MANOEL JOSÉ DECON

CONCEPÇÃO DE UM AMBIENTE HIPERMÍDIA PARA A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre.
Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas
Universidade Federal de Santa Catarina
Orientadora: Profª. Drª. Vania Ribas Ulbricht

FLORIANÓPOLIS
2000

MANOEL JOSÉ DECON

CONCEPÇÃO DE UM AMBIENTE HIPERMÍDIA PARA A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia de Produção e Sistemas** (área de Mídia e Conhecimento) da Universidade Federal de Santa Catarina e aprovada em sua forma final pelo programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas.

Prof. Ricardo Miranda Barcia, PhD
Coordenador do Programa

Banca Examinadora

Profª Drª. Vânia Ribas Ulbricht
Orientadora

Prof. Dr. Gilson Braviano
Membro

Prof. Dr. Milton Luiz Horn Vieira
Membro

Dedicatória

A Adair Ferreira Decon (in memória)

Mãe e Mestra. Tudo começou quando me alfabetizastes.

Aos filhos Patrick e Thiago

O caminho do trabalho, da dedicação, da abnegação é o mais difícil e custoso. No entanto, é o único que nos conduz à verdadeira glória.

A todas as pessoas

que inventam as suas próprias leis quando sabem ter razão; para as que têm um prazer especial em fazer coisas bem feitas, nem que seja só para elas; para as que sabem que a vida é algo mais do que aquilo que os nossos olhos vêem (Richard Bach).

Agradecimentos

A Dr[a]. Vânia Ribas Ulbricht, pela maneira competente com que conduziu a orientação.

Aos professores membros da banca examinadora, pela participação e sugestões.

Aos amigos, pelo apoio e incentivo.

Aos estagiários: André Augusto Pepato

Eduardo Green Short

Flávio Andaló

Marcelo J. B. Filomeno

Rhafael de Souza Moretti

pelo esmero com que se dedicaram aos trabalhos de computação.

SUMÁRIO

Resumo

O ensino da matemática nas escolas brasileiras dissocia os conteúdos dos campos numéricos e algébricos do campo geométrico, quando deveria ocorrer exatamente o contrário. Desde os primeiros anos de vida, a criança já distingue formas, revelando uma geometria espontânea. A proposta deste trabalho é apresentar a concepção de um Ambiente *Hipermídia* para aprendizagem da Geometria Analítica procurando resgatar o fascínio das conquistas obtidas pela criança, antes de ingressar na escola e como manter o interesse por novas conquistas geométricas no campo estrutural e dimensional. Espera-se, com este trabalho, dar um novo alento à geometria e fornecer aos professores uma nova ferramenta de auxílio no processo ensino-aprendizagem.

Abstract

The mathematics teaching, in Brazilian schools, dissociates the content of numeric field and the algebraic of geometrical field, when it should happen exactly the opposite. Since the first years of life, the child already distinguishes shapes, reveling a spontaneous geometry. The proposal of this work is to present the conception of a Hipermidia Environment for Analytical Geometry learning, searching recover the conquest fascination got from children before getting into school and how to maintain the interest for new geometrical conquests in the structural and dimensional field. It is expected with this work to give a new encouragement to geometry and to supply teachers with new support tools in teaching-learning process.

Capítulo I

Introdução

A Geometria Analítica, segundo a filosofia de Descartes, é vista como um apêndice do método para conduzir bem a razão e buscar as verdades nas ciências, bem como um instrumento indispensável para compreender a essência dos problemas geométricos e para interpretar os conceitos de análise.

Como método, a Geometria Analítica permite estudar os lugares geométricos de maneira sistemática e generalizada. Como instrumento de análise, permite demonstrar a impossibilidade de solução de certos problemas clássicos e estudar as transformações geométricas. Para a matemática pura, a Geometria Analítica penetrou tão profundamente em todos os seus ramos que podemos concluir que ela encontrou o seu valor dentro de sua própria essência. Para a matemática aplicada, a Geometria Analítica estrutura todo o cálculo infinitesimal, tanto quantitativamente quanto tecnicamente (Pastor, Santaló e Balanzat, 1959).

Com o passar do tempo, os matemáticos foram estruturando a Geometria Analítica de tal forma que ela ficou reduzida ao estudo do método cartesiano. Sua utilização não é apenas para representação cartesiana de fenômenos, como a variação da temperatura de um doente ou a oscilação dos valores das ações da Bolsa, que nos permitem avaliar, por um exame simples das curvas representadas num sistema de eixos coordenados, a marcha de uma transformação e prever o seu desenvolvimento com certa precisão; ela vai muito além disto.

Na computação gráfica, a máquina tem a possibilidade de receber e interpretar imagens. Essa capacidade é bastante utilizada em inúmeras aplicações, como prover visão a robôs, analisar eletrocardiogramas e outros gráficos, efetuar introdução a desenhos gerados manualmente, retocar e compor fotografias, criar desenhos animados, etc.
Com o surgimento dos terminais de vídeo, gráficos e computadores velozes, tornou-se possível a geração de imagens em tempo real e a criação de vídeo-jogos, simuladores de vôo e de choques de veículos, programas para documentação de projetos, e outros.

A síntese de imagens é o campo de aplicação da computação gráfica que envolve todas as técnicas destinadas à criação e à manipulação de imagens artificiais, a partir de modelos matemáticos e geométricos. (Tori, Arakaki, Massola, Filgueiras, 1987).

A computação gráfica, quando trata de imagem vetorial, estabelece que um desenho é composto de elementos básicos combinados: pontos, segmentos de retas e áreas (espaços preenchidos), cada um com determinadas características como cor, dimensionamento, tipo de traçado, etc. A adoção de um sistema de coordenadas é importante, pois possibilita a descrição matemática do posicionamento relativo dos elementos que compõem o desenho. (Tori, Arakaki, Massola, Filgueiras, 1987).

Atualmente, a Geometria Analítica é vista no ensino médio, onde se estudam a reta e a circunferência no plano cartesiano. No ensino superior, nos cursos que fazem parte das chamadas "Ciências Exatas", abordam-se vetores no R^2 (sistema bidimensional) e no R^3 (sistema tridimensional), retas e planos, cônicas e superfícies quadráticas.
Para se compreender melhor o que ocorre com o ensino da Geometria Analítica, vejamos o tratamento que é dado à Geometria no ensino fundamental.

"A Geometria está ausente na maioria das salas de aula. Esta ausência é, sem dúvida, seu problema principal. Entretanto, mesmo quando ela é trabalhada pelo professor de matemática, tem-se observado que, salvo exceções, há falhas graves na sua abordagem".

Lúcio Márcio Imenes – FUNBEC

Esta afirmação do Prof. Imenes é uma conseqüência de fatos que ocorreram no Brasil, nos últimos anos. O ensino da Geometria, no Brasil, que teve grande destaque no início do século, praticamente, inexiste a partir de 1971. Várias são as causas apontadas. Dentre elas, porém, destacam-se a perda de objetividade no ensino da disciplina, a massificação do ensino (Barbosa, 1978) e o surgimento da Teoria dos Conjuntos na Matemática Moderna (Castrucci, 1981). Segundo Castrucci (1981), o ensino da Geometria nesta "nova" matemática exigia conceitos de transformação vetorial, conceitos estes que não foram bem compreendidos pelos professores. Desta forma, por insegurança, e até mesmo por não saberem o conteúdo, passaram a eliminar a atenção e o tempo destinados à Geometria nos conteúdos da Matemática.

Um outro fator que levou o ensino da Geometria à marginalização foi o fato de os livros didáticos, utilizados na escola, apresentarem os conteúdos de geometria nos capítulos finais, onde o professor dificilmente chega.

O abandono do ensino da geometria, no ensino fundamental e médio, foi mais agravado ainda, pela ausência de seu estudo, nos currículos dos cursos de formação de professores do ciclo básico, o que possibilitaria a estes o aprendizado da geometria. A falta de ciência e o despreparo dos mestres, nesta área levaram à divulgação errônea, no círculo do Magistério, de que a geometria é parte abstrata da matemática e, portanto, de percepção difícil para o aluno. O conhecimento, por parte dos professores, da importância da geometria na formação e no desenvolvimento cognitivo da criança está longe de ser alcançado, ficando assim uma lacuna importante na formação intelectual do aluno.
O agravante desta situação reside no fato de a escola ter funcionado, na maioria das vezes, como um elemento inibidor no desenvolvimento das noções espaciais da criança. Pedagogicamente, desde o seu nascimento, todas as ações da criança, no sentido de conhecer e explorar o espaço em que vive, revelam, de modo implícito, uma geometria espontânea, isto é, independente dos ensinamentos escolares, mas não do meio social. (Miguel e Miorim, 1987).

Essas percepções criam, na criança, as concepções geométricas às quais cabe a escola dar uma roupagem científica. No entanto, o ensino da Matemática é direcionado para operações aritméticas básicas, sem relacioná-las às noções de geometria que a criança já possui. Quando a geometria é trabalhada, faz-se de uma forma genérica ou de uma forma que valoriza a memorização e os processos mecânicos de demonstração, na qual se considera apenas a Geometria Euclidiana Plana, sem nenhuma preocupação com a formação no espaço.

No ensino fundamental cria-se um distanciamento entre a álgebra e a geometria, quando deveria ser exatamente o contrário. Por exemplo: quando é abordada a divisão de um número direta ou inversamente proporcional a outros, isto é feito por cálculos numéricos, sem mostrar

que esta operação é possível através da geometria; a extração da raiz quadrada, antes tão cruelmente exercitada, e atualmente através da máquina calculadora, pode ser resolvida através da régua e do compasso, como nos mostrou Descartes em 1637; a abordagem da equação de 2° grau, muitas vezes, não é associada à parábola que é definida por esta equação. Na sua resolução, limita-se à aplicação da fórmula, sem apresentar uma solução através da geometria, onde se "completam os quadrados" da figura geométrica.
Sendo a Geometria Analítica um método de se estudar Geometria, verifica-se, em conseqüência do exposto, que ela fica prejudicada, pois o não-relacionamento entre álgebra, geometria e figuras dificulta, ao aluno, a apropriação dos conhecimentos da Geometria Analítica.

A apropriação dos conhecimentos geométricos e analíticos será conseguida se a geometria for apresentada a três dimensões, com uma abordagem analítica e transformadora, uma modelagem com aplicações concretas, uma reconstrução de argumentos lógicos e com a utilização de computador para a apresentação.

> *É imprescindível, ao professor, a compreensão de que a utilização dos recursos tecnológicos é irreversível, o que não significa, neste momento histórico, que a máquina o substituirá na sua função de mediador. O acesso à tecnologia está se tornando cada vez mais comum e, portanto, é necessária, ao sujeito, a apropriação do conhecimento que a informatização disponibiliza. Além disso, a utilização do computador pode contribuir para a produção de novos saberes. (Proposta Curricular de Santa Catarina, pág. 112).*

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo geral apresentar a concepção de um Ambiente *Hipermídia* para a aprendizagem em Geometria Analítica, despertando no aluno o fascínio pelas descobertas geométricas no campo estrutural e dimensional.
A concepção do Ambiente tem como objetivos específicos: definir conceitos do Ambiente *Hipermídia* , planejar e desenvolver as interfaces do ambiente e determinar conteúdos da Geometria Analítica que serão trabalhados.

Esta concepção propiciará, em uma segunda etapa, o Desenvolvimento do Ambiente *Hipermídia,* que irá permitir a construção dos conteúdos da geometria analítica de maneira informatizada, constituindo-se, assim, em uma ferramenta didático-pedagógica poderosa, capaz de facilitar o desenvolvimento da geometria como ciência.

1.2 Estrutura do trabalho

No capítulo I é feita uma abordagem genérica da Geometria Analítica, de sua utilização e de como ela é vista atualmente nas escolas.

No capítulo II é apresentada a História da Geometria Analítica, onde se destaca que, desde o início da civilização, a apropriação do conhecimento pelo homem, surgiu de uma necessidade real da sua existência.

O capítulo III aborda a Psicogênese no Ensino da Geometria, fundamentada nas teorias de Piaget e seus seguidores.

As pesquisas desenvolvidas no campo de conhecimento considerado, tratadas no capítulo IV, restringiram-se ao campo da geometria.

No capítulo V, são apresentadas conceituações básicas para a concepção de um Ambiente Hipermídia na aprendizagem da Geometria Analítica.

Finalmente, no capítulo VI é apresentada a conclusão e sugestões para futuros trabalhos.

Capítulo II

História da Geometria Analítica

2.1 Antigas Civilizações

Os desenhos produzidos pelo homem neolítico sugerem uma preocupação com as figuras espaciais que são as precursoras da geometria. A geometria elementar fica caracterizada nos potes, tecidos e cestas que são exemplos de simetria e congruência. Essas configurações podem ter origem no seu sentimento estético e no prazer que lhes dava a beleza das formas, sendo as mesmas mais antigas que a escrita. (Boyer, 1974).
Foi somente nos últimos seis milênios que o homem foi capaz de transformar seus pensamentos e concepções na forma escrita. Portanto, as manifestações do homem pré-histórico chegam, até os dias atuais, através de interpretações baseadas nos poucos artefatos que restaram das evidências fornecidas pela antropologia e da extrapolação retroativa, conjectural, a partir dos documentos que sobreviveram. (Boyer, 1974).

Heródoto e Aristóteles admitiam a produção da geometria anterior à civilização egípcia, sem, no entanto, quererem se arriscar a propor essas origens. Eles tinham concepções diferentes sobre a origem da geometria. Heródoto acreditava que o surgimento dela tenha ocorrido pela necessidade prática de se fazer novas medições de terras, após cada inundação anual do vale do rio Nilo. Aristóteles achava que a existência, no Egito, de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria. Percebem-se que as idéias de Heródoto e de Aristóteles representam duas teorias opostas, quanto à origem da geometria. Um acreditando que ela tenha ocorrido pela necessidade prática e o outro, pelo lazer sacerdotal.

Ambas as teorias, embora distintas, apresentavam um ponto em comum: os geômetras egípcios eram chamados de "esticadores de corda", e essa atividade era tanto usada para realinhar demarcações apagadas de terras, quanto para traçar as bases dos templos. A geometria pode ter origem nos rituais primitivos. Na Índia também era utilizada a "regra da corda", chamada de *sulvasutras* que eram simples relações que se aplicavam a construções de templos e altares. A motivação geométrica dos "esticadores de corda", no Egito, era mais prática que a de seus colegas na Índia, mas ambas podem provir de uma fonte comum, que é a protogeometria relacionada com ritos primitivos, tal como ocorreu com a ciência, cuja gênese desenvolveu-se da mitologia e a filosofia a partir da teologia. É importante salientar que essa teoria de que o surgimento da geometria teve como ponto de partida a secularização de exercícios ritualísticos não está provada. O desenvolvimento da geometria pode ter ocorrido por uma necessidade prática, como a demarcação de terras inundadas. Embora a geometria tenha recebido atenção especial no Egito e na Índia, é a Grécia a verdadeira pátria dessa ciência, pois lá a geometria foi cultivada com ardor, onde numerosas descobertas foram feitas, cujos resultados obtidos foram organizados e sistematizados de modo a se estabelecer o corpo de uma doutrina.

Fig 1-No Antigo Egito, os esticadores de cordas, na tarefa de demarcação de terras.
Fonte: Enciclopédia Abril, 1972.

2.2 O Elementos de Euclides

Com a morte de Alexandre, o Grande, os generais do exército grego passaram a disputar sua sucessão. Em 306 A.C., a parte egípcia do Império ficou nas mãos de Ptolomeu I que direcionou sua administração para as ciências e a cultura. Uma de suas primeiras decisões foi a criação de uma Academia, em Alexandria, com o nome de Museu. Essa escola funcionava como uma universidade atual: alguns professores dedicavam-se às pesquisas, outros eram bons administradores e uma parte se destacava pela capacidade de ensinar. Euclides fazia parte deste último grupo. Ele foi chamado por ser considerado um dos sábios de primeira linha que se notabilizou com a criação do texto de Matemática mais bem sucedido de todos os tempos, perdendo apenas para a Bíblia em número de edições: é o *"Elementos de Euclides"*. O autor passou a ser chamado de Euclides de Alexandria, depois que foi ensinar no Museu. Pela natureza de seu trabalho presume-se que tenha estudado com discípulos de Platão e, provavelmente, na própria Academia.

Ptolomeu, uma vez, perguntou a Euclides se havia um caminho mais curto para a geometria, que o estudo de o *Elementos,* e Euclides lhe respondeu que não havia estrada real para a geometria. (Proclus Diadocus). O *Elementos* está dividido em treze livros, dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o livro X sobre a incomensuráveis e os três últimos se dedicam principalmente a geometria no espaço.

Além de o *Elementos*, Euclides escreveu cerca de uma dúzia de tratados abrangendo tópicos mais variados, desde ótica, astronomia, música, mecânica e até um livro sobre seções cônicas. Mais da metade das obras de Euclides se perderam, inclusive o tratado sobre as cônicas. Cinco obras sobreviveram até hoje: *O Elementos*, *Os Dados, Divisão de figuras, Os Fenômenos* e *Ótica.* Essa última de especial importância, por ser um dos primeiros trabalhos sobre perspectiva.

Entre as obras perdidas de Euclides está também uma sobre Lugares de Superfície, outra sobre Pseudárias (ou falácias) e uma terceira sobre Porismas. Pelas referências antigas não fica bem claro o conteúdo dessas obras. Supõe-se que a primeira tratava das superfícies conhecidas pelos antigos: esfera, cone, cilindro, toro, elipsóide de revolução, parabolóide de revolução e hiperbolóide de revolução de duas folhas.

A perda dos Porismas é particularmente incalculável, pois, pelo que se deduz, trata-se de uma aproximação da Geometria Analítica. Papus disse mais tarde que um Porisma é alguma coisa entre um teorema, onde se propõe algo para demonstração, e um problema onde é proposta uma construção. Outros descreveram Porismas como sendo uma proposição que relaciona quantidades conhecidas e variadas ou indeterminadas. Isso é, para nós, hoje, a idéia de função. No entanto, se Porisma é uma equação verbal de uma curva, o livro de Euclides sobre Porismas difere de nossa Geometria Analítica, somente pela falta de símbolos e técnicas algébricas.

2.3 Fermat

Embora a Geometria Analítica faça referência a Descartes como o seu criador, foi Fermat (1601-1665) quem estabeleceu os métodos característicos desta Geometria. Fermat não era um matemático profissional. Estudou Direito em Toulouse, tendo trabalhado como advogado e depois como Conselheiro no Parlamento. Era um estudioso da literatura clássica e tratava a matemática e a ciência por puro prazer. Em 1629, começou a fazer descobertas importantes na matemática, quando praticava um dos esportes favoritos da época: a "restauração" de obras perdidas da antigüidade baseadas nas informações preservadas. Fermat se dispôs a reconstruir o Lugares Planos de Apolonio, a partir de informações de Coleção Matemática, de Pápus. A conseqüência desse estudo gerou, em 1636, a descoberta do princípio fundamental da Geometria Analítica:

"Sempre que em uma equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha reta ou curva". (Boyer, 1974, p. 253)".

Essa afirmação surgiu um ano antes do aparecimento da Geometria de Descartes, sendo provavelmente o resultado da aplicação de Fermat na análise de Viéte sobre o estudo dos lugares de Apolônio. Daí, acreditar-se que o uso de coordenadas não veio por considerações práticas e nem das representações gráficas medievais de funções, mas sim da aplicação da álgebra da Renascença a problemas geométricos. Fermat dava ênfase ao esboço de soluções de equações algébricas determinadas, limitando sua exposição no tratado intitulado *"Ad locus planos et solidos isagoge"* (Introdução aos lugares planos e sólidos).

A respeito do tratado de Fermat, Leon Brunschvicz, no livro *"Lés etapes de la philosophie mathématique"*, faz o seguinte comentário:

> *É um tratado analítico que diz respeito à solução de problemas planos e sólidos que havia sido visto antes que Descartes tivesse publicado algo a respeito. De fato, o "Ad locus planos et solidos isagoge", contém o princípio da Geometria Analítica, enunciado da forma mais precisa possível". (Brunschvicz, 1945, p.126).*

Fermat começou com a equação linear e escolheu um sistema de coordenadas arbitrário. Usando a notação de Viéte, Fermat esboçou primeiro o caso mais simples da equação linear (Dx = Dy, em simbolismo moderno) que é uma reta que passa pela origem ou uma semi-reta com extremidade na origem (não eram consideradas abscissas negativas). O segmento no primeiro quadrante com extremidades nos eixos das coordenadas foi representado pela equação $Ax + By = C^2$.

Em seguida Fermat mostrou que $xy = k^2$ representa a equação da hipérbole, $A^2 + x^2 = By$ uma parábola, $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By = C^2$ um círculo, $A^2 - x^2 = Ky^2$ uma elipse e que $A^2 + x^2 = Ky^2$ é uma hipérbole (considerando os dois ramos).

