Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduaçao em Matemática e
Computação Científica

Geometria Não-Comutativa do Plano Quântico

Christian Wagner
Orientador: Prof. Dr. Eliezer Batista

Florianópolis
Fevereiro de 2001

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Geometria Não-Comutativa do Plano Quântico

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Física-Matemática

Christian Wagner
Florianópolis
Fevereiro de 2001

Geometria Não-Comutativa do Plano Quântico

por

Christian Wagner

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre",
Área de Concentração em Física-Matemática, e aprovada em sua forma
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica.

Celso Melchíades Dória
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. José Francisco Gomes(IFT-UNESP)

Prof. Dr. Luiz Augusto Saeger (UFSC)

Prof. Dr. Ruy Exel Filho (UFSC)

Florianópolis, março de 2001.

À meu pai Tobias,
minha mãe Silvia,
meus irmãos Robson e Felipe,
minha avó Zélia
e minha namorada Catiane

Agradecimentos

Agradeço a minha família, principalmente ao meus pais, que tornaram possível chegar onde cheguei, e a minha namorada Catiane que proporcionou e continua proporcionando muita felicidade à minha vida, pelo amor e compreensão que tem por mim.

Aos meus colegas, Danilo, Milton, Airton, Graziela, Patrícia, Fábio, Daniel, Maria Inês, Dirceu, Andresa, Clayton, Rafael, Janice, Osvaldo, Jorge, Gilberto, pela amizade e os bons momentos nestes dois anos.

Ao Colega Rafael Casali, pelo suporte em Latex.

Aos professores Celso, Oscar, Igor, Eliezer, Antônio Leitão, que foram meus mestres neste período e que sempre me apoiaram.

À CAPES por ter financiado os meus estudos nestes dois anos.

Ao meu orientador, Eliezer Batista, pela orientação, apoio e amizade.

Resumo

Este Trabalho é um estudo sobre o plano quântico e sua geometria. Iniciamos o texto dando uma visão geral do que é uma álgebra de Hopf e através de uma série de exemplos, para em seguida introduzir os conceitos de ação, coação e estruturas quasi-triangulares. Mais adiante construímos a álgebra de Hopf $U_q(sl(2))$ e estudamos como ela age no plano quântico, primeiro usando uma realização matricial para os geradores de $U_q(sl(2))$ e depois usando operadores diferenciais. Posteriormente estuda-se o cálculo diferencial e o complexo de Wess-Zumino, para q sendo raiz n-ésima da unidade e finalmente exemplificamos para o caso $q^3 = 1$.

Abstract

This work is a study on the quantum plane and its geometry. We begin the text giving a general view of what is a Hopf algebra and many examples, in order to introduce the concepts of action, coaction and quasitriangular estructures. After we construct the Hopf algebra $U_q(sl(2))$ and we study how it acts on the quantum plane, first using a matricial realization for generators of $U_q(sl(2))$ and after using differential operators. Later the differential calculus and the Wess-Zumino complex is studied, for q being an n-th root of unity and finally we do as an example the case $q^3 = 1$.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho, como diz o título, é apresentar a geometria não comutativa do plano quântico. Quem primeiro escreveu sobre geometria não comutativa foi Alain Connes [3], [4]. Como se sabe, para se ter uma geometria precisamos de um espaço e uma ação de grupos [10]. Quando dualizamos este conceito de ação, obtemos uma coação de álgebra de Hopf [15] sobre uma álgebra de coordenadas. Se estas álgebras forem não comutativas, obtemos então uma geometria não comutativa. As álgebras de Hopf, muitas vezes são chamadas de grupos quânticos o que não é verdade. Um grupo quântico é uma álgebra de Hopf, com uma estrutura quasi-triangular [15], e aparece em uma série de idéias físicas [19].

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira:

- No capítulo primeiro fizemos uma revisão auto-contida sobre a teoria das álgebras de Hopf, e em seguida revisamos também a parte de ações e coações entre álgebras de Hopf e damos uma série de exemplos. Finalmente são discutidas as estruturas quasi-triangulares.

- No capítulo segundo discutimos o plano quântico. Primeiramente definimos e o relacionamos com a extensão de Ore, em seguida discutimos de forma sucinta o que vem a ser uma geometria e quando dualizamos a ação e generalizamos para álgebras não comutativas obtemos uma geometria não comutativa. Posteriormente definimos a álgebra de Hopf $U_q(sl(2))$ e como ela age no plano quântico $k_q[x, y]$ de duas maneiras, através de uma realização matricial e por operadores diferenciais, concluindo então que elas coincidem quando aplicadas nos geradores de $k_q[x, y]$. Discutimos também as representações de $U_q(sl(2))$ de maneira geral.

- No capítulo terceiro começamos definindo o complexo de De Rham, ou álgebra de formas diferenciais. No momento seguinte define-se as n-formas e também um operador diferencial d que junto com a álgebra $\Omega(A)$, com o produto $\otimes_A$ nos faz ter em mãos o que chamamos de álgebra diferencial universal. Definimos então o complexo de Wess-Zumino e a cohomologia do plano quântico para q genérico, e concluímos que topologicamente o plano quântico se comporta como um plano.

- No capítulo quarto consideramos a álgebra das matrizes 3×3 como o plano quântico reduzido no qual o grupo quântico H de dimensão finita age, onde H é o quociente de $U_q(sl(2))$ pelo ideal gerado por $q^3 = 1, X_{\pm}^3$ e $K^3 - \mathbf{1}$. Introduzimos também o cálculo diferencial nesta álgebra na qual é o quociente do complexo de Wess-Zumino pelo ideal $q^3 = 1$. Finalmente estudamos a cohomologia do plano quântico para $q^3 = 1$ e notamos que topologicamente o plano quântico tem as características do toro.

- No apêndice A, realizamos uma breve revisão sobre módulos e produto tensorial.
- No apêndice B, demonstramos alguns resultados relativos à estruturas quasi-triangulares.
- No apêndice C, fazemos uma exposição sobre a álgebra de Hopf $U(sl(2))$, onde estudamos a suas realizações e as ações sobre o plano afim $k[x, y]$.
- No apêndice D fazemos a construção FRT(Faddeev - Reshetikhin - Takhtajan), isto é dado um espaço vetorial V de dimensão finita e $c : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ um isomorfismo, então existe uma biálgebra $A(c)$ e uma coação $\delta_v : V \longrightarrow A(c) \otimes V$ tal que V é $A(C)$-comódulo à esquerda, c é um isomorfismo de comódulo e $A(c)$ possui um caráter universal.
- No apêndice E, estudamos o cálculo no plano quântico, onde apresentamos uma versão deformada do binômio de Newton e a derivada de uma função qualquer.

Capítulo 1

Preliminares Algébricas

Trataremos neste capítulo as noções básicas relativas à álgebras, co-álgebras, bialgebras, álgebras de Hopf, módulos e co-módulos de álgebras de Hopf e finalmente estruturas quasi-triangulares. Algumas demonstrações neste capítulo serão omitidas por sua simplicidade, enquanto outras indicaremos alguma referência, já os resultados que julgarmos importantes serão demonstrados com detalhes. Estes tópicos servirão como base para os próximos capítulos.

1.1 Álgebras, Coálgebras, Biálgebras e Álgebras de Hopf

Nesta seção daremos início ao enfoque principal desta dissertação, que são as Álgebras de Hopf, que é um dos pré-requisitos necessários para estudarmos o cálculo diferencial no plano quântico. Sempre denotaremos um corpo por k e vamos considerar $k = \mathbb{C}$, a menos que se estabeleça o contrário.

Definição 1.1 *Uma Àlgebra é uma tripla (A, μ, η), onde A é um espaço vetorial e $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$ e $\eta : k \longrightarrow A$ são aplicações lineares satisfazendo os seguintes diagramas*

Associatividade:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A \\ \uparrow{\scriptstyle \mu \otimes Id} & & \uparrow{\scriptstyle \mu} \\ A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{Id \otimes \mu} & A \otimes A \end{array}$$

Unidade:

$$\begin{tikzcd} k \otimes A \arrow[r, "\eta \otimes Id"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes k \arrow[l, "Id \otimes \eta"'] \arrow[dl, "\cong"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Em simbolos associatividade significa que

$$\mu \circ (\mu \otimes Id) = \mu \circ (Id \otimes \mu)$$

O fato de η ser a unidade significa que

$$\mu \circ (\eta \otimes Id) = \mu \circ (Id \otimes \mu) = Id$$

A maneira como μ opera nos elementos é dado da seguinte forma:

$$\mu(a \otimes b) = a \cdot b$$

Com esta notação, podemos escrever a relação de associatividade em termos de suas componentes, e desta forma chegamos a conclusão que

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \qquad \forall a, b, c \in A$$

Vale lembrar que η funciona da seguinte maneira:

$$\eta(\lambda) = \lambda \cdot \mathbf{1}, \qquad \forall \lambda \in A$$

Assim a comutatividade do diagrama de unidade é o mesmo que dizer que existe $\mathbf{1} \in A$ tal que

$$a \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot a = a, \qquad \forall a \in A$$

Definição 1.2 *Sejam A, B álgebras. Dizemos que $f : A \longrightarrow B$ é um morfismo de álgebra se*

(i) f *é linear*

(ii) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$

(iii) $f(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_B$

Agora vamos descrever o que vem a ser uma álgebra livre. Seja X um conjunto e considere o espaço vetorial $K\{X\}$ com base no conjunto de todas as palavras $x_{i_1}...x_{i_p}$ no alfabeto X, inclusive a palavra vazia $\emptyset$. Uma palavra será chamada de *monômio*. Defina o grau do monômio como sendo o número p de letras usadas. A justaposição de palavras define uma multiplicação em $K\{X\}$ dada por

$$(x_{i_1}...x_{i_p}) \cdot (x_{i_p+1}...x_{i_n}) = x_{i_1}...x_{i_p}x_{i_p+1}...x_{i_n}$$

Esta fórmula equipa $K\{X\}$ com uma estrutura de álgebra, chamada de *Álgebra Livre*. Se $X = \{x_1, ..., x_n\}$, nós denotaremos $K\{X\}$ por $K\{x_1, ..., x_n\}$
Note que a unidade é a palavra vazia, isto é, $1 = \emptyset$. De fato, seja $x_{i_1}...x_{i_p}$ uma palavra genérica de $K\{X\}$, fazendo a justaposição com a palavra vazia temos

$$(x_{i_1}...x_{i_p})\mathbf{1} = x_{i_1}...x_{i_p}$$

Definição 1.3 *Uma álgebra A é dita ser graduada se existem subespaços $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que*

(i) $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$

(ii) $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$

Os elementos de A_i são ditos ser homogêneos de grau i.

Teorema 1.1 *Toda álgebra livre é graduada.*

Demonstração: Tome A_i como sendo o subespaço das palavras de medidas i do conjunto X. Por exemplo
A_1 - Conjunto de palavras de medida 1.
A_2 - Conjunto de palavras de medida 2.
E assim por diante.
Agora suponha que $i \neq j$, digamos $i > j$, desta forma temos que $A_i \cap A_j = \{0\}$, pois uma palavra de medida i, não pode ser de medida j e vice versa, a única possibilidade de isto acontecer é com o zero, pois podemos justapor o 0 i vezes ou j vezes e sempre teremos 0. É fato que $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$, justaposição de palavras. Agora $A = K\{X\}$ é definido como sendo o subespaço linearmente gerado por todos os monômios de grau i, para $i \in \mathbb{N}$.

∎

A seguir estudaremos a propriedade universal da álgebra livre $k\{X\}$.

Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$

Teorema 1.2 (Propriedade Universal da Álgebra Livre) *Dadas A uma álgebra qualquer e $f : X \longrightarrow A$ uma função, existe um único homomorfismo $\widetilde{f} : k\{X\} \longrightarrow A$ tal que $\widetilde{f}|_X = f$*

Demonstração: Seja $p = x_1 x_2 ... x_n \in k\{X\}$. Defina $\widetilde{f} : k\{X\} \longrightarrow A$ linear tal que

$$\widetilde{f}(p) = f(x_1)f(x_2)...f(x_n)$$

Seja p e q tal que

$$p = \sum_i \lambda_i p_i$$

e

$$q = \sum_j \mu_j q_j$$

onde $p_i = x_{i1}...x_{ik_i}$ e $q_j = x_{j_1}...x_{j_{k_j}}$.

Então,

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(pq) &= \widetilde{f}(\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j p_i q_j) = \sum_{i,j}\lambda_i\mu_j\widetilde{f}(p_i q_j) = \\
&= \sum_{i,j}\lambda_i\mu_j\widetilde{f}(x_{i1}...x_{ik_i}x_{j1}...x_{jk_j}) \\
&= \sum_{i,j}\lambda_i\mu_j f(x_{i1})...f(x_{ik_i})f(x_{j1})f(x_{jk_j}) = \\
&= \sum_{i,j}\lambda_i\mu_j\widetilde{f}(p_i)\widetilde{f}(q_j) = \\
&= (\sum_i\lambda_i\widetilde{f}(p_i))(\sum_j\mu_j\widetilde{f}(q_j)) = \\
&= \widetilde{f}(\sum_i\lambda_i p_i)\widetilde{f}(\sum\mu_j q_j) = \\
&= \widetilde{f}(p)\widetilde{f}(q)
\end{aligned}$$

■

Corolário 1.1 *Seja R um conjunto de relações formada por elementos de X, se a imagem dos elementos $x_i \in X$ também satisfazer à R, então existe única $\overline{f} : k\{X\}/I \longrightarrow A$, onde I é um ideal bilateral gerado pelas relações de R, morfismo de álgebra tal que $\overline{f}|_X = f$.*

Demonstração: Sabemos pelo teorema (1.2) que existe única $\widetilde{f} : k\{X\} \longrightarrow A$ morfismo de álgebra tal que $\widetilde{f}|_X = f$. Se $\{f(x_i)\}$ obedecem as relações de R, então $\widetilde{f}|_I = 0$. De fato, seja $r \in R$, isto é:

$$r = \sum_i a_{i_1...i_n}x_{i1}...x_{in} = 0$$

Agora

$$\widetilde{f}(\sum_i a_{i_1...i_n}x_{i1}...x_{in}) = \sum_i a_{i_1...i_n}f(x_{i1})...f(x_{in}) = 0$$

por hipótese.

Defina $\overline{f} : k\{X\} \longrightarrow A$ tal que $\overline{f}([a]) = \widetilde{f}(a)$.

$\overline{f}$ está bem definida. De fato, sejam x,y representantes de $[x]$. Então $x - y \in I$, logo $\widetilde{f}(x-y) = 0$. Assim $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(y) = \overline{f}([x])$.

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\overline{f}([a][b]) &= \overline{f}([ab]) = \widetilde{f}(ab) = \\
&= \widetilde{f}(a)\widetilde{f}(b) = \overline{f}([a])\overline{f}([b])
\end{aligned}$$

■

Proposição 1.1 *Dois morfismos de álgebra S e T são iguais se são iguais nos geradores.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} S(\sum_i a_{i_1 \dots i_n} x_{i1} \dots x_{in}) &= \sum_i a_{i_1 \dots i_n} S(x_{i1}) \dots S(x_{in}) = \\ &= \sum_i a_{i_1 \dots i_n} T(x_{i1}) \dots T(x_{in}) = \\ &= T(\sum_i a_{i_1 \dots i_n} x_{i1} \dots x_{in}) \end{aligned}$$

Logo,

$$S = T$$

■

Exemplo 1.1 *Defina $\mu^{op} = \sigma \circ \mu$, onde σ é o flip, isto é, $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x$. Temos então que (μ^{op}, η, A) é uma álgebra.*

Demonstração: μ^{op} atua da seguinte maneira:

$$\mu^{op}(x \otimes y) = y \cdot x$$

Assim verifica-se facilmente que

$$\mu^{op}(\mu^{op} \otimes Id) = \mu^{op}(Id \otimes \mu^{op})$$

e

$$\mu^{op}(\eta \otimes Id) = \mu^{op}(Id \otimes \eta) = Id$$

■

Observação 1.1 *Se $\mu = \mu^{op}$, então dizemos que a álgebra A é comutativa.*

Exemplo 1.2 *Tome A o conjunto de funções sobre um conjunto ($f : X \longrightarrow k$). Defina*

$$\begin{aligned} \mu : \ A \otimes A &\longrightarrow A \\ f \otimes g &\longmapsto f \cdot g \end{aligned}$$

onde $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad x \in X$

A função constante $\mathbf{1}(x) = 1$ é a unidade desta álgebra. Assim (μ, η, A) é uma álgebra.

Demonstração: De fato,

$$\mu(Id \otimes \mu)(f \otimes g \otimes h)(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x)) =$$

$$= \mu(\mu \otimes Id)(f \otimes g \otimes h)(x),$$

onde utilizamos a associatividade no corpo k.

Do mesmo modo temos que

$$\mu(\mathbf{1} \otimes f)(x) = \mathbf{1}(x) \cdot f(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$$

■

Existem muitas maneiras de construir álgebras, uma delas é através da Álgebra Tensorial.

Seja V um espaço vetorial e defina:

$$T^0(V) = k, \quad T^1(V) = V, \quad T^2(V) = V \otimes V, ..., \quad T^n(V) = V \otimes V \otimes ... \otimes V$$

Considere $T(V) = \bigoplus T^n(V), \quad n \geq 0$

Este produto tensorial induz uma estrutura de álgebra em $T(V)$ definida por:

$$(x_1 \otimes ... \otimes x_n)(x_{n+1} \otimes ... \otimes x_{n+m}) = x_1 \otimes ... \otimes x_n \otimes x_{n+1} \otimes ... \otimes x_{n+m}$$

onde $1 \in k$ é a unidade. Chamamos $T(V)$ de álgebra tensorial.

Vale dizer que a álgebra tensorial $T(V)$ possui caráter universal, isto é, para toda $f : V \longrightarrow A$ linear, onde A é uma álgebra associativa, existe um único morfismo de álgebra $\overline{f} : T(V) \longrightarrow A$ tal que $f = \overline{f} \circ i$, onde i é a inclusão canônica.

Podemos agora construir outras álgebras como quociente desta álgebra tensorial por algum ideal bilateral.

Exemplo 1.3 Algebra Comutativa *Seja V um espaço vetorial e defina*

$$S(V) = T(V)/I$$

onde $I =< x \otimes y - y \otimes x >$

$S(V)$ é uma algebra comutativa.

Demonstração: De fato, o quociente indica que $x \otimes y = y \otimes x$, segue disto que,

$$x_1 \otimes ... \otimes x_n \otimes ... \otimes x_m \otimes ... \otimes x_k = x_k \otimes ... \otimes x_m \otimes ... \otimes x_n \otimes ... \otimes x_1$$

onde as trocas são feitas entre vizinhas, sucessivas vezes.
A álgebra $S(V)$ também é chamada de álgebra simétrica e tem dimensão infinita. Dimensão no sentido de espaço vetorial, onde a $\dim(V) = n$

■

Exemplo 1.4 Álgebra Anti-Comutativa *Seja V um espaço vetorial e defina*

$$\Lambda(V) = T(V)/I$$

onde $I =< x \otimes x >$

$\Lambda(V)$ é uma algebra anti-comutativa nos geradores, no seguinte sentido:

$$x \wedge y = -y \wedge x, \quad \forall x, y \in V$$

Demonstração: Nas operações desta álgebra, utilizaremos o símbolo $\wedge$ definido como $x \wedge y = \pi(x \otimes y)$ e π é a projeção canônica.
Temos que

$$0 = (x + y) \wedge (x + y) = x \wedge x + x \wedge y + y \wedge x + y \wedge y$$

Mas $x \wedge x = 0$ e $y \wedge y = 0$, segue então que

$$x \wedge y = -y \wedge x$$

A álgebra $\Lambda(V)$ também é chamada de álgebra exterior.

■

Observação 1.2 *$\Lambda(V) \subset T(V)$ e $\Lambda(V)$ é graduada, pois:*

$$\Lambda^0(V) = k, \quad \Lambda^1(V) = V, \quad \Lambda^2(V) = V \wedge V, ..., \quad \Lambda^n(V) = V \wedge V \wedge ... \wedge V$$

e

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V)$$

Se $\dim(V) = n$, *temos que* $\dim(\Lambda(V)) = 2^n$
Note agora que a anti-simetria, não funciona para todos os elementos da álgebra, por exemplo:

$$(x_1 \wedge ... \wedge x_k) \wedge (y_1 \wedge ... \wedge y_p) = (-1)^{kp}(y_1 \wedge ... \wedge y_p) \wedge (x_1 \wedge ... \wedge x_k)$$

Definição 1.4 *Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto*

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

que satisfaz as seguintes propriedades

(i) $[\ ,\ ]$ *é bilinear.*

(ii) $[x, x] = 0, \quad \forall x \in V$

(iii) $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$ *(Identidade de Jacobi).*

Agora já estamos aptos a comentar o que vem a ser a Álgebra Universal Envolvente, na qual será constantemente usada nos capítulos seguintes.

Defina $L(A) = (A, [\ ,\ ])$ álgebra de Lie associada à álgebra associativa A. Considere também $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie qualquer. Definimos a álgebra universal envolvente $U(\mathfrak{g})$ como segue. Seja $I(\mathfrak{g})$ um ideal bilateral da álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ gerado por elementos da forma $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ onde $x, y \in \mathfrak{g}$.
Definimos

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{g})$$

Associe também um morfismo de álgebras de Lie

$$i_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \longrightarrow L(U(\mathfrak{g}))$$

Teorema 1.3 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e A uma álgebra associativa e $f : \mathfrak{g} \longrightarrow L(A)$ um morfismo de álgebra de Lie, isto é,*

$$f([x,y]) = f(x)f(y) - f(y)f(x)$$

Então existe única $\varphi : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ morfismo de álgebra tal que $\varphi \circ \pi \circ i = f$, onde $\pi \circ i = i_{\mathfrak{g}}$.

Demonstração: Considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
& T(\mathfrak{g}) \arrow[dr, "\pi"] \arrow[dd, "\overline{f}"] & \\
\mathfrak{g} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & U(\mathfrak{g}) \arrow[dl, "\varphi"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Pela propriedade universal de $T(\mathfrak{g})$ existe um único morfismo de álgebra associativa tal que $\overline{f}(x_1 \otimes ... \otimes x_n) = f(x_1)...f(x_n)$.
Basta provar que $Ker(\overline{f}) = I(\mathfrak{g})$

De fato,

$$\overline{f}(xy - yx - [x,y]) = f(x)f(y) - f(y)f(x) - f([x,y]) = 0$$

Então existe único $\varphi : T(\mathfrak{g})/Ker(\overline{f}) = T(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ morfismo de álgebra, tal que $\varphi \circ i_{\mathfrak{g}} = f$

■

Definição 1.5 *Uma coálgebra é uma tripla (C, Δ, ε), onde C é um espaço vetorial e $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ e $\varepsilon : C \longrightarrow k$ são aplicações lineares satisfazendo os seguintes diagramas*

Coassociatividade:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "Id \otimes \Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes Id"] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}$$

Counidade:

$$\begin{tikzcd}
k \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon \otimes Id"'] \arrow[r, "Id \otimes \varepsilon"] & C \otimes k \\
& C \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Em símbolos coassociatividade significa que

$$(Id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes Id) \circ \Delta$$

E o fato de que ε é a counidade significa que

$$(\varepsilon \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = Id$$

Existe uma maneira interessante de escrever Δ em termo de componentes:

$$\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)} \tag{1.1}$$

Esta maneira, não é única! Esta notação ficará mais explicita com os exemplos a serem apresentados.

Portanto podemos escrever a coassociatividade em termos de seus elementos da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\sum x_{(1)(1)} \otimes x_{(1)(2)} \otimes x_{(2)} &= \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)(1)} \otimes x_{(2)(2)} \\
&= \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)} \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Usando a equação (1.1), temos:

$$\Delta(x_{(1)}) = \sum x_{(1)(1)} \otimes x_{(1)(2)}$$

Assim a equação (1.2) se torna melhor entendida.

Também com a notação de (1.1) e o fato de $C \cong C \otimes k \cong k \otimes C$, podemos descrever a comutatividade do diagrama da counidade em termos de suas componentes e chegamos a conclusão de que

$$x = \sum x_{(1)} \cdot \varepsilon(x_{(2)}) = \sum \varepsilon(x_{(1)}) \cdot x_{(2)}$$

Exemplo 1.5 Coálgebra Oposta *Defina $\Delta^{op} = \sigma \circ \Delta$, onde σ é o flip, isto é, $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x$. Com isto $(C, \Delta^{op}, \varepsilon)$ é uma coálgebra.*

Demonstração: Primeiro vamos notar como atua Δ^{op}

$$\Delta^{op}(x) = \sigma(\Delta(x)) = \sigma(\sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}) = \sum x_{(2)} \otimes x_{(1)}$$

Com isto verifica-se facilmente que

$$(Id \otimes \Delta^{op}) \circ \Delta^{op} = (\Delta^{op} \otimes Id) \circ \Delta^{op}$$

e que

$$(Id \otimes \varepsilon) \circ \Delta^{op} = (\varepsilon \otimes Id) \circ \Delta^{op} = Id$$

■

Observação 1.3 *Se $\Delta^{op} = \Delta$, dizemos qua a coálgebra C é cocomutativa.*

Exemplo 1.6 *Considere A álgebra das funções sobre um grupo finito $(f : G \longrightarrow K)$. Defina*

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$$

Tal que

$$\Delta(f)(a,b) = f(ab)$$

e

$$\varepsilon : A \longrightarrow k$$

onde

$$\varepsilon(f) = f(1)$$

Então (A, Δ, ε) é uma coálgebra.
Note que na definição de Δ utilizamos o isomorfismo $A \otimes A = F(G \times G)$, se G é grupo finito.

Demonstração: Primeiramente vamos verificar o axioma da coassociatividade.

$$\begin{aligned}
(Id \otimes \Delta)\Delta(f)(a,b,c) &= (Id \otimes \Delta)(f_{(1)} \otimes f_{(2)})(a,b,c) = \\
&= (f_{(1)} \otimes \Delta(f_{(2)}))(a,b,c) = (f_{(1)} \otimes f_{(2)})(a,bc) = \\
&= \Delta(f)(a,bc) = f(a(bc)) = f((ab)c) = \\
&= \Delta(f)(ab,c) = (f_{(1)} \otimes f_{(2)})(ab,c) = \\
&= (\Delta(f_{(1)}) \otimes f_{(2)})(a,b,c) = (\Delta \otimes Id)\Delta(f)(a,b,c)
\end{aligned}$$

Agora note que

$$f(a) = f(1a) = \Delta(f)(1,a) = f_{(1)}(1)f_{(2)}(a)$$

Portanto podemos verificar o axioma da counidade

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes Id)\Delta(f)(a) &= (\varepsilon \otimes Id)(f_{(1)} \otimes f_{(2)})(a) = \\
&= \varepsilon(f_{(1)})f_{(2)}(a) = f_{(1)}(1)f_{(2)}(a) = f(a) = \\
&= Id(f)(a)
\end{aligned}$$

■

Exemplo 1.7 *Considere $U(\mathfrak{g})$ a álgebra universal envolvente e defina*

$$\begin{array}{rccc}
\widetilde{\Delta}: & \mathfrak{g} & \longrightarrow & U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \\
& X & \longmapsto & X \otimes 1 + 1 \otimes X
\end{array}$$

Veja que a notação abstrata definida em (1.1) correspondente para este Δ é dada por:

$$\sum x_{(1)} \otimes x_{(2)} = X \otimes 1 + 1 \otimes X$$

Podemos através da universalidadede de $U(\mathfrak{g})$, extender Δ para $U(\mathfrak{g})$, em outras palavras, quer dizer que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\widetilde{\Delta}"] \arrow[dr, "i_{\mathfrak{g}}"'] & U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \\
& U(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

Mas para isso, conforme o teorema (1.3) , devemos ter que:

$$\widetilde{\Delta}([X,Y]) = [\widetilde{\Delta}(X), \widetilde{\Delta}(Y)]$$

De fato:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}([X,Y]) &= \widetilde{\Delta}(XY - YX) = \widetilde{\Delta}(XY) - \widetilde{\Delta}(YX) = \\
&= XY \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes XY - YX \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes YX = \\
&= [X,Y] \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes [X,Y]
\end{aligned}$$

Por outro lado temos que,

$$\begin{aligned}
[\widetilde{\Delta}(X), \widetilde{\Delta}(Y)] &= \widetilde{\Delta}(X)\widetilde{\Delta}(Y) - \widetilde{\Delta}(Y)\widetilde{\Delta}(X) = \\
&= XY \otimes \mathbf{1} + X \otimes Y + Y \otimes X + \mathbf{1} \otimes XY - \\
&- YX \otimes \mathbf{1} - Y \otimes X - X \otimes Y - \mathbf{1} \otimes YX = \\
&= [X,Y] \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes [X,Y]
\end{aligned}$$

Defina também

$$\begin{array}{rccc}
\varepsilon : & U(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & k \\
& X & \longmapsto & 0 \\
& \mathbf{1} & \longmapsto & 1
\end{array}$$

Com Isto temos que $(U(\mathfrak{g}), \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra.

Demonstração:

Coassociatividade

$$\begin{aligned}
(Id \otimes \Delta)\Delta X &= (Id \otimes \Delta)(X \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes X) = \\
&= X \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \Delta X = \\
&= X \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes X \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes X
\end{aligned}$$

Analogamente temos que

$$(\Delta \otimes Id)\Delta X = X \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes X \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes X$$

Counidade

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes Id)\Delta X &= (\varepsilon \otimes Id)(X \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes X) = \varepsilon(x)\mathbf{1} + \varepsilon(\mathbf{1})X = \\
&= 0 \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1} \cdot X = X = Id(X)
\end{aligned}
$$

■

Definição 1.6 *Uma álgebra A é chamada de uma biálgebra se A é uma coálgebra com coproduto $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ e uma counidade $\varepsilon : A \longrightarrow k$ satisfazendo o axioma da compatibilidade*

$$
\begin{aligned}
\Delta(a \cdot b) &= \Delta(a) \cdot \Delta(b) \quad , \quad \varepsilon(a \cdot b) = \varepsilon(a) \cdot \varepsilon(b) \\
\Delta(\mathbf{1}) &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

O Axioma da compatibilidade pode ser expresso pelos seguintes diagramas

Δ é morfismo de álgebra

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "\Delta"] & \\
A \otimes A \arrow[ur, "\mu"] \arrow[d, "\Delta \otimes \Delta"'] & & A \otimes A \\
A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[rr, "\sigma_{23}"] & & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[u, "\mu \otimes \mu"']
\end{tikzcd}
$$

onde $\sigma_{23}(x \otimes y \otimes z \otimes t) = (x \otimes z \otimes y \otimes t)$
ε é morfismo de álgebra

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varepsilon \otimes \varepsilon"'] & A \arrow[d, "\varepsilon"] \\
k \otimes k \arrow[r, "\cong"] & k
\end{tikzcd}
$$

Denotamos uma biálgebra pela quíntupla $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$

Exemplo 1.8 *Seja A a álgebra das funções como mostrado no exemplo (1.6). Já sabemos assim que A é uma coálgebra. Além disso A é uma biálgebra.*

Demonstração: Basta mostrar que Δ e ε satisfazem o axioma da compatibilidade.

$$\begin{aligned}
\Delta(fg)(a,b) &= (fg)(ab) = f(ab)g(ab) = \\
&= \Delta(f)(a,b)\Delta(g)(a,b) = (\Delta(f)\Delta(g))(a,b)
\end{aligned}$$

Do mesmo modo temos que

$$\varepsilon(fg) = (fg)(1) = f(1)g(1) = \varepsilon(f)\varepsilon(g)$$

■

Exemplo 1.9 *No exemplo (1.7) vimos que a álgebra universal envolvente $U(\mathfrak{g})$ é uma coálgebra. Segue agora que $U(\mathfrak{g})$ é uma biálgebra.*

Demonstração: Novamente devemos verificar o axioma da compatibilidade. Mas conforme teorema (1.3) e exemplo (1.7), segue que Δ é um morfismo de álgebra. Agora

$$\begin{aligned}
\varepsilon([X,Y]) &= 0 = \\
&= \varepsilon(X)\varepsilon(Y) - \varepsilon(Y)\varepsilon(X) = \\
&= [\varepsilon(X), \varepsilon(Y)]
\end{aligned}$$

■

Definição 1.7 *Seja $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra. Um endomorfismo*

$$S : A \longrightarrow A$$

é chamada uma antípoda para a biálgebra A se:

$$\mu \circ (S \otimes Id) \circ \Delta = \mu \circ (Id \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon$$

Esta relação também é chamada de Axioma da Antípoda e pode ser representada através do seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "S \otimes Id"] & & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \arrow[u, "\Delta"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & A \\
& k \arrow[ur, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

Este diagrama representa a primeira parte do axioma da antípoda, isto é,

$$\mu \circ (S \otimes Id) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon$$

Para a outra parte da equação, o diagrama é o mesmo só trocando a aplicação da flecha horizontal, que será $Id \otimes S$.

Se calcularmos a relação acima em componentes, digamos em um $x \in A$, chegaremos a conclusão de que

$$\sum S(x_{(1)}) \cdot x_{(2)} = \sum x_{(1)} \cdot S(x_{(2)}) = 1 \cdot \varepsilon(x)$$

A próxima proposição nos dará algumas propriedades importantes em relação a antípoda, mas antes vamos definir uma nova operação:

$$(f * g)(x) = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta(x)$$

onde

$$\begin{array}{rccc} *: & \mathfrak{L}(C, A) \times \mathfrak{L}(C, A) & \longrightarrow & \mathfrak{L}(C, A) \\ & (f, g) & \longmapsto & f * g \end{array}$$

onde $\mathfrak{L}(C, A)$ são as transformações lineares de C em A com C uma coálgebra e A uma álgebra e $*$ é uma operação bilinear chamada de *convolução.*
Calculado em componentes temos que o produto de convolução é dado por

$$f * g(x) = \sum f(x_{(1)}) g(x_{(2)})$$

Proposição 1.2 $(\mathfrak{L}(C, A), *, \eta \circ \varepsilon)$ *é uma álgebra com unidade, onde* $\mathbf{1}_{\mathfrak{L}(C,A)} = \eta \circ \varepsilon$

Demonstração: Temos que provar que:

(i) $(f * g) * h = f * (g * h)$

(ii) $f * (\eta \circ \varepsilon) = f$

O item (i) decorre da coassociatividade, já o item (ii) sai do axioma da counidade.

$\blacksquare$

Proposição 1.3 *Seja* $S : H \longrightarrow H$ *uma antípoda, onde* H *uma biálgebra. Então as seguintes sentenças são verdadeiras:*

(i) *A antípoda é única*

(ii) $S(x \cdot y) = S(y) \cdot S(x)$

(iii) $S(1) = 1$

(iv) $\Delta \circ S = (S \otimes S) \circ \Delta^{op}$

Demonstração:

(i) Suponha que existam antipodas S_1, S_2 tal que

$$\sum S_1(x_{(1)}) \cdot x_{(2)} = \varepsilon(x) \cdot 1$$

$$\sum S_2(x_{(1)}) \cdot x_{(2)} = \varepsilon(x) \cdot 1$$

Agora

$$\begin{aligned} S_1(x) &= S_1(\sum \varepsilon(x_{(1)}) \cdot x_{(2)}) = \sum \varepsilon(x_{(1)}) \cdot 1 \cdot S_1(x_{(2)}) = \\ &= \sum S_2(x_{(1)}) \cdot x_{(2)} \cdot S_1(x_{(3)}) = \sum S_2(x_{(1)}) \cdot \varepsilon(x_{(2)}) \cdot 1 = \\ &= S_2(\sum x_{(1)} \cdot \varepsilon(x_{(2)})) = S_2(x) \end{aligned}$$

(ii) Defina duas aplicações $\nu, \rho \in \mathfrak{L}(H \otimes H, H)$ por

$$\nu(x \otimes y) = S(y) \cdot S(x)$$

$$\rho(x \otimes y) = S(x \cdot y), \quad x, y \in H$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
(\rho * \mu)(x \otimes y) &= \mu(\rho \otimes \mu)\Delta(x \otimes y) = \\
&= \sum \rho((x \otimes y)_{(1)}) \cdot \mu((x \otimes y)_{(2)}) = \\
&= \sum \rho(x_{(1)} \otimes y_{(1)}) \cdot \mu(x_{(2)} \otimes y_{(2)}) \\
&= \sum S(x_{(1)} \cdot y_{(1)}) \cdot x_{(2)} \cdot y_{(2)} = \\
&= \sum S((x \cdot y)_{(1)}) \cdot (x \cdot y)_{(2)} = \eta \circ \varepsilon(x \cdot y) \\
&= \eta \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon)(x \otimes y)
\end{aligned}$$

Da mesma maneira tem-se que

$$(\nu * \mu)(x \otimes y) = \eta \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon)(x \otimes y)$$

onde $\eta \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon)$ é a unidade em $(\mathfrak{L}(H \otimes H, H), *)$

Portanto

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho * (\eta \circ \varepsilon) = \rho * (\mu * \nu) = (\rho * \mu) * \nu = \\
&= (\eta \circ \varepsilon) * \nu = \nu
\end{aligned}$$

Assim provamos o item (ii).

