Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica

O Teorema Abstrato de Segal e Aplicações à Equações de Ondas Não-Lineares

Milton Kist

Orientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Florianópolis

Fevereiro de 2001

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

O Teorema Abstrato de Segal e Aplicações à Equações de Ondas Não-Lineares

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais.

Milton Kist

Florianópolis

Fevereiro de 2001

O Teorema Abstrato de Segal e Aplicações à Equações de Ondas Não-Lineares

por

Milton Kist

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre",
Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica.

Celso Melchíades Dória
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (UFSC-Orientador)

Vanilde Bisognin

Prof. Dra. Vanilde Bisognin (UNIFRA)

Eleni Bisognin

Prof. Dra. Eleni Bisognin (UNIFRA)

Prof. Dr. Joel Santos Souza (UFSC)

Florianópolis, fevereiro de 2001.

A Deus

À minha noiva, Ester Fank

À minha Mãe, Lucena Claudina Kist

Ao meu Pai, Canísio Kist

Agradecimentos

Agradeço à minha família, em especial ao meu irmão e colega do curso colegial, graduação e mestrado Airton pelo incentivo dado em todos os momentos.

Ao Rafael pelo qual tenho grande carinho.

Aos meus colegas de Graduação e Pós-Graduação Airton, Anderson, Andresa, Christian, Claiton, Daniel, Danilo, Dirceu, Fábio, Graziela, Janice, João Luiz, Juliano, Maria Inez, Patrícia, Paulo e Rafael pela amizade e agradável companhia.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) por um ano de suporte financeiro.

Ao professor Joel Santos Souza, o qual sempre me dispensou apoio e incentivo durante a graduação e pós-graduação, juntamente com o qual fiz meu primeiro projeto de iniciação científica.

Às professoras Vanilde e Eleni Bisognin que se dispuseram a fazer parte da banca examinadora deste trabalho e pelas sugestões apresentadas.

Meu especial agradecimento ao meu orientador Ruy Coimbra Charão, pelas suas orientações, apoio e amizade.

Resumo

Neste trabalho estuda-se um teorema abstrato, devido a Irwin E. Segal, para uma equação de evolução abstrata de primeira ordem envolvendo um operador autoadjunto sobre um espaço de Hilbert e uma função não-linear definida nesse espaço. Com adequadas hipóteses, sobre o operador e a não linearidade, obtém-se a existência de uma única solução local para o problema de Cauchy associado. Com hipóteses um pouco mais fortes, se obtém a existência de uma única solução global. Aplicações são apresentadas para algumas equações de ondas não-lineares em domínios não limitados, a saber: Equação de Klein-Gordon, Equação de Seno-Gordon, e um Sistema Acoplado de Klein-Gordon.

Abstract

In this work we study an abstract theorem due to Irwin E. Segal for a first order evolution equation given by a self-adjoint operator in a Hilbert space and a non-linear function defined in this space. With suitable conditions on the operator and the non-linearity we obtain existence and uniqueness of local solutions for the associated Cauchy problem. Using stronger conditions on the operator and the non-linearity we show existence of global solutions. We present some applications for non-linear wave equations, in particular to the Klein-Gordon Equation, sine-Gordon Equation and a Coupled System of Klein-Gordon Equations.

Sumário

Introdução **1**

1 Espaços de Sobolev **6**

1.1 Definição e propriedades 6

1.2 Algumas Imersões de Sobolev 10

2 Equações de Evolução Abstratas Não-lineares **17**

2.1 Existência Local - Unicidade de Soluções 17

2.2 Existência Global 34

3 Aplicações **36**

3.1 Introdução 36

3.2 Equação de Klein-Gordon 38

3.2.1 Existência Local 40

3.2.2 Existência Global 48

3.3 Equação de Seno-Gordon 51

3.4 Sistema acoplado de Klein-Gordon 59

Apêndice **69**

Bibliografia **72**

Introdução

As equações de ondas não lineares são de grande interesse em física aplicada em especial no campo de Teoria Quântica. Semelhante a outros problemas não lineares que aparecem em Matemática, estas equações devem, em grande parte, serem tratadas individualmente em vista de que cada equação possui propriedades especiais. Na literatura se pode ver que com freqüência essas equações são tratadas separadamente. Desse modo, propriedades de existência , unicidade e dependência continua de soluções em relação aos dados iniciais, entre outras propriedades, dependem muitas vezes de aspectos especiais da equação que se estuda. Entretanto, estas equações, do tipo ondas, tem em comum determinados problemas básicos que aparecem em análise funcional não linear. Assim, é possível trabalhar esses modelos em um certo nível abstrato de maneira a propor uma única equação abstrata. De fato, um esquema abstrato esclarece quais propriedades das soluções são gerais e quais dependem de propriedades especiais da equação envolvida. O esquema abstrato que estudamos teve origem no trabalho sobre semigrupos não lineares desenvolvido por I. Segal [18] e posteriormente mais detalhado e compreendido, inclusive com diversas aplicações, no trabalho de M. Reed [13]. Um dos trabalhos pioneiros e inspiradores na área de equações diferenciais parciais não lineares, em especial de tipo ondas, teria sido o importante trabalho de Konrad Jörgens [7]. Importantes também são as contribuições de W.A.Strauss e J.L.Lions (ver [9], [8], [19]). Naturalmente, o nível de abstração aqui considerado é inferior ao do trabalho de I. Segal [18] porém, ainda é capaz de abranger um bom número de casos particulares. Claro que o nível de abstração aqui utilizado permite a obtenção de certas propriedades dos problemas mas, outras propriedades mais específicas as vezes dependem especialmente, por exemplo, do tipo de não linearidade envolvida (ver J.E.M.Rivera [15], [16]). Em um problema específico relacionado com uma equação diferencial parcial, por exemplo do tipo ondas, basicamente, se deseja informações sobre a existência global de soluções, a unicidade das mesmas sobre certas condições, sua regularidade, a dependência contínua dos dados iniciais e mesmo a propriedade de velocidade finita de propagação. Propriedades de decaimento no tempo também são estudadas (ver V.Komornik [6]). Ainda, eventualmente, se necessita de propriedades ditas de espalhamento (cf. V.Petkov [12]). Neste trabalho nos atemos apenas a estudar, em certo grau de abstração, existência local, global e unicidade de soluções.

Obviamente, existem muitos problemas importantes em aberto em ambos os níveis, abstrato e particular.

A seguir, mostramos como problemas abstratos surgem naturalmente a partir de um problema específico. Consideramos o seguinte Problema de Cauchy associado a equação não-linear de Klein-Gordon da Mecânica Relativística:

$$u_{tt}(x,t) - \triangle u(x,t) + m^2 u(x,t) = -g|u(x,t)|^{p-1}u(x,t) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x)$$

Observamos que apenas neste exemplo se pode ver que as propriedades da equação dependem muito da não -linearidade g(s) , isto é, dependem de p e do sinal de g(s). Também a dimensão n é muito importante. Propriedades válidas para uma certa equação numa dimensão podem não ser válidas em outra dimensão para a mesma equação.

Então, para considerar o problema (1) em um sentido geral ou abstrato reformulamos na forma de um sistema de primeira ordem como segue:

Seja $v(x,t) = u_t(x,t)$, então

$$v_t(x,t) - \triangle u(x,t) + m^2 u(x,t) = -g|u(x,t)|^{p-1}u(x,t) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{2}$$

$$u_t = v$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$v(x,0) = g(x)$$

Agora, para cada t, definimos as funções:

$$\begin{cases} \phi(t) = (u(x,t), v(x,t)) \\ J(\phi(t)) = (0, -g|u|^{p-1}u) \end{cases} \tag{3}$$

Então, podemos ver que (2) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \phi'(t) - \begin{pmatrix} 0 & I \\ \triangle - m^2 & 0 \end{pmatrix} \phi(t) = J(\phi(t)) \\ \phi(0) = (f(x), g(x)) \end{cases} \tag{4}$$

O operador $-\triangle + m^2$ é um operador autoadjunto e estritamente positivo em $L^2(\mathbb{R}^3)$ com domínio dado por

$$\{f \in L^2(\mathbb{R}^3) \ \ / \ \ (|\xi|^2 + m^2)\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$$

onde $\hat{f}$ indica a transformada de Fourier de uma função de $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Denotamos por B a única raiz quadrada positiva do operador autoadjunto $-\triangle + m^2$ obtido do cálculo funcional (cf. V.S.Sander [17]). Visto que B é estritamente positivo e fechado, $D(B)$ é um espaço de Hilbert com produto interno $(Bu, Bu)_{L^2(\mathbb{R}^3)}$. Assim, podemos definir o espaço de Hilbert $H = D(B) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ com o produto interno $((u,v),(u,v))_H = (Bu, Bu)_{L^2(\mathbb{R}^3)} + (u,u)_{L^2(\mathbb{R}^3)}$

Agora, seja

$$A = i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -B^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Então, tem-se que A é um operador simétrico em H com domínio $D(A) = D(B^2) \times D(B)$. Assim definimos para cada t o operador

$$W(t) = \begin{pmatrix} cos(tB) & B^{-1}sen(tB) \\ -Bsen(tB) & cos(tB) \end{pmatrix}$$

onde cada uma das entradas é definida pelo cálculo funcional (ver V.S.Sander [17]) para o operador B em $L^2(\mathbb{R}^3)$. Neste ponto, podemos calcular diretamente que $W(t)$ é um grupo a um parâmetro, fortemente contínuo, e que se $\psi_0 \in D(A)$ a derivada forte de $\psi(t) = W(t)\psi_0$ existe e é igual a $-iA\psi$. Assim denotando $W(t) = e^{-itA}$ podemos ver que $\frac{d}{dt}(W(t)\psi_0) = -iAW(t)\psi_0$. Isto é, $e^{-itA}\psi_0$ é solução de

$$\begin{cases} \psi' = -iA\psi \\ \psi(0) = \psi_0 \end{cases}.$$

$W(t)$ aplica $D(A)$ em $D(A)$, um corolário do Teorema de Stone (ver Pazy [11] e Reed/Simon [14]) diz que A é autoadjunto em $D(A)$ e gera $W(t) = e^{-itA}$.

O problema original (1) foi então reformulado. Devemos encontrar uma função $\phi : \mathbb{R} \to H$ que satisfaz:

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -iA\phi(t) + J(\phi(t))$$

$$\phi(0) = \phi_0 = (f, g)$$

onde o operador autoadjunto A é dado por (5) e J é dado por (3).

Assim, mostramos que (1) é realmente um caso especial de uma classe mais geral de problemas em espaços de Hilbert. Isto é, dado um operador autoadjunto em um espaço de Hilbert H, um vetor ϕ_0 em H e uma aplicação não-linear J de H em H, queremos saber como encontrar uma função $\phi : \mathbb{R} \to H$ que resolva o problema de valor inicial:

$$(6) \qquad \begin{cases} \phi'(t) = -iA\phi(t) + J(\phi(t)) \\ \phi(0) = \phi_0 \end{cases}$$

O problema abstrato acima é o assunto de principal interesse neste trabalho. Contudo, a motivação maior para estudar o problema abstrato é provar as propriedades clássicas (como existência e unicidade de soluções) de equações de ondas não-lineares.

Nas aplicações consideramos, em detalhes, modelos da Física-Matemática envolvendo equações diferenciais parciais não-lineares do tipo ondas, tais como as equações de Klein-Gordon e seno-Gordon, e as equações acopladas de Klein-Gordon.

Outras aplicações importantes, como por exemplo o Sistema Acoplado de Equações de Schrödinger e Klein-Gordon também podem ser estudadas via o Teorema Abstrato de Segal (Ver também o Sistema Acoplado de Equações de Dirac e Klein-Gordon em M. Reed [13]).

Finalmente, queremos mencionar um detalhe que enfatiza a importância Teorema Abstrato de Segal apresentado neste trabalho. Em geral, ao se estudar existência de soluções de equações diferenciais parciais de evolução não-lineares por métodos standard tipo Galerkin ou Semigrupos (ver J.L.Lions [8], A.Pazy [11], J.E.M.Rivera [15]) se obtém apenas apenas a existência de soluções fracas. Para se obter a existência de soluções fortes é preciso a realização de outras estimativas e/ou usar regularidade elíptica. Ao se aplicar o Teorema Abstrato de Segal à equações de ondas não-lineares já se obtém diretamente a existência de soluções fortes.

Este trabalho está organizado do seguinte modo: no primeiro capítulo apresentamos resultados básicos dentre eles algumas imersões particulares de Sobolev. No segundo capítulo aparecem os Teoremas abstratos de existência e unicidade local e global de soluções. No terceiro capítulo estudamos as aplicações à equações de ondas não-lineares. No apêndice apresentamos alguns resultados da Teoria de Semigrupos.

Capítulo 1

Espaços de Sobolev

1.1 Definição e propriedades

Definição 1.1.1 *Seja Ω um conjunto mensurável e $1 \leq p \leq \infty$; indicamos por $L^p(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\|f\|_p < \infty$ onde:*

$$\|f\|_p = [\int_\Omega |f(t)|^p \, dt]^{\frac{1}{p}}, \ se \ 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_\infty = supess_{t\in\Omega} |f(t)| = \inf\{C \in \mathbb{R}^+ \ / \ med\{t \in \Omega \ / \ |f(t)| > C\} = 0\}$$

$$= \inf\{C \ / \ |f| \leq C \quad q.s\}.$$

Observação 1: Na verdade $L^p(\Omega)$ deve ser entendido como um conjunto de classes de funções onde duas funções estão na mesma classe se elas são iguais quase sempre em Ω.

Os espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach (espaços vetoriais normados completos) (resultado conhecido como Teorema de Riesz-Fischer), sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert com o produto interno usual da integral.

Nota: Os resultados mencionados neste capítulo podem ser encontrados com suas demonstrações em [1], [10], [5], [2]. As imersões de Sobolev utilizadas no terceiro capítulo são demonstradas na segunda secção deste capítulo.

Observação 2: Em $L^p(\Omega)$ $1 \leq p \leq \infty$ vale a seguinte desigualdade que é chamada desigualdade de Holder: Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com p e q conjugados ($q = \frac{p}{p+1}$ se $1 < p < \infty$ e $q = \infty$ se $p = 1$ e $q = 1$ se $p = \infty$). Então $uv \in L^1(\Omega)$ e $||uv||_{L^1} \leq ||u||_{L^p}||v||_{L^q}$.

Definição 1.1.2 *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis u definidas em Ω, cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é compacto em Ω*

Teorema 1.1.1 *Seja Ω aberto do $\mathbb{R}^n$. Então $C_0^\infty(\Omega)$é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$.*

Para uma função u derivável denotamos :

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} .....\partial x_n^{\alpha_n}}$$

com $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ e $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Sejam Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p$ então u possui derivadas de todas as ordens em um certo sentido, chamado sentido das distribuições. $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$, ao menos para $|\alpha| \leq m$, define-se um novo espaço denominado *Espaço de Sobolev.* A derivada no sentido das distribuições de uma função $u \in L^p(\Omega)$ pode ser definida de um modo direto e de fácil entendimento. Podemos chamá-la de *derivada generalizada* e definida do seguinte modo: seja $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, e Ω aberto do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que uma função $v_i \in L^p(\Omega)$ é a *derivada generalizada* de u (ou derivada distribuicional) em relação à variável x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ se:

$$\int_{\Omega} u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx = -\int_{\Omega} v_i(x)\varphi(x)\,dx$$

para toda função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Se isso for o caso, usaremos a notação: $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i \quad i = 1, 2, ..., n.$

Se v_i também possui derivadas generalizadas então se denota:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Analogamente, podemos ter a derivada generalizada de ordem α

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} .....\partial x_n^{\alpha_n}}$$

de uma função $u \in L^p(\Omega)$.

Definição 1.1.3 *(Espaços de Sobolev) Para p pertencente aos reais com* $1 \leq p < \infty$ *ou para* $p = \infty$. *O espaço de Sobolev de ordem m (m inteiro) é o conjunto:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \text{ com } |\alpha| \leq m\}$$

onde as derivadas são no sentido generalizado ou das distribuições.

Um resultado importante é que os espaços de Sobolev, munidos com a norma natural, são espaços vetoriais normados completos. O resultado é o seguinte:

Teorema 1.1.2 *Sejam* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^n$ *e m um inteiro positivo. Então* $W^{m,p}(\Omega)$ *é um espaço de Banach com a norma*

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p .$$

Definição 1.1.4 *Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e m um inteiro positivo. Denotamos* $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

Definição 1.1.5 *Dado Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ denotamos $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$, isto é, $W_0^{m,p}(\Omega)$ é definido como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Observação 3: Se med$(\mathbb{R}^n - \Omega) > 0$ então $W_0^{m,p}(\Omega) \subsetneq W^{m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.1.3 *Tem-se que $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, isto é, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Um teorema importante que caracteriza os espaços de Sobolev, quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, é o seguinte (ver R. Adams [1] , S. Kesavan [5]).