A "Introdução dos Lugares" de Fermat, somente foi publicada após a sua morte, o que nos leva a pensar que a Geometria Analítica tenha sido objeto de estudo apenas por Descartes. Além de a exposição de Fermat ser mais sistemática e didática que a de Descartes, sua Geometria se aproxima muito da atual por serem as ordenadas tomadas perpendicularmente ao eixo das abcissas. Fermat também percebia a existência de uma Geometria Analítica a mais que duas dimensões, pois afirmou que:

> *"Há certos problemas que envolvem somente uma incógnita e que podem ser chamados de determinados, para distingui-los dos problemas de lugares. Há outros que envolvem duas incógnitas e que nunca podem ser reduzidas a*

uma só; e esses são os problemas de lugares. Nos primeiros problemas, procuramos um ponto único e nos segundos uma curva. Mas se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer a equação, não apenas um ponto ou uma curva, mas toda uma superfície. Assim aparecem superfícies como lugares, etc".(Boyer, 1974, p.255)

O "et coetera" da afirmação sugere uma geometria a mais que três dimensões, e isso só foi desenvolvido efetivamente a partir do século XVIII

2.4 Descartes

Rene Descartes (1596 – 1650), oriundo de família abastada, recebeu educação em colégio jesuíta, em La Flèche, e estudou Direito em Poitier. Viveu muitos anos em Paris e mais tarde alistou-se no exército holandês, como era de costume fazer os nascidos em famílias de posses, como a sua. Participou das campanhas militares na Holanda com Maurice, o Príncipe de Nassau (personagem conhecido na história do Brasil) depois com o Duque Maximiliano I, da Baviera, e mais tarde com o exército francês no cerco de La Rocchelle. Descartes, no entanto, não era um soldado profissional. Durante as campanhas procurava entrar em contato com os sábios da época. Foi assim que conheceu Faulhaber na Alemanha e Desargues na França. Em Paris conheceu Marin Mersenne (1588- 1648) que era considerado o maior divulgador das descobertas científicas, pois quando ele sabia de alguma coisa, toda a "República das Letras" era logo informada. Incentivado, Descartes transformou-se no "pai da filosofia moderna", por apresentar uma visão científica transformada do mundo e estabelecer um novo ramo da matemática.

Em 1637 publicou a sua mais famosa obra: *Discours de la méthode pour bien conduire la raison et chercher la verité dans les sciences* (Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências).
O conteúdo do Discurso era descrito por Descartes nestes termos:

> *Se este discurso parece demasiado longo para ser lido todo de uma vez, ele poderá ser dividido em seis partes. Na primeira encontram-se diversas considerações que se referem as ciências. Na segunda, as principais regras do método que o autor buscou. Na terceira, algumas das regras de moral extraídas deste método. Na quarta, as razões, mediante a demonstração da existência de Deus e da alma humana, que são os fundamentos da metafísica. Na quinta, a ordenação das questões de física investigadas, e em particular, a explicação do movimento do coração e de outras dificuldades da medicina e também a diferença que existe entre nossa alma e a dos animais. Na última, que coisas foram necessárias para irem além da natureza do que foi até então e que razões o fizeram escrever.*
>
> *Em resumo, o Discurso do Método contém as soluções apontadas por Descartes aos principais problemas da filosofia. Seu valor biográfico nos mostra a evolução de sua mente e menciona acontecimentos de sua vida à medida que explica a formação de seu pensamento. Em outra palavras, Descartes revela-se por inteiro, como podemos ver, pela sua forma de apresentar sua vocação filosófica. Para Descartes, o conhecimento matemático é o modelo de todo conhecimento verdadeiro. Deve-se estudar matemática para poder acostumar o espírito a "alimentar-se da verdade" e nunca "contentar-se com razões falsas.(Collette, 1985. p.9-10)*

Em sua Regra Para o Direcionamento da Mente, Descartes deduz de seu método matemático os princípios que asseguram o conhecimento exato de toda a atividade científica. Assim, qualquer que seja o campo de investigação, o científico não deve ocupar-se de nenhum objeto do qual não possa ter uma certeza igual a das demonstrações da geometria, e não deve ter em conta mais que conhecimentos tão certos e evidentes como os dos geômetras.(Collette, 1985: 9 e 10)

Faziam parte do Discurso os apêndices:

La Géométrie que tratava do estudo da Geometria a partir da Análise; *La Dioptrique* que continha as primeiras publicações sobre a lei da refração e *Les Mètèore*s que tratava das primeira explicações sobre o arco-íris.

No programa de pesquisas filosóficas, Descartes admitia que tudo era explicável em termos de matéria e movimento. Ele postulou que o universo todo era feito de matéria em movimento incessante de vértices, e todos os movimentos deveriam ser explicados mecanicamente em termos de forças exercidas pela matéria contígua. Enquanto que a filosofia e a ciência de Descartes eram revolucionárias e primavam pela ruptura com o passado, a matemática tinha fortes laços tradicionais. Este fato se justifica quando se viu que o crescimento da matemática é mais acumulativo que os outros ramos da ciência. A matemática cresce por acumulações com pouco desprezo e irrelevâncias, e as ciências crescem por substituições quando coisas melhores são encontradas.

Descartes, seguindo o conselho de um amigo, adquiriu o hábito de ficar deitado na cama todas as manhãs, pensando na solução de problemas. Foi assim que no inverno de 1619, ele descobriu a fórmula dos poliedros: $V + F = A + 2$, onde V, F e A são, respectivamente, o número de vértices, faces e arestas. Em 1628, escreveu uma carta a um amigo holandês onde apresentava uma regra para a identificação das raízes de qualquer equação por meio de uma parábola. Não se pode afirmar que estava descoberta a Geometria cartesiana. No entanto, sua criação não estava longe disto. Quatro anos após, instalou-se na Holanda, onde permaneceria nos próximos 20 anos. Golius, seu amigo, apresentou-lhe o problemas das três e quatro retas de Pápus. Descartes aplicando seus novos métodos, resolveu-os sem dificuldades. Isso fez com que ele percebesse o poder e a generalidade de seu ponto de vista, e em conseqüência escreveu a obra "*La Geometrie*", que levou a seus contemporâneos o conhecimento da Geometria Analítica. "*La Geometrie*" não é um tratado isolado, mas sim um apêndice do "Discurso", que foi apreciada com o passar dos anos.

Embora Fermat tenha sido o idealizador dos métodos característicos da Geometria Analítica, Descartes é quem estabelece a eqüivalência entre a curva e a equação que a representa em um determinado sistema de coordenadas. Introduzindo este conceito, os problemas da geometria se transformam em problemas de álgebra, ou de modo mais geral, em problemas de Análise Matemática, razão pela qual o conjunto de métodos que permitem estudar as figuras, com o auxílio de coordenadas, recebe o nome de Geometria Analítica. A generalização desses métodos surgem da aplicação sistemática dos procedimentos da Álgebra e da Análise no tratamento das questões geométricas. De fato, o primeiro passo consiste em traduzir toda relação geométrica a uma relação analítica equivalente àquela; diz-se, então, que o enunciado geométrico foi equacionado, isto é, obteve-se uma equação que traduz a relação geométrica. O segundo passo consiste em transformar e resolver tal equação, tarefa esta que corresponde à análise, ou seja, à álgebra e ao cálculo infinitesimal. O terceiro passo consiste em interpretar geometricamente, sobre as figura primitivas, as conseqüências deduzidas do processo analítico. Descartes, pela sua incalculável concepção da aplicação da álgebra à teoria das curvas, mudou verdadeiramente a face das ciências matemáticas. Mesmo a física e a álgebra retiraram grandes vantagens da doutrina das coordenadas e a análise é enriquecida do método dos coeficientes a determinar. Na sua Geometria Analítica, Descartes não estava preocupado com considerações práticas que hoje estão relacionadas com o uso de coordenadas. Ele não estabelecia um sistema de coordenadas a fim de localizar pontos como um topógrafo ou um geógrafo poderiam fazer, nem mesmo pensava em suas coordenadas como pares de números. "*La Geometrie*", em seu tempo, foi tanto um triunfo da teoria não prática, quanto As Cônicas, de Apollonius, na antigüidade. Atualmente, a operacionalização da Geometria Analítica se dá pela substituição dos pontos de um plano por pares de números e as curvas por equações. Assim, o estudo das propriedades das curvas é substituído pelo estudo das propriedades algébricas das equações correspondentes. A geometria está assim "reduzida" à álgebra. Descartes estava tão consciente da importância da sua descoberta que, no ano de sua publicação, escreve uma carta a Mersenne onde afirma que o seu método da análise da natureza e das propriedades das curvas superou a geometria ordinária do mesmo modo que a retórica de Cícero superou o a-b-c das crianças.

Em 1649, Descartes foi convidado pela rainha Cristina para residir na Suécia, onde contraiu uma doença pulmonar, que o levou à morte, no ano seguinte. Foi enterrado em Estocolmo e, após dezessete anos de esforços do governo francês, seus ossos foram transladados e enterrados em Paris, exceto os da mão direita que foram guardados como "souvenir" pelo alto funcionário francês encarregado do transporte da ossada.

Meio século após a publicação do Discurso, Newton e Leibnitz criam o cálculo diferencial que dará à geometria analítica um alcance que Descartes jamais tinha imaginado. Mais tarde Bernoulli, Euler e Lagrange vão completar a "redução" da geometria à análise.

Sob o ponto de vista histórico, é possível estabelecer em que medida a geometria analítica superou a geometria ordinária, em que consiste essa superação e em que medida ela ainda está ligada à tradição grega. No século XIX, os geômetras franceses, Poncelet (1788 – 1867) e Chasles (1793 –1880) estabeleceram esta comparação.

Na introdução ao seu célebre *"Tratado"*, Poncelet assinala claramente em que sentido a geometria analítica superou a "geometria antiga":

(...) enquanto a geometria analítica oferece, pelo seu próprio caminho, meios gerais e uniformes para proceder à resolução das questões que se colocam à busca das propriedades das figuras; enquanto ela chega a resultados de que a generalidade é, por assim dizer, sem limites, a outra procede ao acaso; a sua marcha depende de fato da sagacidade daquele que a utiliza e os seus resultados são, quase sempre, reduzidos ao estado particular da figura que se considera. Pelos esforços sucessivos dos geômetras, as verdades particulares multiplicaram-se, incessantemente, mas raramente aconteceu que o método e a teoria geral tivessem ganho (...) (Piaget & Garcia,1987, p. 91)

Poncelet explica assim as causas profundas desta situação:

Na geometria ordinária, a que se chama, muitas vezes, a síntese, os princípios são completamente diferentes, o caminho é mais tímido ou severo; a figura é descrita, nunca mais se perde de vista, raciocina-se sempre sobre formas reais e existentes e nunca se retiram conseqüências que não se possam descrever a imaginação ou a vista mediante objetos sensíveis; paramos quando esses objetos deixam de ter uma existência positiva e absoluta, uma existência física. O mesmo rigor é levado ao ponto de não admitir as conseqüências de um raciocínio, estabelecido a partir de uma determinada disposição geral dos objetos de uma figura, para uma outra disposição igualmente geral destes objetos e que teria toda a analogia possível com a primeira; numa palavra, nesta geometria restrita se é forçado a retomar toda a série dos raciocínios primitivos a partir do instante em que uma linha ou ponto passaram da direita para a esquerda de uma outra, etc.(Piaget & Garcia, 1987, p. 94)

Pelo seu lado, Chasles, na sua magnífica síntese histórica sobre o desenvolvimento da Geometria faz um comentário semelhante:

A geometria de Descartes, para além deste caráter eminente de universalidade, distingue-se ainda da geometria antiga sob um aspecto particular que merece ser sublinhado; é que ela estabelece, por meio de uma única fórmula, propriedades gerais de famílias inteiras de curvas; de modo que não seria possível descobrir por esta via qualquer propriedade de uma curva, sem que ela faça imediatamente conhecer propriedades semelhantes ou análogas numa infinidade de outra linhas. Até aí só se tinham estudados propriedades particulares de algumas curvas, tomadas uma a uma, e sempre por meios diferentes que não estabelecem qualquer ligação entre curvas diferentes. (Piaget &, Garcia, 1987, p. 94).

2.5 Comparação entre a geometria de Fermat e de Descartes

Muitos autores têm-se preocupado com os trabalhos de Descartes e de Fermat e suas considerações diferem e/ou coincidem em vários pontos. Por exemplo: nem Descartes nem Fermat estabeleceram o uso das coordenadas ou dos métodos analíticos. Nenhum dos dois foi o primeiro a aplicar a álgebra à geometria e em representar graficamente variáveis.

A contribuição de cada um está essencialmente no reconhecimento de que uma equação com duas incógnitas pode ser considerada como a determinação de uma curva plana, relacionada a um sistema de coordenadas. Além do mais, se se acrescentarem a estes métodos algoritmos desenvolvidos por cada um para unir estritamente a equação e a curva correspondente, tudo isso bastará para atribuir-lhes o mérito de serem os criadores da Geometria Analítica. Ambos continuaram os trabalhos de Viète em direções diferentes. Descartes adota o objetivo de Viète à construção geométrica das raízes das equações algébricas, pois continuam em conjunção como simbolismo algébrico mais apropriado. Fermat conserva a notação de Viète e aplica a um campo novo: o estudo dos lugares geométricos. Fermat destaca a idéia fundamental da equação de uma curva de uma maneira mais clara que Descartes. De outro modo, Descartes cobre um campo mais genérico que as equações de 1º e 2º graus de Fermat. Este último oferece uma exposição mais sistemática e acessível do que a de Descartes, cujas proposições nos dão a impressão de que havia evitado esclarecer. Percebe-se melhor, em Fermat, que a equação com duas incógnitas é uma expressão algébrica das propriedades das curvas. Entretanto, Descartes sugere classe de curvas geradas por movimentos simples; Fermat introduz grupos de curvas por equações algébricas.

Em suma, pode-se perceber que Descartes começa com um problema de lugar geométrico a partir do qual obtém uma equação desse lugar; ao passo que Fermat se preocupa mais a partir de uma equação e de deduzir as propriedades de sua curva.

2.6 Era Moderna

Em 1687, Isaac Newton (1642 –1727), publicou a primeira exposição sobre Cálculo, intitulada *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* Esta obra apresenta os fundamentos da física e da astronomia na linguagem da geometria pura. Grande parte da obra é apresentada de forma sintética, mas também apresenta várias passagens analíticas.
Ao observar os títulos dos três livros do Principia, fica-se com a impressão errônea de que se tratam apenas de física e de astronomia, pois os livros se intitulam: Livro I – O Movimento dos Corpos; Livro II – O Movimentos dos Corpos em Meios Resistentes e Livro III – O Sistema do Mundo. No entanto, ele apresenta muita matemática pura, especialmente no que se refere às Secções Cônicas. No lema XIX, do livro I, por exemplo, o autor resolve o problema das quatro retas, onde Papus, acrescentou, que sua solução "não é mais um cálculo analítico, mas uma composição geométrica, tal como os antigos exigiam", uma referência depreciativa ao tratamento dado ao mesmo problema por Descartes. (Boyer, 1974).

Newton sempre deu preferência aos métodos geométricos. No entanto, quando ele achava conveniente, não exitava em apelar para seus métodos de séries infinitas e para o cálculo.

A maior parte da Secção II, do Livro II, é analítica. Por outro lado, o tratamento dado às cônicas é quase que exclusivamente sintético, pois aqui Newton não recorre à análise.

As proposições XIX e XXIV, do livro I apresentam um tratado sobre a descrição das cônicas incluindo teoremas. Na proposição XXVII, Newton relacionou o quadrilátero com as cônicas, utilizando-se do fato de que os centros das cônicas tangentes a quatro retas estão sobre uma reta que passa pelos pontos médios das três diagonais, onde determinou a cônica tangente a cinco retas.

Newton era sensível às críticas, principalmente de seus opositores que não concordavam com suas descobertas. O mais famoso deles foi Hooke que atacou veementemente a obra *Philosophiae Transaction,* publicada em 1672, que se referia à natureza da cor. Magoado, Newton nada mais quis publicar. Passados quinze anos, por insistência de Halley, publicou os *"Principias"*. As três versões de seu cálculo escritas entre 1669 e 1676, permaneceram sob a forma de manuscritos.

Em 1702, morre Hooke e isso reduziu a aversão que Newton tinha em publicar suas idéias. *Opticks*, publicada em 1704, continha duas citações matemáticas: a *Quadratura Curvarum* que tratava dos Métodos de Cálculos e *Enumeration Linearum tertiis Ordiniis* (Enumeração de Curvas de terceiro Grau) que versava sobre gráficos de curvas planas de grau superior. Aqui, Newton notou setenta e duas espécies de cúbicas, e uma curva de cada espécie é cuidadosamente traçada. Pela primeira vez são utilizados dois eixos e coordenadas negativas. Entre as propriedades das cúbicas indicadas nesse tratado, está o fato de a curva de terceiro grau não poder ter mais de três assíntotas (assim como as cônicas não podem ter mais de duas) e que assim como todas as cônicas são projeções do círculo, também todas as cúbicas são projeções de uma parábola divergente $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

A contribuição de Newton à Geometria Analítica não se restringe ao *Enumeration.* No método de fluxos, escrito em 1671, ele sugere novos tipos de sistemas de coordenadas. Um desses métodos de determinação de curvas (Terceira Maneira) é o que chamamos, atualmente, de coordenadas bipolares. Se x e y são as distâncias de um ponto variável a dois pontos fixos ou pólos, então as equações $x + y = a$ e $x - y = a$ representam elipses e hipérboles respectivamente, e $ax + by = c$ são as ovais de Descartes. A "Sétima Maneira para Espirais" é hoje conhecida como sistema de coordenadas polares. Usando x onde usamos hoje θ ou ϕ e y onde usamos r ou ρ, Newton determinou a subtangente à espiral de Arquimedes $by = ax$, assim como às outras espirais. Estabeleceu também as equações para a transformação de coordenadas retangulares para polares, como sendo $xx + yy = tt$ e $tv = y$, onde t é o raio vetor e v um segmento representando o seno do ângulo vetorial associado a um ponto (x,y) em coordenadas cartesianas.

Da Suíça, em 1701, veio Jacob Hermann (1678– 1733), um dos discípulos de Jacques Bernoulli. Hermann ensinou matemática nas Universidades de Pádua, Frankfurt e S. Petesburgo. Na obra *Commentarii Academiae Petropolitanae,* fez a Geometria Analítica no espaço e a coordenadas polares continuando os trabalhos dos irmãos Bernoulli. Timidamente, Jacques Bernoulli aplicou coordenadas polares a espirais, e Hermann determinou as equações polares de curvas algébricas juntamente com equações de transformação de coordenadas retangulares para polares. Jean Bernoulli, desde 1692, referia-se ao uso de coordenadas como "geometria cartesiana", sugerindo essa geometria como a três dimensões. No entanto, foi Hermann quem eficazmente aplicou coordenadas no espaço a planos e a diferentes tipos de superfícies quadráticas.

O primeiro tratado sobre Geometria Analítica no espaço surgiu com a publicação do livro *Traité des Courbes à Double Courbure*, de autoria de Alexis Claude Clairaut (1713 –1765). Esta obra trata do estudo das curvas no espaço, por meio de projeções de dois planos coordenados, que Descartes havia sugerido a quase um século antes. Descrevemos a Geometria Analítica de Clairaut, especialmente em relação ao desenvolvimento em três dimensões, mas o material contido, no segundo volume da *Introduction de Euler* (1710 – 1761), é mais extenso, sistemático e eficaz. Nele, Euler trata da Geometria de coordenadas no espaço atribuindo equações para as três grandes classes de superfícies: cilindros, cones e superfícies de revolução, tornando o uso de coordenadas a base de um estudo sistemático das curvas e superfícies.

O século dezoito foi marcado por revoluções. Para os americanos, o ano de 1776 foi decisivo, com a Independência das Treze Colônias, e o ano de 1789 também o foi para os europeus com a Revolução Francesa. Os matemáticos da França, na época da revolução, não só contribuíram para a ampliação do conhecimento, como foram responsáveis pelo traçado das linhas principais do desenvolvimento da matemática no século seguinte. Pode-se acrescentar à lista de revoluções deste século, outras duas: a revolução geométrica e a revolução analítica.

Nessa época surge um plebeu, filho de comerciante que vem estabelecer os princípios da Geometria Descritiva: Gaspar Monge (1746 – 1818). Foi professor e administrador da École Polytechnique, onde ensinava dois assuntos. O primeiro desses era chamado de estereotomia, hoje geometria descritiva. Monge deu um curso concentrado sobre esse tema a 400 estudantes. O curso tinha um alcance mais amplo, tanto do lado puro quanto do aplicado. Além do estudo da sombra, perspectiva e topografia, dava atenção à propriedade das superfícies, incluindo retas normais e planos tangentes. Entre os problemas propostos por Monge, estava o de determinar a curva de intersecção de duas superfícies cada uma das quais é gerada por uma reta que se move de modo a cortar três retas reversas no espaço. Outro, era o de determinar um ponto no espaço eqüidistante de quatro retas. Tais problemas assinalam uma mudança no ensino da matemática que foi promovido primariamente pela Revolução Francesa.

Os criadores da Geometria Analítica, Fermat e Descartes perceberam o princípio fundamental da Geometria Analítica Espacial, em que uma equação a três incógnitas representava uma superfície e, reciprocamente, sem no entanto a terem desenvolvido. Pode-se dizer que, enquanto o século dezessete foi o século das curvas, o dezoito foi o século que deu início ao estudo das superfícies. O ressurgimento da Geometria no espaço deveu-se, portanto, às atividades matemáticas e revolucionárias de Monge. Se ele não fosse, politicamente ativo, a École Polytchnique, talvez não tivesse sido fundada.