(iii) Sabemos que

$$\mu(Id \otimes S)\Delta(x) = \eta \circ \varepsilon(x)$$

Aplicando esta igualdade para $x = 1$, temos

$$\mu(Id \otimes S)\Delta(1) = 1 \cdot S(1)$$

Por outro lado,

$$\eta \circ \varepsilon(1) = 1 \cdot \varepsilon(1) = 1 \cdot 1 = 1$$

logo

$$S(1) = 1$$

(iv) Defina duas aplicações $\rho, \nu \in \mathfrak{L}(H, H \otimes H)$ por

$$\rho(x) = \Delta \circ S(x)$$

$$\nu(x) = (S \otimes S) \circ \Delta^{op}(x)$$

Temos então que

$$\begin{aligned}(\rho * \Delta)(x) &= \sum \rho(x_{(1)})\Delta(x_{(2)}) = \\ &= \sum \Delta(S(x_{(1)}))\Delta(x_{(2)}) = \\ &= \sum \Delta(S(x_{(1)})x_{(2)}) = \varepsilon(x)(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned}(\Delta * \nu)(x) &= \sum \Delta(x_{(1)})\nu(x_{(2)}) = \\ &= \sum \Delta(x_{(1)})(S(x_{(2)(2)})\otimes S(x_{(2)(1)})) = \\ &= \sum \Delta(x_{(1)})(S(x_{(2)})\otimes S(x_{(3)})) = \\ &= \sum (x_{(1)}\otimes x_{(2)})(S(x_{(4)})\otimes S(x_{(3)})) = \\ &= \sum x_{(1)}S(x_{(4)})\otimes x_{(2)}S(x_{(3)}) = \\ &= \sum x_{(1)}S(x_{(3)})\otimes \varepsilon(x_{(2)}) = \\ &= \sum x_{(1)}S(\varepsilon(x_{(2)})x_{(3)})\otimes \mathbf{1} = \\ &= \sum x_{(1)}S(x_{(2)})\otimes \mathbf{1} = \varepsilon(x)(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\end{aligned}$$

Lembre que $(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\varepsilon$ é a unidade em $(\mathfrak{L}(H, H\otimes H), *)$ pela proposição (1.2) Portanto temos

$$\nu = (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\varepsilon * \nu = (\rho * \Delta) * \nu = \rho * (\Delta * \nu) = \rho * (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\varepsilon = \rho$$

■

Definição 1.8 *Uma álgebra de Hopf H é uma biálgebra que satisfaz o axioma da antípoda.*

Lema 1.1 *São equivalentes as seguintes afirmações sobre $(H, \mu, \Delta, \varepsilon, \eta, S)$ álgebra de Hopf*

(i) $S^2 = Id_H$

(ii) $\sum S(x_{(2)})x_{(1)} = \varepsilon(x)1$

(iii) $\sum x_{(2)}S(x_{(1)}) = \varepsilon(x)1$

Demonstração: Ver apêndice B.

■

Corolário 1.2 *Se H é comutativa ou cocomutativa, então $S^2 = Id$*

Demonstração: Se H é cocomutativa então,

$$\sum S(x_{(2)})x_{(1)} = \sum S(x_{(1)})x_{(2)} = \varepsilon(x)1$$

Se H é comutativa, a demonstração é análoga.

■

Para provarmos que um determinado conjunto é uma álgebra de Hopf, devemos mostrar as seguintes propriedades:

(i) Associatividade

(ii) $(Id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes Id) \circ \Delta$ (Coassociatividade)

(iii) $(\varepsilon \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = Id$ (Counidade)

(iv) $\Delta(x \cdot y) = \Delta(x) \cdot \Delta(y)$ (Compatibilidade)

(v) $\varepsilon(x \cdot y) = \varepsilon(x) \cdot \varepsilon(y)$ (Compatibilidade)

(vi) $\mu \circ (S \otimes Id) \circ \Delta = \mu \circ (Id \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon$ (Antípoda)

Exemplo 1.10 *Conforme o exemplo (1.8), temos que o conjunto A das funções sobre um grupo finito é uma biálgebra. Defina uma antípoda $S : A \longrightarrow A$ da seguinte maneira*

$$S(f)(a) = f(a^{-1})$$

Então A é uma álgebra de Hopf.

Demonstração: Basta mostrar que em A o axioma da antípoda é satisfeito. De fato, primeiramente note que

$$(\eta \circ \varepsilon)f(a) = \eta(f(1))(a) = \mathbf{1}f(1)(a) = f(1)\mathbf{1}(a) = f(1)$$

$$\begin{aligned}
\mu(S \otimes Id)\Delta(f)(a) &= \sum \mu(S(f_{(1)}) \otimes f_{(2)})(a) = \sum S(f_{(1)})f_{(2)}(a) = \\
&= \sum S(f_{(1)})(a)f_{(2)}(a) = \sum f_{(1)}(a^{-1})f_{(2)}(a) = \\
&= \sum (f_{(1)} \otimes f_{(2)})(a^{-1}, a) = \Delta(f)(a^{-1}, a) = \\
&= f(a^{-1} \cdot a) = f(1) = (\eta \circ \varepsilon)f(a)
\end{aligned}$$

Analogamente temos que

$$\mu(Id \otimes S)\Delta = \eta \circ \varepsilon$$

■

Exemplo 1.11 *Pelo exemplo (1.9) temos que a álgebra universal envolvente $U(\mathfrak{g})$ é uma biálgebra. Defina em $U(\mathfrak{g})$ a antípoda*

$$\begin{array}{rccc} S: & U(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & U(\mathfrak{g}) \\ & X & \longmapsto & -X \end{array}$$

Com isto segue que $U(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de Hopf.

Demonstração: Como no exemplo anterior, precisamos somente mostrar que o axioma da antípoda é satisfeito. De fato

$$\begin{aligned}\mu(S \otimes Id)\Delta(X) &= \mu(S \otimes Id)(X \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes X) = \\ &= \mu(-X \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes X) = \\ &= -X \cdot \mathbf{1} + X \cdot \mathbf{1} = 0 = \varepsilon(X) \cdot \mathbf{1}\end{aligned}$$

Da mesma forma temos que

$$\mu(Id \otimes S)\Delta = \eta \circ \varepsilon$$

■

Exemplo 1.12 *Seja $G \subset M_n(k)$ um sub-grupo do grupo das matrizes $n \times n$. Defina as aplicações*
$t_{ij} : G \longrightarrow k$, como $t_{ij}(g) = g_{ij}$(elemento de matriz). Seja $A = k[t_{ij}]_{i,j=1\ldots n}$ a álgebra polinomial. Podemos definir um coproduto($\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$), uma counidade($\varepsilon : A \longrightarrow k$) e uma antípoda($S : A \longrightarrow A$) por:

Coproduto:

$$\Delta(t_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} \otimes t_{kj}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\Delta(t_{ij})(g_1, g_2) &= \sum_{k=1}^{n} t_{ik}(g_1) \otimes t_{kj}(g_2) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (g_1)_{ik}(g_2)_{kj} \\ &= (g_1 g_2)_{ij} = t_{ij}(g_1 g_2)\end{aligned}$$

Ainda mais, Δ é um morfismo de álgebra. De fato:

$$\begin{aligned}\Delta(t_{ij}t_{kl})(g_1, g_2) &= t_{ij}t_{kl}(g_1 g_2) = \\ &= t_{ij}(g_1 g_2)t_{kl}(g_1 g_2) = \\ &= \Delta(t_{ij})(g_1 g_2)\Delta(t_{kl})(g_1 g_2) = \\ &= (\Delta(t_{ij}))(\Delta(t_{kl}))(g_1 g_2)\end{aligned}$$

Counidade:

$$\varepsilon(t_{ij}) = \delta_{ij}$$

ou

$$\varepsilon(t_{ij}) = t_{ij}(\mathbf{1})$$

Antípoda:

$$S(t_{ij})(g) = t_{ij}(g^{-1})$$

Na notação abstrata, temos

$$\sum x_{(1)} \otimes x_{(2)} = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} \otimes t_{kj}$$

Com estas operações $(A, \cdot, \mathbf{1}, \Delta, \varepsilon, S)$ *é uma álgebra de Hopf.*

$\square$

Observação 1.4 *Denominaremos como um abuso de linguagem esta álgebra* A *como* $Fun(G)$, *deixando claro que* **não** *corresponde à álgebra de todas as funções definidas em* G.

1.2 Ações e Coações de Álgebras de Hopf

Seja H uma álgebra de Hopf e V um espaço vetorial.

Definição 1.9 *Uma ação à esquerda de* H *em* V *é uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & H \otimes V & \longrightarrow & V \\ & h \otimes v & \longmapsto & \alpha(h \otimes v) = h \triangleright v \end{array}$$

tal que os diagramas comutem

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \otimes V \arrow[r, "Id \otimes \alpha"] \arrow[d, "\mu \otimes Id"'] & H \otimes V \arrow[d, "\alpha"] \\ H \otimes V \arrow[r, "\alpha"] & V \end{tikzcd}$$

Isto é o mesmo que $h_1 \triangleright (h_2 \triangleright v) = (h_1 h_2) \triangleright v$

$$\begin{tikzcd} H \otimes V \arrow[dr, "\alpha"] & \\ k \otimes V \arrow[u, "\eta \otimes Id"] \arrow[r, "\cong"] & V \end{tikzcd}$$

Ou seja $\mathbf{1} \triangleright v = v$

Definição 1.10 *Se* V *é um espaço vetorial e* $\alpha : H \otimes V \longrightarrow V$ *é uma ação à esquerda de* H *em* V, *então* V *é dito ser* H*-módulo à esquerda.*

Definição 1.11 *Se* V=A *for uma álgebra então dizemos que* A *é* H*-módulo álgebra à esquerda se:*

(i) $h \triangleright (a \cdot b) = (h_{(1)} \triangleright a) \cdot (h_{(2)} \triangleright b)$

(ii) $h \triangleright \mathbf{1} = \varepsilon(h) \cdot \mathbf{1}$

Definição 1.12 *Se* V=C *for uma coálgebra então dizemos que* C *é* H*-módulo coálgebra à esquerda se:*

(i) $\Delta(h \triangleright v) = \sum (h_{(1)} \triangleright v_{(1)}) \otimes (h_{(2)} \triangleright v_{(2)})$

(ii) $\varepsilon(h \triangleright v) = \varepsilon(h) \cdot \varepsilon(v)$

Exemplo 1.13 *Ação regular à esquerda de H sobre H. H é H-módulo coálgebra à esquerda com $L_h(g) = h \cdot g$*

Demonstração: Devemos provar que L é uma ação e que os axiomas de módulo coálgebra são satisfeitos.

Ação:

(i)

$$\begin{aligned} L_{h_{(1)}}(L_{h_{(2)}}(g)) &= L_{h_{(1)}}(h_{(2)} \cdot g) = h_{(1)}(h_{(2)} \cdot g) = \\ &= (h_{(1)} \cdot h_{(2)}) \cdot g = L_{h_{(1)} \cdot h_{(2)}}(g) \end{aligned}$$

(ii) $L_1(g) = 1 \cdot g = g$

Módulo coálgebra:

(i)

$$\begin{aligned} \Delta(L_h(g)) &= \Delta(h \cdot g) = \Delta(h) \cdot \Delta(g) = \\ &= (\sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}) \cdot (\sum g_{(1)} \otimes g_{(2)}) = \\ &= \sum h_{(1)} \cdot g_{(1)} \otimes h_{(2)} \cdot g_{(2)} = \sum L_{h_{(1)}}(g_{(1)}) \otimes L_{h_{(2)}}(g_{(2)}) \end{aligned}$$

(ii) $\varepsilon(L_h(g)) = \varepsilon(h \cdot g) = \varepsilon(h) \cdot \varepsilon(g)$

$\blacksquare$

Exemplo 1.14 *Ação adjunta à esquerda de H em H, definida por*

$$Ad_h(g) = \sum h_{(1)} g S(h_{(2)})$$

Deste modo temos que H é H-módulo álgebra.

Demosntração: Devemos mostrar que Ad_h é uma ação:

Ação:

(i)

$$\begin{aligned} Ad_f(Ad_g(h)) &= Ad_f(\sum g_{(1)} h S(g_{(2)})) = \sum f_{(1)} g_{(1)} h S(g_{(2)}) S(f_{(2)}) = \\ &= \sum f_{(1)} g_{(1)} h S(f_{(2)} g_{(2)}) = \sum (fg)_{(1)} h S((fg)_{(2)}) = \\ &= Ad_{fg}(h) \end{aligned}$$

(ii) $Ad_1(h) = 1hS(1) = h1 = h$

E que H é H-módulo álgebra

(i)

$$\begin{aligned} Ad_f(gh) &= \sum f_{(1)}ghS(f_{(2)}) = \sum f_{(1)}\varepsilon(f_{(2)})ghS(f_{(3)}) = \\ &= \sum f_{(1)}g\varepsilon(f_{(2)})hS(f_{(3)}) = \sum f_{(1)}gS(f_{(2)})f_{(3)}hS(f_{(4)}) = \\ &= Ad_{f_{(1)}}(g)Ad_{f_{(2)}}(h) \end{aligned}$$

(ii) $Ad_f(1) = \sum f_{(1)}1S(f_{(2)}) = \sum 1\varepsilon(f) = \varepsilon(f)$

■

Observação 1.5 *Podemos também definir o conceito de ação à direita.*

Observação 1.6 *Dada uma ação α, podemos ter um conceito dual ao desta ação, a que chamamos de co-ação. O mesmo temos para módulos, que no sentido dual chamamos de co-módulo. Isto só é possível no contexto de álgebras de Hopf.*

Definição 1.13 *Uma co-ação à esquerda de H em V é uma aplicação linear*

$$\begin{aligned} \delta : V &\longrightarrow H \otimes V \\ v &\longmapsto \sum v^{(1)} \otimes v^{(2)} \end{aligned}$$

tal que os diagramas comutem

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & H \otimes V \arrow[d, "\Delta \otimes Id"] \\ H \otimes V \arrow[r, "Id \otimes \delta"] & H \otimes H \otimes V \end{tikzcd}$$

Então $\sum v^{(1)}{}_{(1)} \otimes v^{(1)}{}_{(2)} \otimes v^{(2)} = \sum v^{(1)} \otimes v^{(2)(1)} \otimes v^{(2)(2)}$

$$\begin{tikzcd} H \otimes V \arrow[dr, "\varepsilon \otimes Id"] & \\ V \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "\cong"] & k \otimes V \end{tikzcd}$$

Então $\sum \varepsilon(v^{(1)})v^{(2)} = v$

Com relação a notação de co-ação à esquerda, é válido ressaltar que a entrada mais a esquerda pertence à álgebra e a mais à direita pertence ao espaço.

Definição 1.14 *Se V é um espaço vetorial e $\delta : V \longrightarrow H \otimes V$ é uma co-ação à esquerda de H em V, então V é dito ser H-comódulo à esquerda.*

Definição 1.15 *Se $V = A$ for uma álgebra, então dizemos que A é um H-comódulo álgebra à esquerda se:*

(i) $\delta(a \cdot b) = \delta(a) \cdot \delta(b)$

(ii) $\delta(1) = 1 \otimes 1$

Definição 1.16 *Se $V = C$ for uma coálgebra, então dizemos que C é um H-comódulo coálgebra à esquerda se:*

(i) $\sum v^{(1)} \otimes v^{(2)}{}_{(1)} \otimes v^{(2)}{}_{(2)} = \sum v_{(1)}{}^{(1)} \cdot v_{(2)}{}^{(1)} \otimes v_{(1)}{}^{(2)} \otimes v_{(2)}{}^{(2)}$

(ii) $\sum v^{(1)} \cdot \varepsilon(v^{(2)}) = \varepsilon(v)$

O item (i) pode ser escrito de outra maneira:

$$(Id \otimes \Delta)\delta = (\mu \otimes Id \otimes Id) \circ (Id \otimes \sigma \otimes Id) \circ (\delta \otimes \delta) \circ \Delta$$

Na forma de diagrama temos:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\
C \otimes C \arrow[d, "\delta \otimes \delta"'] & & H \otimes C \arrow[d, "Id \otimes \Delta"] \\
H \otimes C \otimes H \otimes C \arrow[dr, "\sigma_{23}"'] & & H \otimes C \otimes C \\
 & H \otimes H \otimes C \otimes C \arrow[ur, "\mu \otimes Id \otimes Id"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 1.15 *A coação regular à esquerda de H em H, é dada pelo coproduto $R = \Delta : H \longrightarrow H$, e faz H um H-comódulo álgebra.*

Demonstração: Os axiomas de comódulo seguem dos axiomas de coassociatividade e counidade de Δ. Por definição Δ é um morfismo de álgebra, deste modo segue que H é um H-comódulo álgebra.

■

Exemplo 1.16 *A coação coregular à esquerda L^* de H em H^* e definida por:*

$$L^*(\phi)(h) = \sum < h_{(1)}, \phi > h_{(2)}$$

faz H^* um H-comódulo coálgebra. Onde

$$< \, , \, >: H \times H^* \longrightarrow k$$

bilinear.

Demonstração: Devemos mostrar que L^* é uma coação.
Antes vamos escrever $L^*(\phi)(h)$ na nossa notação

$$L^*(\phi)(h) = \sum < h_{(1)}, \phi > h_{(2)} = \sum \phi^{(1)} < h, \phi^{(2)} >,$$

onde $\phi^{(1)} \in H$.
Coação:

(i)

$$\begin{aligned}
(Id \otimes L^*)L^*(\phi)(h) &= (Id \otimes L^*)(\sum \phi^{(1)} \otimes \phi^{(2)})(h) = \\
&= \sum \phi^{(1)} \otimes \phi^{(2)(1)} \otimes \phi^{(2)(2)}(h) = \\
&= \sum \phi^{(1)} \otimes \phi^{(2)(1)} < h, \phi^{(2)(2)} >= \\
&= \sum \phi^{(1)} \otimes < h_{(1)}, \phi^{(2)} > h_{(2)} = \\
&= \sum \phi^{(1)} < h_{(1)}, \phi^{(2)} > \otimes h_{(2)} = \\
&= \sum < h_{(1)}, \phi > h_{(2)} \otimes h_{(3)} = \\
&= \sum < h_{(1)}, \phi > \Delta(h_{(2)}) = \\
&= \Delta(\sum < h_{(1)}, \phi > h_{(2)}) = \\
&= \Delta(\sum \phi^{(1)} < h, \phi^{(2)} >) = \\
&= \sum \Delta(\phi^{(1)}) < h, \phi^{(2)} >= \\
&= \sum \phi^{(1)}{}_{(1)} \otimes \phi^{(1)}{}_{(2)} < h, \phi^{(2)} >= \\
&= (\Delta \otimes Id)L^*(\phi)(h)
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes Id)L^*(\phi)(h) &= (\varepsilon \otimes Id)(\sum \phi^{(1)} \otimes \phi^{(2)}(h)) = \\
&= \sum \varepsilon(\phi^{(1)} < h, \phi^{(2)} >) = \\
&= \varepsilon(\sum < h_{(1)}, \phi > h_{(2)}) = \\
&= \sum < h_{(1)}, \phi > \varepsilon(h_{(2)}) = \\
&= < \sum h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)}), \phi >= \\
&= < h, \phi >= \phi(h)
\end{aligned}$$

E H^* é H comódulo coálgebra:

(i)

$$\begin{aligned}
(Id\otimes\Delta)L^*(\phi)(h,k) &= (Id\otimes\Delta)(\sum\phi^{(1)}\otimes\phi^{(2)})(h,k) = \\
&= \sum\phi^{(1)}\otimes{\phi^{(2)}}_{(1)}\otimes{\phi^{(2)}}_{(2)}(h,k) = \\
&= \sum\phi^{(1)} < h,{\phi^{(2)}}_{(1)} >< k,{\phi^{(2)}}_{(2)} >= \\
&= \sum\phi^{(1)} < h\otimes k,{\phi^{(2)}}_{(1)}\otimes{\phi^{(2)}}_{(2)} >= \\
&= \sum\phi^{(1)} < h\otimes k,\Delta(\phi^{(2)}) >= \\
&= \sum\phi^{(1)} < hk,\phi^{(2)} >
\end{aligned}$$

Por outro lado temos que:

$$\begin{gathered}
\sum{\phi_{(1)}}^{(1)}{\phi_{(2)}}^{(1)}\otimes{\phi_{(1)}}^{(2)}\otimes{\phi_{(2)}}^{(2)}(h,k) = \\
= \sum{\phi_{(1)}}^{(1)}{\phi_{(2)}}^{(1)} < h,{\phi_{(1)}}^{(2)} >< k,{\phi_{(2)}}^{(2)} >= \\
= \sum{\phi_{(1)}}^{(1)} < h,{\phi_{(1)}}^{(2)} > {\phi_{(2)}}^{(1)} < k,{\phi_{(2)}}^{(2)} >= \\
= \sum < h_{(1)},\phi_{(1)} > h_{(2)} < k_{(1)},\phi_{(2)} > k_{(2)} = \\
= \sum < h_{(1)},\phi_{(1)} >< k_{(1)},\phi_{(2)} > h_{(2)}k_{(2)} = \\
= \sum < h_{(1)}\otimes k_{(1)},\Delta(\phi) > h_{(2)}k_{(2)} = \\
= \sum < h_{(1)}k_{(1)},\phi > h_{(2)}k_{(2)} = \\
\sum < (hk)_{(1)},\phi > (hk)_{(2)} = \\
= \sum\phi^{(1)} < hk,\phi^{(2)} >
\end{gathered}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\sum\phi^{(1)}\varepsilon(\phi^{(2)}) &= \sum\phi^{(1)} < 1,\phi^{(2)} >= \\
&= < 1,\phi > 1 =< 1,\phi >= \varepsilon(\phi)
\end{aligned}$$

■

Observação 1.7 *As definições de módulo algebra e coálgebra à esquerda e de comódulo álgebra e coálgebra à esquerda podem ser definidos também à direita.*

1.3 Estruturas Quasi-Triangulares

Definição 1.17 *Seja H uma álgebra de Hopf. Uma estrutura quasi-triangular em H é um elemento inversível $R \in H \otimes H$ tal que:*

(i) $(Id \otimes \Delta)R = R_{13}R_{12}$

(ii) $(\Delta \otimes Id)R = R_{13}R_{23}$

(iii) $\sigma\Delta(a) = R\Delta(a)R^{-1}$ *ou* $\sigma\Delta(a)R = R\Delta(a)$

Notação: $R = \sum_i s_i \otimes t_i$
$R_{12}, R_{13}, R_{23} \in H \otimes H \otimes H$ e

$R_{12} = \sum s_i \otimes t_i \otimes 1$
$R_{13} = \sum s_i \otimes 1 \otimes t_i$
$R_{23} = \sum 1 \otimes s_i \otimes t_i$

Com esta notação podemos escrever os axiomas da definição acima de outra maneira:

(i) $\sum s_i \otimes t_{i(1)} \otimes t_{i(2)} = \sum s_i s_j \otimes t_j \otimes t_i$

(ii) $\sum s_i \otimes s_j \otimes t_i t_j = \sum s_{i(1)} \otimes s_{i(2)} \otimes t_i$

(iii) $\sum a_{(2)} s_i \otimes a_{(1)} t_i = \sum s_j a_{(1)} \otimes t_j a_{(2)}$

Lema 1.2 *(i)* $(\varepsilon \otimes Id)R = (Id \otimes \varepsilon)R = 1$

(ii) $(S \otimes Id)R = R^{-1}$; $(Id \otimes S)R^{-1} = R$

(iii) $(S \otimes S)R = R$

Demonstração: Ver apêndice B.

∎

Proposição 1.4 *Se (H,R) é uma álgebra de Hopf quasi-triangular, então* $(H, \sigma R^{-1})$ *também o é.*

Demonstração: Ver apêndice B.

∎

Teorema 1.4 (Equação de Yang-Baxter) *Seja (H,R) uma álgebra de Hopf quasi-triangular. Então em* $H \otimes H \otimes H$ *a seguinte relação é satisfeita*

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

Demonstração: $\sigma\Delta = R\Delta R^{-1}$, vamos denotar $R^{-1} = \sum \alpha_i \otimes \beta_i$
Note que:

$$(\sigma\Delta \otimes Id)R = (\sigma \otimes Id)(\Delta \otimes Id)R = (\sigma \otimes Id)(R_{13}R_{23}) =$$

$$= (\sigma \otimes Id)(\sum s_i \otimes s_j \otimes t_i t_j) = \sum s_j \otimes s_i \otimes t_i t_j =$$

$$= (\sum 1 \otimes s_i \otimes t_i)(\sum s_j \otimes 1 \otimes t_j) = R_{23}R_{13} \quad (I)$$

Por outro lado,

$$(\sigma\Delta \otimes Id)R = (\sigma\Delta \otimes Id)(\sum s_i \otimes t_i) == \sum s_{i(2)} \otimes s_{i(1)} \otimes t_i =$$

$$= \sum s_j s_{i(1)} \alpha_k \otimes t_j s_{i(2)} \beta_k \otimes t_i = R_{12}((\Delta \otimes Id)R)R_{12}^{-1} =$$

$$= R_{12}R_{13}R_{23}R_{12}^{-1} \quad (II)$$

Agora, $(I) = (II)$, então

$$R_{23}R_{13} = R_{12}R_{13}R_{23}R_{12}^{-1}$$

$$R_{23}R_{13}R_{12} = R_{12}R_{13}R_{23}$$

■

A partir de agora faremos um análogo das estruturas quasi-triangulares no dual de $H \otimes H$. Para isso vamos utilizar a notação de produto de convolução definido na seção anterior.

Podemos introduzir a aplicação dual

$$r : H \otimes H \longrightarrow \mathbb{C}$$

e uma inversa segundo o produto de convolução em $\mathfrak{L}(H \otimes H, \mathbb{C})$ definida como

$$\bar{r} : H \otimes H \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que

(i) $r * \bar{r} = \bar{r} * r = \varepsilon \otimes \varepsilon$

(ii) $\mu^{op} * r = r * \mu$

(iii) $r(\mu \otimes Id) = r_{13} * r_{23}$

$r(Id \otimes \mu) = r_{13} * r_{12}$

onde $r_{12}, r_{13}, r_{23} : H \otimes H \otimes H \longrightarrow \mathbb{C}$ e

$r_{12} = r \otimes \varepsilon$
$r_{23} = \varepsilon \otimes r$
$r_{13} = (r \otimes \varepsilon)(Id \otimes \sigma)$

Em componentes temos que:

(i) $\sum r(a_{(1)} \otimes b_{(1)})\overline{r}(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) = \varepsilon(a)\varepsilon(b)$

Da mesma forma

$$\sum \overline{r}(a_{(1)} \otimes b_{(1)})r(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) = \varepsilon(a)\varepsilon(b)$$

(ii) $\sum b_{(1)}a_{(1)}r(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) = \sum r(a_{(1)} \otimes b_{(1)})a_{(2)}b_{(2)}$

(iii) $r(ab \otimes c) = \sum r(a \otimes c_{(1)})r(b \otimes c_{(2)})$

$r(a \otimes bc) = r(a_{(1)} \otimes c)r(a_{(2)} \otimes b)$

Proposição 1.5 *É verdade que:*

(i) $r(a \otimes 1) = r(1 \otimes a) = \varepsilon(a)$

(ii) $r(S \otimes Id) = \overline{r}$
$\overline{r}(Id \otimes S) = r$
$r(S \otimes S) = r$

Demonstração: Ver apêndice B.

■

Veremos a seguir o análogo do teorema de Yang-Baxter no caso dual.

Teorema 1.5 (Yang-Baxter Dual) *A seguinte equação é verdadeira*

$$r_{12} * r_{13} * r_{23} = r_{23} * r_{13} * r_{12}$$

Demonstração:

$$r_{12} * r_{13} * r_{23}(a \otimes b \otimes c) =$$

$$= \sum (r \otimes \varepsilon)(a_{(1)} \otimes b_{(2)} \otimes c_{(1)})(r \otimes \varepsilon)(Id \otimes \sigma)(a_{(2)} \otimes b_{(2)} \otimes c_{(2)})(\varepsilon \otimes r)(a_{(3)} \otimes b_{(3)} \otimes c_{(3)}) =$$

$$= \sum r(a_{(1)} \otimes b_{(1)})\varepsilon(c_{(1)})r(a_{(2)} \otimes c_{(2)})\varepsilon(b_{(2)})\varepsilon(a_{(3)})r(b_{(3)} \otimes c_{(3)}) =$$

$$= \sum r(a_{(1)} \otimes b_{(1)})r(a_{(2)} \otimes c_{(1)})r(b_{(2)} \otimes c_{(2)}) \qquad (I)$$

De mesma forma temos que:

$$r_{23} * r_{13} * r_{12}(a \otimes b \otimes c) = \sum r(b_{(1)} \otimes c_{(1)})r(a_{(1)} \otimes c_{(2)})r(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) \qquad (II)$$

Devemos agora provar que (I) = (II)

$$\begin{aligned}
(I) &= \sum r(a_{(1)} \otimes b_{(1)})r(a_{(2)}b_{(2)} \otimes c) = \\
&= r(\sum r(a_{(1)} \otimes b_{(1)})a_{(2)}b_{(2)} \otimes c) = \\
&= r(\sum b_{(1)}a_{(1)}r(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) \otimes c) = \\
&= \sum r(b_{(1)}a_{(1)} \otimes c)r(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) = \\
&= \sum r(b_{(1)} \otimes c_{(1)})r(a_{(1)} \otimes c_{(2)})r(a_{(2)} \otimes b_{(2)}) = (II)
\end{aligned}$$

Para provar esta igualdade utilizamos os axiomas (ii) e (iii) da aplicação dual r.

■

Para finalizar esta seção e desta maneira o capítulo 1, vamos relacionar a matriz R com H-módulos e a matriz r dual com H-comódulos.

Seja (H, R) uma álgebra de Hopf quasi-triangular e V e W dois H-módulos. Podemos definir uma estrutura de H-módulo em $V \otimes W$ da seguinte maneira:

$$a \triangleright (v \otimes w) = \Delta(a)(v \otimes w) = \sum (a_{(1)} \triangleright v) \otimes (a_{(2)} \triangleright w)$$

onde $a \in H$, $v \in V$ e $w \in W$.

Vamos agora definir um isomorfismo de H-módulos entre $V \otimes W$ e $W \otimes V$ da seguinte maneira:

$$C^R_{v,w} : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$$

onde $C^R_{v,w} = \sigma R$, ou seja, $C^R_{v,w}(v \otimes w) = \sum (t_i \triangleright w) \otimes (s_i \triangleright v)$

Lema 1.3 *A aplicação*

$$(C^R_{v,w})^{-1} = R^{-1}\sigma : W \otimes V \longrightarrow V \otimes W$$

é inversa à direita e à esquerda de $C^R_{v,w}$

Demonstração: Ver apêndice B.

■

Proposição 1.6 $C^R_{v,w}$ *é um isomorfismo de H-módulos.*

Demonstração: Ver apêndice B.

■

Teorema 1.6 *Em $U \otimes V \otimes W$, H-módulos com (H,R) quasi-triangulares temos:*

$$(Id_W \otimes C^R_{U,V})(C^R_{U,W} \otimes Id_V)(Id_U \otimes C^R_{V,W}) = (C^R_{V,W} \otimes Id_U)(Id_V \otimes C^R_{U,W})(C^R_{U,V} \otimes Id_W)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
&(Id_W \otimes C^R_{U,V})(C^R_{U,W} \otimes Id_V)(Id_U \otimes C^R_{V,W})(u \otimes v \otimes w) = \\
&= (Id_W \otimes C^R_{U,V})(C^R_{U,W} \otimes Id_V)(u \otimes t_i w \otimes s_i v) = \\
&= (Id_W \otimes C^R_{U,V})(t_j t_i w \otimes s_j u \otimes s_i v) = \\
&t_j t_i w \otimes t_k s_i v \otimes s_k s_j u \qquad (I)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&(C^R_{V,W} \otimes Id_U)(Id_V \otimes C^R_{U,W})(C^R_{U,V} \otimes Id_W)(u \otimes v \otimes w) = \\
&= (C^R_{V,W} \otimes Id_U)(Id_V \otimes C^R_{U,W})(t_i v \otimes s_i u \otimes w) = \\
&= (C^R_{V,W} \otimes Id_U)(t_i v \otimes t_j w \otimes s_j s_i u) = \\
&= t_k t_j w \otimes s_k t_i v \otimes s_j s_i u \qquad (II)
\end{aligned}$$

As expressões (I) e (II) são iguais devido à equação de Yang-Baxter.

■

Em particular se $U = V = W$ temos que $C^R_{V,V}$ é uma solução da equação de Yang-Baxter em $V \otimes V$. Portanto para qualquer V, H-módulo(em particular o próprio H) a estrutura quasi-triangular R fornece uma solução explícita da equação de Yang-Baxter. Por isto R também é chamada de *matriz R universal.*

A partir de agora vamos relacionar a matriz r dual e comódulos.

Sejam V, W H-comódulos à esquerda.

$$\begin{array}{rccc} \delta^V : & V & \longrightarrow & H \otimes V \\ & v & \longmapsto & \sum v^{(1)} \otimes v^{(2)} \end{array}$$

onde $v^{(1)} \in H$ e $v^{(2)} \in V$

e

$$\begin{array}{rccc} \delta^W : & W & \longrightarrow & H \otimes W \\ & w & \longmapsto & \sum w^{(1)} \otimes w^{(2)} \end{array}$$

onde $w^{(1)} \in H$ e $w^{(2)} \in V$

Podemos definir uma estrutura de H-comódulo em $V \otimes W$ da seguinte maneira. Considere o seguinte diagrama de flechas:

$$V \otimes W \xrightarrow{\delta^V \otimes \delta^W} H \otimes V \otimes H \otimes W \xrightarrow{\sigma}$$

$$\xrightarrow{\sigma} H \otimes H \otimes V \otimes W \xrightarrow{\mu \otimes Id_V \otimes W} H \otimes V \otimes W$$

Então

$$\delta^{V \otimes W} = \sum v^{(1)} w^{(1)} \otimes v^{(2)} \otimes w^{(2)}$$

A estrutura quasi triangular dual $r : H \otimes H \longrightarrow \mathbb{C}$ induz um isomorfismo de H-comódulos à esquerda entre $V \otimes W$ e $W \otimes V$ definido da seguinte da maneira:

$$C^r_{V,W} = \sum r(w^{(1)} \otimes v^{(1)}) w^{(2)} \otimes v^{(2)}$$

Lema 1.4 *$C^r_{V,W}$ é bijetora.*

Demonstração: Basta mostrar que

$$(C^r_{V,W})^{-1} = \overline{C}^r_{W,V}(w \otimes v) = \sum \overline{r}(w^{(1)} \otimes v^{(1)}) v^{(2)} \otimes w^{(2)}$$

é inversa à direita e à esquerda de $C^r_{V,W}$. E para isso procedemos de maneira análoga como no lema (1.3) juntamente com o axioma (i) da matriz r e os axiomas de comódulo.

■

Proposição 1.7 *$C^r_{V,W}$ é isomorfismo de H-comódulos à esquerda*

Demonstração: Ver apêndice B.

