

**LUCIANO VITORIA BARBOZA**

**ANÁLISE E DESENVOLVIMENTO DE  
METODOLOGIAS CORRETIVAS PARA A  
RESTAURAÇÃO DA SOLUÇÃO DAS  
EQUAÇÕES DA REDE ELÉTRICA**

**FLORIANÓPOLIS  
2001**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA**  
**ELÉTRICA**

**ANÁLISE E DESENVOLVIMENTO DE**  
**METODOLOGIAS CORRETIVAS PARA A**  
**RESTAURAÇÃO DA SOLUÇÃO DAS**  
**EQUAÇÕES DA REDE ELÉTRICA**

Tese submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

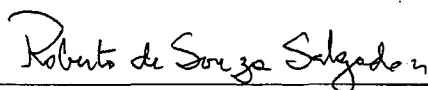
**LUCIANO VITORIA BARBOZA**

Florianópolis, fevereiro de 2001.

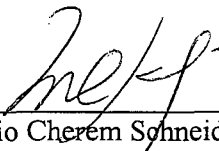
# ANÁLISE E DESENVOLVIMENTO DE METODOLOGIAS CORRETIVAS PARA A RESTAURAÇÃO DA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA REDE ELÉTRICA

Luciano Vitoria Barboza

‘Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Sistemas de Energia*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

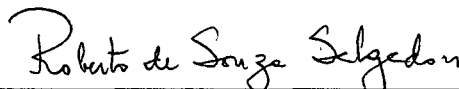


Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph.D.  
Orientador

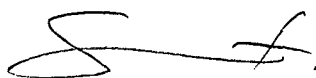


Prof. Márcio Cherem Schneider, D.Sc.  
Coordenador em Exercício do Programa de Pós-Graduação em Eng. Elétrica

Banca Examinadora:



Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph.D.  
Presidente



Prof. Anésio dos Santos Júnior, Dr.Eng.



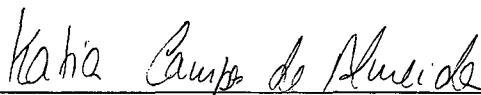
Prof. Geraldo Leite Torres, Ph.D.



Prof. Mário César Zambaldi, Dr.



Prof. Hans Helmut Zürn, Ph.D.



Profª. Katia Campos de Almeida, Ph.D.

*Dedico à minha esposa Jussara Beatris e aos meus filhos  
Luigi e ao que está por vir, pelo amor, dedicação e  
compreensão durante as longas horas de ausência  
na elaboração deste trabalho.*



*À minha querida avó Isolina (in memoriam), pelo  
seu exemplo de vida e perseverança.*

*Aos meus pais Redy e Eva, por me proporcionarem  
as condições para que aqui chegasse.*

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Roberto de Souza Salgado, pelas horas de dedicação e orientação e, principalmente, por sua amizade que foi imprescindível à conclusão deste trabalho.

À Prof<sup>a</sup> Katia Campos de Almeida, pelo incentivo e por suas acertadas sugestões.

Ao Prof. Mário César Zambaldi, pelo grande crescimento pessoal e profissional que adquiri com a sua amizade.

Ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina, que me transmitiram seus conhecimentos, especialmente ao Prof. Hans Helmut Zürn.

À Universidade Católica de Pelotas, pelo apoio e incansável preocupação com a qualificação do seu Corpo Docente.

Ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Pelotas, pela oportunidade e incentivo demonstrados.

Aos colegas do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFSC, pela camaradagem e contribuição para a realização deste trabalho.

Aos funcionários Marcos Luiz de Assis e Wilson da Silva Costa, pela presteza e auxílio que sempre demonstraram.

À CAPES, pelo apoio financeiro ao Curso.

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

## **ANÁLISE E DESENVOLVIMENTO DE METODOLOGIAS CORRETIVAS PARA A RESTAURAÇÃO DA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA REDE ELÉTRICA**

**Luciano Vitoria Barboza**

Fevereiro/2001

Orientador: Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph.D.

Área de Concentração: Sistemas de Energia

Palavras-chave: Fluxo de potência sem solução, matriz Jacobiana singular, método de Newton-Raphson amortecido, método de otimização de Newton, método de otimização de Pontos Interiores, restauração de solução do fluxo de potência, autovetor à esquerda.

Número de Páginas: 169

O presente trabalho aborda a análise e o desenvolvimento de metodologias corretivas para a restauração da solução das equações do fluxo de potência de um sistema de energia elétrica. São apresentados quatro algoritmos utilizando diferentes tipos de técnicas de análise. O primeiro baseia-se no autovetor à esquerda associado ao autovalor nulo da matriz Jacobiana singular do fluxo de carga. Os outros três são baseados em métodos de otimização. Um utiliza o método de Newton de otimização e os outros dois, o método Preditor-Corretor do Primal-Dual de Pontos Interiores. Mostra-se como as abordagens propostas podem ser aplicadas para considerar aspectos do cenário de desregulamentação do setor energético. É, ainda, apresentada uma forma alternativa para a resolução dos sistemas de equações não-lineares através dos métodos Quasi-Newton. No presente estudo, utilizou-se o método de Broyden no algoritmo do Mínimo Resíduo por Newton. Para a validação das metodologias e das implementações foram realizadas simulações computacionais com sistemas do IEEE, de 14, 30, 57 e 118 barras, e com três redes reais equivalentes do sistema Sul-Sudeste Brasileiro, com 352, 749 e 1916 barras. Os resultados obtidos, tanto em termos de qualidade de solução como de tempo computacional, mostram a potencialidade de aplicação das abordagens propostas a casos de fluxo de potência sem solução real.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering.

# **ANALYSIS AND DEVELOPMENT OF CORRECTIVE METHODOLOGIES FOR RESTORING SOLUTION OF THE ELECTRIC NETWORK EQUATIONS**

**Luciano Vitoria Barboza**

February/2001

Advisor: Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph.D.

Area of Concentration: Energy Systems

Keywords: Unsolvable power flow, singular Jacobian matrix, damped Newton-Raphson method, Newton optimization method, Interior Point optimization method, restoring solutions to power flow, left eigenvector.

Number of Pages: 169

This work focuses on the analysis and development of corrective methodologies to restore power flow solutions in electric energy systems. Four algorithms are proposed, which use different types of numerical analysis techniques. The first one is based on the left eigenvector associated to the null eigenvalue of the Jacobian matrix. The other three are based on optimization methods. One uses the Newton optimization method whereas the other two are based on the Predictor-Corrector of the Primal-Dual Interior Point optimization method. It is shown how the proposed approaches can be used in deregulated electric systems. It is also presented an alternative methodology to solve the non-linear equation systems which is based on Quasi-Newton methods. In this study, the Broyden method is applied to the algorithm of Minimum Mismatch by Newton. In order to validate the proposed methodologies, power systems of different sizes were used, including IEEE test-systems, with 14, 30, 57 and 118 buses, and three real networks equivalent from the South-Southeast Brazilian system, with 352, 749 and 1916 buses. The results of these simulations show the potentiality of the proposed approaches, in terms of the quality of the solution as well as in terms of the computational time, to determine corrective solutions in steady state power system analysis.

# SUMÁRIO

## Capítulo 1

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1 Aspectos Gerais .....	1
1.2 O Trabalho Proposto .....	8

## Capítulo 2

### O FLUXO DE POTÊNCIA SEM SOLUÇÃO REAL

<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	12
2.1 Introdução .....	12
2.2 Exemplo de Fluxo de Potência Sem Solução Real .....	14
2.3 Abordagens Baseadas no Método de Newton-Raphson Com Amortecimento .....	19
2.3.1 Método de Sasson et al. ....	22
2.3.2 Método de Iwamoto e Tamura .....	26
2.3.3 Método de Scudder .....	29
2.3.4 Método de Dehnel e Dommel .....	35
2.3.5 Método de Castro e Braz .....	38
2.3.6 Método de Duarte et al. ....	42
2.4 Método do Autovetor à Esquerda .....	44
2.5 Solução via Métodos de Otimização .....	52
2.6 Conclusões .....	58

### Capítulo 3

#### METODOLOGIAS CORRETIVAS PARA A RESTAURAÇÃO

<b>DA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA REDE ELÉTRICA .....</b>	<b>60</b>
3.1 Introdução .....	60
3.2 Sistema-Exemplo .....	61
3.3 Medidas Corretivas Propostas .....	68
3.3.1 Mínima Distância .....	68
3.3.2 Mínimo Resíduo por Newton .....	70
3.3.3 Mínimo Corte de Carga Com Direção Especificada .....	74
3.3.4 Mínimo Resíduo por Pontos Interiores .....	78
3.4 Aplicação das Metodologias Propostas ao Sistema-Exemplo .....	80
3.5 Aspectos Numéricos da Solução via Método de Otimização de Newton .....	82
3.5.1 Método de Broyden com Memória Limitada .....	84
3.6 Conclusões .....	87

### Capítulo 4

<b>RESULTADOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>89</b>
4.1 Introdução .....	89
4.2 Característica de Convergência .....	91
4.2.1 Mínima Distância .....	91
4.2.2 Mínimo Resíduo por Newton .....	93
4.2.3 Mínimo Corte de Carga Com Direção Especificada .....	95
4.2.4 Mínimo Resíduo por Pontos Interiores .....	97
4.2.5 Resumo dos Tempos Computacionais .....	98

4.3	Análise da Qualidade dos Resultados .....	99
4.3.1	Mínima Distância .....	100
4.3.2	Mínimo Resíduo por Newton .....	104
4.3.3	Mínimo Corte de Carga Com Direção Especificada .....	108
4.3.4	Mínimo Resíduo por Pontos Interiores .....	113
4.4	Aplicação do Método de Broyden ao Algoritmo do Mínimo Resíduo por Newton .....	120
4.5	Conclusões .....	124

## Capítulo 5

<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS .....</b>	<b>125</b>
5.1 Aspectos Gerais .....	125
5.2 Resumo dos Resultados .....	126
5.3 Sugestões para Estudos Futuros .....	129

## Apêndice A

<b>OS MÉTODOS MATEMÁTICOS DE OTIMIZAÇÃO .....</b>	<b>131</b>
A.1 Introdução .....	131
A.2 Método de Newton Modificado .....	132
A.3 Método Primal-Dual de Pontos Interiores .....	136
A.4 Método Preditor-Corretor do Primal-Dual de Pontos Interiores .....	143
A.5 Etapa de Predição do Algoritmo Preditor-Corretor do Primal-Dual de Pontos Interiores .....	150
A.6 Redução na Dimensão do Sistema Linear do Método de Pontos Interiores .....	153
A.7 Conclusões .....	156



**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS ..... 158**

# LISTA DE FIGURAS

## Capítulo 1

Figura 1.1	Regiões das Soluções do Fluxo de Potência .....	3
Figuras 1.2	Fluxo de Potência sem Solução e Mecanismos de Restauração da Solução .....	6

## Capítulo 2

Figura 2.1	Sistema-Exemplo de Duas Barras .....	14
Figura 2.2	Regiões das Soluções do Fluxo de Potência para o Sistema-Exemplo ....	17
Figuras 2.3	Curvas de Nível para a Função $F$ do Sistema-Exemplo .....	18
Figura 2.4	Interpolação Cúbica para Minimizar $F(\mathbf{x})$ em Relação a $\varepsilon$ na direção $\Delta\mathbf{x}$ .....	25
Figura 2.5	Algoritmo para o Método de Iwamoto e Tamura .....	29
Figura 2.6	Relação entre as Coordenadas Cartesianas e Polares para um Número Complexo .....	33
Figura 2.7	Algoritmo para o Método de Scudder .....	34
Figura 2.8	Função Quadrática (parábola) Passando por Três Pontos .....	36
Figura 2.9	Parâmetros do Método de Newton-Raphson Amortecido .....	37
Figura 2.10	Algoritmo para o Método de Dehnel e Dommel .....	38
Figura 2.11	Algoritmo para o Método de Duarte et al. ....	44
Figura 2.12	Regiões no Espaço Paramétrico das Soluções das Equações do Fluxo de Potência .....	45

Figura 2.13	Relações entre as Variáveis no Espaço Paramétrico .....	50
Figura 2.14	Algoritmo para o Método de Overbye .....	51

### Capítulo 3

Figura 3.1	Soluções Obtidas com as Abordagens Baseadas no Método de Newton-Raphson com Fator de Amortecimento .....	65
Figura 3.2	Soluções Obtidas com as Abordagens do Autovetor à Esquerda e com Técnica de Otimização .....	67
Figura 3.3	Algoritmo para o Método da Mínima Distância .....	69
Figura 3.4	Soluções Obtidas com as Abordagens Propostas no Estudo .....	82

### Capítulo 4

Figura 4.1	Tempos Computacionais para o Método da Mínima Distância .....	92
Figura 4.2	Tempos Computacionais para o Método do Mínimo Resíduo por Newton .....	94
Figura 4.3	Tempos Computacionais para o Método do Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada .....	96
Figura 4.4	Tempos Computacionais para o Método do Mínimo Resíduo por Pontos Interiores .....	98
Figura 4.5	Resumo dos tempos computacionais .....	99
Figura 4.6	Resumo dos Resultados do Algoritmo <i>MD</i> para o Caso “B” .....	104
Figura 4.7	Resumo dos Resultados do Algoritmo <i>MRN</i> para o Caso “B” .....	107
Figura 4.8	Resumo dos Resultados do Algoritmo <i>MCCDE</i> para o Teste A (Caso “B”) .....	113

Figura 4.9	Resumo dos Resultados do Algoritmo <i>MCCDE</i>	
	para o Teste B (Caso “B”)	113
Figura 4.10	Resumo dos Resultados do Algoritmo <i>MRPI</i>	
	para o Teste A (Caso “B”)	119
Figura 4.11	Resumo dos Resultados do Algoritmo <i>MRPI</i>	
	para o Teste B (Caso “B”)	120
Figura 4.12	Tempos Computacionais dos Algoritmos de	
	Newton-Raphson e de Broyden	122

## Apêndice A

Figura A.1	Função Quadrática Passando por Três Pontos	135
Figura A.2	Algoritmo para o Método de Pontos Interiores Primal-Dual	142
Figura A.3	Algoritmo para o Método Preditor-Corretor do	
	Primal-Dual de Pontos Interiores	150

# LISTA DE TABELAS

## Capítulo 3

Tabela 3.1	Legenda para os Algoritmos Baseados no Método de Newton-Raphson com Fator de Amortecimento .....	63
Tabela 3.2	Resultados para as Abordagens Baseadas no Método de Newton-Raphson com Fator de Amortecimento .....	63
Tabela 3.3	Resultados para as Abordagens de Overbye e Granville et al. ....	66
Tabela 3.4	Legenda para as Metodologias Propostas na Seção 3.3 .....	80
Tabela 3.5	Resultados para as Abordagens Propostas no Estudo .....	81

## Capítulo 4

Tabela 4.1	Dados Gerais dos Sistemas-Teste .....	90
Tabela 4.2	Convergência do algoritmo <i>MD</i> .....	91
Tabela 4.3	Convergência do algoritmo <i>MRN</i> .....	93
Tabela 4.4	Convergência do algoritmo <i>MCCDE</i> .....	95
Tabela 4.5	Convergência do algoritmo <i>MRPI</i> .....	97
Tabela 4.6	Níveis de Carregamento dos Sistemas-Teste .....	100
Tabela 4.7	Resultados do <i>MD</i> para os Casos “A” dos Sistemas-Teste .....	101
Tabela 4.8	Resultados Obtidos no Caso “B” com o Método <i>MD</i> para o Sistema IEEE-30 .....	102
Tabela 4.9	Resultados Obtidos no Caso “B” com o Método <i>MD</i> para o Sistema SSB-749 .....	103

Tabela 4.10	Resultados Obtidos no Caso “B” com o Método <i>MD</i> para o Sistema SSB-1916 .....	103
Tabela 4.11	Resultados do <i>MRN</i> para os Casos “A” dos Sistemas-Teste .....	105
Tabela 4.12	Resultados Obtidos no Caso “B” com o Método <i>MRN</i> para o Sistema IEEE-30 .....	106
Tabela 4.13	Resultados Obtidos no Caso “B” com o Método <i>MRN</i> para o Sistema SSB-749 .....	106
Tabela 4.14	Resultados Obtidos no Caso “B” com o Método <i>MRN</i> para o Sistema SSB-1916 .....	106
Tabela 4.15	Resultados do <i>MCCDE</i> para os Casos “C” dos Sistemas-Teste .....	109
Tabela 4.16	Resultados Obtidos no Teste A (Caso “B”) com o Método <i>MCCDE</i> para o Sistema IEEE-30 .....	109
Tabela 4.17	Resultados Obtidos no Teste B (Caso “B”) com o Método <i>MCCDE</i> para o Sistema IEEE-30 .....	110
Tabela 4.18	Resultados Obtidos no Teste A (Caso “B”) com o Método <i>MCCDE</i> para o Sistema SSB-749 .....	111
Tabela 4.19	Resultados Obtidos no Teste B (Caso “B”) com o Método <i>MCCDE</i> para o Sistema SSB-749 .....	111
Tabela 4.20	Resultados Obtidos no Teste A (Caso “B”) com o Método <i>MCCDE</i> para o Sistema SSB-1916 .....	112
Tabela 4.21	Resultados Obtidos no Teste B (Caso “B”) com o Método <i>MCCDE</i> para o Sistema SSB-1916 .....	112
Tabela 4.22	Resultados do <i>MRPI</i> para os Casos “C” dos Sistemas-Teste .....	114
Tabela 4.23	Resultados Obtidos no Teste A (Caso “B”) com o Método <i>MRPI</i> para o Sistema IEEE-30 .....	115

Tabela 4.24	Resultados Obtidos no Teste B (Caso “B”) com o Método <i>MRPI</i> para o Sistema IEEE-30 .....	115
Tabela 4.25	Resultados Obtidos no Teste A (Caso “B”) com o Método <i>MRPI</i> para o Sistema SSB-749 .....	117
Tabela 4.26	Resultados Obtidos no Teste B (Caso “B”) com o Método <i>MRPI</i> para o Sistema SSB-749 .....	117
Tabela 4.27	Resultados Obtidos no Teste A (Caso “B”) com o Método <i>MRPI</i> para o Sistema SSB-1916 .....	118
Tabela 4.28	Resultados Obtidos no Teste A (Caso “B”) com o Método <i>MRPI</i> para o Sistema SSB-1916 .....	118
Tabela 4.29	Comparação entre os Algoritmos de Newton-Raphson e de Broyden no <i>MRN</i> .....	121
Tabela 4.30	Influência dos Recomeços sobre o Método de Broyden .....	123

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a, b, r, s$	variáveis utilizadas no método de Sasson et al.
$a$	vetor de taps de transformadores com comutação sob carga (LTC)
$a, b$	vetor de limites mínimo e máximo, respectivamente, para as restrições de desigualdade, utilizado no método de Granville et al.
$a, b, c$	vetores utilizados no método de Newton-Raphson amortecido
$A$	matriz com elementos constantes em $S(x)$ quando as equações estáticas do fluxo de potência são expressas em coordenadas cartesianas
$B$	iterações de Broyden
$B$	matriz de aproximação da matriz Jacobiana ou matriz de Broyden
$d$	distância utilizada no método de Dehnel e Dommel
$d(S^{esp})$	distância entre a injeção de potência especificada e a injeção viável, utilizada no método de Overbye
$e$	vetor com as partes reais das tensões complexas
$f$	vetor com as partes imaginárias das tensões complexas
$f(x)$	vetor de desbalanços de potências ativa e reativa ou equações estáticas do fluxo de potência
$F(x)$	função norma euclidiana dos desbalanços de potências ativa e reativa
$F(x)$	matriz Jacobiana do vetor $f(x)$
$fpa$	fluxo de potência amortecido
$gap$	gap de complementariedade sem a atualização das variáveis primais e duais, utilizado no algoritmo de Pontos Interiores



$g\tilde{\alpha}p$	gap de complementariedade com a atualização das variáveis primais e duais, utilizado no algoritmo de Pontos Interiores
$g_0, g_1, g_2, g_3$	variáveis utilizadas para o cálculo do fator de controle do passo no método de Newton-Raphson amortecido
$g(x)$	vetor de restrições de igualdade, utilizado nos algoritmos de otimização
$G(x)$	matriz Jacobiana do vetor $g(x)$
G-N	iterações de Gauss-Newton
$h(x)$	vetor de restrições de desigualdade, utilizado no algoritmo de Pontos Interiores
$H(x, \lambda, \pi)$	matriz Hessiana da função Lagrangeana em relação às variáveis de otimização
$\tilde{H}$	matriz auxiliar, utilizada na redução do sistema linear do algoritmo de Pontos Interiores
$icc_A$	índice de corte de carga ativa
$icc_R$	índice de corte de carga reativa
$J(x)$	matriz Jacobiana do fluxo de potência
$lp$	laço principal do método da Mínima Distância
$m$	sobrescrito, indica o ponto correspondente ao mínimo da função $F(x)$ , utilizado no método de Overbye
$max$	sobrescrito, indica limite máximo para a restrição de desigualdade
$min$	sobrescrito, indica limite mínimo para a restrição de desigualdade
$MD$	método da Mínima Distância
$MCCDE$	método do Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada
$MRN$	método do Mínimo Resíduo por Newton
$MRPI$	método do Mínimo Resíduo por Pontos Interiores

$n$	número de variáveis com limites mínimo e máximo, utilizado no algoritmo de Pontos Interiores
$nb$	número de barras no sistema elétrico
$nb_c$	número de barras de carga no sistema elétrico
$nb_{dc}$	número de barras disponíveis para o corte de carga no sistema elétrico
$nb_{in}$	número de barras com injeção nula no sistema elétrico
$nc$	número de circuitos no sistema elétrico
$ng$	número de barras de geração no sistema elétrico
$nig$	número de barras com demanda integralmente atendida no sistema elétrico
$nt$	número de transformadores no sistema elétrico
N-R	iterações de Newton-Raphson
$p$	sobrescrito, indica coordenadas polares
$P(x)$	vetor de equações de potência ativa
$P_d$	vetor de demandas de potência ativa
$P_{d0}$	vetor de valores especificados das demandas de potência ativa, utilizado no método do Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada
$P_{d_{TOT}}$	demanda total de potência ativa no sistema elétrico
$P_{d_{TOT}}^{sup}$	demanda total de potência ativa realmente suprida pelo sistema elétrico
$P_{df}$	o mesmo que $P_{d_{TOT}}^{sup}$
$P_G$	vetor de potências ativas geradas
$Q(x)$	vetor de equações de potência reativa
$Q_d$	vetor de demandas de potência reativa
$Q_{d0}$	vetor de valores especificados das demandas de potência reativa, utilizado no método do Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada

$Q_{d_{TOT}}$	demanda total de potência reativa no sistema elétrico
$Q_{d_{TOT}}^{sup}$	demanda total de potência reativa realmente suprida pelo sistema elétrico
$Q_{df}$	o mesmo que $Q_{d_{TOT}}^{sup}$
$Q_G$	vetor de potências reativas geradas
$r$	sobrescrito, indica coordenadas cartesianas
$s$	vetor de variáveis de folga
$s, u, y$	vetores auxiliares, utilizados no método de Broyden
$S$	matriz diagonal contendo as variáveis de folga, utilizada no algoritmo de Pontos Interiores
$S(x)$	vetor de equações de potências ativa e reativa
$S^{esp}$	vetor de injeções especificadas de potências ativa e reativa
$t$	vetor auxiliar, utilizado no algoritmo de Pontos Interiores
$\tilde{t}$	vetor auxiliar, utilizado na redução do sistema linear do algoritmo de Pontos Interiores
$U$	matriz Identidade
$x$	vetor de variáveis de estado ou de variáveis de otimização
$v, y$	vetores auxiliares, utilizados na redução do sistema linear do algoritmo de Pontos Interiores
$V$	vetor de magnitudes das tensões complexas
$V_r$	vetor de tensões complexas escritas em coordenadas cartesianas
$V_p$	vetor de tensões complexas escritas em coordenadas polares
$w$	autovetor à esquerda correspondente ao autovalor nulo da matriz Jacobiana do fluxo de potência
$W$	matriz diagonal de ponderação, utilizada no método de Overbye

$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \lambda, \pi)$	matriz Hessiana auxiliar, utilizada no algoritmo de Pontos Interiores
$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \lambda, \pi)$	matriz do sistema linear, utilizada no algoritmo de Pontos Interiores
$\mathbf{y}$	vetor com as variáveis de estado atualizadas em função do passo, utilizado no método de Sasson et al.
$z(\varepsilon)$	função quadrado da norma euclidiana em relação ao parâmetro $\varepsilon$
$\mathbf{z}$	vetor de variáveis de otimização, utilizado no método de Granville et al.
$\alpha$	fator que parametriza as demandas de potências ativa e reativa, utilizado no método do Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada
$\beta$	parâmetro especificado pelo usuário que controla a taxa de decrescimento do parâmetro barreira, utilizado no algoritmo de Pontos Interiores
$\gamma_p, \gamma_D$	comprimentos dos passos nos espaços primal e dual, utilizados no algoritmo de Pontos Interiores
$\tilde{\gamma}$	comprimento do passo nos espaços primal e dual, utilizado na etapa de Predição do algoritmo Preditor-Corretor do Primal-Dual de Pontos Interiores
$\delta$	vetor de ângulos de fase das tensões complexas
$\Delta \mathbf{e}$	incremento no vetor com as partes reais das tensões complexas
$\Delta \mathbf{f}$	incremento no vetor com as partes imaginárias das tensões complexas
$\Delta \mathbf{P}(\mathbf{x})$	vetor de desbalanços de potência ativa
$\Delta \mathbf{P}_d$	vetor com as direções de decrescimento das demandas de potência ativa, utilizado no método do Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada
$\Delta \mathbf{Q}(\mathbf{x})$	vetor de desbalanços de potência reativa
$\Delta \mathbf{Q}_d$	vetor com as direções de decrescimento das demandas de potência reativa, utilizado no método do Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada

$\Delta s$	incremento no vetor de variáveis de folga, utilizado no algoritmo de Pontos Interiores
$\Delta V$	incremento no vetor de magnitudes das tensões complexas
$\Delta x$	incremento nas componentes do vetor de variáveis de estado ou de variáveis de otimização
$\Delta z$	incremento no vetor de variáveis de otimização, utilizado no método de Granville et al.
$\Delta \delta$	incremento no vetor de ângulos de fase das tensões complexas
$\Delta \Delta x^p$	vetor utilizado no método de Scudder
$\Delta \varepsilon$	passo utilizado no método de Dehnel e Dommel
$\Delta \lambda$	incremento no vetor de multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade
$\Delta \pi$	incremento no vetor de multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade, utilizado no algoritmo de Pontos Interiores
$\varepsilon$	fator de controle do passo para o método de Newton-Raphson amortecido e para o método de otimização de Newton
$\Phi(\varepsilon)$	função quadrática que aproxima a função norma euclidiana dos desbalanços de potências, utilizada no método de Dehnel e Dommel
$\lambda$	vetor de multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade
$\mu$	parâmetro barreira, utilizado no algoritmo de Pontos Interiores
$\pi$	vetor de multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade, utilizado no algoritmo de Pontos Interiores
$\Pi$	matriz diagonal contendo os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade, utilizada no algoritmo de Pontos Interiores

$\theta$	vetor contendo as frações de carga a ser cortada em cada barra do sistema, utilizado no método de Granville et al.
$\sigma$	constante utilizada no algoritmo de Pontos Interiores
$\tau(\varepsilon)$	função metade do quadrado da norma euclidiana em relação ao parâmetro $\varepsilon$
$\nu(z)$	função objetivo utilizada no método de Granville et al.
$\xi$	parâmetro utilizado no método de Dehnel e Dommel
$\zeta$	tolerância para o cálculo de $\gamma_p$ e $\gamma_D$ , utilizada no método de Granville et al.
$\Sigma$	superfície que limita as regiões com e sem solução do fluxo de potência
$\nabla$	indica gradiente da função
*	sobrescrito, indica o ponto correspondente à menor distância, no espaço paramétrico, entre a injeção de potência especificada e a injeção de potência viável, utilizado no método de Overbye
$\  \ $	norma euclidiana
$\mathcal{L}$	função Lagrangeana

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 ASPECTOS GERAIS

Durante as últimas décadas, os aspectos de segurança e economia de um sistema de energia elétrica têm se tornado um fator de grande importância na operação e/ou planejamento do mesmo. Com o aumento das restrições na construção de novos sistemas de potência, a despeito do contínuo aumento de demanda, torna-se necessário cada vez mais obter o melhor desempenho dos sistemas hoje existentes. Por isso, a confiabilidade da operação de um sistema de energia elétrica tornou-se um dos fatores primordiais no gerenciamento do mesmo.

Por outro lado, no que diz respeito à capacidade dos equipamentos, nota-se que os sistemas elétricos tendem, cada vez mais, a operar próximos de seus limites máximos. Pode-se apontar algumas das possíveis causas para essa condição de operação:

- o aumento desordenado da demanda no sistema (ativa e reativa);
- a falta de investimento, por parte das concessionárias de energia elétrica, na ampliação e manutenção eficientes das malhas de transmissão;
- os problemas ambientais advindos da construção de novas unidades geradoras;
- o tempo exigido para que as melhorias no sistema elétrico sejam planejadas e executadas;

- a busca de lucros cada vez maiores por parte das companhias que gerenciam o setor elétrico.

Observa-se que as dificuldades para um planejamento de operação econômico, seguro e de boa qualidade nos sistemas de energia elétrica são incontáveis, e crescem mais ainda conforme as dimensões e peculiaridades desses sistemas se acentuam. Dentre essas, duas das mais críticas são:

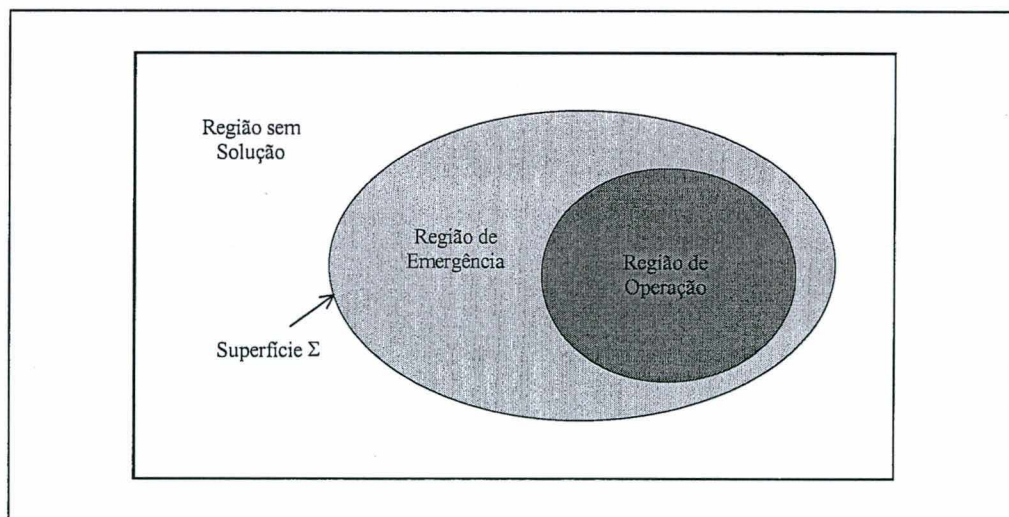
- o aumento aleatório e rápido das demandas de potências ativa e reativa nas barras do sistema. Uma vez que o perfil de tensões nodais está fortemente associado a essa demanda, variações do tipo mencionado resultam em modificações nesse perfil, levando, em casos extremos, a rede elétrica a situações nas quais não é possível a determinação de um ponto de operação viável. É fato conhecido que essas condições críticas são, em geral, atingidas por causa da falta de suporte de potência reativa durante o crescimento súbito da carga;
- a ocorrência de contingências não previstas durante a operação do sistema de energia elétrica. Por contingência, entende-se a saída de equipamentos tais como geradores, linhas de transmissão, transformadores, etc ..., algumas vezes vitais ao bom funcionamento do sistema. Frequentes são os casos em que a saída inesperada de uma linha de transmissão causa sobrecarga em outro(s) circuito(s). Não raros são também os casos em que há violações dos limites de tensão nas barras por efeito da saída de transformadores e/ou outros equipamentos de controle de tensão.

Em função do exposto, tanto no planejamento da operação como durante a opera-



ção, é de extrema importância determinar condições a partir das quais se possa obter uma solução no mínimo viável para um sistema de energia elétrica que esteja fora dos seus limites operativos. Dispor-se de ferramentas computacionais que possibilitem a determinação de um ponto de operação para um sistema que esteja passando por uma contingência severa ou extremamente carregado, tornou-se uma das necessidades mais imperiosas em um Centro de Operação de Sistemas (COS). Essas ferramentas devem ser capazes de fornecer pontos de operação viáveis e, melhor ainda, de produzir soluções operacionais para o sistema elétrico. Por ponto operacional, entende-se aquela solução das equações da rede elétrica para a qual não há violações de limites em variáveis e/ou nos equipamentos do sistema de potência.

Para que se entenda com clareza a distinção que se faz entre um ponto de operação viável e um ponto operacional, observe a Figura 1.1. Nesta figura estão exemplificadas as regiões das soluções de um fluxo de potência genérico.



**Figura 1.1. Regiões das soluções do fluxo de potência.**

A Figura 1.1, define três regiões no espaço paramétrico multidimensional, onde os

parâmetros são as demandas de potências, as injeções de potência ativa, as magnitudes de tensões pré-especificadas, os níveis de potência ativa de intercâmbio, etc. Estas regiões podem assim ser definidas:

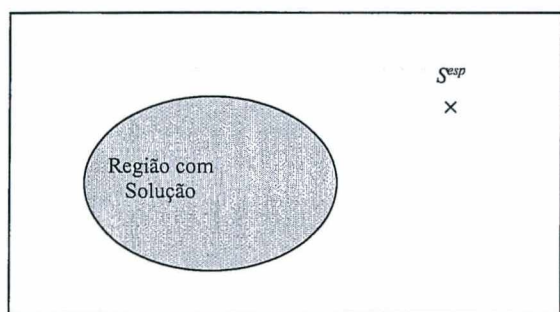
- *região sem solução*: região na qual as equações do fluxo de potência não possuem solução. Qualquer tentativa de operar o sistema nessa região pode causar instabilidade de tensão, ou até mesmo o colapso de tensão (TAYLOR, 1994). Altos carregamentos e/ou contingências, em estudos de planejamento de expansão ou de operação de sistemas de energia elétrica, podem ocasionar a não existência de soluções. Nesses casos, é importante determinar que modificações podem ser realizadas no sistema de modo a restaurar a solução para as equações da rede elétrica. Esta região também é chamada de *região infactível* do fluxo de carga.
- *região de operação*: região caracterizada por apresentar pontos de operação nos quais as equações da rede elétrica possuem solução real e não há violação de limites operacionais e/ou de equipamentos. Esses limites podem se referir a fluxos de potência em circuitos, magnitudes das tensões nas barras do sistema, geração de potências ativa e reativa em barras PV, etc. Normalmente, é nessa região que se deseja operar os sistemas de energia elétrica.
- *região de emergência*: região na qual as equações estáticas do fluxo de carga apresentam solução, entretanto, com a violação de um ou mais limites operacionais e/ou de equipamentos. A princípio é possível operar o sistema nessa região desde que por um intervalo de tempo limitado. O ideal é, a partir de uma solução nessa região, utilizar mecanismos que possibilitem a migração da referida solução para outra na região de operação.

Observe que as regiões de emergência e de operação possuem solução para as equações da rede elétrica. Por este motivo, o espaço formado pela união destas duas regiões é chamado de *região com solução* ou *viável* ou, ainda, *factível* do fluxo de potência. Nessa região, as equações do fluxo de potência possuem múltiplas soluções, uma das quais é utilizada para fins operativos da rede elétrica (IBA et al., 1990).

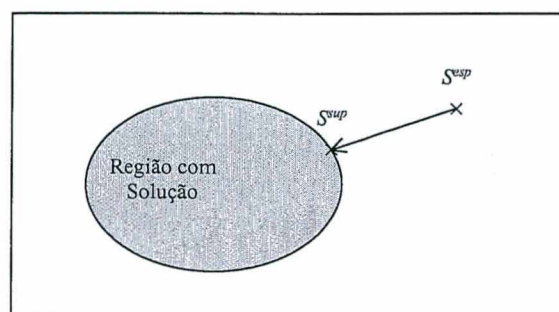
A superfície limite que separa as regiões com e sem solução do fluxo de carga é denotada por  $\Sigma$  (OVERBYE, 1994). Nesta superfície, as equações estáticas do fluxo de carga apresentam uma única solução e a matriz Jacobiana do fluxo de potência convencional torna-se singular (DOBSON et al., 1991). Observa-se que, à medida em que as soluções do fluxo de carga se aproximam da superfície  $\Sigma$ , estas soluções se aproximam umas das outras até que tornam-se coincidentes e se localizam em uma bifurcação sela-nó (TAMURA et al., 1983). Neste ponto, o sistema, em geral, fica sujeito a problemas de instabilidade de tensão (AJJARAPU e CHRISTY, 1992; CAÑIZARES e ALVARADO, 1993).

A Figura 1.2(a) exemplifica um caso genérico em que uma especificação de demanda não é suportada pelo sistema de energia elétrica. Neste caso, as equações do fluxo de potência não apresentam solução real. Nas Figuras 1.2(b), 1.2(c) e 1.2(d) são apresentadas formas de restaurar a solução das equações desta rede elétrica em regime permanente. Nestas figuras,  $S^{esp}$  representa a demanda inicialmente especificada para a rede elétrica e  $S^{sup}$  representa a demanda que pode realmente ser suprida pelo sistema.





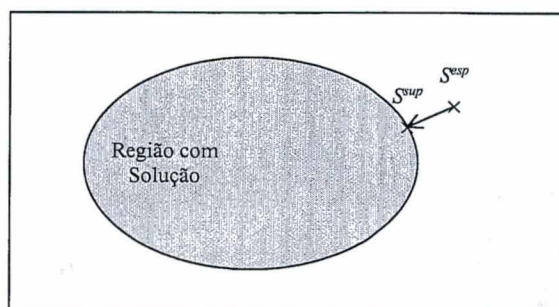
(a) Fluxo de potência sem solução.



(b) Restauração da solução via corte de carga.



(c) Restauração da solução via ajuste de controles.



(d) Restauração aplicando soluções (b) e (c).

Figuras 1.2. Fluxo de potência sem solução e mecanismos de restauração da solução.

Na Figura 1.2(b), é realizado exclusivamente um corte de carga, ou seja, a demanda inicialmente especificada é ajustada para um valor menor que pode ser suprido pela rede elétrica. Esta não é a melhor maneira de se restaurar a solução das equações da rede do ponto de vista das concessionárias de energia elétrica. Por outro lado, na Figura 1.2(c), a solução é restaurada pelo ajuste dos controles do sistema, tais como redespacho de geração, inclusão de fontes de reativos, etc. Do ponto de vista das concessionárias, esta é uma alternativa mais interessante. Finalmente, na Figura 1.2(d), o ajuste de controles e um pequeno corte de carga são implementados de modo a restaurar a solução das equações do fluxo de potência em regime permanente.

Em linhas gerais, a disponibilidade de uma técnica que possibilite quantificar o corte nas demandas de potências ativa e reativa no sistema elétrico e o necessário ajuste nos controles, de modo que seja obtido pelo menos um ponto de operação viável, é um as-

pecto muito importante na operação e planejamento de sistemas de potência. Para essa finalidade, várias são as metodologias propostas na literatura, entre as quais pode-se citar:

- aquelas baseadas no fluxo de carga com controle de passo (SASSON et al., 1971; IWAMOTO e TAMURA, 1981; SCUDDER, 1981; DEHNEL e DOMMEL, 1989; CASTRO e BRAZ, 1997; DUARTE et al., 2000);
- aquelas que utilizam a técnica do autovetor à esquerda da matriz Jacobiana singular (OVERBYE, 1994);
- aquelas baseadas em métodos de otimização (GRANVILLE et al., 1996).

