

ROMEU REGINATTO

**CONTRIBUIÇÕES AO PROJETO DE CONTROLADORES NÃO-LINEARES
PARA SISTEMAS COM RESTRIÇÕES NO CONTROLE**

FLORIANÓPOLIS

2000

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**CONTRIBUIÇÕES AO PROJETO DE CONTROLADORES NÃO-LINEARES
PARA SISTEMAS COM RESTRIÇÕES NO CONTROLE**

Tese submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

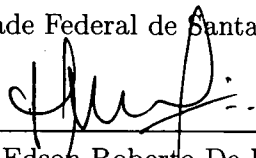
ROMEU REGINATTO

Florianópolis, 9 de outubro de 2000.

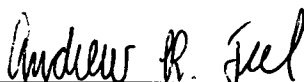
CONTRIBUIÇÕES AO PROJETO DE CONTROLADORES NÃO-LINEARES PARA SISTEMAS COM RESTRIÇÕES NO CONTROLE

Romeu Reginatto

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Controle, Automação e Informática Industrial*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.



Dr. Edson Roberto De Pieri
Orientador

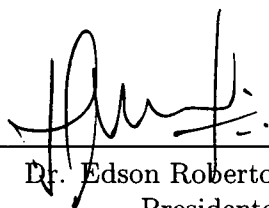


Dr. Andrew R. Teel
Co-Orientador



Dr. Aguinaldo Silveira da Silva
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

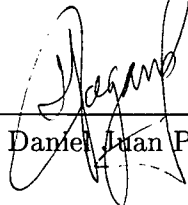
Banca Examinadora:



Dr. Edson Roberto De Pieri
Presidente



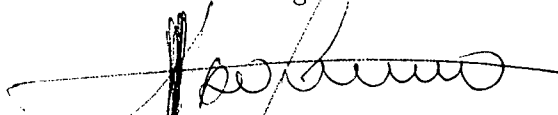
Dr. Pedro Luis Dias Peres



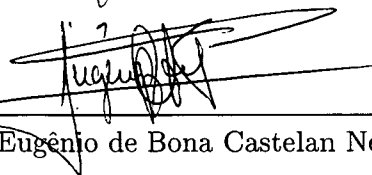
Dr. Daniel Juan Pagano



Dr. Paulo Sérgio Pereira da Silva



Dr. Alexandre Trofino Neto



Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto

A Marlene e Vinícius.

Aos meus pais.

Agradecimentos

Não é senão pelo esforço de muitos que este trabalho se concretiza. Por isto, gostaria de registrar minha gratidão a todos que estiveram presentes e participaram direta ou indiretamente neste trabalho.

Às peças fundamentais deste trabalho, Prof. Dr. Edson R. De Pieri e Prof. Dr. Andrew R. Teel pela acolhida e orientação deste trabalho. O aprendizado que levo da convivência e trabalho com estes professores transcende qualquer possível agradecimento. Não obstante, fica meu agradecimento pela orientação, incentivo constante, pelas aulas, pelas discussões e pela grande amizade.

Sou grato ao Prof. Dr. Petar Kokotovic pela oportunidade de realização de meu trabalho de doutorado sanduíche na UCSB, e por suas valiosas observações quanto ao trabalho.

A todos os professores do DAS/LCMI vai meu agradecimento pela amizade, pelas aulas, pelas discussões, pelas sugestões, e todas demais contribuições neste trabalho. Em especial aos Profs. Drs. Alexandre Trofino Neto e Eugênio Castelan, com quem interagi mais diretamente.

Aos colegas do Computer and Control Lab., Murat, Dan, Mike, Cris, Doca, Luca, Corneliu, Dragan, Vidar, Scott e Nancy, em especial a Luca e Corneliu (*the gang*) pelo coleguismo e todas contribuições diretas e indiretas ao trabalho.

A todos os colegas do LCMI, pela convivência e ajudas daqui e dali. Em especial a José Oliveira, Luis Carlos, Mauro, Daniel Coutinho e Sonia, meus companheiros de sala e trabalho.

O meu agradecimento, especialíssimo e carinhoso, à minha esposa Marlene e ao nosso filho Vinícius, por toda compreensão, companheirismo, encorajamento, apoio, carinho e amor que recebi. Estendo os agradecimentos à *grande família* pelo estímulo e pensamento positivo.

Aos colegas Alexandre Bazanella, João Manoel Gomes da Silva e Tristão Júlio Garcia do Santos, pelo encorajamento e trocas de idéias.

A CAPES pelo apoio financeiro, tanto na Bolsa PICDT como na Bolsa de Doutorado Sanduíche. Sem este apoio, este trabalho não seria possível. Também agradeço a FAPERGS e FAPEU pelo auxílio na participação no 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design.

Ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFSC, ao Departamento de Automação e Sistemas da UFSC e ao Center for Control Engineering and Computation da UCSB pela infraestrutura de trabalho.

Aos grandes idealizadores e mantenedores do *pacote para engenheiro*: Linux, Latex, Emacs, Scilab e Matlab.

Por fim, agradeço a tudo e a todos que direta ou indiretamente ajudaram, e aos que não atrapalharam, na realização deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

CONTRIBUIÇÕES AO PROJETO DE CONTROLADORES NÃO-LINEARES PARA SISTEMAS COM RESTRIÇÕES NO CONTROLE

Romeu Reginatto

Outubro/2000

Orientador: Dr. Edson Roberto De Pieri

Área de Concentração: Controle, Automação e Informática Industrial

Palavras-chave: Controle com restrições, *anti-windup*, compensação de saturação

Número de Páginas: 186

Este trabalho apresenta contribuições para o projeto de controladores não-lineares para sistemas, lineares e não-lineares, com restrições nos atuadores. São apresentadas três contribuições principais neste contexto.

Primeiramente é considerado o problema de estabilização global de sistemas lineares com saturação nos atuadores. Um algoritmo de escalonamento é proposto para efetuar o escalonamento de ganho de uma lei de controle construída a partir de uma família parametrizada de soluções da equação algébrica de Riccati. Este algoritmo reduz a conservatividade de algoritmos existentes, resultando em um melhor desempenho, enquanto garante propriedades de robustez similares.

A segunda contribuição focaliza o problema de seguimento de *set-point*. A técnica do *anti-windup* é utilizada para propor uma estratégia de controle para seguimento de *set-point* para sistemas lineares com modos exponencialmente instáveis e com restrições de magnitude e taxa de variação no sinal de controle. A estratégia proposta admite sinais de referência de magnitude arbitrária e assegura total liberdade de projeto para induzir o desempenho de seguimento "local" (quando os limites dos atuadores não são atingidos) desejado.

O problema de compensação da saturação de atuadores é também considerado no contexto de sistemas não-lineares. A abordagem utilizada baseia-se na idéia da unificação de controladores locais (desprezando a saturação) e globais (considerando a saturação), uma generalização da técnica do *anti-windup* para sistemas não-lineares. A estratégia de controle desenvolvida é então aplicada na compensação de saturação de atuadores em robôs manipuladores, e resultados de simulação são apresentados.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering.

**CONTRIBUTIONS TO THE DESIGN OF NONLINEAR CONTROLLERS
FOR CONSTRAINED CONTROL SYSTEMS**

Romeu Reginatto

October/2000

Advisor: Dr. Edson Roberto De Pieri

Area of Concentration: Control, Automation and Industrial Informatics

Keywords: Constrained control, anti-windup, saturation compensation

Number of Pages: 186

This work presents contributions to the design of nonlinear controllers for both linear and nonlinear systems with actuator constraints. Three main contributions are given.

A first contribution is presented in the context of the global stabilization problem for linear systems with saturating actuators. The Riccati equation approach is employed to construct a parameterized control law for with a novel scheduling algorithm is proposed. The scheduling algorithm aims at reducing conservativeness of existing algorithms so that performance improvements are obtained for the closed loop system while preserving similar robustness properties.

The second contribution focus on the set-point tracking problem. An anti-windup based control strategy is proposed to achieve set-point tracking for exponentially unstable linear systems with both magnitude and rate limits in the control input. The proposed strategy allows for arbitrarily large reference signals, thus enabling fast transient response, and simultaneously allows total freedom in the control design to induce the desired local tracking performance.

The problem of saturation compensation is also considered in the context of nonlinear systems with saturating actuators. The control strategy employs the technique of uniting local and global controllers, consistently with the local (unsaturated) and global (saturated) behavior of the system. This control strategy is applied to saturation compensation in the control of robot manipulators and its performance is studied for different robot tasks.

Sumário

Lista de Símbolos e Siglas	xix
Introdução	1
1 O Problema de Controle com Restrições nos Atuadores	15
1.1 Introdução	15
1.2 Colocação do Problema	15
1.3 Conceitos Preliminares	18
1.4 Restrições no Controle: Modelagem	20
1.5 Restrições no Controle: Efeitos	25
1.6 Comentários Conclusivos	28
2 Estabilização de Sistemas Lineares com Saturação no Controle	29
2.1 Introdução	29
2.2 Estabilização Semiglobal	30
2.2.1 Desempenho	32
2.3 Estabilização Global	34
2.3.1 Escalonamento baseado em conjuntos elipsoidais	35
2.3.2 Escalonamento baseado no sinal de controle	36
2.4 Atenuação de Perturbações	43
2.5 Robustez	44
2.6 Estudo de Casos	47
2.6.1 Cadeia de 2 integradores	47
2.6.2 Cadeia de 3 integradores	53
2.7 Prova do Teorema 2.4.2	57
2.8 Prova do Teorema 2.5.6	64

2.9	Comentários Conclusivos	65
3	Seguimento sob Restrições: Uma Abordagem por <i>Anti-windup</i>	67
3.1	Introdução	67
3.2	Seguimento de Referência com Restrições no Controle	69
3.2.1	Seguimento ótimo com restrições	70
3.2.2	Controle com horizonte deslizante	72
3.2.3	Condicionador de erro/referência	74
3.3	A Técnica do <i>Anti-Windup</i>	82
3.3.1	O <i>anti-windup</i> \mathcal{L}_2	85
3.4	AW para Sistemas com Magnitude e Taxa de Variação Limitadas	92
3.4.1	O compensador anti-windup	95
3.4.2	Requisitos	97
3.4.3	Projeto de α	100
3.4.4	Situações particulares	103
3.5	Estudo de Caso	104
3.6	Prova do Teorema 3.4.10	114
3.7	Comentários Conclusivos	118
4	Compensação de Saturação em Sistemas Não-Lineares	121
4.1	Introdução	121
4.2	Unificando Controladores Locais e Globais	123
4.2.1	A estratégia de unificação	126
4.2.2	Especialização para sistemas lineares com saturação no controle	129
4.2.3	Sistemas lineares com limitação em magnitude e taxa de variação no sinal de controle	131
4.2.4	Sistemas não-lineares com saturação no controle	132
4.2.5	Outros objetivos de controle	133
4.2.6	Robustez	134
4.3	Unificando Controladores Locais e Globais: Uma Generalização	135
4.4	Aplicação em Robôs Manipuladores	139
4.4.1	Colocação do problema	140
4.4.2	Estratégia de controle para compensação de saturação	142
4.4.3	Seguimento de <i>set-point</i>	144

4.4.4	Seguimento de trajetória	148
4.5	Comentários Conclusivos	153
Conclusão e Perspectivas		155
Publicações do Autor		159
A Modelagem do Robô Manipulador		161
B Conjuntos Saída Admissíveis		163
C Estabilidade de Sistemas Não-Lineares		167
C.1	Conceitos Básicos	167
C.1.1	Estabilidade com Relação a Conjuntos Compactos	170
C.1.2	Estabilidade Entrada-Estado - ISS	170
C.2	Estabilidade de Sistemas em Cascata	172
C.3	Estabilidade de Sistemas Interconectados	173
C.4	Ganho \mathcal{L}_2 e Teorema de Pequeno Ganho	174
Referências Bibliográficas		177

Lista de Símbolos e Siglas

\doteq	por definição
$'$	indica a transposição de uma matriz ou vetor
$\hat{\cdot}$	indica a transformada de Laplace de um sinal
\mathbb{Z}	conjunto dos número inteiros
$\mathbb{Z}_{\geq 0}$	conjunto dos inteiros não negativos
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
$\mathbb{R}_{> 0}$	$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
$2^{\mathbb{R}}$	o conjunto de todos os subconjuntos de \mathbb{R}
$\text{Tr}(A)$	traço da matriz A
$\text{spec}(A)$	conjunto dos autovalores da matriz A
C^-	semiplano esquerdo do plano complexo
$\overline{C^-}$	semiplano esquerdo fechado do plano complexo (inclui eixo $j\omega$)
$\text{int}(S)$	interior do conjunto S
∂S	fronteira do conjunto S
\overline{S}	fecho do conjunto S
S^c	complemento do conjunto S
$\text{dist}_S(x)$	distância do ponto x ao conjunto S , $\text{dist}_S(x) \doteq \inf_{s \in S} x - s $
$\text{sgn}(u)$	função sinal
$\text{sat}(u)$	$\min\{1, u \} \text{sgn}(u)$
$\text{sat}_M(u)$	$M \text{sat}(u/M)$
$\lim_{\tau \rightarrow t^-} f(\tau)$	limite à esquerda de $f(\cdot)$ em t

$\ w\ _2$	$\ w\ _2 \doteq \sqrt{\int_{t_0}^{\infty} w'(t)w(t) dt}$
$\ w\ _{\infty}$	$\ w\ _{\infty} \doteq \sup_{t \in [t_0, \infty)} w(t) $
\mathcal{L}_2	espaço dos sinais $w(t)$ Lebesgue mensuráveis que satisfazem $\ w\ _2 < \infty$
\mathcal{L}_{∞}	espaço dos sinais $w(t)$ Lebesgue mensuráveis que satisfazem $\ w\ _{\infty} < \infty$
$\mathcal{L}_{\infty e}$	espaço dos sinais $w(t)$ Lebesgue mensuráveis que satisfazem ess $\sup_{t \in [0, T]} w(t) < \infty$ para todo $0 \leq T < \infty$
\mathcal{K}	a classe das funções $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, contínuas, estritamente crescentes e tais que $\gamma(0) = 0$
\mathcal{K}_{∞}	a classe das funções $\gamma(s) \in \mathcal{K}$ que satisfazem $\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) = \infty$
C^1	classe das funções contínuas e continuamente diferenciáveis
C^k	classe das funções contínuas e com derivadas contínuas até ordem k
$\mathcal{N}_A(U)$	domínio de controlabilidade para zero
$O_{\infty}(A, C, Z)$	conjunto saída admissível máximo (ver apêndice B)
\mathcal{R}_{sp}	a classe de funções constantes $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$
\mathcal{R}_{asp}	a classe de funções $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ assintoticamente convergentes
$ANC(X, U)$	Controlável Assintoticamente para Zero em X com Controle em U
$ANCBC(X)$	Controlável Assintoticamente para Zero em X com Controle Limitado
$ANCBC$	Controlável Assintoticamente para Zero com Controle Limitado
AW	<i>Anti-Windup</i>
BIBO	Entrada Limitada - Saída Limitada (<i>Bounded-input Bounded-output</i>)
LMI	Desigualdade Matricial Linear (<i>Linear Matrix Inequality</i>)
LQR	Regulador Linear Quadrático (<i>Linear Quadratic Regulator</i>)
GAS	Estabilidade Assintótica Global (<i>Global Asymptotic Stability</i>)
LAS	Estabilidade Assintótica Local (<i>Local Asymptotic Stability</i>)
LES	Estabilidade Exponencial Local (<i>Local Exponential Stability</i>)
ISS	Estabilidade Entrada-Estado (<i>Input-to-state Stability</i>)
RHC	Controle com Horizonte Deslizante (<i>Receding Horizon Control</i>)
RG	Condicionador de Referência (<i>Reference Governor</i>)

Introdução

A implementação prática de qualquer sistema de controle utiliza-se necessariamente de sensores e atuadores. Em uma grande maioria de aplicações, os atuadores operam próximos de algum valor de equilíbrio, o que permite realizar aproximações razoáveis que simplificam os fenômenos não-lineares envolvidos. Não obstante, a constante exigência de maior qualidade e produtividade nos processos industriais tem tornado, cada vez mais importante, a utilização ao máximo dos recursos disponíveis, incluindo-se aí, a operação de sistemas em faixas próximas de seus limites de capacidade. Daí a necessidade de utilização de controles mais modernos e adequados a cada problema específico.

Dentre os efeitos não-lineares mais comuns em atuadores estão as limitações de magnitude e taxa de variação. A primeira, mais comum, revela a limitação física do atuador em alimentar o sistema. Como exemplo podem ser citados a limitação na abertura de uma válvula, o torque máximo de um motor elétrico, a tensão máxima aplicável em uma resistência elétrica, o limite na aceleração de um carro, entre outros. Limitações na taxa de variação revelam a limitação do atuador em responder a variações rápidas no sinal de controle. Pode-se ilustrar esta situação com a velocidade máxima de abertura de uma válvula e a velocidade máxima de movimentação de um *flap* em um avião.

A problemática de restrições nos atuadores ganhou mais importância dentro da comunidade acadêmica na última década. Resultaram deste esforço conjunto de pesquisa avanços significativos, tanto em termos de análise como de projeto, chegando-se atualmente a uma compreensão abrangente do problema. A partir de um pequeno apanhado histórico desta trajetória, feita a seguir, procura-se colocar qual é a contribuição deste trabalho e como esta se insere neste contexto.

Lev Pontryagin formulava o *princípio do máximo* na década de 50 estabelecendo condições necessárias para otimalidade de leis de controle com magnitude limitada ¹. Lozi-

¹O princípio do máximo, algumas vezes também denominado de *princípio do mínimo de Pontryagin*, é

er (LOZIER, 1956) analisava o comportamento em regime permanente de sistemas com saturação no controle. Fertik (FERTIK, ROSS, 1967) propunha uma técnica de *anti-windup* para compensar os efeitos da saturação no controle no desempenho do sistema em malha fechada. Fuller (FULLER, 1969) identificava impossibilidades de estabilização global na presença de restrições no controle. Nestes trabalhos encontram-se as bases elementares de muitas técnicas modernas de controle para sistemas com restrições nos atuadores.

Do ponto de vista prático, pode-se dizer que o tratamento de restrições no controle ganhou impulso com o aumento do uso de controladores digitais, os quais permitiram a implementação de leis de controle adequadas ao problema. O *anti-windup* e o controle ótimo, na forma de controle preditivo, controle por matriz dinâmica, ou outros, foram as técnicas predominantemente utilizadas no início. Tal fato deve-se a certa “intuitividade” inerente a estas técnicas e a facilidade de introduzi-las nos sistemas de controle que já estavam em funcionamento.

Do ponto de vista teórico, o grande desenvolvimento deu-se na década de 90, embora resultados importantes são encontrados nas décadas de 70 e 80. Explorando idéias de controle ótimo, em (SCHMITENDORF, BARMISH, 1980) e, posteriormente (SONTAG, 1984, SONTAG, SUSSMANN, 1990, ZHENG, MORARI, 1995a), foram formalizadas as condições para controlabilidade assintótica para zero para sistemas lineares com controle limitado. Mostrou-se que, para um sistema linear, condições necessárias e suficientes para que qualquer estado inicial possa ser levado assintoticamente para zero com controle limitado são (i) o par (A, B) ser estabilizável e (ii) a matriz A não possuir nenhum autovalor com parte real estritamente positiva. O conceito de controlabilidade assintótica para zero envolve um controle em malha aberta e, portanto, não responde diretamente a questão da estabilizabilidade. Este aspecto foi explorado em (SONTAG, SUSSMANN, 1990), onde mostrou-se que a estabilizabilidade global de um sistema linear com controle limitado é equivalente à controlabilidade assintótica para zero com controle limitado, abreviadamente ANCBC². O controle proposto em (SONTAG, SUSSMANN, 1990) é uma realimentação não-linear de estados. Esta característica não pode em geral ser removida quando o objetivo é a estabilização global. De fato, em (FULLER, 1969) e posteriormente (SUSSMANN, YANG, 1991), mostrou-se que mesmo para uma cadeia de 3 integradores não existe uma realimentação linear de estados capaz de garantir estabilidade global da origem na presença de saturação no controle.

hoje encontrado em diversos livros, por exemplo (STENGEL, 1994, FLEMING, RISHEL, 1975, ATHANS, FALB, 1966).

²ANCBC - Asymptotically Null-Controllable with Bounded Controls.

Abordagem. Pode-se dizer que, no contexto de sistema com restrições no controle, encontram-se duas abordagens maiores. A abordagem *direta*, na qual o projeto é executado em uma única etapa, considerando estabilização, desempenho e as restrições conjuntamente; a abordagem *indireta*, na qual um primeiro projeto é feito objetivando desempenho, sem levar em conta as restrições, e, num segundo momento, um projeto adicional é feito para compensar os efeitos das restrições no controle (estabilização). Dentro da abordagem direta, podem-se destacar as abordagens: funções saturação aninhadas; equação de Riccati; baseadas em invariância; controle ótimo com restrições; controle por horizonte deslizante (RHC). Dentro da abordagem indireta, podem-se destacar a técnica do *anti-windup* e o condicionamento de referência.