∎

Teorema 1.7 *Para todo U, V, W H-comódulos à esquerda temos;*

$$(C^r_{V,W} \otimes Id_U)(Id_V \otimes C^r_{U,W})(C^r_{U,V} \otimes Id_W) = (Id_W \otimes C^r_{U,V})(C^r_{U,W} \otimes Id_V)(Id_U \otimes C^r_{V,W})$$

Demonstração:

$$(C^r_{V,W} \otimes Id_U)(Id_V \otimes C^r_{U,W})(C^r_{U,V} \otimes Id_W)(u \otimes v \otimes w) =$$

$$= (C^r_{V,W} \otimes Id_U)(Id_V \otimes C^r_{U,W})(\sum r(v^{(1)} \otimes u^{(1)})v^{(2)}u^{(2)} \otimes w) =$$

$$= (C^r_{V,W} \otimes Id_U)(\sum r(v^{(1)} \otimes u^{(1)})r(w^{(1)} \otimes u^{(2)(1)})(v^{(2)} \otimes w^{(2)} \otimes u^{(2)(2)}) =$$

$$= \sum r(v^{(1)} \otimes u^{(1)})r(w^{(1)} \otimes u^{(2)(1)})r(w^{(2)(1)} \otimes v^{(2)(1)})(w^{(2)(2)} \otimes v^{(2)(2)} \otimes u^{(2)(2)}) =$$

$$= \sum r(v^{(1)}{}_{(1)} \otimes u^{(1)}{}_{(1)})r(w^{(1)}{}_{(1)} \otimes u^{(1)})_{(2)}r(w^{(1)}{}_{(2)} \otimes v^{(1)}{}_{(2)})(w^{(2)}{}_{(2)} \otimes v^{(2)}{}_{(2)} \otimes u^{(2)}{}_{(2)}) =$$

$$= \sum r(w^{(1)}{}_{(1)} \otimes v^{(1)}{}_{(1)})r(w^{(1)}{}_{(2)} \otimes u^{(1)})_{(1)}r(v^{(1)}{}_{(2)} \otimes u^{(1)}{}_{(2)})(w^{(2)}{}_{(2)} \otimes v^{(2)}{}_{(2)} \otimes u^{(2)}{}_{(2)}) =$$

$$= \sum r(w^{(1)} \otimes v^{(1)})r(w^{(2)(1)} \otimes u^{(1)})r(v^{(2)(1)} \otimes u^{(2)(1)})(w^{(2)(2)} \otimes v^{(2)(2)} \otimes u^{(2)(2)}) =$$

$$= (Id_W \otimes C^r_{U,V})(\sum r(w^{(1)} \otimes v^{(1)})r(w^{(2)(1)} \otimes u^{(1)})) =$$

$$= (Id_W \otimes C^r_{U,V})(C^r_{U,W} \otimes Id_V)(\sum r(w^{(1)} \otimes v^{(1)})(u \otimes w^{(2)} \otimes v^{(2)}) =$$

$$= (Id_W \otimes C^r_{U,V})(C^r_{U,W} \otimes Id_V)(Id_U \otimes C^r_{V,W})(u \otimes v \otimes w)$$

Na quarta e sexta igualdade foi usado o axioma de comódulo, e na quinta igualdade a equação de Yang-Baxter dual.

∎

Em particular se $U = V = W$, $C^r_{V,V}$ é um isomorfismo de comódulos entre $V \otimes V$ e $V \otimes V$ que satisfaz a equação de Yang-Baxter.

Definição 1.18 *Se V é um H-módulo(comódulo) com $C^R_{V,V}(C^r_{V,V})$ uma matriz R em $V \otimes V$, então dizemos que V é um espaço vetorial trançado(cotrançado).*

Capítulo 2

O Plano Quântico e Suas Simetrias

Estudamos no capítulo anterior os princípios de álgebras de Hopf bem como o que vem a ser uma ação e uma coação. No presente capítulo, trataremos do plano quântico $k_q[x, y]$ e sua relação com a extensão de Ore. A seguir estudaremos algumas algebras de Hopf específicas, entre elas, a algebra universal envolvente $U_q(sl(2))$, suas representações e como ela age no plano quântico.

2.1 O Plano Quântico

Seja q um elemento inversível do corpo k e seja I_q o ideal bilateral da álgebra livre $K\{x, y\}$ gerada por elementos da forma $yx - qxy$. Define-se o plano quântico como a álgebra quociente

$$k_q[x, y] = K\{x, y\}/I_q$$

Quando $q \neq 1$, álgebra $k_q[x, y]$ é não comutativa.
Em um certo sentido, o plano quântico é uma extensão não comutativa do plano afim, cuja álgebra de coordenadas é dada pela álgebra de polinômios

$$k[x, y] = k\{x, y\}/ < xy - yx >$$

A seguir apresentaremos a relação do plano quântico com extensão de Ore.

Seja A uma álgebra e $A[t]$ um A-módulo livre à esquerda de todos os polinômios da forma

$$P = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0 t^0$$

com coeficientes em A. Se $a_n \neq 0$, dizemos que o grau de P é n e denotamos por $\partial P = n$, por convenção $\partial(0) = -\infty$, onde 0 é o polinômio identicamente nulo.

Definição 2.1 *Seja α um endomorfismo de A, tal que $\alpha(1) = 1$. Uma α-derivação de A é um endomorfismo δ de A tal que*

$$\delta(ab) = \alpha(a)\delta(b) + \delta(a)b \quad , \qquad \forall \;\; a, b \in A$$

Lema 2.1 $\delta(1) = 0$

Demonstração:

$$\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \alpha(1)\delta(1) + \delta(1)1 = \delta(1) + \delta(1)$$

Segue portanto que $\delta(1) = 0$

■

Teorema 2.1 *É verdade que:*

(i) Assuma que $A[t]$ tem uma estrutura de álgebra tal que a inclusão natural de A em $A[t]$ é um morfismo de álgebras, e temos que $\partial(PQ) = \partial(P) + \partial(Q)$ para qualquer par (P, Q) de elementos de $A[t]$. Então A não tem divisores de zero e existe um único endomorfismo injetor α de A e uma única α-derivação δ de A tal que

$$ta = \alpha(a)t + \delta(a) \quad , \quad \forall \ a \in A \qquad (1)$$

(ii) Reciprocamente, seja A uma álgebra sem divisores de zero. Dado um endomorfismo algébrico injetor α de A e uma α-derivação δ de A, existe uma única estrutura de álgebra em $A[t]$ tal que a inclusão de A em $A[t]$ é um morfismo de álgebra e a relação (1) é verdade para todo $a \in A$.

Demonstração: Ver [9].

■

Observação 2.1 *A álgebra definida pela parte (ii) do teorema anterior é denotada por $A[t, \alpha, \delta]$ e é chamada de Extensão de Ore anexada aos dados (A, α, δ)*

O próximo resultado relaciona o grupo quântico com extesnão de ore.

Proposição 2.1 *Se α é um automorfismo do anel de polinômios $K[x]$ definido por*

$$\alpha(x) = qx$$

então

$$k_q[x, y] \cong k[x][y, \alpha, 0]$$

onde $k[x][y, \alpha, 0]$ é a extensão de ore anexada aos dados $(k[x], \alpha, 0)$

Demostração: Defina um morfismo de álgebra $\varphi : K\{x, y\} \longrightarrow k[x][y, \alpha, 0]$ por $\varphi(x) = x$ e $\varphi(y) = y$. Note que

$$\varphi(I_q) = \varphi(yx - qxy) = \varphi(y)\varphi(x) - q\varphi(x)\varphi(y) = yx - qxy = \alpha(x)y - qxy = 0$$

Então existe $\overline{\varphi} : k_q[x, y] \longrightarrow k[x][y, \alpha, 0]$ morfismo de álgebra. Como x e y geram a extensão de Ore, segue que $\overline{\varphi}$ é sobrejetora. Agora defina

$$\begin{array}{rccc} \psi : & k[x][y, \alpha, 0] & \longrightarrow & K_q[x, y] \\ & x^i y^j & \longmapsto & x^i y^j \end{array}$$

onde $\{x^i y^j\}_{i,j>0}$ é uma base ordenada.

Então

$$\psi \circ \overline{\varphi}(x^i y^j) = \psi(\overline{\varphi}(x)^i \overline{\varphi}(y)^j) = \psi(x^i y^j) = x^i y^j$$

Logo $\overline{\varphi}$ é injetora. Seguem deste modo que $\overline{\varphi}$ é um isomorfismo de álgebras.

■

2.2 Geometria e Ação de Grupo

O título deste texto nos fala sobre geometria não-comutativa, mas até agora, ainda não definimos o que é uma geometria e ainda mais não-comutativa, faremos isto nesta scção.

Segundo a perspectiva de Felix Klein no programa de Erlanger para termos uma *Geometria* precisamos de[10]:

- Um espaço, ou seja, um conjunto de pontos onde possamos trabalhar.
- Uma ação de grupo neste espaço.

Por exemplo, considere o espaço como sendo o espaço complexo de dimensão 2:

$$\mathbb{C}^2 = \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{C}\}$$

Considere agora o grupo $GL(2)$, ou seja, o espaço das matrizes 2×2 complexas invertíveis. Podemos então definir uma ação deste grupo no espaço $\mathbb{C}^2$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & GL(2) \times \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & (g, p) & \longmapsto & \alpha_g(p) \end{array}$$

tal que

$$\alpha_g(\alpha_h(p)) = \alpha_{gh}(p)$$
$$\alpha_e(p) = p$$

Em termos de elementos é o seguinte:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

O plano afim $k[x, y] = k\{x, y\}/(xy - yx)$ pode ser considerado como a álgebra polinomial das aplicações que vão de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}$ geradas por:

$$\overline{x}(p) = x, \qquad \overline{y}(p) = y$$

onde $p = (x, y)$

Podemos dualizar o conceito de ação considerando a aplicação

$$\delta_l : \ k[x, y] \longrightarrow F(GL(2)) \otimes k[x, y]$$

onde

$$Fun(GL(2)) = k[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}]$$

de forma que esta seja compatível com a ação de grupo. Este tipo de aplicação como já sabemos denomina-se co-ação à esquerda da álgebra de Hopf $Fun(GL(2))$ sobra a álgebra de polinômios do plano afim. Verificaremos agora como funciona os geradores de $Fun(GL(2))$ quando aplicados num elemento do grupo $GL(2)$.

Seja $g \in GL(2)$ onde

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\overline{a}(g) &= a \\
\overline{b}(g) &= b \\
\overline{c}(g) &= c \\
\overline{d}(g) &= d
\end{aligned}$$

Podemos agora reconstruir a ação usando o conceito de co-ação.

$$\delta_l(\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix})(g,p) = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}(g) \otimes \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}(p)$$

Isto é,

$$\delta_l(\overline{x})(g,p) = \overline{a}(g)\overline{x}(p) + \overline{b}(g)\overline{y}(p)$$

e

$$\delta_l(\overline{y})(g,p) = \overline{c}(g)\overline{x}(p) + \overline{d}(g)\overline{y}(p)$$

Portanto temos que:

$$\delta_l(\overline{x})(g,p) = ax + by$$

e

$$\delta_l(\overline{y})(g,p) = cx + dy$$

Com isto chegamos a conclusão que a ação de grupo no espaço é dual á co-ação de álgebra de Hopf sobre a álgebra das coordenadas. Se generalizarmos isto para álgebras não comutativas, como por exemplo, o plano quântico, obtemos o que chamamos de Geometria Não-Comutativa.

2.3 Módulos sobre a Álgebra Universal Envolvente $U_q(sl(2))$

Seja $SL_q(2) = k\{a,b,c,d\}/I$ onde I é o ideal gerado por $ac - qca$, $ab - qba$, $bc - cb$, $bd - qdb$, $cd - qdc$, $ad - da - (q - q^{-1})bc$ e $ad - qcb - 1$.

Defina as funções:

$$\widetilde{\Delta} : \{a,b,c,d\} \longrightarrow SL_q(2) \otimes SL_q(2)$$

por

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}(a) &= a \otimes a + b \otimes c \\
\widetilde{\Delta}(b) &= a \otimes b + b \otimes d \\
\widetilde{\Delta}(c) &= c \otimes a + d \otimes c \\
\widetilde{\Delta}(d) &= c \otimes b + d \otimes d
\end{aligned}$$

$$\widetilde{\varepsilon}:\{a,b,c,d\}\longrightarrow k$$

por

$$\begin{aligned}\widetilde{\varepsilon}(a) &= 1\\ \widetilde{\varepsilon}(b) &= 0\\ \widetilde{\varepsilon}(c) &= 0\\ \widetilde{\varepsilon}(d) &= 1\end{aligned}$$

$$\widetilde{S}:\{a,b,c,d\}\longrightarrow SL_q(2)$$

por

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(a) &= d\\ \widetilde{S}(b) &= -q^{-1}b\\ \widetilde{S}(c) &= -qc\\ \widetilde{S}(d) &= a\end{aligned}$$

Pelo teorema (1.2) , existem únicos morfismos de álgebra

$$\overline{\Delta}:k\{a,b,c,d\}\longrightarrow SL_q(2)\otimes SL_q(2)$$

$$\overline{\varepsilon}:k\{a,b,c,d\}\longrightarrow k$$

e anti-morfismo de álgebra

$$\overline{S}:k\{a,b,c,d\}\longrightarrow SL_q(2)$$

tal que:

$$\overline{\Delta}|_{\{a,b,c,d\}}=\widetilde{\Delta}$$

$$\overline{\varepsilon}|_{\{a,b,c,d\}}=\widetilde{\varepsilon}$$

$$\overline{S}|_{\{a,b,c,d\}}=\widetilde{S}$$

Considere agora as relações do ideal I formada por elementos do conjunto $\{a,b,c,d\}$. Mostraremos que $\widetilde{\Delta}$, $\widetilde{\varepsilon}$ e $\widetilde{S}$, também satisfazem as relações do ideal I. De fato,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}(a)\widetilde{\Delta}(b) &= (a\otimes a+b\otimes c)(a\otimes b+b\otimes d)=\\ &= a^2\otimes ab+ab\otimes ad+ba\otimes cb+b^2\otimes cd=\\ &= a^2\otimes qba+qba\otimes ad+ba\otimes bc+b^2\otimes qdc=\\ &= a^2\otimes qba+ba\otimes(qad+bc)+b^2\otimes qdc=\\ &= a^2\otimes qba+ba\otimes(qda+q^2bc-bc+bc)+b^2\otimes qdc=\\ &= a^2\otimes qba+ba\otimes qda+ba\otimes q^2bc+b^2\otimes qdc=\\ &= a^2\otimes qba+ba\otimes qda+q^{-1}ab\otimes q^2bc+b^2\otimes qdc=\\ &= a^2\otimes qba+ba\otimes qda+ab\otimes qbc+b^2\otimes qdc\\ &= q(a^2\otimes ba+ba\otimes da+ab\otimes bc+b^2\otimes dc)=\\ &= q\widetilde{\Delta}(b)\widetilde{\Delta}(a)\end{aligned}$$

Analogamente prova-se para as outras relações.

Também temos que:

$$\widetilde{\varepsilon}(a)\widetilde{\varepsilon}(b) = \mathbf{1} \cdot 0 = 0 = q \cdot 0 \cdot \mathbf{1} = q\widetilde{\varepsilon}(b)\widetilde{\varepsilon}(a)$$

Idem para as outras relações.

Queremos que $\widetilde{S}$ satisfaça também as relações do ideal, mas vamos precisar que $\widetilde{S}$ seja anti-morfismo de álgebra, as relaçoes são provadas de maneira difernte. Na verdade precisamos provar que

$$\widetilde{S}(b)\widetilde{S}(a) = q\widetilde{S}(a)\widetilde{S}(b)$$

De fato,

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(b)\widetilde{S}(a) &= -q^{-1}bd = -q^{-1}qdb = -db = \\ &= -qdq^{-1}b = q\widetilde{S}(a)\widetilde{S}(b)\end{aligned}$$

Análogo para as outras relações.

Portanto de acordo com o corolário(1.1) temos que existem únicos morfismos de álgebra

$$\Delta : SL_q(2) \longrightarrow SL_q(2) \otimes SL_q(2)$$
$$\varepsilon : SL_q(2) \longrightarrow k$$

e anti-morfismo de álgebra

$$S : SL_q(2) \longrightarrow SL_q(2)$$

Estes morfismos são chamados respectivamente de Coproduto, Counidade e Antípoda.

A seguir provaremos que $SL_q(2)$ é uma álgebra de Hopf. De acordo com a proposição (1.1) , basta provar o axiomas de coassociatividade, counidade e antípoda para os geradores.

Coassociatividade

$$\begin{aligned}(Id \otimes \Delta) \circ \Delta(a) &= (Id \otimes \Delta)(a \otimes a + b \otimes c) = \\ &= a \otimes \Delta(a) + b \otimes \Delta(c) = \\ &= a \otimes (a \otimes a + b \otimes c) + b \otimes (c \otimes a + d \otimes c) = \\ &= a \otimes (a \otimes a) + a \otimes (b \otimes c) + b \otimes (c \otimes a) + b \otimes (d \otimes c) = \\ &= (a \otimes a) \otimes a + (a \otimes b) \otimes c + (b \otimes c) \otimes a + (b \otimes d) \otimes c = \\ &= (a \otimes a + b \otimes c) \otimes a + (a \otimes b + b \otimes d) \otimes c = \\ &= \Delta(a) \otimes a + \Delta(b) \otimes c = \\ &= (\Delta \otimes Id)(a \otimes a + b \otimes c) = \\ &= (\Delta \otimes Id) \circ \Delta(a)\end{aligned}$$

Análogo para os outros geradores.

Counidade

$$\begin{aligned}(\varepsilon\otimes Id)\circ\Delta(a) &= (\varepsilon\otimes Id)(a\otimes a+b\otimes c)=\\ &= \varepsilon(a)a+\varepsilon(b)c=1\cdot a+0\cdot c=\\ &= a\cdot 1+b\cdot 0=a\varepsilon(a)+b\varepsilon(c)=\\ &= (Id\otimes\varepsilon)(a\otimes a+b\otimes c)=\\ &= (Id\otimes\varepsilon)\circ\Delta(a)\end{aligned}$$

Análogo para os outros geradores.

Antípoda

$$\begin{aligned}\mu\circ(S\otimes Id)\circ\Delta(a) &= \mu\circ(S\otimes Id)(a\otimes a+b\otimes c)=\\ &= S(a)a+S(b)c=da-q^{-1}bc=ad-qbc+q^{-1}bc-q^{-1}bc=\\ &= ad-qbc=ad-qcb=1=\eta\circ\varepsilon(a)\end{aligned}$$

A outra parte do axioma da antípoda obtém-se de maneira análoga, assim como o cálculo para os outros geradores.
Portanto concluímos que $SL_q(2)$ é uma álgebra de Hopf com coproduto, counidade e antípoda como definidos acima.

Vamos definir agora uma coação à direita de $SL_q(2)$ no plano quântico $k_q[x,y]$ dada por

$$\begin{array}{rccc}\delta_r: & k_q[x,y] & \longrightarrow & k_q[x,y]\otimes SL_q(2)\\ & x & \longmapsto & x\otimes a+y\otimes c\\ & y & \longmapsto & x\otimes b+y\otimes d\end{array}$$

Da mesma maneira podemos definir uma coação à esquerda dada por:

$$\begin{array}{rccc}\delta_l: & k_q[x,y] & \longrightarrow & SL_q(2)\otimes k_q[x,y]\\ & x & \longmapsto & a\otimes x+b\otimes y\\ & y & \longmapsto & c\otimes x+d\otimes y\end{array}$$

Imponha agora que

$$\delta_{r,l}(zw)=\delta_{r,l}(z)\delta_{r,l}(w)$$

Isto faz com que $k_q[x,y]$ seja um co-módulo álgebra.

Proposição 2.2 *$k_q[x,y]$ é $SL_q(2)$-comódulo à direita e à esquerda.*

Demonstração: Provaremos apenas para à direita, pois à esquerda é análogo.

(i)

$$\begin{aligned}(\delta_r\otimes Id)\delta_r(x) &= (\delta_r\otimes Id)(x\otimes a+y\otimes c)=\\ &= (\delta_r(x)\otimes a+\delta_r(y)\otimes c)=\\ &= x\otimes a\otimes a+y\otimes c\otimes a+x\otimes b\otimes c+y\otimes d\otimes c=\\ &= x\otimes\Delta(a)+y\otimes\Delta(c)\\ &= (Id\otimes\Delta)(x\otimes a+y\otimes c)=\\ &= (Id\otimes\Delta)\delta_r(x)\end{aligned}$$

Análogo para o gerador y

(ii)

$$\begin{aligned}(Id \otimes \varepsilon)\delta_r(x) &= (Id \otimes \varepsilon)(x \otimes a + y \otimes c) = \\ &= x\varepsilon(a) + y\varepsilon(c) = x = Id(x)\end{aligned}$$

Análogo para ogerador y

■

Proposição 2.3 *$k_q[x,y]$ tem estrutura de $SL_q(2)$-comódulo álgebra.*

Demonstração: Primeiramente devemos provar que

$$\delta_{r,l}(zw) = \delta_{r,l}(z)\delta_{r,l}(w)$$

Mas isto é trivial, pois definimos $\delta_{r,l}$ sobre os geradores de maneira a estender a coação para todo $k_q[x,y]$.

E por definição temos $\delta_{r,l}(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$.

■

Definimos a álgebra $U_q(sl(2))$ como o quociente da álgebra livre gerada por $K, X_\pm$ e K^{-1} pelo ideal bilateral gerado pelas relações

$$KX_\pm K^{-1} - q^{\pm 2}X_\pm$$

$$[X_+, X_-] - \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$$

Defina as seguintes funções:

$$\widetilde{\Delta} : \{K, X_\pm, K^{-1}\} \longrightarrow U_q(sl(2)) \otimes U_q(sl(2))$$

por

$$\widetilde{\Delta}(X_+) = \mathbf{1} \otimes X_+ + X_+ \otimes K \tag{2.1}$$
$$\widetilde{\Delta}(X_-) = X_- \otimes K^{-1} + \mathbf{1} \otimes X_- \tag{2.2}$$
$$\widetilde{\Delta}(K) = K \otimes K \tag{2.3}$$
$$\widetilde{\Delta}(K^{-1}) = K^{-1} \otimes K^{-1} \tag{2.4}$$

$$\widetilde{\varepsilon} : \{K, X_\pm, K^{-1}\} \longrightarrow k$$

por

$$\begin{aligned}\widetilde{\varepsilon}(\mathbf{1}) &= \widetilde{\varepsilon}(K^{\pm 1}) = 1 \\ \widetilde{\varepsilon}(X_\pm) &= 0\end{aligned}$$

$$\widetilde{S}:\{K,X_{\pm},K^{-1}\}\longrightarrow U_q(sl(2))$$

por

$$\begin{aligned}\widetilde{S}K^{\pm 1} &= K^{\mp 1}\\ \widetilde{S}X_+ &= -K^{-1}X_+,\\ \widetilde{S}X_- &= -X_-K\end{aligned}$$

Pelo teorema (1.2) podemos estender estas funções para uma álgebra livre, tal que elas se tornem morfismos de álgebra. Calculemos agora $\widetilde{\Delta}$, $\widetilde{\varepsilon}$ e $\widetilde{S}$ nas relações da álgebra.

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}(K)\widetilde{\Delta}(X_+)\widetilde{\Delta}(K^{-1}) &= (K\otimes K)(1\otimes X_+ + X_+\otimes K)(K^{-1}\otimes K^{-1}) =\\ &= (K\otimes KX_+ + KX_+\otimes K^2)(K^{-1}\otimes K^{-1}) =\\ &= 1\otimes KX_+K^{-1} + KX_+K^{-1}\otimes K =\\ &= 1\otimes q^2X_+ + q^2X_+\otimes K =\\ &= q^2(1\otimes X_+ + X_+\otimes K) =\\ &= q^2\widetilde{\Delta}(X_+)\end{aligned}$$

Idem para as outras relações.

Da mesma maneira temos que

$$\begin{aligned}\widetilde{\varepsilon}(K)\widetilde{\varepsilon}(X_+)\widetilde{\varepsilon}(K^{-1}) &= 1\cdot 0\cdot 1 = 0 = q^2\cdot 0 =\\ &= q^2\widetilde{\varepsilon}(X_+)\end{aligned}$$

Análogo para as outras relações.

De maneira análoga como para a álgebra $SL_q(2)$, S deve satisfazer as relações da álgebra $U_q(sl(2))$ de uma maneira diferente, já que queremos um anti-morfismo de álgebra. De fato,

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(K^{-1})\widetilde{S}(X_+)\widetilde{S}(K) &= K(-K^{-1}X_+)K^{-1} = -X_+K^{-1} =\\ &= -K^{-1}KX_+K^{-1} = -K^{-1}q^2X_+ = q^2\widetilde{S}(X_+)\end{aligned}$$

Portanto de acordo com o corolário(1.1), existem únicos morfismos de algebras

$$\Delta : U_q(sl(2))\longrightarrow U_q(sl(2)\otimes U_q(sl(2))$$

$$\varepsilon : U_q(sl(2))\longrightarrow k$$

e anti-morfismo de álgebra

$$S : U_q(sl(2))\longrightarrow U_q(sl(2))$$

Estes morfismos são chamados respectivamente de Coproduto, Counidade e Antípoda.

Par provarmos que $U_q(sl(2))$ é uma álgebra de Hopf, basta provarmos a veracidade dos axiomas de coassociatividade, counidade e antípoda nos geradores comforme o proposição (1.1) .

Coassiciatividade

$$\begin{aligned}
(\Delta\otimes Id)\circ\Delta(X_+) &= (\Delta\otimes Id)(\mathbf{1}\otimes X_+ + X_+\otimes K) = \\
&= \Delta(\mathbf{1})\otimes X_+ + \Delta(X_+)\otimes K = \\
&= (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\otimes X_+ + (\mathbf{1}\otimes X_+)\otimes K + (X_+\otimes K)\otimes K = \\
&= \mathbf{1}\otimes(\mathbf{1}\otimes X_+) + \mathbf{1}\otimes(X_+\otimes K) + X_+\otimes(K\otimes K) = \\
&= \mathbf{1}\otimes(\mathbf{1}\otimes X_+ + X_+\otimes K) + X_+\otimes(K\otimes K) = \\
&= \mathbf{1}\otimes\Delta(X_+) + X_+\otimes\Delta(K) = \\
&= (Id\otimes\Delta)(\mathbf{1}\otimes X_+ + X_+\otimes K) = \\
&= (Id\otimes\Delta)\circ\Delta(X_+)
\end{aligned}$$

Análogo para os outros geradores.

Counidade

$$\begin{aligned}
(Id\otimes\varepsilon)\circ\Delta(X_+) &= (Id\otimes\varepsilon)(\mathbf{1}\otimes X_+ + X_+\otimes K) = \\
&= \mathbf{1}\varepsilon(X_+) + X_+\varepsilon(K) = \\
&= \mathbf{1}\cdot 0 + X_+\cdot 1 = \mathbf{1}\cdot X_+ + 0\cdot K = \\
&= \varepsilon(\mathbf{1})X_+ + \varepsilon(X_+)K = \\
&= (\varepsilon\otimes Id)(\mathbf{1}\otimes X_+ + X_+\otimes K) = \\
&= (\varepsilon\otimes Id)\circ\Delta(X_+)
\end{aligned}$$

Idem para o restante dos geradores.

Da mesma forma temos o axioma da antípoda. Desta forma chegamos a conclusão que a álgebra $U_q(sl(2))$ é uma álgebra de Hopf.

Defina o emparelhamento de um elemento $X \in U_q(sl(2))$ e $u \in SL_q(2)$ por

$$<\ ,\ >:\ U_q(sl(2))\otimes SL_q(2) \longrightarrow \mathbb{C}$$

onde $< X, u >$ representa o valor de X em u

Vamos usar o emparelhamento, para calcular como os geradores de $U_q(sl(2))$ que são $K, X_\pm$ atuam nos geradores de $SL_q(2)$ a, b, c e d. Para isso precisamos de uma realização matricial para os geradores de $U_q(sl(2))$, são elas:

$$K = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, \quad X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Facilmente verifica-se que esta realização satisfaz as relações da álgebra $U_q(sl(2))$. Agora podemos obter todos os possíveis emparelhamentos entre os geradores de $U_q(sl(2))$

e os geradores de $SL_q(2)$. Eles são dados por:

$$\begin{array}{llll} <K,a> \; = \; q & <K,b> = 0 & <K,c> = 0 & <K,d> = q^{-1} \\ <X_+,a> \; = \; 0 & <X_+,b> = 1 & <X_+,c> = 0 & <X_+,d> = 0 \\ <X_-,a> \; = \; 0 & <X_-,b> = 0 & <X_-,c> = 1 & <X_-,d> = 0 \end{array} \tag{2.5}$$

Teorema 2.2 *Seja $<\ ,\ >$ um emparelhamento, como definido acima, primeiramente temos que $<\ ,\ >$ é único. Se o emparelhamento for não degenerado, isto é, se $<X,u>=0$ para todo u, então $X=0$, e vice versa, então as álgebras envolvidas no emparelhamento são duais.*

□

Portanto com o emparelhamento definido acima para $SL_q(2)$ e $U_q(sl(2))$, que é não-degenerado, segue pelo teorema anterior que $SL_q(2)$ e $U_q(sl(2))$ são duais. Para mais detalhe ver [11].

O emparelhamento é definido de forma a termos:

$$<X_1X_2,u>=<X_1\otimes X_2,\Delta u>$$

e

$$<\Delta X,u_1\otimes u_2>=<X,u_1u_2>$$

e além disso

$$<X_1\otimes X_2,u_1\otimes u_2>=<X_1,u_1><X_2,u_2>$$

E a interação entre unidade e counidade é descrita pelas seguintes relações:

$$<\mathbf{1}_{U_q(sl(2))},u>=\varepsilon_{SL_q(2)}(u)$$

$$<X,\mathbf{1}_{SL_q(2)}>=\varepsilon_{U_q(sl(2))}(X)$$

Podemos dualizar o conceito de coação à direita de $SL_q(2)$ e obter uma ação à esquerda de $U_q(sl(2))$ sobre o plano quântico dada por

$$\begin{array}{rccc} \triangleright: & U_q(sl(2))\otimes k_q[x,y] & \longrightarrow & K_q[x,y] \\ & X\otimes z & \longmapsto & X\triangleright z=\sum z^{(2)}<X,z^{(1)}> \end{array}$$

onde $z^{(1)}\in SL_q(2)$ e $z^{(2)}\in k_q[x,y]$

De fato é uma ação:

$$\begin{aligned} X_1\triangleright(X_2\triangleright z) &= X_1\triangleright(\sum z^{(2)}<X_2,z^{(1)}>)= \\ &= \sum z^{(2)(2)}<X_1,z^{(2)(1)}><X_2,z^{(1)}>= \\ &= \sum z^{(2)}<X_1,{z^{(1)}}_{(2)}><X_2,{z^{(1)}}_{(1)}>= \\ &= \sum z^{(2)}<X_1\otimes X_2,{z^{(1)}}_{(2)}\otimes {z^{(1)}}_{(1)}>= \\ &= \sum z^{(2)}<X_1\otimes X_2,\Delta(z^{(1)})>= \\ &= \sum z^{(2)}<X_1X_2,z^{(1)}>= \\ &= X_1X_2\triangleright z \end{aligned}$$

Também,

$$\mathbf{1} \triangleright z = \sum z^{(2)} < \mathbf{1}, z^{(1)} >= z^{(2)}\varepsilon(z^{(1)}) = z$$

Proposição 2.4 *$k_q[x,y]$ é $U_q(sl(2))$ módulo álgebra.*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
X \triangleright (uv) &= \sum (uv)^{(2)} < X, (uv)^{(1)} >= \sum u^{(2)}v^{(2)} < X, u^{(1)}v^{(1)} >= \\
&= \sum u^{(2)}v^{(2)} < \Delta(X), u^{(1)} \otimes v^{(1)} >= \\
&= \sum u^{(2)} < X_{(1)}, u^{(1)} > v^{(2)} < X_{(2)}, v^{(1)} >= \\
&= (X_{(1)} \triangleright u)(X_{(2)} \triangleright v)
\end{aligned}$$

Da mesma maneira,

$$X \triangleright \mathbf{1} = \sum \mathbf{1}^{(2)} < X, \mathbf{1}^{(1)} >= \varepsilon(X)\mathbf{1}$$

■

Agora mostraremos como os geradores de $U_q(sl(2))$ agem nos geradores de $K_q[x,y]$.

Vejamos,

$$\begin{aligned}
X_+ \triangleright \mathbf{1} &= (Id \otimes < X_+, \cdot >)\delta_r(\mathbf{1}) = \\
&= \mathbf{1}_M \otimes < X_+, \mathbf{1}_M >= \\
&= < X_+, \mathbf{1}_M >= \varepsilon(X_+) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_+ \triangleright x &= (Id \otimes < X_+, \cdot >)\delta_r(x) = \\
&= (Id \otimes < X_+, \cdot >)(x \otimes a + y \otimes c) = \\
&= x < X_+, a > +y < X_+, c >= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_+ \triangleright y &= (Id \otimes < X_+, \cdot >)\delta_r(y) = \\
&= (Id \otimes < X_+, \cdot >)(x \otimes b + y \otimes d) = \\
&= x < X_+, b > +y < X_+, d >= x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_- \triangleright \mathbf{1} &= (Id \otimes < X_-, \cdot >)\delta_r(\mathbf{1}) = \\
&= < X_-, \mathbf{1} >= \varepsilon(X_-) = 0 \\
X_- \triangleright x &= (Id \otimes < X_-, \cdot >)\delta_r(x) = \\
&= x < X_-, a > +y < X_-, c >= y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_- \triangleright y &= (Id \otimes < X_-, \cdot >)\delta_r(y) = \\
&= x < X_-, b > +y < X_-, d >= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
K \triangleright 1 &= \ < K, 1 >= \varepsilon(K) = 1 \\
\\
K \triangleright x &= (Id \otimes < K, \cdot >)\delta_r(x) = \\
&= x < K, a > + y < K, c >= qx \\
\\
K \triangleright y &= (Id \otimes < K, \cdot >)\delta_r(y) = \\
&= x < K, b > + y < K, d >= q^{-1} y
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Veremos na próxima seção que esta ação coincide com a ação de $U_q(sl(2))$ sobre $k_q[x,y]$ em termos de operadores q-diferenciais.

Para estudarmos as representações de $U_q(sl(2))$ e os módulos da mesma álgebra precisamos de mais relações entre os seus geradores.

Proposição 2.5 *Para $m \geq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$ temos*

(i) $X_+^m K^n = q^{-2mn} K^n X_+^m$

(ii) $X_-^m K^n = q^{2mn} K^n X_-^m$

(iii)

$$
\begin{aligned}
[X_+, X_-^m] &= [m] X_-^{m-1} \frac{q^{-(m-1)}K - q^{m-1}K^{-1}}{q - q^{-1}} = \\
&= [m] \frac{q^{m-1}K - q^{-(m-1)}K^{-1}}{q - q^{-1}} X_-^{m-1}
\end{aligned}
$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
[X_+^m, X_-] &= [m] \frac{q^{-(m-1)}K - q^{m-1}K^{-1}}{q - q^{-1}} X_+^{m-1} = \\
&= [m] X_+^{m-1} \frac{q^{m-1}K - q^{-(m-1)}K^{-1}}{q - q^{-1}}
\end{aligned}
$$

onde

$$
[m] = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}
$$

Demonstração:

(i) Faremos indução sobre $n \geq 0$

$n = 0$, então

$$
\begin{aligned}
X_+^m &= KK^{-1}(X_+ KK^{-1} \cdot \ldots \cdot X_+ KK^{-1})K = \\
&= Kq^{-2m} X_+^m = q^{-2m} K X_+^m
\end{aligned}
$$

Agora suponha que

$$X_+^m K^n = q^{-2mn} K^n X_+^m$$

Então

$$\begin{aligned} X_+^m K^{n+1} &= X_+^m K^n K = q^{-2mn} K^n X_+^m K = \\ &= q^{-2mn} K^n q^{-2m} K X_+^m = q^{-2m(n+1)} K^{n+1} X_+^m \end{aligned}$$

(ii) Análogo ao item anterior.