Teorema 1.1.4 *Vale que*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n) \ / \ J_m \widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

onde $J_m(x) = (1 + |x|^2)^{\frac{m}{2}}$. Além disso

$$|||u||| = ||J_m \widetilde{u}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

é uma norma equivalente a norma de Sobolev.

Aqui $S'(\mathbb{R}^3)$ é o conjunto das distribuições temperadas, isto é, $S'(\mathbb{R}^n)$ é o dual topológico do Espaço de Schwarz $S'(\mathbb{R}^n)$ munido da seguinte topologia:

$$\varphi_k \longrightarrow 0 \ \text{ em } \ S(\mathbb{R}^n)$$

se

$$\rho_m(\varphi_k) = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha \varphi_k(x)| \longrightarrow 0$$

A demonstração desses resultados pode ser vista em R. Adams [1] e/ou H. Brézis [2] .

1.2 Algumas Imersões de Sobolev

A seguir apresentaremos algumas imersões particulares nos espaços de Sobolev que serão necessárias para a obtenção de certas estimativas no capítulo de aplicações desta dissertação. Naturalmente, existem diversos resultados gerais de imersões nos espaços de Sobolev que não serão aqui tratados mas que podem ser vistos em R. Adams [1], H. Brézis [2], S. Kesavan [5] e Medeiros-Rivera [10]. De fato, aqui estamos interessados apenas em imersões úteis para as aplicações que iremos apresentar.

São válidas as seguintes imersões:

$$C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$, sendo Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. As imersões que usaremos são:

Lema 1.2.1 *(Sobolev): Se* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ *então* $\| u \|_6 \leq 4 \| \nabla u \|_2 \leq 4\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}$.

Demonstração:

Seja $u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Sabemos que para $i = 1,\ 2,\ 3$ tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[u^4(x)] = 4u^3(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} .$$

Então

$$u^4(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial}{\partial y_i}[u^4(y)]dy_i = \int_{-\infty}^{x_i} 4u^3(y)\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}dy_i ,$$

e desse modo

$$|u(x)|^4 = \left|\int_{-\infty}^{x_i} 4u^3(y)\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}dy_i\right| \leq 4\int_{\mathbb{R}} \left|u^3(y)\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}\right| dy_i .$$

Assim,

$$|u(x)|^2 \leq 2\left(\int_{\mathbb{R}} \left|u^3(y)\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}\right| dy_i\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3.$$

Então

$$|u(x)|^6 \leq 8 \prod_{i=1}^{3} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| u^3(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \right| dy_i \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Integrando com relação à y_1 obtém-se que:

$$\int_{\mathbb{R}} |u(y)|^6 dy_1 \leq 8 \int_{\mathbb{R}} \left[\prod_{i=1}^{3} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| u^3(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \right| dy_i \right)^{\frac{1}{2}} \right] dy_1 =$$

$$= 8 \int_{\mathbb{R}} \left| u^3(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_1} \right| dy_1 \int_{\mathbb{R}} \left[\left(\int_{\mathbb{R}} \left| u^3(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_2} \right| dy_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| u^3(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_3} \right| dy_3 \right)^{\frac{1}{2}} \right] dy_1$$

$$\leq 8 \int_{\mathbb{R}} \left| u^3(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_1} \right| dy_1 \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| u^3(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_2} \right| dy_2 dy_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| u^3(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_3} \right| dy_3 dy_1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 8 \int_{\mathbb{R}} \left| u^3(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_1} \right| dy_1 \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| u^3(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_2} \right| dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| u^3(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_3} \right| dy_1 dy_3 \right)^{\frac{1}{2}}$$

onde a última desigualdade é devido à Holder.

Agora, integrando com relação à y_2 e usando novamente Holder, resulta que:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u(y)|^6 dy_1 dy_2 \leq$$

$$\leq 8 \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| u^3(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_1} \right| dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| u^3(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_2} \right| dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| u^3(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_3} \right| dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

Finalmente integrando com relação à y_3 e usando Holder duas vezes:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(y)|^6 dy \leq$$

$$\leq 8 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u^3(y)| \left| \frac{\partial u(y)}{\partial y_1} \right| dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u^3(y)| \left| \frac{\partial u(y)}{\partial y_2} \right| dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u^3(y)| \left| \frac{\partial u(y)}{\partial y_3} \right| dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 8 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u(y)|^6 dy \right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial u(y)}{\partial y_1} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial u(y)}{\partial y_2} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial u(y)}{\partial y_3} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{4}}$$

Neste ponto notamos que se $u \equiv 0$ então o lema é satisfeito trivialmente. Já para $u \neq 0$ resulta da desigualdade anterior que

$$\left[\int_{\mathbb{R}} |u(y)|^6 dy\right]^{\frac{1}{4}} \leq$$

$$\leq 8\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial u(y)}{\partial y_1}\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial u(y)}{\partial y_2}\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial u(y)}{\partial y_3}\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{4}}$$

Como para $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, temos $abc \leq a^3 + b^3 + c^3 \leq (a+b+c)^3$, então

$$\left[\int_{\mathbb{R}} |u(y)|^6 dy\right]^{\frac{1}{6}} \leq$$

$$\leq 8^{\frac{4}{6}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial u(y)}{\partial y_1}\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{6}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial u(y)}{\partial y_2}\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{6}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial u(y)}{\partial y_3}\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\leq 4\left[\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial u(y)}{\partial y_1}\right|^2 dy + \int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial u(y)}{\partial y_2}\right|^2 dy + \int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial u(y)}{\partial y_3}\right|^2 dy\right]^{\frac{3}{6}}$$

$$= 4\left[\int_{\mathbb{R}^3}(\left|\frac{\partial u(y)}{\partial y_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u(y)}{\partial y_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial u(y)}{\partial y_3}\right|^2) dy\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 4\left[\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

Com isso concluimos que:

$$\| u \|_{L^6(\mathbb{R}^3)} \leq 4 \| \nabla u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} .$$

Corolário 1.2.1 *Se* $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ *então* $u \in L^6(\mathbb{R}^3)$ *e*

$$||u||_{L^6(\mathbb{R}^3)} \leq 4||\nabla u||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 4||u||_{H^1(\mathbb{R}^3)} \ ,$$

para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$. *Isto é, a imersão de* $H^1(\mathbb{R}^3)$ *em* $L^6(\mathbb{R}^3)$ *é contínua.*

Demonstração:

Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Pela densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ (ver lema 1.2.1) então existe uma sequência $\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $\varphi_k \longrightarrow u$ na topologia de $H^1(\mathbb{R}^3)$, isto é

$$||\varphi_k - u||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + ||\nabla\varphi_k - \nabla u||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty$$

Em particular $(\nabla\varphi_k)$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^3)$. Como pelo lema 1.2.1 tem-se que

$$||\varphi_k - \varphi_l||_{L^6(\mathbb{R}^3)} \leq 4||\nabla(\varphi_k - \varphi_l)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 4||\nabla\varphi_k - \nabla\varphi_l||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

então resulta que (φ_k) é uma sequência de Cauchy em $L^6(\mathbb{R}^3)$. Logo $\varphi_k \longrightarrow v \in L^6(\mathbb{R}^3)$. Como também $\varphi_k \longrightarrow v \in L^2(\mathbb{R}^3)$ então resulta que $u = v$ quase sempre em $\mathbb{R}^3$. Isto implica que $u \in L^6(\mathbb{R}^3)$ e passando o limite na desigualdade (dada pelo lema 1.2.1)

$$||\varphi_k||_{L^6(\mathbb{R}^3)} \leq 4||\nabla\varphi_k||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

resulta que

$$||u||_{L^6(\mathbb{R}^3)} \leq 4||\nabla u||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

como queríamos demonstrar.

Corolário 1.2.2 *Se $u_1, u_2, u_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ então:*

$$\| u_1u_2u_3 \|_2 \leq 64 \| \nabla u_1 \|_2 \cdot \| \nabla u_2 \|_2 \cdot \| \nabla u_3 \|_2$$

Demonstração:

Sejam $u_1, u_2, u_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Usando duas vezes a desigualdade de Holder(com $p = 3$, $q = \frac{3}{2}$ e $p = q = 2$ respectivamente) segue que:

$$\| u_1u_2u_3 \|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^3} [u_1(x)u_2(x)u_3(x)]^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} u_1^2(x) \, [u_2(x)u_3(x)]^2 \, dx$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_1^6(x) dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} [u_2(x)u_3(x)]^3 dx \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_1^6(x) dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_2^6(x) dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} u_1^6(x) dx \right)^{\frac{1}{3}}$$

Pelo lema 1.2.1 resulta que :

$$\| u_1u_2u_3 \|_2^2 \leq \| u_1 \|_{L^6}^2 \cdot \| u_2 \|_{L^6}^2 \cdot \| u_3 \|_{L^6}^2$$

$$\leq (4^3)^2 \| \nabla u_1 \|_{L^2}^2 \cdot \| \nabla u_2 \|_{L^2}^2 \cdot \| \nabla u_3 \|_{L^2}^2 \ .$$

Assim a prova do corolário está completa.

Corolário 1.2.3 *Se u_1, u_2, $u_3 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ então $u_1u_2u_3 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e*

$$\| u_1u_2u_3 \|_2 \leq 64 \| \nabla u_1 \|_2 \cdot \| \nabla u_2 \|_2 \cdot \| \nabla u_3 \|_2 \leq 64 \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \ .$$

Demonstração:

É análoga a demostração do corolário 1.2.1 usando o corolário 1.2.2 e a densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$

Lema 1.2.2 *(Sobolev): Se $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ então $u \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ e existe uma constante positiva C tal que*

$$\| u \|_{L^\infty} \leq C \| u \|_{H^2}$$

para toda $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração:

Seja $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$. Então, para $\alpha > 0$ segue do teorema de Plancharel (ver [5]) que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}(y)| dy \right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}^3} (|y|^2 + \alpha^2) |\widehat{u}(y)| \frac{1}{(|y|^2 + \alpha^2)} dy \right)^2$$
$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} (|y|^2 + \alpha^2)^2 |\widehat{u}(y)|^2 dy \right) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dy}{(|y|^2 + \alpha^2)^2}$$

Pelo teorema de Fubini sobre mudança de ordem de integração temos:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{dy}{(|y|^2 + \alpha^2)^2} = \int_0^\infty \int_{|y|=\rho} \frac{dS_y}{(|y|^2 + \alpha^2)^2} d\rho = 4\pi \int_0^\infty \frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2 + \alpha^2)^2} = \frac{\pi^2}{\alpha} .$$

Assim:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}(y)| dy \right)^2 \leq \frac{\pi^2}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} (|y|^2 + \alpha^2)^2 |\widehat{u}(y)|^2 dy$$
$$= \frac{2\pi^2}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} (|y|^4 |\widehat{u}(y)|^2 + \alpha^4 |\widehat{u}(y)|^2) dy = \frac{2\pi^2}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} (||y|^2 \widehat{u}(y)|^2 + \alpha^4 |\widehat{u}(y)|^2) dy$$
$$= \frac{2\pi^2}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} (|\widehat{\triangle u}(y)|^2 + \alpha^4 |\widehat{u}(y)|^2) dy = \frac{2\pi^2}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} (|\triangle u(y)|^2 + \alpha^4 |u(y)|^2) dy$$

devido a Identidade de Parseval para funções de $L^2(\mathbb{R}^3)$ e ao fato que $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$. Agora tomando $\alpha = 1$ resulta que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}(y)| dy \right)^2 \leq 2\pi^2 \int_{\mathbb{R}^3} (|\triangle u(y)|^2 + |u(y)|^2) dy \leq 2\pi^2 \|u\|^2_{H^2(\mathbb{R}^3)} .$$

Usando a Fórmula de Inversão da Transformada de Fourier concluímos que

$$|u(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int |\widehat{u}(y)| dy \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} (2)^{\frac{1}{2}} \pi \parallel u \parallel_{H^2}$$

ao menos quase sempre em $\mathbb{R}^3$. Isso diz que

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^3) \quad \text{e} \quad \parallel u \parallel_{L^\infty} \leq C \parallel u \parallel_{H^2} \quad \text{onde} \quad C = \frac{1}{2(\pi)^{\frac{1}{2}}} .$$

Capítulo 2

Equações de Evolução Abstratas Não-lineares

2.1 Existência Local - Unicidade de Soluções

Nesta secção provaremos um teorema de existência local para a equação abstrata:

$$(6) \qquad \begin{cases} \phi'(t) = -iA\phi(t) + J(\phi(t)) \\ \phi(0) = \phi_0 \end{cases}$$

em um espaço de Hilbert e na secção seguinte a existência global. No capítulo três faremos então algumas aplicações à equações de ondas não lineares. A idéia básica segue a mesma linha das demonstrações de existência de soluções para Equações Diferenciais Ordinárias. Para fazer isso, reformulamos o problema de Cauchy acima e formalmente podemos escrever a forma integral da solução:

$$(7) \qquad \phi(t) = e^{-iAt}\phi_0 + \int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\phi(s))ds \; .$$

A equação integral (7) será então resolvida pelo princípio da contração.

O resultado de existência local e as hipóteses necessárias sobre os operadores A e J estão mencionados no teorema a seguir.

Teorema 2.1.1 *(Existência Local): Seja A um operador autoadjunto em um espaço de Hilbert H e J uma aplicação de $D(A)$ em $D(A)$ satisfazendo:*

(i) $\|J(\phi)\| \leq C(\|\phi\|)\|\phi\|$;

(ii) $\|AJ(\phi)\| \leq C(\|\phi\|, \|A\phi\|)\|A\phi\|$;

(iii) $\| J(\phi) - J(\psi) \| \leq C(\| \phi \|, \| \psi \|) \| \phi - \psi \|$;

(iv) $\| A(J(\phi) - J(\psi)) \| \leq C(\| \phi \|, \| \psi \|, \| A\phi \|, \| A\psi \|) \| A\phi - A\psi \|$.

para todo ϕ e $\psi \in D(A)$, onde cada constante C é uma função monótona crescente que depende das normas indicadas. Então, para cada $\phi_0 \in D(A)$ existe um $T > 0$ tal que o problema de Cauchy (6) *tem uma única solução $\phi : [0,T) \longrightarrow D(A) \subseteq H$ continuamente diferenciável. Além disso para cada conjunto da forma $\{\phi \in H \ / \ \|\phi\| \leq a, \ \|A\phi\| \leq b\}$, com a e b constantes positivas, T pode ser escolhido uniformemente para todo ϕ_0 nesse conjunto.*

Demonstração:

Seja T um número real positivo. Definimos o conjunto

$$X_T = \{\phi : [0,T) \to D(A) \ / \ \phi(t) \text{ e } A\phi(t) \text{ contínuas; } sup\|\phi(t)\| + sup\|A\phi(t)\| < \infty\}$$

Naturalmente, X_T é um espaço vetorial de funções. Também verificaremos que a função :

$$\|\cdot\|_T : X_T \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

dada por

$$\|\phi(\cdot)\|_T = \sup_{t\in[0,T)} \|\phi(t)\| + \sup_{t\in[0,T)} \|A\phi(t)\|$$

$$= \sup_{t\in[0,T)} \|\phi(t)\|_H + \sup_{t\in[0,T)} \|A\phi(t)\|_H$$

é uma norma sobre X_T. Assim, X_T é um espaço vetorial normado. De fato,

Afirmação 1: Como A é um operador autoadjunto e portanto fechado então $(X_T\ ,\ \|\cdot\|_T)$ é um espaço de Banach .

Prova: Primeiro provamos que $\|\phi(\cdot)\|_T \equiv \sup_{t\in[0,T)} \|\phi(t)\| + \sup_{t\in[0,T)} \|A\phi(t)\|$ é uma norma.

(1) $\|\phi\|_T \geq 0$.

(2) $\|\phi\|_T = 0 \iff \phi = 0$

($\Rightarrow$) Seja $\|\phi(t)\|_T = 0$ então $\sup_{t\in[0,T)} \|\phi(t)\| = 0$ e $\sup_{t\in[0,T)} \|A\phi(t)\| = 0$. Mas se $\sup_{t\in[0,T)} \|\phi(t)\| = 0$ temos que $\phi(t) = 0$, para todo $t \in [0,T)$, assim $\phi \equiv 0$.
($\Leftarrow$) Seja $\phi = 0$ então $\|0\|_T = \sup_{t\in[0,T)} \|0\| + \sup_{t\in[0,T)} \|A \cdot 0\| = 0$.

