

Ricardo José de Oliveira Carvalho

**Fluxo de Potência Ótimo:
Algoritmos de Pontos Interiores,
Abordagem Multi-Objetivo e
Aplicação de Transformações Ortogonais**

**Florianópolis
1999**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA**

**Fluxo de Potência Ótimo:
Algoritmos de Pontos Interiores,
Abordagem Multi-Objetivo e
Aplicação de Transformações Ortogonais**

Tese submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica

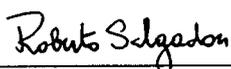
Ricardo José de Oliveira Carvalho

Florianópolis, junho de 1999.

Fluxo de Potência Ótimo: Algoritmos de Pontos Interiores, Abordagem Multi-Objetivo e Aplicação de Transformações Ortogonais

Ricardo José de Oliveira Carvalho

‘Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração Sistemas de Potência, e aprovada em sua forma final pelo curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina’

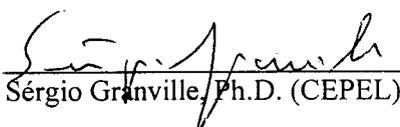


Roberto de Souza Salgado, Ph.D. (Orientador - EEL-UFSC)

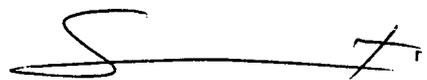


Ildemar Cassana Decker, D.Sc.
(Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica)

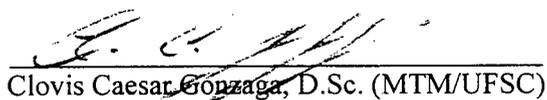
Banca Examinadora:



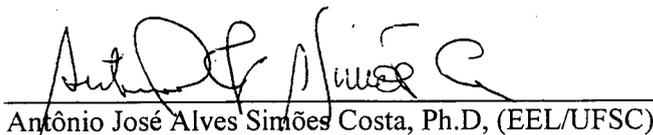
Sérgio Granville, Ph.D. (CEPEL)



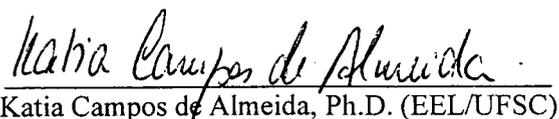
Anésio dos Santos Jr., D.Sc. (UNICAMP)



Clovis Caesar Gonzaga, D.Sc. (MTM/UFSC)



Antônio José Alves Simões Costa, Ph.D. (EEL/UFSC)



Katia Campos de Almeida, Ph.D. (EEL/UFSC)

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica

Fluxo de Potência Ótimo: Algoritmos de Pontos Interiores, Abordagem Multi-Objetivo e Aplicação de Transformações Ortogonais

Ricardo José de Oliveira Carvalho

Junho de 1999

Orientador: Roberto de Souza Salgado.

Área de Concentração: Sistemas de Potência.

Palavras-chave: Fluxo de Potência Ótimo, Pontos Interiores, Multi-Objetivo, Transformações Ortogonais.

Número de Páginas: 141.

Este trabalho de pesquisa apresenta contribuições ao problema de Fluxo de Potência Ótimo. Estas contribuições envolvem os algoritmos de solução, a formulação do problema e as técnicas de solução numérica do problema. O Método de Pontos Interiores foi aplicado ao problema de Otimização Não-Linear associado ao fluxo de potência ótimo. Dois algoritmos pertencentes a esta metodologia foram estudados: o algoritmo de Barreira Primal-Dual e o de Redução de Função Potencial. Os resultados obtidos demonstram o bom desempenho dos algoritmos na solução do problema de fluxo de potência ótimo em sistemas-teste de 14 até 118 barras. A análise conjunta dos algoritmos destaca a robustez, em relação aos parâmetros de ajuste, do algoritmo de Redução de Função Potencial. O trabalho também considera a formulação do problema de fluxo de potência ótimo como um problema de Otimização Multi-Objetivo. Nesta abordagem, as funções objetivo Mínima Perda de Potência Ativa nas Linhas de Transmissão e o Mínimo Desvio de Tensão de um Valor Pré-especificado foram otimizadas simultaneamente. Para solução do problema multi-objetivo, propõe-se uma metodologia baseada no Método das Restrições. O algoritmo de Redução de Função Potencial foi empregado na solução do problema de otimização junto com esta metodologia. Esta metodologia foi testada num sistema de 34 barras. A aplicação dos algoritmos estudados ao problema de fluxo de potência ótimo resulta na solução de um sistema linear no processo iterativo. Este sistema linear possui características especiais as quais permitem sua transformação em sistemas de dimensão reduzida. Esta técnica de redução associada ao sistema linear introduz o uso de Transformações Ortogonais. As Reflexões de Householder foram utilizadas para realizar a fatoração QR da matriz retangular. A superioridade numérica do método Householder sobre a fatoração LU é demonstrada através de um exemplo num sistema teste de seis barras. Os algoritmos estudados foram implementados num programa desenvolvido em linguagem de programação Fortran 90, com conceitos de Programação Orientada para Objetos. A experiência com o uso do programa de fluxo de potência ótimo em sistemas de potência de grande porte é reportada nos resultados. A rede elétrica do sistema interligado das regiões sul e sudeste do Brasil, reduzidas à 730 e 2.000 barras, foram utilizadas nas simulações. Os resultados obtidos destacam o desempenho em termos de número de iteração e tempo de processamento.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the
Requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering

Optimal Power Flow: Interior Point Algorithms, Multi-Objective Approach and Application of Orthogonal Transformations

Ricardo José de Oliveira Carvalho

June / 1999

Advisor: Roberto de Souza Salgado.

Area of Concentration: Power Systems.

Keywords: Optimal Power Flow, Interior Point, Multi-Objective, Orthogonal Transformations.

Number of Pages: 141.

This work proposes some contributions to the solution of the Optimal Power Flow problem. These contributions involve the solution algorithms, the analytical formulation of the problem, and the numerical solution techniques. The Interior Point method is applied to solve the nonlinear optimisation problem that models the Optimal Power Flow. Two algorithms belonging to this class of methods are studied: the Primal-Dual Barrier algorithm and the Potential Reduction Function algorithm. The numerical results of this application to power systems ranging from 14 to 118 buses show the performance of these algorithms. The analysis of these results emphasize the features of robustness of the Potential Reduction Function algorithm. This work also focuses the formulation of the optimal power flow problem as a multi-objective optimisation problem. In this case, the minimisation of both the Active Power Transmission Loss and the Deviation of the Voltage Magnitude from a Pre-Specified Level are simultaneously considered. A methodology based on the Potential Reduction Function algorithm, with the inclusion of constraints corresponding to some of the performance indexes, is proposed to solve the multi-objective optimisation problem. Tests with a 34-bus test system illustrate this application. Solving the optimisation problem through the nonlinear version of the Interior Point algorithm requires the solution of a large size linear system at each iteration. This system can be decomposed in subsystems of reduced dimension, which allows the application of Orthogonal Transformations. To solve the underdetermined linear system resulting from this decomposition, Householder Reflections were used in the QR factorisation. The results obtained with a 6-bus test system show the good performance of this technique with respect to the numerical robustness viewpoint. The computer programs used to test the proposed methodology were written in Fortran 90, with concepts of Object Oriented Programming. The experience with the use of this computer program in power systems of large size is also reported. Two power networks of the South-Southeast region of Brazil, with 730 and 2.000 buses, respectively, were used in the numerical simulation. These results illustrate the features of the proposed methodology in terms of robustness of the iterative process and CPU time.

Aos meus pais,

José Medeiros e Maria Dalva;

Irmã,

Silvinha

e sobrinho

Pedrinho

pelo carinho.

*Aos queridos papai Lauro e mamãe Castor
(em memória).*

Agradecimentos

Inicialmente ao meu orientador Prof. Roberto Salgado pela sua orientação acadêmica, pela confiança e amizade.

Ao talentoso Prof. Clovis Gonzaga, da matemática, pelos brilhantes seminários sobre Otimização.

Aos professores vinculados ao Laboratório de Sistemas de Potência (LABSPOT) e ao Laboratório de Planejamento de Sistemas Elétricos (LABPLAN), com os quais tive a oportunidade de adquirir valiosos conhecimentos como aluno do programa de pós-graduação em engenharia elétrica da UFSC.

Aos colegas da pós-graduação: Bazanella, Gouvea, Robson, Roberto, Flávio, André dentre outros os quais convivemos durante boa parte dos últimos quatro anos. Em especial, ao casal 20 Marcia e Marcelo Vanti pela amizade e companherismo. Aos colegas do futebol organizado pelo Raimundo e Luciano.

Aos colegas e professores do GRUCAD pela permissão informal para a realização de simulações em equipamentos daquele laboratório.

À Universidade de Brasília, pela oportunidade concedida e aos colegas do Departamento de Engenharia Elétrica da UnB pelo apoio logístico durante o meu afastamento. Ao colega Prof. Francisco Damasceno pela confiança e incentivo e ao mestre Wilson que, mesmo não estando mais na ativa, acompanhou de perto o desenvolvimento dos trabalhos apoiando e torcendo para o meu sucesso.

À CAPES pelo fundamental suporte financeiro, indispensável à realização deste trabalho.

Sumário

Lista de Abreviaturas:	v
Lista de Símbolos:	vi
Lista de Tabelas:	viii
Lista de Figuras:	ix
Capítulo 1:	Introdução
1.1 - Generalidades.....	1
1.2 - Objetivos da Tese.....	2
1.3 - Contribuições.....	3
1.4 - Organização da Tese.....	4
Capítulo 2:	Fluxo de Potência Ótimo
2.1 - Introdução.....	6
2.2 - O Problema do Fluxo de Potência Ótimo.....	7
2.3 - Revisão Bibliográfica do Fluxo de Potência Ótimo.....	11
2.3.1 - Abordagem Via Programação Linear.....	11
2.3.2 - Métodos Baseados no Gradiente.....	13
2.3.3 - Método de Newton.....	15
2.3.4 - Métodos Quasi-Newton.....	17
2.3.5 - Fluxo de Potência Ótimo Multi-Objetivo.....	17
2.3.6 - Fluxo de Potência Ótimo Paramétrico.....	17
2.3.7 - Fluxo de Potência Ótimo “Fuzzy”.....	18

2.3.5 - Fluxo de Potência Ótimo via Pontos Interiores.....	18
2.4 - Conclusões.....	19

Capítulo 3: O Método de Pontos Interiores para Otimização Não-linear

3.1 - Introdução.....	20
3.2 - Conceitos Básicos de Programação Não-Linear.....	20
3.3 - O Método de Pontos Interiores para Otimização Não-linear.....	25
3.3.1 - O Método de Barreiras Primal-Dual.....	26
3.3.2 - O Método de Redução de Função Potencial.....	34
3.4 - Fluxo de Potência Ótimo via Pontos Interiores.....	42
3.4.1 - Solução do FPO via Método de Barreira Primal-Dual.....	45
3.4.2 - Solução do FPO pelo Método de Redução de Função Potencial.....	49
3.5 - Conclusões e Considerações.....	53

Capítulo 4: Fluxo de Potência Ótimo Multi-Objetivo

4.1 - Introdução.....	54
4.2 - Otimização Multi-Objetivo.....	54
4.2.1 - O Método dos Pesos.....	56
4.2.2 - O Método das Restrições.....	59
4.3 - Obtenção da Solução de Melhor Compromisso.....	60
4.4 - Abordagem via Pontos Interiores.....	62
4.5 - Aplicação da Otimização Multi-Objetivo à problemas de Sistemas Elétricos Potência.....	66
4.6 - Fluxo de Potência Ótimo Multi-Objetivo.....	67
4.7 - Conclusões.....	70

Capítulo 5: Solução do Sistema Linear

5.1 - Introdução.....	72
5.2 - O Sistema Linear Resultante do problema de Otimização.....	72
5.2.1 - O Sistema Linear Associado ao Problema de Programação Linear.....	73
5.3 - O Sistema Linear Associado ao Fluxo de Potência Ótimo.....	75
5.4 - Solução do Sistema Linear.....	78
5.5 - Aplicação de Transformações Ortogonais.....	83
5.6 - Conclusões.....	88

Capítulo 6: Resultados Obtidos e Detalhes de Implementação

6.1 - Introdução.....	89
6.2 - Resultados Obtidos com os Algoritmos de Barreiras Primal-Dual e o de Redução de Função Potencial.....	90
6.3 - Resultados da Aplicação dos Algoritmos de Barreiras Primal-Dual e o de Redução de Função Potencial ao Problema FPO.....	92
6.3.1 - Análise do Algoritmo de Barreiras Primal-Dual.....	93
6.3.2 - Análise do Algoritmo de Redução de Função Potencial.....	94
6.3.3 - Análise Conjunta dos Algoritmos de Barreira Primal-Dual e o de Redução de Função Potencial.....	97
6.4 - Resultados Obtidos com a Abordagem Multi-Objetivo.....	101
6.4.1 - Aplicação ao Sistema Teste de 14 Barras do IEEE.....	101
6.4.2 - Aplicação a um Modelo Reduzido do Sistema Sul do Brasil.....	104
6.5 - Resultados Obtidos com a Aplicação do Programa de FPO em Sistemas de Pequeno, Médio e Grande Porte.....	108
6.6 - Resultados Obtidos com a Aplicação de Transformações Ortogonais.....	109
6.7 - Conclusões e Considerações.....	112

Capítulo 7:	Conclusões e Recomendações para Futuros Trabalhos	
7.1 - Conclusões.....		114
7.2 - Recomendações para Futuros Trabalhos.....		117
Apêndice A:	Detalhes de Implementação do Fluxo de Potência Ótimo em Linguagem de Programação Fortran 90....	119
Apêndice B:	Dados do Sistema Sul Reduzido a 34 Barras.....	124
Apêndice C:	Dados do Sistema Teste de Seis Barras.....	129
Referências Bibliográficas.....		131

Lista de Abreviaturas

SEP : Sistemas Elétricos de Potência ;

FPO : Fluxo de Potência Ótimo ;

COS : Centros de Operação de Sistemas ;

SCADA : Sistema de Controle e Aquisição de Dados ;

PQ : Barra de Carga;

PV : Barra de Geração;

Vδ : Barra de Referência ou de Balanço;

PI : Pontos Interiores;

PL : Programação Linear;

KKT : Karush-Kuhn-Tucker;

IEEE : Instituto de Engenharia Elétrica e Eletrônica;

SS : Sistema Elétrico interligado das regiões Sul e Sudeste do Brasil;

POO : Programação Orientada para Objetos;

pu: Por unidade.

Lista de Símbolos

\mathfrak{R}^n : conjunto dos vetores coluna $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^t$;

$\mathbf{x}^t = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$: vetor transposto;

$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^t \mathbf{x})^{1/2}$: norma euclidiana;

f : função objetivo ($\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^1$) ;

g : restrições de desigualdade ($\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^l$) ;

h : restrições de igualdade ($\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$) ;

∇ : operador gradiente;

Y : matriz admitância de barra

H : matriz Hessiana do Lagrangeano;

J : matriz Jacobiana das restrições de igualdade;

I : matriz identidade ($\mathfrak{R}^{n \times n}$) ;

Q : matriz ortogonal ($\mathfrak{R}^{n \times m}$) ;

R : matriz triangular superior ($\mathfrak{R}^{n \times m}$) ;

U : matriz Householder ($\mathfrak{R}^{n \times n}$) ;

$P_l(\delta, V)$: função mínima perda de potência ativa ($\mathfrak{R}^{2n} \rightarrow \mathfrak{R}^1$) ;

$Min_{\Delta V}(V)$: função desvio de tensão ($\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^1$) ;

g_l : condutância série;

b_l : susceptância série ;

V : magnitude da tensão de barra ;

δ : ângulo de fase da tensão de barra ;

P^g e P^d : potência ativa gerada e demandada;

Q^g e Q^d : potência reativa gerada e demandada;

α : “tap” de transformadores em fase com ajuste automático sob carga;

Q^{sh} : injeção de potência reativa proveniente de indutores ou capacitores em derivação.

Lista de Tabelas

Tabela 4.1: Solução do exemplo 4.1 via Método dos Pesos.....	58
Tabela 4.2: Distância dos pontos do conjunto de Soluções de Pareto à solução ideal	59
Tabela 5.1: Dados de sistemas de grande porte.....	77
Tabela 6.1: Análise de desempenho dos algoritmos 3.1 e 3.2.....	90
Tabela 6.2: Comparação dos algoritmos 3.2(a) e 3.2(b).....	92
Tabela 6.3: Características dos sistemas testes do IEEE.....	93
Tabela 6.4: Variação do número de iterações com o parâmetro μ	93
Tabela 6.5: Variação do número de iterações com o parâmetro β	95
Tabela 6.6: Desempenho dos algoritmos primal-dual e de redução Potencial.....	97
Tabela 6.7: Resultados obtidos com o sistema teste de 14 barras do IEEE.....	97
Tabela 6.8: Resultados da abordagem multi-objetivo com o sistema teste de 14 barras do IEEE.....	102
Tabela 6.9: Solução do sistema de 34 barras com mínima perda de potência ativa....	106
Tabela 6.10: Resultados do fluxo de carga e das simulações “a” e “b”.....	106
Tabela 6.11: Solução do sistema sul com 34 barras usando o algoritmo 4.1.....	107
Tabela 6.12: Características de convergência para sistemas de pequeno, médio e grande porte.....	108
Tabela 6.13: Tempo de CPU para os blocos do algoritmo 5.1.....	109
Tabela 6.14: Variação do número de condicionamento da matriz de coeficientes.....	111
Tabela 6.15: Resultados obtidos com os sistemas teste de 14 até 118 barras.....	111

Tabela C.1: Dados de barra do sistema de seis barras de Ward e Hale.....	129
Tabela C.2: Dados da rede elétrica do sistema de seis barras de Ward e Hale.....	130

Lista de Figuras

Figura 3.1: Solução gráfica do exemplo 3.1.....	23
Figura 3.2: Solução do exemplo 3.1 via algoritmo 3.1.....	33
Figura 3.3: Solução do exemplo 3.1 via algoritmo 3.2.....	41
Figura 4.1: Curvas de nível das funções f_1 e f_2	57
Figura 4.2: Curva de Pareto do exemplo 4.1.....	59
Figura 4.3: Curva de Pareto do exemplo 4.2.....	61
Figura 4.3.1: Componentes da direção de busca.....	64
Figura 4.4: Trajetória da solução do exemplo 4.1.....	66
Figura 5.1: Estrutura esparsa da matriz do sistema	75
Figura 5.2: Distribuição do tempo de CPU para os blocos de 1 até 10.....	78
Figura 6.1: Variação do parâmetro de ajuste da função barreira.....	94
Figura 6.2: Variação da magnitude das tensões no processo iterativo do algoritmo de barreira primal-dual.....	98
Figura 6.3: Variação do ângulo de fase das tensões no processo iterativo do algoritmo de barreira primal-dual.....	99
Figura 6.4: Variação da magnitude das tensões no processo iterativo do algoritmo de Redução de Função Potencial.....	99
Figura 6.5: Variação do ângulo de fase das tensões no processo iterativo do algoritmo de Redução de Função Potencial.....	100
Figura 6.6: Redução da função objetivo.....	100
Figura 6.7: Curva de Pareto para o sistema de 14 barras do IEEE.....	102

Figura 6.8: Perfil de tensão do sistema teste de 14 barras.....	103
Figura 6.9: Diagrama Unifilar do sistema de 34 barras da região sul do Brasil.....	105
Figura A.1: Estrutura do objeto matriz admittance de barras.....	121
Figura A.2: Diagrama esquemático de um módulo em Fortran.....	122
Figura C.1: Diagrama Unifilar do sistema teste de Ward e Hale.....	129

Capítulo 1

Introdução

1.1 - Generalidades

O Fluxo de Potência Ótimo é uma ferramenta computacional utilizada na síntese e na análise de Sistemas Elétricos de Potência (SEP). A função do fluxo de potência ótimo (FPO) é, na sua essência, determinar os ajustes nos controles do sistema. Estes ajustes otimizam uma função objetivo enquanto satisfazem certas restrições de igualdade e desigualdade. A função objetivo representa um índice de desempenho modelado analiticamente, o qual reflete os aspectos econômicos, de qualidade de serviço e de segurança do SEP. As restrições de igualdade incluem os balanços de potência ativa e reativa do sistema. As restrições de desigualdade tratam dos limites nas variáveis de decisão, dos limites operacionais das máquinas e equipamentos, das restrições de segurança, etc. A modelagem do SEP, proposta para a aplicação no FPO, está baseada nas condições de regime permanente. Portanto, a formulação do problema do FPO, que inclui as equações de análise em regime permanente, conduz a um problema de otimização não-linear, multivariável e de acentuada complexidade.

Nas empresas de energia elétrica, os programas de fluxo de potência ótimo são geralmente utilizados no planejamento e na operação dos sistemas. Nos estudos de planejamento o FPO pode ser usado, entre outras aplicações, no projeto do sistema de transmissão, na análise de carregamento, na avaliação do perfil de tensão, etc. Na operação, esta ferramenta pode ser usada tanto para o estudo do sistema, auxiliando o operador na tomada de decisão, como na operação do SEP em tempo real. Em ambas as situações, são muitas as dificuldades existentes para implementação do FPO num sistema real. Além da complexidade do problema há ainda dificuldades com a interface com as

outras funções, pertinentes à operação de sistema reais, que são executadas com diferente periodicidade.

A evolução da tecnologia dos computadores digitais e das telecomunicações, aliadas aos novos conceitos de sistema operacional e ao desenvolvimento de software, tornaram possível, desde o início da década de 70, a realização dos chamados Centros de Operação de Sistemas (COS). A concepção atual dos centros de operação de sistemas elétricos de potência está baseada no conceito de arquitetura aberta com o uso de sistemas distribuídos e de processamento paralelo em todos os níveis na parte de meios computacionais [Teixeira,1987; Machado,1992]. Usualmente a implementação do fluxo de potência ótimo nos COS é realizada de dois modos: no modo de estudo, onde os resultados constituem recomendações ao despachante, e no modo de malha fechada, onde as ações de controle são efetivadas, através dos diversos componentes do sistema, via controle supervisão, isto é o sistema de controle e aquisição de dados (SCADA).

São muitas as dificuldades para implementação do FPO para operação em tempo real. Fatores relativos ao atendimento de requisitos operacionais tais como o tempo de resposta do programa, a robustez do processo iterativo com respeito ao ponto de partida, a flexibilidade em termos de índice de desempenho para resolver problemas realísticos, a inclusão de modelos de controle discretizados, a confiabilidade da solução dos algoritmos, a consistência do FPO com outras funções realizadas em tempo real, a inclusão de restrições de segurança, a interface homem-máquina, a modelagem dos sistemas externos, a qualidade dos dados e outros requisitos de caráter prático, são exemplos destas dificuldades [Papalexopoulos,1996]. Estes fatores relacionadas à implementação do FPO, abrem espaço para a realização de pesquisas, o que de certa forma motivou o desenvolvimento desta tese.

1.2 - Objetivos da Tese

O objetivo geral desta tese é de trazer contribuições em termos de solução do Fluxo de Potência Ótimo. Especificamente, as contribuições envolvem desde a formulação do

problema, passando pelo estudo de algoritmos de solução até a aplicação de técnicas de solução numérica do problema. Com relação a formulação do problema, considera-se o caráter multi-objetivo associado ao fluxo de potência ótimo. Duas funções objetivo foram tratadas de forma simultânea: a mínima perda de potência ativa na transmissão e o mínimo desvio de tensão de um valor pré-especificado. Esta abordagem tem o objetivo de tornar os programas de cálculo de fluxo de potência ótimo mais flexível diante de situações reais.

Na parte de algoritmos, duas metodologias pertencentes à família de Pontos Interiores são estudadas: o método de Barreira Primal-Dual e o de Redução de função potencial. A apresentação formal do algoritmo de redução de função potencial, a implementação deste algoritmo para resolver o problema de FPO e a comparação do mesmo com o algoritmo de barreira primal-dual são subprodutos desta tese.

Um dos principais produtos do presente trabalho foi o desenvolvimento de um programa de FPO em linguagem de programação Fortran-90. A implementação deste programa objetivou a aquisição de experiência na simulação de sistemas de grande porte.

Com o objetivo de tornar o FPO mais robusto, do ponto de vista numérico, propôs-se uma técnica de decomposição do sistema de equações lineares resultante do problema de otimização, em sistemas de dimensão reduzida, associada ao uso de transformações ortogonais. Esta abordagem torna viável a solução de problemas mal condicionados numericamente.

1.3 - Contribuições

Os resultados desta tese, referentes à formulação e solução do problema de fluxo de potência ótimo, trazem as seguintes contribuições:

1. O estudo e a implementação de um algoritmo baseado no método de redução de função potencial, pertencente à família do método de pontos interiores, para solução do problema de FPO.

2. A formulação multi-objetivo para o fluxo de potência ótimo, associada ao uso de uma técnica de solução que contempla simultaneamente os objetivos mínima perda de potência ativa nas linhas de transmissão e mínimo desvio de tensão de um valor pré-especificado.
3. A decomposição do sistema linear, resultante da formulação do problema de fluxo de potência ótimo, em sistemas de dimensão reduzida, e o emprego de transformações ortogonais como técnica de solução.
4. O desenvolvimento de um programa de computador em linguagem de programação Fortran 90, o qual faz uso de técnicas de programação orientada à objetos.
5. A experiência com a aplicação do programa desenvolvido em sistema realísticos de grande porte como o caso do sistema de 2.000 barras das regiões sul e sudeste do Brasil.

1.4 - Organização da Tese

A documentação desta tese está organizada em sete capítulos e três apêndices.

No capítulo dois os componentes básicos do problema de fluxo de potência ótimo, isto é as variáveis, a função objetivo e as restrições, são apresentados. O problema do fluxo de potência ótimo é formulado como um problema de otimização considerando estes componentes. Ainda neste capítulo realiza-se uma revisão bibliográfica sobre o assunto, comentando as diversas técnicas e abordagens do problema de FPO.

O capítulo três apresenta os fundamentos do método de pontos interiores seguido da aplicação desta metodologia ao problema de fluxo de potência ótimo. Neste capítulo, os algoritmos de barreira primal-dual e o de redução de função potencial são estudados e aplicados ao problema de FPO.

A abordagem multi-objetivo e sua aplicação ao problema de FPO são assuntos do capítulo quatro.

O capítulo cinco é dedicado à solução do sistema linear resultante da aplicação dos algoritmos estudados no capítulo três. Neste capítulo apresenta-se uma técnica de decomposição do sistema linear junto com o uso de transformações ortogonais.

Os principais resultados das simulações realizadas e alguns detalhes de implementações compõem o capítulo seis.

O capítulo sete apresenta as conclusões e recomendações para futuros trabalhos. O apêndice A, apresenta os principais detalhes de implementação do programa de FPO em linguagem de programação Fortran 90. O relatório com os dados da rede elétrica e a solução do fluxo de carga referente ao sistema da região sul do Brasil reduzido a 34 barras compõe o anexo B. O anexo C apresenta dados de um sistema teste de seis barras.

Capítulo 2

Fluxo de Potência Ótimo

2.1 – Introdução

O estudo do fluxo de potência, é geralmente realizado sob condições de regime permanente. Este problema consiste em resolver um conjunto de equações algébricas, não-lineares e complexas. Estas equações, que resultam da aplicação das leis de Kirchhoff ao sistema, são conhecidas como *equações de fluxo de potência ou fluxo de carga*. Estas equações podem assumir duas componentes reais: uma referente à potência ativa (parte real) e outra para potência reativa (parte imaginária). Desta maneira, obtém-se duas equações reais associadas a cada uma das barras do sistema. A cada uma destas equações, são associadas quatro variáveis: a magnitude da tensão, o ângulo de fase da tensão, a potência ativa e a potência reativa. Assim, para resolver tais equações faz-se necessário a especificação de duas das quatro variáveis, ficando as outras duas restantes a serem determinadas. Este é o clássico problema de *Fluxo de Carga* ou *Fluxo de Potência*.

Algumas variáveis do problema do fluxo de carga são a priori conhecidas, como por exemplo, a potência demandada numa barra de carga. Entretanto, outras variáveis como a magnitude da tensão numa barra de geração são especificadas, em alguns casos, com base no conhecimento ou no bom senso do analista. O Fluxo de Potência Ótimo, diferentemente do fluxo de carga, trata as diversas variáveis como sendo passíveis de ajustes. Estes ajustes estão associados à otimização de um determinado índice de desempenho. Neste capítulo, apresenta-se a formulação básica do problema de fluxo de potência ótimo, bem como uma revisão bibliográfica do assunto.

2.2 – O Problema do Fluxo de Potência Ótimo

Na literatura, o fluxo de potência ótimo é apresentado como um problema de otimização, isto é, um problema no qual se procura otimizar uma função objetivo atendendo simultaneamente a um conjunto de restrições. Uma referência clássica neste assunto é o artigo do Carpentier [Carpentier,1962]. Neste trabalho foi apresentado, de maneira formal e completa, o problema de minimizar o custo de produção de energia, considerando as equações de balanço de potência ativa e reativa como restrições de igualdade e as limitações físicas dos equipamentos como restrições de desigualdade. Esta formulação, proposta no início dos anos sessenta, serve como ponto de partida para os estudos de fluxo de potência ótimo.

O problema de FPO, na sua forma básica, envolve os três elementos fundamentais de um problema de otimização, isto é as variáveis, as restrições e a função objetivo. As variáveis do problema normalmente consideradas referem-se a quantidades de barras ou elementos de ramos tais como:

V : a magnitude da tensão de barra ;

δ : o ângulo de fase da tensão de barra ;

P^g e P^d : as potências ativa gerada e demandada;

Q^g e Q^d : as potências reativa gerada e demandada;

α : o “tap” de transformadores em fase com ajuste automático sob carga;

φ : a fase de transformadores defasadores com controle automático de fase;

t : o intercâmbio entre áreas;

Q^{sh} : a injeção de potência reativa proveniente de indutores ou capacitores em derivação.

Algumas destas variáveis podem ser controladas diretamente, outras indiretamente, e há ainda aquelas que são consideradas constantes. Portanto, é usual classificá-las em variáveis de controle ou independentes, variáveis de estado ou dependentes e variáveis de perturbação ou parâmetros fixos. Além disto, costuma-se classificar as barras do sistema

elétrico em função do tipo de variável existente nestas barras. Barras ligadas ao consumidor, são geralmente, chamadas de *barra de carga*, e são caracterizadas pelo conhecimento a priori das potências ativa e reativa demandada. Nestas barras, a magnitude e o ângulo de fase da tensão são variáveis dependentes. As barras conectadas à unidades geradoras são classificadas como *barra de geração*. Nestas barras considera-se a potência ativa gerada e a magnitude da tensão (ou a potência reativa gerada) como variáveis de controle. Há ainda um terceiro tipo de barra, chamada de *barra de referência ou de balanço*, onde se considera a referência angular e se efetua os balanços de potência ativa e reativa do sistema.

A função objetivo, que é expressa em função das variáveis de otimização, representa um índice de desempenho a ser otimizado. São muitas as opções de função objetivo, algumas das quais serão comentadas a seguir:

O Mínimo Custo de Geração de Potência Ativa: Esta função objetivo reflete o aspecto econômico, visto que ela expressa o custo de produção de energia em função da potência ativa gerada pelas diversas unidades do sistema [Carpentier,1962; Dopazo,1967; Happ,1977; Carvalho,1988; Shoults,1982]. O custo de geração pode ser expresso analiticamente como uma função da potência ativa gerada, isto é

$$\text{Custo} = f(P_1^g, P_2^g, \dots, P_n^g)$$

onde n representa o número de unidades geradoras. Esta função, separável em n funções quadráticas, pode ser linearizada por partes ou totalmente, dependendo da modelagem considerada. No caso do despacho econômico, uma aproximação por um polinômio de segundo grau é em geral satisfatória [Carvalho,1995];

O Mínimo Desvio de uma Distribuição de Potência Ativa Pré-especificada: Esta função objetivo é geralmente utilizada para fins de despacho corretivo [Stott,1978; Stott,1979]. Este critério pode ser expresso na forma de uma função quadrática por

$$f(P_i^g) = \sum_{i=1}^n k_i (P_i^g - P_i^{esp})^2$$

onde P^{esp} corresponde ao valor especificado de potência e o coeficiente k é um fator de

ponderação;

A Mínima Perda de Potência Ativa: Trata-se de uma função não-linear bastante utilizada nos estudos de planejamento e operação dos SEP. A perda de potência ativa no sistema pode ser obtida pelo somatório das perdas de potência ativa nas linhas de transmissão, isto é

$$Perdas = \sum_{\text{linhas}} \text{perdas nas linhas}$$

Esta função foi utilizada neste trabalho, e portanto será assunto dos próximos capítulos.

O Mínimo Desvio de Tensão de um Valor Pré-especificado: Esta função objetivo, assim como a maioria das funções que minimizam os desvios de uma condição preestabelecida, possui um caracter corretivo. No presente trabalho, fez-se uso desta função, definida como

$$f(V_i) = \sum_{i=1}^n k_i (V_i - V_i^{esp})^2$$

onde V^{esp} é a tensão especificada e o coeficiente k é um fator de ponderação. Esta função foi otimizada simultaneamente com a mínima perda de potência ativa na abordagem multi-objetivo.

Algumas funções objetivo tais como a *Mínima Ação de Controle*, o *Mínimo Corte de Carga* e a *Mínima Violação*, são freqüentemente adotadas na operação do sistema elétrico sob condições de emergência. A segunda destas funções, que se refere ao corte de carga, é utilizada numa situação extrema.

As restrições de igualdade incluem os balanços de potência ativa e reativa. Estas equações, que configuram o problema de fluxo de carga, são expressas em termos das variáveis de otimização como

$$Pg_i - Pd_i - P_i(\delta, V, \alpha, \varphi) = 0$$

e

$$Qg_i - Qd_i - Q_i(\delta, V, \alpha, \varphi) = 0$$

onde os sobrescritos g e d referem-se a geração e demanda respectivamente. Estas equações são satisfeitas para todas as barras do SEP.

As restrições de desigualdades levam em conta os limites físicos dos componentes do sistema elétrico, os limites impostos por questões de qualidade do fornecimento da energia e os limites associados a segurança do sistema. Estas restrições podem estar associadas as variáveis de controle tais, como a magnitude da tensão, isto é

$$V^{min} \leq V \leq V^{max},$$

o tap dos transformadores

$$\alpha^{min} \leq \alpha \leq \alpha^{max}$$

e a fase do transformador defasador

$$\varphi^{min} \leq \varphi \leq \varphi^{max}$$

onde os subscritos min e max indicam os valores mínimos e máximo das variáveis. As limitações podem também ser impostas às variáveis dependentes, como a magnitude da tensão nas barras de carga, a geração de potência reativa etc. Este tipo de restrição é chamado de restrição funcional. Outro tipo, conhecido como restrição de segurança, costuma fazer parte do conjunto de restrições do problema de FPO. Os limites de fluxo nas linhas de transmissão incluem-se neste tipo de restrição.

A maioria das restrições funcionais ou de segurança são funções não-lineares, que junto com a função objetivo caracterizam o problema de fluxo de potência ótimo como um problema de otimização não-linear. Algumas formulações consideram o desacoplamento entre os problemas " $P-\delta$ " e " $Q-V$ ". Neste caso, o problema do FPO é decomposto em dois subproblemas: um problema de despacho de potência ativa " $P-\delta$ " e outro de despacho de potência reativa " $Q-V$ ". A idéia do desacoplamento está baseada no fato de que a sensibilidade da potência ativa é mais intensa em relação às variações angulares da tensão, assim como a potência reativa é mais sensível às magnitudes das tensões [Shoults,1982]. Uma das vantagens do modelo desacoplado é a redução na dimensão do problema. Além disto, com os problemas desacoplados é possível a aplicação de diferentes técnicas de solução para cada subproblema [Carvalho,1988].

2.3 - Revisão Bibliográfica da Solução do Fluxo de Potência Ótimo

Nas últimas quatro décadas, foram publicados na literatura especializada diversos trabalhos apresentando novas técnicas de otimização aplicadas ao problema do FPO. Muitas destas técnicas resultaram em programas de produção, sendo utilizados pelas empresas do setor elétrico [Shahidehpour,1996]. De uma maneira geral, estas técnicas de otimização são sumarizadas em algoritmos que buscam uma solução ótima. Estes algoritmos diferem entre si, entre outros fatores, pela maneira como a direção de busca é definida. Assim, além da abordagem via programação linear, há os algoritmos cuja busca está baseada no vetor gradiente, os que utilizam a matriz Hessiana para determinar a direção de busca e outros que são um meio termo entre estes dois, os chamados métodos Quasi-Newton.