(iii) Usaremos indução sobre m

$m = 1$, então

$$[X_+, X_-] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} = [1] X_-^{1-1} \frac{q^{-(1-1)} K - q^{1-1} K^{-1}}{q - q^{-1}}$$

Suponha que vale para m, então

$$\begin{aligned} [X_+, X_-^{m+1}] &= [X_+, X_-^m X_-] = [X_+, X_-^m] X_- + X_-^m [X_+, X_-] = \\ &= [m] X_-^{m-1} \frac{q^{-(m-1)} K X_- - q^{m-1} K^{-1} X_-}{q - q^{-1}} + X_-^m \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} = \end{aligned}$$

Agora multiplicaremos a primeira parcela da soma por $K^{-1}K$ e obtemos

$$\begin{aligned} &= [m] X_-^{m-1} \frac{q^{-(m-1)} q^2 X_- K - q^{m-1} q^2 X_- K^{-1}}{q - q^{-1}} + X_-^m \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} = \\ &= \frac{X_-^m}{q - q^{-1}} ([m](q^{-m-1} K - q^{m+1} K^{-1}) + K - K^{-1}) = \\ &= \frac{X_-^m}{(q - q^{-1})^2} (q^{-1} K - q^{2m+1} K^{-1} - q^{-2m-1} K + q K^{-1} + \\ &+ Kq - qK^{-1} - q^{-1} K + q^{-1} K^{-1}) = \\ &= \frac{X_-^m}{(q - q^{-1})^2} ((q - q^{-2m-1}) K - (q^{2m+1} - q^{-1}) K^{-1}) = \\ &= \frac{X_-^m}{(q - q^{-1})^2} (q^{-m} (q^{m+1} - q^{-m-1}) K - q^m (q^{m+1} - q^{-m-1}) K^{-1}) = \\ &= [m+1] X_-^m \left(\frac{q^{-m} K - q^m K^{-1}}{q - q^{-1}} \right) \end{aligned}$$

(iv) Análogo ao item anterior.

■

Definição 2.2 *Seja V um $U_q(sl(2))$ módulo e $\lambda \in \mathbb{C}$ um escalar. Um elemento $v \in V$, $v \neq 0$ é um vetor de peso máximo com peso λ se*

$$X_+ v = 0$$

e

$$K v = \lambda v$$

Proposição 2.6 *Qualquer $U_q(sl(2))$-módulo de dimensão finita V possui um vetor de peso máximo.*

Demonstração: A demonstração desta proposição é a mesma da proposição(C.1) do apêndice C. , com exceção de aqui usamos o gerador K e os autovalores serão dados por

$$\lambda = \alpha q^{2n}$$

■

Lema 2.2 *Seja $v \in V$ vetor de peso máximo com peso λ e seja a sequência*

$$v_p = \frac{1}{[p]!} X_-^p v$$

onde
$[0]! = 1$ *e* $[p]! = [p][p-1]!$

Então

(i) $Kv_p = \lambda q^{-2p} v_p$

(ii) $X_+ v_p = \frac{q^{-(p-1)}\lambda - q^{p-1}\lambda^{-1}}{q-q^{-1}} v_{p-1}$

(iii) $X_- v_p = [p+1] v_{p+1}$

Demonstração:

(i)

$$\begin{aligned} K v_p &= \frac{1}{[p]!} K X_-^p v = \frac{1}{[p]!} q^{-2p} X_-^p K v = \\ &= \lambda q^{-2p} \frac{1}{[p]!} X_-^p v = \lambda q^{-2p} v_p \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} X_+ v_p &= \frac{1}{[p]!} X_+ X_-^p v = \frac{1}{[p]!} [X_+, X_-^p] v = \\ &= \frac{1}{[p]!} [p] X_-^{p-1} \frac{q^{-(p-1)} K - q^{p-1} K^{-1}}{q - q^{-1}} v = \\ &= \frac{1}{[p-1]!} X_-^{p-1} \frac{q^{-(p-1)} \lambda v - q^{p-1} \lambda^{-1} v}{q - q^{-1}} = \\ &= \frac{q^{-(p-1)} \lambda - q^{p-1} \lambda^{-1}}{q - q^{-1}} v_{p-1} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} X_-v_p &= \frac{1}{[p]!}X_-X_-^p = \frac{1}{[p]!}X_-^{p+1}v = \\ &= \frac{[p+1]}{[p]!}\frac{X_-^{p+1}}{[p+1]}v = [p+1]\frac{1}{[p+1]!}X_-^{p+1}v = \\ &= [p+1]v_{p+1} \end{aligned}$$

■

Veremos a seguir um resultado análogo ao teorema(C.1), mas para o caso deformado.

Teorema 2.3 *Seja V um $U_q(sl(2))$ módulo de dimensão finita gerado por um vetor de peso máximo v de peso λ, então*

(i) $\lambda = \pm q^n$, *onde* e $\dim(V) = n+1$

(ii) Se $v_p = \frac{1}{[p]!}X_-^p v$ *temos* $v_p = 0$ *para* $p > n$ *e* $\{v_0 = v, v_1, ..., v_n\}$ *é base de* V.

(iii) K *é diagonalizável nesta base, com autovalores* $\{\pm q^n, \pm q^{n-1}, ..., \pm q^{-n+2}, \pm q^{-n}\}$. $n+1$ *autovalores.*

(iv) Qualquer outro vetor de peso máximo em V *é multiplo escalar de* v *e é de peso* λ.

(v) V *é simples.*

Reciprocamente qualquer $U_q(sl(2))$ *módulo de dimensão finita* V *é gerado por um vetor de peso máximo. E dois* $U_q(sl(2))$ *módulos de peso máximo* V *e* V' *gerados por* v, v' *de mesmo peso são isomorfos.*

Demonstração:

(i) e (ii) Temos que $Kv_p = \lambda q^{-2p}v_p$, logo $\{v_p\}_{p\geq 0}$ é uma sequência de autovetores de K com autovalores distintos, então existe $v_n \neq 0$ e $v_{n+1} = 0$. Temos também que

$$\begin{aligned} v_{n+k} &= \frac{1}{[n+k]!}X_-^{n+k}v = \frac{[n+1]!}{[n+k]!}X_-^{k+1}\frac{1}{[n+1]!}X_-^{n+1}v = \\ &= \frac{[n+1]!}{[n+k]!}X_-^{k+1}v_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

V é gerado como $U_q(sl(2))$ módulo por $\{v_0 = v, v_1, ..., v_n\}$ logo $dimV \leq n+1$. Por outro lado, K possui no máximo $dimV$ autovalores distintos, isto é, $n+1 \leq dimV$. Assim

$$dimV = n+1$$

Note que

$$0 = X_+v_{n+1} = \frac{q^{-n}\lambda - q^n\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}v_n$$

Então

$$q^{-n}\lambda = q^n\lambda^{-1}$$

Isto é

$$\lambda^2 = q^{2n}$$

Portanto

$$\lambda = \pm q^n$$

Para mostrar que $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ é linearmente independente, é análogo ao teorema (C.1) .

(iii) Como $Kv_p = \lambda q^{-2p} v_p$, segue que

$$K = \pm \begin{pmatrix} q^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q^{n-2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & q^{n-4} & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q^{-n} \end{pmatrix}$$

(iv) e (v) Idêntico ao teorema (C.1)

A reciproca também é idêntica ao do teorema (C.1) .

∎

Podemos agora representar X_- e X_+ através de matrizes. São elas

$$\rho_{\varepsilon,n}(X_+) = \begin{pmatrix} 0 & [n] & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & [n-1] & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\varepsilon,n}(X_-) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & [2] & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & [n] & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de agora estudaremos representações de dimensão infinita com estrutura análoga aos módulos de peso máximo de dimensão finita estudados, que são denominados *Módulos de Verma.*

Seja $\lambda \neq 0$. considere o espaço de dimensão infinita gerado pela base enumerável $\{v_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ tal que para $p \geq 0$ tenhamos

$$Kv_p = \lambda q^{-2p} v_p$$

$$K^{-1}v_p = \lambda^{-1}q^{2p}v_p$$

$$X_+v_0 = 0$$

$$X_+v^{p+1} = \frac{q^{-p}\lambda - q^p\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}v_p$$

$$X_-v_p = [p+1]v_{p+1}$$

Denotaremos os módulos de Verma por $V(\lambda)$.

Proposição 2.7 *$V(\lambda)$ é um $U_q(sl(2))$ módulo gerado pelo vetor de peso máximo v_0*

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar que $V(\lambda)$ é um módulo. De fato

$$\begin{aligned}
KX_+K^{-1}v_p &= KX_+\lambda^{-1}q^{2p}v_p = \lambda^{-1}q^{2p}K\frac{q^{-(p-1)}\lambda - q^{p-1}\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}v_{p-1} = \\
&= \lambda^{-1}q^{2p}\frac{q^{-(p-1)}\lambda - q^{p-1}\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}q^{-2(p-1)}v_{p-1} = \\
&= q^2\frac{q^{-(p-1)}\lambda - q^{p-1}\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}v_{p-1} = \\
&= q^2X_+v_p
\end{aligned}$$

Idem para X_-. Temos também que

$$\begin{aligned}
[X_+,X_-]v_p &= X_+X_-v_p - X_-X_+v_p = \\
&= [p+1]X_+v_p - \frac{q^{-(p-1)}\lambda - q^{p-1}\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}X_-v_{p-1} = \\
&= ([p+1]\frac{q^{-p}\lambda - q^p\lambda^{-1}}{q-q^{-1}} - \frac{q^{-(p-1)}\lambda - q^{p-1}\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}[p])v_p = \\
&= \frac{1}{(q-q^{-1})^2}(q\lambda - q^{2p+1}\lambda^{-1} - q^{-2p-1}\lambda + q^{-1}\lambda^{-1} - q\lambda + \\
&+ q^{-2p+1} + q^{2p-1}\lambda^{-1} - q^{-1}\lambda^{-1}) = \\
&= \frac{1}{(q-q^{-1})^2}(q^{-2p}\lambda(q-q^{-1}) - q^{2p}\lambda^{-1}(q-q^{-1}))v_p = \\
&= \frac{q^{-2p}\lambda - q^{2p}\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}v_p = \\
&= \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}v_p
\end{aligned}$$

Agora v_0 é vetor de peso máximo e peso λ. De fato

$X_+v_0 = 0$ por hipótese.

Também, $Kv_0 = \lambda q^{-2\cdot 0} v_0 = \lambda v_0$.

$\blacksquare$

Teorema 2.4 *Qualquer $U_q(sl(2))$ módulo gerado por um vetor de peso máximo v com peso λ é um quociente de $V(\lambda)$.*

Demonstração: Seja V gerado por v de peso máximo e peso λ e considere

$$\begin{array}{rccc} \pi: & V(\lambda) & \longrightarrow & V \\ & v_p & \longmapsto & \frac{1}{[p]!X_-^p v} \end{array}$$

Como π é sobre, segue que do primeiro teorema do homomorfismo(teorema (A.1)) que

$$V = V(\lambda)/Ker(\pi)$$

$\blacksquare$

Enunciaremos sem demonstrar um resultado, que será útil em um teorema adiante.

Lema 2.3 **Lema de Schur** *Se $x \in Z(A)$, onde*

$$Z(A) = \{x \in A; xy = yx \quad \forall y \in A\}$$

com $x \neq 0$, então para todo A-módulo V simples e de dimensão finita, x age como um múltiplo escalar da identidade.

$\square$

Agora considere

$$C_q = X_+X_- + \frac{q^{-1}K + qK^{-1}}{(q-q^{-1})^2}$$

Este elemento é chamado de *Elemento de Casimir* e satisfaz algumas propriedades com relação aos geradores de $U_q(sl(2))$.

Proposição 2.8 *O elemento de Casimir C_q pertence ao centro de $U_q(sl(2))$, isto é, C_q comuta com os geradors de $U_q(sl(2))$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} C_qX_+ &= X_+X_-X_+ + \frac{q^{-1}KX_+ + qK^{-1}X_+}{(q-q^{-1})^2} = \\ &= X_+[X_-, X_+] + X_+X_+X_- + \frac{q^{-1}KX_+K^{-1}K + qK^{-1}X_+KK^{-1}}{(q-q^{-1})^2} = \\ &= X_+\frac{K^{-1} - K}{q-q^{-1}} + X_+X_+X_- + \frac{qX_+K + q^{-1}X_+K^{-1}}{(q-q^{-1})^2} = \\ &= X_+X_+X_- + \frac{X_+}{(q-q^{-1})^2}((q-q^{-1})(K^{-1}-K) + qK - q^{-1}K^{-1}) = \\ &= X_+(X_+X_- + \frac{qK^{-1} + q^{-1}K}{(q-q^{-1})^2}) = \\ &= X_+C_q \end{aligned}$$

Idem para X_-C_q. Para K temos

$$\begin{aligned}
C_qK &= X_+X_-K + \frac{q^{-1}KK + qK^{-1}K}{(q-q^{-1})^2} = \\
&= KK^{-1}X_+KK^{-1}X_-K + \frac{K}{(q-q^{-1})^2}(q^{-1}K + qK^{-1}) = \\
&= KX_+X_- + \frac{K}{(q-q^{-1})^2}(q^{-1}K + qK^{-1}) = \\
&= K(X_+X_- + \frac{q^{-1}K + qK^{-1}}{(q-q^{-1})^2}) = \\
&= KC_q
\end{aligned} \tag{2.7}$$

■

2.4 A Ação de $U_q(sl(2))$ sobre o Plano Quântico como Operadores Pseudo-Diferenciais

Seja A uma álgebra e $a \in A$. Defina as aplicações

$$\begin{array}{rccc} a_l : & A & \longrightarrow & A \\ & b & \longmapsto & ab \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} a_r : & A & \longrightarrow & A \\ & b & \longmapsto & ba \end{array}$$

Seja $\sigma : A \longrightarrow A$ um automorfismo

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$$

Podemos escrever

$$\sigma \circ a_l(b) = \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) = \sigma(a)_l \circ \sigma(b)$$

$$\sigma \circ a_r(b) = \sigma(ba) = \sigma(b)\sigma(a) = \sigma(a)_r \circ \sigma(b)$$

Definição 2.3 *Sejam $\sigma, \tau : A \longrightarrow A$ automorfismos. Uma transformação linear $\delta : A \longrightarrow A$ é uma (σ, τ)-derivação se:*

$$\delta(aa') = \sigma(a)\delta(a') + \delta(a)\tau(a'), \qquad \forall \ a, a' \in A$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}
\delta \circ a_l(b) &= \delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)\tau(b) = \\
&= (\sigma(a)_l \circ \delta + \delta(a)_l \circ \tau)(b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \circ a_r(b) &= \delta(ba) = \sigma(b)\delta(a) + \delta(b)\tau(a) = \\
&= (\delta(a)_r \circ \sigma + \tau(a)_r \circ \delta)(b)
\end{aligned}$$

Seja agora $A = k_q[x,y]$ e os automorfismos

$$\begin{array}{rccc} \sigma_x : & A & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & qx \\ & y & \longmapsto & y \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \sigma_y : & A & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & x \\ & y & \longmapsto & qy \end{array}$$

Sejam também as aplicações lineares

$$\frac{\partial q}{\partial x}(x^m y^n) = [m]x^{m-1}y^n$$

$$\frac{\partial q}{\partial y}(x^m y^n) = [n]x^m y^{n-1}, \quad \forall \ m,n \geq 0$$

Proposição 2.9 *Em $A = k_q[x,y]$ temos*

(i) $y_l x_l = q x_l y_l$

(ii) $x_r y_r = q y_r x_r$

(iii) $\sigma_x \circ x_{l,r} = q x_{l,r} \circ \sigma_x$

(iv) $\sigma_y \circ y_{l,r} = q y_{l,r} \circ \sigma_y$

(v) $\frac{\partial q}{\partial x} \circ \sigma_x = q\sigma_x \circ \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial y} \circ \sigma_y = q\sigma_y \circ \frac{\partial q}{\partial y}$

(vi) $\frac{\partial q}{\partial x} \circ y_l = q y_l \circ \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial y} \circ x_r = q x_r \circ \frac{\partial q}{\partial y}$

(vii) $\frac{\partial q}{\partial x} \circ x_l = q^{-1}x_l \circ \frac{\partial q}{\partial x} + \sigma_x = q x_l \circ \frac{\partial q}{\partial x} + \sigma_x^{-1}$

(viii) $\frac{\partial q}{\partial y} \circ y_r = q^{-1}y_r \circ \frac{\partial q}{\partial y} + \sigma_y = q y_r \circ \frac{\partial q}{\partial y} + \sigma_y^{-1}$

(ix) $x_l \circ \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\sigma_x - \sigma_x^{-1}}{q-q^{-1}}, \quad y_r \circ \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\sigma_y - \sigma_y^{-1}}{q-q^{-1}}$

Demonstração:

(i)

$$y_l x_l(x^m y^n) = yx(x^m y^n) = qxy(x^m y^n) = q x_l y_l(x^m y^n)$$

(ii) Análogo ao item anterior.

(iii) Seja $P = \sum x^m y^n$

$$\begin{aligned} \sigma_x(x_l P) &= \sigma_x(xP) = \sigma_x(x)\sigma_x(P) = \\ &= qx\sigma_x(P) = q x_l(\sigma_x(P)) \end{aligned}$$

O mesmo para $\sigma_x(x_r P)$

(iv) Análogo ao item anterior.

(v)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial x}\circ\sigma_x(x^m y^n) &= \frac{\partial q}{\partial x}(q^m x^m y^n) = q^m[m]x^{m-1}y^n = \\
&= q[m]q^{m-1}x^{m-1}y^n = \\
&= q\sigma_x([m]x^{m-1}y^n) = \\
&= q\sigma_x\circ\frac{\partial q}{\partial x}(x^m y^n)
\end{aligned}$$

O mesmo para

$$\frac{\partial q}{\partial y}\circ\sigma_y(x^m y^n)$$

(vi)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial x}\circ y_l(x^m y^n) &= \frac{\partial q}{\partial x}(yx^m y^n) = q^m\frac{\partial q}{\partial x}(x^m y^{n+1}) = \\
&= q^m[m]x^{m-1}y^{n+1} = q^m[m]q^{-m+1}yx^{m-1}y^n = \\
&= qy_l([m]x^{m-1}y^n) = qy_l\circ\frac{\partial q}{\partial x}(x^m y^n)
\end{aligned}$$

O mesmo para

$$\frac{\partial q}{\partial y}\circ x_r(x^m y^n)$$

(vii)

$$\frac{\partial q}{\partial x}\circ x_l(x^m y^n) = \frac{\partial q}{\partial x}(x^{m+1}y^n) = [m+1]x^m y^n$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(q^{-1}x_l\circ\frac{\partial q}{\partial x}+\sigma_x)(x^m y^n) &= q^{-1}x_l[m]x^{m-1}y^n + q^m x^m y^n = \\
&= (q^{-1}[m]+q^m)x^m y^n = \\
&= \left(\frac{q^{m-1}-q^{-m-1}+q^{m+1}-q^{m-1}}{q-q^{-1}}\right)x^m y^n = \\
&= [m+1]x^m y^n
\end{aligned}$$

(viii)

$$\frac{\partial q}{\partial y}\circ y_r(x^m y^n) = \frac{\partial q}{\partial y}(x^m y^{n+1}) = [n+1]x^m y^n$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(q^{-1}y_r \circ \frac{\partial q}{\partial y} + \sigma_y)(x^m y^n) &= q^{-1}y_r[n]x^m y^{n-1} + q^n x^m y^n = \\
&= q^{-1}[n]x^m y^n + q^n x^m y^n = \\
&= (q^{-1}[n] + q^n)x^m y^n = \\
&= \left(\frac{q^{n-1} - q^{-n-1} + q^{n+1} - q^{n-1}}{q - q^{-1}}\right)x^m y^n = \\
&= [n+1]x^m y^n
\end{aligned}$$

(ix)

$$\begin{aligned}
x_l \circ \frac{\partial q}{\partial x}(x^m y^n) &= x_l([m]x^{m-1}y^n) = [m]x^m y^n = \\
&= \frac{q^m x^m y^n - q^{-m}x^m y^n}{q - q^{-1}} = \frac{\sigma_x - \sigma_x^{-1}}{q - q^{-1}}(x^m y^n)
\end{aligned}$$

O mesmo para

$$y_r \circ \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\sigma_y - \sigma_y^{-1}}{q - q^{-1}}$$

■

Proposição 2.10 *(i)* $\frac{\partial q}{\partial x}$ *é uma* $(\sigma_x^{-1}\sigma_y, \sigma_x)$ *derivação.*

(ii) $\frac{\partial q}{\partial y}$ *é uma* $(\sigma_y, \sigma_x\sigma_y^{-1})$ *derivação.*

Demonstração:

(i) Sabemos que

$$\delta \circ a_l = \delta(a)_l \circ \tau + \sigma(a)_l \circ \delta$$

Devemos provar que

$$\frac{\partial q}{\partial x} \circ y_l = \left(\frac{\partial q}{\partial x}(y)\right)_l \circ \sigma_x + (\sigma_x^{-1}\sigma_y(y))_l \circ \frac{\partial q}{\partial x}$$

Agora

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial x} \circ y_l &= q y_l \circ \frac{\partial q}{\partial x} = \\
&= (\sigma_x^{-1}\sigma(y))_l \circ \frac{\partial q}{\partial x} + \left(\frac{\partial q}{\partial x}(y)\right)_l \circ \sigma_x
\end{aligned}$$

Logo $\frac{\partial q}{\partial x}$ é uma $(\sigma_x^{-1}\sigma_y, \sigma_y)$ derivação.

O mesmo vale para $\frac{\partial q}{\partial x}x_l$

(ii) Sabemos que

$$\delta \circ a_r = \delta(a)_r \circ \sigma + \tau(a)_r \circ \delta$$

Devemos provar que

$$\frac{\partial q}{\partial y} \circ x_r = \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)_r \circ \sigma_y + (\sigma_x \sigma_y^{-1})_r \circ \frac{\partial q}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial y} \circ x_r &= q x_r \circ \frac{\partial q}{\partial y} = \\ &= \left(\frac{\partial q}{\partial y}(x)\right)_r \circ \sigma_y + q x_r \circ \frac{\partial q}{\partial y} = \\ &= \left(\frac{\partial q}{\partial y}(x)\right)_r \circ \sigma_y + (\sigma_x \sigma_y^{-1}(x))_r \circ \frac{\partial q}{\partial y} \end{aligned}$$

O mesmo para $\frac{\partial q}{\partial y} \circ y_r$

Logo $\frac{\partial q}{\partial y}$ é uma $(\sigma_y, \sigma_x \sigma_y^{-1})$ derivação.

■

Com estes resultados, vamos ver a realização de $U_q(sl(2))$ em termos dos operadores x_l, x_r, y_l, y_r, σ_x, σ_y, $\frac{\partial q}{\partial x}$ e $\frac{\partial q}{\partial y}$ definidos acima, ou seja, como os geradores de $U_q(sl(2))$ agem no plano quântico.

Tome $P \in k_q[x, y]$ e defina

$$X_+ \triangleright P = x \frac{\partial q}{\partial y} P = x_l \circ \frac{\partial q}{\partial y}(P)$$

$$X_- \triangleright P = \frac{\partial q}{\partial x} P y = y_r \circ \frac{\partial q}{\partial x}(P)$$

$$K \triangleright P = \sigma_x \sigma_y^{-1}(P)$$

$$K^{-1} \triangleright P = \sigma_y \sigma_x^{-1}(P)$$

Em termos dos geradores temos

$$X_+ \triangleright x = x \frac{\partial q}{\partial y}(x) = 0$$

$$X_+ \triangleright y = x \frac{\partial q}{\partial y}(y) = x$$

$$X_- \triangleright x = \frac{\partial q}{\partial x}(x) y = y$$

$$X_- \rhd y = \frac{\partial q}{\partial x}(y)y = 0$$

$$K \rhd x = \sigma_x \sigma_y^{-1}(x) = qx$$

$$K \rhd y = \sigma_x \sigma_y^{-1}(y) = q^{-1}y$$

Esta ação coincide com a ação de $U_q(sl(2))$ apresentada como dual da coação de $SL_q(2)$ conforme seção anterior e equações (2.6).

Teorema 2.5 *Com esta ação $k_q[x,y]$ é $U_q(sl(2))$-módulo álgebra.*

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar que se trata de um módulo. De fato

$$\begin{aligned}
KX_+K^{-1} \rhd P &= KX_+\sigma_y\sigma_x^{-1}(P) = Kx_l\frac{\partial q}{\partial y}\sigma_y\sigma_x^{-1}(P) = \\
&= Kx_l q \sigma_y \frac{\partial q}{\partial y}\sigma_x^{-1}(P) = \\
&= q^2\sigma_x\sigma_y^{-1}x_l\sigma_y\sigma_x^{-1}\frac{\partial q}{\partial y}(P) = \\
&= q^2 x_l \frac{\partial q}{\partial y}(P) = q^2 X_+ \rhd P
\end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned}
[X_+, X_-] \rhd P &= (X_+X_- - X_-X_+) \rhd P = X_+X_- \rhd P - X_-X_+ \rhd P = \\
&= X_+\left(\frac{\partial q}{\partial x}Py\right) - X_-\left(x\frac{\partial q}{\partial y}P\right) = \\
&= x\frac{\partial q}{\partial y}\left(\frac{\partial q}{\partial x}Py\right) - \frac{\partial q}{\partial x}\left(x\frac{\partial q}{\partial y}P\right)y = \qquad (2.8) \\
&= x\sigma_y\left(\frac{\partial q}{\partial x}P\right) + x\frac{\partial q}{\partial y}\left(\frac{\partial q}{\partial x}P\right)\sigma_x\sigma_y^{-1}(y) - \\
&- \sigma_x\left(\frac{\partial q}{\partial y}P\right)y - \sigma_x^{-1}\sigma_y(x)\frac{\partial q}{\partial x}\left(\frac{\partial q}{\partial y}P\right)y = \qquad (2.9) \\
&= x\sigma_y\left(\frac{\partial q}{\partial x}P\right) + x\left(\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x}P\right)q^{-1}y - \\
&- \sigma_x\left(\frac{\partial q}{\partial y}P\right)y - q^{-1}x\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}Py =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \sigma_y\left(x\frac{\partial q}{\partial x}P\right)-\sigma_x\left(\frac{\partial q}{\partial y}Py\right) &= \sigma_y\left(\left(\frac{\sigma_x-\sigma_x^{-1}}{q-q^{-1}}\right)(P)\right)-\sigma_x\left(\left(\frac{\sigma_y-\sigma_y^{-1}}{q-q^{-1}}\right)(P)\right)= \\
&= \frac{\sigma_y\sigma_x-\sigma_y\sigma_x^{-1}-\sigma_x\sigma_y+\sigma_x\sigma_y^{-1}}{q-q^{-1}}(P)= \\
&= \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}} \triangleright P
\end{aligned}
$$

De (2.8) à (2.9) foi usada a proposição anterior.

Finalmente, para mostrarmos que é módulo-álgebra:

$$
X_+ \triangleright (PQ) \;=\; x\frac{\partial q}{\partial y}(PQ) = x\left(\sigma_y(P)\frac{\partial q}{\partial y}(Q)+\frac{\partial q}{\partial y}(P)\sigma_x\sigma_y^{-1}\right)
$$

Note que σ_y só atua em polinômios na variável y, isto é, se $P = x^m y^n$, então

$$
\sigma_y(P) = q^n P
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
X_+(PQ) &= q^n x P\frac{\partial q}{\partial y}(Q)+\frac{\partial q}{\partial y}(P)K(Q)= \\
&= q^n q^{-n} P x\frac{\partial q}{\partial y}(Q)+x\frac{\partial q}{\partial y}(P)K(Q)= \\
&= P(X_+ \triangleright Q)+(X_+ \triangleright P)(K \triangleright Q)
\end{aligned}
$$

Como queríamos, pois lembre-se que

$$
\Delta(X_+) = \mathbf{1}\otimes X_+ + X_+\otimes K
$$

Idem Para X_-

$$
\begin{aligned}
K \triangleright (PQ) &= \sigma_x\sigma_y^{-1}(PQ) = \sigma_x\sigma_y^{-1}((x^m y^n)(x^k y^l)) = \\
&= \sigma_x\sigma_y^{-1}(q^{nk}x^{m+k}y^{n+l}) = q^{nk}\sigma_x(q^{-n-l}x^{m+k}y^{n+l}) = \\
&= q^{nk}q^{-n-l}q^{m+k}x^{m+k}y^{n+l} = q^{nk}q^{-l+k}q^{-n+m}x^m x^k y^n y^l = \\
&= q^{nk}q^{-l+k}q^{-n+m}q^{-nk}x^m y^n x^k y^l = q^{-n+m}x^m y^n q^{-l+k}x^k y^l = \\
&= \sigma_x\sigma_y^{-1}(x^m y^n)\sigma_x\sigma_y^{-1}(x^k y^l) = \\
&= (K \triangleright P)(K \triangleright Q)
\end{aligned}
$$

Portanto, $k_q[x,y]$ é um $U_q(sl(2))$-módulo álgebra.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Calculo Diferencial Não Comutativo

Vamos iniciar este capítulo introduzindo a definição de formas diferenciais e do complexo de De Rham. Em seguida definiremos a álgebra diferencial universal e construiremos um operador diferencial nesta álgebra. Vamos então construir uma nova álgebra diferencial, chamada de complexo de Wess-Zumino que tem uma estrutura relacionada com o plano quântico e finalmente introduziremos o conceito de cohomologia.

3.1 Introdução

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão finita, T_pM o espaço tangente em M, associado ao ponto p. Quer dizer, para todo $p \in M$, existem vizinhanças abertas $U_\alpha \subset M$, e vizinhança $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ é um homeomorfismo. O par (U_α, ϕ_α) é chamada de carta local para M. Assim em um sistema local de coordenadas $T_pM =< \frac{\partial}{\partial x_i} >$. Seja também $V = (T_pM)^*$(O espaço de todas as aplicações de T_pM em $\mathbb{R}$. Novamente em um sistema local de coordenadas, $(T_pM)^* =< dx^i >$, onde

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta^i_j$$

Defina

$$\Lambda((T_pM)^*) = \bigoplus \Lambda^k((T_pM)^*), \qquad k = 0, ...\infty$$

onde

$$\Lambda^k((T_pM)^*) = \{\sum a_{i1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}\}$$

e

$$a_{i1\cdots i_k} \in \mathbb{R}$$

Estas são denominadas k-formas exteriores em $(T_pM)^*$ e $\Lambda((T_pM)^*)$ é a álgebra exterior de $(T_pM)^*$.

Vamos agora definir formas diferenciais sobre M

Uma forma diferencial sobre M é uma aplicação do tipo

$$\begin{array}{rccc} \omega: & M & \longrightarrow & \bigcup \Lambda((T_pM)^*) \\ & p & \longmapsto & \omega(p) \end{array}$$

tal que localmente

$$\omega(p) = \sum a_{i1\cdots i_k}(p) dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$$

onde $a_{i1\cdots i_k}: M \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis em M.

Defina agora um novo conjunto formado por todas as formas diferenciais e denotado por

$$\Omega(M) = \{\omega : M \longrightarrow \bigcup \Lambda((T_pM)^*)\}$$

temos que

$$\Omega(M) = \bigoplus_{k=1}^{n} \Omega^k(M)$$

Defina também a seguinte aplicação

$$d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

que é dada por

$$d(\sum a_{i1\cdots i_k}(p) dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}) = \sum \sum_j \frac{\partial a_{i1\cdots\cdot i_n}}{\partial x^j}(p) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$$

Esta aplicação é chamada de *derivação exterior*

Definição 3.1 *A tripla $(\Omega(M), \wedge, d)$ é chamada de álgebra de formas diferenciais em M ou complexo de De-Rham e satisfaz ainda as seguintes relações*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{deg(\omega)deg(\eta)} \eta \wedge \omega$$

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{deg(\omega)} \omega \wedge d\eta$$

onde se $\omega \in \Omega^p$, então $deg(\omega) = p$.

3.2 A Álgebra Diferencial Universal

Seja A uma álgebra associativa com unidade. Vamos construir um objeto(álgebra) que apresenta propriedades análogas às propriedades das formas diferenciais usuais.

Defina

$\Omega^0(A) = A$, estas são as 0-formas.

Definimos agora o que vem a ser uma 1-forma:

$\Omega^1(A) = Ker(\mu) \subset A \otimes A$, onde, $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$ é a multiplicação na álgebra.

Proposição 3.1 *$\Omega^1(A)$ é uma A-bimódulo.*

Demonstração: Seja $a \otimes b \in Ker(\mu)$ e $k \in A$. Defina

$k \rhd (a \otimes b) = ka \otimes b$

$(a \otimes b) \lhd k = a \otimes bk$

Inicialmente mostraremos que estas ações ainda pertencem à $ker(\mu)$. De fato,

$$\mu(k \rhd (a \otimes b)) = \mu(ka \otimes b) = (ka)b = k(ab) = 0$$

O mesmo para $(a \otimes b) \lhd k$. Logo $\Omega^1(A)$ é fechado.

Seja agora $k_1, k_2 \in A$. Então

$$\begin{aligned} k_1 \rhd (k_2 \rhd (a \otimes b)) &= k_1 \rhd (k_2 a \otimes b) = k_1(k_2 a) \otimes b \\ &= (k_1 k_2)a \otimes b = k_1 k_2 \rhd (a \otimes b) \end{aligned}$$

O mesmo para a direita. Temos também que

$$1 \rhd (a \otimes b) = 1a \otimes b = a \otimes b$$

O mesmo para a direita.
Para finalizar, precisamos mostrar que

$$(k_1 \rhd (a \otimes b)) \lhd k_2 = k_1 \rhd ((a \otimes b) \lhd k_2)$$

De fato

$$\begin{aligned} (k_1 \rhd (a \otimes b)) \lhd k_2 &= (k_1 a \otimes b) \lhd k_2 = k_1 a \otimes bk_2 = \\ &= k_1 \rhd (a \otimes bk_2) = k_1 \rhd ((a \otimes b) \lhd k_2) \end{aligned}$$

■

Definição 3.2 *Se A é uma álgebra e M um A-bimódulo, dizemos que $d : A \longrightarrow M$ é uma derivação se*

$$d(ab) = dab + adb, \qquad \forall a, b \in A$$

Uma consequência da definição é que $d1 = 0$. De fato,

$$d1 = d(1 \cdot 1) = d1 \cdot 1 + 1 \cdot d1 = d1 + d1$$

Então $d1 = 0$ para toda derivação.

Proposição 3.2 *A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} d: & A & \longrightarrow & \Omega^1(A) \\ & a & \longmapsto & a \otimes 1 - 1 \otimes a \end{array}$$

é uma derivação.

Demonstração:

$$\begin{aligned} d(ab) &= ab \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes ab = ab \otimes \mathbf{1} - (a \otimes b) + a \otimes b - \mathbf{1} \otimes ab = \\ &= a(b \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes b) + (a \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes a)b = \\ &= adb + (da)b \end{aligned}$$

■

Proposição 3.3

$$\Omega^1(A) = \{adb/a, b \in A\}$$

Demonstração:($\Leftarrow$) Inicialmente vamos provar que $adb \in Ker(\mu)$.
Note que

$$adb = a(b \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes b) = ab \otimes \mathbf{1} - a \otimes b$$

Então

$$\mu(adb) = ab - ab = 0$$

($\Rightarrow$) Seja $a \otimes b \in Ker(\mu)$, então $ab = 0$

Agora

$$a \otimes b = a \otimes b - ab \otimes \mathbf{1} = -a(b \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes b) = -adb$$

■

Então $\Omega^1(A)$ são as 1-formas definidas sobra A.

Definição 3.3

$$\Omega^n(A) = \Omega^1(A) \otimes ... \otimes \Omega^1(A)$$

O conjunto definido acima é o que chamamos de n-formas.

Proposição 3.4 *O espaço das n-formas é gerado por:*

$$\Omega^n(A) = < a_0 da_1 ... da_n / a_0, ..., a_n \in A >$$

(Por conveniência omitimos o produto tensorial.)

Demonstração: Usaremos o segundo princípio de indução sobre a dimensão de V e a regra de Leibniz.