Essas metodologias fornecem uma solução para o fluxo de carga de acordo com as características de busca dessa solução. As técnicas baseadas em fluxos de carga com amortecimento, não levam em consideração quão longe o ponto de operação obtido está da especificação inicial das demandas, fornecendo simplesmente uma solução viável para o problema. Essas abordagens são extensões do método de Newton-Raphson convencional e a principal modificação consiste no uso de um fator de passo para atualizar as variáveis do fluxo de potência. Nos casos em que a solução real não existe, a divergência é evitada com o fator de passo tendendo a zero.

A utilização do autovetor à esquerda associado ao autovalor nulo da matriz Jacobiana singular (OVERBYE, 1994) permite determinar uma solução de mínima norma euclidiana, ou seja, o ponto de operação é o mais próximo possível da especificação da demanda. Nesse caso, a solução obtida também é apenas viável. Esta técnica alia a simplicidade das abordagens baseadas no método de Newton-Raphson com controle de passo (IWAMOTO e TAMURA, 1981) com as informações fornecidas pelo autovetor à esquerda. Isto resulta em desbalanços de potência mínimos interpretados como o alívio de carga que deve ser feito para que a solução real das equações da rede elétrica seja restaurada.

Por outro lado, as técnicas de otimização, ao permitirem a incorporação de restrições de desigualdade na sua modelagem, fornecem soluções para o problema do fluxo de carga na região de operação dos sistemas elétricos de potência. Nessas soluções, não há violações às características operacionais do sistema de energia elétrica. A técnica proposta em GRANVILLE et al. (1996) é baseada no algoritmo não-linear Primal-Dual de Pontos Interiores e caracteriza-se por um aumento da dimensão e da complexidade do problema devido à modelagem das restrições adicionais, o que pode, em alguns casos, dificultar o processo de busca da solução.

## 1.2 O TRABALHO PROPOSTO

A determinação de um ponto de operação viável para um sistema de energia elétrica tem sido apontada como um problema de acentuada importância na operação dos sistemas de potência. O principal objetivo do presente estudo é propor medidas corretivas para a restauração da solução das equações estáticas do fluxo de potência. Além disso, através da utilização de técnicas de otimização, com especial enfoque no método de Pontos Interiores, sugerir medidas que conduzam a pontos de operação na região operacional dos sistemas de energia elétrica.

Em linhas gerais, esse trabalho propõe quatro estratégias para a restauração da solvabilidade das equações da rede elétrica:

- uma baseada no método proposto por OVERBYE (1994);
- uma baseada no método de otimização de Newton (TINNEY e HART, 1967;

SUN et al., 1984);

- duas baseadas na aplicação do método de Pontos Interiores (KARMARKAR, 1984; CLEMENTS et al., 1991; WU et al., 1994).

Pretende-se com as metodologias propostas, fornecer ferramentas computacionais com características distintas para os estudos de operação e planejamento da projeção de carga em sistemas elétricos de potência. As duas primeiras abordagens fornecem pontos de operação para o sistema elétrico na região de emergência, enquanto que as duas últimas determinam soluções situadas na região de operação dos sistemas de potência.

Considerando a desregulamentação do setor elétrico brasileiro, nas técnicas propostas foram modeladas algumas características desse quadro. Nesse novo cenário, consumidores podem comprar energia de quem oferecer os melhores preços e qualidade. Os contratos de compra e venda de energia podem ser firmados de acordo com as necessidades dos compradores. Há casos em que o comprador da energia elétrica necessita de um abastecimento garantido, ou seja, o contrato estipula o fornecimento da energia ao consumidor sem a possibilidade de corte. Estes contratos, chamados de *firμες*, podem ser modelados em qualquer uma das metodologias propostas neste trabalho. Esta característica faz com que o presente estudo também contribua para a análise deste novo quadro no setor elétrico brasileiro.

As principais contribuições previstas nesse estudo são as seguintes:

- a sistematização das várias metodologias existentes na literatura para a solução do problema de fluxo de carga sem solução real;
- a proposição de quatro técnicas para a obtenção de medidas corretivas para a restauração das soluções da rede elétrica. Com o estudo dessas metodologias,

pretende-se dar mais um passo na busca de ferramentas computacionais que auxiliem os operadores dos Centros de Operação de Sistemas;

- a análise do problema do corte de carga em estudos de operação e de planejamento de projeção de carga nos sistemas elétricos, levando em conta as características de desregulamentação deste setor;
- o estudo de métodos numéricos quasi-Newton para a resolução de sistemas de equações não-lineares relacionados ao problema de soluções corretivas. Esse estudo tem por finalidade a utilização de técnicas numéricas que aplicadas a sistemas de grande porte forneçam resultados de forma mais rápida e sem perda da qualidade das soluções. Esses algoritmos, os quais foram discutidos em ZAMBALDI (1990) e ZAMBALDI (1993), se mostram bastante atrativos para a utilização em sistemas de grande porte, como aqueles envolvidos no presente estudo.

Essa monografia está dividida em cinco capítulos e um apêndice, distribuídos da seguinte forma.

No Capítulo 1 foram discutidos vários aspectos relativos ao comportamento dos sistemas de energia elétrica em regime permanente, com ênfase naqueles em que as equações do fluxo de potência não apresentam solução. Possíveis causas para essa situação e medidas corretivas existentes na literatura são listadas.

O Capítulo 2 faz uma revisão bibliográfica sobre as metodologias existentes na literatura referentes à restauração da solvabilidade de fluxos de carga sem solução real. Neste capítulo, são apresentadas as principais características dessas abordagens e é desenvolvido um exemplo didático de um fluxo de carga sem solução baseado num sistema de



potência hipotético formado por duas barras interligadas por uma linha de transmissão.

O Capítulo 3 discute as principais linhas deste estudo. Nele, são apresentados os métodos propostos para a obtenção de soluções restaurativas. Quatro metodologias são apresentadas. É ainda descrito um método alternativo para a resolução dos sistemas de equações não-lineares.

O Capítulo 4 apresenta os resultados numéricos obtidos com a aplicação das metodologias propostas a sistemas elétricos de várias dimensões. Neste estudo, foram utilizados como sistemas-teste, sistemas do IEEE de 14, 30, 57 e 118 barras; e sistemas reais equivalentes do Sul-Sudeste Brasileiro com 352, 749 e 1916 barras. As abordagens propostas foram implementadas em FORTRAN 77.

O Capítulo 5 descreve as conclusões do estudo realizado e apresenta sugestões para a continuidade do mesmo.

O Apêndice A apresenta um estudo sobre os métodos numéricos de otimização utilizados no presente trabalho. Inicialmente, discute-se a modificação realizada no método de otimização de Newton. A seguir, apresenta-se o algoritmo Primal-Dual de Pontos Interiores e a interpretação matemática da sua versão Preditor-Corretor. Finaliza-se mostrando como fazer a redução do sistema linear inerente aos métodos de Pontos Interiores, para a obtenção de uma maior eficiência computacional.

## **CAPÍTULO 2**

# **O FLUXO DE POTÊNCIA SEM SOLUÇÃO REAL**

## **REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **2.1 INTRODUÇÃO**

O problema da não existência de soluções reais para as equações do fluxo de potência ocorre, dentre outras situações, quando a especificação da demanda de potências ativa e reativa não é compatível com a topologia da rede elétrica em regime permanente. Durante a operação do sistema, isto pode ocorrer nas seguintes situações:

- quando um sistema estressado é submetido a uma situação de contingência severa como, por exemplo, a perda de uma linha de transmissão importante, a perda de uma fonte de reativos ou a perda de uma geração;
- quando um rápido e desordenado crescimento da demanda faz com que as potências ativa e reativa atinjam níveis não suportados pela estrutura da rede.

Nestas condições, tentativas de operar o sistema de energia elétrica, em geral conduzem o mesmo a problemas de instabilidade ou mesmo colapso de tensão (TAYLOR, 1994). Isto ocorre porque, nestes casos, as equações do fluxo de potência em regime permanente não possuem solução real.

Por outro lado, situações idênticas podem ocorrer nos estudos de planejamento de

expansão de carga, quando se deseja verificar se determinados níveis de demanda podem ser satisfeitos pela rede elétrica. Nesses estudos, em geral, costuma-se observar o comportamento do sistema para novas topologias e/ou novos padrões de carga. Sob determinadas circunstâncias, isto pode resultar na perda das soluções das equações da rede elétrica.

Um grande número de metodologias têm sido propostas na literatura para determinar procedimentos corretivos nos casos onde o problema de fluxo de potência não tem solução real. A maior parte desses métodos visa a obtenção de um ponto de operação aceitável baseado no corte de carga. Por outro lado, alguns métodos foram inicialmente apresentados com a finalidade de aumentar a robustez do processo iterativo do método de Newton-Raphson para a solução do fluxo de potência convencional (TINNEY e HART, 1967). Esses métodos se baseiam no uso de um fator de “amortecimento” (GILL et al., 1981; DENNIS e SCHNABEL, 1983; ASCHER et al., 1987). Este fator também é conhecido como *controle de passo* para o método de Newton-Raphson. Essas metodologias utilizam estratégias de correção nos incrementos, as quais proporcionam um controle na magnitude do passo durante o processo iterativo. O que essas metodologias possuem em comum é que, se o problema em questão não apresenta viabilidade, o fator de controle de passo tende a zero. Devido a esta característica, esta classe de métodos pode ser utilizada para a obtenção de uma solução viável com corte de carga.

Neste capítulo, inicialmente são realizados o estudo de um sistema hipotético formado por duas barras e a análise da influência do aumento da demanda na existência de solução para o fluxo de carga. Posteriormente, são apresentados os aspectos teóricos das principais abordagens relativas aos métodos de Newton-Raphson “amortecido”. A seguir, outras propostas de restauração de solvabilidade, tais como a utilização de um esquema iterativo baseado no autovetor à esquerda associado ao autovalor nulo da matriz Jacobiana

singular e métodos de otimização são revisadas.

## 2.2 EXEMPLO DE FLUXO DE POTÊNCIA SEM SOLUÇÃO REAL

Considere o sistema da Figura 2.1, o qual é constituído por duas barras interligadas por uma linha de transmissão com característica puramente indutiva. A barra 1 é a barra de folga, com magnitude da tensão igual a 1,0 pu e o ângulo de fase igual a  $0^\circ$ . A barra 2 é uma barra de carga, com uma demanda especificada  $P_{d_2}$  e  $Q_{d_2}$ . A linha de transmissão tem uma reatância série de 0,1 pu (base de 100 MVA). Para este sistema, as equações estáticas do fluxo de potência são

$$\Delta P_2 = 10V_2 \sin \delta_2 + P_{d_2} \quad (2.1)$$

$$\Delta Q_2 = 10V_2^2 - 10V_2 \cos \delta_2 + Q_{d_2} \quad (2.2)$$

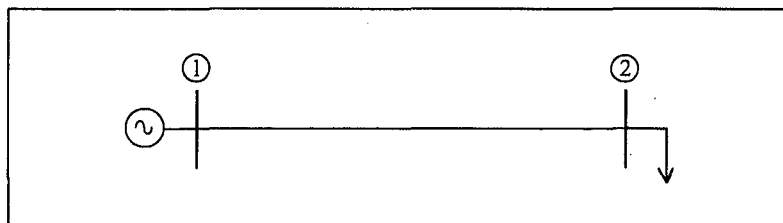


Figura 2.1. Sistema-exemplo de duas barras.

O ponto de operação desta rede,  $(V_2, \delta_2)$ , é aquele que satisfaz o seguinte sistema

de equações não-lineares

$$\Delta P_2 = 10V_2 \text{sen}\delta_2 + P_{d_2} = 0 \quad (2.3)$$

$$\Delta Q_2 = 10V_2^2 - 10V_2 \text{cos}\delta_2 + Q_{d_2} = 0 \quad (2.4)$$

Dependendo dos valores especificados para as demandas  $P_{d_2}$  e  $Q_{d_2}$ , o sistema de equações (2.3) e (2.4) pode possuir duas, uma ou nenhuma solução real (TAMURA et al., 1980). O limite da operação do sistema, isto é, da região onde as equações da rede elétrica possuem solução real, caracteriza-se por pontos nos quais a matriz Jacobiana dessas equações é singular (pontos onde o determinante da matriz Jacobiana é nulo). Uma vez que

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 10V_2 \text{cos}\delta_2 & 10 \text{sen}\delta_2 \\ 10V_2 \text{sen}\delta_2 & 20V_2 - 10 \text{cos}\delta_2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

então

$$\det(\mathbf{J}) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 \text{cos}\delta_2 = 0,5 \quad (2.6)$$

Da equação (2.3), reescrita como

$$V_2 \text{sen}\delta_2 = -0,1P_{d_2} \quad (2.7)$$

e das equações (2.6) e (2.7), pode-se concluir que

$$V_2^2 = 0,01P_{d_2}^2 + 0,25 \quad (2.8)$$

A substituição das equações (2.6) e (2.8) na equação (2.4), fornece

$$\frac{P_{d_2}^2}{10} + Q_{d_2} - 2,5 = 0 \quad (2.9)$$

a qual é a expressão analítica que define a superfície limite  $\Sigma$  da região onde existem soluções reais para o conjunto de equações (2.3) e (2.4). A Figura 2.2 mostra a região onde as equações da rede têm solução real, a superfície limite e a região onde não existe solução real para as equações do fluxo de potência. Deve ser observado que, nesta figura, os pontos **a**, **b** e **c** representam condições nas quais o fluxo de potência possui solução real. Nos pontos **a** e **b**, as equações da rede elétrica possuem duas soluções, e no ponto **c**, apenas uma. Por outro lado, o ponto **d** representa uma condição na qual as demandas especificadas inviabilizam a existência de uma solução real para o sistema de equações não-lineares. Portanto, o conjunto de pontos abaixo da superfície  $\Sigma$  caracteriza a região onde soluções reais existem para a especificação de demanda. O conjunto de pontos situados acima de  $\Sigma$  representa a região onde não é possível determinar soluções reais para o problema de fluxo de potência.

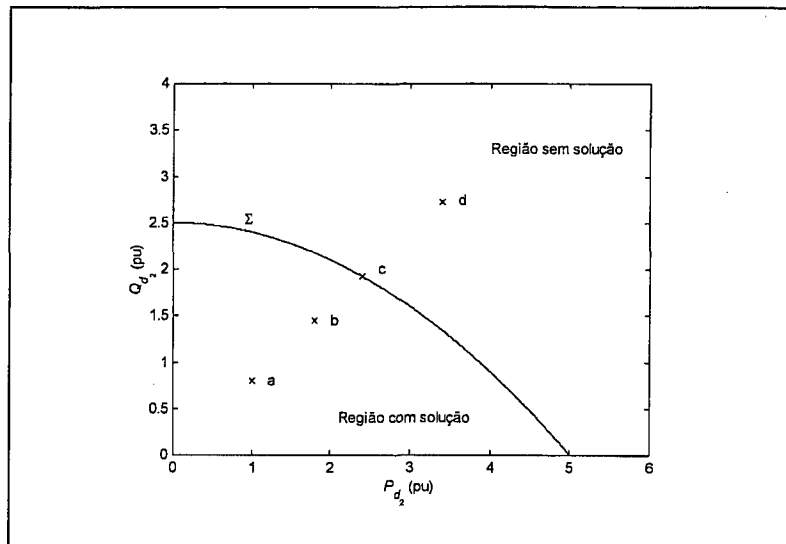


Figura 2.2. Regiões das soluções do fluxo de potência para o sistema-exemplo.

Para ilustrar o efeito das especificações da demanda na barra 2 nos pontos **a**, **b**, **c** e **d**, defina-se uma função  $F$  como

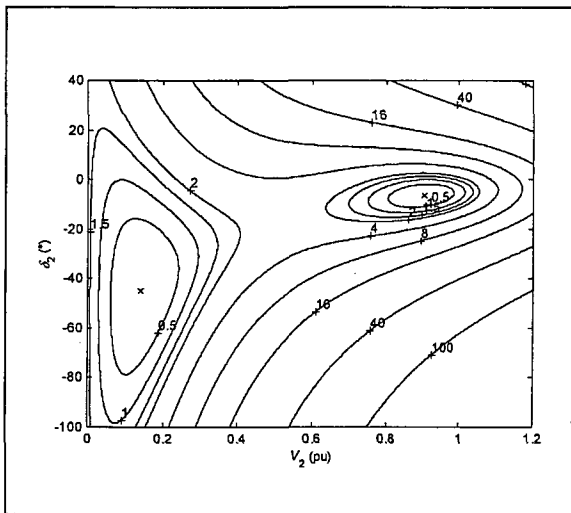
$$F(V_2, \delta_2) = \Delta P_2^2 + \Delta Q_2^2 \quad (2.10)$$

Se o fluxo de potência possui solução real, então o valor de  $F$  deve ser nulo, ou seja, as equações (2.3) e (2.4) dos balanços de potências são satisfeitas.

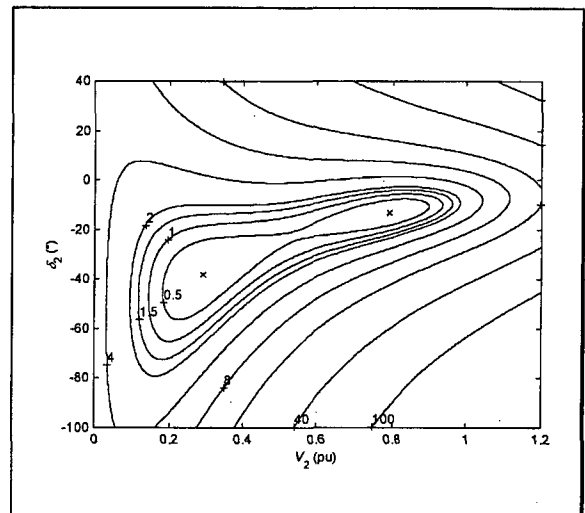
As Figuras 2.3(a) a 2.3(d) mostram as curvas de nível da função  $F$  para os valores de demanda de 100 MW e 80 MVar, 180 MW e 144 MVar, 240 MW e 192,4 MVar e 340 MW e 272 MVar, respectivamente. Nestas figuras, o símbolo 'x' denota os pontos de mínimo local da função  $F$ , os quais são aproximadamente nulos nestes pontos.

Nas Figuras 2.3(a) e 2.3(b), observa-se a existência de duas soluções distintas em cada caso. Para  $P_{d_2} = 100$  MW e  $Q_{d_2} = 80$  MVar, as soluções são  $0,1414 \angle -45^\circ$  pu e  $0,9055 \angle -6,34^\circ$  pu. Para a situação de  $P_{d_2} = 180$  MW e  $Q_{d_2} = 144$  MVar, as soluções são

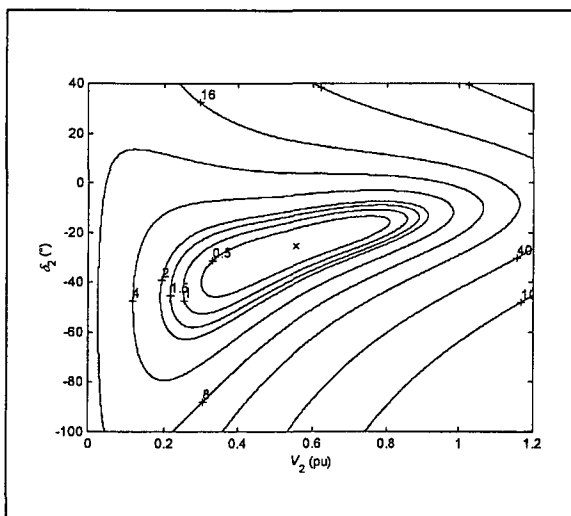
0,2910 $\angle$ -38,20° pu e 0,7920 $\angle$ -13,14° pu. Por outro lado, na Figura 2.3(c), onde  $P_{d_2} = 240$  MW e  $Q_{d_2} = 192,4$  MVar, existe uma única solução em 0,5546 $\angle$ -25,64° pu. Finalmente, na Figura 2.3(d), com  $P_{d_2} = 340$  MW e  $Q_{d_2} = 272$  MVar, nenhuma solução real é obtida.



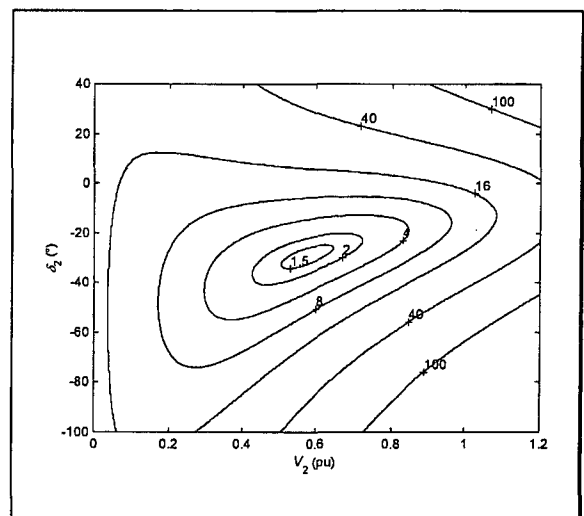
(a)  $P_{d_2} = 100$  MW e  $Q_{d_2} = 80$  MVar



(b)  $P_{d_2} = 180$  MW e  $Q_{d_2} = 144$  MVar



(c)  $P_{d_2} = 240$  MW e  $Q_{d_2} = 192,4$  MVar



(d)  $P_{d_2} = 340$  MW e  $Q_{d_2} = 272$  MVar

Figuras 2.3. Curvas de nível para a função F do sistema-exemplo.



A análise das Figuras 2.3 mostra que, conforme a demanda na barra 2 vai aumentando, as duas soluções do fluxo de potência vão se aproximando uma da outra, Figuras 2.3(a) e 2.3(b), até o ponto em que as duas soluções se unem numa única solução, no ponto de bifurcação nó-sela (ARAPOSTHATIS et al., 1981; KWATNY et al., 1986), Figura 2.3(c). A partir desse ponto, não há solução real para as equações do fluxo de potência, Figura 2.3(d). Neste caso, a função  $F$  possui um único ponto de mínimo, com  $F = 1,3671$ , correspondente a tensão de  $0,5743 \angle -29,47^\circ$  pu. Ressalte-se que, como  $F \neq 0$ , esse valor de tensão não satisfaz as equações (2.3) e (2.4). Isto caracteriza a região sem soluções reais para o fluxo de potência. Utilizando-se um método de fluxo de potência convencional (Newton-Raphson, por exemplo), a determinação deste ponto de operação é impossível.

## **2.3 ABORDAGENS BASEADAS NO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON COM AMORTECIMENTO**

As abordagens baseadas no método de Newton-Raphson com a utilização de um controle sobre o passo da iteração são idênticas em suas estruturas. O que as distingue é a forma de determinar o tamanho do passo. As diferentes versões se baseiam nas características particulares de cada formulação do fluxo de potência, isto é, se formulado em coordenadas cartesianas ou polares. Essas abordagens procuram explorar também outras características da função desbalanço inerente ao método de Newton-Raphson. Os métodos baseados nestas abordagens se caracterizam por uma convergência mais robusta do que a do método de Newton-Raphson convencional, isto é, o controle do tamanho do passo utilizado

na correção dos incrementos garante que não haja uma divergência do processo.

A utilização do método de Newton tem mostrado que a solução para o fluxo de potência é obtida rapidamente para uma ampla variedade de problemas. A utilização de técnicas de esparsidade (TINNEY e WALKER, 1967; OGBUOBIRI et al., 1970; OGBUOBIRI, 1970) permitiu ao método de Newton ser aplicado em problemas de grande porte em sistemas de energia elétrica com uma grande redução nos requisitos de armazenamento e tempo de computação.

O problema do fluxo de potência pode ser representado como a determinação da solução de um conjunto de equações algébricas não-lineares simultâneas, sob a forma

$$f(x) = S(x) - S^{esp} = 0 \quad (2.11)$$

onde  $f(x)$  é o vetor dos desbalanços de potências ativa e reativa;

$S(x)$  é o vetor de equações de potências ativa e reativa;

$S^{esp}$  é o vetor de injeções especificadas de potências ativa e reativa;

$x$  é o vetor das variáveis de estado.

O método de Newton transforma o problema não-linear original em uma seqüência de problemas lineares, cujas soluções tendem à solução do problema geral (2.11). Se uma estimativa inicial  $x_0$  é assumida, o problema linear é da forma

$$J(x_0)\Delta x = -f(x_0) \quad (2.12)$$

onde  $J(x_0)$  é a matriz de primeiras derivadas parciais (matriz Jacobiana) do sistema na

iteração corrente, ou seja,

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad (2.13)$$

A solução do problema (2.12),

$$\Delta \mathbf{x} = -[\mathbf{J}(\mathbf{x}_0)]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \quad (2.14)$$

fornece uma correção à estima inicial  $\mathbf{x}_0$ , e um novo ponto é obtido como

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x} \quad (2.15)$$

o qual é utilizado como um novo ponto de partida para o processo iterativo formado pelas equações (2.12) a (2.15). O processo termina quando a equação (2.11) é satisfeita para uma tolerância adotada.

O método de Newton-Raphson com amortecimento utiliza um fator de correção, o qual tem por finalidade controlar a magnitude da correção das variáveis  $\mathbf{x}$  a cada iteração do processo. O objetivo é fazer com que a cada iteração uma melhor aproximação do problema linear ao problema não-linear seja obtida. Ao final de cada iteração, as variáveis são atualizadas usando-se a expressão

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \Delta \mathbf{x} \quad (2.16)$$

O critério utilizado para a obtenção do valor do multiplicador (ou fator de passo) é baseado no quadrado da função norma euclidiana dos desbalanços de potência, ou seja,

$$F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2^2 = [\mathbf{f}(\mathbf{x})]^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x})]^2 + [f_2(\mathbf{x})]^2 + \dots + [f_{2n}(\mathbf{x})]^2 \quad (2.17)$$

A cada iteração, o mínimo de  $F(\mathbf{x})$  na direção  $\Delta \mathbf{x}$  é encontrado minimizando-se a função

$$F(\mathbf{x}_0 + \varepsilon \Delta \mathbf{x}) \quad (2.18)$$

A forma como este problema de minimização unidimensional é tratado constitui a principal diferença entre as abordagens apresentadas a seguir. Essas abordagens apresentam duas etapas distintas, as quais podem ser resumidas como:

- calcular  $\Delta \mathbf{x}$  através do método de Newton-Raphson convencional, equação (2.14);
- atualizar a estimativa corrente utilizando o fator de passo, equação (2.16).

As seções seguintes apresentam algumas metodologias propostas na literatura para o controle eficiente do fator de passo na direção de Newton.

### 2.3.1 MÉTODO DE SASSON et al.

A metodologia apresentada na referência SASSON et al. (1971) é baseada na apli-

cação de um algoritmo de programação não-linear (SASSON, 1969a; SASSON, 1970) para a solução do problema do fluxo de potência. O procedimento desta abordagem consiste em fazer uma interpolação cúbica (SASSON, 1969b) para a determinação do controle de passo  $\varepsilon$ . A formulação analítica desta estratégia é mostrada a seguir.

Seja a função  $z(\varepsilon)$  definida como

$$z(\varepsilon) = F(\mathbf{x} + \varepsilon \Delta \mathbf{x}) = F(\mathbf{y}) = [\mathbf{f}(\mathbf{y})]^T \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (2.19)$$

onde  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \varepsilon \Delta \mathbf{x}$ .

Derivando-se a equação (2.19) em relação ao parâmetro  $\varepsilon$ , obtém-se

$$z'(\varepsilon) = 2\{[\mathbf{J}(\mathbf{y})]^T \mathbf{f}(\mathbf{y})\}^T \Delta \mathbf{x} = 2[\mathbf{f}(\mathbf{y})]^T \mathbf{J}(\mathbf{y}) \Delta \mathbf{x} \quad (2.20)$$

É interessante notar que quando  $\varepsilon = 0$ ,

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{J}(\mathbf{y}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad z'(0) = 2[\mathbf{f}(\mathbf{x})]^T \mathbf{J}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \quad (2.21)$$

Da expansão de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  em série de Taylor, tem-se

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.22)$$

e, portanto,

$$z'(0) = 2[f'(x)]^T [-f(x)] = -2F(x) \quad (2.23)$$

o qual é sempre negativo, mostrando que o incremento  $\Delta x$  calculado no método de Newton aponta numa direção que minimiza a função  $F(x)$ .

As etapas para realizar a interpolação cúbica, ilustrada na Figura 2.4, são as seguintes:

1. Um passo  $a$  é escolhido de acordo com

$$a = \min \left[ 1, -\frac{2(z_x - b)}{z'_x} \right] \quad (2.24)$$

onde  $z_x = z(0)$  e  $b$  é uma estimativa de  $F$  na solução ótima.

2. O passo  $a$  é utilizado para obter o ponto  $y = x + a \Delta x$ , onde  $z'_y$  é avaliado para verificar se houve mudança de sinal de  $z'_x$  negativo para  $z'_y$ . Uma mudança de sinal implica em que o mínimo está entre estes dois pontos. Caso isto não ocorra, sucessivos passos  $a$  são tomados até que dois pontos adjacentes englobem o mínimo. Então, tomam-se os dois pontos adjacentes como  $w$  e  $y$ , localizados a uma distância  $\varepsilon_w$  e  $\varepsilon_y$ , respectivamente, do ponto original  $x$  como mostra a Figura 2.4.

3. A interpolação produz

$$\varepsilon = \varepsilon_y - \frac{(\varepsilon_y - \varepsilon_w)(z'_y + r - s)}{z'_y - z'_w + 2r} \quad (2.25)$$

$$\text{onde } r = \sqrt{s^2 - z'_w z'_y}$$

$$s = 3 \frac{z_w - z_y}{\varepsilon_y - \varepsilon_w} + z'_w + z'_y \quad (2.26)$$

4. O ponto  $x_0 + \varepsilon \Delta x$  é considerado como o ponto de mínimo se  $z(\varepsilon)$  é menor do que  $z_w$  e  $z_y$ . Caso contrário, a interpolação é repetida entre  $z(\varepsilon)$  e  $z_w$  ou  $z_y$  para que o mínimo seja englobado. A escolha entre  $z_w$  ou  $z_y$  é feita com base no sinal de  $z'(\varepsilon)$ .

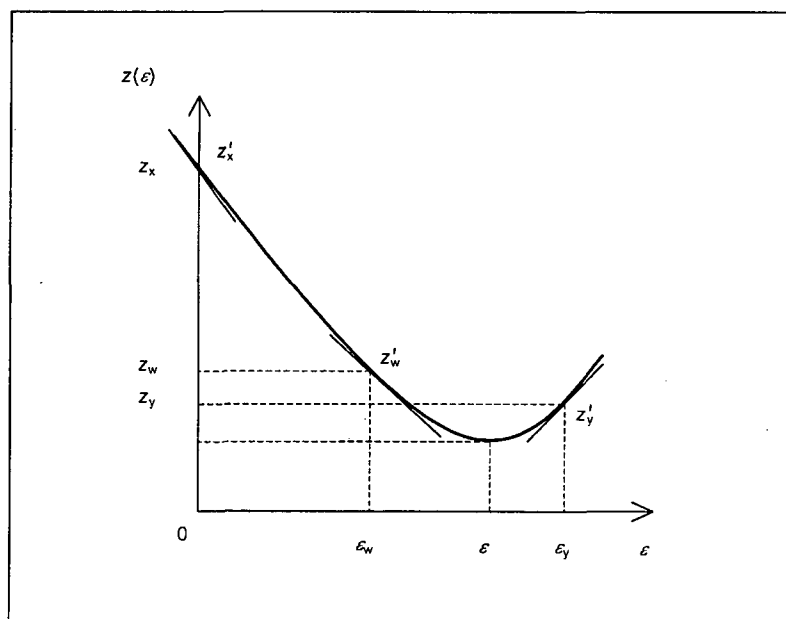


Figura 2.4. Interpolação cúbica para minimizar  $F(x)$  em relação a  $\varepsilon$  na direção  $\Delta x$ .

Para realizar a interpolação proposta, a equação (2.20) deve ser avaliada para diversos valores de  $\varepsilon$ . Para  $\varepsilon = 0$ , a equação (2.20) é computada através da equação (2.23). Os termos necessários para o cálculo da equação (2.20) são obtidos pela avaliação da equação (2.11) e pelos termos da matriz Jacobiana no ponto  $y = x_0 + \varepsilon \Delta x$ , respectivamente. Dessa forma, a interpolação fornece o valor ótimo de  $\varepsilon$ , e o novo ponto  $x_1 = x_0 + \varepsilon \Delta x$  é tomado como solução inicial para a próxima iteração do método de Newton.

### 2.3.2 MÉTODO DE IWAMOTO E TAMURA

O trabalho apresentado em IWAMOTO e TAMURA (1981) utiliza a formulação das equações do fluxo de potência em coordenadas cartesianas, e as expande em série de Taylor até os termos de segunda ordem. Esta expansão não produz aproximação pois os termos de ordem superior são todos nulos.

Seja  $\mathbf{x}$  o vetor com as partes real e imaginária das tensões nas barras do sistema;  $\mathbf{S}^{esp}$ , o vetor com os valores especificados de potências ativa e reativa e magnitude de tensões;  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ , o vetor com as equações correspondentes a  $\mathbf{S}^{esp}$ . As equações do fluxo de potência em coordenadas cartesianas  $\mathbf{S}^{esp} = \mathbf{S}(\mathbf{x})$  transformam-se em um conjunto de equações quadráticas não possuindo nenhum termo linear, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}^{esp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 x_1 \\ x_1 x_2 \\ \vdots \\ x_i x_j \\ \vdots \\ x_n x_n \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

sendo  $\mathbf{A}$  uma matriz com elementos constantes em  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ . Por outro lado, em Galiana (1975) mostra-se que cada uma das equações  $S_i(\mathbf{x})$  contidas em (2.27) pode ser reescrita como

$$S_i^{esp} = S_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}_i \mathbf{x} \quad (2.28)$$

ou, em notação tensorial, como



$$S^{esp} = S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}_N \mathbf{x} \quad (2.29)$$

onde  $\mathbf{A}_N$  é um tensor, ou seja, um vetor de matrizes.

Isto fornece as seguintes derivadas

$$\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \equiv \mathbf{J}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}_N \mathbf{x} \quad \frac{\partial^2 S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} = 2\mathbf{A}_N \quad (2.30)$$

com  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  sendo a matriz Jacobiana de  $S(\mathbf{x})$ . Portanto, a expansão em série de Taylor de  $S(\mathbf{x})$  na direção  $\Delta \mathbf{x}$ , resulta em

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) &= S(\mathbf{x}) + \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \Delta \mathbf{x} = \\ &= S(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{A}_N \Delta \mathbf{x} = \\ &= S(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + S(\Delta \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Observe que nestas equações o último termo possui a mesma forma do primeiro, porém com diferente argumento.

Levando-se em conta a equação (2.31), a equação (2.29) pode ser reescrita como

$$S^{esp} - S(\mathbf{x}) - \mathbf{J}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - S(\Delta \mathbf{x}) = 0 \quad (2.32)$$

O ajuste da magnitude do passo na direção de Newton é obtido multiplicando-se o vetor  $\Delta \mathbf{x}$  pelo escalar  $\varepsilon$ . Isto resulta em

$$\begin{aligned}
 S^{esp} - S(x) - J(x)\varepsilon\Delta x - S(\varepsilon\Delta x) &= 0 & \text{ou} \\
 S^{esp} - S(x) - \varepsilon J(x)\Delta x - \varepsilon^2 S(\Delta x) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

Definido-se os vetores

$$\mathbf{a} \equiv S^{esp} - S(x) \quad \mathbf{b} \equiv -J(x)\Delta x \quad \mathbf{c} \equiv -S(\Delta x)
 \tag{2.34}$$

a equação (2.33) pode ser reescrita como

$$\mathbf{a} + \mathbf{b}\varepsilon + \mathbf{c}\varepsilon^2 = 0
 \tag{2.35}$$

Para determinar o valor de  $\varepsilon$  sob o ponto de vista dos mínimos quadrados, o seguinte problema de otimização é proposto

$$\text{Min } \tau(\varepsilon) = \text{Min } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i\varepsilon + c_i\varepsilon^2)^2
 \tag{2.36}$$

cuja solução ótima pode ser obtida analiticamente resolvendo-se a equação

$$\frac{\partial \tau(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = g_0 + g_1\varepsilon + g_2\varepsilon^2 + g_3\varepsilon^3 = 0
 \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
 \text{onde } g_0 &= \sum_{i=1}^n (a_i b_i) & g_1 &= \sum_{i=1}^n (b_i^2 + 2a_i c_i) \\
 g_2 &= 3 \sum_{i=1}^n (b_i c_i) & g_3 &= 2 \sum_{i=1}^n c_i^2
 \end{aligned}
 \tag{2.38}$$

Os coeficientes requeridos nas equações (2.37) e (2.38) são dados pelas equações (2.34). Um fato importante a ser observado é que o vetor  $\mathbf{b} = -\mathbf{J}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}$  é o simétrico do vetor  $\mathbf{a} = \mathbf{S}^{esp} - \mathbf{S}(\mathbf{x})$ , não necessitando, portanto, ser calculado separadamente. O algoritmo para o método de Iwamoto e Tamura é apresentado na Figura 2.5.

- |   |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Calcular o vetor de incrementos <math>\Delta \mathbf{x}^{(k)}</math></li> <li>2. Calcular os vetores <math>\mathbf{a}^{(k)}</math>, <math>\mathbf{b}^{(k)}</math> e <math>\mathbf{c}^{(k)}</math></li> <li>3. Calcular os coeficientes <math>g_0^{(k)}</math>, <math>g_1^{(k)}</math>, <math>g_2^{(k)}</math> e <math>g_3^{(k)}</math></li> <li>4. Calcular o valor ótimo de <math>\varepsilon^{(k)}</math></li> <li>5. Atualizar as variáveis: <math>\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \varepsilon^{(k)} \Delta \mathbf{x}^{(k)}</math></li> </ol> |
|---|

Figura 2.5. Algoritmo para o método de Iwamoto e Tamura.

### 2.3.3 MÉTODO DE SCUDDER

As referências SCUDDER (1981) e SCUDDER e ALVARADO (1981) apresentam uma metodologia similar à discutida na seção anterior porém utilizando as equações do fluxo de potência em coordenadas polares. Os estudos fazem uma extensão dos princípios da metodologia formulada em coordenadas cartesianas para a forma polar e, dessa maneira, definem um procedimento alternativo para calcular o multiplicador ótimo  $\varepsilon$ .