2.3.1 - Abordagem via Programação Linear

A solução do problema de FPO via programação linear é uma metodologia bem estabelecida como técnica de solução do FPO [Stott,1987]. Com esta abordagem, tanto a função objetivo como as restrições são linearizadas em torno de um ponto de operação. Desta forma, o problema do FPO é formulado como um problema de programação linear (PL). A inicialização do processo de solução, com esta abordagem, é feita através de um fluxo de carga convencional. Assim, partindo de uma solução viável formula-se o problema de PL, linearizando tanto a função objetivo como as restrições. A solução do problema de PL conduz ao ajuste nas variáveis de controle. Já as variáveis de estado são obtidas através da solução de um fluxo de carga. Este processo se repete até que uma solução ótima seja encontrada. Esta técnica é conhecida como *programação linear sucessiva*. Assim, a formulação do problema de programação linear é dada como:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && f'(u^0 + \Delta u, x^0 + \Delta x) \\
 &\text{sujeito a} && g'(u^0 + \Delta u, x^0 + \Delta x) = 0 \\
 &&& h'(u^0 + \Delta u, x^0 + \Delta x) \leq 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde u^0 e x^0 são os valores iniciais das variáveis, Δu e Δx são as correções associadas as respectivas variáveis. As funções f' , g' e h' são aproximações lineares das funções originais. Uma redução no conjunto de variáveis de decisão é, geralmente, adotada [Alsac,1974]. Neste caso, as quantidades Δx são expressas em termos de Δu através de relações de sensibilidade, isto é:

$$\Delta x = S\Delta u$$

onde S é uma matriz de sensibilidade [Peshon,1968].

O problema de programação linear formulado em (2.1) é resolvido através de técnicas de programação linear para Δu . As variáveis de controle são atualizadas e as variáveis de estado x são calculadas através da solução das equações do fluxo de potência não-linear. O algoritmo a seguir resume esta metodologia.

Algoritmo 2.1:

1. Resolver um Fluxo de Potência para obter uma solução inicial: (u^k, x^k) ;
2. Linearizar a função objetivo e as restrições em torno da solução corrente;
3. Expressar Δx em termos de Δu fazendo uso de relações de sensibilidade;
4. Formular e resolver o problema de programação linear para Δu considerando os limites superior e inferior destas variáveis ;
5. Atualizar as variáveis de controle:

$$u^{k+1} = u^k + \alpha \Delta u;$$

onde α é um fator de passo.

6. Testar a convergência:

*Se as variações nos ajustes dos controles são suficientemente pequenas:
o processo convergiu.*

Se não, faça $k = k + 1$, e retorne ao passo 1.

A solução do problema de programação linear é, geralmente, obtida via algoritmos baseados no método Simplex [Petar,1996]; por exemplo o Simplex dual modificado [Mamandur,1981].

2.3.2 - Métodos Baseados no Gradiente

O *Método do Gradiente Reduzido* faz parte dos métodos que se baseiam na direção do vetor gradiente. Esta metodologia se aplica tanto ao problema desacoplado [Dopazo,1967], como para o modelo completo [Dommel,1968]. O Método do Gradiente Reduzido de Dommel e Tinney consiste, basicamente, em determinar o ajuste nas variáveis de controle, determinado pelo método do gradiente, seguido da solução das equações do fluxo de potência, pelo método de Newton-Raphson. Assim, considerando esta metodologia, formula-se o problema o problema de FPO como

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) && \text{em relação a } \mathbf{u} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde \mathbf{u} é o vetor das variáveis de controle, \mathbf{x} é o vetor das variáveis de estado e \mathbf{p} é o vetor de parâmetros fixos. Considera-se este método como uma extensão do fluxo de potência convencional, acrescido de ajustes nas variáveis de controle. Portanto, no processo de solução determina-se o ajuste nas variáveis de controle seguida da solução de um fluxo de carga iterativamente, até que um critério de convergência seja satisfeito. O algoritmo a seguir resume os passos deste método sem considerar as restrições de desigualdade.

Algoritmo 2.2:

1. Especificar o ajuste inicial para as variáveis de controle \mathbf{u} ;
2. Resolver o fluxo de carga via Newton-Raphson e obter as variáveis de estado \mathbf{x} ;
3. Determinar o vetor dos multiplicadores de Lagrange por:

$$\lambda = - \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]$$

onde $[\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{x}]$ é a matriz Jacobiana do método de Newton-Raphson.

4. Calcular o vetor gradiente resolvendo-se a seguinte equação:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right] + \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right]^t \lambda$$

5. *Testar a convergência:*

*Se o vetor gradiente for menor que uma tolerância especificada:
então a solução ótima foi encontrada.*

Se não: prosseguir ao passo seguinte.

6. *Atualizar as variáveis de controle:*

$$u^{novo} = u^{velho} + \Delta u,$$

com $\Delta u = -\alpha \nabla f$

onde α é um fator que determina a magnitude do passo.

7. *Retornar ao passo 2*

O tratamento das restrições de desigualdade é uma das limitações desta metodologia. As restrições de desigualdade referentes às variáveis de controle são facilmente consideradas, todavia, as restrições funcionais necessitam de um tratamento especial. Nas referências [Dommel,1968; Burchett,1982], propõe-se uso de função de penalidade quadrática para estas restrições. O uso de função de penalidade pode retardar a convergência além de exigir uma heurística para a especificação dos fatores de ponderação associados as penalidades.

O cálculo do comprimento do passo α é um procedimento essencial no método do Gradiente. Este cálculo pode ser efetuado formulando-se um problema de otimização unidimensional. Vários métodos foram implementados com este propósito, dentre estes a busca de Fibonacci [Shoults,1982], a interpolação quadrática [Shoults,1982] e a interpolação cúbica [Dommel,1968].

O *Método do Gradiente Projetado* de Rosen [Rosen,1960], usa como direção de busca a projeção o vetor gradiente, de forma a melhorar o índice de desempenho otimizado mantendo a viabilidade da solução. Esta técnica de otimização foi aplicada ao problema de FPO [Salgado,1989] tanto de distribuição de potência ativa como de potência reativa. Com esta abordagem, as restrições não lineares do problema são linearizadas, em torno de um ponto viável, resultando num problema de otimização do tipo

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeito a} && \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ &&& \mathbf{Ex} = \mathbf{e} \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde E é a matriz dos coeficientes associados as restrições ativas, isto é, restrições de desigualdade no limite e as restrições de igualdade originais; A é uma matriz cujos coeficientes estão associados as restrições inativas, b e e são vetores. Portanto, dada uma solução viável x^0 , uma nova solução é obtida com base na direção definida por

$$d = -P\nabla f(x)$$

onde P é uma matriz de projeção. A referência [Salgado,1989] fez uso de Transformações Ortogonais, baseadas nas Rotações de Givens, para determinar a matriz de projeção.

2.3.3 – O Método de Newton

No método de Newton, a direção do gradiente é modificada, premultiplicando-se a mesma pela inversa da matriz Hessiana, definindo a direção de busca. Esta abordagem foi aplicada com sucesso ao problema do FPO nos anos oitenta [Sun,1984; Burchett,1984; Maria,1987]. Nesta metodologia as variáveis são tratadas em conjunto como variáveis de decisão, isto é considera-se $z = [u, x]^t$, onde z é o vetor das variáveis de decisão incluindo-se as variáveis de controle, de estado e de perturbação. Desta forma, a formulação do problema do FPO submetido a restrições de igualdade é dada por:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(z) \\ \text{sujeito a} \quad & g(z) = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

As restrições de igualdade são incorporadas à função objetivo através de multiplicadores de Lagrange, resultando numa função Lagrangeana do tipo

$$L(z, \lambda) = f(z) - \lambda^t g(z) \tag{2.5}$$

A idéia básica do método consiste em fazer uma aproximação quadrática do Lagrangeano a cada iteração do processo de solução, conforme a expressão a seguir.

$$L(z + \Delta z, \lambda + \Delta \lambda) = L(z, \lambda) + \nabla_z L(z, \lambda) \Delta z + \nabla_\lambda L(z, \lambda) \Delta \lambda + \frac{1}{2} \Delta z^t \nabla_z^2 L(z, \lambda) \Delta z + \frac{1}{2} \Delta \lambda^t \nabla_\lambda^2 L(z, \lambda) \Delta \lambda$$

onde a aproximação pode ser obtida pela expansão da função Lagrangeana em série de Taylor em torno do ponto (z, λ) , até o termo de segunda ordem. As correções da solução do problema de otimização original são determinadas a partir das condições de otimalidade de primeira ordem aplicadas ao Lagrangeano, isto resulta na solução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} H & J^t \\ J & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_z L \\ g(z) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

onde H é a matriz *Hessiana* do Lagrangeano e J é a matriz *Jacobiana* das restrições de igualdade. O algoritmo do método de Newton, sem considerar as restrições de desigualdade, é resumido a seguir:

Algoritmo 2.3:

1. *Estimar os valores iniciais para as variáveis primais z e duais λ ;*
2. *Calcular o vetor gradiente do Lagrangeano;*
3. *Testar a Convergência:*

Se a solução corrente satisfaz as condições de otimalidade:

então a solução corrente é uma solução ótima.

Se não, prosseguir ao próximo passo;

4. *Determinar e resolver o sistema linear (2.6) para Δz e $\Delta \lambda$;*
5. *Atualizar a solução corrente e retornar ao passo 2.*

A inclusão de restrições de desigualdade constitui uma das dificuldades deste método. Uma alternativa proposta na referência [Sun,1984] é o uso de funções de penalidade do tipo quadrática, expressas analiticamente como

$$\xi_i = \frac{w_i}{2} (z_i - \bar{z}_i)^2 \quad (2.7)$$

onde w é um fator de peso que deve ser controlado automaticamente. O controle deste fator depende da aproximação do limite ou da qualificação da restrição, isto é, se a restrição é

rígida ou não. As restrições funcionais também recebem tratamento similar, e portanto o maior desafio do algoritmo está na identificação precisa das restrições ativas. O método de função de penalidade usado para identificar o conjunto de restrições de desigualdade ativas apresenta algumas deficiências. Na referência [Monticelli,1992] propõe-se uma estratégia de movimentos adaptativos do método de penalidade para evitar problemas de mal condicionamento.

2.3.4 - Métodos Quasi-Newton

Os métodos chamados quasi-Newton utilizam uma aproximação da inversa da matriz Hessiana na definição da direção de busca. Esta metodologia proposta por Davidon, em 1959, e mais tarde desenvolvida por Fletcher e Powell, também chamada de Método de Métrica Variável, foi aplicada ao problema de FPO por Talukdar e Giras [Talukdar,1982]. As vantagens desta metodologia, apresentados na referência citada, está na rapidez do processo de solução e na robustez do algoritmo, visto que a matriz que aproxima a matriz Hessiana é definida positiva.

2.3.5 - Fluxo de Potência Ótimo Multi-Objetivo

A formulação do problema de FPO como um problema de otimização multi-objetivo é apresentada como uma estratégia com boas perspectivas na referência [Wadhwa,1990]. Neste artigo, apresenta-se uma nova formulação para o problema de FPO, considerando de forma simultânea as funções objetivo mínimo custo de geração de energia e a mínima perda de potência ativa.

Esta abordagem faz parte da presente pesquisa, e portanto será estudada com maiores detalhes no capítulo quatro.

2.3.6 - Fluxo de Potência Ótimo Paramétrico

A Otimização Paramétrica tem sido empregada no problema de fluxo de potência ótimo. Carpentier [Carpentier,1983] e Galiana [Galiana,1983] utilizaram esta técnica como estratégia de solução do FPO. Na referência [Almeida,1994] é feita uma generalização da

aplicação de técnicas de otimização paramétrica ao problema de FPO. Neste trabalho, considera-se a parametrização da função objetivo, dos limites das restrições de desigualdade e das restrições de igualdade. O problema de otimização resultante é resolvido via método de Newton.

2.3.7 - Fluxo de Potência Ótimo “Fuzzy”

Sistemas Especialistas e outras áreas da Inteligência Artificial tem sido aplicados em alguns problemas de Sistemas de Potência [Zhang,1989]. De uma maneira geral, esta área constitui um meio de integração das técnicas numéricas com a programação heurística. Neste contexto, o uso da teoria dos conjuntos difusos (*fuzzy sets*) aparece como uma aplicação viável em problemas de FPO. Miranda e Saraiva modelam as incertezas associadas à geração e a carga através de números “fuzzy” [Miranda,1994]. Na referência [Tomsovic,1992] propõe-se o uso de programação linear “fuzzy” na solução do problema de controle de tensão/potência reativa. A formulação do problema de FPO com o objetivo de minimizar as perdas na transmissão, usando a teoria dos “fuzzy sets” foi apresentada nas referências [Adbul-Rahman,1993 e 1994].

2.3.8 – Fluxo de Potência Ótimo via Pontos Interiores

O método de Pontos Interiores (PI) tem permanecido em evidência desde a publicação do famoso artigo de Karmarkar [Karmarkar,1984]. O algoritmo de Karmarkar, com complexidade polinomial, mostrou-se competitivo ao algoritmo Simplex na solução de problemas de programação linear. O desenvolvimento desta área, conhecida como métodos de PI, é bastante expressivo até os dias atuais.

A aplicação do método de pontos interiores ao problema de FPO formulado como um problema de otimização não-linear, foi apresentada por Granville [Granville,1994]. Neste trabalho, o algoritmo de barreira primal-dual foi aplicado ao problema de despacho ótimo de potência reativa. Outros algoritmos de pontos interiores foram implementados em seguida. Na referência [Wu,1994] aplica-se o algoritmo preditor-corretor na solução do problema de FPO, com vantagens em relação ao primal-dual no que se refere aos aspectos computacionais. Na referência [Torres,1998], o problema de FPO é formulado

representando-se as tensões via coordenadas retangulares. Neste trabalho, utilizou-se o algoritmo primal-dual com o procedimento do preditor-corretor para reduzir o número de iterações. Diversas aplicações desta metodologia foram propostas para tratar os casos de FPO divergentes [Granville,1994].

No laboratório de Sistemas de Potência da UFSC, alguns trabalhos foram desenvolvidos utilizando o método de PI. Na referência [Barboza,1997], o método de PI é aplicado ao problema de máximo carregamento em sistemas de potência. Edgardo utilizou técnicas de Computação de Alto Desempenho na implementação do algoritmo Primal-Dual [Castronuovo,1997].

2.4 - Conclusões

Nesse capítulo apresentou-se o problema de fluxo de potência ótimo com suas variáveis, função objetivo e restrições. Em seguida fez-se uma breve revisão da literatura com ênfase nas principais técnicas de solução do problema de FPO. Algumas formulações alternativas foram comentadas.

O uso de programação linear na solução de problemas de FPO constitui uma área de estudos com razoável desenvolvimento. A linearização das funções por partes, em torno de um ponto de operação, associada a solução de sucessivos problemas de PL é uma técnica bem estabelecida.

Com relação ao problema de FPO não-linear, observa-se que os métodos baseados no gradiente, bastante empregados nos anos sessenta e setenta, evoluíram para os métodos baseados na direção de Newton, a partir dos anos oitenta.

Nos dias atuais, grande parte das pesquisas estão voltadas para aplicação do método de pontos interiores na solução do problema de FPO. Bastante evidente no momento, esta metodologia tem recebido contribuições de pesquisadores em diversas áreas com freqüente surgimento de novos algoritmos. A evolução desta metodologia e os bons resultados na solução do problema de FPO, motivaram, junto com outros fatores, o desenvolvimento deste trabalho.

Capítulo 3

O Método de Pontos Interiores para Otimização Não-linear

3.1 - Introdução

A formulação do problema de Fluxo de Potência Ótimo, geralmente, resulta num problema de otimização não-linear pois algumas das funções envolvidas são não-lineares. A abordagem deste problema, no desenvolvimento desta pesquisa, foi feita através do método de Pontos Interiores. Dois algoritmos, pertencentes a esta metodologia, foram considerados como técnica de solução deste problema: o algoritmo de barreira primal-dual e o algoritmo de Redução de Função Potencial. Neste capítulo, são apresentados os fundamentos destas metodologias bem como os algoritmos que foram posteriormente implementados. Considera-se ainda, os detalhes da aplicação destes algoritmos ao problema de Fluxo de Potência Ótimo. Complementando o assunto, algumas comparações entre estas duas abordagens e a análise de resultados são feitas no capítulo de resultados numéricos.

3.2 – Conceitos Básicos de Programação Não-Linear

Um problema de otimização envolve variáveis, restrições e um critério a ser otimizado. A natureza destes elementos caracteriza o tipo de problema de otimização em questão. Por exemplo, se as restrições e o critério de desempenho são funções lineares,

então o problema é dito pertencer a classe de Programação Linear. Estudaremos o caso mais geral e de maior grau de dificuldade, em que as funções envolvidas são não-lineares. Este é o tipo de problema que será abordado neste capítulo. As definições apresentadas a seguir [Bazaraa,1993; Fiacco,1990] fornecem conceitos preliminares e elementos básicos de programação não-linear necessários ao acompanhamento da exposição.

Notação: No desenvolvimento desta monografia, a representação de vetores, matrizes, funções e etc. será feita através de letras do alfabeto Romano e Grego. Todos os vetores são do tipo coluna e serão denotados por letras minúsculas em negrito; as matrizes serão denotadas por letras maiúsculas também em negrito. Funções escalares serão denotadas por letras minúsculas em itálico e as funções vetoriais em itálico e negrito simultaneamente. Os escalares serão denotados por letras minúsculas simples.

Com relação ao espaço euclidiano n dimensional, denotado \mathfrak{R}^n , será feita uma distinção entre vetores positivos e vetores estritamente positivos, isto é

$$\mathfrak{R}_+^n \equiv \{ \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

e

$$\mathfrak{R}_{++}^n \equiv \{ \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid \mathbf{x} > \mathbf{0} \}$$

Definição 3.1: Considere o seguinte *problema de programação não-linear*

$$\begin{aligned} & \textit{minimize} && f(\mathbf{x}) \\ & \textit{sujeito a} && \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ & && \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $\mathbf{x} = [x_1, x_2 \dots x_n]^T$ é um vetor do \mathfrak{R}^n , de *variáveis* do problema. As funções f , \mathbf{g} e \mathbf{h} são consideradas funções contínuas e duas vezes diferenciáveis. A função $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^1$ é uma função escalar chamada *função objetivo*; $\mathbf{g}: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^l$ corresponde as *restrições de desigualdade* e $\mathbf{h}: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ são as *restrições de igualdade*. Um vetor $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ qualquer é uma *solução viável* ou *factível* do problema (3.1) se ele satisfaz a todas as restrições. O conjunto das soluções viáveis é chamado de *conjunto viável* ou *factível* associado ao

referido problema. Outra classe de restrições de desigualdade diz respeito aos limites associados às variáveis do problema, a qual é definida por

$$K \equiv \{ \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \}. \quad (3.2)$$

onde \mathbf{a} e \mathbf{b} são vetores $\in \mathfrak{R}^n$ que representam os valores máximo e mínimo das variáveis x_i ($i = 1 \dots n$).

Resolver um problema de otimização consiste em encontrar uma solução viável \mathbf{x}^* tal que

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*) \quad (3.3)$$

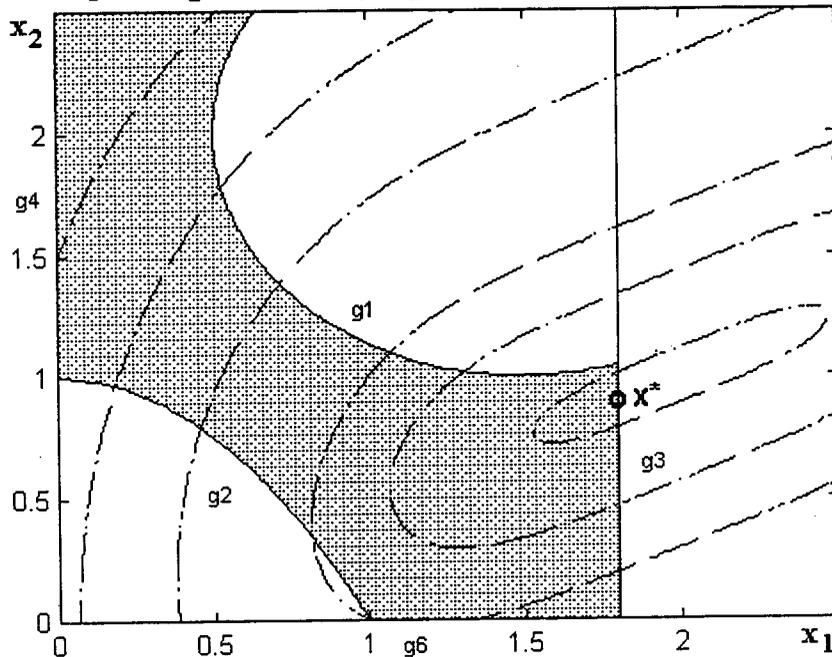
para todo \mathbf{x} viável. Neste caso, \mathbf{x}^* é *solução ótima* ou *ponto de mínimo* do problema (3.1). Se a condição (3.3) for verificada para todo \mathbf{x} viável, \mathbf{x}^* é denominado *mínimo global*. Se existe uma vizinhança em torno de \mathbf{x}^* , isto é $\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \| < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$, onde a condição (3.3) é verificada, então \mathbf{x}^* é um *mínimo local*. Com o objetivo de ilustrar estas definições, considere-se o exemplo a seguir.

Exemplo 3.1: Seja o seguinte problema de programação não-linear:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \\ \text{sujeito a} \quad & g_1(x_1, x_2) = -(x_1 - 1.5)^2 - (x_2 - 2)^2 + 1 \\ & g_2(x_1, x_2) = -x_1^2 + 1 - x_2 \\ & g_3(x_1, x_2) = x_1 - 1.8 \\ & g_4(x_1, x_2) = -x_1 \\ & g_5(x_1, x_2) = x_2 - 2.5 \\ & g_6(x_1, x_2) = -x_2 \end{aligned}$$

onde f é a função objetivo e g_1 até g_6 são restrições de desigualdade do tipo menor ou igual a zero, conforme denotado no problema (3.1). A figura a seguir mostra, geometricamente, a solução do problema

g5 Figura 3.1: Solução gráfica do exemplo 3.1.



onde as curvas tracejadas são chamadas de *curvas de nível* da função objetivo, visto que elas representam o lugar geométrico onde o valor da função objetivo é constante. A área em destaque, delimitada pelas restrições de desigualdade, representa a região viável, e o ponto de coordenadas (1.80 ; 0.90) é a solução do problema, ou seja um ponto de mínimo.

Algumas formas alternativas de representação do problema (3.1) podem ser definidas, dependendo da estrutura proposta para o conjunto viável. Considere Ω um subconjunto $\subseteq \mathbb{R}^n$ definido como

$$\Omega \equiv \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0, h(x) = 0, a \leq x \leq b \}. \quad (3.4)$$

Então, utilizando esta definição, o problema de programação não-linear (3.1) assume a seguinte forma

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array} \quad (3.5)$$

Note-se que as restrições associadas aos limites das variáveis são definidas separadamente das restrições funcionais g , e assim elas podem ser tratadas de forma diferenciada.

No método de pontos interiores, alguns algoritmos geram seqüências de pontos que, apesar de serem interiores, não são viáveis. Estes são os chamados “infeasible-interior-point methods” [Kojima,1994; Potra,1996; Wright,1992; Zhang,1994], bastante utilizados na solução de problemas de otimização não-linear. Os algoritmos que serão estudados nas próximas seções fazem parte desta família de algoritmos. Alguns conceitos apresentados a seguir serão utilizados na descrição das abordagens para o problema .

Definição 3.2: Seja $\Omega \subset \Omega_+$ o conjunto definido pela região onde as restrições de desigualdade são satisfeitas, isto é,

$$\Omega_+ \equiv \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0, a \leq x \leq b \} \quad (3.6)$$

Admite-se que o subconjunto Ω_+ possui um interior, denotado Ω_{++} , onde as desigualdades são estritamente satisfeitas, o qual é definido como

$$\Omega_{++} \equiv \text{interior}(\Omega_+) \equiv \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) < 0, a < x < b \} \quad (3.7)$$

onde o subconjunto Ω_{++} é admitido não vazio, ou seja, $\Omega_{++} \neq \Phi$. A definição de pontos interiores é apresentada a seguir.

Definição 3.3: Um *ponto interior* de um problema de otimização não-linear do tipo (3.5) é todo ponto x pertencente ao subconjunto Ω_{++} , ou seja, é qualquer ponto na região onde as restrições de desigualdade são estritamente satisfeitas. Observe que um ponto interior não necessariamente é um ponto viável.

3.3 - O Método de Pontos Interiores para Otimização Não-linear

Determinar a solução ótima de problemas de otimização não-linear em geral não é uma tarefa simples. Nos últimos tempos, mais especificamente desde a introdução, por Karmarkar [Karmarkar,1984], do algoritmo polinomial para problemas de Programação Linear, em 1984, o método de pontos interiores tem sido utilizado na solução numérica de diversos problemas de otimização. A idéia intuitiva do método de pontos interiores consiste em buscar uma solução ótima reduzindo a função objetivo, no caso de minimização, mantendo a busca no interior da região delimitada pelas restrições. De fato, esta idéia já era conhecida desde os anos sessenta, quando Fiacco e MacCormick [Fiacco,1990] propuseram o método de pontos interiores para programação não-linear. Nesta proposição, as restrições de desigualdade eram penalizadas utilizando-se a função barreira logarítmica de Frisch [Frisch,1955]. À partir desta proposta, muitas inovações do método de pontos interiores foram divulgadas. Para se ter uma idéia desse desenvolvimento, basta fazer uma visita ao site <http://www-c.mcs.anl.gov/home/otc/InteriorPoint/archive.html>, onde uma extensa bibliografia sobre o assunto está disponível. Uma melhoria de particular interesse no método de pontos interiores foi proposta por Clovis Gonzaga [Gonzaga,1991], o qual desenvolveu novos algoritmos onde a busca é uma combinação da direção de redução de custo, para o caso linear, com a direção de centralização. Este método, denominado de trajetória central (path-following method), foi estudado para o problema de programação linear na forma primal [Gonzaga,1992]. Seguindo esta idéia, surgiram as versões primal-dual deste algoritmo [Kojima,1987; Monteiro,1989a e 1989b] para programação linear e quadrática convexa. Estes algoritmos, baseados na trajetória central, contribuíram para o desenvolvimento dos algoritmos para o caso não-linear do problema de fluxo de potência ótimo [Granville,1994] via método de pontos interiores.

No desenvolvimento do presente trabalho de pesquisa, foram estudadas duas versões do método de pontos interiores para a solução do problema de fluxo de potência ótimo. A primeira versão corresponde ao algoritmo primal-dual utilizado na referência [Granville,1994]. A segunda versão, apresentada como uma contribuição à solução do

FPO, utiliza a teoria de Redução de Função Potencial, recentemente introduzida na área de algoritmos de pontos interiores [Todd,1995; Wang,1995; Monteiro,1997].

3.3.1 - O Método de Barreira Primal-Dual

Os algoritmos de trajetória central, derivados do método de penalidades do tipo barreira logarítmica, geram uma seqüência de pontos aproximam da trajetória central. A versão primal-dual deste algoritmo se aplica satisfatoriamente a certos problemas de otimização não-linear, incluindo nesta categoria o problema de FPO.

Considere-se o problema de programação não-linear tal como formulado na definição 3.1, e re-escrito na seguinte forma alternativa

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && f(x) \\
 & \text{sujeito a} && g(x) \leq 0 \\
 & && h(x) = 0 \\
 & && x \in K
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde o vetor x e as funções $f(x)$, $h(x)$ e $g(x)$ foram definidos anteriormente em (3.1), e o conjunto K foi definido em (3.2). Este problema é modificado adicionando-se variáveis de folga s às restrições de desigualdades, transformando as mesmas em igualdades. Isto resulta no seguinte problema

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && f(x) \\
 & \text{sujeito a} && g(x) + s^g = 0 \\
 & && h(x) = 0 \\
 & && a - x + s^a = 0 \\
 & && x - b + s^b = 0 \\
 & && s^g, s^a, s^b \in \mathcal{R}_+^l \times \mathcal{R}_+^n \times \mathcal{R}_+^n
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde as desigualdades do tipo maior ou igual foram previamente transformadas em desigualdades do tipo menor ou igual. Para que os vetores das variáveis de folga s^g , s^a e s^b permaneçam no ortante positivo, isto é $s \in \mathfrak{R}_+$, faz-se uso de uma função barreira logarítmica adicionada à função objetivo. Assim, o problema assume o seguinte formato

$$\begin{aligned}
 \text{minimize} \quad & \left\{ f(x) - \mu \sum_{i=1}^l \log(s_i^g) - \mu \sum_{i=1}^n \log(s_i^a) - \mu \sum_{i=1}^n \log(s_i^b) \right\} \\
 \text{sujeito a} \quad & g(x) + s^g = 0 \\
 & h(x) = 0 \\
 & a - x + s^a = 0 \\
 & x - b + s^b = 0
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde todas as restrições são igualdades e $s > 0$. O parâmetro de penalização da função barreira logarítmica μ é um número positivo que tende iterativamente a zero quando a solução se aproxima do ótimo. O problema primal modificado pode ser visto como uma aproximação do problema original, parametrizado por um fator μ fixo. O papel da função barreira e de seu parâmetro foi bastante estudado por Gonzaga [Gonzaga,1989] que, a partir de uma interpretação geométrica de problemas lineares, caracterizou os pontos centrais como minimizadores da função penalizada.

A função Lagrangeana associada ao problema primal (3.10) parametrizada por um μ fixo, de forma equivalente ao problema primal, é construída incorporando-se as restrições de igualdade à função objetivo através de multiplicadores de Lagrange, variáveis duais, $\lambda \in \mathfrak{R}^m$ e $\pi \in \mathfrak{R}^l \times \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n$, resultando na seguinte função escalar

$$\begin{aligned}
 \ell_\mu(x, \lambda, \pi, s) = & f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log(s_i^g) - \mu \sum_{i=1}^n \log(s_i^a) - \mu \sum_{i=1}^n \log(s_i^b) + \\
 & \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{i=1}^l \pi_i^g (g_i(x) + s_i^g) + \sum_{i=1}^n \pi_i^a (-x + s_i^a + a_i) + \sum_{i=1}^n \pi_i^b (x + s_i^b - b_i)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Esta função desempenha um papel importante para a solução do problema, pois a partir dela é possível estabelecer um caminho para obtenção de uma solução, a qual é

determinada pela aplicação das condições de otimalidade de primeira ordem para o problema 3.10 dadas por

$$\nabla \ell(\mathbf{x}, \lambda, \pi, \mathbf{s}) = \mathbf{0}$$

O que é equivalente a:

$$\nabla_x f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_x h_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \pi_i^g \nabla_x g_i(\mathbf{x}) - \pi^a + \pi^b = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}^g = \mathbf{0} \quad (3.14a)$$

$$-\mathbf{x} + \mathbf{s}^a + \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.14b)$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{s}^b - \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (3.14c)$$

$$\mathbf{S}^g \pi^g = \mu \mathbf{e} \quad (3.15a)$$

$$\mathbf{S}^a \pi^a = \mu \mathbf{e} \quad (3.15b)$$

$$\mathbf{S}^b \pi^b = \mu \mathbf{e} \quad (3.15c)$$

$$\pi^a, \pi^b, \pi^g \geq \mathbf{0}$$

onde \mathbf{e} é um vetor unitário de ordem adequada a dimensão da variável, e as matrizes \mathbf{S}^g , \mathbf{S}^a e \mathbf{S}^b são matrizes diagonais com elementos s^g , s^a e s^b respectivamente. A equação (3.12) expressa a condição de viabilidade dual, as equações (3.13 -3.14) caracterizam a viabilidade primal, e as equações restantes (3.15a, b e c) expressam a condição de complementaridade das folgas. Alguns autores [El-Bakry,1992; Byrd,1996], interpretam estas equações com sendo as condições de Karush-Kuhn-Tucker (K-K-T) para o problema (3.9) perturbadas por um parâmetro μ . De fato, fazendo μ tender a zero, isto é $\mu \rightarrow 0$, as equações são equivalentes às equações de K-K-T.

A proposição descrita a seguir, feita por Megido [Megido,1989], Bayer e Lagarias [Bayer,1989] e Sonnevend [Sonnevend,1986], apresenta algumas hipóteses para o seguinte problema de programação linear

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \{ \mathbf{c}'\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

onde $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ e \mathbf{A} é uma matriz m por n suposta de posto completo, e o correspondente problema dual

$$\underset{y,s}{\text{maximize}} \{ b' y \mid A' y + s = c, s \geq 0 \}$$

cujas condições de otimalidade perturbadas são dadas por

$$\begin{aligned} Ax &= b, \quad x \geq 0 \\ A'y + s &= c, \quad s \geq 0 \\ Xs &= \mu e \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde s são variáveis de folga, X é uma matriz diagonal cujos elementos são x_i , μ é o parâmetro da função barreira e e é um vetor unitário.

Proposição 3.2: Supondo que existe uma solução inicial (x_0, y_0, s_0) viável interior (isto é, $x_0 > 0, s_0 > 0$) para os problemas primal e dual, então as seguintes afirmativas são feitas:

- (i) – O sistema de equações tem solução única para cada $\mu > 0$, denotada por $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$;
- (ii) – o conjunto $\{ x(\mu) : \mu > 0 \}$ define uma trajetória suave na região de viabilidade primal;
- (iii) – o conjunto $\{ y(\mu), s(\mu) : \mu > 0 \}$ define uma trajetória suave na região de viabilidade dual;
- (iv) – o “gap” de dualidade das trajetórias primal e dual é dado por

$$x(\mu)' s(\mu) = n\mu$$

onde n é a dimensão do problema.

- (v) – as seqüências de soluções (ii) e (iii) convergem para solução ótima, isto é

$$\text{Limite}_{\mu \rightarrow 0} (x(\mu), s(\mu)) = (x^*, s^*)$$

Prova: Ver o artigo [Jansen,1995].

Estas considerações feitas para o caso linear, foram estendidas para problemas convexos [Den Hertog,1994] e atualmente são bastante estudadas para o caso não convexo [El-Bakry,1995; Byrd,1996; Gay,1996; Vanderbei,1997]

As equações não-lineares (3.12 até 3.15), resultante da aplicação das condições de otimalidade de primeira ordem, são resolvidas pelo método de Newton-Raphson. Antes porém, seja a seguinte simplificação de notação

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi^g \\ \pi^a \\ \pi^b \end{bmatrix} \quad e \quad s = \begin{bmatrix} s^g \\ s^a \\ s^b \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

No método de Newton, a cada iteração são determinados os incrementos das variáveis $x(\mu)$, $\lambda(\mu)$, $\pi(\mu)$ e $s(\mu)$, na direção de busca, isto é Δx , $\Delta \lambda$, $\Delta \pi$ e Δs , resolvendo-se o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 \ell & \nabla_x' h(x) & \nabla_x' g^{gab}(x) & 0 \\ \nabla_x h(x) & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_x g^{gab}(x) & 0 & 0 & I^{gab} \\ 0 & 0 & S^{gab} & \Pi^{gab} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta \pi \\ \Delta s \end{bmatrix} = [-F_\mu(x, \lambda, \pi, s)] \quad (3.18)$$

onde $F_\mu(x, \lambda, \pi, s)$ representa as equações (3.12 a 3.15). O termo $\nabla_{xx}^2 \ell$ corresponde à Hessiana do Lagrangeano, o qual é dado por

$$\nabla_{xx}^2 \ell = \nabla_{xx}^2 f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_{xx}^2 h_i(x) + \sum_{i=1}^l \pi_i^g \nabla_{xx}^2 g_i(x) \quad (3.19)$$

onde as matrizes $\nabla_{xx}^2 f(x)$, $\nabla_{xx}^2 h(x)$ e $\nabla_{xx}^2 g(x)$ são matrizes Hessianas de f , h e g respectivamente. A matriz S^{gab} é uma matriz diagonal composta pelas submatrizes S^g , S^a e S^b , anteriormente definidas. De forma equivalente, Π^{gab} é um matriz diagonal dada por

$$\Pi^{gab} = \begin{bmatrix} \Pi^g & & \\ & \Pi^a & \\ & & \Pi^b \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

onde as submatrizes Π^g , Π^a e Π^b são diagonais com elementos π_i^g , π_i^a , e π_i^b , respectivamente.

A matriz identidade \mathbf{I}^{gab} assume a seguinte forma.

$$\mathbf{I}^{gab} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^g & & \\ & \mathbf{I}^a & \\ & & \mathbf{I}^b \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

onde as submatrizes do tipo identidade \mathbf{I}^g , \mathbf{I}^a e \mathbf{I}^b , possuem dimensões compatíveis com as respectivas variáveis de folga. Finalmente, por questão de conformidade, considera-se que

$$\nabla_x^t \mathbf{g}^{gab}(x) = [\nabla_x^t \mathbf{g}(x) - \mathbf{I}^a \mathbf{I}^b] \quad (3.22)$$

Com o objetivo de manter a busca da solução ótima no interior do conjunto viável, controla-se o tamanho do passo verificando as seguintes condições

$$\alpha_p = \min \left\{ \min_{\Delta s < 0} \frac{s_i^g}{|\Delta s_i^g|}, \min_{\Delta s < 0} \frac{s_i^a}{|\Delta s_i^a|}, \min_{\Delta s < 0} \frac{s_i^b}{|\Delta s_i^b|}, 1 \right\}, \quad (3.23)$$

e

$$\alpha_d = \min \left\{ \min_{\Delta \pi < 0} \frac{\pi_i^g}{|\Delta \pi_i^g|}, \min_{\Delta \pi < 0} \frac{\pi_i^a}{|\Delta \pi_i^a|}, \min_{\Delta \pi < 0} \frac{\pi_i^b}{|\Delta \pi_i^b|}, 1 \right\}, \quad (3.24)$$

Uma nova solução do problema parametrizado é determinada atualizando-se as variáveis primais e duais como

$$x_\mu^{\text{atual}} = x_\mu + \kappa \alpha_p \Delta x$$

$$\lambda_\mu^{\text{atual}} = \lambda_\mu + \kappa \alpha_d \Delta \lambda$$

$$\pi_\mu^{\text{atual}} = \pi_\mu + \kappa \alpha_d \Delta \pi$$

$$s_\mu^{\text{atual}} = s_\mu + \kappa \alpha_p \Delta s$$

onde κ é uma constante cuja função é evitar que a variável atinja a fronteira. O ajuste do parâmetro μ da função barreira é determinado através de uma “medida de complementariedade” expressa em função da grandeza $s'\pi$. Os procedimentos necessários para implementação desta metodologia, estão resumidos no algoritmo apresentado a seguir.

