

FREDEMAR RÜNCOS

**MÁQUINA ASSÍNCRONA TRIFÁSICA
BRUSHLESS EM CASCATA DUPLAMENTE
ALIMENTADA**

FLORIANÓPOLIS

2001

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA

MÁQUINA ASSÍNCRONA TRIFÁSICA BRUSHLESS EM
CASCATA DUPLAMENTE ALIMENTADA

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de mestre em Engenharia Elétrica.

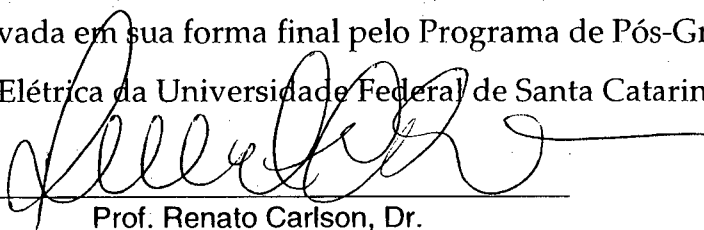
FREDEMAR RÜNCOS

Florianópolis, Março de 2001

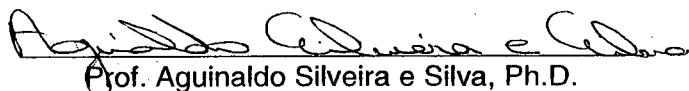
MÁQUINA ASSÍNCRONA TRIFÁSICA BRUSHLESS EM CASCATA DUPLAMENTE ALIMENTADA

FREDEMAR RÜNCOS

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos*, e gravada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

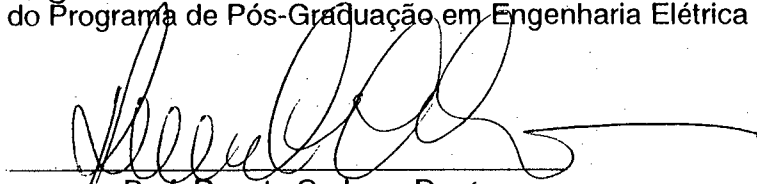


Prof. Renato Carlson, Dr.
Orientador

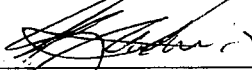


Prof. Aguinaldo Silveira e Silva, Ph.D.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:



Prof. Renato Carlson, Dr.
Presidente



Prof. Nelson Sadowski, Dr.



Prof. Patrick Kuo-Peng, Dr.

DEDICATÓRIA

“A NATUREZA NÃO OFERECE NADA DE GRAÇA, Ela oferece de um lado e exige do outro”.

Este ditado aprendi ao longo dos meus anos de vida.

À minha Família

***Margaret*, minha Esposa**

***Rudolfo Augusto* e**

***Larissa Helena*, meus Filhos**

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar e acima de tudo à “DEUS” por sempre ter me dado Saúde , Energia e Disposição para combater o bom combate .

À WEG pelo incentivo e liberação do Trabalho para cursar as disciplinas do Mestrado em Florianópolis e por incentivar o desenvolvimento de seus Engenheiros. Em Especial à WM que permitiu a construção do Protótipo .

Aos Professores do GRUCAD , pela disposição em criar um horário especial para que nós da WEG pudéssemos realizar o Mestrado. Ao meu orientador , *Professor Renato Carlson* , pela forma Carinhosa e Amiga de orientar o meu Trabalho.

Aos meus Colegas de Mestrado *Siegfried Kreutzfeld* , *Sebastião Lauro Nau* , *Paulo Sérgio dos Santos* e *Mário Célio Contin*, que além do Incentivo proporcionaram fecundas discussões Políticas e Filosóficas nas intermináveis filas na BR101 .

Aos Colegas do Departamento da Engenharia do Produto WM , *Francisco José Doubrawa Filho*, *Ricardo Luiz Sartori* e *Carlos Guilherme da Costa Neves*, por participarem em discussões muito importantes do Trabalho e principalmente na elaboração do Programa..

Aos colegas da Seção de Ensaio da WM , *Décio Odail de Oliveira* e *Marcelo Henrique Olbertz* , que se prontificaram a realizar os Ensaio do Protótipo.

À Secretária do Departamento da Engenharia do Produto WM , *Ivanildes Bauer De Pin*, que soube pacientemente digitar todo o Trabalho.

E finalmente à minha esposa *Margaret* e a meus filhos *Rudolfo* e *Larissa* que souberam compreender os inúmeros finais de semana dedicados ao Trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

A MÁQUINA ASSÍNCRONA TRIFÁSICA BRUSHLESS EM CASCATA DUPLAMENTE ALIMENTADA

Fredemar Rüncos

Março/2001

Orientador: Renato Carlson

Área de Concentração: Concepção e análise de Dispositivos Eletromagnéticos

Palavras-chave: Máquina Assíncrona Duplamente Alimentada

Número de Páginas: 285

RESUMO: No acionamento de máquinas elétricas sempre se procurou máquinas que permitissem controlar o torque e conseqüentemente a velocidade com grande flexibilidade. Por outro lado na geração de energia elétrica, sempre se procura formas alternativas de energia que não poluam ou agridam o meio ambiente. O custo da energia elétrica vem aumentando devido a escassez dos recursos naturais e como conseqüência procura-se maximizar a eficiência do conjunto máquina primária e gerador. Uma boa solução para maximizar o rendimento da geração de energia elétrica é a Máquina Assíncrona Duplamente Alimentada.

O presente trabalho propõe-se a estudar a Máquina Assíncrona Trifásica Brushless ligada em Cascata Duplamente Alimentada (MATBCDA).

É mostrado a base do funcionamento da MATBCDA quando conectada na ligação “MAIS” e ligação “MENOS”.

São analisados em detalhes os parâmetros da máquina, tais como: indutância de dispersão, indutância mútua, indutância magnetizante e resistência dos enrolamentos.

É estudado e elaborado o modelo dinâmico da MATBCDA, tomando como base a teoria do sistema de eixos de referência.

Com base no modelo dinâmico é feita a análise dinâmica da MATBCDA integrando as equações diferenciais pelo método de Runge Kutta de quarta ordem. Esta análise abrange a máquina funcionando como motor e como gerador.

Para completar a análise da MATBCDA é estudado o regime permanente da máquina, focando principalmente o funcionamento como motor ou gerador com fator de potência pré-estabelecido.

A grande vantagem da MATBCDA é o fato dela funcionar como motor e como gerador sem necessidade de escovas, minimizando os problemas de manutenção.

Summary of the dissertation presented at UFSC as part of the requirements to obtain the
Master Degree in Electrical Engineering

DOUBLE-FED IN CASCADE BRUSHLESS THREE-PHASE ASSYNCHRONOUS MACHINE

Fredemar Rüncos

March / 2001

Adviser: Renato Carlson

Concentration Area: Conception and Analysis of Electromagnetic Devices

Key Words: Double-Fed Assynchronous Machine

Number of Pages: 285

Summary: In driving systems of electrical machines it has been commonly used machines that allow both torque and speed control with great flexibility.

On the other hand when it comes to generation of electrical energy, there has been a tendency to use energy sources that do not bring or cause any harms to the environment. The costs on electrical energy have been increasing more and more due to lack of natural resources. As a result, it is extremely important to improve the efficiency of the primer move and generator as much as possible. A good solution to maximize the efficiency in the generation of electrical energy is the Double Fed Assynchronous Machine.

The purpose of this assignment is to study the Double-Fed in Cascade Brushless Three-phase Assynchronous Machine (MATBCDA).

It is showed that the basic functioning system of the MATBCDA when it is connected in the "MORE" and "LESS" modes.

The parameters of the machine such as dispersion inductance, mutual inductance, magnetizing inductance and windings resistance are deeply analysed.

The dynamic model of the MATBCDA is analysed and studied based on the theory of Reference Axes System.

The dynamic analysis of the MATBCDA is made based on the dynamic model integralizing the differential equations by the Runge Kutta fourth order method. This analysis considers the machine working as a generator and as a motor.

In order to complete the analysis of the MATBCDA it is also studied the permanent duty of the machine , focusing mostly on its functioning either as a motor or as a generator with pre-adjusted power factor.

The great advantage of using the MATBCDA is the fact that it works either as a motor or as a generator with no brushes which minimizes the need of maintenance.

SUMÁRIO

RESUMO	v
ABSTRACT	vii
CAPÍTULO 1 - TIPOS DE ACIONAMENTOS ELÉTRICO	01
1.1 Introdução	01
1.2 Máquinas com Excitação Única por Corrente Elétrica	01
1.3 Máquinas Duplamente Excitadas por Corrente Elétrica	02
1.4 Máquinas Excitadas por Corrente Elétrica e Ímã Permanente	02
CAPÍTULO 2 - TIPOS DE MÁQUINAS ASSÍNCRONAS TRIFÁSICAS	03
2.1 Introdução	03
2.2 Máquina Assíncrona Trifásica com Rotor de Gaiola com Alimentação Única [MATRG AU]	03
2.3 Máquina Assíncrona Trifásica com Rotor de Gaiola Duplamente Alimentada [MATRGDA]	04
2.4 Máquina Assíncrona Trifásica com Rotor Bobinado com Alimentação Única [MATRBAU]	07
2.5 Máquina Assíncrona Trifásica com Rotor Bobinado Duplamente Alimentado [MATRBDA]	07
2.6 Máquina Assíncrona Trifásica Brushless em Cascata Duplamente Alimentada [MATBCDA]	08
CAPÍTULO 3 - PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DA MATBCDA	10
3.1 Introdução	10
3.2 Partes Construtivas	10
3.3 Velocidade Síncrona da MATBCDA	12
3.3.1 Ligação MAIS	12
3.3.2 Ligação MENOS	13
3.4 Escorregamento da MATBCDA	15
3.4.1 Máquina Principal	15
3.4.2 Máquina Auxiliar	16

CAPÍTULO 4 - TEORIA DOS SISTEMAS DE REFERÊNCIA	18
4.1 Introdução	18
4.2 Resumo Histórico	18
4.3 Equações de Transformação para um Sistema de Referência Arbitrário	19
4.4 Transformação de um Conjunto de Variáveis Balanceadas	23
4.5 Relações Fasoriais Balanceadas em Regime Permanente	25
4.6 Equações de Tensões Balanceadas em Regime Permanente	27
CAPÍTULO 5 - MODELO DINÂMICO DA MATBCDA	29
5.1 Introdução	29
5.2 Equações de Tensões em Variáveis da MATBCDA	30
5.2.1 Máquina Principal	30
5.2.2 Máquina Auxiliar	33
5.3 Equações de Torque em Variáveis da MATBCDA	36
5.4 Equações de Transformações da MATBCDA para um Sistema de Referência Arbitrário	38
5.4.1 Definição do Sistema de Referência	38
5.4.2 Equações das Tensões no Sistema de Referência Arbitrário	41
5.4.2.1 Máquina Principal	44
5.4.2.2 Máquina Auxiliar	55
5.4.2.3 Máquinas Conectadas em cascata “MAIS”	62
5.4.3 Equações dos Torques no Sistema de Referência Arbitrário	69
5.5 Equações na Forma de Espaço de estado da MATBCDA	70
CAPÍTULO 6 - ANÁLISE DA DINÂMICA DA MATBCDA	76
6.1 Introdução	76
6.2 Regime Dinâmico na Partida como Motor	82
6.2.1 Estator da Máquina Auxiliar em Curto Circuito	82
6.2.2 Estator da Máquina Auxiliar Ligado a Uma Resistência Externa	95
6.2.3 Tensão Imposta ao Estator da Máquina Auxiliar através do Conversor de Frequência	102
6.3 Funcionamento em Regime Dinâmico como Motor	107
6.3.1 Variação da Resistência Externa Ligada ao Estator da Máquina Auxiliar	107
6.3.2 Variação do Torque Externo	113
6.3.3 Variação da Amplitude da Tensão Imposta pelo Conversor	118
6.4 Funcionamento em Regime Dinâmico como Gerador	122

6.4.1	Variação do Torque Externo	122
6.4.2	Variação da Amplitude da Tensão Imposta pelo Conversor	127
CAPÍTULO 7 - MODELO EM REGIME PERMANENTE DA MATBCDA		133
7.1	Introdução	133
7.2	Circuito Equivalente da MATBCDA	133
7.2.1	Circuito Equivalente da Máquina Principal	133
7.2.2	Circuito Equivalente da Máquina Auxiliar	141
7.2.3	Circuito Equivalente da MATBCDA	144
7.3	Funcionamento em Regime da MATBCDA	148
7.3.1	Estator da Máquina Auxiliar Ligada em Curto-Circuito	149
7.3.2	Estator da Máquina Auxiliar Ligada a um Banco de Resistores	159
7.3.3	Estator da Máquina Auxiliar Ligada à Rede através de um Conversor	169
CONCLUSÃO		184
REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA		186
<u>APÊNDICE A</u>		
Determinação dos Parâmetros do Circuito Equivalente – Protótipo MATBDA.....		187
<u>APÊNDICE B</u>		
Relatório Ensaio da MATBCDA		198
<u>APÊNDICE C</u>		
As Parâmetros da MATBCDA		219

CAPÍTULO 1 - TIPOS DE ACIONAMENTOS ELÉTRICOS

1.1 INTRODUÇÃO

Dentro do universo de máquinas elétricas girantes, a máquina assíncrona trifásica é a mais amplamente empregada nos acionamentos industriais. Tanto nas aplicações com velocidade e torque constante como nas aplicações em que é exigido variação de velocidade.

Nos acionamentos industriais onde se requer variação de velocidade o motor assíncrono trifásico de gaiola alimentado por inversor é bastante utilizado, basicamente devido a sua robustez, baixo custo e baixo índice de manutenção.

Nas aplicações como motor onde se exige grandes potências, o conjunto motor gaiola/conversor apresentam atualmente custos muito elevados.

Nas aplicações como gerador, principalmente onde a máquina primária impõe variação de velocidade, o motor de gaiola não oferece boas condições de funcionamento.

Com o objetivo de encontrar soluções mais adequadas para estas aplicações, está-se fazendo um esforço muito grande no sentido de melhorar o “casamento” entre a máquina e o conversor. Neste sentido, a máquina de indução apresenta boas alternativas. Construtivamente o rotor pode ser construído em gaiola ou com enrolamento, onde a máquina com o rotor bobinado oferece a possibilidade de ajuste de velocidade com acionamento (conversor) reduzido. Para grandes potências esta redução do conversor proporciona uma drástica redução no custo do conjunto motor/conversor, tornando esta alternativa bastante atraente.

Na aplicação em geração eólica é exigido que o gerador opere satisfatoriamente bem numa ampla faixa de velocidade. Esta exigência é proveniente da maximização do rendimento da turbina eólica. A máquina de indução convenientemente integrada com o conversor é a melhor alternativa para esta aplicação.

De uma forma geral os acionamentos elétricos podem ser divididos em três grandes grupos:

1.2 MÁQUINAS COM EXCITAÇÃO ÚNICA POR CORRENTE ELÉTRICA

Este tipo de máquina é constituída por um enrolamento eletricamente conectado a uma fonte de tensão que supre a corrente necessária para a excitação da máquina.

A este grupo pertencem:

- a) Máquinas Assíncronas com rotor de gaiola
- b) Máquinas de Relutância
- c) Máquinas de Histerese

As três máquinas acima tem o enrolamento de excitação no estator.

A máquina assíncrona com rotor de gaiola é a mais simples, e de menor custo.

1.3 MÁQUINAS DUPLAMENTE EXCITADAS POR CORRENTE ELÉTRICA

Este tipo de máquina é constituída por dois enrolamentos eletricamente conectados a fontes de tensão que suprem as correntes necessárias para a excitação e controle da máquina.

A este grupo pertencem:

- a) Máquinas de Corrente Contínua
- b) Máquinas Síncronas
- c) Máquinas Assíncronas com Rotor Bobinado

A máquina duplamente excitada fornece maior flexibilidade no controle.

A grande vantagem da máquina duplamente alimentada é o fato de que ela pode trabalhar tanto em regime MOTOR como em regime GERADOR.

A principal desvantagem é a necessidade de comutadores ou anéis coletores com escovas exigindo constante manutenção.

1.4 MÁQUINAS EXCITADAS POR CORRENTE ELÉTRICA E ÍMÃ PERMANENTE

Este tipo de máquina é constituída por um enrolamento de excitação que pode estar no estator ou no rotor.

O fluxo necessário para a geração do torque é obtido através de ímãs colocados no rotor ou no estator, dependendo do projeto da máquina.

A este grupo pertencem:

- a) Máquina CC de Ímã Permanente
- b) Máquinas Síncronas de Ímã Permanente

A construção mais comum da Máquina CC é a do rotor conter o enrolamento de excitação e o estator conter os ímãs.

Na máquina síncrona, normalmente os ímãs estão no rotor e o enrolamento de excitação está no estator.

Estas máquina apresentam grande flexibilidade no controle de velocidade, porém, devido ao alto custo dos ímãs, só é viável para pequenas potências.

CAPÍTULO 2 - TIPOS DE MÁQUINAS ASSÍNCRONAS TRIFÁSICAS

2.1 INTRODUÇÃO

O objetivo do presente trabalho é estudar o funcionamento em regime permanente e em regime dinâmico da Máquina Assíncrona Trifásica Brushless em Cascata Duplamente Alimentada (MATBCDA). Porém, com o objetivo de dar uma visão geral, analisaremos resumidamente os diversos tipos de máquinas assíncronas existentes.

2.2 MÁQUINA ASSÍNCRONA TRIFÁSICA COM ROTOR DE GAIOLA COM ALIMENTAÇÃO ÚNICA [MATRGAU]

Quando o estator da máquina está ligado diretamente na rede a velocidade é constante, não permitindo controle.

Quando conectada à rede através do conversor, o módulo DC do conversor desacopla a frequência do estator da frequência da rede. Variando-se a frequência do estator é possível variar a velocidade da máquina. A **Figura 2.2.1** abaixo mostra esquematicamente esta solução.

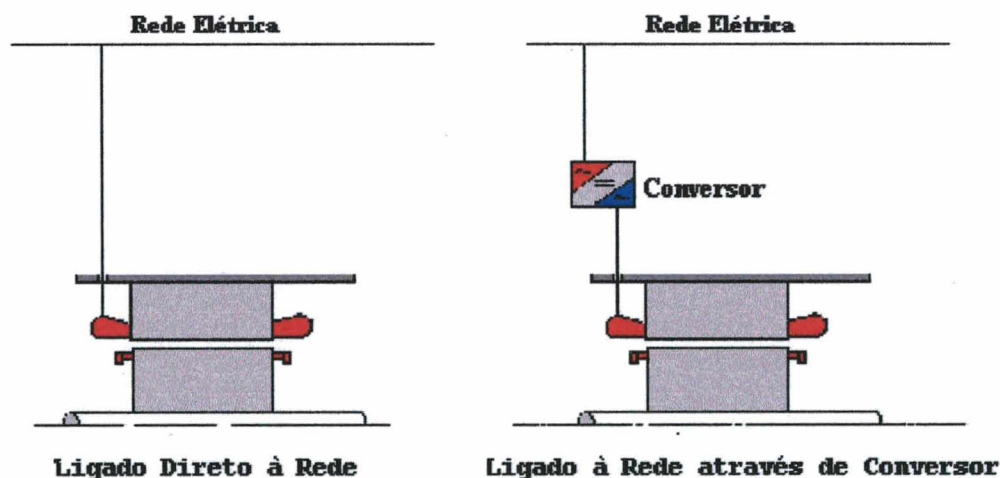


Figura 2.2.1 - Máquina Assíncrona Trifásica com Rotor de Gaiola com Alimentação Única [MATRGAU]

Para aplicação como motor é uma excelente solução porque apresenta a vantagem de ser compacta, robusta e de baixa manutenção.

Para aplicações como gerador, principalmente eólico, apresenta duas desvantagens:

- a) A faixa de variação de velocidade é pequena devido a saturação do núcleo magnético.
Para minimizar esta desvantagem são usadas máquinas de dupla polaridade;
- b) Custo do conversor muito alto. Porque toda a potência passa pelo conversor e portanto exige que o conversor tenha a mesma potência nominal do gerador.

Apesar das duas desvantagens citadas, é bastante usada na geração eólica, em turbinas de menor potência (Potência < 750 kW). Para aumentar a faixa de variação de velocidade, normalmente o estator é constituído de dois enrolamentos (dupla polaridade).

2.3 MÁQUINA ASSÍNCRONA TRIFÁSICA COM ROTOR DE GAIOLA DUPLAMENTE ALIMENTADA [MATRGDA]

Nesta solução a máquina assíncrona apresenta um só estator e um só rotor.

No estator são colocados dois enrolamentos independentes senoidalmente distribuídos no entreferro da máquina, ocupando as mesmas ranhuras.

Para evitar o efeito transformador é necessário que os dois enrolamentos tenham números de pólos diferentes. Para minimizar o empuxo magnético desbalanceado sobre o rotor, a diferença entre números de pólos deve ser superior a (2) dois.

A Figura 2.3.1 mostra esquematicamente esta solução.

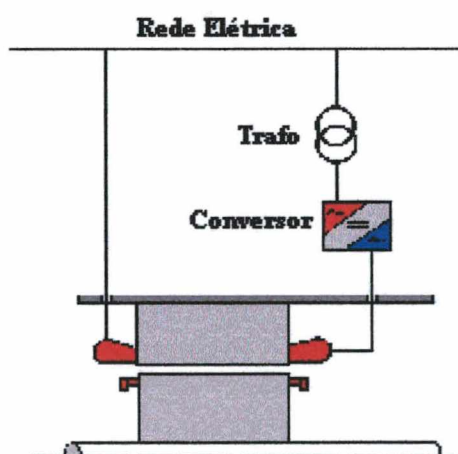


Figura 2.3.1- Máquina Assíncrona Trifásica com Rotor de Gaiola Duplamente Alimentada [MATRGDA]

Para que o rotor seja capaz de interagir com os dois diferentes campos do estator é preciso que a gaiola tenha um desenho especial.

O rotor deverá ter um número de barras igual a soma dos números de pares de pólos dos enrolamentos do estator, ou seja:

$$N_{barras} = P_p + P_a \quad (2.3.1)$$

Onde:

P_p = Número de pares de pólos do enrolamento principal do estator que está ligado diretamente na rede

P_a = Número de par de pólos do enrolamento auxiliar do estator que está ligado ao conversor

Estas barras são curto-circuitadas por dois anéis de curto-circuito um de cada lado do pacote formando uma gaiola de esquilo.

Entre estas barras são colocadas dois ou mais loops fechados de barras que estão isolados entre si. Quanto maior o número de loops melhor para atenuar o conteúdo harmônico induzido na gaiola. Usualmente o número de loops varia de 2 a 5, dependendo do espaço disponível.

A **Figura 2.3.2** mostra a gaiola soldada em cobre para uma máquina cujo enrolamento principal é de 6 pólos e o enrolamento auxiliar é de 2 pólos.

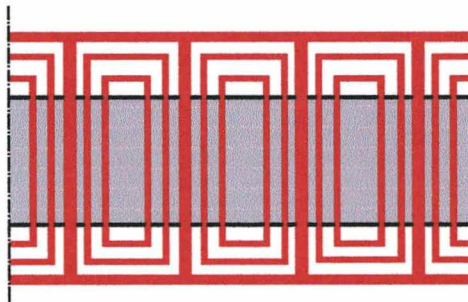


Figura 2.3.2 - Gaiola Soldada Planificada da MATRIGDA -- 6/2 Polos

Como no loop mais externo circula a maior corrente, no desenho da gaiola devemos considerar as barras externas com seção transversal maior.

Na **Figura 2.3.3** é mostrado a gaiola com alumínio injetado planificada para a mesma máquina.

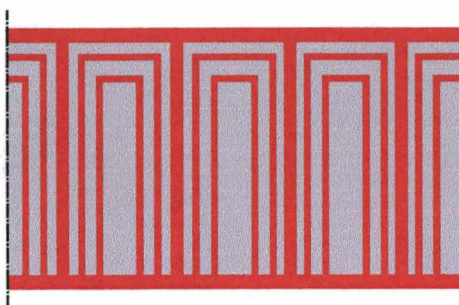


Figura 2.3.3 - Gaiola Fundida Planificada da MATRGEA -- 6.2 Polos

O processo de construção desta gaiola é bastante complicado, exigindo diferentes tipos de chapa para montagem do núcleo magnético do rotor. Além disso, os loops internos não abrangem todo o comprimento do pacote de chapas.

As vantagens dessa solução são basicamente:

- Máquina compacta e robusta;
- Potência do conversor menor, dependendo do intervalo da rotação;

Suas principais desvantagens:

- Desenho especial do enrolamento do estator e rotor;
- Sobredimensionamento do núcleo magnético;
- Maior ruído devido aos dois campos magnéticos;
- Maiores perdas suplementares.

Esta máquina até hoje em dia não é fabricada porque os estudos teóricos foram feitos apenas para máquinas pequenas.

2.4 MÁQUINA ASSÍNCRONA TRIFÁSICA COM ROTOR BOBINADO COM ALIMENTAÇÃO ÚNICA [MATRBAU]

Nesta solução a máquina apresenta um enrolamento no estator e outro no rotor.

Esta máquina é usada nas aplicações onde se requer uma aceleração pesada (grandes torques ou inércias).

Durante a partida, o rotor da máquina é conectada a um banco de resistências e o estator diretamente na rede.

A Figura 2.4.1 abaixo mostra esquematicamente esta solução.

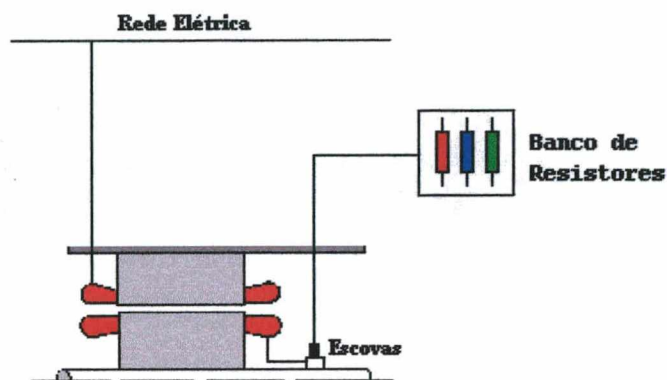


Figura 2.4.1 - Máquina Assíncrona Trifásica com Rotor Bobinado e Alimentação Única [MATRBMU]

Após a partida o rotor é curto-circuitado e somente o estator permanece conectado à rede.

Quando se deseja fazer uma pequena regulação de velocidade é necessário manter uma resistência adicional conectada ao circuito rotórico.

A desvantagem é a manutenção constante devido ao uso de anéis coletores e escovas.

2.5 MÁQUINA ASSÍNCRONA TRIFÁSICA COM ROTOR BOBINADO DUPLAMENTE ALIMENTADA [MATRBDA]

Esta solução apresenta a máquina assíncrona com dois enrolamentos, um no estator e outro no rotor. O estator é conectado diretamente à rede elétrica. O rotor é conectado à rede através do conversor. A Figura 2.5.1 mostra esta solução.

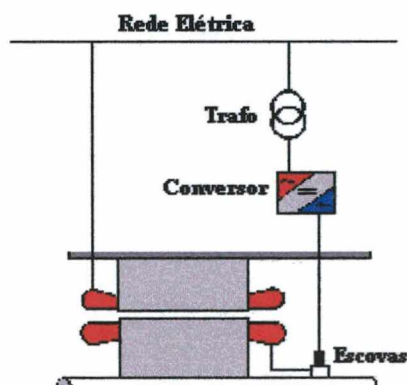


Figura 2.5.1 - Máquina Assíncrona Trifásica com Rotor Bobinado Duplamente Alimentada [MATRBDA]

A grande vantagem desta solução é que o conversor está conectado diretamente ao rotor fazendo com que sua potência seja bem menor que a da máquina. A potência nominal do conversor é da ordem de 1/3 da máquina. Quando a rede é de alta tensão o conversor pode ser construído em baixa tensão e ser conectado a rede através de um transformador. Estas duas características fazem com que o custo do conjunto máquina/conversor seja bem menor.

A vantagem desta, é a capacidade de trabalhar como gerador em uma ampla faixa de rotação. Esta característica permite a aplicação deste gerador tanto em turbinas eólicas como em turbinas hidráulicas.

A desvantagem é que esta solução exige a utilização de anéis e escovas aumentando a necessidade de manutenção.

2.6 MÁQUINA ASSÍNCRONA BRUSHLESS EM CASCATA DUPLAMENTE ALIMENTADA [MATBCDA]

Esta solução é constituída por duas máquinas assíncronas trifásicas separadas, montadas sobre o mesmo eixo. A máquina cujo estator está ligado diretamente à rede chamaremos de Máquina Principal e a outra, cujo estator está ligado à rede através do conversor, chamaremos de Máquina Auxiliar.

Os dois rotores são separados e seus enrolamentos são conectados eletricamente em CASCATA. A Figura 2.6.1 abaixo mostra um diagrama esquemático desta solução.

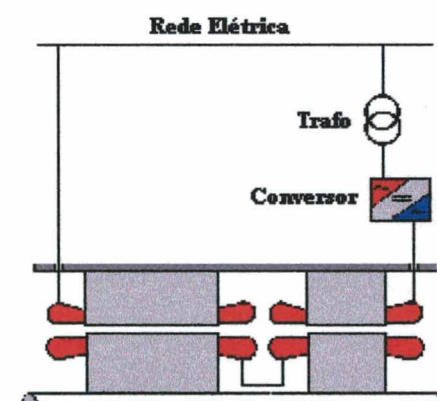


Figura 2.6.1 - Máquina Assíncrona Trifásica Brushless em Cascata Duplamente Alimentada [MATBCDA]

As duas máquinas podem ter qualquer combinação de pólos.

Os dois rotores podem ser conectados em cascata de duas maneiras:

- Ligação “MAIS” quando os rotores estão conectados eletricamente na seqüência de fase cujos conjugados se somam;
- Ligação “MENOS” quando os rotores estão conectados eletricamente na seqüência de fase cujos conjugados se subtraem.

A principal desvantagem:

- Máquina dupla fazendo com que, mecanicamente, seja mais comprida.

As principais vantagens:

- Baixa manutenção – Máquina Brushless;
- Aplicação com controle vetorial;
- Menor ruído
- Menores perdas suplementares
- Maior rendimento
- Custo do conjunto máquina + conversor menor

O objetivo do presente trabalho é estudar detalhadamente o funcionamento desta alternativa, ou seja, da Máquina Assíncrona Trifásica Brushless em Cascata Duplamente Alimentada [MATBCDA].

CAPÍTULO 3 - PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DA MATBCDA

3.1 INTRODUÇÃO

Quando conectamos os rotores de duas máquinas assíncronas de rotor bobinado elétrica e mecanicamente criamos uma máquina assíncrona ligada em cascata, conforme mostrado na **Figura 3.2.1**.

A idéia de ligar máquinas assíncronas em cascata, remonta do início do século. Muitas pesquisas investigando diferentes aspectos tem sido feitas, mas muito pouco de prático aconteceu, principalmente por falta de uma eletrônica avançada.

Neste parágrafo iremos mostrar o princípio básico de funcionamento da MATBCDA.

3.2 PARTES CONSTRUTIVAS

Para estudarmos o princípio de funcionamento da MATBCDA iremos considerar que as duas máquinas, PRINCIPAL e AUXILIAR, sejam construídas de maneira idêntica, tanto mecânica quanto eletricamente, e principalmente, que os enrolamentos dos estatores e dos rotores tenham uma mesma origem e seqüência de bobinagem.

Para que o conjunto funcione em cascata é necessário que os dois rotores estejam conectados elétrica e mecanicamente entre si.

O objetivo da ligação em cascata é variar a velocidade e transformar a energia de escorregamento da máquina principal em energia mecânica através da máquina auxiliar. Com isto conseguimos melhorar o aproveitamento da energia proveniente da rede aumentando a eficiência do conjunto.

As duas máquinas podem ser construídas com qualquer combinação de pólos. Chamaremos de " P_p " o número de par de pólos da máquina principal e " P_a " o número de par de pólos da máquina auxiliar.

A **Figura 3.2.1** abaixo mostra as duas máquinas ligadas em cascata, onde a máquina auxiliar está ligada à rede através de um transformador e conversor de freqüência. O estator da máquina principal está ligada diretamente à rede.

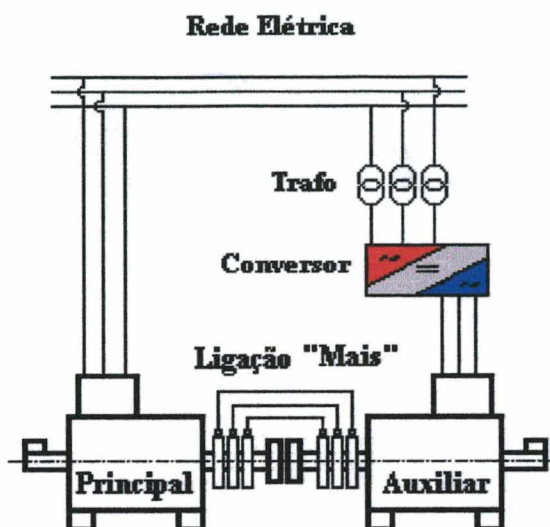


Figura 3.2.1 - Ligação em Cascata "Mais" da MATBCDA

A ligação das duas máquinas mostradas na **Figura 3.2.1** é denominada ligação “MAIS”, porque, sendo as duas máquinas construtivamente idênticas o campo magnético gerado no rotor da máquina auxiliar gira no mesmo sentido do campo girante do estator gerando, desta forma, um torque eletromagnético que se soma ao torque gerado pela máquina principal.

Devido aos dois rotores estarem acoplados mecanicamente pelo eixo conforme mostrado na **Figura 3.2.1** a rotação mecânica " n_a " do rotor da máquina auxiliar é negativa, isto é, gira no sentido oposto do campo girante do rotor.

A ligação em cascata é denominada de ligação “MENOS” quando a conexão do rotor da máquina auxiliar é feita na seqüência de fases tal, que gera um campo magnético que gira em sentido oposto ao do campo girante do estator da máquina auxiliar.

Nesta condição o torque gerado pela máquina auxiliar se opõe ao torque gerado pela máquina principal, isto é, os torques se subtraem.

A rotação mecânica " n_a " neste caso é considerada positiva porque o rotor gira no mesmo sentido do campo girante do rotor.

O conversor varia a tensão e a freqüência da tensão imposta ao estator da máquina auxiliar, com isto, é possível controlar o torque e o fator de potência do conjunto.

Quando a aplicação for em média tensão, o transformador permite que o conversor e a máquina auxiliar sejam mantidos em baixa tensão, reduzindo, desta forma, drasticamente o custo do conjunto.

3.3 VELOCIDADE SÍNCRONA DA MATBCDA

Admitindo que o conjunto esteja trabalhando com uma rotação mecânica " n " dada em rps . Denominaremos " n_p " e " n_a " as rotações mecânicas no eixo das máquinas principal e auxiliar respectivamente.

Nesta condição a frequência " f_{p2} " da tensão no rotor da máquina principal é dada por:

$$f_{p2} = f_{p1} - p_p \cdot n_p \quad (3.3.1)$$

Onde:

$f_{p1} = f_{rede}$ = Frequência de alimentação no estator da máquina principal que é igual à da rede.

Analogamente a frequência " f_{a2} ", no rotor da máquina auxiliar é dada por:

$$f_{a2} = f_{a1} - p_a n_a \quad (3.3.2)$$

Onde:

f_{a1} = Frequência de alimentação do estator da máquina auxiliar.

Como na ligação em cascata os dois rotores estão ligados em série as frequências " f_{p2} " e " f_{a2} " devem ser iguais. Comparando as equações (3.3.1) e (3.3.2), resulta:

$$f_{p1} = f_{a1} + p_p n_p - p_a n_a \quad (3.3.3)$$

3.3.1 Ligação "MAIS"

Para a ligação "MAIS" onde os conjugados se adicionam, temos:

$$n_p = -n_a = n \quad (3.3.1.1)$$

Logo a equação (3.3.3), fica:

$$f_{p1} = f_{a1} + n(p_p + p_a) \quad (3.3.1.2)$$

Portanto a rotação " n " é dada por:

$$n = \frac{f_{p1} - f_{a1}}{p_p + p_a} \quad (3.3.1.3)$$

Pela equação (3.3.1.3) é possível variar a rotação " n " do conjunto, variando-se a frequência " f_{a1} " e a amplitude da tensão imposta a máquina auxiliar. Da equação (3.3.1.3), temos:

$$f_{al}^+ = f_{p1} - n (p_p + p_a) \quad (3.3.1.4)$$

Onde:

f_{al}^+ = Freqüência imposta no estator da máquina auxiliar para ligação "MAIS"

A Figura 3.3.1.1 mostra a variação de " f_{al}^+ " em função da rotação para a ligação "MAIS".

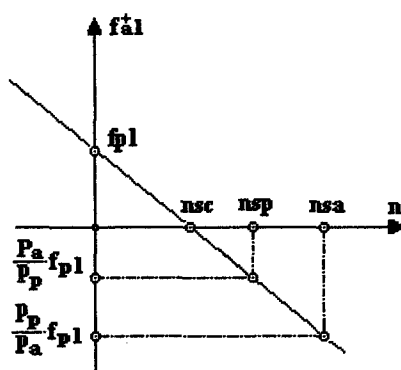


Figura 3.3.1.1 - Freqüência no Estator da Máquina Auxiliar para Ligação "Mais"

A rotação síncrona do conjunto " n_{sc} " é definida como sendo a rotação na qual a freqüência " f_{al} " seja nula (zero), ou seja, da equação (3.3.1.4) fazendo $f_{al} = 0$, temos:

$$n_{sc} = \frac{f_{p1}}{p_p + p_a} = \frac{f_{rede}}{p_p + p_a} \quad (3.3.1.5)$$

Se fizermos as duas máquinas trabalhar em separado, podemos definir a velocidade síncrona para cada máquina.

Para a máquina principal temos:

$$n_{sp} = \frac{f_{p1}}{p_p} = \frac{f_{rede}}{p_p} \quad (3.3.1.6)$$

Para a máquina auxiliar, temos:

$$n_{sa} = \frac{f_{al}}{p_a} = \frac{f_{rede}}{p_a} \quad (3.3.1.7)$$

3.3.2 Ligação “MENOS”

Para a ligação “MENOS” onde os conjugados se subtraem, temos:

$$n_a = n_p = n \quad (3.3.2.1)$$

Substituindo (3.3.2.1) em (3.3.3), temos:

$$f_{p1} = f_{a1} + n(p_p - p_a) \quad (3.3.2.2)$$

A rotação “n” é dada por:

$$n = \frac{f_{p1} - f_{a1}}{p_p - p_a} \quad (3.3.2.3)$$

Aqui também é possível variar a rotação “n” do conjunto variando-se a tensão imposta à máquina auxiliar.

Da equação (3.3.2.3), temos:

$$f_{\bar{a}1} = f_{p1} - n(p_p - p_a) \quad (3.3.2.4)$$

Onde:

$f_{\bar{a}1}$ = Freqüência imposta no estator da máquina auxiliar para ligação “MENOS”

A Figura 3.3.2.1 mostra a variação de “ $f_{\bar{a}1}$ ” em função da rotação para a ligação “MENOS”.

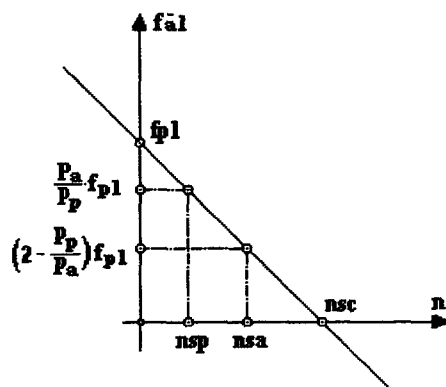


Figura 3.3.2.1 - Freqüência no Estator da Máquina Auxiliar para Ligação "Menos"

A rotação síncrona do conjunto é dada por:

$$n_{sc} = \frac{f_{p1}}{p_p - p_a} \quad (3.3.2.5)$$

A conexão “MENOS” não apresenta interesse prático porque os torques das duas máquinas se subtraem.

3.4 ESCORREGAMENTO DA MATBCDA

Como no caso da MATBCDA temos duas máquinas assíncronas sobre um mesmo eixo e conectadas em cascata devemos determinar o escorregamento para as duas máquinas, ou seja, para a máquina principal e para a máquina auxiliar.

Nas máquinas assíncronas o rotor gira com uma velocidade diferente da do campo girante, isto é, o rotor escorrega em relação à velocidade síncrona.

O escorregamento de uma máquina assíncrona é definido como:

$$s = \frac{n_s - n}{n_s} \quad (3.4.1)$$

Onde:

s = Escorregamento da Máquina

$n_s = \frac{f_{rede}}{p}$ = Rotação Síncrona dada em rps

n = A Rotação Mecânica do Rotor em rps

f_{rede} = Frequência da Rede em Hz

p = Pares de Pólos da Máquina

3.4.1 Máquina Principal

Para a máquina principal o escorregamento “ s_p ” é definido como:

$$s_p = \frac{n_{sp} - n}{n_{sp}} = 1 - \frac{n}{n_{sp}} \quad (3.4.1.1)$$

Em função do número de pares de pólos “ P_p ” é dado por:

$$s_p = \frac{\frac{f_{pl}}{P_p} - n}{\frac{f_{pl}}{P_p}} = 1 - n \frac{P_p}{f_{pl}} \quad (3.4.1.2)$$

Como a frequência que alimenta o estator da máquina principal é igual a da rede podemos escrever o escorregamento “ s_p ” como:

$$s_p = 1 - n \frac{P_p}{f_{rede}} \quad (3.4.1.3)$$

A rotação " n " deve ser expressa em rps .

A Figura 3.4.1.1 a seguir mostra o escorregamento " sp " em função da rotação:

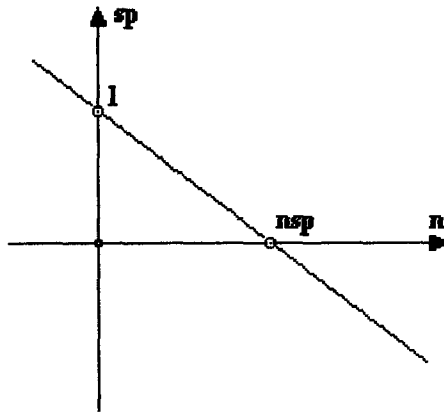


Figura 3.4.1.1 - Escorregamento da Máquina Principal

3.4.2 Máquina Auxiliar

O escorregamento da máquina auxiliar " s_a " é definido como sendo:

$$s_a = \frac{n_{sc} - n}{n_{sc}} = 1 - \frac{n}{n_{sc}} \quad (3.4.2.1)$$

Onde:

n_{sc} = Rotação síncrona do conjunto em cascata definido na equação (3.3.1.5)

n = Rotação do eixo do conjunto

Substituindo a equação (3.3.1.5) em (3.4.2.1) obtemos o escorregamento da máquina auxiliar para a ligação "MAIS".

$$s_a^+ = 1 - n \left(\frac{P_p + P_a}{f_{pl}} \right) \quad (3.4.2.2)$$

Como o estator da máquina principal está ligado diretamente na rede temos $f_{pl} = f_{rede}$ logo:

$$s_a^+ = 1 - n \left(\frac{P_p + P_a}{f_{rede}} \right) \quad (3.4.2.3)$$

A Figura 3.4.2.1 a seguir mostra o escorregamento da máquina auxiliar em função da rotação.

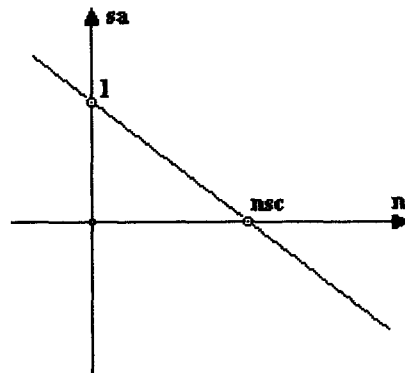


Figura 3.4.2.1 - Escorregamento da Máquina Auxiliar

Observe que o escorregamento " s_a " é nulo na rotação síncrona do conjunto em cascata " n_{sc} ".

Analogamente o escorregamento da máquina auxiliar para a ligação "MENOS", é obtido substituindo a equação (3.3.2.5) em (3.4.2.1).

$$s_a^- = 1 - n \left(\frac{P_p - P_a}{f_{rede}} \right) \quad (3.4.2.4)$$

CAPÍTULO 4 - TEORIA DOS SISTEMAS DE REFERÊNCIA

4.1 INTRODUÇÃO

A equação de tensão, potência e torque as quais descrevem o comportamento da máquina foram estabelecidas no parágrafo (C.5). Mostramos que as indutâncias mútuas entre as fases do estator e do rotor são funções da posição " θ_2 " do rotor em relação ao estator. Portanto nas equações diferenciais da tensão aparecem termos que variam no tempo, com exceção quando o rotor estiver parado.

Uma troca de variáveis, é às vezes, usada para reduzir a complexidade dessas equações diferenciais. Existem vários tipos de mudança de variáveis que são usadas. Originalmente, pensou-se que cada mudança de variáveis eram diferentes e conseqüentemente tratadas separadamente. Percebeu-se mais tarde que todas essas mudanças de variáveis usadas para transformar variáveis reais são casos particulares de uma mais geral. Esta transformação geral refere as variáveis da máquina para um sistema de referência o qual gira com uma velocidade angular arbitrária. Todas as transformações reais são obtidas a partir desta transformação geral simplesmente definindo a velocidade de rotação do sistema de referência.

Neste capítulo iremos analisar esta transformação geral, e estudar algumas propriedades sem a complexidade das equações da máquina.

O objetivo dessa recapitulação da teoria dos sistemas de referência é para que possamos aplicá-lo ao estudo da MATBCDA.

4.2 RESUMO HISTÓRICO

Por volta de 1920, R. H. Park introduziu um novo método de análise de máquina elétrica. Ele formulou uma mudança de variáveis o qual de fato trocava as variáveis (tensão, corrente, enlace de fluxo) associados ao enrolamento do estator de uma máquina síncrona por variáveis associadas a um enrolamento fictício girando com o rotor, ou seja a transformada de Park transforma variáveis do estator a um sistema de referência fixo no rotor. A transformada de Park, a qual revolucionou a análise de máquinas elétricas, tem a única propriedade de eliminar a dependência do tempo das indutâncias das equações diferenciais das tensões nas máquinas síncronas, o qual ocorre através de circuito elétrico com movimento relativo e circuitos elétricos com relutância magnética variável. Por volta de 1930 H. C. Stanley empregou a mudança de variáveis na análise das máquina de indução.

Ele mostrou que a dependência temporal das indutâncias nas equações de tensão na máquina de indução através de circuitos elétricos em movimento relativo pode ser eliminada pela transformação de variáveis associadas ao enrolamento do rotor (variáveis do rotor) para variáveis associadas a um enrolamento fictício estacionário. Neste caso as variáveis do rotor são transformadas a um sistema de referência fixo no estator.

G. Kron introduziu a mudança de variáveis a qual eliminou a dependência das indutâncias de uma máquina de indução simétrica pela transformação dupla de variáveis do estator e das variáveis do rotor para uma sistema de referência rotativo em sincronismo com a rotação do campo magnético. Este sistema é normalmente denominado de “Sistema de Referência Síncrono”.

D.S. Brereton empregou uma mudança de variáveis a qual também eliminou a dependência temporal das indutâncias de uma máquina de indução simétrica, pela transformação das variáveis do estator para um sistema de referência fixo no rotor. Esta é essencialmente a transformação de Park aplicada às Máquinas de Indução.

Park, Stanley, Kron e Bereton, desenvolveram mudanças de variáveis, cada qual parecendo unicamente aplicável a casos particulares. Conseqüentemente cada transformação era tratada separadamente na literatura. Por volta de 1965 notou-se que todas as transformações usadas na análise de máquinas de indução estão contidas numa transformação mais geral a qual elimina a dependência temporal das indutâncias referindo as variáveis do estator e do rotor para um sistema de referência a qual pode girar com qualquer velocidade angular ou permanecer estacionário.

Todas as transformações conhecidas podem ser obtidas simplesmente definindo apropriadamente a velocidade de rotação para o assim chamado “Sistema de Referência Arbitrário”.

Para uma máquina síncrona as variáveis do estator também podem ser transformadas para o sistema de referência arbitrário. Contudo a dependência temporal das indutâncias na máquina síncrona somente são eliminadas se o sistema de referência é fixo no rotor (TRANSFORMAÇÃO DE PARK). Portanto o sistema de referência arbitrário não oferece vantagem na análise de máquinas síncronas, em relação a análise de máquinas de indução.

4.3 EQUAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO PARA UM SISTEMA DE REFERÊNCIA ARBITRÁRIO

Apesar das mudanças de variáveis serem usadas na análise de máquinas de corrente alternada para eliminar a dependência temporal das indutâncias, mudanças de variáveis também são empregadas na análise estática de vários componentes de um sistema de potência, com parâmetros constantes.

Em muitos programas de computador usados para análise de transitórios e estabilidade dinâmica para grandes sistemas de potência, as variáveis para todos os componentes do sistema de potência, exceto para máquinas síncronas, são representados num sistema de referência girando na velocidade síncrona. Logo, todas as variáveis associadas a transformadores, linhas de transmissão, cargas, bancos de capacitores, etc, por exemplo, podem ser transformados para o sistema de referência girando na velocidade síncrona, através da mudança de variáveis.

Felizmente todas as transformações conhecidas para estes componentes, estão também contidos na transformação para o sistema de referência arbitrário, a mesma transformação geral usada para as variáveis do estator da máquina de indução e da máquina síncrona e para as variáveis do rotor da máquina de indução.

Nós podemos formular uma transformação para o sistema de referência arbitrário a qual pode ser aplicada para todas as variáveis. É preferível considerar somente as variáveis associadas com circuitos estacionários neste capítulo e modificar esta análise para as variáveis associadas com o enrolamento do rotor de uma máquina de indução. Em outras palavras, analisaremos neste capítulo a transformação geral, e aplicaremos esta teoria a nossa máquina em estudo no capítulo seguinte.

Uma mudança de variáveis a qual formula uma transformação de um conjunto de variáveis trifásicas de elementos de um circuito estacionário para um sistema de referência arbitrário, pode ser expresso como:

$$\begin{bmatrix} f_{q1} \\ f_{d1} \\ f_{o1} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sin \theta & \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{2\pi}{3} & \frac{2\pi}{3} & \frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{a1} \\ f_{b1} \\ f_{c1} \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

Onde “ θ ” é dado por:

$$\theta = \int_0^t \omega(\xi) d\xi + \theta(0) \quad (4.3.2)$$

A variável “ ξ ” é uma variável de integração.

Numa forma mais compacta a transformação pode ser escrita como:

$$[f_{qdo1}] = [K_1][f_{abc1}] \quad (4.3.3)$$

Onde:

$$[f_{qdo1}]^T = [f_{q1} \ f_{d1} \ f_{o1}] \quad (4.3.4)$$

$$[f_{abc1}]^T = [f_{a1} \ f_{b1} \ f_{c1}] \quad (4.3.5)$$

$$[K_J] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{Sen}\theta & \text{Sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \text{Sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.3.6)$$

Pode ser demonstrado que o inverso da matriz "[K_J]" é dado por:

$$[K_J]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{Sen}\theta & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \text{Sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \text{Sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

Nas equações acima "f" pode representar qualquer variável, tensão, corrente, enlace de fluxo, ou carga elétrica. O índice sobrescrito "T" indica a matriz transposta. O índice subscrito "J" indica as variáveis, parâmetros e transformações associados com circuitos estacionários.

O deslocamento angular "θ" deve ser contínuo, contudo a velocidade angular associada com a mudança de variáveis e indefinida (não especificada).

O sistema de referência pode girar com velocidade angular "CONSTANTE", ou com velocidade angular "VARIÁVEL", ou pode permanecer "ESTACIONÁRIO".

A conotação de "ARBITRÁRIO" consiste no fato de que a velocidade angular da transformação não é especificada e pode ser selecionada arbitrariamente para obter a solução do sistema de equações ou satisfazer as restrições do sistema. A mudança de variáveis mostrada acima pode ser aplicada para variáveis de qualquer forma de onda e seqüência temporal; contudo a transformação mostrada acima foi desenvolvida para a seqüência "abc".

Portanto a transformação para o sistema de referência arbitrário é uma troca de variáveis e não necessita de uma conotação física. É conveniente visualizar as equações de transformações como relações trigonométricas entre variáveis como mostrado na **Figura 4.3.1**.

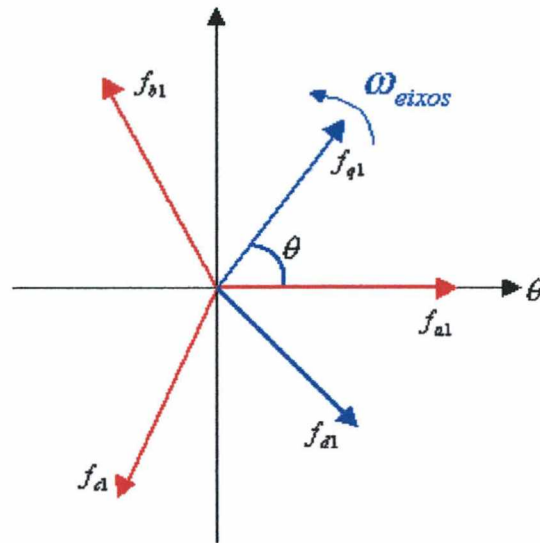


Figura 4.3.1 - Representação Geométrica da Transformação

Em particular as equações de transformação podem ser admitidas como se as variáveis " f_{q1} " e " f_{d1} " estivessem colocados sobre eixos ortogonais entre si e girando com uma velocidade angular " ω ", e as variáveis " f_{a1} ", " f_{b1} " e " f_{c1} " podem ser considerados como variáveis estacionárias colocadas sobre eixos defasados de 120° entre si.

Resolvendo a primeira linha da matriz (4.3.1) obtemos " f_{q1} ", e resolvendo a segunda linha obtemos " f_{d1} ".

É importante notar que as variáveis " o_1 " não estão associados ao sistema de referência arbitrário. As variáveis " o_1 " estão relacionados aritmeticamente com as variáveis " abc_1 " independente de " θ ".

É importante não confundir " f_{a1} ", " f_{b1} " e " f_{c1} " com fasores, elas são quantidades instantâneas as quais podem ser funções do tempo.

A representação da transformação conforme mostrado na **Figura 4.3.1** é particularmente conveniente quando aplicados a máquinas de corrente alternadas onde as direções " f_{a1} ", " f_{b1} " e " f_{c1} " podem ser as direções dos eixos magnéticos do enrolamento do estator. Nesta aplicação as direções de " f_{q1} " e " f_{d1} " são consideradas como as direções dos eixos magnéticos do "novo" (Fictício) enrolamento criado pela transformação de variáveis.

A potência instantânea total pode ser expressa em termos de variáveis " abc_1 " como sendo :

$$P_{abc1} = [u_{abc1}]^T \cdot [i_{abc1}] = u_{a1} i_{a1} + u_{b1} i_{b1} + u_{c1} i_{c1} \quad (4.3.8)$$

A potência expressa em variáveis "qdoI" deve ser igual a potência total expressa em variáveis "abc₁", ou seja, levando em conta a transformação inversa da transformação dada por (4.3.3), podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 P_{qdoI} = P_{abc1} &= [u_{abc1}]^T [i_{abc1}] = \left[[K_1]^{-1} \cdot [u_{qdoI}] \right]^T \cdot [K_1]^{-1} \cdot [i_{qdoI}] \\
 &= [u_{qdoI}]^T \left[[K_1]^{-1} \right]^T \cdot [K_1]^{-1} \cdot [i_{qdoI}] \\
 &= [u_{qdoI}]^T \frac{3}{2} [K_1] [K_1]^{-1} [i_{qdoI}] \\
 &= \frac{3}{2} [u_{qdoI}]^T [i_{qdoI}] \\
 &= \frac{3}{2} (u_{q1} i_{q1} + u_{d1} i_{d1} + u_{o1} i_{o1})
 \end{aligned}
 \tag{4.3.9}$$

O fator " $\frac{3}{2}$ " aparece devido a escolha da constante usada na transformação dada pela equação (4.3.1).

A forma de onda das variáveis " f_{q1} " e " f_{d1} ", de tensão, corrente, enlace de fluxo e cargas elétricas são dependentes da velocidade angular do sistema de referência, mas a forma de onda da potência total é independente do sistema de referência. Em outras palavras, a forma de onda da potência total é a mesma, independente do sistema de referência em relação ao qual é calculado.

4.4 TRANSFORMAÇÕES DE UM CONJUNTO DE VARIÁVEIS BALANCEADAS

Embora as equações de transformações são válidas independentemente da forma de onda das variáveis, é instrutivo considerar as características da transformação quando o sistema trifásico é simétrico e as tensões e as correntes formam um conjunto trifásico balanceado de seqüência "abc₁" como dados pelas equações (4.4.1) a (4.4.4). Um conjunto trifásico balanceado é genericamente definido como quantidades senoidais de amplitude iguais as quais estão defasadas de 120°. Desde que a soma deste conjunto é zero, as variáveis " f_{o1} " são zero.

$$f_{a1} = \sqrt{2} \cdot f_1 \cdot \cos(\theta_{ef}) \tag{4.4.1}$$

$$f_{bl} = \sqrt{2} \cdot f_1 \cdot \text{Cos}\left(\theta_{ef} - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (4.4.2)$$

$$f_{cl} = \sqrt{2} \cdot f_1 \cdot \text{Cos}\left(\theta_{ef} + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (4.4.3)$$

Onde " f_1 " pode ser uma função do tempo e o deslocamento angular " θ_{ef} " é dado por:

$$\theta_{ef} = \int_0^t \omega_e(f) d\xi + \theta_{ef}(0) \quad (4.4.4)$$

É importante notar a diferença entre " θ_e " e " θ_{ef} ". A posição angular do sistema de referência girando na velocidade síncrona é " θ_e ". A posição de cada variável elétrica (tensão, corrente, enlace de fluxo, ou carga elétrica) é " θ_{ef} " e " f_1 " representa a variável elétrica específica.

Contudo " θ_e " e " θ_{ef} " diferem somente na posição inicial " $\theta_e(0)$ " e " $\theta_{ef}(0)$ ", desde que ambos tenham a mesma velocidade angular " ω_e ".

Substituindo (4.4.1) a (4.4.3) na transformação para o sistema de referência arbitrário dado por (4.3.1), após algumas transformações obtemos:

$$f_{q1} = \sqrt{2} f_1 \cdot \text{Cos}(\theta_{ef} - \theta) \quad (4.4.5)$$

$$f_{d1} = \sqrt{2} \cdot f_1 \cdot \text{Sen}(\theta_{ef} - \theta) \quad (4.4.6)$$

$$f_{o1} = 0 \quad (4.4.7)$$

Analogamente, as variáveis trifásicas dadas por (4.4.1) a (4.4.3), as variáveis " f_{q1} " e " f_{d1} " formam um conjunto bifásico balanceado em todos os sistemas de referência exceto quando $\omega = \omega_e$. Neste caso, com o sistema de referência girando na rotação síncrona " ω_e " as quantidades " f_{q1} " e " f_{d1} " resultam:

$$f_{q1}^e = \sqrt{2} f_1 \cdot \text{Cos}[\theta_{ef}(0) - \theta_e(0)] \quad (4.4.8)$$

$$f_{d1}^e = \sqrt{2} f_1 \cdot \text{Sen}[\theta_{ef}(0) - \theta_e(0)] \quad (4.4.9)$$

Onde " θ_{ef} " foi substituído por (4.4.4) e " θ " por (4.3.2) fazendo $\omega = \omega_e$ e $\theta = \theta_e$.

As equações (4.4.8) e (4.4.9) revelam uma propriedade importante. Existe um sistema de referência onde um conjunto de variáveis balanceadas de amplitude constante aparecem como constantes. Em outras palavras, se um conjunto de variáveis balanceadas de amplitude constante aparecem em qualquer sistema de referência, então existe um outro sistema de referência onde este conjunto aparece como constante.

Portanto quando os eixos de referência "qd" estão girando com velocidade angular igual a " ω_e ", isto é, sincronizados com a rede, o conjunto de variáveis de amplitude constante resultam constantes.

4.5 RELAÇÕES BALANCEADAS EM REGIME PERMANENTE

Para as condições balanceadas em regime permanente " ω_e " é constante e as equações (4.4.1) a (4.4.3) podem ser expressa, como:

$$F_{a1} = \sqrt{2} F_1 \text{Cos}[\omega_e t + \theta_{ef}(o)] = R_e \left[\sqrt{2} F_1 e^{j\theta_{ef}(o)} e^{j\omega_e t} \right] \quad (4.5.1)$$

$$F_{b1} = \sqrt{2} F_1 \text{Cos} \left[\omega_e t + \theta_{ef}(o) - \frac{2\pi}{3} \right] = R_e \left[\sqrt{2} F_1 e^{j \left(\theta_{ef}(o) - \frac{2\pi}{3} \right)} e^{j\omega_e t} \right] \quad (4.5.2)$$

$$F_{c1} = \sqrt{2} F_1 \text{Cos} \left[\omega_e t + \theta_{ef}(o) + \frac{2\pi}{3} \right] = R_e \left[\sqrt{2} F_1 e^{j \left(\theta_{ef}(o) + \frac{2\pi}{3} \right)} e^{j\omega_e t} \right] \quad (4.5.3)$$

As letras maiúsculas foram usadas para representar as grandezas em regime permanente.

Se a velocidade do sistema de referência arbitrário é uma constante não especificada, então para um sistema balanceado em condições de regime estacionário as quantidades " f_{q1} " e " f_{d1} " dado por (4.4.5) e (4.4.6) podem ser expressas como:

$$F_{q1} = \sqrt{2} F_1 \text{Cos}[(\omega_e - \omega) t + \theta_{ef}(o) - \theta(o)] = R_e \left[\sqrt{2} F_1 e^{j[\theta_{ef}(o) - \theta(o)]} e^{j(\omega_e - \omega)t} \right] \quad (4.5.4)$$

$$F_{d1} = \sqrt{2} F_1 \text{Sen}[(\omega_e - \omega) t + \theta_{ef}(o) - \theta(o)] = R_e \left[j\sqrt{2} F_1 e^{j[\theta_{ef}(o) - \theta(o)]} e^{j(\omega_e - \omega)t} \right] \quad (4.5.5)$$

Da equação (4.5.1) o fasor " \dot{F}_{a1} " representativo da grandeza " F_{a1} " pode ser escrito:

$$\dot{F}_{a1} = F_1 e^{j\theta_{ef}(o)} \quad (4.5.6)$$

Se " ω " não é igual a " ω_e " então " F_{q1} " e " F_{d1} " são quantidades senoidais e baseado nas equações (4.5.4) e (4.5.5) podemos escrever:

$$\dot{F}_{q1} = F_1 e^{j[\theta_{ef}(o) - \theta(o)]} \quad (4.5.7)$$

$$\dot{F}_{d1} = j \dot{F}_{q1} \quad (4.5.8)$$

É necessário considerar frequências negativas desde que " ω " pode ser maior que " ω_e ". Os fasores giram no sentido anti-horário para " $\omega < \omega_e$ " e sentido horário quando " $\omega > \omega_e$ ".

Temos a liberdade de escolher " $\theta(o)$ ", portanto fazendo " $\theta(o) = 0$ " tem-se:

$$\dot{F}_{d1} = \dot{F}_{q1} \quad (4.5.9)$$

Assim para todos os sistemas de referência "assíncronos" " $\omega \neq \omega_e$ " com " $\theta(o) = 0$ " o fasor representativo das variáveis " f_{d1} " são iguais ao fasor representativo das variáveis " f_{q1} ". Para as condições de regime permanente balanceados, o fasor representativo das variáveis de uma fase precisa somente ser girada (rodado) para representar as variações nas outras fases.

No sistema de referência "síncrono" " $\omega = \omega_e$ " e " $\theta = \theta_e$ " e se continuarmos usando letras maiúsculas para representar variáveis constantes em regime permanente, podemos rescrever as equações (4.5.4) e (4.5.5) da seguinte maneira:

$$F_{q1}^e = R_e \left[\sqrt{2} F_1 e^{j[\theta_{ef}(o) - \theta_e(o)]} \right] \quad (4.5.10)$$

$$F_{d1}^e = R_e \left[j \sqrt{2} F_1 e^{j[\theta_{ef}(o) - \theta_e(o)]} \right] \quad (4.5.11)$$

Fazendo $\theta_e(o) = 0$ então:

$$F_{q1}^e = \sqrt{2} F_1 \text{Cos}[\theta_{ef}(o)] \quad (4.5.12)$$

$$F_{d1}^e = -\sqrt{2} F_1 \text{Sen}[\theta_{ef}(o)] \quad (4.5.13)$$

Lembrando que o fasor " \dot{F}_{a1} " é dado por:

$$\dot{F}_{a1} = F_1 e^{j\theta_{ef}(o)} = F_1 \text{Cos}[\theta_{ef}(o)] + jF_1 \text{Sen}[\theta_{ef}(o)] \quad (4.5.14)$$

E que podemos rescrever as equações (4.5.12) e (4.5.13) como:

$$F_{q1}^e = \sqrt{2} F_1 \text{Cos}[\theta_{ef}(o)] \quad (4.5.15)$$

$$-jF_{d1}^e = j\sqrt{2} F_1 \text{Sen}[\theta_{ef}(o)] \quad (4.5.16)$$

E somando membro a membro as expressões acima finalmente podemos escrever:

$$\sqrt{2} \dot{F}_{a1} = F_{q1}^e - jF_{d1}^e \quad (4.5.17)$$

A grandeza " \dot{F}_{a1} " é um fasor o qual representa uma quantidade senoidal. No entanto " F_{q1}^e " e " F_{d1}^e " não são fasores. Eles são quantidades reais representando variáveis constantes em regime estacionário do sistema de referência síncrono.

4.6 EQUAÇÕES DE TENSÕES BALANCEADAS EM REGIME PERMANENTE

Se o sistema trifásico é simétrico e se as tensões aplicadas formam um conjunto balanceado dado pelas equações (4.4.1) a (4.4.3) então as correntes em regime permanente também formam um conjunto balanceado.

Para resistências iguais em cada fase, a equação de tensão em regime permanente para a fase " a_1 " é dada por:

$$\dot{U}_{a1} = r_1 \cdot \dot{I}_{a1} \quad (4.6.1)$$

Para elementos indutivos e simétricos a equação da tensão em regime permanente para a fase " a_1 " pode ser escrita:

$$\dot{U}_{a1} = j\omega_e L_1 \cdot \dot{I}_{a1} \quad (4.6.2)$$

Para elementos capacitivos lineares e simétricos a equação de corrente em regime permanente para a fase "a₁" pode ser escrito:

$$\dot{I}_{a1} = j\omega_e \cdot C_1 \cdot \dot{V}_{a1} \quad (4.6.3)$$

Para qualquer combinação de elementos do circuito linear e simétricos a equação de tensão em regime permanente pode ser expressa na forma fasorial como:

$$\dot{U}_{a1} = \dot{Z}_1 \cdot \dot{I}_{a1} \quad (4.6.4)$$

Onde " \dot{Z}_1 " é a impedância de cada fase do sistema trifásico.

Para resistências iguais em cada fase do circuito, a equação da tensão " \dot{U}_{q1} " para o regime permanente balanceado em todo sistema de referência assíncrono pode ser escrito:

$$\dot{U}_{q1} = r_1 \cdot \dot{I}_{q1} \quad (4.6.5)$$

Para elementos indutivos lineares e simétricos a equação de tensão " \dot{U}_{q1} " em regime permanente em todo o sistema de referência assíncrona pode ser escrito:

$$\dot{U}_{q1} = j\omega_e L_1 \cdot \dot{I}_{q1} \quad (4.6.6)$$

Para circuitos com elementos capacitivos lineares e simétricos, podemos escrever:

$$\dot{I}_{q1} = j\omega_e C_1 \dot{U}_{q1} \quad (4.6.7)$$

Assim para qualquer combinação de elementos de circuito linear e simétricos a equação de tensão em todo o sistema de referência assíncrono pode ser expresso em forma fasorial como:

$$\dot{U}_{q1} = \dot{Z}_1 \cdot \dot{I}_{q1} \quad (4.6.8)$$

Onde " \dot{Z}_1 " é a mesma impedância da equação (4.6.4) o fato de que as grandezas na forma fasorial em regime permanente são iguais para as variáveis " F_{a1} " e " F_{q1} " foi mostrado na equação (4.5.9). Portanto as impedâncias para os eixos " f_{a1} " e " f_{q1} " também devem ser iguais.

CAPÍTULO 5 - MODELO DINÂMICO DA MATBCDA

5.1 INTRODUÇÃO

Conforme descrição no **Capítulo 2** a MATBCDA é constituída de duas máquinas assíncronas de rotor bobinado e cujos rotores estão conectados em cascata. Vimos também que os rotores podem ser conectados na ligação “MAIS” ou na ligação “MENOS”. Somente a ligação “MAIS” tem interesse prático.

O objetivo deste capítulo é criar um modelo dinâmico da MATBCDA para que possamos fazer uma análise dinâmica da máquina funcionando tanto como motor ou gerador.

Na criação deste modelo será utilizada a teoria da transformação das variáveis da máquina para um sistema de referência arbitrário.

Usaremos a teoria apresentada no **Capítulo 4** e a aplicaremos às máquinas PRINCIPAL e AUXILIAR da MATBCDA.

Na elaboração do modelo iremos considerar as hipóteses simplificadoras apresentadas no **Apêndice C4 – Parágrafo C.1**.

Consideraremos os arranjos dos enrolamentos trifásicos da máquina principal e auxiliar conforme mostrados na **Figura C.2.1** e, por uma questão de conveniência, repetiremos na **Figura 5.1.1**.

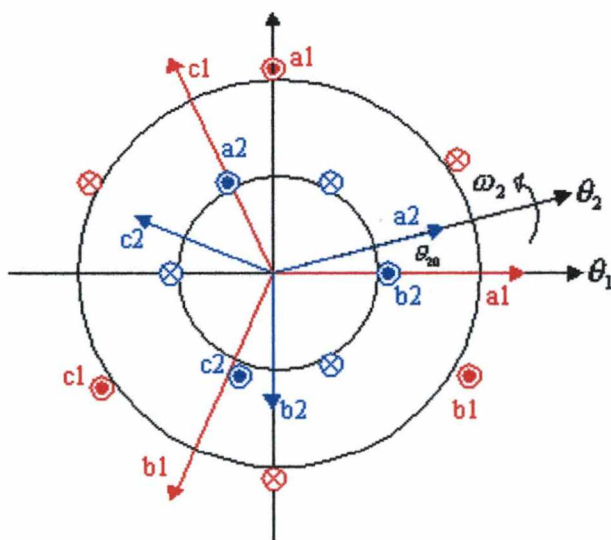


Figura 5.1.1 – Distribuição Simétrica dos Enrolamentos da Máquina de Indução Trifásica [MAT]

Os enrolamentos da Máquina Principal (MP) e Máquina Auxiliar (MA) estão conectados esquematicamente, conforme mostrado na **Figura 5.1.2**, abaixo.

A figura mostra as máquinas conectadas em Y, mas, elas também podem estar conectadas em Δ .

O estator da MP normalmente está ligado à rede, (R, S, T).

O estator da MA é normalmente ligado à rede através de um conversor de frequência. Os dois rotores estão conectados em cascata (série).

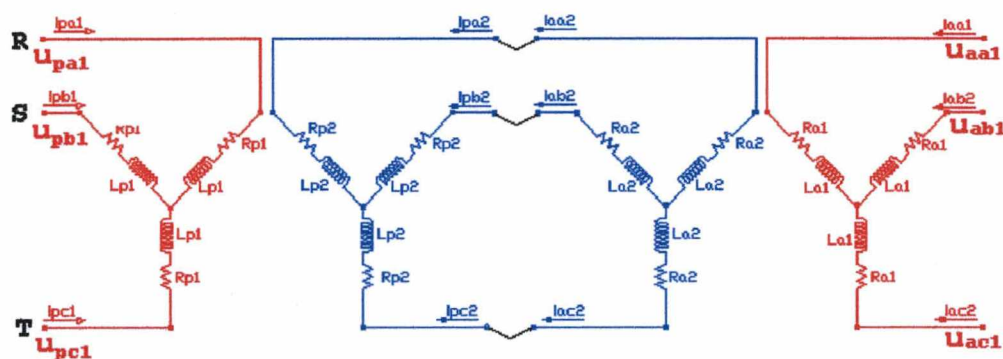


Figura 5.1.2 - Conexão dos Enrolamentos da MATBCDA

5.2 EQUAÇÕES DE TENSÕES EM VARIÁVEIS DA MATBCDA

5.2.1 Máquina Principal

A equação do enlace de fluxo " λ_p " para a máquina pode ser escrita baseado na equação (C.5.1.3) como sendo:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{pabc1} \\ \lambda_{pabc2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{p11} \\ L_{p21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{pabc1} \\ i_{pabc2} \end{bmatrix} \quad (5.2.1.1)$$

Onde " i_{pabc1} " e " i_{pabc2} " representam respectivamente as correntes de fase do estator e do rotor dados por (C.5.1.6) e (C.5.1.7).

A matriz " L_{p11} " representa a matriz de indutâncias do estator da máquina principal dada por:

$$L_{p11} = \begin{bmatrix} L_{dp1} + L_{prp1} & L_{Mpl} & L_{Mpl} \\ L_{Mpl} & L_{dp1} + L_{prp1} & L_{Mpl} \\ L_{Mpl} & L_{Mpl} & L_{dp1} + L_{prp1} \end{bmatrix} \quad (5.2.1.2)$$

Onde " L_{dp1} " representa a indutância de dispersão do estator da MP dado pela equação (C.3.2.5.7).

O termo " L_{prp1} " representa a indutância própria do enrolamento do estator da MP dado pela equação (C.3.3.7).

O termo " L_{Mp1} " representa a indutância mútua entre as fases do enrolamento do estator da MP dado pela equação (C.3.4.5), (C.3.4.6) e (C.3.4.7).

A matriz " $[L_{p22}]$ " representa a matriz de indutâncias do rotor da MP dado por:

$$[L_{p22}] = \begin{bmatrix} L_{dp2} + L_{prp2} & L_{Mp2} & L_{Mp2} \\ L_{Mp2} & L_{dp2} + L_{prp2} & L_{Mp2} \\ L_{Mp2} & L_{Mp2} & L_{dp2} + L_{prp2} \end{bmatrix} \quad (5.2.1.3)$$

Onde " L_{dp2} " representa a indutância de dispersão do rotor da MP dado pela equação (C.3.2.5.8).

O termo " L_{prp2} " representa a indutância própria do enrolamento do rotor da MP dado pela equação (C.3.3.11).

O termo " L_{Mp2} " representa a indutância mútua entre as fases do enrolamento do rotor da MP dado pela equação (C.3.4.8), (C.3.4.9) e (C.3.4.10).

Para expressar as equações de tensão em variáveis da máquina é conveniente referir todas as variáveis do rotor ao estator. Para fazer isto, basta multiplicar a matriz " L_{p12} " dado por (5.2.1.3) pelo fator de redução dado por (C.3.2.1.24), ou seja:

$$[L'_{p22}] = k_{pz} \cdot [L_{p22}] = \begin{bmatrix} L'_{dp2} + L'_{prp2} & L'_{Mp2} & L'_{Mp2} \\ L'_{Mp2} & L'_{dp2} + L'_{prp2} & L'_{Mp2} \\ L'_{Mp2} & L'_{Mp2} & L'_{dp2} + L'_{prp2} \end{bmatrix} \quad (5.2.1.4)$$

A "ASPA" super escrita indica variável do rotor referido ao estator. O fator de redução " k_{pz} " dado pela equação (C.3.2.1.24) para a máquina principal é dado por:

$$k_{pz} = \left(\frac{f_{wp1v1} \cdot N_{condp1}}{f_{wp2v2} \cdot N_{condp2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{m_{p1}}{m_{p2}} \right) \quad (5.2.1.5)$$

Onde:

f_{wp1v1} = Fator de bobinagem do estator da MP

f_{wp2v2} = Fator de bobinagem do rotor da MP

N_{condp1} = Número de condutores em série por fase do estator da MP

N_{condp2} = Número de condutores em série por fase do rotor da MP

m_{p1} = Número de fases do estator da MP

m_{p2} = Número de fases do rotor da MP

A matriz " $[L'_{p12}]$ " das indutâncias mútuas entre estator e rotor é dado pelo equação (C.5.1.10), que referido ao estator pode ser escrito:

$$[L'_{p12}] = L'_{Mp121} \begin{bmatrix} \cos(\theta_{p2}) & \cos\left(\theta_{p2} - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_{p2} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_{p2} + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_{p2}) & \cos\left(\theta_{p2} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_{p2} - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_{p2} + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_{p2}) \end{bmatrix} \quad (5.2.1.6)$$

Onde o termo " L'_{Mp121} " representa a indutância mútua entre o estator e o rotor já referido ao estator, dado por:

$$L'_{Mp121} = \left(\frac{f_{wp1v1} \cdot N_{condp1}}{f_{wp2v2} \cdot N_{condp2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{m_{p1}}{m_{p2}} \right) \cdot L_{Mp121} \quad (5.2.1.7)$$

Onde " L_{Mp121} " é dado pela equação (C.3.5.4).

O angulo " θ_{p2} " representa a posição angular dos enrolamentos do rotor em relação aos enrolamentos do estator.

A matriz " $[L'_{p21}]$ " é igual a matriz transposta de " $[L'_{p12}]$ " ou seja:

$$[L'_{p21}] = [L'_{p12}]^T \quad (5.2.1.8)$$

Portanto as equações de enlace de fluxo " λ'_p " para a MP com as variáveis do rotor referido ao estator pode ser escrito:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{pabc1} \\ \lambda'_{pabc2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{p11} & L'_{p12} \\ L'_{p21} & L'_{p22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{pabc1} \\ i'_{pabc2} \end{bmatrix} \quad (5.2.1.9)$$

As equações de tensão expressas em termos de variáveis de máquina referidos ao estator da MP podem agora ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} u_{pabc1} \\ u'_{pabc2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{p1} & 0 \\ 0 & R'_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{pabc1} \\ i'_{pabc2} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{p11} & L'_{p12} \\ L'_{p21} & L'_{p22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{pabc1} \\ i'_{pabc2} \end{bmatrix} \quad (5.2.1.10)$$

A matriz " R_{p1} " é a matriz de resistências de fase do estator da máquina principal dada pela equação (C.5.1.14).

A matriz " R'_{p2} " é a matriz de resistências de fase do rotor da máquina principal dada pela equação (C.5.1.15) já referida ao estator da máquina principal.

5.2.2 Máquina Auxiliar

Conforme mostrado na Figura 5.1.2 os rotores da MATBCDA estão ligados em série. Isto significa que as correntes rotóricas são iguais e as tensões nos terminais dos rotores também são iguais.

É conveniente escrever as equações de tensão da MA com todas as suas variáveis já referidas ao estator da MP. Portanto, como os rotores estão ligados em série, as variáveis do rotor da MA, como resistências e indutâncias, podem ser referidas ao estator da MP usando o fator de redução definido por (5.2.1.5).

Para referir as variáveis do estator da MA para o estator da MP, devemos primeiro referir ao rotor e em seguida ao estator da MP, ou seja:

$$k_{acz} = \frac{k_{pz}}{k_{az}} = \left(\frac{f_{wp1v1} \cdot N_{condp1}}{f_{wp2v2} \cdot N_{condp2}} \right)^2 \cdot \frac{m_{p1}}{m_{p2}} \cdot \left(\frac{f_{wa2v2} \cdot N_{conda2}}{f_{wa1v1} \cdot N_{conda1}} \right)^2 \cdot \frac{m_{a2}}{m_{a1}} \quad (5.2.2.1)$$

Onde:

$f_w =$ Fatores de bobinagens das máquinas

$N_{cond} =$ Número de condutores em série por fase das máquinas

$m =$ Número de fases das máquinas

As equações de enlace de fluxo " λ'_a " para a MA com suas variáveis já referidas ao estator da MP pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \lambda'_{aabc1} \\ \lambda'_{aabc2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L'_{a11} & L'_{a12} \\ L'_{a21} & L'_{a22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{aabc1} \\ i'_{aabc2} \end{bmatrix} \quad (5.2.2.2)$$

Onde:

$[\lambda'_{abc1}] =$ Representa o enlace de fluxo das fases "abc1" da MA referidas ao estator da MP

$[\lambda'_{abc2}] =$ Representa o enlace de fluxo das fases "abc2" da MA referidas ao estator da MP

$[i'_{abc1}] =$ Correntes do estator da MA referidos ao estator da MP

$[i'_{abc2}] =$ Correntes do rotor da MA referidos ao estator da MP

A matriz " $[L'_{a11}]$ " representa a matriz de indutâncias do estator da MA referido ao estator da MP dado por.

$$[L'_{a11}] = k_{acz} \begin{bmatrix} L_{da1} + L_{pra1} & L_{Ma1} & L_{Ma1} \\ L_{Ma1} & L_{da1} + L_{pra1} & L_{Ma1} \\ L_{Ma1} & L_{Ma1} & L_{da1} + L_{pra1} \end{bmatrix} \quad (5.2.2.3)$$

O significado de " L_{da1} ", " L_{pra1} " e " L_{Ma1} " são os mesmos da equação (5.2.1.2) porém para a máquina auxiliar.

A matriz " $[L'_{a22}]$ " representa as indutâncias do rotor da MA referidos ao estator da MP, dada por:

$$[L'_{a22}] = k_{pz} \begin{bmatrix} L_{da2} + L_{pra2} & L_{Ma2} & L_{Ma2} \\ L_{Ma2} & L_{da2} + L_{pra2} & L_{Ma2} \\ L_{Ma2} & L_{Ma2} & L_{da2} + L_{pra2} \end{bmatrix} \quad (5.2.2.4)$$

O significado de " L_{da2} ", " L_{pra2} " e " L_{Ma2} " são os mesmos da equação (5.2.1.3) porém para a MA.

A matriz " $[L'_{a12}]$ " das indutâncias mútuas entre o estator e o rotor é idêntica a equação (5.2.1.6) porém com os parâmetros da MA e é dada por:

$$[L'_{a12}] = -L'_{Ma121} \begin{bmatrix} \cos(\theta_{a2}) & \cos\left(\theta_{a2} - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_{a2} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_{a2} + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_{a2}) & \cos\left(\theta_{a2} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_{a2} - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_{a2} + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_{a2}) \end{bmatrix} \quad (5.2.2.5)$$

Esta matriz é negativa devido ao fato do rotor estar girando em sentido contrário ao campo girante do estator.

Onde o termo " L'_{Ma121} " representa a indutância mútua entre o estator e o rotor já referido ao estator da MP, dado por:

$$L'_{Ma12} = \left(\frac{f_{wp1v1} \cdot N_{condp1}}{f_{wp2v2} \cdot N_{condp2}} \right) \cdot \frac{m_{p1}}{m_{p2}} \cdot \left(\frac{f_{wa2v2} \cdot N_{conda2}}{f_{wa1v1} \cdot N_{conda1}} \right)^2 \cdot \frac{m_{a2}}{m_{a1}} \cdot L_{Ma121} \quad (5.2.2.6)$$

Onde o termo " L_{Ma121} " é dado pela equação (4.3.5.4), com os parâmetros da MA.

Analogamente à MP para " $[L'_{a21}]$ " temos:

$$[L'_{a21}] = [L'_{a12}]^T \quad (5.2.2.7)$$

Finalmente as equações de tensões expressas em termos de variáveis de máquina referidos ao estator da MP podem agora ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} [u'_{aabc1}] \\ [u'_{aabc2}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R'_{a1}] & [0] \\ [0] & [R'_{a2}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i'_{aabc1}] \\ [i'_{aabc2}] \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} [L'_{a11}] & [L'_{a12}] \\ [L'_{a21}] & [L'_{a22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i'_{aabc1}] \\ [i'_{aabc2}] \end{bmatrix} \quad (5.2.2.8)$$

A matriz " $[R'_{a1}]$ " é a matriz de resistência do estator da MA referido ao estator da MP dado por:

$$[R'_{a1}] = k_{acZ} \begin{bmatrix} R_{af1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{af1} & 0 \\ 0 & 0 & R_{af1} \end{bmatrix} \quad (5.2.2.9)$$

Onde " R_{af1} " é a resistência de fase do estator da MA dada por (c.4.2.3).

A matriz " $[R'_{a2}]$ " é a matriz de resistências do rotor da MA referida ao estator da MP, dada por:

$$[R'_{a2}] = k_{pZ} \begin{bmatrix} R_{af2} & 0 & 0 \\ 0 & R_{af2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{af2} \end{bmatrix} \quad (5.2.2.10)$$

Onde " R_{af2} " é a resistência de fase do rotor da máquina auxiliar dada por (c.4.3.3).

5.3 EQUAÇÕES DE TORQUE EM VARIÁVEIS DA MATBCDA

Na configuração da MATBCDA temos os dois rotores sobre o mesmo eixo e conectados na ligação cascata "MAIS", nesta condição os torques desenvolvidos pelas duas máquinas se somam.

Para a MP o torque eletromagnético " T_{pe} " desenvolvido no entreferro, pode ser escrito de acordo com a equação (C.5.3.3), como sendo:

$$T_{pe} = P_p \cdot [i_{pabc1}]^T \frac{d}{d\theta_{p2}} \{ [L'_{p12}] \} [i'_{pabc2}] \quad (5.3.1)$$

O termo " P_p " representa o número de pares de pólos da MP.

Explicitando a equação (5.3.1) obtemos:

$$T_{pe} = P_p \cdot L'_{Mp121} [i_{pa1} \ i_{pb1} \ i_{pc1}] \frac{d}{d\theta_{p2}} \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\theta_{p2}) & \cos\left(\theta_{p2} - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_{p2} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_{p2} + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_{p2}) & \cos\left(\theta_{p2} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_{p2} - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_{p2} + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_{p2}) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i'_{pa2} \\ i'_{pb2} \\ i'_{pc2} \end{bmatrix} \quad (5.3.2)$$

Fazendo a derivada e efetuando o produto matricial, após algumas transformações obtemos:

$$\begin{aligned} T_{pe} = & -P_p L'_{Mp121} \left\{ i_{pa1} \left(i'_{pa2} - \frac{1}{2} i'_{pb2} - \frac{1}{2} i'_{pc2} \right) + i_{pb1} \left(i'_{pb2} - \frac{1}{2} i'_{pa2} - \frac{1}{2} i'_{pc2} \right) + \right. \\ & \left. + i_{pc1} \left(i'_{pc2} - \frac{1}{2} i'_{pb2} - \frac{1}{2} i'_{pa2} \right) \right\} \text{sen}\theta_{p2} + \frac{\sqrt{3}}{2} [i_{pa1} (i'_{pb2} - i'_{pc2}) + \\ & + i_{pb1} (i'_{pc2} - i'_{pa2}) + i_{pc1} (i'_{pa2} - i'_{pb2})] \text{Cos}\theta_{p2} \} \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Considerando que a alimentação da MA é feita através do rotor, a equação do torque eletromagnético pode ser escrito como:

$$T_{ae} = P_a \cdot [i'_{aabc2}]^T \frac{d}{d\theta_{a2}} \{ [L'_{a12}] \} [i'_{aabc1}] \quad (5.3.4)$$

O termo " P_a " representa o número de pares de pólos da MA.

Explicitando a equação (5.3.4) obtemos:

$$T_{ae} = -p_a \cdot L'_{Ma121} [i'_{aa2} \ i'_{ab2} \ i'_{ac2}] \frac{d}{d\theta_{a2}} \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\theta_{a2}) & \cos\left(\theta_{a2} - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_{a2} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_{a2} + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_{a2}) & \cos\left(\theta_{a2} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_{a2} - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_{a2} + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_{a2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{aa1} \\ i'_{ab1} \\ i'_{ac1} \end{bmatrix} \right\} \quad (5.3.5)$$

Fazendo a derivada e efetuando o produto matricial, após algumas transformações, obtemos:

$$\begin{aligned} T_{ae} = +p_a L'_{Ma121} & \left\{ i'_{aa2} \left(i'_{aa1} - \frac{1}{2} i'_{ab1} - \frac{1}{2} i'_{ac1} \right) + i'_{ab2} \left(i'_{ab1} - \frac{1}{2} i'_{aa1} - \frac{1}{2} i'_{ac1} \right) + \right. \\ & \left. + i'_{ac2} \left(i'_{ac1} - \frac{1}{2} i'_{ab1} - \frac{1}{2} i'_{aa1} \right) \right\} \left[\text{sen}\theta_{a2} + \frac{\sqrt{3}}{2} (i'_{aa2} (i'_{ab1} - i'_{ac1}) + \right. \\ & \left. + i'_{ab2} (i'_{ac1} - i'_{aa1}) + i'_{ac2} (i'_{aa1} - i'_{ab1})) \right] \text{Cos}\theta_{a2} \} \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Como a MATBCDA está ligada em cascata "MAIS" os dois torques se somam. Logo, o torque eletromagnético " T_{ce} " total é dado por:

$$T_{ce} = T_{pe} + T_{ae} \quad (5.3.7)$$

Supondo que a MATBCDA esteja acoplada a uma carga de inércia " J_{carga} " e com torque resistente " T_{carga} ", a equação dinâmica do sistema pode ser escrita baseado na lei de Newton:

$$T_{ce} = (J_{MATBCDA} + J_{carga}) \cdot \frac{d\omega_m}{dt} + B\omega_m + T_{carga} \quad (5.3.8)$$

Onde " $J_{MATBCDA}$ " é a inércia da MATBCDA.

O termo " ω_m " representa a velocidade angular mecânica do rotor da MATBCDA.

O termo " B " representa o coeficiente de atrito viscoso do sistema dado em (Nms/rad) .

Na **Figura 5.4.1.1** consideramos todas as grandezas do rotor referidas ao estator da MP.

Os vetores " f " representam tensões ou correntes da máquina.

O circuito do estator consideramos fixos no sistema de referência estacionário. O circuito do rotor gira em relação ao do estator com uma velocidade angular " ω_{p2} " dado em " rad elétri cos/ s ".

Os eixos " $pq1$ e $pd1$ " giram em relação ao sistema estacionário do estator com velocidade angular " ω_{eixos} ". O ângulo " β_{p2} " representa o deslocamento angular entre o circuito do rotor e os eixos arbitrários " $pq1$ " e " $pd1$ ".

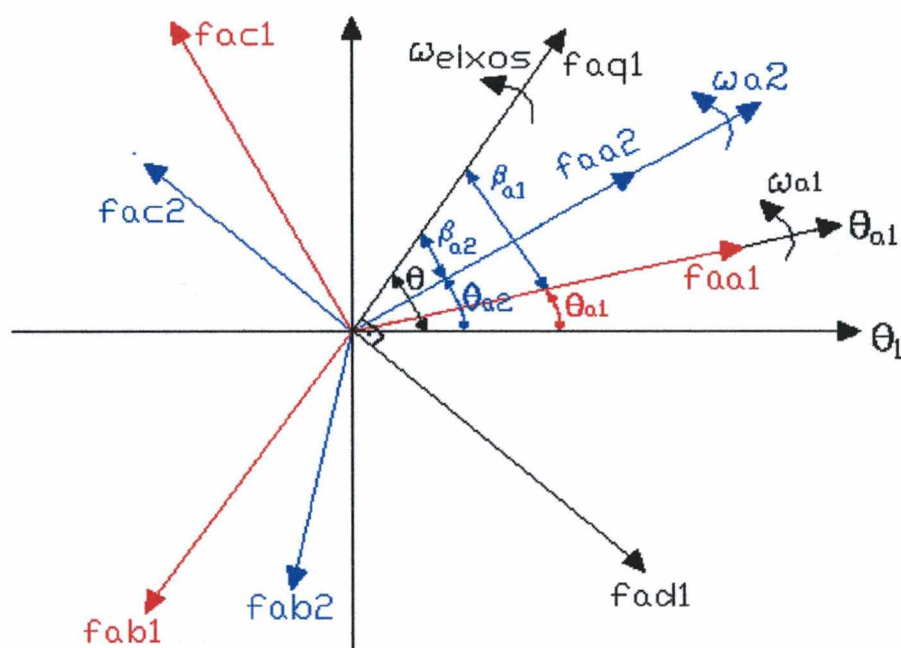


Figura 5.4.1.2 - Sistema de Referência para a Máquina Auxiliar

No sistema de referência para a MA mostrado na **Figura 5.4.1.2** consideramos todas as grandezas do estator e do rotor referidos ao estator da MP.

Neste sistema de referência consideramos que os eixos dos circuitos do rotor da MA estão girando com uma velocidade angular " ω_{a2} " dado em " rad elétri cos/ s " em relação ao eixo estacionário " θ_1 ". Como os dois rotores estão sobre um mesmo eixo mecânico as velocidades " ω_{a2} " e " ω_{p2} " são iguais, ou seja:

$$\omega_{a2} = \omega_{p2} \quad (5.4.1.1)$$

Levando em consideração a rotação mecânica " ω_m " dos rotores podemos escrever:

$$\omega_{a2} = \omega_{p2} = p_p \omega_m \quad (5.4.1.2)$$

A frequência angular elétrica da corrente elétrica induzida no rotor da máquina principal " ω_{pe2} " depende da velocidade relativa entre os circuitos do rotor e do estator.

Como os dois rotores estão conectados em série a frequência angular da corrente é a mesma para a máquina auxiliar e portanto podemos escrever:

$$\omega_{ae2} = \omega_{pe2} = \omega_e - \omega_{p2} = \omega_e - p_p \omega_m \quad (5.4.1.3)$$

Onde " $\omega_e = \omega_{rede}$ " representa a frequência angular elétrica da rede.

