

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

***GERAÇÃO DE RUÍDO DE ALTA FREQUÊNCIA
EM SISTEMAS DE FREIO A DISCO***

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

JEFERSON GONÇALVES

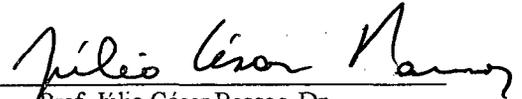
Florianópolis, Fevereiro de 2001

**ESTUDO DA GERAÇÃO DE RUÍDO DE ALTA FREQUÊNCIA
EM SISTEMAS DE FREIO A DISCO**

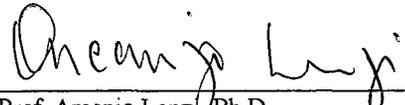
JEFERSON GONÇALVES

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA**

**ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO VIBRAÇÕES E
ACÚSTICA, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**

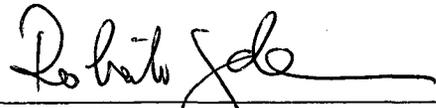


Prof. Júlio César Passos, Dr.
Coordenador



Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.
Orientador

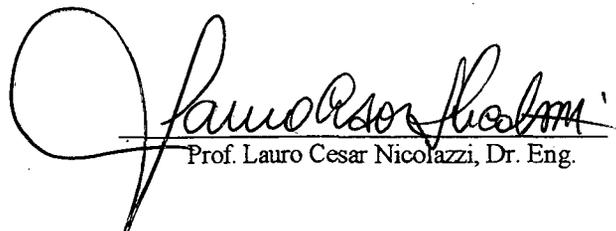
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Roberto Jordan, Dr. Eng.



Prof. Edison da Rosa, Dr. Eng.



Prof. Lauro Cesar Nicolazzi, Dr. Eng.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por mais uma conquista e pelo dom da vida.

À minha noiva, Fernanda, pelo apoio incondicional, não medindo esforços para me auxiliar nas mais adversas horas de minha vida.

A meu irmão, Alexandre, que foi privado da minha companhia e, mesmo assim, manteve o mesmo carinho e afeto de sempre, compreendendo minhas dificuldades e necessidades.

A meus pais, Algacir e Mara, pela compreensão e paciência, necessárias às novas experiências e provações que surgiram ao longo desta caminhada.

Ao meu orientador, Prof. Arcanjo Lenzi, pela sua total e expressiva contribuição à orientação deste trabalho e pelo apoio emocional nas horas incertas.

À empresa Fras-le, na pessoa de Georges Pitseys e Flávio Marcon, pela oportunidade e pleno apoio à execução deste trabalho, não medindo recursos para o seu total sucesso.

A todos os colegas do Laboratório Físico da Fras-le e, em especial, aos colegas Hamilton Leal, Ricardo Canali, Clarindo Canuto, Janice Boschetti, Rui Dalcin, e Julio Lemos, pelo apoio e colaboração durante a execução deste trabalho.

Ao pessoal do suporte eletrônico, Gustavo Tonnet, Flávio Buffon e Elvo Pilati, pelo auxílio durante os ensaios e na solução de dificuldades técnicas.

Aos demais colegas, técnicos e auxiliares do laboratório, pela importante ajuda durante as montagens dos sistemas estudados.

Aos bolsistas do LVA e, em especial a Renato Kempt, pela importante contribuição nas avaliações computacionais.

A todas as outras pessoas que, de forma direta ou indireta, tenham contribuído para o sucesso desta pesquisa.

Meu sincero obrigado, e meu eterno reconhecimento.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS	vi
LISTA DE FIGURAS.....	vii
LISTA DE TABELAS	x
RESUMO	xi
ABSTRACT	xii
<u>Capítulo 1</u>	
INTRODUÇÃO.....	1
<u>Capítulo 2</u>	
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	4
2.1. Sistema de Freio a Disco	4
2.2. Mecanismo de Frenagem	5
2.2.1. Parâmetros de Influência na Geração de Ruído	7
2.2.2. Critério de Análise de Instabilidade do Sistema	8
2.3. Modelos Analíticos	11
2.4. Método dos Elementos Finitos	13
2.5. Metodologia e Equipamentos Usados na Avaliação do Ruído	14
<u>Capítulo 3</u>	
PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS PARA AVALIAÇÃO DO RUÍDO	17
3.1. Bancada de Testes	17
3.1.1. Dinamômetro de Freio	18
3.1.2. Sistemas Utilizados para Estudo.....	19
3.2. Análise da Interferência do Ruído de Fundo	20
3.3. Respostas em Frequência dos Sistemas e Componentes	22
3.3.1. Equipamentos Utilizados	23
3.3.2. Metodologia de Análise	23
3.3.3. Resultados das Respostas em Frequência	24
3.4. Identificação dos Mecanismos de Irradiação	27

3.4.1. Relação entre o Ruído Medido e as Respostas em Frequência dos Sistemas	33
3.5. Testes com os Parâmetros de Influência na Geração do Ruído	36
3.5.1. Relação entre Parâmetros de Influência e Ruído Medido	36
3.5.2. Rotina de Testes Utilizada	38
3.5.3. Conclusões sobre Efeitos dos Parâmetros de Influência	39
 Capítulo 4	
MODELO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DO CONJUNTO DE FREIO	41
4.1. Modelo Analítico.....	41
4.1.1. Determinação das Propriedades Necessárias ao Modelo.....	47
4.1.1.1. Valores de Amortecimento	47
4.1.1.2. Valores de Rigidez	51
4.1.1.3. Momentos de Inércia e Massas	54
4.1.2. Solução do Modelo e Validação Experimental.....	57
4.1.3. Análise de Tendências	61
4.2. Modelos em Elementos Finitos.....	64
4.2.1. Determinação de Propriedades Necessárias ao Modelo.....	66
4.2.2. Resultados e Validação Experimental	67
 Capítulo 5	
ANÁLISE DA PASTILHA DE FREIO	69
5.1. Análise da Influência da Pastilha de Freio no Ruído	69
5.1.1. Proposta de Alteração na Pastilha de Freio	69
5.1.2. Resultados Experimentais	70
 Capítulo 6	
CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	80
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	86
APÊNDICE A – Curvas de Resposta em Frequência de Componentes.....	89
APÊNDICE B – Amortecimento e Rigidez Rotacional	94
APÊNDICE C – Curvas de Rigidez Combinada do Cáliper	97
APÊNDICE D – Matrizes do Modelo Analítico.....	101

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descrição
$N_{1,2}$	Carregamentos sobre o disco
N_0	Pré-carga sobre o disco
y_n	Coordenadas verticais do modelo matemático
θ_n	Coordenadas radiais do modelo matemático
M	Matriz de massa do sistema
C	Matriz de amortecimento do sistema
K	Matriz de rigidez do sistema
ξ	Amortecimento estrutural de componentes
M_c	Massa do cáliper
M_d	Massa do disco de freio
M_{p1}, M_{p2}	Massa das pastilhas de freio 1 e 2
I_c	Momento de inércia do cáliper
I_d	Momento de inércia do disco de freio
I_{p1}, I_{p2}	Momentos de inércia das pastilhas 1 e 2
K_{dl}	Rigidez linear do disco à terra
K_{dr}	Rigidez rotacional do disco de freio à terra
C_{dl}	Amortecimento linear do disco de freio à terra
C_{dr}	Amortecimento rotacional do disco de freio à terra
K_{p1}, K_{p2}	Rigidez linear das pastilhas 1 e 2
C_{p1}, C_{p2}	Amortecimento linear das pastilhas 1 e 2
K_{f1}, K_{f2}	Rigidez combinada fluido/cáliper para as pastilhas 1 e 2
C_{f1}, C_{f2}	Amortecimento combinado fluido/cáliper para pastilhas 1 e 2
D_1, D_2	Braço de momento da força friccional de reação para pastilhas 1 e 2
μ	Coefficiente de atrito entre disco de freio e pastilhas
H	Meia espessura do disco de freio
L_1, L_2	Meia espessura das pastilhas 1 e 2
G	Braço de momento de reação friccional da pastilha 2

LISTA DE FIGURAS

<i>Figura 2.1</i> : Sistema de freio simplificado	4
<i>Figura 2.2</i> : Esquema do sistema de freio simplificado	5
<i>Figura 3.1</i> : Painel frontal do dinamômetro LINK2318	18
<i>Figura 3.2</i> : Configuração de sistema de freio, com suspensão, usado no estudo	20
<i>Figura 3.3</i> : Configuração de sistema de freio simples	21
<i>Figura 3.4</i> : Curvas para avaliação da interferência de ruído de fundo	22
<i>Figura 3.5</i> : Fixação do cáliper para registro de função resposta em frequência	24
<i>Figura 3.6</i> : Fixação do disco para registro de função resposta em frequência	25
<i>Figura 3.7</i> : Fixação da pastilha de freio para registro de função resposta em frequência	25
<i>Figura 3.8</i> : Fixação do sistema simples para registro de função resposta em Frequência	26
<i>Figura 3.8.a</i> : Resposta em frequência do conjunto de freio simplificado. Excitação no diâmetro menor e leitura no diâmetro maior do disco de freio	26
<i>Figura 3.8.b</i> : Coerência do conjunto de freio simplificado	27
<i>Figura 3.9.a</i> : Resposta em frequência do conjunto de freio completo, com excitação no diâmetro maior e leitura no diâmetro menor do disco de freio	28
<i>Figura 3.9.b</i> : Coerência do conjunto de freio completo	28
<i>Figura 3.10</i> : Ruído medido em dinamômetro no sistema completo, totalmente livre e usando pastilha tipo A	30
<i>Figura 3.11</i> : Caixa para enclausuramento do freio	30
<i>Figura 3.12</i> : Montagem da caixa para enclausuramento do freio	31
<i>Figura 3.13</i> : Ruído do sistema completo com enclausuramento do freio	31
<i>Figura 3.14</i> : Ruído do sistema de freio simples	32
<i>Figura 3.15</i> : Ruído registrado em campo, com uso do veículo	33
<i>Figura 3.16</i> : Ruído do sistema simples em terço de oitava	33
<i>Figura 3.17</i> : Relação ruído medido x FRF do sistema de freio simples	34
<i>Figura 3.18</i> : Relação ruído medido x FRF característica do disco de freio	34
<i>Figura 3.19</i> : Relação ruído medido x FRF característica da pastilha Tipo A	35
<i>Figura 3.20</i> : Relação ruído medido x FRF característica o cáliper	35
<i>Figura 3.21</i> : Ocorrências de ruído separadas por valores de pressão de frenagem ...	38
<i>Figura 3.22</i> : Ocorrências de ruído separadas por valores de velocidade	38

Figura 3.23 : Ocorrências de ruído separadas por valores de temperatura	39
Figura 3.24 : Dispersão de ruído por frequência	39
Figura 4.1 : Esquema do modelo analítico	42
Figura 4.2 : Amortecimentos da pastilha Tipo A	48
Figura 4.3 : Amortecimentos da pastilha Tipo B	48
Figura 4.4 : Amortecimentos do disco de freio	49
Figura 4.5 : Amortecimentos do cáliper	49
Figura 4.6 : Curva típica de compressibilidade da pastilha de freio	53
Figura 4.7 : Curva típica de compressibilidade do disco de freio	53
Figura 4.8 : Curva típica da rigidez combinada do cáliper até 10 bar	54
Figura 4.9 : Registro de ruído – varredura por pressão	58
Figura 4.10 : Registro de ruído – varredura por velocidade	58
Figura 4.11 : Registro de ruído – varredura por temperatura	59
Figura 4.12 : Resultado gráfico proveniente do modelo analítico	60
Figura 4.13 : Resultado de registro de ruído proveniente do teste com bancada	61
Figura 4.14 : Variação de instabilidade com a variação do amortecimento da pastilha	62
Figura 4.15 : Variação de instabilidade com a variação da rigidez da pastilha	63
Figura 4.16 : Variação de instabilidade com a variação da massa da pastilha	63
Figura 4.17 : Variação de instabilidade com a variação do amortecimento do disco	64
Figura 4.18 : Modelo sólido do disco	65
Figura 4.19 : Modelo em elementos de placa	65
Figura 4.20 : Modo de vibração na frequência de 7307 Hz, elementos de placa	68
Figura 4.21 : Modo de vibração na frequência de 7564 Hz, elementos de placa	68
Figura 5.1 : Variação de amortecimento com a variação de pressão específica	71
Figura 5.2 : Variações de rigidez com a temperatura para pressão de 150 kgf/cm ²	72
Figura 5.3 : Variações de rigidez com a temperatura para pressão de 300 kgf/cm ²	73
Figura 5.4 : Ruído percentual por pressão – Pastilha E1	74
Figura 5.5 : Ruído percentual por temperatura – Pastilha E1	74
Figura 5.6 : Dispersão de Ruído – Pastilha E1	75
Figura 5.7 : Ruído percentual por pressão – Pastilha D2	75
Figura 5.8 : Ruído percentual por temperatura – Pastilha D2	76
Figura 5.9 : Dispersão de Ruído – Pastilha D2	76
Figura 5.10 : Valores de rigidez para a pastilha E1	78

Figura 5.11 : Distribuição percentual do ruído com a temperatura - pastilha E1	78
Figura 5.12 : Valores de rigidez para a pastilha D2	79
Figura 5.13 : Distribuição percentual do ruído com a temperatura - pastilha D2	79
Figura 6.1 : Amortecimento para duas pastilhas modelo	83
Figura 6.2 : Rigidez para duas pastilhas modelo	83
Figura 6.3 : Resultado de ruído para as duas pastilhas modelo.....	83
Figura A.1 : Resposta em frequência características do disco de freio	89
Figura A.2 : Coerência característica do disco de freio.....	90
Figura A.3 : Resposta em frequência características do cáliper	90
Figura A.4 : Coerência característica do cáliper.....	91
Figura A.5 : Resposta em frequência características da pastilha Tipo B	91
Figura A.6 : Coerência característica da pastilha Tipo B	92
Figura A.7 : Montagem característica do sistema simples para medição de FRF	92
Figura A.8 : Montagem do sistema completo para medição de FRF	93
Figura B.1 : Contato entre disco e pastilha	94
Figura C.1 : Rigidez combinada para pressão hidráulica de 5 bar	97
Figura C.2 : Rigidez combinada para pressão hidráulica de 10 bar	98
Figura C.3 : Rigidez combinada para pressão hidráulica de 15 bar	98
Figura C.4 : Rigidez combinada para pressão hidráulica de 20 bar	99
Figura C.5 : Rigidez combinada para pressão hidráulica de 25 bar	99
Figura C.6 : Rigidez combinada para pressão hidráulica de 30 bar	100

LISTA DE TABELAS

<i>Tabela 4.1</i> – Valores Médios de Amortecimento-Viscoso	51
<i>Tabela 4.2</i> – Momentos de inércia dos componentes do sistema de freio	56
<i>Tabela 4.3</i> – Informações sobre os modelos de elementos finitos	66
<i>Tabela 4.4</i> - Dados utilizados nos modelos de elementos finitos	66
<i>Tabela 4.5</i> – Comparativo entre Frequências Experimentais e Resultado de Elementos Finitos	67
<i>Tabela 5.1</i> – Grupo de Alterações Proposto	70
<i>Tabela 5.2</i> – Amortecimentos médios das pastilhas alteradas	71

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal avaliar as características relevantes de uma pastilha de freio, no que tange à geração de ruído. Para isso, um sistema de freio a disco de um veículo de passeio foi escolhido. Testes experimentais, incluindo testes com o veículo e testes em dinamômetro inercial, e procedimentos teóricos, como modelo analítico e modelo de elementos finitos, foram utilizados para prever as condições e as características principais do ruído e seu mecanismo de geração. Para prover os valores das variáveis do modelo analítico diversos testes experimentais foram desenvolvidos, tais como: determinação de momentos de inércia, valores de rigidez e amortecimento de componentes. Uma rotina de solução para o modelo analítico foi implementada usando o *software* MatLab. Com base nas tendências apresentadas pela solução do modelo analítico, foi possível quantificar o nível de alteração necessário a cada propriedade relevante da pastilha com relação à geração do ruído. A partir da qualificação e quantificação dos mecanismos de geração de ruído, através dos diversos testes propostos, novas pastilhas de freio foram desenvolvidas com a função de minimizar a ocorrência do ruído durante a frenagem. Basicamente, dois procedimentos foram utilizados para a obtenção das novas pastilhas de freio: mudança na pressão específica de compactação e mudanças de composição. Ambas as mudanças causaram alterações significativas no amortecimento e na rigidez das pastilhas de freio. Estas foram comparadas à geração do ruído do sistema real, confirmando as tendências apresentadas pelo modelo matemático.

ABSTRACT

The objective of this work is to understand the influences of the variables of a disc brake system with respect of noise. Studies were concentrated on a brake system of a specific passenger car. Experimental tests, including tests in vehicle and in an inertial dynamometer, and theoretical procedures, like analytical and finite elements models, were used to predict the conditions and the most important characteristics of noise and its mechanisms of generation. The variables of the theoretical model were obtained from many experimental tests. Basically three kinds of procedures were used: determination of moment of inertia, values of stiffness and damping and compressibility tests. A specific routine was implemented, using the MatLab software, in order to solve the theoretical model. Using tendency analyses, indicated by the solution of the model, it was possible to quantify the level of changes necessary to reduce the noise generated by the brake system. Based on the analyses of the mechanisms of noise generation, using all the present tests, new brake pads compositions were proposed and tested to minimize the noise occurrence during the braking process. Basically, two procedures were used to obtain the new brake pads: changes in the composition and in the specific pressure value used to manufacture the brake pads. The two procedures caused changes in the damping and stiffness of the brake pads. These results were compared with the dynamometer tests and it was observed a reasonably good correlation with the analytical model results.

1. INTRODUÇÃO

As exigências por um maior conforto acústico vêm apresentando um interesse crescente em todos os segmentos da sociedade, ocasionando reduções nos níveis de ruído gerados por máquinas, equipamentos, veículos e utensílios domésticos.

A indústria automobilística, em particular, mostra uma corrida acentuada na busca pela redução de níveis de ruído em veículos. Mas esta corrida não mais se limita ao conforto acústico interno do veículo, que em primeira mão já foi alcançado. Existe também a preocupação com a saúde e o bem estar dos pedestres, o que indica que não basta proteger o condutor do ruído, mas é necessário atacar as fontes geradoras para que este ruído não atinja as pessoas fora do veículo. Existem, atualmente, grupos de estudos trabalhando na redução de ruído de motores, escapamentos e sistemas de freios, entre outras fontes.

Contingente com esta preocupação, o objetivo geral deste trabalho é avaliar e quantificar a geração de ruído por sistemas de freios a disco. Dada a diversidade dos sistemas de freio, faz-se necessária a opção por um deles. O sistema físico que será avaliado é composto pelo freio em si, acompanhado do mecanismo de suspensão e parte do chassi.

Dado o avanço dos estudos e dos conhecimentos acumulados sobre ruído de freios, a faixa de frequência de interesse adotada para as análises é de 2 kHz a 18 kHz. O ruído que ocorre nesta faixa é caracterizado, genericamente, como *squeal*. Já o nível de pressão sonora tomado como referencial mínimo, acima do qual o ruído é considerado incômodo, é de 60 dB. Qualquer ruído que se apresente abaixo deste nível, ou fora da faixa, será desconsiderado, por não apresentar influência significativa sobre o sistema auditivo de condutores e pedestres, ou por não pertencer ao escopo do tema deste trabalho.

Para a realização deste trabalho foi feito uso de toda a infraestrutura laboratorial disponibilizada por uma empresa fabricante de pastilhas de freios (Fras-le, situada em Caxias

do Sul/RS). Foi disponibilizado o uso de um dinamômetro inercial para freios, através do qual é possível monitorar as variáveis de frenagem e medir níveis do ruído irradiado.

A empresa disponibilizou, também, veículo instrumentado para testes em campo, utilizando o mesmo conjunto de freios testado em bancada, a fim de serem obtidas correlações entre os resultados obtidos por estes procedimentos.

Foram usados, ainda, recursos de infra-estrutura laboratorial do Laboratório de Vibrações e Acústica da UFSC para determinação de curvas de resposta em frequência de componentes isolados, bem como do conjunto do sistema de freios, para conhecimento dos seus comportamentos dinâmicos. Modelos de elementos finitos do disco, utilizando elementos sólidos e de placa, foram desenvolvidos com *software* da UFSC.

As variáveis principais de frenagem monitoradas durante as medições de ruído são: pressão de frenagem, velocidade e temperatura do disco de freio, as quais serão associadas ao ruído medido.

Os testes de campo, utilizando um veículo, tem como objetivo realizar a validação dos resultados da bancada de testes e verificar a coerência entre estes com os de campo.

Este trabalho tem como objetivo obter um entendimento mais preciso dos mecanismos envolvidos na geração de ruído por este sistema de frenagem, das influências das variáveis relacionadas à frenagem e dos parâmetros relacionados a um modelo dinâmico a ser apresentado sobre o sistema disco/pastilhas/cáliper.

A seguir, será apresentado o conteúdo dos demais capítulos desta dissertação. No Capítulo 2 serão abordadas informações importantes referentes ao mecanismo de frenagem, parâmetros de influência no ruído, a metodologia proposta para este estudo e os equipamentos utilizados.

No Capítulo 3, será apresentado um modelo analítico e a determinação das propriedades necessárias ao modelo e sua solução. Serão, ainda, apresentados os resultados obtidos de modelos de elementos finitos do disco de freio.

Já no Capítulo 4, serão descritas todas as informações acerca dos testes experimentais, incluindo a escolha do melhor sistema para constituir a bancada de testes.

No Capítulo 5 serão efetuadas análises da pastilha de freio e propostas de alteração visando a redução do ruído.

Por fim, no Capítulo 6, serão apresentadas as conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

O trabalho é completado por quatro apêndices onde são apresentado resultados das curvas de resposta em frequência, desenvolvimento do termo de correção para o amortecimento e a rigidez rotacional do disco as curvas para a determinação da rigidez combinada do calíper/fluido e, por último, as matrizes utilizadas para a solução do modelo analítico.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. O Sistema de Freio a Disco

O sistema de freio, e única fonte de geração de ruído em nosso estudo, é composto por três componentes básicos, a saber: disco de freio, pastilha de freio e pinça (comumente chamado de calíper).

Existem, ainda, uma proteção de chapa e um rolamento, alojado no montante. Neste mesmo montante é fixada a suspensão que confere o movimento vertical à roda. Assim, é possível realizar testes em bancada com o sistema simplificado ou completo. Na Figura 2.1 pode-se observar uma foto do sistema de freio simples. Na Figura 2.2 encontra-se um esquema do mesmo sistema mostrado na Figura 2.1.

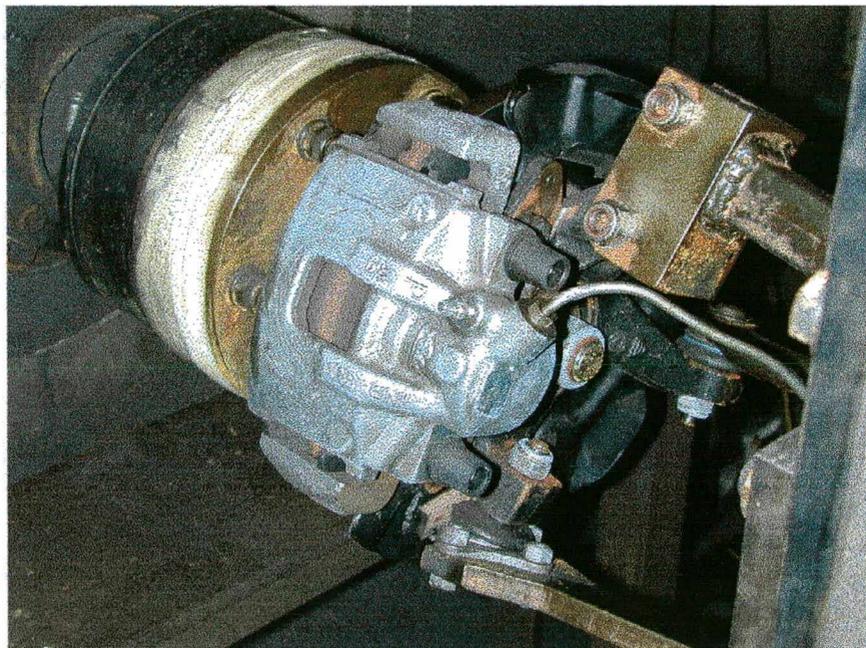


Figura 2.1 : Sistema de freio simplificado.

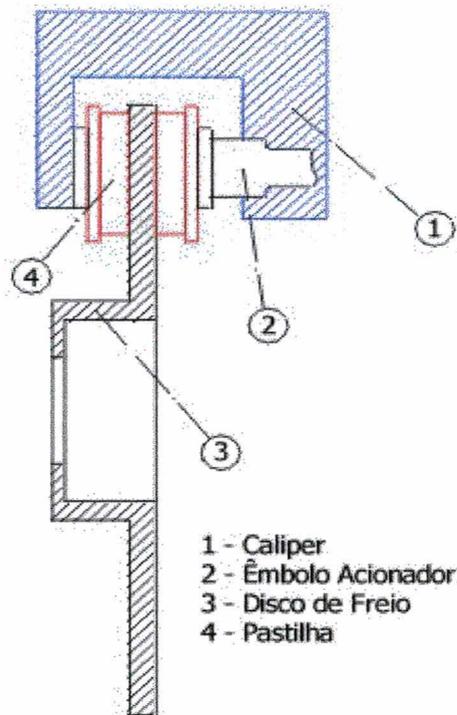


Figura 2.2 : Esquema do sistema de freio simplificado.

2.2. Mecanismo de Frenagem

O mecanismo de frenagem é atribuído ao par disco de freio/pastilha. Segundo Fieldhouse e Newcomb [1993] e Lee [1997], este par é o responsável pela geração de vibrações auto-excitadas no sistema, que podem ser geradas pelos seguintes fatores: decaimento do coeficiente de atrito com incremento de velocidade e variações de contato entre pastilha/disco de freio. Outros trabalhos, como Earles e Badi [1978], Earles e Chambers [1986] abordam os mesmos tipos de problemas dinâmica do conjunto.

De forma geral, as instabilidades são provenientes da variação no contato entre pastilhas de freio e disco [Suoeka et al, 1986; Tian e Hotton,1999 e Zaffiro, 1997]. Esta flutuação no contato, associada às mudanças de velocidade e coeficiente de atrito induzem vibração ao

sistema. Esta vibração pode ser extingüível com o tempo ou auto-excitada e, dadas às frequências naturais do conjunto, provocam uma geração de ruído. As diferentes situações de contato geram diferentes áreas de instabilidade na região de contato entre disco e pastilhas.

As principais conclusões, obtidas por estes pesquisadores, no que tange à ocorrência das instabilidades, são:

- Se o aspecto construtivo do sistema de freio confere uma região de instabilidade, mudanças nos parâmetros como temperatura, pressão de frenagem e coeficiente de fricção não modificam as condições de ruído;
- Mudanças na inclinação de contato entre disco/pastilha modificam a abrangência das regiões de instabilidade. Da mesma maneira, uma alteração crescente no coeficiente de atrito causa um aumento da região de instabilidade;
- Aumentos de amortecimento no disco de freio não modificam o tamanho da região de instabilidade, mas atenuam significativamente a magnitude das instabilidades;
- O aumento de massa das pastilhas e do disco de freio reduz a área de instabilidade;
- Pequenos aumentos no momento de inércia das pastilhas influenciam positivamente na redução da área de instabilidade, mas, em alguns casos, podem aumentar estas áreas;
- Alterações no nível de amortecimento das pastilhas, normal à superfície do disco, não mostram alterações na região de instabilidade;
- Aumento no nível de amortecimento torsional das pastilhas tem influência positiva na redução da área de instabilidade;
- Aumento da rigidez das pastilhas, em sua deformação torsional e normal à superfície do disco, causa uma redução considerável na área de instabilidade;

Todos os trabalhos encontrados na literatura sobre este assunto citam estas instabilidades dinâmicas como sendo as responsáveis pelo aparecimento do *squeal* [Chikamori, 1968; Hollman, 1954; Holubecki 1955 e 1957; Millner, 1978; Noisser, 1998; Pfeifer, 2000; Lee, 1997, e Wagenführer, 1964].

2.2.1. Parâmetros de Influência na Geração de Ruído

Todos os trabalhos citados nesta revisão referem-se às influências de algum, ou vários, dos parâmetros de influência na geração de ruído durante a frenagem. Uma análise detalhada, permite concluir que as variáveis de frenagem são bastante complexas de serem quantificadas numa situação real de uso. Isto ocorre porque algumas das variáveis dependem dos hábitos do condutor, e outras, das condições mecânicas e climáticas às quais está exposto o sistema de freio [Dunlap et al, 1999].

Essencialmente, pode-se dizer que as variáveis de maior influência no ruído gerado durante a frenagem são :

- Pressão da linha hidráulica, ou pressão de frenagem;
- Velocidade do disco de freio;
- Temperatura do disco de freio;
- Coeficiente de atrito;
- Temperatura ambiente;
- Umidade relativa do ar.

Devem ser feitas, ainda, considerações sobre os amortecimentos do disco e da pastilha de freio, uma vez que estes interferem significativamente no ruído gerado, como visto anteriormente. Em função dos estudos realizados mostrarem uma tendência de se analisar

parâmetros do próprio sistema, deixando de lado as variações ambientais, apenas os três primeiros parâmetros serão monitorados.

2.2.2. Critério de Análise de Instabilidade do Sistema

A necessidade de análise de instabilidade surge quando se identifica que o ruído gerado nos sistemas de freio tem origem nas vibrações auto-excitadas, baseadas num processo conhecido como *stick-slip*. Estas vibrações são ditas auto-excitadas porque, dada a ocorrência de amortecimento negativo no sistema, existe um aumento das amplitudes de vibração devido ao aparecimento de uma exponencial crescente.

Um estudo, realizado por Furmanik [1996], abordou a construção de um modelo para análise das influências da velocidade do disco no aparecimento do *stick-slip*. Segundo o pesquisador, a velocidade do disco de freio tem especial influência sobre o aparecimento das instabilidades. Com o incremento da velocidade do disco, a amplitude e a frequência do *stick-slip* são incrementadas.

Existe, então, uma enorme importância em poder prever com certa segurança a ocorrência das instabilidades. Assim, torna-se possível exercer algum controle sobre os parâmetros que influenciam na sua geração.

Uma abordagem acerca do critério matemático para avaliação das instabilidades dinâmicas é apresentada por Hartog [1972] e outras considerações por Dimarogonas [1996]. Como um exemplo mais simplificado, é possível examinar uma equação diferencial de um sistema que tem um grau de liberdade, com amortecimento negativo:

$$m\ddot{x} - c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.1)$$

A solução para a Equação (2.1) pode ser escrita na forma

$$x = e^{+(c/2m)t} (A \cos qt + B \sin qt) \quad (2.2)$$

A resposta de um sistema com amortecimento negativo, conforme representada pela Equação (2.2), caracteriza um sistema dinamicamente instável, já que esta resposta é, evidentemente, expressa por uma exponencial crescente.

Ao se considerar a frequência da vibração auto-excitada, pode-se dizer que, na maioria dos casos práticos, a força de amortecimento negativo é muito pequena em comparação com as forças elásticas e de inércia do movimento. Se a força fosse nula, a frequência seria a natural. Uma força de amortecimento, positiva ou negativa, reduz um pouco a frequência natural. Entretanto, para a maioria dos casos práticos, em engenharia mecânica, essa diferença é desprezível, tal que a frequência da vibração auto-excitada é considerada como sendo a frequência natural do sistema. Somente quando a força de amortecimento negativo é considerável comparada com às forças de inércia e elásticas, a frequência difere significativamente da natural.

Para amortecimento negativo, a força de amortecimento (que é agora uma força de acionamento) executa trabalho positivo sobre o sistema. O trabalho efetuado por essa força durante um ciclo é convertida na energia cinética adicional da vibração. Em muitos casos, a energia provém de uma força sem quaisquer propriedades alternadas, por exemplo, um reservatório de vapor, água sob pressão, um vento permanente, o conjugado contínuo de um motor, etc.

Para um sistema de um grau de liberdade, uma argumentação física simples é usualmente satisfatória para mostrar o valor negativo da constante de amortecimento c . Assim, o critério de estabilidade dinâmica pode ser deduzido por meios físicos ao invés de matemáticos.

Com sistemas de ordem superior, uma concepção física é sempre de ajuda, porém não fornece uma interpretação completa do que ocorre. É necessária uma abordagem matemática e isso envolve, a princípio, o desenvolvimento das equações diferenciais do problema. Para pequenas vibrações, o que permite desprezar quaisquer não-linearidades que possam existir, as equações são todas lineares e de segunda ordem. Suas soluções, como usual, são determinadas partindo-se da premissa:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_{1\max} e^{st} \\ x_2 &= x_{2\max} e^{st} \\ \dots\dots\dots \\ x_n &= x_{n\max} e^{st} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

onde s é um número complexo cuja parte real determina o amortecimento e a parte imaginária, a frequência natural. Substituindo as expressões de x_n nas equações diferenciais de vibração livre, essas equações tornam-se um conjunto de n equações algébricas lineares e homogêneas de incógnitas (complexas) $x_{1\max}$ e $y_{1\max}$. Executa-se, então, um processo de eliminação algébrica, resultando numa equação que não contem quaisquer dessas variáveis, conhecida como *equação da frequência*. É geralmente de grau $2n$ em s . Assim, para um sistema de dois graus de liberdade, obtém-se uma equação do quarto grau; para um sistema de três graus, obtém-se uma equação de quarta ordem, etc.