(3) $\|\lambda\phi\|_T = |\lambda|\|\phi\|_T$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ então

$$\|\lambda\phi\|_T = \sup_{t\in[0,T)} \|\lambda\phi(t)\| + \sup_{t\in[0,T)} \|A(\lambda\phi(t))\|$$

$$= \sup_{t\in[0,T)} |\lambda|\|\phi(t)\| + \sup_{t\in[0,T)} |\lambda|\|A\phi(t)\|$$

$$= |\lambda|(\sup_{t\in[0,T)} \|\phi(t)\| + \sup_{t\in[0,T)} \|A(\phi(t))\|) = |\lambda|\|\phi\|_T$$

(4) $\|\phi + \psi\|_T \leq \|\phi\| + \|\psi\|$

$$\|\phi + \psi\|_T = \sup_{t\in[0,T)} \|\phi(t) + \psi(t)\| + \sup_{t\in[0,T)} \|A(\phi(t) + \psi(t))\|$$

$$\leq \sup_{t\in[0,T)} (\|\phi(t)\| + \|\psi(t)\|) + \sup_{t\in[0,T)} (\|A\phi(t)\| + \|A\psi(t)\|)$$

$$\leq \sup_{t\in[0,T)} \|\phi(t)\| + \sup_{t\in[0,T)} \|A\phi(t)\| + \sup_{t\in[0,T)} \|\psi(t)\| + \sup_{t\in[0,T)} \|A\psi(t)\|$$

$$= \|\phi\|_T + \|\psi\|_T$$

Assim provamos que $\|\cdot\|_T$ é realmente uma norma.

Agora provamos que $(X_T\ ,\ \|\cdot\|_T)$ é um espaço completo (Banach). Para fazer isso, seja $(\phi_n)_n$ de Cauchy em X_T. Devemos provar que existe $\phi \in X_T$ tal que $\phi_n \to \phi$ na topologia da norma definida em X_T. Como $(\phi_n)_n$ é de Cauchy em X_T então dado $\epsilon > 0$, $\exists\ n_0$ tal que $\|\phi_n - \phi_m\|_T < \epsilon$ para $n, m \geq n_0$. Isto é:

$$\sup_{t\in[0,T)} \|\phi_n(t) - \phi_m(t)\|_H + \sup_{t\in[0,T)} \|A\phi_n(t) - A\phi_m(t)\|_H < \epsilon$$

para $n, m \geq n_0$.

Assim

$$(*) \quad \|\phi_n(t) - \phi_m(t)\|_H + \|A\phi_n(t) - A\phi_m(t)\|_H < \epsilon$$

para todo $t \in [0,T)$ e $n, m \geq n_0$.

Então para cada $t \in [0,T)$ $\{\phi_n(t)\}$, $\{A\phi_n(t)\}$ são sequências de Cauchy em H. Como por hipótese H é um espaço de Hilbert (completo), então para cada $t \in [0,T)$ existe $\phi(t)$ e $\psi(t) \in H$ tal que:

$$\phi_n(t) \to \phi(t) \ \text{ e } \ A\phi_n(t) \to \psi(t)$$

com $\phi_n(t) \in D(A)$, $\forall n$, $\forall t$ pela definição de X_T.

Sendo $A = A^*$ e portanto um operador fechado (pois A^* é sempre fechado) então $\phi(t) \in D(A)$ e $\psi(t) = A\phi(t)$, para cada $t \in [0,T)$.

Assim temos que $\phi_n \to \phi$ e $A\phi_n \to A\phi$ com $\phi(t) \in D(A)$, $\forall t \in [0,T)$.

Além disso tomando $\epsilon = 1$ temos :

$$\|\phi(t)\|_H + \|A\phi(t)\|_H \leq \|\phi(t) - \phi_{n_0}\| + \|\phi_{n_0}(t)\| + \|A\phi(t) - A\phi_{n_0}\| + \|A\phi_{n_0}(t)\|$$

$$\leq 1 + \|\phi_{n_0}(t)\| + 1 + \|A\phi_{n_0}(t)\| \leq 2 + \|\phi_{n_0}(t)\| + \|A\phi_{n_0}(t)\|$$

$$\leq 2 + C \quad \forall \;\; t \in [0, T)$$

com C constante positiva independente de $t \in [0,T)$ já que $\phi_{n_0} \in X_T$. Também ϕ e $A\phi$ são limites uniformes de ϕ_n e $A\phi_n$ respectivamente. Como ϕ_n e $A\phi_n$ são contínuas em $[0,T)$ então também ϕ e $A\phi$ são contínuas em $[0,T)$. Logo, $\phi \in X_T$.

De fato em $(*)$ temos:

$$\|\phi_n(t) - \phi_m(t)\|_H + \|A\phi_n(t) - A\phi_m(t)\|_H < \epsilon \; ; \;\; \forall \;\; n, m \geq n_0 \; ; \; \forall \; t \in [0, T).$$

Agora passando ao limite em m obtemos:

$$\|\phi_n(t) - \phi(t)\|_H + \|A\phi_n(t) - A\phi(t)\|_H < \epsilon \; ; \;\; \forall \;\; n \geq n_0 \; ; \; \forall \; t \in [0, T).$$

Isso diz que $\|\phi_n - \phi\|_T < \epsilon$, se $n \geq n_0$. Assim $\phi_n \to \phi$ em X_T. Logo X_T é Banach. Com isto fica provado a afirmação 1.

Agora, para $\alpha > 0$ fixado e $\phi_0 \in D(A)$ definimos o seguinte subespaço de X_T :

$$X(T, \alpha, \phi_0) = \{\phi \in X_T \;\; / \;\; \phi(0) = \phi_0 \;\; \text{e} \;\; \|\phi(\cdot) - e^{iAt}\phi_0\|_T \leq \alpha\}$$

onde e^{iAt} indica a exponencial do operador itA.

Observação 1: Seja $\phi \in X(T, \alpha, \phi_0)$. Então:

(i) $\|\phi(t)\| \leq \alpha + \|\phi_0\|, \;\; \forall \, t \in [0, T)$;

(ii) $\|A\phi(t)\| \leq \alpha + \|A\phi_0\|, \;\; \forall \, t \in [0, T)$.

Justificativa: *(i)* Como $\phi \in X(T, \alpha, \phi_0)$, então $\|\phi(\cdot) - e^{iAt}\phi_0\|_T \leq \alpha$, logo $\|\phi(t) - e^{iAt}\phi_0\|_H \leq \alpha$, $\forall \; t \in [0, T)$. Assim $\|\phi(t)\|_H - \|e^{iAt}\phi_0\|_H \leq \alpha$, o que implica que $\|\phi(t)\|_H \leq \alpha + \|\phi_0\|_H$, $\forall \; t \in [0, T)$.

(ii) Como $\|\phi(\cdot) - e^{iAt}\phi_0\|_T \leq \alpha$ também tem-se que $\|A(\phi(t) - e^{iAt}\phi_0\|_H) \leq \alpha$,

$\forall\ t \in [0,T)$. Da teoria de Semigrupos de operadores segue que $\|A\phi(t) - e^{iAt}A\phi_0\|_H \leq \alpha$, $\forall\ t \in [0,T)$. Assim $\|A\phi(t)\|_H - \|e^{iAt}A\phi_0\|_H \leq \alpha$ e isso diz que $\|A\phi(t)\|_H \leq \alpha + \|A\phi_0\|_H$, $\forall\ t \in [0,T)$.

A existência de uma solução local de (6) será obtida pelo princípio da contração. Para isso precisamos do seguinte resultado.

Afirmação 2: A aplicação $S : X(T,\alpha,\phi_0) \longrightarrow X(T,\alpha,\phi_0)$ dada por

$$(8) \qquad (S\phi)(t) = e^{-iAt}\phi_0 + \int_0^t e^{-iA(t-s)}J(\phi(s))ds$$

está bem definida e é uma contração se T for suficientemente pequeno.

Prova: A seguir indicaremos por C_α distintas constantes que dependem apenas de $\alpha + \|\phi_0\|$ e/ou $\alpha + \|A\phi_0\|$. Seja $\phi(\cdot) \in X(T,\alpha,\phi_0)$. Então, como e^{-itA} é um operador unitário em H, resulta que:

$$\|e^{-iA(t-(s+h))}J(\phi(s+h)) - e^{-iA(t-s)}J(\phi(s))\| =$$

$$= \|e^{-iA(t-s)}e^{iAh}J(\phi(s+h)) - e^{-iA(t-s)}J(\phi(s))\|$$

$$= \|e^{-iA(t-s)}(e^{iAh}J(\phi(s+h)) - J(\phi(s)))\|$$

$$= \|e^{iAh}J(\phi(s+h)) - J(\phi(s))\|$$

$$= \|e^{iAh}J(\phi(s+h)) - e^{iAh}J(\phi(s)) + e^{iAh}J(\phi(s)) - J(\phi(s))\|$$

$$\leq \|J(\phi(s+h)) - J(\phi(s))\| + \|(e^{ihA} - I)J(\phi(s))\|$$

$$\leq C(\|\phi(s+h)\|, \|\phi(s)\|)\|\phi(s+h) - \phi(s)\| + C(\|\phi(s)\|)\|\phi(s)\|\|e^{ihA} - I\|$$

$$\leq C(\alpha + \|\phi_0\|\ ,\ \alpha + \|\phi_0\|)\|\phi(s+h) - \phi(s)\| + C(\alpha + \|\phi_0\|)(\alpha + \|\phi_0\|)\|e^{ihA} - I\|$$

$$\leq C_\alpha\|\phi(s+h) - \phi(s)\| + C_\alpha\|(e^{ihA} - I)\|$$

devido as hipóteses (i) e (iii) sobre J, a observação (1) e a hipótese sobre a monotonicidade das constantes dadas nas hipóteses do teorema. Assim, $e^{-iA(t-s)}J(\phi(s))$ é uma função a valores no espaço de Hilbert H e contínua na variável s. Também de forma similar prova-se, usando as hipóteses (ii) e (iv) sobre A e J e a observação anterior que, $Ae^{-iA(t-s)}J(\phi(s))$ é contínua na variável s.

Com isso a parte do lado direito de (8) está bem definida sendo a Integral no sentido de Riemann. Agora definindo

$$\eta_n(t) = \sum_{m=1}^{n} \frac{t}{n} e^{-i(t-(\frac{mt}{n}))A} J\left(\phi\left(\frac{m}{n}t\right)\right)$$

e

$$\eta(t) = \int_0^t e^{-i(t-s)A} J(\phi(s))ds$$

então $\eta_n(t) \to \eta(t)$ quando $n \to \infty$, pela definição de integral de Riemann. Neste ponto, observamos que pelas hipóteses sobre J, temos que $\eta_n(t) \in D(A)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então podemos calcular para $t \in [0,T)$

$$\begin{aligned} A\eta_n(t) &= A\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{t}{n} e^{-i(t-(\frac{mt}{n}))A} J\left(\phi\left(\frac{m}{n}t\right)\right)\right) \\ &= \sum_{m=1}^{n} \frac{t}{n} Ae^{-i(t-(\frac{mt}{n}))A} J\left(\phi\left(\frac{m}{n}t\right)\right) \\ &= \sum_{m=1}^{n} \frac{t}{n} e^{-i(t-(\frac{mt}{n}))A} AJ\left(\phi\left(\frac{m}{n}t\right)\right) \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então pela definição de integral de Riemann da função $g(s) = e^{-i(t-s)A}AJ(\phi(s))$ resulta que

$$A\eta_n(t) \longrightarrow y(t) = \int_0^t e^{-i(t-s)A} AJ(\phi(s))ds$$

Então, como $\eta_n(t) \to \eta(t)$ e $A\eta_n(t) \to y(t)$ e pelo fato de A ser um operador fechado, resulta que $\eta(t) \in D(A)$ e $y(t) = A\eta(t)$. Isto é, temos que

$$A\int_0^t e^{-i(t-s)A} J(\phi(s))ds = \int_0^t e^{-i(t-s)A} AJ(\phi(s))ds. \tag{8}$$

Além disso, usando novamente o fato de e^{-itA} ser unitário e as hipóteses do Teorema, segue que:

$$\|A\eta(t+h) - A\eta(t)\| =$$

$$= \left\| \int_0^{t+h} e^{-iA((t+h)-s)} AJ(\phi(s))ds - \int_0^t e^{-iA(t-s)} AJ(\phi(s))ds \right\|$$

$$= \left\| \int_0^{t+h} e^{-iAh} e^{-iA(t-s)} AJ(\phi(s))ds - \int_0^t e^{-iA(t-s)A} AJ(\phi(s))ds \right\|$$

$$= \left\| \int_0^{t+h} e^{-iAh} e^{-iA(t-s)} AJ(\phi(s))ds - \int_0^t e^{-iAh} e^{-iA(t-s)} AJ(\phi(s))ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^t e^{-iA(t-s)} e^{-iAh} AJ(\phi(s))ds - \int_0^t e^{-iA(t-s)} AJ(\phi(s))ds \right\|$$

$$\leq \left\| \int_t^{t+h} e^{-iAh} e^{-iA(t-s)} AJ(\phi(s))ds \right\| + \left\| \int_0^t (e^{-iAh} - I) e^{-iA(t-s)} AJ(\phi(s))ds \right\|$$

$$\leq \int_t^{t+h} \|AJ(\phi(s))\| ds + \int_0^t \left\| (e^{-iAh} - I) e^{-iA(t-s)} AJ(\phi(s)) \right\| ds$$

$$\leq \int_t^{t+h} C(\|\phi(s)\|, \|A\phi(s)\|) \|A(\phi(s))\| ds + \int_0^t \left\| (e^{-iAh} - I) e^{-iA(t-s)} AJ(\phi(s)) \right\| ds$$

$$\leq C_\alpha h \sup_{t\in[0,T)} \|A(\phi(t))\|_H + \int_0^t \left\| (e^{-iAh} - I) e^{-iA(t-s)} AJ(\phi(s)) \right\| ds$$

$$\leq hC_\alpha \|\phi\|_T + \int_0^t \left\| (e^{-iAh} - I) e^{-iA(t-s)} AJ(\phi(s)) \right\| ds$$

Agora observamos que

$$\left\| (e^{-iAh} - I) e^{-iA(t-s)} AJ(\phi(s)) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| (e^{-iAh} - I) \right\| \left\| e^{-iA(t-s)} AJ(\phi(s)) \right\|$$

$$\leq \left\|(e^{-iAh} - I)\right\| \|AJ(\phi(s))\|$$

$$\leq \left\|(e^{-iAh} - I)\right\| C(\|\phi(s)\|, \|A\phi(s)\|)\|A(\phi(s))\|$$

$$\leq \left\|(e^{-iAh} - I)\right\| C(\alpha + \|\phi_0\| \ , \ \alpha + \|A\phi_0\|)\|A(\phi(s))\|$$

$$\leq \left\|(e^{-iAh} - I)\right\| C_\alpha(\alpha + \|A\phi_0\|)$$

$$\leq 2C_\alpha(\alpha + \|A\phi_0\|) = \text{constante}$$

Isso diz que

$$\|(e^{-iAh} - I)e^{-iA(t-s)}AJ(\phi(s))\| \to 0$$

uniformemente para todo s em $[0, t)$, $0 \leq t < T$, quando $h \to 0$. Também diz que a norma acima é uniformemente limitada.
Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue:

$$hC_\alpha\|\phi\|_T + \int_0^t \|(e^{-iAh} - I)e^{-iA(t-s)}AJ(\phi(s))\|ds \to 0 \ \text{ quando } \ h \to 0 \ .$$

Assim $A\eta(t)$ é um função contínua em $[0, T)$. Similarmente podemos mostrar que $\eta(t)$ é contínua. Logo, $S\phi(t)$ e $AS\phi(t)$ são contínuas para $t \in [0, T)$. Também, como na estimativa acima, tem-se:

$$\|AS(\phi(t))\| \leq$$

$$\leq \|Ae^{-itA}\phi_0\| + \|A\int_0^t e^{-iA(t-s)}J(\phi(s))ds\|$$

$$\leq \|A\phi_0\| + \int_0^t \|AJ(\phi(s))\|ds$$

$$\leq \|A\phi_0\| + \int_0^t C(\|\phi(s)\|, \|\mathbb{A}\phi(s)\|)\|A\phi(s)\|ds$$

$$\leq \|A\phi_0\| + C_\alpha T \sup_{t\in[0,T)} \|A\phi(t)\|$$

$$\leq \|A\phi_0\| + C_\alpha T(\alpha + \|A\phi_0\|)$$

para $t \in [0,T)$, pois $A\phi(s) \in X(T,\alpha,\phi_0)$ e devido as hipóteses sobre A e J no teorema e a observação 1.