O índice " e " representa uma grandeza elétrica.

Na MATBCDA na ligação cascata "MAIS" a velocidade mecânica " ω_m " tem sentido contrário ao da frequência angular elétrica " ω_{ae2} " e portanto a tensão induzida no estator da MA tem uma frequência angular elétrica " ω_{ae1} ", que depende da velocidade relativa da FMM produzida pelas correntes rotóricas, ou seja:

$$\omega_{ae1} = \omega_{ae2} - p_a \omega_m \quad (5.4.1.4)$$

Substituindo (5.4.1.3) em (5.4.1.4) resulta:

$$\omega_{ae1} = \omega_e - (p_p + p_a) \omega_m \quad (5.4.1.5)$$

O valor de " ω_m " para a qual " ω_{ae1} " é nula corresponde a rotação síncrona da cascata, ou seja: " ω_{sc} "

$$\omega_{sc} = \frac{\omega_e}{p_p + p_a} \quad (5.4.1.6)$$

Comparando a equação (5.4.1.5) com (5.4.1.3) podemos admitir que os circuitos estatóricos da MA estão girando com uma velocidade angular " ω_{a1} " em relação ao eixo estacionário " θ_1 " dado por:

$$\omega_{a1} = (p_p + p_a) \omega_m \quad (5.4.1.7)$$

A velocidade " ω_{a1} " é dado em "*rad elétri cos/ s*" está representada na **Figura 5.4.1.2**.

Portanto a frequência angular elétrica induzida no estator da MA " ω_{ae1} " pode ser escrita :

$$\omega_{ae1} = \omega_e - \omega_{a1} \quad (5.4.1.8)$$

Sabemos que fisicamente os circuitos do estator da MA estão fixos (estacionários), porém no nosso modelo para podermos levar em conta o efeito "CASCATA" somos obrigados a admitir que seus eixos giram com uma velocidade angular " ω_{al} " em relação ao eixo estacionário " θ_1 ".

Esta consideração é muito importante e deverá ser levado em conta na transformação das variáveis de máquina para o sistema de referência arbitrário.

5.4.2 Equações das Tensões no Sistema de Referência Arbitrário

Antes de escrever as equações das tensões no sistema de referência, iremos definir as tensões em variáveis da MATBCDA, para o regime permanente.

Para o estator da MP podemos escrever:

$$u_{pa1}(t) = \sqrt{2} \cdot U_{p1} \cos \left[\omega_e \cdot t + \theta_{pe1}(0) \right] \quad (5.4.2.1)$$

$$u_{pb1}(t) = \sqrt{2} \cdot U_{p1} \cos \left[\omega_e \cdot t + \theta_{pe1}(0) - \frac{2\pi}{3} \right] \quad (5.4.2.2)$$

$$u_{pc1}(t) = \sqrt{2} \cdot U_{p1} \cos \left[\omega_e \cdot t + \theta_{pe1}(0) + \frac{2\pi}{3} \right] \quad (5.4.2.3)$$

Onde:

$U_{p1} = U_{rede}$ = Valor eficaz da tensão em Volts

$\omega_e = 2\pi f_e$ = Frequência angular em (rad/s) da tensão de alimentação (rede) da MATBCDA

$\theta_{pe1}(0)$ = Fase inicial da tensão em (rad) quando $t = 0$

Para o rotor da MP temos:

$$u'_{pa2}(t) = \sqrt{2} \cdot U'_{p2} \cos \left[(\omega_e - \omega_{p2})t + \theta_{pe2}(0) \right] \quad (5.4.2.4)$$

$$u'_{pb2}(t) = \sqrt{2} \cdot U'_{p2} \cos \left[(\omega_e - \omega_{p2})t + \theta_{pe2}(0) - \frac{2\pi}{3} \right] \quad (5.4.2.5)$$

$$u'_{pc2}(t) = \sqrt{2} \cdot U'_{p2} \cos \left[(\omega_e - \omega_{p2})t + \theta_{pe2}(0) + \frac{2\pi}{3} \right] \quad (5.4.2.6)$$

Onde:

U'_{p2} = Valor eficaz da tensão em Volts. Já referido ao estator da MP

$\theta_{pe2}(0)$ = Fase inicial da tensão em (rad) quando $t = 0$

Como a MA está conectada ao rotor da MP e que os dois rotores estão conectados em série as equações de tensões para o rotor em regime permanente pode ser escrita.

$$u'_{aa2}(t) = \sqrt{2} \cdot U'_{a2} \text{Cos} \left[(\omega_e - \omega_{p2})t + \theta_{ae2}(0) \right] \quad (5.4.2.7)$$

$$u'_{ab2}(t) = \sqrt{2} \cdot U'_{a2} \text{Cos} \left[(\omega_e - \omega_{p2})t + \theta_{ae2}(0) - \frac{2\pi}{3} \right] \quad (5.4.2.8)$$

$$u'_{ac2}(t) = \sqrt{2} \cdot U'_{a2} \text{Cos} \left[(\omega_e - \omega_{p2})t + \theta_{ae2}(0) + \frac{2\pi}{3} \right] \quad (5.4.2.9)$$

Onde:

$U'_{a2} = U'_{p2} =$ Valor eficaz da tensão em Volts. Já referido ao estator da MP

$\theta_{ae1}(0) = \theta_{pe2}(0) =$ Fase inicial da tensão em (rad) quando $t = 0$

No nosso estudo da MATBCDA só interessa a ligação cascata “MAIS”, portanto a frequência angular da tensão induzida no estator da MA é dado pela equação (5.4.1.5).

As equações de tensão no estator da MA podem ser escritas:

$$u'_{aa1}(t) = \sqrt{2} \cdot U'_{a1} \text{Cos} \left[(\omega_e - \omega_{a1}) t + \theta_{ae1}(0) \right] \quad (5.4.2.10)$$

$$u'_{ab1}(t) = \sqrt{2} \cdot U'_{a1} \text{Cos} \left[(\omega_e - \omega_{a1}) t + \theta_{ae1}(0) - \frac{2\pi}{3} \right] \quad (5.4.2.11)$$

$$u'_{ac1}(t) = \sqrt{2} \cdot U'_{a1} \text{Cos} \left[(\omega_e - \omega_{a1}) t + \theta_{ae1}(0) + \frac{2\pi}{3} \right] \quad (5.4.2.12)$$

Onde:

$U'_{a1} =$ Valor eficaz da tensão em Volts. Já referido ao estator da MP

$\theta_{ae1}(0) =$ Fase inicial da tensão em (rad) quando $t = 0$

Uma vez estabelecidas as equações de tensão em regime podemos escrever as equações das tensões no sistema de referência arbitrário.

Considerando um enrolamento trifásico estacionário com resistência $''[R_l]''$ e enlace de fluxo $''[\lambda_{abc1}]''$ as equações de tensão para este enrolamento podem ser escritas:

$$[u_{abc1}] = [R_l][i_{abc1}] + \frac{d}{dt}[\lambda_{abc1}] \quad (5.4.2.13)$$

Aplicando-se a transformação dada pela equação (4.3.3) na equação (5.4.2.13) temos:

$$[u_{dq0l}] = [K_1][R_1][K_1]^{-1} [i_{dq0l}] + [K_1] \frac{d}{dt} \{ [K_1]^{-1} [\lambda_{dq0l}] \} \quad (5.4.2.14)$$

A matriz "[K₁]" é dado pela equação (5.3.6) e a matriz "[K₁]⁻¹" é dado pela equação (4.3.7). Considerando que a matriz "[R₁]" é uma matriz diagonal e cujos termos da diagonal principal são iguais, então:

$$[K_1][R_1][K_1]^{-1} = [R_1] \quad (5.4.2.15)$$

A hipótese acima é bastante razoável porque normalmente as máquinas trifásicas são simétricas, apresentando resistências das fases iguais.

Desenvolvendo a derivada do último termo do lado direito da equação (5.4.2.14) temos:

$$[K_1] \frac{d}{dt} \{ [K_1]^{-1} [\lambda_{dq0l}] \} = [K_1] \frac{d}{dt} \{ [K_1]^{-1} \} [\lambda_{dq0l}] + [K_1] [K_1]^{-1} \cdot \frac{d}{dt} [\lambda_{dq0l}] \quad (5.4.2.16)$$

Demonstra-se facilmente que:

$$[K_1] \frac{d}{dt} [K_1]^{-1} = \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4.2.17)$$

Onde:

$$\omega = \omega_{\text{eixos}} = \frac{d\theta}{dt} = \text{Velocidade angular dos eixos "qd" de referência em relação aos eixos do enrolamento trifásico estacionário.}$$

$$[K_1][K_1]^{-1} = [I] \text{ Matriz Identidade} \quad (5.4.2.18)$$

Substituindo (5.4.2.17) e (5.4.2.18) em (5.4.2.16) temos:

$$[K_1] \frac{d}{dt} \{ [K_1]^{-1} [\lambda_{dq0l}] \} = \omega [\lambda_{dq1}] + \frac{d}{dt} [\lambda_{dq0l}] \quad (5.4.2.19)$$

Substituindo (5.4.2.15) e (5.4.2.19) em (5.4.2.14) temos:

$$[u_{dq0l}] = [R_1][i_{dq0l}] + \omega [\lambda_{dq1}] + \frac{d}{dt} [\lambda_{dq0l}] \quad (5.4.2.20)$$

Onde:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{dq1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{d1} \\ -\lambda_{q1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4.2.21)$$

5.4.2.1 Máquina Principal

Para facilitar a nossa formulação iremos escrever primeiro as equações das tensões no sistema de referência arbitrário para cada máquina em separado, isto é, considerando-as não conectadas. Em seguida escreveremos as equações para as duas máquinas conectadas em cascata “MAIS”.

Aplicando-se a equação (5.4.2.20) para a MP obtemos:

$$\begin{bmatrix} u_{pqd01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{p1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{pqd01} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} \lambda_{pdq1} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{pqd01} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.1.1)$$

$$\begin{bmatrix} u'_{pqd02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R'_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{pqd02} \end{bmatrix} + (\omega - \omega_{p2}) \begin{bmatrix} \lambda'_{pdq2} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda'_{pqd02} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.1.2)$$

Onde:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{pdq1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{pd1} \\ -\lambda_{pq1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4.2.1.3)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda'_{pdq2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda'_{pd2} \\ -\lambda'_{pq2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4.2.1.4)$$

Para que o conjunto de equações (5.4.2.1.1) e (5.4.2.1.2) esteja completo é necessário determinar os enlaces de fluxo.

Aplicando-se as equações de transformações dadas pelas equações (4.3.3) aos enlaces de fluxo dado pela equação (5.2.1.9), para a MP obtemos:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{pqd01} \\ \lambda'_{pqd02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_{p2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{p11} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} L'_{p21} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \end{bmatrix}^{-1} \\ \begin{bmatrix} K_1 \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_{p2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} L'_{p12} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} L'_{p22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{p2} \end{bmatrix}^{-1} \\ \begin{bmatrix} K_{p2} \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{pqd01} \\ i'_{pqd02} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.1.5)$$

A matriz “ $\begin{bmatrix} K_1 \end{bmatrix}$ ” é dado por (4.3.6) e a matriz “ $\begin{bmatrix} K_1 \end{bmatrix}^{-1}$ ” é dado por (4.3.7).

A matriz " $[K_{p2}]'$ " é a matriz de transformação das variáveis do rotor ao sistema de referência " qd " que está girando com uma velocidade angular " ω " em relação ao sistema estacionário do estator, ver Figura (5.4.1.1). Como o rotor também gira em relação ao estator com uma velocidade " ω_{p2} " o ângulo na matriz de transformação não é " θ " mas sim " β_{p2} ", ver Figura (5.4.1.1). Portanto a matriz " $[K_{p2}]'$ " pode ser escrita:

$$[K_{p2}] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\beta_{p2} & \cos\left(\beta_{p2} - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\beta_{p2} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\beta_{p2} & \sin\left(\beta_{p2} - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\beta_{p2} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.1.6)$$

Onde o ângulo " β_{p2} " é dado por:

$$\beta_{p2} = \theta - \theta_{p2} \quad (5.4.2.1.7)$$

Onde " θ " é o deslocamento angular dos eixos " qd " definido pela equação (4.3.2). O ângulo " θ_{p2} " é o deslocamento angular do rotor dado por:

$$\theta_{p2} = \int_0^t \omega_{p2}(\xi) d\xi + \theta_{p2}(0) \quad (5.4.2.1.8)$$

Onde " ξ " é uma variável de integração.

A matriz inversa " $[K_{p2}]^{-1}$ " é dada por:

$$[K_{p2}]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\beta_{p2} & \sin\beta_{p2} & 1 \\ \cos\left(\beta_{p2} - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\beta_{p2} - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\beta_{p2} + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\beta_{p2} + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4.2.1.9)$$

Para podermos simplificar as equações (5.4.2.1.5) precisamos antes fazer algumas considerações sobre as matrizes de indutâncias.

Na nossa análise dinâmica iremos considerar apenas a harmônica fundamental " $v_1 = I$ " da F.M.M. Consideramos também todas as variáveis do rotor referidas ao estator. Nestas condições as indutâncias magnetizantes do estator dado por (C.3.2.3.18) e do rotor dado por (C.3.3.11) são iguais. Logo a indutância de magnetização da MP " L_{mp} " pode ser escrita:

$$L_{mp} = \frac{M_{p1}}{4} \cdot \frac{\mu_o}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta p}}{\delta_p \cdot k_{cp1} \cdot k_{cp2} \cdot k_{sp}} \cdot \frac{(N_{consp1} \cdot fw_{p11})}{p_p} \quad (5.4.2.1.10)$$

Onde:

M_{p1} = Número de faixas de zona de enrolamento do estator da MP

$$A_{\delta p} = L_{Fe1} \cdot \frac{\pi (D_{p1} - \delta_p)}{2p_n} = \text{Área polar da MP (m}^2\text{)}$$

δ_p = Entreferro da MP (m)

k_{cp1} e k_{cp2} = Fator de CARTER do estator e do rotor respectivamente

k_{sp} = Fator de Saturação do circuito magnético

fw_{p11} = Fator de bobinagem da onda fundamental do enrolamento do estator

Considerando que MATBCDA é simétrica, isto é, todas as fases são iguais, a indutância própria do estator " L_{pp1} " e a do rotor " L'_{pp2} " referida ao estator são iguais a indutância magnetizante, ou seja:

$$L_{pp1} = L'_{pp2} = L_{mp} \quad (5.4.2.1.11)$$

As indutâncias mútuas entre as fases do estator " L_{Mp1} " e entre as fases do rotor " L_{Mp2} " referidas ao estator também são iguais entre si e baseado nas equações (C.3.4.5) a (C.3.4.10) podemos escrever.

$$L_{Mp1} = L_{Mp2} = -\frac{1}{2} L_{mp} \quad (5.4.2.1.12)$$

Finalmente as indutâncias mútuas entre as fases do estator e do rotor " L'_{Mp121} " já referidos ao estator dada pela equação (5.2.1.7) também são iguais a indutância magnetizante, ou seja:

$$L'_{Mp121} = L_{mp} \quad (5.4.2.1.13)$$

Portanto a matriz de indutâncias " $[L_{p11}]'$ " do estator da MP dada pela equação (5.2.1.2) pode ser rescrita como:

$$[L_{p11}] = \begin{bmatrix} L_{dp1} + L_{mp} & -\frac{1}{2}L_{mp} & -\frac{1}{2}L_{mp} \\ -\frac{1}{2}L_{mp} & L_{dp1} + L_{mp} & -\frac{1}{2}L_{mp} \\ -\frac{1}{2}L_{mp} & -\frac{1}{2}L_{mp} & L_{dp1} + L_{mp} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.1.14)$$

A matriz de indutâncias do rotor " $[L'_{p22}]'$ " é dado por (5.2.1.4) fica:

$$[L'_{p22}] = \begin{bmatrix} L'_{dp2} + L_{mp} & -\frac{1}{2}L_{mp} & -\frac{1}{2}L_{mp} \\ -\frac{1}{2}L_{mp} & L'_{dp2} + L_{mp} & -\frac{1}{2}L_{mp} \\ -\frac{1}{2}L_{mp} & -\frac{1}{2}L_{mp} & L'_{dp2} + L_{mp} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.1.15)$$

A matriz das indutâncias mútuas " $[L'_{p12}]'$ " entre estator e rotor dado pela equação (5.2.1.6), fica:

$$[L'_{p12}] = L_{mp} \begin{bmatrix} \cos \theta_{p2} & \cos \left(\theta_{p2} - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\theta_{p2} + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left(\theta_{p2} + \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \theta_{p2} & \cos \left(\theta_{p2} - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left(\theta_{p2} - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\theta_{p2} + \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \theta_{p2} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.1.16)$$

A matriz " $[L'_{p21}]'$ " é igual a matriz transposta de " $[L'_{p12}]'$ ".

Voltando a equação (6.4.2.1.5) e desenvolvendo os produtos matriciais obtemos:

$$[L_{tp11}] = [K_I][L_{p11}][K_I]^T = \begin{bmatrix} L_{dp1} + L_{up} & 0 & 0 \\ 0 & L_{dp1} + L_{up} & 0 \\ 0 & 0 & L_{dp1} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.1.17)$$

Onde:

$$L_{up} = \frac{3}{2}L_{mp} \quad (5.4.2.1.18)$$

$$[L'_{tp22}] = [K_{p2}][L'_{p22}][K_{p2}]^{-1} = \begin{bmatrix} L'_{dp2} + L_{up} & 0 & 0 \\ 0 & L'_{dp2} + L_{up} & 0 \\ 0 & 0 & L'_{dp2} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.1.19)$$

$$[L'_{tp12}] = [K_1][L'_{p12}][K_{p2}]^{-1} = [K_{p2}][L'_{p21}][K_1]^{-1} = \begin{bmatrix} L_{up} & 0 & 0 \\ 0 & L_{up} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4.2.1.20)$$

Substituindo (5.4.2.1.17), (5.4.2.1.19) e (5.4.2.1.20) em (5.4.2.1.5) resulta para os enlaces de fluxo:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{pqdo1} \\ \lambda'_{pqdo2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L'_{tp11}] & [L'_{tp12}] \\ [L'_{tp12}] & [L'_{tp22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{pqdo1} \\ i'_{pqdo2} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.1.21)$$

Na forma expandida os enlaces de fluxo podem ser escritos:

$$\lambda_{pq1} = L_{dp1} i_{pq1} + L_{up} (i_{pq1} + i'_{pq2}) \quad (5.4.2.1.22)$$

$$\lambda_{pd1} = L_{dp1} i_{pd1} + L_{up} (i_{pd1} + i'_{pd2}) \quad (5.4.2.1.23)$$

$$\lambda_{po1} = L_{dp1} i_{po1} \quad (5.4.2.1.24)$$

$$\lambda'_{pq2} = L'_{dp2} i'_{pq2} + L_{up} (i_{pq1} + i'_{pq2}) \quad (5.4.2.1.25)$$

$$\lambda'_{pd2} = L'_{dp2} i'_{pd2} + L_{up} (i_{pd1} + i'_{pd2}) \quad (5.4.2.1.26)$$

$$\lambda'_{po2} = L'_{dp2} i'_{po2} \quad (5.4.2.1.27)$$

Uma vez determinado os enlaces de fluxo as equações de tensões (5.4.2.1.1) e (5.4.2.1.2) ficam determinadas. Na forma expandida estas equações podem ser escritas:

$$u_{pq1} = R_{p1} i_{pq1} + \omega \lambda_{pd1} + \frac{d}{dt} (\lambda_{pq1}) \quad (5.4.2.1.28)$$

$$u_{pd1} = R_{p1} i_{pd1} - \omega \lambda_{pq1} + \frac{d}{dt} (\lambda_{pd1}) \quad (5.4.2.1.29)$$

$$u_{po1} = R_{p1} i_{po1} + \frac{d}{dt} (\lambda_{po1}) \quad (5.4.2.1.30)$$

$$u'_{pq2} = R'_{p2} i'_{pq2} + (\omega - \omega_{p2}) \lambda'_{pd2} + \frac{d}{dt} (\lambda'_{pq2}) \quad (5.4.2.1.31)$$

$$u'_{pd2} = R'_{p2} i'_{pd2} - (\omega - \omega_{p2}) \lambda'_{pq2} + \frac{d}{dt} (\lambda'_{pd2}) \quad (5.4.2.1.32)$$

$$u'_{po2} = R'_{p2} i'_{po2} + \frac{d}{dt} (\lambda'_{po2}) \quad (5.4.2.1.33)$$

Baseado nas equações de enlace de fluxo e de tensões acima podemos representar a máquina pelo circuito equivalente mostrado na **Figura 5.4.2.1.1**.

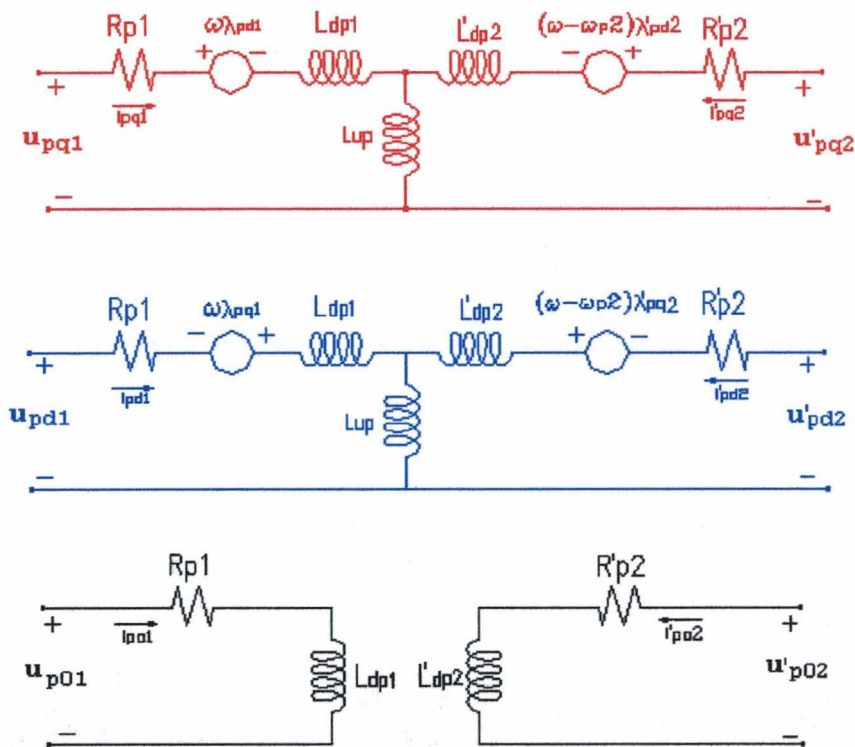


Figura 5.4.2.1.1 - Circuito Equivalente da Máquina Principal no Sistema de Referência Arbitrário

Como normalmente os parâmetros das máquinas são dados em Ohms (reatância) é conveniente expressar as equações de enlaces de fluxo e de tensão em termos de reatância.

Escolheremos como velocidade angular básica para o cálculo das reatâncias a frequência angular elétrica da rede " $\omega_b = \omega_e$ ".

Se multiplicarmos as equações (5.4.2.1.22) a (5.4.2.1.27) pela frequência angular básica " ω_b " obtemos:

$$\Psi_{pq1} = X_{dp1} i_{pq1} + X_{up} (i_{pq1} + i'_{pq2}) \quad (5.4.2.1.34)$$

$$\Psi_{pd1} = X_{dp1} i_{pd1} + X_{up} (i_{pd1} + i'_{pd2}) \quad (5.4.2.1.35)$$

$$\Psi_{po1} = X_{dp1} i_{po1} \quad (5.4.2.1.36)$$

$$\Psi'_{pq2} = X'_{dp2} i'_{pq2} + X_{up} (i_{pq1} + i'_{pq2}) \quad (5.4.2.1.37)$$

$$\Psi'_{pd2} = X'_{dp2} i'_{pd2} + X_{up} (i_{pd1} + i'_{pd2}) \quad (5.4.2.1.38)$$

$$\Psi'_{po2} = X'_{dp2} i'_{po2} \quad (5.4.2.1.39)$$

Onde " Ψ_p " representa agora o enlace de fluxo por segundo ou (W_{ebber}/s) e " X_p " representam as reatâncias indutivas da máquina principal.

As equações de tensões (5.4.2.1.28) a (5.4.2.1.33) podem ser escritas em termos de enlace de fluxo por segundo " Ψ_p " como sendo:

$$u_{pq1} = R_{p1} i_{pq1} + \frac{\omega}{\omega_b} \Psi_{pd1} + \frac{1}{\omega_e} \frac{d}{dt} (\Psi_{pq1}) \quad (5.4.2.1.40)$$

$$u_{pd1} = R_{p1} i_{pd1} - \frac{\omega}{\omega_b} \Psi_{pq1} + \frac{1}{\omega_e} \frac{d}{dt} (\Psi_{pd1}) \quad (5.4.2.1.41)$$

$$u_{po1} = R_{p1} i_{po1} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (\Psi_{po1}) \quad (5.4.2.1.42)$$

$$u'_{pq2} = R'_{p2} i'_{pq2} + \left(\frac{\omega - \omega_{p2}}{\omega_b} \right) \Psi'_{pd2} + \frac{1}{\omega_e} \frac{d}{dt} (\Psi'_{pq2}) \quad (5.4.2.1.43)$$

$$u'_{pd2} = R'_{p2} i'_{pd2} - \left(\frac{\omega - \omega_{p2}}{\omega_b} \right) \Psi'_{pq2} + \frac{1}{\omega_e} \frac{d}{dt} (\Psi'_{pd2}) \quad (5.4.2.1.44)$$

$$u'_{po2} = R'_{p2} i'_{po2} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (\Psi'_{po2}) \quad (5.4.2.1.45)$$

As equações de tensão (5.4.2.1.28) a (5.4.2.1.33) ou (5.4.2.1.40) a (5.4.2.1.45) estão escritas em termos de corrente e enlaces de fluxo (enlace de fluxo por segundo).

Nestas equações claramente as correntes e os enlaces de fluxo estão relacionados e ambos não podem ser independentes ou variáveis de estado.

Em formulação de função de transferência e simulação em computador da máquina de indução, veremos que é desejável expressar as equações de tensão em termos de correntes ou de enlaces de fluxo.

Se escolhermos as correntes como variáveis independentes e substituírmos os enlaces de fluxo por segundo dado por (5.4.2.1.34) a (5.4.2.1.39) nas equações de tensão dada por (5.4.2.1.40) a (5.4.2.1.45) então resulta para as tensões, o conjunto de equações dado por (5.4.2.1.46).

$$\begin{bmatrix} u_{pq1} \\ u_{pd1} \\ u_{po1} \\ u'_{pq2} \\ u'_{pd2} \\ u'_{po2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{p1} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X_{pp1}) & \frac{\omega}{\omega_b} X_{pp1} & 0 & \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X_{up}) & \frac{\omega}{\omega_b} X_{up} & 0 \\ -\frac{\omega}{\omega_b} X_{pp1} & R_{p1} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X_{pp1}) & 0 & -\frac{\omega}{\omega_b} X_{up} & \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X_{up}) & 0 \\ 0 & 0 & R_{p1} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X_{dp1}) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X_{up}) & \left(\frac{\omega - \omega_{p2}}{\omega_b} \right) X_{up} & 0 & R'_{p2} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X'_{pp2}) & \left(\frac{\omega - \omega_{p2}}{\omega_b} \right) X'_{pp2} & 0 \\ -\left(\frac{\omega - \omega_{p2}}{\omega_b} \right) X_{up} & \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X_{up}) & 0 & -\left(\frac{\omega - \omega_{p2}}{\omega_b} \right) X'_{pp2} & R'_{p2} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X'_{pp2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R'_{p2} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X'_{dp2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{pq1} \\ i_{pd1} \\ i_{po1} \\ i'_{pq2} \\ i'_{pd2} \\ i'_{po2} \end{bmatrix}$$

(5.4.2.1.46)

Onde:

$$X_{pp1} = X_{dp1} + X_{up}$$

(5.4.2.1.47)

$$X'_{pp2} = X'_{dp2} + X'_{up}$$

(5.4.2.1.48)

Os enlaces de fluxo por segundo " ψ_p " dados pelas equações (5.4.2.1.34) a (5.4.2.1.39) podem ser expressas em forma de matriz, como sendo:

$$\begin{bmatrix} \psi_{pq1} \\ \psi_{pd1} \\ \psi_{po1} \\ \psi'_{pq2} \\ \psi'_{pd2} \\ \psi'_{po2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{pp1} & 0 & 0 & X_{up} & 0 & 0 \\ 0 & X_{pp1} & 0 & 0 & X_{up} & 0 \\ 0 & 0 & X_{dp1} & 0 & 0 & 0 \\ X_{up} & 0 & 0 & X'_{pp2} & 0 & 0 \\ 0 & X_{up} & 0 & 0 & X'_{pp2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X'_{dp2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{pq1} \\ i_{pd1} \\ i_{po1} \\ i'_{pq2} \\ i'_{pd2} \\ i'_{po2} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.1.49)$$

Se escolhermos os enlaces de fluxo " λ_p " ou enlace de fluxo por segundo " ψ_p " como variáveis independentes devemos isolar as correntes nas equações (6.4.2.1.49) e substituir nas equações de tensão dada por (5.4.2.1.40) a (5.4.2.1.45).

Resolvendo o sistema matricial de (5.4.2.1.49) podemos obter as correntes:

$$\begin{bmatrix} i_{pq1} \\ i_{pd1} \\ i_{po1} \\ i'_{pq2} \\ i'_{pd2} \\ i'_{po2} \end{bmatrix} = \frac{I}{D_p} \begin{bmatrix} X'_{pp2} & 0 & 0 & -X_{up} & 0 & 0 \\ 0 & X'_{pp2} & 0 & 0 & -X_{up} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D}{X_{dp1}} & 0 & 0 & 0 \\ -X_{up} & 0 & 0 & X_{pp1} & 0 & 0 \\ 0 & -X_{up} & 0 & 0 & X_{pp1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{D}{X'_{dp2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{pq1} \\ \psi_{pd1} \\ \psi_{po1} \\ \psi'_{pq2} \\ \psi'_{pd2} \\ \psi'_{po2} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.1.50)$$

Onde:

$$D_p = X_{pp1} X'_{pp2} - X_{up}^2 \quad (5.4.2.1.51)$$

Substituindo (5.4.2.1.50) nas equações de tensão dados por (5.4.2.1.40) a (5.4.2.1.45) obtemos as equações de tensão em função do enlace de fluxo por segundo conforme mostrado no conjunto de equações (5.4.2.1.52).

$$\begin{bmatrix} u_{pq1} \\ u_{pd1} \\ u_{po1} \\ u'_{pq2} \\ u'_{pd2} \\ u'_{po2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_{p1}X'_{pp2} + 1}{D_p} \frac{d}{\omega_b dt} & 0 & -\frac{R_{p1}X_{up}}{D_p} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega}{\omega_b} & \frac{\omega}{\omega_b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_{p1}X'_{pp2} + 1}{D_p} \frac{d}{\omega_b dt} & 0 & \frac{R_{p1}X_{up}}{D_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_{p1}}{X_{dp1}} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R'_{p2}X_{up}}{D_p} & 0 & \frac{R'_{p2}X_{pp1} + 1}{D_p} \frac{d}{\omega_b dt} & \left(\frac{\omega - \omega_{p2}}{\omega_b} \right) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R'_{p2}X_{up}}{D_p} & 0 & -\left(\frac{\omega - \omega_{p2}}{\omega_b} \right) & \frac{R'_{p1}X_{pp1} + 1}{D_p} \frac{d}{\omega_b dt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R'_{p2}}{X'_{dp2}} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{pq1} \\ \psi_{pd1} \\ \psi_{po1} \\ \psi'_{pq2} \\ \psi'_{pd2} \\ \psi'_{po2} \end{bmatrix}$$

(5.4.2.1.52)

É interessante notar que cada equação de tensão nos eixos "q" e "d" contém duas derivadas, quando escolhermos a corrente como variável independente, ou variável de estado. (Ver equação 5.4.2.1.46).

Quando escolhermos o enlace de fluxo por segundo como variável independente ou de estado cada equação "q" e "d" de tensão só tem uma derivada. (Ver equação 5.4.2.1.52).

Como no caso do enlace de fluxo só temos uma derivada, facilita em muito estabelecer um método computacional para resolver o sistema de equações.

No nosso trabalho iremos adotar as correntes como variável independente, mesmo tendo duas derivadas.

5.4.2.2 Máquina Auxiliar

Fazendo-se as mesmas considerações para a máquina auxiliar, sua indutância magnetizante " L_{ma} " pode ser escrita como:

$$L_{ma} = \frac{M_{a1}}{4} \cdot \frac{\mu_o}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta a}}{\delta_a \cdot k_{ca1} \cdot k_{ca2} \cdot k_{sa}} \cdot \frac{(N_{Cond_{a1}} \cdot f_{wa11})}{p_a} \quad (5.4.2.2.1)$$

Onde o significado dos termos é o mesmo da equação (5.4.2.1.10), somente aplicado à máquina auxiliar.

Analogamente, as indutâncias já referidas ao estator da máquina principal podem ser escritas como segue:

Indutância própria do estator " L_{pra1} " e do rotor " L'_{pra2} " podem ser escritas:

$$L'_{pra1} = L'_{pra2} = L'_{ma} = k_{acz} \cdot L_{ma} \quad (5.4.2.2.2)$$

Indutância mútua entre fases do estator " L'_{Ma1} " e do rotor " L'_{Ma2} " já referidos ao estator da máquina principal:

$$L'_{Ma1} = L'_{Ma2} = -\frac{1}{2} L'_{ma} \quad (5.4.2.2.3)$$

As indutâncias mútuas entre fases do estator e do rotor ficam:

$$L'_{Ma121} = L'_{ma} \quad (5.4.2.2.4)$$

A matriz de indutâncias do estator da máquina auxiliar " $[L'_{a11}]$ " referida ao estator da máquina principal dado pela equação (5.2.2.3), fica:

$$[L'_{a11}] = \begin{bmatrix} L'_{da1} + L'_{ma} & -\frac{1}{2} L'_{ma} & -\frac{1}{2} L'_{ma} \\ -\frac{1}{2} L'_{ma} & L'_{da1} + L'_{ma} & -\frac{1}{2} L'_{ma} \\ -\frac{1}{2} L'_{ma} & -\frac{1}{2} L'_{ma} & L'_{da1} + L'_{ma} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.2.5)$$

A indutância de dispersão " L'_{da1} " corresponde a indutância de dispersão do estator da máquina auxiliar dada por:

$$L'_{da1} = k_{acz} \cdot L_{da1} \quad (5.4.2.2.6)$$

Onde " L_{da1} " é a indutância de dispersão de fase da máquina auxiliar dada por (C.3.2.5.7).

A matriz de indutâncias do rotor da máquina auxiliar referida ao estator da máquina principal dado pela equação (5.2.2.4), fica:

$$[L'_{a22}] = \begin{bmatrix} L'_{da2} + L'_{ma} & -\frac{1}{2} L'_{ma} & -\frac{1}{2} L'_{ma} \\ -\frac{1}{2} L'_{ma} & L'_{da2} + L'_{ma} & -\frac{1}{2} L'_{ma} \\ -\frac{1}{2} L'_{ma} & -\frac{1}{2} L'_{ma} & L'_{da2} + L'_{ma} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.2.7)$$

A indutância de dispersão do rotor da máquina auxiliar " L'_{da2} " referida ao estator da máquina principal fica:

$$L'_{da2} = k_{pz} \cdot L_{da2} \quad (5.4.2.2.8)$$

Onde " L_{da2} " é a indutância de dispersão do rotor dado por (C.3.2.5.8).

A matriz de indutâncias mútuas " $[L'_{a12}]$ " entre o estator e o rotor da máquina auxiliar já referida ao estator da máquina principal fica:

$$[L'_{a12}] = -L'_{ma} \begin{bmatrix} \cos \theta_{a2} & \cos\left(\theta_{a2} - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_{a2} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_{a2} + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos \theta_{a2} & \cos\left(\theta_{a2} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_{a2} - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_{a2} + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos \theta_{a2} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.2.9)$$

Esta matriz é negativa devido ao fato do rotor estar girando em sentido contrário ao campo girante do estator.

A matriz " $[L'_{a21}]$ " é igual a matriz transposta de " $[L'_{a12}]$ ".

Aplicando-se a equação (5.4.2.20) para a MA obtemos para as tensões:

$$[u'_{aqdo1}] = [R'_{a1}] [i'_{aqdo1}] + (\omega - \omega_{a1}) [\lambda'_{adq1}] + \frac{d}{dt} [\lambda'_{aqdo1}] \quad (5.4.2.2.10)$$

$$[u'_{aqdo2}] = [R'_{a2}] [i'_{aqdo2}] + (\omega - \omega_{a2}) [\lambda'_{adq2}] + \frac{d}{dt} [\lambda'_{aqdo2}] \quad (5.4.2.2.11)$$

Onde:

$$[\lambda'_{adq1}] = \begin{bmatrix} \lambda'_{ad1} \\ -\lambda'_{aq1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4.2.2.12)$$

$$[\lambda'_{adq2}] = \begin{bmatrix} \lambda'_{ad2} \\ -\lambda'_{aq2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4.2.2.13)$$

O termo " ω_{a1} " introduzido na equação (5.4.2.2.10) representa a velocidade angular dos eixos dos enrolamentos do estator da máquina auxiliar, mostrado na **Figura 5.4.1.2**.

Aplicando-se as equações de transformação dadas pelas equações 4.3.3 aos enlaces de fluxo, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \lambda'_{aqdo1} \\ \lambda'_{aqdo2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{a1}] & [L'_{a11}] & [K_{a1}]^l \\ [K_{a1}] & [L'_{a21}] & [K_{a1}]^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [K_{a1}] & [L'_{a12}] & [K_{a2}]^l \\ [K_{a1}] & [L'_{a22}] & [K_{a2}]^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{aqdo1} \\ i'_{aqdo2} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.2.14)$$

A matriz " $[K_{a1}]$ " corresponde a matriz de transformação das variáveis do estator da MA para os eixos de referência " dq ".

Baseado na **Figura 5.4.1.2** esta matriz assume a forma:

$$[K_{a1}] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\beta_{a1} & \cos\left(\beta_{a1} - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\beta_{a1} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\beta_{a1} & \sin\left(\beta_{a1} - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\beta_{a1} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.2.15)$$

Onde " β_{a1} " é dado por:

$$\beta_{a1} = \theta - \theta_{a1} \quad (5.4.2.2.16)$$

Onde " θ " é a posição angular dos eixos " qd " definido por 4.3.2.

O angulo " θ_{a1} " é posição angular dos enrolamentos do estator da MA dado por:

$$\theta_{a1} = \int_0^t \omega_{a1}(\xi) d\xi + \theta_{a1}(0) \quad (5.4.2.2.17)$$

Onde " ξ " é uma variável de integração.

A **Figura 5.4.1.2** mostra o significado de " θ_{a1} " e " β_{a1} ".

A matriz inversa " $[K_{a1}]^{-1}$ " é dada por:

$$[K_{a1}]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\beta_{a1} & \sin\beta_{a1} & 1 \\ \cos\left(\beta_{a1} - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\beta_{a1} - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\beta_{a1} + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\beta_{a1} + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4.2.2.18)$$

Onde a matriz " $[K_{a2}]$ " é a matriz de transformação das variáveis do rotor da máquina auxiliar para o sistema de referência " qd " que gira com a velocidade angular " ω ". Portanto baseado na equação (5.4.2.1.6) a matriz " $[K_{a2}]$ " pode ser escrita:

$$[K_{a2}] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \beta_{a2} & \cos \left(\beta_{a2} - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\beta_{a2} + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sin \beta_{a2} & \sin \left(\beta_{a2} - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left(\beta_{a2} + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.2.19)$$

Onde " β_{a2} " é o ângulo entre os eixos dos enrolamentos do rotor e os eixos de referência " dq ", ver Figura 5.4.1.2, dado por:

$$\beta_{a2} = \theta - \theta_{a2} \quad (5.4.2.2.20)$$

O ângulo " θ_{a2} " é dado por:

$$\theta_{a2} = \int_0^t \omega_{a2}(\xi) d\xi + \theta_{a2}(0) \quad (5.4.2.2.21)$$

Onde " ξ " é uma variável de integração.

A matriz inversa " $[K_{a2}]^{-1}$ " é idêntica a da máquina principal dada por (5.4.2.1.9), porém substituindo " β_{p2} " por " β_{a2} ".

Repetindo o que foi feito para a máquina principal, a equação dos enlaces de fluxo dado por (5.4.2.2.14) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \lambda'_{aqd01} \\ \lambda'_{aqd02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L'_{ta11}] & [-L'_{ta12}] \\ [-L'_{ta21}] & [L'_{ta22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{aqd01} \\ i'_{aqd02} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.2.22)$$

Onde as matrizes " $[L'_{ta11}]$ ", " $[L'_{ta22}]$ ", " $[L'_{ta12}]$ " e " $[L'_{ta21}]$ " tem o mesmo significado das matrizes da MP dado pelas equações 5.4.2.1.17 a 5.4.2.1.20, porém com os parâmetros da MA.

Na forma expandida, temos:

$$\lambda'_{aq1} = L'_{da1} i'_{aq1} + L'_{ua} (i'_{aq1} - i'_{aq2}) \quad (5.4.2.2.23)$$

$$\lambda'_{ad1} = L'_{da1} i'_{ad1} + L'_{ua} (i'_{ad1} - i'_{ad2}) \quad (5.4.2.2.24)$$

$$\lambda'_{ao1} = L'_{da1} \cdot i'_{ao1} \quad (5.4.2.2.25)$$

$$\lambda'_{aq2} = L'_{da2} i'_{aq2} + L'_{ua} (-i'_{aq1} + i'_{aq2}) \quad (5.4.2.2.26)$$

$$\lambda'_{ad2} = L'_{da2} i'_{ad2} + L'_{ua} (-i'_{ad1} + i'_{ad2}) \quad (5.4.2.2.27)$$

$$\lambda'_{ao1} = L'_{da2} \cdot i'_{ao2} \quad (5.4.2.2.28)$$

Onde " L'_{da1} " e " L'_{da2} " representam as indutâncias de dispersão do estator e do rotor.

O termo " L'_{ua} " é dado por:

$$L'_{ua} = \frac{3}{2} L'_{ma} \quad (5.4.2.2.29)$$

Analogamente as equações (5.4.2.1.28) a (5.4.2.1.33) as tensões da máquina auxiliar podem ser escritos.

$$u'_{aq1} = R'_{a1} i'_{aq1} + (\omega - \omega_{a1}) \lambda'_{ad1} + \frac{d}{dt}(\lambda'_{aq1}) \quad (5.4.2.2.30)$$

$$u'_{ad1} = R'_{a1} i'_{ad1} - (\omega - \omega_{a1}) \lambda'_{aq1} + \frac{d}{dt}(\lambda'_{ad1}) \quad (5.4.2.2.31)$$

$$u'_{ao1} = R'_{a1} i'_{ao1} + \frac{d}{dt}(\lambda'_{ao1}) \quad (5.4.2.2.32)$$

$$u'_{aq2} = R'_{a2} i'_{aq2} + (\omega - \omega_{a2}) \lambda'_{ad2} + \frac{d}{dt}(\lambda'_{aq2}) \quad (5.4.2.2.33)$$

$$u'_{ad2} = R'_{a2} i'_{ad2} - (\omega - \omega_{a2}) \lambda'_{aq2} + \frac{d}{dt}(\lambda'_{ad2}) \quad (5.4.2.2.34)$$

$$u'_{ao2} = R'_{a2} i'_{ao2} + \frac{d}{dt}(\lambda'_{ao2}) \quad (5.4.2.2.35)$$

Lembrando que " ω_{a2} " é igual a " ω_{p2} ".

Considerando as correntes como variáveis independentes e fazendo " $\omega_b = \omega_e$ " o conjunto das equações de tensão da MA em função das reatâncias é dado por 5.4.2.2.36.

O conjunto de equações de tensões em função do enlace de fluxo deixaremos de apresentar porque não serão utilizados no presente trabalho:

$$\begin{bmatrix} u'_{aq1} \\ u'_{ad1} \\ u'_{ao1} \\ u'_{aq2} \\ u'_{ad2} \\ u'_{ao2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R'_{a1} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X'_{aa1}) & \frac{(\omega - \omega_{a1})}{\omega_b} X'_{aa1} & 0 & -\frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X'_{ua}) & \frac{(\omega - \omega_{a1})}{\omega_b} X'_{ua} & 0 \\ -\frac{(\omega - \omega_{a1})}{\omega_b} X'_{aa1} & R'_{a1} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X'_{aa1}) & 0 & \frac{(\omega - \omega_{a1})}{\omega_b} X'_{ua} & 0 & 0 \\ 0 & R'_{a1} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X'_{da1}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X'_{ua}) & -\left(\frac{\omega - \omega_{a2}}{\omega_b} \right) X'_{ua} & 0 & R'_{a2} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X'_{aa2}) & \left(\frac{\omega - \omega_{a2}}{\omega_b} \right) X'_{aa2} & 0 \\ \left(\frac{\omega - \omega_{a2}}{\omega_b} \right) X'_{ua} & -\frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X'_{ua}) & 0 & -\left(\frac{\omega - \omega_{a2}}{\omega_b} \right) X'_{aa2} & R'_{a2} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X'_{aa2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R'_{a2} + \frac{1}{\omega_b} \frac{d}{dt} (X'_{da2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{aq1} \\ i'_{ad1} \\ i'_{ao1} \\ i'_{aq2} \\ i'_{ad2} \\ i'_{ao2} \end{bmatrix}$$

(5.4.2.2.36)

Onde:

$$X'_{aa1} = X'_{da1} + X'_{ua}$$

(5.4.2.2.37)

$$X'_{aa2} = X'_{da2} + X'_{ua}$$

(5.4.2.2.38)

5.4.2.3 Máquinas Conectadas em Cascata “MAIS”

Nos parágrafos 5.4.2.1 e 5.4.2.2 desenvolvemos as equações de tensões da máquina principal e máquina auxiliar em separado.

O conjunto de equações (5.4.2.1.46) representam a máquina principal quando alimentada por um sistema trifásico de tensões equilibradas conforme mostrado nas equações (5.4.2.1) a (5.4.2.3).

O conjunto de equações (5.4.2.2.36) representam a máquina auxiliar quando alimentada pelo rotor por um sistema trifásico de tensões equilibradas conforme mostrado nas equações (5.4.2.7) a (5.4.2.9). Neste caso as equações (5.4.2.2.36) levam em conta a variação da frequência das tensões de alimentação e o fato da rotação mecânica do rotor ser contrária ao campo girante do estator.

Na nossa análise devemos levar em conta o fato de que as duas máquinas trabalham com os dois rotores conectados em série formando uma malha fechada, conforme mostra a **Figura 5.4.2.3.1**, abaixo.



Figura 5.4.2.3.1 - Conexão em Cascata Mais da MATBCDA

Rescrevendo as equações de tensão para o circuito mostrado na **Figura 5.4.2.3.1** conseguimos reduzir o conjunto de 12 equações para 9 equações.

Escrevendo as equações de tensão em variáveis da máquina obtemos:

$$[u_{pabc1}] = [R_{p1}] [i_{pabc1}] + \frac{d}{dt} \{ [L_{p11}] [i_{pabc1}] \} + \frac{d}{dt} \{ [L'_{p12}] [i'_{pabc2}] \} \quad (5.4.2.3.1)$$

$$[0] = [R'_{p2} + R'_{a2}] [i'_{pabc2}] + \frac{d}{dt} \{ ([L'_{p22}] + L'_{a22}) [i'_{pabc2}] \} + \frac{d}{dt} \{ [L'_{p21}] [i_{pabc1}] - [L'_{a21}] [i'_{aabc1}] \} \quad (5.4.2.3.2)$$

$$[u_{aabc1}] = [R'_{a1}] [i'_{aabc1}] + \frac{d}{dt} \{ [L'_{a11}] [i'_{aabc1}] \} - \frac{d}{dt} \{ [L'_{a12}] [i'_{pabc2}] \} \quad (5.4.2.3.3)$$

As indutâncias mútuas " $[L'_{a21}]$ " entre o rotor e o estator da máquina auxiliar são negativas para levar em conta o fato que o rotor gira em sentido oposto ao do campo girante do estator. No circuito mostrado na **Figura 5.4.2.3.1**, mostramos isto através da polaridade das tensões.

Observa-se também que as correntes rotóricas " $[i'_{pabc2}]$ " e " $[i'_{aabc2}]$ " são iguais.

Em forma matricial as 9 equações acima podem ser escritas:

$$\begin{bmatrix} [u_{pabc1}] \\ [0] \\ [u'_{aabc1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{p1}] & [0] & [0] \\ [0] & \{[R'_{p2}] + [R'_{a2}]\} & [0] \\ [0] & [0] & [R'_{a1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_{pabc1}] \\ [i'_{pabc2}] \\ [i'_{aabc1}] \end{bmatrix} + \\ + \frac{d}{dt} \left\{ \begin{bmatrix} [L_{p11}] & [L'_{p12}] & [0] \\ [L'_{p21}] & \{[L'_{p22}] + [L'_{a22}]\} & -[L'_{a21}] \\ [0] & -[L'_{a12}] & [L'_{a11}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_{pabc1}] \\ [i'_{pabc2}] \\ [i'_{aabc1}] \end{bmatrix} \right\} \quad (5.4.2.3.4)$$

Aplicando-se a transformação dada pela equação (4.3.3) as equações (5.4.2.3.4),

temos:

$$\begin{bmatrix} [u_{pqdo1}] \\ [0] \\ [u'_{aqdo1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{p1}] & [0] & [0] \\ [0] & \{[R'_{p2}] + [R'_{a2}]\} & [0] \\ [0] & [0] & [R'_{a1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_{pqdo1}] \\ [i'_{pqdo2}] \\ [i'_{aqdo1}] \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} [\omega] & [0] & [0] \\ [0] & [\omega - \omega_{p2}] & [0] \\ [0] & [0] & [\omega - \omega_{a1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\lambda_{pdq1}] \\ [\lambda'_{pdq2}] \\ [\lambda'_{adq1}] \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} [\lambda_{pqdo1}] \\ [\lambda'_{pqdo2}] \\ [\lambda'_{aqdo1}] \end{bmatrix} \quad (5.4.2.3.5)$$

O conjunto de equações mostrados na equação (5.4.2.3.5) tem a forma da equação (5.4.2.20). Onde as matrizes de velocidade são dadas por:

$$[\omega] = \begin{bmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{bmatrix} \quad (5.4.2.3.6)$$

ω = Velocidade dos eixos de referência

$$[\omega - \omega_{p2}] = \begin{bmatrix} (\omega - \omega_{p2}) & 0 & 0 \\ 0 & (\omega - \omega_{p2}) & 0 \\ 0 & 0 & (\omega - \omega_{p2}) \end{bmatrix} \quad (5.4.2.3.7)$$

ω_{p2} = Velocidade dos eixos dos enrolamentos dos rotores

$$[\omega - \omega_{al}] = \begin{bmatrix} (\omega - \omega_{al}) & 0 & 0 \\ 0 & (\omega - \omega_{al}) & 0 \\ 0 & 0 & (\omega - \omega_{al}) \end{bmatrix} \quad (5.4.2.3.8)$$

ω_{al} = Velocidade dos eixos dos enrolamentos do estator da MA

A matriz " $[\lambda_{pdq1}]$ " é dada por:

$$[\lambda_{pdq1}] = \begin{bmatrix} \lambda_{pd1} \\ -\lambda_{pq1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4.2.3.9)$$

A matriz " $[\lambda'_{pdq2}]$ " é dada por:

$$[\lambda'_{pdq2}] = \begin{bmatrix} \lambda'_{pd2} \\ -\lambda'_{pq2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4.2.3.10)$$

A matriz " $[\lambda'_{adq1}]$ " é dada por:

$$[\lambda'_{adq1}] = \begin{bmatrix} \lambda'_{ad1} \\ -\lambda'_{aq1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4.2.3.11)$$

Os enlaces de fluxo são dados por:

$$[\lambda_{pqdo1}] = \begin{bmatrix} (L_{dpl} + L_{up}) & 0 & 0 \\ 0 & (L_{dpl} + L_{up}) & 0 \\ 0 & 0 & L_{dpl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{pq1} \\ i_{pd1} \\ i_{po1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{up} & 0 & 0 \\ 0 & L_{up} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{pq2} \\ i'_{pd2} \\ i'_{po2} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.3.12)$$

$$[\lambda'_{pqdo2}] = \begin{bmatrix} L_{up} & 0 & 0 \\ 0 & L_{up} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{pq1} \\ i_{pd1} \\ i_{po1} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} L'_{dp2} + L_{up} + L'_{da2} + L'_{ua} & 0 & 0 \\ 0 & L'_{dp2} + L_{up} + L'_{da2} + L'_{ua} & 0 \\ 0 & 0 & L'_{dp2} + L'_{da2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{pq2} \\ i'_{pd2} \\ i'_{po2} \end{bmatrix} - \\
& - \begin{bmatrix} L'_{ua} & 0 & 0 \\ 0 & L'_{ua} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{aq1} \\ i'_{ad1} \\ i'_{ao1} \end{bmatrix} \quad (5.4.2.3.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\lambda'_{aqdol}] = & \begin{bmatrix} L'_{dal} + L'_{ua} & 0 & 0 \\ 0 & L'_{dal} + L'_{ua} & 0 \\ 0 & 0 & L'_{dal} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{aq1} \\ i'_{ad1} \\ i'_{ao1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L'_{ua} & 0 & 0 \\ 0 & L'_{ua} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{pq2} \\ i'_{pd2} \\ i'_{po2} \end{bmatrix} \\
& (5.4.2.3.14)
\end{aligned}$$

Multiplicando as equações dos enlaces de fluxo dado por (5.4.2.3.12), (5.4.2.3.13) e (5.4.2.3.14) pela velocidade angular básica " ω_b " e substituindo nas equações das tensões dadas por (5.4.2.3.5), após expandir as equações, obtemos:

$$\begin{aligned}
u_{pq1} = & R_{p1} i_{pq1} + \frac{\omega}{\omega_b} X_{pp1} i_{pd1} + \frac{\omega}{\omega_b} X_{up} i'_{pd2} + \\
& + \frac{1}{\omega_b} \left[X_{pp1} \frac{d}{dt} (i_{pq1}) + X_{up} \frac{d}{dt} (i'_{pq2}) \right] \quad (5.4.2.3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{pd1} = & R_{p1} i_{pd1} - \frac{\omega}{\omega_b} X_{pp1} i_{pq1} - \frac{\omega}{\omega_b} X_{up} i'_{pq2} + \\
& + \frac{1}{\omega_b} \left[X_{pp1} \frac{d}{dt} (i_{pd1}) + X_{up} \frac{d}{dt} (i'_{pd2}) \right] \quad (5.4.2.3.16)
\end{aligned}$$

$$u_{po1} = R_{p1} i_{po1} + \frac{1}{\omega_b} X_{dp1} \cdot \frac{d}{dt} (i_{po1}) \quad (5.4.2.3.17)$$

$$\begin{aligned}
0 = & R'_2 i'_{pq2} + \Delta\omega_{p2} (X_{up} i_{pd1} - X'_{ua} i'_{ad1} + X'_2 i'_{pd2}) + \\
& + \frac{1}{\omega_b} \left[X_{up} \frac{d}{dt} (i_{pq1}) - X'_{ua} \frac{d}{dt} (i'_{aq1}) + X'_2 \frac{d}{dt} (i'_{pq2}) \right] \quad (5.4.2.3.18)
\end{aligned}$$

$$0 = R'_2 i'_{pd2} - \Delta\omega_{p2} (X_{up} i_{pq1} - X'_{ua} i'_{aq1} + X'_2 i'_{pq2}) +$$

$$+ \frac{1}{\omega_b} \left[X_{up} \frac{d}{dt} (i_{pd1}) - X'_{ua} \frac{d}{dt} (i'_{ad1}) + X'_2 \frac{d}{dt} (i'_{pd2}) \right] \quad (5.4.2.3.19)$$

$$0 = R'_2 i'_{po2} + \frac{1}{\omega_b} X'_{d2} \cdot \frac{d}{dt} (i'_{po2}) \quad (5.4.2.3.20)$$

$$u'_{aq1} = R'_{a1} i'_{aq1} + \Delta\omega_{a1} \cdot X'_{aa1} i'_{ad1} - \Delta\omega_{a1} X'_{ua} i'_{pd2} +$$

$$+ \frac{1}{\omega_b} \left[X'_{aa1} \frac{d}{dt} (i'_{aq1}) - X'_{ua} \frac{d}{dt} (i'_{pq2}) \right] \quad (5.4.2.3.21)$$

$$u'_{ad1} = R'_{a1} i'_{ad1} - \Delta\omega_{a1} \cdot X'_{aa1} i'_{aq1} + \Delta\omega_{a1} X'_{ua} i'_{aq2} +$$

$$+ \frac{1}{\omega_b} \left[X'_{aa1} \frac{d}{dt} (i'_{ad1}) - X'_{ua} \frac{d}{dt} (i'_{pd2}) \right] \quad (5.4.2.3.22)$$

$$u'_{ao1} = R'_{a1} i'_{ao1} + \frac{1}{\omega_b} X'_{da1} \cdot \frac{d}{dt} (i'_{ao1}) \quad (5.4.2.3.23)$$

Onde:

$$X_{pp1} = X_{dp1} + X_{up} \quad (5.4.2.3.24)$$

$$X'_{pp2} = X'_{dp2} + X'_{up} \quad (5.4.2.3.25)$$

$$X'_{aa1} = X'_{da1} + X'_{ua} \quad (5.4.2.3.26)$$

$$X'_{aa2} = X'_{da2} + X'_{ua} \quad (5.4.2.3.27)$$

$$X'_2 = X'_{pp2} + X'_{aa2} \quad (5.4.2.3.28)$$

$$X'_{d2} = X'_{dp2} + X'_{da2} \quad (5.4.2.3.29)$$

$$R'_2 = R'_{p2} + R'_{a2} \quad (5.4.2.3.30)$$

$$\Delta\omega_{a1} = \frac{\omega - \omega_{a1}}{\omega_b} \quad (5.4.2.3.31)$$

$$\Delta\omega_{p2} = \frac{\omega - \omega_{p2}}{\omega_b} \quad (5.4.2.3.32)$$

As equações (5.4.2.3.15) a (5.4.2.3.23) reagrupados em forma matricial é mostrado na equação (5.4.2.3.33).

O conjunto de equações (5.4.2.3.33) descrevem o comportamento da MATBCDA operando como motor ou gerador.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} u_{pq1} \\ u_{pd1} \\ u_{po1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u'_{aq1} \\ u'_{ad1} \\ u'_{ao1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{pl} & \frac{\omega}{\omega_b} X_{pp1} & 0 & 0 & \frac{\omega}{\omega_b} X_p & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega}{\omega_b} X_{pp1} & R_{pl} & 0 & -\frac{\omega}{\omega_b} X_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{pl} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\omega_{p2} X_{up} & 0 & R_{p1} & \Delta\omega_{p2} X'_2 & 0 & -\Delta\omega_{p2} X'_{ua} & 0 \\ -\Delta\omega_{p2} X_{up} & 0 & 0 & -\Delta\omega_{p2} X'_2 & R'_2 & 0 & \Delta\omega_{p2} X'_{ua} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta\omega_{a1} X'_{ua} & 0 & R'_{a1} & \Delta\omega_{a1} X'_{aal} \\ 0 & 0 & 0 & \Delta\omega_{a1} X'_{ua} & 0 & 0 & -\Delta\omega_{a1} X'_{ua} & R'_{a1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{pq1} \\ i_{pd1} \\ i_{po1} \\ i'_{pq2} \\ i'_{po2} \\ i'_{aq1} \\ i'_{ad1} \\ i'_{ao1} \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_b} X_{pp1} & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{up} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{pp1} & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{up} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{dp1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\omega_b} X_{up} & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{\omega_b} X'_{ua} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X'_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{\omega_b} X'_{ua} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X'_{d2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\omega_b} X'_{ua} & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X'_{aal} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\omega_b} X'_{ua} & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X'_{aal} \\ -0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X'_{dal} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} (i_{pq1}) \\ \frac{d}{dt} (i_{pd1}) \\ \frac{d}{dt} (i_{po1}) \\ \frac{d}{dt} (i'_{pq2}) \\ \frac{d}{dt} (i'_{po2}) \\ \frac{d}{dt} (i'_{aq1}) \\ \frac{d}{dt} (i'_{ad1}) \\ \frac{d}{dt} (i'_{ao1}) \end{bmatrix} \\
& \hspace{15em} (5.4.2.3.33)
\end{aligned}$$

5.4.3 Equações dos Torques no Sistema de Referência Arbitrário

Integrando-se as equações dadas por (5.4.2.3.33) obtêm-se as correntes da MP e da MA no sistema de referência arbitrário.

Uma vez conhecidas as correntes estatóricas e rotóricas nos eixos de referência podemos determinar o torque eletromagnético da máquina principal a partir da equação (5.3.1). Substituindo nela as equações de transformação dada por (4.3.3), ou seja:

$$T_{pe} = p_p \cdot \left[[K_1]^T \cdot i_{pqdo1} \right]^T \frac{d}{d\theta_{p2}} \{ [L'_{p12}] \} \cdot [K_{p2}]^T \cdot i_{pqdo2} \quad (5.4.3.1)$$

Desenvolvendo esta equação obtemos o torque eletromagnético da máquina principal em função das correntes:

$$T_{pe} = \frac{3}{2} \cdot p_p \cdot L_{up} (i_{pq1} \cdot i'_{pd2} - i_{pd1} i'_{pq2}) \quad (5.4.3.2)$$

Em função do enlace de fluxo " ψ_p " a equação acima pode ser escrita:

$$T_{pe} = \frac{3}{2} \cdot p_p \left(\frac{1}{\omega_b} \right) (\psi'_{pq2} \cdot i'_{pd2} - \psi'_{pd2} i'_{pq2}) \quad (5.4.3.3)$$

Analogamente a equação do torque eletromagnético da máquina auxiliar pode ser obtida a partir da equação (5.3.4), Substituindo nela a equação de transformação dada por (4.3.3) resulta:

$$T_{ae} = p_a \cdot \left[[K_{a2}]^T \cdot i_{aqdo2} \right]^T \frac{d}{d\theta_{a1}} \{ [L'_{a12}] \} \cdot [K_{a1}]^T \cdot i_{aqdo1} \quad (5.4.3.4)$$

Desenvolvendo a expressão acima, obtemos:

$$T_{ae} = \frac{3}{2} \cdot p_a \cdot L_{ua} (-i'_{aq2} \cdot i'_{ad1} + i'_{ad2} \cdot i'_{aq1}) \quad (5.4.3.5)$$

Em termos de enlace de fluxo por segundo " ψ_a " temos:

$$T_{ae} = \frac{3}{2} \cdot p_a \left(\frac{1}{\omega_b} \right) (-\psi'_{aq1} \cdot i'_{ad1} + \psi'_{ad1} i'_{aq1}) \quad (5.4.3.6)$$

Como a MATBCDA está ligada em cascata "MAIS" os dois torques se somam:

$$T_{ce} = T_{pe} + T_{ae} \quad (5.4.3.7)$$

A equação dinâmica da MATBCDA é dada pela equação (5.3.8), ou seja:

$$T_{ce} = (J_{MATBCDA} + J_{CARGA}) \frac{d\omega_m}{dt} + B\omega_m + T_{CARGA} \quad (5.4.3.8)$$

5.5 EQUAÇÕES NA FORMA DE ESPAÇO DE ESTADO DA MATBCDA

Consideramos variáveis de estado da MATBCDA como sendo as tensões dadas pelas equações (5.4.2.1) a (5.4.2.12) e as correntes de fase correspondentes. Os parâmetros da máquina tais como resistências e reatâncias no sistema de referência arbitrário não dependem da posição relativa do rotor em relação ao estator.

As equações de espaço de estado da máquina principal pode ser obtida a partir da equação (5.4.2.1.46) separando os termos que têm derivadas. Estas equações são mostradas em (5.5.1).

As equações de espaço de estado da máquina auxiliar são obtidas a partir da equação (5.4.2.2.36).

Estas equações são mostradas em (5.5.2).

As equações de espaço de estado da MATBCDA, isto é, das duas máquinas conectadas pelo rotor é obtido a partir da equação (5.4.2.3.33). Para completar o modelo dinâmico devemos considerar as equações que descrevem o comportamento mecânico da MATBCDA.

Chamando o torque da carga " T_{carga} " de " $T_{externo}$ " aplicado ao eixo da máquina a equação (5.4.3.8) pode ser rescrita:

$$T_{externo} = T_{ce} - J_{total} \cdot \frac{d\omega_m}{dt} - B\omega_m \quad (5.5.3)$$

Onde:

$$J_{total} = J_{MATBCDA} + J_{carga} \quad (5.5.4)$$

A velocidade angular mecânica " ω_m " é dado por:

$$\omega_m = \frac{d\theta_m}{dt} \quad (6.5.5)$$

Onde " θ_m " representa o deslocamento angular mecânico do rotor.

Introduzindo as equações (5.5.3) e (5.5.5) em (5.4.2.3.33), obtemos o conjunto de equações mostrado em (5.5.6) que regem o comportamento dinâmico da MATBCDA.

Onde:

$$K_{Tp} = \frac{3}{2} p_p \cdot \frac{X_{up}}{\omega_b} \quad (5.5.7)$$

$$K_{Ta} = \frac{3}{2} p_a \cdot \frac{X'_{ua}}{\omega_b} \quad (5.5.8)$$

$$T_K = -K_{Tp} i_{pd1} - K_{Ta} i'_{ad1} \quad (5.5.9)$$

$$\begin{bmatrix} u_{pq1} \\ u_{pd1} \\ u_{p01} \\ u'_{pq2} \\ u'_{pd2} \\ u'_{p02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{p1} & \frac{\omega}{\omega_b} X_{pp1} & 0 & \frac{\omega}{\omega_b} X_{up} & 0 \\ -\frac{\omega}{\omega_b} X_{pp1} & R_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{p1} & -\frac{\omega}{\omega_b} X_{up} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\omega - \omega_{p2}}{\omega_b}\right) X_{up} & 0 & 0 & \left(\frac{\omega - \omega_{p2}}{\omega_b}\right) X'_{pp2} \\ -\left(\frac{\omega - \omega_{p2}}{\omega_b}\right) X_{up} & 0 & 0 & -\left(\frac{\omega - \omega_{p2}}{\omega_b}\right) X'_{pp2} & R'_{p2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{pq1} \\ i_{pd1} \\ i_{p01} \\ i'_{pq2} \\ i'_{pd2} \\ i'_{p02} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_b} X_{pp1} & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{up} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{pp1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{dp1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\omega_b} X_{up} & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X'_{pp2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{up} & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{pp2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X'_{dp2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} (i_{pq1}) \\ \frac{d}{dt} (i_{pd1}) \\ \frac{d}{dt} (i_{p01}) \\ \frac{d}{dt} (i'_{pq2}) \\ \frac{d}{dt} (i'_{pd2}) \\ \frac{d}{dt} (i'_{p02}) \end{bmatrix} \tag{5.5.1}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} u'_{aq1} \\ u'_{ad1} \\ u'_{ao1} \\ u'_{aq2} \\ u'_{ad2} \\ u'_{ao2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R'_{a1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(\omega - \omega_{a1})}{\omega_b} X'_{aa1} & R'_{a1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R'_{a1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{\omega - \omega_{a2}}{\omega_b}\right) X'_{ua} & 0 & R'_{a2} & 0 & 0 \\ \left(\frac{\omega - \omega_{a2}}{\omega_b}\right) X'_{ua} & 0 & 0 & -\left(\frac{\omega - \omega_{a2}}{\omega_b}\right) X'_{aa2} & R'_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R'_{a2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(\omega - \omega_{a1})}{\omega_b} X'_{ua} \\ 0 \\ 0 \\ \left(\frac{\omega - \omega_{a2}}{\omega_b}\right) X'_{aa2} \\ R'_{a2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i'_{aq1} \\ i'_{ad1} \\ i'_{ao1} \\ i'_{aq2} \\ i'_{ad2} \\ i'_{ao2} \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_b} X'_{aa1} & 0 & 0 & -\frac{1}{\omega_b} X'_{ua} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_b} X'_{aa1} & 0 & 0 & -\frac{1}{\omega_b} X'_{ua} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X'_{da1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\omega_b} X'_{ua} & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X'_{aa2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\omega_b} X'_{ua} & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X'_{aa2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X'_{da2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} (i'_{aq1}) \\ \frac{d}{dt} (i'_{ad1}) \\ \frac{d}{dt} (i'_{ao1}) \\ \frac{d}{dt} (i'_{aq2}) \\ \frac{d}{dt} (i'_{ad2}) \\ \frac{d}{dt} (i'_{ao2}) \end{bmatrix} \\
 & \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad \qquad (5.5.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}
 u_{pq1} \\
 u_{pd1} \\
 u_{pol} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 u'_{aq1} \\
 u'_{ad1} \\
 u'_{ao1} \\
 T_{\text{externo}} \\
 0
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 R_{p1} & \frac{\omega}{\omega_b} X_{pp1} & 0 & 0 & \frac{\omega}{\omega_b} X_{up} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{\omega}{\omega_b} X_{pp1} & R_{p1} & 0 & -\frac{\omega}{\omega_b} X_{up} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \Delta\omega_{p2} X_{up} & 0 & R_{p1} & \Delta\omega_{p2} X'_2 & 0 & 0 & -\Delta\omega_{p2} X'_2 & 0 & -\Delta\omega_{p2} X'_{ua} & 0 \\
 -\Delta\omega_{p2} X_{up} & 0 & 0 & -\Delta\omega_{p2} X'_2 & R'_2 & 0 & R'_2 & 0 & \Delta\omega_{p2} X'_{ua} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta\omega_{al} X'_{ua} & 0 & 0 & 0 & R'_{al} & \Delta\omega_{al} X'_{aal} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \Delta\omega_{al} X'_{ua} & 0 & 0 & 0 & -\Delta\omega_{al} X'_{ua} & R'_{al} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R'_{al} & 0 \\
 K_{Tp} i'_{pd2} & 0 & 0 & T_K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 i'_{pq1} \\
 i'_{pd1} \\
 i'_{pol} \\
 i'_{pq2} \\
 i'_{pd2} \\
 i'_{po2} \\
 i'_{aq1} \\
 i'_{ad1} \\
 i'_{ao1} \\
 \omega_m \\
 \theta_m
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 \frac{1}{\omega_b} X_{pp1} & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{up} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}(j_{pq1}) \\
 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{pp1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{up} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}(j_{pd1}) \\
 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{dp1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}(j_{po1}) \\
 \frac{1}{\omega_b} X_{up} & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}(j'_{pq2}) \\
 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{up} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}(j'_{pd2}) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{d2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}(j'_{po2}) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{aa1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}(j'_{aq1}) \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\omega_b} X_{ua} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}(j'_{ad1}) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{aa1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}(j'_{ao1}) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}(\omega_m) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}(\theta_m) \\
 \frac{1}{\omega_b} X_{pp1} & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_b} X_{up} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
 \end{array}$$

+

(5.5.6)

CAPÍTULO 6 - ANÁLISE DA DINÂMICA DA MATBCDA

6.1 INTRODUÇÃO

No **Capítulo 5** chegamos ao conjunto de equações mostradas nas equações 5.5.6 que representam o modelo dinâmico da MATBCDA. A solução do conjunto de equações diferenciais é feito através do método de Runge KUTTA de Quarta ordem. Para isto foi desenvolvido um programa de computador em FORTRAN 90 que permite solucionar estas equações para diversas condições dinâmicas da máquina.

A análise dinâmica abrange as seguintes condições:

1. REGIME DINÂMICO DE PARTIDA COMO MOTOR

Nesta condição analisaremos a partida da MATBCDA como motor com as seguintes condições impostas ao estator da máquina auxiliar:

- Estator em curto-circuito
- Estator ligado a uma resistência externa
- Tensão imposta ao estator através de um conversor.

2. FUNCIONAMENTO EM REGIME COMO MOTOR OU COMO GERADOR

Nesta condição analisaremos o comportamento da MATBCDA funcionando em regime como motor ou como gerador, simulando:

- Variação da resistência conectada ao estator da Máquina Auxiliar;
- Variação do torque externo;
- Variação da amplitude da tensão imposta.

Tanto para a análise dinâmica quanto para a análise em regime que será feito no Capítulo 7 foi construído uma máquina protótipo com as seguintes características:

Máquina Principal

Modelo -----	FAF 315 S/M – OP 72151
Potência -----	100 kW
Tensão do Estator -----	220 / 380 / 440 Volts
Número de Pólos -----	6
Frequência -----	60 Hz
Regime -----	S1

<i>Fator de Serviço</i>	-----	1,0
<i>Grau de Proteção</i>	-----	IP54
<i>Forma Construtiva</i>	-----	B3D
<i>Classe de Isolamento</i>	-----	F
<i>Elevação de Temperatura</i>	-----	100 °C
<i>Tensão no Rotor</i>	-----	345 Volts
<i>Corrente do Rotor</i>	-----	174A

Dados do Circuito Equivalente a 140°C referidas ao Estator

(Mostrado na Figura 7.2.1.2)

R_{p1}	=	0,068 Ω
X_{p1}	=	0,40 Ω
R_{p2}	=	0,055 Ω
X_{p2}	=	0,38 Ω
R_{pfe1}	=	316,632 Ω
R_{pfe2}	=	501,76 Ω
X_{pm}	=	11,453 Ω
K_{pe}	=	2,142
J_p	=	10 kgm^2

Máquina Auxiliar

<i>Modelo</i>	-----	FAF 315 S/M – OP 72152
<i>Potência</i>	-----	20 kW
<i>Tensão do Estator</i>	-----	440 Volts
<i>Número de Pólos</i>	-----	6
<i>Frequência</i>	-----	60 Hz
<i>Regime</i>	-----	S1
<i>Fator de Serviço</i>	-----	1,0
<i>Grau de Proteção</i>	-----	IP54
<i>Forma Construtiva</i>	-----	B3D
<i>Classe de Isolamento</i>	-----	F
<i>Elevação de Temperatura</i>	-----	100 °C
<i>Tensão no Rotor</i>	-----	347 Volts
<i>Corrente do Rotor</i>	-----	35 A

Dados do Circuito Equivalente a 140°C referidas ao Estator, mostrado na Figura 7.2.2.2).

$$R_{a1} = 0,107 \Omega$$

$$X_{a1} = 0,500 \Omega$$

$$R_{a2} = 0,062 \Omega$$

$$X_{a2} = 0,470 \Omega$$

$$R_{af1} = 186,245 \Omega$$

$$R_{af2} = 645,497 \Omega$$

$$X_{am} = 9,101 \Omega$$

$$K_{ae} = 1,210$$

$$J_a = 5 \text{ kgm}^2$$

Dados do Circuito Equivalente da MATBCDA a 140°C referidos ao estator da Máquina Principal, mostrado na Figura 7.2.3.2.

$$R_{pc1} = 0,068 \Omega$$

$$R_{ac1} = 0,3347 \Omega$$

$$X_{pc1} = 0,400 \Omega$$

$$X_{ac1} = 1,5640 \Omega$$

$$R_{pc2} = 0,055 \Omega$$

$$R_{ac2} = 0,1939 \Omega$$

$$X_{pc2} = 0,380 \Omega$$

$$X_{ac2} = 1,4701 \Omega$$

$$R_{pcfe1} = 316,63 \Omega$$

$$R_{acfe1} = 582,561 \Omega$$

$$R_{pcfe2} = 501,76 \Omega$$

$$R_{acfe2} = 2019,06 \Omega$$

$$X_{pcm} = 11,543 \Omega$$

$$X_{acm} = 28,4673 \Omega$$

$$K_{pce} = 1,7686$$

$$J_{MATBCDA} = 15 \text{ Kg}$$

$$\text{Resistor Externo } R_{cad} = (K_{pce})^2 R_{ac1}$$

Onde R_{cad} é a resistência externa em (Ω) ligada ao estator da Máquina Auxiliar.

Dados dos Termos da Equação 5.5.6

$$R_{p1} = R_{pc1} = 0,068 \Omega$$

$$R'_2 = R'_{p2} + R'_{a2} = R_{pc2} + R_{ac2} = 0,2489 \Omega$$

$$R'_{a1} = R_{ac1} + R_{cad} = 0,3347 \Omega$$

$$X_{pp1} = X_{pc1} + X_{up} = X_{pc1} + \frac{3}{2} X_{pcm} = 17,7145 \Omega$$

$$X'_{up} = \frac{3}{2} X_{pcm} = 17,3145 \Omega$$

$$X'_{ua} = \frac{3}{2} X_{acm} = 42,701 \Omega$$

$$X'_{pp2} = X'_{dp2} + X'_{up} = X_{pc2} + \frac{3}{2} X_{pcm} = 17,6945 \Omega$$

$$X'_{aa2} = X'_{da2} + X'_{ua} = X_{ac2} + \frac{3}{2} X_{acm} = 44,171 \Omega$$

$$X'_2 = X'_{pp2} + X'_{aa2} = 61,8655 \Omega$$

$$X'_{aa1} = X'_{da1} + X'_{ua} = X_{ac1} + \frac{3}{2} X_{acm} = 44,265 \Omega$$

$$X'_{dp1} = X_{pc1} = 0,400 \Omega$$

$$X'_{da1} = X_{ac1} = 1,5640 \Omega$$

$$J_{TOTAL} = J_{MATBCDA} + J_{CARGA}$$

$B =$ Coeficiente de viscosidade dado em (Nms / rad)

Os parâmetros das máquinas, tais como, reatâncias e resistências foram determinados por ensaio conforme relatório de ensaio do protótipo MATBCDA mostrado no Apêndice A.

Nas simulações dinâmicas iremos sempre manter o estator da máquina principal conectado a rede, isto é, a tensão é mantida constante, e equilibrada conforme mostra a **Figura 6.1.1**, abaixo.

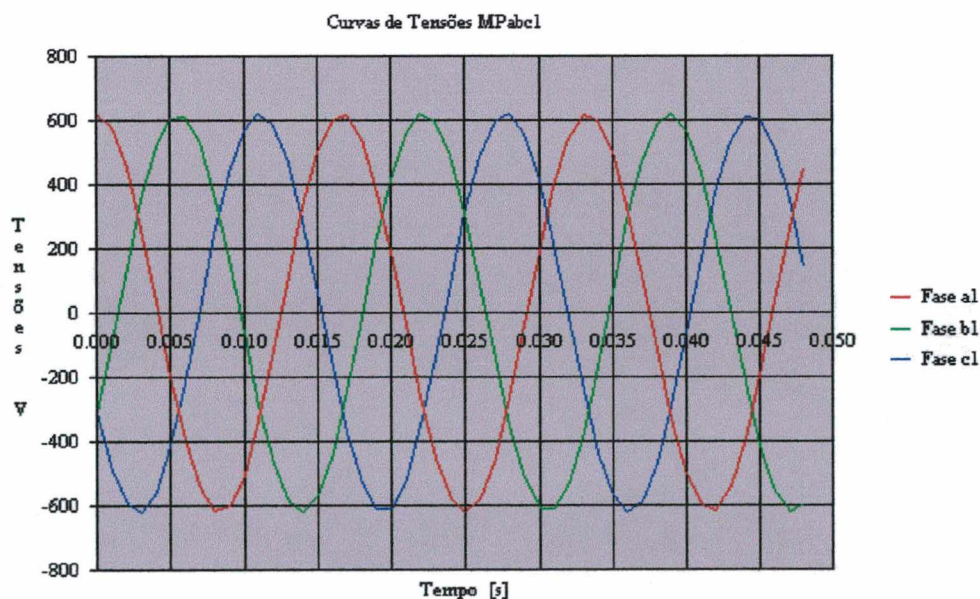


Figura 6.1.1 - Tensão Trifásica Aplicada ao Estator da MP

A onda de tensão da fase "a1" tem constante de fase zero, tendo amplitude máxima no instante zero, ou seja:

$$\theta_e(0) = 0 \quad (6.1.1)$$

A frequência da tensão também é mantida constante e igual a 60 Hz.

Consideramos que os eixos de referência "qd" estejam fixos no rotor e sua posição inicial, coincida com o eixo " θ_1 ", ou seja:

$$\theta(0) = 0 \quad (6.1.2)$$

Consideramos também que a posição inicial dos eixos dos enrolamentos coincidam com o eixo " θ_1 ", ou seja:

$$\theta_{p1}(0) = 0 \quad (6.1.3)$$

$$\theta_{p2}(0) = 0 \quad (6.1.4)$$

$$\theta_{a2}(0) = 0 \quad (6.1.5)$$

$$\theta_{a1}(0) = 0 \quad (6.1.6)$$

Para podermos entender melhor o comportamento dinâmico da MATBCDA recordaremos o comportamento da frequência no estator da máquina auxiliar.

Como vimos no parágrafo (3.3.1) a frequência no estator da MA é dado pela equação (3.3.1.4), ou seja:

$$f_{a1}^+ = f_{p1} - n(p_p + p_a) \quad (6.1.7)$$

No caso da nossa análise temos:

$$f_{p1} = f_{rede} = 60 \text{ Hz}$$

$$p_p = 3$$

$$p_a = 3$$

Conseqüentemente o comportamento da frequência da corrente no estator da MA em função da rotação pode ser mostrada no gráfico da **Figura 6.1.2**, abaixo.

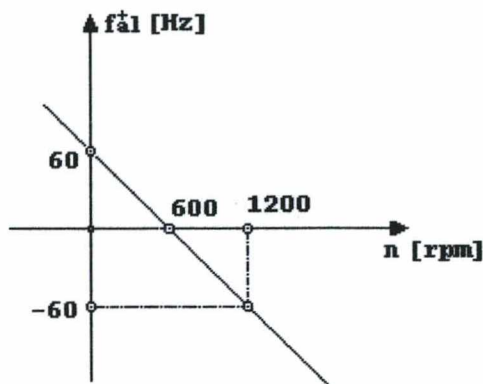


Figura 6.1.2 - Frequência da Corrente Induzida no estator da Máquina Auxiliar na Ligação Cascata "MAIS" da MATBCDA

Observe que em 600 rpm onde temos a rotação síncrona da cascata dada pela equação (3.3.1.5) a frequência da corrente induzida no estator da máquina auxiliar é nula (zero). A partir desta rotação a frequência passa a ser negativa.

A frequência da corrente no rotor da máquina principal pode ser calculado por:

$$f_{p2} = s_p \cdot f_{rede} \quad (6.1.8)$$

Como o escorregamento da MP " s_p " é dado pela equação (3.4.1.1), temos:

$$f_{p2} = \left(1 - \frac{n}{n_{sp}} \right) \cdot f_{rede} \quad (6.1.9)$$

No nosso caso em análise, temos:

$$n_{sp} = \frac{f_{rede}}{p_p} = \frac{60}{3} = 20 \text{ rps ou } 1200 \text{ rpm}$$

Cujo comportamento em função da rotação pode ser mostrado no gráfico da **Figura 6.1.3**, abaixo:

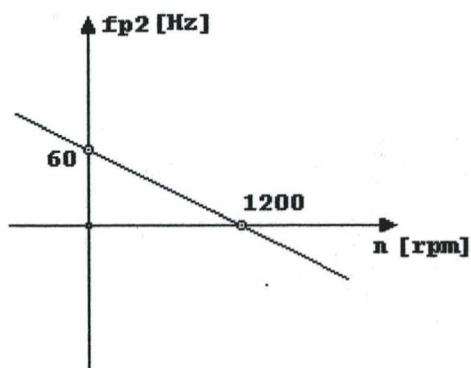


Figura 6.1.3 - Corrente Induzida no Rotor da Máquina Principal

Como os rotores da máquina principal e auxiliar estão ligados em série “CASCATA” a frequência da corrente no rotor da máquina auxiliar é igual a da máquina principal, ou seja:

$$f_{a2} = f_{p2} = \left(1 - \frac{n}{n_{sp}}\right) f_{rede} \quad (6.1.10)$$

6.2 REGIME DINÂMICO NA PARTIDA COMO MOTOR

6.2.1 Estator da Máquina Auxiliar em Curto-circuito

Nesta condição simulamos a partida da máquina mencionada no parágrafo anterior (protótipo) como motor, mas com o estator da máquina auxiliar ligado em curto-circuito.

A **Figura 6.2.1.1** abaixo mostra esquematicamente esta situação.



Figura 6.2.1.1 - Partida da MATBCDA com o Estator da MA em Curto-Circuito

Na partida com o estator da MA em curto-circuito o torque de partida é muito baixo e consequentemente a capacidade de acelerar a carga é bastante reduzida.

Devido a isto setamos a partida como motor nas seguintes condições:

- Torque Externo = 0
- $J_{MATBCDA} (J_p + J_a) = 15 \text{ kgm}^2$
- $J_{CARGA} = 10 \text{ kgm}^2$
- $B_{VISCOSIDADE} = 0,01 \text{ Nms/rad}$
- Resistência Externa $R_{acad} = 0$
- Amplitude da Tensão Imposta = 0
- Constante de Fase da Tensão Imposta = 0
- Intervalo de Integração = 0 a 5 Segundos

Os gráficos das Figuras 6.2.1.2 a 6.2.1.7 mostram a dinâmica da MATBCDA durante a partida com o estator da MA em curto-circuito em variáveis da máquina. **Ressaltamos que todas as variáveis estão referidas ao estator da MP.**

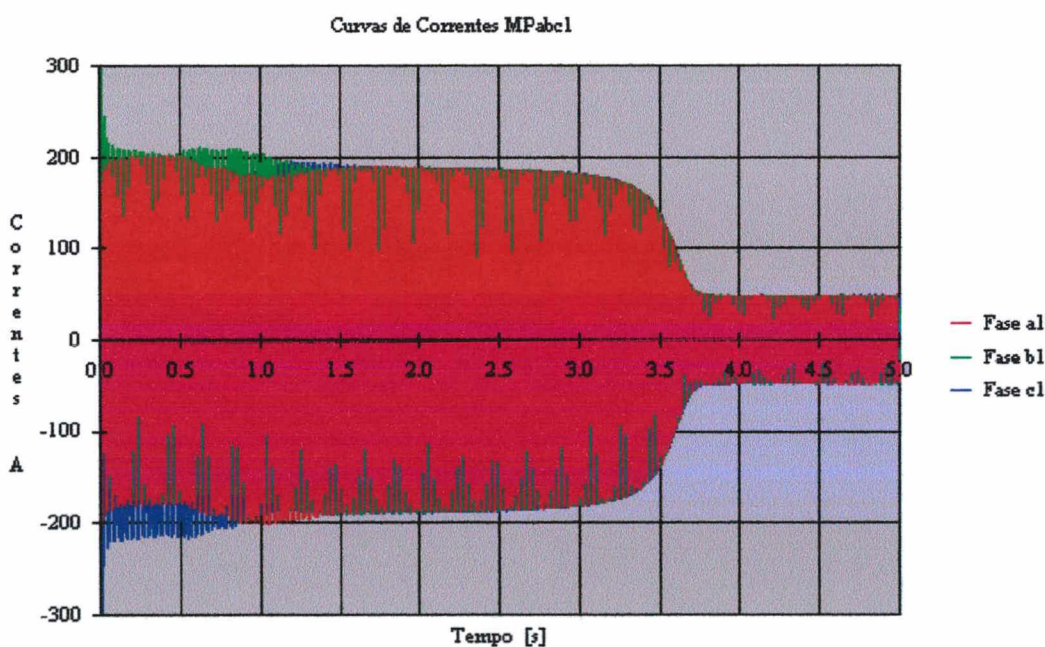


Figura 6.2.1.2 - Correntes do Estator da Máquina Principal [ipabc1]

A frequência das três correntes " i_{pa1} ", " i_{pb1} " e " i_{pc1} " tem frequência 60 Hz.

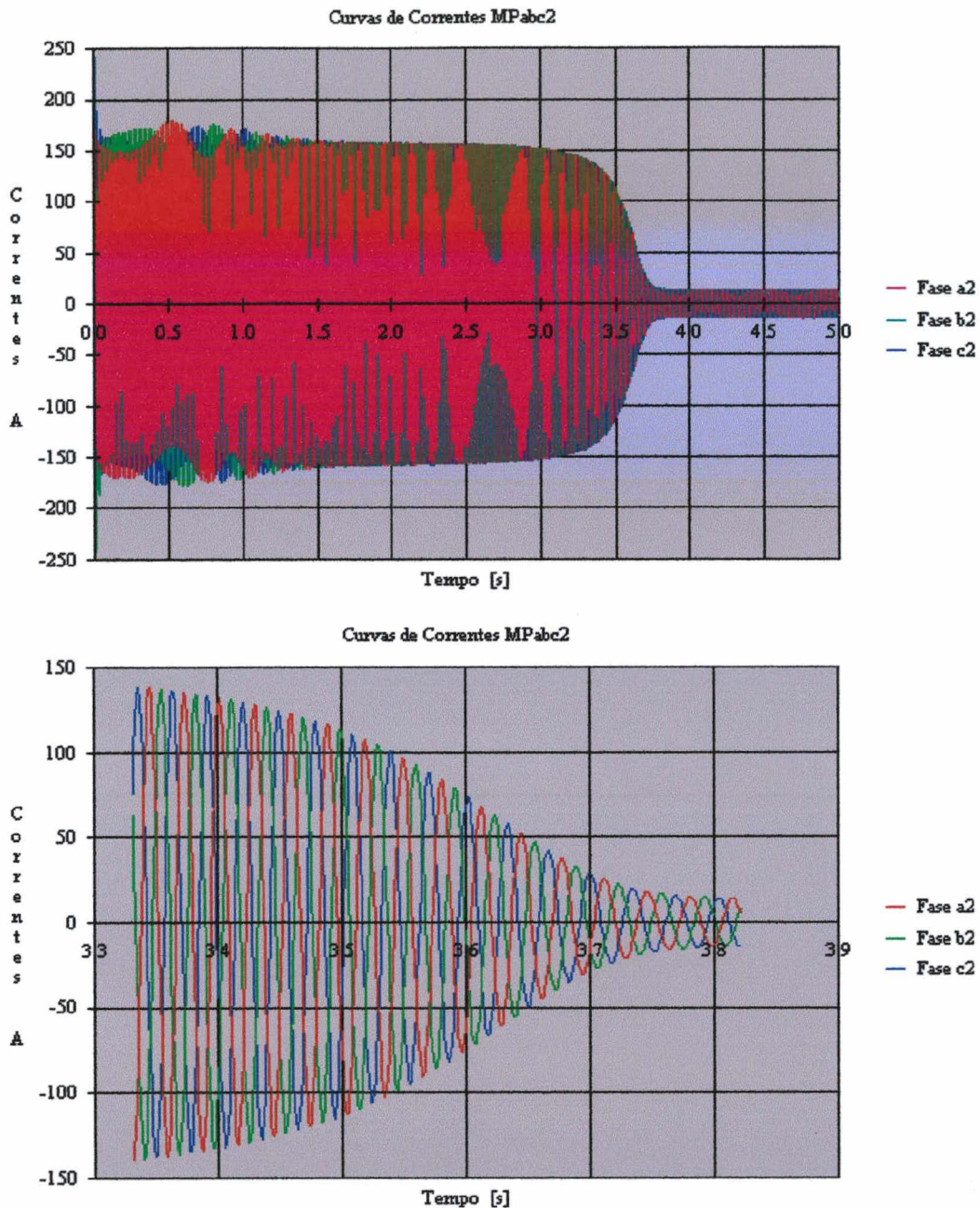


Figura 6.2.1.3 - Correntes no Rotor da Máquina Principal e Máquina Auxiliar [ipabc2=iaabc2]

Foi feito um Zoom entre 3,3s e 3,9s para mostrar que a frequência das correntes rotóricas é aproximadamente 30 Hz. Este fato ocorre porque o sincronismo da cascata ocorre em 600 rpm que corresponde a metade da rotação síncrona da MP.