Uma equação algébrica de grau $2n$ na variável s possui $2n$ raízes ou $2n$ valores de s . As raízes de s são usualmente complexas e também ocorrem em pares conjugados:

$$\begin{aligned} s_1 &= p_1 + jq_1 \\ s_2 &= p_1 - jq_1 \\ s_3 &= p_2 + jq_2 \\ s_4 &= p_2 - jq_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

A solução da primeira equação diferencial é:

$$x_1 = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + C_3 e^{s_3 t} + \dots \quad (2.5)$$

os termos de (2.5) podem ser combinados em pares, na forma

$$C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} = e^{p_3 t} (A \operatorname{sen} q_1 t + B \cos q_1 t) \quad (2.6)$$

tal que a parte imaginária de s é a frequência, e a parte real determina o grau de amortecimento. Se as partes reais de todos os valores de s são negativas, o sistema é dinamicamente estável; se a parte real de alguma raiz é positiva, o sistema é dinamicamente instável na frequência correspondente. A estabilidade pode, então, ser determinada por um exame dos sinais das partes reais das soluções da equação da frequência.

2.3. Modelos Analíticos

O modelo a ser considerado neste trabalho baseia-se no modelo proposto por North [1972], o qual considera, num sistema de equações de movimento para cada componente do sistema de freio, os valores de rigidez, inércia e amortecimentos dos componentes. As equações diferenciais do sistema são obtidas pela aplicação da segunda Lei de Newton. Considera, ainda, valores de coeficiente de atrito, dimensões geométricas dos componentes e o carregamento imposto ao sistema pela pressão de frenagem. North agregou em seu modelo as pastilhas de freio, o disco de freio e o calíper. Este modelo, apesar de ser relativamente simples, possibilita uma avaliação direta das instabilidades do sistema, através da análise dos sinais da parte real das frequências complexas deste sistema, sendo esta é a sua principal vantagem.

Um segundo modelo, proposto por Earles e Badi [1978], aborda o problema do ponto de vista da variação no ângulo de contato entre disco/pastilha. Este modelo possui limitações em relação ao anterior, já que não inclui amortecimentos, carregamentos devido à pressão de frenagem e nem as dimensões dos componentes. Os autores executam uma análise de instabilidades, mas sua preocupação maior é a influência do ângulo mencionado na geração do ruído.

Já num modelo mais aprimorado, Earles e Chambers [1986], abordam o mesmo tipo de modelo anterior, acrescido de amortecimentos. Da mesma forma que no primeiro modelo proposto por Earles e Badi [1978], dimensões geométricas e carregamentos não são considerados, mas as avaliações de instabilidade com o uso dos valores de amortecimento fornecem informações preciosas sobre a contribuição destes na ocorrência de instabilidades. A principal desvantagem destes modelos é a consideração de contato pontual entre disco de freio e pastilha. Esta consideração data da época em que os sistemas de freio eram estudados com fixação no chassi. Em ambos os modelos citados, as equações do sistema são obtidas pelo uso da segunda Lei de Newton.

Um modelo mais recente, proposto por Nishiwaki [1993], avalia um sistema massa-mola, sem amortecimentos, porém, considera a superfície de contato entre disco e pastilha e a película que se forma em função deste contato, variações na pressão superficial de contato, formas dos modos de vibração, além de aspectos de energia envolvidos no processo. O autor não propõem análise de estabilidade, mas apresenta uma proposta de sistema com vibração forçada. As equações de movimento do sistema são obtidas com a aplicação das Equações de Lagrange. A principal dificuldade de aplicação deste modelo é o conhecimento sobre os parâmetros da película de contato que se forma entre disco de freio e pastilha.

Dentre os modelos mencionados, o que mais se adapta às necessidades deste estudo é o proposto por North [1972], porque permite avaliar as características de amortecimento da

pastilha de freio, que está diretamente ligada à sua composição química. Este modelo, bem como suas adaptações, serão oportunamente discutidos e explicitados em seções posteriores.

2.4. Método dos Elementos Finitos

A flexibilidade do método permite modelar uma ampla gama de problemas de engenharia, razão pela qual pesquisadores têm usado este método nas análises do problema de ruído de freios a disco. Talvez o ponto de maior importância seja o de tratar os erros percentuais obtidos por estes modelos.

Pfeifer e Liu [2000], modelaram o disco de freio com elementos sólidos. Posteriormente, compararam os resultados do modelo de elementos finitos com as frequências naturais obtidas experimentalmente. Os erros encontrados ficaram entre 2% a 6%, em módulo. Segundo os pesquisadores, estes erros são aceitáveis.

Modelando disco de freio, cáliper e pastilha, Ballinger *et al* [2000], encontraram, na avaliação das frequências naturais, erros que chegaram a 7% para o disco e 5% para a pastilha e cáliper. Todos os modelos foram construídos com elementos sólidos.

Estudos realizados por Pardus e Nashif [1998], avaliaram modelos de disco de freio e pastilhas modelados com elementos de placa. Neste estudo, não existem comparações numéricas entre os valores de elementos finitos e os experimentais. No entanto, pode-se observar gráficos das funções de resposta em frequência e os respectivos modos de vibração, encontrados a partir do modelo de elementos finitos. Esta comparação visual indica boa proximidade de resultados para o caso do disco de freio, mas os resultados da pastilha não são tão próximos.

De forma geral, pode-se dizer que os erros entre modelos e análise experimental chegam a um máximo de 7%, o que é considerado válido.

2.5. Metodologia e Equipamentos Usados na Avaliação do Ruído

Muitas são as metodologias para se realizar uma avaliação das características de ruído de um sistema de freio, ou de suas variáveis de influência. Em geral, pesquisadores têm usado duas, ou mais, abordagens diferentes. O motivo para este procedimento é a busca pela validação, nos casos de modelos analíticos ou numéricos, ou mesmo a comprovação do fenômeno por mais de um método.

Pesquisadores como Pfeifer e Liu [2000], Ballinger *et al* [2000] e Nashif e Pardus [1998], adotam as abordagens de modelo de elementos finitos e validação experimental, a partir das frequências naturais, obtidas das funções de resposta em frequência. Normalmente, os modelos visam estudar variações geométricas ou de propriedades de material.

Outros trabalhos, como os propostos por Earles e Chambers [1986], North [1972] e Badi e Earles [1978], consistem em comparar resultados provenientes de um modelo analítico com os resultados experimentais de ruído, medidos em dinamômetro de freios. Cabe salientar que, na maioria dos casos experimentais, um dinamômetro integra a bancada de testes. Neste caso, os estudos buscam correlacionar variáveis de rigidez e amortecimento do sistema, entre outras, com ocorrências de ruído.

Pode-se seguir, ainda, a metodologia adotada por Fieldhouse e Newcomb [1993], na qual utilizam resultados de vibração do disco obtidos por holografia para compará-los aos resultados de ruído, obtidos no dinamômetro. Para estes casos, avaliaram o comportamento de propagação das ondas através do conjunto de freio, e os compararam com as ocorrências de instabilidade e geração de *squeal*.

Borchert [1991] apresenta um dos mais completos estudos, do ponto de vista de variedade de abordagens. O pesquisador levanta as curvas de resposta em frequência dos componentes, para executar uma comparação com o ruído medido no dinamômetro. Usaram, ainda, um

modelo analítico para avaliar as instabilidades do sistema, mapeando-o em relação ao coeficiente de fricção experimental do material de atrito.

Buscando nesta revisão dos trabalhos já desenvolvidos neste assunto, pode-se afirmar que a metodologia ideal deve conter um conjunto de procedimentos experimentais, analíticos e numéricos, para que os resultados sejam considerados precisos.

No presente estudo, serão utilizados os seguintes procedimentos:

- Dinamômetro com analisador de sinais incorporado, permitindo leitura de dois canais: um para sinal de microfone e outro para vibração. Representando o principal instrumento da análise experimental, permitirá avaliar as influências de todos os parâmetros de frenagem com registro de ruído originado pelo sistema.
- Modelo de Elementos Finitos, utilizando o software ANSYS - versão University High, usado nos modelos do disco de freio.
- Modelo analítico, através do qual pretende-se extrair as frequências naturais e proceder a análise de instabilidade do sistema.
- Análise Modal Experimental, que fornecerá alguns dos valores de parâmetros necessários à validação dos modelos numéricos e a determinação dos valores dos amortecimentos dos componentes do sistema de freio.

Neste trabalho, será implementado o modelo desenvolvido por North [1972], o qual permite uma análise direta das influências dos vários parâmetros do sistema dinâmico sobre as frequências das vibrações auto-excitadas, bem como uma indicação da magnitude destes parâmetros para que estas não ocorram.

Optou-se por este modelo por ser mais adequado, sendo este o primeiro trabalho desenvolvido na UFSC sobre este assunto, propiciando um maior entendimento do comportamento físico do sistema.

Serão, também, avaliadas neste trabalho as influências das variáveis de frenagem sobre o ruído irradiado, uma vez que não foram encontradas informações a este respeito na revisão bibliográfica.

3. PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS PARA AVALIAÇÃO DO RUÍDO

Os estudos experimentais foram conduzidos nos laboratórios da empresa Fras-le, situada na cidade de Caxias do Sul – RS, com total suporte de infra-estrutura laboratorial e técnica.

O principal equipamento a ser descrito é a bancada de teste (dinamômetro inercial para freios), pois permite determinar as influências de parâmetros de frenagem na geração de ruído. A bancada de testes utilizada e os equipamentos estão descritos a seguir.

Para a execução dos testes dois sistemas distintos foram estudados. Um sistema simples e um sistema que incluía a suspensão e parte do chassi. Diversos experimentos foram realizados com o intuito de compreender os fenômenos de irradiação do ruído gerado e, assim, definir o melhor sistema para os testes em bancada.

3.1. Bancada de Testes

Entenda-se por bancada de testes o dinamômetro para freios, tipo inercial, LINK 2318, com um dos dois sistemas de freio acoplados. Este dinamômetro é dotado de um conjunto de volantes de inércia que possibilita a reprodução da inércia equivalente a diversos tipos de veículos. Desta forma, variando-se os volantes acoplados ao eixo principal do dinamômetro, a inércia do veículo, referente ao sistema de freio que se deseja estudar, pode ser reproduzida. Além destes volantes de inércia, o dinamômetro tem um sistema integrado de monitoramento e um analisador digital de sinais Larson-Davis, habilitado para dois canais com leitura digital simultânea de sinais. Ao analisador de sinais Larson-Davis, Modelo 3200, foi acoplado um microfone capacitivo ½” Larson-Davis – Modelo 2559 – Incidência aleatória. Com este acessório a bancada ficou capacitada a registrar os efeitos de ruído durante os testes de parâmetros de frenagem.

3.1.1. Dinamômetro de Freio

O dinamômetro possui uma câmara com material de absorção acústica em seu interior. Nesta câmara, que pode ser climatizada, foram realizados os testes com o sistema de freio.

O ajuste de todos os parâmetros, incluindo a climatização, é feito segundo programação do computador que controla o equipamento. A Figura 3.1 mostra uma foto do painel principal do dinamômetro.

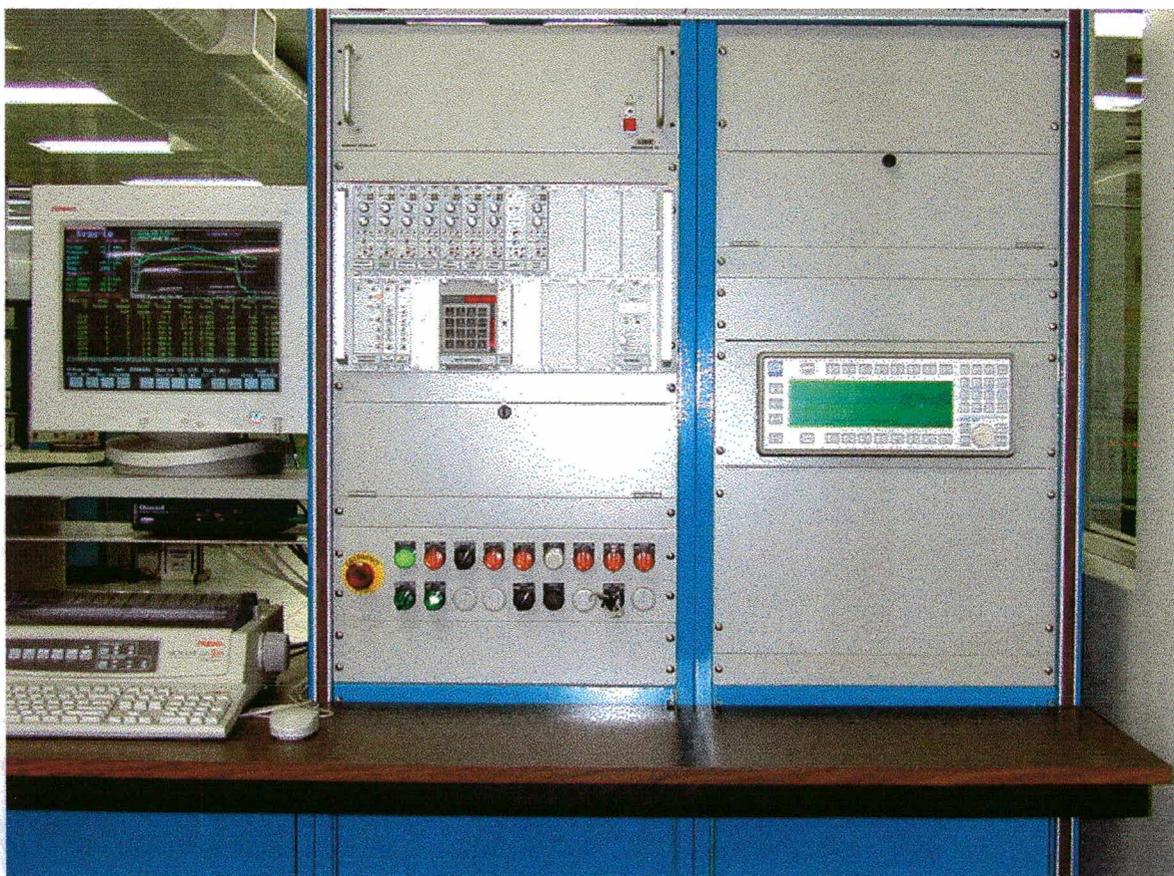


Figura 3.1 : Painel frontal do dinamômetro LINK2318.

O analisador de sinais do dinamômetro pode ser utilizado de forma acoplada, forma esta controlada e configurada pelo computador do dinamômetro, e em modo local, que permite calibração e/ou medições isoladas do programa de teste de ruído. O programa de teste consiste

em varrer pressões de frenagem entre 5 bar e 30 bar, temperaturas de 50°C a 300°C e velocidades de, aproximadamente, 3 km/h e 10 km/h.

O teste executa, ainda, frenagens de parada, que simulam uma desaceleração de 30 km/h para 0 km/h. O tempo aproximado do teste é de 36 h. O período do teste compreende 1409 freadas divididas em 15 blocos. Nestes blocos são feitas varreduras segundo os valores de pressão, temperatura e velocidade mencionados anteriormente. Com este procedimento, chamado AK-Master, garante-se a repetitividade dos ensaios.

Como resultado de um teste, obtêm-se todos os parâmetros de frenagem e climáticos registrados ao longo do teste, juntamente com os espectros de ruído que são registrados sempre que o nível de pressão sonora do ruído ultrapassar 60 dB(A). Pode-se obter, diretamente na forma gráfica, os espectros dos ruídos e das vibrações detectadas, bem como uma dispersão do número de vezes que o ruído ocorreu em uma dada frequência, e o respectivo nível de pressão sonora (NPS) deste ruído. É possível, ainda, obter-se um relatório completo dos registros ocorridos durante o teste.

3.1.2. Sistemas Utilizados para Estudo

O sistema inicial, escolhido para estudo, é composto de um sistema de freio de um veículo de passeio e sua respectiva suspensão. A condição de carga escolhida para o teste foi com o veículo vazio, ou seja, sem o motorista. Esta condição simula o carregamento sofrido na suspensão quando o veículo encontra-se apenas com a carga equivalente ao seu peso próprio, devidamente ajustada para a quarta parte do peso do veículo.

Este ajuste de carga foi feito mediante medição relativa da condição de deformação da mola da suspensão no próprio veículo, nas condições de apoiado no solo e suspenso em

macaco. Medida esta tomada em relação ao ponto superior de fixação do amortecedor e o centro da roda.

Uma foto do sistema pode ser vista na Figura 3.2. Observa-se na foto a utilização de um cabo de aço, que aplica a situação de deslocamento descrita acima, dando a característica de carregamento desejada.

A segunda configuração de teste foi tomada utilizando apenas o sistema de freio. Estas configurações serão de grande utilidade para determinar as influências de componentes na irradiação. A Figura 3.3 mostra uma foto da montagem do sistema de freio simples.

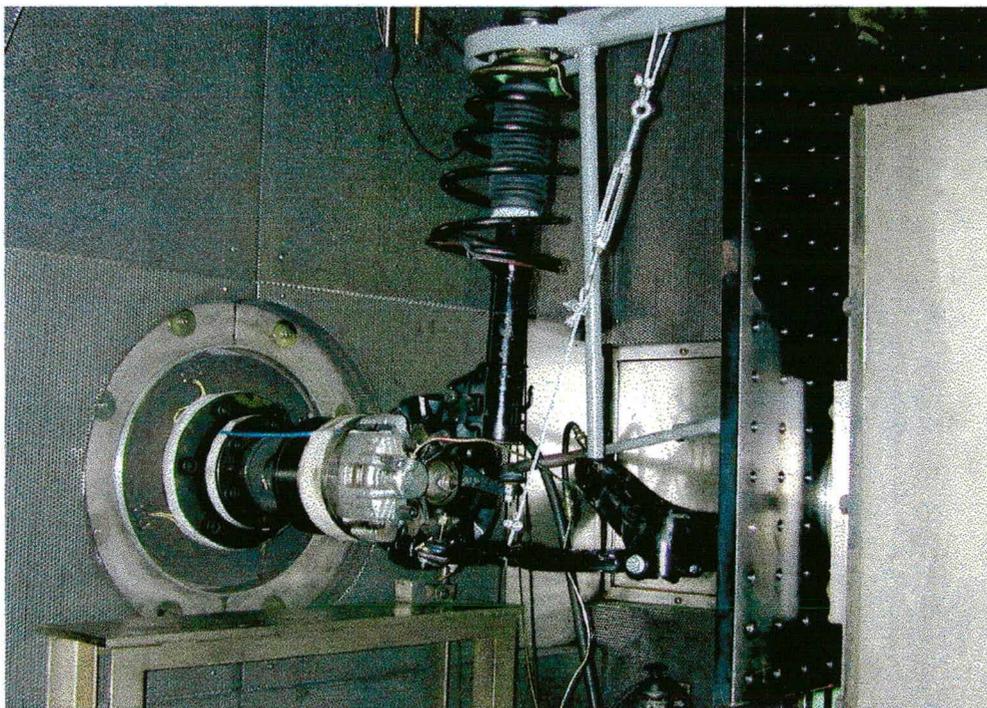


Figura 3.2 : Configuração de sistema de freio, com suspensão, usado no estudo.

3.2. Análise da Interferência do Ruído de Fundo

Existiu a necessidade de evidenciar qual o grau de interferência do ruído de fundo, que ocorre no exterior da câmara, sobre os sinais de ruído medido.

Para avaliar esta interferência, o seguinte procedimento foi utilizado :

- Medidas do ruído de fundo externo à câmara foram realizadas utilizando um analisador de sinais B&K7667, equipado com um microfone capacitivo de ½” da Larson-Davis – Modelo 2559 – Incidência aleatória.
- Utilizando o mesmo equipamento, medidas do ruído interno a câmara, nas mesmas condições de ruído de fundo externo, foram feitas.

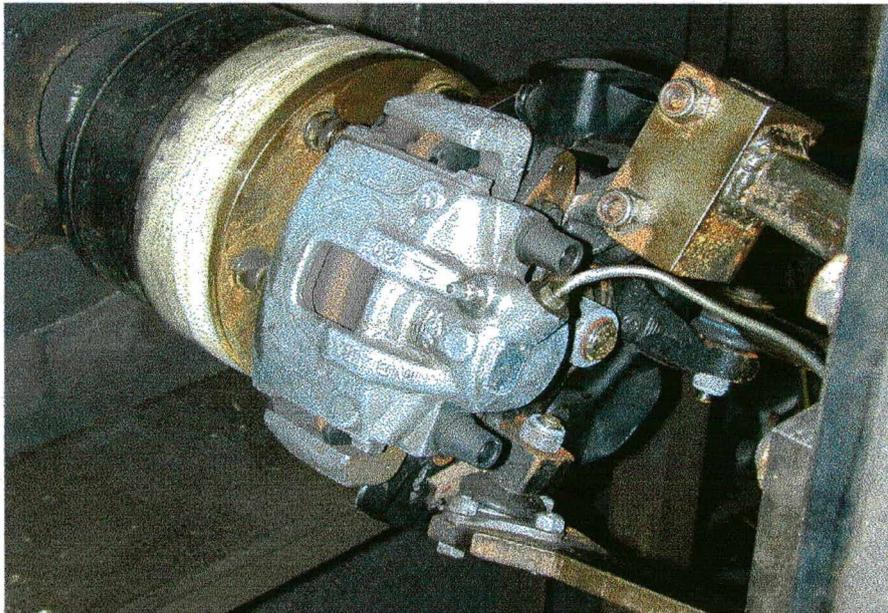


Figura 3.3 : Configuração de sistema de freio simples.

Como resultado, levantou-se a curva mostrada na Figura 3.4. Nela é possível evidenciar a diferença de mais de 15 dB entre ruído de fundo externo e ruído dentro da câmara. Esta evidência permite concluir que valores de sinais correspondentes a frequências a partir de 100 Hz são confiáveis. Mesmo assim, somente valores a partir de 2 kHz serão considerados.

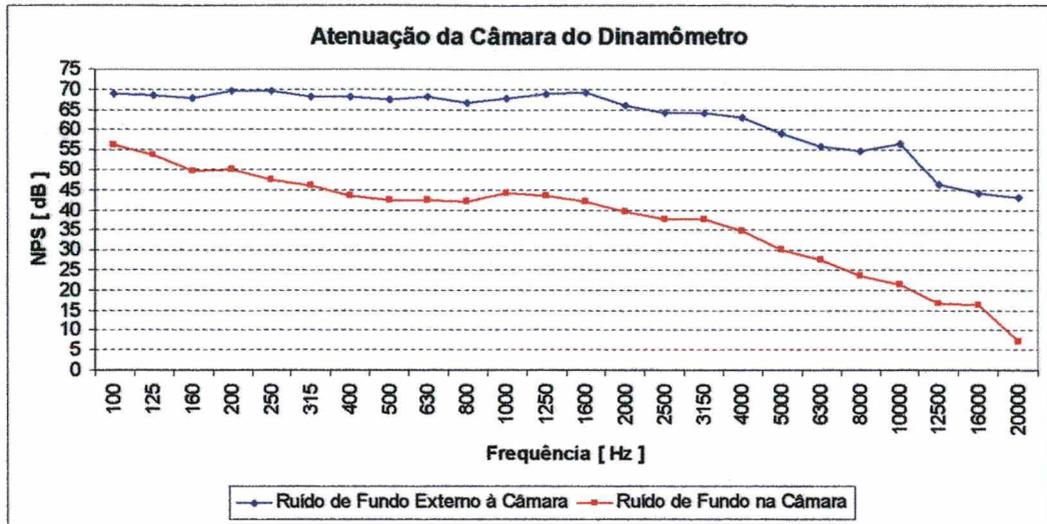


Figura 3.4 : Curvas para avaliação da interferência de ruído de fundo.

3.3. Respostas em Frequência dos Sistemas e Componentes

Com objetivo de futuras comparações as curvas de resposta em frequência (FRF) do sistema de freio e seus componentes foram levantadas.

Os seguintes componentes foram testados individualmente:

- Pastilhas de freio
- Disco de freio
- Caliper
- Chassi/Bandeja

Os seguintes conjuntos, em condição de montagem para operação, foram testados :

- Conjunto de freio sem suspensão e chassi
- Conjunto completo com suspensão e chassi

3.3.1. Equipamentos Utilizados

Para a execução da análise de resposta em frequência dos componentes e conjuntos do sistema de freio, os seguintes equipamentos foram utilizados :

- Analisador HP3566A – PC Spectrum/Network Analyser , 8 canais;
- Excitador Eletrodinâmico B&K - Tipo 4812;
- Amplificador de Potência B&K – Tipo 2707;
- Célula de Carga B&K - Tipo 8200 (3,95 pC/N);
- Acelerômetro B&K – Tipo 4344 (3,26 pC/g);

3.3.2. Metodologia de Análise

As curvas de resposta em frequência foram obtidas com a atuação do excitador eletrodinâmico conectado ao componente com o uso de cola, tendo sido conectado entre estes o transdutor de força. Um sinal aleatório, tipo ruído branco, gerado por um gerador de sinais foi amplificado e serviu de alimentação ao excitador.

Suspendendo os componentes e conjuntos com o uso fios de aço, conferiu-se aos mesmos uma característica de corpo livre. Procedeu-se, em seguida, a uma análise das frequências naturais dos cabos usados na fixação. Os valores obtidos mostram que estas frequências não atingem 5% da primeira frequência natural de vibração dos componentes estudados. Assegurou-se, assim, que o tipo de fixação não interfere de forma significativa.

As médias foram calculadas usando de 100 a 500 amostras, de maneira que a coerência fosse satisfatória, do ponto de vista da minimização dos erros aleatórios.

Nas Figuras 3.5 a 3.8, estão mostradas algumas montagens referentes à aquisição das funções de resposta em frequência.

3.3.3. Resultados das Respostas em Frequência

Por se tratar dos resultados mais significativos, apenas as curvas de resposta em frequência dos conjuntos descritos serão apresentadas no corpo deste trabalho.

As curvas do conjunto de freio simplificado podem ser vistas na Figura 3.8.a e 3.8.b e as curvas do sistema completo na Figura 3.9.a e 3.9.b.

Somente uma curva de resposta em frequência e sua respectiva coerência, serão mostradas, porque são representativas das demais curvas obtidas.

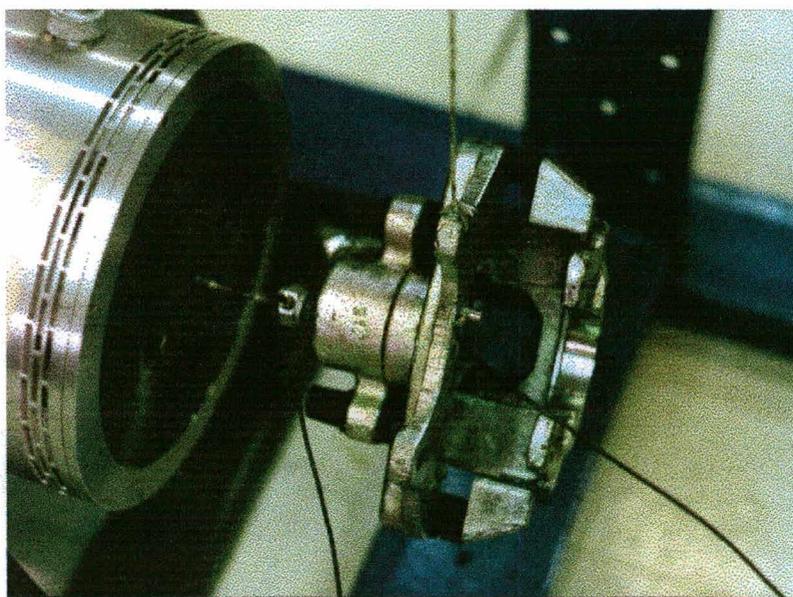


Figura 3.5 : Fixação do caliper para registro de função resposta em frequência.

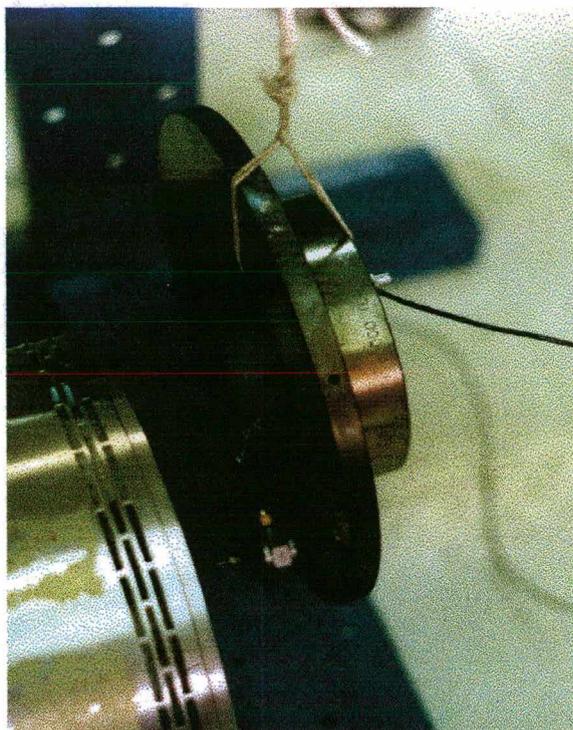


Figura 3.6 : Fixação do disco para registro de função resposta em frequência.

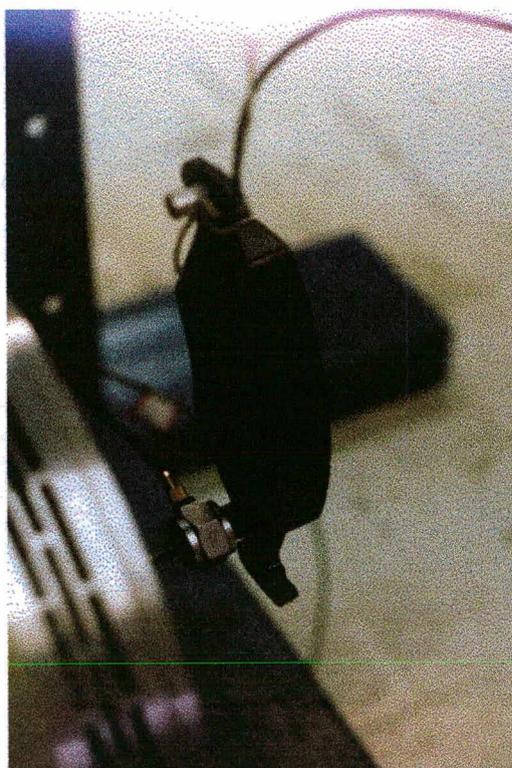


Figura 3.7 : Fixação da pastilha de freio para registro de função resposta em frequência.

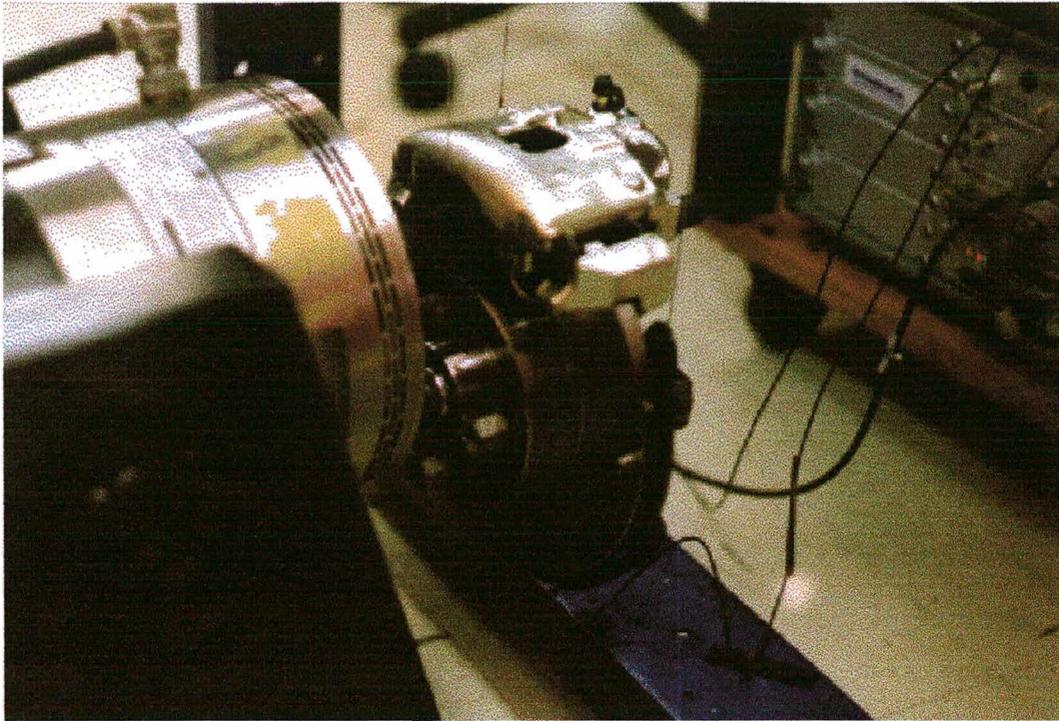


Figura 3.8 : Fixação do sistema simples para registro de função resposta em frequência.

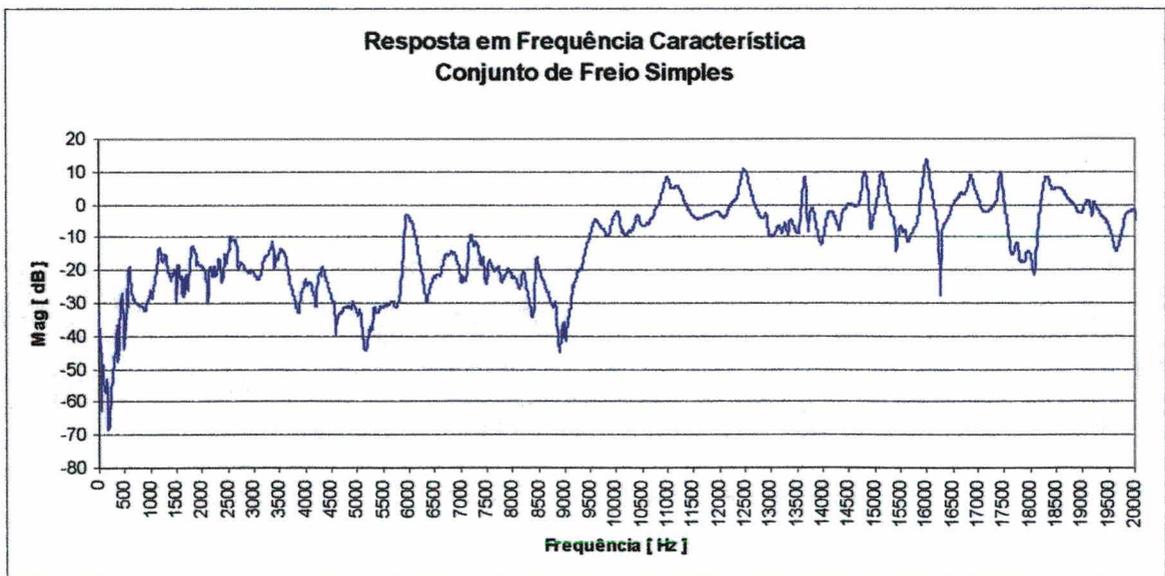


Figura 3.8.a : Resposta em frequência do conjunto de freio simplificado. Excitação no diâmetro menor e leitura no diâmetro maior do disco de freio.

