

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**HOLOGRAFIA ACÚSTICA UTILIZANDO MODELOS DE FONTES
ELEMENTARES**

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA
A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

WILIAM ALVES BARBOSA

FLORIANÓPOLIS, JUNHO DE 2001

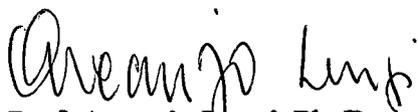
**HOLOGRAFIA ACÚSTICA UTILIZANDO MODELOS DE FONTES
ELEMENTARES**

Wiliam Alves Barbosa

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE

DOUTOR EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA
FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA

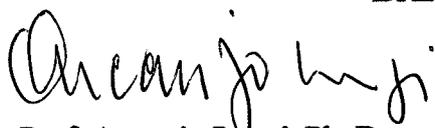


Prof. Arcanjo Lenzi, Ph. D.
Orientador

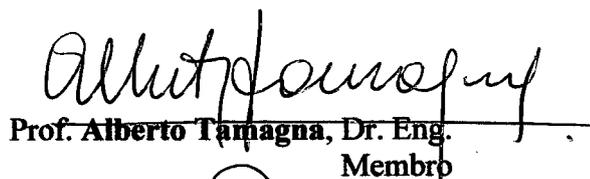


Prof. Júlio César Passos, Dr
Coordenador do Programa de Pós-Graduação

BANCA EXAMINADORA



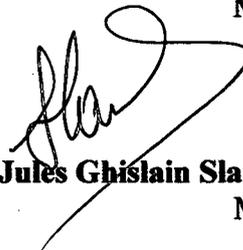
Prof. Arcanjo Lenzi, Ph. D.
Presidente



Prof. Alberto Tamagna, Dr. Eng.
Membro



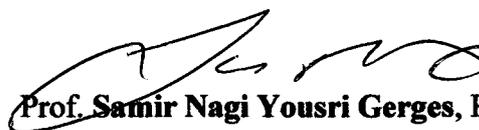
Prof. José Roberto de França Arruda, Dr.
Membro



Prof. Jules Ghislain Slama, Dr.
Membro



Prof. Roberto Jordan, Dr. Eng.
Membro



Prof. Samir Nagi Yousri Gerges, Ph. D.
Membro

No princípio criou Deus os céus e a terra. Gn 1.1

Ordenou o Senhor Deus ao homem, dizendo: De toda árvore do jardim podes comer livremente; mas da árvore do conhecimento do bem e do mal, dessa não comerás; porque no dia em que dela comeres, certamente morrerás. Gn 2.16-17

Então disse o Senhor Deus: Eis que o homem se tem tornado como um de nós, conhecendo o bem e o mal. Ora, não suceda que estenda a sua mão, e tome também da árvore da vida, e coma e viva eternamente. O Senhor Deus, pois, o lançou fora do jardim do Éden para lavrar a terra, de que fora tomado. Gn 3.22-23

Também vi eu que todo trabalho e toda destreza em obras provêm da inveja que o homem tem do seu próximo. Também isso é e vaidade e desejo vão. Ec 4.4

Eis que os dias vêm, diz o Senhor, em que farei um pacto novo com a casa de Israel e com a casa de Judá, não conforme o pacto que fiz com seus pais, no dia em que os tomei pela mão, para os tirar da terra do Egito, esse meu pacto que eles invalidaram, apesar de eu os haver desposado, diz o Senhor. Jr 31.31-32

Respondeu-lhe Jesus: Eu sou o caminho, e a verdade, e a vida; ninguém vem ao Pai, senão por mim. Jo 14.6

A graça do Senhor Jesus seja com todos. Ap 22.21

Dedicatória

Dedico este trabalho para:

Dôra, esposa amada e dedicada, mãe exemplar; **Tiago**, filho amado, presente de Deus; razões de minha própria vida. Pelo carinho e compreensão com que me distinguiram e que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Benedito (*in memoriam*) e **Augusta**, meus queridos pais, que me ensinaram a amar a liberdade, a jamais transigir perante a injustiça e a não compactuar com ímpios.

PROFESSOR Domingos Boëchat Alves, Ph. D., pelos ensinamentos na área de matemática e pelas lições de vida.

Agradecimentos

À **Universidade Federal do Paraná**, pela concessão de afastamento para realização deste trabalho;

CAPES, pelo apoio financeiro;

IPqM, pelo apoio financeiro e em especial ao Comandante CF(EN) **Casimiro José Gabriel**, Dr. Eng., pelo acompanhamento e sugestões valiosas;

Ao **INMETRO**, em especial a toda equipe do seu **Laboratório de Acústica**, pela enorme e indispensável ajuda prestada na realização dos ensaios experimentais;

Ao Prof. **Arcanjo Lenzi**, pela amizade, pelos ensinamentos transmitidos e valiosa orientação;

Ao Prof. **Paulo César Okimoto**, vice-chefe do Departamento de Engenharia Mecânica da UFPR, pela amizade e por todo apoio recebido;

Ao Prof. **Michael Moeser**, Dr. Ing., da TU Berlin por sugerir o uso de holograma acústico como condição de contorno e pelo acompanhamento do trabalho;

Ao amigo **Paulo Zannin**, quem primeiro me sugeriu o uso de fontes elementares; pela amizade, pelas sugestões e discussões, muito produtivas, para este trabalho;

Ao amigo e colega de curso **Marcus Nunes**, pela valiosa e sincera amizade;

Aos amigos e colegas de curso **João Bid** e **Paulo Boni**, pela amizade, pelo apoio e pelas muitas discussões produtivas;

Ao **Osni**, bolsista do Laboratório de Vibrações e Acústica da UFSC, pela grande ajuda prestada para este trabalho;

Ao **Marcos Lenzi** pela digitação dos dados experimentais;

Ao **Paru**, técnico do Laboratório de Vibrações e Acústica da UFSC, pelo grande auxílio prestado na montagem e desenvolvimento do aparato experimental;

Aos colegas de Departamento **Fernando Tadeu Boçon** e **Silvio Francisco Brunatto**, pelas sugestões apresentadas;

A todas as pessoas que direta ou indiretamente colaboraram para a conclusão deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho apresenta um novo método para se obter um modelo linear de radiação de uma fonte sonora, considerando-a como um conjunto de fontes elementares cujos parâmetros são identificados resolvendo-se o problema inverso de radiação; i. e., conhecendo-se o campo acústico sobre uma superfície qualquer envolvendo a fonte, identifica-se a velocidade de vibração de cada fonte elementar usada no modelo. Toda a modelagem e o desenvolvimento matemático são feitos usando-se conceitos de álgebra linear, de forma que o equacionamento é simples e compacto. Prova-se a existência, unicidade e convergência para uma solução de quadrados mínimos lineares (modelo de radiação) na qual o erro na potência sonora é mínimo. O modelo proposto foi testado comparando suas previsões com experimentos realizados em câmara anecóica, para uma fonte axi-simétrica composta por dois alto-falantes e com os valores obtidos por simulação analítica, ou numérica, para a radiação sonora de pistão circular, placa retangular e membrana circular. Excelente correlação foi obtida entre o modelo proposto e os experimentos e simulações realizados.

ABSTRACT

This work presents a new method to obtain a linear model of radiation of a sound source, considering it as a set of elementary sources whose parameters are identified by solving the inverse problem of radiation; i. e., by knowing the acoustic field on a surface involving the source, it identifies the velocity of vibration of each elementary source used in the model. The model and mathematical development are made by using concepts of linear algebra, so that the model equations are simple and compact. It is proved the existence, uniqueness and convergence for a linear minimum squares solution (radiation model) in which the error in the sound power is minimum. The proposed model was tested comparing its predictions with experiments accomplished in anechoic chamber, for an axi-symmetrical source composed by two speakers, and with the values obtained by analytic or numerical simulation, for the sound radiation of a circular piston, a rectangular plate and a circular membrane. Excellent correlation was obtained between the results obtained using the proposed model and results from experiments and numerical simulations.

Sumário

RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xv
Lista de símbolos	xvi
Introdução	1
Capítulo 1 – Soluções gerais da onda e revisão bibliográfica	4
1.1 – Introdução	4
1.2 – Da equação da onda ao problema linear	4
1.3 – Soluções do problema linear	5
1.4 – Holografia Acústica	9
1.5 – Método das Fontes Equivalentes – ESM	13
Capítulo 2 – Ruído Radiado por estruturas	16
2.1 – Introdução	16
2.2 – Potência Sonora	17
2.2.1 – Medição da potência sonora em câmara acústica	17
2.3 – Eficiência de Radiação	18
2.4 – Fator de perda por radiação	19
2.5 – Fontes Elementares	21
2.6 – Placas Infinitas	28
2.7 – Radiação de placa modelada por um conjunto de fontes pontuais	33
Capítulo 3 – Formulação do Problema	36
3.1 – Introdução	36
3.2 – Formulação e geometria do problema proposto	36
3.3 – Caso discreto	39
3.4 – Solução do problema proposto	41
3.5 – Limite para o erro máximo	43
Capítulo 4 – Estudo de casos	48
4.1 – Introdução	48
4.2 – Fonte sonora	49
4.2.1 – Alto-falantes	50

4.2.2 – Tubo de PVC	51
4.2.3 – Flanges	51
4.2.4 – Conexões elétricas	51
4.2.5 – Câmara Anecóica	51
4.2.6 – Posicionamento do microfone	51
4.2.7 – Experimentos	55
4.3 – Estudo de casos experimentais	56
4.3.1 – Caso experimental 1	58
4.3.2 – Caso experimental 2	60
4.3.3 – Caso experimental 3	61
4.3.4 – Caso experimental 4	62
4.3.5 – Caso experimental 5	63
4.3.6 – Caso experimental 6	64
4.3.7 – Caso experimental 7	65
4.3.8 – Caso experimental 8	66
4.3.9 – Caso experimental 9	67
4.3.10 – Caso experimental 10	68
4.4 – Estudo de casos com fontes teóricas	69
4.4.1 – Pistão circular rígido	69
4.4.2 – Placa retangular e membrana circular	70
4.4.3 – Pontos para construção do holograma	72
4.4.4 – Convenções básicas nos casos teóricos	74
4.4.5 – Caso simulado 1	74
4.4.6 – Caso simulado 2	76
4.4.7 – Caso simulado 3	77
4.4.8 – Caso simulado 4	79
4.4.9 – Caso simulado 5	80
4.4.10 – Caso simulado 6	81
4.4.11 – Caso simulado 7	82
4.4.12 – Caso simulado 8	83
4.4.13 – Caso simulado 9	85
4.4.14 – Caso simulado 10	85
4.4.15 – Caso simulado 11	86

4.4.16 – Caso simulado 12	87
4.4.17 – Caso simulado 13	88
4.4.18 – Número de fontes elementares	89
Capítulo 5 – Análise de erros	91
5.1 – Introdução	91
5.2 – Erro sistemático na posição do microfone	92
5.3 – Erro aleatório, de distribuição normal, na posição do microfone	93
Capítulo 6 – Conclusões e recomendações	102
6.1 – Conclusões	102
6.2 – Recomendações	103
Referências Bibliográficas	105
APÊNDICE – Fundamentos Matemáticos	112
A-1 Introdução	112
A-2 Conjunto	112
A-3 Correspondência entre os elementos de conjuntos	120
A-4 Ordem	123
A-5 Função	126
A-6 Seqüências	129
A-7 Operações	131
A-8 Grupo	132
A-9 Anel	132
A-10 Corpo	132
A-11 Intervalo	133
A-12 Espaços topológicos	134
A-13 Funções analíticas	134
A-14 Singularidade, polo	135
A-15 Teorema do resíduo	136
A-16 Funções harmônicas	136
A-17 Ponto aderente	137
A-18 Pontos de acumulação e isolado	137
A-19 Espaços vetoriais lineares	138
A-20 Transformações lineares	142
A-21 Representação matricial de transformações lineares	142

A-22	Transformação singular	144
A-23	Forma n-linear	145
A-24	Métrica, norma, produto interno	146
A-25	Norma matricial	149
A-26	Transformação adjunta	150
A-27	Valores singulares	151
A-28	Inversa generalizada	152
A-29	Conjunto convexo	153
A-30	O problema linear	154
A-31	Solução de norma mínima para o problema linear	155
A-32	O problema de autovalores e autovetores	157
A-33	Operador diferencial de segunda ordem	157
A-34	Distribuições	158
A-35	A equação da onda	160
A-36	Aproximação linear da equação da onda	161
A-37	Equação da onda para a velocidade potencial	162
A-38	Simetria esférica	162
A-39	Simetria axial	164

Lista de figuras

Figura 2.1 – Esfera Pulsante	22
Figura 2.2 – Eficiência de Radiação de Esfera Pulsante	25
Figura 2.3 – Radiação de Placa Infinita	28
Figura 2.4 – Radiação de Placa Infinita – Campo Distante	30
Figura 2.5 – Ondas evanescentes	32
Figura 2.6 – Queda no NPS para ondas evanescentes	32
Figura 2.7 – Eficiência de Radiação de Placa Infinita	33
Figura 2.8 – Transição de fonte esférica para fonte em parede	34
Figura 2.9 – Fontes pontuais em placa	35
Figura 3.1 – Geometria da formulação do problema	38
Figura 3.2 – Influência da distância e frequência na matriz e em seu número de condição	45
Figura 3.3 – Variação dos elementos da matriz A com a distância	46
Figura 4.1 – Fonte sonora real	50
Figura 4.2 – Resposta em frequência dos alto-falantes	50
Figura 4.3 – Fotos da montagem experimental	52
Figura 4.4 – Fotos da montagem experimental	53
Figura 4.5 – Fotos da montagem experimental	54
Figura 4.6 – Cadeia de medição	55
Figura 4.7 – Posicionamento do microfone	56
Figura 4.8 – Caso experimental 1 de 63 a 200 Hz	58
Figura 4.9 – Caso experimental 1 de 250 a 630 Hz	59
Figura 4.10 – Caso experimental 2	60
Figura 4.11 – Caso experimental 3	61
Figura 4.12 – Caso experimental 4	62
Figura 4.13 – Caso experimental 5	63
Figura 4.14 – Caso experimental 6	64
Figura 4.15 – Caso experimental 7	65
Figura 4.16 – Caso experimental 8	66
Figura 4.17 – Caso experimental 9	67

Figura 4.18 – Caso experimental 10	68
Figura 4.19 – Distância de Rayleigh	70
Figura 4.20 – Modos naturais de vibração de placa retangular	71
Figura 4.21 – Modos de vibração axi-simétricos de membrana circular	72
Figura 4.22 – Pontos sobre superfície plana	73
Figura 4.23 – Pontos sobre semi-esfera	73
Figura 4.24 – Distribuição de pontos sobre segmento de reta	73
Figura 4.25 – Distribuição de pontos sobre semicircunferência	73
Figura 4.26 – Distribuição de pontos sobre retângulo	73
Figura 4.27 – Hologramas de comparação e saída, simulação 1	75
Figura 4.28 – Velocidade absoluta na superfície das fontes, simulação 1	75
Figura 4.29 – Hologramas de comparação e saída, simulação 2	76
Figura 4.30 – Velocidade absoluta na superfície das fontes, simulação 2	77
Figura 4.31 – Hologramas de comparação e saída, simulação 3	78
Figura 4.32 – Velocidade real na superfície das fontes, simulação 3	78
Figura 4.33 – Determinação do número de fontes elementares do modelo	80
Figura 4.34 – Projeção do campo para frente, holograma de entrada semicircunferência	81
Figura 4.35 – Projeção do campo para trás	82
Figura 4.36 – Projeção do campo para frente, holograma de entrada retangular	83
Figura 4.37 – Projeção do campo para frente, holograma de entrada reto	84
Figura 4.38 – Ruído radiado por membrana vibrando no modo (0,1)	85
Figura 4.39 – Ruído radiado por membrana vibrando no modo (0,2)	86
Figura 4.40 – Ruído radiado por membrana vibrando no modo (0,3)	86
Figura 4.41 – Radiação de placa	87
Figura 4.42 – Identificação do modo (1,2) de placa	88
Figura 4.43 – Identificação do modo (2,2) de placa	88
Figura 4.44 – Número de fontes elementares	89
Figura 5.1 – Erros na fase e no Nível de Pressão Sonora com a mudança de posição	92
Figura 5.2 – Erro no NPS devido a erro de posição no holograma 63 Hz	94
Figura 5.3 – Erro no NPS devido a erro de posição no holograma 125 Hz	94
Figura 5.4 – Erro no NPS devido a erro de posição no holograma 250 Hz	95

Figura 5.5 – Erro no NPS devido a erro de posição no holograma 500 Hz	95
Figura 5.6 – Erro no NPS devido a erro de posição no holograma 1 kHz	96
Figura 5.7 – Erro no NPS devido a erro de posição no holograma 2 kHz	96
Figura 5.8 – Erro no NPS devido a erro de posição no holograma 4 kHz	97
Figura 5.9 – Erro na reconstrução do NPS, raio 1,1 m	97
Figura 5.10 – Erro na reconstrução do NPS, raio 1,5 m	98
Figura 5.11 – Erro na reconstrução do NPS, raio 5 m	98
Figura 5.12 – Erro na reconstrução do NPS, raio 10 m	99
Figura 5.13 – Comparação entre o NPS exato (azul) e reconstruído (verde)	100
Figura A1 – Diagrama de Venn	113
Figura A2 – Complemento de um conjunto	114
Figura A3 – União de conjuntos	115
Figura A4 – Cobertura de um conjunto	116
Figura A5 – Diferença entre conjuntos	117
Figura A6 – Diferença simétrica em conjuntos	117
Figura A7 – Diagrama coordenado	118
Figura A8 – Gráfico de uma relação	121
Figura A9 – Ordem em conjuntos	124
Figura A10 – Supremo e Ínfimo de um conjunto	125
Figura A11 – Seqüências delta	130
Figura A12 – Convexidade de conjuntos	154
Figura A13 – O problema linear	155
Figura A14 – Sistema de coordenadas polar-esférico	163

Lista de Tabelas

Tabela 4.1 – Relação de equipamentos	55
Tabela 4.2 – Zeros de J_0 para modos axi-simétricos da membrana circular	72
Tabela A1 – Propriedades da igualdade e da inclusão de conjuntos	114
Tabela A2 – Propriedades da interseção e da união de conjuntos	115
Tabela A3 – Conectivos	119
Tabela A4 – Tabela-verdade	119
Tabela A5 – Proposições equivalentes	120

Lista de símbolos

$&$	conectivo E
θ	vetor nulo
ξ	vetor erro residual; fator de conversão vibro-acústico
ε	vetor erro residual relativo
ρ	densidade do meio
σ	eficiência de radiação; vetor
η	fator de perda estrutural
σ	eficiência de radiação; vetor
\emptyset	conjunto vazio
\vee	conectivo OU
\rightarrow	conectivo SE ... ENTÃO
\leftrightarrow	conectivo SE E SOMENTE SE
\otimes	contradição
\Rightarrow	implicação lógica
\Leftrightarrow	equivalência lógica
\in	relação de pertinência
\notin	negação da relação de pertinência
\subset	relação de inclusão ESTÁ CONTIDO
\supset	relação de inclusão CONTEM
$\not\subset$	negação da relação de inclusão ESTÁ CONTIDO
\cap	interseção de conjuntos
\cup	união de conjuntos
\forall	quantificador universal
\exists	quantificador existencial
\leq	relação de ordem PREDECE
\geq	relação de ordem DOMINA
\oplus	soma direta
∇^2	operador de Laplace
(a_1, \dots, a_n)	n-upla ordenada

η_{rad}	fator de perda por radiação
ΔS	elemento discreto de área
$(x; y)$	produto interno entre os vetores x e y
	tal que
$\ \mathbf{A} \ _F$	norma de Frobenius da matriz \mathbf{A}
$\ x \ $	norma do vetor x
$\ b\ _2$	norma 2 do vetor b
\sim	conectivo NÃO
$<$	relação de ordem PRECEDE ESTRITAMENTE
$\langle \mathbf{A} \rangle$	espaço gerado pelo conjunto \mathbf{A}
$>$	relação de ordem DOMINA ESTRITAMENTE
a	raio da esfera; diâmetro do pistão; diâmetro da membrana
\mathbf{A}^\perp	complemento ortogonal do conjunto \mathbf{A}
$\mathbf{A} \diamond \mathbf{B}$	diferença simétrica entre os conjuntos \mathbf{A} e \mathbf{B}
\mathbf{A}^*	transposta conjugada (complexa) da matriz \mathbf{A}
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots, \mathbf{Z}$	notação de conjunto
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots, \mathbf{Z}$	notação de matriz
$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \dots, \mathbb{Z}$	notação de espaço vetorial linear
\mathbf{A}^{-1}	inversa da matriz \mathbf{A}
\mathbf{A}^f	fecho do conjunto \mathbf{A}
\mathbf{A}^T	transposta da matriz \mathbf{A}
$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	produto cartesiano entre os conjuntos \mathbf{A} e \mathbf{B}
b^\perp	projeção ortogonal do vetor b
\mathbf{B}^+	inversa generalizada da matriz \mathbf{B}
c	velocidade do som
\mathbb{C}	conjunto dos números complexos
$\mathbf{C}_A(\mathbf{B})$	complemento do conjunto \mathbf{B} em relação ao conjunto \mathbf{A}
$d(x,y)$	distância Euclidiana entre x e y
$\det(\mathbf{A})$	determinante da matriz \mathbf{A}
$\dim(\mathbb{A})$	dimensão do espaço vetorial linear \mathbb{A}
$E(s)$	média espacial de s

E_{rad}	energia radiada
ESM	método das fontes equivalentes
E_{vib}	energia vibratória
f	frequência; função
$\mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathcal{R}$	notação de corpo
$g(x, y)$	função de Green entre x e y
$\text{grad}(p)$	gradiente de p
$\text{Im}(T)$	imagem da transformação linear T
\mathbf{I}_n	matriz identidade de ordem n
$\text{inf}(\mathcal{B})$	ínfimo do conjunto \mathcal{B}
j	unidade imaginária
J_n	conjunto de índices
$J_n(z)$	função de Bessel tipo n de argumento z
k	número de onda
$K(\mathbf{A})$	número de condição da matriz \mathbf{A}
L_x	comprimento da placa
L_y	largura da placa
m	massa por unidade de área
$\mathbb{M}(r,c)$	espaço vetorial linear das matrizes de r linhas por c colunas
\mathbf{N}	conjunto dos números naturais
$N(T)$	núcleo da transformação linear T
NAH	holografia acústica de campo próximo
NME	nível médio
NPS	nível de pressão sonora
p	pressão sonora; modo de vibração; proposição
$P_{\text{Im}(\mathbf{A})}$	projeção ortogonal sobre a imagem de \mathbf{A}
q	vazão da fonte elementar; modo de vibração; proposição
\mathbf{Q}	conjunto dos números racionais
\mathbf{R}	conjunto dos número reais
$\text{Re}\{x\}$	parte real de x
$\text{Res}[x]$	resíduo de x
S_n	superfície do n -ésimo elemento de área

S_R	conjunto solução da relação R
$\sup(\mathcal{B})$	supremo do conjunto \mathcal{B}
SVD	decomposição a valores singulares
T	tempo de reverberação; transformação linear; período
T^*	adjunta da transformação linear T
T^+	inversa generalizada da transformação linear T
U	conjunto universo
U	matriz unitária
V	volume da câmara acústica; valor verdade de uma proposição
v	velocidade de vibração; velocidade normal de partícula; vetor
V	volume da câmara acústica; valor verdade de uma proposição
\mathbb{V}^\perp	complemento ortogonal do espaço vetorial linear \mathbb{V}
W	potência sonora
W_{cdiss}	potência dissipada em forma de calor
W_{cdiss}	potência dissipada em forma de calor
W_{ent}	potência de entrada
W_{rad}	potência radiada
W_{tdiss}	potência total dissipada
Z_n	zero da função de Bessel de ordem 0

Introdução.

Máquinas ou equipamentos, em uso normal, provocam algum tipo de ruído, em geral indesejável, cujas conseqüências podem ser classificadas em três tipos:

- i) Tornam insalubre o ambiente de trabalho, causando danos à saúde dos trabalhadores, provocando perdas na produtividade e na qualidade da produção, com as respectivas implicações trabalhistas e econômicas;
- ii) Poluem o meio ambiente com a propagação externa do ruído, o que além dos problemas com os órgãos ambientais, prejudicam a imagem da empresa junto aos consumidores; e, por fim,
- iii) O ruído pode excitar vibração em equipamentos sensíveis prejudicando o funcionamento dos mesmos.

A máquina ou equipamento que gere ruído nas condições acima receberá, neste trabalho, a denominação genérica de “fonte sonora”, sendo suas características acústicas, em geral, especificadas em termos da pressão sonora máxima admitida a uma dada distância próxima à fonte ou também em termos da potência sonora.

Desejando-se a pressão sonora num ponto qualquer do ambiente no qual será montada a fonte sonora, por exemplo para planejamento de leiaute, as especificações de pressão sonora em alguns pontos ou da potência sonora são insuficientes. O campo acústico radiado pode ser projetado de duas formas:

- i) Por holografia acústica, na qual conhecido o campo sonoro próximo à fonte, numa superfície geralmente plana, o mesmo pode ser projetado para outra superfície equidistante à primeira; e
- ii) Conhecendo-se um modelo de radiação da fonte, com o qual o ruído pode ser predito em qualquer ponto, sendo de maior interesse, na prática, os pontos situados no exterior da fonte. Um modelo para radiação da fonte sonora é uma ferramenta mais poderosa do que a holografia acústica.

O tema central do presente trabalho é apresentar um novo método para se obter um modelo linear de radiação de uma fonte sonora, considerando-a como um conjunto de fontes elementares cujos parâmetros são identificados resolvendo-se o problema inverso de radiação; i. e., conhecendo-se o campo acústico sobre uma superfície qualquer envolvendo a fonte, identifica-se a velocidade de vibração de cada fonte elementar usada no modelo.

Toda a modelagem e o desenvolvimento matemático são feitos usando-se conceitos de álgebra linear, de forma que o equacionamento é simples e compacto.

Provam-se a existência, a unicidade e a convergência para uma solução (modelo de radiação) na qual o erro na potência sonora é mínimo.

O trabalho está dividido em seis capítulos e um apêndice:

i) No capítulo 1 são discutidas as soluções gerais da equação da onda para a radiação acústica, sendo o assunto desenvolvido como a busca de soluções, de quadrados mínimos lineares, do problema linear. São indicadas as principais referências bibliográficas sobre o assunto. São também apresentadas a holografia acústica e o método das fontes elementares, com as respectivas referências;

ii) No capítulo 2 estão definidos os principais parâmetros relacionados à radiação sonora por estruturas vibrantes. As representações aproximadas e exatas de fontes elementares são apresentadas para o caso geral;

iii) O capítulo 3 trata da formulação do problema proposto como tema central deste trabalho. A formulação, a geometria, a solução e implementação para o caso discreto são apresentadas em termos gerais. Demonstra-se a existência e unicidade de uma solução de quadrados mínimos lineares, de norma mínima para o problema, assim como um limite para o erro máximo na potência sonora, sendo este função da norma da solução escolhida;

iv) No capítulo 4 tem-se vários estudos de casos, aplicando-se o modelo proposto aos dados experimentais obtidos por radiação de uma fonte sonora em câmara anecóica e também, aos dados obtidos por simulação da radiação de pistão rígido, placa retangular e membrana circular. Em todos os casos verifica-se uma excelente correlação

entre os valores preditos pelo modelo e os exatos, com erro desprezável entre as potências sonoras predita e exata. Identificam-se também a posição das fontes sonoras e os modos de vibração de placas e membranas.

v) No capítulo 5 tem-se uma análise de erros, incluindo as influências do número de pontos do holograma acústico, de entrada, usado para identificação das fontes elementares do modelo; a forma geométrica sobre a qual foi tomado o holograma de entrada; a presença de erro sistemático e aleatório no posicionamento do microfone;

vi) No capítulo 6 são apresentadas as principais conclusões e recomendações para trabalhos futuros;

vi) No apêndice encontram-se todos os fundamentos matemáticos utilizados no trabalho, destacando-se: o conceito de extensão de função; conjuntos convexos; espaços de Hilbert; a decomposição a valores singulares; a inversa generalizada; as soluções de quadrados mínimos lineares; o operador diferencial de segunda ordem e a teoria de distribuições. Os conceitos são apresentados, com o rigor necessário, de forma lógica e encadeada, de forma a tornar a leitura fácil e agradável. Para cada tema diretamente relacionado ao trabalho existe indicação clara no texto, muitas vezes acompanhada de exemplos e figuras. Ao leitor não familiarizado com estes conceitos recomenda-se uma leitura preliminar deste apêndice.

Capítulo 1

Soluções gerais da Equação da Onda e revisão bibliográfica

1.1 – Introdução.

Neste capítulo são discutidas as soluções gerais da equação da onda para a radiação acústica.

Usando conceitos de álgebra linear o assunto é desenvolvido com a busca de soluções do problema linear. São discutidos os casos em que o problema linear é consistente ou inconsistente e quando possui solução única ou múltiplas soluções. Para este último caso é desenvolvida uma solução de quadrados mínimos lineares que minimiza o erro da potência sonora, também chamado de erro residual e são indicadas as principais referências bibliográficas que tratam do assunto.

São apresentadas, também, a holografia acústica e o método das fontes equivalentes com as respectivas referências sobre esses temas.

A modelagem matemática da radiação e do espalhamento acústico é um problema antigo e muito estudado pela física-matemática. Em verdade tanto o espalhamento quanto a radiação estão presentes em todos os fenômenos ondulatórios, entretanto, no presente trabalho serão estudados apenas os casos de radiação de ondas acústicas em fluidos homogêneos, considerando-se sistemas lineares.

1.2 – Da equação da onda ao problema linear.

Resolver o problema de radiação, ou de espalhamento acústico, significa encontrar soluções da equação da onda [22]:

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} U_{tt} = F(x, t) \quad (1.1)$$

na qual

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (1.2)$$

$$U_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

ou, sem considerar a variação temporal, procurar soluções da equação reduzida da onda, conhecida como equação de Helmholtz, obtida aplicando-se a transformada de Fourier à equação (1.1) da onda [22]

$$\nabla^2 U - \frac{\omega^2}{c^2} U = F(x) \quad (1.3)$$

Para o caso de $\omega = 0$ a equação de Helmholtz se reduz a

$$\nabla^2 U = F(x) \quad (1.4)$$

que é conhecida como equação potencial ou equação de Laplace, donde o nome de operador de Laplace para ∇^2 .

Nos três casos acima as equações podem ser escritas como o problema linear:

$$TU = b \quad (1.5)$$

com

para a eq. (1.1)
$$T = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad e \quad b = F(x, t)$$

para a eq. (1.2)
$$T = \nabla^2 U - \frac{\omega^2}{c^2} \quad e \quad b = F(x)$$

para a eq. (1.3)
$$T = \nabla^2 \quad e \quad b = F(x)$$

1.3 – Soluções do problema linear.

Portanto o que se busca são as soluções do problema linear, dado pela equação (1.5). Cumpre-se inicialmente identificar os espaços vetoriais lineares, \mathbb{A} e \mathbb{B} , envolvidos no problema; assim para as soluções da equação de Helmholtz em termos de funções generalizadas, sejam $U \in \mathbb{A}$, $b \in \mathbb{B}$ e $T : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$. Com a norma L^2 definida nestes dois espaços tem-se que \mathbb{A} é um espaço de Hilbert [34] e \mathbb{B} também é um espaço de Hilbert [35].

Duas situações se colocam para este problema linear:

- i) b pertence à imagem de T , $b \in \text{Im}(T) \subset \mathbb{B}$, sendo o problema linear consistente; e o conjunto solução de T é $\mathbb{A} \supset \mathcal{S}_T = \{\mu \mid \mu = \mu_0 + \eta, \forall \eta \in N(T)\}$, sendo μ_0 uma solução particular e $N(T) \subset \mathbb{A}$ o núcleo de T , i. e., o conjunto solução do problema linear homogêneo associado $TU = \theta$. De fato verifica-se que sendo μ_0 uma solução então $T\mu_0 = b$ e $T\mu = T(\mu_0 + \eta) = T\mu_0 + T\eta = b + \theta = b$, portanto $\mu = \mu_0 + \eta$ é solução.

Se T for um isomorfismo ou um monomorfismo o núcleo de T será o espaço do vetor nulo, i. e., $N(T) = \{\theta\}$, e o problema linear possui solução única que é dada por $\mu = T_e b$ na qual T_e é uma inversa à esquerda de T ; se T for isomórfica T_e será a inversa de T .

Se T não for monomórfica (portanto não pode ser isomórfica) a dimensão de seu núcleo será maior que zero, $\dim(N(T)) > 0$, ou seja $N(T)$ possui infinitos vetores o que implica em infinitas soluções do problema linear, o que torna necessário o estabelecimento de condições de contorno adicionais apropriadas a cada problema em particular. A transformação linear T é basicamente um operador diferencial, portanto não é monomórfica.

- ii) Na segunda situação considere-se que b não pertence à imagem de T , $b \notin \text{Im}(T)$, o que torna o problema linear $TU = b$ incompatível, sem solução no sentido usual. Com isto tem-se um erro residual ξ diferente de zero; $b - TU = \xi \neq \theta$. Há pois que se buscar uma solução aproximada que torne o erro ξ mínimo.

O tema central do presente trabalho é a busca de uma solução que minimiza a norma $\|\xi\|_2$ do erro residual, que é o erro na potência sonora, e que pode ser encontrada da seguinte forma:

Seja $b^\perp \in \text{Im}(T)$ a projeção ortogonal de b sobre a imagem de T , lembrando-se que b^\perp é o vetor da imagem de T mais próximo de b e seja o novo problema linear $TU = b^\perp$, que é consistente pois $b^\perp \in \text{Im}(T)$, cujo conjunto solução $\mathcal{S}_T^\perp \subset \mathbb{A}$ é:

$$S_T^\perp = \{v \mid v = v_0 + \eta, \forall \eta \in N(T)\}$$

no qual v_0 é uma solução particular de $TU = b^\perp$. Vê-se que $S_T^\perp \subset \mathbb{A}$ é uma variedade linear, portanto um conjunto convexo (subconjunto de um espaço de Hilbert) e como tal possui um único vetor v_{\min} de norma mínima de tal forma que

$$\|\xi\|_2 = \|b - Tv_{\min}\|_2 = \text{mínimo} \quad (1.6)$$

ou seja a solução v_{\min} torna o erro mínimo. Este vetor $v_{\min} \in S_T^\perp \subset \mathbb{A}$ é obtido por

$$v_{\min} = T^+b \quad (1.7)$$

sendo T^+ a inversa generalizada de T . Em verdade trata-se de uma extensão do conceito de soluções do problema linear, sendo estas conhecidas como soluções de quadrados mínimos lineares. Sobre o assunto consultar [15, 25, 27, 28] e para uma abordagem geral do problema linear ver [35, 5].

Soluções analíticas para a radiação acústica de geometria simples como esfera e cilindro são bem conhecidas e podem ser encontradas nos textos clássicos de Rayleigh [36] e Morse [37] estando também presentes nos bons textos sobre acústica como [23, 38, 39, 40].

Diversos métodos matemáticos têm sido empregados para se encontrar soluções da equação da onda e várias destas são apresentadas de forma simples e didática em Butkov [7] que as designa genericamente de funções especiais, ver também Abramowitz & Stegun [41].

A equação de Helmholtz é completamente separável no sistema de coordenadas cilíndrico e no esférico [7] conduzindo a equações diferenciais classificadas num único tipo, conhecida como equação de Sturm-Liouville, cujas soluções são dadas resolvendo-se o problema linear conhecido como problema de Sturm-Liouville e sobre isto pode-se ver [12, 32, 42, 43].

No presente trabalho destaca-se a importância das funções de Green, que são soluções da equação de Helmholtz dentro do contexto de funções generalizadas, ou teoria das distribuições. As funções de Green encontram-se bem detalhadas em [22, 40, 44] e a teoria das distribuições em [9, 10, 18].

Soluções aproximadas, incluindo o método de elementos de contorno, têm sido propostas como:

$$\mu = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \quad (1.8)$$

na qual μ é a solução aproximada; n o número de pontos de discretização; $a_i, i = 1, \dots, n$, são escalares e $\alpha_i, i = 1, \dots, n$, satisfazendo à equação de Helmholtz. Os escalares $a_i, i = 1, \dots, n$, são encontrados especificando-se condições de contorno apropriadas ao caso, sendo os $\alpha_i, i = 1, \dots, n$, entendidos como fontes elementares posicionadas nos n pontos discretos sobre a superfície da fonte. Note-se que o conjunto ordenado $\mathbf{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ não necessita ser linearmente independente, basta que gere o espaço \mathbb{S} que contém o conjunto solução S_A do problema proposto pela equação (1.8), i. e.:

$$S_A \subset \mathbb{S} = \langle \mathbf{A} \rangle$$

sendo $\langle \mathbf{A} \rangle$ o espaço gerado por \mathbf{A} . Todavia se \mathbf{A} for um conjunto linearmente dependente, pode-se eliminar dele todos os vetores que lhe sejam dependentes de forma a se ter um conjunto linearmente independente $\mathbf{A}_1 = \{\alpha_r\}, r = 1, \dots, m < n$, que constitui uma base para \mathbb{S} , e esta base pode ser ortonormalizada gerando $\mathbf{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ que é uma base ortonormal para \mathbb{S} , podendo-se rescrever a equação (1.8) como:

$$\mu = \sum_{i=1}^m b_i \beta_i \quad (1.9)$$

A ortonormalização não é um imperativo para se chegar à solução aproximada, mas as propriedades de vetores ortonormais podem facilitar a obtenção dos escalares $b_i, i = 1, \dots, m$, e diminuir o trabalho computacional.

Sendo este tipo de aproximação, em suma, o teor dos artigos publicados por: Oestreicher [45] para radiação acústica; Pinnington & Pearce [46], analisando um problema de transmissão de vibração; Ben-Menahem & Mikhailov [47] em identificação de ondas sísmicas provocadas por explosões; Tekatlian, Filippi & Habault [48], no qual a superfície da fonte é discretizada, usando como condição de contorno um conjunto discreto de pontos de pressão sonora no espaço externo à fonte e com a solução do problema inverso encontram a solução de quadrados mínimos lineares de norma mínima para a velocidade de vibração da fonte; Wang & Wu [49], usando para expansão

(combinação linear) um conjunto ortonormal de funções e como condição de contorno um conjunto de pontos discretos de pressão sonora no espaço externo à fonte, apresentando, ainda, exemplos de reconstrução do campo sonoro a partir da identificação, por quadrados mínimos lineares, dos parâmetros da fonte; Fahline & Koopmann [50], caracterizando a potência sonora radiada por estruturas vibrantes, expandindo a solução em funções com 1, 2 e 3 singularidades, ou seja multipolos de ordem 0, 1 e 2 respectivamente, tratando-se de um artigo claro e bem fundamentado matematicamente. Em comum estes artigos consideram a superfície da fonte suave e conhecida geometricamente em detalhes. Lembrando-se que uma superfície “é dita suave se pode ser representada por

$$x = x(p, q); \quad y = y(p, q) \quad e \quad z = z(p, q)$$

nas quais p e q são parâmetros independentes e as funções x , y e z possuem derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em relação a p e q , no domínio considerado. As superfícies suaves possuem planos tangentes em todos os pontos e podem ser orientadas; ou seja, pode-se distinguir entre o lado positivo e negativo da superfície” [7].

1.4 -Holografia Acústica.

O termo holografia deriva da palavra grega “holos” - todo. Num sentido literal amplo, “holografia” é o registro do todo.

A técnica de holografia (ótica) foi desenvolvida em 1948 por Garbor [51], ao tentar melhorar a resolução de microscópios eletrônicos. O procedimento é relativamente simples e consiste em registrar, numa placa foto-sensível, a interferência na zona de Fresnel existente entre a luz direta (frente de onda primária) e a refletida (frente secundária) por um dado objeto interposto entre a fonte e a placa. Após processada, a placa apresenta uma rede de franjas, onde cada ponto em sua superfície apresenta um índice de absorção proporcional à intensidade média da onda estacionária, formando um “negativo” de intensidade. Esta placa, denominada Holograma, aproxima-se de uma rede de difração [52].

Montando-se a mesma disposição inicial e fazendo incidir sobre o holograma apenas a frente de onda primária (também chamada de referência), cada fenda comportar-se-á como uma fonte elementar e, de acordo com o princípio de Huygens [52], uma imagem em três dimensões do objeto será recriada. Por este motivo a holografia é também chamada de reconstrução por frente de ondas.

Em princípio a técnica da holografia aplica-se a qualquer tipo de onda: eletromagnética, raios X, luminosa, acústica e sísmica [53] e tomou um impulso grande a partir da década de 60, com a invenção do raio laser.

A holografia acústica consiste em medir a pressão sonora complexa num conjunto de pontos discretos, situados em uma superfície situada próxima à fonte e usar a transformada de Fourier espacial para projetar, para os campos distante ou próximo, este conjunto de pontos de pressão, ao qual se dá o nome de holograma acústico. Doravante usar-se-ão os termos holografia e holograma no contexto da acústica, a menos que explicitamente estabelecido em outro sentido.

Nos seus primórdios a holografia acústica baseou-se na teoria da holografia ótica, na qual a resolução está limitada pelo comprimento de onda. Este fato não causa dificuldades na holografia ótica, pois os comprimentos de onda são muito pequenos, mas é problemático para a acústica aérea e praticamente inviabiliza as aplicações em acústica submarina, na qual os comprimentos de onda são grandes. Revendo os fundamentos teóricos da holografia acústica Williams, Maynard & Skudrzyk [54] não encontraram nada que intrinsecamente limitasse a resolução ao comprimento de onda. Estava preparado o caminho para uma grande evolução da holografia acústica. O problema todo consistia, segundo os autores, no fato que em ótica mede-se o holograma a grandes distâncias da fonte, se comparadas com o comprimento de onda, de tal sorte que as ondas evanescentes não são levadas em consideração e este fato limita a resolução ao comprimento de onda.

A holografia acústica é hoje aplicada nos mais diversos campos e tem sido usada no processamento de sinais em geociências [55]; na análise de vibrações [56, 57, 58, 59]; em ensaios não destrutivos [60]; na solução do problema de espalhamento [61, 62], além do problema de radiação e no controle e diagnóstico de defeitos em máquinas e equipamentos industriais [63].

A determinação do holograma é geralmente feita com a medição da amplitude e fase da pressão sonora, porém pode ser feita por meio da medição da intensidade acústica [63, 64, 65].

Muito embora tenha-se como pressuposto a fonte em campo livre, modificações têm sido apresentadas para a aplicação em ambientes fechados [66, 67].

A holografia acústica foi, conforme já mencionado, derivada da ótica e os hologramas acústicos (as superfícies de medição) medidos em superfícies planas, como as chapas foto-sensíveis da ótica. Todavia os hologramas planos nem sempre atendem às geometrias das fontes sonoras, de tal forma que configurações cilíndricas [59, 68, 69], esféricas [65, 69, 70], axi-simétricas [71, 72] e gerais [83, 84] têm sido propostas. Poucas aplicações têm sido feitas em banda larga [59, 63, 64]; a maioria delas é em tom puro.

O potencial da técnica de holografia acústica é muito grande e não se restringe somente à reconstrução do campo acústico. Em geociências a holografia permite reduzir o tempo de processamento dos dados sísmicos, fornecendo dados tridimensionais, como imagens e velocidade de propagação de vibração, do interior da terra [55].

Stepanishem & Benjamin [28] simularam vários casos de radiadores planos com dimensões da ordem de grandeza do comprimento de onda. Reconstruíram a velocidade de vibração da superfície e o campo acústico em vários planos.

Na década de 80, os trabalhos de Williams & Maynard sistematizaram a holografia acústica com medição do holograma em campo próximo, denominada holografia acústica de campo próximo, NAH, na qual a resolução não é mais limitada pelo comprimento de onda [54]. Sem esta limitação as aplicações submarinas de holografia tomaram um grande impulso. Williams, Dardy & Fink [85], usando a holografia acústica de campo próximo, NAH, determinaram as frequências naturais de uma placa de aço (28 x 20 x 1/4") colocada na interface ar/água. O holograma foi obtido em 4096, pontos (64x64) pontos de medição, no lado submerso, igualmente espaçados de 12,7 mm . A determinação das frequências naturais apresentou erro médio de 1,2 % (experimental/teórico).

Maynard, Williams & Lee [69] apresentaram a holografia acústica de campo próximo de forma generalizada, na qual os hologramas podem ser obtidos em superfícies planas, cilíndricas e esféricas. Apresentam métodos para cálculos de campos de velocidade de partícula, diretividade, intensidade e potência radiada. Os problemas na aquisição de dados, resolução e erro de dobramento são analisados; além de vários casos experimentais com reconstrução de velocidades de superfície, intensidade e identificação de fontes.

Eschenberg & Hayke [58] realizaram experimentos com placas de aço (36 x 24") submersas e concluíram ser a NAH mais eficiente, nestas circunstâncias, para a determinação dos modos de vibração do que o emprego de acelerômetros. Este trabalho apresenta um equacionamento detalhado, incluindo a implementação para o caso discreto, de forma clara e elegante.

A holografia com geometria cilíndrica foi objeto de detalhada análise por Williams, Dardy & Washburn [68].

Veronesi & Maynard [83] propõem, para geometrias mais complicadas, um método numérico com discretização da superfície e testam-no aproximando uma esfera por um poliedro regular de 60 faces triangulares. O problema linear foi resolvido usando a decomposição a valores singulares (SVD) e os resultados comparados com a solução fechada para esfera apresenta boa concordância. O desenvolvimento teórico, apresentado, é bem fundamentado.

A extensão da holografia de tom puro para banda larga veio naturalmente. É mostrada em um artigo publicado por Williams, Houston & Bucaro [59], no qual analisam um cilindro submerso em água. Para a pressão sonora (banda larga) medida em cada ponto (total de 8192 pontos) foi calculada a transformada de Fourier no tempo e posteriormente a transformada de Fourier espacial. A transformada de Fourier da força de excitação foi usada como referência de fase. A faixa de análise estende-se de 2 a 8 kHz, tendo sido obtidas a velocidade de vibração e a mobilidade.

Loyau & Pascal [64] utilizaram medições de intensidade acústica para a formação do holograma, fazendo também a análise em banda larga.

Laville, Sidke & Nicolas [65] trataram da holografia esférica, com o uso de intensidade acústica na obtenção do holograma. Com o uso de intensidade não é necessário medir-se a fase de referência. Este método pode ser muito útil para fontes industriais, que geralmente emitem em banda larga e com excitação desconhecida.

Holografia para geometrias axisimétricas foi estudada por Borgiotti, Sarkissian, Williams & Schuetz [71] e por Sarkissian [72].

O uso do método de elementos de contorno foi sugerido por Bai [84], para fontes com geometria arbitrária e seus algoritmos aplicados à esfera pulsante, cilindro e pistão vibrante, apresentaram boas correlações com as soluções teóricas.

A holografia para estruturas planas radiando em espaços fechados [66] foi proposta por Villot, Chavériat & Roland, considerando uma estrutura plana retangular, radiando num duto rígido semi-infinito como sendo equivalente a uma fonte e suas infinitas imagens radiando em campo livre.

Stone [61], aplicou a holografia para resolver o problema do espalhamento do som.

Saijyou, Ueda & Yoshikawa [62] usaram holografia de campo próximo, no domínio do número de onda, para resolver o problema de espalhamento acústico (tom puro) de um cilindro submerso. Obtiveram uma concordância muito boa entre a reconstrução holográfica e os resultados experimentais.

Lee [70], analisou o caso da holografia esférica em baixas frequências, no qual a função esférica de Hankel com argumento pequeno (campo próximo e baixa frequência) tem comportamento divergente, o que influencia na precisão da reconstrução holográfica.

A reconstrução da intensidade de vibração em chapas submersas, com e sem reforços, é mostrada em trabalho de Saijyou & Yoshikawa [56] no qual o holograma de pressão foi obtido em banda larga.

Pascal & Jing-Fang [63], utilizaram medições de intensidade acústica em banda larga e

aplicaram o método a um compressor de ar industrial e a uma estrutura de vagão ferroviário. Foram, ainda, reconstruídos os campos de intensidade vibratória e de energias potencial e cinética.

A holografia acústica serviu de motivação inicial para este trabalho no sentido de se usar um holograma acústico como condição de contorno, para uma vez resolvido o problema inverso identificar-se a fonte modelada por um conjunto discreto de fontes elementares.

No presente trabalho uma nova abordagem é dada para o modelo de radiação, sendo a fonte sonora modelada por um conjunto de fontes elementares, tipo monopolo, distribuídas sobre uma superfície plana, com a identificação destas fontes elementares feita pela solução do problema inverso. A condição de contorno é tomada como sendo um holograma acústico, em torno da fonte sonora, formado pela pressão acústica radiada pela fonte sonora. Encontra-se uma solução única, de quadrados mínimos lineares, para a qual o erro na potência sonora é mínimo.

1.5 - Método das Fontes Equivalentes – ESM.

O método das fontes equivalentes, também chamado das fontes auxiliares, das soluções fundamentais, das fontes elementares e da superposição, consiste essencialmente em conhecida a superfície S da fonte sonora, não necessariamente suave:

- i) estabelecer sobre S uma condição de contorno, como velocidade de vibração, pressão ou impedância, prescrita num conjunto discreto de pontos $P_f \subset S$;
- ii) escolher uma superfície S_o , em geral suposta suave, contida no interior da fonte de tal forma que a distância Euclidiana $d(x, y) > 0$, $\forall x \in S$ e $\forall y \in S_o$;
- iii) associar um conjunto F_e de fontes elementares a um conjunto discreto de pontos $P_e \subset S_o$, sendo os conjuntos F_e e P_e equipolentes;
- iv) resolver o problema inverso, no sentido de quadrados mínimos lineares, identificando as fontes elementares, i. e., o conjunto F_e , com uma solução que minimiza a norma $\|\xi\|_2$ do erro residual;
- v) usar o conjunto F_e de fontes elementares em toda a análise de ruído

relacionada à fonte sonora.

A idéia matemática geral do método das fontes equivalentes data do início do século XX. Nos anos 1960 a 1970 o método foi utilizado em problemas de elasticidade e difração eletromagnética [73, 74].

Seu uso em acústica é recente, foi proposto em 1984 por Cremer [75] e em 1989 por M. Heckl [76]. Koopmann et al. [86] destacaram a facilidade de implementação computacional do método e apontaram como vantagens em relação ao método de elementos de contorno a não existência de singularidades na formulação e maior velocidade de processamento, para a mesma precisão. Moeser [77] determinou frequências de placas retangulares; Miller et al. [87] comparam o método das fontes equivalentes com o de elementos de contorno para estudo do espalhamento, sendo em ambos os casos a vibração da fonte modelada por elementos finitos, destacando o fato de poder-se usar o método para superfícies não suaves, porém o mesmo mostrou-se muito sensível em relação à localização dos pontos de discreteamento, para espalhamento de cilindro finito. Fahline & Koopmann, [88] analisaram a radiação de cilindros, com excelente concordância entre valores teóricos e preditos. Jeans & Mathews, [89] sugeriram o uso de fontes elementares monopolo e dipolo para resolver o problema das ressonâncias do espaço limitado pela superfície auxiliar S_0 . Brechlin [78] modelou o campo acústico interno em cavidades formadas por placas retangulares. Zannin & Heckl [79] estudaram a influência da impedância superficial na formação da sombra acústica produzida por grandes obstáculos.

Bobrovnikskii & Tomilina [73] apresentaram as propriedades gerais e as causas de erros do método, concluindo que o erro no espaço exterior à fonte não excede ao erro residual minimizado na superfície S da fonte. A existência de erros deve-se, neste caso, a três causas fundamentais:

- i) Conjunto não completo de funções de Green. Trabalhando-se com um número finito de fontes elementares (dadas pelas funções de Green), tem-se um conjunto não completo de funções para representação da solução o que implica no aparecimento do erro residual. Este erro residual e a metodologia para minimizá-lo serão vistos no capítulo 3;
- ii) Escolha da superfície S_0 sobre a qual serão colocadas as fontes elementares. Se a superfície S_0 for fechada, as ressonâncias do volume interno determinado por esta

superfície auxiliar representam causa de erros. Sobre estas ressonâncias ver também Zannin, [80]. O critério para se escolher os melhores parâmetros, como número e tipos de fontes, número de pontos sobre S para a condição de contorno e a forma da superfície auxiliar S_0 , são arbitrários dependendo da sensibilidade e experiência do pesquisador, não existindo ainda uma base teórica sólida para tais escolhas.

- iii) Erros aleatórios nos dados de entrada.

Stepanishen [90] distribuiu as fontes elementares num segmento de reta interno às fontes sonoras de simetrias esféricas ou cilíndricas. Zannin [81, 82] analisou os aspectos gerais do cálculo do espalhamento pelo método das fontes equivalentes e o espalhamento produzido por cilindros circular e elíptico, variando a impedância superficial dos cilindros e obteve excelentes correlações entre os resultados experimentais e simulados pelo método das fontes equivalentes.

Em geral, o método das fontes equivalentes é apresentado nas referências supracitadas com as seguintes características:

- i) Fácil implementação;
- ii) Menor custo computacional, para a mesma precisão, do que o método de elementos de contorno, constituindo-se numa alternativa para este;
- iii) Existência de frequências próprias da superfície interna S_0 , nas quais o método falha, por apresentar erro exageradamente grande; entretanto se a superfície interna S_0 , de colocação das fontes elementares, for de geometria simples, como esfera e cilindro, estas frequências podem ser facilmente calculadas, e portanto evitadas;
- iv) Possui erro controlável para cada caso específico, sendo o único método com tal característica.

Deve-se todavia encarar esta última afirmação de “único método com tal característica” como um certo grau de exagero por parte dos autores, visto ser esta uma característica geral das soluções de quadrados mínimos lineares.

Capítulo 2

Ruído Radiado por estruturas

2.1 - Introdução.

As ondas sonoras são geradas transferindo-se energia para o meio fluido, sendo os principais meios de transferência desta energia [23]:

- i) Vibrações de corpos sólidos em contato com o meio;
- ii) esforços dinâmicos atuando diretamente no meio;
- iii) movimento violento do meio, como explosões ou descargas de jatos e
- iv) efeitos térmicos oscilatórios, como os produzidos por feixes modulados de laser.

Desta forma define-se fonte sonora como uma região no espaço em contato com um meio fluido, no qual a energia acústica é gerada. De particular interesse em engenharia são as fontes sonoras constituídas por estruturas vibrantes.

As vibrações das partículas do meio, definidas como ondas sonoras, são vibrações longitudinais, i. e. as partículas movem-se na direção de propagação do som [40], sendo esta sempre associada ao meio, pois o som não se propaga no vácuo.

A propagação do som, modelada como um processo termodinâmico adiabático, caracteriza-se por variações dinâmicas, de pequena amplitude, da pressão, temperatura, densidade e velocidade de partícula do meio.

São propriedades importantes de uma fonte sonora: potência sonora, eficiência de radiação e fator de perda por radiação. Abaixo são descritas algumas maneiras de obter estas propriedades, sendo também apresentadas algumas fontes teóricas como as fontes elementares e placas infinitas.

2.2 - Potência Sonora.

A potência sonora é a propriedade mais importante de uma fonte sonora, pois determina a quantidade de energia sonora que a mesma fornece ao meio na unidade de tempo e podendo ser medida com o uso de câmaras acústicas, com a técnica de intensidade sonora ou mesmo com um medidor de nível de som, sendo este último procedimento com baixa precisão, porém útil para estimativa em campo. Abaixo é apresentada, de forma sucinta, a determinação da potência sonora empregando câmaras reverberantes e anecóicas.

2.2.1 - Medição da potência sonora em câmara acústica.

Conhecendo-se o volume V e o tempo de reverberação T da câmara reverberante, a potência sonora radiada, para cada banda de frequência, é obtida pela média espacial (5 a 10 pontos) do valor médio quadrático da pressão sonora [33], de acordo com a equação (2.1)

$$W = 13,8 \frac{V}{\rho c^2 T} E(p^2) \quad (2.1)$$

na qual:

- W é a potência sonora em Watt;
- V é o volume da câmara em m^3 ;
- ρ é a densidade do meio (ar) em kg/m^3 ;
- c é a velocidade do som no ar em m/s ;
- T é o tempo de reverberação em segundos;
- p é a pressão sonora em Pa.

$E(\bullet)$ indica média espacial de argumento (\bullet)

Um segundo método para se medir a potência sonora de uma fonte consiste em colocá-la em um campo livre (câmara anecóica ou semi-anecóica) e medir a pressão sonora em vários pontos localizados a uma distância consideravelmente maior que as dimensões da fonte. Neste caso a potência sonora radiada é dada por [33]:

$$W = \frac{1}{\rho c} \sum_{n=1}^N E(p^2) S_n \quad (2.2)$$

na qual S_n é a superfície do elemento de área associado ao n -ésimo ponto de medição. A soma $(S_1 + \dots + S_N)$ dos N elementos de área é igual à superfície da semi-esfera, se a fonte estiver apoiada numa superfície refletora infinita (câmara semi-anecóica) ou igual à superfície da esfera no caso de câmara anecóica.

Seja o vetor $\varphi = (p_1, \dots, p_N)$, cujas coordenadas são as pressões medidas nos pontos $n = 1, \dots, N$. Vê-se que a média espacial dos valores médios quadráticos do conjunto ordenado $\{p_1, \dots, p_N\}$ de pontos de pressão é

$$E(p^2) = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N p_n^2}{N}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^N p_n^2}}{\sqrt{N}} = \frac{\|\varphi\|_2}{\sqrt{N}} \quad (2.3)$$

ou seja, a média espacial dos valores médios quadráticos de um conjunto ordenado de pontos de pressão é a norma Euclidiana do vetor cujas coordenadas são os pontos deste conjunto dividida pela raiz quadrada do número de pontos do conjunto.

O modelo proposto neste trabalho, para radiação de fontes sonoras, identifica a fonte buscando uma solução de quadrados mínimos lineares cuja norma Euclidiana seja mínima. Em outras palavras busca-se uma aproximação na qual o erro na determinação da potência sonora seja mínimo.

2.3 - Eficiência de Radiação.

A vibração estrutural e a potência sonora radiada estão relacionadas pela eficiência de radiação, σ , definida por:

$$\sigma = \frac{W}{\rho c S E(v^2)} \quad (2.4)$$

na qual S é a área da superfície da fonte e $E(v^2)$ é a média espacial do valor médio quadrático da velocidade de vibração de superfície da fonte.

Se uma superfície rígida (por exemplo um pistão) vibra numa frequência tal que suas dimensões sejam bem maiores que o comprimento de onda no meio, o fluido não consegue mover-se lateralmente para fora da superfície. Então a velocidade das partículas do fluido adjacente à superfície é igual à velocidade de vibração da superfície. A radiação ocorrendo na direção normal à superfície produz uma pressão sonora no meio igual a:

$$p = \rho c v \quad (2.5)$$

e a potência sonora radiada será:

$$W = S \rho c E(v^2) \quad (2.6)$$

ou seja para superfícies rígidas e grandes vibrando em alta frequência (comprimento de onda menor que as dimensões da superfície) a eficiência de radiação é igual a 1. Deste modo a eficiência de radiação pode ser definida como sendo a razão entre a potência radiada pela fonte e a potência radiada por um pistão rígido de mesma área e igual velocidade de vibração.