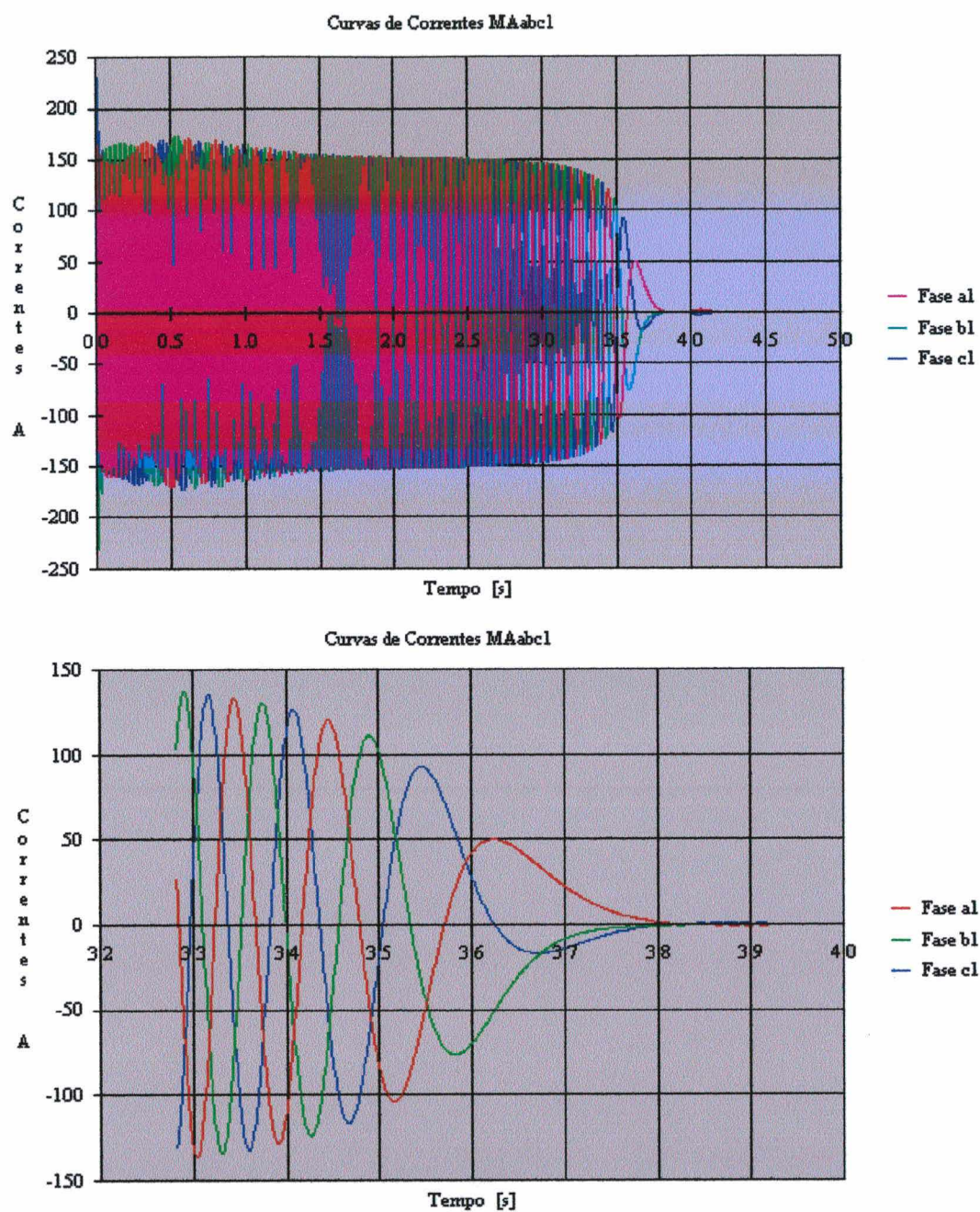


Figura 6.2.1.4 - Correntes no Estator da Máquina Auxiliar [iaabc1]

O Zoom mostra que as correntes " i'_{aa1} ", " i'_{ab1} " e " i'_{ac1} " no estator da máquina auxiliar no sincronismo da cascata apresentam frequência zero.

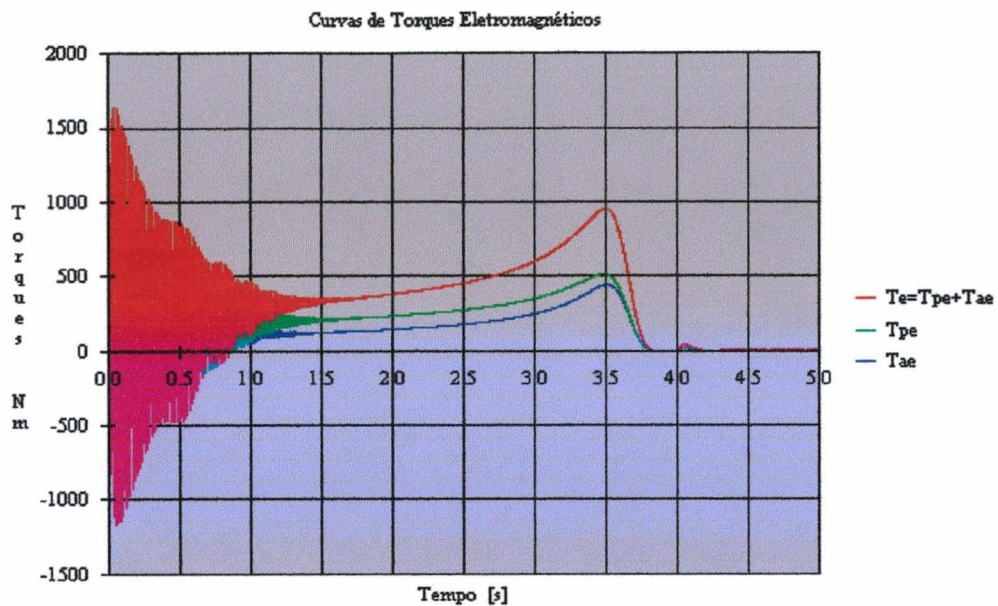


Figura 6.2.1.5 - Torques Eletromagnéticos em Função do Tempo

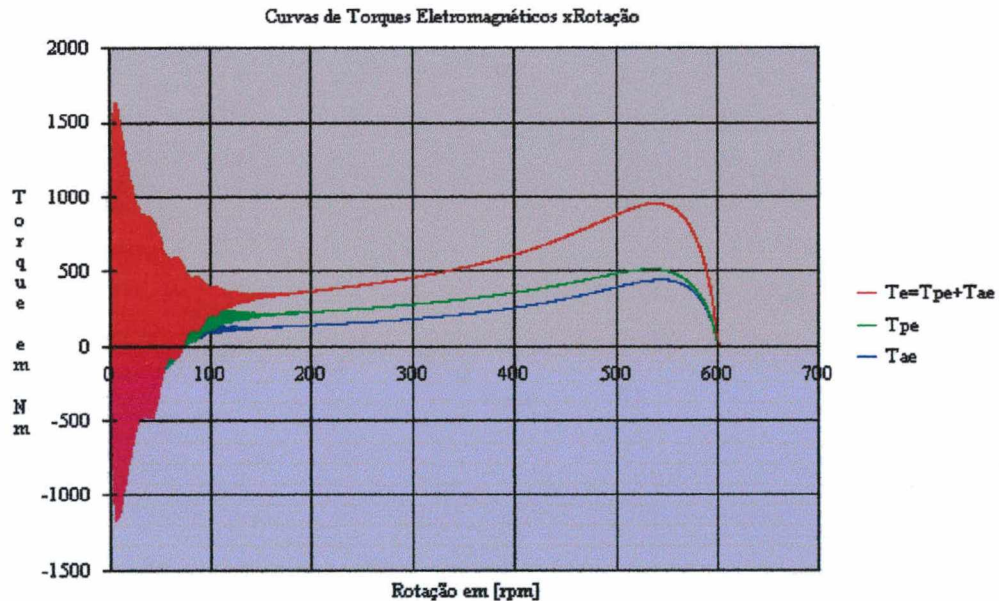


Figura 6.2.1.6 - Torque em função da Rotação

O gráfico de torque em função da rotação mostra que o sincronismo ocorre em 600 rpm.

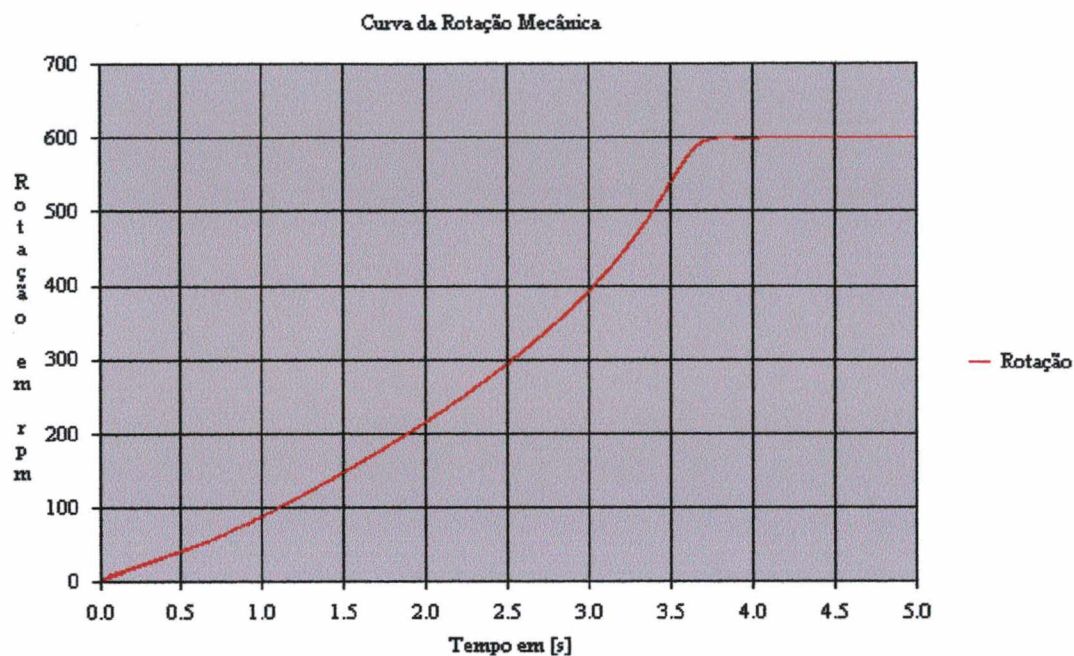


Figura 6.2.1.7 - Rotação em Função do Tempo

Observe que apesar das duas máquinas, principal e auxiliar serem de 6 pólos a rotação síncrona da cascata ocorre em 600 rpm. A rotação síncrona da cascata é dada pela equação (5.4.1.6).

Nos gráficos mostrados nas Figuras 6.2.1.8 a 6.2.1.11 é mostrado as tensões e correntes da máquina nos eixos de referência "qd" que consideramos fixo no rotor, isto é, velocidade dos eixos " ω_{eixos} " é igual:

$$\omega_{eixos} = P_p \cdot \omega_m \quad (6.2.1.1)$$

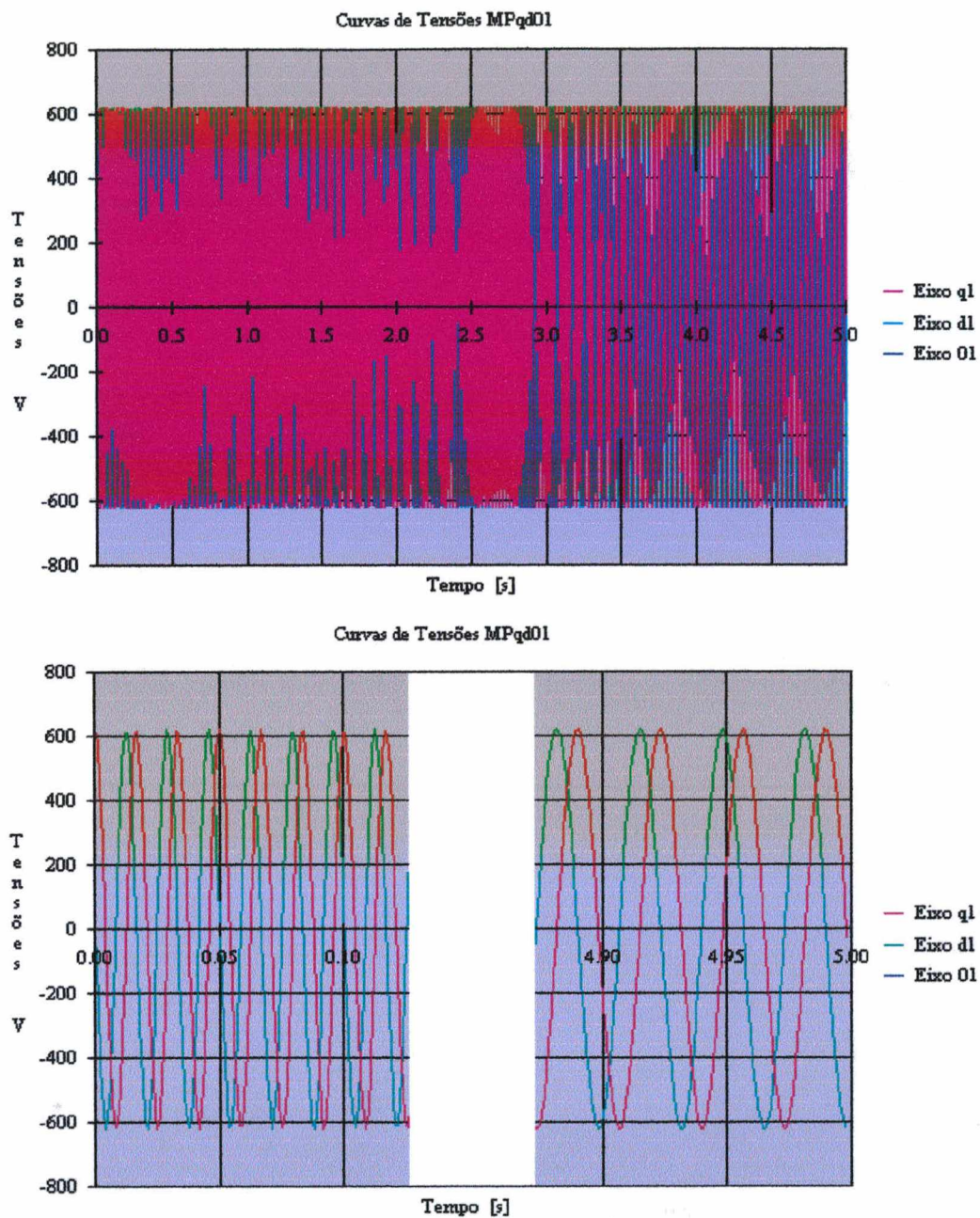


Figura 6.2.1.8 - Tensões do Estator da MP nos Eixos de Referência Girando junto com o Rotor [upqd01]

Foi feito um Zoom para mostrar que as tensões no estator da MP referenciada aos eixos de referência "qd" apresentam frequência na partida de 60 Hz. No sincronismo a frequência cai para 30 Hz. Este fato ocorre porque os eixos estão fixos no rotor, isto é, girando junto com o rotor.

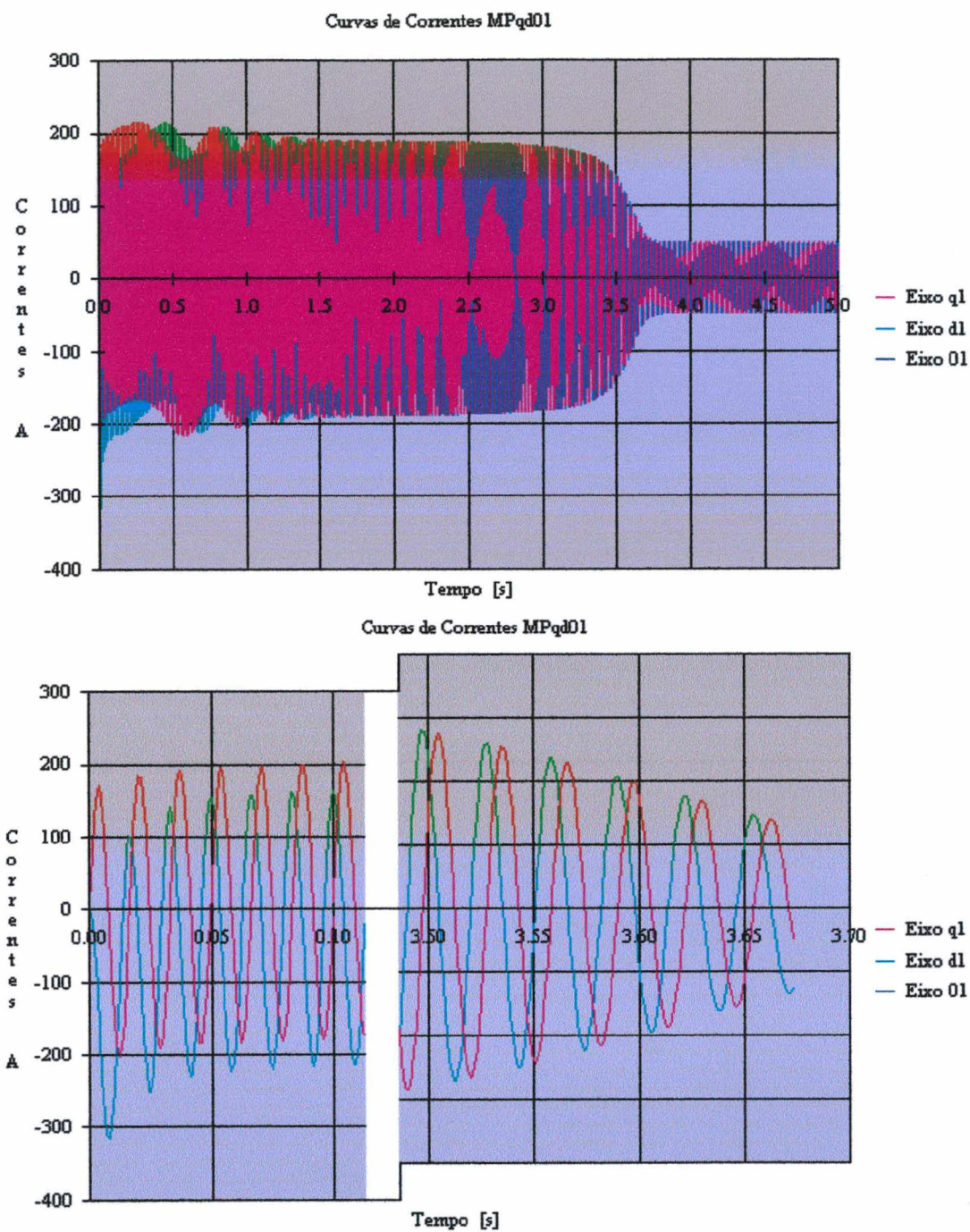


Figura 6.2.1.9 - Correntes do Estator da MP nos Eixos de Referência Girando junto com o Rotor [ipqd01]

As correntes tem o mesmo comportamento da tensão.

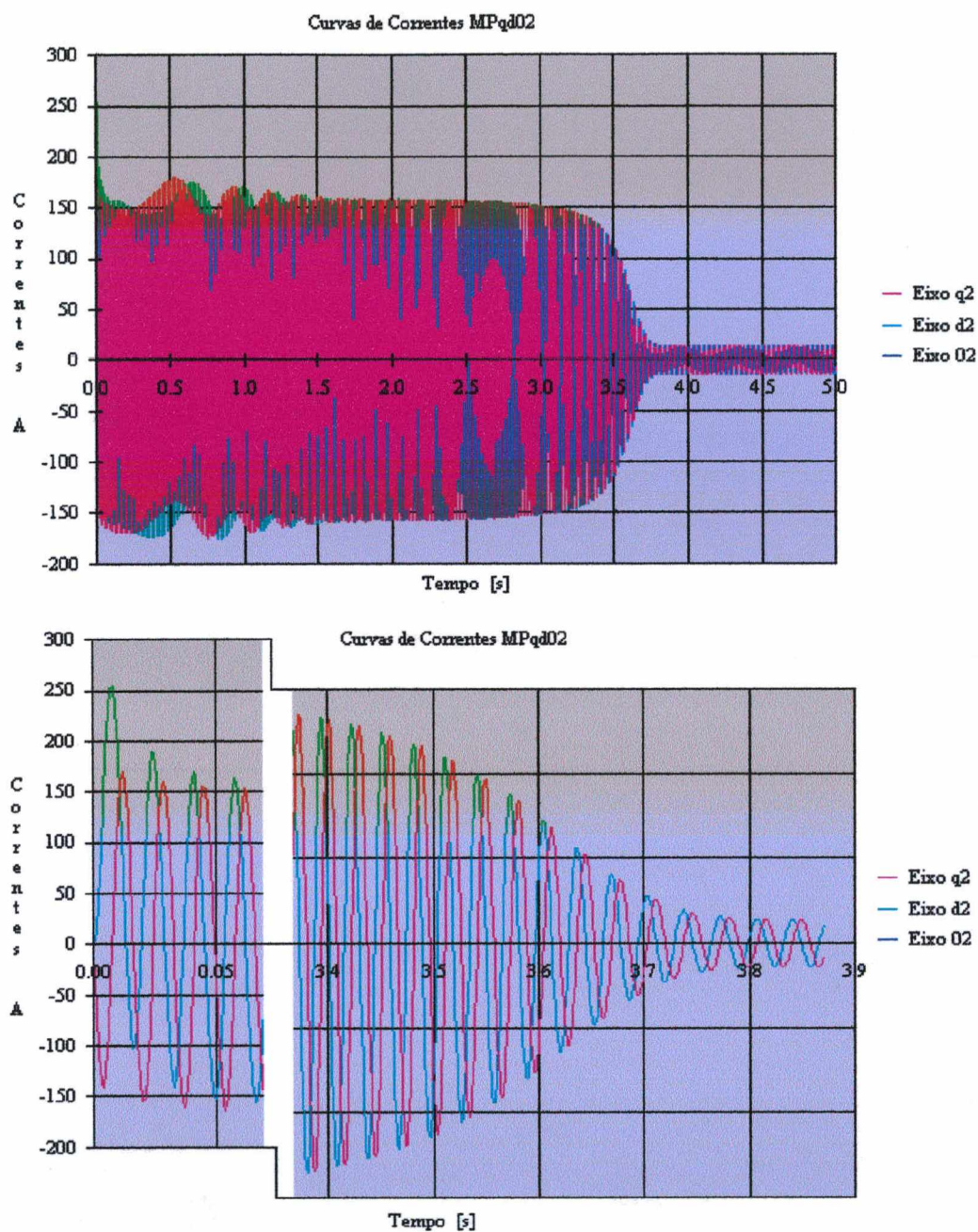


Figura 6.2.1.10 - Correntes do Estator da MP nos Eixos de Referência Girando junto com o Rotor [ipqd02 = iagd02]

As correntes no rotor também tem na partida frequência 60 Hz e no sincronismo 30 Hz. Aqui temos as correntes " i'_{pqd02} " e as correntes " i'_{pabc2} " iguais em frequência e amplitude. Ver Figura 6.2.1.3 com 6.2.1.10. Este fato ocorre porque os eixos " qd " estão fixos no rotor.

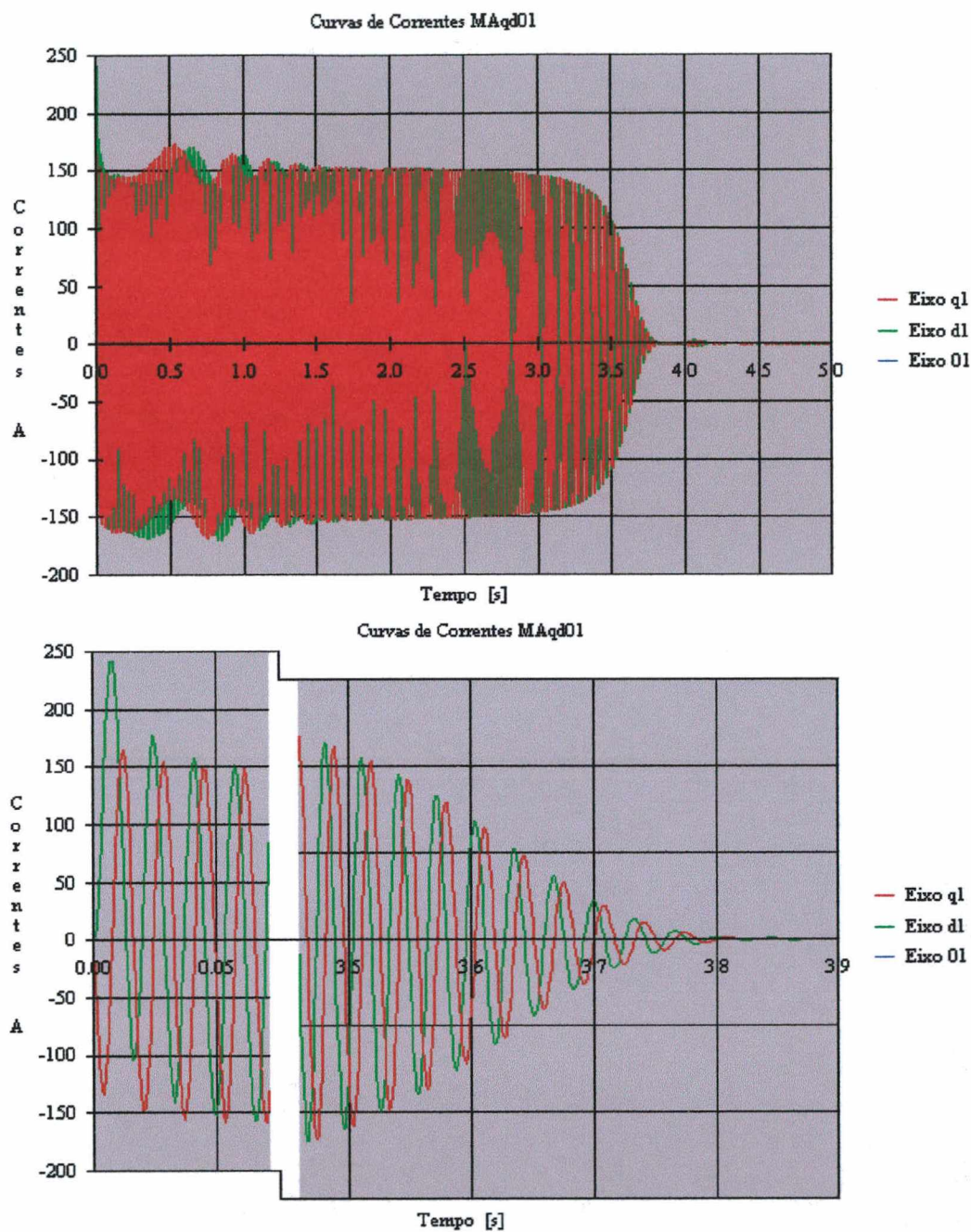


Figura 6.2.1.11 - Correntes do Estator da MA nos Eixos de Referência Girando Junto com o Rotor [iaqd01]

Percebe-se claramente que as correntes no estator da MA " i'_{aqd01} " apresentam frequência zero no sincronismo da cascata.

Na partida a frequência das variáveis nos eixos "qd" é igual ao da rede. Na rotação síncrona, isto é após a partida, a frequência das variáveis nos eixos "qd" é a metade, ou seja, 30 Hz. Isto ocorre devido ao fato dos eixos estarem fixos no rotor e este gira no sincronismo da cascata que corresponde a 600 rpm.

Para investigar o comportamento dinâmico da MATBCDA em rotações acima da rotação síncrona da cascata podemos aplicar ao eixo da mesma um torque negativo. Este torque negativo pode ser obtido através de uma máquina externa, por exemplo, o dinamômetro, que acelerará a MATBCDA até a rotação desejada.

Para esta investigação setamos as seguintes condições.

- Torque Externo = Parabólico conforme **Figura 6.2.2.2**
- Torque Básico = - 2000 Nm (NEGATIVO)
- $J_{MATBCDA} (J_p + J_a) = 15 \text{ kgm}^2$
- $J_{CARGA} = 10 \text{ kgm}^2$
- $B_{VISCOSIDADE} = 0,01 \text{ Mms/rad}$
- Resistência Externa $R_{acad} = 0$
- Amplitude da Tensão Imposta = 0
- Constante de Fase da Tensão Imposta = 0
- Intervalo de Integração = 0 a 4 Segundos

Os gráficos mostrados nas **Figuras 6.2.1.12 a 6.2.1.17** mostram o comportamento da máquina nestas condições.

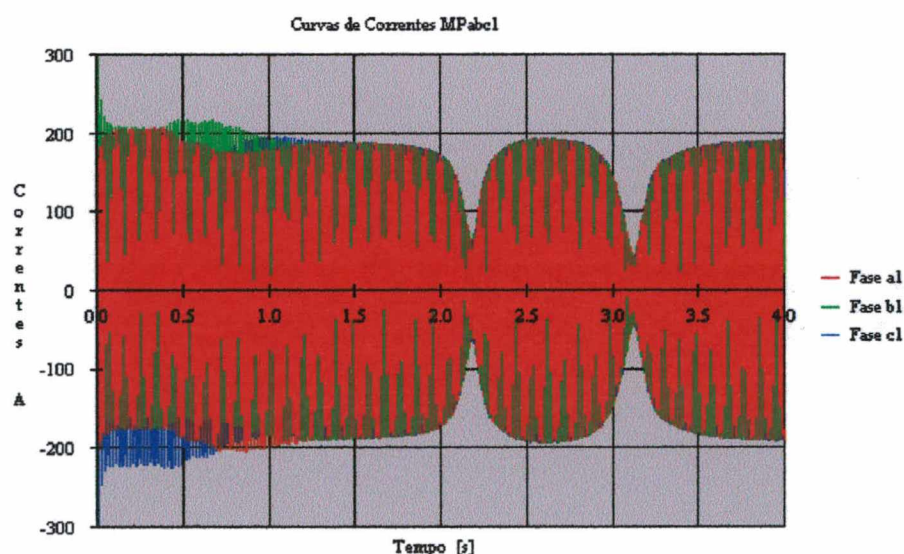


Figura 6.2.1.12 - Correntes do Estator da Máquina Principal [ipabc1]

As correntes " i_{pabc1} " mantém a frequência em 60 Hz, porém suas amplitudes variam de acordo com a rotação. A primeira celer ocorre no sincronismo da cascata e a Segunda no sincronismo da MP.

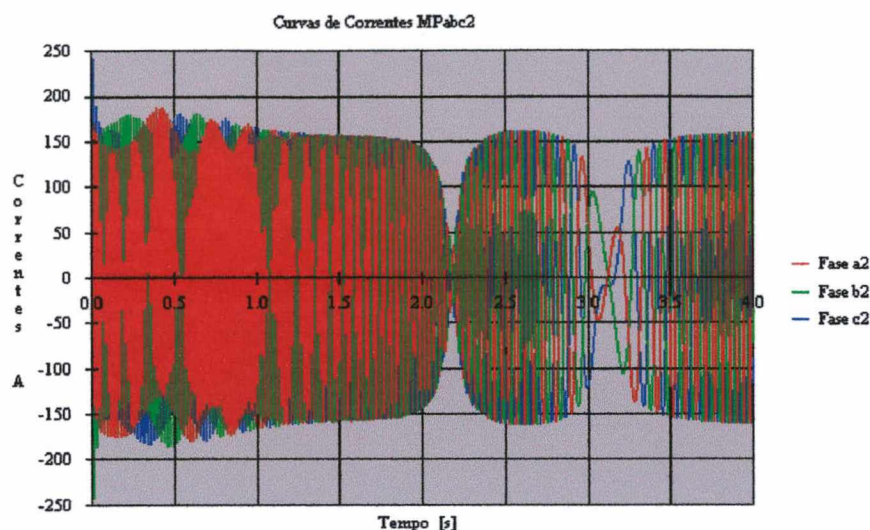


Figura 6.2.1.13 - Correntes no Rotor da Máquina Principal e Máquina Auxiliar [$i_{pabc2}=i_{aabc2}$]

Observe que as correntes " i'_{pabc2} " e " i'_{aabc2} " apresentam frequências e amplitudes variáveis. No sincronismo da cascata a frequência é 30 Hz e no sincronismo da MP a frequência é zero.

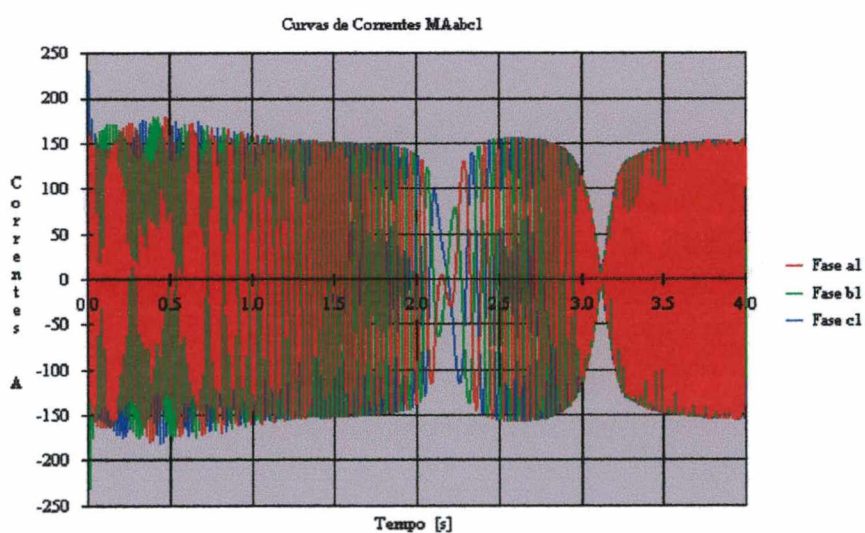


Figura 6.2.1.14 - Correntes no Estator da Máquina Auxiliar [i_{aabc1}]

As correntes " i'_{abc1} " no estator da máquina auxiliar tem comportamento contrário.

A frequência e a amplitude variam porém a frequência é zero no sincronismo da cascata e 60 Hz no sincronismo da MP.

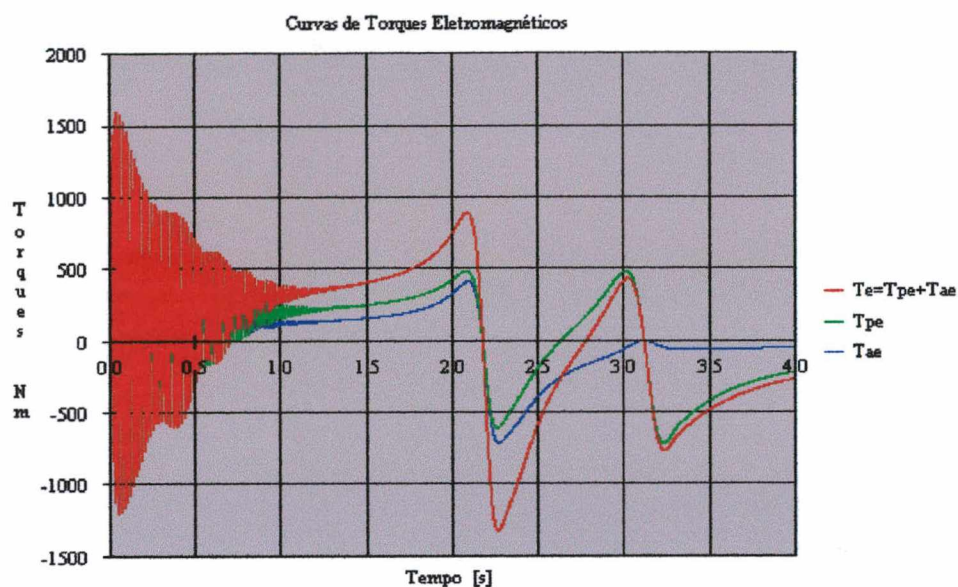


Figura 6.2.1.15 - Torques Eletromagnéticos em Função do Tempo

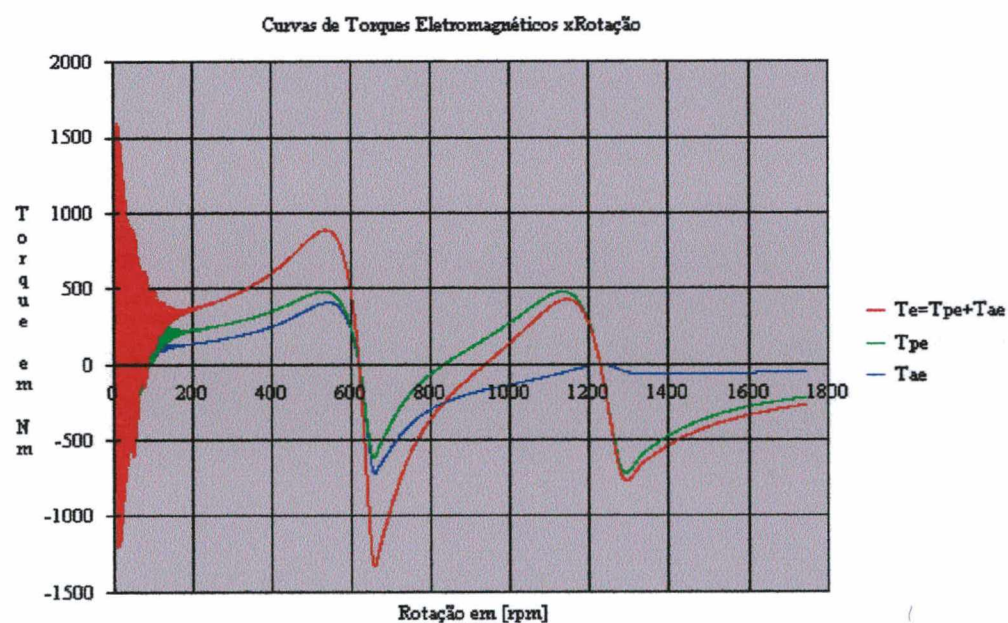


Figura 6.2.1.16 - Torques Eletromagnéticos em Função da Rotação

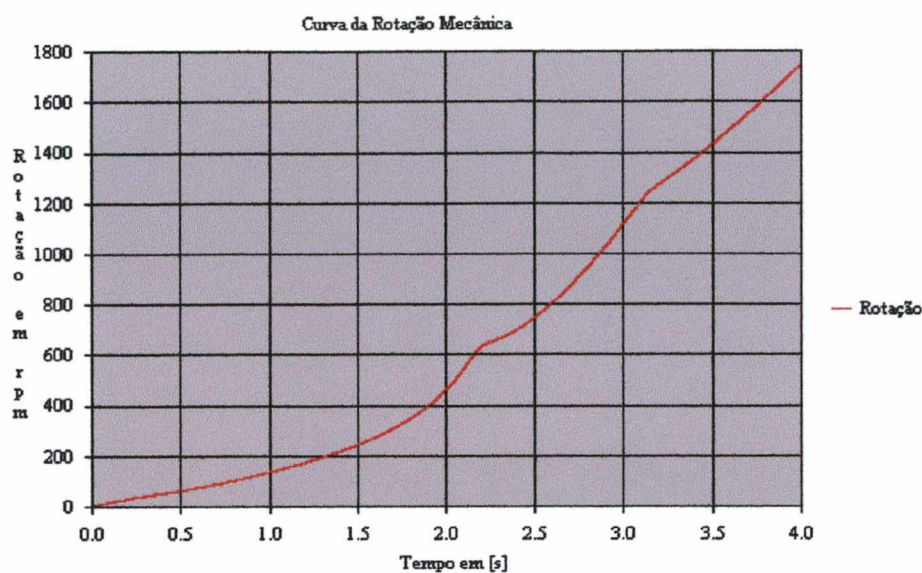


Figura 6.2.1.17 - Rotação Mecânica em Função do Tempo

Analisando as Figuras 6.2.1.15 - 6.2.1.16 e 6.2.1.17, observa-se claramente que a MATBCDA se comporta como MOTOR ou GERADOR dependendo da faixa de rotação. Até 600 rpm trabalha como motor. Entre 600 rpm e 1200 rpm ela muda de gerador para motor. Acima de 1200 rpm ela tem comportamento de gerador, porém a contribuição da MA é desprezível.

6.2.2 Estator da Máquina Auxiliar Ligada a uma Resistência Externa

Nesta simulação iremos considerar a partida da MATBCDA (protótipo) com uma resistência externa ligada ao estator da máquina auxiliar.

A Figura 6.2.2.1 abaixo ilustra esta condição:



Figura 6.2.2.1 - Partida da MATBCDA com Uma Resistência Externa Ligada ao Estator da Máquina Auxiliar

Quando conectamos uma resistência externa "Racad" ao estator da máquina auxiliar o torque de partida aumenta, isto é, a capacidade de aceleração aumenta.

Setamos as seguintes condições:

- Torque Externo = Parabólico. (Ver Figura 6.2.2.2)
- Torque Básico = 300 Nm
- $J_{MATBCDA} (J_p + J_a) = 15,0 \text{ kgm}^2$
- $J_{CARGA} = 10 \text{ kgm}^2$
- $B_{VISCOSIDADE} = 0,01 \text{ Mms/rad}$
- Resistência Externa Racad = 3 x Ra1
- Amplitude da Tensão Imposta = 0
- Constante de Fase da Tensão Imposta = 0
- Intervalo de Integração = 0 a 4 Segundos

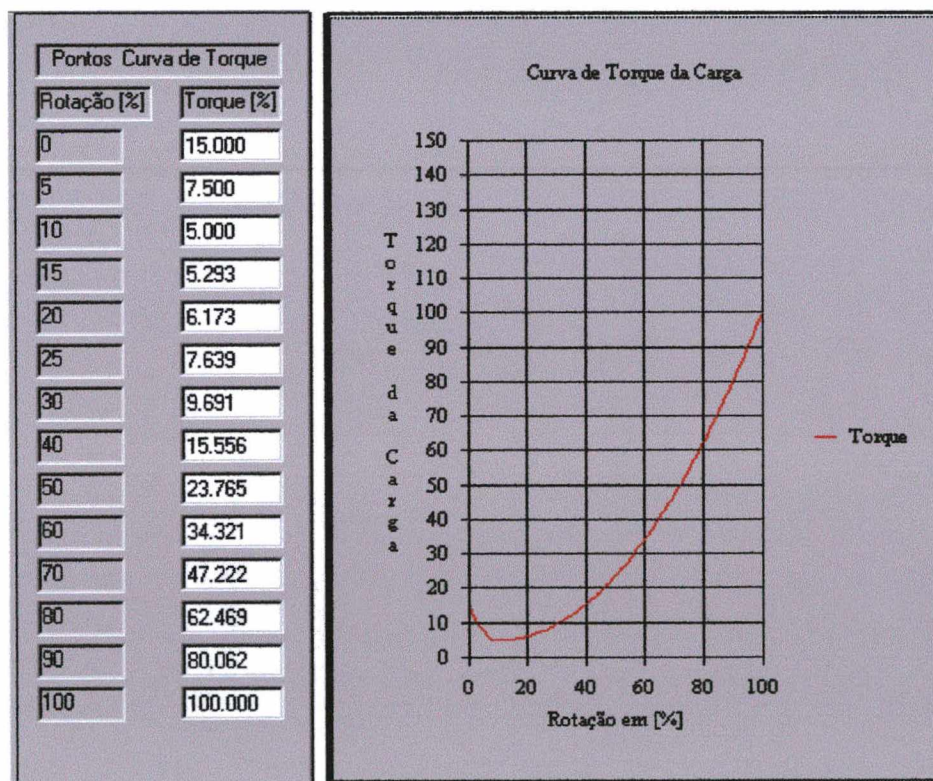


Figura 6.2.2.2 - Curva do Torque Externo Aplicado ao Eixo da MATBCDA

Os gráficos mostrados nas Figuras 6.2.2.3 a 6.2.2.7 mostram a dinâmica da partida com resistência externa ligada ao estator da MA.

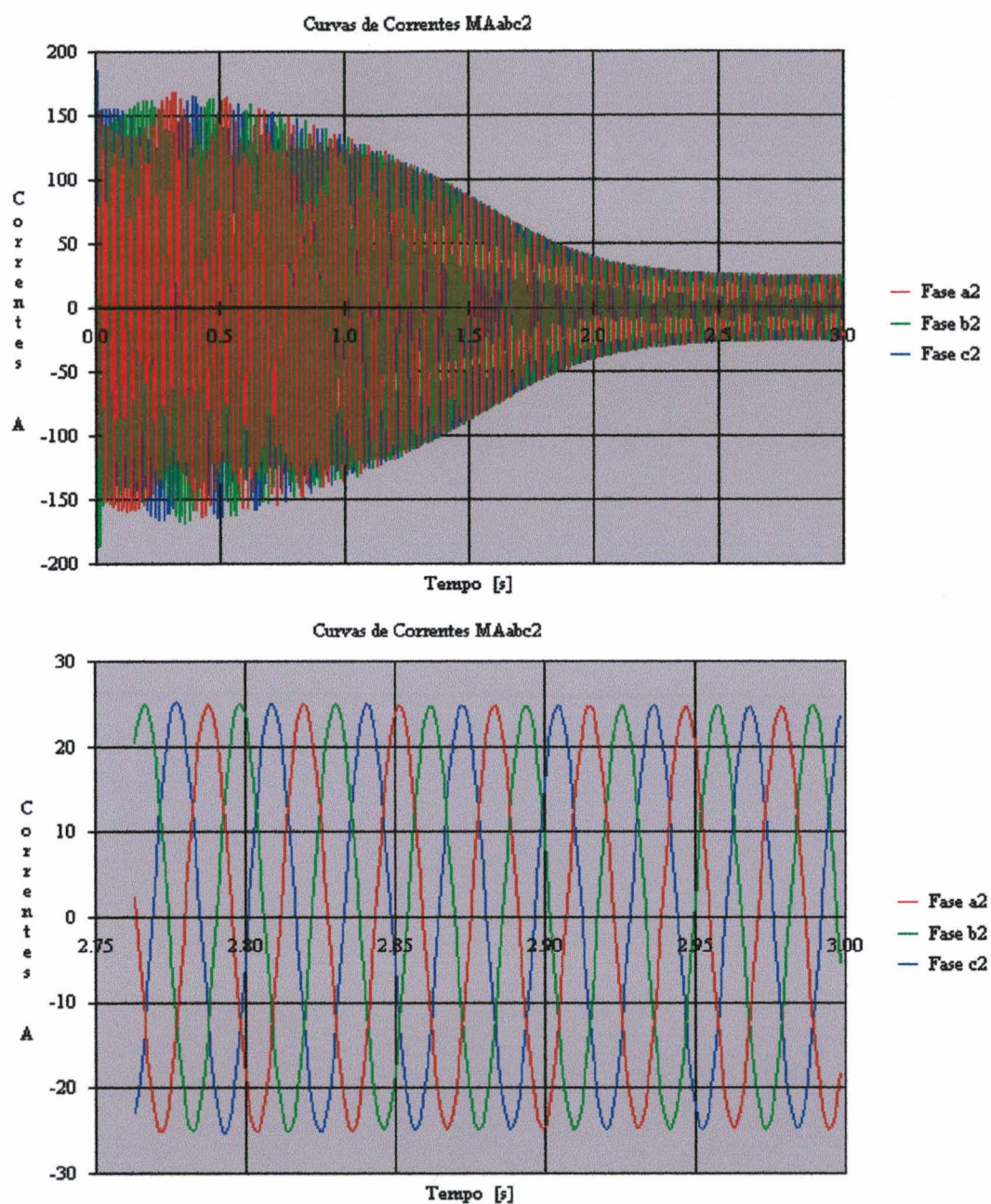


Figura 6.2.2.3 - Correntes no Rotor da MP e da MA com Uma Resistência Externa $3 \times R_{al}$ Ligada no Estator da MA [$i_{pabc2}=i_{aabc2}$]

As correntes rotóricas " i'_{pabc2} " e " i'_{aabc2} " apresentam uma frequência pouco maior que 30 Hz porque com a resistência externa o escorregamento é maior.

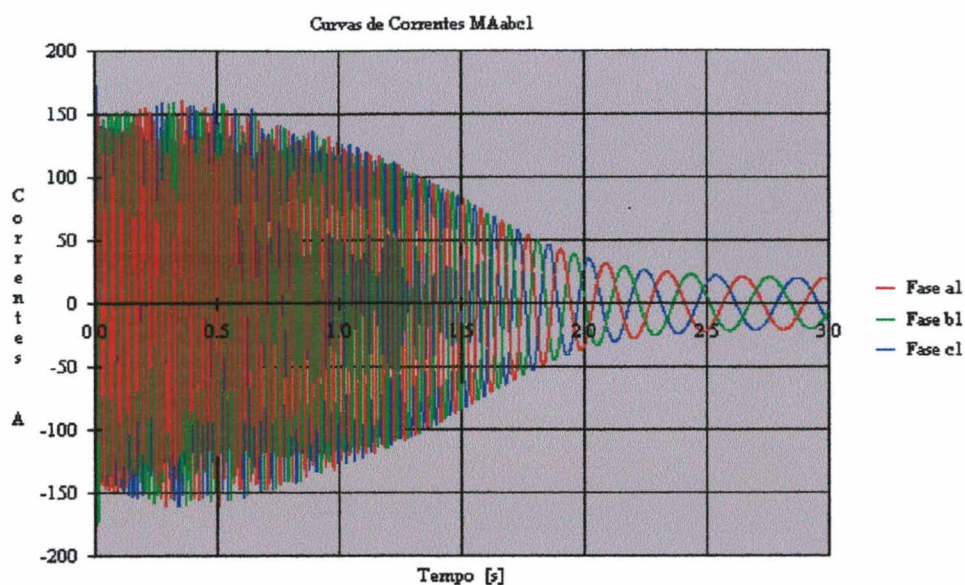


Figura 6.2.2.4 - Correntes no Estator da Máquina Auxiliar [iaabc1] com Uma Resistência Externa de $3 \times R_{a1}$ Ligada no Estator da MA

As correntes do estator da MA após estabilizada a rotação apresenta frequência diferente de zero, isto é, frequência de escorregamento. A rotação do conjunto é menor que 600 rpm.

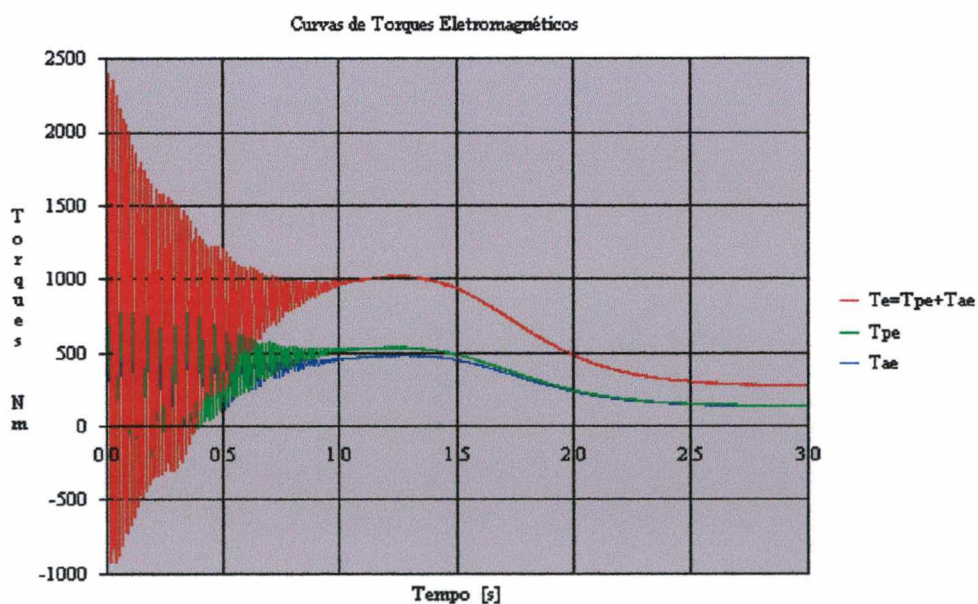


Figura 6.2.2.5 - Torques Eletromagnéticos com Uma Resistência Externa $3 \times R_{a1}$ Ligada ao Estator da MA

Observe que o torque médio na partida aumentou com o efeito da resistência externa. Comparar com a **Figura 6.2.1.5**.

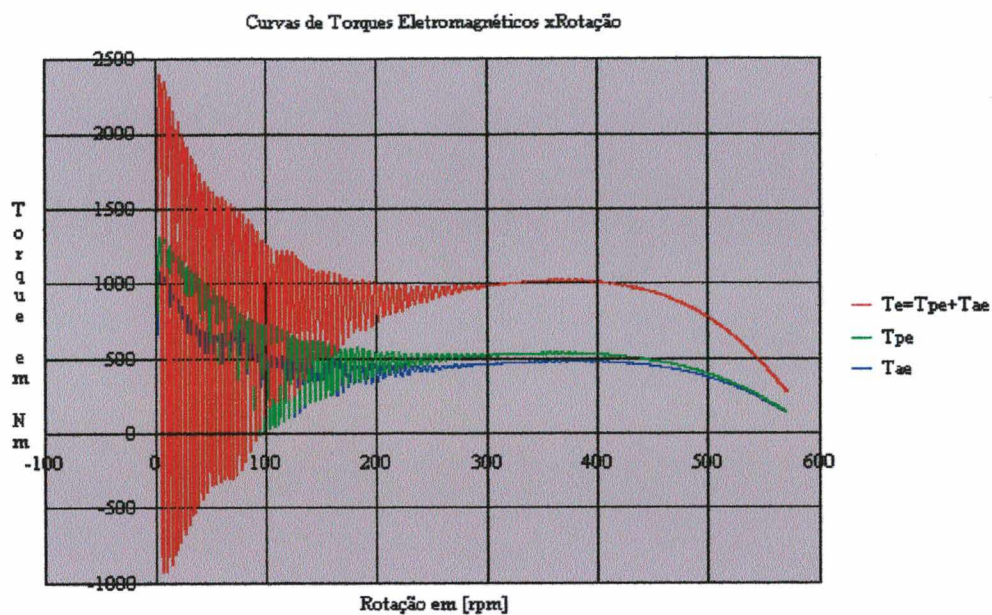


Figura 6.2.2.6 - Torques Eletromagnéticos em Função da Rotação com Uma Resistência Externa $3 \times R_{al}$ Ligada ao Estator da MA

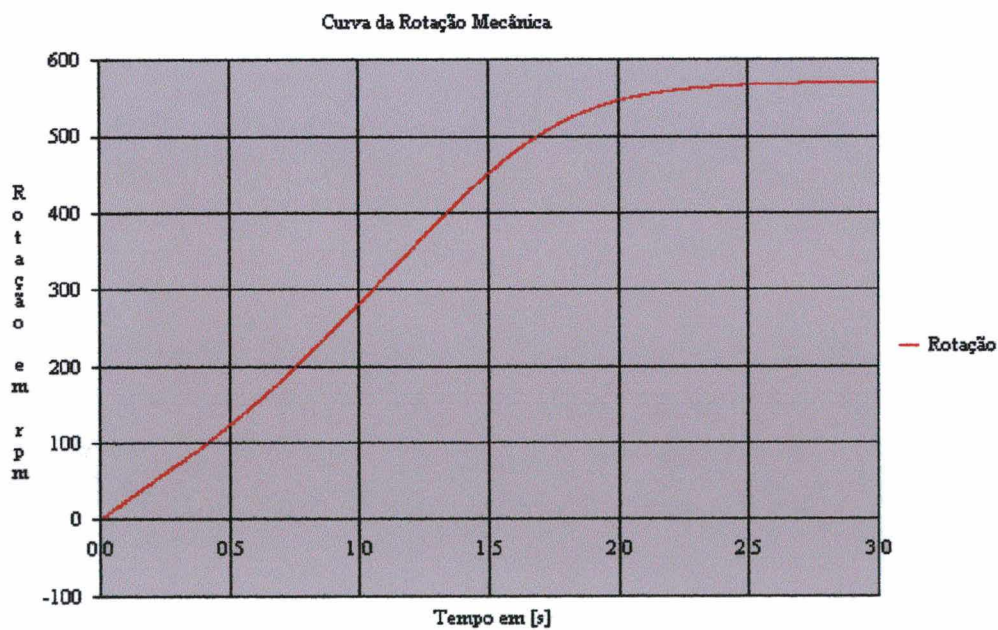


Figura 6.2.2.7 - Rotação em Função do Tempo da MATBCDA com Uma Resistência Externa $3 \times R_{al}$ Ligada ao Estator da MA

Acelerando a máquina acima da rotação síncrona da cascata, nas mesmas condições de torque do parágrafo 6.2.1, podemos ver o comportamento da MATBCDA com a mesma resistência externa ($3 \times R_{a1}$) conectada ao estator da MA nos gráficos mostrados nas Figuras 6.2.2.8 a 6.2.2.12.

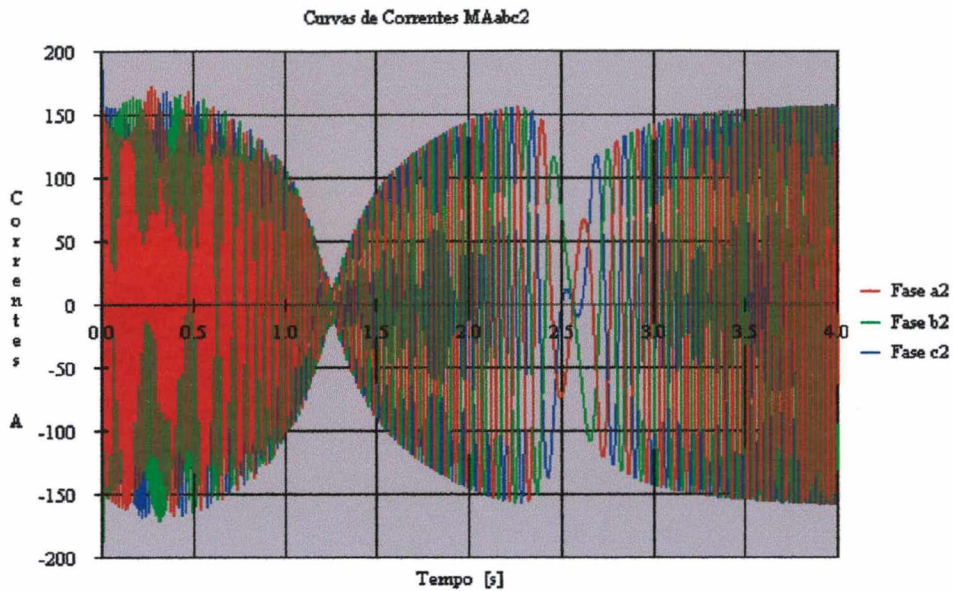


Figura 6.2.2.8 - Correntes no Rotor da MP e da MA com Uma Resistência $3 \times R_{a1}$ Ligada ao Estator da MA [ipabc2=iaabc2]

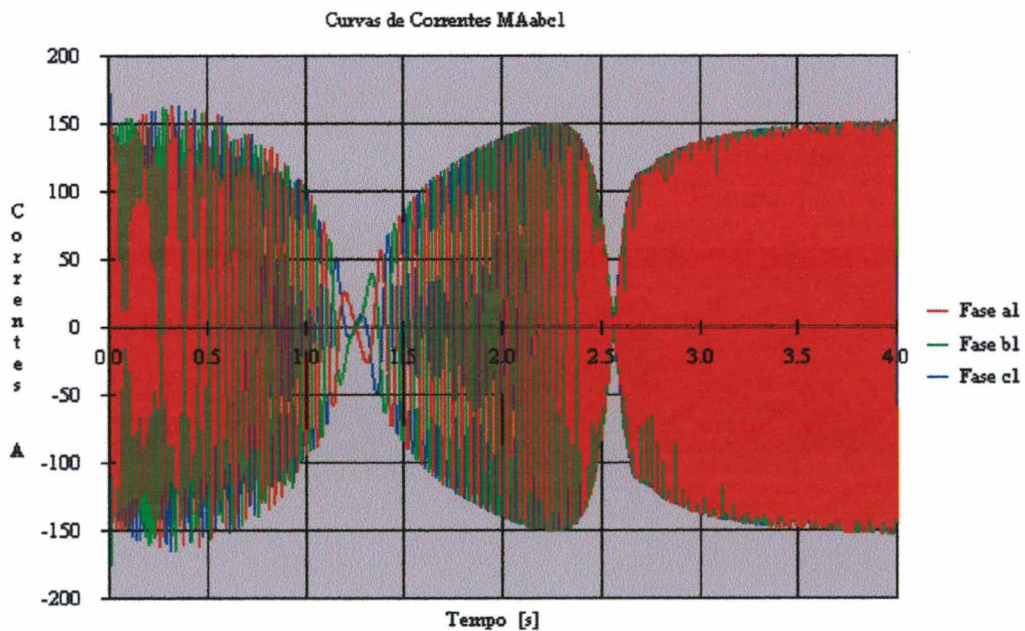


Figura 6.2.2.9 - Correntes no Estator da MA com Uma Resistência Externa $3 \times R_{a1}$ Ligada ao Estator da MA [iaabc1]

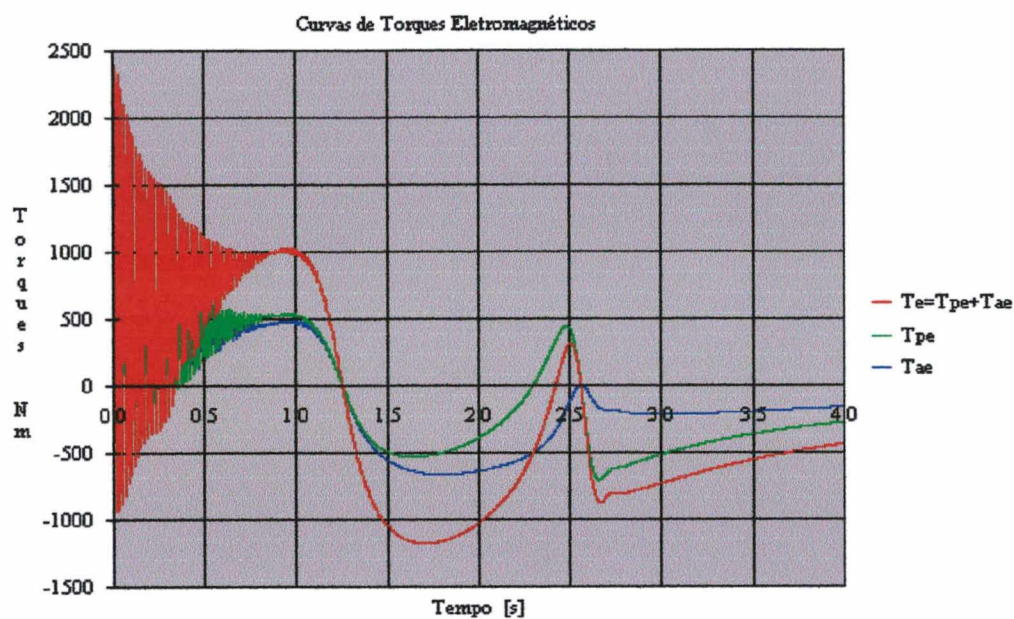


Figura 6.2.2.10 - Torques Eletromagnéticos em Função do Tempo com Uma Resistência Externa $3xR_{a1}$ Ligada ao Estator da MA

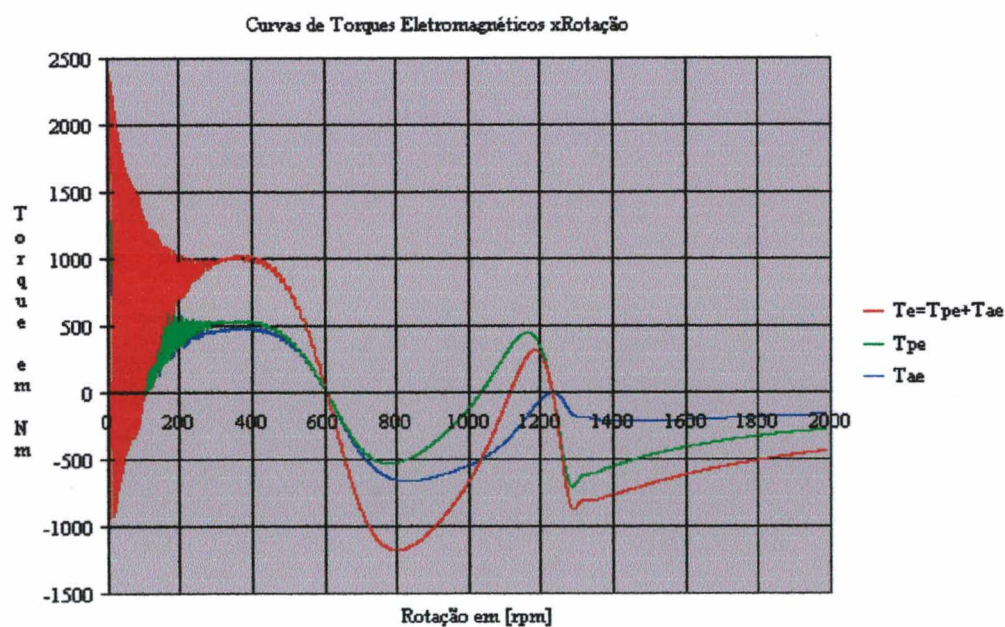


Figura 6.2.2.11 - Torques Eletromagnéticos em função da Rotação com uma Resistência Externa $3xR_{a1}$ Ligada ao Estator da MA

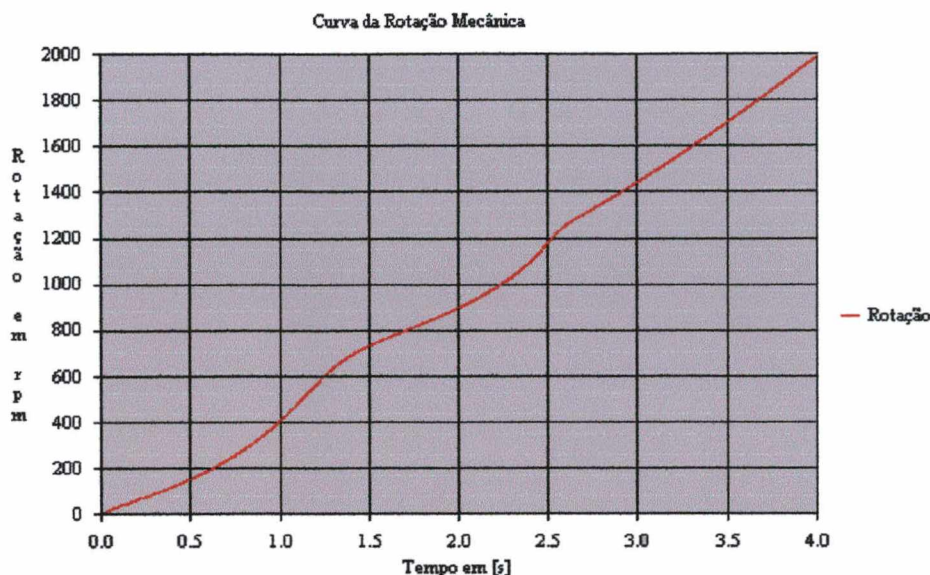


Figura 6.2.2.12 - Rotação Mecânica em Função do Tempo com Uma Resistência Externa $3xR_{a1}$ Ligada ao Estator da MA

Para interpretação dos gráficos são válidos todos os comentários mostrados no Parágrafo 6.2.1.

6.2.3 Tensão Imposta ao Estator da Máquina Auxiliar Através do Conversor de Frequência

A MATBCDA é uma máquina assíncrona que permite dupla alimentação. Devido a esse fato ela apresenta a grande vantagem de permitir fazer o controle de torque e velocidade, tanto na partida como em funcionamento em regime. O objetivo do presente trabalho não é de fazer o controle da máquina, mas sim uma análise da dinâmica de funcionamento. Neste parágrafo nos limitaremos em simular uma partida da MATBCDA com uma determinada tensão imposta ao estator da máquina auxiliar. Será mantida a amplitude constante, variando apenas a frequência de acordo com a rotação da máquina. A Figura 6.2.3.1, mostra esquematicamente esta situação.



Figura 6.2.3.1 - Tensão Imposta ao Estator da Máquina Auxiliar da MATBCDA

Para esta simulação setamos as seguintes condições:

- Torque Externo = Parabólico. (Ver Gráfico 6.2.2.2)
- Torque Básico = 1000 Nm
- $J_{MATBCDA} (J_p + J_a) = 15,0 \text{ kgm}^2$
- $J_{CARGA} = 20 \text{ kgm}^2$
- $B_{VISCOSIDADE} = 0,01 \text{ Nms/rad}$
- Resistência Externa $R_{acad} = 0$
- Amplitude da Tensão Imposta = 50 Volts
- Constante de Fase da Tensão Imposta = - 90 graus
- Intervalo de Integração = 0 a 3 Segundos

Os gráficos das Figuras 6.2.3.2 a 6.2.3.8 mostram o comportamento da MATBCDA nesta condição de partida.

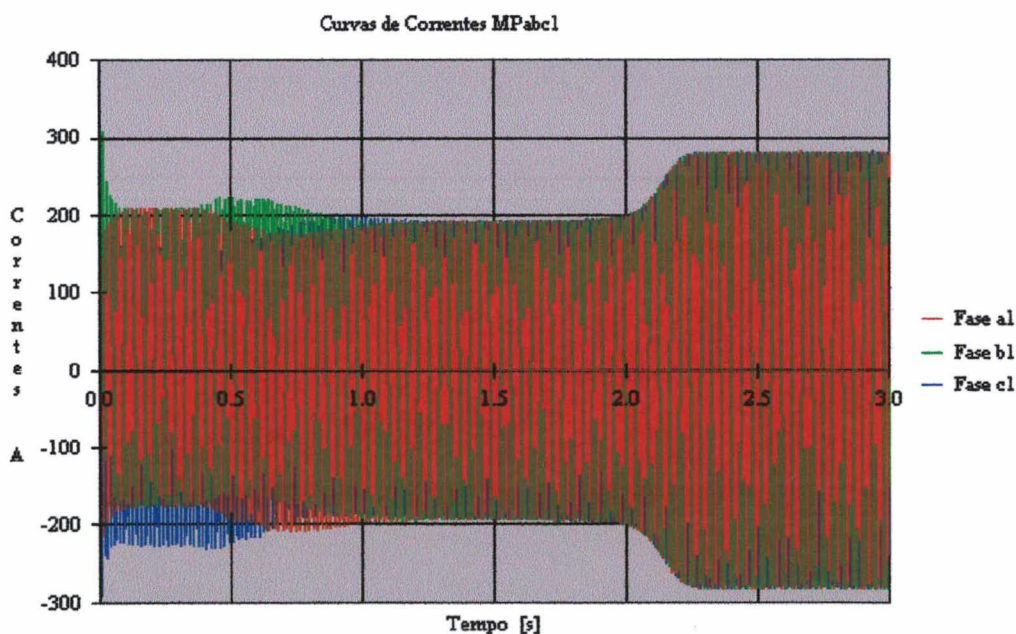


Figura 6.2.3.2 - Correntes no Estator da MP com Uma Tensão Aplicada no Estator da MA

Notamos que a corrente de partida é menor que a corrente em regime. Isto mostra a vantagem da MATBCDA de permitir com uma tensão imposta ao estator da MA controlar as condições de torque e corrente.

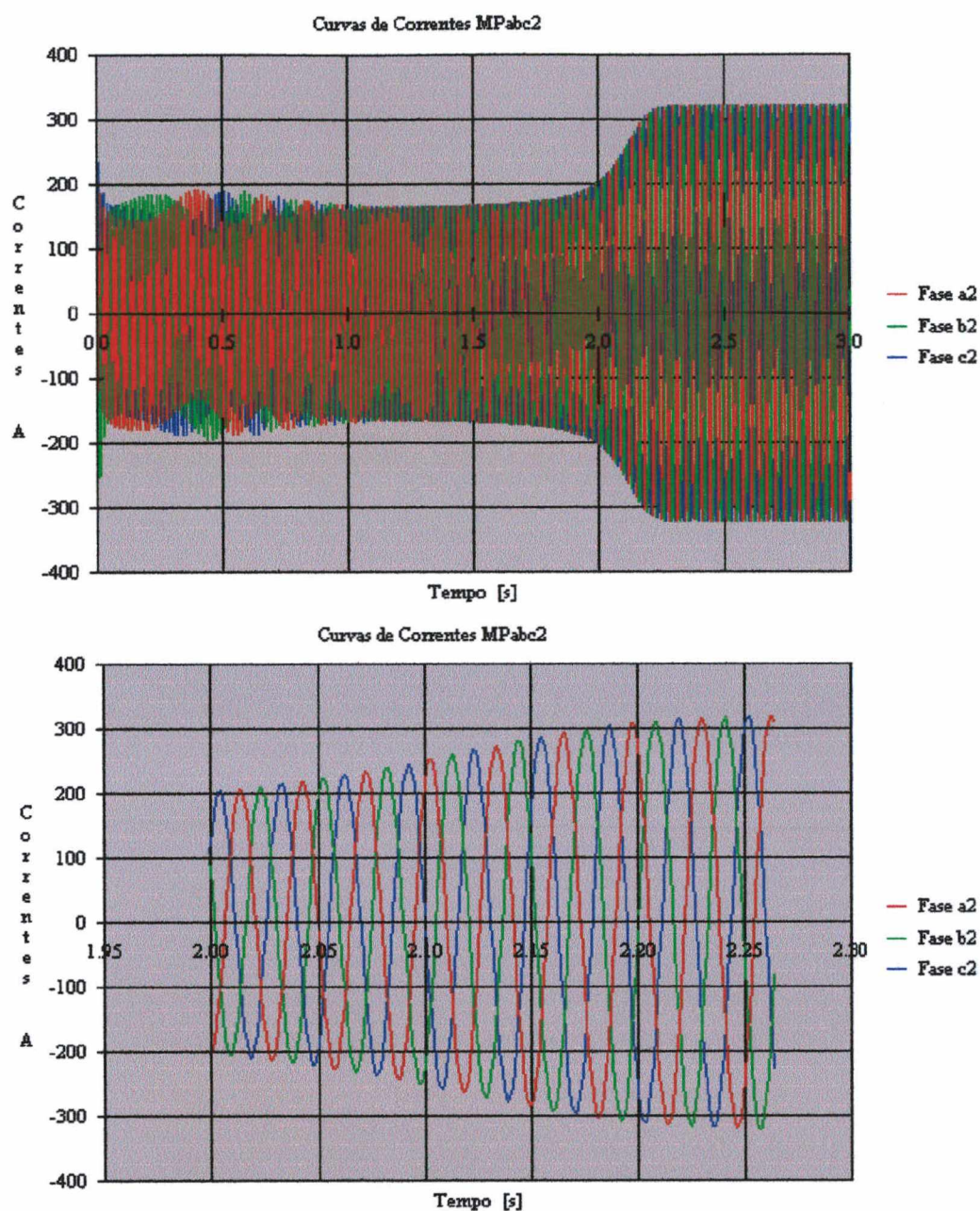


Figura 6.2.3.3 - Correntes no Rotor da MP e da MA com Uma Tensão Imposta ao Estator da MA

As correntes rotóricas também são menores durante a partida, porém sua frequência varia de acordo com a rotação sendo 30 Hz no sincronismo da cascata.

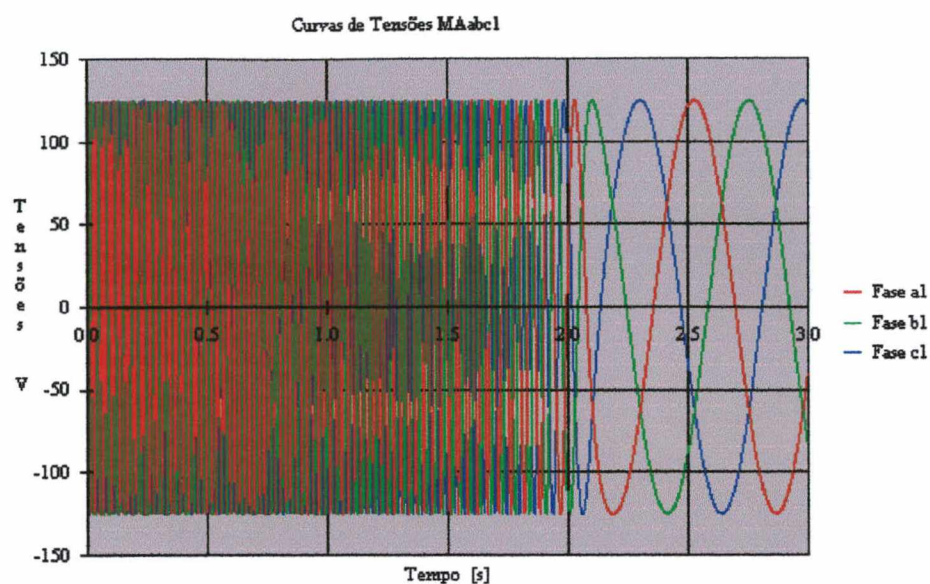


Figura 6.2.3.4 - Tensões Imposta no Estator da Máquina Auxiliar Durante a Partida da MATBCDA

A tensão imposta mostrada no gráfico acima está referida ao estator da MP. Sua amplitude é constante, porém sua frequência varia de acordo com a rotação.

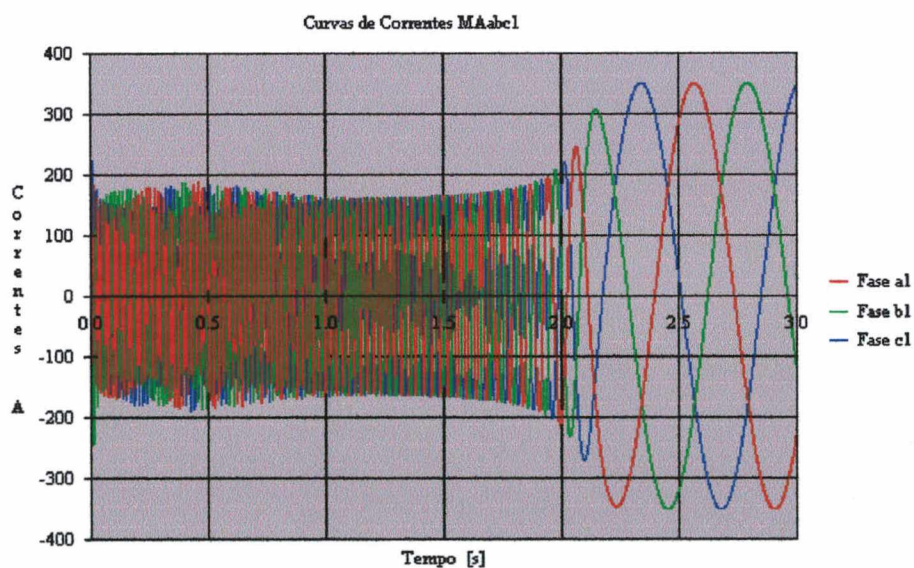


Figura 6.2.3.5 - Correntes no Estator da MA com Uma Tensão Imposta ao Estator da MA

O comportamento da corrente no estator da MA também é o de manter a amplitude menor durante a partida e maior em regime. Sua frequência varia de acordo com a rotação. Na rotação de regime a frequência é igual a frequência de escorregamento.

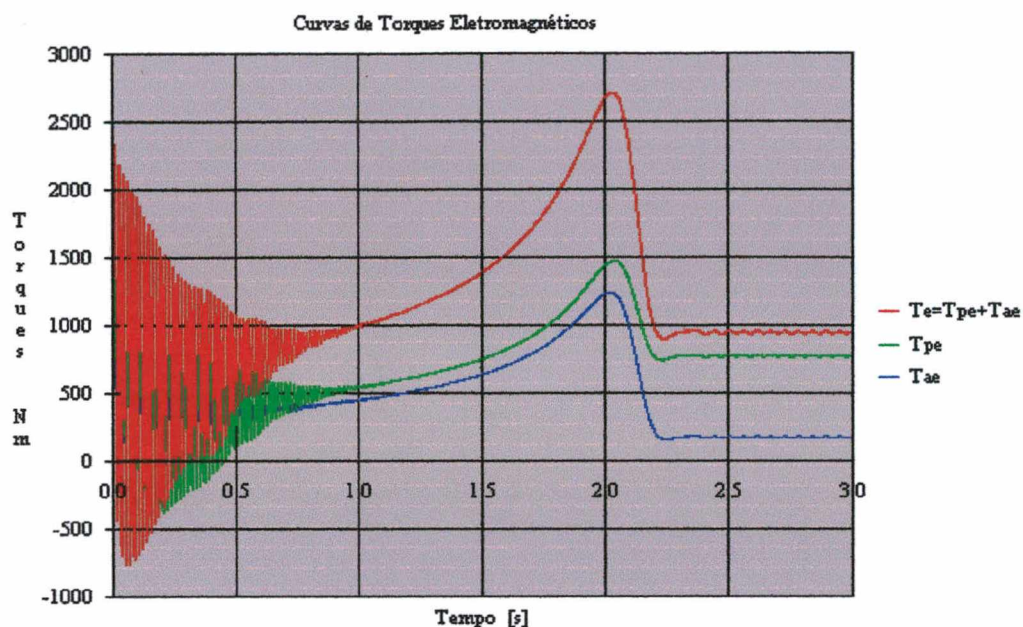


Figura 6.2.3.6 - Torques Eletromagnéticos em Função do Tempo com Uma Tensão Imposta ao Estator da MA

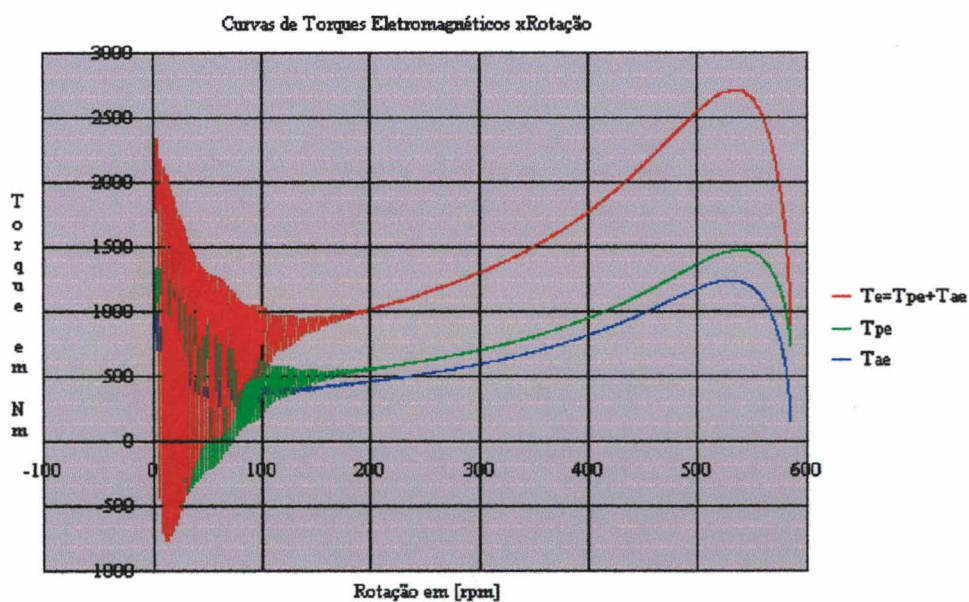


Figura 6.2.3.7 - Torques Eletromagnéticos em Função da Rotação com Uma Tensão Imposta ao Estator da MA

Nas curvas de torque percebe-se claramente a influência da tensão imposta, aumentando sensivelmente o torque máximo.

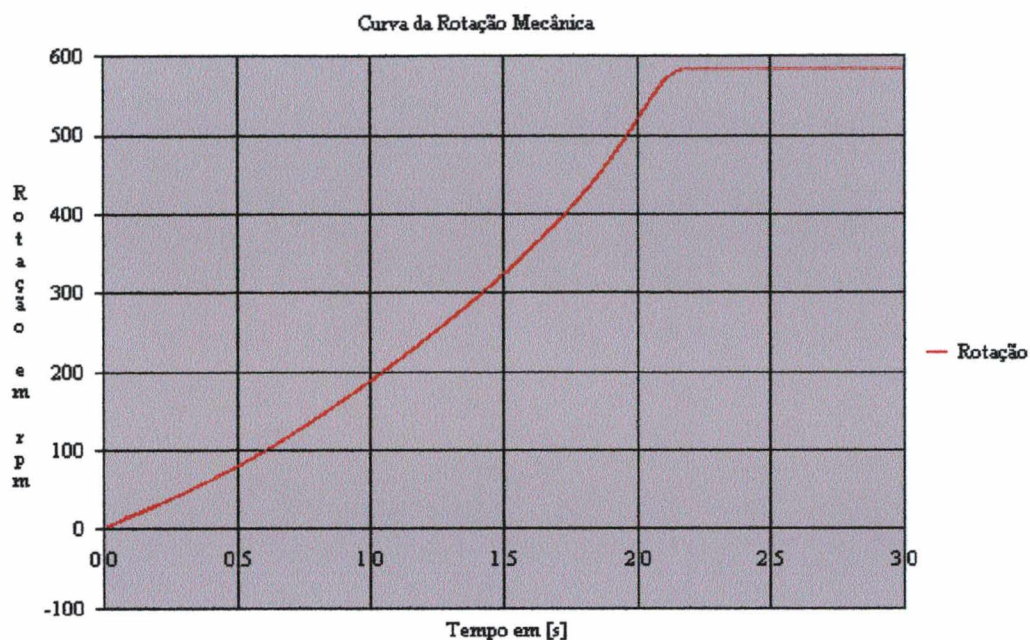


Figura 6.2.3.8 - Rotação Mecânica em Função do Tempo da MATBCDA com Uma Tensão Imposta ao Estator da MA

6.3 FUNCIONAMENTO EM REGIME DINÂMICO COMO MOTOR

Consideraremos o protótipo de 100 kW apresentando no parágrafo 6.1.

Neste parágrafo analisaremos três situações da máquina funcionando como motor:

- Variação da resistência ligada ao estator da MA
- Variação do torque externo no eixo da MATBCDA
- Variação da amplitude da tensão imposta ao estator da MA

6.3.1 Variação da Resistência Externa ligada ao Estator da Máquina Auxiliar

Para esta análise consideramos que a MATBCDA seja acelerada até a rotação síncrona da cascata através de um meio externo. Ao atingir a rotação síncrona o estator da MP é conectado a rede, isto é, no instante de tempo " $t = 0$ ". O estator da máquina auxiliar está em curto-circuito.

A resistência externa ligada ao estator da MA varia de acordo com o gráfico mostrado na **Figura 6.3.1.1**, abaixo:

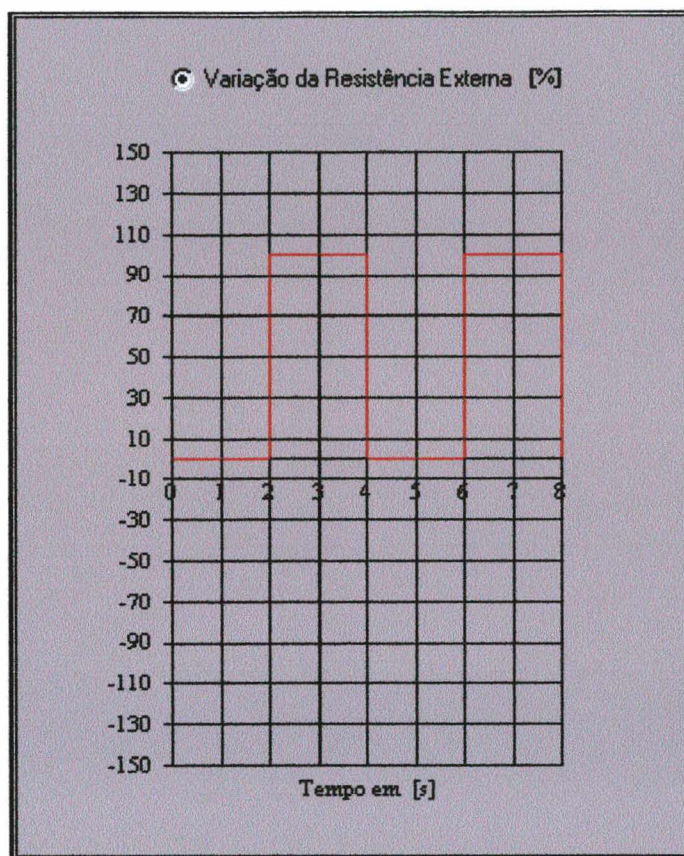


Figura 6.3.1.1 - Variação da Resistência Externa Ligada ao Estator da MA [Rcad=5.0xRa1]

Para esta simulação setamos os seguintes parâmetros:

→ Torque Externo = 500 Nm (CONSTANTE)

→ $J_{MATBCDA} = 15,0 \text{ kgm}^2$

→ $J_{CARGA} = 10,0 \text{ kgm}^2$

→ $B_{VISCOSIDADE} = 0,01 \text{ Nms/rad}$

→ Rotação Inicial = 600 rpm

→ Resistência Externa $R_{cad} = 5,0 \times R_{a1}$

→ Amplitude da Tensão Imposta = 0

→ Constante de Fase da Tensão Imposta = 0

→ Intervalo de Integração = 0 a 4 Segundos

Os gráficos das Figuras 6.3.1.2 a 6.3.1.7 mostram o comportamento da MATBCDA.

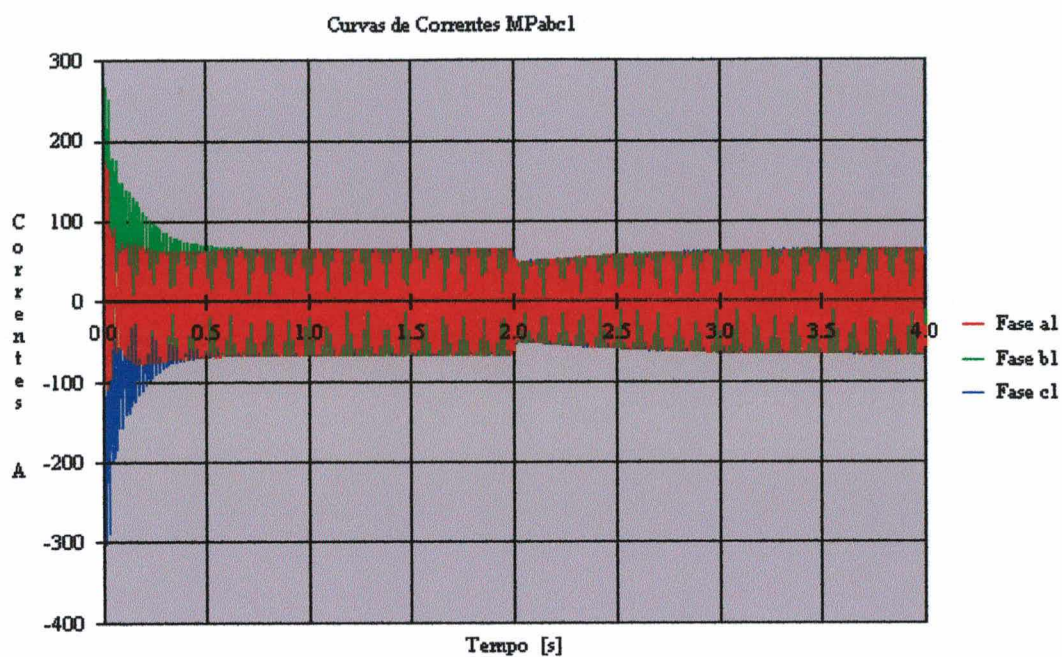


Figura 6.3.1.2 - Correntes do Estator da MP [ipabc1] em Rgimime Motor para Uma Variação da Resistência Externa $5,0 \times R_{a1}$ no Estator da MA

No instante 2s foi subitamente inserido uma resistência externa de $5,0 \times R_{a1}$. A corrente do estator da MP neste instante sofre uma diminuição brusca.

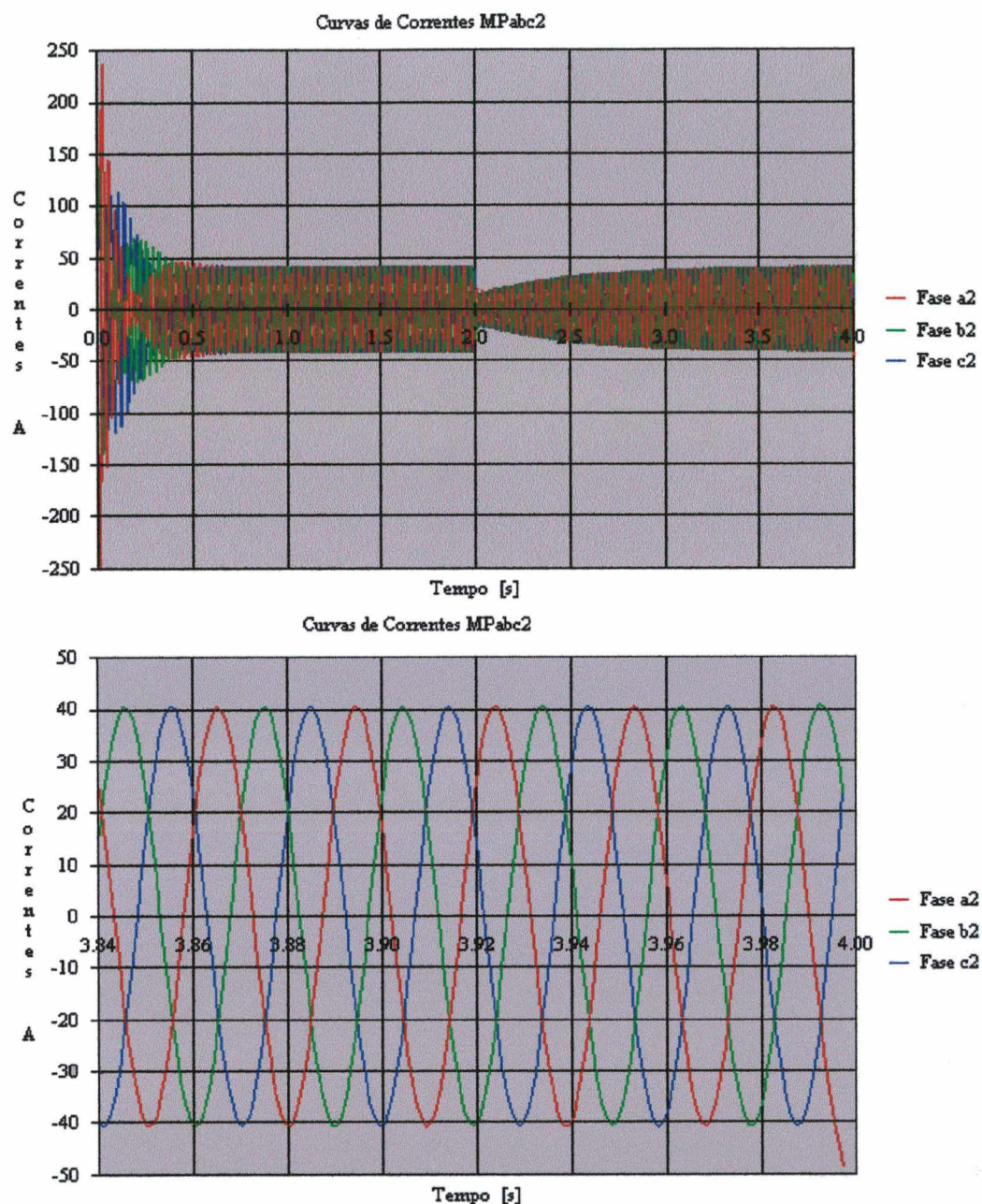


Figura 6.3.1.3 - Correntes no Rotor da MP e da MA [$i_{pabc2}=i_{aabc2}$] em Regime Motor para Uma Variação da Resistência Externa de $5.0 \times R_{al}$ Ligada ao Estator da MA

As correntes rotóricas também sofrem uma variação brusca com a introdução da resistência externa.

