UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO:
Ensino de Ciências Naturais

COMPREENSÃO DE TEXTO:
Enunciados de Problemas Multiplicativos Elementares de Combinatória

CÁTIA MARIA NEHRING

FLORIANÓPOLIS – SC
Dezembro de 2001

Cátia Maria Nehring

COMPREENSÃO DE TEXTO:
Enunciados de Problemas Multiplicativos Elementares de Combinatória

Tese apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal de Santa Catarina, como exigência parcial para obtenção do Título de Doutora em Educação, Linha de Investigação Ensino de Ciências Naturais, sob a orientação da Profª Drª REGINA FLEMMING DAMM.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE DOUTORANDO EM EDUCAÇÃO

"ENUNCIADOS DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS ELEMENTARES DE COMBINATÓRIA"

Tese submetida ao Colegiado do Curso de Pós-Graduação em Educação do Centro de Ciências da Educação em cumprimento parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação.

APROVADO PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 18/12/2001

Dra. Regina Flemming Damm – CFM/UFSC (Orientadora)
Dr. Saddo Ag Almouloud – PUC/SP (Examinador)
Dra. Diva Marília Flemming – UNISUL/SC (Examinadora)
Dr. Méricles Thadeu Moretti – CFM/UFSC (Examinador)
Dra. Neri Terezinha Both Carvalho – CFH/UFSC (Examinadora)
Dr. Maurício de Oliveira Pietrocola – CFM/UFSC (Suplente)
Dra. Edel Ern – CED/UFSC (Suplente)

Prof. Lucídio Bianchetti
Coordenador do PPGE

Cátia Maria Nehring

Florianópolis, Santa Catarina, dezembro de 2001.

A você Gabriela, minha filha, que assim como milhares de crianças têm o mundo pela frente e a curiosidade de aprender. Que a escola seja capaz, de auxiliar, com capacidade neste processo de desvelar o mundo.

AGRADECIMENTOS

A elaboração desta tese não foi um trabalho exclusivamente individual. Teve participações especiais, as quais quero agradeço neste momento:

- a Regina Flemming Damm, pela orientação paciente e competente em todos os momentos do trabalho;
- a Monsieur Raymond Duval, pelas valiosas observações, sugestões e críticas pertinentes ao trabalho. Ao senhor meu especial agradecimento;
- as professoras das diversas escolas, que permitiram uma interação com a prática escolar;
- aos colegas do DeFEM, Sônia, Patrícia, Cleusa, Lecir, Chico, Tânia, Pedro, que possibilitaram minha saída;
- aos meus colegas de curso, Terezinha, Zé, Milton, Valdo, Rejane, Claudia. Todas as experiências vividas e compartilhadas, neste pequeno intervalo de tempo, foram valiosas e significativas, para o resto da vida;
- aos professores do curso, especialmente professora Edel, Maurício, Ardem e Angotti. Vocês foram fundamentais para esta construção;
- aos meus pais, que me ensinaram a enfrentar e lutar pela vida;
- a Unijuí, pelo auxílio e viabilização de minha saída;

A todos que de uma forma ou outra auxiliaram na realização desta tese, meu muito obrigado.

SUMÁRIO

RESUMO

Esta tese enfoca a resolução de problemas multiplicativos elementares de combinatória, entendendo este como um texto matemático, que possui um conteúdo cognitivo (invariante) e variações redacionais (variante). Tem como problemática: considerando o enunciado do problema matemático como um texto que possui duas descrições de organização, o conteúdo cognitivo e a organização redacional, o propósito é fazer uma análise de congruência e não-congruência das situações multiplicativas elementares de combinatória, na perspectiva de responder às seguintes questões: quais seriam os fatores (intrínsecos e extrínsecos) que determinam a congruência ou não destes problemas? E, a proposição de uma representação intermediária, auxilia significativamente o processo de conversão?

O objetivo geral foi identificar as diferentes situações multiplicativas elementares sustentadas pelo sentido operatório, trabalhadas nas séries iniciais, na perspectiva, de auxiliar o processo pedagógico na construção do conceito da operação de multiplicação, levando em consideração as variáveis redacionais do enunciado do problema, que os tornam congruentes ou não-congruentes e a utilização de uma representação intermediária como auxiliar a esse processo.

Como referências teóricas utilizamos Duval, para entendermos a compreensão de texto e Vergnaud, Greer, Schwartz, Nesher, Nunes, Bryant, Maza e Franchi para entender o sentido operatório da operação de multiplicação. Os procedimentos metodológicos tiveram três envolvidos, considerando os enunciados dos problemas multiplicativos: os livros didáticos, os professores elaborando problemas, os alunos de 5ª e 8ª séries resolvendo problemas multiplicativos de combinatória. Em relação aos problemas propostos aos alunos, tivemos dois momentos: o primeiro de sondagem, envolvendo somente alunos de 5ª série e o segundo, propondo aos alunos enunciados multiplicativos de combinatória com variações redacionais. Os registros de representação atribuídos pelos alunos, para o processo de conversão, foram categorizados, tabelados e analisados, para podermos ter uma maior compreensão e clareza, da problemática levantada na tese.

Podemos concluir que a operação de multiplicação possui dos sentidos operatórios: adição sucessiva e produto cartesiano. Esses dois sentidos são complementares para compreensão das situações problemas, que envolvem a operação de multiplicação. Podemos observar o quanto é significativo para o processo de conversão, a variação redacional, principalmente, os enunciados que são modificados considerando os fatores intrínsecos com representações intermediárias. Essa variação é fundamental para modificarmos o processo de conversão, pois, quanto mais congruente o enunciado for, maior facilidade de estabelecer a conversão. Além disso, é através da variação redacional, que se torna possível, enfocarmos os vários sentidos operatórios que sustentam as operações.

ABSTRACT

This thesis emphasises the resolution of elementary multiplicative problems of combinatorial , conceiving this as a mathematical text, which has a cognitive content (not changeable) and writing variations (changeable). I t has as starting: considering the instructions of the math problem as a text which has two descriptions of the organization, the cognitive context and the writing organization, the purpose is to analyze the congruity or not of the elementary multiplicative situations of combinatorial, in the perspective of answering the following questions: which are the factors (intrinsic and extrinsic) that determine the congruity or not of these problems? And, does the idea of an intermediate representation, significantly help in the conversion process?

The main objective was to identify the different elementary multiplicative situations supported by the operatory system, dealt with in the initial series, in the perspective of helping the pedagogical processing the construction of the concept of the multiplication operation, taking consideration the writing variables of the problem's instruction, which make them congruent or not, and the use of an intermediate representation as auxiliar of the process.

As theoric references Duval has used, to understand the text, and Kergnaud, Greer, Schwartz, Nesher, Nunes, Bryant, Maza and Franchi to understand the operatory meaning of the multiplicative operation. The methodological procedures had 3 sources, considering the instructions of the multiplicative problems: the didactic books, the teachers elaborating problems, the students from the 5th and the 8th grade resolving it. In relation to the problems proposed to the students, there were 2 moments: the first one of sounding, engaging only students from the 5th grade, and the second, proposing to the learners multiplicative problems of combinatorial with writing variations. The notes of representation attributed by the students, to the process of conversion, were categorized, tabled and analyzed, so that we can have a bigger comprehension and clarity of the problematic of the thesis.

We can conclude that the multiplicative operation has two operational senses: successive addition and Cartesian product. These 2 senses are complementary to the comprehension of the problem's situation, which requires the multiplication operation. We can observe how significative to the process of conversion the writing variation is, mainly to the instructions, which are modified considering the intrinsic factors with intermediate representations. This variation is fundamental to modify the process of conversion. Besides, it is by the writing variation that is possible to emphasize the multiple operatory senses that support the operations.

INTRODUÇÃO

Este trabalho de pesquisa é uma continuação ampliada da pesquisa desenvolvida no mestrado[1]. Continuação pois a pesquisa continua, tendo como centro o processo ensino-aprendizagem da operação de multiplicação. Ampliação pois neste momento amplia-se a análise e a reflexão, considerando os enunciados dos problemas multiplicativos.

Antes de iniciarmos esta pesquisa, precisamos traçar algumas considerações da pesquisa de mestrado. A principal é nosso entendimento sobre a construção do conceito da operação. Entendemos, que para haver a construção do conceito da operação, seja ela qual for, é necessária a exploração de três eixos: ***o sentido operatório, o significado operatório dos algoritmos e a resolução de situações modeladas pela operação – os enunciados***. Estes três eixos precisam ser considerados e, principalmente, enfocados no processo pedagógico, com suas relações e suas especificidades próprias. O que muda frente ao trabalho realizado hoje, na maioria das escolas, é que estamos entendendo uma complementaridade entre estes três eixos, no sentido de que não se aprende as operações "ensinando" ou "treinando" algoritmos, mas sim construindo e compreendendo algoritmos e este é somente um eixo da operação. Caso fosse possível entender a operação, simplesmente através do domínio dos algoritmos, as calculadoras poderiam substituir este processo. Porém não são.

A compreensão de qual operação usar e por que, em uma situação problema, está ligada diretamente ao sentido operatório e à aplicação desta operação em uma situação modelada. Esse processo de decisão não é possível de ser feito por

---

[1] NEHRING, Cátia Maria. **A multiplicação e seus registros de representação nas séries iniciais.** Florianópolis: UFSC, 1996. 238p. Dissertação. (Mestrado em Educação) Centro de Educação, Universidade Federal de Santa Catarina.

nenhuma calculadora; é uma decisão do sujeito, intransferível. Assim, quando o aluno pergunta: "Qual é a operação que devo usar, professora?", em um problema, está em questão uma dificuldade de compreensão do enunciado que, por sua vez, exige do aluno um conhecimento das idéias que envolvem a operação (sentido operatório) e a conversão do enunciado do problema para o estabelecimento de um tratamento solicitado (algoritmo se estiver tratando de operações).

Com estas considerações e sabendo que na pesquisa de mestrado foram trabalhados os dois primeiro eixos, foi desencadeada a pesquisa que ora se estabelece. Ou seja, considerando o sentido operatório, o significado operatório dos algoritmos e as situações modeladas pela operação no processo de construção do conceito da operação de multiplicação (objeto de investigação desta pesquisa), como podemos compreender as situações modeladas, os enunciados dos problemas matemáticos?

Nossa discussão se inicia pelo entendimento de que a operação de multiplicação não pode ser entendida/ensinada somente como uma adição de parcelas iguais, ela é uma continuidade desta operação, porém ela também apresenta rupturas, por isso o entendimento de complementaridade entre os dois sentidos operatórios (adição sucessiva e produto cartesiano) é essencial para construção do conceito da multiplicação. O tratamento de adição sucessiva é possível de ser aplicado ao sentido operatório da multiplicação; porém, somente este entendimento é limitante para a construção do conceito desta operação. Precisamos considerar que a operação de multiplicação apresenta dois sentidos operatórios complementares, mas com especificidades próprias: a adição sucessiva, que enfoca a idéia de grupos e elementos, e o produto cartesiano, que trabalha com a idéia de cruzamento/relação/dimensão entre as quantidades envolvidas.

O sentido operatório de adição sucessiva envolve uma concepção unitária da multiplicação que significa atribuir papéis diferentes ao multiplicando e ao multiplicador. Desta forma, a propriedade comutativa não é válida. Já o sentido operatório do produto cartesiano atribui um significado binário a multiplicação que atribui papéis iguais ao multiplicando e ao multiplicador, confirmando a propriedade comutativa para a multiplicação.

Esta é uma das idéias centrais desta pesquisa, pois acreditamos que, para conseguirmos construir o conceito de uma operação, precisamos trabalhar com todos os sentidos constitutivos. Esses sentidos sustentarão a formulação dos enunciados

dos problemas. Caso não sejam trabalhos estes sentidos operatórios, os enunciados dos problemas serão limitados ou limitantes para os alunos.

Nossa pesquisa está estruturada em cinco capítulos e um trazendo considerações para o processo pedagógico e a educação matemática. No primeiro capítulo, mostramos nossa trajetória enquanto educadora, os ganchos e relações da pesquisa de mestrado com esta de doutorado. Delimitamos a trajetória desta pesquisa, traçando o problema levantado, a justificativa e os procedimentos metodológicos a serem adotados para a realização da pesquisa. Enfim, é o capítulo que estrutura todo o trabalho desenvolvido.

No capítulo 2 apresentamos o principal referencial teórico utilizado nesta pesquisa, ou seja, a compreensão de texto baseada na teoria de Raymon Duval. Neste capítulo discutimos o entendimento que temos sobre os problemas matemáticos, considerando seus enunciados como textos constituídos por duas descrições de organização: o conteúdo cognitivo, que é o objeto matemático necessário para a resolução do problema, e as variações redacionais, que são as várias formas de escrita do enunciado, considerando o mesmo objeto matemático. Nossa principal preocupação neste capítulo é argumentar sobre a importância de trabalharmos no processo pedagógico com enunciados de problemas potentes e discutirmos que a dificuldade dos alunos na resolução de problemas não é uma questão de interpretação, mas sim de compreensão.

No capítulo 3 efetuamos uma complementação da fundamentação teórica, enfocando algumas pesquisas que envolvem a operação de multiplicação e a resolução de problemas. Nele buscamos, através de Vegnaud, Greer, Schwartz, Nesher, Nunes e Bryant, Maza e Franchi, pesquisadores que enfocaram em seus estudos questões referentes à operação de multiplicação e à resolução de problemas envolvendo esta operação, entendimento/compreensão sobre o quê estrutura esta operação, sustentando o sentido operatório que estrutura os enunciados e a resolução de problemas. A opção por esses pesquisadores efetivou-se em função da possibilidade de contribuição do entendimento da operação de multiplicação para a elaboração dos enunciados de problemas, tendo como foco situações elementares, que envolvem as primeiras aproximações da construção deste conceito, o qual se consolidará no ensino médio, entendendo-o como uma estrutura. Apresentamos as principais contribuições desses autores, em função das classificações que fizeram para a estrutura multiplicativa, o que nos possibilita pensar em um campo de enunciados de problemas, baseado no sentido operatório e traçar algumas considerações que articula o entendimento do trabalho com enunciados de problemas, registros de representações e o fazer pedagógico.

Nesses dois capítulos (2 e 3) trazemos, teoricamente a possibilidade de considerar os enunciados dos problemas como textos e o entendimento de que a operação de multiplicação não é somente uma adição sucessiva, como uma possibilidade para o fazer pedagógico. No quarto capítulo, recomeça o olhar sobre a prática pedagógica e o enfoque aos enunciados de problemas multiplicativos. É o que, tradicionalmente, nos trabalhos acadêmicos, chamamos de pesquisa empírica. Esclarecemos nosso processo metodológico e efetivamos o trabalho considerando três "envolvidos" com os enunciados de problemas no processo pedagógico: os enunciados de problemas multiplicativos nos livros didáticos (dois momentos, livros didáticos e coleções de livros didáticos de 1ª a 5ª série do Ensino Fundamental); professores de séries iniciais, elaborando enunciados de problemas multiplicativos a partir de operações de multiplicação e a resolução pelos alunos, de enunciados de problemas multiplicativos, considerando dois momentos (um de exploração, dos procedimentos dos alunos frente a enunciados de combinatória e outro de análise do processo de conversão de enunciados de combinatória com variações redacionais, para identificarmos a congruência dos enunciados propostos).

No capítulo 5 analisamos, especificamente, o processo de conversão estabelecido pelos alunos frente aos enunciados com variações redacionais. Nossa análise se efetiva tendo por base um tratamento estatístico e a interpretação destes dados considerando o referencial teórico construído, na perspectiva de identificarmos enunciados congruentes para o processo de conversão. Além disso, nossa preocupação é analisar os tratamentos desencadeados pelos alunos no processo de conversão. O tratamento estatístico possibilitou termos uma clareza maior dos dados coletada.

Como fechamento da pesquisa, traçamos algumas considerações que entendemos pertinentes para o processo pedagógico e para a educação matemática de um modo mais geral, considerando os enunciados de problemas multiplicativos, o processo de conversão, a utilização de representações intermediárias nos enunciados de problemas e a formação de professores como ponto fundante para modificação das intervenções pedagógicas.

PREFÁCIO

O doutorado marcou mais um início, ou melhor, um reinício de algo que nunca deve terminar, se nos considerarmos, de fato, *educadores*: a constante busca de aperfeiçoamento e atualização. Porém, por que um início? É um novo curso, novos desafios, novas perspectivas. Por que um reinício? Porque está ancorado em nossas experiências passadas, vividas. Ou seja, tudo o que fizemos é um constante reiniciar, iniciar.

É nesta perspectiva que este trabalho de doutorado está pautado: sobre as experiências vividas nestes 12 anos de docência, como professora do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e do Ensino Superior. Cada uma destas vivências/experiências foi fundamental para a constituição deste processo.

A relação e vivência como professora, do ensino Fundamental e Médio, podem ser consideradas a base e o articulador de todo o trabalho posterior – ensino superior, extensão e pesquisa. Foi a partir do primeiro contato com os alunos de 6ª série, quando da realização do estágio da Licenciatura Curta em Ciências, que a decisão de ser uma profissional da educação realmente foi tomada. A prática do estágio de docência é uma experiência muito rica para um licenciando que não tenha esta vivência de sala de aula. Mas é somente uma experiência, sem muito tempo para reflexão, intervenção, crescimento, pois é uma passagem, que pode definir futuros, no sentido da definição profissional. Neste caso, em decidir ser ou não profissional da educação.

É com a atuação de fato em sala de aula, que nos tornamos profissionais, no sentido completo do termo, vivenciando todos os prazeres e todos os problemas desta profissão. Isto se efetivou no ano de 1989, com turmas de Matemática do Ensino

Fundamental. Consideramos este ano o marco da efetivação de nossa profissionalização na educação, já que o início dessa formação se estabeleceu no processo da licenciatura. A partir daí começamos efetivamente a fazer parte do processo educativo como profissional, assumindo turmas, assumindo cargos diretivos (vice-direção de escola), implantando o Ensino Médio em uma escola em que só havia o Ensino Fundamental, participando de encontros, seminários e tentando sempre melhorar nossa ação pedagógica, principalmente na área de matemática.

Todo o trabalho e experiência realizados com o ensino Fundamental e Médio levaram-nos a atuar no ensino superior. Foi a partir do trabalho com este grau de ensino, baseado no ensino Fundamental e Médio, que a dissertação de mestrado e este de doutorado ganharam forma, estrutura e consistência. Podemos dizer que foram duas ações realizadas, vivenciadas, fundamentais para sua constituição: o trabalho com as licenciaturas de matemática e pedagogia e as extensões universitárias.

Com as licenciaturas, tivemos condições de pensar a formação do professor de matemática e do pedagogo das séries iniciais. Como nosso trabalho se concentrava (e se concentra) na formação pedagógica (disciplinas de instrumentação para o ensino, metodologias de ensino e práticas de ensino), conseguimos identificar dúvidas, dificuldades dos alunos-professores, a pouca articulação que os cursos de licenciatura têm com a escola, a deficiência na formação dos futuros professores com a sua futura profissão e, principalmente, a demanda das escolas, professores e alunos, que fazem o cotidiano da escola, através do acompanhamento de estagiários e do relato dos alunos-professores em sala de aula.

É importante considerar que muitas dessas dificuldades já foram refletidas, pensadas, discutidas e melhoradas nos cursos, através de reformulações curriculares. Tanto o curso de Matemática como o curso de Pedagogia estão hoje, muito próximos das ações da escola, em decorrência das alterações estabelecidas pela nova Lei de Diretrizes e Bases (Lei 9394/96; Art. 65) para os cursos de Licenciatura, no sentido da obrigatoriedade do cumprimento de 300 horas de interação com a escola e das reformulações/reestruturações internas dos mesmos. Hoje temos, nesses dois cursos, uma proposta que proporciona ao licenciando viver experiências com a escola no seu processo de formação. Já nos primeiros semestres do curso, os alunos começam a participar de atividades de acompanhamento/intervenção em uma escola, o que desencadeará seu processo de tornar-se professor.

Já nas extensões universitárias[2], sendo professora ministrante de cursos, conseguimos ter um contato maior com os professores das diversas redes de ensino, através da formação continuada destes. Ou seja, os cursos de extensão se realizam com professores que estão atuando efetivamente em sala de aula. Nestes cursos era/é possível ter uma interação maior com os problemas, necessidades de fato dos professores que estão em sala de aula. Na Unijuí -Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul-, universidade em que atuo, entendemos que a extensão/pesquisa/ensino, tripé que constitui a Universidade, está intimamente ligado/relacionado, se "auto alimentando". Neste sentido, não existe a soberania da pesquisa sobre o ensino, nem do ensino sobre a extensão. Cada um desses eixos possui sua especificidade, seus objetivos e objetos, possuindo as ligações e inter-relações necessárias para a mútua manutenção e qualificação.

Pensando na formação do educador e considerando o grupo de professores que trabalha com estes cursos de licenciatura (Matemática e Pedagogia), na sua maioria professores que tiveram experiências com o ensino fundamental e médio, mas que não continuam atuando, a extensão é a possibilidade de continuarmos em contato com a sala de aula, através dos professores que realmente estão atuando. Esta interação acaba alimentando a prática na Universidade, nos cursos de Licenciatura. Ou seja, saem desta interação os possíveis problemas sobre os quais a pesquisa vai se debruçar; e o ensino, em contrapartida, poderá novamente refletir sobre e testar suas possíveis soluções, viabilidades, etc... . Afinal sem esta interação, o ensino, na Universidade, acaba ficando muito distante da realidade escolar. Porém, esta aproximação não pode ser entendida somente no sentido de "ver a realidade" (os professores da Universidade indo até as escolas para identificar a realidade, com todo o distanciamento que este olhar requer), mas no sentido de interação e compreensão desta. Isso é efetivado através do olhar da pesquisa, que poderá oferecer instrumentos de compreensão, análise e intervenção, com maior clareza e competência.

---

[2] As ações de extensão universitária são entendidas aqui como assessorias pedagógicas que prestadas às Secretarias de Educação, Coordenadorias de Educação e Escolas das Redes de Ensino.

Desta forma, tendo experiência nos três graus de ensino, nas extensões universitárias, no processo de pesquisa, através do mestrado, torna-se fundamental a continuação desta caminhada, na busca de uma melhor consistência teórica e na possibilidade de constituição de grupo de pesquisa na minha instituição, tendo por objeto o ensino-aprendizagem de matemática.

1 – CONSTRUINDO A TRAJETÓRIA DA PESQUISA

1.1 O ensino-aprendizagem de matemática e a resolução de problemas[3]

O processo de ensino-aprendizagem de matemática possui algumas características que são marcantes em qualquer parte do mundo. Podemos dizer que este processo se estabelece basicamente sobre algumas situações de ensino, do tipo: explicação do professor, exercícios, atividades práticas (utilização de material concreto, pesquisas, visitas, etc...) e resolução de problemas. Porém, cada uma destas situações possui conotações diferentes, em função da forma como entendemos o processo ensino-aprendizagem[4], a interação professor-aluno-conhecimento, enfim, todas as relações que se estabelecem no processo pedagógico, ou seja, nas situações didáticas de sala de aula[5].

Um dos documentos que, *a priori*, a grande maioria dos professores na escola está recebendo e estudando são os *Parâmetros Curriculares Nacionais para a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio - PCNs.* Nestes documentos, mais especificamente na parte da matemática, é apresentada uma breve caracterização sobre a área de matemática, o aprender e o ensinar matemática, com os seguintes caminhos para "fazer matemática" na sala de aula: o recurso à resolução de problemas, à história da matemática, às tecnologias da informação e aos jogos;

---

[3] Esta pesquisa vai envolver aspectos do problema em si, ou seja, os enunciados dos problemas e sua influência no processo de resolução. Além disso, os problemas que serão tratados aqui são Problemas Aritméticos Elementares (PAE), na perspectiva de Puig e Franchi. Problemas que fazem parte do contexto escolar e que trazem no seu bojo um objeto de ensino, uma intencionalidade do processo educativo.

[4] Ver artigo de FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Ano 3, nº 4, p 1-37, 1995.

[5] Um ótimo livro que trabalha com estas relações de sala de aula, ou melhor, a situação didática e pedagógica, baseando-se na Escola francesa é MACHADO, Silvia Dias Alcântara, et all. **Educação Matemática: uma introdução**.São Paulo, EDUC, 1999.

elencando também, os objetivos gerais do ensino de matemática e os conteúdos de matemática para cada nível e ciclo.

Em relação à resolução de problemas, este documento apresenta-o com os seguintes princípios:

> *"- a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;*
> *- o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;*
> *- aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;*
> *- um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;*
> *- a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se podem apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas" (BRASIL, 1998:40-41).*

Podemos fazer algumas observações em relação a esses princípios apresentados nos PCNs. A primeira é em relação às situações-problemas serem o ponto de partida das atividades de matemática e não as definições. Concordamos com esta posição, no sentido de que a resolução de problemas não pode ser vista como simples aplicação da teoria. Porém, no processo pedagógico é preciso contemplar vários momentos para o uso da resolução de problemas (aplicações de conteúdos já aprendidos - ampliando estes e identificando possíveis faltas e, também, desencadeando novos conteúdos – no sentido de ser problematizador ou de modelar situações). Outro ponto que consideramos importante é em relação ao aluno ser levado a interpretar o enunciado da questão. Acreditamos, e isso será melhor enfocado no capítulo 2, que o processo empregado não é o de interpretação, mas sim de conversão entre dois registros (representação do enunciado e representação numérica). *A interpretação pressupõe o* *mesmo registro de representação, ou seja, pode-se interpretar um texto através de outro texto.* A resolução de um problema, em matemática, exige uma mudança de registro; logo, uma compreensão e uma conversão entre registros diferentes. Essa perspectiva é fundamental para entender o enunciado do problema como um texto e a resolução de um problema como uma tarefa de conversão entre registros de representação.

Um outro item que os PCNs apresentam é a seleção dos conteúdos, que são organizados através de quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Em relação ao bloco Números e Operações, é elencado que os alunos deverão construir seu conhecimento numérico através de um processo dialético, para resolver determinados problemas, considerando as propriedades, relações e o modo como estes objetos matemáticos apareceram historicamente. Com este viés histórico, os alunos poderão perceber a existência de diversas categorias numéricas, criadas em função de diferentes problemas que a humanidade teve que enfrentar, envolvendo situações que exploram as operações. Estas devem enfocar os seus diferentes significados com o estudo reflexivo do cálculo, através do cálculo mental, exato e aproximado e escrito. Este trabalho deverá estar estreitamente ligado à álgebra e suas generalizações de padrões.

Em relação ao Espaço e Forma, este é constituído pelos conceitos geométricos, que desenvolvem um tipo especial de pensamento, capaz de permitir compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vivemos. Estas noções geométricas contribuem para a aprendizagem de números e medidas, pois estimulam a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa.

O bloco Grandezas e Medidas exige uma forte relação com o social, com ênfase no prático e utilitário, pois estes conceitos estão presentes em nosso cotidiano. São exploradas noções de proporcionalidade e escala, dando um significado aos números e operações. E o Tratamento de Informações, por sua vez, é um bloco que é incorporado nos demais, com a finalidade de destacar e evidenciar sua importância na sociedade atual. Envolve noções de estatística, probabilidade e de combinatória.

Esses quatro blocos sustentam os conteúdos de ensino-aprendizagem da matemática na educação básica. Lançamos mão dos conteúdos elencados pelos PCNs, para situar nossa pesquisa. Pois o foco, é um destes blocos, através dos enunciados dos

Problemas Aritméticos Elementares(PAE)[6], ou seja, números e operações. Contemplando uma discussão mais específica em relação à exploração e consideração dos PAEs, no processo ensino-aprendizagem, tendo por objeto matemático a operação de multiplicação com números naturais, em função de algumas situações detectadas nesses doze anos de prática enquanto professora e, principalmente, de constatações da pesquisa de mestrado[7] explorando esta operação, porém com ênfase no sentido da operação e no significado operatório dos algoritmos (termos utilizados na pesquisa de mestrado).

Quando falamos em *sentido da operação*, estamos considerando as idéias básicas envolvidas na operação, que desencadeiam os diferentes registros de representação. Já o *significado operatório* dos algoritmos é entendido através do sistema de representação dos números e das propriedades das operações, sustentando os algoritmos que podem ser recriados a partir do nosso sistema de numeração decimal. Porém, uma das considerações que pode ser feita, baseada na pesquisa de mestrado, é que, mesmo os alunos dominando estes dois aspectos (sentido da operação e significado operatório dos algoritmos), não conseguem, em muitas situações, resolver *situações-problemas* que envolvem a operação de multiplicação. Não estabelecendo, desta forma, a tarefa de conversão. Isso nos leva a afirmar que, mesmo o professor trabalhando na perspectiva de ampliar o sentido da operação e o significado operatório dos algoritmos, não lhe é garantido um bom trabalho com a resolução de problemas. ***A atividade de resolução de problemas exige algo a mais que o domínio do objeto/conceito matemático específico.***

Não entendemos aqui, que o trabalho com resolução de problemas seja somente uma aplicação de conceitos já estudados, mas que o problema também pode desencadear/estruturar novos conceitos, conforme podemos observar em diversas bibliografias. Nesta perspectiva, a resolução de problemas na ação pedagógica, possui vários sentidos. Um deles é o sentido de *meta*, ou seja, a resolução de problemas é o veículo para gerar e exercitar habilidades e, assim, aprender a ***resolver problemas é a razão principal para estudar matemática***. Outro sentido seria o da resolução de

---

[6] A partir deste momento, escreveremos (PAEs) quando estivermos nos referindo aos Problemas Aritméticos Elementares.

[7] NEHRING, Cátia Maria. **A multiplicação e seus registros de representação nas séries iniciais**. Florianópolis: UFSC, 1996. 238p. Dissertação. (Mestrado em Educação) Centro de Ciência da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina.

problemas ser considerado um **processo**, ou seja, um processo dinâmico e contínuo de aplicação de conhecimentos adquiridos previamente a situações novas e desconhecidas. E ainda, a resolução de problemas poderia ser considerada como uma ***habilidade*** básica, que aparece de maneira muito nebulosa entre os educadores matemáticos, pois os mesmos não conseguem ter clareza do que seriam estas habilidades básicas[8].

Nossa posição em relação à resolução de problemas no ensino de matemática é de que os mesmos servem no sentido de modelarmos situações. Ou seja, o objetivo de ensinar e aprender matemática não se restringe ao aprender e ensinar a fazer cálculos, mas sim a modelar situações da vida utilizando estes cálculos e conceitos com significado resolvendo problemas que aparecem em várias situações da vida (não somente de situações do cotidiano, vai além disso). Assim, a habilidade, no uso das técnicas operatórias, e aqui cabe o uso da palavra habilidade, não é suficiente para trabalhar com situações-problemas: é necessário um entendimento maior da operação, do objeto matemático, para resolvermos um problema. Não podemos pensar no sentido de fornecermos aos alunos uma maior quantidade de problemas para resolver, entendendo que um aumento na quantidade seria o suficiente para termos bons resolvedores de problema, assim como uma atividade esportiva do tipo andar cada vez mais de bicicleta ou treinar cada vez mais possibilitaria uma melhora de performance. Não, o trabalho com problemas não pode ser entendido pelo aumento da quantidade de problemas, mas sim pela escolha de enunciados potentes e do trabalho específico sobre o enunciado do problema – texto (enfocaremos mais esta questão no capítulo 2). Nesta perspectiva, o problema pode ser entendido como uma ferramenta e como um objeto de ensino.

Em muitas situações vivenciadas em sala de aula, onde propomos problemas aos alunos, estes não são compreensíveis para os alunos. Os alunos em muitas situações, questionam sobre o que fazer, qual operação usar, com o caminho a seguir. Neste caso, os algoritmos, os gráficos, as tabelas, as equações, ou seja, as ferramentas matemáticas acabam sendo de pouca utilidade para as situações/fatos da vida cotidiana, onde os problemas aparecem, ou mesmo para os problemas unicamente

---

[8] Estas idéias estão baseadas no artigo: "Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica", de Nicholas A. Branca. In: KRULIK, S. et all. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.** São Paulo, Atual Editora, 1997.

escolares. A ação do aluno, para converter o enunciado do problema em uma linguagem matemática, acaba, muitas vezes, não sendo possível. Mas, se o problema matemático não é compreensível pelos alunos, onde está a dificuldade na atividade de resolução? No texto-enunciado deste problema, no conteúdo cognitivo, nas intervenções pedagógicas? Podem-se elencar várias questões levando em consideração as dificuldades dos alunos, os enunciados dos problemas especificamente, a ação pedagógica[9], etc..., mas precisamos delimitar nossa ação de pesquisa, para podermos torná-la significativa ao processo pedagógico e à própria educação matemática.

As pesquisas sobre resolução de problemas tiveram um grande progresso após os estudos de Duncker (1935) e de Polya (1956; no Brasil, de 1975). Mas a noção do que constitui um problema permanece, em geral, muito intuitiva. Podem-se observar pesquisas que vão em busca de fórmulas para resolver os problemas, como se existisse um algoritmo único para a resolução de problemas. Pesquisas que trabalham na perspectiva heurística do problema, ou seja, processos individuais para resolver os problemas, considerando que cada sujeito possua um modo/maneira de resolve-los. Além de pesquisas que passam por descrições que reagrupam tanto as dificuldades de adaptações impostas pelo meio, como por questões técnicas ou teóricas, passando por situações imaginadas por jogo, tal como as de adivinhações, palavras cruzadas, recreações matemáticas, e outras.

Kilpatrick faz a seguinte observação "parece que as técnicas que tentam "programar" o resolvedor para percorrer uma seqüência determinada de etapas não são muito eficazes... A experiência e algumas pesquisas sugerem, contudo, que se pode aprender alguns procedimentos heurísticos que melhorarão o desempenho em resolução de problemas matemáticos – desde que o professor ilustre como os procedimentos funcionam, dê ampla oportunidade para discussão, prática e reflexão e apóie e incentive os esforços do aluno." (Apud Suydam, 1997:65).

O trabalho de Polya, um dos precursores dos estudos sobre resolução de problemas, concentra-se no estabelecimento de quatro passos para seu processo de

[9] O artigo: "Desemaranhando pistas a partir da pesquisa sobre resolução de problemas", de Marilyn N. Suydam. In: KRULIK, S. et all. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.** São Paulo, Atual Editora, 1997. Faz um levantamento das pesquisas sobre resolução de problemas, através de uma ótima relação com o fazer pedagógico, conseguindo mostrar com as pesquisas (principais problemas e saídas) e o que chama de pistas para o Ensino (relações destes problemas com a prática de sala de aula).

resolução, que são: a compreensão dos problemas, que trata da identificação da incógnita, quais os dados, qual a condicionante, etc... ; o estabelecimento de um plano, encontrar uma ligação entre os dados e a incógnita; a execução do plano, verificando os passos, os passos corretos, demonstrações... ; o exame da solução obtida, a verificação do resultado, argumento, caminhos diferentes, utilização deste resultado ou método em outros problemas.

Além destes quatro passos clássicos, Polya (1978) elenca, em seu livro *A Arte de resolver problemas,* vários tópicos para o professor auxiliar o aluno na resolução de problemas, tais como questões recomendáveis, operações mentais, generalidades, consensos, imitação e prática e as quatro fases propriamente ditas, como uma possibilidade para o fazer pedagógico frente aos problemas. Entendemos estes quatro passos de Polya como uma metodologia para a resolução de um problema, mas não como se fosse possível entender e resolver todos os tipos de problemas seguindo estes passos. Afinal, estes quatro passos acabam, muitas vezes, não garantindo a resolução dos problemas pelos alunos, pois este processo não pode ser entendido de uma maneira tão linear quanto é descrito.

Existem dificuldades para a resolução de problemas que são de ordem diferente. Ou seja, o aluno, muitas vezes, lê o problema e pergunta: *Qual a operação que devo usar para resolver? ou O que devo fazer?* Com isso, em alguns momentos, o professor acaba dizendo que os alunos "*não entenderam nada do problema*". Seria realmente isso? E, ao mesmo tempo, podemos nos perguntar qual deveria ser a posição do professor frente a esta situação. Como o professor procederia nesta situação de completa "incapacidade" dos alunos e por que não, de nós professores? De outro lado, muitas vezes a leitura do aluno não é suficiente para o entendimento do problema e, o professor acaba traduzindo-o para um outro registro, a linguagem verbal, que seria a mais significativa/cotidiana para o aluno. Mas isso nos leva a refletir sobre a função dos problemas no fazer pedagógico. Se este é entendido como uma forma de modelar situações, no momento que o professor traduz o problema, este perde a sua função. Cria-se um problema didático e não uma tarefa de conversão entre registros de representação (representação do problema – enunciado, para representação numérica - cálculos, tabelas).

E como fica a compreensão do problema? Esta situação de compreensão, leitura, conversão do enunciado-texto para o tratamento matemático é

um problema didático muitas vezes intransponível pelos atos pedagógicos realizados em sala de aula. Seria este o conflito na resolução dos problemas? Como o professor não sabe, ou não consegue um modo eficiente para interferir neste círculo vicioso acaba, muitas vezes, tentando traduzir o problema, ou, ainda, dizendo qual operação, ou melhor, o que o aluno deverá/poderá fazer para encontrar um resultado. A resolução dos problemas, tratada desta forma, acaba sendo somente mais uma forma de resolver cálculos e não uma forma potente de modelar/interpretar/compreender situações do mundo. A questão, então, é como efetivamente pode-se trabalhar com os enunciados de problemas interferindo no processo pedagógico?

Uma outra questão que se pode levantar em relação aos problemas é quanto à constituição deste problema matemático. Concordamos que a maioria dos problemas apresentados no contexto escolar, principalmente os (PAEs) estão na forma de um texto. Ou seja, são escritos na língua materna, explorando uma situação de um determinado contexto, necessitando, para sua resolução, serem convertidos para uma representação numérica (cálculo, gráfico, equação). Se concordarmos com esta perspectiva, de que o enunciado do problema é apresentado na forma de um texto, por mais simples, direto que este seja, precisamos, enquanto educadores matemáticos, entender ***qual a constituição deste texto***, como se ***estabelece a compreensão deste pelos alunos*** e, principalmente, como se ***estabelece a conversão do enunciado - texto do problema em outros registros de representação***.

O enunciado – texto do problema é um registro de representação que precisa ser convertido para um registro matemático que pode ser um cálculo, uma tabela, um gráfico, etc... . A tese que defendemos, é de que a dificuldade do aluno não está só na compreensão do enunciado – texto do problema, nem nos conceitos, mas na **relação entre ambas**. Ou seja, na conversão entre dois registros de representação (o enunciado do problema e o registro necessário para a sua resolução) que, obrigatoriamente, é reflexo, das ações pedagógicas propostas pelo professor em sala de aula. Pretendemos, através desta pesquisa, buscar subsídios teóricos-metodológicos, no sentido de entender a influência da variação dos enunciados – textos dos PAEs no processo de conversão.

1.2 A trajetória do mestrado – ênfase nos registros de representação

Os problemas matemáticos já foram investigados sob várias perspectivas[10]. Como já elencamos no início desta pesquisa, vamos centrar o estudo nos PAEs. Mais especificamente, nos problemas multiplicativos elementares de produto cartesiano, entendendo-os como textos matemáticos (os enunciados destes problemas) que deverão ser compreendidos e convertidos para uma linguagem matemática, possuindo um registro numérico específico: a operação de multiplicação. Vamos buscar uma possível releitura para as classificações dos problemas multiplicativos, na perspectiva de auxiliar os professores no fazer pedagógico, delimitando um campo de enunciado de problemas multiplicativos, baseado no sentido operatório da operação de multiplicação.

Nesta perspectiva, precisamos entender o que é um enunciado de problema, que é representado por um texto, quais suas características, qual sua organização. No intuito de esclarecer estas questões, usaremos como aporte teórico Raymond Duval que entende o enunciado do problema matemático como sendo composto por duas descrições, o ***conteúdo cognitivo*** e a ***organização redacional***. A organização redacional do problema leva em consideração as variáveis redacionais do texto, tornando o problema congruente ou não, para quem lê. O conteúdo cognitivo do problema está relacionado aos conceitos que o problema explora/considera, considerando que estes conceitos não são diretamente acessíveis à percepção, necessita-se para sua apreensão do uso de uma representação.

Na tentativa de situar a variação redacional e o conteúdo cognitivo, podemos considerar o seguinte problema: "*Um menino está à distância de 6 m de um muro de 3 m de altura e chuta uma bola que vai bater exatamente sobre o muro. Se a função da trajetória da bola em relação ao sistema de coordenadas é* $y = ax^2 + (1 - 4a)x$*, determine a altura máxima atingida pela bola*". Este problema está explorando o conteúdo de ponto máximo de uma parábola e pode ser variado redacionalmente, considerando os fatores intrínsecos e extrínsecos do texto, mantendo fixo o conteúdo cognitivo. (Esta questão será trabalhada no capítulo 2). Torna-se necessário entender

---

10 Neste sentido, vale a pena ver a tese de doutorado do Prof. Dario Fiorentini, em que o autor faz uma classificação dos estudos sobre resolução de problemas, traçando as principais características e um breve resumo das teses e dissertações defendidas até 1990. FIORENTINI, Dario. **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática: o caso da produção científica em cursos de pós-graduação.** São Paulo: UNICAMP, 1994. Tese de Doutorado.

melhor os registros de representação necessários para representar os objetos matemáticos trabalhados/explorados nos enunciados dos problemas e na busca de sua resolução.

As representações, através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, equações, são bastante significativas no processo de ensino-aprendizagem, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, proporcionando representações diferentes de um mesmo objeto matemático (p.ex. a função pode ser representada através da expressão algébrica, tabelas, gráficos). Assim, os objetos matemáticos de forma alguma podem ser confundidos com suas representações. Ou seja, quando trabalhamos com uma modelização da operação de multiplicação, o fundamental não é o registro intermediário (tabela, gráfico, etc...) que podemos fazer a partir de seu enunciado, mas sim o registro numérico (operação) que é definido por este enunciado. Porém, a utilização da representação intermediária poderá ser fundamental para o estabelecimento da conversão entre o enunciado-texto e a operação, principalmente para os problemas que apresentam maior dificuldade de compreensão para os alunos, ou seja, os problemas não congruentes. ***Considerando a representação intermediária como parte da resolução de problemas, poderíamos, enquanto professores, dispensar o velho hábito pedagógico de traduzir ou reler o problema para o aluno, quando este não consegue resolvê-lo, para pensarmos e propormos representações intermediárias que os auxiliem no processo de resolução, ou seja, de conversão.***

Considerar seriamente este processo de conversão entre registros exige que o professor tenha claro o conhecimento específico (conteúdo cognitivo) que o problema explora, pois é a partir dele que se pode pensar/elaborar representações intermediárias eficientes pedagogicamente, ou seja, transformar o conhecimento específico em conhecimento a ser ensinado e a ser apreendido pelos alunos. Desta forma, cabe ao professor se apropriar do conhecimento científico e transformá-lo em objeto de ensino, tornando-se para o aluno, conhecimento apreendido. Mas, como efetivar este processo de transformação dos conhecimentos científicos em conhecimentos apreendidos no ensino de matemática? Podemos pensar na construção/apropriação do conhecimento via representações. Mas o que entendemos por estas representações?

No campo educacional, mais especificamente na construção/apropriação do conhecimento, o termo representação está muito vinculado ao sentido de concepções prévias que o aluno tem sobre conhecimentos trabalhados na escola e, assim, dos conhecimentos científicos. Giordan faz a seguinte observação:

> . . .(representación) *enfatiza el hecho de que se trata, en un primer nivel, de un conjunto de ideas coordinadas e imágenes coherentes explicativas, utilizadas por las personas que aprenden para razonar frente a situaciones-problema, y sobre todo evidencia la idea de que este conjunto traduce una estructura mental subyacente responsable de estas manifestaciones contextuales* (1988:91).

Admitindo que o professor tem por objetivo a socialização do conhecimento universal sistematizado (conhecimento científico), poderíamos, num primeiro momento, partir das representações prévias dos alunos e, transformando-as, promover a apropriação do conhecimento científico. Isto exige o conhecimento destas representações e um grande trabalho pedagógico posterior para "mudá-las", reconstruí-las.

Sob esta perspectiva, podemos levantar algumas questões:

Como o professor vai conhecer e trabalhar com as representações de seus alunos?

O ensino escolar consegue realmente transformar as representações iniciais em conhecimento científico, posto que os alunos continuam usando-as nos problemas reais, em vez do conhecimento científico?

A perspectiva de trabalharmos com as representações dos alunos apresenta algumas dificuldades em relação ao fazer pedagógico, pois como o professor fará o levantamento das representações iniciais de todos os seus alunos sobre um conceito específico? Como trabalhar no sentido de "mudar/transformar" essas representações? ***Entendemos que o professor tem o papel de trabalhar o conhecimento universal sistematizado. Mas o conhecimento que o professor trabalha é uma transformação deste conhecimento científico, ou seja, é um conhecimento a ser ensinado e, também, um conhecimento a ser aprendido pelo aluno.*** Este conhecimento a ser ensinado poderia levar em consideração as representações dos alunos e outras questões pertinentes no processo ensino-aprendizagem, tentando garantir um maior significado ao conhecimento a ser aprendido. Mas podemos dizer que o levantamento das representações prévias dos alunos, sobre um conceito, é uma opção metodológica que não garante em momento algum o abandono destas representações e a incorporação de uma nova pelo aluno. ***Portanto, a função do professor seria a de proporcionar aos alunos, uma nova maneira de se perceber o mundo, com instrumentos, a priori, mais potentes e lógicos, e necessariamente com significado. Para desta forma, podermos pensar, em conhecimentos científicos transformados em conhecimentos a serem ensinados e, principalmente, conhecimentos aprendidos pelos alunos***. Para que isso se efetive, acreditamos que, além do trabalho com a idéia de representações prévias, pois estas não dão conta de muitas questões e são limitadas, os professores podem se valer das ***representações semióticas***, ou melhor, dos registros de representação, como uma forma de trabalhar o conhecimento matemático.

Raymond Duval[11] (1993-1994-1995-1996) estabelece três tipos de representações, que envolve o ato de construção do conhecimento:

- as ***representações mentais*** (podemos dizer que estão na mesma perspectiva das concepções prévias): Os primeiros estudos foram realizados no ano de 1924-26, por Piaget, em sua obra sobre *A representação do mundo na infância*. Estas representações podem ser definidas pelas "*crenças, convicções, idéias, explicações e concepções dos estudantes sobre os fenômenos naturais e físicos*". São representações internas (ocorrendo no nível do pensamento) e conscientes ao sujeito. O autor considera que as primeiras idéias (sobre a água, fogo e ar) aparecem em função das representações mentais, *sendo que as representações mentais recobrem um conjunto de imagens e, mais globalmente, as concepções que o indivíduo tem sobre um objeto, sobre uma situação, ou sobre alguma coisa que está associado* (Duval, 1994:1).

Um dos questionamentos mais importantes que Duval levanta, em função do desenvolvimento das representações mentais é que autores como Piaget e Vygotsky defendem que para ocorrer desenvolvimento das representações mentais, estas dependeriam "*de uma interiorização das representações semióticas, ao mesmo tempo em que as representações mentais são uma interiorização das percepções*" (Idem, 1993:39);

- *as* ***representações internas ou computacionais***: Esta noção de representação foi estudada a partir de 1955-1960, juntamente com as teorias que privilegiam o tratamento. São representações internas e não conscientes ao sujeito. Ou seja, o sujeito acaba executando certas tarefas sem pensar em todos os passos necessários para a sua realização. Nesta perspectiva duas questões se apresentam, sendo que, na primeira questão, o interesse se deu mais pela psicologia cognitiva e na segunda, pela inteligência artificial (o tratamento da informação):

---

[11] Todas as citações feitas de Duval, são traduções livres, dos originais, que constam na bibliografia.

> *1) Sob quais formas as informações vindas do exterior podem entrar dentro do sistema, quer dizer, quais descrições feitas com a ajuda de símbolos, suscetíveis de serem utilizados pelo sistema, permitem captar as informações provenientes do exterior?*
> *2) Quais são as regras que vão permitir a transformação das informações no interior do sistema, podendo esta transformação ser do tipo cálculo?*
> *A representação é então a **Forma** sob a qual uma informação pode ser descrita e levada em conta em um sistema de tratamento. Isso não tem, pois mais nada a ver com uma "idéia/crença", com uma "evocação de objetos ausentes", os quais enviam de novo para a consciência viva do sujeito. Trata-se ao contrário de uma " ação de codizar[12]" as informações* (Duval, 1994:2).

As representações computacionais traduzem informações externas a um sistema, sob formas que possibilitem recuperá-las e combiná-las no interior do sistema;

- as representações semióticas: A noção desta representação surge com um problema de modelização da linguagem (com Chomsky, Peirce, Benveniste, Granger, etc...). Com Benveniste amplia-se essa discussão, através da introdução de sistemas semióticos e, mais tarde, com trabalhos sobre a aquisição do conhecimento matemático e seus problemas de aprendizagem. A representação semiótica é externa e consciente do sujeito, sendo seu papel fundamental mostrar através de:

> *...um sistema particular de signos, linguagem natural, língua formal, escrita algébrica ou gráficos cartesianos, e quais podem ser convertidos em representações equivalentes em um outro sistema semiótico, mas podendo ter significados diferentes para os sujeitos que os utilizam. A noção de representação semiótica pressupõe um grupo de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico a um outro. Esta operação se descreve com uma mudança de forma e não de conteúdo* (Idem, 1995:17).

Isto é importante, pois o registro de representação dos objetos matemáticos, depende da **forma** e não do **conteúdo** envolvido. Podemos elencar, como exemplo, um problema envolvendo o conteúdo de função do segundo grau, na seguinte situação: *"Um projétil lançado da origem O (0,0), segundo um referencial dado, percorre uma trajetória parabólica cuja função representativa é $y = ax^2 + bx$. Sabendo que o projétil atinge sua altura máxima no ponto (2, 4), escreva a função dessa*

---

[12]Ação de codizar: substituir as letras, sílabas, palavras ou grupos de palavras do texto claro (de uma mensagem), pelas suas correspondentes, relacionadas em um código. (BUARQUE DE HOLANDA, Aurélio, Novo dicionário da língua portuguesa. São Paulo, Nova Fronteira, 1986. p.425)

trajetória". Este problema está representado através de um enunciado – texto que precisa ser convertido para um outro registro de representação, neste caso uma expressão algébrica, que é $y = -x^2 + 4x$. Também pode ser representado através de um gráfico cartesiano, mediante o traçado de uma parábola. Este exemplo nos mostra que a função de segundo grau (conteúdo) pode ser representada através do enunciado, da expressão algébrica e do gráfico cartesiano (formas diferentes). Todos estes registros de representação são mudanças na ***forma*** da representação e não no ***conteúdo*** representado, necessitando que o aluno realmente domine, ou tenha uma visão ampla deste conteúdo, para conseguir estabelecer e entender as diversas formas de representação. Possibilitando assim, um entendimento global do conteúdo tratado.

As representações semióticas podem ser ***convertidas*** em representações "equivalentes" num outro sistema semiótico, mas podendo ter diferentes significados para as pessoas que as utilizam. ***Converter*** uma representação é ***mudar a forma pela qual um conhecimento é representado***. Seguindo nosso exemplo, a conversão vai ser estabelecida no momento, em que o sujeito representar a expressão algébrica e/ou o gráfico cartesiano, identificando que o tempo poderá ser de, aproximadamente, 2,21 segundos para uma altura de 20 metros, com uma velocidade de 25 metros por segundo. E, além disso, relacionar a expressão algébrica com o gráfico cartesiano. Porém, esta conversão não é simples e exige uma interferência do professor, como mediador deste processo, pensando e propondo atividades significativas entre os diferentes registros de representação.

As representações semióticas, as representações computacionais e as representações mentais não são espécies diferentes de representação, mas sim representações que realizam funções diferentes. As representações mentais realizam uma função de objetivação. As representações computacionais realizam uma função de tratamento. As representações semióticas realizam, de maneira indissociável, uma função de objetivação e uma função de expressão. Ela realiza em outra uma função de tratamento, porém este tratamento é intencional, função fundamental para a aprendizagem dos sujeitos. Nas representações computacionais, o tratamento estabelecido é automático, não possuindo intencionalidade e ação do sujeito.

Entendemos que as representações semióticas são fundamentais no processo ensino-aprendizagem, principalmente enfocando a idéia dos registros de representação, pois acreditamos que o ensino de matemática está estreitamente vinculado à compreensão de diferentes registros de representação. Neste sentido, pode-se dizer que uma escrita, um símbolo ou uma notação representa objetos matemáticos, ou seja, um número, uma função, um vetor; da mesma forma, os traços, as figuras também representam objetos matemáticos, na forma de um segmento, um ponto, um círculo, uma operação. Mas ***não podemos confundir a representação do objeto matemático com o próprio objeto matemático.***

É esta questão que precisa ser aprofundada em relação ao fazer pedagógico, ou seja, o processo que se estabelece entre a construção/compreensão do objeto matemático e os seus diversos registros de representação, sendo estes semióticos. É necessário que o educador tenha claro o objeto matemático a ser ensinado, para só então definir quais os registros de representação semióticos que viabilizarão a construção do mesmo. Nesta perspectiva, vale a pena reforçar a importância do professor se apropriar do conhecimento científico e transformá-lo, tendo como foco dois momentos: os conhecimentos a serem ensinados (ter claro os objetos de ensino) e os conhecimentos a serem aprendidos, ou seja, os conhecimentos internalizados pelos alunos.

O que se constata em algumas pesquisas de Educação Matemática[13] é que o aluno não consegue passar das formas representadas (representação) ao conteúdo representado (objeto representado), ou seja, a atividade de conversão é, na maioria dos casos, impossível para uma grande parte dos alunos. O aluno, muitas vezes, é capaz de fazer tratamentos em diferentes tipos de registros de representação do mesmo objeto matemático, porém não consegue fazer as conversões necessárias para a apreensão deste objeto. Vale a pena recordar o exemplo da função do segundo grau: os alunos conseguem trabalhar com o registro de representação da expressão algébrica para o registro de representação do gráfico cartesiano. Porém, quando é fornecida a representação através do gráfico cartesiano, solicitando a representação da expressão algébrica que lhe deu origem, a dificuldade torna-se, muitas vezes, intransponível. Isso mostra que a conversão entre os registros de representação do mesmo conteúdo matemático, muitas vezes não é tão enfatizada na escola. Os próprios registros de representação são tratados parcialmente, sem a devida ênfase na sua complementaridade e relação.

Entendemos que a matemática trabalha com objetos abstratos, basta lembrar da definição de número que é a idéia abstrata. Ou seja, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, ao toque, às sensações, etc... necessitando, para a sua apreensão/compreensão, o uso de uma representação, no caso dos números, dos sistemas numéricos com seus algarismos. As representações, através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos, são significativas e usadas no

---

[13]Ver: DAMM, Regina F. **Apprentissage des problèmes additifs et compréhension des énoncés.** Thèse U.L.P. Strasbourg, 1992; DOUADY, Régine. **Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.** Thèse, Paris VII, 1984; RETAMAL, Ismenia del C.G. **Le role des representations dans l'appropriation de la notion de fonction.** Thèse, 1984.

cotidiano escolar, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, determinando registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático. Precisamos lembrar que, quando trabalhamos com um problema modelado pela operação de multiplicação, por exemplo, o fundamental não é a representação intermediária que podemos fazer a partir de seu enunciado, nem mesmo a representação numérica definida por este enunciado. O importante é o ***processo de conversão*** entre os diferentes registros de representação possíveis para este enunciado. Este processo, pode auxiliar, significativamente a resolução dos problemas. A eficiência na sua resolução e, principalmente, a compreensão dos enunciados, estaria na complementaridade e no entendimento dos registros de representações que são estabelecidos, considerando o conteúdo matemático explorado.

Nem sempre o objeto matemático é claro e acessível, como os objetos reais ou físicos (p.ex. uma mesa, a queda de um corpo, etc.), sendo que o seu tratamento fica na dependência do sistema de representação semiótico utilizado. Podemos dizer que as representações semióticas "***são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento***" (Duval, 1993:39), dependendo do sistema semiótico a ser usado. Duval contesta a idéia de que as representações semióticas são simples exteriorizações das representações mentais para fins de comunicação, dizendo que esta visão é enganosa, pois "*. . . as representações* (semióticas) *não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento*" (Idem, 1993:39). Ou seja, sem as representações semióticas torna-se impossível a construção do conhecimento pelo sujeito que aprende. Para referendar esta posição, o autor elenca algumas funções primordiais, para o uso das representações semióticas:

> - *o* ***desenvolvimento das representações mentais*** *'depende de uma interiorização das representações semióticas, ao mesmo tempo em que às representações mentais são interiorizações das percepções";*
> - *a* ***realização de diferentes funções cognitivas****; a função de objetivação (expressão privada) que é independente daquela da comunicação (expressão para outra pessoa), e a função de tratamento que não pode ser preenchida pelas representações mentais;*
> - *a* ***produção de conhecimento****: as representações semióticas permitem representações radicalmente diferentes de um mesmo objeto na medida que eles podem revelar sistemas semióticos totalmente diferentes.... Assim o desenvolvimento das ciências está ligado a um desenvolvimento de sistemas semióticos mais e*

> *mais específicos e independentes da língua natural* (Idem, 1993:39).

Com estas observações de Duval, podemos dizer que as representações semióticas estão intimamente ligadas às representações mentais, porém não estão subordinadas a estas. É através das representações semióticas que se torna possível efetuar certas funções cognitivas essenciais do pensamento humano, como o tratamento, o qual apresenta uma diversidade de registros semióticos de representação. Neste sentido, Duval (1993:39) faz a seguinte definição: "*chama - se **sémiosis** a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e **noésis** a apreensão conceitual de um objeto*". ***Para que ocorra um significativo aprendizado de matemática, é necessário que a conceitualização ocorra através de significativas representações***. Sendo assim, o sujeito que aprende precisa estabelecer a coordenação de vários registros de representação semiótica, possibilitando, desta forma, uma apreensão conceitual dos objetos matemáticos. Ou seja, quanto maior mobilidade o sujeito tiver com **registros diferentes** do mesmo objeto matemático, maior possibilidade deste sujeito fazer a apreensão do objeto.

É necessário entender quais são as atividades cognitivas do sujeito, para uma *sémiosis,* e as razões pelas quais a aprendizagem conceitual implica a coordenação de vários registros de representação. Para este entendimento, Duval elenca três atividades cognitivas fundamentais ligadas a *sémiosis*, ou seja, para que um sistema semiótico seja um registro de representação, é necessário que:

> *1. Ocorra formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado: enunciado de uma frase (compreensível numa dada língua natural), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, escrita de uma fórmula,. . . Essa formulação implica uma seleção de característica e de dados no conteúdo a ser representado. Essa seleção se faz em função de unidades e regras de formação que são próprias do registro semiótico no qual a representação é produzida. Nesse sentido a formação de uma representação poderia ser comparada à realização de uma tarefa de descrição. Essa formação deve respeitar regras (gramaticais para língua natural, regras de formação de um sistema formal, restrições de construção para as figuras,. . .). A função das regras é de assegurar, em primeiro lugar, as condições de identificação e de reconhecimento da representação e, em segundo lugar, a possibilidade de sua utilização para tratamento. São **regras de conformidade**, não são regras de produção efetiva por um sujeito. Isto quer dizer*

> *que o conhecimento das regras de conformidade não implica na competência para formar representações, mas somente na competência para reconhecê-las* (Duval, 1993:41).

Para ocorrer uma representação identificável, é necessária uma seleção de características e de dados do conteúdo a ser representado e isso depende das regras que asseguram, desta forma, o reconhecimento das representações e a possibilidade de sua utilização para um tratamento. As regras de conformidade já estão estabelecidas na sociedade, não sendo competência do sujeito criá-las, mas sim usá-las para reconhecer as representações. Um exemplo claro é o sistema de numeração hindu-arábico, o qual possui cinco regras de conformidade básicas, que são: o sistema ser posicional, ser de base dez, ser multiplicativo, ser aditivo e ter um algarismo como guardador de lugar: o zero.

Identificando-se o registro de representação claramente, precisamos saber como trabalhar com ele, ou seja, quais os tratamentos necessários a cada registro de representação, entendendo que

> *2. **O tratamento** de uma representação é a transformação dessa representação no próprio registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna do registro. A paráfrase e a inferência são as formas de tratamento em língua natural. O cálculo é uma forma de tratamento próprio às estruturas simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional,...). A reconfiguração é um tipo de tratamento particular para as figuras: é uma das várias operações que dá ao registro das figuras seu papel heurístico*[14]*... Há naturalmente, regras de tratamento próprias a cada registro. Sua natureza e número variam consideravelmente de um registro a outro... No registro da língua natural, há paradoxalmente um elevado número de regras de conformidade e poucas regras de tratamento para a expansão discursiva de um enunciado completo* (Idem: 41-42).

Esta definição de tratamento é fundamental, pois trabalha com as transformações internas do registro de um objeto a ser representado. Por exemplo, as operações com os números naturais, especificamente no registro do significado operatório, possuem como tratamento a compreensão das regras do sistema posicional e da base dez. Sem a compreensão destas regras, os registros de representações algorítmicos não terão sentido, ou seja, não existe tratamento significativo, o que impossibilita a compreensão desta representação, tornando os algoritmos simples mecanismos sem compreensão.

---

[14] Heurístico é entendido aqui como o conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas. Podendo ser complementado com os procedimentos pedagógicos do professor, pelo qual tenta-se levar o aluno a descobrir por si mesmo a verdade.

Outro exemplo que podemos citar é a representação do sistema de numeração romano e o sistema de numeração egípcio, ambos sistema de numeração, porém com tratamentos completamente diferentes:

a) para representar a quantidade vinte e sete, no sistema romano é necessário sabermos os algarismos: X, V, I e o princípio aditivo e subtrativo, ficando a quantidade assim representada: XXVII (é necessário considerarmos os tratamentos necessários para esta representação);

b) para representar a mesma quantidade no sistema egípcio, temos: ∩∩ IIIIIII, com os tratamentos necessários à sua representação, que são determinação de cada marca; cada uma destas marcas só pode ser repetida nove vezes; cada dez marcas são trocadas por outra, de um agrupamento superior; e, para saber o valor do número escrito, é preciso somar os valores dos símbolos utilizados.

Esses dois registros de representação envolvem representações diferentes, possuindo tratamentos completamente diferentes para o mesmo objeto matemático. Possuem grau de dificuldade diferente (custo cognitivo diferente) para quem aprende. Este é um dos problemas que o educador precisa enfrentar, ou considerar, na hora de ensinar, de explorar o conhecimento a ser ensinado e transformar este em atividades de ensino, para que os alunos possam realmente internalizar estes conhecimentos, tornando-os significativos. A tônica do fazer pedagógico seria diminuir ao máximo possível a dificuldade que os alunos possam ter em relação à representação escolhida para se trabalhar, mas, ao mesmo tempo, tendo sempre a perspectiva de avanço no conhecimento construído por eles e a complementaridade dos registros de representações utilizados.

Neste sentido, é importante que seja considerado o processo de conversão entre os registros de representação, que é entendido como

> *3. A* ***conversão*** *de uma representação é a transformação desta representação em uma representação de um outro registro conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial. A conversão é uma transformação externa ao registro de partida (o registro da representação por converter). Uma ilustração é a conversão de uma representação lingüística em uma representação figural. A tradução é a conversão de uma representação lingüística dentro de uma linguagem dada por uma representação lingüística de uma outra língua ou de um outro tipo de linguagem. A descrição é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma representação lingüística* (Duval, 1993:42).