A equação (2.33), expressa em coordenadas cartesianas (sobrescrito “r”), pode ser escrita como

$$\mathbf{S}^{esp} - \mathbf{S}^r(\mathbf{x}^r) - \varepsilon \mathbf{J}^r(\mathbf{x}^r) \Delta \mathbf{x}^r - \varepsilon^2 \mathbf{S}^r(\Delta \mathbf{x}^r) = 0 \quad (2.39)$$

Por outro lado, se o vetor de variáveis em coordenadas polares  $\mathbf{x}^p$ , for calculado a partir de um vetor de variáveis em coordenadas cartesianas  $\mathbf{x}^r$  conhecido, então tem-se

$$\mathcal{S}^p(\mathbf{x}^p) = \mathcal{S}^r(\mathbf{x}^r) \quad (2.40)$$

Observando que

$$\mathbf{J}^r(\mathbf{x}^r) = \frac{\partial \mathcal{S}^r(\mathbf{x}^r)}{\partial \mathbf{x}^r} \quad \text{e} \quad \mathbf{J}^p(\mathbf{x}^p) = \frac{\partial \mathcal{S}^p(\mathbf{x}^p)}{\partial \mathbf{x}^p} \quad (2.41)$$

pode-se concluir que

$$\mathbf{J}^r(\mathbf{x}^r) = \mathbf{J}^p(\mathbf{x}^p) \frac{\partial \mathbf{x}^p}{\partial \mathbf{x}^r} \quad (2.42)$$

O vetor  $\mathbf{x}^r$  pode ser expresso como uma função do vetor  $\mathbf{x}^p$ , ou seja,  $\mathbf{x}^r = \mathbf{f}(\mathbf{x}^p)$ . É possível, então, expandir este vetor de funções em série de Taylor até os termos de segunda ordem, resultando em

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^r(\mathbf{x}^p + \Delta \mathbf{x}^p) &= \mathbf{x}^r(\mathbf{x}^p) + \frac{\partial \mathbf{x}^r}{\partial \mathbf{x}^p} \Delta \mathbf{x}^p + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i^r}{(\partial \mathbf{x}^p)^2} \Delta \mathbf{x}^p \right] \Delta \mathbf{x}^p \\ \mathbf{x}^r(\mathbf{x}^p + \Delta \mathbf{x}^p) - \mathbf{x}^r(\mathbf{x}^p) &= \frac{\partial \mathbf{x}^r}{\partial \mathbf{x}^p} \Delta \mathbf{x}^p + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i^r}{(\partial \mathbf{x}^p)^2} \Delta \mathbf{x}^p \right] \Delta \mathbf{x}^p \\ \Delta \mathbf{x}^r &= \frac{\partial \mathbf{x}^r}{\partial \mathbf{x}^p} \Delta \mathbf{x}^p + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i^r}{(\partial \mathbf{x}^p)^2} \Delta \mathbf{x}^p \right] \Delta \mathbf{x}^p \end{aligned} \quad (2.43)$$

Portanto, o termo  $\mathbf{J}^r(\mathbf{x}^r)\Delta \mathbf{x}^r$  transforma-se em

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^r(\mathbf{x}^r)\Delta \mathbf{x}^r &= \mathbf{J}^p(\mathbf{x}^p) \frac{\partial \mathbf{x}^p}{\partial \mathbf{x}^r} \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}^r}{\partial \mathbf{x}^p} \Delta \mathbf{x}^p + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 x_i^r}{(\partial \mathbf{x}^p)^2} \Delta \mathbf{x}^p \right] \Delta \mathbf{x}^p \right\} = \\ &= \mathbf{J}^p(\mathbf{x}^p) \Delta \mathbf{x}^p + \mathbf{J}^p(\mathbf{x}^p) \frac{\partial \mathbf{x}^p}{\partial \mathbf{x}^r} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 x_i^r}{(\partial \mathbf{x}^p)^2} \Delta \mathbf{x}^p \right] \Delta \mathbf{x}^p \right\} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Definindo-se

$$\Delta \Delta \mathbf{x}^p = \frac{\partial \mathbf{x}^p}{\partial \mathbf{x}^r} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 x_i^r}{(\partial \mathbf{x}^p)^2} \Delta \mathbf{x}^p \right] \Delta \mathbf{x}^p \right\} \quad (2.45)$$

a equação (2.44) pode ser reescrita como

$$\mathbf{J}^r(\mathbf{x}^r)\Delta \mathbf{x}^r = \mathbf{J}^p(\mathbf{x}^p)\Delta \mathbf{x}^p + \mathbf{J}^p(\mathbf{x}^p)\Delta \Delta \mathbf{x}^p \quad (2.46)$$

Finalmente, substituindo-se as equações (2.40) e (2.46) na equação (2.39), obtém-se

$$\mathbf{S}^{esp} - \mathbf{S}^p(\mathbf{x}^p) - \varepsilon[\mathbf{J}^p(\mathbf{x}^p)\Delta \mathbf{x}^p + \mathbf{J}^p(\mathbf{x}^p)\Delta \Delta \mathbf{x}^p] - \varepsilon^2 \mathbf{S}^r(\Delta \mathbf{x}^r) = \mathbf{0} \quad (2.47)$$

Definido-se os vetores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  como

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{S}^{esp} - \mathbf{S}^p(\mathbf{x}^p) \quad \mathbf{b} \equiv -\mathbf{J}^p(\mathbf{x}^p)\Delta\mathbf{x}^p - \mathbf{J}^p(\mathbf{x}^p)\Delta\Delta\mathbf{x}^p \quad \mathbf{c} \equiv -\mathbf{S}^r(\Delta\mathbf{x}^r) \quad (2.48)$$

a equação (2.47) pode ser expressa na forma da equação (2.35), ou seja, como

$$\mathbf{a} + \mathbf{b}\varepsilon + \mathbf{c}\varepsilon^2 = \mathbf{0} \quad (2.49)$$

e os mesmos procedimentos empregados na proposta de Iwamoto e Tamura podem ser aplicados no presente caso. Observe que, devido à expansão da equação (2.43) em série de Taylor ter sido feita somente até os termos de segunda ordem, o valor de  $\varepsilon$  pode diferenciar-se levemente do seu verdadeiro valor ótimo. Entretanto, conforme o processo converge e o valor de  $\Delta\mathbf{x}^p$  vai se tornando menor, os termos truncados vão se tornando desprezíveis.

Para aplicar o método de Scudder a um fluxo de potência em coordenadas polares, note que o vetor  $\mathbf{a}$  é simplesmente o vetor de desbalanços de potência em uma determinada iteração. Por outro lado, o vetor  $\mathbf{b}$  depende do vetor  $\Delta\Delta\mathbf{x}^p$ . Considere o vetor  $\Delta\mathbf{x}^p$  tendo um comprimento  $2n$  e a forma

$$\Delta\mathbf{x}^p = [\Delta\delta_1 \Delta V_1 \Delta\delta_2 \Delta V_2 \dots \Delta\delta_n \Delta V_n]^T \quad (2.50)$$

onde  $\Delta\delta_i$  e  $\Delta V_i$  são as correções no ângulo de fase e na magnitude da tensão, respectivamente, em cada barra do sistema. Na referência SCUDDER (1981) mostra-se que o vetor  $\Delta\Delta\mathbf{x}^p$  tem a forma

$$\Delta\Delta \mathbf{x}^p = \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{\Delta\delta_1\Delta V_1}{V_1} & -\frac{V_1\Delta\delta_1^2}{2} & \frac{\Delta\delta_2\Delta V_2}{V_2} & -\frac{V_2\Delta\delta_2^2}{2} & \dots & \frac{\Delta\delta_n\Delta V_n}{V_n} & -\frac{V_n\Delta\delta_n^2}{2} \end{array} \right]^T \quad (2.51)$$

O vetor  $\mathbf{c}$  é o mesmo do método de Iwamoto e Tamura e, portanto, deve-se calcular as equações do fluxo de potência em coordenadas cartesianas substituindo as variáveis do sistema  $\mathbf{x}^r$  pelas correções nas variáveis  $\Delta\mathbf{x}^r$ . De posse das correções na forma polar,  $\Delta\mathbf{x}^p$ , pode-se facilmente obter estas correções na forma cartesiana como

$$\begin{aligned} \Delta e_i &= e_i(\cos\Delta\delta_i - 1) - f_i\sin\Delta\delta_i + \Delta V_i\cos(\delta_i + \Delta\delta_i) \\ \Delta f_i &= f_i(\cos\Delta\delta_i - 1) + e_i\sin\Delta\delta_i + \Delta V_i\sin(\delta_i + \Delta\delta_i) \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.52)$$

e, assim, obter o vetor  $\mathbf{c}$ . A Figura 2.6 mostra a relação existente entre as variáveis do sistema expressas em coordenadas polares e cartesianas.

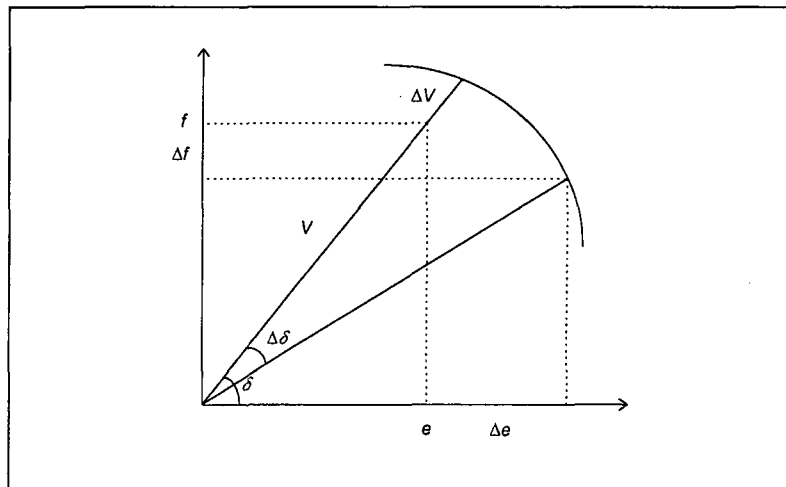


Figura 2.6. Relação entre as coordenadas cartesianas e polares para um número complexo.

Resumindo, a metodologia proposta por Scudder apresenta as seguintes caracte-

rísticas:

- baseia-se numa adaptação direta do método formulado em coordenadas retangulares. A equação (2.35) de IWAMOTO e TAMURA foi adaptada para a formulação em coordenadas polares. Deve-se levar em conta que a expansão das equações do fluxo de potência em coordenadas polares possui infinitos termos. A consideração dos termos até o de segunda ordem constitui, então, uma aproximação;
- o cálculo do vetor  $\mathbf{b}$  é realizado de forma aproximada;
- o cálculo do vetor  $\mathbf{c}$  também é realizado de forma aproximada. Quanto mais distante da solução, maior será a diferença entre os vetores  $\mathbf{c}$ 's calculados com  $\Delta\mathbf{x}^p$  e  $\Delta\mathbf{x}^r$ ;
- o cálculo do fator de passo ótimo  $\varepsilon$  é realizado através de transformações de coordenadas durante o processo.

A Figura 2.7 apresenta o algoritmo básico para o método de Scudder.

1. Calcular o vetor de incrementos em coordenadas polares  $\Delta\mathbf{x}^{p(k)}$
2. Calcular os vetores  $\Delta\mathbf{x}^{r(k)}$  e  $\Delta\Delta\mathbf{x}^{p(k)}$
3. Calcular os vetores  $\mathbf{a}^{(k)}$ ,  $\mathbf{b}^{(k)}$  e  $\mathbf{c}^{(k)}$
4. Calcular os coeficientes  $g_0^{(k)}$ ,  $g_1^{(k)}$ ,  $g_2^{(k)}$  e  $g_3^{(k)}$
5. Calcular o valor ótimo de  $\varepsilon^{(k)}$
6. Atualizar as variáveis em coordenadas cartesianas:  $\mathbf{x}^{r(k+1)} = \mathbf{x}^{r(k)} + \varepsilon^{(k)} \Delta\mathbf{x}^{r(k)}$
7. Obter  $\mathbf{x}^{p(k+1)}$  a partir de  $\mathbf{x}^{r(k+1)}$

Figura 2.7. Algoritmo para o método de Scudder.



### 2.3.4 MÉTODO DE DEHNEL E DOMMEL

O estudo realizado em DEHNEL e DOMMEL (1989) apresenta outra metodologia para a determinação do comprimento de passo ótimo a ser aplicado na correção das variáveis do fluxo de potência. Neste caso, o problema pode ser formulado tanto em coordenadas cartesianas como em polares.

Para se computar o valor do fator de passo ótimo, a função norma euclidiana dos desbalanços de potências

$$F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2 = \sqrt{f_1(\mathbf{x})^2 + f_2(\mathbf{x})^2 + \dots + f_n(\mathbf{x})^2} \quad (2.53)$$

é aproximada no ponto  $\mathbf{x}^{(k)}$ , ao longo da direção de Newton  $\Delta\mathbf{x}^{(k)}$ , por uma função quadrática  $\Phi(\varepsilon)$ , onde  $\varepsilon$  é um escalar que indica o comprimento do passo na direção  $\Delta\mathbf{x}^{(k)}$ . Com a utilização de três pontos  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  e  $\Phi_3$ , respectivamente, em  $\varepsilon_1 = -\Delta\varepsilon$ ,  $\varepsilon_2 = 0$  e  $\varepsilon_3 = \Delta\varepsilon$ , conforme mostrado na Figura 2.8, a função de aproximação é

$$\Phi(\varepsilon) = \Phi_2 - \frac{\Phi_1 - \Phi_3}{2\Delta\varepsilon} \varepsilon + \frac{\Phi_1 - 2\Phi_2 + \Phi_3}{2(\Delta\varepsilon)^2} \varepsilon^2 \quad (2.54)$$

$$\text{onde } \Phi_i = F[\mathbf{x}^{(k)} + \varepsilon_i \Delta\mathbf{x}^{(k)}] \quad (2.55)$$

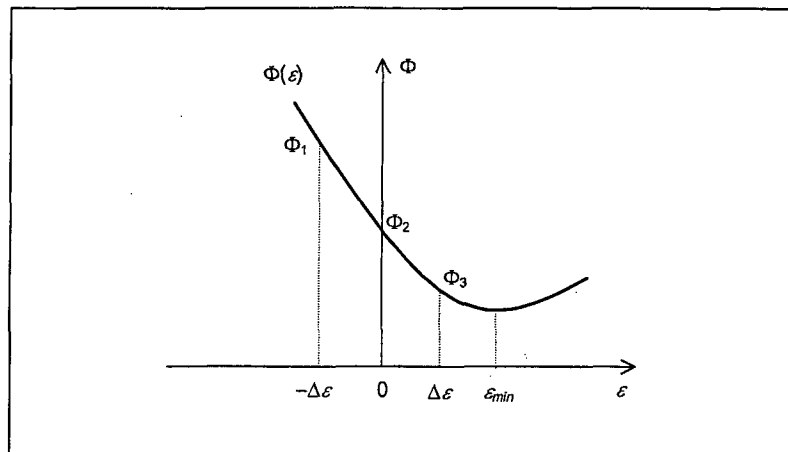


Figura 2.8. Função quadrática (parábola) passando por três pontos.

O valor do passo  $\varepsilon$  é determinado de forma que  $\Phi(\varepsilon)$  tenha valor mínimo. Isto pode ser obtido derivando-se esta função e igualando o resultado a zero, isto é,

$$\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\Delta\varepsilon(\Phi_1 - \Phi_3)}{2\Phi_1 - 4\Phi_2 + 2\Phi_3} \quad (2.56)$$

Precauções devem ser tomadas no cálculo do valor de  $\pm\Delta\varepsilon$ . Se  $\Delta\varepsilon$  for muito pequeno, erros de arredondamento podem tornar-se excessivos nos cálculos de  $\Phi_1$  e  $\Phi_3$ , comprometendo a construção da parábola. Por outro lado, se  $\Delta\varepsilon$  for muito grande, a parábola pode não pertencer à vizinhança de  $\mathbf{x}^{(k)}$ . Para garantir que  $\Delta\varepsilon$  possua uma magnitude adequada,  $\Phi_1$  e  $\Phi_3$  da equação (2.54) são calculados em duas direções a partir do ponto  $\mathbf{x}^{(k)}$ , a uma distância

$$d^{(k)} = \varepsilon \|\Delta \mathbf{x}^{(k)}\| = \Delta\varepsilon \|\Delta \mathbf{x}^{(k)}\| \quad (2.57)$$

ao longo da direção  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$ , onde  $d$  é uma fração da atualização de Newton obtida na iteração anterior (ver Figura 2.9), ou seja,

$$d^{(k)} = \xi \varepsilon^{(k-1)} \|\Delta \mathbf{x}^{(k-1)}\| \quad (2.58)$$

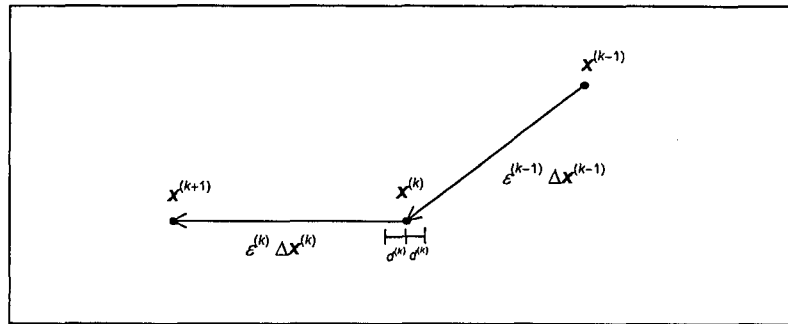


Figura 2.9. Parâmetros do método de Newton-Raphson amortecido.

Comparando as equações (2.57) e (2.58), pode-se deduzir que

$$\Delta \varepsilon = \xi \varepsilon^{(k-1)} \frac{\|\Delta \mathbf{x}^{(k-1)}\|}{\|\Delta \mathbf{x}^{(k)}\|} \quad (2.59)$$

Esta formulação assegura que  $\Phi_1$  e  $\Phi_3$  são calculados em distâncias que são frações da correção da iteração anterior, um de cada lado de  $\mathbf{x}^{(k)}$ . Segundo os autores, o valor de  $\xi$  igual a 0,25 mostrou-se adequado nos testes realizados.

Entretanto, na primeira iteração alguns problemas podem ocorrer. Nesta iteração, não se dispõe de informações da iteração anterior, e por isso,  $\Delta \varepsilon$  é feito igual a  $\xi$ . Além disso, se  $\mathbf{x}^0$  está muito próximo do ponto de mínimo da função norma euclidiana, será atribuído a  $\|\Delta \mathbf{x}^0\|$  um valor muito grande, bem como à distância  $d^0$ . Segundo os autores, isso ra-

ramente acontece, e se ocorrer, pode ser corrigido atribuindo um novo valor inicial mais distante do mínimo, como descrito em ABE et al. (1978).

Além disso, para a aplicação desta metodologia ao problema de fluxo de potência, deve ser atribuído a  $\varepsilon$  o valor unitário toda vez que o valor calculado de  $|\varepsilon|$  for superior a 1,0. Isso tem por objetivo evitar problemas nos casos em que o fluxo de potência é normalmente convergente.

O algoritmo para o método de Dehnel e Dommel está apresentado na Figura 2.10.

1. Calcular o vetor de incrementos  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$
2. Calcular a norma euclidiana do vetor de incrementos  $\|\Delta \mathbf{x}^{(k)}\|$
3. Calcular o valor de  $\Delta \varepsilon^{(k)}$
4. Calcular os valores das funções resíduos  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  e  $\Phi_3$
5. Calcular o valor ótimo de  $\varepsilon^{(k)}$
6. Atualizar as variáveis:  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \varepsilon^{(k)} \Delta \mathbf{x}^{(k)}$

Figura 2.10. Algoritmo para o método de Dehnel e Dommel.

### 2.3.5 MÉTODO DE CASTRO E BRAZ

A referência CASTRO e BRAZ (1997) apresenta uma abordagem alternativa para a solução do problema de fluxo de potência via método de Newton utilizando otimização do fator de passo. O seu referencial teórico é o trabalho de IWAMOTO e TAMURA (1981), porém, neste caso o problema de fluxo de potência é formulado em coordenadas polares e não exige transformações trigonométricas adicionais como as requeridas na abordagem proposta por SCUDDER (1981).

A idéia básica é a mesma apresentada em IWAMOTO e TAMURA (1981). Deve ser ressaltado, porém, que na expansão das equações da rede elétrica em série de Taylor, a metodologia em questão considera apenas os termos de ordem igual ou inferior a dois. Isto implica em uma aproximação para os desbalanços de potências, diferentemente da abordagem de IWAMOTO e TAMURA (1981) onde a expansão é exata.

Considere as equações dos desbalanços de potências escritas na forma vetorial e em coordenadas polares

$$\mathbf{S}^{esp} - \mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.60)$$

A expansão em série de Taylor em torno de um ponto de operação  $\mathbf{x}$ , na direção  $\Delta \mathbf{x}$ , considerando os termos de ordem igual ou inferior a dois resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{esp} - \mathbf{S}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 \mathbf{S}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \\ \mathbf{S}^{esp} - \mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{J}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 \mathbf{S}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.61)$$

onde o termo  $\frac{\partial^2 \mathbf{S}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2}$  é um tensor.

Definindo-se os vetores

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^{esp} - \mathbf{S}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{b} = -\mathbf{J}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \quad \mathbf{c} = -\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 \mathbf{S}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \Delta \mathbf{x} \quad (2.62)$$

e à luz da equação (2.33), na qual o fator de otimização de passo é introduzido, pode-se escrever que

$$a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0 \quad (2.63)$$

a qual é, em forma, semelhante à equação (2.35) porém com as variáveis expressas em coordenadas polares. A partir deste ponto, o processo de cálculo do fator de passo ótimo  $\varepsilon$  pode ser realizado da mesma forma como apresentado em IWAMOTO e TAMURA (1981).

O exemplo abaixo ilustra o cálculo do vetor  $c$ , sendo que os vetores  $a$  e  $b$  são, respectivamente, os desbalanços de potências e o seu simétrico. Seja um sistema de 3 barras no qual a barra 1 é a barra de referência (V $\delta$ ) e as outras duas são barras de carga (PQ). A equação do desbalanço de potência ativa da barra 2 é

$$\Delta P_2(\mathbf{x}) = P_2^{esp} - P_2(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.64)$$

A expansão em série de Taylor dessa equação até o termo de segunda ordem resulta em

$$\begin{aligned}
\Delta P_2(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = & \Delta P_2(\mathbf{x}) - \frac{\partial P_2(\mathbf{x})}{\partial \delta_2} \Delta \delta_2 - \frac{\partial P_2(\mathbf{x})}{\partial \delta_3} \Delta \delta_3 - \frac{\partial P_2(\mathbf{x})}{\partial V_2} \Delta V_2 - \frac{\partial P_2(\mathbf{x})}{\partial V_3} \Delta V_3 + \\
& - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial \delta_2^2} \Delta \delta_2^2 + \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial \delta_3^2} \Delta \delta_3^2 + \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial V_2^2} \Delta V_2^2 + \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial V_3^2} \Delta V_3^2 + \right. \\
& + 2 \left( \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial \delta_2 \partial \delta_3} \Delta \delta_2 \Delta \delta_3 + \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial \delta_2 \partial V_2} \Delta \delta_2 \Delta V_2 + \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial \delta_2 \partial V_3} \Delta \delta_2 \Delta V_3 + \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial \delta_3 \partial V_2} \Delta \delta_3 \Delta V_2 + \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial \delta_3 \partial V_3} \Delta \delta_3 \Delta V_3 + \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial V_2 \partial V_3} \Delta V_2 \Delta V_3 \right) \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Portanto, a componente do vetor  $\mathbf{c}$  relativa ao desbalanço de potência ativa na barra 2 é

$$\begin{aligned}
c_2 = & -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial \delta_2^2} \Delta \delta_2^2 + \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial \delta_3^2} \Delta \delta_3^2 + \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial V_2^2} \Delta V_2^2 + \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial V_3^2} \Delta V_3^2 + \right. \\
& + 2 \left( \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial \delta_2 \partial \delta_3} \Delta \delta_2 \Delta \delta_3 + \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial \delta_2 \partial V_2} \Delta \delta_2 \Delta V_2 + \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial \delta_2 \partial V_3} \Delta \delta_2 \Delta V_3 + \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial \delta_3 \partial V_2} \Delta \delta_3 \Delta V_2 + \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial \delta_3 \partial V_3} \Delta \delta_3 \Delta V_3 + \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{x})}{\partial V_2 \partial V_3} \Delta V_2 \Delta V_3 \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.66}$$

As outras componentes do vetor  $\mathbf{c}$  relativas aos desbalanços de potência ativa na barra 3 e de potência reativa nas barras 2 e 3 podem ser determinadas de maneira análoga.

As principais características dessa metodologia são resumidas a seguir:

- o método é baseado em uma formulação originalmente em coordenadas polares. Ao contrário da abordagem de Scudder, uma dedução das equações é feita com base na metodologia de Iwamoto e Tamura;
- não são realizadas conversões entre coordenadas (polar-retangular) durante o

- processo de cálculo. A única aproximação se refere à não consideração dos termos de ordem maior do que dois na expansão em série de Taylor;
- não há aproximações com relação ao vetor  $\mathbf{c}$ , que é diferente daquele definido no método de Iwamoto e Tamura e no método de Scudder;
  - os vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são definidos da mesma maneira que no método de Iwamoto, não havendo necessidade do cálculo do termo adicional  $\mathbf{J}(\mathbf{x})\Delta\Delta\mathbf{x}^p$  no vetor  $\mathbf{b}$ , como no método de Scudder;
  - esforço computacional para o cálculo do vetor  $\mathbf{c}$  é um pouco maior do que o cálculo dos desbalanços de potências.

### 2.3.6 MÉTODO DE DUARTE et al.

O trabalho apresentado em DUARTE et al. (2000) descreve uma abordagem para o cálculo de fluxo de potência de segunda ordem, no qual os incrementos de tensão e ângulo expressos em coordenadas polares são transformados em coordenadas retangulares.

O estudo visa determinar uma relação entre as coordenadas polares e retangulares, semelhante ao método de SCUDDER (1981), de modo a reproduzir a trajetória de convergência obtida pelo método de IWAMOTO e TAMURA (1981). Esta abordagem baseia-se no que segue.

As relações entre tensões complexas em coordenadas retangulares ( $V_r = e + jf$ ) e polares ( $V_p = V \angle \delta$ ) podem ser expressas como



$$\begin{aligned}e &= V \cos \delta \\f &= V \sin \delta\end{aligned}\tag{2.67}$$

Linearizando as equações (2.67), obtém-se

$$\begin{aligned}\Delta e &= \Delta V \cos \delta - V \Delta \delta \sin \delta \\ \Delta f &= \Delta V \sin \delta + V \Delta \delta \cos \delta\end{aligned}\tag{2.68}$$

Substituindo as equações (2.67) nas (2.68), tem-se

$$\begin{aligned}\Delta e &= \frac{e}{V} \Delta V - f \Delta \delta \\ \Delta f &= \frac{f}{V} \Delta V + e \Delta \delta\end{aligned}\tag{2.69}$$

Desta forma, para o cálculo do fluxo de segunda ordem nesta abordagem, utiliza-se o algoritmo de IWAMOTO e TAMURA com pequenas adaptações. O algoritmo para a metodologia está apresentado na Figura 2.11.

1. Inicializar as variáveis em coordenadas polares,  $\mathbf{x}^{p(k)}$ , e fazer  $k = 1$ .
2. Calcular  $\mathbf{S}[\mathbf{x}^{p(k)}]$ .
3. Se  $\mathbf{S}^{\text{esp}} - \mathbf{S}[\mathbf{x}^{p(k)}] < \varepsilon$ , interromper o processo iterativo.
4. Calcular  $\mathbf{J}^p[\mathbf{x}^{p(k)}]$ .
5. Calcular  $\Delta \mathbf{x}^p = \{\mathbf{J}^p[\mathbf{x}^{p(k)}]\}^{-1} \cdot \{\mathbf{S}^{\text{esp}} - \mathbf{S}[\mathbf{x}^{p(k)}]\}$ .
6. Calcular o vetor  $\mathbf{a}$ .
7. Usando as equações (2.69), determinar  $\Delta \mathbf{x}'$ .
8. Calcular os vetores  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , conforme as equações (2.34) e determinar  $\varepsilon$ .
9. Fazer  $\mathbf{x}'^{(k+1)} = \mathbf{x}'^{(k)} + \varepsilon \Delta \mathbf{x}'^{(k)}$ .
10. Determinar  $\mathbf{x}^p$  a partir de  $\mathbf{x}'$ .
11.  $k = k + 1$ . Voltar ao passo 2.

Figura 2.11. Algoritmo para o método de Duarte et al.

Segundo os autores, a transformação expressa pelas equações (2.69) faz com que a trajetória de convergência seja idêntica a do fluxo de potência de segunda ordem convencional, com um pequeno esforço computacional adicional.

## 2.4 MÉTODO DO AUTOVETOR À ESQUERDA

A abordagem proposta em OVERBYE (1994) visa fornecer uma medida da falta de solvabilidade do fluxo de potência em sistemas de energia elétrica e apresentar ações corretivas para a solução do problema. A metodologia a ser apresentada se baseia no fluxo de potência convencional expresso em coordenadas cartesianas. O objetivo é obter uma primeira solução para as equações da rede elétrica; a partir desta, violações em limites podem ser removidas através de métodos tradicionais de análise de segurança.

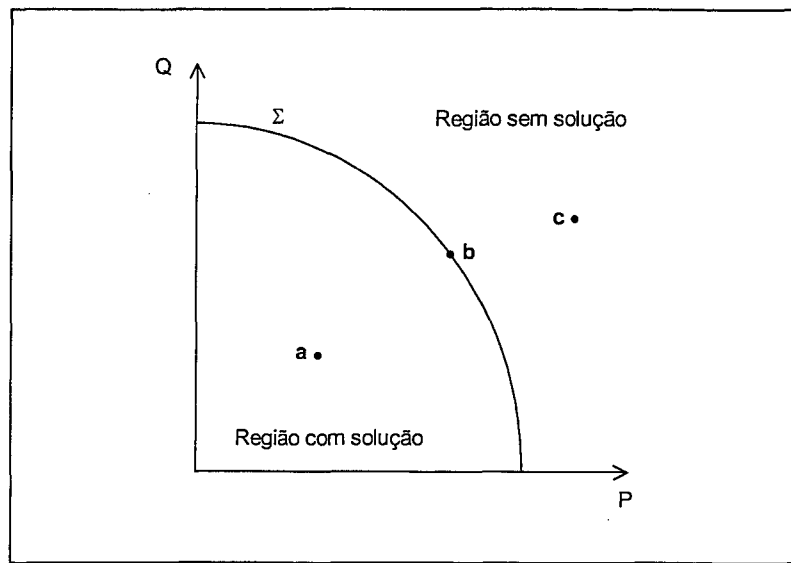


Figura 2.12. Regiões no espaço paramétrico das equações do fluxo de potência.

Para ilustrar esta metodologia, considere-se a Figura 2.12, a qual é uma reprodução genérica da Figura 2.2. Esta representa, no espaço paramétrico, as regiões definidas pelas equações do fluxo de potência de um sistema de energia hipotético. Observa-se que existem duas regiões: uma na qual existem soluções para o fluxo de potência (ponto “a”) e outra na qual nenhuma solução pode ser encontrada (ponto “c”). Estas duas regiões são limitadas por uma superfície  $\Sigma$ , na qual existe somente uma solução para o fluxo de potência (ponto “b”).

A metodologia proposta em OVERBYE (1994) visa quantificar o grau de dificuldade de se obter solução no espaço paramétrico, utilizando para este fim a distância entre o ponto especificado e o ponto mais próximo pertencente à superfície  $\Sigma$ . Para isso, defina-se a função custo

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}^{esp}]^T [\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}^{esp}] \quad (2.70)$$

a qual é sempre maior que zero para todo  $\mathbf{x}$ , e é igual a zero somente quando existe solução para o fluxo de potência.

No caso onde nenhuma solução para o fluxo de potência existe, seja  $\mathbf{x}^m$  o vetor que corresponde ao mínimo da função custo  $F(\mathbf{x})$ . Assim,  $\mathbf{x}^m$  pode ser interpretado como uma solução possível obtida por mínimos quadrados. Seja também  $\mathcal{S}^m = \mathcal{S}(\mathbf{x}^m)$  o ponto no espaço paramétrico que corresponde ao vetor  $\mathbf{x}^m$ . Com as informações relativas a  $\mathbf{x}^m$  e  $\mathcal{S}^m$  pode-se ter uma noção do grau de não solvabilidade do problema. Isto fornece uma idéia sobre as modificações a serem efetuadas de forma a se obter uma solução convergente para as equações do fluxo de potência. Esta medida pode ser desenvolvida a partir das seguintes observações sobre o vetor  $\mathbf{x}^m$ :

- A matriz Jacobiana das equações do fluxo de potência em  $\mathbf{x}^m$ ,  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^m)$ , é singular. Isto pode ser deduzido analisando as condições necessárias de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para que  $\mathbf{x}^m$  seja um mínimo de (2.70), ou seja,

$$\nabla F(\mathbf{x}^m) = [\mathcal{S}(\mathbf{x}^m) - \mathcal{S}^{esp}]^T \mathbf{J}(\mathbf{x}^m) = \mathbf{0} \quad (2.71)$$

Como  $[\mathcal{S}(\mathbf{x}^m) - \mathcal{S}^{esp}]$  é diferente de zero, isto implica em que  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^m)$  é singular.

- O ponto mais próximo de  $\mathcal{S}^{esp}$  (com base na norma euclidiana) na superfície  $\Sigma$  é  $\mathcal{S}^m = \mathcal{S}(\mathbf{x}^m)$ . Da primeira observação, deduz-se que  $\mathcal{S}^m$  é um ponto que pertence à superfície  $\Sigma$ . Este ponto é o mais próximo de  $\mathcal{S}^{esp}$ , pela definição de  $\mathbf{x}^m$  como ponto de mínimo da função (2.70), o que é equivalente a minimizar a norma euclidiana.
- A direção ótima de movimento no espaço paramétrico para restaurar a solvabilidade é dada por  $[\mathcal{S}^{esp} - \mathcal{S}^m]$ . Isto pode ser percebido observando que no ponto  $\mathbf{x}^m$ , as diferenças  $[\mathcal{S}^m - \mathcal{S}^{esp}]$  são os desbalanços de potências ativa e reativa em

cada barra do sistema. Portanto, o sistema pode ser levado à fronteira da região de solvabilidade se as injeções forem modificadas de forma a que todos os desbalanços de potências sejam zerados. De um modo mais formal, isto pode ser concluído observando que, da equação (2.71),  $[\mathbf{S}^m - \mathbf{S}^{esp}]$  é o autovetor à esquerda,  $\mathbf{w}^m$ , correspondente ao autovalor nulo da matriz Jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^m)$ . Em DOBSON (1992) e DOBSON e LU (1992) mostra-se que  $\mathbf{w}^m$  é paralelo ao vetor normal à  $\Sigma$  em  $\mathbf{S}^m$ . Como  $\mathbf{S}^{esp}$  é um elemento que emana normalmente de  $\mathbf{S}^m$ , a direção ótima para se retornar à  $\Sigma$  é a direção com sentido oposto à normal, isto é,  $[\mathbf{S}^{esp} - \mathbf{S}^m]$ .

A distância entre esta solução para as equações do fluxo de potência e  $\mathbf{S}^{esp}$  é então dada por

$$d(\mathbf{S}^{esp}) = \sqrt{[\mathbf{S}^m - \mathbf{S}^{esp}]^T [\mathbf{S}^m - \mathbf{S}^{esp}]} \quad (2.72)$$

a qual pode ser utilizada como uma medida do grau de dificuldade de solução para o fluxo de potência, tendo como direção ótima de retorno à solvabilidade o vetor  $[\mathbf{S}^{esp} - \mathbf{S}^m]$ .

Neste ponto, é interessante comparar a metodologia aqui apresentada para quantificar o grau de dificuldade de solução do fluxo de potência, e o estudo realizado em DOBSON e LU (1993), sobre a margem crítica de carregamento de um fluxo de potência para quantificar o grau de segurança do caso com solução. Ambos os estudos utilizam a norma euclidiana como uma medida de proximidade da superfície  $\Sigma$ . Em DOBSON e LU (1993), esta medida é sugerida para indicar quão longe o sistema está do ponto de colapso

de tensão via bifurcação do tipo nó-sela. Neste caso, um valor elevado desta medida significa que o ponto de operação especificado é mais seguro. Por outro lado, a medida proposta em OVERBYE (1994) indica quão longe o carregamento programado está da região onde as soluções reais existem, com um valor elevado significando que o sistema está mais distante da superfície  $\Sigma$ .

A diferença fundamental entre os dois estudos está na determinação da solução do fluxo de potência, pois ambos utilizam um método iterativo para a determinação do ponto mais próximo sobre  $\Sigma$ . Em DOBSON (1993) a solução do fluxo de potência pode ser determinada através do método da Continuação, do tipo proposto em AJJARAPU e CHRISTY (1992), CAÑIZARES et al. (1992), CAÑIZARES e ALVARADO (1993), ZENG et al. (1993), CHIANG et al. (1995) ou do método de otimização conforme proposto em BARBOZA (1997). Por outro lado, a determinação de um ponto sobre a superfície  $\Sigma$  para o problema sem solução não pode ser realizada por um fluxo de potência convencional e, portanto, a metodologia descrita a seguir é apresentada.

Seja o objetivo considerado, a determinação do ponto sobre a superfície  $\Sigma$  mais próximo de uma especificação de demanda para a qual as equações do fluxo de potência  $\mathcal{S}(\mathbf{x}) - \mathcal{S}^{esp} = \mathbf{0}$  não possuem solução real. Propõe o estudo de OVERBYE (1994) a utilização de um fluxo de potência em coordenadas cartesianas, com controle de passo (IWAMOTO e TAMURA, 1981), associado com a direção ótima de retorno mencionada anteriormente. Este método é desenvolvido observando-se algumas características de convergência do algoritmo de Newton-Raphson quando o controle de passo é utilizado:

- Se  $\mathcal{S}(\mathbf{x}) - \mathcal{S}^{esp} = \mathbf{0}$  não possui solução real, então o fluxo de potência converge para um ponto  $\mathbf{x}^*$  onde a matriz Jacobiana de  $\mathcal{S}(\mathbf{x}^*)$  é singular. Isto pode ser ve-

rificado observando que a direção  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$  em cada iteração é dada por

$$\Delta \mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{J}[\mathbf{x}^{(k)}]^{-1} \{\mathcal{S}[\mathbf{x}^{(k)}] - \mathcal{S}^{esp}\} \quad (2.73)$$

e que o multiplicador ótimo é, então escolhido de forma a minimizar a função custo

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\mathcal{S}(\mathbf{x}) - \mathcal{S}^{esp}]^T [\mathcal{S}(\mathbf{x}) - \mathcal{S}^{esp}] \quad (2.74)$$

na direção  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$ . A única forma da função custo não ser reduzida é se  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$  estiver contido no plano tangente  $F(\mathbf{x}) = \text{constante}$ . Ou de forma equivalente, se o gradiente de  $F[\mathbf{x}^{(k)}]$

$$\nabla F[\mathbf{x}^{(k)}] = \{\mathcal{S}[\mathbf{x}^{(k)}] - \mathcal{S}^{esp}\}^T \mathbf{J}[\mathbf{x}^{(k)}] \quad (2.75)$$

for perpendicular a direção  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$ ; o que implica em que o seu produto interno tem que ser nulo. Entretanto, durante o processo iterativo  $\mathbf{J}[\mathbf{x}^{(k)}]$  não é singular, tornando-se singular apenas na solução, daí

$$\begin{aligned} \frac{\nabla F[\mathbf{x}^{(k)}] \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)}}{\|\Delta \mathbf{x}^{(k)}\|} &= - \frac{\{\mathcal{S}[\mathbf{x}^{(k)}] - \mathcal{S}^{esp}\}^T \mathbf{J}[\mathbf{x}^{(k)}] \mathbf{J}[\mathbf{x}^{(k)}]^{-1} \{\mathcal{S}[\mathbf{x}^{(k)}] - \mathcal{S}^{esp}\}}{\|\Delta \mathbf{x}^{(k)}\|} = \\ &= - \frac{\{\mathcal{S}[\mathbf{x}^{(k)}] - \mathcal{S}^{esp}\}^T \{\mathcal{S}[\mathbf{x}^{(k)}] - \mathcal{S}^{esp}\}}{\|\Delta \mathbf{x}^{(k)}\|} \neq 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

visto que  $\mathcal{S}[\mathbf{x}^{(k)}] - \mathcal{S}^{esp} \neq \mathbf{0}$ . Por outro lado, pode-se observar que conforme  $\mathbf{J}[\mathbf{x}^{(k)}]$  se aproxima da singularidade, a equação (2.76) se aproxima de zero, visto que  $\|\Delta \mathbf{x}^{(k)}\| \rightarrow \infty$ .