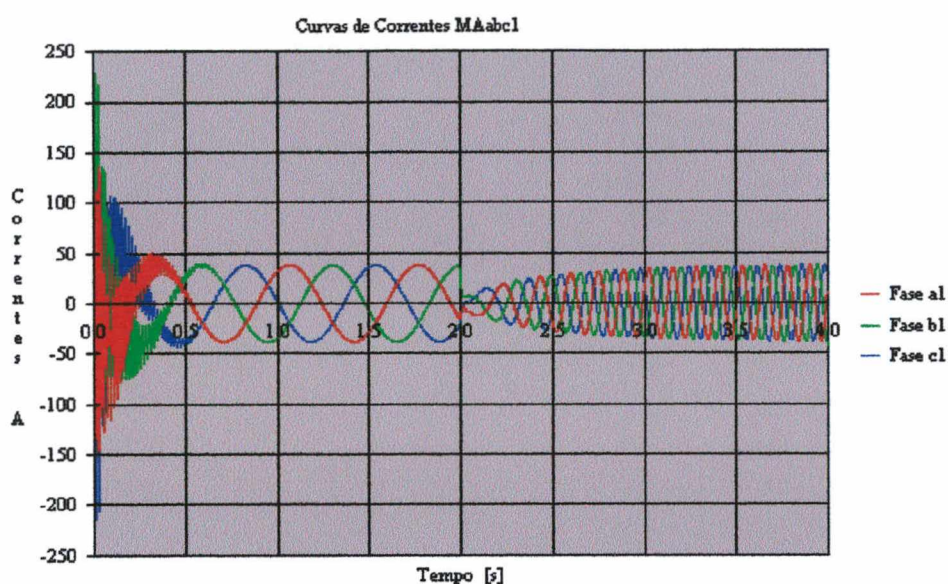


Figura 6.3.1.4 - Correntes no Estator da MA [iaabc1] em Regime Motor para Uma Variação da Resistência Externa $5,0 \times R_{a1}$ no Estator da MA

As correntes no estator da MA após a introdução da resistência sofrem um aumento na frequência.

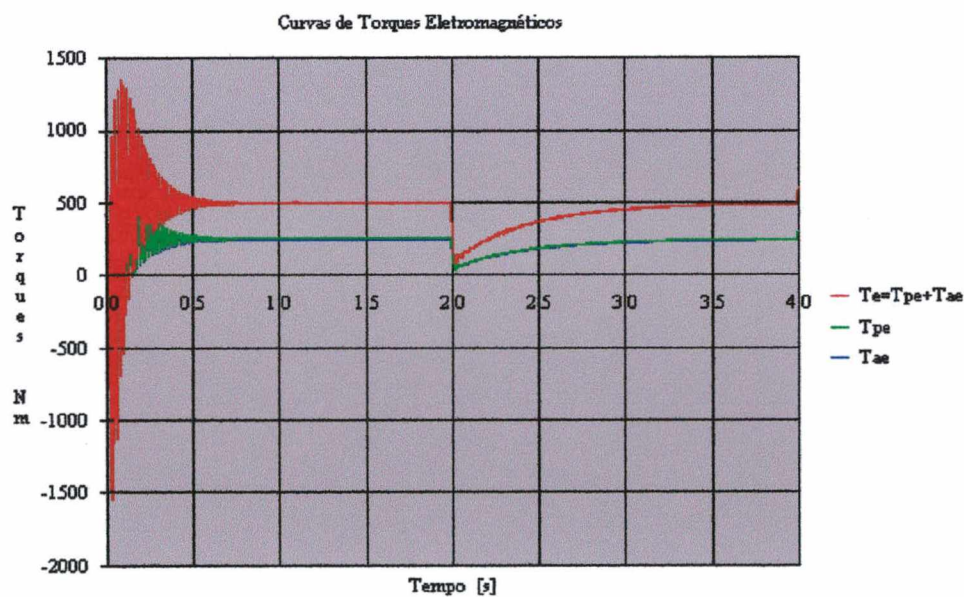


Figura 6.3.1.5 - Torques Eletromagnéticos em Função do Tempo para Uma Variação da Resistência Externa de $5,0 \times R_{a1}$ Ligada ao Estator da MA

O torque também sofre uma variação acentuada no instante de introdução da resistência.

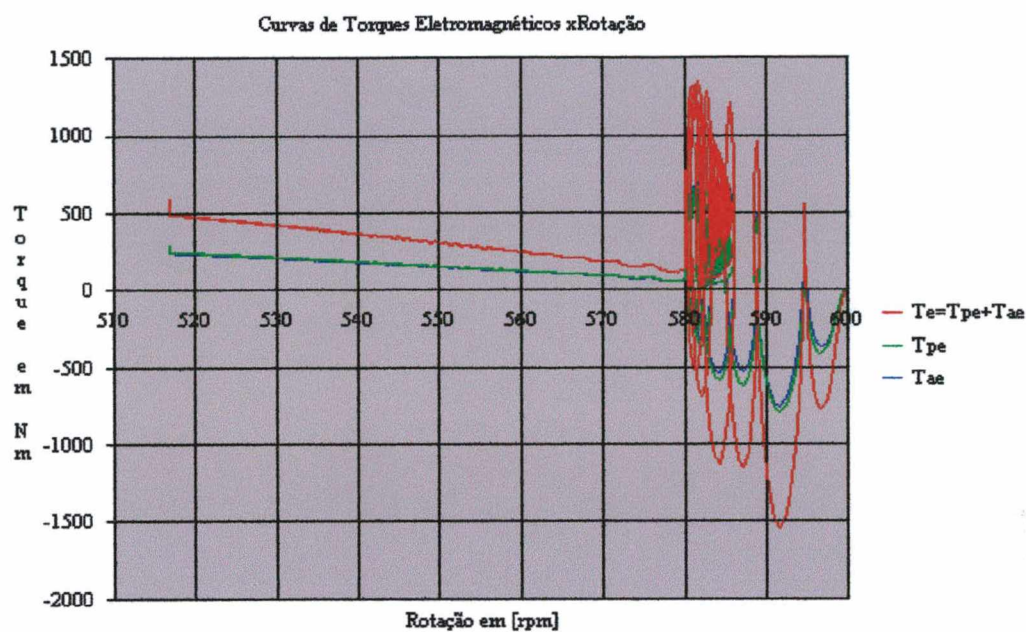


Figura 6.3.1.6 - Torques Eletromagnéticos em Função da Rotação para Uma Variação da Resistência Externa de $5.0 \times R_{a1}$ Ligada ao Estator da MA

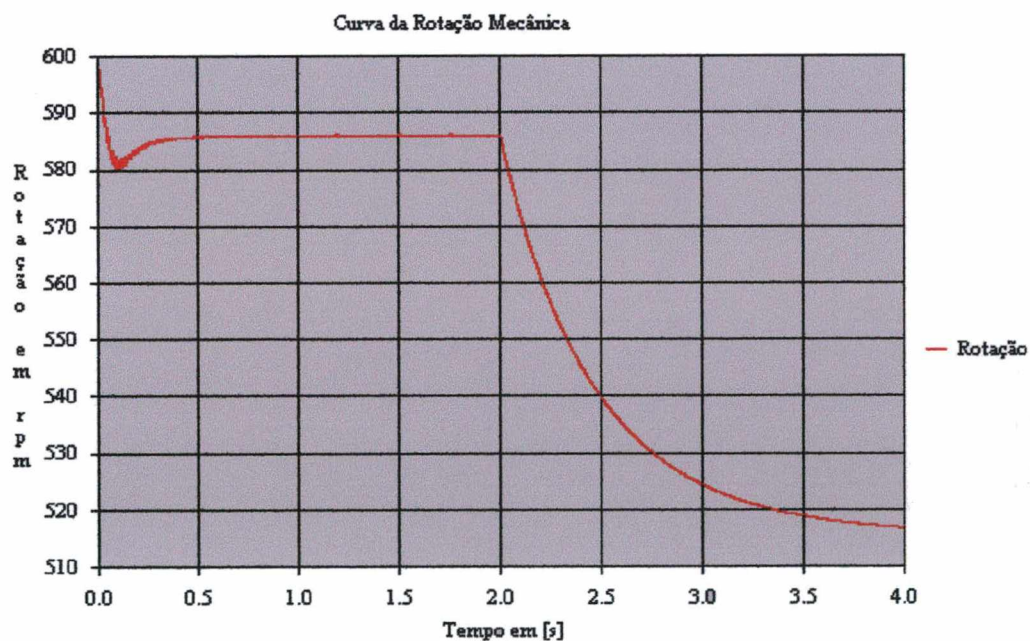


Figura 6.3.1.7 - Rotação Mecânica em Função do Tempo para Uma Variação da Resistência Externa de $5.0 \times R_{a1}$ Ligada ao Estator da MA

No gráfico mostrado na **Figura 6.3.1.1** percebemos que a resistência mudou de $0 \times R_{al}$ para $5,0 \times R_{al}$ (100%) no instante de tempo $t = 2s$, nota-se claramente que a influência da variação da resistência ocorre sobre a rotação e o torque da máquina. Sobre as correntes o efeito é menos pronunciado.

6.3.2 Variação do Torque Externo

Consideramos a variação do torque externo conforme gráfico mostrado na **Figura 6.3.2.1** abaixo.

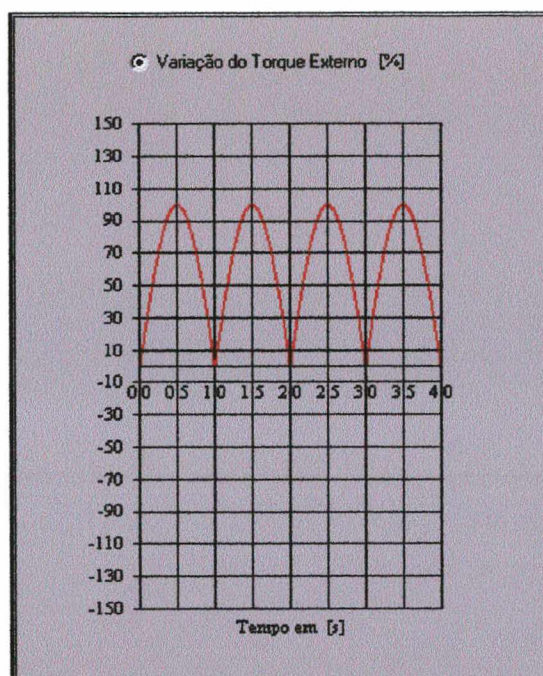


Figura 6.3.2.1 - Variação do Torque Externo Aplicada ao Eixo da MATBCDA

Setamos as seguintes condições para o cálculo:

- Torque Básico = 1000 Nm
- $J_{MATBCDA} = 15,00 \text{ kgm}^2$
- $J_{CARGA} = 20 \text{ kgm}^2$
- $B_{VISCOSIDADE} = 0,01 \text{ Nms/rad}$
- Rotação Inicial = 600 rpm
- Resistência Externa $R_{acad} = 0$
- Amplitude da Tensão Imposta = 50 Volts (constante)
- Constante de Fase da Tensão Imposta = -90°
- Intervalo de Integração = 0 a 4 Segundos

Os gráficos mostrados na Figuras 6.3.2.2.a 6.3.2.8 ilustram o comportamento da MATBCDA.

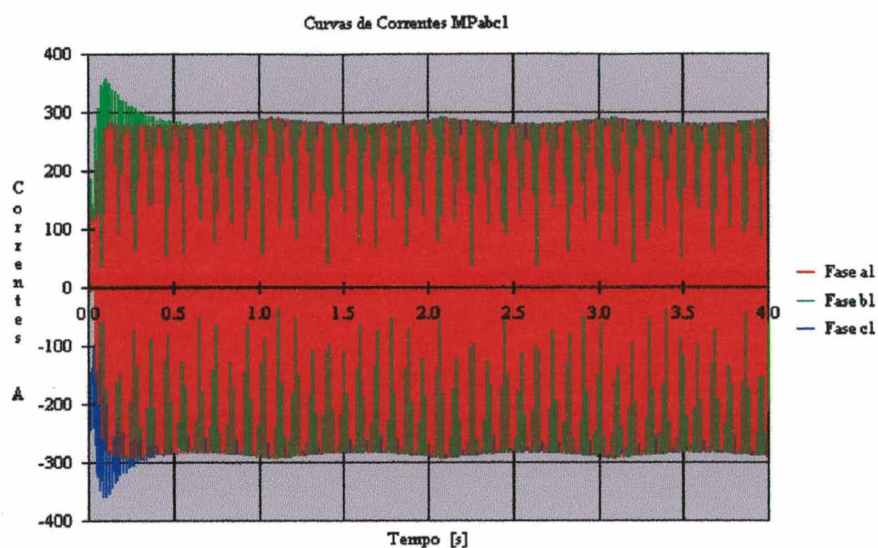


Figura 6.3.2.2 - Correntes no Estator da MP [ipabc1] para Uma Variação do Torque Externo no Eixo da MATBCDA Funcionando em Regime MOTOR

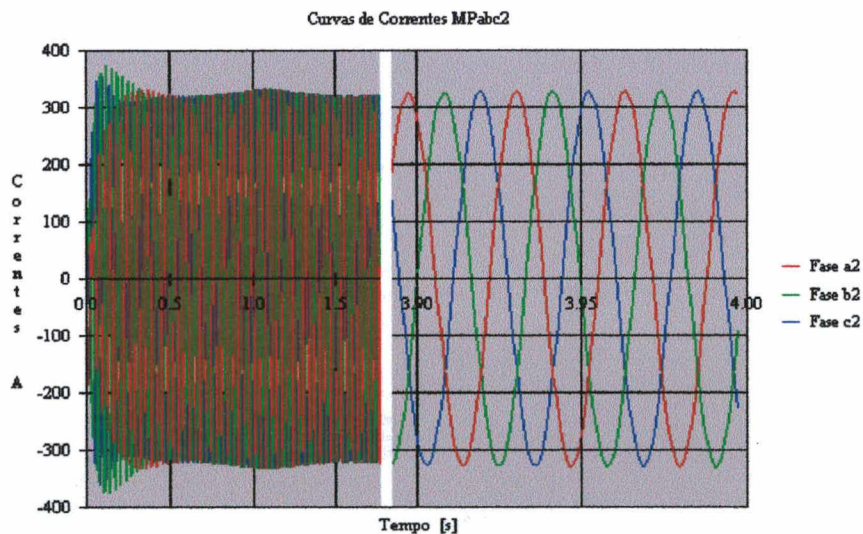


Figura 6.3.2.3 - Correntes no Rotor da MP e da MÁ [ipabc2=iaabc2] para Uma Variação do Torque Externo no Eixo da MATBCDA Funcionando em Regime Motor

Tanto as correntes do estator quanto as do rotor oscilam de acordo com a variação do torque externo. As correntes estáticas apresentam frequência 60 Hz enquanto as do rotor 30 Hz.

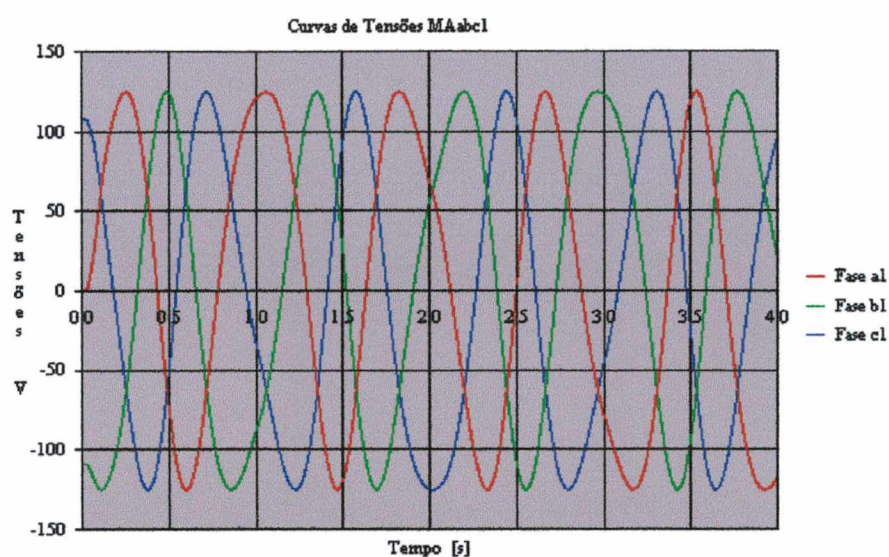


Figura 6.3.2.4 - Tensões Imposta ao Estator da MA [uaabc1] Funcionando como Motor com Uma Variação do Torque Externo no Eixo da MATBCDA

Analisando as curvas das tensões impostas ao estator da MA, notamos que a amplitude se mantém constante, porém as frequências variam de acordo com a variação da rotação.

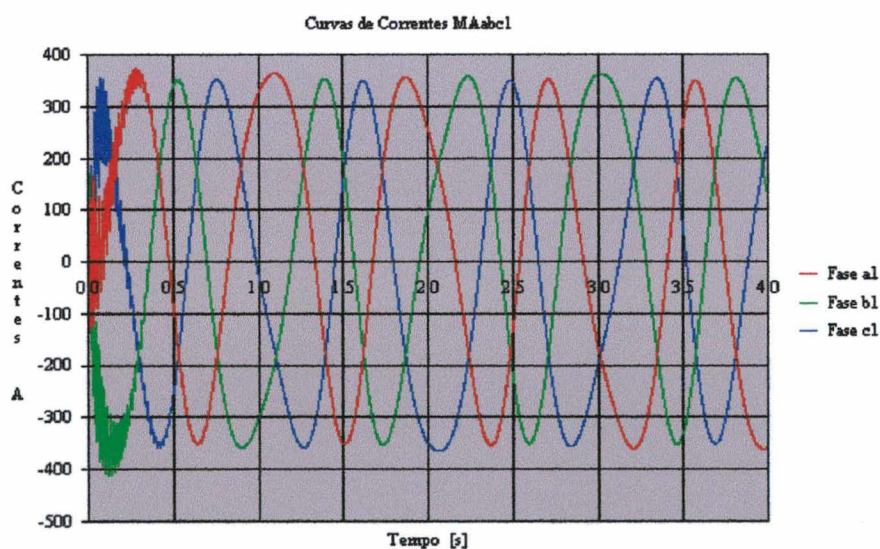


Figura 6.3.2.5 - Correntes No Estator da MA [iaabc1] para Uma Variação do Torque Externo no Eixo da MATBCDA Funcionando como MOTOR

As correntes no estator da MA mantêm as amplitudes constantes, porém após as oscilações iniciais percebemos que suas frequências também variam com a variação da rotação.

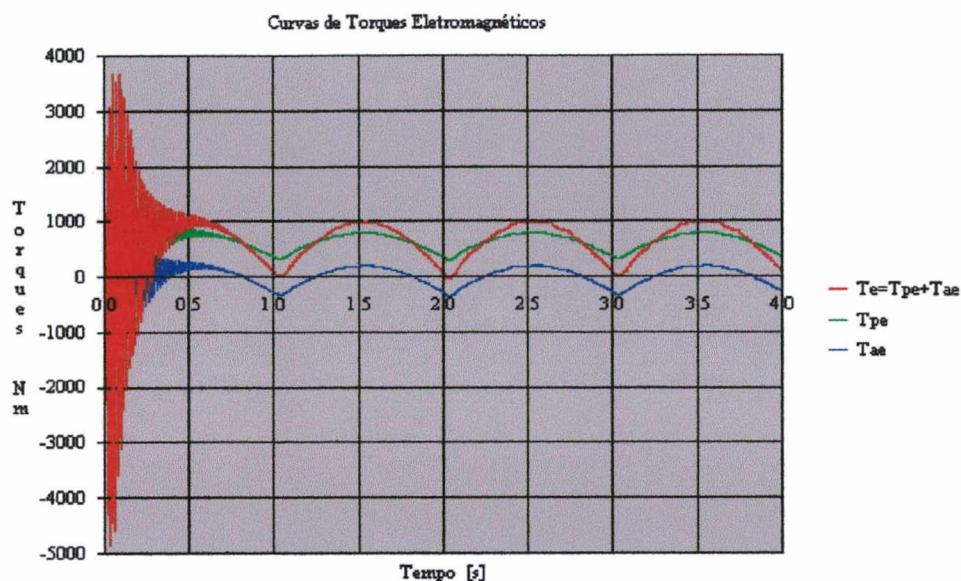


Figura 6.3.2.6 - Torques Eletromagnéticos em Função do Tempo para Uma Variação do Torque Externo no Eixo da MATBCDA Funcionando como MOTOR

Os torques eletromagnéticos acompanham as variações do torque externo no eixo da MATBCDA.

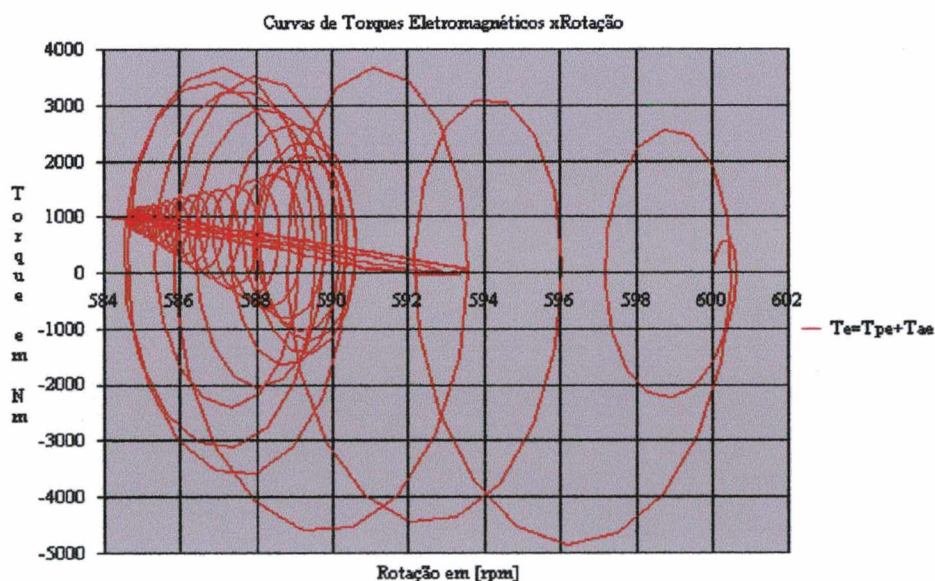


Figura 6.3.2.7 - Torque Eletromagnético Total em Função da Rotação para Uma Variação do Torque Externo no Eixo da MATBCDA Funcionando como MOTOR

O Gráfico da Figura 6.3.2.7 mostra a variação do torque eletromagnético total " $T_e = T_{pe} + T_{ae}$ " em função da rotação.

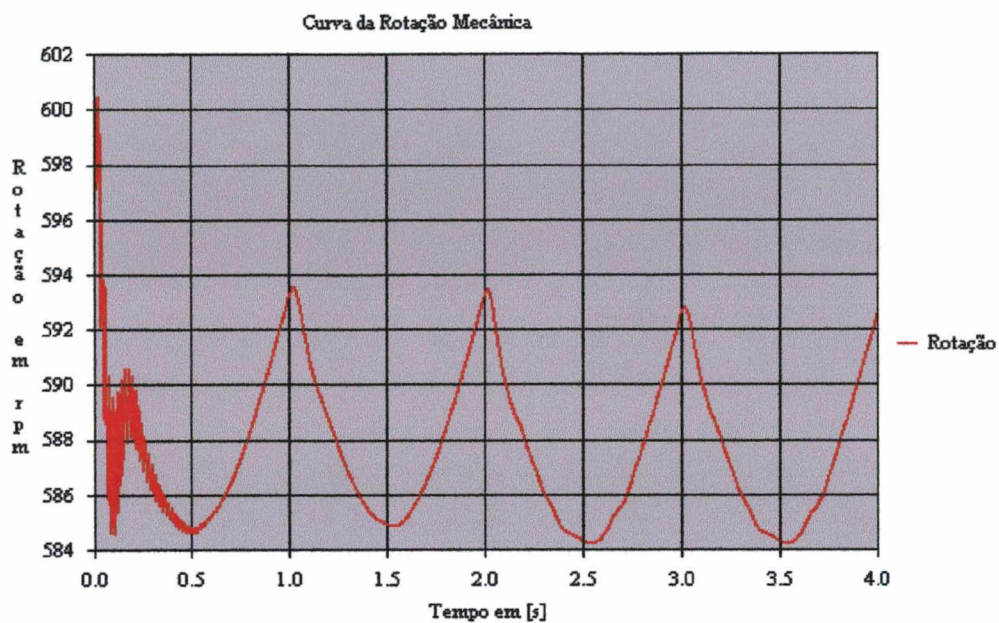


Figura 6.3.2.8 - Rotação Mecânica em Função do Tempo para Uma Variação no Torque Externo no Eixo da MATBCDA Funcionando como MOTOR

A rotação oscila de acordo com o torque externo imposta ao eixo.

6.3.3 Variação da Amplitude da Tensão Imposta pelo Conversor

Iremos considerar que a MATBCDA esteja funcionando como motor e a tensão imposta ao estator da MA varie em forma de “dente de serra” de acordo com o gráfico mostrado na Figura 6.3.3.1 abaixo:

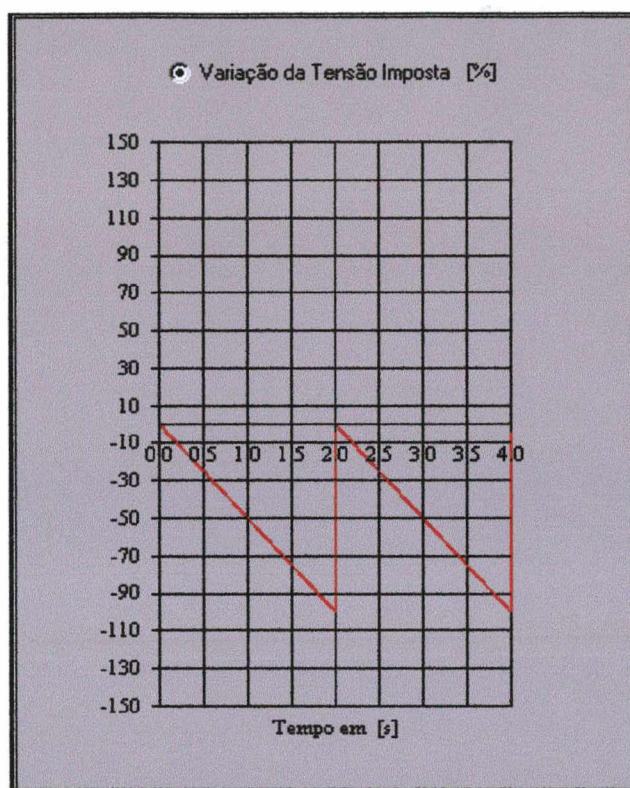


Figura 6.3.3.1 - Variação da Tensão Imposta ao Estator da MA

Setamos as seguintes condições para o cálculo

- Torque Externo = 400 Nm (CONSTANTE)
- $J_{MATBCDA} = 15,0 \text{ kgm}^2$
- $J_{CARGA} = 20,0 \text{ kgm}^2$
- $B_{VISCOSIDADE} = 0,01 \text{ Nms/rad}$
- Rotação Inicial = 600 rpm
- Resistência Externa $R_{acad} = 0$
- Amplitude Máxima da Tensão Imposta = 50 Volts
- Constante de Fase da Tensão Imposta = 0 graus
- Intervalo de Integração = 0 a 4 Segundos

Os gráficos das Figuras 6.3.3.2 a 6.3.3.8 ilustram o comportamento da MATBCDA para esta condições.

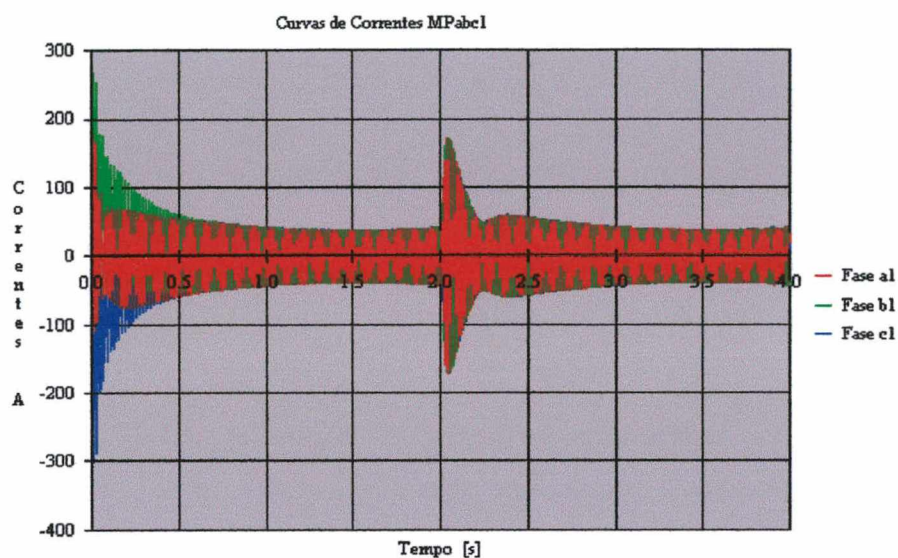


Figura 6.3.3.2 - Correntes no Estator da MP [ipabc1] para Variação da Tensão Imposta no Estator da MA da MATBCDA Funcionando como MOTOR

As correntes no estator da MP sofrem oscilações fortes quando a tensão no estator da MA é bruscamente reduzida a zero.

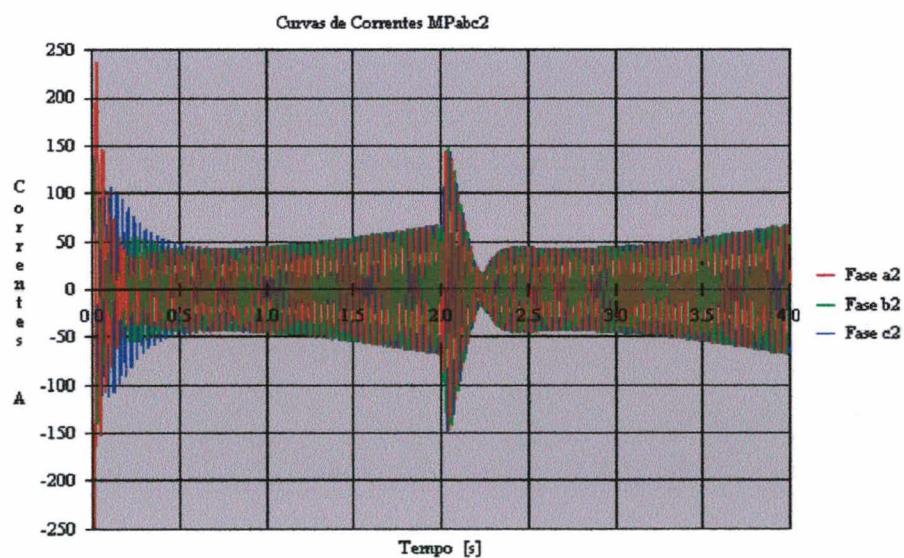


Figura 6.3.3.3 - Correntes no Rotor da MP e da MA [ipabc2=iaabc2] para Uma Variação da Tensão Imposta no Estator da MA da MATBCDA Funcionando como MOTOR

A mesma variação ocorre com as correntes rotóricas, porém suas frequências estão próximas de 30 Hz.

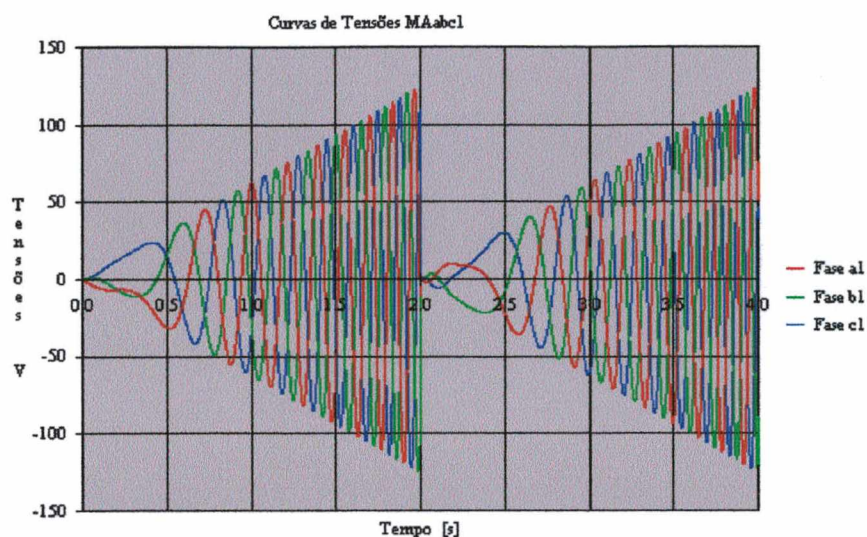


Figura 6.3.3.4 - Tensões no Estator da MA [uaabc1]

A frequência da tensão imposta inicialmente é zero, porque a MATBCDA está girando na rotação síncrona da cascata. Aumentando em seguida e voltando quase a zero quando a tensão imposta é zerada no instante 2s.

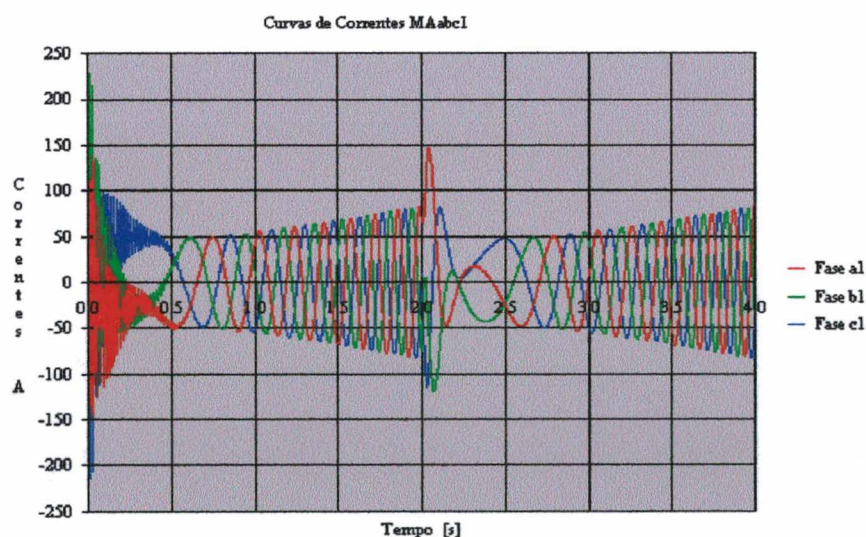


Figura 6.3.3.5 - Correntes no Estator da MA [iaabc1] para Uma Variação da Tensão Imposta no Estator da MA da MATBCDA Funcionando como MOTOR

As correntes no estator da MA inicialmente também tem frequência zero, aumentando em seguida e retornando quase a zero quando a tensão imposta é reduzida a zero.

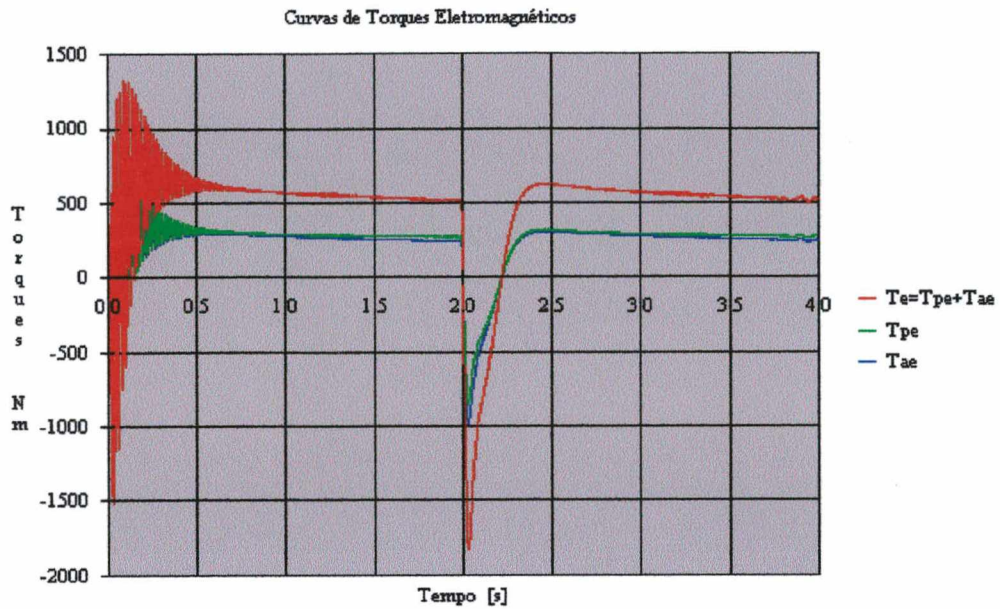


Figura 6.3.3.6 - Torques Eletromagnéticos em Função do Tempo para Uma Variação da Tensão Imposta ao Estator da MA da MATBCDA Funcionando como MOTOR

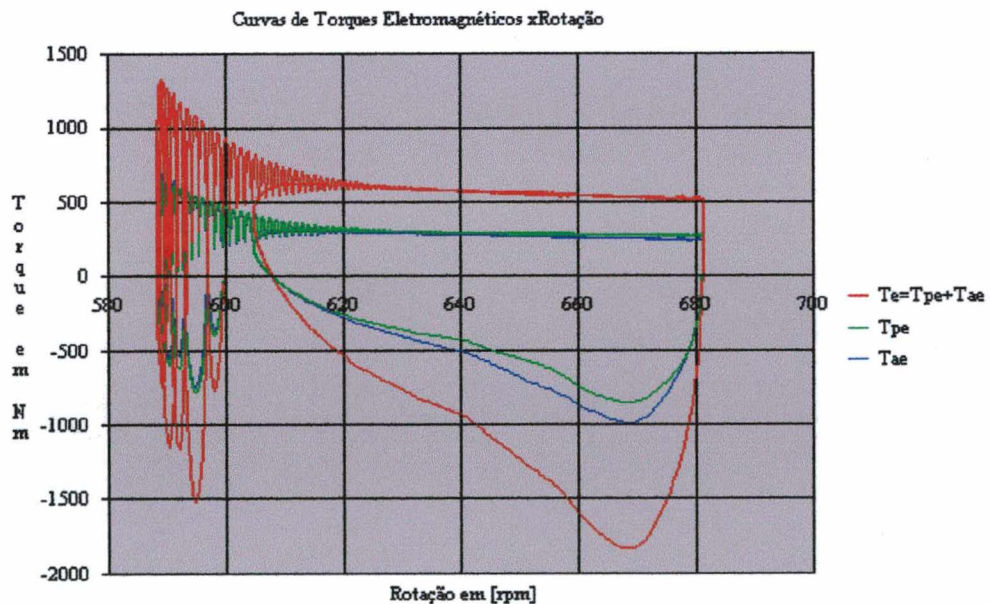


Figura 6.3.3.7 - Torques Eletromagnéticos em Função da Rotação para Uma Variação do da Tensão Imposta ao Estator da MA da MATBCDA Funcionando como MOTOR

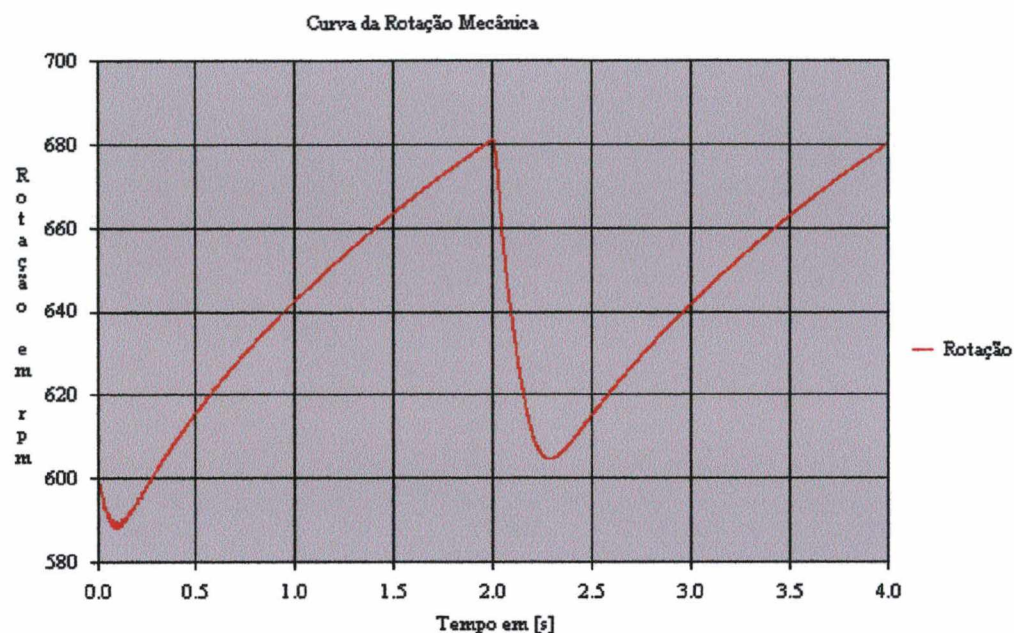


Figura 6.3.3.8 - Rotação Mecânica para Uma Variação da Tensão Imposta ao Estator da MA da MATBCDA Funcionando como MOTOR

Nos gráficos 6.3.3.6, 6.3.3.7 e 6.3.3.8 o efeito da tensão imposta é capaz de fazer a MATBCDA trabalhar como motor numa rotação acima da rotação síncrona da cascata. Este fato reforça a vantagem da MATBCDA de se poder controlar o torque e a rotação com uma tensão imposta ao estator da MA, eliminando desta forma as escovas.

6.4 FUNCIONAMENTO EM REGIME DINÂMICO COMO GERADOR

Analisaremos neste parágrafo o comportamento dinâmico da MATBCDA funcionando como gerador.

Iremos considerar duas situações:

- Variação do Torque Externo
- Variação da Amplitude da Tensão Imposta

6.4.1 Variação do Torque Externo

Na simulação dinâmica como gerador variando o torque externo, iremos considerar que a MATBCDA é acelerada do repouso até a rotação de trabalho (acima da Síncrona) pela máquina

primária e que esta apresenta uma curva de torque em forma de degrau conforme mostrado na **Figura 6.4.1.1**, abaixo.

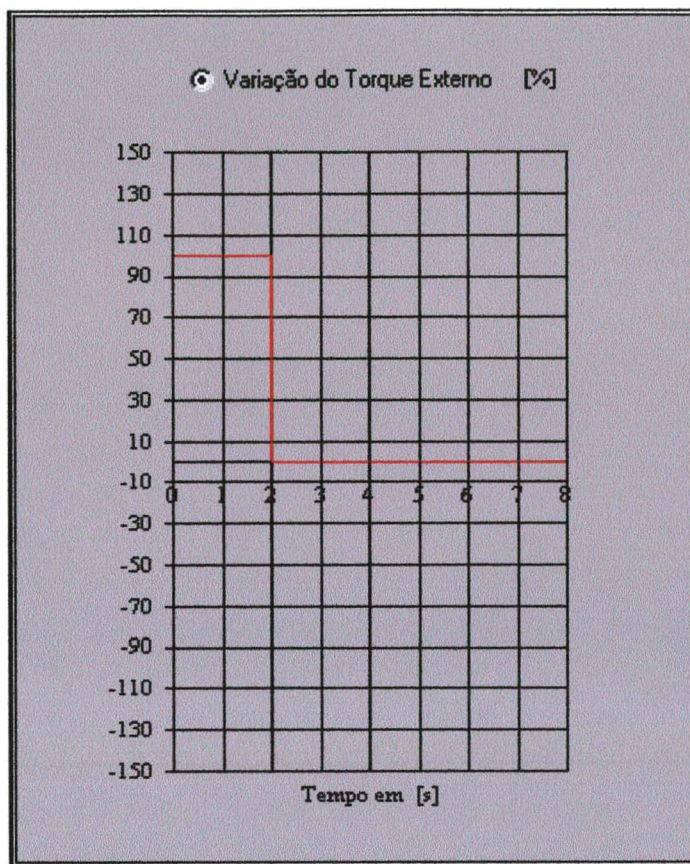


Figura 6.4.1.1 - Variação do Torque em Função do Tempo

Nesta simulação setamos os seguintes parâmetros:

- Torque Básico = - 2000 Nm
- $J_{MATBCDA} = 15,0 \text{ kgm}^2$
- $J_{CARGA} = 20,0 \text{ kgm}^2$
- $B_{VISCOSIDADE} = 0,01 \text{ Nms/rad}$
- Rotação Inicial = 0
- Resistência Externa $R_{acad} = 0$
- Amplitude da Tensão Imposta = 50 Volts
- Constante de Fase da Tensão Imposta = -90°
- Intervalo de Integração = 0 a 4 Segundos

Os gráficos mostrados nas Figuras 6.4.1.2 a 6.4.1.8 ilustram o comportamento dinâmico da MATBCDA funcionando como gerador.

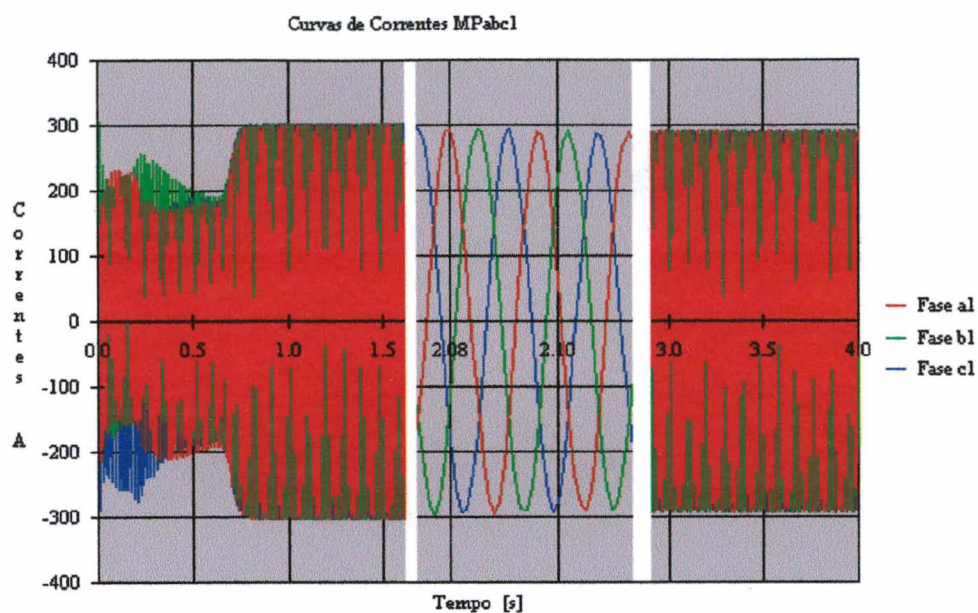


Figura 6.4.1.2 - Correntes no Estator da MP [ipabc1] para uma Variação do Torque Externo no Eixo da MATBCDA Funcionando como GERADOR

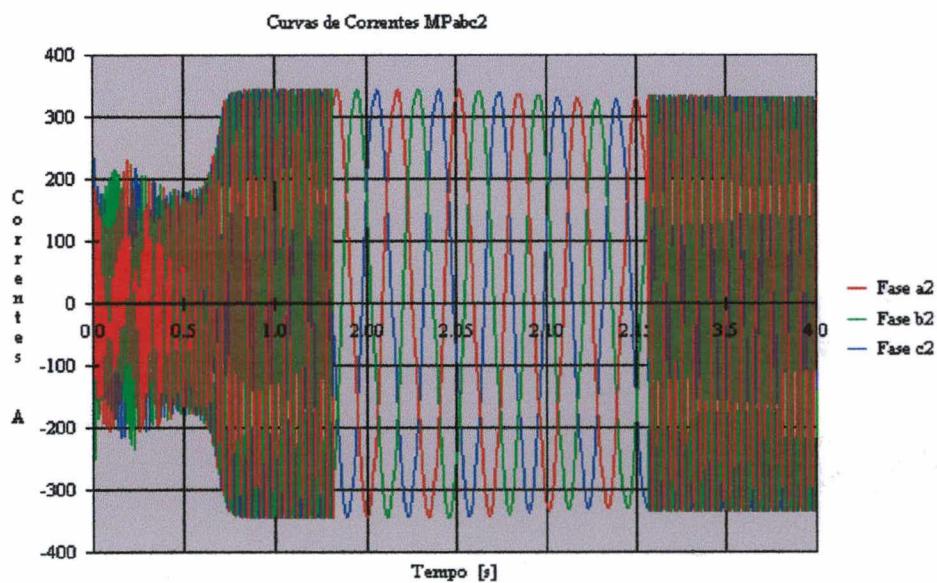


Figura 6.4.1.3 - Correntes no Rotor da MP e da MA [ipabc2=iaabc2] para Uma Variação do Torque Externo no Eixo da MATBCDA Funcionando como GERADOR

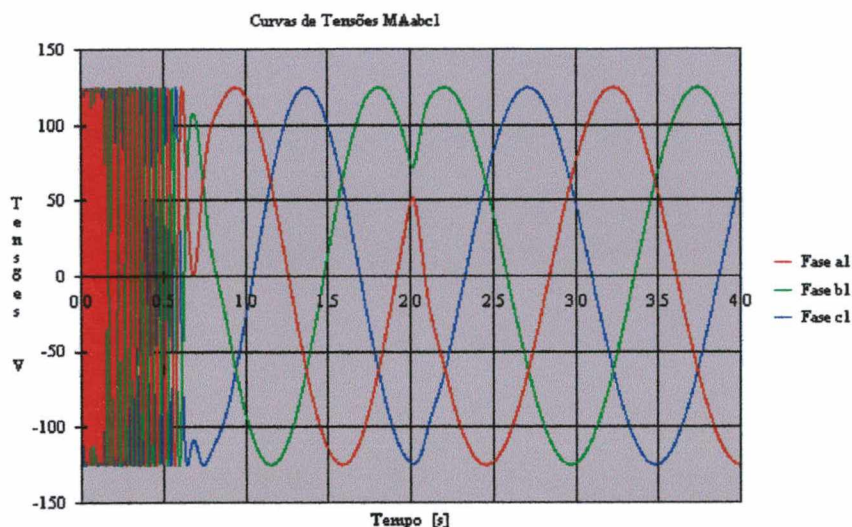


Figura 7.4.1.4 - Tensões Impostas no Estator da MA [uaabc1] para Uma Variação do Torque Externo no Eixo da MATBCDA Funcionando como GERADOR

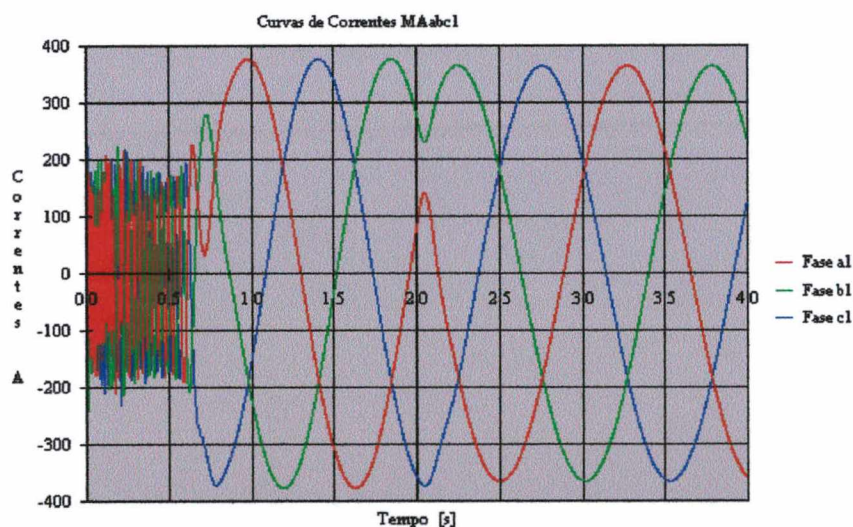


Figura 7.4.1.5 - Correntes no Estator da MA [iaabc1] para Uma Variação do Torque Externo no Eixo da MATBCDA Funcionando como GERADOR

Nos gráficos 6.4.1.4 e 6.4.1.5 observamos duas inversões de fases das tensões impostas e das correntes. A primeira ocorre entre 0,5s e 1s, quando a MATBCDA passa do regime motor para gerador, isto é, a rotação é maior que a síncrona. A Segunda inversão ocorre em torno de 2s quando o torque externo é retirado e a MATBCDA passa a funcionar como motor com rotação abaixo da síncrona.

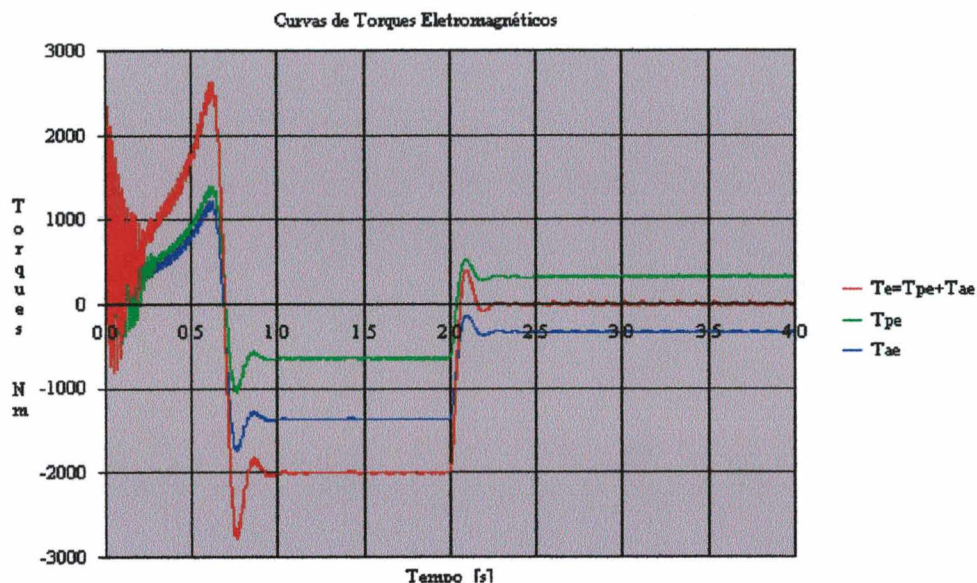


Figura 6.4.1.6 - Torques Eletromagnéticos em Função do Tempo para Uma Variação do Torque Externo no Eixo da MATBCDA Funcionando como GERADOR

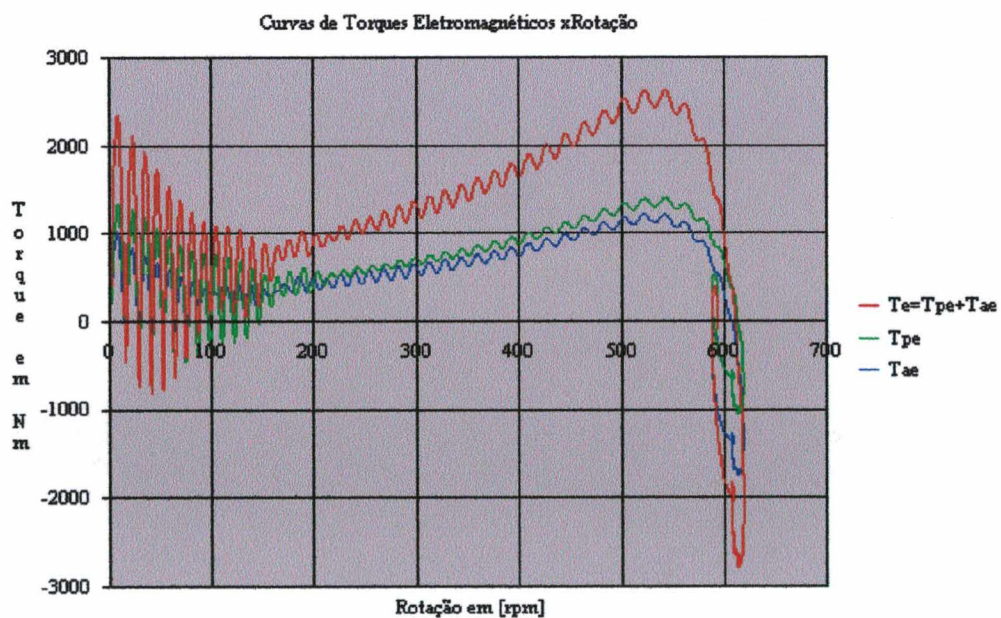


Figura 6.4.1.7 - Torques Eletromagnéticos em Função da Rotação para Uma variação do Torque Externo no Eixo da MATBCDA Funcionando como GERADOR

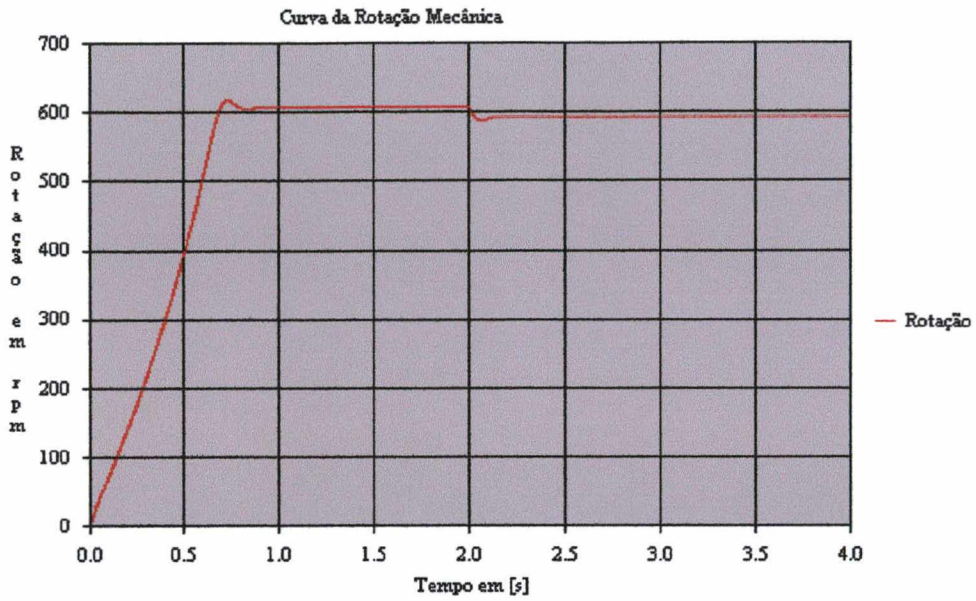


Figura 6.4.1.8 - Rotação Mecânica para Uma Variação do Torque Externo no Eixo da MATBCDA Funcionando como GERADOR

6.4.2 Variação da Amplitude da Tensão Imposta pelo Conversor

Nesta simulação faremos as mesmas considerações do parágrafo anterior, ou seja, a MATBCDA será acelerada do repouso até a rotação de trabalho (acima da Síncrona) pela Máquina Primária considerando neste caso o torque externo constante e igual a -2000 Nm.

A tensão imposta ao estator da MA será variado em forma de degrau, conforme mostrado na **Figura 6.4.2.1**, abaixo.

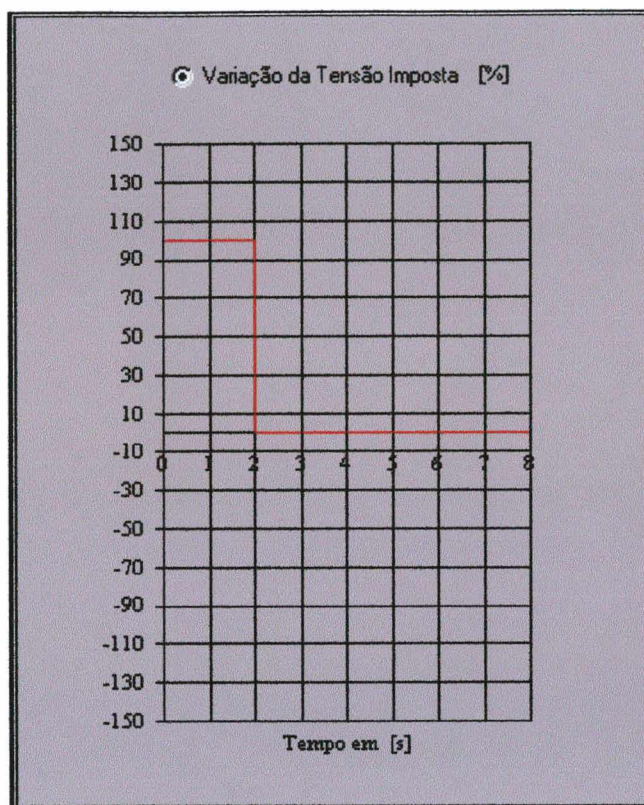


Figura 6.4.2.1 - Variação da Tensão Imposta ao Estator da MA

Foram setados os seguintes parâmetros:

- Torque Externo = - 2000 N (CONSTANTE)
- $J_{MATBCDA} = 15,0 \text{ kgm}^2$
- $J_{CARGA} = 20,0 \text{ kgm}^2$
- $B_{VISCOSIDADE} = 0,01 \text{ Nms/rad}$
- Rotação Inicial = 0 rpm
- Resistência Externa $R_{acad} = 0$
- Amplitude Máxima da Tensão Imposta = 50 Volts
- Constante de Fase da Tensão Imposta = -90°
- Intervalo de Integração = 0 a 4 Segundos

Os gráficos mostrados nas Figuras 6.4.2.2 a 6.4.2.8 mostram o comportamento dinâmico da MATBCDA funcionando como gerador.

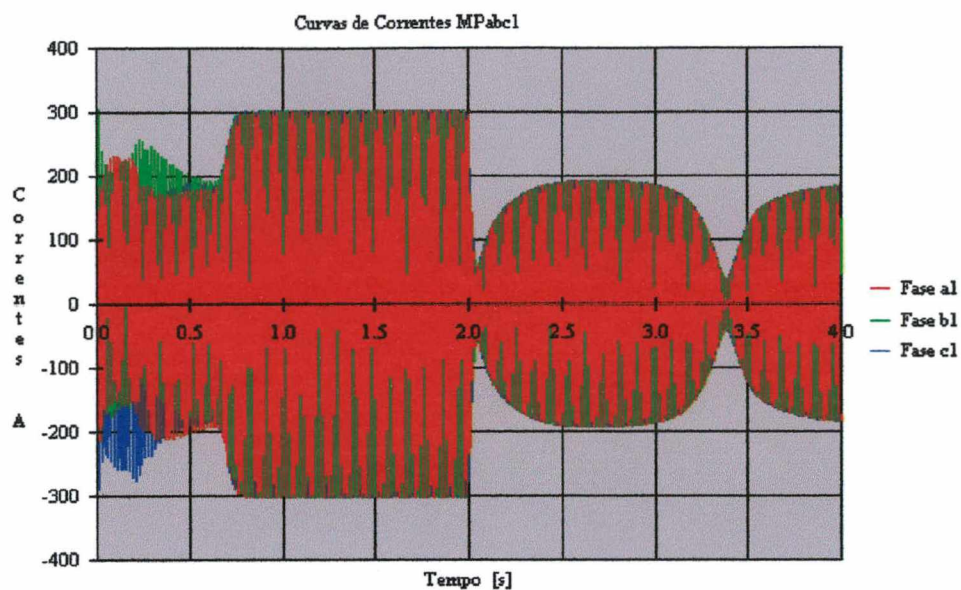


Figura 6.4.2.2 - Correntes no Estator da MP [ipabc1] para Uma Variação da Tensão Imposta ao Estatore da MA da MATBCDA Funcionando como GERADOR

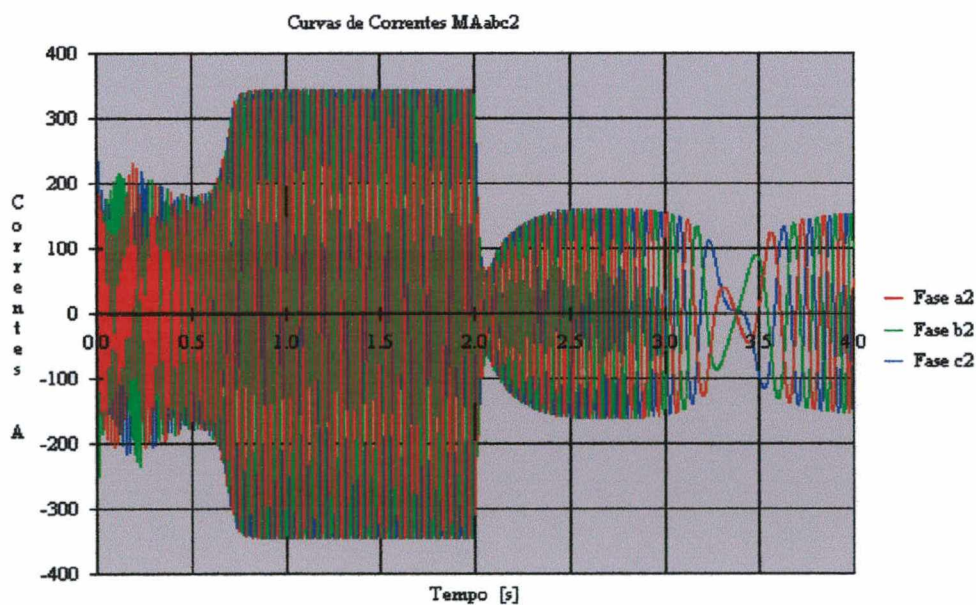


Figura 6.4.2.3 - Correntes no Rotor da MP e da MA [ipabc2=iaabc2] para Uma Variação da Tensão Imposta no Estatore da MA da MATBCDA Funcuinando como GERADOR

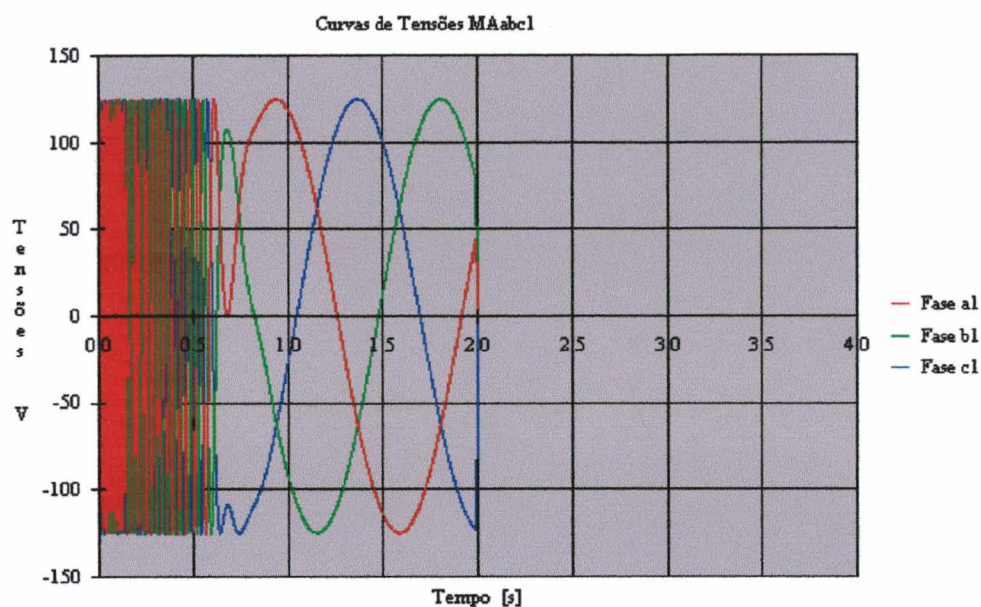


Figura 6.4.2.4 - Tensões Impostas ao Estator da MA da MATBCDA [uaabc1] Funcionando como GERADOR

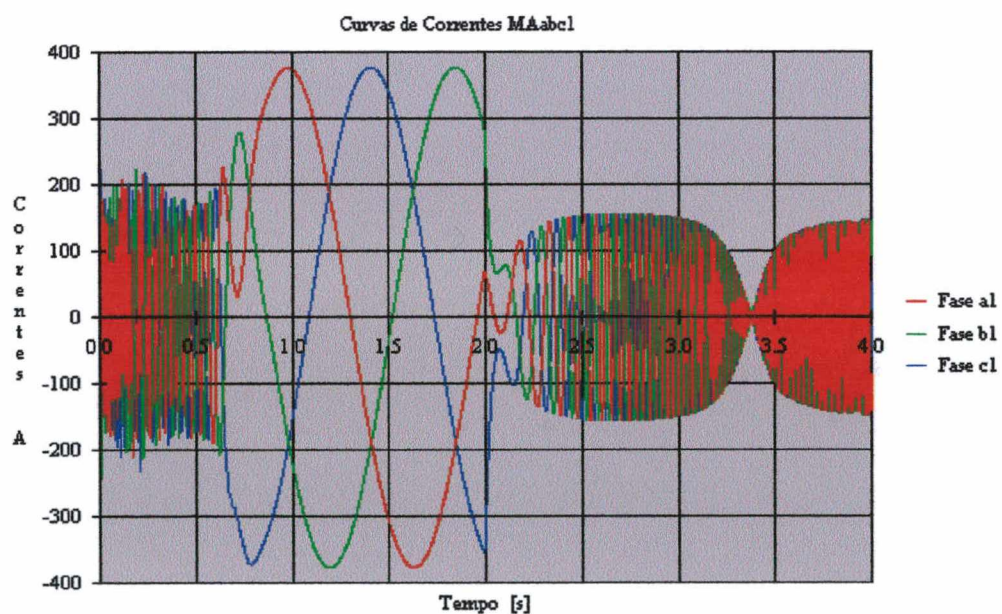


Figura 6.4.2.5 - Correntes no Estator da MA [iaabc1] para uma Variação da Tensão Imposta no Estator da MA da MATBCDA Funcionando como GERADOR

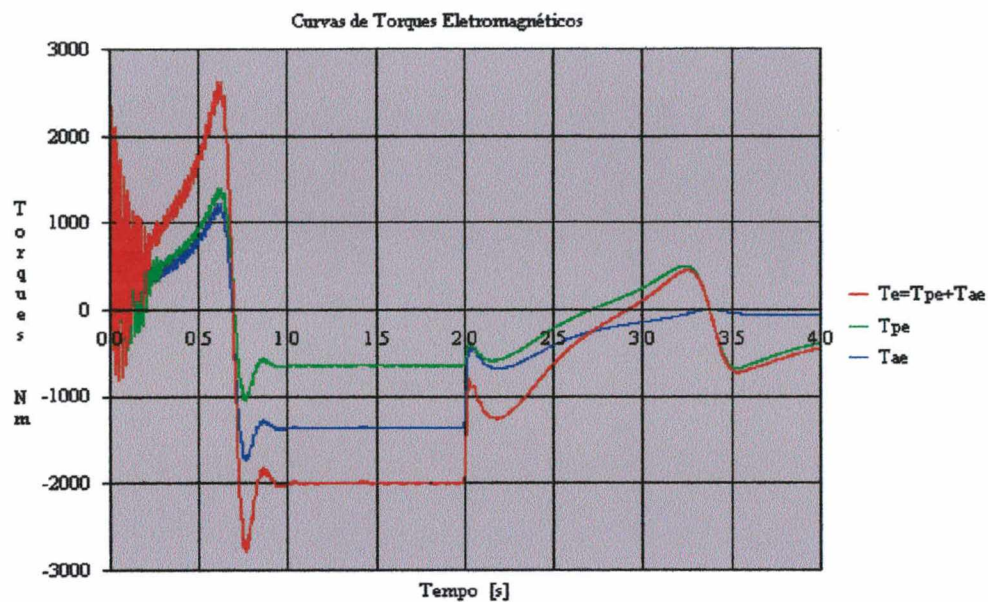


Figura 6.4.2.6 - Torques Eletromagnéticos em Função do Tempo para Uma Variação da Tensão Imposta ao Estator da MA da MATBCDA Funcionando como GERADOR

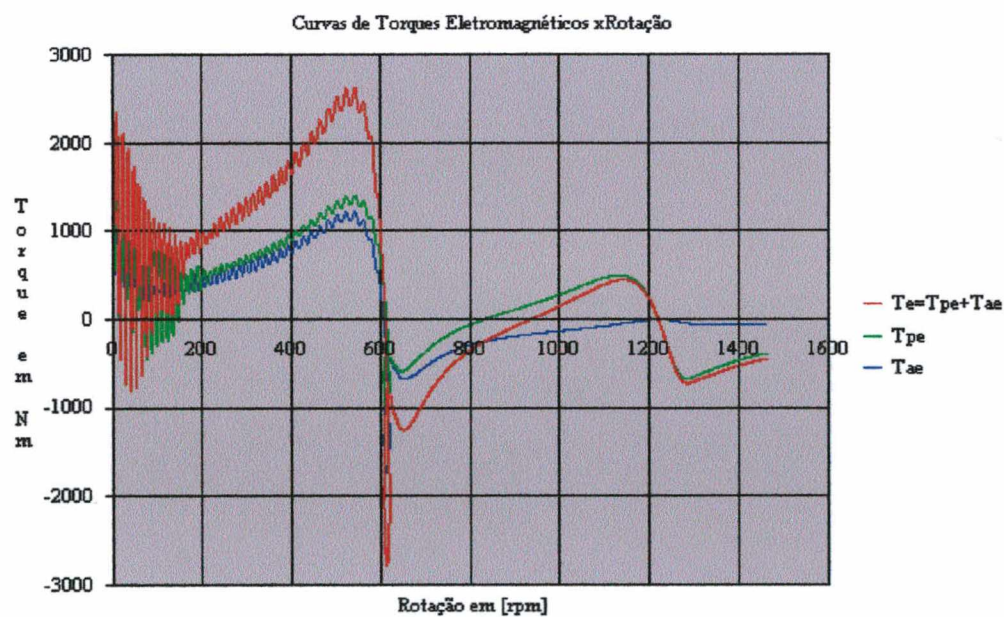


Figura 6.4.2.7 - Torques Eletromagnéticos em Função da Rotação para Uma Variação da Tensão Imposta ao Estator da MA da MATBCDA funcionando como GERADOR

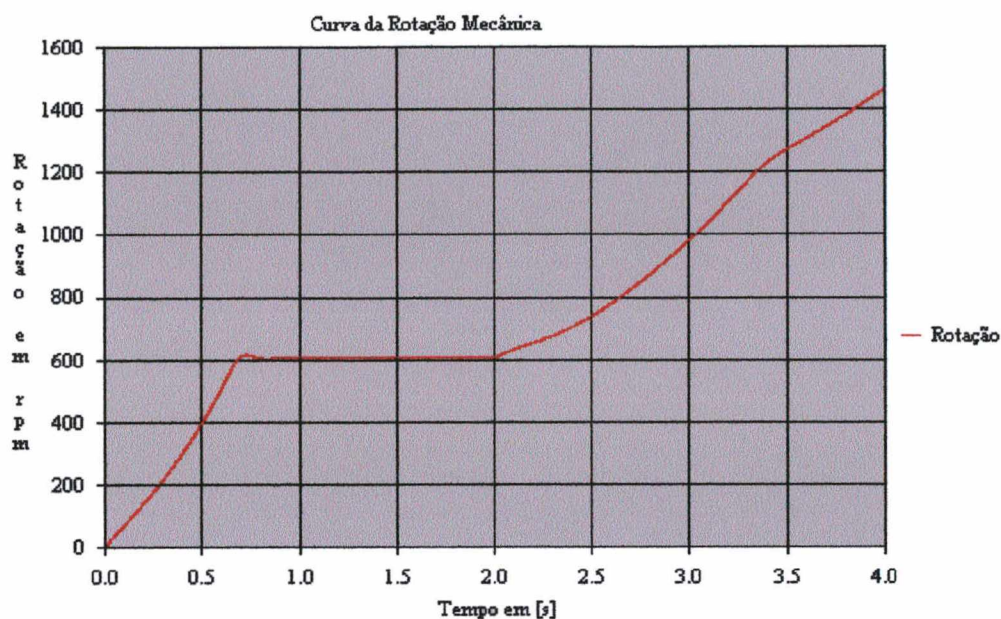


Figura 6.4.2.8 - Rotação Mecânica em Função do Tempo para Uma Variação da Tensão Imposta ao Estator da MA da MATBCDA Funcionando como GERADOR

Analisando os gráficos 6.4.2.2 a 6.4.2.8 observamos que a MATBCDA após ter acelerado entrou em regime gerador. Após a retirada da tensão imposta, que ocorreu no instante 2s ela perdeu a capacidade de manter o torque e como consequência começou a disparar, isto é, aumentar a velocidade, por ação do torque externo.

CAPÍTULO 7 - MODELO EM REGIME PERMANENTE DA MATBCDA

7.1 INTRODUÇÃO

No **Capítulo 5** elaboramos um modelo dinâmico da MATBCDA. No **Capítulo 6** usamos este modelo para fazer algumas simulações dinâmicas. Para podermos fazer uma análise completa da MATBCDA precisamos elaborar um modelo para o REGIME PERMANENTE.

Neste capítulo iremos desenvolver um modelo para a MATBCDA baseado no circuito equivalente "T" paralelo. Na elaboração deste circuito será levado em conta apenas a harmônica fundamental, isto é, " $v_1 = I$ ". Este circuito deverá levar em consideração que as duas máquinas, trabalham em regime acopladas elétrica e mecanicamente.

Com este modelo é possível se fazer análise da máquina funcionando em regime permanente como MOTOR ou como GERADOR, para qualquer condição de carga com o fator de potência indutivo ou capacitivo.

No texto deste capítulo adotaremos letras **maiúsculas** para os parâmetros referidos ao ESTATOR e letras **minúsculas** para os referidos ao ROTOR.

Para facilitar a compreensão analisaremos separadamente o circuito equivalente a máquina principal e auxiliar e finalmente as duas conectadas.

7.2 CIRCUITO EQUIVALENTE DA MATBCDA

7.2.1 Circuito Equivalente da Máquina Principal

Considerando que o enrolamento do estator é estacionário e o do rotor gira na velocidade " n " de rotação da máquina podemos representar a máquina principal por um circuito equivalente móvel onde o rotor está acoplado eletromagneticamente ao estator através do fluxo " Φ_p " no entreferro da máquina.

A **Figura 7.2.1.1** abaixo mostra o circuito equivalente móvel por fase da máquina principal.

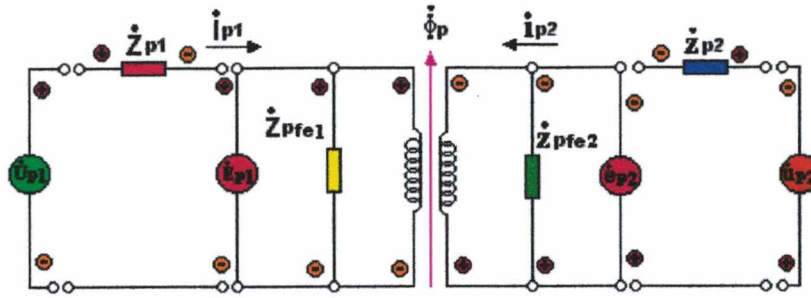


Figura 7.2.1.1 - Circuito Equivalente com Rotor Móvel Por Fase da Máquina Principal

Os parâmetros representados no circuito acima significam:

a) Tensão de Fase do Estator $[\dot{U}_{p1}]$

É a tensão aplicada ao enrolamento do estator da máquina principal " \dot{U}_{p1} " é considerada de fase e é o fasor de referência, ou seja:

$$\dot{U}_{p1} = U_{p1} \left| \theta_{U_{p1}} \right. \quad (7.2.1.1)$$

Onde:

$$\theta_{U_{p1}} = 0 \quad (\text{REFERÊNCIA})$$

A frequência do fasor " \dot{U}_{p1} " é igual a frequência da rede, ou seja:

$$f_{p1} = f_{rede} \quad (7.2.1.2)$$

b) Impedância de Fase do Estator $[\dot{Z}_{p1}]$

Esta impedância leva em conta a resistência " R_{p1} " e a reatância de dispersão " X_{p1} " por fase do estator. A reatância de dispersão é gerada devido ao fluxo de dispersão " ϕ_{p1} " do enrolamento do estator, e é calculada para a frequência " f_{p1} " do estator.

$$\dot{Z}_{p1} = R_{p1} + j X_{p1} \quad (7.2.1.3)$$

A resistência " R_{p1} " é referida para 140°C.

c) Impedância de Fase do Rotor $[\dot{z}_{p2}]$

Esta impedância leva em conta a resistência " r_{p2} " e a reatância de dispersão " x_{p2} " por fase do rotor. A reatância de dispersão é devido ao fluxo de dispersão do rotor " ϕ_{p2} " e é calculada para a frequência " f_{p1} " do estator.

$$\dot{z}_{p2} = r_{p2} + j s_p x_{p2} \quad (7.2.1.4)$$

A resistência " r_{p2} " é referida a 140°C.

O escorregamento " s_p " da máquina principal é dado pela equação (3.4.1.1), ou seja:

$$s_p = \frac{n_{sp} - n}{n_{sp}} \quad (7.2.1.5)$$

A rotação síncrona " n_{sp} " foi definido na equação (3.3.1.6).

d) Tensão Magnetizante de Fase no Lado do Estator $[\dot{E}_{p1}]$

Esta tensão é responsável pela geração do fluxo no entreferro da máquina " ϕ_p ". Esta tensão aparece no ramo magnetizante do circuito equivalente e é representada pelo fasor " \dot{E}_{p1} ". É dado por:

$$\dot{E}_{p1} = \dot{U}_{p1} - \dot{Z}_{p1} \dot{I}_{p1} \quad (7.2.1.6)$$

O seu módulo depende de alguns parâmetros construtivos da máquina e pode ser calculado por:

$$E_{p1} = \frac{\sqrt{2} \pi}{2} \cdot f_{p1} \cdot f_{wp1} \cdot N_{condp1} \phi_p \quad (7.2.1.7)$$

Onde:

f_{wp1} = Fator de bobinagem do estator da máquina principal

N_{condp1} = Número de condutores em série por fase do estator da Máquina Principal

e) Tensão Magnetizante de Fase no Lado do Rotor $[\dot{e}_{p2}]$

A tensão magnetizante " \dot{e}_{p2} " visto do lado do rotor depende do escorregamento " s_p ".

Considerando a relação de transformação das tensões ESTATOR / ROTOR como sendo:

$$k_{pe} = \frac{E_p}{e_{pb}} = \frac{m_{p1}}{m_{p2}} \cdot \frac{f_{wp1} \cdot N_{condp1}}{f_{wp2} \cdot N_{condp2}} \quad (7.2.1.8)$$

Onde:

E_p = Representa a tensão magnetizante visto do lado do estator

e_{pb} = Representa a tensão magnetizante vista do lado do rotor considerando o rotor parado (bloqueado)

Portanto o fasor " \dot{e}_{pb} " pode ser calculado como:

$$\dot{e}_{pb} = \frac{1}{k_{p2}} \cdot \dot{E}_{p2} \quad (7.2.1.9)$$

Onde:

$\dot{E}_{p2} = -\dot{E}_{p1}$ Representa a tensão magnetizante refletida ao rotor

Considerando agora que o nosso rotor não é fixo, isto é, está girando com uma velocidade " n ", a tensão magnetizante vista no lado do rotor é dada por:

$$\dot{e}_{p2} = s_p e_{pb} = \frac{s_p}{k_{pe}} \cdot \dot{E}_{p2} \quad (7.2.1.10)$$

O módulo de " \dot{e}_{pb} " pode ser calculado por:

$$e_{pb} = \frac{\sqrt{2} \pi}{2} \cdot f_{p1} \cdot f_{wp2} \cdot N_{condp2} \cdot \phi_p \quad (7.2.1.11)$$

Onde:

f_{p1} = Frequência estatórica

f_{wp2} = Fator de bobinagem rotor da máquina principal

N_{condp2} = Número de condutores em série por fase do rotor

f) Impedância de Perdas no Ferro do Estator [\dot{Z}_{pfe1}]

Através desta impedância, introduzimos as perdas no ferro do estator no circuito equivalente.

$$\dot{Z}_{pfe1} = R_{pfe1} + j0 \quad (7.2.1.12)$$

A resistência de perdas no ferro " R_{pfe1} " é determinado por:

$$R_{pfe1} = \frac{3 E_{p1}^2}{P_{pfe1}} \quad (7.2.1.13)$$

Onde:

P_{pfe1} = Perdas no ferro medido com a máquina girando em vazio. Ver relatório de ensaio no Apêndice A.

g) Impedância de Perdas no Ferro do Rotor [\dot{Z}_{pfe2}]

Esta impedância é introduzida no circuito equivalente para levar em conta as perdas no ferro do rotor. A MATBCDA normalmente trabalha em rotações próximas da velocidade síncrona da cascata " n_{sc} " onde a frequência no rotor é aproximadamente a metade da frequência da rede de alimentação, e nestas condições a perda no ferro do rotor não pode ser desprezado.

$$\dot{Z}_{pfe2} = \frac{r_{pfe2}}{|S_p|} + j0 \quad (7.2.1.14)$$

A resistência das perdas no ferro " r_{pfe2} " é determinado por:

$$r_{pfe2} = \frac{3 e_{pb2}}{P_{pfe2}} \quad (7.2.1.15)$$

Onde a perda no ferro do rotor " P_{pfe2} " é dado por:

$$P_{pfe2} = P_{pfeb} - P_{pfe1} \quad (7.2.1.16)$$

Onde:

P_{pfeb} = Perdas no ferro medida com rotor bloqueado e circuito secundário aberto, aplicando-se ao estator a tensão nominal. Ver relatório de ensaio no Apêndice A

h) Tensão de Fase nos Terminais do Rotor $[\dot{u}_{p2}]$

A tensão " \dot{u}_{p2} " é a tensão medida nos terminais do rotor. Esta tensão depende do escorregamento e é dado por:

$$\dot{u}_{p2} = (s_p \cdot e_{pb} - \dot{z}_{p2} \cdot \dot{i}_{p2}) \quad (7.2.1.17)$$

Considerando agora o rotor imóvel obtemos o circuito equivalente estacionário da máquina principal. A **Figura 7.2.1.2** mostra o circuito equivalente, estacionário.

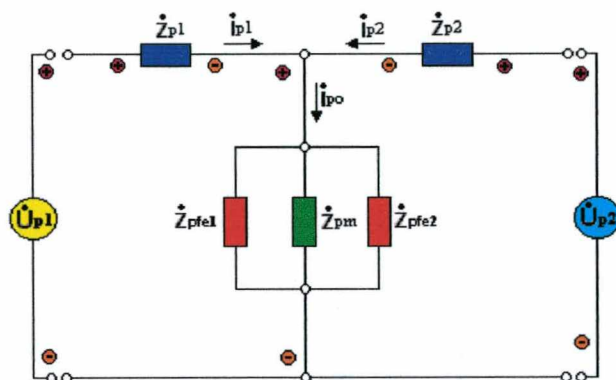


Figura 7.2.1.2 - Circuito Equivalente com Rotor Imóvel Por Fase da Máquina Principal

Os parâmetros do rotor estão referidos ao estator. As impedâncias são dadas por:

$$\dot{Z}_{p1} = R_{p1} + j X_{p1} \quad (7.2.1.18)$$

$$\dot{Z}_{p2} = \frac{R_{p2}}{s_p} + j X_{p2} \quad (7.2.1.19)$$

$$\dot{Z}_{pfe1} = R_{pfe1} + j 0 \quad (7.2.1.20)$$

$$\dot{Z}_{pfe2} = \frac{R_{pfe2}}{|s_p|} + j 0 \quad (7.2.1.21)$$

$$\dot{Z}_{pm} = 0 + j X_{pm} \quad (7.2.1.22)$$

Onde o termo " X_{pm} " representa a reatância magnetizante da máquina. Esta reatância substitui o acoplamento eletromagnético dada pelo fluxo " ϕ_p " no circuito equivalente com rotor MÓVEL, pelo acoplamento elétrico entre o estator e o rotor no circuito equivalente com o rotor imóvel. Para referenciar os parâmetros do rotor ao estator usamos as seguintes constantes de transformação:

PARA A TENSÃO:

$$k_{pe} = \frac{E_p}{e_{pb}} \quad (7.2.1.23)$$

PARA A CORRENTE:

$$k_{pi} = \frac{I_p}{i_p} = \frac{1}{k_{pe}} \quad (7.2.1.24)$$

PARA A IMPEDÂNCIA:

$$k_{pz} = \frac{Z_p}{z_p} = (k_{pe})^2 \quad (7.2.1.25)$$

Uma vez definido os parâmetros do circuito equivalente da máquina principal é possível desenhar o diagrama fasorial.

Para desenhar o diagrama fasorial consideramos os seguintes fasores, todos referidos ao estator:

Tensão de Fase do Estator (Fasor de Referência)

$$\dot{U}_{p1} = U_{p1} \left| \underline{0^\circ} \right.$$

Tensão de Fase do Rotor

$$\dot{U}_{p2} = U_{p2} \left| \underline{\theta_{Up2}} \right.$$

Tensão Magnetizante de Fase refletida ao Estator

$$\dot{E}_{p1} = E_{p1} \left| \underline{\theta_{Ep1}} \right.$$

Tensão Magnetizante de Fase refletida ao Rotor

$$\dot{E}_{p2} = E_{p2} \left| \underline{\theta}_{Ep2} \right.$$

Corrente de Fase do Estator

$$\dot{I}_{p1} = I_{p1} \left| \underline{\theta}_{Ip1} \right.$$

Corrente de Fase do Rotor

$$\dot{I}_{p2} = I_{p2} \left| \underline{\theta}_{Ip2} \right.$$

Corrente de Fase do Ramo em Vazio

$$\dot{I}_{p0} = I_{p0} \left| \underline{\theta}_{Ip0} \right.$$

Fluxo no Entreferro

$$\dot{\Phi}_p = \Phi_p \left| \underline{\theta}_{\phi p} \right.$$

A **Figura (7.2.1.3)** abaixo mostra o diagrama fasorial motor da máquina principal, para FP Indutivo.

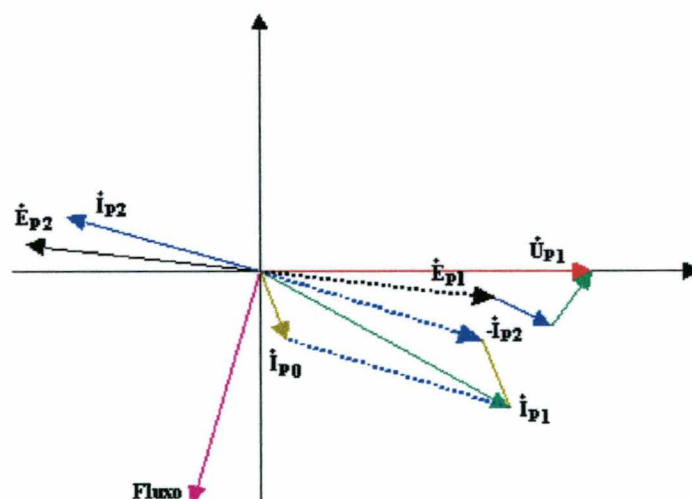
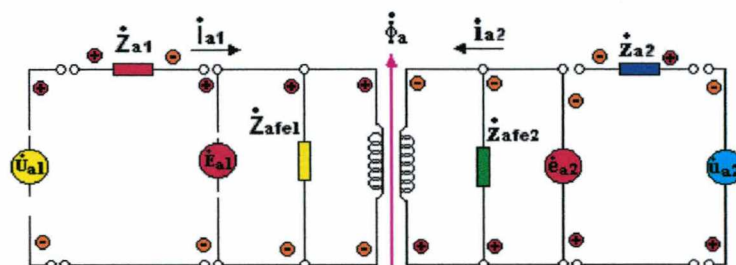


Figura 7.2.1.3 - Diagrama Fasorial Motor da Máquina Principal para FP Indutivo

7.2.2 Circuito Equivalente da Máquina Auxiliar

O circuito equivalente móvel da máquina auxiliar é análogo ao da máquina principal.

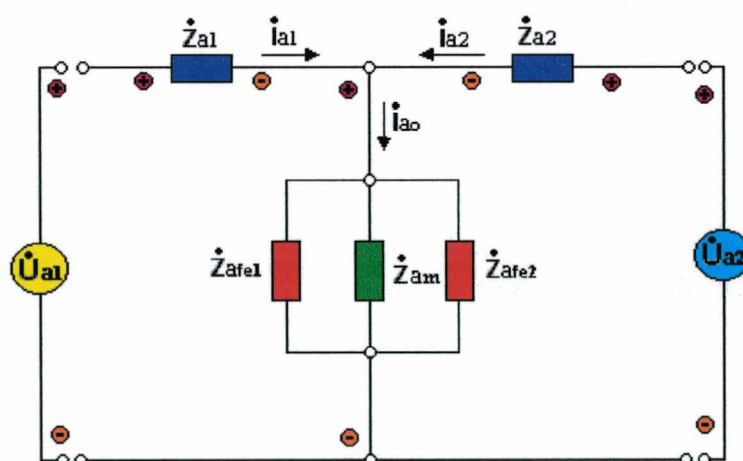
Na **Figura 7.2.2.1** abaixo mostramos o circuito equivalente com o rotor móvel da máquina auxiliar.



**Figura 7.2.2.1 - Circuito Equivalente com Rotor Móvel
Por Fase da Máquina Auxiliar**

Todos os parâmetros do circuito equivalente móvel tem o mesmo significado dos da máquina principal mostrados no parágrafo anterior das letras “a” até “h”. Na notação a letra “p” é substituída pela letra “a”.