$n = 2$

$$\begin{aligned} (a_1 da_2) \otimes_A (b_1 db_2) &= (a_1 da_2 b_1) \otimes_A db_2 = \\ &= (a_1 d(a_2 b_1)) \otimes_A db_2 - a_1 a_2 db_1 \otimes_A db_2 = \\ &= a_1 d(a_2 b_1) db_2 - (a_1 a_2) db_1 db_2 \end{aligned}$$

Suponhamos que é valido para todo natural menor ou igual à n e vamos provar que vale para $n+1$

$$(a_1 db_1) \otimes ... \otimes (a_n db_n) \otimes (a_{n+1} db_{n+1} \in \Omega^{n+1}(A) \tag{3.1}$$

Mas

$$\Omega^{n+1}(A) = \Omega^1(A) \otimes_A \Omega^n(A)$$

Então

$$\begin{aligned}
(a_1 db_1) \otimes ... \otimes (a_n db_n) \otimes (a_{n+1} db_{n+1}) &= (a_1 db_1) \otimes_A ((a_2 db_2) \otimes_A ... \otimes_A (a_{n+1} db_{n+1})) = \\
&= \sum_i (a_1 db_1) \otimes_A (C_0^i dc_1^i ... dc_n^i) = \\
&= \sum_i a_1 d(b_1 c_0^i dc_1^i ... dc_n^i - \sum_i a_1 b_1 dc_0^i dc_1^i ... dc_n^i = \\
&= \sum_j p_0^j dp_1^j ... dp_{n+1}^j
\end{aligned}$$

■

Com estes elementos definidos, podemos definir o seguinte bimódulo

$$\Omega(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega^n(A) = A \oplus \Omega^1(A) \oplus (\Omega^1(A) \otimes \Omega^1(A)) \oplus ...$$

$\Omega(A)$ possui cstrutura dc álgcbra dada pclo produto tensorial sobra A.

Vamos definir um operador diferencial em $\Omega(A)$ da seguinte maneira

$$\begin{array}{rccc}
d: & \Omega^k(A) & \longrightarrow & \Omega^{k+1}(A) \\
 & a_0 da_1 ... da_k & \longmapsto & da_0 da_1 ... da_k
\end{array}$$

Definição 3.4 *A álgebra $(\Omega(A), \otimes_A)$ munido da operação diferencial d é dita ser a álgebra diferencial universal de A*

Observação 3.1 *Note que* $\dim(\Omega(A)) = \infty$, *portanto podemos ter k-formas de qualquer grau, enquanto no caso de formas diferenciais sobre uma variedade, o grau das formas estão limitadas pela dimensão da variedade.*

Enunciaremos e demonstraremos agora um resultado a respeito da universalidade da álgebra em questão.

Teorema 3.1 *Sejam A e B álgebras e $\alpha : A \longrightarrow B$ um morfismo de álgebra. Se $D : A \longrightarrow B$ é uma α-derivação, isto é,*

$$D(ab) = Da\alpha(b) + \alpha(a)Db$$

então existe um único morfismo $\overline{\alpha} : \Omega(A) \longrightarrow B$ tal que o diagrama abaixo comute

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "{D,\alpha}"'] \arrow[dr] & \\
B & & \Omega(A) \arrow[ll, "\overline{\alpha}"']
\end{tikzcd}$$

Em particular, se B é uma álgebra diferencial com operador diferencial δ tal que $\delta \circ \alpha = D$, então $\overline{\alpha}$é morfismo de álgebra diferencial.

Demonstração: Defina

$$\overline{\alpha}(a_0da_1...da_n) = \alpha(a_0)Da_1...Da_n$$

Provaremos primeiramente que $\overline{\alpha}$ é morfismo. De fato.

Para $\Omega^1(A)$ temos:

$$\overline{\alpha}(adb) = \alpha(a)Db$$

Para $\Omega^n(A)$ temos:

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}(a_0da_1...da_nb_0db_1...db_m) &= \overline{\alpha}(a_0da_1...d(a_nb_0)db_1...db_m + \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i a_0da_1...d(a_{n-i}a_{n-i+1})...db_0db_1...db_m + \\
&+ (-1)^n a_0a_1da_2...db_m = \\
&= \alpha(a_0)Da_1...D(a_nb_0)Db_1...Db_m + \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\alpha(a_0)Da_1...D(a_{n-i}a_{n-i+1})...Db_m + \\
&+ (-1)^n\alpha(a_0)\alpha(a_1)Da_2...Da_m
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}(a_0da_1...da_n)\overline{\alpha}(b_0db_1...db_m) &= \alpha(a_0)Da_1...Da_n\alpha(b_0)Db_1...Db_m = \\
&= \alpha(a_0)Da_1...D(a_nb_0)Db_1...Db_m + \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\alpha(a_0)Da_1...D(a_{n-i}a_{n-i+1})...Db_m + \\
&+ (-1)^n\alpha(a_0)\alpha(a_1)Da_2...Da_m
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Pelas equações (3.2) e (3.3) segue que $\overline{\alpha}$ é morfismo.

Falta provar que $\overline{\alpha}$ é morfismo de álgebra diferencial, isto é,

$$\overline{\alpha}(d\omega) = \delta(\overline{\alpha}(\omega))$$

Em termos de diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\alpha"'] & \Omega^1(A) \arrow[d, "\overline{\alpha}"] \\ B \arrow[r, "\delta"] & B \end{tikzcd}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}(d\omega) &= \overline{\alpha}(da_0...da_n) = Da_0...Da_n = \\ &= \delta(\alpha(a_0))...\delta(\alpha(a_n)) = \delta(\alpha(a_0)\delta(\alpha(a_1))...\delta(\alpha(a_n))) = \\ &= \delta(\alpha(a_0)Da_1...Da_n) = \delta(\overline{\alpha}(\omega)) \end{aligned}$$

■

Exemplo 3.1 *Seja $A = C^\infty(X)$, X espaço topológico compacto, e $C^\infty(X)$ o espaço da funções infinitamente diferenciáveis sobre X a valores complexos.*

$A \otimes A = C^\infty(X \times X)$

e $A^{\otimes n} = C^\infty(X \times X \times ... \times X)$

Então, $\Omega^1(A)$ é o espaço das funçoes de 2 variáveis em X, que se anulam na diagonal, isto é,

$$F : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que

$$F(x, x) = 0$$

Finalmente temos

$$df(x, y) = (f \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes f)(x, y) = f(x) - f(y)$$

pois, $\mathbf{1}(y) = 1$

■

Proposição 3.5 $d^2 \equiv 0$

Demonstração:

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d(d(a_0da_1...da_n)) = d(\mathbf{1}da_0da_1...da_n) = \\ &= d\mathbf{1}da_0...da_n = 0 \end{aligned}$$

■

Proposição 3.6

$$d(\omega\eta) = d\omega\eta + (-1)^{deg\omega}\omega d\eta$$

Demonstração: Por um lado temos:

$$\begin{aligned}
d[(a_o da_1 ... da_p)(b_0 db_1 ... db_q)] &= d[a_0 da_1 ... d(a_p b_0) db_1 ... db_q + \\
&+ \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i a_0 da_1 ... d(a_{p-i} a_{p-i+1}) ... da_p db_0 ... db_q + \\
&+ (-1)^p a_0 a_1 da_2 ... da_p db_0 ... db_q] = \\
&= da_0 da_1 ... d(a_p b_0) db_1 ... db_q + \\
&+ \sum_{i=1}^{p-1} da_0 da_1 ... d(a_{p-i} a_{p-i+1}) ... da_p db_0 ... db_q + \\
&+ (-1)^p d(a_0 a_1) da_2 ... da_p db_0 ... db_q = (I)
\end{aligned}$$

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned}
(da_0 da_1 ... da_p)(b_0 db_1 ... db_q) &+ (-1)^p a_0 da_1 ... da_p db_0 db_1 ... db_q = \\
&= da_0 da_1 ... d(a_p b_0) db_1 ... db_q + \\
&+ \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i da_0 da_1 ... d(a_{p-i} a_{p-i+1}) ... da_p db_0 ... db_q + \\
&+ (-1)^p da_0 a_1 da_2 ... da_p db_0 ... db_q + \\
&+ (-1)^p a_0 da_1 ... da_p db_0 db_1 ... db_q = (II)
\end{aligned}$$

Note que (I) = (II).

■

Definição 3.5 *Uma forma diferencial $\omega \in \Omega^k(A)$ é fechada se $d\omega = 0$ e é exata se $\omega = d\eta$ para algum $\eta \in \Omega^{k-1}(A)$*

Observação 3.2 *Toda forma exata é fechada, pois $d\omega = dd\eta = d^2\eta = 0$*

Teorema 3.2 (Lema de Poincaré) *Em $\Omega(A)$ toda forma fechada é exata.*

Demonstração: Defina

$$\begin{aligned}
\beta : \Omega^k(A) &\longrightarrow \Omega^{k-1}(A) \\
\omega dx &\longmapsto (-1)^{deg\omega} \omega x
\end{aligned}$$

onde $dx \in \Omega^1(A)$.
Vamos inicialmente mostrar que $\beta d + d\beta = Id$

$$\begin{aligned}
\beta d(\omega dx) + d\beta(\omega dx) &= \beta(d\omega dx) + (-1)^{deg\omega} d(\omega x) = \\
&= (-1)^{deg\omega+1} d\omega x + (-1)^{deg\omega} d\omega x + \\
&+ (-1)^{deg\omega}(-1)^{deg\omega} \omega dx = \omega dx = Id(\omega dx)
\end{aligned}$$

Seja φ uma forma fechada. Então

$$\beta d\varphi + d\beta\varphi = \varphi$$

Mas $d\varphi = 0$ pois φ é fechada. Assim $d\beta\varphi = \varphi$. Portanto φ é exata.

■

3.3 O Complexo de Wess-Zumino

Seja $A = k_q[x,y]$, vamos construir uma álgebra diferencial $\Omega_{WZ}(A)$ que seja:

(i) Álgebra quadrática, isto é, ela é o quociente de uma álgebra diferencial universal livre por um ideal quadrático.

(ii) $SL_q(2)$ bi-comódulo

Assim o calculo diferencial resultante será denominado bi-covariante.

Podemos pensar que $\Omega(A) = k\{x, y, dx, dy\}/\text{Leibniz}$

Vamos agora definir as 1-formas no dual de $A^{2|0} = k_q[x,y]$.

Usaremos a seguinte notação: $x^1 = x$ e $x^2 = y$

Escreveremos a relação $yx - qxy = 0$ como:

$$\sum_{i,j} E_{ij} x^i y^j = 0 \tag{3.4}$$

onde

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} -q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

É natural supor que o dual de $A^{2|0}$ seja uma álgebra quadrática. Então

$$A^{0|2} = k\{dx^1, dx^2\} / < \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} dx^i dx^j >$$

onde $\varepsilon_{ij} \in k$, isto é, são coeficientes no corpo.

e

$$< dx^i, x^j >= \delta_i^j$$

Queremos que

$$\sum_{i,j} \varepsilon_{ij} dx^i dx^j = 0 \tag{3.5}$$

onde

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$$

Colocando (3.4) e (3.5) no pairing, obtemos:

$$< \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} dx^i dx^j, \sum_{k,l} E_{kl} x^k y^l >= 0$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,l} &= \varepsilon_{ij}E_{kl} < dx^i, x^k >< dx^j, x^l > \\ &= \sum_{ij} \varepsilon_{ij}E_{ij} = Tr(\varepsilon^T E) = 0\end{aligned}$$

Calculando o produto de $\varepsilon^T E$ e aplicando o Tr, obtemos que:

$$\varepsilon_{12} - q\varepsilon_{21} = 0$$

ou seja

$$\varepsilon_{12} = q\varepsilon_{21}$$

As soluções possíveis são

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & q\varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} = \varepsilon_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon_{21}\begin{pmatrix} 0 & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fazendo $\sum \varepsilon_{ij} dx^i dx^j = 0$ e somando nos elementos da matriz ε obtem-se:

$$\varepsilon_{11}(dx^1)^2 + \varepsilon_{21}(qdx^1dx^2 + 1dx^2dx^1) + \varepsilon_{22}(dx^2)^2 = 0$$

Então $(dx^1)^2 = (dx)^2 = 0$ e $(dx^2)^2 = (dy)^2 = 0$

Logo

$$qdx^1dx^2 + dx^2dx^1 = qdxdy + dydx = 0$$

Estas são as relações que definem $A^{0|2}$.

Portanto $A^{0|2} = (A^{2|0})^*$. Levando em conta estas relações temos:

$$\Omega_{WZ}(A) = \Omega(A)/I$$

onde

$$I =< yx - qxy, (dx)^2, (dy)^2, qdxdy + dydx, ... >$$

As reticências significam que existem termos envolvendo produtos de elementos de $\Omega^0(A)$, com elementos de $\Omega^1(A)$ cruzados.

Então

$$\Omega_{WZ}(A) = \Omega^0_{WZ}(A) \oplus \Omega^1_{WZ}(A) \oplus \Omega^2_{WZ}(A)$$

onde

$$\begin{aligned}\Omega^0_{WZ}(A) &\cong A \\ \Omega^1_{WZ}(A) &= < dx, dy > \\ \Omega^2_{WZ}(A) &= < dxdy >\cong A\end{aligned}$$

O símbolo $< \ >$ quer dizer módulo gerado por.

A seguir indicaremos algumas relações adicionais em I, isto é, queremos que xdx, xdy, ydx, ydy possam ser escritas como combinação lineares de dxx, dxy, dyx e dyy. Estas relações corresponderão aos geradores restantes do sub-módulo I. Queremos então que:

$$
\begin{aligned}
xdx &= a_{11}dxx + a_{12}dxy + a_{13}dyx + a_{14}dyy \\
xdy &= a_{21}dxx + a_{22}dxy + a_{23}dyx + a_{24}dyy \\
ydx &= a_{31}dxx + a_{32}dxy + a_{33}dyx + a_{34}dyy \\
ydy &= a_{41}dxx + a_{42}dxy + a_{43}dyx + a_{44}dyy
\end{aligned}
$$

Os dezesseis coeficientes desconhecidos não são fáceis de serem encontrados, por isso apenas indicaremos alguns passos, e mostraremos diretamente as relações desejadas. Para mais detalhes ver [5]. Inicialmente devemos aplicar d nas quatro equações acima, e obtemos 4 relações entre estes coeficientes. Após, diferenciamos a relação $yx - qxy = 0$ e trocamos xdy e ydx pelas relações postuladas acima e obtemos mais três relações entre os coeficientes. Depois usamos a compatibilidade da coação de $SL_q(2)$, com isso obtém-se mais oito relações. Para o último parametro, precisamos usar a associatividade cúbica, isto é, $(xdy)dx = x(dydx)$. Portanto as relações são:

$$
\begin{aligned}
yx &= qxy, \\
qxdx &= dxx \qquad qydy = dyy \\
-qdxdy &= dydx \qquad (dx)^2 = (dy)^2 = 0 \\
ydx &= qdxy
\end{aligned}
$$

Considere $A = A^{2|0}$. Sabemos que

$$\Omega_{WZ}(A) = \Omega^0_{WZ}(A) \oplus \Omega^1_{WZ}(A) \oplus \Omega^2_{WZ}(A)$$

Considere também que

$$d : \Omega^k_{WZ} \longrightarrow \Omega^{k+1}_{WZ}$$

Seja $\omega \in \Omega^0_{WZ}$ tal que $\omega = \sum a_{mn}x^m y^n$. Então

$$
\begin{aligned}
d\omega &= \sum a_{mn}d(x^m y^n) = \sum a_{mn}dx^m y^n + x^m dy^n = \\
&= (dxx^{m-1} + xdxx^{m-2} + x^2dxx^{m-3} + \ldots + x^{m-1}dx)y^n + \\
&+ x^m(dyy^{n-1} + ydyy^{n-2} + y^2dyy^{n-3} + \ldots + y^{n-1}dy = \\
&= (q^{m-1} = q^{m-2} + \ldots + 1)x^{m-1}q^{-n}y^n dx + \\
&+ x^m(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 1)y^{n-1}dy = \\
&= q^{-n}\left(\frac{q^m - 1}{q - 1}\right)x^{m-1}y^n dx + \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)x^m y^{n-1}dy
\end{aligned}
$$

Como $P(x, y) = x^m y^n$ tem-se que

$$P(xq, yq^{-1}) = x^m q^m y^n q^{-n}$$

$$P(x, yq^{-1}) = q^{-n}x^m y^n$$

Então,

$$\frac{P(xq, yq^{-1}) - P(x, yq^{-1})}{q - q^{-1}} = \frac{q^{-n}(q^m - 1)x^m y^n}{q - q^{-1}}$$

Assim denotamos,

$$x_l D_x^q P(x, y) = q^{-n}\left(\frac{q^m - 1}{q - 1}\right)x^m y^n$$

e

$$y_r D_y^q P(x, y) = \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)x^m y^n$$

Portanto,

$$d(P) = D_x^q P d(x) + D_y^q P d(y) \tag{3.6}$$

As derivadas D_x^q e D_y^q são as mesmas que aparecem no cálculo das q-diferenças de Jackson. Para mais detalhes sobre a equação de (3.6) ver [11].

3.4 Cohomologia

Começaremos esta seção definindo alguns sub-espaços do espaço das p-formas.

Definição 3.6 *O espaço das p-formas fechadas(p-cociclos) será denotada por*

$$Z^p_{WZ}(A) = \{\omega \in \Omega^p_{WZ}(A);\ d\omega = 0\}$$

O espaço das p-formas exatas(p cobordos) será denotado por

$$B^p_{WZ}(A) = \{\omega \in Z^p_{WZ}(A);\ \omega = d\eta,\ \ \eta \in \Omega^{p-1}_{WZ}\}$$

Definição 3.7 *O quociente(A-bimódulo)*

$$H^p_{WZ}(A) = Z^p_{WZ}(A)/B^p_{WZ}(A)$$

é denominado a p-ésima cohomologia do complexo de Wess-Zumino.

Estudaremos o que acontece quando estamos trabalhando com q genérico.

Quando $p = 0$, temos $\Omega^0_{WZ} = k_q[x, y]$
Note que $d1 = 0$. Então

$$Z^0_{WZ}(A) = < 1 >= k, \qquad B^0_{WZ}(A) = \{0\}$$

Assim

$$\dim(Z^0_{WZ}(A)) = 1$$

e

$$\dim(H^0_{WZ}(A)) = 1$$

Agora

$$\Omega^1_{WZ}(A) = \{\sum P(x, y)dx + Q(x, y)dy\}$$

Seja $\omega \in Z^1_{WZ}(A)$ e tome

$$\omega = \alpha x^m y^n dx + \beta x^l y^k dy$$

Queremos que $d(x^m y^n dx + x^l y^k dy) = 0$. Mas,

$$\begin{aligned} d(\alpha x^m y^n dx + \beta x^l y^k dy) &= \alpha((dx^m)y^n dx + x^m(dy^n)dx) + \\ &+ \beta((dx^l)y^k dy + x^l(dy^k)dy) = 0 \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \alpha x^m(dyy^{n-1} + ydyy^{n-2} + ... + y^{n-1}dy)dx &+ \beta(dxx^{l-1} + xdxx^{l-2} + ... + x^{l-1}dx)y^k dy = \\ &= \alpha x^m y^{n-1}(q^{n-1} + q^{n-2} + ... + 1)dydx + \\ &+ \beta x^{l-1}(q^{l-1} + q^{l-2} + ... + 1)dxy^k dy = \\ &= -\alpha q\left(\frac{q^n - 1}{q-1}\right)x^m y^{n-1}dxdy + \\ &+ \beta q^{-k}\left(\frac{q^l - 1}{q-1}\right)x^{l-1}y^k dxdy = 0 \end{aligned}$$

Assim devemos ter que

$$m = l - 1$$

e

$$k = n - 1$$

Logo,

$$\alpha q^{-k}(q^l - 1) - \alpha q(q^{k+1} - 1) = 0$$

E segue que,

$$\beta q^{l-k} - \beta q^{-k} - \alpha q^{k+2} + \alpha q = 0$$

Portanto,

$$\beta q^{l-k} - \alpha q^{k+2} = -\beta q^{-k} - \alpha q$$

Tome $\alpha = 1$. Então

$$\beta q^{l-k} - q^{k+2} = -\beta q^{-k} - q$$

Temos assim 3 possibilidades:

(i) $\beta q^{l-k} = \beta q^{-k}$ e $q^{k+2} = q$, onde obtemos que:

$$q^l = 1 \Rightarrow l = 0$$

e

$$k + 2 = 1 \Rightarrow k = -1$$

O que é impossível, pois k não pode ser negativo.

(ii) $\beta q^{l-k} = -q$ e $\beta q^{-k} = -q^{k+2}$. Então,

$$\beta q^l = -q^{k+1}$$

e

$$\beta = -q^{2k+2}$$

Segue então que

$$q^{2k+2}q^{l} = q^{k+1}$$

Donde

$$l + k + 1 = 0 \Rightarrow l = -k - 1$$

E portanto

$$l \leq -1$$

O que é impossível.

(iii) $\beta q^{l-k} = q^{k+2}$ e $\beta q^{-k} = q$. Assim temos,

$$\beta = q^{k+1} = q^{n}$$

Então

$$q^{k+1}q^{l-k} = q^{k+2}$$

Logo,

$$l + 1 = k + 2$$

Como,

$$k + 1 = n \Rightarrow k + 2 = n + 1$$

Portanto,

$$l + 1 = n + 1 \Rightarrow l = n$$

Assim, se $\omega \in Z^1_{WZ}(A)$, então é da forma

$$\omega = x^{n-1}y^{n}dx + q^{n}x^{n}y^{n-1}dy$$

Mas se,

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{1}{[n]}d(q^{n}x^{n}y^{n}) = \\
&= \frac{1}{[n]}q^{n}(dx^{n})y^{n} + \frac{1}{[n]}q^{n}x^{n}(dy^{n}) = \\
&= \frac{1}{[n]}q^{n}[n]x^{n-1}dxy^{n} + \frac{1}{[n]}q^{n}x^{n}[n]y^{n-1}dy = \\
&= x^{n-1}y^{n}dx + q^{n}x^{n}y^{n-1}dy
\end{aligned}$$

Então,

$$\omega \in B^1_{WZ}(A)$$

Temos ainda que $y^{n}dy$ e $x^{n}dx$ pertencem à $Z^1_{WZ}(A)$. Más,

$$y^{n}dy = d\left(\frac{1}{[n+1]}y^{n+1}\right)$$

e

$$x^n dx = d\left(\frac{1}{[n+1]}x^{n+1}\right)$$

Então

$$y^n dy, x^n dx \in B^1_{WZ}(A)$$

Logo,

$$\dim(H^1_{WZ}(A)) = 0$$

Finalmente,

$$\Omega^2_{WZ}(A) = \{P(x,y)dxdy\} = \{x^m y^n dxdy\}$$

Note então que

$$\Omega^2_{WZ}(A) = Z^2_{WZ}(A)$$

Agora devemos escolher α e $\beta \in \mathbb{C}$ tal que

$$d(\alpha x^{m+1}y^n dx + \beta x^m y^{n+1} dy) = P(x,y)dxdy$$

Então

$$\begin{aligned} d(\alpha x^{m+1}y^n dx + \beta x^m y^{n+1} dy) &= \alpha x^m dy^{n+1} dx + \beta dx^{m+1} y^n dy = \\ &= \alpha x^m (q^n + q^{n-1} + ... + 1) y^n dydx + \\ &+ \beta (q^m + q^{m-1} + ... + 1) x^m dx y^n dy = \\ &= -\alpha q \left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right) x^m y^n dxdy + \\ &+ \beta \left(\frac{q^{m+1}-1}{q-1}\right) q^{-n} x^m y^n dxdy = \\ &= \left(\beta\left(\frac{q^{m+1}-1}{q-1}\right)q^{-n} - \alpha q\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)\right) x^n y^n dxdy \end{aligned}$$

Se escolhermos

$$\alpha = q^{-1}\left(\frac{q-1}{q^{n+1}-1}\right)$$

e

$$\beta = 2q^n\left(\frac{q-1}{q^{m+1}-1}\right)$$

Obtemos

$$d(\alpha x^{m+1}y^n dx + \beta x^m y^{n+1} dy) = P(x,y)dxdy$$

Portanto

$$\Omega^2_{WZ}(A) = B^2_{WZ}(A)$$

Assim

$$\dim(H^2_{WZ}(A)) = 0$$

Calculando estas dimensões temos um resultado interessante envolvendo topologia. Para isto, é necessário uma outra definição:

Definição 3.8 *A característica de Euler de um espaço é definido como*

$$\chi(M) = \sum_n (-1)^n \dim(H^n(M))$$

Portanto a característica de Euler do plano quântico para q genérico é,

$$\chi(A) = \dim(H^0_{WZ}(A)) + \dim(H^1_{WZ}(A)) + \dim(H^2_{WZ}(A)) = 1$$

Topologicamente, quer dizer que o plano quântico se comporta como um plano.

No próximo capítulo faremos o mesmo para $q^3 = 1$

Capítulo 4

A Geometria do Plano Quântico para $q^3 = 1$

Neste capítulo estudaremos tudo o que foi visto nos capítulos anteriores, mas para o caso particular, quando $q^3 = 1$

4.1 O Espaço M da Matrizes 3×3 como o Plano Quântico Reduzido

A álgebra das matrizes $n \times n$ pode ser gerada por dois elementos x e y de tal maneira que satisfaçam

$$yx = qxy, \qquad x^n = y^n = I \tag{4.1}$$

onde $q^n = 1$

Estamos interessados em um caso particular, quando $n = 3$, sendo assim podemos explicitar quem são x e y

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & q^{-2} \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $q^3 = 1$ (Use o fato que $q^{-1} = q^2$).

Com x e y desta forma, verifica-se facilmente as relações em (4.1) para $n = 3$

Observação 4.1 *(i) Toda matriz 3×3 é gerada por 9 matrizes elementares E_{ij}, estas matrizes tem 1 na entrada (i, j) e 0 nas outras.*

(ii) Estas matrizes podem ser expressas em termos de x e y da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
E_{11} &= (I + x + x^2)/3, & E_{12} &= (y + xy + x^2y)/3 \\
E_{13} &= (y^2 + xy^2 + x^2y^2)/3 & E_{21} &= (y^2 + qxy^2 + q^2x^2y^2)/3 \\
E_{22} &= (I + qx + q^2x^2)/3 & E_{23} &= (y + qxy + q^2x^2y)/3 \\
E_{31} &= (y + q^2xy + qx^2y)/3 & E_{32} &= (y^2 + q^2xy^2 + qx^2y^2)/3 \\
E_{33} &= (I + q^2x + qx^2)/3
\end{aligned}$$

Para provar estas relações precisamos usar o fato que $q^2 + q + 1 = 0$. Com isto todas as relações são verificadas.

Sabemos que para qualquer matriz A, 3×3 temos

$$A = \sum a_{ij} E_{ij}$$

e como cada E_{ij} é gerado por x e y, segue que a álgebra das matrizes 3×3 é gerada por x e y.

A álgebra associativa gerada, sobre os números complexos, por x e y com a relação $yx = qxy$ é conhecida como a álgebra dos polinômios sobre o plano quântico e é denotada como já vimos por $K_q[x, y]$. Quando $q = 1$, esta álgebra é comutativa e pode ser considerada como a álgebra dos polinômios $K[x, y]$ no plano afim usual, x e y sendo funções coordenadas. A dimensão do plano quântico é infinita, pois as potências dos geradores não satisfazem nenhuma relação em particular. Já em $M_3(k)$(A álgebra das matrizes 3×3), os geradores x e y satisfazem as relações $x^3 = I$ e $y^3 = I$. Sendo assim a dimensão de $M_3(k)$ é igual a 9 e a base de geradores é dada por

$$\beta\{I, x, y, x^2, y^2, xy, x^2y, xy^2, x^2y^2\}$$

Note que estes geradores são os responsáveis pelas matrizes elementares E_{ij}.

Seja agora $\widehat{k_q} = k_q[x, y]/(q^3 - 1)$ uma álgebra associativa e I_q o ideal bilateral gerado por $x^3 - 1 = 0$ e $y^3 - 1 = 0$. Considere

$$M_3(k) = \widehat{k_q}/I_q$$

Por esta razão consideramos o espaço da matrizes 3×3 sobre k como o plano quântico reduzido e denotamos esta álgebra por M.

4.2 O Grupo Quântico F e o seu dual H

Na seção 2.3 do capítulo 2 definimos a coação de $SL_q(2)$ sobre o plano quântico $K_q[x, y]$. Devemos lembrar que esta coação se reduz à uma coação sobre M, mas para isto devemos mostrar que:

(i) $\delta_{r,l}(x^3) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$

(ii) $\delta_{r,l}(y^3) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$

Isto implica em novas relações entre os geradores de $SL_q(2)$. Vejamos:

$$\begin{aligned}
\delta_l(x^3) &= \delta_l(x)\delta_l(x)\delta_l(x) = \\
&= (a \otimes x + b \otimes y)^3 = a^3 \otimes x^3 + a^2 b \otimes x^2 y + aba \otimes xyx + ba^2 \otimes yx^2 + \\
&+ ab^2 \otimes xy^2 + bab \otimes yxy + b^2 a \otimes y^2 x + b^3 \otimes y^3 = \\
&= a^3 \otimes x^3 + a^2 b \otimes x^2 y + q(a^2 b \otimes x^2 y) + q(aba \otimes xyx) + ab^2 \otimes xy^2 + \\
&+ q(ab^2 \otimes xy^2) + q(bab \otimes yxy) + b^3 \otimes y^3 = \\
&= a^3 \otimes x^3 + (1+q)a^2 b \otimes x^2 y + q^2(a^2 b \otimes x^2 y) + (1+q)ab^2 \otimes xy^2 + \\
&+ q^2(ab^2 \otimes xy^2) + b^3 \otimes y^3 = \\
&= a^3 \otimes x^3 + (1+q+q^2)a^2 b \otimes x^2 y + (1+q+q^2)ab^2 \otimes xy^2 + b^3 \otimes y^3
\end{aligned}$$

Mas lembremo-nos que $q^2 + q + 1 = 0$. Logo

$$\delta_l(x^3) = a^3 \otimes x^3 + b^3 \otimes y^3$$

Fazendo o mesmo obtemos:

$$\delta_l(y^3) = c^3 \otimes x^3 + d^3 \otimes y^3$$

$$\delta_r(x^3) = x^3 \otimes a^3 + y^3 \otimes c^3$$

$$\delta_r(y^3) = x^3 \otimes b^3 + y^3 \otimes d^3$$

Mas $\delta_l(x^3) = \delta_l(y^3) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ e $\delta_r(x^3) = \delta_r(y^3) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$. Portanto devemos ter

$$\begin{aligned}
a^3 &= 1 \qquad b^3 = 0 \\
c^3 &= 0 \qquad d^3 = 1
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Denotaremos por F o quociente da álgebra $SL_q(2)$ pelo ideal bilateral gerado por $< a^3 - \mathbf{1}, b^3, c^3, d^3 - \mathbf{1} >$, denotemos este ideal por I_F. Agora note que em $SL_q(2)$, temos:

$$ad - qcb = 1$$

Multiplicando por a^2, obtemos

$$a^3 d - qa^2 cb = a^2$$

Ou seja

$$d = a^2(1 + qcb) \tag{4.3}$$

Pela relação de (4.3), notamos que d depende de a, b e c, segue então que F é gerada por elemento do tipo $a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma$, onde $\alpha, \beta, \gamma : \{0, 1, 2\}$. Assim F tem dimensão finita e é associativa e

$$\dim(F) = 27$$

Proposição 4.1 *F é uma álgebra de Hopf.*

Demonstração: Para mostrar que o quociente $F = SL_q(2)/I_F$ é uma álgebra de Hopf precisamos mostrar que

(i) $\varepsilon(I_F) = 0$

(ii) $\Delta(I_F) \subset I_F \otimes SL_q(2) + SL_q(2) \otimes I_F$

(iii) $S(I_F) \subset I_F$

De fato,

(i)

$$\begin{aligned}\varepsilon(a^3 - 1) = \varepsilon(a^3) - 1 = (\varepsilon(a))^3 - 1 = 1 - 1 = 0 \\ \varepsilon(b^3) = (\varepsilon(b))^3 \\ \varepsilon(c^3) = (\varepsilon(c))^3 \\ \varepsilon(d^3 - 1) = \varepsilon(d^3) - 1 = (\varepsilon(d))^3 - 1 = 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\Delta(a^3 - 1) &= (\Delta(a))^3 - 1 \otimes 1 = \\ &= (a \otimes a + b \otimes c)^3 - 1 \otimes 1 = \\ &= a^3 \otimes a^3 + a^2b \otimes a^2c + aba \otimes aca + ab^2 \otimes ac^2 + ba^2 \otimes ca^2 + \\ &+ bab \otimes cac + b^2a \otimes c^2a + b^3 \otimes c^3 - 1 \otimes 1 = \\ &= a^3 \otimes a^3 + (1 + q^{-2} + q^{-4})a^2b \otimes a^2c + \\ &+ (1 + q^2 + q^4)ab^2 \otimes ac^2 + b^3 \otimes c^3 - 1 \otimes 1 = \\ &= a^3 \otimes a^3 + b^3 \otimes c^3 - 1 \otimes 1 = \\ &= a^3 \otimes a^3 - a^3 \otimes 1 + a^3 \otimes 1 - 1 \otimes 1 + b^3 \otimes c^3 = \\ &= a^3 \otimes (a^3 - 1) + (a^3 - 1) \otimes 1 + b^3 \otimes c^3 \in I_F \otimes SL_q(2) + SL_q(2) \otimes I_F\end{aligned}$$

Análogo para $\Delta(d^3 - 1)$.

$$\begin{aligned}\Delta(b^3) &= (\Delta(b))^3 = (a \otimes b + b \otimes d)^3 = \\ &= a^3 \otimes b^3 + a^2b \otimes b^2d + aba \otimes bdb + ab^2 \otimes bd^2 + \\ &+ ba^2 \otimes db^2 + bab \otimes dbd + b^2 \otimes d^2b + b^3 \otimes d^3 = \\ &= a^3 \otimes b^3 + (1 + q + q^2)a^2b \otimes b^2d + \\ &+ (1 + q + q^2)ab^2 \otimes bd^2 + b^3 \otimes d^3 = \\ &= a^3 \otimes b^3 + b^3 \otimes d^3 \in SL_q(2) \otimes I_F + I_F \otimes SL_q(2)\end{aligned}$$

Idem para $\Delta(c^3)$.

∎

Com todas as restrições satisfeitas, podemos concluir a partir da seção 2.3 do capítulo 2 que M é um F-comódulo à direita e à esquerda e tem estrutura de F-comódulo álgebra. Apesar de F coagir com M, ela não age em M, para isso vamos definir uma álgebra de Hopf H que será um quociente da álgebra universal envolvente

$U_q(sl(2))$ pelo ideal gerado por $q^3 - 1, X_{\pm}^3$ e $K^3 - \mathbf{1}$. Ela na verdade é o dual de F. Vamos a seguir estudar um pouco de representações de $U_q(sl(2))$ quando q é raiz da unidade.

Seja $l = \frac{d}{2}$, se d é par e $l = d$, se d é impar. Então temos

Lema 4.1 *$X_+^l, X_-^l, K^l \in Z(U_q(sl(2)))$, isto é, estão no centro de $U_q(sl(2))$.*

Demonstração:

$$K^l X_{\pm} = K^l X_{\pm} K^{-l} K^l = q^{\pm 2l} X_{\pm} K^l = 1 X_{\pm} K^l = X_{\pm} K^l$$

Também temos

$$\begin{aligned} X_{\pm}^l K &= X_{\pm} X_{\pm} \cdot \ldots \cdot X_{\pm} K = \\ &= K K^{-1} X_{\pm} K K^{-1} X_{\pm} K K^{-1} \cdot \ldots \cdot K K^{-1} X_{\pm} K = \\ &= K q^{\mp 2l} X_{\pm}^l = K X_{\pm}^l \end{aligned}$$

Tem-se ainda que

$$[X_+^l, X_-] = [l] \frac{q^{-(l-1)} K - q^{l-1} K^{-1}}{q - q^{-1}} X_+^{l-1} = 0$$

Pois,

$$[l] = \frac{q^l - q^{-l}}{q - q^{-1}} = 0$$

De modo análogo, obtemos

$$[X_+, X_-^l] = 0$$

■

O que acontece como os $U_q(sl(2))$ módulos quando $q^{2l} = 1$? A resposta é dada nos próximos teoremas.