- Da observação anterior pode ser inferido que  $\mathcal{S}(\mathbf{x}^*)$  pertence ao limite  $\Sigma$  no espaço paramétrico. Desde que os desbalanços de potências são  $\mathcal{S}(\mathbf{x}) - \mathcal{S}^{esp}$ , em  $\mathbf{x}^*$  o valor de  $\mathcal{S}(\mathbf{x}^*)$  é apenas  $\mathcal{S}^{esp}$  adicionado ao desbalanço final. No entanto, isto não significa que  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^m$ ; em geral  $\mathcal{S}(\mathbf{x}^*) \neq \mathcal{S}^m$ . Observe que o multiplicador  $\varepsilon$  é determinado de forma a minimizar  $F(\mathbf{x})$  somente na direção  $\Delta \mathbf{x}$ .
- O autovetor à esquerda  $\mathbf{w}$ , correspondente ao autovalor nulo de  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ , é perpen-

dicular à superfície  $\Sigma$  em  $S(x^*)$  (DOBSON, 1992).

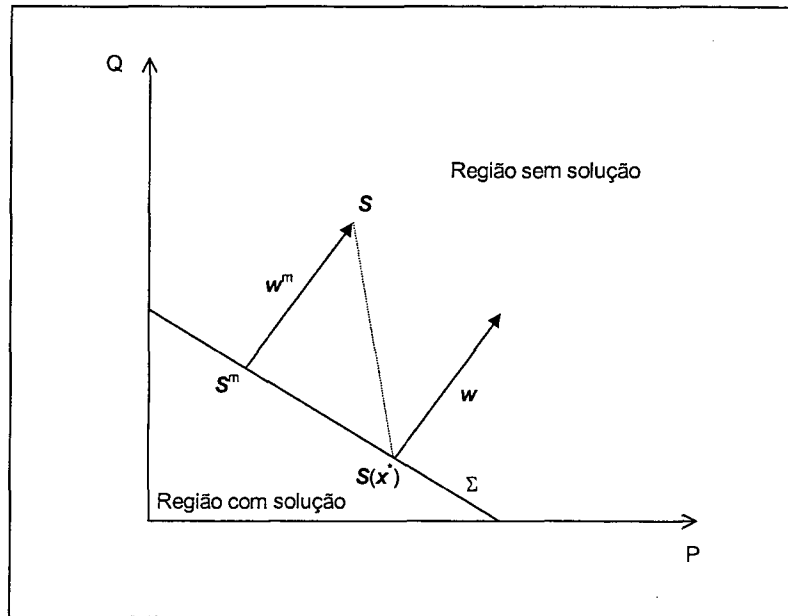


Figura 2.13. Relações entre as variáveis no espaço paramétrico.

A Figura 2.13 mostra a relação entre as variáveis no espaço paramétrico. Se a superfície  $\Sigma$  fosse plana, o vetor das injeções  $S^m$  poderia ser determinado diretamente a partir dos vetores conhecidos  $S^{esp}$  e  $S(x^*)$ , observando que a direção do autovetor à esquerda normalizado de  $J(x^*)$ ,  $w$ , é paralela ao vetor  $w^m$ . O valor de  $S^{esp} - S^m$  é portanto o vetor projeção de  $S(x^*) - S^{esp}$  sobre a direção normalizada do autovetor à esquerda, isto é,

$$S^m = S^{esp} + \{[S(x^*) - S^{esp}] \bullet w\} w \quad (2.77)$$

Para sistemas reais, onde a superfície  $\Sigma$  não é plana, a equação (2.77) é apenas uma aproximação. Isto sugere o algoritmo apresentado na Figura 2.14.

Este algoritmo é derivado da proposta apresentada em DOBSON e LU (1993). As



duas primeiras etapas do algoritmo são a solução do fluxo de potência utilizando um controle de passo. Se o sistema possui uma solução para o fluxo de potência, a tolerância para a convergência será satisfeita e o algoritmo termina com um esforço computacional praticamente igual ao de um fluxo de potência convencional. Para o caso sem solução, o algoritmo trabalha iterativamente resolvendo o problema do fluxo de potência, com aproximações sequenciais para o ponto mais próximo na superfície  $\Sigma$ . A cada iteração, um ponto  $\mathbf{S}^{(k)}$  próximo o suficiente de  $\Sigma$  é determinado, de forma que o critério de convergência seja satisfeito. A rapidez de convergência do algoritmo depende basicamente da estrutura de  $\Sigma$  e, em particular, de quanto esta pode ser aproximada por um hiperplano. Assim, a convergência depende da distância de  $\mathbf{S}^{esp}$  à  $\Sigma$  e da curvatura de  $\Sigma$  na vizinhança de  $\mathbf{S}^{m}$ . Uma discussão a respeito da influência da curvatura de  $\Sigma$  é mostrada em DOBSON e LU (1993).

1. Fazer  $\mathbf{S}^0 = \mathbf{S}^{esp}$ .
2. Resolver o problema do fluxo de carga  $\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}^{(k)}$  usando o método do multiplicador ótimo em coordenadas cartesianas para obter a solução  $\mathbf{x}^{*(k)}$ . Se a maior componente em módulo dos resíduos  $\|\mathbf{S}[\mathbf{x}^{*(k)}] - \mathbf{S}^{(k)}\|_{\infty}$  for menor do que a tolerância do fluxo de carga, então o processo está terminado.
3. Caso contrário, em  $\mathbf{x}^{*(k)}$  calcular o autovetor à esquerda normalizado  $\mathbf{w}^{*(k)}$  correspondente ao autovalor nulo de  $\mathbf{J}[\mathbf{x}^{*(k)}]$ .
4. Fazer  $\mathbf{S}^{(k+1)} = \mathbf{S}^{esp} + \{[\mathbf{S}(\mathbf{x}^{*(k)}) - \mathbf{S}^{(k)}] \cdot \mathbf{w}^{*(k)}\} \mathbf{w}^{*(k)}$ .
5. Retornar ao passo 2.

Figura 2.14. Algoritmo para o método de Overbye.

Finalmente, para que o método possa ser aplicado a sistemas reais, ele deve ser capaz de modelar corretamente as barras de geração, isto é, tratá-las como barras PV. Em um fluxo de potência em coordenadas cartesianas, o vetor de desbalanços inclui as equa-

ções de injeção de potências ativa e reativa e de magnitude da tensão nas barras PV. O grau de dificuldade de solução do sistema pode ainda ser medido usando a função custo apresentada na equação (2.74). Segundo o autor, deve ser utilizado um esquema de ponderação dos desbalanços de modo a equilibrar as diferentes discordâncias de potência e de magnitude de tensões. Por exemplo, um desvio de 0,1 pu no quadrado da magnitude da tensão poderia ser considerado muito mais significativo do que um desvio de 0,1 pu no balanço de potência ativa ou reativa. Dessa forma, a equação (2.74) é modificada para incluir uma matriz diagonal de ponderação, onde cada elemento diagonal  $W_{ii} = (w_i)^2$  é o quadrado do peso da equação  $S_i(\mathbf{x}) - S_i^{esp}$ , ou seja,

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}^{esp}]^T \mathbf{W} [\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}^{esp}] \quad (2.78)$$

Com esta função objetivo, o problema pode ser resolvido através do mesmo algoritmo apresentado na Figura 2.14. Entretanto, a componente do autovetor à esquerda associada à restrição de magnitude de tensão corresponderá a uma mudança em  $V_s^2$  escalonado pelo peso da equação correspondente às barras PV.

## 2.5 SOLUÇÃO VIA MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

A abordagem proposta em GRANVILLE et al. (1996) consiste numa aplicação do método de Pontos Interiores Primal-Dual para determinar medidas corretivas de forma a

obter soluções reais para as equações da rede elétrica. Nesta metodologia, o problema de obter uma solução real para as equações do fluxo de potência é formulado como a determinação do mínimo corte de carga (mantendo o fator de potência das cargas constante) para que essas equações sejam satisfeitas. Neste caso, o grau de dificuldade de obtenção de solução real é expresso em termos da quantidade de carga a ser cortada. No cálculo desta quantidade, é prevista a otimização de alguns controles, tais como tapes de transformadores com comutação sob carga (LTC), tensões em barras de geração e/ou despachos de potência ativa, de forma a permitir a observação do impacto destes controles na solução do problema.

Em termos analíticos, o problema de mínimo corte de carga (GRANVILLE et al., 1996) é expresso como

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \mathbf{P}_d^T \boldsymbol{\theta} \\
 \text{s.a.} \quad & (1 - \theta_i)P_{d_i} - P_i(\mathbf{x}) = 0 \\
 & (1 - \theta_i)Q_{d_i} - Q_i(\mathbf{x}) = 0 \\
 & \mathbf{a} \leq (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) \leq \mathbf{b}
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

onde  $P_{d_i}$  e  $Q_{d_i}$  são as demandas de potências ativa e reativa, respectivamente, na barra  $i$ ;

$P_i(\mathbf{x})$  e  $Q_i(\mathbf{x})$  são as equações de potências ativa e reativa, respectivamente, na barra  $i$ ;

$\boldsymbol{\theta}$  é um vetor contendo a fração da carga a ser cortada em cada barra;

$\mathbf{P}_d$  é o vetor das demandas de potência ativa nas cargas;

$\mathbf{x}$  é o vetor das variáveis de otimização.

No problema (2.79), as duas primeiras restrições representam as equações do ba-

lanço de potências ativa e reativa, respectivamente, na barra  $i$ ; e a terceira restrição, representa os limites nas variáveis. Por exemplo, cada componente do vetor  $\theta$  pode ser maior ou igual a zero e menor ou igual a um. Observe que, se um conjunto de potências ativa e reativa nas cargas for especificado de modo que a solução real do fluxo de potência exista, então na solução ótima do problema (2.79), tem-se  $\theta_i = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Na referência GRANVILLE et al. (1996), o problema (2.79) é resolvido através do método de Pontos Interiores Primal-Dual. Fazendo  $z = [x \ \theta]^T$ , o problema (2.79) pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \nu(z) \\
 \text{s.a.} \quad & \mathbf{g}(z) = \mathbf{0} \\
 & z - s_1 = \mathbf{a} \\
 & z + s_2 = \mathbf{b} \\
 & s_1 \geq \mathbf{0}, s_2 \geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

onde  $\nu(z) = \mathbf{P}_d^T \theta$ ;

$\mathbf{g}(z) = \mathbf{0}$  representa as restrições de igualdade no problema (2.79);

$s_1, s_2$  são vetores de variáveis auxiliares.

As restrições de desigualdade podem ser incorporadas à função objetivo por meio de uma função barreira logarítmica, isto é,

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \nu(z) - \mu \sum_i (\ln s_{1_i} + \ln s_{2_i}) \\
 \text{s.a.} \quad & \mathbf{g}(z) = \mathbf{0} \\
 & z - s_1 = \mathbf{a} \\
 & z + s_2 = \mathbf{b}
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

onde  $\mu$  é o parâmetro barreira do método de Pontos Interiores.

A idéia básica do algoritmo é resolver o problema (2.81) para cada valor de  $\mu$  e forçar  $\mu$  a tender a zero. As condições de otimalidade de primeira ordem associadas ao problema (2.81) são

$$\begin{aligned}
 \nabla_z \nu(z) - [\mathbf{J}(z)]^T \lambda - \pi_1 - \pi_2 &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{g}(z) &= \mathbf{0} \\
 z - s_1 - \mathbf{a} &= \mathbf{0} \\
 z + s_2 - \mathbf{b} &= \mathbf{0} \\
 \mu e - \mathbf{S}_1 \pi_1 &= \mathbf{0} \\
 \mu e + \mathbf{S}_2 \pi_2 &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

onde  $\nabla_z \nu(z)$  é o gradiente de  $\nu(z)$ ;

$\mathbf{J}(z)$  é o Jacobiano de  $\mathbf{g}(z)$ ;

$\lambda$  é o vetor com os multiplicadores de Lagrange (variáveis duais) associados às restrições de igualdade do problema (2.82);

$\pi_1$  e  $\pi_2$  são os vetores com os multiplicadores de Lagrange (variáveis duais) associados às restrições de desigualdade do problema (2.82);

$e$  é um vetor unitário,  $e = [1, 1, \dots, 1]^T$ ;

$S_1$  e  $S_2$  são matrizes diagonais cujos elementos são os componentes dos vetores  $s_1$  e  $s_2$ , respectivamente.

No início do processo, as variáveis primais e duais são seleccionadas de modo que

$$\begin{aligned}
 s_1, s_2 &> \mathbf{0} \\
 \pi_1 &> \mathbf{0}, \pi_2 < \mathbf{0} \\
 z - s_1 &= a \\
 z + s_2 &= b
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

Os incrementos nas variáveis primais ( $\Delta z$ ,  $\Delta s_1$ ,  $\Delta s_2$ ) e duais ( $\Delta \lambda$ ,  $\Delta \pi_1$ ,  $\Delta \pi_2$ ) são obtidos aplicando-se uma iteração do método de Newton-Raphson ao sistema formado pelas equações (2.82). Seja  $[\Delta z \ \Delta \lambda]^T$  a solução do seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & -[\mathbf{J}(z)]^T \\ -\mathbf{J}(z) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{g}(z) \end{bmatrix} \tag{2.84}$$

onde  $\mathbf{W} \equiv \nabla_z^2 \nu(z) - \sum_i \lambda_i \nabla_z^2 g_i(z) + \mathbf{S}_1^{-1} \Pi_1 - \mathbf{S}_2^{-1} \Pi_2$ ;

$t \equiv -\nabla_z \nu(z) + [\mathbf{J}(z)]^T \lambda + \mu \mathbf{S}_1^{-1} - \mu \mathbf{S}_2^{-1}$ ;

$\nabla_z^2 \nu(z)$  e  $\nabla_z^2 g_i(z)$  são as matrizes Hessianas de  $\nu(z)$  e  $g_i(z)$ , respectivamente;

$\Pi_1$  e  $\Pi_2$  são matrizes diagonais cujos elementos são os componentes dos vetores  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , respectivamente.

Então, as demais variáveis são calculadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \Delta s_1 &= \Delta z \\
 \Delta s_2 &= -\Delta z \\
 \mathbf{S}_1 \Delta \pi_1 &= \mu e - \mathbf{S}_1 \pi_1 - \mathbf{\Pi}_1 \Delta s_1 \\
 \mathbf{S}_2 \Delta \pi_2 &= -\mu e - \mathbf{S}_2 \pi_2 - \mathbf{\Pi}_2 \Delta s_2
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

A seguir, os comprimentos dos passos nos espaços primal e dual são calculados como

$$\gamma_P = \min \left[ \min_{\Delta s_{1i} < -\zeta} \frac{s_{1i}}{|\Delta s_{1i}|}, \min_{\Delta s_{2i} < -\zeta} \frac{s_{2i}}{|\Delta s_{2i}|}, 1, 0 \right] \quad \gamma_D = \min \left[ \min_{\Delta \pi_{1i} < -\zeta} \frac{\pi_{1i}}{|\Delta \pi_{1i}|}, \min_{\Delta \pi_{2i} > \zeta} \frac{-\pi_{2i}}{|\Delta \pi_{2i}|}, 1, 0 \right] \tag{2.86}$$

onde  $\zeta$  é uma tolerância pré-especificada.

A nova aproximação para a solução ótima é então

$$\begin{aligned}
 z &= z + \sigma \gamma_P \Delta z \\
 s_1 &= s_1 + \sigma \gamma_P \Delta s_1 \\
 s_2 &= s_2 + \sigma \gamma_P \Delta s_2 \\
 \lambda &= \lambda + \sigma \gamma_D \Delta \lambda \\
 \pi_1 &= \pi_1 + \sigma \gamma_D \Delta \pi_1 \\
 \pi_2 &= \pi_2 + \sigma \gamma_D \Delta \pi_2
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

onde  $\sigma$  vale 0,9995 (GRANVILLE, 1994).

Nesta metodologia, o valor inicial do parâmetro barreira é especificado pelo usuário, e nas iterações seguintes este é calculado usando a expressão

$$\mu = \frac{s_1^T \pi_1 - s_2^T \pi_2}{2n\beta} \quad (2.88)$$

onde  $\beta$  é um parâmetro especificado pelo usuário;

$n$  é o número de variáveis com limite no problema de otimização.

A convergência para o processo iterativo é obtida quando o parâmetro barreira, os resíduos das equações dos balanços de potências ativa e reativa e a norma do vetor  $t$  na equação (2.84) forem menores do que uma tolerância previamente estabelecida.

## 2.6 CONCLUSÕES

Diversas são as abordagens propostas na literatura para o estudo de casos onde as equações do fluxo de potência convencional não possuem soluções reais. Esta situação pode ocorrer devido a um carregamento desordenado e progressivo a que o sistema eventualmente seja submetido, ou em casos de contingências severas em sistemas altamente estressados. Este estudo tem requerido uma atenção especial porque, devido ao fato do fluxo de potência não apresentar solução real, a análise da operação em regime permanente fica comprometida. Nestas condições, o sistema ainda se torna sujeito a sérios problemas



de instabilidade de tensão (TAYLOR, 1994).

Uma classe de metodologias para a obtenção de soluções corretivas são baseadas na solução do fluxo de potência convencional via método de Newton-Raphson com aplicação de um fator de amortecimento. Observou-se que, dentro desta classe, as abordagens propostas são similares. O que as diferencia basicamente é a forma de obter o fator de amortecimento. Algumas dessas metodologias exploram características intrínsecas da formulação do problema do fluxo de potência, ou seja, equações da rede elétrica em regime permanente expressas em coordenadas polares ou em cartesianas.

Abordagens que utilizam uma direção de retorno à região das soluções reais, de modo a conduzir o sistema ao ponto de operação mais próximo possível do programado, fazem uso do autovetor à esquerda associado ao autovalor nulo da matriz Jacobiana. Este tipo de metodologia resulta em dois processos iterativos: (i) um que conduz o sistema para um ponto de operação sobre a superfície limite de solução real; (ii) e outro que, através de sucessivas aproximações baseadas no autovetor à esquerda, conduz o sistema para o ponto de operação mais próximo do programado.

Finalmente, a abordagem baseada no uso de técnicas de otimização, formula o problema de modo a computar o mínimo corte de carga para proporcionar uma solução real para as equações que representam o sistema de potência. Esta abordagem possui a vantagem de não somente fornecer uma solução real, como também de possibilitar que este ponto de operação seja operacional. Caso sejam incluídas restrições operativas, na solução ótima não haverá violações de limites de equipamentos e nem de limites operacionais do sistema.

## **CAPÍTULO 3**

# **METODOLOGIAS CORRETIVAS PARA A RESTAURAÇÃO DA SOLUÇÃO DA REDE ELÉTRICA**

### **3.1 INTRODUÇÃO**

Este capítulo apresenta propostas alternativas àquelas discutidas no Capítulo 2, para determinar medidas corretivas, de forma a obter uma solução operacional ou pelo menos um ponto no qual o sistema possa operar temporariamente. As metodologias sugeridas baseiam-se em métodos de fluxo de potência convencional com amortecimento e em métodos numéricos de otimização. Três abordagens são discutidas:

- metodologia baseada na solução das equações da rede elétrica pelo método de Newton-Raphson com fator de amortecimento;
- metodologia baseada no Método de Otimização de Newton na qual apenas as restrições de igualdade são consideradas;
- metodologia baseada no Método de Pontos Interiores na qual restrições de igualdade e de desigualdade são modeladas.

Inicialmente, mostra-se como as metodologias apresentadas no Capítulo 2 condu-

zem à restauração da solução das equações da rede elétrica do sistema hipotético formado por duas barras. A seguir, propõem-se quatro algoritmos baseados nas abordagens mencionadas, destinados a restaurar a solvabilidade das equações do fluxo de potência.

## 3.2 SISTEMA-EXEMPLO

Considere o sistema hipotético formado por duas barras, apresentado na Figura 2.1, em uma situação de demanda de 340 MW e 272 MVar. Conforme analisado na Seção 2.2, neste nível de carregamento o sistema não apresenta ponto de operação. Em outras palavras, não existe solução real para as equações do fluxo de potência.

Nesta seção, são apresentados os resultados fornecidos pelas metodologias existentes na literatura para restaurar a solvabilidade destas equações. Partindo da premissa de que se deseja restaurar a solvabilidade do sistema com um mínimo impacto no corte de carga, serão usados alguns índices para medir o corte a ser efetuado no sistema, de modo a proporcionar solução para as equações do fluxo de carga.

Na referência OVERBYE (1994) é apresentado o índice  $d$ , o qual mede o grau de dificuldade de obtenção de solução para o problema. Este índice é calculado como

$$d = \sqrt{[f(x)]^T f(x)} \quad (3.1)$$

onde  $f(x)$  é o vetor dos desbalanços de potência do fluxo de carga.

Neste estudo, sugere-se também a definição de outros dois índices, relacionados especificamente ao corte de carga de potências ativa e reativa. Estes índices são definidos como

$$icc_A = \frac{P_{d_{TOR}} - P_{d_{TOR}}^{sup}}{P_{d_{TOR}}} \cdot 100\% \quad (3.2)$$

$$icc_R = \frac{Q_{d_{TOR}} - Q_{d_{TOR}}^{sup}}{Q_{d_{TOR}}} \cdot 100\% \quad (3.3)$$

onde  $icc_A$  e  $icc_R$  são os índices de corte de carga nas demandas de potências ativa e reativa, respectivamente;

$P_{d_{TOR}}$  e  $Q_{d_{TOR}}$  são os valores totais de demanda de potências ativa e reativa, respectivamente; e

$P_{d_{TOR}}^{sup}$  e  $Q_{d_{TOR}}^{sup}$  são os valores totais de demanda de potências ativa e reativa que podem ser supridos pelo sistema de energia elétrica de modo a que as equações do fluxo de carga ainda apresentem uma solução real.

Na Tabela 3.2 são apresentados os resultados obtidos da aplicação das abordagens baseadas no método de Newton-Raphson com fator de amortecimento ao sistema-exemplo. As metodologias estão legendadas conforme mostrado na Tabela 3.1.

**Tabela 3.1. Legenda para os algoritmos baseados no método de Newton-Raphson com fator de amortecimento.**

Metodologia	Legenda
Sasson et al.	<b>A</b>
Iwamoto e Tamura	<b>B</b>
Scudder	<b>C</b>
Dehnel e Dommel	<b>D</b>
Castro e Braz Duarte et al.	<b>E</b>

**Tabela 3.2. Resultados para as abordagens baseadas no método de Newton-Raphson com fator de amortecimento.**

Metodologia	$V_2$ (pu) $\delta_2$ (°)	$P_{d_2}^{sup}$ (MW) $Q_{d_2}^{sup}$ (MVar)	$d$	$icc_A$ (%)	$icc_R$ (%)
<b>A</b>	0,5717 - 27,96	268,03 178,13	1,1828	21,17	34,51
<b>B</b>	0,5978 - 32,99	325,46 144,08	1,2875	4,28	47,03
<b>C</b>	0,6017 - 27,42	277,08 172,06	1,1809	18,51	36,74
<b>D</b>	0,5647 - 27,56	261,27 181,74	1,1977	23,16	33,18
<b>E</b>	0,5702 - 28,69	273,73 175,07	1,1742	19,49	35,64

Na Tabela 3.2,  $V_2$  e  $\delta_2$  representam o ponto de operação e  $P_{d_2}^{sup}$  e  $Q_{d_2}^{sup}$  são os valores máximos de demanda de potências ativa e reativa supridos pelo sistema. As últimas três colunas referem-se aos índices anteriormente discutidos. Observa-se, na Tabela 3.2, que todos os algoritmos fornecem uma solução para o problema. Entretanto, saliente-se que os pontos de operação determinados são bastante distintos entre si. Note que se o critério de análise for o índice  $d$ , erroneamente poder-se-ia concluir que os pontos de operação são

praticamente os mesmos. Neste aspecto, os índices  $icc_A$  e  $icc_R$  se mostram mais significativos para a análise. Baseado neles, pode-se verificar que o método de Iwamoto e Tamura é o que apresenta o menor corte de carga na demanda de potência ativa e o método de Dehnel e Dommel o que apresenta o menor corte na demanda reativa. Por outro lado, os métodos que apresentam os maiores cortes nas demandas ativa e reativa, respectivamente, são os de Dehnel e Dommel e Iwamoto e Tamura. Observe que este fato justifica-se pois para compensar um menor corte de carga em uma demanda, o algoritmo aumenta o corte na outra. Os métodos que apresentam uma uniformidade maior no corte de carga são os de Scudder, Castro e Braz e Duarte et al., este fato também reforçado pela análise do índice  $d$ .

Outra conclusão que se pode deduzir da análise da Tabela 3.2 é a de que, embora se tenha obtido soluções reais para as equações da rede elétrica considerada, estas não são soluções operacionais, pois o nível bastante baixo das tensões na barra de carga inviabiliza este ponto de operação.

A Figura 3.1 ilustra graficamente, no espaço multidimensional dos parâmetros, as soluções obtidas pelos algoritmos baseados no método de Newton-Raphson com fator de amortecimento.

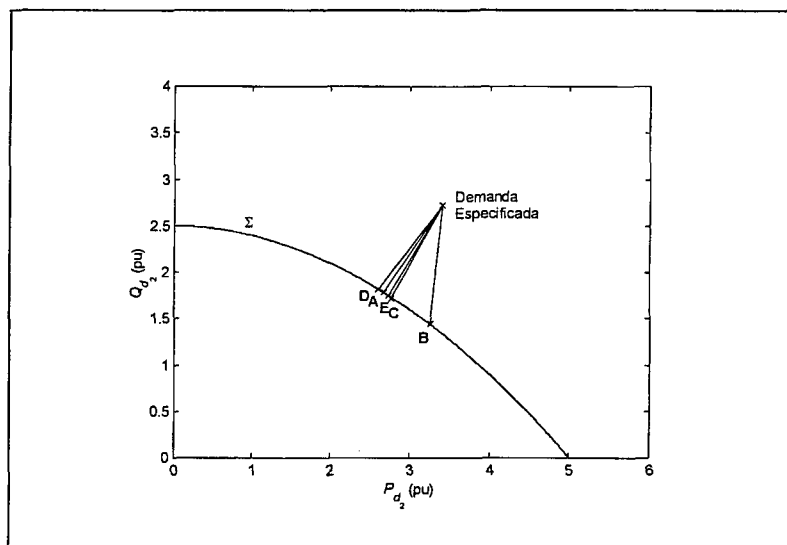


Figura 3.1. Soluções obtidas com as abordagens baseadas no método de Newton-Raphson com fator de amortecimento.

Observa-se na Figura 3.1, que as soluções fornecidas pelas abordagens baseadas no método de Newton-Raphson com fator de amortecimento estão situadas sobre a superfície limite  $\Sigma$ . Nestes pontos de operação, a matriz Jacobiana do fluxo de potência é praticamente singular, ou seja, as soluções do fluxo de potência coexistem em uma bifurcação de “nó-sela” (JARJIS e GALIANA, 1981; GALIANA e ZENG, 1992). Neste ponto, qualquer variação na demanda pode levar o sistema a instabilidade, ou mesmo ao colapso de tensão.

A Tabela 3.3 apresenta os resultados da aplicação dos métodos baseados no auto-vetor à esquerda e no algoritmo de otimização ao sistema-exemplo. A legenda utilizada, neste caso, é:

- F: método de Overbye
- G: método de Granville et al.

Tabela 3.3. Resultados para as abordagens de Overbye e Granville et al.

Metodologia	$V_2$ (pu) $\delta_2$ (°)	$P_{d_2}^{sup}$ (MW) $Q_{d_2}^{sup}$ (MVar)	$d$	$icc_A$ (%)	$icc_R$ (%)
F	0,5774 - 29,38	283,34 169,71	1,1694	16,66	37,61
G	0,9167 - 8,35	139,80 111,84	2,5638	58,88	58,88

Do ponto de vista do índice  $d$ , a metodologia proposta por Overbye fornece a menor distância entre a demanda especificada e o ponto de operação do sistema entre todos os algoritmos considerados. Entretanto, note que este ponto de operação continua não sendo operacional devido à magnitude da tensão na barra 2. Por outro lado, esta distância aumenta consideravelmente com a utilização do método de otimização. Neste caso, além da obtenção da solução para as equações da rede elétrica, a modelagem do problema inclui restrições operativas. Portanto, a solução obtida não somente satisfaz as equações estáticas do fluxo de potência, como também as restrições operacionais. Neste exemplo, a geração de potência ativa foi limitada a um máximo de 250 MW, a geração de potência reativa foi especificada na faixa entre -95 e 150 MVar, e os limites de 0,90 e 1,05 pu foram considerados para a magnitude da tensão nas barras.

A Figura 3.2 mostra, no espaço multidimensional paramétrico, os resultados da Tabela 3.3. Observa-se da Figura 3.2, que a solução fornecida pela abordagem baseada no autovetor à esquerda proposta por Overbye, embora forneça a menor distância, também não é uma solução operacional. Por outro lado, a solução obtida via técnicas de otimização está situada no interior da região das soluções reais do fluxo de potência, sendo portanto a que apresenta a maior distância entre a demanda especificada e a demanda máxima que pode ser suprida pelo sistema. Neste caso, os limites do sistema são respeitados, consti-



tuindo-se esta solução em um ponto operacional.

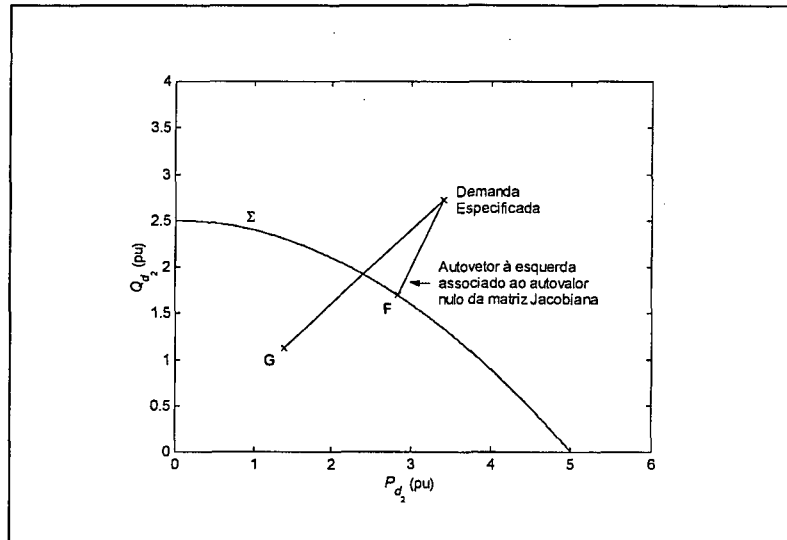


Figura 3.2. Soluções obtidas com as abordagens do autovetor à esquerda e com técnica de otimização.

Este exemplo simples mostra a influência das diferentes abordagens que determinam soluções corretivas sobre o ponto de operação do sistema de energia elétrica. As metodologias baseadas no método de Newton-Raphson com fator de amortecimento fornecem soluções que se localizam na superfície limite  $\Sigma$ , sendo portanto potencialmente sujeitas a problemas de instabilidade ou mesmo colapso de tensão. Estes pontos constituem bifurcações do tipo nó-sela nos quais as soluções do fluxo de potência convergem para uma única solução (TAMURA et al., 1983). A abordagem de Overbye, embora forneça a menor distância, não resulta numa solução operacional, pois esta também se localiza sobre a superfície limite  $\Sigma$ . Por outro lado, a utilização de técnicas de otimização, mesmo requerendo maior corte de carga, fornece soluções operacionais para o problema. Do ponto de vista técnico, esta é a abordagem que apresenta soluções de melhor qualidade, visto que os limites operacionais são respeitados.

### 3.3 MEDIDAS CORRETIVAS PROPOSTAS

A despeito das diversas abordagens existentes na literatura para a determinação de soluções corretivas, vários aspectos desse problema requerem pesquisas adicionais. As seções subseqüentes apresentam novas propostas para a obtenção de medidas corretivas.

Quatro metodologias são apresentadas:

- uma baseada na abordagem de Overbye (Seção 2.4), com as equações estáticas do fluxo de potência expressas em coordenadas polares. Esta proposta é denominada “*Mínima Distância (MD)*”;
- uma baseada no método de otimização de Newton considerando apenas restrições de igualdade, a qual é denominada “*Mínimo Resíduo por Newton (MRN)*”;
- duas baseadas na aplicação do método de otimização de Pontos Interiores, nas quais são modeladas restrições de igualdade e de desigualdade. A primeira é denominada “*Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada (MCCDE)*” e a segunda, “*Mínimo Resíduo por Pontos Interiores (MRPI)*”.

#### 3.3.1 MÍNIMA DISTÂNCIA

Esta abordagem, proposta em BARBOZA e SALGADO (2000a), é semelhante àquela apresentada em OVERBYE (1994). A diferença principal entre essas duas estratégias é que no trabalho de OVERBYE (1994) modelam-se as equações do fluxo de potência

em coordenadas cartesianas, enquanto que na abordagem proposta, essas são expressas em coordenadas polares. Esta segunda forma permite uma melhor interpretação das componentes da tensão complexa.

A Figura 3.3 apresenta o algoritmo para a implementação desta metodologia.

1. Fazer  $\mathbf{S}^0 = \mathbf{S}^{esp}$ .
2. Resolver o problema do fluxo de carga  $\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}^{(k)}$  usando o método do multiplicador ótimo em coordenadas polares. Chamar a solução de  $\mathbf{x}^{*(k)}$ . Se a maior componente em módulo dos resíduos  $\|\mathbf{S}[\mathbf{x}^{*(k)}] - \mathbf{S}^{(k)}\|_{\infty}$  for menor do que a tolerância do fluxo de carga, então o processo está terminado.
3. Caso contrário, em  $\mathbf{x}^{*(k)}$  calcular o autovetor à esquerda normalizado  $\mathbf{w}^{*(k)}$  correspondente ao autovalor nulo de  $\mathbf{J}[\mathbf{x}^{*(k)}]$ .
4. Fazer  $\mathbf{S}^{(k+1)} = \mathbf{S}^{esp} + \{[\mathbf{S}(\mathbf{x}^{*(k)}) - \mathbf{S}] \bullet \mathbf{w}^{*(k)}\} \mathbf{w}^{*(k)}$ .
5. Retornar ao passo 2.

Figura 3.3. Algoritmo para o método da Mínima Distância.

A análise deste algoritmo mostra que a principal diferença entre esta abordagem e o método de Overbye está no passo 2, no qual um problema de fluxo de potência com fator de amortecimento (multiplicador ótimo) é resolvido. Na metodologia proposta por Overbye, o algoritmo de fluxo de potência amortecido utilizado é o de Iwamoto e Tamura (IWAMOTO e TAMURA; 1981), Seção 2.3.2. Este, por sua vez, é baseado nas equações estáticas do fluxo de potência expressas em coordenadas cartesianas.

Na estratégia proposta, sugere-se substituir no passo 2, o método de Iwamoto e Tamura pelo método de Castro e Braz (CASTRO e BRAZ, 1997), Seção 2.3.5. Neste, as equações estáticas do fluxo de potência são expressas em coordenadas polares. Além disso, das metodologias encontradas na literatura, esta mostrou-se bastante robusta do ponto de vista numérico para a convergência do processo iterativo proposto. Os demais passos do

algoritmo permanecem inalterados.

Uma das razões que motivaram a estratégia proposta é que, quando as equações estáticas do fluxo de potência são expressas em coordenadas polares, o vetor de desbalanços contém apenas resíduos de potências ativa e reativa. Na abordagem proposta por Overbye, este vetor contém desbalanços de potências e de magnitudes de tensões. Neste caso, é sugerido em OVERBYE (1994) que se utilize uma ponderação determinada heurística-mente nas equações, de forma a equilibrar a diferença entre esses desbalanços. Na metodologia em questão, esta ponderação é evitada.

A ponderação sugerida em OVERBYE (1994) pode no contexto da metodologia da Mínima Distância ser utilizada com um outro propósito. Barras onde se deseja garantir as injeções de potência pré-especificadas podem receber uma ponderação maior de modo que, na determinação do autovetor à esquerda associado ao autovalor nulo da matriz Jacobiana, estas injeções não sejam reduzidas. Isto faz com que ao final do processo iterativo estas barras tenham as suas especificações de demandas satisfeitas.

Na abordagem proposta, o autovetor à esquerda associado ao autovalor nulo da matriz Jacobiana é calculado através de uma metodologia baseada no algoritmo “Iteração de Potência”, proposto em TREFETHEN e BAU (1997).

### **3.3.2 MÍNIMO RESÍDUO POR NEWTON**

Nesta abordagem utiliza-se o método de otimização de Newton, considerando restrições de igualdade, para minimizar o quadrado da norma euclidiana do vetor de desbalanços de potência, conforme proposto em BARBOZA e SALGADO (2000b). Para for-

mular analiticamente o problema de determinação de soluções corretivas, seja o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  é o vetor dos desbalanços de potência ativa para as barras PQ e PV e os desbalanços de potência reativa para as barras PQ;

$\mathbf{g}(\mathbf{x})$  é o vetor dos desbalanços de potências ativa e reativa para as barras de passagem (ou barras de injeção nula) e para barras PQ onde se deseja garantir o atendimento da demanda;

$\mathbf{x}$  é o vetor das variáveis do sistema de energia elétrica, ou seja,  $\mathbf{x} = [\mathbf{V} \ \boldsymbol{\delta} \ \mathbf{a}]^T$ ;

$\mathbf{V}$  é o vetor das magnitudes das tensões nas barras PQ;

$\boldsymbol{\delta}$  é o vetor dos ângulos de fase das tensões em todas as barras do sistema com exceção da barra de referência angular;

$\mathbf{a}$  é o vetor dos tapes dos transformadores com comutação sob carga (LTC).

A função Lagrangeana correspondente ao problema (3.4) é dada por

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{3.5}$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade.

As condições de otimalidade de primeira ordem (condições de Lagrange) são

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) &= [\mathbf{F}(\mathbf{x})]^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) + [\mathbf{G}(\mathbf{x})]^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\end{aligned}\tag{3.6}$$

onde  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  e  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ .

A aplicação do método de Newton-Raphson para a solução do sistema de equações não-lineares representado pelas equações (3.6) fornece

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \Delta \mathbf{x} + [\mathbf{G}(\mathbf{x})]^T \Delta \boldsymbol{\lambda} &= -[\mathbf{F}(\mathbf{x})]^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) - [\mathbf{G}(\mathbf{x})]^T \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} &= -\mathbf{g}(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{3.7}$$

onde  $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \equiv [\mathbf{F}(\mathbf{x})]^T \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \sum_i f_i(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 f_i(\mathbf{x}) + \sum_j \lambda_j \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_j(\mathbf{x})$ .

Ao final de cada iteração do processo, as novas estimativas para as variáveis são determinadas como

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \varepsilon \Delta \mathbf{x}^{(k)} \\ \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} &= \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \varepsilon \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(k)}\end{aligned}\tag{3.8}$$

onde  $\varepsilon$  é um fator de controle de passo utilizado no método de Newton-Raphson e está

apresentado no Apêndice A.

Um dos principais requisitos para que o método de Newton apresente uma boa convergência é uma inicialização próxima da solução final (GILL et al., 1981; DENNIS e SCHNABEL, 1983). A função objetivo utilizada nesta abordagem, representada pelos quadrados dos desbalanços de potência, acentua ainda mais essa característica. Para evitar os problemas de convergência oriundos desse fato, duas estratégias podem ser tomadas:

- utilizar um controle sobre a magnitude do passo na atualização das variáveis a cada iteração; ou
- obter um ponto inicial próximo à solução final do problema.