O processo de conversão é um passo fundamental no trabalho com representações semióticas, pois a transformação de um registro em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático que está sendo representado, não pode ser confundida com o tratamento. O tratamento se estabelece internamente ao registro; já a conversão se dá entre os registros, ou seja, é exterior ao registro de partida. A conversão exige do sujeito o estabelecimento da diferença entre significado e significante[15] do que se está trabalhando.

Não podemos confundir a conversão com duas atividades que estão muito próximas desta: a ação de codificar e a interpretação. A **interpretação** requer uma mudança de quadro teórico, ou modificação de contexto, não implicando necessariamente em mudança de registro. Podemos interpretar um texto, através da escrita de outro texto, permanecendo o mesmo registro de representação. A **ação de codificar** é a transcrição de uma representação em um outro sistema semiótico, diferente daquele onde ela é dada. Por exemplo, as notas musicais e o som produzido. ***Nesta perspectiva acreditamos que a dificuldade na resolução de problemas em sala de aula não seja somente de interpretação, mas sim de compreensão do processo de leitura e entendimento do enunciado que precisa ser estabelecido e do conteúdo cognitivo que é envolvido nas diversas situações modeladas, exigindo uma tarefa de conversão entre o enunciado do problema – texto e a representação numérica.***

No ensino de matemática, a dificuldade se estabelece justamente porque em muitas situações, é levado em consideração às atividades cognitivas de formação de representações e os tratamentos necessários em cada representação (os cálculos, as tabelas, os gráficos, etc...) separadamente, não existindo um trabalho específico na conversão entre estes diferentes registros. No entanto, o que pode garantir a apreensão do objeto matemático, a conceitualização deste, não é a determinação de representações ou as várias representações possíveis de um mesmo objeto, mas sim a ***coordenação entre estes vários registros de representação***. Por exemplo, não adianta o sujeito resolver uma operação usando material concreto, ou através de uma representação gráfica, se não conseguir coordenar estes procedimentos no tratamento numérico (algoritmos da operação), na situação problema envolvendo esta operação ou mesmo em outro registro de representação qualquer.

Neste sentido torna-se importante entender a coordenação dos registros de representações, o que Duval (1993) chama de *noésis*, ou seja, como o sujeito, tendo se apropriado de vários registros de representação, consegue coordená-los e,

---

[15] O significado corresponde ao conceito ou à ação (possui um sistema determinado e que dele depende), ao passo que o significante corresponde à forma, provido de significação.

principalmente, através desta coordenação, estabelecer uma apreensão do objeto matemático envolvido.

Podemos elencar duas características fundamentais da ligação entre a conceituação e a representação:

1. O progresso do conhecimento humano se dá com a criação e o desenvolvimento de novos e específicos sistemas semióticos. Considerando o conhecimento matemático, é bom lembrar a evolução do desenvolvimento do nosso sistema de numeração;

2. É característica do pensamento humano o trabalho com vários registros de representação. O homem cria, conforme suas necessidades, vários sistemas semióticos, mais especificamente dos algarismos que compõem nosso sistema de numeração.

Podemos perguntar ***qual a necessidade da diversidade de registros de representação para o funcionamento do pensamento humano.*** A resposta para esta questão é colocada pelo próprio Duval, considerando três posições:

1) custo de tratamento e funcionamento de cada registro;

2) limitações representativas específicas a cada registro, com comparação entre diferentes modos de representação; e

3) diferença entre representante e representado.

Explicando cada uma destas posições da seguinte maneira:

> *A existência de muitos registros permite a troca de registros, e essa troca de registros tem por objetivo permitir efetuar tratamentos de uma forma mais econômica e mais poderosa.... as relações entre os objetos podem ser representadas de maneira mais rápida, e mais simples de compreender, como nas formulações literais e nas frases. . . .De um modo geral, em matemática, a economia do tratamento (perceptivo ou algorítmico) é geralmente antecipação com o encontro da língua natural* (Duval, 1993:49).

A economia, em um tratamento, está muito ***vinculada à aproximação com a língua natural*** e, principalmente, à explicitação de formas mais simples e econômicas dos procedimentos adotados. Quanto mais próximo estiver o algoritmo, a tabela, o gráfico, os registros de representação, da forma de expressarmos na língua materna, mais fácil de estabelecermos um sentido a esta representação e, conseqüentemente, de compreendermos o objeto matemático trabalhado. Podemos ilustrar esta economia nos vários tratamentos que podemos realizar a partir do *sistema métrico decimal*. A medida, dois metros e cinqüenta e quatro centímetros, possui várias maneiras de ser representada, como, por exemplo:

- 2m5dm4cm; - 254cm; - 25,4dm ou ainda 2,54m, que é uma das formas mais econômicas de representação, com grande aproximação da linguagem falada e o entendimento do sistema decimal de medida permite passar de uma representação para a outra, possibilitando:

> ***... a complementaridade dos registros.*** *. . . a natureza do registro semiótico que é escolhido para representar um contexto (objeto, conceito ou situação) impõe uma seleção dos elementos significativos ou informações do conteúdo que representa. Esta relação se faz em função das possibilidades e dos registros semióticos escolhidos. Uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representações que uma figura ou que um diagrama. Isto quer dizer que toda a representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa e, de um registro a um outro, não são os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que são representados* (Duval, 1993:49).

Assim, a complementaridade entre os registros é fundamental, no sentido de que toda representação é cognitivamente parcial em relação ao objeto que desejamos representar e a possibilidade de conversão entre os registros permite ao sujeito perceber outros aspectos do conteúdo representado. Essa complementaridade entre os registros de representação escolhidos para representar um objeto matemático é que acaba exigindo do professor o trabalho com várias representações de um mesmo objeto matemático. Por exemplo, quando trabalhamos com o conteúdo funções, os gráficos cartesianos, as expressões algébricas e até as tabelas, são todos registros parciais deste objeto. Cada registro é parcial e possui uma especificação própria, ou um tratamento específico. Perceber, reforçar e articular estas especificidades, a cada registro, e entre os registros é um caminho para o entendimento do objeto como um todo:

> ***a conceptualização implica uma coordenação de registros de representações.*** Neste sentido são levantadas duas hipóteses: *1. Se o registro de representação é bem escolhido, as representações do registro são suficientes para permitir a compreensão do conteúdo conceitual representado. 2. A compreensão (integrativa) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão* (Idem: 50-51).

É necessário lembrar que, para haver uma boa compreensão do conteúdo cognitivo, precisamos, no mínimo, ter dois registros de representação (parciais em relação ao objeto como um todo). Estes registros precisam ser significativos em relação ao objeto representado (reforçando a sua parcialidade) e, quanto mais natural ocorrer a conversão entre estes dois registros, maior a possibilidade de ocorrer a aprendizagem com significado e compreensão.

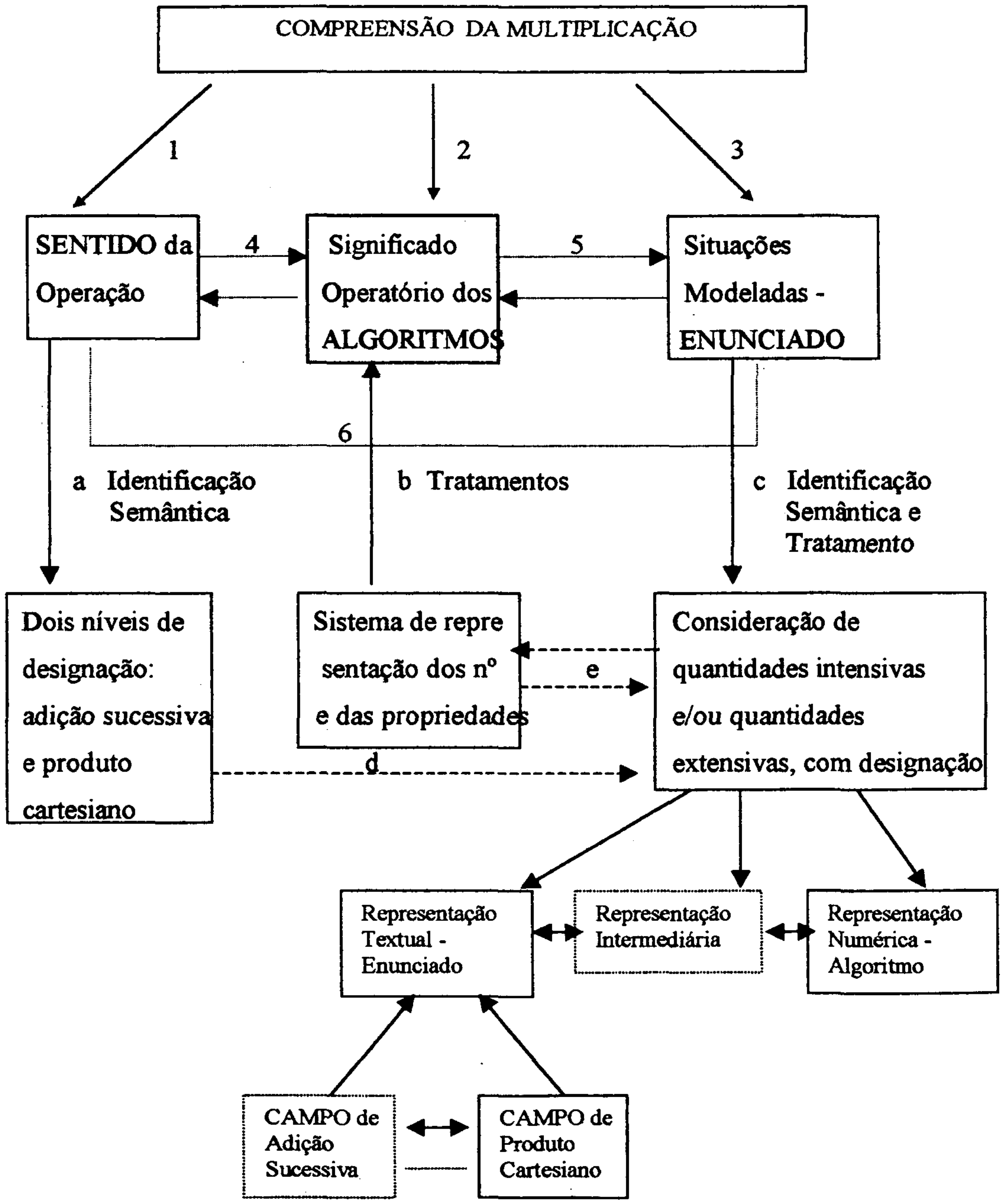
Neste sentido, no momento em que o professor explorar o enunciado do problema matemático como um registro de representação, que deverá ser convertido em outros registros de representação até sua resolução (numérica, gráfica, etc..), terá que ter claro como o aluno fará a conversão entre os diferentes registros utilizados, qual o melhor enunciado, quais os registros de representação mais significativos, possibilitando, desta forma, a construção do conhecimento pelo aluno e o trabalho efetivo com os registros de representação do conteúdo trabalhado.

1.3 Um reolhar na pesquisa do mestrado

Levando em consideração a pesquisa realizada no mestrado, com quatro turmas de segunda série do Ensino Fundamental, na perspectiva da construção do conceito de multiplicação, usando como referencial teórico os registros de representação, elaboramos um organograma para facilitar a compreensão deste conceito, que pode ser entendido através dos três aspectos básicos: o ***sentido da operação***, que leva em consideração as idéias básicas envolvidas na operação, no caso da multiplicação a idéia de adição sucessiva e a idéia do produto cartesiano; o ***significado operatório*** dos algoritmos, que é representado através do sistema de representação dos números e das propriedades da operação; e as ***situações modeladas*** pela operação envolvida, neste caso a operação de multiplicação expressa através de um enunciado representado por um texto, sendo necessário, para a sua resolução, a conversão para um registro de representação numérica.

Retomamos aqui este organograma, reorganizado e ampliado. É este organograma que sustenta todo o entendimento que temos em relação ao trabalho pedagógico que pode ser feito com as referidas operações no cotidiano escolar. Como temos uma questão de tempo e, principalmente, uma delimitação do campo da pesquisa, só trabalhamos com a operação de multiplicação. Mas este organograma pode servir de base para pensarmos o trabalho pedagógico de qualquer operação. Trazer este esboço novamente, tentando entender e explicitar melhor as relações entre cada aspecto, é uma forma de tentar consolidar esta posição, na prática pedagógica, e ampliar seu entendimento através da realização da atual pesquisa, a qual, continua a exploração de mais um aspecto deste, qual seja, o trabalho com as situações modeladas (os enunciados dos problemas multiplicativos).

Elencamos o organograma trabalhado na pesquisa de mestrado, com as alterações que consideramos pertinentes:



As linhas 1, 2 e 3 expressam os conhecimentos parciais da compreensão da operação de multiplicação. Sua função principal é diferenciar e demarcar o objeto representado de suas representações, ou seja, seus representantes. Indica, essencialmente, a parcialidade das representações que trabalhamos/exploramos no contexto escolar e, principalmente, a necessidade de considerarmos o trabalho efetivo sobre cada uma destas representações.

As linhas tracejadas 4, 5 e 6 mostram a necessidade de movimento/relação entre os três aspectos da operação de multiplicação, para esta ser compreendida e apropriada como conceito pelos alunos. É essencialmente a idéia de complementaridade entre os vários aspectos que desencadeiam os vários registros de representação dos objetos matemáticos (conceito), e a necessidade de conversão entre todas estas representações. As linhas tracejadas 4 e 5 não significam um movimento linear, seqüenciado (do tipo preciso do sentido operatório para entender o significado operatório e deste para trabalhar a resolução de problemas), mas sim, para haver realmente uma compreensão, neste caso da multiplicação, torna-se necessário o trabalho com cada um dos aspectos especificamente e a conversão entre eles, admitindo-se, a complementaridade entre os registros de representação.

A linha tracejada 6 representa a possibilidade que se tem, a partir do sentido da operação, levando em consideração quantidades menores que dez, de explorar/resolver situações modeladas por esta operação, sem necessidade do trabalho específico com o significado operatório dos algoritmos. Ou seja, para o trabalho com situações modeladas (os enunciados dos problemas), que envolvem quantidades maiores que dez, é fundamental o trabalho com o significado operatório dos algoritmos (mais especificamente com os algoritmos) e, também, com o sentido da operação. Nas situações modeladas, utilizando quantidades até dez (as tradicionais tabuadas) não é necessário o trabalho com os algoritmos, porém é fundamental o trabalho com os registros de representação que sustentam o sentido da operação. Logo, quando temos situações modeladas com quantidades maiores que dez, surge, obrigatoriamente, a necessidade do trabalho com o significado operatório dos algoritmos ligado às regras do sistema de numeração decimal e as propriedades desta operação. Porém, este trabalho não garante o processo de conversão.

As setas indicadas pelas letras ***a***, ***b*** e ***c*** são identificações de cada aspecto e sua relação com o tratamento necessário para seu registro de representação. Este considera os aspectos internos referentes a cada um dos possíveis registros de representação, do conteúdo cognitivo considerado. Já as setas ***d*** e ***e*** reforçam a complementaridade entre os registros de representação e sua necessidade para o eixo das situações modeladas representadas pelos enunciados. Ou seja, os enunciados, para serem representados, precisam considerar os níveis de designação atribuídos pelo sentido operatório, o qual vai formar o que estamos chamando de campo de enunciados dos problemas. No caso da multiplicação, os enunciados que designam o sentido da adição sucessiva e o produto cartesiano. Já em relação à seta ***e*** esta significa que, para resolver os enunciados dos problemas, há uma necessidade dos algoritmos. Porém, saber os algoritmos não garante a resolução dos problemas.

O aspecto do sentido da operação possui uma identificação semântica que tem por base a passagem do objeto real aos signos. Chamamos esta passagem de ***semiotização***. Em relação a esta semiotização, explorando especificamente a operação de multiplicação, podemos observar dois níveis bem distintos: o tratamento da adição sucessiva, que é a determinação dos elementos em grupos de elementos, e o tratamento do produto cartesiano, que envolve combinações, área, volume, proporção, etc..., estabelecidos a partir das relações entre as grandezas envolvidas. Estes dois níveis são complementares e jamais podem ser omitidos em detrimento de um ou outro, pois exploram tratamentos completamente diferentes das situações multiplicativas. A contagem, por grupos de elementos, está estritamente ligada ao entendimento da operação de multiplicação como adição sucessiva (caráter unitário), sendo o início, para quase todo o processo escolar, em relação à exploração da operação de multiplicação, mas não é a multiplicação. Ou melhor, somente este tratamento não consegue dar conta de todas as possibilidades que temos para a multiplicação. O tratamento do produto cartesiano (caráter binário) mostra uma ampliação da multiplicação, ou seja, são situações que envolvem o pensamento de combinatória, de área, volume, etc... o qual só pode ser entendido e resolvido pensando-se, de fato, multiplicativamente, jamais aditivamente. Aqui entra a idéia de dimensão da multiplicação. ***As situações que envolvem produto cartesiano são o "divisor de águas" entre a multiplicação e a adição.*** Como estamos trabalhando na perspectiva de problemas elementares, o produto cartesiano, através de situações envolvendo combinatória, caminhos e linha por coluna, seriam os mais recomendados de serem trabalhados nas séries iniciais, pois não envolvem conceitos específicos e extrapolam a idéia de multiplicação entendida como adição sucessiva.

O fundamental no trabalho/exploração do aspecto do ***sentido da operação***, para a multiplicação, é num primeiro momento, ocorrer a determinação da quantidade final (produto), através da determinação dos grupos de elementos e não mais pela enumeração de cada elemento dos grupos. Este procedimento não é simples e exige do aluno a passagem da contagem de cada elemento do grupo para a contagem dos grupos de elementos, saindo da enumeração dos elementos para a determinação dos grupos através do pensamento multiplicativo[16], no sentido da contagem de grupos de elementos. E o outro momento seria o da determinação de "n" combinações, através do cruzamento das quantidades envolvidas, formando uma outra quantidade, diferente das duas anteriores, fruto da combinação destes elementos. O entendimento básico do produto cartesiano é a relação/cruzamento entre as quantidades, formando uma nova quantidade (E x E = E).

A base para o entendimento dos algoritmos, ou seja, o aspecto do ***significado operatório dos algoritmos***, é constituída pelos tratamentos estabelecidos a cada registro de representação, entendendo, principalmente, que as operações não se restringem aos algoritmos formais. É possível e pertinente que os alunos criem algoritmos e que estes (algoritmos) tenham por base o sistema de representação dos números (no nosso caso, o sistema de numeração decimal – base dez, posicional, etc...) e as propriedades da operação de multiplicação (distributiva, comutativa, etc...). Desta forma, vale a pena o professor trabalhar, na perspectiva de construção de algoritmos significativos para os alunos, baseado na idéia da composição e decomposição das quantidades, para então chegar aos algoritmos formais. Neste sentido, o ***trabalho se efetivará sobre as quantidades*** envolvidas nas operações e nos problemas determinados pelas situações a serem modeladas. É importante salientarmos que o trabalho com os algoritmos independe das situações modeladas, pois nos algoritmos são tratados os números puros, sem levar em consideração o contexto de aplicação. Já nas situações

---

[16] No trabalho de mestrado (Nehring, 1996), e neste próprio trabalho, entendemos, assim como outros pesquisadores (Piaget, Vergnaud, Franchi, etc...), que a multiplicação não se constitui, simplesmente, em adições sucessivas, mesmo sendo esta a principal idéia explorada por professores e pelos livros didáticos. Porém, mesmo esta idéia não é trabalhada de forma significativa, ou seja, os alunos são levados a contar grupos de elementos, através da contagem dos elementos dos grupos (enumeração). Quando o professor prestar atenção no que o aluno está realmente fazendo, poderá perceber que sua contagem é dos elementos e não dos grupos. Isso mostra o quanto as idéias multiplicativas envolvem estruturas superiores às idéias aditivas, que acabam persistindo, muitas vezes, pelos procedimentos pedagógicos que realizamos.

modeladas, os algoritmos passam a ter um significado para a situação tratada, ou seja, existe uma relação estabelecida pela situação descrita. Os números são relacionais.

No aspecto concernente às situações modeladas, representadas pelos enunciados em sala de aula, é fundamental considerarmos o sentido da operação (pois é este que vai possibilitar a operação ser representada por um texto – enunciado) e os algoritmos (que estabelecem o tratamento numérico responsável pela conversão entre os registros), pois são estes dois eixos que sustentarão a conversão dos enunciados dos problemas para o registro de representação do tratamento numérico necessário para a sua resolução. Para esta conversão, são necessários tratamentos específicos, aos registros de representação, que levam em consideração o tipo de quantidade explorada nos enunciados, intensivas e/ou extensivas. Aqui estamos falando em algoritmos e não em significado operatório, pois os alunos precisam, nesse momento, resolver uma operação e não discutir o processo de formação desta operação. Neste sentido, estamos considerando que os problemas, em situação escolar, são representados na forma de um enunciado - texto, com um registro de representação que é a linguagem escrita. Para podermos resolver este problema, precisamos converter esta representação textual do mesmo em uma representação numérica – neste caso, o algoritmo da operação de multiplicação, considerando o sentido da operação que é explorado pelo enunciado do problema.

Devemos lembrar que Duval chama a atenção para a complementaridade dos registros de representação. Neste sentido poderá ser necessária uma representação intermediária, entre estes dois registros – representação textual (enunciado) e representação numérica (algoritmo da multiplicação). Assim, as situações modeladas, que apresentam não congruência, na tarefa de conversão, podem exigir uma representação intermediária, não discursiva (não basta o professor reler o problema ou tentar traduzi-lo para os alunos). Pois, esse procedimento (de releitura pelo professor, ou tradução) desqualifica o trabalho com a resolução de problemas na escola, tornando a resolução de problema, simples resolução de algoritmo. Para enunciados não congruentes, é necessária a passagem por uma outra representação, que auxilie o aluno a fazer a conversão entre o enunciado - representação textual - e a operação - representação numérica.

Então poderíamos perguntar qual seria esta representação intermediária, capaz de auxiliar os alunos no estabelecimento do processo conversão entre o enunciado do problema e a representação numérica necessária? Seria somente uma representação para os dois grandes campos da operação de multiplicação? Os dois campos que elencamos, conseguem dar conta das situações elementares da operação de multiplicação, considerando o sentido operatório, que dariam sustentação para a representação intermediária? Além destas questões referentes à representação intermediária, poderíamos pensar qual o papel dos enunciados dos problemas para a sua resolução. Os enunciados precisaram ser o ponto de partida, para pensarmos na representação intermediária; logo, como estamos entendendo estes enunciados? A consideração do sentido operatório, como o desencadeador do campo de enunciado de problemas, possibilitaria um maior entendimento da operação de multiplicação?

Esse organograma nos leva a pensarmos efetivamente no trabalho em sala de aula, em relação às operações, considerando os três aspectos necessários para a aquisição deste conhecimento. Como, na pesquisa de mestrado, conseguimos aprofundar os dois primeiros aspectos (sentido da operação e significado operatório), nesta pesquisa queremos centrar nossas discussões no terceiro aspecto, considerando sempre a relação que existe entre ambos. Porém, torna-se necessário entendermos mais especificamente as situações modeladas e, principalmente, o que envolve esta representação do enunciado de problemas trabalhados no cotidiano escolar.

1.4 Novas metas, novos desafios – o doutorado

Na dissertação de mestrado, onde o foco principal era o entendimento do sentido operatório e do significado operatório dos algoritmos, não foi possível pesquisar com maior critério as situações modeladas, ou seja, os enunciados dos problemas, mesmo acreditando que a compreensão do objeto enfocado só se estabeleça na relação efetiva dos três aspectos, considerando a complementaridade dos registros de representação. Porém, em função do tempo destinado à pesquisa, e principalmente pelo organograma apresentado no item anterior não ser utilizado/trabalhado pelos professores, ou mesmo nos livros didáticos, só consideramos/trabalhamos os dois primeiros aspectos profundamente, embora tenhamos feito várias ações na perspectiva das situações modeladas e na elaboração de problemas, mas sem sistematizarmos ou refletirmos muito sobre ela.

Em função desta parcialidade do trabalho com o organograma proposto, não conseguimos trabalhar com as situações modeladas pela operação de multiplicação – os enunciados dos problemas, entendendo-os como um texto e no que consiste à conseqüente compreensão deste enunciado - texto. Em função disso, acreditamos ser fundamental esta pesquisa, na expectativa de ampliação deste enfoque (reorganização do organograma e ampliação do trabalho com todos os aspectos) e conseqüente contribuição para o fazer pedagógico. Pode-se observar, em função de algumas conclusões extraídas a partir da pesquisa de mestrado, o quanto é fundamental a continuação deste. A seguir, elencamos algumas conclusões que foram construídas a partir da realização de tal pesquisa:

... ***b) Quanto à aquisição dos conceitos através dos registros de representação:***

1. Os alunos através das atividades que levaram em consideração os vários registros de representação e principalmente o trabalho com a conversão entre estes registros, conseguiram compreender o Sentido Operatório e o Significado Operatório dos Algoritmos. Neste sentido o professor teve papel fundamental de mediador deste conhecimento, na hora de elaboração das atividades, auxílio dos alunos, reforço de algumas questões consideradas essenciais. Podemos observar a importância destas intervenções no desenvolvimento de nossa seqüência didática, onde os alunos constantemente necessitavam do auxílio do professor para conseguir estabelecer as conversões necessárias.

2. Para uma boa aprendizagem do aluno torna-se necessário primeiro que este domine cada registro de representação, entendendo que cada registro é parcial em relação ao objeto matemático e após estabeleça as relações entre estes. Quanto mais natural for o estabelecimento destas relações, ou melhor, desta conversão entre os registros de representação, mais fácil será a compreensão do objeto matemático estudado. Podemos observar através da seqüência de atividades que os alunos, tendo dificuldade em algum dos registros, não conseguiam estabelecer a conversão, necessitando a intervenção imediata do professor. Podemos verificar isto principalmente no registro de representação da matriz e da área. Os alunos, não tendo dominado cada um dos registros de representação, acabavam confundindo os dois sem possibilidade de conversão. No momento que entenderam cada um dos registros de representação, foi possível estabelecer a conversão entre estes e outros registros.

3. Em relação ao Material Concreto, este é descartado imediatamente pelos alunos, quando conseguem estabelecer uma lógica aos seus procedimentos. Permanecendo outros tipos de registros de representação (figural, cálculos, escrita) para auxiliar. Neste sentido precisamos entender o material concreto como auxiliar e não como o fim de nossa ação pedagógica. Observamos estes procedimentos, principalmente nas primeiras atividades, quando do trabalho com o registro de representação da adição sucessiva. No momento que os alunos conseguiam expressar seu entendimento utilizando o desenho, por exemplo, o material era descartado, mesmo que em muitas situações o professor tenha reforçado a sua utilização. Quando o material já é dominado pelos alunos e estes já tenham abstraído as possibilidades destes, o reforço de sua utilização acaba atrapalhando o desenvolvimento da atividade, pois sua *manipulação envolve tempo e procedimentos demorados, que podem ser utilizados em tarefas mais construtivas.*

Enquanto professores, precisamos encontrar materiais concretos que sejam congruentes com a representação matemática necessária. Esta congruência facilitará a visualização e principalmente a conversão entre os registros de representação.

c) Especificamente em relação à compreensão da multiplicação, podemos afirmar que:

1. Em relação ao Sentido Operatório com a idéia da adição sucessiva, através da construção da tabuada, ***podemos afirmar que esta não garante a aprendizagem da multiplicação****. O registro de representação da adição sucessiva trabalha efetivamente com a determinação de elementos em grupos de elementos, tornando-se necessário o entendimento pelo aluno da diferença na contagem dos elementos em grupos determinados. Observamos que os alunos não utilizam imediatamente o procedimento da contagem dos grupos, mas sim a contagem um-a-um de cada elemento do grupo, mostrando a não- utilização do princípio da multiplicação, mas sim a utilização da adição sucessiva;*

O trabalho inicial com as tabuadas pode ser uma forma de representar o Sistema de Numeração Decimal. Neste sentido vale a pena iniciar com a tabuada do dez, com esta determinando o número de elementos. Ou seja, sempre tendo dez elementos em cada grupo e variando o número de grupos. Este procedimento irá reforçar o Sistema de Numeração Decimal em função da Base dez (nada mais lógico e interessante que mostrar a repetição de grupos de dez da própria numeração). A continuação das demais tabuadas pode desencadear o trabalho com outras bases, reforçando o entendimento da multiplicação como uma contagem de elementos em grupos determinados.

Neste sentido, é urgente que o ***professor entenda a multiplicação não somente como uma simplificação da adição de parcelas iguais e principalmente que esta idéia não garante um pensamento multiplicativo****, tornando-se fundamental a ampliação deste conceito, através do trabalho com todos os registros de representação significativos ao Sentido Operatório da multiplicação (produto cartesiano) e principalmente que o objetivo do trabalho com as tabuadas é a determinação da contagem dos elementos em grupos determinados, podendo desta forma aproximar-se do estudo com as demais bases.*

2. A idéia da possibilidade de ocorrência (produto cartesiano) deve ser iniciada com a exploração de situações conhecidas pelos alunos, auxiliando a montagem desta, através da utilização de recorte das palavras chaves. O procedimento dos alunos nas atividades demonstrou que, além de construírem árvores de possibilidade a partir de situações estabelecidas, elaboram situações a partir do registro de representação da árvore de possibilidades. Garantindo desta forma um entendimento completo deste registro de representação.

3. Em relação ao Sentido Operatório com a idéia da Matriz de Dupla Entrada, podemos afirmar que a habilidade da reversibilidade das ações não ocorre naturalmente. Neste sentido concluímos que os alunos têm uma grande facilidade em completar a matriz, dado seus atributos, porém o processo inverso é executado com bastante dificuldade pela maioria dos alunos envolvidos na pesquisa. Ou seja, os alunos têm dificuldade para descobrir as peças, dado os atributos das mesmas. Esta constatação exige do professor um trabalho mais detalhado, levando em consideração as características das peças. Sugerimos em um primeiro momento ***o trabalho verbal de descrição das peças,*** *após a escrita desta descrição, depois a elaboração da matriz e descrição desta. Após esta seqüência recomendamos o trabalho com matrizes completas para descobrir os atributos iniciais.*

4.Na idéia de área os alunos, apesar de perceber as linhas e colunas, muitas vezes ainda utilizam a contagem um-a-um para determinação do total da área. Observamos estes procedimentos dos alunos quando solicitados a registrar uma área, fornecido o registro do cálculo ou na determinação de uma figura de área irregular. Os alunos conseguiam estabelecer *a figura resultante, porém na determinação da quantidade de quadradinhos/preguinhos, contavam-nos um-a-um. Este procedimento mostra uma imaturidade dos alunos em relação à disposição espacial, exigindo uma continuidade do trabalho com este registro nas demais séries, principalmente quando a figura resultante for irregular, a qual exige mais de um procedimento por cálculo.*

5. É fundamental que o professor trabalhe com o Significado Operatório dos Algoritmos e não simplesmente "ensine" os alunos a resolver cálculos. O trabalho com vários algoritmos da multiplicação torna-se mais compreensível na medida em que é sustentado pelo Sistema de Numeração Decimal e embasado nas propriedades da operação. Utilizamos na pesquisa, as duas principais características deste sistema, que são a Base Dez o Sistema Posicional e a propriedade distributiva, através da decomposição dos numerais com auxílio de uma representação figural (matriz e os operadores) até chegarmos ao cálculo sem auxílio de outra representação. Este processo possibilitou aos alunos pensarem no valor (quantidade) numérico que está sendo multiplicado e não somente seguir passos arbitrariamente. Porém notamos que o registro de representação por cálculo, sem auxílio da decomposição dos numerais, ainda é imaturo aos alunos, não sendo uma construção dos mesmos.

É necessário o trabalho com o Significado Operatório dos Algoritmos utilizando decomposição dos numerais, até o momento que os próprios alunos compreendam estes registros, solicitando um registro mais simplificado. Neste momento é conveniente o trabalho com o registro de representação por cálculo, usando como apoio à decomposição dos numerais, o que acaba aproximando com a linguagem falada.

6. A compreensão pelos alunos do Sentido Operatório e do Significado Operatório dos Algoritmos não garante de forma alguma a aplicação desta operação em uma situação modelada pela multiplicação. Pois entendemos que nesta modelização estão envolvidas outras representações (representação textual - enunciado, representações intermediárias, representação numérica) que possuem tratamentos específicos. Portanto necessita ser trabalhado de forma específica, assim como todos os outros aspectos, o que observamos no desenvolvimento das atividades do pós-teste que levaram em consideração a resolução de um problema e a elaboração deste, fornecido um registro numérico - cálculo.

Acreditamos que nossa seqüência didática com as análises e observações feitas poderá auxiliar de forma significativa os professores que atuam nas Séries Iniciais, não como mais uma lista de atividades que poderão ser executadas pelos alunos, mas principalmente porque possibilitam que o professor compreenda o que está ensinando, permitindo que este amplie o que está exposto aqui. Pois entendemos que o bom professor não é aquele que segue as regras, mas aquele que questiona as regras estabelecidas buscando entendê-las e dominá-las (Nehring, 1996:229-233).

Bem, então como continuar esta pesquisa? Precisávamos definir nosso problema, nossos objetivos e, principalmente, como poderíamos desenvolver esta pesquisa e torná-la significativa para o cotidiano escolar e para a educação matemática, considerando a trajetória de pesquisa realizada até o presente momento. Nosso encaminhamento se efetivou na busca da delimitação de alguns pontos. A pesquisa se efetivou considerando que a operação de multiplicação possui dois sentidos operatórios bem definidos, os quais delimitam dois grandes campos de enunciados: a adição sucessiva e o produto cartesiano. Consideramos o processo inicial de formação deste conceito; logo, nosso olhar será sobre enunciados elementares que envolvam a operação de multiplicação. Como estamos entendendo que o sentido do produto cartesiano é um divisor de águas entre a operação de multiplicação e de adição (questão que será fundamentada nos capítulos 3 e 4), trabalhamos sobre enunciados que considerem situações que exploram o sentido operatório de produto cartesiano. Precisávamos definir então, quais situações do produto cartesiano podem ser consideradas elementares. Definimos, para isso, as que envolvem a ***idéia de combinatória*** a justificativa desta opção está no capítulo 3. Além disso, trabalhamos com os enunciados dos problemas na perspectiva da variação redacional destes, tornando-os congruentes, juntamente com a utilização de representações intermediárias. Nossas análises foram sobre as representações desenvolvidos pelos alunos no processo de conversão, a partir dos enunciados dos problemas com variações redacionais. Para isso, propomos investigar o seguinte problema:

Considerando o enunciado do problema matemático como um texto que possui duas descrições de organização, o conteúdo cognitivo (Invariante) e a organização redacional (Variante), o propósito é fazer uma análise de congruência e não-congruência das situações multiplicativas elementares de combinatória, na perspectiva de responder às seguintes questões: quais seriam os fatores (intrínsecos e extrínsecos) que determinam a congruência ou não destes problemas? E a proposição de uma representação intermediária auxilia significativamente o processo de conversão?

Neste sentido, nosso **objetivo geral** foi identificar as diferentes situações multiplicativas elementares sustentadas pelo sentido operatório, trabalhadas nas séries iniciais, na perspectiva de auxiliar o processo pedagógico na construção do conceito da operação de multiplicação, levando em consideração as variáveis redacionais do enunciado do problema, que os tornam congruentes ou não-congruentes e a utilização de uma representação intermediária como auxiliar a este processo.

Além deste objetivo, traçamos alguns mais específicos, que são:

1. Construir um referencial teórico, entendendo os enunciados dos problemas como um texto matemático, a partir da teoria de Raymond Duval sobre compreensão de texto;

2. Fazer uma revisão dos critérios de classificação dos problemas multiplicativos, a partir da teoria/classificação de Gerard Vergnaud tentando definir os sentidos operatórios que sustentam os enunciados de problemas elementares de multiplicação, diferenciando-os da adição sucessiva;
3. Identificar os sentidos operatórios da operação de multiplicação, que sustentam as situações multiplicativas elementares, baseadas no texto dos problemas e no tipo de quantidade envolvida, analisando a congruência ou não-congruência deste enunciado;
4. Trabalhar especificamente com problemas de combinatória, identificando os tratamentos de resolução e possíveis representações significativas para auxiliar no processo de conversão destes, pelos alunos.

Delimitado o problema e os objetivos, era necessário definir como desenvolver a pesquisa propriamente dita. Para isso, determinamos quatro pontos chaves do trabalho: o entendimento dos enunciados dos problemas como texto; as classificações da operação de multiplicação possibilitando a determinação de um campo de enunciado de problemas, para situações elementares baseadas no sentido operatório; os problemas multiplicativos elementares no fazer pedagógico (partindo dos livros didáticos) e as implicações das variáveis redacionais no processo de conversão dos enunciados multiplicativos de combinatória.

1.5 Traçando a trajetória a ser percorrida – procedimentos metodológicos

Chegada a hora de traçar o caminho a ser percorrido, delimitando momentos, análises, relações. Tais caminhos só terão sentido, na pesquisa, se tivermos claro o pressuposto teórico; por isso, a interlocução com autores, foi à demanda inicial. Isso se fez tendo como norte dois pontos principais: o entendimento dos enunciados dos problemas como textos que são descritos por um conteúdo cognitivo e variações redacionais e a operação de multiplicação, com suas diferenças e semelhanças com a operação de adição, ou seja, a consideração de que uma operação possui sentidos operatórios, que necessitam ser trabalhos no fazer pedagógico, para sustentar o entendimento, ampliação e compreensão da resolução de problemas pelos alunos.

O primeiro momento, da construção do referencial teórico, é o encontro com alguns teóricos que trabalham o tema objeto da pesquisa. Mais especificamente no capítulo 2 delimita-se o entendimento sobre o enunciado de problemas, baseado no referencial de Raymon Duval sobre compreensão textual. Outro ponto teórico marcante de nosso trabalho relaciona-se às formas de classificação da operação de multiplicação. Esta classificação se efetiva nos problemas multiplicativos, tendo por base o tipo de número, as grandezas, a situação envolvida, etc... Para clarearmos estas classificações, apresentamos, no capítulo 3 teóricos que, baseados inicialmente na classificação de Gerard Vergnaud, que foi o pioneiro na busca de uma classificação para a estrutura multiplicativa, outros pesquisadores, que entendemos contribuíram de uma forma ou de outra para nosso trabalho: Bryan Greer, Judah Schwartz, Pearla Nesher, Terezinha Nunes, Peter Bryant, Carlos Maza e Anna Franchi. A busca destes teóricos dá-se no sentido de entendermos os vários sentidos da operação de multiplicação, demarcando as diferenças e semelhanças existentes entre a operação de multiplicação e a operação de adição; as várias situações que envolvem o sentido da operação de multiplicação; e principalmente verificar a existência de trabalhos que explorem todos os sentidos da operação, nos enunciados de problemas, variando-os redacionalmente levando em consideração as séries iniciais, já que estamos na perspectiva da construção inicial do conceito da operação.

Com os pressupostos teóricos construídos e delimitados, sendo estes mediados pela prática educativa, retomamos a interlocução com esta para entendê-la melhor e buscar alternativas para o problema elencado na pesquisa. Assim, definimos a trajetória da pesquisa baseados em quatro pontos de aproximação com este fazer pedagógico. Isso se efetivou na pesquisa de campo, que teve três focos principais: ***livros didáticos*** de séries iniciais, considerando os enunciados dos problemas multiplicativos, ***professores de séries iniciais***, elaborando enunciados de problemas multiplicativos e ***alunos de 5ª e 8ª séries*** do ensino fundamental, resolvendo problemas multiplicativos.

Em relação aos livros didáticos e aos enunciados: Os livros didáticos foram o ponto de referência para mapear os tipos de enunciados de problemas multiplicativos, trabalhados na sala de aula. Ou seja, que enunciados os livros didáticos apresentam e quais os sentidos operatórios explorados pelos mesmos? Este levantamento e análise se efetivaram em duas etapas. A primeira etapa se efetivou com a seleção de 11 livros didáticos, de 1ª a 5ª série, sugeridos por professores. Coletamos todos os problemas concernentes à operação de multiplicação, sem envolver a exploração de um conceito específico. Com este levantamento, queríamos saber se os problemas propostos pelos livros didáticos consideram os vários sentidos operatórios existentes na operação de multiplicação e, principalmente, se aparecem enunciados de problemas que envolvem o sentido operatório de produto cartesiano. A segunda etapa se efetivou com a seleção de 6 coleções de livros didáticos. O objetivo era perceber se nas mesmas havia um trabalho com os diversos sentidos da operação. Pautamos o trabalho nos enunciados dos problemas em busca de verificar se existia uma seqüência na exploração destes sentidos nos diversos livros de cada coleção. Nossas ações se efetivaram na identificação de enunciados de problemas pertinentes à adição sucessiva e enunciados de problemas relativos ao produto cartesiano. Em relação ao sentido operatório do produto cartesiano, buscamos identificar e analisar as idéias trabalhadas e as formas como estas se distribuem nos diversos livros de cada coleção.

Em relação aos professores e os enunciados: Na perspectiva de que os professores poderiam propor os enunciados dos problemas a serem trabalhados com os alunos, solicitamos a 30 professores que trabalham com as Séries Iniciais a elaboração de enunciados de problemas considerando os vários sentidos que tem a operação de multiplicação. Propusemos aos professores duas operações sobre as quais eles deveriam elaborar cinco enunciados, variando as idéias envolvidas nestes. Nosso objetivo, nesta etapa da pesquisa, era verificar se os professores propõem enunciados que envolvem sentidos operatórios diferentes, quais são estes sentidos e as maiores dificuldades na elaboração destes enunciados pelos docentes.

Os alunos e os enunciados: A etapa da pesquisa com os alunos foi realizada em dois momentos. O primeiro, com alunos de 5ª série, porque estes já cursaram as séries iniciais, considerando que trabalharam com os enunciados propostos pelos livros didáticos, formalizaram a operação de multiplicação e começam a formalizar alguns conceitos que necessitam da operação de multiplicação (área, volume, potência, por exemplo). Aplicamos a trinta alunos de diferentes escolas dez enunciados de problemas coletados dos livros didáticos, relacionados à operação de multiplicação, com o sentido operatório do produto cartesiano, mais especificamente, combinatória, caminhos, posição e ordem. Este primeiro bloco de enunciados de problemas teve como objetivo identificar os tratamentos corretos e incorretos dos alunos, a familiaridade com estes enunciados, já que foram extraídos de livros didáticos; que tipo de registros de representação estabelecem para a conversão dos enunciados.

O segundo momento foi realizado com turmas de 5ª e 8ª séries com enunciados de combinatória, pois são enunciados que exploram o sentido do produto cartesiano, que efetivamente diferencia a operação da multiplicação da operação de adição. Além disso, são enunciados que não envolvem conceitos específicos para sua resolução, sendo estes variados redacionalmente, a partir dos fatores intrínsecos, extrínsecos e representações intermediárias. Nossa estratégia desenvolveu-se a partir de duas operações (3 x 4 e 2 x 3), após determinarmos dois tipos de enunciados básicos (extraídos dos livros didáticos). Com base nestes dois enunciados, fizemos dezesseis variações redacionais, considerando os fatores intrínsecos (escolha dos elementos de organização cognitiva e os dois graus de explicitação) e extrínsecos (a posição da questão e a escolha da situação extra-matemática), totalizando 68 enunciados (4 enunciados originais com 16 variações cada). Para a realização da análise, partiu-se dos registros de representações determinados pelos alunos, ao processo de conversão, determinando três categorias de análise: princípio aditivo, princípio multiplicativo e não-conversão, com suas sub-divisões.

A análise, dos processos de conversão, considerando as categorias determinadas, foram organizadas em quadros e tabelas de freqüência permitindo um melhor entendimento e visualização dos dados, possibilitando identificarmos o grupo de enunciado mais potente para o processo de conversão, os registros mais utilizados pelos alunos, os enunciados que levaram a não-conversão, a interferência da representação intermediária no processo de conversão e outras análises que foram enfocadas no capítulo 5.

2 - ENTENDENDO O ENUNCIADO DO PROBLEMA MATEMÁTICO COMO UM TEXTO – UMA POSSIBILIDADE

2.1 A linguagem matemática

Como estabelecemos no capítulo anterior, estamos entendendo que o conhecimento matemático (para ser ensinado e aprendido) necessita de representações estruturadas em função de cada conceito a ser enfocado. Neste sentido, os objetos matemáticos não são observáveis no mundo físico, mas as elaborações matemáticas poderão possibilitar uma representação dos fenômenos do mundo físico. Para esta representação, poderemos usar as linguagens matemáticas (algébricas, aritméticas, geométricas).

A percepção do conhecimento matemático como uma linguagem que possibilita o entendimento e a interação dos sujeitos com o meio em que vivem e, principalmente, com o mundo altamente tecnologizado, leva a compreensão de uma das grandes possibilidades da matemática, ou seja, ser uma das formas de representar e interpretar o mundo quantificável. Porém, precisamos estabelecer, no mínimo, duas considerações. Uma é que a matemática não pode ser considerada somente como um instrumento ou uma linguagem para expressar os fenômenos do mundo. Ela possui construções internas independentes dos fenômenos[17] do mundo físico. E outra, que entendemos ser fundamental na perspectiva de estarmos enfocando o processo

[17] Na perspectiva de discutir esta questão da matemática como ciência, linguagem, ferramenta, etc.. ,vale a pena ler HOGBEN, L **Maravilhas da Matemática**; LUNGARZO, C,.. **O que é Ciência**; MACHADO, N. **Matemática e Realidade**; GIARDINETTO J.R.B. **Matemática escolar e matemática da vida cotidiana**. Entre outros livros de filosofia da matemática.

educativo, é como trabalhar com a idéia da matemática como linguagem, através dos registros de representação, no processo ensino-aprendizagem.

Gómez-Granell, falando sobre a natureza do conhecimento matemático, afirma que *o caráter da linguagem matemática é tentar abstrair o essencial das relações matemáticas eliminando qualquer referência ao contexto ou à situação, a ponto de, na linguagem algébrica, os números, em si mesmos abstratos, serem substituídos por letras, que têm um caráter muito mais genérico* (1997:260).

Neste sentido, a linguagem matemática poderia ser entendida como a "tradução" ou, como fala Duval, uma **conversão** entre registros, da linguagem natural para uma linguagem universal formalizada, permitindo a abstração do essencial das relações matemáticas envolvidas, bem como o aumento do rigor gerado pelo estrito significado dos termos. Logo, estamos falando em estruturas semânticas com símbolos que possuem significados. Podemos dizer que os símbolos matemáticos possuem, no mínimo, dois significados. O primeiro, formal, que obedece a regras internas do próprio sistema e se caracteriza pela sua autonomia do real, pois a validade das suas declarações não está determinada no exterior. E o segundo, ligado ao sujeito (autor dos símbolos) e ao referencial (contexto), que permite associar os símbolos matemáticos às situações reais e torná-los úteis para resolver problemas criados pelas relações sociais/humanas.

A questão que se coloca, ou melhor, a dificuldade é que *"embora as expressões matemáticas façam, por um lado, referência a situações em que aparecem relações quantitativas – portanto, podendo ser matematizadas – por outro, para que tais expressões pertençam ao domínio da matemática, devem ser totalmente autônomas em relação aos contextos e situações específicas de referência"* (Gomez-Granell, 1997:264). Este possível paradoxo pode interferir no processo pedagógico e nos encaminhamentos adotados pelos professores frente aos problemas. Podemos ter um ensino baseado em regras e algoritmos ou baseado na construção e desencadeamento de conceitos que são significativos para os alunos, até chegarmos as regras e/ou algoritmos com significado.

Porém como fazer a intervenção pedagógica, no ensino de matemática, enfatizando o significado dos conceitos, reconhecendo que em todos os conceitos/objetos matemáticos é necessário distinguir um significado formal intrínseco – no qual uns símbolos fazem referência a outros dentro de um código específico (os registros de representação) – e um significado pragmático – que permite a tradução para sistemas de signos não matemáticos (linguagem natural, imagens e representações icônicas, ações, etc...) - e associar tais expressões ao seu significado referencial?

Nesta perspectiva, o trabalho com o ensino de matemática poderia ser pautado pelo predomínio dos aspectos conceituais e semânticos, podendo, neste caso, os registros de representação servirem como um instrumento didático-pedagógico para o professor pensar/elaborar/refletir sua aula. Assim, o início das atividades seria no sentido de potencializar o uso de procedimentos dos próprios alunos, mesmo que não sejam de caráter formal e sim intuitivo para, posteriormente, através de intervenções pedagógicas, sendo o professor o mediador deste processo, buscar através do uso de representações diversas a construção de conceitos. Desta forma o uso dos registros de representações passa pelo sentido de comunicação até o uso da linguagem formal com a apropriação do significado dos símbolos matemáticos.

Podemos sintetizar nosso pensamento, com as palavras de Gómez-Granell,

> *... a linguagem formal caracteriza-se por suprimir o conteúdo semântico e expressar, da maneira mais geral e abstrata possível, o essencial das relações e transformações matemáticas. Este é um longo processo no qual a interação e a dialética entre os aspectos matemáticos e extramatemáticos das diferentes situações assumem um papel fundamental. E é assim porque existe... uma grande resistência do pensamento humano em abandonar o conteúdo do objeto expressado pela linguagem natural e pelo desenho, para substituí-lo pelo símbolo formal. ... Uma mesma criança pode usar o algoritmo convencional da divisão para resolver um problema familiar e recorrer a desenhos ou esquemas para resolver a mesma operação situada num problema de proporcionalidade cuja estrutura semântica é, portanto, mais complexa. Isto é, o importante não é determinar se os alunos possuem ou não um certo procedimento para resolver uma operação, mas em que condições tal procedimento pode ou não ser atualizado. Na resolução de problemas essas condições são dadas pelo contexto ou pela estrutura semântica do problema e não só pelas operações matemáticas implicadas... função de certas variáveis contextuais* (1997: 272-273).

Assim, quando o professor trabalha com ênfase sobre o caráter sintático, ou seja, as relações entre as palavras, orações, parágrafos, os alunos até podem aprender a manipular símbolos, segundo uma série de regras, mas, muitas vezes, acabam por não entender, gerando dificuldades em associar símbolos ao seu significado referencial (basta lembramos dos "erros" dos alunos na tentativa de resolução de algoritmos pelo processo formal). Já quando se trabalha sobre os conceitos, estes não implicam absolutamente um conhecimento das regras sintáticas e das convenções de notações próprias do símbolo matemático. Em várias situações matemáticas é exigido, além do conhecimento conceitual, o domínio de uma série de regras e convenções que também é necessário aprender e ensinar. Isso é coerente com o que Duval (1993) chama de regras de formação e as regras de conformidade, no trabalho com os registros de representação.

Portanto, é necessário que as intervenções pedagógicas sejam pautadas pelo trabalho com o conceitual e o simbólico, no sentido semântico (organização do significado lingüístico). Por mais que o aluno possa resolver diversos problemas e operações mediante procedimentos intuitivos, é necessário ensinar os procedimentos formais com significado; caso contrário, poderá ocorrer uma falta de significado dos símbolos manipulados (significado referencial), ocasionando uma dissociação total entre os aspectos semânticos e os sintáticos. No ensino de matemática, isso fica muito claro quando trabalhamos na perspectiva do aluno criar/construir algoritmos e, simplesmente, na aplicação de algoritmos prontos, verdadeiros.

Mas, afinal, como fica a aprendizagem da matemática e, mais especificamente, os problemas, na perspectiva do trabalho conceitual e semântico, admitindo que saber matemática implica dominar símbolos formais independentemente das situações específicas e, ao mesmo tempo, poder devolver a tais símbolos o seu significado referencial e, então, usá-los nas situações e problemas que assim o requeiram? Considerando que trabalhar com os objetos matemáticos, no contexto escolar, também é trabalhar com a linguagem matemática, não se pode esquecer que aprender uma linguagem não é aprender uma série de regras (simplesmente o sintático), mas sim adquirir um grau de competência comunicativa que permita usar tal linguagem adequadamente em vários contextos. A idéia central, para o trabalho pedagógico, seria a de associar aspectos sintáticos e semânticos aos conceitos propriamente ditos.

2.2 O enunciado dos problemas aritméticos elementares

Como já comentamos no capítulo anterior, os problemas no processo pedagógico podem ser apresentados, no mínimo, sob dois aspectos: o primeiro, no sentido de aplicar os conhecimentos previamente adquiridos, onde a resolução de problemas é só mais uma forma de aplicação do conhecimento adquirido. E o segundo, como instrumento para propor situações que requeiram uma solução matemática e permitam levantar questões. Neste sentido, os problemas passam a desencadear os conceitos a serem explorados em sala de aula. O importante, no processo pedagógico, é a utilização destes dois aspectos, sistematicamente. Ou seja, em alguns momentos usar um tipo e, em outros o outro, contemplando os dois e entendendo a sua complementaridade na construção dos conceitos.

Maza enfatiza que existem três fontes de obstáculos, para a resolução de problemas, que o professor deve evitar:

> *– A interpretação da resolução de problemas como uma atividade de aplicação de uma teoria previamente explicada;*
> *- A redução dos tipos de problemas aritméticos apresentados aos alunos;*
> *- A separação dos problemas apresentados na escola em relação ao contexto familiar em que se desenvolve a criança (1995:24-25).*

O que vamos enfocar neste trabalho, porém, não são os momentos e as funções da utilização dos problemas no fazer pedagógico, mas sim, como podemos considerar os enunciados dos problemas neste fazer pedagógico. Para isso, estamos entendendo-o como um texto com suas implicações semânticas, sintáticas e conceituais a serem exploradas. Nesta perspectiva, podemos dizer que é necessário considerar o aluno frente a estes enunciados de problemas. Isso significa entendermos a situação de leitura que é estabelecida, ponto que vamos enfocar no próximo item. Além disso, como professores, precisamos considerar as estratégias próprias dos alunos, permitindo que o aluno explique mais facilmente a semântica da operação e, assim, construa uma representação mental interna da mesma. Posteriormente deverão conseguir representá-la significativamente, através do uso de suas estratégias, possibilidades e capacidade, transformando-as. *Para isso é necessário que o professor faça um esforço constante e consciente para que os alunos associem os aspectos semânticos e sintáticos das* *operações e transformações matemáticas* (Gómes-Granel, 1997:277). Desta forma, os alunos poderão obter uma ampliação e uma real construção, dos conceitos matemáticos.

Maza reforça que:

> *... as estratégias informais não são um obstáculo na aprendizagem, mas um passo necessário no caminho da construção de um procedimento mais elaborado, mais abstrato e mais simbólico. Estas estratégias podem estar limitadas a contextos determinados, virem associadas a tipos de problemas concretos. Isso reduz sua generalidade e seu alcance posterior. Porém não devem ser excluídas se queremos construir uma aprendizagem significativa* (1995:33).

No momento em que o aluno associa aspectos semânticos e sintáticos, o professor poderá propor representações, permitindo aos alunos entender a semântica da operação ou as transformações. Este é o papel do professor, como orientador e mediador das atividades de sala de aula, associar diversos registros de representação, considerando que os alunos possuem representações internas, esquemas próprios, mas que estes são limitados. Especificamente em relação aos problemas, não adianta simplesmente o professor traduzir o enunciado em uma linguagem oral, é necessário que ele consiga trabalhar com este enunciado, efetuar um tratamento textual e com o registro numérico, um tratamento operatório necessário para a resolução deste problema, sendo estes sintática e semanticamente significativos aos alunos. Para isso, o trabalho com vários enunciados de problema, ou melhor, variações redacionais para o mesmo conteúdo cognitivo, poderiam ser mais viáveis, pedagogicamente, para a compreensão dos conceitos, que a simples tradução da linguagem escrita para a linguagem oral, que sabemos, enquanto professores, não garante nenhuma compreensão do problema.

O trabalho com as variáveis redacionais do enunciado do problema seria uma estratégia didática adotada pelo professor, para trabalhar o mesmo conteúdo cognitivo, mas com vários enunciados de problemas, variando somente redacionalmente, possibilitando, desta forma, ao aluno ter uma amplitude no **campo de enunciados de problemas**, que auxiliaria na compreensão do conceito envolvido. Para a criação deste campo de enunciado de problemas, o professor passa a ser o redator dos mesmos, baseado no sentido operatório da operação enfocada. Ou seja, torna-se o produtor dos problemas propostos aos alunos, tendo claro os aspectos do conteúdo cognitivo a ser trabalhado.

Isso, em parte, é reforçado por Gómez-Granell, quando diz que

> ... *o mesmo modelo* matemático (ou conteúdo cognitivo, como fala Duval) *seja trabalhado através de estruturas semânticas diferentes e que tenhamos consciência do que estamos fazendo para ajudar nossos alunos a reconhecer isomorfismos matemáticos através da diversidade semântica das diferentes situações e contextos. ... As expressões formais de matemática tendem a expressar as relações entre quantidades, eliminando todas as variáveis da situação. No entanto as crianças tendem a não dissociar esses dois aspectos, o que significa que reconhecer isomorfismos matemáticos a partir da diversidade semântica é algo muito complicado* (1997:281).

Mas este "*muito complicado*" não significa impossível. Exige que o professor consiga fazer com que seus alunos reconheçam estas variações e trabalhem/considerem em sala de aula estas variações redacionais. Assim, é fundamental que exista uma intervenção consciente do professor, sobre este trabalho, levando em consideração aspectos semânticos e sintáticos, a partir de ações conscientes e estruturadas destes. Além disso, chamamos a atenção para a necessidade do trabalho específico sobre o enunciado do problema - texto, através das possíveis variações redacionais, levando em consideração o significado referencial e o formal dos símbolos matemáticos, pois acreditamos como Maza, que "*...não basta estudarmos os fatores semânticos que intervêm em um problema, mas examinar com igual atenção em que grau e como a compreensão leitora influi na resolução do problema*" (1995:94).

2.3 O enunciado como um texto e a situação de leitura

Como registramos no capítulo anterior, os enunciados dos problemas apresentados nas situações pedagógicas são, em sua maioria, textos escritos na língua natural, sendo estes apresentados pelos professores, pelos livros didáticos ou, em algumas situações, escolhidos pelos alunos. A primeira ação que os alunos precisam fazer é ler este enunciado - texto. Para ler um texto, temos uma situação que podemos chamar de **situação de leitura**. O que é esta situação e quais as interferências que se estabelecem nela com reflexos sobre a compreensão do texto - problema matemático é o que vamos tentar enfocar e discutir.

A discussão sobre a compreensão textual é muito antiga na área da lingüística. A diversidade de situações nas quais estes textos são transmitidos criam **diferenças cognitivas e leituras diferentes,** à medida que se afastam do mundo de conhecimento do leitor, das preocupações e das condições de aceitação e de sentido dentro dos quais (estes textos) foram produzidos, tornando-os muitas vezes incompreensíveis. Duval chama a atenção para a seguinte questão: "*a compreensão do texto é então inicialmente ligada a este fenômeno da multiplicidade de sentidos possíveis que podem ser discernidos em um texto*". Complementando, o autor afirma que esta compreensão está ligada "*ao fenômeno de emergência do sentido durante a apreensão de uma seqüência de palavras e frases*" (1995:323-324).

Duval não concorda com o termo interpretação de texto, mas sim compreensão de texto, pois afirma que isto está ligado à distinção entre o **problema "hermenêutico"** e o **problema cognitivo** da compreensão de textos. Para Duval (1995), o problema hermenêutico nasce com a confrontação das interpretações múltiplas que a diversificação histórica e cultural das situações de leitura produz. Cada interpretação implica, então, uma compreensão de texto. Já o problema cognitivo se refere, ao contrário, aos processos de elaboração de uma compreensão durante a leitura, isto é, durante os primeiros percursos visuais que passa o leitor, no texto. Ora, não somente estes processos são complexos, mas eles não parecem funcionar, igualmente, para todos os textos. Em particular, desde que a organização redacional de um texto se distancie muito das formas de organização próprias ao discurso espontâneo e desde que o texto não se refira mais a conhecimentos familiares do leitor, as dificuldades de compreensão do texto acabam sendo insuperáveis para muitos alunos do ensino fundamental e médio, e, de uma forma geral, para muitos leitores.

A questão proposta por Duval e que representa nossa busca, enquanto professores de matemática, levando em consideração a resolução de problemas, é se "*podemos chegar a uma descrição dos processos de elaboração de uma compreensão durante a leitura, que nos ofereça as condições para uma aprendizagem de compreensão dos textos?*" (1995:324). Ou seja, seria possível criarmos/elaborarmos uma forma de ensinar nossos alunos a compreender os enunciados dos problemas mais significativamente?

Apesar da quantidade de trabalhos existentes sobre este assunto, principalmente na área da lingüística, dispomos ainda de poucos elementos de resposta para esta questão crucial na área de educação matemática. Na realidade, os modelos de compreensão apresentados são, essencialmente, **centrados sobre o leitor**[18], sobre seus conhecimentos, como se existisse uma competência geral e autônoma de leitura para todos os textos **negligenciando** todos os fatores relativos às **características e às variáveis redacionais do texto** a ler. Não conhecemos muitos trabalhos que explorem os graus e as formas de explicação do conteúdo cognitivo do texto, as diferenças mais ou menos importantes entre a organização redacional do texto e a organização discursiva da forma de se exprimir oral e espontaneamente. Ora, se a **compreensão do texto** resulta da **interação de um leitor e de um texto**, as variáveis redacionais do texto são tão importantes quanto as variáveis relativas ao leitor (a base de conhecimento que ele dispõe em relação ao conteúdo cognitivo do texto, a extensão de seu vocabulário, a sua competência de fazer uma análise gramatical, etc...). Para fazermos uma análise dos processos de compreensão de textos, é indispensável considerarmos a interação destes dois tipos de variáveis (leitor/texto).

Podemos dizer, então, que as interações entre leitor e texto são estabelecidas por duas descrições fundamentais: de uma parte, a distância entre o conteúdo cognitivo do texto e a base de conhecimento do leitor; de outra, a distância entre a organização proposta ao conteúdo cognitivo do texto e a organização redacional deste. Os diferentes tipos de interação (leitor/texto) possíveis determinam **situações de leitura diferentes**. Reconhecer que o fenômeno de compreensão de texto não pode ser separado da situação de leitura leva-nos a reconhecer que, de uma situação a outra, os processos que levam à compreensão de um texto não podem ser sempre os mesmos.

2.4 Elementos que constituem um enunciado - texto

Alguns autores que exploram a compreensão de texto evidenciam a existência de uma organização que torna o texto irredutível às frases que o compõem, analisando as diferentes marcas lingüísticas possíveis, segundo o nível destas frases, idéia muito mais sintática do que semântica. O ***problema, entretanto,*** é saber qual é a

[18] Lembrar das etapas de Polya para resolução de problemas, já comentado no capítulo 1 deste trabalho.

natureza desta organização: se ela é de ***ordem lingüística***, portanto compreendida somente por suas marcas lingüísticas, ou se é de ***ordem de conhecimento*** e de ***representações expressas*** no nosso dia a dia e, portanto, compreendida em função de esquemas cognitivos; ou ainda, se é de ***ordem de escolha*** daquele que produziu o texto e, por isso, compreendida como uma estratégia de produção.

