

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Técnicas LMI para Sistemas com Restrições Algébricas no Estado

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina
como requisito parcial à obtenção do grau de

Mestre em Engenharia Elétrica

por

Karina Acosta Barbosa



0.302.672-4

UFSC-BU



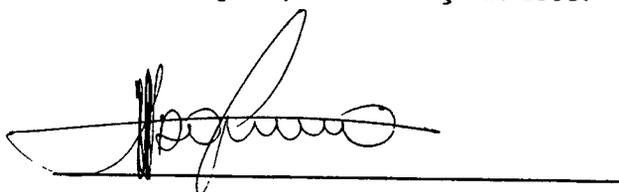
Florianópolis, 12 de março de 1999.

Técnicas LMI para Sistemas com Restrições Algébricas no Estado

Karina Acosta Barbosa

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia na especialidade Engenharia Elétrica, área de concentração Controle, Automação e Informática Industrial, e aprovada em sua forma final pelo curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 12 de março de 1999.

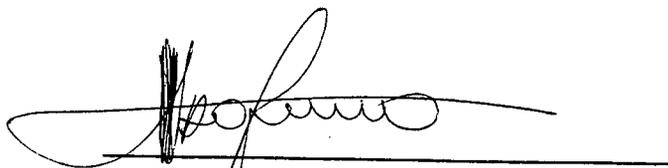


Prof. Alexandre Trofino, Dr.
Orientador

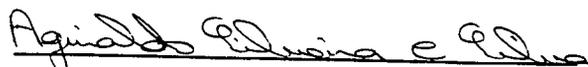


Prof. Ildemar Cassana Decker, D.Sc.
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
da Universidade Federal de Santa Catarina.

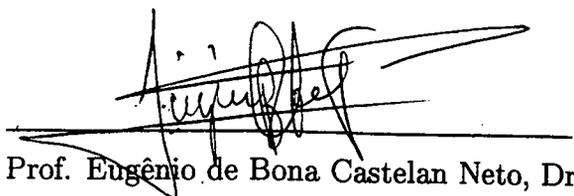
Banca Examinadora



Prof. Alexandre Trofino, Dr.
Orientador



Prof. Aguinaldo Silveira e Silva, PhD.



Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.

DAS UTOPIAS

*“Se as coisas são inatingíveis... ora!
Não é motivo para não querê-las...
Que tristes os caminhos, se não fora
A presença distante das estrelas!”*

Mário Quintana

À meus Pais
Nórcia e Leoneros

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus e a minha família por estarem sempre presentes na minha vida, não só me apoiando, mas sobretudo pelo constante carinho.

Ao professor Alexandre Trofino pela orientação, confiança e paciência neste tempo de trabalho em conjunto. Ao professor Aguinaldo Silva pelo apoio, sugestões e esclarecimentos. Aos professores Eugênio Castellan e Edson De Pieri, pelo incentivo a permanecer aqui mesmo diante das dificuldades iniciais.

Ao corpo docente do curso de Matemática Aplicada da UFRGS, principalmente aos Professores Júlio Claeysen e Rudnei Cunha, pela amizade e apoio para prosseguir no caminho da ciência.

Às amigas Magali, Rubelise e Mônica, não só pela amizade, mas também pela disposição de ler este trabalho e ajudar em sua revisão.

Aos amigos Maurício, Vitor e Howard, pelos bate-papos, momentos de alegria e descontração que passamos juntos.

À Sandra e Merlin pela acolhida quando, de “mala e cuia neste pago me aproximei”.

À turma do apartamento 32A, a todas que hoje estão ou que já passaram, pelos momentos de descontração, brigas e sobretudo por serem um pouco a minha família neste período. Em especial à Malu, que de colega de apartamento se tornou uma grande amiga.

Aos muitos amigos que fiz aqui e principalmente aos que ficaram lá no Rio Grande do Sul, pela força e amizade (não cito nomes porque a lista seria infundável).

Não posso deixar de agradecer a uma das melhores coisas deste período: os colegas da turma de mestrado 97. Não só pela ajuda em aula ou laboratório e, sim, pela amizade que surgiu entre nós: Cesar Torrico, Carlos Venturo, Pierre, Marcos Mendes, Jorge, Sandro, Miguel, Amarilis, Nicole, Ivana, Eládio, Ronei, Carlos Rocha. Cada um, a sua maneira, tem uma participação aqui.

Ao colega José Oliveira, pela cooperação dada, principalmente no uso do Scilab. À “galera” do LCMI que contribuiu para que o ambiente de trabalho fosse mais sociável, em especial Felipe, Marcos Vallim, Michele, Lau, Augusto (Baiano), Karen, Cristian, Sônia, Alexandre (Sobral), Isabel, Eduardo (Sysadmin), Hélio.

Agradeço ao CNPq que durante estes dois anos me propiciou um meio sustento, permitindo assim a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho consideramos o problema de estabilidade quadrática para sistemas incertos com restrições algébricas no estado. No caso discreto e contínuo estabelecemos condições suficientes para sistemas incertos na forma algébrico-diferencial desacoplada, onde as incertezas são do tipo politopo. A metodologia utilizada consiste em descrever as condições do problema como Desigualdades Matriciais Lineares(LMIs), sem a eliminação das variáveis algébricas do sistema. Enfocamos o problema de análise e de síntese por realimentação de estados e de saída. Apresentamos uma extensão do resultado de análise para sistemas com incertezas do tipo LFT. O caso de performance com as normas H_2 e H_∞ também são considerados. Uma aplicação a um Sistema de Potência é apresentada para ilustrar o desempenho da metodologia desenvolvida.

Abstract

In this work, the quadratic stability problem for uncertain systems with state algebraic constraints is considered. The discrete and continuous time cases are considered and sufficient conditions are derived based on the uncoupled differential-algebraic representation. The uncertainties are considered to lie in a polytope. The approach consists of recasting the control problems as Linear Matrix Inequalities (LMIs), without eliminating the system's algebraic variables. We focus on the analysis and synthesis problems. We also present relations with the stability of systems having LFT uncertainties. The performance cases for the H_2 e H_∞ norms are also considered. An application to the stabilization of electric power systems is presented to illustrate the performance of the developed methodology.

Notação

A'	matriz transposta de A .
$A > 0$	matriz simétrica, positiva definida.
$\det(A)$	determinante de A .
LMI	Desigualdades Matriciais Lineares
LFT	Linear Fractional Transformation
SEE	Sistema de Energia Elétrica
$Co[\Psi_i]_{i=1}^q$	$\triangleq \{ \Psi : \Psi = \sum_{i=1}^q \alpha_i \Psi_i, \alpha_i \geq 0 : \sum_{i=1}^q \alpha_i = 1, \}$ representa um politopo convexo de vértices Ψ_i dados.

Sumário

1	Descrição do Problema e Definições	4
1.1	Introdução	4
1.2	Modelagem do Problema	5
1.3	Noções de Estabilidade Quadrática para Sistemas Algébrico-Diferenciais . .	7
1.4	Propriedades de LMI	8
1.4.1	Complemento de Schur	8
1.4.2	S-Procedure	9
1.4.3	L- C_a Scaling	9
1.4.4	D-G Scaling	10
1.5	Comentários	10
2	Análise e Realimentação de Estados	11
2.1	Introdução	11
2.2	Sistemas Contínuos	11
2.2.1	Análise	11
2.2.2	Realimentação de Estados	14
2.2.3	Exemplos	17
2.3	Sistemas Discretos	19
2.3.1	Análise	20
2.3.2	Realimentação de Estados	22
2.3.3	Exemplos	22
2.4	Extensão para Sistemas LFT	24
2.4.1	Uma Aplicação	29
2.5	Comentários	30
3	Realimentação de saída	31
3.1	Introdução	31
3.2	Realimentação de Saída	31

3.2.1	Estática	31
3.2.2	Dinâmica	35
3.3	Extensão para o caso Discreto	37
3.4	Exemplos	39
3.5	Comentários	42
4	Performance H_2 e H_∞	43
4.1	Introdução	43
4.2	Performance H_2	43
4.2.1	Norma H_2	43
4.2.2	Problema H_2 e Realimentação de Estados	45
4.3	Performance H_∞	47
4.3.1	Norma H_∞	47
4.3.2	Problema H_∞ e Realimentação de Estado	48
4.4	Caso Discreto	50
4.4.1	Norma H_2 , Problema H_2 e Realimentação de Estados	50
4.4.2	Norma H_∞ , Problema H_∞ e Realimentação de Estados	52
4.5	Exemplos	53
4.6	Comentários	56
5	Conclusões	57
A	Exemplos de SEE	59
A.1	Sistema com 4 barras	59
A.2	Sistema com 3 barras	63

Introdução

Diversos sistemas físicos podem ser modelados matematicamente por um conjunto de equações algébricas e diferenciais, entre eles: sistemas robóticos [KM94] [MW88], sistemas de potência [HM90] [SSTC98], processos químicos [KD95], sistemas econômicos [Leo53], circuitos elétricos [New81] e sistemas de perturbações singulares [GDB98]. A existência das restrições do tipo algébrica são provenientes das interconexões de dois ou mais subsistemas dinâmicos. Na literatura, estes sistemas são conhecidos como sistemas descritores, sistemas singulares ou sistemas com restrições algébricas.

O interesse nesta área desenvolveu-se muito nas últimas décadas com a publicação de importantes trabalhos, tais como [VLK81], [Cob84b] [Cob84a] [Lew86] [TMK94]. Muitos destes são dedicados ao estudo dos problemas decorrentes da estrutura particular deste tipo de sistema, como a presença de modos impulsivos, descontinuidade da solução e regularidade no sistema. O problema de controle, comumente tratado na literatura, busca tornar o sistema em malha fechada livre de impulsões, regular e estável.

A solução usual dada a este problema consiste em separá-lo em dois subsistemas, um de dinâmica lenta, obtido através da eliminação das variáveis algébricas, e outro de dinâmica rápida, associado aos autovalores infinitos do sistema. O processo é feito em duas etapas: primeiro busca-se tornar o sistema regular e livre de impulsões através da eliminação dos modos infinitos e, em seguida, considera-se apenas o subsistema de dinâmica lenta, estabilizando-o, como é feito em [GDB98] [KKJ86].

Nesta dissertação damos enfoque ao processo de estabilização de sistemas com restrições algébricas, na forma algébrico-diferencial desacoplada. Frequentemente, estes sistemas não aparecem na forma de um conjunto desacoplado de equações algébricas-diferenciais. No entanto, este desacoplamento pode facilmente ser obtido através de trocas de coordenadas como feito em [Dai89]; ou, parcialmente, por transformações ortogonais,

como propôs Varga em [Var95].

A análise da estabilidade de sistemas com restrições algébricas na forma algébrico-diferencial tem um importante papel no estudo da teoria de sistemas singulares e suas aplicações. Normalmente, esta análise é feita através da eliminação da variável algébrica, transformando o sistema algébrico-diferencial em um outro diferencial de menor dimensão [Cob84b] [Var95] [Men98]. Com o sistema na forma diferencial é possível aplicar técnicas já conhecidas de estabilização, tais como alocação de pólos, auto-estrutura e funções de Lyapunov.

Apesar de simples, essa abordagem pode implicar em diversos problemas. Um deles é a dificuldade em considerarmos incertezas no modelo, já que a eliminação da variável algébrica envolve a inversão de matrizes com elementos incertos. Outro problema é a perda da esparsidade das matrizes que, em alguns casos, quando a dimensão do problema é grande, pode acarretar dificuldades computacionais consideráveis.

O que propomos é uma forma alternativa de estudar a estabilidade de sistemas com restrições algébricas explorando as propriedades estruturais das equações do sistema original, sem a eliminação da variável algébrica de maneira semelhante a que propôs [TMK95]. Desta forma facilita-se o estudo de sistemas com parâmetros incertos. Consideramos, então, o problema de Estabilidade Quadrática para sistemas com incertezas descritas na forma politópica no tempo contínuo e discreto. A abordagem que será dada ao problema consiste em descrever as condições para sua resolução, como desigualdades matriciais lineares (LMIs), para as quais se conhece métodos de resolução numéricos eficientes.

Estudamos o problema de análise e de síntese, via realimentação de estados e realimentação de saída. É importante salientar a extensão dos resultados de análise para o caso de sistemas na forma Linear Fractional Transformations (LFT).

No caso de síntese por realimentação de saída, além do problema estático, tratamos também do problema de controladores dinâmicos através da incorporação da dinâmica do controlador ao sistema.

Não somente o problema de estabilidade será exposto, mas também o problema de Performance para sistemas com restrições algébricas. Como índice de performance usaremos a norma H_2 e a Norma H_∞ .

Os capítulos têm a seguinte estrutura geral: primeiramente, faz-se uma abordagem do problema e revisão de alguns conceitos básicos. Em seguida, enunciamos os resultados

obtidos na forma de teoremas. Uma extensão para o caso discreto é feita em todos os capítulos e exemplos são apresentados para ilustrar o desempenho do método.

No capítulo 1, formulamos o problema, com uma revisão dos conceitos de estabilidade e estabilizabilidade quadrática para sistemas com restrições algébricas, além de um apanhado das propriedades de LMI. No capítulo 2, o caso de análise e síntese via Realimentação de estados são considerados. Uma extensão do resultado de análise é feita para sistemas LFT. O caso de Realimentação de saída é considerado no capítulo 3. O problema de performance H_2 e H_∞ será visto no capítulo 4. Finalmente, no capítulo 5 fazemos as considerações gerais sobre os resultados obtidos. No apêndice A fornecemos os dados numéricos dos exemplos de SEE utilizados ao longo da dissertação.

Capítulo 1

Descrição do Problema e Definições

1.1 Introdução

Sistemas com restrições algébricas são representados, matematicamente, por um conjunto de equações algébricas e diferenciais¹, dado por

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Jx + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $x \in R^n$, $u \in R^m$ e $y \in R^p$ representam respectivamente os vetores de estado, de controle e de saídas do sistema; $E \in R^{n \times n}$, $J \in R^{n \times n}$, $C \in R^{p \times n}$. Para caracterizar a singularidade do sistema, consideramos $\text{posto}(E) < n$.

Comportamentos indesejáveis podem ocorrer neste tipo de sistema, decorrentes de sua estrutura particular, como a presença de modos impulsivos [VLK81] e não-unicidade da solução. Para garantir que a solução do sistema seja única, o par (E, A) tem que ser regular. Para que isto ocorra e o sistema seja livre de impulsões temos as seguintes definições dadas em [VLK81].

- O par (E, A) é dito regular se existe algum número complexo s tal que: $\det(sE - A) \neq 0$.
- O par (E, A) regular é livre de impulsão se $\text{posto}(E)$ for igual ao grau do $\det(sE - A)$.

Uma condição algébrica, generalizando a equação de Lyapunov, foi proposta por Takaba et al [TMK95] para garantir que o par (E, A) regular seja estável e livre de impulsões. Uma condição decorrente desta, na forma de LMIs, foi proposta por [MKOS97], sem a

¹À diferença ou recursiva, no caso discreto.

necessidade de considerarmos o par (E, A) regular. Este resultado, descrito na forma de LMI, é apresentado a seguir:

Lema 1.1 [MKOS97] *O par (E, A) é regular, livre de impulsões e estável se e somente se existe $X \in R^{n \times n}$ tal que:*

$$\begin{aligned} E'X &= X'E \geq 0 \\ A'X + X'A &< 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Através deste resultado é possível se obter condições equivalentes às condições propostas neste trabalho, partindo diretamente de sistemas descritores em vez de sistemas restrições algébricas, onde a parte algébrica é vista como uma restrição do problema. Para mais detalhes veja a seção 2.2.1.

No decorrer desta dissertação, consideramos que o sistema é regular e livre de impulsões. O problema principal será o de garantir estabilidade quadrática e performance para sistemas com restrições algébricas no estado, já na forma algébrico-diferencial desacoplada. Na seção 1.2, fornecemos uma solução para o caso em que o sistema não é regular e tem modos impulsivos.