Objetivos. A grande maioria dos resultados existentes na literatura sobre sistemas com restrições no controle trata da estabilização assintótica da origem. No contexto de sistemas lineares, diversos resultados tratam também da estabilização robusta. Por outro lado, poucos resultados estão disponíveis sobre o problema de seguimento de referência na presença de restrições no controle.

Funções saturação aninhadas. Um procedimento iterativo de projeto para estabilização global de uma cadeia de integradores foi proposto em (TEEL, 1992) através do qual uma lei de controle composta de um aninhamento de funções saturação é gerada. Este procedimento utiliza-se, indiretamente, da forma estritamente *feedforward* (SEPULCHRE et al., 1997, TEEL, 1996a, MAZENC, PRALY, 1996), na época ainda não completamente reconhecida. Posteriormente, em (SUSSMANN et al., 1994), tal procedimento foi estendido para a classe de sistemas lineares satisfazendo as condições necessárias para estabilização global. Em (TEEL, 1996a), este procedimento de projeto recursivo foi generalizado para sistemas não-lineares na forma estritamente *feedforward*, porém, neste caso, a garantia de estabilidade é somente local. Este resultado baseia-se em teoremas de pequeno ganho não-lineares (JIANG et al., 1994, TEEL, 1996a) derivados da propriedade de estabilidade entrada-estado (ISS) (SONTAG, 1990, SONTAG, 1995). Seguindo objetivos similares, porém com abordagem diferente - baseada em Lyapunov - em (MAZENC, PRALY, 1996) foi proposto um projeto para sistemas não-lineares na forma estritamente *feedforward* o qual permite obter estabilidade assintótica global com controle limitado. Estabilização global para sistemas não-lineares também foi obtida mais recentemente em (FREEMAN, PRALY, 1998)

utilizando o *back-stepping*. O procedimento garante que o controle é limitado em magnitude e taxa de variação, porém os limites não são definidos *a priori*. A estrutura do controle também é de um aninhamento de funções saturação. Outros resultados relacionados ao caso não-linear são (LIN, SONTAG, 1995, SMIRNOV, 1996, BITSORIS, GRAVALOU, 1995).

Realimentação linear de estados. Para sistemas lineares com restrições no controle, a realimentação linear de estados não permite, em geral, obter estabilidade assintótica global. Condições quando isto é possível são analisadas em (CHAN, HUI, 1998). Contudo, a realimentação linear de estados constitui uma opção muito atrativa devido à facilidade de tratamento algébrico e computacional. Por isto, esta é particularmente interessante quando o sistema em malha aberta possui autovalores instáveis, caso em que apenas a estabilização local é possível. Muitos resultados na literatura exploram leis de controle lineares para estabilização de sistemas lineares com restrições no controle (CASTELAN, 1992, CASTELAN, HENNET, 1992, Gomes da Silva Jr., 1998, LIN, SABERI, 1993). Grande parte destes resultados utilizam-se de funções de Lyapunov poliedrais (Gomes da Silva Jr., TARBOURIECH, 1997), quadráticas (HINDI, BOYD, 1998, TARBOURIECH, GARCIA, 1997) ou, mais recentemente, quadráticas por partes (JOHANSSON, 1999). O uso de desigualdades matriciais lineares (LMI) (BOYD et al., 1994) é muito comum neste contexto (Gomes da Silva Jr., TARBOURIECH, 1998, HINDI, BOYD, 1998, TARBOURIECH, Gomes da Silva Jr., 2000). Procedimentos de análise de estabilidade, determinação do domínio de estabilidade e síntese de leis de controle são os principais problemas abordados.

Abordagem pela equação de Riccati. A solução da equação algébrica de Riccati parametrizada tem se revelado uma importante metodologia de projeto de leis de controle lineares para estabilização de sistemas lineares com saturação no controle. Inicialmente proposta em (LIN, SABERI, 1993), foi, posteriormente, melhor ampliada em (TEEL, 1995b, LIN, SABERI, 1995, SABERI et al., 1996a), entre outros. Um dos aspectos importantes desta construção é a obtenção de conjuntos elipsoidais positivamente invariantes para o sistema em malha fechada. Para sistemas lineares ANCBC, regiões de atração arbitrariamente largas podem ser obtidas, ou melhor, pode-se obter estabilidade semi-global. O projeto então consiste em sintonizar um parâmetro de forma a obter a região de atração suficientemente larga. O sistema em malha fechada, então, opera em um conjunto elipsoidal contido dentro da região de linearidade. Isto introduz um certo grau de conservativida-

de ao projeto - baixo desempenho. Propostas para melhoria de desempenho são apresentadas em (WREDENHAGEN, BELANGER, 1994, LIN, SABERI, 1995, REGINATTO et al., 2000b). Esta metodologia de projeto também ganhou extensões no problema de controle robusto (TARBOURIECH, GARCIA, 1997) e atenuação de perturbações (SUARÉS et al., 1997, CASAVOLA, MOSCA, 1998).

Esta mesma construção também tem servido para a estabilização global e obtenção de propriedades de estabilidade entrada-saída para sistemas lineares ANCBC. A obtenção de estabilidade global é tornada possível através do escalonamento da lei de controle parametrizada em função da evolução do estado do sistema, isto é, o “ganho” da lei de controle é variado em função do estado de forma a garantir estabilidade global. Em linhas gerais, o ganho é reduzido quando o estado aumenta e, aumentado, quando este diminui. Assim, a magnitude do controle é mantida limitada independentemente da magnitude do estado.

A idéia de escalonamento para estabilização global de sistemas lineares com saturação no controle parece ter sido primeiramente introduzida em (TEEL, 1995a). Neste trabalho, a lei de controle parametrizada $-B'P(\xi)x$ obtida da solução da equação de Riccati do tipo H_∞ é escalonada dinamicamente³. O escalonamento é guiado pela magnitude de uma função de Lyapunov quadrática no estado envolvendo a solução $P(\xi)$. Em (MEGRETSKI, 1996) uma técnica de escalonamento estática é proposta para a mesma lei de controle. Aqui, ξ é obtido *on-line* (instantaneamente) como resultado de um problema de otimização dependente do estado do sistema, por isto a denominação *estática*. Com esta estratégia, obtém-se estabilidade global para sistema lineares ANCBC. Também, garante-se estabilidade *BIBO* para sinais de energia limitada (\mathcal{L}_2), e as mesmas propriedades são garantidas para realimentação dinâmica de saída. Alguns aprimoramentos deste resultado são apresentados em (LIN, 1998a), onde a utilização do controle de alto e baixo ganho permite garantir robustez frente a perturbações limitadas em norma atuantes na entrada de controle do sistema.

Estas estratégias de escalonamento compartilham do problema de impor ao sistema, em malha fechada, a operação dentro da região linear dos atuadores, isto é, não é permitida a saturação dos atuadores. Mais especificamente, o sistema em malha fechada é forçado a operar dentro de um conjunto elipsoidal (positivamente invariante), o qual está contido na região de operação linear do sistema. Este fato certamente introduz conservatividade no projeto, isto é, o sistema, em geral, opera com “ganho” menor do que poderia ser. Além disso,

³O parâmetro ξ é obtido da solução de uma equação diferencial não-linear.

devido à invariância dos elipsóides e à propriedade de aninhamento dos mesmos, resulta que o parâmetro escalonado é monótono ao longo do tempo.

Neste contexto é apresentada a primeira contribuição deste trabalho, uma nova estratégia de escalonamento da lei de controle $-B'P(\xi)x$ que permite, explicitamente, a ocorrência de saturação do sinal de controle e não restringe a operação do sistema a conjuntos elipsoidais positivamente invariantes (REGINATTO et al., 2000c, REGINATTO et al., 2000b, REGINATTO, DE PIERI, 2000). Na estratégia proposta, o escalonamento é guiado diretamente pela magnitude do sinal de controle e pode ser não-monótono ao longo do tempo. Resultados de simulação comprovam as vantagens da técnica proposta em termos de taxa de convergência do estado para o sistema em malha fechada. Adicionalmente, propriedades similares aos algoritmos existentes com relação a robustez e estabilidade *BIBO* para sinais limitados em energia são válidas para a técnica proposta.

Seguimento de referência. O problema de seguimento é relativamente mais complexo do que o problema de estabilização, especialmente no contexto de sistemas com restrições no controle. Mesmo que o seguimento assintótico fosse possível na ausência de restrições, a mesma garantia não se estende completamente quando restrições no controle estão presentes. Neste caso, facilmente são encontrados sinais de referência que não podem ser reproduzidos, nem em regime permanente, pelo sistema em questão, devido às restrições em sua entrada de controle. Torna-se então imperioso reconsiderar os objetivos do projeto para adequar a sua funcionalidade às reais necessidades da aplicação. Como as aplicações são diversas, diversas também deverão ser as técnicas disponíveis para obtenção de um projeto adequado.

Seguimento ótimo sob restrições. Uma abordagem natural para o problema de seguimento com restrições é o seguimento ótimo. Nesta abordagem, o problema de seguimento é colocado como um problema de otimização com restrições. A solução deste problema de otimização é um controle de malha aberta que minimiza o índice de desempenho em questão com as restrições envolvidas. Apesar de bastante natural, esta abordagem encontra diversas dificuldades. Primeiramente, a necessidade de conhecer o comportamento futuro do sinal de referência é um limitante. Segundo, a grande dificuldade de colocar o controle projetado como um controle em malha fechada. Resultados nesta direção são bem recentes e ainda restritivos (BEMPORAD et al., 1999). Por fim, a complexidade computacional envolvida na solução do problema de otimização, um problema menor no caso linear, ainda limita a

classe de sistemas tratáveis (POLAK, 1971, MAYNE, 1995). Em função destes problemas, a solução ótima é difícil de ser diretamente aplicada na prática. Contudo, esta técnica pode ser de grande valia na avaliação comparativa de outras técnicas existentes.

Controle com horizonte deslizante. O controle com horizonte deslizante pode ser visto como uma forma implementável do seguimento ótimo com restrições. A cada instante de tempo, um problema de controle ótimo com horizonte finito e com restrições é resolvido com base (RAWLINGS, 2000, CAMACHO et al., 1999, ZHENG, MORARI, 1995b): (i) na medida do estado atual do sistema; (ii) em um modelo que prediz o comportamento futuro do sistema; e (iii) no conhecimento do sinal de referência dentro do horizonte de otimização envolvido. A primeira amostra do controle ótimo assim obtido é implementada e todo o processo é repetido a cada instante de amostragem. Assim, o controle é em malha fechada, pois a cada instante de amostragem a medida do estado é utilizada para alimentar o problema de otimização resolvido. Contudo, como o horizonte de otimização é finito, o controle resultante é, em geral, sub-ótimo.

A principal vantagem do controle com horizonte deslizante é a facilidade de lidar com restrições. Isto porque tais restrições são apenas adicionadas ao problema de otimização envolvido, o qual é resolvido *on-line* numericamente. A resolução deste problema de otimização é, contudo, um dos principais problemas desta técnica (MAYNE, 1995, SCOKAERT, MAYNE, 1998), uma vez que deve ser resolvido *on-line* e, com isto, o tempo de processamento passa a ser fundamental. Adicionalmente, é difícil garantir, *a priori*, a factibilidade do problema de otimização, especialmente quando o sistema está sujeito a estímulos externos.

Outra importante questão no controle com horizonte deslizante é a garantia de estabilidade. No problema de estabilização diversos resultados estão disponíveis (RAWLINGS, MUSKE, 1993, MICHALSKA, MAYNE, 1993; ZHENG, MORARI, 1994, CHEN, ALLGÖWER, 1997, DE NICOLAO et al., 1998, SCOKAERT et al., 1999). A questão da robustez ainda carece de resultados mais concretos, apesar dos importantes resultados já existentes (MICHALSKA, MAYNE, 1993, ZHENG, MORARI, 1993, QI, FISHER, 1994, DE NICOLAO et al., 1996). No contexto de estabilidade entrada-saída na presença de sinais de referência (perturbações externas) poucos resultados estão disponíveis (SCOKAERT, MAYNE, 1998, MILLER, PACHTER, 1997, MILLER, PACHTER, 1998).

Condicionamento de referência. O condicionador de erro/referência tem suas bases no problema de seguimento com restrições, isto é, sua concepção é direcionada ao tratamento deste problema. A técnica parte de um projeto existente que resolve o problema de seguimento na ausência de restrições. Sobre este sistema em malha fechada, uma modificação no sinal de referência aplicado ao sistema é introduzida objetivando garantir que as restrições sejam sempre satisfeitas e, com isto, seja garantida a estabilidade BIBO do sistema. As bases desta técnica foram lançadas em (KAPASOURIS et al., 1988, KAPASOURIS et al., 1990), no contexto do condicionador de erro. Uma melhor fundamentação foi posteriormente apresentada em (GILBERT, TAN, 1991) com a formalização da teoria de conjuntos saída-admissíveis, a qual serve de base para o condicionador de referência dinâmico em (GILBERT et al., 1995). Diversas ramificações desta técnicas são hoje encontradas na literatura, dentre as quais destacam-se (MCNAMEE, PACHTER, 1998, MCNAMEE, PACHTER, 1999) e, no contexto de sistemas não-lineares, (ANGELI, MOSCA, 1999, BEMPORAD, 1998, BEMPORAD et al., 1997).

Anti-windup. A técnica do *anti-windup* é provavelmente uma das mais antigas estratégias para lidar com o problema de restrições no controle. O problema do *windup* foi inicialmente identificado em malhas de controle envolvendo controladores PID, onde a presença de saturação no sinal de controle introduzia perdas significativas de desempenho, devido a sobrecarga da ação integral. Diversas técnicas, hoje denominadas *ad-hoc*, foram então desenvolvidas para compensar estes efeitos indesejados, as primeiras datando da década de 60, *backcalculation* (FERTIK, ROSS, 1967, ZENI et al., 1984), *intelligent integrator* (KRIKELIS, 1980), *anti-reset-windup* (ÅSTRÖM, WITTENMARK, 1984, ÅSTRÖM, RUNDQWIST, 1989), *conditioning technique* (HANUS et al., 1987), entre outros.

Na técnica do *anti-windup* também parte-se da condição em que um projeto de um controle nominal já tenha sido executado e, modificações adicionais devem ser introduzidas para compensar os efeitos das restrições no controle.

Progressos significativos são verificados no início da década de 90, onde técnicas mais gerais foram introduzidas permitindo o tratamento do problema do *anti-windup* em sistemas lineares multivariáveis, especificamente a *generalized conditioning technique* (HANUS, KINNAERT, 1989, CAMPO et al., 1989, WALGAMA et al., 1992, WALGAMA, STERNBY, 1993), o *observer based anti-windup* (ÅSTRÖM, RUNDQWIST, 1989, ÅSTRÖM, HÄGGLUND, 1988) e o *anti-windup* para controle por modelo interno (ZHENG et al., 1994). Em (WALGAMA,

STERNBY, 1990) identificou-se propriedades de observação inerentes em diversas destas técnicas de *anti-windup*. Em (CAMPO et al., 1989, KOTHARE et al., 1994), muitas destas técnicas foram colocadas sob uma formulação geral, em termos de transformações fracionais lineares. Melhorias no *conditioning technique* são apresentadas em (CHEN, PERNG, 1997) através da solução de um problema de otimização, de forma similar ao resultado de (ZHENG et al., 1994). Todas estas técnicas, contudo, restringem-se ao caso em que tanto o processo como o compensador são lineares, e não tratam a questão da estabilidade de forma adequada.

Baseado na formulação de (KOTHARE et al., 1994), um projeto de compensador *anti-windup* é desenvolvido em (MIYAMOTO, VINNICOMBE, 1996) através de um projeto H_∞ , garantindo, assim, estabilidade assintótica global do sistema em malha fechada. Também, em (KAPOOR et al., 1998) um projeto para o *observer based anti-windup* de (ÅSTRÖM, HÄGGLUND, 1988) com garantias de estabilidade global é apresentado. Conceitos de passividade são utilizados neste resultado. Garantias de robustez neste contexto são estudadas em (NIU, TOMIZUKA, 1998). Em (BURGAT, TARBOURIECH, 1998), a técnica do *intelligent integrator* é generalizada em um projeto de *anti-windup* com garantia de estabilidade assintótica global. Mais recentemente, em (KOTHARE, MORARI, 1999), condições para estabilidade assintótica global para laços de *anti-windup* são apresentadas utilizando-se a formulação de (KOTHARE et al., 1994), utilizando resultados de passividade e multiplicadores. Uma estratégia de *anti-windup* que utiliza observadores de estado é apresentada em (SHAMMA, 1999).

O *anti-windup* \mathcal{L}_2 , apresentado em (TEEL, KAPOOR, 1997a), introduz técnicas de controle não-lineares no problema do *anti-windup*. O *anti-windup* \mathcal{L}_2 introduz uma definição formal do problema de *anti-windup* como um problema de garantia de estabilidade \mathcal{L}_2 , o que permite um tratamento mais adequado de questões de estabilidade e robustez. O uso de controle não-linear permite estender a classe de sistemas para os quais é possível garantir estabilidade assintótica global. Também, elimina-se a restrição de que o controle nominal seja linear. Um projeto específico para o caso em que o sistema em malha aberta possui modos instáveis é apresentado em (TEEL, 1999). Estes resultados constituem também aplicações do resultado geral para sistemas não-lineares apresentado em (TEEL, KAPOOR, 1997b).

Nos estudos iniciais do problema do *anti-windup*, este era visto como uma discrepância entre o estado do controlador e a sua saída efetivamente aplicada ao processo. Sendo assim, o foco de atenção não era direcionado ao problema de seguimento em si. Não obstante, o problema do *anti-windup* sempre esteve diretamente ligado à questão do seguimento com

restrições, especialmente o seguimento de *set-point*. Esta interpretação do *anti-windup* como técnica para seguimento sob restrições transparece nos resultados mais recentes (TEEL, KAPOOR, 1997a, BARBU et al., 2000a).

Referência. Para introduzir a próxima contribuição deste trabalho, é necessário rever o tratamento dado ao sinal de referência através das diversas técnicas mencionadas. Nas técnicas de seguimento ótimo com restrições e controle com horizonte deslizante, o sinal de referência não é modificado, e o controle projetado minimiza um custo que leva em consideração o erro de seguimento, respeitadas as restrições no controle envolvidas.

No *anti-windup* \mathcal{L}_2 , o sinal de referência é suposto ser realizável em regime permanente, isto é, supõe-se que o equilíbrio do sistema seja tal que o sinal de controle correspondente está na região linear da saturação.

O condicionador de referência dinâmico, por sua vez, exige que a referência modificada aplicada ao sistema assuma, em todo instante, valores que são realizáveis em regime permanente. Com esta restrição, o sistema em malha fechada perde desempenho, pois a sua entrada efetiva fica limitada a valores pequenos durante todo o tempo. Esta restrição é removida em (MCNAMEE, PACHTER, 1998), onde o condicionador de referência permite que o sinal de referência modificado assuma, temporariamente, valores que não são realizáveis em regime permanente.

A segunda contribuição deste trabalho consiste em um projeto para seguimento de referência com restrições no controle baseado na técnica do *anti-windup*. A classe de sistema considerada é a de sistemas lineares com modos instáveis e com restrições tanto em magnitude como em taxa de variação no sinal de controle. Também, a técnica proposta não impõe nenhuma restrição, *a priori*, sobre o sinal de referência a ser seguido. Garantias de estabilidade são fornecidas mesmo para sinais de referência que não são realizáveis em regime permanente. O objetivo em permitir sinais de referência arbitrariamente grandes é o de obter transições mais rápidas⁴ do sistema, em contraste com a estratégia de restringir *a priori* o sinal de referência a valores pequenos como meio de garantir estabilidade. Por fim, o uso da técnica do *anti-windup* permite dividir o projeto em duas fases: (i) projeto do controle nominal, sem restrições, que garante o desempenho desejado; (ii) projeto do compensador *anti-windup* para garantir estabilidade e respeitar o desempenho induzido pelo controle nominal sempre que

⁴Embora o sinal de referência não seja realizável em regime permanente, esta é uma forma de estimular o sistema a chegar mais rapidamente ao valor realizável mais próximo.

possível.

Sistemas não-lineares. A grande maioria dos projetos para sistemas de controle não-lineares não considera as limitações nos atuadores. Somente não-linearidades no estado são consideradas, e o sistema, em geral, é afim no controle, cuja magnitude é arbitrária. A restrição de magnitude nos atuadores, por outro lado, impõe uma não-linearidade na entrada de controle do sistema. Assim, tais leis de controle, na prática, são válidas apenas na região de operação linear dos atuadores. Por isto é natural que se pense em técnicas para compensar os efeitos da saturação, similarmente ao caso linear, como estratégia de projeto.