Nós veremos, no entanto, que tudo o que consideramos geralmente como organização de um texto resulta da interação entre dois níveis de descrições: um relativo ao conhecimento e outro relativo a estratégias que são fundamentais prioritariamente sobre os critérios de objetivação e não de comunicação. Duval (1995:326) chama, respectivamente, estes dois níveis de descrições de ***conteúdo cognitivo do texto e organização redacional***. A distinção destes dois níveis permitirá definir as variáveis redacionais do texto, tornando mais congruente ou não ao sujeito que lê.

No momento em que consideramos as variáveis redacionais como um dos níveis de descrições do texto, podemos abordar o ponto decisivo em toda a modelização da compreensão de textos, ou seja, aquele da definição das operações que esta compreensão mobiliza necessariamente: a ***segmentação e a recontextualização*** das unidades segmentadas. Estas duas operações não consistem na aplicação de regras de análise lingüística. A natureza das unidades reconhecidas por ocasião da leitura *"depende da maneira pela qual a pessoa detém sua atenção"*. E isto pode ser em cima de uma palavra ou da frase como um todo. Não existem unidades que possamos definir como unidades de base a distinguir previamente durante uma leitura (segmentação e recontextualização são operações fundamentais para o processo de leitura).

A combinação destas diferentes formas permite definir diferentes processos que conduzem à compreensão dos textos, estes processos diferentes podem se traduzir por condutas diferentes. A seleção de um ou de outro processo depende essencialmente da situação de leitura, e esta depende essencialmente dos fatores que determinam as interações possíveis entre um leitor e um texto (distância entre o conteúdo cognitivo do texto e a base de conhecimento dos leitores; e a distância entre a organização própria ao conteúdo cognitivo do texto e a organização redacional do texto). A situação de leitura mais simples é aquela em que estas duas distâncias são reduzidas ao mínimo, onde a compreensão se aproxima do discurso oral cotidiano. O problema da compreensão de texto em situação escolar surge sempre que nos distanciamos desta situação, isto é, desde que exista um distanciamento significativo para um destes dois tipos de fatores. A condição prévia à aprendizagem deve consistir em uma objetivação destas operações (segmentação e recontextualização) com a ajuda de procedimentos controláveis. A forte ligação que existe entre a diversidade de registros de representação e a compreensão de textos é que leva à procura de representações não-discursivas como um meio para objetivar um ou outro dos dois níveis de organização constitutivos dos textos.

Nesta perspectiva, Duval entende que somente as **representações não-discursivas** "*permitem uma apreensão sinóptica, global e precisa de uma organização textual nas quais as partes ou os elementos não são dados somente em seqüências lineares requerendo uma multiplicidade de apreensões sucessivas*" (1995:327). Elas permitem reconstruir, ver e controlar a forma segundo a qual cada frase se integra no texto: "*... a compreensão das frases como parte de um discurso é um processo diferente das frases consideradas isoladamente... Então o que é importante é a forma segundo a qual uma frase pode ser semanticamente integrada com aquelas que a precedem*".(Van Dijik & Kintsch, 1983: 32 apud Duval, 1995:327).

A noção de texto é uma noção que nos parece familiar, mas o que é realmente um texto? Por um lado, podemos dizer que é uma produção escrita e não oral do discurso; por outro lado, é o objeto de uma prática cultural e escolar fundamental: a leitura. Porém, apesar de sua evidência cultural, esta noção de texto é muito difícil de ser assimilada. A maioria das definições propostas para definir a noção de texto recorrem à analogia da frase. A necessidade de tal recorrência não é de surpreender, se lembrarmos que a frase substitui a ordem do discurso e não da linguagem (Duval, 1996:328). Para definir a noção de texto, não podemos comparar o texto a uma frase, mas é preciso determinar como as unidades de uma maneira discursiva podem ser expressas e marcadas em uma seqüência de atos completos do discurso, isto é, em uma seqüência de frases ou, eventualmente, em uma só. Do mesmo modo que qualquer seqüência de palavras não forma uma frase, consideramos que nem toda seqüência de frases forma um texto.

Para que uma seqüência de frases forme um texto, Duval afirma ser necessária, uma integração das unidades em um todo, tendo entre elas uma continuidade de assunto/propósito ou de tese e que, de uma frase à outra, o discurso prossiga. Podemos acrescentar a isso o que diz Maza em relação ao enunciado de um problema, ou seja,

> *Um enunciado não é por si só um problema, o sujeito deve considerar este como tal. ... um problema não é semelhante em si, possuindo a mesma solução, sem necessidade de encontrar uma nova. Por outro lado, a estratégia de solução não deve ser obvia, pois não valeria a pena construir teorias sobre sua resolução..... Estamos diante de um problema quando:*
> *1 - Um ou vários indivíduos precisam encontrar uma solução a uma tarefa enunciada;*
> *2 - Não existe um caminho óbvio que garanta ou determine completamente dita solução* (1995:42).

Além disso, são necessárias algumas regras mínimas de coerência ligadas às marcas lingüísticas de repetição, de progressão, de não-contradição entre as frases, substituições léxicas, nominalizações, recuperação, pressuposições (regras sintáticas)... Porém, estas regras por si só não conseguem estabelecer uma ligação entre duas frases sucessivas que formam um texto ou mostrar o lugar de uma frase na organização do texto. Nesta perspectiva Duval chama atenção para

- ***a importância do implícito em todo discurso de língua natural***. Para o autor, a forma de expansão discursiva que uma língua natural permite excluir é aquela que procede simultaneamente por semelhança externa e semelhança semiótica. Isto significa que a continuidade de um discurso e, por conseqüência, a coerência de um texto, exige uma atividade de inferência que não depende somente das regras próprias à língua, ou seja, a um registro de representação. A atividade de inferência, para ele, se apóia sobre uma base de conhecimentos pressupostos para a redação do texto. Ainda

- ***a exigência de coerência cognitiva***. Os recursos, através das marcas lingüísticas, indicando uma ligação entre as frases, não são suficientes para assegurar a coerência e, por conseqüência, integrar uma seqüência de frases em uma unidade textual. De outro modo, o encadeamento das frases deve também se adequar aos dados de uma base de conhecimento que é pressuposto comum ao redator do texto e para seu leitor potencial. Assim, a coerência de um texto não pode ser verificada somente no plano lingüístico (Duval, 1995:330).

Podemos dizer que a organização de um texto pode ser inteiramente não congruente com a organização dos conhecimentos que ele mobiliza. De outra parte, o emprego de marcas lingüísticas de ligação entre as frases não é nem necessário nem suficiente para organizar uma seqüência de frases em um todo coerente, mesmo que isso facilite a apreensão. Para compreender a interação entre o plano propriamente lingüístico e este do conteúdo cognitivo, Duval recorre à noção de redação, ou seja, a ***organização redacional*** que estrutura o texto.

2.5 Texto e organização redacional

Um texto é uma forma de discurso mais complexa e mais densa que outras formas socialmente produzidas em tempo real, segundo Duval (1995). Ou seja, o texto e o discurso oral são produções diferentes, mas com grandes aproximações, se considerarmos o texto como algo em movimento. O texto apresenta um conjunto de possibilidades de expressão e de sentidos constituídos por um léxico e por um corpo de regras morfológicas, sintéticas, retóricas, lógicas, etc... Mas, também, ligadas ao sujeito que produz. O discurso é o uso que o sujeito faz de uma língua para falar de objetos ou de situações.

Todo discurso resulta de uma interação de dois níveis de descrições: uma parte pertinente às possibilidades discursivas que oferece uma língua para designar os objetos, ou seja, às escolhas que um locutor faz para produzir um discurso; e outra parte, própria aos objetos do discurso produzido falado e as suas relações. Todo discurso liga-se intrinsecamente às possibilidades de variação de formulação para "melhor dizer" ou para "dizer de outra forma" enquanto este se processa, ou seja, no momento em que estamos falando/discursando, podemos corrigir ou dizer de outra forma. Já o texto também sofre estas correções, recorrências, ou reescritas. Mas, sempre que aparece para ser lido acabamos esquecendo estas diversas possibilidades de modificações e considerando-o como algo estático, pronto, definitivo. As formas diferentes de dizer algo no texto ligam-se intrinsecamente às variações redacionais, possíveis de serem realizadas, considerando-o como algo em transformação. Estas variações dependem das situações e dos objetos aos quais a semântica e o conteúdo cognitivo se referem e não às regras sintáticas da linguagem.

Estas ***variáveis redacionais*** são definidas por Duval (1995:333) como um fenômeno da produção textual que se impõe de maneira evidente quando se trata da produção de texto para um mesmo assunto. Estes textos "diferentes" podem ser comparados entre eles, podem ser, eventualmente, selecionados levando-se em conta sua complexidade, se ele é completo, incompleto, mais claro, etc... tratando-os como versões diferentes. Independente de serem de um mesmo autor, ou de autores diferentes, estas versões apresentam necessariamente uma ***invariante*** que é definida como, ***conteúdo cognitivo do texto***. O conteúdo cognitivo de um texto é geralmente definido como o conjunto de conhecimentos necessários à compreensão do tema tratado, independentemente do que o texto mobiliza ou do que ele apresenta.

Podemos pensar nos diversos livros didáticos que temos para o ensino de matemática nos diferentes graus de ensino. Todos os livros são destinados a séries específicas (5ª série, 6ª série, etc...) ou trabalham com conceitos específicos (livros de álgebra linear, cálculo, etc...). Comparando estes livros, existem aqueles que, explorando o mesmo assunto matemático são considerados mais complicados e aqueles que parecem ser mais claros, compreensível quando lemos. O que muda nesses livros não é o conteúdo cognitivo, mas sim a forma de expor este conteúdo, ou seja, a organização redacional do texto apresentado.

Somente a base de conhecimento que os leitores dispõem, para um mesmo texto, pode ser redacionalmente suficiente ou insuficiente para a compreensão de seu conteúdo cognitivo. O desvio extremamente variável que existe entre o conteúdo cognitivo de um texto e a base de conhecimento que sua organização redacional supõe que os leitores em potencial dispõem constitui um dos maiores problemas da escolha de textos a serem usados no ensino, em qualquer disciplina escolar.

É preciso analisar de uma forma mais precisa em que consiste a variação redacional. Não se trata apenas de corrigir os erros de português ou de corrigir, frases escritas erroneamente. A variação redacional se refere à maneira como um conteúdo cognitivo é explicitado no texto. Um exemplo elementar de variação redacional pode ser observado a partir do enunciado do seguinte problema, envolvendo a operação de multiplicação:

"Com três camisas e quatro calças, quantas combinações de roupas você pode fazer?".

Este enunciado propõe somente um procedimento matemático, que é "3 x 4 =12", porém vários alunos acabam determinando como resposta "3 + 4 = 7", não conseguindo perceber que esta resposta está completamente equivocada para a situação proposta. O que o professor pode é propor variações redacionais no enunciado do problema, tentando deixá-lo o mais congruente em relação ao conteúdo cognitivo explorado, como por exemplo:

"Pedro possui três camisas de cores diferentes, amarela, vermelha e bege. E quatro cores de calça marrom, azul, preta, branca. Combinando sempre uma camisa com uma calça, quantas possibilidades diferentes Pedro tem de se vestir, sem repetir nenhuma combinação?"

Porém, fazer variações redacionais para modificar o enunciado dos problemas, não é simplesmente modificar a forma da escrita livremente. Para isso precisamos pensar em um **campo de enunciado de problemas**, que nada mais é do que uma interação entre o conteúdo cognitivo (que não poderá variar) e as organizações redacionais que poderão ser efetivadas, considerando-se as situações e os objetos contemplados no enunciado e não somente as regras da linguagem. Esta variação redacional está estritamente ligada à possibilidade de realizarmos o processo de conversão entre os registros de representação; neste caso, o registro do enunciado e o registro numérico. A organização redacional do enunciado resulta de um certo número de escolhas para descrever a organização do registro numérico solicitado. E esta escolha comanda as variações do enunciado, podendo modificar a tarefa cognitiva exigida para resolver o problema, isto é, para converter o registro do enunciado em um registro numérico necessário.

Então, como fazermos estas variações redacionais, na perspectiva da compreensão do enunciado dos problemas? Duval (1997) elenca dois fatores fundamentais, ou grupo de fatores, para estas variações, que são: os **fatores intrínsecos,** que são pertinentes do ponto de vista de uma correspondência entre o texto do enunciado e a escrita do tratamento matemático solicitado; e os **fatores extrínsecos**, que comandam as variações neutras, ou não-pertinentes, do ponto de vista de certas correspondências, as quais são, evidentemente, constitutivas de um enunciado de problemas, mas não determinantes.

Duval (1997:5-8) chama a atenção para três pontos que constituem os **fatores intrínsecos** da variação redacional:

- o primeiro, é a escolha dos elementos de organização cognitiva que vamos explicitamente designar. Os elementos explicitamente dados na redação de um enunciado de problema são as informações necessárias para possibilitar as respostas possíveis. (Ponto de vista lingüístico, vocabulário, complexidade sintáxica, descrição da situação extra-matemática);

- o segundo são os dois graus de explicitação: este que é explícito por uma proposição (no sentido gramatical) que Duval chama de ***redacionalmente declarado*** e o que é explicito somente por um termo ou uma expressão, que é denominado de ***redacionalmente mencionado***; e

- o terceiro é a escolha da questão. Ela pode apoiar-se sobre uma informação que pode ser diretamente obtida, a partir dos valores numéricos dados no texto. Ou ela pode apoiar-se sobre uma informação que requeira que a gente calcule, em primeiro lugar, outros valores numéricos que não são dados no texto do enunciado.

Em relação aos **fatores extrínsecos** da variação redacional, Duval chama a atenção para quatro pontos:

- o primeiro, refere-se à escolha da situação extra-matemática;
- o segundo, é a presença de informações inúteis, mas atrativas, como, por exemplo, valores numéricos não pertinentes, para o tratamento matemático necessário;
- o terceiro, é o desenvolvimento dos aspectos relativos à descrição e à compreensão da situação extra-matemática envolvida no enunciado;
- o quarto, é o lugar da questão no enunciado do problema: se esta estará no início do enunciado ou no final.

Podemos observar alguns exemplos de enunciados de problemas, envolvendo a operação de multiplicação, com mesmo conteúdo cognitivo, mas com variações na organização redacional:

"- Se você tivesse 4 cores para as pétalas e 2 para os miolos, quantas flores diferentes conseguiria fazer?

- Considere flores com pétalas e miolo. Se você tivesse 4 cores para as pétalas e 2 para os miolos, quantas flores diferentes conseguiria fazer?

- Considere flores com pétalas e miolo. Se você tivesse 4 cores (amarela, vermelha, branca, rosa) para as pétalas e 2 cores (amarelo escuro e amarelo claro) para os miolos, quantas flores diferentes conseguiria fazer?

- Considere flores com diferentes cores para as pétalas e para o miolo. Se tivéssemos 4 cores para as pétalas e 2 cores para os miolos, quantas possibilidades diferentes teíamos de representar estas flores sem repetir combinações

- Considere flores com diferentes cores para as pétalas e para o miolo. Se tivéssemos 4 cores para as pétalas (amarela, vermelha, branca, rosa) e 2 cores para os miolos

(amarelo escuro e amarelo claro), quantas possibilidades diferentes teríamos de representar estas flores sem repetir combinações".

Podemos dizer que os professores acabam centrando suas ações nos fatores extrínsecos da variação redacional, pois estas variações dão a idéia de que o texto não descreve a mesma coisa e mostra aos alunos o uso da matemática na realidade, promovendo uma motivação maior dos mesmos. Porém, Duval chama atenção para os ***fatores intrínsecos, pois são estes que poderão mostrar a real compreensão dos alunos e principalmente propiciar modificações no currículo escolar, mais especificamente no processo pedagógico do ensino de matemática, com utilização dos problemas permeando a construção e exploração de conceitos.***

A identificação dos fatores intrínsecos que compõem a variação redacional permite definir um campo de enunciados de problemas de matematização para cada tipo de tratamento matemático, considerando que "... *um problema não é uma organização redacional particular, isto quer dizer um enunciado particular, que resulta de certas escolhas concernentes aos fatores internos da variação redacional*" (Duval, 1997:8).

A consideração de um campo de enunciado de problemas para determinados tipos de representações matemáticas, provoca uma discussão de ordem didática no fazer pedagógico. De uma parte, obriga colocarmos cada enunciado particular em relação a todas as variações importantes que podemos fazer; de outra, as variações elaboradas não são estas de mudança na escolha dos números (pequenos ou grandes; naturais ou decimais) ou nas escolhas das situações extra-matemáticas para os quais um tratamento matemático pode ser aplicado, mas na ***escolha do tipo de informação que damos sobre a situação e na maneira de darmos estas informações.*** No entendimento de Duval (1997:9), para organizarmos seriamente uma aprendizagem de resolução de problemas, ou seja, que os alunos compreendam/apreendam os enunciados e então reconheçam as informações pertinentes e as organizem, torna-se necessário um trabalho sobre **as variáveis redacionais intrínsecas,** sendo necessário que o professor faça as variações redacionais considerando claramente estes fatores.

É necessário reforçarmos a idéia de que a organização redacional de um conjunto de frases em um texto é relativa a um conteúdo cognitivo específico. Então a organização redacional é dependente do conteúdo cognitivo explícito e este não é determinado por um conjunto de regras de tipo gramaticais. Duval (1995) afirma que, caso o processo redacional de explicitação de um conteúdo cognitivo dependa de mais fatores não-lingüísticos, a primeira categorização das quais é preciso estabelecer é a base de conhecimento pressuposta por todo leitor potencial. Podemos clarear esta afirmação, através dos exemplos apresentados para os enunciados dos problemas multiplicativos. Para estes é necessário que o leitor tenha um conhecimento sobre o sentido da operação, compreendendo que a multiplicação envolve os registros de representação da adição sucessiva e do produto cartesiano.

2.6 A compreensão de texto e a situação de leitura – variáveis redacionais e conteúdo cognitivo

A compreensão de texto, como já vimos, é um fenômeno submetido a diferentes variações. Ela pode, sobre um mesmo assunto e sobre um mesmo leitor, apresentar diferenças razoáveis de déficit e sucesso. Todos sabemos que existem textos fáceis de ler, outros, pelo contrário, difíceis, e outros ainda, que não conseguimos ler, mesmo nos interessando pelo assunto tratado.

A compreensão pode, para um mesmo texto, variar de uma pessoa à outra. Ela depende de parâmetros que podem ser descritos com precisão. Duval(1995) chama de **situação de leitura** ao conjunto de parâmetros que são fundamentais para a seleção de um processo de compreensão, sobre o custo de sua realização e seu sucesso. Teoricamente, existem dois parâmetros que são fatores de variações primordiais. O primeiro, intrinsecamente ligado à redação do texto, depende do grau e da forma de explicitação do conteúdo cognitivo pela organização redacional; o segundo, ligado ao leitor, depende da base de conhecimento de que este dispõe em relação ao conteúdo cognitivo do texto.

Estes dois parâmetros determinam diferentes situações de leitura, que influem consideravelmente no desenvolvimento do processo de compreensão. A consciência da situação de leitura é essencial para avaliar as performances de compreensão de um texto ou para estimar as competências de um leitor.

O **primeiro parâmetro** é devido à variabilidade redacional inerente a produção, não importando qual o texto. Nós vimos que a **variação redacional** é devida a três fatores: escolha dos elementos do conteúdo cognitivo que são explicitados, sua ordem de apresentação e a escolha das expressões lingüísticas para designá-los. ***Disso resulta que a organização redacional particular que constitui a redação do texto pode explicar de uma forma melhor ou pior o conteúdo cognitivo do texto.*** Os graus de explicitação e a importância dos elementos considerados implícitos vão então influir muito no fenômeno de compreensão.

Neste sentido, Duval (1991:173-178), chama a atenção para a existência de **congruência** entre a organização redacional e a organização própria ao conteúdo cognitivo, afirmando que a congruência e a não-congruência entre estas são os valores principais do parâmetro redacional. Intuitivamente, congruência e não-congruência caracterizam o grau de clareza de um texto. Esta análise pode ser estendida a todos os enunciados de problemas de matematização, podendo ser feita, igualmente, para textos mais longos e mais complexos.

O **segundo parâmetro** refere-se à relação existente entre a base de conhecimento do leitor e o conteúdo cognitivo do texto que ele lê. A familiaridade com o conteúdo cognitivo do texto ou, pelo contrário, a novidade deste conteúdo constitui os dois valores principais deste parâmetro de posição do leitor. Geralmente este parâmetro se revela mais importante para os textos especializados, ou de caráter científico, do que para outros textos. Mas ele não é negligenciável, para outros textos, sejam artigos de jornais ou textos literários.

Esses dois parâmetros não são evidentemente independentes um do outro, uma vez que o primeiro trata da relação entre o conteúdo do texto e a organização redacional e o segundo se refere às relações entre o mesmo conteúdo cognitivo e a base de conhecimento do leitor. A combinação destes dois parâmetros principais permite a distinção e a classificação das diferentes situações de leitura em que um leitor pode se encontrar. Duval (1995:350) limita-se aos valores de congruência ou não-congruência para o parâmetro redacional e aquelas de familiaridade e de novidade para o parâmetro de posição ao leitor, definindo quatro tipos de situações de leitura.

TEXTO: correspondência entre a organização redacional e o nível cognitivo

TEXTO/LEITOR	CONGRUÊNCIA	NÃO-CONGRUÊNCIA
Conteúdo Cognitivo **FAMILIAR**	I – Situação trivial, sem riscos de erros.	II – Situação trivial, com riscos de erros.
Conteúdo Cognitivo **NOVO**	III – Situação normativa para uma aprendizagem, exigindo tratamentos paralelos ao texto.	IV – Situação exigindo pesquisa ou uma aprendizagem independente do texto.

A distinção destas diferentes situações de leitura é extremamente importante em tudo o que se refere à avaliação da compreensão de textos, pois esta ocupa um lugar importante nas diferentes disciplinas escolares. Ela tem um papel importante também nos procedimentos de validação dos modelos de compreensão. A determinação de situações de leituras diferentes é um dos componentes essenciais de todo o dispositivo de interpretação utilizado para avaliar a compreensão de um texto pelo leitor.

A possibilidade de uma aprendizagem da compreensão de texto – enunciado é um dos maiores problemas do ensino escolar, envolvendo diversas áreas de conhecimento, no sentido de o aluno ler um texto e extrair informações úteis/significativas deste. A dificuldade que se estabelece nesta aprendizagem de compreensão de texto é da possibilidade de compreendê-los em todas as situações de leitura e não somente na situação de prática oral, ou seja, compreender diversos tipos de textos – enunciados e não somente textos – enunciados mais simples ou do cotidiano.

No cotidiano escolar, torna-se inútil o professor tentar ensinar, ou pensar que os alunos possam aprender todas as diferentes situações de leitura, pois isso varia de um leitor a outro e de um texto a outro. A aprendizagem deve, ao contrário, partir do que seja comum/elementar a todas as situações; neste sentido, a operação de segmentação e de recontextualização constitui o processo de compreensão, afirma Duval (1995:354). Para o autor, a dificuldade da aprendizagem da compreensão do texto se estabelece em aprender a segmentá-lo em unidades textuais de informações e recontextualizar estas unidades segmentadas. Para que isso ocorra, é fundamental uma mudança de registro de representação. Esta necessidade de mudança de registro é fundamental em função de duas razões, para Duval:

- a primeira, tem a necessidade de sair do círculo vicioso didático que consiste em explicar o proposto, o sentido, ou a organização do texto, por um discurso oral ou escrito, no sentido de comentar ou interpretar o enunciado do problema. Ou seja, se explica o discurso do enunciado - texto utilizando-se um outro discurso (discurso escrito pelo discurso oral). Esta conduta ou relação de explicação estabelecida diretamente entre dois discursos postula duas escolhas. De uma parte, tem-se as dificuldades de compreensão para o texto explicado; e de outra, o discurso explicado, transmitido, usa procedimentos ou conhecimentos que servem para compreender outros textos. Estes dois postulados são discutíveis, pois o resultado do discurso explicado vem, simplesmente, recolocar o texto a ser compreendido e não favorece a leitura e a compreensão de outros textos; e
- a segunda razão, é que a compreensão de um discurso implica em sua apreensão semiótica. Para a compreensão do enunciado - texto, o obstáculo de maior importância não é a extensão, mas a linearidade semiótica inerente a todo discurso e, por conseqüência, a todo o texto: esta linearidade impõe uma apreensão parcial e sucessiva das unidades discriminadas. Logo, a operação de recontextualização não pode efetuar-se sem uma apreensão semiótica de organização redacional ou cognitiva, nas quais as unidades obtidas por segmentação devem encontrar seu lugar. É esta apreensão semiótica que permite não restringir a apreensão de cada unidade à sua vizinhança somente na ordem linear de ocorrência, mas de perceber suas relações com outras unidades mais afastadas.

Através da apresentação dessas duas razões para a mudança de registro, Duval chama a atenção para que esta passagem do texto a compreender, exige uma mudança de registro de representação. No nosso caso, o enunciado do problema para um registro de representação numérico que determina sua resolução. Esta conversão, dependendo da complexidade, congruência ou não do enunciado. Podendo ou não exigir a passagem por uma **representação não discursiva** que serve de **representação intermediária** entre o enunciado - texto a compreender e representação numérica para sua resolução. Neste sentido, afirma que é somente através da determinação desta representação intermediária, para enunciados não-congruentes, que se pode ter uma aprendizagem da compreensão do enunciado – texto: *"Na perspectiva de uma aprendizagem das operações de segmentação e de recontextualização é então* *importante distinguirmos as representações que serão diretamente centrais sobre os conteúdos cognitivos e estas que serão diretamente centrais sobre a organização redacional"* (Duval,1995:356). Elas não apresentam as mesmas propriedades e não favorecem o mesmo tipo de tratamento, nem a mesma atividade de conversão.

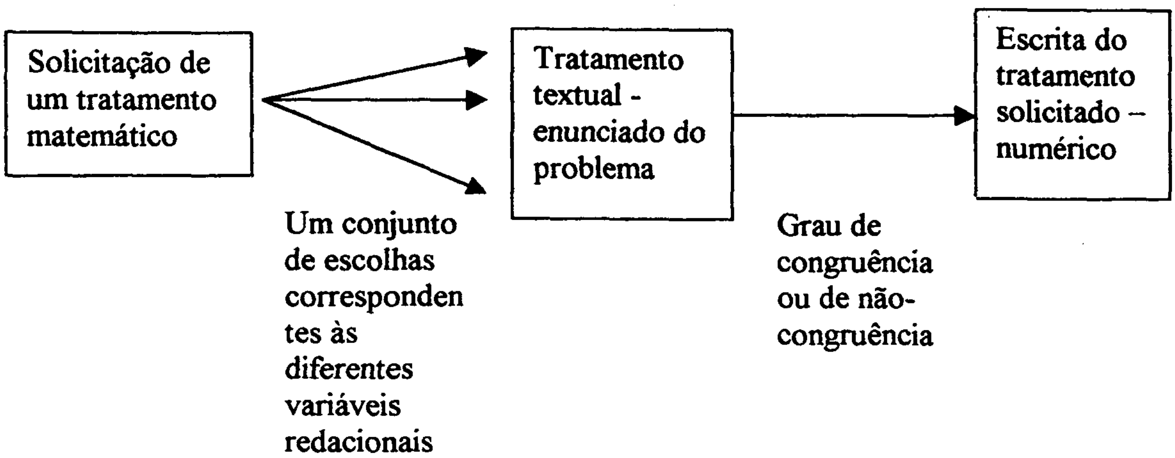
As **representações centradas sobre o conteúdo cognitivo** são as que representam as relações entre os objetos, as ações, os conceitos... Essas representações podem construir registros semióticos diferentes: redes, esquemas, diagramas....As características destas representações é que elas são sempre relativas a um conteúdo cognitivo determinado. Estas especificações das representações limitam então o seu campo de utilização aos textos que tratam do mesmo tema. Elas conduzem a múltiplas representações, com as mudanças de conteúdo cognitivo. Além disso, não podemos ter nenhum procedimento comum para construir essas representações. A elaboração e a escolha destas depende da situação explorada pelo conteúdo cognitivo que queremos representar.

Contrariamente ao que podemos supor, esta especificação não constitui uma desvantagem para a aprendizagem da compreensão textual. A leitura de documentários, ou a de textos especializados, exige somente a mobilização de uma segmentação e uma recontextualização cognitiva. Um caso, particularmente interessante, e igualmente importante para o ensino, é este dos enunciados dos problemas chamados de "matematização", tema tratado nesta pesquisa e que faz parte do processo de ensino de matemática. Eles são redigidos para aplicar um tratamento matemático determinado (operações de adição, multiplicação ou de subtração, conversão de uma quantidade em uma proporção, sistema de equações de primeiro grau, etc...) a uma situação extra-matemática de envolvimento econômico, social ou físico. A descrição que o enunciado fornece da situação escolhida precisa fornecer todas as informações necessárias para aplicarmos os tratamentos matemáticos a serem utilizados em sua resolução. Dito de outra forma, certas expressões do enunciado podem ser convertidas em operações, semanticamente neutras, sobre os números ou sobre as variáveis: *"O conteúdo cognitivo dos enunciados dos problemas de matematização é constituído pelo tipo de tratamento matemático a ser aplicado"* (Duval, 1995:357). Só a escolha das informações necessárias para colocar no tratamento e a maneira das explicações é que podem variar. Os enunciados dos problemas muito diferentes podem, então, ter o mesmo conteúdo cognitivo se suas resoluções dependem da aplicação do mesmo tratamento. Assim, podemos efetuar certas variações redacionais nos enunciados, sem nada mudar no tratamento dado à resolução, porque as performances de resolução aumentam a compreensão espetacularmente. **As representações não-discursivas centradas sobre o conteúdo cognitivo dos enunciados podem se revelar um instrumento poderoso de aprendizagem para a compreensão de enunciados, auxiliando, neste sentido, no processo pedagógico.**

2.7 A tarefa de conversão: passar do enunciado ao registro numérico solicitado

Considerando o processo de leitura e a organização do texto, podemos dizer que a tarefa de resolução de problemas consiste em encontrar, no enunciado, todas as informações necessárias e organizá-las de maneira a identificar e escrever corretamente o procedimento matemático necessário a ser efetuado. Esta tarefa é, essencialmente, de conversão entre os registros de representação e não de determinação de cálculos, pois, como afirma Maza (1995), existe uma distinção entre a compreensão conceitual e procedimental dos algoritmos. Compreender os algoritmos como uma série de regras ordenadas, como um procedimento, é uma aprendizagem que deve ser complementada por uma aprendizagem conceitual que restrinja as possibilidades de atuação dos algoritmos. De igual forma, um enfoque exclusivamente conceitual do procedimento não impede erros procedimentais que só podem ser sanados com uma adequada aprendizagem algorítmica, conforme enfocamos no primeiro capítulo em relação ao significado operatório dos algoritmos, tendo a necessidade do trabalho com o sentido operatório.

Logo, a dificuldade é centrada na passagem do enunciado ao registro numérico necessário a ser efetuado. É importante recuperar a correspondência entre o texto e a solicitação do registro matemático, mas também examinar esta correspondência não mais sobre a tarefa de redação (variações redacionais), na perspectiva da tarefa de leitura em vista de uma seleção e de uma organização das informações pertinentes dadas pelo enunciado. Para isso, Duval (1997:9) propõe o seguinte esquema, considerando dois momentos do enunciado dos problemas:



Do lado da elaboração de um enunciado de problema:
Tarefa de redação
Papel tradicional do professor ou dos livros didáticos

Do lado da resolução do problema elaborado:
Tarefa de conversão
Papel exclusivo do aluno

Podemos pensar no papel do professor e no papel do aluno neste esboço. A tarefa de redação faz situarmos, as dificuldades, no campo de enunciados que é criado/elaborado/definido. Isso implica em termos uma consciência de todos os fatores de variação redacional e de sua influência sobre a tarefa de conversão. Geralmente, os enunciados não são olhados na perspectiva da sua resolução, tornando a tarefa de conversão secundária e reduzindo a execução do tratamento numérico solicitado. Se quisermos ensinar determinado conteúdo, precisamos selecionar alguns problemas que envolvem tal conteúdo. Assim, podemos questionar por que no processo pedagógico, acabamos utilizando menos a resolução de problemas do que a resolução direta de operações, equações, demonstrações, etc. no ensino de matemática.

Podemos dizer que, na resolução de problemas, é necessário um trabalho no processo de conversão, o qual exige, uma mudança entre registros de representação. Na resolução de operações, equações etc.. temos "somente" uma tarefa de resolução algorítmica, apenas se executa tratamentos dentro de um mesmo registro de representação, não existindo conversão entre registros de representação. Como afirmamos anteriormente, a dificuldade nesta tarefa de conversão faz com que o professor traduza o enunciado para os alunos, tornando a resolução de problemas uma simples tarefa de exercício de algoritmos. Definido o algoritmo, é necessário, apenas executá-lo.

Na resolução de problemas, é necessário considerarmos o grau de congruência ou não-congruência no processo de conversão a ser efetuado entre os registros de representação (tratamento do enunciado ao tratamento numérico). O grau de não-congruência depende dos fatores intrínsecos da variação redacional. Estes fatores são decisivos para a compreensão e resolução dos problemas. A congruência ou não-congruência entre dois registros de representação diferentes é determinada a partir de três critérios de correspondência entre as unidades significantes dos dois registros. Estes critérios, para Duval (1993:53), são:

> *- A possibilidade de uma correspondência semântica dos elementos significantes: a cada unidade significativa simples de uma representação, pode associar uma unidade significante elementar;*
> *- Univocidade "semântica" terminal: cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde uma só unidade significante elementar do registro da representação de saída;*
> *- A organização das unidades significantes: a organização respectiva das unidades significantes das duas representações comparadas conduz apreender as unidades em correspondência semântica conforme a mesma ordem nas duas representações. Este critério de correspondência na ordem, no arranjo das unidades que compõem cada uma das duas representações, não é pertinente logo que está presente o mesmo número de dimensões.*

Esses três fatores determinam o grau de congruência ou de não-congruência entre a apresentação das informações nos enunciados e a escolha das operações numéricas a serem efetuadas, demandadas pelos enunciados dos problemas. O ponto essencial na estruturação desta passagem é o grau de não-congruência dependente dos fatores intrínsecos da variação redacional, ou seja, daqueles pertinentes à correspondência entre o texto do enunciado e o registro de representação numérico solicitado.

Logo, o fundamental é como podemos fazer para interferir na dificuldade encontrada pelos alunos na compreensão dos enunciados dos problemas e, conseqüentemente, na aprendizagem de sua resolução. Para isso, podemos dizer que existem duas dimensões: a escolha e a variação dos enunciados, ou melhor, do campo de enunciado de problemas, que acaba sendo competência do professor, os quais precisam ser escolhas globais que envolvam os vários sentidos operatórios. E tem, por sua vez, escolhas para as diferentes variáveis redacionais e para a resolução, que passa pelo processo de conversão através do uso de registros de representação, que é de competência dos alunos, convertendo as formulações do enunciado em um registro de representação matemático eficiente.

Nesta perspectiva, a questão central na aprendizagem da resolução de problemas está no desenvolvimento da segmentação e recontextualização cognitiva (centrados no conteúdo cognitivo e sobre sua organização), exigindo dos alunos que efetuem as duas operações fundamentais de toda a compreensão de texto: efetuar uma segmentação seletiva das unidades pertinentes do enunciado (distinguir as informações úteis para a tarefa de conversão) e recontextualizar as unidades pertinentes em uma organização que permita um tratamento determinado às relações entre as informações úteis. Neste sentido, permite-se ao aluno trabalhar um esquema, desenvolvendo um grupo de questões para seleção das informações úteis e ver quais os registros de representação que podem ser efetuados. Isso desencadeia a necessidade da identificação de representações que, necessariamente, precisam ser únicas, ou seja, uma representação intermediária e transitória entre o registro de representação do enunciado e o registro de representação numérico.

O professor passa, também, a ser um produtor dos textos – enunciados trabalhados e não simplesmente um repassador de problemas elaborados pelos autores de livros didáticos. Por isso, é necessário que este, conheça o conteúdo cognitivo que será explorado e, principalmente, suas possibilidades de variações redacionais nos enunciados, na perspectiva de torná-lo o mais congruente possível para os alunos. Tentando contribuir nesta perspectiva, vamos aprofundar o entendimento das classificações da estrutura multiplicativa, em problemas elementares, na busca do estabelecimento de um campo de enunciado de problemas multiplicativos, considerando as variáveis redacionais, baseado na identificação do sentido operatório da operação de multiplicação.

3 - O SENTIDO OPERATÓRIO DA MULTIPLICAÇÃO – BASE PARA OS ENUNCIADOS

3.1 A estrutura multiplicativa – foco operação de multiplicação

Neste capítulo, pretendemos entender o conteúdo cognitivo que delimitamos neste trabalho, a operação de multiplicação, considerando o organograma apresentado no capítulo 1. Para isso, precisamos considerar, inicialmente, os tipos de classificações que já foram estabelecidos em outras pesquisas, as condições destas, suas possibilidades e seus limites, na perspectiva de delimitarmos um campo de enunciado de problemas, através da variação redacional, que tem por base o ***sentido operatório da multiplicação.***

Para explorarmos os problemas multiplicativos, vamos nos basear nas pesquisas de Gerard Vergnaud, um dos primeiros pesquisadores a propor uma classificação para a estrutura multiplicativa. Além de Vergnaud, enfocaremos as pesquisas de Greer, Schwartz, Nesher, Nunes e Bryant, Maza e Franchi. Todos esses autores, apresentam ou exploram classificações para a multiplicação a partir da classificação proposta por Vergnaud e, principalmente, exploram os problemas multiplicativos sob vários aspectos (considerando tipos de classificações, variáveis, textos, números, etc...). Entendemos que estas classificações servirão para determinarmos o sentido operatório da multiplicação que sustenta os enunciados dos problemas, considerando situações iniciais de escolarização.

Nossa decisão pelo estudo da operação de multiplicação se estabeleceu, como já explicitamos no capítulo 1, como uma forma de continuarmos a pesquisa de mestrado, pela dificuldade apresentada pelos professores no ensino desta operação[19], as poucas pesquisas realizadas com esta operação considerando as séries iniciais do Ensino

[19] Dissertação de Mestrado da Autora, já citada neste trabalho.

Fundamental e a consideração dos enunciados dos problemas na perspectiva de um texto. Além disso, porque acreditamos ser fundamental entendermos e explorarmos pedagogicamente as possíveis e necessárias diferenças entre as operações de adição e de multiplicação, a idéia é buscar as continuidades e descontinuidades entre estas duas operações que, no processo escolar, são enfocadas com muita proximidade. A relação estabelecida, entre estas duas operações, muitas vezes acaba sendo um entrave para o processo de conversão necessário na resolução dos problemas multiplicativos.

3.2 Classificação de Gerard Vergnaud

Vergnaud trabalha na perspectiva da construção de representações simbólicas pelos alunos, que vão se generalizando e abstraindo conforme a interiorização dos conhecimentos construídos. Para ele um conceito não se refere apenas a um tipo de situação, bem como uma situação não pode ser analisada por meio de um único conceito. Ou ainda, um conceito geralmente não é desenvolvido de forma isolada, mas em inter-relações com outros conceitos, por meio de uma variedade de problemas e com ajuda de simbolismo.

O autor afirma que, para ocorrer conceitualização, é necessária uma representação significativa, trabalhando com a idéia ***de campos conceituais***[20] para a aquisição de um novo conceito. Com esta idéia, Vergnaud explica que a estrutura multiplicativa envolve vários conceitos, que não podem ser vistos ou trabalhados independentemente, mas são conceitos interconectados, tais como: a estrutura multiplicativa envolve a estrutura aditiva, a operação de multiplicação e divisão, frações, raiz, números racionais, função linear e não linear, análise dimensional e espaço vetorial. O campo conceitual permitirá a interconexão da **contextualização** e **representação** necessárias para a resolução dos problemas.

Vergnaud (1983), interpretando o comportamento de uma criança frente a problemas aritméticos elementares, acredita ser essencial distinguir dois tipos de cálculo. O "***calculo numérico***", que se refere às operações ordinárias de adição,

[20] Podemos dizer, em linhas gerais, que campos conceituais são organizações invariantes da conduta para uma classe de situações dadas, onde estão os conhecimentos em ação (elementos cognitivos que permitem à ação ser operatória), ou seja, é um conjunto de problemas e situações em que o uso de conceitos, procedimentos e representações de diferentes, mas estreitamente interconectadas categorias, é necessário.

subtração, multiplicação e divisão, e o "***cálculo relacional***", que se refere às operações de pensamento, necessárias para reconhecer as relações envolvidas em uma situação. Este cálculo pode ser geralmente expresso por meio de teoremas (quando é valido), ou de falsas inferências (quando não é válido). Esses teoremas ou inferências não são, necessariamente, expressos ou explicados pela criança: eles podem se tornar hipóteses somente pela observação das ações das crianças. Vergnaud chama-os de ***teoremas-em-ação***.

Podemos relacionar o cálculo numérico e o cálculo relacional de Vergnaud com o organograma apresentado no capítulo 1. O cálculo relacional estaria no eixo das situações modeladas – enunciado, pois considera as situações e o cálculo numérico estaria no eixo do significado dos algoritmos, sendo necessário o processo de aprendizagem da operação, ou melhor, dos algoritmos operatórios.

Esses teoremas-em-ação são relações matemáticas que os alunos levam em consideração quando escolhem uma operação ou uma seqüência de operações para resolver um dado problema. Eles geralmente não são expressos verbalmente, podendo até estar errados. Aparecem espontaneamente em contextos simples, não tendo um valor universal, mas nos permitem traçar o conhecimento matemático ao nível de esquema e ação. Os alunos, geralmente, usam teoremas-em-ação em domínios de contextos fáceis e valores numéricos simples. No entanto, eles são a primeira base intuitiva que os professores podem utilizar para ampliar e formalizar os conceitos dos alunos. Os professores podem expressar e objetivar os teoremas-em-ação, ajudando assim os alunos a ampliar o uso dessas inter-relações para situações mais complexas.

Nos trabalhos de Vergnaud[21] (1978/1983/1987/1988/1994), especificamente sobre a estrutura multiplicativa, encontramos uma categorização ampla dos problemas multiplicativos, apresentados em três grupos - Isomorfismo de Medida, Produto de Medida e Proporções Múltiplas. O isomorfismo de medida consiste de uma simples proporção direta entre duas grandezas (pessoas e objetos, bens e custos, tempo e distância, etc...). O produto de medida consiste na composição cartesiana de duas grandezas para encontrar uma terceira (superfície, volume, produto cartesiano, trabalho e outros conceitos físicos). As proporções múltiplas são semelhantes ao produto de medida em relação ao tratamento aritmético; porém, a diferença reside no fato de termos

[21] Todas as citações utilizadas neste capítulo são traduções livres dos originais, conforme consta na bibliografia.

uma grandeza proporcional a duas diferentes grandezas independentes (p.ex. produção de leite de uma fazenda, sob certas condições, é proporcional ao número de vacas e ao número de dias do período considerado).

Vamos apresentar as principais características desta classificação identificada por Vergnaud[22]. Antes disso, precisamos fazer uma observação em relação a trabalhos mais atuais de Vergnaud, o qual acaba elencando somente as classificações de Isomorfismo de Medida e o Produto de Medida, englobando neste as Proporções Múltiplas. Optamos nesta pesquisa em mostrar a integralidade da pesquisa em relação às classificações.

3.2.1 Isomorfismo de medida

Consiste de uma simples proporção direta ou, de uma proporção simples, nas quais duas variáveis dependam linearmente uma da outra, M_1 e M_2. Inclui pessoas e objetos; preço constante (bens e custos); velocidade uniforme ou velocidade média constante (tempo e distância); densidade constante em uma linha (árvores e distâncias). Estas grandezas podem ser discretas ou contínuas.

Apresenta três subclasses, em relação às operações solicitadas:

a) Multiplicação:

Não consiste de três termos relacionados, mas de um quarto termo relacionado, para os quais a criança tem que extrair um terceiro-termo relacionado. Este tipo de situação envolve quatro termos. Vergnaud afirma que existem dois métodos de pensamento para sua resolução:

- ***Lei binária de composição***: (a x b), neste caso, precisa-se enxergar a e b como números e não como grandezas. Devem-se ver os números sem sua magnitude, ou seja, enquanto números puros.

- ***Operação Unívoca***: pode ser feita por dois diferentes caminhos: usando *operador escalar*[23](b não possui dimensão), uma razão entre duas grandezas de mesma espécie,

---

[22] Essas idéias de Vergnaud foram sintetizadas, principalmente, a partir dos artigos: Multiplicative Structures (83) e Acquisitions des " Strutures Multiplicatives" dans le premier cycle du second degre(78).

[23] Devemos lembrar que os *operadores escalares* ou os *procedimentos escalares* usam uma relação entre quantidades ou magnitudes do mesmo tipo, n vezes, n vezes menos, ou seja, não levam em consideração as magnitudes das grandezas envolvidas, não possuem dimensão. Já os *operadores funcionais* ou os *procedimentos funcionais* levam em consideração as dimensões envolvidas.

ou *operador de função* (*a* representa o coeficiente da função linear), sua dimensão é o quociente de duas outras dimensões.

b) Divisão:

Esta subclasse possui duas categorias, assim definidas por Vergnaud:

- ***Primeira categoria da divisão:*** Encontrar o valor unitário. Aplicação de um operador escalar /b na grandeza. Esta subclasse de problema pode ser resolvida com um operador escalar /*b* na grandeza *c*.

Algumas crianças, em função da dificuldade de transformar xb em /b usam tentativa e erro X x b = c, ou seja, qual o número que multiplicado por *b* é igual a *c*. É um procedimento faltoso/factual, evita a dificuldade conceitual, mas somente para números pequenos e naturais. A distribuição no espaço é um procedimento da divisão usado mentalmente pelo sujeito, mas não tem caráter multiplicativo.

- ***Segunda categoria da divisão:*** Encontrar x conhecendo f(x) e f(1), ou seja, a e b. Inversão do operador da função e aplicando *a* em *b*. Estes problemas são difíceis para as crianças, não só pela inversão, mas também porque a inversão do operador tem uma dimensão inversa da operação direta, que é de pouco uso e difícil de entender.

Vergnaud elenca três procedimentos/estratégias que podem ser usados:

- Pode ser resolvido invertendo-se o operador: este procedimento é difícil para as crianças não só pela inversão, mas porque a inversão tem uma dimensão.
- Encontrar o operador escalar e após transportar para M_1.
- Fazer procedimentos aditivos a + a.... até chegarmos a b e após somar o número de a.

c) Problema de regra de três: caso geral

Estes problemas apresentam vários procedimentos de solução, usando diferentes propriedades de relacionamento dos quatro termos. A multiplicação e a divisão são casos mais simples da regra de três, nos quais quatro termos são envolvidos. Usando as propriedades isomórficas para função linear, acaba sendo mais natural que usar as propriedades dos coeficientes proporcionais.

As estruturas de produto de medida e a proporção múltipla envolvem três ou mais variáveis, enquanto o isomorfismo de medida envolve somente duas variáveis e é modelado pela função linear.

3.2.2 Produto de medida

Consiste da composição cartesiana de duas grandezas espaciais, M_1 e M_2, em uma terceira M_3. Envolve problemas relativos à área, volume, produto cartesiano, trabalho e outros conceitos físicos.

Esta estrutura envolve três variáveis, não podendo ser representada por uma simples tabela de correspondência, como para as estruturas isomórficas de grandezas. Sua representação se dá através de uma tabela de dupla correspondência.

No produto de medida, existe um caminho **canônico** de escolha de unidades f(1,1) = 1 (unidade de comprimento) x (unidade de largura) = (unidade de área)

As unidades do produto são expressas como produtos de unidades elementares (cm x cm = cm^2, cm x cm x cm = cm^3...)

Pode-se identificar três sub-classes de problemas, para o produto de medida:

a)Multiplicação:

Dado o valor da grandeza elementar, encontrar o valor do produto de medida. A solução a x b = x não é fácil de ser analisada em termos de operadores escalares e funcionais. É um produto de duas grandezas, tanto no aspecto dimensional como numérico:

área (m^2) = comprimento (m) x largura (m)

volume (m^3) = comprimento (m) x área da seção (m^2)

Na primeira estrutura, isomorfismo de medida, não é possível explicar porque multiplicar centavos por bolos produz centavos e não bolos. Isto só poderia ser expresso por um operador escalar (centavos $\longrightarrow$ centavos) ou por um operador de função. Na estrutura de produto de medida, a saída é diferente, multiplica-se metro por metro produzindo-se metros quadrados; multiplicando-se meninos por meninas dançarinas, produzimos pares de dançarinos. No produto de medida é dado o valor de duas grandezas elementares e encontramos o valor de outra grandeza que é uma ***relação.***

b)Divisão:

Dado o valor do produto das grandezas e o valor de uma grandeza elementar, encontra-se o valor da outra grandeza. O procedimento de divisão não pode ser descrito por um operador escalar ou funcional. A dimensão da quantidade a ser encontrada é o quociente da dimensão do produto pela dimensão de outra "grandeza elementar".

Volume (m^3)/ área (m^2) = comprimento (m)

O produto de medida é diferente do isomorfismo e pode ser considerado, também, como um duplo isomorfismo. Reciprocamente, o isomorfismo pode também ser visto como um produto:

tempo x velocidade = distância

volume x volume/massa (densidade) = massa

Nestes casos, velocidade e densidade são considerados como constantes e não como variáveis; entretanto, no produto (volume, por exemplo), ambas as grandezas elementares (área da base e altura) são variáveis.

Na estrutura isomórfica, o quociente de dimensões é uma grandeza derivada e não uma grandeza elementar. Se tempo x velocidade = distância, isto é porque velocidade = distância/tempo. Entretanto, na estrutura de produto de medida, as grandezas elementares são realmente elementares e não quocientes, para as crianças que operam.

c) Produto cartesiano:

Vergnaud apresenta o seguinte exemplo para o produto cartesiano:

"Quatro meninas e três meninos estão dançando. Cada menino quer dançar com cada menina, e cada menina com cada menino. Quantos pares diferentes de menino-menina são possíveis?"

Os pares podem ser gerados por uma tabela de dupla entrada e a proporção do número de pares para o número de meninos e meninas, independentemente, pode também ser feita visivelmente por uma tabela de dupla correspondência. O número de pares é proporcional ao número de meninas, quando o número de meninos é admitido como constante, ou vice-versa.

A estrutura aritmética do produto cartesiano como um produto de medida apresenta muita dificuldade e pode ser considerada como uma proporção dupla, mesmo sendo uma proporção simples primeiro.

3.2.3 Proporção múltipla

É muito semelhante ao produto de medida do ponto de vista do relacionamento aritmético: uma grandeza espacial M_3 é proporcional a duas diferentes grandezas espaciais independentes de M_1 e M_2.

O tempo é, muitas vezes, envolvido em tais estruturas porque intervém em muitos fenômenos como um fator direto de proporcionalidade. Na física, o fenômeno de proporções múltiplas pode ser interpretado como produto, isto não é possível nos problemas de proporção múltipla. Na maioria dos casos, uma escolha não natural de unidades pode ser feita f(1,1)=1. Por exemplo, não há razão por que uma vaca produza 1 litro de leite por dia, ou uma pessoa coma 1kg de cereal por semana. Usualmente, existe um coeficiente k não igual a 1 fazendo f(1,1) = k.

Nas proporções múltiplas, as grandezas envolvidas têm seus próprios significados e não podem ser reduzidas por um produto de outras. Não há razão para interpretar a dupla proporcionalidade do consumo de cereais para o número de pessoas e o número de semanas como o operador dimensional (produto de medida).

Vergnaud apresenta duas sub-classes que compõem a proporção múltipla:

a)Multiplicação:

Todos os procedimentos são multiplicativos.

b)Divisão:

São apresentados dois tipos:

- ***Primeiro tipo de divisão***: Procura do valor unitário f(1,1). A divisão não está usualmente no produto de medida, porque f(1,1) = 1, ao menos no sistema métrico.
- **Segundo tipo de divisão**: *encontrar o* x *conhecendo $f(x, a) = b$ e $f(1,1)$.*

Podemos sintetizar algumas posições de Vergnaud, dizendo que este entende que uma função bilinear é um modelo adequado para o ***produto de medida*** e para a ***proporção múltipla***. Uma hipótese é de que isso implica em operações mais complexas do pensamento do que a função linear. Outra hipótese é de que o produto de medida tem suas próprias dificuldades, não redutíveis ao caso das proporções múltiplas.

Para o autor, a relação de multiplicação não é uma relação binária, mas uma relação quaternária, conduzindo a três relações, já mostradas acima (***Isomorfismo de Medida***, ***Produto de Medida***, e ***Proporção Múltipla***). A relação quaternária está baseada no fato de que a relação de multiplicação trata de duas dimensões básicas, M_1 e M_2, que contêm, cada uma, dois números distintos, com uma determinada relação. De interesse particular é aquela das medidas, que inclui o número 1 como a base para a relação. Neste caso, por causa da presença implícita do número 1, parece que a pessoa está tratando de uma relação ternária. De acordo com Vergnaud (1983), a relação quaternária, que mantém o ***isomorfismo de medida,*** pode ser vista de duas perspectivas diferentes: dentro de cada dimensão há uma amplificação ou decréscimo escalar (entre *a* e c ou *b* e *d*); e entre as duas dimensões, M_1 e M_2 há uma função de mapeamento que mantém uma relação constante (entre *a* e *b* e *c* e *d*, respectivamente).

Já o produto de medida é um subtipo de problema de multiplicação que consiste na composição cartesiana de dois espaços de medida, M_1 e M_2, em uma terceira medida, M_3. Três medidas são envolvidas e uma lida com proporções duplas ao invés de uma única proporção, como foi previamente o caso. No terceiro caso, proporção múltipla, uma medida (M_3)é proporcional a duas diferentes medidas independentes (M_1 e M_2). Nesta, as magnitudes envolvidas têm seu próprio significado intrínseco e nenhuma delas pode ser reduzida ao produto das outras.

O que podemos observar com esta classificação de Vergnaud é uma abrangência em relação aos problemas multiplicativos, ou seja, apresenta três categorias gerais para uma variação de idéias que traz as operações de multiplicação e divisão. Outro ponto importante para nosso trabalho é que Vergnaud, nas suas pesquisas, centra a discussão principalmente na classificação de produto de medida, com problemas referentes à área e volume. Os problemas que envolvem combinatória, que fazem parte do produto cartesiano, são considerados complexos para os alunos. A classificação de isomorfismo de medida, praticamente não é explorada em seus estudos com alunos, pois o autor se concentra na faixa etária dos 10 anos em diante, ou seja, após a formação inicial.

Com esta classificação de Vergnaud, se pensarmos o trabalho, com as séries iniciais, precisaríamos concentrar os enunciados envolvendo isomorfismo de medidas. Porém isso não possibilitaria pensarmos em um campo de enunciado de problemas, através de variações redacionais, que contemplem os diversos sentidos da operação de multiplicação.

3.3 Classificação de Bryan Greer

Outro teórico que apresenta classificações para a multiplicação é Bryan Greer. O centro de discussão de seu estudo é a dificuldade dos alunos na passagem do ensino da multiplicação de números naturais para outro tipo de número. O autor, propõe uma análise bidimensional para a estrutura multiplicativa, considerando:

DIMENSÃO VERTICAL: progresso através dos sistemas de números sucessivamente mais gerais.

DIMENSÃO HORIZONTAL: introdução de amplo leque de situações modeladas pelas operações.

Greer (1994:62) chama atenção para as classificações existentes, neste caso está se referindo as classificações propostas por Vergnaud, em função do número limitado de classes as quais não levam em consideração implicações psicológicas e pedagógicas. Para ele essa limitação das classificações, se estabelece em função de que não se diferem aplicações que envolvam:

> *1) apenas números inteiros deriváveis através da contagem de discretas entidades objetivas;*
> *2) números integrais e frações derivadas de divisões de números inteiros por números inteiros;*
> *3)medidas decimais de quantidades.*

Greer em seu artigo de 1994 apresenta uma tabela de classificação[24] para as operações de multiplicação e divisão, ou melhor, para situações modeladas por multiplicação e divisão (1994:64):

	Quantificações	**Comparação multiplicativa**	**Disposição / área retangular**	**Produto de medida**
números inteiros	Grupos equivalentes	comparação multiplicativa	disposição retangular	produto cartesiano
			área retangular	
Multiplicador inteiro	Medidas equivalentes			
Frações	Relação fracionária	comparação multiplicativa	área retangular	
		parte - todo		
Decimais	Relação	comparação multiplicativa	área retangular	produto de medida
	Convenção de medida	parte / todo		
		alteração multiplicativa		

[24] Nos trabalho de Onuchic e Botta (listado na bibliografia) é apresentado um quadro ampliado desta classificação de Greer, baseada no seu trabalho de 1992. A base da classificação é a mesma.

Greer (1994:66) comenta sobre o uso de representações e o problema do uso destas pelos alunos:

> *É absolutamente evidente que o ensino atual permite e reforça o uso de estratégias superficiais para resolver problemas texto sem construir a representação de situações descritas no problema. O uso de representações instrutivas poderia quase que levar a estratégias superficiais de procedimentos que circundam uma análise mais profunda. A aparente idéia de que todos os problemas que importam possam ser manuseados através de pequeno número de representações é uma fonte de interesse.*

Para o autor, **é necessário que as crianças entendam a relação entre "simplicidade algorítmica" e a "variedade fenomenal" da multiplicação e divisão; para isso, precisamos, como professores, dar atenção à extensão do sentido para ambas as dimensões, ou seja, o sistema de números e as diversas situações modeladas** (relação com o organograma apresentado no capítulo 1, que considera o sentido operatório, significado dos algoritmos e as situações modeladas). Podemos relacionar esta idéia de Greer, com o estabelecido no capítulo 2 em relação ao enunciado do problema e ao campo de enunciados. Mais especificamente, a importância do professor trabalhar conscientemente com esta idéia e não querer que os alunos dominem todos os enunciados sem uma articulação maior com o conceito trabalho. Para que isso realmente ocorra, torna-se necessário o trabalho consciente do professor sobre os enunciados dos problemas. O conteúdo cognitivo que este enfoca poderá possibilitar variações redacionais significativas na construção e elaboração dos conceitos matemáticos.

Uma outra questão importantíssima, levantada por Greer é sua afirmação de que não podemos generalizar os procedimentos adotados, a partir das operações de divisão e multiplicação com números naturais, para outro tipo de número. Isso porque várias pesquisas mostram que o tipo de número utilizado exerce grande influência sobre a facilidade ou dificuldade com que a operação solicitada pode ser identificada.

> *Os problemas em textos não evocam genericamente esquemas genéricos aos quais os números possam ser simplesmente inseridos, e representações instrutivas fundamentadas nessa suposição são simplesmente suspeitas. Até onde se possa dizer de crianças de que possuam tais esquemas, são "esquemas viciosos" (Anderson, 1984) ou "teoremas-em-ação" (Vergnaud, 1988). Para que esses se tornem "esquemas fortes", no sentido de Anderson, ou "teoremas em ação", é necessária uma*

> *apreciação da invariabilidade da operação sobre os números envolvidos, que é o ponto crucial da extensão do sentido para a multiplicação e divisão* (Greer, 1994:70).

Esta posição pode ser questionada, se trabalharmos na perspectiva de construção do sentido operatório de cada operação, pautando o trabalho com as operações no organograma apresentado no capítulo 1. Nesse organograma, trabalhamos com o sentido operatório, que é independente do tipo de número e o significado operatório dos algoritmos, que trabalha sobre os números e o processo de cálculo destes. Neste eixo, entra o tipo de número, mas, nas situações modeladas pela operação, o fundamental é o conceitual, ou seja, a identificação de que operação é necessária que seja feita e o registro numérico para sua resolução, estabelecendo o processo de conversão entre os registros de representação. Para isso, o aluno precisa saber identificar as idéias relativas à operação e saber executar os algoritmos necessários à sua resolução. Mas não é o algoritmo com o tipo de número que vai impedir o aluno de resolver o problema. Nesta perspectiva, o trabalho com a invariância do conteúdo cognitivo do enunciado do problema matemático, vai facilitar essa possível generalização. Logo, se o professor realmente trabalhasse na perspectiva de variações redacionais com o invariante no conteúdo cognitivo (neste caso, a operação de multiplicação), poderíamos ter uma outra perspectiva no ensino de matemática, mais especificamente na resolução de problemas aritméticos. Acreditamos que, fortalecendo o trabalho com vários enunciados de problemas, para o mesmo conteúdo, podemos ter uma amplitude maior das situações envolvidas nestes conceitos, facilitando, desta forma, a compreensão pelos alunos.

Baseado em Vergnaud, Greer apresenta cinco níveis de aplicação para a multiplicação e divisão, bem como cinco complexos conceituais que são:

> os **níveis de aplicação**:
> *1.Procedimentos informais de crianças e adultos, envolvendo cálculos contextualizados, com números inteiros.*
> *2.Aplicações que envolvam números não inteiros, derivados de inteiros, através de divisão (especialmente quantidades intensivas).*
> *3.Um leque de aplicações que envolvem decimais positivos tal qual conversões de medida para medidas, comparação multiplicativa etc.*
> *4.Extensão à álgebra, que (para o fechamento na divisão e subtração, respectivamente) necessita de extensão aos números*

> *racionais e aos números negativos (que podem ser - e por séculos o foram - manuseados na aritmética prática).*
> *5.Extensão para números complexos e suas aplicações na modelagem, notadamente na física.*
> **Já os** complexos conceptuais **são:**
> *1.Disposições retangulares, áreas retangulares, produto cartesiano, problemas combinatórios, produtos de medidas.*
> *2.Proporcionalidade,similaridade geométrica, proporcionalidade múltipla, análise dimensional.*
> *3.Comparações multiplicativas, relações parte - todo, mudanças multiplicativas, aumento, exponenciação.*
> *4.Mudança de unidade, conversão de medidas.*
> *5.Quantidade intensiva, relações, função linear* (Greer, 1994:72-73).

Podemos considerar os complexos conceituais, apresentados por Greer, como uma forma de pensarmos e propormos o campo de enunciado de problemas multiplicativos, pois estes serão formados a partir dos diversos sentidos operatórios apresentados em cada operação. Esta seria uma forma mais ampla do que as três categorias apresentadas por Vergnaud. Mesmo assim, ainda temos grandes diferenças para os enunciados de cada um dos complexos. Podemos observar isso, por exemplo, no primeiro complexo, que envolve tratamento relativo ao produto cartesiano apresentando enunciados distintos. Uma idéia é entender o produto cartesiano como um grande grupo de enunciados, que desencadeia subgrupos e envolve registros de representação retangulares, áreas, combinatória, volume, etc... Esta classificação já diferenciaria dois registros distintos: adição sucessiva e produto cartesiano, como idéia inicial e fundamental da multiplicação.

Para Greer, a função do ensino da aritmética seria capacitar as crianças a materializar situações e a entender a natureza do processo a ser modelado, que relaciona aspectos do mundo real com estruturas matemáticas.