Neste capítulo, descrevemos as ferramentas matemáticas utilizadas ao longo deste trabalho. Na seção 1.2 fazemos a descrição e algumas considerações sobre sistemas do tipo algébrico-diferencial desacoplado. Uma breve revisão do conceitos de estabilidade e estabilizabilidade quadrática para sistemas na forma algébrico-diferencial é colocada na seção 1.3. Na última seção, descrevemos algumas propriedades e resultados relacionados à LMIs.

1.2 Modelagem do Problema

Consideramos o sistema (1.1) já na forma algébrico-diferencial desacoplado ², cuja representação matemática é dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z + B_1u \\ 0 = J_3x + J_4z + B_2u \\ y = C_1x + C_2z \end{cases} \tag{1.3}$$

²No restante da dissertação trataremos apenas como sistema algébrico-diferencial sem mencionar que é desacoplado.

onde $x \in R^n$, $z \in R^l$, $u \in R^m$ e $y \in R^p$ são, respectivamente, os vetores das variáveis de estado, algébricas, de entrada e de saída. Admitimos que o sistema (1.3) é incerto e

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B_1 \\ J_3 & J_4 & B_2 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} & B_{1i} \\ J_{3i} & J_{4i} & B_{2i} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

onde $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ é um polítopo convexo de vértices Ψ_i conhecidos.

Assumiremos J_4 inversível, a fim de evitarmos o comportamento impulsivo e garantirmos a regularidade do sistema. Quando J_4 não for inversível, podemos encontrar uma realimentação de estados $u = K_2 z$ que torna $J_4 + B_2 K_2$ inversível sempre que o posto de $(J_4, B_2) = l$, onde l é a dimensão da variável algébrica. Esse procedimento é frequentemente utilizado em diversos artigos, como [Var95], [BJ97].

A abordagem usual dada ao problema de estabilização consiste em se eliminar as restrições algébricas através da eliminação da variável z (no sistema (1.3)), resultando em:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_b u \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3, \\ B_b &= B_1 - J_2 J_4^{-1} B_2 \\ C &= C_1 - C_2 J_4^{-1} J_3 \end{aligned}$$

Apesar da sua simplicidade, essa abordagem possui sérios inconvenientes, como no caso de algumas variáveis eliminadas serem de interesse para fins de controle ou quando essas estão associadas a parâmetros incertos (elementos de J_2 , J_3 , J_4). Essas incertezas podem se espalhar por quase todos os elementos do sistema de ordem reduzida (1.5), complicando o problema de análise e projeto de controladores.

O que propomos nesta dissertação é uma alternativa para tratar sistemas algébrico-diferenciais sem a necessidade da eliminação da variável algébrica. Os resultados obtidos exploram a estrutura original do sistema (1.3) e são descritos como desigualdades matriciais lineares (LMIs), permitindo, assim, tratar sistemas incertos de maneira conveniente.

1.3 Noções de Estabilidade Quadrática para Sistemas Algébrico-Diferenciais

O problema que estamos tratando é o de estabilidade quadrática, via função de Lyapunov, para o sistema do tipo (1.3)-(1.4). As noções de Estabilidade e Estabilizabilidade Quadrática para sistemas do tipo algébrico-diferencial, dadas abaixo, são uma extensão das definições já existentes para sistemas diferenciais [Tro98].

Definição 1.1 (Estabilidade Quadrática) *Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z \\ 0 = J_3x + J_4z \end{cases} \quad (1.6)$$

e suponha que

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} \\ J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Então, o sistema (1.6), (1.7) é quadraticamente estável se existe uma função $v(x) = x'Px > 0$, $\forall x$ tal que sua derivada temporal para as trajetórias do sistema (1.6), (1.7) satisfaça:

$$\begin{cases} \dot{v}(x) = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} J_1'P + PJ_1 & PJ_2 \\ J_2'P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} < 0 \\ \forall \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

◇◇

Definição 1.2 (Estabilizabilidade Quadrática) *Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z + B_1u \\ 0 = J_3x + J_4z + B_2u \end{cases} \quad (1.9)$$

e suponha que

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B_1 \\ J_3 & J_4 & B_2 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} & B_{1i} \\ J_{3i} & J_{4i} & B_{2i} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Então, o sistema (1.9), (1.10) é quadraticamente estabilizável pela lei de controle do tipo $u = K_1x + K_2z$ se existem matrizes K_1 , K_2 e uma função $v(x) = x'Px > 0$, $\forall x$ tal que sua derivada temporal para as trajetórias do sistema (1.9), (1.10) em malha fechada satisfaça:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}(x) = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} J_1'P + PJ_1 + PB_1K_1 + K_1'B_1'P & PJ_2 + PB_1K_2 \\ J_2'P + K_2'B_1'P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} < 0 \\ \forall \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B_1 \\ J_3 & J_4 & B_2 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \forall \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} J_3 + B_2K_1 & J_4 + B_2K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = 0 \end{array} \right. \quad (1.11)$$

◇◇

Para o caso de realimentação de saída, basta considerarmos $u = Ky$ com $y = Cx$ e as definições de Estabilidade e Estabilizabilidade Quadrática para sistemas discretos será omitida, já que podem facilmente serem deduzidas do caso contínuo.

1.4 Propriedades de LMI

Como já comentamos, usaremos técnicas de LMIs para solucionar o Problema de Estabilização de sistemas do tipo algébrico-diferencial. A vantagem em se usar esta técnica deve-se principalmente ao fato de que o conjunto solução é sempre convexo [BGFB94]. Outro ponto relevante é a existência de algoritmos e pacotes computacionais eficientes para o cálculo de LMIs, como o Matlab e o Scilab.

Normalmente os problemas de controle não aparecem na forma explícita de uma LMI, mas através de manipulações algébricas, uma formulação LMI pode ser obtida. A seguir enunciaremos algumas propriedades e resultados de LMIs que serão úteis no decorrer deste trabalho.

1.4.1 Complemento de Schur

Um conjunto de desigualdades não-lineares pode ser posto na forma de uma LMI, através do Complemento de Schur, enunciado abaixo. Enunciaremos aqui somente o caso de desigualdades estritas, o caso não-estrito pode ser visto em [BGFB94].

Lema 1.2 *Sejam Q, R, S matrizes de dimensões compatíveis, com Q, R simétricas. Então as seguintes condições são equivalentes:*

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} > 0 \iff R > 0, \quad Q - SR^{-1}S' > 0 \quad (1.12)$$

1.4.2 S-Procedure

Enunciamos aqui apenas a versão de S-Procedure para sistemas com desigualdades estritas, no caso de desigualdades não-estritas ver [BGFB94, seção 2.6.3].

Lema 1.3 *Sejam $T_0, \dots, T_p \in R^{n \times n}$ matrizes simétricas, consideremos a seguinte condição em T_0, \dots, T_p :*

$$\psi^T T_0 \psi > 0 \quad \forall \psi \neq 0 \text{ tal que } \psi^T T_i \psi \geq 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (1.13)$$

Então (1.13) é verificada se existem escalares $\tau_i > 0$ tais que

$$T_0 - \sum_{i=1}^p \tau_i T_i > 0 \quad (1.14)$$

Além disso (1.14) e (1.13) são equivalentes quando $p = 1$. Quando T_i são funções afim de um conjunto de parâmetros a condição (1.14) ainda implica (1.13).

1.4.3 L- C_a Scaling

Esse lema é uma particularidade do Lema de Finsler [BGFB94].

Lema 1.4 *Dada a matriz simétrica Ψ e a matriz C_a de dimensões compatíveis e seja X uma matriz tal que $C_a X = 0$. Então teremos que*

$$X' \Psi X < 0 \quad (1.15)$$

se e somente se $\exists L$ tal que

$$\Psi + LC_a + C_a' L' < 0 \quad (1.16)$$

Se C_a ou Ψ dependerem de um conjunto de parâmetros incertos, então, para que as condições acima ainda continuem necessárias e suficientes, teremos que a matriz L também deve ser dependente destes parâmetros [LD95].

1.4.4 D-G Scaling

Lema 1.5 [FAG96] *Seja $w_i \in R^k$ e $z_i \in R^k$. Então existe um escalar δ tal que $w_i = \delta z_i$ e $|\delta_i| \leq 1$ se e somente se*

$$\begin{cases} w_i' S_i w_i \leq z_i' S_i z_i, & S_i > 0 \\ w_i' T_i z_i = 0 & T_i = -T_i', \quad T_i, S_i \in R^{n_i \times n_i} \end{cases} \quad (1.17)$$

A prova deste lema pode ser encontrada em [FAG96].

1.5 Comentários

Neste capítulo fornecemos a formulação matemática para sistemas algébrico-diferenciais que iremos utilizar durante este trabalho. Definimos as noções de estabilidade e estabilizabilidade quadrática para sistemas algébrico-diferenciais e enunciamos algumas propriedades de LMIs úteis para obtermos uma formulação convexa para a resolução dos problemas a serem considerados.

Capítulo 2

Análise e Realimentação de Estados

2.1 Introdução

Neste capítulo, consideramos o problema de análise e síntese por realimentação de estados. Procuramos aqui explorar a estrutura algébrico-diferencial do sistema (1.3), através da formulação LMI, tanto no caso contínuo como no caso discreto. Na seção 2.4, apresentamos uma relação entre os resultados de análise e sistemas com incertezas do tipo LFT.

2.2 Sistemas Contínuos

2.2.1 Análise

O problema de Análise para sistemas do tipo algébrico-diferencial consiste em encontrar uma função de Lyapunov para o sistema, garantindo assim a estabilidade quadrática. Em um primeiro momento, consideramos apenas o sistema nominal.

Teorema 2.1 *O sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z \\ 0 = J_3x + J_4z \end{cases} \quad (2.1)$$

é quadraticamente estável se existem matrizes $P > 0$ e L tais que a seguinte LMI seja satisfeita:

$$\begin{bmatrix} J_1'P + PJ_1 & PJ_2 \\ J_2'P & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix}' L' < 0 \quad (2.2)$$

Em caso afirmativo, $v(x) = x'Px$ é uma função de Lyapunov para o sistema.

Prova Sai diretamente da aplicação do lema 1.4 e da definição 1.1. Ou seja, de (2.2), aplicando o lema 1.4 temos que

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} J_1'P + PJ_1 & PJ_2 \\ J_2'P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} < 0, \quad \forall (x, z) : \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = 0$$

e o resultado segue pela definição 1.1.

◇◇

Este resultado é equivalente ao resultado dado pelas condições do lema 1.1 quando consideramos $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. O interessante aqui é que se obteve condições necessárias e suficientes semelhantes, com uma abordagem inicial diferente. Ou seja, uma ligação entre as condições dadas pelo lema 1.4 e o lema 1.1.

A seguir, tratamos do problema de estabilidade para sistemas incertos. Aqui os resultados apresentados estabelecem apenas condições suficientes.

Teorema 2.2 *Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema incerto*

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z \\ 0 = J_3x + J_4z \end{cases} \quad (2.3)$$

e suponha que

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} \\ J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Então o sistema (2.3), (2.4) é quadraticamente estável se existem matrizes $P > 0$ e L tais que a seguinte LMI seja satisfeita:

$$\begin{bmatrix} J_{1i}'P + PJ_{1i} & PJ_{2i} \\ J_{2i}'P & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix}' L' < 0, \quad \forall i = 1, \dots, q \quad (2.5)$$

Em caso afirmativo, $v(x) = x'Px$ é uma função de Lyapunov para o sistema (2.3), (2.4).

Prova: Suponha (2.5) satisfeita, então, por convexidade, temos com (2.4)

$$\begin{bmatrix} J_1'P + PJ_1 & PJ_2 \\ J_2'P & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix}' L' < 0$$

Pré e pós multiplicando-a por $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}'$ e $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$, teremos

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} J_1'P + PJ_1 & PJ_2 \\ J_2'P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} < 0 \quad \forall (x, z): \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = 0, \text{ o que prova o teorema pela definição 1.1.}$$

◇◇

A noção de sistema dual, dada abaixo, pode ser interessante no caso de síntese, onde problemas de estabilização do sistema primal podem ser mais facilmente resolvidos com a utilização do sistema dual.

Considere o sistema incerto:

$$\begin{cases} \dot{x}_d = J_1'x_d + J_3'z_d \\ 0 = J_2'x_d + J_4'z_d \end{cases} \quad (2.6)$$

onde $x_d \in R^n$, $z_d \in R^l$ são, respectivamente, os vetores de variáveis de estado e das variáveis algébricas.

Denominaremos o sistema (2.6) de Sistema Dual(\mathcal{D}) e o sistema (2.7) de Sistema Primal(\mathcal{P}). Note que o sistema (2.6) é obtido a partir do transposto do sistema original, ou seja:

$$\mathcal{P} : A = J_1 - J_2J_4^{-1}J_3 \leftrightarrow \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z \\ 0 = J_3x + J_4z \end{cases}$$

$$\mathcal{D} : A' = J_1' - J_3'J_4^{-T}J_2' \leftrightarrow \begin{bmatrix} J_1' & J_3' \\ J_2' & J_4' \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_d = J_1'x_d + J_3'z_d \\ 0 = J_2'x_d + J_4'z_d \end{cases}$$

É importante ressaltar que se $v(x) = x'Px$ é uma função de Lyapunov para o sistema primal, então $v_d = x_d'P^{-1}x_d$ é uma função de Lyapunov para o sistema dual e vice-versa. Para verificar esse fato, note que para o primal a condição de estabilidade é $\exists P > 0 : A'P + PA < 0$ e para o dual $\exists W > 0 : AW + WA' < 0$. Logo, se as condições do Primal estão satisfeitas, as do dual também o são com $W = P^{-1}$.

Corolário 2.1 *Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema incerto*

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z \\ 0 = J_3x + J_4z \end{cases} \quad (2.7)$$

e suponha que

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} \\ J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Então o sistema (2.7), (2.8) é quadraticamente estável se existem matrizes $W > 0$ e L tais que:

$$\begin{bmatrix} WJ'_{1i} + J_{1i}W & WJ'_{3i} \\ J_{3i}W & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J'_{2i} & J'_{4i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J'_{2i} & J'_{4i} \end{bmatrix}' L' < 0, \forall i = 1, \dots, q \quad (2.9)$$

Em caso afirmativo, $v(x) = x'W^{-1}x$ é uma função de Lyapunov para o sistema (2.7), (2.8).

Prova: Se (2.9) estiver satisfeita, então por convexidade juntamente com (2.8) temos

$$\begin{bmatrix} WJ'_1 + J_1W & WJ'_3 \\ J_3W & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J'_2 & J'_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J'_2 & J'_4 \end{bmatrix}' L' < 0 \quad (2.10)$$

Pós e pré multiplicando-a por $\begin{bmatrix} x_d \\ z_d \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x_d \\ z_d \end{bmatrix}'$ teremos que

$$\begin{bmatrix} x_d \\ z_d \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} WJ'_1 + J_1W & WJ'_3 \\ WJ_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ z_d \end{bmatrix} < 0 \quad \forall (x_d, z_d) : \begin{bmatrix} J'_2 & J'_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ z_d \end{bmatrix} = 0$$

Pela definição 1.1, provamos que $v(x_d) = x'_d W x_d$ é função de Lyapunov para o Sistema Dual, então $v(x) = x'W^{-1}x$ é função de Lyapunov para o Sistema Primal, concluindo a prova do teorema.

◇◇

2.2.2 Realimentação de Estados

O processo de estabilização de sistemas na forma algébrico-diferencial, via realimentação de estados, em alguns casos, busca estabilizar, através de técnicas já conhecidas de controle, o sistema diferencial resultante da eliminação das variáveis algébricas.

Os teoremas a seguir dão condições suficientes para que o sistema seja estabilizável sem a eliminação de nenhuma variável, o que permite a inclusão de incertezas em todas as matrizes J_i .