2.4 - Fator de perda por radiação.

As características de radiação sonora de uma estrutura podem ser descritas também por outros parâmetros como a Eficiência de Conversão Vibro-acústica, ξ , definida pela razão entre a potência radiada para o meio, W_{rad} , e a potência de entrada do sistema em forma de vibração estrutural, W_{ent} :

$$\eta_{\text{rad}} = \frac{\rho c \sigma}{\omega m} \quad (2.12)$$

Nota-se que o Fator de Perda por Radiação depende diretamente da Eficiência de Radiação e é inversamente proporcional à massa por unidade de área da estrutura vibrante.

Considerando-se o ruído estacionário, a potência de entrada, W_{ent} , será igual à potência total dissipada, W_{tdiss} . Considere-se adicionalmente que a dissipação se dá em forma de calor, W_{cdiss} , e por radiação sonora, W_{rad} , então:

$$W_{\text{tdiss}} = W_{\text{cdiss}} + W_{\text{rad}} = W_{\text{ent}} \quad (2.13)$$

mas

$$W_{\text{cdiss}} = \omega \eta E_{\text{vib}} \quad (2.14)$$

na qual η é o fator de perda estrutural e E_{vib} é a energia vibratória total. Considerando as equações (2.13) e (2.14) a equação (2.7) pode ser escrita como:

$$\xi = \frac{W_{\text{rad}}}{W_{\text{rad}} + W_{\text{cdiss}}} = \frac{1}{1 + \frac{W_{\text{cdiss}}}{W_{\text{rad}}}} = \frac{1}{1 + \frac{\omega \eta E_{\text{vib}}}{\omega \eta_{\text{rad}} E_{\text{vib}}}} = \frac{1}{1 + \frac{\eta}{\eta_{\text{rad}}}} \quad (2.15)$$

Vê-se que o fator de conversão vibro-acústico depende somente da razão entre os fatores de perda estrutural e por radiação e que se aproxima da unidade se o fator de perda estrutural for muito menor que por radiação, o que nunca ocorre para radiação no ar mas pode ocorrer para radiação na água.

2.5 - Fontes Elementares.

Analisando do ponto de vista físico, sempre que as dimensões da fonte forem pequenas, i. e., muito menores que o comprimento de onda, a fonte pode ser considerada pontual.

$$\xi = \frac{W_{rad}}{W_{ent}} \quad (2.7)$$

A precisão na determinação da Eficiência de Conversão Vibro-acústica, ξ , depende fundamentalmente da medição da potência de entrada W_{ent} .

Outro parâmetro de interesse é o Fator de Perda por Radiação, η_{rad} , definido pela razão entre a energia radiada em forma de ruído num ciclo, E_{rad} , e a energia vibratória do sistema E_{vib} :

$$\eta_{rad} = \frac{E_{rad}}{2\pi E_{vib}} \quad (2.8)$$

A energia radiada, E_{rad} , é igual à potência radiada, W_{rad} , multiplicada pelo período $T=1/f$, sendo f a frequência em Hz, tendo-se em conta a equação (2.6) pode-se escrever:

$$\eta_{rad} = \frac{W_{rad}}{\omega E_{vib}} = \frac{\sigma \rho c S E(v^2)}{\omega E_{vib}} \quad (2.9)$$

na qual $\omega=2\pi f$ é a frequência circular em rad/s.

A energia vibratória total do sistema é igual à energia cinética máxima, de modo que

$$E_{vib} = \frac{1}{2} m S E(v^2) \quad (2.10)$$

na qual m é a massa por unidade de área. Substituindo a equação (2.10) na (2.9) tem-se:

$$\eta_{rad} = \frac{2\rho c \sigma}{\omega m} \quad (2.11)$$

Considerando-se radiação em apenas um dos lados da estrutura (i.é, o outro lado está no vácuo) tem-se para η_{rad} a seguinte expressão:

Assim, por exemplo, é o caso de uma esfera cujo raio oscila com tempo, como apresentado pela Figura 2.1.

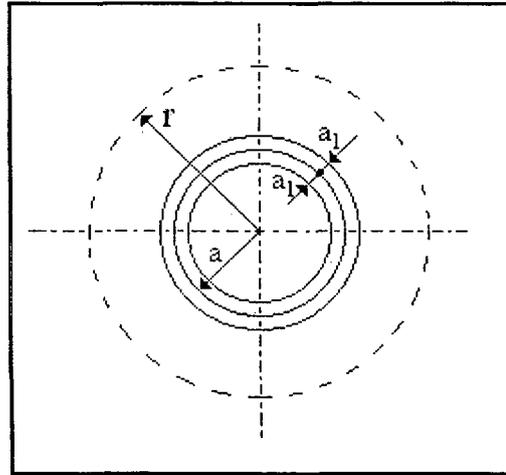


Figura 2.1 – Esfera Pulsante

Se o raio “a” da esfera variar harmonicamente no tempo com frequência ω , então o raio instantâneo da esfera é dado por:

$$a(t) = a + \text{Re}\{a_1 e^{j\omega t}\} \quad (2.16)$$

e a velocidade de vibração da superfície da esfera [33] é dada por:

$$v(t) = \frac{d}{dt} a(t) = \text{Re}\{j\omega a_1 e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{v_1 e^{j\omega t}\} \quad (2.17)$$

nas quais $\text{Re}\{\bullet\}$ significa parte real de $\{\bullet\}$ e j é a unidade imaginária. Esta velocidade é igual à velocidade do meio na interface $r = a$. Matematicamente este problema consiste em, estabelecida a condição de contorno em que na superfície da esfera a componente normal da velocidade do meio seja igual à velocidade da superfície, encontrar a solução da equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (2.18)$$

na qual:

$k = \omega/c$ é o número de onda;

p é a pressão sonora e

∇^2 é o operador de Laplace.

Para processos periódicos pode-se determinar as várias componentes da velocidade por [33].

$$v = \frac{-1}{j\omega\rho} \text{grad}(p) \quad (2.19)$$

Para este caso de simetria esférica, a variação espacial da pressão é

$$p(r) = \frac{C_1}{r} e^{-jkr} \quad (2.20)$$

sendo C_1 uma constante, que pode ser obtida pela componente radial da velocidade (as outras componentes desaparecem [33]) e “ r ” a distância Euclidiana entre o ponto de observação e o centro da fonte. Da equação (2.19) tem-se a velocidade radial, v_r

$$v_r = \frac{-C_1}{j\omega\rho_0} \left(\frac{-1}{r^2} - \frac{jk}{r} \right) e^{-jkr} \quad (2.21)$$

Aplicando a condição de contorno em $r = a$ (velocidade de partícula do meio igual velocidade de vibração da superfície)

$$v_a = C_1 \frac{(1 + jka)e^{-jka}}{j\omega\rho a^2} \quad (2.22)$$

donde

$$C_1 = \frac{j\omega\rho a^2}{1 + jka} v_a e^{jka} \quad (2.23)$$

A variação espacial da pressão e da velocidade serão:

$$v_r = v_a \frac{a^2}{1 + jka} \frac{1 + jkr}{r^2} e^{-jk(r-a)} \quad (2.24)$$

$$p_r = v_a \frac{j\omega\rho a^2}{1 + jka} \frac{1}{r} e^{-jk(r-a)} \quad (2.25)$$

A potência sonora radiada é dada por:

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_S p_r \bar{v}_r dS \right\} = v_a^2 \frac{4\pi r^2}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{j\omega\rho a^2}{(1 + jka)} \frac{a^2}{r(1 - jka)} \frac{(1 - jkr)}{r^2} \right\}$$

$$W = 2\pi v_a^2 \frac{\omega\rho a^4 k}{1 + k^2 a^2} = 2\pi a^2 v_a^2 \rho c \frac{k^2 a^2}{1 + k^2 a^2} \quad (2.26)$$

na qual a barra “-” sobreposta indica conjugado complexo.

Pela equação (2.26) vê-se que a eficiência de radiação, σ é:

$$\sigma = \frac{k^2 a^2}{1 + k^2 a^2} \quad (2.27)$$

A eficiência de radiação de esferas pulsantes cresce com o quadrado da frequência para $ka \ll 1$, i. e., para baixas frequências e esferas de pequeno diâmetro; para $ka \gg 1$ a eficiência de radiação tende a 1. A eficiência de radiação para esfera pulsante, dada pela equação (2.27) é mostrada na Figura 2.2.

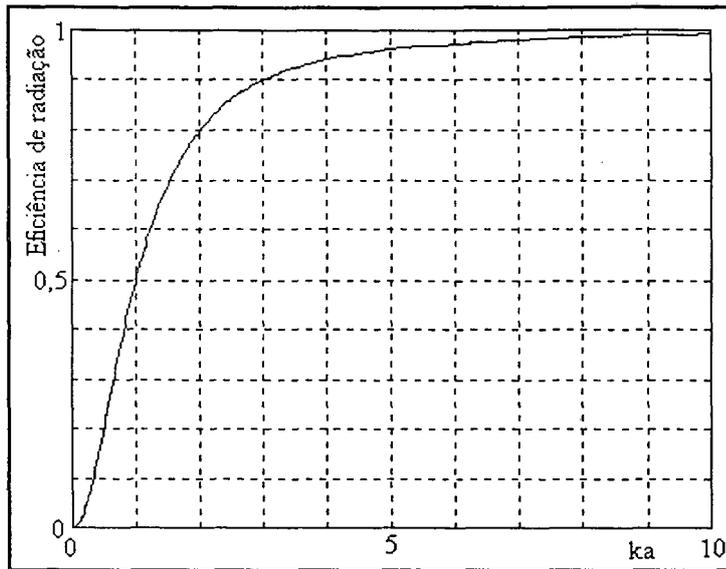


Figura 2.2 – Eficiência de Radiação de Esfera Pulsante

Se o diâmetro da esfera for muito pequeno de tal forma que $ka \ll 1$ para todo k , a fonte é dita fonte pontual, então a equação (2.25) fica sendo

$$p(r) = j\omega\rho \frac{v_a a^2}{r} e^{-jkr} = j\omega\rho \frac{q_o}{4\pi r} e^{-jkr} \quad (2.28)$$

O termo

$$q_o = v_a 4\pi a^2 \quad (2.29)$$

é a vazão da fonte, sendo usualmente traduzido do inglês “volume velocity”, como “velocidade de volume”. Este conceito de vazão da fonte permite aplicar estes resultados para fontes com geometria arbitrária, levando-se em consideração apenas o volume que a fonte desloca na unidade de tempo. “*A geometria da fonte de pequenas dimensões, somente afeta o campo sonoro muito próximo à fonte e geralmente não precisa ser considerada*” [33].

Seja a fonte elementar posicionada em $x_o \in \mathcal{R}^3$ e $x \in \mathcal{R}^3$ o ponto de observação, sendo $r = d(x, x_o)$ a distância Euclidiana entre x e x_o . Escrevendo a equação (2.28) como:

$$p_o(x; x_o) = j\omega\rho \frac{q_o}{4\pi d(x, x_o)} e^{-jkd(x, x_o)} \quad (2.30)$$

vê-se que a equação (2.30) possui um único polo em $r = 0$, donde o nome de monopolo para esta fonte elementar, também dita multipolo de ordem zero.

Um dipolo, ou multipolo de ordem 1, pode ser representado de forma aproximada como um conjunto de dois monopolos de fases opostas, situados um próximo ao outro, mais especificamente um está situado em $(x_o + d_1/2)$ e o outro em $(x_o - d_1/2)$ de tal forma que

$$kd(x_o + d_1/2, x_o - d_1/2) = kd(d_1/2, -d_1/2) \ll 1 \quad (2.31)$$

sendo $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ o número de onda e $d(,)$ a distância Euclidiana, com x_o e $d_1 \in \mathcal{R}^3$. Assim a pressão sonora em x para o dipolo em x_o é aproximadamente

$$p_1(x, x_o) = p_o(x, x_o + d_1/2) - p_o(x, x_o - d_1/2) \quad (2.32)$$

De forma exata o dipolo é representado [92] por:

$$p_1(x, x_o) = (d_1 \text{grad}_o) p_o(x, x_o) \quad (2.33)$$

na qual grad_o é o gradiente em relação às coordenadas da fonte.

A equação (2.33), representação exata de um dipolo, possui um polo de ordem 2 em $x = x_o$.

Um multipolo de ordem 2, ou quadrupolo, pode ser representado de forma aproximada como um conjunto de dois dipolos de fases opostas, situados um próximo ao outro. Mais especificamente, um está situado em $(x_o + d_2/2)$ e o outro em $(x_o - d_2/2)$ de tal forma que:

$$kd(x_o + d_2/2, x_o - d_2/2) = kd(d_2/2, -d_2/2) \ll 1 \quad (2.34)$$

sendo $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ o número de onda e $d(,)$ a distância Euclidiana, com x_0 e $d_2 \in \mathcal{R}^3$. Assim a pressão sonora em x para o quadrupolo em x_0 é aproximadamente

$$p_2(x, x_0) = p_0(x, x_0 + d_2/2) - p_0(x, x_0 - d_2/2) \quad (2.35)$$

A equação (2.35), representação aproximada de quadrupolo, pode ser colocada na forma da soma de 4 monopolos, bastando representar cada um dos dipolos pela representação destes dada pela equação (2.32).

De forma exata o multipolo de ordem 2 é representado [92] por:

$$p_2(x, x_0) = (d_2 \text{grad}_0) p_1(x, x_0) = (d_2 \text{grad}_0) (d_1 \text{grad}_0) p_0(x, x_0) \quad (2.36)$$

na qual grad_0 é o gradiente em relação às coordenadas da fonte.

A equação (2.36), representação exata de um quadrupolo, apresenta um polo de ordem 3 em $x = x_0$.

De uma forma mais geral a pressão num ponto $x \in \mathcal{R}^3$ gerada por um multipolo de ordem n situado em $x_0 \in \mathcal{R}^3$ é de forma exata dada por:

$$p_n(x, x_0) = \prod_{i=1}^n (d_i \text{grad}_0) p_0(x, x_0) \quad (2.37)$$

que possui um polo de ordem $(n + 1)$ em $x = x_0$.

Nota-se que um multipolo é representado por uma função meromorfa com singularidade isolada na origem. Lembrando-se que uma função $f(z)$ é meromorfa se suas únicas singularidades em todo o plano complexo forem pólos e o infinito for uma singularidade essencial.

O conjunto $\{p_n(x, x_0)\} n = 1, \dots, \infty$ é completo no sentido de Cauchy [92]. Lembrando-se que um conjunto \mathcal{B} é dito completo no sentido de Cauchy se toda seqüência de Cauchy em \mathcal{B} converge para algum ponto de \mathcal{B} . *“Como consequência disto, fora de uma esfera envolvendo qualquer fonte de ruído, seu campo acústico pode ser aproximado, com*

a precisão desejada, por uma soma finita de multipolos posicionados no centro desta esfera” [92].

Detalhes sobre multipolos ver referências [23, 92]

2.6 - Placas Infinitas.

Um outro tipo de radiador de grande interesse teórico é constituído por uma placa infinita sujeita à vibração transversal, conforme mostrado na Figura 2.3.

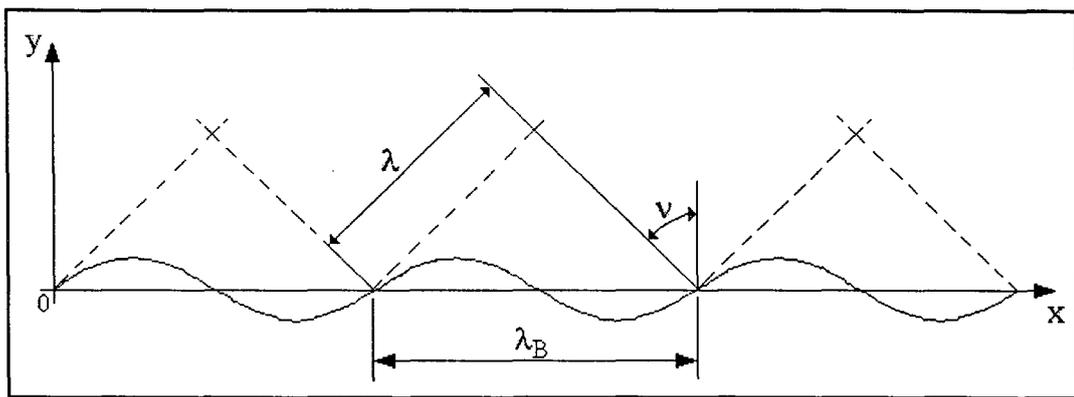


Figura 2.3 – Radiação de Placa Infinita

Seja $v(x)$ a velocidade de vibração na placa [33]

$$v(x) = v_0 e^{-jk_B x} \quad (2.38)$$

sendo $k_B = \frac{2\pi}{\lambda_B}$ o número de onda da vibração na placa e λ_B o respectivo comprimento de onda.

Suponha-se que a pressão sonora $p(x,y)$ seja dada por:

$$p(x, y) = p_0 e^{-j(k_B x + k_y y)} \quad (2.39)$$

Se esta suposição estiver correta então ela deve satisfazer à equação de Helmholtz (2.18).
Pela substituição da equação (2.39) na (2.18) tem-se:

$$p_o[-(k_B^2 + k_y^2)e^{-j(k_B x + k_y y)} + k^2 e^{-j(k_B x + k_y y)}] = 0 \quad (2.40)$$

portanto a suposição feita com a equação (2.39) está correta, com a condição de que o comprimento de onda no meio, k seja dado por:

$$k = \sqrt{k_B^2 + k_y^2} \quad (2.41)$$

Verifica-se que as partículas do meio que são adjacentes à placa estão sujeitas à mesma velocidade de vibração da placa, ou seja, de acordo com a equação (2.19) tem-se:

$$v_{y=0} = \frac{-1}{j\omega\rho} \left(\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{p_o k_y}{\omega\rho} e^{-jk_B x} = v_o e^{-jk_B x} \quad (2.42)$$

donde se verifica que:

$$p_o = \frac{v_o \omega \rho}{k_y} = \frac{v_o \rho c k}{k_y} \quad (2.43)$$

sendo a pressão sonora no semi-espaço acima da placa dada por:

$$p(x, y) = \frac{v_o \rho c}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_B}{k}\right)^2}} e^{-j(k_B x + y \sqrt{k^2 - k_B^2})} \quad (2.44)$$

na Figura 2.3 vê-se que

$$\text{sen}(\nu) = \frac{\lambda}{\lambda_B} = \frac{k_B}{k} \quad (2.45)$$

e com isto a equação (2.44) pode ser reescrita como:

$$p(x, y) = \frac{v_0 \rho c}{\cos(\nu)} e^{-j(k_B x + ky \cos(\nu))} \quad (2.46)$$

que é válida com a condição que o comprimento de onda no meio, λ , seja menor que o comprimento de onda na placa, λ_B . Neste caso a placa radia ondas planas para o meio segundo o ângulo ν e a pressão sonora está em fase com a vibração na placa. Um campo sonoro distante é gerado, onde as partículas do meio executam oscilações de translação na direção determinada pelo ângulo de radiação, conforme mostrado na Figura 2.4.

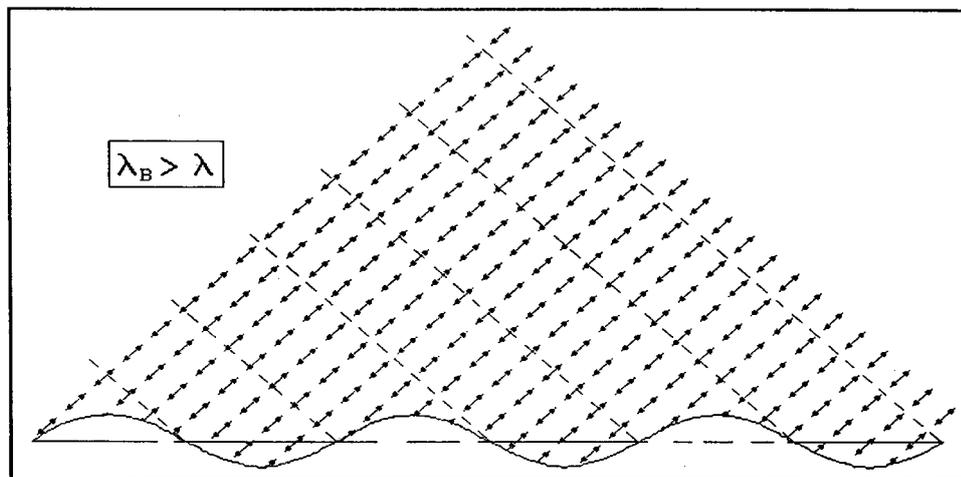


Figura 2.4 – Radiação de Placa Infinita – Campo Distante [33]

A eficiência de radiação de uma placa infinita é

$$\sigma = \frac{1}{\cos(\nu)} = \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_B^2}} \quad (k > k_B) \quad (2.47)$$

Se o comprimento de onda de vibração na placa for menor que o do meio, i. e., $\lambda_B < \lambda$ ou $k_B > k$, não existirá nenhum ângulo real de radiação. Para esta condição duas soluções linearmente independentes da equação de Helmholtz são:

$$p(x, y) = \frac{jv_o \rho c}{\sqrt{\left(\frac{k_B}{k}\right)^2 - 1}} e^{-jk_B x - y \sqrt{k_B^2 - k^2}} \quad (2.48)$$

$$p(x, y) = \frac{jv_o \rho c}{\sqrt{\left(\frac{k_B}{k}\right)^2 - 1}} e^{-jk_B x + y \sqrt{k_B^2 - k^2}} \quad (2.49)$$

A solução dada pela equação (2.49) é descartada com base na consideração de energia [33]. Verificando-se ainda uma defasagem de $\pi/2$ radianos entre a velocidade de vibração e a pressão sonora. As componentes v_x e v_y da velocidade são obtidas da equação (2.48) com a equação (2.19), resultando em:

$$\begin{aligned} v_x &= j \frac{v_o k_B}{\sqrt{k_B^2 - k^2}} e^{-jk_B x - y \sqrt{k_B^2 - k^2}} \\ v_y &= v_o e^{-jk_B x - y \sqrt{k_B^2 - k^2}} \end{aligned} \quad (k_B > k) \quad (2.50)$$

observa-se que as componentes da velocidade estão defasadas de $\pi/2$ radianos, gerando um campo de pressão sonora próximo à placa com as partículas do meio descrevendo uma trajetória, em geral, elíptica conforme Figura 2.5. A eficiência de radiação é nula e nenhum som é radiado para fora do campo próximo com a pressão decaindo muito rapidamente, conforme o ponto de observação se distancia da placa. Estas ondas sonoras são chamadas de Ondas Evanescentes. Num ponto de observação situado a uma distância $y = a\lambda$ da placa (i.é, a distância y medida em comprimentos de onda λ), a queda no nível de pressão sonora, $NPS_{a\lambda}$ em dB, em relação ao nível na superfície ($y = 0$) é

$$NPS_{a\lambda} = 20 \ln(10^{2\pi}) a \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_B}\right)^2 - 1} = 289,35a \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_B}\right)^2 - 1} \quad (\lambda > \lambda_B) \quad (2.51)$$

esta queda no nível de pressão sonora é mostrada na Figura 2.6.

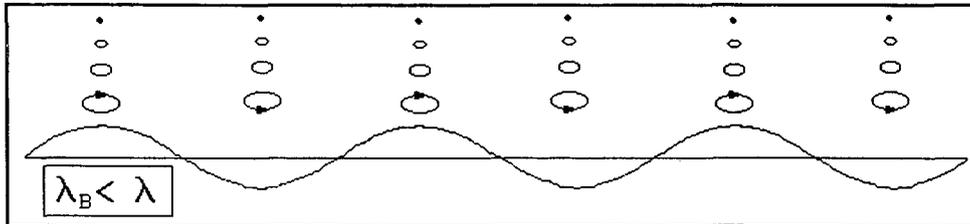


Figura 2.5 – Ondas evanescentes [33]

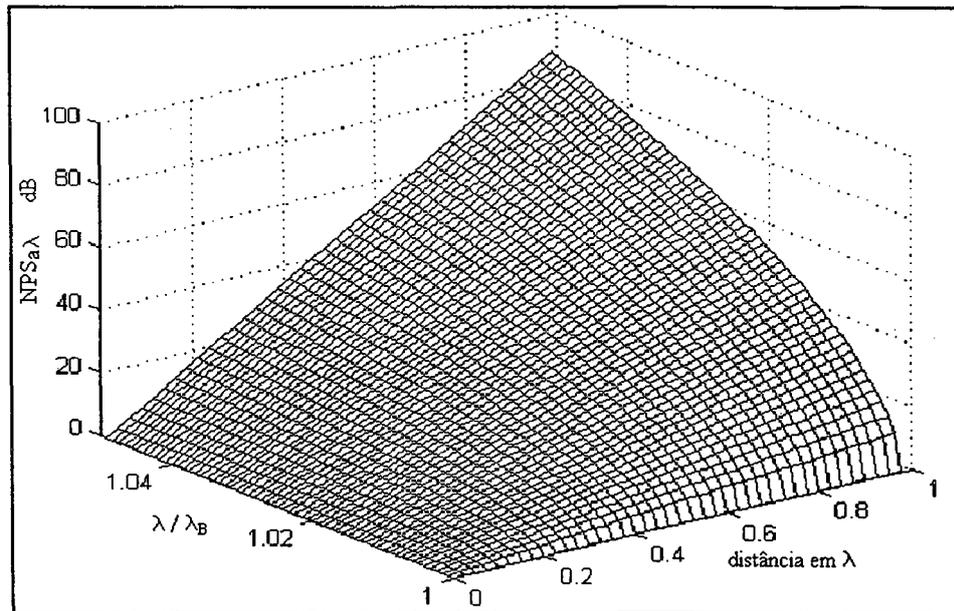


Figura 2.6 – Queda no NPS para ondas evanescentes

Se o comprimento de onda no meio for igual ao comprimento de onda de vibração na placa ($\lambda = \lambda_B$) o ângulo de radiação $\nu = \pi/2$ radianos e a eficiência de radiação é infinita. Porém na prática não é o que se verifica especialmente por duas razões: a primeira pelo fato

de todas as superfícies reais serem finitas e a outra pelo fato do fornecimento de energia para gerar a vibração ser sempre finito. Todavia nesta condição a radiação sonora é muito alta. A eficiência de radiação de placas infinitas é mostrada na Figura 2.7.

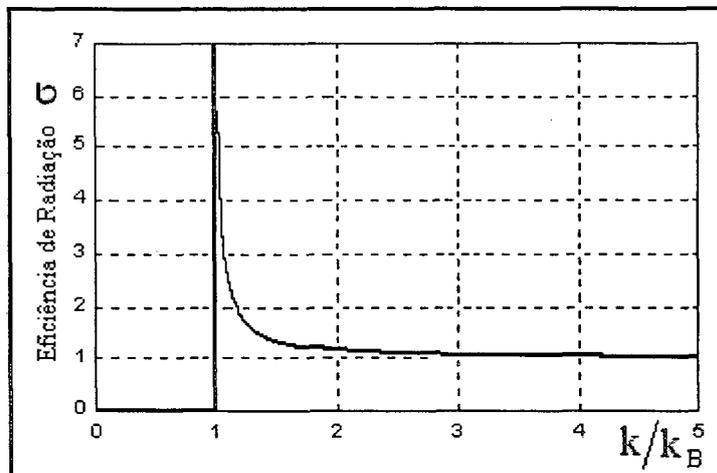


Figura 2.7 – Eficiência de Radiação de Placa Infinita

2.7 - Radiação de placa modelada por um conjunto de fontes pontuais.

Uma fonte muito pequena (pontual) numa parede grande (infinita) pode ser modelada como uma fonte esférica tendo-se em conta a simetria e a radiação puramente radial. A única diferença é que esta fonte na parede produz num dos lados somente a metade da vazão. A Figura 2.8 mostra esquematicamente esta transição do modelo de fonte esférica para fonte pontual numa parede.

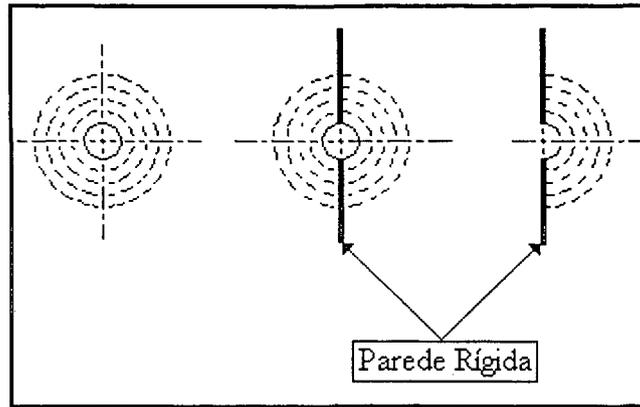


Figura 2.8 – Transição de fonte esférica para fonte em parede [33]

Nesta condição a pressão sonora, num lado da parede, na distância r da fonte será:

$$p(r) = j\omega\rho \frac{q_0}{2\pi r} e^{-jkr} \quad (2.52)$$

na qual $q_0 = S_0 v_0$ é a vazão da fonte. A potência radiada será dada por:

$$W = \frac{\rho c k^2}{4\pi} q_0^2 \quad (2.53)$$

Se ao invés de uma fonte existirem N fontes pontuais na parede, Figura 2.9, então a pressão p no ponto de observação, considerando que o modelo é linear, será dada pela soma das contribuições individuais de cada fonte

$$p = \frac{j\omega\rho}{2\pi} \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{r_n} e^{-jkr_n} \quad (2.54)$$

Considerando-se uma área elementar ds da placa sujeita à velocidade $v(s)$ a vazão elementar será $dq(s) = v(s)ds$ e a equação (2.54) pode ser reescrita como:

$$p = \frac{j\omega\rho}{2\pi} \int_S \frac{v(s)}{r} e^{-jkr} ds \quad (2.55)$$

Sendo o ponto de observação (x,y,z) longe da placa seja R a distância entre este ponto e o centro da placa, as equações (2.54) e (2.55) podem ser reescritas na forma das equações (2.56) e (2.57).

$$p = \frac{j\omega\rho}{2\pi R} \sum_{n=1}^N q_n e^{-jkr_n} \quad (2.56)$$

$$p = \frac{j\omega\rho}{2\pi R} \int_s v(s) e^{-jkr_n} ds \quad (2.57)$$

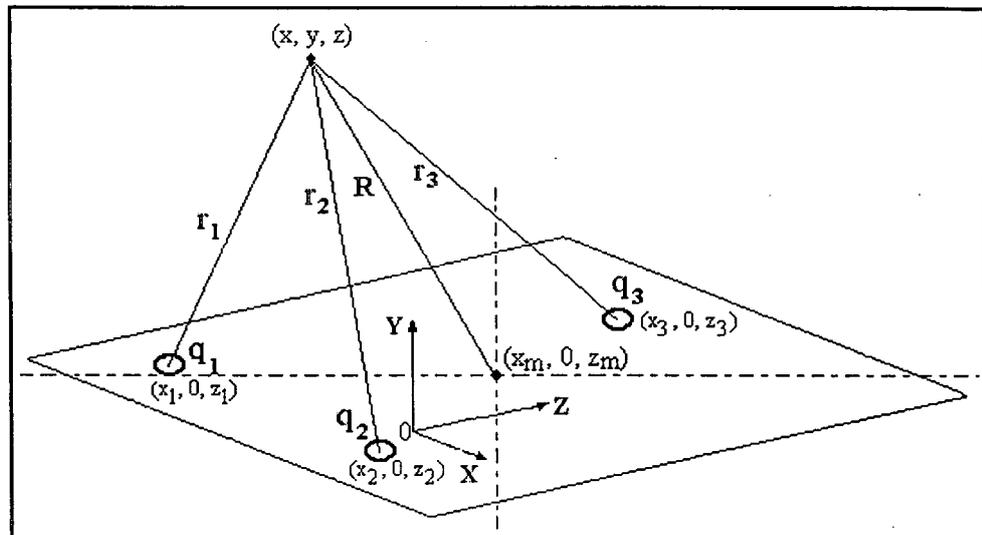


Figura 2.9 – Fontes pontuais em placa

Em verdade, sendo o ponto de observação longe da placa, a distância R adotada em relação ao centro da placa, ou a outro ponto qualquer desta, produz erros pequenos considerando sua posição no denominador das equações (2.54) e (2.55).

Capítulo 3

Formulação do Problema

3.1 – Introdução.

Neste capítulo são apresentadas a formulação do problema, tema central desta tese, que basicamente consiste em substituir a fonte sonora por um conjunto finito de fontes pontuais, tipo monopolo, posicionadas sobre uma superfície plana; de tal forma que o erro na potência sonora radiada pelo conjunto de fontes elementares seja mínimo se comparado com a potência radiada pela fonte sonora.

É apresentada a geometria para a formulação do problema e ficam demonstradas a existência e a unicidade de uma solução de quadrados mínimos lineares, para a qual o erro residual na potência é mínimo.

Usando conceitos de álgebra linear a formulação é proposta em termos de um problema linear, consistente ou inconsistente. Em ambos os casos a solução única é obtida com o uso da inversa generalizada da matriz representativa do problema linear, sendo esta inversa generalizada obtida por meio da decomposição a valores singulares (SVD).

Demonstra-se que o erro na potência sonora é limitado pelo número de condição da matriz representativa do problema linear.

Todos os conceitos matemáticos envolvidos estão definidos no apêndice único, ao final do trabalho.

3.2 – Formulação e geometria do problema proposto.

Seja uma fonte F de ruído radiando em campo livre, a qual satisfaz no campo externo a condição de radiação de Sommerfeld, que em coordenadas esféricas é dada por [38]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p}{\partial r} + jkp \right) = 0 \quad (3.1)$$

na qual “ r ” é o raio; “ p ” a pressão sonora; “ j ” a unidade imaginária e “ k ” o número de onda.

Conhecido um holograma acústico da pressão sonora radiada por F numa superfície externa à fonte, postula-se a existência e unicidade de uma solução aproximada, de norma mínima, que represente a radiação da fonte por um conjunto discreto de fontes pontuais, tipo monopolo, dispostas sobre uma superfície plana, conforme abaixo.

Sejam:

- a) uma fonte sonora F , por exemplo uma estrutura vibrante, radiando em campo livre obedecida a condição de Sommerfeld, sobre a qual se conhece o que normalmente se tem numa análise preliminar de controle de ruído, que geralmente se faz munido de uma trena e de um medidor de nível de som, a saber:
 - i) localização da fonte em \mathcal{R}^3 ;
 - ii) geometria da fonte de uma forma geral, como a obtida numa inspeção visual; e
 - iii) características gerais do ruído radiado, como: estacionário ou intermitente; presença de componentes tonais audíveis e algum sentido preferencial de radiação;
- b) $S_F \subset \mathcal{R}^3$ a superfície da fonte, a qual não se conhece em detalhes;
- c) $P \subset \mathcal{R}^3$ um plano que intercepte a fonte F numa seção representativa da mesma, no contexto de desenho mecânico; em particular se a fonte for plana, que F esteja contida em P , i. e., $F \subset P$;
- d) P_F a intercessão do plano P com a fonte, $P_F = P \cap F$;
- e) S_E uma superfície plana contida em P e que contenha P_F , i. e., $S_E \subset P$ e $P_F \subset S_E$. Sem perda de generalidade pode-se considerar que o centro de coordenadas $(0, 0, 0) \in \mathcal{R}^3$ esteja em S_E , i. e., $(0, 0, 0) \in S_E$;
- f) $x_E \in S_E$, um ponto genérico da superfície S_E ;
- g) \mathcal{R}_+^3 o semi-espaco positivo de \mathcal{R}^3 , que inclui a origem;
- h) S_H uma superfície contida em \mathcal{R}_+^3 , de tal forma que: I - sua intercessão com S_E seja o conjunto vazio, i. e. $S_H \cap S_E = \emptyset$, o que é equivalente a dizer que a distância Euclidiana entre $y \in S_H$ e $x_E \in S_E$ é maior que zero,

$d(y, x_E) > 0 \quad \forall y \in S_H$ e $\forall x_E \in S_E$; II – a projeção ortogonal, $P_P(S_H)$, de S_H sobre P é uma cobertura para S_E sem que esta lhe seja um subconjunto trivial, i. e., $S_E \subset P_P(S_H)$ e $S_E \neq P_P(S_H)$; e por fim,

i) $x \in \mathcal{R}^3$, seja um ponto qualquer externo à fonte, $x \notin F$;

A Figura 3.1 mostra, esquematicamente, as relações geométricas acima.

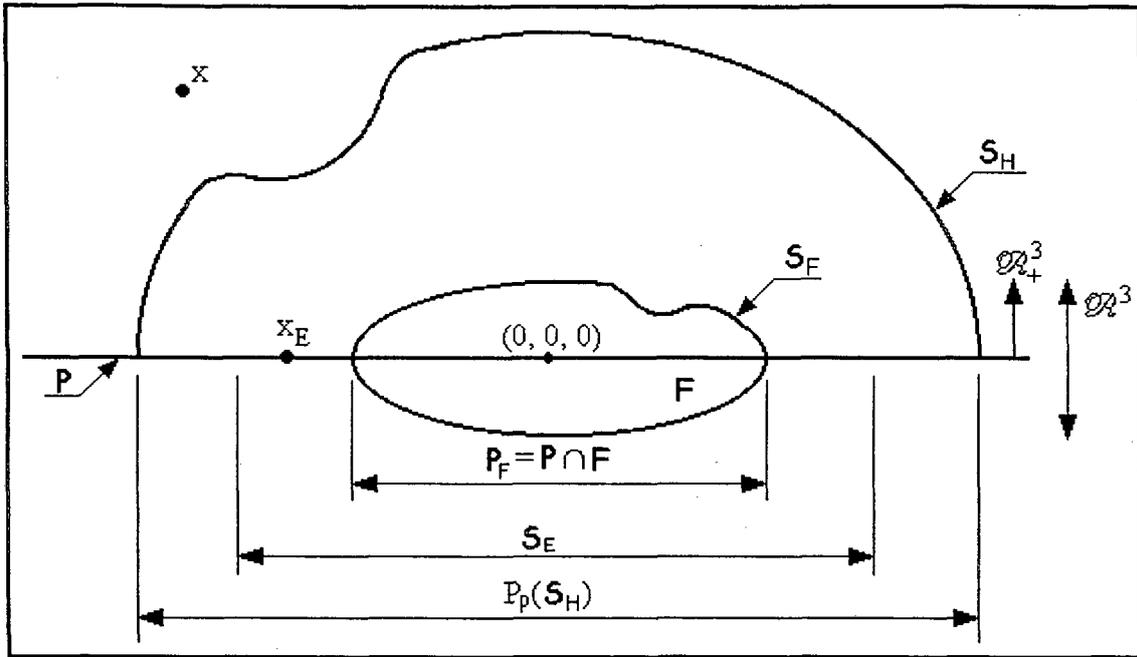


Figura 3.1 – Geometria da formulação do problema

A pressão sonora \hat{p}_x em x , causada por vibração da superfície S_E é dada por [38]

$$\hat{p}_x = - \int_{S_E} g(x, x_E) \frac{\partial p_{x_E}}{\partial n} dS \quad (3.2)$$

na qual $g(x, x_E)$ é a função de Green e $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada normal à superfície S_E , que para tom puro, de frequência f , é dada por

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -j\omega\rho v \quad (3.3)$$

na qual “v” é a velocidade normal de partícula, que na superfície S_E será considerada igual à velocidade normal de vibração da superfície; ρ é densidade do meio e $\omega = 2\pi f$ é a frequência circular.

3.3 – Caso discreto.

Sem perda de generalidade pode-se considerar a radiação apenas em \mathcal{R}_+^3 . Neste caso a função de Green é dada por [38]

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_E) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-jk d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_E)}}{d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_E)} \quad (3.4)$$

sendo $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_E)$ a distância Euclidiana entre \mathbf{x} e \mathbf{x}_E .

Sejam:

- i) $S_h \subset S_H$ um conjunto discreto; $S_h = \{x_1, \dots, x_M\}$;
- ii) $S_e \subset S_E$ uma partição (conjunto discreto); $S_e = \{y_1, \dots, y_N\}$ e para cada $y_i \in S_e$ está associado um elemento discreto de área ΔS_i , $i = 1, \dots, N$ de tal forma que a soma de todos os ΔS_i seja igual à área de S_E ;
- iii) a pressão sonora p_i , $i = 1, \dots, M$ radiada por F conhecida em cada ponto $x_i \in S_h$, $i = 1, \dots, M$;
- iv) o holograma acústico $\mathbf{b} = (p_1, \dots, p_M)^T \in \mathcal{C}^M$, no qual a i -ésima componente é a pressão radiada por F , no ponto $x_i \in S_h$, $i = 1, \dots, M$;
- v) uma distribuição de velocidade normal em S_E com valores definidos, mas não conhecidos, em cada ponto $y_i \in S_e$, $i = 1, \dots, N$;
- vi) o vetor velocidade $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)^T \in \mathcal{C}^N$, no qual a i -ésima componente é a velocidade normal no ponto $y_i \in S_e$, $i = 1, \dots, N$;
- vii) a pressão sonora \hat{p}_i , $i = 1, \dots, M$ radiada por S_E , em cada ponto $x_i \in S_h$, $i = 1, \dots, M$;

- viii) o holograma acústico $\hat{\mathbf{b}} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_M)^T \in \mathcal{V}^M$, no qual a i -ésima componente é a pressão radiada por S_E , no ponto $x_i \in S_h$, $i = 1, \dots, M$;
- ix) seja, também, a norma $\|\cdot\|_2$ definida em \mathcal{V}^N e \mathcal{V}^M , sendo pois ambos espaços de Hilbert; e
- x) $\mathbb{M}(r, c)$ o espaço vetorial linear das matrizes de r linhas por c colunas.

No caso discreto, substituindo-se a função de Green dada pela equação (3.4) na equação (3.2) tem-se para qualquer ponto x e em particular para $x_i \in S_h$, $i = 1, \dots, M$

$$\hat{p}_i = \sum_{r=1}^N \frac{j\omega\rho v_r}{2\pi} \Delta S_r \frac{e^{-jkd(x_i, y_r)}}{d(x_i, y_r)} \quad (3.5)$$

chamando

$$q_r = \frac{j\omega\rho v_r}{2\pi} \Delta S_r; \quad r = 1, \dots, N \quad (3.6)$$

$$a_{ir} = \frac{e^{-jkd(x_i, y_r)}}{d(x_i, y_r)}; \quad r = 1, \dots, N \quad ; \quad i = 1, \dots, M \quad (3.7)$$

tem-se

$$\hat{p}_i = \sum_{r=1}^N a_{ir} q_r; \quad i = 1, \dots, M \quad (3.8)$$

e em forma matricial

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \hat{\mathbf{b}} \quad (3.9)$$

na qual:

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)^T \in \mathcal{V}^N \quad (3.10)$$

$$\hat{\mathbf{b}} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_M)^T \in \mathbb{C}^M \quad (3.11)$$

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_{ir}\} \in \mathbb{M}(M, N), \text{ com } \mathbf{a}_{ir} \in \mathbb{C} \quad (3.12)$$

é um problema linear consistente, pois $\hat{\mathbf{b}} \in \text{Im}(\mathbf{A})$, mas

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{b} \quad (3.13)$$

é inconsistente, pois $\mathbf{b} \notin \text{Im}(\mathbf{A})$ e tal fato faz com que exista um erro residual, ξ , que sendo minimizado conduz à melhor solução procurada. Este erro residual é dado por:

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} = \xi \neq \mathbf{0} \quad (3.14)$$

As coordenadas do vetor $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)^T \in \mathbb{C}^N$ são as vazões complexas das fontes elementares usadas no modelo e a solução do problema inverso busca identificar o vetor \mathbf{q} de norma mínima, que torna mínimo o erro residual, i. e.:

$$\|\xi\|_2 = \|\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}\|_2 = \min \quad (3.15)$$

Note-se, pelo item ii) da seção 3.3, que a cada q_i , $i = 1, \dots, N$, está associado um elemento de área ΔS_i . Com isto, usando-se a equação (3.6), pode-se calcular a velocidade v_i , $i = 1, \dots, N$ de cada fonte elementar do modelo.

3.4 – Solução do problema proposto.

Seja \mathbf{b}^\perp a projeção ortogonal de \mathbf{b} sobre a imagem de \mathbf{A} . Lembrando-se que a projeção ortogonal de \mathbf{b} sobre a imagem de \mathbf{A} é o vetor desta imagem mais próximo do vetor \mathbf{b} .

$$\mathbf{b}^\perp = P_{\text{Im}(\mathbf{A})}\mathbf{b} \quad (3.16)$$

e o novo problema linear consistente,

$$\mathbf{A}q = \mathbf{b}^\perp \quad (3.17)$$

cujo conjunto solução é

$$\mathcal{S}_A = \{q \mid q = q_0 + \eta; \forall \eta \in N(\mathbf{A})\} \quad (3.18)$$

no qual $q_0 \in \mathcal{F}^N$ é uma solução particular e o subespaço $N(\mathbf{A}) \subset \mathcal{F}^N$ é o núcleo de \mathbf{A} , ou seja, é o conjunto solução do problema linear homogêneo $\mathbf{A}q = \theta$.

Vê-se que \mathcal{S}_A é uma variedade linear, sendo portanto um conjunto convexo, subconjunto de um espaço de Hilbert e como tal possui um único vetor $q_{\min} = (q_{\min 1}, \dots, q_{\min N}) \in \mathcal{F}^N$ de norma mínima, de tal forma que o erro residual fica minimizado

$$\|\xi\|_2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}q_{\min}\|_2 = \min \quad (3.19)$$

ou seja tem-se a melhor aproximação dentro do contexto das soluções de quadrados mínimos lineares.

O vetor q_{\min} , solução de norma mínima, é dado por:

$$q_{\min} = (q_{\min 1}, \dots, q_{\min N})^T = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} \quad (3.20)$$

na qual $\mathbf{A}^+ = \{a_{ij}\} \in \mathbb{M}(N, M)$ com $a_{ij} \in \mathcal{F}$ é inversa generalizada de \mathbf{A} .

A determinação de \mathbf{A}^+ pode ser, como feito no presente trabalho, com o uso da decomposição a valores singulares (SVD). “*A decomposição a valores singulares, SVD é uma ferramenta poderosa para resolver o problema de quadrados mínimos lineares. A principal razão para isto é que as matrizes ortogonais que transformam a matriz \mathbf{A} na forma diagonal não alteram a norma \mathcal{L}_2 dos vetores*” [27].

Deste modo ficam estabelecidas a existência e unicidade da solução do problema postulado, sendo ainda o erro máximo limitado como se vê abaixo (seção 3.5).

3.5 - Limite para o erro máximo.

A pressão sonora, num ponto x , radiada pela superfície S_E é dada pela expressão:

$$\hat{p} = \sum_{r=1}^N \frac{j\omega\rho v_r}{2\pi} \Delta S_r \frac{e^{-jk d(x, y_r)}}{d(x, y_r)}; \quad (3.21)$$

e pode ser interpretada [33] como a pressão sonora radiada por um conjunto $F_p = \{f_1, \dots, f_N\}$, de N fontes pontuais localizadas sobre S_E nos pontos y_1, \dots, y_N , com as respectivas vazões q_r dadas por

$$q_r = \frac{j\omega\rho v_r}{2\pi} \Delta S_r; \quad r = 1, \dots, N \quad (3.22)$$

O erro residual $\xi = b - \hat{b}$ pode ser escrito como:

$$\xi = b - Aq_{\min} = b - AA^+b \quad (3.23)$$

dividindo pela norma de b , tem-se o erro residual relativo, ε [95]

$$\frac{\xi}{\|b\|_2} = \frac{b}{\|b\|_2} - AA^+ \frac{b}{\|b\|_2} = \varepsilon \quad (3.24)$$

ou

$$\varepsilon = u - AA^+u = u + (-AA^+u) \quad (3.25)$$

na qual $\varepsilon = \frac{\xi}{\|b\|_2}$ e $u = \frac{b}{\|b\|_2}$. Vê-se que a norma de u é unitária.

A norma do erro residual relativo, ε , é dada pela seguinte expressão:

$$\|\varepsilon\|_2 = \|u + (-\mathbf{A}\mathbf{A}^+u)\|_2 \leq \|u\|_2 + \|-\mathbf{A}\mathbf{A}^+u\|_2 \quad (3.26)$$

Como

$$\|-\mathbf{A}\mathbf{A}^+u\|_2 = \|\mathbf{A}\mathbf{A}^+u\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{A}^+\|_2 \|u\|_2 \quad (3.27)$$

e sendo $\|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{A}^+\|_2$ o número de condição, $\mathcal{K}(\mathbf{A})$, da matriz \mathbf{A}

$$\mathcal{K}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{A}^+\|_2 \quad (3.28)$$

o erro residual relativo obedece à seguinte desigualdade:

$$\|\varepsilon\|_2 \leq 1 + \mathcal{K}(\mathbf{A}) \quad (3.29)$$

A equação (3.29) mostra que o erro máximo da aproximação é limitado.

O conjunto de elementos da matriz \mathbf{A} é dado por:

$$a_{ir} = \frac{e^{-jkd(x_i, y_r)}}{d(x_i, y_r)}; \quad r = 1, \dots, N \quad ; \quad i = 1, \dots, M \quad (3.30)$$

Nota-se pela equação (3.30) que um elemento genérico a_{ir} , $r = 1, \dots, N$ e $i = 1, \dots, M$, da matriz \mathbf{A} , representativa do problema linear, é função da distância euclidiana, $d(x_i, y_r)$, entre o ponto de observação x_i e a posição da y_r da r -ésima fonte elementar. Para tom puro o comprimento de onda, k , representa apenas uma dependência paramétrica.

Com o aumento da distância $d(x, y)$ os elementos de \mathbf{A} tornam-se mais próximos e isto se reflete no número de condição de \mathbf{A} tornando-o menor. A título de exemplo observe-se a Figura 3.2, onde usaram-se 10 pontos igualmente distribuídos numa partição do segmento de reta $[-0,25, 0,25]$, aqui representando a superfície \mathcal{S}_E , sendo que a superfície \mathcal{S}_H foi tomada como uma semicircunferência cujo centro coincide com o centro do segmento de reta. Sobre a semicircunferência foram tomados 10 pontos igualmente distribuídos, de forma semelhante a partição de um intervalo, i. e., o

primeiro e o último pontos estão sobre a reta que contém o segmento de reta utilizado. Com isto $A \in \mathbb{M}(10, 10)$.

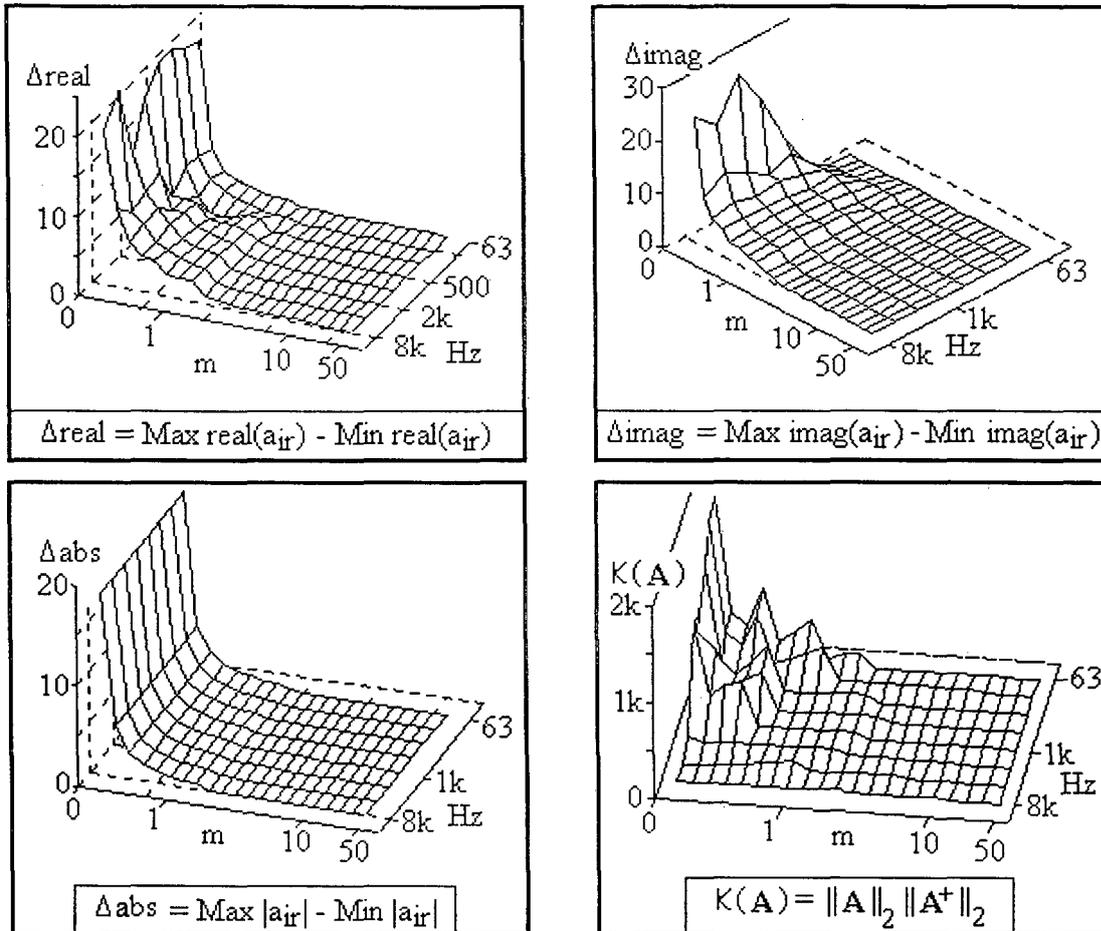


Figura 3.2 – Influência da distância e frequência na matriz e em seu número de condição

O raio da semicircunferência foi variado de 0,3 m a 50 m, sendo de 0,3 a 1 com incremento de 0,1 m, de 1 a 10 com incremento de 1 m e de 10 a 50 com incremento de 10 m num total de 34 raios. Variou-se a frequência de 63 Hz a 8 kHz tomando-se as frequências centrais das bandas de 1/1 de oitava, num total de 8 valores. Nesta Figura 3.2 Δ_{real} é a diferença entre o máximo e o mínimo valor real dos elementos de A e de forma análoga são Δ_{imag} e Δ_{abs} , vendo-se claramente que se a distância aumenta os elementos ficam mais próximos e o número de condição diminui.

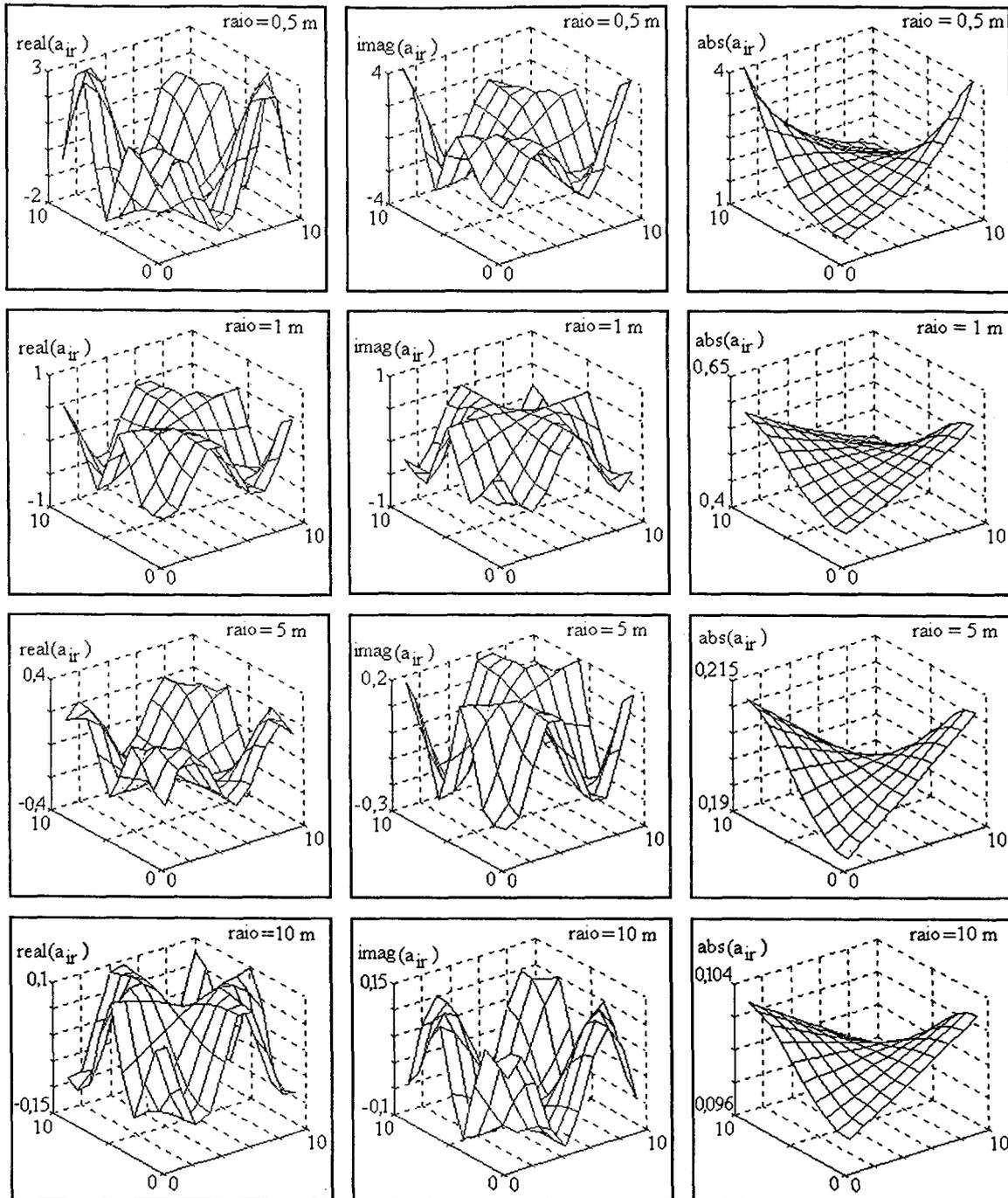


Figura 3.3 – Variação dos elementos da matriz A com a distância.

Para o cálculo do número de condição, como o produto da norma de A pela norma de sua inversa generalizada A^+ , usou-se a decomposição a valores singulares com o menor valor singular limitado a 10^{-6} . Na Figura 3.3, usando a mesma disposição, estão os elementos de A para 1 kHz.

Do exposto conclui-se que o conjunto de fontes elementares posicionadas em S_E e com suas vazões (ou as velocidades das fontes elementares), identificadas pelo vetor

q_{\min} dado pela equação (3.20) pode ser utilizado para calcular a pressão sonora em outros pontos externos à fonte.