Analogamente, é fácil verificar que $\sup_{t\in[0,T)} \|S\phi(t)\| \leq +\infty$. Logo, pela definição de X_T resulta que $S\phi \in X_T$. Mas, queremos mostrar que na verdade $S\phi \in X(T,\alpha,\phi_0)$. Para isso, de maneira análoga aos cálculos anteriores, mostra-se que para cada $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot) \in X(T,\alpha,\phi_0)$, valem as seguintes estimativas:

(a) $\quad \|(S\phi)(t) - e^{-iAt}\phi_0\| \leq C_\alpha T \sup_{t\in[0,T)} \|\phi(t)\|$, para $t \in [O,T)$.

De fato,

$$\|(S\phi)(t) - e^{-iAt}\phi_0\| = \left\| e^{-iAt}\phi_0 + \int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\phi(s))ds - e^{-iAt}\phi_0 \right\|$$

$$= \left\| \int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\phi(s))ds \right\| \leq \int_0^t \|e^{-iA(t-s)}\| \|J(\phi(s))\| ds$$

$$= \int_0^t \|J(\phi(s))\| ds \leq \int_0^t C(\|\phi(s)\|)\|\phi(s)\| ds$$

$$= C(\alpha + \|\phi_0\|) \sup_{t\in[0,T)} \|\phi(t)\| \int_0^t ds = C_\alpha T \sup_{t\in[0,T)} \|\phi(t)\|$$

pela hipótese (i) sobre J e a observação anterior (lembrando que $C(\|\phi\|)$ é monótona crescente em $\|\phi\|$).

(b) $\quad \|A(S\phi)(t) - Ae^{-iAt}\phi_0\| \leq C_\alpha T \sup_{t\in[0,T)} \|A\phi(t)\|$, para $t \in [O,T)$.

Prova: Analogamente como no ítem (a), temos

$$\|A(S\phi)(t) - Ae^{-iAt}\phi_0\| =$$

$$= \left\| Ae^{-iAt}\phi_0 + A\int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\phi(s))ds - Ae^{-iAt}\phi_0 \right\|$$

$$= \left\| \int_0^t e^{-iA(t-s)} AJ(\phi(s))ds \right\| \leq \int_0^t \|AJ(\phi(s))\| ds$$

$$\leq \int_0^t C(\|\phi(s)\|, \|A\phi(s)\|) \|A\phi(s)\| ds \leq C_\alpha T \sup_{t\in[0,T)} \|A\phi(t)\|$$

(c) $\|(S\phi)(t) - (S\psi)(t)\| \leq C_\alpha T \sup_{t\in[0,T)} \|\phi(t) - \psi(t)\|$, para $t \in [O,T)$.

Prova:

$$\|(S\phi)(t) - (S\psi)(t)\| = \left\| \int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\phi(s))ds - \int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\psi(s))ds \right\|$$

$$= \left\| \int_0^t e^{-iA(t-s)} (J(\phi(s)) - J(\psi(s)))ds \right\|$$

$$\leq \int_0^t \|(J(\phi(s)) - J(\psi(s)))\| ds \leq \int_0^t C(\|\phi(s)\|, \|\psi(s)\|) \|(\phi(s)) - (\psi(s))\| ds$$

$$\leq C(\alpha + \|\phi_0\| \ , \ \alpha + \|\psi_0\|) \sup_{t\in[0,T)} \|\phi(t) - \psi(t)\| \int_0^t ds$$

$$\leq C_\alpha T \sup_{t\in[0,T)} \|\phi(t) - \psi(t)\|$$

(d) $\|A((S\phi)(t) - (S\psi)(t))\| \leq C_\alpha T \sup_{t\in[0,T)} \|A\phi(t) - A\psi(t)\|$, para $t \in [O,T)$.

Prova:

$$\|A((S\phi)(t) - (S\psi)(t))\| =$$

$$= \left\| A \int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\phi(s))ds - A \int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\psi(s))ds \right\|$$

$$= \left\| \int_0^t e^{-iA(t-s)} A(J(\phi(s)) - J(\psi(s)))ds \right\|$$

$$\leq \int_0^t \|A(J(\phi(s)) - J(\psi(s)))\|ds$$

$$\leq \int_0^t C(\|\phi(s)\|, \|\psi(s)\|, \|A\phi(s)\|, \|A\psi(s)\|)\|A((\phi(s)) - (\psi(s)))\|ds$$

$$\leq TC(\alpha + \|\phi_0\| \ , \ \alpha + \|\psi_0\| \ , \ \alpha + \|A\phi_0\| \ , \ \alpha + \|A\psi_0\|) \sup_{t\in[0,T)} \|A(\phi(t) - \psi(t))\|$$

$$\leq C_\alpha T \sup_{t\in[0,T)} \|A(\phi(t) - \psi(t))\|$$

Agora notamos que para $\phi \in X(T, \alpha, \phi_0)$ tem-se pela definição de $S\phi$ que $(S\phi)(0) = \phi_0$. Também usando as estimativas (a) e (b) e a observação 1 temos que:

$$\|S\phi(\cdot) - e^{-iA(\cdot)}\phi_0\|_T =$$

$$= \sup_{t\in[0,T)} \|S\phi(t) - e^{-iA(t)}\phi_0\| + \sup_{t\in[0,T)} \|AS\phi(t) - Ae^{-iA(t)}\phi_0\|$$

$$\leq C_\alpha T \sup_{t\in[0,T)} \|\phi(t)\| + C_\alpha T \sup_{t\in[0,T)} \|A\phi(t)\|$$

$$\leq C_\alpha T(\alpha + \|\phi_0\|) + C_\alpha T(\alpha + \|A\phi_0\|)$$

$$= C_\alpha T(2\alpha + \|\phi_0\| + \|A\phi_0\|) \leq \alpha$$

para T suficientemente pequeno, ou seja: $T \leq \dfrac{\alpha}{C_\alpha(2\alpha + \|\phi_0\| + \|A\phi_0\|)}$.
Logo, $S\phi \in X(T, \alpha, \phi_0)$, se T for suficientemente pequeno. Portanto S está bem definida, para T suficientemente pequeno.

Finalmente, resta verificar que $S\phi$ é uma contração. Sejam ϕ e $\psi \in X(T, \alpha, \phi_0)$. Então usando as estimativas (c) e (d) realizadas acima, temos:

$$\|S\phi - S\psi\|_T \leq$$

$$= \sup_{t\in[0,T)} \|S\phi(t) - S\psi(t)\| + \sup_{t\in[0,T)} \|AS\phi(t) - AS\psi(t)\|$$

$$\leq C_\alpha T \sup_{t\in[0,T)} \|\phi(t) - \psi(t)\| + C_\alpha T \sup_{t\in[0,T)} \|A\phi(t) - A\psi(t)\|$$

$$\leq C_\alpha T(\sup_{t\in[0,T)} \|\phi(t) - \psi(t)\| + \sup_{t\in[0,T)} \|A(\phi(t) - \psi(t))\|)$$

$$= C_\alpha T\|\phi - \psi\|_T \ .$$

Isto é,

$$\|S\phi - S\psi\|_T \leq C_\alpha T\|\phi - \psi\|_T \ .$$

Logo, para T suficientemente pequeno, S é contração de $X(T, \alpha, \phi_0)$ em $X(T, \alpha, \phi_0)$. (A saber, basta tomar $T \leq \min\left\{\frac{1}{C_\alpha}, \frac{\alpha}{C_\alpha(2\alpha + \|\phi_0\| + \|A\phi_0\|)}\right\}$).

Deste modo, para T suficientemente pequeno, sendo S é uma contração em $X(T, \alpha, \phi_0)$ (notar que $X(T, \alpha, \phi_0)$ é um subespaço fechado de X_T e X_T é espaço de Banach) seque, pelo princípio da contração, que S tem um único ponto fixo $\phi(\cdot)$ em $X(T, \alpha, \phi_0)$ que satisfaz a equação integral (7).

Queremos mostrar que o ponto fixo $\phi \in X(T, \alpha, \phi_0)$é solução de (6) no intervalo $[0, T)$ para T suficientemente pequeno. Para isso precisamos verificar a diferenciabilidade forte de $\phi(t)$. Temos:

$$\frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} =$$

$$= \frac{e^{-iA(t+h)}\phi_0 + \int_0^{t+h} e^{-iA(t+h-s)} J(\phi(s))ds}{h} - \frac{e^{-iAt}\phi_0 + \int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\phi(s))ds}{h}$$

$$= \frac{\left(e^{-iAh} - I\right) e^{-iAt}\phi_0}{h} + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-iA(t-s)}e^{-iAh} J(\phi(s))ds$$

$$+\frac{1}{h}\int_0^t e^{-iA(t-s)}e^{-iAh} J(\phi(s))ds - \frac{1}{h}\int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\phi(s))ds$$

$$= \frac{\left(e^{-iAh} - I\right) e^{-iAt}\phi_0}{h} + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-iA(t-s)}e^{-iAh} J(\phi(s))ds$$

$$+ \int_0^t e^{-iA(t-s)} \left(\frac{e^{-iAh} - I}{h}\right) J(\phi(s))ds$$

Visto que $\phi_0 \in D(A)$, então $\dfrac{\left(e^{-iAh} - I\right) e^{-iAt}\phi_0}{h}$ converge para $-iAe^{-iAt}\phi_0$, quando $h \to 0$, pois $-iA$ é o gerador do grupo e^{-itA}. Agora como $J(\phi(s)) \in D(A)$, então pela teoria de Semigrupos de Operadores

$$\int_0^t e^{-iA(t-s)} \left(\frac{e^{-iAh} - I}{h}\right) J(\phi(s))ds \longrightarrow \int_0^t e^{-iA(t-s)} - iAJ(\phi(s))ds$$

quando $h \to 0$. Vamos justificar essa última convergência, isto é, vamos verificar porque:

$$\lim_{h\to 0} \int_0^t e^{-iA(t-s)} \left(\frac{e^{-iAh} - I}{h}\right) J(\phi(s))ds = \int_0^t \lim_{h\to 0} e^{-iA(t-s)} \left(\frac{e^{-iAh} - I}{h}\right) J(\phi(s))ds$$

Sabemos que o integrando do lado esquerdo converge, quando $h \to 0$ para $e^{-iA(t-s)}(-iAJ(\phi(s)))$ para cada $s \in [0,t)$ e portanto para h suficientemente pequeno (digamos $|h| < \delta,\ \delta > 0$ fixo) tem-se:

$$||e^{-iA(t-s)} \frac{e^{-iAh} - I}{h} J(\phi(s))|| \leq 1 + ||iAJ(\phi(s))||$$

$$= 1 + ||AJ(\phi(s))|| \leq 1 + C(||\phi(s)||, ||A\phi(s)||)||A\phi(s)|| \leq 1 + C_\alpha(\alpha + ||A\phi_0||)$$

para $|h| < \delta$, devido as hipóteses sobre A e J e a observação 1.
Assim, o integrando é uniformemente limitado. Deste modo, pelo Teorema da Convergência Dominada, pode ser permutado o limite com a integral. Logo, realmente vale que:

$$\lim_{h\to 0} \int_0^t e^{-iA(t-s)} \left(\frac{e^{-iAh} - I}{h}\right) J(\phi(s))ds = \int_0^t e^{-iA(t-s)}(-iA)J(\phi(s))ds$$

Agora, vamos mostrar a convergência de

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{-iA(t-s)} e^{-iAh} J(\phi(s))ds$$

quando $h \to 0$.

Vamos mostrar que

$$(*) \qquad \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-iA(t-s)}e^{-iAh}J(\phi(s))ds \to J(\phi(t)) \quad \text{quando} \quad h \to 0\ .$$

Observação 2: Pelo Teorema do Valor Médio para integrais de funções à valores em um espaço de Hilbert, tem-se:

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} g(t,s,h)ds = \frac{1}{h}\cdot g(t,\tilde{s},h)\cdot h = g(t,(\tilde{s}),h)$$

para algum $\tilde{s}$ tal que $t \leq \tilde{s} \leq t+h$, quando $g(t,s,h)$ for contínua. Assim :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} g(t,s,h)ds = \lim_{h\to 0} g(t,\tilde{s},h) = g(t,t,0)$$

pois $\tilde{s} \to t$ quando $h \to 0$ e g é contínua. Usando isso em $(*)$, onde o integrando é contínuo, resulta que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-iA(t-s)}e^{-iAh}J(\phi(s))ds \to e^{-iA(t-t)}e^{0}J(\phi(t)) = J(\phi(t))$$

Assim:

$$\frac{d\phi}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{\phi(t+h)-\phi(t)}{h} =$$

$$= -iAe^{-iAt}\phi_0 + J(\phi(t)) + \int_0^t e^{-iA(t-s)} - iAJ(\phi(s))ds$$

$$= -iA\left(e^{-iAt}\phi_0 + \int_0^t e^{-iA(t-s)}J(\phi(s))ds\right) + J(\phi(t))$$

Então

$$\frac{d\phi}{dt} = \phi'(t) = -iA\phi(t) + J(\phi(t)) \qquad \forall\ t \in [0,T)$$

e portanto $\phi(t)$ é fortemente diferenciável em $t \in [0,T)$ e além disso, ϕ satisfaz (6). Logo, mostramos que (6) possui uma solução local.

Agora, queremos provar a unicidade da solução local. Suponha que

$$\widetilde{\phi} : [0, \widetilde{T}) \longrightarrow D(A)$$

é uma solução de (6) continuamente diferenciável, satisfazendo $\widetilde{\phi}(0) = \phi_0$. Assim $\widetilde{\phi}$ satisfaz:

$$A\widetilde{\phi}(t) = i\widetilde{\phi}'(t) - iJ(\widetilde{\phi}(t)) \quad , \quad t \in [0, \widetilde{T})$$

e portanto $A\widetilde{\phi}(t)$ é contínua em $[0, \widetilde{T})$. Também

$$\sup_{[0,T_0)} \|\widetilde{\phi}(t)\| + \sup_{[0,T_0)} \|A\widetilde{\phi}(t)\| < +\infty$$

para $T_0 < \widetilde{T}$. Logo, $\widetilde{\phi} \in X_{T_0}$. Além disso, desde que $\widetilde{\phi}(0) = \phi_0$ e $\widetilde{\phi}$ também é solução da equação integral (7), resulta

$$\|\widetilde{\phi}(t) - e^{-iAt}\phi_0\|_{T_0} =$$

$$= \sup_{[0,T_0)} \|\widetilde{\phi}(t) - e^{-iAt}\phi_0\|_H + \sup_{[0,T_0)} \|A\widetilde{\phi}(t) - Ae^{-iAt}\phi_0\|_H$$

$$\sup_{[0,T_0)} \| \int_0^t e^{-iA(t-s)} J(\widetilde{\phi}(s)) ds \|_H + \sup_{[0,T_0)} \| \int_0^t e^{-iA(t-s)} AJ(\widetilde{\phi}(s)) ds \|_H$$

$$\leq \widetilde{C_\alpha} T_0 \leq \alpha \quad ,$$

se T_0 for tal que $T_0 \leq \frac{\alpha}{\widetilde{C_\alpha}}$.

Assim, se $T_0 < \min\left\{\frac{\alpha}{\widetilde{C_\alpha}}, \widetilde{T}\right\}$ segue que $\widetilde{\phi} \in X(T_0, \alpha, \phi_0)$.

Como $\widetilde{\phi}$ também satisfaz a equação integral (7), então pela unicidade do ponto fixo, tem-se que $\phi(t) = \widetilde{\phi}(t)$para $t \in [0, T_0) \cap [0, T)$.

Agora seja T_1 o supremo de tais T_0. Supondo $T_1 < T$ vamos ter que

$$\lim_{t \to T_1} \widetilde{\phi}(t) = \phi(T_1) \quad \text{e} \quad \lim_{t \to T_1} A\widetilde{\phi}(t) = A\phi(T_1) \ .$$

Assim $\widetilde{\phi}(T_1) = \phi(T_1) \in D(A)$.

Então pela parte de existência local podemos prolongar a solução $\widetilde{\phi}$ de modo que em um pequeno intervalo $[T_1, T_2)$, com $0 < T_1 < T_2 < T$, se tenha $\widetilde{\phi}(t) = \phi(t)$. Isso contradiz o fato que T_1 é máximo. Logo, $T_1 \geq T$ e portanto

$$\widetilde{\phi}(t) = \phi(t) \ ,$$

para todo $t \in [0, T)$. Assim $\phi(t)$ dada como ponto fixo de S é a única solução forte do problema (6) no intervalo local $[0, T)$. Com isso a demonstação do teorema 2.1.1 está completa.

Observação 3: O corolário a seguir diz que se $\phi_0 \in H$ então a equação integral (7) possui uma solução contínua, que pode não ser diferenciável, isto é, o problema (6) pode não ter uma solução forte. A solução contínua da equação integral (7) é chamada uma solução fraca ou generalizada do problema (6).