Algoritmo 3.1:

Especificar: $\mu > 0$, $\beta > 0$ e uma solução inicial $(x_0, \lambda_0, \pi_0, s_0)$

Enquanto a convergência não foi obtida

Calcular:

$$F_\mu(x, \lambda, \pi, s), \quad \text{equações (3.12 ate 3.15);}$$

Testar a convergência:

Se

$$\| F_\mu \| \leq \varepsilon_F \quad e \quad \| \mu \| \leq \varepsilon_\mu$$

então:

uma solução foi obtida.

Se não:

Resolver o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 \ell & \nabla_x' h(x) & \nabla_x' g^{gab}(x) & 0 \\ \nabla_x' h(x) & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_x' g^{gab}(x) & 0 & 0 & I^{gab} \\ 0 & 0 & S^{gab} & \Pi^{gab} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta \pi \\ \Delta s \end{bmatrix} = [-F_\mu(x, \lambda, \pi, s)]$$

Calcular o comprimento do passo;

$$\alpha_p = \min \left\{ \min_{\Delta s < 0} \frac{s_i^g}{|\Delta s_i^g|}, \min_{\Delta s < 0} \frac{s_i^a}{|\Delta s_i^a|}, \min_{\Delta s < 0} \frac{s_i^b}{|\Delta s_i^b|}, 1 \right\},$$

$$\alpha_d = \min \left\{ \min_{\Delta \pi < 0} \frac{\pi_i^g}{|\Delta \pi_i^g|}, \min_{\Delta \pi < 0} \frac{\pi_i^a}{|\Delta \pi_i^a|}, \min_{\Delta \pi < 0} \frac{\pi_i^b}{|\Delta \pi_i^b|}, 1 \right\},$$

Atualize a solução corrente;

$$x_{\mu}^{\text{atual}} = x_{\mu} + \kappa \alpha_p \Delta x$$

$$\lambda_{\mu}^{\text{atual}} = \lambda_{\mu} + \kappa \alpha_d \Delta \lambda$$

$$\pi_{\mu}^{\text{atual}} = \pi_{\mu} + \kappa \alpha_d \Delta \pi$$

$$s_{\mu}^{\text{atual}} = s_{\mu} + \kappa \alpha_p \Delta s$$

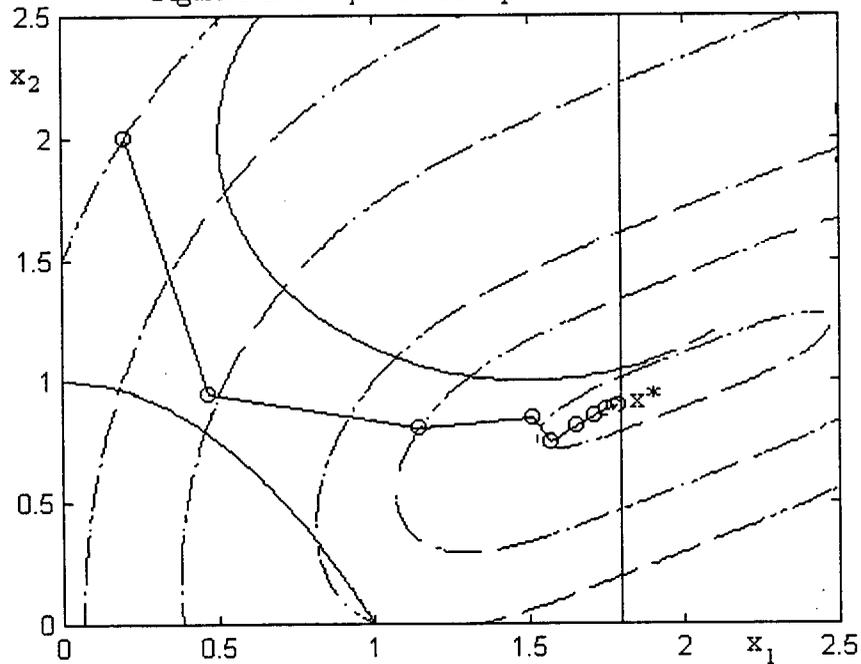
Ajustar o parâmetro da função barreira μ .

$$\mu = \frac{s(\mu)' \pi(\mu)}{n\beta}$$

Avaliar a solução encontrada.

Diferentes implementações do algoritmo de barreira primal-dual foram desenvolvidas no ambiente do Matlab para testes em problemas gerais. A solução do problema-exemplo 3.1, a partir do ponto $x^0 = [0.2 ; 2.0]^t$ é apresentada na figura 3.2.

Figura 3.2: Solução do exemplo 3.1



Na figura 3.2, a trajetória gerada pelo algoritmo está representada pelas linhas contínuas e os círculos são os pontos de acumulação ou soluções intermediárias. A seqüência convergiu para a solução ótima, o ponto $x^* = [1.80 ; 0.90]$, em nove iterações com uma tolerância de 10^{-3} . Na etapa seguinte, o algoritmo foi aplicado na solução do

problema de fluxo de potência ótimo, cujos detalhes são apresentados na seção 3.4 deste capítulo.

3.3.2 - O Método de Redução de Função Potencial

A teoria sobre a redução de função potencial é recente no campo da programação matemática. A introdução desta metodologia na área de pontos interiores caracteriza um avanço pois ela torna a teoria (análise de convergência, complexidade, etc.) mais próxima da prática (escolha da direção de busca, do comprimento do passo, etc.), as quais passam a ser ambas dirigidas por uma função de mérito. A idéia básica desta metodologia consiste em projetar uma função de mérito do tipo redução potencial apropriada ao problema em questão.

Um primeiro aspecto a ser considerado é a diferença entre função de mérito e função objetivo. Em geral, o conceito de função objetivo é mais familiar, desde que esta é especificada visando melhorar um determinado índice de desempenho associado ao problema físico. De forma equivalente, a *função de mérito* é especificada visando avaliar o desempenho do algoritmo usado para solução do problema. Alguns conceitos básicos desta metodologia são apresentados a seguir.

Considere o problema de otimização não-linear tal como aquele representado em (3.5)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array} \quad (3.25)$$

onde x , f e Ω foram definidos anteriormente. Resolver este problema de otimização consiste em encontrar um vetor x^* no conjunto viável, isto é $x^* \in \Omega$, tal que

$$(x - x^*)^T \nabla_x f(x^*) \geq 0,$$

para todo $x \in \Omega$. As restrições de desigualdade $g(x) \leq 0$ são tratadas como igualdades pela

adição de variáveis de folga $y \in \mathfrak{R}^l_+$, tal que

$$y + g(x) = 0 \quad (3.26)$$

A partir do problema primal (3.25), com as restrições de desigualdade expressas como igualdade, são estabelecidas as condições necessárias de otimalidade. Estas condições são enunciadas pelo teorema Karush-Kuhn-Tucker (K-K-T) apresentado na proposição a seguir onde, para simplificar, serão consideradas apenas as restrições de desigualdades.

Teorema 3.1: (Condições Necessárias de Primeira Ordem - Teorema de Karush-Kuhn-Tucker). Considere o problema de minimizar $f(x)$ sujeito a $g(x) \leq 0$, sobre o conjunto não vazio $X \equiv \{x \in \mathfrak{R}^n \mid g(x) \leq 0\}$. Suponha que x^* seja solução do problema e que as funções f e g_i , $i \in I = \{i : g_i(x^*) = 0\}$ sejam diferenciáveis neste ponto. Além disso, considere que os vetores $\nabla g_i(x^*)$ para $i \in I$, são linearmente independentes. Então, as condições necessárias para que x^* resolva localmente o problema, é que existam escalares π_i , $i \in I$, tais que

$$\begin{aligned} \nabla_x f(x) + \sum_{i \in I} \pi_i \nabla_x g_i(x) &= 0 \\ \pi_i &\geq 0 \quad \text{para } i \in I \end{aligned}$$

Prova: Ver o capítulo quatro da referência [Bazaraa,1993].

Pela aplicação do teorema de Karush-Kuhn-Tucker ao problema primal (3.25), com as restrições de desigualdade $g(x) \leq 0$ expressas como em (3.26), obtém-se um sistema de equações não-lineares, chamado de sistema de K-K-T. Este sistema é determinado admitindo-se a existência de variáveis duais λ , π , υ e $\nu \in \mathfrak{R}^{m+l+2n}$, reunidas junto com as variáveis primais no vetor $w = (x, y, \lambda, \pi, \upsilon, \nu)$, tal que

$$\Psi(w) = \begin{bmatrix} L(x, \lambda, \pi, \upsilon, \nu) \\ y + g(x) \\ h(x) \\ y \circ \pi \\ \upsilon \circ (x - a) \\ \nu \circ (b - x) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

com $\Psi(\mathbf{w})$ definido em $\Omega^{\Psi} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times \mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{2n}$. O subconjunto $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ foi definido como K em 3.1. O símbolo “ \circ ” denota o produto de Hadarmad de dois vetores, isto é dados dois vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} , $(\mathbf{x} \circ \mathbf{y})$ corresponde a um vetor cujo i -ésimo elemento é $x_i y_i$. A função vetorial $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{v}, \mathbf{v})$ é definida por

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_{\mathbf{x}} h_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \pi_i \nabla_{\mathbf{x}} g_i(\mathbf{x}) - \mathbf{v} + \mathbf{v} \quad (3.28)$$

O objetivo agora é projetar um algoritmo, construído a partir de uma função de mérito [Tanabe, 1988], que resolva o sistema de equações com restrições (3.27). Isto equivale a encontrar um vetor \mathbf{w} no espaço definido por $\Psi(\mathbf{w})$ tal que

$$\Psi(\mathbf{w}) = \mathbf{0} \quad (3.29)$$

Antes, porém, assume-se que a estrutura do mapeador $\Psi(\mathbf{w})$ possui certas propriedades as quais permitem o seu particionamento como

$$\Psi(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} F(\mathbf{w}) \\ G(\mathbf{w}) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

onde

$$F(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ h(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

e

$$G(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \circ \boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{v} \circ (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \\ \mathbf{v} \circ (\mathbf{b} - \mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Associado à este particionamento, denota-se Ω^{Ψ}_{++} o conjunto de pontos interior de Ω^{Ψ} .

Na proposição a seguir, são feitas algumas hipóteses a respeito das propriedades do sistema de equações com restrições, ou seja, do sistema de K-K-T.

Proposição 3.3: As hipóteses a seguir referem-se ao operador $\Psi(\mathbf{w})$.

- (i) o interior do conjunto viável é não vazio, isto é $\Omega^{\Psi} \neq \emptyset$;
- (ii) o operador $\Psi(\mathbf{w})$ é continuamente diferenciável no subconjunto Ω^{Ψ} ;
- (iii) a matriz Jacobiana $\Psi'(\mathbf{w})$ é não singular para todo $\mathbf{w} \in \Omega^{\Psi}$

Prova: Ver a referência [Wang,1995].

Propõe-se então, desenvolver um algoritmo que gere uma seqüência de vetores $\{\mathbf{w}^k\}$ interiores ao conjunto viável, isto é $\mathbf{w}^k \in \Omega^{\Psi}$ cujos vetores intermediários, se existirem, são soluções do sistema de equações com restrições (3.29). A geração dos vetores intermediários pelo algoritmo, no processo iterativo, será guiada por uma função de mérito $\varphi : \Omega^{\Psi} \rightarrow \mathbb{R}^1$, definida por Wang [Wang,1995] como

$$\varphi(\mathbf{w}) = \zeta \log(F(\mathbf{w})' F(\mathbf{w}) + e' G(\mathbf{w})) - \sum_{i=1}^{n_2} \log G_i(\mathbf{w}) \quad (3.33)$$

para todo $\mathbf{w} \in \Omega^{\Psi}$. O escalar ζ é um número fixo que satisfaz $\zeta > n_2$, onde n_2 é a dimensão do espaço de $G(\mathbf{w})$ e e é um vetor unitário que se ajusta à dimensão do problema. O primeiro termo da função de mérito, dado por $\zeta \log(F(\mathbf{w})' F(\mathbf{w}) + e' G(\mathbf{w}))$, contribui para redução da norma de Ψ , enquanto que o segundo termo, é uma função barreira logarítmica que mantém as soluções geradas no interior do conjunto viável. Fazendo uso do particionamento definido em (3.30), a função de mérito assume a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{w}) = & \zeta \log(\|L(\mathbf{x}, \lambda, \pi, \nu, \nu)\|^2 + \|y + \mathbf{g}(\mathbf{x})\|^2 + \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|^2 + y' \pi + \nu'(x - a) + \nu'(b - x)) \\ & - \sum_{i=1}^l \log(y_i \pi_i) - \sum_{i=1}^n \log(\nu_i(x_i - a_i)) - \sum_{i=1}^n \log(\nu_i(b_i - x_i)) \end{aligned} \quad (3.34)$$

para todo $w = (x, y, \lambda, \pi, v, \nu) \in \Omega^{p}_{++}$. O escalar ζ é maior do que $l+2n$, e o vetor função $L(x, y, \pi, v, \nu)$ foi definido em (3.28).

O algoritmo proposto para resolver o sistema de equações com restrições é um procedimento iterativo, o qual usa a direção de Newton “perturbada” para reduzir, a cada iteração, o valor da função de mérito. A motivação para tomar a direção de Newton “perturbada” ao invés de pegar a direção convencional de Newton, é que a primeira procura acompanhar a trajetória central do conjunto Ω^{p}_{++} . Para um vetor $w \in \Omega^{p}_{++}$ qualquer, a direção de Newton “perturbada” é obtida resolvendo-se o sistema de equações, linearizado no ponto w , dado a seguir

$$\Psi'(w)d = \begin{bmatrix} F'(w)d \\ G'(w)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F(w) \\ -G(w) + \sigma\beta(w)e \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

onde $\beta(w) = e^t G(w)/n\zeta$ é uma medida de proximidade ao centro analítico em w e o escalar $\sigma \in [0,1)$ é um parâmetro de centralização. Em geral, a solução d do sistema linear (3.35), é uma direção de decréscimo da função $\phi(w)$. Fazendo uso dos termos definidos em (3.31) e (3.32), resultantes do particionamento admitido, o sistema de equação (3.35) assume o seguinte formato

$$\begin{bmatrix} \nabla_x L & 0 & \nabla_x h(x) & \nabla_x g(x) & -I & I \\ \nabla_x g(x) & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_x h(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi & 0 & Y & 0 & 0 \\ U & 0 & 0 & 0 & (X - D_a) & 0 \\ -V & 0 & 0 & 0 & 0 & (D_b - X) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_\lambda \\ d_\pi \\ d_v \\ d_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L(x, \lambda, \pi, v, \nu) \\ -y - g(x) \\ -h(x) \\ -y \circ \pi + \sigma\beta e \\ -(x - a) \circ v + \sigma\beta e \\ -(b - x) \circ v + \sigma\beta e \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

onde $D_a, D_b, U, V, X, Y, e \Pi$, são matrizes diagonais cujos elementos da diagonal são $a_i, b_i, u_i, v_i, x_i, y_i$ e π_i respectivamente. Nesta circunstância, o escalar β , definido como a medida proximidade ao centro analítico do conjunto viável, é expresso em termos da complementaridade das folgas como

$$\beta^k = \frac{(y^k)' \pi^k + (v^k)' (x^k - a) + (\nu^k)' (b - x^k)}{l + 2n} \quad (3.37)$$

onde o indexador k refere-se à iteração presente. Desde que β é uma medida de complementaridade das folgas, é de se esperar que esta constante diminua de valor quando a seqüência se aproxima da solução. A função do parâmetro σ , que aparece no lado direito da equação (3.36), é de determinar a participação da componente de centralização da direção de Newton perturbada, durante o processo iterativo.

Algumas propriedades da função potencial serão analisadas a seguir. Antes porém, considere-se a seguinte definição

$$\phi(\mathbf{w}) = F(\mathbf{w})'F(\mathbf{w}) + e^t G(\mathbf{w})$$

Note-se que $\phi(\mathbf{w}) > 0$ para todo $\mathbf{w} \in \Omega_{++}^{\Psi}$.

Proposição 3.4: *Seja dado $\zeta > n_2$. Para um vetor arbitrário $\mathbf{w} \in \Omega_{++}^{\Psi}$ e um escalar $\alpha \in (0,1)$ e baseando-se nas hipóteses (i) e (ii) admitidas na proposição-3.3, as seguintes propriedades são validas:*

(i) $\varphi(\mathbf{w}) \geq (\zeta - n_2) \log \phi(\mathbf{w}) + n_2 \log n_2$;

(ii) $\varphi(\mathbf{w})$ é continuamente diferenciável em \mathbf{w} e tem o gradiente dado por

$$\nabla \varphi(\mathbf{w}) = (\zeta / \phi(\mathbf{w})) (2\nabla F(\mathbf{w})F(\mathbf{w}) + \nabla G(\mathbf{w}) e) - \nabla G(\mathbf{w})G(\mathbf{w})^{-1},$$

onde $G(\mathbf{w})^{-1}$ é entendido componente a componente.

(iii) se \mathbf{d} é uma solução do sistema de equações (3.35), então

$$\nabla \varphi(\mathbf{w})' \mathbf{d} \leq - (1 - \sigma)(\zeta - n_2),$$

desde que exista um escalar $\tau' > 0$ tal que para todo $\tau \in (0, \tau']$,

$$\mathbf{w} + \tau \mathbf{d} \in \Omega_{++}^{\Psi}$$

$$\varphi(\mathbf{w} + \tau \mathbf{d}) - \varphi(\mathbf{w}) \leq -\alpha \tau (1 - \sigma)(\zeta - n_2) < 0.$$

Prova: A prova desta proposição está na página 10 da referência [Wang,1995].

Um dos resultados práticos desta proposição é o estabelecimento de uma regra para determinação do comprimento do passo, equivalente a regra de Armijo [Friedlander,1994], resultante da propriedade (iii). O algoritmo básico, proposto para o método é apresentado a seguir.

Algoritmo 3.2:

Especificar $\zeta > n_2$, $\alpha \in (0,1)$, $\sigma' \in [0,1)$, e uma solução inicial $w^0 \in \Omega^{++}$
 Enquanto a convergência não for obtida

Calcular:

$$F(w) = \begin{bmatrix} L(x, \lambda, \pi, \nu, \nu) \\ h(x) \\ y + g(x) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G(w) = \begin{bmatrix} y \circ \pi \\ \nu \circ (x - a) \\ \nu \circ (b - x) \end{bmatrix}$$

Teste de Convergência:

se

$$\| F \| \leq \varepsilon_F \quad \text{e}$$

$$\| \min(y, \pi); \min(\nu, (x-a)); \min(\nu, (b-x)) \| \leq \varepsilon_G$$

então:

a convergência foi obtida.

Se não:

Calcular a direção de busca d :

$$\begin{bmatrix} F'(w)d \\ G'(w)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F(w) \\ -G(w) + \sigma\beta(w)e \end{bmatrix}$$

onde

$$\beta(w) = e'G(w)/n_2$$

Calcular o comprimento do passo;

$$w + \tau d \in \Omega^{++}$$

$$\varphi(w + \tau d) - \varphi(w) \leq -\alpha\tau(1 - \sigma)(\zeta - n_2) < 0.$$

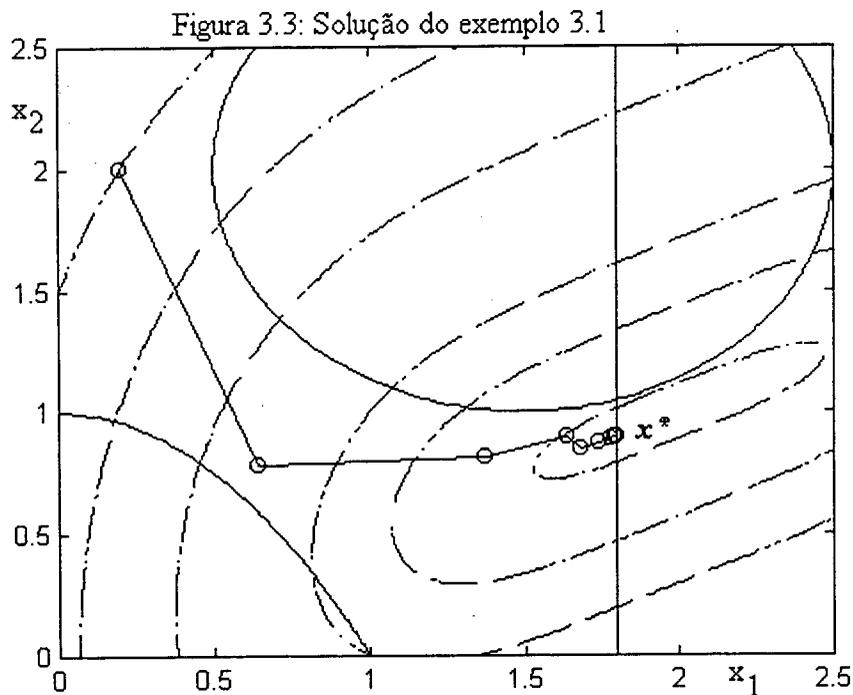
Atualizar a solução corrente;

$$w^{\text{atual}} = w + \tau d$$

Ajustar o parâmetro de centralização $\sigma \in [0, \sigma')$.

Avaliar a solução encontrada.

De forma equivalente aos estudos realizados com o algoritmo de barreira primal-dual, o algoritmo de Redução de Função Potencial foi implementado inicialmente em ambiente Matlab, para análise de problemas gerais. Algumas comparações entre este algoritmo e o primal-dual, visto no item anterior, foram feitas e serão comentadas posteriormente. A figura (3.3) mostra a solução do exemplo 3.1 utilizando-se o algoritmo 3.2.



Nesta figura, a trajetória e as soluções intermediárias estão representadas pelas linhas contínuas e círculos, respectivamente. A solução foi obtida em nove iterações e a tolerância considerada foi de 10^{-3} . Posteriormente o algoritmo foi aplicado ao problema de fluxo de potência ótimo conforme descrito na seção a seguir.

3.4 - Fluxo de Potência Ótimo via Pontos Interiores

Será mostrado a seguir, que a formulação do problema de Fluxo de Potência Ótimo conduz a um problema de otimização não-linear semelhante ao problema discutido nos seções anteriores. As variáveis consideradas inicialmente, as quais incluem algumas das variáveis de controle e dependentes apresentadas no capítulo dois, estão relacionadas no vetor de variáveis descrito a seguir

$$\mathbf{x} = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, V_1, V_2, \dots, V_n]^t$$

onde n é o número de barras do sistema. A variável V , definida para cada barra, representa a magnitude da tensão de barra, expressa na forma polar, e a variável δ , também definida para cada barra, denota o ângulo de fase da tensão de barra. As restrições de igualdade são as conhecidas *equações do fluxo de potência*, isto é, equações que expressam os balanços das potências ativa P e reativa Q , impostos à cada barra do sistema elétrico de potência

$$Pg_i - Pd_i - P_i(\delta, V) = 0$$

e

$$Qg_i - Qd_i - Q_i(\delta, V) = 0$$

onde os subscritos g e d referem-se a geração e demanda respectivamente. As potências demandadas são consideradas constantes em barras de carga. Nas barras de geração a potência ativa gerada é considerada conhecida, com exceção de uma barra, onde é contabilizado o balanço de potência. Os termos que aparecem como função das variáveis do problema, nestas equações, representam o fato de que a potência injetada na barra é igual a soma dos fluxos de potência que deixam a barra. Estas equações, deduzidas da primeira lei de Kirchhoff, podem ser expressas como

$$P_i(\delta, V) = V_i \sum_{j \in i} V_j (G_{ij} \cos \delta_{ij} + B_{ij} \sen \delta_{ij}) \quad (3.38a)$$

e

$$Q_i(\delta, V) = V_i \sum_{j \in i} V_j (G_{ij} \text{sen } \delta_{ij} - B_{ij} \text{cos } \delta_{ij}) \quad (3.38b)$$

onde j e i são indexadores de barras e, $j \in i$ significa o conjunto de barras j vizinhas à barra i . A variável δ_{ij} refere-se à diferença angular entre barras vizinhas, isto é $\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$. As constantes G_{ij} e B_{ij} são elementos da matriz admitância de barra Y_{barra} , definida a seguir, e representam as partes real e imaginária de um número complexo. Estas constantes se relacionam com os elementos físicos resistência r_{ij} e reatância x_{ij} , associados aos circuitos modelados pelo circuito pi, através da seguinte expressão

$$g_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_{ij}^2 + x_{ij}^2} \quad ; \quad b_{ij} = \frac{-x_{ij}}{r_{ij}^2 + x_{ij}^2} \quad (3.39)$$

onde g_{ij} e b_{ij} representam a condutância e susceptância série respectivamente. Estes elementos dispostos em forma matricial \mathbf{G} e \mathbf{B} formam matriz admitância de barra dada por

$$Y_{\text{barra}} = \mathbf{G} + j \mathbf{B}$$

onde seus elementos são números complexos, dados por $y_{ij} = g_{ij} + j b_{ij}$.

As restrições de desigualdade associadas ao FPO podem ser do tipo funcional, isto é expressas como função das demais variáveis, ou simples limites superior e inferior das variáveis. Numa primeira implementação utilizou-se os limites nas tensões de barra como restrições de desigualdade, ou seja

$$V_i^{\text{min}} \leq V_i \leq V_i^{\text{max}}$$

onde os subscritos min e max indicam os valores mínimos e máximo das tensões.

Na presente formulação considera-se como função objetivo a Perda de Potência Ativa nas linhas de transmissão, a qual consiste do somatório dos fluxos de potência ativa em todas as linhas de transmissão, e pode ser expressa analiticamente em termos das variáveis x por

$$P_l(V, \delta) = \sum_{i=j=1}^{nl} g_{ij} (V_i^2 + V_j^2) - 2V_i * V_j g_{ij} \cos \delta_{ij}$$

onde nl é o número de linhas do sistema. Outras funções objetivo foram implementadas, entre quais o mínimo desvio de tensão e o mínimo desvio de um ponto de operação. Neste último caso, o “tap” dos transformadores foi considerado como variável de controle. A expressão para função objetivo mínimo desvio de tensão é dada a seguir

$$\text{Min}_{\Delta V}(V) = \sum_{i=1}^n k_i (V_i - V_i^{esp})^2$$

onde V^{esp} é um valor fixo de tensão o qual pretende-se desviar-se o menos possível. A constante k_i permite estabelecer pesos diferenciados à certas barras, quando for necessário. Nas simulações considerou-se o peso unitário.

Em termos das variáveis, restrições e função objetivo considerados o problema de otimização do fluxo de potência assume a seguinte representação

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & P_l(\delta, V) \\ \text{sujeito a} \quad & Pg_i - Pd_i - P_i(\delta, V) = 0 \\ & Qg_i - Qd_i - Q_i(\delta, V) = 0 \\ & V_i^{min} \leq V_i \leq V_i^{max} \end{aligned} \tag{3.40}$$

onde as equações de balanço de potência ativa correspondem a todas as barras, com exceção daquela escolhida como *barra de balanço ou de referência*. Esta barra é quem vai efetuar o balanço de potência ativa no sistema. As equações de balanço de potência reativa são definidas apenas para as barras de carga.

Os algoritmos de barreira primal-dual, e o de Redução de Função Potencial foram utilizados na solução do problema do FPO, formulado em (3.40). As duas abordagens serão apresentadas nas subseções a seguir. Antes porém, com o objetivo de simplificar as equações expressas nas seções subsequentes, a notação a seguir é considerada.

Notação: A matriz Jacobiana correspondente as restrições de igualdade, equações (3.38a-b) é denotada pela letra J , e admite o seguinte particionamento:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \delta} & \frac{\partial P}{\partial V} \\ \frac{\partial Q}{\partial \delta} & \frac{\partial Q}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_J & N_J \\ M_J & L_J \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

onde as expressões analíticas para os termos de J são encontradas em [Monticelli,1983]. A matriz Hessiana do Lagrangeano, ou de determinada função especificada será denotada por H . No caso específico do Lagrangeano H assume a seguinte forma

$$H = \begin{bmatrix} \nabla_{\delta\delta}^2 \ell(\delta, V) & \nabla_{\delta V}^2 \ell(\delta, V) \\ \nabla_{V\delta}^2 \ell(\delta, V) & \nabla_{VV}^2 \ell(\delta, V) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{\delta\delta} & H_{\delta V} \\ H_{V\delta} & H_{VV} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

onde ℓ é a função Lagrangeana. As expressões referentes à matriz Hessiana do Lagrangeano são dadas em [Sun,1984].

3.4.1 - Solução do FPO via Método de Barreira Primal-Dual

No desenvolvimento a seguir, o problema de fluxo de potência ótimo formulado em (3.40) é resolvido pelo método de barreira primal-dual, metodologia apresentada na subseção 3.3.1 deste capítulo. Nesta abordagem, as restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade pela introdução de variáveis de folga. Desta forma, transforma-se o problema original num problema equivalente, o qual contém apenas restrições de igualdade e é dado por

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & P(V, \delta) \\ \text{sujeito a} \quad & PG_i - P_i^d - P_i(\delta, V) = 0 \\ & QG_i - Q_i^d - Q_i(\delta, V) = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned}
-V_i + V_i^{min} + s_i^1 &= 0 \\
V_i - V_i^{max} + s_i^2 &= 0 \\
s_i^1, s_i^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

onde s^1 e s^2 são vetores $n \times 1$. A condição de não-negatividade das variáveis de folga é tratada pela incorporação destas variáveis à função objetivo através de função barreira logarítmica. Assim, obtém-se uma função objetivo modificada que assume a seguinte forma

$$\left\{ P_i(V, \delta) - \mu \sum_{i=1}^n \log s_i^1 - \mu \sum_{i=1}^n \log s_i^2 \right\}$$

onde $s > \mathbf{0}$. O parâmetro μ foi definido no item 3.3.1. Associa-se ao problema transformado uma função Lagrangeana irrestrita, tal como aquela definida em (3.11). No caso do FPO esta função é escrita como

$$\begin{aligned}
\ell_{\mu}(V, \delta, \lambda, \pi, s) &= P_i(V, \delta) - \mu \sum_{i=1}^n \log(s_i^1) - \mu \sum_{i=1}^n \log(s_i^2) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^p (P_i^g - P_i^d - P_i(V, \delta)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^m \lambda_i^q (Q_i^g - Q_i^d - Q_i(V, \delta)) + \sum_{i=1}^n \pi_i^1 (-V + s_i^1 + V_i^{min}) + \sum_{i=1}^n \pi_i^2 (V + s_i^2 - V_i^{max})
\end{aligned} \tag{3.44}$$

onde as variáveis duais π^1 e π^2 são não negativas. O indexador m se refere às barras de carga. A partir desta equação, como visto anteriormente, obtém-se as condições necessárias de otimalidade:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\delta} P_i(V, \delta) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^p \nabla_{\delta} P_i(V, \delta) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^q \nabla_{\delta} Q_i(V, \delta) &= \mathbf{0} \\
\nabla_V P_i(V, \delta) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^p \nabla_V P_i(V, \delta) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^q \nabla_V Q_i(V, \delta) - \pi^1 + \pi^2 &= \mathbf{0} \\
-(P_i^g - P_i^d - P_i(V, \delta)) &= 0 \\
-(Q_i^g - Q_i^d - Q_i(V, \delta)) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-V_i + V_i^{min} + s_i^1 &= 0 \\
V_i - V_i^{max} + s_i^2 &= 0 \\
\pi^1 - \mu / s_i^1 &= 0 \\
\pi^2 - \mu / s_i^2 &= 0
\end{aligned}
\tag{3.45}$$

Estas equações não lineares são resolvidas pelo método de Newton [Gill,1995]. A solução do sistema linear, mostrado a seguir, determina os incrementos das variáveis (δ , V , λ^p , λ^q , π^1 , π^2 , s^1 , s^2) na direção de busca

$$\begin{bmatrix}
H_{\delta\delta} & H_{\delta v} & H'_j & M'_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\
H_{v\delta} & H_{vv} & N'_j & L'_j & -I & I & 0 & 0 \\
H_j & N_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
M_j & L_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\
0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\
0 & 0 & 0 & 0 & S^1 & 0 & \Pi^1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S^2 & 0 & \Pi^2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta\delta \\
\Delta V \\
\Delta\lambda^p \\
\Delta\lambda^q \\
\Delta\pi^1 \\
\Delta\pi^2 \\
\Delta s^1 \\
\Delta s^2
\end{bmatrix}
= -[F]
\tag{3.46}$$

onde F representa o gradiente da função Lagrangeana dado pelo conjunto de equações não-lineares (3.45); e as matrizes S^1 , S^2 , Π^1 e Π^2 são matrizes diagonais cujos elementos são s_i^1 , s_i^2 , π_i^1 e π_i^2 respectivamente. Este sistema linear pode ser reduzido através das manipulações algébricas descritas a seguir. Do sistema linear obtém-se as expressões para Δs^1 e Δs^2 como

$$\Delta s^1 = \Delta V + (V - V^{min} - s^1)
\tag{3.47}$$

e

$$\Delta s^2 = -\Delta V - (V - V^{max} + s^2)
\tag{3.48}$$

as expressões para $\Delta\pi^1$ e $\Delta\pi^2$ obtidas do sistema linear, com a substituição dos termos Δs^1 e Δs^2 obtidos anteriormente, são

$$\Delta\pi^1 = - (S^1)^{-1} \Pi^1 \Delta V - (S^1)^{-1} [\Pi^1 (V - V^{min} - s^1) - \mu e] - \pi^1
\tag{3.49}$$

e

$$\Delta\pi^2 = (\mathcal{S}^2)^{-1}\Pi^2\Delta V + (\mathcal{S}^2)^{-1} [\mu\mathbf{e} + \Pi^2(V - V^{max} + s^2)] - \pi^2 \quad (3.50)$$

A eliminação dos termos $\Delta\pi^1$ e $\Delta\pi^2$ do sistema linear é realizada operando-se a segunda linha da matriz deste sistema, a qual é mostrada a seguir. Tomando-se

$$\mathbf{H}_{v\delta}\Delta\delta + \mathbf{H}_{vv}\Delta V + N_j^t\Delta\lambda^p + L_j^t\Delta\lambda^q - \Delta\pi^1 + \Delta\pi^2 = -\nabla_v\ell(\delta, V, \lambda, \pi, s) \quad (3.51)$$

faz-se

$$\mathbf{H}_{vv} = \mathbf{H}_{vv} + (\mathcal{S}^1)^{-1}\Pi^1 + (\mathcal{S}^2)^{-1}\Pi^2 \quad (3.52)$$

e

$$\begin{aligned} -\nabla_v\ell(\delta, V, \lambda, \pi, s) &= -\nabla_v\ell(\delta, V, \lambda, \pi, s) - (\mathcal{S}^1)^{-1}[\Pi^1(V - V^{min} - s^1) - \mu\mathbf{e}] - \pi^1 \\ &\quad - (\mathcal{S}^2)^{-1}[\mu\mathbf{e} + \Pi^2(V - V^{max} + s^2)] + \pi^2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Assim, com as substituições propostas para \mathbf{H}_{vv} e $-\nabla_v\ell(\delta, V, \lambda, \pi, s)$, o sistema linear (3.46) assume a seguinte forma reduzida:

$$\begin{bmatrix} H_{\delta\delta} & H_{\delta V} & H_j^t & M_j^t \\ H_{V\delta} & H_{VV} & N_j^t & L_j^t \\ H_j & N_j & 0 & 0 \\ M_j & L_j & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta V \\ \Delta\lambda^p \\ \Delta\lambda^q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_{\delta}\ell \\ \nabla_V\ell \\ h^p \\ h^q \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

onde h^p e h^q representam as restrições de igualdade. Portanto, ao invés de lidar com o sistema maior, descrito em (3.46), resolve-se o sistema reduzido para $\Delta\delta$ e ΔV , e à partir deste calcula-se Δs^1 e Δs^2 pelas equações (3.47) e (3.48), seguido do cálculo de $\Delta\pi^1$ e $\Delta\pi^2$ via (3.49) e (3.50) respectivamente. Estes incrementos nas variáveis, isto é $\Delta\delta$, ΔV , $\Delta\lambda$, $\Delta\pi$ e Δs , são utilizados na atualização das variáveis primais e duais

Variáveis primais:

$$\delta^{atual} = \delta + \kappa\alpha_p\Delta\delta$$

$$V^{atual} = V + \kappa\alpha_p\Delta V$$

Variáveis duais:

$$\lambda^p{}^{atual} = \lambda^p + \kappa\alpha_d\Delta\lambda^p$$

$$\lambda^q{}^{atual} = \lambda^q + \kappa\alpha_d\Delta\lambda^q$$

$$\begin{aligned} s^{1 \text{ atual}} &= s^1 + \kappa \alpha_p \Delta s^1 & \pi^{1 \text{ atual}} &= \pi^1 + \kappa \alpha_d \Delta \pi^1 \\ s^{2 \text{ atual}} &= s^2 + \kappa \alpha_p \Delta s^2 & \pi^{2 \text{ atual}} &= \pi^2 + \kappa \alpha_d \Delta \pi^2 \end{aligned}$$

onde o escalar κ é escolhido de forma a evitar a fronteira. Conforme visto anteriormente, o ajuste do parâmetro da função barreira está relacionado com o “gap” de dualidade. Para o problema considerado este ajuste é obtido por

$$\mu = \frac{(s^1)' \pi^1 + (s^2)' \pi^2}{2n\beta} \quad (3.55)$$

onde β é um parâmetro > 1 . Nas simulações adotou-se β igual a 10 conforme recomendado na referência [Granville,1994]. O critério de parada é estabelecido quando todas as condições especificadas a seguir são satisfeitas: o parâmetro da função barreira logarítmica atende uma tolerância especificada (nas simulações considerada 10^{-5}); as restrições de igualdade são satisfeitas em relação a uma tolerância, por exemplo 10^{-3} ; e a norma do gradiente do Lagrangeano, em relação às variáveis do problema, satisfaz a uma tolerância especificada (no presente caso, 10^{-3}). Numa primeira etapa, o algoritmo3.1 foi implementado em ambiente Matlab, para a avaliação de desempenho nos sistemas-teste de 14, 30, 57 e 118 barras do IEEE. Os principais resultados obtidos nas simulações são apresentados no capítulo seis. Posteriormente, as implementações foram efetivadas em linguagem de programação Fortran-90 para estudos em sistemas de grande porte. Detalhes e resultados destas implementações são expostos nos capítulos cinco e seis desta monografia.