Em suma, atendidas as condições descritas anteriormente:

Conhecendo-se o campo sonoro radiado, dado pelo holograma de entrada $b = (p_1, \dots, p_m)^T$ tomado sobre um conjunto discreto de pontos $x = \{x_1, \dots, x_m\}$, no campo externo à fonte sonora, deseja-se prever o campo acústico num conjunto discreto de pontos $z = \{z_1, \dots, z_h\}$, também externo à fonte, com erro mínimo na potência sonora.

Os passos abaixo ilustram todo o procedimento do modelo proposto:

PASSO 1 – Definir o número n de fontes elementares e suas respectivas posições, $y = \{y_1, \dots, y_n\}$;

PASSO 2 – Calcular a matriz $A \in \mathbb{M}(m, n)$, de m linhas por n colunas, sendo

$$a_{ir} = \frac{e^{-jkd(x_i, y_r)}}{d(x_i, y_r)}; \quad r = 1, \dots, n \quad ; \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{Equação 3.30});$$

PASSO 3 – Montar o problema linear, inconsistente, $Aq = b$ (Equação 3.13);

PASSO 4 – Resolver o problema inverso, identificando a solução de quadrados mínimos lineares, q_{\min} , para a qual o erro é mínimo. Esta solução é $q_{\min} = A^+b$ (Equação 3.20), sendo a matriz $A^+ \in \mathbb{M}(n, m)$ a inversa generalizada de A ;

PASSO 5 – Calcular o campo sonoro $\hat{b} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m)^T$, predito pelo modelo, no conjunto de pontos $x = \{x_1, \dots, x_m\}$, por $\hat{b} = Aq_{\min}$;

PASSO 6 – Comparar b (holograma de entrada, conhecido) com \hat{b} (holograma predito pelo modelo) e se o erro for aceitável passar para o passo 7, caso contrário (o erro não for aceitável) retornar ao passo 1, para redefinir o número e/ou a posição das fontes elementares;

PASSO 7 - Calcular a nova matriz $A \in \mathbb{M}(h, n)$, de h linhas por n colunas, sendo

$$a_{ir} = \frac{e^{-jkd(z_i, y_r)}}{d(z_i, y_r)}; \quad r = 1, \dots, n \quad ; \quad i = 1, \dots, h;$$

PASSO 8 - Calcular o campo sonoro $P = (P_1, \dots, P_h)^T$, predito pelo modelo, no conjunto de pontos $z = \{z_1, \dots, z_h\}$, por $P = Aq_{\min}$, sendo A a nova matriz calculada no passo 7.

Este procedimento está exemplificado na seção 4.4.8, páginas 79 e 80.

Capítulo 4

Estudo de casos

4.1 – Introdução.

Neste capítulo são mostrados os estudos de casos aplicando-se o modelo de fontes elementares proposto, que consistem basicamente em, tendo-se um conjunto discreto de pontos de pressão sonora radiada pela fonte sonora, substituir esta por um conjunto de fontes elementares, tipo monopolo, dispostas em uma superfície plana. A identificação das fontes elementares do modelo é feita pela resolução do problema inverso, que resulta numa única solução de quadrados mínimos lineares de norma mínima.

O método foi aplicado ao ruído radiado por uma fonte real, composta por 2 alto-falantes, colocada numa câmara anecóica. Foram medidos hologramas, em tom puro, sobre 3 semicircunferências de raios diferentes em torno da fonte sonora.

Usando-se um dos hologramas, chamado de holograma de entrada, como condição de contorno, as fontes elementares do modelo foram identificadas e o ruído predito pelo modelo de fontes elementares foi comparado com os outros hologramas, observando-se excelente concordância entre os valores preditos e os experimentais. Desta forma usando o holograma de menor raio para identificação das fontes elementares, o campo acústico foi reconstruído (predito) nos raios intermediário e maior, i. e., mais distante da fonte. O mesmo foi feito com holograma obtido no raio intermediário, sendo o campo acústico reconstruído no raio maior, mais distante da fonte, e no raio menor, mais próximo da fonte. Com o holograma medido no maior raio foram obtidas as predições para os raios intermediário e menor, ambos mais próximos da fonte sonora real.

Da mesma maneira o holograma de entrada foi tomado com número menor de pontos para os diversos casos.

O método também foi aplicado a fontes sonoras teóricas:

- i) Pistão circular rígido, para o qual o ruído radiado foi obtido por uma solução analítica;
- ii) Placa retangular vibrando em diversos modos naturais, para a qual o ruído radiado foi obtido por solução numérica da integral de Rayleigh e
- iii) Membrana circular vibrando em modos axi-simétrico, para a qual o ruído radiado foi obtido por solução numérica da integral de Rayleigh.

Todas estas fontes teóricas supostas em parede rígida infinita, em campo livre e vibrando em tom puro.

Os hologramas do ruído radiado por estas fontes foram tomados sobre diversos tipos de superfície, a saber:

- i) Segmento de reta;
- ii) Semicircunferência;
- iii) Retângulo;
- iv) Superfície plana e
- v) Semi-esfera.

Para os estudos de casos simulados, com as fontes teóricas, procedeu-se de forma semelhante aos casos experimentais:

- i) Foram determinados os hologramas do ruído radiado pelas fontes teóricas, de forma analítica ou por solução numérica da integral de Rayleigh;
- ii) Tomou-se um dos hologramas como condição de contorno (hograma de entrada) para identificação das fontes elementares do modelo;
- iii) Obteve-se o ruído predito pelo modelo, para diversas posições e
- iv) Comparou-se o ruído pelo modelo com o ruído radiado pelas fontes teóricas, obtendo-se excelente concordância entre ambos.

A identificação das velocidades do conjunto de fontes elementares permitiu identificar as posições das fontes teóricas e os modos de vibração das placas e membranas.

A determinação do número e posição das fontes elementares, para os quais não existe uma regra geral, foi feita usando-se o conceito de extensão e restrição de uma função. Lembrando-se de que tendo-se uma função $f: A \rightarrow B$, e $D \subset A$ um subconjunto de A , a função $g: D \rightarrow B$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in D$ é chamada de restrição da função f ao conjunto D e denotada por $f|_D: D \rightarrow B$. A função f é dita uma extensão de g ao conjunto A e em geral a extensão de uma função não é unívoca pois qualquer função $h: A \rightarrow B$ para a qual $g(x) = h(x)$ para todo $x \in D$ é uma extensão de g . Este procedimento é ilustrado na seção 4.4.8.

4.2 - Fonte sonora.

Num tubo de PVC com diâmetro externo de 300 mm, conforme mostrado na Figura 4.1, montou-se no centro um flange cego dividindo-o em 2 compartimentos estanques e na abertura de cada compartimento foi montado um flange no qual foi fixado um alto-falante. Este conjunto

foi suspenso do teto da câmara anecóica por meio de 3 cabos de aço finos (diâmetro de 1 mm), com comprimentos reguláveis para nivelamento.

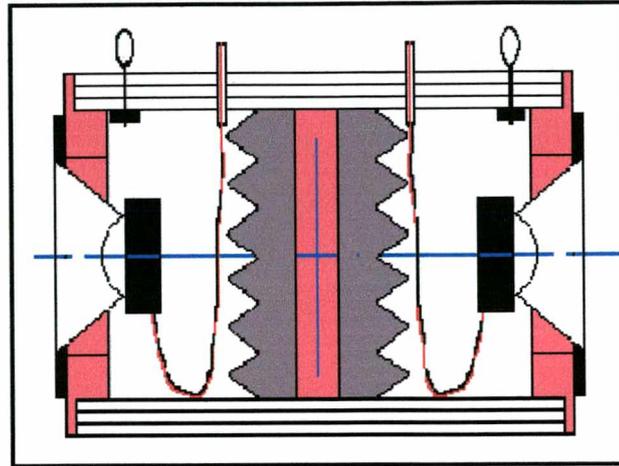


Figura 4.1 – Fonte sonora real

Os seguintes elementos foram utilizados na montagem da fonte sonora experimental:

4.2.1 - Alto-falantes.

Foram usados 2 alto-falantes, marca Pioneer modelo TS-W202F, com diâmetro nominal de 8", cuja curva de resposta em frequência, conforme manual do equipamento, é mostrada na Figura 4.2.

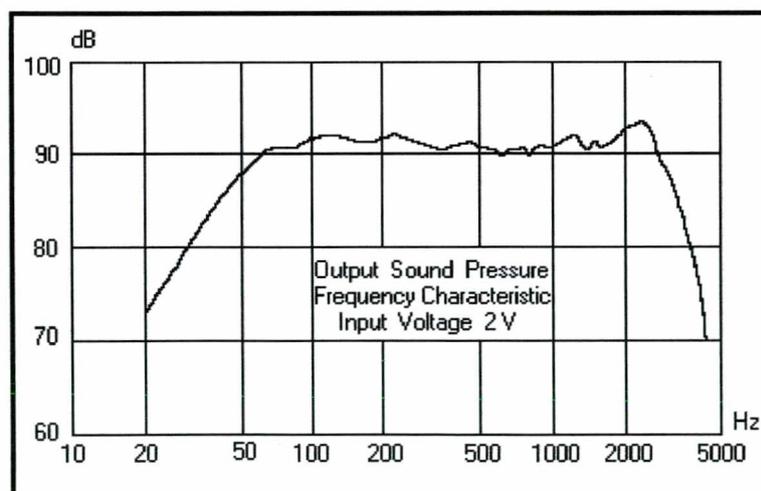


Figura 4.2 - Resposta em frequência dos alto-falantes.

4.2.2 - **Tubo de PVC.**

Tubo com diâmetro externo de 300 mm e espessura da parede de 15 mm, composta de 3 camadas de 5 mm cada.

4.2.3 - **Flanges.**

Tanto o flange cego quanto os de fixação dos alto-falantes foram confeccionados em madeira seca de angelim-pedra com espessura de 23 mm e fixados com parafusos após a montagem com leve interferência. Nas faces do flange cego foi colado material acústico (espuma de poliuretano, 30 kg/m³) com espessura de 30 mm.

4.2.4 - **Conexões elétricas.**

Todas as conexões elétricas são tipo RCA e os cabos flexíveis de cobre, tipo paralelo com fase identificada e seção transversal de 1 mm² para cada condutor.

4.2.5 - **Câmara Anecóica.**

Utilizou-se a câmara anecóica do Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial – INMETRO, situado em Xerém, município de Duque de Caxias RJ, cujas superfícies internas são revestidas por cubos de lã de vidro de dimensões variáveis, perfazendo uma espessura total de 70 cm de revestimento. Medindo sempre na face do revestimento, são as seguintes as dimensões internas da câmara, em cm:

Largura..... 420;

Comprimento 520;

Altura 420;

Posição da tela 70 cm acima do revestimento inferior e 350 cm abaixo do revestimento do teto.

4.2.6 - **Posicionamento do microfone.**

Um sistema rígido de apoio para o microfone foi construído da seguinte forma: Cinco tubos de aço (ϕ 5 x 150 cm) foram ancorados na base da câmara, abaixo do revestimento, em esperas apropriadas, e sobre os mesmos foram montadas duas vigas de madeira (5 x 5 x 250 cm)

encaixadas em forma de cruz de tal sorte que a parte inferior da cruz ficou 1 cm acima da tela. No centro da cruz foi fixado um cabeçote divisor em cuja saída foi conectado o suporte de microfone, especialmente construído, para permitir o posicionamento em qualquer ponto desejado. Este conjunto após centrado, nivelado e apumado permitiu posicionar, com precisão, o microfone sobre circunferências em torno da fonte. As Figura 4.3, 4.4 e 4.5 mostram fotos da montagem experimental.

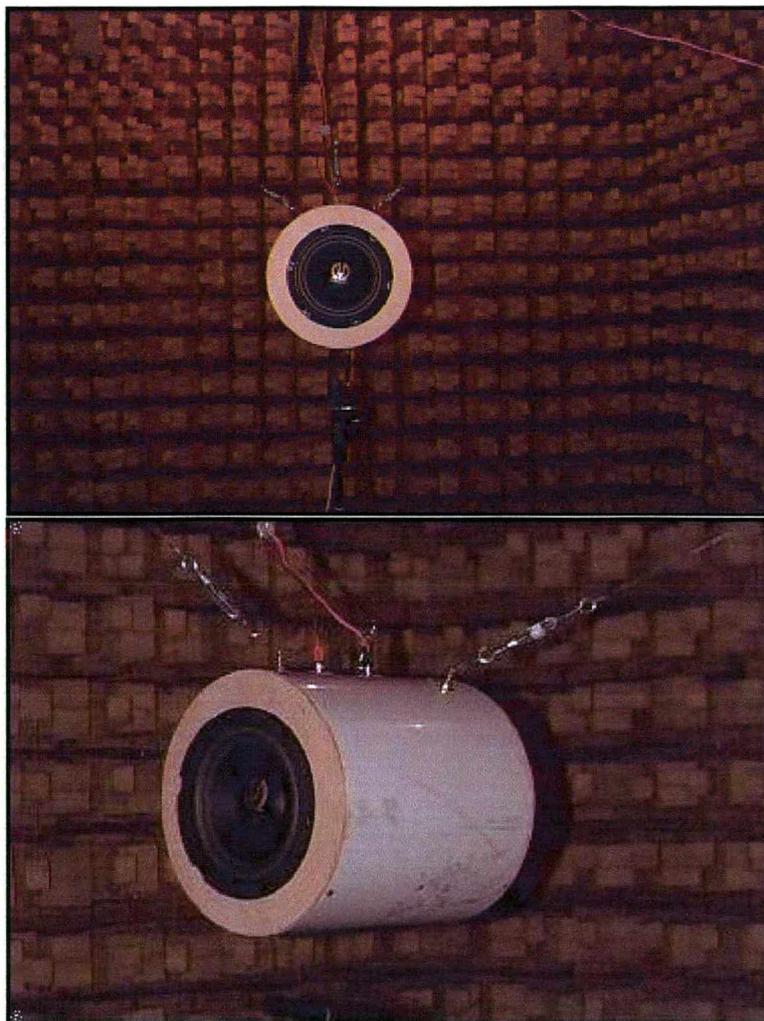


Figura 4.3 – Fotos da montagem experimental

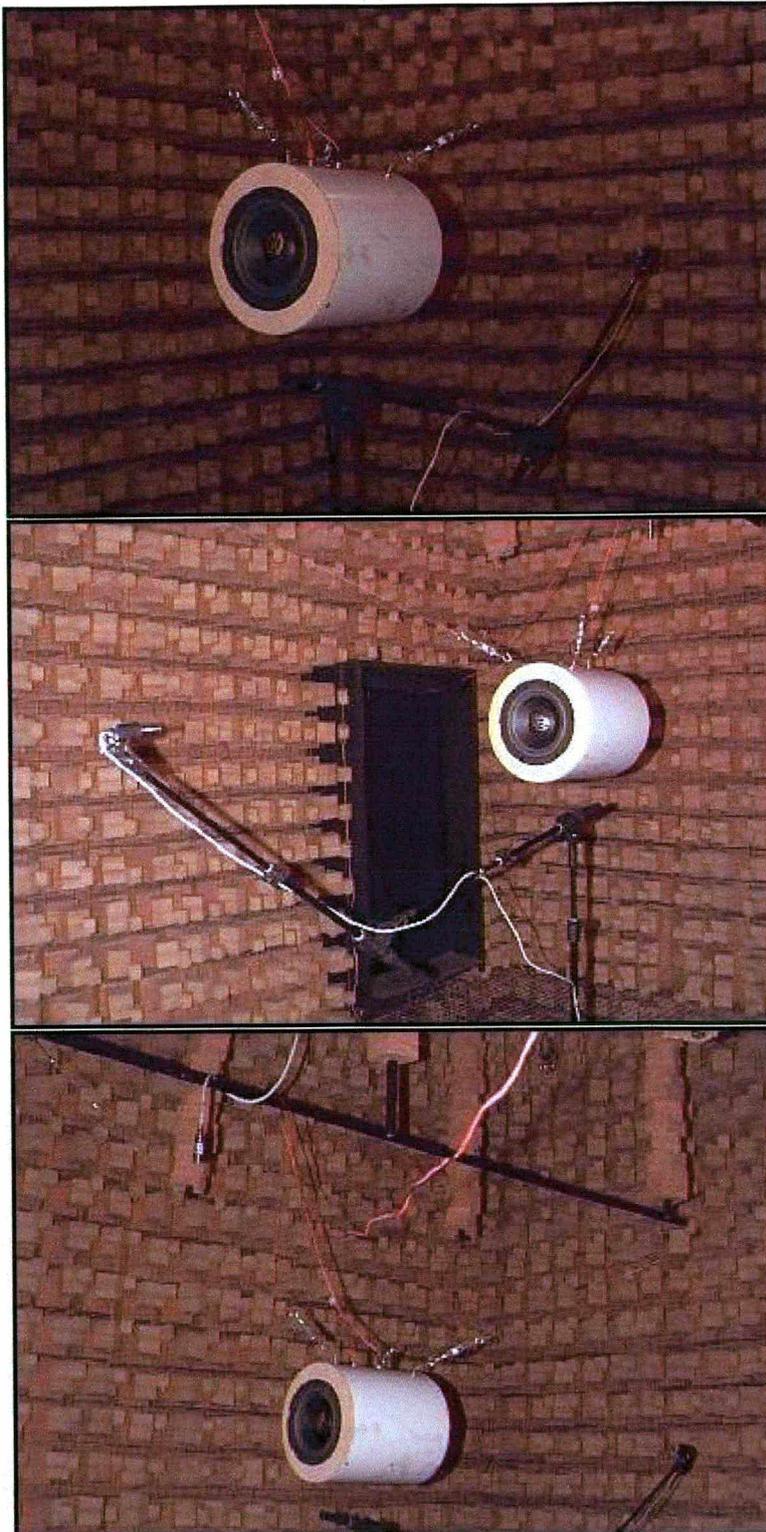


Figura 4.4 – Fotos da montagem experimental

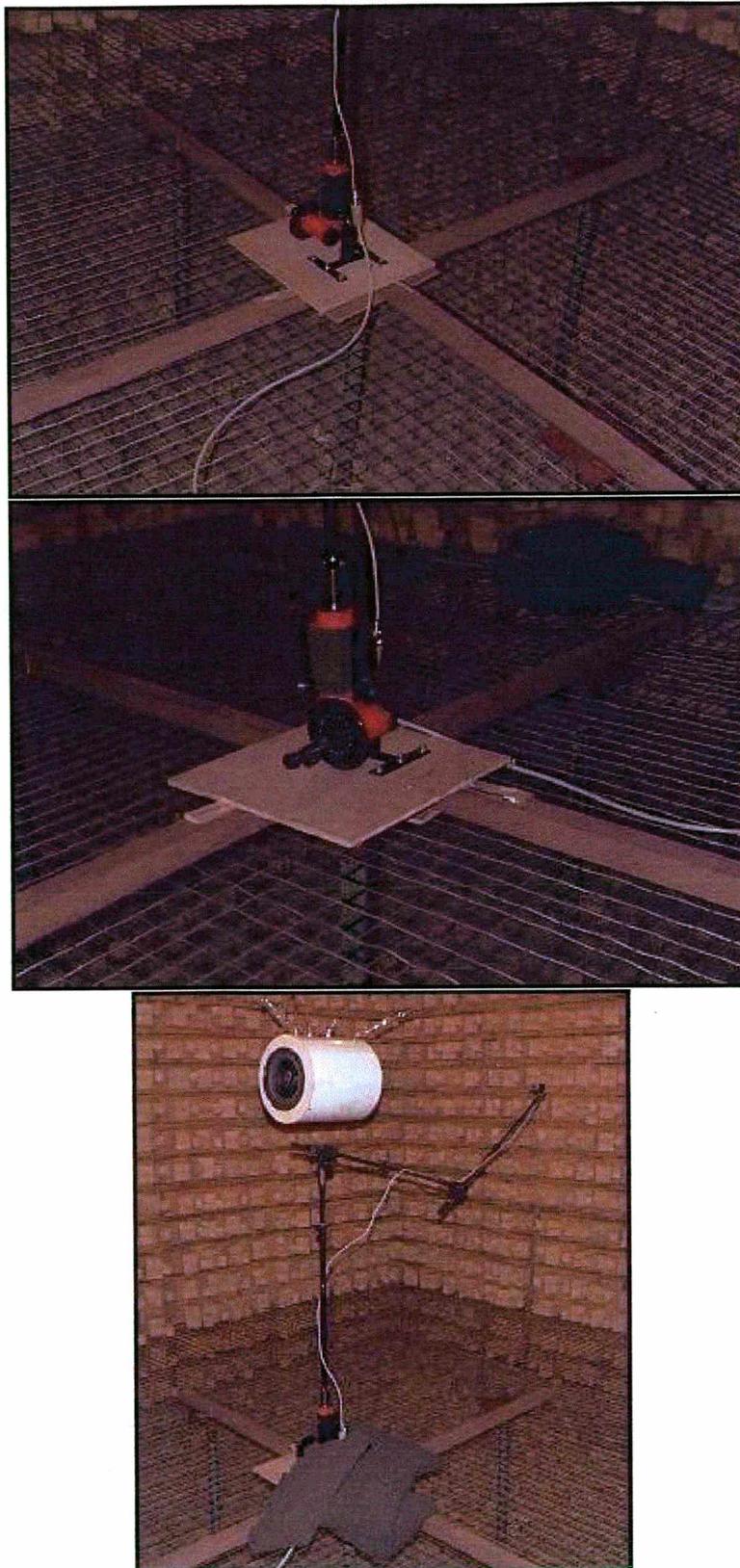


Figura 4.5– Fotos da montagem experimental

4.2.7 – Experimentos.

Para medição do holograma acústico usou-se a cadeia de medição mostrada na Figura 4.6, com a qual foram medidas as variáveis Nível de Pressão Sonora (NPS) em dB ref. $2 \cdot 10^{-5}$ Pa e o ângulo de fase, em graus, entre o sinal elétrico de excitação dos alto-falantes e o sinal elétrico correspondente ao NPS.

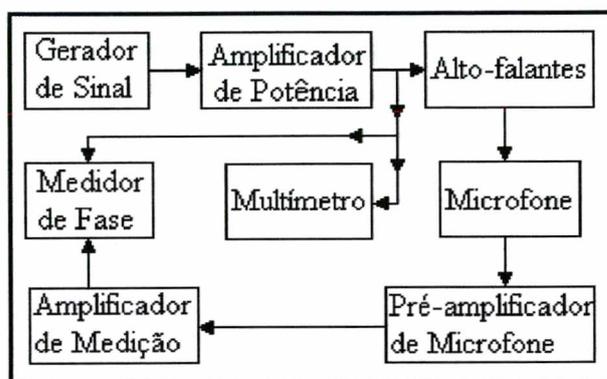


Figura 4.6 – Cadeia de medição

Nestas medições foram utilizados os equipamentos constantes da tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Relação de equipamentos

EQUIPAMENTO	MARCA	MODELO	SÉRIE
Gerador de sinais	Hewlett Packard	8003B	3011A07959
Amplificador de potência	Bruel & Kjaer	2706	965166
Alto-falantes	Pioneer	TS-W202F	sem número
Microfone	Bruel & Kjaer	4165	1565232
Pré-amplif. para microfone	Bruel & Kjaer		3 (número Inmetro)
Amplificador de medição	Bruel & Kjaer	2636	951714
Medidor de fase	Bruel & Kjaer	2976	971957
Multímetro	Tektronix	DMM254	51735
Calibrador de ruído	Bruel & Kjaer	4220	284869
Cabeçote divisor	Adriática	Adri Junior	sem número

As medições foram feitas em pontos discretos e em tons puros, com o microfone posicionado sobre três semicircunferências, de raios 0,23; 0,55 e 1,15 m, cujos centros coincidem com o centro geométrico da fonte, conforme Figura 4.7.

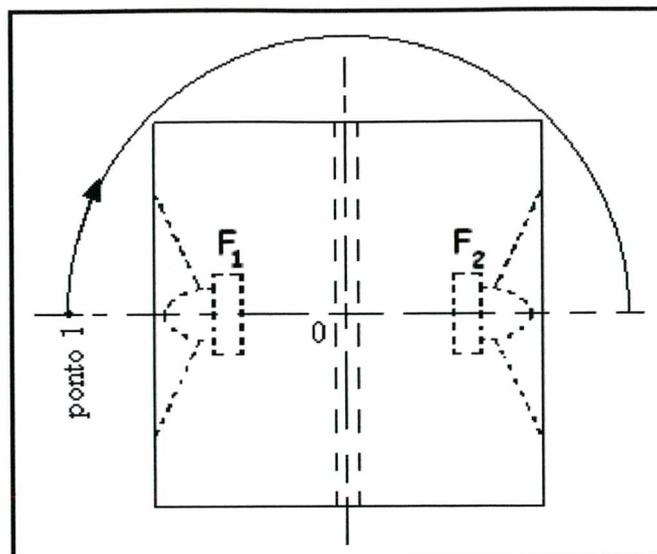


Figura 4.7 – Posicionamento do microfone

Sobre cada semicircunferência mediu-se um holograma acústico (amplitude e fase) composto por 65 pontos.

Em todos os experimentos usou-se:

- a mesma cadeia de medição;
- posicionamento manual do microfone em pontos discretos fixos;
- excitação em tom puro nas frequências centrais das bandas de 1/3 de oitava na faixa de 63 a 630 Hz, num total de 11 frequências;

4.3 – Estudo de casos experimentais.

Em todo o processamento dos dados experimentais usou-se o termo entrada para se referir ao vetor usado como condição de contorno para identificação da fonte na solução do problema inverso, ou seja, no problema linear $Aq = b$ o termo entrada refere-se ao vetor b , que nos gráficos consta sempre em azul. O termo reconstruído foi usado para se referir ao vetor (holograma) obtido como saída do modelo e aparece na cor verde, sendo sempre comparado com um holograma experimental, de cor vermelha, medido no mesmo raio, chamado raio de saída, em que estará sendo feita a reconstrução.

Tratando-se de fonte axi-simétrica o holograma foi medido em semicircunferência e as fontes elementares, tipo monopolo, serão distribuídas sobre um segmento de reta, chamado segmento de reta das fontes, contido no eixo longitudinal de simetria da fonte.

Os casos experimentais 1 e 2, seções 4.3.1 e 4.3.2, respectivamente, usam como condição de contorno, para identificação das fontes elementares do modelo, o holograma experimental medido no raio de 0,23 m, com 65 pontos e que aparece, nas respectivas figuras, na cor azul

denominado “holograma experimental de entrada”. As fontes elementares são identificadas pela solução do problema inverso e com isto são preditos, i. e., calculados pelo modelo os hologramas nos raios 0,55 m e 1,15 m, ambos com 65 pontos e que estão, nas respectivas figuras, identificados como “holograma reconstruído”, na cor verde. Trata-se, pois, de projeção para frente.

No caso experimental 1 são mostradas as frequências centrais das bandas de 1/3 de oitava de 63 Hz a 630 Hz, Figuras 4.8 e 4.9. Nos demais casos experimentais são mostradas as frequências de 63, 100, 160, 250, 400 e 630 Hz.

O caso experimental 3, seção 4.3.3, trata da projeção para trás, usando como condição de contorno o holograma experimental, de 65 pontos e cor azul na Figura 4.11, medido no raio de 0,55 m. A predição é feita, com 65 pontos, para o raio de 0,23 m e aparece na figura em verde, sendo comparada com holograma experimental medido, com 65 pontos, neste raio e mostrado em vermelho.

O caso experimental 4, seção 4.3.4, usa o mesmo holograma de entrada, com a predição sendo feita, em 65 pontos, no raio 1,15 m e comparada com holograma experimental medido neste raio, também com 65 pontos. Trata-se, pois, de projeção para frente.

Os casos experimentais 5 e 6, seções 4.3.5 e 4.3.6, tratam de projeção para trás. O holograma de entrada é tomado no raio 1,15 m, com 65 pontos, e os hologramas preditos nos raios de 0,55 m e 0,23 m, ambos com 65 pontos, são comparados com os respectivos hologramas experimentais para estes dois raios.

Para os casos experimentais 7 a 10, seções 4.3.7 a 4.3.10, usam-se partições do holograma experimental de entrada com 33, 17 e 9 pontos, sendo os hologramas preditos, i. e. calculados pelo modelo, com 65 pontos e comparados com os respectivos hologramas experimentais, também com 65 pontos. O caso experimental 7 e 8 tratam de projeção para frente, usando como condição de contorno uma partição de 33 pontos do holograma experimental medido no raio 0,23 m e predizendo o campo acústico nos raios 0,55 m e 1,15 m. No caso experimental 9 tem-se a mesma predição, porém a condição de contorno é uma partição de 17 pontos e no caso experimental 10 tem-se a projeção para trás, no raio 0,23 m, sendo a condição de contorno uma partição de 9 pontos do holograma experimental medido no raio 1,15 m.

4.3.1 - Caso experimental 1.

Raio de entrada : 0,23 m; com 65 pontos

Raio da saída : 0,55 m; com 65 pontos

Comprimento do segmento de reta das fontes: 0,30 m; com 3 fontes

Resultados: Figuras 4.8 e 4.9.

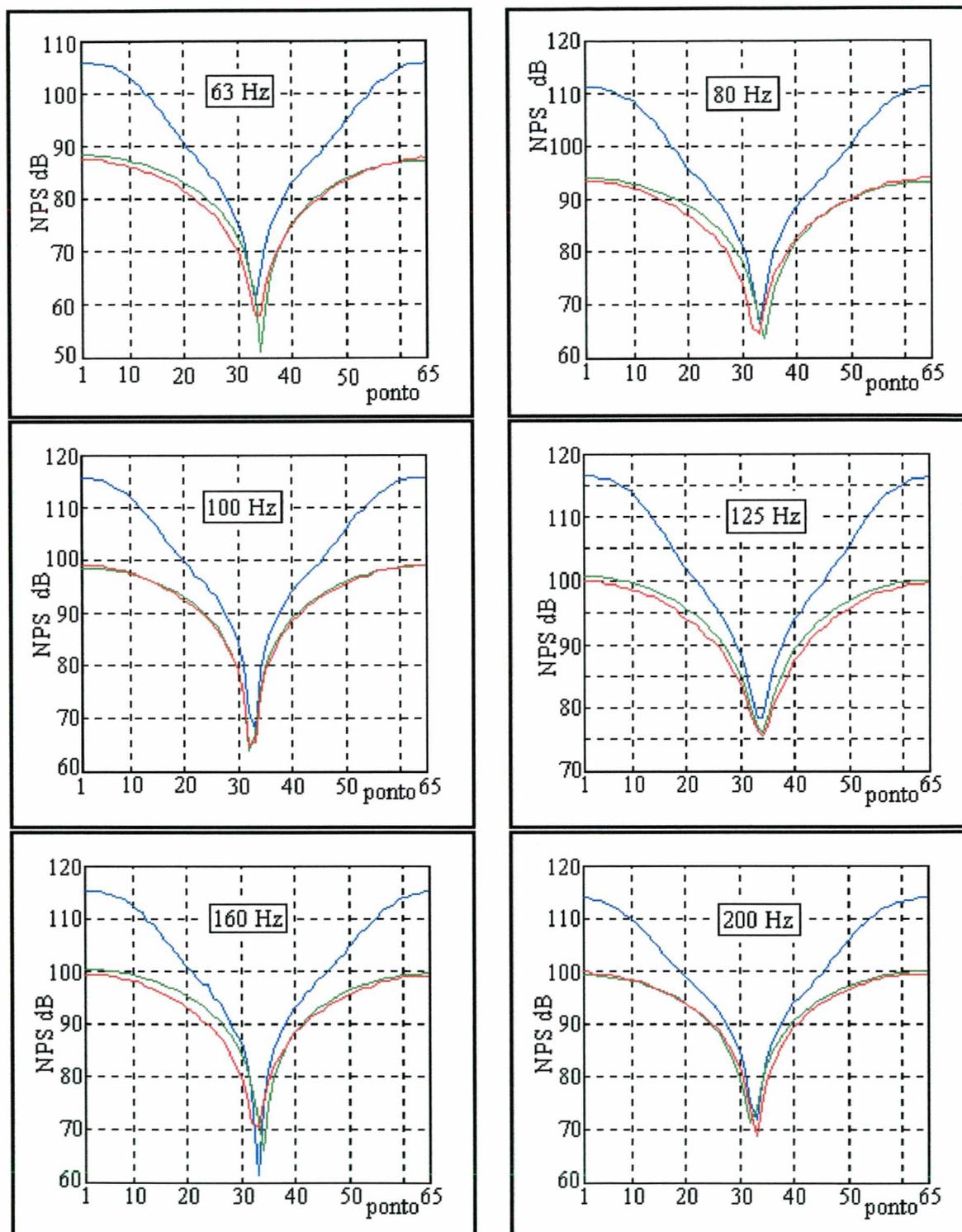


Figura 4.8 – Caso experimental 1 de 63 a 200 Hz

Azul: holograma experimental de entrada no raio 23 cm, com 65 pontos;
Vermelho: holograma experimental no raio 55 cm;
Verde: holograma reconstruído no raio 55 cm (3 fontes).

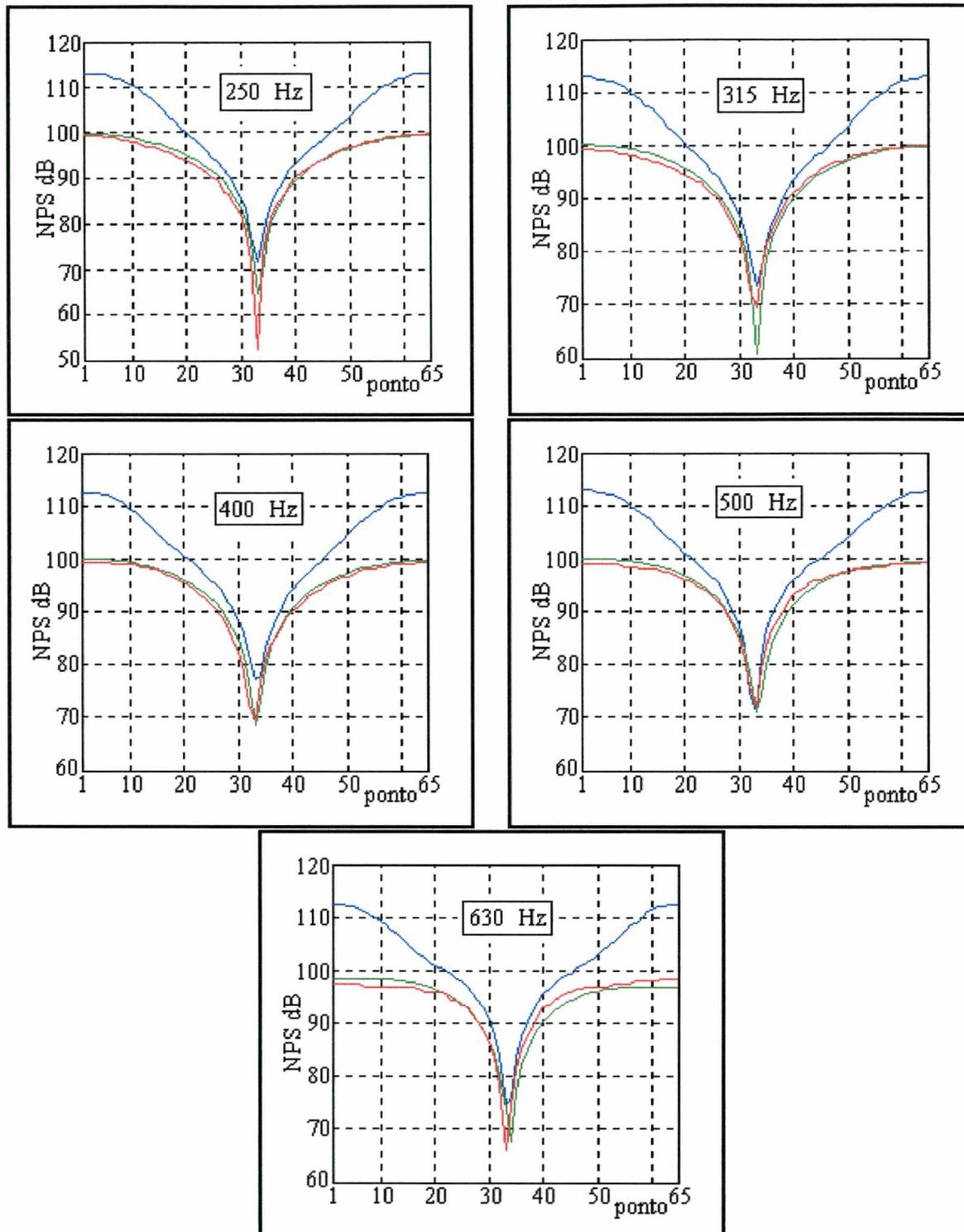


Figura 4.9 – Caso experimental 1 de 250 a 630 Hz

Azul: holograma experimental de entrada no raio 23 cm, com 65 pontos;
 Vermelho: holograma experimental no raio 55 cm;
 Verde: holograma reconstruído no raio 55 cm (3 fontes).

4.3.2 - Caso experimental 2.

Raio de entrada : 0,23 m; com 65 pontos

Raio da saída : 1,15 m; com 65 pontos

Comprimento do segmento de reta das fontes: 0,30 m; com 3 fontes;

Resultados: Figura 4.10.

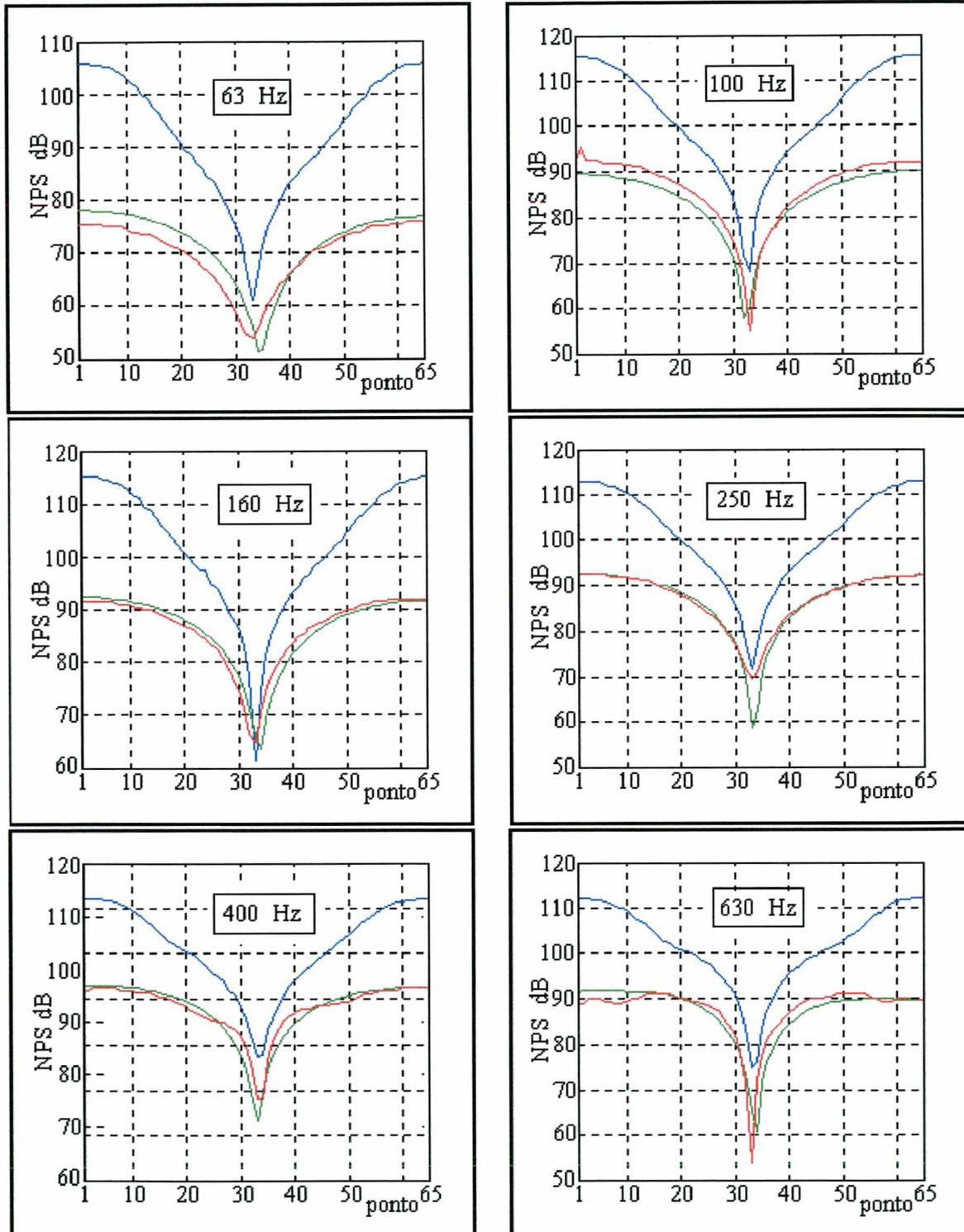


Figura 4.10 – Caso experimental 2

Azul: holograma experimental de entrada no raio 23 cm;
Vermelho: holograma experimental no raio 115 cm;
Verde: holograma reconstruído no raio 115 cm (3 fontes).

4.3.3 - Caso experimental 3.

Raio de entrada : 0,55 m; com 65 pontos

Raio da saída : 0,23 m; com 65 pontos

Comprimento do segmento de reta das fontes: 0,30 m; com 3 fontes;

Resultados: Figura 4.11.

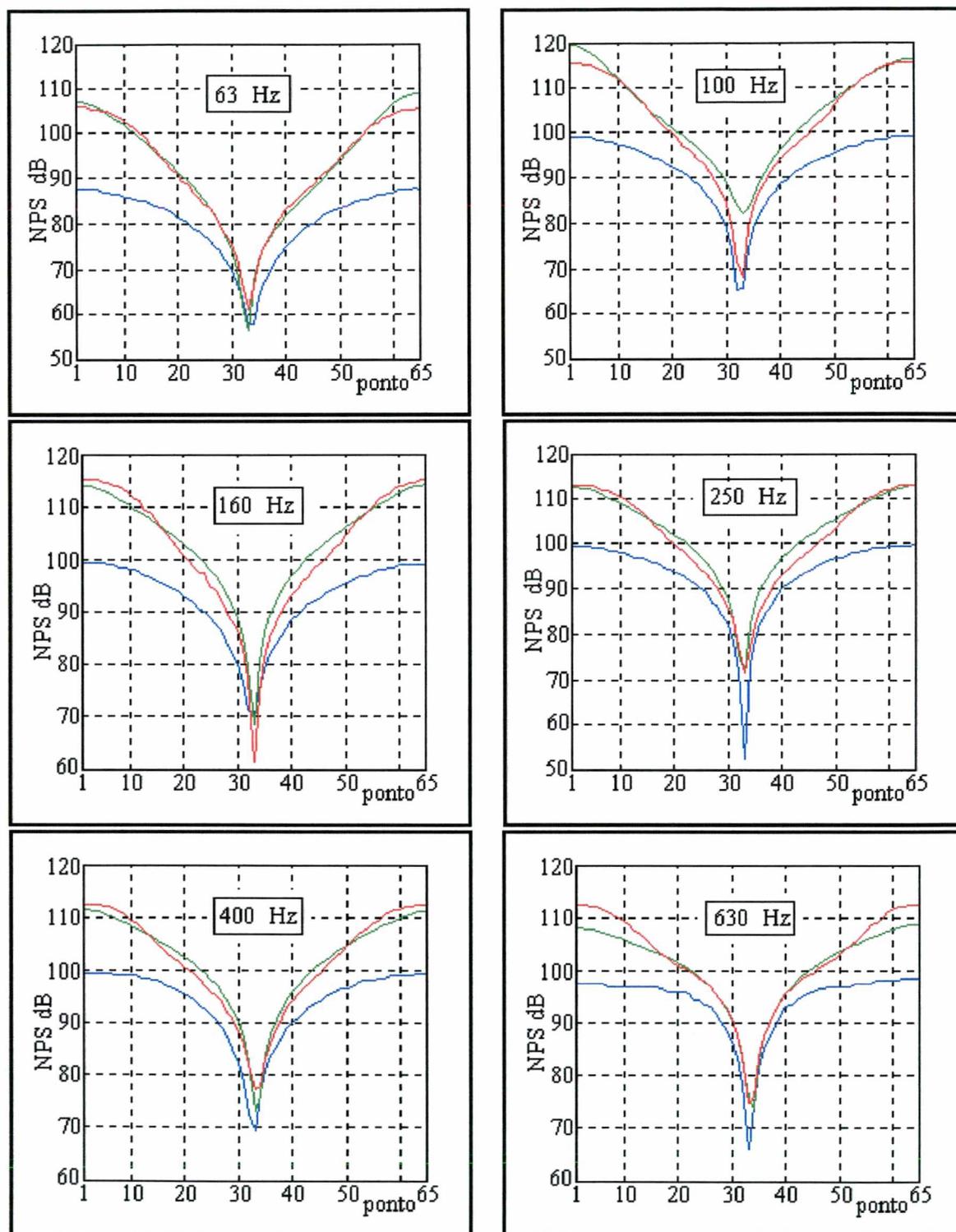


Figura 4.11 – Caso experimental 3.

Azul: holograma experimental de entrada no raio 55 cm;
Vermelho: holograma experimental no raio 23 cm;
Verde: holograma reconstruído no raio 23 cm (3 fontes).

4.3.4 – Caso experimental 4.

Raio de entrada : 0,55 m; com 65 pontos

Raio da saída : 1,15 m; com 65 pontos

Comprimento do segmento de reta das fontes: 0,30 m; com 3 fontes;

Resultados: Figura 4.12.

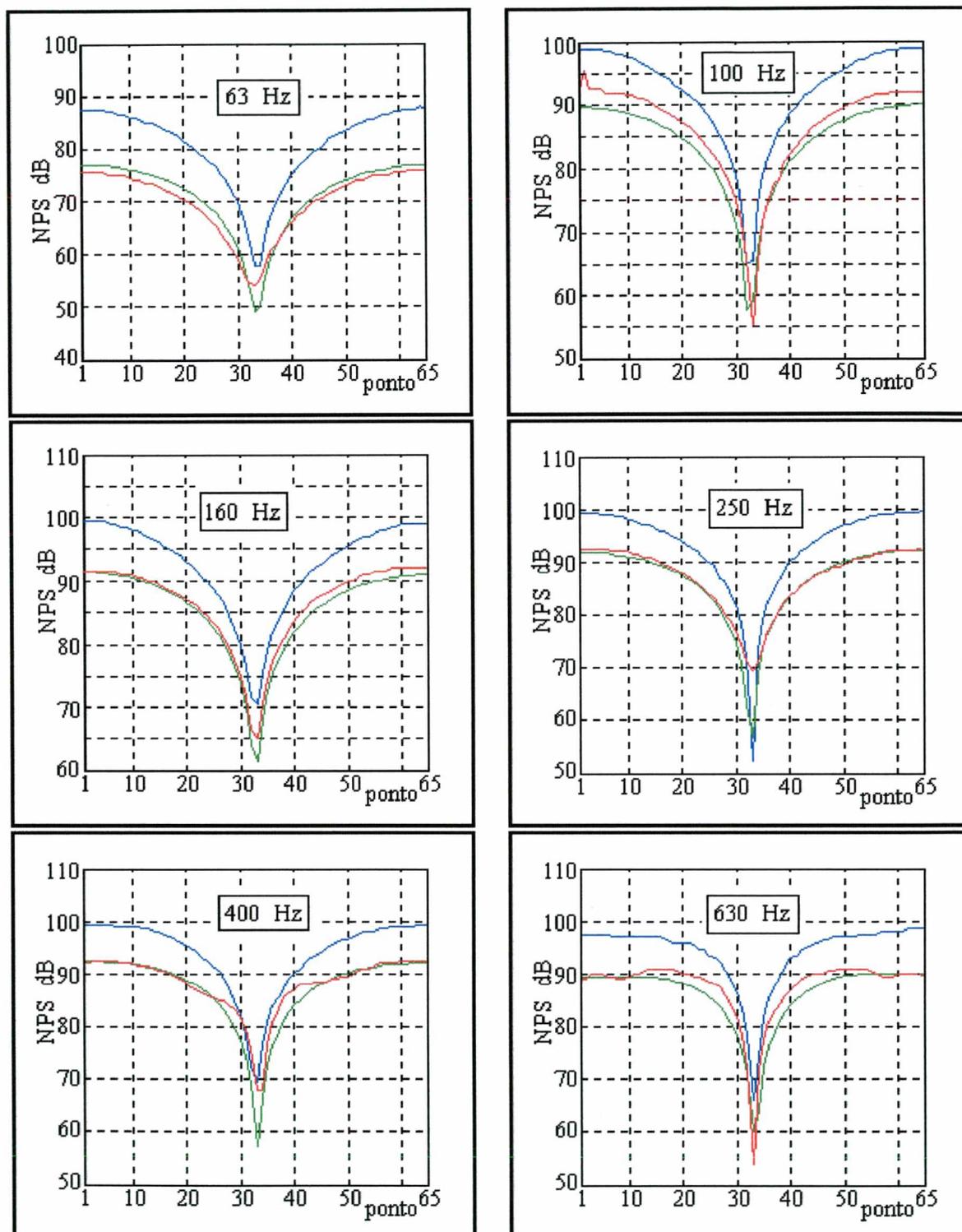


Figura 4.12 – Caso experimental 4.

Azul: holograma experimental de entrada no raio 55 cm;
Vermelho: holograma experimental no raio 115 cm;
Verde: holograma reconstruído no raio 115 cm (3 fontes).

4.3.5 – Caso experimental 5.

Raio de entrada : 1,15 m; com 65 pontos

Raio da saída : 0,23 m; com 65 pontos

Comprimento do segmento de reta das fontes: 0,30 m; com 2 fontes;

Resultados: Figura 4.13.

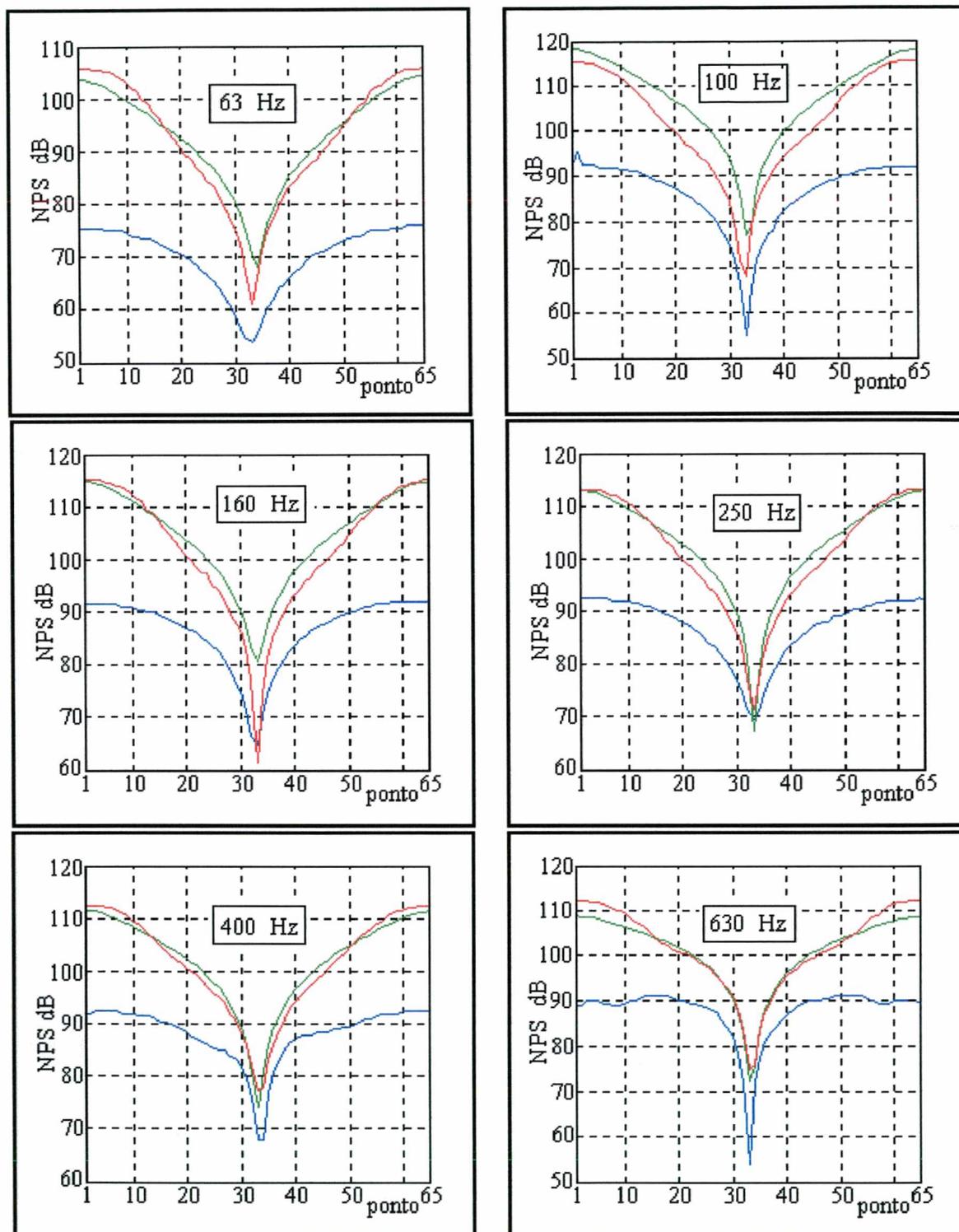


Figura 4.13 – Caso experimental 5.

Azul: holograma experimental de entrada no raio 115 cm;
Vermelho: holograma experimental no raio 23 cm;
Verde: holograma reconstruído no raio 23 cm (2 fontes)

4.3.6 - Caso experimental 6.

Raio de entrada : 1,15 m; com 65 pontos

Raio da saída : 0,55 m; com 65 pontos

Comprimento do segmento de reta das fontes: 0,30 m; com 2 fontes;

Resultados: Figura 4.14.

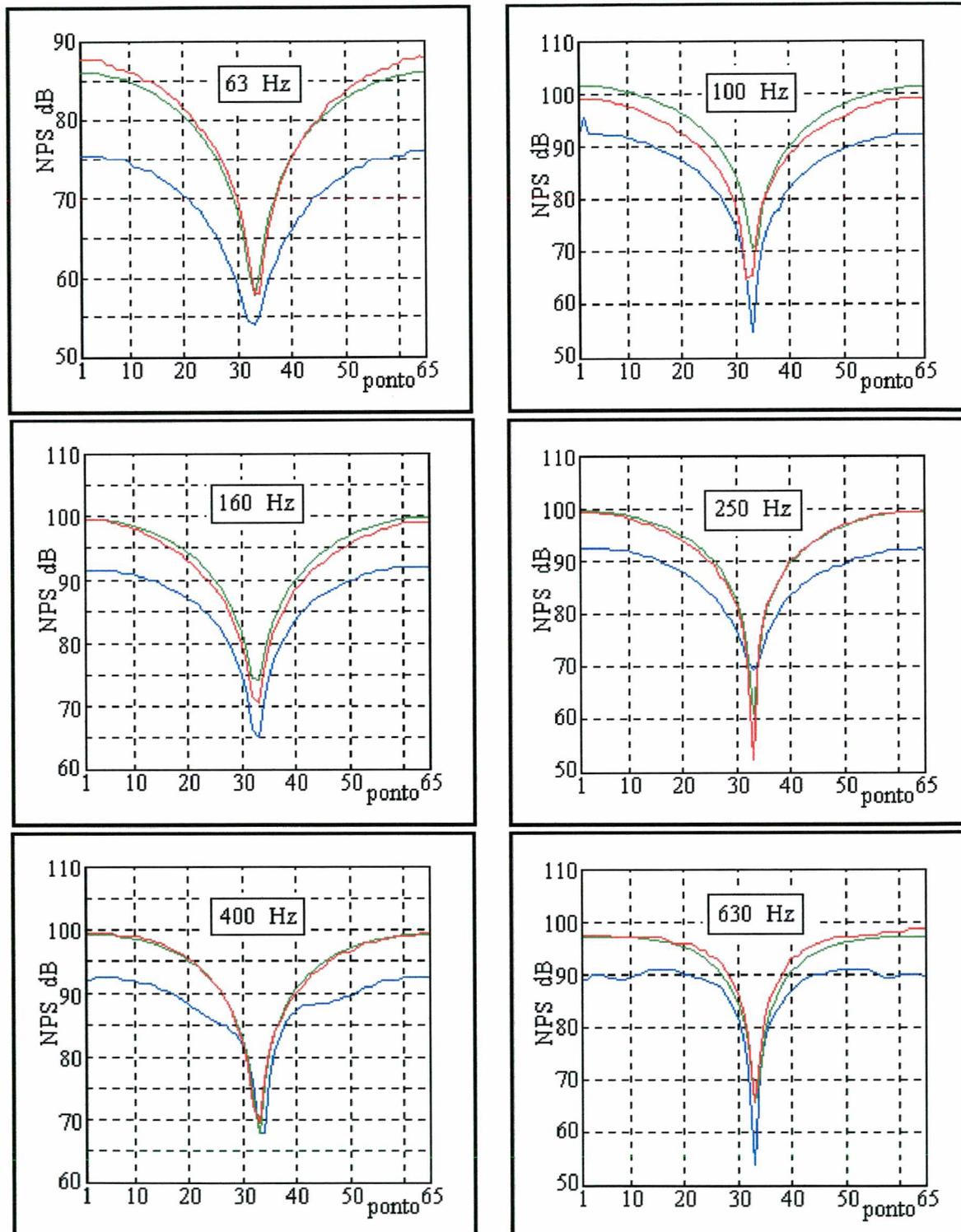


Figura 4.14 – Caso experimental 6.

Azul: holograma experimental de entrada no raio 115 cm;
Vermelho: holograma experimental no raio 55 cm;
Verde: holograma reconstruído no raio 55 cm (2 fontes)

4.3.7 - Caso experimental 7.

Raio de entrada : 0,23 m; com 33 pontos
Raio da saída : 0,55 m; com 65 pontos
Comprimento do segmento de reta das fontes: 0,30 m; com 2 fontes;
Resultados: Figura 4.15.