Corolário 2.1.1 : *Se A é um operador autoadjunto em um espaço de Hilbert H e suponha que J seja uma aplicação não-linear de H em H e satisfaz o item (iv) do teorema (1). Então para cada $\phi_0 \in H$, existe um $T > 0$ tal que (7) tem uma solução contínua $\phi(t)$ em $[0, T)$. T pde ser escolhido uniformemente nas bolas de H.*

Demonstração:

A demonstração é similar, somente que é mais fácil já que não precisamos diferenciar a equação integral. Apenas precisa definir:

$$X(T, \alpha, \phi_0) = \{\psi(t) : [0, T) \to H \text{ contínuas } / \sup_{t \in [0,T)} \|\psi(t) - e^{-iAt}\phi_0\| \leq \alpha, \ \ \psi(0) = \phi_0\} .$$

A partir deste ponto a demonstração segue os mesmos moldes da demonstração do teorema 2.1.1 .

Observamos que as hipóteses (i) e (ii) no teorma 2.1.1, seguem das hipóteses (iii) e (iv) respectivamente. Elas foram especificadas separadamente apenas para simples comparação com as hipóteses do teorema 2.2.1 abaixo. Observamos também que a mesma demonstração mostra a existência local em um intervalo $(-T, T)$ visto que e^{-iAt} é um grupo. Isto é bem conhecida do cálculo onde as equações diferenciais ordinárias não lineares podem não ter soluções globais no tempo (por exemplo: $\frac{dx}{dt} = x^2$). Como nesse caso, podemos provar a existência global se tivermos alguma estimativa apriori que garanta que a solução é limitada.

2.2 Existência Global

O teorema de existência global de soluções fortes para o problema de Cauchy (6) é o seguinte:

Teorema 2.2.1 *:(Existência Global) Sejam A, J e H satisfazendo as hipóteses do teorema 2.1.1 exeto (ii) que é substituído por:*
(ii') $||AJ(\phi)|| \leq C(||\phi||)||A\phi||$ (isto é, C não depende de $||A\phi||$).
Supor também que em todo intervalo finito no qual uma solução forte de (6) existe, $||\phi(t)||$ é limitada. Então (6) tem uma única solução global para todo t.

Demonstração:

Pelo teorema 2.1.1 sabemos que existe uma solução em $[0, T)$ para algum $T > 0$ suficientemente pequeno. Seja $\overline{T}$ o supremo dos números T tal que a solução do problema de Cauchy (6) existe em $[0, T)$ com $\phi(t)$ e $A\phi(t)$ contínuas. Então tem-se que $\overline{T} < \infty$ ou $T = \infty$.

Suponha que $\overline{T} < \infty$. Vamos mostrar que $||A\phi(t)||$ é limitada em qualquer intervalo finito $[0, T)$ com $T < \overline{T}$, isto é, em qualquer intervalo finito onde a solução existe. A solução de (6) satisfaz a equação (7) em tal intervalo, assim:

$$||A\phi(t)|| = \left\|Ae^{-iAt}\phi_0 + A\int_0^t e^{-iA(t-s)}J(\phi(s))ds\right\|$$

$$\leq ||A\phi_0|| + \int_0^t ||e^{-iA(t-s)}AJ(\phi(s))||ds \qquad \text{por (8)}$$

$$\leq ||A\phi_0|| + \int_0^t ||AJ(\phi(s))||ds$$

$$\leq ||A\phi_0|| + \int_0^t C(||\phi(s)||)||A\phi(s)||ds$$

onde a última desigualdade decorre da hipótese (ii'). Também por hipótese temos que $||\phi(s)||$ é limitada em todo intervalo finito $[0, T)$ onde a solução existe, então:

$$||A\phi(t)|| \leq ||A\phi_0|| + C(T) \int_0^t ||A\phi(s)||ds$$

Agora usando a desigualdade de Gronwall segue que :

$$||A\phi(t)|| \leq ||A\phi_0||e^{TC(T)} = \text{constante}$$

Assim mostramos que $||A\phi(t)||$ é limitada em qualquer intervalo finito $[0, T)$ com $T < \overline{T}$.

Vimos na demonstração de existência local de soluções no teorema 2.1.1 que o comprimento do intervalo de existência de soluções depende somente dos números $||\phi_0||$ e $||A\phi_0||$. Portanto se escolhermos um ponto T_1 suficientemente próximo de $\overline{T}$ podemos então construir uma solução do problema de Cauchy (6) no intervalo $[T_1, T_2)$, onde $T_1 < \overline{T} < T_2$. Então pela unicidade local, esta solução estende nossa solução anterior no intervalo $[0, \overline{T})$ o que contradiz a maximalidade de $\overline{T}$, logo $\overline{T}$ não pode ser finito. Portanto $\overline{T} = \infty$ e assim a solução existe em $[0, \infty)$. De forma similar é possível mostrar que existe uma única solução no intervalo $(-\infty, 0]$. Logo, o problema (6), com as hipóteses do Teorema 2.2.1 tem única solução global.

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Introdução

Neste capítulo estudamos como os teoremas de existência do capítulo 2 podem ser aplicados. Para fazer aplicação a um problema específico, geralmente deve-se provar as quatro hipóteses de um dos teoremas de existência que aparecem no capítulo anterior. Isso algumas vezes depende de longos cálculos e das estimativas de Sobolev. Em geral, as estimativas são verificadas num conjunto denso no espaço vetorial onde o operador A atua e então por um argumento de limitação e densidade segue que as estimativas são válidas em todo o domínio de A. Finalmente, visto que estamos tratando com funções à valores vetoriais, em alguns argumentos extras é necessário o uso de desigualdades de energia. Como muitos desses detalhes são de natureza técnica é importante que sejam bem detalhados para se entender toda a natureza do problema.

Assim, nos exemplos vamos procurar provar a maior parte dos detalhes técnicos envolvidos.

A transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^3)$ de uma função f será representada por $\widehat{f}$. Consideramos conhecido do leitor as propriedades da transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^3)$ tais como o teorema de Plancharel. Para referências sobre tal tema ver

D.G.Figeuiredo [3], S.Kesavan [5], J.E.M.Rivera [16].

A seguir estabelecemos algumas definições básicas.

Seja $\triangle$ o operador de Laplace em $\mathbb{R}^3$, isto é, $-\triangle u = -D^{(2,2,2)}u$, para $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, então a realização de $-\triangle$:

$$-\triangle : D(-\triangle) \subset L^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$$

com

$$D(-\triangle) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^3) \ / \ -\triangle u \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$$

é um operador autoadjunto. Disso decorre que o operador $-\triangle + m^2$, com $m^2 > 0$ uma constante é autoadjunto. Também $-\triangle + m^2$ é um operador positivo. Logo, existe o operador raiz quadrada positiva de $-\triangle + m^2$, dado pelo cálculo funcional e que representamos por $B = \sqrt{-\triangle + m^2} = (-\triangle + m^2)^{\frac{1}{2}}$ que também é um operador autoadjunto e positivo (ver [17]).

Naturalmente, o operador $B^2 = -\triangle + m^2$ tem domínio dado por :

$$D(B^2) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^3) \ / \ (-\triangle + m^2)u \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$$

$$= \{u \in L^2(\mathbb{R}^3) \ / \ (|\xi|^2 + m^2)\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^3)\} = H^2(\mathbb{R}^3) \ .$$

O domínio do operador B é dado por:

$$D(B) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^3) \ / \ (-\triangle + m^2)^{\frac{1}{2}}u \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$$

$$= \{u \in L^2(\mathbb{R}^3) \ / \ (|\xi|^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^3)\} = H^1(\mathbb{R}^3) \ .$$

Também consideramos neste capítulo o seguinte espaço

$$X = \{(u, v) \in L^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3) \ / \ \|Bu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \infty\} = D(B) \times L^2(\mathbb{R}^3)$$

com a norma:

$$\|(u,v)\|_X^2 = \|Bu\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

Observemos que $D(B)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por $(u,v)_{D(B)} = (Bu, Bv)_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ visto que B é um operador fechado (De fato, B é autoadjunto) e estritamente positivo. Logo, segue que X também é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$((u,v),(u_1,v_1))_X = (Bu, Bu_1)_{L^2(\mathbb{R}^3)} + (v, v_1)_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Neste capítulo o símbolo $\|.\|$ sempre indicará a norma em X e $\|.\|_p$ indicará a norma usual em $L^p(\mathbb{R}^3)$.

Nestas aplicações o operador A que aparece nos Teoremas abstratos do capítulo dois será sempre o operador

$$A = i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -B^2 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & I \\ \triangle - m^2 & 0 \end{pmatrix}$$

sendo I o operador Identidade.

Temos que A é autoadjunto em X com domínio

$$D(A) = \{(u,v) \in X \ / \ u \in D(B^2),\ v \in D(B)\} = D(B^2) \times D(B)$$

Também nas estimativas que serão realizadas diferentes constantes serão representadas pela mesma letra C.

3.2 Equação de Klein-Gordon

Neste primeiro exemplo de aplicação dos resultados do capítulo dois consideramos o problema de Cauchy associado com a equação de Klein-Gordon (mecânica relativística), a saber

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + m^2 u + \lambda |u|^2 u = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3, \ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x) \in H^2(\mathbb{R}^3) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \in H^1(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ é uma constante.

Esse problema é equivalente a

$$\begin{cases} w_t = -iAw + J(w) \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

com

$$w = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} ; \quad A = i \begin{pmatrix} 0 & I \\ \triangle - m^2 & 0 \end{pmatrix} ; \quad J(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda |u|^2 u \end{pmatrix} ; \quad w_0 = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} ,$$

onde a aplicação J deve ser considerada como uma aplicação $J : D(A) \to D(A)$. Isso é um ítem que deverá ser provado.

Nota: Como $A^* = A$, isto é, A é autoadjunto então iA é um operador skew-adjunto e portanto o teorema de Stone (ver apêndice, A. Pazy [11], Reed e Simon [14]) diz que iA gera um grupo C^0 unitário: $T(t) = e^{itA}$, $t \in \mathbb{R}$.

Observação 1: Para $u \in D(B^2)$, usando as propriedades da Transformada de Fourier e o Teorema de Plancharel, temos:

$$||Bu||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = (Bu, Bu)_{L^2(\mathbb{R}^3)} = (B^2 u, u)_{L^2(\mathbb{R}^3)} = ((-\triangle + m^2)u, u)_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$= (-\triangle u, u)_{L^2(\mathbb{R}^3)} + m^2 (u,u)_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + m^2 \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx$$

3.2.1 Existência Local

Para estudar a existência local, primeiro notamos que o dado inicial $w_0 = (\phi, \psi) \in D(A) = H^2(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$. Em segundo lugar notamos que conforme observado no final da secção 2.1 , para aplicarmos o teorema de existência e unicidade de solução local, somente precisamos provar que:

(i) $J(0) = \vec{0}$;

(ii) $J : D(A) \longrightarrow D(A)$;

(iii) $\| J(U) - J(U_1) \| \leq C(\| U \|, \| U_1 \|) \| U - U_1 \|$;

(iv) $\| A(J(U) - J(U_1)) \| \leq C(\| U \|, \| U_1 \|, \| AU \|, \| AU_1 \|) \| AU - AU_1 \|$,

para $U,\ U_1 \in D(A) = D(B^2) \times D(B) = H^2(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$.

Justificativa:

(i) De fato, tem-se que $J(\vec{0}) = (0,0) = \vec{0}$.

(ii) Seja $U = (u, v) \in D(A)$. Então $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ e $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Precisamos provar que $J(U) = (0, -\lambda|u|^2u) \in D(A)$. Isto é, precisamos provar que $-\lambda|u|^2u \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Aqui, em vez de trabalharmos com $|u|^2u$, vamos trabalhar com u^3 pois os cálculos são parecidos.

Temos:

$$(a) \qquad \int_{\mathbb{R}^3} |u^3|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^3} |u|^6 dy \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2\right)^3 < +\infty\ .$$

já que $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ onde a desigualdade acima decorre do corolário (1.2.1)

$$(b) \qquad \int_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial}{\partial x_j} u^3\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \left|3u^2 \frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 dx = 9\int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 dx$$

$$\leq 9\|u\|^4_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 dx < +\infty$$

Na primeira desigualdade acima usamos o lema 1.2.2 , que diz que se $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ então $u \in L^\infty(\mathbb{R}^3))$.

Usando (b) temos:

$$\|\nabla u^3\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^3|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\left|\frac{\partial u^3}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u^3}{\partial x_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial u^3}{\partial x_3}\right|^2 \right) dx < +\infty$$

Logo, para $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$, usando (a) e (b), isto é, usando que

$$\|u^3\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u^3\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} < +\infty$$

concluímos que $u^3 \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Observação 2: Se tivéssemos trabalhado com $|u|^2 u$, teríamos:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(|u|^2 u) = |u^2| \frac{\partial u}{\partial x_j} + 2u|u|\text{sgn}(u)\frac{\partial u}{\partial x_j}$$

$$= |u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_j} + 2|u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_j} = 3|u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

e as majorações em (a) e (b) seriam parecidas. Concluímos que se $U \in D(A)$ então $J(U) \in D(A)$. Portanto, resulta que (ii) é válida.

(iii) Sejam $U = (u, v)$, $U_1 = (u_1, v_1) \in D(A)$. Então:

$$J(U) - J(U_1) = (0, -\lambda(|u|^2 u - |u_1|^2 u_1))$$

Assim:

$$\|J(U) - J(U_1)\|_X =$$

$$= (\|B(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \| -\lambda(|u|^2 u - |u_1|^2 u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)})^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\lambda| \||u|^2 u - |u_1|^2 u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$= |\lambda| \| (u-u_1)(|u|^2 + \overline{u}u_1) + u_1^2(\overline{u} - \overline{u_1}) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq |\lambda| (\| (u-u_1)(|u|^2 + \overline{u}u_1) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \| u_1^2(\overline{u} - \overline{u_1}) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)})$$

$$\leq |\lambda| (\| (u-u_1)|u^2| \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \| (u-u_1)\overline{u}u_1 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \| u_1^2(\overline{u} - \overline{u_1}) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)})$$

$$\leq C|\lambda| (\| \nabla(u-u_1) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| \nabla u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \| \nabla(u-u_1) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| \nabla \overline{u} \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| \nabla u_1 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} +$$

$$+ \| \nabla(\overline{u} - \overline{u_1}) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| \nabla u_1 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2)$$

$$= C|\lambda| \| \nabla(u-u_1) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} (\| \nabla u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \| \nabla u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| \nabla u_1 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \| \nabla u_1 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2)$$

onde a última desigualdade acima decorre do corolário 1.2.3 .

Agora como $\|U\|_X^2 = \|(u,v)\|_X^2 = \|Bu\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$, temos:

$$\|U\|_X \geq \|Bu\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = (\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + m^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2)^{\frac{1}{2}}$$

pela observação 1.

Com isso concluímos que:

$$J(U) - J(U_1) \leq C|\lambda| \|U - U_1\|_X (\|U\|_X^2 + \|U\|_X \|U_1\|_X + \|U_1\|_X^2)$$

$$= C(\|U\|_X, \|U_1\|_X) \|U - U_1\|_X$$

sendo $C(\|U\|_X, \|U_1\|_X)$ crescente em seus argumentos.
Isso justificou a validade da estimativa (iii).

Finalmente, para provar a existência de uma única solução fraca do problema de Cauchy para a equação de Klein-Gordon, resta justificar o ítem:

(iv) Sejam $U = (u, v)$, $U_1 = (u_1, v_1) \in D(A)$. Então

$$A(J(U) - J(U_1)) = i \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - m^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda(|u|^2 u - |u_1|^2 u_1) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -\lambda(|u|^2 u - |u_1|^2 u_1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Com isso temos:

$$\|A(J(U) - J(U_1))\|_X^2 = \|(-i\lambda(|u|^2 u - |u_1|^2 u_1), 0)\|_X^2$$

$$= \|B(-\lambda(|u|^2 u - |u_1|^2 u_1))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = |\lambda|^2 \|B(|u|^2 u - |u_1|^2 u_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \quad (3.1)$$

onde u e $u_1 \in H^2(\mathbb{R}^3)$, pois U e $U_1 \in D(A) = H^2(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$.