Teorema 2.3 *Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema incerto*

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z + B_1u \\ 0 = J_3x + J_4z \end{cases} \quad (2.11)$$

e suponha que

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B_1 \\ J_3 & J_4 & 0 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} & B_{1i} \\ J_{3i} & J_{4i} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Então o sistema (2.11), (2.12) é quadraticamente estabilizável, pela lei de controle $u = K_1x + K_2z$, se existem matrizes $W > 0$, $R > 0$, N , M , F_1 , F_2 tais que as seguintes LMIs sejam factíveis:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} WJ'_{1i} + J_{1i}W + B_{1i}F_1 + F'_1B'_{1i} & J_{2i}R + B_{1i}F_2 \\ RJ'_{2i} + F'_2B'_{1i} & 0 \end{bmatrix} + N[J_{3i} \ J_{4i}] + [J_{3i} \ J_{4i}]'N' < 0 \\ M[J_{3i} \ J_{4i}] = [J_{3i}W \ J_{4i}R] \quad \forall i = 1, \dots, q \end{cases} \quad (2.13)$$

Em caso afirmativo, $v(x) = x'W^{-1}x$ é uma função de Lyapunov para o sistema em malha fechada e $K_1 = F_1W^{-1}$, $K_2 = F_2R^{-1}$ são os ganhos estabilizantes.

Prova: Suponha que (2.13) esteja satisfeita e defina $L = NM^{-1}$, $K_1 = F_1W^{-1}$ e $K_2 = F_2R^{-1}$. Como $M[J_{3i} \ J_{4i}] = [J_{3i}W \ J_{4i}R]$, temos que:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} WJ'_{1i} + J_{1i}W + B_iK_1W + WK'_1B'_i & J_{2i}R + B_iK_2R \\ RJ'_{2i} + RK'_2B'_i & 0 \end{bmatrix} + L[J_{3i}W \ J_{4i}R] + \\ & + [J_{3i}W \ J_{4i}R]'L' < 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por convexidade e com (2.12), temos:

$$\begin{bmatrix} WJ'_1 + J_1W + BK_1W + WK'_1B' & J_2R + BK_2R \\ RJ'_2 + RK'_2B' & 0 \end{bmatrix} + L[J_3W \ J_4R] + [J_3W \ J_4R]'L' < 0 \quad (2.15)$$

Pré e Pós multiplicando-a por $\begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix}'$ e $\begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} WJ'_1 + J_1W - BK_1W - WK'_1B' & J_2R - BK_2R \\ & RJ'_2 - RK'_2B' \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix} < 0$$

sempre que $[J_3W \ J_4R] \begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = 0$

Com $W = P^{-1} > 0$, $R > 0$, $x_0 = Px$ e $z_0 = R^{-1}z$, concluímos a prova do teorema pela definição 1.2.

◇◇

Corolário 2.2 *Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema incerto*

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z + B_1u \\ 0 = J_3x + J_4z + B_2u \end{cases} \quad (2.16)$$

e suponha que

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B_1 \\ J_3 & J_4 & B_2 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} & B_{1i} \\ J_{3i} & J_{4i} & B_{2i} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Então o sistema (2.16), (2.17) é quadraticamente estabilizável por uma lei de controle do tipo $u = K_1x$ se $\exists W > 0$, L , F , tais que as seguintes LMIs sejam factíveis $\forall i = 1, \dots, q$:

$$\begin{bmatrix} WJ'_{1i} + J_{1i}W + B_{1i}F + F'B'_{1i} & WJ'_{3i} + F'B'_{2i} \\ J_{3i}W + B_{2i}F & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J'_{2i} & J'_{4i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J'_{2i} & J'_{4i} \end{bmatrix}' L' < 0 \quad (2.18)$$

Em caso afirmativo, $K_1 = FW^{-1}$ é o ganho estabilizante e $v(x) = x'W^{-1}x$ é uma função de Lyapunov para o sistema realimentado.

Prova: A prova é semelhante ao corolário 2.1, necessitando-se apenas substituir J_1 por $J_1 + B_1K_1$ e J_3 por $J_3 + B_2K_1$ na LMI (2.9).

◇◇

Quando o sistema não apresenta parâmetros incertos, ou seja $q = 1$, as condições do Teorema 2.2 e dos Corolários 2.1, 2.2 são necessárias e suficientes. A prova da necessidade é obtida através da aplicação do Lema 1.4.

As condições do Teorema 2.3 são apenas suficientes, mesmo quando o sistema não apresenta incertezas. No entanto, se aplicarmos uma transformação de similaridade em x e z , tais que $x_0 = \tau_x^{-1}x$ e $z_0 = \tau_z^{-1}z$, as condições do Teorema 2.3 mudam para

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} WJ'_{1i} + J_{1i}W + BF_1 + F'_1B' & J_{2i}R + BF_2 \\ RJ'_{2i} + F'_2B' & 0 \end{array} \right] + N[J_{3i}T_x \ J_{4i}T_z] + \\ + [J_{3i}T_x \ J_{4i}T_z]' N' < 0 \\ M[J_{3i}T_x \ J_{4i}T_z] = [J_{3i}W \ J_{4i}R] \end{array} \right. \quad \forall i = 1, \dots, q. \quad (2.19)$$

onde $T_x = \tau_x \tau'_x$ e $T_z = \tau_z \tau'_z$. Com isso, podemos encontrar valores de T_x e T_z que tornem o problema factível. Contudo, esse não é um trabalho trivial, já que as condições acima não são convexas em T_x e T_z . Uma alternativa para tal é tentar encontrar T_x e T_z através de teste de Dectabilidade e Estabilizabilidade, como propôs [CT99].

2.2.3 Exemplos

Nos exemplos a seguir, utilizamos o software matemático Scilab(desenvolvido pelo INRIA, França).

Exemplo 2.1 *Primeiramente iremos considerar o caso de análise, com o sistema descrito na forma (2.3), onde :*

$$J_1 = \begin{pmatrix} -10 & -5 \\ -14 & -11 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Note que o sistema é estável, dado que os autovalores de $(J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3)$ são:

$$-2.4262859$$

$$-26.240381$$

Aplicando o Teorema 2.1, comprovamos a estabilidade do sistema, obtendo:

$$L = \begin{pmatrix} 0.0305042 & 0.0679597 \\ -0.1800858 & -0.1866456 \\ -0.5530199 & -0.0151116 \\ 0.0839101 & -0.5377337 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 19.668744 & -1.5244659 \\ -1.5244659 & 4.4820319 \end{pmatrix}$$

Considerando o mesmo sistema, mas agora, com elementos incertos nas matrizes J_3 e J_4 da seguinte forma:

$$J_3 = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 6 & 6(1 + \delta_1) \end{pmatrix}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 6(1 + \delta_2) \end{pmatrix}$$

Aplicando o teorema 2.2, conseguimos provar que o sistema acima continua quadraticamente estável para uma variação de 70% em δ_1 e de 80% em δ_2 .

Exemplo 2.2 Podemos também aplicar o corolário 2.1 no mesmo exemplo, aqui apenas para o caso nominal, obtendo:

$$L = \begin{pmatrix} 0.0375533 & -0.0481731 \\ -0.1082332 & -0.0382336 \\ -0.3055450 & 0.0116717 \\ 0.0201787 & -0.3107010 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 19.668744 & -1.5244659 \\ -1.5244659 & 4.4820319 \end{pmatrix}$$

Aqui percebe-se que não há, no caso de análise, uma diferença entre aplicar o teorema de análise com abordagem dual ou primal, mas isso fica mais evidente para o caso de síntese via realimentação de estados onde a abordagem dual é bem menos restritiva.

Exemplo 2.3 Considerando agora o sistema na forma (1.3) com

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 8 \\ 9 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 8 \\ 21 & 15 & 15 \\ 6 & 3 & 6 \\ 24 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que tem o seguinte conjunto de autovalores em malha aberta :

$$\begin{aligned} & -18.020392 \\ & \quad 1.612461 \\ & \quad 35.230153 \end{aligned}$$

Utilizando o teorema 2.3 obtemos os seguintes ganhos :

$$K_1 = (-13376.846 \quad -77287.489 \quad -42727.209)$$

$$K_2 = (-0.4931469 \quad 0.4410784 \quad 0.2298262 \quad -0.4865354)$$

que levam os autovalores em malha fechada para:

$$\begin{aligned} & -23190078. \\ & -1.6999876 + 6.3699917i \\ & -1.6999876 - 6.3699917i \end{aligned}$$

Exemplo 2.4 *Aqui utilizamos um exemplo de sistemas de potência cujos dados numéricos podem ser encontrados na seção A.1 do Apêndice A.*

Aplicando o corolário 2.2, obtemos

$$K_1 = (-8503.5176 \quad -2798.8724 \quad -3292.6663 \quad -0.1280335)$$

que leva ao seguinte conjunto de autovalores em malha fechada:

$$\begin{aligned} & -67.715007 + 997.07621i \\ & -67.715007 - 997.07621i \\ & -9.55111 \\ & -3.3599221 \end{aligned}$$

Os ganhos aqui obtidos são elevados, mas deve-se levar em conta que nenhum critério de performance foi utilizado. No capítulo 4, utilizando critérios de performance, obtemos para este mesmo exemplo ganhos mais razoáveis.

2.3 Sistemas Discretos

No caso discreto, os sistemas com restrições algébricas são descritos por um conjunto de equações algébricas e recursivas (à diferença). Os resultados a seguir são uma extensão

dos resultados obtidos para o caso contínuo.

2.3.1 Análise

Os teoremas a seguir fornecem condições suficientes para provar a estabilidade de sistemas discretos com restrições algébricas.

Teorema 2.4 *Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema incerto*

$$\begin{cases} x_{k+1} = J_1 x_k + J_2 z_k \\ 0 = J_3 x_k + J_4 z_k \end{cases} \quad (2.20)$$

e suponha que

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} \\ J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Então, o sistema (2.20), (2.21) é quadraticamente estável se existem matrizes $P > 0$ e L , tais que a seguinte LMI esteja satisfeita:

$$\begin{bmatrix} - \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix}' L' \begin{bmatrix} J_{1i}' P \\ J_{2i}' P \\ -P \end{bmatrix} \\ P \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i = 1, \dots, q \quad (2.22)$$

Em caso afirmativo, $v(x_k) = x_k' P x_k$ é função de Lyapunov para o sistema (2.20), (2.21).

Prova Suponha que (2.22) satisfeita; pela propriedade da convexidade e por (2.21), teremos:

$$\begin{bmatrix} - \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix}' L' \begin{bmatrix} J_1' P \\ J_2' P \\ -P \end{bmatrix} \\ P \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0$$

Aplicando o Complemento de Schur na LMI acima, obtemos:

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix}' L' < 0$$

Pré e Pós multiplicando esta equação por $\begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix}' \left(\begin{bmatrix} J_1' \\ J_2' \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix} < 0, \forall \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix} = 0 \quad (2.23)$$

que é a versão discreta da definição 1.1.

◇◇

A abordagem Dual também pode ser utilizada, como no caso contínuo, para garantir a estabilidade do sistema Primal.

Corolário 2.3 *Seja $Co\{\Psi_i\}_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Então o sistema (2.20), (2.21) é quadraticamente estável se existem matrizes $W > 0$ e L tais que a seguinte LMI esteja satisfeita:*

$$\begin{bmatrix} - \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J_{2i} & J_{4i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{2i} & J_{4i} \end{bmatrix}' L' \begin{bmatrix} J_{1i}W \\ J_{3i}W \\ -W \end{bmatrix} \\ W \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{3i} \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0, \forall i = 1, \dots, q \quad (2.24)$$

Em caso afirmativo, $v(x_k) = x_k' W^{-1} x_k$ é uma função de Lyapunov do sistema.

Prova De forma análoga ao caso contínuo, podemos verificar a estabilidade do sistema (2.20), (2.21) (Primal), analisando a estabilidade do seguinte sistema

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = J_1' \tilde{x}_k + J_3' z_k \\ 0 = J_2' \tilde{x}_k + J_4' z_k \end{cases} \quad (2.25)$$

onde (2.25) é denominado sistema Dual. Sabemos que, se $v(x_k) = x_k' W^{-1} x_k$ é uma função de Lyapunov para o sistema primal, então $v(\tilde{x}_k) = \tilde{x}_k' W \tilde{x}_k$ será uma função de Lyapunov para o sistema (2.25) (e vice-versa). Este fato pode ser verificado pela condição de estabilidade do primal $\exists P > 0 : A'PA - P < 0$ e o Complemento de Schur.

Suponha (2.24) válida. Pela propriedade da convexidade, teremos que ela é válida para (2.21). Aplicando o Complemento de Schur, obtemos:

$$\begin{bmatrix} J_1' & J_3' \end{bmatrix}' W \begin{bmatrix} J_1 & J_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J_2 & J_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_2' & J_4' \end{bmatrix}' L' < 0$$

Pré e pós multiplicando a equação acima por $\begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix}'$ e $\begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix}$, concluímos a prova pela versão discreta da definição 1.1.

2.3.2 Realimentação de Estados

Teorema 2.5 *Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema incerto*

$$\begin{cases} x_{k+1} = J_1 x_k + J_2 z_k + Bu \\ 0 = J_3 x_k + J_4 z_k \end{cases} \quad (2.26)$$

e suponha que

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B \\ J_3 & J_4 & 0 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} & B_i \\ J_{3i} & J_{4i} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Então o sistema (2.26), (2.27) é quadraticamente estabilizável pela lei de controle $u = -K_1 x$ se existem matrizes $W > 0$, F , L , tais que a seguinte LMI seja factível:

$$\begin{bmatrix} - \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J'_{2i} & J'_{4i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J'_{2i} & J'_{4i} \end{bmatrix}' L' \begin{bmatrix} J_{1i}W - B_i F \\ J_{3i}W \\ -W \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} W J'_{1i} - F' B_i & W J'_{3i} \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, q \quad (2.28)$$

Em caso afirmativo, $K_1 = FW^{-1}$ é o ganho de realimentação em malha fechada e $v(x_k) = x_k' W^{-1} x_k$ é função de Lyapunov para o sistema (2.26), (2.27).

Prova : A prova é semelhante ao caso de análise usando a abordagem Dual. Teremos apenas que substituir J_1 por $J_1 - BK_1$ e definir $K_1 = FW^{-1}$.

2.3.3 Exemplos

Exemplo 2.5 *Considerando o sistema (2.20) onde:*

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.8 \\ 0.6 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.8 & 0.7 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}, J_4 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Note que o sistema é estável já que os autovalores são:

$$\begin{aligned} & -0.2628571 + 0.4336461i \\ & -0.2628571 - 0.4336461i \end{aligned}$$

A) utilizando o Teorema 2.4:

Obtemos

$$P = \begin{pmatrix} 10977.169 & 5740.0266 \\ 5740.0266 & 8142.209 \end{pmatrix}$$

B) Abordagem DUAL: usando o corolário 2.3, teremos:

$$W = \begin{pmatrix} 820.5735 & -413.29314 \\ -413.29314 & 774.89858 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.6 Utilizamos o exemplo A.1 do apêndice A, discretizado com um período de amostragem de $T_a = 0.01$.

Em malha aberta o sistema discretizado tem os seguintes autovalores:

$$\begin{aligned} & 0.8348422 \\ & 0.9408887 \\ & 1.0105966 + 0.0479511i \\ & 1.0105966 - 0.0479511i \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 2.5, obtemos como ganho K , da realimentação de estados $u = -Kx$,

$$K = (137.45132 \quad 70.395621 \quad 670.92199 \quad 0.2115725)$$

que leva os autovalores em malha fechada para:

$$\begin{aligned}
& -0.0391355 + 0.1439773i \\
& -0.0391355 - 0.1439773i \\
& 0.8797351 + 0.1269674i \\
& 0.8797351 - 0.1269674i
\end{aligned}$$

2.4 Extensão para Sistemas LFT

Os resultados obtidos na seção 2.2.1 são aqui estendidos para sistemas LFT (Linear Fractional Transformations) [LZD91] [DPZ91] [LZD96]. A estrutura destes sistemas pode ser vista como um problema de realimentação, mostrado no diagrama de blocos da figura 2.1.

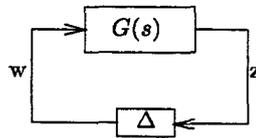


Figura 2.1: Sistema LFT

onde $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ representa a matriz de transferência do sistema.