A geometria descritiva não foi a única contribuição de Monge à Geometria, pois na École ele ministrou também um curso sobre a "aplicação da análise à geometria." Assim como o título abreviado "Geometria Analítica" não estava ainda em uso geral, também não havia "Geometria Diferencial", mas o curso dado por Monge era uma introdução a esse campo. Por falta de textos disponíveis, Monge escreveu e imprimiu, em 1795, as *Feuilles d'Analyse* para uso dos estudantes. Aqui a geometria analítica a três dimensões realmente tomou forma. Foi esse curso que formou o protótipo da geometria analítica no espaço.

Monge mostrou deficiências na tarefa de compilar textos, mas isto era compensado por seus alunos que produziram uma grande quantidade de textos elementares sobre geometria analítica, que por um século ou mais, fora posta na sombra do cálculo, para conquistar seu lugar nas escolas.
Entre os anos de 1798 e 1802, Sylvestre François Lacroix (1765 – 1843), Jean Baptiste Biot (1774 – 1862), Louis Puissant (1769 – 1843) e F.L. Lefrançais, inspirados em Monge, escreveram cada um uma obra de Geometria Analítica. Lacroix acreditava que Monge foi o primeiro a pensar que a álgebra e a geometria deveriam ser tratadas juntamente. Delambre atribuiu a Monge a ressurreição entre a álgebra e a geometria. (Boyer, 1974).
Quando Descartes idealizou a Geometria Analítica, ele não se fixou em coordenadas para estabelecer seus princípios. Isso só foi concebido através de Monge.

Além dos sistemas de coordenadas conhecidos (retangulares, polares, etc.) podem-se criar outros sistemas facilmente. Tudo o que se precisa é estabelecer um referencial apropriado juntamente com algumas regras que nos ensinem como localizar um ponto no plano, com relação ao referencial, por meio de um conjunto ordenado de números. Assim, para o sistema cartesiano regular, o sistema consiste em dois eixos perpendiculares, cada um com uma escala, sendo bem familiares as regras que nos ensinam como localizar um ponto, com relação a esse referencial, pelo par ordenado de números reais que representam as distâncias do ponto aos eixos. Este é o sistema mais conhecido, donde provém a classificação das curvas em lineares, quadráticas ou cúbicas. Algumas curvas, como as espirais, por exemplo, se tornam impraticáveis com o uso de coordenadas cartesianas, daí utilizar-se as coordenadas polares, cujo referencial é uma reta e a localização de um ponto se faz através de um par de números, onde um deles representa uma distância, e o outro, o ângulo.

Em 1829, o geômetra prussiano Julius Plücker (1801 – 1868) estabeleceu um sistema chamado coordenadas lineares, onde o elemento fundamental não é um ponto, e sim uma reta. Um ponto, agora, em vez de ter coordenadas, tem uma equação linear que é a equação verificada pelas coordenadas de todas as retas que passam pelo ponto. Neste sistema, uma curva fica bem definida como o lugar de seus pontos ou como a envoltória de suas tangentes. Se, em vez de pontos ou retas, escolhêssemos circunferências como elementos fundamentais, então precisaríamos ter um terno ordenado para determinar um de nossos elementos. Num sistema cartesiano regular, por exemplo, poderíamos tomar as duas coordenadas do centro da circunferência junto com o seu raio. Idéias com essa levaram a uma generalização considerável e ao desenvolvimento da teoria da dimensão. Considerou-se como *dimensionalidade* de uma variedade de elementos fundamentais o número de coordenadas independentes necessárias para localizar cada elemento fundamental. De acordo com esse conceito, o plano é bidimensional quanto a pontos e também quanto a retas, mas tridimensional quanto a circunferências. Pode-se mostrar que o plano é pentadimensional quando se escolhe como variedade de elementos fundamentais a totalidade das secções cônicas do plano. Obviamente, a teoria da dimensão se desenvolveu muito além desses conceitos elementares e é, hoje, uma matéria de extensão e profundidade consideráveis. (Eves 1995).

A partir das considerações de Plücker, que foi discípulo de Monge, em 1843, era publicado o primeiro artigo de autoria de Arthur Cayley (1821 – 1895) que tratava da geometria pontual de dimensão superior (hiperespaço n-dimensional com $n>3$), que recebeu posteriormente a atenção dos matemáticos ingleses, J. J. Sylvester e W. K. Clifford, sendo este último considerado como o responsável pelo desenvolvimento dessa geometria projetiva. Independente das descobertas da geometria pontual, de ordem superior, surgiram os aspectos aritméticos do assunto que foram gradualmente, emergindo das aplicações da análise, em que se pode estender um tratamento analítico de duas ou três variáveis para um número finito arbitrário de variáveis. A partir daí, os matemáticos passaram para generalizações, aplicando a terminologia da geometria à álgebra e à análise. Esse procedimento foi enunciado por Cauchy, em

1847, num artigo sobre lugares analíticos, quando disse: "Chamaremos um conjunto de n variáveis de ponto analítico, uma equação ou sistema de equações de lugar analítico e assim por diante" (Eves, 1995, p. 599-600).

Embora só publicada, em 1866, foi em 1854 que Riemann proferiu importante conferência em que se estabelecia a noção de variedade n-dimensional e suas relações mensuradoras, mantendo as concepções geométricas e a imaginação. Estuda-se geometria n-dimensional analiticamente pela introdução de conceitos apropriados no espaço aritmético n-dimensional. Esse espaço aritmético é o conjunto de n-uplos $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ de números reais, sendo cada um desses n-uplos chamado ponto no espaço. Assim a distância entre dois pontos (x_1, x_2) e (y_1, y_2), num espaço cartesiano regular bidimensional é dado por $[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2}$, e a distância entre os pontos (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) num sistema cartesiano tridimensional é dado por $[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2]^{1/2}$, a distância entre os pontos $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de um espaço n-dimensional aritmético é dada por $[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}$.

Analogamente, define-se uma esfera n-dimensional de raio r e centro no ponto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ como a coleção de todos os pontos $x = (x_1, \ldots, x_n)$, tais que:
$(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 = r^2$

Portanto, uma geometria n-dimensional pode ser considerada como um estudo puramente algébrico que emprega a terminologia geométrica (Eves, 1995)

2.7 Conclusão

Analisando criteriosamente a História, constata-se que as descobertas no campo da geometria foram produtos da necessidade da vida do homem. Isso ocorreu desde a medição de terras no Egito até a formulação da teoria da Dimensionalidade. Muito antes do homem se utilizar dos conhecimentos da álgebra, ele já fazia uso da geometria. Dessa maneira, pode-se dizer que os conhecimentos geométricos são precursores dos algébricos. Euclides, Fermat e seus seguidores davam ênfase total à geometria, criando a fase áurea dessa ciência. Com Viète, começou-se a fazer a associação entre álgebra e geometria

Com o passar do tempo, priorizou-se nas escolas, os conteúdos algébricos em detrimento aos geométricos.

Desde a mais tenra idade, a criança já possui noções de forma, distância, posição, etc. Isso comprova que ela tem concepções geométricas, às quais cabe a escola dar uma roupagem científica.

Como ocorre a construção dessas concepções, como ocorre a cognição e outros assuntos semelhantes são tratados no capítulo seguinte.

Capítulo III

A Psicogênese no Ensino da Geometria

Introdução

"Psicogênese é a compreensão da origem e da evolução das funções psíquicas. Esta compreensão e evolução estão ligadas diretamente ao conhecimento das suas raízes orgânicas" (Lima Filho e Rebouças, 1988, p. 10)

A psicogênese no ensino da Geometria, neste trabalho, está embasada nas Teorias de Piaget e seus seguidores. Assim, todo processo de construção do conhecimento, especificamente da geometria, estará seguindo a linha do citado autor.

Do ponto de vista biológico, as condutas cognitivas são destacadas de um organismo que é dotado de estruturas que se manifestam pelo poder de assimilação e acomodação. Há, inicialmente, uma assimilação funcional a partir das estruturas pré-existentes, isto é, estruturas funcionais inscritas nas estruturas orgânicas. Essas primeiras estruturas são programadas hereditariamente. Assim, as primeiras manifestações da atividade mental consistem em assimilar os elementos novos nas estruturas já programadas e, a partir daí, construir outras estruturas mais elaboradas (Wadsworth, 1993).

Convém salientar, no entanto, que o organismo só é capaz de dar uma resposta quando uma determinada estrutura já tiver alcançado um nível de "competência" que é traduzido por uma sensibilidade específica às incitações do meio. Pode-se afirmar, então, que existe uma continuidade entre os mecanismos biológicos mais gerais e aqueles que tornam possível a gênese das funções cognitivas, tanto no aspecto operativo (da motricidade às operações intelectuais) quanto do figurativo (percepção, imagem, etc.)

Pelo exposto, percebe-se que, no processo de organização e adaptação intelectual, quatro conceitos cognitivos básicos precisam ser dominados. São eles: esquema, assimilação, acomodação e equilibração. Esses conceitos são usados para explicar como e por que o desenvolvimento cognitivo ocorre.

3.1 Esquema

Piaget entendeu a mente como dotada de estruturas do mesmo modo que o corpo. Todos os animais têm um estômago, uma estrutura que permite ingerir e digerir. Piaget usou o termo esquema para ajudar a explicar por que as crianças apresentam respostas mais ou menos estáveis aos estímulos e para explicar muitos fenômenos associados à memória. Esquemas são as estruturas mentais ou cognitivas pelas quais os indivíduos, intelectualmente, se adaptam e organizam o meio (Wadsworth, 1993). Como estruturas, esquemas são os correlatos mentais dos mecanismos biológicos de adaptação. O estômago é uma estrutura biológica que os animais usam com sucesso para se adaptarem ao seu meio. De modo semelhante, esquemas são estruturas que se adaptam e se modificam com o desenvolvimento mental. A existência destas estruturas é inferida. Um estômago, como órgão do corpo, é um objeto real. Esquemas não são objetos reais, mas são vistos como conjuntos de processos dentro do sistema nervoso. Como tal, esquemas não têm correlatos físicos e não são observáveis.

Uma outra analogia pode ser a de um arquivo, no qual cada ficha representa um esquema. Os adultos têm mais fichas ou esquemas. Estes esquemas são usados para processar e identificar a entrada de estímulos. Dessa maneira, o organismo está apto a diferenciar estímulos e a generalizar. A criança, quando nasce, apresenta poucos esquemas (fichas no arquivo). À medida que se desenvolve, seus esquemas tornam-se mais generalizados, mais diferenciados e, progressivamente, mais complexos (Wadsworth, 1993).

Esquemas mudam continuamente ou se tornam mais refinados. De fato, os esquemas sensório-motores da criança se desenvolvem até se transformarem nos esquemas de adultos. No momento do nascimento, o " arquivo da criança" contém somente poucas fichas amplas nas quais tudo está escrito. À medida que a criança se desenvolve, mais fichas são necessárias para conter as mudanças de classificação. Um exemplo: imagine uma criança em uma sala da pré-escola. A professora traça um segmento de reta no quadro, e pergunta ao aluno: O que é isto?

A criança olha para o quadro e vê o segmento de reta. É quase impossível se ver como funciona a cabeça da criança quando ela está pensando. Após pensar um pouco, ela diz: "É um risco". Considerando que o aluno deu uma resposta honesta, podemos considerar que ocorreu algo assim: o aluno olhou para o quadro e viu um segmento de reta. Recebendo este "novo" estímulo, ela tentou remetê-lo a uma ficha do seu arquivo. Em termos de coisas que o aluno pode identificar, o estímulo (segmento de reta) fica mais próximo de risco, razão pela qual ele identificou a reta como risco (um esquema ou arquivo).

Quando confrontada com um estímulo, a criança tenta "encaixar" o estímulo em um esquema disponível. Assim, o aluno logicamente chamou o segmento de reta, de risco, desde que para ele as características do segmento de reta se apresentaram como muito próximas das características de um risco. Para a criança, o segmento de reta enquadrou-se nos critérios próprios de um risco. Suas estruturas, neste momento, não lhe permitiram perceber as diferenças entre um segmento de reta e um risco, mas lhe permitiram ver as similaridade. Isso explica o porquê de as crianças, mesmo após a pré-escola, ainda chamarem o círculo ou circunferência de roda e a esfera de bola.

Esquemas são estruturas intelectuais que organizam os eventos como eles são percebidos pelo organismo e classificados como em grupos, de acordo com características comuns. Eles são ocorrências psicológicas repetitórias no sentido de que uma criança pode, repetidamente, classificar estímulos de uma maneira consistente. Se uma criança "consistentemente" classifica segmentos de reta como riscos ou círculos como roda, podemos inferir sobre a natureza dos seus conceitos.

Esquemas são definidos pelo comportamento observável da criança. Mas, esquemas são mais do que o comportamento; eles são estruturas internas das quais brotam o comportamento. Esquemas são percebidos pelos padrões de comportamento que ocorrem repetidamente no curso da atividade cognitiva. Um esquema considera um conjunto total de ações distintas mais similares.

Visto que esquemas são estruturas do desenvolvimento cognitivo que se transformam, o crescimento e o desenvolvimento deles devem ser levados em conta. Os conceitos do adulto são diferentes dos conceitos das crianças. Os conceitos se transformam. Os esquemas cognitivos do adulto são derivados dos esquemas sensório-motores da criança. Os processos responsáveis pela mudança são assimilação e acomodação.

3.2 Assimilação

É o processo cognitivo pelo qual uma pessoa integra novo dado perceptual, motor ou conceitual nos esquemas ou padrões de comportamento já existentes. Pode-se dizer que uma criança tem experiência: vê coisas novas (segmento de reta) ou vê coisas velhas de novas formas e ouve coisas. A criança tenta adaptar esses novos eventos ou estímulos nos esquemas que ela possui naquele momento. Para a criança, no exemplo anteriormente apresentado, o objeto (segmento de reta) tem todas as características de um risco, e assim a criança concluiu que aquele objeto era um risco. O estímulo (segmento de reta) foi assimilado ao esquema risco. Assim, assimilação pode ser vista como um processo cognitivo de colocar (classificar) novos eventos em esquemas existentes.

A assimilação ocorre continuamente. Seria uma extrema supersimplificação sugerir que uma pessoa processa um estímulo por vez. Um ser humano está continuamente processando um grande número de estímulos (Wadsworth, 1993).

Teoricamente a assimilação não resulta em mudança dos esquemas, mas ela afeta o crescimento deles e, dessa forma, é uma parte do desenvolvimento. Segundo Wadsworth, a assimilação é uma parte do processo pelo qual o indivíduo cognitivamente se adapta ao ambiente e o organiza. O processo de assimilação possibilita a ampliação dos esquemas. Ele não explica as suas transformações. Os esquemas se transformam e nos adultos ele são diferentes daqueles das crianças. Piaget descreveu e explicou essas transformações pelo processo de acomodação.

3.3 Acomodação

Quando confrontada com um novo estímulo, a criança tenta assimilá-lo a esquemas já existentes. Algumas vezes isso não é possível. Ocasionalmente, um estímulo pode não ser incorporado ou assimilado, por não contar a estrutura cognitiva com um esquema no qual ele prontamente se encaixe. As características do estímulo não se aproximam daquelas requeridas por qualquer dos esquemas disponíveis da criança. O que faz uma criança, então? Essencialmente ela pode fazer uma das duas coisas: ela pode criar um novo esquema no qual possa encaixar o estímulo (uma nova ficha no arquivo); ou ela pode modificar um esquema prévio de modo que o estímulo possa ser nele incluído. Ambas são formas de acomodação. Assim, acomodação é a criação de novos esquemas ou a modificação de velhos esquemas. Ambas as ações resultam em uma mudança na estrutura cognitiva (esquemas) ou no seu desenvolvimento (Wadsworth, 1993).

Ocorrida a acomodação, uma criança pode tentar assimilar o estímulo, novamente. Uma vez modificada a estrutura cognitiva, o estímulo é prontamente assimilado. A assimilação é sempre o fim, o produto. A facilidade ou dificuldade com que o aluno cria um novo esquema ou modifica um esquema prévio resulta em uma facilidade ou dificuldade de "aprender" coisas novas. Assim, eles são erroneamente rotulados em alunos que aprendem e em alunos que não aprendem (neste caso não se respeitou o tempo que ele leva para tomar uma das duas decisões).

De modo algum é esperado da criança que está assimilando e acomodando, ativamente, que desenvolva esquemas que assumam uma forma particular. Nas concepções de esquema, aqui usadas, está implícita a idéia de que os esquemas são construídos sobre as experiências repetidas. Os esquemas refletem o nível atual da criança confrontada com um novo estímulo, a criança tenta anexá-lo a esquemas já existentes. Algumas vezes isso não é possível. Ocasionalmente, um estímulo pode não ser incorporado ou assimilado, por não contar a estrutura cognitiva com um esquema no qual ele prontamente se encaixe. As características do estímulo não se aproximam daquelas requeridas por qualquer dos esquemas disponíveis da criança. O que faz uma criança, então? Essencialmente ela pode fazer uma das duas coisas: ela pode criar uma novo esquema no qual possa encaixar o estímulo (uma nova ficha no arquivo); ou ela pode modificar um esquema prévio de modo que o estímulo possa ser, nele, incluído.

Ambas são formas de acomodação. Assim, acomodação é a criação de novos esquemas ou a modificação de velhos esquemas. Ambas as ações resultam em uma mudança na estrutura cognitiva (esquemas) ou no seu desenvolvimento (Wadsworth, de compreensão e conhecimento do mundo. Os esquemas são por ele construídos. Como construções, os esquemas não são cópias exatas da realidade. Suas formas são determinadas pela assimilação e acomodação da experiência e, com o passar do tempo, elas se tornam cada vez mais próximas da realidade.

Nenhum comportamento é só assimilação ou só acomodação. Todo comportamento reflete ambos os processos, embora alguns comportamentos expressem, relativamente, mais um processo do que o outro. Por exemplo: o que nós, geralmente, conhecemos como jogo infantil é tipicamente mais assimilação do que acomodação. Por outro lado, os esforços da criança de imitação dos outros é, usualmente, mais um ato de acomodação do que de assimilação.

Durante a assimilação, uma pessoa impõe sua estrutura disponível aos estímulos que estão sendo processados. Isto é, os estímulos são "forçados" a se ajustar à estrutura da pessoa. Na acomodação o inverso é verdadeiro. A pessoa é "forçada" a mudar a sua estrutura para acomodar os novos estímulos. A acomodação explica o desenvolvimento (uma mudança qualitativa), e a assimilação explica o crescimento (uma mudança quantitativa); juntos eles explicam a adaptação intelectual e o desenvolvimento das estruturas cognitivas.

3.4 Equilibração

Os processos de assimilação e acomodação são necessários ao crescimento e ao desenvolvimento cognitivo. De igual importância são as quantidades relativas de assimilação e de acomodação que ocorrem. Por exemplo: imagine o resultado, em termos de desenvolvimento mental, de uma pessoa que só assimilou estímulos e nunca fez acomodações. Essa pessoa acabaria com uns poucos esquemas amplos e seria incapaz de detectar diferenças nas coisas. A maioria delas seria vista como similar. Para o aluno, a reta continuaria sendo um risco, para sempre. Por outro lado qual seria o resultado se uma pessoa só fizesse acomodações e nunca assimilasse? O resultado seria uma pessoa tendo um grande número de esquemas muito pequenos que teriam pouca generalidade. A maioria das coisas seria vista como diferente. A pessoa seria incapaz de detectar semelhanças. Em cada um desses extremos, resultaria um desenvolvimento intelectual anormal. Portanto, um "balanço" entre assimilação e acomodação é tão necessário quanto os processos em si. Piaget chamou o balanço entre a assimilação e acomodação de equilíbrio. É ele o mecanismo auto-regulador necessário para assegurar uma eficiente interação da criança com o meio.

Equilíbrio é um estado de balanço entre a assimilação e acomodação. Desequilíbrio é um estado de não balanço entre a assimilação e acomodação. Equilibração é o processo de passagem do desequilíbrio para o equilíbrio.

Qualquer coisa pode ser assimilada por uma criança. Os esquemas que ela usa podem não estar em harmonia com os do adulto (por exemplo, classificar uma reta como um risco), mas o modo como a criança organiza os estímulos na sua estrutura cognitiva é, teoricamente, sempre apropriado ao seu nível de desenvolvimento conceitual. Não há organização "errada". Há apenas organizações cada vez melhores, à medida em que o desenvolvimento intelectual avança.

Pode-se dizer, então, que uma criança, ao experimentar um novo estímulo (ou um velho, outra vez), tenta, anexar, o estímulo a um esquema existente. Se ela for bem sucedida, o equilíbrio, em relação àquela situação estimuladora particular, é alcançado no momento. Se a criança não consegue assimilar o estímulo, ela tenta, então, fazer uma acomodação, modificando um esquema ou criando um esquema novo. Quando isso é feito, ocorre a assimilação do estímulo e, nesse momento, o equilíbrio é alcançado.