Continuando, pela observação 1 resulta que:

$$\|B(|u|^2 u - |u_1|^2 u_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \|(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}}(|u|^2 u - |u_1|^2 u_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(|u|^2 u - |u_1|^2 u_1)|^2 dx + m^2 \int_{\mathbb{R}^3} |(|u|^2 u - |u_1|^2 u_1)|^2 dx \quad (3.2)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^2 u - |u_1|^2 u_1) \right|^2 dx + m^2 \int_{\mathbb{R}^3} ||u|^2 u - |u_1|^2 u_1|^2 dx$$

Precisamos estimar essas duas últimas integrais. Temos:

$$m^2 \int_{\mathbb{R}^3} |(|u|^2 u - |u_1|^2 u_1)|^2 dx = m^2 \| |u|^2 u - |u_1|^2 u_1 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

$$= m^2 \|(u - u_1)|u|^2 + u_1(|u|^2 - |u_1|^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

$$\leq 2m^2 (\|(u - u_1)|u||u|\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|u_1(|u| - |u_1|)(|u| + |u_1|)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2)$$

Como $u,\ u_1 \in H^2(\mathbb{R}^3)$ então $u,\ u_1 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ e também é fácil ver que $|u|,\ |u_1| \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Assim, usando o Corolário 1.2.3 , obtemos:

$$m^2 \int_{\mathbb{R}^3} |(|u|^2 u - |u_1|^2 u_1)|^2 dx \le$$

$$\le Cm^2(\|\nabla(u-u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|\nabla u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(|u|-|u_1|)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(|u|+|u_1|)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)})$$

$$\le Cm^2(\|\nabla(u-u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|\nabla u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(u-u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(|u|+|u_1|)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)})$$

$$\le Cm^2\|\nabla(u-u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}(\|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}(\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}))$$

Agora, lembramos que

$$\|U\|^2_X = \|(u,v)\|^2_X = \|Bu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

e

$$\|A(U)\|^2_X = \|(v,(\Delta - m^2)u)\|^2_X = \|Bv\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|(\Delta - m^2)u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ .$$

Então

$$\|U\|^2_X \ge \|Bu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + m^2\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

e

$$\|A(U)\|^2_X \ge \|(\Delta - m^2)u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\Delta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + m^4\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - 2(\Delta u, m^2 u)_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$= \|\Delta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + m^4\|u\|^2_{L(\mathbb{R}^3)} + 2m^2\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Portanto

$$m^2 \int_{\mathbb{R}^3} |(|u|^2 u - |u_1|^2 u_1)|^2 dx \le C\|A(U-U_1)\|^2_X(\|U\|^4_X + \|U_1\|^2_X\|U\|^2_X + \|U_1\|^4_X)$$

$$= C(\|U\|_X, \|U_1\|_X)\|A(U-U_1)\|^2_X$$

sendo $C(\|U\|_X, \|U_1\|_X)$ crescente em seus argumentos (como se requer nos teoremas de existência do capítulo 2). Com isso temos que

$$m^2 \int_{\mathbb{R}^3} |(|u|^2u - |u_1|^2u_1)|^2 dx \leq C(\|U\|_X, \|U_1\|_X)\|A(U - U_1)\|_X^2 \tag{3.3}$$

Agora vamos estimar

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^2u - |u_1|^2u_1) \right|^2 dx = \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^2u - |u_1|^2u_1) \right|^2 dx$$

Para tanto precisamos majorar adequadamente

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^2u - |u_1|^2u_1) \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \left| 3|u|^2\frac{\partial u}{\partial x_i} - 3|u_1|^2\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^2 dx = 9 \int_{\mathbb{R}^3} \left| |u|^2\frac{\partial u}{\partial x_i} - |u_1|^2\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^2 dx$$

para $i = 1,\ 2,\ 3$.
Agora, desde que $|u|^2\frac{\partial u}{\partial x_i} - |u_1|^2\frac{\partial u_1}{\partial x_i} = (\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u_1}{\partial x_i})|u|^2 + (|u|^2 - |u_1|^2)\frac{\partial u_1}{\partial x_i}$.
Se obtém

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| |u|^2\frac{\partial u}{\partial x_i} - |u_1|^2\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right)|u|^2 + (|u|^2 - |u_1|^2)\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^2 dx$$

$$\leq 2\int_{\mathbb{R}^3} \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right)|u|^2 \right|^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}^3} \left| (|u|^2 - |u_1|^2)\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^2 dx$$

$$= 2\left\| \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right)|u|^2 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\left\| (|u| - |u_1|)(|u| + |u_1|)\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

Como u e $u_1 \in H^2(\mathbb{R}^3)$ então $u,\ u_1,\ \frac{\partial u}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \in H^1(\mathbb{R}^3)$, para $i = 1,\ 2,\ 3$. Assim, usando o corolário 1.2.3 obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| |u|^2\frac{\partial u}{\partial x_i} - |u_1|^2\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^2 dx \leq$$

$$\leq C((\|\nabla(\frac{\partial(u - u_1)}{\partial x_i})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2)^2 + (\|\nabla(u-u_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(|u|+|u_1|)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)})^2)$$

para $i = 1,\ 2,\ 3$.

Agora, pelo teorema de Plancharel temos

$$\left\|\nabla \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} \left|\nabla \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \left|\widehat{\nabla (\frac{\partial u_1}{\partial x_i})}\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|_i^2 \xi^2 |\widehat{u_1}|^2 d\xi$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^4 |\widehat{u_1}|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} (|\xi|^2 |\widehat{u_1}|)^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{-\triangle u_1}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\triangle u_1|^2 dx = \|\triangle u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Assim, para $i = 1,\ 2,\ 3$ vamos ter:

$$\left\|\nabla \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\triangle u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \ .$$

Do mesmo modo se obtém que

$$\left\|\nabla \left(\frac{\partial (u - u_1)}{\partial x_i}\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\triangle (u - u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \ .$$

Usando esses resultados

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| |u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} - |u_1|^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^2 dx \leq$$

$$\leq C((\|\triangle (u-u_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)})^2 + (\|\nabla (u-u_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla (|u|+|u_1|)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\triangle u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)})^2)$$

$$\leq C(\|\triangle (u - u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)} +$$

$$+ \|\nabla (u - u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} (\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}) \|\triangle u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)})$$

Como

$$\|U\|^2_X \geq \|Bu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + m^2 \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

e

$$\|A(U)\|^2_X \geq \|(\triangle - m^2) u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\triangle u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + m^4 \|u\|^2_{L(\mathbb{R}^3)} - 2(\triangle u, m^2 u)_{L(\mathbb{R}^3)}$$

$$= \|\triangle u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + m^4\|u\|^2_{L(\mathbb{R}^3)} + 2m^2\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

então segue que:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| |u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} - |u_1|^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^2 dx \le$$

$$\le C\|A(U-U_1)\|^2_X(\|U\|^4_X + \|AU_1\|^2_X(\|U\|^2_X + \|U_1\|^2_X))$$

$$= C(\|U\|_X, \|U_1\|_X, \|AU_1\|_X)\|A(U-U_1)\|^2_X$$

Agora, como

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^2 u - |u_1|^2 u_1) \right|^2 dx = 9 \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| |u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} - |u_1|^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^2 dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| |u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} - |u_1|^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right|^2 dx \le C(\|U\|_X, \|U_1\|_X, \|AU_1\|_X)\|A(U-U_1)\|^2_X$$

para $i = 1,\ 2,\ 3$; concluímos que:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} |\frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^2 u - |u_1|^2 u_1)|^2 dx \le C(\|U\|_X, \|U_1\|_X, \|AU_1\|_X)\|A(U-U_1)\|^2_X \quad (3.4)$$

Combinando as estimativas (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) resulta a validade do ítem (iv)

Consequentemente, todas as hipóteses do Teorema de Existência Local são válidas para o sistema:

$$\begin{cases} w_t = -iAw + J(w) \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

o qual é equivalente ao problema de Cauchy associado a equação de Klein-Gordon.

De fato, a solução $w(t)$, pelo Teorema de Existência Local, está na classe

$$C([0,T); D(A)) \cap C^1([0,T); X)$$

para algum $T > 0$ suficientemente pequeno.

Portanto, a solução $u(t) = w_1(t)$, sendo w_1 a primeira componente de w, está na classe

$$C^2([0,T); L^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0,T); H^1(\mathbb{R}^3)) \cap C([0,T); H^2(\mathbb{R}^3)) \ .$$

Assim, o Problema de Cauchy para a equação de Klein-Gordon, com dados iniciais em $H^2(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$, possui uma única solução local forte.

3.2.2 Existência Global

Vamos verificar a existência de solução global forte. Como já temos uma única solução local forte, para verificarmos a existência de uma solução global forte precisamos provar ainda os seguintes ítens:

(v) $\|AJ(w)\|_X \leq C(\|w\|_X)\|A(w)\|_X$;
para todo $w \in D(A)$
(vi) $\|w(t)\|$ é limitada em todo intervalo $[0,T)$, onde a solução existe.

Prova de (v):

Seja $w = (u,v) \in D(A)$. Como $J(w) = (0, -\lambda|u^2|u)$ e $AJ(w) = i(-\lambda|u^2|u, 0)$ então

$$\|AJ(w)\|_X^2 = \|(-\lambda|u|^2u, 0)\|_X^2 = \|B(-\lambda|u^2|u)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = |\lambda|^2\|B(|u^2|u)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

onde $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ pois $w = (u,v) \in D(A) = H^2(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$.

Precisamos estimar

$$\|B(|u|^2u)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \|(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}}|u|^2u\|_{L^2\mathbb{R}^3}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(|u|^2u)|^2dx + m^2 \int_{\mathbb{R}^3} ||u|^2u|^2dx$$

Primeiro vamos estimar $m^2 \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} ||u|^2u|^2dx$. Como $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ podemos usar o corolário 1.2.3 . Com isso temos:

$$m^2 \int_{\mathbb{R}^3} ||u|^2 u|^2 dx = m^2 \|uuu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq m^2 C \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Mas, como

$$\|w\|_X \geq \|Bu\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = (\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + m^2 \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)})^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\|A(w)\|^2_X \geq \|(\Delta - m^2)u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\Delta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + m^4 \|u\|^2_{L(\mathbb{R}^3)} - 2 < \Delta u, m^2 u >$$

$$= \|\Delta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + m^4 \|u\|^2_{L(\mathbb{R}^3)} + 2m^2 \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

segue que

$$m^2 \int_{\mathbb{R}^3} ||u|^2 u|^2 dx \leq C \|A(w)\|^2_X (\|w\|^2_X)^2 = C(\|w\|_X) \|Aw\|^2_X \, .$$

Vamos estimar

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(|u|^2 u)|^2 dx = \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial}{\partial x_i}(|u|^2 u) \right|^2 dx = \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| 3|u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \, .$$

Como $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ então $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\mathbb{R}^3)$ e assim, usando novamente o corolário 1.2.3 e o teorema de Plancharel obtemos (ver prova do ítem (iv) na parte da existência local)

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| |u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx = \left\| |u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C(\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)})^2 = (**)$$

Observando que

$$\|w\|_X \geq (\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

e

$$\|A(w)\|^2_X \geq \|\Delta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| |u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \leq C\|A(w)\|_X^2(\|w\|_X^2)^2 = C(\|w\|_X)\|A(w)\|_X^2$$

Assim, usando o fato que

$$m^2 \int_{\mathbb{R}^3} | \, |u|^2 u|^2 dx \leq C(\|w\|_X)\|A(w)\|_X^2$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(|u|^2 u)|^2 dx \leq C(\|w\|_X)\|A(w)\|_X^2$$

temos que

$$\|AJ(w)\|_X^2 \leq C(\|w\|_X)\|A(w)\|_X^2 + C(\|w\|_X)\|A(w)\|_X^2 \, .$$

Isto é

$$\|AJ(w)\|_X \leq C(\|w\|)\|A(w)\|$$

Logo, o ítem (v) está provado.

Prova de (vi):

Fazemos a seguinte observação.

Observação 3: Observamos que não foi exigido que $\lambda > 0$, mas notamos que só é possível provar (vi) para $\lambda > 0$.

Para provar a limitação da solução usamos o método da energia. A energia para a equação de Klein-Gordon é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + u_t^2 + m^2 u^2)dx + \frac{\lambda}{4}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 dx$$

para todo t no intervalo de existência $[0, T)$ (pode ter $T = +\infty$) .

É fácil ver que

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0$$

no intervalo de existência.

Portanto,

$$E(t) = \text{constante} = E(0)$$

no intervalo de existência.

Assim,

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (|Bu|^2 + u_t^2)dx + \frac{\lambda}{4}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 dx = E(0) \ .$$

Desde que $\lambda > 0$ tem-se :

$$E(0) = E(t) \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (|Bu|^2 + u_t^2)dx = \frac{1}{2}(\|Bu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}) = \frac{1}{2}\|w\|^2_X$$

no intervalo de existência.

Portanto

$$\|w\|^2_X \leq \text{constante}$$

. Assim, também o ítem (vi) está provado.

Com isso, concluímos que o problema de Cauchy para a equação de Klein-Gordon possui única solução global forte.

3.3 Equação de Seno-Gordon

Agora consideramos como um segundo exemplo para aplicar o Teorema Abstrato de Segal de existência de soluções, o seguinte problema de valor inicial associado a equação de Seno-Gordon:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m^2 u + \lambda \text{sen} u = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3, \ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x) \in H^2(\mathbb{R}^3) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \in H^1(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

Tomando:

$$w = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}; \quad A = i \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - m^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad J(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda \text{sen} u \end{pmatrix}; \quad w_0 = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

temos que o problema acima é equivalente ao problema:

$$\begin{cases} w_t = -iAw + J(w) \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

Neste exemplo também consideramos os seguintes espaços:

$$X = D(B) \times L^2(\mathbb{R}^3)$$
$$D(A) = H^2(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$$

onde $B = (-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}}$.

Para pôr este problema nas condições do teorema de existência e unicidade de soluções locais precisamos provar que:

(i) $J(0) = \vec{0}$;

(ii) $J : D(A) \longrightarrow D(A)$;

(iii) $\| J(U) - J(U_1) \| \leq C(\| U \|, \| U_1 \|) \| U - U_1 \|$;

(iv) $\| A(J(U) - J(U_1)) \| \leq C(\| U \|, \| U_1 \|, \| AU \|, \| AU_1 \|) \| AU - AU_1 \|$.

Verificação das Condições $(i) \cdots (iv)$**:**

(i) $J(0,0) = (0, -\lambda \text{sen} 0) = (0,0)$

(ii) Seja $U = (u,v) \in D(A)$ então temos que $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ e $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Precisamos provar que $J(U) = (0, -\lambda \text{sen} u) \in D(A)$. Isto é, devemos mostrar que se $\text{sen} u \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Para isso, basta provar que $\text{sen} u$ e $\nabla(\text{sen} u)$ são funções de $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Para ver isso é suficiente mostrar que:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\text{sen}u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

e

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \text{sen}u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \ .$$

Mas,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\text{sen}u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

pois $u \in H^2(\mathbb{R}^3) \subset L^2(\mathbb{R}^3)$.

Também

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\text{sen}u\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos u\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Então

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \text{sen}u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

pois $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in H^1(\mathbb{R}^3) \subset L^2(\mathbb{R}^3)$.

Assim, $\text{sen}u \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

(iii) Sejam $U = (u, v)$ e $U_1 = (u_1, v_1) \in D(A)$. Então

$$J(U) - J(U_1) = (0, -\lambda(\text{sen}u - \text{sen}u_1)) \ .$$

Assim:

$$\|J(U) - J(U_1)\|_X^2 = \|(0, -\lambda(\text{sen}u - \text{sen}u_1))\|_X^2 = \| - \lambda(\text{sen}u - \text{sen}u_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

$$= |\lambda|^2 \|\text{sen}u - \text{sen}u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq |\lambda|^2 \|u - u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq |\lambda|^2 \frac{1}{m^2} \|U - U_1\|^2_X$$

A última desigualdade acima é válida, pois:

$$\|u - u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \frac{1}{m^2} \|u - u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} m^2 \leq \frac{1}{m^2} (m^2 \|u - u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla(u - u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)})$$

$$= \frac{1}{m^2} \|B(u - u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{m^2} \|U - U_1\|^2_X \; .$$

Com isso verificamos que

$$\|J(U) - J(U_1)\|_X \leq C \|U - U_1\|_X$$

(iv) Para $U = (u, v)$ e $U_1 = (u_1, v_1) \in D(A)$ temos:

$$A(J(U) - J(U_1)) = A(0, -\lambda(\text{sen}u - \text{sen}u_1)) = -i\lambda(\text{sen}u - \text{sen}u_1, 0)$$

Então:

$$\|A(J(U) - J(U_1))\|_X = \| - i\lambda(\text{sen}u - \text{sen}u_1, 0)\|_X = |\lambda| \|B(\text{sen}u - \text{sen}u_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$= |\lambda| \|(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}} (\text{sen}u - \text{sen}u_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \; .$$

Já vimos que para $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$

$$\|Bu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + m^2 \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx \; .$$

Portanto

$$\|(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}} (\text{sen}u - \text{sen}u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\text{sen}u - \text{sen}u_1)|^2 dx + m^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\text{sen}u - \text{sen}u_1|^2 dx \; .$$

Precisamos majorar $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(\text{sen}u-\text{sen}u_1)\right|^2 dx$, para $i=1,\ 2,\ 3$.