Consideramos o caso em que Δ é uma matriz diagonal com elementos incertos, representada por

$$\Delta \in \Delta_s = \{\Delta : \Delta = \text{Diag}(\delta_i I_{n_i}), \quad \delta_i \in \mathbb{R}, |\delta_i| \leq 1\}. \quad (2.29)$$

A representação por variáveis de estado do sistema na forma LFT é dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx + Dw \\ w = \Delta z \end{cases} \quad (2.30)$$

onde A, B, C, D são matrizes conhecidas e $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^k$ e $z \in \mathbb{R}^k$.

Os teoremas a seguir utilizam-se da idéia do L-Ca "Scaling" e D-G "Scaling" apresentados nas seções 1.4.3, 1.4.4. O problema tratado é o de análise, ou seja, verificar se o sistema é quadraticamente estável, com $\Delta \in \Delta_s$. Para tal, assumimos que $\|D\| < 1$, garantindo que o sistema (2.30) seja regular.

Teorema 2.6 *Seja $\{\Delta_i\}_{i=1}^q$ o conjunto de vértices do politopo Δ_s . Então o sistema incerto*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx + Dw \\ w = \Delta z \end{cases} \quad (2.31)$$

é quadraticamente estável se $\exists L, P$, tais que:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A'P + PA & PB\Delta_i \\ \Delta_i B'P & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} C & (D\Delta_i - I) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & (D\Delta_i - I) \end{bmatrix}' L < 0 \\ P > 0 \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, q. \quad (2.32)$$

Em caso afirmativo, $v(x) = x'Px$ é função de Lyapunov para o sistema.

Prova: O sistema (2.31), através da eliminação da variável w , é equivalente ao seguinte sistema na forma algébrico-diferencial desacoplado:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\Delta z \\ 0 = Cx + (D\Delta - I)z \end{cases} \quad (2.33)$$

Considerando $J_1 = A$, $J_2 = B\Delta$, $J_3 = C$ e $J_4 = (D\Delta - I)$, podemos facilmente aplicar o Teorema 2.2 ($L - C_a$ Scaling) no sistema 2.33, o que prova o teorema.

◇◇

Note que a condição $\|D\| < 1$ é necessária para garantir a regularidade do sistema, isto é, J_4 inversível para todo Δ . O interessante da abordagem acima é que se conseguiu uma formulação politópica para as incertezas limitadas em norma.

O resultado abaixo é similar ao resultado obtido por Feron et al [FAG96] na proposição 1.1.

Teorema 2.7 *Seja Δ_s definido por (2.29). Então o sistema incerto*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx + Dw \\ w = \Delta z, \quad \Delta \in \Delta_s \end{cases} \quad (2.34)$$

é quadraticamente estável se $\exists T, S, P$, tais que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} A'P + PA + C'SC & PB + C'SD + C'T' \\ B'P + D'SC + TC & -S + D'SD + TD + D'T' \end{array} \right] < 0 \\ T = -T', \quad T = \text{Diag}\{T_i\}, \quad T_i \in R^{n_i \times n_i} \\ S > 0, \quad S = \text{Diag}\{S_i\}, \quad S_i \in R^{n_i \times n_i} \\ P > 0 \end{array} \right. \quad (2.35)$$

Em caso afirmativo, $v(x) = x'Px$ é função de Lyapunov para o sistema.

Prova: As condições para que $v(x) = x'Px$ seja função de Lyapunov para o sistema (2.34) são $P > 0$ e

$$\dot{v}(x) = x'(A'P + PA)x + w'B'Px + x'PBw < 0 \quad (2.36)$$

sempre que $z = Cx + Dw$ e $w = \Delta z$.

Pelo lema 1.5, teremos que :

$$w_i = \delta_i z_i \Leftrightarrow \begin{cases} w_i' S_i w_i \leq z_i' S_i z_i, & S_i > 0 \\ w_i' T_i z_i = 0 & T_i = -T_i' \end{cases}$$

Utilizando o fato de que $z = Cx + Dw$, teremos:

$$\begin{cases} w_i' S_i w_i \leq z_i' S_i z_i = (C_i x + D_i w)' S_i (C_i x + D_i w), & S_i > 0 \\ w_i' T_i z_i = w_i' T_i (C_i x + D_i w) = 0 & T_i = -T_i' \end{cases}$$

Aplicando S-procedure [BGFB94], obtemos que:

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) \leq & x'(A'P + PA)x + w'B'Px + x'PBw + (Cx + Dw)'S(Cx + Dw) - w'Sw \\ & + w'T(Cx + Dw) + (Cx + Dw)'Tw < 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Note que (2.37) pode ser escrita na forma LMI, como indicado em (2.35). Assim, se (2.35) está satisfeita, temos (2.37) satisfeita e, conseqüentemente, (2.36) também está, o que prova o teorema.

◇◇

Teorema 2.8 *Seja Δ_s definido em (2.29). Então o sistema incerto*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx + Dw \\ w = \Delta z, \quad \Delta \in \Delta_s \end{cases} \quad (2.38)$$

é quadraticamente estável se $\exists L, P, S, T$, tais que:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A'P + PA & PB & 0 \\ B'P & -S & T \\ 0 & T' & S \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} C & D & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D & -I \end{bmatrix}' L' < 0 \\ T = -T', \quad T = \text{Diag}\{T_i\} \\ S > 0, \quad S = \text{Diag}\{S_i\} \\ P > 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Em caso afirmativo, $v(x) = x'Px$ é função de Lyapunov para o sistema.

Prova: As condições para que $v(x) = x'Px$ seja função de Lyapunov para o sistema (2.38) são $P > 0$ e

$$\dot{v}(x) = x'(A'P + PA)x + w'B'Px + x'PBw < 0$$

sempre que $0 = Cx + Dw - z$ e $w = \Delta z$.

Uma condição suficiente para incorporar a restrição $w = \Delta z$ a $\dot{v}(x)$ é dada a seguir.

Como $w_i = \delta_i z_i \Leftrightarrow \begin{cases} w_i' S_i w_i \leq z_i' S_i z_i, & S_i > 0 \\ w_i' T_i z_i = 0 & T_i = -T_i' \end{cases}$ pelo lema 1.5, de maneira análoga ao teorema 2.7, podemos aplicar S-procedure e obter

$$\dot{v}(x) \leq \begin{bmatrix} x \\ w \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'P + PA & PB & 0 \\ B'P & -S & T \\ 0 & T' & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ z \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.40)$$

sempre que $\begin{bmatrix} C & D & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ z \end{bmatrix} = 0$

Supondo que (2.35) esteja satisfeita, podemos simplesmente pré e pós multiplicá-la

por $\begin{bmatrix} x \\ w \\ z \end{bmatrix}'$ e $\begin{bmatrix} x \\ w \\ z \end{bmatrix}$ e o teorema fica provado com (2.40).

◇◇

Proposição 2.1 *O Teorema 2.7 é um caso particular do Teorema 2.8, obtido com*

$$L_1 = \frac{1}{2}C'S, \quad L_2 = T + \frac{D'S}{2} \quad \text{e} \quad L_3 = S\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right)$$

sendo $\epsilon > 0$ um escalar suficientemente pequeno.

Prova: Considere as condições dadas pelo Teorema 2.8. Fazendo a multiplicação de $L \begin{bmatrix} C & D & -I \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1C & L_1D & -L_1 \\ L_2C & L_2D & -L_2 \\ L_3C & L_3D & -L_3 \end{bmatrix}$$

então

$$L \begin{bmatrix} C & D & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D & -I \end{bmatrix}' L' = \begin{bmatrix} L_1C + C'L_1' & L_1D + C'L_2' & -L_1 + C'L_3' \\ (L_1D + C'L_2')' & L_2D + D'L_2' & -L_2 + D'L_3' \\ (-L_1 + C'L_3')' & (-L_2 + D'L_3')' & -L_3 - L_3' \end{bmatrix}$$

a LMI (2.39) fica:

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + L_1C + C'L_1' & PB + L_1D + C'L_2' & -L_1 + C'L_3' \\ (PB + L_1D + C'L_2')' & -S + L_2D + D'L_2' & T - L_2 + D'L_3' \\ (-L_1 + C'L_3')' & (T - L_2 + D'L_3')' & S - L_3 - L_3' \end{bmatrix} < 0$$

Escolhendo $L_1 = \frac{1}{2}C'S$ e $L_2 = T + \frac{D'S}{2}$ e $L_3 = S\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right)$ e definindo

$$\Phi = \begin{bmatrix} A'P + PA + C'SC & PB + C'SD\frac{1}{2} + C'(T + \frac{D'S}{2}) \\ (PB + C'SD\frac{1}{2} + C'(T + \frac{D'S}{2}))' & -S + TD + D'T' + D'SD \end{bmatrix}$$

temos que:

$$\begin{bmatrix} \Phi & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}C'S + C'S(\frac{1}{2} + \epsilon) \\ D'S\epsilon \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2}C'S + C'S(\frac{1}{2} + \epsilon))' & (D'S\epsilon)' \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -S\epsilon \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0$$

Aplicando Schur:

$$\Phi + \begin{bmatrix} \epsilon B_2' S \\ \epsilon D' S \end{bmatrix} S^{-1} \epsilon^{-1} \begin{bmatrix} \epsilon S B_2 & \epsilon S D \end{bmatrix} < 0$$

efetuando as multiplicações no segundo termo da desigualdade, obtemos:

$$\Phi + \epsilon \begin{bmatrix} C' \\ D' \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} < 0$$

Para ϵ suficientemente pequeno, a expressão acima se reduz à condição dada pelo teorema 2.7. O que prova a nossa proposição, ou seja, D-G scaling caso particular de $L-Ca/D-G$ scaling.

◇◇

2.4.1 Uma Aplicação

Exemplo 2.7 *Uma aplicação a sistemas LFT:*

Considerando o seguinte exemplo de sistema LFT (2.30) onde :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

A variação máxima em módulo de δ_1 e δ_2 , obtida pela aplicação de cada teorema, é mostrada na tabelas (2.1), (2.2) e (2.3).

É interessante notar que o teorema 2.6 é menos restritivo que os outros teoremas. Já provamos que o teorema 2.7 é menos restritivo do que o teorema 2.8. Falta demonstrar analiticamente se a abordagem politópica é mais vantajosa do que as outras. Em todos os exemplos que simulados, a metodologia politópica foi menos restritiva.

Variação Max. de	Teoremas		
	2.6	2.7	2.8
$\ \delta_1\ $ com $\ \delta_2\ = 0$	0.5	0.42	0.42
$\ \delta_2\ $ com $\ \delta_1\ = 0$	0.24	0.17	0.17

Tabela 2.1: variação máxima de $\|\delta_i\|$ com $\|\delta_j\| = 0$

Variação Max. de	Teoremas		
	2.6	2.7	2.8
$\ \delta_1\ $	0.33	0.17	0.18
$\ \delta_2\ $	0.14	0.14	0.14

Tabela 2.2: variação máxima de $\|\delta_1\|$ com $\|\delta_2\| \leq 0.14$

Variação Max. de	Teoremas		
	2.6	2.7	2.8
$\ \delta_1\ $	0.15	0.15	0.15
$\ \delta_2\ $	0.20	0.14	0.15

Tabela 2.3: variação máxima de $\|\delta_2\|$ com $\|\delta_1\| \leq 0.15$.

2.5 Comentários

Neste capítulo fornecemos condições suficientes para o problema de análise e síntese via realimentação de estados, evitando o processo de inversão de matrizes e preservando a esparsidade do sistema.

O interessante desta abordagem é que podemos, de maneira simplificada, considerar incertezas em todos os elementos do sistema.

Outro ponto importante é a maneira alternativa de se tratar sistemas na forma LFT. Com isso, resolve-se o problema de incertezas do tipo limitada em norma de forma politópica (Teorema 2.6), sendo a solução menos restritiva. O ponto negativo deste é de ordem numérica, já que o número de LMIs cresce exponencialmente, à razão de 2^q . A vantagem das duas outras abordagens é o fato do número de LMIs ser independente do número de parâmetros incertos no sistema.

Capítulo 3

Realimentação de saída

3.1 Introdução

O processo de estabilização de sistemas dinâmicos por realimentação de saída é uma técnica de controle frequentemente utilizada na prática, pois dificilmente temos acesso a todas as variáveis de estado. Normalmente, as técnicas de estabilização de sistemas algébrico-diferenciais, via realimentação de saída, utilizam o sistema obtido com a eliminação das variáveis algébricas. Este procedimento permite a utilização de diversas técnicas já conhecidas de realimentação de saída, tais como: LMI, alocação de pólos, Função de Lyapunov, posicionamento de auto-estrutura entre outros [SADG97].

De forma análoga ao caso de realimentação de estados, o que propomos, neste capítulo, é estabilizar o sistema algébrico-diferencial através de uma realimentação de saída, sem a eliminação da variável algébrica. A idéia é garantir que o sistema incerto seja quadraticamente estabilizável e que $v(x) = x'Px$, $\forall x$, com $P > 0$, seja uma função de Lyapunov para o sistema realimentado.

3.2 Realimentação de Saída

3.2.1 Estática

Aqui trataremos do caso de uma realimentação de saída desacoplada do tipo

$$u = - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} y, \text{ onde } y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}.$$

Esse tipo de abordagem é interessante, pois caracteriza uma independência entre as variáveis algébricas e as variáveis diferenciais. Mas os resultados a seguir podem ser facilmente transpostos para o caso de realimentação de saída sem desacoplamento.

Teorema 3.1 *Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema incerto*

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1 x + J_2 z + Bu \\ 0 = J_3 x + J_4 z \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.1)$$

e suponha que

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \\ C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} \\ J_{3i} & J_{4i} \\ C_{1i} & 0 \\ 0 & C_{2i} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Então o sistema (3.1), (3.2) é quadraticamente estabilizável pela realimentação de saída $u = - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} y$ se existem P, L, F_1, F_2, M tais que as seguintes LMIs sejam factíveis:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} PJ_{1i} + J'_{1i}P - BF_1C_{1i} - C'_{1i}F'_1B' & PJ_{2i} - BF_2C_{2i} \\ J'_{2i}P - C'_{2i}F'_2B' & 0 \end{bmatrix} + L[J_{3i} \ J_{4i}] + [J_{3i} \ J_{4i}]'L' < 0 \\ PB = BM \\ P > 0 \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, q \quad (3.3)$$

Em caso afirmativo, os ganhos de realimentação são dados por $K_1 = M^{-1}F_1$ e $K_2 = M^{-1}F_2$ e $v(x) = x'Px$ é uma função de Lyapunov para o sistema realimentado.

Prova: Suponha que as condições do Teorema 3.1 estejam satisfeitas. Como $K_1 = M^{-1}F_1$, $K_2 = M^{-1}F_2$ e $PB = BM$, teremos:

$$\begin{bmatrix} PJ_{1i} + J'_{1i}P - PBK_1C_{1i} - C'_{1i}K'_1B'P & PJ_{2i} - PBK_2C_{2i} \\ J'_{2i}P - C'_{2i}K'_2B'P & 0 \end{bmatrix} + L[J_{3i} \ J_{4i}] + [J_{3i} \ J_{4i}]'L' < 0$$

Pela propriedade da convexidade juntamente com (3.2), obtemos

$$\begin{bmatrix} PJ_1 + J_1'P - PBK_1C_1 - C_1'K_1'B'P & PJ_2 - PBK_2C_2 \\ J_2'P - C_2'K_2'B'P & 0 \end{bmatrix} + L[J_3 \ J_4] + [J_3 \ J_4]'L' < 0$$

Pré e pós multiplicando-a por $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}'$ e $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$, concluímos a prova do teorema pela definição 1.2.

◇◇

Uma outra alternativa seria trabalharmos com o Problema Dual, de forma análoga a utilizada no problema de realimentação de estados.

O sistema dual ao sistema (3.1) é descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}_d = J_1'x_d + C_1'u_d + J_3'z_d \\ 0 = J_2'x_d + J_4z_d \\ y_d = B'x_d \end{cases} \quad (3.4)$$

onde $u_d = -G_a'y_d$

O teorema a seguir garante condições suficientes para o caso de realimentação de saída do tipo $u = -K_1y$ com $y = C - 1x$.