3.4.2 - Solução do FPO pelo Método de Redução de Função Potencial

O método de Redução de Função Potencial, visto no item 3.3.1, apresenta uma teoria mais consistente na abordagem de problemas de otimização não-linear. Esta metodologia, cujos fundamentos foram apresentados anteriormente, será aplicada na

solução do problema de fluxo de potência ótimo. As restrições de desigualdades, do tipo limites máximo e mínimo associados às variáveis do problema, constituem o subconjunto K_v , o qual de acordo com a definição-3.1, é escrito como

$$K_v \equiv \{ V \in \mathfrak{R}^n \mid V^{min} \leq V \leq V^{max} \}.$$

com esta definição o problema de FPO é apresentado na seguinte forma alternativa

$$\begin{aligned} & \underset{V \in K_v}{\text{minimize}} && P_l(\delta, V) && (3.56) \\ & \text{sujeito a} && P^g_i - P^d_i - P_i(\delta, V) = 0 && i = 1 \dots n-1 \\ & && Q^g_i - Q^d_i - Q_i(\delta, V) = 0 && i = 1 \dots m \end{aligned}$$

onde n é o número de barras e m se refere às barras de carga. As condições de otimalidade associadas à este problema resultam da aplicação do teorema de Karush-Kuhn-Tucker, teorema-3.1. Com as variáveis primais e duais agrupadas no vetor $w = (\delta, V, \lambda^p, \lambda^q, u, v)$, onde u e v são vetores $n \times 1$, isto é $\in \mathfrak{R}^+$, $\lambda^p \in \mathfrak{R}^{n-1}$ e $\lambda^q \in \mathfrak{R}^m$ são variáveis duais associadas às restrições de igualdade. Define-se as funções vetoriais a seguir

$$L_\delta(V, \delta, \lambda^p, \lambda^q, u, v) = \nabla_\delta P_l(V, \delta) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^p \nabla_\delta P_i(V, \delta) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^q \nabla_\delta Q_i(V, \delta) \quad (3.57)$$

e

$$L_v(V, \delta, \lambda^p, \lambda^q, u, v) = \nabla_v P_l(V, \delta) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^p \nabla_v P_i(V, \delta) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^q \nabla_v Q_i(V, \delta) - u + v \quad (3.58)$$

e o sistema de equações não-lineares, na forma particionada representada em (3.45 e 3.46), é dado por

$$F(w) = \begin{bmatrix} L_\delta(V, \delta, \lambda^p, \lambda^q, u, v) \\ L_v(V, \delta, \lambda^p, \lambda^q, u, v) \\ -(P^g_i - P^d_i - P_i(V, \delta)) \\ -(Q^g_i - Q^d_i - Q_i(V, \delta)) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

e

$$G(w) = \begin{bmatrix} v \circ (V - V^{\min}) \\ v \circ (V^{\max} - V) \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

A função de mérito utilizada pertence a família das funções de potencial, definida conforme a equação (3.33) e expressa como

$$\begin{aligned} \varphi(w) = & \zeta \log \left[\|L_\delta(V, \delta, \lambda^p, \lambda^q, v)\|^2 + \|L_V(V, \delta, \lambda^p, \lambda^q, v)\|^2 + \|(P^g - P^d - P(V, \delta))\|^2 + \|(Q^g - Q^d - Q(V, \delta))\|^2 \right. \\ & \left. + v^t \circ (V - V^{\min}) + v^t \circ (V^{\max} - V) \right] - \sum_{i=1}^n \log(v_i(V_i - V^{\min}_i)) - \sum_{i=1}^n \log(v_i(V^{\max}_i - V_i)) \end{aligned} \quad (3.61)$$

para todo vetor $w = (\delta, V, \lambda^p, \lambda^q, v) \in \Omega_{++}^v$, onde o interior do conjunto viável é definido como

$$\Omega_{++}^v \equiv \{ (x, y, \lambda, \pi, v) \in (V^{\min}, V^{\max}) \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2n_{++}} \}$$

sendo $(V^{\min}, V^{\max}) \equiv \{ V \in \mathbb{R}^n \mid V^{\min} < V < V^{\max} \}$. A direção de busca, isto é a direção de Newton “perturbada” definida na seção 3.3.2, é obtida resolvendo-se o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} \nabla_\delta L_\delta & \nabla_V L_\delta & H'_j & M'_j & 0 & 0 \\ \nabla_\delta L_V & \nabla_V L_V & N'_j & L'_j & -I & I \\ H_j & N_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_j & L_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_v & 0 & 0 & (D_V - D_V^{\min}) & 0 \\ 0 & -D_v & 0 & 0 & 0 & (D_V^{\max} - D_V) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} d_\delta \\ d_v \\ d_{\lambda^p} \\ d_{\lambda^q} \\ d_v \\ d_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_\delta(\delta, V, \lambda, v) \\ -L_V(\delta, V, \lambda, v) \\ -h^p(\delta, V) \\ -h^q(\delta, V) \\ -(V - V^{\min}) \circ v + \sigma \beta e \\ -(V^{\max} - V) \circ v + \sigma \beta e \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

onde h^p e h^q representam as restrições de igualdade. As matrizes D_δ , D_v , D_V , D_V^{\min} e D_V^{\max} , são matrizes diagonais, cujos elementos são v_i , v_i , V_i , V_i^{\min} e V_i^{\max} , respectivamente. O escalar β , definido anteriormente, é expresso como

$$\beta_{\sigma}^k = \frac{(\mathbf{v}^k)^t (V^k - V^{\min}) + (\mathbf{v}^k)^t (V^{\max} - V^k)}{2n} \quad (3.63)$$

onde k corresponde a iteração atual. O sistema de equações lineares é reduzido, conforme mostrado a seguir, através de manipulações algébricas. Explicitando os termos referentes a d_v e d_v obtém-se

$$d_v = [- (D_V - D_V^{\min})^{-1} D_v] d_V - v + \sigma \beta (D_V - D_V^{\min})^{-1} e \quad (3.64)$$

e

$$d_v = [(D_V^{\max} - D_V)^{-1} D_v] d_V - v + \sigma \beta (D_V^{\max} - D_V)^{-1} e \quad (3.65)$$

substituindo-se estes termos no resultado da operação da segunda linha do sistema (3.62), obtém-se as modificações necessárias ao termo $\nabla_V L_V$ da matriz e $-L_V$ do vetor do lado direito, como

$$\mathbf{H}_{VV} = \nabla_V L_V + (D_V - D_V^{\min})^{-1} D_v + (D_V^{\max} - D_V)^{-1} D_v \quad (3.66)$$

e

$$-L_V = -L_V - v + v + \sigma \beta [(D_V - D_V^{\min})^{-1} - (D_V^{\max} - D_V)^{-1}] e \quad (3.67)$$

que reduz o sistema (3.62) à forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{J}^t \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_x \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Nesta última representação, adotou-se $\Delta x = [\delta V]^t$ e $\Delta \lambda = [\lambda^p \lambda^q]^t$, $\mathbf{L}_x = [-L_s -L_V]^t$ e $\mathbf{h} = [h^p h^q]^t$. Detalhes sobre a solução deste sistema linear são descritos no capítulo cinco, visto que a solução eficiente deste sistema é de maior importância em se tratando de sistemas de grande porte.

As implementações do algoritmo 3.2 aplicadas ao problema de fluxo de potência ótimo foram realizadas num estudo inicial em ambiente Matlab. No capítulo de resultados

obtidos, faz-se uma análise dos resultados destas implementações. Na etapa subsequente este programa, escrito para Matlab, foi convertido para linguagem de programação Fortran 90. Os principais detalhes das implementações assim como a análise dos resultados para sistemas testes e de grande porte são descritos nos capítulos cinco e seis.

3.5 - Conclusões e Considerações

Embora os resultados obtidos através dos algoritmos de barreira primal-dual e de Redução de Função Potencial sejam semelhantes, os dois algoritmos possuem motivação diferentes. O primeiro foi proposto como uma extensão de resultados de análise de problemas de programação linear. Já o segundo algoritmo tem sua teoria mais consistente pois os principais resultados são derivados a partir de uma função de mérito. Estes algoritmos foram aplicados ao problema fluxo de potência ótimo, inicialmente no ambiente do Matlab, e seu desempenho foi avaliado em sistemas de testes de 6 à 118 barras. Os principais detalhes e a análise dos resultados destas implementações são apresentados no capítulo seis.

Capítulo 4

Fluxo de Potência Ótimo Multi-Objetivo

4.1 - Introdução

Este capítulo trata da aplicação de otimização multi-objetivo ao problema de fluxo de potência ótimo. Inicialmente apresenta-se o problema de programação multi-objetivo junto com alguns conceitos relacionados. As principais técnicas de solução de problemas de otimização multi-objetivo, baseadas no escalonamento das funções objetivo, são apresentadas. Formula-se então, o problema de fluxo de potência ótimo como um problema de otimização não-linear multi-objetivo submetido a restrições de igualdade e de desigualdade. Para solução do problema de FPO propõe-se, como uma contribuição, um algoritmo baseado no escalonamento das funções objetivo associada à aplicação do método de pontos interiores.

4.2 - Otimização Multi-Objetivo

Um problema de otimização multi-objetivo consiste em determinar um vetor de variáveis de decisão, que satisfaz a um conjunto de restrições e otimiza uma função vetorial, cujos elementos representam os índices de desempenho a serem otimizados. Num problema de otimização padrão, com apenas uma função objetivo, busca-se uma solução viável que otimiza um dado índice. Esta solução geralmente é única. Em problemas de otimização multi-objetivo, a solução que minimiza um índice provavelmente não minimizará os outros índices. Portanto, uma outra noção de otimalidade deve ser adotada.

Matematicamente, um problema de otimização multi-objetivo pode ser formulado conforme mostrado a seguir.

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && f(\mathbf{x}) \\
 & \text{sujeito a} && \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\
 & && \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t$ é o vetor das variáveis de otimização (também chamadas de variáveis de decisão), o qual é definido no espaço \mathcal{R}^n ; e $f(\mathbf{x}) = [f_1, f_2, \dots, f_k]^t$ é o vetor dos índices de desempenho, definidos no espaço das funções objetivo, isto é $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^k$. As funções vetoriais $\mathbf{g}: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^l$ correspondem às restrições de desigualdade, enquanto que $\mathbf{h}: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$ representam as restrições de igualdade. O vetor das funções objetivo mapeia o vetor das variáveis de decisão, definidas no espaço das variáveis de decisão, no espaço das funções objetivo. Desta forma, deve-se fazer uma distinção entre o espaço de dimensão “ n ” das variáveis de decisão e o espaço de dimensão “ k ” das funções objetivo. Com relação ao problema de otimização multi-objetivo formulado em 4.1, o conceito de otimalidade, conhecido como *otimalidade de Pareto* é introduzido. Segundo este conceito, uma solução viável para um problema programação multi-objetivo é uma solução de Pareto, se não existir nenhuma outra solução que irá produzir uma melhoria em um objetivo sem causar uma degradação em pelo menos um dos outros objetivos [Jiguan,1976]. A definição a seguir formaliza este conceito.

Definição 4.1: Seja X o conjunto viável associado ao problema 4.1, isto é $X = \{ \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \}$. Um ponto \mathbf{x}^* é uma *solução de Pareto*, ou *solução de compromisso*, de um problema de otimização multi-objetivo, se $\mathbf{x}^* \in X$ e não existe nenhum outro ponto $\mathbf{x} \in X$ tal que

$$f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{x}^*), \quad \text{para } i = 1 \dots k$$

e

$$f_j(\mathbf{x}) < f_j(\mathbf{x}^*) \quad \text{para pelo menos um } j \in \mathbf{I}$$

onde \mathbf{I} é o conjunto dos índices relativos às funções objetivo.

Tipicamente existe uma curva ou superfície de pontos de Pareto que relaciona as funções objetivo. Assim, para um problema de programação multi-objetivo, a solução de Pareto geralmente não é única. Desta forma, em algumas aplicações é desejável conhecer o conjunto das soluções de Pareto, assim como a sua imagem no espaço das funções objetivo. Em problemas de otimização multi-objetivo, o conceito de otimalidade está geralmente associado à determinação do conjunto de soluções Pareto. Diversos métodos para a obtenção deste conjunto são encontrados na literatura [Cohon,1978; Osyczka,1984; Jiguan,1976; Asim,1991]. O método dos pesos, o método das restrições, o método de otimização com hierarquia, o método do critério global e a programação de metas são exemplos de técnicas de geração de soluções de Pareto. A seguir são apresentados alguns destes métodos os quais estão baseados no escalonamento das funções objetivo.

4.2.1 - O Método dos Pesos

O método dos pesos, sugerido por Zadeh em 1963 [Zadeh,1963], consiste essencialmente na otimização de uma função resultante da soma ponderada de todas as funções objetivo. Isto significa que o problema de otimização multi-objetivo é transformado num problema de otimização com apenas uma função objetivo dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) \quad (4.2)$$

onde $w_i \geq 0$ são os coeficientes de peso que representam a importância relativa do índice. Nesta metodologia, empregam-se diferentes coeficientes de peso para cada uma das funções. Usualmente, considera-se que

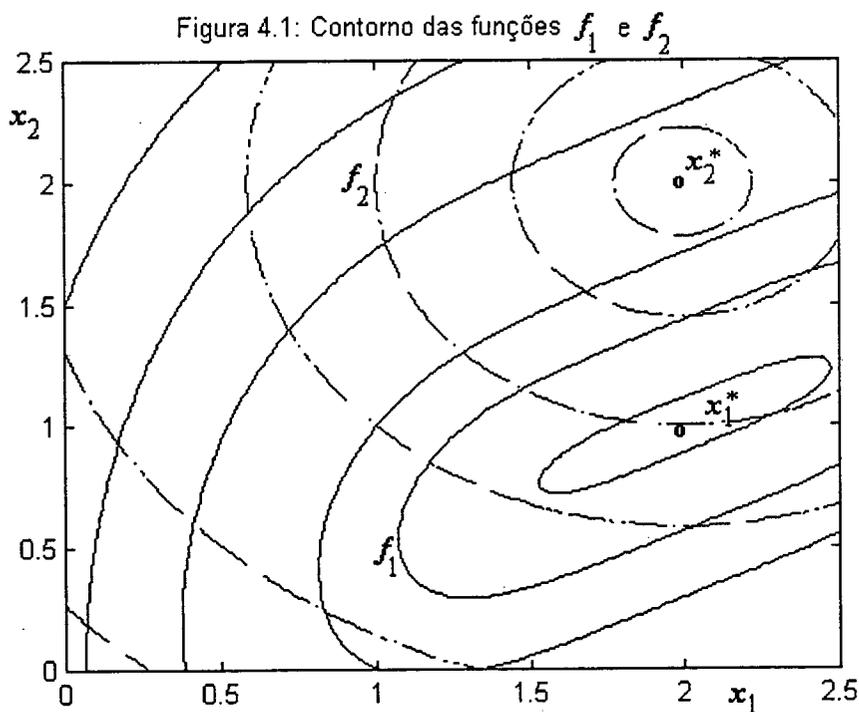
$$\sum_{i=1}^k w_i = 1$$

O exemplo descrito a seguir ilustra a aplicação desta metodologia na solução de um problema de otimização com duas funções objetivo.

Exemplo 4.1: Considere-se o problema de minimização simultânea das funções f_1 e f_2 dado por

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_1 = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \\ \text{e} \quad & f_2 = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{sujeito a} \quad & 0 \leq x_1 \leq 2.5 \\ & 0 \leq x_2 \leq 2.5 \end{aligned}$$

A figura 4.1 ilustra os contornos das funções f_1 e f_2 dentro dos limites estabelecidos para as variáveis.



Nesta figura, as curvas de nível descritas pelas linhas contínuas se referem à função f_1 , e pelas linhas tracejadas à função f_2 . Os pontos x_1^* e x_2^* são mínimos das funções f_1 e f_2 respectivamente. Com base no método dos pesos, o problema multi-objetivo é transformado num problema mono-objetivo equivalente, o qual é formulado a seguir

$$\begin{aligned}
 \text{minimize} \quad & w_1[(x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2] + w_2[(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2] \\
 \text{sujeito a} \quad & w_1 + w_2 = 1 \\
 & 0 \leq x_1 \leq 2.5 \\
 & 0 \leq x_2 \leq 2.5 \\
 & w_1, w_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

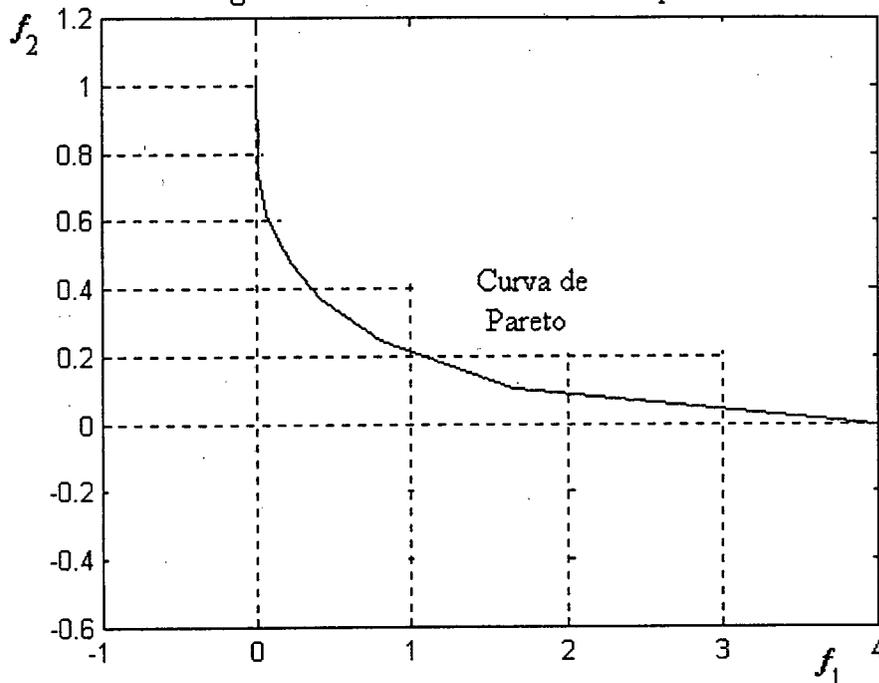
onde os coeficientes w_1 e w_2 assumem valores previamente especificados. A tabela 4.1 apresenta os valores obtidos na solução do exemplo 4.1 variando-se os coeficientes w entre zero e um.

Tabela 4.1: Solução do exemplo 4.1 via Método dos Pesos.

Solução de Pareto	pesos		variáveis		função objetivo	
	w_1	w_2	x_1^*	x_2^*	f_1	f_2
1	0.0	1.0	2.0000	2.0000	4.0000	0.0000
2	0.2	0.8	2.2176	1.5544	0.7964	0.2459
3	0.4	0.6	2.2823	1.3754	0.2258	0.4698
4	0.6	0.4	2.2917	1.2679	0.0668	0.6211
5	0.8	0.2	2.2631	1.1826	0.0152	0.7373
6	1.0	0.0	1.9884	0.9942	0.0000	1.0117

O mapeamento dos pontos f_1 e f_2 no espaço das funções objetivo produz uma curva, ou superfície no caso de $k > 2$, chamada de *curva de Pareto*. A figura a seguir mostra o aspecto desta curva, gerada a partir dos dados da tabela 4.1.

Figura 4.2: Curva de Pareto do exemplo-4.1



Na figura 4.2, a curva de Pareto representa o conjunto dos pontos mínimos de combinações das funções f_1 e f_2 . A geração da curva de Pareto com esta técnica, geralmente exige a solução de várias combinações dos pesos no problema de otimização. Portanto, sua aplicação é relativamente limitada [Das,1996].

4.2.2 - O Método das Restrições

O método das restrições é considerado o método mais intuitivo para geração de soluções de Pareto [Cohon,1978]. Algumas variações desta metodologia, como o “ ϵ -constraint method” [Haimes,1973] e o método das restrições de igualdade própria [Jiguan,1976], são encontradas na literatura. A seguir apresenta-se o método das restrições descrito por Osyczka [Osyczka,1984].

Considere-se o problema de otimização multi-objetivo formulado conforme (4.1). Selecionando-se uma função objetivo como a principal, por exemplo a de índice k , e

transformando as demais funções objetivo em restrições, o problema multi-objetivo é transformado num problema mono-objetivo dado por

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f_k(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeito a} && h(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ &&& g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.3)$$

e às restrições adicionais

$$f_i(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_i, \quad \text{para } i = 1 \dots k-1$$

onde ε_i um valor pré-especificado. Este problema transformado, acrescido de restrições, corresponde a um problema de otimização na forma padrão e para resolvê-lo basta utilizar qualquer das técnicas estudadas no capítulo três. A solução deste problema é uma solução de Pareto dependendo dos valores especificados para as constantes ε_i .

Um procedimento usual para escolha dos parâmetros ε_i^0 , para $i = 1 \dots k-1$, consiste em resolver " $k-1$ " problemas de otimização considerando cada uma das funções objetivo separadamente. De posse dos valores iniciais atribuídos aos parâmetros ε_i^0 , estes podem ser ajustados, por exemplo, durante um processo de tomada de decisão por

$$f_i(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_i^0 + \Delta f_i$$

onde Δf_i são os acréscimos associados às respectivas funções objetivo.

O método das restrições, assim como o método dos pesos é, geralmente, empregado para obtenção do conjunto de soluções de Pareto. Portanto, para determinar uma solução ótima de Pareto, é necessário o conhecimento a priori, dos coeficientes de peso w_i , no caso do método dos pesos, ou dos parâmetros ε_i , no caso do método das restrições.

4.3 - Obtenção da Solução de Melhor Compromisso

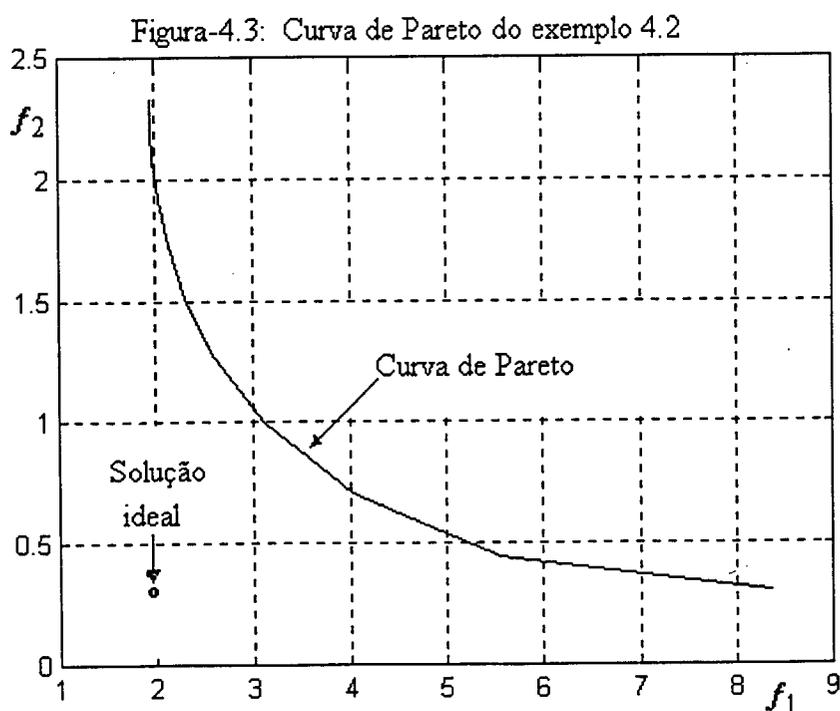
A solução de melhor compromisso é aquela que, além de pertencer ao conjunto das soluções de Pareto, satisfaz a um critério de imparcialidade, ou incorpora alguma

preferência. A determinação desta solução é geralmente uma tarefa nebulosa pois ela está associada a um juízo de valor por parte do analista do problema. Várias são as técnicas propostas para a determinação da solução de melhor compromisso. A referência [Cohon,1987] apresenta técnicas que incorporam preferências e outras baseadas na definição geométrica de "melhor". O método da mínima distância da solução ideal [Zeleny,1974] é um exemplo deste segundo tipo de metodologia, o qual se fundamenta na escolha da solução, dentro do conjunto de soluções de Pareto, que se encontra mais próxima do ideal. Para ilustrar esta idéia, seja o exemplo 4.2 mostrado a seguir.

Exemplo 4.2: Considere-se o exemplo 4.1, modificado pela adição de uma restrição de igualdade.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f_1 = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \\ &\text{e} && f_2 = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ &\text{sujeito a} && x_1^2 - x_2 = 0 \end{aligned}$$

A figura 4.3 ilustra o conjunto de soluções de Pareto e a solução ideal associados ao exemplo 4.2.



Nesta figura, a solução ideal, representada pelo ponto de coordenadas (1.9462 , 0.3065), e o conjunto de soluções de Pareto, estão definidos no espaço das funções objetivo. Pode-se constatar, como era esperado, que a solução ideal, isto é o ponto denotado por "o", não pertence ao conjunto de soluções de Pareto. Assim, de acordo com o método deseja-se encontrar, dentro do conjunto de soluções de Pareto, o ponto de menor distância da solução ideal. A tabela a seguir mostra os valores das distâncias dos diversos pontos do conjunto de soluções de Pareto à solução ideal.

Tabela - 4.2: Distância dos pontos do conjunto de solução de Pareto à solução ideal

f_1	8.37	5.56	4.02	3.13	2.62	2.31	2.13	2.03	1.98	1.95	1.95
f_2	0.31	0.44	0.70	0.99	1.27	1.51	1.73	1.92	2.09	2.21	2.33
d	6.42	3.62	2.11	1.37	1.17	1.26	1.44	1.61	1.77	1.91	2.03

sendo a distância d calculada por

$$d = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2}$$

onde x são os pontos pertencentes ao conjunto de soluções de Pareto, e y é o ponto correspondente à solução ideal. Assim, a solução de melhor compromisso, isto é o ponto de menor distância da solução ideal, encontra-se na quinta coluna da tabela 4.2. Este ponto corresponde as coordenadas (1.132 , 1.282) definidas no espaço das variáveis.

4.4 - Abordagem Via Método de Pontos Interiores

A solução de um problema de otimização multi-objetivo ocorre geralmente em duas etapas. Na primeira, gera-se o conjunto de soluções de Pareto, o qual na maioria dos métodos é resultado da solução de inúmeros problemas de otimização. Na segunda etapa escolhe-se a solução de melhor compromisso, incorporando-se, por exemplo, alguma preferência. A necessidade de resolver repetidamente o mesmo problema de otimização,

para que se tenha um conjunto de soluções de Pareto aceitável, na primeira etapa, pode resultar num elevado custo computacional. Em problemas de grande porte este custo elevado pode inviabilizar a aplicação destas técnicas. A abordagem proposta a seguir resolve o problema de otimização escalonado, tal como no método das restrições, e inclui uma heurística. O problema resultante é resolvido via método de pontos interiores.

Nos testes realizados com esta abordagem utilizou-se duas funções objetivo não-lineares porém convexas. Portanto, no desenvolvimento a seguir considere-se o \mathbb{R}^2 como sendo o espaço das funções objetivo, isto é $k = 2$, e que as funções envolvidas são convexas.

Conforme visto anteriormente, no método das restrições elege-se uma função objetivo como principal e transforma-se as demais em restrições, resultando no seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_1(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{l}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.4)$$

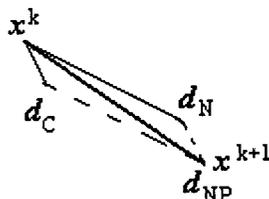
onde $\mathbf{l}(\mathbf{x}) = [f_2(\mathbf{x}) - \varepsilon_2 ; f_3(\mathbf{x}) - \varepsilon_3 ; \dots ; f_k(\mathbf{x}) - \varepsilon_k]^T$ representa o vetor de funções objetivo transformadas. O valor atribuído à ε_i , definido para $i = 2 \dots k$, será considerado posteriormente. A transformação das funções objetivo em restrições define outro conjunto viável, associado ao problema (4.4) e dado por

$$\Omega^\varepsilon \equiv \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{l}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \} \quad (4.5)$$

Este conjunto viável é admitido não vazio, e portanto pode-se fazer uso do algoritmo de redução de função potencial introduzido no capítulo três. O método da redução de função potencial, detalhado no algoritmo-3.2, utiliza a direção de Newton perturbada na busca de uma solução do problema de otimização. A direção de Newton perturbada, determinada na transição do ponto \mathbf{x}^k para o ponto \mathbf{x}^{k+1} , e pode ser entendida

como a resultante da direção de Newton com uma componente de centralização. A figura a seguir ilustra tais componentes

Figura 4.3.1: Componentes da direção de busca



onde d_N é a direção de Newton, d_C é a direção de centralização, e d_{NP} é a direção de Newton perturbada. A componente d_C , que aponta para o centro analítico do conjunto viável, é afetada pelas restrições conforme descrito pela equação (3.37). Admite-se, sob as condições estabelecidas na proposição 4.1, que as restrições, originárias da transformação das funções objetivo, perturbam a direção de Newton buscando uma solução de Pareto.

Considere o problema de otimização multi-objetivo re-escrito como

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x) && (4.6) \\ &\text{sujeito a} && x \in \mathcal{R}^n \end{aligned}$$

onde x , e $f(x)$ foram definidos anteriormente. As condições necessárias de otimalidade para o problema de otimização multi-objetivo são dadas na proposição a seguir.

Proposição 4.1: (Condições necessárias de primeira ordem para uma solução de Pareto).

Sejam $f_i(x)$, para $i = 1 \dots k$, funções contínuas e pelo menos uma vez diferenciáveis. Se x^* é uma solução de Pareto do problema (4.6), então é possível encontrar pesos w_i (multiplicadores) tais que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k w_i \nabla f_i(x^*) &= 0 \\ w_i &\geq 0, \quad \text{para } i = 1 \dots k, \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1$$

onde $\nabla f_i(\mathbf{x})$ é o vetor gradiente das funções objetivo.

Prova: Ver referência [Charalambous,1989].

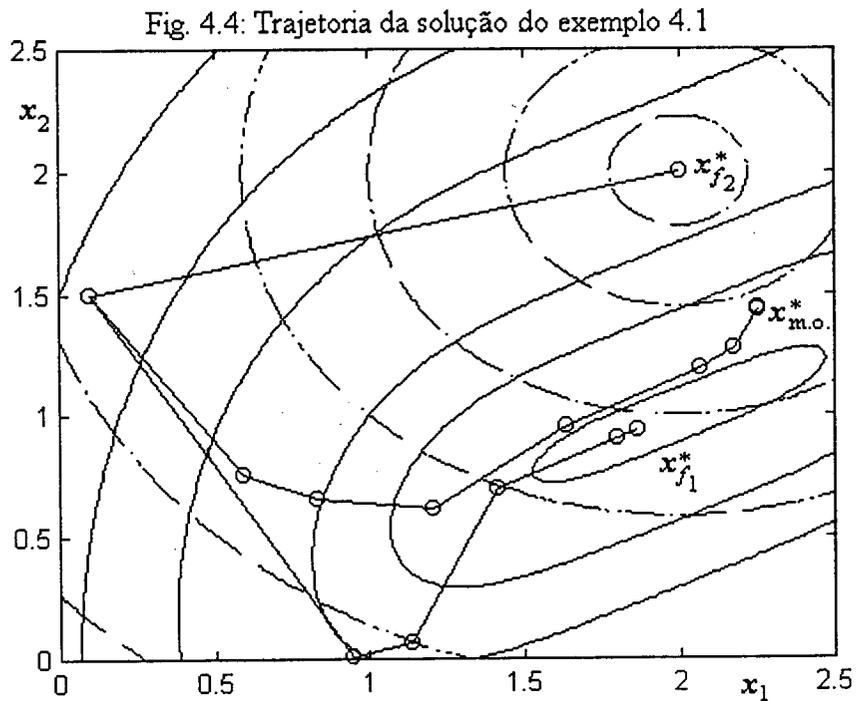
O valor atribuído à ε_i é ajustado durante o processo de solução do problema de otimização multi-objetivo. Para este ajuste, considera-se, de forma heurística, que ε_i assume o valor da função objetivo principal no ponto corrente. Desta forma, as restrições estarão ativas durante o processo de solução. A aplicação do algoritmo 3.2 ao problema de otimização multi-objetivo transformado considerando-se o ajuste de ε_i é resumido no seguinte procedimento:

Algoritmo 4.1:

1. *Selecionar a função objetivo principal;*
2. *Transformar as demais funções objetivo em restrições;*
3. *Resolver o problema de otimização transformado, via pontos interiores, considerando os ajustes nos parâmetros ε_i ;*
4. *Avaliar a solução encontrada.*

Neste algoritmo, a solução do problema de otimização modificado é obtida através do algoritmo-3.2. A avaliação da solução, descrita no quarto passo do algoritmo, consiste na caracterização do ponto encontrado, isto é, ponto de mínimo, de máximo ou de sela. Este algoritmo foi implementado para resolver os problemas dos exemplos 4.1 e 4.2 entre outros e, posteriormente aplicado ao problema de fluxo de potência ótimo. Os detalhes de implementação assim como a análise dos resultados, com esta abordagem, são apresentados no capítulo seis.

O algoritmo proposto foi usado para resolver o exemplo 4.1 e os resultados obtidos estão ilustrados na figura 4.4.



Na figura 4.4, são ilustradas as três trajetórias das soluções dos problemas de otimização. Duas trajetórias consideram as funções f_1 e f_2 individualmente. A terceira trajetória corresponde à abordagem multi-objetivo. O ponto $x^*(f_1) = [1.86 ; 0.93]^t$, obtido em 5 iterações, é o ponto de mínimo da função f_1 ; $x^*(f_2) = [2.000 ; 2.000]^t$, obtido em uma iteração, é o ponto de mínimo da função f_2 ; e o ponto $x_{m.o.}^* = [2.25 ; 1.43]^t$, obtido em oito iterações, é uma solução de Pareto obtida através do algoritmo proposto.

4.5 - Aplicação da Otimização Multi-Objetivo à Problemas de Sistemas Elétricos de Potência

A utilização de técnicas de otimização multi-objetivo na solução de problemas de engenharia elétrica é bastante difundida. Sua aplicação em projeto de circuitos elétricos [Lightner,1981], problemas de sistemas de controle [Lin,1973], projeto de filtros digitais [Charalambous,1989] entre outras, é uma prática usual. Em sistemas elétricos de potência a

aplicação de otimização multi-objetivo está mais evidente nas áreas de planejamento e operação das redes elétricas. Algumas destas aplicações são encontradas na literatura.

Yokoyama e outros [Yokoyama,1988] propõem um algoritmo de otimização multi-objetivo para problemas de planejamento e operação de sistemas de potência. Neste trabalho, o método das restrições é utilizado para obtenção do conjunto de soluções de Pareto, e um índice de preferência é introduzido para escolha da solução de melhor compromisso. O algoritmo foi testado num problema onde o mínimo custo de geração, a mínima emissão de NOx e o mínimo carregamento das linhas de transmissão foram utilizados como função objetivo. O índice de preferência utilizado levou em conta a segurança estática do sistema.

Na referência [Ying,1994] é apresentado um pacote computacional multi-objetivo para o planejamento de reativos em sistemas de potência de grande porte. No referido trabalho, a obtenção da solução do problema multi-objetivo envolve dois estágios. No primeiro estágio, uma técnica numérica é usada para obtenção do conjunto de soluções de Pareto, e no estágio seguinte seleciona-se a solução de melhor compromisso. Quatro funções objetivo são utilizadas: o custo associado à redução das perdas de potência ativa, o custo da planta, o mínimo desvio de tensão e o mínimo desvio de fluxo nas linhas de transmissão.

No caso específico do fluxo de potência ótimo, são promissoras as perspectivas do uso de técnicas de otimização multi-objetivo. O artigo [Wadhwa,1990] apresenta uma nova formulação para o problema de FPO, considerando de forma simultânea as funções objetivo mínimo custo de geração de energia e a mínima perda de potência ativa. Apesar destas duas funções estarem indiretamente relacionadas, a maioria das abordagens utilizam um esquema de otimização seqüencial para a solução deste problema [Shoults,1982].