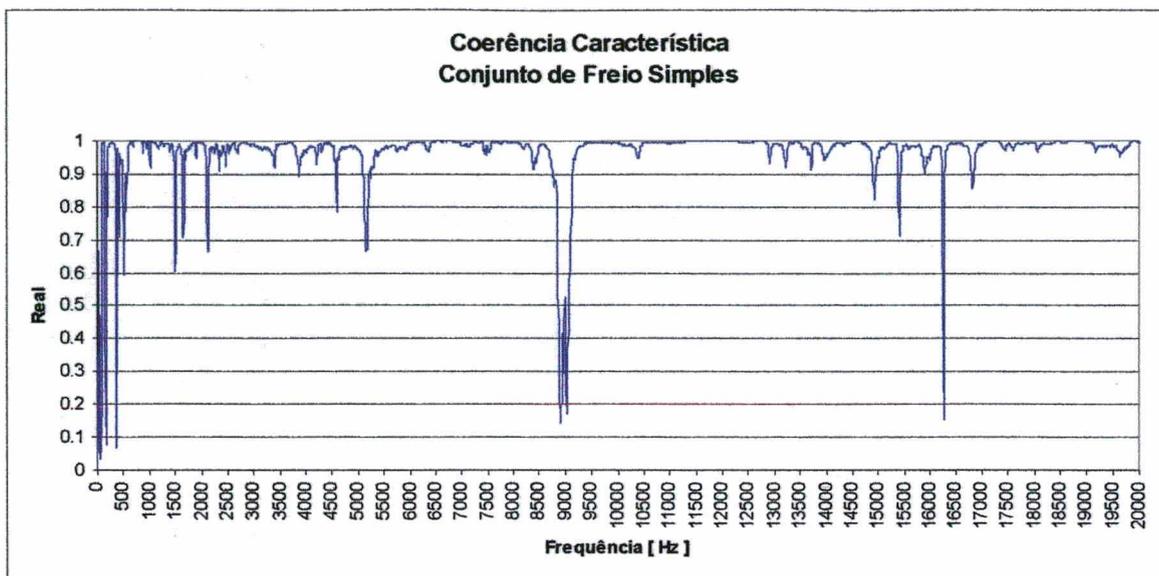


Figura 3.8.b : Coerência do conjunto de freio simplificado.

Nesta seção não serão explorados os valores de frequência e seus respectivos amortecimentos. Este procedimento será tomado nas próximas seções. No Apêndice A, pode-se avaliar as curvas de resposta em frequência representativas dos componentes individuais e mais algumas fotos das montagens feitas para executar as medições.

3.4. Identificação dos Mecanismos de Irradiação

Para a identificação dos mecanismos de irradiação, e definição da bancada de testes, escolheu-se uma pastilha de freio, sabidamente ruidosa, e usou-se a seguinte seqüência de análise [Abdelhamid, 1982; Richmond e Kao, 1994 e Teitelbaum, 1965]:

- Teste em dinamômetro com o sistema completo;
- Teste em dinamômetro com sistema completo e freio enclausurado por caixa de madeira;
- Teste em dinamômetro com sistema simples, sem enclausuramento;
- Teste de ruído em veículo.

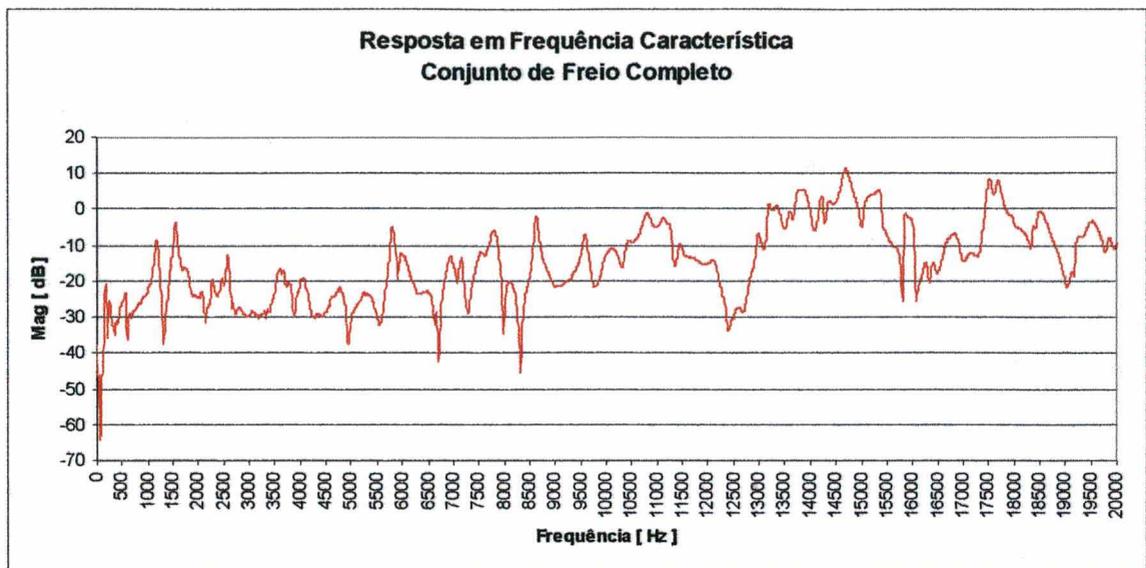


Figura 3.9.a : Resposta em frequência do conjunto de freio completo, com excitação no diâmetro maior e leitura no diâmetro menor do disco de freio.

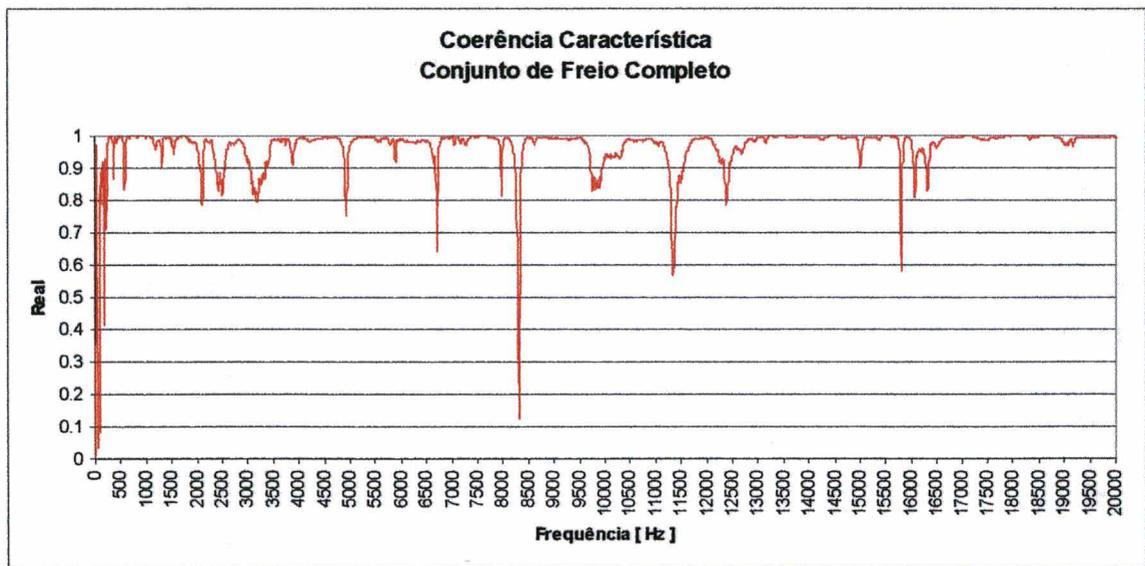


Figura 3.9.b : Coerência do conjunto de freio completo.

Para todos os testes descritos, foi utilizada uma pastilha **Fras-le** tratada, neste trabalho, como **Tipo A**. Para a primeira fase, utilizando o sistema visto na Figura 3.2, o teste foi repetido três vezes. Um gráfico de dispersão do ruído, para uma etapa representativa deste teste, pode ser vista na Figura 3.10. A dispersão vista nos gráficos como o da Figura 3.10

indicam o número de ocorrências de ruído na respectiva frequência, bem como seu nível de pressão sonora. Representa, portanto, a repetitividade do ensaio.

Para identificar como se comportava a atenuação do mecanismo gerador de ruído, ou seja, o par disco de freio/pastilha, uma caixa de madeira foi construída. A finalidade desta caixa foi causar uma redução dos níveis de ruído emitidos pelo referido par, possibilitando avaliar se outras fontes de irradiação do mecanismo, como bandeja/balança e amortecedor/mola, estariam contribuindo no efeito global do ruído. Na Figura 3.11, pode-se observar uma foto da caixa utilizada para o enclausuramento.

O revestimento da caixa da Figura 3.11 foi feito com material SONEX[®], e todas as frestas que não interferiam nos movimentos rotativos do dinamômetro foram seladas com cola. Na Figura 3.12 vê-se a montagem da caixa no sistema de freio, dentro do dinamômetro. Os resultados de ruído, obtidos com o enclausuramento proposto na Figura 3.12, podem ser vistos na Figura 3.13.

Efetuada-se uma comparação entre as Figuras 3.10 e 3.13, percebe-se que as frequências de maior concentração permanecem bem salientes. Mas o mais importante é que ocorreram reduções da ordem de 15 dB no nível de ruído registrado. Esta informação dá indícios de que o par disco de freio/pastilha é realmente o principal gerador e irradiador de ruído do sistema.

Para acrescentar informações à discussão, deu-se início à terceira etapa de testes, envolvendo apenas o sistema simples mostrado na Figura 3.3. Os resultados obtidos deste teste podem ser vistos na Figura 3.14.

Dada a semelhança entre os registros de ruído do sistema simples e completo, a última etapa foi desenvolvida. Procedeu-se a um teste no veículo. O teste de campo reproduziu as mesmas condições do teste em dinamômetro, contemplando o mesmo número de freadas e os mesmos blocos de pressão, temperatura e velocidade. O veículo foi equipado com o analisador da Brüel&Kjaer mencionado na seção 3.2. Exceção feita no uso do microfone,

onde se substituiu o microfone Larson Davis, descrito, por um Brüel&Kjaer Tipo 4155, incidência direta, e seu respectivo pré-amplificador.

O resultado obtido nesta medição pode ser apreciado na Figura 3.15.

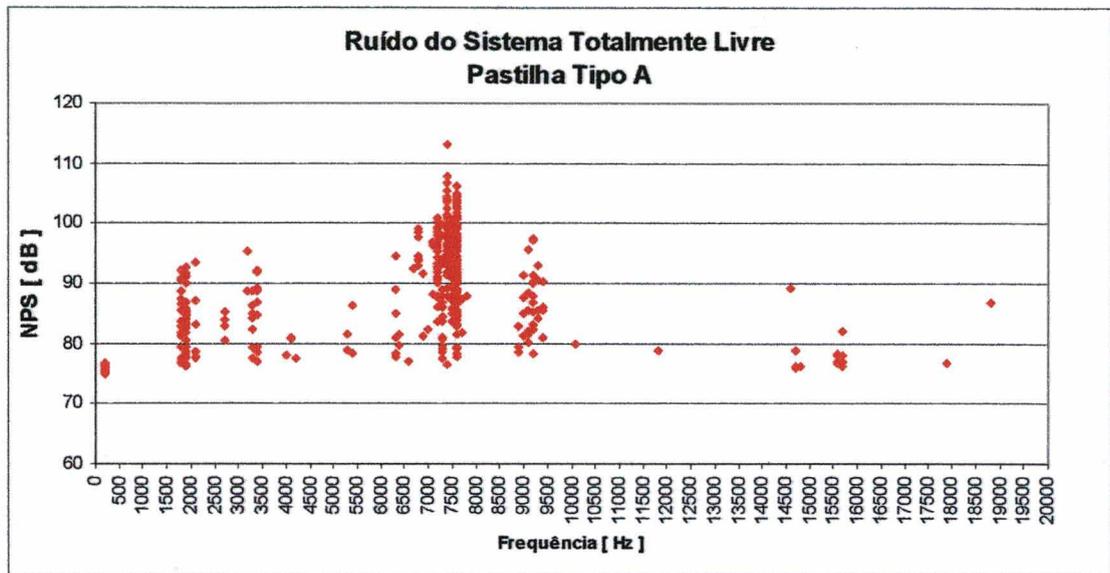


Figura 3.10 : Ruído medido em dinamômetro no sistema completo, sem enclausuramento, e usando pastilha tipo A.



Figura 3.11 : Caixa para enclausuramento do freio.

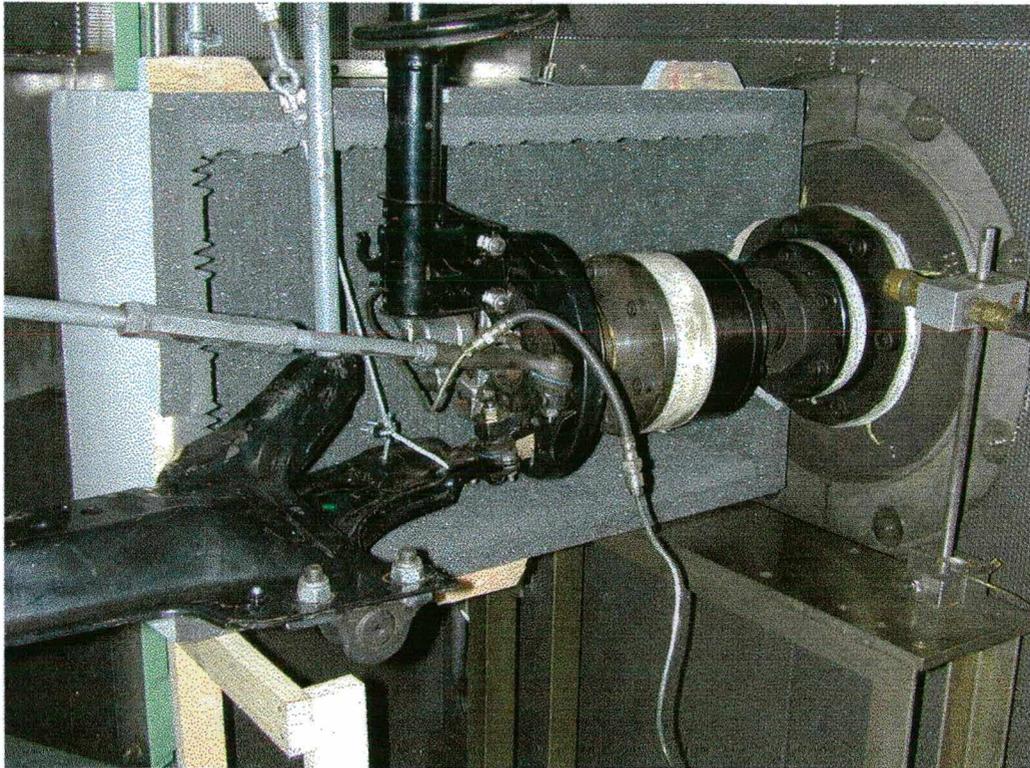


Figura 3.12 : Montagem da caixa para enclausuramento do freio.

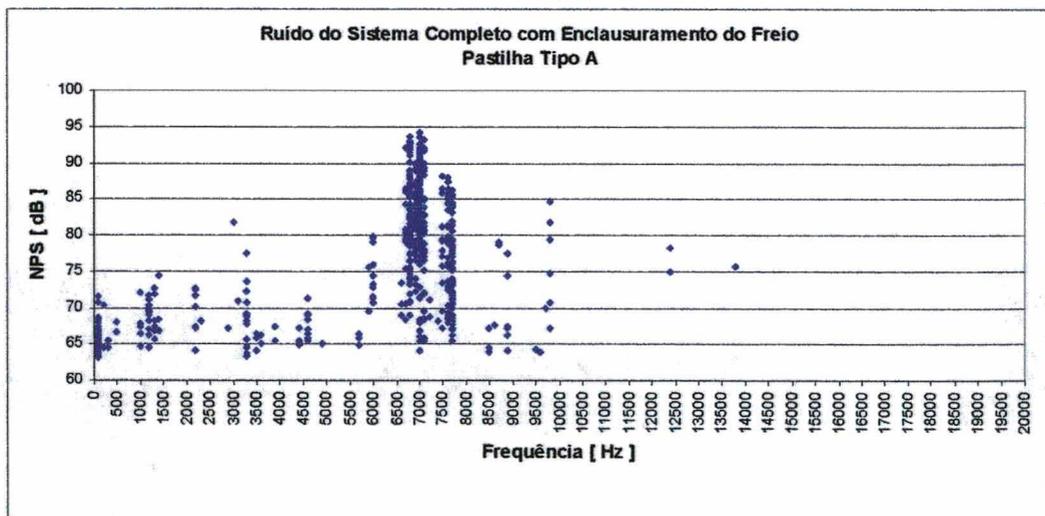


Figura 3.13 : Ruído do sistema completo com enclausuramento do freio.

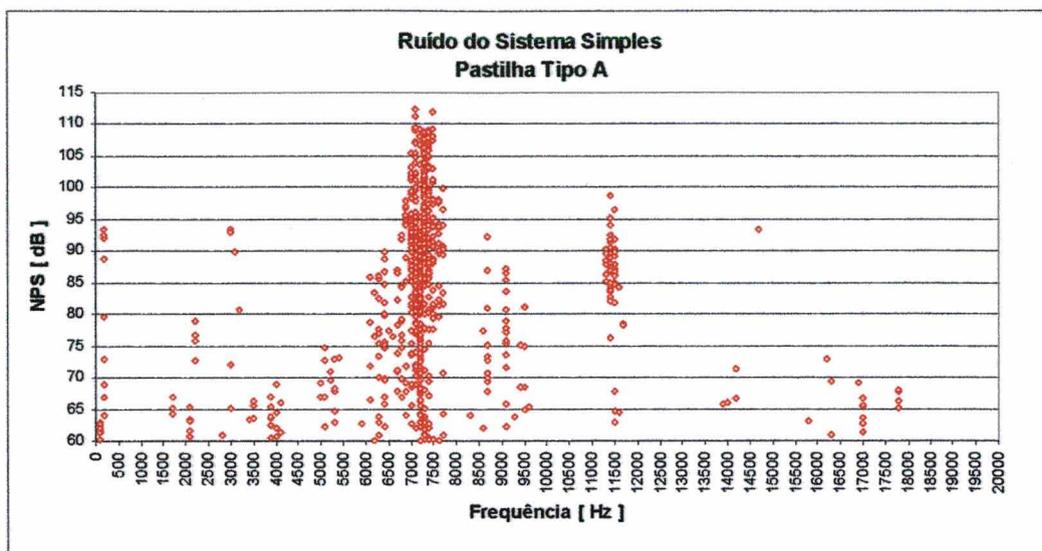


Figura 3.14 : Ruído do sistema de freio simples

Dadas às características do equipamento utilizado nas medições de campo, os dados só puderam ser apresentados em terço de oitava, conforme Figura 3.15. Para um melhor nível de comparação, o resultado do sistema simples foi filtrado para as mesmas condições. Este resultado pode ser visto na Figura 3.16.

Pela observação das Figuras 3.15 e 3.16, pode-se notar que a condição de ruído do sistema simples é satisfatoriamente semelhante aos dados obtidos no campo. Com esta avaliação tem-se, ainda, a indicação de que o chassi e o amortecedor não exercem grande influência na irradiação do ruído gerado.

Dadas estas evidências e tendo em vista que a montagem e operação da bancada utilizando sistema simples é muito menos trabalhosa, optou-se pelo uso do sistema simples nos estudos de ruído. Resta apenas executar algumas comparações do ruído registrado no sistema simples e as respostas em frequência, mencionadas no item 3.3.

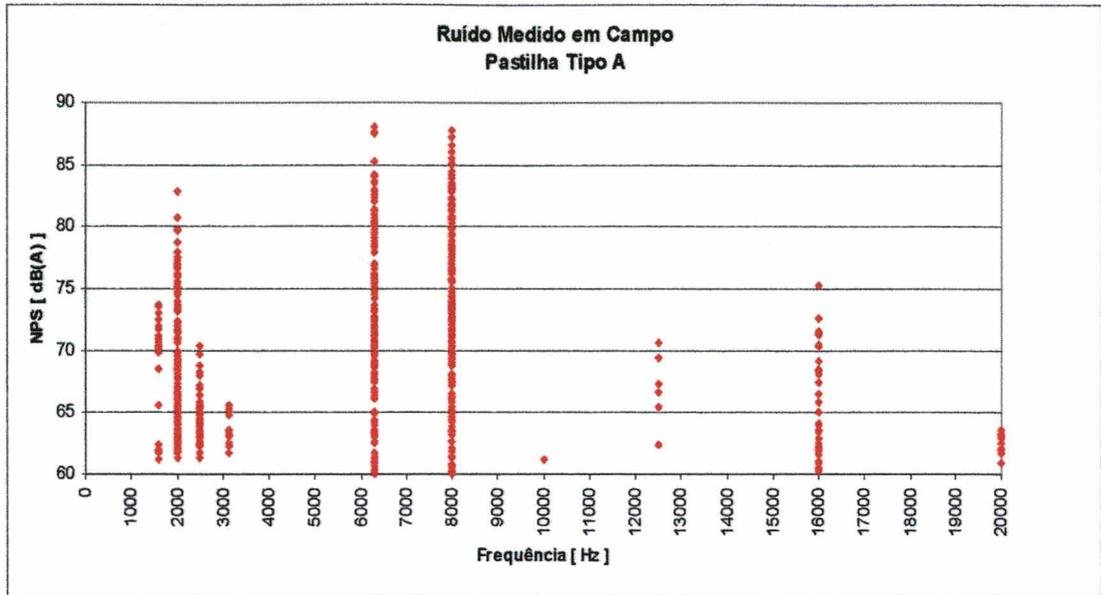


Figura 3.15 : Ruído registrado em campo com uso do veículo.

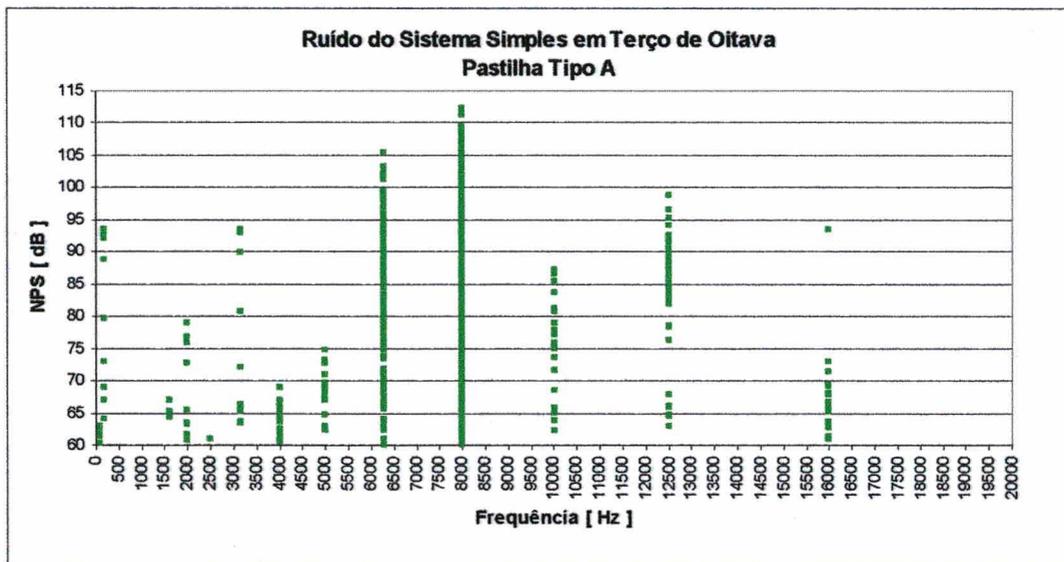


Figura 3.16 : Ruído do sistema simples em terço de oitava.

3.4.1. Relação entre o Ruído Medido e as Respostas em Frequência do Sistema

Dois conjuntos de resultados foram julgados importantes no diagnóstico das influências dos componentes no ruído: as FRF do conjunto de freio simples e as FRF dos componentes

deste mesmo conjunto. Pela sobreposição dos resultados de ruído às FRF, pode-se proceder esta avaliação. Na seqüência de Figuras 3.17 a 3.20, serão apresentadas estas sobreposições.

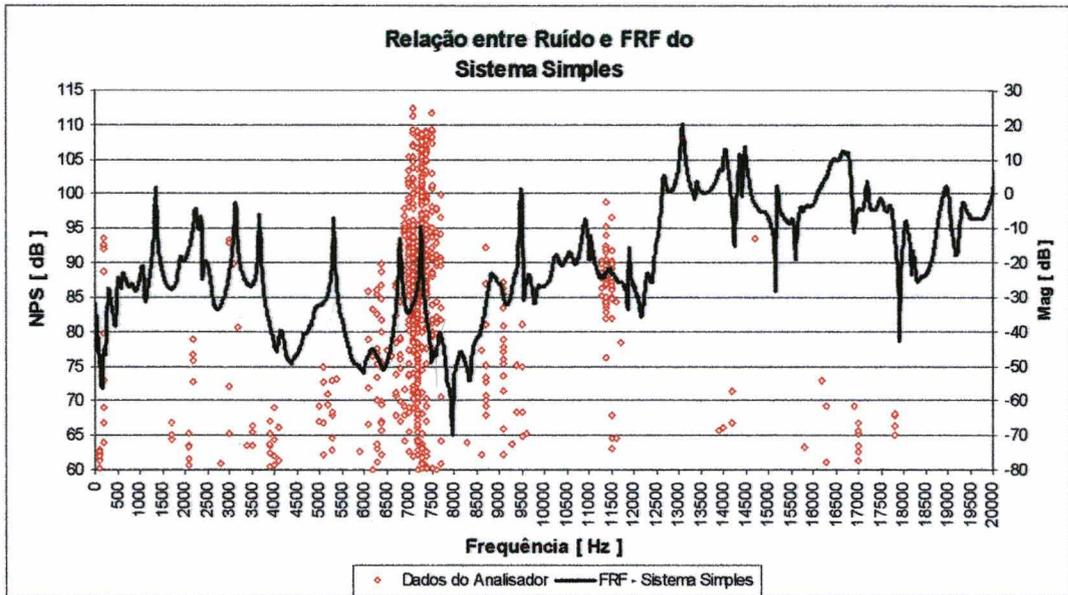


Figura 3.17 : Relação ruído medido x FRF do sistema de freio simples.

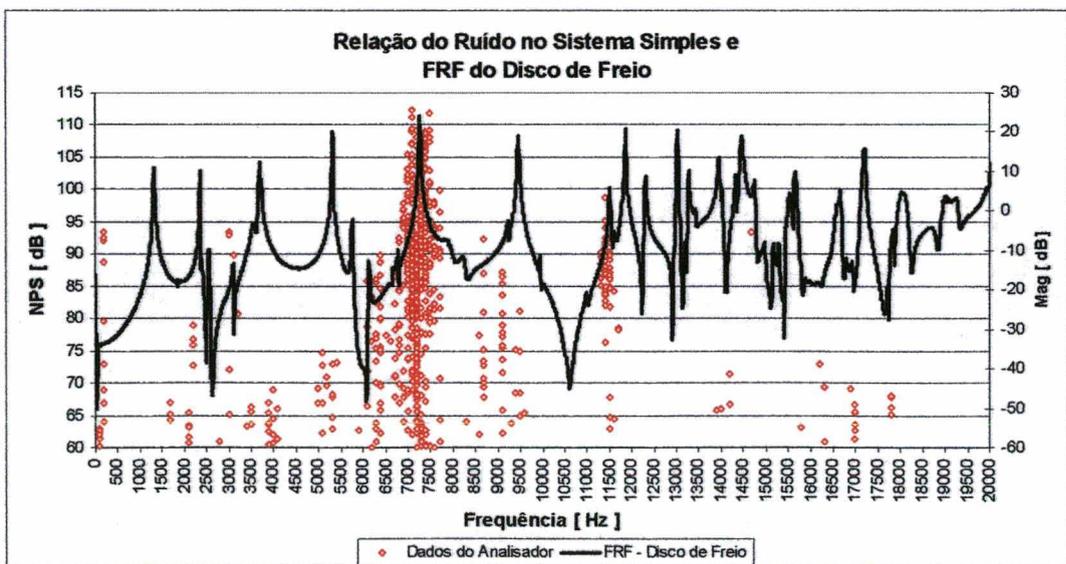


Figura 3.18 : Relação ruído medido x FRF característica do disco de freio.

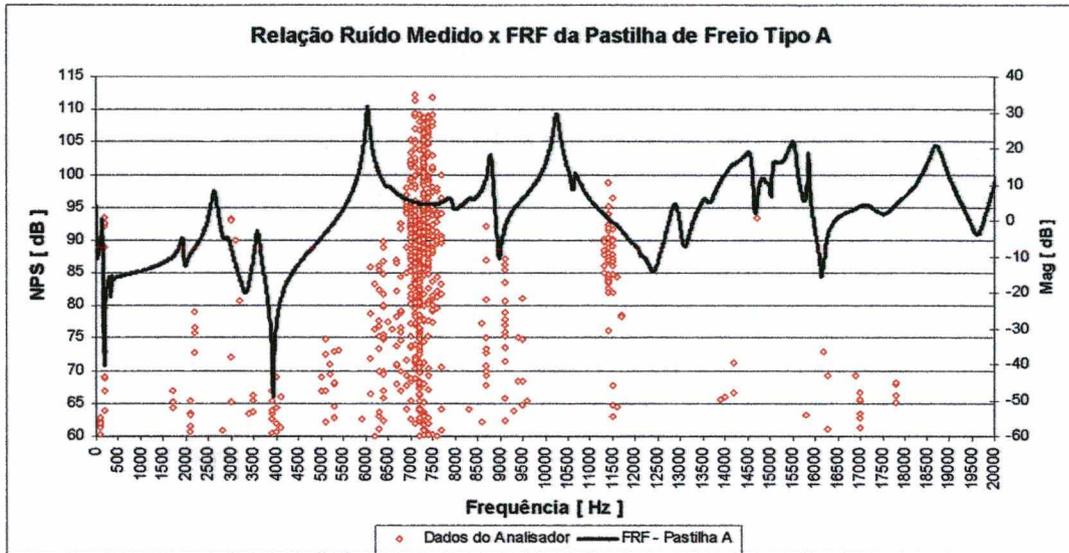


Figura 3.19 : Relação ruído medido x FRF característica da pastilha de freio Tipo A.

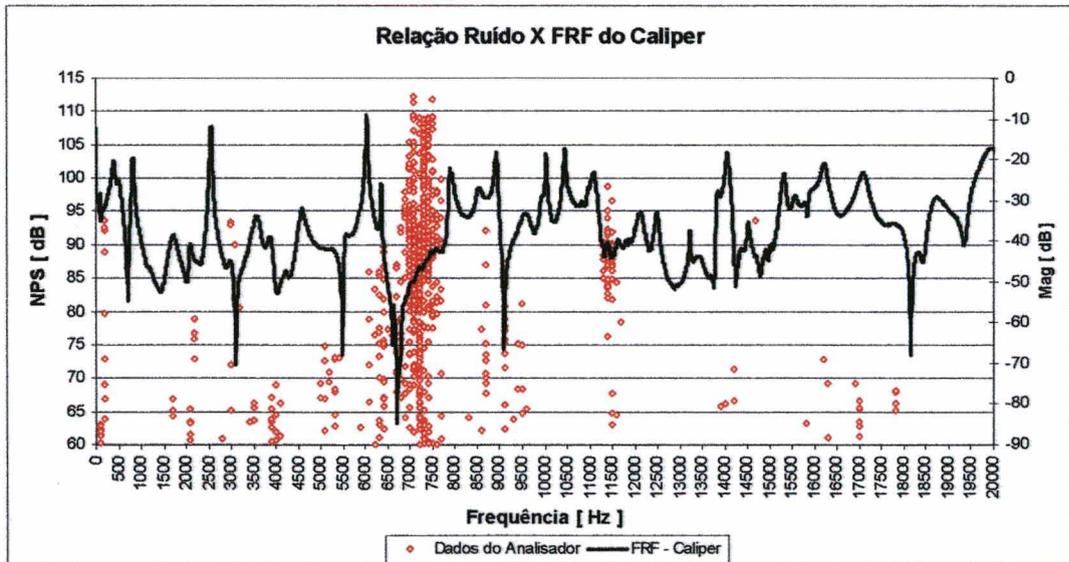


Figura 3.20 : Relação ruído medido x FRF característica o caliper.

A Figura 3.18 evidencia a clara contribuição do disco de freio na irradiação do ruído. A pastilha de freio e o caliper, como componentes isolados, não apresentam grandes contribuições na irradiação do ruído. Já o sistema acoplado, como um todo, apresenta frequências de ressonância nas principais regiões de ocorrência de ruído.

Deve-se salientar que o sistema em estado de operação sofre cargas devido à pressão de frenagem. Desta forma, dadas as condições alteradas de rigidez do sistema, são esperadas variações nas frequências de ocorrência de ruído. Estas variações, em alguns casos, podem provocar uma divergência entre as ressonâncias do sistema, medidas sem carga, e os picos de ruído registrados. Por estas razões, os resultados apresentados na seqüência de figuras precedentes é considerado satisfatório.

Diante destas evidências finais, o sistema simples será utilizado como bancada de testes para avaliação dos parâmetros de influência na geração do ruído, citados na Seção 2.2.1.