Considerando o rotor imóvel obtemos o circuito equivalente estacionário da máquina auxiliar. A **Figura 7.2.2.2**, abaixo mostra o circuito equivalente.



**Figura 7.2.2.2 - Circuito Equivalente com Rotor Imóvel
Por Fase da Máquina Auxiliar**

Os parâmetros do rotor estão referidos ao estator.

As impedâncias são dadas por:

$$\dot{Z}_{a1} = R_{a1} + j X_{a1} \quad (7.2.2.1)$$

$$\dot{Z}_{a1} = \frac{R_{a2}}{s_a} + j X_{a2} \quad (7.2.2.2)$$

$$Z_{apfe1} = R_{afe1} + j0 \quad (7.2.2.3)$$

$$Z_{apfe2} = \frac{R_{afe2}}{|s_a|} + j0 \quad (7.2.2.4)$$

$$Z_{am} = 0 + j X_{am} \quad (7.2.2.5)$$

Onde " X_{am} " representa a reatância magnetizante da máquina auxiliar.

Para referenciar os parâmetros do rotor ao estator usamos as seguintes constantes de transformação:

PARA A TENSÃO:

$$k_{ae} = \frac{E_a}{e_{ab}} \quad (7.2.2.6)$$

PARA A CORRENTE:

$$k_{ai} = \frac{I_a}{i_a} = \frac{I}{k_{a2}} \quad (7.2.2.7)$$

PARA A IMPEDÂNCIA:

$$k_{az} = \frac{Z_a}{z_a} = (k_{ae})^2 \quad (7.2.2.8)$$

Para desenhar o diagrama fasorial consideramos os seguintes fasores, todos referidos ao estator:

Tensão de Fase do Estator (Fasor de Referência $\theta U_{p1} = 0^\circ$)

$$\dot{U}_{a1} = U_{a1} \left| \underline{\theta}_{U_{a1}} \right.$$

Tensão de Fase nos terminais do rotor

$$\dot{U}_{a2} = U_{a2} \left| \underline{\theta}_{U_{a2}} \right.$$

Tensão Magnetizante de Fase refletida ao Estator

$$\dot{E}_{a1} = E_{a1} \left| \underline{\theta}_{E_{a1}} \right.$$

Tensão Magnetizante de Fase refletida ao Rotor

$$\dot{E}_{a2} = E_{a2} \left| \underline{\theta}_{E_{a2}} \right.$$

Corrente de Fase do Estator

$$\dot{I}_{a1} = I_{a1} \left| \underline{\theta}_{I_{a1}} \right.$$

Corrente de Fase do Rotor

$$\dot{I}_{a2} = I_{a2} \left| \underline{\theta}_{I_{a2}} \right.$$

Corrente de Fase do Ramo em Vazio

$$\dot{I}_{a0} = I_{a0} \left| \underline{\theta}_{I_{a0}} \right.$$

Fluxo no Entreferro

$$\dot{\Phi}_a = \Phi_a \left| \underline{\theta}_{\phi_a} \right.$$

A **Figura 7.2.2.3**, abaixo mostra o diagrama fasorial motor da máquina auxiliar, para FP Indutivo.

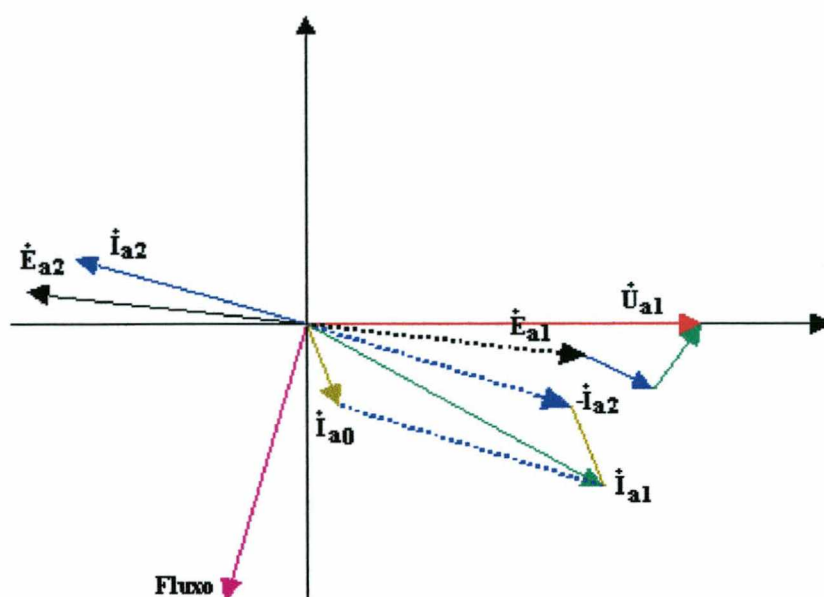


Figura 7.2.2.3 - Diagrama Fasorial Motor da Máquina Auxiliar para FP Indutivo

7.2.3 Circuito Equivalente da MATBCDA

Neste parágrafo consideremos as duas máquinas conectadas em cascata pelo rotor na ligação “MAIS”.

A **Figura 7.2.3.1** abaixo mostra o circuito equivalente móvel das duas máquinas conectadas em cascata.

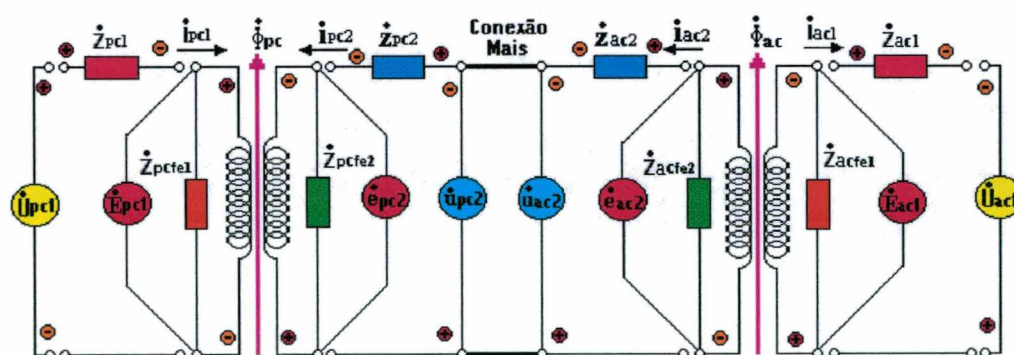


Figura 7.2.3.1 - Circuito Equivalente Móvel Por Fase da MATBCDA

Os parâmetros representados no circuito acima já foram comentados nos parágrafos (7.2.1) e (7.2.2). Devido a conexão série dos dois rotores a corrente que percorre os dois rotores é a mesma, ou seja:

$$i_{pc2} = i_{ac2} \quad (7.2.3.1)$$

Para podermos representar as máquinas conectadas por um circuito equivalente estacionário devemos referir todos os parâmetros ao estator da máquina principal.

Para referir os parâmetros ao estator da máquina principal usaremos as seguintes constantes.

a) Para os Parâmetros do Rotor da Máquina Principal

Para referir, tensões, correntes e impedâncias do rotor da máquina principal ao estator usaremos as mesmas constantes de transformação discutidos no parágrafo (7.2.1), ou seja:

PARA A TENSÃO:

$$k_{pce} = k_{pe} \quad (7.2.3.2)$$

PARA A CORRENTE:

$$k_{pci} = k_{pi} \quad (7.2.3.3)$$

PARA A IMPEDÂNCIA:

$$k_{pcz} = k_{pz} \quad (7.2.3.4)$$

b) Para os Parâmetros do Rotor da Máquina Auxiliar

Como o rotor da máquina auxiliar está conectada em série com o rotor da máquina principal as constantes de transformação são as mesmas do rotor da máquina principal.

c) Para os Parâmetros do Estator da Máquina Auxiliar

Para referir as grandezas do estator da máquina auxiliar ao estator da máquina principal devemos primeiro referir ao rotor e em seguida ao estator da máquina principal, ou seja:

PARA A TENSÃO:

$$k_{ace} = \frac{k_{pe}}{k_{ae}} \quad (7.2.3.5)$$

PARA A CORRENTE:

$$k_{aci} = \frac{k_{pi}}{k_{ai}} \quad (7.2.3.6)$$

PARA A IMPEDÂNCIA:

$$k_{acz} = \frac{k_{pz}}{k_{az}} \quad (7.2.3.7)$$

A Figura 7.2.3.2 a seguir mostra o circuito equivalente estacionário da MATBCDA.

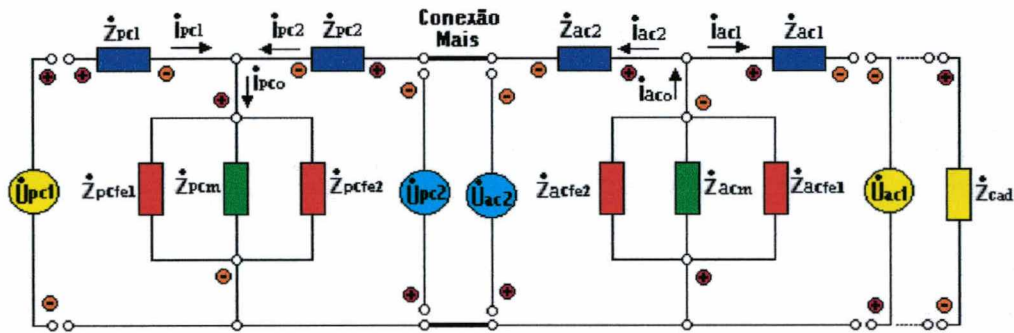


Figura 7.2.3.2 - Circuito Equivalente Imóvel Por Fase da MATBCDA

As impedâncias do circuito acima são dados por:

Para o lado da Máquina Principal

$$Z_{pc1} = R_{p1} + j X_{p1} \quad (7.2.3.8)$$

$$\dot{Z}_{pc2} = k_{pcz} \left(\frac{r_{p2}}{s_p} + j x_{p2} \right) \quad (7.2.3.9)$$

$$\dot{Z}_{pfe1} = R_{pfe1} + j O \quad (7.2.3.10)$$

$$\dot{Z}_{pcfe2} = \frac{R_{pfe2}}{|s_p|} + j O \quad (7.2.3.11)$$

$$\dot{Z}_{pcm} = O + j X_{pm} \quad (7.2.3.12)$$

Para o lado da Máquina Auxiliar

$$\dot{Z}_{ac1} = k_{acz} \left(\frac{R_{a1}}{s_a} + j X_{a1} \right) \quad (7.2.3.13)$$

$$\dot{Z}_{ac2} = k_{pcz} \left(\frac{r_{a2}}{s_p} + j x_{a2} \right) \quad (7.2.3.14)$$

$$\dot{Z}_{acfe1} = k_{acz} \left(\frac{R_{afe1}}{|s_a|} + j O \right) \quad (7.2.3.15)$$

$$\dot{Z}_{acfe2} = k_{acz} \left(\frac{R_{afe2}}{|s_p|} + j O \right) \quad (7.2.3.16)$$

$$\dot{Z}_{acm} = k_{acz} (O + j X_{am}) \quad (7.2.3.17)$$

$$\dot{Z}_{cad} = k_{acz} \left(\frac{R_{acad}}{s_a} + j X_{acad} \right) \quad (7.2.3.18)$$

Onde:

Z_{cad} = É a impedância adicional já referida ao estator da Máquina Principal

R_{acad} = É a resistência adicional ligada ao estator da MA da MATBCDA

X_{acad} = É a reatância adicional ligada ao estator da MA da MATBCDA

No circuito equivalente da **Figura 7.2.3.2** estão mostrados também as tensões no estator e rotor das máquinas principal e auxiliar com suas respectivas polaridades.

7.3 FUNCIONAMENTO EM REGIME DA MATBCDA

O objetivo deste parágrafo é estudar o funcionamento da MATBCDA em regime analisando o fluxo de potência e os torques nas seguintes condições:

- Estator da máquina auxiliar ligada em curto-circuito*
- Estator da máquina auxiliar ligado a um banco de resistor*
- Estator da máquina auxiliar ligado à rede através de um conversor de frequência*

A fluxo de potência entre as duas máquinas e o eixo pode ser representado esquematicamente conforme mostrado na **Figura 7.3.1**, abaixo:

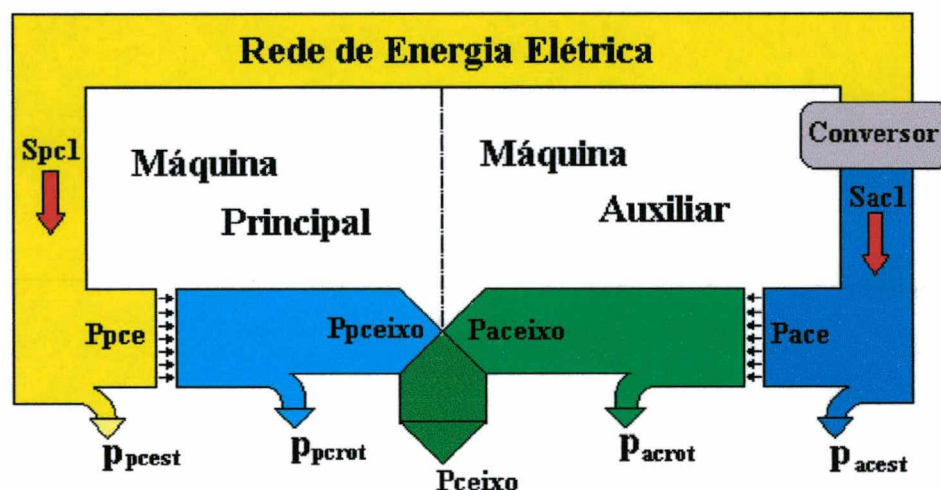


Figura 7.3.1 - Fluxo de Potências Entre as Duas Máquinas e o Eixo da MATBCDA

Quando a máquina está operando com o estator em curto-circuito ou conectada a um banco de resistores a potência " \dot{S}_{acl} " é nula, isto é, não há fluxo de potência entre a rede elétrica e o estator da máquina auxiliar. Porém, quando o estator da máquina auxiliar está ligado à rede através de um conversor de frequência, a potência " \dot{S}_{acl} " não é nula.

A potência fornecida pela rede ao estator da MA através do conversor é considerada positiva, e a potência transferida do estator da MA para a rede através do conversor é considerada negativa.

Através do conversor é possível controlar o funcionamento da MATBCDA. A grande vantagem é poder controlar o funcionamento em determinada condição de carga (torque externo) com um fator de potência pré-estabelecido.

7.3.1 Estator da Máquina Auxiliar Ligada em Curto-Circuito

Nesta condição de trabalho em regime a impedância " \dot{Z}_{ac1} " e a tensão " \dot{U}_{ac1} " no circuito equivalente da Figura 7.2.3.2 são nulas.

Resolvendo o circuito equivalente para cada ponto de rotação " n " obtém-se facilmente as correntes em cada ramo do circuito.

Uma vez conhecido as correntes " \dot{I}_{pc1} ", " \dot{I}_{pc2} ", " \dot{I}_{pco} ", " \dot{I}_{ac1} ", " \dot{I}_{ac2} " e " \dot{I}_{aco} " é possível calcular as perdas e as potências envolvidas no processo eletromecânico de transformação de energia.

Todas as correntes mencionadas acima estão referidas ao estator da MP.

A potência absorvida pelo estator da máquina principal da rede " \dot{S}_{pc1} " é dado por:

$$\dot{S}_{pc1} = 3 \cdot \dot{U}_{pc1} \cdot \bar{\dot{I}}_{pc1} \quad (7.3.1.1)$$

Onde:

$\bar{\dot{I}}_{pc1}$ = É o conjugado complexo de \dot{I}_{pc1}

A potência ativa é dada por:

$$P_{pc1} = R_e (\dot{S}_{pc1}) \quad (7.3.1.2)$$

A potência reativa é dada por:

$$Q_{pc1} = I_m (\dot{S}_{pc1}) \quad (7.3.1.3)$$

A potência eletromagnética ativa " P_{pce} " que atravessa o entreferro da máquina principal é dado por:

$$P_{pce} = P_{pc1} - P_{pcest} \quad (7.3.1.4)$$

Onde as perdas estatóricas são calculadas por:

$$P_{pcest} = P_{pcj1} + P_{pcfe1} + P_{pcsl} \quad (7.3.1.5)$$

Onde:

P_{pcj1} = Perdas joules no enrolamento do estator da máquina principal

P_{pfe1} = Perdas no ferro no estator da máquina principal

P_{pcs1} = Perdas suplementares no estator da máquina principal. Consideramos estas perdas zero no circuito equivalente da **Figura 7.2.3.2**

A partir dos parâmetros do circuito equivalente a potência eletromagnética " P_{pce} " pode ser calculada como:

$$P_{pce} = 3 \left[\frac{R_{pc2}}{s_p} \cdot I_{pc2}^2 + \frac{R_{ac2}}{s_p} \cdot I_{ac2}^2 + \frac{R_{ac1}}{s_a} \cdot I_{ac1}^2 \right] \quad (7.3.1.6)$$

Devido a conexão em cascata (série) dos dois rotores as correntes " I_{pc2} " e " I_{ac2} " são iguais.

As resistências " R_{pc2} ", " R_{ac2} " e " R_{ac1} " correspondem as resistências referidas ao estator da máquina principal, ou seja:

$$R_{pc2} = k_{pcz} \cdot r_{p2} \quad (7.3.1.7)$$

$$R_{ac2} = k_{pcz} \cdot r_{a2} \quad (7.3.1.8)$$

$$R_{ac1} = k_{acz} \cdot R_{a1} \quad (7.3.1.9)$$

O torque eletromagnético desenvolvido pela máquina principal é calculada como:

$$T_{pce} = \frac{P_{pce}}{2\pi n_{sp}} = P_{pce} \cdot \frac{P_p}{2\pi f_{rede}} \quad (7.3.1.10)$$

A partir dos parâmetros do circuito equivalente é dado por:

$$T_{pce} = \frac{3P_p}{2\pi f_{rede}} \left[\frac{R_{pc2}}{s_p} \cdot I_{pc2}^2 + \frac{R_{ac2}}{s_p} \cdot I_{ac2}^2 + \frac{R_{ac1}}{s_a} \cdot I_{ac1}^2 \right] \quad (7.3.1.11)$$

Uma vez calculada a potência eletromagnética, podemos calcular a potência mecânica no eixo " P_{pceixo} " desenvolvida pela máquina principal.

Como o rotor da máquina principal está conectado em série com o rotor da máquina auxiliar uma parcela de potência eletromagnética " P_{pce} " é transmitida à máquina auxiliar. Esta parcela é calculada como:

$$\dot{S}_{ac2} = 3 \cdot \dot{u}_{ac2} \cdot \bar{i}_{ac2} \quad (7.3.1.12)$$

Onde:

\dot{u}_{ac2} = Tensão medida nos terminais do rotor da máquina auxiliar

\bar{i}_{ac2} = Conjugado Complexo da Corrente medida nos terminais do rotor da máquina auxiliar

A componente ativa é dada por:

$$P_{ac2} = R_e (\dot{S}_{ca2}) \quad (7.3.1.13)$$

A componente reativa é dada por:

$$Q_{ac2} = I_m (\dot{S}_{ac2}) \quad (7.3.1.14)$$

Portanto a potência mecânica no eixo desenvolvida pela máquina principal fica:

$$P_{pceixo} = P_{pce} - P_{ac2} - P_{pccrot} \quad (7.3.1.15)$$

As perdas rotóricas são dadas por:

$$P_{pccrot} = P_{pcj2} + P_{pcfe2} + P_{psc2} \quad (7.3.1.16)$$

Onde:

P_{pcj2} = Perdas joules no rotor da máquina auxiliar

P_{pcfe2} = Perdas no ferro no rotor da máquina principal

P_{psc2} = Perdas suplementares no rotor da máquina principal.

Consideramos estas perdas zero no circuito equivalente da **Figura 7.2.3.2**

A potência mecânica calculada a partir dos parâmetros do circuito equivalente é dado por:

$$P_{peixo} = (1 - s_p) P_{pce} \quad (7.3.1.17)$$

Substituindo (7.3.1.6) em (7.3.1.17), temos:

$$P_{peixo} = 3(I - s_p) \left[\frac{R_{pc2}}{s_p} \cdot I_{pc2}^2 + \frac{R_{ac2}}{s_p} \cdot I_{ac2}^2 + \frac{R_{ac1}}{s_a} \cdot I_{ac1}^2 \right] \quad (7.3.1.18)$$

O torque mecânico desenvolvido no eixo pela máquina principal é dado por:

$$T_{peixo} = \frac{P_{peixo}}{2\pi n} \quad (7.3.1.19)$$

Em função dos parâmetros do circuito equivalente fica:

$$T_{peixo} = \frac{3(I - s_p)}{2\pi n} \left[\frac{R_{pc2}}{s_p} \cdot I_{pc2}^2 + \frac{R_{ac2}}{s_p} \cdot I_{ac2}^2 + \frac{R_{ac1}}{s_a} \cdot I_{ac1}^2 \right] \quad (7.3.1.20)$$

Analisamos agora o fluxo de potência na máquina auxiliar.

Como o estator da máquina auxiliar está em curto circuito, ela só recebe potência da máquina principal através do circuito rotórico. A potência aparente entregue aos seus terminais é dado pela equação (7.3.1.12). Portanto a potência eletromagnética " P_{ace} " que atravessa o entreferro da máquina auxiliar é dado por:

$$P_{ace} = P_{ac2} - P_{acrot} \quad (7.3.1.21)$$

As perdas rotóricas " P_{acrot} " é dado por:

$$P_{acrot} = P_{acj2} + P_{acfe2} + P_{acs2} \quad (7.3.1.22)$$

Onde:

P_{acj2} = Perdas joules no rotor da máquina auxiliar

P_{acfe2} = Perdas no ferro no rotor da máquina auxiliar

P_{acs2} = Perdas suplementares no rotor da máquina auxiliar. Consideramos estas perdas zero no circuito equivalente da **Figura 7.2.3.2**

A potência eletromagnética que atravessa o entreferro da máquina auxiliar " P_{ace} " em função dos parâmetros do circuito equivalente pode ser calculado como:

$$P_{ace} = 3 s_p \frac{R_{ac1} \cdot I_{ac1}^2}{s_a} \quad (7.3.1.23)$$

O torque eletromagnético desenvolvido pela máquina auxiliar é dado por:

$$T_{ace} = \frac{P_{ace}}{2\pi n_{sa} \times s_p} = \frac{1}{s_p} \cdot \frac{P_{ace}}{2\pi n_{sa}} = \frac{1}{s_p} \cdot \frac{P_{ace} \times P_a}{2\pi \cdot f_{rede}} \quad (7.3.1.24)$$

Onde " n_{sa} " é a rotação síncrona da máquina auxiliar dada por (3.3.1.7).

A partir dos parâmetros do circuito equivalente é dado por:

$$T_{ace} = 3 \frac{R_{ac1} \times I_{ac1}^2}{s_a} \cdot \frac{P_a}{2\pi \cdot f_{rede}} \quad (7.3.1.25)$$

Conseqüentemente a potência mecânica desenvolvida no eixo da máquina auxiliar será:

$$P_{aceixo} = (1 - s_a) P_{ace} \quad (7.3.1.26)$$

Em função dos parâmetros do circuito equivalente fica:

$$P_{aceixo} = 3 (1 - s_a) s_p \cdot \frac{R_{ac1} \cdot I_{ac1}^2}{s_a} \quad (7.3.1.27)$$

Considerando as perdas estatóricas a potência no eixo fica:

$$P_{aceixo} = P_{ace} - P_{acest} \quad (7.3.1.28)$$

As perdas estatóricas são:

$$P_{acest} = P_{acj1} + P_{acfel} + P_{acs1} \quad (7.3.1.29)$$

Onde:

P_{acj1} = Perdas no ferro no estator da máquina auxiliar

P_{acfel} = Perdas no ferro no estator da máquina auxiliar

P_{acs1} = Perdas suplementares no estator da máquina auxiliar. Consideramos estas perdas zero no circuito equivalente da **Figura 7.2.3.2**

Portanto o torque desenvolvido no eixo pela máquina auxiliar, fica:

$$T_{aceixo} = \frac{P_{aceixo}}{2\pi n} \quad (7.3.1.30)$$

Em função dos parâmetros do circuito equivalente, fica:

$$T_{\text{eixo}} = \frac{3(1-s_a)s_p}{2\pi n} \cdot \frac{R_{ac1} \cdot I_{ac1}^2}{s_a} \quad (7.3.1.31)$$

Finalmente a potência total desenvolvida no eixo da máquina ligada em cascata é dado pela soma das potências desenvolvidas pela máquina auxiliar e principal, ou seja:

$$P_{\text{eixo}} = P_{\text{peixo}} + P_{\text{aceixo}} \quad (7.3.1.32)$$

O torque resultante no eixo é dado por:

$$T_{\text{eixo}} = \frac{P_{\text{eixo}}}{2\pi n} \quad (7.3.1.33)$$

Resolvendo o circuito equivalente da MATBCDA da **Figura 7.2.3.2** com o estator da máquina auxiliar em curto-circuito para o protótipo mencionado no **Capítulo 6** obtemos o desempenho em regime permanente.

O circuito foi resolvido para uma faixa de rotação de 0 a 40 rps (2400 rpm). A tensão no estator da máquina principal foi mantida constante.

Os gráficos mostrados nas **Figuras 7.3.1.1. a 7.3.1.7** mostram o comportamento em regime permanente da MATBCDA nesta condição. Todos os valores estão referidos ao estator da MP.

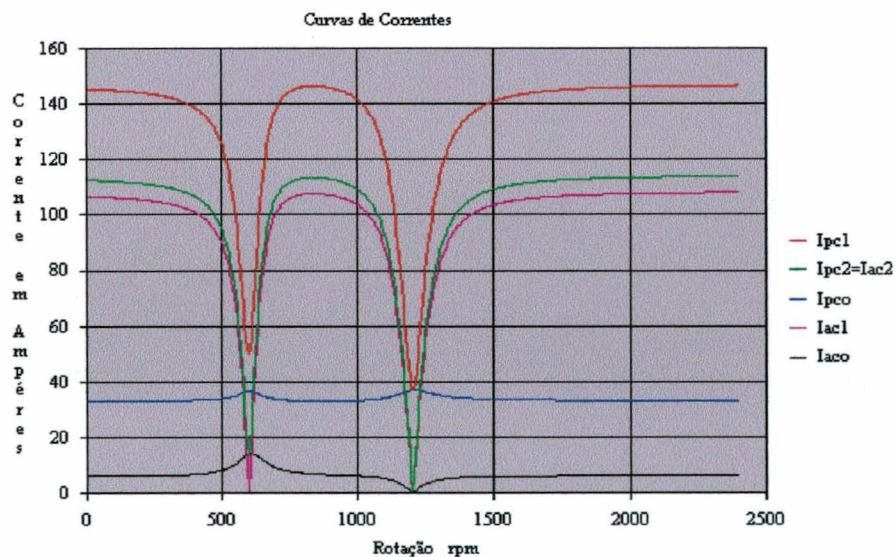


Figura 7.3.1.1 - Módulo das Correntes de Fase da Máquina Principal e da Máquina Auxiliar Referidas ao Estator da MP [Ipc1, Ipc2=Iac2, Ipc0, Iac1, Iaco]

As correntes apresentam uma singularidade em dois pontos de rotação. A primeira na rotação síncrona da cascata (600 rpm) e a segunda na rotação síncrona da máquina principal (1200 rpm).

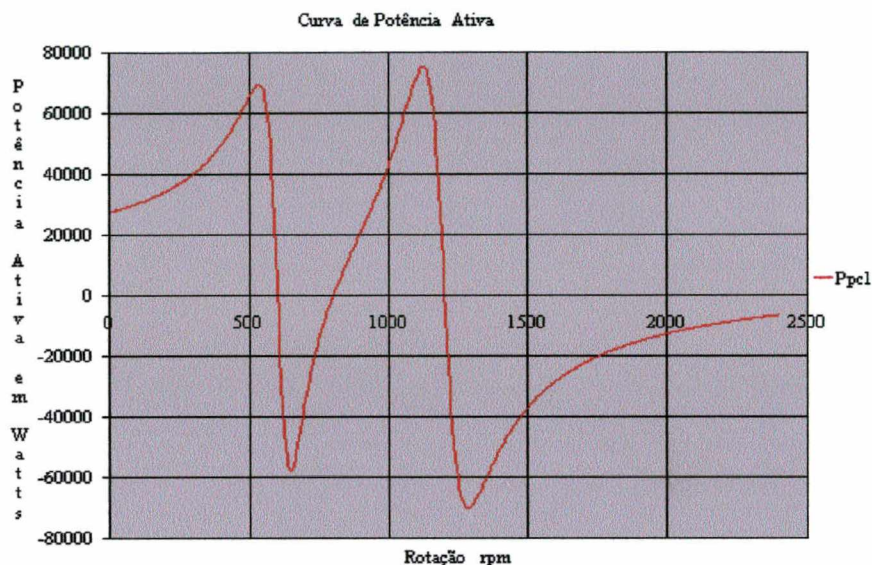


Figura 7.3.1.2 - Potência Ativa no Estator da MP [Ppc1]

No gráfico de potência ativa notamos que a MATBCDA funciona como motor nos intervalos [0 a 600] e na faixa aproximada de [800 a 1200 rpm]. Como gerador na faixa de [600 a 800 rpm] e acima de 12000 rpm.

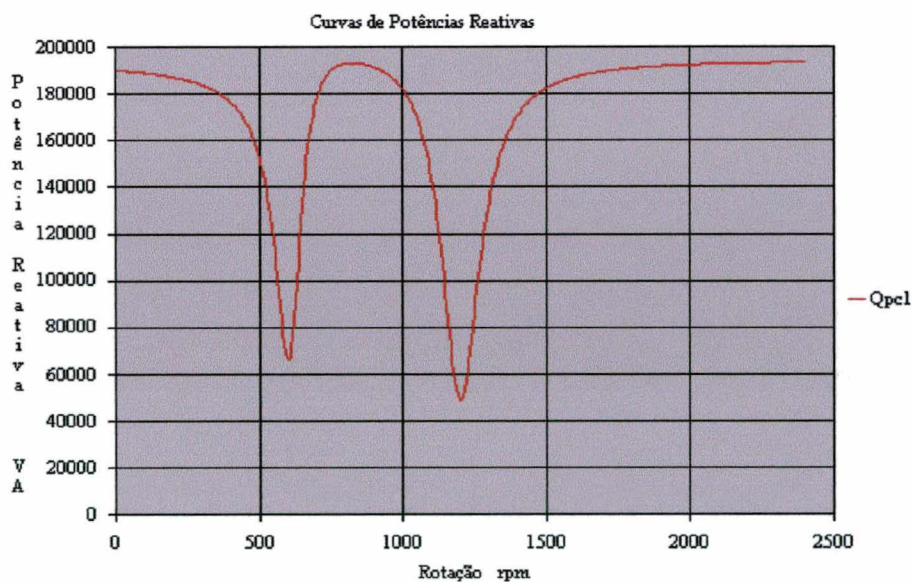


Figura 7.3.1.3 - Potência Reativa no Estator da MP [Qpc1]

A potência reativa sempre é positiva, isto significa que a MATBCDA, tanto em regime MOTOR quanto GERADOR precisa de potência reativa para funcionar.

O gráfico da **Figura 7.3.1.4** mostra o comportamento da potência no eixo da MATBCDA.

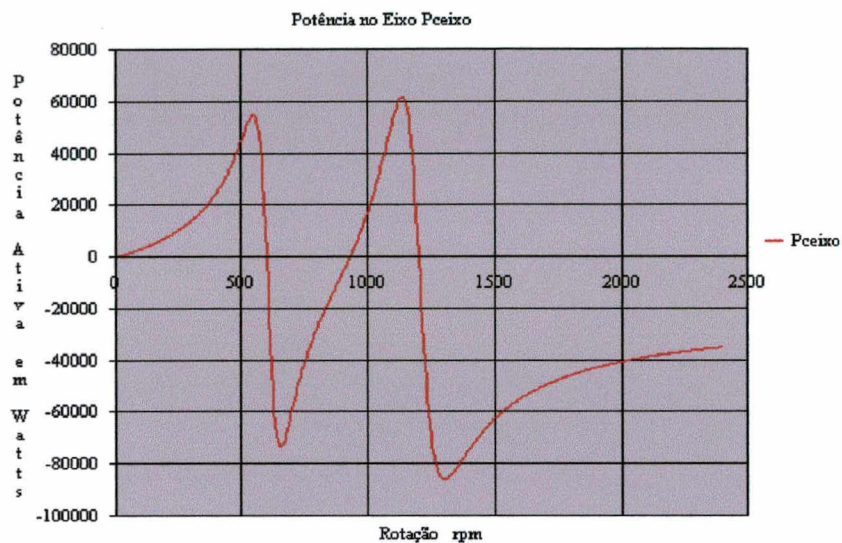


Figura 7.3.1.4 - Potência no Eixo da MATBCDA [Pceixo]

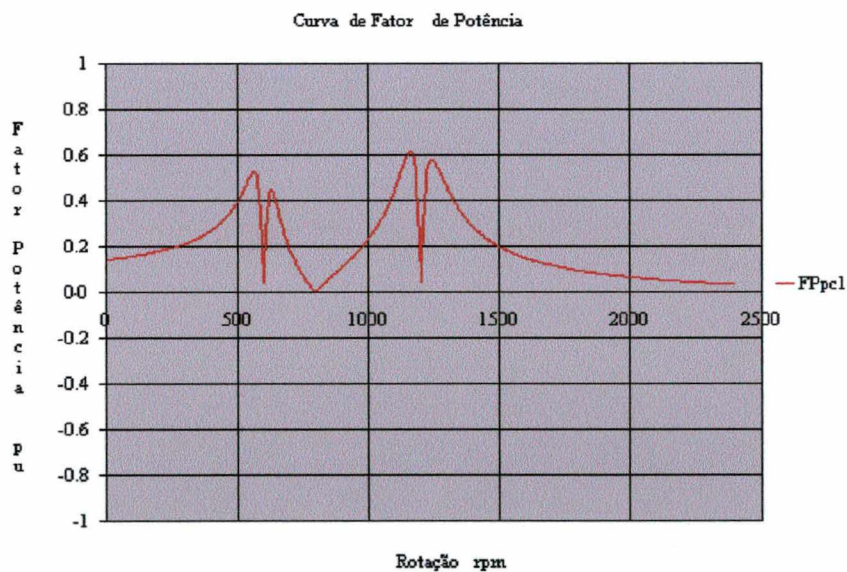


Figura 7.3.1.5 - Fator de Potência no estator da MP [FPpcl]

No gráfico (7.3.1.5) quando o FP é negativo não significa que a MATBCDA trabalha com a corrente adiantada em relação à tensão. Significa que nas regiões onde o FP é negativo a MATBCDA opera como gerador e nesta condição a defasagem entre a tensão e a corrente é maior que 90° .

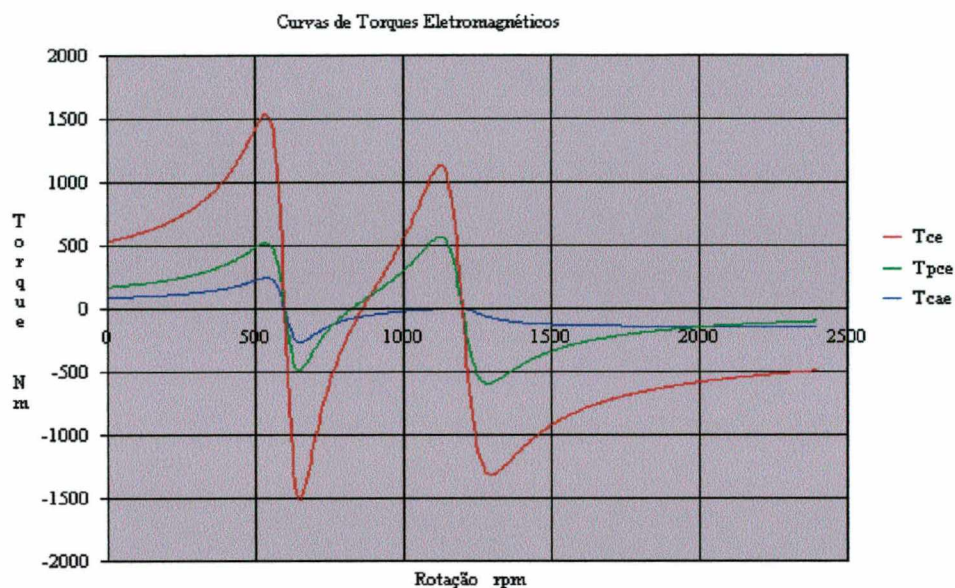


Figura 7.3.1.6 - Torques Eletromagnéticos no Entreferro [Tce, Tpe, Tca]

No gráfico mostrado na **Figura 7.3.1.6** são mostrados os torques eletromagnéticos desenvolvidos pela máquina principal e auxiliar. O torque eletromagnético total da cascata " T_{ce} " está referido a rotação síncrona da cascata " n_{sc} ".

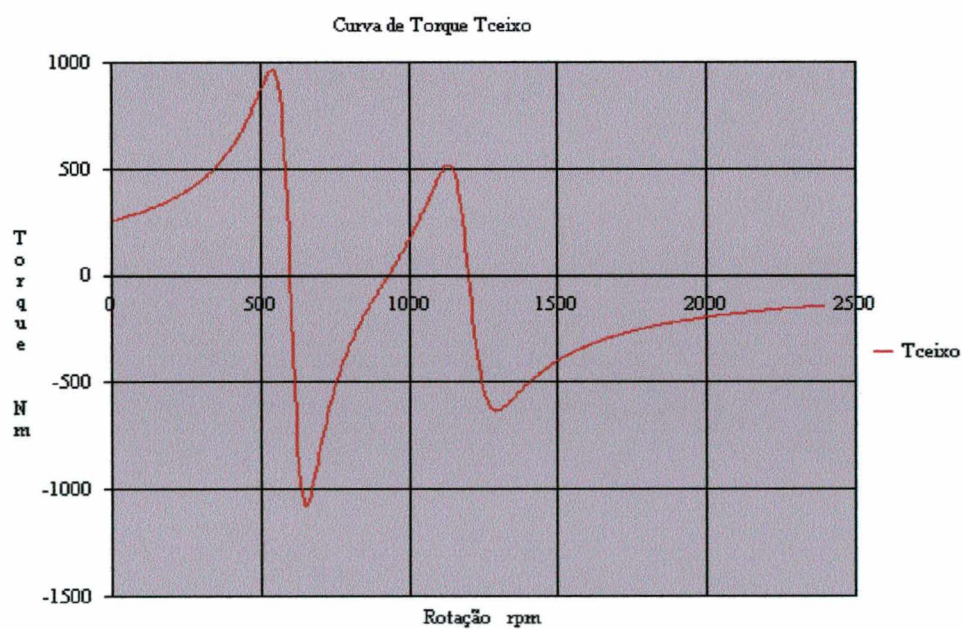


Figura 7.3.1.7 - Torque Mecânico no Eixo da MATBCDA [Tceixo]

O gráfico mostrado na **Figura 7.3.1.7** mostra o torque mecânico no eixo da MATBCDA.

O gráfico 7.3.1.8 mostra as curvas de corrente no estator da MP " I_{pc1} " calculada e ensaiada.

Levantou-se através de ensaio pelo método dinamométrico as curvas de correntes no estator da máquina principal e o torque no eixo na faixa de rotação de 0 a 1200 rpm.

Este ensaio possibilitou mostrar a forma das curvas e com isto comparar com as curvas calculadas pelo modelo.

A curva de corrente ensaiada ficou um pouco maior que a calculada, porém o torque no eixo medido e calculado na **Figura 7.3.1.9** apresentam boa acuracidade.

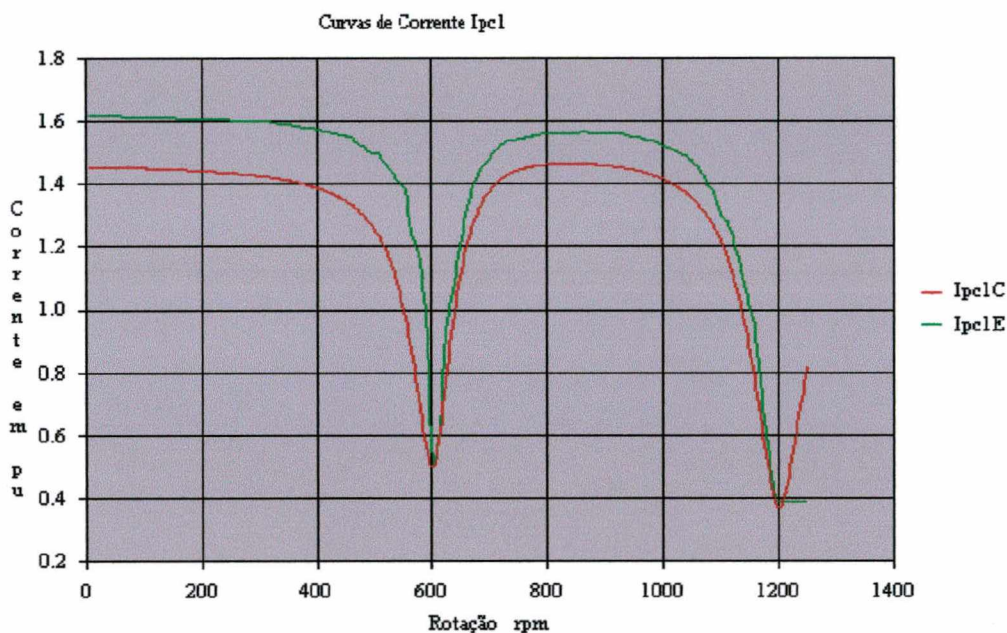


Figura 7.3.1.8 - Módulo da Corrente no Estator da MP Calculada [Ipc1C] Comparada com o Valor Ensaado [Ipc1E]

O gráfico 7.3.1.9 mostra a curva de torque no eixo " T_{eixo} " calculado e ensaiado.



Figura 7.3.1.9 - Torque no Eixo da MATBCDA Calculado [Tceixo] Comparado com o Valor Ensaiado.

No Apêndice B é mostrado o relatório de ensaios das máquinas individuais e das máquinas ligadas em cascata “Mais”, com o estator da máquina auxiliar em curto-circuito também ligado a uma resistência externa.

7.3.2 Estator da Máquina Auxiliar Ligada a um Banco de Resistores

O banco de resistores " \dot{Z}_{acad} " é introduzido no estator da máquina auxiliar com o objetivo de se controlar a curva de torque e corrente em função da rotação “n”.

Normalmente o banco de resistores é aplicado para melhorar as condições de partida quando opera como “MOTOR”.

Quando a aplicação exigir controle contínuo de velocidade o banco pode ser mantido conectado ao estator da máquina auxiliar permanentemente.

Nesta condição de trabalho a tensão " \dot{U}_{ac1} " passa a ser a tensão aplicada sobre o banco de resistores.

O circuito equivalente da **Figura 7.2.3.2** pode ser resolvido para cada ponto de rotação e para cada tap do banco de resistências adicionais.

Analogamente ao Parágrafo 7.3.1, conhecendo-se as correntes " \dot{I}_{pc1} ", " \dot{I}_{pc2} ", " \dot{I}_{pc0} " e " I_{ac1} ", " \dot{I}_{ac2} ", " I_{ac0} " é possível determinar o fluxo de potência envolvida no processo eletromecânico de transformação de energia.

A impedância adicional " \dot{Z}_{acad} " é referida ao estator da máquina auxiliar, ou seja:

$$\dot{Z}_{acad} = R_{acad} + j X_{acad} \quad (7.3.2.1)$$

Onde:

R_{acad} = Tap da resistência adicional em Ohm

X_{acad} = Tap da reatância adicional. Normalmente é nula.

A impedância adicional referida ao estator da máquina principal mostrado no circuito equivalente da **Figura 7.2.3.2** é dado pela equação 7.2.3.18, ou seja:

$$\dot{Z}_{cad} = \frac{R_{cad}}{s_a} + j X_{cad} = k_{acz} \left(\frac{R_{acad}}{s_a} + j X_{acad} \right) \quad (7.3.2.2)$$

A análise do fluxo de potência é análoga ao do parágrafo (7.3.1) porém deve ser levado em conta as perdas joules na resistência adicional. Estas perdas são calculadas como:

$$P_{cadj} = 3 (R_{cad}) \cdot I_{ac1}^2 \quad (7.3.2.3)$$

Para a máquina principal o fluxo de potência e o torque são calculados pelas mesmas equações do parágrafo (7.3.1), porém nas equações (7.3.1.6), (7.3.1.11), (7.3.1.18) e (7.3.1.20) deve ser acrescentado dentro do colchetes o termo que leva em conta a resistência adicional, ou seja:

$$\frac{R_{cad}}{s_a} \cdot I_{ac1}^2 \quad (7.3.2.4)$$

O termo acima representa a contribuição da resistência adicional na potência e no torque.

Para a máquina auxiliar o fluxo de potência é o mesmo do parágrafo (7.3.1), porém nas equações (7.3.1.23), (7.3.1.27) e (7.3.1.31) para introduzir a contribuição da resistência adicional devemos substituir " R_{ac1} " por " $R_{ac1} + R_{cad}$ ".

Nas perdas estáticas dados pela equação (7.3.1.29) devemos adicionar as perdas joules na resistência adicional, ou seja:

$$P_{acst} = P_{acj2} + P_{acfel} + P_{acsl} + P_{cadj} \quad (7.3.2.5)$$

Os gráficos mostrados na Figuras 7.3.2.1 a 7.3.2.12 ilustram o comportamento em regime permanente da MATBCDA quando o estator da MA está conectado a um banco de resistores, com resistência máxima " $R_{cad} = 4 \times R_{a1}$ ".

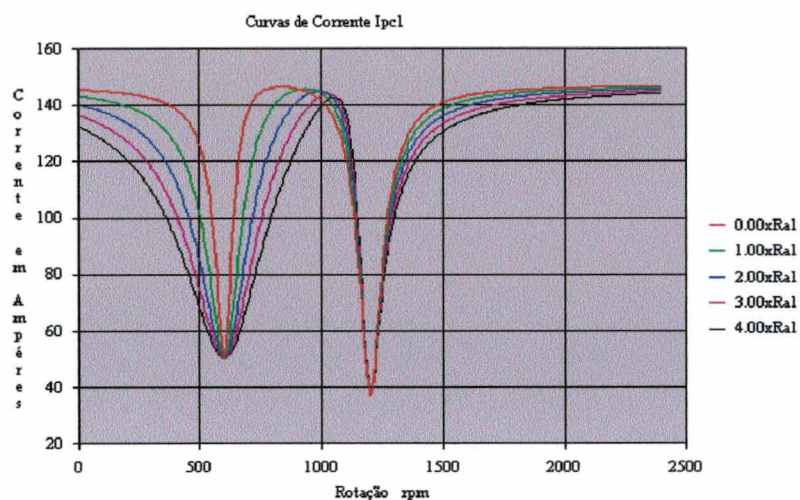


Figura 7.3.2.1 - Módulo da Corrente no Estator da MP com o Estator da MA Ligado a Um Banco de Resistores Externo [Ipc1]

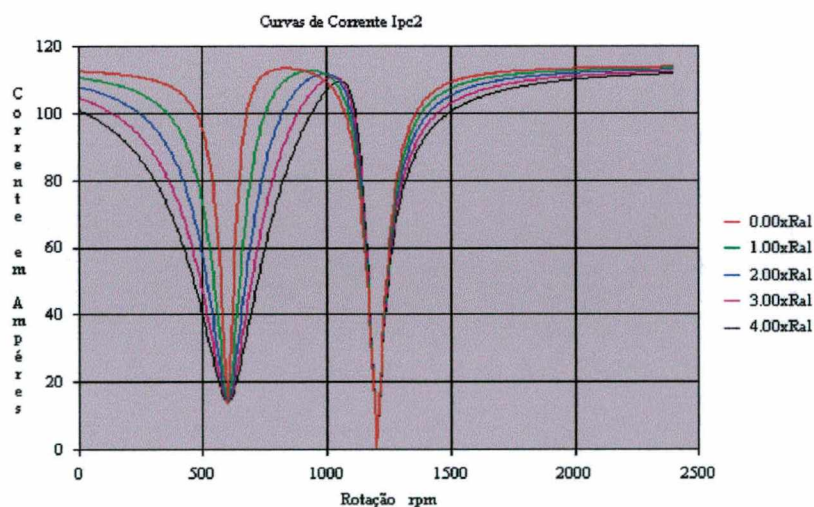


Figura 7.3.2.2 - Módulo da Corrente no Rotor da MP com o Estator da MA Ligado a Um Banco de Resistores Externo [Ipc2=Iac2]

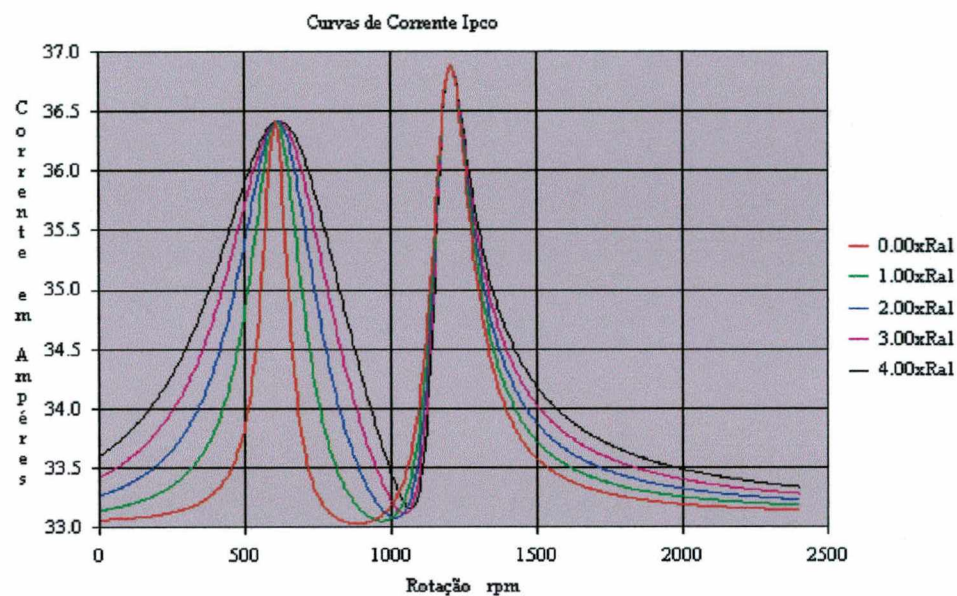


Figura 7.3.2.3 - Módulo da Corrente no Ramo em Vazio da MP com o Estator da MA Ligado a Um Banco de Resistores Externos [I_{p0}]

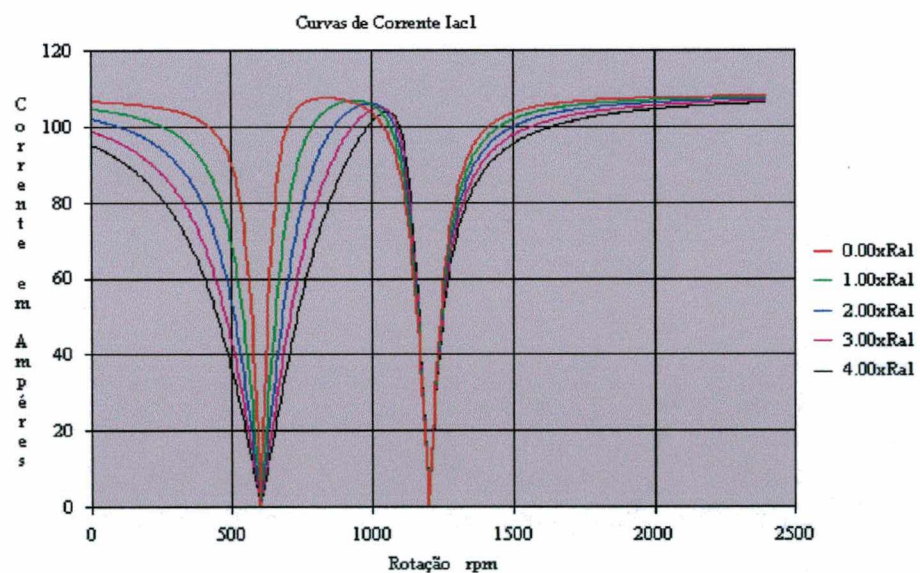


Figura 7.3.2.4 - Módulo da Corrente no Estator da MA ligado a Um Banco de Resistores Externo [I_{ac1}]

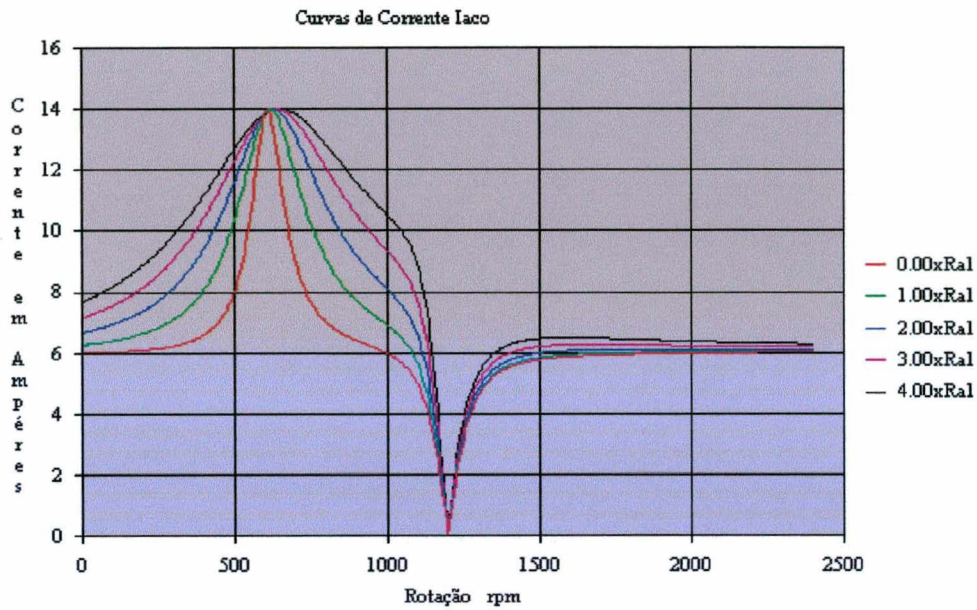


Figura 7.3.2.5 - Módulo da Corrente no Ramo em Vazio da MA Com o Estator Ligado a Um Banco de Resistores Externo [Iaco]

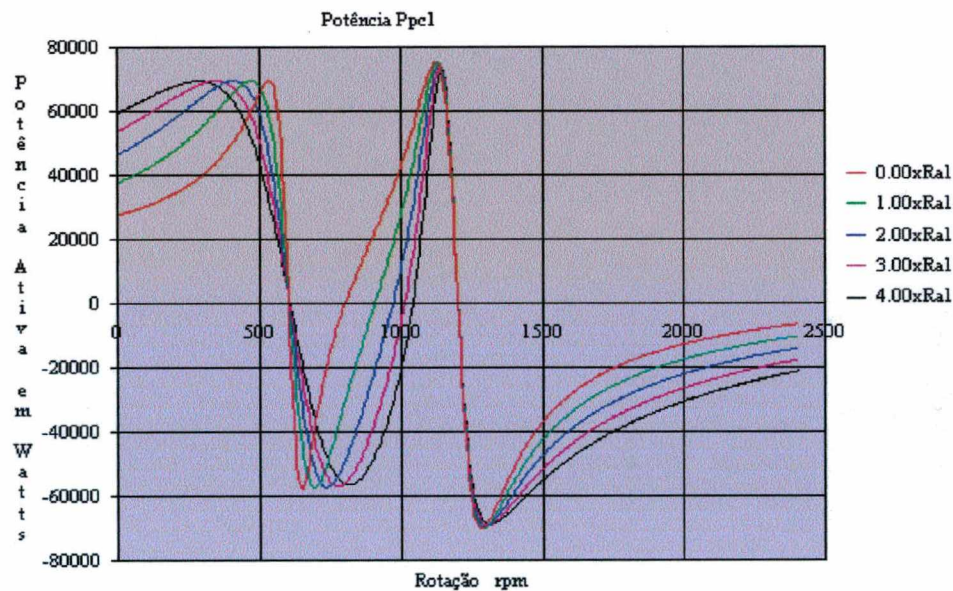


Figura 7.3.2.6 - Potência Ativa no estator da MP com o Estator da MA Ligado a Um Banco de Resistores Externo [Ppcl]

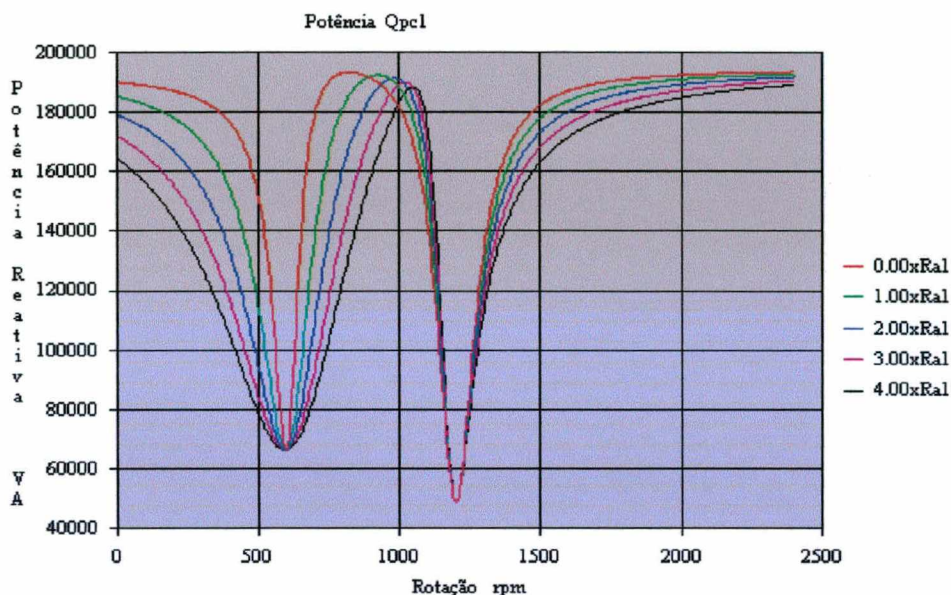


Figura 7.3.2.7 - Potência reativa no Estator da MP com o Estator da MA Ligado a Um Banco de Resistências Externo [Qp1]

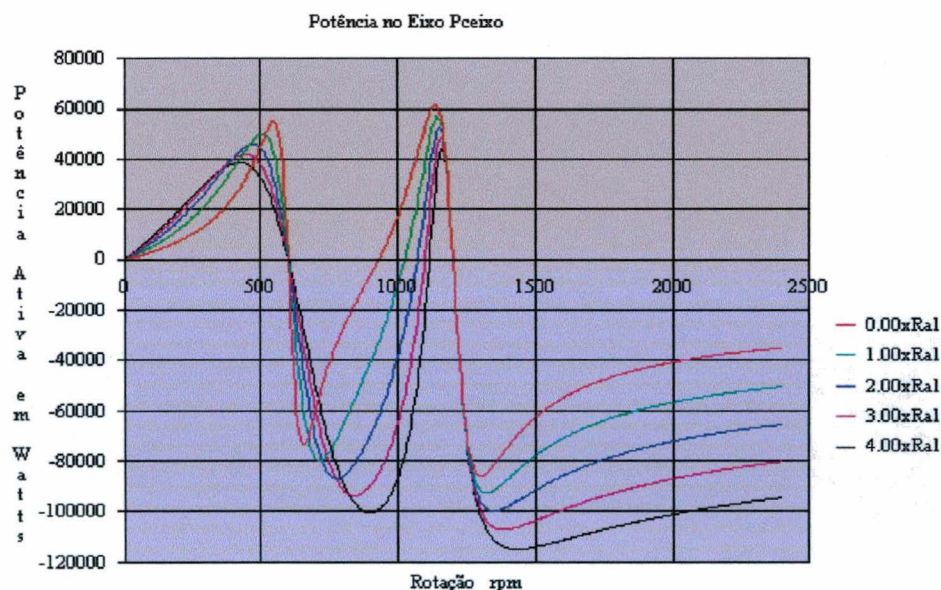


Figura 7.3.2.8 - Potência no Eixo da MATBCDA Com o Estator da MA Ligado a Um Banco de Resistências Externo [Pceixo]

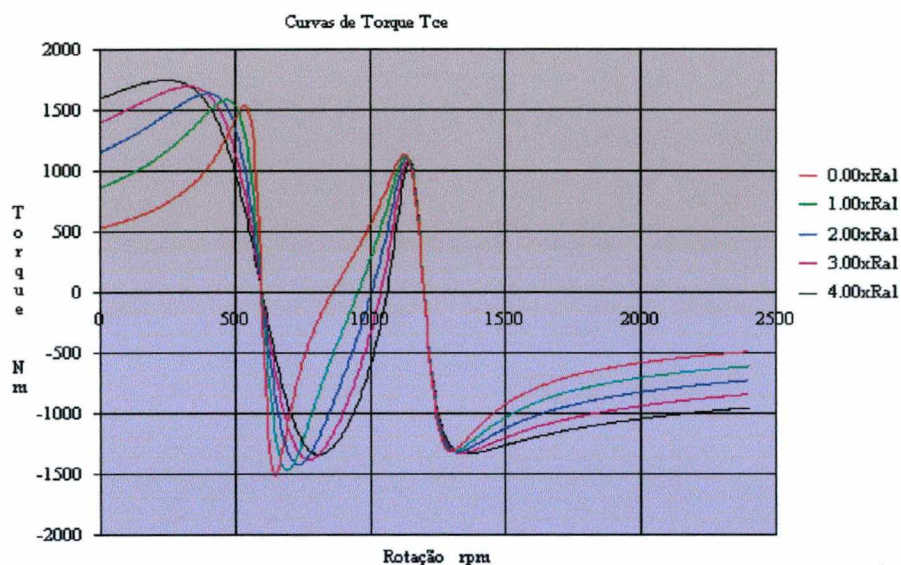


Figura 7.3.2.9 - Torque Eletromagnético da MATBCDA com o Estator da MA Ligado a Um Banco de Resistências Externo [Tce]

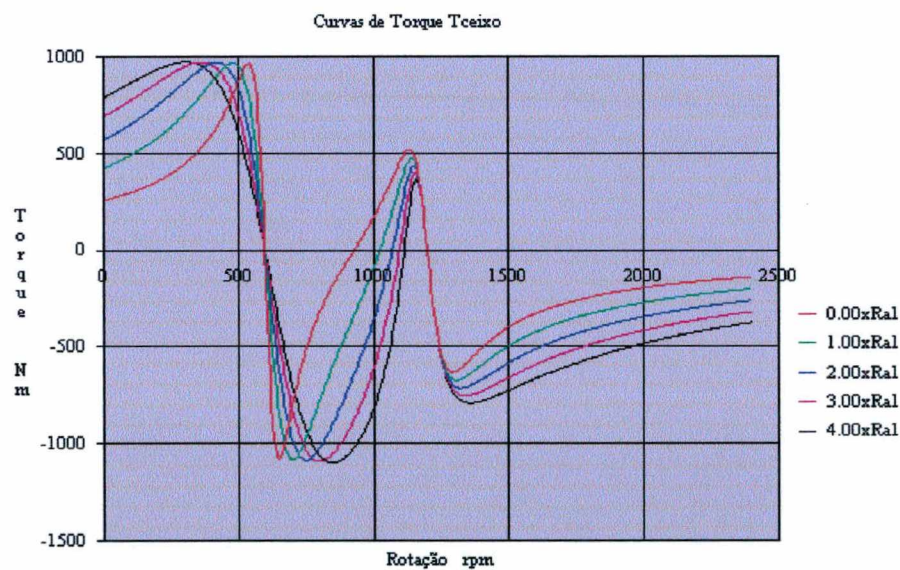


Figura 7.3.2.10 - Torque no Eixo da MATBCDA com o Estator da MA Ligado a Um Banco de Resistências Externo [Tceixo]

Com o banco de resistores ligado ao estator da MA as variáveis da MATBCDA, tais como corrente, potências e torques apresentam comportamento semelhante apresentando inclinações diferentes de acordo com o tap do reostato. Porém, todas as curvas continuam apresentando dois pontos de singularidade, um 600 rpm e outro em 1200 rpm.

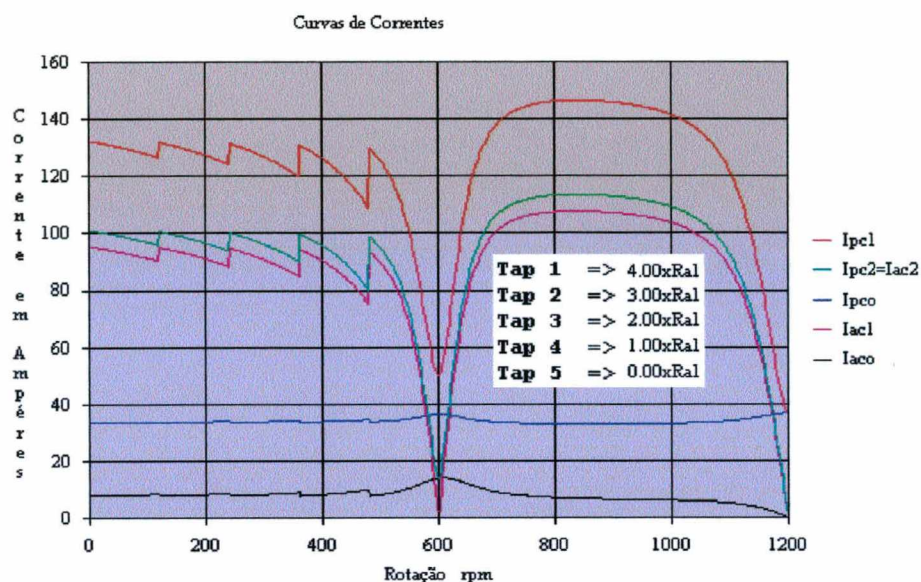


Figura 7.3.2.11 - Módulo das Correntes de Fase da Máquina Principal e da Máquina Auxiliar Referidas ao Estator da MP Simulando Uma Partida com Um Banco de Resistores Com cinco Tap's [Ipc1,Ipc2=Iac2,Ipc0,Iac1,Iaco]

Os gráficos (7.3.2.11) e (7.3.2.12) mostram uma partida da MATBCDA com um banco de resistências inserido no estator da MA. Durante a partida os tap's são comutados conforme mostrado nas figuras. Nota-se que tanto o torque quanto as correntes são bastante sensíveis à variação da resistência.

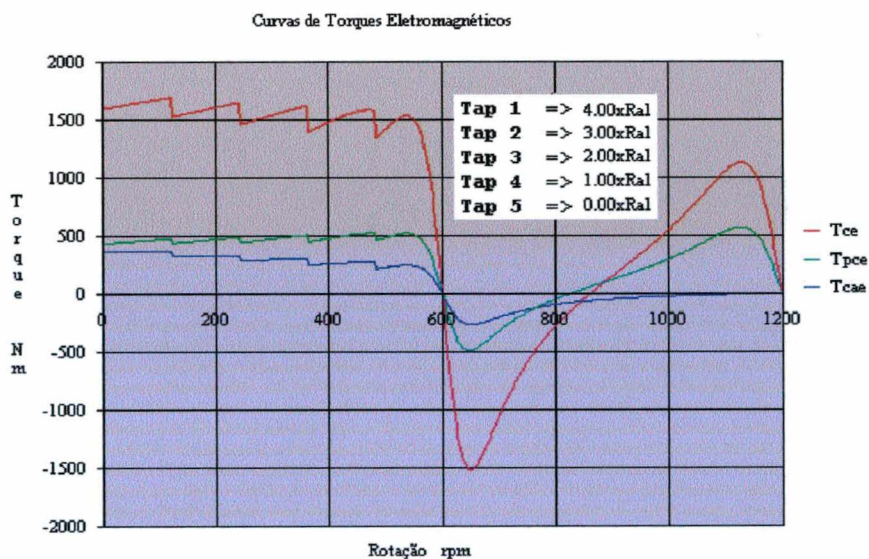


Figura 7.3.2.12 - Torques Eletromagnéticos da MATBCDA Simulando Uma Partida com Um Banco de Resistores Com Cinco Tap's [Tce , Tpc0, Tcae]

Os gráficos 7.3.2.13 e 7.3.2.14 mostram as curvas de corrente do estator da MP " I_{pcl} " calculada e ensaiada para resistências externas adicionadas ao estator da MA de " $1,0 \times R_{al}$ " e " $2,0 \times R_{al}$ " respectivamente.

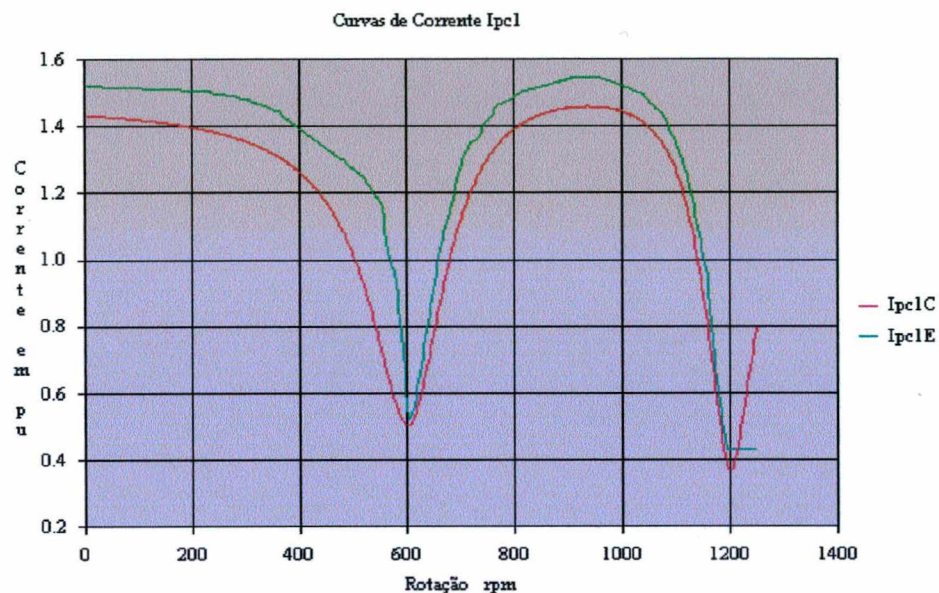


Figura 7.3.2.13 - Módulo da Corrente no Estator da MP Calculada [I_{pcl}] Comparada com o valor Ensaiado [I_{pclE}] Para Tap de Resistência Externa de $1.0 \times R_{al}$ Ligado ao Estator da MA

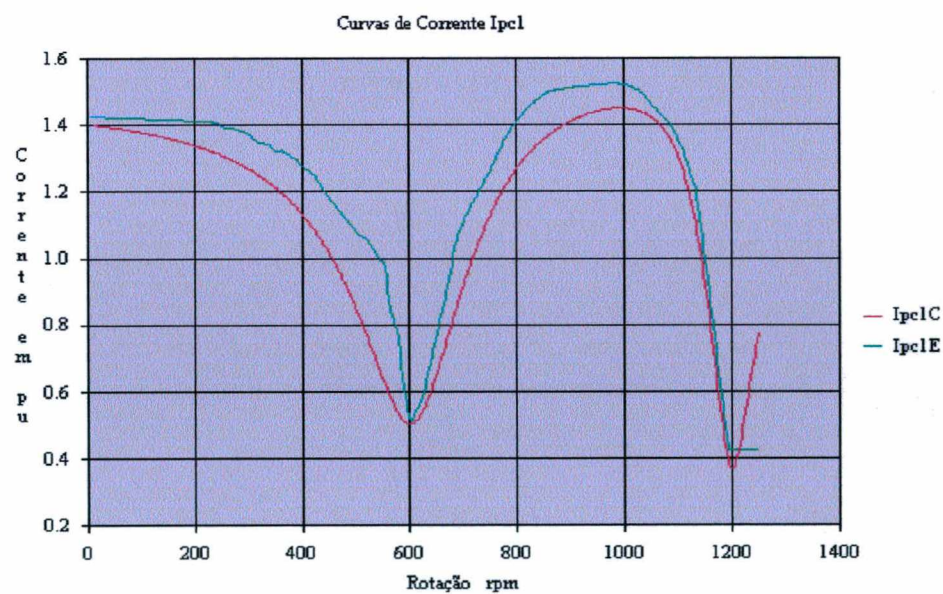


Figura 7.3.2.14 - Módulo da Corrente no Estator da MP Calculada [I_{pcl}] Comparada com o valor Ensaiado [I_{pclE}] Para Tap de Resistência Externa de $2.0 \times R_{al}$ Ligado ao Estator da MA

Os gráficos 7.3.2.15 e 7.3.2.16 mostram as curvas de torque no eixo " T_{ceixo} " calculadas e ensaiadas para os mesmos tap's de resistências adicionais ao estator da MA.

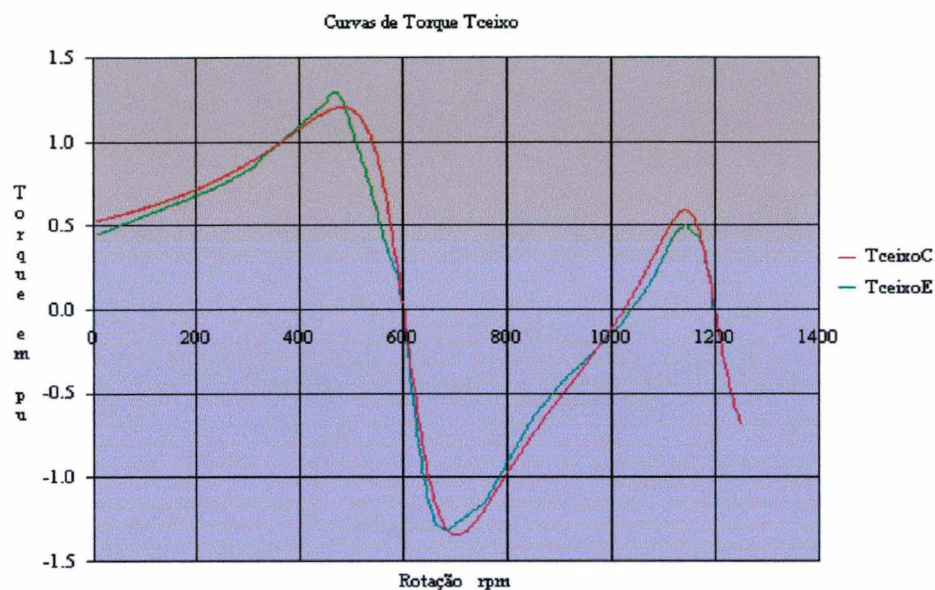


Figura 7.3.2.15 - Torque no Eixo da MATBCDA Calculado [Tceixo] Comparado Com o Valor Ensaiado Para Tap de Resistência Externa de 1.0 x Ral Ligado ao Estator da MA

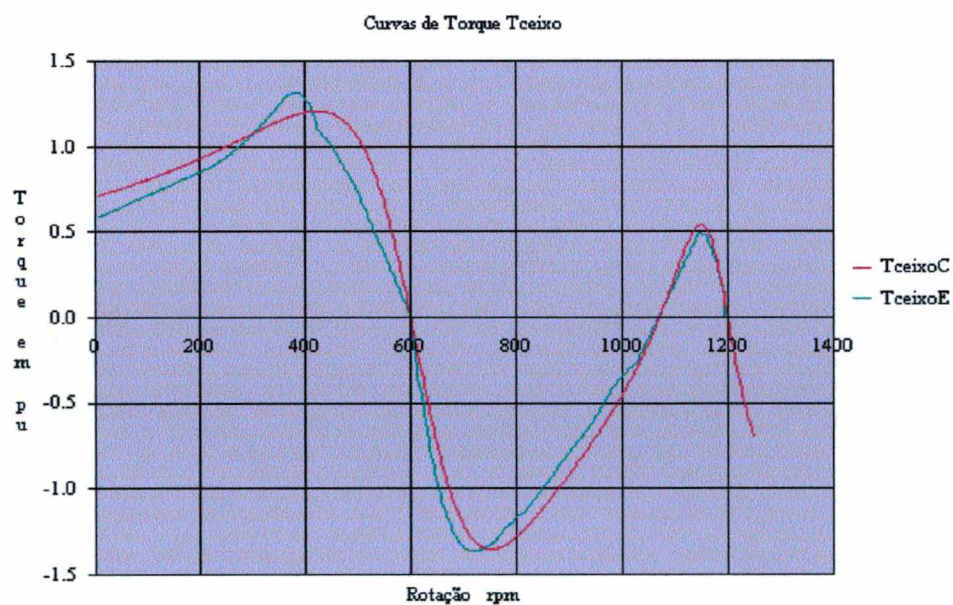


Figura 7.3.2.16 - Torque no Eixo da MATBCDA Calculado [Tceixo] Comparado Com o Valor Ensaiado Para Tap de Resistência Externa de 2.0 x Ral Ligado ao Estator da MA

No APÊNDICE B é mostrado o relatório de ensaios das curvas mostradas acima.

7.3.3 Estator da Máquina Auxiliar Ligada à Rede através de Um Conversor de Frequência

Nesta condição de trabalho o estator da máquina auxiliar está conectado à rede através de uma conversor de frequência de controle vetorial, conforme mostrado na **Figura 3.2.1**.

A função do conversor é desacoplar a frequência da rede e impor ao estator da máquina auxiliar o fasor tensão " \dot{U}_{ac1} ".

A frequência da tensão imposta depende da rotação da máquina conforme mostrado no Gráfico da **Figura 3.3.1.1**.

A amplitude e a fase dependem da rotação e principalmente da condição de trabalho imposta ao estator da máquina principal, ou seja, depende se a máquina está trabalhando como "MOTOR" ou "GERADOR", e se o fator de potência é "INDUTIVO" ou "CAPACITIVO".

O diagrama fasorial de correntes mostrado na **Figura 7.3.3.1** mostra a MATBCDA funcionando como "MOTOR" com fator de potência "INDUTIVO".

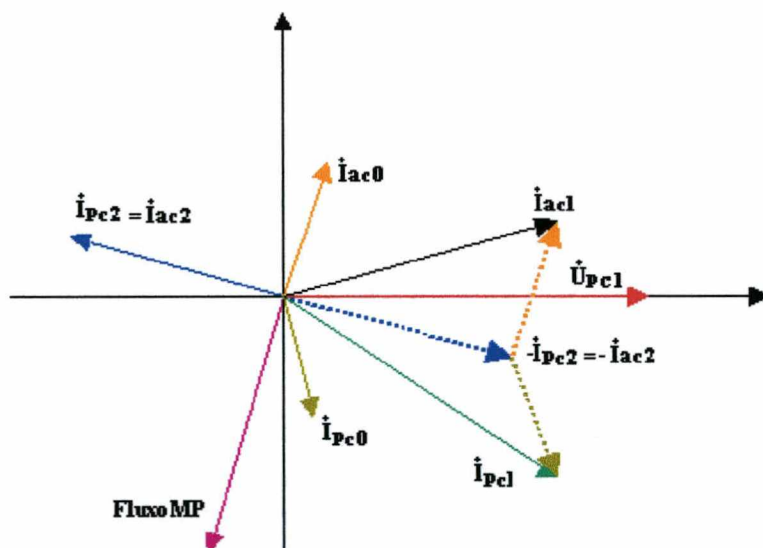


Figura 7.3.3.1 - Diagrama Fasorial de Correntes com Motor com FP Indutivo da MATBCDA

No diagrama fasorial acima o fasor da tensão " \dot{U}_{pc1} " é tomado como referência.

Como o conversor está conectado ao estator da máquina auxiliar é possível controlar a máquina principal através da imposição adequada da tensão " \dot{U}_{ac1} " ao estator da máquina auxiliar.

Neste parágrafo iremos mostrar como determinar " \dot{U}_{ac1} ".

Admitindo que a máquina principal está trabalhando numa dada condição imposta onde é conhecido:

- a) Torque Eletromagnético (T_{pce})
- b) Rotação (n)
- c) O Fator de Potência da Máquina Principal (FP_{pc1})

O torque eletromagnético desenvolvido no entreferro da máquina principal nesta condição é dada por:

$$T_{pce} = k_{pc} \cdot \dot{\phi}_{pc} \times I_{pc2} \quad (7.3.3.1)$$

Onde:

k_{pc} = Constante da máquina principal

$\dot{\phi}_{pc}$ = Fluxo no entreferro da máquina principal

I_{pc2} = Corrente de fase do rotor referido ao estator

Como o estator da máquina principal está ligado à rede onde a tensão é constante, o fluxo " $\dot{\phi}_{pc}$ " no entreferro é constante e pode ser calculado a partir da tensão " \dot{U}_{pc1} ", logo:

$$\dot{\Phi}_{pc} = k_{pc1} \cdot U_{pc1} \quad (7.3.3.2)$$

Onde:

k_{pc1} = Constante que depende do enrolamento da máquina e da frequência da tensão " \dot{U}_{pc1} "

U_{pc1} = Tensão de fase do estator (valor eficaz)

Substituindo (7.3.3.2) em (7.3.3.1) e desenvolvendo o produto vetorial, obtemos:

$$T_{pce} = k_{pc\phi} \cdot U_{pc1} I_{pc2} \text{Cos}(\theta_{Epc2} - \theta_{Ipc2}) \quad (7.3.3.3)$$

A constante " $k_{pc\phi}$ " pode ser facilmente determinada a partir das condições nominais da máquina.

A Figura 7.3.3.2 mostra o significado dos demais parâmetros da equação (7.3.3.3).

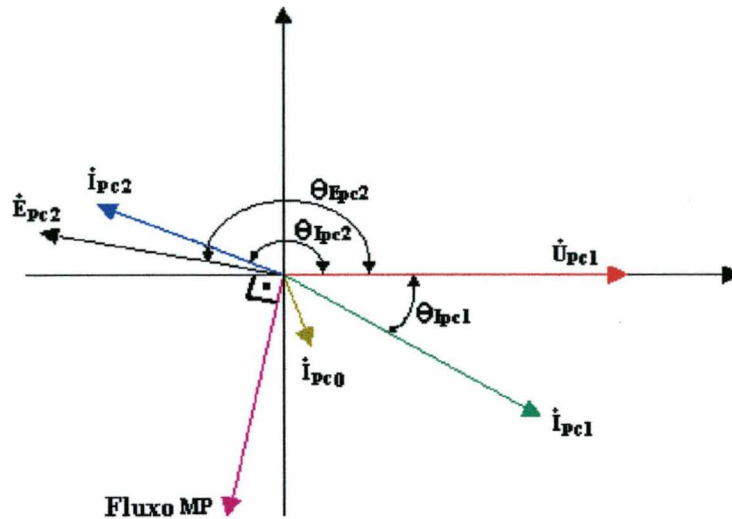


Figura 7.3.3.2 - Fases das Correntes da Máquina Principal

A equação (7.3.3.3) é uma equação genérica válida tanto para trabalho em regime "MOTOR" como regime "GERADOR".

Como a tensão " \dot{U}_{pc1} " é constante e a corrente " \dot{I}_{pc2} " pode ser variada (controlada) de acordo com a condição de trabalho imposta, temos a possibilidade de controlar o torque eletromagnético desenvolvido no entreferro da máquina principal.

Conhecendo-se as condições de trabalho imposto à máquina principal e os parâmetros do circuito equivalente mostrado na Figura 7.2.3.2 se determina facilmente " \dot{I}_{pc1} " e " \dot{I}_{pc0} " e portanto a corrente " \dot{I}_{pc2} " é dada por:

$$\dot{I}_{pc2} = \dot{I}_{pc1} - \dot{I}_{pc0} \quad (7.3.3.4)$$

Por outro lado como o rotor da máquina principal está ligado em série com o rotor da máquina auxiliar temos:

$$\dot{I}_{pc2} = \dot{I}_{ac2} \quad (7.3.3.5)$$

Uma vez conhecida a corrente rotórica " \dot{I}_{ac2} " da máquina auxiliar e a partir do circuito equivalente é possível determinar a corrente do estator " \dot{I}_{ac1} " por:

$$\dot{I}_{ac1} = \dot{I}_{ac0} - \dot{I}_{ac2} \quad (7.3.3.6)$$

A tensão imposta ao estator da máquina auxiliar pode ser calculada por:

$$\dot{U}_{ac1} = \dot{U}_{ac2} - \dot{I}_{ac2} \dot{Z}_{ac2} + \dot{I}_{ac1} (\dot{Z}_{ac1} + Z_{cad}) \quad (7.3.3.7)$$

A tensão " \dot{U}_{ac1} " obtida pela expressão (7.3.3.7) está referida ao estator da máquina principal. Como o conversor está conectado diretamente ao estator da máquina auxiliar, devemos referir esta tensão ao estator da máquina auxiliar, ou seja:

$$\dot{U}_{a1} = s_a \cdot \frac{1}{k_{ace}} \cdot \dot{U}_{ac1} \quad (7.3.3.8)$$

Onde a constante " k_{ace} " é dada pela equação (7.2.3.5).

O fluxo de potência através da MATBCDA quando opera com o conversor conectado ao estator da máquina auxiliar pode ser dividido em duas partes, uma que flui através da máquina principal " S_{pc1} " e outra que flui através da máquina auxiliar " \dot{S}_{ac1} " conforme mostrado esquematicamente na **Figura 7.3.1**.

O fluxo de potência através da máquina principal é análogo ao mostrado no parágrafo 7.3.1. No fluxo de potência através da máquina auxiliar deverá ser considerado a parcela que pode entrar ou sair através do conversor.

A potência que entra no rotor da máquina auxiliar proveniente do rotor da máquina principal é dado pelas equações (7.3.1.12), (7.3.1.13) e (7.3.1.14).

A parcela que entra ou sai no estator da máquina auxiliar através do conversor é dado por:

$$\dot{S}_{ac1} = 3 \cdot \dot{U}_{a1} \bar{\dot{I}}_{a1} \quad (7.3.3.9)$$

Onde " $\bar{\dot{I}}_{a1}$ " é o conjugado complexo da corrente no estator da máquina auxiliar, que é dado por:

$$\bar{\dot{I}}_{a1} = \frac{1}{k_{aci}} \cdot \dot{I}_{ac1} \quad (7.3.3.10)$$

Onde a constante " k_{aci} " é dada pela equação (7.2.3.6).

A componente ativa é dada por:

$$P_{ac1} = Re(\dot{S}_{ac1}) \quad (7.3.3.11)$$

A componente reativa é dada por:

$$Q_{ac1} = Im(\dot{S}_{ac1}) \quad (7.3.3.12)$$

Portanto, a potência eletromagnética no entreferro da máquina auxiliar é dada por:

$$\dot{S}_{ace} = \dot{S}_{ac1} + \dot{S}_{ac2} - P_{act} \quad (7.3.3.13)$$

Onde:

P_{act} = Perdas totais na máquina auxiliar

\dot{S}_{ac2} = É dado pela equação 7.3.1.12

A potência eletromagnética ativa é dada por:

$$P_{ace} = Re(\dot{S}_{ace}) \quad (7.3.3.14)$$

A potência mecânica no eixo desenvolvido pela máquina auxiliar pode ser calculada, como sendo:

$$P_{aceixo} = (1 - s_a) P_{ace} \quad (7.3.3.15)$$

E conseqüentemente o torque mecânico é dado por:

$$T_{aceixo} = \frac{P_{aceixo}}{2\pi n} \quad (7.3.3.16)$$

A potência total desenvolvida no eixo é dado pela soma:

$$P_{ceixo} = P_{peixo} + P_{aceixo} \quad (7.3.3.17)$$

Onde " P_{peixo} " é a potência mecânica no eixo desenvolvida pela MP dada pela equação (7.3.1.17).

O torque resultante é dado por:

$$T_{ceixo} = \frac{P_{ceixo}}{2\pi n} \quad (7.3.3.18)$$

Finalmente a potência total absorvida ou entregue à rede pode ser calculada como:

$$\dot{S}_{rede} = \dot{S}_{pci} + \dot{S}_{aci} \quad (7.3.3.19)$$

Onde " S_{pci} " é dada pela equação (7.3.1.1).

Para ilustrar o funcionamento da MATBCDA com o conversor em regime permanente, iremos considerar que no eixo está atuando um torque que varia de acordo com o gráfico mostrado na Figura 7.3.3.3.

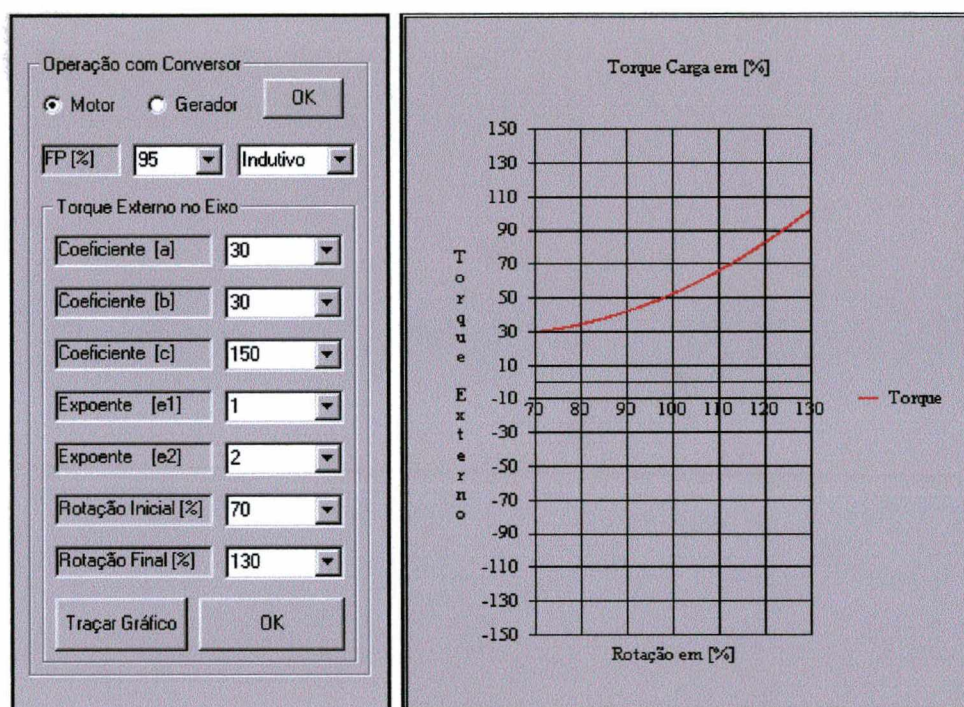


Figura 7.3.3.3 - Torque no Eixo da MATBCDA Operando com Um Conversor Ligado no Estator da MA

O Gráfico da Figura 7.3.3.3 obedece a seguinte equação:

$$T_{orque}(\%) = 30 + 30(n - n_o) + 150(n - n_o)^2 \quad (7.3.3.20)$$

Onde:

n = Rotação em % da Rotação Básica

n_o = Rotação Inicial em % da Rotação Básica

Os Gráficos das Figuras 7.3.3.4 a 7.3.3.11 mostram as correntes, o fluxo de potência, torques e a tensão que o conversor deve aplicar ao estator da máquina auxiliar para que a máquina principal trabalhe na condição de Motor com FP = 0,95 Indutivo nas seguintes condições:

- Torque no eixo variando conforme Gráfico 7.3.3.3
- Resistência externa no estator da MA $R_{acad} = 0$
- Rotação Básica 600 rpm
- Torque Básico 1606 Nm
- Faixa de operação de 70% a 130% da rotação básica

Analisando os gráficos das Figuras 7.3.3.4 a 7.3.3.9, notamos que a máquina tem um comportamento contínuo como motor em toda a faixa de rotação controlada, inclusive no ponto de rotação síncrona da cascata (600 rpm).