No presente estudo, as duas alternativas sugeridas acima são implementadas. A primeira alternativa apresentou um melhor desempenho computacional em termos de número de iterações para a convergência e tendo refletido também num menor tempo de execução. Ainda é importante ressaltar que: (i) para o problema de minimização proposto, uma inicialização próxima à solução final é muito difícil de ser obtida, principalmente em se tratando de sistemas realísticos; (ii) na maioria dos casos estudados, um controle sobre a magnitude do passo possibilita a prevenção da divergência do processo, proporcionando uma estratégia de convergência global; (iii) uma estratégia desse tipo é utilizada em SASSON et al. (1973) e os resultados obtidos mostram a sua eficiência e robustez.

Na formulação apresentada neste trabalho, o vetor de correções das variáveis de otimização inclui termos de correção nos multiplicadores de Lagrange, os quais devem ser tratados de uma forma diferente dos termos de correção nas variáveis tradicionais do sistema de potência (ângulos de fase e magnitudes das tensões). Por este motivo, optou-se por

trabalhar com uma busca unidimensional diferente daquela sugerida em SASSON et al. (1973), visto que, no trabalho de SASSON et al., o problema de minimização era irrestrito. A estratégia de busca utilizada no método do Mínimo Resíduo por Newton é relativamente simples e eficiente sob o ponto de vista computacional e está devidamente descrita no Apêndice A deste estudo.

Além destes aspectos, observou-se que, em situações onde não há certeza sobre a proximidade entre as soluções inicial e final, a utilização de iterações do método de Gauss-Newton no início do processo iterativo melhora consideravelmente a característica de convergência (para maiores detalhes, ver Apêndice A).

Embora o método do Mínimo Resíduo por Newton modele apenas restrições de igualdade, o controle sobre os limites de geração de reativos nas barras PV é efetivamente realizado. Este tipo de restrição operativa é modelada da mesma forma que no fluxo de potência convencional. A barra que tiver um de seus limites de geração de reativos atingido, é transformada de PV em PQ com demanda integralmente atendida. A potência reativa gerada é fixada neste limite e a magnitude da tensão nesta barra se torna uma variável de otimização. Observe que isto modifica o tamanho do vetor  $g(x)$  e, por conseguinte, a dimensão da matriz  $G(x)$ . Esta transformação se reflete na estrutura e dimensão do sistema linear a ser resolvido, equação (3.7). O sistema aumenta de dimensão toda vez que uma barra PV atinge um dos seus limites de geração de reativos.

### **3.3.3 MÍNIMO CORTE DE CARGA COM DIREÇÃO ESPECIFICADA**

Esta abordagem, proposta em BARBOZA e SALGADO (2000c), é baseada no al-



goritmo de Pontos Interiores segundo a metodologia apresentada em BARBOZA (1998). Nesta seção é discutida a modelagem do problema de minimização em termos das variáveis do sistema de energia elétrica.

Para a implementação da proposta de Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada, o problema de otimização a ser resolvido é o seguinte

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \alpha \\
 \text{s.a.} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{x}^{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\max} \\
 & \mathbf{h}^{\min} \leq \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{h}^{\max}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde  $\alpha$  é um fator que parametriza as demandas de potências ativa e reativa;

$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \alpha)$  é o vetor das equações de balanço de potência parametrizadas pelo fator  $\alpha$ ;

$\mathbf{h}(\mathbf{x})$  é o vetor das variáveis funcionais com seus limites mínimos e máximos,  $\mathbf{h}^{\min}$  e  $\mathbf{h}^{\max}$ , respectivamente;

$\mathbf{x}$  é o vetor das variáveis do sistema elétrico com seus limites mínimos e máximos,  $\mathbf{x}^{\min}$  e  $\mathbf{x}^{\max}$ , respectivamente, ou seja,  $\mathbf{x} = [\mathbf{V} \ \delta \ \mathbf{a}]^T$ ;

$\mathbf{V}$  é o vetor das magnitudes das tensões em todas as barras do sistema de energia;

$\delta$  é o vetor dos ângulos de fase das tensões em todas as barras do sistema com exceção da barra de referência angular;

$\mathbf{a}$  é o vetor dos tapes dos transformadores com comutação sob carga (LTC).

O vetor  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \alpha)$  é formado pelas equações de balanço de potências ativa e reativa em todas as barras de carga do sistema elétrico. Estas equações parametrizadas pelo fator  $\alpha$

assumem a forma

$$\begin{aligned}\Delta P_i(\mathbf{x}, \alpha) &= P_i(\mathbf{x}) - P_{G_i} + (P_{d0_i} - \alpha \Delta P_{d_i}) \\ \Delta Q_i(\mathbf{x}, \alpha) &= Q_i(\mathbf{x}) - Q_{G_i} + (Q_{d0_i} - \alpha \Delta Q_{d_i})\end{aligned}\quad \text{para } i = 1, 2, \dots, npq \quad (3.10)$$

onde  $\Delta P_i(\mathbf{x}, \alpha)$  e  $\Delta Q_i(\mathbf{x}, \alpha)$  são os desbalanços de potências ativa e reativa parametrizados;

$P_i(\mathbf{x})$  e  $Q_i(\mathbf{x})$  são as injeções de potências ativa e reativa calculadas, respectivamente;

$P_{G_i}$  e  $Q_{G_i}$  são as potências ativa e reativa geradas, respectivamente;

$P_{d0_i}$  e  $Q_{d0_i}$  são os valores iniciais das demandas de potências ativa e reativa, respectivamente;

$\Delta P_{d_i}$  e  $\Delta Q_{d_i}$  são as direções de variação das demandas de potências ativa e reativa, respectivamente.

Em relação aos vetores  $\Delta P_d$  e  $\Delta Q_d$ , é importante salientar que ambos são fornecidos pelo usuário. Estes definem a direção na qual o processo de otimização irá buscar a melhor solução para a determinação de um ponto de operação viável para o sistema de energia elétrica.

Para as barras de geração, a direção de variação das demandas de potências ativa e reativa é feita igual a zero. Isto implica em que, nestas barras, toda a demanda é suposta ser atendida localmente. Para as barras de injeção nula, o mesmo artifício é utilizado, de modo que, ao final do processo iterativo, a restrição de injeção de potência nula nestas barras seja satisfeita. As barras PQ consideradas no presente contexto são àquelas que efetivamente possuem demanda de energia elétrica ou barras de injeção nula. No caso dessas barras,

uma direção de decréscimo ( $\Delta P_d$  e  $\Delta Q_d$ ) é especificada a priori.

O vetor  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  é composto pelas variáveis funcionais do sistema de energia elétrica.

Entre outras variáveis, este vetor poderá conter:

- geração de potência ativa;
- geração de potência reativa; e
- fluxo de potência nos circuitos.

A geração de potências ativa e reativa nas barras de geração são independentes do fator  $\alpha$  visto que nestas barras toda a demanda é suposta atendida e, portanto, a direção de decréscimo da carga é feita igual a zero. Portanto, estas variáveis funcionais podem ser modeladas como

$$\begin{aligned} P_{G_i}(\mathbf{x}) &= P_i(\mathbf{x}) + P_{d0_i} \\ Q_{G_i}(\mathbf{x}) &= Q_i(\mathbf{x}) + Q_{d0_i} \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, npv \quad (3.11)$$

O vetor das variáveis de otimização  $\mathbf{z}$  é composto pelas variáveis do sistema de energia elétrica acrescidas do parâmetro de variação da demanda, ou seja,

$$\mathbf{z} = [\mathbf{x} \quad \alpha]^T; \quad (3.12)$$

Uma outra característica importante desta metodologia é a possibilidade de se especificar determinadas barras de carga do sistema de energia elétrica para que tenham as suas demandas de potência atendidas integralmente. Para isto, basta que as taxas de de-

crécimo da demanda nestas barras ( $\Delta P_{d_i}$  e  $\Delta Q_{d_i}$ ) sejam feitas iguais a zero. O artifício é semelhante àquele utilizado nas barras de geração onde a demanda é suposta ser atendida integralmente.

### 3.3.4 MÍNIMO RESÍDUO POR PONTOS INTERIORES

Esta modelagem consiste em formular o problema de soluções corretivas a partir do seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\
 \text{s.a.} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{x}^{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\max} \\
 & \mathbf{h}^{\min} \leq \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{h}^{\max}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  é o vetor dos desbalanços de potências ativa e reativa nas barras potencialmente sujeitas ao corte de carga;

$\mathbf{g}(\mathbf{x})$  é o vetor dos desbalanços de potências ativa e reativa nas barras de injeção nula e naquelas barras que devem ter as suas demandas atendidas integralmente;

$\mathbf{h}(\mathbf{x})$  é o vetor das variáveis funcionais com seus limites mínimos e máximos,  $\mathbf{h}^{\min}$  e  $\mathbf{h}^{\max}$ , respectivamente; e

$\mathbf{x}$  é o vetor das variáveis do sistema de potência com seus limites mínimos e máximos,  $\mathbf{x}^{\min}$  e  $\mathbf{x}^{\max}$ , respectivamente, ou seja,  $\mathbf{x} = [V \ \delta \ \mathbf{a}]^T$ ;

$V$  é o vetor das magnitudes das tensões em todas as barras do sistema de energia;

$\delta$  é o vetor dos ângulos de fase das tensões em todas as barras do sistema com exceção da barra de referência angular;

$a$  é o vetor dos tapes dos transformadores com comutação sob carga (LTC);

Os desbalanços de potências ativa e reativa são modelados como

$$\begin{aligned}\Delta P_i(\mathbf{x}) &= P_i(\mathbf{x}) - P_{G_i} + P_{d_i} \\ \Delta Q_i(\mathbf{x}) &= Q_i(\mathbf{x}) - Q_{G_i} + Q_{d_i}\end{aligned}\tag{3.14}$$

Na implementação computacional desta estratégia, problemas de viabilidade foram detectados para alguns dos sistemas testados. Para minimizar o quadrado da norma euclidiana dos balanços de potências e satisfazer simultaneamente os limites operacionais do sistema, o processo de otimização pode produzir uma troca no sinal da injeção de potência na barra. Isto significa que geração de potência pode ser atribuída a barras de carga, o que inviabiliza a solução sob o ponto de vista prático. Outro aspecto verificado foi a tendência do processo matemático de aumentar em vez de diminuir a demanda em determinadas barras de carga.

Para evitar situações como essa, foram adicionadas restrições de desigualdade para modelar o corte da demanda em cada barra de carga. O limite inferior corresponde a zero e o valor máximo é atribuído pelo usuário em função da análise desejada. Dessa forma, obtém-se o valor do mínimo corte de carga que pode ser realizado no sistema de modo que o mesmo apresente um ponto de operação. Com o limite máximo para o corte de carga é possível, então, testar-se outras possibilidades operacionais para o sistema de potência.

### 3.4 APLICAÇÃO DAS METODOLOGIAS PROPOSTAS AO SISTEMA-EXEMPLO

As metodologias descritas na seção anterior foram aplicadas ao sistema de duas barras apresentado na Seção 3.2. As abordagens e as suas respectivas legendas são mostradas na Tabela 3.4.

Tabela 3.4. Legenda para as metodologias propostas na Seção 3.3.

Metodologia		Legenda
Mínima Distância		<b>H</b>
Mínimo Resíduo por Newton		<b>I</b>
Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada	mantendo o fp das cargas constantes	<b>J</b>
	direção de corte fornecida pela abordagem do Mínimo Resíduo por Newton	<b>K</b>
	direção de corte fornecida pela abordagem de Castro e Braz	<b>L</b>
Mínimo Resíduo por Pontos Interiores		<b>M</b>

Os resultados obtidos com a aplicação dos métodos propostos ao sistema-exemplo são mostrados na Tabela 3.5. Nesta tabela, observa-se que as metodologias **H** e **I** fornecem praticamente o mesmo resultado, o que era esperado visto que ambas as estratégias visam minimizar a distância entre a demanda especificada inviável e a demanda máxima possível de ser atendida. Por outro lado, nas abordagens baseadas na técnica de otimização de Pontos Interiores, verifica-se um considerável aumento no corte de carga, o que também era esperado na medida em que restrições de magnitudes de tensões, potências ativas e reativas

geradas também devem ser atendidas. O atendimento dessas restrições operacionais do sistema de energia requer um corte de carga maior, fazendo com que a distância entre as soluções inviável e operacional seja maior. É importante notar a diferença na magnitude da tensão na barra 2 nos resultados obtidos via abordagens **H** e **I** (na faixa de 0,574) e através das abordagens que modelam as restrições de desigualdade (não inferior a 0,90). Isto ressalta o fato de que as abordagens descritas nas Seções 3.3.3 e 3.3.4, mais do que simplesmente fornecerem uma solução para as equações da rede elétrica, são capazes de fornecer uma solução operacional.

**Tabela 3.5. Resultados para as abordagens propostas no estudo.**

Metodologia	$V_2$ (pu) $\delta_2$ (°)	$P_{d_2}^{sup}$ (MW) $Q_{d_2}^{sup}$ (MVar)	$d$	$icc_A$ (%)	$icc_R$ (%)
<b>H</b>	0,5745 - 29,57	283,53 169,61	1,1693	16,61	37,64
<b>I</b>	0,5743 - 29,47	282,49 170,20	1,1692	16,91	37,43
<b>J</b>	0,9169 - 8,35	139,82 111,86	2,5635	58,88	58,88
<b>K</b>	0,9336 - 13,69	231,97 80,78	2,1962	31,77	70,30
<b>L</b>	0,9298 - 12,67	214,17 87,98	2,2293	37,01	67,65
<b>M</b>	0,9377 - 14,68	249,44 73,15	2,1850	26,64	73,11

A Figura 3.4 ilustra, no espaço paramétrico das demandas, as soluções apresentadas na Tabela 3.5.

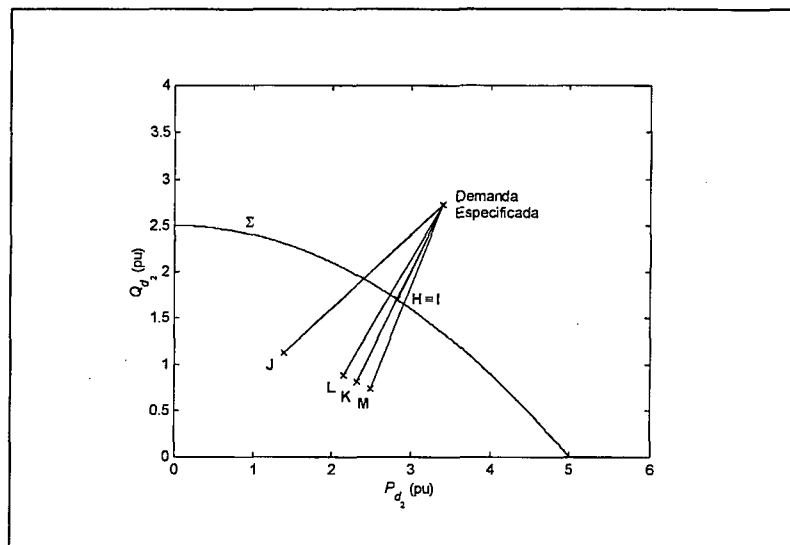


Figura 3.4. Soluções obtidas com as abordagens propostas no estudo.

A Figura 3.4 revela que as soluções obtidas através das metodologias H e I estão situadas sobre a superfície limite da região de soluções. Estas metodologias fornecem apenas uma solução para o problema. Por outro lado, as soluções obtidas via metodologias baseadas no algoritmo de Pontos Interiores se localizam no interior da região com solução. Essas constituem soluções operacionais para o problema do fluxo de potência, isto é, são pontos de operação em que não há violação de qualquer restrição operativa.

### 3.5 ASPECTOS NUMÉRICOS DA SOLUÇÃO VIA MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO DE NEWTON

Nos estudos realizados por ZAMBALDI (1990) e ZAMBALDI (1993) foram analisados métodos iterativos de resolução de sistemas não-lineares conhecidos na literatura como métodos Quasi-Newton. Essas referências apresentam as características de con-



vergência desses métodos e fazem um estudo comparativo entre a convergência destes e a do método de Newton-Raphson. Esses algoritmos foram aplicados à resolução do problema de fluxo de potência convencional e os resultados numéricos obtidos tornaram atrativa a investigação da sua aplicação à metodologia do Mínimo Resíduo por Newton. A referência SASSON (1969) mostra um estudo da aplicação combinada de dois destes métodos Quasi-Newton para a solução do Fluxo de Potência Ótimo, os métodos de Powell e Fletcher-Powell. Apesar de que, nos últimos anos, pouca pesquisa tem sido empreendida nesta área, aspectos relevantes podem ser apontados na aplicação destes algoritmos.

O método de Newton possui boas propriedades de convergência devido à informação da curvatura fornecida pela matriz Hessiana, a qual permite que um modelo quadrático local seja construído para a função Lagrangeana (GILL et al., 1981). Por outro lado, os métodos Quasi-Newton são baseados na idéia de obter a informação da curvatura utilizando um método de direção descendente em cada iteração, aproveitando as informações disponíveis do comportamento do gradiente da função Lagrangeana. Note que isto está em contraste com o método de Newton, onde toda a informação da curvatura é calculada em um único ponto. O desenvolvimento dos métodos Quasi-Newton está baseado no fato de que uma aproximação para a curvatura da função Lagrangeana pode ser determinada sem a formação explícita da matriz Hessiana.

Os métodos Quasi-Newton (QN): BROYDEN (1965), DENNIS e SCHNABEL (1983) e ZAMBALDI (1993), originalmente foram introduzidos para problemas nos quais a avaliação da matriz do sistema linear envolve alto custo computacional. Neste caso, calcula-se uma aproximação para a mesma com algum critério específico. Diferentes aproximações caracterizam diferentes métodos QN.

Uma outra característica desses métodos é explorar a sua formulação para obter

economia de cálculo na fase de resolução dos sistemas lineares a cada iteração. O método de Broyden, cuja aplicação é proposta neste trabalho, utiliza uma correção de posto um reforçando este comportamento. Neste caso, como o problema envolve um grande número de variáveis, a implementação com memória limitada é necessária (ZAMBALDI, 1993; KOZAKEVICH e ZAMBALDI, 1999).

### 3.5.1 MÉTODO DE BROYDEN COM MEMÓRIA LIMITADA

Em geral, os métodos Quasi-Newton para a resolução de um sistema não-linear  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  são estruturados da seguinte forma

$$\mathbf{B}_k \mathbf{s}_k = -\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k \quad (3.16)$$

onde  $k$  é a iteração corrente.

Desse modo, cada iteração é caracterizada pela avaliação da função  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$ , da matriz  $\mathbf{B}_k$  (aproximação da matriz Jacobiana de  $\mathbf{h}$ ), da resolução do sistema linear (3.15) e da atualização das variáveis, equação (3.16). Para a iteração seguinte, a matriz  $\mathbf{B}_{k+1}$  é obtida a partir de  $\mathbf{B}_k$  utilizando uma fórmula de recorrência envolvendo  $\mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{x}_{k+1}$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})$ . Frequentemente,  $\mathbf{B}_{k+1}$  é escolhida como uma das matrizes que satisfazem a Equação Secante,

$$\mathbf{B} \mathbf{s}_k = \mathbf{y}_k \quad (3.17)$$

onde  $\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$ .

O método de Broyden, aplicado neste estudo devido a matriz do sistema linear resultante ser indefinida matematicamente, utiliza uma matriz de posto um para obter  $\mathbf{B}_{k+1}$  a partir de  $\mathbf{B}_k$ , da seguinte forma

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \frac{(\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k) \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_k} \quad (3.18)$$

Entretanto, mesmo quando  $\mathbf{B}_k$  é uma matriz esparsa,  $\mathbf{B}_{k+1}$  não é esparsa. Portanto, para problemas grandes e esparsos, a fórmula de atualização acima não é conveniente. Uma forma de superar esta limitação é através do uso da chamada *forma de memória limitada*.

Utilizando-se a equação (3.18) e a fórmula de Sherman-Morrison (GOLUB e VAN LOAN, 1996) pode-se obter uma expressão de  $\mathbf{B}_{k+1}^{-1}$  a partir de  $\mathbf{B}_k^{-1}$ . Isto feito, a iteração de Broyden pode ser obtida da seguinte forma

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) \quad (3.19)$$

Assim, em vez do cálculo explícito do sistema linear (3.15), é feita a atualização da inversa da matriz aproximada. Essa atualização, no método de Broyden, é da forma

$$\mathbf{B}_{k+1}^{-1} = \mathbf{B}_k^{-1} + \frac{(\mathbf{s}_k - \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{y}_k) \mathbf{s}_k^T \mathbf{B}_k^{-1}}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{y}_k} \quad (3.20)$$

A partir da equação (3.20), é possível obter uma fórmula de recorrência do tipo

$$\mathbf{B}_k^{-1} = \left[ \prod_{i=0}^{k-1} (\mathbf{U} + \mathbf{u}_i \mathbf{s}_i^T) \right] \mathbf{B}_0^{-1} \quad (3.21)$$

onde  $\mathbf{U}$  é a matriz identidade.

O vetor  $\mathbf{u}_k$  neste caso é dado pela expressão

$$\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{s}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{y}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{y}_k} \quad (3.22)$$

A fórmula (3.21) não pode ser empregada indefinidamente tomando-se a inicialização com  $\mathbf{B}_0^{-1}$ . Na prática, a cada iteração dois vetores adicionais são necessários, além do fato de se estar incrementando o custo por iteração. Portanto, escolhe-se um intervalo de recomeços para que o processo iterativo possa prosseguir com segurança. Mais especificamente, seleciona-se um número inteiro  $m$  tal que, quando o resto da divisão de  $k$  (número da iteração corrente) por  $m$  for igual a zero, o processo iterativo deve ser recomeçado. Isto implica em utilizar  $\mathbf{B}_k^{-1}$  ao invés de  $\mathbf{B}_0^{-1}$  na equação (3.21) para introduzir os recomeços.

A inicialização da matriz  $\mathbf{B}_0$  é de extrema importância para garantir a convergência do processo iterativo. Uma escolha possível é utilizar a própria matriz Jacobiana do

sistema. Do ponto de vista da escolha do parâmetro  $m$ , este depende intrinsecamente do problema em questão e, principalmente, da dimensão do mesmo. Nos experimentos numéricos alguns valores deste parâmetro são avaliados em relação ao desempenho global do método de Broyden.

O sistema de equações não-lineares a ser resolvido no método do Mínimo Resíduo por Newton é formado pelas equações (3.6). Fazendo uma analogia entre as equações (3.6) e a equação  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  do método de Broyden, pode-se concluir que

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} [\mathbf{F}(\mathbf{x})]^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) + [\mathbf{G}(\mathbf{x})]^T \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.23)$$

Assim, os dois vetores adicionais necessários à aplicação do método de Broyden ao algoritmo do Mínimo Resíduo por Newton são

$$\mathbf{s}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\lambda}_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \boldsymbol{\lambda}_{k-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_k = \nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k) - \nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\lambda}_{k-1}) \quad (3.24)$$

A análise das características matemáticas e de convergência do método de Broyden pode ser encontrada em DENNIS e SCHNABEL (1983).

### 3.6 CONCLUSÕES

Através de um sistema de duas barras ilustrou-se as principais características do

problema de obtenção de soluções corretivas e alguns aspectos numéricos do mesmo.

Além das abordagens encontradas na literatura, as metodologias propostas neste capítulo também podem ser utilizadas para viabilizar a restauração da solvabilidade das equações da rede elétrica em regime permanente. Quatro abordagens foram apresentadas:

- Mínima Distância;
- Mínimo Resíduo por Newton;
- Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada; e
- Mínimo Resíduo por Pontos Interiores.

Os resultados numéricos obtidos da aplicação dessas técnicas ao sistema-exemplo, ilustram o fato de que os métodos que não modelam os limites nas variáveis funcionais, conduzem a pontos de operação onde apenas as equações da rede elétrica são satisfeitas. Esses pontos de operação se situam sobre a superfície limite da região com solução do fluxo de potência. Por outro lado, as metodologias que possibilitam incluir estes limites conduzem a soluções operacionais, isto é, aquelas onde não há violações nos limites operacionais e/ou de equipamentos.

Em relação à solução do problema de otimização via método de Newton, estratégias alternativas podem ser utilizadas para a solução dos sistemas não-lineares. As referências ZAMBALDI (1990) e ZAMBALDI (1993) mostram resultados numéricos atrativos em termos de precisão e de esforço computacional. No presente estudo, aplicou-se o método de Broyden ao algoritmo do Mínimo Resíduo por Newton.

# CAPÍTULO 4

## RESULTADOS NUMÉRICOS

### 4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos com a aplicação das metodologias descritas no capítulo anterior a vários sistemas de energia elétrica. As análises de desempenho são realizadas com base em dois aspectos relevantes, a saber:

- característica de convergência das abordagens, tomando-se como parâmetros de análise o número de iterações para a convergência e o tempo computacional associado;
- a qualidade das soluções fornecidas pelas metodologias, tomando-se como parâmetros os índices sugeridos no Capítulo 3.

A Tabela 4.1 apresenta os dados gerais dos sistemas-teste que são utilizados para a comprovação da eficiência das metodologias propostas no Capítulo 3. Nesta tabela,  $nb$  refere-se ao número de barras do sistema;  $nc$ , ao número de circuitos;  $nt$ , ao número de transformadores;  $ng$ , ao número de barras de geração;  $nbc$ , ao número de barras de carga e  $nbin$ , ao número de barras com injeção nula. Ainda em relação à Tabela 4.1, as quatro primeiras linhas dizem respeito a sistemas-teste do IEEE, enquanto que as últimas três linhas referem-se a sistemas de energia elétrica reais. Estes três últimos são equivalentes, com di-

ferentes características, do sistema de energia elétrica da região Sul-Sudeste do Brasil.

**Tabela 4.1. Dados gerais dos sistemas-teste.**

Sistema-teste	$nb$	$nc$	$nt$	$ng$	$nbc$	$nbin$
IEEE-14	14	20	3	5	8	1
IEEE-30	30	41	4	6	18	6
IEEE-57	57	80	17	7	35	15
IEEE-118	118	179	9	34	74	10
SSB-352	352	476	252	30	174	148
SSB-749	749	1.275	457	87	385	277
SSB-1916	1.916	2.788	835	153	1.113	650

O computador utilizado nas simulações é um Pentium II de 400 MHz com 128 Mb de memória RAM.

As metodologias apresentadas no Capítulo 3 são referidas como segue:

- Mínima Distância → *MD*
- Mínimo Resíduo por Newton → *MRN*
- Mínimo Corte de Carga em uma Direção Especificada → *MCCDE*
- Mínimo Resíduo por Pontos Interiores → *MRPI*

Os resultados obtidos são apresentados nas seções seguintes deste capítulo.



## 4.2 CARACTERÍSTICA DE CONVERGÊNCIA

### 4.2.1 MÍNIMA DISTÂNCIA

A Tabela 4.2 apresenta os resultados da convergência do algoritmo da Mínima Distância aplicado aos sistemas-teste. A segunda coluna da tabela refere-se à ordem do sistema linear a ser resolvido a cada iteração do método. As terceira e quarta colunas referem-se aos números de iterações do laço principal ( $lp$ ) e dos fluxos de potências amortecidos realizados ( $fpa$ ).

Tabela 4.2. Convergência do algoritmo *MD*.

Sistema-teste	Ordem do Sistema Linear	Número de Iterações		Tempo (s)
		$lp$	$fpa$	
IEEE-14	26	4	4, 4, 5, 4	0,042
IEEE-30	55	3	4, 2, 2	0,032
IEEE-57	106	2	7, 2	0,088
IEEE-118	230	4	4, 6, 4, 7	0,472
SSB-352	673	2	7, 2	0,472
SSB-749	1.424	5	4, 5, 6, 5, 4	2,73
SSB-1916	3.707	3	6, 5, 5	4,35

Observando os resultados apresentados na Tabela 4.2, pode-se verificar que o número de iterações necessárias para a convergência do método da Mínima Distância não está diretamente relacionado à dimensão do sistema de potência. Note que no sistema

SSB-749 foi onde necessitou-se de mais iterações (24 iterações de *fpa* e 5 cálculos do autovetor à esquerda associado ao autovalor nulo da matriz Jacobiana). Por outro lado, no maior dos sistemas, o SSB-1916, o algoritmo *MD* necessitou de apenas 16 iterações de *fpa* e 3 cálculos do autovetor.

Os tempos computacionais mostrados na Tabela 4.2 estão representados graficamente na Figura 4.1.

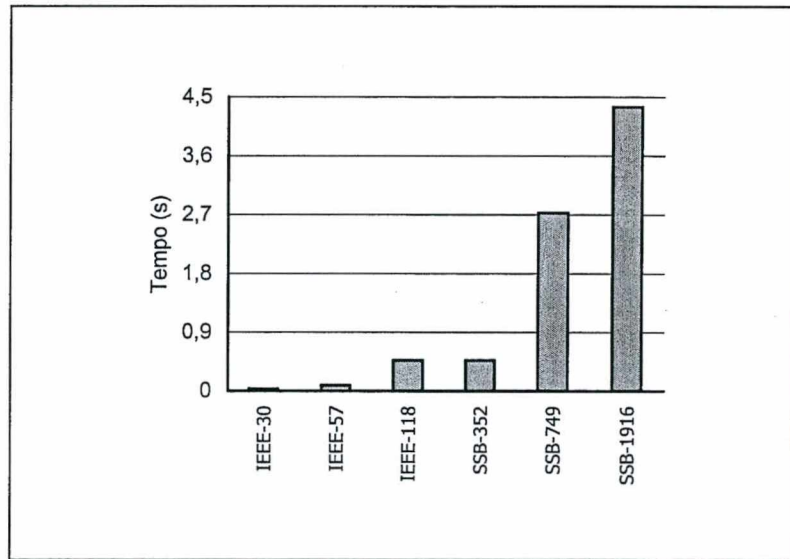


Figura 4.1. Tempos computacionais para o método da Mínima Distância.

Em termos de esforço computacional, pode-se depreender que o tempo requerido por este método para fornecer uma solução está associado em grande parte à dimensão do sistema linear. Exclua-se desta conclusão o sistema IEEE-30, cuja solução requer menos tempo do que o IEEE-14, e o SSB-352 que necessitou do mesmo tempo que o IEEE-118. Saliente-se que estes casos também estão relacionados com o nível do carregamento testado. Isto não quer dizer que para outros níveis de demanda, estas características de tempo computacional irão se repetir.

Pela observação da Figura 4.1, pode-se concluir que o método da Mínima Distância apresenta um esforço computacional relativamente pequeno, o que lhe confere uma possibilidade de aplicação para fins de análise de sistemas com pontos de operação ineficazes.

#### 4.2.2 MÍNIMO RESÍDUO POR NEWTON

A Tabela 4.3 apresenta os resultados da aplicação do método do Mínimo Resíduo por Newton aos sistemas-teste. A terceira coluna da tabela diz respeito ao número de iterações do método de Gauss-Newton utilizadas no início do processo iterativo (*G-N*). A quarta coluna refere-se ao número de iterações do método de Newton-Raphson usadas no processo iterativo (*N-R*).

Tabela 4.3. Convergência do algoritmo *MRN*.

Sistema-teste	Ordem do Sistema Linear	Número de iterações			Tempo (s)
		<i>G-N</i>	<i>N-R</i>	Total	
IEEE-14	38	2	6	8	0,024
IEEE-30	74	3	3	6	0,040
IEEE-57	138	5	4	9	0,120
IEEE-119	272	2	5	7	0,210
SSB-352	975	4	3	7	0,570
SSB-749	2.016	3	6	9	2,45
SSB-1916	5.066	4	9	13	9,84

Observando a Tabela 4.3, nota-se que o aumento de complexidade do problema de otimização (tanto na ordem do sistema linear como no tempo computacional) estão relacionados à dimensão do sistema elétrico. Observe que a aplicação do algoritmo *MRN* ao sistema IEEE-14, resulta em um sistema linear de ordem 38 e necessita de 0,024 s para convergir; enquanto que no sistema SSB-1916, o algoritmo apresenta um sistema linear de ordem 5.066 e precisa de 9,84 s para convergir.

Outro fator importante a ser observado são as iterações do método de Gauss-Newton realizadas no início do processo iterativo. O número destas iterações é determinante para a convergência do processo. Os resultados apresentados na Tabela 4.3 são aqueles que se mostraram os melhores em termos do número de iterações total.

A Figura 4.2 apresenta graficamente os tempos computacionais obtidos com a aplicação do método do Mínimo Resíduo por Newton aos sistemas-teste.

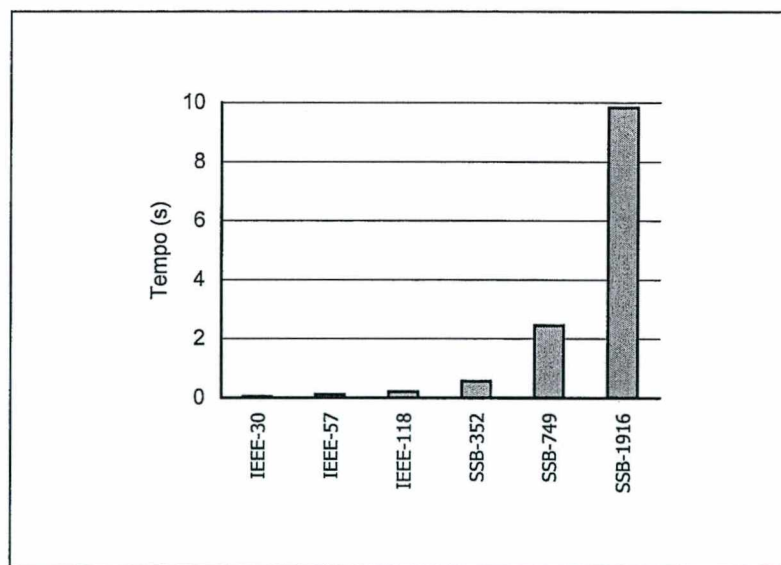


Figura 4.2. Tempos computacionais para o método do Mínimo Resíduo por Newton.

Os tempos computacionais apresentados indicam o potencial do método do Míni-

mo Resíduo por Newton para a obtenção de soluções corretivas em sistemas de energia elétrica.

### 4.2.3 MÍNIMO CORTE DE CARGA COM DIREÇÃO ESPECIFICADA

Os resultados da aplicação do método do Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada são mostrados na Tabela 4.4. Estas simulações foram realizadas considerando uma direção tal que o fator de potência da demanda em cada barra foi mantido constante durante o processo de otimização.

Tabela 4.4. Convergência do algoritmo *MCCDE*.

Sistema-teste	Ordem do Sistema Linear	Número de Iterações	Tempo (s)
IEEE-14	46	5	0,020
IEEE-30	108	6	0,058
IEEE-57	214	7	0,186
IEEE-118	404	9	0,462
SSB-352	1.348	11	1,24
SSB-749	2.822	16	4,39
SSB-1916	7.358	11	10,97

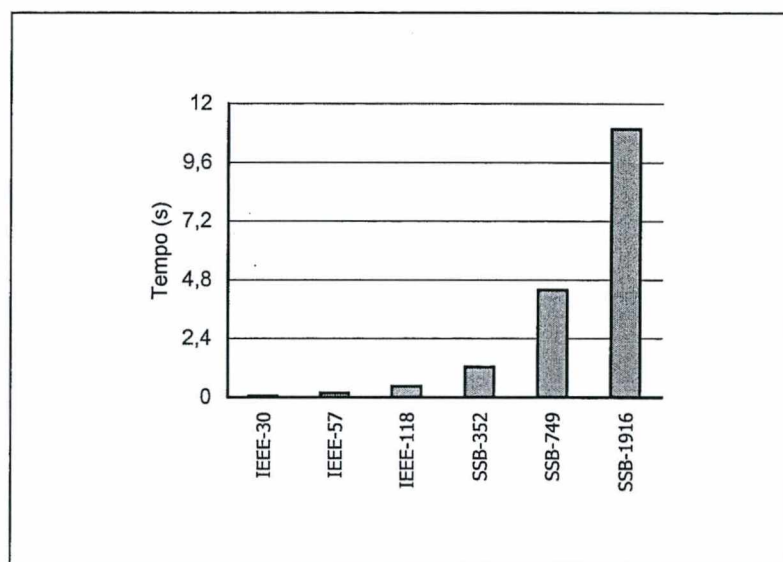
Esta abordagem é a que apresenta os sistemas lineares de maior ordem a serem resolvidos a cada iteração. Em consequência disso, os tempos computacionais também crescem com a complexidade da modelagem. Observando a Tabela 4.4, nota-se que quanto maior é o sistema de potência, maior é a dimensão do sistema linear e, por conseguinte,



maior é o tempo computacional para o método.

Por outro lado, observe que o número de iterações necessárias para a convergência do método não é uma função exclusiva da dimensão do sistema elétrico. Por exemplo, o sistema SSB-749 mesmo não sendo o de maior dimensão, é o que necessita do maior número de iterações para convergir no nível de carregamento estudado (16 iterações).

Os tempos computacionais listados na Tabela 4.4 estão mostrados graficamente na Figura 4.3.



**Figura 4.3. Tempos computacionais para o método do Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada.**

Os tempos computacionais obtidos através do algoritmo do Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada o habilitam à análise de casos infactíveis em sistemas de potência.

#### 4.2.4 MÍNIMO RESÍDUO POR PONTOS INTERIORES

Os resultados obtidos da aplicação do algoritmo do Mínimo Resíduo por Pontos Interiores aos sistemas-teste são mostrados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5. Convergência do algoritmo *MRPI*.

Sistema-teste	Ordem do Sistema Linear	Número de Iterações	Tempo (s)
IEEE-14	29	6	0,022
IEEE-30	71	6	0,098
IEEE-57	145	7	0,162
IEEE-118	255	9	0,450
SSB-352	1.097	12	1,47
SSB-749	2.209	18	7,15
SSB-1916	5.409	14	21,20

Comparando a Tabela 4.5 com as tabelas relativas aos outros métodos, observa-se que esta abordagem é a que requer maior esforço computacional. Isto deve-se ao fato de que nesta metodologia um maior número de restrições operacionais para o sistema é modelado. Note que, mesmo possuindo sistemas lineares com dimensão inferiores ao do método *MCCDE*, os tempos computacionais, em geral, são maiores.

Por outro lado, analisando as Tabelas 4.4 e 4.5, observa-se que o sistema SSB-749 é o que apresenta a característica de convergência mais difícil. Note que no método *MCCDE*, ele necessita de 16 iterações, enquanto que no *MRPI* necessita de 18 iterações para convergir. Este fato está relacionado à topologia e ao nível de carregamento para o qual o sistema foi estudado.

Os tempos computacionais obtidos pela aplicação da metodologia do Mínimo Resíduo por Pontos Interiores aos sistemas-teste estão, graficamente, apresentados na Figura 4.4.

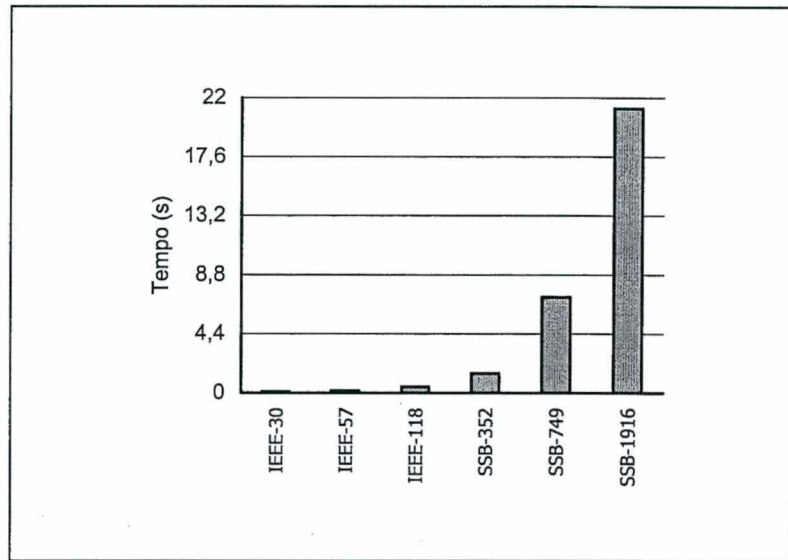


Figura 4.4. Tempos computacionais para o método do Mínimo Resíduo por Pontos Interiores.