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(\text{sen}u-\text{sen}u_1)\right|^2 dx=\int_{\mathbb{R}^3}\left|\text{cos}u\frac{\partial u}{\partial x_i}-\text{cos}u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|^2 dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^3}\left|\text{cos}u\frac{\partial(u-u_1)}{\partial x_i}+(\text{cos}u-\text{cos}u_1)\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|^2 dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^3}\left|\text{cos}u\frac{\partial(u-u_1)}{\partial x_i}+\left(-2\text{sen}\left(\frac{u+u_1}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|^2 dx$$

$$\leq\int_{\mathbb{R}^3}\left(2\left|\frac{\partial(u-u_1)}{\partial x_i}\right|^2+2\left|\left(-2\text{sen}\left(\frac{u+u_1}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|^2\right)dx$$

onde a desigualdade é devido ao fato que $|a+b|^2\leq 2|a|^2+2|b|^2$ para a e b números reais.

Continuando, obtemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(\text{sen}u-\text{sen}u_1)\right|^2 dx\leq$$

$$\leq 2\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial(u-u_1)}{\partial x_i}\right|^2 dx+2\int_{\mathbb{R}^3}4\left|\frac{u+u_1}{2}\right|^2\left|\frac{u-u_1}{2}\right|^2\left|\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|^2 dx$$

$$=2\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial(u-u_1)}{\partial x_i}\right|^2 dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|^2|u+u_1|^2|u-u_1|^2dx$$

$$\leq 2\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial(u-u_1)}{\partial x_i}\right|^2 dx+C\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla(u+u_1)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla(u-u_1)|^2dx\right)$$

onde a última majoração decorre do corolário 1.2.3 , que pode ser usado uma vez que u e $u_1\in H^2(\mathbb{R}^3)$.

Agora, pelo teorema de Plancharel temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|^2 dx=\int_{\mathbb{R}^3}\left|\widehat{\nabla\frac{\partial u_1}{\partial x_i}}\right|^2 dx=\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^2\xi_i^2|\widehat{u_1(\xi_i)}|^2d\xi$$

$$\leq\int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^4|\widehat{u_1}|^2d\xi=\int_{\mathbb{R}^3}|\widehat{-\triangle u_1}|^2dx=\int_{\mathbb{R}^3}|\triangle u_1|^2dx\ .$$

Concluímos então que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial}{\partial x_i}(\text{sen}u - \text{sen}u_1) \right|^2 dx \leq$$

$$\leq 2 \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial (u-u_1)}{\partial x_i} \right|^2 dx + C \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\Delta u_1|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla (u+u_1)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla (u-u_1)|^2 dx \right)$$

para $i = 1,\ 2,\ 3$.

Então

$$\|\nabla(\text{sen}u - \text{sen}u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \left\| \left(\frac{\partial(\text{sen}u - \text{sen}u_1)}{\partial x_1}, \frac{\partial(\text{sen}u - \text{sen}u_1)}{\partial x_2}, \frac{\partial(\text{sen}u - \text{sen}u_1)}{\partial x_3} \right) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$= \left\| \frac{\partial(\text{sen}u - \text{sen}u_1)}{\partial x_1} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial(\text{sen}u - \text{sen}u_1)}{\partial x_2} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \left\| \frac{\partial(\text{sen}u - \text{sen}u_1)}{\partial x_3} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq \|\nabla(u-u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} (C + C\|\Delta u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla(u+u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)})$$

$$\leq \|\nabla(u-u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} (C + C\|\Delta u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} (\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)})) .$$

Portanto

$$\|\nabla(\text{sen}u - \text{sen}u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + m^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\text{sen}u - \text{sen}u_1|^2 dx \leq$$

$$\leq \|\nabla(u-u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} (C + C\|\Delta u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} (\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)})) + m^2 \int_{\mathbb{R}^3} |u-u_1|^2 dx$$

$$\leq \|\nabla(u-u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} (C + C\|\Delta u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} (\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)})) + m^2 \|u-u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Note que

$$\|A(U)\|^2_X = \|(v, (\Delta - m^2)u)\|^2_X = \|Bv\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|(\Delta - m^2)u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} .$$

Daí segue que

$$\|A(U)\|^2_X \geq \|(-\Delta + m^2)u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|-\Delta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + m^4 \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2(-\Delta u, m^2 u)_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$= \|-\Delta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + m^4 \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2m^2 \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Então obtemos que

$$\|A(J(U)-J(U_1))\|_X =$$

$$= |\lambda|(\|\nabla(\text{sen}u - \text{sen}u_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + m^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\text{sen}u - \text{sen}u_1|^2 dx)$$

$$\leq \|A(U-U_1)\|^2_X (C + C\|A(U_1)\|^2_X(\|AU\|^2_X + \|AU_1\|^2_X))$$

$$\leq C(\|AU\|_X, \|AU_1\|_X)\|A(U-U_1)\|^2_X$$

onde a constante C é crescente em seus argumentos.

A verificação do ítem (iv) agora está completa.

Tendo verificado as quatro condições nescessárias, o teorema de existência local diz que a equação

$$w_t(t) = -iAw(t) + J(w(t))$$

possui única solução $w = (u, u_t)$, com $w \in C(0,T; D(A)) \cap C^1(0,T;X)$, satisfazendo $w(0) = w_0 = (\phi, \psi)$.

Como $D(A) = H^2(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$ e $X = H^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ concluimos que o problema de Cauchy para a equação de Seno-Gordon possui uma unica solução local na classe

$$C^2(0,T; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(0,T; H^1(\mathbb{R}^3)) \cap C(0,T; H^2(\mathbb{R}^3))$$

para algum $T > 0$ (solução forte).

Queremos provar a existência de uma única solução global forte. Para isso precisamos ainda provar os dois itens a seguir:

(v) $\|AJ(U)\|_X \leq C(\|U\|_X)\|A(U)\|_X$, para $U \in D(A)$;

(vi) $\|w(t)\|_X$ é limitado em todo intervalo $[0,T)$, onde a solução $w(t)$ existe.

Note que (v) não pode ser obtida de (iv) pois a constante em (v) precisa depender somente de $||U||_X$.

Observação: Para verificar (vi) não podemos usar o método da energia. De fato, para a equação Seno-Gordon a energia $E(t)$ é dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int(|\nabla u|^2 + u_t^2 + m^2u^2)dx + \frac{\lambda}{2}\int \cos u dx = \text{constante} = E(0) \ .$$

Como o termo $\frac{\lambda}{2}\int \cos u dx$ não tem sinal definido. Então, por exemplo, não podemos afirmar que

$$\frac{1}{2}\int(|\nabla u|^2 + u_t^2 + m^2u^2)dx \leq E(0)$$

para provar o ítem (vi).

Então, para provar (vi) usamos o fato que

$$w(t) = T(t)w_0 + \int_0^t T(t-s)J(w)ds$$

onde $T(t)$ é gerado pelo operador iA.

Daí obtemos que

$$||w(t)|| \leq ||w_0|| + \int_0^t ||J(w)||ds$$

pois $T(t)$ é unitário. Agora para $w = (u, u_t)$, lembrando que $J(w) = (0, -\lambda \text{sen} u)$, segue que:

$$||J(w)||_X = ||\lambda \text{sen} u||_{L^2(\mathbb{R}^3)} = |\lambda|||\text{sen} u||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq |\lambda|||u||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq |\lambda|||w||_X \ .$$

Portanto

$$||w(t)|| \leq ||w_0|| + |\lambda|\int_0^t ||w||ds \ .$$

Finalmente, usando a conhecida desigualdade de Gronwall, obtemos que

$$\|w(t)\| = \|w_0\|e^{|\lambda|t} \leq \|w_0\|e^{|\lambda|T} = \text{constante(T)} .$$

Logo, o ítem (vi) é válido.

Prova de (v)**:** Seja $U \in D(A)$. Então

$$J(U) = (0, -\lambda \text{sen} u) \quad \text{para} \quad U = (u, u_1) .$$

Assim:

$$AJ(U) = A(0, -\lambda \text{sen} u) = i(-\lambda \text{sen} u, 0) .$$

Então

$$\|AJ(U)\|_X^2 = \|B(-\lambda \text{sen} u)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \|(-\triangle + m^2)^{\frac{1}{2}}(-\lambda \text{sen} u)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

$$= |\lambda|^2 \|(-\triangle + m^2)^{\frac{1}{2}} \text{sen} u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = |\lambda|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\text{sen} u)|^2 dx + m^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\text{sen} u|^2 dx \right)$$

$$= |\lambda|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^{3} \left| (\cos u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx + m^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\text{sen} u|^2 dx \right)$$

$$\leq |\lambda|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + m^2 \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx \right)$$

$$= |\lambda|^2 \|Bu\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq |\lambda|^2 \frac{1}{m^2} \|AU\|_X^2 = C\|AU\|_X^2$$

com C uma constante positiva independente de U.

Concluimos então que o problema de valor inicial para a equação Seno-Gordon possui única solução $u \in C^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^2(\mathbb{R}; H^2(\mathbb{R}^3))$ (solução global forte).

3.4 Sistema acoplado de Klein-Gordon

Nesta secção consideramos o seguinte sistema acoplado de Klein-Gordon:

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + m^2 u + uv^2 = 0 & , \ x \in \mathbb{R}^3, \ t \in \mathbb{R} \\ v_{tt} - \triangle v + \sigma^2 v + vu^2 = 0 & , \ x \in \mathbb{R}^3, \ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi_1(x) \in H^2(\mathbb{R}^3) \\ u_t(x,0) = \varphi_2(x) \in H^1(\mathbb{R}^3) \\ v(x,0) = \psi(x) \in H^2(\mathbb{R}^3) \\ v_t(x,0) = \psi(x) \in H^1(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

Nosso objetivo é provar que este sitema possui uma única solução global forte $(u,\ v) \in C^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap C(\mathbb{R}; H^2(\mathbb{R}^3)) \times C^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap C(\mathbb{R}; H^2(\mathbb{R}^3))$. Escrevendo :

$$w = \begin{pmatrix} u \\ u_t \\ v \\ v_t \end{pmatrix} ; \ A = i \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \triangle - m^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & \triangle - m^2 & 0 \end{pmatrix} ; \ J(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ -uv^2 \\ 0 \\ -vu^2 \end{pmatrix} ; \ w_0 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

temos que o sistema acima é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} w_t = -iAw + J(w) \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

Aqui consideramos o espaço:

$$X = H^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$$

com a norma

$$\|(u_1, u_2, u_3, u_4)\|_X^2 = \|u_1\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 + \|u_2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|u_3\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 + \|u_4\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

para um elemento $U = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in X$.

O operador A tem domínio dado por

$$D(A) = H^2(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3) \times H^2(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3) \ .$$

Observação: No espaço X prova-se que $A^* = A$. Então, pelo Teorema de Stone (ver Apêndice e/ou Pazy [11]), A gera um grupo C^0-unitário $T(t)_{t\in\mathbb{R}}$ tal que $\dfrac{dT(t)}{dt} = AT(t)$.

Vamos agora verificar as hipóteses que garantem a existência e unicidade local de solução forte para o sistema acoplado de Klein-Gordon. Assim, precisamos verificar os quatro itens que seguem:

(i) $J(0) = \vec{0}$;

(ii) $J : D(A) \longrightarrow D(A)$;

(iii) $\| J(U) - J(U_1) \| \leq C(\| U \|, \| U_1 \|) \| U - U_1 \|$;

(iv) $\| A(J(U) - J(U_1)) \| \leq C(\| U \|, \| U_1 \|, \| AU \|, \| AU_1 \|) \| AU - AU_1 \|$,

para $U,\ U_1 \in D(A)$

Verificação:

(i) $\quad J(0) = (0,0,0,0) = \overrightarrow{0}$

(ii) $\quad$ Seja $U = (u_1, u_2, v_1, v_2) \in D(A)$ então $u_1,\ v_1 \in H^2(\mathbb{R}^3)$ e $u_2,\ v_2 \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Precisamos mostrar que $J(U) = (0, -u_1v_1^2, 0, -v_1u_1^2) \in D(A)$, isto é, precisamos mostrar que $u_1v_1^2$ e $v_1u_1^2 \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Pelo lema 1.2.2 temos que se $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ então $u \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Aqui, como $u_1,\ v_1 \in H^2(\mathbb{R}^3)$ então obtemos que:

$$||u_1v_1^2||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} |u_1v_1^2|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |u_1|^2|v_1|^4 dx$$

$$\leq ||v_1||^4_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} |u_1|^2 dx = ||v_1||^4_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} ||u_1||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} < +\infty$$

Logo $u_1v_1^2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Agora precisamos mostrar que $\nabla(u_1v_1^2) \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Para isso calculamos

$$\left\|\frac{\partial(u_1v_1^2)}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}(u_1v_1^2)\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3}\left|u_1 2v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_j} + v_1^2\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right|^2 dx$$

$$\leq C\|u_1\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\|v_1\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial v_1}{\partial x_j}\right|^2 dx + C\|v_1\|^4_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right|^2 dx$$

$$\leq C\|u_1\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\|v_1\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\left\|\frac{\partial v_1}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C\|v_1\|^4_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\left\|\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} < +\infty$$

para $j = 1,\ 2,\ 3$; pois u_1 e $v_1 \in H^2(\mathbb{R}^3)$.

Agora, como

$$\|\nabla(u_1v_1^2)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \left\|\frac{\partial(u_1v_1^2)}{\partial x_1}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial(u_1v_1^2)}{\partial x_2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial(u_1v_1^2)}{\partial x_3}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Então

$$\|\nabla(u_1v_1^2)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} < +\infty\ .$$

Com isso $u_1v_1^2 \in H^1(\mathbb{R}^3)$. De forma análoga mostra-se que $v_1u_1^2 \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Portanto vale a condição (ii), isto é, $J : D(A) \longrightarrow D(A)$.

(iii) Sejam $\phi = (u_1, u_2, v_1, v_2)$, $\psi = (\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2}, \widetilde{v_1}, \widetilde{v_2}) \in D(A)$. Queremos mostrar que

$$\|J(\phi) - J(\psi)\|_X \leq C(\|\phi\|_X, \|\psi\|_X)\|\phi - \psi\|_X\ .$$

Temos

$$J(\phi) - J(\psi) = (0, -u_1v_1^2 + \widetilde{u_1}\widetilde{v_1}^2, 0, -v_1u_1^2 + \widetilde{v_1}\widetilde{u_1}^2)\ .$$

Assim

$$\|J(\phi) - J(\psi)\|^2_X = \|(0, -u_1v_1^2 + \widetilde{u_1}\widetilde{v_1}^2, 0, -v_1u_1^2 + \widetilde{v_1}\widetilde{u_1}^2)\|^2_X$$

$$= \|u_1v_1^2 - \widetilde{u_1}\widetilde{v_1}^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|v_1u_1^2 - \widetilde{v_1}\widetilde{u_1}^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

Precisamos estimar $\|u_1v_1^2 - \widetilde{u_1}\widetilde{v_1}^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$ e $\|v_1u_1^2 - \widetilde{v_1}\widetilde{u_1}^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$.

Temos que:

$$\|u_1v_1^2 - \widetilde{u_1}\widetilde{v_1}^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|(u_1 - \widetilde{u_1})v_1^2 + \widetilde{u_1}(v_1^2 - \widetilde{v_1}^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq \|(u_1 - \widetilde{u_1})v_1^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\widetilde{u_1}(v_1^2 - \widetilde{v_1}^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Agora, usando o corolário 1.2.3 que diz que se $w_1,\ w_2,\ w_3 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ então $w_1w_2w_3 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e $\|w_1w_2w_3\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\nabla w_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla w_2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla w_3\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, temos que:

$$\|u_1v_1^2 - \widetilde{u_1}\widetilde{v_1}^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq$$

$$\leq C\|\nabla(u_1-\widetilde{u_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C\|\nabla\widetilde{u_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(v_1-\widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(v_1+\widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq C\|\phi - \psi\|_X(\|\nabla v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\nabla\widetilde{u_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}(\|\nabla(v_1 + \widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}))$$

$$\leq C\|\phi - \psi\|_X(\|\nabla v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\nabla\widetilde{u_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}(\|\nabla v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla\widetilde{v_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}))$$

$$\leq C\|\phi - \psi\|_X(\|\phi\|_X^2 + \|\psi\|_X(\|\phi\|_X + \|\psi\|_X))$$

Note que para ϕ e $\psi \in D(A)$ $\phi - \psi = (u_1 - \widetilde{u_1}, u_2 - \widetilde{u_2}, v_1 - \widetilde{v_1}, v_2 - \widetilde{v_2})$. Então $\|\phi - \psi\|_X \geq \|u_1 - \widetilde{u_1}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}$ e $\|\phi - \psi\|_X \geq \|v_1 - \widetilde{v_1}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}$. Além disso, $\|\phi\|_X \geq \|u_1\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}$, $\|\phi\|_X \geq \|v_1\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}$, $\|\psi\|_X \geq \|\widetilde{u_1}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}$ e $\|\psi\|_X \geq \|\widetilde{v_1}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}$. Como $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} = (\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2)^{\frac{1}{2}} \geq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, então as desigualdades acima estão justificadas.