3.5. Testes com os Parâmetros de Influência na Geração do Ruído

Para proceder as avaliações dos parâmetros de influência, foi criada uma rotina de cálculo (macro) para o programa Excel, já que o dinamômetro não executa esta separação diretamente. Esta macro capacitou a separação das ocorrências de ruído em relação as variáveis de interesse. Esta separação permite monitorar as variações de parâmetros, em termos percentuais, quando se executam alterações na composição da pastilha de freio.

Visando entender as relações entre ruído e respectivas variáveis de interesse, uma pastilha de freio com composição considerada adequada foi utilizada. Esta pastilha, denominada **Tipo B**, referencia o nível mais alto de exigência. Utilizando esta pastilha, ter-se-á uma boa visão da influência das variáveis a serem monitoradas.

3.5.1. Rotina de Testes Utilizada

O teste utilizado em todos os ensaios foi o AK-Master, consistindo dos blocos mencionados na Seção 3.1.1. Este teste prevê varreduras nas seguintes variáveis e condições:

- Pressões, variando de 2,5 a 30 bar, sempre realizando um perfil de pressão;
- Temperaturas do par disco/pastilha, variando de 50°C a 300°C;
- Velocidade de rotação do disco de freio, nas faixa de velocidades de 5 rpm e 10 rpm. O teste executa, ainda, uma frenagem de parada de 30 km/h para 0 km/h.

A duração aproximada do teste é de 24 h, onde são executadas cerca de 1400 freadas, divididas em 4 blocos.

Ao final do teste, os resultados são emitidos na forma de uma tabela seqüencial, conforme o procedimento tomado. Tem-se, também, um resultado gráfico dos níveis de ruído obtidos em cada frenagem, quando estes ultrapassarem 60 dB.

Porém, o procedimento de teste não permite que se tenha uma separação das variáveis de frenagem monitoradas, nem os níveis de ruído em dB(A). A rotina de cálculo (macro) criada, utilizando o *software* Excel, permite que as variáveis de interesse sejam agrupadas e proceda a cálculos de ocorrência percentual de ruído em cada uma das condições. Os resultados provenientes do programa de separação de variáveis são:

- Ocorrências percentuais de ruído, globais e relativas, segundo a variação de pressão;
- Ocorrências percentuais de ruído, globais e relativas, segundo a variação de velocidade de frenagem;
- Ocorrências percentuais de ruído, globais e relativas, segundo a variação de temperatura do par disco/pastilha;
- Dispersão dos níveis de ruído, agrupados por frequência, corrigidos para dB(A).

3.5.2. Relação entre Parâmetros de Influência e Ruído Medido

Com base nos resultados do programa discutido anteriormente, é possível avaliar, para cada nova pastilha, as influências de cada parâmetro de frenagem na geração do ruído.

Para uma avaliação da efetividade do programa, tomou-se uma pastilha genérica, e procedeu-se a um teste em dinamômetro. Exemplos dos resultados obtidos podem ser vistos nas figuras que seguem.

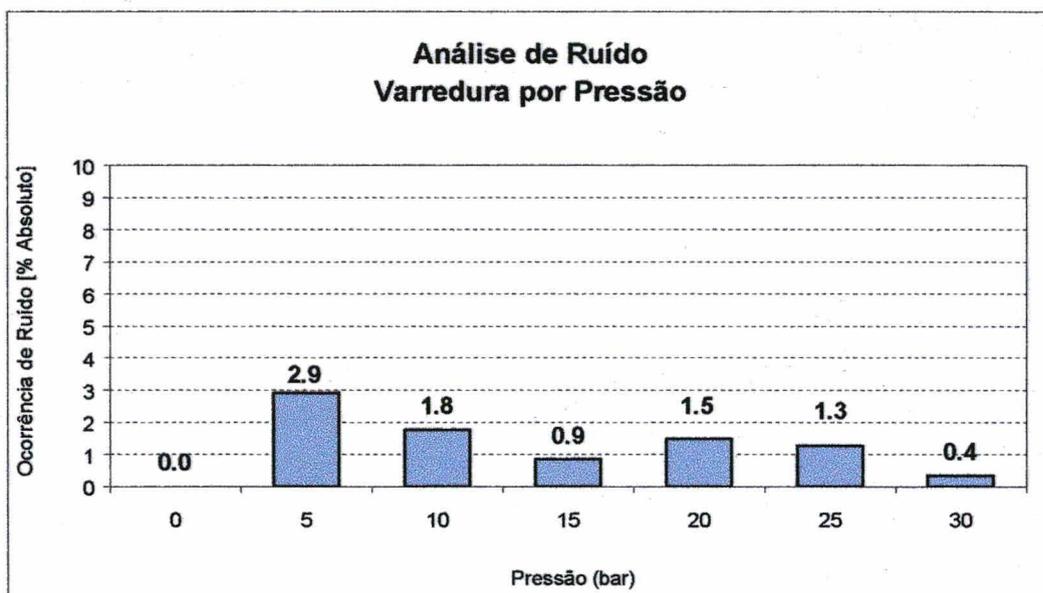


Figura 3.21 : Ocorrências de ruído separadas por valores de pressão de frenagem.

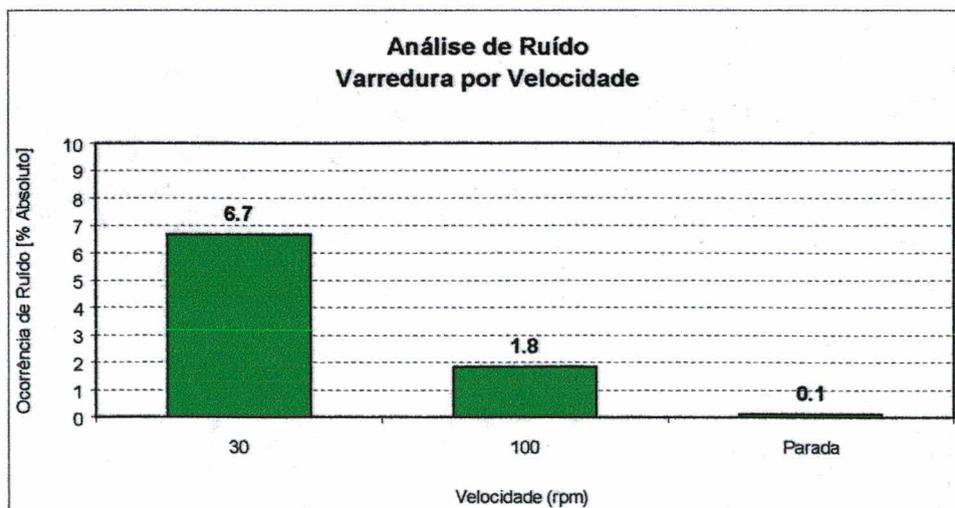


Figura 3.22 : Ocorrências de ruído separadas por valores de velocidade.

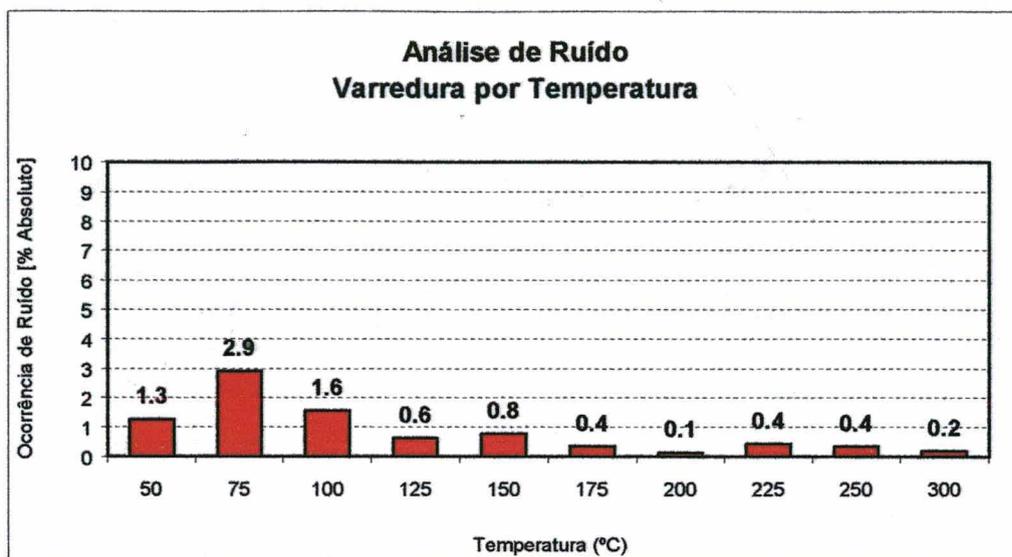


Figura 3.23 : Ocorrências de ruído separadas por valores de temperatura.

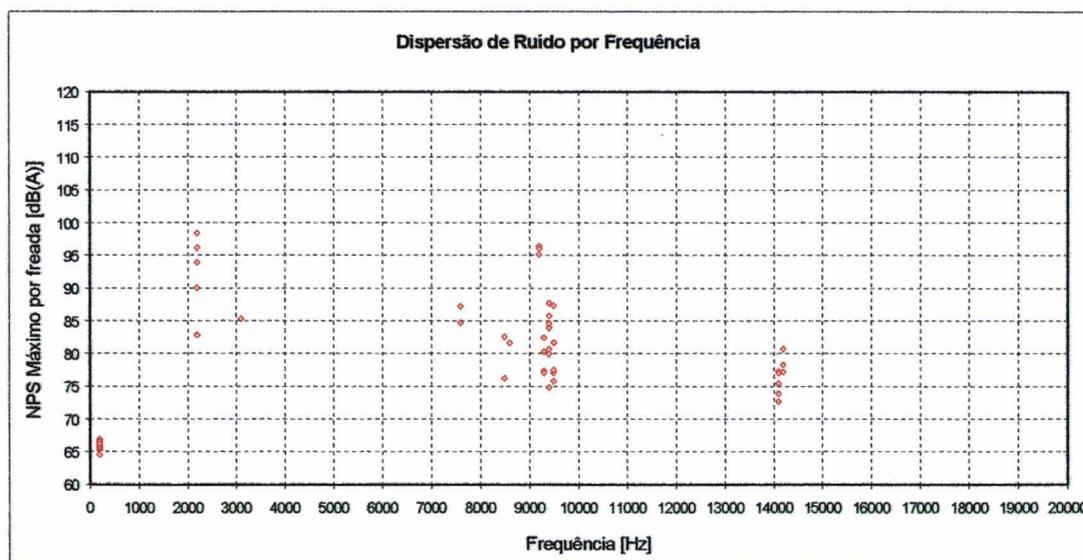


Figura 3.24 : Dispersão de ruído por frequência.

3.5.3. Conclusões sobre Efeitos dos Parâmetros de Influência

Após acompanhar os resultados de vários testes, realizados com diversos tipos de pastilhas de freio, pôde-se concluir que o ruído, geralmente, ocorre nas seguintes condições:

- Pressões entre 5 bar e 15 bar;
- Velocidade de 30 rpm;
- Temperaturas entre 50°C e 100°C.

Embora na maioria dos casos o ruído tenha se manifestado nas condições descritas acima, não é raro que o mesmo apareça em condições de pressão e temperatura mais elevadas. No entanto, a condição de velocidade permanece praticamente inalterada, mesmo quando as pressões e temperaturas diferem significativamente das descritas.

É importante salientar que, dadas as características químicas das pastilhas, alterações de composição podem causar um deslocamento das ocorrências de ruído para regiões de maior pressão ou maior temperatura.

A maior utilidade da separação de variáveis influentes será verificada quando se realizar uma comparação das ocorrências de ruído com variações de rigidez e amortecimento das pastilhas de freio. Esta comparação permitirá entender os efeitos das alterações sobre o percentual de ruído em cada faixa de pressão, temperatura ou velocidade analisada.

4. MODELO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DO CONJUNTO DE FREIO

O modelo analítico apresentado neste trabalho fornecerá indicativos das instabilidades do sistema. Modelos em elementos finitos, serão usados para análise das frequências naturais, comparando-as com as obtidas experimentalmente e os respectivos modos de vibração. Estes modos têm especial importância no cálculo de alguns parâmetros do modelo matemático.

4.1. Modelo Analítico

Com base nas discussões feitas no Capítulo 2, o modelo escolhido para avaliar a geração de ruído e monitorar o aparecimento de instabilidade foi baseado no modelo proposto por North [1972]. Com este modelo, pode-se variar diretamente os valores de rigidez, amortecimento e demais propriedades dos componentes do sistema. Assim é possível estabelecer uma relação entre as variações executadas e o aparecimento das instabilidades.

Um esquema, mostrando os referenciais utilizados para escrever as equações de movimento, pode ser visto na Figura 4.1. Nesta figura, vê-se que o modelo proposto tem oito graus de liberdade. Um de translação, dado pelos eixos y_n , e um de rotação, dado pelos eixos θ_n , para cada um dos quatro componentes do sistema. Contempla, ainda, dimensões relevantes de cada componente, bem como seus momentos de inércia e valores de massa. Na Figura 4.1.b, tem-se a cota G, que indica o ponto utilizado para introduzir nas equações do modelo a reação ocasionada pelo atrito das pastilhas sobre o calíper.

Inicialmente, pode-se considerar uma pré-carga estática N_0 sobre cada uma das pastilhas de freio. Esta pré-carga existe no sistema real, e é da ordem de 10^3 N (2,5 bar). Pelos referenciais estabelecidos na Figura 4.1, as forças dinâmicas exercidas pelas pastilhas sobre o disco podem ser escritas na forma :

$$N_1 = N_0 - C_{p1}(\dot{y}_1 - \dot{y}_0) - K_{p1}(y_1 - y_0) \quad (4.1)$$

$$N_2 = N_0 + C_{p2}(\dot{y}_2 - \dot{y}_0) + K_{p2}(y_2 - y_0) \quad (4.2)$$

onde N_0 é a carga estática entre pastilhas e disco de freio.

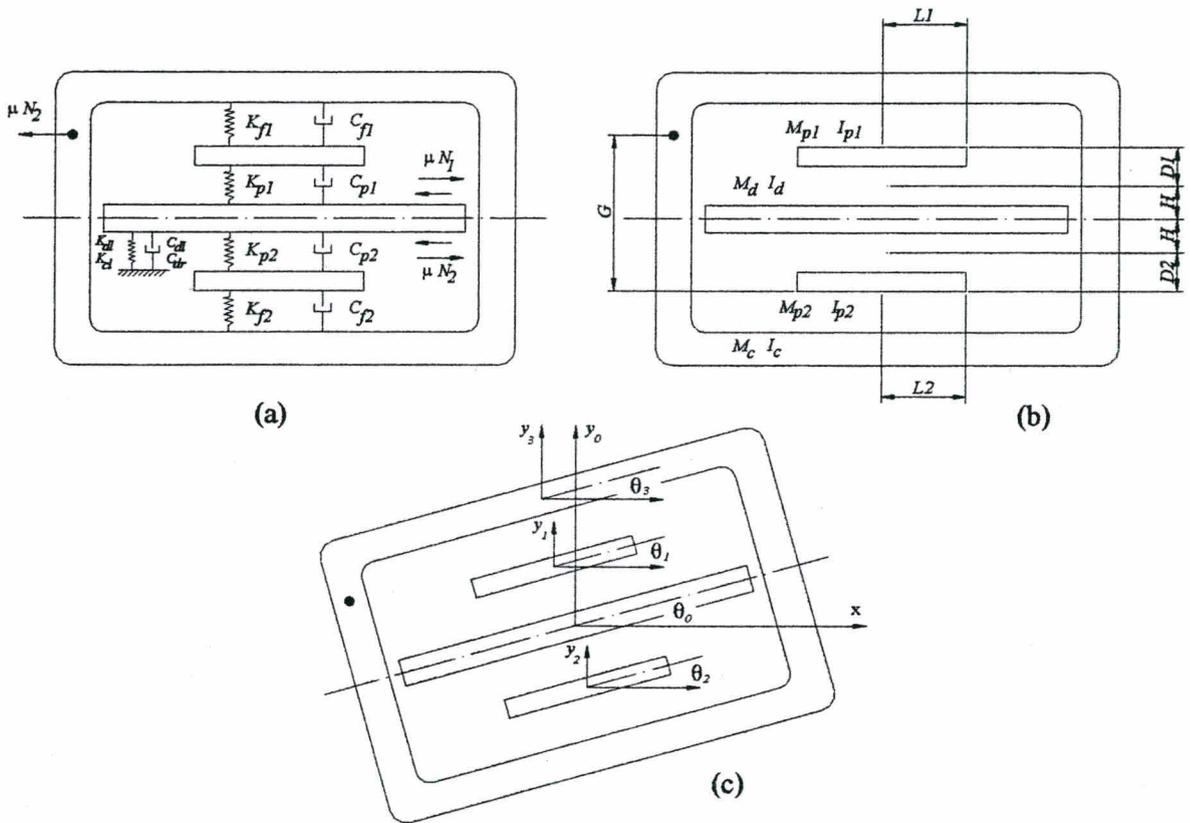


Figura 4.1 : Esquema do modelo analítico. (a) Modelo massa-mola-amortecimento

(b) Dimensões do modelo. (c) Coordenadas gerais do sistema.

As variáveis K_{p1} e K_{p2} , representam os valores de rigidez das pastilhas 1 e 2, respectivamente, e as variáveis C_{p1} e C_{p2} , os valores de amortecimento viscoso destas mesmas pastilhas.

A rigidez combinada do fluido de freio e do caliper, e seus respectivos amortecimentos, são representados pelas variáveis K_{f1} , K_{f2} , C_{f1} e C_{f2} .

A rigidez e o amortecimento rotacional, entre pastilha e disco, por exemplo, podem ser avaliados pelas seguintes expressões (veja Apêndice B):

$$K_{rot} = K_{p1} \left(\frac{L_1^2}{3} \right) \quad C_{rot} = C_{p1} \left(\frac{L_1^2}{3} \right) \quad (4.3)$$

Com base na Figura 4.1.a, e nas equações apresentadas em (4.3), para pequenos valores dos ângulos θ_0 , θ_1 , θ_2 e θ_3 , pode-se escrever as equações de movimento do sistema.

Disco de Freio

$$\begin{aligned} M_d \ddot{y}_0 + C_{p1} (\dot{y}_0 - \dot{y}_1) + K_{p1} (y_0 - y_1) + \mu (N_1 + N_2) \theta_0 \\ + C_{p2} (\dot{y}_0 - \dot{y}_2) + K_{p2} (y_0 - y_2) + C_{dl} \dot{y}_0 + K_{dl} y_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} I_d \ddot{\theta}_0 + C_{p1} \left(\frac{L_1^2}{3} \right) (\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_1) + K_{p1} \left(\frac{L_1^2}{3} \right) (\theta_0 - \theta_1) - \mu (N_1 - N_2) H \\ + C_{p2} \left(\frac{L_2^2}{3} \right) (\dot{\theta}_0 - \dot{\theta}_2) + K_{p2} \left(\frac{L_2^2}{3} \right) (\theta_0 - \theta_2) + C_{dr} \dot{\theta}_0 + K_{dr} \theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

sendo:

M_d a massa do disco;

μ o coeficiente de atrito entre disco de freio e pastilhas;

C_{dl} o amortecimento linear do disco a terra;

K_{dl} a rigidez linear do disco a terra;

I_d o momento de inércia do disco de freio;

H a meia espessura do disco de freio;

K_{dr} a rigidez de flexão do disco a terra;

C_{dr} o amortecimento de flexão do disco a terra.

L_1, L_2 o meio comprimento das pastilhas 1 e 2;

Pastilha 1

$$M_{p1}\ddot{y}_1 + C_{p1}(\dot{y}_1 - \dot{y}_0) + K_{p1}(y_1 - y_0) + C_{f1}(\dot{y}_1 - \dot{y}_3) + K_{f1}(y_1 - y_3) = 0 \quad (4.6)$$

$$I_{p1}\ddot{\theta}_1 + C_{p1}\left(\frac{L_1^2}{3}\right)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_0) + K_{p1}\left(\frac{L_1^2}{3}\right)(\theta_1 - \theta_0) - \mu N_1 D_1 + C_{f1}\left(\frac{L_1^2}{3}\right)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3) + K_{f1}\left(\frac{L_1^2}{3}\right)(\theta_1 - \theta_3) = 0 \quad (4.7)$$

sendo:

M_{p1} a massa da pastilha 1;

I_{p1} o momento de inércia da pastilha 1;

D_1 o braço de momento da força de atrito de reação da pastilha 1.

Pastilha 2

$$M_{p2}\ddot{y}_2 + C_{p2}(\dot{y}_2 - \dot{y}_0) + K_{p2}(y_2 - y_0) + C_{f2}(\dot{y}_2 - \dot{y}_3) + K_{f2}(y_2 - y_3) = 0 \quad (4.8)$$

$$I_{p2}\ddot{\theta}_2 + C_{p2}\left(\frac{L_2^2}{3}\right)(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_0) + K_{p2}\left(\frac{L_2^2}{3}\right)(\theta_2 - \theta_0) + \mu N_2 D_2 + C_{f2}\left(\frac{L_2^2}{3}\right)(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) + K_{f2}\left(\frac{L_2^2}{3}\right)(\theta_2 - \theta_3) = 0 \quad (4.9)$$

sendo:

M_{p2} a massa da pastilha 2;

I_{p2} o momento de inércia da pastilha 2;

D_2 o braço de momento da força de atrito de reação da pastilha 2.

Cáliper

$$\begin{aligned} M_c \ddot{y}_3 + C_{f1}(\dot{y}_3 - \dot{y}_1) + K_{f1}(y_3 - y_1) - K_{pc}(y_2 + L_2\theta_2 - y_3 - L_2\theta_3) \\ + C_{f2}(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + K_{f2}(y_3 - y_2) + C_{cl}\dot{y}_3 + K_{cl}y_3 - \mu N_2\theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} I_c \ddot{\theta}_3 + C_{f1}\left(\frac{L_1^2}{3}\right)(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1) + K_{f1}\left(\frac{L_1^2}{3}\right)(\theta_3 - \theta_1) - K_{pc}(y_2 + L_2\theta_2 - y_3 - L_2\theta_3)L_2 \\ + C_{f2}\left(\frac{L_2^2}{3}\right)(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) + K_{f2}\left(\frac{L_2^2}{3}\right)(\theta_3 - \theta_2) + C_{cr}\dot{\theta}_3 + K_{cr}\theta_3 - \mu N_2G = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

sendo:

M_c a massa do caliper;

I_c o momento de inércia do caliper;

$G = D_1 + D_2 + 2H$, o braço do momento de reação friccional da pastilha 2.

Para escrever as equações apenas em função dos deslocamentos e da pré-carga inicial, podem-se adicionar as equações (4.1) e (4.2), cujo resultado é :

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 = 2N_0 - C_{p1}(\dot{y}_1 - \dot{y}_0) - K_{p1}(y_1 - y_0) \\ + C_{p2}(\dot{y}_2 - \dot{y}_0) + K_{p2}(y_2 - y_0) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Procedendo a subtração das mesmas equações, tem-se :

$$\begin{aligned} N_1 - N_2 = -C_{p1}(\dot{y}_1 - \dot{y}_0) - K_{p1}(y_1 - y_0) \\ - C_{p2}(\dot{y}_2 - \dot{y}_0) - K_{p2}(y_2 - y_0) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Substituindo as Equações (4.1), (4.2), (4.12) e (4.13) no conjunto de Equações (4.4) a (4.11), e procedendo um rearranjo das mesmas, pode-se escrever as equações de movimento do sistema na forma matricial. Estas matrizes podem ser vistas no Apêndice D.

Na forma matricial, com cada equação normalizada pela massa, as referidas equações podem ser expressas como :

$$\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0 \quad (4.14)$$

onde o vetor X é dado por:

$$X = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ y_0 \\ \theta_0 \\ y_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Pode-se rearranjar a Equação (4.14), escrevendo-a na forma

$$\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \dot{X} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -C & -K \\ U & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ X \end{bmatrix} = 0 \quad (4.15)$$

onde U é uma matriz com a diagonal unitária.

Os autovalores da matriz

$$\begin{bmatrix} -C & -K \\ U & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

fornecem as frequências naturais e os amortecimentos dos oito modos de vibração do sistema.

4.1.1. Determinação das Propriedades Necessárias ao Modelo

Os valores referentes às matrizes de amortecimento e rigidez, bem como a massa e os momentos de inércia de cada componente, foram obtidos experimentalmente.

4.1.1.1. Valores de Amortecimento

Os valores de amortecimento estrutural foram obtidos a partir das curvas de resposta em frequência, utilizando o método da banda de meia potência [Ewins, 1986]. Os valores de amortecimento das pastilhas Tipo A e Tipo B, utilizadas como referências, podem ser vistos nas Figuras 4.2 e 4.3. Para o disco de freio e caliper, os valores de amortecimento viscoso podem ser observados nas Figuras 4.4. e 4.5.

Para proceder ao cálculo do amortecimento dos componentes, cada um dos picos da curva de resposta em frequência dos componentes foi considerado como um sistema de um grau de liberdade.

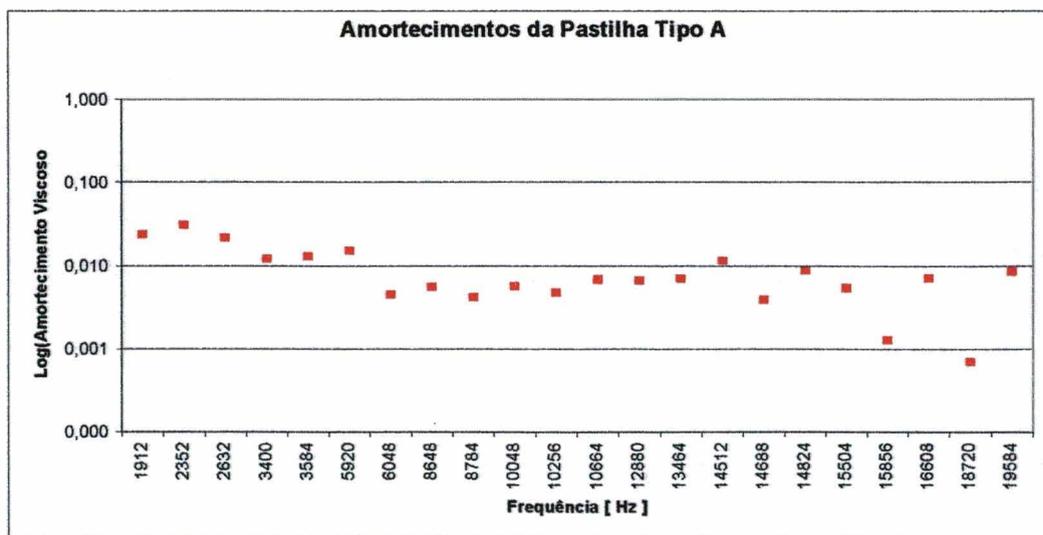


Figura 4.2 : Amortecimentos da pastilha Tipo A.

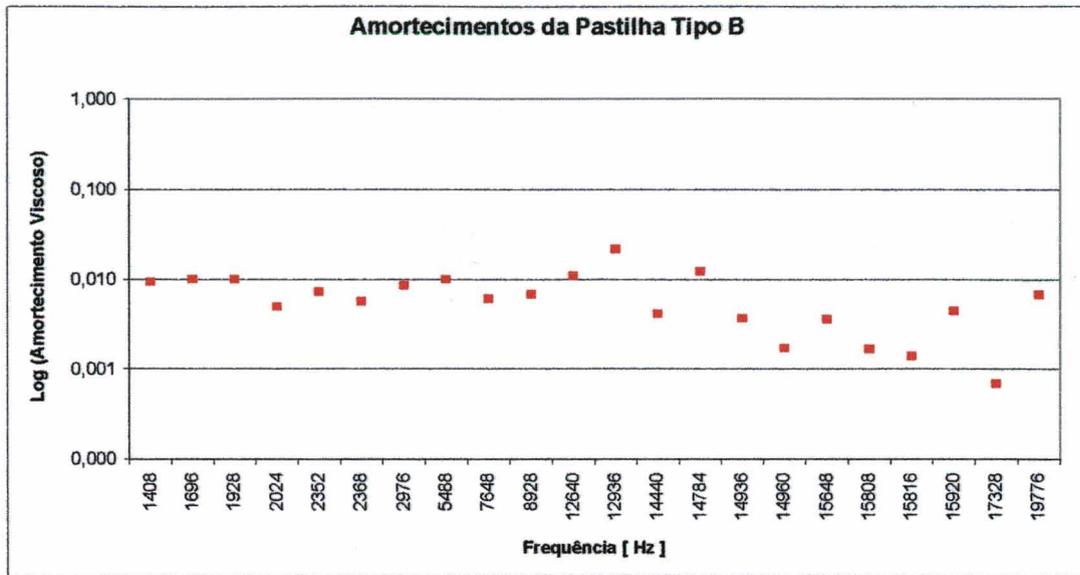


Figura 4.3 : Amortecimentos da pastilha Tipo B.

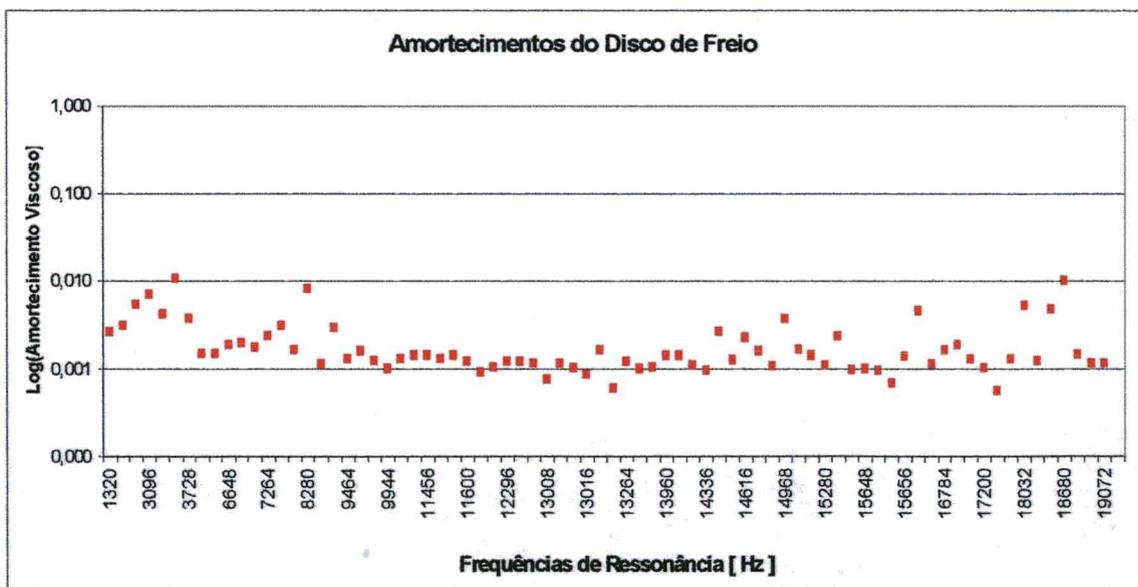


Figura 4.4 : Amortecimentos do disco de freio.

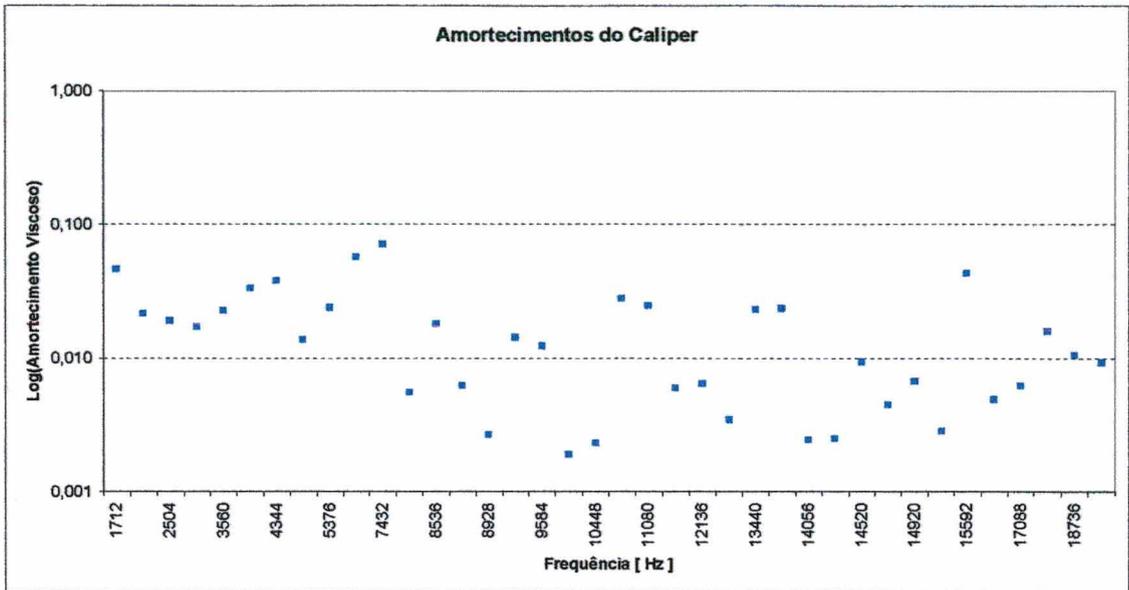


Figura 4.5 : Amortecimentos do caliper.

Todos os amortecimentos na direção normal a superfície do disco, inclusive o do próprio disco, foram calculados segundo a expressão [North, 1972]:

$$c = 2\xi\sqrt{KM} \tag{4.17}$$

sendo: ξ o amortecimento viscoso, obtido das funções de resposta em frequência;

K a rigidez do componente [N/m]

M a massa do componente [kg]

Já o amortecimento rotacional do disco de freio (C_{dr}) foi calculado segundo a expressão [North, 1972]:

$$C_{dr} = 2\xi\sqrt{K_{dr}I_d} \tag{4.18}$$

sendo: ξ o amortecimento viscoso, obtido das funções de resposta em frequência

K_{dr} a rigidez rotacional do disco [N/m]

I_d o momento de inércia do disco [kg.m²]

Note-se que, mesmo tomando cada pico da função resposta em frequência como um sistema de um grau de liberdade, existe ainda uma diferença esperada nos valores de amortecimento em função de que as variáveis da relação acima deveriam ser variáveis modais.