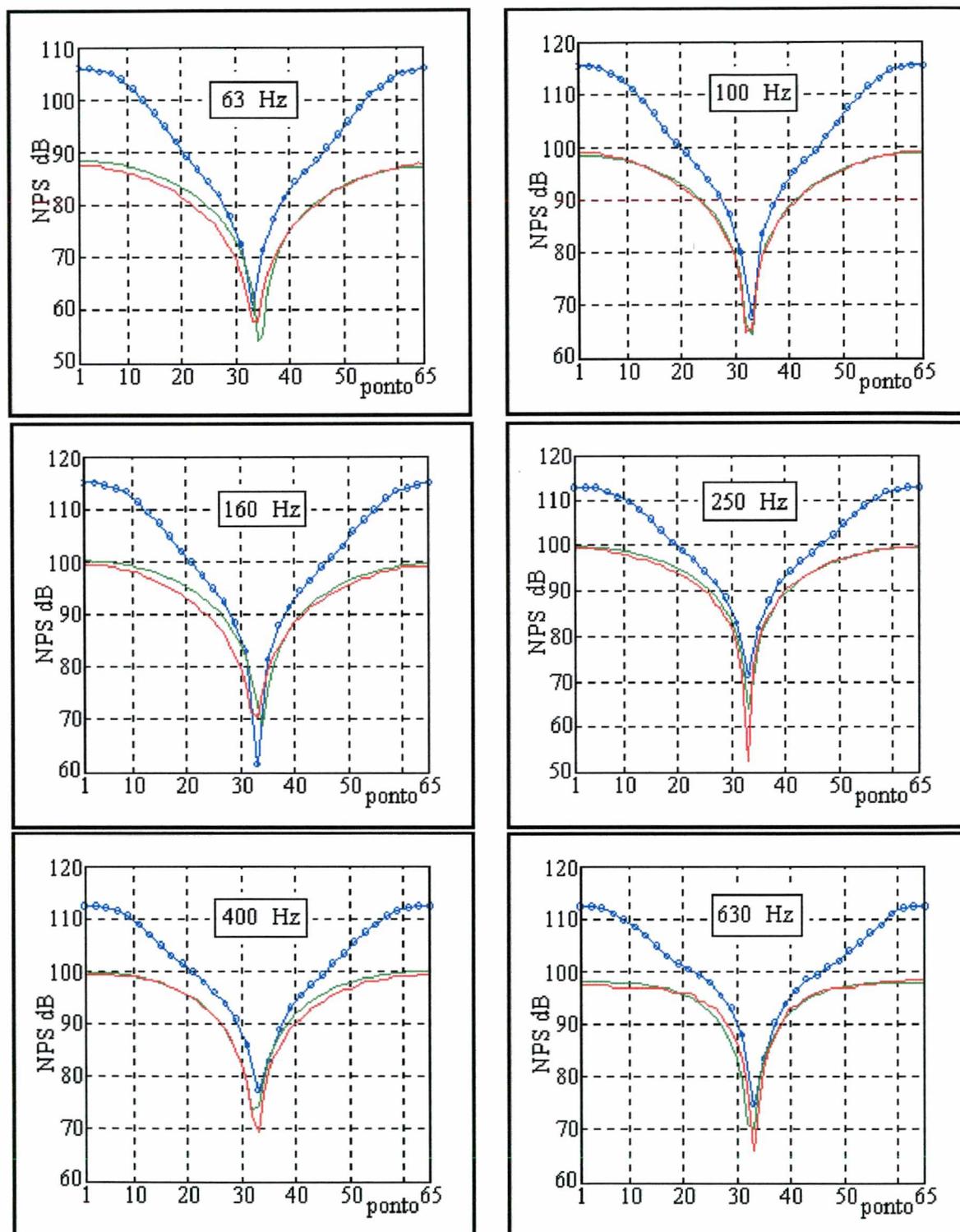


Figura 4.15 – Caso experimental 7.

Azul: holograma experimental de entrada no raio 23 cm, com 33 pontos em 180 graus;
Vermelho: holograma experimental no raio 55 cm, com 65 pontos em 180 graus;
Verde: holograma reconstruído no raio 55 cm (2 fontes), com 65 pontos em 180 graus;

4.3.8 – Caso experimental 8.

Raio de entrada : 0,23 m; com 33 pontos

Raio da saída : 1,15 m; com 65 pontos

Comprimento do segmento de reta das fontes: 0,30 m; com 2 fontes;

Resultados: Figura 4.16.

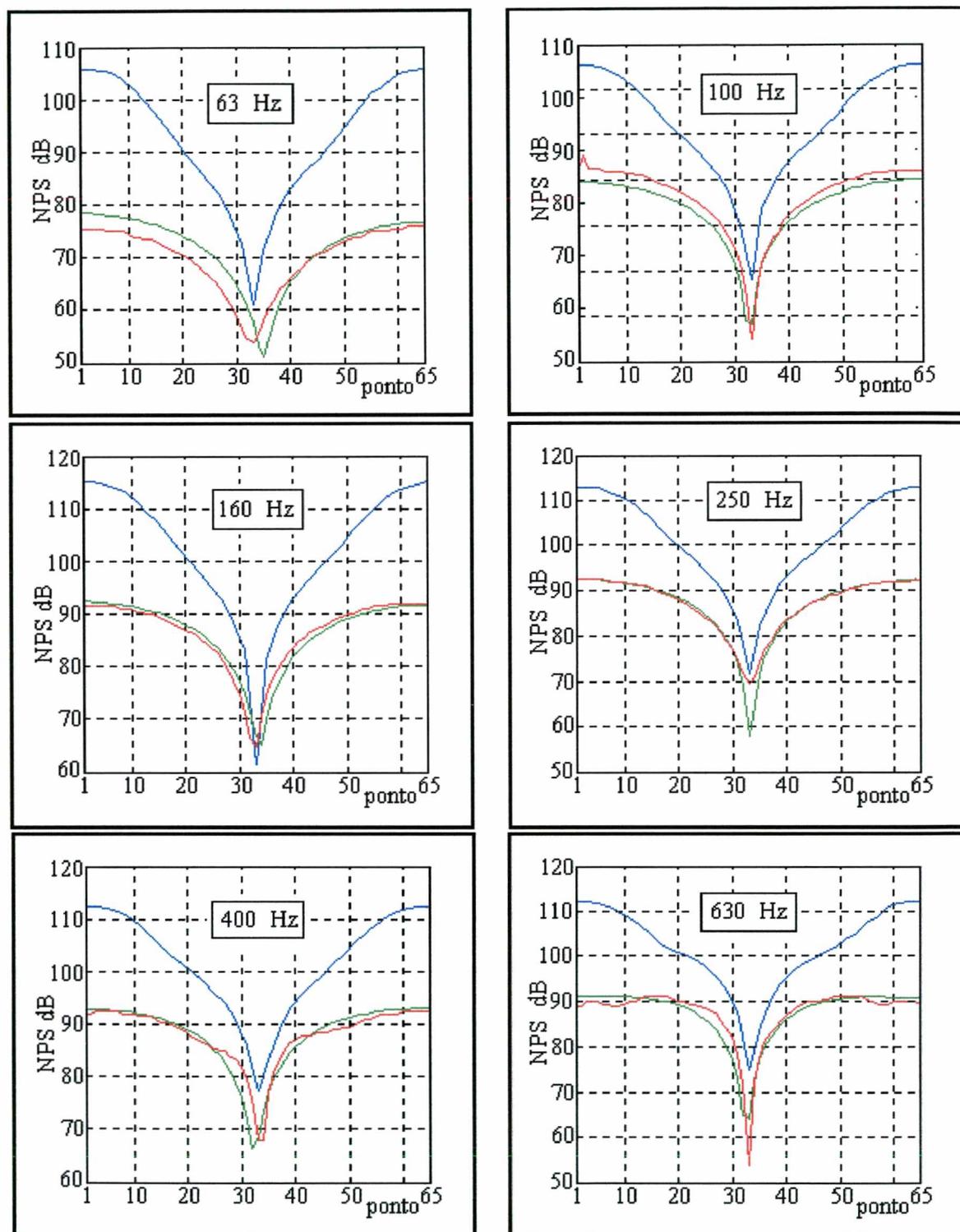


Figura 4.16 – Caso experimental 8.

Azul: holograma experimental de entrada no raio 23 cm, com 33 pontos em 180 graus;
Vermelho: holograma experimental no raio 115 cm, com 65 pontos em 180 graus;
Verde: holograma reconstruído no raio 115 cm (2 fontes), com 65 pontos em 180 graus;

4.3.9 - Caso experimental 9.

Raio de entrada : 0,23 m; com 17 pontos

Raio da saída : 1,15 m; com 65 pontos

Comprimento do segmento de reta das fontes: 0,30 m; com 2 fontes;

Resultados: Figura 4.17.

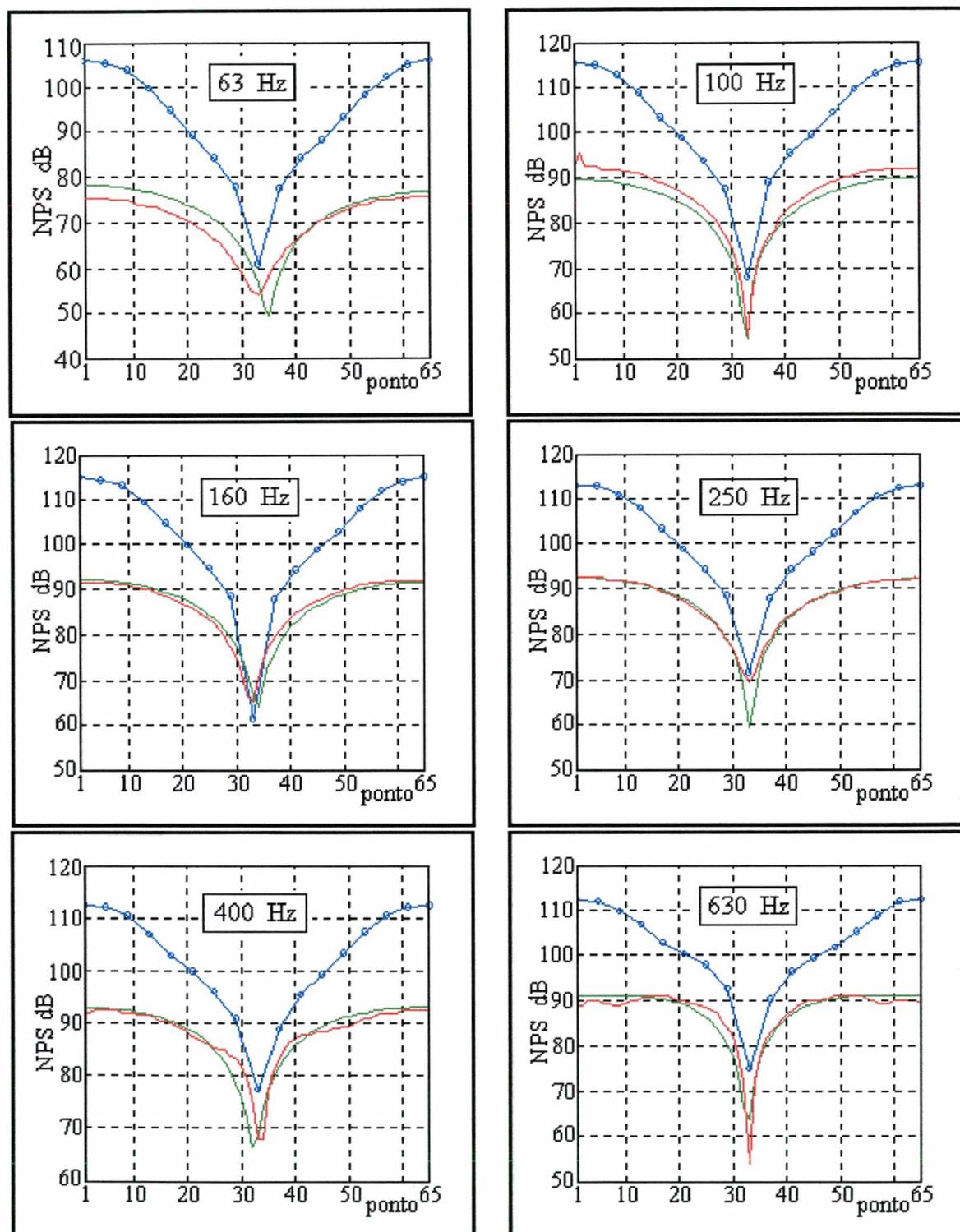


Figura 4.17 – Caso experimental 9.

Azul: holograma experimental de entrada no raio 23 cm, com 17 pontos em 180 graus;
Vermelho: holograma experimental no raio 115 cm, com 65 pontos em 180 graus;
Verde: holograma reconstruído no raio 115 cm (2 fontes), com 65 pontos em 180 graus;

4.3.10 - Caso experimental 10.

Raio de entrada : 1,15 m; com 9 pontos

Raio da saída : 0,23 m; com 65 pontos

Comprimento do segmento de reta das fontes: 0,30 m; com 2 fontes;

Resultados: Figura 4.18.

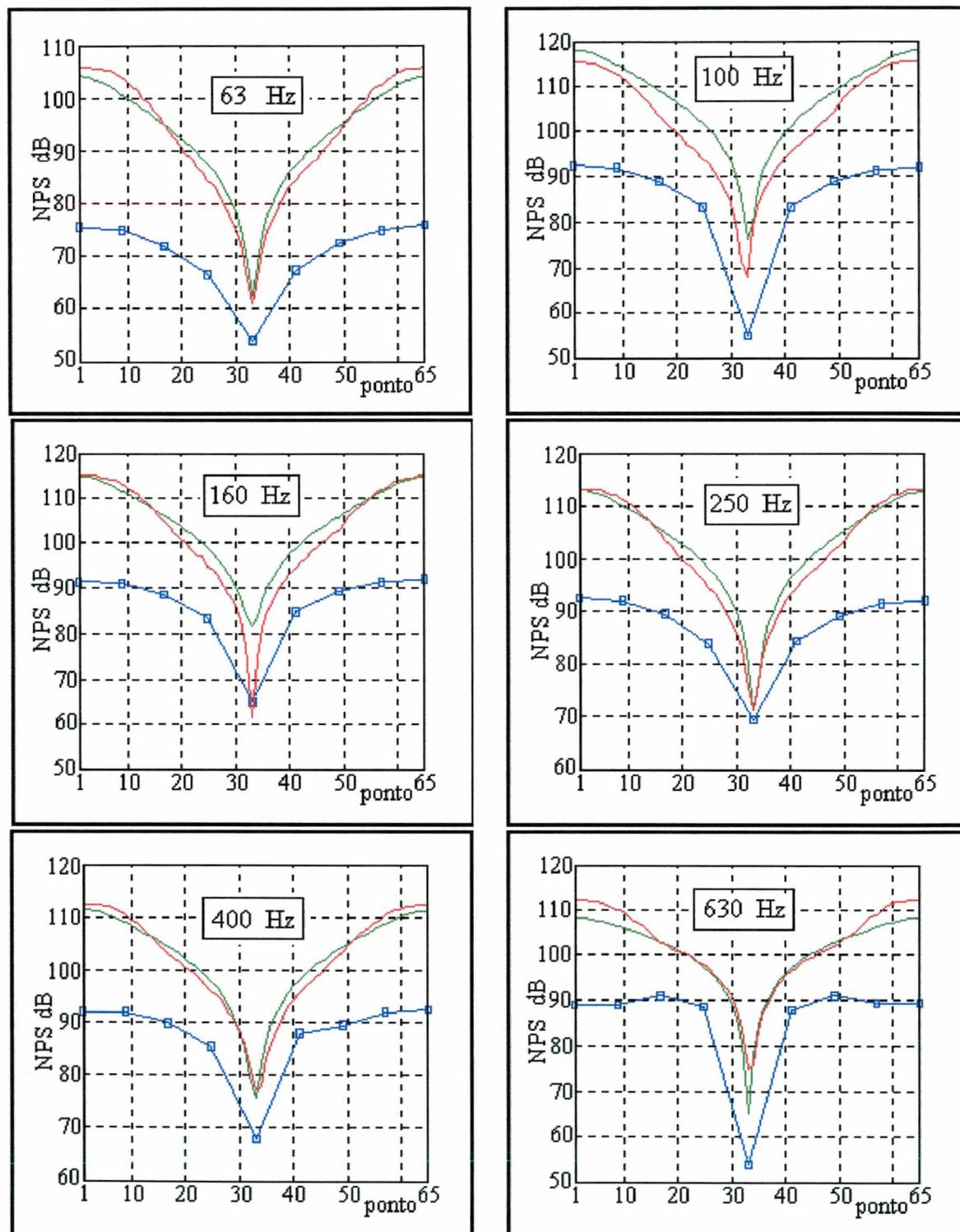


Figura 4.18 – Caso experimental 10.

Azul: holograma experimental de entrada no raio 115 cm, com 9 pontos em 180 graus;
Vermelho: holograma experimental no raio 23 cm, com 65 pontos em 180 graus;
Verde: holograma reconstruído no raio 23 cm (2 fontes), com 65 pontos em 180 graus;

Observa-se, nestes casos experimentais, que o modelo proposto consegue predizer com boa precisão o campo acústico radiado, tanto para frente quanto para trás. Mesmo usando-se partições do holograma experimental de entrada, o campo acústico predito, com maior número de pontos, apresenta boa concordância com o campo experimental.

Os erros em 63 Hz, no holograma de raio 1,15 m, tendo como entrada o raio 0,23 m, devem-se, provavelmente a problemas de resposta da câmara anecóica em baixas frequências.

4.4 – Estudo de casos com fontes teóricas.

Para simulações numéricas usou-se como fonte sonora o pistão circular rígido, a placa retangular vibrando em um dos seus modos naturais, e a membrana circular vibrando em um de seus modos naturais axi-simétrico. Todas estas fontes supostas em parede rígida infinita radiando em campo livre para um dos lados.

4.4.1 - Pistão circular rígido.

A pressão sonora radiada pelo pistão rígido, em parede rígida e infinita, foi computada por [91]:

$$p(r, \varphi) = \frac{j\omega v_o \rho a^2}{r} e^{-jkr} \frac{J_1(ka \sin \varphi)}{ka \sin \varphi} \quad (4.1)$$

na qual:

r é a distância Euclidiana entre o centro do pistão e o ponto de observação;

j é a unidade imaginária;

ω é a frequência circular;

ρ é a densidade do meio (ar);

a é o diâmetro do pistão;

φ é o ângulo entre a reta que passa pelos pontos de observação e centro do pistão com a reta normal à superfície do pistão que passa pelo centro do mesmo;

k é o número de onda e

$J_1(\bullet)$ é a função de Bessel tipo 1 de argumento (\bullet).

A equação (4.1) é válida para pontos de observação situados em distâncias r dadas por:

$$r > R_o = \frac{\pi a^2}{\lambda} \quad (4.2)$$

na qual λ é o comprimento de onda, sendo R_o , conhecido como distância de Rayleigh, mostrado na Figura 4.19.

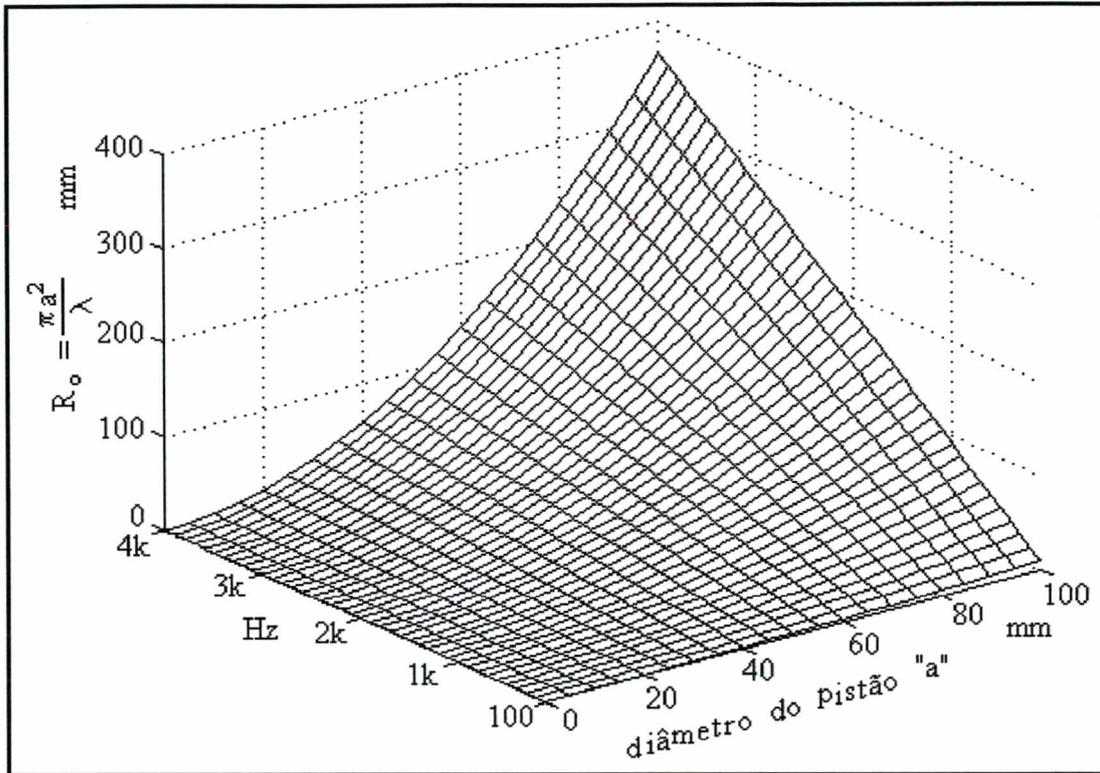


Figura 4.19 – Distância de Rayleigh

4.4.2 - Placa retangular e membrana circular.

A pressão sonora radiada pela placa retangular e membrana circular, ambas em parede rígida infinita, foi calculada discreteando-se a integral de Rayleigh [33]

$$p(x) = \frac{j\omega\rho}{2\pi} \int_S \frac{v(y)e^{-jkd(y,x)}}{d(y,x)} dS \quad (4.3)$$

na qual:

$x \in \mathcal{R}^3$ é o ponto de observação;

ω é a frequência circular;

ρ é a densidade do meio (ar);

S é a superfície vibrante (placa retangular ou membrana circular);

$y \in S$ um ponto genérico sobre S ;

k é o número de onda e

$d(y,x)$ é distância Euclidiana entre y e x .

Para discretizar a integral de Rayleigh, equação (4.3), usaram-se 50 pontos por comprimento de onda. Segundo Litwinczik [93] uma boa representação é obtida com apenas 20 pontos por comprimento de onda.

Para a placa retangular usou-se como velocidade de vibração

$$v(s) = v_0 \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi y}{L_y}\right) \quad (4.4)$$

na qual:

s é um ponto genérico sobre a placa;

v_0 é a velocidade pico;

$x \in [0, L_x]$ e $y \in [0, L_y]$ coordenadas de s ;

L_x e L_y dimensões da placa e

p e q os modos de vibração nos eixos X e Y respectivamente.

A Figura 4.20 mostra alguns modos de vibração da placa.

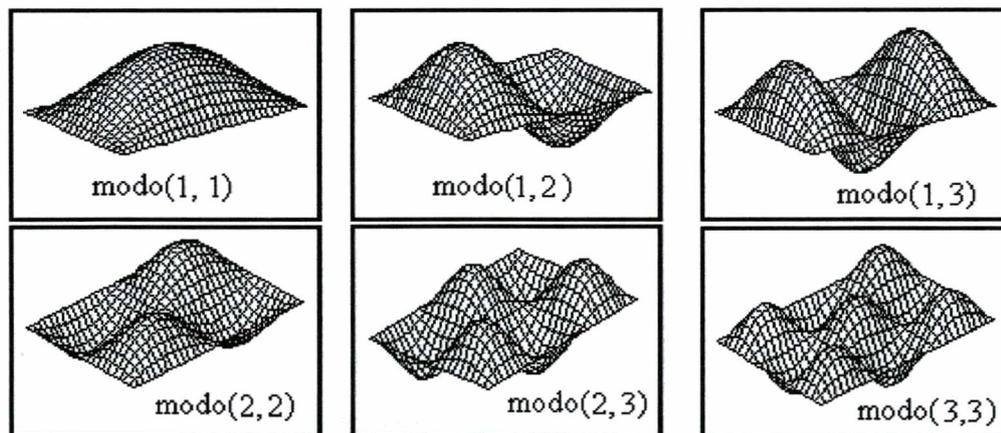


Figura 4.20 – Modos naturais de vibração de placa retangular

Para a membrana circular usou-se como velocidade de vibração [91]

$$v(r) = J_0\left(Z_n \frac{r}{a}\right) \quad (4.5)$$

na qual:

$r \in [0, a]$ é um ponto genérico sobre a membrana;

a é o diâmetro da membrana;

$J_0(\bullet)$ é a função de Bessel de ordem 0 de argumento (\bullet) e

$Z_n, n = 1, 2, 3, \dots$ são os zeros de $J_0(\bullet)$ correspondentes aos modos $(0,1), (0, 2), \dots$ de vibração da membrana, respectivamente.

Alguns valores de Z_n são dados na Tabela 4.2.

n	Z_n	n	Z_n	n	Z_n
1	2.40482555769577	2	5.52007811028631	3	8.65372791291101
4	11.79153443901428	5	14.93091770848778	6	18.07106396791092
7	21.21163662987926	8	24.35247153074930	9	27.49347913204026
10	30.63460646843198	11	33.77582021357356	12	36.91709835366404
13	40.05842576462824	14	43.19979171317673	15	46.34118837166181
16	49.48260989739781	17	52.62405184111500	18	55.76551075501998
19	58.90698392608094	20	62.04846919022717	21	65.18996480020687
22	68.33146932985680	23	71.47298160359374	24	74.61450064370183
25	77.75602563038805	26	80.89755587113763	26	84.03909077693820
28	87.18062984364116	29	90.32217263721048	30	93.46371878194478

A Figura 4.21 mostra os 3 primeiros modos axi-simétricos da membrana circular.

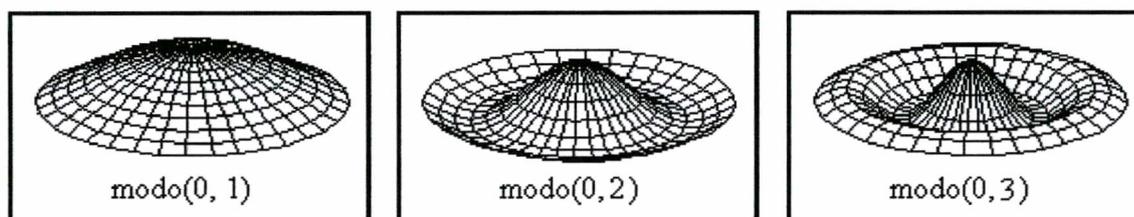


Figura 4.21 – Modos de vibração axi-simétricos de membrana circular.

4.4.3 - Pontos para construção do holograma.

O holograma, vetor cujas coordenadas são as pressões medidas (calculadas), foi tomado sobre: superfície plana, semi-esfera e usando as condições de simetria do pistão e da membrana usou-se também segmento de reta, semicircunferência e retângulo, estes dois últimos envolvendo a fonte no lado de radiação desta, assim como a semi-esfera e a caixa retangular. A distribuição dos pontos do holograma sobre estas superfícies (ou linhas) é mostrado nas Figuras 4.22 a 4.26.

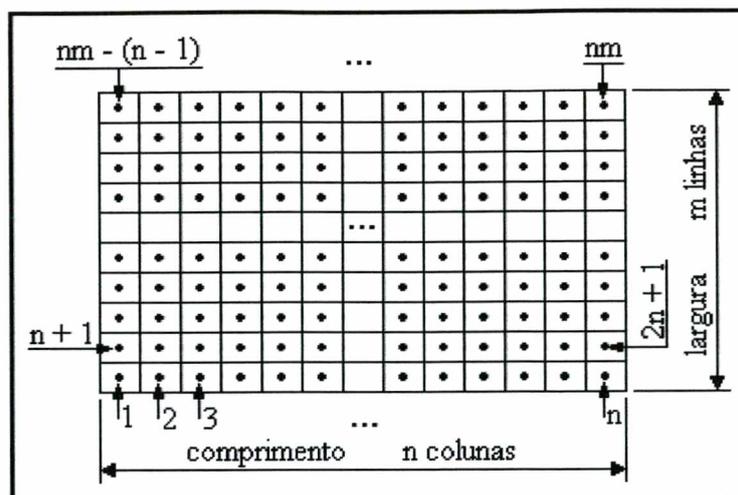


Figura 4.22 – Pontos sobre superfície plana.

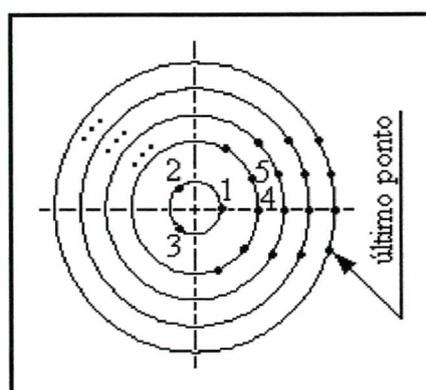


Figura 4.23 – Pontos sobre semi-esfera (vista de topo)

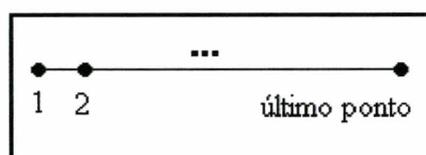


Figura 4.24 – Distribuição de pontos sobre segmento de reta.

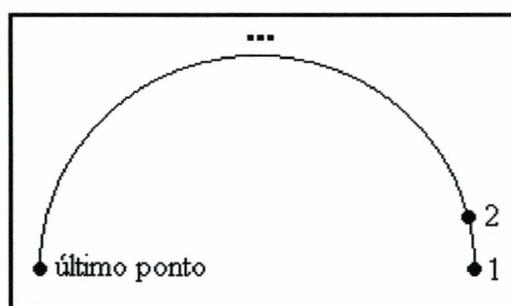


Figura 4.25 – Distribuição de pontos sobre semicircunferência.

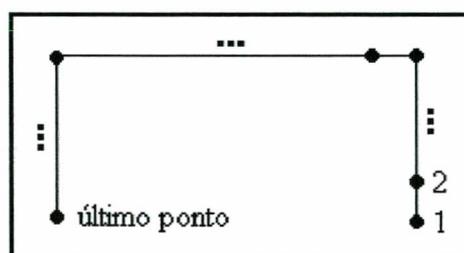


Figura 4.26 – Distribuição de pontos sobre retângulo.

4.4.4 – Convenções básicas nos casos teóricos.

Nas simulações numéricas dá-se aos hologramas os seguintes nomes:

Entrada – holograma exato de radiação da fonte teórica, obtido analiticamente ou por solução numérica da integral de Rayleigh, que servirá para identificar o conjunto de fontes elementares do modelo;

Saída – holograma aproximado fornecido pelo modelo de fontes elementares;

Comparação – holograma exato de radiação da fonte teórica, formado nos mesmos pontos do holograma de saída e servirá para ser comparando com este último, verificando-se o erro de aproximação do modelo.

A menos que especificado em contrário usou-se velocidade pico $v_0 = 1$ m/s para a fonte teórica.

Nas simulações, ao contrário dos casos experimentais, os valores do nível de pressão sonora não estão necessariamente calibrados, sendo porém comparáveis em cada caso e o erro comparável em todos os casos.

Em todas as simulações as fontes elementares são distribuídas sobre uma superfície plana (ou num segmento de reta) e a reta normal que passa pelo centro desta superfície (ou segmento de reta) passa também pelo centro da superfície (ou linha) dos hologramas, a menos que especificado em contrário. A superfície (linha) das fontes elementares está contida no plano XY, motivo pelo qual a posição das fontes é, geralmente apresentada apenas com duas coordenadas.

4.4.5 - Caso simulado 1.

Nesta simulação usa-se como fonte sonora um pistão rígido de pequeno diâmetro, posicionado em parede rígida infinita.

Uma superfície retangular de 0,4 x 0,5 m, na qual o pistão está contido em seu centro, é discreteada em 17 x 17 pontos e em cada ponto é posicionada uma fonte elementar, multipolo tipo zero ou monopolo. Trata-se de uma projeção para frente pois o holograma de entrada, condição de contorno, é tomado sobre uma superfície plana paralela à fonte sonora e distante da mesma de 0,05 m e o campo acústico é predito para uma superfície, também paralela, distante de 1 m. Os valores preditos são comparados com os valores exatos para esta superfície, sendo ainda mostrados os valores de velocidades das fontes elementares.

Os demais dados deste caso são:

Fonte: 1 pistão, centrado, com diâmetro $a = 0,01$ m;

Frequência: 1000 Hz;

Hologramas:

Entrada – plano de 0,4 x 0,5 m com 17 x 17 = 289 pontos, situado a 0,05 m da fonte;

Comparação e saída – 0,4 x 0,5 m com 17 x 17 pontos, situado a 1 m da fonte.

Fontes elementares: superfície 0,4 x 0,5 m com 17 x 17 fontes elementares.

Resultados: Figura 4.27 – Hologramas de comparação e saída; Figura 4.28 – velocidade na superfície das fontes elementares.

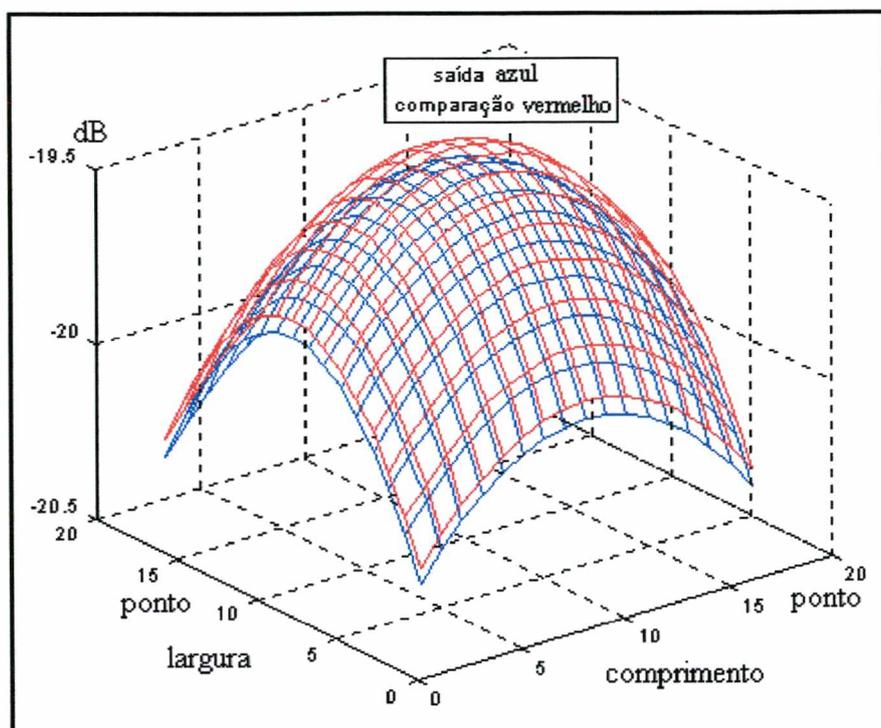


Figura 4.27 –Hologramas de comparação e saída, simulação 1.

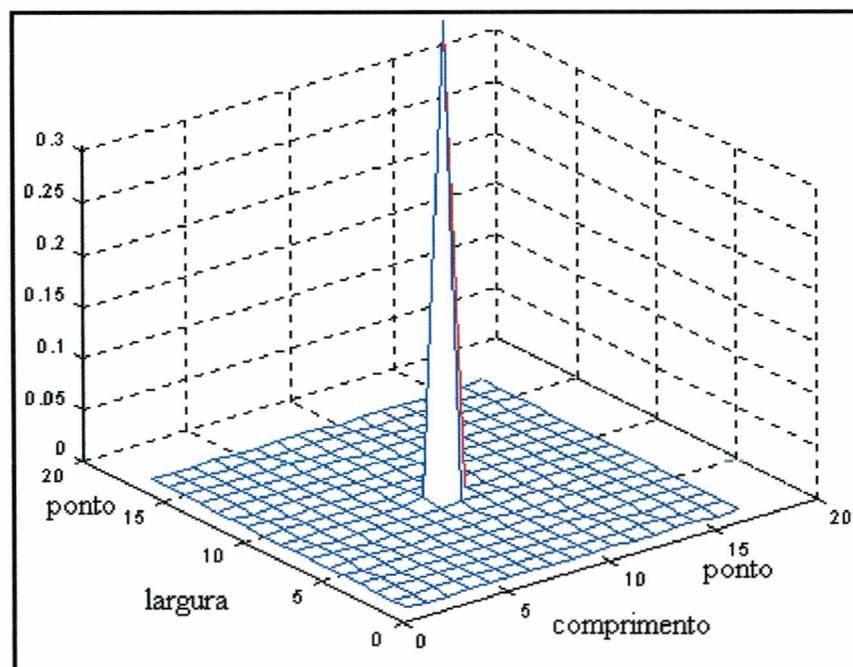


Figura 4.28 –Velocidade absoluta na superfície das fontes, simulação 1.

Observa-se, na Figura 4.27, que o campo acústico predito, holograma em azul identificado como “saída”, aproxima-se com grande precisão do exato, em vermelho, chamado de “comparação”.

A posição da fonte sonora, pistão, é perfeitamente identificada pelas velocidades das fontes elementares, como visto na Figura 4.28.

4.4.6 - Caso simulado 2.

Este caso é semelhante ao anterior, sendo a fonte sonora composta por 2 pistões iguais, de pequeno diâmetro. O campo acústico é predito para uma superfície paralela situada a 0,4 m do plano da fonte sonora, sendo também comparado ao exato. São ainda mostradas as velocidades de vibração das fontes elementares.

Abaixo os dados deste caso.

Fonte: 2 pistões com diâmetros iguais $a = 0,01$ m;

Posição dos pistões $(L_x/4, L_y/2)$ e $(3L_x/4, L_y/2)$

Frequência: 1000 Hz;

Hologramas:

Entrada – plano de $0,4 \times 0,5$ m com $17 \times 17 = 289$ pontos, situado a 0,05 m da fonte;

Comparação e saída – $0,4 \times 0,5$ m com 17×17 pontos, situado a 0,4 m das fontes.

Fontes elementares: superfície $L_x = 0,4 \times L_y = 0,5$ m com 17×17 fontes elementares.

Resultados: Figura 4.29 – Hologramas de comparação e saída; Figura 4.30 – Velocidade na superfície das fontes elementares.

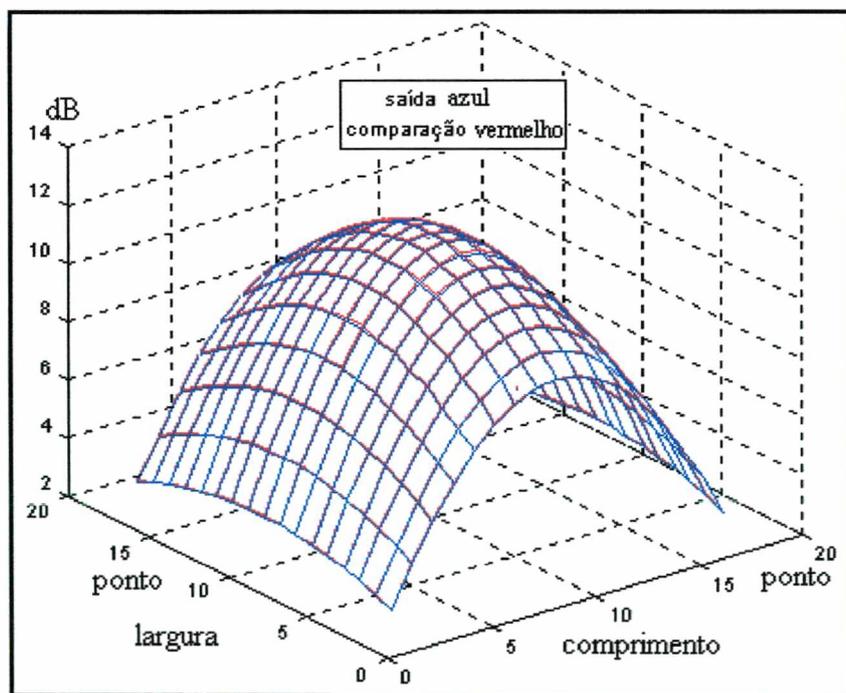


Figura 4.29 – Hologramas de comparação e saída, simulação 2.

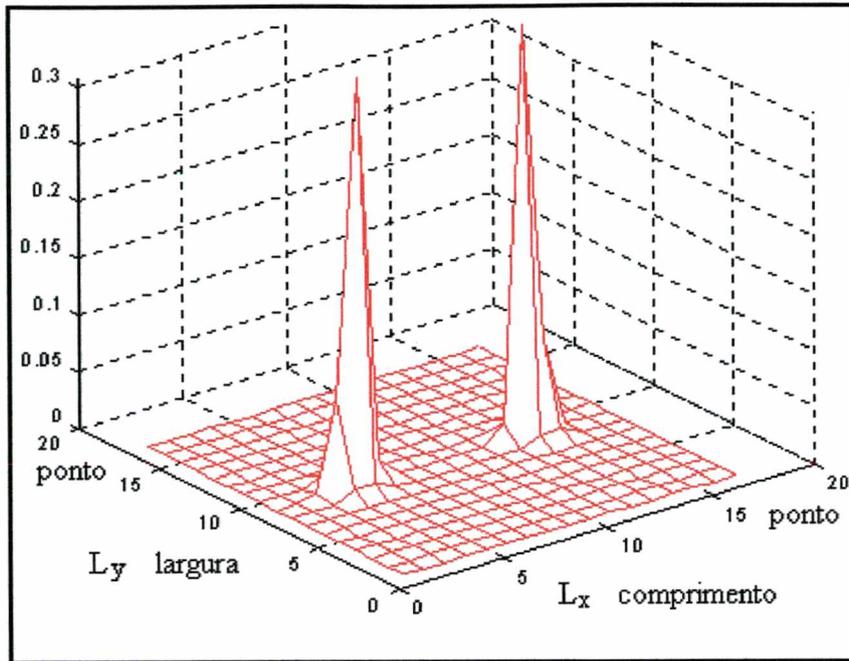


Figura 4.30 –Velocidade absoluta na superfície das fontes, simulação 2.

Nota-se, na Figura 4.29, que o campo acústico predito, em azul, coincide perfeitamente com o exato, que aparece em vermelho e que as posições dos pistões que compõe a fonte sonora estão perfeitamente identificadas, pelas velocidades das fontes elementares que são mostradas na Figura 4.30.

4.4.7 - Caso simulado 3.

Nesta simulação a fonte sonora é composta por 3 pistões iguais aos anteriores, sendo que um deles está defasado 180 graus em relação aos outros 2. São também mostrados os hologramas predito e exato e as velocidades das fontes elementares.

Os demais dados para a caso são:

Fonte: 3 pistões com diâmetros iguais $a = 0,01$ m;

Posição dos pistões

pistão 1 ($L_x/4, L_y/2$) e velocidade $v_1 = -1$ m/s;

pistão 2 ($L_x/2, L_y/2$) e velocidade $v_2 = +1$ m/s;

pistão 3 ($3L_x/4, L_y/2$) e velocidade $v_3 = -1$ m/s.

Frequência: 1000 Hz;

Hologramas:

Entrada – plano de $0,4 \times 0,5$ m com $33 \times 33 = 1089$ pontos, situado a $0,02$ m da fonte;

Comparação e saída – $0,4 \times 0,5$ m com 33×33 pontos, situado a $0,4$ m das fontes.

Fontes elementares: superfície $L_x = 0,4 \times L_y = 0,5$ m com 33×33 fontes elementares.

Resultados: Figura 4.31 – Hologramas de comparação e saída; Figura 4.32 – Velocidade na superfície das fontes elementares.

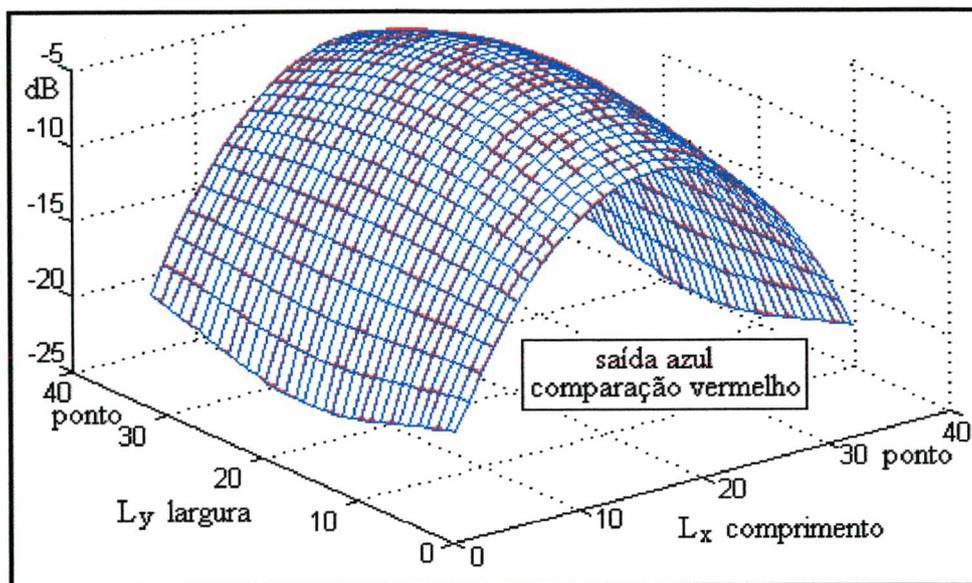


Figura 4.31 – Hologramas de comparação e saída, simulação 3.

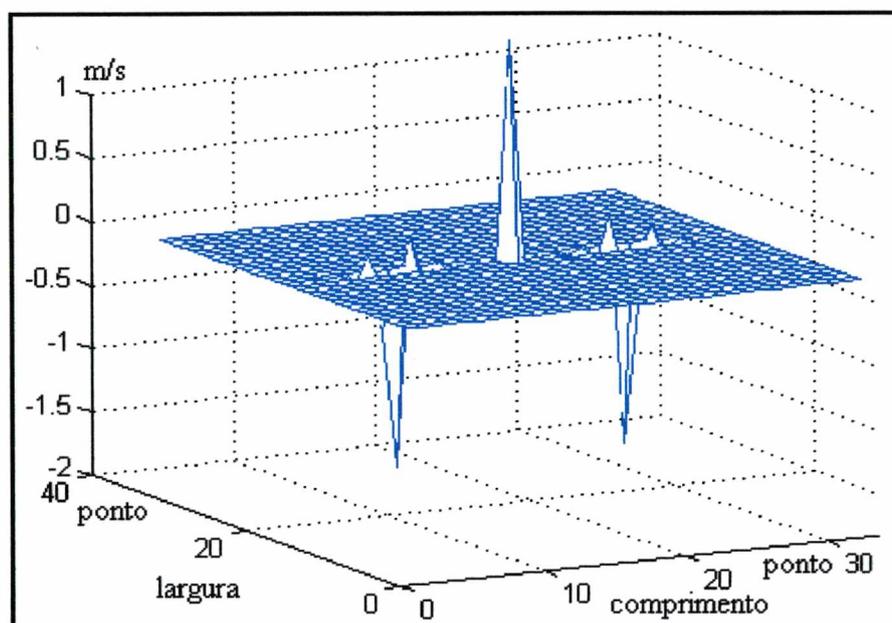


Figura 4.32 – Velocidade real na superfície das fontes, simulação 3.

Observa-se, Figura 4.31, uma perfeita concordância entre o campo acústico predito, em azul, e o exato, em vermelho.

A posição dos 3 pistões e a fase entre eles está claramente identificada, pelas velocidades das fontes elementares, na Figura 4.32.

4.4.8 - Caso simulado 4.

Neste caso simulado aplica-se o conceito de extensão de uma função para encontrar o número de fontes elementares a considerar no modelo, lembrando-se que $f: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ é uma extensão de $g: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$ ao conjunto \mathbf{A} se $g(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbf{D} \subset \mathbf{A}$. Ou seja o número de fontes e o posicionamento das mesmas deve ser feito de tal forma que o modelo consiga reproduzir com erro aceitável o holograma de entrada, sendo o “erro aceitável” dependente de cada problema em particular.

Os seguintes dados serão empregados para esta simulação.

Fonte 1 pistão com diâmetro $a = 0,20$ m;

Frequências: 500 Hz, 1 kHz e 4 kHz;

Hogramas:

Entrada – semicircunferência de raio 1 m com 90 pontos;

Comparação e saída – semicircunferência de raio 1 m com 25, 45 ou 360 pontos.

Fontes elementares: distribuídas sobre um segmento de reta de comprimento 0,6 m com 2, 3, 5, 7 ou 26 fontes elementares.

Resultados: Figura 4.33.

Esta seção ilustra o procedimento usado em todos os estudos de casos deste capítulo, qual seja: escolher o número de fontes elementares do modelo para que o mesmo consiga reproduzir o holograma de entrada, i. e., a condição de contorno, com erro aceitável.

O holograma predito, que aparece em verde e chamado “saída” e é calculado nos mesmos pontos que o de entrada, é comparado com este último, que aparece em azul e identificado por “comparação”.

Vê-se, Figura 4.33, que o modelo prediz de forma exata o holograma de entrada usando 5 fontes elementares para 125 Hz, 7 fontes para 1 kHz e 26 fontes para 4 kHz.

Escolhido o número de fontes e suas posições o campo acústico pode ser predito em outras posições, é o que mostra o caso simulado 5 (seção 4.4.9) que projeta o campo acústico para frente e o caso simulado 6 (seção 4.4.10) que projeta para trás, ambos usando o mesmo pistão desta seção.

Este procedimento está descrito, passo a passo, na página 47 ao final do capítulo 3.

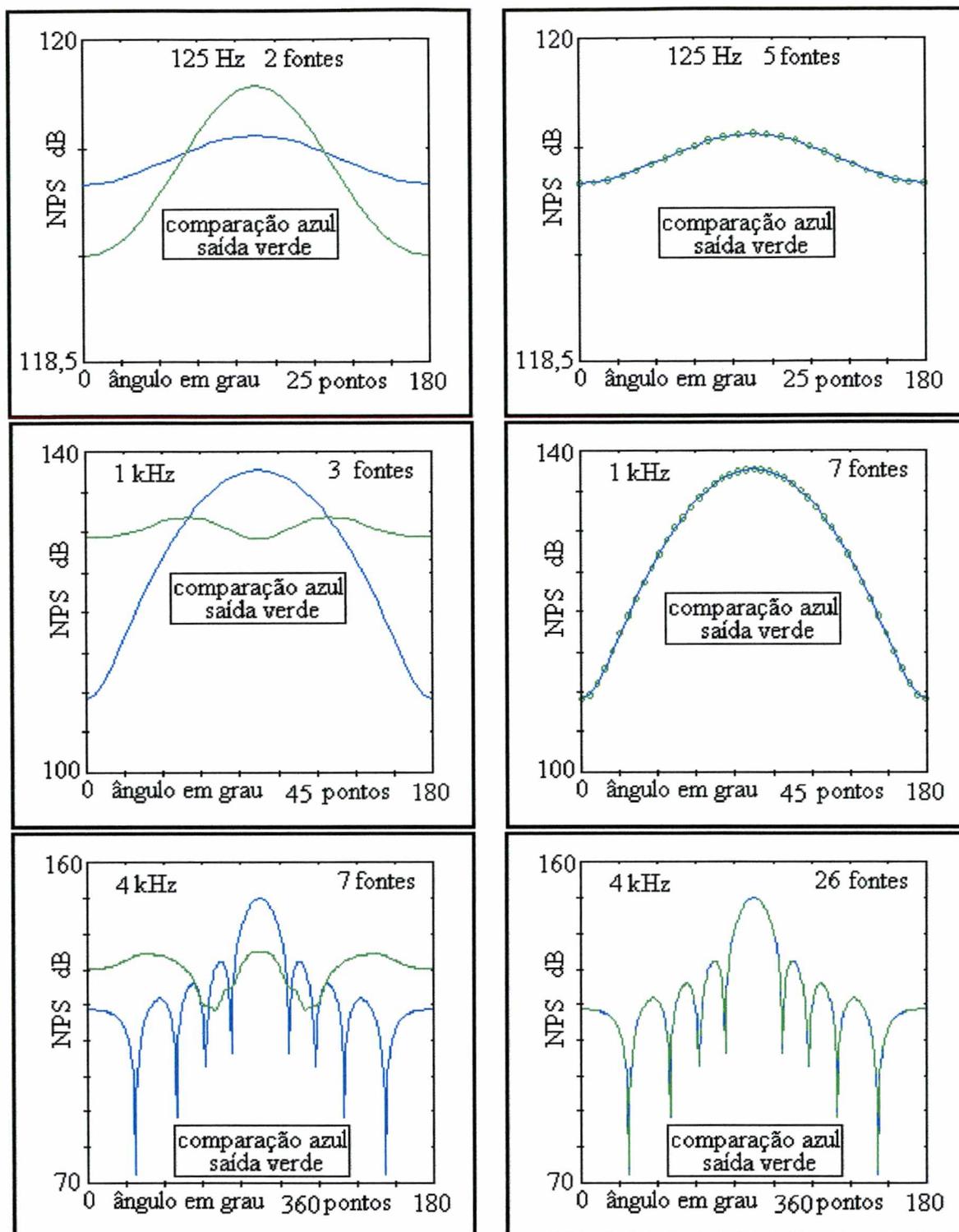


Figura 4.33 – Determinação do número de fontes elementares do modelo.

4.4.9 - Caso simulado 5.

O holograma de entrada é formado numa semicircunferência de raio 1 m e predito para um raio de 4 m. Esta mesma semicircunferência de saída é usada nos casos simulados 7 (seção 4.4.11) 8 (seção 4.4.12) com os quais este deve ser comparado, sendo diferente nestes casos o holograma de entrada.

Fonte 1 pistão com diâmetro $a = 0,20$ m;

Frequências: 500 Hz, 2 kHz e 4 kHz;

Hologramas:

Entrada – semicircunferência de raio 1 m com 90 pontos;

Comparação e saída – semicircunferência de raio 4 m com 360 pontos.

Fontes elementares: 50 distribuídas sobre um segmento de reta de comprimento 0,6 m.

Resultados: Figura 4.34, onde o erro em dB refere-se à diferença entre nível médio equivalente exato e o aproximado pelo modelo.

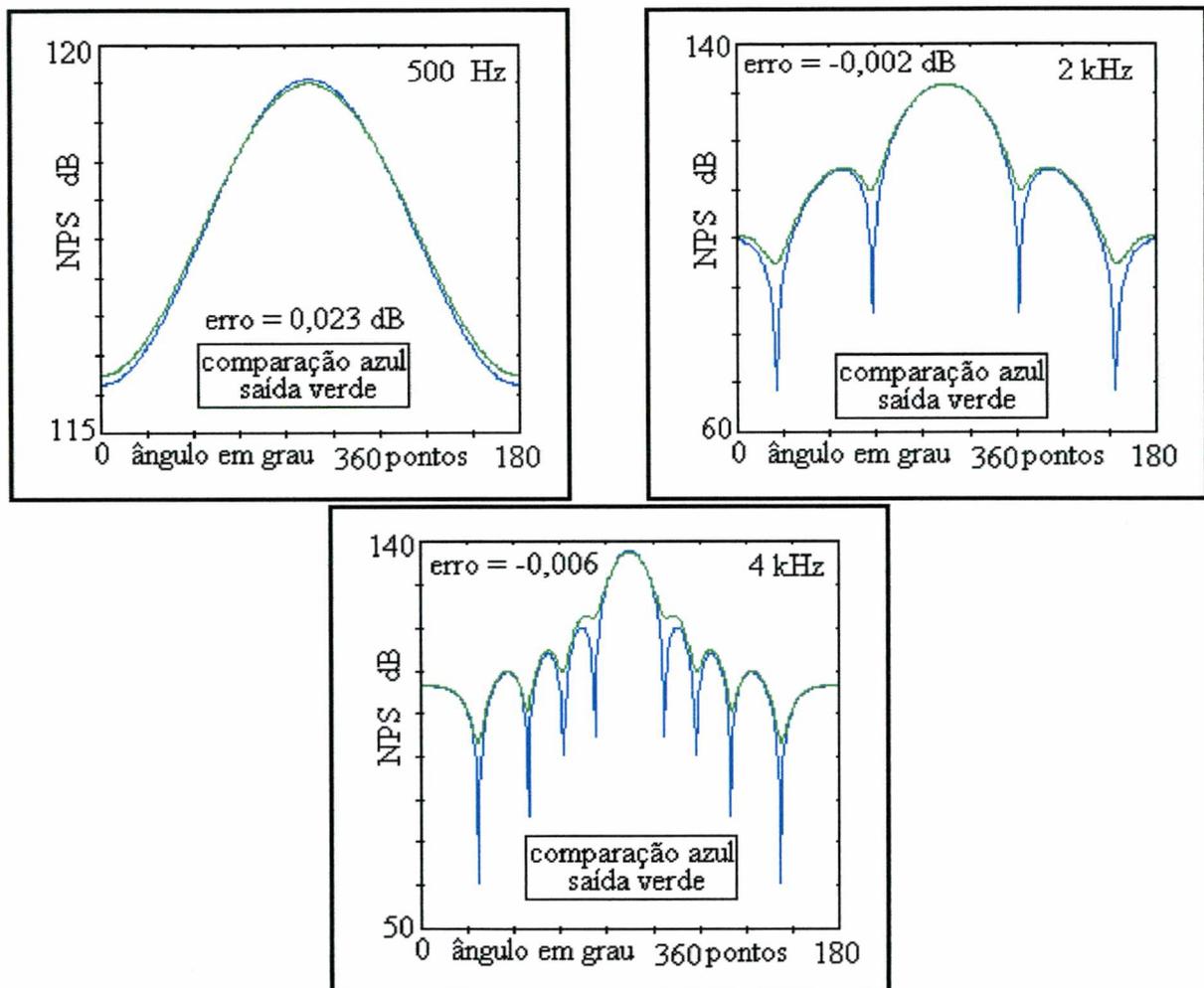


Figura 4.34 – Projeção do campo para frente, holograma de entrada semicircunferência.

4.4.10 - Caso simulado 6.

O holograma de entrada é formado numa semicircunferência de raio 4 m e predito para um raio de 1 m, i. e., mais próximo da fonte.

Fonte 1 pistão com diâmetro $a = 0,20$ m;

Frequências: 500 Hz, 2 kHz e 4 kHz;

Hogramas:

Entrada – semicircunferência de raio 4 m com 90 pontos;

Comparação e saída – semicircunferência de raio 1 m com 360 pontos.

Fontes elementares: 50 distribuídas sobre um segmento de reta de comprimento 0,6 m.

Resultados: Figura 4.35, onde o erro em dB refere-se à diferença entre nível médio equivalente exato e o aproximado pelo modelo.