A análise dos tempos computacionais obtidos via metodologia do Mínimo Resíduo por Pontos Interiores mostra o potencial da mesma para aplicações em sistemas de energia elétrica de grande porte.

#### 4.2.5 RESUMO DOS TEMPOS COMPUTACIONAIS

A Figura 4.5 apresenta graficamente o resumo do desempenho das abordagens propostas em termos de tempo computacional.



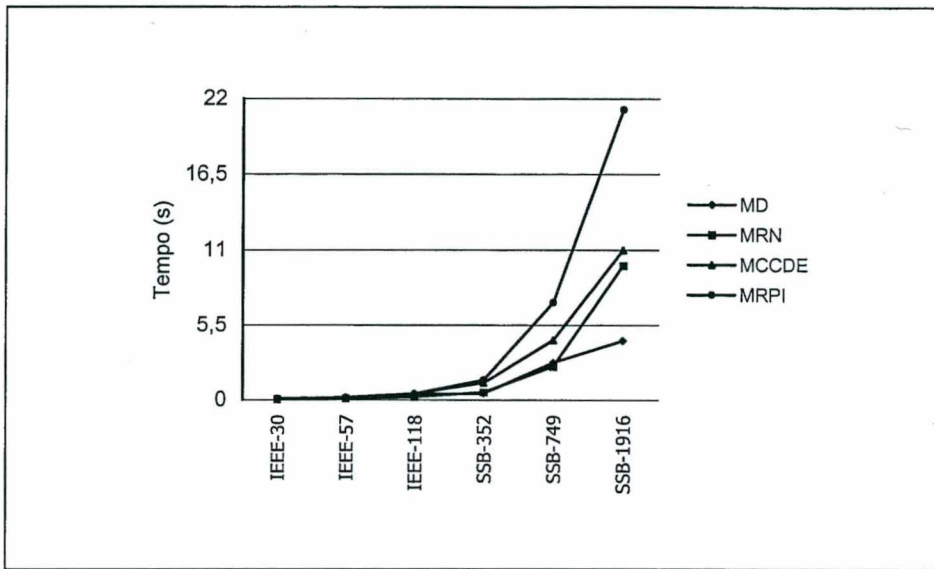


Figura 4.5. Resumo dos tempos computacionais.

A Figura 4.5 mostra que as abordagens baseadas no algoritmo de Pontos Interiores necessitam de um maior tempo de computação para obterem a convergência. Por outro lado, a metodologia baseada no autovetor à esquerda é a que apresenta os menores tempos computacionais.

### 4.3 ANÁLISE DA QUALIDADE DOS RESULTADOS

Três sistemas foram selecionados para a análise da qualidade dos resultados obtidos aplicando-se os algoritmos propostos: os sistemas-teste IEEE-30, SSB-749 e SSB-1916. O impacto da aplicação das diferentes metodologias sobre estes sistemas, será feita analisando-se os índices de corte de carga previamente definidos no Capítulo 3.

A Tabela 4.6 apresenta os níveis de carregamento dos sistemas-teste analisados nesta seção. As linhas 3, 6 e 9 desta tabela (casos A) referem-se aos valores mínimos de

demanda total para os quais o fluxo de potência convencional não apresenta solução.

Tabela 4.6. Níveis de carregamento dos sistemas-teste.

Sistema-teste	Caso	Demanda Total	
		$P_d$ (MW)	$Q_d$ (MVA <sub>r</sub> )
IEEE-30	A	776,52	345,79
	B	821,86	365,98
	C	356,84	158,90
SSB-749	A	26.735,36	9.967,83
	B	27.464,50	10.239,68
	C	25.785,61	9.613,73
SSB-1916	A	37.140,60	11.164,45
	B	37.841,36	11.375,10
	C	37.353,00	11.228,30

Os resultados são apresentados a seguir.

### 4.3.1 MÍNIMA DISTÂNCIA

Inicialmente, serão analisados os casos “A”, os quais correspondem aos menores níveis de carregamento para os quais os algoritmos convencionais de fluxo de carga não apresentam solução. A Tabela 4.7 apresenta os resultados obtidos com a aplicação do método da Mínima Distância aos sistemas-teste. Nesta tabela, a segunda linha refere-se ao número de barras do sistema que têm a sua demanda integralmente atendida (*nig*) e a ter-

ceira linha é o número de barras disponíveis para o corte de carga ( $n_{bdc}$ ). As linhas 6, 7 e 8 são os índices para mensurar o grau de infactibilidade do caso em estudo, discutidos no Capítulo 3.

Tabela 4.7. Resultados do MD para os casos “A” dos sistemas-teste.

Sistema-teste		IEEE-30	SSB-749	SSB-1916
$n_{ig}$		24	662	1.763
$n_{bdc}$		0	0	0
Demanda Atendida	$P_{df}$ (MW)	776,52	26.735,36	37.140,60
	$Q_{df}$ (MVar)	345,79	9.967,83	11.164,45
$d$		1,1765	1,6598	0,2009
$icc_A$ (%)		0,00	0,00	0,00
$icc_R$ (%)		0,00	0,00	0,00
Geração (MW)	Prevista	60,00	25.000,24	31.628,90
	Redespacho	262,06	25.546,04	31.733,38

Da Tabela 4.7, nota-se que todos os casos apresentados podem ter a sua demanda integralmente atendida (os índices de corte de carga são iguais a zero). Para isso, apenas um redespacho na geração ativa das barras PV é suficiente. Observe as linhas 9 e 10 da Tabela 4.7, as quais apresentam o nível de geração pré-especificada e o nível para o qual é possível atender toda a demanda, respectivamente. Verifica-se que com um aumento de geração de 202,06 MW, de 545,80 MW e de 104,48 MW, respectivamente para os sistemas IEEE-30, SSB-749 e SSB-1916, a solução das equações da rede elétrica é restaurada e, ainda, toda a demanda é passível de ser atendida.

Por outro lado, chama-se a atenção para o índice  $d$  sugerido em OVERBYE

(1994). Note que, mesmo o caso não sendo inactivável e a carga integralmente atendida, este índice é diferente de zero. Isto leva a conclusão de que o índice  $d$  é de pouca valia na prática. Se o caso apresenta ou não solução para as equações da rede, este índice pode ser ainda diferente de zero, conforme mostrado na Tabela 4.7. Este será zero apenas no caso em que as equações da rede elétrica sejam satisfeitas e todas as especificações atendidas.

A seguir, são analisados os resultados fornecidos pelo algoritmo  $MD$  para os casos “B” dos sistemas-teste. Nestas simulações o número de barras com o balanço de potências satisfeito foi gradativamente aumentado, o que é indicado na coluna  $nig$ . O critério utilizado na escolha das barras do tipo  $nig$  foi o de proximidade geográfica.

A Tabela 4.8 apresenta os resultados para o sistema IEEE-30.

**Tabela 4.8. Resultados obtidos no caso “B” com o método  $MD$  para o sistema IEEE-30.**

$nig$	$nbd$	Demanda Atendida		$d$	$icc_A$ (%)	$icc_R$ (%)
		$P_{df}$ (MW)	$Q_{df}$ (MVar)			
6	18	810,21	355,34	0,0537	1,42	2,91
9	15	810,57	355,65	0,0538	1,37	2,82
12	12	815,27	355,67	0,0634	0,80	2,82

Observando a Tabela 4.8, percebe-se que, no presente caso, os índices de corte de carga tendem a diminuir conforme o número de barras disponíveis para o corte é reduzido. Por outro lado, nota-se que o índice  $d$  tende a aumentar.

A Tabela 4.9 apresenta os resultados obtidos da aplicação do algoritmo  $MD$  ao sistema SSB-749.



Tabela 4.9. Resultados obtidos no caso “B” com o método *MD* para o sistema SSB-749.

<i>nig</i>	<i>nbdc</i>	Demanda Atendida		<i>d</i>	<i>icc<sub>A</sub></i> (%)	<i>icc<sub>R</sub></i> (%)
		<i>P<sub>df</sub></i> (MW)	<i>Q<sub>df</sub></i> (MVA <sub>r</sub> )			
327	335	26.706,24	9.955,77	1,1907	2,76	2,77
394	268	26.834,38	9.994,11	1,2037	2,29	2,40
567	95	26.970,35	10.059,22	1,2235	1,80	1,76

Para este sistema, percebe-se que a garantia do suprimento da demanda integral de um número maior de barras faz com que os índices de corte de carga ativa e reativa diminuam. Isto implica em que a demanda total atendida pelo sistema elétrico aumenta. Observa-se que, também neste caso, o índice *d* tende a aumentar.

Os resultados para o sistema SSB-1916 estão apresentados na Tabela 4.10.

Tabela 4.10. Resultados obtidos no caso “B” com o método *MD* para o sistema SSB-1916.

<i>nig</i>	<i>nbdc</i>	Demanda Atendida		<i>d</i>	<i>icc<sub>A</sub></i> (%)	<i>icc<sub>R</sub></i> (%)
		<i>P<sub>df</sub></i> (MW)	<i>Q<sub>df</sub></i> (MVA <sub>r</sub> )			
751	1.012	37.639,10	11.217,49	0,1338	0,53	1,39
935	828	37.560,55	11.137,79	0,3021	0,74	2,09
1.105	658	37.643,41	11.204,08	0,4146	0,52	1,50

Analisando a Tabela 4.10, percebe-se que as conclusões feitas para os outros dois sistemas-teste não são inteiramente válidas para o SSB-1916. Na aplicação do algoritmo *MD* a este sistema, os índices de corte de carga inicialmente aumentam e depois se reduzem (o inverso ocorre com a demanda total atendida), conforme o número de barras com demanda totalmente satisfeita aumenta. Por outro lado, o índice *d* apresenta o mesmo comportamento observado nos outros sistemas.

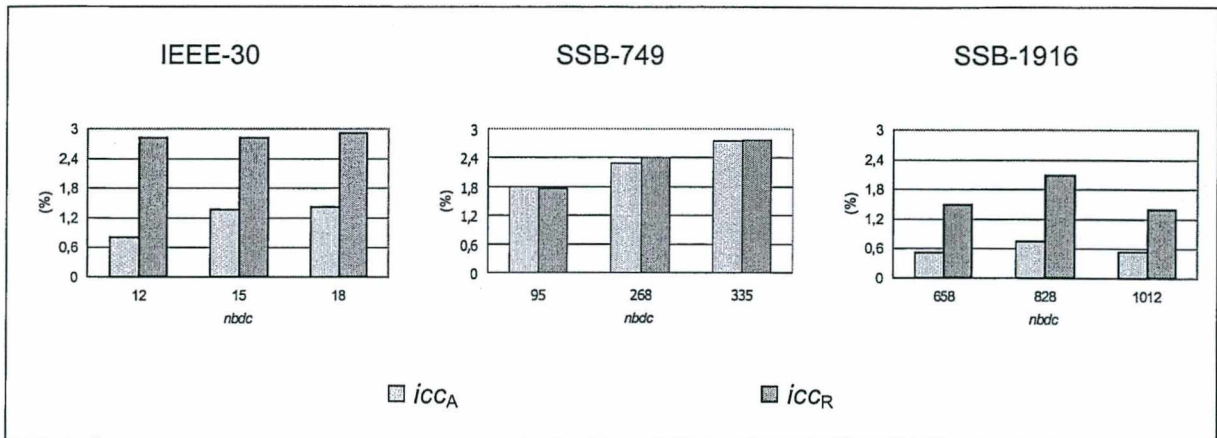


Figura 4.6. Resumo dos resultados do algoritmo *MD* para o caso “B”.

A Figura 4.6 ilustra graficamente os principais resultados obtidos com a aplicação do algoritmo da Mínima Distância aos sistemas-teste.

### 4.3.2 MÍNIMO RESÍDUO POR NEWTON

Inicialmente são mostrados os resultados fornecidos pela abordagem *MRN* aos casos “A” dos sistemas-teste. Estes resultados estão apresentados na Tabela 4.11.

Tabela 4.11. Resultados do *MRN* para os casos “A” dos sistemas-teste.

Sistema-teste		IEEE-30	SSB-749	SSB-1916
<i>nig</i>		24	662	1.763
<i>nbdc</i>		0	0	0
Demanda Atendida	$P_{df}$ (MW)	776,52	26.735,36	37.140,60
	$Q_{df}$ (MVar)	345,79	9.967,83	11.164,45
<i>d</i>		1,2044	1,6561	0,1574
$icc_A$ (%)		0,00	0,00	0,00
$icc_R$ (%)		0,00	0,00	0,00
Geração (MW)	Prevista	60,00	25.000,24	31.628,90
	Redespacho	267,19	25.529,18	31.710,58

Da Tabela 4.11, percebe-se que, confirmando os resultados da aplicação do método *MD*, neste nível de carregamento, os três sistemas possuem um ponto de operação viável e toda a demanda pode ser atendida desde que haja um redespacho na geração de potência ativa. O algoritmo *MRN* apresenta no caso dos sistemas SSB-749 e SSB-1916 um despacho menor de potência ativa que o *MD*, 528,94 MW contra 545,8 MW e 81,68 MW contra 104,48 MW, respectivamente. Entretanto, para o sistema IEEE-30, o redespacho é maior, 207,19 MW contra 202,06 MW.

Por outro lado, deve ser salientado que as duas metodologias se propõem a minimizar o quadrado da soma dos desbalanços de potência, tendendo teoricamente a determinar soluções semelhantes. Entretanto, uma é baseada no autovetor à esquerda associado ao autovalor nulo da matriz Jacobiana (*MD*) e a outra utiliza técnicas de otimização (*MRN*), o que resulta na adoção de diferentes percursos até a solução. Portanto, as diferenças apresentadas acima (comparando os redespachos de geração ativa nas Tabelas 4.7 e 4.11) po-



dem ser atribuídas às diferentes estratégias utilizadas.

A seguir, são apresentados os resultados da metodologia do *MRN* para os casos “B” dos sistemas-teste. As Tabelas 4.12, 4.13 e 4.14 apresentam os resultados para os sistemas IEEE-30, SSB-749 e SSB-1916, respectivamente.

**Tabela 4.12. Resultados obtidos no caso “B” com o método *MRN* para o sistema IEEE-30.**

		Demanda Atendida				
<i>nig</i>	<i>nbdc</i>	$P_{df}$ (MW)	$Q_{df}$ (MVar)	<i>d</i>	$icc_A$ (%)	$icc_R$ (%)
6	18	810,64	355,56	0,0534	1,37	2,85
9	15	810,98	355,86	0,0535	1,32	2,77
12	12	811,67	356,41	0,0539	1,24	2,62

**Tabela 4.13. Resultados obtidos no caso “B” com o método *MRN* para o sistema SSB-749.**

		Demanda Atendida				
<i>nig</i>	<i>nbdc</i>	$P_{df}$ (MW)	$Q_{df}$ (MVar)	<i>d</i>	$icc_A$ (%)	$icc_R$ (%)
327	335	26.707,41	9.978,25	1,1857	2,76	2,55
394	268	26.792,46	9.997,04	1,1985	2,45	2,37
567	95	26.978,17	10.058,41	1,2232	1,77	1,77

**Tabela 4.14. Resultados obtidos no caso “B” com o método *MRN* para o sistema SSB-1916.**

		Demanda Atendida				
<i>nig</i>	<i>nbdc</i>	$P_{df}$ (MW)	$Q_{df}$ (MVar)	<i>d</i>	$icc_A$ (%)	$icc_R$ (%)
751	1.012	37.623,35	11.206,09	0,1404	0,58	1,49
935	828	37.566,23	11.101,13	0,3411	0,73	2,41
1.105	658	37.572,51	11.136,45	0,5397	0,71	2,10

Analisando os resultados apresentados nas Tabelas 4.12, 4.13 e 4.14, pode-se con-



cluír que estes dados são semelhantes aos mostrados nas Tabelas 4.8, 4.9 e 4.10 para o método da Mínima Distância. Com a aplicação do algoritmo do Mínimo Resíduo por Newton aos três sistemas-teste, verifica-se uma tendência do corte de carga diminuir (maior a quantidade de demanda atendida) conforme o número de barras com demanda integralmente atendida aumenta. Observe que isto confirma o que foi discutido anteriormente sobre os dois métodos. Ambos devem apresentar resultados semelhantes pois se propõem a realizar a mesma tarefa.

Por outro lado, é importante salientar que o algoritmo *MRN* mostrou-se mais robusto do ponto de vista numérico e computacional. Em outras palavras, é mais fácil conseguir a convergência do algoritmo *MRN* do que o do *MD*. Para obter a convergência do algoritmo do Mínimo Resíduo por Newton, é suficiente determinar o número de iterações do método de Gauss-Newton que devem ser realizadas no início do processo iterativo. Por sua vez, o algoritmo da Mínima Distância mostrou-se muito sensível à ponderação atribuída às barras nas quais a demanda deve ser totalmente atendida. Em alguns casos, isto faz com que o ajuste do método necessite de várias tentativas de ponderação.

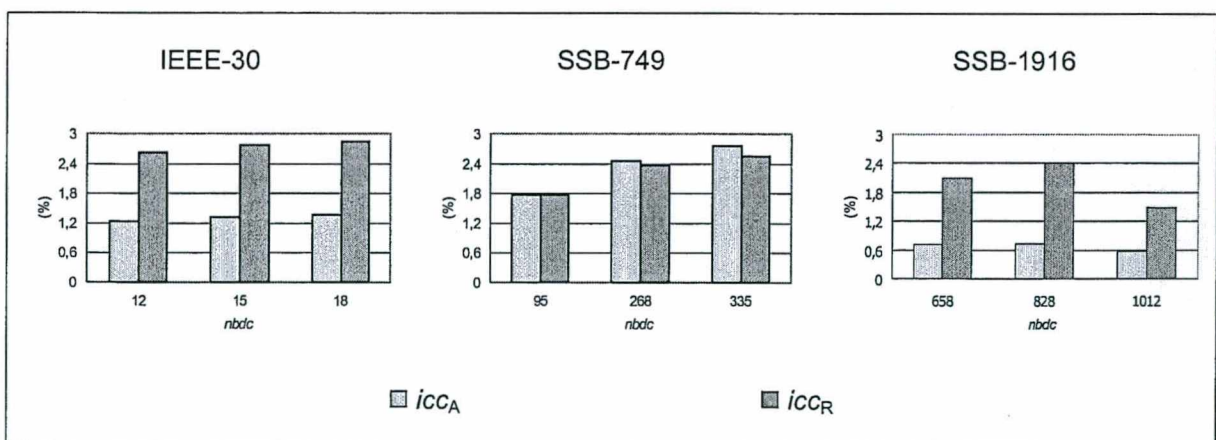


Figura 4.7. Resumo dos resultados do algoritmo *MRN* para o caso “B”.

O resumo dos resultados para o corte de carga obtidos com a aplicação do método do Mínimo Resíduo por Newton aos sistemas-teste está apresentado na Figura 4.7.

### 4.3.3 MÍNIMO CORTE DE CARGA COM DIREÇÃO ESPECIFICADA

Conforme discutido no Capítulo 3, nesta abordagem é permitido ao usuário definir a direção do corte de carga. Para exemplificar esta característica, nesta seção são apresentados resultados obtidos a partir do decréscimo de carga em duas direções distintas:

- uma na qual o fator de potência das cargas é mantido constante (Teste A);
- e outra na qual o corte de carga na demanda reativa é 30% superior ao da demanda ativa (Teste B).

Inicialmente, são apresentados os resultados obtidos da aplicação do método do Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada para o nível de carregamento dos casos “C” dos sistemas-teste. A direção de decréscimo da carga é tal que o fator de potência das demandas é mantido constante durante o processo iterativo. A Tabela 4.15 mostra os resultados desta simulação.

Tabela 4.15. Resultados do *MCCDE* para os casos “C” dos sistemas-teste.

Sistema-teste		IEEE-30	SSB-749	SSB-1916
<i>nig</i>		24	662	1.763
<i>nbdc</i>		0	0	0
Demanda Atendida	$P_{df}$ (MW)	356,84	25.785,61	37.353,00
	$Q_{df}$ (MVA <sub>r</sub> )	158,90	9.613,73	11.228,30
$icc_A$ (%)		0,00	0,00	0,00
$icc_R$ (%)		0,00	0,00	0,00

Observando os resultados da Tabela 4.15, constata-se que as demandas são integralmente atendidas, sem a necessidade de corte de carga ( $icc_A$  e  $icc_R$  iguais a zero em todos os casos). Esta simulação apresenta os valores máximos de demanda para os sistemas-teste que, dentro das restrições impostas aos mesmos, é possível ser atendida totalmente sem que seja necessário recorrer ao corte de carga.

Por outro lado, as Tabelas 4.16 e 4.17 mostram os resultados dos Testes A e B para o sistema IEEE-30 na condição de carga do caso “B”, respectivamente.

Tabela 4.16. Resultados obtidos no Teste A (caso “B”) com o método *MCCDE* para o sistema IEEE-30.

		Demanda Atendida				
<i>nig</i>	<i>nbdc</i>	$P_{df}$ (MW)	$Q_{df}$ (MVA <sub>r</sub> )	<i>d</i>	$icc_A$ (%)	$icc_R$ (%)
6	18	593,28	258,75	0,7422	27,81	29,30
9	15	641,85	278,64	0,6167	21,90	23,86
12	12	680,21	295,78	0,5638	17,24	19,18

Tabela 4.17. Resultados obtidos no Teste B (caso “B”) com o método *MCCDE* para o sistema IEEE-30.

<i>nig</i>	<i>nbd</i>	Demanda Atendida		<i>d</i>	<i>icc<sub>A</sub></i> (%)	<i>icc<sub>R</sub></i> (%)
		<i>P<sub>df</sub></i> (MW)	<i>Q<sub>df</sub></i> (MVA <sub>r</sub> )			
6	18	621,00	243,49	0,6984	24,44	33,47
9	15	663,72	266,23	0,5841	19,24	27,25
12	12	697,07	285,58	0,5360	15,18	21,97

Pela análise das Tabelas 4.16 e 4.17, observa-se que, em todos os casos simulados, há uma tendência do algoritmo produzir uma redução no corte de demanda ativa e aumentá-lo na demanda reativa do Teste A para o Teste B. Isto faz com que, do ponto de vista do atendimento de demanda ativa, a direção de decréscimo da carga no Teste B seja mais interessante do ponto de vista prático. Inclusive, o aumento do corte na demanda reativa pode, eventualmente, vir a ser compensado pela instalação de bancos de reativos no sistema.

Por outro lado, nestes testes permanece válida a constatação de que conforme aumenta o número de barras com demanda satisfeita integralmente, diminuem os índices de corte de carga ativa e reativa (colunas 6 e 7 das Tabelas 4.16 e 4.17). Em relação ao índice *d*, observa-se que este diminui em todos os testes conforme o número de barras com demanda totalmente satisfeita aumenta.

Os resultados dos Testes A e B, no nível de demanda do caso “B”, para o sistema SSB-749 são apresentados nas Tabelas 4.18 e 4.19, respectivamente.



Tabela 4.18. Resultados obtidos no Teste A (caso “B”) com o método *MCCDE* para o sistema SSB-749.

		Demanda Atendida				
<i>nig</i>	<i>nbdc</i>	$P_{df}$ (MW)	$Q_{df}$ (MVA <sub>r</sub> )	<i>d</i>	<i>icc<sub>A</sub></i> (%)	<i>icc<sub>R</sub></i> (%)
327	335	25.772,08	9.864,96	2,2720	6,16	3,66
394	268	25.858,70	9.838,63	2,7746	5,85	3,92
567	95	25.828,89	9.963,41	2,8177	5,96	2,70

Tabela 4.19. Resultados obtidos no Teste B (caso “B”) com o método *MCCDE* para o sistema SSB-749.

		Demanda Atendida				
<i>nig</i>	<i>nbdc</i>	$P_{df}$ (MW)	$Q_{df}$ (MVA <sub>r</sub> )	<i>d</i>	<i>icc<sub>A</sub></i> (%)	<i>icc<sub>R</sub></i> (%)
327	335	25.812,91	9.764,30	2,2450	6,01	4,64
394	268	25.858,84	9.718,37	2,7984	5,85	5,09
567	95	25.832,49	9.881,32	2,8443	5,94	3,50

Pela análise dos resultados apresentados nas Tabelas 4.18 e 4.19, nota-se que para o sistema SSB-749 a direção de decréscimo da demanda praticamente não influi no corte de demanda ativa. Esta direção apenas influi no corte de demanda reativa, fazendo com que este aumente do Teste A para o Teste B.

Por outro lado, para este sistema, conforme o número de barras com demanda integralmente satisfeita aumenta, o índice *d* também aumenta, o corte na demanda ativa praticamente não se altera e o corte de demanda reativa inicialmente aumenta e, depois, apresenta uma diminuição.

As Tabelas 4.20 e 4.21 mostram os resultados obtidos da aplicação do algoritmo do Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada ao sistema SSB-1916 para os Testes A e B, na condição de demanda especificada pelo caso “B”, respectivamente.

**Tabela 4.20. Resultados obtidos no Teste A (caso “B”) com o método MCCDE para o sistema SSB-1916.**

		Demanda Atendida				
<i>nig</i>	<i>nbdc</i>	$P_{df}$ (MW)	$Q_{df}$ (MVA <sub>r</sub> )	<i>d</i>	<i>icc<sub>A</sub></i> (%)	<i>icc<sub>R</sub></i> (%)
751	1.012	37.298,05	11.198,76	0,4498	1,44	1,55
935	828	37.299,67	11.210,45	0,5061	1,43	1,45
1.105	658	37.304,72	11.219,71	0,5561	1,42	1,37

**Tabela 4.21. Resultados obtidos no Teste B (caso “B”) com o método MCCDE para o sistema SSB-1916.**

		Demanda Atendida				
<i>nig</i>	<i>nbdc</i>	$P_{df}$ (MW)	$Q_{df}$ (MVA <sub>r</sub> )	<i>d</i>	<i>icc<sub>A</sub></i> (%)	<i>icc<sub>R</sub></i> (%)
751	1.012	37.298,56	11.146,08	0,4597	1,43	2,01
935	828	37.299,62	11.161,04	0,5173	1,43	1,88
1.105	658	37.305,70	11.173,47	0,5671	1,42	1,77

A análise das Tabelas 4.20 e 4.21, conduz às mesmas observações realizadas para o sistema SSB-749. Note que o corte de demanda ativa praticamente não é influenciado pela direção de decréscimo da carga, e apenas o corte na demanda reativa sofre influência, aumentando do Teste A para o B.

Por outro lado, conforme o número de barras com demanda totalmente atendida aumenta, o índice *d* também aumenta, o índice de corte de demanda ativa praticamente não se altera e o índice de corte de demanda reativa diminui.

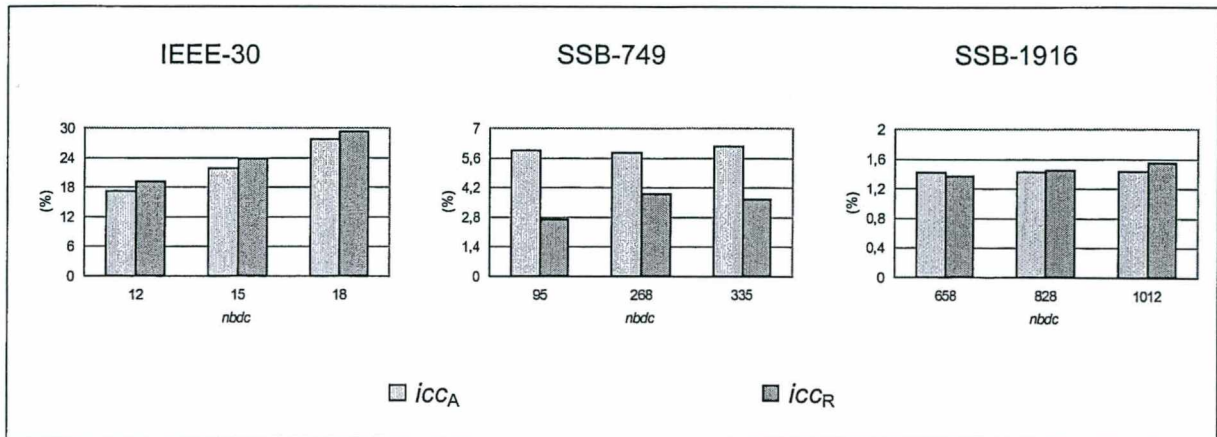


Figura 4.8. Resumo dos resultados do algoritmo *MCCDE* para o Teste A (caso "B").

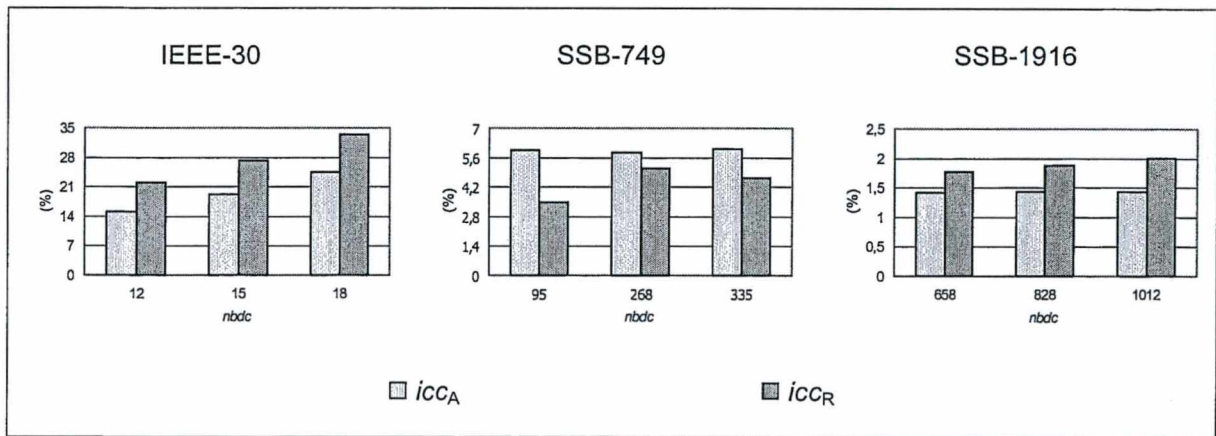


Figura 4.9. Resumo dos resultados do algoritmo *MCCDE* para o Teste B (caso "B").

O resumo dos resultados fornecidos pela metodologia do Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada para os Testes A e B está mostrado graficamente nas Figuras 4.8 e 4.9.

#### 4.3.4 MÍNIMO RESÍDUO POR PONTOS INTERIORES

Conforme apresentado no Capítulo 3, esta metodologia é uma extensão da abor-



dagem do Mínimo Resíduo por Newton, na qual são incorporadas restrições de desigualdade. Devido a essa inclusão, optou-se por resolver o problema de otimização utilizando o algoritmo Preditor-Corretor do Primal-Dual de Pontos Interiores. Observe que a função objetivo é a mesma nos dois métodos.

Uma outra característica importante desta abordagem é a possibilidade de definição de limites máximos para o corte de carga. Nesta seção, serão apresentadas simulações que demonstram a potencialidade de utilização destas restrições, como segue:

- Teste A: é requerido que a demanda de fato suprida em cada barra seja igual ou superior a 60% do seu valor inicial. Exceção ao sistema IEEE-30 que, por razões técnicas, este limite deve ser 38%.
- Teste B: é requerido que a demanda de fato suprida em cada barra seja igual ou superior a 30% do seu valor inicial.

Primeiramente, os resultados fornecidos pela abordagem do Mínimo Resíduo por Pontos Interiores aos casos “C” dos sistemas-teste são analisados. A Tabela 4.22 apresenta estes resultados.

Tabela 4.22. Resultados do *MRPI* para os casos “C” dos sistemas-teste.

Sistema-teste		IEEE-30	SSB-749	SSB-1916
<i>nig</i>		24	662	1.763
<i>nbd</i>		0	0	0
Demanda Atendida	$P_{df}$ (MW)	356,84	25.785,61	37.353,00
	$Q_{df}$ (MVar)	158,90	9.613,73	11.228,30
$icc_A$ (%)		0,00	0,00	0,00
$icc_R$ (%)		0,00	0,00	0,00



A análise da Tabela 4.22 mostra que em todos os casos os níveis de demanda podem ser atendidos integralmente sem haver a necessidade de se recorrer ao corte de carga. Comparando as Tabelas 4.15 (Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada) e 4.22 (Mínimo Resíduo por Pontos Interiores), observa-se que estas conduzem a mesma conclusão.

As Tabelas 4.23 e 4.24 apresentam os resultados da aplicação do *MRPI* ao sistema IEEE-30 nos níveis de demanda do caso “B”, para os Testes A e B, respectivamente.

**Tabela 4.23. Resultados obtidos no Teste A (caso “B”) com o método *MRPI* para o sistema IEEE-30.**

		Demanda Atendida				
<i>nig</i>	<i>nbdc</i>	$P_{df}$ (MW)	$Q_{df}$ (MVar)	<i>d</i>	$icc_A$ (%)	$icc_R$ (%)
6	18	727,44	272,46	0,4095	11,49	25,55
9	15	730,08	278,87	0,4187	11,17	23,80
12	12	688,15	295,54	0,5279	16,27	19,25

**Tabela 4.24. Resultados obtidos no Teste B (caso “B”) com o método *MRPI* para o sistema IEEE-30.**

		Demanda Atendida				
<i>nig</i>	<i>nbdc</i>	$P_{df}$ (MW)	$Q_{df}$ (MVar)	<i>d</i>	$icc_A$ (%)	$icc_R$ (%)
6	18	751,67	291,35	0,3317	8,54	20,39
9	15	754,58	294,90	0,3328	8,19	19,42
12	12	753,27	301,91	0,3456	8,35	17,51

Comparando as Tabelas 4.23 e 4.24, percebe-se que quanto maior o corte de carga permitido, menores os índices de corte no sistema. O método *MRPI* realoca os cortes de modo que no sistema como um todo haja uma necessidade menor de corte de carga para viabilizar o ponto de operação.

Pela observação das tabelas anteriores, nota-se que conforme o número de barras com demanda integralmente satisfeita aumenta, também se eleva o valor do índice  $d$  e diminui o índice de corte de carga reativa ( $icc_R$ ). Por outro lado, o índice de corte de carga ativa ( $icc_A$ ) apresenta um comportamento não previsível, inicialmente decrescendo, para logo em seguida aumentar.

Por outro lado, comparando as Tabelas 4.12, 4.23 e 4.24, observa-se que os índices de corte de carga aumentam consideravelmente da abordagem *MRN* para a *MRPI*. Por exemplo, no caso onde são disponibilizadas 15 barras para o corte de carga, no *MRN* estes índices são de 1,32 e 2,77, respectivamente, para as demandas ativa e reativa. Por sua vez, no *MRPI* estes índices crescem para 11,49 e 25,55 e 8,54 e 20,39, respectivamente, nos Testes A e B. Estes valores ilustram o impacto das restrições de desigualdade sobre a operação do sistema. Saliente-se que, além do controle do nível de geração reativa realizado no *MRN*, no *MRPI* monitora-se, entre outras grandezas, o perfil de tensões nas barras do sistema e o nível de geração ativa. Com a definição de limites para as magnitudes das tensões nas barras e para a geração de potência ativa, era esperado que os índices de corte de carga realmente aumentassem.

Os resultados obtidos nas condições de carregamento do caso “B” para o sistema SSB-749 são mostrados nas Tabelas 4.25 e 4.26, respectivamente, para os Testes A e B.

Tabela 4.25. Resultados obtidos no Teste A (caso “B”) com o método *MRPI* para o sistema SSB-749.

		Demanda Atendida				
<i>nig</i>	<i>nbdc</i>	$P_{df}$ (MW)	$Q_{df}$ (MVA <sub>r</sub> )	<i>d</i>	<i>icc<sub>A</sub></i> (%)	<i>icc<sub>R</sub></i> (%)
327	335	25.760,57	10.063,08	0,9866	6,20	1,72
394	268	25.761,38	10.097,98	1,1248	6,20	1,38
567	95	25.832,60	10.183,41	1,7960	5,94	5,50

Tabela 4.26. Resultados obtidos no Teste B (caso “B”) com o método *MRPI* para o sistema SSB-749.

		Demanda Atendida				
<i>nig</i>	<i>nbdc</i>	$P_{df}$ (MW)	$Q_{df}$ (MVA <sub>r</sub> )	<i>d</i>	<i>icc<sub>A</sub></i> (%)	<i>icc<sub>R</sub></i> (%)
327	335	25.753,92	10.047,80	0,9632	6,23	1,87
394	268	25.750,23	10.085,98	1,0846	6,24	1,50
567	95	25.826,85	10.180,03	1,7434	5,96	5,83

Comparando as Tabelas 4.25 e 4.26, nota-se que a relaxação no corte de carga, ocorrido do Teste A para o Teste B, influi mais acentuadamente no corte de carga reativa. O índice de corte de carga ativa praticamente não se altera em função deste procedimento em nenhuma das seleções de barras analisadas.

Por outro lado, no sistema SSB-749, observa-se que conforme o número de barras disponíveis para corte diminui, o índice *d* aumenta e o índice de corte de carga ativa praticamente não se altera. Entretanto, o índice de corte de demanda reativa diminui, da primeira para a segunda seleção. Contudo, quando o número de barras com demanda integralmente atendidas aumenta para 567, *icc<sub>R</sub>* aumenta consideravelmente de 1,38 para 5,50 e de 1,50 para 5,83, respectivamente, nos Testes A e B. Novamente, neste caso, observa-se a atuação não previsível dos limites operacionais sobre o corte de carga.

Considerando as Tabelas 4.13, 4.25 e 4.26, observe o impacto dos limites sobre os



índices de corte de carga. Enquanto os índices de corte de demanda ativa aumentam, os índices de corte de carga reativa diminuem. Exceção para o caso onde foram disponibilizadas apenas 95 barras para corte de carga. Neste caso,  $icc_R$  cresce de 1,77 (no *MRN*) para 5,50 e 5,83 (no *MRPI*), nos Testes A e B. Nesta comparação entre as duas metodologias, também pode ser observada a influência não prevista dos limites operacionais do sistema elétrico sobre o corte de carga.

As Tabelas 4.27 e 4.28 apresentam os resultados para os Testes A e B, respectivamente, para o sistema SSB-1916 no nível de demanda definido no caso “B”.

**Tabela 4.27. Resultados obtidos no Teste A (caso “B”) com o método *MRPI* para o sistema SSB-1916.**

		Demanda Atendida				
<i>nig</i>	<i>nbdc</i>	$P_{df}$ (MW)	$Q_{df}$ (MVar)	<i>d</i>	$icc_A$ (%)	$icc_R$ (%)
751	1.012	37.083,74	10.905,39	0,2890	2,00	4,13
935	828	37.140,04	10.996,67	0,2855	1,85	3,33
1.105	658	37.191,56	11.075,75	0,2879	1,72	2,63

**Tabela 4.28. Resultados obtidos no Teste B (caso “B”) com o método *MRPI* para o sistema SSB-1916.**

		Demanda Atendida				
<i>nig</i>	<i>nbdc</i>	$P_{df}$ (MW)	$Q_{df}$ (MVar)	<i>d</i>	$icc_A$ (%)	$icc_R$ (%)
751	1.012	37.060,36	10.848,75	0,3019	2,06	4,63
935	828	37.122,24	10.949,31	0,2960	1,90	3,74
1.105	658	37.179,25	11.038,22	0,2955	1,75	2,96

Observando as Tabelas 4.27 e 4.28, constata-se que os cortes de demanda ativa e reativa aumentam com a permissão de um corte maior em cada barra. Note, por exemplo, o caso onde estão disponibilizadas 658 barras para corte. Se o limite de corte for de 40%,

$icc_A$  e  $icc_R$  valem, respectivamente, 1,72 e 2,63. Contudo, se o corte permitido aumentar para 70%, estes aumentam para 1,75 e 2,96, respectivamente.