É dessa maneira que se processam o crescimento e o desenvolvimento cognitivo, em todas as suas fases. Do nascimento até à idade adulta, o conhecimento é construído pelo indivíduo, e os esquemas do adulto são construídos a partir do esquemas da criança. Na assimilação, o organismo "encaixa" os estímulos à estrutura que já existe: na acomodação, o organismo "muda" a estrutura para encaixar o estímulo. O processo de acomodação resulta numa mudança qualitativa na estrutura intelectual (esquemas), enquanto que a assimilação somente acrescenta à estrutura existente uma mudança quantitativa. Assim, assimilação e acomodação – uma coordenação cumulativa, diferenciação, integração e construção constante – explicam o crescimento e o desenvolvimento das estruturas cognitivas e do conhecimento. Equilibração é o mecanismo interno que regula esses processos. Do mesmo modo que nós nos adaptamos biologicamente ao mundo que nos cerca, o desenvolvimento da mente – desenvolvimento intelectual – é também um processo de adaptação.

3.5 Desenvolvimento Cognitivo e Afetivo

Piaget concebeu a inteligência como tendo dois aspectos: o **cognitivo** e o **afetivo**. O desenvolvimento cognitivo envolve três componentes: conteúdo, função e estrutura.

Conteúdo é o que a criança conhece. Ele se refere aos comportamentos sensório-motor e intelectual. Pela sua natureza, o conteúdo varia consideravelmente de idade para idade e de criança para criança (Wadsworth, 1993).

Função refere-se aos conceitos de assimilação e acomodação que são estáveis e contínuas no decorrer do desenvolvimento cognitivo.

Estrutura refere-se aos conceitos de esquemas que explicam a ocorrência de determinados comportamentos.

O sistema de Piaget requer que a criança atue sobre o meio para que ocorra o desenvolvimento cognitivo. O desenvolvimento das estruturas cognitivas é assegurado somente quando a criança assimila e acomoda os estímulos do ambiente. Isto só pode acontecer quando os sentidos da criança entram em contato com o meio. Quando a criança está agindo no meio, movimentando-se no espaço, manipulando objetos, observando com olhos e ouvidos, ou pensando, ela está obtendo dados brutos para serem assimilados e acomodados. Estas ações resultam no desenvolvimento de esquemas.

As ações físicas e mentais sobre o meio são uma condição necessária, mas não suficiente para o desenvolvimento cognitivo. Isto é, a experiência sozinha não assegura o desenvolvimento, mas o desenvolvimento não ocorre sem a experiência. A assimilação e a acomodação são também necessárias ao desenvolvimento. A ação é um dos vários determinantes que interagem no desenvolvimento.

Para Piaget todo conhecimento é uma construção resultante das ações da criança. De acordo com o autor, há três tipos de conhecimento: o conhecimento físico, o conhecimento lógico-matemático e o conhecimento social. O conhecimento físico é o conhecimento das propriedades dos objetos e é derivado das ações sobre os objetos. O conhecimento lógico-matemático é o conhecimento construído com base nas ações sobre os objetos. O conhecimento social é o conhecimento sobre coisas criadas pela cultura. Cada tipo de conhecimento depende das ações físicas ou mentais. As ações instrumentais do desenvolvimento são aquelas que geram desequilíbrios e conduzem ao esforço de estabelecer o equilíbrio (equilibração). Assimilação e acomodação são os agentes de equilibração, o auto-regulador do conhecimento (Wadsworth, 1993).

O desenvolvimento cognitivo, enquanto um processo contínuo, pode ser dividido em quatro estágios para fins de análise e descrição. Esses estágios são:

1- O estágio da inteligência sensório-motora (0 a 2 anos). Durante este estágio, o comportamento da criança é basicamente motor. Ela não representa eventos internamente e não pensa conceitualmente. Apesar disso o desenvolvimento cognitivo é constatado à medida que os esquemas são construídos.

2 - O estágio do pensamento pré-operacional (2 a 7 anos). Este estágio é caracterizado pelo desenvolvimento da linguagem e pelo rápido desenvolvimento conceitual. O raciocínio é pré-lógico ou semilógico.

3 - O estágio das operações concretas (7 as 11 anos). Neste estágio, a criança aplica o pensamento lógico a problemas concretos.

4 - O estágio das operações formais (11 aos 15 anos ou mais). Aqui as estruturas cognitivas da criança alcançam seu nível mais elevado de desenvolvimento, tornando-as capazes de aplicar o raciocínio lógico a todas as classes de problemas.

Paralelamente ao desenvolvimento cognitivo está o **desenvolvimento afetivo**. Afeto inclui sentimentos, interesses, desejos, tendências, valores e emoções em geral. Piaget entendeu que há aspectos do afeto que se desenvolvem.

O afeto apresenta várias dimensões, das quais destacam-se os sentimentos subjetivos (amor, raiva, depressão, etc.) e sentimentos expressivos (sorrisos, lágrimas, gritos, etc.). No desenvolvimento intelectual apresentam-se como de maior importância a motivação ou energização intelectual e a seleção. Entende-se motivação como uma força que põe uma estrutura do conhecimento para funcionar, isto é, alguma coisa capaz de acionar a estrutura e originar o espaço a ser desenvolvido. Seleção é o direcionamento da atividade intelectual para objetos ou eventos particulares. (Wadsworth, 1993).

Todo comportamento apresenta os dois aspectos: o cognitivo e o afetivo. Esses aspectos formam uma unidade no funcionamento intelectual. Eles são "os dois lados de uma mesma moeda".

O aspeto afetivo tem uma profunda influência sobre o desenvolvimento intelectual. Ele pode acelerar ou diminuir o ritmo de desenvolvimento. Ele pode determinar sobre que conteúdos a atividade intelectual se concentrará. Apesar de toda essa interferência, o afetivo, segundo Piaget, não pode em si modificar as estruturas cognitivas.

Segundo Piaget, citado por Wodsworth (1993, p. 23), "... embora a questão afetiva cause o comportamento, embora ela acompanhe constantemente o funcionamento da inteligência e embora ela acelere ou freie o ritmo de desenvolvimento, ela, em si mesma, no entanto, não pode gerar estruturas de comportamento e não pode modificar as estruturas em cujo funcionamento ela intervém".

Muitas pessoas acreditam que os aspectos afetivos da vida humana surgem de alguma fonte interna, de forma mais ou menos predeterminada. Para Piaget, o aspecto afetivo não é mais predeterminado do que a inteligência, propriamente dita (Wodsworth, 1993). Na sua visão há notável paralelo entre os aspectos afetivo e cognitivo.

O afeto se desenvolve no mesmo sentido que a cognição ou inteligência. Ao examinar-se o raciocínio das crianças sobre questões morais, que é um aspecto da vida afetiva, percebe-se que os conceitos morais delas são construídos do mesmo modo que os conceitos cognitivos. A medida que os aspectos cognitivos se desenvolvem, há um desenvolvimento paralelo da afetividade. Os mecanismos de construção são os mesmos. As crianças anexam as experiências aos esquemas afetivos do mesmo modo que anexam as experiências às estruturas cognitivas (Wadsworth, 1993).

Piaget argumentou também, que todo comportamento apresenta ambos os aspectos. Não há portanto, comportamento cognitivo puro, como não há comportamento afetivo puro. A criança que gosta de matemática, faz progressos mais rápidos que a criança que não gosta desta disciplina.

Em todos os casos, o comportamento é influenciado pela afetividade. É impossível encontrar um comportamento oriundo apenas da afetividade, como também é impossível encontrar um comportamento constituído somente por elementos cognitivos.

3.6 O espaço perceptivo

Segundo Piaget e Inhelder (1993), a construção progressiva das relações espaciais acontecem em dois planos bem distintos: o plano perceptivo ou sensório-motor e o plano representativo ou intelectual. É essa dualidade que dificulta a análise psicogenética do espaço.

Os matemáticos, em sua grande maioria, raciocinam como se o espaço se desenvolvesse apenas sob a influência dos mecanismos motores e perceptivos, como se a representação figurada e a intuição geométrica se limitassem a anotar, previamente, tal construção sensório-motriz. Essa visão se constitui em uma demasiada simplificação dos fatos.

"Kant já concebia o espaço como uma estrutura *a priori* da "sensibilidade", constituindo o papel do entendimento simplesmente em submeter os dados espaciais perceptivos a uma seqüência de raciocínios suscetíveis de debilitá-los indefinidamente sem esgotar o conteúdo". (Piaget & Inhelder, 1993, p. 17).

"H. Poincaré liga a formação do espaço a uma intuição sensível e relaciona suas vias profundas sobre a significação do grupo dos deslocamentos ao jogo das sensações propriamente ditas, como se o espaço sensório-motor fornecesse o essencial da representação geométrica e como se o intelecto trabalhasse sobre o sensível já previamente elaborado" (Piaget & Inhelder, 1993).

A teoria piagetiana estabelece a especificidade das operações espaciais e mostra o desenvolvimento dos conhecimentos espaciais paralelamente à geometria. Ele subordina a imagem à operatividade, ressaltando a homogeneidade na representação espacial, entre simbolismo e símbolo. (Marie-Germaine Pêcheux, 1990).

Uma coisa é perceber visualmente um círculo ou um quadrado, e outra coisa é, percebendo essas formas através da exploração tátil, reconstruir a imagem visual correta, seja reconhecendo-os entre diversos modelos, seja desenhando-os.

No caso da percepção, o reconhecimento da forma se deve a uma estruturação mais ou menos imediata que ocorre na criança desde os 3 a 5 meses de idade, em média. No entanto, a imagem visual das mesmas formas exige uma representação intuitiva, cuja construção é realizada quando o objeto permanece fora do campo perceptível da visão. Isso requer a intervenção das funções mais complexas, que a criança adquire após a metade do segundo ano de idade.

Para Piaget e Inhelder (1993), a construção do espaço começa no plano perceptivo e caminha para o plano da representação. Para se entender a intuição espacial progressiva é necessário compreender a passagem de um plano para outro. A esse respeito a análise dos fatos, conhecidos sob o nome de estenognósia, permite:

- controlar a maneira pela qual funciona a percepção sob as espécies de percepção tátil que marca o início da fase de recognição;
- compreender como a percepção tátil é traduzida pelo sujeito em imagens gráficas;
- introduzir-se ao estudo da abstração das formas.

Com referência ao primeiro ponto, pode-se afirmar que é impossível a criança concentrar-se em apenas um ponto da figura. Ela vai deslocando as mãos no conjunto das partes que formam a figura e desta maneira tem o reconhecimento perceptivo do todo. Aqui ocorrem dois processos distintos: a percepção, propriamente dita, que resulta da "centração" (espécie de instantaneidade no dinamismo da atividade perceptiva) de cada parte do objeto, bem como sua atividade sensório-motora que consiste no deslocamento de uma "centração" para outra e o "transporte" dos resultados ocorridos entre estas "centrações".

Existe, portanto, uma estreita ligação entre percepção e movimento. Esta ligação é constante e recíproca. Exemplificando: uma criança quando se apossa de um cartão triangular, centra suas mãos para uma parte do objeto, sobre um dos ângulos do cartão, por exemplo. A percepção desta parte da superfície desencadeará um movimento na direção da outra parte da figura, àquela que é aberta em relação ao ângulo que inicialmente foi tomado. Aqui os gestaltistas descrevem esse fato com muita propriedade. Segundo eles, a percepção estando em desequilíbrio (em razão da abertura do ângulo sobre o resto da figura) produz um movimento correspondente à corrente nervosa devido à diferença de potencial entre a região excitada e a região contígua ainda não excitada. Tal movimento acabará na exploração dos outros ângulos do triângulo, repercutindo sobre as percepções ulteriores, uma vez que "transporta" os resultados da percepção anterior e que, encontrando, por exemplo, um ângulo "transporta" as primeiras relações para as segundas; coordenando, portanto, as percepções sucessivas entre si e constitui o conjunto das transformações que asseguram a passagem de uma percepção à outra. Nesse enfoque, pode-se dizer que não há percepção que não esteja inserida numa atividade sensório-motora de conjunto, onde essa percepção está ligada a uma centração particular. Essa atividade reage sobre as percepções nas quais se apóia e que religa uma às outras (Piaget e Inhelder, 1993).

Essa interpretação, que parece evidente no caso da percepção tátil e das explorações que constituem a atividade perceptiva correspondente, vale, igualmente, para a percepção visual. A única diferença entre os dois domínios é que uma centração do olhar engloba mais elementos simultâneos do que uma centração da mão. No caso das figuras simples, como um círculo ou um triângulo, o olhar abrange, desde a primeira centração, o conjunto dos elementos e das relações em jogo. Nas figuras mais complexas, o olhar é obrigado a explorar, como faz a mão, e intervém, então, numa atividade perceptiva ou sensório-motora que consiste em coordenar as centrações como no domínio de tocar, e com as mesmas reciprocidades entre o elemento perceptivo e o elemento motor (Piaget e Inhelder, 1993).

A atividade perceptiva ou sensório-motora se desenvolve de acordo com a idade da criança. Assim, uma criança com, aproximadamente, 4 anos permanece quase passiva quando em contato com objetos a reconhecer. Ela segura os objetos, geralmente, com as duas mãos, apalpa-os ou gira e se atém às primeiras centrações fortuitas, sem explorá-los. No estágio seguinte (de 4 a 7 anos), a criança afirma sua atividade perceptiva, particularmente, nas provas tátil-cinestésicas, primeiro por explorações globais (segurando o objeto nas duas extremidades e estabelecendo entre elas algumas relações de conjunto); a seguir, pela análise incompleta de índices particulares (ângulos, lados, etc.), e depois pela análise completa, com transposições, antecipações, etc. sem, no entanto, apresentar uma síntese metódica. Neste estágio, a exploração começa sem sistema e sem hipótese e termina por uma revista completa, tateante e num único sentido, de todos os caracteres marcantes: rotação em um mesmo sentido de orientação e passagem dos movimentos efetuados contra a palma da mão à exploração conduzida só com um dedo ao longo do contorno (particularmente com os losangos). Finalmente, no estágio das operações concretas (por volta dos 7 a 8 anos) constatam-se as explorações sistemáticas com retorno a um ponto de partida que serve de referência (Piaget e Inhelder,1993).

O segundo ponto da esteregnósia trata da imagem, que é a passagem da percepção à representação intuitiva. Essa passagem é acompanhada de uma transformação do tátil em visual e efetua-se quando o sujeito, a partir de suas percepções táteis orientadas por uma atividade perceptiva tátil-cinestésica, busca retirar uma imagem visual ou uma imagem gráfica que implica, simultaneamente, na visão e no movimento.

As imagens são, pois, símbolos representativos construídos ao mesmo tempo que as relações de pensamento significados por ela. Isso ocorre, porque na construção da imagem existe um elemento motor que prolonga a atividade perceptiva em oposição à percepção simples. Esse elemento é a imitação (Piaget e Inhelder, 1993).

“A imagem é, com efeito, geneticamente um produto da imitação. Ela é uma imitação interiorizada, isto é, suscetível de esboçar-se sem mais nada, em lugar de manifestar-se em gestos exteriores, mas ligada no início a esses gestos imitativos, como na imagem lúdica ou na imitação diferenciada" (Piaget, Inhelder, 1993, p. 56).

"A imitação se constitui no prolongamento dos movimentos de acomodação próprios da ação e isso ocorre a partir do nível da atividade sensório-motora do bebê. A imitação (portanto, a imagem) é como o "positivo" correspondente aos "negativos" da acomodação, isto é, as modificações sofridas pelos esquemas da ação sob a influência dos objetos sobre os quais se apoia" (Piaget & Inhelder, 1993).

De um lado, constata-se uma ligação importante entre o modo de exploração do sujeito, em face aos objetos apresentados e o nível de desenho que ele realiza desses mesmos objetos. Por outro lado, o nível desse desenho corresponde ao das recognições de tais figuras entre diversos modelos visuais oferecidos à escolha. Tudo ocorre como se a manifestação visual da forma percebida, tatilmente, fosse a expressão dos esquemas sensório-motores que intervém nessa percepção, como se o desenho fosse justamente um "positivo" correspondente aos "negativos" constituídos pelas acomodações dessa atividade de exploração perceptiva (Piaget & Inhelder, 1993).

O último ponto abordado trata do estudo da abstração das formas. Nesse ponto, depara-se com a interrogação: as formas geométricas são abstraídas dos objetos percebidos e depois imaginados ou dos movimentos coordenados que intervêm na percepção e depois na construção da imagem representativa?

Em cada um dos três estágios considerados, o sujeito não consegue reconhecer e nem mesmo representar outras formas, a não ser aquelas nas que ele é capaz de reconstruir com suas próprias ações, onde ele efetua a abstração das formas a partir da coordenação das ações e não, ou não somente, a partir do objeto.

É assim que no primeiro estágio, as únicas formas reconhecidas e apresentadas pela criança são as cíclicas fechadas e as que repousam em simples relações topológicas de fechamento e de abertura, de vizinhança e de separação, de envolvimento, etc. Essas relações exprimem as coordenações mais simples das ações de seguir, gradualmente, de rodear, de separar, etc (Piaget & Inhelder, 1993).

No segundo estágio, começam as formas euclidianas baseadas na distinção das retas e das incurvações, dos ângulos de diferentes valores, do paralelismo e, sobretudo, das relações de igualdade ou desigualdade dos lados de uma figura. Fica claro, portanto, que a representação só pode abstrair a intuição de uma relação de igualdade a partir de uma relação de igualação, a intuição de uma reta a partir da ação de seguir com a mão ou com olhar sem mudar a direção, a intuição de um ângulo a partir de dois movimentos que se cortam (Piaget & Inhelder, 1993).

"No terceiro estágio, a correlação entre as formas e a coordenação das ações é evidente, uma vez que o retorno a um ponto fixo de referência, necessário à sua construção, é também necessário à sua recognição e à sua representação" (Piaget & Inhelder, 1993).

3.7 O espaço projetivo

A diferença essencial entre as relações topológicas, que são as principais formas elementares, e as relações euclidianas, prende-se ao modo de coordenação das figuras em si. As relações de vizinhança, de separação, de ordem, de envolvimento e de continuidade constituem-se pouco a pouco entre os elementos de uma mesma figura ou de uma mesma configuração estruturadas por elas. Essas relações topológicas não conduzem à construção de sistemas de conjunto que reúnem uma multiplicidade de figuras em função seja de um jogo de perspectivas, seja de eixos de coordenadas e é por isso que elas são, psicologicamente, elementares (Piaget & Inhelder,1993).

"O espaço topológico inicial é interior e cada figura, da qual ele exprime as propriedades intrínsecas em oposição às relações espaciais que as situam em relação às outras figuras" (Piaget & Inhelder, 1993, p. 167).

Nas relações topológicas não existe um espaço total que englobe todas as figuras. Elas são consideradas em si mesmas e não em um sistema de conjunto que as organizaria em um único todo estruturado segundo uma mesma coordenação espacial.

Com o espaço projetivo e o espaço euclidiano se dá o contrário. Os objetos e suas configurações se relacionam uns aos outros, segundo sistemas de conjunto que consistem ou em projeções ou em perspectivas ou em coordenadas que dependem de certos eixos. É por isso que as estruturas projetivas e euclidianas são mais complexas e, por conseguinte, de elaboração mais tardia por parte da criança.

Implicando em conservação das retas, ângulos, curvas, distâncias eu de certas relações definidas que subsistem por meio das transformações, tais estruturas sempre se relacionam, sejam em figuras isoladas ou em conjuntos, de modo abstrato ou explícito.

> *O espaço projetivo inicia, psicologicamente, quando o objeto ou sua figura deixam de ser considerados em si mesmos para serem considerados em relação a um ponto de vista. Ponto de vista do sujeito como tal, caso em que intervém uma relação de perspectiva ou ponto de vista de outros objetos sobre os quais se encontra projetado. Assim, as relações projetivas supõem uma coordenação entre objetos espaciais distintos, em oposição à análise intrínseca das relações topológicas próprias de cada objeto considerado em si mesmo (Piaget& Inhelder, 1993, p. 168).*

3.8 Passagem do espaço projetivo ao espaço euclidiano

Segundo Piaget & Inhelder (1993), as relações entre o espaço projetivo e o espaço euclidiano podem ser vistas de duas maneiras: a do ponto de vista da construção axiomática dos geômetras e a do ponto de vista da gênese psicológica do espaço.

Na visão matemática, uma correspondência projetiva, chamada de homologia, conserva as retas em certas relações quantitativas ao mesmo tempo em que passa das relações topológicas para as relações métricas, conhecidas por métricas euclidianas.

Na visão psicológica, as intuições topológicas induzem a noção de reta, bem como as relações projetivas iniciais, por subordinação a um sistema de pontos de vista. Dessa dupla visão (matemática e psicológica) o espaço projetivo e o espaço euclidiano são elaborados, independentemente, um do outro, mas ambos a partir do espaço topológico (Piaget & Inhelder, 1993).

Existe ainda um outro enfoque, segundo o qual pode-se construir entre o espaço projetivo e o euclidiano uma série de passagens, constituídas por afinidades e semelhanças. Assim é que, do ponto de vista matemático, as afinidades são correspondências projetivas (homologia) que conservam, entre outras, as paralelas; as semelhanças são afinidades que conservam os ângulos; os movimentos são semelhanças que conservam as distâncias, etc. Da homologia projetiva ao deslocamento euclidiano passa-se por uma série de transições ou de especificações sucessivas.