Teorema 4.1 *Os $U_q(sl(2))$ módulos de dimensão n menor que l são isomorfos a $V_{\varepsilon,n}$ dados no teorema(2.2)*

Demonstração: A demosntração é mesma da recíproca do teorema (C.1) , pois $1, q, q^2, ..., q^n$ são escalares distintos. c

Teorema 4.2 *Não há módulos simples de dimensão maior que l.*

Demonstração: Assuma que exista V um $U_q(sl(2))$ módulo de dimensão maior que l. Vamos dividir em dois casos:

(i) Suponha que exista $v \in V$ tal que $Kv = \lambda v$ e $X_- v = 0$.
Tome subespaço vetorial V' gerado por

$$v_0 = v, \quad X_+ v = v_1, ..., X_+^p v = v_p, ..., X_+^{l-1} v = v_{l-1}$$

Então $\{0\} \neq V' \subsetneq V$

Vamos mostrar que V' é submódulo.

$$Kv_p = KX_+^p v = q^{2p} X_+^p K v = \lambda q^{2p} v_p$$

$$X_+ v_p = X_+ X_+^p v = X_+^{p+1} v, \quad 0 \leq p < l-1$$
$$X_+ v_{l-1} = X_+^l v = \alpha v, \quad \alpha \in k$$

esta última igualdade é obtida do Lema de Schur.

$$\begin{aligned}
X_- v_p &= X_- X_+^p v = [X_, X_+^p] v = \\
&= [p] \frac{q^{p-1} K^{-1} - q^{-(p-1)} K}{q - q^{-1}} X_+^{p-1} v = \\
&= [p] \frac{q^{p-1} \lambda^{-1} q^{-2(p-1)} - q^{-(p-1)} \lambda q^{2(p-1)}}{q - q^{-1}} v_{p-1} = \\
&= [p] \frac{q^{-p+1} \lambda^{-1} - q^{p-1} \lambda}{q - q^{-1}} v_{p-1}
\end{aligned}$$

Portanto V' é submódulo de V, contradizendo a hipótese de V ser simples.

(ii) Suponha que não exista $v \in V$ tal que $Kv = \lambda v$ e $X_- v = 0$, $v \neq 0$.

Considere $V' \subset V$ gerado por

$$v_o = v, \ v_1 = X_- v, \ \dots, \ v_p = X_-^p v, \ \dots, \ v_{l-1} = X_-^{l-1} v$$

Então V' é submódulo de V. De fato

$$Kv_p = KX_-^p v = \lambda q^{-2p} v_p$$

$$X_- v_p = X_- X_-^p v = X_-^{p+1} v, \quad 0 \leq p < l-1$$
$$X_- v_{l-1} = X_-^l v = \alpha v, \quad \alpha \in k$$

A última igualdade obtém-se do Lema de Schur.

$$\begin{aligned}
X_+ X_-^p v &= X_+ X_- X_-^{p-1} v = (C_q - \frac{q^{-1} K + q K^{-1}}{(q - q^{-1})^2} X_-^{p-1} v = \\
&= \left(\beta - \frac{q^{-1} \lambda q^{-2(p-1)} + q \lambda^{-1} q^{2(p-1)}}{(q - q^{-1})^2} \right) v_{p-1} \qquad (4.4) \\
&= \left(\beta - \frac{\lambda q^{-2p+1} + \lambda^{-1} q^{2p-1}}{(q - q^{-1})^2} \right) v_{p-1}
\end{aligned}$$

Em (4.4) foi usado o Lema de Schur.

Então V' é submódulo de V com $dim < l$, contradição logo não existem módulos simples de $dim > l$.

$\blacksquare$

O próximo resultado nos diz a respeito do $U_q(sl(2))$ módulos com dimensão l. A demonstração deste teorema não é das mais fáceis, portanto apenas faremos um esboço da demonstração.

Teorema 4.3 *Qualquer $U_q(sl(2))$ módulo com dimensão igual à l é isomorfo a um dos módulos a seguir:*

(i) $V(\lambda, a, b)$ *com* $b \neq 0$

(ii) $V(\lambda, a, 0)$ *onde* λ *não é da forma* $\pm q^{j-1}$, $\quad 1 \leq j \leq l-1$.

(iii) $V(\pm q^{1-j}, c)$ *com* $c \neq 0$ *e* $1 \leq j \leq l-1$.

Esboço da demonstração: Vamos apenas definir os módulos do item (i) e (iii) e mostrar como os geradores de $U_q(sl(2))$ atuam nos elementos da base e para o item (i) vamos mostra de fato que $V(\lambda, a, b)$ é um $U_q(sl(2))$ módulo.

(i) Seja $V(\lambda, a, b)$ com $\lambda \neq 0$, onde $dimV = l$ e a base de V é dado por $\{v_0, ..., v_{l-1}\}$ tal que

$$Kv_p = \lambda q^{-2p} v_p$$

$$X_+ v_{p+1} = \left(\frac{q^{-p}\lambda - q^p \lambda^{-1}}{q - q^{-1}} [p+1] + ab \right) v_p$$

$$X_- v_p = v_{p+1}, \quad X_+ v_0 = a v_{l-1}, \quad X_{l-1} = b v_0$$

Temos de mostrar que $V(\lambda, a, b)$ é um $U_q(sl(2))$ módulo. De fato

$$\begin{aligned} KX_+K^{-1}v_p &= KX_+\lambda^{-1}q^{2p}v_p = \lambda^{-1}q^{2p}Kav_{p-1} = \\ &= \lambda^{-1}q^{2p}\lambda q^{-2(p-1)}X_+v_p = q^2 X_+ v_p \end{aligned}$$

Idem para KX_-K^{-1}.

Também

$$
\begin{aligned}
[X_+, X_-]v_p &= X_+X_-v_p - X_-X_+v_p = \\
&= X_+v_{p+1} - \left(\frac{q^{-p+1}\lambda - q^{p-1}\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}[p] + ab\right)v_{p-1} = \\
&= \left(\frac{q^{-p}\lambda - q^{p}\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}[p+1] + ab\right) - \\
&- \left(\frac{q^{-p+1}\lambda - q^{p-1}\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}[p] + ab\right)v_p = \\
&= \frac{1}{(q-q^{-1})^2}(q\lambda - q^{-2p-1}\lambda - q^{2p+1}\lambda^{-1} + q^{-1}\lambda^{-1} - q\lambda + \\
&+ q^{-2p+1}\lambda + q^{2p-1}\lambda^{-1} - q^{-1}\lambda^{-1})v_p = \\
&= \frac{1}{(q-q^{-1})^2}(q^{-2p}\lambda(q-q^{-1}) - q^{2p}(q-q^{-1})\lambda^{-1})v_p = \\
&= \frac{q^{-2p}\lambda - q^{2p}\lambda^{-1}}{q-q^{-1}}v_p = \\
&= \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}v_p
\end{aligned}
$$

Isto mostra que $V(\lambda, a, b)$ funciona como um $U_q(sl(2))$ módulo.

(iii) Seja $V(\mu, c)$ com $\mu \neq 0$ onde $dimV = l$, tendo como base $\{v_0, ..., v_{l-1}\}$ satisfazendo

$$Kv_p = \mu q^{2p} v_p$$

$$X_-v_{p+1} = \frac{q^{-p}\mu^{-1} - q^{p}\mu}{q-q^{-1}}[p+1]v_p$$

$$X_+v_p = v_{p+1}, \quad X_-v_0 = 0, \quad X_+v_{l-1} = cv_0, \quad Kv_{l-1} = \mu q^{-2} v_{l-1}$$

De maneira análoga mostra-se que $V(\mu, c)$ é um $U_q(sl(2))$ módulo.

■

A seguir explicitaremos uma base para módulos de dimensão 2. Seja V um $U_q(sl(2)$-módulo. Como a $\dim(V) = 2$, segue que $n = 1$, de acordo com o teorema (2.3) , temos quem é a representação de K para esta dimensão.
Como K é uma matriz diagonal, segue que os seus autovalores são:

$$\lambda_1 = q \qquad \lambda_2 = q^{-1}$$

Nossa meta é encontrar uma base para V. Conforme teorema (2.3) devemos ter que

$$X_+v = 0$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Logo $y = 0$ e x é qualquer. Portanto $v_0 = (1, 0)$ é um vetor da base e satisfaz:

$$Kv_0 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = qv_0$$

ou seja, v_0 é autovetor do autovalor $\lambda_1 = q$.

Agora

$$v_1 = \frac{1}{[1]!} X_-^1 v_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Então $v_1 = (0, 1)$ e satisfaz $X_+ v_1 = 0$ e $Kv_1 = q^{-1}v_1$, ou seja v_1 é autivalor do autevetor $\lambda_2 = q\,{-1}$. Obtemos assim uma base para módulos de dimensão 2. Seja ela

$$\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

que são os autovetores.

4.3 As Ações de H

Nesta seção vamos definir algumas ações de H. São elas:

(i) H em H

(ii) H em F

(iii) H em M

Depois de definidas, mostraremos como elas atuam no seu geradores. Comecemos pela mais simples.

(i) H agindo em H

A ação é dada pela multiplicação. São elas:

Ação à direita:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_r & H \otimes H & \longrightarrow & H \\ & X \otimes Y & \longmapsto & X \lhd Y = XY \end{array}$$

Ação à esquerda:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_l & H \otimes H & \longrightarrow & H \\ & X \otimes Y & \longmapsto & X \rhd Y = XY \end{array}$$

Provaremos que são ações. De fato

$$\begin{aligned} X_1 \rhd (X_2 \rhd Y) &= X_1(X_2 \rhd Y) = X_1(X_2Y) = \\ &= (X_1X_2)Y = X_1X_2 \rhd Y \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\mathbf{1} \rhd Y = \mathbf{1}Y = Y$$

Idem para à direita.

(ii) H agindo em F.

Seja $X, Y \in H$, formas lineares em F. Tome $u \in F$.
Define-se a ação entre estas duas álgebras de Hopf(H em F), usando o emparelhamento $< \, , \, >$.

Ação à esquerda:

$$\begin{array}{rccc} \alpha_l : & H \otimes F & \longrightarrow & F \\ & (X, u) & \longmapsto & X \rhd u \end{array}$$

Mas para esta ação, faremos o uso do emparelhamento:

$$< Y, X \rhd u > = < YX, u >$$

Proposição 4.2 *F é um H-módulo álgebra.*

Demonstração: Primeiramente mostraremos que se trata relamente de uma ação. De fato,

$$\begin{aligned} < Y, X_1 \rhd (X_2 \rhd u) > &= < YX_1, X_2 \rhd u > = < (YX_1)X_2, u > = \\ &= < Y(X_1X_2), u > = < Y, X_1X_2 \rhd u > \end{aligned}$$

Logo

$$X_1 \rhd (X_2 \rhd u) = X_1X_2 \rhd u$$

Temo também que,

$$< Y, \mathbf{1} \rhd u > = < Y\mathbf{1}, u > = < Y, u >$$

Então

$$\mathbf{1} \rhd u = u$$

Assim F é um H-módulo.

Para mostrar que F é um H módulo álgebra precisamos notar que

$$\begin{aligned} < Y, X \rhd u > &= < YX, u > = < Y \otimes X, \Delta(u) > = \\ &= < Y \otimes X, u_{(1)} \otimes u_{(2)} > = < Y, u_{(1)} > < X, u_{(2)} > = \\ &= < Y, u_{(1)} < X, u_{(2)} >> \end{aligned} \tag{4.5}$$

Assim,

$$X \triangleright u = u_{(1)} < X, u_{(2)} >$$

Vamos agora provar que F é um H-módulo álgebra. De fato,

$$\begin{aligned}
X \triangleright (uv) &= \sum (uv)_{(1)} < X, (uv)_{(2)} >= \sum u_{(1)} v_{(1)} < X, u_{(2)} v_{(2)} >= \\
&= \sum u_{(1)} v_{(1)} < \Delta(X), u_{(2)} \otimes v_{(2)} >= \\
&= \sum u_{(1)} v_{(1)} < X_{(1)} \otimes X_{(2)}, u_{(2)} \otimes v_{(2)} >= \\
&= \sum u_{(1)} < X_{(1)}, u_{(2)} > v_{(1)} < X_{(2)} \otimes v_{(2)} >= \\
&= \sum (X_{(1)} \triangleright u)(X_{(2)} \triangleright v)
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$X \triangleright \mathbf{1} = \sum \mathbf{1}_{(1)} < X, \mathbf{1}_{(2)} >= \varepsilon(X)\mathbf{1}$$

■

Podemos definir uma ação à direita da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rccc}
\alpha_r : & F \otimes H & \longrightarrow & F \\
 & (u, X) & \longmapsto & u \triangleleft X
\end{array}$$

Então

$$< Y, u \triangleleft X >=< XY, u >$$

É uma ação, de fato:

$$\begin{aligned}
< Y, (u \triangleleft X_1) \triangleleft X_2 > &= < X_2 Y, u \triangleleft X_1 >=< X_1(X_2 Y), u >= \\
&= < (X_1 X_2) Y, u >=< Y, u \triangleleft X_1 X_2 >
\end{aligned}$$

Isto é,

$$(u \triangleleft X_1) \triangleleft X_2 = u \triangleleft X_1 X_2$$

Da mesma forma,

$$< Y, u \triangleleft \mathbf{1} >=< \mathbf{1} Y, u >=< Y, u >$$

ou seja,

$$u \triangleleft \mathbf{1} = u$$

De maneira análoga como na proposição (4.2) , temos que F é um H-módulo álgebra à direita.
Agora mostraremos como a ação à esquerda atua nos geradores de H e geradores de F. Temos então que:

$$H =< X_+, X_-, K >, \qquad F =< a, b, c, d >$$

$$\begin{aligned}
< K, X_+ \triangleright a > &= < K X_+, a >=< K \otimes X_+, a \otimes a + b \otimes c >= \\
&= < K, a >< X_+, a > + < K, b >< X_+, c >= 0
\end{aligned}$$

Também,

$$< X_-, X_+ \triangleright a >=< X_+, X_+ \triangleright a >= 0$$

Então

$$X_+ \triangleright a = 0$$

Analogamente tem-se que $X_+ \triangleright c = 0$
Agora,

$$\begin{aligned}
< K, X_+ \triangleright b > &= < KX_+, b >=< K \otimes X_+, a \otimes b + b \otimes d >= \\
&= < K, a >< X_+, b > + < K, b >< X_+, d >= \\
&= < K, a > 1+ < K, b > 0 =< K, a >
\end{aligned}$$

Então

$$X_+ \triangleright b = a$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
< K, X_+ \triangleright d > &= < KX_+, d >=< K \otimes X_+, c \otimes b + d \otimes d >= \\
&= < K, c >< X_+, b > + < K, d >< X_+, d >= \\
&= < K, c > 1+ < K, d > 0 =< K, c >
\end{aligned}$$

Assim,

$$X_+ \triangleright d = c$$

Da mesma forma temos que:

$$\begin{aligned}
< K, X_- \triangleright a > &= < KX_-, a >=< K \otimes X_-, a \otimes a + b \otimes c >= \\
&= < K, a >< X_-, a > + < K, b >< X_-, c >= \\
&= < K, a > 0 + < K, b > 1 =< K, b >
\end{aligned}$$

Então,

$$X_- \triangleright a = b$$

Fazendo o mesmo obtemos que:

$$X_- \triangleright b = X_- \triangleright d = 0, \qquad X_- \triangleright c = d$$

Por último temos que:

$$\begin{aligned}
< K, K \triangleright a > &= < KK, a >=< K \otimes K, a \otimes a + b \otimes c >= \\
&= < K, a >< K, a > + < K, b >< K, c >= \\
&= q < K, a >=< K, qa >
\end{aligned}$$

Então,

$$< K, a >= qa$$

Para os outros temos,

$$K \triangleright b = q^2 b \qquad K \triangleright c = qc \qquad K \triangleright d = q^2 d$$

O calculo para a ação à direita são análogos por esta razão apenas indicaremos os resultados.

$$\begin{array}{llll} a \triangleleft X_+ = c & b \triangleleft X_+ = d & c \triangleleft X_+ = 0 & d \triangleleft X_+ = 0 \\ a \triangleleft X_- = 0 & b \triangleleft X_- = 0 & c \triangleleft X_- = a & d \triangleleft X_- = b \\ a \triangleleft K = qa & b \triangleleft K = qb & c \triangleleft K = q^2c & d \triangleleft K = q^2d \end{array}$$

(iii) H agindo em M.

Na seção 2.3 do capítulo 2, definimos a ação de $U_q(sl(2))$ sobre o plano quântico $k_q[x,y]$, usando o emparelhamento. A ação de H sobre M é a mesma da referida seção. Agora para calcular a ação de H nos geradores de M precisamos considerar dois fatos: M é H-módulo álgebra e as ações sobre os geradores x e y, como esta mostrado na seção 2.3.

$$\begin{aligned} X_+ \triangleright x^2 &= X_+ \triangleright x \cdot x = \\ &= (X_+ \triangleright x)(\mathbf{1} \triangleright x) + (K \triangleright x)(X_+ \triangleright x) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_+ \triangleright y^2 &= X_+ \triangleright y \cdot y = \\ &= (X_+ \triangleright y)(\mathbf{1} \triangleright y) + (K \triangleright y)(X_+ \triangleright y) = \\ &= xy + q^2yx = \\ &= xy + xy = 2xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_+ \triangleright xy &= (X_+ \triangleright x)(\mathbf{1} \triangleright y) + (K \triangleright x)(X_+ \triangleright y) = \\ &= qx^2 \end{aligned}$$

Com estas relações, podemos de maneira análoga obter as relações para os outros geradores:

$$X_+ \triangleright x^2y = q^2\mathbf{1} \qquad X_+ \triangleright xy^2 = 2qx^2y \qquad X_+ \triangleright x^2y^2 = 2q^2y$$

Da mesma maneira temos,

$$\begin{aligned} X_- \triangleright x^2 &= X_- \triangleright x \cdot x = \\ &= (X_- \triangleright x)(K^{-1} \triangleright x) + (\mathbf{1} \triangleright x)(X_- \triangleright x) = \\ &= q^{-1}yx + xy = \\ &= xy + xy = 2xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_- \triangleright y^2 &= (X_- \triangleright y)(K^{-1} \triangleright y) + (\mathbf{1} \triangleright y)(X_- \triangleright y) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_- \triangleright xy &= (X_- \triangleright x)(K^{-1} \triangleright y) + (\mathbf{1} \triangleright x)(X_- \triangleright y) = \\ &= qy^2 \end{aligned}$$

Para as outras temos,

$$X_- \triangleright x^2y = 2qxy^2 \qquad X_- \triangleright xy^2 = q^2\mathbf{1} \qquad X_- \triangleright x^2y^2 = 2q^2x$$

Finalmente temos,

$$K \triangleright x^2 = (K \triangleright x)(K \triangleright x) = q^2x^2$$

$$K \triangleright y^2 = (K \triangleright y)(K \triangleright y) = qy^2$$

$$K \triangleright xy = (K \triangleright x)(K \triangleright y) = q^3xy = xy$$

Assim temos,

$$K \triangleright x^2y = qx^2y \qquad K \triangleright xy^2 = q^2xy^2 \qquad K \triangleright x^2y^2 = x^2y^2$$

Da mesma maneira podemos fazer todos os calculos, utilizando ações à direita. Primeiramente vamos definir a coação à esquerda:

$$\begin{array}{rccc} \delta_l : & M & \longrightarrow & F \otimes M \\ & z & \longmapsto & \sum z^{(1)} \otimes z^{(2)} \end{array}$$

Assim definimos uma ação à direita, da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} \alpha_r : & M \otimes H & \longrightarrow & M \\ & (z, X) & \longmapsto & z \triangleleft X = (< X, \cdot > \otimes Id)\delta_l(z) = \\ & & & \sum < X, z^{(1)} > z^{(2)} \end{array}$$

De maneira análoga como anteriormente, prova-se que α_r é uma ação e que M é um $U_q(sl(2))$ módulo álgebra à direita. Igualmente podemos calcular a ação dos geradores de $U_q(sl(2))$ nos geradores de M. São eles,

$$\begin{array}{rcllr} x \triangleleft X_+ & = & y & x \triangleleft X_- = 0 & x \triangleleft K = qx \\ y \triangleleft X_+ & = & 0 & y \triangleleft X_- = x & x \triangleleft K = q^2y \\ \mathbf{1} \triangleleft X_+ & = & 0 & \mathbf{1} \triangleleft X_- = 0 & \mathbf{1} \triangleleft K = \mathbf{1} \\ x^2 \triangleleft X_+ & = & 2qxy & x^2 \triangleleft X_- = 0 & x^2 \triangleleft K = q^2x^2 \\ y^2 \triangleleft X_+ & = & 0 & y^2 \triangleleft X_- = 2qxy & y^2 \triangleleft K = qy^2 \\ xy \triangleleft X_+ & = & y^2 & xy \triangleleft X_- = x^2 & xy \triangleleft K = xy \\ x^2y \triangleleft X_+ & = & 2qxy^2 & x^2y \triangleleft X_- = \mathbf{1} & x^2y \triangleleft K = qx^2y \\ xy^2 \triangleleft X_+ & = & \mathbf{1} & xy^2 \triangleleft X_- = 2qx^2y & xy^2 \triangleleft K = q^2xy^2 \\ x^2y^2 \triangleleft X_+ & = & qx & x^2y^2 \triangleleft X_- = qy & x^2y^2 \triangleleft K = x^2y^2 \end{array}$$

4.4 O Complexo de Wess-Zumino e Cohomologia

Sabemos que quando $q^3 = 1$, nós impomos as relações no plano quântico $x^3 = 1$ e $y^3 = 1$. Isto define a álgebra M(álgebra das matrizes 3×3) como o quociente do plano quântico. Adicionando estas duas relações cúbicas na álgebra diferencial $\Omega_{WZ}(A)$, define-se uma nova álgebra diferencial que denotaremos por $\Omega_{WZ}(M)$. Para verificarmos que isto define uma álgebra diferencial, devemos verificar que nós estamos tomando o quociente por um ideal diferencial, em outras palavras, devemos verificar que

$$dx^3 = d1 = 0$$

e

$$dy^3 = d1 = 0$$

De fato,

$$\begin{aligned} dx^3 &= dx^2x + x^2dx = dxx^2 + xdxx + x^2dx = \\ &= q^2x^2dx + qx^2dx + x^2dx = \\ &= (1+q+q^2)x^2dx = 0 \end{aligned}$$

Da mesma forma para dy^3.

A nova álgebra diferencial $\Omega_{WZ}(M)$ é chamada de *Complexo de Wess-Zumino Reduzido*

Estudaremos agora a cohomologia de d para o caso onde $q^3 = 1$

$p = 0$. Então

$$\Omega^0_{WZ}(A) =< 1, x, y, x^2, y^2, xy, x^2y, xy^2, x^2y^2 >$$

Neste caso temos

$$Z^0_{WZ}(A) =< 1 >= k$$

e

$$B^0_{WZ}(A) = \{0\}$$

então

$$\dim(H^0_{WZ}(A)) = 1$$

$p = 1$. Então

$$\begin{aligned} \Omega^1_{WZ}(A) &= < dx, dy, xdx, xdy, ydx, ydy, xydx, xydy, x^2dx, x^2dy, \\ &, \; y^2dx, y^2dy, xy^2dx, xy^2dy, x^2ydx, x^2ydy, x^2y^2dx, x^2y^2dy > \end{aligned}$$

Agora note que:

$$d1 = 0 \quad d(x) = dx \quad d(y) = dy$$

$$d(xy) = dxy + xdy = q^2ydx + xdy \in B^1_{WZ}(A)$$

$$\begin{aligned} d(x^2y) &= dx^2y + x^2dy = dxxy + xdxy + x^2dy = \\ &= (q+1)xdxy + x^2dy = (q+1)q^2xydx + x^2dy = \\ &= (1+q^2)xydx + x^2dy = -qxydx + x^2dy \in B^1_{WZ}(A) \end{aligned}$$

Analogamente tem-se:

$$d(xy^2) = qy^2dx - q^2xydx \qquad dx^2 = -q^2xdx \qquad dy^2 = -q^2ydy$$

$$d(x^2y^2) = -xy^2dx - q^2x^2ydy$$

Logo

$$\dim B^1_{WZ}(A) = 8$$

Agora x^2dx e y^2dy não aparecem na combinação de nenhum elemento de $B^1_{WZ}(A)$, mas são fechadas. Portanto

$$Z^1_{WZ}(A) = B^1_{WZ}(A) \bigoplus < x^2dx, y^2dy >$$

isto é,

$$\dim Z^1_{WZ}(A) = 10$$

e portanto

$$\dim(H^1_{WZ}(A)) = 2$$

$p = 2$. Então

$$\begin{aligned} \Omega^2_{WZ}(A) &= < dxdy, xdxdy, ydxdy, xydxdy, x^2dxdy, y^2dxdy, \\ &, \quad x^2ydxdy, xy^2dxdy, x^2y^2dxdy > \end{aligned}$$

Agora temos que

$$Z^2_{WZ}(A) = \Omega^2_{WZ}(A)$$

Logo

$$\dim(Z^2_{WZ}(A)) = 9$$

Note que nenhum elemento de $\Omega^1_{WZ}(A)$, quando derivado, resulta em x^2y^2dxdy. Enquanto, todos os outros são derivadas de alguma 1-forma

$$\dim(B^2_{WZ}(A)) = 8$$

Portanto

$$\dim(H^2_{WZ}(A)) = 1$$

Podemos então calcular a característica de Euler.

$$\chi(A) = \dim(H^0_{WZ}(A)) - \dim(H^1_{WZ}(A)) + \dim(H^2_{WZ}(A)) = 1 - 2 + 1 = 0$$

E isto é a característica de Euler do toro, isto quer dizer que, topologicamente o plano quântico, quando $q^3 = 1$, possui as características de um toro.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho depois de estudarmos os princípios de álgebras de Hopf, percebemos que este tipo de álgebra aparece muito no estudo do plano quântico, principalmente quando queremos estudar os efeitos da ação e coação de certas algebras de Hopf no plano quântico. Foram estudados dois casos especiais, a álgebra $SL_q(2)$ e a àlgebra $U_q(sl(2))$, onde concluímos que para mostrar que de fato são álgebras de Hopf, precisamos fortemente usar o teorema universal da álgebra livre, e como já era esperado, os calculos se mostraram difíceis e cansativos. O fato mais interessante foi estudar a geometria do plano quântico, onde foi, considerado dois fatos, uma para q genérico e outra para $q^3 = 1$, e o resultado obtido foi que para q genérico o plano quântico tem características topológicas do plano usual, e para $q^3 = 1$, o plano quântico tem a topologia do toro, que na verdade como estamos estudando, objetos não comutativos, o toro em questão é não comutativo. Fica uma pergunta: E se considerarmos $q^4 = 1$ ou $q^5 = 1$, que tipo de resultados podemos obter? A partir disto podemos ter outras respostas em relação a geometria não comutativa do plano quântico. Fisicamente falando, as álgebras de Hopf, ou grupos quânticos, tem grandes aplicações em física, uma delas seria na teoria da gravitação, onde busca-se equações que possam unificar a teoria da relatividade e a mecânica quântica, mas esse é um problema ainda em aberto. Assim considero este trabalho uma boa motivação para se estudar a parte matemática das álgebras de Hopf, e futuramente partir para as aplicações físicas.

Apêndice A

Módulos e Produto Tensorial

Todos os anéis considerados tem unidade.

Definição A.1 *Sejam A um anel. Um grupo abeliano $(M,+)$ é um A-módulo à esquerda, quando existe uma operação*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A \times M & \longrightarrow & M \\ & (a,m) & \longmapsto & a \cdot m \end{array}$$

tal que

(i) $a \cdot (b \cdot m) = (a \cdot b) \cdot m$

(ii) $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$

(iii) $(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot n$

(iv) $1 \cdot m = m \qquad \forall m, n \in M \;\; e \;\; a, b \in A$

Observação A.1 (i) *Analogamente define-se A-módulo á direita.*
(ii) *Pode-se definir módulos sobre anéis sem unidade. Para isso omitimos o axioma* (iv).

Em particular, todo anel A é um A-módulo.

Exemplo A.1 *Sejam M e N módulos sobre um anel R. Então $M \times N$ adquire estrutura de módulo fazendo-se:*

$$(m_1, n_1) + (m_2, n_2) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2)$$

$$a(m,n) = (am, an), \quad a \in R$$

Demonstração: $(i) a(b(m,n)) = a(bm, bn) = (a(bm), a(bn)) = ((ab)m, (ab)n) = ab(m,n)$
De maneira análoga prova-se as outras propriedades.

■

Definição A.2 *Seja M um A-módulo. Um subconjunto $N \subseteq M$ é um A-submódulo de M quando* *(i)* $(N, +)$ *é subgrupo de* $(M, +)$

(ii) $a \in A$ *e* $n \in N \Rightarrow a \cdot n \in N$

Notação: $N \leq M$

Do mesmo modo como para anéis, também temos homomorfismos entre módulos, que são definidos da seguinte maneira:

Definição A.3 *Seja M,N A-módulos. Uma função* $f : M \longrightarrow N$ *é um A-homomorfismo quando:*

(i) $f(m + n) = f(m) + f(n), \quad \forall m, n \in M$

(ii) $f(a \cdot m) = a \cdot f(m), \quad \forall m \in M$ *e* $\forall a \in A$.

Observação A.2 *A condição (i) diz que f é um homomorfismo de grupos. Assim* $f(0) = 0$ *e* $f(-m) = -f(m)$.

Defina os seguintes conjuntos:
$Ker(f) = \{m \in M;\ f(m) = 0\}$ **Núcleo de f**
$Im(f) = f(M) = \{f(m);\ m \in M\}$ **Imagem de f**

Estes conjuntos assim definidos tem algumas propriedades que são enunciadas no próximo resultado:

Proposição A.1 *Seja* $f : M \longrightarrow N$ *um A-homomorfismo. Então*
(a) $Im(f) \leq N$
(b) $Ker(f) \leq M$.
(c) $Ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow f$ *é injetora*

Demonstração: Ver [7]

■

Teorema A.1 (1° Teorema do Homomorfismo) *Seja* $f : M \longrightarrow N$ *um A-homomorfismo. Então existe uma única função* $f^* : \frac{M}{ker(f)} \longrightarrow Im(f)$ *tal que:*

(i) f^* *é A-isomorfismo*

(ii) $f = i \circ f^* \circ \pi, \quad \pi : M \longrightarrow \frac{M}{ker(f)}$

Onde i é a aplicação identidade.

Em particular quando f é sobrejetora $\frac{M}{ker(f)} \cong N$

Demonstração:Demonstração:

(i) Defina $f^* : \frac{M}{Ker(f)} \longrightarrow Im(f)$ tal que $f^*(\overline{m}) = f(m)$

f^* está ben definida e é injetora. De fato $\overline{m} = \overline{n} \Leftrightarrow m - n \in Ker(f) \Leftrightarrow f(m-n) = 0 \Leftrightarrow f(m) - f(n) = 0 \Leftrightarrow f(m) = f(n) \Leftrightarrow f^*(\overline{m}) = f^*(\overline{n})$.

f^* é sobrejetora. De fato, seja $u \in im(f) \Rightarrow u = f(m), m \in M$. Tome $\overline{m} \in \frac{M}{Ker(f)}$, assim temos que $f^*(\overline{m}) = f(m) = u$.

f^* é homomorfismo. De fato,
$f^*(\overline{m} + \overline{n}) = f^*(\overline{m+n}) = f(m+n) = f(m) + f(n) = f^*(\overline{m}) + f^*(\overline{n})$
$f^*(a \cdot \overline{m}) = f^*(\overline{a \cdot m}) = f(a \cdot m) = a \cdot f(m) = a \cdot f^*(\overline{m})$
Destas três afirmações prova-se que f^* é um isomorfismo.

(ii) Seja $m \in M$, $(i \circ f^* \circ \pi)(m) = (i \circ f^*)(\overline{m}) = i(f(m)) = f(m)$.

Provaremos agora a unicidade de f^*. Seja $g : \frac{M}{Ker(f)} \longrightarrow Im(f)$ isomorfismo tal que $f = i \circ g \circ \pi$. Portanto $f^*(\overline{m}) = f(m) = (i \circ g \circ \pi)(m) = g(\pi(m)) = g(\overline{m})$.

■

Vimos no exemplo (A.1) que $M \times N$ com aquelas operações adquire estrutura de módulo. Agora considere $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de A-módulos. Denote o produto cartesiano dos membros desta família por $\Pi_{i \in I} M_i$. De maneira análoga como no exemplo (A.1) definimos operações que fazem com que $\Pi_{i \in I} M_i$ adquira estrutura de A-módulo chamado de *produto direto* da família de A-módulos $\{M_i\}_{i \in I}$.

Definição A.4 *Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de A-módulos. Dizemos que $(m_i)_{i \in I} \in \Pi_{i \in I} M_i$ é uma seqência quase-nula quando $m_i = 0$, exceto para um número finito de índices.*

Notação: $M^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} M_i = \{(m_i)_{i \in I} \in \Pi_{i \in I} M_i;\ \ (m_i)_{i \in I}$ é sequência quase-nula$\}$.

Observação A.3 *O módulo $M^{(I)}$ definido acima é chamado de Soma Direta externa da família de A-módulos $\{M_i\}_{i \in I}$. Quando I é finito, da forma $I = \{1, 2, ..., n\}$ denotamos $M^{(I)} = M_1 \bigoplus M_2 \bigoplus ... \bigoplus M_n$.*

Seja A um anel
$A^{(I)} = \bigoplus A_i, \quad A_i = A, \quad \forall i \in I$
$A^{(I)} = \{(\lambda_i)_{i \in I};\ \ \lambda_i \in A$ e $(\lambda_i)_{i \in I}$ é sequência quase-nula$\}$

Definição A.5 *Sejam M um A-módulo e $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq M$. Dizemos que $x \in M$ é combinação linear de $\{x_i\}_{i \in I}$ se existe $(\lambda_i)_{i \in I} \in A^{(I)}$ tal que*

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i$$

Definição A.6 *A família $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq M$, M um A-módulo, é linearmente independente(livre) se $(\lambda_i)_{i \in I} \in A^{(I)}$ e $x = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i = 0$, então $\lambda_i = 0 \quad \forall i \in I$*
Um subconjunto de M que não é linearmente independente, é chamado linearmente dependente.

Tome $S = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq M$, com M um A-módulo tal que $M = A \cdot x_1 + ... + A \cdot x_n$. Dizemos neste caso que M é *A-módulo finitamente gerado* e $\forall x \in M$ temos

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i$$

Definição A.7 *A família $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq M$, M um A-módulo, é uma A-base(ou base livre) de M quando é linearmente independente e gera M.*
Neste caso dizemos que M é um A-módulo livre.

Exemplo A.2 *Seja A um anel e considere o A-módulo $A^{(I)}$. Tome $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq A^{(I)}$, definido por $e_k = (x_j)_{j \in I}$ onde $x_k = 1$ e $x_j = 0, \quad j \neq k$. O conjunto $\{e_i\}_{i \in I}$ é uma base para $A^{(I)}$ chamada de base canonica.*

Demonstração: Vamos mostrar que $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq A^{(I)}$ gera e é linearmente independente.

Gera: Seja $(a_i)_{i \in I} \in A^{(I)}$ e temos que

$$(a_i)_{i \in I} = \sum_{I \in I} a_i \cdot e_i$$

Linearmente Independente: Seja $(\lambda_i)_{i \in I} \in A^{(I)}$ e $\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot e_i = 0$, então $(\lambda_i)_{i \in I} = 0$, ou seja $\lambda_i = 0 \quad \forall i \in I$.

■

A seguir vamos definir, apresentar resultados e dar exemplos do que vem a ser um *produto tensorial*. Antes apresentaremos algumas notações que serão usadas no término desta seção.

Notações: A é anel com unidade
M é A-módulo à direita
N é A-módulo à esquerda
T é grupo abeliano.