Na estratégia de compensação de saturação, as leis de controle existentes (para controle sem restrições) podem ser utilizadas para induzir, localmente, o desempenho desejado para o sistema. O controle adicional necessário para garantir a estabilidade na presença da saturação é o que se tem denominado de *compensação da saturação*. Esta estratégia de controle é consistente com os objetivos usuais de controle em sistemas não-lineares, onde a necessidade de desempenho é local, enquanto que a necessidade de estabilidade é global (ou, ao menos, em um domínio maior).

Em (TEEL, KAPOOR, 1997b) uma estratégia de unificação de controladores locais e globais é apresentada. Nesta estratégia, um primeiro controle (local) é projetado sobre um modelo modificado do sistema, o qual é localmente consistente com o modelo real, com o objetivo de induzir o desempenho desejado ao sistema. Um outro controle (global) é projetado com o finalidade de garantir estabilidade global, porém sem requisitos de desempenho. Com base nestes controles, um controle unificado é construído para o sistema, o qual preserva, localmente, as propriedades do projeto local efetuado. Esta estratégia de unificação é utilizada em (TEEL, KAPOOR, 1997a, TEEL, 1999, BARBU et al., 1999, BARBU et al., 2000a) para síntese de compensadores *anti-windup* para sistemas lineares com restrições no controle.

Como terceira contribuição deste trabalho, esta técnica de unificação de controladores locais e globais é explorada para compensação de saturação em sistemas não-lineares. Uma pequena generalização é proposta, a qual não requer que o controle global garanta estabilidade assintótica global para o sistema. Com base nisto, um estudo é feito acerca da compensação de saturação em robôs manipuladores. Mostram-se as vantagens, em termos de estabilidade e desempenho, em introduzir a compensação de saturação nos atuadores para o controle de robôs manipuladores. Resultados de simulação são apresentados para um robô manipulador planar de dois graus de liberdade.

Organização do trabalho

Este trabalho está organizado em 4 capítulos. Cada capítulo contém um apêndice específico onde são colocadas as provas dos resultados apresentados.

O capítulo 1 introduz o problema de estudo deste trabalho. Os problemas de estabilização e de seguimento para sistemas lineares com restrições no controle são formulados tecnicamente. Também, os conceitos fundamentais relacionados ao tema do trabalho e importantes para o desenvolvimento do mesmo são apresentados.

O capítulo 2 aborda o problema da estabilização global de sistemas lineares com saturação no controle. A construção de leis de controle parametrizadas baseadas na solução da equação de Riccati é apresentada e, a partir disto, o tema principal do capítulo é desenvolvido. São revistos os principais algoritmos de escalonamento desta lei de controle e suas propriedades de estabilização e robustez. Em seguida é apresentada a primeira contribuição deste trabalho, consistindo de uma nova metodologia de escalonamento desta lei de controle com o objetivo de reduzir a conservatividade dos algoritmos existentes e, com isto, melhorar o desempenho do sistema em malha fechada como um todo. Questões de robustez e estabilidade entrada-saída para sinais limitados em energia são discutidas na seqüência. Por fim, são apresentados dois estudos de caso ilustrando as propriedades e vantagens do algoritmo de escalonamento proposto em termos de velocidade de resposta para o sistema em malha fechada.

O capítulo 3 é dedicado ao problema de seguimento de *set-point* para sistemas lineares com restrições no controle. Restrições tanto de magnitude como de taxa de variação são consideradas neste caso. O capítulo inicia colocando uma revisão das principais técnicas disponíveis para projeto de controladores visando o seguimento de sinais de referência na presença de restrições no controle. Especificamente, são consideradas: seguimento ótimo com restrições; controle com horizonte deslizante; condicionamento de referência; e *anti-windup*.

A abordagem *anti-windup* é desenvolvida em mais detalhes por consistir no tema central do capítulo, que consiste em uma proposição de um projeto para seguimento de sinais de referência em sistemas lineares com modos instáveis e com restrições de magnitude e taxa de variação no sinal de controle, a qual é baseada em *anti-windup*. A técnica proposta estende resultados existentes em diversas direções, as quais são melhor colocadas no próprio capítulo. Resultados de simulação são também apresentados para um sistema de segunda ordem instável em malha aberta. O estudo é ilustrativo de um problema de controle manual de voo, considerando-se apenas o modelo longitudinal (*pitch angle*) da aeronave.

O capítulo 4 trata da questão da compensação de saturação em sistemas não-lineares.

Primeiramente a estratégia de unificação de controladores locais e globais de (TEEL, KAPOOR, 1997b) é desenvolvida. São feitas particularizações deste desenvolvimento mostrando como o *anti-windup* \mathcal{L}_2 e a contribuição do capítulo 3 são aplicações deste resultado. Em seguida, uma pequena generalização do resultado de (TEEL, KAPOOR, 1997b) é apresentada e, com base neste resultado, uma estratégia de controle para compensação de saturação em robôs manipuladores é desenvolvida. Esta técnica permite que os controles tradicionais sejam utilizados para induzir o desempenho local, enquanto introduz modificações de controle para garantir domínios de estabilidade. Por fim, esta técnica é aplicada a um robô manipulador planar de dois graus de liberdade e resultados de simulação são apresentados ilustrando suas principais propriedades.

Conclusões e perspectivas são apresentadas ao final do trabalho. Conceitos adicionais são também incluídos nos apêndices.

Capítulo 1

O Problema de Controle com Restrições nos Atuadores

1.1 Introdução

Neste capítulo procura-se colocar, tecnicamente, os problemas abordados no trabalho. Estes problemas são apresentados no contexto genérico de sistemas não-lineares variantes no tempo, muito embora as contribuições do trabalho restrinjam-se a sub-classes desta classe de sistemas.

A partir da colocação do problema, são apresentados conceitos básicos necessários para o desenvolvimento dos problemas em estudo nos capítulos subseqüentes. Procura-se também apresentar os efeitos decorrentes da presença de restrições nos atuadores e suas implicações no problema de controle.

1.2 Colocação do Problema

Em problemas de controle em geral torna-se quase imprescindível lidar com fatores como não-linearidades, perturbações e restrições. A presença destes fatores é que justifica, em grande parte, todo o problema de controle.

Considere então um sistema descrito por uma equação dinâmica da forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{f}(t, x, u, w) \\ y &= h_y(t, x, w) \\ z &= h_z(t, x, u, w) \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde x é o estado, u é a entrada de controle e w é uma perturbação, pertencentes aos espaços X , U e W , respectivamente, e $t \in \mathbb{R}$. As saídas y e z correspondem a variáveis mensuráveis e variáveis de desempenho, respectivamente, e pertencem aos espaços Y e Z . Assume-se que \tilde{f} , h_y e h_z sejam, pelo menos, localmente Lipschitz em x , u e w , e Lebesgue mensuráveis em t . A regularidade em \tilde{f} é necessária para garantia de existência de solução.

Restrições. Como se verifica em sistemas reais, os atuadores estão sujeitos a restrições, normalmente decorrentes de limitações técnicas. Embora tais restrições possam ser incorporadas na função \tilde{f} , em muitas situações é de interesse explicitar tais restrições com o intuito de enfatizar o seu efeito/participação no projeto da lei de controle.

A restrição mais comum em atuadores é a limitação de magnitude, por exemplo a abertura de uma válvula, a corrente fornecida por um inversor, a potência de um motor elétrico, a faixa de operação de um amplificador, entre outras. Outra restrição importante é também a limitação em taxa de variação, por exemplo a velocidade máxima de abertura de uma válvula, a velocidade máxima de movimentação de um *flap* em uma asa de avião, aceleração máxima de um motor, entre outras.

Como o intuito de explicitar estas restrições nos atuadores, uma nova variável de controle é introduzida u_s a qual representa a efetiva atuação sobre o sistema ou a saída do atuador. O atuador, neste nível de generalidade, é representado por um operador \mathcal{H} com estado x_u , entrada u e saída u_s , gerando a seguinte representação para o sistema (1.1), onde $x_{u_o} = x_u(t_o)$,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u_s, w) \\ u_s &= \mathcal{H}(x_{u_o}, u_s, u) \\ y &= h_y(t, x, w) \\ z &= h_z(t, x, u_s, w) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Nota 1.2.1 *Em muitas situações, notadamente na técnica do anti-windup, um controle é projetado para o sistema (1.2) negligenciando-se as restrições nos atuadores. Neste caso, toma-se u_s como entrada do sistema, ao invés de u , e projeta-se u_s diretamente. Ao sistema (1.2) com restrições negligenciadas denomina-se sistema sem restrições. Quando as restrições são apenas em magnitude, também denomina-se de sistema não saturado.*

Estabilidade. O objetivo do trabalho é propor técnicas de projeto de controladores para subclasses do sistema (1.2) de forma a garantir determinadas propriedades de estabilidade.

Assuma que a origem de (1.2) é um equilíbrio para perturbação e controle nulos, isto é, $f(t, 0, 0, 0) = 0$ e considere os seguintes problemas.

Problema 1.2.2 (Estabilização) *O problema de estabilização local (global) consiste em projetar um sistema dinâmico¹ \mathcal{G}_c (com estado $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$, $x_{c_0} = x_c(t_0)$) tal que o sistema em malha fechada (1.2) com*

$$u = \mathcal{G}_c(x_{c_0}, y) \quad (1.3)$$

tenha, para $w \equiv 0$, $x = 0$ como um equilíbrio localmente (globalmente) assintoticamente estável.

Problema 1.2.3 (Estabilização \mathcal{L}_2) *O problema de estabilização \mathcal{L}_2 consiste em projetar um sistema dinâmico \mathcal{G}_c (com estado $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$, $x_{c_0} = x_c(t_0)$) tal que o sistema em malha fechada (1.2) com*

$$u = \mathcal{G}_c(x_{c_0}, y) \quad (1.4)$$

seja (a) globalmente assintoticamente estável para $w = 0$ e (b) $(x, x_c) \in \mathcal{L}_2$ sempre que $w \in \mathcal{L}_2$.

Problema 1.2.4 (Seguimento com restrições) *Seja r um sinal de referência e seja \mathcal{S} uma classe destes sinais. O problema de seguimento com restrições consiste em projetar um sistema dinâmico \mathcal{G}_c (com estado $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$, $x_{c_0} = x_c(t_0)$) tal que o sistema em malha fechada (1.2) com*

$$u = \mathcal{G}_c(x_{c_0}, y, r) \quad (1.5)$$

satisfaça as seguintes propriedades:

1. *Se $r \in \mathcal{S}$ é limitado, então (x, x_c) é limitado;*
2. *Se $r \in \mathcal{S}$ é limitado e $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \bar{r}$, então (x, x_c) é limitado e $(x(t), x_c(t)) \rightarrow (\bar{x}, \bar{x}_c)$ quando $t \rightarrow \infty$;*
3. *Nas condições do item 2, se, ainda, $u_s(t) - u(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, então $y(t) \rightarrow r(t)$ quando $t \rightarrow \infty$.*

¹Para facilitar a exposição, preferiu-se não explicitar a estrutura do controle projetado. Assim, utilizou-se a notação $u = \mathcal{G}_c(x_{c_0}, y)$ para representar um sistema dinâmico com entrada y , saída u e estado x_c . A dependência em x_{c_0} (não em x_c) foi introduzida para explicitar que a saída u é dependente da entrada y e do estado inicial $x_{c_0} = x_c(0)$.

O problema de seguimento 1.2.4 consiste basicamente de um problema de seguimento assintótico com restrições. As propriedades estabelecidas exigem: estabilidade no sentido entrada limitada saída limitada (BIBO); estabilidade no sentido entrada convergente saída convergente; e o seguimento assintótico propriamente dito, quando este for possível.

Neste trabalho são considerados casos específicos destes problemas envolvendo sistemas lineares com restrições de magnitude e taxa de variação no sinal de controle. As contribuições deste trabalho estão apresentadas nos capítulos 2 e 3 e consistem no seguinte:

Contribuição na estabilização global e \mathcal{L}_2 de sistema lineares com saturação no controle. Esta contribuição é apresentada no capítulo 2 e consiste em um algoritmo de escalonamento de uma lei de controle parametrizada que apresenta, na ausência de perturbações, desempenho superior a projetos similares existentes na literatura e, na presença de perturbações, propriedades de estabilidade \mathcal{L}_2 similares a estas leis de controle existentes. O capítulo também apresenta dois exemplos ilustrativos da funcionalidade e desempenho da lei de controle proposta.

Contribuição no seguimento de *set-point* de sistema lineares com limitação em magnitude e taxa de variação no sinal de controle. Esta contribuição é apresentada no capítulo 3. A técnica do *anti-windup* é utilizada para propor um projeto de controle visando o seguimento de *set-point* para sistemas lineares com restrições tanto em magnitude como em taxa de variação no sinal de controle. A técnica objetiva obter um seguimento rápido com garantia de estabilidade. Para tanto, nenhuma restrição é feita *a priori* sobre o sinal de referência.

Contribuição na compensação de saturação em sistemas não-lineares. Esta contribuição é apresentada no capítulo 4. A estratégia de unificação de controladores locais e globais de (TEEL, KAPOOR, 1997b) é adaptada para propor um esquema de compensação de saturação em sistemas não-lineares. Este esquema é então aplicado ao controle de robôs manipuladores.

1.3 Conceitos Preliminares

Nesta seção são introduzidos diversos conceitos que serão utilizados ao longo do trabalho. O conteúdo desta seção é baseado em (SCHMITENDORF, BARMISH, 1980, SONTAG, 1984,

SONTAG, SUSSMANN, 1990, GILBERT, TAN, 1991, LASSERRE, 1993).

Considere o seguinte sistema linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.6)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ são estado e entrada de controle, respectivamente. Dados um controle $u(\cdot)$ Lebesgue-mensurável e um estado inicial x_o , $\phi(t; x_o, u)$ representa a trajetória de (1.6) correspondente. Nas definições que seguem, $U \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto compacto, convexo e tal que $0 \in \text{int}(U)$.

Definição 1.3.1 *O estado $x_o \in \mathbb{R}^n$ para o sistema (1.6) é dito controlável assintoticamente para zero com controle em $U \subset \mathbb{R}^m$ se existe um controle $u : [0, \infty) \rightarrow U$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; x_o, u) = 0$.* ◁

Definição 1.3.2 *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. O sistema (1.6) é dito controlável assintoticamente para zero em X com controle em $U \subset \mathbb{R}^m$ (abreviadamente $ANC(X, U)^2$) se para qualquer $x_o \in X$, existe um controle $u : [0, \infty) \rightarrow U$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; x_o, u) = 0$. Quando $X = \mathbb{R}^n$, diz-se que o sistema (1.6) é controlável assintoticamente para zero com controle em $U \subset \mathbb{R}^m$. Remove-se a palavra assintoticamente quando for possível levar o estado para zero em tempo finito.* ◁

Definição 1.3.3 *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. O sistema (1.6) é dito controlável assintoticamente para zero em X com controle limitado (abreviadamente $ANCBC(X)^3$) se para qualquer $\epsilon > 0$ e qualquer $x_o \in X$, existe um controle $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $|u(t)| \leq \epsilon$, $\forall t \geq 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; x_o, u) = 0$. Quando $X = \mathbb{R}^n$, diz-se que o sistema (1.6) é controlável assintoticamente para zero com controle limitado ($ANCBC$). Remove-se a palavra assintoticamente ($NCBC$) quando for possível levar o estado para zero em tempo finito.* ◁

O seguinte lema mostra que as Definições 1.3.2 e 1.3.3 são equivalentes quando $X = \mathbb{R}^n$ (SONTAG, 1984). Disto conclui-se que, do ponto de vista da controlabilidade assintótica global para zero, o limite na magnitude do sinal de controle é irrelevante.

Lema 1.3.4 *O sistema (1.6) é $ANC(\mathbb{R}^n, U)$ se e somente se é $ANCBC$.* ◻

²Do inglês, asymptotically null-controlable.

³Do inglês asymptotic null-controlability with bounded controls

A propriedade *ANCBC* pode ser completamente caracterizada em termos de propriedades do par (A, B) , conforme coloca o lema a seguir (SONTAG, SUSSMANN, 1990, SCHMITEN-DORF, BARMISH, 1980).

Lema 1.3.5 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. O sistema linear (A, B) é *ANCBC*.
2. O par (A, B) é estabilizável e $\text{spec}(A) \subset \overline{C^-}$, isto é, nenhum autovalor de A possui parte real estritamente positiva.

◦

Para fins de comparação, note que, na ausência de saturação, a estabilizabilidade do par (A, B) é condição necessária e suficiente para controlabilidade assintótica global para zero.

Definição 1.3.6 *Para o sistema (1.6), o conjunto*

$$\mathcal{N}_A^T(U) \doteq \{x_o \in \mathbb{R}^n : \exists t_1 \in [0, T] \text{ e } u : [0, t_1] \rightarrow U \text{ tais que } \phi(t_1; x_o, u) = 0\} \quad (1.7)$$

é denominado domínio de controlabilidade para zero em tempo $T < \infty$. O domínio de controlabilidade assintótica para zero de (1.6) é o conjunto

$$\mathcal{N}_A(U) \doteq \{x_o \in \mathbb{R}^n : \exists u : [0, \infty) \rightarrow U \text{ tal que } \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; x_o, u) = 0\} \quad (1.8)$$

◁

Definição 1.3.7 *Para uma dada lei de controle $u = k(x)$ e $U \subset \mathbb{R}^m$, a região de factibilidade é o conjunto*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : k(x) \in U\} \quad (1.9)$$

Se a lei de controle é linear ($u = Kx$) a região de factibilidade é denominada de região de linearidade.

◁

1.4 Restrições no Controle: Modelagem

No estudo de sistemas com restrições no controle e no estado são em geral consideradas duas classes de restrições, a saber:

1. **Duras.** Restrições que têm de ser satisfeitas. Usualmente, o projeto do controle deve garantir o atendimento às restrições, o que, em certos casos, pode ser uma tarefa complexa (RAWLINGS, MUSKE, 1993);
2. **Brandas.** Restrições que podem ser violadas. Usualmente, a violação das restrições é penalizada através de um índice de desempenho que deve ser minimizado (ZHENG, MORARI, 1995b).

Restrições são comumente representadas pelo conjunto de valores que as variáveis do sistema podem assumir. No contexto de restrições no sinal de controle, são comumente encontradas restrições do tipo (SHEWCHUN, FERON, 1997)

$$\begin{aligned} -\underline{M}_i \leq u_i(t) \leq \overline{M}_i, \\ |\dot{u}_i(t)| \leq R_i, \end{aligned} \quad i = 1, \dots, m, \quad t \geq 0 \quad (1.10)$$

Estas restrições de magnitude e taxa de variação no sinal de controle podem também ser modeladas através de operadores não-lineares. Restrições de magnitude no sinal de controle são usualmente representadas através de uma não-linearidade tipo saturação, isto é,

$$u_s = \sigma(u) = [\sigma_1(u_1), \dots, \sigma_m(u_m)] \quad (1.11)$$

onde

$$\sigma_i(u_i) = \begin{cases} \overline{M}_i & u_i \geq \overline{M}_i \\ u_i & -\underline{M}_i \leq u_i \leq \overline{M}_i \\ -\underline{M}_i & u_i \leq -\underline{M}_i \end{cases} \quad (1.12)$$

Uma hipótese comum é a de simetria das funções saturação, isto é, $\underline{M}_i = \overline{M}_i = M_i$. Neste caso⁴, as restrições de magnitude podem ser normalizadas em termos da função saturação $\text{sat}(u_i) = \min\{1, |u_i|\} \text{sgn}(u_i)$ na forma

$$\sigma_i(u_i) = M_i \text{sat}\left(\frac{u}{M_i}\right) \quad (1.13)$$

⁴Sem a hipótese de simetria, o sistema resultante será afim, ao invés de linear, com respeito a entrada saturada.

Uma simplificação adicional no modelo pode ainda ser introduzida redefinindo-se o vetor de entrada como

$$\tilde{u} \doteq \left[\frac{u_1}{M_1}, \dots, \frac{u_m}{M_m} \right]' \quad (1.14)$$

Assim, $\sigma(u) = \text{diag}\{M_1, \dots, M_m\} \text{sat}(\tilde{u})$ e a matriz $\text{diag}\{M_1, \dots, M_m\}$ pode ser incorporada à matriz B do sistema, uniformizando e normalizando as funções saturação em todos os canais de entrada do sistema.

A partir do modelo básico da saturação (1.12), outras descrições podem ser obtidas para representar restrições de magnitude como, por exemplo, os modelos politópico e por regiões (TARBOURIECH, GARCIA, 1997, Gomes da Silva Jr., 1998), e o modelo por condição de setor (HINDI, BOYD, 1998, PITTEET et al., 1997). Ainda, diversos autores consideram funções saturação mais genéricas, sem exigir a existência de uma região de linearidade (LIU et al., 1996, LIN et al., 1996b).