Sob o prisma psicológico, essa passagem ocorre na medida em que o sujeito coordena diferentes pontos de vista. Construindo as relações projetivas, ele consegue coordenar as distâncias e assim construir as relações euclidianas. Esses dois sistemas apóiam-se um no outro. Os dois chegam, com efeito, a um relacionamento das figuras entre si e não somente das partes vizinhas das figuras, daí uma conservação, ou de certas relações de forma invariante no curso das mudanças de pontos de vista ou das distâncias em grandezas invariantes no curso dos movimentos (Piaget & Inhelder, 1993).

As pessoas que trabalham com crianças, principalmente aquelas que tratam das noções de percepção e de projeção devem abordar a conservação das paralelas, por exemplo, não num campo apenas perceptivo, mas também no campo da sua transformação, onde se respeita o paralelismo de alguns de seus elementos. Essas transformações devem ser consideradas, ainda, nos losangos que aumentam ou diminuem de tamanho; na descoberta das projeções, na semelhança e na conservação dos ângulos; na construção das horizontais e verticais, que produzem o sistema de coordenadas (que será visto a seguir), etc. Desta maneira, a criança terá mais facilidade de visualizar o todo, quando lhe for solicitado para construir o plano de uma vila, um jardim ou um parque de diversões. Ela terá as noções de "ponto de vista" perceptivo, de paralelismo, de proporção e de coordenadas e, assim, obter sem dificuldades as relações de conjunto entre as noções projetivas e as noções euclidianas.

3.9 Construção do sistema de coordenadas

A noção de linha reta é induzida, simultaneamente, pelo método projetivo da visão que permite alinhar os elementos segundo a direção do olhar e pelo método euclidiano da conservação de uma mesma direção.

"A reta supõe, assim, as noções de ordem, de contínuo, etc., que são de caracter topológico, mas subordinadas a um ponto de vista ou a uma direção". (Piaget & Inhelder, 1993, p. 434).

Logo que o sujeito adquire a idéia da reta, ele é capaz de imprimir a mesma direção a outras duas ou mais, daí a noção de paralelas que se conservam no curso das transformações afins. Quando a criança constitui as noções de retas paralelas, ela é levada a descobrir a semelhança de triângulos, graças ao paralelismo de seus lados e assim considerar a igualdade dos ângulos pelo método da superposição com rotação. Essa comparação dos ângulos acaba na construção de um agrupamento sistemático de operações que repousam na correspondência co-unívoca e que induz à noção de proporção, complemento necessário da semelhança (Piaget & Inhelder, 1993).

Correlativamente aos progressos da correspondência co-unívoca e a partir das noções de retas e paralelas constata-se uma segunda correspondência entre os pontos coordenados do espaço, mas que obedecem a um outro princípio multiplicativo: o das correspondências biunívocas em muitas dimensões, segundo eixos de coordenados retangulares.

Pode-se exemplificar o espaço estruturado a partir de tal princípio, olhando os objetos que nos rodeiam. Vê-se esses objetos dispostos no interior de um entrelaçado de retas paralelas, que se cortam perpendicularmente, segundo as três dimensões. Se esta visão das coisas parece clara é porque a experiência física impõe tal estruturação, em função de todas as verticais e horizontais que se cortam entre si. O sistema de coordenadas é comparado com uma tabela com dupla ou tripla entrada, na qual todos os objetos do espaço são ordenados em correspondência biunívoca uns com outros, segundo as diversas colunas ou em diversos compartimentos previstos (Piaget & Inheler, 1993).

Pela complexidade da construção dos sistema de coordenadas, pode-se afirmar que é ilusório atribuir ao sujeito o conhecimento inato ou, psicologicamente, precoce de um conjunto estruturado, segundo um sistema de coordenadas retangulares a duas ou três dimensões. Mesmo as noções físicas de horizontal e vertical não dão lugar a nenhuma tomada de consciência imediata, pois sabe-se que enquanto a percepção se apoia em campos restritos, um sistema de coordenadas exige a coordenação operatória de todos os campos em si.

Assim como as noções, de sucessão e de simultaneidade, de sincronismo e de isocronismo que definem um tempo homogêneo, marcam a chegada e não a partida da construção do tempo, o sistema de coordenadas está no ponto de chegada da construção psicológica do espaço euclidiano.

Um sistema de coordenadas supõe, em primeiro lugar, as noções topológicas de ordem e de dimensão, isto é, um conjunto de relações de ordem que permitem seriar os objetos segundo *n* dimensões. Um sistema de coordenadas é o produto de uma multiplicação lógica das relações de ordem, com intervenção das retas, das distâncias, das paralelas e dos ângulos, segundo *n* dimensões. Vê-se que um sistema de eixos de coordenadas supõe,

além das relações topológicas elementares, o conjunto das noções euclidianas aplicadas ao relacionamento de todos os objetos entre si. Esse sistema é, portanto, a estruturação de conjunto do espaço euclidiano e é por isso que sua construção é tão tardia (Piaget & Inhelder, 1993).

3.10 Conclusão

Segundo Guilford (1959), o comportamento cognitivo envolve as "atividades intelectuais", podendo haver até 120 capacidades humanas de domínio cognitivo. A característica comum dessas capacidades é aquilo que o organismo faz com as informações de que dispõe.

Essas operações mentais, como por exemplo: a descoberta ou o reconhecimento de informação (cognição); retenção ou armazenamento de informação (memória); geração de informação a partir de certos dados; tomadas de decisão ou julgamento acerca de informação, são consideradas operações componentes integrais realizadas no domínio cognitivo. (Magil, 1984).

No processo ensino-aprendizagem, a velocidade com que essas informações ocorrem devem ser respeitadas individualmente. Desse modo, não existem alunos que tenham facilidade ou dificuldade de "aprender" coisas novas. Existe é uma diferença de tempo em que eles criam um novo esquema ou modificam um esquema já existente. **Portanto, impor um currículo comum a todos os alunos é condenar um grande número, deles, ao fracasso ou à frustração.**

O ritmo de desenvolvimento pode ser rápido ou lento. Muitas vezes, as crianças que aprendem num ritmo lento, nos primeiros anos, "recuperam o atraso" a partir dos doze anos (Kagan, 1975, Wadsworth, 1978). Essa recuperação evidencia que ritmos de desenvolvimento abaixo da média não são, necessariamente, indicadores de potencial abaixo da média.

A prática educacional está baseada na premissa de que o conhecimento é algo que pode ser transmitido, diretamente, dos professores aos alunos ou entre os alunos. Existe ainda uma prática mais errônea que concebe a educação como uma transferência de conhecimento.

A suposição, aqui, é de que o "significado" ou compreensão pode ser transmitido pela palavra oral ou escrita e, assim, a linguagem é suficiente para transferir a informação de uma fonte (o livro, o professor) ao aluno, que espera avidamente (Wadsworth,1993). Quando o conhecimento não é adquirido, parte-se do pressuposto de que exista algum problema, ou com o aluno (motivação) ou com um componente do processo de educação (visão, audição, etc)

Possivelmente, a mais importante e mais revolucionária implicação da teoria de Piaget diz respeito ao fato de que as crianças constroem o conhecimento a partir de suas ações sobre o meio. Assim, o conhecimento físico é construído por meio das ações sobre os objetos; o conhecimento lógico-matemático é construído a partir das ações sobre o objeto, sendo que o componente mais importante é a ação da criança e não o objeto em si; e o conhecimento social depende da ação da criança ou da sua interação com outras pessoas.

Se um dos objetivos da educação é expandir a aquisição do conhecimento pelas crianças, o método educacional precisa estar relacionado com o modo como elas adquirem o conhecimento. Muitos alunos não "aprendem", porque eles, literalmente, não conseguem entender aquilo que lhes é ensinado.

Aqui há um influência fundamental do papel desempenhado pelo professor. Se ele interpreta a inteligência (habilidade de ser bem sucedido nas tarefas escolares) como "determinada", provavelmente, ele não terá motivação para se empenhar em favor do aluno cujo desempenho é baixo em sala de aula. Por outro lado, se o professor entende a inteligência como um "desenvolvimento", portanto, não determinada, ele poderá se motivar para auxiliar o aluno de baixo desempenho. O modo como ele interpreta a inteligência, determina sua prática de ensino.

Os conteúdos da área de Matemática, quando não trabalhados na forma construtivista têm sido prejudiciais na aprendizagem. Até mesmo os alunos mais "brilhantes" são prejudicados pelo método de ensino tradicional e pelos currículos de matemática. Esses métodos centram-se na transmissão direta ao aluno pelo professor e nas respostas corretas, ao invés de ter como centro o pensamento autônomo e a construção dos princípios matemáticos.

A maior parte da instrução matemática centra-se no procedimento de cálculos, e não sobre os métodos que encorajam a construção autônoma dos conhecimento matemáticos que fundamentam o cálculo. As crianças lutam para entender e atribuir sentido às coisas. Quando não conseguem, elas recorrem à memorização e a outras estratégias mais ineficientes.

Os alunos são persuadidos ou condicionados a negligenciar sua tendência natural para a compreensão. No lugar de compreender, eles desenvolvem hábitos de memorizar e não de buscar a compreensão. Provavelmente, esta é a maior razão de os alunos "odiarem" a matemática. Isso ocorre, porque eles não a compreendem. Essa compreensão não acontece, muitas vezes, por não se dar sentido aos conteúdos que estão sendo trabalhados. **Nesse círculo vicioso, a criança não se apropria dos conhecimentos matemáticos, não por deficiências, mas sim por sensatez, pois o cérebro humano não suporta carregar o peso de um conhecimento morto que ele não consegue integrar com a vida.**

Sob este prisma, pode-se dizer que o conhecimento mais importante, no ensino, é aquele produzido pelo aluno, tendo o professor a função de levar o educando a refletir em níveis cada vez mais elevados. O ensino terá um bom nível, quando estimular o aluno a pensar, raciocinar e resolver problemas, sendo seus erros tratados como hipóteses que devem ser testados e analisados, verificando onde houve o desvio do pensamento lógico (Ulbricht, 1997).

Nesta sistemática de construção e de desafios constantes para o aluno, o emprego de novas tecnologias, mais particularmente o computador, é de fundamental importância. Acredita-se que a informática tenha potencial para revolucionar o processo de ensino e aprendizagem como já ocorre em muitos aspectos da vida moderna. A utilização desses meios irá beneficiar a educação sem que ela sofra algum efeito colateral negativo, apregoado pelos tradicionalistas que acham que a instrução terá uma abordagem mecanicista, sem interação humana, onde a presença do professor é dispensável (Maddux, Willis, 1996).

Capítulo IV

Pesquisas desenvolvidas no campo do conhecimento considerado

Especificamente, do uso do computador na geometria analítica, nada de relevante foi encontrado. Por isso, restringiu-se a descrição das pesquisas desenvolvidas na Geometria, as quais estão apresentadas a seguir.

4.1 A integração do computador no ensino da geometria para o desenvolvimento e a utilização de cenários. – Richard Allen; Judith Cederberg; Martha Wallace – Departamente of Mathematics St. Olaf College Northfield, MN 55057 USA. In: Actes Deuxièmes Journées EIAO de Cachan, Cachan: ENS, 1991. P. 33-44

Este projeto, com duração de dois anos, foi realizado graças a uma subvenção por parte da Fundação Nacional de Ciências, na qual a pesquisa se efetuou, no Departamento de Matemática do Colégio Santo Olavo em Minessotta.

Ao longo das últimas décadas, os pesquisadores norte-americanos concluíram da necessidade de mudar o ensino e também o aprendizado da Geometria. A Associação Nacional do Ensino da Matemática (National Council of Teaches of Mathematics) no documento Curriculum and Evolution Standarts for School Mathematics (NCTM,1989) recomenda o ensino e a aprendizagem da Geometria, baseado no engajamento ativo, que incentive a pesquisa e descoberta de fatos novos, que não tratem apenas de uma simples memorização e sim que conceba a matemática como resolução de problemas, argumentação e comunicação. O documento reconhece que o papel do ensino deve mudar de transmissor de fatos e de informações para animador da aprendizagem. O objetivo principal do projeto foi o melhoramento do ensino da Geometria no nível secundário através da introdução da tecnologia da informática no ensino, como uma ferramenta pedagógica eficaz. Na pesquisa foi desenvolvido e utilizado "cenários" junto com um plano de lições especializados que formaram uma série de etapas no ensino de um tema particular (por exemplo, os triângulos e suas transformações), acompanhado por uma ampla documentação escrita e integrando o computador como ferramenta didática.

O Projeto começou em junho de 1990 com uma oficina de duas semanas de duração animada por três pesquisadores (Allen, Cedenberg e Wallace) que se reuniram no St. Olaf College com 10 professores de geometria. Esses professores formavam o grupo de professores ou Master Teacher's e o TAG (Teacher Action Group) que eram encarregados da transformação da pesquisa em ensino e aprendizagem da geometria.

O projeto pretende responder ao seguinte questionamento: o que falta aos professores de geometria para que eles possam trabalhar de maneira eficaz dentro da sociologia da informática que está a sua disposição? A resposta disso esta no desenvolvimento e utilização de um conjunto de cenários que em suas lógicas constituem o elemento pedagógico essencial.

Os cenários auxiliam o ensino da geometria, pois:

- propiciam um ensinamento que encoraja a conjecturar a resolução de problemas;
- ampliam, com ajuda do computador, as construções tradicionais, e outras experiências manipulativas, permitindo, por exemplo, a criação de objetos a três dimensões;
- desenvolvem a intuição geométrica no alunos, auxiliando-os nas capacitações interativas.

Os cenários foram escritos adaptando-se aos níveis de aprendizado. Para atingir os objetivos, diferentes cenários foram desenvolvidos, como:

- cenário das construções;
- cenário dos ângulos;
- cenário das simetrias;
- cenário dos triângulos;
- cenário dos fractais.

Para se utilizar do cenário das construções que é destinado a um ritmo mais acelerado na geometria com o GEOMETRIC TRIANGLE SUPPOSER, os alunos trabalham em duplas, dentro de laboratórios, acompanhados de um computador. O objetivo deste cenário é o de criar um capítulo integrado, no qual o suporte fornece aos alunos uma ferramenta suplementar maior que as regras e as comparações tradicionais com as quais desenham, copiam, calculam, medem e constróem os objetivos geométricos.

O cenário dos ângulos é utilizado no primeiro nível com RENE'S PLACE sobre o APPLE II e com o GEOMETRIC TRIANGLE SUPPOSER. O ensino deve ter a sua disposição um computador para fazer as demonstrações na classe, onde os alunos trabalham em duplas. O cenário apresenta os ângulos, a terminologia convencional e as ligações pertinentes através de uma abordagem que alie a descrição à descoberta.

A finalidade do cenário das simetrias é a utilização no curso regular de geometria em ritmo acelerado com o GEOMETER SKETCHPAD. Os alunos trabalham em atividades a base do computador. Este cenário começa pelas lições que objetivam a conjectura, a reunião de dados e a construção de argumentos, dentre outras atividades fundamentais de geometria.

Dos quatro cenários consagrados ao estudo dos triângulos, três são destinados a utilização no curso regular (nível médio) e o quarto no ensino acelerado (nível superior). Para se utilizar dos quatro com o GEOMETRIC TRIANGLE SUPPOSER, em um laboratório, os alunos trabalham em duplas. Para o uso deste cenário, leva-se 3 a 5 semanas, em função do cenário ser muito dinâmico. Os cenário são todos de ciências preliminares que consagram a utilização de lógica, organizada de forma que descubra os fatos sobre triângulos favorecendo as conjecturas.

O cenário dos fractais é destinado a utilização no curso de geometria (nível médio) com a GEOMETER'S SKETCHAP e com TERRAPIN LOGO do Macintosch. A duração prevista para este cenário é de uma semana de preferência no final de um curso de geometria de dois semestres de duração. Os alunos trabalham em duplas em atividades a base do computador dentro de um laboratório. O objetivo pedagógico principal deste cenário é o de fornecer aos alunos, os aspectos da geometria que são aos mesmo tempo novos e apaixonantes. Os fractais são auto-semelhantes e tem a dimensões fracionadas.

Avaliação

Na primeira análise dos dados foram efetuadas a partir de 15 avaliações preenchidas por 11 professores diferentes. Os resultados foram apresentados em dois grupos: um grupo era formado por 9 professores, que eram autores dos cenários, que os usaram e depois os avaliaram e outro grupo era formado por 6 professores que utilizaram os cenários, não sendo eles os autores.

A análise das avaliações revelam que todos os professores que compararam esta experiência com outras, precedentes, classificaram a Utilização de Cenários de "na mesma" ou "melhorou" :

- o tempo de adaptação da lógica necessária;
- o tempo necessário para a preparação do material e da lógica;
- o nome das ciências consagradas no tema;
- a fadiga relevante do ensino;
- a satisfação relevante do ensino.

Negativamente foi constatado:

- a lógica é repetitiva e o seu funcionamento não é mensurado;
- constata-se indisciplina no laboratório, por parte dos alunos;
- os objetos geométricos apresentados na tela são distorcidos, sobretudo na perpendicularidade;
- os não autores dizem que as atividades sobre as conjecturas estão pouco estruturadas;
- recomenda-se a divisão de certos cenários longos em segmentos mais curtos.

Conclusão

A lógica SUPPOSER funciona bem dentro de um contexto de atividades orientadas sobre a conjectura e a construção. A utilização do RENE'S PLACE no estudo dos ângulos é conhecido com certo sucesso. O GEOMETER'S SKETCHAD funciona bem, não somente dentro do contexto do exercício orientados sobre a conjectura da construção, mas também dentro das atividades que desenvolvem a visualização e as capacidades espaciais dos alunos.

4.2 Uma abordagem para o treinamento informatizado envolvendo exercícios de geometria elementar . PINTADO, Michell . In: Deuxième Journée EIAO de Cachan. Cachan: ENS, 1991.p. 45 – 60.

Os pesquisadores definem como inteligência artificial os dados de um etapa inicial (EI) e de uma etapa final (EF) que juntamente com um operador (OP) encontram sucessivas aplicações de OP para obter EF, a partir de EI. Este formalismo causa certas dificuldades para os alunos que perguntam: Como determinar com precisão EI, EF e OP? Quando esta aplicação é válida? Os elementos de OP são úteis para a solução? A atividade de demonstração causou um bloqueio para os alunos, pois a maioria deles compreende uma demonstração feita pelo professor, mas se sente incapaz de faze-la sozinho. Na inteligência artificial, os problemas maiores são: como aplicar um certo dado em aberto e como fazer as representações das etapas de OP. Esses conhecimentos são numerosos e será interessante que os alunos descubram sozinhos.

No processo de resolução de problemas distingui-se duas ações distintas na resolução de problemas:

- detecção dos fatos pertinentes dentro do enunciado;
- surgimento de procedimentos para a resolução apropriada aos objetivos da situação.

Essas duas atividades não são cooperativas, como por exemplo: uma detecção de uma particularidade de dados, faz surgir um procedimento; um procedimento é uma luz que fornece a utilidade dos dados.

O processo de modelagem da aprendizagem caracteriza-se pela passagem progressiva do sub-conhecimento para o conhecimento integral, na resolução de problemas. Para que isso ocorra, é necessário se ter uma preocupação constante entre a ligação das situações conhecidas e o enunciado desenhado. Na fase de aprendizagem do sub-conhecimento usa-se técnicas mais simples, não especializadas, até que, o aluno progressivamente possa se identificar com os conhecimentos específicos que irão substituindo os iniciais.

Descrição da resolução

A resolução de problemas apresenta as seguintes dificuldades:

- tentar produzir uma argumentação mais próxima da realidade;
- utilizar uma linguagem bem próxima da matemática;
- dispor de grande flexibilidade para ajudar nos teoremas e nos procedimentos de resolução;

Para que o sistema siga essas regras de produção são necessários:

- utilizar uma linguagem mais concisa possível afim de produzir uma aprendizagem eficaz e que possua uma comunicação agradável com o sistema;
- a noção de relações é primordial na geometria. Os objetos são essencialmente comuns para as relações entre eles e o uso do raciocínio;
- uma simples figura contribui grandemente para o objeto.

Conclusão

O funcionamento da resolução descrita é uma cooperação entre as duas entidades seguintes:

- reconhecimento de protótipo que desencadeie deduções associadas;
- pesquisa de objetivos adaptados a situações comuns.

Para uma melhor aprendizagem é necessário sempre comparar a associação corrente-adiante/ corrente-atrás que se caracteriza pela solução e sua adaptação.

4.3 A exploração da demonstração no Projeto Mentoniezh. Dominique Py. IRISA. 35042 – Rennes Cedex. Actes Deuxièmes Journée EIAO de Cachan, Cachan: ENS, 1991. P. 19-31

Geralmente os alunos, quando se defrontam com as demonstrações em geometria, apresentam muitas dificuldades. A primeira delas é em saber no que consiste a prova. A segunda dificuldade é redigir uma demonstração correta, sob o ponto de vista sintático e semântico. Essas dificuldades se reforçam quando os manuais e livros insistem na correção de provas, apresentando uma solução correta, sem mostrar o método que foi utilizado para obtê-la.