A idéia básica de Greer é uma mudança do tipo de número para problemas que envolvem número difícil, como, por exemplo, frações ou decimais, que não possibilitam representações intuitivas, sugerindo que os números sejam mudados para números fáceis, possibilitando a resolução do problema. Nesta perspectiva, para o autor, a dificuldade é encontrada no tipo de número e não na variação redacional e, também, na idéia da representação intuitiva e não em representações construídas elaboradas para determinados conceitos, ou seja, representações semióticas. Entendemos que, se a dificuldade está no tipo de número, é necessário um trabalho sobre o significado operatório dos algoritmos, e não na mudança do número na resolução de problemas, pois esta é uma tarefa de conversão entre registros de representações e não de simples resolução numérica.

O autor estabelece que manter a invariância de propriedades das operações, pedagogicamente, seria uma modificação radical e auxiliaria muito as crianças no processo de resolução de problemas. Estas invariâncias seriam mais potentes, no ensino da multiplicação, que as representações em função da diversidade conceitual desta operação. Entendemos que esta posição pode ser um indicativo para o processo pedagógico, porém acreditamos que o trabalho com a variação redacional nos enunciados dos problemas envolveria tanto as invariâncias das propriedades, haja visto que explora o sentido da operação e os registros de representação, considerando que o processo de resolução de problemas passa por uma tarefa de conversão entre registros de representação.

3.4 Classificação de Judah L. Schwartz

Para Schwartz as operações de multiplicação e divisão são composições de transformação dos referentes, ou seja, compõem duas quantidades semelhantes ou diferentes para produzir uma terceira quantidade que é, em geral, diferente das duas originais. Neste sentido, Schwartz (1988) **aponta uma série de falhas em se introduzir a multiplicação como uma maneira eficiente de fazer adições sucessivas**. Ele dá uma abordagem na qual focaliza o tipo de referente em questão: uma quantidade extensiva e/ou intensiva. Na adição e na subtração, trabalhamos basicamente com quantidades extensivas, aquelas que podem ser contadas ou medidas diretamente, como, por exemplo, o número de biscoitos ou a altura de uma pessoa. Já nas operações de multiplicação e divisão, entra em jogo um tipo de quantidade que não é contada ou medida diretamente, a quantidade **intensiva,** que é uma quantidade contínua: peso do café, custo do café, preço do café. Descreve uma qualidade e quase sempre vem acompanhada pela palavra ***por***, ou esta está implícita. Não é somente escalar, pode ser vetorial. Mas é sempre uma relação entre quantidades extensivas, ou seja, é uma relação quantificável. É necessária a distinção destes dois tipos de quantidades, pois é a base para a classificação de Schwartz.

A quantidade **extensiva** pode ser representada como um ponto colocado na linha de número, mas a quantidade *intensiva* deve ser representada como um número infinito de pontos discretos que residem em uma linha reta no plano. É uma quantidade, não uma relação.

Enquanto na quantidade *extensiva* o referente é uma entidade simples (unidimensional); na quantidade *intensiva*, o referente envolve duas entidades (bidimensional), isto é, estruturas multiplicativas combinam duas magnitudes, com diferentes referentes, para produzir uma quantidade cujo referente não é o mesmo que o multiplicando ou que o multiplicador.

Schwartz explica que as quantidades intensivas possuem tipos diferentes, pois são formadas a partir das quantidades extensivas, podendo ser discretas ou contínuas, com as seguintes condições: discreta/discreta, relação entre dois conjuntos, (doces/bolsas); contínua/discreta ou discreta/contínua (galões/baldes ou pessoas/ano) e contínua/contínua (milhas /hora, g/cm^3).

Para o autor, os problemas de conversão de medidas, apresentados por Vergnaud, são problemas especiais de quantidades intensivas. **Além disso, os problemas tipo E x E = E são de formação de produto cartesiano, aqueles do tipo nBlusa x nSaia = nCombinação; largura x comprimento = área. Combinação e área não estabelecem relações entre duas quantidades extensivas, mas uma quantidade extensiva em seu próprio sentido**. Este referente é novo. Não é uma relação. Este fato implica na palavra ***dimensão***. Normalmente, dimensão em área é entendida como uma construção bidimensional, não podendo este resultado ser ordenado. Somente quando esta medida é considerada unidimensional, ou seja, cm^2, é uma outra unidade.

O autor afirma que a "*maioria dos problemas de multiplicação e divisão trabalhados na escola são do tipo intensiva X extensiva = extensiva, sendo trabalhado poucos problemas do tipo intensiva X intensiva = Intensiva e extensiva X extensiva = extensiva que é uma representação do produto cartesiano*" (Schwartz, 1988:46). O que significa o real trabalho com produto cartesiano nas séries iniciais? Seria realmente possível a criança resolver situações envolvendo esta idéia? A perspectiva de considerarmos subdivisões para o produto cartesiano não seria uma possibilidade de pensarmos um campo de enunciado de problemas mais potentes e significativos para o trabalho com a operação de multiplicação?

Uma outra questão importante, trazida por Schwartz (1988) para o processo pedagógico, é que seria interessante o professor fazer uma distinção clara entre as operações que resultam em composições de preservação de referente de quantidade (que são caracterizadas pelas operações de adição e subtração) e aquelas que modificam o referente, ou seja, as operações de multiplicação e divisão. Esta distinção se efetiva em função da semântica em que são modeladas as operações. Essa questão, trazida por Schwartz, é mais uma justificativa para o trabalho com o campo de enunciado de problemas e uma possibilidade de entendermos, centrarmos nossa discussão nos enunciados que exploram quantidades extensivas, enfocando as séries iniciais do Ensino Fundamental.

A distinção entre quantidade "intensiva" (I) e quantidade "extensiva" (E) também está baseada na análise dimensional. No caso de quantidade extensiva, o referente é uma única entidade (dimensão). Já a quantidade intensiva envolve um referente para duas entidades. Por exemplo, quando a pessoa fala 5 doces o referente são os doces **(uma entidade)**, uma quantidade extensiva (E); mas, quando a pessoa fala 60 quilômetros por hora, a quantidade é uma quantidade intensiva (I), porque os referentes são quilômetros e hora **(duas entidades)**. Com base nesta distinção, Schwartz define três categorias de problemas multiplicativos:

(a) ***Multiplicação de I x E***: Estes são os problemas mais comuns e que também podem ser apresentados como adição repetida quando pelo menos um dos números, o número E, é um inteiro. Estes problemas também correspondem ao *isomorfismo de medida,* de Vergnaud, considerando que a quantidade intensiva corresponde à relação da função. O resultado da multiplicação de quantidade E x I resulta em uma medida E, que é uma das medidas que aparecem na quantidade I. Por exemplo: 3 crianças vezes 4 bolas de gude por criança resulta na medida de bolas de gude. Este tipo de problema é semelhante aos problemas de mapeamento categorizados por Nesher.

(b) ***Multiplicação de E x E***: Esta é a multiplicação cartesiana, em que se multiplica uma medida E_1 por outra medida E_2, produzindo uma terceira medida E_3. Por exemplo: Se E_1 é o número de camisas e E_2 o número de calças, então E_1 x E_2 fornece uma medida E_3 extensiva nova, que é o número de possíveis combinações.

(c) ***Multiplicação de I x I***: Estes casos são muito comuns em ciência. Uma quantidade intensiva multiplicada por outra quantidade intensiva produz uma terceira quantidade intensiva nova. Por exemplo: N km por hora vezes M horas por dia dará uma medida de (N x M) km por dia.

Originalmente, Schwartz considerou a possibilidade de multiplicar uma determinada quantidade por uma quantidade escalar S de quantidades não dimensionáveis (S x E), mas ele se referiu depois à quantidade escalar como uma "quantidade intensiva em disfarce" (i.e., 3 cm por cm, etc....). Esta classificação de Schwartz auxilia nossa proposição, na perspectiva do sentido operatório. Podemos começar a delimitar dois sentidos bem gerais para a multiplicação: adição sucessiva e produto cartesiano (pensando nas quantidades envolvidas e na possibilidade de variações redacionais).

3.5 Classificação de Pearla Nesher

Esta autora é uma das poucas teóricas que traz a discussão dos enunciados dos problemas como um texto, ou seja, questões lingüísticas do texto, mediante uma análise proposicional do texto. Para a autora, não é a busca de palavras que caracteriza o texto, mas o trabalho com todo o texto. Para isso, usa como base três autores: Vergnaud, Schwartz e Fischbein, fazendo três estudos empíricos. O primeiro, enfoca a elaboração pelas crianças e a explicação de vários tipos de problemas de multiplicação; o segundo, trabalha com a consciência textual e lingüística das crianças em relação a este tipo de problemas; e um terceiro, que apresenta um estudo instrutivo, ou seja, o papel do professor.

Devemos chamar a atenção para a pesquisa de Nesher, que trabalha na perspectiva da elaboração de problemas pelos alunos, ou seja, os alunos acabam sendo produtores dos enunciados de problemas. Esta perspectiva é muito significativa, e acreditamos que os professores precisam reforçar este trabalho em sala de aula. Porém, não é a sistemática que ocorre no processo escolar e, **principalmente,** a tarefa de redação (produção de enunciado de problemas) envolve processos diferentes da tarefa de conversão (resolução do problema), já elencados no capítulo 2. Os alunos não são produtores dos seus textos (problemas), nem os professores, conforme podemos observar em várias pesquisas. O que ocorre, na maioria das vezes, é que os professores são os responsáveis por trazer os textos - enunciados que serão trabalhados em sala de aula, a partir dos livros didáticos.

Para Nesher, os problemas em aritmética têm sido trabalhados sobre a construção matemática e valores numéricos, em lugar das entidades textuais.

> *Trabalhos que lidam com a transição/*conversão *do texto para a matemática, ainda são poucos. Existem trabalhos neste sentido na última década em relação a elementos aditivos. Isto é surpreendente, pois a fonte principal das dificuldades para os estudantes reside na forma de transição do problema fornecido em linguagem natural para sua apresentação em linguagem matemática (Nesher, 1988:20).*

Essa afirmação acaba justificando e reforçando a diferença entre a tarefa de redação e a tarefa de conversão foco desta pesquisa. A estrutura proposicional de problemas multiplicativos é uma tentativa de identificar as condições lógicas para a boa formulação dos textos dos problemas de multiplicação e divisão. A autora descreve três tipos distintos de problemas multiplicativos, que já foram citados na presente pesquisa (os de Schwartz e Vergnaud), que não foram tratados do ponto de vista textual. A autora, a partir da seguinte classificação, tentou identificar a estrutura proposicional:

3.5.1 Regra de mapeamento

Os problemas de multiplicação que descrevem uma ***regra de mapeamento*** são considerados por todos os investigadores como sendo os mais fáceis. Alguns chamam de "adição repetida". Como no caso da adição, um problema de multiplicação, por mais simples que seja, consiste em três proposições na estrutura subjacente. As condições lógicas, para um texto de **multiplicação** elementar bem formado, podem ser formuladas levando em consideração os três fatores seguintes:

> *1. O primeiro fator declara em termos gerais que existem n1 x's (estantes) para cada y's (livros) e que há um predicado binário - P que leva x e y como argumentos [Tenha (estantes, livros)].*
> *2. O segundo fator apresenta uma regra de mapeamento geral: diz que para todo o x's (estantes), se existe y's (livros) isso cumpre o predicado binário P(x, y), então há n2 y's exatamente (8 livros em cada estante). Isto descreve um mapeamento entre cada estante e 8 livros, típico deste tipo de problema.*
> *3. O terceiro fator pergunta quantos y's (livros) há para cada x's (estantes) que mantém este predicado binário. Em um problema de divisão este fator torna-se parte da determinada informação. Também há uma suposição implícita sobre a singularidade*

> *deste mapeamento que diz que o mapeamento de y's para x's consiste em conjuntos deslocados de y's a cada x (i.e., os livros em uma estante são distintos dos livros nas outras estantes, mas isto nunca é feito explicitamente na formulação verbal do texto)* (Nesher, 1988:21).

Para os problemas de multiplicação e divisão, assim como os de adição e subtração, tem-se a mesma estrutura lógica subjacente. Nesher se refere a esta estrutura subjacente como "multiplicativa" e acrescenta que a diferença entre textos de multiplicação e divisão é que, nos últimos, o componente de informação sempre contém o fator que será o componente de pergunta. Por exemplo: *"Há 40 livros ao todo nas estantes no quarto. Daqui pode divergir a informação. Podem (1) dar a regra de mapeamento: "Dan pôs 8 livros em cada estante" e perguntar " quantas estantes há no quarto?" Ou podemos (2) informar isso " há 8 estantes no quarto de Dan" e perguntar " quantos livros põe Dan em cada estante?"* (a regra de mapeamento).

Estas duas descrições distintas resultam em dois tipos de problemas de **divisão** (quotização e partição), que derivam ambos do fato de que os dois fatores que entram nos problemas de multiplicação na regra de mapeamento são assimétricos. A diferença entre problemas de partição e de quotização é, como aparecem na estrutura subjacente dos problemas multiplicativos, os componentes de pergunta do fator 1 (a descrição existencial do x's) ou do fator 2 (a regra de mapeamento). Explorando os mesmos itens léxicos, neste caso, estantes e livros.

3.5.2 Comparação multiplicativa

Um exemplo de tal problema é o seguinte: *"Dan tem 5 bolas de gude. Ruth tem 4 vezes tantas bolas de gude quanto Dan. Quantas bolas de gude tem Ruth?"*

A forma geral deste tipo de problema pode ser descrita pelos três seguintes fatores:

> *1) O primeiro fator diz que há um conjunto de referente que contém n1 y's (Dan tem n1 bolas de gude).*
> *2) O segundo fator diz que há uma função específica que traça cada elemento do referente fixado de y's a um conjunto comparado de x's (para cada bola de gude de Dan, há 4 bolas de gude de Ruth, exatamente).*

> *3)O terceiro fator, que é o componente de pergunta em problemas de multiplicação, pergunta quanto x's há no jogo comparado (quantas bolas de gude têm a Ruth)?* (Nesher, 1988:22).

Também há condições implícitas para serem cumpridas sobre a singularidade da função de y para x. Esta análise descreve a noção de **função escalar** entre o número de objetos do referente e o número de objetos do conjunto comparado. Para a criança é necessário distinguir que a função (sobre uma determinada formulação verbal) tem uma direção que não é intercambiável. Os objetos comparados não precisam ser do mesmo tipo. A pessoa pode comparar o número das bolas de Dan com o número dos selos de Ruth. Característica deste tipo de problema é a formulação da função matemática (y = f(x)) em idioma ordinário, que usa uma expressão como: ***"x tem tantas vezes n tanto quanto y"***. Isto é sintaticamente muito complicado e é aprendido como uma expressão holística que denota a operação de multiplicação; torna-se uma sugestão verbal para formulação de problemas multiplicativos. A distinção de que x e y não são intercambiáveis e que os papéis dos referentes comparados não são simétricos, como pode ser pensado incorretamente; normalmente é pouco enfatizada durante o processo ensino-aprendizagem. Este tipo de reflexão também é levantado por Maza, nos problemas que classifica de comparação.

3.5.3 Multiplicação cartesiana

Uma terceira classe de problemas, que é menos conhecida e trabalhada nos primeiros anos escolares, envolve a multiplicação de duas dimensões diferentes para adquirir uma terceira[25]. Como exemplo, temos: *"Ruth tem 4 saias e 3 blusas. Quantas combinações diferentes de saia e de blusa pode fazer a Ruth?"*

> *Este tipo de problema também consiste em três fatores onde os primeiros dois fatores descrevem dois conjuntos independentes de objetos (neste exemplo, o número de blusas que a Ruth tem (x's) e o número de saias que a Ruth tem (y's)).*
> *O terceiro fator é o componente de pergunta e pergunta quanto z's há onde z é uma multiplicação cruzada entre cada x's e cada*

[25] Isso pode ser visto no capítulo 4, no levantamento das situações multiplicativas apresentadas nos livros didáticos de séries iniciais e nas situações problemas propostas pelos professores.

> *y's (para cada blusa e saia há uma combinação); este z que é um predicado ternário único* (Nesher, 1988:23).

Formalmente, e também empiricamente, este tipo de problema pode ser reduzido a um problema de predicado binário do tipo regra de mapeamento, quando, está definido entre, por exemplo, cada saia e o número de blusas que podem combinar, ou seja, quando se fixa uma das quantidades envolvidas.

O primeiro tipo de problema, regra de mapeamento, é considerado como o mais fácil. A função de duas determinadas quantidades é tomada diretamente, e nenhuma elaboração adicional do texto é necessária. A estrutura deles pode ser vista como um procedimento repetido de uma maneira dinâmica que poderia ser reduzida à adição repetida, repetindo-se n vezes (primeiro predicado) o número (n2) do y's (segundo predicado) atingindo o número total de y's. Os professores, nas séries iniciais, são inclinados a omitir as distinções predicativas exatas e só se referir a nl vezes n2 y's e a evitando a necessidade de falar sobre o x's e a regra de mapeamento. Nesse processo de ensino-aprendizagem, tais problemas de multiplicação tornam-se n2 + n2 + n2. . . (n vezes), assim sendo entendidos como uma operação de adição repetida, em lugar de uma operação de multiplicação binária.

O segundo tipo de problema (problemas de comparação) pede considerações de ordem. Mas a relação assimétrica embutida no problema só é mencionada sutilmente na estrutura do segundo fator, quer dizer, "A tem n vezes quanto (ou menos que) B". Caso contrário, A e B parecem simétricos. A direção desta expressão, às vezes, é difícil de distinguir e isto poderia causar dificuldade adicional com este tipo de problema. Compare a oração "A tem n vezes tantos quanto B" com "B tem n vezes tão pouco quanto A". Ambas têm a mesma direção subjacente (que A tem mais que B), mas poderia ser confuso e difícil para a criança fazer tal abstração.

O terceiro tipo de problema (multiplicação cartesiana) esconde uma suposição implícita que não é expressa explicitamente no texto - enunciado do problema, mas deve ser levada em conta na sua resolução. A suposição é que cada x's é multiplicação cruzada com cada y's. Na ausência de uma descrição exata, a criança poderia pensar em todos os tipos de combinações entre x's e y's, inclusive a combinação aditiva. A similaridade deste tipo de problema para a adição se torna mais clara até quando são consideradas as primeiras duas proposições, que são idênticas em estrutura, aos problemas aditivos do "tipo de associação". Podemos entender, que, se trabalharmos na perspectiva da variação redacional do texto - enunciado, esta dificuldade de identificação semântica poderia ser superada.

Para Nesher, *"tanto Vergnaud como Schwartz fazem uma Análise dimensional, porém Vergnaud considera a relação de multiplicação como uma relação quaternária, enquanto que Schwartz considera a relação de multiplicação como ternária"* (1988:24).

Vergnaud (1988) e Schwartz (1988) consideram a formulação de problemas multiplicativos simples como parte de uma multiplicação mais ampla no campo conceitual que envolve conceitos de relação, números racionais, espaço-vetor, etc.... Porém, não se aprofundam nestes problemas "simples", que fazem parte do cotidiano escolar das séries iniciais, e, por sua vez, fundamentam a ampliação dos demais conceitos. Nesher (1988) aborda, em seu artigo, problemas de multiplicação simples, em função de dificuldades apresentadas por crianças no processo ensino-aprendizagem. Esta posição reforça a necessidade de pesquisas envolvendo tais problemas nas séries iniciais.

Em relação aos modelos comportamentais básicos de Fischbein, a autora coloca que estes foram deduzidos do nível de dificuldade dos problemas e do padrão de erro demonstrado pelas crianças. Eles não foram deduzidos com base na análise do texto ou na situação e dimensões em questão, mas com base no tipo de número incluído nos problemas. Este paradigma cria algumas dificuldades, elencadas por Nesher: o conjunto de problemas que incluem a tarefa de Fischbein só era controlado com respeito ao tipo de número e não com respeito a muitas outras variáveis, como formulação lingüística, léxico, contexto, e estrutura semântica, todos as quais foram considerados fatores cruciais na pesquisa da formulação de problemas aditivos. Em razão destas variáveis, não serem controladas nas experiências, é difícil atribuir o nível de desempenho, somente nestes problemas. O nível de desempenho poderia, simplesmente, ser atribuído a muitos outros fatores não controlados, concluindo a autora que a interpretação de Fischbein é seletiva.

Nesher chama atenção para os modelos implícitos intuitivos, que apresentam a adição sucessiva como sendo a concepção dos alunos para a multiplicação. Esta concepção poderia estar pautada pelos modelos pedagógicos que ensinamos na escola. Ou seja, Fischbein observou ***o modelo de adição repetida para a***

multiplicação, porque a instrução escolar introduz a multiplicação usando este modelo. É uma questão em que devemos pensar, pois é uma prática adota mundialmente em qualquer escola, principalmente para a introdução da multiplicação. Não seria este um problema a ser enfrentado, com a exploração da idéia do sentido operatório? Ou seja, quando introduzimos as noções da operação de multiplicação, não seria necessário explorarmos vários sentidos desta operação na busca de construção efetiva do sentido operário? Isso, em nossa pesquisa de mestrado, já mostrou ser possível e, principalmente, significativo aos alunos para o entendimento e ampliação do conceito da operação.

Para Nesher, os problemas aprendidos na escola são "criaturas" especiais:

> *Eles são formulados por elementos de idioma natural que devem ajudar a criança na sua compreensão. Todavia, eles não são textos no sentido regular da palavra, porque eles derivam de e supostamente correspondem, a uma estrutura matemática subjacente. Isto lhes torna um gênero muito especial com o qual as crianças em fase escolar se ocupam durante muitas horas, freqüentemente com pouco sucesso. É plausível atribuir alguns obstáculos de aprendizagem a nossos modos de ensino. A sabedoria de um uso extenso de problemas textuais na escola é discutível. Alguns apóiam o uso contínuo de problemas e afirmam que eles são os meios pelos quais uma criança aprende a aplicar matemática no mundo real. Em outra oportunidade (Nesher, 1980) eu argumentei que as verdadeiras aplicações não aparecem nos problemas estereotipados ensinados nas escolas. A escola só os usa porque lidar com situações do mundo-real é muito mais complicado; e as escolas, em sua longa história de sabedoria pedagógica acumulada", produziram situações fáceis, semi-realistas que representam classes de aplicações diferentes para uma determinada estrutura matemática* (1988:38).

Uma das tarefas principais dos pedagogos, na visão de Nesher, seria descobrir o que constitui uma classe distinta de aplicações e identificar suas características. Identificamos, até aqui, três classes principais de problemas de multiplicação, com nomes diferentes, não havendo acordo nas características essenciais destas classes de problemas. Podemos dizer então que a questão não é a identificação e acumulação de variáveis, mas a determinação de quais são as essenciais, com o maior poder explicativo, com maior alcance para as classificações, possibilitando a identificação de um campo de enunciado de problemas através da implementação de variáveis redacionais, na perspectiva de elaboração de representações intermediárias entre o registro textual e o registro numérico necessário à resolução do problema.

O efeito dos fatores lingüísticos demonstrados no estudo de Nesher (1988) nos leva a acreditar que os dados textuais com os quais a criança se confronta primeiramente, quando lhe é fornecido um problema, são cruciais. Isto conduz a uma análise proposicional, que é uma análise completa do texto que descreve uma determinada situação e não somente a busca de palavras chaves isoladas, os quais poderiam caracterizar a operação a ser realizada. A conscientização da estrutura lingüística (semântica e sintática) de um texto poderia impedir que os professores caíssem na armadilha de sugestões verbais e ao, invés disso, pudessem usar a informação lingüística completa para extrair a representação do enunciado e as dimensões em questão. Os professores deveriam saber e poderiam ensinar para os estudantes como assimilar a situação-modelo de um determinado texto e a importância de uma análise dimensional completa. Para isso, a teoria de Duval, no sentido da identificação de um campo de enunciado de problemas, pode viabilizar esta diversidade de sentidos operatórios e a complementaridade de diversos enunciados na perspectiva da construção do conceito.

3.6 Classificação de Terezinha Nunes e Peter Bryant

Outros teóricos, que trabalharam com a classificação da estrutura multiplicativa, foram Nunes e Bryant[26]. Para estes autores, existem muitas outras razões para a compreensão da multiplicação e divisão do que calcular quantidades.

Para Nunes e Bryant (1997:143), o ***raciocínio aditivo*** se refere a situações nas quais objetos ou conjuntos de objetos são reunidos ou separados. Já o ***raciocínio multiplicativo*** são situações de correspondência um-para-muitos, relações que envolvem relações entre variáveis, e situações que envolvem distribuição, divisão e divisões ao meio. Esses autores apresentam três classificações para a estrutura multiplicativa, as situações de correspondência um-para-muitos, as situações que envolvem relações entre variáveis ou co-variações e as situações que envolvem distribuição e cortes (splits) sucessivos. Passamos a caracterizar cada uma delas.

---

[26] Idéias baseadas no livro: **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre, Artes Médica, 1997. Principalmente capítulos 7 e 8.

3.6.1 Situações de correspondência um-para-muitos

Existe alguma continuidade em relação às situações multiplicativas e as situações aditivas (1 carro para quatro rodas, uma mesa com seis cadeiras, etc...). Porém, os autores elencam quatro diferenças básicas (Nunes e Bryant,1997:143-144):

- a situação multiplicativa envolve uma relação constante de correspondência um-para-muitos entre dois conjuntos. Esta correspondência é invariável na situação, um tipo de invariável que não está presente na situação aditiva. Esta correspondência um-para-muitos é base para o conceito de ***proporção***;
- como segunda diferença, temos que as ações efetuadas para manter uma proporção invariável não são unir/separar, mas ***replicação*** e seu inverso. Esta replicação envolve somar a cada conjunto a unidade correspondente para o conjunto, de modo que a correspondência invariável um-para-muitos seja mantida. O inverso de replicar é remover unidades correspondentes de cada conjunto. Se removermos um carro, devemos remover quatro rodas, a fim de mantermos a proporção 1:4 entre carros e rodas;
- a terceira diferença é que uma proporção permanece constante quando a replicação é efetuada, mesmo se o número de carros e o número de rodas muda. Esta é a razão por que uma proporção não representa o número de objetos em qualquer um dos conjuntos, mas é uma expressão da **relação** entre os dois conjuntos;
- a quarta diferença é o **novo sentido de número,** que pode ser identificado no número de vezes que uma replicação é efetuada. Este número é denominado ***fator escalar***. Não se refere ao número de carros ou rodas; ele não se refere ao número de objetos nos conjuntos, mas ao número de replicações relacionando dois tamanhos estabelecidos do mesmo tipo. Para que a proporção permaneça constante, o mesmo fator escalar deve ser aplicado a cada conjunto.

As situações de correspondência um-para-muitos envolvem o desenvolvimento de dois novos sentidos de números: a ***proporção***, que é expressa por um par de números que permanece invariável em uma situação, mesmo quando o tamanho do conjunto varia, e o ***fator escalar***, que se refere ao número de replicações aplicadas a ambos conjuntos, mantendo a proporção constante.

3.6.2 Situações que envolvem relações entre variáveis, ou seja, co-variação

Estas situações acabam levando o número a ter um novo sentido, nas quais duas (ou mais) variáveis co-variam como uma conseqüência de convenção ou de causa. ***Convenção***, para os autores (Nunes e Bryant, 145), significa "co-variação concordada", que pode ser alterada por novos acordos (um quilo de açúcar custa tanto, meio quilo custa...). ***Causa*** se refere ao impacto de uma variável sobre outra; não esperamos ser capazes de mudar relações causais por concordância (pendurar um peso de 20g estica 15cm, pendurando 10g estica 7,5cm).

Nunes e Bryant (1997) afirmam, que é possível usar o mesmo tipo de operação, a replicação e seu inverso, ao resolver problemas sobre relações entre duas variáveis e problemas que envolvem correspondência um-para-muitos entre conjuntos. A relação entre as duas variáveis não é alterada pelo número de replicações, como uma semelhança entre este tipo de situação multiplicativa e o primeiro, ou seja, situações de correspondência um-para-muitos.

Assim como temos semelhanças entre estas duas situações, temos duas diferenças, que, para os autores, são:

> *- Primeiro, os números no segundo tipo de situação se referem a* ***valores sobre variáveis*** *e não a conjuntos. Os conjuntos são feitos de elementos descontínuos e as variáveis são contínuas. Portanto, valores fracionais emergem naturalmente no contexto de variáveis enquanto somos confinados a números inteiros ao falar sobre conjuntos(meio carro tem duas rodas é absurdo enquanto meio quilo de açúcar custa 0,80 é possível)....*
> *- Segunda diferença, entre raciocínio multiplicativo em uma correspondência um-para-muitos e em co-variação de situações variáveis resulta do modo como as relações invariáveis são expressas... Nas situações de um-para-muitos a relação é expressa por uma proporção. Já nas situações referentes a variáveis diferentes é necessário falar de* ***um fator, uma função ou uma terceira variável conectando as duas variáveis****. Ou seja, é a relação entre as duas variáveis, dada na questão* (Nunes e Bryant, 1997:146).

Os autores conceitualizam as quantidades e as relações entre estas, em duas classes: as **quantidades intensivas**, como sendo as quantidades que se referem às relações em vez da quantidade real, em contraste com as **quantidades extensivas**, que se referem à soma total, ou seja, quantidade total. Mesma perspectiva usada por Schwartz, apresentada neste capítulo.

Os autores fazem uma observação para os problemas de ***proporções múltiplas***, apresentados por Vergnaud, chamando a atenção para a maior complexidade destes. Porém, os princípios, nas proporções múltiplas, são os mesmos das situações de co-variação. Podemos dizer, baseados nestes autores, que, mesmo quando as crianças entendem a correspondência um-para-muitos, elas provavelmente precisam construir alguns conceitos diferentes, a fim de lidar com situações nas quais uma relação entre variáveis está envolvida. As novidades em lidar com relações entre variáveis referem-se a ***frações de unidades de medida*** e a um tipo novo de sentido de número que expressa a relação entre as duas variáveis, ***um fator, uma função ou uma quantidade intensiva*** (Nunes e Bryant, 1997: 147).

3.6.3 Situações que envolvem distribuição e cortes (splits) sucessivos

Para os autores, distribuir envolve a distribuição eqüitativa de um conjunto entre um número de receptores (por exemplo, doces por crianças) que por sua vez, envolve um novo raciocínio multiplicativo. É diferente da adição e subtração, porque ela estabelece uma relação multiplicativa entre dois ou mais conjuntos. As relações parte-todo da distribuição e divisão consideram três elementos: o tamanho do todo, o número das partes e o tamanho das partes, que deve ser o mesmo para todas as partes.

A distribuição pode apresentar algumas dificuldades para as crianças, em relação à correspondência um-para-muitos, por três motivos: o primeiro, é que a ação da distribuição é o ponto de partida e o aspecto mais básico e óbvio da partição, enquanto esta ação está no passado para a correspondência um-para-muitos. O segundo, é que, na distribuição, as crianças precisam enfrentar as relações entre três conjuntos (variáveis), existindo uma relação direta e inversa entre estas variáveis. *"Portanto, há relações novas a serem entendidas com a distribuição e cortes sucessivos que não estão presentes na situação de correspondência um-para-muitos, na qual a proporção é fixa desde o início"* (Nunes e Bryant, 1997: 148). Passo básico para ir além da atividade simples de distribuir até a compreensão da divisão. Um terceiro motivo é que a divisão por distribuição pode resultar em frações, enquanto correspondências um-para-muitos são ligadas a números inteiros. *"As frações não são somente um tipo novo de sentido de número, mas também um tipo novo de número"* (Idem, 148).

Outra diferença entre a distribuição e a divisão com correspondência um-para-muitos e situações de co-variação surge de ações e operações efetuadas nestas situações diferentes.

> *A correspondência um-para-muitos e situações de co-variação têm em comum o fato de que a ação básica que liga diversos pares números é a replicação (ou seu inverso). À medida que o fator escalar (ou o número de reproduções) muda, a relação entre os conjuntos ou entre as variáveis permanece constante: há uma taxa constante nas situações de correspondência um-para-muitos e uma função constante (ou fator) nas situações de co-variação* (Idem, 149).

Quando a divisão é desempenhada sucessivamente, em um conjunto ou objeto, estas divisões sucessivas provocam uma transformação na relação entre o todo e as partes: idéia de diagrama de árvores (sugerido por Confrey-1994: apud Nunes e Bryant, 1997:149). Cortes sucessivos e divisões sucessivas possuem o mesmo significado para os autores, lembrando que há três tipos de sentidos de número para estas divisões sucessivas: o número de cortes (ou divisões), o número de partes em cada divisão e o tamanho das partes.

Segundo Nunes e Bryant, Confrey apontou que divisões sucessivas claramente diferem das situações multiplicativas precedentes, de duas formas: primeiro, porque há um sentido de número novo que indica a **taxa de transformação**; segundo porque o resultado de tais cortes difere do resultado da replicação. A replicação dá uma progressão aritmética. Existem três valores a serem considerados: o total, o número de receptores e a quota (o tamanho da distribuição).

> *Uma série de divisões ou cortes sucessivos mostra uma progressão que difere das situações de multiplicação precedentes. O número de divisões sucessivas não tem o mesmo sentido que o número de replicações sucessivas: com a replicação não há transformação na relação entre as variáveis, enquanto que com a divisão há transformação na relação parte-todo* (Nunes e Bryant, 1997:149-150).

Os autores afirmam que existe uma ligação entre o raciocínio multiplicativo e aditivo, assim como entre a divisão e a subtração, principalmente em relação ao cálculo que pode ser feito. Porém, diversos conceitos novos emergem no raciocínio multiplicativo, que não estão presentes no aditivo, como, por exemplo, a idéia de:

> *- PROPORÇÃO é uma forma nova de sentido de número expressando uma situação de correspondência um-para-muitos. Uma proporção é expressa não por um número, mas por pares de números. A fim de manter a proporção fixa e acrescentar mais elementos, replicar em vez de juntar é a ação a ser efetuada. O número de replicações é conhecido como um fator escalar".*
>
> *-... no que se refere à relação entre duas variáveis, um sentido de número novo emerge, um FATOR, FUNÇÃO OU UMA QUANTIDADE INTENSIVA CONECTANDO AS DUAS VARIÁVEIS. Situações multiplicativas que envolvem a relação entre variáveis podem tornar-se mais complexas à medida que o número de variáveis nas situações aumenta. ...*
>
> *-... outro tipo de ação, a DISTRIBUIÇÃO, envolve uma nova visão das relações parte-todo, que difere de tais relações em situações aditivas. Na distribuição, há três valores a serem considerados: o total, o número de receptores e a quota (ou o tamanho da distribuição). A quota e o número de receptores estão em relação inversa um com o outro: enquanto um cresce o outro diminui. A distribuição também envolve um outro tipo novo de número: as frações...* (Nunes e Bryant, 1997:151).

No entendimento destes autores, há uma tendência de vermos a multiplicação de forma bastante estreita, como sendo intrinsecamente relacionada ao conceito de proporcionalidade, sendo que este conceito, segundo Piaget, só é dominado aos 10/11 anos. Para eles, a idéia inicial de multiplicação é a de correspondência um-para-muitos, desenvolvimento do esquema de correspondência e seu uso em inferências transitivas. Piaget considera que, se a criança pode entender correspondência termo-a-termo e transitividade, deve também ser capaz de captar correspondência de um-para-muitos.

Para resolver problemas de multiplicação quantitativamente, as crianças precisam organizar sua forma de contagem de uma outra forma, precisando efetuar replicações e saber como contar as unidades apropriadas em cada um dos conjuntos (isso reforça o que elencamos no primeiro capítulo, em relação ao sentido operatório, e o que trabalhamos na dissertação de mestrado). Nunes e Bryant apresentam algumas atividades realizadas por Steffe em que aparecem problemas do tipo "*Maria tem três saias e quatro blusas diferentes; quantos trajes diferentes ela pode vestir, mudando suas saias e blusas?*", sendo que estes são classificados como problemas do tipo um-para-muitos, **porém mais complexos**.

Por que mais complexos? A explicação dos autores está baseada em Nesher (1988) por duas razões: primeira, o problema envolve dois conjuntos básicos (saias e blusas) e um terceiro (trajes - combinação dos dois primeiros); segunda, a correspondência um-para-muitos não é explicitamente identificada na formulação verbal. Aqui entra a questão da organização redacional e, principalmente, o trabalho com os diversos sentidos da operação. Este tipo de enunciado de problema é classificado como produto cartesiano e todos os autores trabalhados até agora chamam a atenção para a sua complexidade.

As conclusões apresentadas pelos autores, em relação à habilidade das crianças resolverem problemas quantitativos que envolvem situações de correspondência um-para-muitos, claramente indicam que resolver problemas com números absolutos é muito mais difícil do que raciocinar sobre relações. As crianças novas, até os oitos anos, podem resolver problemas de um-para-muitos como correspondência simples. No entanto, somente aos 9 anos as crianças reconhecem as correspondências um-para-muitos implícitas nos problemas de produto cartesiano mais complexos. Seria isso realmente tão específico em termos de idade, ou a intervenção pedagógica poderia modificar esta situação?

Em relação a esta questão, Nunes e Bryant se posicionam na perspectiva de que a escola pode e deve trabalhar com problemas envolvendo relações de multiplicação antes de quantificar. Esta exploração das relações, sem quantificação aumenta a percepção das crianças em relação à correspondência um-para-muitos. Outra questão é que as crianças podem trabalhar em sala de aula não somente com materiais completos, mas sim com amostras de materiais, necessitando a ampliação do raciocínio matemático para além do que elas podem representar concretamente. Ou seja, fazer uso da idéia de abstração reflexionante[27].

As dificuldades das crianças em proporções de co-variação acabam levando os pesquisadores a tornar os problemas mais familiares; porém, mesmo assim as crianças não obtêm sucesso na solução (Nunes e Bryant,1997:164-165). Isso reforça o que Duval afirma sobre as modificações nos fatores extrínsecos. Os autores chamam atenção para as situações familiares e as situações matemáticas familiares. Para Nunes e Bryant, as pesquisas envolvendo problemas relativamente familiares para as crianças não são, necessariamente, questões que elas resolvem por cálculo em suas vidas cotidianas. Pesquisas adicionais indicaram que quando as situações fazem parte de

[27] Sobre o tema abstração reflexionante ver livro: PIAGET, J. **Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais**. Porto Alegre, Artes Médicas, 1995.

práticas cotidianas, nas quais os números são importantes e o cálculo é incomum, o desempenho parece ser consideravelmente melhor.

Mas ainda fica uma pergunta: por que os jovens falham em adotar soluções funcionais? Duas razões são apresentadas pelos autores: uma, eles não entendem as idéias matemáticas da lógica das relações funcionais, e, de fato, isso é o que foi sugerido por Piaget; a outra eles não entendem o suficiente sobre o conteúdo do problema, ou seja, podemos dizer que faltaria para os alunos o sentido operatório. A solução encontrada por Nunes e Bryant para este problema foi buscar situações significativas da vida cotidiana que possibilitassem estudar o desenvolvimento do conceito de relações funcionais. Acreditamos, porém, que somente este procedimento não garante a construção do conceito, como afirma Giardinetto[28] em relação a matemática escolar e à matemática da vida cotidiana.

Existem diferenças entre o significado do conhecimento sobre o conteúdo de um problema e o da instrução matemática para o desempenho das crianças em problemas funcionais. Podemos relacionar esta posição dos autores com o que Duval identifica nas Situações de Leitura, trabalhadas no capítulo anterior, principalmente em relação à distância do conhecimento do leitor em relação ao conteúdo cognitivo explorado no texto. Estas distâncias podem, em muitas situações, ser suficientes para a impossibilidade de resolução de certos problemas propostos em sala de aula.

Outra conclusão importante de Nunes e Bryant para esta pesquisa, em relação às implicações para o processo ensino-aprendizagem de matemática, é que os problemas trabalhados nas escolas e nos livros didáticos, considerando as reais proporções, são mais uma desculpa às crianças para usar a aritmética do que um conteúdo a ser trabalhado com elas. Ou seja, os enunciados dos problemas, na realidade, acabam sendo uma outra forma de as crianças realizarem algoritmos, não existindo um trabalho específico por parte dos professores, sobre o processo de resolução de problemas (conversão) e sobre a elaboração de enunciados de problemas apresentados em sala de aula (redação).

---

[28] GIARDINETTO, J.R.B. **Matemática escolar e matemática da vida cotidiana**. Campinas, SP: Autores Associados, 1999.(Coleção Polêmicas do Nosso Tempo; v.65)

3.7 Classificação de Carlos Maza

O autor Carlos Maza trabalha com a idéia de ***campos de enunciados de problemas ou categorias de problemas***, pois acredita que:

- a resolução é distinta e de diferentes níveis de dificuldades para cada tipo de problema; e
- ao considerarmos distintas as formas de resolução, as destrezas e conhecimentos que se colocam em cada problema, diferem e permitem desenvolver um tratamento das operações mais flexíveis e de mais amplo nível conceitual (Maza, 1991:25).

Para as situações multiplicativas Maza, propõe quatro tipos de categorias de problemas: ***razão, combinação, comparação e conversão***.

3.7.1 Os problemas de razão e combinação

Para Maza os problemas de razão levam em consideração a idéia de adição sucessiva e os problemas de combinação levam em consideração a idéia de produto cartesiano, porque têm uma combinação de elementos dos dois conjuntos originais. **E são os mais difíceis** de serem resolvidos e entendidos.

O autor argumenta que os problemas de razão podem ser resolvidos, inicialmente, por adições sucessivas. No entanto, os de combinação requerem um conhecimento mais amplo da operação de multiplicação. Todas as investigações indicam que o distinto papel, que caracteriza a adição sucessiva, o multiplicando e o multiplicador, se constrói de um modo paulatino, a partir de exercícios de soma repetida de uma quantidade consigo mesma. Se a multiplicação se constrói a partir de adição sucessiva (sem que o seja), a aprendizagem dos problemas de razão será mais significativa, no sentido de que envolve o conhecimento que deve aprender-se, com o que já se tem anteriormente. Nos problemas de combinação não é assim, pois é necessária uma concepção nova de uma nova operação.

Torna-se necessário considerar o caráter da operação correspondente a cada tipo de problema. Nos de razão, se dispõe de uma quantidade inicial, que vai se combinando à medida que se repete, sucessivamente, um número de vezes (caráter unitário). Os problemas de combinação respondem a um modelo binário. Envolve duas quantidades iniciais, ambas do mesmo nível/tipo, devendo ser consideradas as duas, simultaneamente, para resolver o problema. A preferência dos alunos, pela concepção unitária, pode ser entendida no sentido desta implicar maior simplificação mental na compreensão da operação (Maza, 1991:28).

Os problemas de razão são mais simples que os de combinação por razões conceituais. No entanto, devemos lembrar que as duas idéias, razão e combinação, respondem à mesma operação, devendo ser ensinados os dois tipos, trazendo duas conseqüências para **o professor:**

> - *Que, inicialmente, a multiplicação não se conceba como uma operação única que resolve uma série de problemas. A este conhecimento se chega depois de conceber distintos tipos de multiplicação: a que resolve o primeiro problema envolvendo adições sucessivas e em segundo resolve problemas de combinatória;*
> - *Que, para conseguir esta unificação conceitual da multiplicação, se deve estender laços entre ambos problemas, laços que permitam ao aluno descobrir que as distintas formas de resolvê-los são, na realidade, uma só. Um instrumento essencial para ele serão as representações gráficas do tipo matricial* (Maza, 1991:28).

Cabe, aqui, lembrarmos do trabalho que realizamos na pesquisa de mestrado, quanto à exploração do sentido da operação e do significado operatório dos algoritmos, quando propusemos várias atividades utilizando registros de representações na forma de matriz. Este registro de representação foi o que apresentou maior dificuldade para os alunos; porém foi o que fez os alunos pensarem multiplicativamente. Sem este sentido, é impossível resolver situações multiplicativas que extrapolam a idéia de adição sucessiva. Além disso, podemos perceber a necessidade de representações intermediárias entre o registro textual e o registro numérico, para enunciados não-congruentes.

Para os problemas de combinação, o autor apresenta dois tipos de solução, ou estratégias, que são:

- estratégias iterativas, ou seja, utilizando adições e subtrações sucessivas; e
- estratégias diretas, resolvendo por multiplicação direta, ou seu inverso.

As **estratégias iterativas** apresentam três vantagens:

> *- Os problemas de combinação serão resolvidos por um procedimento conhecido previamente (a reiteração) com o qual se facilitará a resolução;*
> *- A forma de representação preferencial será a de rede matricial que resulta ser a representação que melhor une as estratégias iterativas com as multiplicativas;*
> *- Na soma, o conhecimento que se adquire será mais significativo, no sentido de unir mais adequadamente o conhecido (adição ou subtração reiterada) com aquele que se tem que conhecer (estratégias diretamente multiplicativas)* (Maza, 1991:54).

Um exemplo de problema elencado por Maza para exemplificar as situações de combinação é *"Em um pequeno campo quadrado se plantaram macieiras em 5 filas e 3 colunas. Quantas árvores se plantaram no total do campo?"*

É um problema de combinação, pois temos quantidades E por E (5 árvores de um lado e 3 árvores de outro). Porém também pode ser interpretado como um problema de razão ou de comparação, se **modificarmos sua redação,** por exemplo: *"Em um pequeno campo quadrado se plantou uma fila de 5 macieiras. Logo depois plantamos mais duas filas. Quantas macieiras se plantaram no total?"* Podemos observar que esta modificação no enunciado acarreta uma modificação no campo do enunciado, ou melhor, modifica o sentido operatório. Nossa proposta é de que a variação redacional modifique o enunciado, permanecendo com o mesmo sentido operatório.

Para Maza, a forma mais simples de representação é o desenho figurativo abstrato dos elementos em jogo. A própria disposição proposta (linha por coluna) conduz a uma rede matricial que pode resolver-se por adições sucessivas ou por meios multiplicativos diretos. Podemos lembrar, aqui, do proposto por Duval com os registros de representação e sua importância nos enunciados de problemas não-congruentes. **Maza (1991:54) afirma que o campo de problemas combinatórios se amplia consideravelmente, se considerarmos as primeiras atividades que se abordam nas aulas sobre cálculo de superfícies – quadrados e retângulos fundamentalmente. Ex.** *"Um agrônomo é encarregado de comparar a superfície de dois campos de cultivo: um é quadrado e outro é retangular. Como poderá determinar qual é o maior?"*

O primeiro procedimento poderá ser intuitivo. Pode-se compensar as estimações, comparando os terrenos. O segundo método pode se constituir na sobreposição das figuras recortadas, observando e comparando na perspectiva de decompor e recompor as figuras. O professor não deve sugerir os passos a seguir pelos alunos, apenas mediar esta elaboração. A maior dificuldade que surge na determinação de superfícies é sua relação com o perímetro. Para diminuir esta dificuldade, o autor propõe que o professor elabore atividades de comparação entre perímetro e área para encontrar as diferenças, chegando na determinação de superfície pelo cálculo de multiplicação[29] (Maza, 1991:56).

Nos problemas de combinação que exigem **soluções multiplicativas**, Maza chama a atenção no sentido de que os elementos que se repetem não são iguais, ou da mesma natureza, como na superfície (metro por metro ou lado por lado), só sendo possível uma resolução multiplicativa, ou seja, não existe como resolver a questão sem pensar multiplicativamente. **É nestes casos que as soluções multiplicativas são a única solução e, nesta perspectiva, se coloca a necessidade de trabalharmos com problemas desta natureza nas séries iniciais, construindo a idéia da multiplicação completamente e não, simplesmente, aditivamente.** Como exemplo, podemos apresentar o seguinte problema: "*Durante o carnaval, vai se realizar uma festa na escola. Para isso cada equipe organiza uma série de disfarces, formada por um chapéu e uma máscara. Se um aluno produz 3 chapéus e 2 máscaras distintas, de quantas maneiras poderão se disfarçar combinando estes elementos?*"

Para o autor, este problema pode ser realizado em sala de aula, construindo-se os chapéus e as máscaras. Os alunos irão experimentando todas as possibilidades concretamente. É necessário que o professor proponha outras combinações, aumentando o número de chapéus ou de máscaras. Os alunos precisam perceber as possibilidades de combinações entre os elementos, na perspectiva de permanecer com um dos elementos invariáveis. Isso está a um passo das soluções multiplicativas e, principalmente, da abstração desta idéia. Ex. "*Construir 4 máscaras diferentes, de 3 cores distintas cada uma. Se dispusermos para fazer, de uma cartolina branca grande, em quantas partes iguais deveremos dividir a cartolina, para confeccionar uma careta?*" (Maza, 1991:57).

Este problema é similar ao anterior, porém, possui algo novo, sua relação com problemas iterativos, como os de superfícies retangulares, apresentados

---

[29] Sobre este enfoque de perímetro e superfície, ver BORGES, Pedro A. P. ***Matemática 5ª Série: melhoria do ensino de ciências e matemática***. Ijuí, Unijuí Editora, 1991.

anteriormente. Ele pode explorar uma nova idéia do tipo de procedimento a seguir, para encontrar a solução. Evidentemente, é necessário dividir a cartolina em quatro partes de um lado e três lados do outro. Ex: "*Tem 30 crianças em uma classe. Estas crianças vão representar uma peça de teatro, devemos dispor as crianças em cadeiras. No total, 30 cadeiras. Como poderemos dispor estas cadeiras de forma retangular?*" (Maza, 1991:58).

Esse problema é de combinatória de solução iterativa, pois as cadeiras são idênticas. Tratando-se de um problema de divisão, de que se conhece o resultado e não os fatores, sugerem que existam como auxílio para a resolução, papéis recortados representando as possíveis disposições. Neste sentido, existe um suporte do material concreto (neste caso, os papéis) como maneira de representar o problema. Além disso, podemos observar a importância da variação redacional, modificando a dificuldade na resolução do problema e, principalmente, explorando outras questões do mesmo conteúdo cognitivo. Isso é o que Duval chama de congruência do problema.

Faremos agora uma afirmação que consideramos fundamental para a presente pesquisa: baseada na pesquisa de mestrado, acreditamos que o encaminhamento dado por Maza em relação aos problemas de combinação, é extremamente procedente. Porém, ressalvamos que a exploração de linhas por colunas envolve um conceito de área (por mais que tenhamos a representação figural). Isso poderia ser resolvido se explorássemos a idéia de combinação, a qual envolve elementos diferentes, criando um terceiro elemento, mas não exige outro conceito, além de pensar em uma relação entre as quantidades envolvidas. Outra questão desencadeada pela exploração de linha por colunas é, que o aluno não reconhecendo a multiplicação, acaba contanto as unidades envolvidas, possibilidade trazida pela representação.

3.7.2 Os problemas de comparação e conversão

Os problemas de comparação têm uma similaridade estrutural com os problemas de razão. Já os problemas de conversão mostram marcas relacionadas, tanto com os de razão como os de combinação na perspectiva das estratégias de resolução. O critério para esta classificação é a estrutura das suas quantidades. Os problemas de razão sempre apresentam uma quantidade de elementos e uma razão entre as duas quantidades, em que a segunda é a unidade.

Nos problemas de combinação, todas as quantidades são do primeiro tipo, ou seja, de elementos. São quantidades **extensivas** (magnitudes quaisquer). Quantidade **intensiva** se refere à razão de uma quantidade em relação à unidade de outra quantidade. Ficando a estrutura das quantidades nos problemas de Razão: E x I = E e de Combinação E x E = E.

Os problemas que trabalham com quantidades I x I = I são classificados como problemas de **conversão**. Por exemplo: "*Tenho três pacotes de caramelo em cada bolsa. Há 4 caramelos em cada pacote. Quantos caramelos têm em cada bolsa?*" Ficando o problema:

4 caramelos/pacote x 3 pacotes/bolsa = 12 caramelos /bolsa

Estes problemas estão relacionados aos problemas trabalhados na física de conversão de medidas, próprios de um nível superior de ensino. Como, por exemplo, comparar dimensionalmente os conceitos de energia potencial e cinética. Os problemas de conversão acabam não sendo trabalhados nas séries iniciais, em função de sua complexidade conceitual, na perspectiva de Maza. Porém, podem ser feitos outros planejamentos, ou outras variações redacionais para a utilização, neste nível de ensino, de tais problemas. Como, por exemplo: "*Um mês tem 4 domingos e cada domingo ganho 25,00 de mesada. Quanto ganho em um mês?*" A estrutura deste problema é I x I = I, podendo ser resolvido por adições sucessivas. O que mudou foi o nível lingüístico ou, como diz Duval, a variação redacional, tornando o problema acessível aos alunos, ou mais congruentes.

Os problemas que envolvem expressões do tipo **vezes que** são considerados, por Maza, como um refinamento de problemas de razão, classificando-os como de **comparação** devido à quantidade intensiva destes problemas. Por exemplo: "*Um jogo custa 50 centavos. Outro, maior, custa 3 vezes mais. Quanto custa este último?*"

Os problemas de comparação são geralmente resolvidos como adição sucessiva, tal como os problemas de razão. Para o autor, nos problemas de razão o que se repete é a quantidade intensiva, segundo o número indicado pela quantidade extensiva. Já nos problemas de comparação se repete a quantidade extensiva, segundo o número da quantidade intensiva. A dificuldade que pode aparecer nos problemas de comparação é do lugar da quantidade intensiva. Mas isso é resolvido com a inversão dos valores na operação E x I = E. A diferença com problemas de razão é que a segunda quantidade é uma quantidade intensiva, ou seja, há uma razão entre as quantidades.

Maza (1991:35) propõe a seguinte classificação para os problemas multiplicativos, considerando o tipo de quantidade:

Classificação dos problemas	Tipo de quantidade
RAZÃO	E x I = E
COMPARAÇÃO	E x I = E[30]
COMBINAÇÃO	E x E = E
CONVERSÃO	I x I = I

O autor propõe uma seqüência de aprendizagem para os problemas de multiplicação e divisão (devemos lembrar que fizemos uma opção de não trabalharmos com a operação de divisão neste trabalho, mas mesmo assim vamos elencar as observações do autor):

NÍVEIS DE DIFICULDADE (Maza,1991:39)

1.Problemas de Comparação	Multiplicativos Agrupamento-comparação Partição-comparação
Problemas de Razão	Multiplicativos Agrupamento-razão Partição-razão
2. Problemas de Conversão	Multiplicação RR e RC Divisão RR e RC
3. Problemas de Combinação	Multiplicação Divisão
4. Problemas de Conversão	Multiplicação CC Divisão CC

A partir destes níveis, teríamos as seguintes estratégias utilizadas para os problemas Maza (1991:40):

Adição sucessiva .... Razão e Comparação

Adição sucessiva com inclusão hierárquica.....................Conversão RR e RC[31]

Estratégia multiplicativa .... Combinação

Estratégia multiplicativa com inclusão hierárquica..........Conversão CC

[30] Entendemos que, em função da repetição de elementos e de grupos, os problemas de comparação deveriam ser entendidos como I x E = E, ou seja, a quantidade extensiva se repete em função da quantidade intensiva. Mas isso é resolvido pela inversão dos termos na operação, como o próprio Maza chama a atenção.

[31] RR: duas razões entre quantidades intensivas; RC: uma razão e um quantificador; CC: dois quantificadores.

Podemos notar, com este esboço, que os problemas de *combinação* exigem um pensamento multiplicativo para a sua resolução, mostrando mais uma vez a importância de um trabalho com este tipo de enunciado de problema, principalmente no processo escolar inicial.

3.8 Classificação de Anna Franchi

Outra autora que trabalha com problemas da operação de multiplicação é Franchi[32]. Esta pesquisadora não trabalha somente com a classificação dos problemas multiplicativos, mas, principalmente, com a relação pedagógica de seu ensino. Porém, em seu trabalho acaba propondo alguns problemas, nos quais classifica e justifica seus critérios de classificação.

Aqui só vamos utilizar a parte da classificação dos problemas multiplicativos, pois o objetivo da autora é captar os processos matemáticos de resolução de problemas verbais multiplicativos utilizados pelos alunos e suas dificuldades nessa tarefa. Franchi entende que os ***problemas verbais multiplicativos*** são os clássicos problemas escolares, que requerem para a sua resolução apenas as operações de multiplicação e divisão, levando em consideração os números naturais.

Como está interessada na prática pedagógica, Anna Franchi acabou trabalhando com conceitos, tais como contrato didático, para entender a relação didática, transposição didática, pois seu trabalho é sobre um objeto específico de ensino. Neste sentido, faz uma ótima abordagem sobre como evolui este conhecimento e, principalmente, a relação do *"Savoir Savant"* até o Saber Ensinado. Trabalhou também com a dimensão lingüística e discursiva – pois sua base é a sala de aula e os instrumentos de comunicação, sendo que a linguagem é entendida como tratamento simbólico da realidade. Como diz a autora:

> *A linguagem,... tem um papel estruturante, um papel de re-presentação, isto é, de nova apresentação. Note-se que não se trata aqui somente das ações que se fazem com a linguagem ou das ações em que a linguagem está, mas da ação que a linguagem é. Ou seja, a linguagem não é somente um epifenômeno exterior ao sujeito, mas se constrói em uma*

---

32 Idéias baseadas na tese de doutorado. FRANCHI, Anna. *Compreensão das situações multiplicativas elementares.* (Tese de Doutorado) PUC – SP. Orientadora: Mere Abramovicz, 1995.

> *relação complexa de exterioridade-interioridade* (Franchi, 1995:20).

O objeto de investigação da autora são as operações de multiplicação e divisão, sendo que seu foco se efetivará na observação dos processos dos alunos, mais especificamente em como os alunos interpretam em linguagem matemática diferente tipos de problemas multiplicativos, tomados em diferentes formas de representação (escrita). Franchi (1995:29) coloca as seguintes expressões como equivalentes a "" *a x b = c"; por exemplo "a x b = c" é equivalente a " c:b = a"; " a x b = c" é equivalente a " c:a = b". Utiliza essas relações na relação de problemas multiplicativos, ou de modo mais geral, como os alunos manipulam e utilizam diferentes procedimentos para encontrar a solução desses problemas"* .

Para a autora, esses tipos de problemas multiplicativos apresentam situações interpretativas ou situações modeladas por operações de multiplicação ou divisão (Idem, 1995:30). A operação predominante no trabalho é a *divisão*, admitindo situações de partição eqüitativa de uma coleção de objetos em um determinado número de grupos e situações de partição de uma coleção de objetos em grupos de mesmo número.

A autora utiliza Vergnaud para contextualizar campo conceitual multiplicativo. Segundo Franchi, Vergnaud afirma que em toda situação se pode estabelecer, com os dados pertinentes, uma combinação de "relação de base" que permitiria tal classificação. Os problemas multiplicativos elementares envolvem duas variáveis situadas em diferentes espaços de medida e inter-relacionadas por uma regra de proporção. Esta regra de proporção põe em evidência uma das "relações de base", a partir da qual podem ser ***geradas quatro classes de problemas***: multiplicação, divisão-partição, divisão por quota e quarta proporcional. A autora não caracteriza cada uma destas classes. Além de Vergnaud, Franchi utiliza como referencial as idéias de Greer(1994)[33].

Franchi (1995:32) delimita sua pesquisa nas seguintes bases:

> *- no eixo vertical considerado por Greer (94), a números naturais e valores em cruzeiros; neste último caso teríamos, na denominação desse autor, situações do tipo " medidas iguais"; matematicamente, as operações realizadas para interpretar situações desse tipo são definidas no domínio dos "números decimais"; observe-se, entretanto, que os centavos não eram utilizados; no ensino das primeiras séries é usual, e mesmo*

---

33 Autor e livro já apresentado neste capítulo.

> *recomendável, a introdução de problemas envolvendo cruzeiros antes da introdução da notação decimal; assim sendo, o registro dos valores das notas, utilizando a vírgula e os zeros, pode ser considerada como uma forma de denotar a natureza do objeto considerado;*
> *- no eixo horizontal, as situações "grupos iguais"; esta situação é aquela pela qual se inicia usualmente o ensino da multiplicação sendo aplicável a um grande número de problemas relativos às necessidades cotidianas e técnicas; ela é denominada por muitos autores como "adição repetida... ".*

Franchi (1995:33) utiliza também a teoria de Schwartz (1988), já explanada neste capítulo. Porém, em seu trabalho usa somente multiplicações de quantidades I x E que correspondem a "grupos iguais e a produto de medidas", na denominação de Greer. Esta multiplicação está associada a duas divisões:

- Divisão E x E: pede-se a determinação de uma quantidade intensiva, denominada por Franchi de divisão por repartição.
- Divisão E x I: pede-se a determinação de uma quantidade extensiva, divisão por quota.

Franchi (1995:64) explora problemas da estrutura multiplicativa a partir de textos envolvendo cadeias verbais da estrutura aditiva, considerando dois casos:

> *– os problemas expressam-se por meio de duas cadeias verbais independentes: uma, com as características da estrutura aditiva e outra com as da estrutura multiplicativa; a partir destas formulam-se as questões correspondentes à adição ou subtração e as correspondentes à multiplicação ou divisão;*
> *- as cadeias verbais se interpretam em termos de operações matemáticas a serem efetuadas em seqüência, sendo a multiplicação ou a divisão a primeira operação a ser realizada, minimizando-se a influência da segunda cadeia verbal na seleção dos dados para a primeira operação.*

A partir deste quadro teórico, Franchi propõe uma classificação para os problemas trabalhados em sala de aula. Para esta classificação, utiliza o enfoque dimensional de Schwartz (1988) e a notação que sugere, além de incluir outras classes de critérios que se mostraram relevantes para a maior ou menor dificuldade dos problemas propostos. Os critérios utilizados por Franchi são (1995:64-67):

*Os **critérios de classificação dos problemas**, pelas propriedades características:*

- *A: o tipo dos referentes numéricos, segundo Schwartz;*
- *B: a natureza das variáveis extra-matemáticas (quantidades discretas ou valores em cruzeiro) características do enredo;*

- *C: a dependência/independência dos dados correspondentes às operações de multiplicação ou de divisão fornecidos pelo texto verbal;*
- *D: a ordenação dos dados na formulação do texto verbal: na multiplicação a referência inicial à quantidade extensiva ou intensiva; no caso da divisão, à ordenação relativa, no texto, do dividendo e do divisor.*

*QUADRO II – **Critérios de Classificação dos Problemas**:*

A – Tipos de referentes numéricos:

Multiplicação

1. *Situação trivial – I x E;*
2. *2. Situação comparativa – E x E;*

Divisão

1. *Divisão repartição – E Total: E;*
2. *Divisão por quota – E total: I;*

B – Variáveis extra - matemáticas no enredo do problema:

1. *Quantidades discretas (canetas, bolinhas, etc...,);*
2. *Valores em cruzeiros (determinação de preço, salário, etc;);*

C – Dependência e independência entre os dados:

1. *Dados independentes para todas as operações;*
2. *Dados independentes para multiplicação ou divisão;*
3. *Dados dependentes;*

D – Ordenação dos dados na formulação do texto verbal:

Multiplicação

1. *Referência inicial à quantidade extensiva;*
2. *Referência inicial à quantidade intensiva;*

Divisão

1. *Ordem direta (os dados numéricos se ordenam na ordem em que constam no algoritmo da divisão: dividendo maior divisor;);*
2. *Ordem inversa (o dado correspondente ao divisor é fornecido primeiro).*

Todos os problemas trabalhados por Franchi foram de situações do tipo I x E, não sendo explorados problemas envolvendo a idéia de produto cartesiano, por mais que do tipo 4 e 5 sejam apresentados como E x E. Os problemas de estrutura multiplicativa apresentavam-se na ordem I x E. Em relação à divisão, foram exploradas as duas situações, ou seja, tanto questões sobre agrupamento de objetos quanto o custo unitário. Além disso, os textos estavam em ordem direta para a operação.