Dada a complexidade de se avaliarem os parâmetros modais, esta aproximação, ainda que não correta, foi admitida como suficiente.

Os valores dos coeficientes de amortecimento a serem usados no modelo analítico, utilizando a Equação (4.17), serão determinados durante a execução da rotina de cálculo dos auto-valores e auto-vetores do modelo. Como não se pode garantir em que região da faixa de frequência audível irá se manifestar o ruído, valores médios de amortecimento viscoso foram utilizados na rotina de cálculo, uma vez que a variação destes com a frequência não é considerável.

Na tabela que segue, estão apresentados os valores médios de amortecimento viscoso dos componentes do sistema de freio, obtidos das curvas de resposta em frequência.

Tabela 4.1 – Valores Médios de Amortecimento Viscoso

Componente	Amortecimento Viscoso Médio (ξ)
Pastilha Tipo B	0,007
Caliper	0,017
Disco de Freio	0,002

4.1.1.2. Valores de Rigidez

O valor da rigidez rotacional do disco de freio, a ser utilizado na Equação (3.18), foi determinada pela expressão [North, 1972]:

$$K_{dr} = 4\pi^2 I_d f^2 \quad (4.19)$$

em que f é a frequência natural de interesse e I_d o momento de inércia do disco de freio.

Os valores de rigidez das pastilhas e do disco de freio foram determinados experimentalmente. Utilizando a máquina de ensaios de compressibilidade LINK 1620, o procedimento descrito a seguir foi implementado.

- As diferentes pastilhas de freio e corpos de prova do disco de freio foram devidamente preparados;
- Os referidos componentes foram submetidos a ensaios de compressibilidade, no qual foram variados os valores de temperatura e pressão, referentes à situação de frenagem em bancada;
- Mediante estas variações, curvas de pressão x deslocamento foram obtidas;
- Feitas as devidas conversões de unidades, os valores de rigidez foram calculados através da determinação da inclinação das curvas obtidas.

As temperaturas e pressões aplicadas no ensaio são as mesmas pressões aplicadas durante os testes executados em dinamômetro. Cuidados foram tomados para que as áreas de aplicação de pressão fossem correspondentes àquelas do sistema real. Nas Figuras 4.6 e 4.7, podem-se observar duas curvas características, obtidas a partir do procedimento descrito.

Conforme estas figuras , as medidas foram tomadas respeitando-se a histerese do material. Os valores utilizados no modelo foram obtidos da média dos valores obtidos com ambas as retas. Isto é importante porque o sistema de freio, durante uma frenagem real, funciona com aumento e redução da pressão.

Para a determinação dos valores de rigidez referentes ao caliper, um procedimento diferenciado do anterior foi tomado. Este procedimento, usando o próprio dinamômetro LINK 2318, foi necessário para possibilitar a avaliação da rigidez conjunta proporcionada pelo caliper e pelo fluido de freio.

- Um bloco de aço SAE 1045, com dimensões aproximadas de 97 x 45 x 45 mm, temperado com uma dureza de 45-48 HRC e suposto indeformável, foi cuidadosamente montado no lugar do disco e das pastilhas de freio;
- Pressões iguais às aplicadas ao disco e à pastilha de freio, no procedimento descrito anteriormente, foram aplicadas ao caliper e seu respectivo sistema de transmissão de pressão hidráulica;
- Os valores de pressão e fluido deslocado foram medidos pelos sensores do dinamômetro e os gráficos de pressão por deslocamento de fluido foram gerados;
- Conhecendo-se o diâmetro do cilindro acionador do sistema de freio, foi possível determinar o deslocamento do mesmo e a conseqüente compressão do sistema.

Com o procedimento descrito, pôde-se calcular os valores de rigidez conjunta do caliper e fluido. A curva da Figura 4.8 é um exemplo de curva obtida do ensaio. As demais curvas, resultantes do mesmo processo, podem ser vistas no Apêndice C. Neste caso, não foram levantadas curvas durante a redução de pressão hidráulica. Ainda que este procedimento não tenha sido tomado, entende-se que não será prejudicial, devido à condição do caliper não estar diretamente ligado ao par gerador disco/pastilha.

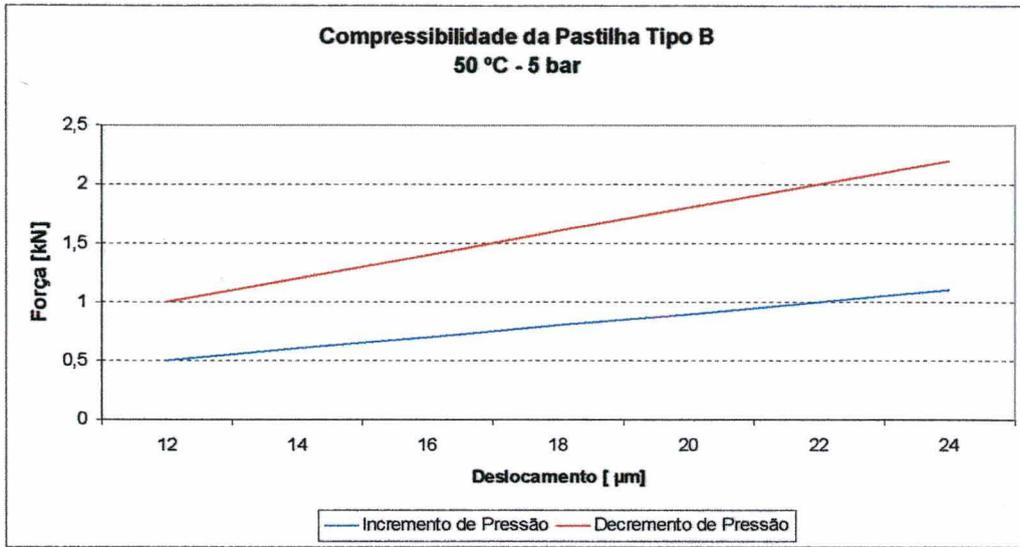


Figura 4.6 : Curva típica de compressibilidade da pastilha de freio

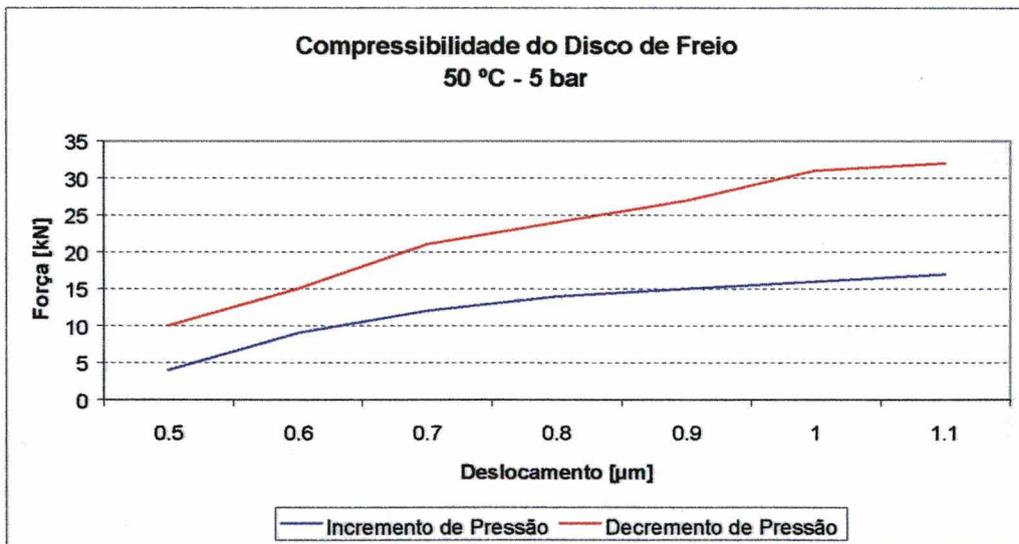


Figura 4.7 : Curva típica de compressibilidade do disco de freio

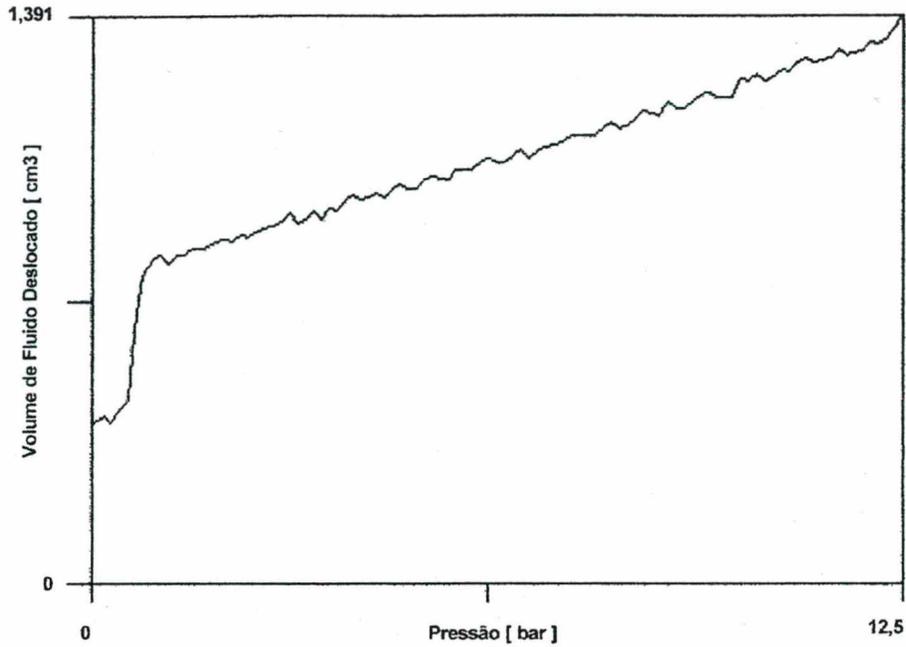


Figura 4.8 : Curva típica da rigidez combinada do caliper até 10 bar.

4.1.1.3. Momentos de Inércia e Massas

Para obtenção dos valores de momento de inércia das diferentes pastilhas de freio e do caliper, o seguinte procedimento foi tomado :

- As peças foram penduradas num ponto cuja distância ao centro de gravidade era conhecida. Para o caso das pastilhas de freio, a distância da borda ao centro de gravidade foi obtida de um modelo no ANSYS. No caso do caliper, a distância foi informada pelo fabricante do componente, mediante uso de software de projeto.
- O componente foi pendulado em torno desta fixação e o período do pêndulo foi determinado com uso de um cronômetro. Três medições foram realizadas para cada componente e o valor médio foi tomado.

- Uma vez conhecido o período do pêndulo e o raio de giração, o momento polar de inércia do componente foi calculado através da relação [Harris, 1976]:

$$J_p = \frac{T^2 M \cdot g \cdot h}{4\pi^2} \quad (4.20)$$

sendo:

T o período médio do pêndulo [s];

M a massa do componente [kg];

g a aceleração da gravidade [m/s^2];

h a distância da extremidade da peça ao centro de gravidade do componente [m].

Como o ponto de pendulação não pode ser colocado exatamente sobre o componente, para serem respeitadas as distâncias ao centro de gravidade, usou-se o teorema dos eixos paralelos para corrigir o momento de inércia através da relação:

$$J_{pc} = J_p + M \cdot d^2 \quad (4.21)$$

sendo:

J_p o momento de inércia polar, determinado pela expressão anterior;

M a massa do componente [kg];

d a distância do ponto de pendulação a extremidade da peça [m]

Os valores finais para caliper e pastilha, calculados segundo as relações apresentadas, são mostrados na Tabela 4.2.

A massa e o momento de inércia do disco de freio é um assunto a parte. Devido às condições rotatórias do mesmo, deve-se considerar uma massa e um momento equivalente, para que as características de inércia sejam computadas no modelo.

Segundo North [1972], a massa e o momento de inércia equivalente do disco podem ser avaliados com base numa equação derivada das características vibratórias do disco, que leva em conta seu modo de vibração.

Tabela 4.2 – Momentos de inércia dos componentes do sistema de freio

<i>Componente</i>	<i>Massa</i> [kg]	<i>Momento de Inércia</i> [kg.m ²]
Pastilha Tipo B	0,2790	3,78x10 ⁻⁴
Caliper	3,0166	1,52x10 ⁻²

As Equações (4.22) e (4.23) demonstram estas relações. A equação da massa equivalente pode ser escrita como [North, 1972]:

$$M_{equ} = \frac{2Y\pi}{(b-r_0)^{2k}} \int_a^b r(r-r_0)^{2k} dr \quad (4.22)$$

sendo:

$Y = y.h$ a densidade por unidade de área [kg/m²]

y a densidade do material [kg/m³]

h a espessura do disco [m]

b o raio externo do disco [m]

a o raio interno do disco [m]

r_0 uma constante do modo de vibração.

k um expoente do modo de vibração.

Já a equação do momento de inércia equivalente é [North, 1972]:

$$I_{equ} = M_{equ} \frac{b^2}{n^2} \quad (4.23)$$

onde n é a ordem do modo de vibração referente à frequência de vibração que se deseja avaliar. O valor de n será determinado pelo modelo de elementos finitos (veja Item 4.2.2).

Os valores resultantes da aplicação das Equações (4.17) e (4.18) são calculados na rotina de solução do modelo analítico.

4.1.2. Solução do Modelo e Validação Experimental

Para a solução do modelo analítico foi implementada uma rotina, utilizando o software MatLab. Esta rotina calcula os elementos das matrizes de amortecimento e rigidez, extrai os autovalores da matriz e plota um gráfico para análise de instabilidade.

Para que os valores a serem usados no modelo fossem devidamente escolhidos, recorreu-se à resposta real de um sistema. Utilizando os gráficos provenientes da rotina de separação de parâmetros do teste em bancada, escolheu-se a condição de teste em que houve o maior percentual de ocorrência de ruído. As Figuras 4.9 a 4.11, mostram os referidos resultados quando o sistema foi testado com a pastilha **Tipo B**.

Pela observação dos gráficos das Figuras 4.9 a 4.11, identifica-se o problema efetivo na pressão de 5 bar, velocidade de 30 rpm e 50°C de temperatura. Desta forma, os valores de rigidez, dependentes de pressão e temperatura puderam ser escolhidos.

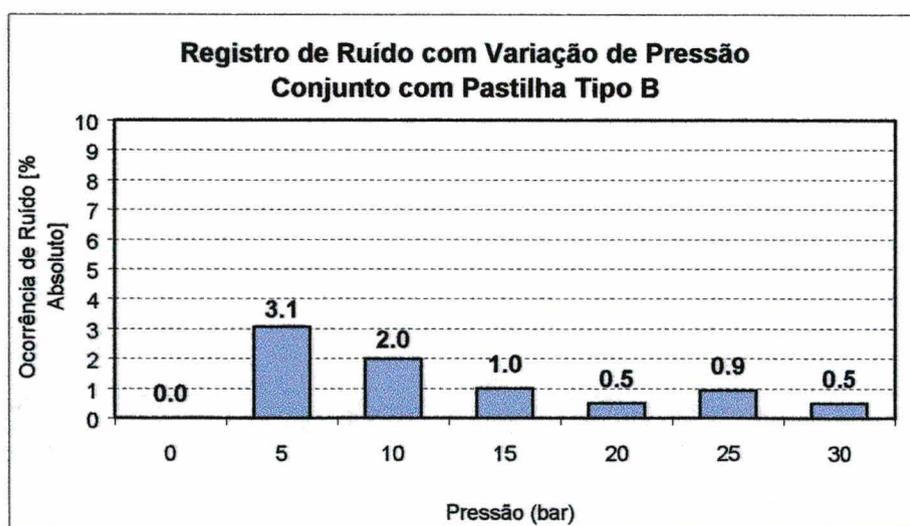


Figura 4.9 : Registro de ruído – varredura por pressão.

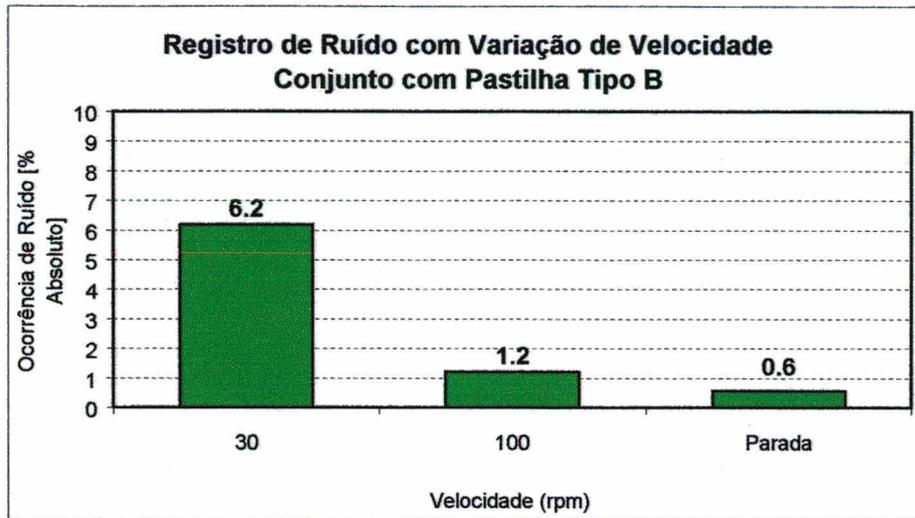


Figura 4.10 : Registro de ruído – varredura por velocidade.

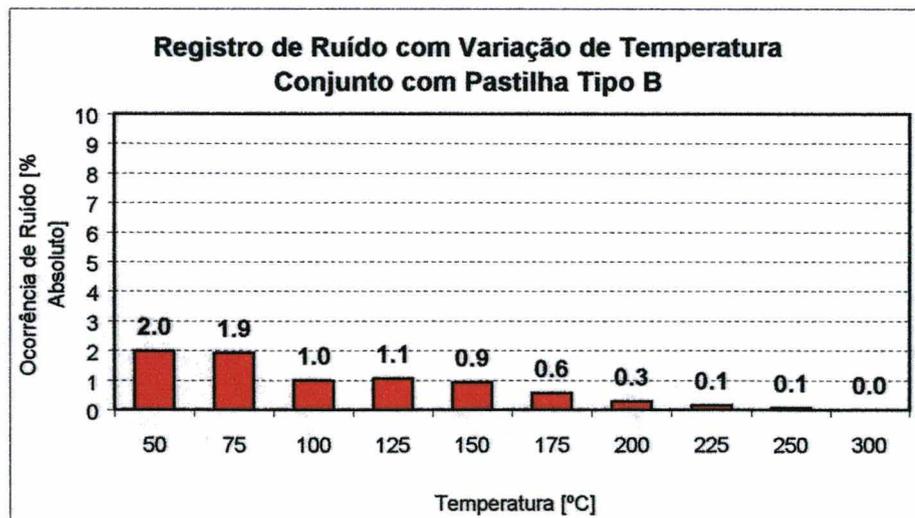


Figura 4.11 : Registro de ruído – varredura por temperatura.

A seguir, tem-se uma lista dos valores dos parâmetros usados no modelo, utilizando a Pastilha Tipo B.

$$\begin{aligned}M_c &= 3,0166 \text{ kg} \\M_d &= 3,7282 \text{ kg} \\M_{p1}, M_{p2} &= 0,2790 \text{ kg} \\I_c &= 1,52 \times 10^{-2} \text{ kg.m}^2 \\I_d &= 0,2808 \text{ kg.m}^2 \\I_{p1}, I_{p2} &= 3,78 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2 \\K_{dl} &= 5,0 \times 10^9 \text{ N/m} \\K_{dr} &= 6,7 \times 10^6 \text{ N/m} \\C_{dl} &= 2,22 \times 10^3 \text{ N/m/s} \\C_{dr} &= 0,61 \text{ N/m/rad/s} \\K_{p1}, K_{p2} &= 4,0 \times 10^7 \text{ N/m} \\C_{p1}, C_{p2} &= 46,77 \text{ N/m/s} \\K_{f1}, K_{f2} &= 1,1 \times 10^7 \text{ N/m} \\C_{f1}, C_{f2} &= 1,958 \times 10^2 \text{ N/m/s} \\D_1, D_2 &= 9,0 \times 10^{-3} \text{ m} \\\mu &= 0,38 \\N_o &= 904,78 \text{ N} \\H &= 6,0 \times 10^{-3} \text{ m} \\L_1, L_2 &= 50,0 \times 10^{-3} \text{ m} \\G &= 30,0 \times 10^{-3} \text{ m} \\\xi_{disco} &= 0,002 \\\xi_{caliper} &= 0,017 \\\xi_{pastilha} &= 0,007 \\f &= 7000 \text{ Hz}\end{aligned}$$

O resultado do modelo, baseado no uso dos valores acima, que pode ser visto na Figura 4.12, indica uma frequência de vibração de 7 kHz na área instável. Isto significa que esta frequência, ao ser excitada pelo par disco/pastilha, ganha uma componente exponencial

crescente. Esta frequência, dita auto-excitada, só cessará quando cessar o contato entre disco e pastilha, isto é, a frenagem for terminada ou a pressão hidráulica aumentar consideravelmente, fugindo da região compreendida entre 5-15 bar.

Como verificação, um gráfico de ocorrência de ruído, obtido diretamente do dinamômetro, pode ser visto na Figura 4.13.

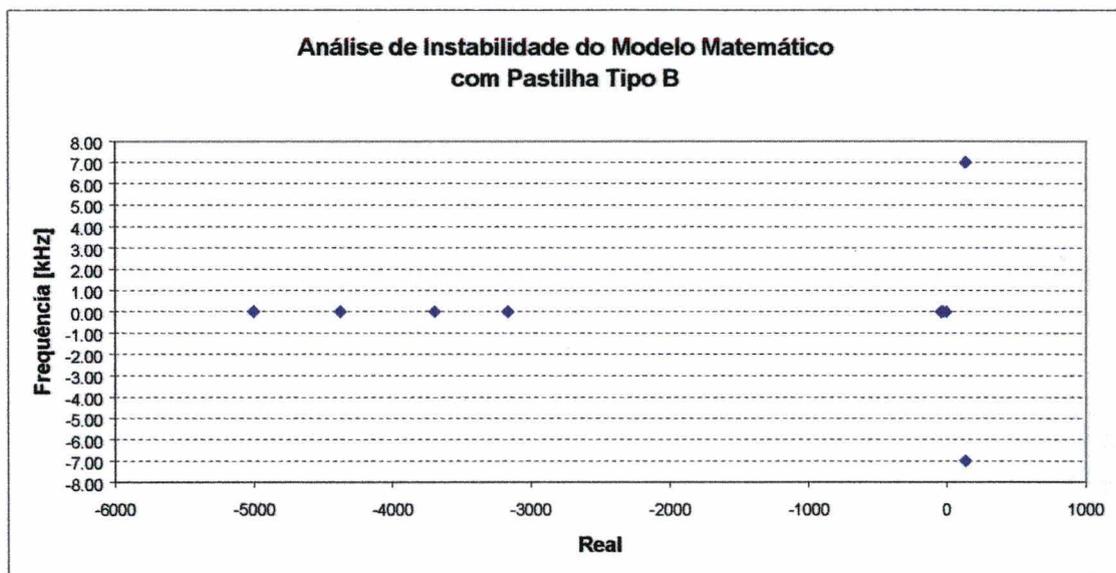


Figura 4.12 : Resultado gráfico proveniente do modelo analítico.

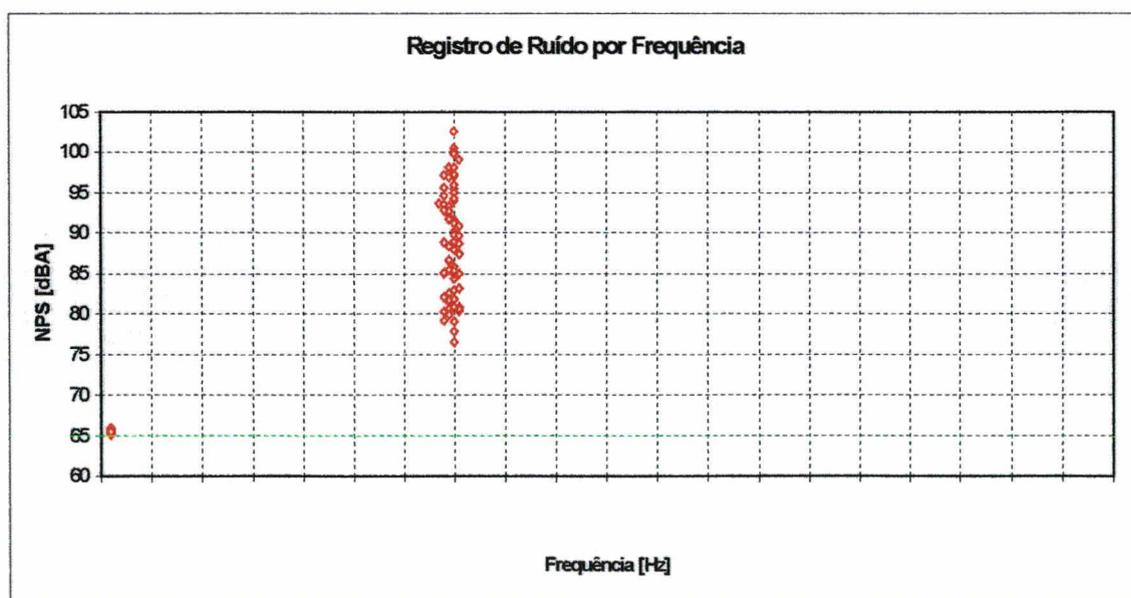


Figura 4.13 : Resultado de registro de ruído proveniente do teste com bancada.

Vê-se, claramente, na Figura 4.13 que o resultado do modelo matemático, mostrado na Figura 4.12, está bastante coerente com o obtido do ensaio em bancada. Isto permite que sejam analisados os efeitos das variações de massa, rigidez e amortecimentos dos componentes, sobre o ruído gerado com este modelo.

4.1.3. Análise de Tendências

Nesta seção, usando o modelo analítico, serão analisadas as seguintes variações:

- Rigidez das pastilhas de freio;
- Amortecimento das pastilhas de freio;
- Rigidez do disco de freio;
- Amortecimento linear do disco;
- Rigidez combinada do caliper;
- Massas do caliper, disco e pastilhas.

Muito embora a intenção principal seja modificar as características da pastilha de freio, a mudança das demais variáveis é favorável ao entendimento do comportamento do sistema. Devido às frequências resultantes do modelo serem complexas conjugadas, somente as positivas serão mostradas.

Na Figuras 4.14 a 4.16, pode-se observar as variações na instabilidade do sistema quando procede-se a alterações nas características da pastilha de freio.

Pode-se observar pela Figura 4.14 que em torno de 60% de redução do amortecimento da pastilha, o sistema passa para a região de estabilidade. Já na Figura 4.15, nota-se que uma redução de 10 vezes na rigidez da pastilha, ou seja, de uma ordem de grandeza, faz com que o

sistema passe para a região estável. Variações na massa da pastilha mostram uma aproximação da resposta do sistema em relação à estabilidade. Porém, tornam-se impraticáveis tais reduções.

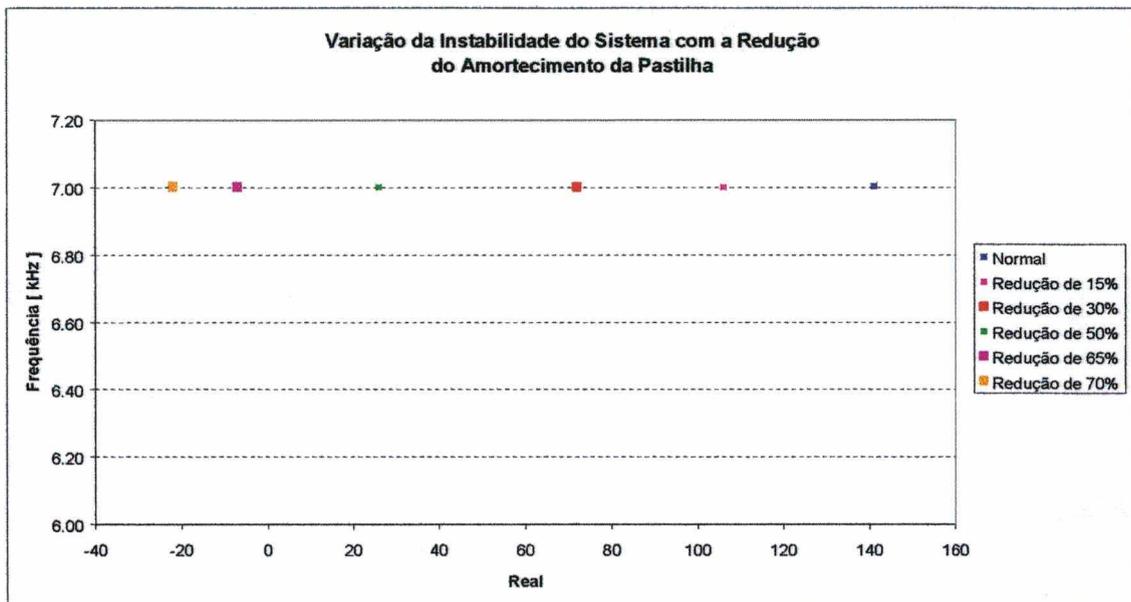


Figura 4.14 : Variação de instabilidade com a variação do amortecimento da pastilha.

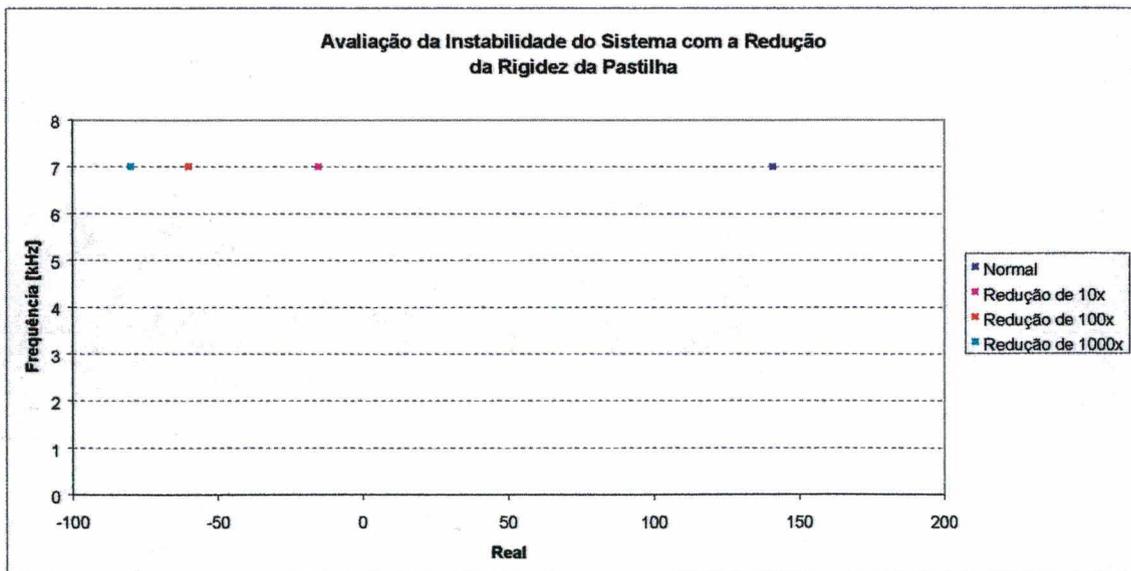


Figura 4.15 : Variação de instabilidade com a variação da rigidez da pastilha.

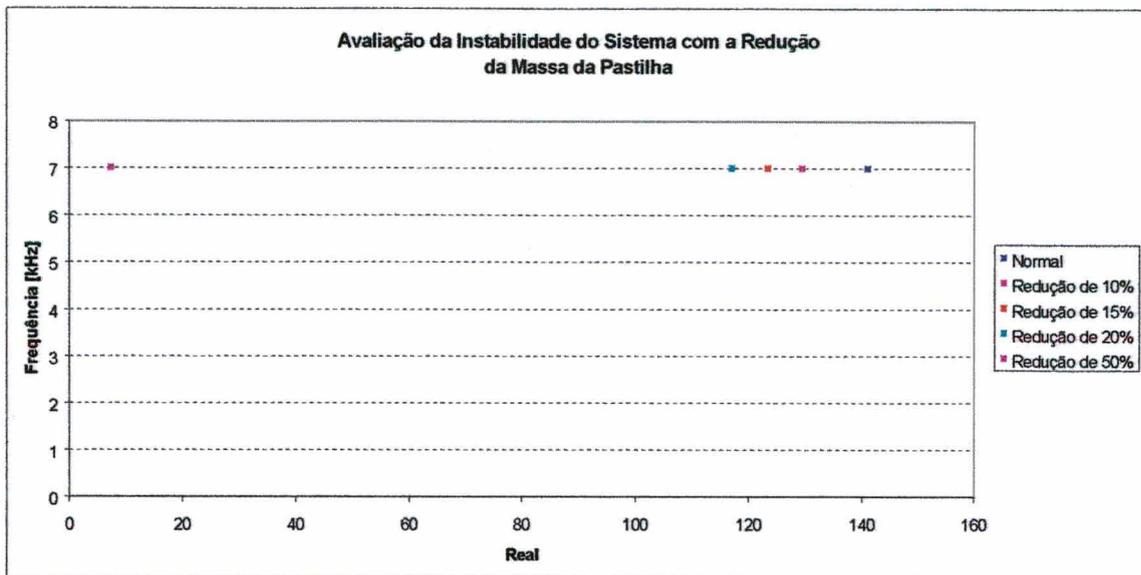


Figura 4.16 : Variação de instabilidade com a variação da massa da pastilha.

Com relação às variações no disco de freio, pode-se afirmar que alterações na rigidez do mesmo não mostram mudanças significativas de estabilidade. Para as variações de amortecimento, observa-se que um aumento da ordem de 2,5 vezes coloca o sistema sobre a região de estabilidade. Isto pode ser visto na Figura 4.17.