O projeto Mentoniezh (geometria, em bretão) é um tutorial que ajuda a resolução de problemas de geometria na escola. Ele comporta 4 etapas, a saber:

- aquisição da figura;
- transformação da figura;
- exploração da demonstração;
- redação da demonstração.

Após as duas primeiras etapas, o aluno traça a figura geométrica sobre uma prancheta gráfica e o sistema verifica se ela corresponde às especificações do problema. No decorrer da 4ª etapa o aluno fornece sucessivamente os passos da demonstração. O tutorial valida as etapas corretas e rejeita as erradas, apresentando a explicação para os erros.

Se o aluno não consegue imaginar o plano de provas, o tutorial o auxilia através da abordagem crescente, fazendo-lhe explorar a busca, associada ao problema a partir da conclusão da demonstração.

A todo momento, o estado da demonstração está presente em uma lista de metas a atingir (inicialmente a conclusão do problema) e de uma lista de propriedades demonstradas (inicialmente as hipóteses do problema). Ao longo do diálogo, o aluno indica na lista de metas, a propriedade que ele busca para demonstração. O tutor lembra neste caso, os diferentes teoremas que permitem provas desta propriedade, possibilitando ao aluno, escolher a mais apropriada. Este teorema é aplicado de forma decrescente: sua conclusão é considerada como demonstrada, desde que suas hipóteses o sejam. A meta escolhida (conclusão do teorema) é portanto substituída ao mesmo tempo por uma sub-meta (hipótese do teorema) dentro da substituição de metas esperadas.

Se o aluno imagina um plano de provas, o tutorial o auxilia através da abordagem global, fazendo-o desenvolver e completar seu plano. A vantagem desse método é a de permitir a moderação no curso da fase de exploração e poder acessar a um certo grau de sub-entendimento.

Ao curso desta fase, aluno indica as principais propriedades que deseja demonstrar. O tutor compara essa proposições às demonstrações corretas para validá-las ou refugá-las. O plano estará incorreto por diversas razões:

- uma das propriedades é falsa;
- uma das propriedades é supérfluas;
- as propriedades se ligam em planos diferentes.

De cada um dos casos, o plano é refugado com uma mensagem de explicações indicando o propriedade em causa. Quando o aluno corrigir o seu plano, ele passará para a fase de demonstração. O tutor pergunta-lhe quando se realizará sucessivamente todas as etapas do plano, isto é, quando serão demonstradas cada uma das propriedades.

Conclusão

Nesta pesquisa apresentou-se duas abordagens de demonstração em geometria, alternativas às demonstrações lineares crescentes. Nas duas abordagens: a crescente (que parte da meta para chegar a hipótese) e a global (que apresenta um esquema geral de prova) são geralmente empregadas para trabalhos orais ou protótipos.

4.4 Desenho e Figura – Geometria e desenho técnico com auxílio do computador – Rudolf Strässer. IDM, Universidade de Bielefeld / LSFF, IMAG, Universidade de Grenoble. In. Actes Séminaire de Didactique des Mathémaatiques et de l'Informatique: 1991. p. 177-189.

Nos cursos de didática é mais evidenciada a especificação do domínio do saber constituído pela geometria (Laborde 1990, p. 341– 345). Laborde diz que o saber geométrico se interessa por dois campos do conhecimento: o espaço material (visto físico) e o espaço teórico que se apresenta como decorrente da geometria não euclidiana, centrando-se sobre a análise material. Esses dois campos de conhecimento constituem o significado da geometria.

O desenho parece ser o sistema que mais se adapta a análise das relações espaciais, no lugar de ser a língua natural ou uma linguagem formalizada que se pretende para melhorar a exploração das relações lógicas.

É, principalmente, a percepção que desempenha o papel de mediador entre a figura e o desenho. Parzyzs (1988) distingue o desenho como um modo de representar o objeto geométrico que está descrito no texto que o definiu. Observa-se que Parzysz não identifica o objeto material e objeto da geometria, da figura.

Significação de geometria e de desenho técnico

Para se ter uma imagem completa da geometria, a relação binária: desenho-figura deve ser ampliada para "significação" dos desenhos e das figuras. Em uma perspectiva um pouco global da matemática e da história da matemática, depois do século XIX, está se fazendo um corte mais e mais com o mundo material, criando-se um campo exemplar de pesquisa axiomática.

Do ponto de vista epistemológico, a geometria cria um campo de análise lógica. Bourbaki (1960. p. 145) caracteriza a geometria como tendo ultrapassado, na qualidade de ciência autônoma e viva, a geometria clássica, transformando-se portanto, na linguagem universal da matemática contemporânea, de uma flexibilidade e de uma comodidade incomparável.

Do ponto de vista das práticas sociais, atribui-se um outro significado a geometria: utilização como meio de planificação, de descrição e de controle da produção material, principalmente nos desenhos técnicos. Esta utilização, graças ao progresso de geometria descritiva de Monge e de seus sucessores, está transformando a atividade específica de desenhista técnico, em um saber ensinar, dentro das lições de ensino profissionalizante e em um desenvolvimento de significância específica.

Tradicionalmente, na escola, é planejada uma geometria plana, uma geometria a duas dimensões, enquanto que o desenho técnico, notadamente na metalurgia e nas edificações (excluindo a eletricidade), é um modo específico de descrever os corpos tridimensionalmente apoiados em duas dimensões.

Uma ferramenta nova: o computador e o micro-mundo entre figura e desenho

O computador é um programador de tela que provoca mudanças nas menores possibilidades na geometria escolar. Por exemplo: na Alemanha, as variáveis numéricas sobre os comprimentos e sobre os ângulos para uma construção qualquer, são muito divulgadas como meio de uniformização das construções dos alunos.

Pode-se mencionar as vantagens do uso do computador, tanto na geometria quanto no desenho técnico:

- explicação da construção;
- oportunização a exploração;
- subjacência mais apropriada a um ensino explícito;
- estabelecimento de uma seqüência para demonstração;
- possibilidades de macroconstruções;
- possibilidade de dobrar, trocar um desenho, facilitar a construção das variáveis de uma figura.

Para o Desenho Auxiliado pelo Computador (DAO), os dois últimos pontos são importantes porque eles não podem burlar a avaliação.

Conclusão

LABORDE (1991), está falando da trilogia mundo Real-Modelo-Micromundo.

Para a geometria, eles distinguem uma geometria do desenho, da figura e da figura do CABRI-Géomètre. Na sua contribuição, em princípio, Laborde discute a gestão automática desta trilogia. Ele necessita até mesmo rever que esta trilogia não está identificada com o triângulo semiótico significante / significar / significação. Ademais, na minha visão da trilogiais, Laborde falha na distinção entre significante e significação que é pertinente na geometria.

4.5 Um modelo especialista na resolução de problemas de geometria. Jean Michel Bazin; LAFORIA, Université de PARIS, 6. Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 5 e UFR de sciences exactes et naturelles. Moulin de la Housse, 51100 REIMS. In: Actes Environnements Interactifs d'apprentissage avec ordinateur: ENS, 1993. P. 27-38

Este trabalho fundamenta-se sobre a seguinte hipótese: qualquer ensinamento que se disponha a atender ao aluno, ele também deve propor uma maneira de pesquisar. A partir de observações, de análise de artigos, de teses e conceitos de Ensino Interativo Assistido por Computador (EIAO) e de trabalhos de psicologia e didática propõe-se aqui um mecanismo de enriquecimento do problema. O maior interesse é propor os elementos que permitem elaborar uma solução susceptível do trabalho juntamente com o esclarecimento dos problemas.

Como se faz o enriquecimento de um problema?

Depois da leitura do enunciado, tem-se uma visão do problema muito mais rica que inicialmente. Decompõem-se o processo em três etapas. A primeira etapa é constituída de reflexões e de automatismo descompromissados com o traçado da figura. A segunda etapa permite experimentalmente colocar o problema dentro de um capítulo em curso. Na chamada etiqueta do problema, o capítulo ou sub-capítulo, dentro do qual experimentalmente se coloca o problema. Ao longo da terceira etapa, o fenômeno da classificação do problema permite enriquece-lo com os conhecimentos contidos nos capítulos correspondentes às suas etiquetas. O estudo sucessivo destas três etapas compõe-se das seguintes partes: propor uma limitação do problema, mostrar como experimentalmente etiqueta-los e finalmente como esta etiquetagem permite enriquece-lo.

Este método de exploração da figura, dirigido pelo conhecimento, favorece, portanto, um dos aspectos mais fascinantes de geometria: a passagem do concreto para o abstrato.

4.6 Manipulação direta dos trabalhos de desenho em Geometria Descritiva na aprendizagem por computador: Paulo PAVEL, University of Maine – Le Mans, FRANCE; Marie-Claire RIBEIRO POLA, Laval University – Quebec, CANADÁ; Martial VIVET, University Maine, Le Mans, FRANCE,1998. In: Actes Eighth International Conference on Engineering Design Graphies and Descriptive Geometry, Texas: ENS, 1998. p. 608-612.

Para Pavel (1996), as mais freqüentes dificuldades nos alunos em Geometria Descritiva são: criação do desenho ortográfico com os instrumentos do desenho tradicional e visualização espacial. Os computadores tem sido usados para minimizar esses problemas. Alguns ensinamentos experimentais tem usado o software CAD e esta prática tem sido usada nas escolas.

A noção do espaço tridimensional leva o homem a confrontar suas origens com o mundo, sendo isso a essência da construção da mente humana, uma construção racional, onde os objetos estão coordenados e estruturados em situação espacial 3D. A raiz da percepção espacial são as percepções táteis, que são transportadas do gráfico pelas imagens mentais que introduzem a forma abstrata.

Em seus trabalhos de desenho, usam a geometria elementar plana, conhecida pela descrição de procedimentos, para resolver um problema proposto. Mas, na aprendizagem, deve-se primeiramente visualizar a situação espacial (heurístca) através da passagem recíproca entre o plano do desenho e a geometria do espaço tridimensional, através do Método das Projeções de Monge. Esse método, permite-nos resolver trabalhos de desenho mais complexos, especialmente naqueles que tem uma modelagem sólida, onde a visualização espacial é indispensável. A prática da não visualização, cria no aluno, o hábito de resolver trabalhos de desenho, somente com raciocínio em termos de plano, não desenvolvendo uma visão espacial.

As principais questões com o ensino da Geometria Descritiva são:

a- a passagem do plano para o espaço não é objeto de ensino;

b- maiores capacidades de visualização espacial são necessárias para se adquirir uma decolagem na noção de trabalhos de desenho;

c- o método de ensino de projeções sem a preocupação da visualização, cria o hábito de resolver problemas sem essa visualização espacial, o que dificulta a resolução de problemas mais complexos;

d- representação de instrumentos que tragam um "status" cognitivo real através de um método que possa contribuir com a geometria e o raciocínio espacial do aluno.

Deve-se considerar todas as dificuldades que o aluno apresenta, para se obter um processo de ensino e aprendizagem da Geometria Descritiva. Os autores criaram condições para isso, através do desenvolvimento de situações de ensino, onde os alunos terão a possibilidade de manipular objetos geométricos e representa-los com a ajuda de um micro-mundo que facilita a compreensão dos conceitos mais abstratos que são difíceis de visualizar.

O projeto desenvolve a Geometria Descritiva usando o micro-mundo Cabri Géométre II (Laborde e Laborde, 1991), (Bellemainm 1992), (Laborde,1994). Este software possibilita a manipulação direta dos objetos geométricos básicos. Essa manipulação direta permite a observação de todas as propriedades invariantes do desenho construído e explicado pelo Método das Projeções de Monge.

Muitos estudantes de engenharia e ciências são capazes de acompanhar certos papéis e modelos, mas quando são chamados para visualiza-los eles se atrapalham. Isso é o resultado do estudo impróprio das visualizações de princípios básicos envolvendo retas e planos (Hawnk, 1992). Para aprimorar o estudo da visualização das retas e planos, desenvolveu-se com o mesmo Cabri Géométre II, situações utilizando o paradigma de multimundo para representação de objetos diferenciando-os pelo envolvimento das imagens mentais e problemática

Conclusão

Pelo método da manipulação direta do desenho, a tela do computador se transforma em um campo experimental para a pesquisa em propriedades geométricas das duplas projeções ortogonais dos objetos no espaço. A adição de movimentos para os trabalhos de desenho em Geometria Descritiva, permite ao estudante aprender, descobrindo a jogada da análise da mudança de propriedade e da dupla projeção do objeto durante a manipulação seguinte. No ensino de situações de multimundo as condições espaciais podem ser comparadas no desenho resultante. Pelo processo da manipulação direta dos trabalhos de desenho através do computador a Geometria Descritiva se transforma em um instrumento universal aplicada a todas as técnicas, porque ela teoriza ambas as fases essenciais: a descoberta (formas) e representação (superfície).

4.7- CABRI – GÉOMÈTRE e DEFI, interação microcomputador/tutor em geometria – Université Joseph, Grenoble, França. (Baulac, 1991; Almouloud, 1993)

Baulac (1991) define o Cabri-Géomètre como um caderno de rascunho interativo. Na tipologia dos "software" educativos, segundo seu modo de interação com o educando, ele é um micromundo de construção e exploração de figuras geométricas.

DEFI é um tutor para a fase de exploração e de pesquisa de uma demonstração. A interação do Cabri-géomètre e do DEFI permite que seja feita uma descoberta dirigida da geometria. Para o aluno se utilizar deste "software" é necessário que ele pesquise e saiba pesquisar. Com o Cabri-Géomètre, o estudante tem possibilidade de criar macro-construções. O DEFI é uma ferramenta que auxilia a descoberta da solução de um problema, bem como sua organização dedutiva, sendo eficaz na revelação das técnicas utilizadas pelos alunos para realizar as concepções de raciocínio (Almouloud, 1993).

O DEFI foi desenvolvido com os seguintes princípios didáticos (Baulac, 1991):

- colocar os alunos em verdadeira atividade de resolução de problemas;
- integrar, na resolução do problema, um trabalho de natureza heurística sobre a figura;
- reagir em tempo real, os erros de tipo lógico;
- neutralizar ao máximo as variáveis de natureza lingüísticas;

• fazer com que o aluno reflita sobre a atividade que está desenvolvendo;

• trabalhar mais a nível de representação de conhecimento do que em torno de estratégias mais ou menos algorítmicas da solução.

Para sua realização foram desenvolvidos essencialmente dois módulos: um módulo demonstração, que manipula os passos da demonstração impondo uma estrutura e fazendo uma validação e um módulo exploração da figura, que é de natureza e de funções essencialmente heurística.

Com esta aplicação, os alunos apresentam dois encaminhamentos: uma postura de resgate da exploração e uma declaração de capacidade de fornecer sua prova, registrando-a, resumidamente, em um rascunho.

Segundo Almouloud (1993), uma das principais características do DEFI é ter substituído a demonstração geométrica por tarefas elementares que devem se acessíveis à maioria dos alunos. As decisões que o DEFI toma foram feitas a partir do conhecimento especialista e são anotadas no histórico do aluno. O modelo do aluno no sistema EIAC (Ensino Inteligente Auxiliado por Computador) possui diversas funcionalidades, tais como:

• Corretiva – no módulo demonstração de DEFI existe uma lista de "bugs" do ponto de vista didático, e que tem por objetivo conduzir o estudante a assimilar a estrutura de uma demonstração e não somente fornecer correções imediatas e certas faltas julgadas importantes;

• Elaborativa – que visa completar os conhecimento ou a concepção do aluno para que ele seja capaz de resolver o problema. Daí a necessidade de integrar o DEFI com o Cabri-Géométre;

• Diagnóstico – a leitura dos resumos dos passos das demonstrações feito por professores que não estão familiarizados com o processo didático estabelecido, é diferente da do "software" . O modelo do aluno deve conduzir a regras mais elaboradas do que simples percorrer de uma lista. No DEFI são utilizados, na versão atual, três tipos de passos.

• Evolutiva.

Os dois "softwares" foram desenvolvidos, inicialmente em ambiente Machintosh e a interação utiliza os meios multitarefas deste sistema.

A interface de comunicação é realizada por um módulo exterior às aplicações e por um arquivo de mensagens que tem a preocupação de preservar a prioridade das mensagens, além de possibilitar o funcionamento normal do programa em ausência do módulo externo, possibilitar a interação futura com outros programas e estabelecer um funcionamento independente das evoluções constantes dos "softwares".

Em 1997, os autores aprimoraram o CABRI GÈOMÉTRE, criando o CABRI GÉOMÈTRE II, que permite construir e explorar objetos geométricos interativamente. Os fundamentos geométricos deste software incentiva a exploração e hipóteses, desde formas simples até projeções avançadas e de geometria hiperbólica.

Dentre os principais recursos do CABRI GÊOMÈTRE II, pode-se destacar:

- Inclui a interação analítica, de transformações e geometria euclidiana;
- Permite a construção intuitiva de pontos, retas, triângulos, polígonos, circunferências e outros objetos básicos;
- Translada, expande e rotaciona objetos geométricos em torno de centros geométricos ou de pontos específicos, além de executar a simetria axial e a inversão dos objetos;
- Constrói facilmente cônicas, incluindo elipses e hipérboles;
- Explora conceitos avançados na geometria descritiva e hiperbólica;
- Comenta e mede figuras (com atualização automática);
- Utiliza tanto coordenadas cartesianas como polares;
- Fornece para exibição ao usuário, equações de objetos geométricos, incluindo retas, círculos, elipses e coordenadas de pontos;
- Permite ao professor configurar menus de ferramentas para centralizar as atividades do aluno;
- Verifica as propriedades geométricas para verificar hipóteses baseadas nos cinco postulados de Euclides;
- Calcula continuamente um lugar geométrico;
- Ilustra as características dinâmicas de figuras através de animação;
- Permite ao usuário salvar desenhos em disco, etc.

Conclusão

Cada um dos "softwares" pode ser servidor e/ou cliente de dados e ferramentas. Neste caso específico, o DEFI é cliente do Cabri-Géomètre, pois primeiramente o aluno constrói as figuras com a ajuda do Cabri e após a construção, o DEFI intervém para possibilitar a construção desta demonstração.

Os dados conhecidos pelo Cabri-Géomètre desde seu registro sob a forma de arquivo são transformados em texto que pode ser utilizado por outro programa.

Os "softwares" podem utilizar as estruturas de dados de outros "softwares" bem como seus algoritmos. O procedimento utilizado permite modificar algumas características das interfaces, permitindo a passagem de uma aplicação a outra.

O Cabri-Géométre pode responder às questões sobre a veracidade de certas propriedades, respeitando o ponto de vista particular ou genérico da figura.

Conclusão

Nas pesquisas apresentadas, apurou-se que a utilização do computador na geometria requer conhecimentos preliminares, os mais diversos, de informática. Nenhum dos autores abordou uma maneira eficaz de construção do conhecimento por parte do aluno. Eles se limitaram a apresentar as causas das dificuldades, como por exemplo: os alunos não possuem visualização espacial ou se as possuem são limitadas.

Qualquer atividade educacional que se utiliza da informática, deve a cada passo, estabelecer a ligação do antes e do depois, para que se possa ter um perfeita ligação entre eles.

Para uma demonstração de geometria com a utilização do computador, é imprescindível que se tenha bem claro, qual é a hipótese e o que se quer comprovar. Para tanto, é necessário que esteja bem definido o triângulo semiótico significante-significar-significação.

Partindo-se da premissa de que o usuário tem (uns mais e outros menos) noções espaciais e consequentemente concepções geométricas, o "software" utilizado no assunto, deve levar isso em consideração. Assim, a construção do Ambiente deve se preocupar sempre, com as características e capacidades do usuário.

Capítulo V

Construção do Ambiente

Introdução

Desde os tempos remotos, o homem evoluiu na sua capacidade de se comunicar. A necessidade de uma comunicação mais objetiva e expressiva obrigou-o a se utilizar de vários meios simultaneamente. Estava criada a multimídia. Tecnicamente o termo multimídia se aplica a qualquer tipo de comunicação, em que se usa mais de um meio (Maddux, Willis, Lamant, 1996). Quando a multimídia se utiliza de um computador, cria um sistema de acesso chamado *hipermídia*, que emprega informações, de forma que o usuário pode navegar nela de maneira produtiva, não linear. A informação pode estar sob a forma de textos, diagramas, diagramas de movimento (animação), imagens estáticas, imagens em movimento (televisão), fala, som ou programas de computador. Selecionando "botões" que são visíveis na tela, o usuário navega dentro da *hipermídia*. Ativando botões, o computador responde. O usuário pode reverter facilmente a ação do botão, para retornar à situação de tela existente antes da sua ativação.

Para a criação do Ambiente *Hipermídia*, seguiu-se um roteiro, do qual foram selecionados alguns tópicos, a seguir descritos. Essa seleção baseou-se na complexidade e no desconhecimento deles, pela maioria dos professores.

5.1 Hierarquização dos conteúdos da Geometria Analítica

Todo o conteúdo abordado da Geometria Analítica foi dividido em grupos de informações, que compõem os invólucros. Cada invólucro pode ter um título. Ele pode ser aberto ou fechado. É fechado quando o usuário pode ler o seu título e aberto quando se pode ver seu conteúdo. Um invólucro pode ter outro dentro dele e pode encerrar outros, existindo, assim, uma hierarquia. A representação visual dos invólucros foi feita através de um ícone que representa o conteúdo de cada invólucro e de um título escrito, também associado a ele.