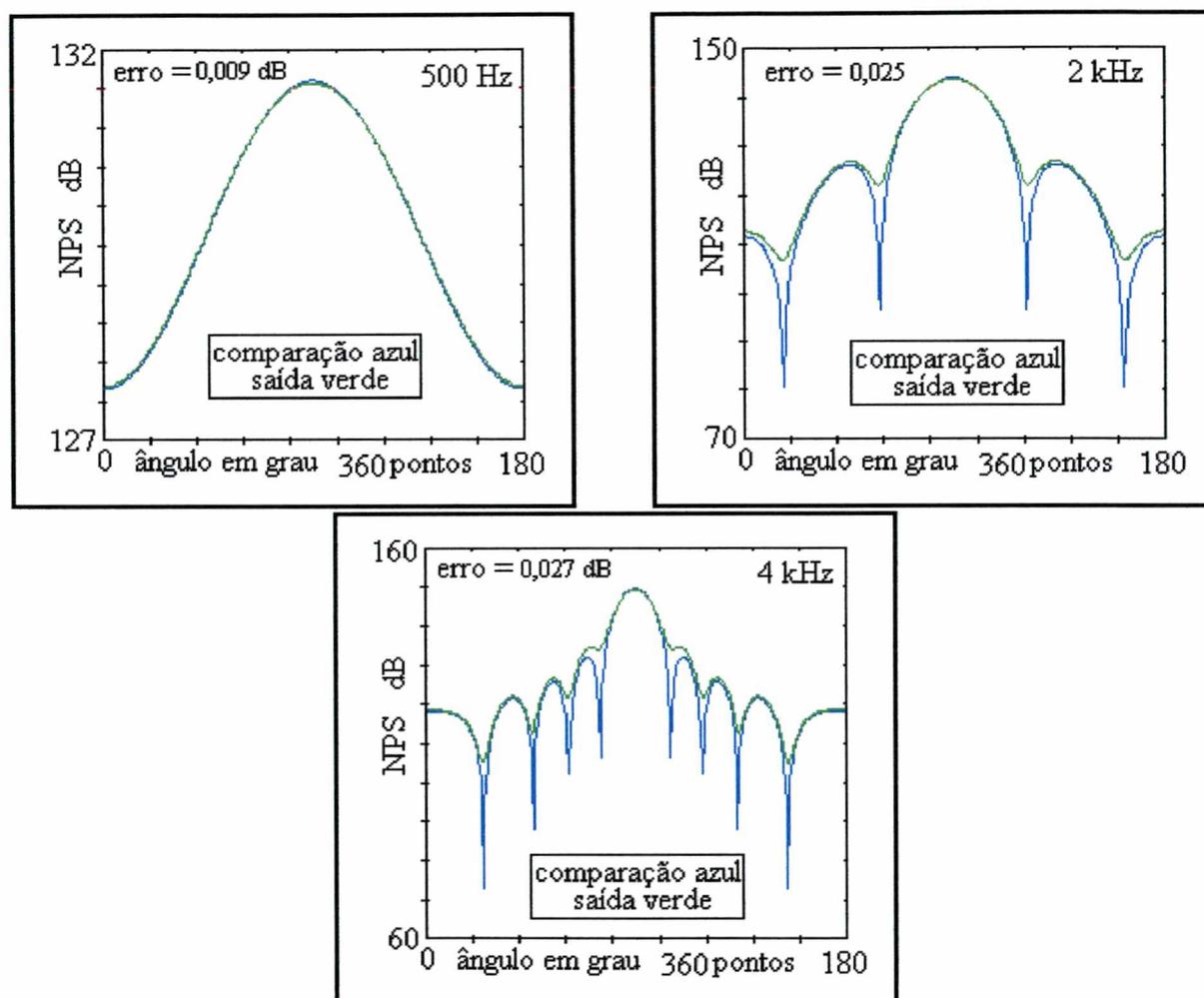


Figura 4.35 - Projeção do campo para trás.

4.4.11 - Caso simulado 7.

O holograma de entrada foi tomado sobre um retângulo e o holograma de saída sobre uma semicircunferência de raio 4 m, a mesma usada nos casos simulados 5 (seção 4.4.9) e 8 (seção 4.4.12) com os quais este caso deve ser comparado, pois o somente o holograma de entrada é diferente em cada caso.

Fonte 1 pistão com diâmetro $a = 0,20$ m;

Frequências: 500 Hz, 2 kHz e 4 kHz;

Hologramas:

Entrada – retângulo de altura 1 m e largura 1 m, com 90 pontos no total distribuídos 22 em cada lado vertical e 48 no lado horizontal;

Comparação e saída – semicircunferência de raio 4 m com 360 pontos.

Fontes elementares: 50 distribuídas sobre um segmento de reta de comprimento 0,6 m.

Resultados: Figura 4.36, onde o erro em dB refere-se à diferença entre nível médio equivalente exato e o aproximado pelo modelo.

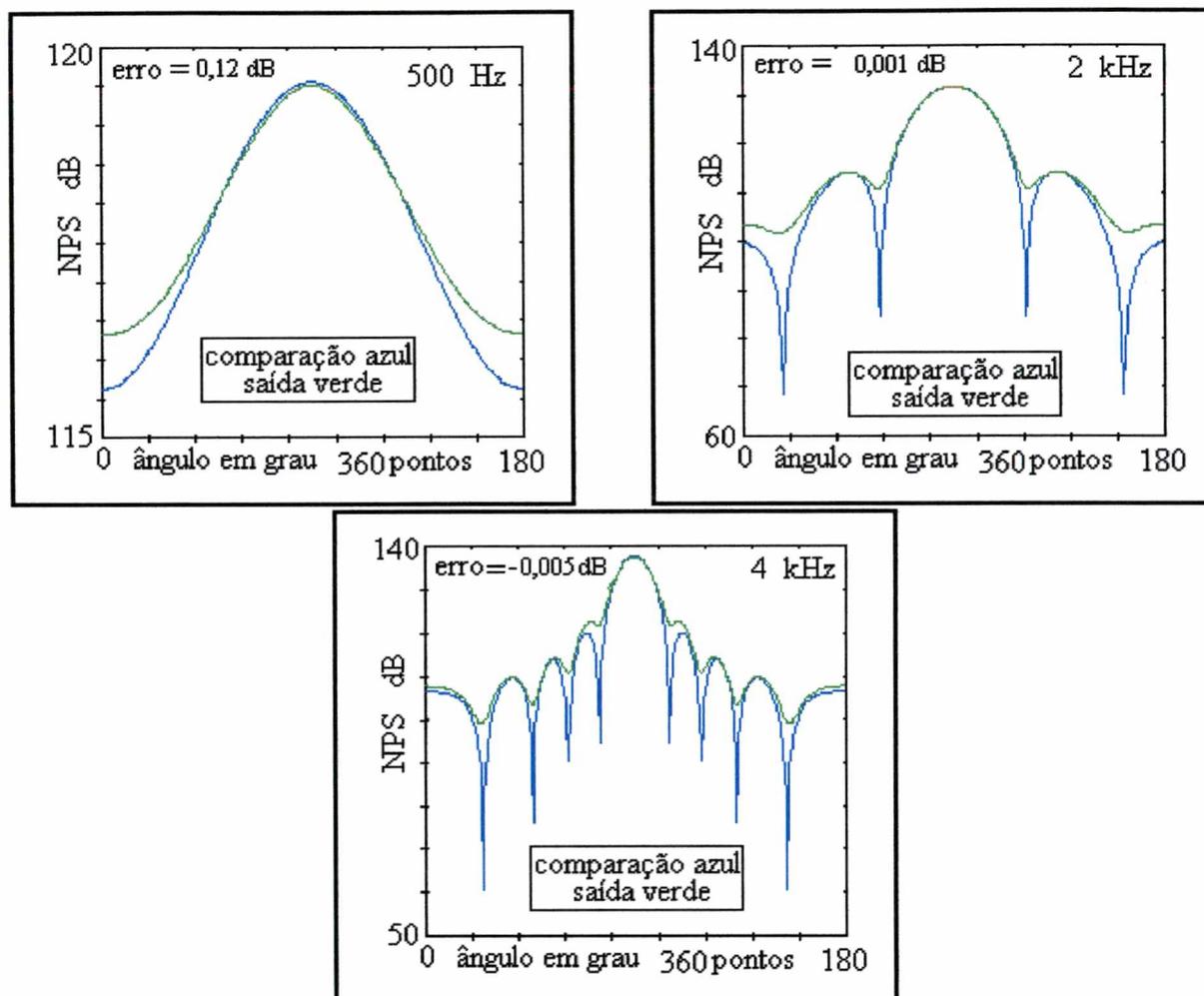


Figura 4.36 - Projeção do campo para frente, holograma de entrada retangular.

4.4.12 - Caso simulado 8.

O holograma de entrada foi tomado sobre um segmento de reta e o holograma de saída sobre uma semicircunferência de raio 4 m, a mesma usada nos casos simulados 5 (seção 4.4.9) e 7 (seção 4.4.11) com os quais este caso deve ser comparado, posto ser a diferença entre eles apenas o holograma de entrada.

Fonte 1 pistão com diâmetro $a = 0,20$ m;

Frequências: 500 Hz, 2 kHz e 4 kHz;

Hologramas:

Entrada – segmento de reta à 1 m de altura do pistão e comprimento de 3 m, com 90 pontos;

Comparação e saída – semicircunferência de raio 4 m com 360 pontos.

Fontes elementares: 50 distribuídas sobre um segmento de reta de comprimento 0,6 m.

Resultados: Figura 4.37, onde o erro em dB refere-se à diferença entre nível médio equivalente exato e o aproximado pelo modelo.

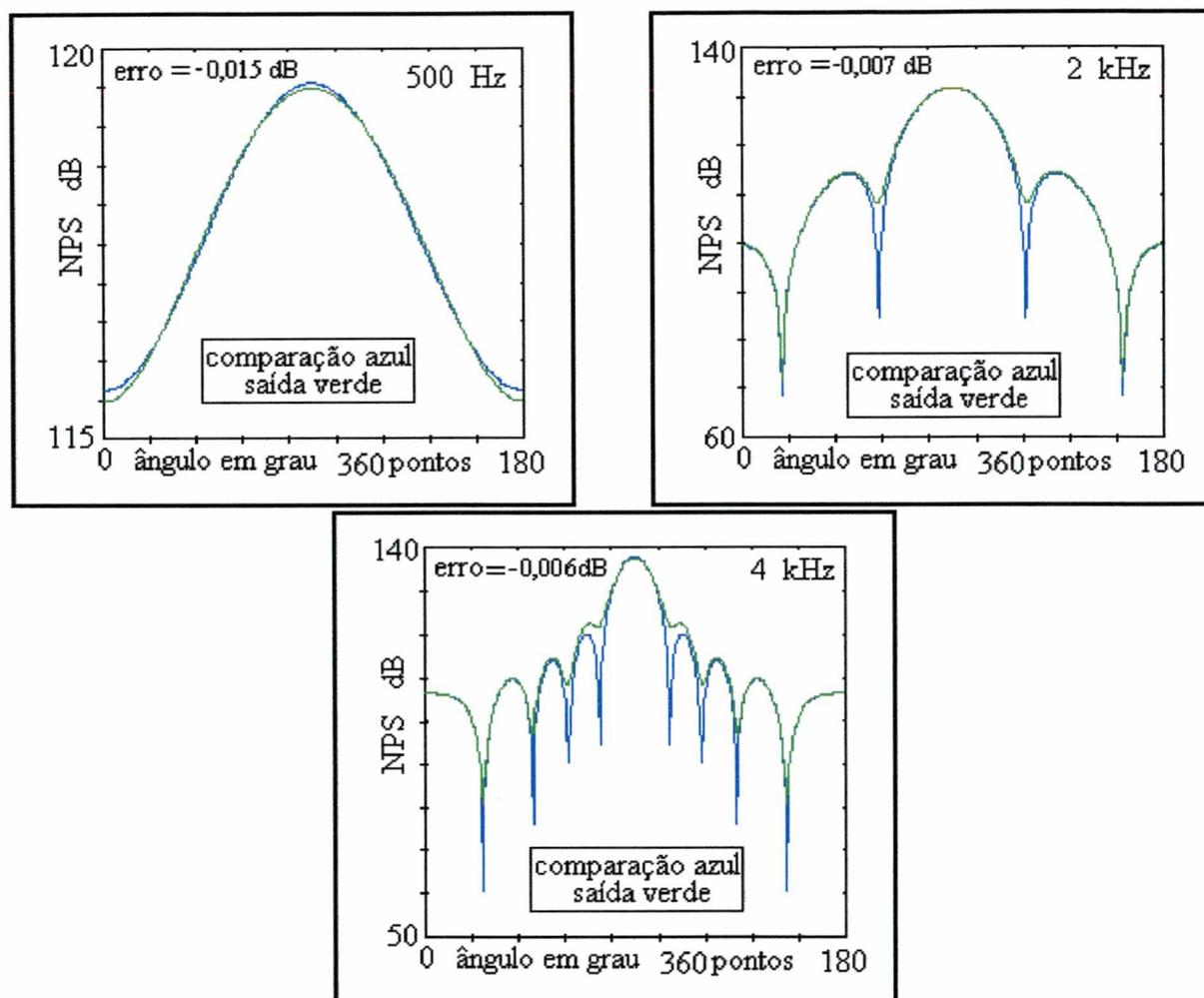


Figura 4.37 - Projeção do campo para frente, holograma de entrada reto.

Vê-se pelos casos simulados 5, 7 e 8, seções 4.4.9, 4.4.11 e 4.4.12 respectivamente, que a forma do holograma de entrada, nas frequências analisadas, não altera o erro de forma significativa, ou seja o modelo proposto consegue prever o campo acústico com erro desprezável.

4.4.13 - Caso simulado 9.

Usou-se como fonte teórica uma membrana circular vibrando no modo (0,1). Além da reconstrução do campo acústico identifica-se a velocidade no segmento de reta das fontes elementares onde se nota claramente o modo de vibração da membrana.

Fonte: membrana circular com diâmetro $a = 0,10$ m;

Frequência: 1 kHz;

Hologramas:

Entrada – semicircunferência de raio 1 m, discreteada em 100 pontos;

Comparação e saída – semicircunferência de raio 4 m com 90 pontos.

Fontes elementares: 200 distribuídas sobre um segmento de reta de comprimento 1 m.

Resultados: Figura 4.38.

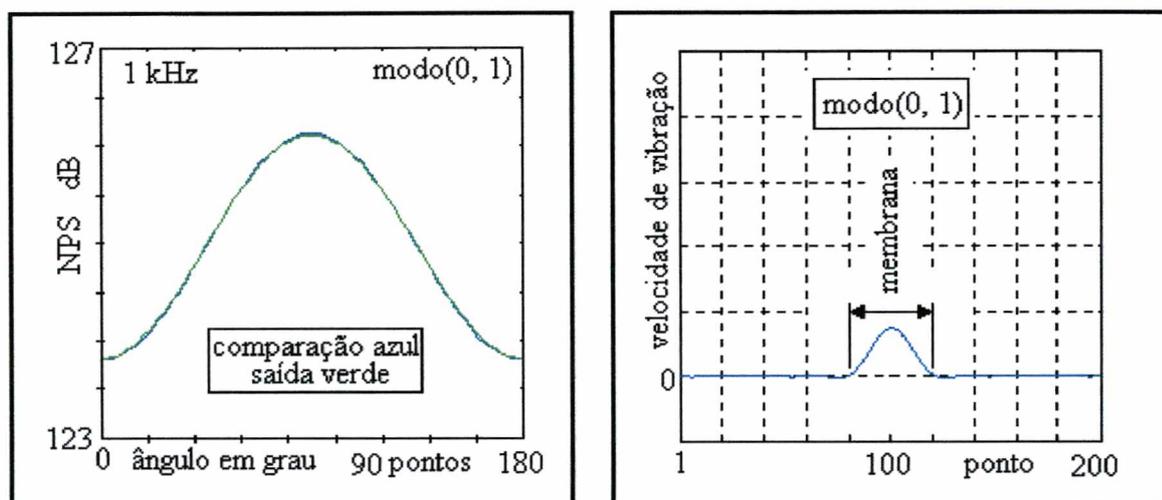


Figura 4.38 – Ruído radiado por membrana vibrando no modo (0, 1)

4.4.14 - Caso simulado 10.

Usou-se como fonte uma membrana circular vibrando no modo (0, 2). Além da reconstrução do campo acústico identificou-se a velocidade no segmento de reta das fontes elementares, onde se nota claramente o modo de vibração da membrana.

Fonte membrana circular com diâmetro $a = 0,10$ m;

Frequência: 4 kHz;

Hologramas:

Entrada – semicircunferência de raio 1 m, discreteada em 100 pontos;

Comparação e saída – semicircunferência de raio 4 m com 90 pontos.

Fontes elementares: 200 distribuídas sobre um segmento de reta de comprimento 1 m.

Resultados: Figura 4.39.

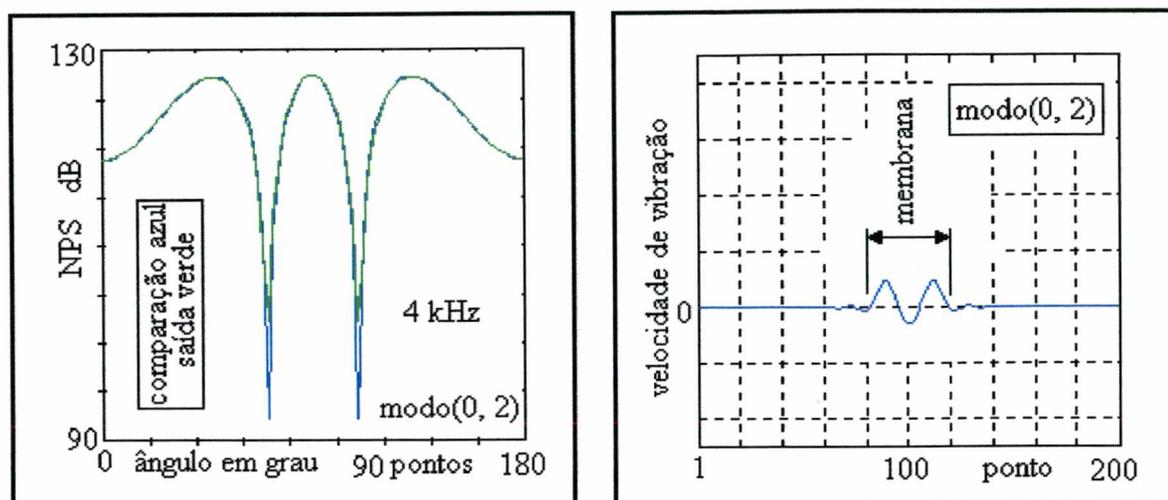


Figura 4.39 – Ruído radiado por membrana vibrando no modo (0, 2)

4.4.15 - Caso simulado 11.

Usou-se como fonte uma membrana circular vibrando no modo (0, 3). Além da reconstrução do campo acústico identificou-se a velocidade no segmento de reta das fontes elementares onde se nota claramente o modo de vibração da membrana.

Fonte: membrana circular com diâmetro $a = 0,10$ m;

Frequência: 4 kHz;

Hologramas:

Entrada – semicircunferência de raio 1 m, discretizada em 100 pontos;

Comparação e saída – semicircunferência de raio 4 m com 90 pontos.

Fontes elementares: 200 distribuídas sobre um segmento de reta de comprimento 1 m.

Resultados: Figura 4.40.

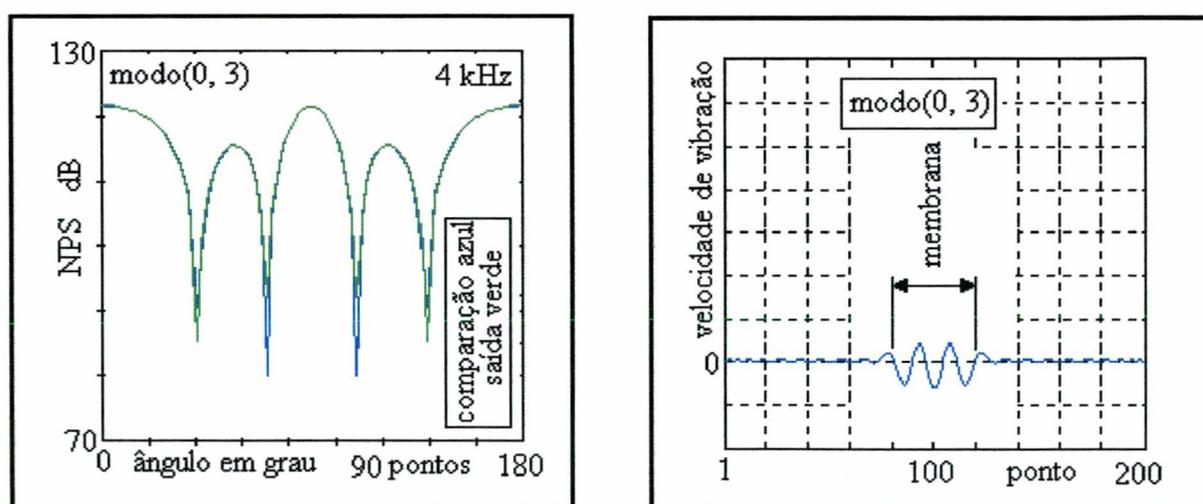


Figura 4.40 – Ruído radiado por membrana vibrando no modo (0, 3)

Nos casos simulados 9 a 11, seções 4.4.13 a 4.4.15, que tratam da radiação de membranas nas condições descritas na seção 4.4, vê-se que os campos acústicos preditos, curvas verdes, aproximam-se com erro desprezável dos campos acústicos exatos, curvas “azuis”. Observa-se, também, que os modos de vibração das membranas ficaram perfeitamente identificados pelas velocidades das fontes elementares.

4.4.16 - Caso simulado 12.

Usou-se como fonte uma placa retangular vibrando nos modos (1, 1) e (1, 2). Além da reconstrução do campo acústico para o modo (1, 1) identificou-se a velocidade na superfície das fontes elementares onde se nota claramente os modos (1, 1) e (1, 2) de vibração da placa.

Fonte placa retangular de 0,2 x 0,2 m;

Frequência: 100 Hz;

Hologramas:

Entrada – semi-esfera de raio 0,5 m, discretizada em 67 pontos;

Comparação e saída – superfície plana de 0,6 x 0,6 m distante 0,5 m da placa vibrante discretizada com $16 \times 16 = 256$ pontos.

Fontes elementares: 256 distribuídas sobre uma superfície plana de 0,6 x 0,6 m discretizada em 16×16 pontos.

Resultados: Figuras 4.41 e 4.42.

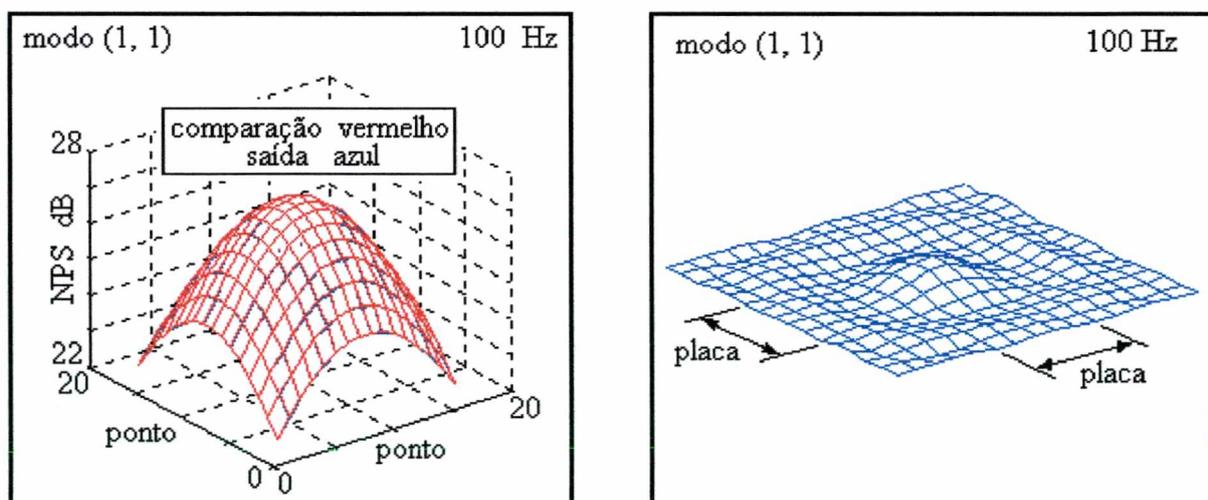


Figura 4.41 – Radiação de placa

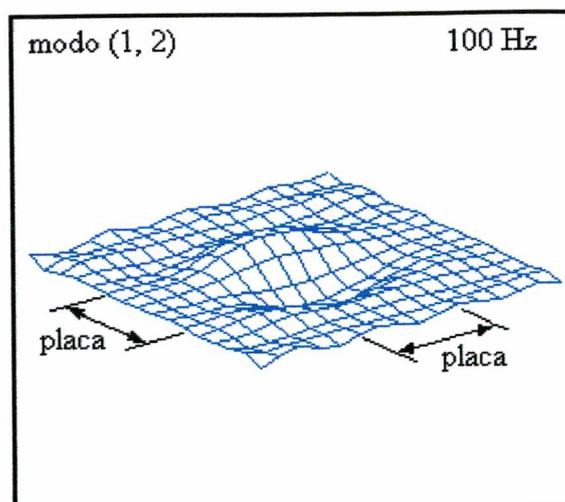


Figura 4.42 – Identificação do modo (1, 2) de placa

4.4.17 - Caso simulado 13.

Usou-se como fonte uma placa retangular vibrando no modo (2, 2). Identificou-se a velocidade na superfície das fontes elementares onde se nota claramente o modo de vibração da placa.

Fonte placa retangular de 0,15 x 0,15 m;

Frequência: 100 Hz;

Hologramas:

Entrada – superfície plana de 0,6 x 0,6 m, situada a 0,05 m da placa vibrante e discreteada em $20 \times 20 = 400$ pontos;

Fontes elementares: 400 distribuídas sobre uma superfície plana de 0,6 x 0,6 m discreteada em 20×20 pontos.

Resultado: Figura 4.43.

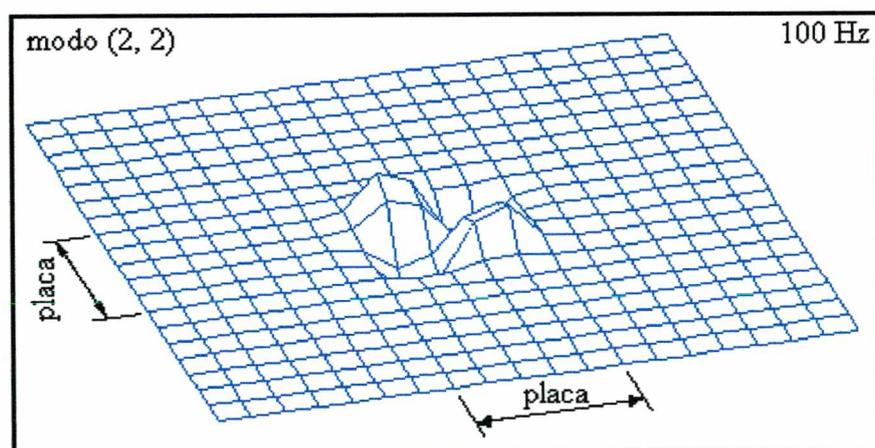


Figura 4.43 – Identificação do modo (2, 2) de placa.

4.4.18 – Número de fontes elementares.

O número e a posição das fontes elementares são arbitrários, dependendo da experiência e sensibilidade do pesquisador [73]. Nesta seção determinou-se o número mínimo de fontes elementares para o qual o modelo representa, com erro desprezável, o holograma de entrada. Foram utilizados os seguintes parâmetros:

Fonte sonora: pistão circular rígido de diâmetro d , em parede rígida infinita, radiando em campo livre, apenas para um dos lados;

Posição das fontes elementares: sobre um segmento de reta de comprimento $3d$, situada no mesmo plano do pistão, com o centro deste coincidindo com a posição média do segmento de reta. As fontes elementares foram posicionadas sobre o segmento de reta como uma partição deste.

Holograma de entrada: semicircunferência de raio 1 m, discretizada em 100 pontos;

Holograma de saída e comparação: semicircunferência de mesmo raio (1 m) discretizada em 360 pontos.

A Figura 4.44 mostra a geometria do problema e o número de fontes elementares suficientes em função da frequência, para que o modelo consiga reproduzir o holograma de entrada com erro desprezável.

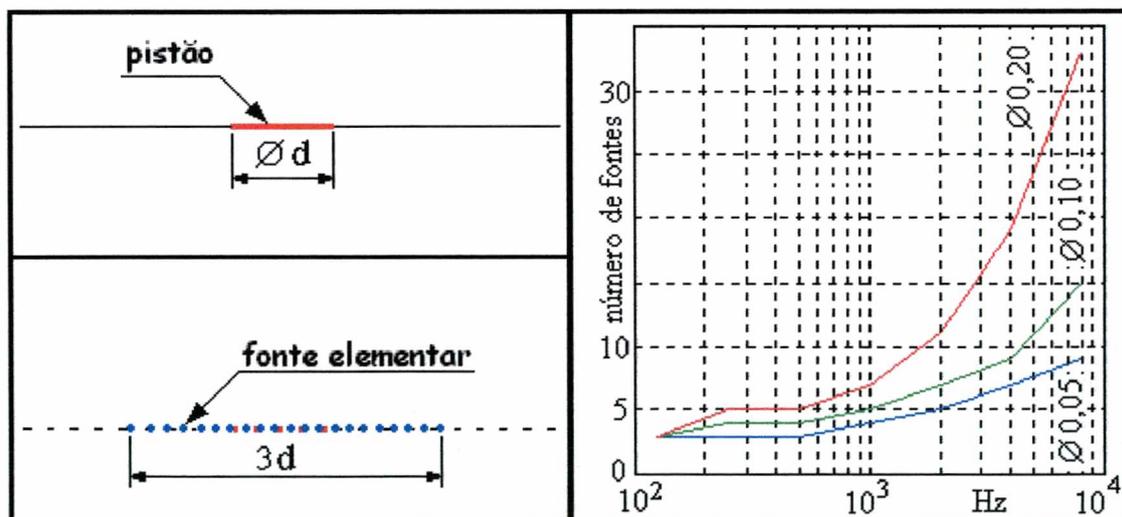


Figura 4.44 – Número de fontes elementares

Na Figura 4.44 as curvas: azul refere-se a um pistão de diâmetro de 0,05 m, com segmento de reta das fontes de 0,15 m; verde a pistão de diâmetro 0,10 m, com segmento de reta de 0,30 m e vermelha a pistão de diâmetro 0,20 m, com segmento de reta de 0,6 m.

Nota-se que o número suficiente de fontes elementares aumenta com a frequência e com o diâmetro do pistão.

Sumariando, o modelo de radiação proposto, por fontes elementares identificadas pela solução, de quadrados mínimos lineares, do problema inverso consegue:

- i) Predizer o campo acústico radiado externamente à fonte com erro desprezável na potência sonora;
- ii) identificar a posição de fontes sonoras e
- iii) predizer modos de vibração de fontes planas.

Capítulo 5

Análise de erros.

5.1 – Introdução.

O modelo de radiação proposto neste trabalho consiste em encontrar uma solução de quadrados mínimos lineares (de norma 2 mínima). Mostrou-se na seção 2.2 que o erro, no cálculo da potência sonora radiada, está diretamente relacionado à norma 2, conforme a equação (2.3). Portanto o que se busca é uma solução cujo erro na potência sonora seja mínimo. Na seção 3.4 prova-se que a solução procurada existe e é única, sendo dada pela equação (3.20), para a qual o erro máximo na potência sonora é limitado pelo número de condição da matriz representativa do problema linear; de acordo com a equação (3.29) da seção 3.5.

Em igualdade de outras condições viu-se na seção 3.5, figura 3.2, que o número de condição da matriz representativa do problema linear diminui com o aumento da distância Euclidiana entre a fonte e o ponto de observação.

O erro da aproximação pode ser previamente estabelecido, como se viu ao final da seção 2.5, pois *“fora de uma esfera envolvendo qualquer fonte de ruído, seu campo acústico pode ser aproximado, com a precisão desejada, por uma soma finita de multipolos posicionados no centro desta esfera”* [92].

Nos casos experimentais 1 (seção 4.3.1, figuras 4.8 e 4.9) e 7 (seção 4.3.7, figura 4.15), variou-se de um para o outro apenas o número de pontos do holograma de entrada. O mesmo foi feito com os casos experimentais 2 (seção 4.3.2, figura 4.10), 8 (seção 4.3.8, figura 4.16) e 9 (seção 4.3.9, figura 4.17) e também com os casos experimentais 5 (seção 4.3.5, figura 4.13) e 10 (seção 4.3.10, figura 4.18). Comparando-se os resultados, mostrados nas figuras mencionadas, vê-se que a mudança no número de pontos do holograma de entrada não afetou o erro na potência sonora.

Diferentes formas nos hologramas de entrada foram estudadas nos casos simulados 5 (seção 4.4.9, figura 4.34), 7 (seção 4.4.11, figura 4.36) e 8 (seção 4.4.12, figura 4.37), onde se nota claramente que o erro na potência sonora não foi afetado pela forma geométrica sobre a qual foi tomado o holograma de entrada.

No presente capítulo complementa-se a análise de erros, considerando-se a influência do posicionamento incorreto do microfone, sendo analisados dois casos:

i) erro sistemático, na posição do microfone, variando de 1 a 20 mm e sua influência sobre a fase e sobre o nível de pressão sonora;

ii) erro aleatório de distribuição normal, na posição do microfone, e sua influência no nível de pressão e na potência sonora.

5.2 – Erro sistemático na posição do microfone.

O campo sonoro em geral, para pequenas variações de posição apresenta pequenas variações de nível de pressão sonora (NPS) porém é muito sensível na fase para a qual uma pequena variação de posição pode representar grande variação de fase. Usando como fonte sonora uma membrana, em parede rígida infinita e com centro em $(0, 0, 0)$, de diâmetro 0,10 m vibrando no modo $(0, 1)$; um ponto fixo $x_0 = (0,5, 0,5, 0,5)$ m e um ponto variável $x = x_0 + (\Delta x, \Delta x, \Delta x)$ sendo $\Delta x \in \{1, 2, 3, \dots, 20\} \cdot 10^{-3}$ m, i. e., aplicou-se em cada coordenada de x um erro Δx de 1 a 20 mm, com variação de 1 em 1 mm. Em cada caso calculou-se a diferença na fase e no NPS entre os pontos x_0 e x . Estes valores estão na Figura 5.1, cujos valores foram computados para as frequências centrais das bandas de 1/1 de oitava de 63 a 8 kHz.

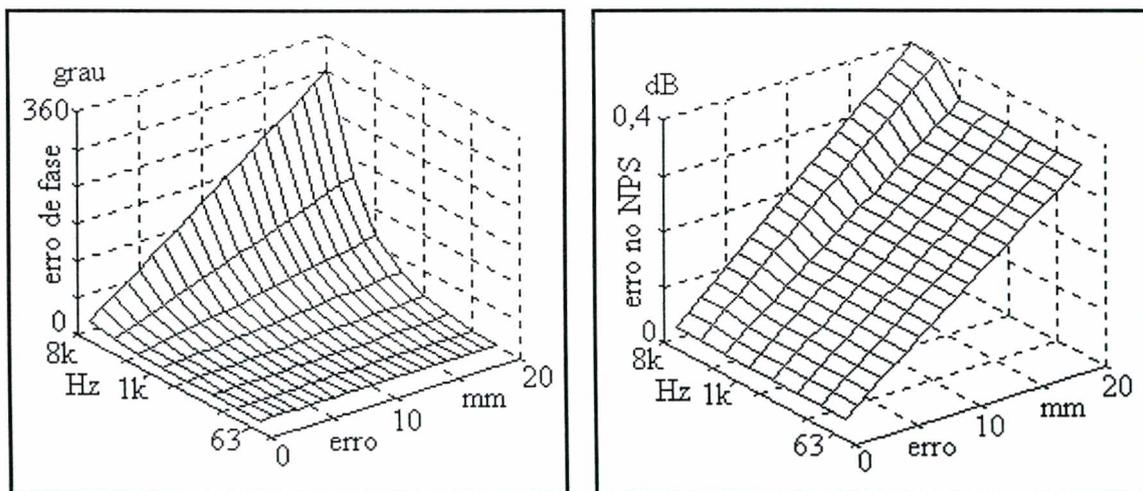


Figura 5.1 – Erros na fase e no Nível de Pressão Sonora com a mudança de posição

5.3 – Erro aleatório, de distribuição normal, na posição do microfone.

Usando a mesma fonte acima (membrana) e aplicando-se nas posições de medição do holograma de entrada (que serve para identificar a fonte) medido em 100 pontos igualmente distribuídos sobre uma semicircunferência de raio 1,1 m, com centro em (0, 0, 0), um erro de posição aleatório de distribuição normal com valores no intervalo $[-1, 1] \cdot 10^{-2}$ m, calculou-se o erro entre as reconstruções do campo sonoro sem e com erro de posição no holograma de entrada. O NPS foi reconstruído em noventa pontos sobre os raios 1,2; 1,3; 1,6; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 e 10 m para as frequências centrais de 1/1 de oitava de 63 Hz a 4 kHz. Os resultados estão nas Figuras 5.2 a 5.8. Os erros grandes verificados nas frequências de 2 e 4 kHz ocorrem fora da região central, 90 graus, que é o sentido preferencial de radiação desta fonte. Estes erros não são inerentes ao modelo proposto, mas estão relacionados à precisão do posicionamento dos microfones para medição do holograma, mostrando a sensibilidade do modelo a estes erros.

Com a mesma fonte e mesmo holograma de entrada, sem erro de posicionamento, o NPS sonora foi reconstruído nos raios 1,1 (mesmo raio do holograma de entrada); 1,5; 5 e 10 m para as frequências centrais de 1/1 de oitava de 63 Hz a 8 kHz. Tanto no holograma de entrada como nas reconstruções foram usados 100 pontos igualmente distribuídos sobre a semicircunferência. Cada holograma de NPS reconstruído foi comparado com o valor exato do NPS radiado pela fonte para as respectivas posições. Os erros, estes inerentes ao modelo, entre o valor exato e o reconstruído estão nas Figuras 5.9 a 5.12.

Na Figura 5.13 são comparados os hologramas de NPS exato (azul) e reconstruído pelo modelo (verde).

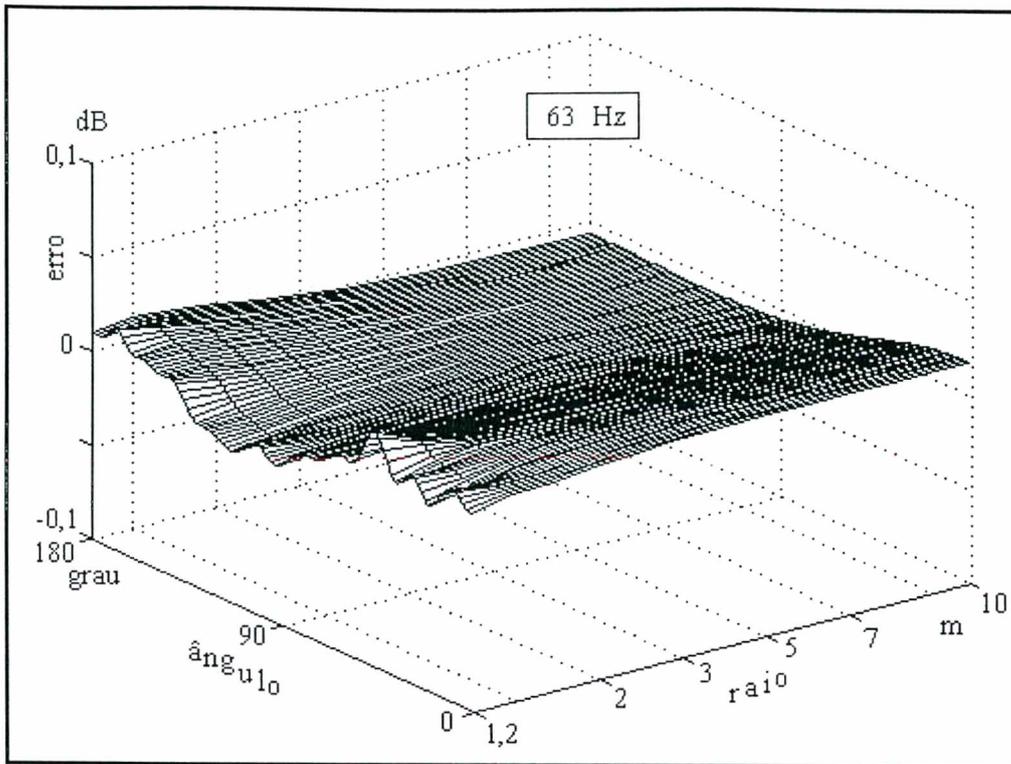


Figura 5.2 – Erro no NPS devido a erro de posição no holograma 63 Hz

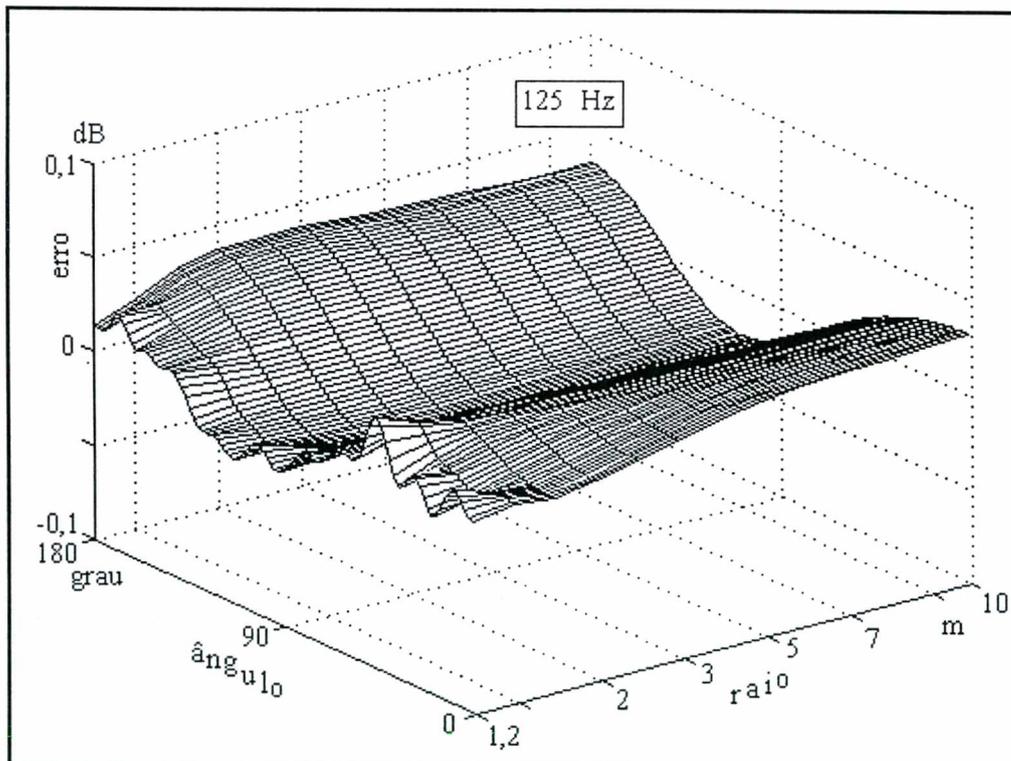


Figura 5.3 – Erro no NPS devido a erro de posição no holograma 125 Hz

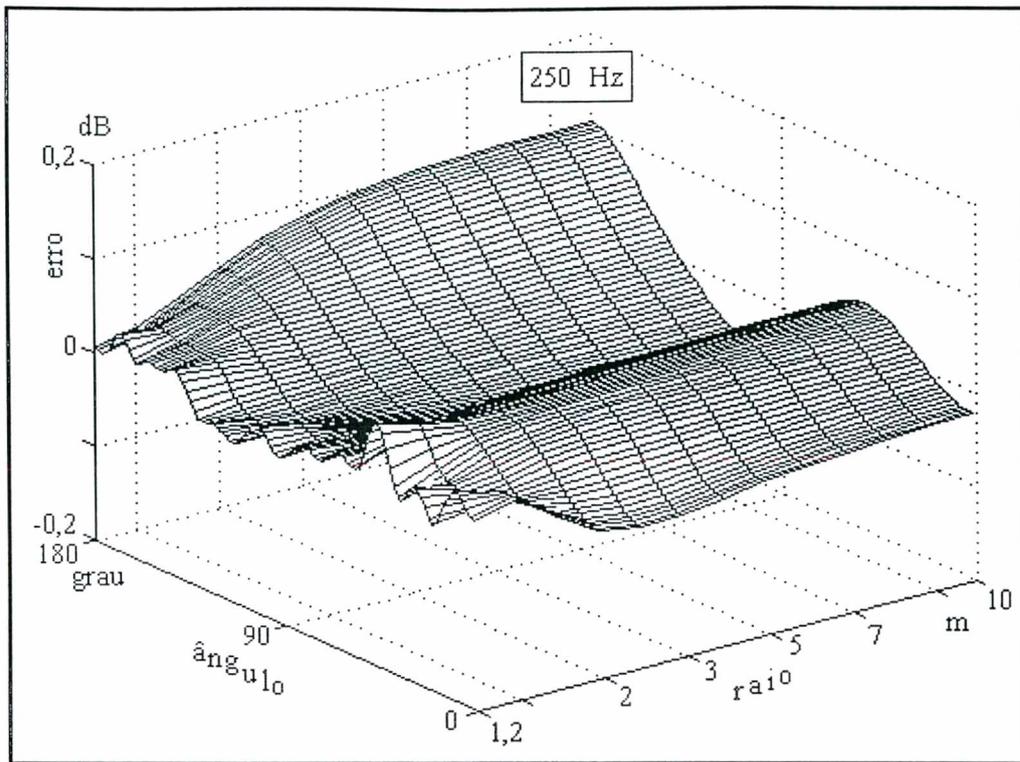


Figura 5.4 – Erro no NPS devido a erro de posição no holograma 250 Hz

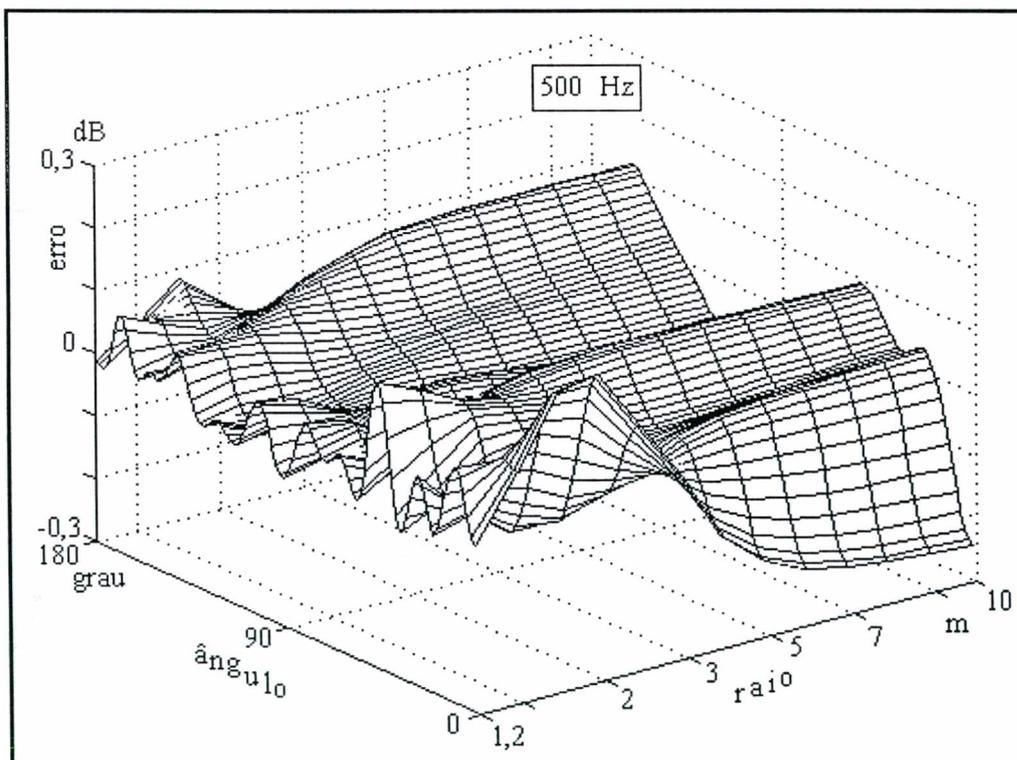


Figura 5.5 – Erro no NPS devido a erro de posição no holograma 500 Hz

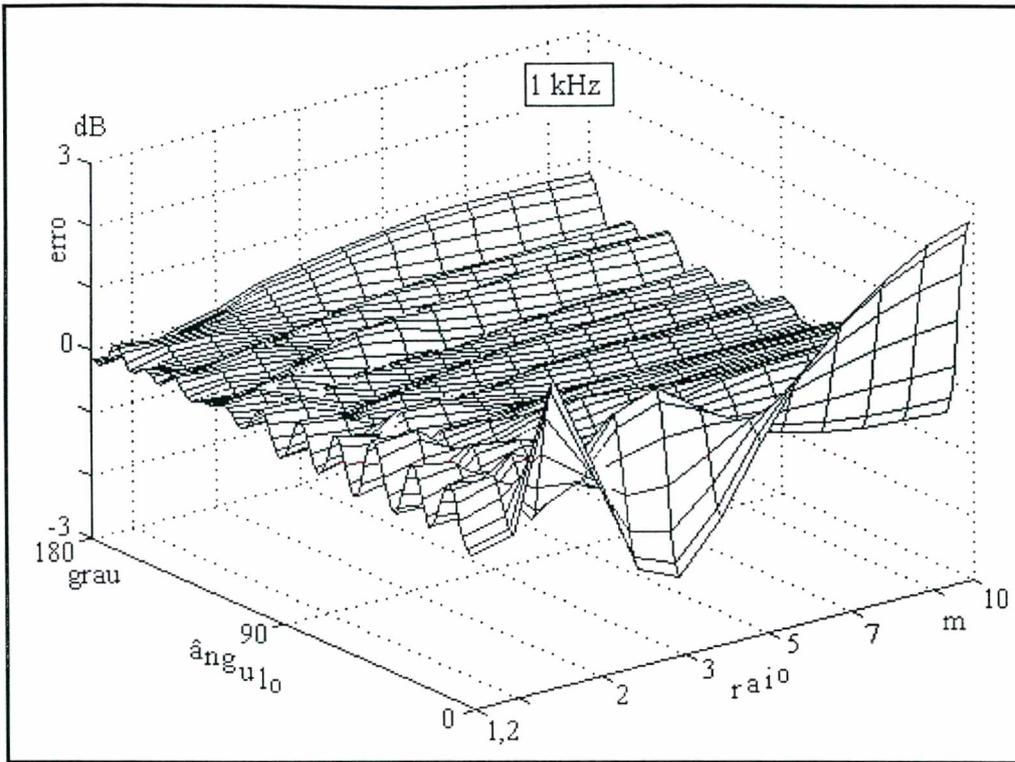


Figura 5.6 – Erro no NPS devido a erro de posição no holograma 1 kHz

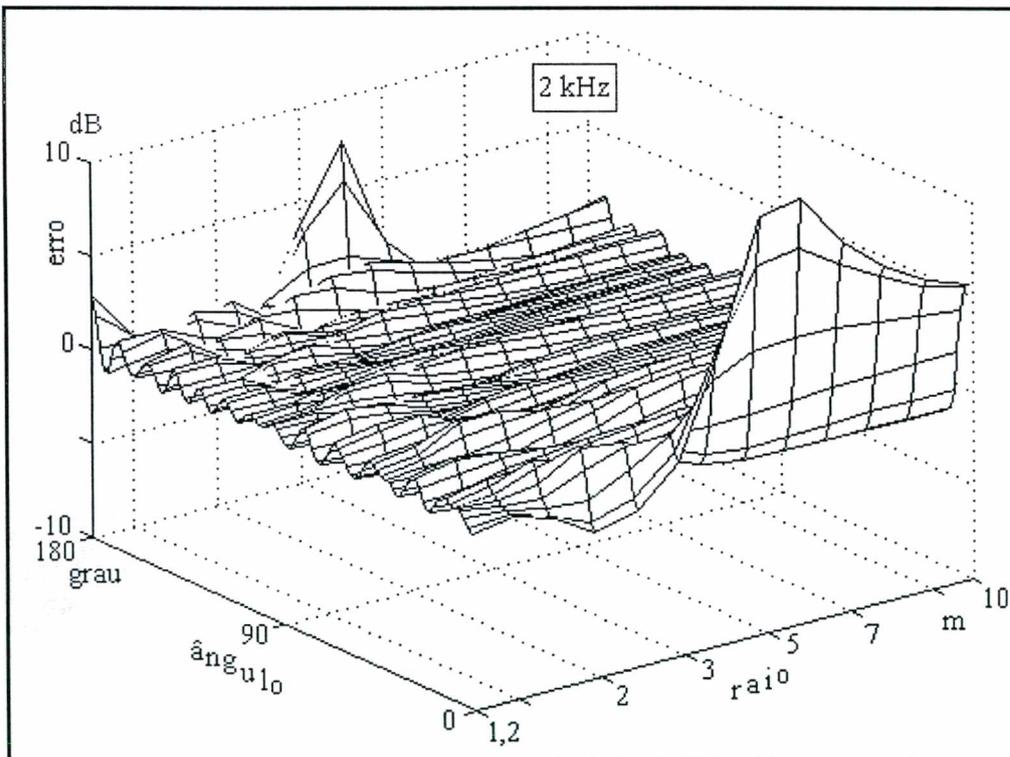


Figura 5.7 – Erro no NPS devido a erro de posição no holograma 2 kHz

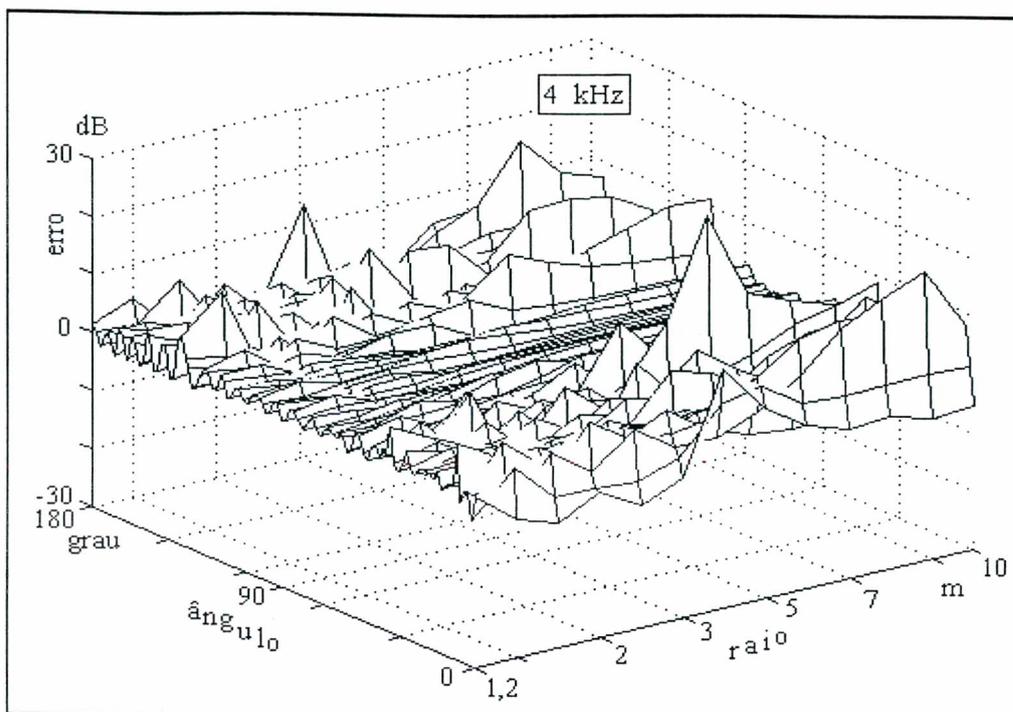


Figura 5.8 – Erro no NPS devido a erro de posição no holograma 4 kHz

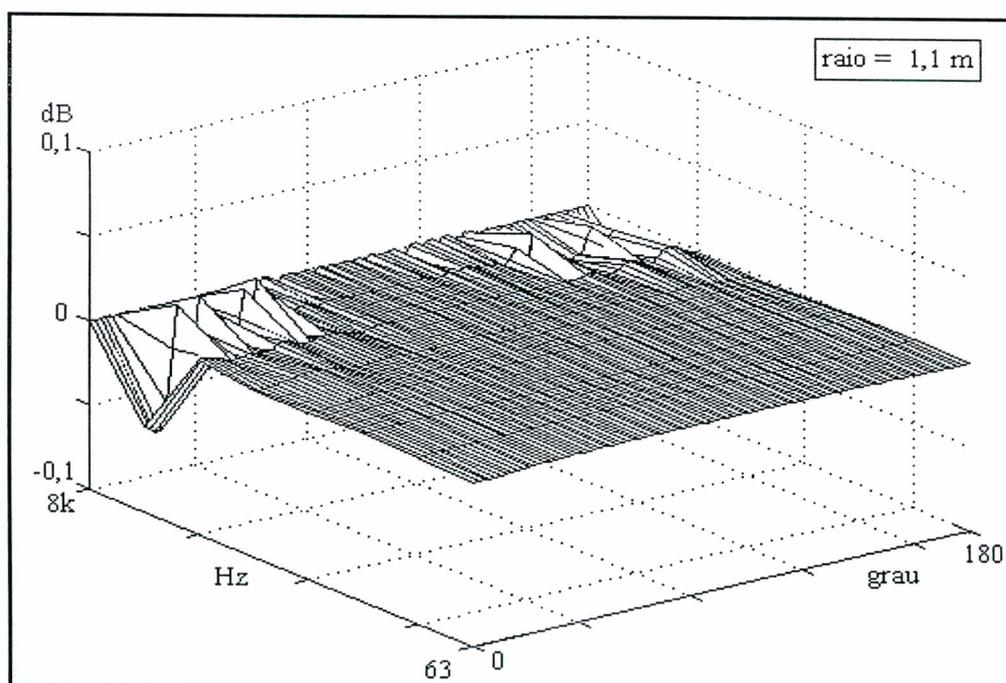


Figura 5.9 – Erro na reconstrução do NPS, raio 1,1 m

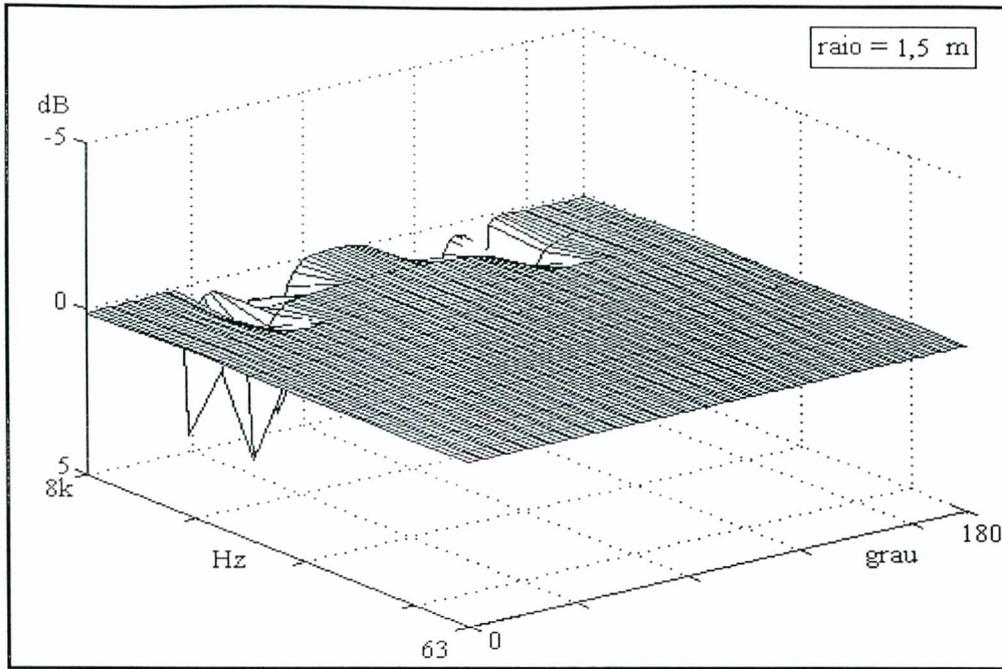


Figura 5.10 – Erro na reconstrução do NPS, raio 1,5 m

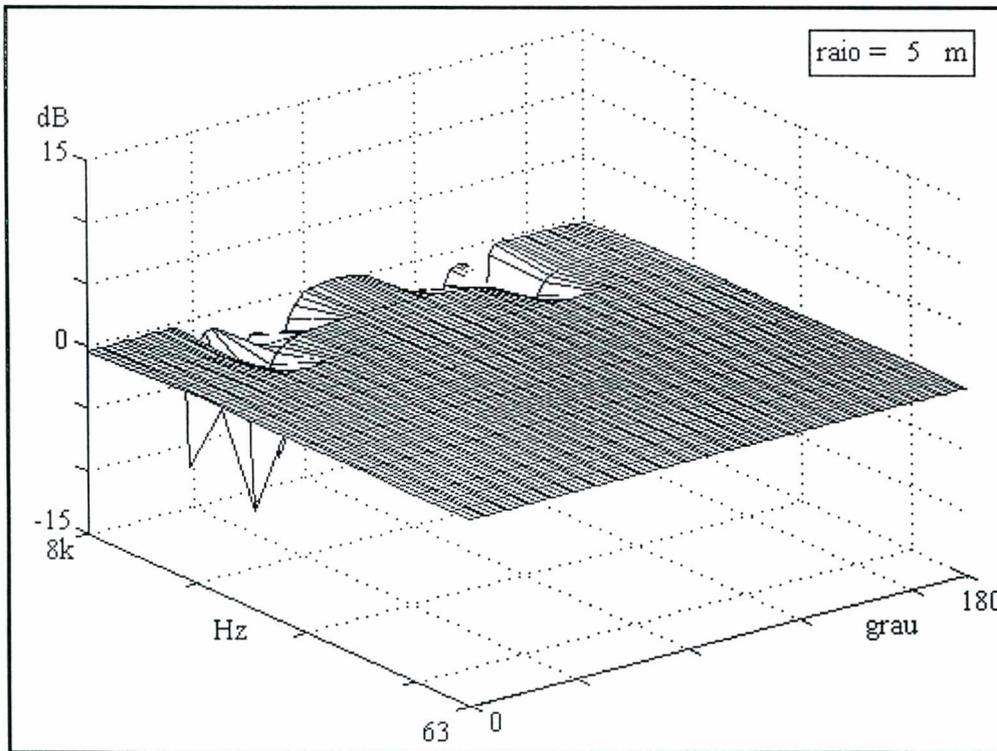


Figura 5.11 – Erro na reconstrução do NPS, raio 5 m

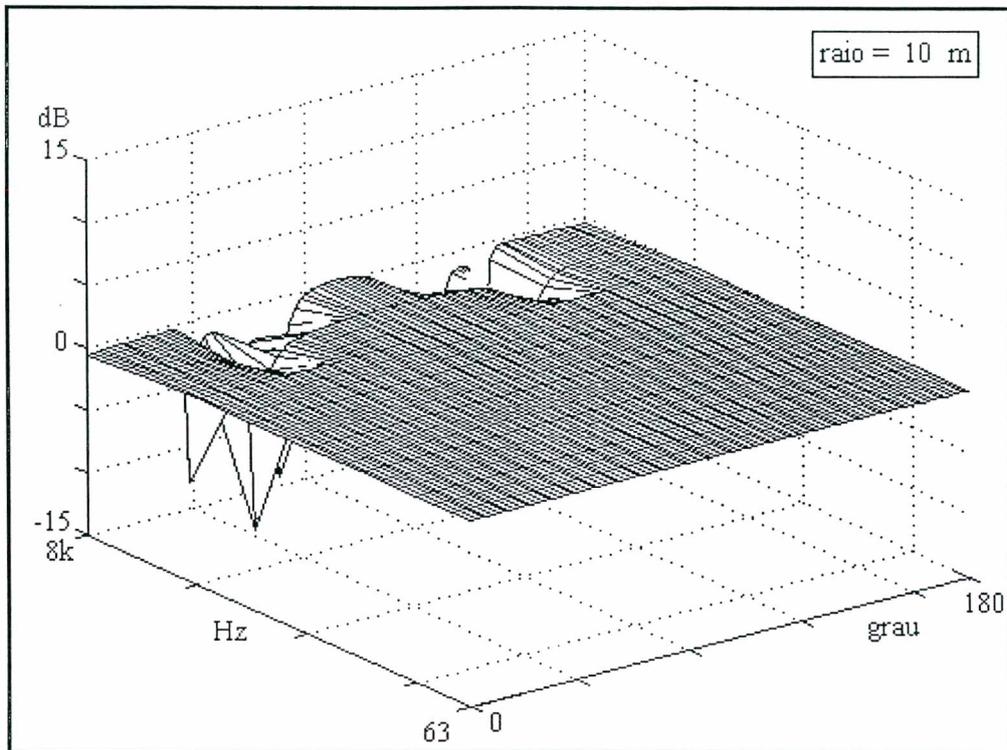


Figura 5.12 – Erro na reconstrução do NPS, raio 10 m

Nota-se que nas regiões laterais, fora do ângulo 90° em altas frequências, aparecem erros pontuais grandes, todos eles situados fora do lóbulo principal de radiação deste tipo de fonte. As comparações entre os hologramas exato e reconstruído pelo modelo, para várias semicircunferências e frequências são mostradas na Figura 5.13, onde fica bem claro que estes erros pontuais não interferem no erro da potência sonora.