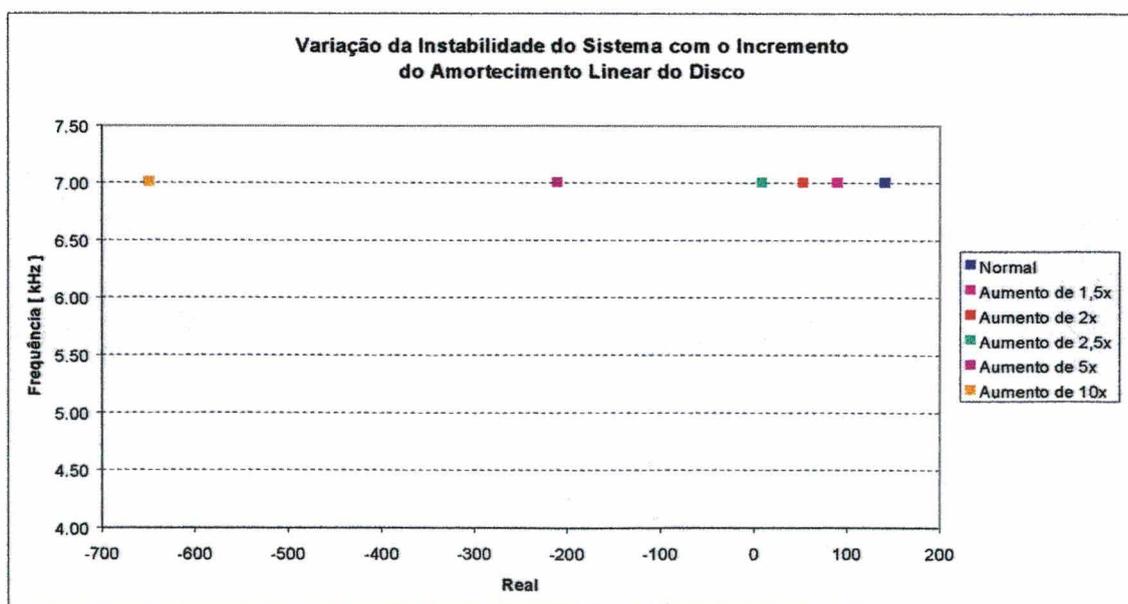


Figura 4.17 : Variação de instabilidade com a variação do amortecimento do disco.

Deve-se observar que o modelo analítico apresentado representa um sistema de parâmetros concentrados, o que implica em simplificações que necessitam serem feitas, principalmente na representação do comportamento do disco e da pastilha. Estes componentes possuem modos e respectivas frequências de ressonância bem definidas, pois são considerados subsistemas contínuos, para os quais parâmetros concentrados equivalentes foram determinados. Estas simplificações certamente alteram a representação analítica do comportamento real do sistema físico. Entretanto, a frequência de maior ocorrência do ruído foi determinada com boa precisão.

4.2. Modelos em Elementos Finitos

Para este procedimento de análise o componente modelado foi o disco de freio. O componente foi modelado em elementos de placa e elementos sólidos. Uma análise comparativa entre os dois tipos de modelo irá indicar qual é o tipo de elemento mais adequado à construção do modelo de análise. As frequências naturais obtidas do modelo serão comparadas com as obtidas experimentalmente, através das FRF do componente.

Tanto o modelo em elementos de placa como o modelo em elementos sólidos foram processados para uma faixa de frequência de 0 a 20 kHz. Os modelos, criados para avaliação das frequências naturais, podem ser vistos nas Figuras 4.18 e 4.19.

Na Tabela 4.3 estão as informações mais relevantes sobre os dois modelos avaliados.

Tabela 4.3 – Informações sobre os modelos de elementos finitos.

	Modelo com Elementos de Placa	Modelo com Elementos Sólidos
Tipo de Elemento	<i>Shell 91</i>	<i>Solid 92</i>
Refinamento Automático	<i>Smartsiz 1</i>	<i>Smartsiz 4</i>
Nº de Elementos	4327	11601

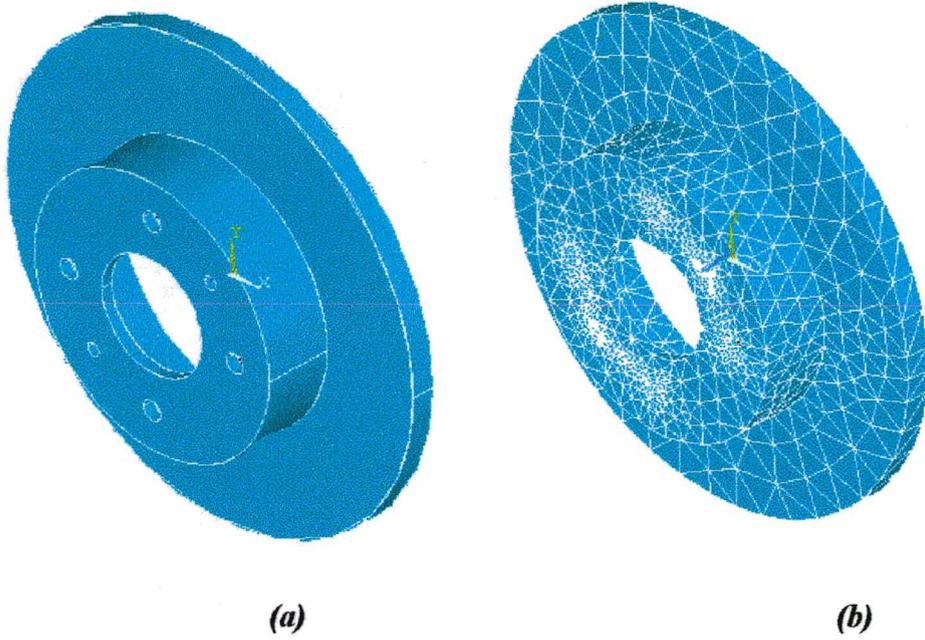


Figura 4.18 : Modelo sólido do disco. **(a)** Modelo volumétrico
(b) Malha com elementos de volume.

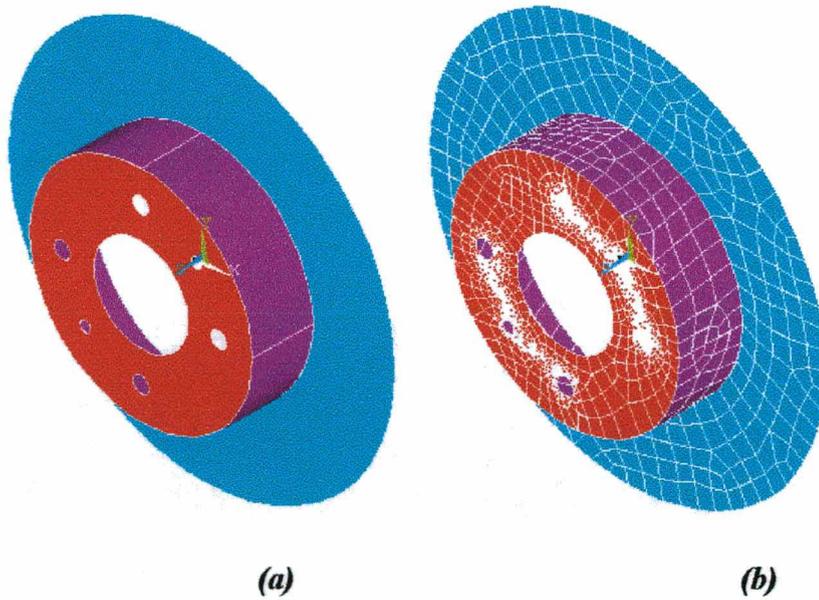


Figura 4.19 : Modelo em elementos de placa. **(a)** Modelo plano
(b) Malha com elementos de placa.

4.2.1. Determinação das Propriedades Necessárias ao Modelo

Basicamente, três propriedades são necessárias para executar as análises de elementos finitos : módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e massa específica.

Estas propriedades são relativamente fáceis de serem determinadas. A massa específica foi calculada com base na massa do disco e seu volume, que foi determinado pela medição de suas dimensões. Os valores de coeficiente de Poisson e o módulo de elasticidade foram aproximados segundo o tipo de material do disco. Estas informações foram fornecidas pela Fras-le e podem ser vistas na Tabela 4.4.

Para o modelo em elementos sólidos, o valor de massa específica foi verificado através da massa do modelo no ANSYS, quando comparada com a massa real. O mesmo procedimento foi tomado para o modelo em elementos de placa, ainda que este tenha sido subdividido em três espessuras de placa diferentes, para acompanhar a geometria real do componente.

Tabela 4.4 - Dados utilizados nos modelos de elementos finitos

	<i>Coeficiente de Poisson</i>	<i>Módulo de Elasticidade [GPa]</i>	<i>Massa Específica [kg/m³]</i>
<i>Disco de Freio Elemento Sólido</i>	0,29	209	7370
<i>Disco de Freio Elemento Placa</i>	0,29	209	7370

4.2.2. Resultados e Validação Experimental

Como resultado dos modelos de elementos finitos, obtiveram-se as frequências naturais do mesmo. Já que as frequências naturais do disco são muitas, somente as mais importantes serão apresentadas. Estas frequências foram escolhidas mediante a análise das curvas de resposta

em frequência e dos resultados de ruído do modelo experimental. Para facilitar a análise, os dados foram compilados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Comparativo entre frequências experimentais e resultado de elementos finitos

<i>Frequência Experimental [Hz]</i>	<i>Elementos de Placa [Hz]</i>	<i>Erro [%]</i>	<i>Elementos Sólidos [Hz]</i>	<i>Erro [%]</i>
2552	2268,7	11,10	2540,1	0,46
3568	3618,5	1,39	3515,5	1,47
6784	6762,1	0,32	6848,8	0,95
7264	7307	0,59	-	-
7480	7564	1,12	7669,2	2,47
9464	9283,2	1,91	9356,9	1,13
12296	12141	1,26	12137	1,29
14000	14198	1,41	14135	0,96
15280	15291	0,07	15371	0,59

Pela observação da Tabela 4.5, vê-se que o modelo em elementos sólidos apresenta uma maior precisão nas altas frequências. A frequência de maior interesse encontra-se em torno de 7000 Hz, porque é nesta região que concentram-se as ocorrências do ruído no sistema real. No modelo desenvolvido, a frequência mais próxima a real foi a de 7307 Hz. Considerando que, por problemas de refinamento da malha, o modelo em elementos sólidos não mostrou algumas das frequências de interesse, o modelo escolhido para indicar o modo de vibração a ser usado no modelo matemático é o resultado do modelo do disco em elementos de placa.

Nas Figuras 4.16 e 4.17, serão mostradas as formas dos modos correspondentes as frequências em torno de 7000 Hz, referentes ao modelo de placa.

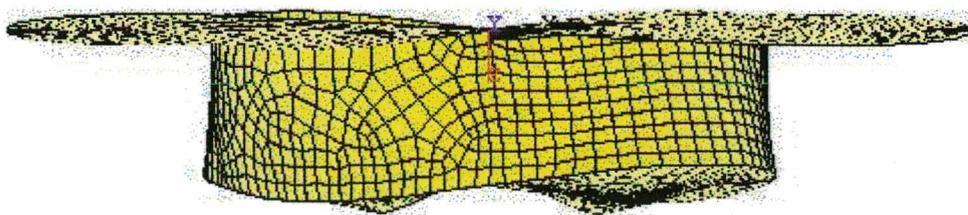


Figura 4.20 : Modo de vibração na frequência de 7307 Hz, com elementos de placa.

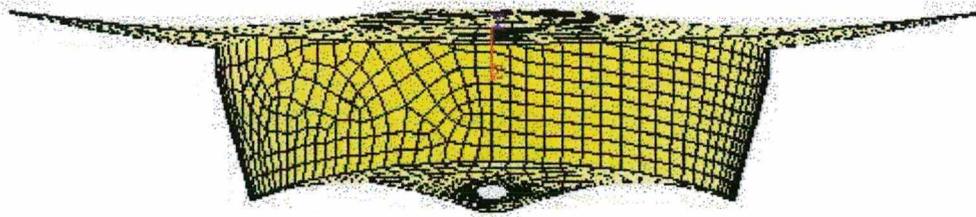


Figura 4.21 : Modo de vibração na frequência de 7564 Hz, com elementos de placa.

Basicamente, pode-se observar que ambos os modos de interesse são modos de deformação normais à superfície de atrito do disco. Esta informação é importante, já que é sabido que alterações na área de contato entre disco e pastilha geram instabilidades, conforme descrito no Capítulo 2. Desta forma, tem-se um efeito cíclico já que quando a instabilidade ocorre, o sistema entra em ressonância nestas frequências e quando elas são excitadas, provocam uma irregularidade na superfície de contato disco/pastilha, jogando o sistema na instabilidade.

Para utilização no modelo matemático, a frequência de ressonância que está mais próxima da frequência experimental de maior ocorrência percentual será utilizada. Esta frequência é a de 7307, que corresponde a um modo normal de ordem 10. Este valor é utilizado na relação (4.23) para determinar o valor do momento de inércia equivalente do disco de freio.

5. ANÁLISE DA PASTILHA DE FREIO

Neste capítulo serão abordadas algumas características peculiares da pastilha de freio e sugeridas algumas modificações, segundo as tendências indicadas pelo modelo analítico proposto.

5.1. Análise da Influência da Pastilha de Freio no Ruído

A pastilha de freio tem uma influência bastante acentuada na geração do ruído. Embora as frequências naturais próprias, quando analisadas isoladamente, não sejam comparáveis com as frequências de ocorrência do ruído, é possível que esta provoque um deslocamento das frequências naturais quando acoplada ao conjunto.

Além disso, as frequências naturais variam apreciavelmente quando se muda a estrutura da mesma, através de uma variação na composição, ou na pressão específica de conformação.

Para uma avaliação mais precisa da contribuição da pastilha na geração do ruído, algumas pastilhas serão confeccionadas, variando-se a composição e pressão de conformação.

5.1.1. Proposta de Alteração na Pastilha de Freio

A proposta de alteração consiste em elencar dois tipos de pastilhas com composições diferentes e confeccioná-las, cada uma, com duas pressões específicas de conformação. Uma vez confeccionadas, serão testadas em bancada. Os resultados de rigidez e de amortecimento de cada exemplar, serão comparados aos resultados das tendências indicadas pelo modelo analítico. Por sua vez, os resultados de ruído, obtidos em bancada, serão correlacionados entre si e com os valores de amortecimento e rigidez.

Desta forma, as pastilhas foram confeccionadas em dois grupos de composição, chamados C, D e E, e divididos por pressão específica de conformação, conforme a Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Grupo de Alterações Proposto.

<i>Pressão de 150 bar</i>	<i>Pressão de 300 bar</i>
Pastilha C1	Pastilha C2
Pastilha D1	Pastilha D2
Pastilha E1	Pastilha E2

Entende-se que as alterações de pressão específica, juntamente com as variações de composição, propiciem mudanças significativas nos valores de rigidez e amortecimento. Estes valores serão medidos experimentalmente. Os amortecimentos serão obtidos das curvas de resposta em frequência. Já os valores de rigidez serão obtidos segundo testes de compressibilidade com temperatura controlada.

5.1.2. Resultados Experimentais

Uma vez confeccionadas as pastilhas, cada uma foi submetida aos seguintes ensaios :

- Análise de resposta em frequência, para obtenção dos valores de amortecimento;
- Ensaio de compressibilidade, para levantamento dos valores de rigidez.

Tanto as curvas de resposta em frequência, como os valores de rigidez, serão obtidos segundo os procedimentos anteriormente descritos no corpo deste trabalho.

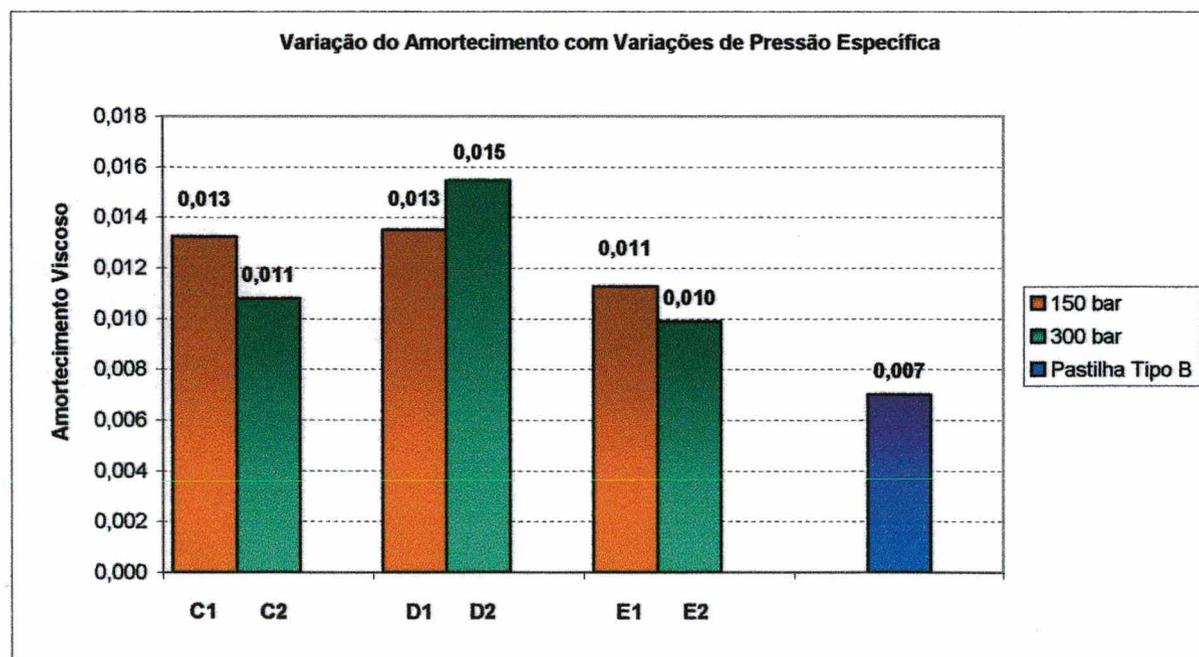
Considerando que as curvas de resposta em frequência foram aceitas somente quando o valor da função coerência era superior a 0,9, torna-se desnecessário apresentar individualmente as referidas curvas.

Desta forma, somente os valores médios de amortecimento, que possibilitam a comparação com as tendências do modelo analítico, serão apresentados. Conforme distribuição referenciada na Tabela 5.1, os valores de amortecimento médio são mostrados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Amortecimentos médios das pastilhas alteradas.

<i>Pressão de 150 bar</i>	<i>Pressão de 300 bar</i>
C1 = 0,013	C2 = 0,011
D1 = 0,013	D2 = 0,015
E1 = 0,011	E2 = 0,010

Pode-se observar o comportamento do amortecimento estrutural das pastilhas, comparado ao amortecimento estrutural da pastilha Tipo B, utilizada no modelo analítico, na Figura 5.1.



De forma geral, vê-se que, para obedecer à tendência de redução de amortecimento obtida com o uso do modelo analítico, as pastilhas **C2**, **E1** e **E2** podem ser selecionadas. Isto indica que um aumento da pressão específica de conformação, quando utilizadas as composições das pastilhas **C2** e **E2**, favorece a redução dos valores de amortecimento estrutural. De forma antagônica, a pastilha **D2** tem o maior valor de amortecimento, como pode ser constatado.

Para a avaliação das condições de rigidez, o teste de compressibilidade foi executado. Os resultados gráficos, conforme a variação da temperatura, podem ser apreciados nas figuras que seguem.

Através de uma primeira análise global das Figuras 5.2 e 5.3, pode-se verificar que a pastilha **E1** apresenta a tendência indicada pelo modelo analítico, no que tange a valores de rigidez. Para uma comparação direta, note-se que a pastilha **Tipo B** apresenta uma rigidez de 5×10^7 N/m, em média. Assim, a pastilha **E1** é a mais indicada para atender às duas exigências.

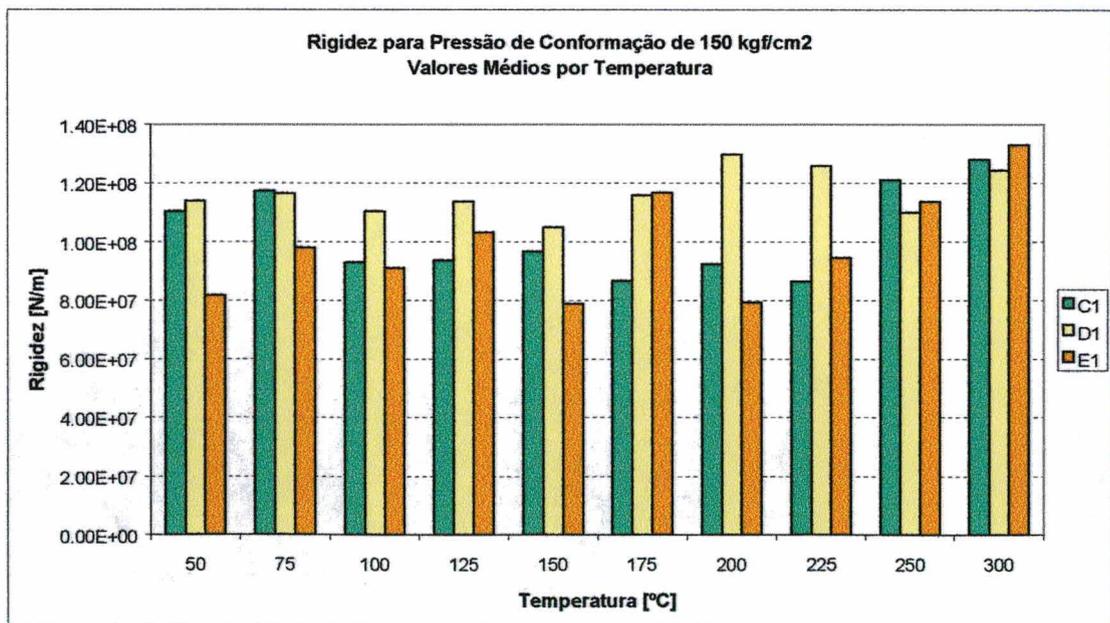


Figura 5.2 : Variações de rigidez com a temperatura para pressão de 150 kgf/cm².

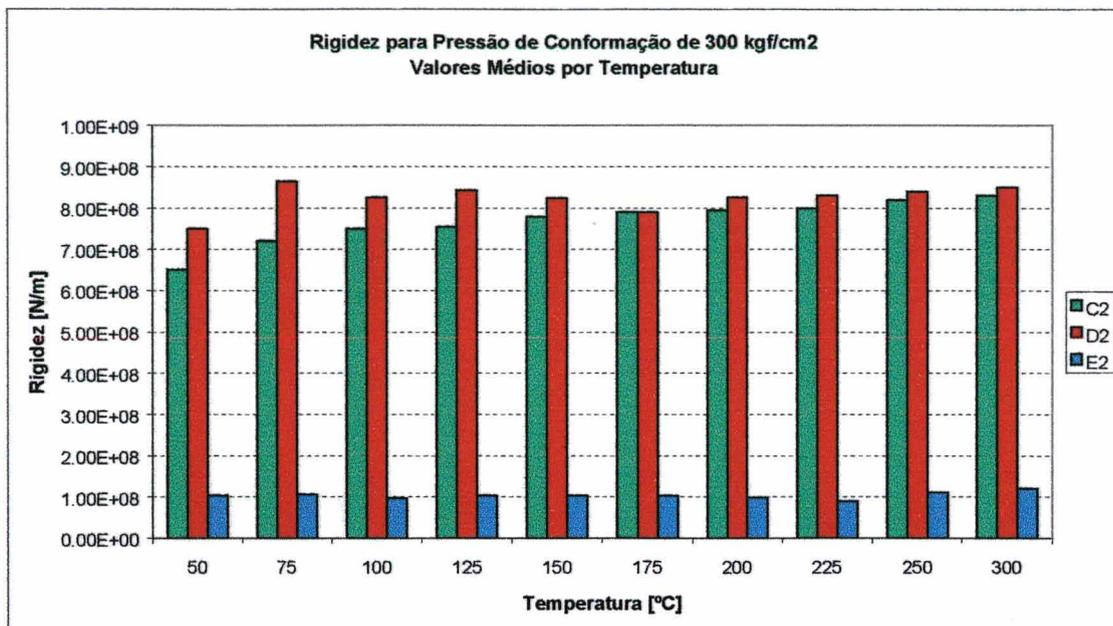


Figura 5.3 : Variações de rigidez com a temperatura para pressão de 300 kgf/cm².

Um fator que prejudica a análise do problema é o fato do amortecimento apresentar variações com a temperatura. Dadas às condições em que os valores de amortecimento foram obtidos, não se dispõe de informações de sua variação com a temperatura.

Deve-se, novamente, salientar que o modelo analítico apresentado representa o comportamento do sistema dinâmico do conjunto disco/pastilhas/cáliper através de um sistema de parâmetros concentrados. O disco e as pastilhas, entretanto, podem ser melhor representadas como componentes distribuídos, possuindo seus modos e frequências naturais próprios.

Os resultados encontrados para as pastilhas testadas referem-se às alterações simultâneas de rigidez e amortecimento, não sendo, portanto, possível uma análise clara das influências das variações isoladas destes parâmetros.

Assim, os testes experimentais em dinamômetro são de vital importância nas conclusões. O procedimento de teste utilizado no dinamômetro continua sendo o AK-Master, mencionado anteriormente.

Na seqüência, dois testes foram escolhidos por conveniência, sendo capazes de representar a complexidade de análise do problema. Esta complexidade é devida à característica química do componente estudado, que se modifica com a temperatura e pode apresentar um caráter flutuante. Nas Figuras 5.4 a 5.9 pode-se verificar os resultados provenientes da separação de variáveis, durante os testes de bancada.

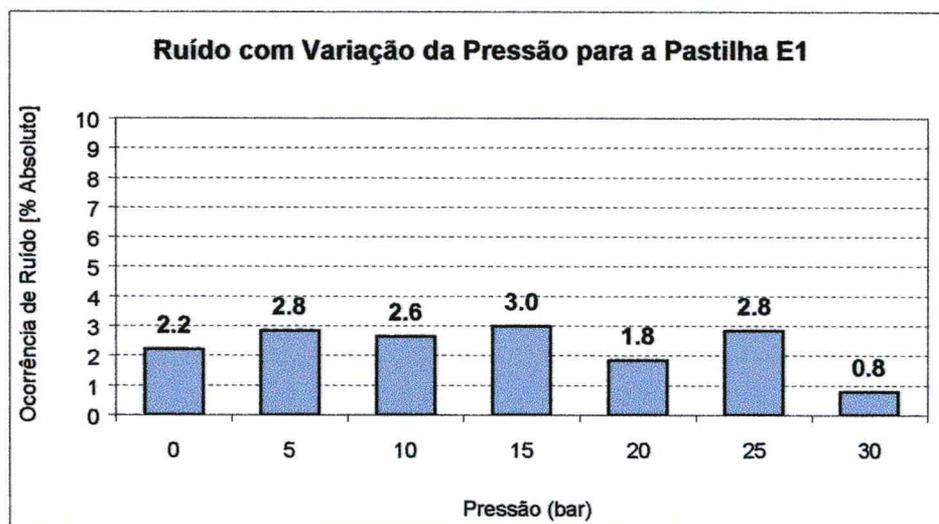


Figura 5.4 : Ruído percentual por pressão – Pastilha E1.

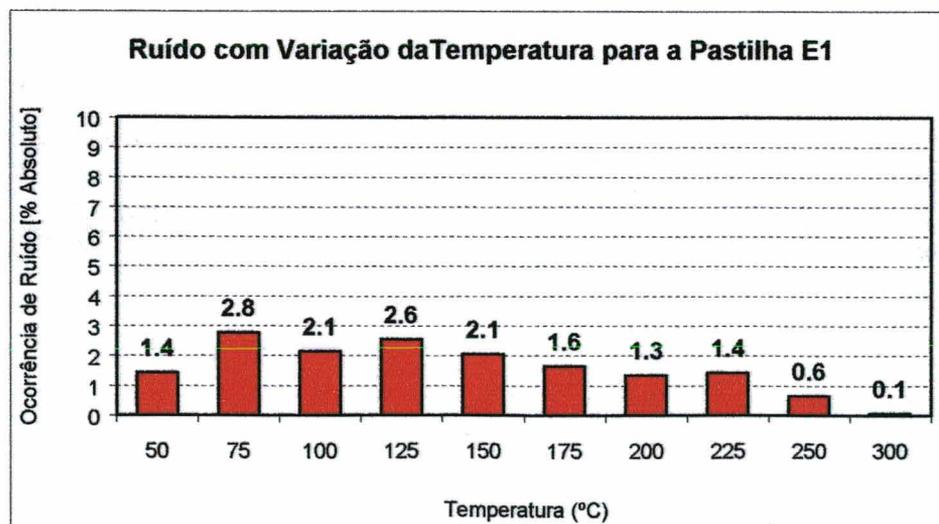


Figura 5.5 : Ruído percentual por temperatura – Pastilha E1.

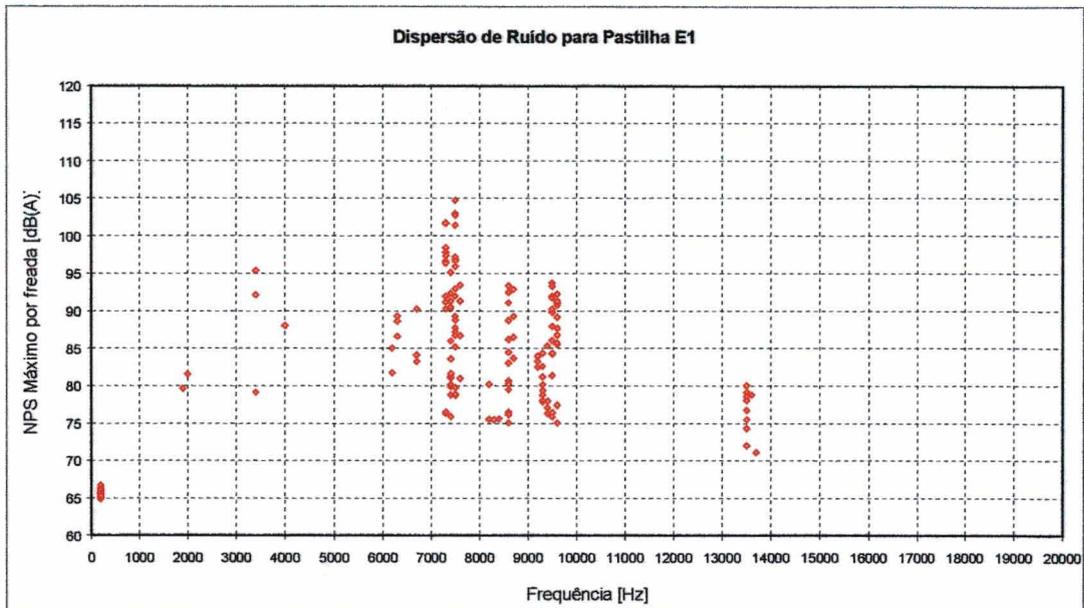


Figura 5.6 : Dispersão de Ruído – Pastilha E1.

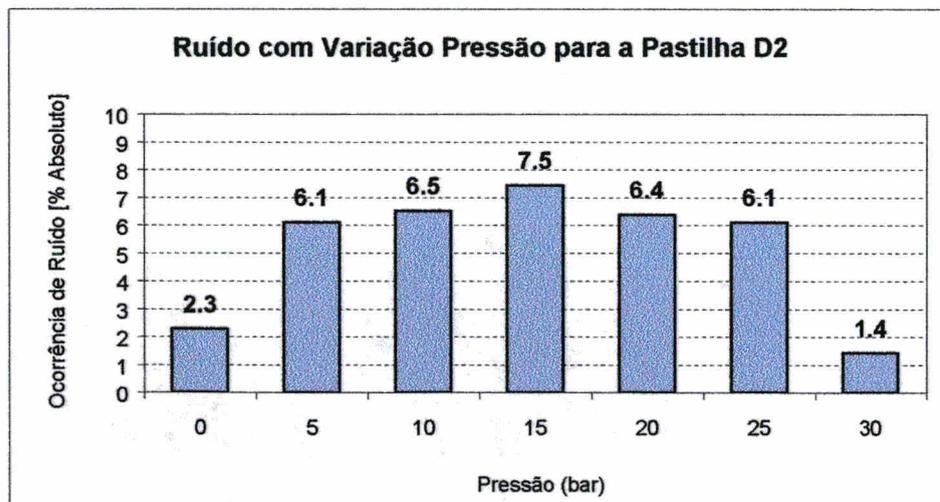


Figura 5.7 : Ruído percentual por pressão – Pastilha D2.

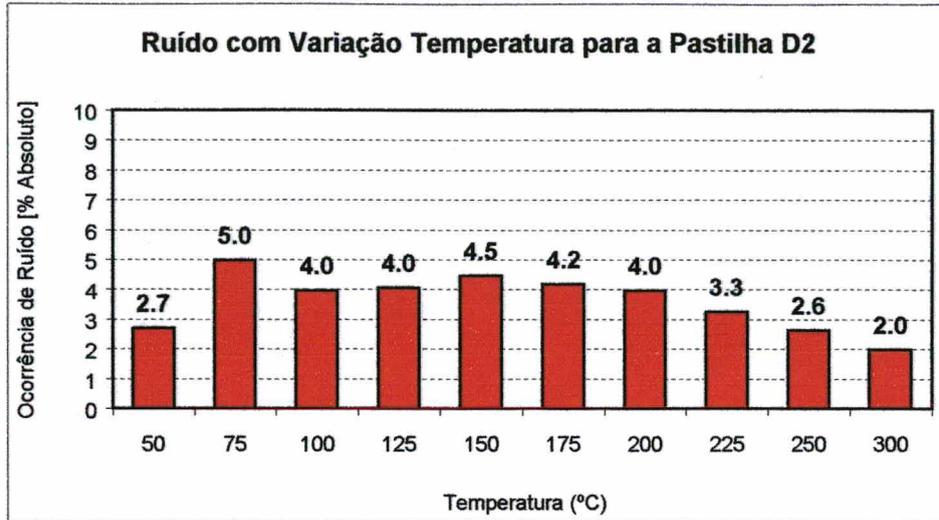


Figura 5.8 : Ruído percentual por temperatura – Pastilha D2.