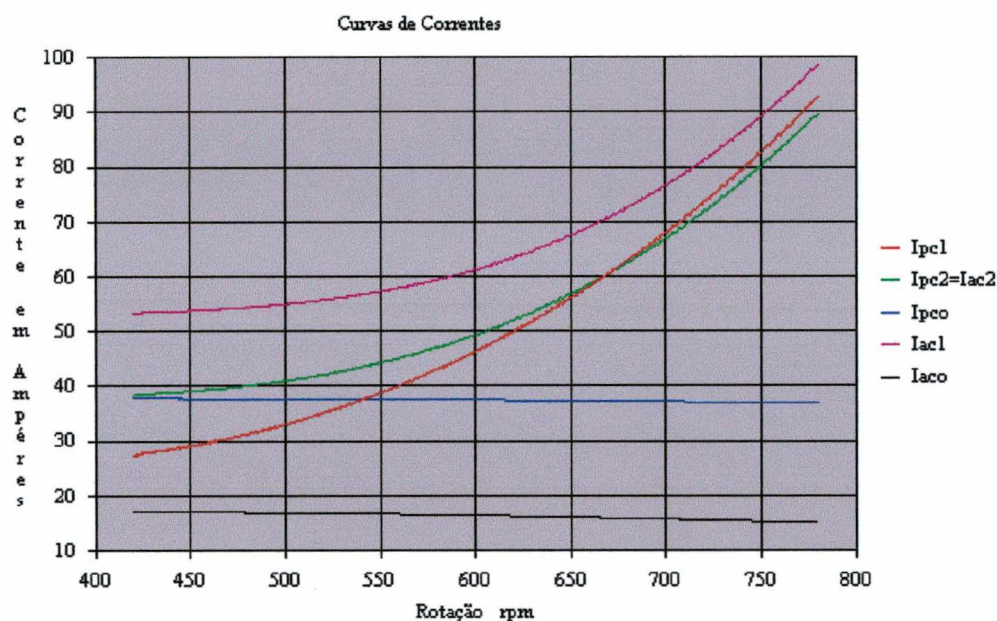


Figura 7.3.3.4 – Módulo das Correntes na MP e MA Referidas ao Estator da MP, Operando Como Motor Com Conversor Ligado ao Estator da MA Controlando o FP 0.95 Indutivo na Faixa de Rotação de 7% a 130% da Rotação Síncrona da Cascata [I_{pc1}, I_{pc2}=I_{ac2}, I_{pec0}, I_{acl}, I_{aco}]

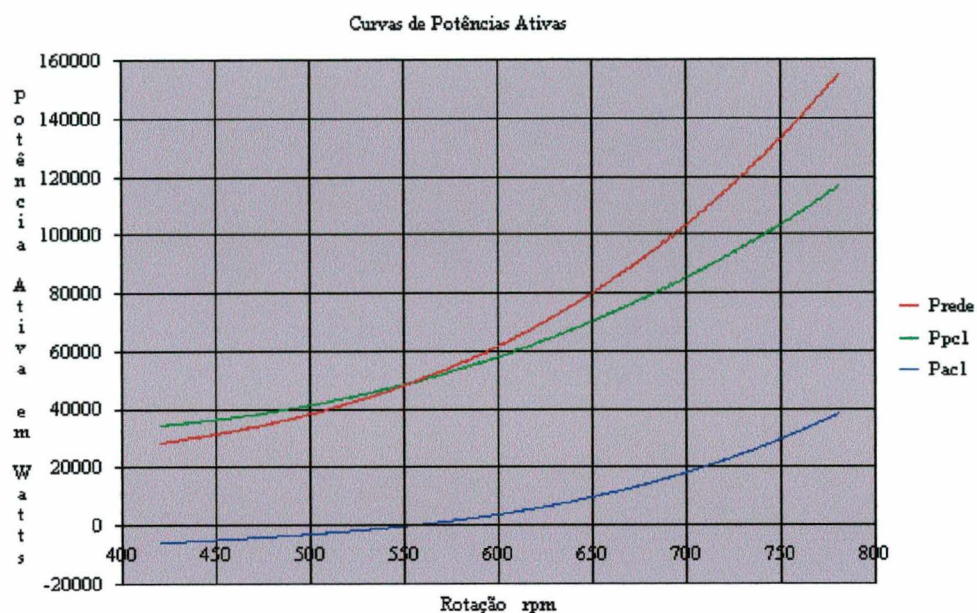


Figura 7.3.3.5 - Potências Ativas no Estator das MP e MA Operando Como Motor Com Conversor Ligado ao Estator da MA Controlando o FP 0.95 Indutivo na Faixa de Rotação de 70% a 130% da Rotação Síncrona da Cascata [Ppcl, Pacl, Prede]

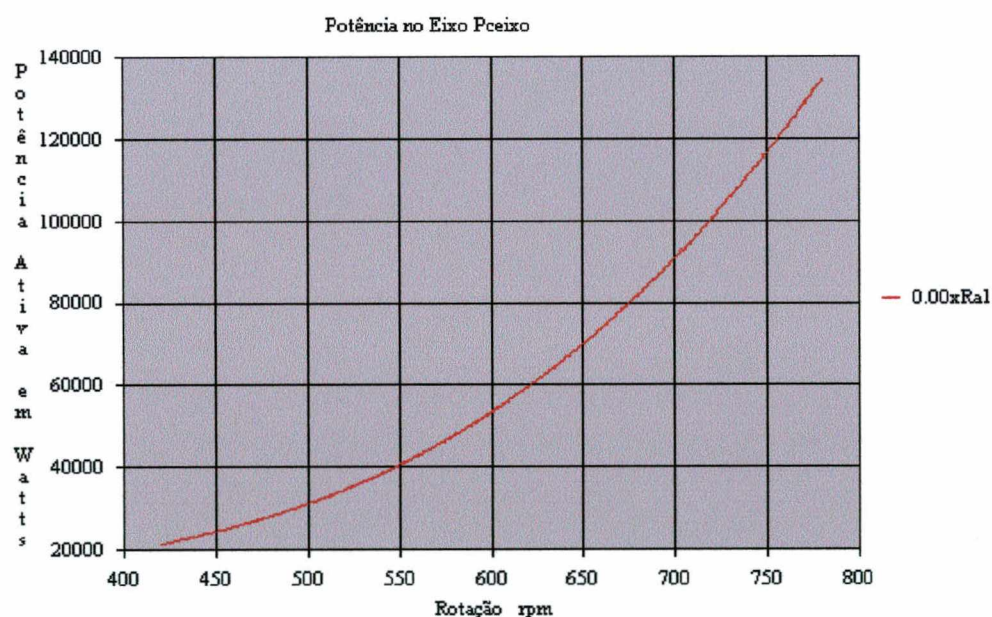


Figura 7.3.3.6 - Potência Ativa no Eixo da MATBCDA Operando Como Motor Com Conversor Ligado ao Estator da MA Controlando o FP 0.95 Indutivo na Faixa de Rotação de 70% a 130% da Rotação Síncrona da Cascata [Pceixo]

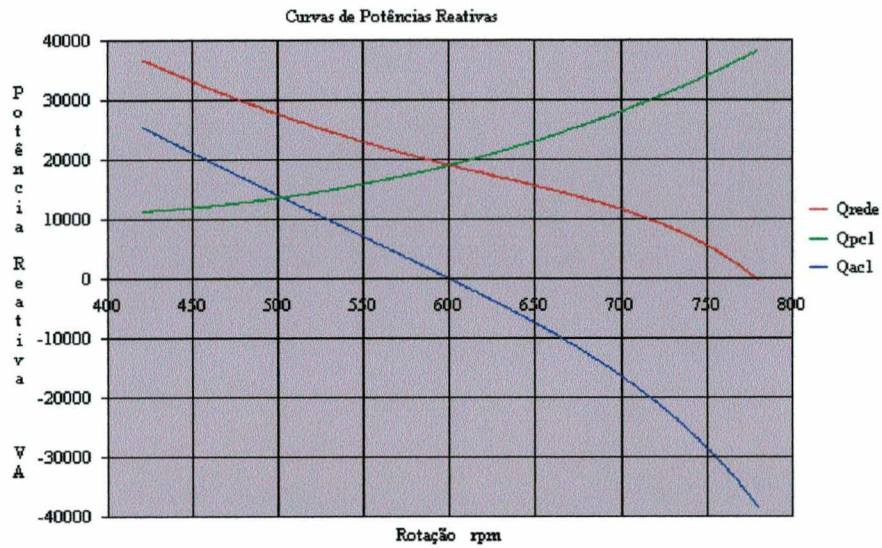


Figura 7.3.3.7 - Potências Reativas no Estator das MP e MA Operando Como Motor Com Conversor Ligado ao Estator da MA Controlando o FP 0.95 Indutivo na Faixa de Rotação de 70% a 130% da Rotação Síncrona da Cascata [Qpc1,Qac1,Qrede]

A máquina auxiliar a partir da rotação síncrona da cascata começa a gerar reativos.

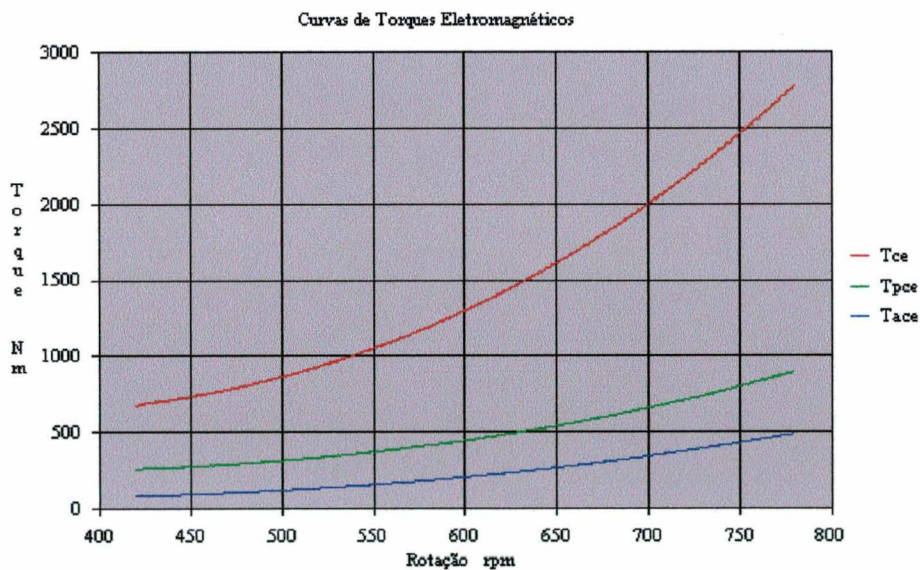


Figura 7.3.3.8 - Torques Eletromagnéticos da MATBCDA Operando Como Motor Com Conversor Ligado ao Estator da MA Controlando o FP 0.95 Indutivo na Faixa de Rotação de 70% a 130% da Rotação Síncrona da Cascata [Tce,Tpece,Tace]

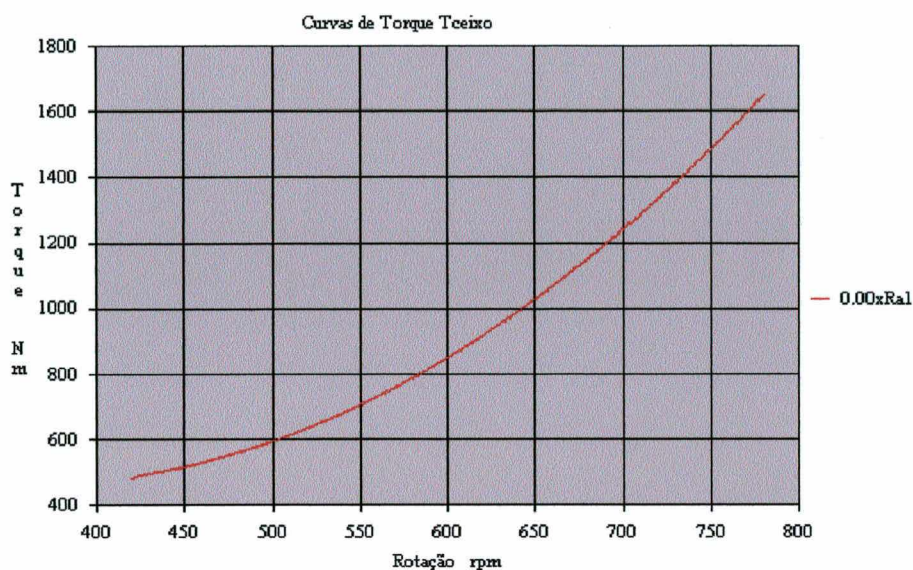


Figura 7.3.3.9 - Torque de Saída no Eixo da MATBCDA Operando Como Motor Com Conversor Ligado ao Estator da MA Controlando o FP 0.95 Indutivo na Faixa de Rotação de 70% a 130% da Rotação Síncrona da Cascata [Tceixo]

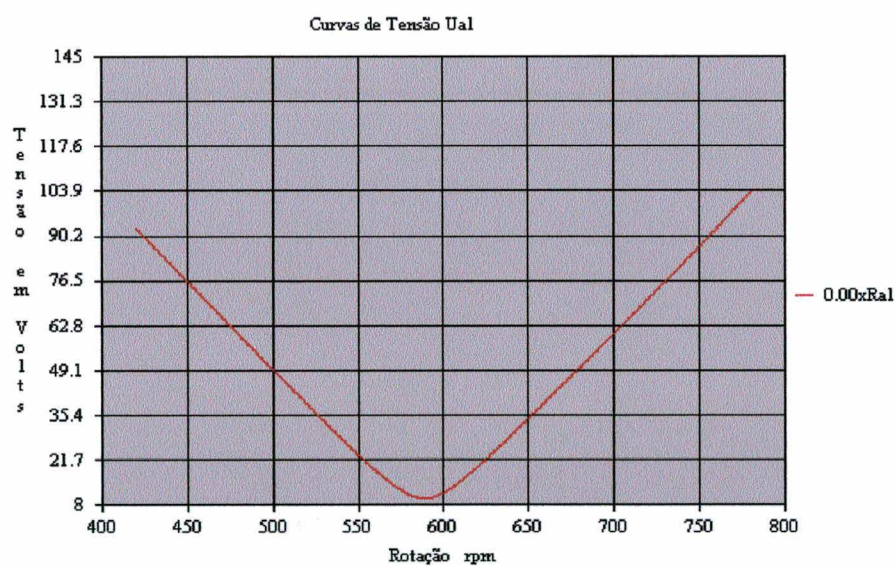


Figura 7.3.3.10- Amplitude da Tensão Imposta no Estator da MA Operando Como Motor Com Conversor Ligado ao Estator da MA Controlando o FP 0.95 Indutivo na Faixa de Rotação de 70% a 130% da Rotação Síncrona da Cascata [Ual]

A amplitude da tensão imposta ao estator da máquina auxiliar varia de acordo com o escorregamento, atingindo seu valor mínimo no ponto de sincronismo da cascata.

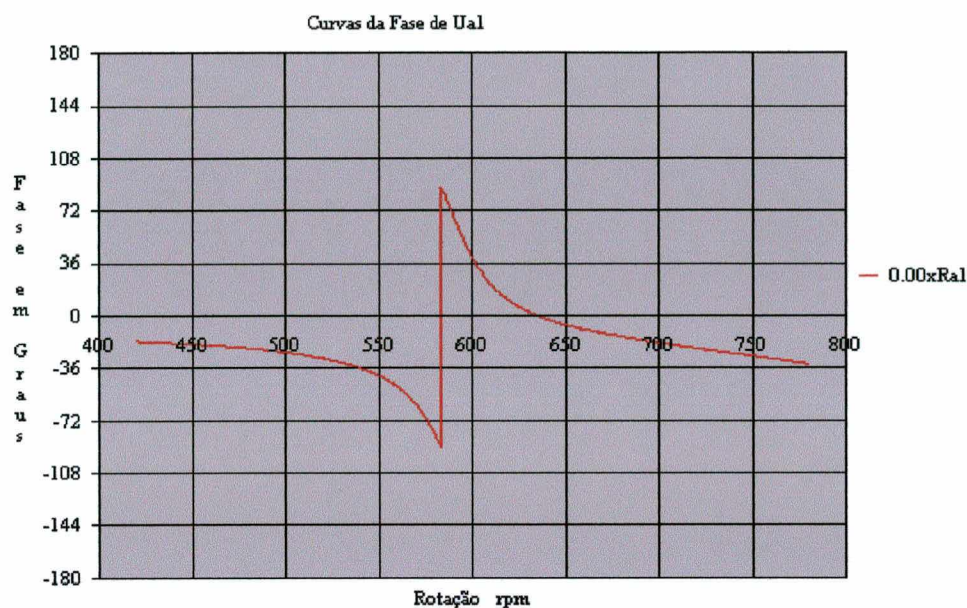


Figura 7.3.3.11- Fase da Tensão Imposta no Estator da MA Operando Como Motor Com Conversor Ligado ao Estator da MA Controlando o FP 0.95 Indutivo na Faixa de Rotação de 70% a 130% da Rotação Síncrona da Cascata [Fase de Ua1]

Notamos claramente que a fase da tensão imposta depende do ponto de trabalho.

Os gráficos das **Figuras 7.3.3.12 a 7.3.3.19** mostram as correntes, o fluxo de potência, torques e a tensão que o conversor deve aplicar ao estator da MA para que a máquina principal trabalhe na condição de **GERADOR** com **FP = 0,95 INDUTIVO**, nas seguintes condições:

- Torque no eixo variando conforme gráfico 7.3.3.3
- Resistência externa no estator da MA $R_{acad} = 0$
- Rotação Básica 600 rpm
- Torque Básico -1606 Nm
- Faixa de operação de 70% a 130% da rotação básica.

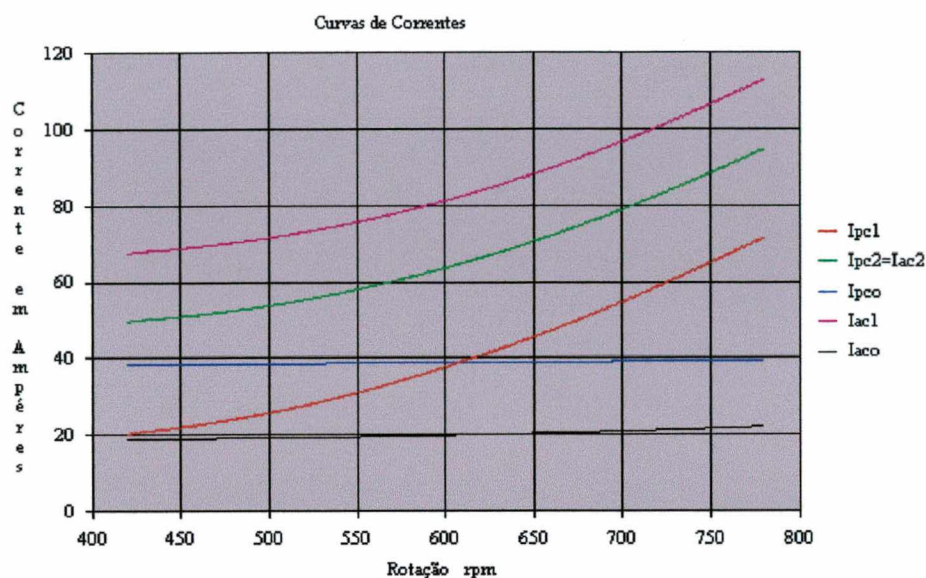


Figura 7.3.3.12- Módulo das Correntes na MP e MA Referidas ao Estator da MP, Operando Como Gerador Com Conversor Ligado ao Estator da MA Controlando o FP 0.95 Indutivo na Faixa de Rotação de 7% a 130% da Rotação Síncrona da Cascata
[$I_{pc1}, I_{pc2}=I_{ac2}, I_{pc0}, I_{ac1}, I_{ac0}$]

Analisando os gráficos, verificamos que a máquina funciona muito bem como gerador em toda a faixa de rotação controlada. O controle é feito pela tensão imposta mostrada nos Gráficos 7.3.3.18 e 7.3.3.19.

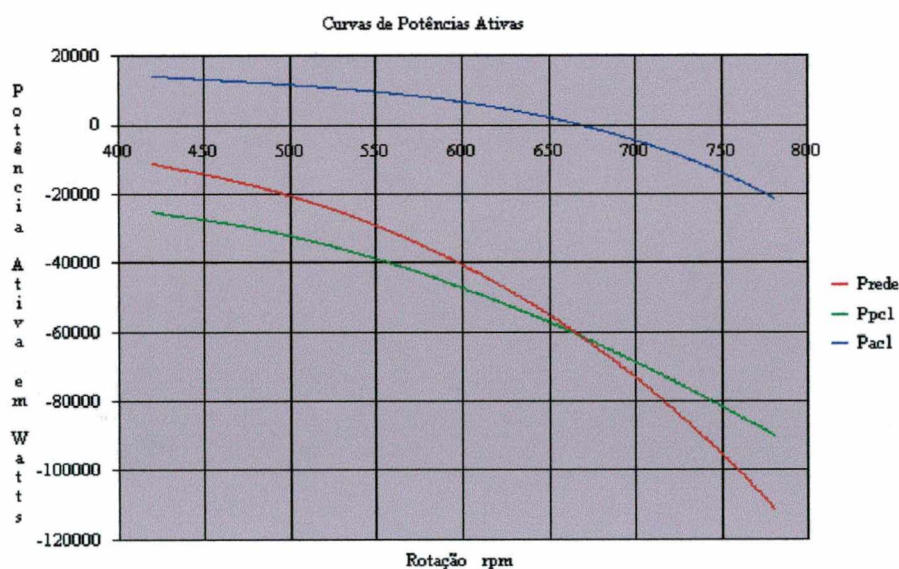


Figura 7.3.3.13- Potências Ativas no Estator das MP e MA Operando Como Gerador Com Conversor Ligado ao Estator da MA Controlando o FP 0.95 Indutivo na Faixa de Rotação de 70% a 130% da Rotação Síncrona da Cascata
[$P_{pc1}, P_{pac1}, P_{prede}$]

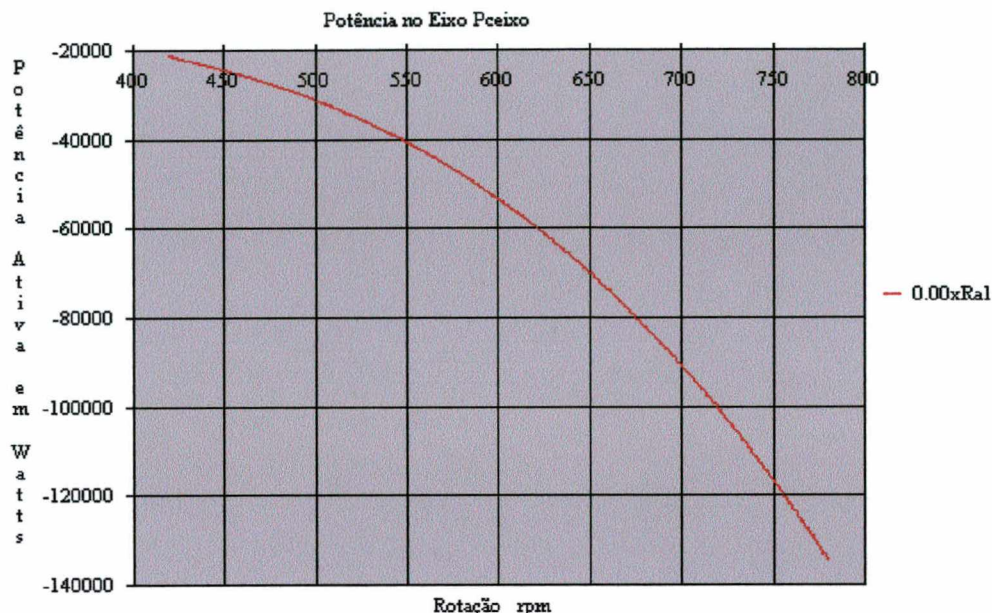


Figura 7.3.3.14- Potência Ativa no Eixo da MATBCDA Operando Como Gerador Com Conversor Ligado ao Estator da MA Controlando o FP 0.95 Indutivo na Faixa de Rotação de 70% a 130% da Rotação Síncrona da Cascata [Pceixo]

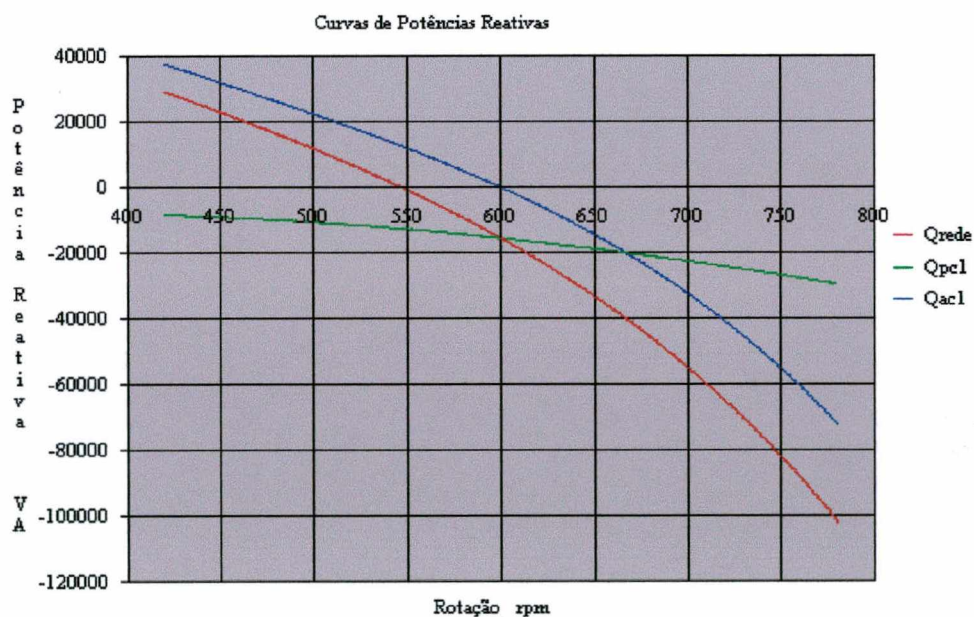


Figura 7.3.3.15- Potências Reativas no Estator das MP e MA Operando Como Gerador Com Conversor Ligado ao Estator da MA Controlando o FP 0.95 Indutivo na Faixa de Rotação de 70% a 130% da Rotação Síncrona da Cascata [Qpcl,Qacl,Qrede]

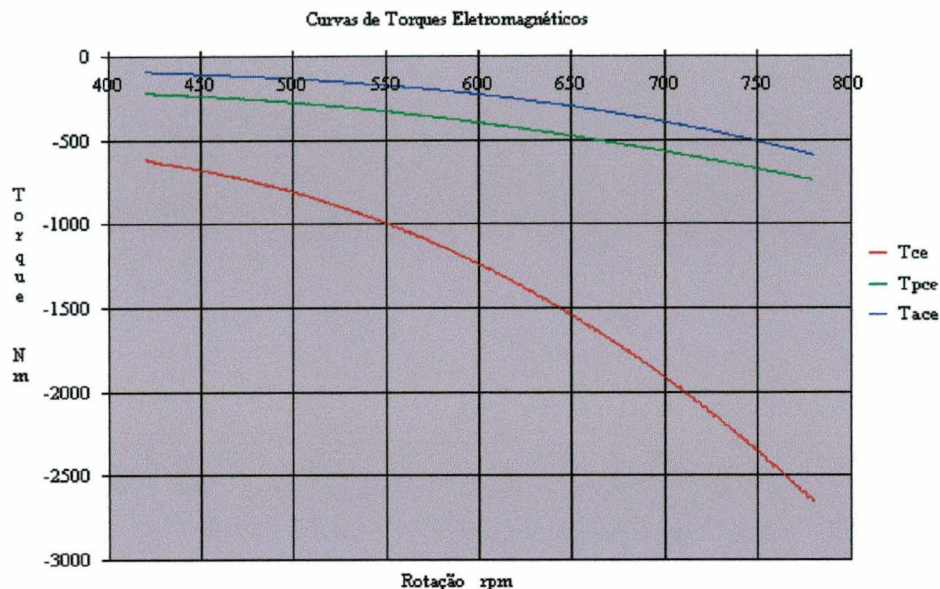


Figura 7.3.3.16- Torques Eletromagnéticos da MATBCDA Operando Como Gerador Com Conversor Ligado ao Estator da MA Controlando o FP 0.95 Indutivo na Faixa de Rotação de 70% a 130% da Rotação Síncrona da Cascata [Tce, Tpece, Tace]

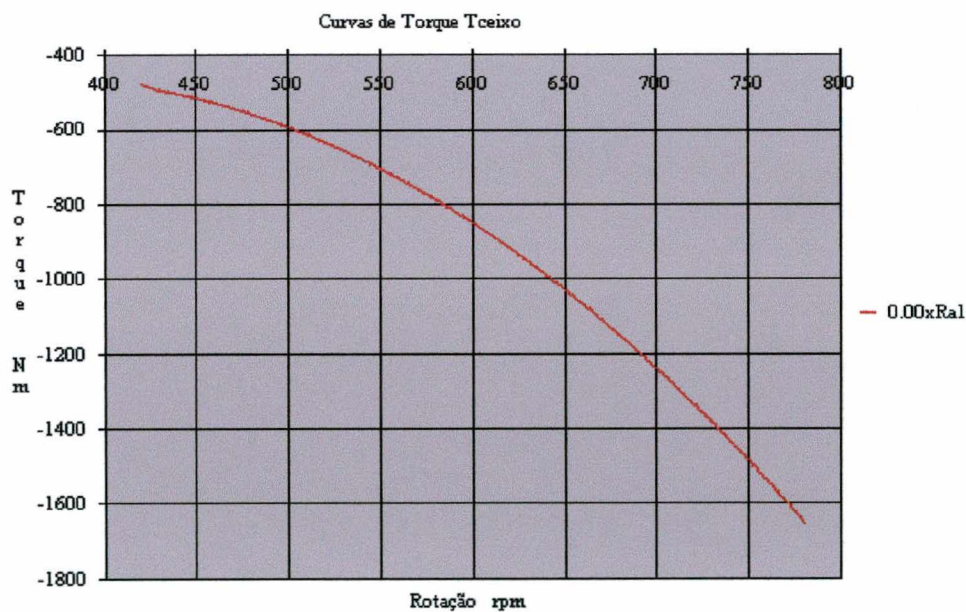


Figura 7.3.3.17- Torque de Saída no Eixo da MATBCDA Operando Como Gerador Com Conversor Ligado ao Estator da MA Controlando o FP 0.95 Indutivo na Faixa de Rotação de 70% a 130% da Rotação Síncrona da Cascata [Tceixo]

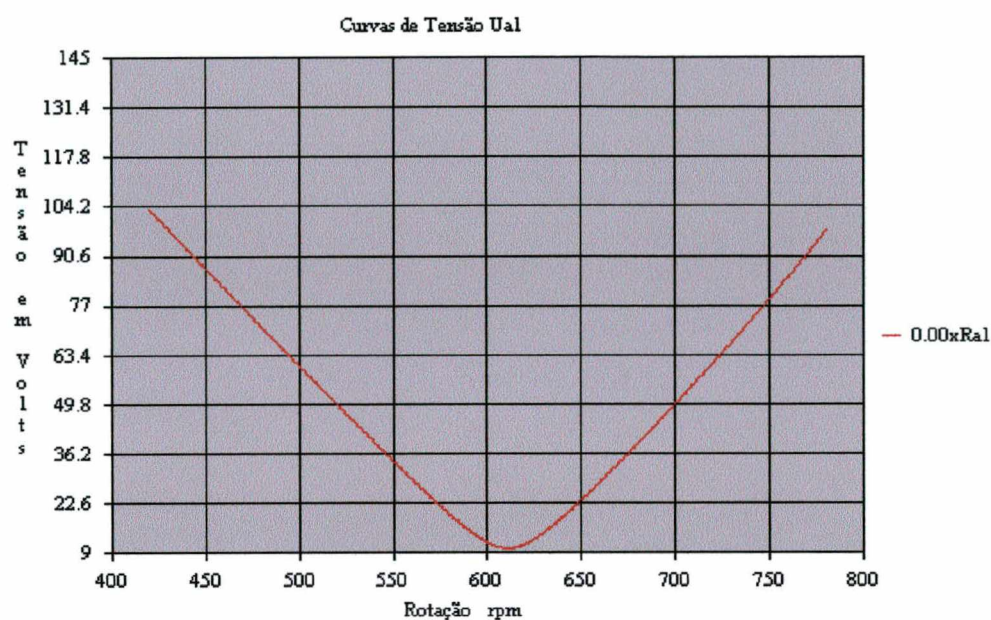


Figura 7.3.3.18 - Amplitude da Tensão Imposta no Estator da MA Operando Como Gerador Com Conversor Ligado ao Estator da MA Controlando o FP 0.95 Indutivo na Faixa de Rotação de 70% a 130% da Rotação Síncrona da Cascata [U_{a1}]

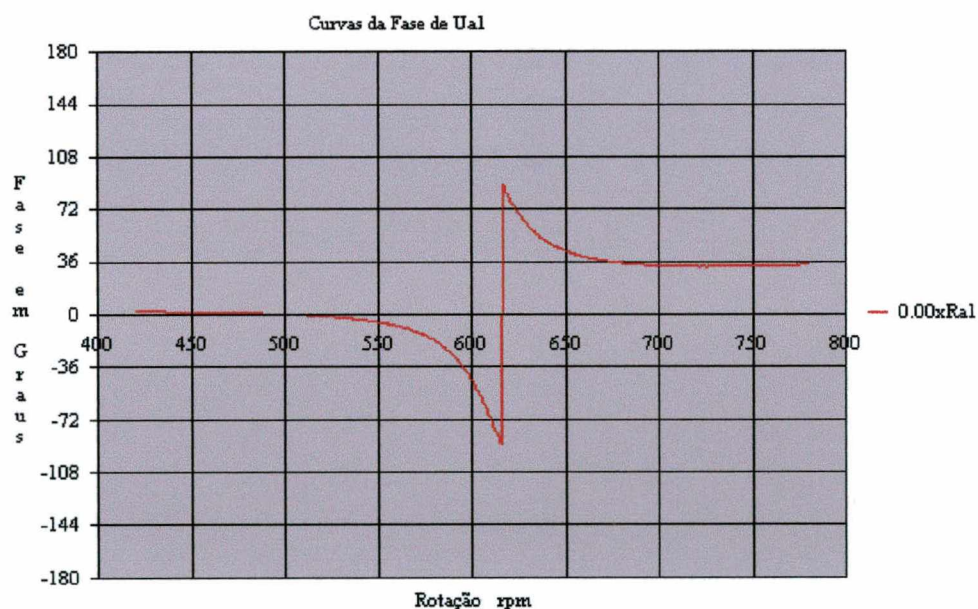


Figura 7.3.3.19- Fase da Tensão Imposta no Estator da MA Operando Como Gerador Com Conversor Ligado ao Estator da MA Controlando o FP 0.95 Indutivo na Faixa de Rotação de 70% a 130% da Rotação Síncrona da Cascata [Fase de U_{a1}]

CONCLUSÃO

No presente trabalho estudamos o funcionamento da Máquina Assíncrona Trifásica Bruhless ligada em Cascata Duplamente Alimentada (MATBCDA) em regime dinâmico e em regime permanente .

No modelo dinâmico foi utilizado a teoria do sistema de eixos arbitrários e para o modelo em regime permanente, o circuito equivale em “T” com o rotor imóvel.

O desempenho da MATBCDA, quando comparado com o desempenho das máquinas *Principal* e *Auxiliar* é pior, principalmente com relação ao torque eletromagnético e fator de potência. Esta deficiência pode ser amplamente compensada quando a MATBCDA é controlada pelo conversor de frequência conectado ao estator da MA. Com uma tensão adequadamente aplicada ao estator da máquina auxiliar, podemos controlar o torque e a rotação para um determinado fator de potência pré – estabelecido no estator da MP.

Abaixo é mostrado um resumo comparativo dos diversos tipos de Máquinas Assíncronas Trifásicas.

MÁQUINAS	FAIXA DE VARIÇÃO VELOCIDADE	POTÊNCIA DO CONVERSOR	CONTROLE FATOR DE POTÊNCIA	ANÉIS COLETORES	DESEMPENHO SEM CONVERSOR	DESEMPENHO COM CONVERSOR
MATRGU	100%	100%	Não	Sem anéis	Bom	Bom
MATRGDA	30%	30%	Sim	Sem anéis	Regular	Aprofundar a pesquisa
MATRBAU	10%	Não é usado	Não	Com anéis	Bom	Não é usado
MATRBDA	30%	30%	Sim	Com anéis	Bom	Bom
MATBCDA	30%	30%	Sim	Sem anéis	Regular	Bom

A MATBCDA pode ser uma solução quando a aplicação exigir:

- *Potência muito grande;*
- *Uma variação de velocidade em torno da rotação síncrona da ordem de $\pm 30\%$.*

Neste caso a MATBCDA constitui uma boa solução porque o conjunto “MOTOR + CONVERSOR” apresenta um custo menor. Tendo a vantagem de poder controlar o fator de potência.

A aplicação que exige as duas características acima é a geração de energia elétrica através de turbinas eólicas. Por necessidade de redução de custo, a potência das turbinas são de ordem de 2000KW e para maximizar o aproveitamento da energia dos ventos, é exigido uma variação de velocidade da ordem $\pm 30\%$.

Uma outra grande vantagem da MATBCDA é a eliminação dos problemas de manutenção proveniente das escovas.

Como esta máquina é Brushless, não apresenta o problema de desgaste de escovas e anéis coletores e nem a diminuição da resistência de isolamento proveniente do pó das escovas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Yuefeng Liao – Desing of A Brushless Doubly-Fed Induction Motor for Adjustable Speed Drive Applications – GE-Corporate Research Development Center, Building K1-EP118, P.O. Box 8, Schenectady, NY 12301, USA.
- [2] Ruqi Li, René Spée, Alan K Wallace, and G. C. Alexander – Synchronous Drive Performance of Brushless Doudly-Fed Motors – IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 30, NO 4, July/August 1994.
- [3] B. Hopfensperger, D. J. Atkinson, R. A. Lakin – Cascaded Brushless Doubly-Fed Machines for Variable Speed Wind Power Generation: na Overview – Department of Electrical and Electronic Engineering University of Newcastle. Newcastle upon Tyne, NE1 7RU, Great Britain.
- [4] Richter, Rudolf – “Elektrische Maschinen – Di Induktionsmaschinen” Verlag Birkhäuser AG, Barel, 1954 – Página 315 - 358
- [5] Enrico Levi – “Polyphase Motors – A Direct Aproach To Their Design” – John Wiley & Sons Inc., 1984 – Página 98 – 178
- [6] M. Kostenko & L. Piotrovski – “Máquinas Elétricas” – Vol. II – Edições Lopes da Silva, Porto, 1979, traduzido por Antônio Fernando Magalhães – Página 612 – 621, 694 – 704.
- [7] Kause Paul C. & Wasynczuk. Oleg & Sudhoff Scott D. – “Analysis of Electric Machinery” Institute of Electrical na Electronic Enginners, Inc. 375 – East 47 th Strees – New York, NY 10017 – 2394 – 1995
- [8] Alger Philip L. “Induction Machines – Their Behavios and Ures” – Gordon and Breach Science Publishers AS – Postfach – 4004 Barel – Switzerland - 1995
- [9] Seinsch Hans Otto. “Oberfelderscheinungen in Drehfeldmaschinen” “Grundlagen zur Analytischen Berechnung” –B.G. Teubner Stuttgart – 1992 – Printed in germany

APÊNDICE A

DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS

DO CIRCUITO EQUIVALENTE

PROTÓTIPO MATBCDA

Determinação dos Parâmetros do Circuito Equivalente Protótipo MATBDA

1) Ensaio da Máquina Auxiliar

Data : 05 de Agosto de 1999

Valores Medidos:

	Secundário	Primário		
Ligação:	Lig ₂ := "Y"	Lig ₁ := "Y"		
Coef. tensão de fase:	kat ₂ := if(Lig ₂ = "Y", $\sqrt{3}$, 1)	kat ₁ := if(Lig ₁ = "Y", $\sqrt{3}$, 1)		
Coef. corrente de fase:	kac ₂ := if(Lig ₂ = "Y", 1, $\sqrt{3}$)	kac ₁ := if(Lig ₁ = "Y", 1, $\sqrt{3}$)		
Temp ambiente	Taa ₂ := 26	Taa ₁ := 27.5		
Medidas de resist:	mra := 0..2 (três valores)			
Resistência @ Tamb:	Ra ₂ _{mra} :=	Ra ₁ _{mra} :=		
	0.02925·(ohm)	0.07476·(ohm)		
	0.02925·(ohm)	0.07522·(ohm)		
	0.02930·(ohm)	0.07477·(ohm)		
	Secundário	Primário		
	Curto	Curto	Aberto	
Tensão primária:	Uasc ₁ := 88.8·(V)	Uasa ₁ := 440·(V)	Uapc ₁ := 0·(V)	Uapa ₁ := 446·(V)
Corrente primária:	Iasc ₁ := 43.8·(A)	Iasa ₁ := 27.83·(A)	Iapc ₁ := 49·(A)	Iapa ₁ := 0·(A)
Fator de potência:	FPasc := 0.1429	FPasa := 0.088	FPapc := 0.141	FPapa := 0.077
Tensão secundária:	uasc ₂ := 0·(V)	uasa ₂ := 343.5·(V)	uapc ₂ := 88.2·(V)	uapa ₂ := 391.5·(V)
Corrente secundária:	iasc ₂ := 48.1·(A)	iasa ₂ := 0·(A)	iapc ₂ := 64·(A)	iapa ₂ := 41.04·(A)
Pot. absorvida:	Pasc := 962.7·(watt)	Pasa := 1859·(watt)	Papc := 1374·(watt)	Papa := 2143·(watt)
Fat. transf. tensão	kasae := $\frac{Uasa_1 \cdot kat_1^{-1}}{uasa_2 \cdot kat_2^{-1}}$	kasae = 1.281	kapae := $\frac{Uapa_1 \cdot kat_1^{-1}}{uapa_2 \cdot kat_2^{-1}}$	kapae = 1.139
	kae := $\frac{kasae + kapae}{2}$	kae = 1.21		
Fat. transf. corrente:	kai := kae ⁻¹	kai = 0.826		
Fat. transf. imped.:	kaz := kae ²	kaz = 1.464		

Ensaio com Secundário Aberto Alimentado pelo Primário:

Tensão prim. fase:	$U_{saf1} := U_{sa1} \cdot kat_1^{-1}$	$U_{saf1} = 254.034 \text{ (V)}$
Corrente estator:	$I_{sa1} := I_{sa1} \cdot kac_1^{-1} \cdot e^{j \cdot -\text{acos}(FP_{asa})}$	$I_{sa1} = 2.449 - 27.722i \text{ (A)}$
Res. est. fase:	$R_{sa1} := \text{mean}(R_{a1})$	$R_{sa1} = 0.075 \text{ (ohm)}$
Perdas J est:	$P_{aj1} := 3 \cdot R_{sa1} \cdot (I_{sa1})^2$	$P_{aj1} = 174.071 \text{ (watt)}$
Perdas no ferro:	$P_{afe1} := P_{asa} - P_{aj1}$	$P_{afe1} = 1.685 \times 10^3 \text{ (watt)}$
Perd. ferro fase:	$P_{afef1} := \frac{P_{afe1}}{3}$	$P_{afef1} = 561.643 \text{ (watt)}$
Ten. sec. fase ref.:	$U_{sar2} := u_{sa2} \cdot kat_2^{-1} \cdot kac$	$U_{sar2} = 239.981 \text{ (V)}$
Res. perda ferro	$R_{afetsa} := \frac{(U_{sar2})^2}{P_{afef1}}$	$R_{afetsa} = 102.54 \text{ (ohm)}$
Imp. equivalente :	$Z_{aesa} := \frac{U_{saf1}}{I_{sa1}}$	$Z_{aesa} = 0.803 + 9.093i \text{ (ohm)}$
Res. série:	$R_{0sa} := \text{Re}(Z_{aesa}) - R_{sa1}$	$R_{0sa} = 0.728 \text{ (ohm)}$
Reat. série	$X_{0sa} := \sqrt{\left(\frac{ U_{sar2} }{ I_{sa1} }\right)^2 - R_{0sa}^2}$	$X_{0sa} = 8.592 \text{ (ohm)}$
Reat primário:	$X_{sa1} := \text{Im}(Z_{aesa}) - X_{0sa}$	$X_{sa1} = 0.5 \text{ (ohm)}$
Reat magnetizante:	$X_{amsa} := \sqrt{\frac{R_{0sa} \cdot R_{afetsa}^2}{(R_{afetsa} - R_{0sa})}}$	$X_{amsa} = 8.673 \text{ (ohm)}$

Parâmetros obtidos:

Resistência primário:	$R_{sa1} = 0.075 \text{ (ohm)}$
Reatância primário:	$X_{sa1} = 0.5 \text{ (ohm)}$
Resistência ferro	$R_{afetsa} = 102.54 \text{ (ohm)}$
Reatância magnetizante:	$X_{amsa} = 8.673 \text{ (ohm)}$

Ensaio com Primário Aberto alimentado pelo secundário:

Tensão sec. fase:	$u_{apaf_2} := u_{apa_2} \cdot kat_2^{-1}$	$u_{apaf_2} = 226.033 \text{ (V)}$
Corrente rotor:	$i_{apa_2} := i_{apa_2} \cdot e^{j \cdot -\text{acos}(FP_{\text{Papa}})}$	$i_{apa_2} = 3.16 - 40.918i \text{ (A)}$
Res. fase rotor:	$rapaf_2 := \text{mean}(Ra_2)$	$rapaf_2 = 0.029 \text{ (ohm)}$
Perdas J rotor:	$paj_2 := 3 \cdot rapaf_2 \cdot (i_{apa_2})^2$	$paj_2 = 147.88 \text{ (watt)}$
Perdas no ferro:	$pafe_2 := P_{\text{Papa}} - paj_2$	$pafe_2 = 1.995 \times 10^3 \text{ (watt)}$
Perd. ferro fase:	$pafaf_2 := \frac{pafe_2}{3}$	$pafaf_2 = 665.04 \text{ (watt)}$
Tens. prim. ref. fase:	$u_{apar_1} := U_{apa_1} \cdot kat_1^{-1} \cdot kae^{-1}$	$u_{apar_1} = 212.796 \text{ (V)}$
Res perda ferro:	$rafetpa := \frac{(u_{apar_1})^2}{pafaf_2}$	$rafetpa = 68.089 \text{ (ohm)}$
Imp. equiv :	$zaeqpa := \frac{u_{apaf_2}}{i_{apa_2}}$	$zaeqpa = 0.424 + 5.491i \text{ (ohm)}$
Res. serie:	$r0pa := \text{Re}(zaeqpa) - rapaf_2$	$r0pa = 0.395 \text{ (ohm)}$
Reat. serie	$x0pa := \sqrt{\left(\frac{ u_{apar_1} }{ i_{apa_2} }\right)^2 - r0pa^2}$	$x0pa = 5.17 \text{ (ohm)}$
Reat secundário:	$xapa_2 := (\text{Im}(zaeqpa) - x0pa)$	$xapa_2 = 0.321 \text{ (ohm)}$
Reat magnetizante:	$xampa := \sqrt{\frac{r0pa \cdot rafetpa^2}{rafetpa - r0pa}}$	$xampa = 5.2 \text{ (ohm)}$
Parâmetros obtidos (referidos ao estator):		
Resistência rotor:	$Rapa_2 := rapaf_2 \cdot kaz$	$Rapa_2 = 0.043 \text{ (ohm)}$
Reatância rotor:	$Xapa_2 := xapa_2 \cdot kaz$	$Xapa_2 = 0.47 \text{ (ohm)}$
Res. perda ferro	$Rafetpa := rafetpa \cdot kaz$	$Rafetpa = 99.701 \text{ (ohm)}$
Reatância magnetiz:	$Xampa := xampa \cdot kaz$	$Xampa = 7.614 \text{ (ohm)}$
Res. ferro bloq. média:	$Rafebm := \frac{Rafetpa + Rafetsa}{2}$	$Rafebm = 101.121 \text{ (ohm)}$

Ensaio a Vazio:**Valores Medidos:**

Perdas mecânicas:	$P_{amev} := 778 \cdot (\text{watt})$
Perdas no ferro:	$P_{afeev} := 1331 \cdot (\text{watt})$
Pot. absorvida:	$P_{aev} := 2298 \cdot (\text{watt})$
Tensão linha:	$U_{aev1} := 440.68 \cdot (\text{V})$
Corrente de linha:	$I_{aev1} := 27.68 \cdot (\text{A})$

Determinação da Resistência do Ferro:

Tensão fase:	$U_{aevf1} := U_{aev1} \cdot \text{kat}_1^{-1}$	$U_{aevf1} = 254.427 \text{ (V)}$
Fator de pot:	$FP_{ev} := \frac{P_{aev}}{\sqrt{3} \cdot U_{aev1} \cdot I_{aev1}}$	$FP_{ev} = 0.109$
Cor de fase:	$I_{aevf1} := I_{aev1} \cdot \text{kac}_1^{-1} \cdot e^{j \cdot \text{acos}(FP_{ev})}$	$I_{aevf1} = 3.011 - 27.516i \text{ A}$
Tensão magnetizante:	$E_{ev0} := \frac{U_{aev1}}{\text{kat}_1} - I_{aevf1} \cdot (R_{asa1} + j \cdot X_{asa1})$	$E_{ev0} = 240.433 + 0.555i \text{ (V)}$
Res perda ferro:	$R_{afeev} := \frac{(E_{ev0})^2}{\frac{P_{afeev}}{3}}$	$R_{afeev} = 130.297 \text{ (ohm)}$
Imp. equiv :	$Z_{aeqev} := \frac{U_{aevf1}}{I_{aevf1}}$	$Z_{aeqev} = 1 + 9.137i \text{ (ohm)}$
Res. serie:	$R_{0ev} := \text{Re}(Z_{aeqev}) - R_{asa1}$	$R_{0ev} = 0.925 \text{ (ohm)}$
Reat. série	$X_{0ev} := \sqrt{\left(\frac{ E_{ev0} }{ I_{aevf1} }\right)^2 - R_{0ev}^2}$	$X_{0ev} = 8.637 \text{ (ohm)}$
Reat. primário:	$X_{aev1} := (\text{Im}(Z_{aeqev}) - X_{0ev})$	$X_{aev1} = 0.5 \text{ (ohm)}$
Reat. magnetizante:	$X_{amev} := \sqrt{\frac{R_{0ev} \cdot R_{afeev}^2}{R_{afeev} - R_{0ev}}}$	$X_{amev} = 11.017 \text{ (ohm)}$
Parâmetros obtidos:		
Reatância primário:	$X_{aev1} = 0.5 \text{ (ohm)}$	
Resistência ferro:	$R_{afeev} = 130.297 \text{ (ohm)}$	
Reatância magnetizante:	$X_{amev} = 11.017 \text{ (ohm)}$	

Parâmetros do Circuito Equivalente para 440 (V) @ 140 (°C) referidos as estator

Coef. corr. temp. est	$kaT_1 := \frac{(234.5 + 140)}{(234.5 + T_{aa1})}$	$kaT_1 = 1.429$
Coef. corr. temp. rot	$kaT_2 := \frac{(234.5 + 140)}{(234.5 + T_{aa2})}$	$kaT_2 = 1.438$
Resistência primário	$Ra_1 := R_{sa1} \cdot kaT_1$	$Ra_1 = 0.107 \text{ (ohm)}$
Reatancia primário	$Xa_1 := \frac{X_{asa1} + X_{aev1}}{2}$	$Xa_1 = 0.5 \text{ (ohm)}$
Resistência do ferro:	$Rafe_1 := R_{afeev} \cdot kaT_1$	$Rafe_1 = 186.245 \text{ (ohm)}$
Res ferro paralela:	$Rafe_2 := \frac{R_{afebm} \cdot R_{afeev}}{R_{afeev} - R_{afebm}} \cdot kaT_1$	$Rafe_2 = 645.497 \text{ (ohm)}$
Reat. magnetizante	$X_{am} := \frac{X_{amsa} + X_{ampa} + X_{amev}}{3}$	$X_{am} = 9.101 \text{ (ohm)}$
Resistencia secundário	$Ra_2 := R_{pa2} \cdot kaT_2$	$Ra_2 = 0.062 \text{ (ohm)}$
Reatância secundário	$Xa_2 := X_{pa2}$	$Xa_2 = 0.47 \text{ (ohm)}$

2) Ensaio Máquina Principal

Valores Medidos:

	Secundário		Primário							
Ligação:	Lig ₂ := "Y"		Lig ₁ := "D"							
Coef. tensão de fase:	kpt ₂ := if(Lig ₂ = "Y", $\sqrt{3}$, 1)		kpt ₁ := if(Lig ₁ = "Y", $\sqrt{3}$, 1)							
Coef. corrente de fase:	kpc ₂ := if(Lig ₂ = "Y", 1, $\sqrt{3}$)		kpc ₁ := if(Lig ₁ = "Y", 1, $\sqrt{3}$)							
Temp ambiente	Tpa ₂ := 26		Tpa ₁ := 26							
Medidas de resist:	mrp := 0..2 (três valores)									
Resistência @ Tamb:	Rp ₂ _{mrp} :=		Rp ₁ _{mrp} :=							
	<table border="1"> <tr><td>0.00826·(ohm)</td></tr> <tr><td>0.00836·(ohm)</td></tr> <tr><td>0.00848·(ohm)</td></tr> </table>		0.00826·(ohm)	0.00836·(ohm)	0.00848·(ohm)	<table border="1"> <tr><td>0.04761·(ohm)</td></tr> <tr><td>0.04750·(ohm)</td></tr> <tr><td>0.04727·(ohm)</td></tr> </table>		0.04761·(ohm)	0.04750·(ohm)	0.04727·(ohm)
0.00826·(ohm)										
0.00836·(ohm)										
0.00848·(ohm)										
0.04761·(ohm)										
0.04750·(ohm)										
0.04727·(ohm)										
	Secundário		Primário							
	Curto	Aberto	Curto	Aberto						
Tensão primária:	Up _{sc1} := 82.6·(V)	Up _{sa1} := 440·(V)	Up _{pc1} := 0·(V)	Up _{pa1} := 440·(V)						
Corrente primária:	Ip _{sc1} := 168.1·(A)	Ip _{sa1} := 69.6·(A)	Ip _{pc1} := 192.6·(A)	Ip _{pa1} := 0·(A)						
Fator de potência:	FP _{psc} := 0.139	FP _{psa} := 0.079	FP _{ppc} := 0.14	FP _{ppa} := 0.075						
Tensão secundária:	up _{sc2} := 0·(V)	up _{sa2} := 343·(V)	up _{pc2} := 82.2·(V)	up _{pa2} := 369.6·(V)						
Corrente secundária:	ip _{sc2} := 194·(A)	ip _{sa2} := 0·(A)	ip _{pc2} := 254.4·(A)	ip _{pa2} := 95.6·(A)						
Pot. absorvida:	P _{psc} := 3349.2·(watt)	P _{psa} := 4200·(watt)	P _{ppc} := 5071·(watt)	P _{ppa} := 4560·(watt)						
Fat. transf. tensão	$kpsae := \frac{Up_{sa1} \cdot kpt_1^{-1}}{up_{sa2} \cdot kpt_2^{-1}}$	kpsae = 2.222	$kppae := \frac{Up_{pa1} \cdot kpt_1^{-1}}{up_{pa2} \cdot kpt_2^{-1}}$	kppae = 2.062						
	$kpe := \frac{kpsae + kppae}{2}$	kpe = 2.142								
Fat. transf. corrente:	kpi := kpe ⁻¹	kpi = 0.467								
Fat. transf. imped.:	kpz := kpe ²	kpz = 4.588								

Ensaio com Secundário Aberto Alimentado pelo Primário:

Tensão prim. fase:	$U_{psa1} := U_{psa1} \cdot k_{pt1}^{-1}$	$U_{psa1} = 440 \text{ (V)}$
Corrente estator:	$I_{psa1} := I_{psa1} \cdot k_{pc1}^{-1} \cdot e^{j \cdot -\text{acos}(FP_{psa})}$	$I_{psa1} = 3.175 - 40.058i \text{ (A)}$
Res. est. fase:	$R_{psa1} := \text{mean}(R_{p1})$	$R_{psa1} = 0.047 \text{ (ohm)}$
Perdas J est:	$P_{pj1} := 3 \cdot R_{psa1} \cdot (I_{psa1})^2$	$P_{pj1} = 229.904 \text{ (watt)}$
Perdas no ferro:	$P_{pfe1} := P_{psa} - P_{pj1}$	$P_{pfe1} = 3.97 \times 10^3 \text{ (watt)}$
Perd. ferro fase:	$P_{pfef1} := \frac{P_{pfe1}}{3}$	$P_{pfef1} = 1.323 \times 10^3 \text{ (watt)}$
Ten. sec. fase ref.:	$U_{psar2} := u_{psa2} \cdot k_{pt2}^{-1} \cdot k_{pe}$	$U_{psar2} = 424.167 \text{ (V)}$
Res. perda ferro	$R_{pfetsa} := \frac{(U_{psar2})^2}{P_{pfef1}}$	$R_{pfetsa} = 135.954 \text{ (ohm)}$
Imp. equivalente :	$Z_{pesa} := \frac{U_{psa1}}{I_{psa1}}$	$Z_{pesa} = 0.865 + 10.916i \text{ (ohm)}$
Res. série:	$R_{0sa} := \text{Re}(Z_{pesa}) - R_{psa1}$	$R_{0sa} = 0.818 \text{ (ohm)}$
Reat. série	$X_{0sa} := \sqrt{\left(\frac{ U_{psar2} }{ I_{psa1} }\right)^2 - R_{0sa}^2}$	$X_{0sa} = 10.524 \text{ (ohm)}$
Reat primário:	$X_{psa1} := \text{Im}(Z_{pesa}) - X_{0sa}$	$X_{psa1} = 0.392 \text{ (ohm)}$
Reat magnetizante:	$X_{pmsa} := \sqrt{\frac{R_{0sa} \cdot R_{pfetsa}^2}{(R_{pfetsa} - R_{0sa})}}$	$X_{pmsa} = 10.575 \text{ (ohm)}$

Parâmetros obtidos:

Resistencia est:	$R_{psa1} = 0.047 \text{ (ohm)}$
Reatância primário:	$X_{psa1} = 0.392 \text{ (ohm)}$
Resistência ferro	$R_{pfetsa} = 135.954 \text{ (ohm)}$
Reatância magnetizante:	$X_{pmsa} = 10.575 \text{ (ohm)}$

Ensaio com Primário Aberto alimentado pelo secundário

Tensão sec. fase:	$u_{ppaf_2} := u_{ppa_2} \cdot k_{pt_2}^{-1}$	$u_{ppaf_2} = 213.389 \text{ (V)}$
Corrente rotor:	$i_{ppa_2} := i_{ppa_2} \cdot e^{j \cdot -\arccos(FP_{ppa})}$	$i_{ppa_2} = 7.17 - 95.33i \text{ (A)}$
Res. fase rotor:	$r_{ppaf_2} := \text{mean}(R_{p_2})$	$r_{ppaf_2} = 8.367 \times 10^{-3} \text{ (ohm)}$
Perdas J rotor:	$ppj_2 := 3 \cdot r_{ppaf_2} \cdot (i_{ppa_2})^2$	$ppj_2 = 229.398 \text{ (watt)}$
Perdas no ferro:	$ppfe_2 := P_{ppa} - ppj_2$	$ppfe_2 = 4.331 \times 10^3 \text{ (watt)}$
Perd. ferro fase:	$ppfaf_2 := \frac{ppfe_2}{3}$	$ppfaf_2 = 1.444 \times 10^3 \text{ (watt)}$
Tens. prim. ref. fase:	$u_{ppar_1} := U_{ppa_1} \cdot k_{pt_1}^{-1} \cdot k_{pe}^{-1}$	$u_{ppar_1} = 205.423 \text{ (V)}$
Res perda ferro:	$r_{pfetpa} := \frac{(u_{ppar_1})^2}{ppfaf_2}$	$r_{pfetpa} = 29.233 \text{ (ohm)}$
Imp. equiv :	$z_{peqpa} := \frac{u_{ppaf_2}}{i_{ppa_2}}$	$z_{peqpa} = 0.167 + 2.226i \text{ (ohm)}$
Res. serie:	$r_{0pa} := \text{Re}(z_{peqpa}) - r_{ppaf_2}$	$r_{0pa} = 0.159 \text{ (ohm)}$
Reat. serie	$x_{0pa} := \sqrt{\left(\frac{ u_{ppar_1} }{ i_{ppa_2} }\right)^2 - r_{0pa}^2}$	$x_{0pa} = 2.143 \text{ (ohm)}$
Reat secundário:	$x_{ppa_2} := (\text{Im}(z_{peqpa}) - x_{0pa})$	$x_{ppa_2} = 0.083 \text{ (ohm)}$
Reat magnetizante:	$x_{pmpa} := \sqrt{\frac{r_{0pa} \cdot r_{pfetpa}^2}{r_{pfetpa} - r_{0pa}}}$	$x_{pmpa} = 2.162 \text{ (ohm)}$

Parâmetros obtidos (referido ao estator):

Resistência rotor:	$R_{ppa_2} := r_{ppaf_2} \cdot k_{pz}$	$R_{ppa_2} = 0.038 \text{ (ohm)}$
Reat. rotor:	$X_{ppa_2} := x_{ppa_2} \cdot k_{pz}$	$X_{ppa_2} = 0.38 \text{ (ohm)}$
Res. perda ferro	$R_{pfetpa} := r_{pfetpa} \cdot k_{pz}$	$R_{pfetpa} = 134.115 \text{ (ohm)}$
Reat. magnetiz:	$X_{pmpa} := x_{pmpa} \cdot k_{pz}$	$X_{pmpa} = 9.919 \text{ (ohm)}$
Res ferro bloq media:	$R_{pfebm} := \frac{(R_{pfetpa} + R_{pfetsa})}{2}$	$R_{pfebm} = 135.035 \text{ (ohm)}$

Ensaio a Vazio:**Valores Medidos:**

Perdas mecânicas: $P_{pmev} := 1216 \cdot (\text{watt})$

Perdas no ferro: $P_{pfeev} := 2453 \cdot (\text{watt})$

Tensão linha: $U_{pev1} := 440 \cdot (\text{V})$

Pot. absorvida: $P_{pev} := 4320 \cdot (\text{watt})$

Corrente de linha: $I_{pev1} := 68.7 \cdot (\text{A})$

Determinação da Resistência do Ferro:

Tensão fase: $U_{pevf1} := U_{pev1} \cdot k_{pt1}^{-1}$ $U_{pevf1} = 440.68 \text{ (V)}$

Fator de pot: $FPev := \frac{P_{pev}}{\sqrt{3} \cdot U_{pev1} \cdot I_{pev1}}$ $FPev = 0.083$

Cor de fase: $I_{pevf1} := I_{pev1} \cdot k_{pc1}^{-1} \cdot e^{j \cdot -\text{acos}(FPev)}$ $I_{pevf1} = 3.273 - 39.529i \text{ A}$

Tensão magnetizante: $E_{ev0} := \frac{U_{pev1}}{k_{pt1}} - I_{pevf1} \cdot (R_{psa1} + j \cdot X_{psa1})$ $E_{ev0} = 424.369 + 0.595i \text{ (V)}$

Res perda ferro: $R_{pfeev} := \frac{(|E_{ev0}|)^2}{\frac{P_{pfeev}}{3}}$ $R_{pfeev} = 220.248 \text{ (ohm)}$

Imp. equiv : $Z_{peqev} := \frac{U_{pevf1}}{I_{pevf1}}$ $Z_{peqev} = 0.917 + 11.072i \text{ (ohm)}$

Res. serie: $R_{0ev} := \text{Re}(Z_{peqev}) - R_{psa1}$ $R_{0ev} = 0.869 \text{ (ohm)}$

Reat. série $X_{0ev} := \sqrt{\left(\frac{|E_{ev0}|}{|I_{pevf1}|}\right)^2 - R_{0ev}^2}$ $X_{0ev} = 10.664 \text{ (ohm)}$

Reat primário: $X_{pev1} := (\text{Im}(Z_{peqev}) - X_{0ev})$ $X_{pev1} = 0.5 \text{ (ohm)}$

Reat magnetizante: $X_{pmev} := \sqrt{\frac{R_{0ev} \cdot R_{pfeev}^2}{R_{pfeev} - R_{0ev}}}$ $X_{pmev} = 13.864 \text{ (ohm)}$

Parâmetros obtidos:

Reatância primário: $X_{pev1} = 0.409 \text{ (ohm)}$

Resistência ferro: $R_{pfeev} = 220.248 \text{ (ohm)}$

Reatância magnetizante: $X_{pmev} = 13.864 \text{ (ohm)}$

Parâmetros do Circuito Equivalente para 440 (V) @ 140 (°C) referidos as estator

Coef. corr. temperatura	$kpT_1 := \frac{(234.5 + 140)}{(234.5 + T_{pa1})}$	$kpT_1 = 1.438$
Coef. corr. temperatura	$kpT_2 := \frac{(234.5 + 140)}{(234.5 + T_{pa2})}$	$kpT_2 = 1.438$
Resistência primário	$R_{p1} := R_{psa1} \cdot kpT_1$	$R_{p1} = 0.068 \text{ (ohm)}$
Reatância primário	$X_{p1} := \frac{X_{psa1} + X_{pev1}}{2}$	$X_{p1} = 0.4 \text{ (ohm)}$
Resistência do ferro:	$R_{pfe1} := R_{pfeev} \cdot kpT_1$	$R_{pfe1} = 316.632 \text{ (ohm)}$
Res ferro paralela:	$R_{pfe2} := \frac{R_{pfeb1} \cdot R_{pfeev}}{R_{pfeev} - R_{pfeb1}} \cdot kpT_1$	$R_{pfe2} = 501.761 \text{ (ohm)}$
Reat. magnetizante	$X_{pm} := \frac{X_{pmsa} + X_{pmpa} + X_{pmev}}{3}$	$X_{pm} = 11.453 \text{ (ohm)}$
Resistencia secundário	$R_{p2} := R_{ppa2} \cdot kpT_2$	$R_{p2} = 0.055 \text{ (ohm)}$
Reatância secundário	$X_{p2} := X_{ppa2}$	$X_{p2} = 0.38 \text{ (ohm)}$

APÊNDICE B

RELATÓRIO

ENSAIO DA MATBCDA

Características Nominal

Máquina Principal

Modelo :	FAF.315M40	Potência:	100 Kw
Tensão Estator :	440 V / D	Nº de Pólos:	6
Tensão Rotor :	343 V / Y	Rotação:	1187 rpm
Corrente Estator:	175.5 A	Torque Nominal:	82 mkgf

Máquina Auxiliar

Modelo:	FAF.315M14	Potência:	20 kW
Tensão Estator :	440 V / Y	Nº de Pólos:	6
Tensão Rotor :	348 V / Y	Rotação:	1190 rpm
Corrente Estator:	42.03 A	Torque Nominal:	16.3 mkgf

Sistema de Medição

- Torque : Célula de carga com dinamômetro (gerador cc em balanço)
- Corrente : Com transformador de corrente e analisador de potência
- Tensão: Diretamente e analisador de potência
- Rotação: Encoder e analisador de potência
- Resistência: Microhomímetro digital

Grandezas Medidas

- Corrente : valores de linha em Ampéres
- Tensão : valores de linha em Volts
- Potência : valor trifásico em Watts
- Resistência : valores de fase em Ohm
- Torque : em mkgf
- Rotação : em rpm

Ensaio de Máquina Assíncrona Trifásica Brushless Duplamente Alimentada

(MATBDA)

1- Ensaio como motor nas máquinas individualmente

1.1 Máquina Auxiliar número 72152

1.1.1 Ensaio de medição de resistência de fase a frio

Estator			
Ambiente (°C)	Raf1 (Ω)	Ligação	Fase
27.5	0.07476	Y	1-2
	0.07522		2-3
	0.07477		1-3
40	0.07849	Y	Média

Rotor			
Ambiente (°C)	Raf2 (Ω)	Ligação	Fase
26	0.02925	Y	13-14
	0.02925		14-15
	0.02930		13-15
40	0.03084	Y	Média

1.1.2 Ensaio a vazio

Ua1 (V)	453.13	440.68	402.02	361.77	319.76	280.32	240.96	--
Ia1 (A)	29.16	27.68	23.88	20.78	17.99	15.41	13.45	--
Po (W)	2682	2298	1985	1815	1524	1397	1208	--
Pfe (W)	--	1331	--	--	--	--	--	--
Pmec (W)	--	778	--	--	--	--	--	--

1.1.3 Ensaio Bloqueado

Ua1 (V)	88.8	0	440	446
Ia1 (A)	43.8	49	27.83	--
Pab (W)	962.7	1374	1859	2143
Cos φ	0.1429	0.141	0.088	0.077
Ua2 (V)	0	88.2	343.5	391.5
Ia2 (V)	48.1	64	--	41.04

1.1.4 Ensaio de Conjugado Máximo

Tensão (V)	Conjugado (mkgf)	Cmáx/Cn
431	85	5.21

1.1.5 Ensaio em Carga

Potência: 27cv

Tensão: 440 V

Ligação: Y

% Potência	Mkgf	Ia (A)	Pa(W)	Rpm	Cos ϕ	η (%)
125	20.3	48.4	27197	1190	0.74	91.2
100	16.3	42.03	21837	1192	0.67	91.6
75	12.2	36.41	16608	1193	0.59	90.1
50	8.15	32.06	11457	1195	0.46	87.4

1.1.6 Curva de Torque

1.1.6.1 Tabela de Dados

Valores de base :

Corrente : 42.03 A

Torque : 16.3 mkgf

Corrente (pu)	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5
Torque(pu)	1.1	1.00	0.96	0.94	0.89	0.90	0.84	0.82	0.77
Rotação(rpm)	0	76	103	128	153	176	222	244	266

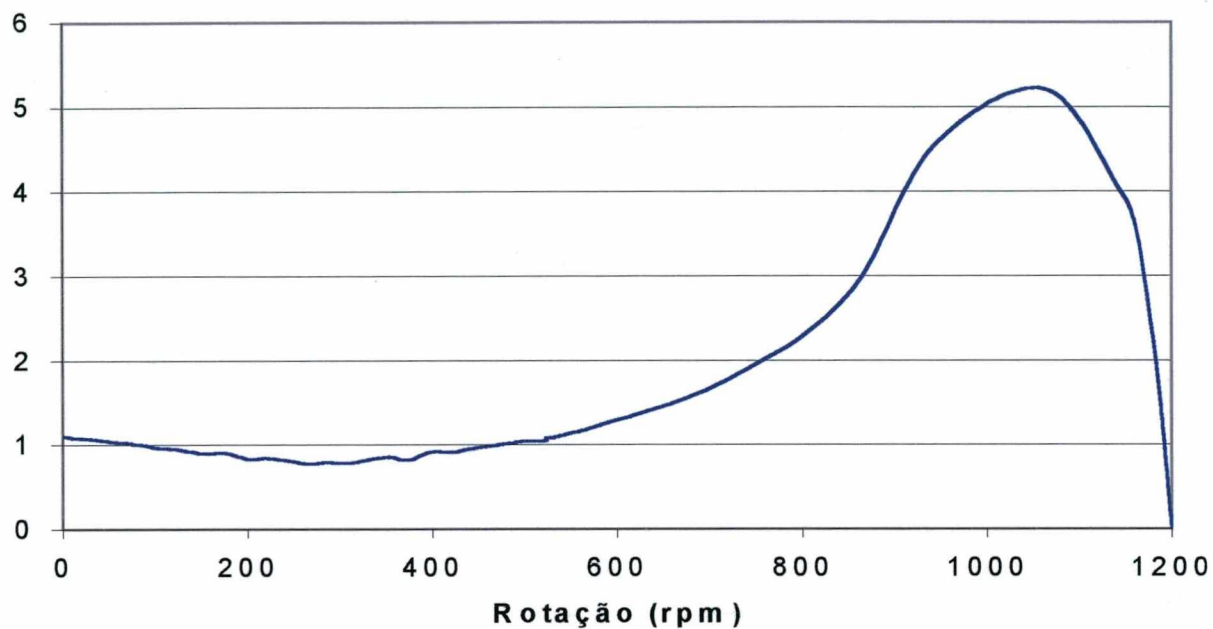
Corrente (pu)	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5	6.5
Torque(pu)	0.79	0.83	0.84	0.85	0.82	0.92	0.92	0.96	0.99
Rotação(rpm)	286	330	345	352	375	397	421	444	470

Corrente (pu)	6.5	6.5	6.5	6.4	6.4	6.4	6.4	6.4	6.4
Torque(pu)	1.03	1.08	1.10	1.18	1.29	1.38	1.52	1.70	1.97
Rotação(rpm)	496	522	537	565	596	631	668	708	752

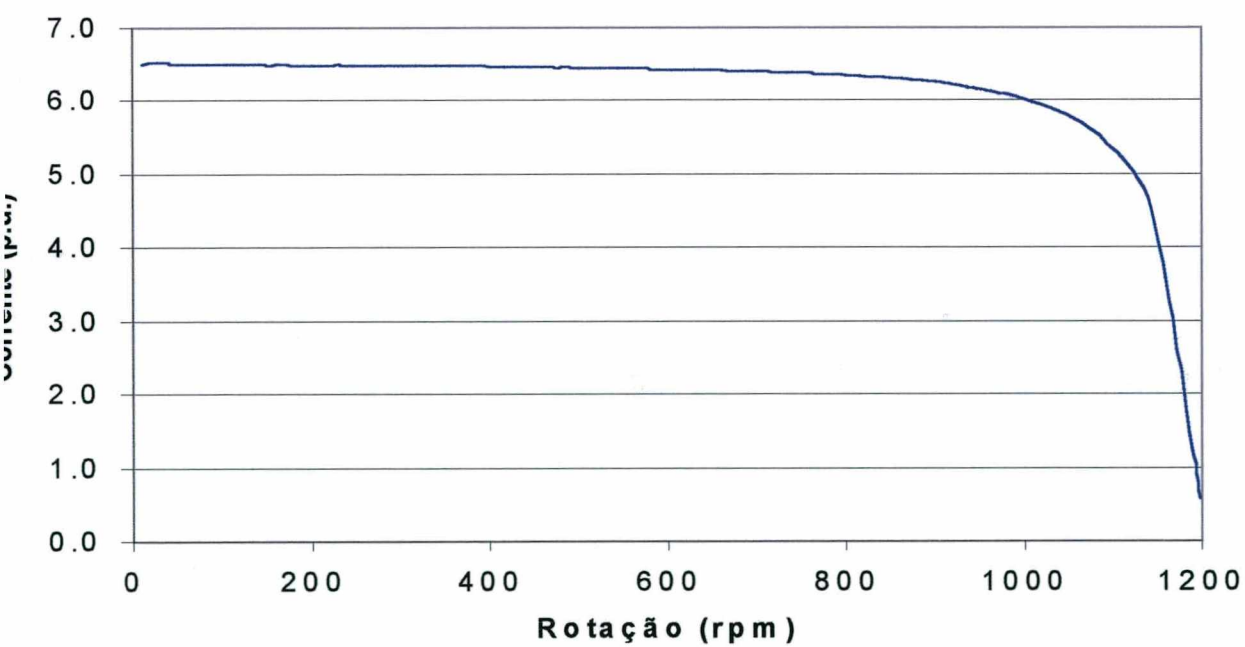
Corrente (pu)	6.4	5.6	4.2	2.6	2.2	1.7	1.3	1.00	0.
Torque(pu)	2.31	5.21	4.00	3.00	2.5	2.0	1.50	1.00	0
Rotação(rpm)	804	1063	1144	1171	1177	1183	1188	1192	1200

1.1.6.2 Gráficos

**Curva de Conjugado
Máquina Auxiliar**



**Curva de Corrente
Máquina Auxiliar**



1.2 Máquina Principal número 72151

1.2.1 Ensaio de medição de resistência de fase a frio

Estator			
Ambiente (°C)	R _{pf1} (Ω)	Ligação	Fase
26	0.04761	D	1-2
	0.04750		2-3
	0.04727		1-3
40	0.05002	D	Média

Rotor			
Ambiente (°C)	R _{pf2} (Ω)	Ligação	Fase
26	0.00826	Y	13-14
	0.00836		14-15
	0.00848		13-15
40	0.00881	Y	Média

1.2.2 Ensaio a vazio

Up1 (V)	460	440	400	360	320	280	240	--
Ip1 (A)	74.9	68.7	60.0	53.0	46.8	40.9	35.5	--
Po (W)	4632	4320	3800	3264	2816	2408	2156	--
Pfe (W)	--	2453	--	--	--	--	--	--
Pmec (W)	--	1216	--	--	--	--	--	--

1.2.3 Ensaio Bloqueado

Up1 (V)	82.6	0	440	444
Ip1 (A)	168.1	192.6	69.6	--
Pab (W)	3349.2	5071	4200	4560
Cos φ	0.139	0.14	0.079	0.075
Up2 (V)	0	82.2	343	369.6
Ip2 (V)	194	254.4	--	95.6

1.2.4 Ensaio de Conjugado Máximo

Tensão (V)	Conjugado (mkgf)	C _{máx} /C _n
440	297.7	3.6

1.2.5 Ensaio em Carga

Potência: 136cv Tensão: 440 V Ligação: D

% Potência	Mkgf	Ia (A)	Pa(W)	Rpm	Cos ϕ	η (%)
125	102.5	205.5	136000	1186	0.87	91.9
100	82	175.5	113696	1188	0.85	89.2
75	61.5	134.5	86096	1191	0.81	87.5
50	41	105.6	58096	1193	0.71	86.7

1.2.6 Curva de Torque

1.2.6.1 Tabela de Dados

Valores de base:

Corrente : 175.5 A

Torque : 82 mkgf

Corrente (pu)	6.4	6.4	6.4	6.4	6.4	6.3	6.3	6.3	6.3
Torque(pu)	0.71	0.71	0.67	0.66	0.63	0.63	0.59	0.56	0.54
Rotação(rpm)	0	34	63	90	115	141	190	210	236

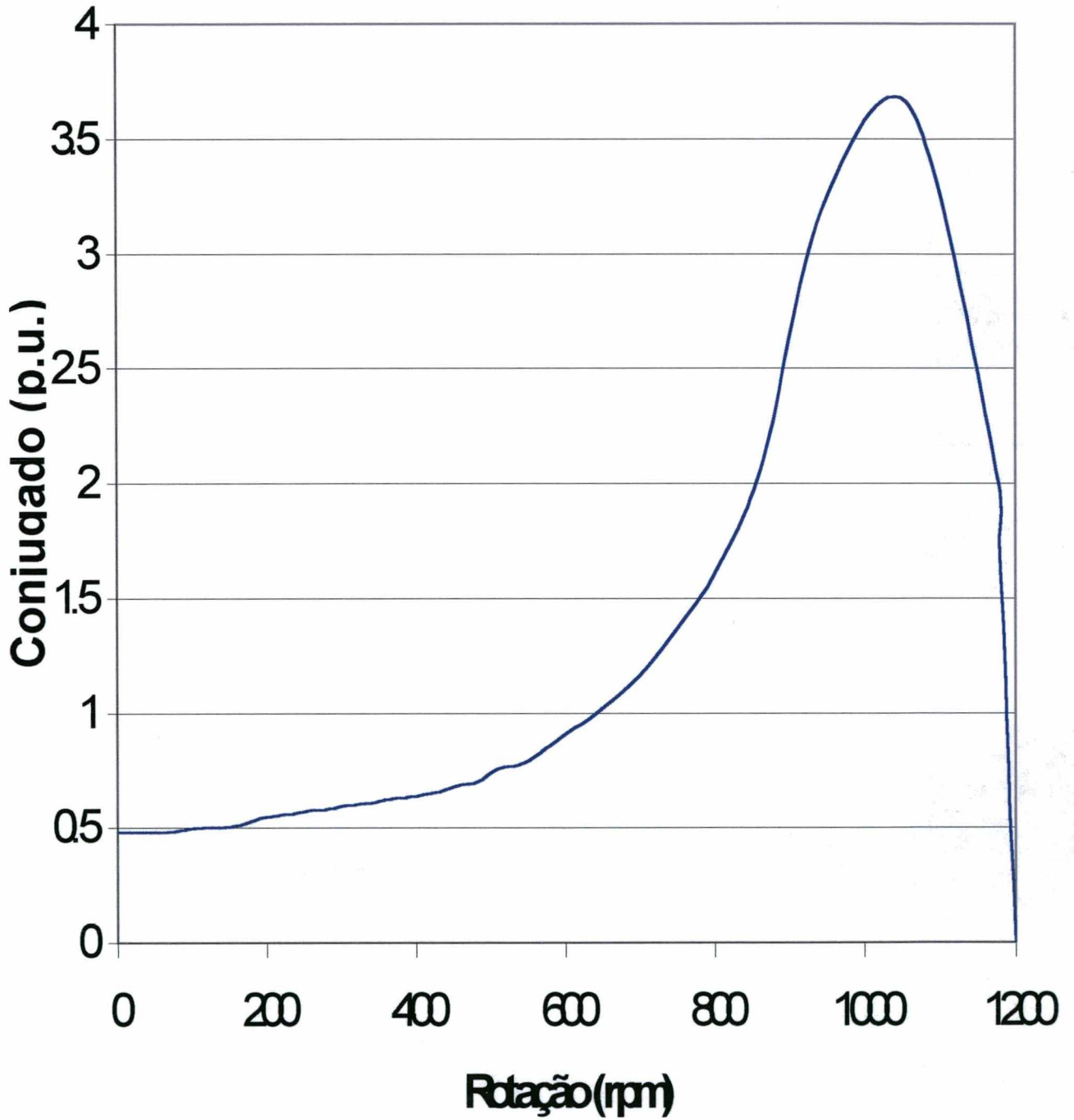
Corrente (pu)	6.3	6.3	6.3	6.3	6.3	6.3	6.3	6.3	6.3
Torque(pu)	0.61	0.60	0.60	0.59	0.63	0.64	0.65	0.68	0.69
Rotação(rpm)	253	295	345	352	386	407	431	456	482

Corrente (pu)	6.3	6.3	6.3	6.3	6.2	6.2	6.2	6.2	6.2
Torque(pu)	0.75	0.77	0.82	0.89	0.96	1.06	1.18	1.37	1.62
Rotação(rpm)	508	537	566	597	630	667	707	752	803

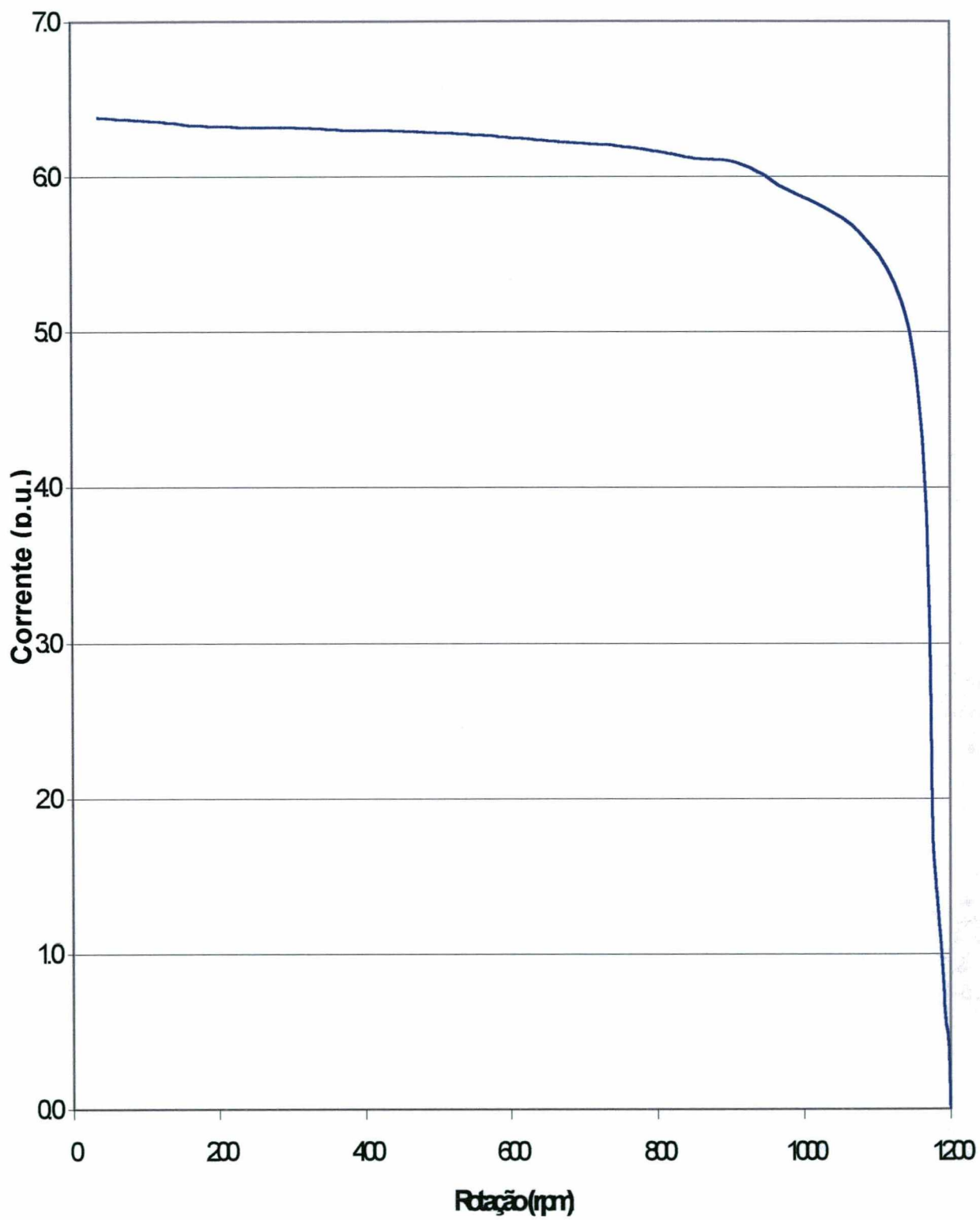
Corrente (pu)	6.2	6.1	5.5	1.62	1.39	1	0.60	0.45	0
Torque(pu)	2.09	3.18	3.63	2	1.5	1	0.5	0.25	0
Rotação(rpm)	864	943	1063	1178	1182	1188	1193	1197	1200

1.2.6.2 Gráfico

Curva de Conjugado Máquina Principal



Curva de Corrente Máquina Principal



2. Ensaio das Máquinas Ligadas em Cascata “Mais” Com o Estator da Máquina Auxiliar em Curto Circuito (Rac_{ad}=0)

2.1 Ensaio em carga entre 0 e 600 rpm (Máquina Principal)

Mkgf	I1 (A)	I2 (A)	I3 (A)	Σ I (A)	Pa(W)	rpm	cosφ
30	99.7	99.6	100.4	99.9	24560	594	0.322
50	109.9	110	111.4	110.4	34630	587	0.412
70	134.1	133.9	135.1	134.4	50000	578	0.486
90	171.2	171.1	172.8	171.7	65000	561	0.499

2.2 Ensaio em carga entre 600 e 1200 rpm (Máquina Principal)

Mkgf	I1 (A)	I2 (A)	I3 (A)	Σ I (A)	Pa(W)	rpm	cosφ
30	96.6	96.4	97.2	96.4	13120	607	0.178
50	106.9	106.7	107.6	107.1	23390	610	0.285
70	129.1	128.9	130.2	129.4	37940	617	0.385
90	162.7	162.3	163.7	162.9	50600	627	0.409

2.3 Ensaio a Vazio

U _{a1} (V)	480	440	400	360	320	280	240	200
I _{a1} (A)	106.5	90.0	78.3	69.1	60.7	52.6	44.8	37.1
P _o (W)	5300	4420	3700	3110	2580	2230	1702	1384
P _{fe} (W)	--	3220	--	--	--	--	--	--
P _{mec} (W)	--	600.6	--	--	--	--	--	--

2.4 Ensaio de Conjugado Máximo entre 0 e 600 rpm

440 Volts	109.1 kgfm
-----------	------------

2.5 Curva de Torque e Corrente por Rotação

2.5.1 Tabela de Dados

Valores de base:

Corrente : 175.5 A

Torque : 82 mkgf

Corrente(pu)	1.620	1.619	1.618	1.617	1.617	1.616	1.615	1.614	1.614
Torque(pu)	0.182	0.190	0.198	0.206	0.213	0.219	0.225	0.231	0.237
Rotação(rpm)	8	19.8	31.7	43.6	55.4	67.3	79.2	91.0	102.9

Corrente(pu)	1.613	1.612	1.611	1.611	1.610	1.609	1.608	1.608	1.607
Torque(pu)	0.243	0.249	0.255	0.262	0.269	0.277	0.285	0.294	0.304
Rotação(rpm)	114.7	126.6	138.5	150.3	162.2	174.1	185.9	197.7	209.6

Corrente(pu)	1.606	1.605	1.605	1.604	1.603	1.602	1.602	1.601	1.600
Torque(pu)	0.314	0.326	0.339	0.353	0.368	0.385	0.404	0.423	0.445
Rotação(rpm)	221.5	233.3	245.2	257.1	268.9	280.7	292.6	304.5	316.4

Corrente(pu)	1.595	1.590	1.590	1.585	1.580	1.580	1.575	1.570	1.565
Torque(pu)	0.469	0.494	0.522	0.551	0.583	0.617	0.654	0.693	0.735
Rotação(rpm)	328.2	340.1	351.9	363.8	375.6	387.5	399.4	411.4	423.1

Corrente(pu)	1.560	1.555	1.550	1.530	1.520	1.500	1.500	1.470	1.440
Torque(pu)	0.779	0.826	0.876	0.930	0.986	1.050	1.160	1.250	1.320
Rotação(rpm)	434.9	446.8	458.7	470.5	482.4	494.3	506.1	517.9	529.8

Corrente(A)	1.410	1.390	1.230	1.180	1.000	0.500	0.590	0.950	1.060
Torque(pu)	1.330	1.120	0.883	0.605	0.435	-0.068	-0.822	-1.370	-1.497
Rotação(rpm)	541.7	553.5	565.4	577.3	589.1	601	612.8	624.7	636.6

Corrente(pu)	1.200	1.320	1.400	1.450	1.470	1.505	1.525	1.540	1.540
Torque(pu)	-1.525	-1.479	-1.333	-1.266	-1.199	-1.133	-0.999	-0.866	-0.808
Rotação(rpm)	648.4	660.3	672.2	684.0	695.8	707.7	719.6	731.5	743.3

Corrente(pu)	1.545	1.550	1.555	1.560	1.560	1.560	1.562	1.563	1.564
Torque(pu)	-0.750	-0.675	-0.600	-0.550	-0.500	-0.429	-0.358	-0.304	-0.250
Rotação(rpm)	755.2	767.0	778.9	790.7	802.6	814.5	826.3	838.2	850.1

Corrente(pu)	1.565	1.564	1.563	1.562	1.560	1.560	1.560	1.550	1.550
Torque(pu)	-0.184	-0.118	-0.075	-0.033	0.010	0.040	0.078	0.116	0.148
Rotação(rpm)	861.9	873.7	885.6	897.5	909.4	921.2	933.1	944.9	956.8

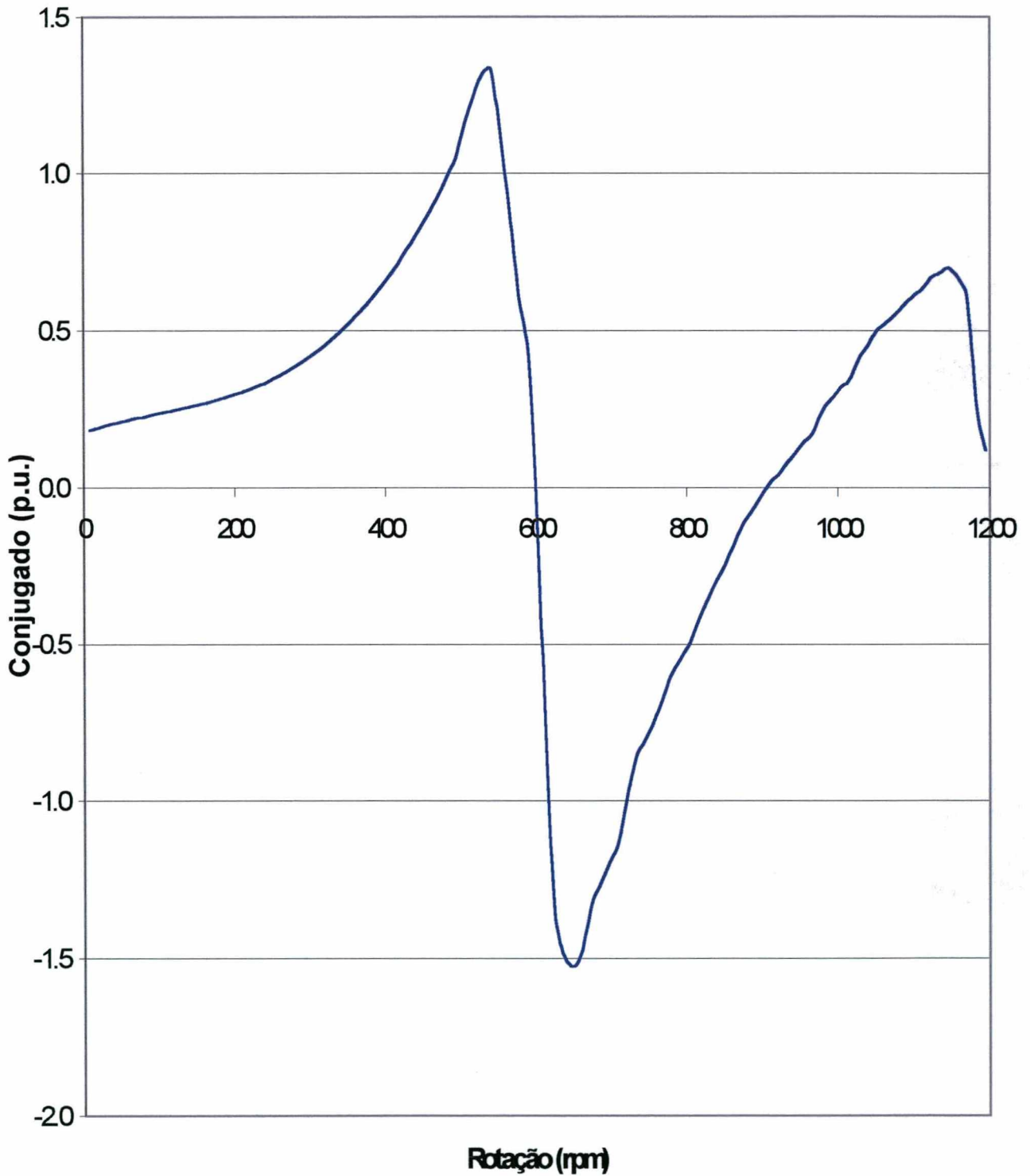
Corrente(pu)	1.540	1.540	1.530	1.520	1.510	1.500	1.490	1.470	1.450
Torque(pu)	0.181	0.250	0.285	0.320	0.341	0.405	0.452	0.500	0.525
Rotação(rpm)	968.6	980.5	992.4	1004.2	1016.1	1027.9	1039.8	1051.6	1063.5