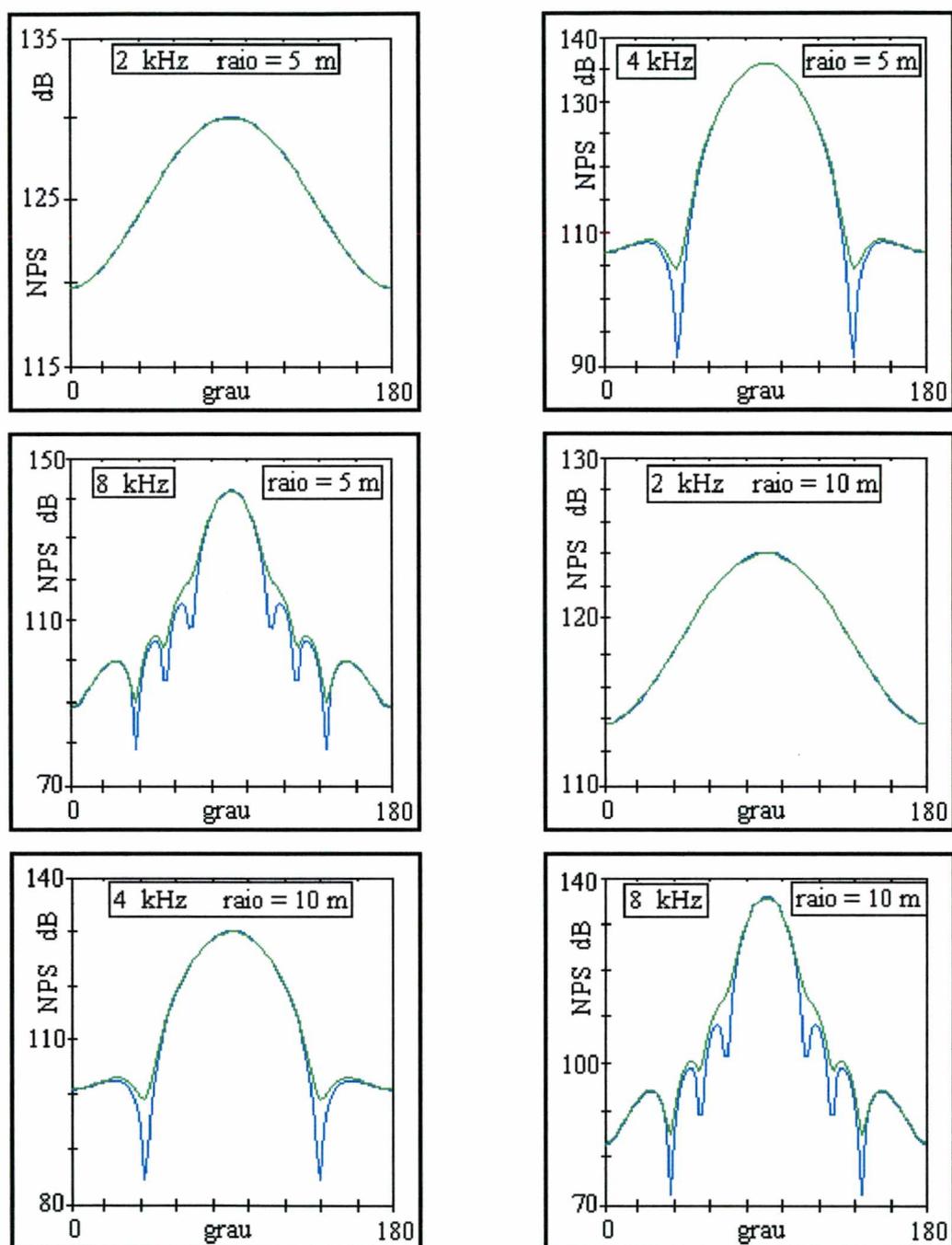


Figura 5.13 – Comparação entre NPS exato (azul) e reconstruído (verde)

Os erros acima, Figura 5.12, refletem-se no nível médio, NME, da seguinte forma:

4 kHz com raio = 5 m

NME exato = 129,03 dB;

NME aproximado = 129,02 dB

4 kHz com raio = 10 m

NME exato = 123,01 dB;

NME aproximado = 123,00 dB

8 kHz com raio = 5 m

NME exato = 131,94 dB;

NME aproximado = 131,88 dB

8 kHz com raio = 10 m

NME exato = 125,86 dB;

NME aproximado = 125,92 dB

Portanto os valores reconstruídos podem ser tomados como exatos, para se calcular a potência sonora radiada.

O critério de análise de erro dos valores reconstruídos deve ser em termos de valor médio quadrático ou de potência sonora, posto que o modelo baseia-se justamente em tornar mínima a norma dois do erro residual.

Deve-se ter em mente a existência dos erros ponto-a-ponto, mostrados acima, ao se reconstruir o campo acústico, posto ser implícito ao modelo apresentar soluções relacionadas ao mínimo erro quadrático global e não mínimo em todos os pontos.

Capítulo 6

Conclusões e recomendações

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões do trabalho, várias delas já destacadas ao longo do texto, e algumas recomendações para estudos.

6.1 – Conclusões.

i) O estudo de radiação sonora é apresentado como um problema linear, consistente ou não, sendo mostradas as soluções gerais deste problema linear, incluindo a formulação matricial do mesmo. As soluções, usando transformação linear, analisadas desta maneira são independentes de um particular sistema de coordenadas;

ii) O problema proposto consiste em substituir a fonte sonora por um conjunto, plano, de fontes elementares tipo monopolo, que são identificadas pela solução do problema inverso de radiação. Para problema linear prova-se a existência e unicidade de uma solução de quadrados mínimos lineares, para a qual o erro na potência sonora é mínimo;

iii) O erro máximo, na potência sonora, do modelo proposto é limitado pelo número de condição da matriz representativa do problema linear;

iv) Uma vez escolhida a precisão desejada para o potência sonora, determina-se o número de fontes elementares e suas respectivas posições usando-se o conceito de extensão de uma função; qual seja: o modelo deve representar o campo acústico usado na identificação das fontes elementares, dentro da precisão adotada;

v) Nos casos estudados, experimentais e simulados, o modelo proposto reproduziu o campo acústico radiado, nas mais diversas situações, com erro desprezável na potência sonora, ou seja apresentou uma excelente concordância entre os valores experimentais ou simulados e os preditos pelo modelo;

vi) A forma do holograma de entrada (semicircunferência, retângulo, segmento de reta, superfície plana ou semi-esfera) não afetou o erro na potência sonora do modelo, comparada com a potência da fonte sonora;

vii) O modelo proposto consegue prever o campo acústico em qualquer superfície externa à fonte, independente da forma da superfície sobre a qual foi tomado o holograma de entrada. Nisto se diferenciando da holografia acústica que apenas projeta o campo acústico em superfícies semelhantes a do holograma de entrada;

viii) Os erros pontuais na predição do campo acústico, pelo modelo de fontes elementares proposto, não afetam o erro na potência sonora, muito embora estes erros pontuais apresentem-se grandes em alguns casos;

ix) A identificação das velocidades das fontes elementares do modelo permitiu localizar a posição de fontes sonoras e a determinação de modos de vibração de placas e membranas circulares;

x) O erro é limitado pelo número de condição da matriz representativa do problema linear e o número de condição está ligado à sensibilidade das soluções, i. e., o quanto um erro nos dados entrada (ou na matriz) é amplificado pela sua inversa generalizada

x) Por fim trata-se de um método bom e de fácil implementação, que exige pouco esforço computacional. A título de ilustração cita-se que todos os casos estudados foram processados em um microcomputador pessoal tipo Pentium 200.

6.2 – Recomendações.

Recomenda-se para trabalhos futuros a realização de estudos, de forma isolada ou em conjunto, dos seguintes tópicos:

i) Aplicar técnicas de otimização para a determinação do número e posição das fontes elementares do modelo;

ii) Usar no modelo de fontes elementares multipolos de ordem qualquer;

iii) Aplicar o método para modelar a radiação de fontes com geometria arbitrária;

iv) Sistematizar a análise da influência dos erros, nos dados de entrada e numéricos, sobre o erro na potência sonora do modelo.

Referências Bibliográficas

- [1] Alencar Filho, E., **Teoria Elementar dos Conjuntos**, Liv. Nobel S. A., 7ª ed., São Paulo –SP, 1969.
- [2] Vera, F., **Introducción a la Teoría de Conjuntos**, ed. del Plata, Buenos Aires – Argentina, 1948.
- [3] Lima, Elon L., **Curso de Análise vol. 1**, IMPA, Projeto Euclides, 9º ed., Rio de Janeiro, 1999.
- [4] Lipschutz, S., **Teoria dos Conjuntos**, ed. McGraw-Hill do Brasil, 1978.
- [5] Alves, Domingos B., **Álgebra Linear**, UFSC – CTC – EMC, Florianópolis, 1986.
- [6] Monteiro, L. H. Jacy, **Álgebra Moderna Vol. 1**, ed. LPM, São Paulo, 1963.
- [7] Butkov, E., **Física Matemática**, ed. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 1988.
- [8] Azambuja, H. F., **A Função Delta e suas Aplicações**, Tese Livre Docência, Escola de Engenharia da UFRS, 1964.
- [9] Nachbin, L., **Lectures on the Theory of Distributions**, Textos de Matemática N° 15, UFPE, Recife, 1964.
- [10] Hounie, J., **Teoria Elementar da Distribuições**, IMPA, 12º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Calda, 1979.
- [11] Ávila, G. S. S., **Introdução à Análise Matemática**, ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1993.
- [12] Höning, C. S., **Análise Funcional e o Problema de Sturm-Liouville**, ed. Edgard Blücher – USP, São Paulo, 1978.
- [13] Lima, Elon L., **Álgebra Linear**, IMPA, 4º ed., Rio de Janeiro, 2000.
- [14] Lima, Elon L., **Espaços Métricos**, IMPA, Projeto Euclides, 3º ed., Rio de Janeiro, 1993.
- [15] Groetsch, C. W., **Generalized Inverses of Linear Operators, Representation and Approximation**, Marcel Dekker Inc., New York, 1977.
- [16] Dopp, J., **Noções de Lógica Formal**, ed. Herder, São Paulo, 1970.
- [17] Hegenberg, L., **Lógica : o cálculo de predicados**, ed. Heder & ed. USP, São Paulo, 1973.
- [18] Iório Jr, Rafael J., Iório, Valéria M., **Equações diferenciais parciais: uma introdução**, IMPA, Projeto Euclides, 1ª ed., Rio de Janeiro, 1988.

- [19] Nachbin, L., **Topologia e ordem**, Tese de Docência Livre apresentada à Congregação da Faculdade Nacional de Filosofia (Universidade do Brasil) para provimento da cadeira de Análise Matemática e Análise Superior, Chicago (USA), 1950.
- [20] Lipschutz, S., **Topologia geral**, ed. McGraw-Hill do Brasil / INL-MEC, São Paulo, 1973.
- [21] Lima, Elon L., **Curso de análise volume 2**, IMPA Projeto Euclides, 5^a ed., Rio de Janeiro, 1999.
- [22] Bleistein, N., **Mathematical methods for wave phenomena**, Academic Press Inc., New York, 1984.
- [23] Morse, P. M., Ingard, K. U., **Theoretical Acoustics**, Princeton University Press, USA, 1986.
- [24] Rockafellar, R. T., **Convex Analysis**, Princeton University Press, New Jersey, USA, 1997.
- [25] Ben-Israel, A., Greville, T. N. E., **Generalized Inverses: Theory and Applications**, John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [26] Judice, E. D., **Introdução à Álgebra Linear**, ICEPS, Belo Horizonte – MG, 1960.
- [27] Björk, A., **Least Square Methods**, Linköping University, Sweden, 1991.
- [28] Nashed, M. Z., **Generalized Inverses and Applications**, Academic Press, New York, 1976. Publication No. 32 of the Mathematics Research Center The Univ. of Wisconsin-Madison
- [29] Medeiros, L. A. da J., **Introdução às Funções Complexas**, McGraw-Hill/Ed. da USP, São Paulo, 1972.
- [30] Apostol. T. M., **Mathematical Analysis**, 2nd ed. , Addison-Wesley, USA, 1974.
- [31] Bronwell, A., **Advanced Mathematics in Physics and Engineering**, 1st ed, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [32] Wylie, C. R, Barrett, C. L., **Advanced Engineering Mathematics**, 5th ed., McGraw-Hill, Singapore, 1982.
- [33] Cremer, L., Heckl, M., **Structure Borne Sound**, Springer-Verlag, New York, 1973.
- [34] Figueiredo, Djairo G. de, **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**, 4^a ed, IMPA Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2000.

- [35] Zubelli, J. P., **An Introduction to Inverse Problems, Exemples, Methods and Questions**, 22^o Colóquio Brasileiro de Matemática, 26-30/JUL/1999, IMPA, Rio de Janeiro.
- [36] Rayleigh, L., **The Theory of Sound**, Dover Publ., NY, 1945.
- [37] Morse, P. M., **Vibration and Sound**, McGraw-Hill, NY, 1948.
- [38] Pierce, A. D., **Acoustics an Introduction to its Physical Principles and Applications**, McGraw-Hill, USA, 1981.
- [39] Temkin, S., **Elements of Acoustics**, John Wiley & sons, USA, 1981.
- [40] Skudrzyk, E., **The Foundations of Acoustics**, Springer - Verlag, NY, 1971.
- [41] Abramowitz, M., Stegun, I. A., **Handbook of Mathematical Functions**, Dover, USA, 1965.
- [42] Weinberger, H. F., **A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods**, John Wiley & sons, USA, 1965.
- [43] Machado, K. D., **Equações Diferenciais Aplicadas à Física**, Ed. da UEPG, Ponta Grossa – PR, 1999.
- [44] DeSanto, J. A., **Scalar Wave Theory, Green's Functions and Applications**, Springer-Verlag, USA, 1992.
- [45] Oestreicher, H. L., Representation of the field of an acoustic source as a series of multipole fields, **JASA** 29(11) nov/1957, pp. 1219-1222.
- [46] Pinngton, R. J., Pearce, D. C. R., Multipole expansion of the vibration transmission between a source and a receiver, **J. of Sound and Vibration** 142(3), 1990, pp. 461-479.
- [47] Ben-Menahem, A., Mikhailov, O., Multipole radiation of sismic waves from explosions in nonspherical cavities and its application to signal identification, **JASA** 97(5) maio/1995, pp. 2675-2698.
- [48] Tekatlian, A., Filippi, P., Habault, D., Détermination des caractéristiques vibratoires de sources de bruit par résolution d'un problème inverse de rayonnement, **Acustica**, vol. 86, 1996, pp. 91-101.
- [49] Wang, Z., Wu, S. F., Helmholtz equation-least-squares method for reconstructing the acoustic pressure field, **JASA** 102(4), out/1997, pp. 2020-2032.
- [50] Fahnlne, J. B., Koopmann, G. H., Numerical implemantation of lumped parameter model for the acoustic power output of a vibrating structure, **JASA** 102(1), jul/1997, pp. 179-192
- [51] Garbor, D., A New Microscopic Principle, **Nature**, vol. 161, 1948, pp. 777-778.

- [52] Gonçalves Jr, Armando A., **Medição de microdeslocamentos tridimensionais e deformações pela holografia interferométrica autocalibrada**, dissertação, UFSC, 1989, Florianópolis - SC
- [53] Collier, R.. J. et al., **Optical Holography**, Academic Press, 1971, New York.
- [54] Williams, E. G., Maynard, J. D., Skudrzyk, E., Sound source reconstruction using a microphone array, **JASA** 68(1), 1980, pp. 340-344.
- [55] Gan, W. S., Application of acoustical holography to seismic data processing, **Acoustical Imaging and Holography**, vol. 1, n. 2, 1979, pp. 143-147.
- [56] Saijyou, K., Yoshikawa, S.. Measurement of structural and acoustic intensities using near-field acoustical holography, **Jpn. J. Appl. Phys**, vol. 35, 1996, pp. 3167-3174.
- [57] Yoneyama, M., Schueler, C., Wade, G., Analysis of vibration surfaces using acoustical holography, **Acoustical Imaging: Proc. of the International Symposium**, vol. 10, 1982, Plenum Press, New York, pp. 219-252.
- [58] Eschenberg, K. E., Hayke, S. I., Imaging the nearfield of a submerged-plate using acoustical holography, **Acoustical Imaging: Proc. of the International Symposium**, vol. 15, 1987, Can Plenum Press, USA, pp. 659-673.
- [59] Williams, E. G., Houston, B. B., Bucaro, J. A., Broadband nearfield acoustical holography for vibrations cylinders, **JASA** 86(2), 1989, pp. 674- 679.
- [60] Prokoph, G., Ermet, H., Krönig, M., A broadband-holography imaging system for nondestructive evaluation, **Acoustical Imaging: Proc. of the International Symposium**, vol. 15, 1987, Can Plenum Press, USA, pp. 547-557.
- [61] Stone, W. R., Acoustical holography is, at best, only a partial solution to the inverse scattering problem, **Acoustical Imaging: Proc. of the International Symposium**, vol. 11, 1982, Plenum Press, New York, pp. 385-398.
- [62] Saijyou, K., Ueda, M., Yoshikawa, S., Application of generalized near-field holography to scattering problems, **Jpn. J. Appl. Phys.**, vol. 33, 1994, pp. 3170-3175.
- [63] Pascal, J. C., Jing-Fang Li, L'holographie acoustique: un outil pour le contrôle et le diagnostic des machines et équipements industriels, **Rev. Française de Mécanique**, n. 1, 1996, pp. 41-48.
- [64] Loyau, T., Pascal, J, C., Broadband acoustical holography reconstruction from acoustic intensity measurements I: Principle of the method, **JASA** 84(5), 1988, pp. 1744-1750.

- [65] Laville, F., Sidki, M., Nicolas, J., Spherical acoustical holography using sound intensity measurements: theory and simulation, *Acustica*, vol. 76, 1992, pp. 193-198.
- [66] Villot, M., Chavériat, G., Roland, J., Phonoscopy: An acoustical holography technique for plane structures radiating in enclosed spaces, *JASA* 91(1), 1992, pp. 187-195.
- [67] Williams, E. G. et al., Interior near-field acoustic holography in flight, *JASA* 108(4), out/2000, pp. 1451-1463.
- [68] Williams, E. G., Dardy, H. D., Washburn, K.B., Generalized nearfield acoustical holography for cylindrical geometry: Theory and experiment, *JASA* 81(2), 1987, pp. 389-407.
- [69] Maynard, J. D., Williams, E. G., Lee, Y., Nearfield acoustic holography: I. Theory of generalized holography and the development of NAH, *JASA* 78(4), 1985. pp. 1395-1413.
- [70] Lee, J.C., Spherical acoustical holography of low frequency noise sources, *Applied Acoustics*, v. 48, n. 1, 1996, pp. 85-95.
- [71] Borgiotti, G. V., Sarkissian, A., Williams, E.G., Schuet, Z, L., Conformal generalized near-field acoustic holography for axisymmetric geometries, *JASA* 88(1), 1990, pp. 199-209.
- [72] Sarkissian, A., Near-field acoustic holography for axisymmetric geometry: A new formulation, *JASA* 88(2), 1990, pp. 861-866.
- [73] Bobrovnitskii, Y. I., Tomilina, T. M., General properties and fundamental errors of the method of equivalent sources, *Acoustical Physics*, 41(5), 1995, pp. 649-660.
- [74] Eves, H., **Introdução à História da Matemática**, Ed. da UNICAMP, 2ª ed, Campinas-SP, 1997.
- [75] Cremer, L., Die Synthese des Schallfeldes eines beliebigen festen Körpers in Luft mit beliebiger Schnellverteilung aus Kugelschallfeldern. *Acustica*, 55(1984), 44.
- [76] Heckl M., Bemerkungen zur Berechnung der Schallabstrahlung nach der Methode der Kugelfeldsynthese (Cremer-methode). *Acustica*, 68 (1989) pp. 251-257.
- [77] Moeser, M., Berechnung der Plattenresonanzen mit der Multipolsynthese, *Acustica*, 72(1990) pp 21-27.
- [78] Brechlin, E., **Berechnung von innenraumproblem mit Hilfe der Multipolstrahler-Synthese**. Studienarbeit am Institut für Technische Akustik der TU Berlin, 1995.

- [79] Zannin, P. H. T., Heckl, M., Schallfeld in der Umgebung von Zylindern mit beliebiger Verteilung der Oberflächenimpedanz. Fortschritte der Akustik, **DAGA 95**, 1995.
- [80] Zannin, P. H. T., **Berechnung der Schallstreuung nach der Quellsimulationstechnik und Vergleich mit den Meßergebnissen**, Tese de Doutorado, Univ. Técnica de Berlim - Instituto de Acústica Técnica, Berlim -1996.
- [81] Zannin, P. H. T., Some aspects of scattering calculation using the source simulation technique, **Forum Acusticum**, Berlim, 1999 (em CD-ROM)
- [82] Zannin, P. H. T., Die quellsimulationstechnik zur Berechnung der Schallstreuung – Vergleich zwischen theoretischen und Experimentellen Ergebnissen, **Acustica – acta acustica**, vol. 86, 2000, pp. 413-428.
- [83] Veronesi, W. A., Maynard, J. D., Digital holographic reconstruction of sources with arbitrarily shaped geometries, **JASA** 85(2), 1989, pp. 588-589.
- [84] Bai, M. R., Application of BEM (boundary element method) - based acoustic holography to radiation analysis of sound sources with arbitrarily shaped geometries, **JASA** 92(1), pp. 533-549.
- [85] Williams, E. G., Dardy, H.D., Fink, R.G., Nearfield acoustical holography using an underwater automated scanner, **JASA** 78(2), 1985, pp. 789-798.
- [86] Koopmann, G. H., Song L., Fahline, J. B., A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition, **JASA** 86(6), dez/1989, pp. 2433-2438.
- [87] Miller, R. D., et al., A comparison between the boundary elements method and the wave superposition approach for the analysis of the scattered fields from rigid bodies and elastic shells, **JASA** 89(5), maio/1991, pp. 2185-2196.
- [88] Fahline, J. B., Koopmann, G. H., A numerical solution for the general radiation problem based on the combined methods of superposition and singular-value decomposition, **JASA** 90(5), nov/1991, pp. 2808-2818.
- [89] Jeans, R., Mahtews, I. C., The wave superposition method as a robust technique for computing acoustic fields, **JASA** 92(2), ago/1992, pp. 1156-1166.
- [90] Stepanishen, P., R., The forward projection of harmonic pressure fields using the generalized internal source density method, **JASA** 102(4), out/1997, pp. 1955-1963
- [91] Reynolds, D. D., **Engineering Principles of Acoustics, Noise and Vibration Control**, Allyn and Bacon Inc., USA, 1980.
- [92] Bobrovnikskii, Y. I., A physical model and the near-field characteristics of a multipole, **Acoustical Physics**, 44(1), 1998, pp. 8-14.

- [93] Litwinczik, V., **Irradiação Sonora de Placas Planas com Descontinuidades**, dissertação PPGEM-USFC, Florianópolis, 1998.
- [94] Jensen, F. B. et al., **Computational Ocean Acoustics**, American Institute of Physics Press, New York, 1994.
- [95] Ochmann, M., The Source Simulation Technique for Acoustic Radiation Problems, **Acustica** 81(1995), pp. 512-527.

APÊNDICE

Fundamentos Matemáticos

A-1 Introdução

No presente apêndice são apresentados os fundamentos matemáticos envolvidos no trabalho com dois objetivos principais:

- i) Unificar a simbologia e definições, encontradas nas várias referências e
- ii) Apontar em cada caso o conceito matemático usado de forma a permitir, restrições, extensões e críticas ao método aqui proposto.

Procurou-se apresentar as definições de forma lógica e encadeada, o que nem sempre foi possível, todavia para tornar a leitura mais agradável foram intercalados alguns exemplos de aplicação dos conceitos e algumas figuras.

De resto, tratam-se de conceitos já bem difundidos e conhecidos, com vasta literatura a respeito, de forma que as definições em geral não estão referenciadas, tendo em vista serem encontradas em toda referência citada, salvo quando não concordantes em que se adotou uma e as demais são citadas. As conclusões que não são triviais a partir das definições estão referenciadas.

A-2 Conjunto

O conceito de Conjunto é intuitivo e não se tem para o mesmo uma definição rigorosa, sua importância para matemática foi primeiramente assinalada por Georg Cantor (1845-1918) e segundo ele conjunto “*é o agrupamento de um todo de objetos, bem definidos e discerníveis, de nossa percepção ou do nosso entendimento, chamados os elementos do conjunto*” [1]

Os conjuntos serão denotados pelas letras, em caixa alta, $A, B, C, D, \dots, X, Y, Z$ e os seus elementos pelas letras, em caixa baixa, $a, b, c, d, \dots, x, y, z$ e representados pela seguinte notação $A = \{\dots\}$, por exemplo $A = \{a, e, i, o, u\}$ é o conjunto A cujos elementos são a, e, i, o, u . Devido à importância e uso alguns conjuntos terão notação reservada, assim denota-se por:

- \mathbb{R} o conjunto dos números reais;
- \mathbb{C} o conjunto dos números complexos;
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ o conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ o conjunto dos números inteiros;
- \mathbb{Q} o conjunto dos números racionais;
- $J_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ o conjunto de índices, no qual n é um número natural

A relação de pertinência entre um elemento e o conjunto é denotada pelo símbolo \in , proposta pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1952), se o elemento não pertence ao conjunto usa-se o símbolo \notin , assim no exemplo acima e pode-se escrever que “ $a \in A$ ” e que “ $d \notin A$ ”.

Chama-se variável a um elemento x não especificado de um conjunto X , que é dito domínio da variável x . Quando a variável x de um domínio X assume um elemento específico $x_1 \in X$, diz-se que x assume (ou toma) o valor x_1 . Em particular uma variável cujo domínio é constituído por um único elemento ($X = \{x_1\}$) é chamada de constante.

A definição de um conjunto pode ser feita por meio de uma determinação analítica, na qual cada elemento do conjunto é mencionado, como no exemplo acima, ou por meio de uma determinação sintética na qual as propriedades características dos elementos são mencionadas. O conjunto A , acima, é o conjunto das vogais. Em notação sintética pode-se escrever

$$A = \{x \mid x \text{ é uma vogal}\} \quad (A1)$$

E lê-se “ A é o conjunto dos elementos x tal que x é uma vogal”. O símbolo “ \mid ” lê-se como “tal que”.

Uma representação visual de forte apelo didático e muito comum para conjunto faz-se com o uso do diagrama de Venn, que consiste de uma curva plana fechada com os elementos do conjunto representados simbolicamente em seu interior, conforme Figura A1.

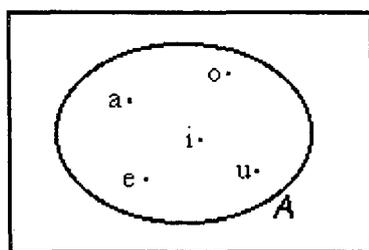


Figura A1 – Diagrama de Venn

Para se referir a todos os elementos do conjunto usa-se o símbolo \forall , dito quantificador universal, que se lê “para todo” ou “todo” e para se referir à existência de um ou mais elementos que satisfazem determinada condição usa-se o símbolo \exists dito quantificador existencial, que se lê “existe pelo menos um” [17].

Dois conjuntos A e B são ditos iguais (relação de igualdade), denota-se por $A = B$, se e somente se todos os elementos que pertencem a um pertencem também ao outro. Chama-se subconjunto de X ao conjunto Y cujos elementos, todos eles, pertencem também a X e neste caso diz-se que Y está contido em X (relação de inclusão), denota-se por $Y \subset X$ ou que X contém Y , denota-se por $X \supset Y$; a negação de \subset (está contido) denota-se por $\not\subset$ (lê-se “não está contido”). Em particular o conjunto vazio, definido como o conjunto que não contém nenhum elemento e denotado por \emptyset , está contido em todos os conjuntos. Os subconjuntos A e \emptyset de A são ditos subconjuntos triviais de A .

As seguintes propriedades, Tabela A1, são válidas para as relações de igualdade e de inclusão:

Tabela A1 – Propriedades da igualdade e da inclusão de conjuntos

Relação de Igualdade (=)	Relação de Inclusão (\subset)
$A = A$ reflexiva	$A \subset A$ reflexiva
se $A = B$ e $B = D$ então $A = D$ transitividade	se $A \subset B$ e $B \subset D$ então $A \subset D$ transitividade
se $A = B$ então $B = A$ simétrica	se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$ anti-simétrica

Chama-se de classe de conjuntos ao conjunto cujos elementos são conjuntos e de conjunto dos subconjuntos de A à classe de conjuntos composta por todos os subconjuntos de A . Exceto A e \emptyset que são subconjuntos triviais, qualquer outro subconjunto de A é chamada de subconjunto próprio de A .

Dada uma classe de conjuntos $D = \{ A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n \}$ ao conjunto que contém todos os conjuntos desta classe dá-se o nome de conjunto universo, usualmente denotado por U . Note-se que a relação entre um conjunto genérico A_j e a classe D é uma relação de pertinência, $A_j \in D$, pois A_j é um elemento de D e entre A_j e o conjunto universo a relação é de inclusão, $A_j \subset U$, pois A_j é um subconjunto do conjunto universo.

Dados um conjunto A e um subconjunto $B \subset A$, define-se o complemento de B em relação a A , denotado por $C_A(B)$, como o conjunto composto pelos elementos de A que não pertencem a B , isto é, $C_A(B) = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$, Figura A2. Em particular $C_A(\emptyset) = A$ e $C_A(A) = \emptyset$.

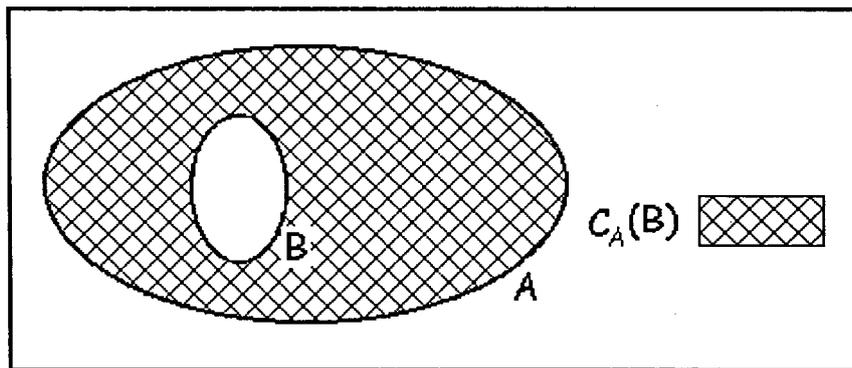


Figura A2 – Complemento de um conjunto

O conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e também pertencem a B , denotado por $A \cap B$ é chamado de interseção dos conjunto A e B , i. e.,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\} \quad (A2)$$

Se $A \cap B = \emptyset$ diz-se que os conjuntos A e B são disjuntos.

O conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou pertencem a B , denotado por $A \cup B$ é chamado de união de A com B , Figura A3.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad (A3)$$

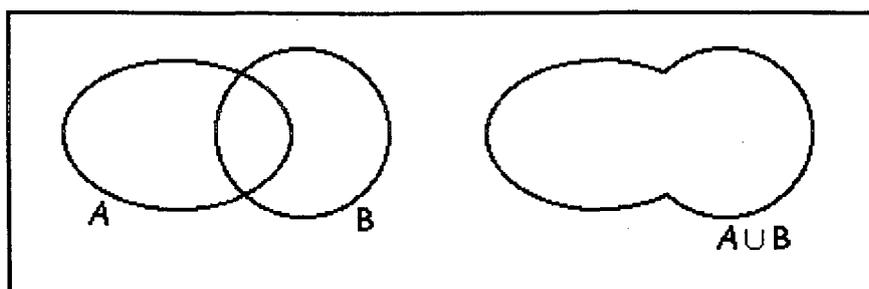


Figura A3 – União de conjuntos

A interseção e a união de conjuntos gozam das seguintes, Tabela A2, propriedades:

Tabela A2 – Propriedades da interseção e da união de conjuntos

Propriedade	Interseção	União
Idempotente	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Comutativa	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Associativa	$(A \cap B) \cap D = A \cap (B \cap D)$	$(A \cup B) \cup D = A \cup (B \cup D)$
Distributiva	$A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$	$A \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup D)$
se $B \subset A$ e $D \subset A$	$C_A(B \cap D) = C_A(B) \cap C_A(D)$	$C_A(B \cup D) = C_A(B) \cup C_A(D)$

Em particular $A \cap \emptyset = \emptyset$ e $A \cup \emptyset = A$. (A4)

Note-se que em relação ao conjunto dos subconjuntos de A a interseção, a união, o complementar e mais as relações de igualdade, contem e está contido resulta uma em outra conservando-se a igualdade e trocando-se entre si a união e a interseção, contem e está contido, e \emptyset e A . Isto é conhecido como princípio da dualidade e as propriedades são chamadas de duais. Por exemplo, se B é um subconjunto de A então

$$B \cup C_A(B) = A \quad \text{e} \quad B \cap C_A(B) = \emptyset$$

Sejam $J_n = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n \}$ o conjunto de índices e uma classe A de conjuntos definida por: $A = \{ A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \}$, então a interseção e a união dos conjuntos da classe A serão também denotadas, respectivamente, por:

$$\cap A_j = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n \quad (A5)$$

$$\cup A_j = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \quad (A6)$$

Se um conjunto B está contido na união dos conjuntos de uma classe A de conjuntos, isto é $B \subset \cup A_j$, diz-se que esta classe é uma cobertura para o conjunto B . Figura A4.

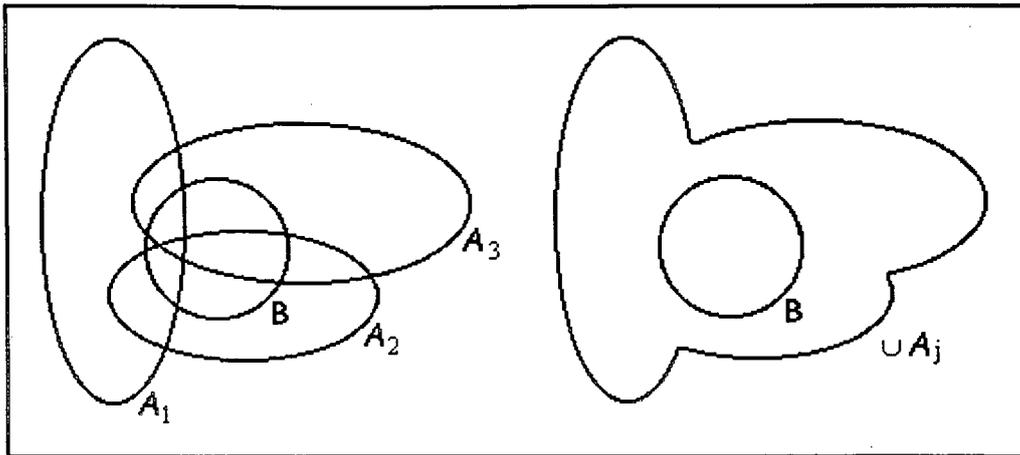


Figura A4 – Cobertura de um conjunto.

Se uma classe $A = \{ A_j \mid j \in J_n \}$ satisfaz as propriedades:

$$\begin{aligned} A_j &\neq \emptyset; \\ A_j &\subset B; \\ A_j \cap A_i &= \emptyset \quad \forall j \neq i \in J_n \text{ e} \\ \cup A_j &= B \end{aligned}$$

diz-se, então que A é uma partição de B . Nota-se que uma partição de B é todo conjunto dos subconjuntos não triviais de B disjuntos dois a dois e cuja união é o conjunto B , ou seja é uma cobertura para B . Por exemplo, sejam:

$$\begin{aligned} B &= \{ a, e, i, o, u \} \\ A_1 &= \{ a, e \} \\ A_2 &= \{ i, u \} \\ A_3 &= \{ o \} \end{aligned}$$

Nota-se que A_1 , A_2 e A_3 são: subconjuntos de B ; disjuntos dois-a-dois e a união $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = B$. Portanto o conjunto $A = \{ A_1, A_2, A_3 \}$ é uma partição de B .

Define-se a diferença entre os conjuntos A e B , denotada por $A - B$ como o conjunto composto pelos elementos de A que não pertencem a B . Figura A5.

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \} \quad (A7)$$

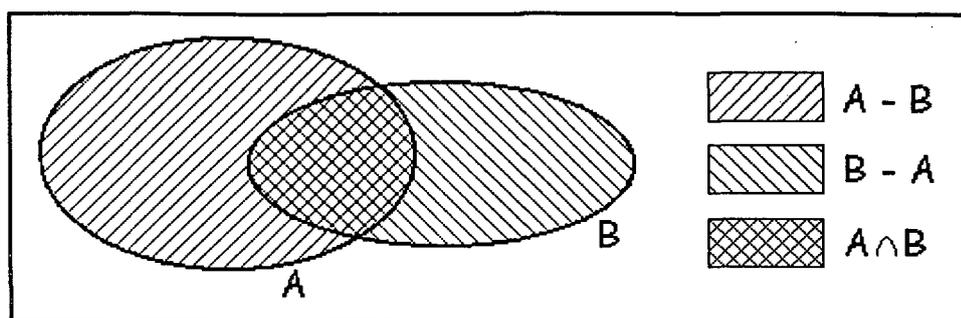


Figura A5- Diferença entre conjuntos

Vê-se que $A - A = \emptyset$; $A - \emptyset = A$ e que se:

$$B \subset A \text{ implica em } B - A = \emptyset \text{ e } A - B = C_A(B)$$

$$A \cap B = \emptyset \text{ implica em } A - B = A \text{ e } B - A = B$$

Outra diferença entre dois conjuntos A e B chamada diferença simétrica, denotada como $A \diamond B$ é definida por:

$$A \diamond B = \{ x \mid \text{se } x \in A \text{ implica em } x \notin B \text{ e se } x \in B \text{ implica em } x \notin A \}$$

Portanto a diferença simétrica é o conjunto $A \diamond B$ composto pelos elementos que pertencem a um e somente um dos conjuntos A e B , isto está ilustrado na Figura A6. Da própria definição segue-se que

$$A \diamond B = (A - B) \cup (B - A) \quad (A8)$$

gozando portanto das propriedades da comutatividade e da associatividade.

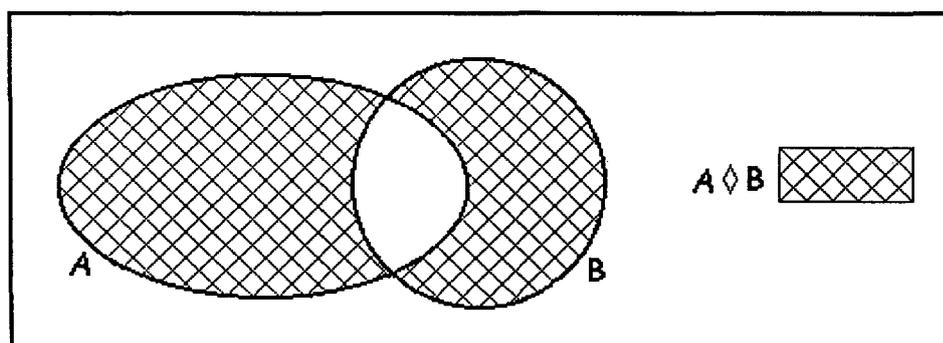


Figura A6 - Diferença simétrica em conjuntos

Dados os conjuntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ define-se o produto cartesiano entre estes conjuntos, denotado por $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ ou por $\prod A_j$ como sendo o conjunto:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \{ x = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \mid a_j \in A_j \text{ e } j \in J_n \} \quad (A9)$$

Ao elemento $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ do conjunto $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ dá-se o nome de n -upla ordenada e ao j -ésimo componente da n -upla ordenada dá-se o nome de j -ésima coordenada. Em particular se $n = 3$ o elemento $(a_1, a_2, a_3) \in A_1 \times A_2 \times A_3$ é chamado de

tripla ordenada e se $n = 2$ o elemento $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ é chamado de par ordenado ou dupla ordenada.

Se $A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_n = A$ o produto cartesiano é representado como a n -ésima potência do conjunto A , i. e., $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = A^n$. Em particular se $n = 2$ então A^2 é chamado de quadrado cartesiano e ao subconjunto $B \subset A^2$ definido por:

$$B = \{ (x, x) \mid x \in A \} \tag{A10}$$

dá-se o nome de diagonal de A^2 .

Note-se que o produto cartesiano não é comutativo, pois em geral $A \times B \neq B \times A$, mas é distributivo em relação à união e à interseção.

$$A \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D) \tag{A11}$$

$$A \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (A \times D) \tag{A12}$$

O produto cartesiano pode ser representado por meio de um diagrama, dito diagrama coordenado, como o mostrado na Figura A7 para produto cartesiano dos conjuntos

$$A = \{ \clubsuit, \spadesuit, \diamond, \heartsuit \} \text{ e } B = \{ \otimes, \ominus, \odot \}$$

$$A \times B = \{ (\clubsuit, \otimes), (\clubsuit, \ominus), (\clubsuit, \odot), (\spadesuit, \otimes), (\spadesuit, \ominus), (\spadesuit, \odot), (\diamond, \otimes), (\diamond, \ominus), (\diamond, \odot), (\heartsuit, \otimes), (\heartsuit, \ominus), (\heartsuit, \odot) \}$$

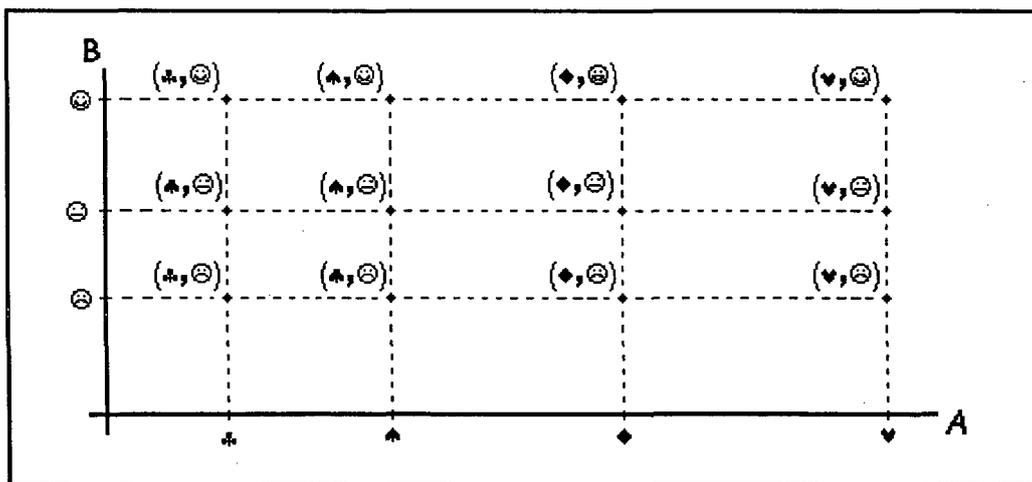


Figura A7 – Diagrama coordenado

Chama-se proposição (ou sentença) uma oração que exprime um pensamento completo e para cada proposição valem os dois princípios da lógica:

- Não contradição, pelo qual uma proposição não pode ser simultaneamente falsa e verdadeira;
- Terceiro excluído, pelo qual uma proposição ou é falsa ou é verdadeira excluindo-se qualquer outra possibilidade.

Diz-se que o valor-verdade de uma proposição p é “verdade”, denotado por V , se p é verdadeira e “falsidade”, denotado por F , se p é falsa. Por exemplo sejam as proposições

p : a é uma vogal;

q : c é uma vogal.

o valor-verdade da proposição p é verdade (V) e o valor-verdade de q é falsidade (F).

Usam-se conectivos para formar novas proposições (ditas compostas) a partir de proposições simples. Se uma proposição p é composta pelas proposições q, r, s denota-se isto como $p(q, r, s)$. Os seguintes símbolos, Tabela A3, são usados para denotar os conectivos [16].

Tabela A3 - Conectivos

Conectivo	Símbolo
E	&
Ou	\vee
Não	\sim
se ... então	\rightarrow
se e somente se	\leftrightarrow

Denomina-se tabela-verdade de uma proposição o conjunto de todos os valores-verdades correspondentes a todas as possíveis combinações dos valores-verdades das proposições componentes, Tabela A4.

Tabela A4 – Tabela-verdade

p	q	$\sim p$	$p \& q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Denomina-se tautologia, ou proposição logicamente verdadeira, a proposição cujos possíveis valores-verdades são sempre verdade (V); e contradição, ou proposição logicamente falsa denotada por \otimes , a proposição cujos possíveis valores-verdades são sempre falsidade (F).

Se duas proposições $p(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ e $q(q_1, q_2, q_3, \dots, q_m)$ são ditas equivalentes se e somente se suas tabelas verdades forem iguais, denotando-se esta propriedade por: $p(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) \Leftrightarrow q(q_1, q_2, q_3, \dots, q_m)$. São equivalentes as seguintes proposições mostradas na Tabela A5:

Tabela A5 – Proposições equivalentes

$p \& p \Leftrightarrow p$	propriedade idempotente
$p \vee p \Leftrightarrow p$	
$p \& q \Leftrightarrow q \& p$	comutatividade
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	
$(p \& q) \& r \Leftrightarrow p \& (q \& r)$	associatividade
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	
$p \& (q \vee r) \Leftrightarrow (p \& q) \vee (p \& r)$	distributividade
$p \vee (q \& r) \Leftrightarrow (p \vee q) \& (p \vee r)$	
$p \& (q \vee r) \Leftrightarrow p$	absorção
$p \vee (q \& r) \Leftrightarrow p$	
$\sim(p \& q) \Leftrightarrow p \vee \sim q$	leis de Morgan
$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \& \sim q$	

Diz-se que a proposição p implica logicamente na proposição q , denota-se por $p \Rightarrow q$, se e somente se a proposição $p \rightarrow q$ for uma tautologia.

A implicação lógica goza das propriedades reflexiva ($p \Rightarrow p$); anti-simétrica (se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ então $p \Leftrightarrow q$) e transitiva (se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow r$ então $p \Rightarrow r$).

Não se deve confundir os símbolos \rightarrow e \Leftrightarrow com \Rightarrow e \Leftrightarrow , pois os primeiros são conectivos que quando aplicados a duas proposições resultam numa outra proposição, por exemplo $r = p \rightarrow q$ ou $r = p \leftrightarrow q$, e os dois últimos apenas relacionam duas proposições, por exemplo $p \Rightarrow q$ (p implica em q) ou $p \Leftrightarrow q$ (p é equivalente a q). O símbolo \rightarrow é também utilizado em limites para especificar que x tende a y ($x \rightarrow y$) e na definição de função para especificar que uma função f mapeia o conjunto A no conjunto B ($f: A \rightarrow B$), não havendo problemas de se confundir com conectivo pois no contexto sempre é claro o uso que está sendo feito.

A-3 Correspondência entre os elementos de conjuntos

Dados dois conjuntos A e B diz-se que há uma correspondência entre A e B se um elemento genérico $x \in A$ puder ser associado a um ou mais elementos $y \in B$ ou ($\forall x \in A \exists y \in B$). Se um elemento $x \in A$ for associado a um único elemento $b \in B$ ou ($\forall x \in A \exists y \in B \mid y$ é único) diz-se que a correspondência é unívoca e se também cada elemento $y \in Y$ for associado a um único elemento $x \in X$ diz-se que a correspondência é biunívoca.

Chama-se função proposicional, denotada por $p(x)$, definida em conjunto X , a uma proposição para a qual existe um valor-verdade para todo $x \in X$. O subconjunto $S_p \subset X$, para o qual o valor-verdade de $p(x)$ é sempre verdade, diz-se que x satisfaz $p(x)$, é dito conjunto solução de $p(x)$, em notação sintética pode-se escrever:

$$S_p = \{x \mid x \in X \text{ e o valor-verdade de } p(x) \text{ é verdade}\} \quad (A13)$$

Se a função proposicional estiver definida num produto cartesiano $\prod X_j$ costuma-se denotá-la por $p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ao rigor da definição anterior seria $p((x_1, x_2, x_3, \dots, x_n))$, sendo que $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \prod X_j$ e $x_j \in X_j$ com $j \in J_n$.

Uma função proposicional $p(x, y)$ definida em $A \times B$ chama-se relação de A em B , e é denotada por $R(A, B, p(x, y))$ ou por $R : A \rightarrow B$ (lê-se R é uma relação de A em B). Se um par ordenado $(a, b) \in A \times B$ satisfaz $p(x, y)$ diz-se que “ a ” está relacionado com “ b ” de acordo com a relação R e denota-se por aRb , caso contrário se (a, b) não satisfaz $p(x, y)$, isto é o valor-verdade de $p(x, y)$ é falsidade, diz-se que “ a ” não está relacionado com “ b ” de acordo com a relação R e denota-se por $a \nR b$. Em particular se $A = B$ diz-se simplesmente que R é uma relação definida em A .

O subconjunto $S_R \in A \times B$ no qual todo elemento $(a, b) \in S_R$ satisfaz $p(x, y)$ é chamado de conjunto solução da relação $R(A, B, p(x, y))$.

$$S_R = \{ (x, y) \mid (x, y) \in A \times B \text{ e } xRy \} \quad (A14)$$

Chama-se gráfico de uma relação ao conjunto de pontos do diagrama coordenado de $A \times B$ que satisfazem à relação. Por exemplo seja a relação $R(A, B, p(x, y))$ com os conjuntos

$$A = \{ s, a, b, e \}; \quad B = \{ c, i, d, r \}$$

e a função proposicional $p(x, y)$ definida em $A \times B$ “ x é uma vogal e y é uma consoante”. O conjunto solução de $p(x, y)$ é

$$S_R = \{ (a, c), (a, d), (a, r), (e, c), (e, d), (e, r) \}$$

e o seu gráfico são os pontos destacados no diagrama coordenado de $A \times B$, Figura A8

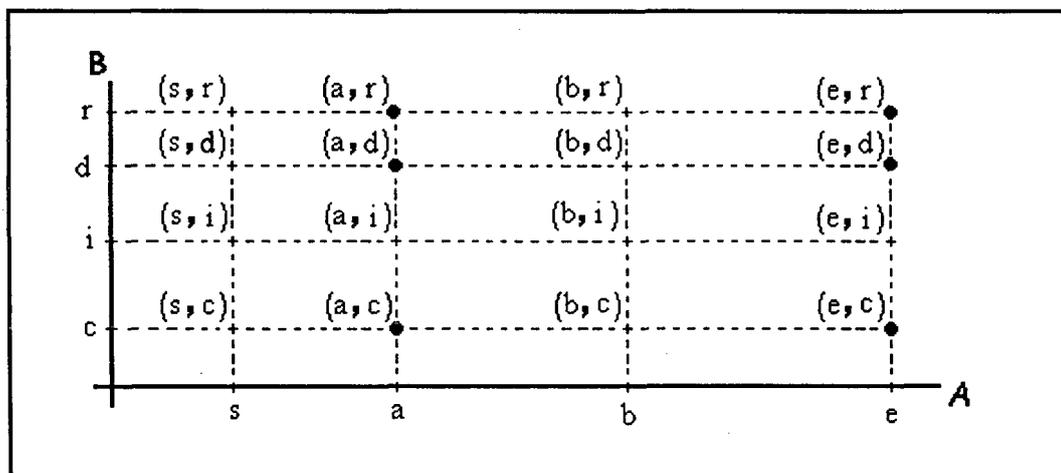


Figura A8 – Gráfico de uma relação

Sejam os conjuntos $A, B, A \times B, D = \{ (A \times B)_j \mid (A \times B)_j \subset A \times B \text{ e } j \in J_n \}$ o conjunto dos subconjuntos de $A \times B$, $R_{A \times B} = \{ R_j \mid R_j = (A, B, p(x,y)) \}$ o conjunto de todas as relações entre A e B e a relação $R = (D, R_{A \times B}, p(z, w))$, na qual $p(z, w)$ é a tautologia

$$\forall (z, w) \in (A \times B)_j \quad R_j \text{ é satisfeita} \quad (A15)$$

vê-se, então, que o conjunto solução de R_j é o conjunto $(A \times B)_j$ e que a cada conjunto $(A \times B)_j$ corresponde uma relação R_j , ou seja a relação R é biunívoca e por este motivo, algumas vezes se define uma relação como sendo simplesmente um subconjunto de $A \times B$, i. e., $R \subset A \times B$. Por exemplo: Sejam $A = \{ \clubsuit, \spadesuit, \diamond, \heartsuit \}$ e $B = \{ \odot, \ominus, \otimes \}$, então

$$A \times B = \{ (\clubsuit, \odot), (\clubsuit, \ominus), (\clubsuit, \otimes), (\spadesuit, \odot), (\spadesuit, \ominus), (\spadesuit, \otimes), (\diamond, \odot), (\diamond, \ominus), (\diamond, \otimes), (\heartsuit, \odot), (\heartsuit, \ominus), (\heartsuit, \otimes) \}$$

pela notação $R = \{ (\clubsuit, \odot), (\spadesuit, \odot), (\diamond, \odot), (\heartsuit, \odot) \}$ deve-se entender que o subconjunto $\{ (\clubsuit, \odot), (\spadesuit, \odot), (\diamond, \odot), (\heartsuit, \odot) \} \subset A \times B$ é o conjunto solução de $(A, B, p(x, y))$ e de maneira análoga deve ser entendida a notação $(a, b) \in R$.