4.6 - Fluxo de Potência Ótimo Multi-Objetivo

O problema do fluxo de potência ótimo consiste essencialmente na determinação do estado do sistema que otimiza uma determinada função objetivo e atende a um conjunto de

restrições de igualdade e desigualdade. Conforme visto no capítulo dois, são muitas as opções de função objetivo. Dentre estas, a minimização do custo de geração, a minimização de perdas de potência ativa, o mínimo desvio de uma distribuição de potência ativa pré-especificada e mínima ação de controle são freqüentemente utilizadas.

Em problemas reais tal como o da operação de sistemas elétricos de potência é comum deparar-se com situações na qual necessita-se fazer uma tomada de decisão com objetivos às vezes conflitantes sob certos aspectos. Além disso, os resultados da aplicação do fluxo de potência ótimo ao problema de operação de sistema elétrico, com o objetivo de redução das perdas por exemplo, pode produzir um grande impacto no estado do sistema em relação à uma condição de operação não otimizada. Porém, o alcance de um determinado objetivo com um mínimo de desvio da condição de operação anterior, é certamente um procedimento bastante recomendável sob o ponto de vista prático. No presente caso são associadas as funções objetivo mínima perda de potência ativa nas linhas de transmissão e mínimo desvio de um ponto de operação (em termos da magnitude da tensão e tazes). Nesta situação, a abordagem do problema via otimização multi-objetivo certamente conduzirá a resultados mais realísticos sob o ponto de vista prático.

O problema de FPO formulado como um problema de otimização multi-objetivo considerando-se a mínima perda de potência ativa e o mínimo desvio de tensão com funções objetivo é representado analiticamente como

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && P_l(\delta, V) \text{ e } \text{Min}_{\Delta V}(V) \\
 &\text{sujeito a} && P g_i - P d_i - P_i(\delta, V) = 0 \\
 &&& Q g_i - Q d_i - Q_i(\delta, V) = 0 \\
 &&& V_i^{\text{min}} \leq V_i \leq V_i^{\text{max}}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde as equações de balanço de potência ativa são definidas para todas as barras menos a barra de referência, e as equações de balanço de potência reativa são definidas apenas para as barras de carga. As funções objetivo P_l e $\text{Min}_{\Delta V}$ representam as perdas de potência ativa nas linhas de transmissão e o mínimo desvio de tensão de um valor pré-especificado, respectivamente. A expressão analítica para estas funções objetivo são dadas por

$$P_l(V, \delta) = \sum_{l=ij=1}^{nl} g_{ij} (V_i^2 + V_j^2) - 2V_i * V_j g_{ij} \cos \delta_{ij}$$

onde n_l é o número de linhas do sistema, e

$$Min_{\Delta V}(V) = \sum_{i=1}^n k_i (V_i - V_i^{esp})^2$$

onde n é o número de barras, V^{esp} é o valor de tensão pré-especificado constante k é usada para ponderar os respectivos desvios de tensão.

O algoritmo 4.1 é aplicado ao problema de otimização multi-objetivo (4.7). Assim, o primeiro passo é fazer o escalonamento das funções objetivo. A função objetivo mínima perda de potência ativa é eleita como função objetivo principal enquanto que o mínimo desvio de tensão é transformado em restrição, resultando no problema de otimização a seguir

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & P_l(\delta, V) \\ \text{sujeito a} \quad & Min_{\Delta V}(V) \leq \varepsilon \\ & Pg_i - Pd_i - P_i(\delta, V) = 0 \\ & Qg_i - Qd_i - Q_i(\delta, V) = 0 \\ & V_i^{min} \leq V_i \leq V_i^{max} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Conforme descrito na seção 4.4, considera-se ε ajustado durante o processo de solução por

$$\varepsilon^k = P_l(\delta^k, V^k) \tag{4.9}$$

onde o superescrito k indica a iteração corrente. De acordo com o método de redução de função potencial, descrito no capítulo três, as restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade através de variáveis de folga. Assim, as restrições nos desvios de tensão assumem a forma

$$y + Min_{\Delta V}(V) - \varepsilon = 0 \tag{4.10}$$

onde $y \in \mathfrak{R}^1_+$. O problema 4.8 com a desigualdade transformada em restrição de igualdade é resolvido via pontos interiores, com o uso do algoritmo de redução de função potencial. A função de mérito utilizada para o desenvolvimento do algoritmo é definida como

$$\begin{aligned} \varphi(V, \delta, y, \pi, \lambda^p, \lambda^q, v, v) = & \varsigma \log \left[\left\| L_\delta(V, \delta, y, \pi, \lambda^p, \lambda^q, v, v) \right\|^2 + \left\| L_V(V, \delta, y, \pi, \lambda^p, \lambda^q, v, v) \right\|^2 + \left\| y + \sum_{i=1}^n k_i (V_i - V_i^{exp})^2 - \varepsilon \right\|^2 \right. \\ & + \left\| -(P^g - P^d - P(V, \delta)) \right\|^2 + \left\| -(Q^g - Q^d - Q(V, \delta)) \right\|^2 + (y * \pi) + v' \circ (V - V^{min}) + v' \circ (V^{max} - V) \\ & \left. - \log(y * \pi) - \sum_{i=1}^n \log(v_i (V_i - V_i^{min})) - \sum_{i=1}^n \log(v_i (V_i^{max} - V_i)) \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde $\pi \in \mathfrak{R}^1_+$, $\lambda^p \in \mathfrak{R}^{n-1}$, $\lambda^q \in \mathfrak{R}^m$, $v \in \mathfrak{R}^n$ e $v \in \mathfrak{R}^n_+$ são os vetores correspondentes às variáveis duais. A função vetorial $L_\delta(\dots)$ é expressa pela equação (3.57) e $L_V(\dots)$ é definida como

$$L_V(V, \delta, y, \pi, \lambda^p, \lambda^q, v, v) = \nabla_V P_i(V, \delta) + 2\pi(V - V^{exp}) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^p \nabla_V P_i(V, \delta) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^q \nabla_V Q_i(V, \delta) - v + v \quad (4.12)$$

Os detalhes de desenvolvimento desta metodologia foram apresentados no capítulo três. A abordagem multi-objetivo foi implementada em ambiente Matlab e aplicada ao problema de fluxo de potência ótimo. No capítulo seis serão apresentados detalhes das implementações realizadas.

4.7 - Conclusões

Com base nas aplicações analisadas, verificou-se que a otimização multi-objetivo, aplicada à problemas reais, fundamenta-se na geração do conjunto de soluções de Pareto e na escolha da melhor solução compromisso.

A robustez do algoritmo de redução de função potencial, estudado no capítulo três, motivou a aplicação do método de pontos interiores ao problema de otimização multi-

objetivo. O algoritmo 3.2, relativo à metodologia, foi desenvolvido para a solução do problema de otimização escalonado, tal como no método das restrições, porém considerando-se o parâmetro ε ajustado durante o processo de solução. Resultados numéricos mostrados no exemplo 4.1 ilustram como a metodologia proposta pode ser utilizada para se determinar a solução ótima multi-objetivo.

Mostrou-se ainda que o problema de fluxo de potência ótimo, considerando as funções objetivo mínima perda de potência ativa e o mínimo desvio de um perfil de tensão pré-especificado pode ser formulado como um problema de otimização multi-objetivo, cuja solução pode ser determinada através da abordagem proposta. Os resultados obtidos com esta abordagem são mostrados no capítulo de resultados numéricos.

Capítulo 5

Solução do Sistema Linear

5.1 – Introdução

A aplicação de técnicas de otimização, vista no capítulo três, na solução de problema de fluxo de potência ótimo, conduz à necessidade de se resolver um sistema de equações lineares bastante esparso e com estrutura especial. A solução deste sistema linear pode ser obtida pelos métodos tradicionais baseados na eliminação de Gauss. No entanto, devido a presença de um bloco nulo, problemas de estabilidade numérica podem ocorrer e quase sempre um esquema de pivotamento deve ser previsto.

Neste capítulo será proposto, como uma contribuição à solução do sistema de equações lineares, uma abordagem baseada na decomposição do sistema aumentado em sistemas menores. Além disto, o uso de transformações ortogonais é introduzido visando dar maior robustez numérica à solução.

5.2 – O Sistema Linear Resultante do Problema de Otimização

No capítulo 3, foi visto que a aplicação das condições de otimalidade de primeira ordem, associada ao problema de FPO, resulta num conjunto de equações não-lineares. A solução destas equações não-lineares foi obtida iterativamente com o uso de um algoritmo

cuja busca é baseada na direção de Newton, definida a partir da solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} H & J^t \\ J & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} t \\ h \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

onde H é uma matriz quadrada, simétrica, chamada de *matriz Hessiana* e definida conforme as equações (3.54 e 3.68). A *matriz Jacobiana* J é uma matriz retangular; e 0 é uma matriz nula. Os vetores Δx e $\Delta \lambda$ correspondem às correções nas variáveis primais e duais associadas ao problema de otimização. O vetor t , no lado direito da equação (5.1), foi definido em (3.54), para o algoritmo de barreiras primal-dual e (3.68), para o algoritmo de redução de função potencial. O vetor h corresponde às restrições de igualdade.

5.2.1 – O Sistema Linear Associado ao Problema de Programação Linear

Nas implementações do método de pontos interiores para o problema de programação linear, via algoritmo primal-dual, recai-se num sistema linear equivalente ao descrito na equação (5.1). Neste caso, a matriz de coeficientes associada ao problema assume a seguinte forma [Fourer,1993]

$$\begin{bmatrix} -E & DA^T \\ AD & 0 \end{bmatrix}$$

onde E e D são matrizes diagonais semi-definida positiva e definida positiva, respectivamente; e A é a matriz de restrições do problema. A solução deste sistema linear tem recebido atenção especial, visto que além de problemas numéricos inerentes ao mesmo, é requerido um significativo esforço computacional na sua obtenção [Turner,1991; Gill,1992]. Nas referências [Wright M,1992 e 1997] é feita uma discussão a respeito dos problemas numéricos associados à fatoração desta matriz em sistemas de grande porte. Na maioria das implementações, a solução numérica do sistema linear é realizada de duas formas: na forma reduzida, tal como no Método da Equação Normal

[Golub,1992], ou com o sistema aumentado, isto é, conforme (5.1). No primeiro caso, a fatoração da matriz AD^2A^T em geral é obtida diretamente via Cholesky, isto é,

$$AD^2A^T = LL^T$$

Nesta representação, L é uma matriz diagonal inferior. Uma desvantagem desta abordagem é a eventual perda da esparsidade [Lustig,1991; Vanderbei,1993]. Além disto, nesta matriz podem ocorrer problemas de condicionamento numérico [Wright M,1997].

A segunda alternativa consiste em fatorar diretamente a matriz do sistema na forma aumentada. Neste caso, cuidados especiais devem ser tomados, tendo em vista que esta matriz é simétrica porém indefinida. Algumas implementações, as quais resolvem o sistema linear na forma aumentada, têm sido bem sucedidas fatorando-se a matriz com o esquema de Bunch-Parlett [Bunch,1971]. A subrotina da Harwell MA27, realiza a fatoração de matrizes simétricas com esta técnica, incluindo recursos para preservar a esparsidade [Duff,1982].

O livro [Wright S,1997] resume a estratégia utilizada na solução do sistema linear dos mais recentes aplicativos baseados no algoritmo primal-dual do método de pontos interiores para programação linear. A referência [Fourer,1993] faz uma comparação de desempenho do método da equação normal versus abordagem com o sistema aumentado, com o algoritmo primal-dual aplicado à problemas de programação linear de pequeno, médio e grande porte.

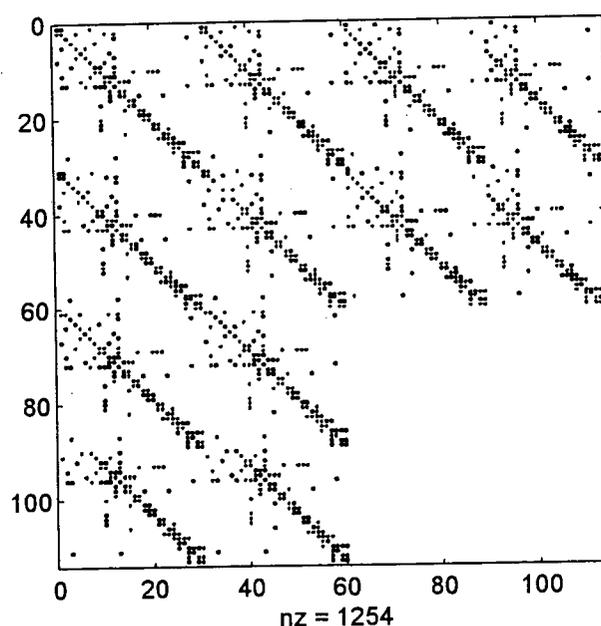
Outras abordagens alternativas têm sido propostas na literatura. O grupo de pesquisa do Laboratório de Otimização de Sistemas da Universidade de Stanford, introduziu uma redução no sistema linear e utilizou diretamente a subrotina MA27 da Harwell [Gill,1991]. Na referência [Vanderbei,1993], a matriz de coeficientes é rearranjada e denominada *matriz quasi-definida*; como alternativa de solução numérica do sistema linear propõe-se a decomposição das matrizes em dois blocos, aplicando a formula de Sherman-Morrison-Woodbury, separado-se as partes densa e esparsa do sistema.

A solução do sistema linear via métodos iterativos tem sido investigada, embora pouco divulgada na área de otimização. Recentemente, algumas implementações do Método do Gradiente Conjugado Pré-condicionado foram reportadas [Mehrotra,1989; Karmarkar1989].

5.3 – O Sistema Linear Associado ao Fluxo de Potência Ótimo

No que se refere ao problema de FPO, H é de ordem n , J é m por n , com $m < n$ e posto admitido igual a m ; e $\mathbf{0}$ é de ordem m por m . Neste caso, n é basicamente igual a duas vezes o número de barras e m é igual ao número de barras de geração mais duas vezes o número de barras de carga. A figura a seguir mostra a estrutura esparsa da matriz do sistema linear, ordenada naturalmente, para o sistema teste de 30 barras do IEEE.

Figura 5.1: Estrutura esparsa da matriz do sistema linear



Nesta representação, “nz” corresponde ao número de elementos não nulos.

Com relação à estrutura esparsa da matriz do sistema, a submatriz H apresenta um padrão de elementos não nulos composto de quatro blocos. Cada um dos blocos possui estrutura semelhante à estrutura da matriz admitância de barras. Este fato propicia o uso de um esquema de fatoração com blocos (2x2), ou (4x4), se a matriz Jacobiana for considerada adequadamente. Nas referências [Sun,1984;Torres,1998], tem-se uma discussão a respeito do uso da fatoração por blocos da matriz do sistema linear associado ao problema de FPO.

As subrotinas da HARWELL são consideradas uma referência para solução de sistemas lineares de grande porte. Neste pacote de subrotinas, a MA28 [Duff,1977]

executa a fatoração LU, com esparsidade, usa esquema de bloco diagonal, provê esquema de ordenação para redução de enchimento e possui esquema de pivotamento para estabilidade numérica. Uma discussão sobre a estrutura e detalhes desta subrotina é feita por Duff e Reid em [Duff,1982].

Visando ilustrar a importância da solução do sistema linear no problema de fluxo de potência ótimo, apresenta-se no algoritmo 5.1 a estrutura computacional de um dos programas computacionais desenvolvidos neste trabalho.

Algoritmo 5.1:

- *Ler e organizar dos dados;*
- *Determinar a matriz admitância de barras;*
- *Selecionar uma solução inicial:*
 - *Partida plana ou;*
 - *Partida com Fluxo de Potência;*
- *Inicializar as variáveis e ajustar os parâmetros do algoritmo;*
- *Enquanto a convergência não for obtida:*
 1. *Calcular a função objetivo e suas derivadas;*
 2. *Calcular a potência líquida nas barras;*
 3. *Calcular a matriz Jacobiana;*
 4. *Montar o vetor gradiente, lado direito da equação (5.1);*
 5. *Testar a convergência;*
 6. *Calcular a matriz Hessiana;*
 7. *Resolver o Sistema Linear (5.1);*
 8. *Calcular o comprimento do passo;*
 9. *Atualizar a solução corrente;*
 10. *Ajustar os parâmetros do algoritmo;*
- *Imprimir os relatórios com os resultados obtidos.*

As tarefas representadas pelos blocos numerados de 1 até 10 são realizadas a cada iteração constituindo assim a malha principal do programa.

Numa primeira versão do programa de FPO, implementado em Fortran 90, utilizou-se a subrotina MA28 da Harwell para resolver o sistema linear (5.1). O programa foi

desenvolvido para minimizar as perdas de potência ativa na transmissão com o controle da magnitude da tensão em barras que permitem tal procedimento.

Em sistemas de potência realísticos, o número de variáveis e restrições associadas ao problema de FPO cresce com o número de barras do sistema. Em sistemas de grande porte, a dimensão da matriz resultante do problema de otimização é da ordem de quatro ou mais vezes o número de barras, dependendo do número de controles e restrições considerados. A tabela a seguir apresenta dados correspondentes a sistemas reais

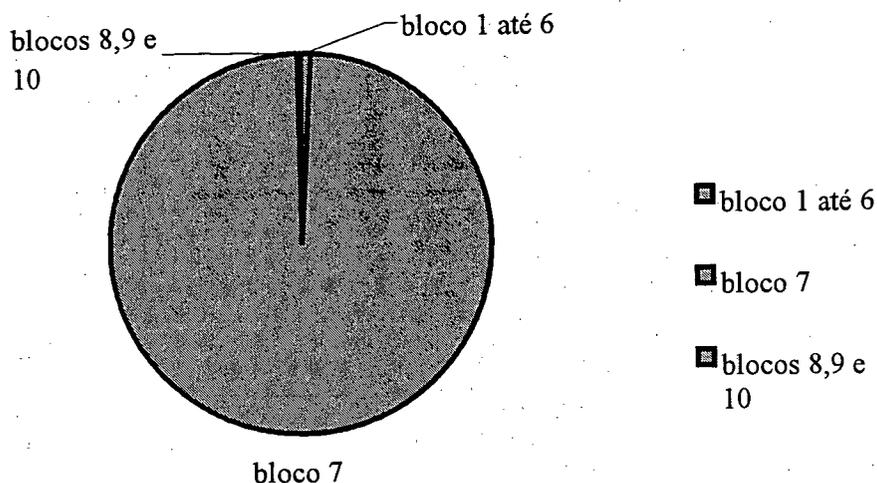
Tabela 5.1 - Dados de Sistemas de Grande Porte

Nome do sistema	barras / circuitos	dimensão do sistema linear	percentagem de elementos não nulos
SS-360	352 / 385	1.377×1.377	0.69
SS-730	730 / 973	2.815×2.815	0.39
SS-2000	1916 / 2357	7.500×7.500	0.14

onde SS-360, 730 e 2000 se refere ao sistema elétrico interligado das regiões Sul e Sudeste do Brasil, reduzido a 352, 730 e 1916 barras respectivamente. A dimensão do sistema linear no caso do SS-2000 é de 7.500 por 7.500 elementos, o que corresponderia a 56.250.000 elementos se a matriz fosse cheia, entretanto, apenas uma quantidade reduzida ($0.0014 * 56.250.000 = 78.750$) de elementos não nulos estão presentes. Com base nestes dados, torna-se evidente as dificuldades na solução do sistema linear devido ao porte das matrizes envolvidas, as quais são bastante esparsas e possuem um bloco diagonal nulo.

Num programa para cálculo de fluxo de potência ótimo, a tarefa que requer o maior tempo computacional, para sistemas de grande porte, é resolver o sistema linear. Para se ter uma idéia, considere-se a utilização do programa de FPO para minimizar as perdas de potência ativa no sistema sul-sudeste de 730 barras. No capítulo de resultados uma tabela com o registro dos tempos demandados por iteração, pelos principais blocos (ou arranjo de blocos) é apresentada. Alguns desses registros estão resumidos na figura 5.1.

Figura 5.2: Distribuição do tempo de CPU para os blocos de 1 até 10.



Conforme pode ser constatado no gráfico da figura 5.1, a solução do sistema linear, no caso apresentado, representou a tarefa mais dispendiosa do ponto de vista computacional. Neste caso, cerca de 99% do tempo gasto numa iteração é usado para resolver o referido sistema linear, e 1% restante é utilizado no cálculo da matriz Hessiana, da matriz Jacobiana, do vetor gradiente, da magnitude do passo e na atualização da solução. Portanto, é bastante recomendável concentrar esforços na pesquisa de abordagens alternativas para realização desta tarefa.

5.4 - Solução do Sistema Linear

A solução numérica de um sistema linear pode ser obtida através de métodos diretos [Golub,1992, Heath,1997] ou iterativos [Hestenes,1973]. Em problemas de sistemas elétricos de potência, mais especificamente os problemas de Fluxo de Carga e de FPO, geralmente utiliza-se os métodos diretos na solução de sistemas lineares. Para o primeiro problema citado, os métodos baseados na eliminação de Gauss, por exemplo a Fatoração LU [Golub,1992], tem-se sido bem sucedidos. Entretanto, no caso do problema de FPO o uso desta técnica pode não ser apropriada devido a problemas numéricos. Na presente pesquisa optou-se pelo uso de métodos ortogonais para solução do sistema linear.

controvertidos. A complexidade (em termos do número de operações) associada à redução a forma triangular de uma matriz $n \times n$ é da ordem de n^3 , tanto para a eliminação Gaussiana como para o método de Householder. Entretanto, a redução de Householder requer cerca de duas vezes mais o número de operações em ponto flutuante. Este fator de 2 é, certamente, considerável na escolha do método. O fator histórico também é relevante. Enquanto o método de Gauss data de 1800 [Heath,1997] os métodos de Householder e Givens têm pouco mais de quarenta anos. A escolha de métodos ortogonais, como o método de Householder, é justificada na solução de problemas com matrizes mal condicionadas, pois estes métodos são numericamente estáveis.

A presença do bloco nulo, na parte inferior direita da matriz do sistema (5.1), torna viável a separação do sistema linear aumentado em sistemas menores [Heath,1978]. Assim, ao invés de resolver diretamente o sistema (5.1) obtém-se a mesma solução tratando com sistemas menores. Esta possibilidade originou a abordagem apresentada a seguir.

O sistema linear (5.1) pode ser decomposto multiplicando-se a primeira linha da matriz de coeficientes pelo vetor $[\Delta x \ \Delta \lambda]^t$, igualando o resultado ao correspondente vetor do lado direito, isto é

$$H \Delta x = -J^t \Delta \lambda - t \quad (5.2)$$

De forma análoga, operando a segunda linha da matriz de coeficientes em (5.1) obtém-se

$$J \Delta x = -h \quad (5.3)$$

O desenvolvimento a seguir considera a matriz Jacobiana transposta J^t fatorada sob a forma

$$J^t = QR \quad (5.4)$$

onde Q é uma matriz ortogonal, conforme a definição a seguir, e R é uma matriz triangular superior.

Definição 5.1 - Uma matriz Q de ordem n por n é uma matriz ortogonal, se ela satisfaz a seguinte propriedade:

$$QQ^t = Q^tQ = I, \quad (5.5)$$

onde I é a matriz identidade. Logo, tem-se que $Q^t = Q^{-1}$.

Como a matriz J^t é n por m com $n > m$, e Q é definida de acordo com a definição 5.1, então, $Q^t J^t$ pode ser escrito como

$$Q^t J^t = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

desta forma, a ordem da matriz triangular superior R é m por m , e a matriz nula 0 é uma de ordem $(n-m)$ por m . O teorema apresentado a seguir admite o particionamento da matriz Q .

Teorema 5.1. Se $A = [a_1 \dots a_m] \in \mathcal{R}^{n \times m}$ ($n > m$) com vetores coluna a_i ($i = 1..m$) linearmente independentes, pode ser fatorada na forma $A = QR$, onde $Q = [q_1 \dots q_n] \in \mathcal{R}^{n \times n}$ e $R \in \mathcal{R}^{m \times m}$, então o espaço gerado pelas colunas da matriz A é igual ao espaço gerado pelas colunas da matriz ortogonal Q , isto é

$$\text{espaço gerado } \{a_1 \dots a_m\} = \text{espaço gerado } \{q_1 \dots q_m\}$$

em particular, se $Q_1 = Q(1 \dots n, 1 \dots m)$, $Q_2 = Q(1 \dots n, m+1 \dots n)$ e $R_1 = R(1 \dots m, 1 \dots m)$, então

$$\text{imagem}(A) = \text{imagem}(Q_1),$$

$$\text{imagem}(A)^\perp = \text{imagem}(Q_2)$$

e

$$A = Q_1 R_1.$$

onde o símbolo $^\perp$ indica complemento ortogonal.

Prova: A prova do teorema 5.1 é dada na página 217 da referência [Golub,1992].

Se a matriz Q da equação (5.4), for particionada de tal forma que

$$Q = [Q_1 | Q_2], \quad (5.7)$$

onde a submatriz Q_1 possui dimensão n por m e Q_2 é uma matriz retangular n por $(n - m)$. Então, as colunas de Q_1 formam uma base para o espaço imagem de J e as colunas de Q_2 formam uma base para o espaço nulo de J . O teorema 5.1 serve de base para algumas considerações feitas no desenvolvimento da abordagem apresentada a seguir.

Seja Δx , a solução do sistema subdeterminado (5.3), dada por

$$\Delta x = \Delta x_R + \Delta x_N \quad (5.8)$$

onde Δx_R é uma a solução particular, isto é a componente do espaço imagem, e Δx_N é uma solução da equação homogênea, ou seja, componente do espaço nulo. A componente Δx_R pode ser escrita como a projeção de um vetor s no espaço imagem de J , assim como Δx_N é escrita como uma combinação linear das colunas da matriz de espaço nulo de J . Logo, tem-se que

$$\Delta x_R = Q_1 s \quad (5.9)$$

e

$$\Delta x_N = Q_2 f \quad (5.10)$$

onde f é um vetor.

Desta forma, a equação (5.3) é re-escrita como

$$J(Q_1 s + Q_2 f) = -h \quad (5.11)$$

Porém,

$$Q_1^t J^t = R \quad (5.12)$$

e

$$Q_2^t J^t = 0 \quad (5.13)$$

Portanto, usando (5.12) e (5.13) na equação (5.11) obtém-se

$$R^t s = -h \quad (5.14)$$

onde R é a matriz triangular definida anteriormente. O sistema linear triangular acima é resolvido para s via substituição direta. A componente de espaço nulo da solução do

sistema subdeterminado (5.3) pode ser obtida a partir da equação (5.2) considerando-se que o vetor s , componente de espaço imagem, já é conhecido. Assim, re-escrevendo-se a equação (5.2)

como

$$H(Q_1 s + Q_2 f) = -t - J^t \Delta\lambda \quad (5.15)$$

Pré-multiplicando a equação (5.15) por Q_2^t , e usando o fato que $Q_2^t J^t = 0$, obtém-se

$$Q_2^t H Q_2 f = -Q_2^t (t + H Q_1 s) \quad (5.16)$$

onde o termo $Q_2^t H Q_2$ corresponde a uma matriz quadrada simétrica e de ordem $(n - m)$. Este sistema linear é resolvido para f possibilitando o cálculo da componente de espaço nulo via equação (5.10). Desta forma a solução do sistema subdeterminado (5.3) é obtida por

$$\Delta x = (Q_1 s + Q_2 f) \quad (5.17)$$

A expressão para o cálculo de $\Delta\lambda$ é desenvolvida a partir da substituição do vetor solução Δx na equação (5.2) pré-multiplicada por Q_1^t , obtendo-se

$$Q_1^t H \Delta x + Q_1^t J^t \Delta\lambda = -Q_1^t t \quad (5.18)$$

Do fato que $Q_1^t J^t = R$, resulta

$$R \Delta\lambda = -Q_1^t (t + H \Delta x) \quad (5.19)$$

onde o sistema triangular acima é resolvido para $\Delta\lambda$, completando assim a solução do sistema linear expresso em (5.1). O algoritmo apresentado a seguir resume os cálculos necessários para resolver o sistema linear utilizando a abordagem apresentada.

Algoritmo 5.2:

1 – Fatorar a matriz J^t tal que

$$Q^t J^t = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 – Resolver o sistema triangular

$$R^t s = -h$$

e calcular:

$$\Delta x_R = Q_1 s$$

3 – Resolver o sistema linear quadrado, simétrico e de ordem $(n-m)$:

$$Q_2^t H Q_2 f = -Q_2^t (t + H Q_1 s)$$

calcular

$$\Delta x_N = Q_2 f \quad e \quad \Delta x = \Delta x_R + \Delta x_N$$

4 – Obter $\Delta \lambda$ resolvendo o sistema triangular

$$R \Delta \lambda = -Q_1^t (t + H \Delta x)$$

O algoritmo 5.2 foi implementado inicialmente no ambiente de Matlab para testes e posteriormente em linguagem de programação Fortran 90. Este algoritmo representa o bloco de número 7 na estrutura global do programa de FPO resumida no algoritmo 5.1.

5.5 - Aplicação de Transformações Ortogonais

São poucas as aplicações de Métodos Ortogonais em problemas Fluxo de Potência Ótimo. Algumas aplicações desta metodologia são encontradas na área de Estimção de Estados em Sistemas de Potência. Nas referências [Simões-Costa, 1980 e 1981], as

Reflexões de Householder e as Rotações de Givens foram utilizadas na solução do problema de Mínimos Quadrados, associados à Estimação de Estados.

Na seção anterior, o uso de Transformações Ortogonais foi introduzido como uma ferramenta da abordagem proposta para solução do sistema de equações lineares (5.1). O desenvolvimento da metodologia proposta, resumida no algoritmo 5.1, supõe a fatoração QR da matriz Jacobiana transposta, cuja existência está baseada no teorema a seguir.

Teorema 5.2. Seja $A = [a_1 \dots a_m] \in \mathcal{R}^{m \times m}$, com vetores coluna a_i ($i = 1..m$) linearmente independentes. Então, existe um conjunto q_i ($i = 1..m$) de vetores coluna ortogonais tal que a matriz de transição de $[a_1 \dots a_m]$ para $[q_1 \dots q_m]$ é triangular superior, isto é,

$$a_i = r_{i1} q_1 + r_{i2} q_2 + \dots + r_{im} q_m$$

para $i = 1 \dots m$, ou em forma matricial

$$A = QR,$$

onde $Q \in \mathcal{R}^{m \times m}$ é uma matriz ortogonal e $R \in \mathcal{R}^{m \times m}$ é uma matriz triangular superior.

Prova: A demonstração deste teorema é feita a seguir pois junto com ela a definição de ortogonalidade e o algoritmo de Gram-Schmidt são apresentados [Lipschutz,1972].

Definição 5.2: Um conjunto de vetores coluna q_i ($i = 1..m$) é *ortogonal* se seus elementos são ortogonais dois a dois, isto é, se o produto interno $(q_i, q_j) = 0$ para $i \neq j$. Além disto, se cada vetor coluna q_i possui comprimento unitário, diz-se que o conjunto de vetores coluna é *ortonormal*.

Lema 5.1: Um conjunto de vetores coluna *ortonormal* q_i ($i = 1..m$) é linearmente independente e, para qualquer vetor $v \in \mathcal{R}^m$, o vetor

$$w = v - (v, q_1) q_1 - (v, q_2) q_2 - \dots - (v, q_m) q_m$$

é ortogonal a cada um dos q_1 .

Assim, fazendo

$$q_1 = v_1 / \|v_1\|,$$

então $[q_1]$ é ortonormal. A seguir, considere-se

$$w_2 = v_2 - (v_2, q_1) q_1 \text{ e } q_2 = w_2 / \|w_2\|$$

pelo lema 5.1, w_2 e, portanto, q_2 é ortogonal a q_1 ; então, $[q_1 q_2]$ é ortonormal.

Posteriormente, fazendo

$$w_3 = v_3 - (v_3, q_1) q_1 - (v_3, q_2) q_2 \text{ e } q_3 = w_3 / \|w_3\|,$$

novamente pelo lema 5.1, w_3 e, portanto, q_3 é ortogonal a q_1 e q_2 ; então, $[q_1 q_2 q_3]$ é ortonormal. Por indução, obtém-se um conjunto de vetores $[q_1 \dots q_m]$ ortonormal, que é linearmente independente, e portanto, constitui uma base do \mathcal{R}^m . Esta construção específica caracteriza o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, e garante que a matriz de transição é triangular \square .

O algoritmo 5.2 usa as submatrizes Q_1 e Q_2 , obtidas a partir do particionamento da matriz Q . Assim, a técnica usada para fatoração QR deve prever a separação da matriz Q nas submatrizes Q_1 , n por m , e Q_2 , n por $(n - m)$, definidas conforme o teorema 5.1.

Três algoritmos foram investigados para realizar a fatoração QR na matriz Jacobiana transposta: as Reflexões de Householder, as Rotações de Givens e o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. A escolha recaiu nas reflexões ou transformação de Householder. Esta escolha se justifica pelos seguintes fatos: primeiro, o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, tradicionalmente conhecido em Álgebra Linear [Lipschutz,1972], requer o armazenamento separado das matrizes A , Q e R . Por outro lado, nas reflexões de Householder as matrizes Q e R podem ocupar o mesmo espaço da matriz A [Heath,1997]. Com relação as rotações de Givens, numa análise preliminar, não foi observado nenhuma vantagem aparente deste método em relação às reflexões de Householder. Além disto, segundo a referência [Golub,1992], enquanto o algoritmo de

Householder requer cerca de $2m^2(n - m/3)$ operações em ponto flutuante (flops), para fatorar uma matriz cheia, o algoritmo de Givens, requer aproximadamente $3m^2(n - m/3)$ flops.

O processo de triangularização ortogonal de Householder [Householder,1958], popularizado por Golub para resolver o problema de mínimos quadrados [Golub,1965], consiste de sucessivas reflexões ou transformações elementares, com matrizes unitárias U_i , aplicadas à esquerda de uma dada matriz $A \in \mathcal{R}^{n \times m}$, de forma a reduzir esta matriz à forma triangular superior, isto é

$$U_m U_{m-1} \dots U_1 A = \begin{bmatrix} R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

onde R é uma matriz triangular superior m por m , e a matriz nula $\mathbf{0}$ é uma matriz de ordem $(n-m)$ por m . As matrizes U_i são chamadas de *matrizes ou refletores de Householder*, e são definidas a seguir.

Definição 5.3: Se \mathbf{v} é um vetor $\in \mathcal{R}^n$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, então a matriz

$$U = I - 2 \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\mathbf{v}^t\mathbf{v}} \quad (5.21)$$

é chamada de *matriz ou refletor de Householder* e o vetor \mathbf{v} é chamado de *vetor de Householder*.

A matriz de Householder é uma matriz de projeção e portanto, as propriedades de simetria e ortogonalidade estão associadas a esta matriz. É fácil de mostrar que a matriz U é simétrica pois

$$U^t = I^t - 2 \frac{(\mathbf{v}\mathbf{v}^t)^t}{\mathbf{v}^t\mathbf{v}} = I - 2 \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\mathbf{v}^t\mathbf{v}} = U \quad (5.22)$$

e ortogonal, isto é

$$UU^t = U^tU = \left(I - 2 \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\mathbf{v}^t\mathbf{v}} \right)^2 = I - 4 \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^t}{\mathbf{v}^t\mathbf{v}} + 4 \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}^t\mathbf{v})\mathbf{v}^t}{(\mathbf{v}^t\mathbf{v})(\mathbf{v}^t\mathbf{v})} = I \quad (5.23)$$

Uma interpretação física associada à transformação de Householder [Trefethen,1997; Brinch,1992] é que, dado um vetor $x \in \mathcal{R}^n$, uma reflexão de Householder projeta este vetor no hiperplano ortogonal ao espaço gerado pelo vetor v . Este fato sugere uma idéia para a determinação do vetor de Householder. Se o vetor x for considerado um múltiplo de um vetor unitário e_1 , onde $e_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^t$, e o vetor v for definido como

$$v = x + \text{sign}(x_1) \|x\| e_1 \quad (5.24)$$

então, o vetor Ux possui a mesma direção de e_1 . Desta forma, uma reflexão de Householder aplicada ao vetor x elimina todos componentes deste vetor, menos o primeiro. Além disto, como U é uma transformação unitária, a norma do vetor x é preservada. Por exemplo, se $x = [2 \ 6 \ -3]^t$ então, da expressão (5.24), $v = [9 \ 6 \ -3]^t$ e $Ux = [-7 \ 0 \ 0]^t$.

A aplicação de sucessivas reflexões de Householder a uma matriz $A \in \mathcal{R}^{n \times m}$, resulta na transformação QR onde, para o caso de n maior que m tem-se

$$Q = U_1 U_2 \dots U_m \quad (5.25)$$

onde Q é uma matriz ortogonal e

$$U_m U_{m-1} \dots U_1 A = R \quad (5.26)$$

onde R é uma matriz triangular superior.

Uma segunda versão do programa de FPO foi desenvolvida, utilizando o método de Householder para fatorar a matriz Jacobiana transposta, como requerido pelo algoritmo (5.2). Alguns detalhes de implementação assim como os principais resultados, são apresentados no capítulo de resultados, no qual mostra-se um caso onde, devido a problemas numéricos, a subrotina baseada na fatoração LU falha, enquanto que a que usa transformações ortogonais é bem sucedida.