Corolário 3.1 *Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um polítopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema incerto*

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1x + J_2z + Bu \\ 0 = J_3x + J_4z \\ y = C_1x \end{cases} \quad (3.5)$$

e suponha que

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B \\ J_3 & J_4 & 0 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} & B_i \\ J_{3i} & J_{4i} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Então o sistema (3.5), (3.6) é quadraticamente estabilizável pela realimentação de saída $u = -K_1y$ se existem W, L, F, M e N tais que as seguintes LMIs sejam factíveis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} J_{1i}W + WJ'_{1i} - B_iNC_1 - C'_1N'B'_i & WJ'_{3i} \\ J_{3i}W & 0 \end{array} \right] + L \left[\begin{array}{cc} J'_{2i} & J'_{4i} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} J'_{2i} & J'_{4i} \end{array} \right]' L' < 0 \\ C_1W = MC_1 \end{array} \right. \quad \forall i = 1, \dots, q \quad (3.7)$$

Em caso afirmativo, o ganho de realimentação é dado por $K_1 = M^{-1}N$ e $v(x) = x'W^{-1}x$ é uma função de Lyapunov para o sistema realimentado.

Prova: Supondo que (3.7) esteja satisfeita. Como temos $K_1 = M^{-1}N$ e $C_1W = MC_1$, ficamos com:

$$\left[\begin{array}{cc} J_{1i}W + WJ_{1i} - B_iK_1C_1W - WC'_1K'_1B'_i & WJ'_{3i} \\ J_{3i}W & 0 \end{array} \right] + L \left[\begin{array}{cc} J'_{2i} & J'_{4i} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} J'_{2i} & J'_{4i} \end{array} \right]' L' < 0 \quad (3.8)$$

Por convexidade, teremos com (3.6)

$$\left[\begin{array}{cc} J_1W + WJ_1 - BK_1C_1W - WC'_1K'_1B' & WJ'_3 \\ J_3W & 0 \end{array} \right] + L \left[\begin{array}{cc} J'_2 & J'_4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} J'_2 & J'_4 \end{array} \right]' L' < 0 \quad (3.9)$$

Pré e Pós multiplicando-a por $\begin{bmatrix} x_d \\ z_d \end{bmatrix}'$ e $\begin{bmatrix} x_d \\ z_d \end{bmatrix}$ obtemos

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} x_d \\ z_d \end{bmatrix}' \left[\begin{array}{cc} J_1W + WJ_1 - BK_1C_1W - WC'_1K'_1B' & WJ'_3 \\ J_3W & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_d \\ z_d \end{bmatrix} < 0$$

$$\forall (x_d, z_d) : J'_2x_d + J_4z_d = 0$$

Pela definição 1.2, esta é a condição para que $V(x) = x'_dWx_d$ seja função de Lyapunov para o sistema Dual. Então temos que $V(x) = x'W^{-1}x$ será função de Lyapunov para o sistema primal, concluindo assim a prova do teorema.

◇◇

OBS: quando consideramos $y = C_1x + C_2z$ ($C_2 \neq 0$), obtemos

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc} J_{1i}W + WJ'_{1i} - B_iNC_1 - C'_1N'B'_i & WJ'_{3i} \\ J_{3i}W & 0 \end{array} \right] + L \left[\begin{array}{cc} J_{2i} - C'_2K'_2B'_i & J'_{4i} \end{array} \right] \\ & + \left[\begin{array}{cc} J_{2i} - C'_2K'_2B'_i & J'_{4i} \end{array} \right]' L < 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

que é não-convexa devido ao termo $LC'_2K'_2B'_a$.

3.2.2 Dinâmica

Normalmente, podemos incorporar a dinâmica do controlador no sistema, transformando o problema de realimentação dinâmica de saída em um problema de realimentação estática de dimensão aumentada. Consideramos aqui o problema de realimentação sem desacoplamento entre as variáveis algébricas e diferenciais, ou seja, $u = -Ky$ com $y = C_1x + C_2z$.

Dado o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= J_1x + J_2z + Bu \\ 0 &= J_3x + J_4z \\ y &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

e a seguinte lei de controle:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c + D_c y \end{aligned} \quad (3.12)$$

em malha fechada, teremos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (J_1 + BD_c C_1)x + (J_2 + BD_c C_2)z + BC_c x_c \\ \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c C_1 x + B_c C_2 z \\ 0 &= J_3 x + J_4 z \end{aligned} \quad (3.13)$$

resultando no seguinte sistema aumentado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= J_{1a}x_a + J_{2a}z - B_a G_a C_{1a}x_a - B_a G_a C_{2a}z \\ 0 &= J_{3a}x_a + J_4 z \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $x_a = [x' \ x'_c]'$; $J_{1a} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $B_a = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$; $J_{2a} = \begin{bmatrix} J_2 \\ 0 \end{bmatrix}$;

$$C_{1a} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}; C_{2a} = \begin{bmatrix} C_2 \\ 0 \end{bmatrix}; G_a = \begin{bmatrix} -D_c & -C_c \\ -B_c & -A_c \end{bmatrix}; J_{3a} = \begin{bmatrix} J_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando o sistema (3.14), obtemos o seguinte resultado:

Corolário 3.2 *Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema incerto*

$$\begin{cases} \dot{x}_a = J_{1a}x_a + J_{2a}z + B_a u_a \\ 0 = J_{3a}x + J_4 z \\ y = \begin{bmatrix} C_{1a} & C_{2a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ z \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.15)$$

e suponha que

$$\begin{bmatrix} J_{1a} & J_{2a} \\ J_{3a} & J_4 \\ C_{1a} & C_{2a} \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1ai} & J_{2ai} \\ J_{3ai} & J_{4i} \\ C_{1ai} & C_{2ai} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Então o sistema (3.15), (3.16) é quadraticamente estabilizável pela realimentação de saída $u = -G_a y$ se existem matrizes P, L, F, M tais que as seguintes LMIs sejam factíveis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} P J_{1ai} + J'_{1ai} P - B_a F C_{1ai} - C'_{1ai} F' B'_a & P J_{2ai} - B_a F C_{2ai} \\ J'_{2ai} P - C'_{2ai} F' B'_a & 0 \end{bmatrix} + \\ \qquad \qquad \qquad + L [J_{3ai} \ J_{4i}] + [J_{3ai} \ J_{4i}]' L' < 0 \\ P B_a = B_a M \\ P > 0 \end{array} \right. \quad \forall i = 1, \dots, q \quad (3.17)$$

Em caso afirmativo, a matriz dos ganhos que definem o controlador é dada por $G_a = M^{-1}F$ e $v(x) = x'Px$ é uma função de Lyapunov para o sistema realimentado.

Prova: A prova é idêntica à do teorema 3.1 e será omitida.

◇◇

Às vezes, necessitamos que o controlador tenha alguma estrutura predeterminada. Neste caso, podemos colocar o sistema na forma canônica observável e reorganizar as

matrizes, de forma que os parâmetros desconhecidos fiquem apenas nas matrizes B_c e D_c . Reorganizando então o sistema (3.14), obtemos

$$\begin{cases} \dot{x}_a = (\tilde{J}_{1a} - B_a \tilde{G}_a C_a) x_a + (J_{2a} - B_a \tilde{G}_a C_2) z \\ 0 = J_{3a} x_a + J_4 z \end{cases} \quad (3.18)$$

onde x_a, B_a, J_{2a}, J_{3a} estão definidos na seção anterior e

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{1a} &= \begin{bmatrix} J_1 & BC_c \\ 0 & A_c \end{bmatrix}; \\ \tilde{G}_a &= \begin{bmatrix} -D_c \\ -B_c \end{bmatrix}; \\ C_a &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como o sistema tem a mesma estrutura do sistema 3.15, podemos aplicar o Corolário 3.2, substituindo J_{1a} por \tilde{J}_{1a} , G_a por \tilde{G}_a e C_{1a} por C_a .

◇◇

Nos casos anteriores, podemos facilmente transpor os resultados para uma realimentação de saída desacoplada (sistema do tipo (3.1)). Basta empregarmos o mesmo algebrismo usado para incorporar a dinâmica do controlador ao sistema, obtendo, então, uma nova estrutura para as matrizes G_a, C_{1a} e C_{2a} , podendo-se assim aplicar o Corolário 3.2.

3.3 Extensão para o caso Discreto

Os resultados obtidos para o caso contínuo são facilmente transpostos para o caso discreto. Trataremos aqui apenas do caso de realimentação de saída estática, usando a abordagem Primal. O problema de realimentação de saída dinâmica pode ser obtido de maneira semelhante ao processo feito na seção 3.2.2.

Teorema 3.2 *Seja $Co[\Psi_i]_{i=1}^q$ um politopo convexo de vértices Ψ_i dados. Considere o sistema incerto*

$$\begin{cases} x_{k+1} = J_1 x_k + J_2 z_k + Bu \\ 0 = J_3 x_k + J_4 z_k \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.19)$$

e suponha que

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q, \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} J_{1i} & J_{2i} \\ J_{3i} & J_{4i} \\ C_{1i} & C_{2i} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Então o sistema (3.19), (3.20) é quadraticamente estabilizável pela realimentação de saída $u = - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} y$ se existem matrizes P, L, F_1, F_2, M , tais que as seguintes LMIs sejam factíveis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} - \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{3i} & J_{4i} \end{bmatrix}' L' \begin{bmatrix} J_{1i}'P - C_{1i}'F_1'B' \\ J_{2i}'P - C_{2i}'F_2'B' \\ -P \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} PJ_{1i} - BF_1C_{1i} & PJ_{2i} - BF_2C_{2i} \end{bmatrix} \end{array} \right] < 0 \\ PB = BM \end{array} \right. \quad \forall i = 1, \dots, q \quad (3.21)$$

Em caso afirmativo, $K_1 = M^{-1}F_1$ e $K_2 = M^{-1}F_2$ são os ganhos de realimentação em malha fechada e $v(x_k) = x_k'Px_k$ é função de Lyapunov para o sistema.

Prova Suponha (3.21) satisfeita. Usando as propriedades de convexidade e as igualdades $PB = BM$, $K_1 = M^{-1}F_1$ e $K_2 = M^{-1}F_2$, temos:

$$\left[\begin{array}{c} - \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix}' L' \begin{bmatrix} J_1'P - C_1'K_1'B'P \\ J_2'P - C_2'K_2'B'P \\ -P \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} PJ_1 - PBK_1C_1 & PJ_2 - PBK_2C_2 \end{bmatrix} \end{array} \right] < 0$$

Aplicando o Complemento de Schur na equação acima, teremos:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} J_1 - BK_1C_1 & J_2 - BK_2C_2 \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} J_1 - BK_1C_1 & J_2 - BK_2C_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + L \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_3 & J_4 \end{bmatrix}' L' < 0 \end{aligned}$$

Pré e pós multiplicando a desigualdade acima por $\begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix}'$ e $\begin{bmatrix} x_k \\ z_k \end{bmatrix}$, concluímos a prova de forma análoga a 2.23.

◇◇

3.4 Exemplos

Para os exemplos que se seguem, estaremos considerando o SEE descrito na seção A.2 do apêndice A.

Exemplo 3.1 Considerando uma realimentação de saída estática dada por $y = C_1x + C_2z$ e $u = -Ky$ onde

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtemos como ganho K:

$$K = 0.0909840$$

Este ganho estabiliza o sistema levando os autovalores em malha fechada para:

$$\begin{aligned} & -640.22307 \\ & -41.069961 \\ & -0.3753911 + 6.0424434i \\ & -0.3753911 - 6.0424434i \\ & -2.2276516 \\ & -14.790796 \\ & -0.0010000 \end{aligned}$$

Exemplo 3.2 Considerando agora o caso de realimentação Estática de Saída usando desacoplamento, com

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando o Teorema 3.1, obtemos como ganho

$$K_1 = 0.0023026$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.4185987 & 0.0358428 & -0.0819564 \end{bmatrix}$$

que leva ao seguinte conjunto de autovalores em malha fechada:

$$\begin{aligned} & -67.571972 \\ & -4.6938227 + 28.89169i \\ & -4.6938227 - 28.89169i \\ & -0.4662180 + 5.1533396i \\ & -0.4662180 - 5.1533396i \\ & -14.610203 \\ & -0.0010000 \end{aligned}$$

Exemplo 3.3 Considerando agora o caso de realimentação dinâmica de saída através do sinal de potência elétrica, sem nenhum parâmetro conhecido no controlador, aplicando o Corolário 3.2 obtemos

$$G_a = \begin{bmatrix} 0.3113264 & 0.1684943 \\ 9.633D - 07 & 0.4999812 \end{bmatrix}$$

levando para os seguintes pólos em malha fechada:

$$\begin{aligned} & -65.590352 \\ & -5.6402443 + 26.565806i \\ & -5.6402443 - 26.565806i \\ & -14.518367 \\ & -0.5565239 + 5.6693332i \\ & -0.5565239 - 5.6693332i \\ & -0.0010000 \\ & -0.4999812 \end{aligned}$$

Exemplo 3.4 Considerando agora o caso de realimentação dinâmica de Saída através do sinal de potência elétrica, com o seguinte controlador:

$$G(s) = \frac{k(1 + s\tau_1)}{(1 + s\tau_2)}$$

com τ_2 fixado em 0.28 e aplicando o Corolário 3.2, obtemos como ganho

$$G_a = \begin{bmatrix} 0.3511806 \\ 0.0000031 \end{bmatrix}$$

e os parâmetros do controlador são: $k = -0.3511808$, $\tau_1 = 0.2799$ que leva os autovalores em malha fechada para:

$$\begin{aligned} & -66.258508 \\ & -5.2949099 + 27.358107i \\ & -5.2949099 - 27.358107i \\ & -14.549978 \\ & -0.5519739 + 5.4902876i \\ & -0.5519739 - 5.4902876i \\ & -3.5714302 \\ & -0.0010000 \end{aligned}$$

◇◇

Exemplo 3.5 Considerando o sistema de potência usado na seção anterior e discretizando-o com período de amostragem de $T_a = 0.01$.

O sistema discretizado tem os seguintes autovalores em malha aberta:

$$\begin{aligned} & 0.4079623 \\ & 0.9031130 + 0.1810932i \\ & 0.9031130 - 0.1810932i \\ & 1.000226 + 0.0808196i \\ & 1.000226 - 0.0808196i \\ & 0.8603371 \\ & 0.99999 \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 3.2 teremos que a realimentação de saída $u = -[K_1 \ K_2]y$ estabiliza o sistema com

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.0008012 & 0.0146860 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.2331555 & -0.1597248 & -0.8020158 \end{bmatrix}$$

levando os autovalores em malha fechada para:

- 0.3130646
- 0.5647584
- $0.9961787 + 0.0691667i$
- $0.9961787 - 0.0691667i$
- 0.8525666
- 0.9992920
- 0.99999

3.5 Comentários

Neste capítulo enfocamos o problema de realimentação de saída para sistemas algébrico-diferenciais no tempo contínuo e discreto. A abordagem utilizada é idêntica à utilizada no processo de estabilização por realimentação de estados, ou seja, trata a parte algébrica como uma restrição a mais do problema.

Além do problema de realimentação estática de saída, tratamos também do problema de realimentação de saída dinâmica, incorporando a dinâmica do controlador ao sistema. Outro ponto relevante é a possibilidade de se considerar realimentação de saída do tipo descentralizada, que pode ser interessante em algumas aplicações.

As condições para a solução do problema são apenas suficientes, mesmo quando tratamos de sistemas nominais. No entanto, como no caso de realimentação de estados, estas condições são sensíveis à aplicação de uma transformação de similaridade.

Os exemplos apresentados ilustram o bom desempenho do método proposto, com a obtenção de ganhos pequenos para o controlador.

Capítulo 4

Performance H_2 e H_∞

4.1 Introdução

Atualmente, além do problema de robustez, outro ponto importante na teoria de controle é o problema de performance. Busca-se uma forma de minimizar, na saída do sistema, a influência de perturbações presentes na entrada. Para isto, necessita-se ter uma idéia da medida da variável de performance, ou seja, encontrar um controlador K no qual a função de transferência em malha fechada da entrada da perturbação w , para a saída de performance desejada, z , seja mínima. Um dos caminhos mais comuns para definir uma medida de performance são os critérios de norma H_2 e H_∞ .