Corrente(A)	1.400	1.380	1.300	1.280	1.220	1.130	1.03	0.950	0.730
Torque(pu)	0.550	0.579	0.608	0.630	0.670	0.683	0.700	0.670	0.610
Rotação(rpm)	1075.4	1087.3	1099.1	1110.9	1122.8	1134.7	1146.6	1158.4	1170.3

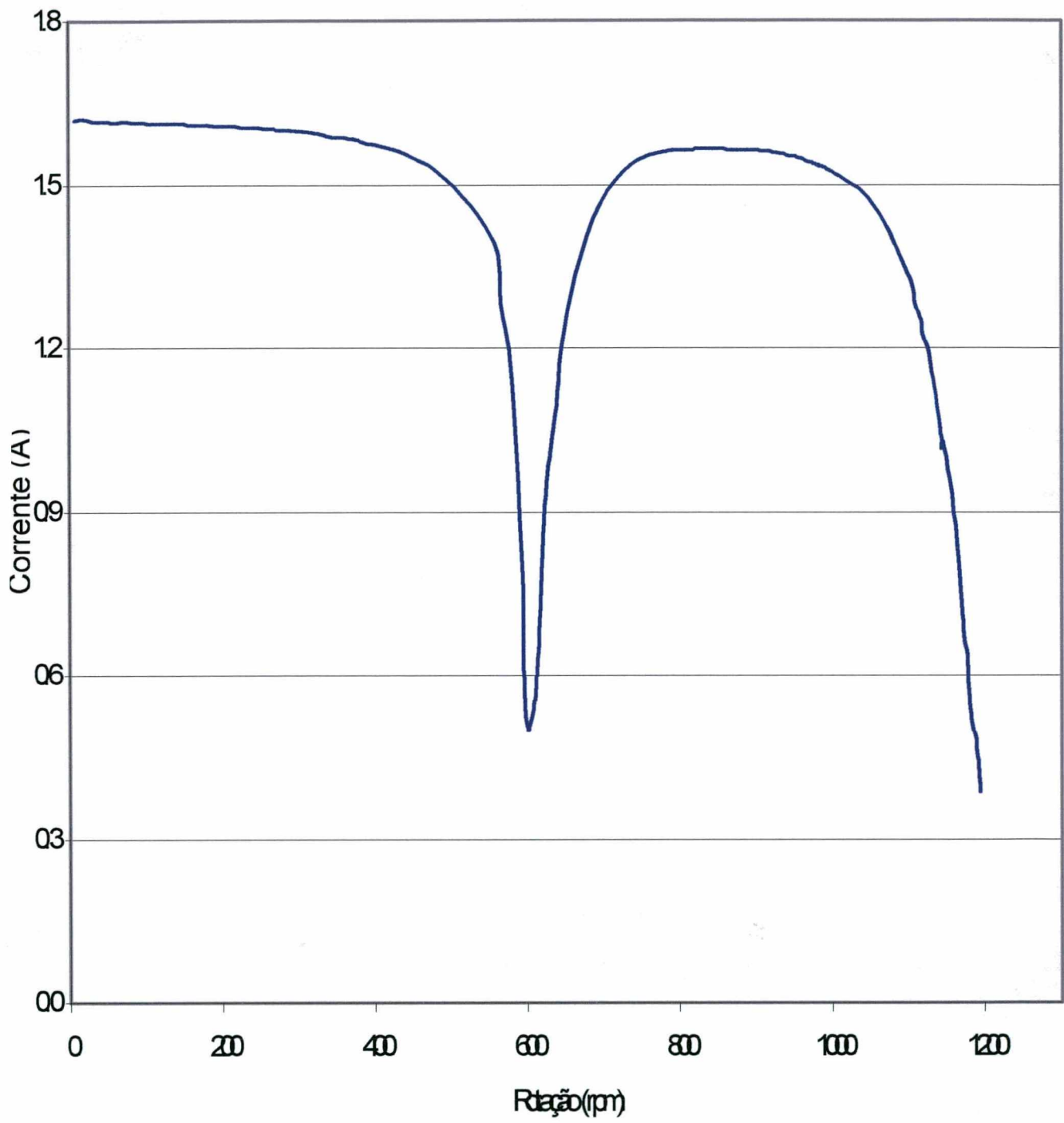
Corrente(A)	0.540	0.390							
Torque(pu)	0.270	0.118							
Rotação(rpm)	1182.1	1194							

2.5.2 Gráficos ($R_{acat}=0$)

Curva de Torque
MATBCDA ($R_{acat}=0$)



Curva de Corrente
MATECDA (Recat=0)



3. Ensaio das Máquinas Ligadas em Cascata “Mais” Com o Estator da Máquina Auxiliar Ligado em Banco de Resistências de 1 x Raf1

$$\text{Racad} = 1 \times \text{Raf1} = 1 \times 0.07849 = 0.07849 \text{ ohms (40° C)}$$

3.1 Ensaio em carga entre 0 e 600 rpm (Máquina Principal)

Mkgf	I1 (A)	I2 (A)	I3 (A)	ΣI (A)	Pa(W)	rpm	cos ϕ
30	99.6	99.3	102.3	100.4	25361	585.4	0.333
50	113.8	113.1	116.0	114.3	37717	575.8	0.438
70	133.9	133.4	136.8	136.4	50230	564.5	0.490
90	171.1	170.4	173.8	171.8	65270	539.2	0.498

3.2 Ensaio em carga entre 600 e 1200 rpm (Máquina Principal)

Mkgf	I1 (A)	I2 (A)	I3 (A)	ΣI (A)	Pa(W)	Rpm	cos ϕ
30	95.6	95.7	96.2	95.8	19015	607	0.260
50	110.3	110.1	111.4	110.6	26967	611	0.319
70	127.2	127.4	128.1	127.5	34670	615	0.356
90	164.2	162.3	163.7	163.4	47423	628	0.380

3.3 Ensaio de Conjugado Máximo entre 0 e 600 rpm

440 Volts	106.6 kgfm
-----------	------------

3.4 Curva de Torque e Corrente por Rotação

3.4.1 Tabela de Dados

Valores de base:

Corrente : 175.5 A

Torque : 82 mkgf

Corrente(pu)	1.520	1.519	1.519	1.517	1.517	1.516	1.515	1.514	1.514
Torque(pu)	0.450	0.464	0.478	0.493	0.507	0.522	0.536	0.551	0.565
Rotação(rpm)	8	19.8	31.7	43.6	55.4	67.3	79.2	91.0	102.9

Corrente(pu)	1.513	1.512	1.511	1.511	1.510	1.509	1.508	1.508	1.507
Torque(pu)	0.579	0.593	0.608	0.622	0.637	0.651	0.665	0.680	0.694
Rotação(rpm)	114.7	126.6	138.5	150.3	162.2	174.1	185.9	197.7	209.6

Corrente(pu)	1.506	1.505	1.495	1.495	1.493	1.491	1.482	1.481	1.470
Torque(pu)	0.709	0.725	0.742	0.760	0.779	0.799	0.820	0.842	0.866
Rotação(rpm)	221.5	233.3	245.2	257.1	268.9	280.7	292.6	304.5	316.4

Corrente(pu)	1.465	1.460	1.450	1.445	1.424	1.409	1.395	1.381	1.367
Torque(pu)	0.916	0.943	0.971	1.000	1.030	1.062	1.094	1.128	1.163
Rotação(rpm)	328.2	340.1	351.9	363.8	375.6	387.5	399.4	411.4	423.1

Corrente(pu)	1.353	1.338	1.325	1.310	1.300	1.280	1.265	1.250	1.220
Torque(pu)	0.624	1.220	1.280	1.300	1.250	1.138	1.025	0.913	0.800
Rotação(rpm)	434.9	446.8	458.7	470.5	482.4	494.3	506.1	517.9	529.8

Corrente(A)	1.190	1.170	1.010	0.960	0.780	0.519	0.554	0.666	0.79
Torque(pu)	0.664	0.528	0.393	0.295	0.196	-0.012	-0.370	-0.705	-0.967
Rotação(rpm)	541.7	553.5	565.4	577.3	589.1	601	612.8	624.7	636.6

Corrente(pu)	0.905	1.025	1.105	1.17	1.26	1.319	1.353	1.361	1.409
Torque(pu)	-1.143	-1.280	-1.299	-1.317	-1.290	-1.263	-1.236	-1.209	-1.182
Rotação(rpm)	648.4	660.3	672.2	684.0	695.8	707.7	719.6	731.5	743.3

Corrente(pu)	1.425	1.462	1.469	1.478	1.491	1.504	1.508	1.513	1.518
Torque(pu)	-1.155	-1.091	-1.026	-0.962	-0.898	-0.833	-0.769	-0.705	-0.640
Rotação(rpm)	755.2	767.0	778.9	790.7	802.6	814.5	826.3	838.2	850.1

Corrente(pu)	1.523	1.528	1.534	1.539	1.545	1.546	1.547	1.546	1.545
Torque(pu)	-0.599	-0.553	-0.507	-0.461	-0.422	-0.384	-0.355	-0.320	-0.283
Rotação(rpm)	861.9	873.7	885.6	897.5	909.4	921.2	933.1	944.9	956.8

Corrente(pu)	1.54	1.534	1.526	1.518	1.511	1.502	1.495	1.471	1.454
Torque(pu)	-0.246	-0.209	-0.172	-0.136	-0.099	-0.048	0.003	0.053	0.104
Rotação(rpm)	968.6	980.5	992.4	1004.2	1016.1	1027.9	1039.8	1051.6	1063.5

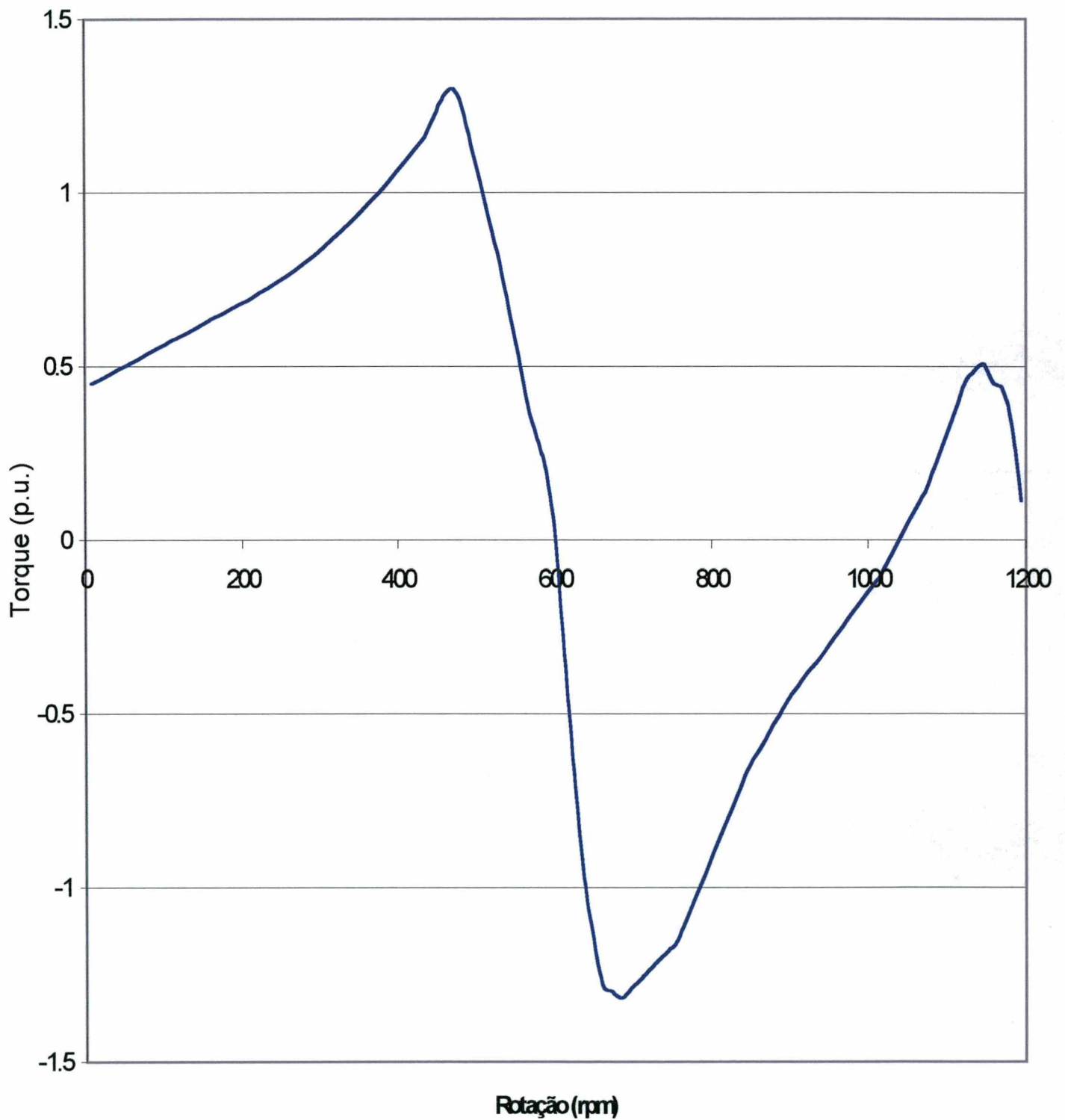
Corrente(A)	1.438	1.393	1.35	1.297	1.244	1.144	1.044	0.945	0.711
Torque(pu)	0.155	0.229	0.304	0.378	0.452	0.487	0.506	0.452	0.435
Rotação(rpm)	1075.4	1087.3	1099.1	1110.9	1122.8	1134.7	1146.6	1158.4	1170.3

Corrente(A)	0.545	0.430							
Torque(pu)	0.325	0.113							
Rotação(rpm)	1182.1	1194							

3.5.2 Gráficos

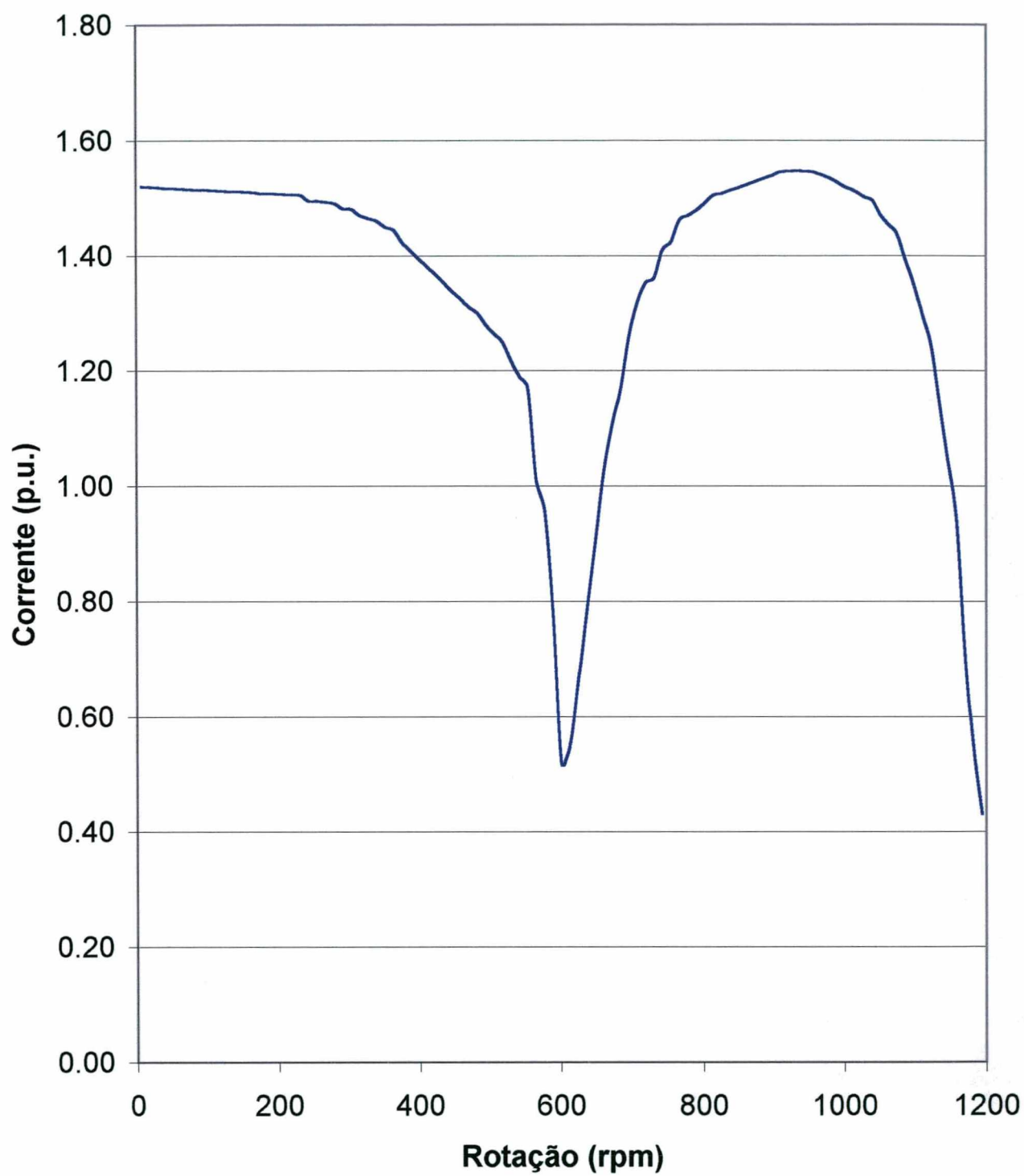
$R_{acad} = 1 \times R_{af1} = 1 \times 0.07849 = 0.07849$ ohms (40°C)

MATBDA
Torque x Rotação



MATBDA

Corrente x Rotação



4. Ensaio das Máquinas Ligadas em Cascata “Mais” Com o Estator da Máquina Auxiliar Ligado em Banco de Resistências de 2 x Raf1

$$\text{Racad} = 2 \times \text{Raf1} = 2 \times 0.07849 = 0.15698 \text{ ohms (40}^\circ \text{ C)}$$

4.1 Ensaio em carga entre 0 e 600 rpm (Máquina Principal)

Mkgf	I1 (A)	I2 (A)	I3 (A)	ΣI (A)	Pa(W)	Rpm	cos ϕ
30	96.6	96.4	99.9	97.6	23821	581.2	0.318
50	110.7	110.5	113.9	111.7	36771	567.1	0.429
70	134.5	133.9	137.7	135.4	51280	545.0	0.498
90	174.3	173.6	177.4	175.1	65640	500.4	0.497

4.2 Ensaio em carga entre 600 e 1200 rpm (Máquina Principal)

Mkgf	I1 (A)	I2 (A)	I3 (A)	ΣI (A)	Pa(W)	Rpm	Cos ϕ
30	92.7	92.8	95.8	93.7	17627	614.8	0.246
50	105.7	105.5	106.8	106.0	27137	634.5	0.335
70	127.8	127.9	129.8	128.5	35896	642.5	0.366
90	166.9	167.0	168.9	167.6	46604	660.0	0.364

4.3 Ensaio de Conjugado Máximo entre 0 e 600 rpm

440 Volts	108.2 kgfm
-----------	------------

4.4 Curva de Torque e Corrente por Rotação

4.4.1 Tabela de Dados

Valores de base:

Corrente : 175.5 A

Torque : 82 mkgf

Corrente(pu)	1.426	1.425	1.425	1.423	1.423	1.422	1.421	1.420	1.420
Torque(pu)	0.590	0.606	0.622	0.638	0.654	0.671	0.687	0.704	0.720
Rotação(rpm)	8	19.8	31.7	43.6	55.4	67.3	79.2	91.0	102.9

Corrente(pu)	1.419	1.418	1.417	1.417	1.416	1.415	1.414	1.414	1.413
Torque(pu)	0.736	0.752	0.768	0.784	0.801	0.817	0.833	0.849	0.866
Rotação(rpm)	114.7	126.6	138.5	150.3	162.2	174.1	185.9	197.7	209.6

Corrente(pu)	1.412	1.411	1.405	1.393	1.391	1.388	1.380	1.370	1.350
Torque(pu)	0.882	0.906	0.931	0.959	0.988	1.020	1.053	1.088	1.126
Rotação(rpm)	221.5	233.3	245.2	257.1	268.9	280.7	292.6	304.5	316.4

Corrente(pu)	1.346	1.341	1.322	1.325	1.310	1.300	1.280	1.265	1.250
Torque(pu)	1.165	1.206	1.250	1.295	1.310	1.320	1.280	1.240	1.150
Rotação(rpm)	328.2	340.1	351.9	363.8	375.6	387.5	399.4	411.4	423.1

Corrente(pu)	1.220	1.190	1.165	1.141	1.116	1.092	1.067	1.063	1.034
Torque(pu)	1.062	1.024	0.961	0.897	0.834	0.770	0.684	0.598	0.513
Rotação(rpm)	434.9	446.8	458.7	470.5	482.4	494.3	506.1	517.9	529.8

Corrente(A)	1.004	0.985	0.829	0.781	0.608	0.509	0.546	0.584	0.670
Torque(pu)	0.428	0.342	0.256	0.171	0.086	0.000	-0.330	-0.520	-0.778
Rotação(rpm)	541.7	553.5	565.4	577.3	589.1	601	612.8	624.7	636.6

Corrente(pu)	0.755	0.841	0.923	1.035	1.091	1.136	1.172	1.208	1.244
Torque(pu)	-0.939	-1.100	-1.190	-1.282	-1.330	-1.360	-1.360	-1.360	-1.340
Rotação(rpm)	648.4	660.3	672.2	684.0	695.8	707.7	719.6	731.5	743.3

Corrente(pu)	1.281	1.321	1.361	1.391	1.415	1.440	1.461	1.475	1.491
Torque(pu)	-1.320	-1.275	-1.230	-1.200	-1.160	-1.140	-1.092	-1.043	-0.995
Rotação(rpm)	755.2	767.0	778.9	790.7	802.6	814.5	826.3	838.2	850.1

Corrente(pu)	1.502	1.504	1.508	1.510	1.515	1.516	1.518	1.520	1.521
Torque(pu)	-0.947	-0.899	-0.851	-0.802	-0.754	-0.706	-0.658	-0.610	-0.546
Rotação(rpm)	861.9	873.7	885.6	897.5	909.4	921.2	933.1	944.9	956.8

Corrente(pu)	1.523	1.525	1.523	1.521	1.512	1.504	1.483	1.462	1.441
Torque(pu)	-0.483	-0.420	-0.375	-0.330	-0.295	-0.260	-0.184	-0.108	-0.032
Rotação(rpm)	968.6	980.5	992.4	1004.2	1016.1	1027.9	1039.8	1051.6	1063.5

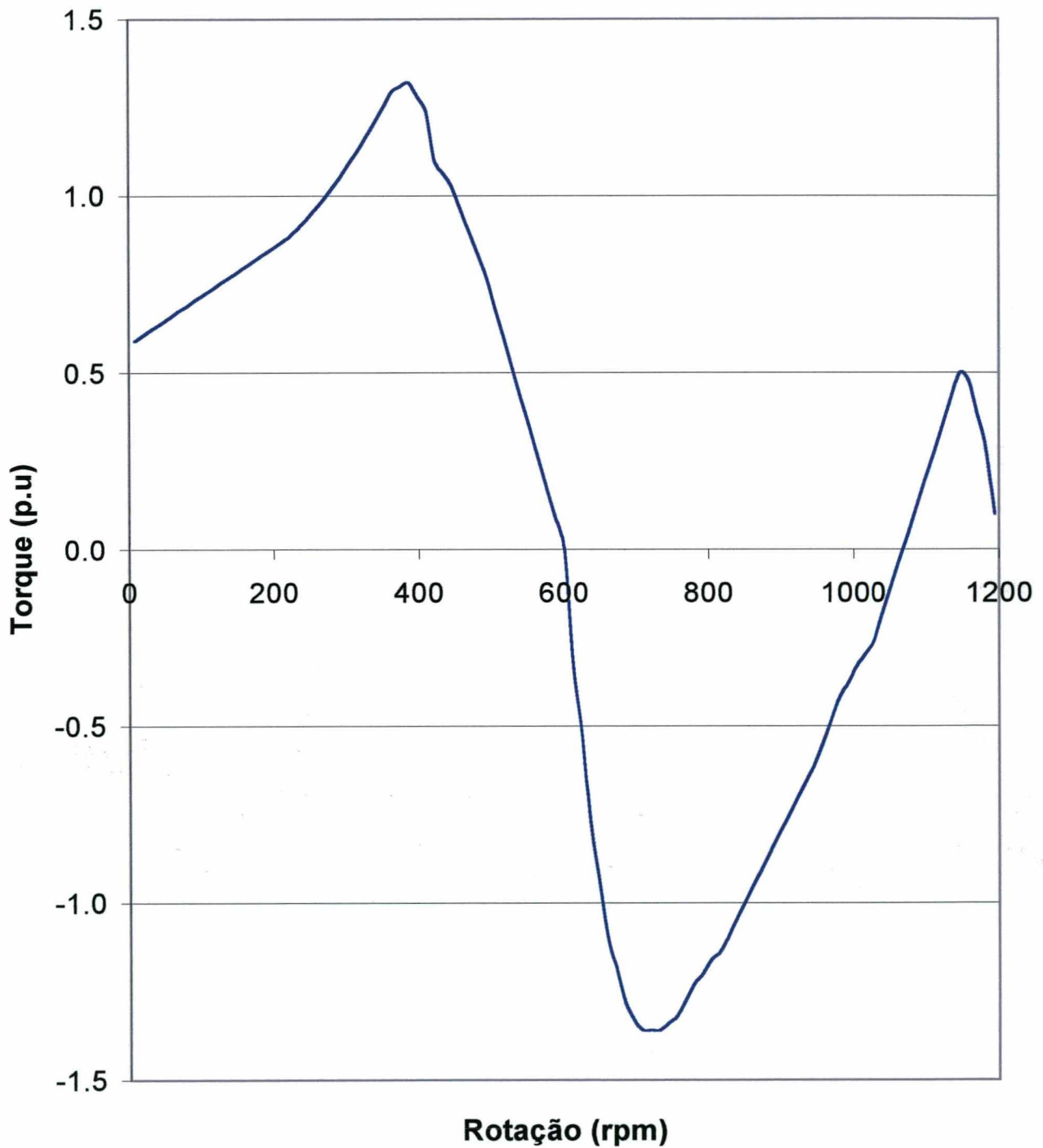
Corrente(A)	1.421	1.400	1.359	1.319	1.258	1.198	1.046	0.895	0.732
Torque(pu)	0.044	0.120	0.197	0.274	0.351	0.428	0.500	0.480	0.385
Rotação(rpm)	1075.4	1087.3	1099.1	1110.9	1122.8	1134.7	1146.6	1158.4	1170.3

Corrente(A)	0.561	0.424							
Torque(pu)	0.290	0.100							
Rotação(rpm)	1182.1	1194							

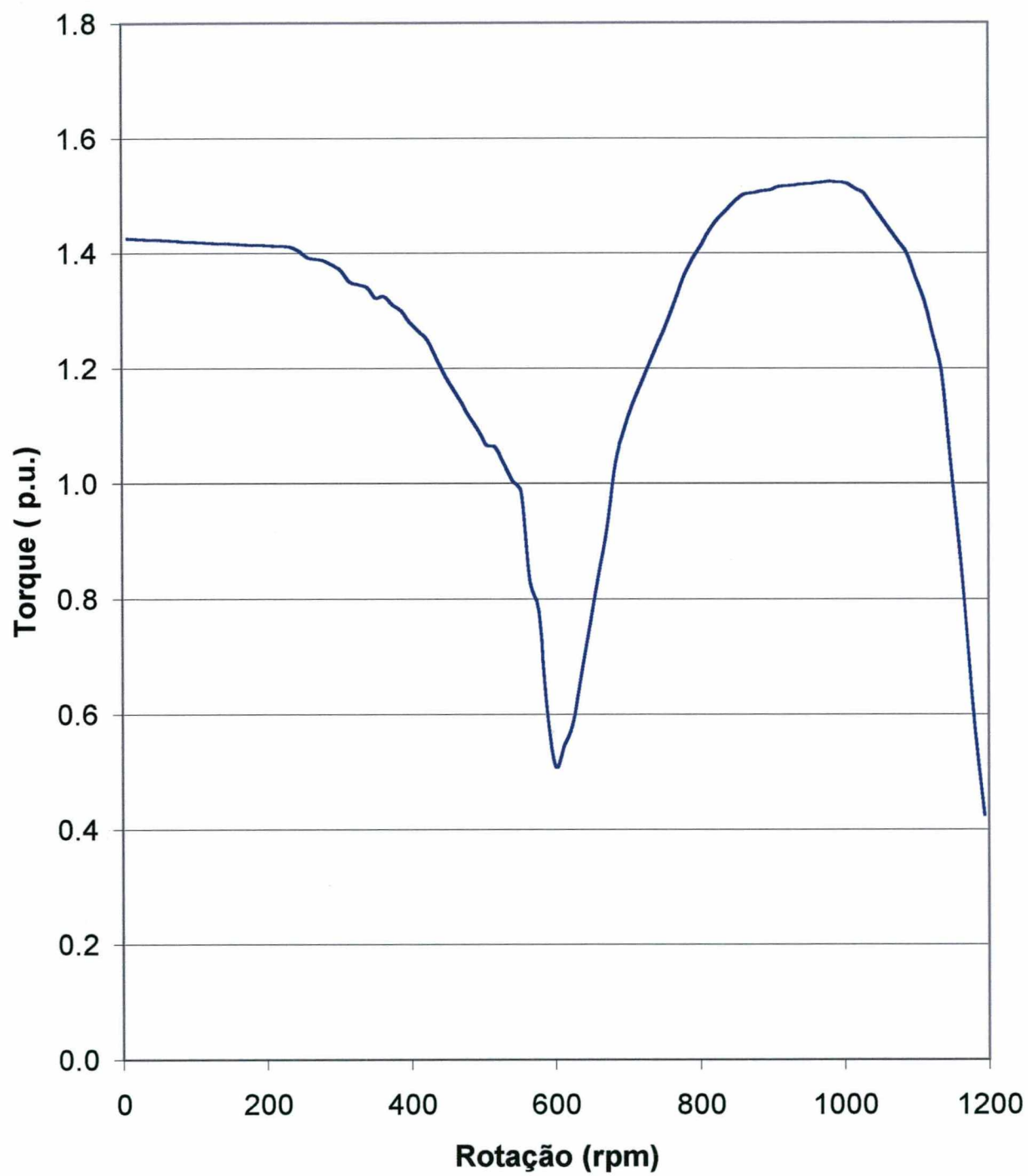
4.5.2 Gráficos

$$R_{acad} = 2 \times R_{af1} = 2 \times 0.07849 = 0.15698 \text{ ohms (40}^\circ \text{ C)}$$

MATBDA Torque x Rotação



MATBDA Corrente x Rotação



APÊNDICE C

OS PARÂMETROS DA MATBCDA

OS PARÂMETROS DA MATBCDA

C.1 INTRODUÇÃO

Para fazer uma análise DINÂMICA e em REGIME é muito importante determinar com precisão os parâmetros físicos da máquina.

A MATBCDA é constituída por duas máquinas assíncronas, máquina principal e máquina auxiliar, que são, do ponto de vista eletromagnético, simétricas, isto é, seus enrolamentos estão senoidalmente distribuídos.

Esta característica facilita a determinação dos seus parâmetros físicos, tais como resistências e indutâncias. Para poder representar matematicamente os modelos DINÂMICOS e em REGIME, assumimos algumas hipóteses simplificativas, sem as quais o estudo se tornaria extremamente complexo. As hipóteses simplificativas adotadas no presente trabalho são:

- a) Os três enrolamentos do estator são iguais entre si e senoidalmente distribuídos na periferia do entreferro;
- b) Os três enrolamentos do rotor são iguais entre si e senoidalmente distribuídos na periferia do entreferro;
- c) Entreferro constante e cilíndrico;
- d) A distribuição dos condutores na periferia do entreferro é considerada senoidal;
- e) O circuito magnético é considerado não saturável. É desprezada a saturação dos dentes das ranhuras;
- f) O efeito pelicular nos condutores é desprezado;
- g) Em regime dinâmico é desprezado as perdas no ferro;
- h) É considerado apenas a harmônica fundamental " $v_1 = p$!"

C.2 EQUAÇÕES DA ONDA DA FMM NO ENTREFERRO DA MÁQUINA

C.2.1 Sistema de Referência

Para estabelecer a equação da onda da FMM no entreferro da máquina consideraremos a seqüência de fase abc positiva e girando no sentido anti-horário.

Adotaremos o índice "1" para as grandezas do ESTATOR e o índice "2" para as grandezas do ROTOR.

Os três enrolamentos do estator simetricamente distribuídos e defasados de " $\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ " serão considerados fixos ao sistema de referência " θ_1 ".

Os enrolamentos do rotor simetricamente distribuídos e também defasados de " $\frac{2\pi}{3}$ rad" serão considerados fixos ao sistema de referência " θ_2 ".

O sistema " θ_2 " gira em relação ao sistema " θ_1 " com uma velocidade angular " ω_2 (rad/s)"

A Figura C.2.1.1 abaixo mostra os sistemas de referência descritos.

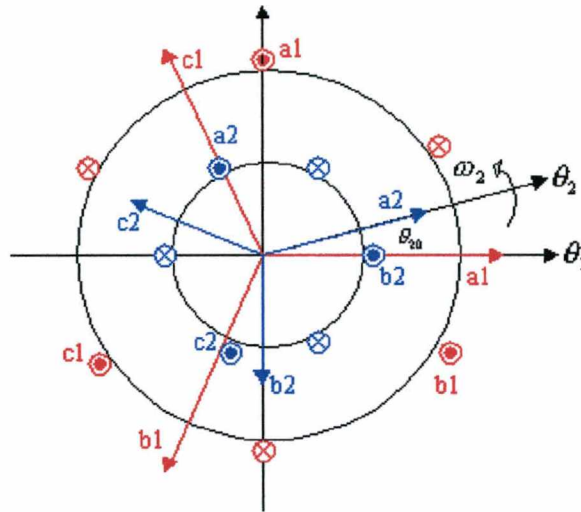


Figura C.2.1.1 - Sistema de Referência da Máquina Assíncrona Trifásica [MAT]

Na Figura C.2.1.1 " θ_{20} " representa a posição inicial do sistema " θ_2 " em relação ao sistema " θ_1 ".

Os vetores " a_1, b_1, c_1 " representam os eixos dos enrolamentos do estator e os vetores " a_2, b_2, c_2 " os eixos dos enrolamentos do rotor.

No nosso sistema de referência a posição de um ponto qualquer sobre o rotor pode ser referido ao sistema " θ_1 " pela expressão abaixo.

$$\theta_1(t) = \theta_{20} + \theta_2(t) \quad (\text{C.2.1.1})$$

Derivando a equação (C.2.1.1) em relação ao tempo obtemos a equação de transformação de velocidade:

$$\omega_1(t) = \omega_{20} + \omega_2(t) \quad (\text{C.2.1.2})$$

Onde " ω_{20} " representa a velocidade inicial do sistema de referência " θ_2 " em relação a " θ_1 ".

O termo " $\omega_2(t)$ " representa a velocidade do ponto considerado sobre a superfície do rotor em relação a " θ_2 ".

C.2.2 Onda de Densidade Linear de Corrente

Para estudarmos a onda da FMM gerada por uma fase do enrolamento trifásico iremos considerar o enrolamento mostrado na **Figura C.2.2.1**.

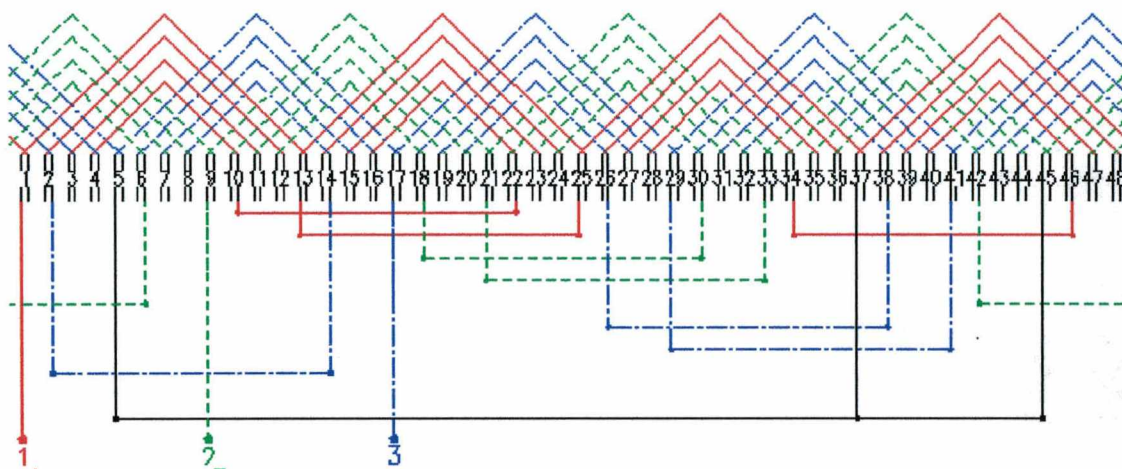


Figura C.2.2.1 - Enrolamento Trifásico 4 Pólos 48 Ranhuras

Na **Figura C.2.2.2-a** estamos mostrando o diagrama de condutores para a fase " a_1 " do enrolamento.

Na **Figura C.2.2.2-b** mostramos a distribuição da densidade de corrente ao longo do entreferro da máquina.

Na **Figura C.2.2.2-c** mostramos a onda da FMM resultante da fase " a_1 ". Percebe-se que esta onda não é senoidal pura, logo apresentando uma grande quantidade de harmônicos. Estes harmônicos são denominados "Harmônicos de Campo" ou "Harmônicos de Enrolamento".

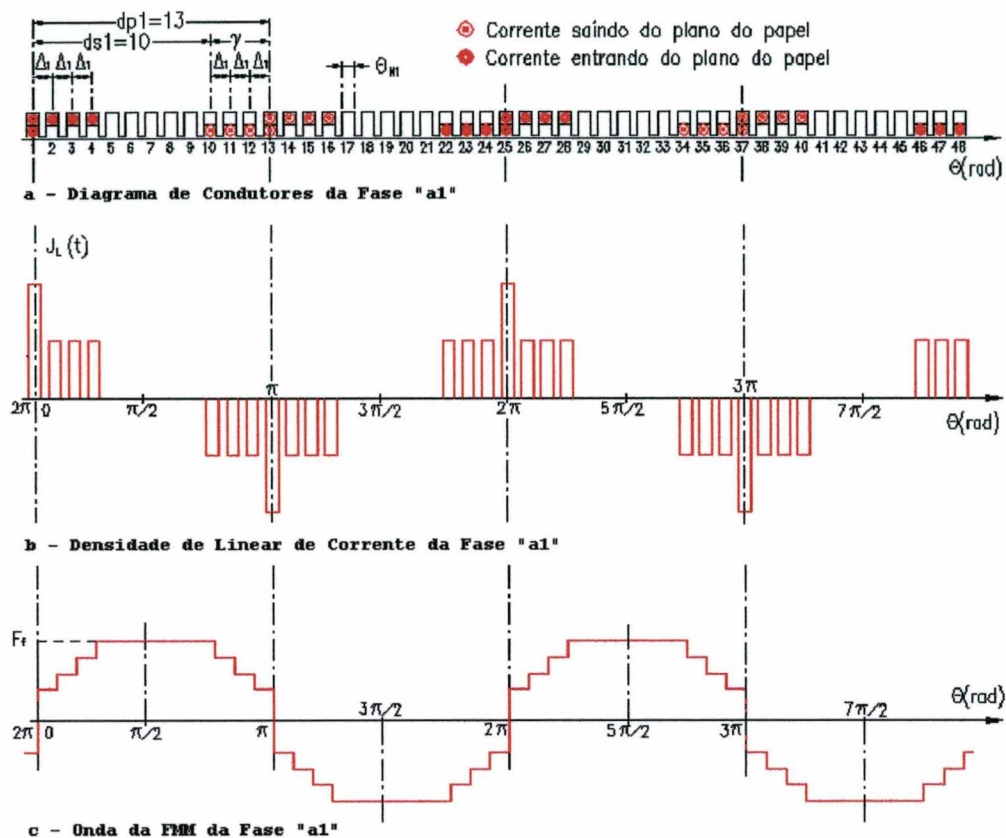


Figura C.2.2.2 - Diagrama de Condutores - Densidade Linear de Corrente - Onda da FMM da fase "a1" do Enrolamento mostrado na Figura 4.2.2.1

No eixo " θ_1 " é representado o espaço dado em graus elétricos, ou seja:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{\tau_{p1}} \cdot x_1 \quad (\text{C.2.2.1})$$

Onde:

θ_1 = É dado em radianos elétricos

$\tau_{p1} = \frac{\pi(D_1 - \delta)}{2p}$ = Passo Polar ou Pleno "m"

x_1 = Distância em "m" na periferia do entreferro

p = Número de pares de pólos

D_1 = Diâmetro Interno do Estator dado em "m"

δ = Entreferro da Máquina dado em "m"

A largura de uma ranhura " b_{N1} " na periferia do entreferro em graus elétricos pode ser expressa por:

$$\theta_{N1} = \frac{\pi}{\tau_{pl}} \cdot b_{N1} \quad (\text{C.2.2.2})$$

Iremos primeiramente analisar a FMM gerada por uma fase do enrolamento. Para isto, consideraremos que a fase " a_1 " está sendo alimentada por uma corrente dada por:

$$i_{a1\mu}(t) = \sqrt{2} I_{a1\mu} e^{j\mu[\omega_e t + \theta_e(o)]} \quad (\text{C.2.2.3})$$

Onde:

$I_{a1\mu}$ = Valor eficaz da corrente em (A) para a harmônica de corrente de ordem " μ "

$\omega_e = 2\pi f_{rede}$ = Frequência angular em " rad/s " da harmônica fundamental da corrente

t = Tempo em "s"

$\theta_e(o)$ = Fase inicial da corrente quando $t = 0$

f_{rede} = Frequência da rede de alimentação em Hz

μ = Ordem da harmônica da corrente que alimenta a fase " a_1 ". É sempre um número inteiro

Quando " $\omega_e = 0$ " teremos uma corrente contínua alimentando a fase " a_1 ".

Usamos a representação complexa, porém somente a parte real das grandezas tem significado FÍSICO.

Consideramos a origem do sistema de coordenadas " θ_1 " no centro da ranhura "7", ver **Figura C.2.2.2**, onde se localiza o centro do polo da FMM da fase " a_1 ".

A densidade de corrente de uma ranhura para o enrolamento em questão será:

$$J_{LR}(t) = \frac{Z_{ef1} \cdot i_{a1\mu}(t)}{\theta_{N1} R} \quad (\text{C.2.2.4})$$

Onde:

Z_{ef1} = Número de condutores efetivos por ranhura

$R = \left(\frac{D_1 - \delta}{2} \right)$ = Raio médio do entreferro dado em "m"

Na **Figura C.2.2.3** mostramos uma ranhura ampliada onde é possível ver o significado da densidade linear de corrente.

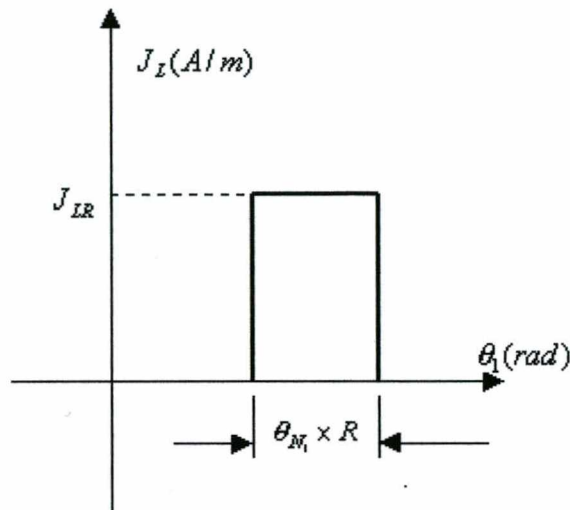


Figura C.2.2.3 -Densidade Linear de Corrente de Uma ranhura

Como a densidade linear de uma ranhura tem forma retangular, a sua influência na periferia do entreferro pode ser obtida através da série de Fourier.

$$j_{LR}(\theta_1, t) = \sum_{\nu_1=-\infty}^{\infty} J_{LR\nu_1} e^{j\left(\nu_1\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)} \quad (C.2.2.5)$$

A equação (C.2.2.5) representa uma série complexa infinita onde nos interessa apenas os termos reais.

O ângulo " $\frac{\pi}{2}$ " foi introduzido na série de Fourier para adequa-la ao nosso sistema de referência que tem sido colocado no centro do polo da FMM, ver **Figura C.4.2.2**.

A série é válida no intervalo " $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$ ", isto é, num período completo da máquina. Como a máquina tem tantos períodos quanto pares de pólos, esta série é válida para todo o entreferro da máquina. Para a definição da série de Fourier " ν_1 " assume valores inteiros desde " $-\infty$ " até " $+\infty$ " e representa o número de pares de pólos da harmônica, ou seja:

$$\nu = 0 \pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \dots \quad (C.2.2.6)$$

Os coeficientes " $J_{LR\nu_1}$ " são determinados como segue:

$$J_{LR\nu_1} = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} J_{LR(t)} e^{-j\nu_1\theta_1} d\theta_1 \quad (C.2.2.7)$$

Substituindo " $J_{LR}(t)$ " dado pela equação (C.2.2.4) e resolvendo a integral, temos:

$$J_{LRv1} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{Z_{ef1} i_{a1\mu}(t)}{R} \cdot \frac{\text{sen}(v_1 \theta_{N1}/2)}{(v_1 \theta_{N1}/2)} \quad (\text{C.2.2.8})$$

Considerando que " $\theta_{N1} \ll d_{p1}$ " (passo pleno) a equação C.2.2.8, fica:

$$J_{LRv1} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{Z_{ef1} i_{a1\mu}(t)}{R} \quad (\text{C.2.2.9})$$

Ao se fazer esta consideração admitimos que toda a corrente está concentrada no centro da ranhura, isto é, a densidade linear de corrente passa a ser uma função impulso.

Substituindo (C.2.2.9) em (C.2.2.5) a onda de densidade linear de corrente fica:

$$j_{LR}(\theta_1, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \frac{Z_{ef1} \cdot i_{a1\mu}(t)}{R} e^{j(v_1 \theta_1 + \frac{\pi}{2})} \quad (\text{C.2.2.10})$$

Para considerar as " q_1 " ranhuras por pólo e fase consideramos que cada ranhura seja preenchida por bobinas que tenham passo encurtado conforme mostrado no esquema da Figura C.2.2.1. O encurtamento destas bobinas em graus elétricos é dado por:

$$\gamma_1 = \Delta_1 (d_{p1} - d_{s1}) \quad (\text{C.2.2.11})$$

Onde:

$$\Delta_1 = \frac{2\pi}{N_1} = \hat{\text{Ângulo elétrico em "rad" ocupado por uma ranhura}}$$

$$d_{p1} = \left(\frac{N_1}{2p} + 1 \right) = \text{Passo pleno em número de ranhuras}$$

$$d_{s1} = \text{Passo do enrolamento em número de ranhuras}$$

A equação (C.2.2.10) representa a influência de uma ranhura no semi período, ou seja, num pólo. Para considerar a influência das demais ranhuras de uma fase, podemos fazer a soma vetorial, das densidades lineares de corrente de todas as ranhuras de uma fase. Considerando que numa fase temos " $2p q_1$ " ranhuras e que estas estão defasadas de um ângulo " Δ_1 " e que as bobinas tenham um encurtamento " γ_1 ", a densidade linear de corrente por fase " $j_{Lf1}(\theta_1, t)$ " pode ser escrita como:

$$j_{Lf1}(\theta_1, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{v1=-\infty}^{\infty} 2p \cdot q_1 \sum_{k=0}^{k=q_1-1} \frac{Z_{ef1}(k) \cdot i_{a1\mu}(t)}{R} \cdot \frac{1}{q_1} \cdot \left[\frac{e^{j \left[v1(\theta_1 - k\Delta_1) + \frac{\pi}{2} \right]} - e^{j \left\{ v1 \left[\theta_1 - (\pi - \gamma_1 + k\Delta_1) \right] + \frac{\pi}{2} \right\}}}{2} \right] \quad (C.2.2.12)$$

Desenvolvendo o somatório em "k" da equação (C.2.2.12) e após algumas transformações obtemos a equação da onda de densidade linear de corrente por pólo e fase do enrolamento:

$$j_{Lf1}(\theta_1, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{v1=-\infty}^{\infty} \frac{N_{cond1} \cdot i_{a1\mu}(t)}{2p \cdot R} \cdot f_{dlv1} \cdot f_{elv1} \cdot e^{j \left[v1(\theta_1 - \theta_{10}) + \frac{\pi}{2} \right]} \quad (C.2.2.13)$$

Onde:

$$v_1 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm \dots \quad (C.2.2.14)$$

O termo " N_{cond1} " representa o número de condutores em série por fase e é dado por:

$$N_{cond1} = 2p \cdot q_1 Z_{ef1} = \frac{N_1}{m_1} \cdot Z_1 \cdot \frac{N_{cam1}}{N_{Lig1}} \quad (C.2.2.15)$$

Onde:

Z_1 = Número de espiras por bobina

N_{cam1} = Número de camadas do enrolamento

N_{Lig1} = Número de ligações (caminhos) em paralelo

N_1 = Número de ranhuras do estator

m_1 = Número de fases do enrolamento

O termo " f_{dlv1} " representa o "Fator de Distribuição" do enrolamento dado por:

$$f_{dlv1} = \frac{1}{q_1} \cdot \frac{\text{sen} \left(v_1 q_1 \frac{\Delta_1}{2} \right)}{v_1 \frac{\Delta_1}{2}} \quad (C.2.2.16)$$

O termo " f_{elv_1} " representa o "Fator de Encurtamento" do enrolamento dado por:

$$f_{elv_1} = \text{sen} \left[v_1 \left(\frac{\pi - \gamma_1}{2} \right) \right] = \text{sen} \left[v_1 \left(\frac{d_{s1} - 1}{d_{p1} - 1} \right) \frac{\pi}{2} \right] \quad (\text{C.2.2.17})$$

O ângulo " θ_{10} " representa a fase espacial inicial da onda dada por:

$$\theta_{10} = (q_1 - 1) \frac{\Delta_1}{2} - \frac{\gamma_1}{2} \quad (\text{C.2.2.18})$$

O produto " $f_{d1v_1} \cdot f_{elv_1}$ " é denominado "Fator de Bobinagem" ou "Fator de Enrolamento", " f_{w1v_1} ", ou seja:

$$f_{w1v_1} = f_{d1v_1} \cdot f_{elv_1} = \frac{1}{q_1} \frac{\text{sen} \left(v_1 q_1 \frac{\Delta_1}{2} \right)}{\text{sen} \left(v_1 \frac{\Delta_1}{2} \right)} \cdot \text{sen} \left[v_1 \left(\frac{d_{s1} - 1}{d_{p1} - 1} \right) \frac{\pi}{2} \right] \quad (\text{C.2.2.19})$$

Explicitando " $i_{a1\mu}(t)$ " na equação (C.2.2.13), obtemos a equação da onda de densidade linear de corrente de fase " a_1 " do enrolamento:

$$j_{Lf1}(\theta_1, t) = \sum_{v1=-\infty}^{\infty} J_{Lf1v1} e^{j \left[\mu(\omega_s t + \theta_e(0)) + v1(\theta_1 - \theta_{10}) + \frac{\pi}{2} \right]} \quad (\text{C.2.2.20})$$

O termo " J_{Lf1v1} " representa a amplitude da onda dada por:

$$J_{Lf1v1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{N_{cond1} \cdot f_{w1v1} \cdot I_{a1\mu}}{2p \cdot R} \quad (\text{C.2.2.21})$$

C.2.3 Onda de FMM no Entreferro

Uma vez conhecida a onda de densidade linear de corrente ao longo do eixo " θ_1 ", podemos determinar a " $fmm_{f1}(\theta_1, t)$ " de uma fase como sendo:

$$fmm_{f1}(\theta_1, t) = \int j_{Lf1}(\theta_1, t) \cdot R \, d\theta \quad (\text{C.2.3.1})$$

Substituindo (C.2.2.20) em (C.2.3.1) e efetuando a integral, obtemos:

$$fmm_{f_1}(\theta_1, t) = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} FMM_{f_1v_1} e^{j[\mu(\omega_e t + \theta_e(0)) + v_1(\theta_1 - \theta_{10})]} \quad (C.2.3.2)$$

Onde o termo " $FMM_{f_1v_1}$ " corresponde a amplitude da onda dada por:

$$FMM_{f_1v_1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{N_{cond1} \cdot f_{w1v_1} \cdot I_{a1\mu}}{2p \cdot v_1} \quad (C.2.3.3)$$

Onde " v_1 " é ordem da harmônica dada pela equação (C.2.2.14).

A FMM da fase dada pela equação (C.2.3.2) continua sendo uma onda pulsante no espaço, porém está defasada de " $\frac{\pi}{2} rad$ " em relação a onda de densidade linear de corrente. Observe na **Figura C.2.2.2-c** que seu valor máximo ocorre quando " $\theta_1 = 0$ ", ou seja na origem das coordenadas espaciais " θ_1 ".

Para que a máquina possa desenvolver um torque é necessário gerar uma onda de FMM girante no espaço compreendido pelo entreferro.

O enrolamento trifásico mostrado na **Figura C.2.2.1** quando alimentado por correntes equilibradas e defasadas no tempo produz uma onda de FMM girante.

A corrente de cada fase podem ser expressa por:

$$FASE \ a_1 \ i_{a1\mu}(t) = \sqrt{2} I_{a1\mu} e^{j\mu[\omega_e t + \theta_e(0)]} \quad (C.2.3.4)$$

$$FASE \ b_1 \ i_{b1\mu}(t) = \sqrt{2} I_{b1\mu} e^{j\mu[\omega_e t + \theta_e(0) - \frac{2}{3}\pi]} \quad (C.2.3.5)$$

$$FASE \ c_1 \ i_{c1\mu}(t) = \sqrt{2} I_{c1\mu} e^{j\mu[\omega_e t + \theta_e(0) + \frac{2}{3}\pi]} \quad (C.2.3.6)$$

O significado dos parâmetros das equações acima são os mesmos da equação (C.2.2.3).

Para obtermos a equação de onda da FMM, iremos considerar a influência das faixas de zona sobre as harmônicas do campo girante.

O número de faixa de zona do enrolamento depende como os grupos de bobinas são ligados, isto é, depende de como os grupos de bobinas são alimentados pelas corrente de cada fase.

Uma “FAIXA DE ZONA” é definida como sendo o espaço em Graus Elétricos ocupados pela ranhuras cujo grupo de bobinas é alimentado pela mesma corrente que é responsável pela formação de um pólo por fase.

Agora se cada fase do enrolamento trifásico, que está defasada no espaço de “ $\frac{2\pi}{3} rad$ ”, for alimentada pelas correntes “ $i_{a1\mu}(t), i_{b1\mu}(t), i_{c1\mu}(t)$ ” que estão defasados no tempo de “ $\frac{2\pi}{3} rad$ ” formarão uma onda resultante girante de densidade linear de corrente.

Consequentemente a onda de FMM resultante também irá girar no espaço.

A **Figura C.2.3.1** ilustra as três ondas de densidade linear de corrente para dois instantes de tempo “ t_1 ” e “ t_2 ”, gerados pelas faixas de zona.

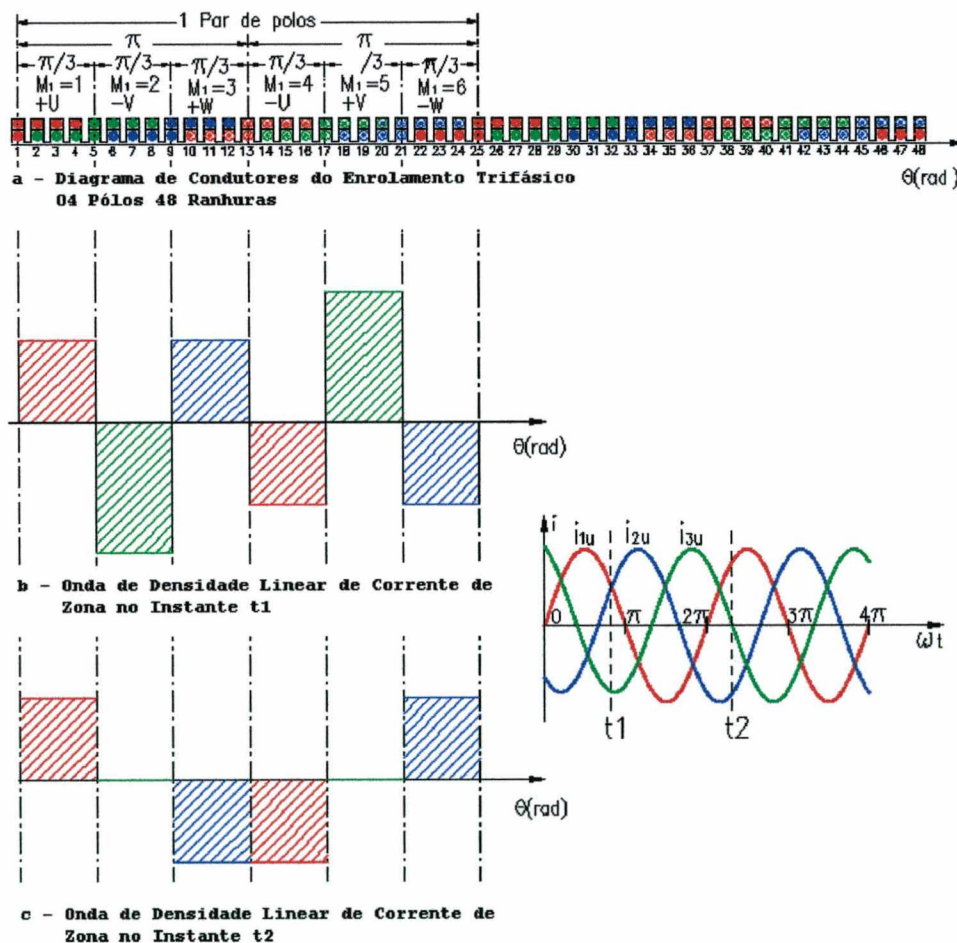


Figura C.2.3.1 - Onda de Densidade Linear de Corrente Gerado pelas Faixas de Zona do Enrolamento 04 Pólos 48 Ranhuras

A largura da faixa de zona de um enrolamento trifásico é dado por:

$$\beta_{lv1} = v_1 q_1 \Delta_1 \quad (\text{C.2.3.7})$$

Portanto o número " M_1 " de faixas de zona por par de pólos, fica:

$$M_1 = \frac{v_1 2\pi}{\beta_{lv1}} = \frac{2\pi}{q_1 \Delta_1} \quad (\text{C.2.3.8})$$

Para a " v_1 - éssima" harmônica a largura da faixa de zona pode ser escrito como:

$$\beta_{lv1} = v_1 \frac{2\pi}{M_1} \quad (\text{C.2.3.9})$$

Como o enrolamento mostrado na **Figura C.2.2.1** está disposto de tal maneira que por par de pólos constitui " M_1 " faixas de zona, ver **Figura C.2.3.1**, e como as faixas de zona são alimentadas por correntes que estão defasadas no tempo de um ângulo equivalente a $\beta_{1\mu}$ podemos escrever:

$$\beta_{1\mu} = \mu \frac{2\pi}{M_1} \quad (\text{C.2.3.10})$$

A equação (C.2.3.10) acima mostra que em cada faixa de zona num tempo correspondente a um período (par de pólos) ocupa uma largura equivalente a " $\beta_{1\mu}$ " radianos. Em outras palavras, se alimentarmos os grupos de condutores que constituem as faixas de zona por correntes independentes defasadas no tempo de " $\beta_{1\mu}$ " obtemos o mesmo resultado. A **Figura C.2.3.2** mostra o significado de " $\beta_{1\mu}$ ".

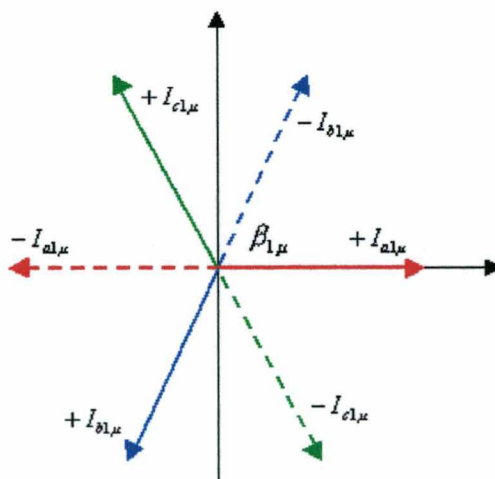


Figura C.2.3.2 - Largura das Faixas de Zona

Feito estas considerações, é possível se obter a equação da " $fmm_{f1}(\theta_1, t)$ " resultante no entreferro da máquina. Para este objetivo partiremos da equação (C.2.3.2), ou seja:

$$fmm_{f1}(\theta_1, t) = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} FMM_{f1v1} e^{j[\mu(\omega_e t + \theta_e(o)) + v_1(\theta_1 - \theta_{10})]} \quad (C.2.3.11)$$

A equação (C.2.3.11) representa uma onda pulsante e que pode ser obtida a partir de duas ondas girantes uma para a direita (DEXTRÓGIRA) e outra para esquerda (LEVÓGIRA) e de amplitudes iguais à metade da onda pulsante, portanto:

$$fmm_{f1}(\theta_1, t) = \frac{1}{2} \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} FMM_{f1v1} \left[e^{j[\mu(\omega_e t + \theta_e(o)) + v_1(\theta_1 - \theta_{10})]} + e^{j[\mu(\omega_e t + \theta_e(o)) - v_1(\theta_1 - \theta_{10})]} \right] \quad (C.2.3.12)$$

Para " n - éssima" faixa de zona podemos escrever:

$$fmm_{f1}(n)(\theta_1, t) = \frac{1}{2} \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} FMM_{f1v1} \left[e^{j\left[\mu\left(\omega_e t + \theta_e(o) + \frac{2\pi}{M1} \cdot n\right) + v_1\left(\theta_1 - \theta_{10} + \frac{2\pi}{M1} \cdot n\right)\right]} + e^{j\left[\mu\left(\omega_e t + \theta_e(o) + \frac{2\pi}{M1} \cdot n\right) - v_1\left(\theta_1 - \theta_{10} + \frac{2\pi}{M1} \cdot n\right)\right]} \right] \quad (C.2.3.13)$$

A FMM resultante do enrolamento " $fmm_1(\theta_1, t)$ " por pólo e fase é obtida efetuando-se a soma para os " M_1 " faixas de zona, ou seja:

$$fmm_1(\theta_1, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{M_1} fmm_{f1}(n)(\theta_1, t) \quad (C.2.3.14)$$

O fator " $\frac{1}{2}$ " foi introduzido porque a FMM resultante que desejamos é por pólo e que corresponde a metade da FMM por par de pólo.

Considerando as três correntes equilibradas, isto é:

$$I_{1\mu} = I_{a1\mu} = I_{b1\mu} = I_{c1\mu} \quad (\text{C.2.3.15})$$

efetuando-se a soma obtemos:

$$\begin{aligned} fmm_1(\theta_1, t) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} FMM_{f1v1} \left\{ e^{j[\mu(\omega_e t + \theta_e(0)) + v_1(\theta_1 - \theta_{10})]} \cdot \left[e^{j\frac{2\pi}{M1}(v_1 + \mu) \cdot 1} + \right. \right. \\ \left. \left. + e^{j\frac{2\pi}{M1}(v_1 + \mu) \cdot 2} + \dots + e^{j\frac{2\pi}{M1}(v_1 + \mu) \cdot M1} \right] + \right. \\ \left. + e^{j[\mu(\omega_e t + \theta_e(0)) - v_1(\theta_1 - \theta_{10})]} \cdot \left[e^{-j\frac{2\pi}{M1}(v_1 - \mu) \cdot 1} + e^{-j\frac{2\pi}{M1}(v_1 - \mu) \cdot 2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \dots + e^{-j\frac{2\pi}{M1}(v_1 - \mu) \cdot M1} \right] \right\} \quad (\text{C.2.3.16}) \end{aligned}$$

Na equação acima os termos dentro do primeiro colchetes, representam os harmônicos DEXTRÓGIROS (giram no sentido horário).

Os termos dentro do segundo colchete representam os harmônicos LEVÓGIROS (giram no sentido anti-horário).

O nosso sistema de referência adotado na **Figura C.2.1** é considerado positivo no sentido anti-horário.

O somatório dentro dos colchetes, tanto para os harmônicos DEXTRÓGIROS como para os LEVÓGIROS, assume o valor " M_1 " ou o valor zero "0" dependendo dos valores de " v_1 " e " μ ".

As condições em que o somatório é igual a " M_1 " são importantes porque esses harmônicos estão presentes na FMM resultante do enrolamento " $m_1 - FÁSICO$ ".

Estas condições podem ser generalizadas como:

$$\frac{v_1 \pm \mu}{M1} = \frac{g_1}{c_1} = \text{INTEIRO} \quad (\text{C.2.3.17})$$

Onde " g_1 " representa um número inteiro positivo inclusive o zero "0", ou seja:

$$g_1 = 0, 1, 2, 3, 4 \dots \quad (\text{C.2.3.18})$$

O termo " c_1 " representa a parte fracionária do enrolamento, isto é:

$$q_1 = a \frac{b}{c} \quad (\text{C.2.3.19})$$

Por exemplo:

- Para q_1 inteiro temos $c_1 = 1$

- Para $q_1 = a \frac{b}{2}$ temos $c_1 = 2$

- Para $q_1 = a \frac{b}{4}$ temos $c_1 = 4$

Portanto o conjunto de harmônicos presente na FMM resultante depende de como o pólo com " q_1 " ranhuras é alimentado e formado.

A equação (C.2.3.17) é usualmente apresentada, como:

$$v_1 = \mu + M_1 \frac{g_1}{c_1} \quad (\text{C.2.3.20})$$

Onde " g_1 " assume agora valores inteiros desde " $-\infty$ " até " $+\infty$ ", ou seja:

$$g_1 = 0 \pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \dots \quad (\text{C.2.3.21})$$

Para harmônicos LEVÓGIROS temos $g_1 \geq 0$.

Para harmônicos DEXTRÓGIROS temos $g_1 < 0$.

Considerando as generalizações feitas acima, podemos rescrever a equação (C.2.3.16) de uma forma mais compacta

$$fmm_1(\theta_1, t) = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \frac{M_1}{4} FMM_{f_1 v_1} e^{j[\mu(\omega_e t + \theta_e(0)) - v_1(\theta_1 - \theta_{10})]} \quad (\text{C.2.3.22})$$

A equação (C.2.3.22) representa a onda da FMM resultante no entreferro responsável pelo torque eletromagnético. Sua amplitude é dada por:

$$FMM_{1v_1} = \frac{M_1}{4} FMM_{f_1 v_1} = \frac{M_1}{4} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{N_{cond1} \cdot fw_{1v_1} \cdot I_{1\mu}}{p \cdot v_1} \quad (\text{C.2.3.23})$$

Portanto:

$$fmm_1(\theta_1, t) = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} FMM_{1v_1} e^{j[\mu(\omega_e t + \theta_e(0)) - v_1(\theta_1 - \theta_{10})]} \quad (C.2.3.24)$$

A parte exponencial da equação acima representa a fase da onda espacial. Como ela é uma onda progressiva, esta quantidade é constante, de tal modo que podemos escrever:

$$\mu(\omega_e t + \theta_e(0)) - v_1(\theta_1 - \theta_{10}) = \text{CONSTANTE} \quad (C.2.3.25)$$

Derivando em relação a "t" obtemos a equação da velocidade da onda.

$$\begin{aligned} \mu \omega_e - v_1 \frac{d\theta_1}{dt} &= 0 \\ \frac{d\theta_1}{dt} = \omega_{1v_1} &= \frac{\mu}{v_1} \omega_e \end{aligned} \quad (C.2.3.26)$$

Onde " ω_{1v_1} " representa a velocidade de deslocamento da harmônica de ordem " v_1 ". Em relação a um referencial fixo no estator todas as harmônicas tem frequência angular fixa e igual a " ω_e ", portanto a velocidade de deslocamento " ω_{1v_1} " da harmônica é inversamente proporcional a sua ordem " v ".

C.3 INDUTÂNCIAS DA MÁQUINA

Uma vez que o conceito de enrolamento senoidal distribuído e a FMM senoidal no entreferro tem sido estabelecida, o próximo passo é determinar os fluxos de dispersão, próprio e mútuo dos enrolamentos da máquina.

Para estabelecer as equações dos fluxos primeiramente devemos estabelecer a equação da indução no entreferro da máquina.

C.3.1 Indução no Entreferro

Para chegarmos a equação da onda de indução resultante no entreferro da máquina partiremos da equação da FMM dada por (C.2.3.24).

Consideramos inicialmente que a máquina tenha um entreferro geometricamente não uniforme conforme mostrado na **Figura C.3.1.1**.

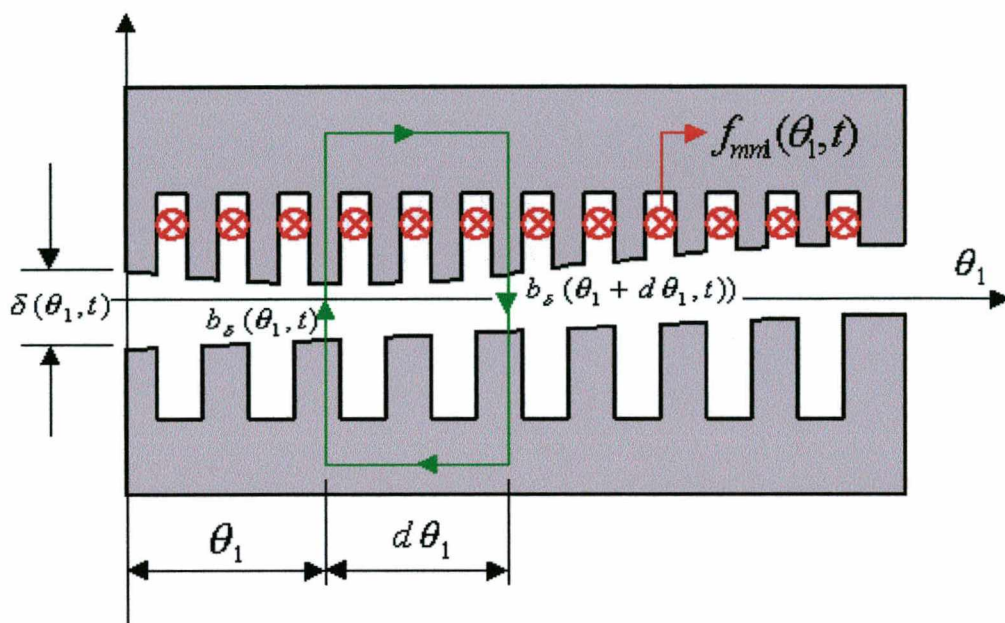


Figura C.3.1.1 - A Lei de Ampère Aplicada ao Entreferro da Máquina

Aplicando-se a Lei de Ampère ao caminho fechado mostrado na Figura C.3.1.1 e considerando a permeabilidade do ferro infinita, temos:

$$\oint \frac{b_{\delta}(\theta_1, t)}{\mu_0} \cdot \delta(\theta_1, t) = 2 \times f_{mm_1}(\theta_1, t) \quad (C.3.1.1)$$

O fator "2" foi introduzido na equação (C.3.1.1) porque " $b_{\delta}(\theta_1, t)$ " atravessa duas vezes o entreferro no caminho considerado.

Desenvolvendo a integral de linha, temos:

$$\frac{b_{\delta}(\theta_1, t)}{\mu_0} \cdot \delta(\theta_1, t) + \frac{b_{\delta}(\theta_1 + d\theta_1, t)}{\mu_0} \cdot \delta(\theta_1 + d\theta_1, t) = 2 \times f_{mm_1}(\theta_1, t) \quad (C.3.1.2)$$

Levando ao limite quando " $d\theta_1 \rightarrow 0$ " resulta:

$$b_{\delta}(\theta_1, t) = \frac{\mu_0}{\delta(\theta_1, t)} \cdot f_{mm_1}(\theta_1, t) = p(\theta_1, t) \cdot f_{mm_1}(\theta_1, t) \quad (C.3.1.3)$$

O primeiro termo do segundo membro da equação acima é denominado "PERMEÂNCIA DO ENTREFERRO", " $p(\theta_1, t)$ ".

Esta permeância pode ser representada genericamente por uma série de FOURIER, ou seja:

$$p(\theta_1, t) = \frac{\mu_0}{\delta(\theta_1, t)} = P_0 + \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} P_{\lambda} e^{j[\lambda(\omega_{\lambda} t + \theta_{\lambda}(0)) - \lambda(\theta_1 - \theta_{p0})]} \quad (\text{C.3.1.4})$$

A equação acima representa uma onda progressiva de permeância magnética no entreferro da máquina.

Onde:

θ_{p0} = Fase inicial da onda em "rad"

ω_{λ} = Velocidade angular da onda de permeância "rad / s"

$\theta_{\lambda}(0)$ = Fase inicial da permeância quando $t = 0$

λ = Representa a ordem da harmônica em número de pares de pólos

P_{λ} = Amplitude da onda

O somatório da equação (C.3.1.4) representa a permeância devido ao efeito das ranhuras do rotor e estator, bem como a saturação do topo dos dentes e a excentricidade no entreferro.

O termo " P_0 " representa a permeância do entreferro que satisfaz as seguintes condições:

- 1º) Estator e Rotor liso sem ranhuras
- 2º) Estator e Rotor perfeitamente cilíndricos e concêntricos
- 3º) Circuito magnético não saturado

Nestas condições a parte da equação (C.3.1.4) que varia com o tempo e no espaço é nula, isto é, não existe, logo:

$$p(\theta_1, t) = \frac{\mu_0}{\delta(\theta_1, t)} = P_0 \quad (\text{C.3.1.5})$$

Para atender as três condições acima basta desprezar a excentricidade e corrigir o entreferro geométrico " δ " pelos fatores de CARTER " k_{c1}, k_{c2} " e pelo fator de saturação do circuito magnético da máquina " k_s ".

Portanto a permeância " P_0 " fica:

$$P_0 = \frac{\mu_0}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot k_s} \quad (\text{C.3.1.6})$$

Onde:

δ = Entreferro Geométrico em “m”

$$k_{c1} = \frac{t_{N1} \cdot (5\delta + b_{01})}{t_{N1} \cdot (5\delta + b_{01}) - (b_{01})^2} = \text{Fator de Carter do Estator}$$

$$k_{c2} = \frac{t_{N2} \cdot (5\delta + b_{02})}{t_{N2} \cdot (5\delta + b_{02}) - (b_{02})^2} = \text{Fator de Carter do Rotor}$$

b_{01} = Abertura da Ranhura do Estator em “m” (ver **Figura C.3.2.1.4**)

b_{02} = Abertura da Ranhura do Rotor em “m” (ver **Figura C.3.2.1.4**)

$$t_{N1} = \frac{\pi (D_1 - \delta)}{N_1} = \text{Passo de Ranhura do Estator}$$

$$t_{N2} = \frac{\pi (D_1 - \delta)}{N_2} = \text{Passo de Ranhura do Rotor em “m”}$$

O fator de saturação “ k_s ” corresponde a relação entre a FMM total do circuito magnético e a FMM consumida no entreferro, ou seja:

$$k_s = \frac{\sum \text{FMM do circuito magnético}}{\text{FMM consumida no entreferro}} \quad (\text{C.3.1.7})$$

No presente trabalho iremos desprezar o somatório da equação (C.3.1.4). Isto significa que a onda de indução resultante aqui analisada terá um número restrito de harmônicos.

Portanto a onda de indução resultante, fica:

$$b_\delta (\theta_1, t) = P_0 \cdot fmm_1 (\theta_1, t) \quad (\text{C.3.1.8})$$

Substituindo (C.2.3.24) e (C.3.1.6) em (C.3.1.8) resulta:

$$b_\delta (\theta_1, t) = \frac{\mu_o}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot k_s} \cdot \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} FMM_{1v1} e^{j[\mu(\omega_e t + \theta_e(\theta)) - v_1(\theta_1 - \theta_{10})]} \quad (\text{C.3.1.9})$$

Podemos compactar, escrevendo:

$$b_\delta (\theta_1, t) = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} B_{1v1} e^{j[\mu(\omega_e t + \theta_e(\theta)) - v_1(\theta_1 - \theta_{10})]} \quad (\text{C.3.1.10})$$

A amplitude da onda é dada por:

$$B_{lv1} = \frac{\mu_0}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot ks} \cdot FMM_{lv1} \quad (C.3.1.11)$$

Definindo um entreferro equivalente " δ' " podemos escrever como:

$$B_{lv1} = \frac{\mu_0}{\delta'} \cdot FMM_{lv1} = \frac{M_1}{4} \frac{\sqrt{2} \mu_0}{\pi \delta'} \cdot \frac{N_{cond1} \cdot f_{wlv1}}{p \cdot v_1} \cdot I_1 \mu \quad (C.3.1.12)$$

Onde:

$$\delta' = \delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot ks \quad (C.3.1.13)$$

A velocidade de deslocamento da onda de indução é a mesma da onda de FMM dada por (C.2.3.26).

A equação (C.3.1.10) representa a expressão geral da onda de indução por pólo resultante no entreferro da máquina, atendendo as três restrições colocadas no início do parágrafo.

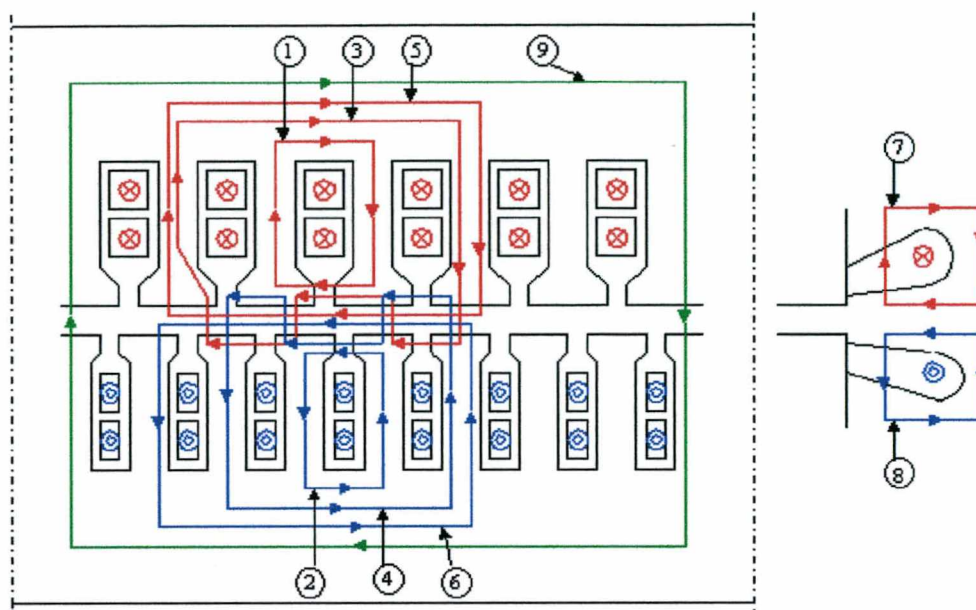
C.3.2 Indutância de Dispersões

A corrente que circula no enrolamento da máquina gera um fluxo que denominaremos de fluxo total. Mas nem todo esse fluxo atravessa o entreferro e enlaça o enrolamento do rotor devido a dispersão. Em outras palavras, o fluxo mútuo é menor que o fluxo total gerado, devido a dispersão. Para uma análise acurada tanto em regime como em transitório, é necessário determinar as indutâncias desses caminhos dos fluxos de dispersão.

Em uma máquina Assíncrona trifásica devemos considerar os seguintes fluxos de dispersão:

- a) Fluxo de dispersão de ranhuras;
- b) Fluxo de dispersão no entreferro;
- c) Fluxo de dispersão nas cabeças de bobinas;
- d) Fluxo de dispersão devido os harmônicos de ordem superior.

A Figura C.3.2.1 mostra esquematicamente o caminho desses fluxos de dispersão.



- 1- Fluxo de Dispersão das Ranhuras do Estator
- 2- Fluxo de Dispersão das Ranhuras do Rotor
- 3- Fluxo de Dispersão ZIG-ZAG e Inclinação do Estator
- 4- Fluxo de Dispersão ZIG-ZAG e Inclinação do Rotor
- 5- Fluxo de Dispersão das Harmônicas de Ordem Superior do Estator
- 6- Fluxo de dispersão das Harmônicas de Ordem Superior do Rotor
- 7- Fluxo de Dispersão das cabeças de Bobina do estator
- 8- Fluxo de Dispersão das Cabeças de Bobina do Rotor
- 9- Fluxo Mútuo ou Útil

Figura C.3.2.1 - Caminhos dos Diversos Fluxos de Dispersão da Máquina

Os caminhos dos fluxos de dispersão “1”, “2”, “3”, “4” estão sujeitos ao efeito de saturação dos topos dos dentes. No presente trabalho não iremos considerar este efeito porque para aplicações da MATBCDA, a performance durante a partida não é tão relevante, isto é, podemos desprezar este efeito.

C.3.2.1 Indutância de Dispersão de Ranhuras

O fluxo disperso nas ranhuras depende basicamente da geometria da ranhura. No projeto deve ser escolhida uma geometria adequada para minimizar este fluxo de dispersão. A dispersão ocorre tanto nas ranhuras do estator como nas do rotor.

Atualizaremos a indutância de dispersão de ranhura primeiramente de uma forma genérica. Após feito isto, particularizaremos para as ranhuras do estator e rotor.

Para obtermos a equação da indutância de dispersão, consideramos a ranhura genérica mostrada na **Figura C.3.2.1.1**, abaixo:

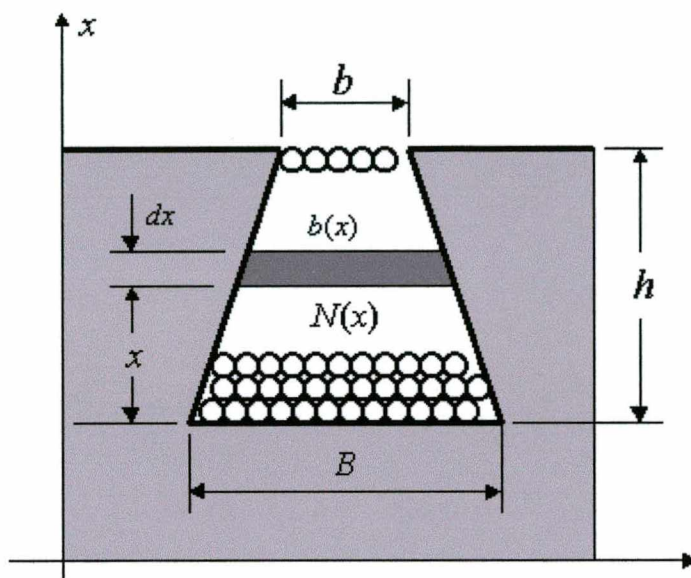


Figura C.3.2.1.1 - Dispersão em Uma Ranhura Genérica

Considerando que os condutores estão uniformemente distribuídos dentro da ranhura, a fração de condutores " $N(x)$ " até a altura " x " é proporcional à relação de áreas, ou seja:

$$N(x) = N_{ef} \cdot \frac{A(x)}{At} = N_{ef} \frac{\int_0^x b(x) dx}{\int_0^h b(x) dx} \quad (\text{C.3.2.1.1})$$

O termo " N_{ef} " representa o número de condutores efetivos totais dentro da ranhura. Cada condutor está conduzindo uma corrente " I_μ ".

O fluxo de dispersão através da ranhura é dado por:

$$\phi(x) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_0^x B(x) \cdot L_{Fe} \cdot dx \quad (\text{C.3.2.1.2})$$

A partir da Lei de Ampère obtemos a indução " $B(x)$ ", ou seja:

$$\oint \vec{H}(x) \cdot d\vec{l} = I_\mu N(x)$$

$$B(x) = \frac{\mu_0}{b(x)} \cdot I_\mu \cdot N(x) \quad (\text{C.3.2.1.3})$$

Substituindo na equação do fluxo dado por (C.3.2.1.2) temos:

$$\phi(x) = \mu_0 L_{Fe} \cdot I_{\mu} \int_0^x \frac{I}{b(x)} \cdot N(x) dx \quad (C.3.2.1.4)$$

Por outro lado, a indutância de dispersão pode ser calculada como sendo:

$$L_{disp} = N(x) \cdot \frac{\phi(x)}{I_{\mu}} \quad (C.3.2.1.5)$$

Substituindo (C.3.2.1.1) e (C.3.2.1.4) em (C.3.2.1.5) obtemos para a indutância de dispersão:

$$L_{disp} = \mu_0 L_{Fe} (N_{ef})^2 \cdot \int_0^x \frac{I}{b(x)} \cdot \left[\frac{\int_0^x b(x) dx}{\int_0^h b(x) dx} \right]^2 dx \quad (C.3.2.1.6)$$

A equação (C.3.2.1.6) acima representa a equação geral para a indutância de dispersão " L_{disp} " para uma ranhura cujo comprimento do pacote de ferro é " L_{fe} ", com " N_{ef} " condutores efetivos no seu interior. Definindo coeficiente de permeância " kp_R " como sendo:

$$kp_R = \int_0^x \frac{I}{b(x)} \cdot \left[\frac{\int_0^x b(x) \cdot dx}{\int_0^h b(x) dx} \right]^2 dx \quad (C.3.2.1.7)$$

A equação (C.3.2.1.6) pode ser simplificada:

$$L_{disp} = \mu_0 L_{Fe} \cdot (N_{ef})^2 \cdot kp_R \quad (C.3.2.1.8)$$

Portanto para o cálculo da indutância de dispersão é necessário se conhecer o coeficiente de permeância da ranhura.

A equação (C.3.2.1.7) se aplica para o cálculo do coeficiente de permeância das ranhuras ou trechos de ranhuras onde existe uma distribuição uniforme de condutores conduzindo corrente elétrica. Para os trechos de ranhura onde não há distribuição uniforme de condutores, mas apenas passagem do campo de dispersão, o termo entre colchetes na equação (C.3.2.1.7) se reduz a unidade "1", portanto:

$$kp_R = \int_0^x \frac{I}{b(x)} \cdot dx \quad (C.3.2.1.9)$$

A equação (C.3.2.1.8) fornece a reatância de dispersão de uma ranhura. Considerando que os condutores efetivos " N_{ef} " das ranhuras de uma fase estão ligados em série, para uma fase temos:

$$L_{dRf} = \mu_0 L_{Fe} \cdot (N_{ef})^2 \cdot kp_R \times \left(\frac{N}{m}\right) \quad (\text{C.3.2.1.10})$$

Onde:

N = Número total de ranhuras

m = Número de fases do enrolamento

O número de condutores efetivos " N_{ef} " de uma ranhura pode ser calculada como:

$$N_{ef} = \frac{m \times N_{cond}}{N} \quad (\text{C.3.2.1.11})$$

O termo " N_{cond} " representa o número de condutores em série por fase dado por (C.2.2.15), ou seja:

$$N_{cond} = \frac{N}{m} \cdot Z \cdot \frac{N_{cam}}{N_{Lig}} \quad (\text{C.3.2.1.12})$$

Substituindo (C.3.2.1.11) em (C.3.2.1.10) obtemos a indutância de dispersão da ranhura por fase:

$$L_{dRf} = \mu_0 L_{Fe} \cdot \left(\frac{m}{N}\right) \cdot (N_{cond})^2 \cdot kp_R \quad (\text{C.3.2.1.13})$$

A equação (C.3.2.1.13) acima foi deduzida considerando que dentro da ranhura os condutores estão conduzindo corrente em fase. Na maioria dos enrolamentos trifásicos dentro das ranhuras de uma fase podem existir, condutores de outra fase. Este fato ocorre toda vez que o enrolamento é de dupla camada e de passo diferente do passo pleno ou polar. Nestes casos a bobina superior conduz uma corrente que está defasada em relação a corrente conduzida pela bobina inferior de um ângulo " $\Delta\theta$ ".

Para levar este efeito em consideração precisamos levar em conta o acoplamento magnético entre a bobina superior e a bobina inferior em cada ranhura.

A **Figura C.3.2.1.2** abaixo ilustra uma ranhura com duas bobinas conduzindo correntes não em fase.

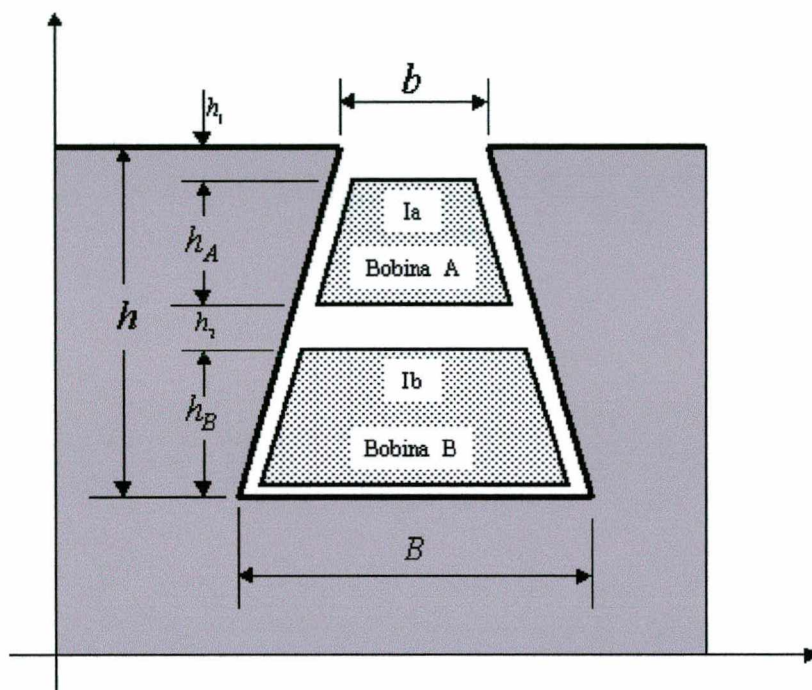


Figura C.3.2.1.2 - Dispersão em Uma Ranhura com duas Bobinas

Neste caso a indutância mútua entre a bobina superior (A) e a inferior (B), deve ser multiplicada pelo " $\cos(\Delta\theta)$ " para obter a indutância efetiva.

Referindo-se a ranhura com duas bobinas conforme mostrado na **Figura C.3.2.1.2** a indutância total é formada por três parcelas:

- Indutância própria da bobina (A) L_A
- Indutância própria da bobina (B) L_B
- Indutância mútua entre (A) e (B) $2L_{AB}$

Considerando que as duas bobinas estão efetivamente ligados em série a indutância total de dispersão é dado pela soma:

$$L_{dR} = L_A + 2L_{AB} \cdot \cos \Delta\theta + L_B \quad (\text{C.3.2.1.14})$$

Comparando a equação (C.3.2.1.14) acima com (C.3.2.1.13) podemos escrever para uma fase:

$$L_{dRf} = \mu_o L_{Fe} \cdot \left(\frac{m}{N}\right) (N_{cond})^2 (kp_A + 2kp_{AB} \cos \Delta\theta + kp_B) \quad (\text{C.3.2.1.15})$$

Onde:

kp_A = Coeficiente de permeância da indutância própria de A

kp_B = Coeficiente de permeância da indutância própria de B

kp_{AB} = Coeficiente de permeância da indutância mútua de A e B

O coeficiente de permeância total da ranhura baseado na equação (C.3.2.15) fica:

$$kp_R = kp_A + 2 kp_{AB} \cos\Delta\theta + kp_B \quad (\text{C.3.2.1.16})$$

Quando todas as ranhuras de uma fase são percorridas por correntes em fase " $\Delta\theta = 0^\circ$ ", o acoplamento magnético entre a bobina superior e inferior é total e portanto " $\cos\Delta\theta = 1$ ".

Como normalmente num enrolamento trifásico de dupla camada o passo é diferente do passo pleno, as correntes conduzidas na bobina superior e inferior estão defasadas. Em geral há dois tipos de ranhura por fase conduzindo a corrente com diferentes fases. É portanto necessário calcular a permeância de cada ranhura e somá-los para obter a permeância equivalente por fase.