Segundo Franchi (1995:124), a situação multiplicativa mais utilizada no ensino de matemática é do tipo E x I (adição repetida, grupos iguais). Para a autora, ***categorias de problemas*** são as perguntas que podemos fazer em função do texto escrito. No caso da multiplicação, temos: número total de objetos, número de objetos por grupo (divisão por partição) ou o número de grupos formados (divisão por quota).

Franchi (1995:124) chama a atenção no sentido de que, entre a expressão aritmética e a linguagem corrente, existe uma linguagem técnica pela qual aquela é lida ou descrita. Podemos relacionar isto com a necessidade do trabalho, pelo professor, com a idéia de conversão entre o texto – enunciado do problema e a representação numérica. E, além disso, a possibilidade do auxílio de uma representação intermediária entre estes dois registros de representação, para a conversão do problema.

Franchi (1995:125), complementando esta idéia afirma que

> *A formulação, porém, de um problema é feita em linguagem corrente, que se deve interpretar em um modelo discursivo não matemático, inclui pessoas, objetos, valores, ações, etc. que já possuem um sentido específico socialmente privilegiado. ...Um problema descreve um evento: sua primeira interpretação se dá, portanto, no sistema de referência da linguagem natural. .... é justamente sobre o texto do problema escolar que o aluno deve operar para formular uma igualdade matemática.*

Concluindo com a seguinte afirmação, sobre a linguagem:

> *Quanto aos aspectos sintáticos, considera-se que o texto de um problema pode organizar os eventos de uma situação em diferentes ordens. Na passagem de um texto para a linguagem matemática é irrelevante a ordem em que as cadeias verbais que compõem a estrutura lógica do problema aparecem no texto. Mas essa ordem não é indiferente do ponto de vista do aluno;.... ressalta-se que " o grau em que a formulação lingüística se correlaciona com a estrutura aritmética subjacente e o grau em que essa estrutura está diretamente representada no texto" é importante para facilidade ou a dificuldade da tarefa de extrair a estrutura aritmética, a partir da formulação verbal* (Idem,126).

Em relação às representações intermediárias do texto, comenta a autora que, não são utilizadas representações intermediárias funcionais entre o texto – enunciado do problema e a sua formulação em linguagem matemática. Mais um argumento para considerarmos o processo de resolução de problemas como uma tarefa de conversão, ou seja, mudança de registros de representação, que poderá necessitar de uma representação intermediária para a sua resolução, em função da não-congruência do enunciado.

> *Um forte indício de que a dificuldade da resolução de problemas por quota tem a ver com as diferenças entre a representação verbal (ou seja o sentido corrente do termo dividir) e o sentido técnico de dividir é o fato de que essas dificuldades são menos acentuadas quando se opera com modo*

> *de representação não verbal, por exemplo, com símbolos icônicos em situações significativas para o aluno* (Franchi,1995:127).

Para Franchi (1995:140), o modelo preconizado por Vergnaud, em relação às classificações, não abarca todos os aspectos relativos à estrutura multiplicativa. Revela o aspecto da proporcionalidade do pensamento multiplicativo, que permite estender esse modelo para situações multiplicativas mais complexas, e, inclusive, outros campos numéricos. Porém, acaba não explorando situações elementares desta estrutura. Nesta linha de raciocínio em que entra a presente pesquisa, explorando a possibilidade de trabalhar com o produto cartesiano em situações elementares nas séries iniciais, pautando assim uma diferença crucial entre a operação de multiplicação e adição.

Podemos afirmar, com base nos teóricos utilizados aqui, que poucas pesquisas, considerando a estrutura multiplicativa, tiveram como foco os conceitos elementares desta estrutura e, principalmente, dando ênfase à distinção e complementaridade entre o tratamento da adição sucessiva e o produto cartesiano como dois registros de representação fundamentais para o sentido operatório da operação de multiplicação. Além disso, temos poucas pesquisas que consideram as variáveis relacionadas do enunciado dos problemas - texto, o qual se constituem nosso foco de pesquisa. Ou seja, problemas elementares da estrutura multiplicativa na perspectiva textual, contemplando o sentido operatório da operação de multiplicação.

3.9 As pesquisas como aporte para novos entendimentos

Neste capítulo, nosso principal objetivo foi buscar as pesquisas que trabalharam com a operação de multiplicação e seus problemas, para entender a constituição desta operação, tentando delimitar, através do sentido operatório, considerando situações elementares[34], um campo de enunciados de problemas que pudéssemos variar redacionalmente, tornando estes congruentes no processo de conversão. O que encontramos foram grandes classificações, que consideram

[34] Quando falamos em situações elementares de multiplicação, estamos considerando o trabalho com a operação de multiplicação no processo inicial da escola, ou seja, nas séries iniciais, onde são trabalhados os primeiros conceitos da operação de multiplicação e os problemas desta operação.

principalmente o tipo de quantidade a ser enfocada – intensiva ou extensiva - e poucos teóricos explorando situações elementares de multiplicação.

Considerando sempre o organograma proposto no capítulo 1, entendemos que o sentido operatório é que sustenta as situações modeladas – enunciados dos problemas, compreendemos que a operação de multiplicação em nível elementar possui dois sentidos: o da adição sucessiva e o do produto cartesiano. Esta diferenciação é o ponto central para elaborarmos enunciados de problemas, considerando o sentido operatório, enfocando situações elementares. Percebemos, através das pesquisas elencadas aqui, que, exceto Maza, nenhum outro autor trabalha na perspectiva de diferenciar estes dois sentidos.

Podemos observar, pelo quadro abaixo, como os autores enfocados nesta pesquisa consideram estes dois sentidos, em suas pesquisas:

AUTORES	Adição Sucessiva	Produto Cartesiano
Gérard Vergnaud	Isomorfismo de Medida	Produto de Medida – o produto cartesiano é um sub-tipo do Produto de Medida.
Brian Greer	Quantificações e Comparação Multiplicativa ligada ao tipo de número	Disposição área retangular e Produto de Medida (Produto cartesiano aparece quando temos números inteiros. Quando temos decimais é um produto de medida)
Judah L. Schwartz	Problemas envolvendo quantidade I x E, I x I	Problemas envolvendo quantidade E x E
Pearla Nesher	Regra de Mapeamento, Comparação Multiplicativa	Multiplicação Cartesiana
Nunes e Bryant	Problemas do tipo um-para-muitos	O Produto Cartesiano faz parte dos problemas do tipo um-para-muitos, sendo considerados mais complexos.
Carlos Maza	Problemas do tipo Razão, Comparação e Conversão	Problemas do Tipo Combinação
Anna Franchi	Trabalha com quantidades do tipo E x I	Não trabalha com nenhum problema deste tipo.

Estamos considerando que estes dois sentidos operatórios é que sustentarão as variações redacionais dos enunciados propostos.

Vergnaud faz uma grande classificação, sua pesquisa acaba se concentrando em situações que chama de produto de medida; porém, não explora situações elementares e não enfoca especificamente enunciados de problemas envolvendo idéias do produto cartesiano. Este faz parte do produto de medida.

Greer considera o tipo de número e a passagem do número natural para outros tipos de números. Também trabalha com uma classificação do produto de medida e disposições/área retangular. Em pesquisas posteriores, chama a atenção para o produto cartesiano, incluindo a idéia de combinatória.

Schwartz explora o tipo de referente usado em muitas pesquisas. Esta determinação do tipo de referente, ou seja, o tipo da quantidade que está na operação, identifica as relações entre as variáveis e as dimensões. É um dos pesquisadores que chama a atenção para as falhas em se introduzir multiplicação como adição sucessiva.

Nesher é uma das poucas pesquisadoras que enfoca o texto dos problemas multiplicativos, chamando a atenção para o texto como um todo e não para o uso de palavras chaves, que, na multiplicação e divisão, pode levar a erros. Faz referência ao processo de conversão e a necessidade de pesquisas neste processo. Considera a multiplicação cartesiana como uma classe de problemas a ser trabalhado; porém, não trabalha na perspectiva de variações redacionais, mas sim na estrutura textual.

Nunes e Bryant, por sua vez, exploram o sentido do número para além da idéia de calcular quantidades. Sua maior preocupação é pensar na ação a ser realizada e o que esta ação desencadeia na quantidade. Não exploram a idéia de produto cartesiano e chamam a atenção para a sua complexidade.

Franchi é a pesquisadora que tem como foco de seu trabalho situações elementares e problemas que são trabalhados efetivamente em sala de aula, nas séries iniciais. Porém, seus enunciados concentram-se em grupos e elementos, ou seja, adição sucessiva. Além disso, a pesquisadora quer enfocar as duas possibilidades de divisão atreladas à operação de multiplicação.

Maza efetua efetivamente a diferenciação entre adição e multiplicação. Enfoca o produto cartesiano e trabalha com os enunciados dos problemas multiplicativos. Para o produto cartesiano, sua estratégia é que os alunos deveriam iniciar por enunciados que envolvam a idéia de linha por coluna, tendo como suporte uma representação para, depois, explorar problemas de combinatória. Este é o ponto em que discordamos, e a presente pesquisa tenta enfocar um outro caminho. Ou seja, como na pesquisa de mestrado trabalhamos com várias representações para o sentido operatório da operação de multiplicação, podemos detectar que a idéia de linha por coluna, não garante o pensamento multiplicativo. Em função disso, nossa tentativa é o trabalho com enunciados de problemas que exploram a idéia de combinatória, pois estes, diferenciam, efetivamente, multiplicação de adição.

Tendo presente este referencial construído e, a pesquisa de mestrado considerando a operação de multiplicação, nosso enfoque se efetiva sobre os enunciados elementares de ***combinatória***. Ou seja, enfocaremos um registro de representação da classificação estabelecida pelos autores em relação ao sentido operatório do ***produto cartesiano***, que são considerados os mais complexos, porém os que permitem uma ampliação significativa da idéia de adição sucessiva para a operação de multiplicação. Os enunciados dos problemas vão envolver quantidades discretas e extensivas, para alunos em processo inicial de escolarização, justificando tratarmos de problemas aritméticos elementares.

3.10 Os enunciados dos problemas multiplicativos elementares - rupturas e continuidades em relação à adição

Podemos observar que, nas classificações apresentadas pelos pesquisadores, o sentido operatório do produto cartesiano é elencado como um pensamento elementar dos problemas multiplicativos; porém, todos fazem ressalvas em relação à sua complexidade. Exceto Maza, nenhum outro pesquisador, apresentado aqui, explora especificamente este sentido para a multiplicação, considerando problemas elementares de multiplicação. E nenhum trabalha com estes enunciados, variando-os redacionalmente. Podemos entender que, realmente, o sentido operatório do produto cartesiano é um divisor de águas entre a operação de adição e a operação de multiplicação? Seria este um tratamento mais complexo que o tratamento de adição sucessiva? Poderíamos explorar o tratamento de combinatória em problemas multiplicativos elementares, variando os enunciados como uma forma de torná-los congruentes aos alunos? Por que a multiplicação não pode ser entendida como uma simples adição sucessiva?

Os argumentos para responder a essas questões estão pautados, principalmente, nas pesquisas apresentadas por Maza[35], que reforça a idéia de que a

---

[35] Do livro ***Enseñanza de la multiplicación y división***. Madrid, Editorial Sintesis, 1991.

operação de multiplicação não pode ser simplesmente identificada como uma soma reiterada (ou adição sucessiva), como é apresentada na maioria das obras (principalmente nos livros didáticos, como vamos observar no próximo capítulo). Para ele, a multiplicação deve, em primeiro lugar, ser entendida como uma operação aritmética entre números naturais. O ponto de partida, desta operação, são os números naturais e o ponto de chegada, outro número distinto ou não dos anteriores. No caminho, pode-se registrar uma transformação dos primeiros nos últimos. Desta forma, a operação pode ser concebida como uma aplicação entre o conjunto N x N de pares ordenados de números naturais, sendo o próprio conjunto N. Esta concepção da multiplicação tem um ***caráter binário*** (Maza, 1991:17).

$$N \times N \longrightarrow N$$
$$(3,4) \longrightarrow 12$$

A dois números se designa um terceiro número, sendo que os dois primeiros possuem um papel equivalente na definição. Mas podemos considerar que os papéis sejam diferentes. Assim, a operação de multiplicação pode ser definida como uma aplicação de N em N do seguinte modo:

$$N \xrightarrow{\times 4} N$$
$$3 \longrightarrow 12$$

Esta é uma interpretação de ***caráter unitário*** da multiplicação, tornando-a limitada, restringindo os resultados à multiplicação por quatro, neste caso. A conseqüência, na matemática, é o abandono desta definição de operação em benefício da primeira, mais ampla, ou seja, um caráter binário (Maza, 1991:18).

A possibilidade de interpretação unitária e binária acaba sendo uma ambigüidade da operação de multiplicação. O modo binário da operação é mais geral e, portanto, preferível, no campo da multiplicação. Já a interpretação unitária se enquadra melhor na concepção inicial que tem a multiplicação, ou seja, da adição sucessiva. Existe uma quantidade que é transformada por outra quantidade.

A criança começa por entender a multiplicação como uma operação unitária que vai evoluir para uma concepção binária, concluindo que: "*...a multiplicação é uma operação binária, do ponto de vista matemático, porém começa sendo unitária em sua aprendizagem. Isto reflete o fato de que os papéis de ambas quantidades (multiplicando e multiplicador) estão diferenciados em princípio para fazer-se intercambiáveis depois*" (Maza, 1991:18).

Se interpretarmos a multiplicação como uma adição sucessiva, é possível dizermos que sua definição mais geral seria de uma soma como o cardinal da união de conjuntos disjuntos. Desta forma, a multiplicação de *a* x *b* comportaria os seguintes passos:

- escolher um conjunto *A*, cujo cardinal seja a;
- realizar a união do conjunto *A* consigo mesmo, tantas vezes como indicar o cardinal *b*;
- encontrar o cardinal *c* do conjunto união, de todos os anteriores.

Esta definição envolve uma concepção unitária da multiplicação, já que os papéis de *a* e *b* são distintos (Maza, 1991:18). O autor argumenta, ademais, que não são apenas os papéis que são distintos, mas que são os cardinais de conjuntos de distinta classe (categoria) em abstração: o número *a* é o cardinal de um conjunto de elementos, enquanto que *b* é o cardinal de um conjunto de conjuntos. O primeiro, marca o número de elementos que se considera no conjunto A. O segundo, indica o número de vezes que o conjunto A se repete. Seus elementos são as repetições do conjunto A. Com o resultado *c*, voltamos ao primeiro nível: refere-se exclusivamente ao conjunto total de elementos que se pode contar no final. Desta forma, o multiplicando e o multiplicador têm papéis diferentes e naturezas distintas. Por isso, o pesquisador argumenta que a interpretação da multiplicação como uma adição sucessiva exclui a identificação de uma com a outra, afirmando que ***"a multiplicação não é uma soma reiterada, inclui uma interpretação como tal. Não é um caso particular da soma. É outra operação que pode ser definida, tal como aqui se tem feito, a partir da soma. Porém não se reduz a ela"*** (Maza,1991:19). Entender a multiplicação como adição sucessiva torna as propriedades elementares (comutativa, associativa e distributiva) excessivamente complexas.

Maza entende a multiplicação como um produto cartesiano, seguindo os seguintes passos:

- escolher um conjunto *A*, cujo cardinal seja *a*;
- escolher um conjunto *B*, cujo cardinal seja *b*;
- formar o produto cartesiano *A x B*;
- O cardinal de A x B é o resultado desejado *c*.

Para o autor, o entendimento da multiplicação como um produto cartesiano supõe muitas considerações diferentes da adição sucessiva. **O conjunto A e o B têm o mesmo nível de abstração: referem-se a conjuntos de elementos concretos, sem diferenciação. O resultado *c* é o cardinal de um conjunto cujos elementos são**

combinações de elementos de A e B. Este é o grande diferencial entre situações que podem ser resolvidas por adições sucessivas e situações que, necessariamente, precisam ser pensadas e resolvidas por multiplicações.

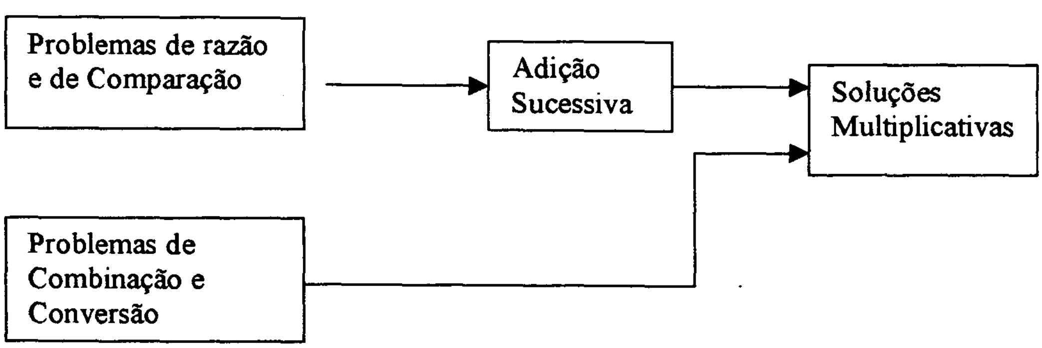
Devemos chamar a atenção para estas grandes diferenças, ou seja:

- ***multiplicação como soma reiterada: A e C têm a mesma natureza; B tem natureza distinta dos dois anteriores; e***
- ***multiplicação como produto cartesiano: A e B têm a mesma natureza e C tem natureza distinta dos dois anteriores, porém com uma combinação dos dois anteriores.***

A adição sucessiva concebe a multiplicação como unitária e o produto cartesiano como uma concepção binária. O produto cartesiano implica uma comutatividade entre os elementos A e B que não existe na adição sucessiva (exemplo: Joana e Pedro e Pedro e Joana representam a mesma coisa; já três grupos de quatro e quatro grupos de três são representações diferentes). Esta concepção de produto cartesiano exclui qualquer possibilidade de entendimento da multiplicação como uma simples adição sucessiva.

Mas, se a multiplicação não é simplesmente uma adição sucessiva, o que é então? *"É antes de tudo, uma operação aritmética, tanto de natureza unitária como binária, que pode ser interpretada como uma soma reiterada (sem ser ela mesma) ou como um produto cartesiano"* (Maza, 1991:20).

Com esta idéia de complementaridade de interpretação, que sustenta e estrutura o sentido operatório da operação de multiplicação, distinguindo o registro de representação da adição sucessiva e do produto cartesiano, é que precisamos considerar o processo ensino-aprendizagem desta operação, nos dois eixos elencados no capítulo 1. Podemos visualizar esta posição com a apresentação do seguinte esquema para os problemas multiplicativos, apresentado por Maza (1991:79):



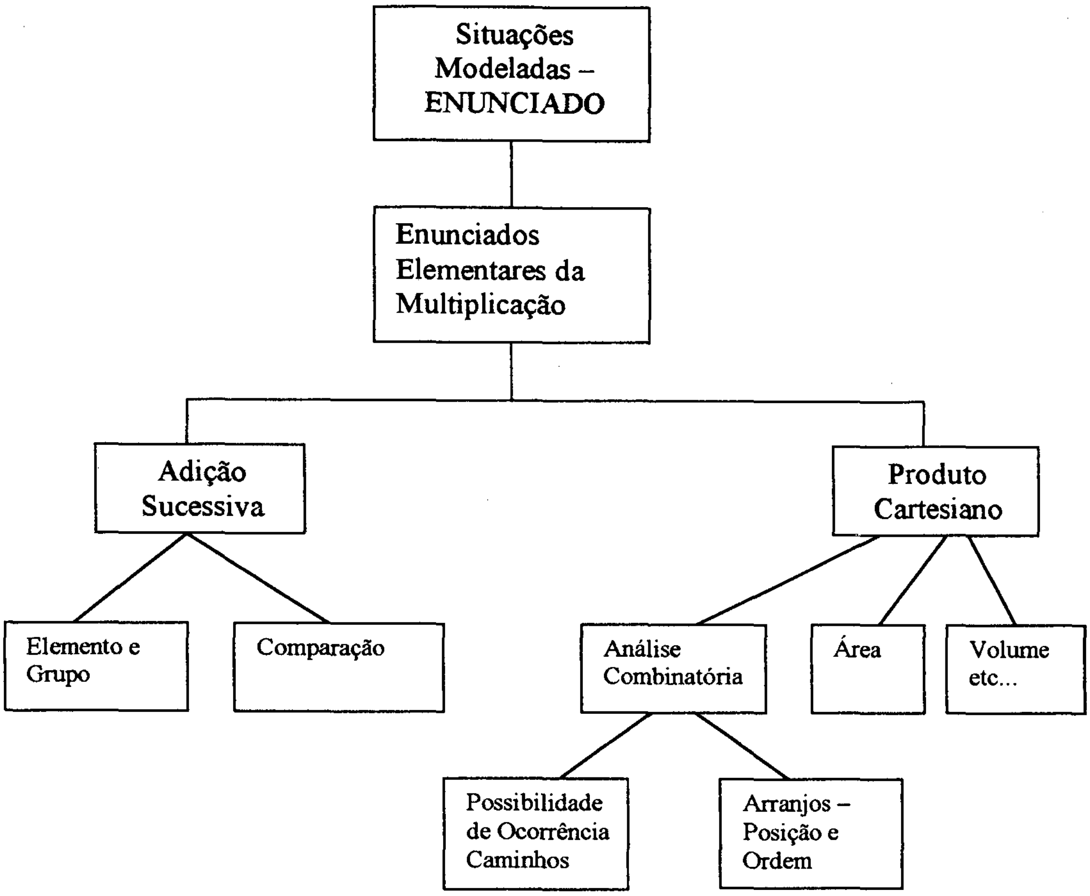
Com este esquema e o exposto acima, acreditamos ter deixado clara a importância do trabalho com problemas elementares envolvendo os vários sentidos operatórios da multiplicação. Já existem outros trabalhos que envolvem a operação de multiplicação, explorando principalmente o registro de representação da adição sucessiva (como, por exemplo, o trabalho de doutorado de Franchi), outros explorando conceitos específicos, em relação ao produto cartesiano, do tipo proporcionalidade, área, volume, funções, etc...(não enfocado neste trabalho, pois estamos trabalhando com situações elementares), outros com outro tipo de número que não os naturais e, ainda, trabalhos envolvendo outros níveis de ensino que não as séries iniciais.

Acreditamos ser necessário a exploração de problemas elementares da multiplicação, que enfoque o tratamento de combinatória, tornando possível e visível, no trabalho pedagógico, esta complementaridade entre os registros de representação da adição sucessiva e do produto cartesiano. E uma outra perspectiva da exploração dos enunciados dos problemas elementares, através do enfoque da variação redacional dos enunciados dos problemas matemáticos. Não sendo possível envolver todos os registros de representação que traz o produto cartesiano, em função do tempo e da complexidade dos conceitos envolvidos, acreditamos que a combinatória poderia ser o início para a construção deste conceito, que se ampliará no processo educativo até o ensino médio.

Em pesquisas realizadas por Puig e Cerdán (1995), considerando problemas aritméticos escolares, os autores concluíram que os problemas multiplicativos deveriam iniciar por situações que envolvessem adição sucessiva, área no sentido de linha e coluna e, somente depois, situações de combinatória, pois o tratamento de linha por coluna envolveria uma representação significativa para os alunos. Concordamos em parte com esta posição, porém reafirmamos nossa posição centrada no trabalho com problemas envolvendo adição sucessiva e de combinatória, a qual também possui representações que são significativas, em termos de situações elementares, considerando que estamos entendendo as possíveis variações redacionais necessárias e as possíveis representações intermediárias, para tornar os enunciados congruentes. Além disso, podemos observar que os livros didáticos já trazem o tratamento de linha por coluna e, mesmo assim, os alunos têm dificuldade em resolver enunciados de combinatória (conforme vamos observar no capítulo IV e V).

Para efetivarmos o trabalho de construção da operação de multiplicação, considerando o sentido operatório implícito nesta, o professor precisa ter claro que o registro de representação da adição sucessiva define papéis diferentes para o multiplicando e o multiplicador (número que se repete e número de repetições). Este sentido, distingue, o valor que se repete do número de repetições, criando algumas dificuldades de compreensão para outros problemas que não envolvem tal sentido e provocando uma ambigüidade em relação à propriedade comutativa da multiplicação. Embora, matematicamente, $a \times b = b \times a$, no contexto dos enunciados dos problemas que envolvem adições sucessivas, isso não ocorre, o que é perfeitamente observável nos problemas que envolvem o sentido de combinatória e outras idéias referentes ao produto cartesiano da multiplicação (do tipo configurações retangulares, proporcionalidade, áreas, etc...).

Nesta perspectiva, temos os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) chamando a atenção para o trabalho da operação de multiplicação com tratamentos diferentes da adição sucessiva. Isto reforça a importância deste enfoque na construção do conceito da multiplicação e principalmente na ampliação deste conceito, através da exploração de diversos enunciados de problemas, tornando possível pensarmos em um campo de enunciados de problemas. Tentando deixar mais clara nossa posição em relação ao eixo dos enunciados, ou seja, aos problemas modelados pela operação de multiplicação (organograma apresentado no primeiro capítulo) e considerando como base para esta classificação o sentido operatório que sustenta tal operação, propomos a seguinte complementação para o eixo do organograma, apresentado no capítulo I:



Este organograma tenta determinar o campo de enunciado dos problemas multiplicativos elementares. Em relação aos enunciados dos problemas que envolvem o sentido operatório, temos basicamente dois tratamentos básicos: o de grupos de elementos (marcado pela idéia de repetição de grupo de elementos) e o de comparação (marcado por palavras mais que, dobro, triplo, etc...). Em relação aos enunciados dos problemas que envolvem o sentido operatório do produto cartesiano, temos vários tratamentos. Os enunciados de análise combinatória que podem ser subdivididos em enunciados de possibilidade de ocorrência e caminhos (que não considera a ordem dos elementos), e os de arranjo, que consideram a posição e ordem dos elementos (envolvendo um aprendizado de um conceito específico). Os enunciados de área podem envolver a idéia de área, explorando representações de linha por coluna, sem necessidade do conceito formal de área (trabalhando basicamente com números naturais) e os enunciados que trabalham com o conceito de área (extrapolando para números racionais). Os enunciados envolvendo volume necessitam da idéia de tridimensionalidade e vários outros conceitos que envolvem a estrutura multiplicativa, proporcionalidade, função linear, potenciação, etc....

Precisamos lembrar que a presente pesquisa está trabalhando somente com situações elementares; por isso, vamos centrar nossa discussão nestas. Desta forma, o campo de enunciados que vamos explorar é o de análise combinatória, mais, especificamente, enunciados que envolvem a idéia de possibilidade de ocorrência e de caminhos, pois estes não consideram a ordem dos elementos, valendo a propriedade comutativa para a operação de multiplicação.

4 - ENUNCIADOS DOS PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS ELEMENTARES E O PROCESSO PEDAGÓGICO

4.1 A trajetória traçada e percorrida na pesquisa de campo

Com a complementação do organograma apresentado no capítulo 1, em função do quadro teórico enfocado nos capítulos 2 e 3, podemos enfocar nossa atuação da presente pesquisa no contexto pedagógico. Tanto a pesquisa de mestrado como esta de doutorado são fruto da relação estabelecida com professores de séries iniciais e como professora do Ensino Fundamental e Médio. Articulado a isso, a formação de professores de Matemática e Pedagogia. Considerando esta trajetória, não queremos que esta pesquisa seja considerada como uma "simples" pesquisa, em que o pesquisador coleta informações da escola, para analisar e validar suas hipóteses. Não, acreditamos que uma pesquisa, principalmente em Educação, deve ser compartilhada entre pesquisador e escola. Como pesquisadora, preciso da escola; porém, a escola também precisa de resultados das pesquisas para poder repensar o seu processo.

O processo desta pesquisa se efetivou no desenvolvimento do projeto de pesquisa, na busca da construção do referencial teórico e no olhar constante da prática pedagógica. Como estabelecemos no primeiro capítulo, esta tese possui uma articulação muito grande com a pesquisa realizada no mestrado, no sentido de complementaridade e continuidade, na perspectiva de contribuição com o fazer pedagógico para a construção do conceito da operação de multiplicação.

Optamos, considerando dados do mestrado e o referencial teórico, em implementar a pesquisa no sentido da definição de um campo de enunciados de problemas, mais especificamente enunciados de problemas que envolvem a idéia de combinatória, tentando identificar enunciados de problemas mais congruência para os alunos, a partir de variações redacionais de seus enunciados, e a implicação do uso de representações intermediárias no processo de conversão destes enunciados.

Estamos considerando o processo ensino-aprendizagem de matemática, com um objeto específico: os enunciados dos problemas multiplicativos. Em função desta definição, a pesquisa empírica teve três envolvidos, com os enunciados dos problemas, no processo pedagógico:

- os enunciados de problemas multiplicativos apresentados em alguns livros didáticos;
- os enunciados elaborados por professores de séries iniciais envolvendo operações de multiplicação; e
- a resolução de enunciados de problemas multiplicativos, pelos alunos, considerando o sentido operatório de produto cartesiano – mais especificamente idéias de combinatória-.

O primeiro trabalho desenvolvido, na pesquisa de campo, foi com os livros didáticos, nos quais se objetivava verificar quais os tipos de problemas propostos. Se estes conseguiam explorar o sentido de adição sucessiva e produto cartesiano? E se, nos problemas de produto cartesiano, tínhamos algum tipo de enunciado específico.

O segundo, foi o trabalho com alguns professores de séries iniciais. Propusemos a estes, a elaboração de enunciados de problemas, sendo fornecidas as operações de multiplicação. Eles deveriam elaborar vários enunciados de problemas, explorando sentidos diferentes para a mesma operação de multiplicação. Com isso, queríamos verificar se o professor, sendo solicitado a redigir enunciados da operação de multiplicação, considerava sentidos diferentes para esta operação; quais eram os principais sentidos explorados; se para elaborar os enunciados dos problemas, os professores faziam alguma modificação nos enunciados considerando os fatores intrínsecos ou extrínsecos do mesmo; e se o professor apresentava alguma dificuldade para escrever o enunciado do problema.

O terceiro trabalho desenvolvido foi com alunos do ensino fundamental, mais especificamente alunos de 5ª e 8ª séries. Esse foi desencadeado em dois momentos, envolvendo enunciados de problemas multiplicativos, com ênfase na idéia de combinatória. A partir de enunciados propostos pelos livros didáticos, explorando a idéia de combinatória: propusemos a 30 alunos de 5ª série, de diferentes escolas, resolver 10 enunciados multiplicativos. A observação e a análise se efetivaram sobre os registros de representação numéricos, determinado pelos alunos ao processo de conversão. E a utilização de outras representações. Este instrumento deveria possibilitar a identificação de enunciados que pudéssemos variar redacionalmente. Para os alunos resolver estes enunciados foi entregue para cada professora, cópias do instrumento para seus alunos. Esta não poderia interferir na resolução e nem auxiliar os alunos. Os alunos deveriam resolver individualmente e sem utilizar borracha.

O segundo momento, considerando os alunos, foi feito através da proposição de enunciados de problemas de combinatória sendo estes modificados redacionalmente. Aqui trabalhamos efetivamente com a teoria de compreensão de texto, proposto por Duval. Nosso objetivo era tentar identificar enunciados de problemas congruentes, através da modificação dos fatores intrínsecos e extrínsecos dos enunciados, considerando os tratamentos desencadeados pelos alunos no processo de conversão destes enunciados. Envolvemos 544 alunos, respondendo quatro enunciados (que identifica um grupo), sendo que tínhamos dezessete grupos de enunciados. Os alunos são de 5ª e 8ª Série de escolas do município de Ijuí. Entramos em contato com cada professora para saber o número de alunos em cada sala. Para cada sala, separamos cópias de cada grupo de enunciados, tendo o cuidado, para que, em cada sala, pelo menos um aluno, respondesse, um grupo de enunciados.

Este segundo momento, foi organizado na forma de tabelas de freqüência com percentuais dos registros de representação determinado para cada enunciado, conforme a classificação que estabelecemos a partir da análise de todo o instrumento. Estas tabelas serviram para auxiliar na identificação de questões pertinentes, em função da grande quantidade de alunos envolvidos e de grupos de enunciados. A análise dos dados coletados, através da aplicação do instrumento, visou a comparação dos diferentes enunciados (grupos de enunciados) com variações redacionais na aferição do grau de congruência estabelecido no processo de conversão. Esta conversão abrangeu a avaliação do tipo de raciocínio elaborado pelos alunos para estabelecer o processo de conversão. Os diferentes registros de representação estabelecidos foram alocados a uma forma de resposta, definido pelo tipo de princípio utilizado.

4.2 Os enunciados de problemas multiplicativos nos livros didáticos

O trabalho com os livros didáticos teve por objetivo verificar e analisar quais os tipos de enunciados dos problemas propostos; se estes exploravam o sentido de adição sucessiva e produto cartesiano; e se, nos enunciados de produto cartesiano, havia algum tipo de enunciado especifico.

Os enunciados dos problemas coletados nos livros didáticos envolvem essencialmente números naturais, que não necessitam de conceitos matemáticos formais, para a sua resolução, tais como área, perímetro, volume, porcentagem, juros. Coletamos todos os enunciados propostos, envolvendo operação de multiplicação, sem fazer uma análise no sentido de problemas repetitivos. O que nos interessava era o sentido operatório que os enunciados dos problemas enfocavam. Para isso, buscamos alguns livros didáticos, que acabam sendo a principal fonte dos problemas[36] trabalhados em sala de aula. Podemos destacar três etapas e considerações que encaminhamos com os livros didáticos:

4.2.1 A primeira etapa com os livros didáticos

Inicialmente elencamos 11 livros didáticos e coletamos enunciados de problemas, com números naturais, que, para a sua resolução necessitam da operação de multiplicação. Os livros foram selecionados a partir de algumas sugestões de professores e da disponibilidade dos mesmos. Neste momento, não trabalhamos com coleções completas, apesar de alguns livros pertencerem a coleções. Os livros pesquisados foram os seguintes

[36] Ver livro de BISHOP, A. ***Enculturación matemática. La educación matemática desde uma perspectiva cultural.*** Buenos Aires, Paidós, 1999. (1999: 28-29). Sobre o ensino de matemática baseado em textos. O professor acaba sendo somente um repassador do que o livro didático traz. O professor não cria os problemas trabalhados em sala de aula.

Título da Obra	Autor	Editora	Série/Ano	Nº de problemas
Fazendo e Compreendendo Matemática (*)	Manhúcia P.Liberman et all	Solução – São Paulo	1ª - 1997	**22 (2)**
Matemática – Coleção Quero Aprender	Oscar Guelli	Ática – São Paulo	1ª - 1995	**12**
Matemática – Coleção Desafio (*)	Sônia Campelo	Ática – São Paulo	1ª - 1992	**17**
Matemática – Coleção Viva Vida	Giovanni & Giovanni Jr.	FTD – São Paulo	1ª - 1994	**34**
PROMAT 3 – Projeto Oficina de Matemática(*)	Maria C.C. Grasseschi et.all.	FTD – São Paulo	3ª - s/d	**26 (1)**
Matemática – Coleção Quero Aprender	Oscar Guelli	Ática – São Paulo	4ª - 1995	**30**
Novo Caminho da Matemática	Imenes, Jakubo, Lellis	Scipione – São Paulo	4ª - 1997	**35 (2)**
Alegria de Saber Matemática	Lucina Passos, et.all.	Scipione – São Paulo	4ª - 1992	**57**
Matemática e Realidade	Gelson Iezzi, et. all.	Atual – São Paulo	5ª - 1996	**32**
Uma Aventura do Pensamento	Oscar Guelli	Ática – São Paulo	5ª - 1997	**49 (1)**
Fazendo e Compreendendo Matemática	Manhúcia P. Liberman et. all.	Solução – São Paulo	5ª - 1997	**28 (7)**
11 Obras				**Total: 342 (13)**

( ) Número de enunciados envolvendo combinatória.

(*) Livros que foram pesquisados também nas coleções.

A partir desta primeira coleta, traçamos as seguintes considerações/análises:

- A maioria dos livros selecionados envolve o sentido operatório de adição sucessiva como foco de trabalho com os enunciados de problemas, ou seja, a elaboração dos enunciados dos problemas se efetiva sobre grupos e elementos, do tipo: *"Um passarinho tem duas pernas. Então três passarinhos terão:.........pernas."*

- Muitos enunciados de problemas exploram o sistema monetário, do tipo: *"Pedro comprou um livro por 6 reais. Se comprar 3 livros quanto vai pagar?"*

- Enunciados de problemas explorando comparações, do tipo: *"Maria tem 5 coleções de figurinha. Ana, sua irmã, tem o dobro. Quantas figurinhas tem Ana?"*

- Enunciados de problemas explorando o sentido operatório de produto cartesiano, principalmente enfocando disposições espaciais, do tipo: *"Um prédio de apartamentos tem 5 andares. Em cada andar há 2 apartamentos. Quantos apartamentos há nesse prédio?"*

- Na quarta e quinta séries, os enunciados de problemas explorados concentram-se em conceitos específicos, do tipo perímetro, área, volume, massa, capacidade, porcentagem. Também apresentam muitos problemas envolvendo números decimais e frações. Em função desta observação, optamos em não trabalharmos com os livros de 5ª série nas coleções. Os problemas considerados aqui não exploram tais conceitos.

- Conseguimos coletar somente treze enunciados de problemas envolvendo o registro de combinatória, sendo que oito destes estão em livros da 5ª série;

- Não conseguimos observar continuidade entre os problemas propostos nos livros didáticos, ou seja, uma evolução gradual em termos de sentido operatório explorado na operação de multiplicação. Fica clara a utilização de conceitos específicos, que necessitam da operação de multiplicação para o estabelecimento da conversão entre o enunciado e o registro matemático necessário, principalmente no final da quarta série, com enfoque maior na quinta.

Por não conseguirmos visualizar uma ampliação dos tratamentos da operação de multiplicação nos livros selecionados, optamos em fazer um novo levantamento dos enunciados dos problemas que envolvem multiplicação com números naturais, em **coleções de livros didáticos**. Este trabalho visava observar se existe um trabalho com os dois sentidos operatórios e uma ampliação destes, considerando o conceito de multiplicação, principalmente se o registro de combinatória era utilizado e se existia alguma série que se caracterizasse por apresentar este registro.

Observamos que existe um predomínio do sentido da adição sucessiva em todos os livros pesquisados. Os seja, a maioria dos livros inicia o trabalho com enunciados que exploram grupos e elementos.

4.2.2 Uma segunda etapa com os livros didáticos

Uma segunda etapa foi definir algumas coleções de livros didáticos que pudessem caracterizar melhor os vários tipos de enunciados de problemas trabalhados nas séries iniciais e, também, verificar se o registro de combinatória era explorado; se existia uma sistemática de exploração dos vários sentidos da operação de multiplicação nas obras; se alguma série trabalhava com maior ênfase com o registro de representação de combinatória; se o início do trabalho com enunciado de problemas multiplicativos considerava no mínimo, os dois sentidos operatórios da multiplicação, ou seja, adição sucessiva e produto cartesiano.

Para fazer este levantamento, elencamos 6 coleções sugeridas por professores da rede de ensino. Isso não significa que alguma obra é adotada para os alunos, são obras que servem principalmente como consulta e/ou planejamento dos professores.[37] As coleções pesquisadas foram estas:

Título da Coleção	Autor	Editora	Série/Ano	Nº de problemas
A Conquista da Matemática- Teoria e Aplicação	Giovanni e Giovanni Jr	São Paulo – FTD	1, 2, 3 e 4 – 1992	48+109+96+55= **308**
Matemática ao Vivo	Imenes, Jakubo, Lellis	São Paulo - Scipione	1, 2, 3 e 4 - 1993	12+31(8)+43(11)+39(5)= **125(24)**
Fazendo e Compreendendo Matemática (*)	Manhúcia Libermann, et. All.	Solução – São Paulo	1, 2, 3, e 4 - 1997	22(2)+44(4)+49(3)+34(3)= **149(12)**
Matemática – Coleção Desafios (**)	Sônia Campelo	Ática – São Paulo	1, 2, 3 e 4 - 1992	17+20+24+13= **74**
Matemática – A partir da Ação	Ernesto Rosa Neto	Ática - São Paulo	1, 2, 3 e 4 - 1993	28+61(2)+52+20(1)= **161(03)**
PROMAT – Projeto Oficina de Matemática (***)	Maria Cecília C. Grasseschi, et. All	FTD – São Paulo	1, 2, 3 e 4 1995	08+11+26(1)+10= **55(01)**
Total de Livros (&)				**872(40)**

(*) Livro da 1ª série já relacionado.

(**) Livro da 1ª série já relacionado.

(***) Livro da 3ª série já relacionado.

(&) Deste total de 872 enunciados de problemas, 65 são comuns aos enunciados de problemas já coletados.

( ) Os valores entre parênteses significam enunciados de problemas de combinatória.

Algumas observações e análises das obras pesquisadas:

[37] Na região de Ijuí, praticamente nenhuma escola de séries iniciais adota livro didático para os alunos. Os livros são utilizados para o planejamento dos professores ou para algumas atividades dos alunos.

- A primeira obra inicia com enunciados de problemas de multiplicação, explorando o sentido operatório de produto cartesiano, com ênfase ao registro de representação de **área,** através de linha por coluna. Na seqüência, trabalha com o sentido operatório de adição sucessiva. Aproxima o registro de elementos e grupos e a operação de multiplicação através da representação do algoritmo destas duas operações, relacionando adição sucessiva com multiplicação. Trabalha também com o registro comparativo (dobro, triplo, quíntuplo, quádruplo, tantas vezes mais que); além de aproximar a multiplicação com o sistema de numeração decimal, através do uso das palavras dezena, centena, milhar. Uma outra observação sobre esta obra é a exploração de muitos enunciados de problemas em que não se identifica um problema propriamente dito. São simples transformações das operações em uma linguagem escrita, como, por exemplo, *"Multiplique 5 por 70. Ao resultado, adicione 150. Qual é o número que você vai obter?"* (Vol.2, p.60). Esta obra pode ser caracterizada, nos seus quatro volumes, pela exploração do produto cartesiano, com ênfase no registro de área (representação de linha por coluna). Após este sentido operatório, é explorada a adição sucessiva e sua relação com a operação de multiplicação, através da representação dos dois algoritmos. Não exploram, em nenhum volume, enunciados de problemas com o sentido operatório do produto cartesiano, com o registro de combinatória.

- Na coleção Matemática ao Vivo, o início dos enunciados dos problemas envolvendo a operação de multiplicação se estabelece no volume 1, através do registro de comparação (dobro, triplo) *"Branca teve 4 filhotes. Preta teve o dobro de filhotes. Preta teve...... filhotes.(Com desenho da situação)"* (Vol.1, p. 130). Segue o registro de grupos e elementos do sentido operatório da adição sucessiva. Apresenta enunciados de problemas que exploram o registro de área (registro de linha por coluna) juntamente com a adição sucessiva. Nos volumes 2, 3 e 4, apresenta enunciados de problemas envolvendo o registro de combinatória, em que há uma proposição da confecção de materiais concretos, como possibilidade de mediar o processo de conversão do enunciado. Explora, ainda, muitos enunciados de problemas em que se faz necessária outra operação, além da multiplicação. Devemos ressalta que nesta coleção existe um item, dentro do tema números, identificado por *possibilidades*, que é explorado nos três últimos volumes. Neste item são trabalhados os enunciados de problemas que envolvem produto cartesiano, com ênfase no registro de combinatória. Ou seja, os enunciados que envolvem o registro de combinatória estão separados dos enunciados que envolvem, por exemplo, adição sucessiva.

- Em relação à coleção Fazendo e Compreendendo Matemática, esta inicia o trabalho com enunciados de problemas multiplicativos com o sentido operatório da adição sucessiva, explorando grupos e elementos e comparação (dobro, triplo, vezes mais que...). O sentido operatório do produto cartesiano é explorado através do registro de combinatória, apresentando enunciados em todos os volumes, e, no terceiro e quarto volumes, é introduzido o registro de área, através da representação de linha por coluna. Há uma ênfase no trabalho com enunciado de problemas, considerando o sentido operatório da adição sucessiva. Porém, devemos ressaltar que esta é a única coleção pesquisada que trabalha com o registro de combinatória nos quatro volumes de sua coleção.

- A obra Matemática – Coleção Desafios explora basicamente o sentido operatório da adição sucessiva com dois registros: elementos e grupos e comparação (dobro, triplo, quádruplo, a mais que...). Somente em um volume (vol. 02) são explorados enunciados de problemas envolvendo o sentido operatório do produto cartesiano, com o registro de área através da representação de linha por coluna. Não apresenta nenhum enunciado de problema envolvendo o sentido operatório de produto cartesiano, com registro de combinatória.

- Na coleção Matemática a partir da Ação, nos dois primeiros volumes é explorado o sentido operatório de adição sucessiva, com os registros de elementos e grupos e comparação. No volume dois, existem dois enunciados de problemas envolvendo o registro de combinatória. No terceiro volume, são explorados, além dos registros de adição sucessiva e comparação, alguns enunciados de problemas, com registro de área através da representação de linha por coluna. No volume quatro, a ênfase é dada ao registro de grupos e elementos, com apenas um problema de comparação e uma situação de combinatória.

- A última coleção analisada, PROMAT – Projeto Oficina de Matemática, explora com muita ênfase o sentido operatório de adição sucessiva, iniciando por este em três volumes (01, 02 e 04), com o tratamento de elementos e grupos. Apresenta também o registro de comparação (utilizando as palavras dobro, triplo, etc...), com poucos enunciados. Explora o sentido operatório do produto cartesiano, através do registro de área, com representação de linha por coluna, e um problema de combinação.

Devemos lembrar que, no livro da 5ª série, são apresentados muitos enunciados de problemas envolvendo o registro de combinatória.

Podemos dizer que, nas coleções, é possível visualizarmos uma ampliação dos enunciados dos problemas trabalhados, na perspectiva da exploração de vários sentidos operatórios, envolvendo as situações modeladas pela operação de multiplicação. Na maioria das obras, aparecem os dois sentidos operatórios fundamentais da operação de multiplicação, ou seja, adição sucessiva (grupos e elementos e comparação) e produto cartesiano (combinação e área, principalmente). Na sua maioria, os livros começam por explorar os enunciados dos problemas multiplicativos, envolvendo o sentido operatório da adição sucessiva e tentam articular as representações dos algoritmos da adição sucessiva para algoritmos da multiplicação. Esta é a principal articulação apresentada nas coleções pesquisadas, entre a adição e multiplicação. Devemos lembrar que este procedimento não garante articulação entre a operação de adição e multiplicação, pois estamos trabalhando com dois eixos diferentes das operações: um do sentido operatório e outro do algoritmo. Comparar algoritmos não garante articulação ou ampliação entre adição sucessiva e multiplicação. Esse processo pode pautar a construção das tabuadas (que se concentra no eixo dos algoritmos), mas não a articulação possível de ser estabelecida, no sentido operatório, entre as operações.

O sentido operatório de produto cartesiano é explorado, principalmente, através da representação de linha por coluna, que poderá fundamentar o registro da área, mais tarde, no processo escolar. Considerando a pesquisa realizada no mestrado, podemos afirmar que a representação de linha por coluna não explora necessariamente o pensamento multiplicativo, pois em muitas situações, os alunos acabam enumerando as linhas ou as colunas, esboçando um pensamento aditivo. Neste sentido, acreditamos que, além deste registro de linha por coluna, faz-se necessário o trabalho com a combinatória, que necessita, obrigatoriamente, do pensamento multiplicativo para conversão do registro do enunciado ao registro numérico necessário. Das coleções pesquisadas, somente uma explora o registro de combinatória em seus quatro volumes, mesmo assim com um número muito pequeno de enunciados de problemas. A exploração do sentido operatório de produto cartesiano fica muito aquém do sentido operatório da adição sucessiva, como podemos observar no quadro da página seguinte.

Dos 1149 enunciados de problemas que identificamos, nos livros didáticos, apenas ***194 enunciados exploram*** o sentido operatório de produto cartesiano, envolvendo linha por coluna e combinatória. Destes, apenas **50 enunciados** envolvem combinatória, que são, necessariamente, os que exigem um pensamento multiplicativo. Podemos observar, através dos enunciados de problemas, a seguinte distribuição dos enunciados de produto cartesiano, com representação de combinatória, nas séries:

Distribuição por série dos enunciados envolvendo combinatória

	1ª Série	**2ª Série**	**3ª Série**	**4ª Série**	**5ª Série**
Número de Problemas que exploram combinatória	4	12	15	11	8

Este quadro mostra, em primeiro lugar, o número extremamente baixo de enunciados envolvendo combinatória por série. Além disso, podemos afirmar que, nos livros didáticos pesquisados, não existe um enfoque da complementaridade do sentido operatório da adição sucessiva e do produto cartesiano, pautando o trabalho nas situações modeladas pela operação de multiplicação.

Tratamentos	**Número de Situações**
Sentido operatório de **Adição Sucessiva**	**955 – 83%**
Sentido operatório de **Produto Cartesiano**	**194 – 17%** (Destes, 50 são de combinação - 4%)

Fazemos, a seguir, algumas considerações e análises em relação aos livros didáticos e aos enunciados de problemas das situações modeladas pela operação de multiplicação:

- As coleções de livros didáticos pesquisados exploram os sentidos operatórios da operação de multiplicação nos enunciados de problemas, com ênfase na adição sucessiva – grupos e elementos e produto cartesiano, com enfoque no registro de área, através da exploração da representação de linha por coluna (tratamento retangular).

- No sentido operatório da adição sucessiva, o registro de comparação é trabalhado em quase todas as obras, utilizando as palavras dobro, triplo, quádruplo, por exemplo, como auxílio para o estabelecimento das tabuadas de 2, 3 e 4 respectivamente. Além destas palavras, usam também "quantas vezes mais que". Este registro poderá fortalecer o entendimento da multiplicação como uma simplificação da adição sucessiva. Seria necessário um trabalho efetivo com o significado das palavras que desencadeiam o pensamento multiplicativo.

- O sentido operatório do produto cartesiano, com registro de combinatória, é trabalhado, com ênfase, em apenas duas coleções, sendo que, em uma delas, aparece como um conceito separado, ou seja, é um item da coleção, chamado *"Possibilidade"*. Isso confirma nossa posição de que os autores dos livros didáticos, pesquisados, não consideram o sentido operatório e, principalmente, a relação entre eles, para propor os enunciados dos problemas multiplicativos.

Em função destas constatações, podemos perceber que um dos sentidos operatórios dos enunciados de problemas multiplicativos, e que diferencia os problemas multiplicativos dos problemas aditivos, acaba não sendo explorado com sua devida importância nos livros didáticos. Ou seja, existe uma tendência, nos livros didáticos, de explorar o sentido operatório da adição sucessiva nos enunciados dos problemas multiplicativos e deixar para um segundo plano o sentido operatório do produto cartesiano, com seus diferentes registros (exploram a área com representação de linha por coluna, mas em pequena quantidade). Logo, podemos nos perguntar como fica o trabalho com os alunos, em função desta pouca exploração do sentido operatório do produto cartesiano pelos livros didáticos. O professor, quando solicitado a produzir enunciados de problemas envolvendo a operação de multiplicação, consegue processar os dois sentidos operatórios que sustentam a operação de multiplicação, desencadeando os enunciados dos problemas multiplicativos?

Com objetivo de verificar se o professor conseguia explorar os sentidos operatórios de adição sucessiva e produto cartesiano, para enunciados de problemas envolvendo a operação de multiplicação, solicitamos a alguns professores, que trabalham com séries iniciais, uma produção de enunciados para duas operações de multiplicação. Devemos lembrar o que enunciamos no capítulo 2, ou seja a distinção entre a produção de enunciados, que é uma tarefa de redação e a resolução do enunciado do problema elaborado, que é uma tarefa de conversão. Acreditamos que os professores podem e devem ser os "criadores/elaboradores" dos enunciados trabalhados em sala de aula. Para isso, precisam ter clareza sobre, as diferentes variáveis redacionais determinadas pelo registro de representação matemático que o conceito explorado necessita. No caso da operação de multiplicação, os enunciados devem pautar o sentido operatório da adição sucessiva – envolvendo os registros de elementos e grupos e comparação e o produto cartesiano – envolvendo combinatória, caminhos, áreas, volumes, etc...

4.3 Os professores elaborando enunciados de problemas multiplicativos

Solicitamos a 30 professores de Séries Iniciais, das redes públicas e privadas da região de Ijuí, que elaborassem enunciados de problemas envolvendo as seguintes operações: 3 x 4 e 2 x 5. A grande maioria dos professores envolvidos, possui curso de Licenciatura em Pedagogia, ou outra Licenciatura, atuando em média cinco anos, nas séries iniciais. Todos os professores estavam atuando em sala de aula.

Cada professor precisava redigir 5 enunciados envolvendo cada uma das duas operações. Nesta solicitação, explicamos aos professores que eles, precisavam criar enunciados de problemas multiplicativos, explorando idéias/sentidos diferentes para as operações. Estas idéias/sentidos não significam situações do mundo real diferente, do tipo um problema envolve a compra de mercadorias e outro problema envolve o número de flores em um vaso. Isso pode ser entendido como situações diferentes, mas não, necessariamente, idéias diferentes da operação de multiplicação. A idéia está relacionada ao registro de representação diferente que pode ser estabelecido para a resolução do problema, tendo por base o sentido operatório. Aqui estamos considerando variações nos fatores intrínsecos dos problemas e não somente nos fatores extrínsecos. Os enunciados elaborados pelos professores foram classificados e tabelados. O resultado que obtemos foi o seguinte:

Professores envolvidos: 30 professoras

27 professores elaboraram 5 enunciados de problemas envolvendo cada uma das operações.
2 professores elaboraram 5 enunciados de problemas envolvendo (3x4) e 4 enunciados de problemas envolvendo (2x5).
1 professor elaborou 4 enunciados de problemas envolvendo (3x4) e 5 enunciado de problemas envolvendo a operação (2 x 5).

Total: 297 enunciados de problemas multiplicativos elaborados pelos professores.

QUADRO GERAL DOS ENUNCIADOS, ELABORADO PELOS PROFESSORES

Sentido operatório e registro utilizado para a elaboração do enunciado	**Número de problemas e porcentagem**
Adição Sucessiva – Grupos e Elementos	**150 – 50,51%**
Ad. Sucessiva - Problema Envolvendo Preço	**36 – 12,12%**
Adição Sucessiva - Comparação	**56 – 18,86%**
Produto Cartesiano – Proporção	**4 – 1,35%**
Produto Cartesiano – Combinatória	**2 – 0,67%**
Produto Cartesiano – Área	**2 – 0,67%**
Equívoco – Redação ou não corresponde à operação	**20 – 6,73%**
Equívoco na operação – usa Adição	**4 – 1,35%**
Equívocos na operação – usa Divisão	**3 – 1,01%**
Equívoco – Comparação	**20 – 6,73%**
Total de enunciados	**297 – 100%**

PROCESSO DE CONVERSÃO	**SENTIDO OPERATÓRIO**	**NÚMERO DE PROBLEMAS**	**PORCENTAGEM EM RELAÇÃO AO TOTAL**
Correto	Produto Cartesiano	8	2,69%
	Adição Sucessiva	242	81,48%
Equivocado	Produto Cartesiano	9	3,03%
	Adição Sucessiva	38	12,80%

Podemos observar como é significativo para os professores o uso de enunciados de problemas multiplicativos que exploram o sentido operatório da adição sucessiva, com o registro de grupos e elementos, como, por exemplo[38]:

- Maria tem três vasos com quatro flores em cada um. Quantas flores ela tem ao todo?

- Em uma cesta cabe 3 melões? Quantos melões caberão em 4 cestas?

- Claudete tem três vezes mais canetas do que Claudia. Claudia tem 4 canetas. Quantas canetas Claudete tem?

- Paulo possui 4 anos, seu irmão possui o triplo. Quantos anos têm o irmão de Paulo?

Este é o principal sentido operatório usado pelos professores e que apresenta maior facilidade de elaboração pelos mesmos. Essa elaboração confirma a ênfase existente no trabalho com o sentido operatório de adição sucessiva, para os problemas multiplicativos, pelos livros didáticos, que também, por sua vez, reforçam o sentido operatório de adição sucessiva. Além disso, o mais sério é a parcialidade da operação de multiplicação, ou seja, é trabalhado somente o aspecto unitário desta, o que se torna limitante para a compreensão e construção de seu conceito pelo aluno.

Outro registro que se destaca, nos enunciados dos problemas elaborados pelos professores, é a determinação de preço de *n* produtos. Neste caso, temos uma quantidade *E* por uma *I*, com uma determinação de uma quantidade *E* preço, que Franchi trabalhou em sua tese e outros teóricos afirmam serem os problemas mais trabalhados na operação de multiplicação, assim como o registro de grupos e elementos, da adição sucessiva, pois envolvem o mesmo tipo de quantidade (extensiva e intensiva resultando em uma extensiva). Como, por exemplo:

- Pedro comprou 4 quilos de balas. Cada quilo custou 3 reais. Quanto Pedro gastou?

- Comprei uma caneta por 2,00. Se quiser comprar uma caneta a cada um dos meus 5 amigos, precisarei de .....reais.

Os enunciados de problemas referentes ao registro de comparação, classificação definida por MAZA e que representa o sentido operatório da adição sucessiva, são significativos nos problemas propostos pelos professores. Assim como são os enunciados de problemas que mais apresentaram dificuldades, com equívocos na

[38] Todos os exemplos utilizados aqui são fiéis às elaborações dos professores. Não fizemos nenhum tipo de correção.

sua elaboração. Como exemplo de situações envolvendo o registro de comparações, temos:

- Na festa de Carmem possuia 4 pessoas. Na festa de Ângela havia o triplo. Quantas pessoas havia na festa de Ângela?

-Tenho 5 maçãs, Ângela tem 2 vezes mais maçãs que eu. Quantas maçãs têm Ângela?

Podemos observar alguns enunciados de problemas, que tentam desenvolver este registro de comparação, mas que são incorretos no seu enunciado, tais como:

- Colecionei 2 figurinhas de chicle por tarde, e Claudete colecionou o dobro e mais uma. Quantas figurinhas colecionamos por tarde?(lembrar que a operação é 2 x 5)

- Comprei 5 sorvetes e resolvi compra-los mais duas vezes o que comprei. Quantos sorvetes ficaram?

- Tânia contêm 3 balas. Foi ao mercado comprar o dobro de duas que tinha. Quantas balas Tânia ficou?(operação 3 x 4)

- Em uma festa foram feitas 4 latinhas de doces e 3 vezes mais no restante da festa. Quantas latas de doces foram feitas?

Nestes enunciados os professores quiseram usar o registro de comparação, porém tiveram dificuldade na tarefa de redação do enunciado de problema. Isso vem ao encontro do que afirmamos, baseado em Duval, que a tarefa de redação envolve processos diferentes da tarefa de conversão, com um entendimento do objeto matemático que está sendo considerado. Isso nos faz pensar o quanto precisamos redimensionar as práticas pedagógicas no ensino de matemática. O processo de solicitar aos alunos que escrevam enunciados de problemas a partir de operações, muito usado pelos professores como uma outra forma de explorar os problemas no contexto escolar, é complexo e exige um trabalho efetivo sobre este fazer (tarefa de redação), assim como o processo de resolução do problema, ou seja, a tarefa de conversão.

Nos problemas que exploram o sentido operatório do produto cartesiano, podemos observar três registros distintos: proporção, combinatória e área. Precisamos considerar que estes registros só apareceram em oito enunciados e, mesmo assim, os enunciados de combinatória não estão muito claros. Como exemplos, temos:

- Minha mãe tem 3 blusas coloridas. Cada uma dessas blusas tem 4 cores diferentes. Quantas cores ao todo minha mãe tem em suas blusas?

- Quero fazer uma quadra com 3 metros de largura e 4 metros de comprimento. Quantos metros quadrados ocuparei?"

São enunciados em que podemos visualizar a tentativa de explorar o sentido de combinatória. Porém, não são enunciados que possam ser convertidos, utilizando a operação de multiplicação, da maneira como estão redigidos.

Em relação aos enunciados de problemas multiplicativos, que apresentaram equívocos pelos professores, em relação à redação e às operações, temos alguns exemplos. Devemos lembrar que as operações solicitadas são 3 x 4= e 2 x 5=:

- Fui numa loja de 1,99 e comprei 3 agarradinhos para dar a 3 crianças no final de 4 dias. Quantos agarradinhos eu darei a eles?

- Tem uma feira de gado, os feirantes entraram em acordo os 3 juntos montaram a feira, no primeiro dia venderam 4 cabeças de gado. Quantas cabeças eles venderam em quatro dias, se cada dia venderam 4?

- Maria andou 3 quilômetros, Marta andou 4 quilômetros. Quantos quilômetros somam as duas juntas?

- Somos 12 colegas. A professora dividiu a turma em 4 equipe. Cada membro da equipe teria que trazer um bombom para a turma. Quantos bombons deu ao todo?

- Claudete comeu 5 fatias de pão de na parte da manhã. Quantas fatias comeu durante o dia?"

Considerando a elaboração dos enunciados dos problemas multiplicativos elaborados pelos professores, podemos dizer que estes têm presente o sentido operatório da adição sucessiva – grupos e elementos -, sendo suas elaborações pautadas por este tratamento (242 enunciados de problemas envolvendo o sentido operatório de adição sucessiva e 8 enunciados envolvendo produto cartesiano). Os professores, envolvidos na pesquisa, apresentam equívocos na tarefa de redação dos enunciados dos problemas, partindo da operação. Estes equívocos se dão principalmente no registro do sentido da comparação, com a utilização de termos, tais como dobro, triplo, mais que, etc... Isso pode indicar que o uso de palavras-chaves para a operação de multiplicação não pode ser reforçado. Esta questão é levantada por Maza (1995:30), que afirma: " *...la confianza em las palabras clave seguirá presente (sobre todo si se há reafirmado em operaciones anteriores), pero la exclusión de los problemas de Combinación y Conversión llevará a la formación de unos modelos rígidos de aprendizaje en estas* *operaciones artiméticas."* Além disso, o registro de combinatória e área, que são os dois principais registros utilizados no sentido operatório do produto cartesiano, pelos livros didáticos, são quase inexistentes nos enunciados propostos pelos professores. Os enunciados, envolvendo o registro de combinatória, não estão corretamente elaborados: eles conseguem apenas dar uma idéia de combinatória, mas não podem ser resolvidos pela operação de multiplicação fornecida.

Após estas considerações realizadas sobre os enunciados de problemas propostos por alguns livros didáticos e a elaboração de enunciados de problemas por alguns professores que atuam nas séries iniciais, podemos enfocar os alunos frente os enunciados de problemas multiplicativos, no processo de conversão, com enunciados enfocando o sentido operatório do produto cartesiano. Mais especificamente, enunciados envolvendo registro de combinatória.

Se os livros didáticos exploram poucos enunciados de problemas, enfocando o registro de combinatória, e os próprios professores envolvidos na pesquisa, acabam não considerando esse sentido como uma sistemática, será que os alunos conseguem resolver problemas desse tipo? Quais os registros que eles usam para converter o texto - enunciado do problema em um registro numérico que possibilite uma resposta correta? Os fatores intrínsecos e extrínsecos realmente interferem na congruência do enunciado do problema? A utilização de representações intermediárias possibilita uma melhora no processo de conversão?