A representação do efeito da limitação na taxa de variação do sinal de controle é mais complexa que a limitação em magnitude e requer, além de não-linearidades, um operador com memória. A Tabela 1.1 resume os modelos mais utilizados⁵ na literatura (TEEL, 1994, LIN et al., 1997, LAUVDAL, 1997, HESS, SNELL, 1997, LIN et al., 1999, BARBU et al., 1999, BARBU et al., 2000a).

1	$\dot{u}_s = R \text{sat}(u)$
2	$\dot{u}_s = R \text{sat}(u - T_r u_s)$
3	$\dot{u}_s = R \text{sat}(k(u - u_s))$
4	$\dot{u}_s = R \text{sgn}(u - u_s)$

Tabela 1.1: Modelos para taxa de variação limitada no sinal de controle.

Note-se que o primeiro modelo (Tabela 1.1) é consideravelmente artificial, uma vez que a entrada u passa a ser a derivada do sinal de controle, ao invés do controle em si.

O quarto modelo (Tabela 1.1) produz como sinal de saída u_s o próprio sinal de entrada u limitado em taxa de variação no intervalo $[-R, R]$, modelando efetivamente a limitação em taxa de variação. O modelo 3 constitui uma aproximação do quarto, com a vantagem de ter o lado direito Lipschitz. Aproximações mais suaves podem ser obtidas utilizando-se funções

⁵Muito embora, nesta seção, sejam considerados apenas sistemas contínuos, toda a formulação pode ser facilmente desenvolvida também para o caso discreto.

como, por exemplo, tangente hiperbólica.

O modelo 2 considera que o atuador tem uma constante de tempo T_r , a qual representa o efeito da limitação em taxa de variação. Note-se que os modelos 2 e 3 têm efeitos consideravelmente diferentes, afóra o caso trivial $T_r = k = 1$.

Combinando-se a saturação em magnitude com os modelos para limitação em taxa de variação obtêm-se diversos modelos para o efeito conjunto de limitação em magnitude e taxa de variação do sinal de controle. A Tabela 1.2 apresenta os modelos mais comumente encontrados na literatura (TEEL, 1994, LIN, 1998b, BARBU et al., 1999, BARBU et al., 2000a).

1	$\dot{x}_u = R \text{sat}(u)$ $u_s = \text{sat}_M(x_u)$
2	$\dot{x}_u = R \text{sat}(u - T_r x_u)$ $u_s = \text{sat}_M(x_u)$
3	$\dot{u}_s = R \text{sat}(k(\text{sat}_M(u) - u_s))$
4	$\dot{u}_s = R \text{sgn}(\text{sat}_M(u) - u_s)$

Tabela 1.2: Modelos para magnitude e taxa de variação limitadas no sinal de controle.

Neste trabalho será utilizado o modelo 4 da Tabela 1.2, ilustrado em diagrama de blocos na Figura 1.1, como modelo básico para restrições de magnitude e taxa de variação no sinal de controle. Esta escolha deve-se ao fato deste modelo ser consistente com o seguinte entendimento do fenômeno combinado de limitação em magnitude e taxa de variação em um atuador. Para esta descrição assume-se que $u_s(0) \in [-M, M]$.

se $u(t_0) = u_s(t_0)$, $ u(t) \leq M$, $ \dot{u}(t) \leq R$, $\forall t \in [t_0, t_1)$,	então $u_s(t) = u(t)$, $\forall t \in [t_0, t_1)$
se $u(t) = u_s(t)$, $ u_s(t) < M$, $\dot{u}(t) \geq R$	então $\dot{u}_s(t) = R \text{sgn}(\dot{u}(t))$
se $u(t) > u_s(t)$, $-M \leq u_s(t) < M$	então $\dot{u}_s(t) = R$
se $u(t) < u_s(t)$, $-M < u_s(t) \leq M$	então $\dot{u}_s(t) = -R$
se $u(t) > u_s(t) \geq M$	então $u_s(t) = M$ e $\dot{u}_s(t) = 0$
se $u(t) < u_s(t) \leq -M$	então $u_s(t) = -M$ e $\dot{u}_s(t) = 0$
se $u(t) = u_s(t)$, $ u_s(t) = M$, $\text{sgn}(u_s(t)\dot{u}(t)) \leq 0$	então $\dot{u}_s(t) = \text{sat}_R(\dot{u}(t))$

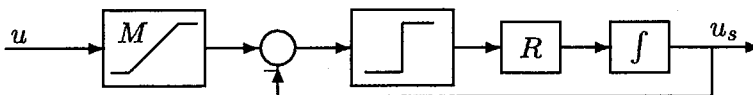


Figura 1.1: Diagrama de blocos do modelo de limitação em magnitude e taxa de variação no sinal de controle.

De todos os itens, apenas o primeiro carece de prova mais formal, a qual é parte do seguinte lema (BARBU et al., 2000b).

Lema 1.4.1 *Seja $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua satisfazendo $|\eta(t)| \leq M$, $\forall t \geq 0$ e $|\dot{\eta}(t)| \leq R$ para quase todo t em $[0, \infty)$. O problema de valor inicial*

$$\dot{\zeta} \in R \operatorname{SGN} \left(M \operatorname{sat} \left(\frac{\eta}{M} \right) - \zeta \right) \quad (1.15)$$

$$\zeta(0) = \eta(0) \quad (1.16)$$

onde

$$\operatorname{SGN}(x) \doteq \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0 \\ -1, & \text{if } x < 0 \\ [-1, 1] & \text{if } x = 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

possui como única solução $\zeta(t) = \eta(t)$ em $[0, \infty)$.

Prova: Como a função multivalor⁶ $\operatorname{SGN} : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ é semicontínua por cima⁷ e tem valores não vazios, compactos e convexos para cada $x \in \mathbb{R}$, segue de (FILIPPOV, 1988, Teorema 1, pg. 77) que existe pelo menos uma solução. Como o lado direito de (1.15) é uniformemente limitado, cada solução é definida em $[0, \infty)$. Seja ζ uma solução qualquer de (1.15) definida em $[0, \infty)$ e seja $e \doteq \zeta - \eta$. Então, $e(0) = 0$ e, da equação (1.15), segue que

$$\dot{e} \in -R \operatorname{SGN}(e) - \dot{\eta}, \quad \text{para quase todo } t \text{ em } [0, \infty), \quad (1.18)$$

⁶Uma função multivalor F , denotada por $F : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$, é uma função que associa cada valor de x do domínio a um subconjunto de \mathbb{R} , isto é, a imagem é um subconjunto de \mathbb{R} (ou um elemento de $2^{\mathbb{R}}$).

⁷Uma função multivalor F é semicontínua por cima em x se para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - y| \leq \delta$ implica $F(y) \subset F(x) + \epsilon B$, onde $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ e a soma de dois conjuntos S_1 e S_2 é definida como $S_1 + S_2 = \{x + y : x \in S_1, y \in S_2\}$. A função multivalor F é dita semicontínua por cima se for semicontínua por cima em todo ponto do domínio.

Como, por hipótese, $|\dot{\eta}(t)| \leq R$, vale que para quase todo $t \in [0, \infty)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d(ee)}{dt} &= e \dot{e} \\ &= e(-R \operatorname{sgn}(e) - \dot{\eta}) \\ &\leq -R|e| + R|e| = 0, \end{aligned}$$

onde a função $\operatorname{sgn}(x)$ é o sinal x para $x \neq 0$ e definida arbitrariamente, dentro do intervalo $[-1, 1]$, em $x = 0$.

Assim, $e^2(0) = 0$ e $\frac{d(e^2)}{dt} \leq 0$ para quase todo t . O resultado então segue aplicando teoremas de comparação (KHALIL, 1996). \circ

O efeito da restrição em taxa de variação do sinal de controle também pode ser visto como uma restrição no estado. Definindo a nova entrada u e aumentando o estado do sistema com o novo estado u_s determinado por

$$\dot{u}_s = u, \tag{1.19}$$

as restrições $|u_s| \leq M$ e $|\dot{u}_s| \leq R$ podem ser reescritas como $|u| \leq R$ e $|u_s| \leq M$, esta última consistindo em uma restrição no estado aumentado (x, u_s) .

Para sistemas de tempo discreto, a restrição em taxa de variação é simples de ser modelada, consistindo apenas em uma limitação na norma da diferença $[u(k) - u(k-1)]$.

1.5 Restrições no Controle: Efeitos

Para o sistema (1.6) a estabilizabilidade local é equivalente a estabilizabilidade do par (A, B) . Contudo, não é verdade, em geral, que para K tal que $A + BK$ é Hurwitz, tem-se (1.6) globalmente estável com $u = Kx$. Com efeito, mostra-se que mesmo uma cadeia de 3 integradores (com saturação no controle) não é estabilizável globalmente por meio de uma realimentação linear de estados (FULLER, 1969, SUSSMANN, YANG, 1991).

O seguinte lema formaliza a relação existente entre a estabilizabilidade de (1.6) com a propriedade ANCBC e com propriedades do par (A, B) (SONTAG, SUSSMANN, 1990, SCHMITENDORF, BARMISH, 1980).

Lema 1.5.1 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. O sistema linear (A, B) é ANCBC.

2. O sistema (1.6) é globalmente assintoticamente estabilizável com controle limitado, isto é, com $|u(t)| \leq M$ para algum $M > 0$ independente da condição inicial.
3. O par (A, B) é estabilizável e $\text{spec}(A) \subset \overline{C^-}$.

◦

Note-se que, como conseqüência do Lema 1.5.1, se a estabilização global é possível, então ela é possível para qualquer limite na magnitude do sinal de controle. As condições do Lema 1.5.1 não garantem, contudo, que a lei de controle estabilizante seja uma realimentação linear de estados. De fato, em geral, a estabilização global de (1.6) é obtida com realimentação não-linear de estados (SONTAG, SUSSMANN, 1990, TEEL, 1992, SUSSMANN et al., 1994, TEEL, 1996a, MEGRETSKI, 1996). Também, como resultado do lema, a estabilização global de (1.6) é impossível se A contém algum autovalor com parte real estritamente positiva. Esta questão é melhor formalizada no lema a seguir (SCHMITENDORF, BARMISH, 1980, SONTAG, SUSSMANN, 1990, ZHENG, MORARI, 1995a)

Lema 1.5.2 *Seja* $\left(\begin{bmatrix} A_u & 0 \\ 0 & A_s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_u \\ B_s \end{bmatrix} \right)$ *uma decomposição do par* (A, B) *com* $A_s \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$ *e tal que* A_u *contém todos (e somente) os autovalores de* A *com parte real estritamente positiva. Então,* $\mathcal{N}_{A_u}(U)$ *(veja Definição 1.3.6) é limitado e*

$$\mathcal{N}_A(U) = \mathcal{N}_{A_u}(U) \times \mathbb{R}^{n_s}$$

◦

Logo, como resultado do Lema 1.5.2, o domínio de controlabilidade para zero é sempre limitado no subespaço correspondente aos autovalores com parte real positiva. Portanto, a estabilização global não é possível para sistemas que contenham modos instáveis.

Por outro lado, a estabilização local sempre é possível, mesmo com realimentação linear de estados. Desde que U contenha a origem como ponto interior, para qualquer K tal que $A + BK$ seja Hurwitz, o conjunto $O_\infty(A + BK, K, U)$ contém uma vizinhança da origem do \mathbb{R}^n .

A adição de restrições na taxa de variação do sinal de controle contribui para restringir ainda mais o domínio de controlabilidade para zero. Apesar disto, a adição de restrições de taxa de variação não modifica as condições para estabilizabilidade global do sistema, conforme coloca o seguinte resultado (SHEWCHUN, FERON, 1997).

Lema 1.5.3 *Sejam $M > 0$ e $R > 0$. Então o sistema (1.6) é globalmente assintoticamente estabilizável com $|u(t)| \leq M$ e $|\dot{u}(t)| \leq R$ se e somente se*

1. *o par (A, B) é estabilizável;*
2. *nenhum autovalor de A possui parte real estritamente positiva.*

◦

Na presença de modos instáveis no sistema, a adição da restrição em taxa de variação contribui sensivelmente na redução do domínio de controlabilidade para zero do sistema. Neste caso, o domínio de controlabilidade para zero deve ser entendido no espaço de estados aumentado (x, u_s) e o valor inicial do sinal de controle $u_s(0)$ passa então a interferir na estabilizabilidade do sistema.

A Figura 1.2 faz uma comparação entre os domínios de controlabilidade para zero para o sistema de primeira ordem $\dot{x} = x + u_s$ nos casos em que u_s é limitado apenas em magnitude ($|u_s| \leq 1$) e u_s é limitado tanto em magnitude como em taxa de variação ($|u_s| \leq 1, |\dot{u}_s| \leq 1$). Pode-se notar a redução considerável no domínio de controlabilidade para zero com a introdução da limitação em taxa de variação no controle.

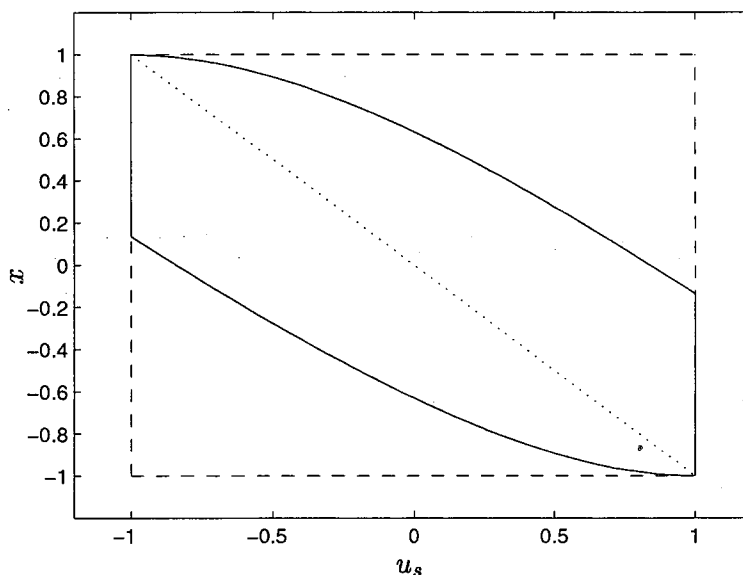


Figura 1.2: Efeito da limitação em taxa de variação no controle sobre o domínio de controlabilidade para zero do sistema $\dot{x} = x + u_s$. Somente com limitação em magnitude (tracejada); com limitação em magnitude e taxa de variação (sólida); variedade de equilíbrio (pontilhada).

Nota 1.5.4 *O efeito da limitação em taxa de variação do sinal de controle pode ser interpretado como um atraso de fase introduzido na malha de controle, pois consiste em uma limitação da velocidade de transferência do sinal de controle para a entrada efetiva do sistema. Esta interpretação baseia-se na obtenção da função descritiva do modelo que descreve a limitação em taxa de variação e permite o projeto de compensadores locais baseados em interpretações heurísticas dos fenômenos envolvidos (RUNDQWIST, HILLGREN, 1996).* ★

1.6 Comentários Conclusivos

A presença de saturação no controle constitui um obstáculo importante na estabilização de sistemas. No contexto de sistemas lineares, a estabilização global só é possível se o sistema em malha aberta não possuir autovalores com parte real positiva, além do requisito usual de estabilizabilidade do par (A, B) . Na presença de modos exponencialmente instáveis no sistema em malha aberta, o domínio de controlabilidade para zero resulta limitado nas direções correspondentes a estes modos, e a estabilização global torna-se impossível.

Um ponto importante é que a adição da restrição em taxa de variação ao sinal de controle não modifica as condições para estabilizabilidade global. Logo, se um sistema linear é estabilizável globalmente com controle limitado em magnitude, também o será com controle limitado tanto em magnitude quanto em taxa de variação. Contudo, no caso de sistemas lineares instáveis em malha aberta, a restrição adicional de taxa de variação implica em uma redução no domínio de controlabilidade para zero.

A estabilização global de sistema lineares com restrições no controle só é possível, no caso geral, por meio de um controle não-linear. Neste trabalho são estudadas leis de controle não-lineares aplicadas ao problema de controle de sistemas lineares e não-lineares com restrições no controle.

Capítulo 2

Estabilização de Sistemas Lineares com Saturação no Controle

2.1 Introdução

Neste capítulo são abordados sistemas lineares com saturação no controle do ponto de vista do problema de estabilização. O capítulo faz uma síntese das diversas técnicas de controle para estes sistemas que objetivam a estabilização da origem (no sentido de Lyapunov) e, concomitantemente, é apresentada uma contribuição à solução deste problema cujas principais propriedades são:

1. Garante estabilidade assintótica global sempre que esta é possível;
2. Garante estabilidade \mathcal{L}_2 de uma entrada de perturbação para o estado e sinal de controle.
3. Na ausência de perturbação, apresenta desempenho superior comparada a técnicas similares propostas na literatura no que tange à velocidade de convergência do estado para a origem.

Esta contribuição consiste em uma nova metodologia para escalonamento da lei de controle parametrizada $-B'P(\xi)x$ obtida a partir da solução da equação algébrica de Riccati parametrizada em ξ .

O capítulo é organizado da seguinte forma. Primeiramente são apresentadas as principais técnicas de projeto para estabilização semi-global e global para estes sistemas, focalizando a estratégia de projeto baseada na solução parametrizada da equação de Riccati. Em seguida é

apresentada a contribuição já mencionada, abordando-se também aspectos de robustez. Dois exemplos de aplicação da técnica proposta são também incluídos ilustrando suas principais propriedades de desempenho. Por fim são apresentadas as provas dos teoremas envolvidos e as considerações finais.

Considere o sistema linear com saturação nos atuadores

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu_s \\ u_s &= \sigma(u) \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, e $\sigma(\cdot)$ é a função saturação descentralizada,

$$\sigma(u) = [\sigma_1(u_1), \dots, \sigma_m(u_m)]' \quad (2.2)$$

e $\sigma_i(u_i) = \text{sat}_M(u_i)$, $M > 0$ sendo uma constante. Por simplicidade, assume-se $\sigma(\cdot)$ simétrica e o mesmo nível de saturação para todos os canais de entrada.

A seção 1.5 apresenta diversas propriedades sobre a estabilizabilidade do sistema (2.1). Entre elas, está a propriedade ANCBC como condição necessária e suficiente para a estabilizabilidade global de (2.1). Como, ao longo deste capítulo lida-se com a questão da estabilização global, esta hipótese será considerada válida.

2.2 Estabilização Semiglobal

Conforme colocado na seção 1.5, a realimentação linear de estados não permite, em geral, a estabilização global de (2.1). Contudo, é possível obter-se regiões de atração arbitrariamente largas utilizando realimentação linear de estados com “ganhos pequenos”. A construção destas leis de controle utiliza-se de propriedades da equação de Riccati estabelecidas no lema a seguir (veja (TEEL, 1995b) para uma prova). O lema é apresentado de forma mais detalhada que o necessário para esta seção, porém o intuito é de utilizar este resultado posteriormente neste capítulo.

Lema 2.2.1 *Seja $Q : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ uma função matricial continuamente diferenciável e tal que $\lim_{\xi \rightarrow \infty} Q(\xi) = 0$ e, para todo $\xi \in [1, \infty)$,*

$$Q(\xi) = Q'(\xi) > 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi) < 0 \quad (2.3)$$

Então, para o sistema (2.1), existe uma função matricial continuamente diferenciável $P(\xi)$ satisfazendo, para todo $\xi \in [1, \infty)$,

$$A'P(\xi) + P(\xi)A - P(\xi)BB'P(\xi) + Q(\xi) = 0 \quad (2.4)$$

$$P(\xi) = P'(\xi) > 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \xi}(\xi) < 0 \quad (2.5)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} P(\xi) = P_o \geq 0 \quad (2.6)$$

Adicionalmente, se (2.1) for ANCBC, então $P_o = 0$. ◦

Claramente, na ausência de saturação, a lei de controle

$$u = -B'P(\xi)x \quad (2.7)$$

estabiliza o sistema (2.1) para qualquer valor de ξ . Na presença de saturação, contudo, o parâmetro ξ é utilizado para ajustar o “ganho” da realimentação, controlando assim a magnitude do sinal de controle, como estabelece o teorema a seguir (TEEL, 1995b, SABERI et al., 1996b).

Teorema 2.2.2 *Assuma que (2.1) é ANCBC. Para qualquer conjunto compacto $X_o \subset \mathbb{R}^n$, existe $\xi^* \in [1, \infty)$ tal que para qualquer $\xi \in [\xi^*, \infty)$ a origem de (2.1), (2.7) é exponencialmente estável e a região de atração contém X_o .*

A prova deste resultado é apresentada por evidenciar aspectos construtivos e propriedades importantes para o restante do capítulo. A prova é adaptada de (TEEL, 1995b) utilizando os resultados de (MEGRETSKI, 1996).