Neste capítulo fornecemos condições para o projeto de controladores via realimentação de estados do tipo $u = -Kx$ para sistemas com restrições algébricas, levando em conta os critérios de performance H_2 e H_∞ . Os casos contínuo e discreto serão tratados. Uma breve revisão dos conceitos de norma H_2 e H_∞ , nos dois casos, será feita no decorrer deste capítulo.

4.2 Performance H_2

4.2.1 Norma H_2

Seja o sistema dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u u + B_w w \\ z_2 = C_z x + D_{uz} u \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $x \in R^n$ é a variável de estado que supomos estar disponível para realimentação, $u \in R^m$ é a variável de controle, $w \in R^l$ é a variável de perturbação e $z_2 \in R^q$ é a saída,

ou sinal de performance. A representação do sistema em diagramas de bloco é dada pela Figura 4.1.

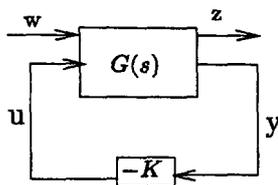


Figura 4.1: Problema H_2

Primeiramente vamos considerar o problema de análise onde se supõe que o sistema de malha aberta ($u \equiv 0$) é estável.

A função de transferência do sistema em malha aberta de w para z é representada por

$$G(s) = C_z(sI - A)^{-1}B_w$$

A norma H_2 para a função de transferência $G(s)$ ou sua anti-transformada $G(t)$ é definida como

$$\|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(G^*(jw)G(jw))dw = \int_0^{\infty} G(t)'G(t)dt$$

Se L_c denota o Graminiano de Controlabilidade e L_o o Graminiano de Observabilidade, a norma H_2 pode ser calculada por [Dai91]:

$$\|G\|_2^2 = \text{tr}(C_z L_c C_z') = \text{tr}(B_w' L_o B_w)$$

onde L_c e L_o são soluções de

$$AL_c + L_c A' + B_w B_w' = 0$$

$$A' L_o + L_o A + C_z' C_z = 0$$

Podemos também calcular a norma através do seguinte problema de Otimização [BGFB94]:

$$\|G\|_2^2 = \min(\text{tr}(C_z L_c C_z')) : AL_c + L_c A' + B_w B_w' \leq 0, L_c \geq 0$$

$$\|G\|_2^2 = \min(\text{tr}(B_w' L_o B_w)) : A' L_o + L_o A + C_z' C_z \leq 0, L_o \geq 0$$

ou ainda

$$\|G\|_2^2 = \min(\text{tr}(N)) : N - C_z L_c C_z', \quad A L_c + L_c A' + B_w B_w' \leq 0, \quad L_c \geq 0$$

$$\|G\|_2^2 = \min(\text{tr}(N)) : N - B_w' L_o B_w, \quad A' L_o + L_o A + C_z' C_z \leq 0, \quad L_o \geq 0$$

4.2.2 Problema H_2 e Realimentação de Estados

O problema de otimização em H_2 consiste em encontrar uma realimentação de estado, tal que a norma H_2 da função de transferência em malha fechada $\|G_{wz_2}\|$ seja minimizada.

O teorema a seguir é conhecido na literatura, veja por exemplo [Cru96], e fornece condições para que a norma H_2 do sistema seja minimizada por uma realimentação de estados $u = -Kx$.

Teorema 4.1 [Cru96] *Seja G_{wz_2} a função de transferência em malha fechada no sistema abaixo com $u = -Kx$*

$$\begin{cases} \dot{x} = Jx + B_u u + B_w w \\ z_2 = C_z x + D_{uz} u \\ y = x \end{cases} \quad (4.2)$$

e suponha que $C_z' D_{uz} = 0$ e $D_{uz}' D_{uz} > 0$. Então

$$\min \|G_{wz_2}\|_2^2 = \min \text{tr}(N) : \begin{cases} \begin{bmatrix} N & C_z W - D_{uz} F \\ (C_z W - D_{uz} F)' & W \end{bmatrix} \geq 0 \\ JW + WJ' + B_u F + F' B_u' + B_w B_w' \leq 0 \\ W > 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

e o ganho que minimiza a norma é dado por $K = FW^{-1}$.

◇◇

Para sistemas do tipo algébrico-diferencial na forma 4.4, obtém-se a extensão do resultado acima mostrado no Teorema 4.2.

Teorema 4.2 *Considere o seguinte sistema algébrico diferencial:*

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1 x + J_2 z + B_u u + B_w w \\ 0 = J_3 x + J_4 z \\ z_2 = C_z x + D_{uz} u \end{cases} \quad (4.4)$$

A minimização de $\|G_{wz}\|_2$ por realimentação de estados é dada pelo seguinte problema de minimização:

$$\|G_{wz}\|_2^2 = \min \text{tr}(N) : \begin{bmatrix} N & C_z W - D_{uz} F \\ (C_z W - D_{uz} F)' & W \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} J_1 W + W J_1' - B F - F' B' + B_w B_w' & W J_3' \\ J_3 W & 0 \end{bmatrix} + L[J_2' \ J_4'] + [J_2' \ J_4']' L' \leq 0 \quad (4.6)$$

$$W > 0$$

onde $K = FW^{-1}$ é o ganho que minimiza a norma H_2 em malha fechada com $u = -Kx$

Prova: Pré e pós multiplicando-a por $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}'$ e $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$ e utilizando o lema 1.4, temos que 4.6 é equivalente a

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} J_1 W + W J_1' + B_u F + F' B_u' + B_w B_w' & W J_3' \\ J_3 W & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \leq 0$$

$$\forall(x, z) : \begin{bmatrix} J_2' & J_4' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = 0$$

Desenvolvendo a multiplicação e considerando $z = -J_4^{-T} J_2' x$ obtemos:

$$x'((J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3)W + W(J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3)' + B_u F + F' B_u' + B_w B_w')x \leq 0$$

Fazendo-se $J = J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3$, obtemos as condições do teorema 4.1 o que completa a prova.

◇◇

O problema acima considera o sistema nominal (sem incertezas). Para sistemas incertos com

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B_u & B_w \\ J_3 & J_4 & 0 & 0 \\ C_z & 0 & D_{wz} & 0 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q \quad (4.7)$$

podemos mostrar que $\text{tr}(N)$ se torna um limitante superior para $\|G_{wz_2}\|_2^2$, isto é, $\|G_{wz_2}\|_2^2 \leq \text{tr}(N)$. Com essa ressalva, as mesmas LMIs (4.6) se aplicam no caso incerto desde que elas sejam resolvidas para os vértices do politopo (4.7). Esse procedimento foi detalhado no caso de realimentação de estados e será omitido aqui. Note que G_{wz_2} deve ser visto como um operador quando as incertezas variam no tempo.

4.3 Performance H_∞

4.3.1 Norma H_∞

A norma H_∞ de uma função de transferência G_s é a norma induzida pela norma H_2 , ou seja, é o maior ganho em norma 2 que se pode obter do sistema, e é dada por [GL95]:

$$\|G_{wz_2}\|_\infty = \sup_w \sigma_{\max}[G(jw)]$$

onde \sup denota o supremo da função $\sigma_{\max}[G(jw)]$, e $\sigma_{\max}[G(jw)]$ é o máximo valor singular.

No caso de norma H_∞ , não existe uma forma analítica de cálculo, mas podemos calculá-la de maneira iterativa. Um procedimento iterativo para o cálculo da norma H_∞ é dado a seguir e pode ser encontrado, por exemplo, em [Sou94]:

Teorema 4.3 *Seja o sistema $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Então $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ se e somente se existir uma matriz $P > 0$ tal que*

$$(A + BZ^{-1}D'C)'P + P(A + BZ^{-1}D'C) + PBZ^{-1}B'P + \gamma^2 C'T^{-1}C = 0 \quad (4.8)$$

onde $Z = \gamma^2 I - D'D$ e $T = \gamma^2 I - DD'$

◇◇

O cálculo da norma H_∞ pode ser expresso também na formulação LMI, dado pelo Teorema 4.4.

Teorema 4.4 *Seja a função de transferência $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Então a sua norma H_∞ é dada pelo problema ¹*

¹Se a função não for controlável ou observável, então o problema retorna um limitante superior para a norma.

$$\|G\|_\infty = \min(\gamma^2) : \begin{bmatrix} AW + WA' & B \\ B' & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} WC' \\ D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CW & D \end{bmatrix} < 0, W > 0 \quad (4.9)$$

Prova: A prova deste é obtida diretamente da equação de Riccati, colocada na forma LMI. A prova completa pode ser encontrada, por exemplo, em [Cru96].

◇◇

4.3.2 Problema H_∞ e Realimentação de Estado

O problema subótimo H_∞ consiste em encontrar um controlador K tal que o sistema seja estável e a norma $H_\infty \leq \gamma$, onde o valor de γ é previamente especificado. O problema ótimo H_∞ consiste em encontrar um controlador que minimize essa norma.

Considerando o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = J_1 x + J_2 z + B_u u + B_w w \\ 0 = J_3 x + J_4 z \\ z_2 = C_z x + D_{wz} w + D_{uz} u \end{cases} \quad (4.10)$$

A solução do problema subótimo H_∞ é dada pelo Teorema 4.5.

Teorema 4.5 *Seja γ um escalar positivo e G_{wz_2} a função de transferência de w para z_2 no sistema (4.10) em malha fechada. Então existe uma realimentação de estados $u = -Kx$ tal que $\|G_{wz_2}\|_\infty \leq \gamma$ se e somente se a seguinte LMI for factível em W , F e L :*

$$\begin{bmatrix} \Psi & \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (C_z W - D_{uz} F)' \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_w' & 0 \end{bmatrix} & -\gamma^2 I & D_{wz}' \\ \begin{bmatrix} C_z W - D_{uz} F & 0 \end{bmatrix} & D_{wz} & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.11)$$

$W > 0$

$$\Psi = \begin{bmatrix} J_1 W + W J_1' - B_u F - F' B_u' & W J_3' \\ J_3 W & 0 \end{bmatrix} + L [J_2' \ J_4'] + [J_2' \ J_4']' L'$$

onde $K = F W^{-1}$ é o ganho de realimentação.

Prova: Defina

$$\tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} \Psi & \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B'_w & 0 \end{bmatrix} & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

e $C_f = C_z - D_{uz}K$

Aplicando o complemento de Schur na LMI (4.11), obtemos a seguinte LMI equivalente:

$$\tilde{\Psi} + \begin{bmatrix} WC'_f \\ 0 \\ D' \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} C_f W & 0 & D \end{bmatrix} \leq 0$$

Pré e pós multiplicando-a por $\begin{bmatrix} x \\ z \\ \bar{w} \end{bmatrix}'$ e $\begin{bmatrix} x \\ z \\ \bar{w} \end{bmatrix}$, temos pelo lema 1.4 que a desigualdade

acima é equivalente a:

$$\begin{cases} x'(J_1 W + W J'_1)x + \bar{w} B'_w x + x' B_w \bar{w} + z' J_3 W x + x' W J'_3 z - \bar{w} \gamma^2 I \bar{w} + \\ + \begin{bmatrix} x \\ \bar{w} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} WC'_f \\ D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_f W & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \bar{w} \end{bmatrix} \leq 0 \\ \forall(x, z, \bar{w}) : \begin{bmatrix} J'_2 & J'_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

Da restrição de igualdade, deduzimos que $z = -J_4^{-1} J'_2 x$. Definindo $J = J_1 - J_2 J_4^{-1} J_3 - BK$, obtemos:

$$x'(JW + WJ')x + B'_w x + x' B_w \bar{w} - \bar{w} \gamma^2 I \bar{w} + \begin{bmatrix} x \\ \bar{w} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} WC'_f \\ D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_f W & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \bar{w} \end{bmatrix} \leq 0, \forall(x, \bar{w})$$

Colocando $\begin{bmatrix} x \\ \bar{w} \end{bmatrix}$ em evidência, teremos:

$$\begin{bmatrix} x \\ \bar{w} \end{bmatrix}' \left(\begin{bmatrix} JW + WJ' & B_w \\ B'_w & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} WC'_f \\ D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_f W & D \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ \bar{w} \end{bmatrix} \leq 0$$

A prova se completa com o teorema 4.4.

◇◇

É interessante notar que o resultado apresentado é equivalente ao resultado proposto por Izumi et al [MKOS97], no caso de $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, que resolve o problema de performance H_∞ através do Lema 1.1.

4.4 Caso Discreto

Nesta seção faremos uma breve revisão da teoria de norma H_2 e H_∞ para sistemas discretos. As definições de Norma H_2 e H_∞ para sistemas discretos são similares ao caso contínuo e podem ser obtidas em [GL95]. Os resultados obtidos aqui são uma extensão dos resultados obtidos na seção anterior.

4.4.1 Norma H_2 , Problema H_2 e Realimentação de Estados

A norma H_2 para sistemas discretos é definida por

$$\|G(z)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} r_k' r_k$$

onde r_k é a resposta ao pulso unitário do sistema e $G(z)$ sua transformada z .

A norma H_2 pode ser calculada através do gramiano da controlabilidade ou observabilidade dado por

$$\|G\|_2^2 = tr(B' L_o B) = tr(CL_c C')$$

onde

$$A' L_o A - L_o + C' C = 0$$

$$A L_c A' - L_c + B B' = 0$$

Como no caso contínuo, o cálculo da norma H_2 pode ser feito através de um problema de otimização dado por

$$\|G\|_2^2 = \min(tr(B' L_o B)) : \{A' L_o A - L_o + C' C \leq 0, L_o > 0\}$$

$$\|G\|_2^2 = \min(tr(CL_c C')) : \{A L_c A' - L_c + B B' \leq 0, L_c > 0\}$$

◇◇

O problema de síntese H_2 discreto consiste em encontrar um controlador, tal que o sistema seja estável e tenha a norma H_2 minimizada em malha fechada. O teorema a seguir fornece condições que solucionam o problema de síntese H_2 , no caso de uma realimentação de estados $u_k = -Kx_k$.

Teorema 4.6 [ZDG96] *Seja G_{wz_2} a função de transferência de w_k para z_{2k} em malha fechada com $u_k = -Kx_k$. No sistema abaixo,*

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B_u u_k + B_w w_k \\ z_{2k} = C_z x_k + D_{uz} u_k \end{cases} \quad (4.12)$$

Então

$$\min \|G_{wz_2}\|_2^2 = \min_{N, W, F, L} \text{tr}(N) : \begin{cases} \begin{bmatrix} N & C_z W - D_{uz} F \\ (C_z W - D_{uz} F)' & W \end{bmatrix} \geq 0 \\ \begin{bmatrix} -W & (AW - B_u F)W & B_w \\ (AW - B_u F)' & -W & 0 \\ B_w' & 0 & -I \end{bmatrix} \leq 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

e o ganho $u_k = -Kx_k$ que minimiza a norma é dado por $K = FW^{-1}$.

◇◇

O resultado acima é conhecido na literatura e permite o cálculo da norma H_2 de um sistema discreto sem restrição algébrica e será utilizado como base para os resultados que seguem. Vamos agora considerar um sistema discreto com restrição algébrica, indicado a seguir.

$$\begin{cases} x_{k+1} = J_1 x_k + J_2 z_k + B_u u_k + B_w w_k \\ 0 = J_3 x_k + J_4 z_k \\ z_{2k} = C_z x_k + D_{uz} u_k \end{cases} \quad (4.14)$$

Para o sistema acima, a minimização da norma H_2 , por uma lei de controle do tipo $u = -Kx$, é dada pelo Teorema 4.7.