Diagrama da hierarquização dos conteúdos da Geometria Analítica

1. Geometria Analítica
    1.1 Plana
        1.1.1 Introdução
            1.1.1.1 Distância entre dois pontos na reta
            1.1.I. 2 Sistema cartesiano ortogonal
            1.1.1.3 Distância entre dois pontos no plano cartesiano
            1.1.1.4 Cálculo das coordenadas de um ponto médio

        1.1.2 Reta
            1.1.2.1 Condição de alinhamento de três pontos
            1.1.2.2 Inclinação e coeficiente angular de uma reta
                1.1.2.2.1 Inclinação
                1.1.2.2.2 Coeficiente angular ou declividade
            1.1.2.3 Estudo da equação da reta
                1.1.2.3.1 Equação da reta que passa por um ponto
                1.1.2.3.2 Equação reduzida da reta
                1.1.2.3.3 Equação segmentária da reta
                1.1.2.3.4 Equação geral da reta
            1.1.2.4 Posição relativa de duas retas no plano cartesiano
                1.1.2.4.1 Paralelismo de retas
                1.1.2.4.2 Interseção de retas
                1.1.2.4.3 Perpendicularismo de retas
            1.1.2.5 Ângulo formado por duas retas
            1.1.2.6 Distância entre ponto e reta
            1.1.2.7 Cálculo da área de um triângulo

        1.1.3 Circunferência
            1.1.3.1 Definição

1.1.3.2 Equação geral

1.1.3.3 Posição relativa entre ponto e circunferência

1.1.3.4 Posição relativa entre reta e circunferência

1.1.4 Cônicas

1.1.4.1 Parábola

1.1.4.2 Elipse

1.1.4.3 Hipérbole

1.2 Espacial

1.2.1 Reta

1.2.1.1 Equação vetorial da reta

1.2.1.2 Equações paramétricas da reta

1.2.1.3 Reta definida por dois pontos

1.2.1.4 Equações simétricas da reta

1.2.1.4.1 Condição de alinhamento de três pontos

1.2.1.5 Equações reduzidas da reta

1.2.1.6 Retas paralelas aos planos e aos eixos coordenados

1.2.1.7 Ângulo de duas retas

1.2.1.8 Condição de paralelismo de duas retas

1.2.1.9 Condição de ortogonalidade de duas retas

1.2.1.10 Condição de coplanaridade de duas retas

1.2.1.11 Posição relativa de duas retas

1.2.1.12 Interseção de duas retas

1.2.1.13 Reta ortogonal a duas retas

1.2.1.14 Ponto que divide um segmento de reta em uma razão dada

1.2.2 Plano

1.2.2.1 Equação geral

1.2.2.2 Determinação de um plano

1.2.2.3 Planos paralelos aos eixos e aos planos coordenados – casos particulares

1.2.2.3.1 Plano que passa pela origem

1.2.2.3.2 Planos paralelos aos eixos coordenados

1.2.2.3.3 Planos paralelos aos planos coordenados

1.2.2.4 Equações paramétricas do plano

1.2.2.5 Ângulos de dois planos

1.2.2.5.1 Condição de paralelismo e perpendicularismo entre dois planos

1.2.2.6 Ângulo de uma reta com um plano

1.2.2.6.1 Condição de paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

1.2.2.6.2 Condição para que uma reta esteja contida em um plano

1.2.2.7 Interseção de dois plano

1.2.2.8 Interseção de reta com plano

1.2.2.8.1 Interseção do plano com os eixos e os planos coordenados

1.2.3 Quadráticas

1.2.3.1 Introdução

1.2.3.2 Superfícies quadráticas centradas

1.2.3.2.1 Elipsóide

1.2.3.2.2 Hipérbole de uma folha

1.2.3.2.3 Hipérbole de duas folhas

1.2.3.3 Superfícies quadráticas não centradas

1.2.3.3.1 Parabolóide elíptico

1.2.3.3.2 Parabolóide hiperbólico

1.2.3.4 Superfícies cônicas

1.2.3.5 Superfícies cilíndricas

A hierarquia do conteúdo utilizada foi tanto a estrutura de árvore (quando não se utiliza de linhas cruzadas, Fig. 2), quanto a estrutura de rede (que se utiliza de linhas cruzadas, Fig. 3).

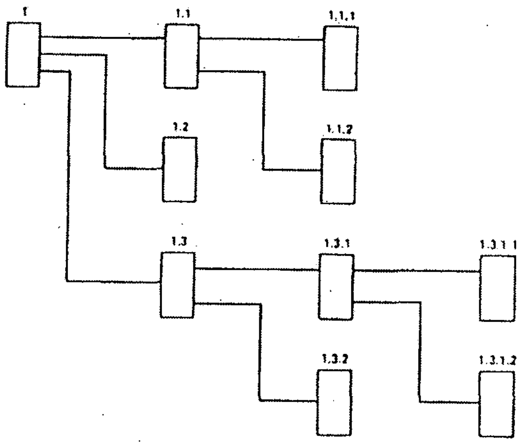


Fig. 2 Estrutura de árvore
Fonte: James Martin, 1992

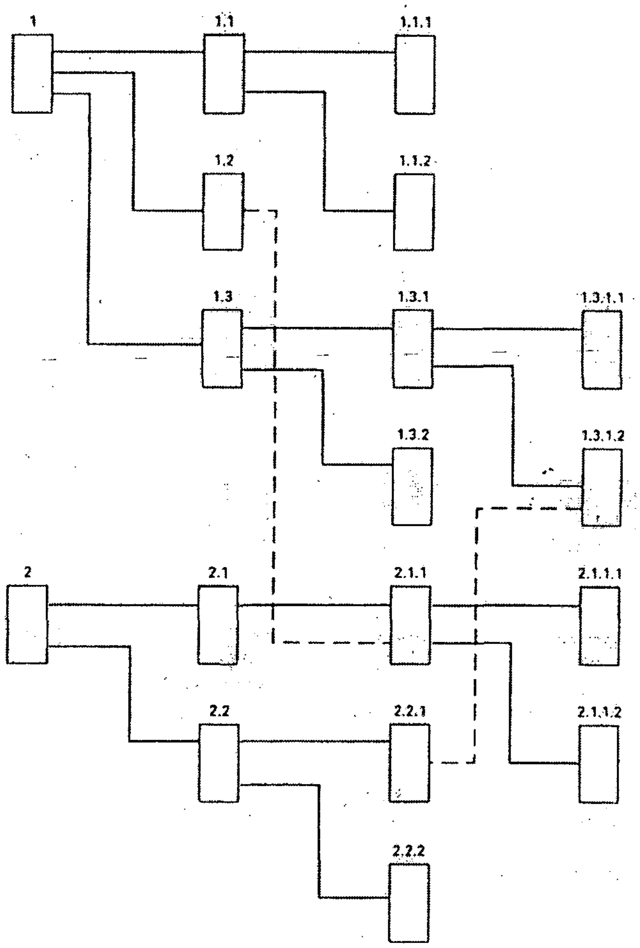


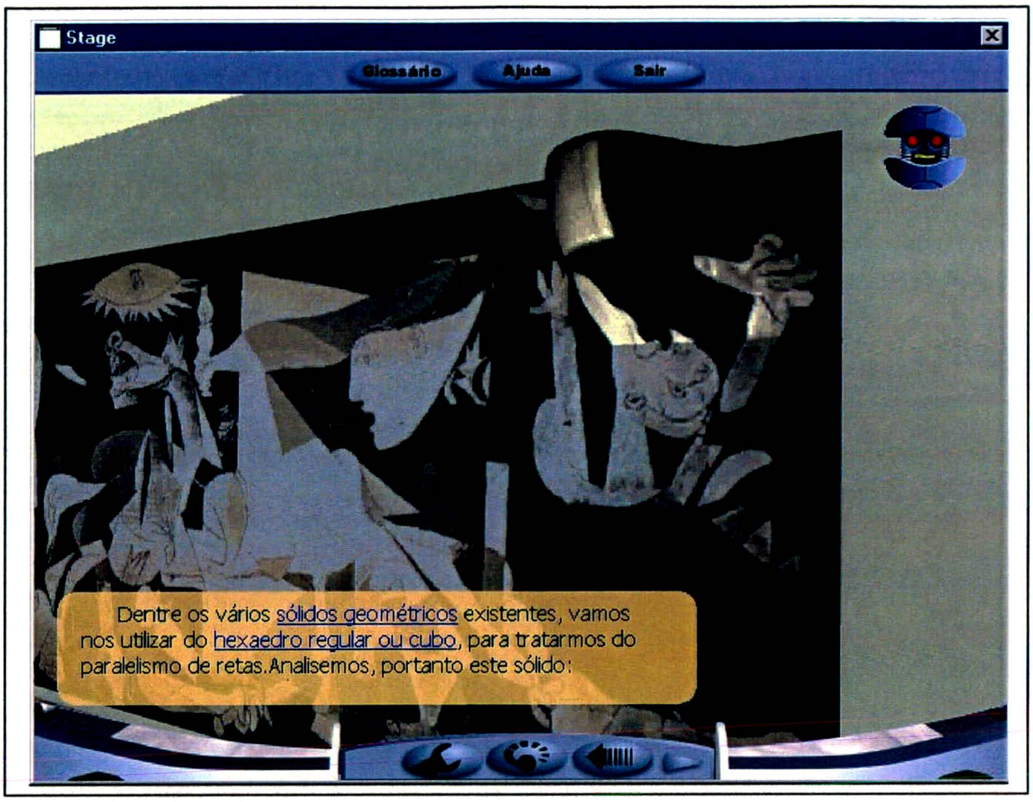
Fig. 3 Estrutura de rede
Fonte: James Martin, 1992

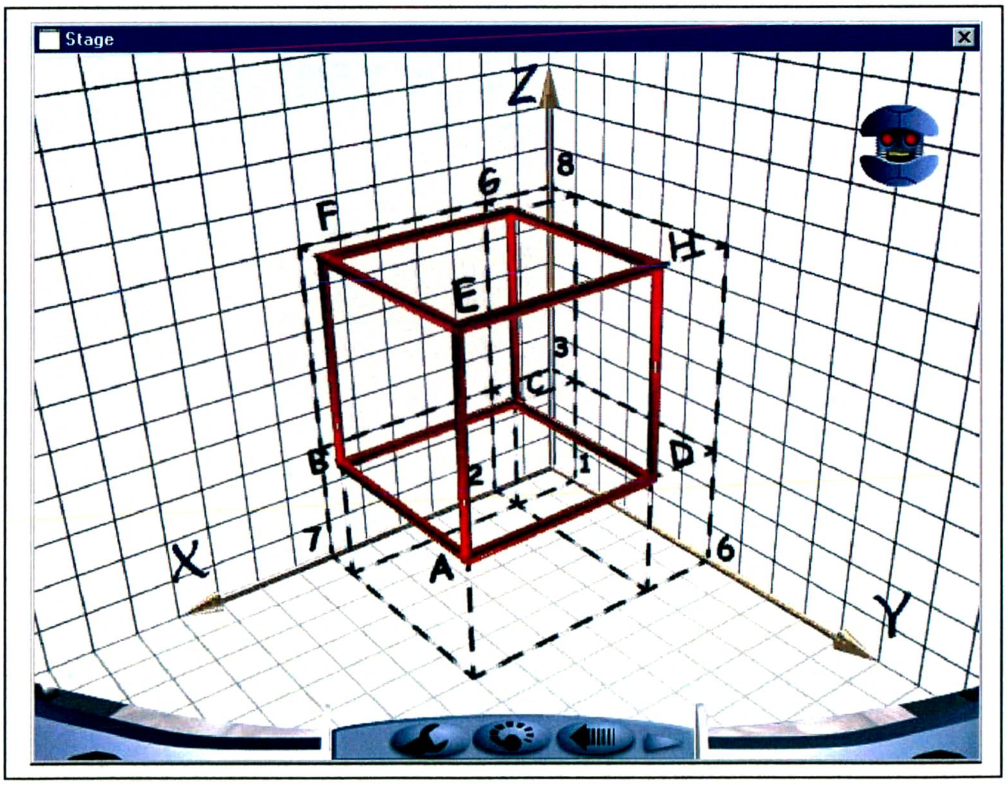
5.2 Elaboração do "Storyboard"

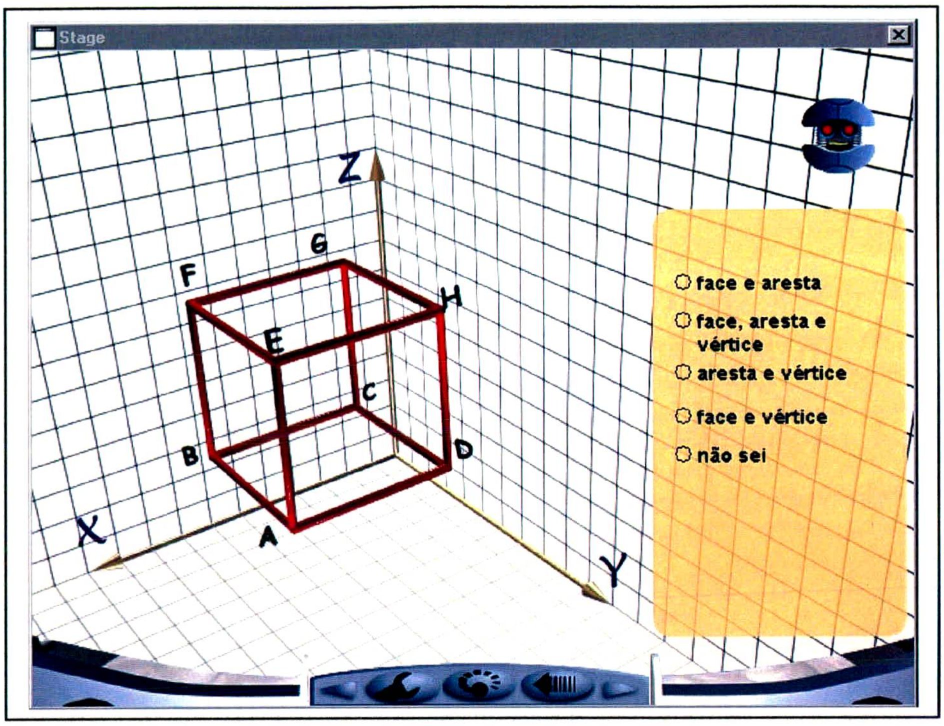
O "storyboard" é um gráfico de cenas e pontos de decisão do projeto *hipermídia*. Ele é uma ferramenta útil pois apresenta uma imagem clara do projeto todo. A maioria dos "storyboards" são do tipo gráfico ou do tipo ficha. Cada um apresenta suas vantagens e desvantagens.
Os do tipo gráfico são bons para projetos com um número limitado de cenas, ou aqueles que tendem a fluir a partir de um início fixo até um ou mais pontos finais fixos. Uma história do tipo escolha-seu-próprio-caminho é um bom exemplo disso. Às vezes, pode ser possível retroceder na história, mas normalmente segue-se por um certo número de cenas possíveis até se atingir o final.
"Storyboards" baseados em fichas são bons para projetos mais complexos. Aqui se tem uma ficha para cada cena. Na ficha, pode-se acompanhar uma cena, o que acontece nela, de onde se pode chegar até ela e para onde se pode ir, a partir dela. Poderão ser atribuídos números às cenas, para se manterem as fichas ordenadas. Se uma cena for modificada ou eliminada, não é preciso refazer todo o roteiro, bastando, para isso, substituir ou eliminar a ficha correspondente àquela cena. (Gertler, 1995)
Neste trabalho foi utilizado o "storyboard" do tipo fichas. A seguir estão apresentadas algumas fichas correspondentes a cenas da Construção do Ambiente.

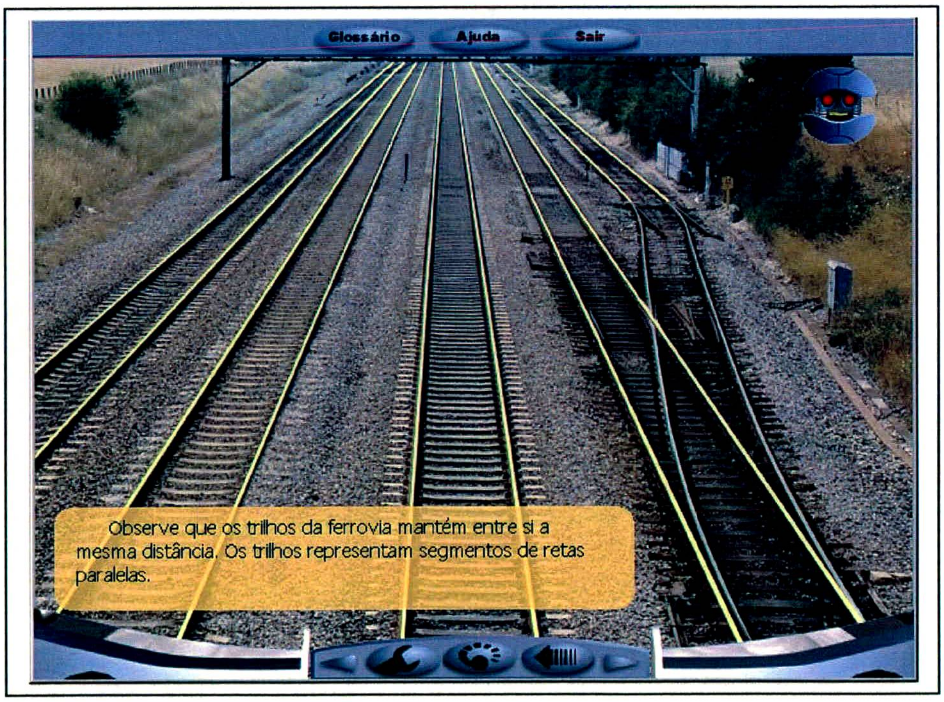
5.2 Desenvolvimento da Metáfora

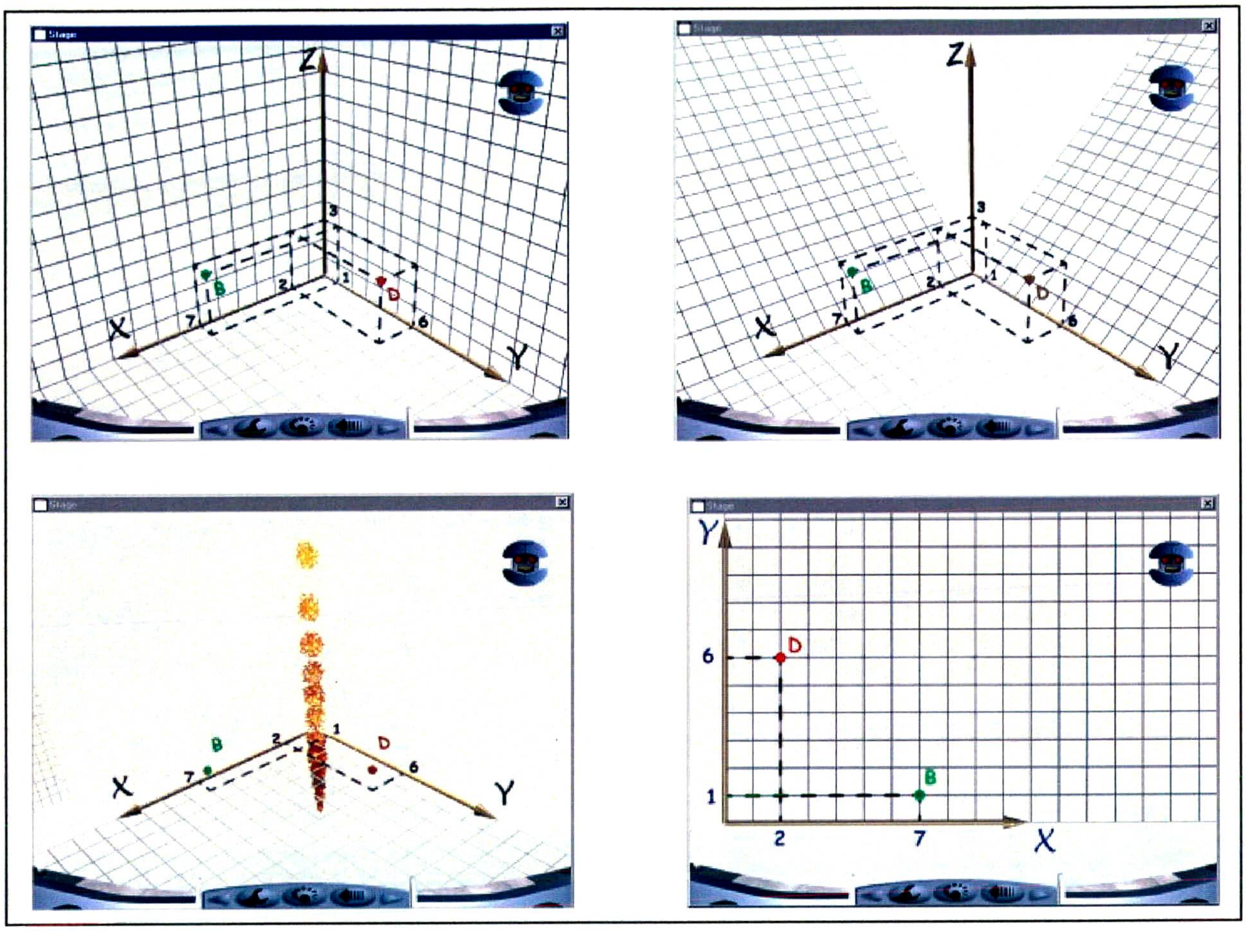
Em lingüística, uma metáfora é "o emprego de um termo concreto para exprimir uma noção abstrata por substituição analógica" (Enciclopédia Larousse,1979). Na interação homem-computador, a metáfora é considerada um fator predominante na criatividade, e notadamente importante na aprendizagem. A metáfora é um estimulador das inferências que permitem identificar não só os traços comuns, mas também as diferenças entre as noções mais conhecidas das menos conhecidas (Coutaz, 1990). A metáfora é um veículo cognitivo precioso que esta sendo explorada vantajosamente na interação homem-computador. Nessa interação, consideram-se essencialmente dois tipos de metáfora: aquelas que se inspiram em um modelo real e aquelas que falam de um abstrato (Hutchins, 86). Qualquer que seja o tipo