Os resultados mostrados nas Tabelas 4.27 e 4.28 permitem verificar que conforme o número de barras disponíveis para corte aumenta, elevam-se também os índices de corte de carga ativa e reativa. Por outro lado, o índice  $d$  apresenta um comportamento diferenciado. No Teste A, este índice inicialmente diminui e, a seguir, aumenta conforme o número de barras disponíveis para corte aumenta. No Teste B, o índice  $d$  aumenta com o aumento do número de barras disponíveis para corte.

Pela comparação das Tabelas 4.14, 4.27 e 4.28, nota-se que para o sistema SSB-1916 com a atuação dos limites operacionais e de equipamentos, há uma tendência a um aumento dos índices de corte de carga através do sistema.

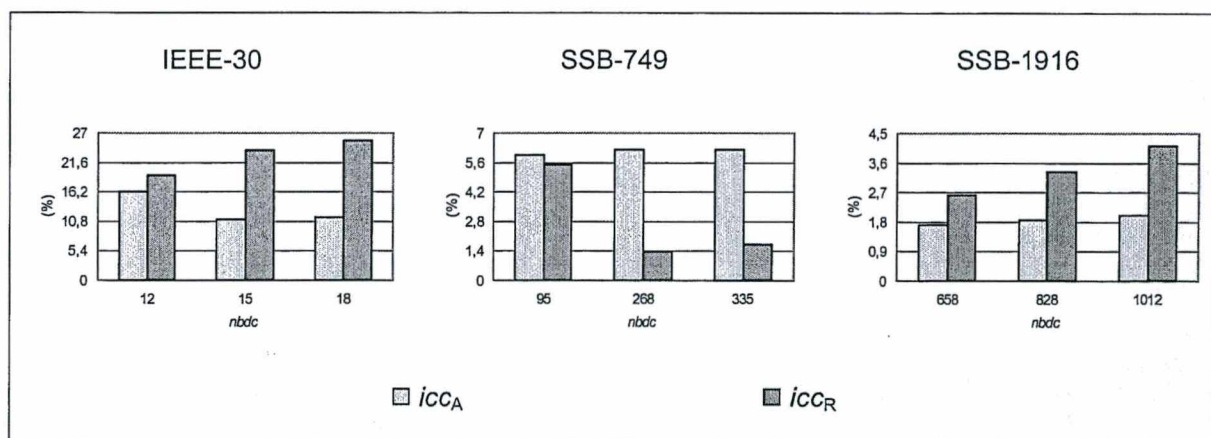


Figura 4.10. Resumo dos resultados do algoritmo *MRPI* para o Teste A (caso "B").

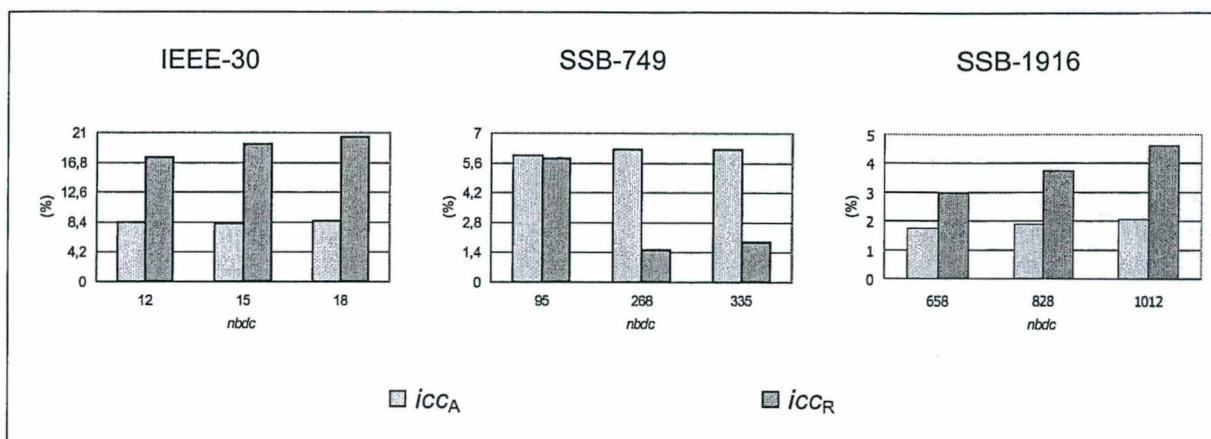


Figura 4.11. Resumo dos resultados do algoritmo *MRPI* para o Teste B (caso "B").

A aplicação da metodologia do Mínimo Resíduo por Pontos Interiores aos sistemas-teste fornece os resultados que estão mostrados graficamente nas Figuras 4.10 e 4.11.

## 4.4 UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DE BROYDEN NO ALGORITMO DO MÍNIMO RESÍDUO POR NEWTON

No Capítulo 3, para a abordagem do Mínimo Resíduo por Newton, foi apresentada a substituição do método de Newton-Raphson pelo método de Broyden para a resolução dos sistemas de equações não-lineares resultantes da aplicação das condições de otimalidade ao problema de otimização. Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos com esta modificação e alguns aspectos relacionados aos recomeços requeridos pelo método de Broyden.

A Tabela 4.29 apresenta um comparativo entre o desempenho do método de Newton-Raphson e o de Broyden para alguns dos sistemas-teste anteriormente mostrados,



implementados na abordagem do Mínimo Resíduo por Newton. Nessa tabela, as colunas “G-N”, “N-R” e “B” referem-se ao número de iterações realizadas utilizando o algoritmo de Gauss-Newton, o de Newton-Raphson e o de Broyden, respectivamente. A última coluna (Ganho) relaciona o decréscimo percentual de tempo computacional entre as implementações do método de Newton-Raphson e a de Broyden. Para que a análise seja a mais confiável possível, nas duas implementações são realizadas o mesmo número de iterações com o algoritmo de Gauss-Newton (coluna 2). As iterações totais são a soma das colunas 2 e 3 para o algoritmo de Newton-Raphson e a soma das colunas 2, 6 e 7 para o método de Broyden.

**Tabela 4.29. Comparação entre os algoritmos de Newton-Raphson e de Broyden no MRN.**

Sistema-teste	G-N	Newton-Raphson			Broyden			Ganho (%)	
		N-R	Total	Tempo (s)	N-R	B	Total		Tempo (s)
IEEE-57	5	4	9	0,120	2	8	15	0,110	8,33
IEEE-118	2	5	7	0,210	3	5	10	0,166	20,95
SSB-352	4	3	7	0,570	2	4	10	0,548	3,86
SSB-749	3	6	9	2,45	5	2	10	2,30	6,12
SSB-1916	4	9	13	9,84	6	8	18	8,12	17,48

Para um melhor entendimento da Tabela 4.29, é preciso lembrar que a inicialização e os recomeços no método de Broyden são realizados por uma iteração de Newton-Raphson. Além disso, toda vez que uma barra de geração atinge o seu limite de reativos, esta é transformada de PV em PQ. Isto produz uma mudança estrutural na matriz Jacobiana do sistema e, por conseguinte, na matriz do sistema linear da abordagem do Mínimo Resíduo por Newton, equação (3.7). Toda vez que isto se verifica, a iteração correspondente

com a nova matriz é realizada por Newton-Raphson. Baseado nisso, por exemplo, pode-se dizer que no sistema IEEE-57, substituiu-se duas iterações de Gauss-Newton por oito de Broyden. Ou ainda, no sistema SSB-1916, três iterações de Newton-Raphson foram substituídas por oito de Broyden.

Os resultados em termos de tempo computacional estão mostrados graficamente na Figura 4.12.

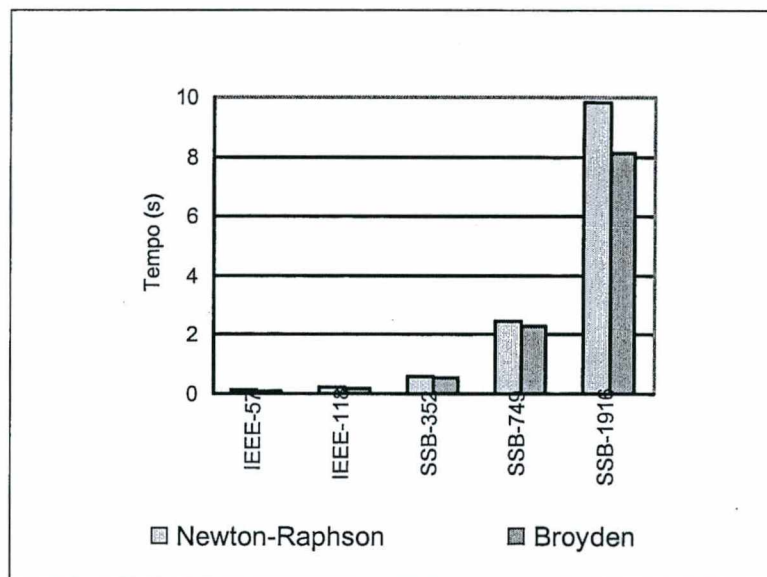


Figura 4.12. Tempos computacionais dos algoritmos de Newton-Raphson e de Broyden.

Analisando os resultados expressos na Tabela 4.29 e na Figura 4.12, nota-se que em todos os sistemas estudados houve uma redução do tempo computacional. O sistema que apresentou o maior ganho foi o IEEE-118 (20,95%) e o que apresentou o menor foi o SSB-352 (3,86%). No primeiro, foram substituídas duas iterações de Newton-Raphson por cinco de Broyden e no segundo, uma iteração de Newton-Raphson por quatro de Broyden.

A influência do número de iterações do método de Broyden efetuadas entre cada recomeço está apresentada na Tabela 4.30. Nesta tabela, a segunda coluna refere-se ao nú-



mero de iterações de Gauss-Newton; a terceira, ao número de recomeços; a quarta, ao número de iterações de Newton-Raphson e a quinta, ao número de iterações de Broyden realizadas até a convergência do processo iterativo.

**Tabela 4.30. Influência dos recomeços sobre o método de Broyden.**

Sistema-teste	G-N	Recomeços	N-R	B	Total
IEEE-57	5	3	3	6	14
	5	4	2	8	15
	5	5	3	10	18
IEEE-118	2	3	4	3	9
	2	4	4	4	10
	2	5	3	5	10
SSB-352	4	3	2	4	10
	4	4	2	4	10
	4	5	2	6	12
SSB-749	3	3	5	2	10
	3	4	5	2	10
	3	5	5	2	10
SSB-1916	4	3	6	8	18
	4	4	6	12	22
	4	5	6	13	23

Analisando a Tabela 4.30, observa-se que o sistema menos sensível aos recomeços é o SSB-749. Independente do número de recomeços, o algoritmo necessita de cinco iterações de Newton-Raphson e duas de Broyden para a convergência. Deste fato, deduz-se que são realizadas as cinco iterações de Newton-Raphson consecutivamente e posterior-

mente as duas de Broyden que fazem com que o processo iterativo convirja.

Por outro lado, os sistemas mais sensíveis aos recomeços são o IEEE-57 e o SSB-1916. No primeiro, utilizando-se três recomeços, o processo atinge a convergência em 14 iterações. Se o número de recomeços for aumentado para cinco, o número total de iterações passa para 18. Isto representa um aumento de 28,57% no número de iterações. Por sua vez, o algoritmo aplicado ao SSB-1916 apresenta, com três recomeços, um número total de 18 iterações. Aumentando para cinco os recomeços, o número total de iterações aumenta para 23, representando um acréscimo percentual de 27,78% nas iterações.

## 4.5 CONCLUSÕES

Neste capítulo, foram apresentados vários resultados numéricos relacionados às metodologias propostas no Capítulo 3. Esses resultados mostram o potencial, tanto computacional como de qualidade de soluções, para a aplicação dessas abordagens em sistemas elétricos de grande porte.

Os resultados numéricos mostram também a possibilidade de substituição do tradicional método de Newton-Raphson por métodos quasi-Newton para a resolução de sistemas de equações não-lineares.

# CAPÍTULO 5

## CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS

### 5.1 ASPECTOS GERAIS

Quando um sistema elétrico de potência está altamente carregado e/ou sob alguma contingência severa, é possível que as equações da rede elétrica não apresentem solução. Entretanto, é possível restaurar a solvabilidade de um fluxo de potência através das quatro abordagens sugeridas neste trabalho:

- *MÍNIMA DISTÂNCIA*: que utiliza as equações estáticas do fluxo de carga em coordenadas polares e as informações contidas no autovetor à esquerda associado ao autovalor nulo da matriz Jacobiana;
- *MÍNIMO RESÍDUO POR NEWTON*: na qual modela-se o problema do fluxo de carga sem solução real como um problema de otimização sujeito apenas a restrições de igualdade, com resolução via método de Newton de otimização.
- *MÍNIMO CORTE DE CARGA COM DIREÇÃO ESPECIFICADA*: na qual minimiza-se o corte de carga corretivo numa direção pré-estabelecida, sujeito a restrições de igualdade e de desigualdade, com solução via método de Pontos Interiores.
- *MÍNIMO RESÍDUO POR PONTOS INTERIORES*: a qual é semelhante a do

Mínimo Resíduo por Newton acrescida da modelagem de restrições de desigualdade.

Os sistemas de equações não-lineares, tão comuns em estudos de sistemas de potência, podem ser alternativamente resolvidos através dos métodos Quasi-Newton. No presente trabalho, o método de Broyden aplicado à abordagem do Mínimo Resíduo por Newton forneceu resultados satisfatórios em termos de eficiência computacional.

## 5.2 RESUMO DOS RESULTADOS

Com base nos resultados numéricos discutidos no Capítulo 4, as principais conclusões advindas deste estudo são:

- As metodologias propostas apresentam um bom desempenho computacional em termos de tempo de CPU necessário para a convergência dos processos iterativos.
- A qualidade das soluções está compatível com o tipo de proposta existente em cada abordagem. Observe que as metodologias da Mínima Distância e do Mínimo Resíduo por Newton, que se propõem a realizar a mesma tarefa, apresentam resultados semelhantes. Por sua vez, o algoritmo do Mínimo Resíduo por Pontos Interiores, que é uma extensão do Mínimo Resíduo por Newton in-

corporando restrições de desigualdade, apresenta soluções mais conservadoras (maiores cortes de demanda).

- As metodologias propostas não se restringem unicamente a realizar cortes de carga. Uma utilização eficiente dos controles disponíveis é efetuada primeiro. Somente, então, caso as equações da rede elétrica ainda não apresentem solução, é realizado o corte de carga no sistema elétrico.
- Na abordagem da Mínima Distância, constatou-se, em alguns sistemas-teste, uma grande sensibilidade do processo iterativo à ponderação das equações dos desbalanços de potência das barras nas quais é garantido o atendimento integral de demanda. Isto dificultou o ajuste do método nestes casos. Além disso, observou-se também que, em alguns casos, o autovetor à esquerda associado ao autovalor nulo da matriz Jacobiana leva o processo iterativo a fazer um “zig-zag” em torno do ponto de operação viável.
- Com a utilização de algumas iterações do método de Gauss-Newton para inicializar mais eficientemente o método de Newton-Raphson, o algoritmo do Mínimo Resíduo por Newton mostrou-se mais robusto numericamente. Não foi constatada nenhuma situação de carregamento, para nenhum dos sistemas-teste, para a qual o método não tivesse obtido convergência. Por outro lado, para alguns níveis de demanda, foi necessário utilizar um fator de controle do passo das iterações de modo a impedir a divergência do processo iterativo. Este controle de passo, conforme citado na literatura, faz com que o método de

Newton-Raphson apresente convergência global.

- O método do Mínimo Corte de Carga com Direção Especificada apresenta uma tendência de fornecer soluções mais conservadoras. Isto se deve ao fato da utilização de um único fator para a parametrização das demandas. Por outro lado, a utilização de vários fatores, um para cada demanda, ocasionaria um aumento exagerado da complexidade do problema de otimização. Neste método, a possibilidade de definição da taxa de decrescimento das demandas torna-se um fator importante, pois a experiência dos operadores e despachantes do sistema elétrico pode ser utilizada como uma heurística de modo a se obter um menor impacto de corte de carga sobre a rede elétrica.
- Na metodologia do Mínimo Resíduo por Pontos Interiores, foi constatada a tendência, em alguns níveis de carregamento, do processo iterativo trocar o tipo de injeção de potência na barra. Em outras palavras, barras de carga são transformadas em barras de geração. Para contornar este problema, foram introduzidas restrições de desigualdade adicionais ao problema de otimização. Estas fazem com que as demandas finais nas barras do sistema situem-se entre o valor previamente especificado e um valor mínimo definido pelo usuário.
- A especificação a priori de barras ou áreas com demandas integralmente atendidas, não implica necessariamente em maiores ou menores índices de corte de carga. Estes índices estão relacionados diretamente a topologia da rede elétrica e ao nível de carregamento a que o sistema de potência está submetido.

- A determinação de um limite mínimo de atendimento das demandas nas barras disponíveis para corte, não implica em que uma maior ou menor demanda total seja obtida para o sistema elétrico (ver resultados da metodologia do Mínimo Resíduo por Pontos Interiores).
- A utilização de métodos quasi-Newton é possível, sem perda de qualidade de solução. Neste estudo, a utilização do método de Broyden, embora não tenha apresentado um ganho de tempo muito elevado, mostrou-se viável. Além disso, em todos os testes realizados, este se mostrou mais eficiente, em termos de tempo computacional, do que o método de Newton-Raphson.

### 5.3 SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS

Para o prosseguimento dos estudos relacionados à restauração de soluções para as equações da rede elétrica, pode-se citar os seguintes aspectos como fonte de pesquisa:

- A implementação de controles que evitem o “zig-zag” que, em determinados sistemas elétricos e níveis de carregamentos, tende a ocorrer no método da Mínima Distância.
- A determinação a priori do número ideal de iterações de Gauss-Newton na abordagem do Mínimo Resíduo por Newton, para fazer com que o processo

iterativo convirja o mais rápido possível.

- O desenvolvimento de técnicas de análise que definam estratégias ótimas para a determinação de barras ou áreas que fiquem disponíveis para o corte de carga.
- O estudo e implementação de técnicas de otimização multi-objetivo de modo a obter, na metodologia do Mínimo Resíduo por Pontos Interiores, o limite máximo para os valores finais das demandas nas barras disponíveis de modo, a se conseguir os menores índices de corte de carga.
- A possibilidade de aplicação de outros métodos quasi-Newton na resolução dos sistemas de equações não-lineares resolvidas na abordagem do Mínimo Resíduo por Newton.
- A investigação de métodos iterativos para a resolução de sistemas lineares, principalmente, aplicados aos sistemas de grande porte inerentes às metodologias em estudo neste trabalho. Este estudo pode possibilitar a vetorização ou, até mesmo, a paralelização dos algoritmos propostos, objetivando uma convergência mais rápida para o processo iterativo.



# APÊNDICE A

## OS MÉTODOS MATEMÁTICOS DE OTIMIZAÇÃO

### A.1 INTRODUÇÃO

Este apêndice apresenta os principais métodos matemáticos de otimização utilizados nesta Tese. No algoritmo do Mínimo Resíduo por Newton, sugere-se a utilização do método de Newton para a resolução do problema não-linear de otimização. Por outro lado, nos algoritmos do Mínimo Corte de Carga em uma Direção Especificada e do Mínimo Resíduo por Pontos Interiores, o método de Pontos Interiores não-linear é sugerido.

O método de Newton utilizado nesta tese é uma variante do trabalho apresentado em SUN et al. (1984). As principais diferenças consistem na utilização de:

- somente restrições de igualdade;
- método de Gauss-Newton no início do processo iterativo;
- controle da magnitude do passo na atualização das variáveis nas iterações de Newton-Raphson.

Por outro lado, em relação ao método de Pontos Interiores, o grande impulso na aplicação destes métodos a problemas físicos surgiu com o trabalho de KARMARKAR (1984). Desde então, outros trabalhos surgiram, sedimentando cada vez mais a aplicação destes métodos aos problemas do nosso cotidiano. Trabalhos que tornaram-se referências

para os pesquisadores em aplicações dos métodos de Pontos Interiores aos sistemas de energia elétrica são os de MIZUNO et al. (1989), MEHROTRA (1992) e EL-BAKRY et al. (1996). Estes estudos apresentam uma versão nova para o tradicional método de Pontos Interiores Primal-Dual. Este novo algoritmo ficou conhecido como Preditor-Corretor do Primal-Dual de Pontos Interiores.

## A.2 MÉTODO DE NEWTON MODIFICADO

Considere o problema de otimização abaixo no qual são modeladas restrições de igualdade apenas

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{array} \tag{A.1}$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor das variáveis de otimização;

$f(\mathbf{x})$  é a função objetivo ou índice a ser otimizado; e

$\mathbf{g}(\mathbf{x})$  é o vetor com as funções das restrições de igualdade.

Para a resolução deste problema via método de Newton, o primeiro passo é construir a função Lagrangeana, isto é, agrega-se à função objetivo as restrições de igualdade juntamente com os seus multiplicadores de Lagrange. Isto transforma o problema (A.1) em um problema de minimização irrestrita da forma

$$\text{Min } f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.2})$$

As condições de otimalidade de primeira ordem (condições de Lagrange) para este problema são

$$\begin{aligned} \nabla_x f(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

onde  $\nabla_x f(\mathbf{x})$  é o vetor gradiente da função objetivo; e

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \text{ é a matriz Jacobiana de } \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Para a resolução deste sistema de equações não-lineares, utiliza-se o método de Newton-Raphson. Em sua forma matricial, o seguinte sistema linear é obtido

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) & \mathbf{G}(\mathbf{x})^T \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_x f(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\text{onde } \mathbf{W}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \nabla_x^2 f(\mathbf{x}) + \sum_i \lambda_i \nabla_x^2 g_i(\mathbf{x}).$$

Nas iterações em que o método de Gauss-Newton é utilizado, o último termo do lado direito desta equação é desprezado.

Ao final de cada iteração do processo, as novas estimativas para as variáveis são

determinadas como

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \varepsilon \Delta \mathbf{x}^{(k)} \\ \lambda^{(k+1)} &= \lambda^{(k)} + \varepsilon \Delta \lambda^{(k)}\end{aligned}\tag{A.5}$$

onde  $\varepsilon$  é o fator de controle de passo na direção de Newton.

Para a determinação do fator de passo ótimo  $\varepsilon$ , a função Lagrangeana

$$\mathfrak{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x})\tag{A.6}$$

é aproximada no ponto  $[\mathbf{x}^{(k)} \ \lambda^{(k)}]^T$ , ao longo da direção de Newton  $[\Delta \mathbf{x}^{(k)} \ \Delta \lambda^{(k)}]^T$ , por uma função quadrática  $\Phi(\varepsilon)$ , onde  $\varepsilon$  é um escalar que indica o comprimento de passo na direção  $[\Delta \mathbf{x} \ \Delta \lambda]^T$ . Com a utilização de três pontos  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  e  $\Phi_3$ , respectivamente, em  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$ , conforme mostrado na Figura A.1, a função de aproximação é

$$\Phi(\varepsilon) = A\varepsilon^2 + B\varepsilon + C\tag{A.7}$$

com

$$A = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\Phi_1 + \varepsilon_3\Phi_2 - \varepsilon_2\Phi_3}{\varepsilon_2\varepsilon_3(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)} \quad B = \frac{(\varepsilon_3^2 - \varepsilon_2^2)\Phi_1 - \varepsilon_3^2\Phi_2 + \varepsilon_2^2\Phi_3}{\varepsilon_2\varepsilon_3(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)} \quad C = \Phi_1\tag{A.8}$$

onde  $\Phi_i = \mathfrak{L}[\mathbf{x}^{(k)} + \varepsilon_i \Delta \mathbf{x}^{(k)}, \lambda^{(k)} + \varepsilon_i \Delta \lambda^{(k)}]$ .

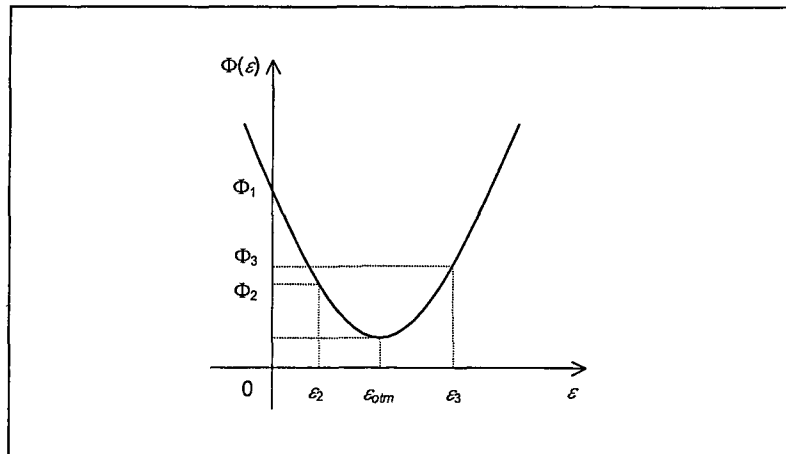


Figura A.1. Função quadrática passando por três pontos.

O valor ótimo do passo  $\varepsilon_{otm}$  é determinado de forma que  $\Phi(\varepsilon)$  tenha valor mínimo. Isto pode ser obtido derivando-se a função (A.7) em relação à  $\varepsilon$  e igualando o resultado a zero, isto é,

$$\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{otm} = \frac{(\varepsilon_3^2 - \varepsilon_2^2)\Phi_1 - \varepsilon_3^2\Phi_2 + \varepsilon_2^2\Phi_3}{2[(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)\Phi_1 - \varepsilon_3\Phi_2 + \varepsilon_2\Phi_3]} \quad (\text{A.9})$$

Além disso, para prevenir problemas nos casos em que o algoritmo de otimização possui convergência satisfatória, a aplicação deste controle de passo ao problema do Mínimo Resíduo por Newton deve levar em conta que toda vez que o valor de  $\varepsilon_{otm}$  calculado for superior a unidade, deve ser atribuído a ele o valor unitário.

Por outro lado, no presente estudo foram utilizados para  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$ , respectivamente, os valores de 0,1 e 0,2 com bastante sucesso.

### A.3 MÉTODO PRIMAL-DUAL DE PONTOS INTERIORES

Considere a seguinte formulação genérica de um problema de otimização (CARPENTIER, 1962; EL-HAWARI, 1996)

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & f(\mathbf{x}) \\
 \text{s.a.} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{h}^{\min} \leq \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{h}^{\max}
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

onde  $\mathbf{x}$ ,  $f(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  são as mesmas funções e vetores definidas na equação (A.1); e

$\mathbf{h}(\mathbf{x})$  é o vetor com as restrições de desigualdade com seus limites mínimo e máximo, respectivamente,  $\mathbf{h}^{\min}$  e  $\mathbf{h}^{\max}$ .

O tratamento das restrições de igualdade pelo método de Pontos Interiores é feito através da modificação da função objetivo. Estas restrições são incorporadas à função objetivo através dos multiplicadores de Lagrange  $\lambda$ . Por sua vez, as restrições de desigualdade são inicialmente transformadas em igualdades pela adição de variáveis de folga não-negativas  $s$ . Assim, o problema enunciado pela equação (A.10) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & f(\mathbf{x}) - \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\
 \text{s.a.} \quad & \mathbf{h}(\mathbf{x}) - s_l - \mathbf{h}^{\min} = \mathbf{0} \\
 & \mathbf{h}(\mathbf{x}) + s_u - \mathbf{h}^{\max} = \mathbf{0} \\
 & s_l, s_u > \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

A seguir, o problema apresentado na equação (A.11) pode ser transformado em um problema de otimização irrestrito utilizando-se o método de penalidade de Fiacco e McCormick (FIACCO e McCORMICK, 1968), resultando em

$$\text{Min} \quad f(\mathbf{x}) - \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mu \left( \sum_i \ln s_{l_i} + \sum_i \ln s_{u_i} \right) - \pi_l^T [\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^{\min}] - \pi_u^T [\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^{\max}] \quad (\text{A.12})$$

onde  $\lambda$  é o vetor com os multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade;

$\pi_l$  e  $\pi_u$  são os vetores com os multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade que foram transformadas em igualdade pela adição das variáveis de folga  $s_l$  e  $s_u$ ;

$\mu \left( \sum_i \ln s_{l_i} + \sum_i \ln s_{u_i} \right)$  é conhecida como função barreira logarítmica e garante a não-negatividade das variáveis de folga; e

$\mu$  é o parâmetro barreira do método de Pontos Interiores.

Analisando o problema de otimização modificado e irrestrito apresentado pela equação (A.12), pode-se definir uma função Lagrangeana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \lambda, \pi_l, \pi_u) = & f(\mathbf{x}) - \mu \left( \sum_i \ln s_{l_i} + \sum_i \ln s_{u_i} \right) - \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \\ & - \pi_l^T [\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^{\min}] - \pi_u^T [\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^{\max}] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Com a aplicação das condições de Karush-Kuhn-Tucker à equação (A.13) (BAZARAA e SHETTY, 1979; GREIG, 1980), obtém-se as condições de estacionariedade

da função Lagrangeana. Estas condições necessárias de otimalidade de primeira ordem (BARBOZA, 1997) são

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, s_l, s_u, \lambda, \pi_l, \pi_u) = 0 &\Rightarrow \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) - [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})]^T \lambda - [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T (\pi_l + \pi_u) = 0 \\
 \nabla_{s_l} \mathcal{L}(\mathbf{x}, s_l, s_u, \lambda, \pi_l, \pi_u) = 0 &\Rightarrow \mu \mathbf{e} - \mathbf{S}_l \pi_l = 0 \\
 \nabla_{s_u} \mathcal{L}(\mathbf{x}, s_l, s_u, \lambda, \pi_l, \pi_u) = 0 &\Rightarrow \mu \mathbf{e} + \mathbf{S}_u \pi_u = 0 \\
 \nabla_{\lambda} \mathcal{L}(\mathbf{x}, s_l, s_u, \lambda, \pi_l, \pi_u) = 0 &\Rightarrow -\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \\
 \nabla_{\pi_l} \mathcal{L}(\mathbf{x}, s_l, s_u, \lambda, \pi_l, \pi_u) = 0 &\Rightarrow -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) - s_l - \mathbf{h}^{min}] = 0 \\
 \nabla_{\pi_u} \mathcal{L}(\mathbf{x}, s_l, s_u, \lambda, \pi_l, \pi_u) = 0 &\Rightarrow -[\mathbf{h}(\mathbf{x}) + s_u - \mathbf{h}^{max}] = 0
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

onde  $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ ,  $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})$  e  $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})$  são os vetores gradientes de  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ , respectivamente;

$\mathbf{e}$  é um vetor unitário;

$\mathbf{S}_l$  e  $\mathbf{S}_u$  são matrizes diagonais formadas pelos elementos dos vetores  $s_l$  e  $s_u$ , respectivamente.

O método de Fiacco e McCormick (CASTRONUOVO, 1997) constrói uma trajetória o mais central possível até o ponto ótimo, penalizando a vizinhança da trajetória com os limites da região viável formada pelas restrições de desigualdade. Isto pressupõe que o ponto inicial para o processo seja interior à região viável ou, no máximo, situado na periferia desta região. Portanto, para a estimativa inicial tem-se



$$\begin{aligned}
s_l > 0 \quad \text{e} \quad s_u > 0 \\
\pi_l > 0 \quad \text{e} \quad \pi_u < 0
\end{aligned}
\tag{A.15}$$

Na versão Primal-Dual, o próximo passo é resolver as condições de Karush-Kuhn-Tucker, equações (A.14). Isto pode ser realizado utilizando-se o método de Newton-Raphson, o que resulta na solução do seguinte sistema linear de equações

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{x}, \lambda, \pi_l, \pi_u) \Delta \mathbf{x} - [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})]^T \Delta \lambda - [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T \Delta \pi_l - [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T \Delta \pi_u &= -\mathbf{t} \\
-\Pi_l \Delta s_l - \mathbf{S}_l \Delta \pi_l &= -(\mu \mathbf{e} - \mathbf{S}_l \pi_l) \\
\Pi_u \Delta s_u + \mathbf{S}_u \Delta \pi_u &= -(\mu \mathbf{e} + \mathbf{S}_u \pi_u) \\
-\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\
-\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \Delta s_l &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) - s_l - \mathbf{h}^{\min} \\
-\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - \Delta s_u &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) + s_u - \mathbf{h}^{\max}
\end{aligned}
\tag{A.16}$$

onde  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \lambda, \pi_l, \pi_u) \equiv \nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x}) - \sum_i \lambda_i \nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x}) - \sum_j (\pi_{l_j} + \pi_{u_j}) \nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x})$  é a matriz Hessiana

da função Lagrangeana em relação às variáveis de otimização;

$\nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\mathbf{x})$ ,  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 g_i(\mathbf{x})$  e  $\nabla_{\mathbf{x}}^2 h_j(\mathbf{x})$  são as matrizes Hessianas de  $f(\mathbf{x})$ ,  $g_i(\mathbf{x})$  e  $h_j(\mathbf{x})$ , respectivamente;

$$\mathbf{t} \equiv \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, s_l, s_u, \lambda, \pi_l, \pi_u);$$

$\Pi_l$  e  $\Pi_u$  são matrizes diagonais formadas pelos elementos dos vetores  $\pi_l$  e  $\pi_u$ , respectivamente.

O sistema de equações lineares formado pelas equações (A.16) pode ser reescrito

em forma matricial, resultando em

$$\mathbf{W}(x, s_l, s_u, \lambda, \pi_l, \pi_u) \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta s_l \\ \Delta s_u \\ \Delta \lambda \\ \Delta \pi_l \\ \Delta \pi_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -(\mu e - S_l \pi_l) \\ -(\mu e + S_u \pi_u) \\ g(x) \\ h(x) - s_l - h^{\min} \\ h(x) + s_u - h^{\max} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

com

$$\mathbf{W}(x, s_l, s_u, \lambda, \pi_l, \pi_u) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{H}(x, \lambda, \pi_l, \pi_u) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -[\nabla_x g(x)]^T & -[\nabla_x h(x)]^T & -[\nabla_x h(x)]^T \\ \mathbf{0} & -\Pi_l & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -S_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Pi_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & S_u \\ -\nabla_x g(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\nabla_x h(x) & \mathbf{U} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\nabla_x h(x) & \mathbf{0} & -\mathbf{U} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

onde  $\mathbf{U}$  é a matriz identidade.

Uma vez resolvida a equação matricial (A.17) e obtidos os incrementos nas variáveis primais e duais, a próxima etapa é determinar os comprimentos dos passos nos espaços primal e dual de modo a garantir a não-negatividade das variáveis de folga e os sinais dos multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade. Isto é feito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \gamma_P &= \min \left[ \min_{\Delta s_{l_i} < 0} \frac{s_{l_i}}{|\Delta s_{l_i}|} \quad \min_{\Delta s_{u_i} < 0} \frac{s_{u_i}}{|\Delta s_{u_i}|} \quad 1,0 \right] \\ \gamma_D &= \min \left[ \min_{\Delta \pi_{l_j} < 0} \frac{\pi_{l_j}}{|\Delta \pi_{l_j}|} \quad \min_{\Delta \pi_{u_j} > 0} \frac{-\pi_{u_j}}{|\Delta \pi_{u_j}|} \quad 1,0 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

A nova aproximação da solução ótima é, então, obtida por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \sigma \gamma_P \Delta \mathbf{x}^{(k)} \\ \mathbf{s}_l^{(k+1)} &= \mathbf{s}_l^{(k)} + \sigma \gamma_P \Delta \mathbf{s}_l^{(k)} \\ \mathbf{s}_u^{(k+1)} &= \mathbf{s}_u^{(k)} + \sigma \gamma_P \Delta \mathbf{s}_u^{(k)} \\ \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} &= \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \sigma \gamma_D \Delta \boldsymbol{\lambda}^{(k)} \\ \boldsymbol{\pi}_l^{(k+1)} &= \boldsymbol{\pi}_l^{(k)} + \sigma \gamma_D \Delta \boldsymbol{\pi}_l^{(k)} \\ \boldsymbol{\pi}_u^{(k+1)} &= \boldsymbol{\pi}_u^{(k)} + \sigma \gamma_D \Delta \boldsymbol{\pi}_u^{(k)} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

onde  $\sigma$  é uma constante que tem por finalidade garantir que as variáveis  $\mathbf{s}$  e  $\boldsymbol{\pi}$  não assumam valores iguais a zero (YAN e QUINTANA, 1997). A literatura recomenda a utilização de um valor igual a 0,9995 que, na prática, mostra-se satisfatório.

Finalmente, o método de penalidades de Fiacco e McCormick estabelece que o parâmetro barreira deve diminuir durante o processo iterativo, tendendo a zero na convergência. Em programação linear espera-se que a taxa de decaimento de  $\mu$  seja da ordem do sistema. Por outro lado, em programação não-linear, devido às não-linearidades das restrições, isto já não acontece. Introduce-se, então, no cálculo do parâmetro barreira, uma constante  $\beta > 1,0$  que controla o decréscimo de  $\mu$ . Segundo GRANVILLE et al. (1994), este parâmetro deve situar-se entre 10,0 e 20,0 e observa-se que valores muito elevados podem

interferir no processo de convergência do método. Assim sendo, a expressão para o cálculo do valor do parâmetro barreira ao final de cada iteração é

$$\mu = \frac{s_l^T \pi_l - s_u^T \pi_u}{2n\beta} \quad (\text{A.21})$$

onde  $n$  é o número de variáveis ou funções que possuam limites; e

o numerador da equação (A.21), conhecido como *gap de complementariedade*, estima a distância entre os problemas primal e dual a cada iteração.

A Figura A.2 apresenta o algoritmo para a resolução de um problema de otimização via método de Pontos Interiores versão Primal-Dual.

- |  |
|--|
| <p>0. Inicialização das variáveis.</p> <p>1. Cálculo do vetor gradiente da função Lagrangeana aumentada, equação (A.13).</p> <p>2. Teste das condições de convergência (norma euclidiana do vetor gradiente e valor de <math>\mu</math>).<br/>Se os critérios de convergência forem satisfeitos, então a solução ótima foi encontrada.<br/>Caso contrário, prosseguir ao Passo 3.</p> <p>3. Cálculo e fatoração da matriz <math>\mathbf{W}</math>, equação (A.18).</p> <p>4. Solução do sistema linear, equação (A.17).</p> <p>5. Determinação dos comprimentos dos passos nos espaços primal e dual, equações (A.19).</p> <p>6. Atualização das variáveis de otimização, equação (A.20).</p> <p>7. Cálculo do novo valor do parâmetro barreira <math>\mu</math>, equação (A.21).</p> <p>Retorno ao Passo 1.</p> |
|--|

**Figura A.2. Algoritmo para o método de Pontos Interiores Primal-Dual.**

## A.4 MÉTODO PREDITOR-CORRETOR DO PRIMAL-DUAL DE PONTOS INTERIORES

Uma formulação alternativa do método de Pontos Interiores foi apresentada em MIZUNO et al. (1989) e reformulada em MEHROTRA (1992). Esta formulação ficou conhecida como Preditor-Corretor do Primal-Dual de Pontos Interiores. Estudos realizados por ZHANG e ZHANG (1995) e TAPIA et al. (1996) discutem cuidadosamente esta formulação e apresentam as principais características analíticas desta metodologia.

A diferença fundamental entre as versões Primal-Dual e Preditor-Corretor consiste em que, no Primal-Dual simplesmente aplica-se o método de Newton-Raphson para a obtenção dos pontos estacionários da função Lagrangeana, ou seja, os pontos que satisfazem as condições de Karush-Kuhn-Tucker, equações (A.14). Portanto, inicia-se um processo iterativo em que a cada iteração uma nova aproximação deste ponto ótimo é obtida.

Por outro lado, na versão Preditor-Corretor, além de buscar a cada iteração uma melhor aproximação para a solução ótima, substitui-se esta nova aproximação diretamente nas condições de KKT.