Prova: Considere a família de conjuntos elipsoidais

$$S_\xi(c) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : \text{Tr}(B'P(\xi)B)x'P(\xi)x \leq c^2\} \quad (2.8)$$

Como consequência do fato de $\frac{\partial P}{\partial \xi}(\xi) < 0$, a família de elipsóides $S_\xi(c)$ possui a importante propriedade de ser concêntrica, isto é, para qualquer $c > 0$ fixo,

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow S_{\xi_1}(c) \subset S_{\xi_2}(c)$$

Seja,

$$\xi^* \doteq \min_{\xi} \{ \xi \in [1, \infty), X_o \subset S_{\xi}(M) \} \quad (2.9)$$

$$(2.10)$$

A existência de ξ^* finito é garantida pela propriedade ANCBC de (2.1), pois, neste caso, $P(\xi) \rightarrow 0$ quando $\xi \rightarrow \infty$. Logo, para qualquer $\xi \in [\xi^*, \infty)$, tem-se

$$x \in S_{\xi}(M) \Rightarrow |u| = |B'P(\xi)x| \leq M \quad (2.11)$$

pois,

$$|B'P(\xi)x|^2 \leq |B'P^{1/2}(\xi)|^2 |P^{1/2}(\xi)x|^2 \leq \text{Tr}(B'P(\xi)B) x'P(\xi)x \quad (2.12)$$

Seja $\xi \in [\xi^*, \infty)$. Para provar a estabilidade exponencial considere a função quadrática candidata $V(x) = x'P(\xi)x$. Sua derivada ao longo das trajetórias de (2.1), (2.7) contidas em $S_{\xi}(M)$ resulta, usando (2.11) e (2.4),

$$\dot{V} = x'(A'P(\xi) + P(\xi)A)x + 2x'P(\xi)B \sigma(-B'P(\xi)x) \quad (2.13)$$

$$= x'(A'P(\xi) + P(\xi)A - 2P(\xi)BB'P(\xi))x \quad (2.14)$$

$$\leq -x'Q(\xi)x \quad (2.15)$$

de onde o resultado do teorema segue. •

Nota 2.2.3 *Uma forma alternativa para construção da família de elipsóides (2.8) pode ser encontrada, por exemplo, em (WREDENHAGEN, BELANGER, 1994, SUARÉS et al., 1997). Embora computacionalmente mais complexa, ela é menos conservativa no sentido que constrói o maior elipsóide contido na região de linearidade do controle.*

2.2.1 Desempenho

O controle proposto no Teorema 2.2.2 é inerentemente de baixo ganho, isto é, o ganho é reduzido o suficiente para que a região de interesse X_o esteja contida na região de operação linear do sistema. Quanto maior o domínio de estabilidade desejado X_o , menor será o ganho do controle. O uso de controle de baixo ganho freqüentemente é associado a respostas lentas ou de baixo desempenho dinâmico. Assim, uma alternativa que possivelmente melhoraria o desempenho do sistema em malha fechada seria utilizar ganhos mais elevados no controle,

especialmente em torno da origem, quando a magnitude do estado já é relativamente pequena. Uma primeira contribuição nesta direção é proposta em (SABERI et al., 1996b). O controle proposto, denominado controle de *alto e baixo ganho*, é dado por

$$u = -(1 + k) B' P(\xi) x \quad (2.16)$$

onde k é qualquer constante positiva. Este controle explora a margem de ganho do controle LQR (2.7). O ajuste de k não afeta a estabilidade, sendo, portanto, somente para melhorar o desempenho do sistema.

Uma abordagem mais elaborada é apresentada em (WREDENHAGEN, BELANGER, 1994), consistindo em um controle LQR linear por partes. Dada a região de interesse X_o , é gerada uma seqüência finita ξ_i , $i = 1, \dots, r$, com

$$1 = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_r = \xi^*$$

da qual obtém-se a família de controles $k_i(x, \xi_i) = -B' P(\xi_i) x$, $i = 1, \dots, r$ e de elipsóides ¹

$$S_{\xi_1}(M) \subset S_{\xi_2}(M) \subset \dots \subset S_{\xi_r}(M) \quad (2.17)$$

Por construção, tem-se que $X_o \subset S_{\xi_r}(M)$ e

$$x \in S_{\xi_i}(M) \Rightarrow |k_i(x, \xi_i)| \leq M, \quad i = 1, \dots, r$$

Também, todos os conjuntos $S_{\xi_i}(M)$ são positivamente invariantes (prova similar ao Teorema 2.2.2). Como conseqüência, o seguinte algoritmo de controle linear por partes garante as mesmas propriedades de estabilidade do Teorema 2.2.2 com o possível acréscimo do desempenho devido à aplicação de ganho mais elevado. A medida que o estado converge para zero, ganhos cada vez maiores são aplicados até o limite $k_{\xi_1}(x, \xi_1)$. O chaveamento é seguro, isto é, não há possibilidade de ocorrência de chaveamentos de alta freqüência, pois baseia-se em conjuntos positivamente invariantes.

1. Dado $x_o \in X_o$, determinar o menor índice $j \in [1, r]$ tal que $x_o \in S_{\xi_j}(M)$.
2. Aplicar o controle linear $u = k_j(x, \xi_j)$;

¹No trabalho original (WREDENHAGEN, BELANGER, 1994), os elipsóides são construídos de forma menos conservativa. Optou-se pela construção simplificada devido ao encadeamento com o texto subsequente.

3. Quando $x(t) \in S_{\xi_{j-1}}(M)$, aplicar o controle $u = k_{j-1}(x, \xi_{j-1})$;
4. Repetir o passo anterior até atingir $u = k_{\xi_1}(x, \xi_{\xi_1})$

2.3 Estabilização Global

A estabilização semiglobal desenvolvida na seção 2.2 utilizou-se de realimentação linear de estados. Contudo, em geral, a estabilização global requer realimentação não-linear de estados (SONTAG, SUSSMANN, 1990, TEEL, 1992, SUSSMANN et al., 1994, TEEL, 1996a, MEGRETSKI, 1996).

Uma abordagem para estabilização global de (2.1) utiliza-se de um aninhamento de funções saturação (TEEL, 1992, SUSSMANN et al., 1994, TEEL, 1996a). Nesta abordagem, contudo, fica difícil garantir requisitos de desempenho local para o sistema em malha fechada. Esta abordagem não será discutida em detalhes neste trabalho. Para o leitor interessado sugerem-se as referências citadas.

Por outro lado, a lei de controle parametrizada (2.7) possui inerentemente as propriedades de desempenho do regulador linear quadrático, permitindo estabelecer facilmente o desempenho local desejado. Contudo, obtém-se apenas estabilidade semiglobal, e, à medida que o domínio de estabilidade desejado é aumentado, também perde-se em desempenho devido à redução do ganho necessária para garantir operação do sistema na região linear da saturação.

Uma abordagem natural para usufruir do desempenho local da lei de controle parametrizada (2.7) e ao mesmo tempo obter estabilidade global é variar ξ em função da evolução do estado do sistema, isto é, efetuar um *escalonamento de ganho*² com o parâmetro ξ . Abordagens neste sentido podem ser encontradas em (TEEL, 1995a, MEGRETSKI, 1996, LIN, 1998a, REGINATTO et al., 2000b).

Os principais elementos do escalonamento de ganho são: o parâmetro a ser escalonado; a informação utilizada para tal; e o mecanismo utilizado para o escalonamento. No presente caso, a parâmetro escalonado é ξ , enquanto a informação e o mecanismo podem ser variados, resultando em comportamentos diversos para o sistema em malha fechada.

²Será utilizada esta terminologia para referir-se à técnica *gain scheduling*.

2.3.1 Escalonamento baseado em conjuntos elipsoidais

A estratégia apresentada em (MEGRETSKI, 1996, LIN, 1998a) determina o parâmetro ξ como resultado de um problema de otimização que emprega as propriedades de concentricidade dos elipsóides $S_\xi(c)$ (eq. 2.8). Sejam,

$$R(x) \doteq \min_{\xi} \{ \xi \in [1, \infty) : \text{Tr}(B'P(\xi)B) x'P(\xi)x \leq M^2 \} \quad (2.18)$$

e a lei de controle

$$u_R(x) \doteq -B'P(R(x))x \quad (2.19)$$

O resultado a seguir (MEGRETSKI, 1996) resume as propriedades da lei de controle (2.19) em malha fechada com (2.1).

Teorema 2.3.1 *A função $u_R(x)$ é globalmente Lipschitz. O equilíbrio $x = 0$ do sistema (2.1) em malha fechada com (2.19) é GAS.* •

Note-se que o problema de otimização (2.18) sempre tem solução, pois $P(\xi) \rightarrow 0$ quando $\xi \rightarrow \infty$. Ainda, necessariamente, $R(x) \rightarrow 0$ à medida que $|x| \rightarrow \infty$, pois $P(\xi)$ é sempre positiva definida. Nisto transparece a idéia central do escalonamento, isto é, utilizar ganho pequeno quando o estado está longe da origem e utilizar ganho maior à medida que o estado se aproxima da origem.

Como resultado da minimização em (2.18), $R(x)$ é tal que sempre se verifica

$$\text{Tr}(B'P(R(x))B) x'P(R(x))x = M^2, \quad \forall x \neq 0$$

Por outro lado,

$$\text{Tr}(B'P(\xi)B) x'P(\xi)x \leq M^2 \Rightarrow \quad (2.20)$$

$$|P^{1/2}(\xi)B| |P^{1/2}(\xi)x| \leq M \Rightarrow \quad (2.21)$$

$$|B'P(\xi)x| \leq M \quad (2.22)$$

Logo, o algoritmo de escalonamento garante que o sistema em malha fechada opera sempre na região linear da saturação. Mais precisamente, para cada valor de x , ξ é escolhido de forma que o estado x pertença a um elipsóide contido na região de linearidade da lei de controle (2.19). A função minimizada introduz certa conservatividade na obtenção de tal elipsóide.

Uma formulação menos conservativa, possivelmente com maior necessidade computacional, pode ser encontrada em (SUARÉS et al., 1997).

Nota 2.3.2 *A margem de ganho da lei de controle LQR pode ser explorada para permitir um certo nível de saturação do sinal de controle. Isto pode ser obtido substituindo-se M em (2.18) por qualquer valor entre M e $2M$. Outra alternativa (LIN, 1998a) é utilizar a técnica de alto e baixo ganho.*

Note que se o algoritmo de escalonamento for interrompido no estado $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ passando o sistema em malha fechada a operar com $\xi = \bar{\xi} \doteq R(\bar{x})$, resulta que o conjunto

$$\{x : \text{Tr}(B'P(\bar{\xi})B)x'P(\bar{\xi})x \leq M^2\}$$

é positivamente invariante para o sistema em malha fechada (2.1), (2.19), e que o estado converge para zero exponencialmente com o sistema operando sempre na região linear da saturação. Este fato, aliado ao fato da função $\text{Tr}(B'P(\xi)B)x'P(\xi)x$ ser monótona em ξ , resulta em que o parâmetro escalonado ξ é monótono ao longo do tempo ou, mais precisamente, é decrescente como função do tempo. Este aspecto da monotonicidade aliado ao uso de elipsóides é que parece introduzir conservatividade a este algoritmo e que será também analisado em mais detalhes junto com a contribuição apresentada a seguir.

2.3.2 Escalonamento baseado no sinal de controle

A contribuição apresentada nesta seção objetiva reduzir a conservatividade do algoritmo de escalonamento (2.18)-(2.19) e com isto melhorar o desempenho do sistema em malha fechada, principalmente em relação a velocidade de convergência do estado para zero.

Ao invés de utilizar regiões elipsoidais que induzem a operação linear do sistema em malha fechada para guiar o escalonamento, o algoritmo proposto utiliza-se diretamente da magnitude do sinal de controle, isto é, $|B'P(\xi)x|$. Com isto pretende-se reduzir a conservatividade na estimativa da região de operação linear do sistema, permitindo assim a utilização de ganhos mais elevados. A Figura 2.1 ilustra a conservatividade da estimativa elipsoidal da região de linearidade.

Como ficará claro posteriormente, o algoritmo de escalonamento proposto admite que o parâmetro ξ seja não-monótono ao longo do tempo, sendo este outro ponto de possível ganho de desempenho em relação ao algoritmo (2.18)-(2.19).

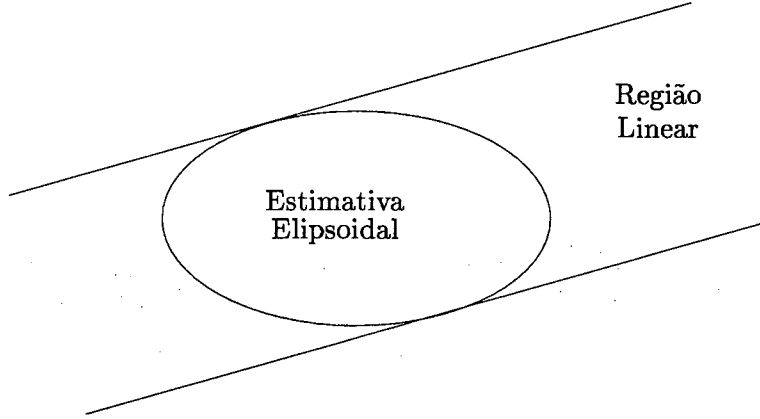


Figura 2.1: Região de linearidade versus estimativa elipsoidal.

Para introduzir o algoritmo de escalonamento, considere as seguintes definições (REGINATTO et al., 2000a, REGINATTO et al., 2000b, REGINATTO et al., 2000c):

Definição 2.3.3 Considere o sistema (2.1) e o resultado do Lema 2.2.1.

1. Sejam $\alpha \in (0, 1)$, $0 < \kappa < \rho \leq 2M$ e $\beta \in [0, \min\{1, (2M - \rho)/\rho\}]$ constantes reais.

Defina

$$N(\xi) \doteq \alpha Q(\xi) + \beta P(\xi) B B' P(\xi) \quad (2.23)$$

$$v(x, \xi) \doteq |B' P(\xi) x| \quad (2.24)$$

$$\bar{\xi}(x) \doteq \min \{ \xi \in [1, \infty) \text{ tal que } v(x, \xi) \leq \rho \} \quad (2.25)$$

2. Seja $W : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1]$ uma função localmente Lipschitz e que satisfaz

$$\begin{aligned} W(s) &= 1, & 0 \leq s \leq \kappa/2 \\ W(s) &= 0, & s \geq \kappa \end{aligned} \quad (2.26)$$

3. Seja $r : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$ uma função localmente Lipschitz e que satisfaz

$$-r(\xi, x) x' \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi} x \leq x' N(\xi) x, \quad \forall (\xi, x) \in [1, \infty) \times \{\mathbb{R}^n - \{0\}\} \quad (2.27)$$

O algoritmo de escalonamento proposto (REGINATTO et al., 2000b, REGINATTO et al., 2000c) consiste em um operador

$$\mathcal{G}(\xi(0), x(t), v(x(t)), \xi(t)),$$

com $\xi(0) = \bar{\xi}(x(0))$, que fornece o valor de $\xi(t)$ de acordo com

$$\xi(t) = \begin{array}{l} \min \zeta, \quad \text{se } v(x(t), \xi(t)) \geq \rho \\ \zeta \in [\xi(t^-), \infty) \\ v(x(t), \zeta) \leq \rho \end{array} \quad (2.28)$$

$$\dot{\xi}(t) = -\text{sat}(k(\xi(t) - 1)) r(\xi(t), x(t)) W(v(x(t), \xi(t))), \text{ caso contrário} \quad (2.29)$$

onde k é uma constante positiva (parâmetro de projeto) e $\xi(t^-) \doteq \lim_{\tau \rightarrow t^-} \xi(\tau)$.

O seguinte resultado estabelece as propriedades de estabilidade do sistema em malha fechada (2.1, 2.7) com o algoritmo de escalonamento de ganho (2.28, 2.29) (REGINATTO et al., 2000b, REGINATTO et al., 2000c).

Teorema 2.3.4 *Assuma que (2.1) é ANCBC. Sejam $P(\xi)$ e $Q(\xi)$ conforme o Lema 2.2.1 e considere a notação introduzida na Definição 2.3.3. Então, o sistema (2.1) com a lei de controle (2.7) e o algoritmo de escalonamento (2.28, 2.29) é tal que $x = 0$ é localmente exponencialmente estável e globalmente assintoticamente estável. Adicionalmente, $\xi(t) \rightarrow 1$ a medida que $t \rightarrow \infty$.* •

A prova deste resultado (veja também (REGINATTO et al., 2000c)) está apresentada na seção 2.7, ao final deste capítulo, para o caso mais geral de sistemas sujeitos a perturbações externas considerados na seção 2.4. No que segue, são apresentadas a funcionalidade e as principais propriedades do algoritmo de escalonamento proposto.

Funcionalidade e propriedades do algoritmo de escalonamento de ganho

O algoritmo de escalonamento tem a natureza de um sistema híbrido à medida que a dinâmica de $\xi(t)$ é dada ora por (2.28), ora por (2.29). As transições de uma dinâmica para outra são determinadas pelo valor da função $v(x, \xi)$, a qual depende do estado x e do próprio parâmetro de escalonamento ξ . O valor da função v corresponde a uma medida da magnitude do sinal de controle, $-B'P(\xi)x$, aqui tomada como sendo a norma Euclidiana. Assim, o

algoritmo de escalonamento é diretamente guiado pela magnitude do sinal de controle, como representado pela função $v(x, \xi)$.

Como a lei de controle (2.7) também depende de ξ , o algoritmo de escalonamento (2.28, 2.29) é definido, na verdade, de forma implícita em $\xi(t)$. A explanação a seguir objetiva elucidar esta questão, mostrando que o algoritmo é de fato bem definido, ao mesmo tempo que descreve a funcionalidade do algoritmo.

Funcionalidade do algoritmo: Quando o sinal de controle (2.7) é de magnitude pequena ($v(x(t), \xi(t)) < \rho$), o parâmetro de escalonamento $\xi(t)$ é dado por (2.29). Como r e W são não-negativas, $\xi(t)$ é não-crescente ao longo do tempo. Em particular, $\xi(t)$ é estritamente decrescente sempre que $v(x(t), \xi(t)) < \kappa$. A função saturação passa a ter efeito quando $\xi(t)$ é próximo de seu valor nominal, 1, forçando a existência do equilíbrio $\xi = 1$. Embora W seja nula para $v(x(t), \xi(t)) \geq \kappa$ implicando que $\dot{\xi}(t) = 0$, não é difícil verificar que esta não é uma condição de equilíbrio para o sistema em malha fechada. Portanto, quando a magnitude do sinal de controle é pequena, o parâmetro de escalonamento é não-crescente e convergente para seu valor nominal 1. Nesta fase do algoritmo, denominada *recuperação*, o ganho da lei de controle (2.7) é aumentado em direção ao seu valor nominal.

Por outro lado, para valores maiores da magnitude do sinal de controle, o parâmetro $\xi(t)$ passa a ser obtido de (2.28). Esta fase é denominada de *busca* e objetiva reduzir o “ganho” do controle tanto quanto necessário para garantir que o sinal de controle não ultrapasse o valor máximo permitido, como especificado pela condição $v(x, \xi) \leq \rho$. Esta garantia é obtida do problema de minimização em (2.28) o qual assegura $v(x(t), \xi(t)) \leq \rho$ para todo t . Isto é possível porque $\lim_{\xi \rightarrow \infty} P(\xi) = 0$ de forma que, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ sempre é possível encontrar um ξ , suficientemente grande, tal que $v(x, \xi) = \rho$. Esta condição, a igualdade $v(x(t), \xi(t)) = \rho$, é que de fato é garantida sempre que (2.28) está ativa.

Note que $\xi(t)$ é não-decrescente como resultado do problema de minimização (2.28). Esta propriedade aliada ao limite ρ na magnitude do sinal de controle são fundamentais para a garantia de estabilidade do sistema em malha fechada. Por outro lado, o interesse no mínimo valor de ξ satisfazendo (2.28) vem do interesse em não utilizar um “ganho” menor do que o necessário.

Como $v(x, \xi)$ não é necessariamente monótona, como função de ξ , a exigência de que $\xi(t)$ seja não-decrescente em (2.28) pode levar a descontinuidades no parâmetro de escalonamento. Contudo, tais descontinuidades em $\xi(t)$ não causam descontinuidades em $v(x(t), \xi(t))$ (como

função do tempo), pela própria definição do problema de minimização. Assim, o sinal de controle (2.7) não é necessariamente descontínuo em tais pontos. Por exemplo, no caso escalar, a continuidade de $v(x(t), \xi(t))$ como função do tempo garante a continuidade de $u(t) = -B'P(\xi(t))x(t)$. No caso geral, pode-se mostrar que os pontos de descontinuidade de $\xi(t)$ são isolados e existe apenas um número finito deles em qualquer intervalo de tempo limitado (veja a prova do Teorema th:schedpert na seção proofmain).