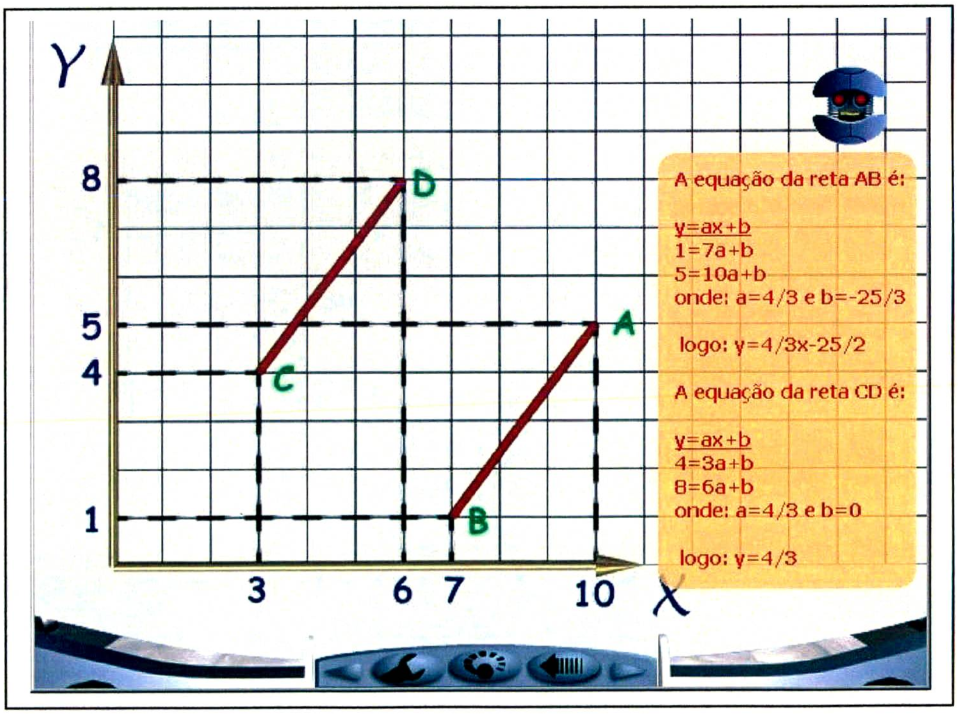

Stage
Glossário
Ajuda
Sair
Dentre os vários sólidos geométricos existentes, vamos nos utilizar do hexaedro regular ou cubo, para tratarmos do paralelismo de retas.Analisemos, portanto este sólido:


Stage
Z
8
G
F
H
E
3
C
B
D
2
1
7
X
A
6
Y


Stage
Z
G
F
H
E
C
B
D
X
A
Y
face e aresta
face, aresta e vértice
aresta e vértice
face e vértice
não sei


Glossário
Ajuda
Sair
Observe que os trilhos da ferrovia mantém entre si a mesma distância. Os trilhos representam segmentos de retas paralelas.


Z
3
2
1
7
6
B
D
X
Y


Y
8
5
4
1
3
6
7
10
X
A
B
C
D
A equação da reta AB é:
y=ax+b
1=7a+b
5=10a+b
onde: a=4/3 e b=-25/3
logo: y=4/3x-25/2
A equação da reta CD é:
y=ax+b
4=3a+b
8=6a+b
onde: a=4/3 e b=0
logo: y=4/3

de metáfora escolhida, ela apresentará vantagens e inconvenientes. Mesmo assim, deve ela definir um estilo de interação, devendo se constituir em uma unidade de coerência geral para a imagem.

Para este trabalho, foi idealizada como metáfora uma Viagem no Tempo, em que será abordada a História da Arte.

5.3.1 História da Arte

Embora se saiba que a arte é uma manifestação do homem através da pintura, música, escultura, dança, arquitetura, etc., está sendo abordada, neste trabalho, apenas a pintura. Desde os seus primórdios, o homem manifestou seu espírito artístico através da pintura. Assim, quando se faz uma viagem no tempo, relaciona-se qualquer época com o estilo dessa arte. Do estilo predominante, procura-se resgatar o que existe nele de manifestações geométricas, comparando-as com um ramo da Geometria. A Geometria Analítica está interligada ao Cubismo Analítico, pois neste tipo de pintura, o autor decompõe minuciosamente as formas, em sucessivos planos e ângulos, que se interpenetram ou se sucedem, sugerindo uma visão total e simultânea dos objetos.

O Cubismo surgiu com a idéia de Cézanne, de simplificar as formas, reduzindo-as a seus elementos geométricos básicos. Ele pretendia tratar as formas da natureza como se fossem cilindros, esferas ou cones. Há controvérsias, no entanto, de que obra é pioneira no Cubismo. Uns acham que é **Les Demoiselles** (Fig. 4), pintada por Picasso em 1907, que retrata cinco pessoas em formas geometrizadas, até mesmo deformadas. Outros acham que foram as paisagens de Georges Braques exibidas em 1908, em que o autor transforma os troncos das árvores em cilindros e as casas em verdadeiros cubos. Os cubistas não tinham a intenção de representar, mas de sugerir ao espírito a estrutura total dos corpos ou objetos. Queriam que suas obras fossem vistas sob todos os ângulos. Queriam, ainda, com essa simultaneidade de percepção da estrutura total do objeto, despertar, também, sentimentos e idéias de tempo.

Fig. 4 Pablo Picasso, **Les demoiselles d'Avignon,** 1907
Fonte: História da Pintura, Wendy Beckett, 1997

O cubismo foi uma forma de rompimento com os estilos tradicionais. Ele resultou no que os críticos chamam de visão simultânea, que é a fusão de várias vistas de uma figura ou de um objeto numa única imagem.

A expressão cubismo deve-se ao crítico Louis Vauxcelles, que ao comentar as paisagens chamou-as de cubos, cúbicas.

A influência do Cubismo não se limitou apenas à pintura. Ele alcançou também outras artes, como a arquitetura e as artes decorativas e aplicadas.

Segundo Cavalcanti, na pintura existem duas espécies de realismo: o Visual e o Intelectual.

No Realismo Visual, o pintor representa apenas aquilo que vê ou aquilo que está sob sua percepção visual direta. No Realismo Intelectual, o pintor representa não apenas aquilo que vê, mas também aquilo que ele sabe que existe, embora não o esteja vendo.

Se o artista for um realista visual, ele representará um caixote, aplicando-lhe as regras da perspectiva científica, representando apenas as três faces visíveis. Se for realista intelectual, irá representar as três faces visíveis e as três invisíveis. Os cubistas propuseram-se a solucionar este problema aplicando simultaneamente o Realismo Visual e o Intelectual. Passaram a decompor os objetos em ângulos, quadrados, retângulos, que se cruzam e interpenetram.

Essa decomposição era feita de modo arbitrário, sem obediência ou fidelidade à estrutura do objeto representado. A obra era criada conforme a imaginação ou as exigências da sensibilidade do artista. A idéia do pintor cubista não é mais imitar, reproduzir ou copiar a forma do objeto, mas, sim, criar ritmos plásticos, combinação de linhas e cores, que não possuem relação direta com a imagem do objeto. Da decomposição, surgem duas linhas do Cubismo: a Sintética (Fig. 5) e a Analítica (Fig. 6).

O Cubismo Analítico é a primeira fase da decomposição minuciosa da forma dos objetos, que se distingue ainda pela discrição do colorido. O Cubismo Analítico vai de 1908 a 1911 e nele as formas são decompostas arbitrariamente em múltiplos elementos. Nesse período, as obras de Picasso e Braque se parecem bastante. O Cubismo Analítico foi muito criticado, na época, porque achavam que os quadrados e ângulos despertavam sugestões mecanicistas.

Fig. 5 Pablo Picasso, **Fábrica em Horta de Ebro,** 1909
Fonte: Vida e Obra de Picasso, Nathaniel Harris, 1995.

Fig. 6 Pablo Picasso, **Violino e Uvas**, 1912
Fonte: Vida e Obra de Picasso, Nathaniel Harris, 1995

5.4 Software de Autoria

Escolheu-se para este trabalho, como software de autoria, o Director 7.0, que é um programa de desenvolvimento de multimídia. Ele é utilizado para apresentações interativas, constituindo-se em uma ferramenta poderosa para elaboração de simulações técnicas. Para sua utilização, não é necessário conhecimentos profundos de técnicas ou linguagens de programação no desenvolvimento do "software".

Um sistema de autoria é um ambiente que possui vários recursos para a criação de um sistema *hipermídia*. Ele possui elementos pré-programados e uma linguagem própria, que possibilitam o desenvolvimento de aplicações *hipermídia*.

Para a criação do "software", além da ferramenta, é necessário utilizar criatividade na realização do "layout" de "design" das telas, das seqüências animadas, na audição de "videoclips" ou na confecção de desenhos.

Segundo Bizzotto (1998), o Director 7.0 utiliza como metáfora o desenvolvimento de um filme em que todos os componentes do "software" são análogos àqueles necessários para sua criação. É evidente que não é preciso ser um diretor de cinema para entender como o Director funciona. Qualquer pessoa tem uma idéia, mesmo que seja elementar, dos aspectos envolvidos no desenvolvimento de um filme.

Neste programa existem quatro janelas básicas:

- a janela "Cast members" que corresponde aos atores do filme, que são: imagens, sons, animação, textos, etc;
- a janela (o) "Stage", que é o lugar onde os atores são colocados (palco);
- a janela "Score" onde aparecem bem definidas as seqüências das cenas que irão ocorrer. É onde é feita toda a programação;
- janela "Control panel", que funciona como um controle remoto, possibilitando rodar o filme, podendo-se, assim, ter um feedback imediato do que realmente se deseja fazer. A escolha deste "software" de autoria foi feita em função das seguintes características:

-"Cross-platform": permite que o ambiente desenvolvido não seja restrito, por exemplo, a PC's. Com isso pode-se formar uma "comunidade de conhecimento" com pessoas em diferentes lugares do mundo, utilizando diferentes plataformas;

- Arquitetura aberta: facilita a extensão através da utilização de ferramentas desenvolvidas por outras instituições;
- Integração com a Internet: o Director permite grande facilidade para comunicação via rede, possibilitando desde download de arquivo até o üpload de páginas WWW;
- Permite a orientação a objetos: a linguagem de programação utilizada pelo Director permite a criação de objetos na memória:
- Mudanças "on the fly": o Director permite que se altere o código do software criado, durante a utilização pelo usuário final. (Bizzotto, 99)

5.5 Conclusão

Primeiramente se conceituou as técnicas de comunicação, enfatizando a *Hipermídia* como um canal, não apenas de informação, mas de interação com o usuário. Apresentou-se as formas de navegação nos conteúdos da geometria analítica e como estes conteúdos estão dispostos hierarquicamente. A metáfora utilizada foi escolhida pela capacidade que a História da Arte tem de estabelecer ligações entre os homens, nos mais diversos períodos da História.

A utilização do Director 7.0 deu-se pela capacidade que este “software” de autoria tem no desenvolvimento da *Hipermídia* . Na descrição da Concepção do Ambiente, procurou-se objetividade nas conceituações e na escolha dos meios auxiliares.

Capítulo VI

Conclusão

Inicialmente, procurou-se fazer uma análise criteriosa e crítica de como a geometria analítica é atualmente trabalhada nas escolas. Ao ser apresentada a história da Geometria Analítica, desde o início, constatou-se que a busca pelo conhecimento sempre esteve relacionada a uma necessidade, em que a matemática (bem como outras ciências) só tem sentido se for trabalhada com a realidade do aluno.

Considerando-se a evolução tecnológica, foi proposta uma nova forma de aprendizagem da geometria analítica via computador, mais especificamente, usando a *hipermídia*. Considerando que mesmo com utilização da tecnologia, se os conteúdos da disciplina forem abordados de uma forma mecanicista, não se estará apresentando nenhuma novidade, a proposta apresentada é levar o aluno a uma concepção do processo do conhecimento verdadeiramente dinâmico, relacional e interativo.

Para que haja dinamismo, relacionamento e interatividade, este trabalho foi idealizado considerando o usuário independentemente de pré-requisitos. Não se estabeleceu, portanto, faixas etárias ou conhecimentos prévios.

O ponto forte deste trabalho é o de dar liberdade ao usuário, para que ele, e somente ele, estabeleça seus limites. Está sendo considerado, aqui, o aluno como portador de imaginação, de criatividade e de noções espaciais. As argüições, quando feitas, deverão ter pelo menos três formas de abordagem, para que o aluno possa escolher aquela mais compatível com a sua idéia sobre o assunto. Desta maneira, estará se respeitando o que foi dito no Capítulo II: Não existem alunos que "aprendem" e os que "não aprendem". O que existe é um tempo diferenciado entre eles, para tomarem uma decisão: criar um novo esquema ou modificar um já existente".

6.1 Sugestões para futuros trabalhos

A partir desta concepção, pode-se estabelecer como trabalho prioritário e exequível o Desenvolvimento de um Ambiente *Hipermídia* para a Aprendizagem da Geometria Analítica. Poderão ser criados outros ambientes, abordando qualquer conteúdo de qualquer área de estudos.

Referências Bibliograficas

ALLEN, Richard; CEDERBERG, Judith; WALLACE, Martha. L'Intégration de l'Ordinateur dans l'Enseignement de la Géométrie par le Développement et l'Utilisation de Scénarios. In: Actes Deuxièmes Journées EIAO de Cachau, Cachau: Ens, 1991. P. 33-44.

BARBOSA, Ana Mae T. B.. A Arte e Educação no Brasil. São Paulo. Perspectiva, 1978.

BARTHE, Michel. Ergonomie des Logiciels – une nouvelle approuche des méthodologies d'informatisation. Paris. Masson, 1995.

BAZIN, Jean Michel. Un Modèle d'Expert en Résolution de Problème de Géométrie. In: Actes Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur: ENS, 1993. p. 27-38.

BEATO, M. Perez; MARMOL, L. Sanchez. Geometria-Métrica, Proyectiva Y Sistemas de Representacion. Madri. Gráficas Reunidas S.A., 1961.

BECKETT, Wendy. História da Pintura. São Paulo. Editora Ática, 1997.

BIZZOTTO, Carlos Eduardo Negrão. Director 6 Multimídia e Internet. Florianópolis. Editora Visual Books, 1998.

BOYER, Carl B., História da Matemática, São Paulo. Editora Edgard Blücher Ltda., 1974.

BRUNSCHVICG, Leon. Las etapas de la Filosofia Matemática, Buenos Aires. Editorial Lantaro, 1945.

CABRI-GÉOMÈTRE e DEFI, Interação Micromundo/tutor em Geometria - Université Joseph Fourier, Grenoble, França. (Baulac 1991; Almouloud, 1993).

CASTRUCCI, Benedito. Desenho e os Fundamentos Matemáticos. In: II Congresso Nacional de Desenho, Florianópolis. 1981.

CAVALCANTI, Carlos. Como Entender a Pintura Moderna. Rio de Janeiro. Editora Rio.1981

COLLETTE, Jean Paul. História de las Matemáticas, Vol II, Madri. Siglo Veiuntiuno de España S. A. 1985.

COUTAZ, Joëlle. Interfaces Homme-Ordinateur. Paris. Bordos, 1990.

ENCICLOPÉDIA ABRIL. Vol. VI. São Paulo. Abril Cultural, 1972.

EVES, Howard. Introdução a História da Matemática, São Paulo. Editora da UNICAMP, 1985

GERTLER, Nat. Multimídia Ilustrada. Rio de Janeiro. Axcel Books, 1995.

GIOVANNI, José Ruy:; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR., José Ruy. Matemática Fundamental, São Paulo. FTD, 1994.

GUELLI, Oscar. Contando a História da Matemática. Vol. II e VII. São Paulo. Editora Ática. S. A., 1966

HARRIS, Nathaniel. Vida e Obra de Picasso. Rio de Janeiro. Ediouro, 1995.

LIMA FILHO, Adegenor; REBOUÇAS, Floracy Amaral. O Pensamento Formal em Piaget. Goiânia. Dimensão, 1988.

MADDUX, Cleborne D.; WILLIS, Jerry W. Johnson, D. LaMont Educacional Computing: Learning With Tomorrow's Tecnologies. EUA: Allyn and Bacon, 2ª Ed. 1996.

MAGILL, Richard A. Aprendizagem Motora: Conceitos e Aplicações. São Paulo. Editora Edgard Blücher Ltda., 1984.

MARSDEN, Jerrold E.; TROMBA, Anthony J.. Vector Calculus. New York. W. H. Freemann and Company, 1986.

MARTIN, James, Hiperdocumentos e Como Criá-los. Rio de Janeiro. Campus, 1992.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. O Ensino da Matemática no 1º grau. São Paulo. Editora Atlas, 1987.

PASTOR, Julio Rey; SANTALÓ, Luis A,; BALANZAT, Manuel. Geometria Analítica. Buenos Aires. Editorial Kapelusz, 1959.

PAVEL, Paulo; RIBEIRO POLA, Marie-Claire; VIVET, Martial. Direct Manipulation of Working Drwwing in Descriptive Geometry Learning by Computers. In: Actes Eighth International Conference on Engineering Design Graphics and Descriptive Geometry, Texas: ENS, 1998. p. 608-612.

PÊCHEUX, Marie-Germaine. Le développment des Repports des Enfants a l'Éspace. Paris. Éditions Nathan, 1990.

PIAGET, Jean e GARCIA, Roland. Psicogênese e História das Ciências. Lisboa. Publicações Dom Quixote, 1987.

PIAGET, Jean e INHELDER, Bärbel. A Representação do Espaço na Criança. Porto Alegre. Artes Médicas, 1993.

PINTADO, Michel. Une Approche Pour un Tuteur Informatique d'Entreinement à la Résolution d'Exercices de Géométrie Élémentaire. In: Actes Deuxièmes Journées EIAO de Cachau, Cachau: ENS, 1991. p. 45-60.

PY, Dominique. L'Exploration de la Démonstration dans le Projet Mentoniezh. In: Actes Deuxièmes Journées EIAO de Cachau, Cachau: ENS, 1991. p. 19-31.

RODRIGUES, Álvaro J.. Geometria Descritiva. Rio de Janeiro. Livro Técnico Ltda, 1960.

RUEGG, Alan; BURMEISTER, Guido . Méthodes Constructives de la Géométrie Spatiale. Normandes, Lausanne. 1993.

SECRETARIA DO ESTADO DA EDUCACÃO E DO DESPORTO (Santa Catarina) Proposta Curricular. Florianópolis: SC, IOESC, 1998.

SPERANDIO, Jean-Claude. L'ergononmie dans la Conception des Projets Informatiques. Toulouse. Octares, 1993.

STANGOS, Nikos. Conceitos da Arte Moderna. Rio de Janeiro. Jorge Zahar Editor, 1991.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. Geometria Analítica, São Paulo. McGraw Hill, 1987.

STRÄSSER, Rudolf. Dessin et Figure: Géométrie et Dessin Technique à l'Aide d'un Ordinateur. In: Actes Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique: 1991. p. 177-189.

SWOKOWSKI, Earl S.. Cálculo com Geometria Analítica. São Paulo. Makron Books do Brasil Editora Ltda., 1994

THEUREAU, Jacques; JEFFROY, François. Ergononmie des Situations Informatissés. Toulouse. Octares, 1994.

TORI, Romero; ARAKARI, Reginaldo; MASSOLA, Antonio Carlos Aguirra; FILGUEIRAS, Lucio Vilela Leite. Fundamentos da Computação Gráfica. Rio de Janeiro e São Paulo: Livros Técnicos e Científicos S. A., 1987.

ULBRICHT, Vânia Ribas. Modelagem de um Ambiente Hipermídia de Construção do Conhecimento em Geometria Descritiva. Florianópolis, 1997. (Doutorado em Engenharia de Produção. Universidade Federal de Santa Catarina).

VAUGHAN, Tay, Multimídia na Prática. São Paulo. Makron Books, 1994.

WADSWORTH, Barry J. Inteligência e Afetividade da Criança na Teoria de Piaget. São Paulo. Pioneira Editora, 1993.

WOLFMAN, Douglas E.. Criando em Multimídia. Rio de Janeiro. Campus, 1994.