4.4 Uma primeira análise considerando o processo de conversão estabelecido pelos alunos

Escolhemos dez enunciados de problemas elencados pelos livros didáticos, pesquisados, envolvendo o sentido de combinatória e solicitamos a 30 alunos de 5ª série, de diferentes escolas de Ijuí, para resolve-los. Fomos em dez escolas de Ijuí. Nestas escolas solicitamos a professora de uma 5ª série para escolher três alunos que desejassem resolver os enunciados propostos. Nosso objetivo era tentar identificar se os alunos eram capazes de resolver os enunciados propostos, servindo como um diagnóstico para a realização das variações redacionais, a ser realizada posteriormente.

Nossa opção por alunos de 5ª série foi em função de estarmos trabalhando com situações elementares da operação de multiplicação, e não com conceitos específicos (do tipo área, volume, proporção). Também, porque, nas coleções pesquisadas e nos enunciados propostos pelos professores, mesmo com uma quantidade mínima, aparece o registro de produto cartesiano. Além disso, devemos lembrar de que são os registros estabelecidos pelo sentido operatório do produto cartesiano que estabelecem, para a operação de multiplicação, o caráter binário, que a distingue da operação de adição. Logo, acreditávamos que os alunos de 5ª série, *a priori*, já teriam uma noção das situações propostas aqui e condições para resolver tais enunciados de problemas. Mostramos a seguir os enunciados trabalhados e os procedimentos adotados pelos alunos:

ENUNCIADOS PROPOSTOS AOS ALUNOS E PROCEDIMENTOS ADOTADOS

1. As seleções do Brasil, Argentina, Peru e Uruguai disputam um campeonato. Todos os times se enfrentam uma só vez. Que jogos devem ser realizados?

Procedimentos corretos: 8 alunos.

Destes 8 alunos, 6 fizeram uma representação por árvore de possibilidade. 1 colocou somente a resposta e 1 descreveu as possibilidades de cada time pegando 3 times.

Procedimentos incorretos: 22 alunos

- **Idéia de dois jogos** se enfrentando Brasil x Argentina e Peru x Uruguai: 12 alunos.
- **Não respondeu:** 1 aluno
- **Outras respostas:**
    - **12 jogos:** 1 aluno
    - **Todos contra todos:** 1 aluno
    - **Iniciaram a distribuição dos times corretamente, mas não a terminaram:** 2 alunos
    - **Respostas sem sentindo:** 5 alunos

Não é possível, neste enunciado, pensarmos em uma operação. É um problema de contagem e combinação destes elementos. Conseguimos perceber que os alunos não conseguem manter uma das quantidades fixas para poder combinar. Condição necessária para pensar combinatoriamente.

2. Numa sorveteria há sorvete de copinho e de casquinha. O sabor pode ser de chocolate, flocos, limão ou uva. Quantos tipos de sorvete essa sorveteria oferece a seus clientes, considerando que só podemos escolher um sabor de cada vez?

- **Procedimento correto** – utilizando a operação de multiplicação: 1 aluno
- **Procedimentos incorretos**:
    - **Casquinhas e copinhos**: 7 alunos
    - **Respostas de outras quantidades:**
        - 2 tipos de sorvete (consideram no que colocar o sorvete): 3 alunos
        - 4 tipos de sorvete (consideram a quantidade de sabores): 10 alunos
        - 6 tipos de sorvete (envolve 2 - copinhos e casquinha - e 4 tipos de sabor, somando-os) : 4 alunos
    - **Não respondeu**: 1 aluno
    - **Respostas sem sentindo**:
        - **20 sorvetes**: 1 aluno
        - **3 tipos de sorvete**: 1 aluno
        - **distribuiu e acrescentou os sabores, com resposta 20**: 1 aluno
        - **elencou os sabores e considerou os recipientes em que podem ser colocados os sorvetes:** 1 aluno

A atenção dos alunos se volta para uma das quantidades envolvidas no enunciado. Não existe uma idéia de combinação entre as duas quantidades.

3. Usando os algarismos 6, 7 e 8, podendo ou não repeti-los, podemos escrever nove números de dois algarismos. Quais são?

- **Procedimento correto com escrita de todos os números**: 23 alunos
- **Procedimentos incorretos**: 7 alunos
    - Acrescentam os valores 60, 70, 80 e não repete *u* e *d*: 1 aluno
    - Iniciou as combinações e não finalizou: 1 aluno
    - Enumerou todas as quantidades, usando 6,7 e 8 como dezena e 0 a 9 como unidade: 1 aluno

- Respostas sem sentido (68, 680, 6800, 6850, 8600, 608, 60008; 6, 27, 42, 63, 84; são 68 que podemos repetir nove vezes; 6 = 2, 3, 6 e 8 = 2, 4, 8): 4 alunos.

Este enunciado é o que teve o maior número de procedimentos corretos. Isso pode ser entendido considerando dois pontos. O enunciado apresenta o resultado numérico solicitado, ficando para os alunos somente o registro destes números (que foi o que ocorreu). Ou em função, de apresentar poucas possibilidades, necessária a combinação, é possível, o aluno fazer tentativa e erro.

4. Nas competições da escola, os alunos podem escolher um esporte individual (natação e salto em distância) e outro coletivo (futebol, basquete e vôlei). Escreva as possibilidades de um aluno participar dos jogos do campeonato?

- **Procedimentos corretos**: 3 alunos
  - Usando somente a operação:1 aluno
  - Usando uma representação da árvore de possibilidade ou elencando as possibilidades: 2 alunos
- **Procedimentos incorretos**: 27 alunos
  - Somente uma possibilidade, sendo este o esporte individual: 4 alunos
  - Somente uma possibilidade, um coletivo e um individual: 5 alunos
  - Somente um esporte: 6 alunos
  - Não responderam: 3 alunos
  - Citaram alguns esportes sem relacioná-los: 2 alunos
  - Resposta sem sentindo: "Competir para ganhar o jogo": 7 alunos

Este foi o enunciado que apresentou melhor resultado no processo de conversão.

5. De quantas maneiras diferentes um casal e um cachorro podem ser acomodados em um sofá de 3 lugares?

- **Procedimentos corretos**: 2 alunos
  - Usando operação 2 x 3 = 6: 1 aluno
  - Fazendo as possibilidades: 1 aluno
- **Procedimentos incorretos**: 28 alunos
  - Resposta "sentados": 5 alunos
  - Descreve várias maneiras, mas não chega ao total: 1 aluno

- Não respondeu: 1 aluno
- Uma maneira:11 alunos
- Duas maneiras: 1 aluno
- Várias maneiras: 2 alunos
- Sentado, deitado e em pé: 4 alunos
- Três maneiras: 3 alunos.

Este enunciado é um enunciado típico de trabalho em sala de aula, porém sem nenhum sentido com a vida real. Podemos notar os procedimentos adotados pelos alunos. Estes acabaram pensando sobre a situação e respondendo sobre ela. O pensamento matemático, não teve nenhum significado. Como professores, precisamos repensar os enunciados propostos, pois estes precisam ter significados matemáticos, mas também significado com a vida.

6. Com 2 narizes e 3 chapéus, quantos disfarces diferentes você pode fazer?

- **Procedimentos corretos**: 3 alunos
    - Fazendo as combinações: 2 alunos
    - Fazendo a operação: 1 aluno
- **Procedimentos incorretos**: 27 alunos
    - Resposta 5 disfarces (soma das parcelas): 7 alunos
    - Dois disfarces e sobra 1 chapéu: 7 alunos
    - Não respondeu: 1 aluno
    - Três disfarces: 4 alunos
    - Nove disfarces: 1 aluno
    - Um palhaço: 2 alunos
    - Um nariz dois chapéus e um nariz um chapéu: 5 alunos

7. Com dois pares de tênis, 3 camisas e 4 calças, quantas combinações de roupas você pode fazer?

- **Procedimentos corretos**: 1 aluno
    - Elencando as combinações: 1
- **Procedimentos incorretos**: 29 alunos
    - Três combinações (considerando os 3 atributos): 7 alunos
    - Nove combinações (2 +3 +4): 3 alunos
    - Duas combinações (considerando o número de tênis): 8 alunos

- Quatro combinações (levando em consideração o número de calças): 4 alunos
- Cinco combinações (considerando número de tênis e camisas): 1 aluno
- Dez combinações: 1 aluno
- Um dia ponho uma e outro posso fazer outra, várias combinações: 2 alunos
- Não responderam: 3 alunos

8. Uma fábrica produz bonecas, com as seguintes características: tamanho grande ou pequeno; cor dos olhos: verdes, azuis ou pretos; cor dos cabelos: pretos ou loiros.

- Descreva uma boneca produzida por essa fábrica:

- Quantas bonecas diferentes essa fábrica poderá produzir?

- **Resposta correta**: 3 alunos
  - Elencando todas as possibilidades: 3 alunos
- **Procedimentos incorretos**: 27 alunos
  - Descreve uma possibilidade e responde haver duas bonecas diferentes: 4 alunos
  - Descreve uma possibilidade e responde haver três bonecas diferentes: 6 alunos
  - Responde que várias bonecas podem ser produzidas: 2 alunos
  - Só descrevem uma boneca: 5 alunos
  - Descrevem e encontram 7 bonecas produzidas (considerando a quantidade de atributos 2+2+3): 4 alunos
  - Descrevem e encontram 4 bonecas (considerando dois atributos 2 +2): 2 alunos
  - Descrevem e encontram 5 bonecas (considerando a cor dos olhos e outro atributo 2 + 3): 2 alunos
  - Outras quantidades de bonecas: 1 aluno
  - Não responde: 1 aluno

9. Pedro pretende viajar de São Paulo a Porto Alegre. Consultando uma agência de turismo, foi informado de que 2 companhias aéreas fazem essa rota 2 vezes ao dia, em horários diferentes. Qualquer que seja o vôo escolhido, ele poderá optar, ainda, pelas classes econômica ou luxo. Quantas possibilidades de viajar, voando em diferentes condições, tem Pedro, se considerarmos um período de uma semana?

- **Resposta correta**: Nenhum aluno
- **Procedimentos incorretos**: 30 alunos
    - Duas possibilidades (reforço às classes econômica e luxo): 9 alunos
    - Não responderam: 5 alunos
    - Quatro possibilidades (2 +2): 1 aluno
    - Quatorze possibilidades (com operação 7 x 2): 4 alunos
    - Vinte oito possibilidades: 3 alunos
    - Dez possibilidades: 3 alunos
    - Oito possibilidades - não consideram a semana: 2 alunos
    - Outras respostas, considerando tempo de vôo: 3 alunos.

O fato do enunciado envolver três combinações, torna o enunciado completamente não congruente aos alunos.

10. Nossa classe vai representar uma peça de teatro. Fábio, Bruno e Luís querem ser Rei. Carol, Fabiane e Jô querem ser Rainha. Quantos pares, rei-rainha daria para formar?

- **Procedimentos corretos**: 3 alunos
    - Descrevendo as possibilidades: 3 alunos
- **Procedimentos incorretos**: 27 alunos
    - Um par rei-rainha: 5 alunos
    - Três pares rei-rainha (considerando a quantidade de meninas): 17 alunos
    - Dois pares: 2 alunos
    - Quatro pares: 1 aluno
    - Não responderam: 2 alunos

RESULTADOS OBTIDOS EM FUNÇÃO DOS REGISTROS

ENUNCIADO DO PROBLEMA	REGISTRO CORRETO	REGISTRO INCORRETO
01	8 alunos	22 alunos
02	1 aluno	29 alunos
03	23 alunos	7 alunos
04	6 alunos	24 alunos
05	2 alunos	28 alunos
06	3 alunos	27 alunos
07	1 aluno	29 alunos
08	3 alunos	27 alunos
09	0 alunos	30 alunos
10	3 alunos	27 alunos

Frente a este catastrófico resultado, pode-se observar a grande dificuldade que os alunos apresentam em relação aos enunciados dos problemas multiplicativos que enfocam o registro de combinatória, nesta primeira etapa. Isso pode ser analisado, levando-se em consideração, no mínimo, duas causas: o reduzido trabalho deste registro no processo escolar e a dificuldade na compreensão dos enunciados de problemas pelos alunos, gerando a não-congruência dos mesmos.

Os registros incorretos, estabelecidos pelos alunos, estão centrados, principalmente, na falta de entendimento atribuída pelos alunos, aos enunciados. Ou seja, o processo de conversão estabelecido pelos alunos dá-se no sentido do entendimento dos enunciados, como se estes envolvessem a operação de adição, ou a consideração de somente uma das quantidades envolvidas. Os alunos adicionam as quantidades determinadas no enunciado do problema. Isso pode ser causado pela aproximação feita, no processo escolar, para estas duas operações. Os alunos são levados a "entender" que a operação de multiplicação é "simplesmente uma adição sucessiva". Logo, um enunciado que envolve multiplicação pode ser resolvido (convertido) mediante uma operação de adição das parcelas.

Isto pode reforçar nossa tese sobre a importância da exploração do sentido operatório no trabalho pedagógico. No caso da multiplicação, o sentido operatório da adição sucessiva e do produto cartesiano, com sua complementaridade e ruptura, sustentando a elaboração dos enunciados dos problemas. Nesta perspectiva, é importante entender essa complementaridade e ruptura existente entre as operações de adição e multiplicação. Isso é fundamental para a proposição de enunciados e, principalmente a construção do conceito da operação de multiplicação. Os enunciados a serem explorados precisam envolver todos os diversos sentidos operatórios que sustentam a operação, na perspectiva de construção do conceito, através de variações redacionais.

Outra questão que pode ser enfocada, analisando os registros incorretos, refere-se à dificuldade que os alunos têm na compreensão do enunciado. Isso poderá ser trabalhado pelo professor, ou até mesmo pelos livros didáticos, se considerarmos variações redacionais para os enunciados pertencentes a um campo de enunciados de problemas. A questão é saber se as variações redacionais, sustentadas pelos fatores intrínsecos, tornam os enunciados dos problemas mais congruentes ao processo de conversão estabelecido pelos alunos; e se a inclusão de uma representação intermediária poderia facilitar este processo? Essas questões serão aprofundadas no próximo capítulo, no qual enfocaremos o papel da variação redacional dos enunciados de problemas multiplicativos de combinatória, no processo de conversão estabelecido pelos alunos.

Esta primeira etapa, do trabalho realizado com os alunos, considerando o processo de conversão, mostra a grande dificuldade no estabelecimento deste processo, envolvendo o sentido operatório do produto cartesiano, mais especificamente combinatória. Para darmos seqüência a pesquisa, considerando o quadro que traçamos em relação aos livros didáticos, os professores e esta primeira etapa dos alunos, envolvidos na pesquisa, vai explorar enunciados envolvendo caminhos e possibilidade de ocorrências. Estes são os mais elementares, considerando o sentido operatório do produto cartesiano. Envolveremos turmas de 5ª e 8ª série. Quinta, em função de estarem iniciando o processo de formalização de alguns conceitos, que envolvem a estrutura multiplicativa. Oitava série, em função de ser a série final do Ensino Fundamental. Como estes alunos estão fechando um ciclo de estudo seria possível observar alguma diferença nestas duas séries, considerando o processo escolar.

O capítulo posterior tratará especificamente sobre os enunciados dos problemas de combinatória, considerando as variações redacionais, em algumas turmas de 5ª e 8ª série.

5 - VARIAÇÃO REDACIONAL E OS ENUNCIADOS DE COMBINATÓRIA

5.1 Variando redacionalmente os enunciados dos problemas de combinatória

A partir dos resultados obtidos nesta primeira etapa com os enunciados, retirados dos livros didáticos, considerando o processo de conversão realizado pelos alunos e a fundamentação teórica, sentimos necessidade de determinar alguns enunciados básicos para serem variados redacionalmente.

Para isso, partimos da determinação de duas operações de multiplicação (3 x 4 e 2 x 3). A estas operações determinamos os enunciados de combinatória envolvendo o registro de possibilidade de ocorrência e caminhos (fatores intrínsecos). Para cada um destes registros, foram enfocadas duas situações extra-matemáticas, considerando o fator extrínseco do enunciado. Com estas definições, elaboramos quatro enunciados básicos, os quais variamos redacionalmente 16 vezes, considerando os fatores intrínsecos (a escolha dos elementos de organização cognitiva, o grau de explicitação) e os fatores extrínsecos (lugar da questão e situação extra-matemática). Os enunciados básicos elaborados foram:

- Possibilidade de ocorrência: ou contagem

- Com três casacos e quatro calças, quantos trajes você poderá fazer?
- Uma lancheria oferece dois tipos de bebida e três tipos de sanduíche. Quantos lanches podem ser feitos?

- ***Caminhos:***

- Marcelo quer ir para a sua escola, mas precisa passar pela casa de Paulo para pegar um livro. Sabendo que existem três ruas da sua casa até a casa de Paulo e da casa de Paulo até a escola quatro ruas, quantos caminhos Marcelo poderá fazer para chegar até a escola passando pela casa de Paulo?
- Ana mora em Ijuí e vai visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar, antes, em Curitiba, para levar uma encomenda de sua avó. Para fazer a viagem, Ana tem duas rodovias para chegar até Curitiba e de Curitiba para Mato Grosso três rodovias. Quantos trajetos Ana poderá percorrer para ir de Ijuí até o Mato Grosso, passando por Curitiba?

Com a definição destes quatro enunciados, os critérios para estabelecer as variações redacionais, considerando os fatores intrínsecos e extrínsecos foram:

- O ***primeiro grupo*** de enunciados é responsável pelo **enunciado elementar**. É o enunciado que possui menor quantidade de informação.
- O ***segundo grupo*** de enunciados elenca a **palavra diferente**. Estes enunciados são modificados no sentido do grau de explicitação, ou seja, pela inclusão de uma expressão (fator intrínseco).
- O ***terceiro grupo*** de enunciados **modifica a questão,** com base no segundo enunciado. O lugar da questão é modificado neste enunciado (fator extrínseco).
- O ***quarto grupo*** de enunciados é baseado no enunciado original, acrescentando as **palavras combinação e sempre.** Estes enunciados são modificados segundo a escolha dos elementos de organização cognitiva que vamos explicitamente designar (fator intrínseco).
- O ***quinto grupo*** de enunciados está baseado no quarto grupo de enunciados **modificando a questão.** O lugar da questão é modificado (fator extrínseco).
- O ***sexto grupo*** de enunciado tem por base o enunciado original, **acrescentando as qualidades e caminhos.** Esses enunciados são modificados no sentido do grau de explicitação, ou seja, segundo a inclusão de termos (fator intrínseco).
- O ***sétimo grupo*** de enunciados está baseado no **segundo grupo, acrescentando as qualidades e caminhos.** Estes enunciados são modificados no sentido do grau de explicitação, ou seja, mediante a inclusão de termos (fator intrínseco).

- O ***oitavo grupo*** de enunciados tem por base o **quarto grupo, acrescentando as qualidades e aos caminhos.** Estes enunciados são modificados no sentido do grau de explicitação, ou seja, pela inclusão de termos (fator intrínseco).
- O ***nono grupo*** de enunciados toma por base o **oitavo grupo, com modificação do lugar da questão** (fator extrínseco).
- O ***décimo grupo*** de enunciados tem por base o **enunciado original, somado com a representação natural**. A representação intermediária natural é entendida como uma representação que enfoca a situação extra-matemática do enunciado (fator intrínseco).
- O ***décimo primeiro*** grupo está baseado no **enunciado é o enunciado original, com acréscimo de uma representação estruturada.** A representação intermediária estruturada é uma representação que considera a estrutura representacional do objeto matemático explorado. Neste caso, utilizamos uma matriz de dupla entrada e a árvore de possibilidade (fator intrínseco).
- O ***décimo segundo*** grupo de enunciados alicerça-se no **oitavo grupo, com acréscimo de uma representação natural** (fator intrínseco).
- O ***décimo terceiro*** grupo de enunciados está baseado no **oitavo grupo, somado a uma representação estruturada** (fator intrínseco).
- O ***décimo quarto*** grupo de enunciados está baseado no **nono grupo, acrescido de uma representação estruturada** (fator intrínseco).
- O ***décimo quinto*** grupo de enunciados está baseado no **nono grupo, acrescido de uma representação natural** (fator intrínseco).
- O ***décimo sexto*** grupo de enunciados está baseado no **segundo grupo, com acréscimo de uma representação natural** (fator intrínseco).
- O ***décimo sétimo*** grupo de enunciados está baseado no **segundo grupo, com acréscimo de uma representação estruturada** (fator intrínseco).

Considerando as determinações das variações redacionais, os enunciados dos problemas, propostos aos alunos, para o estabelecimento do processo de conversão, foram:

GRUPO 1

1. Com três casacos e quatro calças, quantos trajes você poderá fazer?
2. Uma lancheria oferece dois tipos de bebida e três tipos de sanduíche. Quantos lanches podem ser feitos?

3. Marcelo quer ir para a sua escola, mas precisa passar pela casa de Paulo para pegar um livro. Sabendo que existem três ruas da sua casa até a casa de Paulo e da casa de Paulo até a escola quatro ruas, quantos caminhos Marcelo poderá fazer para chegar até a escola, passando pela casa de Paulo?
4. Ana mora em Ijuí e vai visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar, antes, em Curitiba, para levar uma encomenda de sua avó. Para fazer a viagem Ana têm duas rodovias para chegar até Curitiba e de Curitiba para Mato Grosso três rodovias. Quantos trajetos Ana poderá percorrer para ir de Ijuí até o Mato Grosso, passando por Curitiba?

GRUPO 2
1. Com três casacos e quatro calças, quantos trajes diferentes você poderá fazer?
2. Uma lancheria oferece dois tipos de bebida e três tipos de sanduíche. Quantos lanches diferentes podem ser feitos?
3. Marcelo quer ir para a sua escola, mas precisa passar pela casa de Paulo para pegar um livro. Sabendo que existem três ruas da sua casa até a casa de Paulo e da casa de Paulo até a escola quatro ruas, quantos caminhos diferentes Marcelo poderá fazer para chegar até a escola, passando pela casa de Paulo?
4. Ana mora em Ijuí e vai visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar antes, em Curitiba para levar uma encomenda de sua avó. Para fazer a viagem, Ana tem duas rodovias para chegar até Curitiba e de Curitiba para Mato Grosso três rodovias. Quantos trajetos diferentes Ana poderá fazer para ir de Ijuí até Mato Grosso, passando por Curitiba?

GRUPO 3
1. Quantos trajes diferentes você poderá fazer, com três casacos e quatro calças?
2. Quantos lanches diferentes podem ser feitos em uma lancheria que oferece dois tipos de bebida e três tipos de sanduíche?
3. Quantos caminhos diferentes Marcelo poderá fazer para chegar até a escola, sabendo que precisa passar pela casa de Paulo para pegar um livro, considerando que existem três ruas da sua casa até a casa de Paulo e da casa de Paulo até a escola quatro ruas?
4. Quantos trajetos diferentes Ana poderá percorrer para ir de Ijuí até Mato Grosso, passando por Curitiba, considerando que Ana mora em Ijuí e vai visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar, antes, em Curitiba para levar uma encomenda de sua avó. Para fazer a viagem Ana tem duas rodovias para chegar até Curitiba e de Curitiba para Mato Grosso, três rodovias.

GRUPO 4
1. Com três casacos e quatro calças, combinando sempre um casaco e uma calça, quantas combinações de trajes diferentes você poderá fazer?
2. Uma lancheria oferece dois tipos de bebida e três tipos de sanduíche. Lanchando sempre um tipo de bebida e um tipo de sanduíche, quantas combinações de lanches diferentes podem ser feitas?
3. Marcelo quer ir para a sua escola, mas precisa passar pela casa de Paulo para pegar um livro. Sabendo que existem três ruas diferentes da sua casa até a casa de Paulo e da casa de Paulo até a escola, quatro ruas diferentes, quantas combinações de caminhos diferentes Marcelo poderá fazer para chegar até a escola, passando sempre pela casa de Paulo?

4. Ana mora em Ijuí e vai visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar antes, em Curitiba, para levar uma encomenda de sua avó. Para fazer a viagem, Ana tem duas rodovias diferentes até chegar em Curitiba e, de Curitiba para Mato Grosso, três rodovias diferentes. Quantas combinações de trajetos diferentes Ana poderá fazer para ir de Ijuí até Mato Grosso, passando sempre por Curitiba?

GRUPO 5

1. Quantas combinações de trajes diferentes você poderá fazer, com três casacos e quatro calças, combinando sempre um casaco e uma calça?
2. Quantas combinações de lanches diferentes podem ser feitas, em uma lancheria que oferece dois tipos de bebida e três tipos de sanduíche, lanchando sempre um tipo de bebida e um tipo de sanduíche?
3. Quantas combinações de caminhos diferentes Marcelo poderá fazer para chegar até a escola, passando sempre pela casa de Paulo, pois precisa pegar um livro. Sabendo que existem três ruas diferentes da sua casa até a casa de Paulo e, da casa de Paulo até a escola, quatro ruas diferentes.
4. Quantas combinações de trajetos diferentes Ana poderá fazer para ir de Ijuí até Mato Grosso, passando sempre por Curitiba, para visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar antes em Curitiba, para levar uma encomenda de sua avó, sabendo que para fazer a viagem, Ana tem duas rodovias diferentes para chegar até Curitiba e, de Curitiba para Mato Grosso, três rodovias diferentes.

GRUPO 6

1. Com três casacos (um branco, um amarelo e um vermelho) e quatro calças (uma azul, uma preta, uma marrom e uma verde), quantos trajes você poderá fazer?
2. Uma lancheria oferece dois tipos de bebida (suco e refrigerante) e três tipos de sanduíche (misto, prensado e natural). Quantos lanches podem ser feitos?
3. Marcelo quer ir para a sua escola, mas precisa passar pela casa de Paulo para pegar um livro. Sabendo que existem três ruas (rua Sepé, rua Rondônia e rua Amazonas) da sua casa até a casa de Paulo e, da casa de Paulo até a escola, quatro ruas (rua Central, rua Maceió, rua Sergipe e rua Manaus), quantos caminhos Marcelo poderá fazer para chegar até a escola, passando pela casa de Paulo?
4. Ana mora em Ijuí e vai visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar antes, em Curitiba, para levar uma encomenda de sua avó. Para fazer a viagem Ana tem duas rodovias para chegar até Curitiba (a BR043 e a RS473) e, de Curitiba para Mato Grosso, três rodovias (a BR102, a PR205 e a BR367). Quantos trajetos Ana poderá percorrer para ir de Ijuí até Mato Grosso, passando por Curitiba?

GRUPO 7

1. Com três casacos (um branco, um amarelo e um vermelho) e quatro calças (uma azul, uma preta, uma marrom e uma verde), quantos trajes diferentes você poderá fazer?
2. Uma lancheria oferece dois tipos de bebida (suco e refrigerante) e três tipos de sanduíche (misto, prensado e natural). Quantos lanches diferentes podem ser feitos ?
3. Marcelo quer ir para a sua escola, mas precisa passar pela casa de Paulo para pegar um livro. Sabendo que existem três ruas (rua Sepé, rua Rondônia e rua Amazonas) da sua casa até a casa de Paulo e, da casa de Paulo até a escola, três ruas (rua Central, rua Maceió, rua Sergipe e rua Manaus), quantos caminhos diferentes Marcelo poderá fazer para chegar até a escola, passando pela casa de Paulo?

4. Ana mora em Ijuí e vai visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar antes, em Curitiba, para levar uma encomenda de sua avó. Para fazer a viagem, Ana tem duas rodovias para chegar até Curitiba (a BR043 e a RS473) e de Curitiba para Mato Grosso, três rodovias (a BR102, a PR205 e a BR367). Quantos trajetos diferentes Ana poderá fazer para ir de Ijuí até Mato Grosso, passando por Curitiba?

GRUPO 8

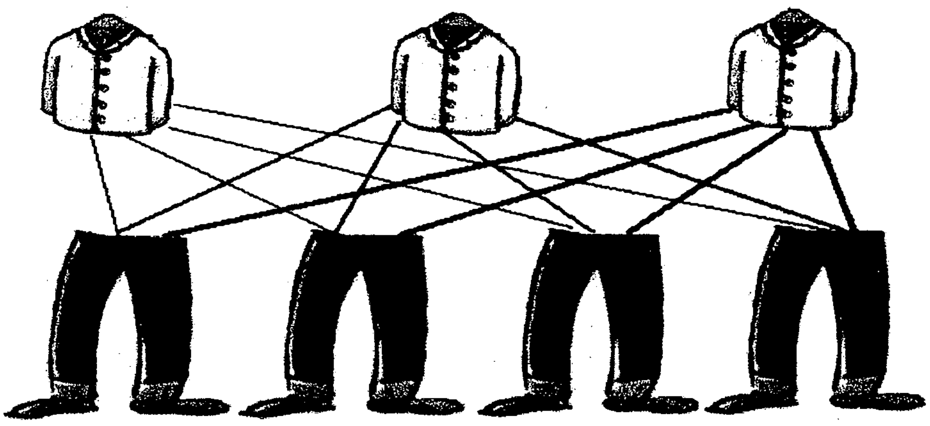
1. Com três casacos (um branco, um amarelo e um vermelho) e quatro calças (uma azul, uma preta, uma marrom e uma verde), combinando sempre um casaco e uma calça, quantas combinações de trajes diferentes você poderá fazer?
2. Uma lancheria oferece dois tipos de bebida (suco e refrigerante) e três tipos de sanduíche (misto, prensado e natural). Lanchando sempre um tipo de bebida e um tipo de sanduíche, quantas combinações de lanches diferentes podem ser feitas?
3. Marcelo quer ir para a sua escola, mas precisa passar pela casa de Paulo para pegar um livro. Sabendo que existem três ruas diferentes (rua Sepé, rua Rondônia e rua Amazonas) da sua casa até a casa de Paulo e, da casa de Paulo até a escola, quatro ruas diferentes (rua Central, rua Maceió, rua Sergipe e rua Manaus), quantas combinações de caminhos diferentes Marcelo poderá fazer para chegar até a escola, passando sempre pela casa de Paulo?
4. Ana mora em Ijuí e vai visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar, antes, em Curitiba, para levar uma encomenda de sua avó. Para fazer a viagem, Ana tem duas rodovias diferentes até chegar em Curitiba (a BR043 e a RS473) e, de Curitiba para Mato Grosso, três rodovias diferentes (a BR102, a PR205 e a BR367). Quantas combinações de trajetos diferentes Ana poderá fazer para ir de Ijuí até Mato Grosso, passando sempre por Curitiba?

GRUPO 9

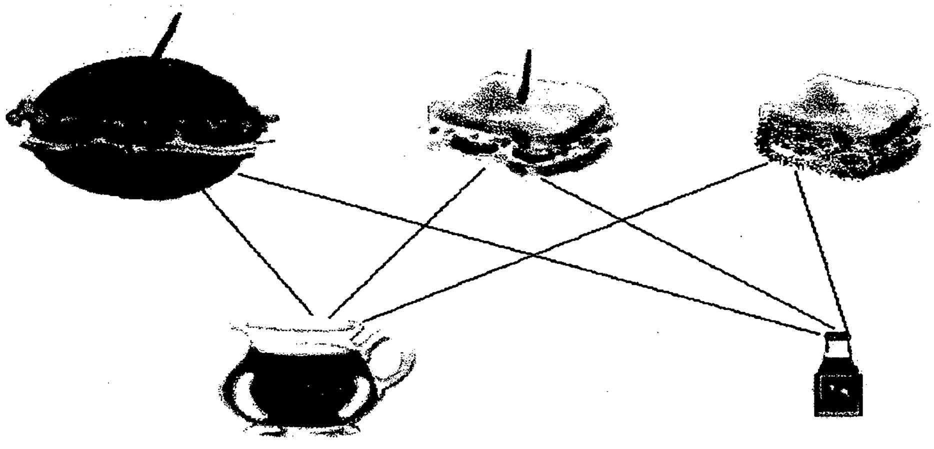
1. Quantas combinações de trajes diferentes você poderá fazer, com três casacos (um branco, um amarelo e um vermelho) e quatro calças (uma azul, uma preta, uma marrom e uma verde), combinando sempre um casaco e uma calça?
2. Quantas combinações de lanches diferentes podem ser feitas, em uma lancheria que oferece dois tipos de bebida (suco e refrigerante) e três tipos de sanduíche (misto, prensado e natural), lanchando sempre um tipo de bebida e um tipo de sanduíche?
3. Quantas combinações de caminhos diferentes Marcelo poderá fazer para chegar até a escola, passando sempre pela casa de Paulo, pois precisa pegar um livro, sabendo que existem três ruas diferentes (rua Sepé, rua Rondônia e rua Amazonas) da sua casa até a casa de Paulo e, da casa de Paulo até a escola, quatro ruas diferentes (rua Central, rua Maceió, rua Sergipe e rua Manaus)?
4. Quantas combinações de trajetos diferentes Ana poderá fazer para ir de Ijuí até Mato Grosso, passando sempre por Curitiba, para visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar, antes, em Curitiba, para levar uma encomenda de sua avó, sabendo que, para fazer a viagem, Ana tem duas rodovias diferentes para chegar até Curitiba (a BR043 e a RS473) e, de Curitiba para Mato Grosso, três rodovias diferentes (a BR102, a PR205 e a BR367)?

GRUPO 10

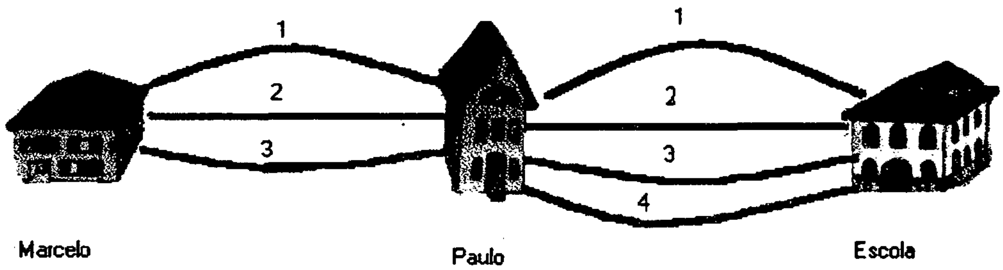
1. Com três casacos e quatro calças, quantos trajes você poderá fazer?



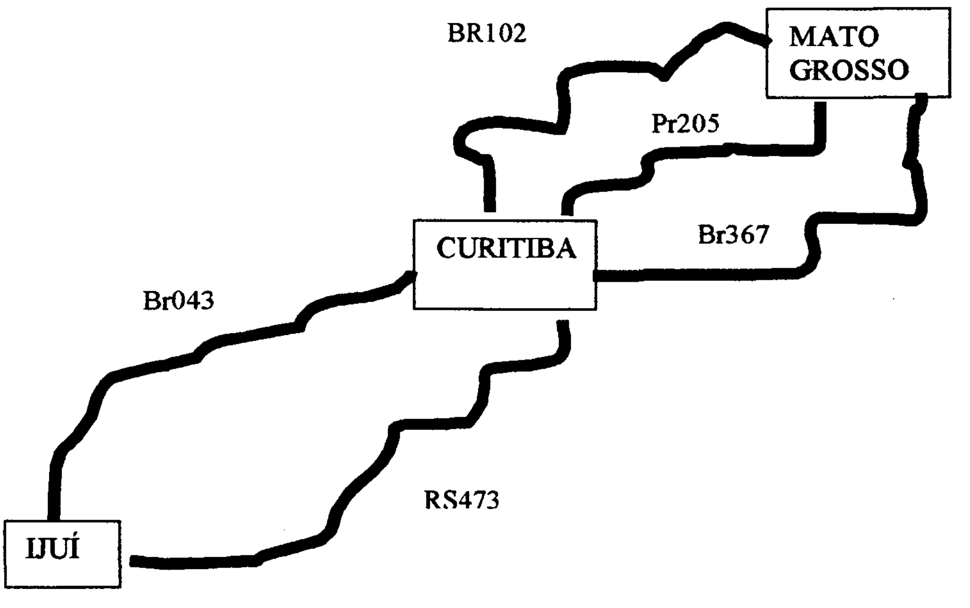
2. Uma lancheria oferece dois tipos de bebida e três tipos de sanduíche. Quantos lanches podem ser feitos?



3. Marcelo quer ir para a sua escola, mas precisa passar pela casa de Paulo para pegar um livro. Sabendo que existem três ruas da sua casa até a casa de Paulo e, da casa de Paulo até a escola, quatro ruas, quantos caminhos Marcelo poderá fazer para chegar até a escola, passando pela casa de Paulo?



4. Ana mora em Ijuí e vai visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar, antes, em Curitiba, para levar uma encomenda de sua avó. Para fazer a viagem, Ana tem duas rodovias para chegar até Curitiba e, de Curitiba para Mato Grosso, três rodovias. Quantos trajetos Ana poderá percorrer para ir de Ijuí até Mato Grosso, passando por Curitiba?

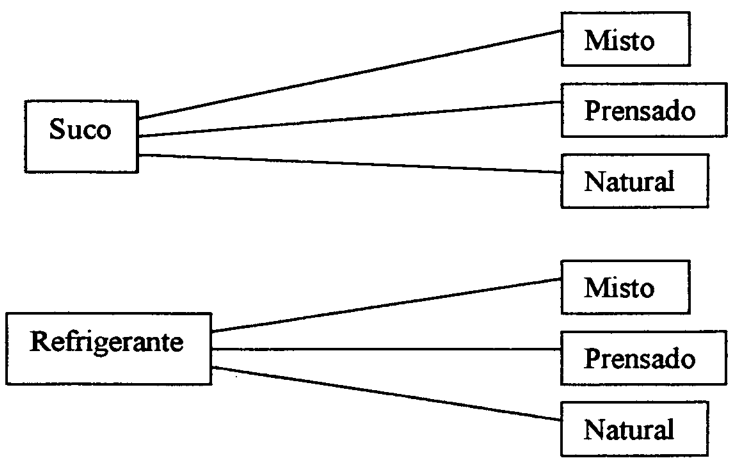


GRUPO 11

1. Com três casacos e quatro calças, quantos trajes você poderá fazer?

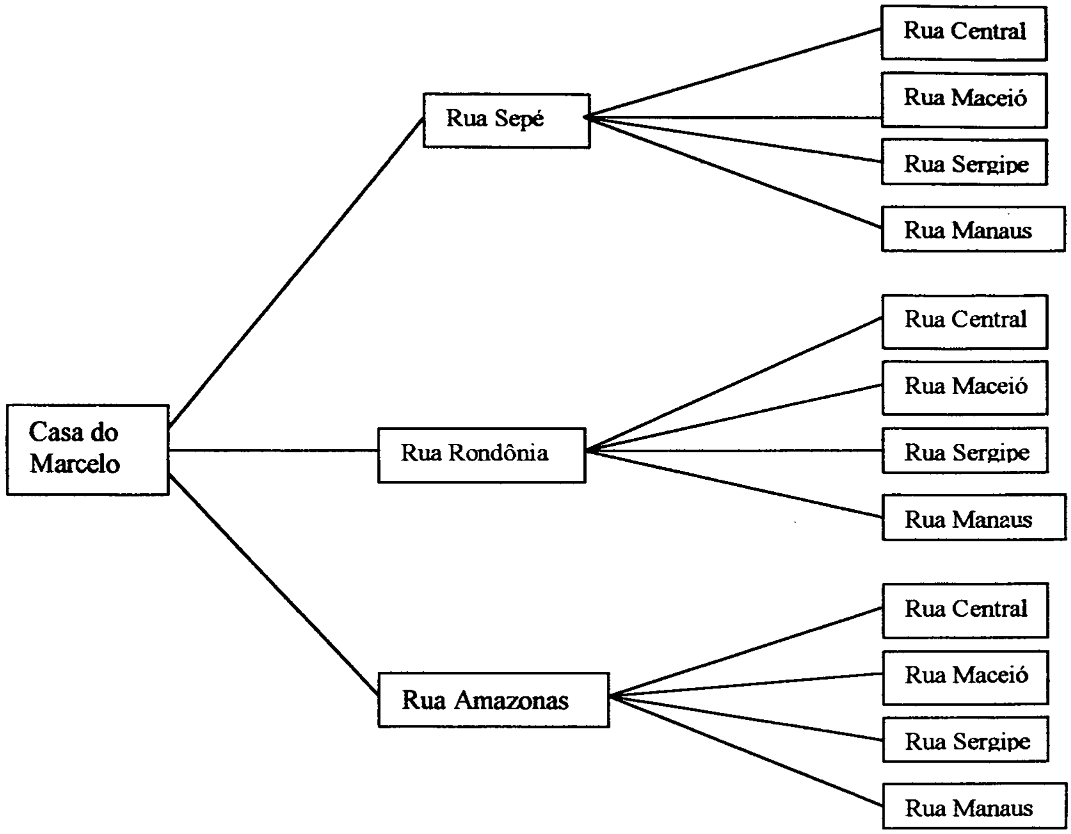
	Azul	Preta	Marrom	Verde
Branco				
Amarelo				
Vermelho				

2. Uma lancheria oferece dois tipos de bebida e três tipos de sanduíche. Quantos lanches podem ser feitos?



3. Marcelo quer ir para a sua escola, mas precisa passar pela casa de Paulo para pegar um livro. Sabendo que existem três ruas da sua casa até a casa de Paulo e, da casa de Paulo até a escola, quatro ruas, quantos caminhos Marcelo poderá fazer para chegar até a escola, passando pela casa de Paulo?

CASA DO MARCELO CASA DO PAULO ESCOLA

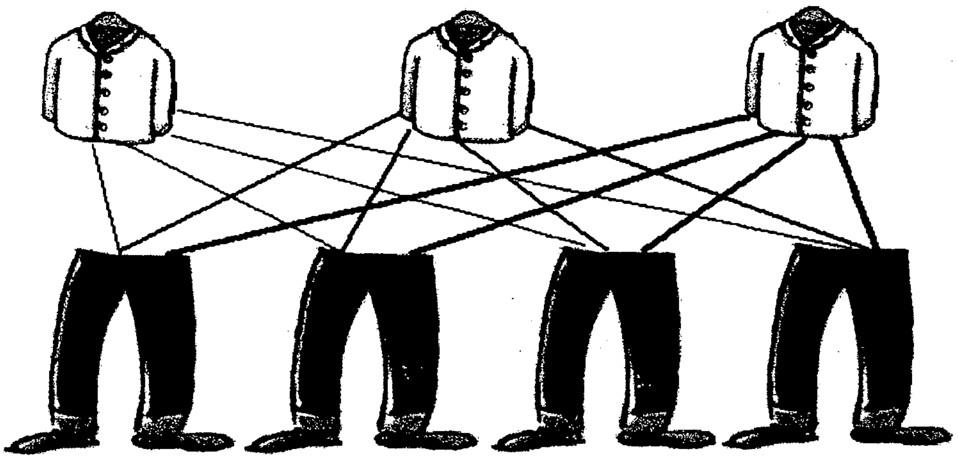


4. Ana mora em Ijuí e vai visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar, antes, em Curitiba, para levar uma encomenda de sua avó. Para fazer a viagem, Ana tem duas rodovias para chegar até Curitiba e, de Curitiba para Mato Grosso, três rodovias. Quantos trajetos Ana poderá percorrer para ir de Ijuí até Mato Grosso, passando por Curitiba?

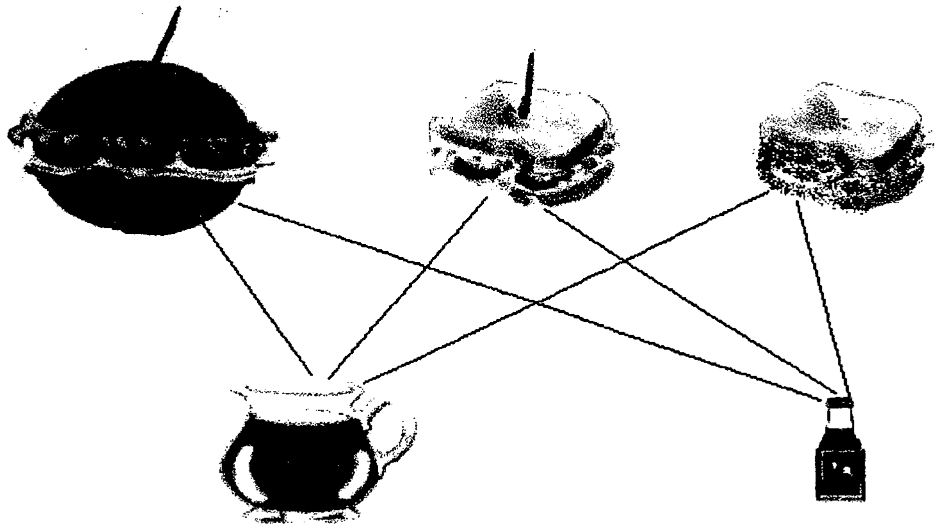
	BR 102	**PR 205**	**BR 367**
BR 043			
RS 473			

GRUPO 12

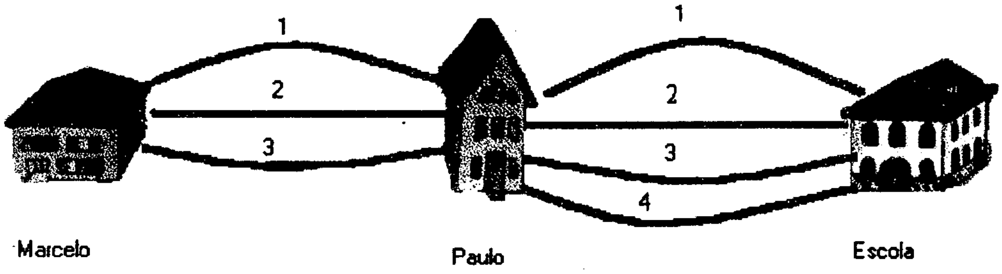
1. Com três casacos (um branco, um amarelo e um vermelho) e quatro calças (uma azul, uma preta, uma marrom e uma verde), combinando sempre um casaco e uma calça, quantas combinações de trajes diferentes você poderá fazer?



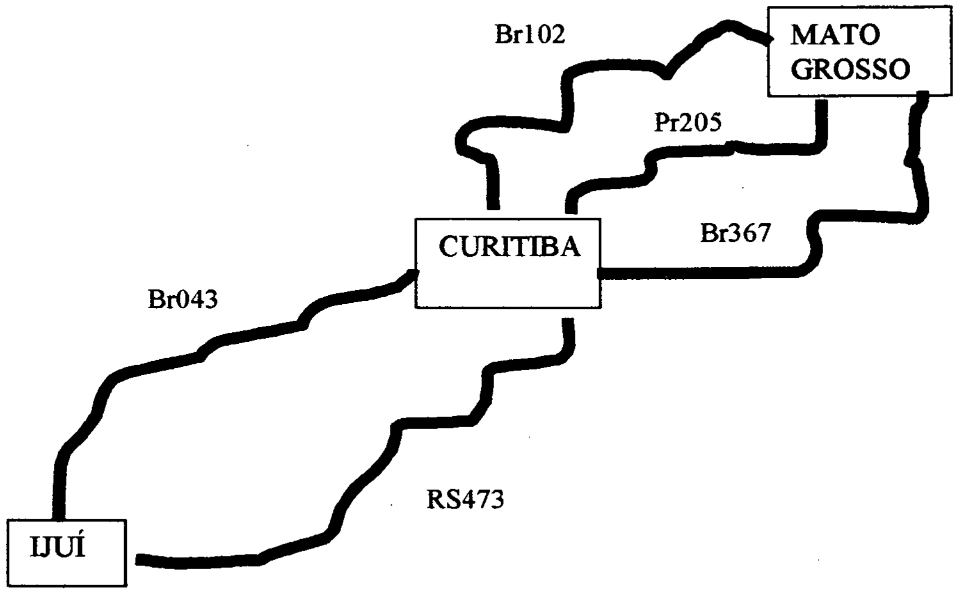
2. Uma lancheria oferece dois tipos de bebida (suco e refrigerante) e três tipos de sanduíche (misto, prensado e natural). Lanchando sempre um tipo de bebida e um tipo de sanduíche, quantas combinações de lanches diferentes podem ser feitas?



3. Marcelo quer ir para a sua escola, mas precisa passar pela casa de Paulo para pegar um livro. Sabendo que existem três ruas diferentes (rua Sepé, rua Rondônia e rua Amazonas) da sua casa até a casa de Paulo e, da casa de Paulo até a escola, quatro ruas diferentes (rua Central, rua Maceió, rua Sergipe e rua Manaus), quantas combinações de caminhos diferentes Marcelo poderá fazer para chegar até a escola, passando sempre pela casa de Paulo?



4. Ana mora em Ijuí e vai visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar, antes, em Curitiba, para levar uma encomenda de sua avó. Para fazer a viagem, Ana tem duas rodovias diferentes até chegar a Curitiba (a BR043 e a RS473) e, de Curitiba para Mato Grosso, três rodovias diferentes (a BR102, a PR205 e a BR367). Quantas combinações de trajetos diferentes Ana poderá fazer, para ir de Ijuí até Mato Grosso, passando sempre por Curitiba?

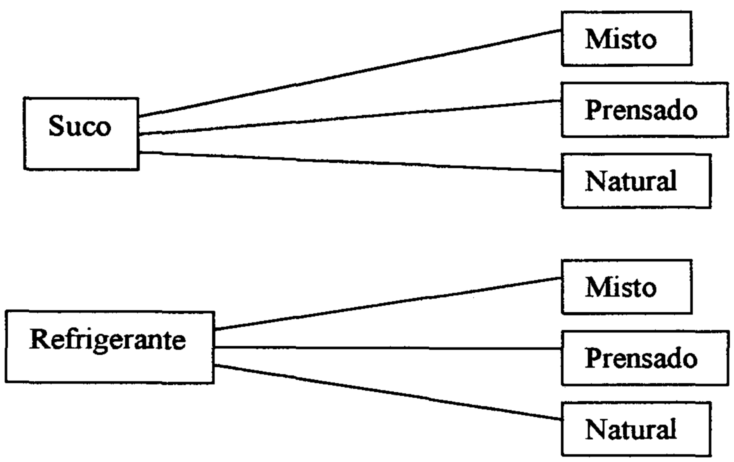


GRUPO 13

1. Com três casacos (um branco, um amarelo e um vermelho) e quatro calças (uma azul, uma preta, uma marrom e uma verde), combinando sempre um casaco e uma calça, quantas combinações de trajes diferentes você poderá fazer?

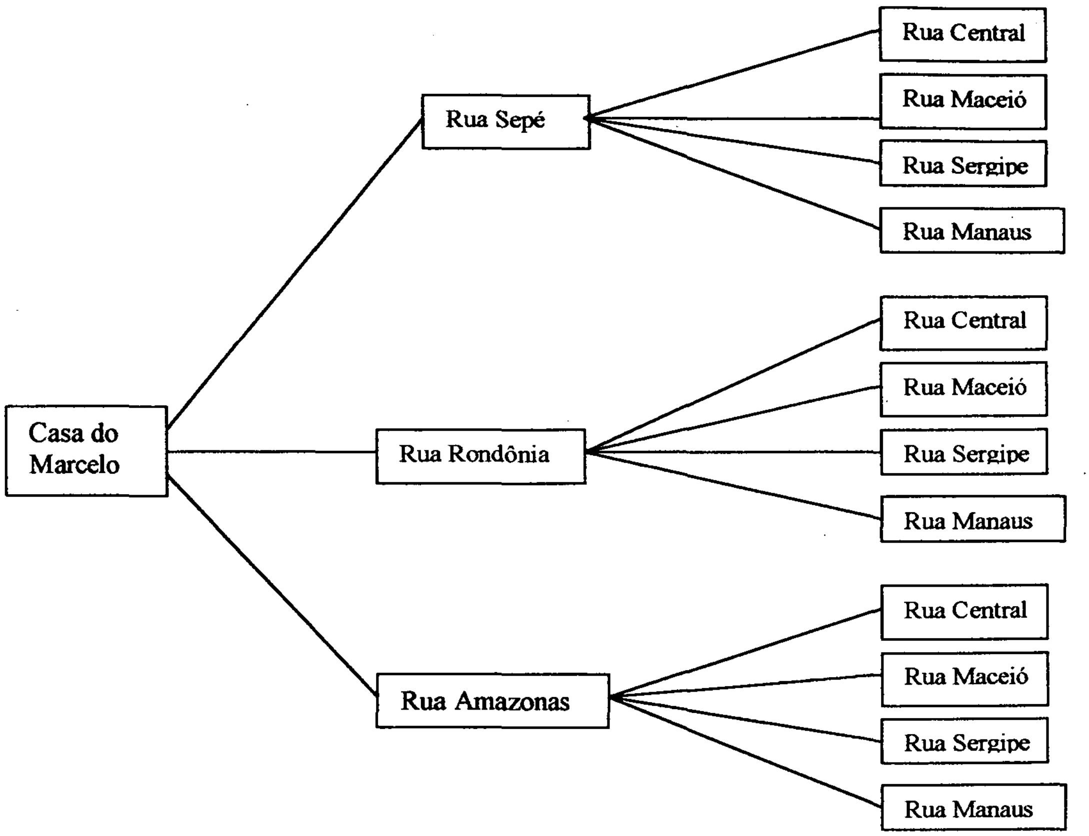
	Azul	Preta	Marrom	Verde
Branco				
Amarelo				
Vermelho				

2. Uma lancheria oferece dois tipos de bebida (suco e refrigerante) e três tipos de sanduíche (misto, prensado e natural). Lanchando sempre um tipo de bebida e um tipo de sanduíche, quantas combinações de lanches diferentes podem ser feitas?



3.Marcelo quer ir para sua escola, mas precisa passar pela casa de Paulo para pegar um livro. Sabendo que existem três ruas diferentes (rua Sepé, rua Rondônia e rua Amazonas) da sua casa até a casa de Paulo e, da casa de Paulo até a escola, quatro ruas diferentes (rua Central, rua Maceió, rua Sergipe e rua Manaus), quantas combinações de caminhos diferentes Marcelo poderá fazer para chegar até a escola, passando sempre pela casa de Paulo?

CASA DO MARCELO CASA DO PAULO ESCOLA



4. Ana mora em Ijuí e vai visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar, antes, em Curitiba, para levar uma encomenda de sua avó. Para fazer a viagem, Ana tem duas rodovias diferentes até chegar a Curitiba (a BR043 e a RS473) e, de Curitiba para Mato Grosso, três rodovias diferentes (a BR102, a PR205 e a BR367). Quantas combinações de trajetos diferentes Ana poderá fazer, para ir de Ijuí até Mato Grosso, passando sempre por Curitiba?

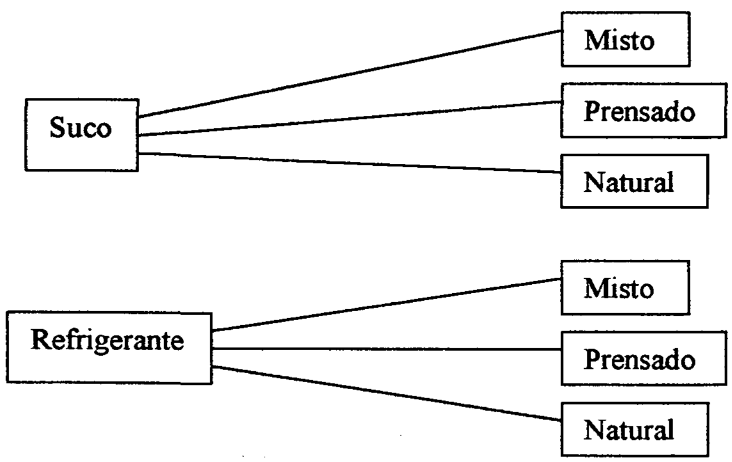
	BR 102	**PR 205**	**BR 367**
BR 043			
RS 473			

GRUPO 14

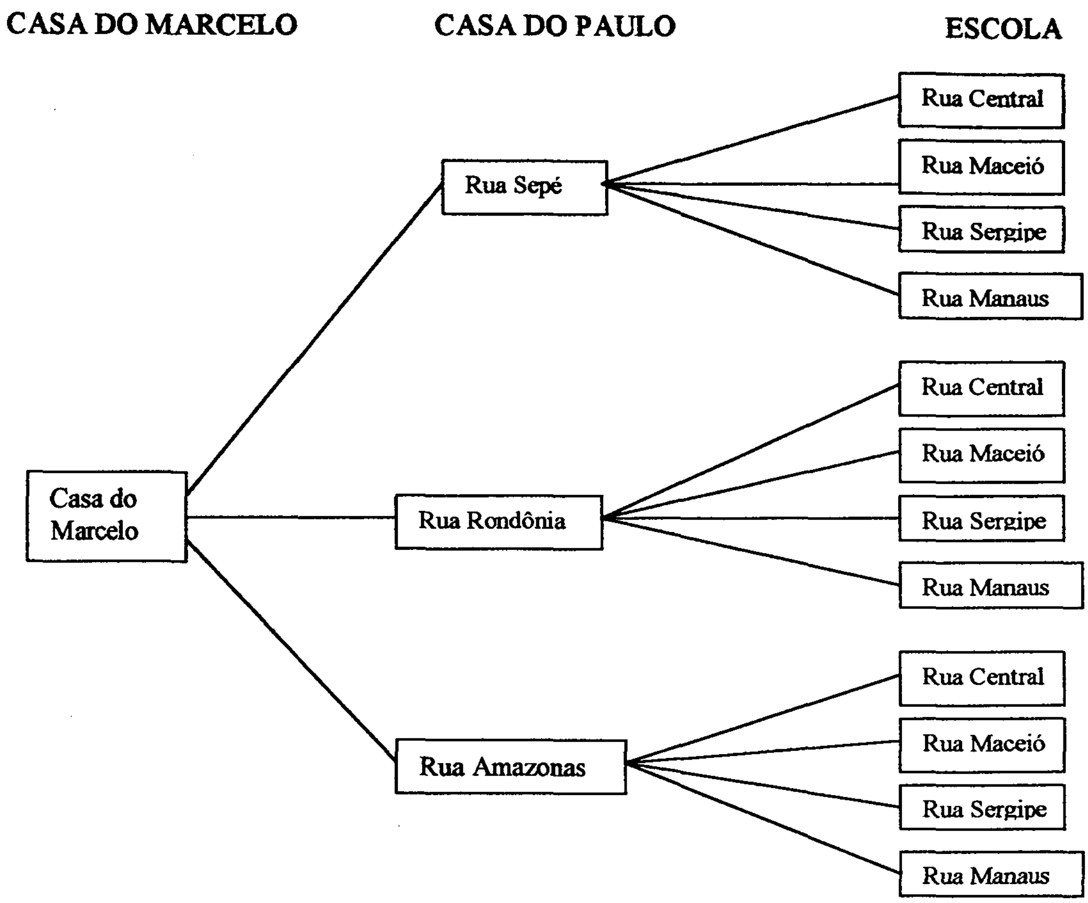
1. Quantas combinações de trajes diferentes você poderá fazer, com três casacos (um branco, um amarelo e um vermelho) e quatro calças (uma azul, uma preta, uma marrom e uma verde), combinando sempre um casaco e uma calça?

	Azul	Preta	Marrom	Verde
Branco				
Amarelo				
Vermelho				

2. Quantas combinações de lanches diferentes podem ser feitas, em uma lancheria que oferece dois tipos de bebida (suco e refrigerante) e três tipos de sanduíche (misto, prensado e natural), lanchando sempre um tipo de bebida e um tipo de sanduíche?



3. Quantas combinações de caminhos diferentes Marcelo poderá fazer para chegar até a escola, passando sempre pela casa de Paulo, pois precisa pegar um livro, sabendo que existem três ruas diferentes (rua Sepé, rua Rondônia e rua Amazonas) da sua casa até a casa de Paulo e, da casa de Paulo até a escola, quatro ruas diferentes (rua Central, rua Maceió, rua Sergipe e rua Manaus)?

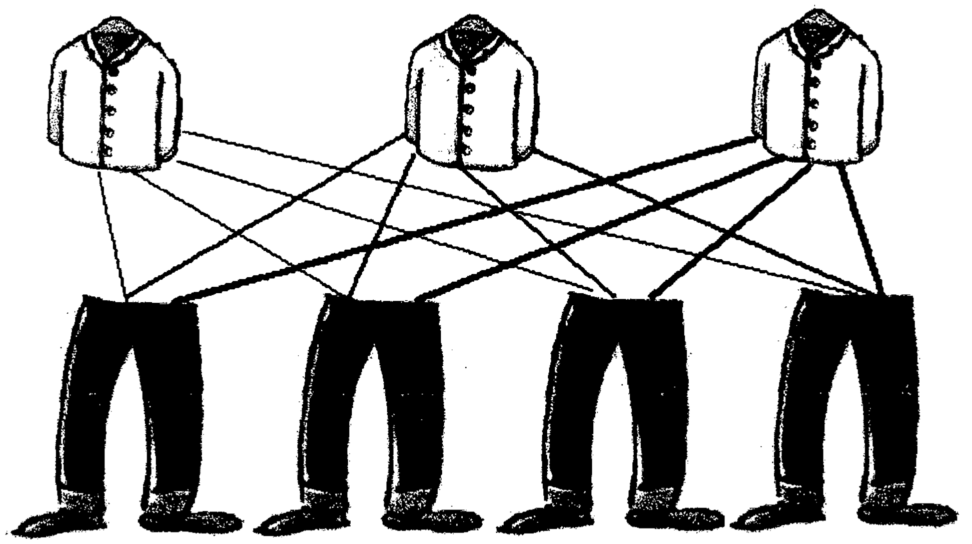


4. Quantas combinações de trajetos diferentes Ana poderá fazer para ir de Ijuí até Mato Grosso, passando sempre por Curitiba, para visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar, antes, em Curitiba, para levar uma encomenda de sua avó, sabendo que, para fazer a viagem, Ana tem duas rodovias diferentes para chegar até Curitiba (a BR043 e a RS473) e, de Curitiba para Mato Grosso, três rodovias diferentes (a BR102, a PR205 e a BR367).