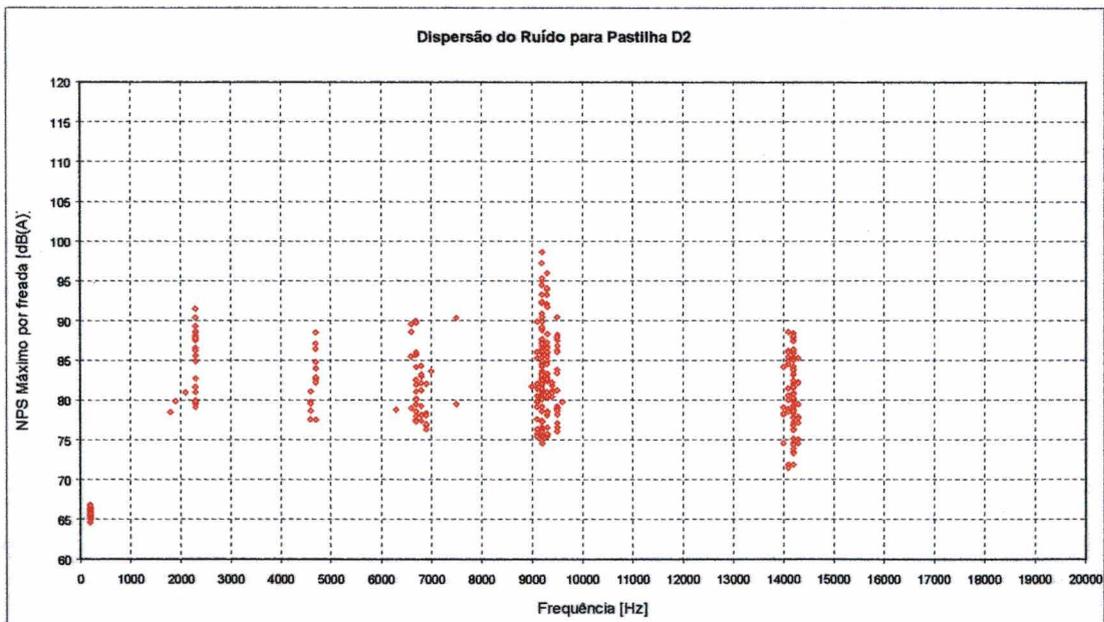


Figura 5.9 : Dispersão de Ruído – Pastilha D2.

Quando se compara o conjunto de figuras precedentes com a Tabela 5.1, identifica-se claramente que o incremento da pressão específica de conformação acarreta o aumento da ocorrência de ruído.

Observando-se as Figuras 5.4 e 5.7 vê-se que a ocorrência percentual de ruído nas pressões de trabalho subiu à medida que cresceu a pressão específica de conformação. O mesmo efeito pode ser notado comparando-se os gráficos de ocorrência percentual de ruído nas diferentes temperaturas de operação.

Um fato bastante interessante pode ser apreciado através da comparação dos valores de rigidez das pastilhas com as curvas de distribuição percentual de ruído nas diferentes temperaturas. Estes gráficos podem ser vistos na seqüência de Figuras 5.10 a 5.13.

Pela observação cuidadosa das figuras, pode-se verificar que, até 150°C, quando se aumenta a rigidez da pastilha aumenta também a ocorrência percentual de ruído naquela temperatura. O inverso também é verdadeiro. Quando a rigidez decresce, cai o percentual de ocorrência.

Acima de 150°C os resultados de ruído não obedecem às tendências indicadas pela rigidez. Em geral o percentual de ocorrência diminuí, enquanto a rigidez mantém-se quase que inalterada ou em suave crescimento.

Este comportamento indica que temperaturas mais elevadas, da ordem de 200°C a 300°C, podem estar contribuindo para a alteração das superfícies do disco e da pastilha. Estas alterações podem proporcionar uma rigidez localizada, através da formação de películas mais rígidas e possíveis cristalizações dos componentes de natureza orgânica da pastilha de freio. Desta forma, alterações ocorridas nas superfícies do disco e da pastilha têm condições de provocar diferenças de rigidez que podem ser detectadas nos testes de dinamômetro.

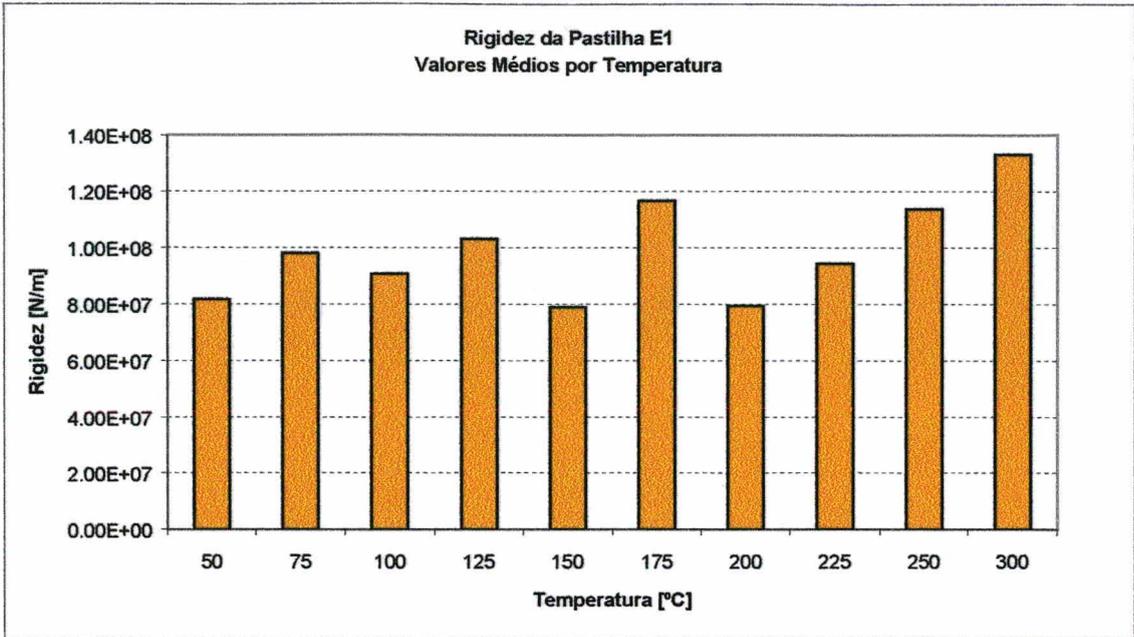


Figura 5.10 : Valores de rigidez para a pastilha E1.

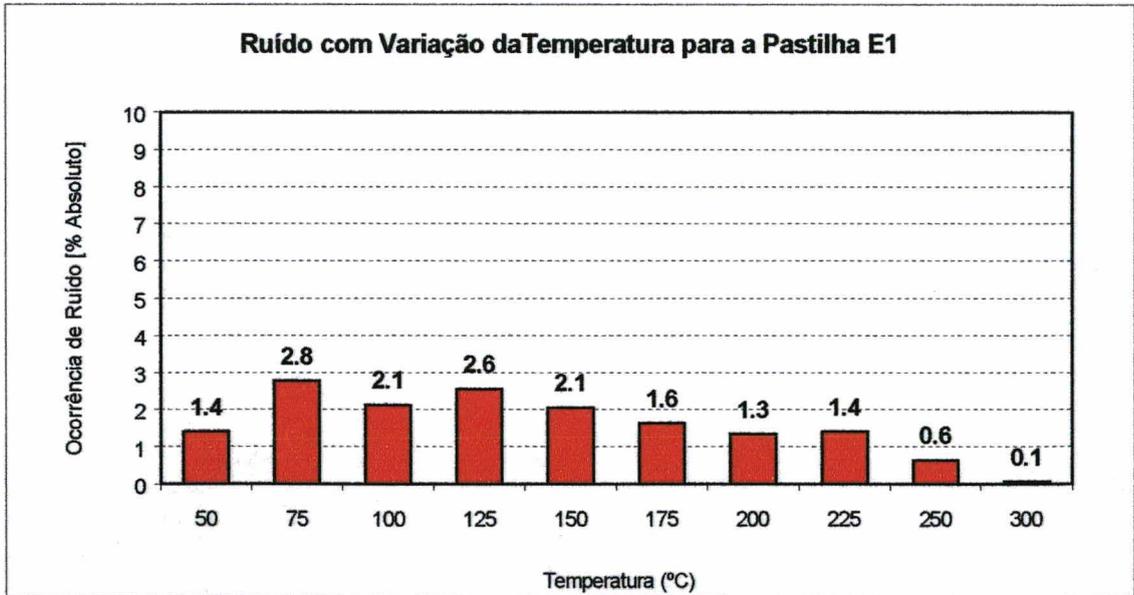


Figura 5.11 : Distribuição percentual do ruído com a temperatura - pastilha E1.

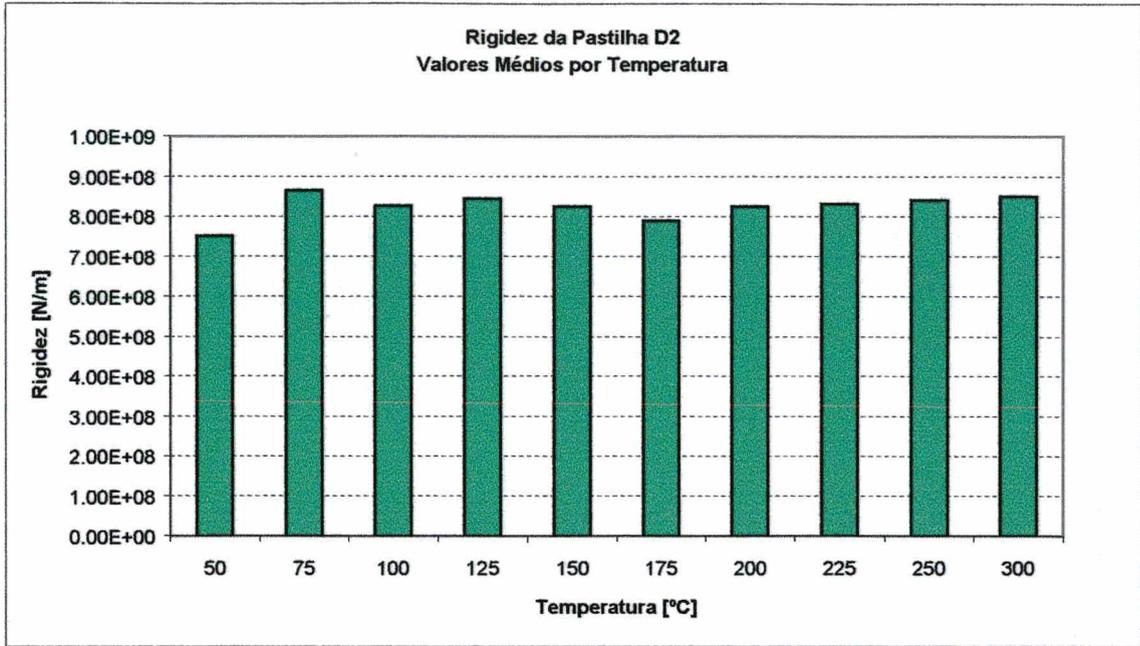


Figura 5.12 : Valores de rigidez para a pastilha D2.

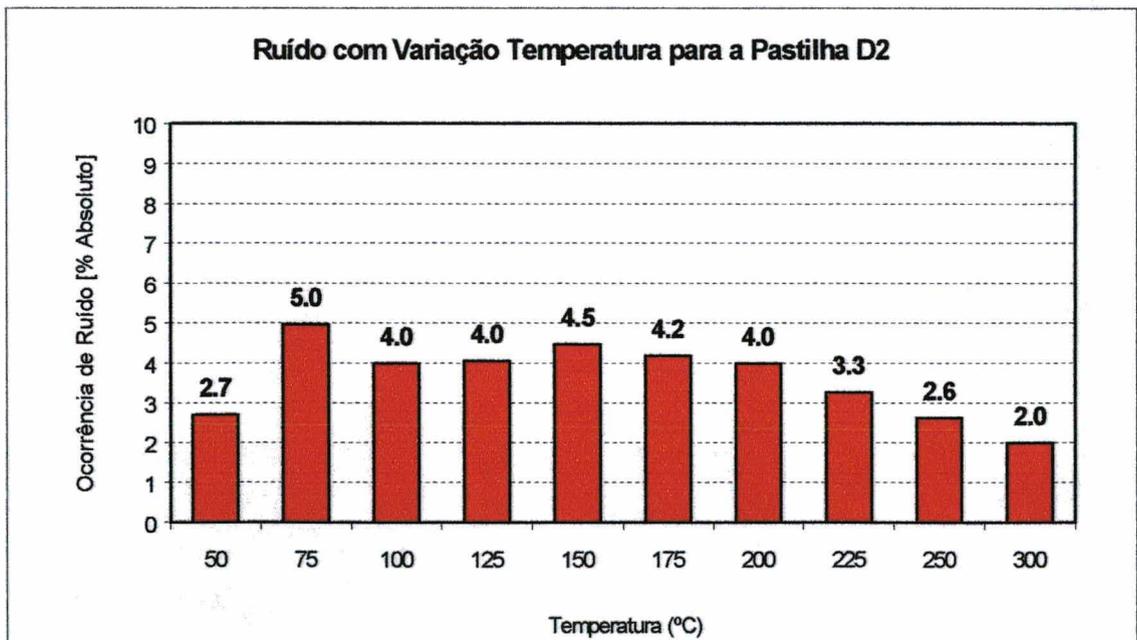


Figura 5.13 : Distribuição percentual do ruído com a temperatura - pastilha D2.

6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Inicialmente, os cuidados tomados com relação às interferências do ruído de fundo no interior da câmara de ensaios asseguraram total confiabilidade quanto aos resultados de ruído do sistema estudado (Figura 3.4). O mesmo pode ser dito com relação à calibração do microfone utilizado na medição do ruído. Por razões de compatibilidade de equipamentos, o microfone usado foi o de incidência aleatória. Porém, como os testes de ruído foram caracterizados como comparativos entre si, este modelo foi considerado aceitável. Desta forma, os valores de nível de pressão sonora registrados são, também, considerados confiáveis.

As funções de resposta em frequência foram cuidadosamente obtidas, observando-se sempre os valores de coerência a fim de garantir a presença de ressonâncias. Tomou-se o cuidado de realizar a excitação sobre os conjuntos de freio em, no mínimo, dois pontos da superfície do disco de freio. Este procedimento garantiu respostas em frequência na mesma região em que ocorrem as excitações durante a frenagem real.

O mecanismo de irradiação foi estudado extensivamente. Os dois sistemas de freio, com e sem suspensão, foram avaliados de diversas maneiras para que se pudesse diagnosticar sua participação na irradiação do ruído gerado pelo par disco/pastilha. Optou-se pelo sistema de freio sem a suspensão, por concluir que representava satisfatoriamente as condições reais de frenagem com o veículo. Porém, uma bateria de testes envolvendo uma maior variedade de pastilhas de freio onde, simultaneamente, seriam correlacionados os resultados de dinamômetro com os de campo, seria de grande valia para aprimorar os conhecimentos sobre a bancada, quando utilizada com suspensão.

Comparando-se as funções de resposta em frequência dos componentes com as dispersões de ruído medido em dinamômetro, constatou-se que o disco de freio tem uma frequência de

ressonância muito próximo da região em que se concentram as ocorrências de ruído. Um exemplo bastante típico está mostrado na Figura 3.18.

Da mesma maneira, quando uma função resposta em frequência característica do conjunto de freio simples foi sobreposta aos resultados de ruído, notou-se que existiam duas frequências de ressonância dentro da região de maior concentração de ruído, além de outras ressonâncias em regiões de menor concentração. Este fato indica que, quando acoplados, os componentes do conjunto conferem uma condição apropriada para a geração de ruído (Figura 3.19). De qualquer maneira, a predominância do disco de freio como elemento de maior contribuição na geração e irradiação do ruído é indiscutível. Por sua vez, a pastilha, enquanto componente, não mostra sequer uma única frequência de ressonância na região de interesse. Por outro lado, é responsável pelo fornecimento das condições necessárias ao fenômeno de vibração auto-excitada que ocorre durante a frenagem.

O modelo analítico mostrou-se bastante preciso. Apesar de alguns valores de amortecimento e rigidez terem sido determinados de forma experimental, ou baseados em expressões simplificadas, observou-se convergência dos resultados do modelo analítico com os obtidos em dinamômetro. Esta convergência pode ser apreciada comparando-se as Figuras 4.12 e 4.13. Desta forma, foi possível atestar a confiabilidade do modelo e proceder às avaliações desejadas.

O modelo em elementos finitos permitiu o cálculo das frequências naturais e dos respectivos modos de vibração com precisão da ordem de 2,5%, em toda a faixa de frequência de interesse. Desta forma, demonstrou ser uma ferramenta bastante útil na determinação do modo exato de vibração referente à frequência natural estudada, usada para a determinação do momento de inércia equivalente do disco de freio. Este momento de inércia, bem como a massa equivalente, foram incorporados ao conjunto de valores usados na solução do modelo analítico.

A análise de tendências do modelo analítico, baseado na representação do sistema físico através de parâmetros concentrados, forneceu as seguintes conclusões:

- Reduções de amortecimento e rigidez da pastilha de freio colaboram para deslocar a frequência responsável pelo ruído para uma região de estabilidade.
- Variações de massa das pastilhas podem ser implementadas, mas não são de grande ajuda na estabilidade do sistema.
- Aumento de amortecimento do disco de freio indica melhora na estabilidade do sistema.

Assim, conclui-se que alterações conjuntas de redução do amortecimento e da rigidez das pastilhas de freio e um aumento do amortecimento do disco podem levar a uma maior estabilidade do sistema, reduzindo assim a geração de ruído.

A análise da responsabilidade da pastilha de freio sobre a geração de ruído não constitui tarefa simples. Dada a sua característica de composição orgânica e inorgânica, muitas mudanças podem ocorrer durante uma frenagem, devido às variações de temperatura, umidade, atrito e outras, como sedimentação e desprendimento das camadas superficiais.

Estas condições de sedimentação e desprendimento podem alterar significativamente a rigidez superficial das pastilhas, provocando alterações na ocorrência do ruído. Este caráter é, talvez, o mais importante dentre os desencorajadores no estudo da influência da pastilha na geração de ruído.

Nas figuras que seguem vê-se resultados representativos das alterações feitas nas pastilhas, segundo o apresentado na Tabela 5.1 do Capítulo 5.

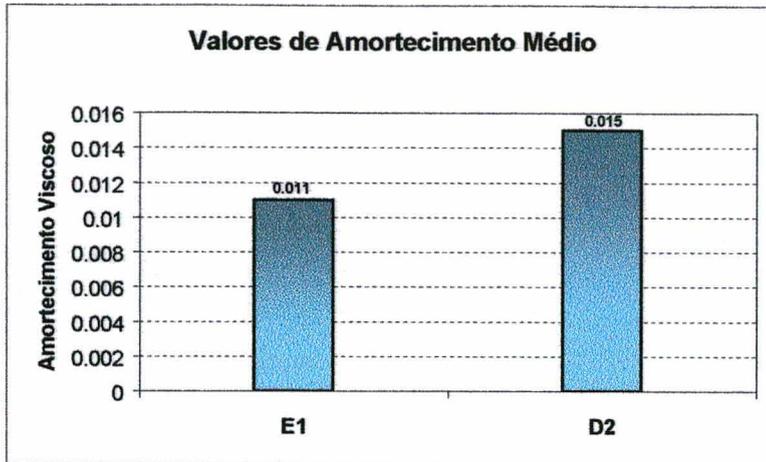


Figura 6.1 : Amortecimento para duas pastilhas modelo.

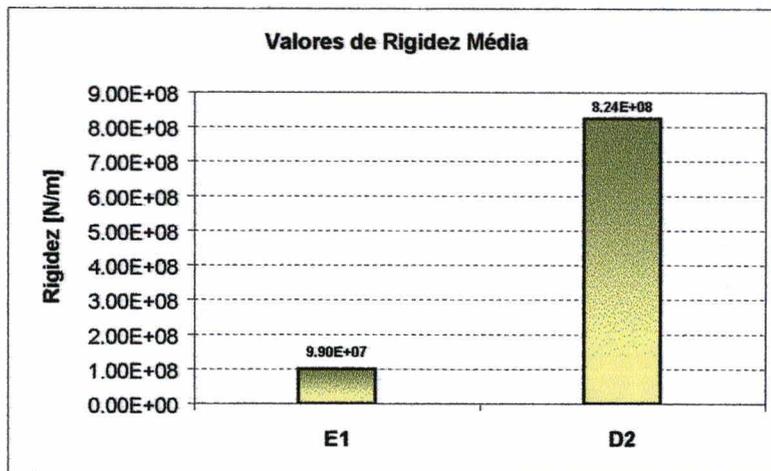


Figura 6.2 : Rigidez para duas pastilhas modelo.

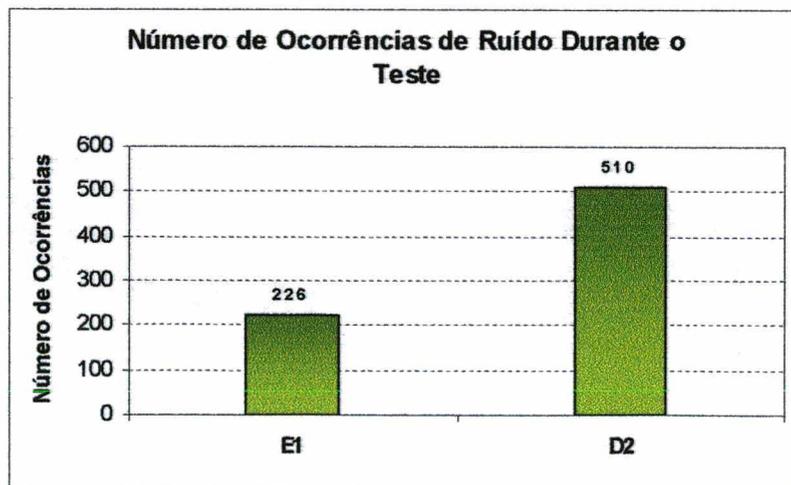


Figura 6.3 : Resultado de ruído para as duas pastilhas modelo.

Nota-se que a pastilha E1 é a que apresenta os menores valores de amortecimento e rigidez, sendo, portanto, a mais indicada para atender as tendências apresentadas pelo modelo analítico.

Observa-se que, se comparadas entre si, às pastilhas E1 e D2 demonstram as tendências apresentadas pelo modelo analítico, ou seja, menores amortecimento e rigidez, menor ocorrência de ruído. Indicam, ainda, que quanto menor a pressão específica de compactação, menor a possibilidade de ocorrência de ruído.

Entretanto, recomenda-se aprimorar o modelo analítico apresentado, através da consideração dos modos próprios do disco e das pastilhas, principalmente, para uma reprodução mais próxima do comportamento dinâmico físico real do conjunto de freio. Isto permitirá verificar as conclusões tiradas do modelo atual.

Outro fato importante é que, acima de 150°C, como evidenciado no Capítulo 5, a rigidez mantém-se quase que constante, mas a ocorrência de ruído se reduz. Isto pode estar indicando que possíveis variações no amortecimento e na rigidez dinâmica das pastilhas estejam ocorrendo durante o processo de frenagem.

Portanto, é importante conhecer a variação de amortecimento do material das pastilhas com a variação da temperatura. Porém, assim como a avaliação da rigidez, o amortecimento só poderá ser levantado em condições estáticas. O comportamento destes dois parâmetros durante o processo de frenagem é mais difícil de ser obtido. Estes procedimentos, no entanto, deverão ser implementados no futuro.

Recomenda-se que, em futuros trabalhos de pesquisa nesta área, sejam observadas as variações localizadas na superfície das pastilhas e do disco, que podem ocorrer devido às variações de temperatura, combinadas com a variação de pressão.

Recomendações para Trabalhos Futuros

- Observar as variações do amortecimento com a temperatura;
- Determinar as influências dos vários compostos orgânicos e inorgânicos que formam o material de atrito da pastilha sobre o ruído;
- Avaliar possíveis efeitos de forma geométrica das pastilhas;
- Desenvolver modelos de elementos finitos, ou analíticos, envolvendo o conjunto de freio como um todo, os quais considerem os modos próprios dos componentes do sistema de freio, tais como disco, pastilhas e cáliper;
- Estudar a introdução de elementos elásticos na pastilha de freio, com o objetivo de reduzir a rigidez da mesma.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABDELHAMID, M.K.** *Measurement and Signal Analysis Techniques for Brake Noise*. SAE. Technical Paper N° 95A4025.1958.
- BALLINGER, R.S., DUNLAP, B. e KUNG, S.** *Complex Eigenvalue Analysis for Reducing Low Frequency Brake Squeal*. SAE. Technical Paper N° 0444. January. 2000.
- BORCHERT, T.** *Dynamical Behavior of the Disc Brake Pad*. SAE. Technical Paper N° 912656. 1991.
- CHIKAMORI, S.** *Study on Brake Noise*. Nagoya Motor Vehicle. Relatório Interno. January. 1968.
- DIMAROGONAS, A.** *Vibration for Engineers*. Prentice Hall. Second Edition. New Jersey. 1996.
- DUNLAP, K.B., RIEHLE, M.A. e LONGHOUSE, R.E.** *An Investigative Overview of Automotive Disc Brake Noise*. SAE. Technical Paper N° 010142. October. 1999.
- EARLES, S.W. e BADI, M.N.M.** *On the Interaction of a Two-Pin-Disc System with Reference to the Generation of Disc Brake Squeal*. SAE. Technical Paper N° 780331. March. 1978.
- EARLES, S.W.E. e CHAMBERS, P.W.** *Disc Brake Squeal Noise Generation; Predicting its Dependency on System Parameters Including Damping* – Interscience Enterprises. U.K. 1986. pg. e25-e41.
- EWINS, D.J.** *Modal Testing : Theory and Practice*. Research Studies Press. London. April. 1986.
- FIELDHOUSE, J.D. e NEWCOMB, T.P.** *An Experimental Investigation into Disc Brake Noise*. Imech – C444/036/93. 1993.

- FURMANIK, K.** *Experimental Investigations of Self-Excited Friction Vibrations Into a Friction Brake.* 5th Mini Conference on Vehicles System Dynamics, Identification and Anomalies. Budapest. November. 1996.
- HARTOG, J.P.** Den. *Vibrações nos Sistemas Mecânicos.* Ed. Edgard Blucher LTDA. SP. 1972.
- HARRIS, C.M. e CREDE, C.E.** *Shock and Vibration Handbook.* Ed. McGraw Hill. 1976.
- HOLLMAN, M.** *Brake Noises, Their Causes and Some Methods of Their Elimination.* A.T.Z. N° 3. Vol 56. March 1954.
- HOLUBECKI, Z. e FOSBERRY, R.C.A.** *An Investigation of the Cause and Nature of Brake Squeal.* SAE. Technical Paper N° 0895. June. 1955.
- HOLUBECKI, Z. ;FOSBERRY, R.C.A.** *Some Experiments on the Prevention of Brake Squeal.* SAE. Technical Paper N° 0332. January. 1957.
- LEE, A.** *Diagnosis of Noise and Vibration Problems During Braking.* ISATA Magazine. January. 1997.
- MILLNER, N.** *An Analysis of Disc Brake Squeal.* SAE. Technical Paper N° 780332. March. 1978.
- NISHIWAKI, M.** *Generalized Theory of Brake Noise .* IMech.E. Technical Paper N° D02392 . 1993.
- NOISSER, T.A., SAID, M.A.R. e EL NAHAS, N.S. et al.** *Significance of Squeal in Disc Brake Design.* International Journal of Vehicle Design, v.19, N° 01, 1998, pg. 124-133.
- NORTH, M.R.** *Disc Brake Squeal – A Theoretical Model.* MIRA . Technical Report N° 1972/5. 1972.

NORTH, M.R. *Frictionally Induced Self Excited Vibration in a Disc Brake*. Ph.D. Thesis. Loughborough University. January. 1972.

PARDUS, J. e NASHIF, A. *Controlling Disc Brake Noise With Constrained Layer Damping*. MSC Laminates and Composites Inc, USA, 1998, pg. 29-35.

PFEIFER, J.; LIU, W. *Reducing High Frequency Disc Brake Squeal by Pad Shape Optimization*. SAE. Technical Paper N° 010447. 2000.

RICHMOND, J.W. e KAO, T. *The Application of Predictive Techniques to Study Thermo-elastic Instability of Brakes*. SAE. Technical Paper N° 942087. 1994.

SUOEKA, A., YOSHITAKE, Y., TAMURA, H. e TAKAYAMA, Y. *Self-Excited Vibration of a Circular Plate Subjected to a Frictional Forces Exerted in Two Regions on Its Outer Circumference*. Bulletin of JSME, v.29, N° 256, October, 1986, pg. 3499-3504.

TEITELBAUM, B.R., SUTTLE, W.C. e SUNG, C.B. *Instrumentation Techniques for Brake Noise Investigation*. SAE. Technical Paper N° 650488. May. 1965.

TIAN, J. e HUTTON, S.G. *Self-excited Vibration in Flexible Rotating Disks Subjected to Various Transverse Interactive Forces : a General Approach*. Journal of Applied Mechanics, v. 66, September, 1999, pg. 800-805.

WAGENFÜHRER, H. *Noise from Brakes*. MIRA Report. August. 1964.

ZAFFIRO, P. A. *Understanding and Solving Mechanical Instabilities*. Sound and Vibration Magazine. v.31. September. 1997.

APÊNDICE A

Curvas de Resposta em Frequência de Componentes

Neste apêndice, serão apresentadas as curvas características de resposta em frequência dos componentes dos sistemas de freio, bem como suas respectivas curvas de coerência. O número de médias utilizado para obter as curvas variou entre 100 e 400.

Os equipamentos utilizados para as medições são brevemente descritos a seguir.

- Analisador HP3566A – PC Spectrum/Network Analyser , 8 canais;
- Excitador Eletrodinâmico B&K – Tipo 4812;
- Amplificador de Potência B&K – Tipo 2707;
- Célula de Carga B&K - Tipo 8200 (3,95 pC/N);
- Acelerômetro B&K – Tipo 4344 (3,26 pC/g);

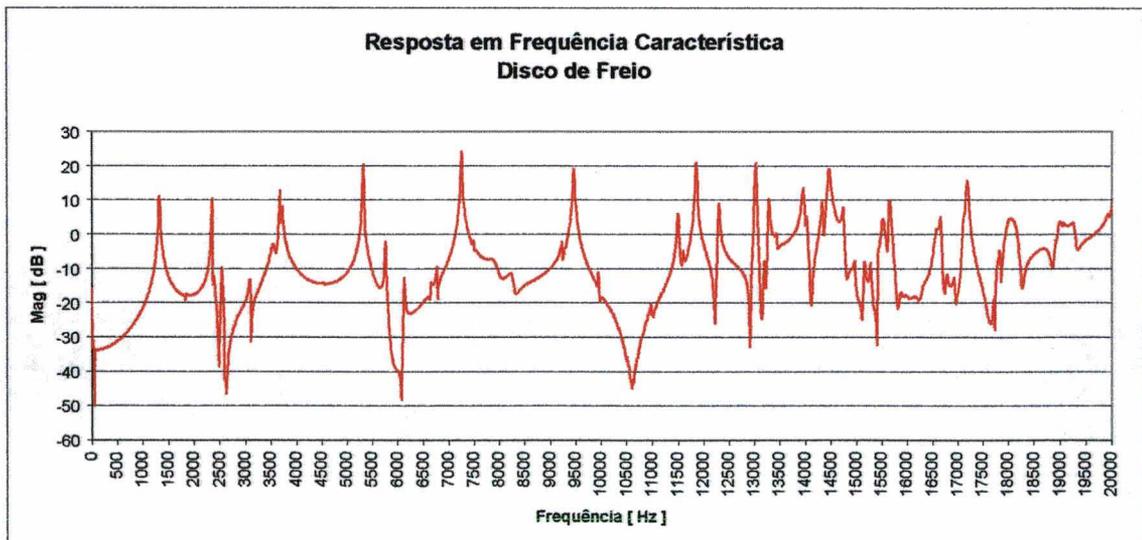


Figura A.1 : Resposta em frequência, características do disco de freio.

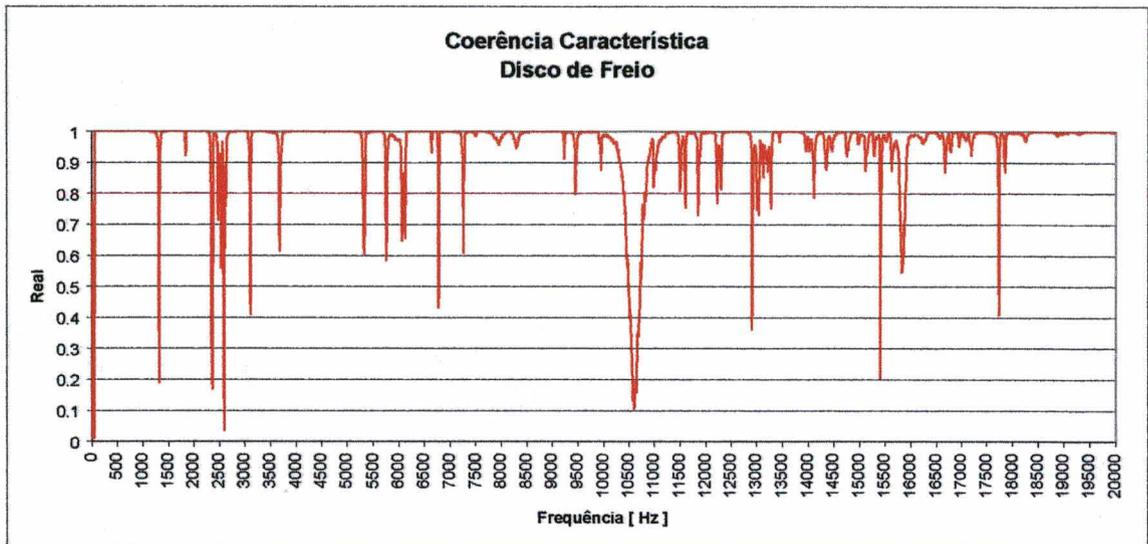


Figura A.2 : Coerência característica do disco de freio.