Transições: Uma questão importante na funcionalidade do algoritmo de escalonamento (2.28, 2.29), é a transição de (2.28) para (2.29) e vice-versa. Considere, sem perda de generalidade, que a inicialização do sistema satisfaz $v(x(0), \xi(0)) < \rho$. À medida que o sistema evolui ao longo do tempo, a condição $v(x(t), \xi(t)) = \rho$ pode ser atingida. Se não for o caso, então $\xi(t)$ permanecerá sendo determinado por (2.29) e acabará por convergir para seu valor nominal. Por outro lado, se for o caso, a função W garante que $\xi(t)$ é constante durante algum intervalo de tempo antes da condição $v(x(t), \xi(t)) = \rho$ ser atingida. Logo, apenas a evolução do estado é capaz de causar a transição de (2.29) para (2.28).

Por outro lado, se o sistema em malha-fechada está operando com $v(x(t), \xi(t)) = \rho$, o problema de minimização garante a permanência desta condição. Assim, de forma similar, apenas a evolução do estado é capaz de causar a transição de (2.28) para (2.29).

Por conseqüência, todas transições entre (2.28) e (2.29) são suaves e guiadas pela evolução do estado, ou seja, a determinação de $\xi(t)$ em qualquer instante de tempo não causa nenhuma transição, mesmo que ξ seja descontínuo naquele instante de tempo.

Por fim, como v é uma função contínua do tempo, sempre é possível iniciar o algoritmo verificando a magnitude de v e, a partir disso, decidir na implementação de (2.28) ou (2.29). Isto resolve a questão da definição implícita do algoritmo em ξ .

Como resultado destas propriedades, as trajetórias do estado $x(t)$ do sistema em malha-fechada são funções contínuas e C^1 por partes, enquanto que o parâmetro de escalonamento $\xi(t)$ é C^1 por partes, mas pode ter descontinuidades isoladas (ver prova do Teorema 2.4.2 na seção 2.7).

Parâmetros: O parâmetro de projeto mais importante do algoritmo de escalonamento é a função $r(\xi, x)$, a qual determina a taxa de recuperação do parâmetro ξ . Quanto mais rápida a recuperação, maior o ganho do controle utilizado e, possivelmente, melhor o desempenho do sistema, respeitadas as condições de estabilidade do sistema em malha fechada. Assim,

em geral, é de interesse escolher r o maior possível. Uma escolha simples e natural é

$$r(\xi, x) \doteq - \frac{x'N(\xi)x}{x' \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi} x} \quad (2.30)$$

Uma escolha alternativa e mais simples para $r(\xi, x)$ é a seguinte. Seja $\tilde{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ uma função localmente Lipschitz, globalmente limitada e tal que

$$-\tilde{r}(\xi) \frac{\partial P_\xi}{\partial \xi} \leq N(\xi), \quad \forall \xi \in [0, \infty) \quad (2.31)$$

Então, pode-se escolher $r(\xi, x) = \tilde{r}(\xi)$. A função $\tilde{r}(\xi)$ em (2.31) pode ser obtida de forma fechada, de maneira que o esforço computacional exigido será menor que o necessário em (2.30). O custo disso é a conservatividade introduzida, o que pode fazer com que a recuperação de ξ se torne muito lenta.

Nota 2.3.5 *Todo o esquema de controle depende da existência da solução $P(\xi)$ da equação de Riccati parametrizada. Na escolha da função r também pode ser necessária $\partial P(\xi)/\partial \xi$. Embora todo este esforço seja off-line, em muitos casos a dificuldade na obtenção destas expressões analíticas pode ser proibitiva. Por outro lado, a solução numérica on-line também parece pouco viável devido ao esforço computacional requerido. Em (MEGRETSKI, 1996) é proposta uma alternativa para este problema a qual pode ser utilizada para muitas aplicações práticas. Consiste em obter $P(\xi)$ através de*

$$P(\xi) \doteq \left[P_1^{-1} + \frac{\xi - 1}{\xi_m - 1} (P_m^{-1} - P_1^{-1}) \right]^{-1} \quad (2.32)$$

onde $\xi_m \gg 1$ e P_1, P_m são obtidos de

$$A'P_1 + P_1A - P_1BB'P_1 + Q(1) = 0 \quad (2.33)$$

$$A'P_m + P_mA - P_mBB'P_m + Q(\xi_m) = 0 \quad (2.34)$$

A solução parametrizada assim obtida só é válida para $\xi \leq \xi_m$. Assim, ξ_m deve ser escolhido grande o suficiente para englobar a região de operação normal do sistema em questão. *

Os parâmetros α e β cumprem funções similares e afetam a taxa de recuperação de ξ através da função r (eq. (2.23)). Eles determinam o peso das matrizes $Q(\xi)$ e $P(\xi)BB'P(\xi)$ na formação da matriz $N(\xi)$ e, obviamente, quanto maior $N(\xi)$, maior poderá ser a escolha

de r . O parâmetro α ainda possui relação com a taxa de convergência exponencial do estado para a origem. A taxa de convergência que pode ser provada depende de $1 - \alpha$, fato que pode levar a um compromisso na escolha de α .

O parâmetro κ cumpre apenas o papel de garantir uma transição suave entre as fases de recuperação e busca do algoritmo. Seu efeito na taxa de recuperação é tanto menor quanto mais próximo de ρ for escolhido.

O nível de saturação admissível é determinado pelo parâmetro ρ . Se for de interesse, a saturação pode ser evitada escolhendo-se $\rho \leq M$. Por outro lado, fazendo uso da margem de ganho da lei de controle LQR (2.7), pode-se ajustar ρ até $2M$ possivelmente melhorando o desempenho do sistema.

Nota 2.3.6 *Embora tenha-se utilizado a norma Euclidiana na definição de $v(x, \xi)$ como uma medida da magnitude do sinal de controle, é na verdade possível utilizar qualquer norma p para $p \in [1, \infty)$. Este fato pode ser de interesse em sistemas multivariáveis, pois, neste caso, $v(x, \xi)$ fornecerá diferentes estimativas para diferentes valores de p .* ★

Implementação: O problema de minimização (2.28) envolvido no algoritmo de escalonamento consiste em um problema de programação não-linear. Contudo, como a variável de decisão é escalar, o problema pode ser resolvido facilmente. Uma alternativa é utilizar-se uma busca seqüencial e aplicar, em seguida, o método da bissecção para localizar a solução.

Como a implementação de algoritmos de controle é, em geral, em tempo discreto, é importante considerar o efeito da discretização do algoritmo de escalonamento. Ademais, a implementação em tempo discreto é também bastante desejável em função do problema de minimização (2.28), o qual não é solúvel de forma viável em tempo contínuo. Uma abordagem natural é utilizar a implementação discreta usual com período de amostragem suficientemente pequeno. Neste caso, contudo, o resultado será apenas semi-global, isto é, a estabilidade da origem pode ser garantida apenas para condições iniciais dentro de um certo conjunto compacto no espaço de estados. Quanto menor o período de amostragem, maior será o conjunto compacto, caracterizando o termo semi-global. Não obstante a esta perda na propriedade da estabilidade global, o resultado ainda é satisfatório para a maioria das aplicações práticas.

2.4 Atenuação de Perturbações

Nas seções anteriores foi abordada a questão da estabilização de sistemas lineares com restrições no controle. Foram consideradas duas situações: estabilidade semiglobal e global. Nesta seção estes resultados serão aprimorados para embutir propriedades de atenuação de perturbações. Para tanto, nesta seção serão considerados sistemas descritos por

$$\dot{x} = Ax + B_1\sigma(u) + B_2w \quad (2.35)$$

onde $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ é uma entrada de perturbação, e as demais variáveis são análogas a (2.1).

A questão abordada nesta seção é determinar propriedades que podem ser garantidas em relação à perturbação w por meio dos algoritmos de escalonamento de ganho (2.18) e (2.28), (2.29). Para este fim, a lei de controle parametrizada a ser escalonada é obtida a partir da equação de Riccati associada ao problema H_∞ , conforme coloca o próximo lema (TEEL, 1995b).

Lema 2.4.1 *Seja $Q : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ função matricial continuamente diferenciável e tal que $\lim_{\xi \rightarrow \infty} Q(\xi) = 0$ e, para todo $\xi \in [1, \infty)$,*

$$Q(\xi) = Q'(\xi) > 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi) < 0 \quad (2.36)$$

Se (A, B_1) e (A, B_2) forem ambos estabilizáveis, existe uma constante finita $\gamma > 0$ e uma função matricial continuamente diferenciável $P(\xi)$ satisfazendo para todo $\xi \in [1, \infty)$,

$$A'P(\xi) + P(\xi)A + P(\xi) \left(\frac{1}{\gamma^2} B_2' B_2 - B_1 B_1' \right) P(\xi) + Q(\xi) = 0 \quad (2.37)$$

$$P(\xi) = P'(\xi) > 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \xi}(\xi) < 0 \quad (2.38)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} P(\xi) = P_o \geq 0 \quad (2.39)$$

Ainda, se (A, B_1) for ANCBC então $P_o = 0$. ◦

O teorema a seguir (REGINATTO et al., 2000b, REGINATTO et al., 2000c) estabelece que o algoritmo de escalonamento de ganho proposto (2.28, 2.29) pode ser utilizado para escalonar a lei de controle

$$u = -B_1' P(\xi) x \quad (2.40)$$

obtida a partir da solução parametrizada apresentada no Lema 2.4.1.

Teorema 2.4.2 *Sejam $P(\xi)$ e $Q(\xi)$ conforme o Lema 2.4.1 assumindo que (A, B_1) e (A, B_2) são estabilizáveis e que (A, B_1) é ANCBC. Suponha que $w \in \mathcal{L}_{\infty e}$. Então, o sistema (2.35) com a lei de controle (2.40) e o algoritmo de escalonamento (2.28), (2.29) é tal que $(x, u) \in \mathcal{L}_2$ sempre que $w \in \mathcal{L}_2$. Na ausência de perturbação, $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável e localmente exponencialmente estável. Adicionalmente, $\xi(t) \rightarrow 1$ à medida que $t \rightarrow \infty$. •*

O teorema estabelece a estabilidade \mathcal{L}_2 da entrada de perturbação w para o estado x e sinal de controle u do sistema em malha fechada. Isto garante robustez para o sistema em malha fechada frente a sinais de perturbação externos \mathcal{L}_2 . O requisito adicional de que a perturbação seja um sinal $\mathcal{L}_{\infty e}$ não restringe o resultado significativamente, pois os sinais de perturbação, na prática, são limitados. O requisito apenas impõe que a perturbação w seja limitada em qualquer intervalo limitado de tempo, podendo ser ilimitada no infinito.

É fácil de ver que na ausência de perturbação ($w = 0$), o Teorema 2.4.2 reduz-se ao resultado do Teorema 2.3.4, de onde se deduz as propriedades de estabilidade do equilíbrio. A prova deste teorema encontra-se na seção 2.7, ao final deste capítulo.

Nota 2.4.3 *Um resultado similar vale para o caso do algoritmo (2.18), apresentado de forma mais generalizada em (MEGRETSKI, 1996). Neste caso garante-se um ganho- \mathcal{L}_2 não-linear de w para (x, u) e não é necessário que a perturbação pertença a $\mathcal{L}_{\infty e}$. **

2.5 Robustez

Nesta seção serão explorados aspectos de robustez do algoritmo de escalonamento proposto. Será também proposta uma modificação na lei de controle para compensar incertezas aditivas ao sinal de controle.

Não linearidades na entrada de controle: Para cada ξ fixo, a lei de controle (2.7) (também (2.40)) é ótima com respeito ao índice de desempenho quadrático

$$J = \int_0^{\infty} (x'Q(\xi)x + u'u) dt \quad (2.41)$$

Embora a otimalidade seja perdida quando ξ é escalonado em função do estado, as margens de estabilidade são mantidas, o que garante robustez ao sistema em malha fechada com relação a não-linearidades na entrada de controle. O próximo teorema formaliza este resultado.

Teorema 2.5.1 *Seja $\phi(u) \doteq [\phi_1(u_1), \dots, \phi_m(u_m)]$ onde $\phi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, m$, são funções não-lineares localmente Lipschitz que satisfazem*

$$u_i \phi_i(u_i) \geq u_i^2 \quad (2.42)$$

Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + B_1 \sigma(\phi(u)) + B_2 w \quad (2.43)$$

em malha fechada com (2.40) e com o algoritmo de escalonamento (2.28, 2.29) é tal que $(x, u) \in \mathcal{L}_2$ sempre que $w \in \mathcal{L}_2$. Na ausência de perturbação, $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável e localmente exponencialmente estável. Adicionalmente, $\xi(t) \rightarrow 1$ à medida que $t \rightarrow \infty$ •

O Teorema 2.5.1 estabelece limites para não-linearidades na entrada de controle que são toleráveis pelo sistema em malha-fechada. Basicamente, o teorema estabelece que qualquer aumento de ganho é tolerável, enquanto reduções de ganho não são admissíveis. O Teorema 2.5.1 é, na verdade, uma consequência do seguinte teorema que caracteriza as funções saturação para as quais o resultado de estabilidade é válido.

Definição 2.5.2 *Uma função $\sigma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ pertence a classe $\mathcal{S}(M)$ se $\sigma(\cdot)$ é descentralizada (veja equação (2.2)), globalmente Lipschitz e satisfaz*

$$u' \sigma(u) \geq u' \text{sat}_M(u), \quad \forall |u| \in [0, 2M] \quad (2.44)$$

◁

Teorema 2.5.3 *O Teorema 2.4.2 para o sistema (2.35) é válido para todo $\sigma(\cdot) \in \mathcal{S}(M)$.* •

Nota 2.5.4 *Para ver que o resultado do Teorema 2.5.1 segue do Teorema 2.5.3, note que para qualquer $\phi(\cdot)$ satisfazendo (2.42), existe uma função $\sigma(\cdot)$ na classe \mathcal{S} tal que $\sigma(u) = \text{sat}_M(\phi(u))$, $\forall u \in \mathbb{R}^m$.* ★

O Teorema 2.5.3 mostra que os resultados de estabilidade são válidos para uma classe mais geral de funções saturação, conforme especificado pela classe $\mathcal{S}(M)$. Não há necessidade da função $\sigma(\cdot)$ possuir uma região linear, nem de ser monótona. Contudo, esta deve ter um comportamento “linear” próximo da origem. O Teorema 2.5.3 é consequência do Lema 2.7.1, apresentado na seção 2.7 em conjunto com a prova do Teorema 2.4.2.

Incertezas aditivas na entrada e de norma limitada: Considere que o sistema (2.35) é perturbado aditivamente na entrada de controle na forma

$$\dot{x} = Ax + B_1\sigma(u + g(t, x)) + B_2w \quad (2.45)$$

onde g é localmente Lipschitz em x é Lebesgue mensurável em t , e valem as demais hipóteses do sistema (2.35).

Considere que a incerteza g é limitada em norma, como estabelece a seguinte hipótese.

Hipótese 2.5.5 *A função, $g(t, x)$ satisfaz*

$$|g(t, x)| \leq h(|x|), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad (2.46)$$

onde $h(\cdot)$ é uma função localmente Lipschitz e conhecida. ▷

Estas incertezas com norma limitada aditivas na entrada de controle podem ser compensadas com uma modificação na lei de controle a ser escalonada pelo algoritmo de escalonamento proposto (REGINATTO et al., 2000b, REGINATTO et al., 2000c). Esta modificação segue um princípio similar ao apresentado em (LIN, 1998a), e é objeto do seguinte teorema, cuja prova está apresentada na seção 2.8.

Teorema 2.5.6 *Considere o sistema (2.45) com as hipóteses do Teorema 2.4.2. Suponha que $g(t, x)$ satisfaz a Hipótese 2.5.5. Então, a lei de controle*

$$u = -(1 + q(x, \xi)) B_1' P(\xi) x \quad (2.47)$$

onde $q(x, \xi)$ satisfaz

$$q(x, \xi) \geq \frac{5 [h(|x|)]^2}{(1 - \alpha) x' Q(\xi) x} \quad (2.48)$$

com o algoritmo de escalonamento de ganho (2.28, 2.29) é tal que $(x, u) \in \mathcal{L}_2$ sempre que $w \in \mathcal{L}_2$. Na ausência de perturbação, $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável. Adicionalmente, $\xi(t) \rightarrow 1$ à medida que $t \rightarrow \infty$. •

Comparado ao controle (2.40), a lei de controle (2.47) contém o termo adicional $q(x, \xi) B_1' P(\xi) x$. O fator $q(x, \xi)$ é escolhido suficientemente grande (2.48) de forma que o efeito da incerteza é dominado e as propriedades de estabilidade são mantidas.

Nota 2.5.7 *É importante observar que o algoritmo de escalonamento é guiado pela magnitude do sinal $v(x, \xi) = |B'P(\xi)x|$. No presente caso, em que o fator $q(x, \xi)B'P(\xi)x$ é adicionado ao sinal de controle, v não mais corresponde à magnitude do sinal de controle. Enquanto v é limitado ao valor ρ pelo algoritmo de escalonamento, o sinal de controle propriamente dito u pode atingir valores muito maiores, de forma que o sistema pode permanecer saturado por maior tempo em função do efeito da incerteza.* ★

2.6 Estudo de Casos

Nesta seção são considerados dois exemplos para ilustrar as propriedades de desempenho e funcionalidade do algoritmo de escalonamento proposto. O primeiro exemplo, uma cadeia de 2 integradores, não inclui perturbações e sua finalidade é permitir uma visualização mais completa da funcionalidade do algoritmo de escalonamento. Aspectos de desempenho e robustez são explorados mais profundamente no segundo exemplo, uma cadeia de 3 integradores.

2.6.1 Cadeia de 2 integradores

O seguinte exemplo é tomado de (LIN, 1998a) e pode também ser encontrado em (REGINATTO et al., 2000a). Consiste em uma cadeia de 2 integradores com representação no espaço de estados dada por,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

onde considera-se que o sinal de controle é limitado ao intervalo $[-1, 1]$.

A solução parametrizada da equação de Riccati (Lema 2.2.1) é construída para $Q(\xi) = (1/\xi)I$, e é dada em forma fechada por (LIN, 1998a)

$$P(\xi) = \begin{bmatrix} g \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\xi}} - g\right) & \sqrt{\frac{2}{\xi}} - g \\ \sqrt{\frac{2}{\xi}} - g & g \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

onde $g \doteq \sqrt{\frac{1}{\xi} + 2\sqrt{\frac{2}{\xi}}}$.

A Figura 2.2 ilustra o comportamento do sistema em malha fechada sem saturação e com $\xi \equiv 1$. Pode-se ver que, para esta condição inicial, o sistema ultrapassa os limites admissíveis para o sinal de controle.

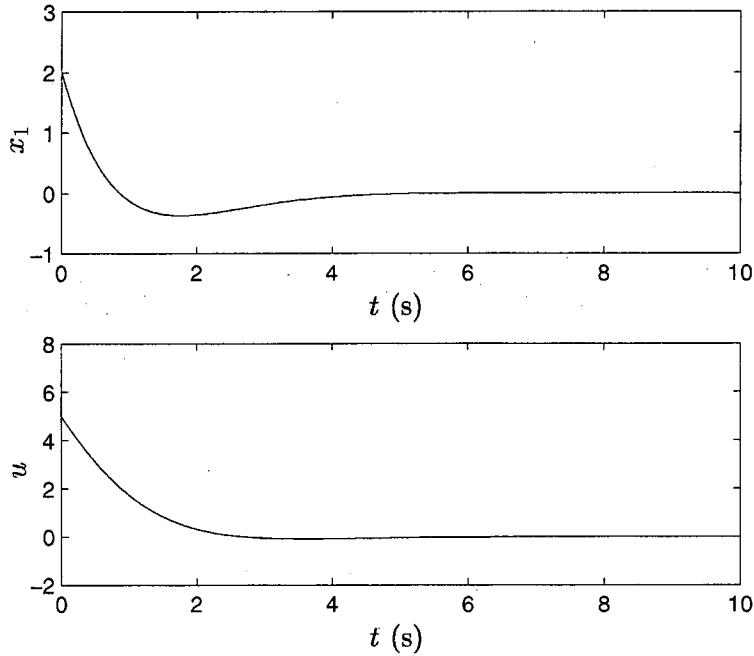


Figura 2.2: Simulação do sistema em malha fechada sem saturação para $x(0) = [2, -2]'$.

As funções $r(\xi, x)$ e $W(\cdot)$ são escolhidas como (veja (2.30))

$$r(\xi, x) = -\frac{x'N(\xi)x}{x'\frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi}x} \quad (2.51)$$

$$W(s) = \begin{cases} 1, & s \leq 0.95\kappa \\ 20\left(1 - \frac{s}{\kappa}\right), & 0.95\kappa < s < \kappa \\ 0, & s \geq \kappa \end{cases} \quad (2.52)$$

para $\alpha = 0.9$, $\kappa = 0.95\rho$ e ρ como indicado em cada caso. A função W e o parâmetro κ são escolhidos de forma a não afetar significativamente a taxa de recuperação de ξ determinada pela função r . Em todas as simulações, $k = 10$, ξ é inicializado em 1, sempre que possível, e o algoritmo de escalonamento é implementado em tempo discreto com período de amostragem de 5ms.