O conjunto $D_R \subset A$ é chamado de domínio da relação $(A, B, p(x, y))$

$$D_R = \{ x \mid x \in A \text{ e } (x, y) \in S_R \} \quad (A16)$$

e o conjunto $C_R \subset B$ é denominado codomínio ou contra-domínio ou ainda amplitude de $(A, B, p(x, y))$.

$$C_R = \{ y \mid y \in B \text{ e } (x, y) \in S_R \} \quad (A17)$$

Seja uma relação $R = (A, B, p(x, y))$ e S_R o seu conjunto solução. Isto posto diz-se que:

- se $A = B$, R é reflexiva se para todo $a \in A$ o elemento $(a, a) \in S_R$;
- se $A = B$, R é simétrica se e somente se $(a, b) \in S_R \Leftrightarrow (b, a) \in S_R$;
- se $A = B$, R é anti-simétrica se e somente se $(a, b) \in S_R$ e $(b, a) \in S_R$ então $a = b$;
- se $A = B$, R é transitiva se e somente se $(a, b) \in S_R$ e $(b, c) \in S_R$ então $(a, c) \in S_R$;
- R é uma relação de equivalência se for simétrica, reflexiva e transitiva;
- R é uma relação de ordem se é anti-simétrica, reflexiva e transitiva;
- $R^{-1} = (B, A, q(x, y))$ é a relação inversa de R se e somente se $(a, b) \in S_R \Leftrightarrow (b, a) \in S_R^{-1}$;
- dada uma relação $S = (B, D, q(x, y))$ a relação $S \circ R = (A, D, r(x, y))$ é uma relação composta se e somente se $\forall (a, c) \in S_{S \circ R} \Leftrightarrow \exists b \in B \mid (a, b) \in S_R \text{ e } (b, c) \in S_S$

A mais importante relação de equivalência é, indiscutivelmente, a relação de igualdade “ = ”, pois para cada elemento em um conjunto tem-se; $x = x$ (é reflexiva); se $x = y$ então $y = x$ (é simétrica) e se $x = y$ e $y = z$ então $x = z$ (é transitiva).

A-4 Ordem.

Dados dois elementos distintos “x” e “y” de um conjunto A , tal que se possa afirmar que x precede y, denota-se por $x < y$ e lê-se “x precede estritamente y; diz-se então que existe uma relação de ordem parcial em A e que os elementos x e y, com $(x, y) \in S_R$ e $S_R \supset A^2$, são comparáveis. Se $(z, w) \in A^2$ mas $(z, w) \notin S_R$ diz-se que z e w são não comparáveis, e o conjunto A é dito conjunto parcialmente ordenado.

Um conjunto A é dito totalmente ordenado se sobre ele está definida uma ordem parcial com a seguinte propriedade, conhecida como tricotomia, válida para quaisquer dois elementos x e y de A :

$$x < y \text{ ou } x = y \text{ ou } x > y \quad (\text{A18})$$

Os seguintes símbolos são utilizados para relações de ordem:

- $x < y$; já definido anteriormente;
- $x > y$; lê-se “x domina estritamente y”, com o significado de que $x \neq y$ e x é precedido por y;
- $x \leq y$; lê-se “x precede y”, com o significado de que x precede ou é igual a y;
- $x \geq y$; lê-se “x domina y”, com o significado de x sucede ou é igual a y.

Vê-se que num conjunto A totalmente ordenado por uma relação de ordem R tem-se que $S_R = A^2$.

Um conjunto sobre o qual estiver definida uma relação de ordem total ou parcial será chamado de conjunto ordenado.

Se existir num conjunto ordenado um único elemento que preceda estritamente qualquer outro elemento ele é chamado de primeiro elemento. Analogamente o elemento que domina estritamente qualquer outro elemento é denominado último elemento.

Qualquer elemento de um conjunto ordenado que não seja precedido estritamente por nenhum outro é chamado de mínimo, e de forma análoga se não dominado estritamente por nenhum outro é chamado de máximo. Vê-se portanto que se existir o primeiro elemento ele será o único mínimo; da mesma forma existindo o último elemento ele será o único máximo.

Os conceitos de mínimo, máximo, primeiro e último elementos só existem se for considerada uma ordem sobre o conjunto. A definição de um conjunto, por exemplo:

$$A = \{ a, e, i, o, u \}$$

não traz de forma explícita nem implícita nenhuma definição de ordem sobre o mesmo. Sejam as relações de ordem R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 , conforme Figura A9, definidas em A ; na qual vê-se que o conjunto com R_1 é totalmente ordenado sendo “e” seu primeiro elemento (também seu único mínimo) e “i” o último elemento (também o único máximo); com R_2 o conjunto é parcialmente ordenado pois “a” e “e” são não comparáveis mas são, ambos, mínimos, não existe primeiro elemento e “i” é último elemento (também o único máximo);

com a relação R_3 não há primeiro nem último elementos, “u” e “a” são mínimos e “i” e “e” são máximos; com R_4 é parcialmente ordenado sendo “a” o primeiro elemento (também o único mínimo) e “u” o último elemento (também o único máximo); com R_5 é parcialmente ordenado, “u” é o primeiro elemento (também o único mínimo) e não existe último elemento, mas “a”, “i”, “e” e “o” são máximos.

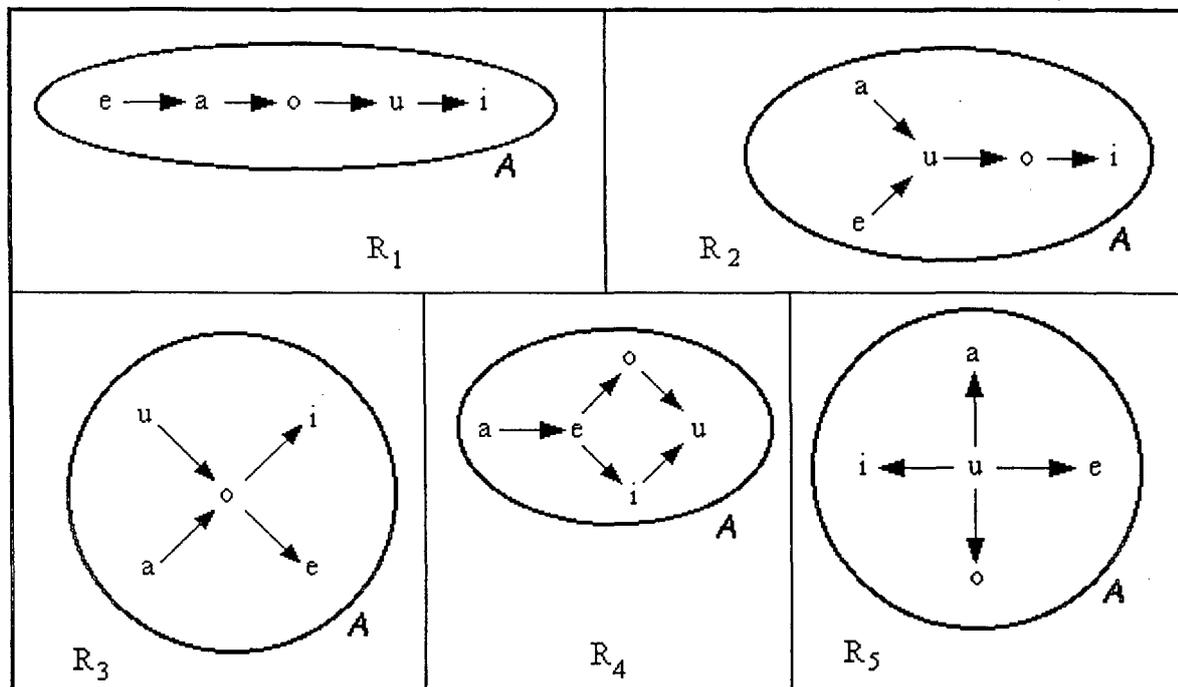


Figura A9 – Ordem em conjuntos.

Dados um conjunto ordenado A , $B \subset A$ um subconjunto qualquer, $D \subset A$ definido com a propriedade de cada elemento de D precede todos elementos de B , e $E \subset A$ definido com a propriedade de cada elemento de E domina todos elementos de B , em notação sintética:

$$D = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \leq y, \forall y \in B \}$$

$$E = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \geq y, \forall y \in B \}$$

Se D tiver último elemento ele será chamado de ínfimo do conjunto B , denotado por $\inf(B)$. Se E tiver primeiro elemento ele será chamado de supremo do conjunto B , e denotado por $\sup(B)$.

Se um conjunto tem ínfimo é dito limitado inferiormente; se tem supremo é limitado superiormente. Se possui ínfimo e supremo é dito limitado.

Note-se que se um conjunto tiver primeiro elemento este será também o seu ínfimo, do mesmo modo, se tiver último elemento este será também o seu supremo e que o primeiro elemento, o último elemento, o máximo e o mínimo pertencem ao conjunto, mas o ínfimo e o supremo não necessariamente precisam pertencer ao conjunto em questão, basta

que pertençam a um conjunto do qual o conjunto em questão seja subconjunto. Seja por exemplo o conjunto ordenado A , Figura A10 e seus subconjuntos B , D , E e F .

$$A = \{ a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l \}$$

$$B = \{ c, d, e, f, g, h, i \}$$

$$D = \{ e, f, g, h, i \}$$

$$E = \{ g, i, j, k \}$$

$$F = \{ d, e, f, g, h, i, j, k \}$$

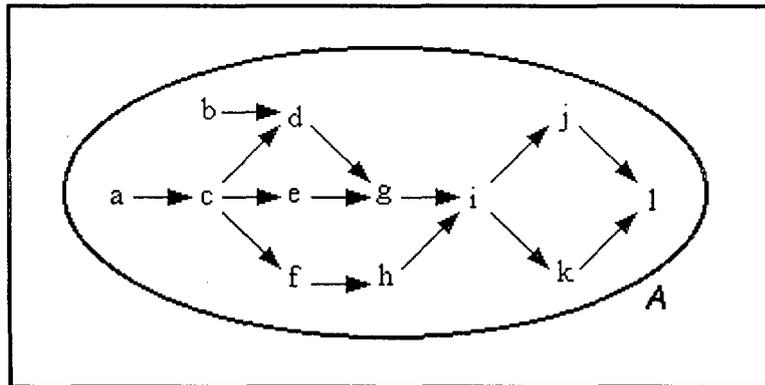


Figura A10 – Supremo e Ínfimo de um conjunto

Vê-se claramente que:

- A tem “ l ” como seu último elemento, que é seu único máximo e $\sup(A) = l$, mas não tem primeiro elemento, “ a ” e “ b ” são mínimos de A , portanto o $\inf(A)$ se existir não pertencerá a A ;
- B tem “ c ” como primeiro elemento e “ i ” como último elemento, logo $\inf(B) = c$ e $\sup(B) = i$. Note-se que “ c ” e “ i ” pertencem a B ;
- D não tem primeiro elemento, “ e ” e “ f ” são seus mínimos, mas tem “ i ” como último elemento que é também o seu supremo, $\sup(D) = i$ e o $\inf(D) = c$. Note-se que $\sup(D) = i \in D$ e o $\inf(D) = c \notin D$;
- E tem “ g ” como primeiro elemento, o que implica $\inf(E) = g$, mas não tem último elemento, sendo “ j ” e “ k ” seus máximos e o $\sup(E) = l$. Note-se que $\inf(E) = g \in E$ e $\sup(E) = l \notin E$;
- F não tem primeiro nem último elemento; “ d ”, “ e ” e “ f ” são seus mínimos e “ j ” e “ k ” são os máximos. O $\inf(F) = c \notin F$ e o $\sup(F) = l \notin F$.

Se num conjunto A estiver definida uma relação de equivalência R chama-se de classe de equivalência do elemento $a \in A$ segundo a relação R , denota-se $A_{(a)}$ ao conjunto formado pelos elementos $x \in A$ tal que $(a, x) \in R$, isto é $(a, x) \in S_R$. Ao conjunto formado por todas as classes de equivalência em A , segundo R , dá-se o nome de conjunto quociente, denota-se por A/R .

$$A/R = \{ A_{(x)} \mid x \in A \} \quad (A19)$$

Note-se que $A_{(x)} \subset A$ e que portanto A/R é uma partição de A .

A-5 Função.

A uma relação $R = (A, B, p(x, y))$ cujo conjunto solução S_R seja

$$S_R = \{ (x, y) \mid (a, b) \in S_R \text{ e } (a, c) \in S_R \Rightarrow b = c \} \quad (A20)$$

dá-se nome de função, isto é, para cada $x \in A$ é associado um único $y \in B$ e diz-se que a função mapeia A em B .

Denota-se função por $f : A \rightarrow B$ lê-se “ f é uma função de A em B ”. O elemento $y \in B$ que a função associa a $x \in A$ denota-se por $f(x)$, lê-se “ f de x ”. $f(x)$ é a imagem de x sob a ação de f , e x é a sua pré-imagem.

Ao conjunto formado por todos os elementos $f(x) \in B$ dá-se o nome de imagem do conjunto A sob a ação de f , denota-se por $f(A)$.

$$f(A) = \{ y \mid y \in B \text{ e } y = f(x) \} \quad (A21)$$

Note-se que:

- o contradomínio de uma função não é unívoco, em verdade qualquer subconjunto D de B que contenha $f(X)$, isto é $f(X) \subset D \subset B$, pode ser contradomínio de f .
- ao se denotar $f(x)$ não se infere, em absoluto, que f seja “função de uma variável”, no sentido usual que se dá à esta expressão. Se por exemplo A for o produto cartesiano de n conjuntos, $A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$, então cada elemento $x \in A$ será $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ com $x_j \in A_j$ e f é “função de n variáveis”.

Se para cada elemento distinto de A for associado um único elemento distinto de B diz-se que a função é monomórfica ou injetora ou ainda um monomorfismo. Se a imagem $f(X)$ da função for igual ao conjunto B , diz-se que a função é epimórfica ou sobrejetora ou um epimorfismo. Se a função for monomórfica e epimórfica é chamada de isomórfica ou bijetora ou um isomorfismo.

Se $f : A \rightarrow B$ é tal que $f(A) = \{ b \}$, ou seja para todo elemento “ x ” de A tem-se que $f(x) = b$, então f é chamada de função constante.

Se $f: A \rightarrow A$ é tal que $f(x) = x$ para todo $x \in A$ diz-se que f é a função identidade, denotada por Id_A .

Dadas as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow D$ chama-se $g \circ f: A \rightarrow D$ de função composta, ou seja:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A \quad (A22)$$

Dadas as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow A$, se a função composta $g \circ f: A \rightarrow A$ for igual à função identidade $Id_A: A \rightarrow A$, ou seja $g(f(x)) = x \quad \forall x \in A$, diz-se que g é a inversa à esquerda de f . Se $f \circ g: B \rightarrow B$ for igual à função identidade $Id_B: B \rightarrow B$, ou seja $f(g(y)) = y \quad \forall y \in B$ diz-se que g é a inversa à direita de f . Se g for a inversa à direita e também a inversa à esquerda de f , diz-se simplesmente g é a inversa de f e denota-se por $f^{-1}: B \rightarrow A$. Note-se que:

- A inversa à esquerda de $f: A \rightarrow B$ existirá se e somente se f for monomórfica;
- a inversa à direita de $f: A \rightarrow B$ existirá se e somente se f for epimórfica;
- a inversa de $f: A \rightarrow B$ existirá se e somente se f for isomórfica, muito embora para uma relação $R: A \rightarrow B$ sempre existe a relação inversa $R^{-1}: B \rightarrow A$.

Nota-se também que a composição de funções é associativa. Por exemplo sejam as funções: $f: A \rightarrow B$; $g: B \rightarrow C$ e $h: C \rightarrow D$ então

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Seja a função $f: A \rightarrow B$, e $D \subset A$ um subconjunto de A , a função $g: D \rightarrow B$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in D$ é chamada de restrição da função f ao conjunto D e denotada por $f|_D: D \rightarrow B$. A função f é dita uma extensão de g ao conjunto A e em geral a extensão de uma função não é unívoca pois qualquer função $h: A \rightarrow B$ para a qual $g(x) = h(x)$ para todo $x \in D$ é uma extensão de g .

“Um grande número de problemas matemáticos importantes se reduzem a estender uma ou várias funções de tal modo que as extensões satisfaçam a certas condições adicionais (continuidade, analiticidade, etc.). A função que se deseja estender é chamada a condição de contorno” [3] O critério para se escolher qual (ou quais) extensão é a mais adequada ao problema é objeto de estudo em otimização. Sejam, por exemplo, uma estrutura vibrante E , imersa num meio fluido, S uma superfície em torno da estrutura e $f: E \rightarrow S$ uma função que relaciona a vibração da estrutura com o ruído radiado. Conhecendo-se o ruído em S deseja-se obter um extensão de f para se predizer o ruído numa outra superfície qualquer. Este é o tema central do presente trabalho e para escolher a melhor extensão de f usar-se-á o critério da norma mínima, a ser definido oportunamente.

Um conjunto A chama-se finito se é vazio, diz-se que tem zero elementos, ou quando existe um isomorfismo $f: J_n \rightarrow A$, diz-se que tem n elementos. Um conjunto que não é finito é dito infinito.

Um conjunto A é dito enumerável quando é finito ou quando existe um isomorfismo $f: \mathbb{N} \rightarrow A$.

Dois conjuntos A e B são ditos equipolentes se existe um isomorfismo $f: A \rightarrow B$. Vê-se que dois conjuntos finitos com o mesmo número de elementos são equipolentes. Isto será usado neste trabalho ao se dividir a estrutura vibrante em pequenas partes, ordenadas segundo a ordenação usual que se dá para matrizes e depois usar, no modelo matemático, como uma matriz linha (ou coluna) ordenada de forma tal que, tendo a matriz p linhas, os primeiros p elementos da matriz linha serão os elementos da primeira linha da matriz, os seguintes os da segunda linha e assim sucessivamente. Desta forma sejam os conjuntos ordenados:

$M = \{ a_{ij} \}$ matriz de N linhas por M colunas;

$V = \{ v_n \}$ matriz linha de NM (N vezes M) elementos ordenada conforme acima;

$A = \{ 1, 2, 3, \dots, N \}$ índice das linhas da matriz;

$B = \{ 1, 2, 3, \dots, M \}$ índice das colunas da matriz e

$D = \{ 1, 2, 3, \dots, NM \}$ índice dos elementos da matriz linha (ou coluna).

Evidentemente um elemento genérico de uma matriz qualquer fica perfeitamente identificado pelo seu índice. Isto posto, postula-se que a relação $f: A \times B \rightarrow D$ definida por $f(n, m) = (n-1)M + m$ é uma função isomórfica que transforma a matriz M na matriz linha (ou coluna) V , cuja prova segue:

i – a relação f é uma função.

Suponha-se que para um dado $(n, m) \in A \times B$ existam duas imagens diferentes $v_1 \in D$ e $v_2 \in D$, i. e.,

$$f(n, m) = (n-1)M + m = v_1 \quad \text{e} \quad f(n, m) = (n-1)M + m = v_2$$

tomando a razão $\frac{v_1}{v_2} = \frac{(n-1)M + m}{(n-1)M + m} = 1 \Rightarrow v_1 = v_2$, ou seja $v_1 \neq v_2$ é uma contradição,

logo f é uma função.

ii – f é monomórfica.

Suponha-se que exista um $v \in D$ que seja a imagem de dois elementos diferentes $(n_1, m_1) \in A \times B$ e $(n_2, m_2) \in A \times B$, então

$$f(n_1, m_1) = (n_1-1)M + m_1 = v \quad \text{e} \quad f(n_2, m_2) = (n_2-1)M + m_2 = v$$

tomando a razão $\frac{f(n_1, m_1)}{f(n_2, m_2)} = \frac{(n_1-1)M + m_1}{(n_2-1)M + m_2} = \frac{v}{v} = 1$

$$(n_1-1)M + m_1 = (n_2-1)M + m_2 \Rightarrow m_1 = (n_2 - n_1)M + m_2$$

Note-se que $(n_2 - n_1)$ é inteiro, pois ambos, n_1 e n_2 são inteiros (e positivos). Se $(n_2 - n_1) > 0 \Rightarrow (n_2 - n_1) = |(n_2 - n_1)| \Rightarrow m_1 = |(n_2 - n_1)|M + m_2 > M \Rightarrow \otimes \Rightarrow (n_1, m_1) \notin A \times B$.
 $(n_2 - n_1) < 0 \Rightarrow (n_2 - n_1) = -|(n_2 - n_1)| \Rightarrow m_1 = -|(n_2 - n_1)|M + m_2 < 1 \Rightarrow \otimes \Rightarrow (n_1, m_1) \notin A \times B$.
portanto $(n_2 - n_1) = 0 \Rightarrow n_2 = n_1 \Rightarrow m_1 = m_2 \Rightarrow f$ é monomórfica.

iii) f é epimórfica.

Os conjuntos $A \times B$ e D são equipolentes pois ambos são finitos com NM elementos cada. Sendo $f: A \times B \rightarrow D$ monomórfica, ela é portanto epimórfica também ou seja f é um isomorfismo. cqd.

A-6 Seqüências

Uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ ou $f(n) = a_n$ com $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \in A$ é chamada de seqüência e será denotada por (x_n) .

Uma seqüência diz-se:

- crescente se $x_1 < x_2 < \dots < x_n \dots < \dots$
- decrescente se $x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$
- não decrescente se $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$
- não crescente se $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq \dots x_n \geq \dots$

Denomina-se subsequência a restrição de uma seqüência a um subconjunto $N' \subset \mathbb{N}$. Diz-se que uma seqüência é limitada se o conjunto de seus termos for limitado.

Por exemplo sejam F o conjunto das funções reais de variável real, i. e., o conjunto das funções definidas de \mathbb{R} em \mathbb{R} , e as seqüências (f_n) e (g_n) definidas de \mathbb{N} em F , conforme abaixo [7, 8]:

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2x^2}; \quad f_n(x) \in F; \quad n \in \mathbb{N}; \quad x \in \mathbb{R}$$
$$g_n = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}; \quad g_n(x) \in F; \quad n \in \mathbb{N}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Estas seqüências tendem a ficar fortemente concentrada na origem com o aumento do n , como pode ser observado na Figura A11. Diz-se que estas seqüências tendem para o “delta de Dirac” que pode ser tratado como uma função dentro do contexto das Funções Generalizadas, ou Teoria das Distribuições, que no presente trabalho desempenham papel fundamental posto que a solução da equação de Helmholtz em termos de Função de Green, ou fontes pontuais que será utilizada, é uma solução em termos de Funções Generalizadas.

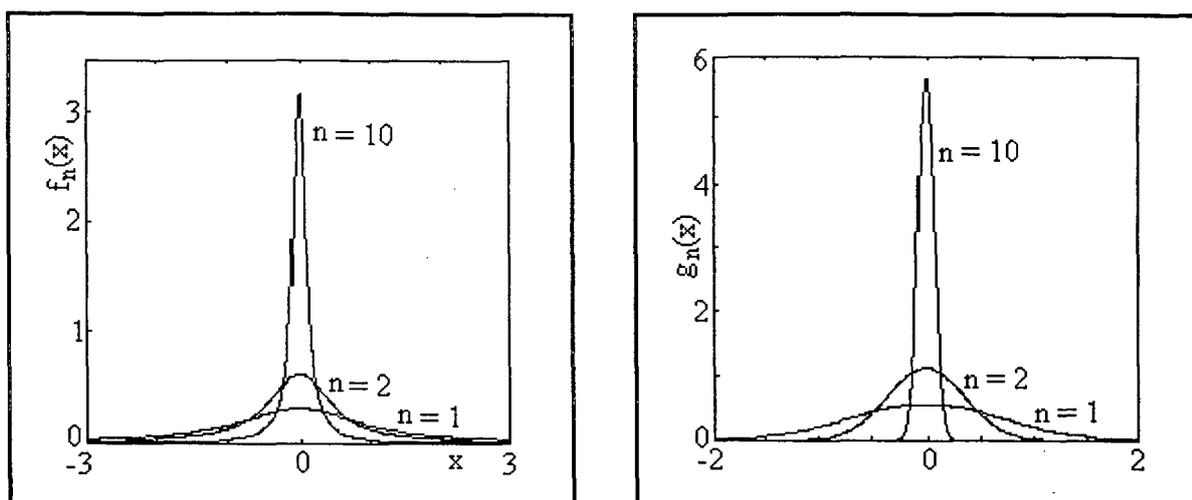


Figura A11 – Seqüências delta

Várias seqüências podem ser construídas tendendo para o delta de Dirac e não é preciso ficar restrito ao conjunto \mathbb{R} , pois pode-se ter seqüências delta em \mathbb{R}^n [7, 8, 9, 10].

“Diz-se que uma seqüência (a_n) converge para o número L , ou tem limite L se, dado qualquer número $\varepsilon > 0$, sempre é possível encontrar um número N tal que

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon \quad (\text{A23})$$

Escreve-se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ou $\lim a_n = L$ ou $a_n \rightarrow L$.

Uma seqüência que não converge é dita divergente. Chama-se seqüência nula toda a seqüência que converge para zero.” [11]

Se o conjunto dos elementos de um seqüência é limitado diz-se que a mesma é limitada.

Se $\lim x_n = a$, este limite é único e qualquer subsequência de (x_n) converge para o mesmo limite a . [3, 11]

Diz-se que uma seqüência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dado um $\varepsilon > 0$, arbitrariamente escolhido, existir um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in X$. Se a convergência se dá apenas nos pontos em que $f(x)$ é contínua (no sentido usual de continuidade de funções) diz-se que a seqüência converge fracamente. Este conceito de convergência fraca é fundamental na definição de distribuições, cuja importância já foi apontada para o presente trabalho.

“Uma seqüência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se um seqüência de Cauchy quando para qualquer $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, qualquer que seja $x \in X$. A seqüência (f_n) converge uniformemente se e somente se for uma seqüência de Cauchy”. [3] Isto é conhecido como “Critério de Convergência de Cauchy”, e é usado na definição de espaços vetoriais completos (no sentido de Cauchy) entre os quais se destacam os Espaços de Banach e de Hilbert, nos quais estão definidas as distribuições e o operador (linear) diferencial (da equação de Helmholtz) chamado de operador das ondas [9, 10, 12].

A-7 Operações

A uma função $f: A^n \rightarrow A$ dá-se o nome de operação n-ária e diz-se que a operação em questão é definida em A ou que A é fechado em relação a esta operação. De particular interesse é $f: A^2 \rightarrow A$, à qual se dá o nome de operação binária.

Adote-se a seguinte convenção: dizer “seja a operação binária \clubsuit em A ”, significa que $\clubsuit: A^2 \rightarrow A$ e denotar “ $x \clubsuit y = z$ ” significa que, para $(x, y) \in A^2$ e $z \in A$, $\clubsuit(x, y) = z$. Isto posto diz-se que para $\clubsuit: A^2 \rightarrow A$:

- \clubsuit é comutativa se e somente se $a \clubsuit b = b \clubsuit a$, $\forall a, b \in A$;
- \clubsuit é associativa se e somente se $(a \clubsuit b) \clubsuit c = a \clubsuit (b \clubsuit c)$, $\forall a, b, c \in A$;
- \clubsuit é distributiva à esquerda em relação à operação binária \heartsuit em A se e somente se $a \clubsuit (b \heartsuit c) = (a \clubsuit b) \heartsuit (a \clubsuit c)$, $\forall a, b, c \in A$;
- \clubsuit é distributiva à direita em relação à operação binária \heartsuit em A se e somente se $(a \heartsuit b) \clubsuit c = (a \clubsuit c) \heartsuit (b \clubsuit c)$, $\forall a, b, c \in A$;
- \clubsuit distributiva em relação à operação binária \heartsuit em A se e somente se \clubsuit for distributiva à esquerda e também à direita;
- se A for um conjunto totalmente ordenado chama-se de monotonicidade da operação binária \clubsuit à propriedade de que, se $a < b$ então $(a \clubsuit c) < (b \clubsuit c)$, $\forall a, b, c \in A$.
- diz-se que existe o elemento neutro para \clubsuit , se houver um $e \in A$ tal que para todo $x \in A$ se tenha $e \clubsuit x = x \clubsuit e = x$. O elemento neutro será denotado por e , e se existir será único [1].
- se existir o elemento neutro e para \clubsuit e se para cada $x \in A$ existir um elemento $x' \in A$ tal que $x \clubsuit x' = x' \clubsuit x = e$, diz-se que x' é o elemento simétrico de x para a operação \clubsuit ou que x é simetrizável. Costuma-se denotar o elemento simétrico de x por “ $-x$ ” (e denominá-lo elemento oposto de x se \clubsuit é a adição como usualmente definida) ou por x^{-1} (e denominá-lo elemento inverso de x se \clubsuit é a multiplicação usual).
- diz-se que existe o elemento absorvente para \clubsuit , se houver um $a \in A$ tal que para todo $x \in A$ se tenha $a \clubsuit x = x \clubsuit a = a$. O elemento absorvente será denotado por a .
- se $a \clubsuit x = a \clubsuit y$ implicar que $x = y$ para todo $x, y \in A$ então diz-se que “ a ” é um elemento regular à esquerda para \clubsuit ;
- se $x \clubsuit a = y \clubsuit a$ implicar que $x = y$ para todo $x, y \in A$ então diz-se que “ a ” é um regular à direita para \clubsuit ;
- se um elemento é regular à direita e à esquerda diz-se que ele é regular ou simplificável. Note-se que se \clubsuit for comutativa então um elemento regular à direita ou à esquerda será regular;

A-8 Grupo.

Seja a operação binária \clubsuit em A . Ao conjunto $E = \{ A, \clubsuit \}$ dá-se o nome de estrutura. Se existir o elemento neutro e para \clubsuit e se esta for associativa diz-se que a operação binária \clubsuit define sobre A uma estrutura de monóide, ou que A é um monóide em relação a \clubsuit , ou ainda que A é um monóide. Se a operação \clubsuit for comutativa diz-se que A é um monóide comutativo. Se todo elemento do monóide A for simetrizável diz-se que \clubsuit define sobre A uma estrutura de grupo ou que A é um grupo e se \clubsuit for comutativa o grupo é dito comutativo ou abeliano.

Um grupo $G = \{ A, \clubsuit \}$ é dito isomórfico a um grupo $F = \{ B, \heartsuit \}$ se existir uma função isomórfica $f : A \rightarrow B$ tal que:

$$f(a_1 \clubsuit a_2) = f(a_1) \heartsuit f(a_2); \quad a_1, a_2 \in A \quad (A24)$$

Uma propriedade válida para um grupo é também válida para todo grupo que lhe seja isomórfico [5]. Vê-se que se dois grupos são isomórficos, então seus respectivos conjuntos são equipolentes.

A-9 Anel.

Sejam um conjunto A e duas operações binárias \clubsuit e \heartsuit definidas sobre A . Se \clubsuit definir sobre A uma estrutura de grupo abeliano; \heartsuit for associativa e também distributiva em relação a \clubsuit ; diz-se que as operações \clubsuit e \heartsuit definem sobre A uma estrutura de anel, denotada por $\{ A, \clubsuit, \heartsuit \}$. Se \heartsuit for também comutativa o anel é dito comutativo e se existe o elemento neutro para \heartsuit o anel é dito comutativo com elemento neutro (também dito elemento unidade, se \heartsuit for multiplicação).

Sem perda de generalidade, para o anel comutativo $\{ A, \clubsuit, \heartsuit \}$, pode-se chamar a operação \clubsuit de adição; \heartsuit de multiplicação; o elemento neutro $e \in A$ de $\{ A, \heartsuit \}$ de unidade e o elemento absorvente $a \in A$ de $\{ A, \heartsuit \}$ de zero. Assim diz-se que um elemento $a \in A$ é divisor do zero se e somente se existir um $b \in A$, $b \neq a$, tal que $a \heartsuit b = a$ e se $a \neq a$ diz-se que “ a ” é divisor próprio do zero. Aos elementos $x \in A$ que não sejam divisores do zero dá-se o nome de elementos regulares, conforme definido anteriormente onde se usou o conceito estabelecido no teorema conhecido como “lei restrita do cancelamento da multiplicação” [6] que estabelece que se $a \heartsuit x = a \heartsuit y$; $a, x, y \in A$; e “ a ” é regular então $x = y$.

A-10 Corpo.

Um anel comutativo $\{ A, \clubsuit, \heartsuit \}$ com unidade diferente de zero, i. e., $e \neq a$, que não possui divisores próprios do zero é dito anel de integridade ou domínio integral e se todo elemento $x \in A$, $x \neq a$, for inversível então o anel é chamado de corpo. Nota-se que num

corpo as estruturas $\{A, \clubsuit\}$ e $\{A - \{a\}, \heartsuit\}$ são grupos abelianos aditivo e multiplicativo, respectivamente.

Um corpo genérico será denotado por $\mathcal{F} = \{F, \clubsuit, \heartsuit\}$ e diz-se que o corpo é ordenado se sobre F estiver definida uma relação de ordem $<$ de tal forma que:

- $\forall a, b \in F$ vale uma e somente uma das alternativas: ou $a < b$ ou $a = b$ ou $b > a$ (tricotomia);
- $\forall a, b, c \in F$ se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$ (transitividade);
- $\forall a, b, c \in F$ se $a < b$ então $a \clubsuit c < b \clubsuit c$ (preservação na adição);
- $\forall a, b, c \in F$ se $a < b$ e $a < c$ então $a \heartsuit c < b \heartsuit c$ (preservação na multiplicação por um elemento positivo).

Um elemento genérico do corpo, $x \in \mathcal{F}$, será chamado de escalar, sem com isto se inferir que este termo tenha o sentido usual que lhe é atribuído.

“Um corpo ordenado $\mathcal{F} = \{F, \clubsuit, \heartsuit\}$ é um corpo no qual se destacou um subconjunto $P \subset F$, chamado o conjunto dos elementos positivos do corpo tal que as seguintes condições são satisfeitas:

- *a adição e a multiplicação de elementos positivos são positivos. Ou seja $\forall x, y \in P$ implica em $x \clubsuit y \in P$ e $x \heartsuit y \in P$;*
- *$\forall x \in F$ uma e somente uma das três alternativas é válida: ou $x \in P$ ou $-x \in P$ ou $x = a$ (zero).*

Denotando por $-P$ o conjunto dos elementos $-x$, onde $x \in P$, tem-se $F = P \cup (-P) \cup \{a\}$; sendo P , $(-P)$ e $\{a\}$ disjuntos dois-a-dois. O conjunto $-P \subset F$, é chamado de conjunto dos elementos negativos do corpo. Num corpo ordenado $x^2 = x \heartsuit x \in P$.” [3]

São exemplos importantes de corpo, com as operações usuais de adição “+” e multiplicação “.”:

$\mathcal{R} = \{R, +, .\}$ corpo dos números reais, também chamado de reta real;

$\mathcal{C} = \{C, +, .\}$ corpo dos números complexos;

A-11 Intervalo.

Em um corpo ordenado \mathcal{F} pode-se definir a importante noção de intervalo (subconjuntos de \mathcal{F}), como segue, com $a, b \in \mathcal{F}$ e $a < b$:

- $(a, b) = \{x \mid x \in \mathcal{F}, a < x < b\}$ intervalo aberto;
- $(a, b] = \{x \mid x \in \mathcal{F}, a < x \leq b\}$ intervalo aberto à esquerda;
- $[a, b) = \{x \mid x \in \mathcal{F}, a \leq x < b\}$ intervalo aberto à direita;
- $[a, b] = \{x \mid x \in \mathcal{F}, a \leq x \leq b\}$ intervalo fechado;

Se $a = b$ o intervalo $[a, a]$, composto de um único elemento, é chamado de intervalo degenerado. Os pontos “a” e “b” são chamados de extremos do intervalo.

Para o corpo dos números reais destacam-se os seguintes intervalos:

- $(-\infty, b]$ semi-reta esquerda fechada com origem em “b”;
- $(-\infty, b)$ semi-reta esquerda aberta com origem em “b”;

- $[a, \infty)$ semi-reta direita fechada com origem em “a”;
- (a, ∞) semi-reta direita aberta com origem em “a”;
- $(-\infty, \infty)$ reta real;

Um partição do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito $A \subset [a, b]$ tal que $a \in A$ e $b \in A$. Se $A \neq B$ são partições de $[a, b]$ e $A \subset B$ diz-se que B é uma partição mais fina do intervalo, ou que B é um refinamento de A . No presente trabalho usar-se-á para a distribuição das fontes elementares, partições e refinamentos do intervalo sobre a reta (ou superfície) das fontes do modelo.

A-12 Espaços topológicos

Seja um conjunto A . “Uma topologia sobre A é um conjunto de partes de A , ditas abertas segundo esta topologia, tais que:

- i) A e \emptyset são partes abertas;
- ii) A interseção de duas (e portanto de um número finito não nulo de) partes abertas é aberta;
- iii) a união de uma coleção não vazia, finita ou não, de partes abertas é aberta.

Um espaço topológico é um conjunto munido de uma topologia, i. e., um conjunto sobre o qual está dada uma topologia”. [19].

Um importante espaço topológico é o conjunto dos reais \mathbb{R} (ou \mathbb{R}^n), para o qual diz-se que existe uma topologia natural.

Seja um subconjunto dos números reais $X \subset \mathbb{R}$. Um elemento $x \in X$ é chamado de ponto interior de X se existir um intervalo (a, b) , subconjunto de X tal que $x \in (a, b)$. “Segundo esta definição todos os elementos de um intervalo aberto são pontos interiores desse intervalo. O interior de um conjunto, denota-se $\text{int}(X)$, é o conjunto de seus pontos interiores. Assim, o intervalo (a, b) é o seu próprio interior, i. e., $\text{int}((a, b)) = (a, b)$; é também o interior do intervalo $[a, b]$ ”, $\text{int}([a, b]) = (a, b)$. [11]

Se todos os elementos de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ são seus pontos interiores, então A é dito aberto ou conjunto aberto.

Qualquer conjunto que contenha interiormente um elemento x é dito vizinhança de x . Assim por exemplo, seja $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ então o intervalo $V_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ é uma vizinhança de a ; chamada de vizinhança simétrica ou vizinhança ε de a .

A-13 Funções analíticas

Seja $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e uma função $f: A \rightarrow \mathbb{C}$. Se para $z \in A$ existir o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) \quad (\text{A25})$$

diz-se que f é derivável no ponto z e ao número complexo $f'(z)$ dá-se o nome de derivada de f no ponto z . [21, 29] De forma semelhante define-se derivadas de ordens superiores e também derivada parcial.

Sendo $A_d \subset A$ o conjunto de todos os pontos nos quais a derivada de f existe pode-se definir uma função $f': A_d \rightarrow \mathbb{C}$, chamada derivada de f cuja imagem é o subconjunto de \mathbb{C} formado pelas derivadas de f nos pontos em que a mesma existe.

A função $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ é dita analítica se sua derivada f' existe e é contínua em todos os pontos de A [30]. Sendo analítica, f possui derivadas de todas as ordens. [31]

Se $f(z)$ é analítica num disco de raio r e centro z_0 (em verdade uma vizinhança de z_0) então a mesma pode ser expandida numa série complexa de Taylor, i. e.:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (\text{A26})$$

na qual $f^{(n)}$ é a derivada de ordem n de f . A recíproca é verdadeira, i. e., se f pode ser expandida em série de Taylor, então f é analítica. [30, 31]

A-14 Singularidade, polo.

Um ponto z_0 é chamado de singularidade isolada ou ponto singular isolado de f se:

- i) f for analítica em uma vizinhança de z_0 (disco de raio r centrado em z_0), excluindo-se o ponto z_0 ;
- ii) f não for analítica em z_0 . A rigor f não necessita nem ser definida em z_0 [30].

Um ponto singular isolado z_0 de uma função analítica f é dito um polo se $f(z) \rightarrow \infty$ quando $z \rightarrow z_0$. Se f for indeterminada em z_0 , i. e., f não possui limite em z_0 nem diverge para infinito neste ponto diz que z_0 é uma singularidade essencial. [29]

A título de exemplo, seja $f(z)$ analítica e as funções:

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0} \quad (\text{A27})$$

Vê-se que a medida que z se aproxima de z_0 , i. e. $z \rightarrow z_0$, a função $g(z)$ aumenta indefinidamente. A singularidade em z_0 é chamada de polo simples.

$$h(z) = \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)} \quad ; \quad z_1 \neq z_2 \neq \cdots \neq z_n \quad (\text{A28})$$

A função $h(z)$ também aumente indefinidamente cada vez que $z \rightarrow z_i$, $i = 1, \dots, n$. Diz-se que $h(z)$ possui n pólos isolados, a saber z_1, \dots, z_n .

$$p(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} \quad (\text{A29})$$

Com $p(z)$ o comportamento é semelhante, dizendo-se que $p(z)$ possui um polo de ordem m em z_0 . [30, 32]

Vê-se que a radiação acústica de uma esfera [33] modelada matematicamente por :

$$p(r) = \frac{C}{r} e^{-jkr} \quad (\text{A30})$$

possui um único polo na origem $r = 0$, vindo daí o nome monopolo para este tipo de fonte. Do mesmo modo derivam os nomes dipolo e multipolo.

Diz-se que uma função $f(z)$ é meromorfa se suas únicas singularidades em todo o plano complexo forem pólos e o infinito for uma singularidade essencial. [29]

A-15 Teorema do resíduo.

Seja $f(z)$ analítica em uma vizinhança de $z = z_0$, podendo z_0 ser um ponto singular, e seja C uma curva simples fechada no interior desta vizinhança e entorno de $z = z_0$. Então a integral

$$\text{Res}[f(a)] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \quad (\text{A31})$$

é chamada de resíduo da junção no ponto $z = z_0$ e independe da escolha do caminho C de integração [7], evidentemente desde que o mesmo esteja contido numa região na qual $f(z)$ é analítica.

Isto posto pode-se apresentar o teorema do resíduo [7]. “*Se $f(z)$ é analítica no interior de um contorno fechado C e sobre C exceto em um número finito de singularidades isoladas em $z = z_1, \dots, z_n$, todas situadas no interior de C , então*” [7]

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z_k)] \quad (\text{A32})$$

A respeito do teorema do resíduo e suas aplicações pode-se consultar [7, 29, 30, 31, 32].

A-16 Funções harmônicas

Toda função que satisfaz à equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0 \quad (\text{A33})$$

é chamada de função harmônica [7, 21].

São exemplos de funções harmônicas [21]:

$$i) \quad f: \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \frac{1}{|x|}; \quad |x| = \sqrt{(x; x)} \quad (A34)$$

$$ii) \quad g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; \quad g(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z^2 \quad (A35)$$

$$iii) \quad h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad h(x, y) = [A \cos(ax) + B \sin(ax)]e^{ay} \quad (A36)$$

A-17 Ponto aderente.

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e (x_n) uma seqüência em A . Ao ponto a limite de (x_n) dá-se o nome de ponto aderente de A . Em particular todo ponto interior de A é um ponto aderente de A . O ponto aderente não necessariamente pertence ao conjunto. O conjunto A^f de todos os pontos aderentes de A chama-se fecho de A . Se $A = A^f$ diz-se que o conjunto A é fechado. “Um conjunto F é fechado se, e somente se, seu complementar $\mathbb{R} - F$ é aberto” [3, 11] Por exemplo seja $X \subset \mathbb{R}^n$. “Um subconjunto $A \subset X$ diz-se aberto em X se para cada $a \in A$ existe um $\delta > 0$ tal que os pontos x , pertencentes a X , que cumprem a condição $|x - a| < \delta$ estão em A ”. [21] Onde $|x - a|$ é a distância entre x e a , definida adiante. Vê-se que $(0, 1]$ é aberto em $[0, 1]$.

Se um conjunto for limitado e fechado diz-se que o mesmo é um conjunto compacto.

Seja a função $f: X \rightarrow Y$, o subconjunto $S \subset X$ fora do qual $f(x)$ se anula é chamado suporte de f ; ou em outras palavras o suporte de f é o fecho de $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$.

Sejam A e B subconjuntos de \mathbb{R} com $A \subset B$. Diz-se que A é denso em B quando todo ponto de B for aderente a A . “As seguintes afirmações são equivalentes a dizer que A é denso em B :

- i) *Todo ponto de B é limite de uma seqüência de pontos de A ;*
- ii) *$B \subset A^f$;*
- iii) *para todo $b \in B$ e todo $\varepsilon > 0$ tem-se $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$;*
- iv) *todo intervalo aberto que contenha um ponto de B deve conter também algum ponto de A .” [3]*

“Dito de outra maneira, A ser denso em B significa que os pontos de B que não pertencem a A certamente são pontos de acumulação de A ” [11]

A-18 Pontos de acumulação e isolado.

Diz-se que o ponto $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de $A \subset \mathbb{R}$ se qualquer vizinhança $V_\varepsilon(a)$ contem algum elemento $x \in A$ diferente de a . O conjunto A' de todos os pontos de acumulação de A é também chamado de derivado de A . Um ponto d é dito ponto de acumulação à direita de A se, dado um $\varepsilon > 0$, todo intervalo $[d, d + \varepsilon)$ possui algum ponto de A diferente de d . Da mesma forma e é dito ponto de acumulação à esquerda de A se, dado um $\varepsilon > 0$, todo intervalo $(e - \varepsilon, e]$ possui algum ponto de A diferente de “ e ”.

Se um ponto $b \in A$ não for um ponto de acumulação de A diz-se que b é um ponto isolado de A . Vê-se que para b ser um ponto isolado de A basta que existir um $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(b) \cap A = \{b\}$. Em particular todo ponto $z \in Z$ é um ponto isolado em Z .

Se todos elementos de um conjunto são pontos isolados diz-se que este conjunto é discreto.

Para todo $A \subset \mathbb{R}$, tem-se $A^f = A \cup A'$. [3, 11, 20].

Os conceitos acima podem ser estendidos ao \mathbb{R}^n [21].

A-19 Espaços vetoriais lineares.

Sejam:

- Um conjunto não vazio V ;
- uma operação binária $\#$ em V , de tal sorte que $\{V, \#\}$ seja um grupo abeliano;
- um corpo $\mathcal{F} = \{F, \clubsuit, \heartsuit\}$;
- uma função $\spadesuit : F \times V \rightarrow V$, com as seguintes propriedades válidas para todo $\alpha, \beta \in V$, todo $a, b \in F$ com e sendo a unidade de \mathcal{F} e usando a notação $a \spadesuit \alpha = \beta$ com o significado de $\spadesuit(a, \alpha) = \beta$ com $(a, \alpha) \in F \times V$:
 - $a \spadesuit \alpha \in V$;
 - $a \spadesuit (b \spadesuit \alpha) = (a \heartsuit b) \spadesuit \alpha$;
 - $a \spadesuit (\alpha \# \beta) = a \spadesuit \alpha \# a \spadesuit \beta$;
 - $(a \clubsuit b) \spadesuit \alpha = a \spadesuit \alpha \clubsuit b \spadesuit \alpha$;
 - $e \spadesuit \alpha = \alpha$.

A estrutura $\mathbb{V} = \{V, \#, \mathcal{F}, \spadesuit\}$ é denominada Espaço Vetorial Linear. Diz-se também que V constitui (ou é) um espaço vetorial linear sobre \mathcal{F} .

Sem perda de generalidade pode-se chamar de vetor um elemento genérico de V e havendo clara distinção entre o vetor (elemento de V) e o escalar (elemento de F) pode-se também chamar de: adição (de escalares) à operação \clubsuit e representando-a pelo símbolo usual de adição; multiplicação (de escalares) à operação \heartsuit e representá-la pelo símbolo usual de multiplicação; adição (de vetores) à operação $\#$ denotando-a pelo símbolo usual de adição e de multiplicação (de escalar por vetor) à função \spadesuit usando para esta a notação usual de multiplicação. Isto posto, para todo $\alpha, \beta, \gamma \in V$ e todo $a, b \in F$, pode-se dizer que um espaço vetorial linear possui as seguintes propriedades:

- $\alpha + \beta \in V$ (fechamento);
- $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (associatividade);
- $\exists \theta \in V$ tal que $\theta + \alpha = \alpha + \theta = \alpha$ (existência do vetor zero);
- $\exists (-\alpha) \in V$ tal que $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$ (existência do aditivo inverso);
- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (comutatividade);
- $a\alpha \in V$ (produto de escalar por vetor);
- $a(b\alpha) = (ab)\alpha$ (associatividade);
- $a(\alpha + \beta) = a\alpha + b\beta$ (distributividade da soma (adição) de vetores em relação à multiplicação (produto) de escalar por vetor);

- $(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$ (distributividade da soma de escalares em relação ao produto de escalar por vetor;
- $e\alpha = \alpha$ (e é a unidade de \mathcal{F}).

Se um subconjunto $W \subset V$ é, em relação ao mesmo corpo e operações em \mathbb{V} , um espaço vetorial linear \mathbb{W} , diz-se que \mathbb{W} é um subespaço (vetorial linear) do espaço (vetorial linear) \mathbb{V} , e será denotado por $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$. Para provar que \mathbb{W} subespaço de \mathbb{V} basta provar que para todo $a, b \in \mathcal{F}$ e para todo $\alpha, \beta \in W \subset V$ tem-se que $a\alpha + b\beta \in W$, posto que as outras propriedades estão provadas pelo fato de ser W subconjunto de V . Em particular o conjunto $\{\theta\}$ constitui um espaço vetorial linear sobre \mathcal{F} , chamado de espaço do vetor zero (ou nulo). \mathbb{V} também é subespaço de \mathbb{V} pois $V \subset V$. \mathbb{V} e $\{\theta\}$ são chamados de subespaços triviais de \mathbb{V} , e todos os demais são ditos subespaços próprios de \mathbb{V} . Verifica-se da definição de espaço vetorial linear que qualquer subespaço tem o vetor nulo como um de seus elementos.

Denotando por θ o zero de \mathcal{F} (i. e., o elemento absorvente \mathbf{a} de \mathcal{F}), sem se dar com isto o sentido usual que se dá ao símbolo “0” e a palavra “zero”, vê-se que as seguintes proposições são verdadeiras para todo $a \in \mathcal{F}$ e todo $\alpha \in V$:

- $a\theta = \theta$;
- $0\theta = \theta$;
- se $a\alpha = \theta$ ou $a = 0$ ou $\alpha = \theta$;

É também imediato que $a(-\alpha) = (-a)\alpha = -(a\alpha)$.

Doravante ao se afirmar:

- “seja V um espaço vetorial” entenda-se V é o conjunto de vetores do espaço vetorial linear \mathbb{V} em relação ao corpo \mathcal{F} ;
- “seja $A \subset \mathbb{V}$ ” entenda-se $A \subset V$ é um subconjunto do conjunto V de vetores do espaço vetorial linear \mathbb{V} em relação ao corpo \mathcal{F} ;
- “ $\alpha \in \mathbb{V}$ ” entenda-se o vetor α pertence ao conjunto V de vetores do espaço vetorial linear \mathbb{V} em relação ao corpo \mathcal{F} ;
- “ $a \in \mathcal{F}$ ” entenda-se “ a ” pertence ao conjunto \mathcal{F} de escalares do corpo \mathcal{F} .

Seja um espaço vetorial linear \mathbb{V} em relação ao corpo \mathcal{F} ; define-se Combinação Linear como sendo a soma

$$\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \quad (\text{A37})$$

para todo subconjunto $\{\alpha_i\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{V}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathcal{F}$. Se todos os $a_i \in \mathcal{F} = \mathcal{R}$ forem reais positivos e a soma $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, então a combinação linear $\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i$ é

chamada de combinação convexa. “Em muitos problemas de matemática aplicada ocorrem combinações convexas, nos quais os a_1, \dots, a_n podem ser interpretados como probabilidades ou proporções. Por exemplo, se n partículas com massas m_1, \dots, m_n estão posicionadas, respectivamente, nos pontos x_1, \dots, x_n de \mathcal{R}^3 , o centro de gravidade deste sistema de partículas é o ponto $x_g = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, onde $a_i = \frac{m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$. Nesta combinação convexa a_i é a proporção da massa total que está localizada no ponto x_i .” [24]

Note-se que a combinação linear é um vetor $\beta \in \mathbb{V}$, podendo-se escrever $\beta = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i$; β é dito linearmente dependente em $\{\alpha_i\}$. Se $\beta = \theta$ e pelo menos um a_i for diferente de zero diz-se que o conjunto $\{\alpha_i\}$ é Linearmente Dependente. Se não for linearmente dependente o conjunto é dito Linearmente Independente. Em particular se $\theta \in \{\alpha_i\}$ o conjunto é linearmente dependente, o mesmo ocorrendo se o conjunto possuir dois vetores proporcionais.

Ao conjunto $\langle A \rangle$ formado por todas as combinações lineares de A dá-se o nome de Conjunto Gerado por A . Em particular $\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$. Pela própria definição vê-se que conjunto gerado por um conjunto satisfaz todas as propriedades de espaço vetorial linear. Diz-se também que $\langle A \rangle$ é o espaço (vetorial linear) gerado por A .

Por convenção o conjunto vazio \emptyset é linearmente independente e gera o espaço do vetor zero, $\{\theta\}$. [5]

Se um elemento $\alpha_k \in \{\alpha_i\}$, $i \in J_n$ for linearmente dependente em $\{\alpha_i\}$, i. e. for uma combinação linear dos outros $(n-1)$ elementos de $\{\alpha_i\}$, vê-se então que se α_k for retirado de $\{\alpha_i\}$ o espaço $\langle \{\alpha_i\} - \{\alpha_k\} \rangle = \langle \{\alpha_i\} \rangle$, ou seja o espaço gerado por um conjunto não se altera quando deste se retira um vetor que lhe seja linearmente dependente. Se este procedimento for repetido tantas vezes quantos forem os elementos linearmente dependentes em $\{\alpha_i\}$ ao final ter-se-á um conjunto linearmente independente, que continuará gerando o mesmo espaço $\langle \{\alpha_i\} \rangle$.

É imediato, também, que se α_k for linearmente dependente em $\{\alpha_i\}$ e cada um dos α_i for linearmente dependente em $\{\beta_i\}$ então α_k será linearmente dependente em $\{\beta_i\}$.

Um conjunto ordenado e linearmente independente A é dito uma base de \mathbb{V} , se e somente se A gera \mathbb{V} , i. e., $\mathbb{V} = \langle A \rangle$. Se A for finito com n elementos diz-se que \mathbb{V} tem dimensão n , denota-se $\dim(\mathbb{V}) = n$, e se A for infinito o espaço \mathbb{V} é de dimensão infinita. Em particular o espaço do vetor zero $\{\theta\}$ tem dimensão zero, $\dim(\{\theta\}) = 0$.

Se \mathbb{V} tem dimensão n então cada subconjunto linearmente independente de \mathbb{V} conterà no máximo n elementos (Teorema de substituição de Steinitz [5]), o que é equivalente a dizer que qualquer subconjunto de \mathbb{V} com mais de n elementos é linearmente dependente ou que qualquer subespaço $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ tem dimensão finita $m \leq n$ e se $m = n$ então $\mathbb{W} = \mathbb{V}$. Vê-se ainda que qualquer subconjunto ordenado de \mathbb{V} , linearmente independente e com n elementos pode ser uma base de \mathbb{V} . A menos que especificado em

contrário considerar-se-á o espaço \mathbb{V} definido em relação ao corpo \mathcal{F} e de dimensão finita n .

Se $\mathbf{A} = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \}$ for uma base de \mathbb{V} , então qualquer vetor $\beta \in \mathbb{V}$, pode ser representado de forma unívoca como uma combinação linear dos vetores de \mathbf{A} .

$$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \dots + a_n\alpha_n \quad a_i \in \mathcal{F}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A38})$$

Vê-se então que ao vetor $\beta \in \mathbb{V}$ corresponde um único $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in \mathcal{F}^n$, sendo a recíproca também verdadeira, o que mostra a existência de um isomorfismo entre \mathbb{V} e \mathcal{F}^n que preserva a adição de vetores e a multiplicação de escalar por vetor. Note-se que esta representação n -upla é dependente da base adotada para \mathbb{V} .

O vetor é invariante em relação a base adotada. Isto permite, por exemplo que se mude de base no decurso da análise de um fenómeno físico, como no modelo de radiação do presente trabalho em que se usa nas simulações de radiação de um pistão um sistema de coordenadas polares ou esféricas sendo os cálculos do modelo numérico são feitos com coordenadas cartesianas .

É trivial verificar-se que \mathcal{F}^n é um espaço vetorial linear em relação a \mathcal{F} . “*Isto implica que poderíamos nos limitar ao estudo do espaço na forma \mathcal{F}^n . Entretanto é muito mais simples não fazer tal restrição, uma vez que as propriedades mais importantes de espaços vetoriais não dependem da notação usada para denotar os vetores, tornando-se importante o estabelecimento dessas propriedades usando somente os axiomas de definição de espaço vetorial.*” [5]

O conjunto de vetores $\mathbf{B} = \{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)\}$ é linearmente independente e constitui uma base, dita base canônica, para \mathcal{R}^n . Doravante usar-se-á para \mathcal{R}^n sempre a base canônica.

Sejam \mathbb{U} , \mathbb{W} e \mathbb{Y} subespaços de \mathbb{V} . A interseção de subespaços (dois ou mais), definida de modo análogo à interseção de conjuntos, é um subespaço de \mathbb{V} . A união dos subespaços \mathbb{U} e \mathbb{W} é o conjunto $\mathbb{U} + \mathbb{W}$, chamado soma de \mathbb{U} e \mathbb{W} , definido por:

$$\mathbb{U} + \mathbb{W} = \{ x \mid x = u + w, \forall u \in \mathbb{U}, \forall w \in \mathbb{W} \} \quad (\text{A39})$$

Se o único elemento da interseção de \mathbb{U} e \mathbb{W} for o vetor nulo, i. e. $\mathbb{U} \cap \mathbb{W} = \{ \theta \}$, a união de destes subespaços é chamada de soma direta de \mathbb{U} e \mathbb{W} , denotada por $\mathbb{U} \oplus \mathbb{W}$. A soma e a soma direta são subespaços de \mathbb{V} e se $\mathbb{Y} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{W}$ então todo elemento $y \in \mathbb{Y}$ se escreve univocamente como $y = u + w$, onde $u \in \mathbb{U}$ e $w \in \mathbb{W}$. [13]

A dimensão da soma ou da soma direta é dada por [5]:

$$\dim(\mathbb{U} + \mathbb{W}) \text{ ou } \dim(\mathbb{U} \oplus \mathbb{W}) = \dim(\mathbb{U}) + \dim(\mathbb{W}) - \dim(\mathbb{U} \cap \mathbb{W}) \quad (\text{A40})$$

Se \mathbb{V}_1 é subespaço de \mathbb{V} então existe pelo menos um \mathbb{V}_2 , também subespaço \mathbb{V} , de tal que $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$. Os subespaços \mathbb{V}_1 e \mathbb{V}_2 são ditos complementares ou que \mathbb{V}_2 é o complemento de \mathbb{V}_1 e vice-versa. É importante destacar-se que o complemento não é unívoco. [5]

A-20 Transformações lineares.