Desenvolvendo a equação (C.3.2.1.16) para a ranhura na **Figura C.3.2.1.2** obtemos:

$$kp_R = kp_h \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos\Delta\theta \right) - kp_{h2} \left(\frac{1}{8} \cos\Delta\theta - \frac{1}{24} \right) + kp_{h1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\Delta\theta \right) \quad (\text{C.3.2.1.17})$$

Onde:

kp_h = Coeficiente de permeância da região da ranhura h

kp_{h2} = Coeficiência de permeância de região da ranhura h_2

kp_{h1} = Coeficiente de permeância da região da ranhura h_1

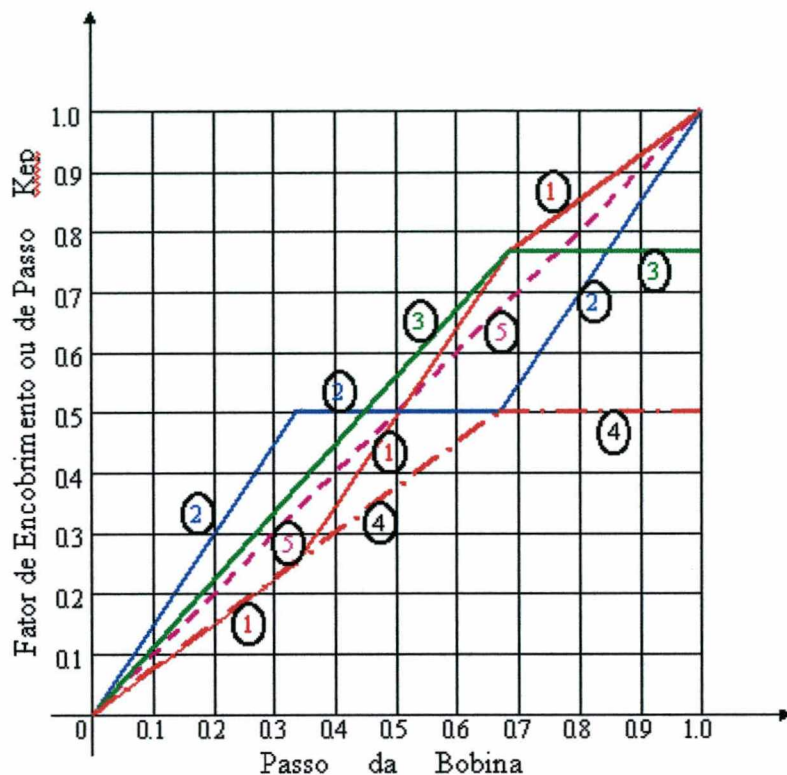
Definindo fator de "Encobrimento" ou fator de "Passo" como sendo:

$$k_{ep} = \frac{1 + \cos\Delta\theta}{2} \quad (\text{C.3.2.1.18})$$

A equação (C.3.2.1.17) fica:

$$kp_R = kp_h \left(\frac{3k_{ep} + 1}{4} \right) - kp_{h2} \left(\frac{6k_{ep} - 4}{24} \right) + kp_{h1} \cdot k_{ep} \quad (\text{C.3.2.1.19})$$

O valor efetivo de " k_{ep} " para todo o enrolamento está mostrado na **Figura C.3.2.1.3** abaixo, para todos os tipos de enrolamentos trifásicos.



Trifásico Faixa Zona 60 Graus	: 1=> Conexão Linha-Linha
	2=> Conexão Linha-Neutro
Trifásico Faixa de Zona 120 Graus	: 3=> Conexão Linha-Linha
	4=> Conexão Linha-Neutro
Bifásico Faixa de Zona 90 graus	: 5=> Todas as Conexões

Figura C.3.2.1.3 - Fator de Encobrimento ou de Passo da Indutância de Dispersão da Ranhura

Uma vez obtida a equação geral para a indutância de dispersão de ranhura por fase, dada pelas equações (C.3.2.1.13) e (C.3.2.1.19) podemos aplicá-las no cálculo da " L_{disp} " por fase de ranhuras conhecidas.

Consideramos para este cálculo duas ranhuras bastante usadas no projeto de máquinas assíncronas. Na **Figura C.3.2.1.4** a ranhura tipo I é para Máquinas de Baixa Tensão e o tipo II para Máquinas de Média Tensão.

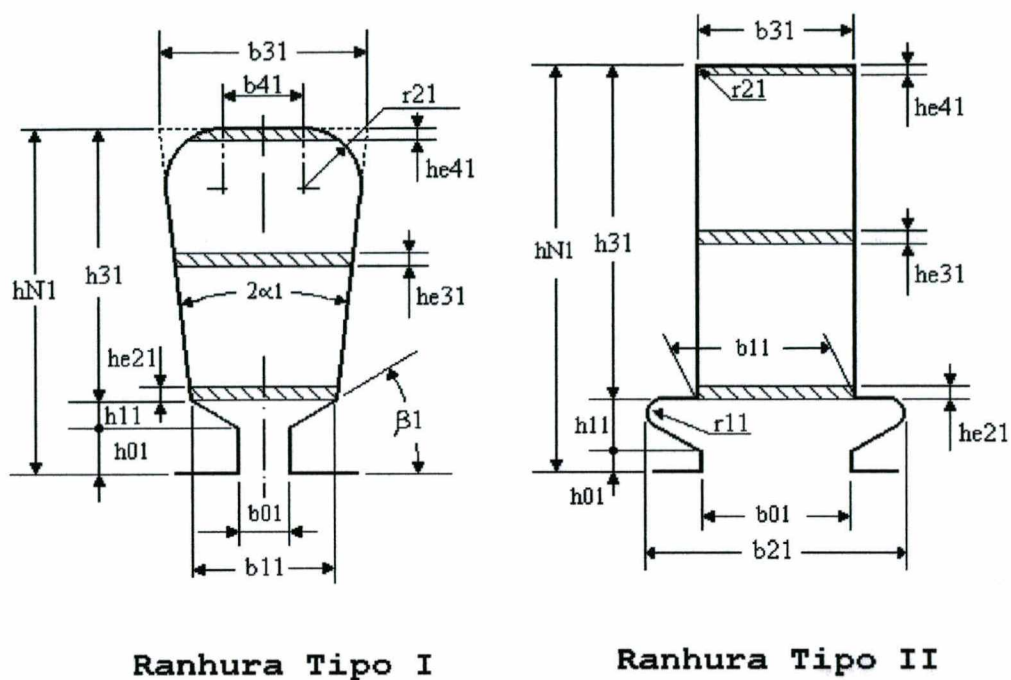


Figura C.3.2.1.4 - Tipos de Ranhuras do Estator

Os coeficientes de permeância para a ranhura I de acordo com (C.3.2.1.7) e (C.3.2.1.9) podem ser calculador por:

$$\left. \begin{aligned}
 kp_{01} &= \frac{h_{01}}{b_{01}} \\
 kp_{11} &= \frac{h_{11}}{b_{01} - b_{11}} \cdot \ln \left(\frac{b_{01}}{b_{11}} \right) \\
 kp_{31} &= \frac{2 h_{31}}{3 (b_{11} + b_{31})} \quad (\text{Aproximadamente}) \\
 kp_{e31} &= \frac{2 \times he_{31}}{b_{11} + b_{31}}
 \end{aligned} \right\} \quad (C.3.2.1.20)$$

O coeficiente de permeância total da ranhura fica:

$$kp_{RI} = kp_{31} \left(\frac{3k_{ep} + 1}{4} \right) - kp_{e31} \left(\frac{6k_{ep} - 4}{24} \right) + k_{ep} (kp_{01} + kp_{11}) \quad (C.3.2.1.21)$$

Para a ranhura Tipo II temos:

$$\left. \begin{aligned} kp_{01} &= \frac{h_{01}}{b_{01}} \\ kp_{11} &= \frac{h_{11}}{b_{01} - b_{11}} \cdot \ln \left(\frac{b_{01}}{b_{11}} \right) \\ kp_{31} &= \frac{h_{31}}{3 b_{31}} \\ kp_{e31} &= \frac{2 \times he_{31}}{b_{31}} \end{aligned} \right\} \quad (C.3.2.1.22)$$

O coeficiente de permeância total da ranhura fica:

$$kp_{RII} = kp_{31} \left(\frac{3k_{ep} + 1}{4} \right) - kp_{e31} \left(\frac{6k_{ep} - 4}{24} \right) + k_{ep} (kp_{01} + kp_{11}) \quad (4.3.2.1.23)$$

A indutância de dispersão é calculada pela equação (C.3.2.1.13).

A indutância de dispersão das ranhuras do rotor é calculada de modo semelhante as do estator. As indutâncias rotóricas normalmente são referidas ao estator. Para fazer isto podemos usar o seguinte fator de redução.

$$k_Z = \left(\frac{f_{w1v1} \cdot N_{cond1}}{f_{w2v2} \cdot N_{cond2}} \right)^2 \cdot \frac{m_1}{m_2} \quad (C.3.2.1.24)$$

Uma vez calculado o coeficiente de permeância " kp_{R1} " para a ranhura do estator e " kp_{R2} " para a ranhura do rotor, as expressões gerais das indutâncias de dispersão das ranhuras do estator e do rotor por fase podem ser escritas conforme:

$$L_{dRf1} = \mu_0 \cdot L_{Fe1} \cdot \left(\frac{m_1}{N_1} \right) \cdot (N_{cond1} \cdot f_{w1v1})^2 \cdot kp_{R1} \quad (C.3.2.1.25)$$

Analogamente para a ranhura do rotor temos:

$$L_{dRf2} = \mu_0 \cdot L_{Fe2} \cdot \left(\frac{m_2}{N_2} \right) \cdot (N_{cond2} \cdot f_{w2v2})^2 \cdot kp_{R2} \quad (C.3.2.1.26)$$

A equação (C.3.2.1.26) acima representa a indutância de dispersão por fase das ranhuras do rotor referido ao rotor. Para referi-la ao estator devemos multiplicar pelo fator " k_Z " dado por (C.3.2.1.24).

C.3.2.2 Indutância de Dispersão Zig-Zag

Os caminhos do fluxo de dispersão Zig-Zag são produzidos devido ao fato do entreferro da máquina não ser liso. No parágrafo (C.3.1) quando calculamos a indução no entreferro foi desprezado o somatório da equação (C.3.1.4), isto significa que o efeito das ranhuras e dentes para o fluxo no entreferro foi desconsiderado.

Para considerar no desempenho da máquina este efeito do fluxo “Zig-Zagueando” no entreferro entre o dente do estator e do rotor, calcularemos a indutância de dispersão Zig-Zag.

Para isto, consideramos uma máquina trifásica simétrica, onde o rotor ocupa uma posição tal que o eixo do seu enrolamento coincida com o eixo do estator. A Figura C.3.2.2.1 mostra esta condição.

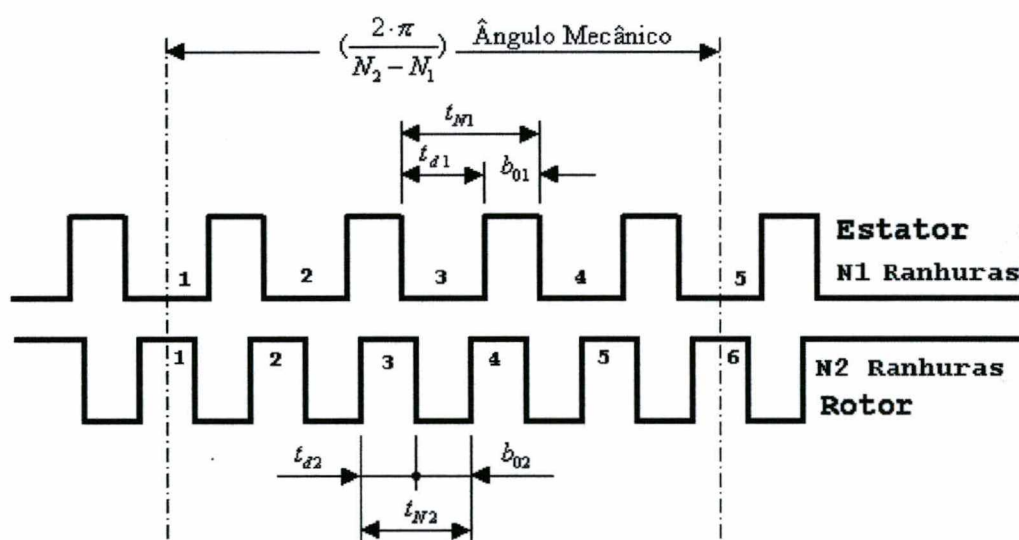


Figura C.3.2.2.1 - Posição Relativa das Ranhuras do Estator e do Rotor

O número de ranhuras por pólo é considerado bastante grande, e o dente número “1” (um) do estator é tomado como estando no ponto central da faixa de zona do estator. Nesta condição as correntes são simétricas em relação a este ponto central.

Nestas condições de acordo com ALGER PHILIP L. (Páginas 222 a 226) demonstra-se que a indutância de dispersão Zig-Zag pode ser calculada como segue:

$$L_{dzf} = \mu_0 L_{Fe} \cdot \left(\frac{m}{N} \right) (N_{cond})^2 \cdot k_{pz} \quad (C.3.2.2.1)$$

Onde:

L_{dzf} = Representa a indutância de dispersão Zig-Zag total por fase

O termo " k_{pZ} " representa o coeficiente de permeância Ziz-Zag do entreferro dado por:

$$k_{pZ} = k_{ep} \cdot \frac{td_1 \cdot td_2 (td_1^2 + td_2^2)}{12 \cdot t_{N1} \cdot t_{N2} \cdot \delta'} \quad (C.3.2.2.2)$$

Onde:

t_{N1}, t_{N2} = Passos de ranhuras do estator e do rotor

δ' = Entreferro efetivo dado por (C.3.1.13)

Os termos " td_1 " e " td_2 " representam a largura do topo do dente no entreferro do estator e do rotor dado por:

$$td_1 = \frac{\pi (D_1 - \delta)}{N_1} - b_{01} \quad (C.3.2.2.3)$$

$$td_2 = \frac{\pi (D_1 - \delta)}{N_2} - b_{02} \quad (C.3.2.2.4)$$

Substituindo os termos acima na equação (C.3.2.2.2) e considerando o entreferro efetivo dado (C.3.1.13) obtemos para o coeficiente de permeância Zig-Zag.

$$k_{pZ} = \frac{k_{ep}}{12 \cdot \delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot ks} \left[\frac{\pi (D_1 - \delta)}{N_1} \cdot k_{eZ1} + \frac{\pi (D_1 - \delta)}{N_2} \cdot \frac{N_1}{N_2} \cdot k_{eZ2} \right] \quad (C.3.2.2.5)$$

Onde o primeiro termo entre colchetes se refere ao estator e o segundo termo ao rotor, porém já referido ao estator.

Os fatores " k_{eZ1} " e " k_{eZ2} " são empíricos e foram introduzidos para compensar a simplificação feita na passagem de (C.3.2.2.2) para (C.3.2.2.5) onde foi considerado que " $td_1 \cong t_{N1}$ " e " $td_2 \cong t_{N2}$ "

e . Estes fatores são dados por:

$$k_{eZ1} = \frac{1,2}{k_{c1}} - 0,2 \quad (C.3.2.2.6)$$

$$k_{eZ2} = \frac{1,2}{k_{c2}} - 0,2 \quad (C.3.2.2.7)$$

Portanto o coeficiente de permeância Zig-Zag do estator fica:

$$k_{pZ1} = \frac{k_{ep}}{12 \cdot \delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot k_s} \cdot \frac{\pi (D_1 - \delta)}{N_1} \cdot k_{eZ1} \quad (\text{C.3.2.2.8})$$

O coeficiente de permeância Zig-Zag do rotor referido ao estator fica:

$$k_{pZ2} = \frac{k_{ep}}{12 \cdot \delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot k_s} \cdot \frac{\pi (D_1 - \delta)}{N_2} \cdot \frac{N_1}{N_2} \cdot k_{eZ2} \quad (\text{C.3.2.2.9})$$

Este mesmo coeficiente referido ao rotor:

$$k_{pZ2} = \frac{k_{ep}}{12 \cdot \delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot k_s} \cdot \frac{\pi (D_1 - \delta)}{N_2} \cdot k_{eZ2} \quad (\text{C.3.2.2.10})$$

Finalmente, a indutância de dispersão Zig-Zag por fase do estator fica:

$$L_{dZf1} = \mu_0 \cdot L_{Fe1} \cdot \left(\frac{m_1}{N_1} \right) (N_{cond1})^2 \cdot k_{pZ1} \quad (\text{C.3.2.2.11})$$

A indutância de dispersão Zig-Zag por fase para o rotor temos:

$$L_{dZf2} = \mu_0 \cdot L_{Fe2} \cdot \left(\frac{m_2}{N_2} \right) (N_{cond2})^2 \cdot k_{pZ2} \quad (\text{C.3.2.2.12})$$

Para referi-la ao estator podemos usar o fator de redução dado pela equação (C.3.2.1.24).

C.3.2.3 Indutância de Dispersão devido à Inclinação de Ranhuras

Sabemos que para enrolamentos inteiros nem o fator de distribuição " f_{dlv1} " dado por (4.2.2.16) e nem o fator de encurtamento " f_{e1v1} " dado por C.2.2.17 são capazes de atenuar as harmônicas de ranhuras. Eles não conseguem atenuar porque para estes harmônicos estes fatores tem módulo igual aos fatores da onda fundamental.

Para enrolamento fracionário o fator de distribuição para a harmônica de ranhura tem módulo diferente do da fundamental, conseqüentemente ajuda a atenuar estas harmônicas.

Com o objetivo de minimizar a influência dos harmônicos de ranhura é feito a inclinação das ranhuras do estator ou do rotor.

Como a natureza não dá nada de graça, a inclinação não afeta o fator de bobinagem da máquina porém afeta o “acoplamento” eletromagnético entre o estator e o rotor.

Para sermos mais precisos, a inclinação afeta a tensão magnetizante da máquina.

Sabe-se que as duas primeiras harmônicas de ranhura são mais perigosas mas com uma inclinação adequada das ranhuras podemos praticamente eliminar seus efeitos sobre a tensão magnetizante.

A redução do acoplamento eletromagnético entre o estator e o rotor se traduz num aumento da dispersão do fluxo no entreferro da máquina. Para chegarmos na expressão da indutância de dispersão devido a inclinação consideramos a bobina do estator não inclinada e a do rotor inclinada conforme mostrada na **Figura C.3.2.3.1**.

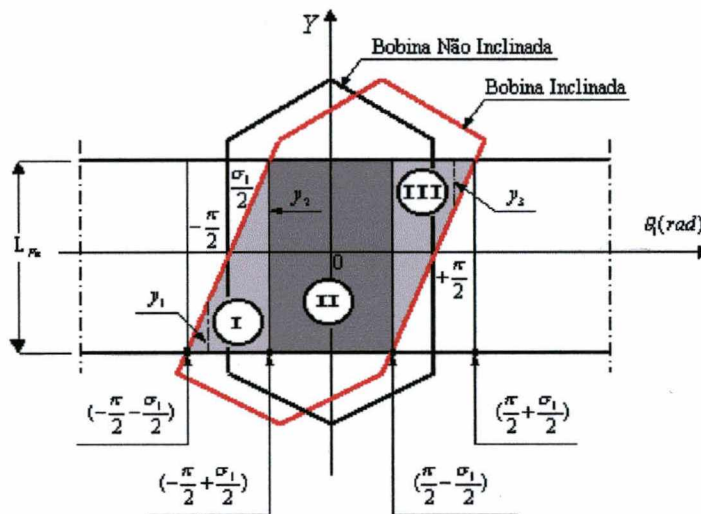


Figura C.3.2.3.1 - Acoplamento Eletromagnético Entre as Bobinas do Estator e Rotor Considerando a Inclinação Relativa

O ângulo “ σ_1 ” representa o ângulo de inclinação da bobina em graus elétricos e pode ser calculado por:

$$\sigma_1 = \frac{\pi \times 2p}{N_1} \cdot i \quad (\text{C.3.2.3.1})$$

Onde:

σ_1 = Graus Elétricos em Radianos

N_1 = Número de Ranhuras do Estator

i = Inclinação da Ranhura expressa em número de ranhuras do estator

A tensão magnetizante induzida depende do fluxo "concatenado" (enlaçado) pelas duas bobinas. Este fluxo pode ser calculado como sendo:

$$\phi_{\delta I}(t) = \oint b_{\delta I}(\theta_1, t) \cdot ds \quad (\text{C.3.2.3.2})$$

Como interessa o fluxo por pólo esta integral deverá ser executada numa superfície abrangida pelo passo polar.

Devido a inclinação o elemento de área " ds " depende da abcissa espacial " θ_1 ", ou seja,

$$ds = y \cdot \frac{\tau_{pl}}{\pi} \cdot d\theta_1 \quad (\text{C.3.2.3.3})$$

A coordenada " y " assume valores de acordo com a abcissa espacial " θ_1 ", conforme mostrado na **Figura C.3.2.3.1**.

O termo " τ_{pl} " é o passo polar em " m " dado por:

$$\tau_{pl} = \frac{\pi(D_1 - \delta)}{2p} \quad (\text{C.3.2.3.4})$$

A integral dada na equação (C.3.2.3.2) deverá ser resolvida para três regiões distintas conforme mostrado na **Figura C.3.2.3.1**.

Para a Região I, temos:

$$\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\sigma_1}{2}\right) \leq \theta_1 < \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sigma_1}{2}\right) \quad (\text{C.3.2.3.5})$$

a coordenada " y_1 " :

$$y_1 = \frac{L_{Fe1}}{\sigma_1} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sigma_1}{2} + \theta_1\right) \quad (\text{C.3.2.3.6})$$

Para a Região II, temos:

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sigma_1}{2}\right) \leq \theta_1 < \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sigma_1}{2}\right) \quad (\text{C.3.2.3.7})$$

a coordenada " y_2 " :

$$y_2 = L_{Fe1} \quad (\text{C.3.2.3.8})$$

Para a Região III, temos:

$$\left(\frac{\pi - \sigma_1}{2}\right) \leq \theta_1 \leq \left(\frac{\pi + \sigma_1}{2}\right) \quad (\text{C.3.2.3.9})$$

a coordenada "y₃" :

$$y_3 = \frac{L_{Fe1}}{\sigma_1} \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sigma}{2} + \theta_1\right) \quad (\text{C.3.2.3.10})$$

Portanto a integral (C.3.2.3.2), fica:

$$\begin{aligned} \Phi_{\delta 1}(t) = \frac{\tau_{p1}}{\pi} & \left[\int_{\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\sigma_1}{2}\right)}^{\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sigma_1}{2}\right)} b_{\delta}(\theta_1, t) y_1 d\theta_1 + \int_{\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sigma_1}{2}\right)}^{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sigma_1}{2}\right)} b_{\delta}(\theta_1, t) y_2 d\theta_1 + \right. \\ & \left. + \int_{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sigma_1}{2}\right)}^{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sigma_1}{2}\right)} b_{\delta}(\theta_1, t) y_3 d\theta_1 \right] \quad (\text{C.3.2.3.11}) \end{aligned}$$

Substituindo "b_{δ1}(θ, t)" dado por (C.3.1.10) em (C.3.2.3.11) efetuando a integral, após algumas transformações obtemos para o fluxo enlaçado pelas duas bobinas.

$$\phi_{\delta 1}(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{L_{Fe1} \cdot \tau_{p1} \cdot B_{1v1}}{v_1} \cdot \text{sen}\left(v_1 \frac{\pi}{2}\right) \cdot f_{iv1} \cdot e^{j[\mu(\omega_e t + \theta_e(0)) - v_1 \theta_{10}]} \quad (\text{C.3.2.3.12})$$

Na equação acima o termo "sen(v₁ π/2)" assume o valor "+1", "0" ou "-1" dependendo da ordem da harmônica. Para as harmônicas geradas pela equação (C.2.3.20) quando "M₁ = 6" faixas de zona, o valor "sen(v₁ π/2)" será "+1" ou "-1" para "M₁ = 3" faixas de zona o valor será "0" ou "-1".

Como para o cálculo da indutância nos interessa o módulo (valor absoluto) do fluxo iremos considerar "sen(v₁ π/2) = 1".

O termo "f_{iv1}" na equação acima é denominado "Fator de Inclinação", dado por:

$$f_{iv1} = \frac{\text{sen}\left(v_1 \frac{\sigma_1}{2}\right)}{v_1 \frac{\sigma_1}{2}} = \frac{\text{sen}\left(v_1 \frac{\pi p}{N_1} \cdot i\right)}{v_1 \frac{\pi p}{N_1} \cdot i} \quad (\text{C.3.2.3.13})$$

Definindo a área polar " $A_{\delta v1}$ " como sendo:

$$A_{\delta v1} = \frac{L_{Fe1} \cdot \tau_{p1}}{v_1} = L_{Fe1} \frac{\pi (D_1 - \delta)}{2p \cdot v_1} \quad (\text{C.3.2.3.14})$$

E substituindo " B_{lv1} " dado por (C.3.1.12), obtemos:

$$\phi_{\delta l}(t) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \phi_{\delta lv1} \cdot e^{j[\mu(\omega_e t + \theta_e(\theta)) - v_1 \theta_{10}]} \quad (\text{C.3.2.3.15})$$

Onde:

$$\phi_{\delta lv1} = \frac{M_1}{4} \cdot \frac{2\sqrt{2} \mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta v1}}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot ks} \cdot \frac{N_{cond1} \cdot f_{wlv1} \cdot f_{iv1}}{p \cdot v_1} \cdot I_1 \mu \quad (\text{C.3.2.3.16})$$

A equação (C.3.2.3.15) acima fornece o fluxo concatenado pelas bobinas do estator e do rotor quando inclinados. O fluxo de dispersão devido a inclinação corresponde à diferença entre o fluxo concatenado quando as bobinas não estão inclinadas " $f_{iv1} = 1$ " e quando estão inclinadas. Portanto a indutância de dispersão por fase devido a inclinação pode ser calculada como:

$$L_{dif lv1} = \left[\frac{M_1}{4} \cdot \frac{\mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta v1}}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot ks} \cdot \frac{(N_{cond1} \cdot f_{wlv1})^2}{p \cdot v_1} \right] (1 - f_{iv1}) \quad (\text{C.3.2.3.17})$$

Como iremos demonstrar no parágrafo seguinte (C.3.2.4) o termo entre colchetes na equação (C.3.2.3.17) representa a indutância de magnetização por fase " $L_{mf lv1}$ " da máquina para a harmônica de ordem " v_1 ", quando não inclinada, ou seja:

$$L_{mf lv1} = \frac{M_1}{4} \cdot \frac{\mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta v1}}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot ks} \cdot \frac{(N_{cond1} \cdot f_{wlv1})^2}{p \cdot v_1} \quad (\text{C.3.2.3.18})$$

Portanto:

$$L_{dif lv1} = L_{mf lv1} \cdot (1 - f_{iv1}) \quad (\text{C.3.2.3.19})$$

A inclinação das ranhuras afeta o acoplamento magnético entre o estator e rotor, gerando uma dispersão do fluxo que é igual para ambos. Baseado neste fato, podemos concluir que

as indutâncias de dispersão, devido a inclinação para o estator e o rotor, são iguais. Logo, a indutância de dispersão, devido a inclinação referida ao rotor fica:

$$L_{dif\ 2v1} = \frac{1}{K_z} \cdot L_{dif\ 1v1} = \left(\frac{N_{cond2} \cdot f_{w2v1}}{N_{cond1} \cdot f_{w1v1}} \right)^2 \frac{m_2}{m_1} \cdot L_{dif\ 1v1} \quad (C.3.2.3.20)$$

Onde o fator de redução K_z é dado por (C.3.2.1.24).

C.3.2.4 Indutância de Dispersão das Harmônicas de Ordem Superior

A indutância de dispersão das harmônicas de ordem superior " L_{dhos} " indica que parcela da tensão magnetizante total gerada no entreferro da máquina corresponde as harmônicas cujo número de par de pólos é diferente da fundamental, ou seja, harmônicas cujo " $v_1 \neq 1$ ".

Baseado no que foi dito acima, podemos dizer que uma parte da F.M.M. total gerada pelo enrolamento é gasto para criar e manter as harmônicas de ordem superior no entreferro da máquina. Se levarmos em conta o conceito de energia magnética no entreferro, a indutância de dispersão " L_{dhos} " está relacionada com aquela parcela de energia gasta para criar e manter as harmônicas cujo " $v_1 \neq 1$ ". Iremos deduzir primeiro a expressão para a indutância de dispersão " L_{dhos1} " para as harmônicas do estator.

A indutância de magnetização ou magnetizante de fase da máquina pode ser calculada como sendo:

$$L_{mf1} \cdot \frac{d}{dt}(i_{1\mu}(t)) = Nef \cdot \frac{d}{dt}(\phi_{\delta1}(t)) \quad (C.3.2.4.1)$$

Onde " Nef " representa o número efetivo de espiras por fase. Substituindo a corrente " $i_{1\mu}(t)$ " dado por (C.2.3.4) e o fluxo " $\phi_{\delta1}(t)$ " dado por (C.3.2.3.15) e admitindo que " θ_{10} " nesta equação seja nulo, temos:

$$L_{mf1} = (Nef) \cdot \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \frac{\phi_{\delta1v1}}{\sqrt{2} I_{1\mu}} \quad (C.3.2.4.2)$$

O número de espiras efetivas por fase é dada por " $\frac{1}{2} (N_{cond1} \cdot f_{w1v1})$ " e o fluxo " $\phi_{\delta1v1}$ " é dado por (C.3.2.3.16), obtemos para a indutância magnetizante:

$$L_{mf1} = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \frac{M_1}{4} \cdot \frac{\mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta1v1}}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot ks} \cdot \frac{(N_{cond1} \cdot f_{w1v1})^2}{p v_1} \cdot f_{iv1} \quad (C.3.2.4.3)$$

Quando a máquina não tem inclinação temos " $f_{1v1} = I$ " e neste caso a equação acima se torna igual a equação (C.3.2.3.18).

A equação (C.3.2.4.3) pode ser escrita como:

$$L_{mf1} = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} L_{mf1v1} \quad (\text{C.3.2.4.4})$$

Onde " L_{mf1v1} " representa a indutância magnetizante de fase do estator para a harmônica de ordem " v_1 ", ou seja:

$$L_{mf1v1} = \frac{M_1}{4} \cdot \frac{\mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta v1}}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot k_s} \cdot \frac{(N_{cond1} \cdot f_{w1v1})^2}{p \cdot v_1} \cdot f_{1v1} \quad (\text{C.3.2.4.5})$$

Pela equação (C.3.2.4.4) notamos que a indutância magnetizante total de fase " L_{mf1} " corresponde a um somatório de infinitas parcelas devido as harmônicas de campo do estator. Esta equação pode ser escrita, de uma forma mais adequada, como sendo:

$$L_{mf1} = L_{mf11} + \sum_{v_1=-\infty (v_1 \neq 1)}^{\infty} L_{mf1v1} \quad (\text{C.3.2.4.6})$$

Onde " L_{mf11} " representa a indutância magnetizante da onda fundamental " $v_1 = 1$ ". Definindo a indutância de dispersão por fase devido as harmônicas de ordem superior " L_{dhsf1} " como sendo:

$$L_{dhsf1} = \sum_{v_1=-\infty (v_1 \neq 1)}^{\infty} L_{mf1v1} \quad (\text{C.3.2.4.7})$$

Podemos escrever (C.3.2.4.6) como:

$$L_{mf1} = L_{mf11} + L_{dhsf1} \quad (\text{C.3.2.4.8})$$

A indutância de dispersão " L_{dhsf1} " pode ser calculado a partir do coeficiente da indutância de dispersão das harmônicas de ordem superior " k_{dhs1} " adequadamente definido como:

$$k_{dhs1} = \frac{L_{dhsf1}}{L_{mf11}} \quad (\text{C.3.2.4.9})$$

Levando (C.3.2.4.9) em (C.3.2.4.8) obtemos:

$$L_{mf1} = L_{mf11} (1 + k_{dhos1}) \quad (\text{C.3.2.4.10})$$

Conseqüentemente temos:

$$L_{dhosf1} = k_{dhos1} \cdot L_{mf11} \quad (\text{C.3.2.4.11})$$

Substituindo (C.3.2.4.5) e (C.3.2.4.7) em (C.3.2.4.9) e lembrando que $A_{\delta v1} = A_{\delta} / v_1$ obtemos para o coeficiente da indutância de dispersão.

$$k_{dhos1} = \sum_{v_1=-\infty (v_1 \neq 1)}^{\infty} \left(\frac{1}{v_1} \cdot \frac{f_{w1v1}}{f_{w11}} \right)^2 \cdot \left(\frac{f_{iv1}}{f_{i1}} \right) \quad (\text{C.3.2.4.12})$$

Devido a periodicidade do fator de enrolamento " f_{w1v1} " a série dada por (C.3.2.4.12) não apresenta uma convergência bem definida.

Para chegarmos a expressão da indutância de dispersão das harmônicas de ordem superior para o enrolamento do rotor devemos basicamente seguir o mesmo caminho que fizemos para o estator.

Porém, devemos considerar que cada harmônica " v_1 " do estator induz uma corrente " i_{2v1} " que por sua vez é capaz de gerar uma onda de força magnetomotriz " $fmm_{f2}(\theta_1, t)$ " de infinitos termos cujas harmônicas são dadas por:

$$v_2 = v_1 + M_2 \frac{g_2}{c_2} \quad (\text{C.3.2.4.13})$$

Onde " g_2 " assume valores desde " $-\infty$ " até " $+\infty$ ", ou seja:

$$g_2 = 0 \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4... \quad (\text{C.3.2.4.14})$$

O termo " c_2 " tem o mesmo significado de " c_1 " mostrado no parágrafo (C.2.3).

O termo " M_2 " representa o número de faixas de zona por par de polos do enrolamento do rotor.

A corrente " $i_{2v1}(t)$ " induzida na fase do rotor pela harmônica de ordem " v_1 " é dada por:

$$i_{2v1}(t) = \sqrt{2} I_{2v1} \cdot e^{j[\omega_{2v1}t + \theta_{ev1}(o)]} \quad (\text{C.3.2.4.15})$$

Onde a frequência " ω_{2v_1} " da corrente induzida depende do escorregamento do rotor em relação ao campo do estator que gira com velocidade angular " ω_{1v_1} " dado por (C.2.3.26), considerando o número de pares de pólos da harmônica temos:

$$\omega_{1v_1} = \frac{\mu}{v_1} \left(\frac{\omega_e}{p} \right) \quad (\text{C.3.2.4.16})$$

O escorregamento (s_{v_1}) para a harmônica de ordem " v_1 " pode ser definido como:

$$s_{v_1} = \frac{\omega_{1v_1} - \omega_m}{\omega_{1v_1}} = 1 - \frac{v_1}{\mu} \cdot \frac{p}{\omega_e} \cdot \omega_m \quad (\text{C.3.2.4.17})$$

Onde " ω_m " é a velocidade angular mecânica do rotor dado por:

$$\omega_m = (1 - s_1) \left(\frac{\omega_e}{p} \right) \quad (\text{C.3.2.4.18})$$

Portanto a frequência angular " ω_{2v_1} " da corrente induzida, pode ser obtida a partir de:

$$\omega_{2v_1} = \omega_{1v_1} - v_1 \cdot \omega_m \quad (\text{C.3.2.4.19})$$

A velocidade " ω_m " foi multiplicada por " v_1 " para transformar de radianos mecânicos por segundo a radianos elétricos por segundo.

Substituindo " ω_m " dado por (C.3.2.4.18) em (C.3.2.4.19) a frequência da corrente induzida fica:

$$\omega_{2v_1} = \omega_{1v_1} - v_1 \cdot \frac{\omega_e}{p} (1 - s_1) \quad (\text{C.3.2.4.20})$$

Como a corrente " $i_{2v_1}(t)$ " alimenta a fase do enrolamento rotórico ela gera uma onda de FMM que pode ser obtida de modo semelhante ao do parágrafo (C.2.3), ou seja, para a harmônica de ordem " v_1 " referida ao sistema " θ_2 " podemos escrever.

$$fmm_{f_{2v_2}}(\theta_2, t) = \sum_{v_2=-\infty}^{\infty} FMM_{f_{2v_2}} \cdot e^{j[(\omega_{2v_1}t + \theta_e(\theta)) - v_2(\theta_2 - \theta_{20})]} \quad (\text{C.3.2.4.21})$$

Onde o coeficiente " $FMM_{f_{2v_2}}$ " é análogo ao dado pela equação (C.2.3.23), ou seja:

$$FMM_{f_{2v_2}} = \frac{M_2}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{N_{cond2} \cdot f_{w2v_2}}{p \cdot v_2} \cdot I_{2v_1} \quad (\text{C.3.2.4.22})$$

Em relação ao sistema de referência " θ_1 " a coordenada " θ_2 " fica:

$$\theta_2 = \theta_1 - \omega_m \cdot t = \theta_1 - \frac{\omega_e}{p} (1-s_1) t \quad (\text{C.3.2.4.23})$$

Substituindo (C.3.2.4.20) e (C.3.2.4.23) na equação da onda dada por (C.3.2.4.21) obtemos:

$$fmm_{f2v_2}(\theta_1, t) = \sum_{v_2=-\infty}^{\infty} FMM_{f2v_2} \cdot e^{j \left[\left((v_2 - v_1) \frac{\omega_e}{p} (1-s_1) + \omega_{1v_1} \right) \cdot t + \theta_e(o) - v_2(\theta_1 - \theta_{20}) \right]} \quad (\text{C.3.2.4.24})$$

A equação acima (C.3.2.4.24) representa a FMM por fase do enrolamento rotórico no sistema de referência " θ_1 ", gerado por todos os harmônicos de ordem " v_2 " dado por (C.3.2.4.13) cuja origem (fonte) é a corrente induzida " $i_{2v_1}(t)$ " pela harmônica do campo do estator " v_1 ".

Para chegarmos a equação da FMM total por fase do enrolamento rotórico devemos considerar o efeito de todos os harmônicos de campo " v_1 ". Isto pode ser feito somando-se todas as " $fmm_{f2v_2}(\theta_1, t)$ " geradas para cada " v_1 ", ou seja:

$$fmm_{f_2}(\theta_1, t) = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \sum_{v_2=-\infty}^{\infty} FMM_{f2v_2} \cdot e^{j \left[\left((v_2 - v_1) \frac{\omega_e}{p} (1-s_1) + \omega_{1v_1} \right) \cdot t + \theta_e(o) - v_2(\theta_1 - \theta_{20}) \right]} \quad (\text{C.3.2.4.25})$$

Substituindo " ω_{1v_1} " dado por (C.2.3.26) e " $v_2 - v_1$ " obtida da equação (C.3.2.4.13) obtemos finalmente a equação FMM, total por fase do rotor.

$$fmm_{f_2}(\theta_1, t) = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \sum_{v_2=-\infty}^{\infty} FMM_{f2v_2} \cdot e^{j[(\omega_{2v_2} \cdot t + \theta_e(o)) - v_2(\theta_1 - \theta_{20})]} \quad (\text{C.3.2.4.25})$$

Onde " ω_{2v_2} " é a frequência angular da FMM total dada por:

$$\omega_{2v_2} = \omega_e \left[\frac{\mu}{v_1} + M_2 \frac{g_2}{c_2} \cdot \left(\frac{1-s_1}{p} \right) \right] \quad (\text{C.3.2.4.26})$$

Fazendo as mesmas considerações feitas no parágrafo (C.3.1) a onda de indução máxima por pólo resultante no entreferro devido ao enrolamento rotórico pode ser escrito:

$$b_{\delta 2}(\theta_1, t) = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \sum_{v_2=-\infty}^{\infty} B_{2v_2} \cdot e^{j[(\omega_{2v_2} \cdot t + \theta_e(o)) - v_2(\theta_1 - \theta_{20})]} \quad (\text{C.3.2.4.27})$$

Onde:

$$B_{2v_2} = \frac{M_2}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\mu_0}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot ks} \cdot \frac{N_{cond2} \cdot f_{w2v_2}}{p \cdot v_2} I_{2v_1} \quad (\text{C.3.2.4.28})$$

Analogamente à equação (C.3.2.3.16) para o fluxo máximo por pólo resultante no entreferro devido ao enrolamento do rotor temos:

$$\phi_{\delta 2}(\theta_1, t) = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \sum_{v_2=-\infty}^{\infty} \phi_{\delta 2v_2} \cdot e^{j[(\omega_{2v_2} \cdot t + \theta_e(o)) - v_2 \theta_{20}]} \quad (\text{C.3.2.4.29})$$

Onde:

$$\phi_{\delta 2v_2} = \frac{M_2}{4} \cdot \frac{2\sqrt{2}\mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta v_2}}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot ks} \cdot \frac{N_{cond2} \cdot f_{w2v_2} \cdot f_{iv2}}{p \cdot v_2} \cdot I_{2v_1} \quad (\text{C.3.2.4.30})$$

Portanto analogamente à equação (C.3.2.4.3) obtemos a indutância magnetizante por fase do enrolamento do rotor:

$$L_{mf2} = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \sum_{v_2=-\infty}^{\infty} \frac{M_2}{4} \cdot \frac{\mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta v_2}}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot ks} \cdot \frac{(N_{cond2} \cdot f_{w2v_2})^2}{p \cdot v_2} \cdot f_{iv2} \quad (\text{C.3.2.4.31})$$

Definindo:

$$L_{mf2v_2} = \frac{M_2}{4} \cdot \frac{\mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta v_2}}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot ks} \cdot \frac{(N_{cond2} \cdot f_{w2v_2})^2}{p \cdot v_2} \cdot f_{iv2} \quad (\text{C.3.2.4.32})$$

Temos:

$$L_{mf2} = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \sum_{v_2=-\infty}^{\infty} L_{mf2v_2} \quad (\text{C.3.2.4.33})$$

Notamos na equação (C.3.2.4.33) que para cada harmônica de ordem " v_1 " temos infinitos termos " L_{mf2v2} ". Podemos rescrever esta equação como:

$$L_{mf2} = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} L_{mf2v2=v1} + \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \sum_{v_2=-\infty(v_2 \neq v_1)}^{\infty} L_{mf2v2} \quad (\text{C.3.2.4.34})$$

O primeiro termo do segundo membro representa a indutância magnetizante do rotor, ou seja:

$$L_{mf22} = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} L_{mf2v2=v1} \quad (\text{C.3.2.4.35})$$

O segundo termo do segundo membro representa a indutância de dispersão dos harmônicos de ordem superior do rotor, ou seja:

$$L_{dhsf2} = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \sum_{v_2=-\infty(v_2 \neq v_1)}^{\infty} L_{mf2v2} \quad (\text{C.3.2.4.36})$$

Portanto a equação (C.3.2.4.34) fica:

$$L_{mf2} = L_{mf22} + L_{dhsf2} \quad (\text{C.3.2.4.37})$$

Definindo um coeficiente da indutância de dispersão dos harmônicos de ordem superior do rotor como:

$$k_{dhs2v1} = \frac{1}{L_{mf2v2=v1}} \cdot \sum_{v_2=-\infty(v_2 \neq v_1)}^{\infty} L_{mf2v2} \quad (\text{C.3.2.4.38})$$

A indutância " L_{dhsf2} " pode se escrita:

$$L_{dhsf2} = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} k_{dhs2v1} \times L_{mf2v2=v1} \quad (\text{C.3.2.4.39})$$

Substituindo (C.3.2.4.39) e (C.3.2.4.35) em (C.3.2.4.37) e reunindo sob um mesmo somatório a indutância magnetizante total do rotor pode ser escrita:

$$L_{mf2} = \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} L_{mf2v_2=v_1} (1 + k_{dhos2v_1}) \quad (C.3.2.4.40)$$

Fazendo as mesmas considerações feitas à equação (C.3.2.4.12) o coeficiente da indutância de dispersão das harmônicas superiores do rotor dado por (C.3.2.4.38) pode ser calculado por:

$$k_{dhos2v_1} = \sum_{v_2=-\infty (v_2 \neq v_1)}^{\infty} \left(\frac{1}{v_2} \cdot \frac{f_{w2v_2}}{f_{w2v_2=v_1}} \right)^2 \cdot \left(\frac{f_{iv_2}}{f_{iv_2=v_1}} \right) \quad (C.3.2.4.41)$$

Devido a periodicidade do fator " f_{w2v_2} " a série acima não apresenta uma conveniência bem definida.

C.3.2.5 Indutância de Dispersão das Cabeças de Bobinas

A geometria da cabeça de bobina do estator junto com as várias configurações geométricas dos anéis de curto circuito do rotor de gaiola ou das cabeças de bobina de um rotor bobinado fornece uma distribuição de fluxo tridimensional complicada de se resolver analiticamente. Contudo o princípio da superposição permite que o campo total seja resolvido em componentes, cada uma das quais pode ser claramente visualizada e calculada com uma boa aproximação. Deste forma é possível levar em consideração a influência da geometria das cabeças de bobinas na indutância de dispersão na fase de projeto da máquina. A **Figura C.3.2.5.1** mostra a geometria genérica das cabeças de bobinas.

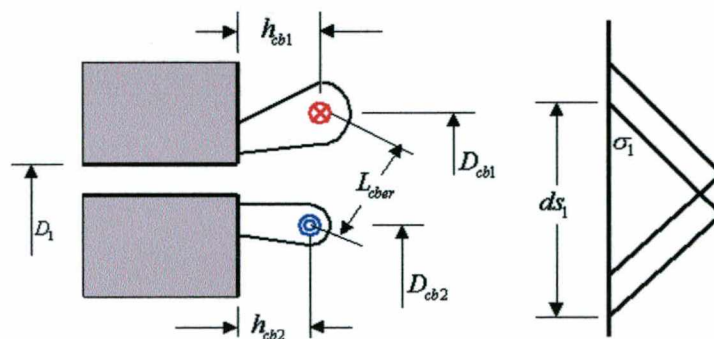


Figura C.3.2.5.1 - Configuração Geométrica das Cabeças de Bobinas do Estator e do Rotor

No modelo adotado considera-se as linhas de fluxos de dispersão fluindo em planos radiais na extremidade do pacote de chapas, considerando apenas o caminho no ar, e desprezando-se o caminho na face axial do pacote de chapas. Esta suposição é em parte justificada pelo efeito do amortecimento das correntes parasitas no plano das lamina (chapas), as quais se opõe a qualquer fluxo entrando no pacote na direção axial. No rotor onde a corrente é aproximadamente contínua, ou de baixa frequência, o fluxo de dispersão da cabeça da bobina pode entrar numa direção axial do núcleo sem oposição.

Baseado no modelo exposto acima, de acordo com "INDUCTION MACHINES" de PHILIP L. ALGER a indutância de dispersão das cabeças de bobinas por fase pode ser calculada por duas parcelas.

A primeira leva em conta a dispersão produzida pela componente da corrente na direção axial, dada por:

$$L_{dcbaf1v1} = \frac{M_1}{4} \cdot \frac{5\mu_o}{4 \cdot \pi^2} \cdot \frac{(N_{cond1} f_{w1v1})^2}{p^2 \cdot v_1^2} \cdot k_{pcbaf1} \quad (C.3.2.5.1)$$

Onde " k_{pcbaf1} " representa o coeficiente de permeância da cabeça de bobina para a dispersão axial, dado por:

$$k_{pcbaf1} = Dcb_1 \cdot \text{tg } \sigma_1 \left[\frac{\left(\frac{d_{s1} - l}{d_{p1} - l} \right) \pi - \text{sen} \left(\frac{d_{s1} - l}{d_{p1} - l} \right) \pi}{\pi} \right] \cdot \left[1 - \left(\frac{0.8 Dcb_2}{Dcb_1} \right)^p \right] \quad (C.3.2.5.2)$$

Onde " p " é número de pares de pólos.

A Segunda parcela leva em conta a dispersão produzida pela componente da corrente na direção radial denominada componente periférica. Esta componente pode ser calculada como:

$$L_{dcbpf1v1} = \frac{M_1}{4} \cdot \frac{9.2\mu_o}{8 \cdot \pi^2} \cdot \frac{(N_{cond1} f_{w1v1})^2}{p^2 \cdot v_1^2} \cdot k_{pcbpf1} \quad (C.3.2.5.3)$$

Onde " k_{pcbpf1} " representa o coeficiente de permeância da cabeça de bobina para a dispersão periférica, dado por:

$$k_{pcbpf1} = Dcb_1 \cdot \log_{10} \left(\frac{1.40 Dcb_1}{hN_1} \right) - D_1 \log_{10} \left(\frac{0.54 D_1}{L_{cber}} \right) \quad (C.3.2.5.4)$$

A distância " L_{cber} " representa a distância entre os centros das extremidades das cabeças de bobinas do estator e do rotor, é dado por:

$$L_{cber} = \sqrt{\frac{l}{4}(Dcb_1 - Dcb_2)^2 + (hcb_1 - hcb_2)^2} \quad (C.3.2.5.5)$$

O significado dos termos geométricos das equações acima estão mostrados na **Figura C.3.2.5.1**.

Portanto a indutância de dispersão total das cabeças de bobina do estator por fase corresponde a soma das duas parcelas, ou seja:

$$L_{dcbf1v1} = L_{dcbaf1v1} + L_{dcbpf1v1} \quad (C.3.2.5.6)$$

A indutância de dispersão das cabeças de bobinas do rotor podem ser calculadas de modo semelhante. Contudo é suficiente assumir que a indutância do estator e do rotor sejam iguais.

A importância das equações expostas anteriormente para o cálculo das indutâncias de dispersão de cabeça de bobina, está no fato delas levarem em conta a geometria das cabeças de bobinas. Com isto, o projetista pode avaliar o seu efeito de desempenho da máquina já na fase de projeto.

Para melhorar a acuracidade do cálculo da indutância de dispersão das cabeças de bobinas é necessário ajustar coeficientes empíricos baseados em ensaios para as equações (C.3.2.5.1) e (C.3.2.5.3).

A indutância de dispersão total por fase do enrolamento do estator e dado por:

$$L_{df1v1} = L_{dRf1} + L_{dzf1} + L_{dif1v1} + L_{dhosf1} + L_{dcbf1v1} \quad (C.3.2.5.7)$$

Onde:

L_{dRf1} = Indutância de dispersão das ranhuras do estator dada pela equação (C.3.2.1.25)

L_{dzf1} = Indutância de dispersão Zig-Zag do estator dada pela equação (C.3.2.2.11)

L_{dif1v1} = Indutância de dispersão devido a inclinação dada pela equação (C.3.2.3.17)

L_{dhosf1} = Indutância de dispersão devido as harmônicas de ordem superior dada pela equação (C.3.2.4.11)

$L_{dcbf1v1}$ = Indutância de dispersão das cabeças de bobinas do estator dada pela equação (C.3.2.5.6)

A indutância de dispersão total por fase do enrolamento do rotor é dado por:

$$L_{df\ 2\nu 1} = L_{dRf\ 2} + L_{dZf\ 2} + L_{dif\ 2\nu 1} + L_{dhosf\ 2} + L_{dcbf\ 2\nu 1} \quad (\text{C.3.2.5.8})$$

Onde:

$$L_{dRf\ 2} = \text{Indutância de dispersão das ranhuras do rotor dada pela equação (C.3.2.1.26)}$$

$$L_{dZf\ 2} = \text{Indutância de dispersão Zig-Zag do rotor dada pela equação (C.3.2.2.12)}$$

$$L_{dif\ 2\nu 1} = \text{Indutância de dispersão devido a inclinação dada pela equação (C.3.2.3.20)}$$

$$L_{dhosf\ 2} = \text{Indutância de dispersão devido as harmônicas de ordem superior dada pela equação (C.3.2.4.39)}$$

$$L_{dcbf\ 2\nu 1} = \text{Indutância de dispersão das cabeças de bobinas do rotor dada pela equação (C.3.2.5.6)}$$

C.3.3 Indutância Própria do Enrolamento

A indutância própria ou auto-indutância de um enrolamento é a indutância proveniente da variação do fluxo produzido pela corrente que circula no próprio enrolamento. O fluxo no entreferro gerado pelo enrolamento quando nele circula uma corrente " $i_{a1}\mu(t)$ " é dada por:

$$\phi_{\delta 1}(t) = \oint b_{\delta 1}(\theta_1, t) ds \quad (\text{C.3.3.1})$$

Como interessa o fluxo por pólo esta integral deverá ser resolvida numa superfície aberta abrangida pelo passo polar. O elemento de área " ds " é dado por:

$$ds = L_{Fe1} \cdot \frac{\tau_{p1}}{\pi} d\theta_1 \quad (\text{C.3.3.2})$$

Onde " τ_{p1} " é o passo polar dado por (C.3.2.3.4).

Substituindo " $b_{\delta 1}(\theta_1, t)$ " dado por (C.3.1.10), " ds " dado por (C.3.3.2) em (C.3.3.1) obtemos:

$$\phi_{\delta 1}(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} L_{Fe1} \cdot \frac{\tau_{p1}}{\pi} \cdot \sum_{\nu 1=-\infty}^{\infty} B_{1\nu 1} \cdot e^{j[\mu(\omega_e t + \theta_e(\theta)) - \nu 1(\theta_1 - \theta_0)]} \cdot d\theta_1 \quad (\text{C.3.3.3})$$

Resolvendo a integral dada por (C.3.3.3), temos:

$$\phi_{\delta 1}(t) \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \Phi_{\delta 1 v_1} \cdot \text{sen} \left(v_1 \frac{\pi}{2} \right) \cdot e^{j[\mu(\omega_e t - \theta_e(0)) - v_1 \theta_0]} \quad (\text{C.3.3.4})$$

As considerações com relação a " $\text{sen} \left(v_1 \frac{\pi}{2} \right)$ " são as mesmas feitas no parágrafo (C.3.2.3).

A amplitude " $\phi_{\delta 1 v_1}$ " do fluxo neste caso é dada por:

$$\phi_{\delta 1 v_1} = \frac{M_1}{4} \frac{2\sqrt{2} \mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta v_1}}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot k_s} \cdot \frac{N_{cond1} f_{w1v1}}{p \cdot v_1} I_{a1\mu} \quad (\text{C.3.3.5})$$

Neste caso a inclinação não foi levada em consideração porque estamos interessados no fluxo próprio do enrolamento.

Para a auto tensão induzida para uma fase do estator podemos escrever.

$$(L_{pf1v1}) \cdot \frac{d}{dt} (i_{a1\mu}(t)) = \left(\frac{N_{cond1} f_{w1v1}}{2} \right) \frac{d}{dt} (\phi_{\delta 1}(t)) \quad (\text{C.3.3.6})$$

Portanto para a indutância própria ou auto-indutância para uma fase do estator, resulta:

$$L_{pf1v1} = \frac{M_1}{4} \cdot \frac{\mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta v_1}}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot k_s} \cdot \frac{(N_{cond1} \cdot f_{w1v1})^2}{p \cdot v_1} \quad (\text{C.3.3.7})$$

A equação (C.3.3.7) acima representa a indutância magnetizante ou de magnetização por fase do enrolamento do estator, ou seja, a indutância própria do enrolamento é igual a indutância magnetizante " L_{mf1v1} " dada pela equação (C.3.2.4.5).

Como o enrolamento é simétrico e igualmente distribuído, a indutância própria é a mesma para as três fases do estator. Considerando a indutância de dispersão por fase, para o estator a indutância própria total para cada fase pode ser escrita:

Para a FASE " a_1 "

$$L_{pa1v1} = L_{df1v1} + L_{mf1v1} \quad (\text{C.3.3.8})$$

Para a FASE " b_1 "

$$L_{pb1v1} = L_{df1v1} + L_{mf1v1} \quad (\text{C.3.3.9})$$

Para a FASE "c₁"

$$L_{pc1v1} = L_{df1v1} + L_{mf1v1} \quad (\text{C.3.3.10})$$

Para o enrolamento do rotor a indutância própria por fase pode ser obtida analogamente, ou seja:

$$L_{pf2v2} = \frac{M_2}{4} \cdot \frac{\mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta v2}}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot ks} \cdot \frac{(N_{cond2} \cdot f_{w2v2})^2}{p \cdot v_2} \quad (\text{C.3.3.11})$$

A equação (C.3.3.11) acima representa a indutância magnetizante por fase do enrolamento do rotor "L_{mf2v2}". Para "v₂ = v₁" esta indutância é igual ao do estator, porém refletida ao rotor, dado pela equação (C.3.2.4.32).

Considerando também que o enrolamento é simétrico e igualmente distribuído a indutância própria é a mesma para as três fases do rotor. Levando em conta a dispersão por fase, a indutância própria total para cada fase pode se escrita:

Para a FASE "a₂"

$$L_{pa2v2} = L_{df2v2} + L_{mf2v2} \quad (\text{C.3.3.12})$$

Para a FASE "b₂"

$$L_{pb2v2} = L_{df2v2} + L_{mf2v2} \quad (\text{C.3.3.13})$$

Para a FASE "c₂"

$$L_{pc2v2} = L_{df2v2} + L_{mf2v2} \quad (\text{C.3.3.14})$$

C.3.4 Indutância Mútua entre Duas Fases do Enrolamento

A indutância mútua entre duas fases "a₁" e "b₁" de um enrolamento é a indutância proveniente da variação do fluxo gerado pela corrente da fase "b₁", através da fase "a₁".

A corrente que circula na fase "b₁" gera um fluxo "φ_{δ1v1}(t)" dado pela equação (C.3.3.4) cuja amplitude máxima é dada por (C.3.3.5). Substituindo "I_{a1μ}" nesta equação por "I_{b1μ}" obtemos:

$$\phi_{\delta1v1} = \frac{M_1}{4} \cdot \frac{2\sqrt{2} \mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta v1}}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot ks} \cdot \frac{(N_{cond1} \cdot f_{w1v1})^2}{p \cdot v_1} \cdot I_{b1\mu} \quad (\text{C.3.4.1})$$

O eixo magnético da fase "b₁" está defasado no espaço de $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ rad da fase "a₁" ver Figura C.3.4.1.

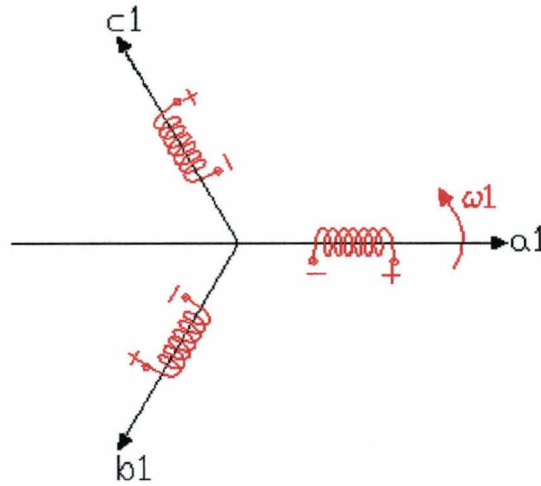


Figura C.3.4.1 - Disposição Espacial das Fases

O fluxo gerado pela fase "b₁" que enlaça a fase "a₁" é dado pela sua projeção na direção de "a₁" ou o fluxo concatenado " ϕ_{ab1} " é dado por:

$$\phi_{ab1} = \phi_{\delta 1v1} \cdot \text{Cos}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{C.3.4.2})$$

Substituindo (C.3.4.1) em (C.3.4.2) resulta:

$$\phi_{ab1} = -\frac{1}{2} \left[\frac{M_1}{4} \cdot \frac{2\sqrt{2} \mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta v1}}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot ks} \cdot \frac{(N_{cond1} \cdot f_{w1v1})^2}{p \cdot v_1} \right] \cdot I_{b1\mu} \quad (\text{C.3.4.3})$$

Portanto a indutância mutua " L_{ab1v1} " entre as duas fases fica:

$$L_{ab1v1} = -\frac{1}{2} \left[\frac{M_1}{4} \cdot \frac{\mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta v1}}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot ks} \cdot \frac{(N_{cond1} \cdot f_{w1v1})^2}{p \cdot v_1} \right] \quad (\text{C.3.4.4})$$

O termo entre colchetes na equação acima representa a indutância magnetizante por fase " L_{mf1v1} " do enrolamento dado pela equação (C.3.2.3.18). Considerando que o enrolamento é simétrico e igualmente distribuído, temos para as três fases:

Para as FASES " a_1 " e " b_1 " (C.3.4.5)

$$L_{a1b1v1} = -\frac{1}{2} L_{mf1v1}$$

Para as FASES " a_1 " e " c_1 "

$$L_{a1c1v1} = -\frac{1}{2} L_{mf1v1} \quad \text{(C.3.4.6)}$$

Para as FASES " b_1 " e " c_1 " (C.3.4.7)

$$L_{b1c1v1} = -\frac{1}{2} L_{mf1v1}$$

Para o enrolamento do rotor as indutâncias mútuas entre as fases são obtidas de modo análogo, ou seja:

Para as FASES " a_2 " e " b_2 "

$$L_{a2b2v2} = -\frac{1}{2} L_{mf2v2} \quad \text{(C.3.4.8)}$$

Para as FASES " a_2 " e " c_2 "

$$L_{a2c2v2} = -\frac{1}{2} L_{mf2v2} \quad \text{(C.3.4.9)}$$

Para as FASES " b_2 " e " c_2 "

$$L_{b2c2v2} = -\frac{1}{2} L_{mf2v2} \quad \text{(C.3.4.10)}$$

A indutância " L_{mf2v2} " é dada por (C.3.2.4.32).

C.3.5 Indutância Mútua entre Fases dos Enrolamentos do Estator e do Rotor

As equações das indutâncias mútuas entre as fases do estator e do rotor são facilmente obtidas se admitirmos os enrolamentos simétricos e uniformemente distribuídos. Admitimos que as três fases do estator estão fixas no sistema de referência " θ_1 ", e as três fases do rotor estão fixas no sistema de referência " θ_2 " e que este está girando com uma velocidade angular " ω_2 " em relação a " θ_1 ". A Figura C.3.5.1 ilustra o nosso sistema.

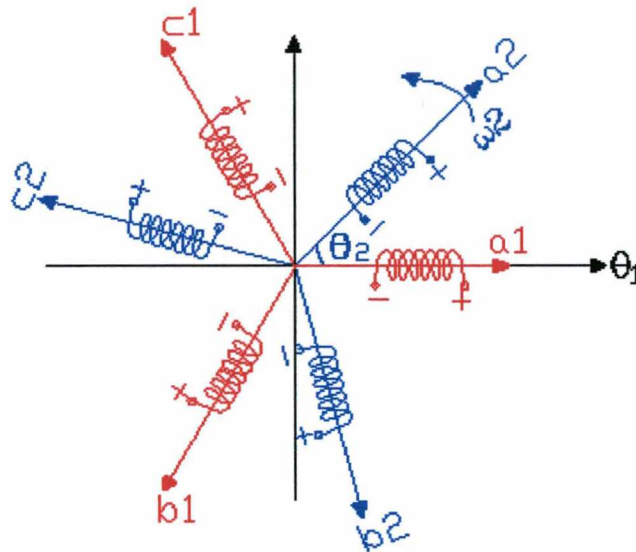


Figura C.3.5.1 - Sistema de Referência com as Fases do Enrolamento

Como no enrolamento trifásico as três fases, tanto do estator quanto do rotor, estão espacialmente defasadas de " $\left(\frac{2\pi}{3}\right) rad$ ", o fluxo gerado pela fase " a_1 " do estator e que enlaça a fase " a_2 " do rotor depende da posição do rotor " θ_2 " em relação ao estator " θ_1 ". No caso dos enrolamentos mostrados na Figura C.3.5.1, o fluxo mútuo entre as fases " a_1 " e " a_2 " é " $\phi_{a_1a_2}(t)$ " e pode ser escrito:

$$\Phi_{a_1a_2}(t) = \phi_{\delta_1}(t) \cos(\theta_2) \quad (C.3.5.1)$$

Onde " $\phi_{\delta_1}(t)$ " é o fluxo gerado pela fase " a_1 " dado pela equação (C.3.3.4), cuja amplitude " ϕ_{δ_1} " é dado por (C.3.3.5).

Portanto para estas duas fases podemos escrever:

$$L_{a1a2v1} \cdot \frac{d}{dt}(i_{a1\mu}(t)) = \left(\frac{N_{cond2} f_{w2v1}}{2} \right) \left(\frac{d}{dt}(\phi_{\delta}(t)) \cdot \text{Cos}\theta_2 \right) \quad (\text{C.3.5.2})$$

Efetuada as derivadas e isolando a indutância mútua " L_{a1a2v1} " obtemos:

$$L_{a1a2v1} = \left[\frac{M_1}{4} \cdot \frac{\mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta v1}}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot ks} \cdot \frac{(N_{cond1} f_{w1v1})(N_{cond2} f_{w2v1})}{p \cdot v_1} \right] \cdot \text{Cos}\theta_2 \quad (\text{C.3.5.3})$$

Denominando o termo entre colchetes de indutância mútua máxima entre as fases do estator e do rotor " L_{M12v1} " temos:

$$L_{M12v1} = \frac{M_1}{4} \cdot \frac{\mu_0}{\pi^2} \cdot \frac{A_{\delta v1}}{\delta \cdot k_{c1} \cdot k_{c2} \cdot ks} \cdot \frac{(N_{cond1} f_{w1v1}) \cdot (N_{cond2} f_{w2v1})}{p \cdot v_1} \quad (\text{C.3.5.4})$$

Portanto podemos escrever " L_{a1a2v1} " como sendo:

$$L_{a1a2v1} = L_{M12v1} \cdot \text{Cos}\theta_2 \quad (\text{C.3.5.5})$$

A indutância mútua entre as fases " a_1 " e " b_2 ", pode ser escrita levando-se em conta a defasagem espacial " $-\frac{2\pi}{3}$ ", ou seja:

$$L_{a1b2v1} = L_{M12v1} \cdot \text{Cos}\left(\theta_2 - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{C.3.5.6})$$

A indutância mútua entre as fases " a_1 " e " c_2 " pode ser escrita como:

$$L_{a1c2v1} = L_{M12v1} \cdot \text{Cos}\left(\theta_2 + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{C.3.5.7})$$

Para as fases " b_1 " do estator e demais do rotor temos:

$$L_{b1b2v1} = L_{M12v1} \cdot \text{Cos}\theta_2 \quad (\text{C.3.5.8})$$

$$L_{b1c2v1} = L_{M12v1} \cdot \text{Cos}\left(\theta_2 - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{C.3.5.9})$$

$$L_{b1a2v1} = L_{M12v1} \cdot \cos\left(\theta_2 + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{C.3.5.10})$$

Para as fases "c₁" do estator e demais do rotor temos:

$$L_{c1c2v1} = L_{M12v1} \cdot \cos\theta_2 \quad (\text{C.3.5.11})$$

$$L_{c1a2v1} = L_{M12v1} \cdot \cos\left(\theta_2 - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{C.3.5.12})$$

$$L_{c1b2v1} = L_{M12v1} \cdot \cos\left(\theta_2 + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{C.3.5.13})$$

Nota-se claramente que as indutâncias mútuas entre as fases do estator e do rotor dependem da posição relativa do rotor em relação ao estator, isto é, dependem do ângulo " θ_2 ".

C.4 RESISTÊNCIAS DA MÁQUINA

C.4.1 Introdução

Para se fazer uma boa análise da máquina, além das indutâncias, é muito importante determinar as resistências das fases do estator e do rotor.

Como a resistência é influenciada pela temperatura devemos considerar a temperatura de operação da máquina. De acordo com a norma internacional de Cobre Recozido IACS (The International Annealed Copper Standart) é aceito internacionalmente a condutividade do Cobre Eletrolítico como padrão, isto é, 100% de condutividade.

Este padrão é expresso em termos de resistividade de massa como sendo $0,15328 \Omega\text{g}/\text{m}^2$ a resistência de um fio circular uniforme de 1,0 metro de comprimento e massa de 1,0 grama, a temperatura de 20°C.

Chamando de " ρ_m " a resistividade de massa de um condutor temos por definição:

$$\rho_m = \frac{R \cdot m}{L^2} \quad (\text{C.4.1.1})$$

Onde:

R = Resistência do Condutor em (Ω)

m = Massa do Condutor em (Kg)

L = Comprimento do Condutor em (m)

A resistividade de massa pode ser expressa em termos de resistividade volumétrica " ρ_v ".

Baseado na Segunda lei de OHM podemos escrever:

$$\rho_v = \frac{RA}{L} \quad (\text{C.4.1.2})$$

Onde:

$$A = \text{Seção transversal do condutor em } (m^2)$$

Lembrando que " $A = Volume / L$ " a relação entre resistividade de massa " ρ_m " e resistividade volumétrica " ρ_v " é dada por:

$$\rho_v = \frac{\rho_m}{\gamma} \quad (\text{C.4.1.3})$$

Onde " γ " é a massa específica do condutor dado em (Kg/m^3) .

A TABELA (C.4.1.1) abaixo mostra a resistividade de alguns condutores.

TABELA (C.4.1.1) – RESISTIVIDADE ELÉTRICA A 20°C

TIPO DE CONDUTOR	MASSA ESPECÍFICA γ [Kg/m ³]	RESISTIVIDADE DE MASSA ρ_m [Ω Kg/m ³]	RESISTIVIDADE VOLUMÉTRICA ρ_v [Ω m]	CONDUTIVIDADE IACS [%]
COBRE ELETROLÍTICO	$8,9 \times 10^3$	$1,5328 \times 10^{-4}$	$1,7213 \times 10^{-8}$	100
ALUMÍNIO 99	$2,7 \times 10^3$	$8,937 \times 10^{-4}$	$3,31 \times 10^{-8}$	52,00
ALUMÍNIO 10	$2,7 \times 10^3$	$1,939 \times 10^{-4}$	$7,18 \times 10^{-8}$	23,98
LATÃO	$8,48 \times 10^3$	$5,64 \times 10^{-4}$	$6,66 \times 10^{-8}$	25,84

A variação da resistividade com a temperatura dos condutores é muito importante e deve ser considerada no projeto da máquina.

Para intervalos pequenos da ordem de 100°C, a variação da resistividade pode ser considerada proporcional à variação da temperatura.

Conhecendo-se a resistividade " ρ_1 " a uma temperatura " T_1 " e " α_1 " o coeficiente de temperatura nesta temperatura, a resistividade " ρ_2 " na temperatura " T_2 " é dado por:

$$\rho_2 = \rho_1 [1 + \alpha_1 (T_2 - T_1)] \quad (\text{C.4.1.4})$$

Para variações de temperatura muito grande a relação acima não pode ser mais aplicada porque o coeficiente " α " de temperatura varia.

Quando a temperatura varia de " T_1 " para " T_2 " o coeficiente de temperatura varia de " α_1 " para " α_2 " dado pela expressão.

$$\alpha_2 = \frac{I}{\frac{I}{k_{IACS} \cdot \alpha} + (T_2 - T_1)} \quad (C.4.1.5)$$

Onde o fator " k_{IACS} " representa a relação entre o índice " $IACS_{Liga}$ " da liga do material e o índice " $IACS_{Material}$ " do material, ou seja:

$$k_{IACS} = \frac{IACS_{Liga}}{IACS_{Material}} \quad (C.4.1.6)$$

O coeficiente " α " representa o coeficiente de temperatura do material.

A equação da variação da resistividade (C.4.1.5) não leva em conta a variação das dimensões do condutor com a temperatura.

A TABELA (C.4.1.2) abaixo mostra o coeficiente " α " para o Cobre e o Alumínio.

TABELA (C.4.1.2) – COEFICIENTE DE TEMPERATURA PARA O COBRE E ALUMÍNIO

ÍNDICE DE CONDUZIVIDADE IACS (%)	TEMPERATURA EM [°C]						TEMPERATURA (-) ONDE $\rho = 0$ [°C]
	0	15	20	25	30	50	
	COEFICIENTE DE TEMPERATURA DA RESISTÊNCIA [°C ⁻¹]						
Aluminum							
55	0.00392	0.00370	0.00363	0.00357	0.00351	0.00328	255.2
56	0.00400	0.00377	0.00370	0.00363	0.00357	0.00333	250.3
57	0.00407	0.00384	0.00377	0.00370	0.00363	0.00338	245.3
58	0.00415	0.00383	0.00383	0.00376	0.00369	0.00344	241.0
59	0.00423	0.00390	0.00390	0.00382	0.00375	0.00349	236.6
60	0.00431	0.00396	0.00396	0.00389	0.00381	0.00354	232.3
60.0	0.00435	0.00400	0.00400	0.00393	0.00385	0.00357	229.8
60.97	0.00438	0.00403	0.00403	0.00395	0.00387	0.00359	228.3
61.0	0.00438	0.00403	0.00403	0.00395	0.00387	0.00360	228.1
61.2	0.00440	0.00404	0.00404	0.00396	0.00388	0.00360	227.3
61.3	0.00441	0.00405	0.00405	0.00397	0.00389	0.00361	226.9
61.4	0.00441	0.00406	0.00406	0.00398	0.00390	0.00362	226.5
61.5	0.00442	0.00406	0.00406	0.00398	0.00390	0.00362	226.1
61.8	0.00445	0.00408	0.00408	0.00400	0.00392	0.00364	224.9
62.0	0.00446	0.00410	0.00410	0.00401	0.00393	0.00365	224.1
63	0.00454	0.00416	0.00416	0.00408	0.00400	0.00370	220.3
64	0.00462	0.00423	0.00423	0.00414	0.00406	0.00375	216.5
65	0.00470	0.00429	0.00429	0.00420	0.00412	0.00380	212.9
Coper							
95	0.00403	0.00373	0.00373	0.00367	0.00360	0.00336	247.8
96	0.00408	0.00377	0.00377	0.00370	0.00364	0.00339	245.1
97	0.00413	0.00381	0.00381	0.00374	0.00367	0.00342	242.3
97.5	0.00415	0.00383	0.00383	0.00376	0.00369	0.00344	241.0
98	0.00417	0.00385	0.00385	0.00378	0.00371	0.00345	239.6
99	0.00422	0.00389	0.00389	0.00382	0.00374	0.00348	237.0
100	0.00427	0.00393	0.00393	0.00385	0.00378	0.00352	234.5
101	0.00431	0.00397	0.00397	0.00389	0.00382	0.00355	231.9
102	0.00409	0.00401	0.00401	0.00393	0.00385	0.00358	229.5

Para a geração dos valores da Tabela (C.4.1.2) foram usados os seguintes valores.

Para o ALUMÍNIO:

$$\alpha = 0,00403 \text{ (}^{\circ}\text{C}^{-1}\text{)}$$

$$IACS_{MATERIAL} = 61\%$$

$$T_1 = 20^{\circ}\text{C}$$

Para o COBRE:

$$\alpha = 0,00393 \text{ (}^{\circ}\text{C}^{-1}\text{)}$$

$$IACS_{MATERIAL} = 100\%$$

$$T_1 = 20^{\circ}\text{C}$$

As temperaturas negativas onde a resistividade é nula, considerando-se uma relação linear, estão mostrados na última coluna da Tabela (C.4.1.2).

No gráfico mostrado na Figura C.4.1.1 é mostrado o ponto onde " $\rho = 0$ ".

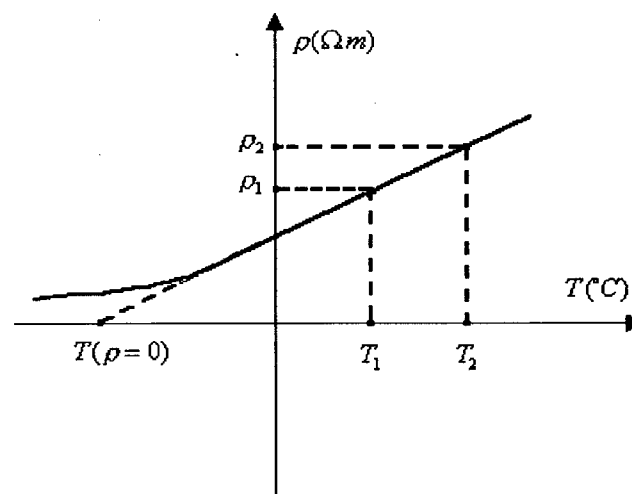


Figura C.4.1.1 - Relação da Resistividade com a Temperatura

Considerando que no intervalo de temperatura onde a máquina elétrica opera, a resistividade varia linearmente com a temperatura, podemos escrever:

$$\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{T_2 - T(\rho = 0)}{T_1 - T(\rho = 0)} \right) \quad (\text{C.4.1.6})$$

Esta equação é normalmente usada para corrigir a resistência da máquina em função da temperatura.

C.4.2 Resistência de Fase do Enrolamento do Estator

Considerando um enrolamento trifásico " m_1 " com número de pólos igual a " $2p$ ", com " N_1 " Ranhuras e número de comanda " N_{cam1} ", e com número de ligações (caminhos) em paralelo " N_{Lig1} " e que cada bobina tenha " Z_1 " espiras, então o número de condutores em série por fase pode ser calculado pela equação (C.2.2.15), ou seja:

$$N_{cond1} = \frac{N_1}{m_1} \cdot Z_1 \cdot \frac{N_{cam1}}{N_{Lig1}} \quad (C.4.2.1)$$

Se cada um dos condutores é formado por " j_{b1} " fios na base e " j_{h1} " fios na altura e que o fio tenha uma seção " S_{fio1} ", então a seção de um condutor pode ser escrita:

$$S_{cond1} = j_{b1} \cdot j_{h1} \cdot S_{fio1} \quad (C.4.2.2)$$

O comprimento médio de um condutor " L_{cond1} " depende da geometria do pacote de chapas, do passo do enrolamento, e do tipo de enrolamento usado.

Uma vez conhecido o comprimento " L_{cond1} ", a resistência de fase do enrolamento pode ser calculada como:

$$R_{f1} = \rho_{cond1} \cdot \frac{N_{cond1} \cdot L_{cond1}}{S_{cond1}} \quad (C.4.2.3)$$

Onde " ρ_{cond1} " é a resistividade do material condutor na temperatura de operação desejada. A correção de " ρ_{cond1} " é feita pela equação (C.4.1.4).

C.4.3 Resistência de Fase do Enrolamento do Rotor

Como a MATBCDA é constituída no rotor por enrolamentos trifásicos, iremos considerar apenas o cálculo da resistência de fase do rotor para o rotor bobinado. Não analisaremos o caso do rotor de gaiola.

Considerando no rotor um enrolamento trifásico idêntico ao do estator, podemos calcular o " N_{cond2} " como sendo:

$$N_{cond2} = \frac{N_2}{m_2} \cdot Z_2 \cdot \frac{N_{cam2}}{N_{Lig2}} \quad (C.4.3.1)$$

Se cada um dos condutores " N_{cond2} " seja formado por " j_{b2} " fios na base e " j_{h2} " fios na altura e que cada fio tenha uma seção " S_{fio2} ", então a seção do condutor pode ser escrita:

$$S_{cond2} = j_{b2} \cdot j_{h2} \cdot S_{fio2} \quad (C.4.3.2)$$

Uma vez conhecido o comprimento médio do condutor " L_{cond2} " a resistência de fase do enrolamento do rotor é dado por.

$$Rf_2 = \rho_{cond2} \cdot \frac{N_{cond2} \cdot L_{cond2}}{S_{cond2}} \quad (C.4.3.3)$$

Onde " ρ_{cond2} " é a resistividade do material do condutor na temperatura de operação desejada. A correção de " ρ_{cond2} " é feita pela equação (C.4.1.4).

A resistência de fase " Rf_2 " dado pela equação (C.4.3.3) acima fornece a resistência referida ao rotor. Se desejarmos a resistência do rotor referida ao estator devemos usar o fator de redução " k_Z " dado pela equação (C.3.2.1.24), ou seja:

$$k_Z = \left(\frac{f_{w1v1} \cdot N_{cond1}}{f_{w2v2} \cdot N_{cond2}} \right)^2 \cdot \frac{m_1}{m_2} \quad (C.4.3.4)$$

Portanto:

$$R'f_2 = k_Z \cdot Rf_2 \quad (C.4.3.5)$$

Onde " $R'f_2$ " representa a resistência " Rf_2 " referida ao estator.

Sabemos que tanto a resistência quanto a indutância interna são afetadas pela variação brusca da corrente, isto é, pela frequência, dando origem ao efeito "SKIN" ou efeito "PELICULAR"

No presente trabalho iremos desprezar este efeito tanto para o condutor do estator quanto para o do rotor.

C.5 EQUAÇÕES DA MÁQUINA

C.5.1 Equações de Tensão

Para podermos escrever as equações das tensões da máquina de indução precisamos primeiro estabelecer as equações de enlaces de fluxo para cada fase. Como a nossa máquina é constituída de três enrolamentos no estator e três no rotor as seis equações para o enlace de fluxo por fase " λ " pode ser escrito:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{a1} \\ \lambda_{b1} \\ \lambda_{c1} \\ \lambda_{a2} \\ \lambda_{b2} \\ \lambda_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{dpa1} & L_{a1b1} & L_{a1c1} & L_{a1a2} & L_{a1b2} & L_{a1c2} \\ L_{b1a1} & L_{dpb1} & L_{b1c1} & L_{b1a2} & L_{b1b2} & L_{b1c2} \\ L_{c1a1} & L_{c1b1} & L_{dpc1} & L_{c1a2} & L_{c1b2} & L_{c1c2} \\ L_{a2a1} & L_{a2b1} & L_{a2c1} & L_{dpa2} & L_{a2b2} & L_{a2c2} \\ L_{b2a1} & L_{b2b1} & L_{b2c1} & L_{b2a2} & L_{dpb2} & L_{b2c2} \\ L_{c2a1} & L_{c2b1} & L_{c2c1} & L_{c2b2} & L_{c2b2} & L_{dpc2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a1} \\ i_{b1} \\ i_{c1} \\ i_{a2} \\ i_{b2} \\ i_{c2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5.1.1})$$

Onde:

$$\begin{aligned} L_{dpa1} &= L_{da1} + L_{pa1} & L_{dpa2} &= L_{da2} + L_{pa2} \\ L_{dpb1} &= L_{db1} + L_{pb1} & L_{dpb2} &= L_{db2} + L_{pb2} \\ L_{dpc1} &= L_{dc1} + L_{pc1} & L_{dpc2} &= L_{dc2} + L_{pc2} \end{aligned} \quad (\text{C.5.1.2})$$

Como os enrolamentos são simétricos e considerando apenas a harmônica fundamental " $v_1 = I$ " podemos definir:

- Indutâncias de Dispersão da Estator " L_{d1} "

$$L_{da1} = L_{db1} = L_{dc1} = L_{d1} = L_{df11} \quad \text{Equação (C.3.2.5.7)}$$

- Indutâncias de Dispersão do Rotor " L_{d2} "

$$L_{da2} = L_{db2} = L_{dc2} = L_{d2} = L_{df21} \quad \text{Equação (C.3.2.5.8)}$$

- Indutâncias Próprias do Estator " L_{pr1} "

$$L_{pa1} = L_{pb1} = L_{pc1} = L_{pr1} = L_{pf11} = L_{mf11} \quad \text{Equação (C.3.3.7)}$$

- Indutâncias Própria do Rotor " L_{pr2} "

$$L_{pa2} = L_{pb2} = L_{pc2} = L_{pr2} = L_{pf21} = L_{mf21} \quad \text{Equação (C.3.3.11)}$$

- Indutâncias Mútuas entre Fases do Estator " L_{M1} "

$$L_{albl} = L_{alcl} = L_{blal} = L_{blcl} = L_{clal} = L_{clbl} = L_{M1} = -\frac{1}{2} L_{mf11}$$

Equações (C.3.4.5), (C.3.4.6) e (C.3.4.7)

- Indutâncias Mútuas entre Fases do Rotor " L_{M2} "

$$L_{a2b2} = L_{a2c2} = L_{b2a2} = L_{b2c2} = L_{c2a2} = L_{c2b2} = L_{M2} = -\frac{1}{2} L_{mf21}$$

Equações (C.3.4.8), (C.3.4.9) e (C.3.4.10)

- Indutâncias Mútuas entre Fases do Estator e do Rotor " L_{M12} ", " L_{M21} "

$$L_{a1a2} = L_{b1b2} = L_{c1c2} = L_{a2a1} = L_{b2b1} = L_{c2c1} = L_{M121} \cdot \text{Cos}\theta_2$$

$$L_{a1b2} = L_{b1c2} = L_{c1a2} = L_{b2a1} = L_{c2b1} = L_{a2c1} = L_{M121} \cdot \text{Cos}\left(\theta_2 - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$L_{a1c2} = L_{b1a2} = L_{c1b2} = L_{c2a1} = L_{a2b1} = L_{b2c1} = L_{M121} \cdot \text{Cos}\left(\theta_2 + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Onde " L_{M121} " é dado pela Equação (C.3.5.4).

Uma vez definido as indutâncias acima, podemos escrever a equação (C.5.1.1) de uma forma mais compacta como segue:

$$\begin{bmatrix} [\lambda_{abc1}] \\ [\lambda_{abc2}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_{11}] & [L_{12}] \\ [L_{21}] & [L_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_{abc1}] \\ [i_{abc2}] \end{bmatrix} \quad (\text{C.5.1.3})$$

Onde " $[\lambda_{abc1}]$ " representa o enlace de fluxo das fases do estator e " $[\lambda_{abc2}]$ " o enlace de fluxo das fases do rotor, dado por:

$$[\lambda_{abc1}] = \begin{bmatrix} \lambda_{a1} \\ \lambda_{b1} \\ \lambda_{c1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5.1.4})$$

$$[\lambda_{abc2}] = \begin{bmatrix} \lambda_{a2} \\ \lambda_{b2} \\ \lambda_{c2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5.1.5})$$

O termo " $[i_{abc1}]$ " representa as correntes de fase do estator e " $[i_{abc2}]$ " as correntes de fase do rotor dadas por:

$$[i_{abc1}] = \begin{bmatrix} i_{a1} \\ i_{b1} \\ i_{c1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5.1.6})$$

$$[i_{abc2}] = \begin{bmatrix} i_{a2} \\ i_{b2} \\ i_{c2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5.1.7})$$

A matriz " $[L_{11}]$ " representa a matriz de indutâncias do estator dada por:

$$[L_{11}] = \begin{bmatrix} L_{d1} + L_{pr1} & L_{M1} & L_{M1} \\ L_{M1} & L_{d1} + L_{pr1} & L_{M1} \\ L_{M1} & L_{M1} & L_{d1} + L_{pr1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5.1.8})$$

A matriz " $[L_{22}]$ " representa a matriz de indutâncias do rotor dada por:

$$[L_{22}] = \begin{bmatrix} L_{d2} + L_{pr2} & L_{M2} & L_{M2} \\ L_{M2} & L_{d2} + L_{pr2} & L_{M2} \\ L_{M2} & L_{M2} & L_{d2} + L_{pr2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5.1.9})$$

A matriz " $[L_{12}]$ " representa a matriz de indutâncias mútuas entre as fases do estator e do rotor, dada por:

$$[L_{12}] = L_{M121} \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & \cos\left(\theta_2 - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_2 + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_2 + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_2) & \cos\left(\theta_2 - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_2 - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_2 + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (\text{C.5.1.10})$$

A matriz " $[L_{21}]$ " é igual a " $[L_{12}]^T$ " (transposta) e representa a matriz de indutâncias mútuas entre as fases do rotor e do estator, dada por:

$$[L_{21}] = [L_{12}]^T = L_{M121} \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & \cos\left(\theta_2 + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_2 - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_2 - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_2) & \cos\left(\theta_2 + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_2 + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_2 - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (\text{C.5.1.11})$$

Das leis da física, podemos escrever a equação da tensão em um enrolamento como sendo.

$$u = R \cdot i + \frac{d}{dt}(\lambda) \quad (\text{C.5.1.12})$$

Onde "λ" representa o fluxo enlaçado pelo enrolamento. No caso da máquina trifásica temos 6 enrolamentos, e, neste caso, suas equações de tensão podem ser escritas na forma matricial como sendo:

$$\begin{bmatrix} u_{a1} \\ u_{b1} \\ u_{c1} \\ u_{a2} \\ u_{b2} \\ u_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_1] & [0] \\ [0] & [R_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a1} \\ i_{b1} \\ i_{c1} \\ i_{a2} \\ i_{b2} \\ i_{c2} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \left\{ \begin{bmatrix} [L_{11}] & [L_{12}] \\ [L_{21}] & [L_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a1} \\ i_{b1} \\ i_{c1} \\ i_{a2} \\ i_{b2} \\ i_{c2} \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{C.5.1.13})$$

Onde a matriz "[R₁]" representa a matriz de resistência do estator, dada por:

$$[R_1] = \begin{bmatrix} R_{a1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{b1} & 0 \\ 0 & 0 & R_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{f1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{f1} & 0 \\ 0 & 0 & R_{f1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5.1.14})$$

Onde "R_{f1}" é a resistência de fase do estator dada pela equação (4.4.2.3).

A matriz "[R₂]" representa a matriz de resistências do rotor, dada por:

$$[R_2] = \begin{bmatrix} R_{a2} & 0 & 0 \\ 0 & R_{b2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{f2} & 0 & 0 \\ 0 & R_{f2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{f2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5.1.15})$$

Onde "R_{f2}" é a resistência de fase do rotor dada pela equação (C.4.3.3).

Desenvolvendo as equações para as tensões do estator no sistema matricial (C.5.1.13), obtemos:

$$[u_{abc1}] = [R_1][i_{abc1}] + [L_{11}] \frac{d}{dt} [i_{abc1}] + [L_{12}] \frac{d}{dt} [i_{abc2}] + \frac{d}{d\theta_2} \{[L_{12}]\} \cdot [i_{abc2}] \frac{d\theta_2}{dt} \quad (\text{C.5.1.16})$$

Fazendo o mesmo para as tensões do rotor, obtemos:

$$[u_{abc2}] = [R_2][i_{abc2}] + [L_{22}] \frac{d}{dt} [i_{abc2}] + [L_{21}] \frac{d}{dt} [i_{abc1}] + \frac{d}{d\theta_2} \{[L_{21}]\} \cdot [i_{abc1}] \frac{d\theta_2}{dt} \quad (\text{C.5.1.17})$$

Nas equações (4.5.1.16) e (4.5.1.17) as derivadas das matrizes "[L₁₁]" e "[L₂₂]" em relação ao tempo são nulas porque estas matrizes são constantes com o "θ₂" isto é, não tem termos que variam com o tempo.

Nas equações citadas acima o último termo de cada equação apresenta a derivada das matrizes de indutância "[L₁₂]" e "[L₂₁]" em relação a "θ₂".

Esta dependência torna a solução do sistema de equações mais difícil.

C.5.2 Equações de Potência

A potência instantânea do enrolamento do estator "[p_{abc1}]" pode facilmente ser obtida multiplicando-se pela esquerda a equação (4.5.1.16) por "[i_{abc1}]^T", portanto:

$$[p_{abc1}] = [i_{abc1}]^T [R_1][i_{abc1}] + [i_{abc1}]^T [L_{11}] \frac{d}{dt} [i_{abc1}] + [i_{abc1}]^T [L_{12}] \frac{d}{dt} [i_{abc2}] + [i_{abc1}]^T \frac{d}{d\theta_2} \{[L_{12}]\} \cdot [i_{abc2}] \cdot \frac{d\theta_2}{dt} \quad (\text{C.5.2.1})$$

Analogamente obtemos a potência instantânea do rotor, ou seja:

$$[p_{abc2}] = [i_{abc2}]^T [R_2][i_{abc2}] + [i_{abc2}]^T [L_{22}] \frac{d}{dt} [i_{abc2}] + [i_{abc2}]^T [L_{21}] \frac{d}{dt} [i_{abc1}] + [i_{abc2}]^T \frac{d}{d\theta_2} \{[L_{21}]\} \cdot [i_{abc1}] \cdot \frac{d\theta_2}{dt} \quad (\text{C.5.2.2})$$

A potência total dos 6 enrolamentos é dada pela soma, logo:

$$P_{TOTAL} = [p_{abc1}] + [p_{abc2}] \quad (\text{C.5.2.3})$$

Efetuada-se a soma e levando em consideração que:

$$[L_{21}] = [L_{12}]^T \quad (\text{C.5.2.4})$$

$$[i_{abc2}]^T [L_{21}] [i_{abc1}] = [i_{abc1}]^T [L_{12}] [i_{abc2}] \quad (\text{C.5.2.5})$$

$$[i_{abc2}]^T \frac{d}{d\theta_2} \{[L_{21}]\} [i_{abc1}] = [i_{abc1}]^T \frac{d}{d\theta_2} \{[L_{12}]\} [i_{abc2}] \quad (\text{C.5.2.6})$$

Após algumas transformações obtemos:

$$\begin{aligned} P_{TOTAL} = & [i_{abc1}]^T [R_1] [i_{abc1}] + [i_{abc2}]^T [R_2] [i_{abc2}] + \\ & + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} [i_{abc1}]^T [L_{11}] [i_{abc1}] + \frac{1}{2} [i_{abc2}]^T [L_{22}] [i_{abc2}] + \right. \\ & \left. + [i_{abc1}]^T [L_{12}] [i_{abc2}] \right\} + [i_{abc1}]^T \frac{d}{d\theta_2} \{[L_{12}]\} [i_{abc2}] \frac{d\theta_2}{dt} \end{aligned} \quad (\text{C.5.2.7})$$

Os dois primeiros termos da equação acima representam as perdas joules nos enrolamentos. As derivadas em relação ao tempo entre colchetes representam as variações da energia magnética armazenada nos enrolamentos. O último termo representa a potência mecânica " P_{mec} ", logo:

$$P_{mec} = [i_{abc1}]^T \frac{d}{d\theta_2} \{[L_{12}]\} [i_{abc2}] \frac{d\theta_2}{dt} \quad (\text{C.5.2.8})$$

4.5.3 Equação de Torque

Da física sabemos que a potência mecânica de um sistema rotativo pode ser calculado como:

$$P_{mec} = T \cdot \frac{d\theta_m}{dt} \quad (\text{C.5.3.1})$$

Onde " θ_m " representa o deslocamento angular mecânico do rotor.

A relação entre o deslocamento angular elétrico " θ_2 " e o mecânico " θ_m " é dada por:

$$\theta_2 = p \theta_m \quad (\text{C.5.3.2})$$

Onde " p " representa o número de pares de polos da máquina.

Substituindo (C.5.3.2) em (C.5.3.1) e comparando o resultado com (C.5.2.8) obtemos para o torque eletromagnético " T_e " a seguinte relação.

$$T_e = p [i_{abc1}]^T \frac{d}{d\theta_2} \{ [L_{12}] \} [i_{abc2}] \quad (\text{C.5.3.3})$$

Expandindo na forma matricial obtemos:

$$T_e = p \cdot [i_{a1} \ i_{b1} \ i_{c1}] \cdot L_{M121} \cdot \frac{d}{d\theta_2} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \cos\left(\theta_2 - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_2 + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_2 + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\theta_2 & \cos\left(\theta_2 - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta_2 - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_2 + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a2} \\ i_{b2} \\ i_{c2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5.3.4})$$

As equações de tensões, potências e torque em variáveis da máquina são bastante complexas de serem resolvidas porque dependem da posição angular " θ_2 ". Para minimizar esta dificuldade se faz necessário fazer uma transformação de variáveis.