O comportamento do sistema em malha fechada é ilustrado na Figura 2.3. Para uma condição inicial pequena, o sistema satura apenas no início da resposta, e o parâmetro escalonado ξ é monótono ao longo do tempo. Para uma condição inicial grande, o parâmetro escalonado mostra-se não-monótono, pois o sinal de controle atinge os limites duas vezes. Em ambos os casos o estado converge para a origem, e o parâmetro escalonado recupera o seu valor nominal ($\xi = 1$) com uma taxa de convergência similar à convergência do estado para

a origem.

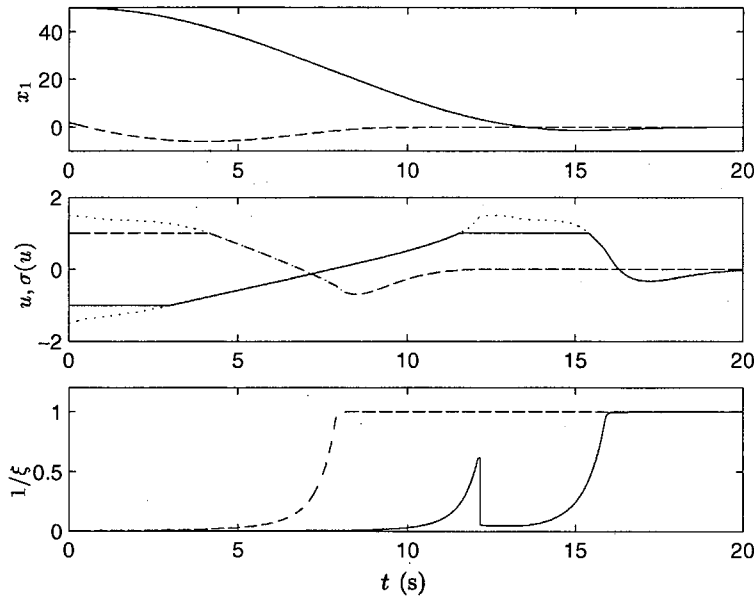


Figura 2.3: Simulação para $\rho = 1.5$. Linha sólida: $x(0) = [50, 50]'$; Tracejada: $x(0) = [2, -2]'$. Curva pontilhada: sinal de controle antes da saturação.

A funcionalidade do algoritmo de escalonamento pode ser visualizada no gráfico 3D mostrado na Figura 2.4, devido ao sistema ser de segunda ordem. O algoritmo de escalonamento força o sistema em malha fechada a operar na região $S \doteq \{(x, \xi) : v(x, \xi) \leq \rho\}$, a qual corresponde ao espaço entre as duas superfícies mostradas na figura. O parâmetro escalonado inicia em $\xi = 1$ e é constante até o instante em que a trajetória atinge a fronteira de S (marcado com \circ na figura). Neste ponto, uma descontinuidade ocorre com o parâmetro escalonado ξ porque a fronteira direita de S tem uma forma côncava nas proximidades de $\xi = 1$ (vista da direita) de forma que se ξ crescesse continuamente, a região S tenderia a diminuir ao invés de aumentar. Então, ξ salta para um ponto onde a região S alarga com acréscimos de ξ (marcado com \triangle na figura) e continua crescendo de forma a manter a trajetória na fronteira de S . Após o terceiro ponto marcado com \square , a trajetória deixa a fronteira de S e converge para a origem (do espaço (x_1, x_2)) enquanto o parâmetro escalonado é lentamente decrescido ao seu valor nominal. Pode-se observar que ξ é constante tanto quando a trajetória chega na fronteira de S como quando a trajetória deixa esta fronteira. A Figura 2.5 mostra os mesmo resultado como função do tempo.

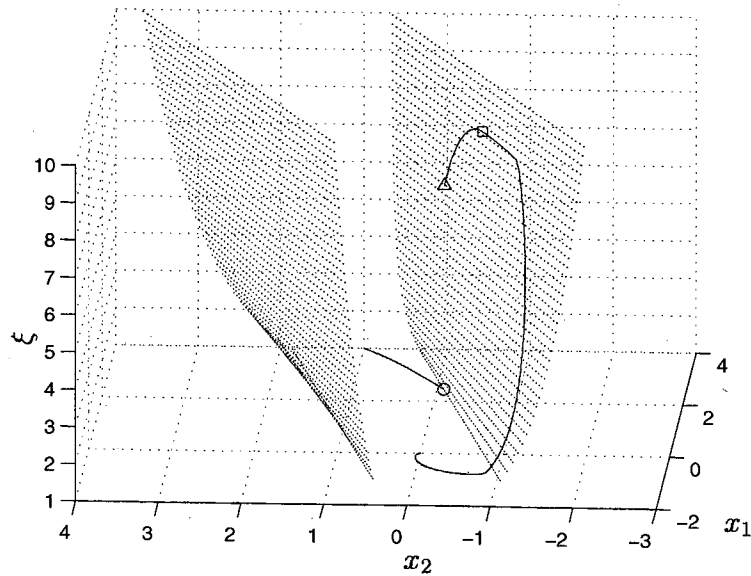


Figura 2.4: Não monotonicidade/descontinuidade de $\xi(t)$. Linha sólida: trajetória do sistema em malha fechada para $x(0) = [4, 1]'$, $\xi(0) = 1$, e $\rho = 1.5$. A região entre as superfícies corresponde a S .

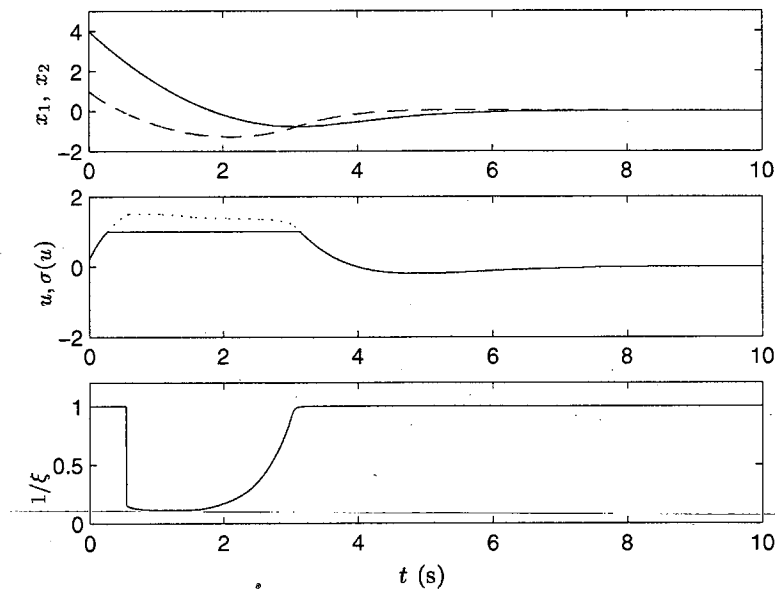


Figura 2.5: Resposta temporal da simulação ilustrada na Figura 2.4. Linha sólida: $x_1(t)$; Tracejada: $x_2(t)$; Pontilhada: sinal de controle antes da saturação.

O efeito do parâmetro ρ sobre o desempenho do sistema em malha fechada pode ser visto na Figura 2.6. Pode-se ver que o valor máximo de $\rho = 2$ permite uma convergência mais rápida do estado do que o caso com $\rho = 1$. O parâmetro escalonado ξ mostra que um ganho maior é empregado no caso $\rho = 2$ o que permite atingir a saturação em contraste com o caso

$\rho = 1$. Pode-se também observar a monotonicidade de ξ neste caso

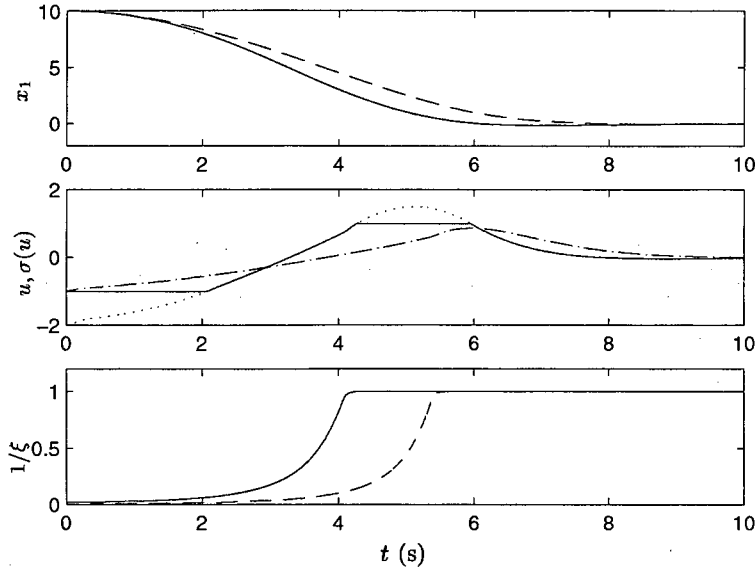


Figura 2.6: Efeito do parâmetro ρ para $x(0) = [10, 10]'$. Sólida: $\rho = 2$; Tracejada: $\rho = 1$; Pontilhada: sinal de controle antes da saturação.

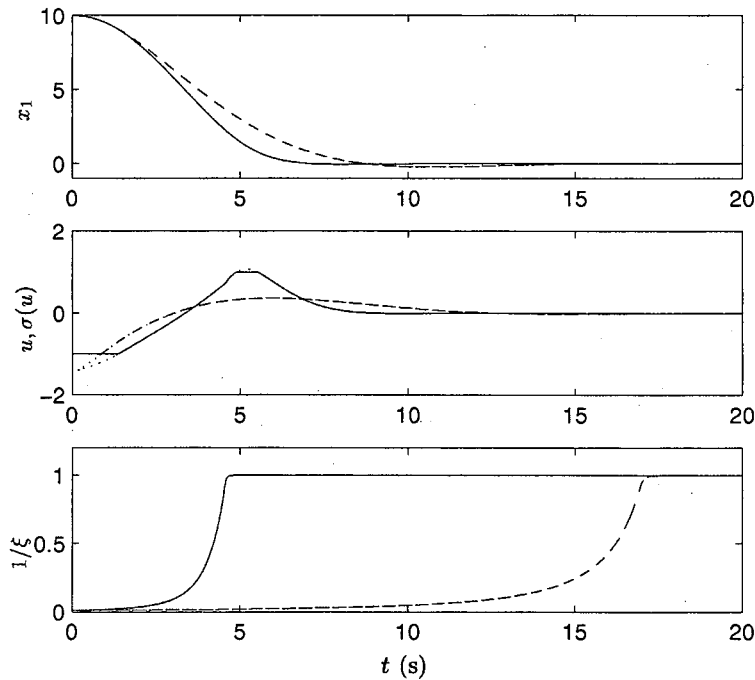


Figura 2.7: Influência da função r , $x(0) = [10, 10]'$, $\rho = 1.5$. Sólida: \tilde{r} dada por (2.51); Tracejada: \tilde{r} dada por (2.53); Pontilhada: sinal de controle antes da saturação.

Na Figura 2.7 a influência da função $r(\xi, x)$ no desempenho do sistema em malha fechada é investigada. Como mencionado anteriormente, pode ser de interesse reduzir o esforço

computacional através de uma escolha em forma fechada para a função \tilde{r} como uma função ξ . Neste sentido, uma escolha possível é³

$$\tilde{r}(\xi) = \sqrt{\xi} \quad (2.53)$$

Os requisitos sobre a função $r(\xi, x)$ são, com alguma conservatividade, satisfeitos com esta escolha e com $W(v(x, \xi))$ dado por (2.52). O resultado na Figura 2.7 mostra que a recuperação de ξ torna-se consideravelmente mais lenta, fazendo com que a convergência do estado seja mais lenta. Assim, a escolha de r torna-se um compromisso entre desempenho e complexidade de implementação.

A Figura 2.8 ilustra uma primeira comparação de desempenho do algoritmo proposto com o algoritmo proposto em (MEGRETSKI, 1996) (equações (2.18) e (2.19)). Pode-se observar que o algoritmo proposto produz uma convergência mais rápida do estado para a origem e um uso mais efetivo do esforço de controle disponível.

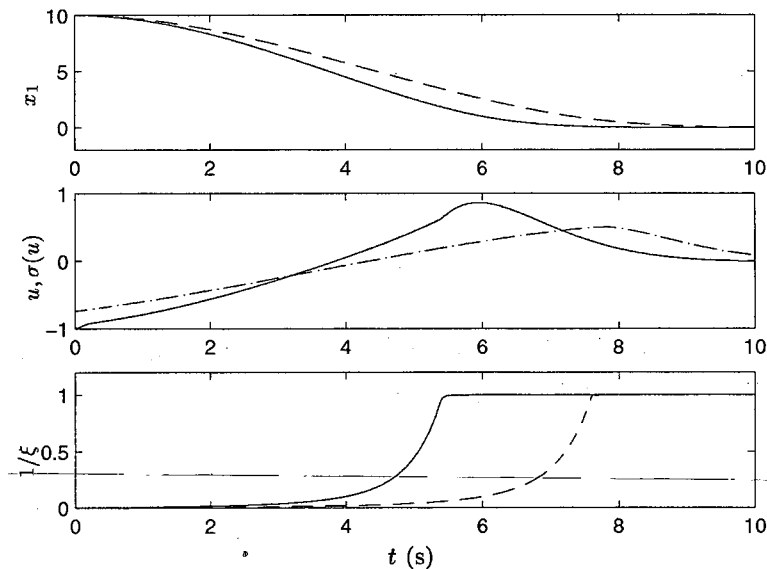


Figura 2.8: Comparação de desempenho para $x(0) = [10, 10]'$, $\rho = 1$. Sólida: algoritmo de escalonamento propostos; Tracejada: algoritmo de (MEGRETSKI, 1996) (equações (2.18) e (2.19)).

³Obtida com auxílio de computação algébrica.

2.6.2 Cadeia de 3 integradores

Como um exemplo ilustrativo da metodologia de escalonamento, esta será aplicada a um sistema constituído de uma cadeia de 3 integradores com perturbação externa dado por

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = \sigma(u) + w \quad (2.54)$$

O sinal de controle é limitado em magnitude por $M = 5$, isto é, $\sigma(u) = \text{sat}_5(u)$. A solução parametrizada da equação de Riccati tipo H_∞ é construída para $\gamma \geq 4$ e para a escolha $Q(\epsilon) = \frac{11}{10} \text{diag}\{25\epsilon, 4\epsilon^2, \epsilon\}$ onde $\epsilon \doteq 1/\xi$. Esta é dada em forma fechada por ⁴

$$P(\epsilon) = \frac{11}{10} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_4 & p_5 \\ p_3 & p_5 & p_6 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

onde

$$p_3 = 5\sqrt{\epsilon}, \quad p_6 = \sqrt[6]{1600\epsilon + 1100\epsilon^{\frac{8}{5}}}, \quad p_1 = p_3p_5 \\ p_5 = 0.5(p_6^2 - \epsilon), \quad p_2 = p_3p_6, \quad p_4 = -p_3 + p_5p_6$$

Neste exemplo, $r(\xi, x)$ é computada *on-line* como $r(\xi, x) = -x'N(\xi)x / x' \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi} x$, onde α é escolhido e diferentes valores para ρ são considerados. A função W é escolhida da mesma forma que no exemplo anterior (seção 2.6.1), também com $\kappa = 0.95\rho$. Em todas as simulações $k = 10$ e o algoritmo de escalonamento é implementado em tempo discreto com período de amostragem de $5ms$.

A Figura 2.9 mostra o desempenho do sistema em malha fechada em resposta a uma condição inicial pequena em x_1 . Para fins de comparação, as respostas para os casos sem saturação e com saturação, porém sem escalonamento ($\xi = 1, \forall t \geq 0$), são também apresentadas. Pode-se notar que o algoritmo de escalonamento fornece uma resposta intermediária, e o sinal de controle atinge a saturação.

⁴Esta solução é, na verdade, solução da inequação de Riccati tipo H_∞ , isto é, (2.37) com \leq em lugar de $=$, e foi obtida com auxílio de computação algébrica.

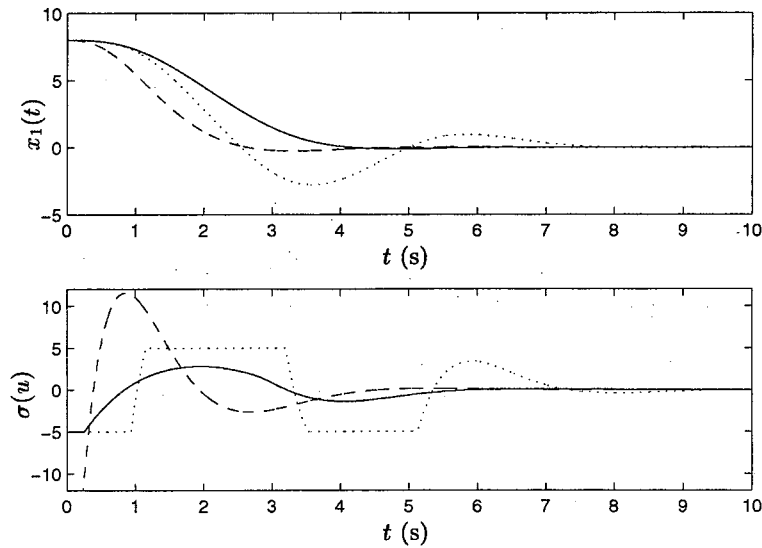


Figura 2.9: Resposta do sistema em malha fechada para $x(0) = [8, 0, 0]'$ e $\rho = 7.5$ (sólida); Resposta do sistema sem saturação $\xi = 0$ (tracejada); Resposta do sistema saturado sem escalonamento (pontilhada).

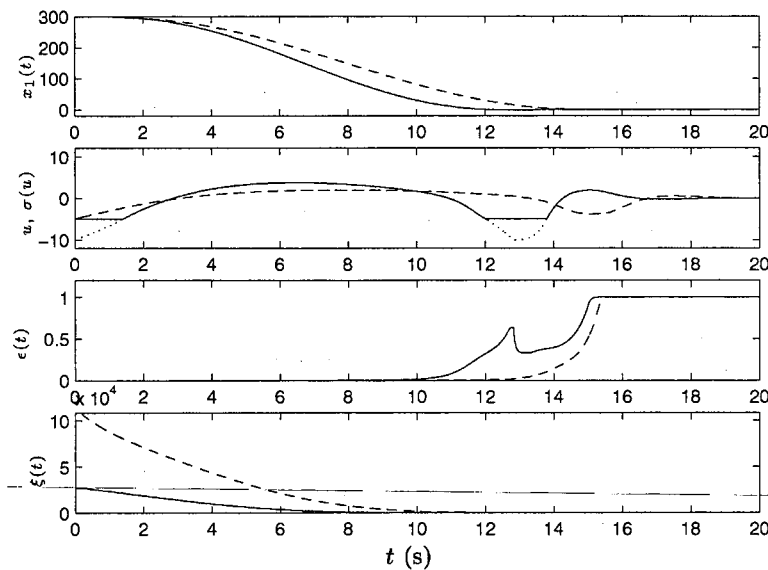


Figura 2.10: Resposta do sistema em malha fechada para $x(0) = [300, 0, 0]'$ e $\rho = 10$ (sólida); $\rho = 5$ (tracejada). Pontilhada: sinal de controle antes da saturação.

A Figura 2.10 mostra o comportamento do sistema em malha fechada para $x_1(0) = 300$, uma condição inicial grande em x_1 . O efeito do parâmetro ρ pode ser observado, neste caso. Para $\rho = 10$, o máximo nível de saturação é permitido, e a convergência do estado mostra-se mais rápida que no caso $\rho = 5$ (sem saturação). O comportamento do parâmetro

escalonado $\xi(t)$ também está mostrado na figura juntamente com $\epsilon(t)$ definido acima. A não-monotonicidade do parâmetro escalonado é verificada no caso $\rho = 10$, fato este associado ao sinal de controle ter atingido os limites permitidos duas vezes.