Assim, temos obtido que

$$\|u_1v_1^2 - \widetilde{u_1}\widetilde{v_1}^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C(\|\phi\|_X, \|\psi\|_X)\|\phi - \psi\|_X .$$

De forma semelhante temos que

$$\|v_1 u_1^2 - \widetilde{v_1}\widetilde{u_1}^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C(\|\phi\|_X, \|\psi\|_X)\|\phi - \psi\|_X$$

Concluimos então que

$$\|J(\phi) - J(\psi)\|_X \leq C(\|\phi\|_X, \|\psi\|_X)\|\phi - \psi\|_X$$

Assim fica provado o ítem (iii).

(iv) Para verificar este item, sejam $\phi = (u_1, u_2, v_1, v_2)$, $\psi = (\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2}, \widetilde{v_1}, \widetilde{v_2}) \in D(A)$ temos

$$A(J(\phi) - J(\psi)) =$$

$$= i \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \Delta - m^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & \Delta - m^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -u_1 v_1^2 + \widetilde{u_1}\widetilde{v_1}^2 \\ 0 \\ -v_1 u_1^2 + \widetilde{v_1}\widetilde{u_1}^2 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -u_1 v_1^2 + \widetilde{u_1}\widetilde{v_1}^2 \\ 0 \\ -v_1 u_1^2 + \widetilde{v_1}\widetilde{u_1}^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Então

$$\|A(J(\phi) - J(\psi))\|_X^2 = \|u_1 v_1^2 - \widetilde{u_1}\widetilde{v_1}^2\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 + \|v_1 u_1^2 - \widetilde{v_1}\widetilde{u_1}^2\|\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2$$

$$= \|u_1 v_1^2 - \widetilde{u_1}\widetilde{v_1}^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\nabla(u_1 v_1^2 - \widetilde{u_1}\widetilde{v_1}^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|v_1 u_1^2 - \widetilde{v_1}\widetilde{u_1}^2\|\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\nabla(v_1 u_1^2 - \widetilde{v_1}\widetilde{u_1}^2)\|\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

Mas, em (iii) já temos estimado que

$$\|u_1 v_1^2 - \widetilde{u_1}\widetilde{v_1}^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|v_1 u_1^2 - \widetilde{v_1}\widetilde{u_1}^2\|\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq$$

$$\leq C\|\nabla(u_1 - \widetilde{u_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C\|\nabla\widetilde{u_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(v_1 - \widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(v_1 + \widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} +$$

$$+C\|\nabla(v_1-\widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}+C\|\nabla\widetilde{v_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(u_1-\widetilde{u_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(u_1+\widetilde{u_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Como

$$A(\phi-\psi)=(u_2-\widetilde{u_2},(\Delta-m^2)(u_1-\widetilde{u_1}),v_2-\widetilde{v_2},(\Delta-\sigma^2)(v_1-\widetilde{v_1}))$$

então, em particular, vale que

$$\|A(\phi-\psi)\|_X\geq\|(\Delta-m^2)(u_1-\widetilde{u_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|(\Delta-\sigma^2)(v_1-\widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$\geq C\|u_1-\widetilde{u_1}\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}+C\|v_1-\widetilde{v_1}\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}$$

sendo C uma constante que depende dos coeficientes que depende de m^2 e σ^2 .

Daí podemos concluir que

$$\|u_1v_1^2-\widetilde{u_1}\widetilde{v_1}^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|v_1u_1^2-\widetilde{v_1}\widetilde{u_1}^2\||_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leq$$

$$\leq C(\|\phi\|_X,\|\psi\|_X)\|A\phi-A\psi\|_X\ .$$

Agora, precisamos estimar $\|\nabla(u_1v_1^2-\widetilde{u_1}\widetilde{v_1}^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$.

Temos

$$\|\frac{\partial}{\partial x_j}(u_1v_1^2-\widetilde{u_1}\widetilde{v_1}^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}=\|\frac{\partial}{\partial x_j}((u_1-\widetilde{u_1})v_1^2+\widetilde{u_1}(v_1^2-\widetilde{v_1}^2))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq\|\frac{\partial}{\partial x_j}((u_1-\widetilde{u_1})v_1^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|\frac{\partial}{\partial x_j}(\widetilde{u_1}(v_1^2-\widetilde{v_1}^2))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$=\|v_1^2\frac{\partial}{\partial x_j}(u_1-\widetilde{u_1})+2v_1(\frac{\partial}{\partial x_j}v_1)(u_1-\widetilde{u_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+$$

$$+\|(v_1-\widetilde{v_1})(v_1+\widetilde{v_1})\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{u_1}+\widetilde{u_1}(v_1+\widetilde{v_1})\frac{\partial}{\partial x_j}(v_1-\widetilde{v_1})+\widetilde{u_1}(v_1-\widetilde{v_1})\frac{\partial}{\partial x_j}(v_1+\widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq\|v_1^2\frac{\partial}{\partial x_j}(u_1-\widetilde{u_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|2v_1(\frac{\partial}{\partial x_j}v_1)(u_1-\widetilde{u_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+$$

$$+\|(v_1-\widetilde{v_1})(v_1+\widetilde{v_1})\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{u_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|\widetilde{u_1}(v_1+\widetilde{v_1})\frac{\partial}{\partial x_j}(v_1-\widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\|\widetilde{u_1}(v_1-\widetilde{v_1})\frac{\partial}{\partial x_j}(v_1+\widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

para $j = 1,\ 2,\ 3$.

Como $v_1,\ u_1,\ \widetilde{v_1},\ \widetilde{u_1} \in H^2(\mathbb{R}^3)$ então $\frac{\partial}{\partial x_j}v_1,\ \frac{\partial}{\partial x_j}u_1,\ \frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{v_1},\ \frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{u_1} \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Assim usando o corolário 1.2.3 temos:

$$\|\nabla(u_1v_1^2 - \widetilde{u_1}\widetilde{v_1}^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq$$

$$\leq C\|\nabla(\frac{\partial}{\partial x_j}(u_1-\widetilde{u_1}))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla v_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}+C\|\nabla v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(\frac{\partial}{\partial x_j}v_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(u_1-\widetilde{u_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+$$

$$+C\|\nabla(\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{u_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(v_1 - \widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(v_1 + \widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+$$

$$+C\|\nabla\widetilde{u_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(\frac{\partial}{\partial x_j}(v_1 - \widetilde{v_1}))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(v_1 + \widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+$$

$$+C\|\nabla\widetilde{u_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(v_1 - \widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(\frac{\partial}{\partial x_j}(v_1 - \widetilde{v_1}))\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq C\|\Delta(u_1 - \widetilde{u_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla v_1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C\|\nabla v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\Delta v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(u_1 - \widetilde{u_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+$$

$$+C\|\Delta\widetilde{u_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(v_1 - \widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(v_1 + \widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+$$

$$+C\|\nabla\widetilde{u_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\Delta(v_1 - \widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(v_1 + \widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+$$

$$+C\|\nabla\widetilde{u_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla(v_1 - \widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\Delta(v_1 - \widetilde{v_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ .$$

Como $C\|u_1 - \widetilde{u_1}\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} + C\|v_1 - \widetilde{v_1}\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|A(\phi - \psi)\|_X$ e $\|\nabla v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|v_1\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}$ e também $\|\Delta v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|v_1\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}$, então podemos concluir neste ponto que

$$\|A(J(\phi) - J(\psi))\|_X \leq C\|A\phi - A\psi\|_X(\|A\psi\|_X(\|\psi\|_X + \|\phi\|_X) + \|A\phi\|_X(\|\phi\|_X + \|\psi\|_X))$$

Isso diz que a condição (iv) também é válida.

Logo, temos única solução local forte (u, v) para o problema de valor inicial asssociado ao sistema acoplado de Klein-Gordon.

Finalmente, para obtermos a solução global falta mostrar que:

(v) $\|AJ(\phi)\|_X \leq C(\|\phi\|_X)\|A\phi\|_X$;

(vi) $\|w(t)\|_X$ é limitada em cada intervalo $[0,T)$ onde a solução existe.

Prova de (v)

Para $\phi = (u_1,\ u_2,\ v_1,\ v_2)$

$$\|AJ(\phi)\|_X^2 = \|i(-u_1v_1^2, 0 - v_1u_1^2, 0)\|_X^2 = \|u_1v_1^2\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2 + \|v_1u_1^2\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}^2$$

$$= \|u_1v_1^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\nabla(u_1v_1^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|v_1u_1^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\nabla(v_1u_1^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

Mas

$$\|u_1v_1^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \|v_1u_1^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq C(\|\phi\|_X)\|A\phi\|_X^2$$

e usando o corolário 1.2.3 temos

$$\|\nabla(u_1v_1^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla(v_1u_1^2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} =$$

$$= \|v_1^2\nabla u_1 + 2v_1u_1\nabla v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|u_1^2\nabla v_1 + 2v_1u_1\nabla u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq \|v_1^2\nabla u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|2v_1u_1\nabla v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|u_1^2\nabla v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|2v_1u_1\nabla u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq C\|\triangle u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C\|\nabla v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\triangle v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}+$$

$$+C\|\triangle v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + C\|\nabla v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\triangle u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$\leq C\|A\phi\|_X(\|\phi\|_X^2 + \|\phi\|_X^2 + \|\phi\|_X^2 + \|\phi\|_X^2)$$

Logo

$$\|AJ(\phi)\|_X \leq \|A\phi\|_X C(\|\phi\|_X)$$

Prova de (vi) Para mostrar (vi) vamos usar o método da energia. Já sabemos que (u,v) é solução local do sistema de Klein-Gordon e portanto podemos mostrar que sua energia $E(t)$ dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2 + u_t^2 + m^2u^2 + |\nabla v|^2 + v_t^2 + \sigma^2 v^2 + u^2v^2)dx$$

é constante.

Isso obtém-se notando que

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_t(u_{tt} - \triangle u + m^2 u + uv^2) = 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} v_t(v_{tt} - \triangle v + \sigma^2 u + vu^2) = 0 \ ,$$

somando e integrando por partes. Conclui-se então que $\frac{dE}{dt} = 0$ o que implica que $E(t) =$ constante.

Agora, sendo $B = (-\triangle + m^2)^{\frac{1}{2}}$; $D = (-\triangle + \sigma^2)^{\frac{1}{2}}$ obtemos que

$$E(t) \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|Bu|^2 + u_t^2 + |Dv|^2 + v_t^2)dx$$

$$= \frac{1}{2}(\|Bu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|Dv\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|v_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}) \geq \frac{C}{2}\|w\|^2_X$$

onde $w = (u, u_t, v, v_t)$ e $C = \min\{1, \sigma^2, m^2\}$. Assim $\|w(t)\|_X$ é limitada. Logo temos provado a existência de uma única solução global para o problema de Cauchy para o sistema acoplado de Klein-Gordon.

Apêndice

Semigrupos de Operadores Lineares

Definição Seja X um espaço de Banach e $L(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Diz-se que a aplicação $S : \mathbb{R}^+ \longrightarrow L(X)$ é um Semigrupo de operadores lineares limitados de X se:

(i) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade de X;

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall\ t,\ s \in \mathbb{R}^+$.

Diz-se que o semigrupo S é de classe C^0 se:

(iii) $\lim\limits_{t\to 0^+} \|(S(t) - I)(x)\|_X = 0$, $\forall\ x \in X$.

Observação 1: Se S é um semigrupo de classe C^0, então $\|S(t)\|$ é uma função limitada em todo intervalo limitado $[0,T]$.

Nota: Os resultados apresentados nesta secção podem se vistos com suas demonstrações em A.M.Gomes [4], A.Pazy [11], M.Reed-B.Simon [14].

Observação 2: Todo semigrupo de classe C^0 é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, isto é, se $t \in \mathbb{R}^+$ então $\lim\limits_{s\to t^+} S(s)x = S(t)x$, $\forall\ x \in X$.

Definição O operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ definido por:

$$D(A) = \{x \in X \ /\ \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h}(x) \ \text{ existe}\}$$

e

$$A(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h}(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \ , \quad \forall \ x \in D(A)$$

é dito Gerador Infinitesimal do semigrupo S.

Teorema Seja S um semigrupo de classe C^0 e A o gerador infinitesimal de S.

(i) Se $x \in D(A)$ então $S(t)x \in D(A) \ \ \forall \, t \geq 0$ e

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax \ ;$$

(ii) Se $x \in D(A)$ então

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x \ d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax \ d\tau \ ;$$

(iii) Se $x \in X$ então $\displaystyle\int_0^t S(\tau)x \ d\tau \in D(A)$ e

$$S(t)x - x = A \int_0^t S(\tau)x \ d\tau \ .$$

Observação: Seja S um semigrupo de classe C^0, A o gerador infinitesimal de S e $u_0 \in D(A)$ então $S(t)u_0 \in D(A)$ e

$$\frac{dS(t)u_0}{dt} = AS(t)u_0$$

isto é, a função $w(t) = S(t)u$ definida para $t \in \mathbb{R}^+$ é solução do problema de Cauchy.

$$\begin{cases} w' = Aw \ , & t \in \mathbb{R}^+ \\ w(0) = u_0 \end{cases}$$

Definição Seja X um espaço de Banach e $L(X)$ a álgebra dos operadores limitados de X. Diz-se que a aplicação $S : \mathbb{R} \longrightarrow L(X)$ é um Grupo de operadores lineares limitados de X se:

(i) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade de X;

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall\ t,\ s \in \mathbb{R}$.

(iii) $\lim_{t \to 0} \|(S(t) - I)(x)\|_X = 0$, $\forall\ x \in X$.

Definição Seja H um espaço de Hilbert diz-se que $U : H \longrightarrow H$ é um operador unitário se

$$(U(x), U(y))_H = (x, y) \ , \qquad \forall\ x,\ y \in H$$

Teorema (Stone): A é um gerador infinitesimal do grupo C^0 de operadores unitários sobre o espaço de Hilbert H se e somente se iA for autoadjunto.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R.A. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] BRÉZIS, Haim. *Análisis funcional Teoria y aplicaciones.* Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[3] FIGUEIREDO, D.G. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.* IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[4] GOMES, A.M. *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução.* IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.

[5] KESAVAN, S. *Topics in functional analysis and applications.* Wiley Eastern Limited, Bangalore, 1989.

[6] KOMORNIK, Vilmos. *Exact controllability and stabilization. The multiplier method.* Wiley, Chicester and Masson, Paris, 1994.

[7] KONRAD, J. *Das Anfangswertproblem im Grossen fur Cine Klasse Nichtlineaer.* Wellengleichungen, Math.Z., 77(1961), 295-380.

[8] LIONS, J. L. *Quelques Méthodes de Résolution des Ploblèmes aux Limites Non Linéaires.* Dunod, Paris, 1969.

[9] LIONS, J. L.; STRAUSS, W. A. Some non-linear evolution equations. *Bull. Soc. Math. France*, 93(1965), 43-96.

[10] MEDEIROS, L. A.; RIVERA, P. H. *Iniciação aos espaços de Sobolev.* IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[11] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[12] PETKOV, Vesselin. *Scattering theory for hyperbolic operators.* Elsevier Science Pu- blishers, Amsterdam, 1989.

[13] REED, Michael. *Abstract non-linear wave equations.* Series: Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[14] REED, M.; SIMON, B. *Functional Analysis - Methods of Modern Mathematical Physics* , vol. I. Academic Press, New York, 1972.

[15] RIVERA, J. E. M. *Tópicos em Termo e Visco Elasticidade.* Monografias do LNCC, Rio de Janeiro, Petrópolis, 1998 .

[16] RIVERA, J. E. M. *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.* Textos Avançados, LNCC, Rio de Janeiro, 1999.

[17] SANDER, V.S. *Functional Analysis Spectral Theory.* Birkhäuser Verlag, Berlin, 1998.

[18] SEGAL, I. *Non-linear Semi-groups.* Ann. Math. 78 (1963), 339-364.

[19] STRAUSS, W. A. Nonlinear wave equations. *CBMS Lectures Notes 73*, American Mathematical Society, 1989.