Sejam \mathbb{U} e \mathbb{V} espaços vetoriais lineares em relação a \mathcal{F} e uma função $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ de tal forma que para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{U}$ e $a, b \in \mathcal{F}$ se tenha:

$$f(a\alpha + b\beta) = af(\alpha) + bf(\beta) \quad (\text{A41})$$

Diz-se que a função f é um homomorfismo em relação a \mathcal{F} , pois preserva a estrutura do espaço, e dá-se à mesma o nome de Transformação Linear. Em particular $f(\theta) = \theta$, devendo-se observar que, apesar do uso do mesmo símbolo θ para o vetor nulo, no primeiro membro o argumento de f $\theta \in \mathbb{V}$ e no segundo membro $\theta \in \mathbb{U}$ e não são necessariamente iguais. De resto todas as definições e propriedades estabelecidas as funções valem para as transformações lineares. O conjunto de todas as transformações lineares entre \mathbb{U} e \mathbb{V} é um espaço vetorial linear \mathbb{F} em relação a \mathcal{F} [5, 13], chamado espaço dos homomorfismos entre \mathbb{U} e \mathbb{V} , que será denotado $\mathbb{L}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$. Se $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ denotar-se-á o espaço dos homomorfismos em \mathbb{U} por $\mathbb{L}(\mathbb{U})$.

A-21 Representação matricial de transformações lineares

Sejam uma transformação linear $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$; o conjunto $\mathbf{U} = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ uma base de \mathbb{U} e o conjunto $\mathbf{V} = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$ uma base de \mathbb{V} .

Qualquer vetor de \mathbb{V} pode ser expresso, de forma unívoca, como uma combinação linear dos vetores de \mathbf{V} , em particular para cada $u_j \in \mathbf{U}$ pode-se escrever:

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i \quad a_{ij} \in \mathcal{F} \quad (\text{A42})$$

As m -uplas $(a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \dots, a_{mj})$ são as coordenadas dos vetores $f(u_j)$ em relação à base \mathbf{V} .

O conjunto de vetores $\{f(u_1), f(u_2), f(u_3), \dots, f(u_n)\} \subset \mathbb{V}$ não é necessariamente uma base para a imagem de f , porém gera esta imagem, o que significa que a transformação linear f fica completamente determinada conhecendo-se os n vezes m escalares a_{ij} , além é claro das bases \mathbf{U} de \mathbb{U} e \mathbf{V} de \mathbb{V} , posto que a representação m -upla é dependente da base.

O conjunto $\{a_{ij} \mid i = 1, 2, 3, \dots, m; j = 1, 2, 3, \dots, n\}$ define uma matriz $A_{m,n}$ de m por n elementos

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

que é chamada de matriz representativa da transformação linear f em relação às bases U e V . Note-se que a j -ésima coluna de $A_{m,n}$ é composta pelas coordenadas da imagem do j -ésimo vetor da base U em relação à base V . O número de linhas é igual à dimensão de \mathbb{V} e o número de colunas igual à dimensão de \mathbb{U} . Vê-se, então, que uma matriz $A_{m,n}$ é representativa de uma transformação linear de um espaço de dimensão n em outro de dimensão m . Se $n = m$ a matriz é dita quadrada de ordem n .

Chamar-se-á de real uma matriz cujos elementos são todos números reais e de complexa se os elementos forem complexos.

Uma matriz quadrada de ordem n , $A = \{a_{ij}\}$ é dita simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$ e anti-simétrica se $a_{ij} = -a_{ji}$. Note-se que para matriz anti-simétrica $a_{ii} = 0$, i. e., a diagonal principal é nula. Se $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ diz-se que a matriz é diagonal. A matriz identidade é uma matriz diagonal na qual os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e será denotada I_n ou I . Uma matriz diagonal $D = \{d_{ij}\}$ será, também, representada por $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ onde $d_i = d_{ii}$ com $i = 1, 2, \dots, n$.

O conjunto das matrizes representativas de todas as transformações lineares de \mathbb{U} em \mathbb{V} constitui um espaço vetorial linear que será denotado por $\mathbb{M}(m, n)$.

Dada uma matriz $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{M}(m, n)$ chama-se de transposta de A à matriz $A^T = \{a'_{ji}\} \in \mathbb{M}(n, m)$ para a qual $a'_{ji} = a_{ij}$ com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$. A matriz $A^* = \{a^*_{ji}\} \in \mathbb{M}(n, m)$ para a qual $a^*_{ji} = \bar{a}_{ij}$ (a barra sobreposta indica conjugado complexo) chama-se transposta conjugada (complexa) de A .

Dada uma matriz A , quadrada de ordem n , dá-se o nome de inversa de A à matriz A^{-1} , também quadrada de mesma ordem (se existir será única), que satisfaz $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. A possui inversa se e somente se for representativa de um isomorfismo o que significa que o posto de A é igual a n (diz-se também que A é de posto completo) e que o determinante de A é diferente de zero [5, 13].

Uma matriz $B \in \mathbb{M}(m, n)$ é equivalente a uma matriz $A \in \mathbb{M}(m, n)$ se existirem matrizes não singulares $Q \in \mathbb{M}(n, n)$ e $P \in \mathbb{M}(m, m)$ tal que $B = QAP$. As matrizes A e B serão equivalentes se e somente se tiverem o mesmo posto. [5].

Sejam A , B , e P matrizes quadradas de ordem n . Diz-se que A e B são similares se existir P , não singular, tal que: $B = P^{-1}AP$, sendo P^{-1} a inversa de P . Vê-se que a similaridade é um caso particular de equivalência. Matrizes similares representam a mesma transformação linear em diferentes bases. [5, 25]

Chama-se de unitária à matriz complexa quadrada U se $U^* = U^{-1}$ e de ortogonal à matriz real quadrada B se $B^T = B^{-1}$.

Dada uma matriz $A = \{a_{ij}\}$, quadrada de ordem n , pode-se associar para cada elemento $a_{ij} \in A$ uma sub-matriz A_{ij} , quadrada de ordem $(n-1)$, obtida suprimindo-se a i -ésima linha e a j -ésima coluna de A ; chama-se de cofator do elemento $a_{ij} \in A$ ao número $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$, onde $\det(\bullet)$ é o determinante de (\bullet) . Note-se que a cada elemento $a_{ij} \in A$ corresponde um cofator C_{ij} , de modo que pode-se formar a matriz $C = \{C_{ij}\}$, quadrada de ordem n , cujos valores são os cofatores associados aos elementos $a_{ij} \in A$. A matriz C^T , transposta de C , que será denotada por $\text{adj}(A)$ é chamada de matriz adjunta de A [26]; adjunta clássica de A [13] ou [5] propõe o termo adjuncto da matriz A .

A transformação linear $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ é chamada de operador linear. Groesch [15] chama de operador linear o que Alves [5] e Lima [13] definem, e que foi aqui adotada,

como transformação linear. A transformação linear $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathcal{F}$ é chamada de funcional linear ou forma linear em \mathbb{V} . O conjunto de todos os funcionais lineares de \mathbb{V} em \mathcal{F} é um espaço vetorial linear, dito espaço dual de \mathbb{V} . [5]

O espaço de todos os operadores lineares $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ será denotado $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ ao invés de $\mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$.

Para uma matriz \mathbf{A} quadrada de ordem n , representativa de um operador linear, a matriz $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$, com $\lambda \in \mathcal{F}$ e \mathbf{I} a matriz identidade, é chamada de matriz característica de \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jj} - \lambda & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Vê-se que o determinante de $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$, denotar-se-á $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$, é um polinômio $p(\lambda)$, cujos zeros tornam singular a matriz (operador linear) característica de \mathbf{A} . O polinômio $p(\lambda)$ é chamado de polinômio característico da matriz (operador) \mathbf{A} .

Uma matriz \mathbf{A} , quadrada de ordem n , é dita diagonalizável se existir se existir uma matriz diagonal \mathbf{D} similar a \mathbf{A} .

A menos que especificado em contrário considerar-se-á doravante os espaços \mathbb{U} e \mathbb{V} definidos em relação ao mesmo corpo \mathcal{F} , ambos finitos com $\dim(\mathbb{V}) = n$ e $\dim(\mathbb{U}) = m$.

A-22 Transformação singular.

Diz-se que uma transformação linear $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ é singular se e somente se existir um $\alpha \neq \theta \in \mathbb{U}$ tal que $f(\alpha) = \theta$. Se uma transformação linear não é singular ela é chamada de não singular.

A imagem de $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$, denotada

$$\text{Im}(f) = \{ \beta \in \mathbb{V} \mid \beta = f(\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{U} \} \quad (\text{A43})$$

é subespaço de \mathbb{V} .

$$\text{O conjunto } \text{N}(f) = \{ \alpha \in \mathbb{U} \mid f(\alpha) = \theta \} \quad (\text{A44})$$

é chamado de núcleo da transformação $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ e é um subespaço de \mathbb{U} . Se f for um monomorfismo (ou isomorfismo) tem-se $\text{N}(f) = \{ \theta \}$. [5]

A dimensão da imagem de f , $\dim(\text{Im}(f))$ é chamada de posto (rank) da transformação e a dimensão do núcleo, $\dim(\text{N}(f))$ é chamada de nulidade de f . Se f for um

isomorfismo, então \mathbb{U} e \mathbb{V} tem a mesma dimensão n , que é igual ao posto de f , sendo zero a nulidade de f .

A-23 Forma n-linear.

Sejam \mathbb{W} e \mathbb{S} espaços vetoriais em relação a \mathcal{R} e uma função $b : \mathbb{W} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathcal{R}$ que seja linear em $w \in \mathbb{W}$ e também linear em $s \in \mathbb{S}$, ou seja $\forall a \in \mathcal{R}, \forall w, w' \in \mathbb{W}$ e $\forall s, s' \in \mathbb{S}$ tem-se:

$$\begin{aligned} b(w + w', s) &= b(w, s) + b(w', s); \\ b(w, s + s') &= b(w, s) + b(w, s'); \\ b(aw, s) &= ab(w, s) \text{ e} \\ b(w, as) &= ab(w, s). \end{aligned}$$

Então a função b é chamada de forma bilinear. Se $\mathbb{W} = \mathbb{S}$ e $b(w, s) = b(s, w)$ diz-se que a forma bilinear é simétrica e se $b(w, s) = -b(s, w)$ a forma bilinear é chamada de anti-simétrica.

Sejam uma forma bilinear $b : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathcal{R}$ e um funcional linear $q : \mathbb{W} \rightarrow \mathcal{R}$, então q é dito uma forma quadrática se e somente se:

$$q(w) = b(w, w), \forall w \in \mathbb{W} \quad (\text{A45})$$

A função $f : \mathbb{W}^n \rightarrow \mathcal{R}$, sendo $\mathbb{W}^n = \mathbb{W} \times \mathbb{W} \times \mathbb{W} \times \dots \times \mathbb{W}$, é chamada de forma n-linear sobre \mathbb{W} se f for linear em cada uma das variáveis de \mathbb{W}^n , i.e. $\forall w \in \mathbb{W}$ e $\forall a \in \mathcal{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned} f(w_1, w_2, \dots, w_i + w_j, \dots, w_n) &= f(w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_n) + f(w_1, w_2, \dots, w_j, \dots, w_n) \\ f(w_1, w_2, \dots, aw_i, \dots, w_n) &= af(w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_n) \end{aligned}$$

Vê-se que se um dos vetores de (w_1, w_2, \dots, w_n) for o vetor nulo ter-se-á $f(w_1, w_2, \dots, w_n) = 0$, pois

$$f(w_1, w_2, \dots, \theta, \dots, w_n) = f(w_1, w_2, \dots, 0\theta, \dots, w_n) = 0f(w_1, w_2, \dots, \theta, \dots, w_n) = \theta.$$

Diz-se uma forma n-linear é alternada se e somente a mesma for anti-simétrica, i. e.:

$$f(w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_j, \dots, w_n) = -f(w_1, w_2, \dots, w_j, \dots, w_i, \dots, w_n) \quad (\text{A46})$$

Se $f : \mathbb{W}^n \rightarrow \mathcal{R}$ for uma forma n-linear alternada, se o conjunto de vetores $\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subset \mathbb{W}^n$ for linearmente dependente então $f(w_1, w_2, \dots, w_n) = 0$. Dito de outra forma se existir uma forma n-linear alternada $g : \mathbb{W}^n \rightarrow \mathcal{R}$ de tal forma que $g(w_1, w_2, \dots, w_n) \neq 0$, então o conjunto $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ é linearmente independente. [13]

As formas n-lineares alternadas são usadas na definição da função determinante.

O conjunto de todas as formas n-lineares sobre \mathbb{W} , i. e., $f : \mathbb{W}^n \rightarrow \mathcal{R}$, constitui um espaço vetorial em relação a \mathcal{R} . Em particular todo funcional linear $f : \mathbb{W} \rightarrow \mathcal{R}$ é uma forma 1-linear alternada [13].

Seja \mathbb{W} um espaço vetorial linear em relação a \mathcal{C} . A função $f: \mathbb{W}^2 \rightarrow \mathcal{C}$ é dita forma hermitiana se $\forall w, w', w'' \in \mathbb{W}$ e $\forall a', a'' \in \mathcal{C}$ forem válidas:

$$f(w, w') = \overline{f(w', w)} \quad \text{e} \quad f(w, a'w' + a''w'') = a'f(w, w') + a''f(w, w'') \quad (\text{A47})$$

nas quais a barra sobreposta indica complexo conjugado.

De um modo geral para se caracterizar perfeitamente uma função $f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$ é necessário que se conheça o valor de $f(x) \in \mathbb{G}$ para cada ponto $x \in \mathbb{F}$ (seu domínio). Para uma transformação linear $T: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$, com $\mathbf{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ sendo um base de \mathbb{U} , basta conhecer a imagem de \mathbf{A} sob a ação T , i. e., o conjunto $\mathbf{B} = \{T(\alpha_1), T(\alpha_2), \dots, T(\alpha_n)\} \subset \mathbb{V}$, devendo-se isto ao fato de que as transformações lineares preservam a estrutura de espaço vetorial linear, ficando evidente também que $\text{Im}(T) = \langle \mathbf{B} \rangle$, porém \mathbf{B} não é necessariamente uma base para $\text{Im}(T)$; podendo vir a ser se dele for eliminado cada vetor que seja linearmente dos demais.

Sejam os espaços vetoriais lineares \mathbb{U} e \mathbb{V} ; um subconjunto de \mathbb{U} linearmente independente $\mathbf{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ e um subconjunto qualquer $\mathbf{B} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\} \in \mathbb{V}$. Existe transformação linear $T: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que $\mathbf{B} = \{T(\alpha_1), T(\alpha_2), \dots, T(\alpha_r)\}$, i. e., cada β_i é a imagem de α_i sob a ação de T . [5, 13]. Este teorema garante a existência das transformações lineares. Evidentemente qualquer vetor $\alpha \in \mathbb{U}$ que seja linearmente dependente em \mathbf{A} terá sua imagem $T(\alpha)$ em $\langle \mathbf{B} \rangle$. Isto é de fundamental importância no contexto do presente trabalho na medida em que se tem o holograma acústico em torno da fonte, e se procura justamente a transformação T , ou ainda uma extensão de T . Permite, por exemplo que sabendo-se que a fonte é axi-simétrica, o holograma possa ser medido apenas numa semicircunferência em torno da fonte, como se fez para modelar a radiação de alto-falantes, pistões rígidos e membranas; de resto outras condições de simetria ou anti-simetria podem ser usadas para simplificar o modelo.

A-24 Métrica, norma, produto interno.

Uma forma bilinear $d: \mathbb{W}^2 \rightarrow \mathcal{R}$ é chamada de métrica em \mathbb{W} se e somente se $\forall w, w', w'' \in \mathbb{W}$:

$$d(w, w) = 0;$$

$$\text{Se } w \neq w' \text{ então } d(w, w') > 0;$$

$$d(w, w') = d(w', w)$$

$$d(w, w') \leq d(w, w'') + d(w'', w')$$

$d(w, w') \in \mathcal{R}$ é chamado de distância entre w e w' . \mathbb{W} , com uma métrica definida sobre ele, é dito espaço métrico. Em verdade qualquer espaço \mathbb{W} pode vir a ser um espaço métrico, bastando definir sobre ele a métrica “zero-um” da seguinte forma $d: \mathbb{W}^2 \rightarrow \mathcal{R}$, com $d(w, w) = 0$ e $d(w, w') = 1$ se $w \neq w'$. “O espaço métrico que se obtém desta maneira é, naturalmente, bastante trivial, embora seja útil para contra-exemplos”. [14]

Doravante serão considerados espaços vetoriais definidos apenas em relação ao corpo real \mathcal{R} ou complexo \mathcal{C} , que continuarão sendo indistintamente denotados por \mathcal{F} .

Note-se que \mathcal{R}^2 com a multiplicação de $z = (x, y)$ e $w = (u, v)$ definida por

$$zw = (xu - yv, xv + yu) \quad (\text{A48})$$

constitui o corpo dos números complexos. [21]

Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ vetores em \mathcal{R}^n , a métrica $d(x, y)$ definida como:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \quad (\text{A49})$$

é chamada de distância Euclidiana entre os vetores x e y .

Seja \mathbb{W} um espaço vetorial linear em relação a \mathcal{F} . Para todo $w, w', w'' \in \mathbb{W}$ e todo $a, b \in \mathcal{F}$, define-se norma e produto interno por: [5, 13, 15]

Norma é um funcional linear $\|x\|: \mathbb{W} \rightarrow \mathcal{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} \|w\| &\geq 0; \\ \|w\| &= 0 \Leftrightarrow w = \theta; \\ \|aw\| &= |a|\|w\| \text{ e} \\ \|w + w'\| &\leq \|w\| + \|w'\| \end{aligned}$$

Se o funcional linear $\|x\|: \mathbb{W} \rightarrow \mathcal{R}$, satisfaz todas as propriedades acima menos $\|w\| = 0 \Leftrightarrow w = \theta$, então $\|x\|$ é chamado de semi-norma.

Duas normas p e q sobre um mesmo espaço \mathbb{W} são equivalentes se ambas determinam em \mathbb{W} a mesma topologia. Diz-se que a norma p domina a norma q se e somente se $q \leq ap$ para qualquer $a > 0$. [9]

Produto interno é uma transformação linear $(x; y): \mathbb{W}^2 \rightarrow \mathcal{F}$ tal que:

$$\begin{aligned} (w; w') &= \overline{(w'; w)}; \\ (aw + bw'; w'') &= a(w; w'') + b(w'; w''); \\ (w; w) &\geq 0 \text{ e} \\ (w; w) &= 0 \Leftrightarrow w = \theta \end{aligned}$$

Note-se que a raiz quadrada positiva do produto interno de dois vetores iguais define uma norma em \mathbb{W} , chamada norma definida pelo produto interno, i. e. $\sqrt{(w; w)}$ é

uma norma em \mathbb{W} , que salvo referência em contrário será, doravante, chamada simplesmente de norma.

Se $\|w\| = 1$, o vetor w é dito vetor unitário. Vê-se que para qualquer vetor $w' \in \mathbb{W}$ existe pelo menos um vetor unitário w tal que $w' = w\|w'\|$, bastando por exemplo tomar o vetor unitário $w = \frac{w'}{\|w'\|}$.

Se $(w; w') = 0$, os vetores w e w' são ditos ortogonais (ou perpendiculares), o que usualmente se denota por $w \perp w'$. Se todos os vetores de um conjunto A são dois-a-dois ortogonais, diz-se que A é um conjunto ortogonal.

Todo conjunto ortogonal de vetores não nulos é linearmente independente [5, 13] e se, também, todos os seus vetores forem unitários o conjunto é denominado conjunto ortonormal. Uma base constituída por um conjunto ortonormal é chamada de base ortonormal.

Todo espaço vetorial linear com produto interno possui uma base ortonormal [5, 13]. É possível a partir de uma base qualquer construir-se uma base ortonormal, sendo geralmente empregado nesta construção um algoritmo conhecido como processo de ortonormalização de Gram-Schmidt que encontra-se detalhado em [5] e [13].

$$\text{Ao vetor} \quad w'' = \frac{(w'; w)}{(w'; w')} w' \quad (\text{A50})$$

dá-se o nome de projeção ortogonal do vetor w sobre o eixo que contem o vetor w' . Vê-se que se w' for unitário $w'' = (w'; w)w'$. O vetor w'' é o vetor do eixo ao qual pertence w' mais próximo de w .

Sejam $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ subespaço de um espaço vetorial linear com produto interno; $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ uma base ortogonal de \mathbb{A} e $b \in \mathbb{B}$; ao vetor b^\perp definido por:

$$b^\perp = \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_i; b)}{(\alpha_i; \alpha_i)} \alpha_i \quad (\text{A51})$$

dá-se o nome de projeção ortogonal de b sobre \mathbb{A} , que será denotada por $b^\perp = P_{\mathbb{A}} b$ e é o vetor de $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ mais próximo de $b \in \mathbb{B}$. [5, 13]

O espaço \mathbb{W} é dito espaço normado se sobre ele estiver definida uma norma e espaço produto interno ou espaço pré-Hilbert se sobre ele estiver definido um produto interno.

Seja \mathbb{V} um espaço pré-Hilbert e $A \subset \mathbb{V}$ um conjunto não vazio; chama-se de complemento ortogonal de A ao conjunto A^\perp composto por todos os vetores de $v \in \mathbb{V}$ que são ortogonais a todos vetores $a \in A$. Em notação sintética $v \in A^\perp \Leftrightarrow (v; a) = 0 \quad \forall a \in A$. O complemento ortogonal é um subespaço de \mathbb{V} e é igual ao complemento ortogonal do subespaço gerado por A , i. e. $A^\perp = \langle A \rangle^\perp$. Também para todo subespaço $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}$ tem-se a decomposição em soma direta $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_1^\perp$. [13]

O critério de convergência de Cauchy pode ser redefinido usando o conceito de norma da seguinte forma. “Uma seqüência (x_n) em um espaço normado é dita seqüência de Cauchy se dado um $\varepsilon > 0$ existe um inteiro positivo N_ε tal que $n, m > N_\varepsilon$ implica em $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.” [15]

Um espaço vetorial linear normado \mathbb{B} é dito completo se toda seqüência de Cauchy em \mathbb{B} converge para algum ponto de \mathbb{B} . É chamado também de espaço de Banach.

Um espaço produto interno \mathbb{H} é chamado espaço de Hilbert se for completo em relação a norma definida por este produto interno. Em particular o espaço dual \mathbb{H}^* , de um espaço de Hilbert \mathbb{H} é um espaço de Hilbert. [15]

São exemplos de normas comumente usadas [18]:

- i) Sejam $1 \leq p \leq \infty$, i. e. $p \in \mathcal{R} \cup \{\infty\}$ e $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathcal{C}^n$, então a definição seguinte é uma norma:

$$\|z\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{com} \quad \|z\|_\infty = \sup |z_j| \quad 1 \leq j \leq n \quad (\text{A52})$$

Para $p = 2$ a norma $\|z\|_2$ é chamada de norma euclidiana;

- ii) Seja $\ell_p(z)$ o espaço das seqüências complexas $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ limitadas, i. e.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \quad (\text{A53})$$

$$\text{a norma } \|x\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{é chamada de norma } \ell^p. \quad (\text{A54})$$

- iii) Seja $L([a, b])$ o espaço das funções contínuas em $[a, b]$. A norma

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b |f(x)|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty) \quad \text{com} \quad \|f\|_\infty = \sup |f(x)|_{x \in [a, b]} \quad (\text{A55})$$

é chamada de norma L^p , com $p \in [1, \infty)$, sendo L^∞ também chamada de norma do supremo.

Em particular \mathcal{R}^n e \mathcal{C}^n , com a norma $\|\bullet\|_2$ definida pelo produto interno usual, são espaços de Hilbert. [15, 18]. O conjunto, $L^2([a, b])$, de todas as funções definidas em $[a, b]$ com a norma L^2 é chamado de espaço das funções de quadrado integrável à Lebesgue. [34] Sobre integral de Lebesgue ver Apostol [30].

O símbolo $\|\bullet\|$ será usado doravante como sendo a norma $\|\bullet\|_2$.

A-25 Norma matricial.

Como as matrizes são vetores do espaço $\mathbb{M}(m, n)$ a definição de norma vista para vetores aplica-se às mesmas; sendo comum o uso de duas normas em particular. A primeira chamada norma de Frobenius, que é equivalente à norma Euclidiana em \mathcal{R}^{nm} , definida para a matriz A como:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{A56})$$

a segunda, chamada de norma matricial induzida por uma norma vetorial definida como abaixo, para a matriz A sendo os vetores z pertencentes ao domínio de A .

Seja $\|z\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^p \right)^{1/p}$ uma norma vetorial definida no domínio e na imagem de A ,

então a norma (matricial) de A induzida por $\|z\|_p$ será [25]

$$\|A\|_p = \sup_{z \neq 0} \frac{\|Az\|_p}{\|z\|_p} = \sup_{\|z\|_p=1} \|Az\|_p \quad (\text{A57})$$

de particular interesse é $p=2$, condição em que $\|z\|_p = \|z\|_2$ reduz-se à norma Euclidiana de z , sendo $\|A\|_2$ também chamada de norma dois (da matriz A) e está relacionada à propagação de erros das soluções de quadrados mínimos.[27]

A-26 Transformação adjunta.

Sejam \mathbb{H}_1 e \mathbb{H}_2 espaços de Hilbert [15] ou finitos com produto interno [5, 13], com os respectivos produtos internos $(;)_1$ e $(;)_2$, e uma transformação linear $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$. Chama-se (transformação linear) adjunta de T à transformação linear $T^* \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_2, \mathbb{H}_1)$ que, para todo $a \in \mathbb{H}_1$ e todo $b \in \mathbb{H}_2$, satisfaz:

$$(Ta; b)_2 = (a; T^*b)_1, \quad \forall a \in \mathbb{H}_1 \quad e \quad \forall b \in \mathbb{H}_2 \quad (\text{A58})$$

A transformação adjunta é única e valem as seguintes propriedades [13, 15]

- i) $(ST)^* = T^*S^*$
- ii) $(T^*)^* = T$
- iii) $(T+S)^* = T^* + S^*$
- iv) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$, $\forall \alpha \in \mathcal{F}$
- v) $\|T^*\| = \|T\|$
- vi) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$
- vii) $N(T^*) = \text{Im}(T)^\perp$
- viii) $\text{Im}(T^*) = N(T)^\perp$
- ix) $N(T) = \text{Im}(T^*)^\perp$
- x) $\text{Im}(T) = N(T^*)^\perp$
- xi) $\dim(T^*) = \dim(T)$

Se T for a matriz representativa da transformação linear $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ em relação à bases ortonormais de \mathbb{H}_1 e \mathbb{H}_2 então a representação matricial da adjunta T^* de T será em relação as mesmas bases a matriz T^* , que é a transposta conjugada de T . [5]

“Não confunda transformação adjunta definida acima com o adjunto de uma matriz. Talvez seria oportuno chamar o adjunto de uma matriz B de adjunto da matriz B e reservar a palavra adjunta para a transformação somente” [5]

Se $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}_2 = \mathbb{H}$ e $T = T^*$, o operador linear $T \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$ é dito auto-adjunto, cuja matriz representativa em relação a uma base ortonormal é simétrica. [13]

“Para todo operador auto-adjunto $A : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, num espaço finito munido de produto interno, existe uma base ortonormal $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \mathbb{E}$ formada por autovetores de A .” [13] Sendo a matriz A representativa de A , nesta base, uma matriz diagonal. Tal fato é conhecido como Teorema Espectral. Em particular a projeção ortogonal é um operador auto-adjunto. [13]

A-27 Valores singulares

Seja $A : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ uma transformação linear de posto r entre espaços finitos com produto interno. Existem bases ortonormais $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \mathbb{U}$ e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ tais que: $Au_i = \sigma_i v_i$ e $A^* v_i = \sigma_i u_i$, sendo $\sigma_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, r$ e $\sigma_i = 0$ para $i \geq r + 1$. Aos números positivos $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ dá-se o nome de valores singulares da transformação linear $A : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ de posto r . Este é o Teorema dos Valores Singulares. As bases $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \mathbb{U}$ e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ são respectivamente bases ortonormais de autovetores para os operadores $A^* A : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ e $AA^* : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$; o conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ é uma base ortonormal para $\text{Im}(A^*)$; do mesmo modo $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é base ortonormal para $\text{Im}(A)$ e os conjuntos $\{u_{r+1}, \dots, u_n\} \subset N(A)$ e $\{v_{r+1}, \dots, v_n\} \subset N(A^*)$ também são bases. [13, 5]

Alternativamente os valores singulares podem ser definidos como sendo a raiz quadrada positiva dos r autovalores não nulos de $A^* A$, que são iguais aos r autovalores não nulos de AA^* , ou seja A e A^* possuem os mesmos valores singulares. [25] :

Em forma matricial o Teorema dos Valores Singulares pode ser escrito como segue. Para toda a matriz, real ou complexa, $A \in \mathbb{M}(m, n)$, de posto r , existem matrizes unitárias $U \in \mathbb{M}(m, m)$ e $V \in \mathbb{M}(n, n)$ e r escalares $\{d_1, d_2, \dots, d_r\}$ satisfazendo $|d_i| = \sigma_i$ para $i = 1, \dots, r$ sendo $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ os valores singulares de A , tal que:

$$A = UDV^*, \quad D = \begin{pmatrix} D_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{ou } D = U^* A V \quad (59)$$

onde $D \in \mathbb{M}(m, n)$; $D_r = \{d_1, d_2, \dots, d_r\}$ é uma matriz diagonal. $\mathbf{0}$ indica que todos os demais valores de D são nulos. Este é o Teorema de Decomposição a Valores Singulares, usualmente denotado por SVD (*Singular Value Decomposition*). Ver [13, 27] para o caso de matrizes reais e [25, 28] para o caso complexo.

“A decomposição a valores singulares, SVD é uma ferramenta poderosa para resolver o problema de quadrados mínimos lineares. A principal razão para isto é que as matrizes ortogonais que transformam a matriz A na forma diagonal não alteram a norma ℓ_2 dos vetores”. [27]

A norma dois de A é igual ao maior dos valores singulares A , i. e. $\|A\|_2 = \sigma_1$. [13, 25, 27]

A-28 Inversa generalizada.

Para toda matriz $A \in \mathbb{M}(m, n)$ real ou complexa existe uma única matriz $X \in \mathbb{M}(n, m)$ que satisfaz as seguintes equações: [25, 27, 28]

- i) $AXA = A$
- ii) $XAX = X$
- iii) $(AX)^* = AX$
- iv) $(XA)^* = XA$

Se A for não singular vê-se que X será a inversa A^{-1} de A ; todavia partindo-se do pressuposto que, em geral, A não é quadrada e se o for não será necessariamente não singular não se pode dizer que A possua inversa e daí deriva a denominação de Inversa Generalizada para X ; também denominada pseudo-inversa. A inversa generalizada X de A será denotada por A^+ .

A inversa generalizada A^+ de A , usando-se as definições do teorema de decomposição a valores singulares acima, pode ser dada por: [25, 27]

$$A^+ = VD^+U^* \quad \text{com} \quad D^+ = \begin{pmatrix} D_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A60})$$

A norma dois de A^+ é igual ao inverso do menor valor singular de A , [27]

$$\|A^+\|_2 = \frac{1}{\sigma_r}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 \text{ são os valores singulares de } A$$

Define-se número de condição da matriz A , denotado $K(A)$, como o produto das normas dois de A e A^+ . [27]

$$K(A) = \|A\|_2 \|A^+\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_r} \quad (\text{A61})$$

Nashed [28] chama a esta definição de pseudo-número de condição de A , reservando o nome “número de condição” para matrizes não singulares. Ben-Israel [25] define número de condição apenas para matrizes não singulares como o produto da norma dois da matriz pela norma dois de sua inversa. Em todo o caso o número de condição está ligado à sensibilidade, vale dizer ao erro das soluções, i. e., o quanto um erro nos dados entrada (ou na matriz) é amplificado pela sua inversa generalizada. [25, 27, 28]

A definição da inversa generalizada em termos de transformações lineares é semelhante à apresentada em termos matriciais, como se vê:

Sejam \mathbb{H}_1 e \mathbb{H}_2 espaços de Hilbert [15] ou finitos com produto interno [13] e uma transformação linear $T \in \mathbb{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$. Existe uma única transformação linear $T^+ \in \mathbb{L}(\mathbb{H}_2, \mathbb{H}_1)$, chamada inversa generalizada de T , tal que:

- i) $TT^+ = (TT^+)^*$
- ii) $T^+T = (T^+T)^*$
- iii) $TT^+T = T$
- iv) $T^+TT^+ = T^+$

Nas definições acima, tanto em forma matricial como de transformação linear, as equações são chamadas de equações de Penrose e a inversa generalizada é chamada de inversa de Moore-Penrose [25, 28] ou de pseudo-inversa [13], enquanto [15] chama de inversa generalizada segundo a definição de Penrose e apresenta também as três outras definições abaixo, sendo a primeira a) denominada definição de Desoer-Whalen; a segunda b) de Moore e a terceira c) variacional:

- a) T^+ é a única transformação linear satisfazendo:
 - i) $T^+Tx = x$ para $x \in N(T)^\perp$
 - ii) $T^+y = \theta$ para $y \in \text{Im}(T)^\perp$

- b) T^+ é a única transformação linear que satisfaz:
 - i) $TT^+ = P_{\text{Im}(T)}$
 - ii) $T^+T = P_{\text{Im}(T^*)}$
 nas quais $P_{\text{Im}(T)}$ é a projeção ortogonal sobre a imagem de T e $P_{\text{Im}(T^*)}$ é projeção ortogonal sobre a imagem de T^* .

- c) “Seja $T \in \mathbb{L}(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ com $\text{Im}(T)$ fechada. A transformação linear $T^+ : \mathbb{K}_2 \rightarrow \mathbb{K}_1$ definida por $T^+b = u$, onde u é a solução de quadrados mínimos (definida abaixo) com menor norma para a equação $Tx = b$ é chamada de inversa generalizada de T ”.

A definição variacional é dada por Lima [13] na seguinte forma: “Seja $A : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita, munidos de produto interno. A pseudo-inversa de A é a correspondência $A^+ : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ que associa a cada $y \in \mathbb{F}$ o vetor $A^+y = x \in \mathbb{E}$ de menor norma entre todos os vetores $x \in \mathbb{E}$ que tornam mínima a distância $|y - Ax|$ ”

As definições de Penrose, Desoer-Whalen, Moore e variacional são equivalentes. [15].

As referências [13, 15] definem a inversa generalizada em termos de transformações lineares dando pouca ênfase à representação matricial; [15] usa matrizes reais não ressaltando a definição em termos de transformações lineares; [25, 28] são as referências mais completas, usando matrizes e transformações lineares para os casos real e complexo. Cumpre também destacar a interpretação geométrica, extremamente didática, em [13].

A-29 Conjunto Convexo.

Sejam um espaço vetorial linear normado \mathbb{E} e um subconjunto $A \subset \mathbb{E}$. Diz-se que A é um conjunto convexo se para todo $\alpha, \beta \in A$ e todo $a \in [0, 1]$ o vetor $\gamma = a\alpha + (1 - a)\beta$ pertencer ao conjunto A , o que é equivalente a dizer que se $\alpha, \beta \in A$ então o segmento de reta que liga α e β está contido em A . Se toda a reta que passa por α e β estiver contida

em A (i. e. $a \in \mathcal{R}$, não mais ficando limitado ao intervalo $[0, 1]$), diz-se que A é uma variedade linear ou variedade afim. [21, 24] Vê-se pois que toda variedade linear é convexa. O conjunto vazio é uma variedade linear. [13].

“Um subconjunto de \mathcal{R}^n é convexo se e somente se contém todas as combinações convexas de seus elementos.” [24] Em particular \mathcal{R}^n é convexo.

A Figura A12 ilustra a convexidade de conjuntos, na qual se vê que A é convexo pois quaisquer dois pontos de A podem ser ligados por um segmento de reta inteiramente em A , B não é convexo pois $b_1, b_2 \in B$ mas o segmento de reta que os liga não está inteiramente em B .

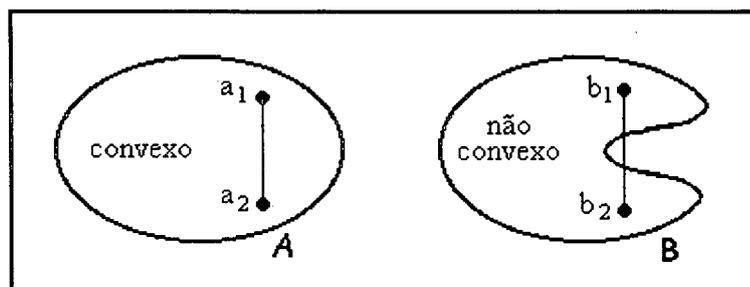


Figura A12 – Convexidade de conjuntos

Os conjuntos convexos desempenham importante papel na teoria de otimização de melhor aproximação. [15, 24] pois “um subconjunto convexo fechado de um espaço de Hilbert contém um único vetor de norma mínima”. [15]

Se $E \subset \mathcal{R}^n$ e $F \subset \mathcal{R}^m$ são convexos então o produto cartesiano $E \times F \subset \mathcal{R}^{n+m}$ é convexo. [21]

De particular interesse no presente trabalho é o fato de que o conjunto de soluções de um sistema linear de n equações e m incógnitas é uma variedade linear [13], logo é um conjunto convexo e como tal apresenta um vetor norma mínima.

A-30 O problema linear.

Sejam $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ e $v \in \mathbb{V}$. “O problema linear consiste em achar o conjunto de todos os $u \in \mathbb{U}$, tais que $f(u) = v$. Evidentemente se $v \notin \text{Im}(f)$ o problema não tem solução e é dito inconsistente ou incompatível.” [5] O problema linear $f(u) = v$ está esquematizado na Figura A13.

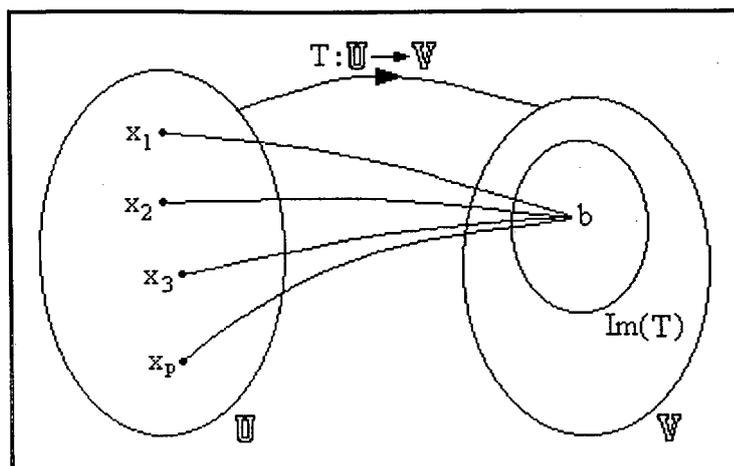


Figura A13 – O problema linear

Vê-se que o conjunto solução de T , S_T é um subconjunto de U porém não é subespaço de U , a menos que $b = \theta$ e neste caso S_T seria o núcleo, $N(T)$, da transformação T ; este sim subespaço de U .

Sendo x_i e x_j soluções do problema linear então o vetor $\eta = x_i - x_j$ pertence ao núcleo de T , pois $T\eta = T(x_i - x_j) = Tx_i - Tx_j = b - b = \theta$; logo $\eta \in N(T)$. O que é equivalente a dizer que se x_0 for uma solução de $T: U \rightarrow V$ e η qualquer vetor do núcleo de T , então o vetor $(x_0 + \eta)$ é também solução, i. e. $(x_0 + \eta) \in S_T$, pois $T(x_0 + \eta) = Tx_0 + T\eta = b + \theta = b$; portanto $(x_0 + \eta)$ é solução do problema linear.

Conhecendo-se uma solução particular x_0 de $Tx = b$, obtêm-se o conjunto de todas as soluções do problema linear adicionando a x_0 combinações lineares de $Tx = \theta$. [5, 13] A equação $Tx = \theta$ é chamada de equação homogênea associada ao problema linear. O conjunto de todas as soluções do problema linear constitui, como se viu, uma variedade linear em U . Se $N(T) \neq \{\theta\}$ o problema apresenta uma infinidade de soluções.

Se T for um isomorfismo então existe uma única $T^{-1}: V \rightarrow U$ de tal forma que $T^{-1}b = x$ é a única solução do problema linear.

Se T for um monomorfismo, vale dizer $N(T) = \{\theta\}$, o problema também tem solução única $Eb = x$, na qual E é uma inversa a esquerda de T .

Se T não for monomórfica, $N(T) \neq \{\theta\}$, haverá uma infinidade de soluções, devendo-se adotar um critério de escolha da melhor entre elas.

A-31 Solução de norma mínima para o problema linear.

Se b não pertencer à imagem de T o sistema é incompatível e não tem solução no sentido acima, o que implica na necessidade de se ampliar o conceito de solução para também se escolher a melhor possível. Assim seja $P_{Im(T)}: V \rightarrow Im(T) \subset V$ a projeção ortogonal de V na imagem de T . Com isto o vetor $P_{Im(T)}b = b^\perp \in Im(T)$ e é o vetor da $Im(T)$ mais próximo de b , sendo razoável considerar as várias soluções, $u \in U$, do problema linear compatível $Tx = b^\perp$ como soluções generalizadas do problema linear incompatível $Tx = b$. [15]

Por outro lado, como $b \notin \text{Im}(T)$, vê-se que o vetor residual $r = (b - Tx) \neq \theta$ para todo $x \in \mathbb{U}$, que na verdade trata-se de um erro residual [25], o que sugere que se procure soluções (generalizadas) $u \in \mathbb{U}$ cujo erro seja limitado a este erro residual. Podendo-se para isto usar a norma Euclidiana, que será denotada por $\|\bullet\|$ ao invés de $\|\bullet\|_2$, assim pode-se escrever:

$$\|Tu - b\| \leq \|Tx - b\|, \quad \forall x \in \mathbb{U} \quad (\text{A62})$$

Em verdade são equivalentes as seguintes condições [15]:

- i) $Tu = b^\perp$
- ii) $\|Tu - b\| \leq \|Tx - b\|, \quad \forall x \in \mathbb{U}$
- iii) $T^*Tu = T^*b$

A condição iii) é chamada de equação normal [25, 27].

Isto posto define-se um vetor $u \in \mathbb{U}$ que satisfaz uma (e portanto todas) das condições acima como uma solução de quadrados mínimos do problema linear $Tx = b$, e dentre estas, a solução de norma mínima (com menor erro residual) é $u = T^+b$, sendo T^+ a inversa generalizada de T . [13, 15]

Em termos matriciais, seja $A \in \mathbb{M}(m, n)$ a matriz, real ou complexa, representativa de T , de forma que o problema linear fica, com $\mathcal{F} = \mathcal{R}$ ou \mathcal{C}

$$Ax = b, \quad x \in \mathcal{F}^n \quad \text{e} \quad b \in \mathcal{F}^m \quad (\text{A63})$$

Se o problema for inconsistente o vetor residual $r = b - Ax$ será diferente do vetor nulo para todo $x \in \mathcal{F}^n$. Procura-se a solução para a qual r tenha a norma mínima, ou seja deve-se minimizar o seguinte funcional linear:

$$\sum_{i=1}^m |r_i|^2 = \sum_{i=1}^m \left| b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|^2 = \|b - Ax\|^2 \quad (\text{A64})$$

O único vetor $x_0 \in \mathcal{F}^n$ que minimiza este funcional linear, chamado de solução de quadrados mínimos (lineares) de norma mínima é dado por: [25, 27, 28]

$$x_0 = A^+b \quad (\text{A65})$$

sendo A^+ a inversa generalizada de A e que satisfaz [25, 28]

- i) $\|Ax_0 - b\| \leq \|Ax - b\|, \quad \forall x \in \mathcal{F}^n$
- ii) $\|x_0\| < \|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{F}^n \text{ com } x \neq x_0$

Se o problema for compatível de solução única, então a solução dada pela inversa generalizada identifica-se com esta; se for compatível de múltiplas soluções ou incompatível é a solução de norma mínima.

No presente trabalho usou-se a solução por inversa generalizada, tendo-se a garantia de que as soluções dos problemas lineares estudados são as de norma mínima.

A propagação de erros e sensibilidade das solução de quadrados mínimos é encontrada em Björk [25].

A-32 O problema de autovalores e autovetores.

Sejam $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$; $\theta \neq u \in \mathbb{U}$ e $\lambda \in \mathcal{F}$. O problema de autovalores de $f(u) = \lambda u$ consiste em encontrar o conjunto solução S_f de f , que pode ser escrita como $f(u) - \lambda u = \theta$; ou considerando λ como uma transformação escalar pode-se escrever $(f - \lambda)(u) = \theta$. Donde se vê que o problema de autovalores consiste em encontrar o núcleo, $N(f - \lambda)$ da transformação $(f - \lambda)$, que deve ser singular para que exista solução do problema linear $(f - \lambda)(u) = \theta$. O escalar λ é um autovalor de f e u é um autovetor de f . Note-se que qualquer combinação linear de autovetores é um autovetor.

Em forma matricial o problema de autovalores e autovetores pode ser escrito, sendo F a matriz representativa de f , como $[F - \lambda I]u = \theta$; que tem solução não trivial se λ for um zero do polinômio característico de $[F - \lambda I]$.

Matrizes similares possuem os mesmos autovalores e autovetores. Isto mostra que matrizes similares representam a mesma transformação linear em bases diferentes, permitindo que se faça mudança de bases no decurso de um problema físico. [5]

“Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e $D = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$ uma matriz diagonal. Então D é similar a A se e somente se $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$ forem os autovalores de A .” [5]

A-33 Operador diferencial de segunda ordem.

Seja L o operador diferencial de segunda ordem definido por:

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad (A66)$$

Se os coeficientes a_{ij} são variáveis é possível diagonalizar globalmente apenas em espaços de dimensão 2; para dimensões maiores somente é possível diagonalizar em uma vizinhança de um dado ponto. [22]

Dependendo dos autovalores de L as equações diferenciais parciais podem ser classificadas em [22, 18]:

- i) Elítica, se todos os autovalores de L forem diferentes de zero e de mesmo sinal. Neste caso L reduz-se ao operador de Laplace

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}; \quad (A67)$$

- ii) Hiperbólica, se todos os autovalores forem diferentes de zero e somente um deles possuir sinal contrário aos demais; é o caso da equação da onda;

- iii) Ultra-hiperbólica, se todos os autovalores forem diferentes de zero e existir pelo menos dois de cada sinal;
- iv) Parabólica, se pelo menos um dos autovalores for nulo.

A-34 Distribuições.

Sejam \mathbb{E} e \mathbb{F} espaços normados, \mathbb{A} aberto em \mathbb{E} e $\mathbb{K} \subset \mathbb{A}$ compacto. Denote-se por $\mathbb{E}^{(n)}(\mathbb{A}; \mathbb{F})$, $n = 0, 1, \dots, \infty$, o conjunto das funções contínuas n vezes diferenciáveis definidas de \mathbb{A} em \mathbb{F} , i. e., $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{F}$. A topologia determinada pelo conjunto de todas as seminormas em \mathbb{K} é chamada de [11]:

- topologia de ordem n em $\mathbb{E}^{(n)}(\mathbb{A}; \mathbb{F})$, se $n < \infty$;
- topologia natural em $\mathbb{E}^{(\infty)}(\mathbb{A}; \mathbb{F})$, se $n = \infty$.

Com esta topologia $\mathbb{E}^{(n)}(\mathbb{A}; \mathbb{F})$ é chamado de espaço (topológico) de Hausdorff.

Seja o subespaço $\mathcal{D}^{(n)}(\mathbb{A}; \mathcal{F}) \subset \mathbb{E}^{(n)}(\mathbb{A}; \mathcal{F})$ das funções $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{F}$ com suporte compacto. Por simplicidade denotar-se-á $\mathcal{D}^{(n)}(\mathbb{A})$ ao invés de $\mathcal{D}^{(n)}(\mathbb{A}; \mathcal{F})$ e $\mathcal{D}(\mathbb{A})$ ao invés de $\mathcal{D}^{(\infty)}(\mathbb{A}; \mathcal{F})$. Um elemento de $\mathcal{D}(\mathbb{A})$, que é uma função contínua infinitamente diferenciável, é chamado de função teste. Seja o subconjunto $\mathbb{K} \subset \mathbb{A}$ compacto, denota-se $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}^{(n)}(\mathbb{A}) \subset \mathcal{D}^{(n)}(\mathbb{A})$ e por $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{A})$ os subespaços nos quais f tem suporte contido em \mathbb{K} .

Uma forma linear d em $\mathcal{D}(\mathbb{A})$ tal que para cada subconjunto compacto $\mathbb{K} \subset \mathbb{A}$ se tenha d restrita a $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$ contínua, com respeito à topologia natural em $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A})$, é chamada de distribuição em $\mathcal{D}(\mathbb{A})$.

Se $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ a distribuição é dita real; do mesmo modo diz-se que a distribuição é complexa se $\mathcal{F} = \mathbb{C}$.

O conjunto $\mathcal{D}'(\mathbb{A})$ de todas as distribuições definidas em $\mathcal{D}(\mathbb{A})$ constitui um espaço vetorial linear, o que significa, entre outras propriedades, que uma combinação linear de distribuições é uma distribuição.

Por exemplo sejam $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$, $g \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$ e a forma linear $\delta: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}$ definida por $\delta(g) = g(0)$. A forma linear δ é claramente linear e contínua, sendo portanto uma distribuição chamada delta de Dirac.[10] Diz-se que δ possui a propriedade de filtragem.

Butkov [7] apresenta o conceito de teoria das distribuições de uma maneira menos formal, porém com uma interpretação física muito didática.

“Em física, encontra-se freqüentemente o conceito de um pulso de duração infinitamente curta. Por exemplo, um corpo posto em movimento, a partir do repouso, por meio de um golpe instantâneo, adquire um momento igual à impulsão do choque ou seja:

$$mv = I = \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t)dt \quad (\text{A68})$$

em que $F(t)$ é a força e τ a duração da ação da força. A designação ‘golpe’ significa que τ é tão pequeno que a mudança, no momento, ocorre instantaneamente. No entanto como

uma tal mudança no momento é um número finito, segue-se que $F(t)$ deveria ter sido infinita durante o golpe e nula nos outros instantes.

Esta espécie de formulação não é correta com os conceitos matemáticos comuns. Em verdade, talvez nem seja mesmo fisicamente rigorosa. O gráfico real da força é mais provavelmente o de uma força fortemente concentrada” [7], como mostrado na Figura 11 para as seqüências delta.

“A afirmativa $\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$ não é correta e não pode ser usada para definir uma função, e muito menos uma função integrável. Uma outra tentativa seria definir $\delta(x)$ como a função que satisfaz a propriedade

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0) \quad (\text{A69})$$

para todas as funções contínuas $f(x)$. No entanto, esta tentativa também fracassa. É possível mostrar que pode não haver nenhuma função com esta propriedade.

O que no entanto é verdade é a existência de uma seqüência (ϕ_n) de funções fortemente concentradas que tendem para a propriedade de filtragem [7].

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)f(x)dx = f(0) \quad (\text{A70})$$

Estas seqüências são conhecidas como seqüências delta, Figura A11.

Diz-se que a seqüência (f_n) é fracamente convergente se o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx \quad (\text{A71})$$

existir para todas as funções teste $g(x)$. Estas funções $f_n(x)$ são ditas funções admissíveis.

“Uma distribuição $\phi(x)$ é um conceito matemático associado a uma seqüência fracamente convergente (f_n) de funções admissíveis para as quais a integral simbólica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)g(x)dx \quad (\text{A72})$$

tem significado, por meio da equação [7]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)g(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx \quad (\text{A73})$$

O uso de forças impulsivas, modeladas como o delta de Dirac, é muito comum em dinâmica de estruturas e no modelo de fontes pontuais (elementares) de ruído; sendo este o modelo de fontes usadas para a seguinte definição da função de Green.

Para um meio infinito, a função de Green $g(r, r_0)$, $r, r_0 \in \mathcal{R}^3$, é uma solução da equação de Helmholtz :

$$\nabla^2 g(r, r_0) + k^2 g(r, r_0) = -\delta(r - r_0) \quad (\text{A74})$$

na qual k é o número de onda (razão da frequência circular pela velocidade do som no meio). A função $g(r, r_0)$ é válida para a onda acústica gerada por uma fonte pontual harmônica, situada em r_0 . Para radiação em campo livre tem-se:

$$g(r, r_0) = \frac{1}{4\pi d(r, r_0)} e^{ikd(r, r_0)} \quad (\text{A75})$$

na qual $d(r, r_0)$ é a distância Euclidiana entre r e r_0 . [23].

O modelo de cálculo de radiação proposto neste trabalho está baseado no uso de fontes pontuais e das funções de Green.

A-35 A equação da onda.

A equação da onda para um fluido ideal pode ser derivada da hidrodinâmica e da relação adiabática entre pressão e densidade. Assim tem-se as equações [94] de:

- conservação da massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \quad (\text{A76})$$

- Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p(\rho) \quad (\text{A77})$$

- estado adiabática

$$p = p_0 + \rho' \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_E + \frac{1}{2} (\rho')^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_E + \dots \quad (\text{A78})$$

Nas quais:

ρ é a densidade do meio;

\mathbf{v} é a velocidade de partícula;

o subscrito “E” indica que a derivada parcial é tomada com entropia constante;

o subscrito “o” indica que a variável é independente do tempo;

o sobrescrito “'” indica variação dinâmica;

o símbolo “•” indica o produto escalar.

$$\text{Se } A = (a_1, \dots, a_n) \text{ e } B = (b_1, \dots, b_n) \Rightarrow A \cdot B = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (\text{A79})$$

Desta forma tem-se

$$p = p_0 + p' \quad (\text{A80})$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (\text{A81})$$

A velocidade “c” do som no fluido ideal é dada por

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_E \quad (\text{A82})$$

sendo p a pressão; ρ a densidade e o subscrito “E” indicando que a derivada parcial é tomada com entropia constante.

A-36 Aproximação linear da equação da onda.

Uma aproximação linear da equação da onda pode ser obtida tomando-se apenas o primeiro termo de cada uma das equações (A76), (A77) e (A78) conforme abaixo:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{A83})$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p'(\rho) \quad (\text{A84})$$

$$p' = \rho' c^2 \quad (\text{A85})$$

Tomando a derivada parcial da equação (A83) em relação ao tempo; o divergente da equação (A84) e considerando a equação (A85) tem-se:

$$\rho \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A86})$$

que é a equação da onda para a pressão na qual o sobrescrito “'” foi omitido. Nesta equação considerou-se que ρ_0 e a velocidade “c” do som no meio são independentes do tempo, posto na escala temporal a variação desta duas variáveis ocorre muito mais lentamente que as variações dinâmicas consideradas.

Se a densidade é constante no espaço a equação (A86) torna-se:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A87})$$

que é a forma usual da equação da onda para a pressão.

A equação da onda para velocidade de partícula é obtida de forma análoga tomando-se o divergente da equação (A83); a derivada parcial da equação (A84) e considerando a equação (A85), o que resulta em:

$$\frac{1}{\rho} \nabla(\rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{v}) - \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A88})$$

Atente-se para o fato de que a velocidade de partícula é uma variável vetorial, assim “esta forma da equação da onda é uma equação vetorial acoplada nas três componentes espaciais da velocidade de partícula, envolvendo as derivadas parciais, no espaço, da densidade e da velocidade do som. É raramente utilizada, exceto para estudo de propagação uni-axial.” [94]

A-37 Equação da onda para a velocidade potencial.

A velocidade potencial ϕ é definida como:

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad (\text{A89})$$

Se a densidade no meio for constante tem-se:

$$\nabla \rho = 0 \quad (\text{A90})$$

Substituindo-se as equações (A89) e (A90) na equação (A88) encontra-se:

$$\nabla \left(c^2 \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (\text{A91})$$

É evidente que se ϕ satisfizer à equação da onda (A87) então satisfará também à equação (A91).

A-38 Simetria esférica.

A simetria esférica centrada representa o tipo mais simples de onda não plana. É o caso do ruído radiado por uma esfera pulsante de pequenas dimensões, centrada na origem.

Seja o sistema de coordenadas polar-esférico representado na Figura A14

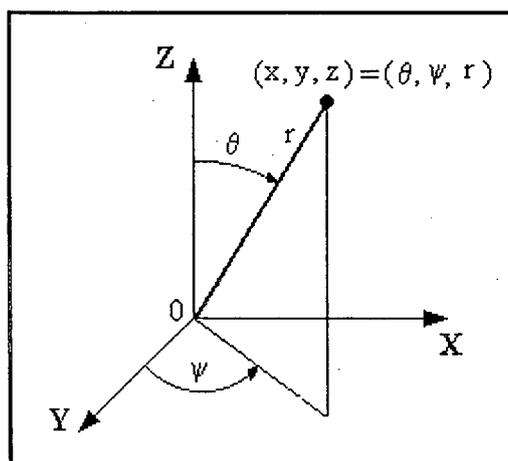


Figura A14 – Sistema de coordenadas polar-esférico

Neste sistema de coordenadas a equação da onda é dada por: [39]

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi^2} \quad (\text{A92})$$

Se a fonte estiver centrada na origem a equação (A92) reduz-se a:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (\text{A93})$$

considerando que

$$\frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2} = r \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (\text{A94})$$

pode-se escrever a equação (A93) como

$$\frac{\partial^2 (\phi r)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (\phi r)}{\partial r^2} \quad (\text{A95})$$

que é a equação da onda unidimensional para a variável ϕr , cuja solução geral é dada por:

$$\phi(r, t) = \frac{f(ct - r) + g(ct + r)}{r} \quad (\text{A96})$$

na qual a solução $f(ct - r)$ representa a onda que se afasta da origem e $g(ct + r)$ representa a onda sonora que se aproxima da origem, ambas com velocidade “c”.

A-39 Simetria axial.

Neste caso consideram-se as ondas esféricas cujas propriedades são simétricas com respeito a uma linha. Este tipo de problema é também dito axi-simétrico.

Sem perda de generalidade pode-se considerar a fonte centrada e a linha de simetria contida no eixo polar. Desta forma o problema torna-se independente do ângulo de azimute ψ , dependendo apenas do ângulo polar θ e da distância "r" do ponto de observação à origem. Nestas condições a velocidade potencial satisfaz à equação: [39]

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right] \quad (\text{A97})$$

Para tom puro de frequência circular ω a equação (A97) torna-se:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} \right) + k^2 \tilde{\phi} = 0 \quad (\text{A98})$$

na qual k é o número de onda e $\tilde{\phi} = f(r, \theta)e^{j\omega t}$.