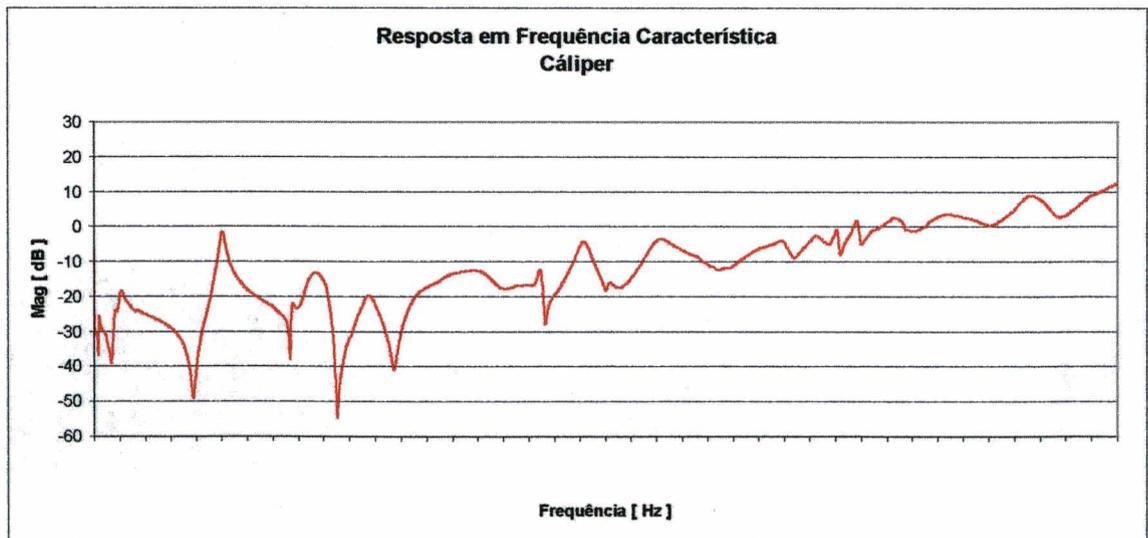


Figura A.3 : Curva de resposta em frequência característica do calíper.

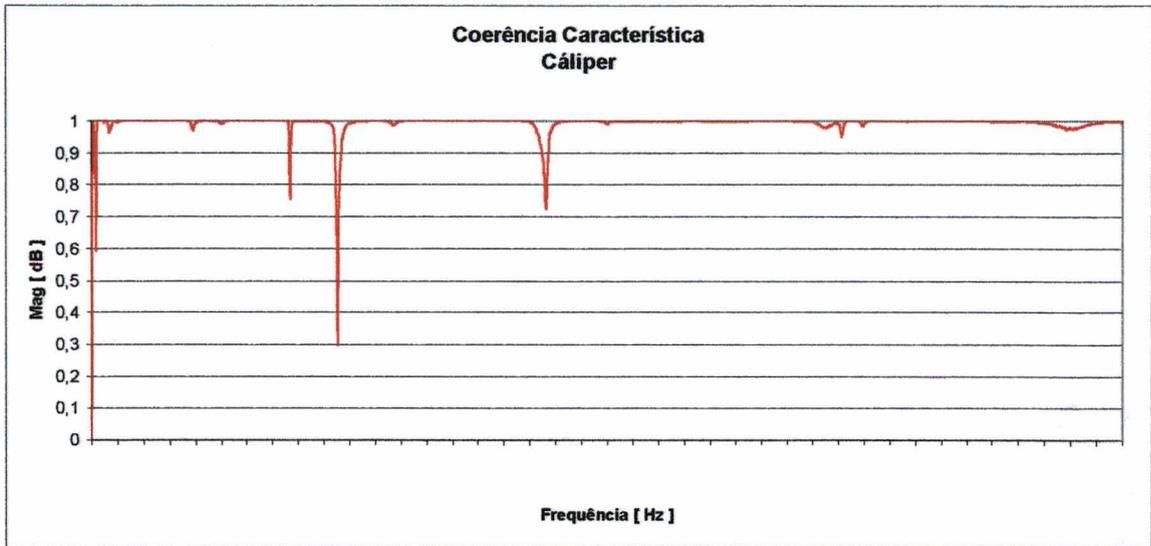


Figura A.4 : Coerência característica do cáliper.

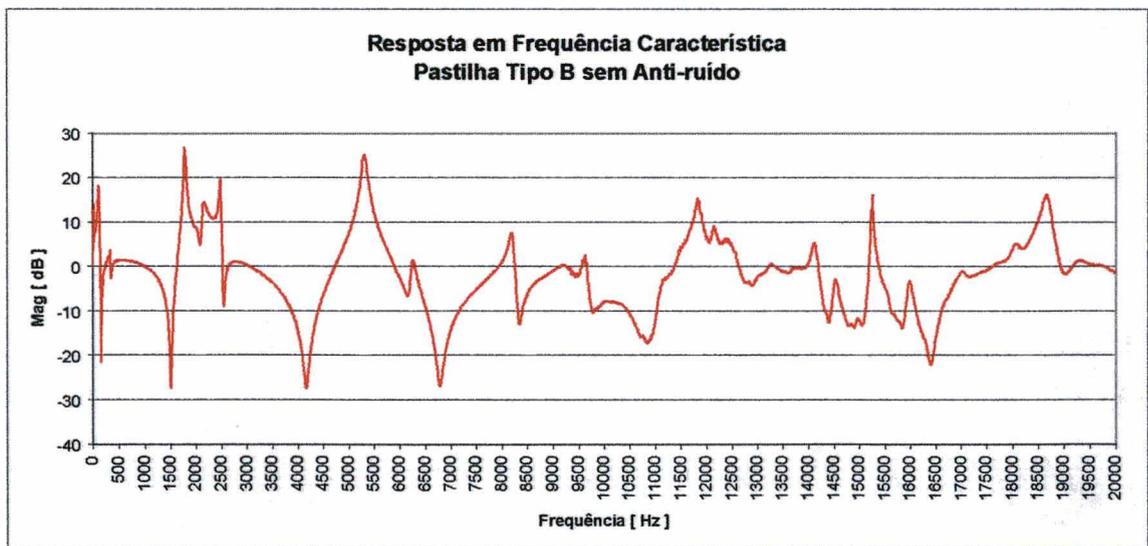


Figura A.5 : Resposta em frequência característica da pastilha Tipo B.

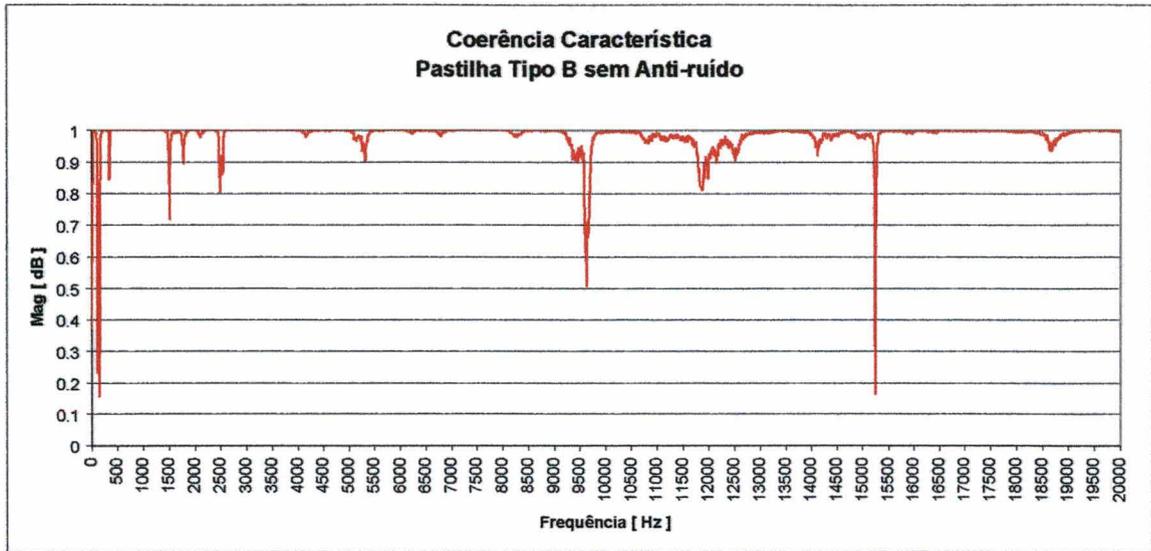


Figura A.6 : Coerência característica da pastilha Tipo B.

A seguir têm-se duas fotos ilustrando as montagens para a obtenção das curvas de resposta em frequência.

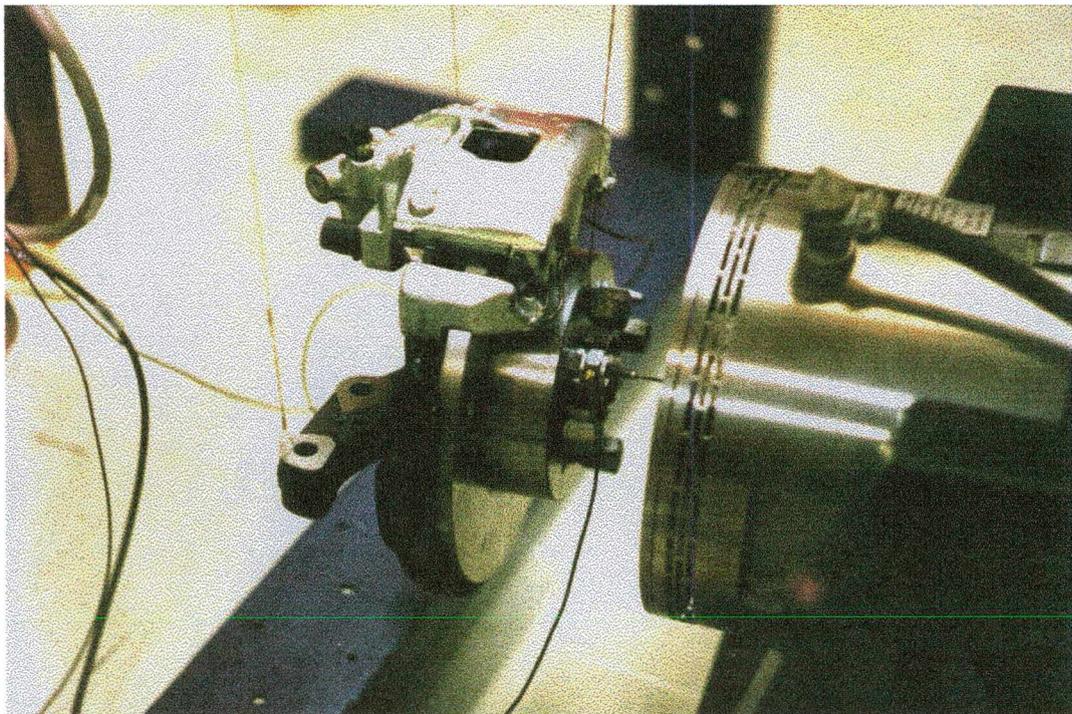


Figura A.7 : Montagem característica do sistema simples para medição de FRF

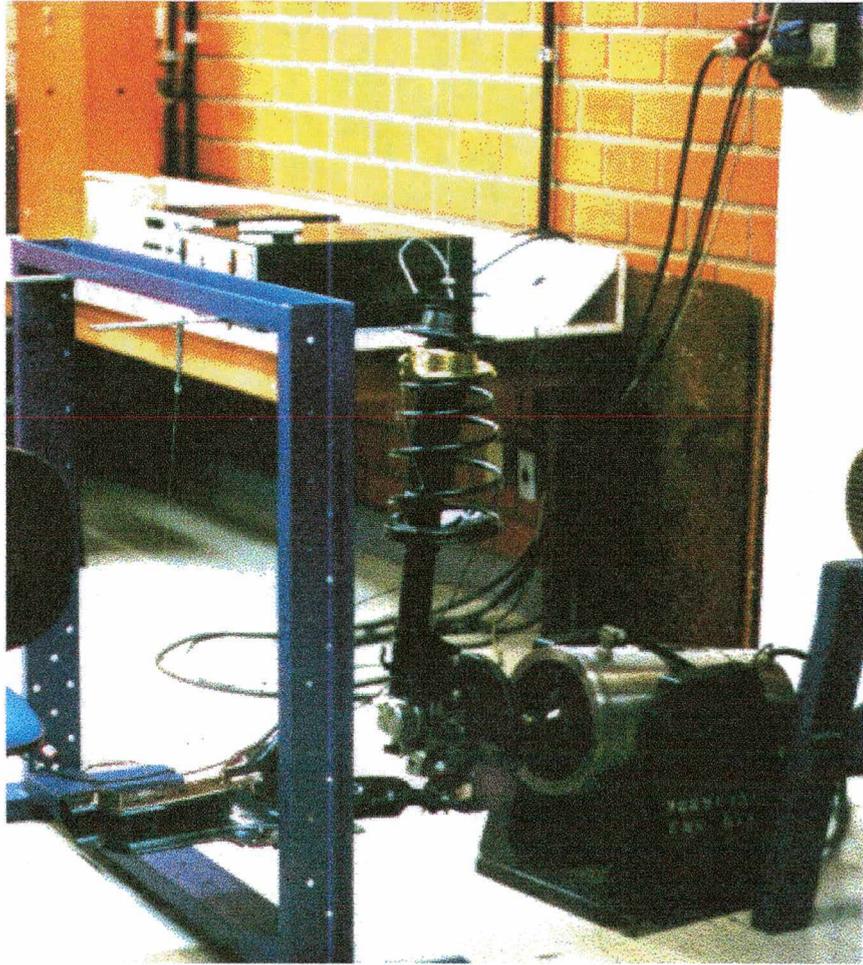


Figura A.8 : Montagem do sistema completo para medição de FRF

APÊNDICE B

Amortecimento e Rigidez Rotacional

Segundo North [1972], a rigidez e o amortecimento rotacional da pastilha podem ser expressos em termos da rigidez e amortecimento lineares $K_{p1,2}$, $C_{p1,2}$ e L , onde $2L$ é o comprimento efetivo da pastilha.

Considere-se a força de contato entre pastilha e disco de freio como apresentado na Figura B.1.

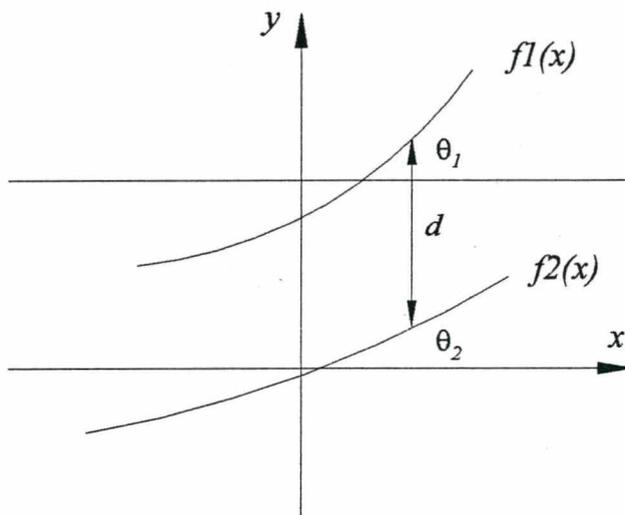


Figura B.1 : Contato entre disco e pastilha.

Para pequenos valores de θ_1 e θ_2 , a força pontual de contato, ao longo do eixo x , pode ser expressa por:

$$F = -K(d - d_0) \quad (\text{b.1})$$

sendo:

K a rigidez por unidade de comprimento $[(N/m)/m]$

$$d = f_1(x) - f_2(x)$$

d_0 a distância de deformação média, onde não existe mais força sendo gerada

A força total de separação é dada por:

$$F_t = \int_{-L}^L K(d_0 - f_1(x) + f_2(x))dx \quad (\text{b.2})$$

Da mesma forma, o momento total é dado por:

$$M_t = \int_{-L}^L Kx(d_0 - f_1(x) + f_2(x))dx \quad (\text{b.3})$$

Assumindo modos de contato lineares, na forma:

$$f_1(x) = \theta_1 x$$

$$f_2(x) = \theta_2 x$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Força Total:} \quad F_t &= \int_{-L}^L K(d_0 - x(\theta_1 - \theta_2))dx \\ F_t &= 2KLd_0 \end{aligned} \quad (\text{b.4})$$

$$\begin{aligned} \text{Momento Total:} \quad M_t &= \int_{-L}^L Kx(d_0 - x(\theta_1 - \theta_2))dx \\ M_t &= 2K\left(\frac{L^3}{3}\right)(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (\text{b.5})$$

Assim, vê-se que, para modos lineares, a força de separação não depende do ângulo de contato e o momento total não é dependente da distância de separação entre disco e pastilhas.

Comparando os resultados de (b.4) e (b.5), pode-se escrever:

$$\text{Rigidez Linear :} \quad 2KL$$

$$\text{Rigidez Rotacional:} \quad 2K\left(\frac{L^3}{3}\right) = 2KL\left(\frac{L^2}{3}\right)$$

Desta forma, para corrigir os valores de rigidez e amortecimento lineares do disco de freio e das pastilhas nas equações do modelo, transformando-os em valores rotacionais, basta multiplicar os valores lineares pelo fator $L^2/3$.

Na intenção de minimizar o número de parâmetros do modelo, e também por simplicidade, o mesmo procedimento foi adotado para corrigir os valores de amortecimento e rigidez lineares do cáliper em relação às pastilhas de freio.

APÊNDICE C

Curvas de Rigidez Combinada do Cáliper

Neste apêndice, são apresentadas as curvas de rigidez combinada do cáliper, que representa os valores de rigidez do próprio cáliper mais a rigidez do fluido do sistema hidráulico.

Para obter estas curvas, o dinamômetro inercial para freios LINK 2318 foi utilizado. Um sensor volumétrico, instalado no sistema hidráulico do dinamômetro é responsável pelo registro da variação de volume dentro do cilindro do cáliper. Igualmente, um sensor de pressão registra simultaneamente os valores de pressão sobre o cilindro do cáliper. A atuação destes sensores permite obter as curvas mostradas a seguir.

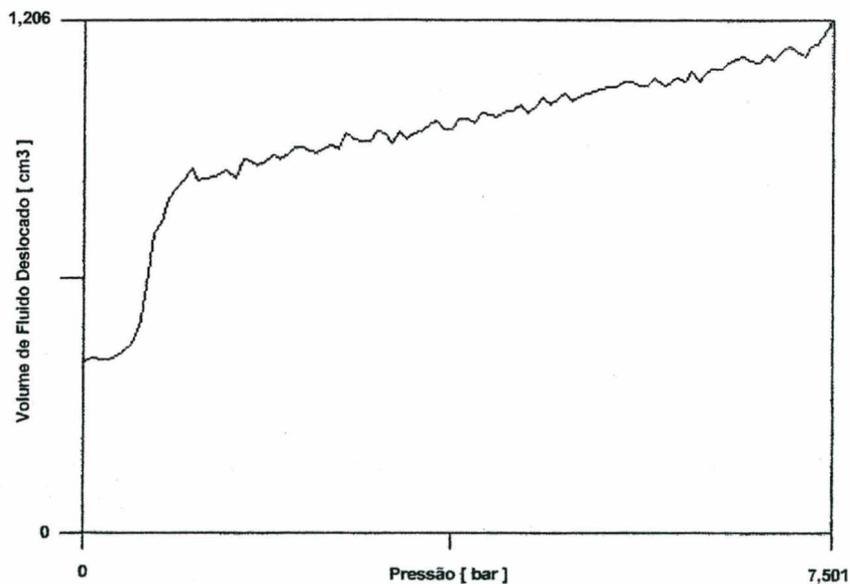


Figura C.1 : Rigidez combinada para pressão hidráulica até 5 bar.

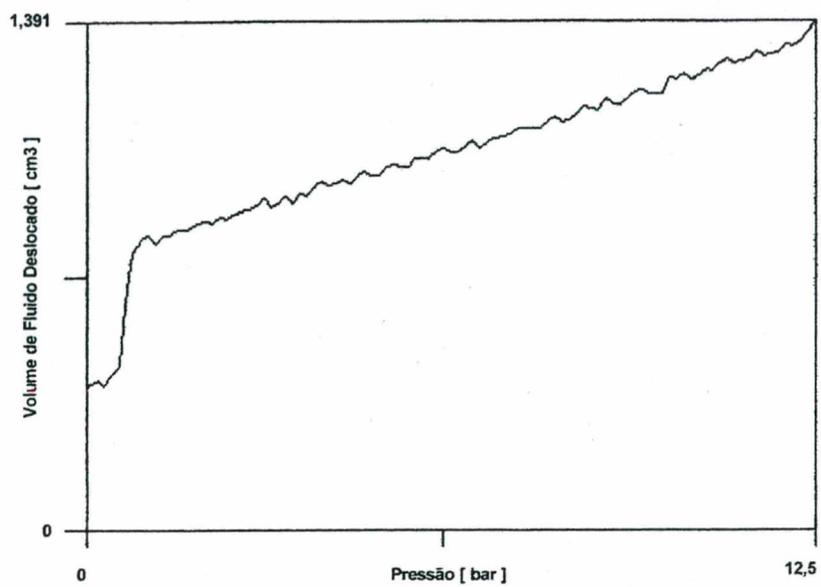


Figura C.2 : Rigidez combinada para pressão hidráulica até 10 bar.

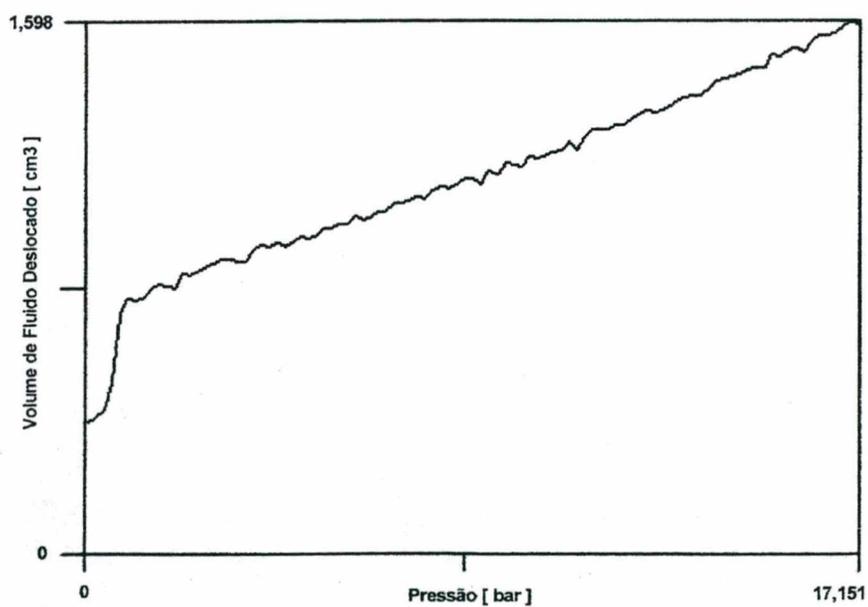


Figura C.3 : Rigidez combinada para pressão hidráulica até 15 bar.

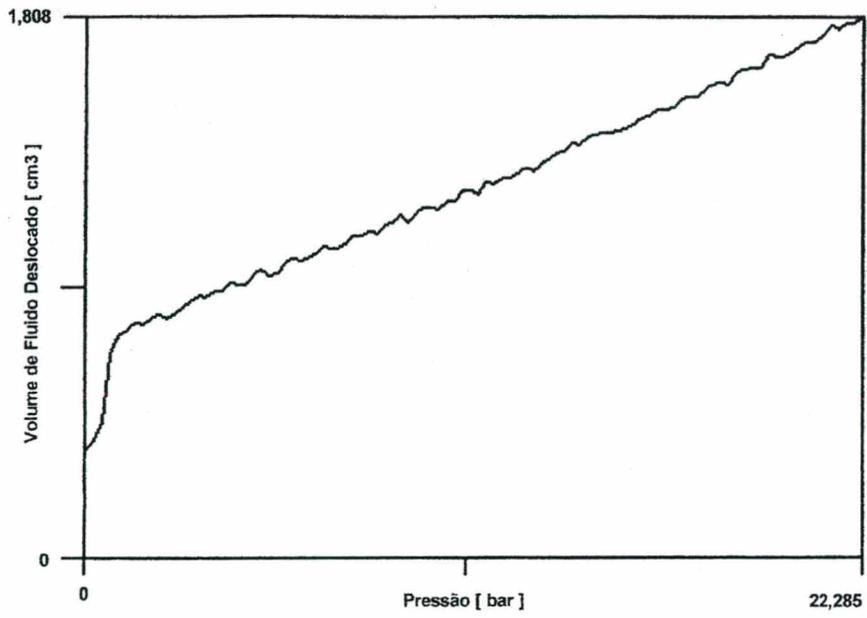


Figura C.4 : Rigidez combinada para pressão hidráulica até 20 bar.

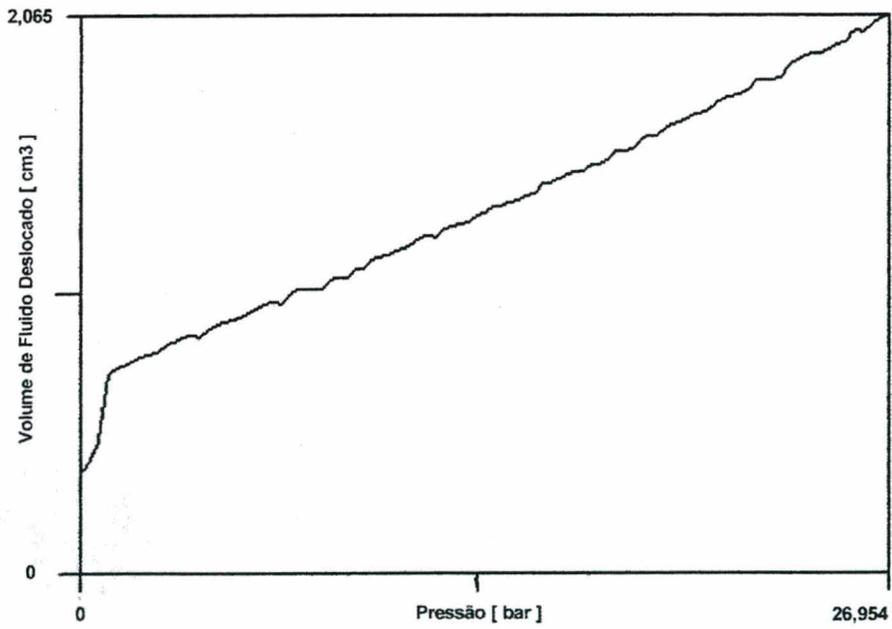


Figura C.5 : Rigidez combinada para pressão hidráulica até 25 bar.

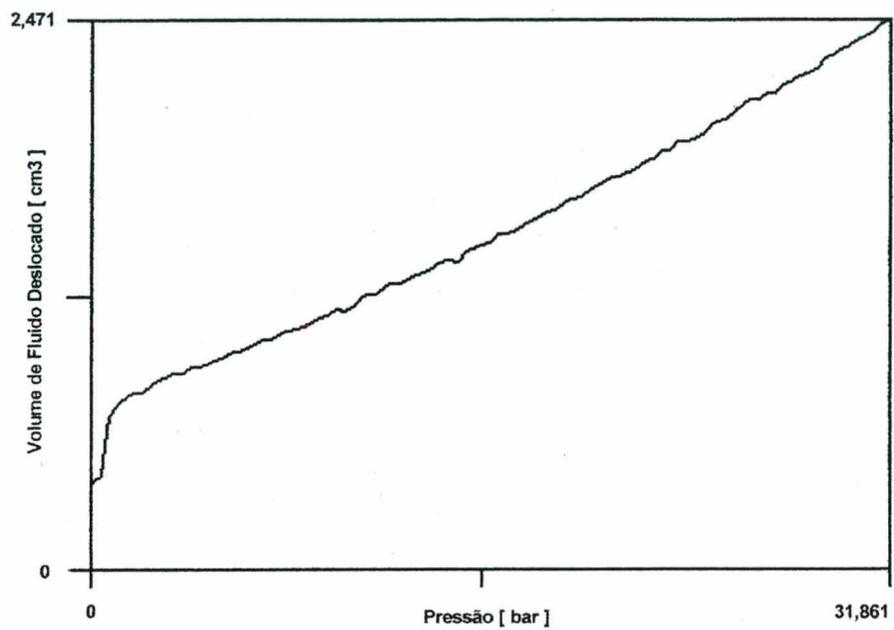


Figura C.6 : Rigidez combinada para pressão hidráulica até 30 bar.

APÊNDICE D

Matrizes do Modelo Analítico

Matriz Amortecimento

$$\begin{bmatrix}
 \frac{C_{p1} + C_{f1}}{M_{p1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_{p1}}{M_{p1}} & 0 & -\frac{C_{f1}}{M_{p1}} & 0 \\
 0 & \frac{C_{p2} + C_{f2}}{M_{p2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_{p2}}{M_{p2}} & 0 & -\frac{C_{f2}}{M_{p2}} & 0 \\
 \frac{\mu D_1 C_{p1}}{I_{p1}} & 0 & \frac{(C_{p1} + C_{f1})}{3I_{p1}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu D_1 C_{p1}}{I_{p1}} & \frac{L_1^2 C_{p1}}{3I_{p1}} & 0 & -\frac{L_1^2 C_{f1}}{3I_{p1}} \\
 0 & \frac{\mu D_2 C_{p2}}{I_{p2}} & 0 & \frac{L_2^2 (C_{p2} + C_{f2})}{3I_{p2}} & 0 & 0 & -\frac{\mu D_2 C_{p2}}{I_{p2}} & \frac{L_2^2 C_{p2}}{3I_{p2}} & 0 & -\frac{L_2^2 C_{f2}}{3I_{p2}} \\
 -\frac{C_{p1}}{M_d} & -\frac{C_{p2}}{M_d} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{p1} + C_{p2} + C_{dl}}{M_d} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\mu H C_{p1}}{I_d} & \frac{\mu H C_{p2}}{I_d} & -\frac{C_{p1} L_1^2}{3I_d} & -\frac{C_{p2} L_2^2}{3I_d} & -\frac{C_{p1} L_1^2}{3I_d} & -\frac{C_{p2} L_2^2}{3I_d} & -\frac{\mu H (C_{p1} + C_{p2})}{I_d} & \frac{L_1^2 C_{p1} + L_2^2 C_{p2}}{3I_d} + \frac{C_{dr}}{I_d} & 0 & 0 \\
 \frac{C_{f1}}{M_c} & \frac{C_{f2}}{M_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{f1} + C_{f2} + C_{cl}}{M_c} & 0 \\
 0 & -\frac{2\mu C_{p2} G}{I_c} & -\frac{C_{f1} L_1^2}{3I_c} & -\frac{C_{f2} L_2^2}{3I_c} & 0 & 0 & \frac{2\mu C_{p2} G}{I_c} & 0 & 0 & \frac{L_1^2 C_{f1} + L_2^2 C_{f2}}{3I_c} + \frac{C_{cr}}{I_c}
 \end{bmatrix}$$

Matriz Rigidez

$$\begin{bmatrix}
 \frac{K_{p1} + K_{f1} + K_{pe}}{M_{p1}} & 0 & \frac{L_1 K_{pe}}{M_{p1}} & 0 & \frac{K_{p1}}{M_{p1}} & 0 & -\frac{K_{f1}}{M_{p1}} & 0 \\
 0 & \frac{K_{p2} + K_{f2} + K_{pc}}{M_{p2}} & 0 & \frac{L_2 K_{pc}}{M_{p2}} & \frac{K_{p2}}{M_{p2}} & 0 & \frac{K_{f2} + K_{pc}}{M_{p2}} & -\frac{L_2 K_{pc}}{M_{p2}} \\
 \frac{\mu D_1 K_{p1} + L_1 K_{pe}}{I_{p1}} & 0 & \frac{L_1^2 (K_{p1} + K_{f1}) + 3K_{pe} I_1^2}{3I_{p1}} & 0 & \frac{\mu D_1 K_{p1}}{I_{p1}} & \frac{L_1^2 K_{p1}}{3I_{p1}} & 0 & -\frac{L_1^2 K_{f1}}{3I_{p1}} \\
 0 & \frac{\mu D_2 K_{p2} + L_2 K_{pc}}{I_{p2}} & 0 & \frac{L_2^2 (K_{p2} + K_{f2} + 3K_{pc})}{3I_{p2}} & \frac{\mu D_2 K_{p2}}{I_{p2}} & \frac{L_2^2 K_{p2}}{3I_{p2}} & -\frac{L_2 K_{pc}}{I_{p2}} & \frac{L_2^2 (K_{f2} + 3K_{pc})}{3I_{p2}} \\
 -\frac{K_{p1}}{M_d} & -\frac{K_{p2}}{M_d} & 0 & 0 & \frac{K_{p1}}{M_d} & \frac{K_{p2}}{M_d} & 0 & 0 \\
 \frac{\mu H K_{p1}}{I_d} & \frac{\mu H K_{p2}}{I_d} & \frac{L_1^2 K_{p1}}{3I_d} & \frac{L_2^2 K_{p2}}{3I_d} & \frac{\mu H (K_{p1} + K_{p2})}{I_d} & \frac{(L_1^2 K_{p1} + L_2^2 K_{p2})}{3I_d} + \frac{K_{db}}{I_d} & 0 & 0 \\
 \frac{K_{f1}}{M_c} & \frac{K_{f2} + K_{pe}}{M_c} & 0 & -\frac{L_2 K_{pc}}{M_c} & 0 & -\frac{\mu N_0}{M_c} & \frac{K_{f1} + K_{f2} + K_{cd} + K_{pc}}{M_c} & \frac{L_2 K_{pc}}{M_c} \\
 0 & \frac{\mu K_{p2} G - L_2 K_{pe}}{I_c} & -\frac{L_1^2 K_{f1}}{3I_c} & -\frac{L_2^2 (K_{f2} + 3K_{pc})}{3I_c} & \frac{\mu K_{p2} G}{I_c} & 0 & \frac{L_2 K_{pc}}{I_c} & \frac{L_1^2 K_{f1} + L_2^2 (K_{f2} + 3K_{pc} + 3K_{cr})}{3I_c}
 \end{bmatrix}$$