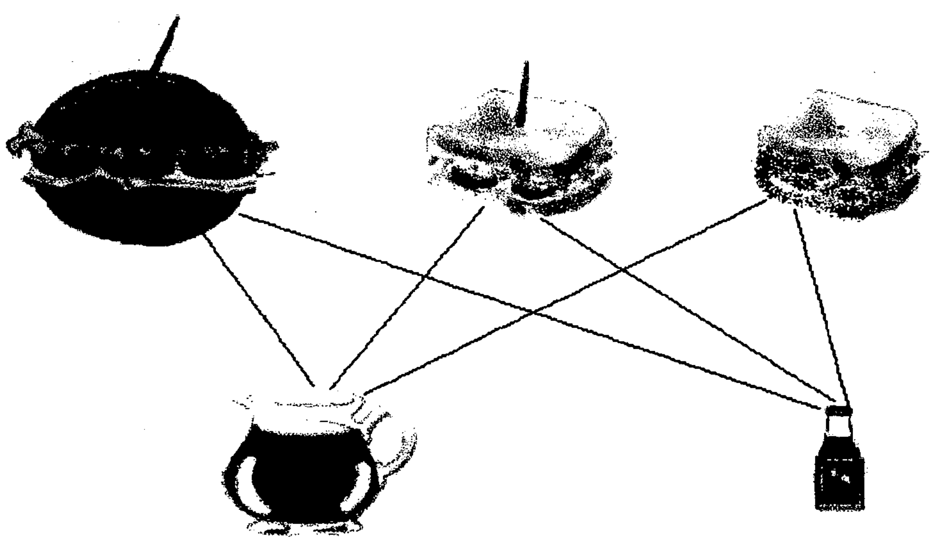
	BR 102	**PR 205**	**BR 367**
BR 043			
RS 473			

GRUPO 15

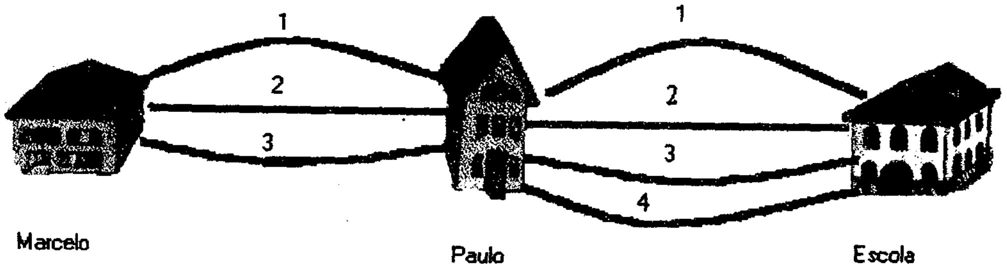
1. Quantas combinações de trajes diferentes você poderá fazer, com três casacos (um branco, um amarelo e um vermelho) e quatro calças (uma azul, uma preta, uma marrom e uma verde), combinando sempre um casaco e uma calça?



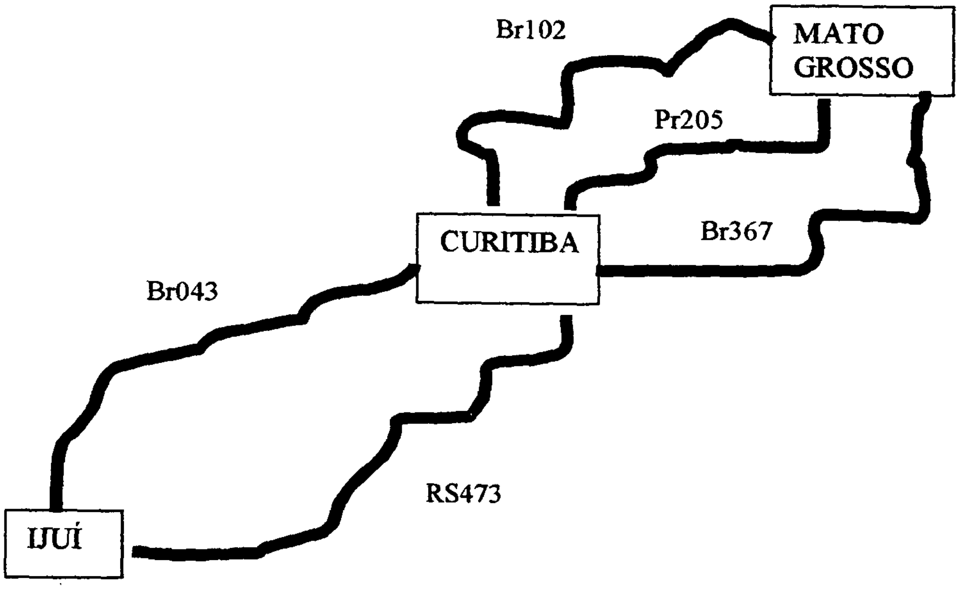
2. Quantas combinações de lanches diferentes podem ser feitas, em uma lancheria que oferece dois tipos de bebida (suco e refrigerante) e três tipos de sanduíche (misto, prensado e natural), lanchando sempre um tipo de bebida e um tipo de sanduíche?



3. Quantas combinações de caminhos diferentes Marcelo poderá fazer para chegar até a escola, passando sempre pela casa de Paulo, pois precisa pegar um livro, sabendo que existem três ruas diferentes (rua Sepé, rua Rondônia e rua Amazonas) da sua casa até a casa de Paulo e, da casa de Paulo até a escola, quatro ruas diferentes (rua Central, rua Maceió, rua Sergipe e rua Manaus)?

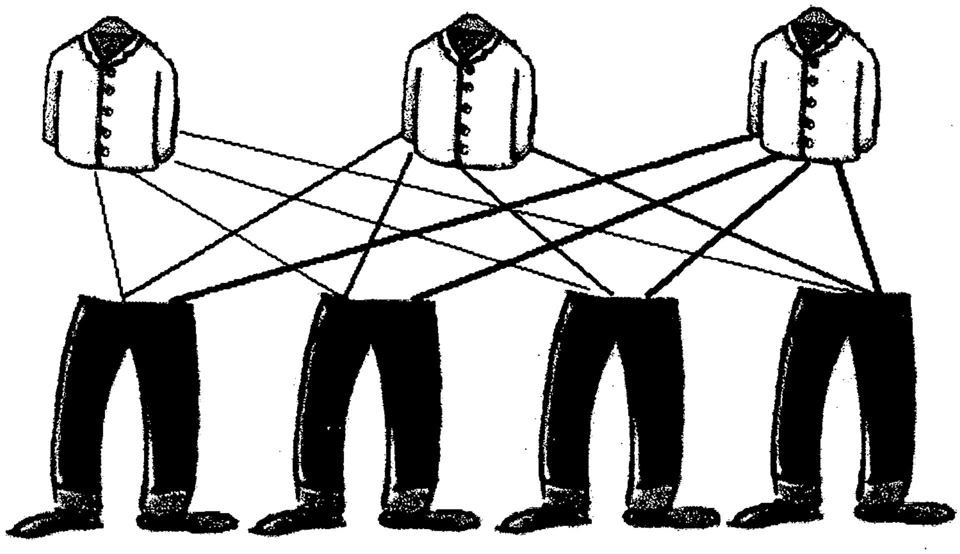


4. Quantas combinações de trajetos diferentes Ana poderá fazer para ir de Ijuí até Mato Grosso, passando sempre por Curitiba, para visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar, antes, em Curitiba, para levar uma encomenda de sua avó, sabendo que, para fazer a viagem, Ana tem duas rodovias diferentes para chegar até Curitiba (a BR043 e a RS473) e, de Curitiba para Mato Grosso, três rodovias diferentes (a BR102, a PR205 e a BR367).

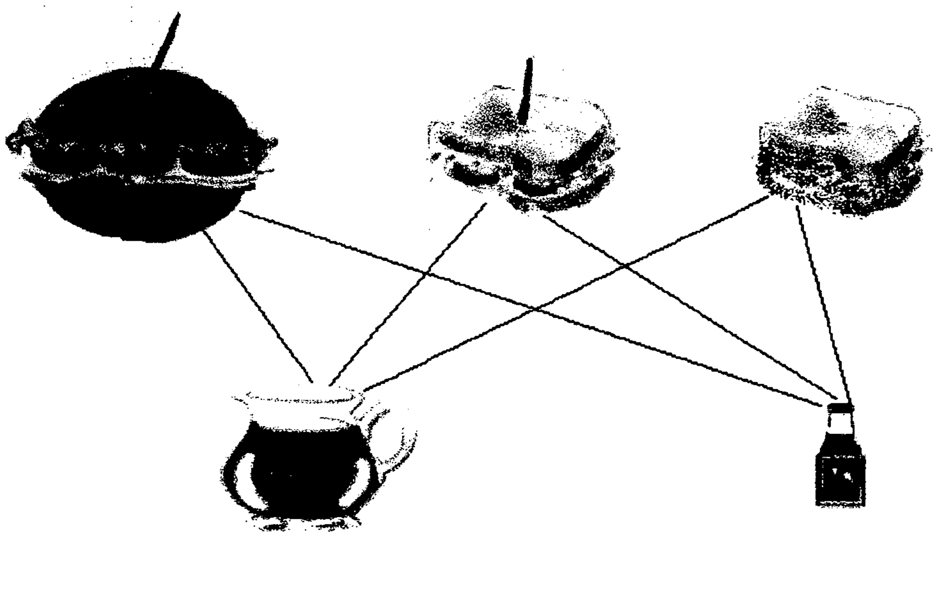


GRUPO 16

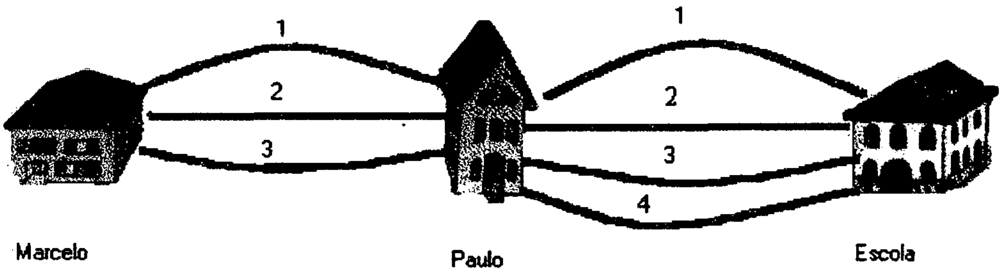
1. Com três casacos e quatro calças, quantos trajes diferentes você poderá fazer?



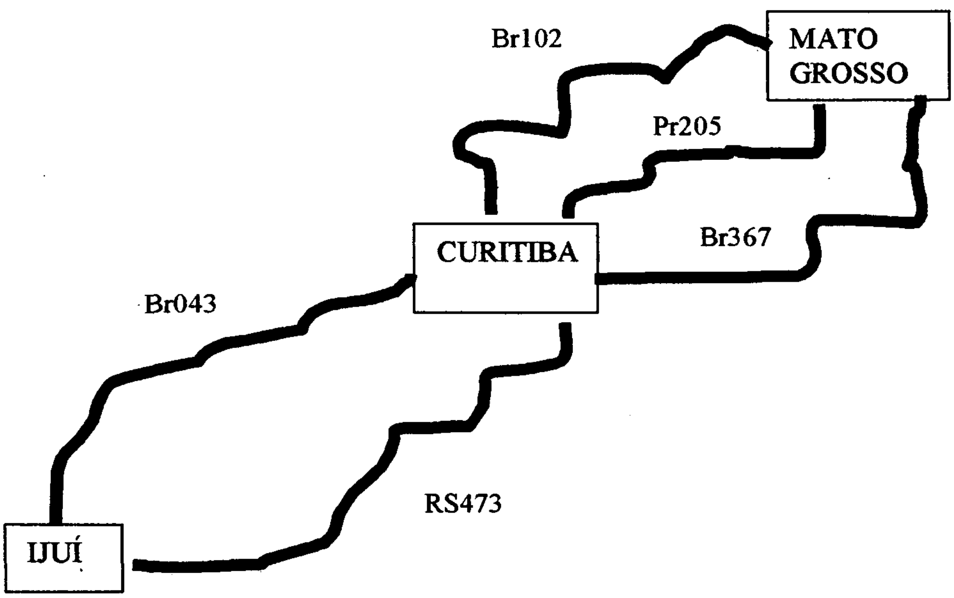
2. Uma lancheria oferece dois tipos de bebida e três tipos de sanduíche. Quantos lanches diferentes podem ser feitos?



3. Marcelo quer ir para sua escola, mas precisa passar pela casa de Paulo para pegar um livro. Sabendo que existem três ruas da sua casa até a casa de Paulo e, da casa de Paulo até a escola, quatro ruas, quantos caminhos diferentes Marcelo poderá fazer para chegar até a escola, passando pela casa de Paulo?



4. Ana mora em Ijuí e vai visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar, antes, em Curitiba, para levar uma encomenda de sua avó. Para fazer a viagem, Ana tem duas rodovias para chegar até Curitiba e, de Curitiba para Mato Grosso, três rodovias. Quantos trajetos diferentes Ana poderá fazer para ir de Ijuí até Mato Grosso, passando por Curitiba?

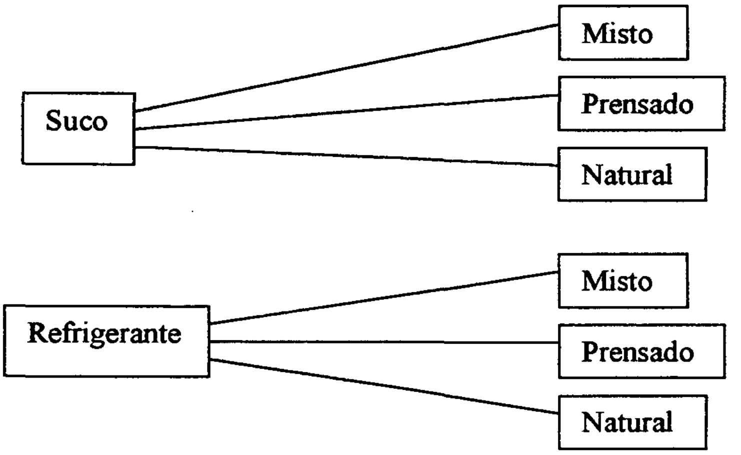


GRUPO 17

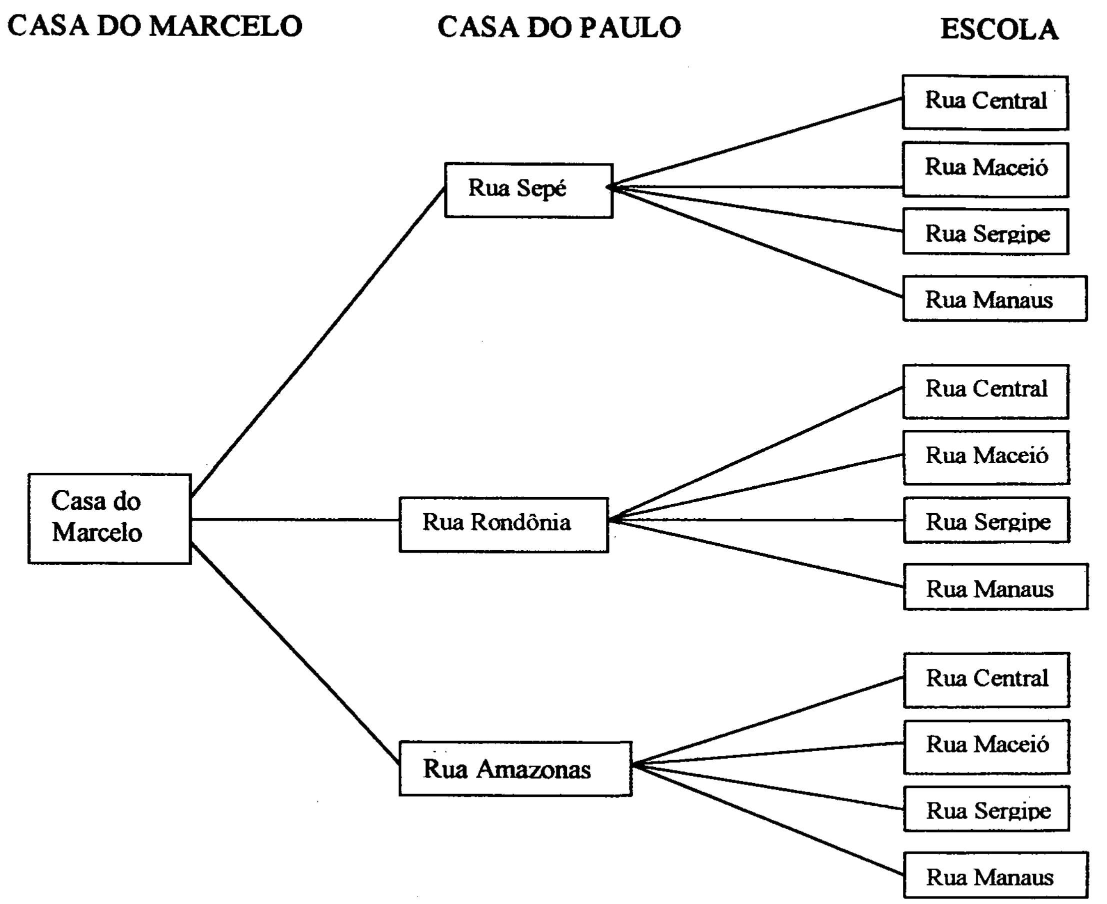
1. Com três casacos e quatro calças, quantos trajes diferentes você poderá fazer?

	Azul	Preta	Marrom	Verde
Branco				
Amarelo				
Vermelho				

2. Uma lancheria oferece dois tipos de bebida e três tipos de sanduíche. Quantos lanches diferentes podem ser feitos?



3. Marcelo quer ir para a sua escola, mas precisa passar pela casa de Paulo para pegar um livro. Sabendo que existem três ruas da sua casa até a casa de Paulo e, da casa de Paulo até a escola, quatro ruas, quantos caminhos diferentes Marcelo poderá fazer para chegar até a escola, passando pela casa de Paulo?



4. Ana mora em Ijuí e vai visitar sua avó que mora no Mato Grosso, mas precisa passar, antes, em Curitiba, para levar uma encomenda de sua avó. Para fazer a viagem, Ana tem duas rodovias para chegar até Curitiba e, de Curitiba para Mato Grosso três rodovias. Quantos trajetos diferentes Ana poderá fazer para ir de Ijuí até Mato Grosso, passando por Curitiba?

	BR 102	**PR 205**	**BR 367**
BR 043			
RS 473			

A partir dos grupos de enunciados definidos, estes foram propostos para alunos de 5ª e 8ª séries. Cada grupo de enunciados foi resolvido por 16 alunos de cada série, totalizando 544 alunos envolvidos. A análise, considerando a freqüência dos registros no processo de conversão estabelecido pelos alunos, considerou:

- Se havia possibilidade de observar **registros diferentes entre os enunciados** de possibilidade de ocorrência e de caminhos (enunciados 1 e 2 e enunciados 3 e 4 de cada grupo de enunciados), detectando dificuldades diferentes caracterizando desta forma sentidos operatórios diferentes.
- Se era possível verificar uma **regularidade entre os procedimentos** de conversão corretos dos alunos, ou seja, podemos identificar alunos que converteram corretamente todos os enunciados que resolveram, ou este procedimento é aleatório.
- Se era possível observar, através da comparação entre os enunciados, em função de **variações redacionais**: grupo 1 com grupo 2; grupo 1 com grupo 4; grupo 1 com grupo 6; grupo 2 com grupo 7; grupo 4 com grupo 8, onde é possível identificar a influência, destas modificações redacionais, no processo de conversão realizado pelos alunos.
- É possível a comparação entre os enunciados: 1 – 10 e 11; 8 – 12 e 13; 9 – 14 e 15; 2-16 e 17(o primeiro é um enunciado sem representação e os dois últimos são o mesmo enunciado, com a inclusão de uma representação intermediária (natural ou estruturada)), tentando **identificar o papel da representação intermediária** no processo de conversão dos enunciados.
- Se era possível comparar os **procedimentos adotados** pela 5ª série e os procedimentos adotados pela 8ª série. Existe diferença de registro estabelecido. Podemos afirmar que a 5ª série apresenta maior dificuldade no processo de conversão, que a 8ª série.

5.2 O processo de conversão estabelecido pelos alunos frente aos enunciados com variações redacionais

Como já elencamos, os alunos envolvidos na pesquisa são pertencentes às redes públicas (estadual e municipal) e privada da região que freqüentam a 5ª e a 8ª séries do Ensino Fundamental, no corrente ano. A aplicação dos enunciados foi efetivada pela professora regente da turma, justificando e historiando o trabalho de pesquisa. A professora aplicou os enunciados a seus alunos e, enquanto pesquisadora, acompanhamos esse processo em sala de aula, sem intervenção direta com os alunos. Foi solicitado aos alunos que resolvessem os problemas da maneira que acreditavam ser a mais conveniente, sem apagar o que fizeram. O que nos interessava era observar qual seria o primeiro registro estabelecido para o processo de conversão, estabelecido pelo aluno.

Tomamos o cuidado, para que em cada turma pesquisada, constasse pelo menos um grupo de cada um dos dezessete enunciados trabalhados. Ou seja, todas as turmas envolvidas resolveram no mínimo uma vez os dezessete grupos de enunciados. Pois, não queríamos que uma turma resolvesse o grupo 1, outra turma, resolvesse o grupo 2. Isso poderia levar a copia entre os alunos e principalmente dados sem significado, sem diversidade nos registros de representação. Queríamos uma diversidade nos alunos que iriam resolver o grupo de enunciados.

Conseguimos envolver 8 escolas, com 38 turmas, totalizando 544 alunos, sendo 272 de cada série. Envolvemos mais turmas de oitava séries, pois o número de alunos nestas é bem menor que os de 5ª séries. Nosso cuidado foi termos dezesseis alunos, de cada série envolvida, respondendo um grupo de enunciados, para podermos ter um parâmetro de comparação e análise dos procedimentos de conversão adotados.

A análise dos registros estabelecidos pelos alunos no processo de conversão possibilitou organizarmos três grandes categorias de análise, baseadas em dois grandes princípios, que são: ***princípio aditivo, princípio multiplicativo e não conversão***.

Princípio aditivo - Estes procedimentos para o processo de conversão se caracterizam pela utilização da operação de adição. São registros “equivocados” para o enunciado determinado; porém, mostram a equivocada articulação que pode ser estabelecida entre a operação de adição sucessiva e a multiplicação (muitas vezes reforçada pelos livros didáticos e procedimentos adotados pelos professores), levando o aluno a cometer erros no processo de conversão, principalmente em enunciados de produto cartesiano. Os registros estabelecidos neste princípio são:

(OAP) - ***Operação de Adição das Parcelas***, caracterizada pelo registro de representação da operação de adição, considerando as quantidades elencadas no enunciado do problema. **PROCEDIMENTO SEM CONVERSÃO**.

(RAP) - ***Resposta da Adição das Parcelas*** caracterizada pelo registro de representação do resultado da operação de adição das parcelas, sem registro desta. **PROCEDIMENTO SEM CONVERSÃO.**

Princípio multiplicativo – raciocínio combinatório - Este princípio caracteriza os registros que exploram o sentido operatório multiplicativo, através da combinatória; porém, temos dois grupos de registros diferentes: aqueles que levam à conversão, que é sustentada pela utilização da operação de multiplicação ou da adição das parcelas iguais; e aqueles registros que mostram um princípio de combinatória, porém o registro é parcial ao processo de conversão necessário. Esses registros não apresentam o cruzamento das quantidades utilizadas no enunciado, considerando apenas as parcelas/ quantidades envolvidas parcialmente. Os registros são:

(OM) - ***Operação de Multiplicação***. O registro estabelecido é da operação de multiplicação, pertinente à conversão entre o registro do enunciado e o registro numérico, no caso, a operação de multiplicação. PROCESSO DE CONVERSÃO CORRETO.

(RM) - ***Resposta da Multiplicação***. O registro estabelecido é somente a resposta da operação de multiplicação, sem registro desta. PROCESSO DE CONVERSÃO CORRETO.

(API) – ***Adição de Parcelas Iguais***. O registro estabelecido é a operação da adição das parcelas iguais, ou seja, o pensamento é de grupos e elementos. Idéia atrelada a adição e não pensamento multiplicativo. PROCESSO DE CONVERSÃO CORRETO.

(DPI) - ***Determina uma das parcelas e indica falta ou excesso***. Neste registro, existe uma tentativa inicial de mostrar um princípio multiplicativo, a determinação de uma das quantidades envolvidas no enunciado do problema, é indicadora da falta ou do excesso, dependendo da quantidade usada como referência (se for a quantidade maior, terá uma falta; se for a quantidade menor, terá um excesso). Existe uma primeira combinação

(combinação um a um, não cruzamento); porém, não uma combinação entre todas as quantidades envolvidas, não possibilitando a conversão entre o registro do enunciado e o registro numérico solicitado. PROCEDIMENTO PARCIAL, SEM CONVERSÃO.

(DP) - *Determina uma das Parcelas*. Este registro apresenta uma tentativa inicial de mostrar um princípio multiplicativo, pois existe uma determinação do cruzamento de uma das quantidades envolvidas no enunciado do problema, através da determinação de uma das parcelas envolvidas; porém, não existe conversão, não tendo, por isso, a idéia de combinação/relação/cruzamento entre as quantidades envolvidas no enunciado. **PROCEDIMENTO PARCIAL, SEM CONVERSÃO.**

Não-conversão - São os registros, em que não é possível o estabelecimento do processo de conversão entre o enunciado do problema e o registro numérico necessário. Porém, é possível observar algumas regularidades entre os registros utilizados. Em função disso, determinou-se cinco subcategorias para a não-conversão:

(NC1) – Não-conversão entre o registro do enunciado e o registro aritmético. Os registros utilizados só determinam frases do tipo: somente uma maneira, ou várias maneiras.

(NC2) – Não-conversão entre o registro do enunciado e o registro aritmético. O registro aritmético (operação) não é compatível com o enunciado. É determinada outra quantidade para resolução da operação, ou outras operações.

(NC3) – Não-conversão entre o registro do enunciado e o registro aritmético. O registro estabelecido se concentra no desenho do contexto do enunciado.

(NC4) – Não-conversão entre o registro do enunciado e o registro aritmético. O registro estabelecido determina uma quantidade aleatória, sem utilização de uma representação de operação.

(NC5) – Não-conversão entre o registro do enunciado e o registro aritmético. O registro estabelecido é a adição das quantidades que determinam as rodovias envolvidas no enunciado.

Podemos organizar nossa classificação, considerando os registros de representação dos alunos, ao processo de conversão, na seguinte tabela:

Sigla	Registro do Aluno Frente ao Enunciado
	Princípio aditivo
OAP	Operação de Adição de Parcelas
RAP	Resposta da Adição de Parcelas
	Princípio multiplicativo – Raciocínio combinatório
OM	Operação de Multiplicação
RM	Resposta da Multiplicação
API	Adição de Parcelas Iguais
DP	Determina uma das Parcelas
DPI	Determina uma das Parcelas e indica falta ou excesso
	Não Conversão
NC1	Não conversão do tipo 1: uma ou várias maneiras
NC2	Não conversão do tipo 2: operação não é compatível com enunciado
NC3	Não conversão do tipo 3: concentrado no desenho do enunciado
NC4	Não conversão do tipo 4: determinação de uma quantidade aleatória
NC5	Não conversão do tipo 5: Adição de códigos informativos

Após a determinação destas categorias, baseadas nos registros determinado pelos alunos, ao processo de conversão, organizamos tabelas de freqüência, considerando a série, os enunciados e os grupos de enunciados. As tabelas de freqüência estão em anexo nesta pesquisa.

5.3 Analisando os registros adotados pelos alunos frente às variações redacionais

Feito o levantamento de todos os registros determinados pelos alunos no processo de conversão, estes foram organizados, como auxiliar para nosso processo de análise, podemos traçar as seguintes considerações:

- ***Analisando cada um dos quatro enunciados enfocados, como se apresenta o processo de conversão, considerando os registros desenvolvidos pelos alunos***

Considerando as duas séries – conforme tabela 07

Registros	Enunciado 1	Enunciado 2	Enunciado 3	Enunciado 4
OM	151 - 27,8%	138 – 25,4%	113 – 20,8%	119 – 21,9%
RM	149 – 27,4%	165 – 30,3%		
RAP			132 – 24,3%	133 – 24,4%

Considerando cada uma das séries – conforme tabela 08

Registros	Enunciado 1		Enunciado 2		Enunciado 3		Enunciado 4	
Série	**5ª**	**8ª**	**5ª**	**8ª**	**5ª**	**8ª**	**5ª**	**8ª**
OM	72 - 26,5%	79- 29,0%	65- 23,9%	73- 26,9%		62- 22,8%		63- 23,2%
RM		115- 42,3%		119- 43,9%		75- 27,6%		80- 29,5%
RAP					76- 27,9%		85- 31,3%	
DP	63- 23,2%		63- 23,2%		56- 20,6%		56- 20,6%	

Podemos observar que, no primeiro e no segundo enunciados, que exploram possibilidades de ocorrência, os registros da OM e RM são os mais significativos. O registro é modificado para o terceiro e o quarto tipos de enunciados, que envolvem caminhos. Para esses enunciados, o registro mais utilizado é o da RAP. Este resultado pode nos levar a uma primeira conclusão geral: os enunciados 1 e 2 não apresentam o mesmo grau de complexidade que os enunciados 3 e 4.

Se fizermos esta análise, considerando cada série separadamente, percebemos que o quadro é sensivelmente modificado. Os registros atribuídos pela 8ª série é que possibilitaram caracterizar os enunciados 1 e 2, com registro de RM ou OM. Os alunos de 5ª série apresentaram registros caracterizados pelo princípio aditivo. Este fato mostra a diferença de conhecimento entre as duas séries, ou seja, o processo escolar acaba facilitando o processo de conversão para estes enunciados, mesmo não fazendo parte do processo pedagógico o trabalho com enunciados de combinatória. Mas, como a estrutura multiplicativa é composta por vários conceitos, que são enfocados em outras séries do ensino fundamental, esses conceitos, acabam ajudando no estabelecimento do processo de conversão, em enunciados de problemas elementares.

Aqui podemos concluir que os enunciados de caminhos apresentam maior dificuldade para os alunos e levam a estabelecer o processo de não-conversão, utilizando, preferencialmente, o registro da operação de adição das parcelas. Podemos dizer que isso pode estar relacionado ao fato de a operação de multiplicação ser trabalhada como uma adição de parcelas iguais. No momento, em que o aluno não compreende a situação matemática explorada no enunciado, a operação de adição é que acaba sendo significativa e utilizada para resolução do enunciado. E o registro de adição de parcelas iguais, passa a ser entendido como adição das parcelas envolvidas no enunciado.

Neste sentido, o campo de enunciados de problemas não pode ser estabelecido como combinatória, mas sim dentro deste campo, pois nele temos enunciados apresentando possibilidades de ocorrência e outros, enfocando caminhos. É necessária a intervenção pedagógica, ou seja, o trabalho efetivo de sala de aula, para os dois campos de enunciados.

- Considerando os registros adotados pelos alunos no processo de conversão, qual é o comportamento nos quatro enunciados (conforme tabela 007)

Enunciado Geral	Procedimento	Nº alunos Geral – Porcentagem
Enunciado 1	**Conversão**	309 – 56,8%
	Não-Conversão	235 – 43,2%
Enunciado 2	**Conversão**	318 – 58,6%
	Não-Conversão	225 – 41,4%
Enunciado 3	**Conversão**	211 – 38,8%
	Não-Conversão	333 – 61,2%
Enunciado 4	**Conversão**	228 – 42%
	Não-Conversão	315 – 58%

Estes dados conseguem nos mostrar que, no enunciado 1, considerando todos os grupos de enunciados, tivemos 309 alunos, que conseguiram estabelecer o processo de conversão, utilizando registros OM, RM ou API. No enunciado 2, temos quase o mesmo número de alunos (318). Estes dados reforçam a posição de que os enunciados 1 e 2 são realmente os que apresentam maior possibilidade de conversão, pois um grande número de alunos conseguiu convertê-los, utilizando principalmente os registros de OM e RM. Vale lembrar que esta análise é feita com as duas séries. E que modificando a situação extra-matemática (fator extrínseco), não se modifica o procedimento de conversão, significativamente, confirmando a teoria apresentada por Duval, em relação a modificação dos fatores extrínsecos.

Já os enunciados 3 e 4, também considerando todos os grupos e as duas séries, mostram o elevado índice de registros que levam ao processo de não-conversão. Basta dizer que 333 alunos, no enunciado 3, e 315, no enunciado 4, estabelecem registros incorretos, acarretando a, não-conversão do enunciado ao registro matemático necessário.

Somente 96 alunos (dos 544) estabeleceram, um processo de conversão para os quatro tipos de enunciados, considerando todos os grupos e as duas séries. E 37 alunos não estabeleceram nenhum processo de conversão para os quatro tipos de enunciados.

- Considerando os resultados suficientes e ou insuficientes em função do registro

De acordo com os registros estabelecidos para o processo de conversão, podemos classificar estes em suficientes (registros de OM, RM e API) e ou insuficientes (registros OAP, RAP, DP, DPI, NC1, NC2, NC3, NC4 e NC5), (conforme a tabela 09):

Resultados	5ª Série	8ª Série	Geral
Suficiente	88 – 32,4%	156 – 57,4%	244 – 44,9%
Insuficiente	184 – 67,6%	116 – 42,6%	300 – 55,1%

Esses resultados podem nos levar a afirmar que os problemas envolvendo registro de combinatória apresentam um grau de complexidade que exige uma intervenção pedagógica para ser superado. Mesmo com o trabalho realizado pela escola com outros conceitos (área, volume, proporção, etc...) que sustentam a estrutura multiplicativa, é necessário o trabalho efetivo sobre este significado operatório da multiplicação, para termos modificações nos resultados obtidos. Afinal, mesmo os alunos das 8ª Séries não conseguiram estabelecer processos de conversão realmente satisfatórios, ficando 42,6% destes com resultados considerados insuficientes.

- Analisando o processo de conversão para cada série, considerando os grupos de enunciados (tabelas 15 a 18):

	5ª Série		8ª Série	
	Conversão	**Não Conversão**	**Conversão**	**Não Conversão**
Enunciado 1	Grupo 12 – 81,3%	Grupo 3 – 87,4%	Grupo 12 – 100%	Grupo 1 – 56,2%
Enunciado 2	Grupo 12 – 81,3%	Grupo 6 – 81,2%	Grupo 12 – 100%	Grupo 1 – 56,2%
Enunciado 3	Grupo 12 – 68,8%	Grupo 1 e 11 93,7%	Grupo 12 – 75,1%	Grupo 11- 68,7%
Enunciado 4	Grupo 12 – 62,5%	Grupo 1 – 93,7%	Grupo 8 – 81,3%	Grupo 11- 68,6%

Neste quadro somamos os registros de representação de OM, RM e API, podendo mostrar a porcentagem determinada no estabelecimento no processo de conversão, considerando o enunciado em um dos grupos.

Podemos observar, através deste quadro que os enunciados do grupo 12, são os que levam ao estabelecimento do processo de conversão, para as duas séries, principalmente nos enunciados 1 e 2. Sendo que na oitava série este índice chega a 100%.

- Identificação de enunciados mais potentes – maior grau de congruência (conforme tabelas 10, 11, 12 e 13)

Considerando os grupos de enunciados, tentamos identificar os enunciados mais potentes, ou seja, aqueles que conseguem levar o aluno ao estabelecimento do processo de conversão, sendo os registros estabelecidos uma operação de multiplicação (OM) ou uma resposta da multiplicação (RM). Estes enunciados são os que possuem maior congruência com o registro textual e o registro numérico. Podemos observar no seguinte quadro:

	5ª Série	8ª Série
Enunciado 1	Grupo 12 –OM- (56,3%)	Grupos 12 e 16 –RM- (62,5%)
Enunciado 2	Grupo 12 –OM- (56,3%)	Grupo 13 –RM- (68,8%) Grupos 8 e 12 –RM- (62,5%)
Enunciado 3	Grupo 12 –OM- (50%)	Grupos 2, 3 e 8 –RM- (50%) Grupo 12 –OM- (43,8%)
Enunciado 4	Grupo 12 –OM- (50%)	Grupo 13 –RM- (56,3%) Grupos 2 e 8 –RM- (50%)

Este quadro se concentra no registro de representação (OM ou RM) que foi mais utilizado para o processo de conversão. Por isso, podemos observar a diversidade dos grupos. O que não foi apresentado no quadro anterior, pois naquele conseguimos observar o processo de conversão considerando os três registros possíveis. Neste quadro estamos considerando o registro mais utilizado, sendo que este estabelece o processo de conversão.

Com estes dados podemos verificar que, para a 5ª série, os enunciados pertencentes ao grupo 12 foram os mais significativos para o estabelecimento do processo de conversão, apesar de possuírem percentagem de acerto menor que o da 8ª série. Em função disso, podemos dizer que, na 5ª série, é necessária a elaboração de enunciados que apresentem todas as informações possíveis da situação extra-matemática e, além disso, a inclusão de uma representação intermediária baseada nesta situação extra-matemática, característica dos enunciados do referido grupo.

Já na 8ª série, existem vários grupos que contribuem para o estabelecimento do processo de conversão; porém, o grupo 12 acaba estando presente nos quatro enunciados. Observando todos os registros de representação responsáveis pelo processo de conversão, podemos identificar os enunciados pertencentes ao grupo 12 como os responsáveis para o estabelecimento do melhor processo de conversão, tanto na 5ª como na 8ª série. Ou seja, os enunciados deste grupo é que levam ao estabelecimento da congruência entre enunciado e o registro numérico e, conseqüentemente, ao processo de conversão. Devemos lembrar que o grupo 12 de enunciados é caracterizado pela inclusão de uma representação intermediária, sendo esta natural, a qual enfoca a situação extra-matemática do enunciado. E o seu enunciado é constituído pelas palavras combinação, sempre e descrição das qualidades ou caminhos. É o grupo de enunciado que discrimina completamente a situação e o objeto matemático. Como o sentido operatório de combinatória é complexo, o enunciado e a representação intermediária acabam realmente auxiliando os alunos no estabelecimento do processo de conversão.

- Os enunciados que levam ao processo de não-conversão e os registros utilizados

Tentamos identificar, nos grupos de enunciados, os que não estabelecem a conversão, e qual o registro utilizado. O quadro que encontramos é o seguinte (conforme tabelas 10 a 13):

	5ª Série **Grupo – porc – tratam**	**8ª Série** **Grupo – porc – tratam**
Enunciado 1	Grupo 9 - 50% - DP Grupo 1 - 43,8% - DP	Grupo 1 - 31,3% - DP Grupo 10 - 25% - DP
Enunciado 2	Grupo 9 - 43,8% - DP Grupos 1, 8 e 11 - 37,5% - DP Grupo 5 – 37,5% - DPI Grupo 4 – 37,5% - RAP	Grupos 1 e 10 - 25% - DP Grupos 14 - 20% - NC2
Enunciado 3	Grupo 6 – 62,5% - RAP Grupo 1 - 50% - RAP Grupos 3 e 10- 43,8% - RAP	Grupos 7 e 16 – 43,8% - RAP Grupo 9 – 37,5% - RAP

	Grupo 17 – 43,8% - DP	
Enunciado 4	Grupo 1 - 62,5% - RAP Grupos 3, 6 e 10 - 43,8% - RAP	Grupo 7 - 50% - RAP Grupos 5, 6 e 16 - 31,3% - RAP

Podemos observar que o registro mais utilizado, nas duas séries, para os enunciados 1 e 2 dos grupos, se deu através da Determinação de Parcelas (DP). Isso pode indicar que o aluno pensa em uma possibilidade de combinação, ou seja, apresenta um pensamento inicial combinatório, porém, parece que lhe falta conhecimento para o estabelecimento do processo de conversão.

Já para os enunciados 3 e 4 dos grupos, para as duas séries, o registro utilizado foi o da RAP (Resposta da Adição de Parcelas), um indicativo da dificuldade na resolução dos enunciados explorando caminhos e que o recurso utilizado, diante da dificuldade encontrada, é a utilização do pensamento aditivo.

- A utilização de representação intermediária e sua interferência no processo de conversão

Esta análise se estabelece a partir da comparação dos registros adotados no processo de conversão, considerando os grupos de enunciados que possuem o mesmo enunciado e a inclusão de uma representação intermediária. Nesta perspectiva, podemos comparar os seguintes grupos de enunciados: 1-10-11; 8-12-13; 9-14-15; e 2-16-17.

Todos esses grupos possuem o mesmo enunciado (o grupo que aparece em primeiro lugar). Neste é acrescentado uma representação intermediária (fator intrínseco), podendo esta ser natural (RN – enfatizando a situação extra-matemática) ou estruturada (RE – com ênfase no objeto matemático explorado no enunciado, podendo ser uma matriz de dupla entrada ou uma representação de árvore de possibilidade).

5ª SÉRIE – Porcentagem do registro mais utilizado em cada grupo de enunciados

ENUNCIADOS	GRUPO 1	GRUPO 10(RN)	GRUPO 11(RE)
Enunciado 1	43,8% - DP	25% - OM e DP	31,3% - DP
Enunciado 2	37,5% - DP	31,3% - OM e RM	37,5% - DP
Enunciado 3	50% - RAP	43,8% - RAP	31,3% - DP
Enunciado 4	62,5% - RAP	43,8% - RAP	37,5% - RAP

Podemos concluir que, para estes três grupos de enunciados, que possuem a mesma organização redacional, a inclusão de uma representação intermediária não auxiliou significativamente os alunos no estabelecimento do processo de conversão. Isso confirma a teoria dos registros de representação, no sentido de que a representação intermediária precisa ser congruente com o enunciado. Neste caso, como o enunciado era complexo, somente a inclusão de uma representação não foi suficiente para favorecer o estabelecimento do processo de conversão. Podemos notar uma leve diferença, neste processo, no grupo 10, com os dois primeiros enunciados, mas com uma percentagem pouca significativa no processo de conversão.

8ª SÉRIE – Porcentagem do registro mais utilizado em cada grupo de enunciados

ENUNCIADOS	GRUPO 1	GRUPO 10(RN)	GRUPO 11(RE)
Enunciado 1	37,5% - RM	37,5% - OM	37,5% - OM
Enunciado 2	37,5% - RM	37,5% - OM	31,3% - OM
Enunciado 3	31,3% - RM	31,3% - OM e DP	25% - DP
Enunciado 4	31,3% - RM	31,3% - OM	18,8% - RM e DP

Na 8ª série, a inclusão da representação intermediária também não é de grande significado, para alteração do processo de conversão, para estes grupos de enunciados. Porém, o processo de conversão é mais congruente que o da 5ª série. Sendo os registros estabelecidos de RM ou OM, predominantes. Com o acréscimo da RN, não houve modificação no percentual de acerto, porém houve uma modificação no registro utilizado, de RM para OM. Já a inclusão da RE ocasionou o processo de não-conversão, principalmente nos enunciados 3 e 4. Isso pode nos levar a concluir que a utilização de representações intermediárias estruturadas precisam, necessariamente, ser enfocadas na prática pedagógica. Ou seja, os alunos precisam compreender esta representação, para poder atribuir sentido/significado à mesma, auxiliando, desta forma, no processo de conversão.

5ª SÉRIE – Porcentagem do registro mais utilizado em cada grupo de enunciados

ENUNCIADOS	GRUPO 8	GRUPO 12(RN)	GRUPO 13(RE)
Enunciado 1	37,5% - DPI	56,3% - OM	31,3% - OM e DP
Enunciado 2	37,5% - DP	56,3% - OM	31,3% - DP
Enunciado 3	25% - RAP e OM	50% - OM	31,3% - DP
Enunciado 4	37,5% - RAP	50% - OM	31,3% - DP

Aqui podemos observar uma significativa diferença da inclusão de uma representação intermediária, conservando o mesmo enunciado. A inclusão da RN foi significativa para o estabelecimento do processo de conversão, levando os alunos, em todos os enunciados, a realizar registros multiplicativos. Já a RE, que faz parte do grupo 13, não é significativa para o processo de conversão, confirmando a necessidade da intervenção pedagógica. Mesmo o enunciado sendo significativo, a representação intermediária utilizada não é congruente.

8ª SÉRIE – Porcentagem do registro mais utilizado em cada grupo de enunciados

ENUNCIADOS	GRUPO 8	GRUPO 12(RN)	GRUPO 13(RE)
Enunciado 1	43,8% - RM	62,5% - RM	56,3% - RM
Enunciado 2	62,5% - RM	62,5% - RM	68,8% - RM
Enunciado 3	50% - RM	43,8% - OM	37,5% - RM
Enunciado 4	50% - RM	43,8% - OM	56.3% - RM

Para a 8ª série, podemos observar que a inclusão da representação intermediária (sendo esta Natural ou Estruturada) não altera significativamente o processo de conversão, principalmente no enunciado 2, pois os registros utilizados são registros de multiplicação, em qualquer grupo. Ou seja, neste caso o enunciado do problema, por si só, já é suficiente para o estabelecimento do processo de conversão, dispensando a utilização da representação intermediária. Podemos afirmar que, para os enunciados 3 e 4, a representação intermediária acabou dificultando o processo de conversão. Porém, esta afirmação não pode ser conclusiva, pois devemos lembrar que alunos diferentes resolveram cada grupo de enunciados.

Podemos pensar em uma continuação desta pesquisa, na perspectiva de determinar a um grupo de alunos a resolução de diferentes enunciados (variando-os redacionalmente) e a inclusão de representações intermediárias nestes enunciados. Isso poderia fundamentar melhor a função da representação intermediária e da variação redacional no processo de conversão.

5ª SÉRIE – Porcentagem do registro mais utilizado em cada grupo de enunciados

ENUNCIADOS	GRUPO 9	GRUPO 14(RE)	GRUPO 15(RN)
Enunciado 1	50% - DP	37,5% - OM	25% - OM e RM
Enunciado 2	43,8% - DP	25% - OM e RM	37,5% - RM
Enunciado 3	31,3% - RAP e OM	25% - DP	25% - OM e DP
Enunciado 4	31,3% - OM	37,5% - OM	25% - DP

8ª SÉRIE – Porcentagem do registro mais utilizado em cada grupo de enunciados

ENUNCIADOS	GRUPO 9	GRUPO 14(RE)	GRUPO 15(RN)
Enunciado 1	50% - OM	50% - RM	50% - RM
Enunciado 2	56,3% - OM	40% - RM	37,5% - RM
Enunciado 3	37,5% - RAP e OM	31,3% - RM	31,3% - OM e RM
Enunciado 4	37,5% - OM	37,5% - RM	31,5% - OM e RM

Esses grupos de enunciados são caracterizados pela modificação de um fator extrínseco (colocação da questão – grupo 9, a partir do grupo 8). O grupo 14 é constituído pela inclusão da representação estruturada e o grupo 15 é constituído pela inclusão da representação natural.

Podemos notar que esses três grupos de enunciados apresentam muita dificuldade para os alunos. E a inclusão da representação intermediária, para o enunciado 2, da 8ª série, acaba dificultando mais o estabelecimento do processo de conversão. Neste sentindo, podemos dizer que a dificuldade poderá estar centrada no enunciado, sendo que a inclusão de uma representação intermédia, principalmente para a 5ª série, não facilita o estabelecimento do processo de conversão: para a representação ser significativa é necessário que exista um grau de congruência entre a representação e o enunciado.

Estes dados nos fazem refletir sobre a função da modificação do lugar da questão em um enunciado. Conforme a teoria apresentada por Duval, a variação do lugar da questão no enunciado é considerada um fator extrínseco, por não modificar substancialmente o processo de conversão a ser estabelecido pelo aluno. Com a pesquisa realizada, não é isso que percebemos. Em todos os enunciados (3, 5 e 9), em que modificamos o lugar da questão, trazendo esta para o início do enunciado, houve um aumento na dificuldade dos alunos no estabelecimento do processo de conversão. Ou seja, o lugar da questão no início do enunciado dificulta o processo de conversão.

5ª SÉRIE – Porcentagem do registro mais utilizado em cada grupo de enunciados

ENUNCIADOS	GRUPO 2	GRUPO 16(RN)	GRUPO 17(RE)
Enunciado 1	31,3% - DP	37,5% - RM	31,3% - RM
Enunciado 2	25% - RAP	31,3% - OM e RM	25% - RM
Enunciado 3	37,5% - DP	31,3% - RAP e OM	43,8% - DP
Enunciado 4	37,5% - RAP	37,5% - RAP	37,5% - DP

8ª SÉRIE – Porcentagem do registro mais utilizado em cada grupo de enunciados

ENUNCIADOS	GRUPO 2	GRUPO 16(RN)	GRUPO 17(RE)
Enunciado 1	43,8% - RM	62,5% - RM	43,8% - RM
Enunciado 2	50% - RM	50% - RM	50% - RM
Enunciado 3	50% - RM	43,8% - RAP	31,3% - RM
Enunciado 4	50% - RM	31,3% - RAP	40% - RM

Este grupo de enunciados é estabelecido a partir da inclusão de uma expressão de explicitação (fator intrínseco – acréscimo da palavra diferente a partir do grupo 1). O grupo 16 se estabelece com a inclusão de uma RN e o grupo 17 pela inclusão da RE. Para a 5ª série, a inclusão de uma representação intermediária modifica consideravelmente o processo de conversão. A RN, é mais potente que a RE, para esta série, principalmente, para os enunciados 1 e 2. Para os enunciados 3 e 4, nem a organização redacional do enunciado, nem as representações intermediárias foram suficientes para modificar o processo de conversão.

Para a 8ª série, o quadro é outro. O processo de conversão é estabelecido já no grupo 2, com índices bastante satisfatórios. A inclusão de uma representação intermediária, seja ela natural ou estruturada, em muitos casos, dificultou esse processo. Podemos observar isso no grupo 16, nos enunciados 3 e 4, levando os alunos ao estabelecimento do processo de não-conversão. Isso pode ter sido causado pela pouca potencialidade do enunciado devido à falta de congruência deste, com a representação intermediária.

- ***Comparação entre os grupos de enunciados com variações redacionais***

Podemos comparar os grupos de enunciados que modificamos redacionalmente com os que permaneceram sem a inclusão de representações intermediárias. Esta comparação pode ser feita entre os grupos 1 e 2; 1 e 4; 1 e 6; 2 e 7; e 4 e 8. Aqui podemos analisar especificamente o papel da modificação de fatores intrínsecos ao enunciado do problema, comparando com os enunciados do grupo 1, 2 e 4. Para esta comparação e análise vamos considerar os registros de OM e RM, ou seja, os registros que estabelecem o processo de conversão.

	5ª SÉRIE		8ª SÉRIE	
Enunciados	**GRUPO 1**	**GRUPO 2**	**GRUPO 1**	**GRUPO 2**
Enunciado 1	25%	12,6%	43,8%	62,6%
Enunciado 2	31,3%	31,3%	43,8%	68,8%
Enunciado 3	6,3%	12,6%	37,6%	68,8%
Enunciado 4	6,3%	18,8%	43,8%	68,8%

Na 8ª série, a modificação no grau de explicitação é significativa para o estabelecimento do processo de conversão. Já na 5ª série, não podemos perceber a mesma implicação da modificação. Porém para os enunciados 3 e 4, mais complexos para os alunos, o acréscimo da palavra *"diferente"* modifica significativamente o processo de conversão.

	5ª SÉRIE		8ª SÉRIE	
Enunciados	**GRUPO 1**	**GRUPO 4**	**GRUPO 1**	**GRUPO 4**
Enunciado 1	25%	50%	43,8%	81,3%
Enunciado 2	31,3%	25%	43,8%	87,5%
Enunciado 3	6,3%	25%	37,6%	62,6%
Enunciado 4	6,3%	31,3%	43,8%	56,3%

Podemos observar que, na 5ª série, a escolha dos elementos de organização cognitiva que vamos explicitamente designar, é potente, para os enunciados 1, 3 e 4, auxiliando significativamente o estabelecimento do processo de conversão. E na 8ª série, também isso pode ser percebido com uma elevação muito significativa no processo de conversão.

Acreditamos que, a partir desses dados, podemos confirmar a teoria de Duval, no aspecto da importância e significado dos fatores intrínsecos do enunciado dos problemas e do quanto estes fatores realmente interferem no processo de conversão.

	5ª SÉRIE		8ª SÉRIE	
Enunciados	**GRUPO 1**	**GRUPO 6**	**GRUPO 1**	**GRUPO 6**
Enunciado 1	25%	25,1%	43,8%	68,8%
Enunciado 2	31,3%	18,8%	43,8%	68,8%
Enunciado 3	6,3%	18,8%	37,6%	50%
Enunciado 4	6,3%	18,8%	43,8%	50%

Podemos observar, nesses dados, que, na 8ª série, o grau de explicitação foi significativo para estabelecer o processo de conversão, em todos os enunciados. Já na 5ª série, nos dois primeiros enunciados, não podemos dizer que a inclusão das qualidades ou caminhos auxiliaram no processo de conversão. Podemos dizer que, para a 5ª série, a inclusão das qualidades ou caminhos, sem a utilização, da representação intermediária, não auxilia significativamente no processo de conversão. Podemos pensar que a dificuldade esteja no tamanho do enunciado, ou seja, o enunciado torna-se muito extenso, dificultando a compreensão.

	5ª SÉRIE		8ª SÉRIE	
Enunciados	**GRUPO 4**	**GRUPO 8**	**GRUPO 4**	**GRUPO 8**
Enunciado 1	50%	31,3%	81,3%	75,1%
Enunciado 2	25%	37,6%	87,5%	87,5%
Enunciado 3	25%	31,3%	62,6%	81,3%
Enunciado 4	31,3%	31,3%	56,3%	81,3%

Aqui podemos observar uma oscilação nos resultados obtidos, em função da modificação do grau de explicitação, ou seja, da inclusão de termos. A inclusão de termos em um enunciado não garante a melhora do processo de conversão. Apesar de obtermos resultados muito significativos nestes grupos de enunciados (o índice de acertos é elevado), a inclusão das qualidades ou dos caminhos para um enunciado auxilia e, para outro, não. Logo, com estes dados, não podemos tirar conclusões sobre a importância de elencar todas as características ou qualidades (neste caso) para o estabelecimento do processo de conversão.

	5ª SÉRIE		8ª SÉRIE	
Enunciados	**GRUPO 2**	**GRUPO 7**	**GRUPO 2**	**GRUPO 7**
Enunciado 1	12,6%	37,6%	62,6%	56,3%
Enunciado 2	31,3%	43,8%	68,8%	62,6%
Enunciado 3	12,6%	18,8%	68,8%	37,6%
Enunciado 4	18,8%	37,6%	68,8%	37,5%

Da mesma forma que a comparação do grupo 4 com o grupo 8, o grupo 2 com o grupo 7 é modificado, quanto ao grau de explicitação, ou seja, mediante a inclusão de termos que estamos entendendo as qualidades ou os caminhos. Podemos ver que, neste grupo de enunciados, para a 5ª série, existe um considerável progresso no processo de conversão em todos os enunciados. Já para a 8ª série, isso não pode ser percebido, podendo ser dito que a inclusão destas qualidades ou caminhos dificultou os alunos no processo de conversão.

Os alunos de 5ª série, por sua vez, apresentaram maior dificuldade, no processo de conversão, que os alunos da 8ª série. Isso pode ser conseqüência dos alunos de 8ª série, terem aprendido outros conceitos, que fazem parte da estrutura multiplicativa, e os alunos de 5ª série estarem confundindo adição sucessiva com adição das parcelas.

Ao final dessas análises, podemos dizer, baseada na pesquisa de campo, considerando os alunos que estabeleceram o processo de conversão, que este é influenciado significativamente pelos fatores intrínsecos, pela utilização de representações intermediárias (principalmente, representações naturais, pois as estruturadas necessitam da intervenção pedagógica) e, principalmente, que a variação redacional é um instrumento potente para o professor, no processo pedagógico de ensino da matemática, considerando que a utilização de resolução de problemas é uma sistemática deste fazer.

Em relação ao problema traçado nesta pesquisa, da identificação de quais seriam os fatores (intrínsecos e extrínsecos) que determinam a congruência ou não dos enunciados dos problemas, podemos dizer que, considerando, os enunciados trabalhados aqui, os fatores intrínsecos, através da escolha dos elementos de organização cognitiva que vai se explicitar e os graus de explicitação são a sustentação para as variações redacionais, tornando os enunciados congruentes para o estabelecimento do processo de conversão. Para a 8ª série a escolha dos elementos de organização cognitiva que vai se explicitar é mais significativo, em função dos alunos desta série, já possuírem outros conhecimentos que sustentam a operação de multiplicação.

Já na 5ª série, é necessário o trabalho com os dois fatores intrínsecos, escolha dos elementos de organização cognitiva que vai se explicitar e os graus de explicitação. É muito significativo para essa série, a representação intermediária, sendo esta centrada na situação extra-matemática. A inclusão, da representação intermediária, no enunciado do problema, faz com que os alunos, estabeleçam o processo de conversão, identificando a congruência.

CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROCESSO PEDAGÓGICO E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Mais uma etapa deve ser fechada, terminada. Como todas as etapas de nossa vida, marcada mais por interrogações, angústias, análises e incertezas, do que por certezas, verdades, decisões. É nessa perspectiva que traçamos algumas considerações sobre a pesquisa realizada, que, obrigatoriamente, precisa ser marcada por um final, mas que continuará fazendo parte do nosso fazer enquanto profissional da educação.

Como qualquer pesquisa, precisávamos delimitar nosso foco de trabalho. Este se estabelece no entendimento da construção do conceito das operações, pautado em três eixos: *sentido operatório, significado operatório dos algoritmos e resolução de situações modeladas pela operação – os enunciados*. Como não tínhamos condições de envolver todas as operações, optamos, em função de dificuldades apresentadas pelos professores em suas práticas pedagógicas, por enfocar a operação de multiplicação, tema da dissertação de mestrado e continuação da pesquisa atual.

A grande questão que se estabelece no trabalho pedagógico em relação à operação de multiplicação é sua aproximação com a operação de adição. Esta visão, marcada pela idéia (sentido) de que a multiplicação é uma adição de parcelas iguais (ou adição sucessiva), sendo, em muitas situações, a única idéia trabalhada efetivamente na escola, tanto no início de construção deste conceito, como base nos enunciados dos problemas. Isso leva a erros conceituais e, principalmente, a dificuldades no processo de construção deste conceito, para o entendimento de outros enunciados de problemas e da própria estrutura multiplicativa. Nossa defesa e entendimento, nesta pesquisa, é de que a operação de multiplicação precisa ser trabalhada, no seu processo inicial, com dois sentidos operatórios, adição sucessiva e produto cartesiano, mediante a compreensão da complementaridade destes e suas rupturas (caráter unitário e caráter binário).

Estes dois sentidos operatórios é que irão formar o conceito da multiplicação, sustentando os diversos campos de enunciados de problemas multiplicativos. Os sentidos operatórios de adição sucessiva e produto cartesiano possuem diferenças significativas – propriedade comutativa, entendimento do caráter unitário e binário da operação - e a sua complementaridade é a possibilidade de construção e entendimento de situações multiplicativas. Isso precisa acontecer no processo inicial de apropriação deste conceito, ou seja, nas situações elementares que alicerçarão todo o trabalho no Ensino Fundamental.

A trajetória desta pesquisa foi marcada pela busca de um referencial teórico sobre a operação de multiplicação e a resolução de problemas na perspectiva de entendimento destes, como textos. Ou seja, o problema matemático que exploramos na escola é um texto que explora um conteúdo cognitivo e possui uma organização redacional. Conforme variamos redacionalmente os enunciados, podemos torná-los congruentes, ou não, para o estabelecimento do processo de conversão (a resolução dos problemas). Nossa tarefa, enquanto, educadores matemáticos, é considerar que os enunciados possuem variações redacionais e tais variações podem implicar a apreensão conceitual de modo mais lógico ou obscuro para o aluno, ou seja, auxiliar ou não o aluno a estabelecer o processo de conversão. Estas variações estão baseadas no sentido operatório, de cada operação. Quanto mais variarmos redacionalmente os enunciados trabalhados em sala de aula, maior a possibilidade de trabalho com enunciados significativos e potentes, que proporcionam ao aluno melhor compreensão do conhecimento matemático e de situações contextualizadas.

Enquanto educadores precisamos compreender, que não é qualquer variação redacional que vai auxiliar no processo de conversão. Utilizando o referencial teórico de Duval, que chama a atenção para os fatores intrínsecos e extrínsecos dos enunciados, entendemos que os responsáveis pela modificação do processo de conversão, com maior significado para os alunos, são os fatores intrínsecos. Aqueles que consideram o conteúdo cognitivo explorado no problema e não os responsáveis pela exploração da situação extra-matemática. A modificação da situação extra-matemática não é fundante para o processo de conversão.

O delineamento do referencial teórico possibilitou a articulação com o fazer pedagógico de uma maneira mais coerente e consistente. Pois através das pesquisas realizadas sobre os problemas multiplicativos, podemos traçar os limites e possibilidades destas, identificando os sentidos operatórios, e as idéias básicas para o produto cartesiano, com possibilidade de exploração no processo inicial de escolarização. Neste sentido, nossa interação com a prática pedagógica foi marcada por três momentos, considerando sempre os enunciados dos problemas multiplicativos, com ênfase nos casos de combinatória:

- ***Os enunciados dos problemas multiplicativos, nos livros didáticos*** pesquisados, aparecem enfocando o registro destes como adição sucessiva. O produto cartesiano é explorado com pouca ênfase e centrado no registro de linha por coluna. Este registro, como vimos, tanto na dissertação de mestrado, como nesta pesquisa, pode levar o aluno a processos aditivos, por enumeração. A idéia de combinatória é quase inexistente nos enunciados apresentados pelos livros pesquisados. Existe uma certa articulação do algoritmo da adição com o da multiplicação; porém, devemos lembrar que este procedimento não garante a articulação entre as operações, principalmente nos enunciados de problemas. O trabalho com o algoritmo faz parte (é um eixo) da compreensão da operação, não conseguindo ser o articulador entre os eixos.

Podemos dizer, em função dos livros pesquisados, que não existe a complementaridade do sentido operatório, da adição sucessiva, com o produto cartesiano, para a operação de multiplicação. Existe sim, uma ênfase no trabalho com o sentido operatório da adição sucessiva. Esta análise dos enunciados dos problemas multiplicativos, nos livros didáticos, marcou o primeiro momento desta pesquisa.

- ***O professor elaborando enunciados de problemas multiplicativos***, centra-se no sentido operatório da adição sucessiva, modificando, principalmente, a situação extra-matemática, ou seja, o fator extrínseco. Tal modificação, porém, não é significativa para, construção e compreensão do conceito trabalhado. Além da exploração da adição sucessiva, outro tipo de enunciado, elaborado pelos professores, é os que envolvem preços e produtos. Estes possuem a mesma estrutura matemática (quantidades intensivas por extensivas) e pertencem ao sentido operatório da adição sucessiva. Os professores apresentam muita dificuldade na elaboração dos enunciados, em questões de estruturação do enunciado. Aqui precisamos lembrar da diferença que Duval afirma ter na tarefa de conversão (resolução do problema) e na tarefa de redação (elaboração de enunciados de problemas). Estas duas tarefas são distintas e envolvem processos diferentes. Acreditamos que, no fazer pedagógico, principalmente, o professor deva ser o criador/elaborador dos enunciados trabalhados em sala de aula. Para isso, precisa ter claro o objeto matemático a ser enfocado e as suas potencialidades. Sem isso, os enunciados não passam de simples cálculos escritos em língua portuguesa. No trabalho com o aluno, é necessário que se criem estratégias de elaboração de enunciados e que este processo seja realmente um foco do trabalho do professor. Este trabalho constituiu o segundo momento dessa pesquisa.

- ***Os alunos diante do processo de conversão de enunciados***, tendo por base os enunciados de combinatória na perspectiva de variarmos redacionalmente, tornando estes mais congruentes, para o processo de conversão, é o marco do terceiro momento desta tese. Foi possível identificarmos um grupo de enunciados mais potente, considerando os registros de representação determinados no processo de conversão, pelos alunos de 5ª e 8ª séries envolvidos na pesquisa. Esse foi o centro de interesse da pesquisa, ou seja, identificar e verificar a potencialidade da variação redacional para o processo de conversão e a influência da representação intermediária nesse.