Teorema 4.7 *Seja $G_{w_k z_k}$ a função de transferência em malha fechada de w_k para z_k no sistema (4.14), com $u = -Kx$. Então:*

$$\min \|G_{w_k z_k}\|_2^2 = \min_{N,W,F,L} \text{tr}(N) : \begin{bmatrix} N & C_z W - D_{uz} F \\ (C_z W - D_{uz} F)' & W \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} - \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J'_2 & J'_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J'_2 & J'_4 \end{bmatrix}' L' & \begin{bmatrix} J_1 W - B F \\ J_3 W \\ -W \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} W J_1 - F' B' & W J'_3 \\ B'_w & 0 \end{bmatrix} & & \end{bmatrix} \leq 0$$

$$W > 0 \tag{4.15}$$

onde o ganho que minimiza a norma H_2 é dado por $K = FW^{-1}$

Prova A prova é análoga ao caso contínuo e será omitida. Cabe ainda lembrar que para sistemas incertos, onde

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 & B_u & B_w \\ J_3 & J_4 & 0 & 0 \\ C_z & 0 & D_{wz} & 0 \end{bmatrix} \in Co[\Psi_i]_{i=1}^q \tag{4.16}$$

$\text{tr}(N)$ é um limitante superior para a norma $\|G_{w_k z_k}\|_2^2$, isto é, $\|G_{w_k z_k}\|_2^2 \leq \text{tr}(N)$. Para minimizar esse limitante, basta resolver (4.15) para o conjunto de vértices do politopo $Co\{\Psi_i\}$. Note que, no caso incerto, $G_{w_k z_k}$ deve ser visto como um operador caso as incertezas variem no tempo.

4.4.2 Norma H_∞ , Problema H_∞ e Realimentação de Estados

A norma H_∞ e o problema H_∞ para o caso discreto são definidos de forma análoga ao caso contínuo (veja seção 4.3). O cálculo da norma H_∞ também é feito de forma iterativa.

Teorema 4.8 *Seja o sistema $G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$ com (A, B) estabilizável. Então $\|G\|_\infty < \gamma$ sse $\exists P > 0$ tal que;*

$$AQA' - Q + BB' - (AQC' + BD')R^{-1}(CQA' + DB') = 0 \tag{4.17}$$

onde $R = -\gamma^2 + DD' + CQC < 0$

Esta equação pode ser facilmente posta na forma LMI, como dado abaixo. Para mais detalhes veja [SX92], [ZDG96].

Teorema 4.9 *Seja o sistema $G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$ com (A, B) estabilizável. Então a norma $\|G\|_\infty < \gamma$ é dada por:*

$$\|G\|_\infty = \min \gamma : \begin{bmatrix} A & B_W \\ C_2 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B_W \\ C_2 & D \end{bmatrix}' - \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0, W > 0 \quad (4.18)$$

◇◇

Os dois teoremas acima se aplicam para sistemas discretos sem restrição algébrica. Passaremos aqui diretamente ao caso de realimentação de estados para sistemas discretos com restrição algébrica, buscando encontrar um controle K , que estabilize o sistema e satisfaça $\|G(z)\|_\infty < \gamma$, para um dado γ .

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_{k+1} = J_1 x_k + J_2 z_k + B_u u_k + B_w w_k \\ 0 = J_3 x_k + J_4 z_k \\ z_{2k} = C_z x_k + D_{wz} w_k + D_{uz} u_k \end{cases} \quad (4.19)$$

A solução do problema subótimo H_∞ é dada por:

Teorema 4.10 *Seja γ um escalar positivo e G_{wz_2} a função de transferência de w para z_2 no sistema (4.19) em malha fechada. Então existe uma realimentação de estados $u_k = -Kx_k$ tal que $\|G_{wz_2}\|_\infty \leq \gamma$ se e somente se a seguinte LMI for factível em W , F e L :*

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} - \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} J_2' & J_4' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_2' & J_4' \end{bmatrix}' L & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} J_1 W + B_u F & B_W \\ J_3 W & 0 \\ C_2 W + D_u F & D_{wz} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} W J_1' + F' B_u' & W J_3' & W C_2' + F' D_u' \\ B_W' & 0 & D_{wz}' \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix} < \quad (4.20)$$

Prova A prova deste segue os mesmos passos do caso contínuo e será omitida.

4.5 Exemplos

Exemplo 4.1

Aqui utilizamos o exemplo 1 de SEE dado no Apêndice A. Consideramos:

$$C_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D_{uz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B_w = \begin{pmatrix} 0.2113249 \\ 0.7560439 \\ 0.0002211 \\ 0.3303271 \end{pmatrix}$$

Utilizando o teorema 4.2, obtemos como ganho de realimentação:

$$K = (9.356705 \quad 0.2174239 \quad -2.8981683 \quad 0.9812815)$$

e o traço de $N = 4.6729797$

Que leva os autovalores em malha fechada para:

$$\begin{aligned} & -1000.1303 \\ & -0.6105863 + 4.1497485i \\ & -0.6105863 - 4.1497485i \\ & -0.2375850 \end{aligned}$$

Note a sensível redução na magnitude dos ganhos aqui obtido quando comparados ao resultado obtido no exemplo 2.4. Perceba também que existe um autovalor que foi posicionado quase em $-\infty$, isto pode ser explicado pelo fato de que na escolha das matrizes de performance não se levou em conta nenhum critério físico.

Exemplo 4.2 Para o caso H_∞ , considerando o mesmo exemplo com:

$$C_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D_{uz} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_w = \begin{pmatrix} 0.2113249 \\ 0.7560439 \\ 0.0002211 \\ 0.3303271 \end{pmatrix} \quad D_{wz} = \begin{pmatrix} 0.6653811 \\ 0.6283918 \end{pmatrix}$$

Supondo $\gamma = 5$ e utilizando o Teorema 4.5, obtemos como ganho de realimentação de estados:

$$K = (60.852661 \quad 2.0314555 \quad -17.559783 \quad 2.1740479)$$

que leva os autovalores em malha fechada para

$$\begin{aligned} & -2190.7582 \\ & -1.3782739 + 4.1160446i \\ & -1.3782739 - 4.1160446i \\ & -0.8407899 \end{aligned}$$

Os ganhos aqui obtidos são maiores que os do exemplo anterior, caso de performance H_2 , isto se deve ao fato de que quando tratamos do problema de performance via norma H_∞ , buscamos sempre amenizar os efeitos do pior sinal de perturbação presente no sistema na saída deste. Mas, como no caso anterior, estes ganhos são bem menores que os do exemplo 2.4.

Exemplo 4.3 Para o caso de sistemas discretos iremos retornar ao exemplo 2.6. Consideraremos como índice de performance para a norma H_2 o sistema discreto (4.14) com

$$C_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_{uz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B_w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3303271 \end{pmatrix}$$

Com o teorema 4.7 temos que o ganho que estabiliza o sistema é dado por:

$$K = (0.6401133 \quad 0.0180451 \quad -0.6363450 \quad 0.0804802)$$

e o valor do critério minimizado é $\text{traço}(N) = 0.1112150$, que leva ao seguinte conjunto de autovalores em malha fechada

$$\begin{aligned} & 0.0078893 \\ & 0.9933085 + 0.0413279i \\ & 0.9933085 - 0.0413279i \\ & 0.9976157 \end{aligned}$$

Exemplo 4.4 Para o mesmo exemplo, usando agora o critério de performance H_∞ , com

$$C_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_{uz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B_w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3303271 \end{pmatrix}, D_{wz} = \begin{pmatrix} 0.11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Supondo $\gamma = 11.121503$ e aplicando o teorema 4.10, obtemos como ganho

$$K = (17.303843 \quad 1.1980519 \quad -0.4679964 \quad 0.1037385)$$

que estabiliza o sistema, levando os autovalores em malha fechada para:

$$\begin{aligned} & - 0.0415203 \\ & 0.8308952 \\ & 0.9850822 + 0.0414517i \\ & 0.9850822 - 0.0414517i \end{aligned}$$

4.6 Comentários

Condições necessárias e suficientes para o problema de performance H_2 e H_∞ foram expostas neste capítulo. Os resultados são apresentados somente para sistemas nominais, mas podem facilmente ser transpostos para sistemas incertos de maneira análoga ao caso de realimentação de estados (cap. 2). Uma breve revisão dos conceitos de Performance H_2 e H_∞ é feita no início de cada seção para melhor formular o problema.

Enfocamos aqui apenas o problema de realimentação de estados, mas parece-nos que o caso de realimentação de saída pode ser obtido de forma semelhante ao capítulo 3.

Como era de se esperar, com a aplicação de critérios de performance, há uma melhora significativa no esforço de controle em relação aos resultados obtidos nos capítulos precedentes, quando o problema era apenas de estabilização (sem critérios de performance).

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho tratamos do problema de estabilização quadrática para sistemas com restrições algébricas no estado. Interessantes resultados foram obtidos para o caso de análise e síntese de sistemas na forma algébrico-diferencial, sem a necessidade da eliminação de variáveis algébricas.

Nesta nova abordagem, o conjunto de equações algébricas é tratado como uma restrição do sistema. Com isto, pode-se através do lema de Finsler (L-Ca Scaling), obter condições que garantam a estabilidade quadrática do sistema sem a necessidade de invertermos matrizes, o que preserva a esparsidade do sistema e facilita o trabalho de sistemas com parâmetros incertos. Outra característica relevante é que se conseguiu colocar as condições do problema de maneira convexa, através da formulação LMI, o que permite resolver o problema numericamente de forma eficiente.

A maioria dos resultados aqui apresentados é necessária e suficiente para o caso de sistemas nominais e apenas suficientes no caso de sistemas incertos. Conexões entre incertezas do tipo politopo e LFT também foram consideradas e alguns resultados comparativos foram estabelecidos.

No capítulo 2 fornecemos condições suficientes para o problema de análise e síntese via realimentação de estados para sistemas algébrico-diferenciais incertos. Neste capítulo é interessante notar a relação entre a abordagem $L - C_a$ scaling (Lema de Finsler) e sistema da forma LFT.

O capítulo 3 aborda o problema de realimentação de saída, tanto para o caso de realimentação de saída estática, quanto para o caso de realimentação de saída dinâmica, através da transformação do sistema dinâmico em um sistema aumentado. É interessante

notar que os resultados de simulações obtidos com essa abordagem, para o exemplo de SEE considerado são satisfatórios tanto pela posição dos autovalores no plano complexo como pela magnitude dos ganhos do controlador obtidos.

O capítulo 4 trata do Problema de performance H_2 e H_∞ de sistemas algébrico-diferenciais. Apenas o caso nominal foi considerado, mas para sistemas incertos os resultados podem ser transpostos de maneira semelhante a do caso de realimentação de estados (capítulo 2). Trabalhamos aqui apenas o caso de realimentação de estados, o caso de performance com realimentação de saída, parece-nos poder ser obtido de maneira semelhante. É importante observar a significativa melhora nos ganhos, quando comparamos os resultados obtidos neste capítulo aos obtidos no caso de realimentação de estado (capítulo 2).

Devido à ordem elevada dos sistemas do tipo algébrico-diferencial, percebemos que os softwares existentes ainda não têm uma boa eficácia numérica, principalmente quando consideramos incertezas do tipo politopo, onde o número de LMIs cresce exponencialmente na ordem de 2^i , onde i é o número de parâmetros incertos.

Uma forma alternativa de atenuar o crescimento exponencial é tratar as incertezas como limitadas em norma, ao invés de politópicas. Isto requer mudanças nas LMIs aqui apresentadas, de forma semelhante ao caso do teorema 2.6 (abordagem politópica) para o caso do teorema 2.7 (abordagem limitada em norma). A diminuição do esforço computacional se faz às custas de condições mais restritivas para solucionar o problema.

Para atenuar os problemas relativos à ordem elevada do sistema uma idéia seria estudar novos algoritmos que explorem a esparsidade do sistema, facilitando assim o manuseio de sistemas de ordem elevada.

Como perspectivas de futuros trabalhos, podemos citar:

- uma melhor comparação dos resultados obtidos com os resultados já existentes na literatura;
- uma aplicação mais detalhada a sistemas de potência;
- tratar outros tipos de estabilidade, como a biquadrática [Tro98];
- estudar novos algoritmos que explorem a esparsidade do sistema.

Apêndice A

Exemplos de SEE

Sistemas de Potência podem ser modelados matematicamente como um sistema na forma algébrico-diferencial (sistema 1.3). Neste sistema as equações diferenciais descrevem os geradores, controladores e outros dispositivos dinâmicos, enquanto as equações algébricas descrevem a rede e as conexões estáticas dos equipamentos à rede. Esses sistemas têm características bem particulares, como o fato das matrizes J_i serem esparsas e J_4 ser inversível. Para mais detalhes veja [Sca98], [HM90]. A seguir fornecemos os dados numéricos de dois sistemas-teste utilizados como exemplo neste trabalho.

A.1 Sistema com 4 barras

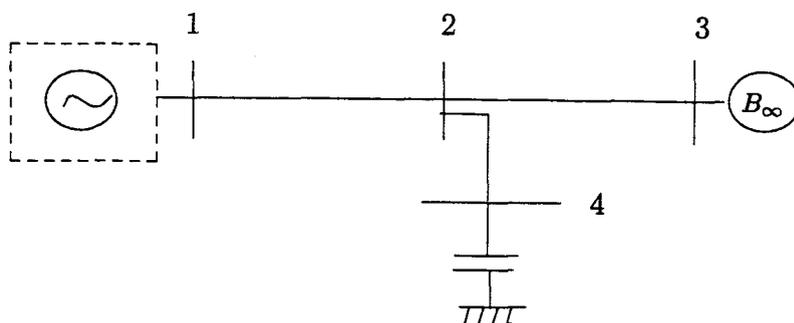


Figura A.1: Representação de um sistema Máquina-Barra Infinita: 4 barras

Consideramos um sistema máquina-barra infinita (constituído de 4 barras, um gerador e uma barra infinita), mostrado na Figura (A.1). Este sistema possui 4 variáveis diferen-

ciais e 16 variáveis algébricas. Os dados da barra, da linha e da máquina síncrona, bem como os parâmetros de excitação, são mostrados em forma de tabela no final desta seção.