Uma função $\tau : M \times N \longrightarrow T$ é *A-Tensorial(ou A-balanceada)* quando:

(i) $\tau(m_1 + m_2, n) = \tau(m_1, n) + \tau(m_2, n)$

(ii) $\tau(m, n_1 + n_2) = \tau(m, n_1) + \tau(m, n_2)$

(iii) $\tau(m \cdot a, n) = \tau(m, a \cdot n), \quad \forall a \in A, \quad m, m_1, m_2 \in M$ e $\forall n_1, n_2, n \in N$

Exemplo A.3 *O Produto de um anel $\cdot : A \times A \longrightarrow A$ é uma função A-tensorial.*

Demosntração: De fato, as propriedades (i) e (ii) são as distributivas do anel e a propriedades (iii) é a associativa do anel.

■

Definição A.8 *Com as notações acima, dizemos que o par (T,τ) é um produto tensorial de M e N sobre A quando para cada grupo abeliano $\widetilde{T}$ e cada aplicação A-tensorial $\widetilde{\tau} : M \times N :\longrightarrow \widetilde{T}$, existe um único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $f : T \longrightarrow \widetilde{T}$ tal que $f \circ \tau = \widetilde{\tau}$. Em outras palavras é o mesmo que dizer que o diagrama abaixo comute*

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\widetilde{\tau}"] & \\ T \arrow[rr, dashed, "f"] & & \widetilde{T} \end{tikzcd}$$

Proposição A.2 (Unicidade do Produto Tensorial) *Se (T,τ) e $(\widetilde{T},\widetilde{\tau})$ são produtos tensoriais de M e N, então existe um $\mathbb{Z}$-isomorfismo $f : T \longrightarrow \widetilde{T}$ tal que $f \circ \tau = \widetilde{\tau}$.*

Demonstração: (T,τ) produto tensorial, $\widetilde{\tau} : M \times N \longrightarrow \widetilde{T}$ é A-tensorial, então existe único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $f : T \longrightarrow \widetilde{T}$ tal que $f \circ \tau = \widetilde{\tau}$.
Agora $(\widetilde{T},\widetilde{\tau})$produto tensorial, $\tau : M \times N \longrightarrow T$ é A-tensorial, então existe único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $g : \widetilde{T} \longrightarrow T$ tal que $g \circ \widetilde{\tau} = \tau$.
Considere os seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ T \arrow[rr, dashed, "g \circ f"] & & T \end{tikzcd}$$

Temos que $g \circ f \circ \tau = g \circ \widetilde{\tau} = \tau$ e $Id_T \circ \tau = \tau$
Pela unicidade do $\mathbb{Z}$-homomorfismo, segue que $g \circ f = Id_T$, isto é, f é injetora.

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\widetilde{\tau}"'] \arrow[dr, "\widetilde{\tau}"] & \\ \widetilde{T} \arrow[rr, dashed, "f \circ g"] & & \widetilde{T} \end{tikzcd}$$

Temos que $f \circ g \circ \widetilde{\tau} = f \circ \tau = \widetilde{\tau}$ e $Id_{\widetilde{T}} = \widetilde{\tau}$
Pela unicidade do $\mathbb{Z}$-homomorfismo, segue que $f \circ g = Id_{\widetilde{T}}$, isto é, f é sobrejetora.

■

A seguir mostraremos que dados A anel e M e N A-módulos à esquerda e à direita respectivamente o produto tensorial sempre existe.
Considere $F = \mathbb{Z}^{(M\times N)} = \mathbb{Z}^{(I)}$ $(I = M \times N)$, onde F é $\mathbb{Z}$-módulo livre com base canônica $\{x_\alpha\}_{\alpha\in M\times N}$ onde $x_\alpha : M \times N \longrightarrow \mathbb{Z}$ com $x_\alpha(\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$.
Tome

$$F = \bigoplus_{\alpha\in I} \mathbb{Z} \cdot x_\alpha$$

Seja

$$D_1 = \{x_{(m+m',n)} - x_{(m,n)} - x_{(m',n)};\ \ m, m' \in M,\ \ n \in N\} \subseteq F$$
$$D_2 = \{x_{(m,n+n')} - x_{(m,n)} - x_{(m,n')};\ \ m \in M,\ \ n, n' \in N\} \subseteq F$$
$$D_3 = \{x_{(m\cdot a,n)} - x_{(m,a\cdot n)};\ \ m \in M,\ \ n \in N,\ \ a \in A\} \subseteq F$$
$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \subseteq F$$

Seja K o submódulo gerado por D, então

$$K := \bigcap_{L \leq F \text{ e } D \subseteq L} = \{\sum_{j=1}^{\lambda} a_j \cdot d_j;\ \ \lambda \in \mathbb{N},\ \ a_j \in \mathbb{Z},\ \ d_j \in D\}$$

Note que $K \leq F$, então $\frac{F}{K}$ é $\mathbb{Z}$-módulo(grupo abeliano)
Tome $T = \frac{F}{K}$ e defina

$$\begin{array}{rccc} \tau: & M \times N & \longrightarrow & T \\ & (m,n) & \longmapsto & x_{(m,n)} + K \end{array}$$

Afirmação A.1 *τ é A-tensorial.*

Demonstração: Note que $x_{(m+m',n)} - x_{(m,n)} - x_{(m',n)} \in D_1 \subseteq D \subseteq L \subseteq K$, logo $\overline{x_{(m+m',n)}} = \overline{x_{(m,n)} + x_{(m',n)}}$.
(i) $\tau(m+m',n) = x_{(m+m',n)}+K = (x_{(m,n)}+x_{(m',n)})+K = (x_{(m,n)}+K)+(x_{(m',n)}+K) = \tau(m,n) + \tau(m',n)$.
Os itens (ii) e (iii) saem de maneira análoga.

■

Observação A.4 *$\tau(M \times N)$ gera T. De fato, dado $\bar{t} \in T$, $\bar{t} = t + K$ onde $t \in F$, então $t = \sum_{j \in M \times N} \lambda_j \cdot x_j$.*
Assim $\bar{t} = \sum_{j \in M \times N} \lambda_j \cdot x_j + K = \sum_{j \in M \times N} \lambda_j \cdot (x_j + K) = \sum_{j \in M \times N} \lambda_j \cdot \tau(j)$.

Já podemos desta maneira demosnstrar o seguinte teorema

Teorema A.2 *O par (T, τ) construido acima é um produto tensorial de M e N.*

Demonstração: Seja $\widetilde{T}$ um grupo abeliano e $\widetilde{\tau} : M \times N \longrightarrow \widetilde{T}$ A-tensorial.
Defina $\widetilde{f} : F \longrightarrow \widetilde{T}$ por:

$$\widetilde{f}(\sum_{i \in M \times N} \lambda_i \cdot x_i) = \sum_{i \in M \times N} \lambda_i \cdot \widetilde{\tau}(i)$$

que é $\mathbb{Z}$-homomorfismo de grupos e $\widetilde{f}(x_i) = \widetilde{\tau}(i)$
Defina

$$\begin{array}{rccc} I: & M \times N & \longrightarrow & F \\ & (m,n) & \longmapsto & x_{(m,n)} \end{array}$$

Note que $\widetilde{f} \circ I(m,n) = \widetilde{f}(x_{(m,n)}) = \widetilde{\tau}(m,n)$, isto é, $\widetilde{f} \circ I = \widetilde{\tau}$. Isto pode ser expresso no seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "I"'] \arrow[dr, "\widetilde{\tau}"] & \\ F \arrow[rr, "\widetilde{f}"] & & \widetilde{T} \end{tikzcd}$$

(i) $\widetilde{f}(K) = 0$. De fato, lembre-se primeiramente que K é o submódulo gerado por $D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Como $\widetilde{f}$ é $\mathbb{Z}$-homomorfismo, basta ver que $\widetilde{f}$ se anula em D_1, D_2 e D_3. Tome $u \in D_1$, então $u = x_{(m+m',n)} - x_{(m,n)} - x_{(m',n)}$, portanto, $\widetilde{f}(u) = \widetilde{f}(x_{(m+m',n)}) - \widetilde{f}(x_{(m,n)}) - \widetilde{f}(x_{(m',n)}) = \widetilde{\tau}(m+m',n) - \widetilde{\tau}(m,n) - \widetilde{\tau}(m',n) = 0$, pois $\widetilde{\tau}$ é A-tensorial, deste modo temos que $\widetilde{f}(D_1) = 0$, analogamente $\widetilde{f}(D_2) = \widetilde{f}(D_3) = 0$

Defina

$$\begin{array}{rccc} f: & T = \frac{F}{K} & \longrightarrow & \widetilde{T} \\ & \overline{x} & \longmapsto & \widetilde{f} \end{array}$$

(ii) f está bem definido. De fato, se $\overline{x} = \overline{y}$, então $x - y \in K$ e assim $\widetilde{f}(x-y) = 0$ e portanto $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(y)$

(iii) f é um $\mathbb{Z}$-homomorfismo. De fato $f(\overline{x}+\overline{y}) = f(\overline{x+y}) = \widetilde{f}(x+y) = \widetilde{f}(x)+\widetilde{f}(y) = f(\overline{x}) + f(\overline{y})$

(iv) $f \circ \tau = \widetilde{\tau}$. De fato, $f \circ \tau(m,n) = f(x_{(m,n)} + K) = \widetilde{f}(x_{(m,n)}) = \widetilde{\tau}(m,n)$

(v) f é única. De fato, suponha que exista $g : T \longrightarrow \widetilde{T}$ $\mathbb{Z}$-homomorfismo tal que $g \circ \tau = \widetilde{\tau}$, segue que $g \circ \tau = f \circ \tau$.
Tome agora $\overline{t} \in T$, então $\overline{t} = \sum \lambda_j \cdot \tau(j)$, portanto $g(\overline{t}) = \sum \lambda_j \cdot g(\tau(j)) = \sum \lambda_j \cdot f(\tau(j)) = f(\overline{t})$, então $f = g$.

Logo (T, τ) é produto tensorial.

$\blacksquare$

Notação: Se A é anel com unidade, M e N são A-módulos à direita e à esquerda respectivamente, denotamos o único produto tensorial de M e N por $T = M \bigotimes N$

Observação A.5 *Se $(m,n) \in M \times N$, então $\tau(m,n) = m \otimes n$. Temos também que $\tau(M \times N)$ gera $M \bigotimes N$. Note que se $u \in M \bigotimes N$, então $u = \sum_{j \in M \times N} \lambda_j \cdot \tau(j) = \sum_{j \in M \times N} \lambda_j \cdot (m_j \otimes n_j)$, assim se $u \in M \bigotimes N$, tem-se que $u = \sum_{j \in \mathbb{Z}} m_j \otimes n_j$.*

Proposição A.3 *As seguintes sentenças são verdadeiras:*

(i) $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$

(ii) $m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$

(iii) $m \cdot a \otimes n = m \otimes a \cdot n$

(iv) $0 \otimes n = n \otimes 0 = 0$

(v) $-(m \otimes n) = (-m) \otimes n = m \otimes (-n)$

(vi) $z \cdot (m \otimes n) = (m \cdot z) \otimes n = m \otimes z \cdot n, \quad \forall z \in \mathbb{Z}$

Demonstração: Os itens (i), (ii) e (iii) saem pela observação anterior, enquanto os itens (vi) (v) é consequência do item (i). Já o item (vi), separe os casos $z = 0, z > 0$ e $z < 0$ e apleque os itens anteriores.

■

Proposição A.4 *Seja A anel comutativo e M, N A-módulos. Então* $M \otimes N \cong N \otimes M$

Demostração: O primeiro passo é demonstrar que o seguinte diagrama comute

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\widetilde{\eta}"] & \\ M \otimes N \arrow[rr, dashed, "\eta"] & & N \otimes M \end{tikzcd}$$

Então defina

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\eta}: & M \times N & \longrightarrow & N \otimes M \\ & (m, n) & \longmapsto & n \otimes m \end{array}$$

(i) $\widetilde{\eta}$ é A-tensorial. De fato, $\widetilde{\eta}(m_1 + m_2, n) = n \otimes m_1 + m_2 = n \otimes m_1 + n \otimes m_2 = \widetilde{\eta}(m_1, n) + \widetilde{\eta}(m_2, n)$. Os outros axiomas seguem de maneira análoga.

Portanto existe único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\eta : M \otimes N \longrightarrow N \otimes M$ tal que $\eta \circ \tau = \widetilde{\eta}$

(ii) η é homomorfismo. De fato, $\eta(a \cdot (m \otimes n)) = \eta(a \cdot m \otimes n) = \eta(\tau(a \cdot m, n)) = \widetilde{\eta}(a \cdot m, n) = n \otimes a \cdot m = a \cdot (n \otimes m) = a \cdot (\widetilde{\eta}(m, n)) = a \cdot (\eta(\tau(m, n))) = a \cdot (\eta(m \otimes n))$

(iii) η é sobrejetora. De fato, seja $n \otimes m \in N \otimes M$. Tome $m \otimes n \in M \otimes N$, então $\eta(m \otimes n) = \eta(\tau(m, n)) = \widetilde{\eta}(m, n) = n \otimes m$

(iv) η é injetora. De fato, defina

$$\begin{array}{rccc} f: & N \otimes M & \longrightarrow & M \otimes N \\ & n \otimes m & \longmapsto & m \otimes n \end{array}$$

Assim temos, $f \circ \eta(m \otimes n) = f(\eta(\tau(m, n))) = f(\widetilde{\eta}(m, n) = f(n \otimes m) = m \otimes n$. Portanto η tem inversa à esquerda, e segue que η é injetora.

Portanto chegamos que $M \otimes N \cong N \otimes M$

■

Proposição A.5 *Seja A anel comutativo e M, N e P A-módulos, então de maneira análoga como na proposição anterior podemos provar que $(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P)$ e que $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$.*

□

Apêndice B

Demonstrações

Aqui neste apêndice vamos apresentar as demonstrações dos resultados que consideramos secundários mas não menos importantes que os resultados principais.

B.1 Resultados de Estruturas Quasi-Triangulares

Lema B.1 *(i)* $(\varepsilon \otimes Id)R = (Id \otimes \varepsilon)R = 1$

(ii) $(S \otimes Id)R = R^{-1}$; $(Id \otimes S)R^{-1} = R$

(iii) $(S \otimes S)R = R$

Demonstração:

(i) Queremos provar que:

$$(\varepsilon \otimes Id)R = \sum \varepsilon(s_i)t_i = \mathbf{1}$$

Para isso vamos utilizar o axioma

$$(\Delta \otimes Id)R = R_{13}R_{23}$$

Ou em componebtes

$$\sum s_i \otimes s_j \otimes t_i t_j = \sum s_{i(1)} \otimes s_{i(2)} \otimes t_i \quad (I)$$

Vamos agora aplicar $(\varepsilon \otimes Id \otimes Id)$ em (I)

$$\begin{aligned}(\varepsilon \otimes Id \otimes Id)(\sum s_{i(1)} \otimes s_{i(2)} \otimes t_i) &= \sum \varepsilon(s_{i(1)})s_{i(2)} \otimes t_i = \\ &= \sum s_i \otimes t_i\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\varepsilon \otimes Id \otimes Id)(\sum s_i \otimes s_j \otimes t_i t_j) &= \sum \varepsilon(s_i)s_j \otimes t_i t_j = \\ &= \sum s_j \otimes (\varepsilon(s_i)t_i)t_j\end{aligned}$$

Então

$$\sum s_j \otimes t_j = \sum s_j \otimes (\varepsilon(s_i)t_i)t_j$$

Logo

$$\sum \varepsilon(s_i)t_i = \mathbf{1}$$

Para a outra parte do item (i), devemos usar, $(Id \otimes Id \otimes \varepsilon)$ e o axioma (i) da definição.

(ii) Queremos provar que

$$(S \otimes Id)R = R^{-1}$$

Usaremos o axioma

$$(\Delta \otimes Id)R = R_{13}R_{23}$$

Vamos aplicar $(\mu \otimes Id)(S \otimes Id \otimes Id)$ nos dois lados do axioma acima.
Por um lado temos que:

$$(\mu \otimes Id)(S \otimes Id \otimes Id)(\Delta \otimes Id)R = (\varepsilon \otimes Id)R = \mathbf{1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\mu \otimes Id)(S \otimes Id \otimes Id)(\sum s_i \otimes s_j \otimes t_i t_j) &= \sum S(s_i)s_j \otimes t_i t_j = \\ &= (\sum S(s_i) \otimes t_i)(\sum s_j \otimes t_j) = \\ &= ((S \otimes Id)R)R\end{aligned}$$

Portanto

$$((S \otimes Id)R)R = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$$

Então

$$(S \otimes Id)R = R^{-1}$$

Para a outra parte do item (ii), devemos notar quem é $(\Delta \otimes Id)R^{-1}$. Sabemos que $RR^{-1} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$. Portanto

$$\begin{aligned}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} &= (\Delta \otimes Id)(RR^{-1}) = \\ &= (\Delta \otimes Id)(R)(\Delta \otimes Id)(R^{-1}) = \\ &= R_{13}R_{23}(\Delta \otimes Id)R^{-1}\end{aligned}$$

Assim

$$(\Delta \otimes Id)R^{-1} = R_{23}^{-1}R_{13}^{-1}$$

Da mesma forma provamos que

$$(Id \otimes \Delta)R^{-1} = R_{12}^{-1}R_{13}^{-1} \qquad (II)$$

Vamos aplicar $(Id \otimes \mu)(Id \otimes Id \otimes S)$ nos dois lado de (II). Antes denotaremos:

$$R^{-1} = \sum \alpha_i \otimes \beta_i$$

Use também o fato que $(Id \otimes \varepsilon)R^{-1} = \mathbf{1}$. Aplicando no lado esquerdo, obtemos:

$$(Id \otimes \mu)(Id \otimes Id \otimes S)(Id \otimes \Delta)R^{-1} = (Id \otimes \varepsilon)R^{-1} = \mathbf{1}$$

No lado direito

$$\begin{aligned}(Id\otimes\mu)(Id\otimes Id\otimes S)R_{12}^{-1}R_{13}^{-1} &= (Id\otimes\mu)(Id\otimes Id\otimes S)R_{12}^{-1}(Id\otimes Id\otimes S)R_{13}^{-1} = \\ &= (Id\otimes\mu)(R^{-1}\otimes S(1))(\sum\alpha_i\otimes 1\otimes S(\beta_i)) = \\ &= R^{-1}(Id\otimes S)R^{-1} = 1\otimes 1\end{aligned}$$

Logo

$$(Id\otimes S)R^{-1} = R$$

(iii)

$$(S\otimes S)R = (Id\otimes S)(S\otimes Id)R = (Id\otimes S)R^{-1} = R$$

■

Proposição B.1 *Se (H,R) é uma álgebra de Hopf quasi-triangular, então $(H,\sigma R^{-1})$ também o é.*

Demonstração: Vamos denominar $\overline{R} = \sigma R^{-1}$. Temos de provar que:

(i) $(\Delta\otimes Id)\overline{R} = \overline{R_{13}}\cdot\overline{R_{23}}$

(ii) $(Id\otimes\Delta)\overline{R} = \overline{R_{13}}\cdot\overline{R_{12}}$

(iii) $\Delta^{op}(a) = \overline{R}\Delta(a)\overline{R}^{-1}$

Vamos provar o item (ii), pois o item (i) é análogo.

(ii) $\overline{R} = \sum\beta_i\otimes\alpha_i$. Vamos utilizar a seguinte relação:

$$(\Delta\otimes Id)R^{-1} = R_{23}^{-1}R_{13}^{-1} \Rightarrow \sum\alpha_{i(1)}\otimes\alpha_{i(2)}\otimes\beta_i = \sum\alpha_j\otimes\alpha_i\otimes\beta_i\beta_j$$

Portanto temos que:

$$\begin{aligned}(Id\otimes\Delta)\overline{R} &= (Id\otimes\Delta)(\sum\beta_i\otimes\alpha_i) = \sum\beta_i\otimes\alpha_{i(1)}\otimes\alpha_{i(2)} = \\ &= \sigma_{12}\sigma_{23}(\sum\alpha_{i(1)}\otimes\alpha_{i(2)}\otimes\beta_i) = \\ &= \sigma_{12}\sigma_{23}(\sum\alpha_j\otimes\alpha_i\otimes\beta_i\beta_j) = \sum\beta_i\beta_j\otimes\alpha_j\otimes\alpha_i = \\ &= (\sum\beta_i\otimes 1\otimes\alpha_i)(\sum\beta_j\otimes\alpha_j\otimes 1) = \overline{R_{13}}\cdot\overline{R_{12}}\end{aligned}$$

(iii) Já que (H,R) é uma estrutura quasi triangular, temos que:

$$R^{-1}\Delta^{op}(a) = \Delta(a)R^{-1}$$

Portanto

$$\overline{R}\Delta(a) = (\sum\beta_i\otimes\alpha_i)(\sum a_{(1)}\otimes a_{(2)}) = \sum\beta_i a_{(1)}\otimes\alpha_i a_{(2)} =$$

$$= \sigma(R^{-1}\Delta^{op}(a)) = \sigma(\Delta(a)R^{-1}) = \sum a_{(2)}\beta_i\otimes a_{(1)}\alpha_i =$$

$$= (\sum a_{(2)}\otimes a_{(1)})(\sum\beta_i\otimes\alpha_i) = \Delta^{op}\overline{R}$$

Para o item (i) devemos usar o fato de que:

$$(Id \otimes \Delta)R^{-1} = R_{12}^{-1}R_{13}^{-1}$$

■

Lema B.2 *São equivalentes as seguintes afirmações sobre $(H, \mu, \Delta, \varepsilon, \eta, S)$ álgebra de Hopf*

(i) $S^2 = Id_H$

(ii) $\sum S(x_{(2)})x_{(1)} = \varepsilon(x)1$

(iii) $\sum x_{(2)}S(x_{(1)}) = \varepsilon(x)1$

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$

$$\sum S(x_{(2)})x_{(1)} = S^2(\sum S(x_{(2)})x_{(1)}) = S(\sum S(x_{(1)})S^2(x_{(1)})) =$$

$$= S(\sum S(x_{(1)})x_{(2)}) = S(\varepsilon(x)1) = \varepsilon(x)S(1) = \varepsilon(x)1$$

$(ii) \Rightarrow (i)$

$$S^2(x) = S^2(\sum \varepsilon(x_{(1)})x_{(2)}) = \sum \varepsilon(x_{(1)})S^2(x_{(2)}) = \sum x_{(1)}S(x_{(2)})S^2(x_{(3)}) =$$

$$= \sum x_{(1)}S(S(x_{(3)})x_{(2)}) = \sum x_{(1)}S(\varepsilon(x_{(2)})1) = \sum x_{(1)}\varepsilon(x_{(2)}) = x$$

Para provar que $(i) \Rightarrow (iii)$ e $(iii) \Rightarrow (i)$ faz-se de maneira análoga como nos itens anteriores.

■

Proposição B.2 *As relações abaixo são satisfeitas pela estrutura quuase triangular dual.*

(i) $r(a \otimes 1) = r(1 \otimes a) = \varepsilon(a)$

(ii) $r(S \otimes Id) = \overline{r}$
$\overline{r}(Id \otimes S) = r$
$r(S \otimes S) = r$

Demonstração:

(i) $r(a \otimes 1) = \sum r(a_{(1)}\varepsilon(a_{(2)}) \otimes 1) = r(a_{(1)} \otimes 1)r(a_{(2)} \otimes 1)\overline{r}(a_{(3)} \otimes 1) = \sum r(a_{(1)} \otimes 1)\overline{r}(a_{(2)} \otimes 1) = \varepsilon(a)$
Análogo para $r(1 \otimes a)$

(ii) Temos que: $r(S\otimes Id)*r(a\otimes b) = \sum r(S(a_{(1)})\otimes b_{(1)})r(a_{(2)}\otimes b_{(2)}) = \sum r(S(a_{(1)})a_{(2)}\otimes b) = r(\sum(S(a_{(1)})a_{(2)} \otimes b) = r(\varepsilon(a) \otimes b) = \varepsilon(a)r(1 \otimes b) = \varepsilon(a)\varepsilon(b)$

Assim $r(S \otimes Id) = \overline{r}$

Para o próximo, basta notar que: $\overline{r}(\mu \otimes Id) = \overline{r}_{23} * \overline{r}_{13}$ e assim provamos a segunda equação do item (ii) de maneira análoga como anteriormente. Para a última equação do item (ii) temos:
$r(S \otimes S) = r(S \otimes Id)(Id \otimes S) = \overline{r}(Id \otimes S) = r$

■

Lema B.3 *A aplicação*

$$(C^R_{v,w})^{-1} = R^{-1}\sigma : W \otimes V \longrightarrow V \otimes W$$

é inversa à direita e à esquerda de $C^R_{v,w}$

Demonstração: $R^{-1}\sigma\sigma R(v \otimes w) = R^{-1}R(v \otimes w) = v \otimes w$

Da mesma forma temos que

$\sigma RR^{-1}\sigma(w \otimes v) = \sigma(1 \otimes 1)(v \otimes w) = \sigma(v \otimes w) = w \otimes v$

■

Proposição B.3 $C^R_{v,w}$ *é um isomorfismo de H-módulos.*

demonstração: Pelo lema anterior temos que $C^R_{v,w}$ é bijetora. Falta apenas provar que $C^R_{v,w}$ é homomorfismo de H-módulos, isto é,

$$C^R_{v,w}(a \triangleright (v \otimes w)) = a \triangleright (C^R_{v,w}(v \otimes w))$$

De fato,

$$C^R_{v,w}(a \triangleright (v \otimes w)) = C^R_{v,w}(\Delta(a)(v \otimes w)) = \sigma R(\sum(a_{(1)} \triangleright v) \otimes (a_{(2)} \triangleright w)) =$$

$$= \sum(t_i a_{(2)} \triangleright w) \otimes (s_i a_{(1)} \triangleright v) = \sum(a_{(1)} t_j \triangleright w) \otimes (a_{(2)} s_j \triangleright v) =$$

$$= \Delta(a)(\sum(t_j \triangleright w) \otimes (s_j \triangleright v)) = a \triangleright (\sum(t_j \triangleright w) \otimes (s_j \triangleright v)) = a \triangleright (C^R_{v,w}(v \otimes w))$$

■

Proposição B.4 $C^{r}_{V,W}$ *é isomorfismo de H-comódulos à esquerda*

Demonstração: Para mostrar que $C^r_{V,W}$ é um homomorfismo de H-comódulos devemos verificar a veracidade da seguinte igualdade:

$$\delta^{W\otimes V}(C^r_{V,W}(v\otimes w)) = (Id\otimes C^r_{V,W})\delta^{V\otimes W}(v\otimes w)$$

De fato,

$$\delta^{W\otimes V}(\sum r(w^{(1)}\otimes v^{(1)})w^{(2)}\otimes v^{(2)}) = \sum r(w^{(1)}\otimes v^{(1)})w^{(2)(1)}v^{(2)(1)}\otimes w^{(2)(2)}\otimes v^{(2)(2)} =$$

$$= \sum r(w^{(1)}{}_{(1)}\otimes v^{(1)}{}_{(1)})w^{(1)}{}_{(2)}v^{(1)}{}_{(2)}\otimes w^{(2)}\otimes v^{(2)} =$$

$$= \sum v^{(1)}{}_{(1)}w^{(1)}{}_{(1)}r(w^{(1)}{}_{(2)}\otimes v^{(1)}{}_{(2)})\otimes w^{(2)}\otimes v^{(2)} =$$

$$= \sum v^{(1)}w^{(1)}r(w^{(2)(1)}\otimes v^{(2)(1)})\otimes w^{(2)(2)}\otimes v^{(2)(2)} =$$

$$= (Id\otimes C^r_{V,W})(\sum v^{(1)}w^{(1)}\otimes v^{(2)}\otimes w^{(2)} =$$

$$= (Id\otimes C^r_{V,W})\delta^{V\otimes W}(v\otimes w)$$

Na segunda e quarta igualdades foi usado o axioma de comódulo, já na terceira igualdade usamos o axioma (ii) da matriz r dual.

■

Apêndice C

Módulos sobre a Álgebra Universal Envolvente $U(sl(2))$

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma representação de $\mathfrak{g}$ em V é uma aplicação linear

$$\begin{array}{rccc} \rho: & \mathfrak{g} & \longrightarrow & End(V) \\ & x & \longmapsto & \rho(x) : V \longrightarrow V \end{array}$$

tal que

$$\rho([x,y]) = [\rho(x), \rho(y)] = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)$$

Seja $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow End(V)$ uma representação de $\mathfrak{g}$ então V é um $U(\mathfrak{g})$-módulo:

$$\begin{array}{rccc} \rhd : & U(\mathfrak{g}) \otimes V & \longrightarrow & V \\ & x \otimes v & \longmapsto & \rho(x)v = x \rhd v \end{array}$$

Então

$$\begin{aligned} [x,y] \rhd v &= \rho([x,y]) \rhd v = \\ &= (\rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)) \rhd v = \\ &= \rho(x)(y \rhd v) - \rho(y)(x \rhd v) = \\ &= x \rhd (y \rhd v) - y \rhd (x \rhd v) \end{aligned}$$

Portanto Módulos em $U(\mathfrak{g})$ nos levam a uma representação de $\mathfrak{g}$ e vice-versa.

Estamos interessados em uma algebra de Lie mais específica, chamada de $sl(2)$, que consiste no conjunto das matrizes de traço zero. O comutador desta algebra de Lie é dado por

$$\begin{array}{rccc} [\ ,\ ]: & sl(2) \times sl(2) & \longrightarrow & sl(2) \\ & (A,B) & \longmapsto & AB - BA \end{array}$$

A álgebra universal envolvente associada a $sl(2)$ é denotada por $U(sl(2))$ e é gerado por três elementos, X_+, X_- e H, onde

$$[H, X_+] = \pm 2X_{\pm}$$

$$[X_+, X_-] = H$$

Exemplo C.1 *Uma realização em termos de matrizes 2×2 é dada por*

$$X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Demosntração: Verifica-se facilmente que as relações de comutação são satisfeitas. ∎

Observação C.1 *$sl(2)$ é a álgebra de Lie de $SL(2)$.*

Lema C.1 *As seguintes relações valem em $U(sl(2))$*

(i) $X_+^p H^q = (H - 2p)^q X_+^p$

(ii) $X_-^p H^q = (H + 2p)^q X_-^p$

(iii) $[X_+, X_-^p] = pX_-^{p-1}(H - p + 1) = p(H + p - 1)X_-^{p-1}$

(iv) $[X_+^p, X_-] = pX_+^{p-1}(H + p - 1) = p(H - p + 1)X_+^{p-1}$

Demonstração:

(i) Tome $q = 1$ e fazemos indução sobre p.

$p = 1$, então

$$\begin{aligned} X_+H &= X_+H - HX_+ + HX_+ = [X_+, H] + HX_+ = \\ &= -2X_+ + HX_+ = (H-2)X_+ \end{aligned}$$

Agora suponha que $X_+^p H = (H - 2p)X_+^p$, portanto

$$\begin{aligned} X_+^{p+1}H &= X_+X_+^pH = X_+(H-2p)X_+^p = \\ &= X_+HX_+^p - 2pX_+^{p+1} = (H-2)X_+^{p+1} - 2pX_+^{p+1} = \\ &= (H - 2 - 2p)X_+^{p+1} = (H - 2(p+1))X_+^{p+1} \end{aligned}$$

Finalmente suponha que $X_+^p H^q = (H - 2p)^q X_+^p$, logo

$$\begin{aligned} X_+^p H^{q+1} &= X_+H^qH = (H-2p)^q X_+^p H = \\ &= (H-2p)^q(H-2p)X_+^p = (H-2p)^{q+1}X_+^p \end{aligned}$$

(ii) Análogo ao item anterior.

(iii) Primeiramente note que

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$$

Faremos indução sobre p.

$p = 1$, então

$$[X_+, X_-] = H = 1X_-^{1-1}(H - 1 + 1)$$

Agora suponha que $[X_+, X_-^p] = pX_-^{p-1}(H-p+1)$, portanto

$$\begin{aligned}
[X_+, X_-^{p+1}] &= [X_+, X_-^p X_-] = [X_+, X_-^p]X_- + X_-^p[X_+, X_-] = \\
&= pX_-^{p-1}(H-p+1)X_- + X_-^p H = \\
&= pX_-^{p-1}(H-2-p+1) + X_-^p H = \\
&= (p+1)X_-^p H - pX_-^p(p+1) = \\
&= (p+1)X_-^p(H-p)
\end{aligned}$$

(iv) Use o fato que

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

Assim a prova é análoga ao item anterior.

■

Vamos a partir de agora considerar o módulos sobre $U(sl(2))$ de dimensão finita.

Definição C.1 *$v \in V$ é vetor de peso λ se*

$$Hv = \lambda v$$

e é vetor de peso máximo com peso λ se é vetor de peso λ e

$$X_+ v = 0$$

Proposição C.1 *Todo V sobre $\mathbb{C}$ de dimensão finita tem vetor de peso máximo*

Demonstração: $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado, isto é, tem raízes em $\mathbb{C}$.
Então existe $\alpha \in \mathbb{C}$ e $w \in V$ tal que $Hw = \alpha w$

Se $X_+ w = 0$, o resultado está obtido.

Se $X_+ w \neq 0$, tome a sequência de vetores $\{X_+^p w\}_{p \geq 0}$. Então temos

$$HX_+^p w = X_+^p(H+2p)w = (\alpha + 2p)X_+^p w$$

isto é, $X_+^p w$ é autovetor de H.
Assim $\{X_+^p w\}_{p\geq 0}$ é sequência de autovetores de H com autovalores distintos. Como V tem dimensão finita, então existe no máximo $dimV$ autovalores distintos, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $X_+^n w \neq 0$ e $X_+^{n+1} = 0$. Assim $v = X_+^n w$ é vetor de peso máximo com peso $\lambda = \alpha + 2n$.

■

Seja $v \in V$, V de dimensão finita, v vetor de peso máximo λ e seja também a sequência

$$v_p = \frac{1}{p\,!} X_-^p v$$

Lema C.2 *As seguintes relações são verdadeiras* *(i)* $Hv_p = (\lambda - 2p)v_p$

(ii) $X_+v_p = (\lambda - p + 1)v_{p-1}$

(iii) $X_-v_p = (p+1)v_{p+1}$

Demonstração:

(i)

$$\begin{aligned} Hv_p &= \frac{1}{p\,!}HX_-^p v = \frac{1}{p\,!}X_-^p(H-2p)v = \\ &= \frac{1}{p\,!}X_-^p(\lambda-2p)v = (\lambda-2p)v_p \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} X_+v_p &= \frac{1}{p\,!}X_+X_-^p v = \frac{1}{p\,!}X_+X_-^p v + X_-^p X_+ v - X_-^p X_+ v = \\ &= \frac{1}{p\,!}[X_+, X_-^p]v = \frac{1}{p\,!}pX_-^{p-1}(H-p+1)v = \\ &= \frac{1}{(p-1)\,!}X_-^{p-1}(\lambda-p+1)v \\ &= (\lambda-p+1)v_{p-1} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} X_-v_p &= \frac{1}{p\,!}X_-^{p+1}v = (p+1)\frac{1}{(p+1)\,!}X_-^{p+1}v = \\ &= (p+1)v_{p+1} \end{aligned}$$

■

Teorema C.1 *Seja V um $U(sl(2))$-módulo de dimensão finita gerado por v de peso máximo com peso λ e*

$$v_p = \frac{1}{p\,!}X_-^p v$$

Então

(i) $dimV = \lambda + 1$ *e* $\lambda = n$ $\qquad v_{n+k} = 0, \quad k \geq 1$

(ii) $\{v_0 = v, v_1, ..., v_n\}$ *base de* V.

(iii) H *é diagonalizável, com autovalores* $\{n, n-2, n-4, ..., n-2n = n\}$

(iv) v' *vetor de peso máximo em* V *é múltiplo de* v.

(v) V *é simples.*

Reciprocamente, se V é de dimensão finita e simples, então V é gerado por vetor de peso máximo. Dois módulos V e V' gerados por vetor de peso máximo com mesmo peso λ são isomorfos.