5.6 - Conclusões

Neste capítulo, conclui-se que a solução do sistema linear é uma tarefa fundamental para uma aplicação bem sucedida de um programa de FPO em sistemas de grande porte. Verificou-se também que as características específicas da matriz do sistema, descritas pela equação (5.1), possibilitam a decomposição do sistema aumentado em sistemas de tamanho reduzido. Esta técnica foi explorada e proposta como uma alternativa viável para solução do referido sistema linear.

A decomposição do sistema aumentado em sistemas de dimensão reduzida, desenvolvido na seção 5.3 e resumido no algoritmo 5.2, introduz o uso de transformações ortogonais na solução. O algoritmo 5.2, prevê a fatoração **QR** da matriz Jacobiana transposta onde a matriz ortogonal **Q** deve ser particionada nas submatrizes Q_1 e Q_2 , definidas em 5.7. O método de Householder foi utilizado para realizar a fatoração **QR**, tendo em vista, entre outros fatores, a excelente qualidades de estabilidade numérica e a forma como a matriz é processada.

Capítulo 6

Resultados Obtidos e Detalhes de Implementação

6.1 - Introdução

Este capítulo destina-se a apresentação dos resultados das simulações realizadas nos diversos estágios do presente trabalho. A seção 6.2 apresenta os principais resultados obtidos com os algoritmos de Barreira Primal-Dual e o de Redução de função potencial. Na seção seguinte, é mostrado como estes algoritmos foram aplicados ao problema de FPO. Ainda nesta seção, uma análise conjunta destes algoritmos aplicados ao problema de FPO é realizada.

Os resultados das simulações do FPO multi-objetivo são apresentados na seção 6.4. Nesta seção, o fluxo de potência ótimo multi-objetivo para o sistema teste de 14 barras do IEEE é analisado. Um segundo sistema, reduzido a partir da rede elétrica da região sul do Brasil, é utilizado para ilustrar os benefícios da abordagem multi-objetivo.

Os resultados obtidos da aplicação do fluxo de potência ótimo à sistemas de pequeno, médio e grande porte são apresentados na seção 6.5. Os aspectos referentes ao tempo de processamento e as características de convergência como o número de iteração são abordados nesta seção.

Os resultados da aplicação de Transformações Ortogonais são apresentados na seção 6.6. Nesta seção, submeteu-se um sistema teste de seis barras a uma situação extrema, para ilustrar a superioridade, do ponto de vista numérico, dos métodos ortogonais em relação aos métodos baseados na eliminação de Gauss.

Finalmente, na seção 6.7 conclui-se a análise dos resultados obtidos.

6.2 - Resultados Obtidos com os Algoritmos de Barreira Primal-Dual e o de Redução de Função Potencial

Os algoritmos de Barreira Primal-Dual e o de Redução de função potencial, estudados no capítulo 3, foram implementados inicialmente no ambiente Matlab para resolver problemas gerais de otimização. O problema 3.1, enunciado no capítulo três, foi utilizado para a análise de desempenho dos algoritmos 3.1 e 3.2. Inicialmente, verificou-se o comportamento dos algoritmos em relação ao ponto de partida. Assim, escolheu-se os pontos próximos aos vértices, isto é $x_1 = [0.1 ; 1.1]^t$, $x_2 = [0.1 ; 2.4]^t$, $x_3 = [1.1 ; 0.1]^t$, $x_4 = [1.7 ; 0.1]^t$, $x_5 = [1.7 ; 1.0]^t$, $x_6 = [0.5 ; 2.4]^t$, para a realização deste teste. A tabela 6.1 apresenta os resultados das simulações.

Tabela 6.1: Análise de desempenho dos algoritmos 3.1 e 3.2.

ponto de partida	Algoritmo 3.1	Algoritmo 3.2(a)	Algoritmo 3.2(b)
	no. de iterações	no. de iterações	no. de iterações
x_1	10	10	9
x_2	11	8	9
x_3	10	9	9
x_4	8	9	8
x_5	11	8	8
x_6	13	8	10
Média	9,2	8,7	8,8

Em todas as simulações utilizou-se uma tolerância de 10^{-3} . Os parâmetros de ajuste do algoritmo 3.1 foram: $\mu = 0,1$ e $\beta = 10$. Cabe ressaltar que a convergência deste algoritmo é sensível ao ajuste do primeiro parâmetro. Assim, se o valor de μ for aumentado para 1,0, o número médio de iterações se eleva para 11,7. Se por outro lado, μ for diminuído para 0,01, a solução ótima a partir do segundo ponto, isto é de x_2 , vai requerer

17 iterações. Duas versões do algoritmo 3.2 foram consideradas. A primeira, o algoritmo 3.2(a), não inclui o cálculo do passo ótimo. A segunda versão, o algoritmo 3.2(b), além de considerar a viabilidade da nova solução, calcula o passo ótimo deduzido na propriedade (iii) da proposição 3.4. Os parâmetros usados nos algoritmos de redução de função potencial, algoritmo 3.2(a) e 3.2(b) foram $\sigma = 1.0$ e $\beta = 0,5$. Os detalhes de implementação do procedimento de cálculo do passo ótimo, usado na versão 3.2(b), são resumidos no algoritmo 6.1.

Algoritmo 6.1:

$$m = 0$$

Faça :

$$m = m + 1$$

$$x^m = x^k + \tau \rho^m \Delta x^k$$

calcular:

$$\varphi(x^m)$$

$$\text{Enquanto: } \varphi(x^m) - \varphi(x^k) \leq -\alpha \tau \rho^m (1 - \sigma)(\zeta - n_2)$$

onde φ é a função de mérito definida pela equação (3.33); τ é o comprimento do passo resultante do teste de viabilidade. Os parâmetros ρ e α foram ajustados em 0,5, conforme sugerido em [Wang,1995]. A constante n_2 foi definida no capítulo três e o parâmetro da função de mérito ζ é calculado por $\zeta = n_2 \sqrt{n_2}$.

O procedimento descrito no algoritmo 6.1 é usado para evitar passos de grande magnitude com pouco decréscimo no valor da função objetivo na busca linear. Esta regra, denominada *condição de Armijo* [Friedlander,1994], exige que este decréscimo seja, em certo sentido, proporcional a magnitude do passo. Os efeitos do cálculo do passo ótimo, com o uso do procedimento descrito pelo algoritmo 6.1, se tornam mais evidentes no exemplo 6.1.

Exemplo 6.1: Considere-se o exemplo 3.1 modificado para a forma

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \\ \text{sujeito a} \quad & 0 \leq x_1 \leq 1,8 \\ & 0 \leq x_2 \leq 2,4 \end{aligned}$$

onde apenas os limites nas variáveis foram considerados como restrições. Os resultados da tabela 6.2 mostram o número de iterações requeridas pelos algoritmos 3.2(a) e 3.2(b) na solução do exemplo 6.1.

Tabela 6.2: Comparação dos algoritmos 3.2(a) e 3.2(b).

ponto De partida	Algoritmo 3.2(a)	Algoritmo 3.2(b)
	no. de iterações	no. de iterações
$x_1 = [0.1 \ 0.1]^t$	8	7
$x_2 = [0.1 \ 2.4]^t$	8	7
$x_3 = [1.7 \ 0.1]^t$	8	8
$x_4 = [1.7 \ 2.4]^t$	8	5
média	8	6.7

Neste caso, os parâmetros dos algoritmos foram ajustados em $\sigma = 1.0$ e $\beta = 0.3$. Nota-se que a inclusão do cálculo do passo ótimo reduziu o número de iterações em média, de 8 para 6.7.

6.3 - Aplicação dos Algoritmos de Barreira Primal-Dual e o de Redução de Função Potencial ao Problema de FPO

Os algoritmos de barreira primal-dual e o de redução de função potencial, cujos desenvolvimentos teóricos estão documentados nas seções 3.4.1 e 3.4.2 do capítulo três, foram implementados no ambiente Matlab para resolver o problema de FPO. Nestes testes, considerou-se a mínima perda de potência ativa nas linhas de transmissão como função objetivo, as equações de balanço de potência ativa e reativa como restrições de igualdade e os limites máximo e mínimo de tensão como restrições de desigualdade. As características dos sistemas teste de 14, 30, 57 e 118 barras do IEEE, utilizados na nesta simulação, são resumidos na tabela 6.3.

Tabela 6.3: Características dos sistemas testes do IEEE

Sistema teste	número de variáveis	número de restrições de igualdade	número de restrições de desigualdade
IEEE-14	28	22	28
IEEE-30	60	53	60
IEEE-57	114	106	114
IEEE-118	236	201	236

Na presente simulação, apenas a magnitude e o ângulo de fase das tensões foram considerados como variáveis. Os limites máximos e mínimos das tensões foram adotados como 1.05 (pu) e 0.95 (pu), respectivamente. As tolerâncias foram especificadas em $\varepsilon_{\mu} = 10^{-5}$ e $\varepsilon_F = 10^{-3}$ para o algoritmo de barreira primal-dual, e $\varepsilon_G = 10^{-5}$ e $\varepsilon_F = 10^{-3}$ para o algoritmo de redução de função potencial. O desempenho dos algoritmos foi avaliado individualmente, tendo sido realizada posteriormente uma comparação entre os mesmos.

6.3.1 - Análise do Algoritmo de Barreira Primal-Dual

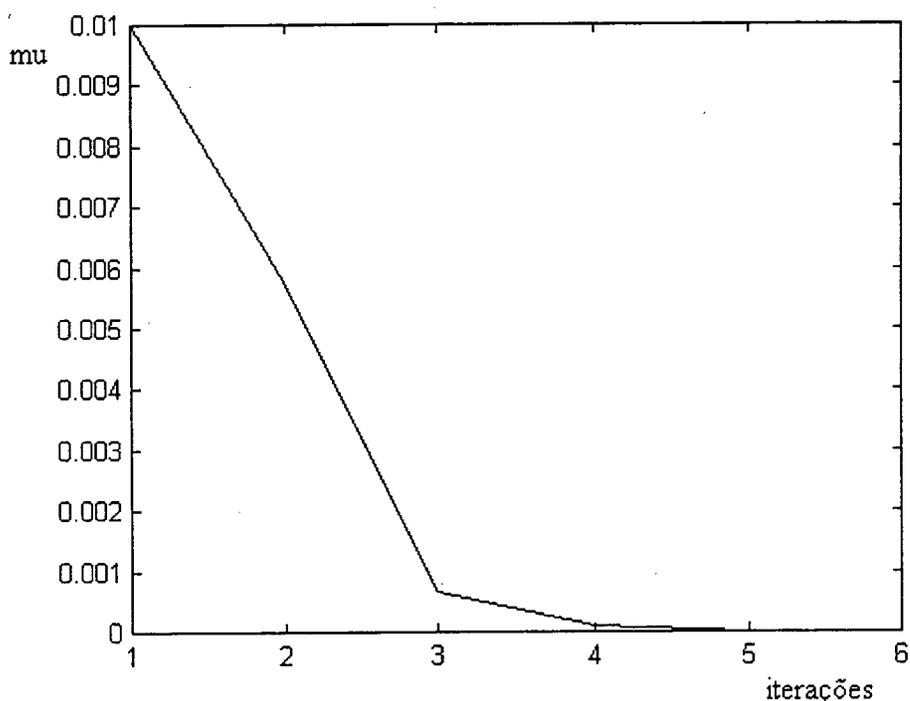
Nos testes com o algoritmo de barreira primal-dual, implementado conforme algoritmo 3.1, analisou-se o efeito da variação do parâmetro μ . Os resultados deste teste estão resumidos na tabela 6.4.

Tabela 6.4: Variação do número de iterações com o parâmetro μ .

Sistema	$\mu = 10^{-3}$	$\mu = 10^{-2}$	$\mu = 10^{-1}$	$\mu = 10^0$	$\mu = 10^1$
IEEE-14	7	6	7	8	9
IEEE-30	8	8	10	11	12
IEEE-57	9	10	11	12	13
IEEE-118	X	X	13	14	15

Nesta tabela, X indica divergência no processo iterativo. Todas as simulações foram realizadas com $\beta = 10$. Estes resultados mostram a importância da escolha do parâmetro de ajuste da função barreira logarítmica. Por exemplo $\mu = 10^{-2}$ é uma boa escolha para os sistemas de 14 e 30 barras entretanto, é uma péssima escolha para o sistema de 118 barras. Um outro aspecto importante deste algoritmo, diz respeito a sua característica de convergência, a qual pode ser avaliada através da observação da variação do parâmetro μ . Este parâmetro, atualizado conforme a equação (3.17), tende iterativamente à zero conforme mostra o gráfico da figura 6.1, obtido para o sistema de 14 barras.

Figura 6.1: Variação do parâmetro de ajuste da função barreira



6.3.2 - Análise do Algoritmo de Redução de Função Potencial

O algoritmo baseado no método de Redução de função potencial, descrito no capítulo 3, foi implementado inicialmente no ambiente Matlab para resolver o problema de fluxo de potência ótimo. Alguns detalhes de implementação são analisados a seguir. O

efeito da estimativa inicial para a constante β , assim como para o parâmetro μ do algoritmo 3.1 é avaliado na tabela 6.5.

Tabela 6.5: Variação do número de iterações com o parâmetro β .

Sistema	$\beta = 10^{-3}$	$\beta = 10^{-2}$	$\beta = 10^{-1}$	$\beta = 10^0$	$\beta = 10^1$
IEEE-14	7	8	9	10	11
IEEE-30	7	9	10	10	11
IEEE-57	10	12	13	14	14
IEEE-118	16	14	13	14	14

Deve ser enfatizado, que a versão do algoritmo utilizada não considera o cálculo do passo ótimo. Todas as simulações foram realizadas com o parâmetro $\sigma = 5$. Dos resultados obtidos, nota-se que este algoritmo é robusto em relação à estimativa inicial para o parâmetro β visto que, na faixa de variação considerada, não foi constatado nenhum caso de divergência. Fica evidente entretanto, a importância do ajuste deste parâmetro, pois o número de iterações, no processo de solução é sensível a este valor. A atualização do parâmetro de centralização σ foi realizada com base numa regra empírica, sugerida por Wang e outros [Wang,1995], descrita a seguir.

Se o comprimento do passo for maior que 0,5

Faça $\sigma = \sigma / 10$

Se não

Mantenha σ inalterado

Fim

Outro aspecto importante, diz respeito à estimativa inicial dos valores das variáveis do problema, isto é das variáveis primais e duais. Com relação as variáveis primais, a magnitude das tensões V e o ângulo de fase das tensões δ , nas simulações realizadas considerou-se a partida plana, ou seja $V = 1.0$ p.u. e $\delta = 0.0$ rad. Neste caso o ponto de partida é um ponto interior porém inviável. A inicialização com um ponto viável, obtido via fluxo de carga convencional, foi investigado e reportado em [Carvalho,1996].

A inicialização das variáveis duais também constituiu um fator preponderante para o sucesso das implementações. Na literatura consultada, pouco é mencionado a este respeito. Em geral, recomenda-se atribuir o valor unitário para estas variáveis. De fato, para as variáveis duais associadas às restrições de igualdade uma estimativa inicial unitária, isto é $\lambda^p = 1.0$ e $\lambda^q = 1.0$ mostrou-se bem apropriada. Entretanto, esta regra não se verifica para as variáveis duais associadas às condições de complementaridade das folgas u e v . Por exemplo, se no sistema de 118 barras fossem tomados $u = 1.0$ e $v = 1.0$ como estimativas iniciais, este caso passaria a ser divergente. No desenvolvimento desta pesquisa, verificou-se de forma intuitiva que uma estimativa inicial razoável para estas variáveis pode ser obtida a partir da equação (3.37). Assim, fez-se

$$u^0 = \beta * (2 + 2n) / (V - V^{\min}) \quad (6.1)$$

e

$$v^0 = \beta * (2 + 2n) / (V^{\max} - V) \quad (6.2)$$

onde n é o número de variáveis. Estas equações foram utilizadas para inicializar as variáveis duais em todas as simulações realizadas.

O efeito do cálculo do passo ótimo, desenvolvido a partir do algoritmo 6.1, foi avaliado. Para isto, implementou-se uma versão do programa de FPO no ambiente Matlab, incluindo este cálculo. Apesar das tentativas de ajuste dos parâmetros relacionados a este procedimento, isto é, os parâmetros α , ρ , e ζ , os resultados não foram favoráveis. Na maior parte dos casos analisados, o número de iterações aumentou em relação aos descritos na tabela 6.5 (os melhores casos). No caso do melhor ajuste obtido, o número de iterações considerando-se apenas a viabilidade da solução corrente igualou-se aquele da tabela 6.5.

6.3.3 - Análise Conjunta dos Algoritmos de Barreira Primal-Dual e o de Redução de função potencial

Os resultados dos testes com os algoritmos de barreira primal-dual e o de redução de função potencial são agora analisados simultaneamente. Os desempenhos destes algoritmos, com relação ao número de iterações, são confrontados na tabela 6.6 .

Tabela 6.6: Desempenho dos algoritmos primal-dual e de redução de função potencial.

Sistema Teste	Algoritmo de Barreira Primal-Dual	Algoritmo de Redução de função potencial
IEEE-14	6	7
IEEE-30	8	7
IEEE-57	9	10
IEEE-118	13	13

Nesta tabela, a segunda coluna se refere ao número de iterações requerido pelo algoritmo de barreira primal-dual, e a terceira coluna mostra o número de iterações requerido pelo algoritmo de redução de função potencial. O desempenho dos algoritmos, com relação a este item, é praticamente o mesmo.

Nos testes realizados, constatou-se que os valores finais da função objetivo são praticamente os mesmos. Entretanto, os valores finais das variáveis primais V e δ são aproximados. A tabela a seguir apresenta os resultados relativos à magnitude e ângulo de fase das tensões nas quatorze barras do sistema teste IEEE-14.

Tabela 6.7: Resultados obtidos com o sistema teste de 14 barras do IEEE.

Barra	FPO com o algoritmo de Barreira Primal-Dual		FPO com o algoritmo de Redução de função potencial	
	V (pu)	δ (rad)	V (pu)	δ (rad)
1	1.0500	0.0000	1.0500	0.0000
2	1.0405	-0.2449	1.0500	-0.2446
3	1.0284	-0.2652	1.0363	-0.2648

4	1.0045	-0.2281	1.0068	-0.2279
5	1.0350	-0.0895	1.0366	-0.0898
6	1.0138	-0.2752	1.0213	-0.2746
7	1.0198	-0.2449	1.0266	-0.2446
8	1.0075	-0.2795	1.0146	-0.2788
9	1.0127	-0.2760	1.0196	-0.2752
10	1.0072	-0.2828	1.0151	-0.2821
11	1.0122	-0.2809	1.0201	-0.2803
12	1.0113	-0.1858	1.0147	-0.1862
13	1.0163	-0.1592	1.0195	-0.1597
14	0.9915	-0.2981	0.9989	-0.2971
		Perdas = $1.3868e^{-1}$		Perdas = $1.3855e^{-1}$
		Iterações = 6		Iterações = 7

A evolução das variáveis primais durante o processo de convergência é representada pelas trajetórias ilustradas nas figuras 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5.

Figura 6.2: Variação da magnitude das tensões no processo iterativo do algoritmo de barreira primal-dual.

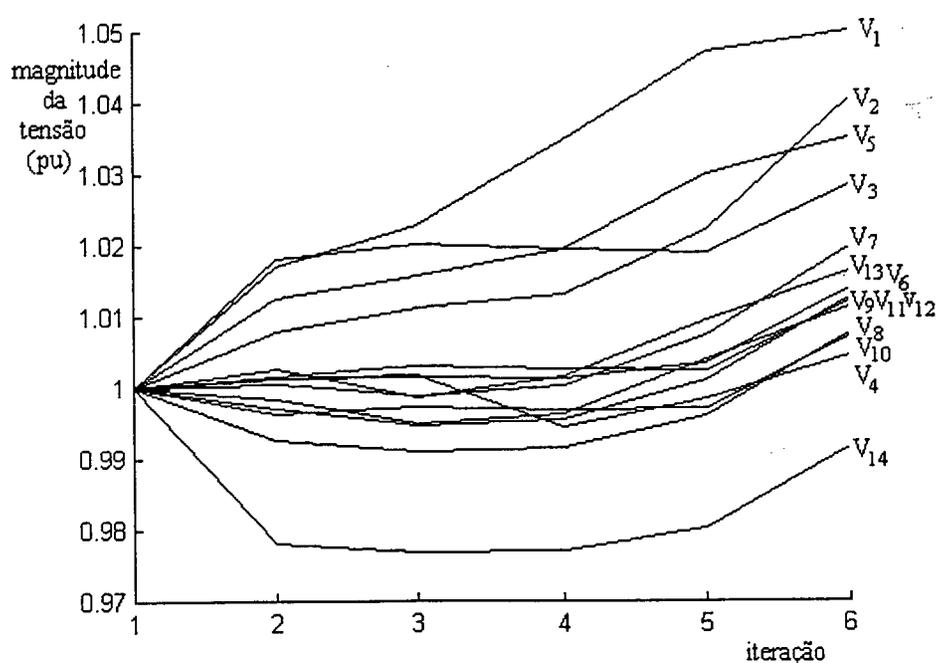


Figura 6.3: Variação do ângulo de fase das tensões no processo iterativo do algoritmo de barreira primal-dual.

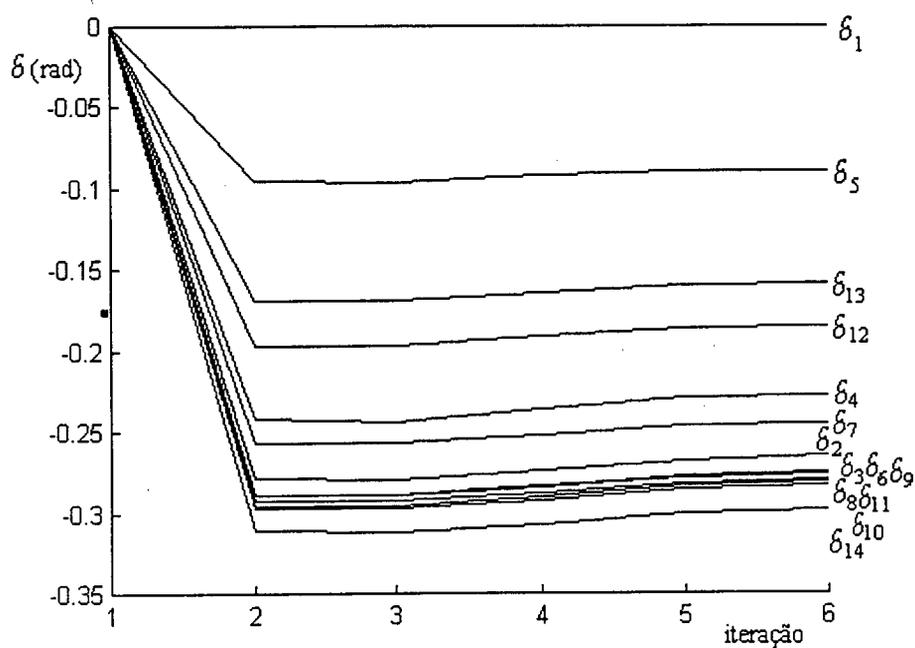


Figura 6.4: Variação da magnitude das tensões no processo iterativo do algoritmo de redução de função potencial.

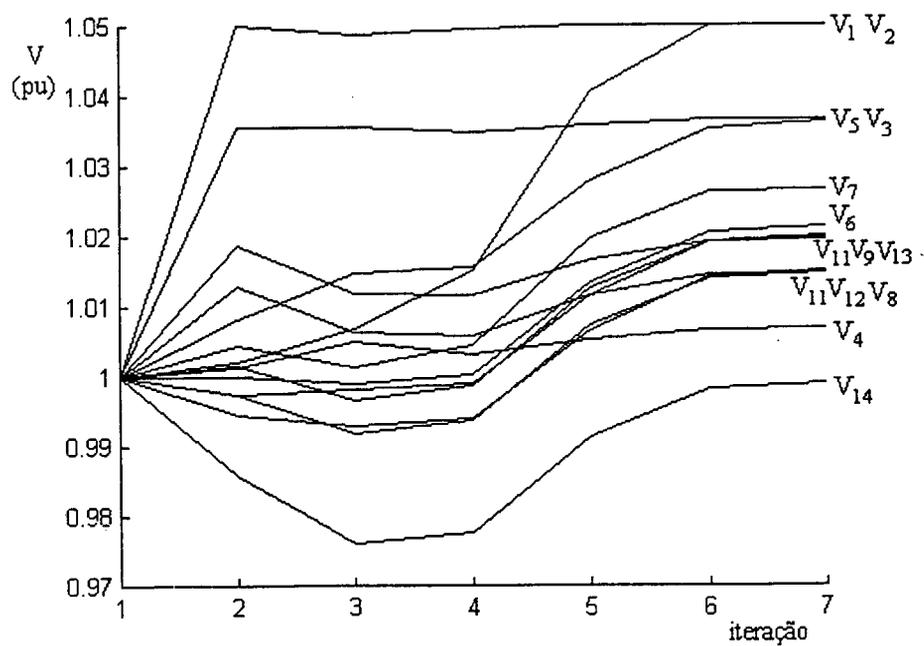
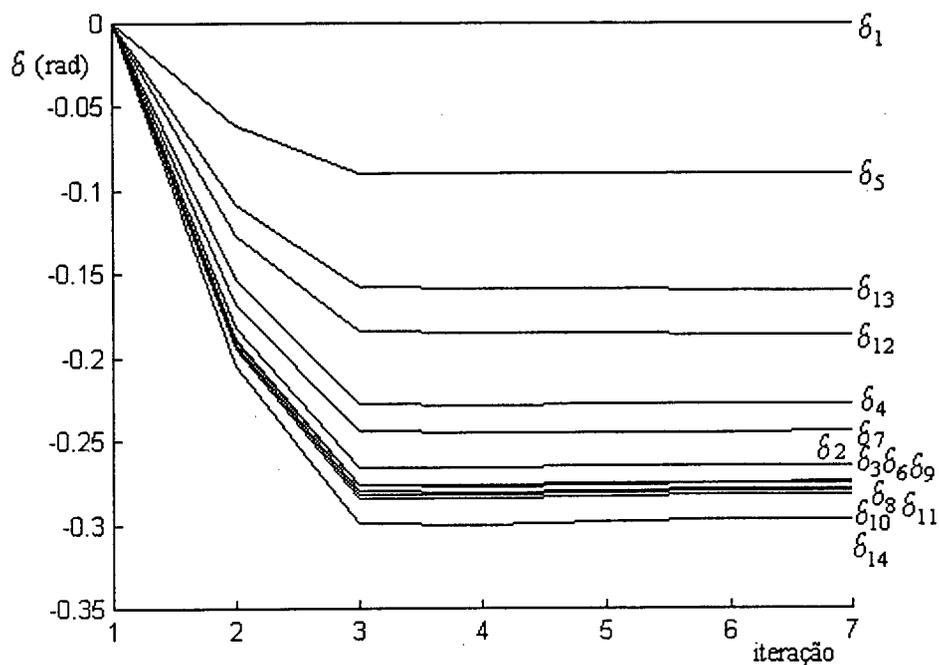
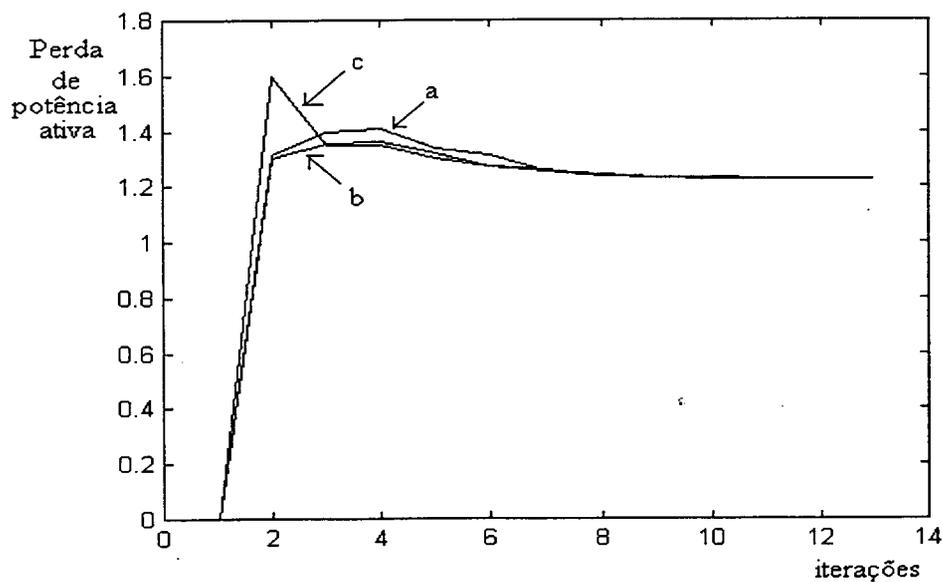


Figura 6.5: Variação do ângulo de fase das tensões no processo iterativo do algoritmo de redução de função potencial.



onde de forma equivalente ao caso “b” a barra de número um foi considerada barra de referência. A redução da função objetivo durante o processo de convergência é ilustrada na figura 6.6.

Figura 6.6: Redução da função objetivo



As curvas mostradas na figura 6.6 se referem ao sistema teste de 118 barras do IEEE. A curva “a” mostra a redução da função objetivo para o caso do algoritmo de barreira primal-dual, a curva “b” se refere ao algoritmo de redução de função potencial, e a curva “c” representa o algoritmo de redução de função potencial com o cálculo do passo ótimo. Em todos os casos a convergência foi obtida em 13 iterações, com a tolerância especificada anteriormente.

6.4 - Resultados Obtidos com a Abordagem Multi-Objetivo

Com base na teoria apresentada no capítulo quatro, implementou-se uma versão do programa de fluxo de potência ótimo considerando a abordagem multi-objetivo. Duas funções objetivo foram consideradas: a mínima perda de potência ativa na transmissão e o mínimo desvio de tensão de um valor pré-especificado. As implementações foram realizadas considerando-se as tensões como variáveis de otimização. Os limites máximo e mínimo de tensão, em todas as barras, foram considerados como restrições de desigualdade; e as equações de balanço de potência ativa e reativa constituíram o conjunto de restrições de igualdade.

6.4.1 - Aplicação ao Sistema Teste de 14 Barras do IEEE

Um primeiro teste foi realizado com o sistema de 14 barras do IEEE. As seguintes simulações foram realizadas:

- a) FPO com minimização de perdas de potência ativa;
- b) FPO com mínimo desvio de 1.0 (pu) de tensão como função objetivo;
- c) FPO multi-objetivo considerando a mínima perda como função objetivo principal e o mínimo desvio de tensão como restrição.

Os resultados dessas simulações em termos de valor das funções objetivo utilizadas são resumidos na tabela 6.7.

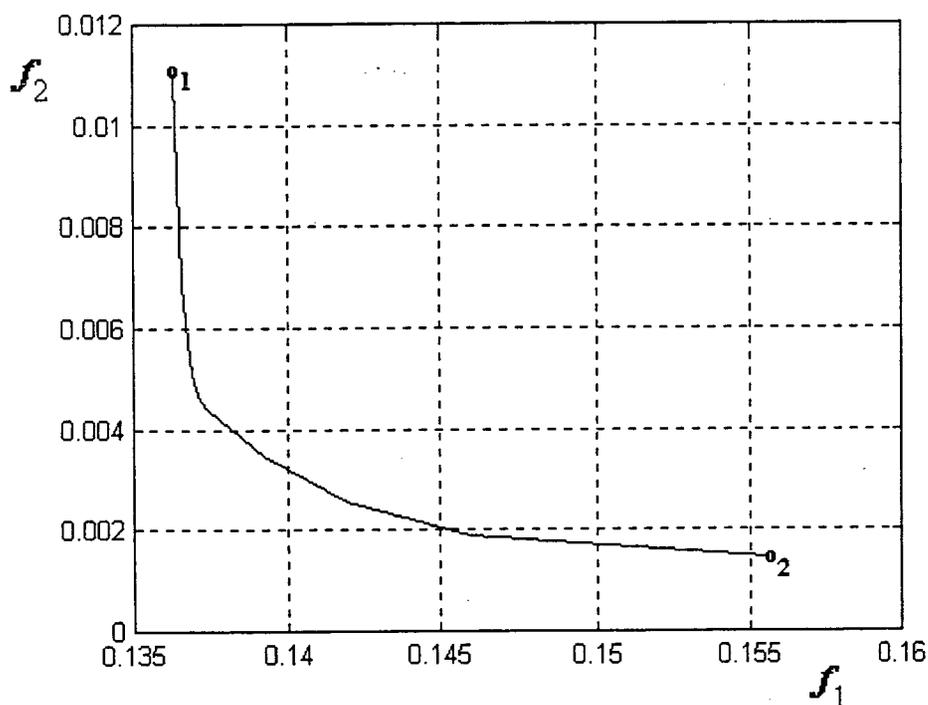
Tabela 6.8: Resultados da abordagem multi-objetivo com o sistema de 14 barras

	Simulação “a”	Simulação “b”	simulação “c”
Valor final da função objetivo	Mínima perda de potência ativa	mínimo desvio de tensão	solução com o algoritmo proposto
f_1	0.1363	0.1552	0.1364
f_2	0.0111	0.0015	0.0089

onde f_1 é a mínima perda e f_2 é o mínimo desvio de 1.0 (pu). de tensão. Nas simulações “a” e “b”, o problema de FPO foi tratado de forma convencional, isto é apenas uma função objetivo foi considerada. Na simulação “c”, utilizou-se o algoritmo 4.1, proposto no capítulo 4, onde a solução obtida é uma solução de Pareto.

Uma versão do programa de FPO multi-objetivo foi implementada usando o método dos pesos para gerar a curva de Pareto. Os resultados da aplicação desta versão do programa ao sistema de 14 barras do IEEE é a curva de Pareto mostrada na figura a seguir:

Figura 6.7: Curva de Pareto para o sistema de 14 barras do IEEE.



Nesta figura, os pontos “ o_1 ” e “ o_2 ” indicam os mínimos das funções f_1 e f_2 respectivamente. Esta curva foi obtida com os coeficientes de peso variando de zero a um.

Esta versão do método dos pesos, implementada em Matlab, inclui uma malha externa ao programa de FPO conforme mostra o procedimento resumido no algoritmo 6.2.

Algoritmo 6.2:

$w_1 = 0.0$;

Faça i variar de 1 até 11

$w_2 = 1.0 - w_1$;

Resolva o problema de otimização considerando:

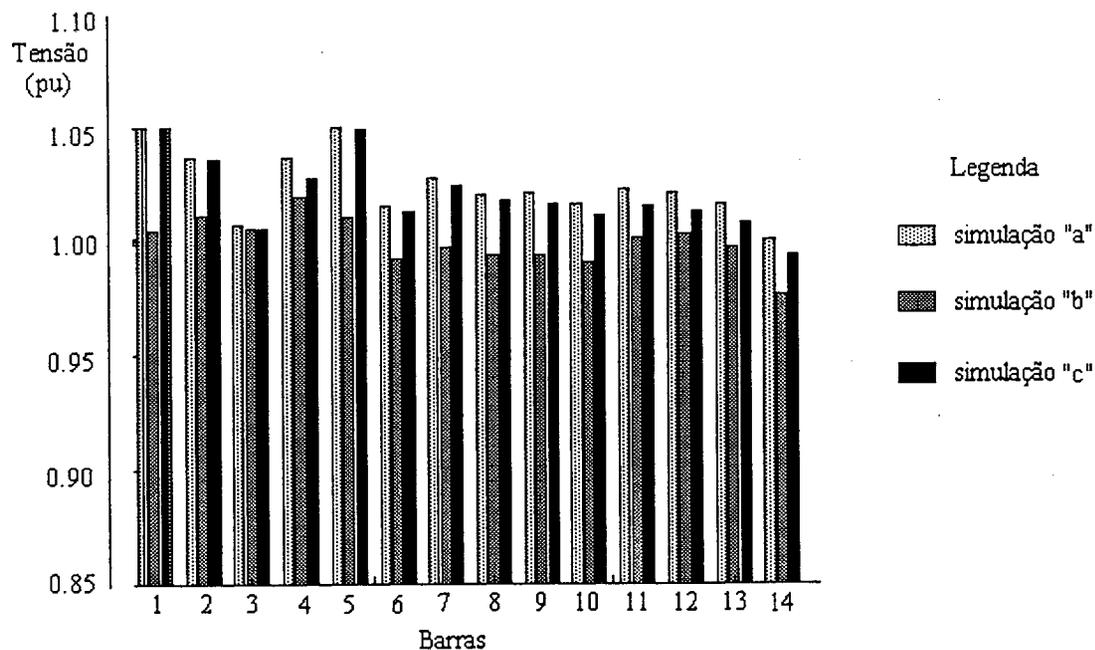
$$\text{função_objetivo} = w_1 * f_1 + w_2 * f_2 ;$$

$w_1 = w_1 + 0.1$;

Fim (Faça).

Neste algoritmo, w_1 e w_2 são os coeficientes de peso. O significado da solução obtida com o algoritmo proposto se torna mais evidente observando-se os perfis de tensão associado a cada caso simulado. O gráfico de barras da figura 6.8 ilustra estes perfis

Figura 6.8: Perfil de tensão do sistema teste de 14 barras



Para cada barra do sistema são mostrados os valores finais das tensões com a mínima perda, o mínimo desvio de tensão e com a abordagem multi-objetivo. Observe-se que na maioria das barras, isto é barras 4, 6, 7 até 14, o valor final da tensão, obtido com a abordagem multi-objetivo, ficou entre os valores das simulações “a” e “b”.