Através do programa AMCT (Modal Analysis for Voltage Studies) e dos dados do sistema, obtém-se a matriz Jacobiana, cujos valores não-nulos são dados abaixo:

$J_1(1,1)=-0.888889$	$J_1(1,4)=0.117647$
$J_1(2,1)=111.309799$	$J_1(2,3)=-188.534195$
$J_1(3,2)=1$	$J_1(4,4)=-20$
$J_2(1,9)=0.445458$	$J_2(1,12)=0.629588$
$J_2(2,9)=-14.482916$	$J_2(2,11)=188.534195$
$J_2(2,12)=-107.226868$	$J_2(4,9)=-1000$
$J_2(4,16)=0$	
$J_3(1,1)=6.802753$	$J_3(2,1)=4.81321$
$J_3(5,3)=3000.61499$	$J_3(16,4)=0$
$J_4(1,1)=-1$	$J_4(1,9)=-0.885131$
$J_4(1,12)=-6.553223$	$J_4(2,2)=-1$
$J_4(2,9)=-2.933956$	$J_4(2,12)=-0.885131$
$J_4(3,3)=-1$	$J_4(4,4)=-1$
$J_4(4,13)=1.978$	$J_4(5,5)=-1$
$J_4(5,11)=-3000.61499$	$J_4(6,6)=-1$
$J_4(6,10)=-2999.384766$	$J_4(7,7)=-1$
$J_4(8,8)=-1$	$J_4(9,2)=-1$
$J_4(9,9)=6.6176$	$J_4(9,12)=2.498426$
$J_4(9,13)=-5.442264$	$J_4(9,14)=-2.498426$
$J_4(10,6)=-1$	$J_4(10,10)=6.6176$
$J_4(10,11)=-2.498426$	$J_4(10,13)=-5.442264$
$J_4(10,14)=2.498426$	$J_4(11,5)=-1$
$J_4(11,10)=-2.498426$	$J_4(11,11)=5.382399$
$J_4(11,13)=-2.526215$	$J_4(11,14)=-5.382399$
$J_4(12,9)=2.498426$	$J_4(12,12)=5.382399$
$J_4(12,13)=2.526215$	$J_4(12,14)=-5.382399$
$J_4(13,4)=-1$	$J_4(13,9)=-5.382399$
$J_4(13,10)=-5.382399$	$J_4(13,11)=-2.498426$

$J_4(13,12)=2.498426$	$J_4(13,13)=22.74147$
$J_4(13,15)=-9.889999$	$J_4(14,3)=-1$
$J_4(14,9)=-2.498426$	$J_4(14,10)=2.498426$
$J_4(14,11)=-5.382399$	$J_4(14,12)=-5.382399$
$J_4(14,14)=20.546009$	$J_4(14,16)=-9.78121$
$J_4(15,8)=-1$	$J_4(15,13)=-9.889999$
$J_4(15,15)=9.889999$	$J_4(16,7)=-1$
$J_4(16,14)=-9.78121$	$J_4(16,16)=9.78121$
$J_4(12,9)=2.498426$	$J_4(12,12)=5.382399$
$J_4(12,13)=2.526215$	$J_4(12,14)=-5.382399$
$J_4(13,4)=-1$	$J_4(13,9)=-5.382399$
$J_4(13,10)=-5.382399$	$J_4(13,11)=-2.498426$
$J_4(13,12)=2.498426$	$J_4(13,13)=22.74147$
$J_4(13,15)=-9.889999$	$J_4(14,3)=-1$
$J_4(14,9)=-2.498426$	$J_4(14,10)=2.498426$
$J_4(14,11)=-5.382399$	$J_4(14,12)=-5.382399$
$J_4(14,14)=20.546009$	$J_4(14,16)=-9.78121$
$J_4(15,8)=-1$	$J_4(15,13)=-9.889999$
$J_4(15,15)=9.889999$	$J_4(16,7)=-1$
$J_4(16,14)=-9.78121$	$J_4(16,16)=9.78121$

$$B_1(4,1)=1000$$

O sistema é instável e possui os seguintes autovalores em malha aberta:

- 16.515781
- 5.9111344
- 1.0596639 + 4.7951076i
- 1.0596639 - 4.7951076i

Dados do Exemplo 1: Sistema de 4 Barras

DADOS DA BARRA

Barra no	Tensão		Pgen (MW)	Qgen (MVA _r)	Pload (MW)	Qload (MVA _r)	Qsh () (MVA _r) ()
	mod(pu)	ang(deg)					
1	1.00000	49.8000	250.0000	61.5000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.98900	24.9000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	97.8121
3	1.00000	0.0000	-250.0000	61.5000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.98900	24.9000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

DADOS DA LINHA

(from)	(to)	R (pu)	Xl (pu)	Xc (MVA _r)	base (MVA)
1	2	0.0000	0.5000	0.0000	300.0000
2	3	0.0000	0.5000	0.0000	300.0000
2	4	0.0000	0.3000	0.0000	300.0000

DADOS DA MÁQUINA SÍNCRONA

Barra no. cod	md	comp(%)		base (MVA)	H (s)	D (pu/pu)	Xd (pu)	Xq (pu)	X'd (pu)	X'q (pu)
		Pgen	Qgen							
1	2	100	100	300.0	3.840	0.0000	2.7200	2.6000	0.3600	
3	1	100	100	300.0	1000.000	0.0000			0.0010	

Barra no. cod.	X''d (pu)	X''q (pu)	Ra (pu)	T'd (pu)	T'q (pu)	T''d (pu)	T''q (pu)
1			0.0000	8.500			
3							

DADOS DO SISTEMA DE EXCITAÇÃO:

Barra no.cd	Parâmetros			
	Ka	Ta	Efd mn	Efd mx
1	50.0000	0.0500	-10.0000	10.0000

A.2 Sistema com 3 barras

Utilizamos como exemplo um sistema máquina-barra infinita, constituído de 3 barras, um gerador e uma barra infinita, mostrado na figura (A.2).

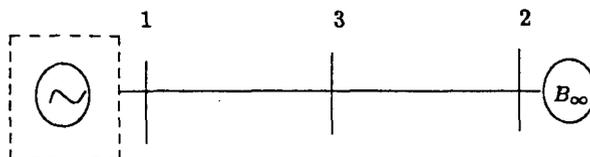


Figura A.2: Representação de um sistema Máquina-Barra Infinita: 3 Barras

Este sistema possui ordem 19 (total), das quais 7 são variáveis de estado e 12 variáveis algébricas. Os dados da barra, da linha e da máquina síncrona, bem como os parâmetros de excitação, são mostrados em forma de tabela no final desta seção.

Através do programa AMCT (Modal Analysis for Voltage Studies) e dos dados das tabelas, obtém-se a matriz Jacobiana deste sistema, cujos valores não-nulos são dados abaixo:

$J_1(1,1)=-0.190259$	$J_1(1,2)=-1.19997$
$J_1(1,3)=0.007407$	$J_1(1,5)=-0.780975$
$J_1(1,6)=0.190259$	$J_1(2,1)=35.460991$
$J_1(2,2)=-62.600594$	$J_1(2,3)=0.167528$
$J_1(2,5)=-17.663231$	$J_1(3,2)=-0.175055$
$J_1(3,3)=-37.704353$	$J_1(3,5)=-24.100004$
$J_1(4,2)=-163.264771$	$J_1(4,3)=-207.945755$
$J_1(4,5)=-276.084137$	$J_1(5,4)=1$
$J_1(6,6)=-33.555557$	$J_1(6,7)=6666.666992$
$J_1(7,6)=1e-09$	$J_1(7,7)=-0.001$

$J_2(1,9)=0.916224$	$J_2(1,10)=0.780975$
$J_2(2,9)=20.722137$	$J_2(2,10)=17.663231$
$J_2(3,9)=-20.249783$	$J_2(3,10)=24.100004$
$J_2(4,8)=-188.5504$	$J_2(4,9)=-59.443882$
$J_2(4,10)=276.084137$	$J_2(6,9)=-6666.666992$
$J_2(7,12)=0$	

$$J_3(3,2)=3.688581$$

$$J_3(3,5)=6.24126$$

$$J_3(4,3)=-4.072884$$

$$J_3(12,7)=0$$

$$J_3(3,3)=4.702217$$

$$J_3(4,2)=4.25349$$

$$J_3(4,5)=-1.429188$$

$$J_4(1,1)=-1$$

$$J_4(2,2)=-1$$

$$J_4(3,3)=-1$$

$$J_4(3,10)=-6.24126$$

$$J_4(4,9)=-5.657792$$

$$J_4(5,5)=-1$$

$$J_4(7,2)=-1$$

$$J_4(7,8)=-1.306899$$

$$J_4(7,12)=1.306899$$

$$J_4(8,7)=-0.843466$$

$$J_4(8,11)=-1.337829$$

$$J_4(9,4)=-1$$

$$J_4(9,10)=0.864668$$

$$J_4(9,12)=-0.864668$$

$$J_4(10,9)=1.325023$$

$$J_4(10,11)=0.885133$$

$$J_4(11,6)=-1$$

$$J_4(11,8)=-0.866464$$

$$J_4(11,10)=1.308732$$

$$J_4(11,12)=-0.442268$$

$$J_4(12,7)=0.866464$$

$$J_4(12,9)=-1.298603$$

$$J_4(12,11)=0.4527$$

$$J_4(1,8)=-1000.290955$$

$$J_4(2,7)=-999.708984$$

$$J_4(3,9)=1.348621$$

$$J_4(4,4)=-1$$

$$J_4(4,10)=1.429188$$

$$J_4(6,6)=-1$$

$$J_4(7,7)=5.09908$$

$$J_4(7,11)=-4.624049$$

$$J_4(8,1)=-1$$

$$J_4(8,8)=4.517141$$

$$J_4(8,12)=-4.517141$$

$$J_4(9,9)=5.067762$$

$$J_4(9,11)=-4.769805$$

$$J_4(10,3)=-1$$

$$J_4(10,10)=4.659527$$

$$J_4(10,12)=-4.659527$$

$$J_4(11,7)=-4.621881$$

$$J_4(11,9)=-4.519533$$

$$J_4(11,11)=9.393934$$

$$J_4(12,5)=-1$$

$$J_4(12,8)=-4.621881$$

$$J_4(12,10)=-4.554785$$

$$J_4(12,12)=9.176666$$

$$B_1(6,1)=6666.6667$$

$$B_1(7,1)=0$$

O sistema é instável em malha aberta e possui o seguinte conjunto de autovalores:

- 59.203768
- $9.6886974 + 18.109323i$
- $9.6886974 - 18.109323i$
- $0.0225985 + 8.0819636i$
- $0.0225985 - 8.0819636i$
- 13.96629
- 0.0010000

Dados do Exemplo 2: Sistema de 3 Barras

DADOS DA BARRA

Barra no	Tensão		Pgen (MW)	Qgen (MVA _r)	Pload (MW)	Qload (MVA _r)	Qsh () (MVA _r) ()
	mod(pu)	ang(deg)					
2	1.00000	0.0000	-107.5185	29.0988	0.0000	0.0000	0.0000
1	1.00780	26.6490	110.0000	22.3896	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.97688	13.3771	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

DADOS DA LINHA

(from)	(to)	R (pu)	Xl (pu)	Xc (MVA _r)	base (MVA)
1	3	0.0100	0.2075	0.0000	100.0
3	2	0.0100	0.2075	0.0000	100.0

DADOS DA MÁQUINA SÍNCRONA

Barra no. cod	md	comp(%)		base (MVA)	H (s)	D (pu/pu)	X _d (pu)	X _q (pu)	X' _d (pu)	X' _q (pu)
		Pgen	Qgen							
2	1	100	100	100.0	1000.000	0.0000			0.0010	
1	4	100	100	100.0	4.270	0.0000	1.4450	0.9590	0.3160	

Barra no. cod.	X'' _d (pu)	X'' _q (pu)	R _a (pu)	T' _d (pu)	T' _q (pu)	T'' _d (pu)	T'' _q (pu)
2			0.0000	8.500			
1	0.1790	0.1620	0.0010	5.256		0.028	0.157

DADOS DO SISTEMA DE EXCITAÇÃO:

Barra no.cd	Parâmetros							
	K _a	T _a	K _f	T _f	V1 mn	V1 mx	E _{fd} mn	E _{fd} mx
1	200.0000	0.0300	0.00100	1000.00000	-0.1000	0.1000	-20.1560	20.1560

Referências Bibliográficas

- [BGFB94] S. Boyd, L.EL. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [BJ97] D. J. Bender and A. J.Laub. *The Linear Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 32(No 8):672–688, September 1997.
- [Cob84a] D. J. Cobb. *Controllability, observability and duality in singular systems*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 29:1076–1082, 1984.
- [Cob84b] D. J. Cobb. *Feedback and pole assignment in descriptor systems*. *Int. Journal Control*, Vol. 33:1135–1146, 1984.
- [Cru96] César A. R. Crusius. *Formulação LMI para Problemas de Performance e Robustez*. Dissertação de mestrado, Pós Graduação em Engenharia Elétrica - UFSC, 1996.
- [CT99] C.A.R. Crusius and A. Trofino. *Sufficient LMI Conditions for Output Feedback Control Problems*. *A ser publicado em IEEE Transactions Automatic Control*, 1999.
- [Dai89] L. Dai. *Singular Control System*. Springer-Verlag, 1989.
- [Dai91] R. L. Dailey. *Lectures Notes for the Workshop on H_∞ end μ methods for robust control*. In *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, 1991.
- [DPZ91] J. C. Doyle, A. Packard, and Kemin Zhou. *Review of LFT, LMIs, and μ* . In *IEEE-Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, pages 1227–1232, December 1991.

- [FAG96] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. *Analysis and Synthesis of Robust Control Systems via Parameter-Dependent Lyapunov Functions*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41(No 7):1041–1046, July 1996.
- [GDB98] G. Garcia, J. Daafouz, and J. Bernussou. *H₂ Guaranteed Cost Control for Singularly Perturbed Uncertain Systems*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43(No 9):1323–1329, September 1998.
- [GL95] M. Green and David J. N. Limebeer. *Linear Robust Control*. Prentice-Hall, 1995.
- [HM90] D. J. Hill and I. M.Y. Mareels. *Stability Theory for Differential/Algebraic Systems with Application to Power Systems*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 37(No 11):1416–1423, November 1990.
- [KD95] A. Kumar and P. Daoutidis. *Feedback Control of Nolinear Differential-Algebraic Equation Systems*. *A.I.Ch.E.J.*, Vol. 41:619–636, 1995.
- [KKJ86] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, and J.O'Reilly. *Singular Perturbed Methods in Control: Analysis and Design*. New York:Academic, 1986.
- [KM94] H. Krishnan and N. H. McClamroch. *Tracking in Nolinear Differential-Algébriic Control Systems whit Applications to Constrained Robot Systems*. *Automatica*, Vol. 33:419–426, 1994.
- [LD95] Wei-Min Lu and John Doyle. *H_∞ control of nonlinear systems: a convex characterization*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40(No 9):1668–1675, September 1995.
- [Leo53] W. Leontief. *Studies in the Structure of the American Economy*. Oxford Univ. Press, 1953.
- [Lew86] F. Lewis. *A survey of linear singular systems*. *Circuits, Systems Sig. Proces.*, Vol. 5:3–36, 1986.
- [LZD91] W. M. Lu, Kemin Zhou, and J. C. Doyle. *Stabilization of LFT Systems*. In *IEEE-Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, pages 1239–1244, December 1991.
- [LZD96] Wei-Min Lu, Kemin Zhou, and John Doyle. *Stabilization of Uncertain Linear Systems: An LFT Approach*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41(No 1):50–64, January 1996.

- [Men98] Roberta A. M. Mendonça. *Estabilização em Duas Etapas de Sistemas Descritores*. Dissertação de mestrado, Pós Graduação em Engenharia Elétrica - UFSC, Fpólis - SC, Junho 1998.
- [MKOS97] Izumi Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda. *H_∞ Control for Descriptor Systems: A Matrix Inequalities Approach*. *Automatica*, Vol. 33(No 4):669–673, 1997.
- [MW88] N. H. McClamroch and D. W. Wang. *Feedback Stabilization and Tracking of Constrained Robots*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 30:419–426, 1988.
- [New81] R. W. Newcomb. *The semistate description of nonlinear time-variable circuits*. *IEEE Transactions Circuits Systems*, Vol. 28:62–71, 1981.
- [SADG97] V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato, and K. Grigoriadis. *Static Output Feedback—A Survey*. *Automatica*, Vol. 33(No 2):125–137, 1997.
- [Sca98] Francisco E. Scavone. *Projeto Robusto de Controladores de Sistemas de Energia Elétrica*. Dissertação de mestrado, Pós Graduação em Engenharia Elétrica - UFSC, Fpolis - SC, 1998.
- [Sou94] S. R. Souza. *Análise Conveza Aplicada a Sistemas Dinâmicos Contínuos*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, June 1994.
- [SSTC98] F.E. Scavone, A.S. Silva, A. Trofino, and J. M. Campagnolo. *Projeto Robusto de Controladores para Sistemas de Potência usando Técnicas LMI*. In *XII Congresso Brasileiro de Automática*, Uberlândia, MG, 1998.
- [SX92] C. E. Souza and L. Xie. On the discrete-time bounded real lemma with application in the characterization of static state feedback H_{∞} controllers. *Systems & Control Letters*, 18:61–71, 1992.
- [TMK94] K. Takaba, N. Morihira, and T. Katayama. *H_∞ control for descriptor system—a J -spectral factorization approach*. In *IEEE-Proceedings of the 33th Conference on Decision and Control*, pages 2251–2256, Lake Buena Vista, 1994.
- [TMK95] K. Takaba, N. Morihira, and T. Katayama. *A generalized Lyapunov theorem for descriptor system*. *Systems & Control Letters*, Vol. 24:49–51, 1995.

- [Tro98] A. Trofino. *Abordagem LMI para problemas de controle com funções de Lyapunov dependente de parâmetros*. In *XII Congresso Brasileiro de Automática*, Uberlândia, MG, 1998. mini-curso.
- [Var95] A. Varga. *On stabilization methods of descriptor systems*. *Systems and Control*, Vol. 24:133–138, 1995.
- [VLK81] G.C. Verghese, Bernard C. Lévi, and Thomas Kailath. *A Generalized State-Space for Singular Systems*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26(No 4):811–831, August 1981.
- [ZDG96] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall International, Inc., USA, 1996.