Podemos traçar algumas considerações em relação aos registros desencadeados pelos alunos: a primeira é a diferença de registros adotados pelos alunos de 5ª e 8ª séries. O processo escolar acaba "facilitando" a resolução dos enunciados propostos. Porém, como este sentido operatório de combinatória não é explorado no cotidiano escolar, por mais que as operações de multiplicação envolvidas sejam elementares, mesmo os alunos de 8ª série apresentam dificuldades no processo de conversão.

A dificuldade encontrada pelos alunos faz com que seu procedimento de conversão se estabeleça como uma adição sucessiva. Isso pode ser causado pelo processo pedagógico (relação que é estabelecida entre adição sucessiva e multiplicação). Ou seja, quando o enunciado do problema não é congruente, o recurso utilizado pelo aluno é a adição das parcelas, ou determinação de uma parcela envolvida no enunciado. ***Neste caso, adição das parcelas e adição sucessiva podem ter o mesmo grau de compreensão pelo aluno, levando ao processo de não-conversão***.

A variação da escolha da situação extra-matemática não é significativa (fator extrínseco), para o processo de conversão; porém, ***o sentido operatório, que é identificado pelo campo de enunciado, o qual estrutura os enunciados dos problemas***, é significativo para o estabelecimento do registro, responsável pelo processo de conversão. Podemos observar isso nos enunciados 1 e 2, que exploram possibilidades de ocorrência, que são os enunciados mais congruentes para o processo de conversão, e os enunciados 3 e 4, que exploram caminhos, apresentando enunciados não congruentes. Isso comprova a teoria utilizada, os fatores intrínsecos são significativos para o processo de conversão e conseguem determinar o campo de enunciado dos problemas.

Especificamente para o campo de enunciados de combinatória, proposto por nós, envolvendo possibilidade de ocorrência e caminhos, observamos que precisa ser sub dividido. Percebemos, através da pesquisa de campo, que os alunos possuem muita dificuldade na conversão dos enunciados que exploram caminhos; logo, nosso campo de enunciados para combinatória ficaria com a seguinte divisão: ***enunciados de possibilidade de ocorrência (maior grau de congruência), caminhos (exige intervenção do professor e representações intermediárias potentes) e arranjos (envolvendo o trabalho com conceitos específicos, não podendo ser considerado um trabalho de situações elementares)***.

Considerando as variações redacionais realizadas nos enunciados, ou seja, os fatores intrínsecos, podemos afirmar que estes possuem um papel significativo para o estabelecimento do processo de conversão. Na 5ª série, existe a necessidade da descrição da escolha dos elementos de organização cognitiva que vai ser explicitada, descrita, no enunciado, considerando o objeto matemático. Isso facilita o estabelecimento do processo de conversão. Já para a 8ª série, como os alunos já possuem outros conceitos formados, que podem auxiliar no processo de conversão, para estes enunciados de combinatória, o grau de explicitação é mais significativo que a escolha de elementos de organização cognitiva a serem designados.

O papel das representações intermediárias no processo de conversão depende do grau de congruência com o enunciado do problema e do reconhecimento significativo da representação utilizada pelo aluno. Não é qualquer representação que pode auxiliar o aluno a estabelecer o processo de conversão. As representações precisam ser significativas com o objeto matemático tratado. As representações naturais, que possuem ênfase nas situações extra-matemática exploradas no enunciado, acabam sendo, em muitos casos, mais significativas para o processo de conversão, principalmente para os alunos de 5ª série. As representações estruturadas (independentes das situações extra-matemática, enfocando o objeto matemático) são mais potentes para o processo de conversão, porém exigem o trabalho pedagógico; caso contrário, não são significativas para os alunos, não auxiliando no estabelecimento do processo de conversão.

Podemos concluir que as representações intermediárias possuem um papel fundamental no processo de conversão, para os enunciados trabalhados nesta pesquisa. Quanto mais próxima à representação intermediária estiver da língua natural mais potente ela é. As representações estruturadas exigem um trabalho pedagógico, para que os alunos possam atribuir significados a elas. As representações estruturadas são mais amplas, mais potentes, servindo para vários tipos de enunciados. Podemos concluir, ainda, em função dos procedimentos dos alunos, que a utilização de representações intermediárias potentes auxilia, significativamente, o estabelecimento do processo de conversão.

Com estes três momentos traçados e percorridos, tendo como base o referencial teórico, podemos traçar as seguintes considerações finais para o processo pedagógico e a educação matemática;

1. O*s livros didáticos e os enunciados de problemas multiplicativos.* Sabemos que os livros didáticos são a grande fonte de pesquisa dos professores em sala de aula. Estes acabam sendo, em muitas situações, o único livro pesquisado pelos professores para o planejamento de suas aulas. Como os livros acabam explorando muito parcialmente os dois sentidos operatórios que a operação de multiplicação possui, existe uma parcialidade nos enunciados de problemas propostos. Isso leva o professor a explorar, com seus alunos, somente uma possibilidade da operação de multiplicação, que é restritiva; a adição sucessiva, que não possibilita a sustentação da propriedade comutativa, e possui um caráter unitário da multiplicação. Estes são os limites que precisam ser repensados pelos autores de livros didáticos, para que se possa construir efetivamente o conceito da operação de multiplicação. Sendo necessário para isso, uma extrapolação desta idéia, com o enfoque do sentido operatório do produto cartesiano, em situações elementares, com a mesma ênfase, que o sentido operatório da adição sucessiva.

Os livros didáticos, ou melhor, os autores dos livros didáticos, precisariam dar um tratamento ampliado, para esta operação, considerando, no mínimo, a complementaridade entre o sentido operatório da adição sucessiva e o sentido operatório do produto cartesiano.

2. *O professor e a resolução de problemas.* Os professores, na sua prática diária, e, muitas vezes, no seu processo de formação, nem sempre são incentivados a elaborar enunciados de problemas e visualizá-los, como textos, indispensáveis no processo de construção dos conceitos matemáticos. Isso acaba levando o professor a ser, em muitas situações, um repassador de informações e não um sujeito capaz de ser um mediador na construção de conceitos. Isso precisa ser urgentemente revisto. Precisamos melhorar os cursos de formação e possibilitar aos professores, que estão atuando em sala de aula, cursos de formação continuada, na perspectiva de formação de professores que pensem/analisem/redimensionem sua ação em sala de aula, com uma boa fundamentação teórica e pedagógica. Considerando a resolução de problemas, os professores precisam concebe-los como um processo que possui duas tarefas relacionadas: a tarefa de redação e a tarefa de conversão. A tarefa de redação é função do professor; porém, pode ser uma atividade de ensino também utilizada com o aluno. A tarefa de conversão, por sua vez, é essencialmente do aluno. Estas duas tarefas estão estreitamente relacionadas com o objeto matemático a ser enfocado no enunciado do problema. Por isso, é fundamental que o professor domine o conceito que será trabalho, explorado, nos enunciados dos problemas.

Acreditamos que esta pesquisa possui potencialidade de continuação, na perspectiva do entendimento dos enunciados dos problemas como textos, constituídos pelo conteúdo cognitivo e organização redacional. A possibilidade de variações redacionais é ainda muito grande, pensando nos enunciados envolvendo a operação de multiplicação. A busca de uma representação intermediária estruturada eficiente ainda é igualmente, uma demanda. Embora tenhamos traçado, algumas possibilidades, que forneceram resultados satisfatórios, acreditamos que exista uma demanda, de busca de representação intermediária eficiente, para a operação de multiplicação, como para o sentido operatório de combinatória. Sentimos que conseguimos avançar, na perspectiva do entendimento dos problemas matemáticos e da operação de multiplicação, ou melhor a potencialidade do trabalho com variações redacionais e o entendimento da complementaridade dos sentidos operatórios da operação de multiplicação (adição sucessiva e produto cartesiano) como sustentação para os enunciados de problemas.

Porém, considerando o processo pedagógico, estamos conscientes e convictos de que ainda é necessária muita reflexão, coerência e consistente, para termos uma perspectiva de modificação do processo ensino-aprendizagem de matemática, tornando-o, mais atraente, significativo, compreensível e qualificado. Isso poderá ser efetivado, considerando os problemas matemáticos (tema da pesquisa), como textos, trabalhando na perspectiva da redação destes enunciados e na perspectiva da resolução destes, ou seja, no processo de conversão.

BIBLIOGRAFIA

ARTIGUE, Michèle. Ingénierie Didactique. In: ***Recherches en didactique des mathématiques***, Paris, Université Paris, v. 9, n 3, p. 281-308, 1988.

ASTOLFI, Jean-Pierre; PETERFALVI, Birgitte; VÉRIN, Anne. ***Commet les enfants apprennent les sciences.*** Paris, RETZ, 1998.

BECKER, Fernando. ***Da ação à operação: o caminho da aprendizagem em J.Piaget e Paulo Freire.*** Porto Alegre, Palmarinca, 1993.(Educação e Realidade).

BISHOP, Alan J. ***Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.*** Barcelona, Editorial Paidós, 1999. (Temas de educación – Colección dirigida por César Coll).

BRANCA, Nicholas A.Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, S e REYS, R.(Org). ***A resolução de problemas na matemática escolar.*** São Paulo, Atual, p.4-12.1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. ***Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*** Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998.(5ª a 8ª séries).

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. ***Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*** Secretaria de educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.(Vol.03).

CARVALHO, Dione Lucchese de. ***Multiplicação e divisão: aprendizagem de transformações multiplicativas da pré-escola à 6ª série do 1º grau.*** São Paulo, CLR Balieiro, 1986. (Coleção Aprendendo Ensinando)

CUBERES, María Teresa González (Org.) ***Educação infantil e séries inicias: articulação para a alfabetização.*** Porto Alegre, Artes Médicas, 1997.

CUNHA, Maria Carolina Cascino da. ***As operações de multiplicação e divisão junto a alunos de 5ª a 8ª séries.*** (Dissertação de Mestrado) PUC – SP. Orientadora: Tânia Campos. 1997.

DAMM, Regina Flemming. ***Apreentisage des problèmes additifs et compréhension de texte.*** Strasbourg. Tese (Doutorado em Didactique des Mathématiques) - Institut de Recherche Mathematique Avancee, Université Louis Pasteur. 1992.

DUBOIS, Colette; FÉNICHEL, Muriel; PAUVERT, Marcelle. ***Se former pour enseigner les mathématiques.*** Paris, Armand Colin Éditeur. (Formation des Enseignants. 1. Problèmes, géométrie).

DUHALDE, María Elena e CUBERES, María Teresa González. ***Encontros iniciais com a matemática: contribuições à educação infantil.*** Porto Alegre, Artes Médicas, 1998.

DUVAL, Raymond. ***Lecture et compréhension des textes***. Strasbourg:I.R.E.M, 1986.

DUVAL, Raymond. Ecarts Semantiques et coherence mathematique: Introduction aux problèmes de congruence. In: ***Annales de didactique et de sciences cognitives***, Strasbourg, IREM, v. I, p.7-25, 1988.

DUVAL, Raymond. Interaction des Niveaux de Representation dans la Comprehension des Textes. In: ***Annales de didactique et de sciences cognitives***, Strasbourg, IREM, v. IV, p.163-196, 1991.

DUVAL, Raymond. ***Sémiosis et noésis – diversité dês registres de représentation et fonctionnement cognitif de la pensée.*** Université Louis Pasteur. Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Juillet, 1992.(Synthèse des travaux présentés pour l'habilitation). Xerox.

DUVAL, Raymond. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In: ***Annales de didactique et de sciences cognitives***, Strasbourg, IREM, v. V, p.37-65, 1993.

DUVAL, Raymond. ***Première partie: représentations et registres de représentation***. 1994. (xérox).

DUVAL, Raymond. ***Sémiosis et penseé humaine. registres sémiotiques et apprentissages intellectuels***. Paris: Peter Lang S.A., 1995. (Recherches en Sciences de L'Éducation.).

DUVAL, Raymond. ***La compréhension des énoncés de problème de mathématisation: de la lecture a la resolution – approche cognitive des processus d'apprentissage***. 1997.(xérox).

DUVAL, Raymond. ***Conversion et articulation des representations analogiques***. IUFM, Nord Pas de Calais, n 1, janvier, 1999.(Seminaires de Recherche).

ESCARABAJAL, Marie-Claude. Schémas d'Interprétation et Résolution de Problèmes Arithmétiques. In: ***Revue française de pédagogie***. n 82, janv.-fév.-mars, p15-21, 1988.

FAVRE, Jean-Michel. Elaborer une demarche d'enseignement par l'observation de la formation et de l'evolution d'um concept: la multiplication. In: ***Grand N***, n 53, p 27-37, 1993-1994.

FIORENTINI, Dario. ***Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática: o caso da produção científica em cursos de pós-graduação.*** São Paulo: UNICAMP, 1994. Tese de Doutorado. (Doutorado em Educação - Área de Metodologia de Ensino - Sub-área: Educação Matemática) Faculdade de Educação.

FISCHER, Jean-Paul; PLUVINAGE, François. Comprexités de compréhension et d'exécution des opérations arithmétiques élémentaires. In: ***Recherche en didactique des mathématiques.*** Vol. 9, n 2, p.133-154, 1988.

FRANCHI, Anna. ***Compreensão das situações multiplicativas elementares.*** São Paulo, 1995. Tese (Doutorado em Educação - Supervisão e Currículo) - Pontificia Universidade Católica - SP.

GIARDINETTO, José Roberto Boettger. ***Matemática escolar e matemática da vida cotidiana.*** Campinas, SP: Autores Associados, 1999. (Coleção polêmicas do nosso tempo; v. 65)

GIORDAN, André; VECCHI, Gerard de. ***Les origenes del saber***. 1 ed. Sevilha: Diada Editoras, 1988.

GLORIAN, Perrin e JEANNE, Marie. Sens, Algorithmes et représentations symboliques. ***In: Mathematiques, logique et construction du sens.*** Mai, 1994(Actes du Congrés Nacional de A.N.C.P.).

GÓMEZ-GRANELL, Carmen ***La funcion del dibujo en la construccion de los formalismo matematicos.*** Barcelona, IMIPAE, Vol.8, n 2, p. 155-178, 1986. (Cuadernos de Psicologia).

GÓMEZ-GRANELL, Carmen. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, Ana e TOLCHINSKY, Liliana (Org). ***Além da alfabetização. A aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática.*** 3 ed. São Paulo, Editora Ática, 1997. (Série Fundamentos, 127)

GREER, Brian. Extending the meaning of multiplication and division. In: G.Harel e J.Confrey(Eds.) ***The development of multiplicative reasoning in the learning of***

mathematics. Albany: State University of New York Press. Cap.03, p. 61-85. 1994.

GROSSI, Esther Pillar. ***Um espaço para ficar inteligente: multiplicação e construtivismo.*** Erechim, EDELBRA, 1994.(Série Didática Pós-Piagetiana, v. 5)

HAREL, Guershon; BEHR, Merlyn; POST, Thomas; LESH, Rechard. The impact of the number type on the solution of multiplication and division problems: further considerations. In: G.Harel e J.Confrey(Eds.) ***The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.*** Albany: State University of New York Press. Cap.10, p. 363-384. 1994.

HIEBERT, James; BEHR, Merlyn(Org.) ***Number concepts and operations in the middle grades.*** Lawrence Erlbaum Associates, EUA, National council of teachers of mathematics. Vol, 02. (Research Agenda for Mathematics Education). 1988.

KRULIK, Stephen. ***A resolução de problemas na matemática escolar.*** São Paulo, Atual, 1997.

LINS, Rômulo Campos e GIMENEZ, Joaquim. ***Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI.*** Campinas-SP, Papirus, 1997.(Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

LOSITO, Sonia Maria. ***O sistema de numeração decimal e o princípio multiplicativo: um estudo na 4ª série do 1º grau.*** Campinas, São Paulo. 1996 (Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação).

MACHADO, Nílson José. ***Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua.*** São Paulo, Cortez: Autores Associados, 1990. (Coleção educação contemporânea; 59).

MACHADO, Silvia Dias Alcântara... et all. ***Educação Matemática: uma introdução.*** São Paulo: EDUC, 1999.

MAURICE, Jean-Jacques. Problèmes Multiplicatifs: L'Expérience de l'Enseignant, l'Action Effective de l'Élève. ***In: Recherches en Didactique des Mathématiques,*** Vol.16, n 3, p. 323-348, 1996.

MAZA, Carlos. ***Enseñanza de la Multiplicación y División.*** Madrid, Editorial Sínteses, 1991. (Matematicas: cultura y aprendizaje)

MAZA, Carlos. ***Aritmética y representación. De la comprensión del texto al uso de materiales.*** Barcelona, Editorial Paidós, 1995. (Papeles de Pedagogía, 19)

MENDONÇA, Maria do Carmo Domite. ***Problematização: Um caminho a ser percorrido em Educação Matemática.***(Tese de Doutorado) UNICAMP, Campinas, São Paulo, 1993. Orientadora: Márcia Regina Ferreira de Brito.

MORGADO, Luísa Maria de Almeida. ***O Ensino da Aritmética. Perspectiva Construtivista.*** Coimbra, Portugal, Livraria Almedina, 1993.

NEHRING, Cátia Maria. ***A Multiplicação e seus Registros de Representação nas Séries Iniciais.*** Florianópolis: UFSC, 1996. 238p. Dissertação. (Mestrado em Educação) Centro de Educação, Universidade Federal de Santa Catarina.

NESHER, Pearla. Multiplicative School Word Problems: Theoretical Approaches and Empirical Findings. In: HIEBERT, James e BERH, Merlyn(Eds) ***Number Concepts and Operations in the Middle Grades.*** P. 19-40. Reston, The National Council Of Teachers of Mathematics. 1988. (Vol 2).

NUNES, Terezinha e Bryant, Peter. ***Crianças fazendo matemática.*** Porto Alegre, Artes Médicas, 1997.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa e BOTTA, Luciene Souto. Reconceitualizando as Quatro Operações Fundamentais. ***In: Revista de Educação Matemática*** - SBEM-SP, Ano 6, No. 4 Julho de 98, pg. 19-26

PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma, et. al. ***Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas.*** Porto Alegre, Artes Médicas, 1996.

PERALES PALACIOS, F.J. La Resolución de Problemas: Una Revisión Estructurada. ***In: Enseñanza de Las Ciencias,*** 11(2), p170-178, 1993.

PIAGET, Jean. ***A Formação do Símbolo na Criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação.*** 3ed. Rio de Janeiro, Guanabara Koogan, 1978.

PIAGET, Jean; SZEMINSKA, Alina. ***A Gênese do Número na Criança.*** Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1971.

PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel. ***Gênese das Estruturas Lógicas Elementares.*** Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1983.

POLYA, George. ***A arte de Resolver Problemas.*** Um Novo Aspecto do Método Matemático. Rio de Janeiro, Interciência, 1978.

POLYA, George. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, S e REYS, R.(Org). ***A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.*** São Paulo, Atual, p.1-3.1997.

POZO, Juan Ignácio (Org.) ***A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.*** Porto Alegre, Artes Médicas, 1998.

RABELO, Edmar Henrique. ***Produção e Interpretação de textos matemáticos: um caminho para um melhor desempenho na resolução de problemas.*** (Dissertação de Mestrado). Campinas, UNICAMP, São Paulo, 1995. Orientador: Sergio Lorenzato.

ROBERT, Aline. Problèmes Mèthodologiques en Didactique des Mathèmatiques. In: ***Recherches en Didactique des Mathèmatiques***, v. 12, n 1, p. 33-58, 1992.

RODRIGUES, Valdir. ***Resolução de Problemas como Estratégia para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa matemática.*** (Dissertação de Mestrado) UNESP, Rio Claro, São Paulo. 1992. Orientadora Lourdes de la Rosa Onuchic

ROGALSKI, J. A Propos de L'Acquisition de la Bidimensionnalite Chez les eleves d'age presccolaire et scolaire. In: ***Cahier de didactique des mathematiques***. Paris, Universite Paris VII, n. 12.

ROGALSKI, J. Enseignement et acquisition de la Bidimensionnalite – Analyse des Effets Macroscopiques de L'Enseignement. In: ***Cahier de didactique des mathematiques***. Paris, Universite Paris VII, n. 13.

SCHWARTZ, Judah L. Intensive Quantity and Referent Transforming Arithmetic Operations. In: HIEBERT, James e BERH, Merlyn(Eds***) Number Concepts and Operations in the Middle Grades.*** P. 41-52. Reston, The National Council Of Teachers of Mathematics. 1988. (Vol 2).

STEFFE, Leslie P. Children's multiplying schemes. In: G.Harel e J.Confrey(Eds.) ***The development of multiplicative reasoning in the learning of Mathematics.*** Albany: State University of New York Press. Cap.01, p. 3-39.1994.

STEFFE, Leslie P. Children's Construction of Number Sequences and Multiplying Schemes. In: HIEBERT, James e BERH, Merlyn(Eds***) Number Concepts and Operations in the Middle Grades.*** P. 119-140. Reston, The National Council Of Teachers of Mathematics. 1988. (Vol 2).

SUYDAM, Marilyn N. Desemaranhando pistas a partir da pesquisa sobre resolução de problemas. In: KRULIK, S e REYS, R.(Org). ***A Resolução de Problemas na Matemática Escolar***. São Paulo, Atual, p.49-73.1997.

VERGNAUD, Gérard; RICCO, G. et al. Quelles connaissances les enfants de sixième ont-ils des "structures multiplicatives" élémentaires? Un sondage. In: ***Bulletin APMEP***, n 313, p.331-357, abril,1978.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative Structures. In: LESH, R. & LANDAU, M.(Eds). ***Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes.*** New York: Academic Press, p. 127-174,1983.

VERGNAUD, Gérard; ROUCHIER, A. et al. ***Acquisition des "Structures Multiplicatives" dans le premier cycle du second degre***. Paris, Ecole des Hautes en Sciendes Sociales. Centre d'Etude des Processus Cognitifs et du Langage. Laboratoire associé au C.N.R.S. décembre, 1978.

VERGNAUD, Gerard. ***Didactique et Acquisition du Concept de Volume***. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble, Vol. 4, n 1, p. 9-25, 1983.

VERGNAUD, Gerard; RICCO, Graciela. ***Representation du Volume et Arithmetisation Entretiens Individuels Avec des Eleves de 11 a 15 ans.*** Grenoble, Vol. 4, n 1, p. 27-69, 1983.

VERGNAUD, Gerard, et all. ***Une Experience Didactique sur le Conceept de Volume en Classe de Cinquieme(12-13 ans).*** Grenoble, Vol. 4, n 1, p. 71-120, 1983.

VERGNAUD, Gerard. ***Didactics as a Content-Oriented Approach to Research on the Learning of Physics, Mathematics and Natural Language.*** Paris, C.N.R.S.1984.(Centre d´Etude des Processus Cognitifs et du Langage).

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative Structures. In: HIEBERT, James e BERH, Merlyn(Eds***) Number Concepts and Operations in the Middle Grades.*** P. 141-161. Reston, The National Council Of Teachers of Mathematics. 1988. (Vol 2).

VERGNAUD, Gérard. La Théorie Des Champs Conceptuels. In: ***Recherches en Didactique des Mathématiques***, Grenoble, La Pensée Sauvage, v.10, n. 23, p.133-170, 1990.

VERGNAUD, Gerard. Multiplicative Conceptual Field: What and Why? In: G.Harel e J.Confrey(Eds.) ***The development of multiplicative reasoning in the learning of Mathematics.*** Albany: State University of New York Press. Cap.02, p. 41-60. 1994.

ANEXOS

I – FREQÜÊNCIAS

Tabelas Simples

Tabela 01: Distribuição dos alunos por série – Escolas de Ensino Fundamental – Ijuí – RS - 2001

SERIE	Nº	%
5ª	272	50,0
8ª	272	50,0
Total	544	100,0

Fonte: Testes aplicados nas escolas de Ijuí – NEHRING, C.

Tabela 02: Distribuição dos alunos por grupo de enunciados – Escolas de Ensino Fundamental – Ijuí – RS - 2001

GRUPOS	Nº	%
1	32	5,9
2	32	5,9
3	32	5,9
4	32	5,9
5	32	5,9
6	32	5,9
7	32	5,9
8	32	5,9
9	32	5,9
10	32	5,9
11	32	5,9
12	32	5,9
13	32	5,9
14	32	5,9
15	32	5,9
16	32	5,9
17	32	5,9
Total	544	100,0

Fonte: Testes aplicados nas escolas de Ijuí – NEHRING, C.

Tabela 03: Distribuição dos alunos por tipo de registro no **enunciado 1** – Escolas de Ensino Fundamental – Ijuí – RS - 2001

ENUM1	Nº	%
OM	151	27,8
RM	149	27,4
DP	92	16,9
DPI	63	11,6
RAP	41	7,5
OAP	12	2,2
NC1	10	1,8
API	9	1,7
NC4	9	1,7
NC2	6	1,1
NC3	2	,4
Total	544	100,0

Tabela 04: Distribuição dos alunos por tipo de registro no **enunciado 2** – Escolas de Ensino Fundamental – Ijuí – RS - 2001

ENUM2	Nº	%	% Válido
RM	165	30,3	30,4
OM	138	25,4	25,4
DP	88	16,2	16,2
DPI	52	9,6	9,6
RAP	41	7,5	7,6
API	15	2,8	2,8
OAP	14	2,6	2,6
NC2	13	2,4	2,4
NC4	8	1,5	1,5
NC1	7	1,3	1,3
NC3	2	,4	,4
Subtotal	543	99,8	100,0
NR	1	,2	
Total	544	100,0	

Tabela 05: Distribuição dos alunos por tipo de registro no **enunciado 3** – Escolas de Ensino Fundamental – Ijuí – RS - 2001

ENUM3	Nº	%
RAP	132	24,3
OM	113	20,8
RM	93	17,1
DP	90	16,5
DPI	28	5,1
NC4	26	4,8
OAP	24	4,4
NC2	21	3,9
NC1	10	1,8
API	5	,9
NC3	2	,4
Total	544	100,0

Tabela 06: Distribuição dos alunos por tipo de registro no **enunciado 4** – Escolas de Ensino Fundamental – Ijuí – RS - 2001

ENUM4	Nº	%	% Válido
RAP	133	24,4	24,5
OM	119	21,9	21,9
RM	104	19,1	19,2
DP	89	16,4	16,4
DPI	27	5,0	5,0
OAP	20	3,7	3,7
NC1	13	2,4	2,4
NC4	13	2,4	2,4
NC2	11	2,0	2,0
NC5	7	1,3	1,3
API	5	,9	,9
NC3	2	,4	,4
Subtotal	543	99,8	100,0
NR	1	,2	
Total	544	100,0	

Tabela 07: Distribuição dos alunos por tipo de registro no enunciado 1 a 4 – Escolas de Ensino Fundamental
– Ijuí – RS – 2001

	ENUNCIADO 1		ENUNCIADO 2		ENUNCIADO 3		ENUNCIADO 4	
	Nº	%	Nº	% Válido	Nº	%	Nº	% Válido
OAP	12	2,2	14	2,6	24	4,4	20	3,7
RAP	41	7,5	41	7,6	132	24,3	133	24,5
OM	151	27,8	138	25,4	113	20,8	119	21,9
RM	149	27,4	165	30,4	93	17,1	104	19,2
API	9	1,7	15	2,8	5	,9	5	,9
DP	92	16,9	88	16,2	90	16,5	89	16,4
DPI	63	11,6	52	9,6	28	5,1	27	5,0
NC1	10	1,8	7	1,3	10	1,8	13	2,4
NC2	6	1,1	13	2,4	21	3,9	11	2,0
NC3	2	,4	2	,4	2	,4	2	,4
NC4	9	1,7	8	1,5	26	4,8	13	2,4
NC5							7	1,3
Total	544	100,0	543	100,0	544	100,0	543	100,0

Tabela 08: Distribuição dos alunos por série e registro dado pelo aluno ao enunciado conforme o grupo de enunciados (% coluna) – Escolas de Ensino Fundamental – Ijuí – RS – 2001

REGISTRO	SERIE							
	ENUNCIADO1		ENUNCIADO2		ENUNCIADO3		ENUNCIADO4	
	5ª série	8ª série	5ª série	8ª série	5ª série	8ª série	5ª série	8ª série
OAP	12		14		18	6	12	8
	4,4%		5,1%		6,6%	2,2%	4,4%	3,0%
RAP	30	11	30	11	76	56	85	48
	11,0%	4,0%	11,0%	4,1%	27,9%	20,6%	31,3%	17,7%
OM	72	79	65	73	51	62	56	63
	26,5%	29,0%	23,9%	26,9%	18,8%	22,8%	20,6%	23,2%
RM	34	115	46	119	18	75	24	80
	12,5%	42,3%	16,9%	43,9%	6,6%	27,6%	8,8%	29,5%
API	1	8	3	12		5		5
	,4%	2,9%	1,1%	4,4%		1,8%		1,8%
DP	63	29	63	25	56	34	56	33
	23,2%	10,7%	23,2%	9,2%	20,6%	12,5%	20,6%	12,2%
DPI	43	20	33	19	16	12	15	12
	15,8%	7,4%	12,1%	7,0%	5,9%	4,4%	5,5%	4,4%
NC1	6	4	5	2	7	3	6	7
	2,2%	1,5%	1,8%	,7%	2,6%	1,1%	2,2%	2,6%
NC2	5	1	8	5	16	5	6	5
	1,8%	,4%	2,9%	1,8%	5,9%	1,8%	2,2%	1,8%
NC3	2		2		2		2	
	,7%		,7%		,7%		,7%	
NC4	4	5	3	5	12	14	3	10
	1,5%	1,8%	1,1%	1,8%	4,4%	5,1%	1,1%	3,7%
NC5							7	
							2,6%	
Total	272	272	272	271	272	272	272	271
	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Fonte: Testes aplicados nas escolas de Ijuí – NEHRING, C.

Tabela 09: Distribuição dos alunos por série e resultado conforme o grupo de enunciados (% coluna) – Escolas de Ensino Fundamental – Ijuí – RS – 2001

Resultados	SERIE		Total
	5ª série	8ª série	
Insuficiente	184	116	300
	67,6%	42,6%	55,1%
Suficiente	88	156	244
	32,4%	57,4%	44,9%
Total	272	272	544
	100,0%	100,0%	100,0%

O índice suficiente considera os registros de OM, RM e API.
O índice insuficiente considera os registros de OAP, RAP, DP, NC1, NC2, NC3, NC4, NC5.

Avaliação da distribuição de cada grupo por tipo de registro

Tabela 10: Distribuição dos alunos por grupo de enunciados e série segundo o tipo de registro (% linha) no enunciado 1, por grupo e série – Escolas de Ensino Fundamental – Ijuí – RS - 2001

GRUPCOD	**ENUNCIADO 1**											Total
	OAP	RAP	OM	RM	API	DP	DPI	NC1	NC2	NC3	NC4	
Grupo 1 - 5ª	6,3%	25,0%	12,5%	12,5%		43,8%						100,0%
Grupo 1 - 8ª			6,3%	37,5%		31,3%	25,0%					100,0%
Grupo 2 - 5ª		25,0%	6,3%	6,3%		31,3%	18,8%	6,3%		6,3%		100,0%
Grupo 2 - 8ª		6,3%	18,8%	43,8%		6,3%	18,8%				6,3%	100,0%
Grupo 3 - 5ª	6,3%	31,3%	6,3%	6,3%		18,8%	25,0%		6,3%			100,0%
Grupo 3 - 8ª		12,5%	6,3%	56,3%	12,5%	6,3%	6,3%					100,0%
Grupo 4 - 5ª	6,3%	18,8%	37,5%	12,5%		6,3%	18,8%					100,0%
Grupo 4 - 8ª			37,5%	43,8%		18,8%						100,0%
Grupo 5 - 5ª	12,5%	6,3%	25,0%	6,3%		12,5%	37,5%					100,0%
Grupo 5 - 8ª			25,0%	43,8%		18,8%	12,5%					100,0%
Grupo 6 - 5ª	6,3%	12,5%	18,8%	6,3%		25,0%	31,3%					100,0%
Grupo 6 - 8ª		6,3%	31,3%	37,5%		6,3%	12,5%	6,3%				100,0%
Grupo 7 - 5ª	6,3%	12,5%	31,3%	6,3%		31,3%	6,3%		6,3%			100,0%
Grupo 7 - 8ª		12,5%	31,3%	25,0%	18,8%	12,5%						100,0%
Grupo 8 - 5ª	6,3%		25,0%	6,3%		25,0%	37,5%					100,0%
Grupo 8 - 8ª		6,3%	31,3%	43,8%			12,5%				6,3%	100,0%
Grupo 9 - 5ª			31,3%			50,0%	12,5%			6,3%		100,0%
Grupo 9 - 8ª		6,3%	50,0%	12,5%		12,5%	18,8%					100,0%
Grupo 10 - 5ª	6,3%	6,3%	25,0%	18,8%	6,3%	25,0%	6,3%				6,3%	100,0%
Grupo 10 - 8ª		6,3%	37,5%	31,3%		25,0%						100,0%
Grupo 11 - 5ª	12,5%	6,3%	25,0%	6,3%		31,3%	12,5%				6,3%	100,0%
Grupo 11 - 8ª		12,5%	37,5%	18,8%		12,5%		6,3%			12,5%	100,0%
Grupo 12 - 5ª			56,3%	25,0%		6,3%	12,5%					100,0%
Grupo 12 - 8ª			37,5%	62,5%								100,0%
Grupo 13 - 5ª		18,8%	31,3%			31,3%		18,8%				100,0%
Grupo 13 - 8ª			12,5%	56,3%	12,5%	6,3%		6,3%			6,3%	100,0%
Grupo 14 - 5ª	6,3%	6,3%	37,5%	6,3%		12,5%	25,0%	6,3%				100,0%
Grupo 14 - 8ª			37,5%	50,0%				6,3%	6,3%			100,0%
Grupo 15 - 5ª		12,5%	25,0%	25,0%		18,8%			18,8%			100,0%
Grupo 15 - 8ª			37,5%	50,0%			12,5%					100,0%
Grupo 16 - 5ª		6,3%	31,3%	37,5%		6,3%	12,5%				6,3%	100,0%
Grupo 16 - 8ª			18,8%	62,5%	6,3%	12,5%						100,0%
Grupo 17 - 5ª			25,0%	31,3%		18,8%	12,5%	6,3%			6,3%	100,0%
Grupo 17 - 8ª			37,5%	43,8%		12,5%	6,3%					100,0%

Fonte: Testes aplicados nas escolas de Ijuí – NEHRING, C.

Tabela 11: Distribuição dos alunos por grupo de enunciados e série segundo o tipo de registro (% linha) no enunciado 2, por grupo e série – Escolas de Ensino Fundamental – Ijuí – RS - 2001

GRUPCOD	ENUNCIADO 2										Total
	RAP	OM	RM	API	DP	DPI	NC1	NC2	NC3	NC4	
Grupo 1 - 5ª	25,0%	12,5%	18,8%		37,5%						100,0%
Grupo 1 - 8ª	6,3%	6,3%	37,5%		25,0%	18,8%	6,3%				100,0%
Grupo 2 - 5ª	25,0%	18,8%	12,5%		12,5%	18,8%	6,3%		6,3%		100,0%
Grupo 2 - 8ª	12,5%	18,8%	50,0%			18,8%					100,0%
Grupo 3 - 5ª	25,0%	6,3%	18,8%		18,8%	12,5%		6,3%			100,0%
Grupo 3 - 8ª	12,5%	12,5%	56,3%	12,5%		6,3%					100,0%
Grupo 4 - 5ª	37,5%	25,0%			6,3%	25,0%		6,3%			100,0%
Grupo 4 - 8ª		37,5%	50,0%		12,5%						100,0%
Grupo 5 - 5ª		25,0%			25,0%	37,5%					100,0%
Grupo 5 - 8ª		25,0%	50,0%		6,3%	18,8%					100,0%
Grupo 6 - 5ª	12,5%	12,5%	6,3%		31,3%	31,3%					100,0%
Grupo 6 - 8ª	6,3%	31,3%	37,5%		12,5%	12,5%					100,0%
Grupo 7 - 5ª	12,5%	31,3%	12,5%		18,8%	12,5%					100,0%
Grupo 7 - 8ª		31,3%	31,3%	18,8%	18,8%						100,0%
Grupo 8 - 5ª		31,3%	6,3%		37,5%	25,0%					100,0%
Grupo 8 - 8ª		25,0%	62,5%			6,3%		6,3%			100,0%
Grupo 9 - 5ª		31,3%			43,8%	12,5%	6,3%		6,3%		100,0%
Grupo 9 - 8ª	6,3%	56,3%	12,5%		6,3%	18,8%					100,0%
Grupo 10 - 5ª	12,5%	31,3%	31,3%		25,0%						100,0%
Grupo 10 - 8ª	6,3%	37,5%	31,3%		25,0%						100,0%
Grupo 11 - 5ª	12,5%		18,8%	6,3%	37,5%			6,3%			100,0%
Grupo 11 - 8ª	18,8%	31,3%	18,8%	6,3%	12,5%			6,3%		6,3%	100,0%
Grupo 12 - 5ª	6,3%	56,3%	25,0%		6,3%	6,3%					100,0%
Grupo 12 - 8ª		37,5%	62,5%								100,0%
Grupo 13 - 5ª	6,3%	25,0%	18,8%		31,3%		6,3%	6,3%			100,0%
Grupo 13 - 8ª		12,5%	68,8%	12,5%			6,3%				100,0%
Grupo 14 - 5ª		25,0%	25,0%		12,5%	6,3%	6,3%	12,5%			100,0%
Grupo 14 - 8ª		13,3%	40,0%	6,7%	6,7%			20,0%		13,3%	100,0%
Grupo 15 - 5ª		25,0%	37,5%		25,0%			12,5%			100,0%
Grupo 15 - 8ª		37,5%	37,5%	6,3%	6,3%	12,5%					100,0%
Grupo 16 - 5ª	6,3%	31,3%	31,3%		12,5%	12,5%				6,3%	100,0%
Grupo 16 - 8ª		25,0%	50,0%	6,3%	12,5%					6,3%	100,0%
Grupo 17 - 5ª	6,3%	18,8%	25,0%	12,5%	12,5%	6,3%	6,3%			12,5%	100,0%
Grupo 17 - 8ª		18,8%	50,0%	6,3%	12,5%	6,3%				6,3%	100,0%

Fonte: Testes aplicados nas escolas de Ijuí – NEHRING, C.

Tabela 12: Distribuição dos alunos por grupo de enunciados e série segundo o tipo de registro (% linha) no enunciado 3, por grupo e série – Escolas de Ensino Fundamental – Ijuí – RS - 2001

GRUPCOD	**ENUNCIADO 3**											Total
	OAP	RAP	OM	RM	API	DP	DPI	NC1	NC2	NC3	NC4	
Grupo 1 - 5ª	12,5%	50,0%		6,3%		6,3%		12,5%	12,5%			100,0%
Grupo 1 - 8ª	6,3%	25,0%	6,3%	31,3%		25,0%	6,3%					100,0%
Grupo 2 - 5ª		31,3%	6,3%	6,3%		37,5%	6,3%			6,3%	6,3%	100,0%
Grupo 2 - 8ª		12,5%	18,8%	50,0%		6,3%	12,5%					100,0%
Grupo 3 - 5ª	12,5%	43,8%	6,3%	6,3%		31,3%						100,0%
Grupo 3 - 8ª	6,3%	6,3%	6,3%	50,0%	12,5%	12,5%	6,3%					100,0%
Grupo 4 - 5ª	6,3%	25,0%	25,0%			12,5%	25,0%				6,3%	100,0%
Grupo 4 - 8ª		12,5%	25,0%	31,3%		12,5%			12,5%		6,3%	100,0%
Grupo 5 - 5ª	12,5%	18,8%	25,0%	6,3%		18,8%	18,8%					100,0%
Grupo 5 - 8ª		31,3%	25,0%	12,5%		18,8%	12,5%					100,0%
Grupo 6 - 5ª	6,3%	62,5%	12,5%	6,3%			12,5%					100,0%
Grupo 6 - 8ª	6,3%	31,3%	37,5%	12,5%			6,3%				6,3%	100,0%
Grupo 7 - 5ª	6,3%	37,5%	18,8%			12,5%	12,5%		12,5%			100,0%
Grupo 7 - 8ª		43,8%	31,3%	6,3%	6,3%	6,3%					6,3%	100,0%
Grupo 8 - 5ª	6,3%	25,0%	25,0%	6,3%		12,5%	6,3%		18,8%			100,0%
Grupo 8 - 8ª			31,3%	50,0%		6,3%	6,3%				6,3%	100,0%
Grupo 9 - 5ª	6,3%	31,3%	31,3%			25,0%				6,3%		100,0%
Grupo 9 - 8ª	6,3%	37,5%	37,5%	6,3%			6,3%				6,3%	100,0%
Grupo 10 - 5ª	12,5%	43,8%	12,5%	6,3%		12,5%					12,5%	100,0%
Grupo 10 - 8ª		12,5%	31,3%	18,8%		31,3%					6,3%	100,0%
Grupo 11 - 5ª	18,8%	25,0%	6,3%			31,3%		6,3%			12,5%	100,0%
Grupo 11 - 8ª	6,3%	18,8%	6,3%	18,8%	6,3%	25,0%		12,5%			6,3%	100,0%
Grupo 12 - 5ª		12,5%	50,0%	18,8%		6,3%	6,3%		6,3%			100,0%
Grupo 12 - 8ª		6,3%	43,8%	31,3%		12,5%	6,3%					100,0%
Grupo 13 - 5ª		12,5%	18,8%	6,3%		31,3%		6,3%	25,0%			100,0%
Grupo 13 - 8ª		25,0%	12,5%	37,5%				6,3%			18,8%	100,0%
Grupo 14 - 5ª	12,5%	6,3%	18,8%			25,0%	6,3%	6,3%	12,5%		12,5%	100,0%
Grupo 14 - 8ª		12,5%		31,3%		25,0%			18,8%		12,5%	100,0%
Grupo 15 - 5ª		12,5%	25,0%	12,5%		25,0%		12,5%	6,3%		6,3%	100,0%
Grupo 15 - 8ª	6,3%	6,3%	31,3%	31,3%		18,8%	6,3%					100,0%
Grupo 16 - 5ª		31,3%	31,3%	12,5%		18,8%					6,3%	100,0%
Grupo 16 - 8ª		43,8%	18,8%	18,8%	6,3%						12,5%	100,0%
Grupo 17 - 5ª		6,3%	6,3%	18,8%		43,8%	6,3%		6,3%		12,5%	100,0%
Grupo 17 - 8ª		25,0%	25,0%	31,3%		12,5%	6,3%					100,0%

Fonte: Testes aplicados nas escolas de Ijuí – NEHRING, C.

Tabela 13: Distribuição dos alunos por grupo de enunciados e série segundo o tipo de registro (% linha) no enunciado 4, por grupo e série – Escolas de Ensino Fundamental – Ijuí – RS - 2001

GRUPCOD	ENUNCIADO 4												Total
	OAP	RAP	OM	RM	API	DP	DPI	NC1	NC2	NC3	NC4	NC5	
Grupo 1 - 5ª	6,3%	62,5%		6,3%		18,8%		6,3%					100,0%
Grupo 1 - 8ª	6,3%	25,0%	12,5%	31,3%		18,8%	6,3%						100,0%
Grupo 2 - 5ª	6,3%	37,5%	12,5%	6,3%		25,0%				6,3%	6,3%		100,0%
Grupo 2 - 8ª		12,5%	18,8%	50,0%		6,3%	12,5%						100,0%
Grupo 3 - 5ª	6,3%	43,8%	6,3%	6,3%		37,5%							100,0%
Grupo 3 - 8ª	6,3%	18,8%	6,3%	43,8%	12,5%	6,3%	6,3%						100,0%
Grupo 4 - 5ª		31,3%	25,0%	6,3%		12,5%	25,0%						100,0%
Grupo 4 - 8ª		12,5%	25,0%	31,3%		18,8%					12,5%		100,0%
Grupo 5 - 5ª	12,5%	18,8%	25,0%	6,3%		18,8%	18,8%						100,0%
Grupo 5 - 8ª		31,3%	25,0%	18,8%		12,5%	12,5%						100,0%
Grupo 6 - 5ª	12,5%	43,8%	12,5%	6,3%		12,5%	12,5%						100,0%
Grupo 6 - 8ª	6,3%	31,3%	37,5%	12,5%			6,3%				6,3%		100,0%
Grupo 7 - 5ª	6,3%	37,5%	31,3%	6,3%		6,3%	12,5%						100,0%
Grupo 7 - 8ª		50,0%	25,0%	12,5%	6,3%	6,3%							100,0%
Grupo 8 - 5ª		37,5%	25,0%	6,3%		12,5%	6,3%					12,5%	100,0%
Grupo 8 - 8ª			31,3%	50,0%		6,3%	6,3%				6,3%		100,0%
Grupo 9 - 5ª		25,0%	31,3%			25,0%		6,3%		6,3%		6,3%	100,0%
Grupo 9 - 8ª		25,0%	37,5%	12,5%		6,3%	6,3%		12,5%				100,0%
Grupo 10 - 5ª	12,5%	43,8%	12,5%	12,5%		18,8%							100,0%
Grupo 10 - 8ª	6,3%	18,8%	31,3%	6,3%		18,8%		12,5%			6,3%		100,0%
Grupo 11 - 5ª	6,3%	37,5%	18,8%			18,8%					6,3%	12,5%	100,0%
Grupo 11 - 8ª	12,5%	12,5%	6,3%	18,8%	6,3%	18,8%		12,5%	12,5%				100,0%
Grupo 12 - 5ª		12,5%	50,0%	12,5%		6,3%	6,3%		6,3%			6,3%	100,0%
Grupo 12 - 8ª		6,3%	43,8%	31,3%		12,5%	6,3%						100,0%
Grupo 13 - 5ª		18,8%	18,8%	6,3%		31,3%		6,3%	18,8%				100,0%
Grupo 13 - 8ª		6,3%	12,5%	56,3%		6,3%		6,3%			12,5%		100,0%
Grupo 14 - 5ª	6,3%	6,3%	37,5%	12,5%		31,3%	6,3%						100,0%
Grupo 14 - 8ª		12,5%	18,8%	37,5%		12,5%			6,3%		12,5%		100,0%
Grupo 15 - 5ª		18,8%	18,8%	12,5%		25,0%		12,5%	6,3%			6,3%	100,0%
Grupo 15 - 8ª	12,5%		31,3%	31,3%		18,8%	6,3%						100,0%
Grupo 16 - 5ª		37,5%	25,0%	18,8%		12,5%			6,3%				100,0%
Grupo 16 - 8ª		31,3%	18,8%	18,8%	6,3%	18,8%					6,3%		100,0%
Grupo 17 - 5ª		18,8%		25,0%		37,5%	6,3%	6,3%			6,3%		100,0%
Grupo 17 - 8ª		6,7%	13,3%	40,0%		20,0%	6,7%	13,3%					100,0%

Fonte: Testes aplicados nas escolas de Ijuí – NEHRING, C.

Avaliação da distribuição em cada grupo, por tipo de registro mais utilizado.

Tabela 14: Distribuição dos alunos por grupo de enunciados e série segundo o tipo de registro (% linha - máximo na linha) no enunciado, por grupo e série – Escolas de Ensino Fundamental – Ijuí – RS - 2001

Grupo e Série	ENUNCIADO 1					ENUNCIADO 2					ENUNCIADO 3					ENUNCIADO 4			
	RAP	OM	RM	DP	DPI	RAP	OM	RM	DP	DPI	RAP	OM	RM	DP	DPI	RAP	OM	RM	DP
Grupo 1 - 5ª				43,8					37,5		50,0					62,5			
Grupo 1 - 8ª			37,5					37,5					31,3					31,3	
Grupo 2 - 5ª				31,3		25,0								37,5		37,5			
Grupo 2 - 8ª			43,8					50,0					50,0					50,0	
Grupo 3 - 5ª	31,3					25,0					43,8					43,8			37,5
Grupo 3 - 8ª			56,3					56,3					50,0					43,8	
Grupo 4 - 5ª		37,5				37,5					25,0	25,0			25,0	31,3			
Grupo 4 - 8ª			43,8					50,0					31,3					31,3	
Grupo 5 - 5ª					37,5					37,5		25,0					25,0		
Grupo 5 - 8ª			43,8					50,0			31,3					31,3			
Grupo 6 - 5ª					31,3				31,3	31,3	62,5					43,8			
Grupo 6 - 8ª			37,5					37,5				37,5					37,5		
Grupo 7 - 5ª		31,3		31,3			31,3				37,5					37,5			
Grupo 7 - 8ª		31,3					31,3	31,3			43,8					50,0			
Grupo 8 - 5ª					37,5				37,5		25,0	25,0				37,5			
Grupo 8 - 8ª			43,8					62,5					50,0					50,0	
Grupo 9 - 5ª				50,0					43,8		31,3	31,3					31,3		
Grupo 9 - 8ª		50,0					56,3				37,5	37,5					37,5		
Grupo 10 - 5ª		25,0		25,0			31,3	31,3			43,8					43,8			
Grupo 10 - 8ª		37,5					37,5					31,3		31,3			31,3		
Grupo 11 - 5ª				31,3					37,5					31,3		37,5			
Grupo 11 - 8ª		37,5					31,3							25,0				18,8	18,8
Grupo 12 - 5ª		56,3					56,3					50,0					50,0		

Grupo 12 - 8ª		37,5	62,5					62,5				43,8					43,8		
Grupo 13 - 5ª		31,3		31,3					31,3					31,3					31,3
Grupo 13 - 8ª			56,3					68,8					37,5					56,3	
Grupo 14 - 5ª		37,5					25,0	25,0						25,0			37,5		
Grupo 14 - 8ª			50,0					40,0					31,3					37,5	
Grupo 15 - 5ª		25,0	25,0					37,5						25,0					25,0
Grupo 15 - 8ª			50,0				37,5	37,5				31,3	31,3				31,3	31,3	
Grupo 16 - 5ª			37,5				31,3	31,3			31,3	31,3				37,5			
Grupo 16 - 8ª			62,5					50,0			43,8					31,3			
Grupo 17 - 5ª			31,3					25,0						43,8					37,5
Grupo 17 - 8ª			43,8					50,0					31,3					40,0	
Total		27,8	27,4					30,4			24,3					24,5			

Fonte: Testes aplicados nas escolas de Ijuí – NEHRING, C.

Porcentagem no Processo de Conversão

Tabela 15: Porcentagem no processo de conversão considerando o grupo e a série do **ENUNCIADO 1**

GRUPCOD	**CONVERSÃO**	**NÃO CONVERSÃO**	**TOTAL**
Grupo 1 - 5ª	25,0%	75,0%	100%
Grupo 1 – 8ª	43,8%	56,2%	100%
Grupo 2 - 5ª	12,6%	87,4	100%
Grupo 2 – 8ª	62,6	37,4	100%
Grupo 3 - 5ª	12,6	87,4	100%
Grupo 3 – 8ª	75,1%	24,9	100%
Grupo 4 – 5ª	50,0	50,0	100%
Grupo 4 – 8ª	81,3	18,7	100%
Grupo 5 - 5ª	31,3	68,7	100%
Grupo 5 – 8ª	68,8	31,2	100%
Grupo 6 - 5ª	25,1	74,9	100%
Grupo 6 – 8ª	68,8	31,2	100%
Grupo 7 - 5ª	37,6	62,4	100%
Grupo 7 – 8ª	75,1	24,9	100%
Grupo 8 - 5ª	31,3	68,7	100%
Grupo 8 – 8ª	75,1	24,9	100%
Grupo 9 – 5ª	31,3	68,7	100%
Grupo 9 – 8ª	62,5	37,5	100%
Grupo 10 – 5ª	50,1	49,9	100%
Grupo 10– 8ª	68,8	31,2	100%
Grupo 11 – 5ª	31,3	68,7	100%
Grupo 11 – 8ª	56,3	43,7	100%
Grupo 12– 5ª	**81,3**	18,7	100%
Grupo 12 – 8ª	**100**	0,0	100%
Grupo 13 – 5ª	31,3	68,7	100%
Grupo 13 – 8ª	81,3	18,7	100%
Grupo 14 – 5ª	43,8	56,2	100%
Grupo 14 – 8ª	87,5	12,5	100%
Grupo 15 – 5ª	50,0	50,0	100%
Grupo 15 – 8ª	87,5	12,5	100%
Grupo 16 – 5ª	69,0	31,0	100%
Grupo 16 – 8ª	87,6	13,0	100%
Grupo 17 – 5ª	56,3	43,7	100%
Grupo 17 – 8ª	81,3	18,7	100%

Tabela 16: Porcentagem no processo de conversão considerando o grupo e a série do **ENUNCIADO 2**

GRUPCOD	**CONVERSÃO**	**NÃO CONVERSÃO**	**TOTAL**
Grupo 1 - 5ª	31,3%	68,7	100%
Grupo 1 – 8ª	43,8	56,2	100%
Grupo 2 - 5ª	21,3	78,7	100%
Grupo 2 – 8ª	68,8	31,2	100%
Grupo 3 - 5ª	25,1	74,9	100%
Grupo 3 – 8ª	81,3	18,7	100%
Grupo 4 – 5ª	25,0	75,0	100%
Grupo 4 – 8ª	87,5	12,5	100%
Grupo 5 - 5ª	25,0	75,0	100%
Grupo 5 – 8ª	75,0	25,0	100%
Grupo 6 - 5ª	18,8	81,2	100%
Grupo 6 – 8ª	68,3	31,7	100%
Grupo 7 - 5ª	43,8	56,2	100%
Grupo 7 – 8ª	81,4	18,6	100%
Grupo 8 - 5ª	37,6	62,4	100%
Grupo 8 – 8ª	87,5	12,5	100%
Grupo 9 – 5ª	31,3	68,7	100%
Grupo 9 – 8ª	68,8	31,2	100%
Grupo 10 – 5ª	62,6	37,4	100%
Grupo 10– 8ª	68,8	31,2	100%
Grupo 11 – 5ª	25,1	74,9	100%
Grupo 11 – 8ª	56,4	43,6	100%
Grupo 12– 5ª	**81,3**	18,7	100%
Grupo 12 – 8ª	**100**	0,0	100%
Grupo 13 – 5ª	43,8	56,2	100%
Grupo 13 – 8ª	93,8	6,2	100%
Grupo 14 – 5ª	50,0	50,0	100%
Grupo 14 – 8ª	60,0	40,0	100%
Grupo 15 – 5ª	62,5	37,5	100%
Grupo 15 – 8ª	81,3	18,7	100%
Grupo 16 – 5ª	62,6	37,4	100%
Grupo 16 – 8ª	81,3	18,7	100%
Grupo 17 – 5ª	56,3	43,7	100%
Grupo 17 – 8ª	75,1	24,9	100%

Tabela 17: Porcentagem no processo de conversão considerando o grupo e a série do **ENUNCIADO 3**

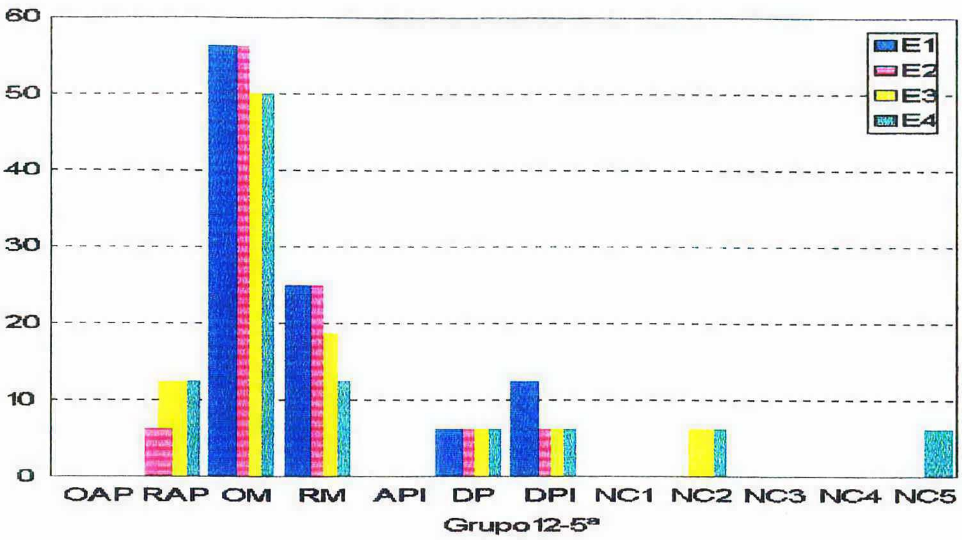
GRUPCOD	**CONVERSÃO**	**NÃO CONVERSÃO**	**TOTAL**
Grupo 1 - 5ª	6,3	93,7	100%
Grupo 1 – 8ª	37,6	62,4	100%
Grupo 2 - 5ª	12,6	87,4	100%
Grupo 2 – 8ª	68,8	31,2	100%
Grupo 3 - 5ª	12,6	87,4	100%
Grupo 3 – 8ª	68,8	31,2	100%
Grupo 4 – 5ª	25,0	75,0	100%
Grupo 4 – 8ª	56,3	43,7	100%
Grupo 5 - 5ª	31,3	68,7	100%
Grupo 5 – 8ª	37,5	62,5	100%
Grupo 6 - 5ª	18,8	81,2	100%
Grupo 6 – 8ª	50,0	50,0	100%
Grupo 7 - 5ª	18,8	81,2	100%
Grupo 7 – 8ª	43,9	56,1	100%
Grupo 8 - 5ª	31,3	68,7	100%
Grupo 8 – 8ª	81,3	18,7	100%
Grupo 9 – 5ª	31,3	68,7	100%
Grupo 9 – 8ª	43,8	56,2	100%
Grupo 10 – 5ª	18,8	81,2	100%
Grupo 10– 8ª	50,1	49,9	100%
Grupo 11 – 5ª	6,3	93,7	100%
Grupo 11 – 8ª	31,4	68,6	100%
Grupo 12– 5ª	**68,8**	31,2	100%
Grupo 12 – 8ª	**75,1**	24,9	100%
Grupo 13 – 5ª	25,1	74,9	100%
Grupo 13 – 8ª	50,0	50,0	100%
Grupo 14 – 5ª	18,8	81,2	100%
Grupo 14 – 8ª	31,3	68,7	100%
Grupo 15 – 5ª	37,5	62,5	100%
Grupo 15 – 8ª	62,6	37,4	100%
Grupo 16 – 5ª	43,8	56,2	100%
Grupo 16 – 8ª	43,9	56,1	100%
Grupo 17 – 5ª	25,1	74,9	100%
Grupo 17 – 8ª	56,3	43,7	100%

Tabela 18: Porcentagem no processo de conversão considerando o grupo e a série do **ENUNCIADO 4**

GRUPCOD	**CONVERSÃO**	**NÃO CONVERSÃO**	**TOTAL**
Grupo 1 - 5ª	6,3	93,7	100%
Grupo 1 – 8ª	43,8	56,2	100%
Grupo 2 - 5ª	18,8	81,2	100%
Grupo 2 – 8ª	68,8	31,2	100%
Grupo 3 - 5ª	12,6	87,4	100%
Grupo 3 – 8ª	62,6	37,4	100%
Grupo 4 – 5ª	31,3	68,7	100%
Grupo 4 – 8ª	56,3	43,7	100%
Grupo 5 - 5ª	31,3	68,7	100%
Grupo 5 – 8ª	43,8	56,2	100%
Grupo 6 - 5ª	18,8	81,2	100%
Grupo 6 – 8ª	50,0	50,0	100%
Grupo 7 - 5ª	37,6	62,4	100%
Grupo 7 – 8ª	43,8	56,2	100%
Grupo 8 - 5ª	31,3	68,7	100%
Grupo 8 – 8ª	**81,3**	18,7	100%
Grupo 9 – 5ª	31,3	68,7	100%
Grupo 9 – 8ª	50,0	50,0	100%
Grupo 10 – 5ª	25,0	75,0	100%
Grupo 10– 8ª	37,6	62,4	100%
Grupo 11 – 5ª	18,8	81,2	100%
Grupo 11 – 8ª	31,4	68,6	100%
Grupo 12– 5ª	**62,5**	37,5	100%
Grupo 12 – 8ª	**75,1**	24,9	100%
Grupo 13 – 5ª	25,1	74,9	100%
Grupo 13 – 8ª	68,8	31,2	100%
Grupo 14 – 5ª	50,0	50,0	100%
Grupo 14 – 8ª	56,3	43,7	100%
Grupo 15 – 5ª	31,3	68,7	100%
Grupo 15 – 8ª	62,6	37,4	100%
Grupo 16 – 5ª	43,8	56,2	100%
Grupo 16 – 8ª	43,9	56,1	100%
Grupo 17 – 5ª	25,0	75,0	100%
Grupo 17 – 8ª	53,3	46,7	100%

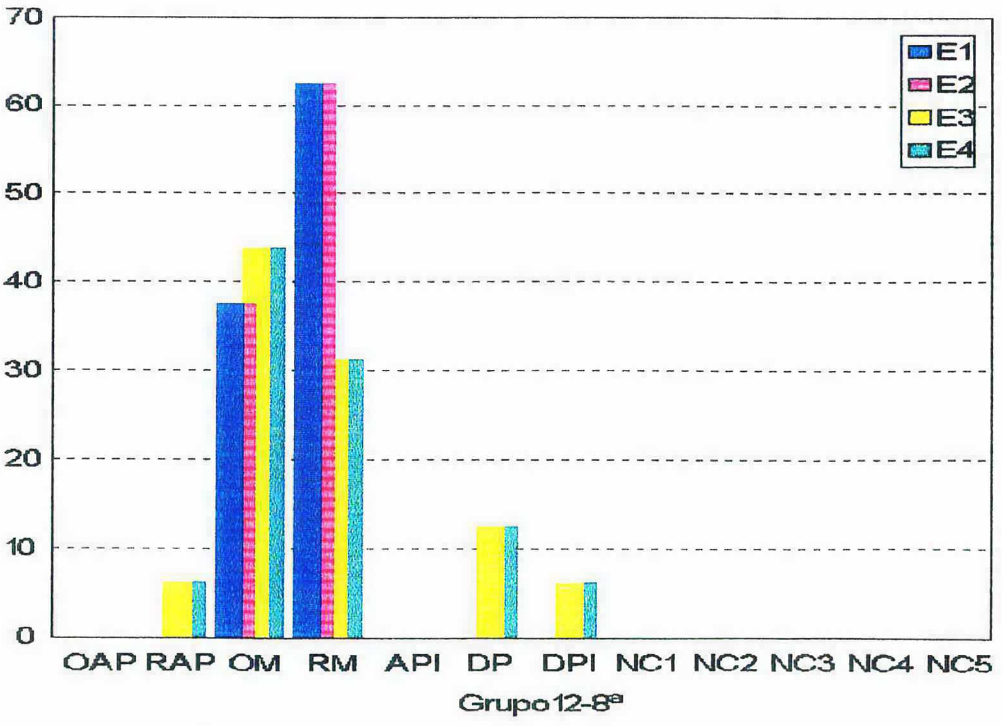
Comparação dos registros por Enunciado do Grupo12

Figura 01: Comparação dos registros por Enunciado (%) do Grupo 12 da 5ª série. Escolas de Ensino Fundamental – Ijuí – RS – 2001



Fonte: Testes aplicados nas escolas de Ijuí – NEHRING, C.

Figura 02: Comparação dos registros por Enunciado (%) do Grupo 12 da 8ª série. Escolas de Ensino Fundamental – Ijuí – RS – 2001



Fonte: Testes aplicados nas escolas de Ijuí – NEHRING, C.