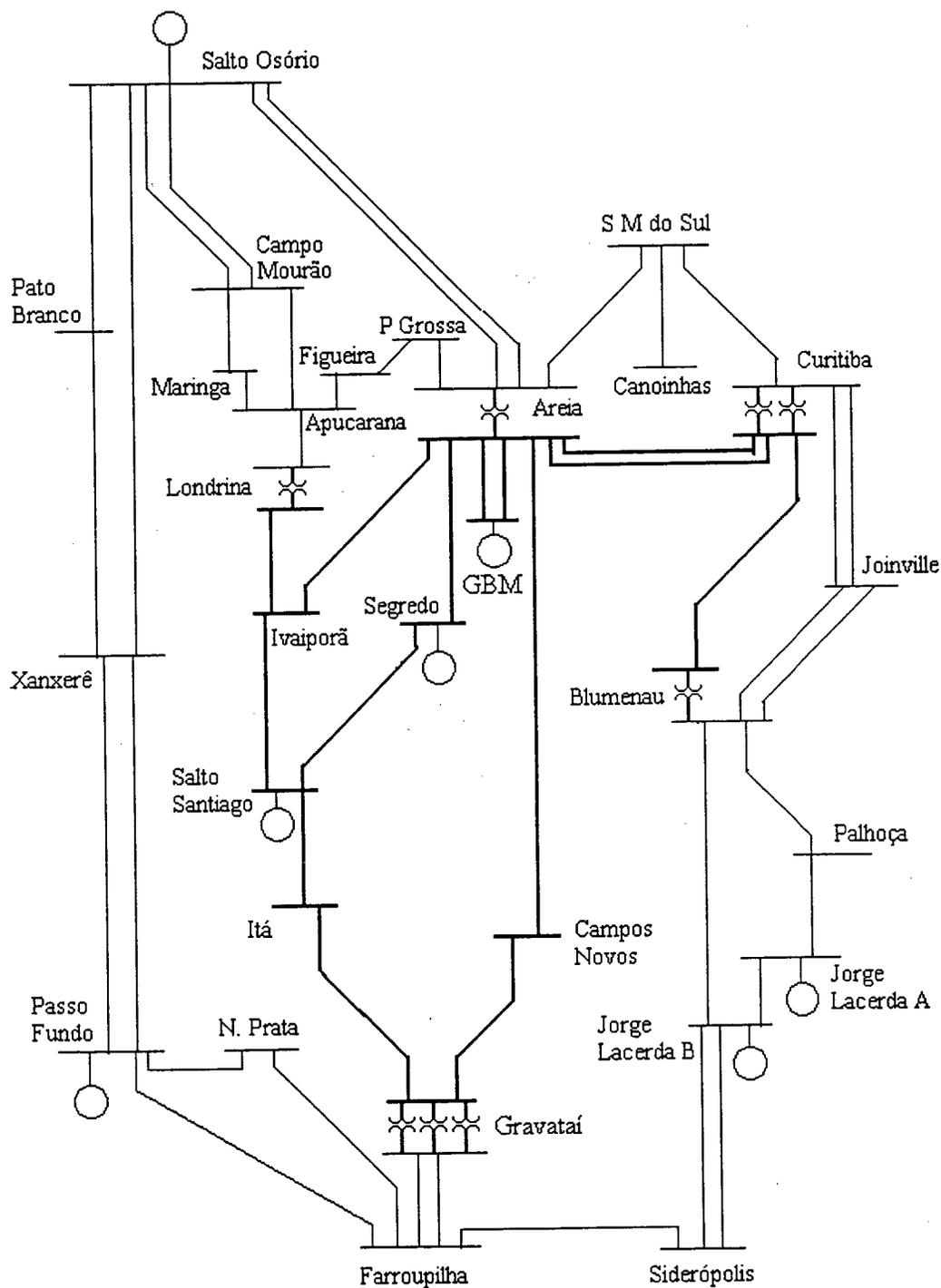
6.4.2 - Aplicação a um Sistema Reduzido da Região Sul do Brasil

A situação descrita a seguir tem o objetivo de ilustrar os benefícios da aplicação de um programa de fluxo de potência ótimo multi-objetivo. Parte do sistema elétrico da região sul do Brasil foi reduzido a 34 barras a partir dos dados do sistema de 730 barras. Esta redução inclui, além da geração, os sistemas de transmissão em 525 e 230 KV. As demandas de potência ativa e reativa nas barras consideradas, foram substituídas por um equivalente aproximado. O resultado desta redução é mostrado no diagrama unifilar da figura 6.10.

Neste diagrama, as linhas com traço duplo se referem ao nível de tensão de 525 KV, e as de traço simples ao nível de 230 KV. Os dados de barra e das linhas de transmissão referentes a este sistema constam no apêndice B. O programa ANAREDE, desenvolvido no Centro de Pesquisas em Energia Elétrica (CEPEL) foi utilizado para gerar os valores considerados como ponto de partida nas simulações.

As funções objetivo mínima perda de potência ativa nas linhas de transmissão e o mínimo desvio de tensão de um valor pré-especificado foram utilizadas neste exemplo.

Figura 6.9: Diagrama Unifilar do sistema de 34 barras da região sul do Brasil



Nos estudos realizados considerou-se a solução do fluxo de carga como ponto de partida e estabeleceu-se, a partir deste ponto, uma faixa de mais ou menos cinco por cento da magnitude inicial, como limites de tensão. Inicialmente aplicou-se o programa de FPO com mínima perda como função objetivo. Os resultados obtidos são apresentados na tabela

6.9, onde são mostrados os valores iniciais e finais da tensão de barra, nas oito barras de tensão controlada e nas oito barras de carga que sofreram a maior mudança de “status” sob o ponto de vista de magnitude da tensão.

Tabela 6.9: Solução do sistema de 34 barras com mínima perda de potência ativa

Nome da barra	Barra de tensão controlada			nome da barra	Barra de carga		
	tensão inicial	tensão final	ajuste (%)		tensão inicial	tensão final	variação (%)
Ivaiporã	1.0350	1.0762	3.82	Maringá	0.9792	1.0292	4.85
J. Lacerda-A	1.0300	1.0570	2.55	Xanxere	0.9842	1.0334	4.76
Passo Fundo	1.0200	1.0642	4.15	Pato Branco	1.0022	1.0522	4.75
Salto Osório	1.0350	1.0824	4.38	Figueira	0.9930	1.0424	4.74
Sto Santiago	1.0350	1.0741	3.64	C. Mourão	1.0046	1.0545	4.73
J. Lacerda-B	1.0200	1.0598	3.75	Joinville	1.0137	1.0637	4.70
GBMunhoz	1.0350	1.0682	3.11	Apucarana	0.9855	1.0336	4.65
Segredo	1.0300	1.0724	3.95	Blumenau	1.0443	1.0942	4.55

Nesta tabela, os ajustes de tensão das barras de tensão controlada, e as maiores variações de tensão nas barras de carga, são expressos em porcentagem.

O estudo seguinte, consistiu em aplicar o programa de FPO com mínimo desvio de tensão do valor inicial como função objetivo. Como os valores de tensão pré-especificados constituem um ponto viável, visto que este satisfaz as restrições de igualdade e é interior, a solução final é o próprio ponto de partida. A tabela a seguir resume os valores finais das funções objetivo para estas duas simulações realizadas

Tabela 6.10: Resultados do fluxo de carga e das simulações “b” e “c”.

Valor final da função objetivo	solução do fluxo de carga	FPO com mínima perda de P. ativa	FPO com mínimo desvio de tensão
f_1	0.9961	0.9164	0.9960
f_2	0.0000	0.0668	7.6×10^{-7}

Ne tabela 6.10, f_1 é a mínima perda de potência ativa e f_2 é o mínimo desvio de tensão com relação à solução do fluxo de carga. Conforme pode ser visto na tabela 6.10, a aplicação do FPO com a mínima perda de potência ativa como função objetivo, resultou numa redução de aproximadamente 8 % nas perdas de potência ativa. Agora considere-se a seguinte possibilidade:

Encontrar uma solução que além de reduzir as perdas conduza a um menor ajuste nas variáveis de controle, em relação a solução corrente, e produza uma menor variação nas variáveis de estado.

Para alcançar esta meta, será utilizado o programa de FPO com o algoritmo proposto considerando a abordagem multi-objetivo. Assim, tomando a mínima perda de potência ativa como função objetivo e o mínimo desvio de tensão de um valor pré-especificado como restrição, obteve-se os resultados mostrados na tabela 6.11.

Tabela 6.11: Solução do sistema sul com 34 barras usando o algoritmo 4.1.

Nome da barra	Barra de tensão controlada			Nome da barra	Barra de carga		
	tensão inicial	tensão final	ajuste (%)		tensão inicial	tensão final	variação (%)
Ivaiporã	1.0350	1.0553	1.92	Maringá	0.9792	1.0079	2.84
J. Lacerda-A	1.0300	1.0375	0.72	Xanxere	0.9842	1.0103	2.58
Passo Fundo	1.0200	1.0403	1.95	Pato Branco	1.0022	1.0317	2.86
Salto Osório	1.0350	1.0661	2.91	Figueira	0.9930	1.0209	2.74
Sto Santiago	1.0350	1.0531	1.72	C. Mourão	1.0046	1.0344	2.88
J. Lacerda-B	1.0200	1.0411	2.02	Joinville	1.0137	1.0418	2.69
GBMunhoz	1.0350	1.0546	1.86	Apucarana	0.9855	1.0122	2.64
Segredo	1.0300	1.0543	2.30	Blumenau	1.0443	1.0720	2.58

Na tabela 6.11, nos resultados obtidos com a abordagem multi-objetivo utilizou-se um fator de ponderação igual a 5. Estes resultados são expressivos, visto que o ajuste

médio de tensão foi reduzido, de 3,7 %, no caso de mínima perda de potência ativa, para 1,92 %, enquanto que a variação média de tensão, nas barras consideradas, decresceu de 4,7 % para 2,7 %. Com relação ao total de perdas de potência ativa, houve um acréscimo de 3,6 % pois, com esta solução, as perdas aumentaram de 0.9164 (pu), no caso da função objetivo mínima perda, para 0.9496 (pu).

6.5 - Resultados Obtidos com a Aplicação do Programa de FPO em Sistemas de Pequeno, Médio e Grande Porte

Numa primeira versão do programa de FPO, implementado em Fortran, utilizou-se a subrotina MA28 da Harwell para resolver o sistema linear (5.1). O programa foi usado para minimizar as perdas de potência ativa na transmissão, em sistemas testes e reais, com o controle da magnitude da tensão nas barras de geração. As simulações foram realizadas num microcomputador PC – Pentium II, 300 Mhz, 128 MB de RAM, no ambiente Windows. Os resultados obtidos com os sistemas simulados, no que diz respeito a características de convergência e tempo computacional, estão resumidos na tabela 6.12.

Tabela 6.12: Características de convergência para sistemas de pequeno, médio e grande porte

nome do sistema	número de barras	número de iterações	tempo (seg.) de processamento
IEEE-14	14	6	0.08
IEEE-30	30	6	0.44
IEEE-57	57	9	0.82
IEEE-118	118	14	1.26
SS-360	352	16	9.61
SS-730	730	20	94.36
SS-2000	1916	23	460.39

Na tabela 6.12, SS-360, 730 e 2000 se referem ao sistema elétrico interligado das regiões sul e sudeste do Brasil, isto é, aos sistemas reduzidos de 352, 730 e 1916 barras, respectivamente. Os resultados foram obtidos considerando uma tolerância de 10^{-3} para a norma do gradiente e 10^{-5} para o equivalente parâmetro da função barreira. Em todos os casos, a inicialização foi obtida a partir de um fluxo de carga.

Os tempo de CPU por tarefa, associados aos blocos descritos no algoritmo 5.1, estão ilustrado na tabela 6.13, na qual alguns blocos foram agrupados em razão da sua pequena parcela de participação no tempo total.

Tabela 6.13: Tempo de CPU para os blocos do algoritmo 5.1.

TEMPO DE C.P.U.		
Blocos	segundos	percentagem
1 até 6	0.033	0.73
7	4.452	99.10
8 até 10	0.008	0.17
Total	4.493	100

Os resultados mostrados na tabela 6.13 referem-se ao sistema de 730 barras, sendo os tempos dados por iteração. Nesta simulação cerca de 99% do tempo gasto, numa iteração, foi usado para determinar, fatorar e resolver o sistema de equações lineares, e o 1% restante do tempo foi gasto para realizar as demais tarefas.

6.6 - Resultados Obtidos com a Aplicação de Transformações Ortogonais

A abordagem proposta para resolver o sistema de equações lineares, desenvolvida no capítulo cinco, prevê o uso de transformações ortogonais. Conforme citado anteriormente, uma das vantagens do uso de transformações ortogonais, é a sua superioridade para operar matrizes numericamente mal condicionadas. No presente trabalho, o método de Householder foi empregado para realizar a fatoração **QR** da matriz Jacobiana transposta. O exemplo descrito a seguir ilustra este aspecto.

Considere-se o sistema de seis barras de Ward e Hale [Ward,1956], cujo diagrama unifilar e dados da rede elétrica estão no apêndice C. Nesta seção, este sistema-teste é analisado com o programa de FPO, com o controle das tensões visando minimizar as perdas de potência ativa na transmissão. Com relação aos limites mínimo e máximo da magnitude da tensão, a seguinte situação extrema foi adotada:

a) Para as barras de tensão controlada:

$$V_{\text{máx}} = 1.06 \text{ (pu)}, \text{ e } V_{\text{min}} = 0.90 \text{ (pu)};$$

b) Para as barras de carga:

$$V_{\text{máx}} = 1.05 \text{ (pu)}, \text{ e } V_{\text{min}} = 0.8858 \text{ (pu)};$$

Além disto, os “taps” dos transformadores foram considerados unitários.

A versão do programa de FPO que faz uso da subrotina da Harwell na solução do sistema linear foi empregada sem sucesso na solução deste problema. Nesta simulação, o processo não convergiu no número máximo de iterações, fixado em cinquenta, e finalizou com uma mensagem de erro tipo “overflow”.

Este mesmo caso foi simulado com sucesso com a versão do programa que faz uso das transformações ortogonais. Os resultados da simulação, cujo processo convergiu em seis iterações, estão resumidos no relatório a seguir.

----- VARIÁVEIS DE BARRA -----							
NO. BARRA	NOME	TIPO	TENSÃO		GERAÇÃO	CARGA	REATIVO
			MODULO/ ANGULO		MW/ MVAR	MW/ MVAR	SHUNT MVAR
1	6	0	.914		.00	50.00	
			-.62		.00	5.00	.00
2	5	0	.886		.00	30.00	
			-.97		.00	18.00	.00
3	3	0	.913		.00	55.00	
			-1.58		.00	13.00	.00
4	4	0	.933		.00	.00	
			1.88		.00	.00	.00
5	2	1	1.060		50.00	.00	
			8.46		20.46	.00	.00
6	1	2	1.060		95.70	.00	
			11.49		52.43	.00	.00

Perdas de potência ativa nas linhas = 10.70
 Demanda total de potência ativa = 135.00
 Geração total de potência ativa = 145.70

Analisou-se, com auxílio do software Matlab, o motivo do insucesso da versão do programa de FPO que faz uso da subrotina da Harwell. Verificou-se que o estreitamento da faixa de limites da magnitude das tensões torna a matriz de coeficientes do sistema linear mal condicionada. A tabela 6.14 mostra o número de condicionamento da matriz de coeficientes, por iteração, obtido com o Matlab na versão do programa desenvolvido neste ambiente.

Tabela 6.14: Variação do número de condicionamento da matriz de coeficientes.

iteração	1	2	3	4	5	6	7	8	9
número de condicionamento	1.4^{e+03}	2.1^{e+06}	1.6^{e+05}	2.1^{e+08}	8.9^{e+09}	3.9^{+13}	9.8^{e+19}	1.3^{e+33}	1.7^{e+48}

No processo iterativo correspondente a este caso, a partir da nona iteração obteve-se a seguinte mensagem:

Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.

Observe-se que o condicionamento da matriz do sistema vai piorando a cada iteração o que certamente conduz a problemas na solução do sistema linear.

A tabela a seguir apresenta resultados obtidos com os sistemas teste de 14 até 118 barras do IEEE.

Tabela 6.15: Resultados obtidos com os sistemas de 14 até 118 barras

nome do sistema	ordem (n)	Com fatoração LU		Com fatoração QR	
		n. de flops/ n^3	n. de iterações	n. de flops/ n^3	n. de iterações
IEEE-14	50	0.366	6	1.394	6
IEEE-30	113	0.345	6	1.360	6
IEEE-57	220	0.382	9	1.347	9
IEEE-118	437	0.355	14	1.340	14

Na tabela 6.15, n é a dimensão da matriz do sistema linear. As colunas três e cinco apresentam o número de operações em ponto flutuante, obtido com auxílio do Matlab, para as versões do programa de FPO que fazem uso da fatoração LU e QR, respectivamente. Estas medidas foram tomadas para o problema de minimizar perdas de potência ativa com controle da tensão. Nas colunas quatro e seis, apresenta-se o número de iterações que, para as duas versões implementadas, é o mesmo conforme esperado. As simulações foram realizadas num microcomputador PC – Pentium II, 300 Mhz, 128 MB de RAM, no ambiente Windows. Nesta tabela não se apresenta os tempos de CPU obtidos com a subrotina que executa a solução do sistema linear via fatoração QR. Desde que na aplicação da fatoração QR visou-se prioritariamente observar a robustez da solução do FPO, nas implementações não foram utilizadas técnicas de ordenação ou qualquer estratégia para reduzir o tempo de CPU.

6.7 - Conclusões e Considerações

Neste capítulo foram apresentados os principais resultados obtidos referentes aos algoritmos implementados, incluindo abordagem multi-objetivo, o uso de transformações ortogonais e a aplicação do programa de FPO a sistemas de grande porte.

Com relação aos algoritmos de barreira primal-dual e o de redução de função potencial, estes apresentam desempenho bem parecidos no que diz respeito ao número de iterações. Os testes realizados com problemas gerais de otimização assim como com o problema de FPO mostram que o primeiro algoritmo, isto é o de barreira primal-dual, é bastante sensível ao ajuste do parâmetro da função barreira enquanto que o algoritmo de redução de função potencial demonstra ser mais tolerante em relação ao ajuste do parâmetro de centralização.

A implementação do cálculo do passo ótimo, através da regra de Armijo, mostrou-se bem sucedida na solução do exemplo 3.1 modificado. Entretanto, nas simulações realizadas com o problema de FPO nenhuma vantagem foi conseguida com a inclusão deste cálculo.

As diferenças dos algoritmos de barreira primal-dual e o de redução de função potencial, vistas em relação as variáveis de otimização primais, foram evidenciadas com a aplicação do FPO ao sistema teste de 14 barras do IEEE. Uma observação interessante é que os ângulos de fase das tensões aproximam-se dos valores finais logo na primeira iteração, para o algoritmo de barreira primal-dual, ou na segunda iteração no caso do algoritmo de redução de função potencial.

A viabilidade da implementação de um FPO multi-objetivo foi avaliada na seção 6.4. Os testes realizados no sistema reduzido a 34 barras da região sul do Brasil mostram as vantagens da solução encontrada com esta abordagem. A solução que atende aos dois critérios otimizados simultaneamente, a mínima perda de potência ativa na transmissão e ao mínimo desvio de tensão da solução corrente, apresenta-se atrativa principalmente devido aos aspectos de redução nos ajustes dos controles e nas variações das tensões, seguida do aspectos econômicos, pois a redução das perdas não é tão expressiva.

A superioridade dos métodos ortogonais na solução de sistemas de equações lineares, foi demonstrada no exemplo apresentado na seção 6.7. O uso da fatoração LU mostrou-se vulnerável na solução do sistema linear mal condicionado. O emprego da fatoração QR via Householder associado a técnica de decomposição do sistema linear aumentado mostrou um bom desempenho na solução de problemas mal condicionados numericamente.

Capítulo 7

Conclusões e Recomendações para Futuros Trabalhos

No desenvolvimento da presente pesquisa, foram apresentadas algumas contribuições ao Fluxo de Potência Ótimo com o objetivo de minimizar as dificuldades associadas a implementação deste aplicativo na Operação de Sistemas Elétricos em tempo real. Apresentou-se a teoria do algoritmo de Redução de função potencial, seguido da sua aplicação ao problema de FPO, cujos resultados obtidos nos testes demonstram robustez e consistência. A versão Multi-Objetivo do FPO, tornou este programa flexível no auxílio à tomada de decisão em situações de conflito de objetivos. Finalmente, o emprego de transformações ortogonais deu maior robustez, do ponto de vista numérico, ao programa desenvolvido.

7.1 - Conclusões

Os resultados obtidos com o algoritmo de redução de função potencial demonstram sua robustez e excelente desempenho na solução do problema de FPO. Os principais aspectos positivos deste algoritmo são:

- O desenvolvimento do algoritmo é motivado por uma função de mérito do tipo redução potencial. A partir da redução de função potencial desenvolveu-se uma regra para o cálculo do passo ótimo. As análises de convergência e complexidade podem ser desenvolvidas a partir desta função de mérito [Wang,1995]. Portanto, este algoritmo apresenta uma teoria consistente tendo

em vista que os aspectos teóricos e práticos são dirigidos por uma função de mérito;

- A aplicação deste algoritmo na solução do problema de FPO, desenvolvida no capítulo 3, tornou possível a redução do sistema linear representado na equação (3.68);
- O algoritmo proposto é robusto com relação ao ajuste de constantes tais como o parâmetro β , o qual foi definido como uma medida do centro analítico do conjunto viável;
- As curvas descritas pelas variáveis primais V e δ , durante o processo de convergência, mostradas no capítulo de resultados, definem uma trajetória suave na região de viabilidade;
- A inclusão do cálculo do passo ótimo, através da regra de Armijo, não trouxe benefícios apreciáveis ao problema de FPO, com a função objetivo mínima perda de potência ativa. Entretanto, a inclusão deste cálculo torna o algoritmo mais robusto, tendo em vista que a condição de Armijo garante que o decréscimo da função objetivo é, em certo sentido, proporcional ao tamanho do passo. Por outro lado, o custo computacional associado à inclusão deste procedimento é pequeno, pois, conforme os resultados obtidos, o tempo gasto para avaliar a função de mérito representa menos de 1% do tempo gasto, numa iteração.

O FPO multi-objetivo apresenta-se atrativo na solução de problemas reais. Esta abordagem tornou possível a otimização simultânea das funções mínima perda de potência ativa e mínimo desvio de tensão. Os principais resultados desta abordagem são:

- Com a abordagem proposta neste trabalho, obtém-se uma solução do problema multi-objetivo em uma única etapa ao contrário dos métodos convencionais onde a otimização multi-objetivo é, geralmente, realizada em duas etapas. Na primeira gera-se um conjunto de soluções, chamadas de soluções de Pareto. E na etapa

seguinte, escolhe-se uma destas soluções a atual é denominada solução de compromisso.

- A metodologia proposta com a abordagem multi-objetivo foi implementada com sucesso na otimização simultânea das funções mínima perda de potência ativa e mínimo desvio de tensão de um valor pré-especificado.
- Do ponto de vista prático, a solução de um FPO multi-objetivo é mais atrativa, pois os resultados considerando-se as funções objetivo mínima perda e mínimo desvio de tensão, reduzem os ajustes dos controles e nas variações de tensão.
- Demonstrou-se que a solução de um problema multi-objetivo é uma solução de Pareto e, desta forma, será uma solução de compromisso entre as funções objetivo consideradas. Portanto, do ponto de vista econômico, a solução de um FPO multi-objetivo é a solução de compromisso entre a mínima perda de potência ativa e mínimo desvio de tensão de um valor especificado.

O uso de métodos ortogonais na solução do sistema linear na solução do problema de FPO, torna o processo iterativo mais robusto do ponto de vista numérico.

- As características especiais da matriz de coeficientes do sistema linear tornaram viável a decomposição do sistema aumentado em sistemas de tamanho reduzido. Esta decomposição foi possível devido a presença do bloco nulo, na parte inferior esquerda da matriz de coeficientes.
- Utilizou-se o método de Householder, com relativo sucesso, para realizar a fatoração **QR** da matriz Jacobiana transposta, junto com estratégia proposta para solução do sistema de equações lineares descrita no capítulo cinco. Os resultados obtidos confirmaram a superioridade desta técnica, do ponto de vista numérico, em relação à fatoração **LU**.

O desenvolvimento do programa de FPO em linguagem de programação Fortran 90, possibilitou a aquisição de experiência com a aplicação em sistemas de grande porte. Com base nos resultados obtidos conclui-se:

- Os recursos e facilidades do Fortran 90, possibilitaram a implementação do programa de FPO usando-se os conceitos de programação orientada a objetos.
- Este novo estilo de programação, foi explorado com sucesso nas implementações. O tempo total gasto para minimizar as perdas na transmissão em um sistema com 730 barras, com o processo iterativo tendo convergido em 21 iterações, foi de aproximadamente 4.5 segundos.
- A tarefa que requer a maior parcela de tempo computacional num programa de FPO é a resolução do sistema linear, descrito no bloco de número 7 do algoritmo 5.1. Nos testes realizados em sistemas de grande porte, cerca de 99% do tempo eram absorvidos neste cálculo quando a subrotina da Harwell foi utilizada.

7.2 - Recomendações para Futuros Trabalhos

Os resultados desta pesquisa podem ser aprimorados ou servir como ponto de partida para outros futuros trabalhos de pesquisa. Estes principais aspectos são descritos a seguir:

O custo computacional, isto é, o tempo de CPU associado ao uso de transformações ortogonais na estratégia proposta para solução do sistema de equações lineares, pode ser reduzido. Para tanto, um investimento maior deve ser feito no desenvolvimento de uma estrutura especializada na fatoração QR, via Householder. Esta estrutura computacional, deve fazer uso do recursos e facilidades do Fortran 90, junto com os conceitos de programação orientada à objetos.

Outro fator que deve ser investigado é a estratégia de ordenação para preservar a esparsidade no uso de métodos ortogonais. A possibilidade do uso da fatoração com blocos também é recomendada.

Considera-se que a otimização multi-objetivo, para problemas não-lineares, é uma área da programação matemática incipiente porém em pleno desenvolvimento. Com relação ao presente trabalho iniciado, recomenda-se a extensão do desenvolvimento da abordagem multi-objetivo para outras funções objetivo, como por exemplo o mínimo custo de geração e a mínima perda de potência ativa. Além disto, a experiência com a aplicação desta abordagem para um número de funções objetivo maior que dois e sua generalização são temas de pesquisa recomendável.

Apêndice A

Detalhes de Implementação do Fluxo de Potência Ótimo em Linguagem de Programação Fortran 90

Com o objetivo de viabilizar a metodologia estudada no capítulo cinco, foi desenvolvido um programa de computador, em linguagem de programação Fortran 90, para o cálculo do fluxo de potência ótimo. Este programa foi implementado em duas versões: a primeira usa a subrotina da Harwell para resolver o sistema linear descrito pela equação (5.1); a segunda versão faz uso de técnicas de transformações ortogonais, introduzidas no capítulo cinco, para resolver o referido sistema linear. Estes programas foram aplicados na solução de problemas de sistemas elétricos de pequeno, médio e grande porte. Alguns detalhes de implementação serão comentados a seguir.

No que diz respeito a linguagem de programação utilizada nas implementações a escolha recaiu no Fortran. O novo padrão Fortran, conhecido como Fortran 90, é uma linguagem de programação moderna e bastante poderosa [Decyk,1997]. Sua versão mais atual possui novas facilidades, incluindo-se os mais recentes conceitos de Programação Orientada a Objetos (POO) [Pappas,1991; Marshall,1997].

A programação orientada a objetos surgiu como uma alternativa para lidar com os problemas associados ao desenvolvimento, manutenção e atualização de grandes programas. A POO introduziu novos conceitos no ambiente de programação tais como o de *Abstração de dados*, de *Encapsulamento*, de *Polimorfismo* e de *Herança* [Marshall,1997; Decyk,1997; Pappas,1991]. Uma descrição completa do Fortran 90 incluindo os conceitos de programação orientada a objetos é encontrada na referência [Marshall,1997]. A abstração de dados com o uso de estruturas “type” ou tipos derivados é uma das facilidades de POO introduzidas pelo Fortran 90. Usando estes novos conceitos propõe-se uma estrutura individualizada para os principais elementos do sistema elétrico, isto é as barras e os ramos.

O trecho do programa a seguir descreve a implementação dos objetos tipo barra e tipo linha.

```

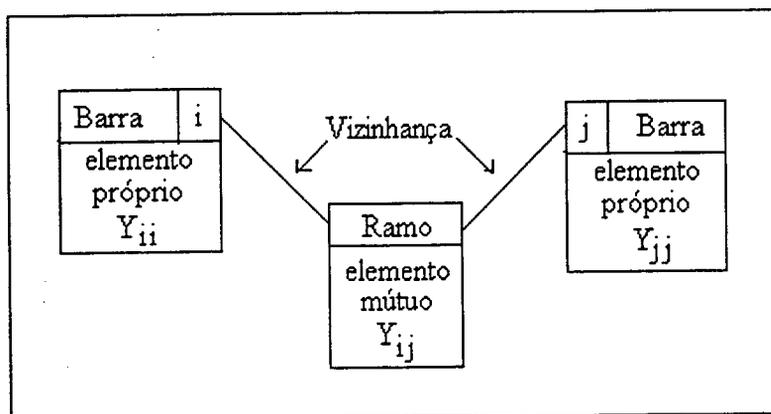
TYPE buz
  integer          :: n          ! numero de seqüência
  integer          :: num        ! numero da barra
  character(len=12) :: nome      ! nome da barra
  integer          :: tipo       ! tipo de barra
  real(8)          :: v          ! tensão de barra
  real(8)          :: vmax       ! tensão máxima de barra
  real(8)          :: vmin       ! tensão mínima de barra
  real(8)          :: ang        ! angulo da tensão
  real(8)          :: pg         ! potência ativa gerada
  real(8)          :: qg         ! potência reativa gerada
  real(8)          :: pd         ! potência ativa demandada
  real(8)          :: qd         ! potência reativa demandada
  real(8)          :: qreat      ! reator shunt
END TYPE buz
TYPE (buz), allocatable :: barra(:)

TYPE transformador
  integer          :: controle
  real             :: tap        ! tap do trafo
  real             :: tmax       ! tap máximo
  real             :: tmin       ! tap mínimo
END TYPE transformador
TYPE ramo
  integer          :: n          ! n. do circuito
  integer          :: circ       ! identificação
  integer          :: o          ! origem
  integer          :: d          ! destino
  integer          :: tipo       ! tipo de elemento
  real(8)          :: r          ! resistência série
  real(8)          :: x          ! reatância série
  real(8)          :: bsh        ! susceptância shunt
  TYPE(transformador) :: trafo   ! tipo trafo
  real             :: flnorm     ! fluxo normal
  real             :: flemer     ! fluxo de emergência
END TYPE ramo
TYPE(ramo), allocatable :: linha(:)

```

A conexão das barras é feita através de ramos, denominação atribuída a elementos da rede tais como linhas de transmissão e transformadores. Assim, cada objeto do tipo barra está conectado a vários objetos do tipo ramo simultaneamente, o que torna necessário o projeto de uma estrutura dinâmica de dados responsável por estas conexões. Na presente implementação, optou-se em atender a este requisito num objeto associado à matriz admitância de barras. A figura C.1 ilustra o mecanismo de conexão dos objetos barra e ramo organizados numa estrutura proposta para a matriz admitância de barras, representada pelo objeto tipo `y_barra`.

Figura A.1: Estrutura do objeto matriz admitância de barras.



Nesta figura, a vizinhança se refere ao conjunto de barras adjacentes à barra considerada. O fragmento de código fonte a seguir descreve a implementação do objeto `y_barra` em suas principais partes.

```

TYPE proprio
  integer          :: grau          ! nu. de vizinhos
  integer, POINTER :: vizinha(:)    ! vizinhos
  real(8)          :: g             ! condutância própria
  real(8)          :: b             ! susceptância própria
END TYPE proprio
TYPE mutuo
  integer          :: lin          ! indicador linha
  integer          :: col          ! indicador coluna
  real(8)          :: g             ! condutância mútua
  real(8)          :: b             ! susceptância mútua
END TYPE mutuo
TYPE(proprio), allocatable :: yp(:)
TYPE(mutuo), allocatable  :: ym(:)

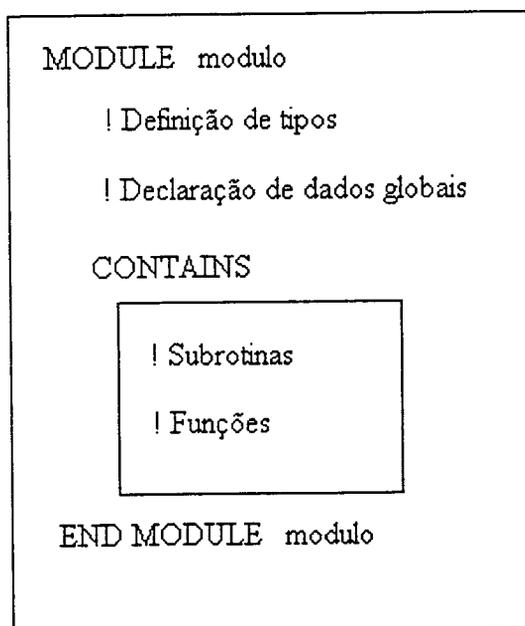
```

Ponteiros e arranjos dinâmicos são duas facilidades do Fortran 90. Os ponteiros podem ser associados a tipos definidos pelo usuário, para criar estruturas de dados dinâmicas como as listas encadeadas. A criação de listas ou arranjos alocados dinamicamente na memória do computador é uma das evoluções introduzidas no Fortran 90. O uso destes recursos permite que o programa se adapte de forma adequada à dimensão do problema. Assim, a quantidade de memória alocada é aquela realmente necessária ao armazenamento dos dados e à execução do programa. Desta forma, evita-se o dimensionamento prévio de vetores de dimensão elevada, os quais ficam sujeitos ao

superdimensionamento, no caso de sistemas de pequeno porte, ou impõe limitações aos recursos do programa.

Na programação orientada a objetos, os dados passam a ser os elementos ativos, uma vez que possuem as subrotinas que os manipulam contidas em sua própria estrutura. Esta filosofia de agrupamento em uma estrutura única para os dados e subrotinas denomina-se *Encapsulamento*. No Fortran 90, a Encapsulamento é realizados em “modules” que são pacotes ou módulos, definidos pela linguagem, que podem conter declaração de variáveis, tipos definidos pelo programador, subrotinas e funções genéricas. A figura a seguir mostra o diagrama esquemático de um módulo.

Figura A.2: Diagrama esquemático de um módulo em Fortran



Os módulos são acessíveis em qualquer parte do programa, caso seja desejado, através do comando USE. O trecho do programa a seguir, mostra a Encapsulamento do tipo definido para a matriz Hessiana.

```

MODULE Hessiana
  TYPE proprio
    real(8)      :: h1      ! elemento diagonal_h1
    real(8)      :: h2      ! elemento diagonal_h2
    real(8)      :: h3      ! elemento diagonal_h3
    real(8)      :: h4      ! elemento diagonal_h4
  END TYPE proprio

```

```

TYPE(proprio),ALLOCATABLE      :: hp(:)
!
TYPE mutuo
    integer      :: lin      ! indice de linha
    integer      :: col      ! índice de coluna
    real(8)      :: h1       ! elemento h1
    real(8)      :: h2       ! elemento h2
    real(8)      :: h3       ! elemento h3
    real(8)      :: h4       ! elemento h4
END TYPE mutuo
!
TYPE(mutuo),ALLOCATABLE      :: hm(:)
!
END MODULE Hessiana

```

Neste exemplo, os elementos da diagonal, da matriz Hessiana são armazenados no tipo definido próprio e os elementos fora da diagonal no tipo definido mútuo.

O Polimorfismo representa a capacidade de vários objetos diferentes possuírem métodos com o mesmo nome, geralmente, associados a uma tarefa semelhante. Isto permite uma padronização das mensagens com a mesma finalidade para objetos distintos [Pappas,1991]. A Herança é a capacidade do objeto herdar as características de um objeto antecessor, isto é, que lhe deu origem. A herança torna possível a especialização de objetos descendentes com a inclusão de novas características ao objeto herdeiro [Pappas,1991]. Estes conceitos, apesar de pouco usados durante as implementações, são citados aqui visando ilustrar a terminologia da POO.

É importante ressaltar que o Fortran 90 é compatível com o Fortran 77. Assim, a evolução para este novo estilo de programação pode ser realizada de forma mais suave, em relação a trabalhos anteriormente desenvolvidos [Vanti,1998]. Um exemplo disto foi o uso da subrotina MA28 da Harwell, escrita em Fortran 77, numa das versões do programa escrito em Fortran 90.