Considere que, a cada iteração, a nova aproximação para as variáveis de otimização seja

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} & \mathbf{s}_l + \Delta \mathbf{s}_l & \mathbf{s}_u + \Delta \mathbf{s}_u \\
 \boldsymbol{\lambda} + \Delta \boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{\pi}_l + \Delta \boldsymbol{\pi}_l & \boldsymbol{\pi}_u + \Delta \boldsymbol{\pi}_u
 \end{array} \tag{A.22}$$

onde os vetores  $\Delta$ 's contém os incrementos nas respectivas variáveis de otimização.

Substituindo estas novas estimativas nas condições de KKT expressas nas equações (A.14), obtém-se

$$\begin{aligned}
& \nabla_x f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - [\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})]^T (\lambda + \Delta \lambda) - [\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})]^T [(\pi_l + \Delta \pi_l) + (\pi_u + \Delta \pi_u)] = \mathbf{0} \\
& \mu \mathbf{e} - (\mathbf{S}_l + \Delta \mathbf{S}_l)(\pi_l + \Delta \pi_l) = \mathbf{0} \\
& \mu \mathbf{e} + (\mathbf{S}_u + \Delta \mathbf{S}_u)(\pi_u + \Delta \pi_u) = \mathbf{0} \\
& -\mathbf{g}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
& -[\mathbf{h}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - (s_l + \Delta s_l) - \mathbf{h}^{min}] = \mathbf{0} \\
& -[\mathbf{h}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) + (s_u + \Delta s_u) - \mathbf{h}^{max}] = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Os termos não-lineares das equações (A.23) podem ser aproximados em primeira ordem por uma série de Taylor, da qual obtém-se

$$\begin{aligned}
& \nabla_x f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \nabla_x f(\mathbf{x}) + \nabla_x^2 f(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \\
& \nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \nabla_x^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \\
& \nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \nabla_x^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \\
& \mathbf{g}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \\
& \mathbf{h}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}
\end{aligned} \tag{A.24}$$

A substituição das equações (A.24) na primeira das equações (A.23) resulta em

$$\begin{aligned}
& \nabla_x f(\mathbf{x}) + \nabla_x^2 f(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - [\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \nabla_x^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}]^T (\lambda + \Delta \lambda) + \\
& \quad - [\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \nabla_x^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}]^T [(\pi_l + \Delta \pi_l) + (\pi_u + \Delta \pi_u)] = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla_x f(\mathbf{x}) + \nabla_x^2 f(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - [\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x})]^T \boldsymbol{\lambda} - [\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x})]^T \Delta \boldsymbol{\lambda} - [\nabla_x^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}]^T \boldsymbol{\lambda} - [\nabla_x^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}]^T \Delta \boldsymbol{\lambda} + \\
& \quad - [\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T (\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u) - [\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T \Delta \boldsymbol{\pi}_l - [\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T \Delta \boldsymbol{\pi}_u + \\
& \quad - [\nabla_x^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}]^T (\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u) - [\nabla_x^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}]^T (\Delta \boldsymbol{\pi}_l + \Delta \boldsymbol{\pi}_u) = 0
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Na equação acima, os termos que envolvem tensores podem ser reescritos sob a seguinte forma

$$\begin{aligned}
[\nabla_x^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}]^T \boldsymbol{\lambda} &= \sum_i [\lambda_i \nabla_x^2 \mathbf{g}_i(\mathbf{x})] \cdot \Delta \mathbf{x} \\
[\nabla_x^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}]^T \Delta \boldsymbol{\lambda} &= \sum_i [\Delta \lambda_i \nabla_x^2 \mathbf{g}_i(\mathbf{x})] \cdot \Delta \mathbf{x} \\
[\nabla_x^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}]^T (\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u) &= \sum_j [(\pi_{l_j} + \pi_{u_j}) \nabla_x^2 h_j(\mathbf{x})] \cdot \Delta \mathbf{x} \\
[\nabla_x^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}]^T (\Delta \boldsymbol{\pi}_l + \Delta \boldsymbol{\pi}_u) &= \sum_j [(\Delta \pi_{l_j} + \Delta \pi_{u_j}) \nabla_x^2 h_j(\mathbf{x})] \cdot \Delta \mathbf{x}
\end{aligned} \tag{A.26}$$

A substituição das equações (A.26) na equação (A.25) e manipulações algébricas pertinentes resultam em que a primeira equação das equações (A.23) transforma-se em

$$\begin{aligned}
& \left[ \nabla_x^2 f(\mathbf{x}) - \sum_i \lambda_i \nabla_x^2 \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) - \sum_j (\pi_{l_j} + \pi_{u_j}) \nabla_x^2 h_j(\mathbf{x}) \right] \Delta \mathbf{x} - [\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x})]^T \Delta \boldsymbol{\lambda} + \\
& \quad - [\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T \Delta \boldsymbol{\pi}_l - [\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T \Delta \boldsymbol{\pi}_u = \\
& = -\{ \nabla_x f(\mathbf{x}) - [\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x})]^T \boldsymbol{\lambda} - [\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T (\boldsymbol{\pi}_l + \boldsymbol{\pi}_u) \} + \\
& \quad + \left[ \sum_i \Delta \lambda_i \nabla_x^2 \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) + \sum_j (\Delta \pi_{l_j} + \Delta \pi_{u_j}) \nabla_x^2 h_j(\mathbf{x}) \right] \Delta \mathbf{x}
\end{aligned} \tag{A.27}$$

A segunda e a terceira equações das equações (A.23) são expressas como

$$\begin{aligned}
-\Pi_l \Delta s_l - S_l \Delta \pi_l &= -(\mu e - S_l \pi_l) + \Delta S_l \Delta \pi_l \\
\Pi_u \Delta s_u + S_u \Delta \pi_u &= -(\mu e + S_u \pi_u) - \Delta S_u \Delta \pi_u
\end{aligned} \tag{A.28}$$

A quarta equação das equações (A.23) é escrita como

$$-\nabla_x g(x) \Delta x = g(x) \tag{A.29}$$

E as duas últimas equações das equações (A.23) podem ser expressas como

$$\begin{aligned}
-\nabla_x h(x) \Delta x + \Delta s_l &= h(x) - s_l - h^{min} \\
-\nabla_x h(x) \Delta x - \Delta s_u &= h(x) + s_u - h^{max}
\end{aligned} \tag{A.30}$$

Combinando as equações (A.27), (A.28), (A.29) e (A.30) e usando a forma matricial, é possível escrever

$$\mathbf{W}(x, s_l, s_u, \lambda, \pi_l, \pi_u) \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta s_l \\ \Delta s_u \\ \Delta \lambda \\ \Delta \pi_l \\ \Delta \pi_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t + z \\ -(\mu e - S_l \pi_l) + \Delta S_l \Delta \pi_l \\ -(\mu e + S_u \pi_u) - \Delta S_u \Delta \pi_u \\ g(x) \\ h(x) - s_l - h^{min} \\ h(x) + s_u - h^{max} \end{bmatrix} \tag{A.31}$$

$$\text{com } t \equiv \nabla_x f(x) - [\nabla_x g(x)]^T \lambda - [\nabla_x h(x)]^T (\pi_l + \pi_u) \tag{A.32}$$



$$z \equiv \left[ \sum_i \Delta \lambda_i \nabla_x^2 g_i(\mathbf{x}) + \sum_j (\Delta \pi_{l_j} + \Delta \pi_{u_j}) \nabla_x^2 h_j(\mathbf{x}) \right] \Delta \mathbf{x} \quad (\text{A.33})$$

$$W(\mathbf{x}, s_l, s_u, \lambda, \pi_l, \pi_u) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \lambda, \pi_l, \pi_u) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -[\nabla_x g(\mathbf{x})]^T & -[\nabla_x h(\mathbf{x})]^T & -[\nabla_x h(\mathbf{x})]^T \\ \mathbf{0} & -\Pi_l & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -S_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Pi_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & S_u \\ -\nabla_x g(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\nabla_x h(\mathbf{x}) & \mathbf{U} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\nabla_x h(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & -\mathbf{U} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, \lambda, \pi_l, \pi_u) \equiv \nabla_x^2 f(\mathbf{x}) - \sum_i \lambda_i \nabla_x^2 g_i(\mathbf{x}) - \sum_j (\pi_{l_j} + \pi_{u_j}) \nabla_x^2 h_j(\mathbf{x}) \quad (\text{A.35})$$

onde  $\mathbf{U}$  é a matriz identidade.

É importante observar que as matrizes do sistemas lineares das formulações Primal-Dual, equação (A.17), e Preditor-Corretor, equação (A.31) são as mesmas. Comparando estas equações, percebe-se que a diferença entre elas está no vetor do lado direito do sistema a ser resolvido. Na versão Preditor-Corretor, este vetor apresenta termos não-lineares nos vetores  $\mathbf{z}$  e  $\Delta \mathbf{S} \Delta \boldsymbol{\pi}$ . Devido a estes termos, o vetor do lado direito da equação (A.31) não pode ser determinado diretamente e, portanto, a equação (A.31) pode ser resolvida apenas de forma aproximada. Além disso, sob o ponto de vista de programação não-linear, o vetor  $\mathbf{z}$  pode ser desprezado na avaliação do vetor do lado direito do sistema linear, sem perda considerável das características de convergência do método (WU et al., 1994; IRISARRI et al., 1997).

Dessa forma, para estimar os termos não-lineares  $\Delta \mathbf{S}_l \Delta \boldsymbol{\pi}_l$  e  $\Delta \mathbf{S}_u \Delta \boldsymbol{\pi}_u$ , MEHROTRA (1992) sugere primeiramente fazer uma etapa de *predição* na qual resolve-se o problema original, ou seja, desprezando a influência da função barreira logarítmica. Nesta etapa, a

equação matricial a ser resolvida é

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u, \lambda, \boldsymbol{\pi}_l, \boldsymbol{\pi}_u) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{s}_l \\ \Delta \mathbf{s}_u \\ \Delta \lambda \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_l \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ \mathbf{S}_l \boldsymbol{\pi}_l \\ -\mathbf{S}_u \boldsymbol{\pi}_u \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_l - \mathbf{h}^{\min} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}_u - \mathbf{h}^{\max} \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

Após a solução do sistema linear acima, o parâmetro barreira e os termos não-lineares podem ser estimados e o lado direito da equação (A.31) pode ser determinado. WU et al. (1993) sugere que o cálculo dinâmico do parâmetro barreira seja efetuado como

$$\mu = \left( \frac{\tilde{g}\tilde{a}p}{gap} \right)^2 \left( \frac{\tilde{g}\tilde{a}p}{2n} \right) \quad (\text{A.37})$$

onde  $gap = \mathbf{s}_l^T \boldsymbol{\pi}_l - \mathbf{s}_u^T \boldsymbol{\pi}_u$  é o gap de complementariedade sem atualização das variáveis;

$\tilde{g}\tilde{a}p = (\mathbf{s}_l + \tilde{\gamma} \Delta \mathbf{s}_l)^T (\boldsymbol{\pi}_l + \tilde{\gamma} \Delta \boldsymbol{\pi}_l) - (\mathbf{s}_u + \tilde{\gamma} \Delta \mathbf{s}_u)^T (\boldsymbol{\pi}_u + \tilde{\gamma} \Delta \boldsymbol{\pi}_u)$  é o gap de complementariedade com atualização das variáveis; e

$$\tilde{\gamma} = \min \left[ \min_{\Delta s_{l_i} < 0} \frac{s_{l_i}}{|\Delta s_{l_i}|}, \min_{\Delta s_{u_i} < 0} \frac{s_{u_i}}{|\Delta s_{u_i}|}, \min_{\Delta \pi_{l_j} < 0} \frac{\pi_{l_j}}{|\Delta \pi_{l_j}|}, \min_{\Delta \pi_{u_j} > 0} \frac{-\pi_{u_j}}{|\Delta \pi_{u_j}|} \right] \quad (\text{A.38})$$

Para determinar a direção de busca da iteração corrente para a atualização das variáveis de otimização, realiza-se a etapa de *correção*. Nesta etapa, o sistema linear apre-

sentado na equação (A.31) é resolvido com o vetor do lado direito re-estimado. Obtidos os incrementos nas variáveis de otimização, a seqüência passa a ser a mesma do Primal-Dual. Determinam-se os comprimentos dos passos nos espaços primal e dual, equações (A.19), atualizam-se as variáveis, equações (A.20), e calcula-se o novo valor do parâmetro barreira, equação (A.21).

Em relação às formulações apresentadas em MIZUNO et al. (1989) e MEHROTRA (1992), a característica comum às duas abordagens é que o valor do parâmetro barreira na etapa de correção depende do seu valor na etapa de predição. A diferença fundamental entre elas é que, na etapa de correção, o algoritmo de MEHROTRA não avalia a matriz  $\mathbf{W}(x, s_l, s_u, \lambda, \pi_l, \pi_u)$  novamente. Este algoritmo utiliza a mesma matriz fatorada na etapa de predição. Portanto, é importante notar que ao realizarem-se as duas etapas, como a matriz do sistema linear é a mesma, apenas um processo de fatoração é executado na etapa de predição do algoritmo. Na etapa de correção, a resolução do sistema linear requer apenas o processo de substituição direta e inversa.

A Figura A.3 apresenta o algoritmo para a resolução de um problema de otimização utilizando o método do Preditor-Corretor do Primal-Dual de Pontos Interiores.

0. Inicialização da variáveis.
1. Cálculo do vetor gradiente da função Lagrangeana aumentada, equação (A.14).
2. Teste das condições de convergência (norma euclidiana do vetor gradiente e valor de  $\mu$ ).  
Se os critérios de convergência forem satisfeitos, então a solução ótima foi encontrada.  
Caso contrário, prosseguir ao Passo 3.
3. Cálculo e fatoração da matriz  $W$ , equação (A.18).
4. Etapa de predição: resolução da equação (A.36).  
Cálculo dos termos não-lineares e estimação dinâmica do valor de  $\mu$ , equação (A.37).
5. Etapa de correção: resolução da equação (A.31).
6. Determinação dos comprimentos dos passos nos espaços primal e dual, equações (A.19).
7. Atualização das variáveis de otimização, equações (A.20).
8. Cálculo do novo valor do parâmetro barreira  $\mu$ , equação (A.21).  
Retorno ao Passo 1.

Figura A.3. Algoritmo para o método Preditor-Corretor do Primal-Dual de Pontos Interiores.

## A.5 ETAPA DE PREDIÇÃO DO ALGORITMO

### PREDITOR-CORRETOR DO PRIMAL-DUAL

#### DE PONTOS INTERIORES

Conforme indicado na seção anterior, na etapa de *predição* do algoritmo Preditor-Corretor resolve-se o problema original de otimização sem considerar a função barreira logarítmica. É sugerido que o sistema linear a ser resolvido nesta etapa seja aquele representado pela equação (A.36). Nesta seção será mostrado matematicamente como este sistema linear é obtido.

Considere o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & f(\mathbf{x}) \\
\text{s.a.} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
& \mathbf{h}^{\min} \leq \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{h}^{\max}
\end{aligned} \tag{A.39}$$

As condições de Karush-Kuhn-Tucker associadas a este problema são

$$\begin{aligned}
\nabla_x f(\mathbf{x}) - [\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x})]^T \lambda - [\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T (\pi_l + \pi_u) &= \mathbf{0} \\
-\mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\
-\Pi_l[\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{\min}] &= \mathbf{0} \\
-\Pi_u[\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{\max}] &= \mathbf{0} \\
\pi_l \geq \mathbf{0} \text{ e } \pi_u \leq \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{A.40}$$

Para introduzir as variáveis de folga nas condições de KKT, deve ser lembrado que

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(\mathbf{x}) - s_l - \mathbf{h}^{\min} = \mathbf{0} & \Rightarrow s_l = \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}^{\min} \\
\mathbf{h}(\mathbf{x}) + s_u - \mathbf{h}^{\max} = \mathbf{0} & \Rightarrow s_u = -\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{h}^{\max}
\end{aligned} \tag{A.41}$$

Dessa forma, as condições de KKT podem ser escritas da seguinte forma

$$\begin{aligned}
& \nabla_x f(\mathbf{x}) - [\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x})]^T \lambda - [\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T (\pi_l + \pi_u) = \mathbf{0} \\
& -\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
& -\Pi_l s_l = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad -\mathbf{S}_l \pi_l = \mathbf{0} \\
& \Pi_u s_u = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \mathbf{S}_u \pi_u = \mathbf{0} \\
& \mathbf{h}(\mathbf{x}) - s_l - h^{\min} = 0 \\
& \mathbf{h}(\mathbf{x}) + s_u - h^{\max} = 0
\end{aligned} \tag{A.42}$$

O uso do método de Newton-Raphson para resolver o sistema não-linear de equações (A.42) resulta na solução, a cada iteração, do seguinte sistema linear

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, s_l, s_u, \lambda, \pi_l, \pi_u) \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta s_l \\ \Delta s_u \\ \Delta \lambda \\ \Delta \pi_l \\ \Delta \pi_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ \mathbf{S}_l \pi_l \\ -\mathbf{S}_u \pi_u \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) - s_l - h^{\min} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) + s_u - h^{\max} \end{bmatrix} \tag{A.43}$$

$$\text{onde } t \equiv \nabla_x f(\mathbf{x}) - [\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x})]^T \lambda - [\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T (\pi_l + \pi_u) \tag{A.44}$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, s_l, s_u, \lambda, \pi_l, \pi_u) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \lambda, \pi_l, \pi_u) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -[\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x})]^T & -[\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T & -[\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T \\ \mathbf{0} & -\Pi_l & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{S}_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Pi_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_u \\ -\nabla_x \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{U} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\nabla_x \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & -\mathbf{U} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{A.45}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, \lambda, \pi_l, \pi_u) \equiv \nabla_x^2 f(\mathbf{x}) - \sum_i \lambda_i \nabla_x^2 g_i(\mathbf{x}) - \sum_j (\pi_{l_j} + \pi_{u_j}) \nabla_x^2 h_j(\mathbf{x}) \tag{A.46}$$

Portanto, a equação matricial mostrada em (A.43) é aquela correspondente à etapa de predição. Sua solução torna possível avaliar os termos não-lineares presentes na equação (A.31) bem como estimar dinamicamente o valor do parâmetro barreira  $\mu$  para a iteração corrente.

## A.6 REDUÇÃO NA DIMENSÃO DO SISTEMA LINEAR DO MÉTODO DE PONTOS INTERIORES

Em problemas de Fluxo de Potência Ótimo, o sistema de equações lineares da equação (A.16) possui uma dimensão bastante elevada (de 6 a 10 vezes o número de barras). Esta dimensão aumenta com o número de restrições de desigualdade. Em GRANVILLE et al. (1994) é proposta uma forma de reduzir a dimensão deste sistema linear e torná-la independente do número de restrições de desigualdade.

Por conveniência da análise, defina-se os seguintes vetores

$$\begin{aligned}
 v_l &\equiv \mu e - S_l \pi_l \\
 v_u &\equiv \mu e + S_u \pi_u \\
 y_l &\equiv h(x) - s_l - h^{min} \\
 y_u &\equiv h(x) + s_u - h^{max}
 \end{aligned}
 \tag{A.47}$$

Com isso, a segunda, a terceira, a quinta e a sexta equações das equações (A.16) podem ser escritas da seguinte forma

$$\begin{aligned}
-\Pi_l \Delta s_l - S_l \Delta \pi_l &= -v_l \\
\Pi_u \Delta s_u + S_u \Delta \pi_u &= -v_u \\
-\nabla_x h(x) \Delta x + \Delta s_l &= y_l \\
-\nabla_x h(x) \Delta x - \Delta s_u &= y_u
\end{aligned} \tag{A.48}$$

Das duas últimas equações da equação (A.48), pode-se inferir que

$$\begin{aligned}
\Delta s_l &= y_l + \nabla_x h(x) \Delta x \\
\Delta s_u &= -y_u - \nabla_x h(x) \Delta x
\end{aligned} \tag{A.49}$$

e com a substituição das equações (A.49) nas duas primeiras equações da equação (A.48) resulta que

$$\begin{aligned}
\Delta \pi_l &= S_l^{-1} (v_l - \Pi_l y_l) - S_l^{-1} \Pi_l \nabla_x h(x) \Delta x \\
\Delta \pi_u &= -S_u^{-1} (v_u - \Pi_u y_u) - S_u^{-1} \Pi_u \nabla_x h(x) \Delta x
\end{aligned} \tag{A.50}$$

Substituindo as equações (A.50) na primeira equação das equações (A.16) e procedendo manipulações algébricas adequadas, obtém-se

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{H}(x, \lambda, \pi_l, \pi_u) + [\nabla_x h(x)]^T (S_l^{-1} \Pi_l - S_u^{-1} \Pi_u) \nabla_x h(x)\} \Delta x - [\nabla_x g(x)]^T \Delta \lambda = \\
= -t + [\nabla_x h(x)]^T [S_l^{-1} (v_l - \Pi_l y_l) - S_u^{-1} (v_u - \Pi_u y_u)]
\end{aligned} \tag{A.51}$$

Fazendo-se, por definição,



$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, s_l, s_u, \lambda, \pi_l, \pi_u) &\equiv \mathbf{H}(\mathbf{x}, \lambda, \pi_l, \pi_u) + [\nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x})]^T (\mathbf{S}_l^{-1} \Pi_l - \mathbf{S}_u^{-1} \Pi_u) \nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}) \\ \tilde{\mathbf{t}} &\equiv -\mathbf{t} + [\nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x})]^T [\mathbf{S}_l^{-1} (\mathbf{v}_l - \Pi_l \mathbf{y}_l) - \mathbf{S}_u^{-1} (\mathbf{v}_u - \Pi_u \mathbf{y}_u)]\end{aligned}\quad (\text{A.52})$$

a equação (A.51) transforma-se em

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, s_l, s_u, \lambda, \pi_l, \pi_u) \Delta \mathbf{x} - [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})]^T \Delta \lambda = \tilde{\mathbf{t}} \quad (\text{A.53})$$

a qual, juntamente com a quarta equação das equações (A.16), forma o sistema linear reduzido

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, s_l, s_u, \lambda, \pi_l, \pi_u) & -[\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})]^T \\ -\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{t}} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.54})$$

A dimensão deste sistema reduzido pode ser até 50% inferior à dimensão do sistema linear completo e independente do número de restrições de desigualdade modeladas no problema de otimização. Analisando a equação (A.54) pode-se concluir que a dimensão do sistema linear reduzido é a soma do número de variáveis de otimização com o número de restrições de igualdade modeladas no problema. No estudo realizado em BARBOZA (1997), é mostrado que, do ponto de vista computacional, a implementação da redução no sistema linear é consideravelmente proveitosa em termos de tempo de processamento.

A dedução de relações matemáticas para a redução da dimensão do sistema linear foi feita tomando-se como base as equações do método Primal-Dual. Para a versão Preditor-Corretor, por analogia, pode-se agir de forma semelhante. Apenas algumas alterações

devem ser observadas, isto é:

- na etapa de predição:  $v_l = -S_l \pi_l$

$$v_u = S_u \pi_u$$

- na etapa de correção:  $v_l = -(\mu e - S_l \pi_l) + \Delta S_l \Delta \pi_l$

$$v_u = -(\mu e + S_u \pi_u) + \Delta S_u \Delta \pi_u$$

## A.7 CONCLUSÕES

Neste apêndice, aspectos teóricos dos principais algoritmos matemáticos utilizados no presente trabalho foram apresentados.

Para aumentar a robustez do método de Newton de otimização, uma versão modificada pode ser utilizada, a qual consiste basicamente no controle da magnitude do passo na direção de busca ao longo das iterações e no uso de iterações Gauss-Newton no início do processo iterativo.

Na formulação do algoritmo Primal-Dual de Pontos Interiores, observa-se a incorporação da função barreira logarítmica como uma forma de modelar-se as restrições de desigualdade no problema de otimização.

O algoritmo Preditor-Corretor do Primal-Dual consiste na substituição direta do novo ponto nas condições de KKT. Cada iteração deste método é subdividida em duas etapas: (i) etapa de Predição, na qual o problema original é resolvido e os termos não-lineares e o parâmetro barreira são estimados dinamicamente; (ii) etapa de Correção, na qual o sistema proveniente da substituição do novo ponto nas condições de KKT é resolvido e os

incrementos nas variáveis são obtidos.

Um esquema de eliminação de variáveis reduz a dimensão do sistema linear, tornando-a independente do número de restrições de desigualdade no problema de otimização. A dimensão deste sistema passa a ser função apenas do número de variáveis de otimização e do número de restrições de igualdade. Este esquema, em alguns casos, consegue diminuir em até 50% a ordem do sistema linear (BARBOZA, 1997). Desde que uma das tarefas que exige maior esforço computacional é aquela relativa ao processo de fatoração das matrizes dos sistemas lineares, esta redução agiliza em muito o tempo de convergência dos métodos. Portanto, embora cada iteração do método Preditor-Corretor seja computacionalmente mais dispendiosa, os tempos finais de cálculo são significativamente menores (WU et al., 1994; IRISARRI et al., 1997), o que encoraja os pesquisadores desta área a optarem por esta versão.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABE, S.; HAMADA, N.; ISONO, A.; OKUDA, K.; 1978. Load Flow Convergence in the Vicinity of a Voltage Stability Limit. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, New York, Vol. PAS-97, Nº 6, November/December, p. 1983-1993.
- AJJARAPU, V.; CHRISTY, C.; 1992. The Continuation Power Flow: a Tool for Steady State Voltage Stability Analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, Vol. 7, Nº 1, February, p. 416-423.
- ARAPOSTHATIS, A.; SASTRY, S.; VARAIYA, P.; 1981. Analysis of the Power Flow Equation. *Journal of Electrical Power Energy Systems*, New York, Vol. 3, July, p. 115-126.
- ASCHER, U. M.; MATTHEIJ, R. M. M.; RUSSEL, R. D.; 1987. *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*. New Jersey : Prentice-Hall Inc.
- BARBOZA, Luciano Vitoria; 1997. *Análise do Máximo Carregamento de Sistemas de Potência via Métodos de Pontos Interiores*. Florianópolis. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina.

- BARBOZA, L. V.; SALGADO, R.; ALMEIDA, K. C.; 1998. Estudo do Máximo Carregamento de Sistemas de Potência via Algoritmos de Pontos Interiores. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA (12<sup>o</sup> : Setembro 1998 : Uberlândia, Brasil). *Anais*. Uberlândia, 1998. Vol. 6, p. 2005-2010.
- BARBOZA, L. V.; SALGADO, R.; 2000a. Restauração da Solução das Equações da Rede Elétrica: Uma abordagem Baseada na Mínima Distância. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA (13<sup>o</sup> : Setembro 2000 : Florianópolis, Brasil). *Anais*. Florianópolis, 2000. p. 169-174.
- BARBOZA, L. V.; SALGADO, R.; 2000b. Corrective Solutions of Steady State Power System via Newton Optimization Method. *Revista SBA Controle & Automação*, São Paulo, Vol. 11, Nº 3, Setembro/Outubro/Novembro/Dezembro, p. 182-186.
- BARBOZA, L. V.; SALGADO, R.; 2000c. Restoring Power Flow Solutions via Minimum Load Shedding. In: INDUSTRY APPLICATIONS CONFERENCE (4<sup>th</sup> : November 2000 : Porto Alegre, Brazil). *Proceedings*. Porto Alegre, 2000. p. 802-806.
- BAZARAA, M. S.; SHETTY, C. M.; 1979. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. New York : John Wiley & Sons.
- CAÑIZARES, C. A.; ALVARADO, F. L.; DE MARCO, C. L.; DOBSON, I.; LONG, W. F.; 1992. Point of Collapse Methods Applied to AC/DC Power Systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, Vol. 7, Nº 2, May, p. 673-683.

- CAÑIZARES, C. A.; ALVARADO, F. L.; 1993. Point of Collapse and Continuation Methods for Large AC/DC Systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, Vol. 8, Nº 1, February, p. 1-8.
- CARPENTIER, J. ; 1962. Contribution a l'Étude du Dispatching Économique. *Bulletin de la Société Française des Électriciens*, Paris, Ser. 8, Vol. 3, Août, p. 431-447.
- CASTRO, C. A.; BRAZ, L. M. C.; 1997. Uma Nova Abordagem para a Solução do Problema de Fluxo de Carga pelo Método de Newton com Otimização de Passo. *Revista SBA Controle & Automação*, São Paulo, Vol. 8, Nº 3, Setembro/Outubro/Novembro/Dezembro, p. 121-133.
- CASTRONUOVO, Edgardo Daniel; 1997. *Solução de Fluxo de Potência Ótimo via Método de Pontos Interiores com Aplicação de Computação de Alto Desempenho*. Florianópolis. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina.
- CHIANG, H. D.; FLUECK, A. J.; SHAH, K. S.; BALU, N.; 1995. CPFLOW: A Practical Tool for Tracing Power System Steady State Stationary Behavior Due to Load and Generation Variations. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, Vol. 10, Nº 2, May, p. 623-634.

CLEMENTS, K. A.; DAVIS, P. W.; FREY, K. D.; 1991. Power System State Estimation with Inequality Constraints. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON CIRCUITS AND SYSTEMS (June 1991 : Singapore). *Proceedings*. Singapore, 1991, Vol. 2, p. 990-993.

DEHNEL, M.; DOMMEL, H. W.; 1989. A Method for Identifying Weak Nodes in Non-convergent Load Flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, Vol. 4, Nº 2, May, p. 801-807.

DENNIS Jr., J. E.; SCHNABEL, R. B.; 1983. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. New Jersey : Prentice-Hall Inc.

DOBSON, I.; LU, L.; HU, Y.; 1991. A Direct Method for Computing a Closest Saddle Node Bifurcation in the Load Power Parameter Space of an Electric Power System. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON CIRCUITS AND SYSTEMS (June 1991 : Singapore). *Proceedings*. Singapore, 1991. Vol. 5, p. 3019-3022.

DOBSON, I.; 1992. Observations on the Geometry of Saddle Node Bifurcation and Voltage Collapse in Electrical Power Systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, New York, Vol. 39, Nº 3, March, p. 240-243.

- DOBSON, I.; LU, L.; 1992. Computing an Optimum Direction in Control Space to Avoid Saddle Node Bifurcation and Voltage Collapse in Electric Power Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, Vol. 37, Nº 10, October, p. 1616-1620.
- DOBSON, I.; LU, L.; 1993. New Methods for Computing a Closest Saddle Node Bifurcation and Worst Case Load Power Margin for Voltage Collapse. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, Vol. 8, Nº 3, August, p. 905-913.
- DUARTE, V. S.; PEREIRA, J. L. R.; COSTA, V. M.; 2000. Uma Nova Proposta para o Cálculo de Fluxo de Potência para Sistemas Mal-Condicionados. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA (13ª : Setembro 2000 : Florianópolis, Brasil). *Anais*. Florianópolis, 2000. p. 885-889.
- EL-BAKRY, A. S.; TAPIA, R. A.; TSUCHIYA, T.; ZHANG, Y.; 1996. On the Formulation and Theory of the Newton Interior-Point Method for Nonlinear Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, New York, Vol. 89, Nº 3, June, p. 507-541.
- EL-HAWARY, M. E.; 1996. Optimal Power Flow: Solution Techniques, Requirements and Challenges. *IEEE Tutorial Course*, January.
- FIACCO, A. V.; McCORMICK, G. P.; 1968. *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. New York : John Wiley & Sons.



GALIANA, F. D.; 1975. Power-Voltage Limitations Imposed by the Network Structure of a Power System. In: POWER INDUSTRY COMPUTER APPLICATIONS CONFERENCE (9<sup>th</sup> : June 1975 : New Orleans, USA). *Proceedings*. New Orleans, 1975. p. 356-363.

GALIANA, F. D.; ZENG, Z. C.; 1992. Analysis of the Load Flow Behaviour Near a Jacobian Singularity. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, Vol. 7, N<sup>o</sup> 3, August, p. 1362-1369.

GILL, P. E.; MURRAY, W.; WRIGHT, M. H.; 1981. *Practical Optimization*. London : Academic Press.

GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F.; 1996. *Matrix Computations*. Baltimore : The Johns Hopkins University Press.

GRANVILLE, S.; 1994. Optimal Reactive Dispatch Through Interior Point Methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, Vol. 9, N<sup>o</sup> 1, February, p. 136-146.

GRANVILLE, S.; MELLO, J. C. O.; MELO, A. C. G.; 1996. Application of Interior Point Methods to Power Flow Unsolvability. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, Vol. 11, N<sup>o</sup> 2, May, p. 1096-1103.

GREIG, D. M.; 1980. *Optimisation*. London : Longman.

- IBA, K.; SUZUKI, H.; EGAWA, M.; WATANABE, T.; 1990. A Method for Finding a Pair of Multiple Load Flow Solutions in Bulk Power System. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, New York, Vol. 5, Nº 2, May, p. 582-591.
- IRISARRI, G. D.; WANG, X.; TONG, J. & MOKHTARI, S.; 1997. Maximum Loadability of Power Systems Using Interior Point Non-Linear Optimization Method. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, Vol. 12, Nº 1, February, p. 162-172.
- IWAMOTO, S.; TAMURA, Y.; 1981. A Load Flow Calculation Method for Ill-Conditioned Power Systems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, New York, Vol. PAS-100, Nº 4, April, p. 1736-1743.
- JARJIS, J.; GALIANA, F. D.; 1981. Quantitative Analysis of Steady State Stability in Power Networks. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, New York, Vol. PAS-100, Nº 1, January, p. 318-326.
- KARMAKAR, N.; 1984. A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming. *Combinatorica*, New York, Vol. 4, Nº 4, May, p. 373-395.
- KOZAKEVICH, D. N.; ZAMBALDI, M. C.; 1999. Quasi-Newton Methods with Incomplete Factorizations for Some Nonlinear Predominant Convection-Diffusion Problems. *Technical Report 01/99*, Department of Mathematics, Federal University of Santa Catarina, Brazil, January.

- KWATNY, H. G.; PASRIJA, A. K.; BAHAR, L. Y.; 1986. Static Bifurcation in Electric Power Networks: Loss of Stability and Voltage Collapse. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, New York, Vol. CAS-33, Nº 10, October, p. 981-991.
- MEHROTRA, S.; 1992. On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Method. *SIAM Journal on Optimization*, New York, Vol. 2, Nº 4, November, p. 575-601.
- MIZUNO, S.; TODD, M. J. & YE, Y.; 1989. Anticipated Behaviour of the Path Following Algorithms for Linear Programming. *Technical Report 878*, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, Ithaca, December.
- OGBUOBIRI, E. C.; TINNEY, W. F.; WALKER, J. W.; 1970. Sparsity-Directed Decomposition for Gaussian Elimination on Matrices. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, New York, Vol. PAS-89, Nº 1, January, p. 141-150.
- OGBUOBIRI, E. C.; 1970. Dynamic Storage and Retrieval in Sparsity Programming. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, New York, Vol. PAS-89, Nº 1, January, p. 150-155.
- OVERBYE, T. J.; 1994. A Power Flow Measure for Unsolvable Cases. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, Vol. 9, Nº 3, August, p. 1359-1365.

- SASSON, A. M., 1969a. Nonlinear Programming Solutions for Load-Flow, Minimum-Loss, and Economic Dispatching Problems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, New York, Vol. PAS-88, N° 4, April, p. 399-409.
- SASSON, A. M., 1969b. Combined Use of the Powell and Fletcher-Powell Nonlinear Programming Methods for Optimal Load Flows. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, New York, Vol. PAS-88, N° 10, October, p. 1530-1537.
- SASSON, A. M., 1970. Decomposition Technique Applied to the Nonlinear Programming Load-Flow Method. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, New York, Vol. PAS-89, N° 1, January, p. 78-82.
- SASSON, A. M.; TREVIÑO, C.; ABOYTES, F.; 1971. Improved Newton's Load Flow Through a Minimization Technique. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, New York, Vol. PAS-90, N° 10, October, p. 1974-1981.
- SASSON, A. M.; VILORIA, F.; ABOYTES F.; 1973. Optimal Load Flow Solution Using the Hessian Matrix. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, New York, Vol. PAS-92, N° 1, January/February, p. 31-41.
- SCUDDER, J. M.; 1981. Step Size Optimization in a Polar Newton Power Flow. *Lecture Notes*, University of Wisconsin, Madison.

SCUDDER, J. M.; ALVARADO, F. L.; 1981. Discussão de IWAMOTO e TAMURA (1981).

SUN, D. I.; ASHLEY, B.; BREWER, B.; HUGHES, A.; TINNEY, W. F.; 1984. Optimal Power Flow Solutions by Newton Approach. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, New York, Vol. PAS- 103, Nº 10, October, p. 2864-2880.

TAMURA, Y.; IBA, K.; IWAMOTO, S.; 1980. A Method for Finding Multiple Load Flow Solutions for General Power Systems. In: IEEE/PES WINTER MEETING (February 1980 : New York, USA). *Proceedings*. New York, Paper A80-043-0.

TAMURA, Y.; MORY, H.; IWAMOTO, S.; 1983. Relationship Between Voltage Instability and Multiple Load Flow Solutions in Electric Power Systems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, New York, Vol. PAS-102, Nº 5, May, p.1115-1125.

TAPIA, R.; ZHANG, Y.; SALTZMAN, M. & WEISER, A.; 1996. The Mehrotra Predictor-Corrector Interior-Point Method as a Perturbed Composite Newton Method. *SIAM Journal on Optimization*, New York, Vol. 6, Nº 1, February, p. 47-56.

TAYLOR, C. W.; 1994. *Power System Voltage Stability*. New York : McGraw-Hill Ltd.

TINNEY, W. F.; HART, C. E.; 1967. Power Flow Solution by Newton's Method. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, New York, Vol. PAS-86, Nº 11, November, p. 1449-1460.

- TINNEY, W. F.; WALKER, J. W.; 1967. Direct Solution of Sparse Network Equations by Optimally Ordered Triangular Factorization. *Proceedings of the IEEE*, New York, Vol. 55, Nº 11, November, p. 1801-1809.
- TREFETHEN, L. N.; BAU III, D.; 1997. *Numerical Linear Algebra*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- WU, Y. C.; DEBS, A. S. & MARSTEN, R. E.; 1993. A Nonlinear Programming Approach Based on an Interior Point Method for Optimal Power Flows. In: IEEE/NTUA POWER TECH CONFERENCE: PLANNING, OPERATION AND CONTROL OF TODAY'S ELECTRIC POWER SYSTEMS (September 1993 : Athens, Greece). Proceedings. Athens, Paper APT 409-17-27.
- WU, Y. C.; DEBS, A. S. & MARSTEN, R. E.; 1994. A Direct Nonlinear Predictor Corrector Primal Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, Vol. 9, Nº 2, May, p. 876-883.
- YAN, X.; QUINTANA, V. H.; 1997. An Efficient Predictor-Corrector Interior Point Algorithm for Security-Constrained Economic Dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, Vol. 12, Nº 2, May, p. 803-810.
- ZAMBALDI, Mário César; 1990. *Métodos Quasi-Newton para Sistemas Não-Lineares Esparsos com Estrutura Dinâmica de Dados*. Campinas. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação, Universidade Estadual de Campinas.

- ZAMBALDI, Mário César; 1993. *Novos Resultados sobre Fórmulas Secantes e Aplicações*. Campinas. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação, Universidade Estadual de Campinas.
- ZENG, Z. C.; GALIANA, F. D.; OOI, B. T.; YORINO, N.; 1993. A Simplified Approach to Estimate Maximum Loading Conditions in the Load Flow Problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, New York, Vol. 8, Nº 2, May, p. 646-654.
- ZHANG, Y. & ZHANG, D.; 1995. On Polynomiality of the Mehrotra-Type Predictor-Corrector Interior Point Algorithms. *Mathematical Programming*, New York, Vol. 68, p. 303-318.