Demonstração:

(i) e (ii) $\{v_p\}$ é uma sequência de autovetores de H, com autovalores distintos. Assim existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $v_n \neq 0$ e $n_{n+1} = 0$. Agora,

$$\begin{aligned} v_{n+k} &= \frac{1}{(n+k)\,!} X_-^{n+k} v = \frac{(n+1)\,!}{(n+k)\,!} X_-^{k-1} \frac{1}{(n+1)\,!} X_-^{n+1} v = \\ &= \frac{(n+1)\,!}{(n+k)\,!} X_-^{k-1} v_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

Sabemos que $\{v_0, ..., v_n\}$ são os autovetores de H com autovalores distintos, como $\det(H - \lambda I)$ tem no máximo $dimV$ raízes, segue que $n+1 \leq dimV$

Note que,

$$0 = X_+ v_{n+1} = (\lambda - (n+1) + 1)v_n = (\lambda - n)v_n$$

Como $v_n \neq 0$, segue que $\lambda = n$

Temos que $\{v_p\}$ são autovetores de H com autovalores $\lambda_p = \lambda - 2p$, onde $\lambda_p \neq \lambda_q, \quad p \neq q$ e $\lambda_p \neq 0$. Considere que

$$\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$$

Queremos provar que $\alpha_i = 0, \quad i = 0, ..., n$. Usaremos indução sobre n.

$n = 0$, então $H(\alpha_0 v_0) = 0$ e portanto $\alpha_0 \lambda_0 v_0 = 0$, como $\lambda_0 v_0 \neq 0$ segue que $\alpha_0 = 0$

$n = 1$, então $H(\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1) = 0$ e portanto

$$\alpha_0 \lambda_0 v_0 + \alpha_1 \lambda_1 v_1 = 0$$

Por outro lado, temos que

$$\alpha_0 \lambda_0 v_0 + \alpha_1 \lambda_0 v_1 = 0$$

Subtraindo uma equação da outra, obtemos

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_0) = 0$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_0$ e $v_1 \neq 0$, segue que $\alpha_1 = 0$. Logo $\alpha_0 v_0 = 0$, então $\alpha_0 = 0$.

Suponha que

$$\alpha_0 v_0 + ... + \alpha_{n-1} v_{n-1} = 0, \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = ... = \alpha_{n-1} = 0$$

Seja

$$\alpha_0 v_0 + ... + \alpha_{n-1} v_{n-1} + \alpha_n v_n = 0 \tag{C.1}$$

Aplicando H em (2.1), obtemos

$$\alpha_0 \lambda_0 v_0 + ... + \alpha_{n-1} \lambda_{n-1} v_{n-1} + \alpha_n \lambda_n v_n = 0$$

Por outro lado, se multiplicarmos λ_n em (C.1)

$$\alpha_0 \lambda_n v_0 + ... + \alpha_{n-1} \lambda_n v_{n-1} + \alpha_n \lambda_n v_n = 0$$

Subtraindo as duas útimas equações obtemos que

$$\alpha_0 (\lambda_0 - \lambda_n) v_0 + ... + \alpha_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) v_{n-1} = 0$$

Então

$$\alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) = 0$$

Logo $\alpha_i = 0$ para $i = 1, ..., n-1$. Portanto $\alpha_n v_n = 0$ e finalmente $\alpha_n = 0$

Assim $\{v_0, ..., v_n\}$ é base em V, e deste modo chegamos a conclusão que $dim V = n + 1$

(iii) Como $H v_p = (n - 2p) v_p$ com $p = 0, ..., n$, vê-se facilmente que H é uma matriz diagonal formada pelos autovalores $\{n, n-2, ..., n-2n = -n\}$

(iv) Seja v' vetor de peso máximo em V, isto é,

$$H v' = \alpha v'$$

Então $v' = k v_i$m, onde k é uma constante.

Como $X_+ v' = 0$, segue que $i = 0$, isto é, $v' = kv$.

(v) $V' \subseteq V$, V' de dimensão finita. Então existe v' vetor de peso máximo em V', mas v' é de peso máximo em V. Então $v' = kv$. Assim V' é gerado por v e portanto $V \subseteq V'$. Logo $V = V'$

Para a recíproca, tome V simples de dimensão finita, então existe $v \neq 0$ de peso máximo em V. Seja $V' \subseteq V$ gerado por v.

Mas como V é simples e $V' \neq 0$, segue que $V' = V$, então V é gerado por v.

Como V e V' são gerados por v, vetor de peso máximo com peso λ, segue que $dim V = dim V' = n + 1$. Logo

$$V \cong V'$$

■

Veremos a seguir um resultado mais geral, válido para uma algebra de Lie $\mathfrak{g}$ qualquer.

Teorema C.2 *Seja A um $U(\mathfrak{g})$-módulo. então A é um $U(\mathfrak{g})$ módulo álgebra se e somente se para todo $X \in \mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g})$ age em A como derivação.*

Demosntração:($\Rightarrow$) Suponha que A é um $U(\mathfrak{g})$ módulo álgebra, isto é,

$$\begin{aligned} x \rhd (ab) &= \sum (x_{(1)} \rhd a)(x_{(2)} \rhd b) = \\ &= \mu(\rhd \otimes \rhd)(Id \otimes \sigma \otimes Id)(\delta \otimes Id \otimes Id)(x \otimes a \otimes b) \end{aligned}$$

e

$$x \rhd \mathbf{1} = \varepsilon(x)\mathbf{1}$$

Lembre-se que em $U(\mathfrak{g})$, $\Delta(X) = X \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes X$

Assim

$$\begin{aligned} x \rhd (ab) &= \mu(\rhd \otimes \rhd)(Id \otimes \sigma \otimes Id)(\Delta \otimes Id \otimes Id)(x \otimes a \otimes b) = \\ &= \mu(\rhd \otimes \rhd)(Id \otimes \sigma \otimes Id)((X \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes X) \otimes a \otimes b) = \\ &= \mu(\rhd \otimes \rhd)(Id \otimes \sigma \otimes Id)(X \otimes \mathbf{1} \otimes a \otimes b + \mathbf{1} \otimes X \otimes a \otimes b) = \\ &= \mu(\rhd \otimes \rhd)(X \otimes a \otimes \mathbf{1} \otimes b + \mathbf{1} \otimes a \otimes X \otimes b) = \\ &= \mu(X \rhd a \otimes \mathbf{1} \rhd b + \mathbf{1} \rhd a \otimes X \rhd b) = \\ &= (X \rhd a)b + a(X \rhd b) \end{aligned}$$

Portanto X é uma derivação.

Deste fato segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon(X)\mathbf{1} = X \rhd \mathbf{1} = X \rhd \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}) = \\ &= (X \rhd \mathbf{1})\mathbf{1} + \mathbf{1}(X \rhd \mathbf{1}) \end{aligned}$$

E portanto $X \rhd \mathbf{1} = 0$

($\Leftarrow$) Defina

$$\begin{aligned} \alpha_X : \; A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto X \rhd a \end{aligned}$$

Note que α_X é derivação,pois

$$\begin{aligned} \alpha_X(ab) &= X \rhd (ab) = (X \rhd a)b + a(X \rhd b) = \\ &= \alpha_X(a)b + a\alpha_X(b) \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} X \rhd (ab) &= \alpha_X(ab) = \alpha_X(a)b + a\alpha_X(b) = \\ &= (X \rhd a)b + a(X \rhd b) = \\ &= \mu(\rhd \otimes \rhd)(Id \otimes \sigma \otimes Id)(\Delta \otimes Id \otimes Id)(x \otimes a \otimes b) \end{aligned}$$

Temos também que

$$\alpha_X(\mathbf{1}) = X \rhd \mathbf{1} = 0 = \varepsilon(X)\mathbf{1}$$

Então A é $U(\mathfrak{g})$ módulo álgebra pois $U(\mathfrak{g})$ é gerado por $\mathfrak{g}$.

$\blacksquare$

Teorema C.3 *Defina a ação de $U(sl(2))$ em $k[x,y] = k\{x,y\}/(xy-yx)$ como:*

$$X_+ \triangleright P(x,y) = x\frac{\partial}{\partial y}P$$

$$X_- \triangleright P(x,y) = y\frac{\partial}{\partial x}P$$

$$H \triangleright P(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x}P - y\frac{\partial}{\partial y}P$$

Com isto $k[x,y]$ é módulo álgebra sobre $U(sl(2))$

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar que $k[x,y]$ é um $U(sl(2))$ módulo, isto é,

$$[H, X_\pm]P = \pm 2X_\pm P$$
$$[X_+, X_-]P = HP$$

De fato,

$$\begin{aligned}
[H, X_+]P &= HX_+P - X_+HP = \\
&= (x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y})x\frac{\partial}{\partial y}P - x\frac{\partial}{\partial y}(x\frac{\partial}{\partial x}P - y\frac{\partial}{\partial y}P) = \\
&= x\frac{\partial}{\partial y}P + x^2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}P - yx\frac{\partial^2}{\partial y^2}P - x^2\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}P + x\frac{\partial}{\partial y}P + xy\frac{\partial^2}{\partial y^2}P \\
&= x\frac{\partial}{\partial y}P + x\frac{\partial}{\partial y}P = 2x\frac{\partial}{\partial y}P = 2X_+P
\end{aligned}$$

Idem para $[H, X_-]P$.

Agora

$$\begin{aligned}
[X_+, X_-]P &= X_+X_-P - X_-X_+P = \\
&= x\frac{\partial}{\partial y}(y\frac{\partial}{\partial x}P) - y\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial}{\partial y}P) = \\
&= x\frac{\partial}{\partial x}P + xy\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}P - y\frac{\partial}{\partial y}P - yx\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}P = \\
&= x\frac{\partial}{\partial x}P - y\frac{\partial}{\partial y}P = HP
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que as ações são derivações. De fato,

$$\begin{aligned}
X_+(PQ) &= x\frac{\partial}{\partial y}(PQ) = \\
&= (x\frac{\partial}{\partial y}P)Q + xP\frac{\partial}{\partial y}Q = \\
&= (X_+P)Q + P(X_+Q)
\end{aligned}$$

Idem para X_-.
Da mesma forma temos

$$\begin{aligned}
H(PQ) &= x\frac{\partial}{\partial x}(PQ) - y\frac{\partial}{\partial y}(PQ) = \\
&= (x\frac{\partial}{\partial x}P)Q + xP\frac{\partial}{\partial x}Q - (y\frac{\partial}{\partial y}P)Q - yP\frac{\partial}{\partial y}Q = \\
&= (x\frac{\partial}{\partial x}P - y\frac{\partial}{\partial y}Q) + P(x\frac{\partial}{\partial x}Q - y\frac{\partial}{\partial y}Q) = \\
&= (HP)Q - P(HQ)
\end{aligned}$$

Portanto pelo teorema (C.2) , segue que $k[x,y]$ é $U(sl(2))$ módulo álgebra.

■

Exemplo C.2 *O subespaço $V = k[x,y]_n =< x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, ..., y^n >$ é um módulo de peso máximo n e $v = x^n$ é vetor de peso máximo de peso n.*

Demosntração:

$$\begin{aligned}
Hx^n &= x\frac{\partial}{\partial x}x^n - y\frac{\partial}{\partial y}x^n = \\
&= xnx^{n-1} = nx^n
\end{aligned}$$

e

$$X_+x^n = x\frac{\partial}{\partial y}x^n = x \cdot 0 = 0$$

Além disso

$$\begin{aligned}
v_p &= \frac{1}{p\,!}X_-^P v = \frac{1}{p\,!}\left(y\frac{\partial}{\partial x}\right)^p x^n = \\
&= \frac{1}{p\,!}y^p n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)x^{n-p} = \\
&= \frac{n\,!}{p\,!(n-p)\,!}y^p x^{n-p} = \\
&= \binom{n}{p} y^p x^{n-p}
\end{aligned}$$

Apêndice D

A Construção FRT(Faddeev - Reshetikhin - Takhtajan)

Teorema D.1 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $c : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ um isomorfismo. Então existe uma biálgebra $A(c)$ e uma aplicação $\delta_V : V \longrightarrow A(c) \otimes V$ tal que:*

(i) (V, δ_V) *é um $A(c)$-comódulo à esquerda.*

(ii) $c : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ *é morfismo de comódulo.*

(iii) Se A' é uma outra biálgebra coagindo em V por δ'_V tal que (ii) é satisfeito, então existe um único morfismo de biálgebra ϕ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "\delta'_V"'] \arrow[dr, "\delta_V"] & \\
A' \otimes V & & A(c) \otimes V \arrow[ll, "\phi \otimes Id_V"']
\end{tikzcd}$$

comute.

$A(c)$ é única a menos de isomorfismo.

Demonstração: Vamos primeiramente analisar o morfismo c

$$c(v_i \otimes v_j) = \sum c_{ij}^{kl} v_k \otimes v_l$$

onde $\{v_i\}_{i=1,\ldots,n}$ é base de V.

Seja $k\{T_i^j\}_{i,j=1,\ldots,n}$ a álgebra livre gerada pelos T_i e seja o ideal bilateral $I(c) \subset k\{T_i^j\}$ gerado pelos elementos

$$C_{ij}^{mn} = \sum_{kl} c_{ij}^{kl} T_k^m T_l^n - T_i^k T_j^l c_{kl}^{mn}$$

Definimos

$$A(c) = k\{T\}/I(c)$$

Lema D.1 *$A(c)$ possui estrutura de biálgebra com*

$$\Delta(T_i^j) = \sum_k T_i^k \otimes T_k^j$$

$$\varepsilon(T_i^j) = \delta_i^j$$

Demonstração Lema: $A(c)$ é uma coálgebra. De fato, basta mostrarmos os axiomas de coassociatividade e counidade.

$$\begin{aligned}
(Id \otimes \Delta)\Delta(T_i^j) &= (Id \otimes \Delta)(\sum_k T_i^k \otimes T_k^j) = \\
&= \sum_{k,l} T_i^k \otimes (T_k^l \otimes T_l^j) = \sum_{k,l} (T_i^k \otimes T_k^l) \otimes T_l^j = \\
&= (\Delta \otimes Id)(\sum_l T_i^l \otimes T_l^j) = (\Delta \otimes Id)\Delta(T_i^j)
\end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes Id)\Delta(T_i^j) &= (\varepsilon \otimes Id)(\sum_k T_i^k \otimes T_k^j) = \\
&= \sum_k \delta_i^k \cdot T_k^j = T_i^j = Id(T_i^j)
\end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que Δ é um morfismo de álgebra:

$$\begin{aligned}
\Delta(T_i^j T_k^l) &= \sum_{m,n} T_i^m T_k^n \otimes T_m^j T_n^l = \\
&= (\sum_m T_i^m \otimes T_m^j)(\sum_n T_k^n \otimes T_n^l) = \\
&= \Delta(T_i^j)\Delta(T_k^l)
\end{aligned}$$

ε também é um morfismo de álgebra.

$$\varepsilon(T_i^j T_k^l) = \delta_i^j \delta_k^l = \varepsilon(T_i^j)\varepsilon(T_k^l)$$

Assim provamos que $k\{T\}$ possui estrutura de biálgebra. Para provarmos que $A(c)$ herda a estrutura de biálgebra de $k\{T\}$, devemos provar que

$$\varepsilon(I(c)) = 0$$

e também

$$\Delta(I(c)) \subseteq I(c) \otimes k\{T\} + k\{T\} \otimes I(c)$$

Primeiramente vamos provar o seguinte isomorfismo

$$c \otimes c/(c \otimes I + I \otimes c) \cong c/I \otimes c/I$$

Sabemos que

$$c/I = \{x + I;\ x \in c\}$$

Então

$$\begin{aligned} c/I\otimes c/I &= \{(x+I)\otimes(y+I)=x\otimes y+I\otimes y+x\otimes I+I\otimes I\}= \\ &= \{x\otimes y+c\otimes I+I\otimes c\}=c\otimes c/(c\otimes I+I\otimes c) \end{aligned}$$

pois temos um diagrama comutativo, isto é,

$$\begin{tikzcd} k\{T\} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\pi"'] & k\{T\}\otimes k\{T\} \arrow[d, "\pi"'] \\ A(c) \arrow[r, "\overline{\Delta}"] & A(c)\otimes A(c) \end{tikzcd}$$

onde

$$A(c)\otimes A(c)\cong\frac{k\{T\}\otimes k\{T\}}{k\{T\}\otimes I(c)+I(c)\otimes k\{T\}}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \varepsilon(C_{ij}^{mn}) &= \varepsilon(\sum_{kl} c_{ij}^{kl}T_k^mT_l^n-T_i^kT_j^lc_{kl}^{mn})= \\ &= \sum c_{ij}^{kl}\delta_k^m\delta_l^n-\delta_i^k\delta_j^lc_{kl}^{mn}= \\ &= c_{ij}^{mn}-c_{ij}^{mn}=0 \end{aligned}$$

Do mesmo modo temos

$$\begin{aligned} \Delta(C_{ij}^{mn}) &= \Delta(\sum_{kl} c_{ij}^{kl}T_k^mT_l^n-T_i^kT_j^lc_{kl}^{mn})= \\ &= \sum c_{ij}^{kl}T_k^pT_l^q\otimes T_p^mT_q^n-T_i^pT_j^q\otimes T_p^kT_q^lc_{kl}^{mn}= \\ &= \sum c_{ij}^{kl}T_k^pT_l^q\otimes T_p^mT_q^n-T_i^kT_j^lc_{kl}^{mn}\otimes T_p^mT_q^n+ \\ &+ T_i^kT_j^l\otimes c_{kl}^{mn}T_p^mT_q^n-T_i^pT_j^q\otimes T_p^kT_q^lc_{kl}^{mn}= \end{aligned}$$

Agora trocamos $p\leftrightarrow k$ e $q\leftrightarrow l$ no último termo da equação acima e obtemos

$$\begin{aligned} \Delta(C_{ij}^{mn}) &= \sum_{p,q}(\sum_{k,l} c_{ij}^{kl}T_k^pT_l^q-T_i^kT_j^lc_{kl}^{pq})\otimes T_p^mT_q^n+ \\ &+ \sum_{k,l} T_i^kT_j^l\otimes(\sum_{p,q} c_{kl}^{pq}T_p^mT_q^n-T_k^pT_l^qc_{pq}^{mn})= \end{aligned}$$

Novamente troque $p\leftrightarrow k$ e $q\leftrightarrow l$ e obtemos

$$\begin{aligned} \Delta(C_{ij}^{mn}) &= \sum_{p,q} C_{ij}^{pq}\otimes T_p^mT_q^n+T_i^pT_j^q\otimes C_{pq}^{mn}\in \\ &\in I(c)\otimes k\{T\}+k\{T\}\otimes I(c) \end{aligned}$$

Assim terminamos a demonstração do lema

■

Voltemos a demonstração do teorema. Defina

$$\begin{array}{rccl} \delta_l : & V & \longrightarrow & A(c)\otimes V \\ & v_i & \longmapsto & \sum_j T_i^j \otimes v_j \end{array}$$

(i) Vamos mostrar que (V,δ_l) é um comódulo à esquerda. De fato,

$$\begin{aligned} (Id\otimes\delta_l)\delta_l(v_i) &= (Id\otimes\delta_l)(\sum_j T_i^j\otimes v_j) = \\ &= \sum_j T_i^j \otimes \sum_k T_j^k \otimes v_k = \sum_{j,k} T_i^j\otimes T_j^k\otimes v_k = \\ &= \sum_k(\sum_j T_i^j\otimes T_j^k)\otimes v_k = (\Delta\otimes Id)(\sum_k T_i^k\otimes v_k) = \\ &= (\Delta\otimes Id)\delta_l(v_i) \end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned} (\varepsilon\otimes Id)\delta_l(v_i) &= (\varepsilon\otimes Id)(\sum_j T_i^j\otimes v_j) = \\ &= \sum_j \delta_i^j v_j = v_i \end{aligned}$$

(ii) C é morfismo de comódulo, onde $c: V\otimes V \longrightarrow V\otimes V$

Primeiramente vamos fazer um diagrama da estrutura de comódulo em $V\otimes V$

$$\begin{tikzcd} V\otimes V \arrow[r, "\delta_l\otimes\delta_l"] \arrow[d, "\delta_l^{V\otimes V}"'] & A(c)\otimes V\otimes A(c)\otimes V \arrow[d, "Id\otimes\sigma_{23}\otimes Id"] \\ A(c)\otimes V\otimes V & A(c)\otimes A(c)\otimes V\otimes V \arrow[l, "\mu\otimes Id_{V\otimes V}"'] \end{tikzcd}$$

Podemos verificar facilmente que $(V\otimes V, \delta_l^{V\otimes V})$ tem estrutura de comódulo.

Verificaremos agora como $\delta_l^{V\otimes V}$ atua em um elemento de $V\otimes V$.

$$\begin{aligned} \delta_l^{V\otimes V}(v_i\otimes v_j) &= (\mu\otimes Id)\sigma_{23}(\delta_l\otimes\delta_l)(v_i\otimes v_j) = \\ &= (\mu\otimes Id)\sigma_{23}(\sum_{k,l} T_i^k\otimes v_k\otimes T_j^l\otimes v_l) = \\ &= (\mu\otimes Id)(\sum_{k,l} T_i^k\otimes T_j^l\otimes v_k\otimes v_l) = \\ &= \sum_{k,l} T_i^k T_j^l\otimes v_k\otimes v_l \qquad (D.1) \end{aligned}$$

Finalmente mostraremos que c é um morfismo de comódulo, isto é,

$$\delta_l^{V\otimes V} \circ c = (Id \otimes c)\delta_l^{V\otimes V}$$

Por um lado temos que

$$\begin{aligned}
(\delta_l^{V\otimes V} \circ c)(v_i \otimes v_j) &= \delta_l^{V\otimes V}(\sum_{k,l} c_{ij}^{kl} v_k \otimes v_l) = \\
&= \sum_{k,l,m,n} c_{ij}^{kl} T_k^m T_l^n \otimes v_m \otimes v_n \qquad \text{(D.2)}
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
(Id \otimes c)\delta_l^{V\otimes V}(v_i \otimes v_j) &= (Id \otimes c)(\sum_{k,l} T_i^k T_j^l \otimes v_k \otimes v_l) = \\
&= \sum_{k,l,m,n} T_i^k T_j^l \otimes c_{kl}^{mn} v_m \otimes v_n \\
&= \sum_{k,l,m,n} T_i^k T_j^l c_{kl}^{mn} \otimes v_m \otimes v_n \qquad \text{(D.3)}
\end{aligned}$$

Para provar que (D.2) é igual a (D.3), devemos verificar a seguinte igualdade

$$c_{ij}^{kl} T_k^m T_l^n = T_i^k T_j^l c_{kl}^{mn}$$

Mas note que

$$c_{ij}^{kl} T_k^m T_l^n - T_i^k T_j^l c_{kl}^{mn} = C_{ij}^{kl} \in I(c)$$

Então em $A(c)$, a igualdade é verdadeira, e portanto (D.2) = (D.3)

(iii) Seja A' uma biálgebra e $\delta' : V \longrightarrow A' \otimes V$ tal que (V, δ') é A' comódulo e $c : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ é morfismo de comódulo. Seja

$$\delta'(v_i) = \sum u_i^j \otimes v_j$$

onde $\{u_i^j\}$ são os geradores de A'

Devido ao fato de V ser comódulo, tem-se:

$$\Delta(u_i^j) = \sum u_i^k \otimes u_k^j, \qquad \varepsilon(u_i^j) = \delta_i^j$$

O fato de c ser morfismo de comódulo nos força a ter que

$$c_{ij}^{kl} u_k^m u_l^n - u_i^k u_j^l c_{kl}^{mn} = 0$$

Agora seja

$$\begin{array}{rccc}
\phi : & A(c) & \longrightarrow & A' \\
& T_i^j & \longmapsto & u_i^j
\end{array}$$

ϕ é morfismo de biálgebra, isto é,

$$(\phi \otimes \phi) \circ \Delta = \Delta \circ \phi$$

e

$$\varepsilon \circ \phi = \varepsilon$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(\phi \otimes \phi) \circ \Delta(T_i^j) &= (\phi \otimes \phi)(\sum_k T_i^k \otimes T_k^j) = \sum_k u_i^k \otimes u_k^j = \\
&= \Delta(u_i^j) = \Delta(\phi(T_i^j))
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\varepsilon \circ \phi(T_i^j) = \varepsilon(u_i^j) = \delta_i^j = \varepsilon(T_i^j)$$

A seguir mostraremos que

$$(\phi \otimes Id)\delta_V = \delta'_V$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(\phi \otimes Id)\delta_V(v_i) &= (\phi \otimes Id)(\sum_j T_i^j \otimes v_j) = \\
&= \sum_j u_i^j \otimes v_j = \delta'_V(v_i)
\end{aligned}$$

Por outro lado, a afirmação que $(\phi \otimes Id)\delta_V = \delta'_V$ nos força a termos que $\phi(T_i^j) = u_i^j$, ou seja, ϕ é único.

Para finalizar, devemos mostrar que $A(c)$ é único.

Vamos supor que existam $A(c)$ e $B(c)$ que satisfaçam (i), (ii) e (iii). Defina

$$\Delta_l : V \longrightarrow B(c) \otimes V$$

e

$$\delta_l : V \longrightarrow A(c) \otimes V$$

e considere os seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "\Delta_l"'] \arrow[dr, "\delta_l"] & \\
B(c) \otimes V \arrow[rr, "\psi \otimes Id"] & & A(c) \otimes V
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "\Delta_l"'] \arrow[dr, "\delta_l"] & \\
B(c) \otimes V & & A(c) \otimes V \arrow[ll, "\phi \otimes Id"']
\end{tikzcd}$$

Pelo item (iii), existe único ψ e ϕ tal que o diagrama comute.

Além disso

$$\begin{aligned}\Delta_l &= (\phi \otimes Id)\delta_l = (\phi \otimes Id)(\psi \otimes Id)\Delta_l = \\ &= (\phi \circ \psi \otimes Id)\Delta_l\end{aligned}$$

Então $\phi \circ \psi = Id_{B(c)}$.

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}\delta_l &= (\psi \otimes Id)\Delta_l = (\psi \otimes Id)(\phi \otimes Id)\delta_l = \\ &= (\psi \circ \phi \otimes Id)\delta_l\end{aligned}$$

Então $\psi \circ \phi = Id_{A(c)}$.

Logo $\psi = \phi^{-1}$ e portanto $B(c) \cong A(c)$

■

Para finalizar este apêndice, vamos relacionar o morfismo c com a equação de Yang-Baxter.

Teorema D.2 *Assuma que c satisfaz a equação de Yang-Baxter, isto é,*

$$(c \otimes Id)(Id \otimes c)(c \otimes Id) = (id \otimes c)(c \otimes Id)(Id \otimes c)$$

Então $A(c)$ possui estrutura quasi-triangular dual

$$r : A(c) \otimes A(c) \longrightarrow k$$

tal que $C^r_{V \otimes V} = c$

Demonstração: Seja $r(T^k_i \otimes T^l_j) = c^{kl}_{ji}$ Lembre-se que

$$C^r_{V \otimes V}(v \otimes w) = \sum r(w^{(1)} \otimes v^{(1)})w^{(2)} \otimes v^{(2)}$$

Se r estiver definido em todo $A(c) \otimes A(c)$ então:

$$\delta_l(v_i) = \sum_j T^j_i \otimes v_j = \sum_i v^{(1)}_i \otimes v^{(2)}_i$$

Assim

$$\begin{aligned}C^r_{V \otimes V}(v_i \otimes v_j) &= \sum r(T^l_j \otimes T^k_i)v_l \otimes v_k = \\ &= \sum c^{lk}_{ij} v_l \otimes v_k = c(v_i \otimes v_j)\end{aligned}$$

■

Apêndice E

Cálculo no Plano Quântico

Mostraremos neste apêndice alguns calculos clássicos, mas com respeito ao plano quântico, como o binômio de newton e a derivada de uma função qualquer.

E.1 Binômio de Newton

Vamos mostrar que

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}_q x^j y^{n-j} \tag{E.1}$$

onde

$$\binom{n}{j}_q = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} \tag{E.2}$$

onde

$$[n]! = [1]...[n], \qquad [0]! = 1, \qquad [n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$$

A fórmula que aparece em (E.2) é conhecida como os coeficientes binomiais de Gauss.
Antes de provarmos o queremos, vamos provar uma outra afirmação:

Lema E.1

$$\binom{n}{j}_q = \binom{n-1}{j-1}_q + q^j \binom{n-1}{j}_q$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{j-1}_q + q^j \binom{n-1}{j}_q &= \frac{[n-1]!}{[j-1]![n-j]!} + q^j \frac{[n-1]!}{[j]![n-1-j]!} = \\
&= \frac{[n-1]!}{[j-1]![n-j-1]!}\left(\frac{1}{[n-j]+\frac{q^j}{[j]}}\right) = \\
&= \frac{[n-1]!}{[j-1]![n-j-1]!}\left(\frac{[j]+q^j[n-j]}{[n-j][j]}\right) = \\
&= \frac{[n-1]!}{[j]![n-j]!}([j]+q^j[n-j]) = \\
&= \frac{[n-1]!}{[j]![n-j]!}\left(\frac{q^j-1}{q-1} + q^j\left(\frac{q^{n-j}-1}{q-1}\right)\right) = \\
&= \frac{[n-1]!}{[j]![n-j]!}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right) = \\
&= \frac{[n-1]!}{[j]![n-j]!}[n] = \\
&= \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} = \binom{n}{j}_q
\end{aligned}$$

■

Podemos agora demosntrar a equação (E.1), e faremos isso por indução sobre n.

$n = 1$

$$x + y = \binom{1}{0}_q x^0 y^1 + \binom{1}{1}_q x^1 y^0 = x + y$$

Suponhamos que vale para n e vamos provar que vale para $n+1$.

$$\begin{aligned}
(x+y)^n(x+y) &= \left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}_q x^j y^{n-j}\right)(x+y) = \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}_q x^j y^{n-j} x + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}_q x^j y^{n-j+1} = \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}_q q^{n-j} x^{j+1} y^{n-j} + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}_q x^j y^{n-j+1} = \\
&= \binom{n}{n}_q x^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}_q q^{n-j} x^{j+1} y^{n-j} + \\
&+ \binom{n}{0} y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}_q x^j y^{n-j+1}
\end{aligned}$$

Fazendo $j = p - 1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
(x+y)^n(x+y) &= \binom{n+1}{n+1}_q x^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p-1}_q q^{n-p+1} x^p y^{n-p+1} + \\
&+ \binom{n+1}{0}_q y^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p}_q x^p y^{n-p+1} =, \qquad q^n = 1 \\
&= \binom{n+1}{n+1}_q x^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \left(q^{1-p} \binom{n}{p-1}_q + \binom{n}{p}_q \right) x^p y^{n-p+1} + \\
&+ \binom{n+1}{0}_q y^{n+1} = \\
&= \binom{n+1}{n+1}_q x^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n-1}{p-1}_q x^p y^{n-p+1} + \binom{n+1}{0}_q y^{n+1} = \\
&= \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} x^p y^{n+1-p}
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Assuma agora que $q^{2n} = 1$, isto é, q^2 é raiz primitiva da unidade de grau maior que n. Neste caso tem-se que

$$(x+y)^n = x^n + y^n$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}_q x^j y^{n-j} = \\
&= x^n + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j}_q x^j y^{n-j} + y^n
\end{aligned}$$

Mas lembre-se que

$$\binom{n}{j}_q = \frac{[n][n-1]...[n-j+1]}{[j]...[1]}$$

e

$$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = \frac{q^{-n}}{q^{-1}} = \left(\frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} \right) = 0$$

Portanto

$$(x+y)^n = x^n + y^n$$

E.2 Operadores Diferenciais

Vamos as seguir mostrar como derivamos uma função qualquer na reta quântica.

Defina $\partial_q : A = k[x, x^{-1}] \longrightarrow A$ por

$$df = dx\partial_q f$$

Seja $\sigma : A \longrightarrow k$ um automorfismo tal que, $\sigma(x) = q^2x$. Então

$$fdx = dx\sigma(f)$$

tal que

$$\partial_q(fg) = \partial_q(f)g + \sigma(f)\partial_q(g)$$

Vamos agora encontrar uma fórmula para a derivada de uma função qualquer no plano quântico.

Temos que

$$df = dx\partial_q f$$

Portanto

$$dx = dx\partial_q(x)$$

Logo

$$\partial_q(x) = 1$$

Também temos que

$$\begin{aligned} \partial_q(\mathbf{1}) &= \partial(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}) = \partial_q(\mathbf{1})\mathbf{1} + \sigma(\mathbf{1})\partial_q(\mathbf{1}) = \\ &= \partial_q(\mathbf{1}) + \partial_q(\mathbf{1}) \end{aligned}$$

Então $\partial_q(\mathbf{1}) = 0$.

Agora note que

$$\begin{aligned} \partial_q(xf(x)) &= \partial_q(x)f(x) + \sigma(x)\partial_q(f(x)) = \\ &= \mathbf{1}f(x) + xq^2\partial_q(f(x)) \end{aligned} \tag{E.3}$$

Da mesma forma temos que

$$\partial_q(f(x)x) = \partial_q(f(x))x + f(xq^2)\mathbf{1} \tag{E.4}$$

Subtraindo (E.3) de (E.4) obtemos

$$0 = f(x) + xq^2\partial_q(f(x)) - \partial_q(f(x))x - f(xq^2)$$

Assim

$$f(x) - f(xq^2) = (xq^2 - x)\partial_q(f(x))$$

Logo

$$\partial_q(f(x)) = \frac{f(xq^2) - f(x)}{xq^2 - x}$$

Referências Bibliográficas

[1] E. Abe. *Hopf Algebras*, Cambridge University Press - New York, 1977

[2] V. Chari e A. Pressley. *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press - New York, 1994.

[3] A. Connes. *Noncommutative Geometry*, Academic Press, Inc - San Diego, 1994

[4] A. Connes. *Noncommutative Differential Geometry*, Institute des Hautes Etudes Scientifiques. Extrait des Publications Mathématiques n°62, 1986.

[5] R. Coquereaux, A. O. Garcia e R. Trinchero *Differential Calculus and Connections on a Quantum Plane at Cubic Root of Unity*, Rev. Math. Phys.12:227-285, 2000.

[6] E. G. Floratos. *Manin's Quantum Spaces and Standard Quantum Mechanics*, Phys. Lett. B 252 (1990) 97-100.

[7] A. Gonçalves. *Introdução à Àlgebra*, Projeto Euclides - Rio de Janeiro, 1979.

[8] V. Guillemin e A. Pollack *Differential Topology*, MIT, Prentice-Hall,Inc - New Jersey, 1974.

[9] C. Kassel. *Quantum Groups*, Springer-Verlag - New York, 1995.

[10] F. Klein. *O Programa de Erlangen(Considerações comparativas sobre as pesquisas geométricas modernas)*, Tradução de N. C. Fernandes, Instituto de Física - USP - São Paulo, 1984.

[11] A. Klimyk e K. Schmudgen. *Quantum Groups and their Representations*, Springer-Verlag, 1997.

[12] E. L. Lima. *Curso de Análise - Vol 2*, Projeto Euclides - Rio de Janeiro, 1999.

[13] E. L. Lima. *Variedades Diferenciáveis*, Monografias em Matemática - Rio de Janeiro, 1973.

[14] I. Madsen e J. Tornehave. *From Calculus to Cohomology*, Cambridge University Press - New York, 1997.

[15] S. Majid. *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge University Press - New York, 1995.

[16] Y. I. Manin. *Notes on Quantum Groups and Quantum De Rham Complexes*, Theoret. Annal Math. Phys. 92(1992) 425-449.

[17] Y. I. Manin. *Quantum Groups and Noncommutative Geometry*, Preprint Montreal University, CRM-1561, 1988; Commun. Math Phys. 123, 163, 1989.

[18] F. C. P. Milies. *Anéis e Módulos.*, IME, Universidade de São Paulo - São Paulo, 1972.

[19] L. A. Takhtajan. *Introduction to Quantum Group and Integrable Massive Models of Quantum Fiel Theory*, M. L. Ge and B. H. Zhang (eds) pg 69-197, World Scientific, 1992.

[20] J. C. Varilly. *An Introduction to Noncommutative Geometry*, Physics/9709045, 1997.

[21] J. Wess e B. Zumino. *Covariant Differential Cauculus on the Quantum Hyperplane*, Nucl. Phys. B(Proc. Suppl.)18B (1990) 302.