Apêndice B

Dados do Sistema Sul Reduzido a 34 Barras

CEPEL - CENTRO DE PESQUISAS DE ENERGIA ELETRICA - PROGRAMA DE ANALISE DE REDES - V03-05/87 Sistema Sul - 34 barras - 5 geradores e 6 transformadores (sistema reduzido)

DADOS DE BARRA AC

NUM.	BARRA NOME	TP	AR	BARRA CONT.	TENSAO MOD	ANG	GT	GER MW ESPEC	MIN	GER MVAR ESPEC	MAX	CARGA MW	MVAR	SHUNT MVAR
1047	SALTO OSORIO	1	1	0	1.035	.0	0	600.0	-9999.0	.0	99999.0	242.0	15.0	.0
1069	XANXERE	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	322.5	85.7	.0
1041	PASSO FUNDO	1	1	0	1.020	.0	0	180.0	-9999.0	.0	99999.0	284.1	37.9	.0
962	FARROUPILHA	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	181.7	69.6	.0
1057	SIDEROPOLIS	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	131.0	63.3	.0
1010	J. LACERDA B	1	1	0	1.020	.0	0	110.0	-9999.0	.0	99999.0	.0	.0	.0
939	BLUMENAU-230	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	333.1	165.0	.0
1015	JOINVILLE	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	237.0	99.6	.0
960	CURITIBA-230	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	408.3	128.8	.0
829	PONTA GROSSA	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	124.0	-6.0	.0
934	AREIA-230	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
1210	GRAVATAI-230	0	1	1	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	27.0	97.0	.0
1034	PALHOCA-230	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	91.5	49.1	.0
884	FIGUEIRA-230	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	99.7	-2.6	.0
834	S.M. SUL -230	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	7.8	2.6	.0
943	CANOINHAS230	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	44.9	32.9	.0
1029	LONDRINA-230	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	194.3	20.5	.0
878	APUCARANA230	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	97.2	20.9	.0
868	MARINGA -230	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	105.2	31.5	.0
954	C.MOURAO-230	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	77.0	12.0	.0
1050	P. BRANCO-230	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	36.0	1.8	.0
1228	N. PRATA -230	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
1006	J. LACERDA-A	1	1	0	1.030	.0	0	50.0	-9999.0	.0	99999.0	197.6	53.1	.0
999	IVAIPORA	2	1	0	1.035	.0	0	.0	-9999.0	.0	99999.0	.0	.0	-200.0
1060	STO. SANTIAGO	1	1	0	1.035	.0	0	640.0	-9999.0	.0	99999.0	.0	.0	.0
933	AREIA-525	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
959	CURITIBA-525	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	-300.0
956	CAMPOS NOVOS	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	-100.0
976	GRAVATAI-525	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	-150.0
938	BLUMENAU-525	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0
824	GBMUNHOS	1	1	0	1.035	.0	0	800.0	-9999.0	.0	99999.0	.0	.0	.0
856	SEGREDO	1	1	0	1.030	.0	0	500.0	-9999.0	.0	99999.0	.0	.0	.0
995	ITA - 525	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	-300.0
1028	LONDRINA-525	0	1	0	1.000	.0	0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0

DADOS DE CIRCUITO AC

DA BARRA	P/ BARRA	CIRC P	RESIST (%)	REATAN (%)	SUSCEP (MVAR)	ESPEC	T A P MIN	MAX	ANG DEFAS	BARRA CONT.	CAPAC (MVA)
934	1047	0 D	3.04	15.74	27.120	.000	.000	.000	.0	0	132.0
934	1047	0 D	3.04	15.72	27.090	.000	.000	.000	.0	0	132.0
1047	1069	0 D	3.07	15.89	27.370	.000	.000	.000	.0	0	132.0
1069	1041	0 D	1.50	7.78	13.400	.000	.000	.000	.0	0	132.0
1069	1041	0 D	1.50	7.78	13.380	.000	.000	.000	.0	0	132.0
1041	962	0 D	4.62	23.48	41.370	.000	.000	.000	.0	0	132.0
962	1057	0 D	3.85	19.94	34.320	.000	.000	.000	.0	0	132.0
962	1210	0 D	1.65	8.45	14.510	.000	.000	.000	.0	0	132.0
962	1210	0 D	1.65	8.45	14.510	.000	.000	.000	.0	0	132.0
1057	1010	0 D	.90	4.64	7.980	.000	.000	.000	.0	0	132.0
1057	1010	0 D	.96	4.84	8.350	.000	.000	.000	.0	0	132.0
1010	939	0 D	3.74	19.36	32.280	.000	.000	.000	.0	0	132.0
1010	1006	0 D	.01	.70	1.300	.000	.000	.000	.0	0	132.0
939	1015	0 D	1.27	6.57	11.210	.000	.000	.000	.0	0	132.0
939	1015	0 D	1.28	6.57	11.520	.000	.000	.000	.0	0	132.0
939	1034	0 D	2.53	13.13	22.550	.000	.000	.000	.0	0	132.0
1015	960	0 D	1.89	9.78	16.840	.000	.000	.000	.0	0	132.0
1015	960	0 D	1.90	9.70	17.030	.000	.000	.000	.0	0	132.0
960	834	0 D	2.21	11.48	19.690	.000	.000	.000	.0	0	132.0
834	943	0 D	.91	4.71	8.080	.000	.000	.000	.0	0	132.0
834	934	0 D	2.46	12.65	21.710	.000	.000	.000	.0	0	132.0
829	934	0 D	3.46	18.07	30.150	.000	.000	.000	.0	0	318.0
1047	1050	0 D	1.63	8.34	14.640	.000	.000	.000	.0	0	132.0
1069	1050	0 D	1.51	7.73	13.750	.000	.000	.000	.0	0	132.0
1041	1228	0 D	2.30	11.88	20.470	.000	.000	.000	.0	0	132.0
1228	962	0 D	2.30	11.88	20.470	.000	.000	.000	.0	0	132.0
1034	1006	0 D	2.28	11.83	20.310	.000	.000	.000	.0	0	132.0
1047	954	0 D	3.43	17.78	30.550	.000	.000	.000	.0	0	132.0
1047	954	0 D	3.43	17.78	30.610	.000	.000	.000	.0	0	132.0
868	954	0 D	1.51	7.84	13.490	.000	.000	.000	.0	0	132.0
1029	878	0 D	.34	4.07	13.160	.000	.000	.000	.0	0	132.0
878	954	0 D	2.17	11.23	19.330	.000	.000	.000	.0	0	132.0
934	933	0 D	.03	1.21	.000	.991	.000	.000	.0	0	600.0
939	938	0 D	.03	1.15	.000	1.152	.000	.000	.0	0	600.0
1029	1028	0 D	.04	1.21	.000	.949	.000	.000	.0	0	672.0
933	999	0 D	.16	2.01	245.800	.000	.000	.000	.0	0	1100.0
999	1060	0 D	.15	1.94	236.970	.000	.000	.000	.0	0	1100.0
1060	856	0 D	.05	.70	839.200	.000	.000	.000	.0	0	1100.0
933	959	0 D	.22	2.73	334.000	.000	.000	.000	.0	0	1100.0
933	959	0 D	.24	2.98	363.000	.000	.000	.000	.0	0	1100.0
960	959	0 D	.03	1.16	.000	1.065	.000	.000	.0	0	600.0
960	959	0 D	.03	1.17	.000	1.065	.000	.000	.0	0	600.0
933	956	0 D	.16	2.05	250.200	.000	.000	.000	.0	0	1100.0
956	976	0 D	.25	3.09	377.400	.000	.000	.000	.0	0	1100.0
1210	976	0 D	.03	1.22	.000	1.036	.000	.000	.0	0	600.0
1210	976	0 D	.04	1.14	.000	1.036	.000	.000	.0	0	600.0
1210	976	0 D	.04	1.22	.000	1.036	.000	.000	.0	0	600.0
959	938	0 D	.13	1.60	195.900	.000	.000	.000	.0	0	1100.0
933	824	0 D	.01	.13	15.160	.000	.000	.000	.0	0	1100.0
933	824	0 D	.01	.12	15.430	.000	.000	.000	.0	0	1100.0
933	856	0 D	.05	.70	83.920	.000	.000	.000	.0	0	1100.0
1060	995	0 D	.17	2.17	265.160	.000	.000	.000	.0	0	1100.0
976	995	0 D	.32	3.98	485.720	.000	.000	.000	.0	0	1100.0
999	1028	0 D	.11	1.39	170.340	.000	.000	.000	.0	0	1100.0
868	878	0 D	1.10	5.68	9.790	.000	.000	.000	.0	0	1100.0
829	884	0 D	2.59	13.48	22.610	.000	.000	.000	.0	0	1100.0
878	884	0 D	2.18	11.35	19.050	.000	.000	.000	.0	0	1100.0

									954 C.MOURAO-230	0	53.8	-7.0
									1050 P.BRANCO-230	0	186.3	10.2
									1069 XANXERE	0	169.6	7.4
1050	0	1.002	.0	.0	36.0	.0	.0					
P.BRANCO-230		-17.1	.0	.0	1.8	.0	.0					
									1047 SALTO OSORIO	0	-181.0	1.9
									1069 XANXERE	0	145.0	-3.7
1057	0	1.010	.0	.0	131.0	.0	.0					
SIDEROPOLIS		-26.7	.0	.0	63.3	.0	.0					
									962 FARROUPILHA	0	-100.8	-17.8
									1010 J.LACERDA B	0	-15.4	-23.1
									1010 J.LACERDA B	0	-14.8	-22.4
1060	1	1.035	640.0	.0	.0	.0	.0					
STO.SANTIAGO		1.7	-819.0	.0	.0	.0	.0					
									856 SEGREDO	0	208.0	-389.1
									995 ITA - 525	0	268.3	-292.8
									999 IVAIPORA	0	163.7	-137.1
1069	0	.984	.0	.0	322.5	.0	.0					
XANXERE		-23.6	.0	.0	85.7	.0	.0					
									1041 PASSO FUNDO	0	-9.7	-50.1
									1041 PASSO FUNDO	0	-9.7	-50.1
									1047 SALTO OSORIO	0	-161.2	8.1
									1050 P.BRANCO-230	0	-141.8	6.4
1210	0	1.124	.0	.0	27.0	.0	.0					
GRAVATAI-230		-7.7	.0	.0	97.0	.0	.0					
									962 FARROUPILHA	0	213.2	39.4
									962 FARROUPILHA	0	213.2	39.4
									976 GRAVATAI-525	0	-147.4	-58.0 1.036
									976 GRAVATAI-525	0	-158.2	-60.5 1.036
									976 GRAVATAI-525	0	-147.7	-57.3 1.036
1228	0	1.054	.0	.0	.0	.0	.0					
N.PRATA -230		-19.8	.0	.0	.0	.0	.0					
									962 FARROUPILHA	0	-63.0	-8.8
									1041 PASSO FUNDO	0	63.0	8.8

TOTAIS DA AREA 1

GERACAO	INJ EQV	CARGA	LINK DC	SHUNT	EXPORT	IMPORT	PERDAS
MW/ MVAR	MW/ MVAR	MW/ MVAR	MW/ MVAR	MVAR/ EQUIV	MW/ MVAR	MW/ MVAR	MW/ MVAR
3342.4	.0	3241.9	.0	-1135.7	.0	.0	100.5
-1902.3	.0	977.7	.0	.0	.0	.0	-4015.7

Apêndice C

Dados do Sistema de Seis Barras de Ward e Hale

Figura C.1: Diagrama Unifilar do sistema de Ward e Hale

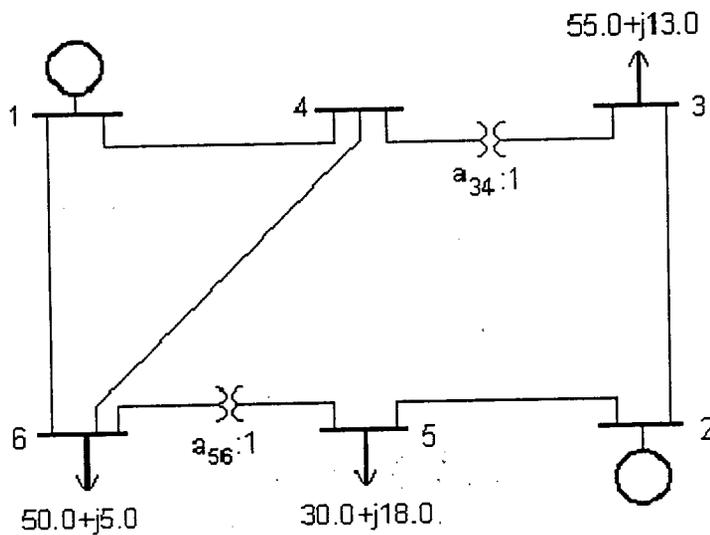


Tabela C.1: Dados de barra do sistema de seis barras de Ward e Hale

número da barra	nome da barra	tensão (pu)	ângulo (rad)	potência ativa gerada	potência reativa gerada	potência ativa demandada	Potência reativa demandada
1	barra-1	1.06	0.00	∞	∞		
2	barra-2	1.06	0.00	50.0	∞		
3	barra-3	1.00	0.00			55.0	13.0
4	barra-4	1.00	0.00			00.0	00.0
5	barra-5	1.00	0.00			30.0	18.0
6	barra-6	1.00	0.00			50.0	5.0

Tabela C.2: Dados da rede elétrica do sistema de seis barras de Ward e Hale

barra origem	barra destino	resistência (%)	reatância (%)	susceptância (%)	tap
1	4	8.00	37.00	0.00	
1	6	12.30	51.80	0.00	
2	3	72.30	105.00	0.00	
2	5	28.20	64.00	0.00	
3	4	0.00	13.30	0.00	1.000
4	6	9.70	40.70	0.00	
5	6	0.00	30.00	0.00	1.000

Referências Bibliográficas

- [Adbul-Rahman,1993] - Adbul-Rahman, K. H. and S. M. Shahidehpour. *A Fuzzy – Based Optimal Reactive Control*. IEEE, Transactions on Power Systems, Vol. 8, No. 2, p. 662-670, maio, 1993.
- [Adbul-Rahman,1993] - Adbul-Rahman, K. H. and S. M. Shahidehpour. *Aplication of Fuzzy sets to Optimal Reactive Planning with security Constrains*. IEEE, Transactions on Power Systems, Vol. 9, maio, 1994.
- [Almeida,1994] – Almeida, Katia C. *A General Parametric Optimal Power Flow*. Ph.D. Thesis, McGill University, Montreal, Canada, 1994.
- [Alsac,1974] – O. Alsac and B. Stot. *Optimal load flow with steady-state security*. IEEE, Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 93, p. 745-751, maio/junho, 1974.
- [Assim,1991] - Asim Roy, Jyrki Wallenius. *Nonlinear and Unconstrained Multiple-Objective Optimization: Algorithm, Computation and Application*. Naval Research Logistics, Vol. 38, p. 623-635, 1991.
- [Bayer,1989] – Bayer, D. and J. C. Lagarias. *The nonlinear geometry of linear programming I: Affine and projective trajectories*. Transactions of the American Mathematical Society, 314, p. 527-581, 1989.
- [Barboza,1997] – Luciano V. Barboza. *Análise do Máximo Carregamento de Sistemas de Potência via Método de Pontos Interiores*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, CTC/DEE, 1997.
- [Bazaraa,1993] - M. Bazaraa, H. Sherali and C. Shetty. *NONLINEAR PROGRAMMING Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons, Inc. 1993.
- [Brinch,1992] - Brinch Hansen, P. *Householder Reduction of Linear Equations*. ACM Computing Surveys, Vol. 24, No. 2, p. 185-194. Junho, 1992.
- [Bunch,1971] – Bunch J.R. and Parlett B.N. *Some stable methods for calculating inertia and solving symmetric linear equations*. Mathematics of Computations, 31, p. 639-655, 1971.

- [Burchett,1982] - Burchett, R. C; H. H. Happ D. R. Vierath, and K. A. Wirgau. *Developments in Optimal Power Flow*. IEEE, Power Apparatus and Systems, p. 406-413, Fevereiro de 1982.
- [Burchett,1984] - Burchett, R. C; Happ, H. H. and D. R. Vierath. *Quadratically Convergent Optimal Power Flow*. IEEE, Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 103, no.11, p. 3267-3275, novembro, 1984.
- [Byrd,1996] - Byrd, R. H; Gilbert, J. C. and Nocedal, J. *A trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming*. Technical Report, OTC-96, INRIA Rocquencourt, Maio, 1996.
- [Carpentier,1962] – Carpentier, J. *Contribution a lttude du Dispatching tconomique*. Bulletin de la Societé Française des Eletriciens. Ser. 8, Vol. 3, p. 431-447, 1962.
- [Carpentier,1973] - Carpentier, J. *Differential Injections Method: A General Method for Secure and Optimal Power Flow*. Anais do PICA Conference, June 1973.
- [Carvalho,1988] - Carvalho, Ricardo J. O. *Otimização da Potência Ativa e Reativa em Sistemas de Potência*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, 1988.
- [Carvalho,1989] – Carvalho, Ricardo J. O. e F. R. Frazão de Lima. *Optimum Real and Reactive Power Flow*. In: II Simpósio de Especialistas em Planejamento da Operação e Expansão Elétrica, Anais, (Rio de Janeiro), SP-39, p. 1-8, 1989.
- [Carvalho,1995] - Ricardo J. O. Carvalho e F. R. Frazão de Lima. *Despacho Econômico com Perda Calculada através da Matriz Jacobiana*. In: XI Congresso Chileno de Engenharia Elétrica, Anais, p. 192-195, (Punta Arenas – Chile), 1995.
- [Carvalho,1996] - Carvalho, Ricardo J. O; Roberto Salgado e J. P. S. Gouvea. *Experiencia com a Aplicação do Método de Pontos Interiores ao Problema de Fluxo de Potência Ótimo*. In: 3- Encontro Luso-Afro-Brasileiro de Planejamento e Exploração de Redes de Energia, Anais, p. 23-30, (Porto, Portugal), outubro, 1996.
- [Carvalho,1997] - Carvalho, Ricardo J. O. e Roberto Salgado. *Fluxo de Potência Ótimo Multi-Objetivo: Abordagem via Pontos Interiores*. In: XII Congresso Chileno de Engenharia Elétrica, Anais, p. 76-81, (Temuco – Chile), 1997.

[Castronuovo,1997] – Castronuovo Edgardo D. *Solução do Fluxo de Potência Ótimo via Método de Pontos Interiores, com Aplicação de Computação de Alto Desempenho*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, CTC/DEE, 1997.

[Charalambous,1989] - Charalambous, C. *A New Approach to Multicriterion Optimization Problem and Its Application to the Design of 1-D Digital Filters*. IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 36, No. 6, p. 773-784, Junho, 1989.

[Cohon,1978] - Cohon, Jared L. *Multiobjective Programming and Planning*. Academic Press, New York, 1978.

[Das,1996] - Das, I. *Normal-Boundary Intersection: A New Method for Generating Pareto Optimal Points in Nonlinear Multicriteria Optimization Problems*. ICASE-NASA Tech. Report, 96-62, julho, 1996.

[Das,1997] - I. Das. *Nonlinear Multicriteria Optimization and Robust Optimality*. Ph.D. Thesis, Rice University, Houston, Texas, 1997.

[Decyk,1997] - Decyk, V. K; C. D. Norton and B. K. Szymanski. *Introduction to Object-Oriented Concepts using Fortran-90*. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology.

[Delson,1992] – Delson, J. and S. M. Shahidehpour. *Linear Programming applications to power systems economics, planning and operations*. IEEE, Transactions on Power Systems, Vol. 7, no. 3, agosto, 1992.

[Dommel,1968] - Dommel, H. W. and Tinney, W. F. *Optimal Power Flow*. IEEE, Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. 87, No.10, p. 1866-1876,outubro, 1968.

[Dopazo,1967] - Dopazo, J.F; O. A. Klitin, G. W. Stagg and M. Watson. *An Optimization Technique For Real End Reactive Power Allocation*. IEEE, Proc. Vol-55, novembro, 1967.

[Duff,1977] - Duff, I. S. MA28 - *A set of Fortran subroutines for sparse unsymmetric linear equations*. Report R. 8730, AERE, Harwell, England, 1977.

- [Duff,1982] – Duff, I. S. and J. K. Reid. MA27 - *A set of Fortran subroutines for solving sparse symmetric sets of linear equations*. Report R. 10533, AERE, Harwell, England, 1982.
- [El-Bakry,1992] - El-Bakry, A; R. Tapia, Y. Zhang and T. Tsuchiya. *On the Formulation and Theory of the Newton Interior-Point Method for Nonlinear Programming*. Report TR92-40, Rice University, Houston, Texas, 1992.
- [Fiacco,1990] - Fiacco, A. V. and G. McCormick. *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization techniques*. Reprint: SAIM Classics in Applied Mathematics, 1990.
- [Fourer,1993] – Fourer R. and Mehrotra S. *Solving symmetric indefinite in an interior-point method for linear programming*. *Mathematical Programming* 62, p. 15-39, 1993.
- [Friedlander1994] – Friedlander, A. *Elementos de Programação Não-Linear*. Editora UNICAMP, 1994.
- [Frisch,1955] - Frisch, K. R. *The logarithmic potential method of convex programming*. Technical Report, University Institute of Economics, Oslo, Norway, 1955.
- [Galiana,1983] – Galiana F. D. e outros. *Optimal Power System Dispatch Through the Continuation Method: Variation of Functional Inequality Limits*. Proc. of IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems, p. 1192-1197, maio, 1983.
- [George,1983] - George, A. and M. T. Heath. *A comparison of some methods for solving sparse linear least squares problems*. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 4, p. 177-187, 1983
- [Gill,1995] - Gill, P. E; W. Murray and M. H. Wright. *Practical Optimization*. Academic Press, 1995.
- [Gill,1991] - Gill, P. E; W. Murray D. B. Ponceleón and M. Saunders. *Solving reduced KKT systems in barrier methods for linear and quadratic programming*. Technical Report SOL 91-7, Systems Optimization Laboratory, Stanford University, 1991.
- [Golub,1965] – Golub, G. H. *Numerical Methods for Solving Linear Least Squares Problems*. *Numer. Math*; Vol. 7, p. 206-216, 1965.
- [Golub,1992] – Golub, G. H. and Charles F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins, Second Edition, 1993.

- [Gonzaga,1989] - Gonzaga, C. *Algoritmos de Pontos Interiores para programação linear*. 17th Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1989.
- [Gonzaga,1991] - Gonzaga, C. *Large steps path-following methods for linear programming, Part II: Potential reduction method*. SIAM Journal on Optimization, 1, p. 280-292, 1991.
- [Gonzaga,1992] - Gonzaga, C. *Path-following methods for linear programming*. SIAM Review 34, p. 167-224, 1992.
- [Granville,1994] - Granville, S. *Optimal Reactive Dispatch Through Interior Point Methods*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 9, p. 136-146, Fevereiro, 1994.
- [Granville,1994] - Granville, S; Mello J. C. O. and Mello A. C. G. Application of interior point methods to power flow unsolvability. IEEE, Transactions on Power Systems, Vol. 11, no. 2, p. 1096-1103, Maio, 1994.
- [Haimes,1973] - Haimes Y. *Integrated system Identification and Optimization*. In "Control and Dynamics Systems: Advances in Theory and Applications. (C. Leondes, ed), Vol. 9 , 435-518, Academic Press, New York, 1973.
- [Happ,1977] - Happ, H. H. *Optimal Power Dispatch*. IEEE, Transactions on Power Apparatus and Systems. Vol-96, p. 820-830, maio/junho 1977.
- [Heath,1984] - Heath, Michael T; R. J. Plemmons and R. C. Ward. *Sparse Orthogonal Schemes for Structural Optimization using the Force Method*. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol 5, No 3, p. 514-532, Setembro, 1984.
- [Heath,1978] - Heath, Michael T. *Numerical Algorithms for Nonlinearly Constrained Optimization*. Ph.D. Thesis, University of Santa Barbara, 1978.
- [Heath,1997] - Heath, Michael T. *Scientific Computing: A Introductory Survey* . McGraw-Hill, 1997.
- [Hestenes,1973] - Hestenes, Magnus R. *Iterative Methods for Solving Linear Equation* . Journal of Optimization Theory and Application 11, 1973.
- [Householder,1958] - Householder, A. S. *Unitary Triangularization of a nonsymmetric Matrix*. J. ACM. 5, p. 339-342, 1958.

[Jansen,1995] - Jansen, B; C. Roos and T. Terlaky. *A short survey on ten years interior point methods*. Report 95-45, Delft University of Technology, 1995.

[Jiguan,1976] - Jiguan G. Lin. *Multiple-Objective Problems: Pareto-Optimal Solutions by Method of Proper Equality Constraints*. IEEE, Transactions on Automatic Control, vol. 21, p. 641-650, outubro, 1976.

[Karmarkar,1984] - Karmarkar, N. *A new polynomial time algorithm for linear programming*. *Combinatorica* 4, p. 373-395, 1984.

[Karmarkar,1989] - Karmarkar, N. and Ramakrishnan G. *Implementation and computational results of the Karmarkar algorithm for linear programming, using an iterative method for computing projections*. Technical Report, AT&T Bell Labs., 1989.

[Kojima,1987] - Kojima, M; S. Mizuno and A. Yoshise. *A polynomial-time algorithm for a class of linear complementarity problems*. Report B-193, Department of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology, Japan, 1987.

[Kojima,1994] - Kojima, M; T. Nona and A. Yoshise. *Global convergence in infeasible interior-point algorithms*. *Mathematical Programming* 65, p. 43-72, 1994.

[Lawson,1974] - Lawson, C. L. and R. J. Hanson. *Solving Least Squares Problems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.

[Lee,1985] - K. Y. Lee, Y. M. Park and J. L. Ortiz. *A United Approach to Optimal Real and Reactive Power Dispatch*. IEEE, Transactions on Power Apparatus and Systems. Vol-104, maio, 1985.

[Lightner,1981] - Lightner, M. R. and S. W. Director. *Multiple criterion optimization for the design of electronics circuits*. IEEE, Transactions on Circuits and Systems, Vol. 28, p. 169-179, março, 1981.

[Lin,1973] - Lin, J. G. et alii. *On relatively optimal controls of dynamic systems with vector performance indices*. In: 7th. Princeton Conf. Inform. Sci. Syst., p. 579-584, março, 1973.

[Lipschutz,1972] - Lipschutz, S. *Álgebra Linear*. (Edição Revisada), Coleção Schaum, McGraw-Hill.

- [Luenberger,1984] – Luenberger, D. G. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [Lustig,1991] – Lustig I. J, Marsten R. E. and Shanno D. *Computational experience with a primal-dual interior point method for linear programming*. Linear Algebra and its Applications, v. 152, p. 191-222, 1991.
- [Machado,1992] - Machado, L. Jairo B. *Análise de Segurança em Tempo Real dos Sistemas de Potência*. Apostila do Curso de Pós-Graduação, UFSC, 1992.
- [Mamandur,1981] - Mamandur, K. R. C. and R. O. Chenowete. *Optimal Control of Reactive Power Flow for Improvements in Voltage Profiles and for Real Power Loss Minimization*. IEEE, Transactions on Power Apparatus and Systems. Vol.- 100, p. 3185-3194, Julho, 1981.
- [Maria,1987] – Maria, G. A. and J. A. Findlay. *A Newton Optimal Power Flow for the Ontario Hydro EMS*. IEEE, Transactions on Power Systems. Vol.- 2, no. 3, p. 576-584, agosto, 1987.
- [Marshal,1997] - Marshal, A. C; J.S. Morgan and J.L. Schonfelder. *Fortran 90 Course Notes*. The University of Liverpool, 1997.
- [Megido,1989] - Megido, N. *Pathways to the optimal set in linear programming*. In: *Progress in Mathematical Programming*, p. 131-158, Springer Verlag, New York, 1989.
- [Mehrotra,1989] – Mehrotra S. *Implementations of affine scaling methods: Approximate solutions of systems of linear equations using preconditioned conjugate gradient methods*, Technical Report, 89-04, Northwestern University, IL, 1989.
- [Miranda,1992] – Miranda, V. e J. T. Saraiva. *Fuzzy Modeling of Power System Optimal Load Flow*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 7, No. 2, p. 843-849, maio, 1992.
- [Monteiro,1989a] – Monteiro, R. and I. Adler. *Interior path following primal-dual algorithm; Part I: Linear programming*. Mathematical Programming 44, p. 27-41, 1989.
- [Monteiro,1989b] – Monteiro, R. and I. Adler. *Interior path following primal-dual algorithm; Part II: Convex Quadratic programming*. Mathematical Programming 44, p. 43-66, 1989.
- [Monteiro,1997] - Monteiro, R. and J. Pang. *A Potential Reduction Newton Method for*

Constrained Equations. School of Industrial and Systems Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, 1997.

[Monticelli,1983] - Monticelli, A. *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*. Editora Edgard Blücher, 1983.

[Monticelli,1992] - Monticelli, A. and Wen-Hsiung E.L. *Adaptive Movement Penalty Method for the Newton Optimal Power*. IEEE, Transactions on Power Systems. Vol. 7, p. 334-342, 1992.

[Osyczka,1984] - Osyczka, A. *Multicriterion Optimization in Engineering with Fortran Programs*. Ellis Horwood Limited, 1984.

[Papalexopoulos,1996] - Papalexopoulos, A.D. *Challenges to On-line OPF Implementation*. Tutorial Course, IEEE/PES Winter Meeting, p. 36-51, Baltimore, 1996.

[Pappas,1991] - Chris H. Pappas and William H. Murray. *Turbo C++ Completo e Total*. Makron Books, Editora McGraw-Hill, 1991.

[Peschon,1968] - Peschon, J; Piercy, D. S. and Tinney, W. *Optimum Control of Reactive Power Flow*. IEEE, Transactions on Power Apparatus and Systems. Vol-87, p. 1687-1695, 1968.

[Petar,1996] - Petar Ristanovic. *Successive Linear Programming Based OPF Solution*. Tutorial Course, IEEE/PES Winter Meeting, Baltimore, p. 1-9,1996

[Potra,1996] - Potra, F. A. *An infeasible interior-point predictor-corrector algorithm for linear programming*. SIAM Journal on Optimization, 1996.

[Rosen,1960] - Rosen, J. B. *The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming*. SIAM, Applied Mathematics, 8, p. 181-217, 1960.

[Salgado,1989] - Salgado, R. *Optimal Load Flow Solutions Using the Gradient Projection Method*. Ph.D. Thesis, University of Manchester, Institute of Science and Technology, 1989.

[Sasson,1974] - Sasson A M. and Merrill H. M. *Some Application of Optimization Techniques to Power Systems Problems*. Proc. IEEE, Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol-62, n-7, 1974.

- [Shahidehpour,1996] – Shahidehpour, S.M. and V.C. Ramesh. *Nonlinear Programming Algorithms and Decomposition Strategies for OPF*. Tutorial Course, IEEE/PES Winter Meeting, Baltimore, p. 10-25, 1996.
- [Shoults,1982] - R. R. Shoults and D. T. Sun. *Optimal Power Flow Based Upon P-Q Decomposition*. IEEE, Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol-101, No. 2, p. 397-413, Fevereiro, 1982.
- [Simões-Costa,1980] – Simões Costa, A. J. A. and V. H. Quintana. *A Robust Numerical Technique for Power System State Estimation*. IEEE PES Summer Meeting, Minneapolis, Julho, 1980.
- [Simões-Costa,1981] – Simões Costa, A. J. A. and V. H. Quintana. *An Orthogonal Row Processing Algorithm for Power Sequential State Estimator*. IEEE, Transactions on Power Apparatus and Systems, 100(8), p. 3791-3800, Agosto, 1981.
- [Sonnevend,1986] - Sonnevend, C. *An 'analytic cente' for polyedrons and new classes of global algorithms for liner (smooth, convex) programming*. Proceedings of the 12th IFIP in Budapest, Hungary, vol 84, p. 866-876, Springer Verlag, Berlin, Germany, 1986.
- [Stott,1987] - Stott, B. Alsac, O. and Monticelli. A. *Security Analysis and Optimization*. IEEE, Proceedings, Vol. 75, no. 12, december, 1987.
- [Stott,1978] – Stott, B. and Hobson, E. *Power System Security Control Calculation Using Linear Programming*. IEEE, Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 97, p.1713-1731, setembro/outubro, 1978.
- [Stott,1979] – Stott, B. and Marinho, J.L. *Linear Programming for Power-System Network Security Application*. IEEE, Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 98, maio/junho, 1979.
- [Sun,1984] - D. Sun, B. Ashey, B. Brewer A. Hughes and W. F. Tinney. *Optimal Power Flow by Newton Approach*. IEEE, Transactions on Power Systems, vol. 103, No. 10, p. 2864-2875, outubro, 1984.
- [Talukdar,1982] – Talukdar, S. N and Giras, T. C. *A fast and Robust Variable Metric Method for Optimal Power Flow*. IEEE, Transactions on Power Systems, vol. 101, No. 2, p. 415-420, fevereiro, 1982.

- [Tanabe,1988] - K. Tanabe. *Centere Newton Method for Mathematical Programming*. Institute of Statistical Mathematics, Minatoku, Tokyo, Japan, 1988.
- [Teixeira,1987] - Teixeira, M.J; M. Morozowski, N. Lambert, L.C. Lima e P.A. Machado. *Uma nova geração de Centros de Controle de Energia*. 8- CBA, (Belém –PA), p. 397-403, 1987.
- [Todd,1995] - Todd, M. *Potential-Reduction Methods in Mathematical Programming*. School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, Ithaca, New York, 1995.
- [Tomsovic,1992] – Tomsovic, K. *A Fuzzy Linear Programming Approach to the Reactive Power/Voltage Control Problem*. IEEE, Transactions on Power Systems, Vol.7, Fevereiro, 1992.
- [Torres,1998] – Torres, G. L. and Quintana, V. H. *An Interior-Point Method for Nonlinear Optimal Power Flow using Voltage Rectangular Coordinates*. IEEE, Transactions on Power Systems, Vol. 13, no. 4, Novembro, 1998.
- [Trefethen,1997] – Trefethen, Lloyd N. and David Bau, *Numerical Linear Algebra*, SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.
- [Turner,1991] - Turner K. *Computing Projections for the Karmarkar Algorithm*. Linear Algebra and its Applications, v. 152, p. 141-154, 1991.
- [Vanderbei,1993] – Vanderbei, R. *Symmetric Quasi-Definite Matrices*. Report, DIMACS 93-72, Rutger University, 1993.
- [Vanderbei,1997] – Vanderbei, R. and D. Shanno. *A interior point for non convex nonlinear programming*. Report SOR-97-21, Statistics and Operations Research, Princeton University, 1997.
- [Vanti,1998] - Vanti, M. G; J. P. A. Bastos e E. T. Guiyotoku. *Implementação de uma Estrutura da Dados para Pré-Processamento em Elementos Finitos 3D Baseada em Objetos Utilizando a Linguagem Fortran 90*. In: 8th. CBMAG, 1998.
- [Vargas,1992] - L. Vargas, V. Quintana and A. Vannelli. *A Tutorial Description of an Interior Point Method and its applications to Security-Constrained Economic Dispatch*. IEEE, PES 1002, Summer Meeting, Seattle, Julho, 1992.

- [Wadhwa,1990] - Wadhwa, C. L. and N. K. Jain. *Multiple objective optimal load flow: a new perspective*. IEE Proceedings, Vol. 137, Pt. C, No. 1, p. 13-18, Janeiro, 1990.
- [Wang,1995] - Wang, T; R. Monteiro and J. Pang. *An Interior Point Potential Reduction Method for Constrained Equations*. Report, revised october, 1995.
- [Ward,1956] – Ward, J. B. and Hale, H. W. *Digital Computer Solution of Power Flow Problems*. IEEE, Power Apparatus and Systems, Junho, 1956.
- [Wright M,1997] - Wright, M. *Ill-Conditioning and Computational Error in Interior Methods for Nonlinear Programming*. Technical Report 97-4-04, Computing Sciences Research Center, Bell Laboratories, 1997.
- [Wright M,1992] - Wright, M. *Some Linear Algebra Issues in Large-Scale Optimization*. Technical Report , AT&T, Bell Laboratories, 1992.
- [Wright,1992] - Wright, S. *An infeasible interior point algorithm for linear complementarity problems*. Technical Report MCS-P331-1092, Argonne National Laboratory, Outubro, 1992.
- [Wright S,1996] - Wright, S. *Interior Point for Linear Programming*. SIAM, 1996.
- [Wu,1994] – Wu, Y. C.; Debs, A. S. and Marsten R. E. *A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flow*. IEEE, Transactions on Power Systems, Vol. 9, no. 2, p. 876-883, Maio, 1994.
- [Ying,1994] - Ying-Tung Hsiao, Hsiao-Dong Ciang, Chu-Chang Liu and Yuan-Lin Chen, *A Computer Package for Multi-Objective VAR Planning in Large Scale Power Systems*. IEEE, Transactions on Power Systems, Vol. 9, No. 2, p. 668-676, Maio, 1994.
- [Yokoyama,1988] - Yokoyama, R; S. H. Bae, T. Morita and H. Sasaki. *Multiobjective Optimal Generation Dispatch base on Probability Security Criteria*. IEEE, Transactions on Power Systems, Vol. 3, p. 317-324, Fevereiro, 1988.
- [Zadeh,1963] - Zadeh, L. A. *Optimality and Non-Scalar-Valued Performance Criteria* . IEEE, Transactions on Automatic Control, vol. 8, p. 59-60, Janeiro, 1963
- [Zeleny,1974] - Zeleny, M. *A concept of Compromise Solutions and the Method of the Displaced Ideal*. Comput. Operations Res. Vol. 1, p. 479-486, 1974.

[Zhang,1989] – Zhang, Z.Z; Hope, G. S. and Malik, P. *Expert Systems in Electrical Power Systems, A Bibliographic Survey*. IEEE, Transactions on Power Systems, Vol.4, p. 1355-1361, Outubro, 1994.

[Zhang,1994] - Zhang, Y. *On the convergence of an infeasible interior-point algorithm for linear programming and other problems*. SIAM Journal on Optimization, No. 4, 1994.