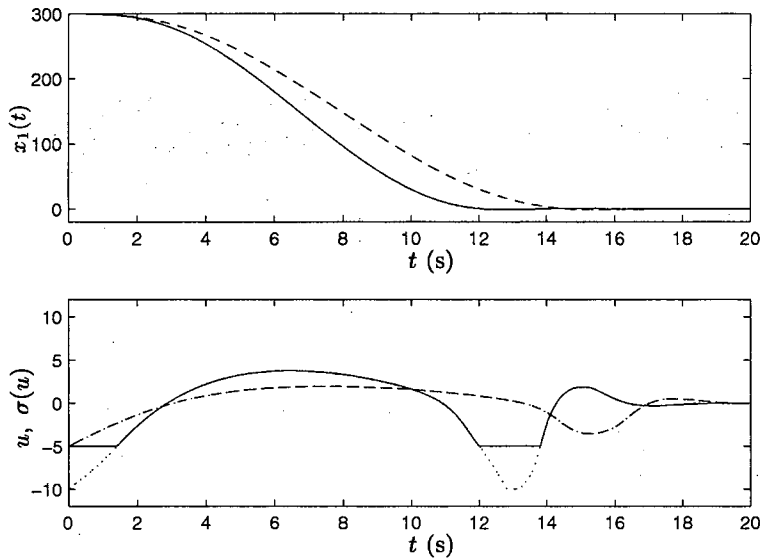


Figura 2.11: Comparação da resposta entre o algoritmo de escalonamento proposto (sólida) e o algoritmo proposto em (MEGRETSKI, 1996) (tracejada) para $x(0) = [300, 0, 0]^T$ e $\rho = 10$. Pontilhada: sinal de controle antes da saturação.

A Figura 2.11 compara o desempenho do algoritmo de escalonamento proposto com o algoritmo proposto em (MEGRETSKI, 1996) (equações (2.18) e (2.19)). Para esta comparação foi utilizado $M = 10$ na implementação de (2.18) de forma a permitir a ocorrência de saturação no algoritmo de (MEGRETSKI, 1996). A mesma condição inicial da Figura 2.10 foi utilizada. O algoritmo de escalonamento proposto produz uma convergência mais rápida do estado e permite que todo o esforço de controle disponível seja utilizado. Embora a saturação pudesse ocorrer no esquema de (MEGRETSKI, 1996), observa-se que esta de fato não ocorre, o que é uma consequência da conservatividade do algoritmo. A resposta assim obtida é similar a que se obtém com o algoritmo proposto para $\rho = 5$.

O comportamento do sistema em malha fechada sujeito a uma perturbação externa é ilustrado na Figura 2.12. Nesta simulação, a perturbação é escolhida como $w(t) = 25 \cos(2\pi/3t) \exp(-t/6)$, e a condição inicial é nula. Embora a perturbação seja convergente para zero, sua magnitude inicial é suficiente para levar o sistema saturado sem algoritmo de escalonamento ($\xi(t) = 1, \forall t \geq 0$) para a instabilidade. Pode-se observar que o algoritmo de escalonamento garante $x \in \mathcal{L}_2$ como desejado.

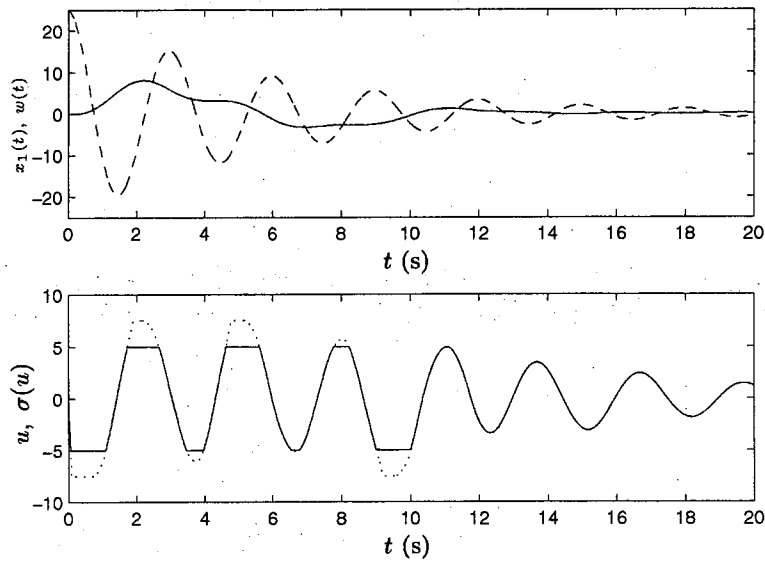


Figura 2.12: Resposta do sistema em malha fechada (sólida) com perturbação externa (traçada) para $x(0) = 0$ e $\rho = 7.5$. Pontilhada: sinal de controle antes da saturação.

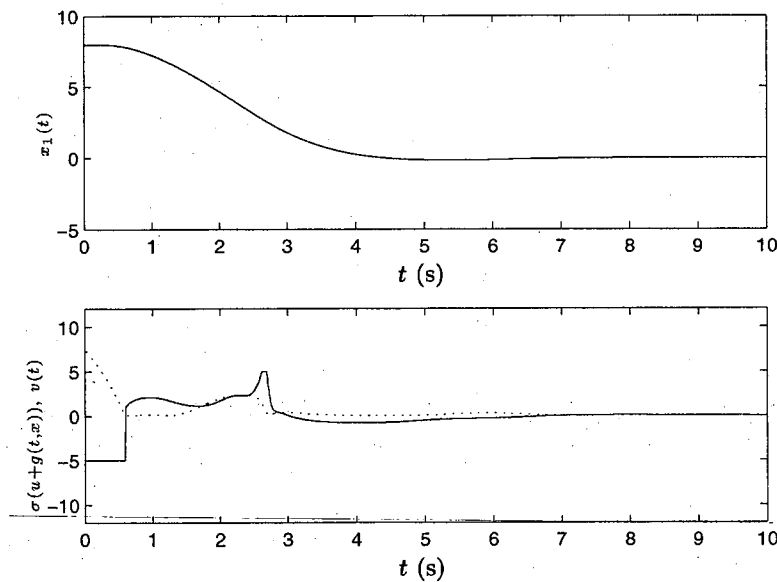


Figura 2.13: resposta do sistema em malha fechada com incertezas aditivas na entrada para $x(0) = [8, 0, 0]'$ e $\rho = 7.5$. Linha pontilhada: $v(t)$.

A Figura 2.13 mostra o desempenho do sistema em malha fechada quando sujeito a incertezas aditivas na entrada. O termo não-linear $g(t, x) = 2(x_3)^2 \sin(x_1)$ é adicionado na entrada do sistema o qual torna o sistema instável para a condição inicial $x(0) = [8, 0, 0]'$. A Figura 2.13 mostra a resposta do sistema com a adição do termo para dominação da

perturbação $g(t, x)$ dado por

$$q(x, \xi) = \frac{20(x_3)^4}{(1 - \alpha)x'Q(\xi)x}$$

O resultado mostra que a estabilidade do sistema em malha fechada é obtida e o desempenho do sistema é similar ao caso sem perturbação (compare com a Figura 2.9).

2.7 Prova do Teorema 2.4.2

O seguinte lema técnico será necessário.

Lema 2.7.1 *Seja $0 < \rho \leq 2M$ e $\beta \in [0, \min\{1, (2M - \rho)/\rho\}]$. Seja $p \in [1, \infty]$ e seja $\sigma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função globalmente Lipschitz, descentralizada e que satisfaz $u'\sigma(u) \geq u'\text{sat}_M(u)$ para todo u tal que⁵ $|u|_p \leq 2M$. Então,*

$$|u|_p \leq \rho \Rightarrow u'u - 2u'\sigma(u) \leq -\beta u'u \quad (2.56)$$

Prova: Primeiramente note que o lado direito da implicação (2.56) é equivalente a

$$2u'\sigma(u) \geq (1 + \beta)u'u \quad (2.57)$$

Basta provar que

$$2u'\text{sat}_M(u) \geq (1 + \beta)u'u, \quad \forall |u|_p \leq \rho \leq 2M \quad (2.58)$$

de onde o resultado do lema segue, pois, por hipótese, $u'\sigma(u) \geq u'\text{sat}_M(u)$ para todo u tal que $|u|_p \leq 2M$.

A desigualdade (2.58) claramente se verifica para $0 < \rho \leq M$, pois, neste caso, $\text{sat}_M(u) = u$. Para o caso $M < \rho \leq 2M$, note que $|u|_p \leq \rho$ implica $|u_i|_p \leq \rho$ para $i = 1, \dots, m$. Por sua vez, $|u_i|_p \leq \rho$ implica

$$2u_i\text{sat}_M(u_i) \geq \frac{2M}{\rho}u_i^2$$

Conseqüentemente,

$$2u'\text{sat}_M(u) \geq \frac{2M}{\rho}u'u$$

de onde segue o resultado do lema, pois $(1 + \beta) \leq 2M/\rho$. ◻

⁵ $|\cdot|_p$ é a norma- p usual para vetores.

Existência de solução: A dinâmica do sistema em malha fechada (2.35), (2.40), (2.28), (2.29) é composta pelo sistema n -dimensional (2.35), (2.40) e por uma das duas dinâmicas possíveis para $\xi(t)$, (2.28) ou (2.29).

Dado um estado inicial $x_o \in \mathbb{R}^n$ e $\xi_o \in G(x_o)$, por uma solução de (2.35), (2.40), (2.28), (2.29) entende-se uma função $x(t)$ definida em um certo intervalo de tempo $[t_o, t_1]$, contínua e absolutamente contínua no intervalo $[t_o, t_1]$, que satisfaz, conjuntamente com uma função $\xi(t)$, absolutamente contínua por partes, $x(t_o) = x_o$, $\xi(t_o) = \xi_o$, e (2.35), (2.40), (2.28), (2.29) para quase todo instante de tempo $t \in [t_o, t_1]$.

No que segue, mostra-se que soluções para o sistema (2.35), (2.40), (2.28), (2.29) existem para todo estado inicial $x(t_o) \in \mathbb{R}^n$ e são definidas para todo $t \in [t_o, \infty)$. Para ver isto, considere os seguintes sistemas:

$$\Sigma_a : \begin{cases} \dot{x}_a = Ax_a + B_1 \sigma(-B_1' P(\xi_a) x_a) + B_2 w(t) \\ \dot{\xi}_a = -\text{sat}(k(\xi_a - 1)) r(\xi_a, x_a) W(v(x_a, \xi_a)) \end{cases} \quad (2.59)$$

$$\Sigma_b : \begin{cases} \dot{x}_b = Ax_b + B_1 \sigma(-B_1' P(\xi_b) x_b) + B_2 w(t) \\ \xi_b(t) = \min_{\zeta \in [\xi_b(t-), \infty)} \zeta, \\ v(x_b(t), \zeta) \leq \rho \end{cases} \quad (2.60)$$

Os sistemas Σ_a e Σ_b descrevem as dinâmicas possíveis para os sistema em malha-fechada (2.35), (2.40), (2.28), (2.29). As soluções de (2.35), (2.40), (2.28), (2.29) são construídas como justaposições (no tempo) de soluções de Σ_a e Σ_b , definidas em certos intervalos de tempo. Antes de fazer esta composição, os sistemas Σ_a e Σ_b são analisados separadamente.

Claramente Σ_a possui uma solução única para todo $(x(t_o), \xi(t_o)) \in \mathbb{R}^n \times [1, \infty)$, a qual é definida para todo $t \in [t_o, \infty)$ e é uma função absolutamente contínua.

Para a análise do sistema Σ_b , note primeiramente que o problema de minimização impõe que a função $\xi_b(t)$ seja não-decrescente ao longo do tempo. Assim, $\xi_b(t)$ é contínua para quase todo instante t no intervalo em que a solução de Σ_b esteja definida. Além disso, descontinuidades em $\xi_b(t)$ podem ocorrer apenas nos instantes de tempo em que a restrição está ativa, isto é, no conjunto $\mathcal{O} := \{t : v(x_b(t), \xi_b(t)) = \rho\}$.

Considere o problema de otimização auxiliar

$$f(x) := \min_{v(x, \zeta)^2 = \rho^2} \zeta \quad (2.61)$$

Como $v(x, \zeta)$ é C^1 , $f(x)$ também será C^1 em uma vizinhança de qualquer ponto no qual $\frac{\partial v}{\partial \xi}(x, f(x)) \neq 0$. Deste fato segue que para quaisquer $x_b(t_o) \in \mathbb{R}^n$ e $\xi_b(t_o) \in G(x_b(t_o))$ tais que

$$(\partial v / \partial \xi)(x_b(t_o), \xi_b(t_o)) < 0,$$

o sistema Σ_b possui uma única solução definida para algum intervalo de tempo $[t_o, t_1)$ com a propriedade de que, para todo $t \in [t_o, t_1)$, $\xi_b(t)$ é contínua e

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}(x_b(t), \xi_b(t)) < 0 \quad (2.62)$$

Claramente, a solução pode ser continuada ao longo do tempo enquanto (2.62) for satisfeita. Como $\xi_b(t)$ deve ser não-decrescente, a violação da condição (2.62) pode causar uma descontinuidade em $\xi(t)$. Se $\xi(\cdot)$ é descontínua em $t = t_1$, necessariamente

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}(x_b(t_1), \xi_b(t_1^-)) \geq 0 \quad (2.63)$$

e $\xi_b(t_1)$ obtido de Σ_b satisfará (2.62) em $t = t_1$. Assim, uma única solução existirá para o sistema Σ_b em um intervalo $[t_1, t_2)$ iniciando em $x_b(t_1)$ e $\xi_b(t_1)$. Claramente, para qualquer $x_b \in \mathbb{R}^n$ existe um ξ_b satisfazendo (2.62). Além disso, como $P(\xi)$ é continuamente diferenciável e $w \in \mathcal{L}_{\infty e}$, apenas um número finito de descontinuidades pode ocorrer em qualquer intervalo de tempo finito. Este fato permite estender as soluções de Σ_b para todo $t \in [t_o, \infty)$.

A construção de trajetórias do sistema (2.35), (2.40), (2.28), (2.29) a partir de pedaços de trajetórias dos sistemas Σ_a e Σ_b é feita da seguinte forma: seja $(x(t_o), \xi(t_o)) \in \mathbb{R}^n \times [1, \infty)$ e assumamos, sem perda de generalidade, que $v(x(t_o), \xi(t_o)) < \rho$. Faça $(x_a(t_o), \xi_a(t_o)) = (x(t_o), \xi(t_o))$. Então, $(x(t), \xi(t)) = (x_a(t), \xi_a(t))$ conquanto $v(x_a(t), \xi_a(t)) < \rho$. Seja $t_1 > t_o$ o primeiro instante de tempo em que $v(x_a(t), \xi_a(t)) = \rho$. Assumamos que $t_1 < \infty$, caso contrário as trajetórias de (2.35), (2.40), (2.28), (2.29) e Σ_a seriam idênticas para todo t . Faça $x_b(t_1) = x_a(t_1)$ e $\xi_b(t_1^-) = \xi_a(t_1) = \xi(t_1^-)$. Agora, $(x(t), \xi(t)) = (x_b(t), \xi_b(t))$ conquanto $v(x_b(t), \xi_b(t)) = \rho$. Seja $t_2 \geq t_1$ o último instante de tempo em que esta condição é satisfeita pelo sistema Σ_b . Então, $\exists \delta_1 > 0$ tal que $v(x_b(t), \xi_b(t)) < \rho$ e $\dot{\xi}_b(t) = 0$ para todo $t \in (t_2, t_2 + \delta_1)$. Faça $(x_a(t_2), \xi_a(t_2)) = (x_b(t_2), \xi_b(t_2))$. Como $W(\cdot)$ é (Lipschitz) contínua e $W(v(x, \xi)) = 0$ sempre que $v(x, \xi) \geq \kappa$, segue que para algum $\delta_2 > 0$, $(x_a(t), \xi_a(t)) = (x_b(t), \xi_b(t))$ em $(t_2, t_2 + \delta_2)$ e logo $v(x_a(t), \xi_a(t)) < \rho$ em $(t_2, t_2 + \delta_2)$. Assim, $(x(t), \xi(t)) = (x_a(t), \xi_a(t))$ para todo $t > t_2$ tal que $v(x_a(t), \xi_a(t)) < \rho$. Tal propriedade será válida ao menos em um

intervalo aberto de tempo de forma que chaveamentos de alta frequência (modos deslizantes) entre (2.28) e (2.29) não são possíveis.

Pela repetição do mesmo raciocínio, as soluções do sistema em malha fechada podem ser estendidas para todo $t \in [t_0, \infty)$. Da análise também segue que $x(t)$ é contínua e absolutamente contínua por partes.

Estabilidade exponencial local: Seja $\delta > 0$, $c \doteq \frac{\kappa}{2|B|}$, $\xi(0) \in \mathcal{C} \doteq [1, 1 + \delta]$, e defina

$$H(x, \xi) \doteq \text{Tr}(P(\xi)) x' P(\xi) x \quad (2.64)$$

$$\Gamma \doteq \{x : H(x, \xi) \leq c^2, \forall \xi \in \mathcal{C}\} \quad (2.65)$$

A função $H(x, \xi)$ é positiva definida e Γ é um conjunto compacto. Ainda, para todo $\xi \in \mathcal{C}$, vale que

$$x \in \Gamma \Rightarrow \text{Tr}(P(\xi)) x' P(\xi) x \leq c^2 \Rightarrow |P(\xi)x|^2 \leq c^2 \Rightarrow |B_1' P(\xi)x| \leq \frac{\kappa}{2} \quad (2.66)$$

Assim, $x \in \Gamma$ implica que, para todo $t \geq t_0$,

$$\dot{\xi} = -\text{sat}(k(\xi - 1)) r(x, \xi) \quad (2.67)$$

Usando (2.66), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} &= \text{Tr}(P(\xi)) x' (A' P(\xi) + P(\xi) A) x + 2 \text{Tr}(P(\xi)) x' P(\xi) B_1 \sigma(-B_1' P(\xi) x) \\ &= \text{Tr}(P(\xi)) x' (A' P(\xi) + P(\xi) A) x - 2 \text{Tr}(P(\xi)) x' P(\xi) B_1 B_1' P(\xi) x \\ &\leq -\text{Tr}(P(\xi)) [(1 - \alpha) x' Q(\xi) x + x' M(\xi) x] \end{aligned} \quad (2.68)$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \xi} \dot{\xi} &= -x' \left[\frac{\partial \text{Tr}(P(\xi)) P(\xi)}{\partial \xi} \text{sat}(k(\xi - 1)) r(\xi, x) \right] x \\ &= - \left[\text{Tr}(P(\xi)) x' \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi} x + \frac{\partial \text{Tr}(P(\xi))}{\partial \xi} x' P(\xi) x \right] \text{sat}(k(\xi - 1)) r(\xi, x) \end{aligned} \quad (2.69)$$

Sem perda de generalidade, assumamos que δ é escolhida de forma que ⁶ para todo $\xi \in \mathcal{C}$

$$- \frac{\partial \text{Tr}(P(\xi))}{\partial \xi} x' P(\xi) x \text{sat}(k(\xi - 1)) r(\xi, x) \leq \frac{(1 - \alpha)}{2} \text{Tr}(P(\xi)) x' Q(\xi) x, \quad \forall x \in \Gamma \quad (2.70)$$

⁶ A existência de tal $\delta > 0$ segue da regularidade de $P(\xi)$ e $Q(\xi)$.

Levando 2.70 e 2.27 em 2.69 resulta

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} \dot{\xi} \leq \text{Tr}(P(\xi)) \left[\frac{(1-\alpha)}{2} x' Q(\xi) x + x' M(\xi) x \right] \quad (2.71)$$

uma vez que $|\text{sat}(k(\xi - 1))| \leq 1$. Logo, de (2.68) e (2.71), obtém-se

$$\dot{H} \leq -\frac{(1-\alpha)}{2} \text{Tr}(P(\xi)) x' Q(\xi) x \quad (2.72)$$

o que implica que \dot{H} é negativa definida em Γ . A estabilidade exponencial do equilíbrio $x = 0$ segue do fato de que H e \dot{H} são uniformemente quadráticas em Γ . Mais especificamente, como $\xi \in \mathcal{C}$ todo o tempo, existem escalares positivos α_i , $i = 1, 2, 3$ tais que

$$\alpha_1 |x|^2 \leq H(x, \xi) \leq \alpha_2 |x|^2 \quad (2.73)$$

$$\dot{H}(x, \xi) \leq -\alpha_3 |x|^2 \quad (2.74)$$

Por fim, segue de (2.67) que $\xi(t) \rightarrow 1$ exponencialmente.

Estabilidade \mathcal{L}_2 e estabilidade assintótica global: Defina o conjunto

$$\Omega_\xi(\rho) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : v(x, \xi) = |B_1' P(\xi) x| \leq \rho\} \quad (2.75)$$

Como o algoritmo de escalonamento de ganho garante $v(t) \leq \rho$, $\forall t \geq 0$, resulta que

$$x(t) \in \Omega_\xi(\rho), \quad \forall t \geq 0$$

Assim, apenas trajetórias contidas em $\Omega_\xi(\rho)$ precisam ser consideradas. Para provar que tais trajetórias possuem as propriedades estabelecidas no teorema, considere a função positiva definida

$$V(x, \xi) \doteq x' P(\xi) x \quad (2.76)$$

Como $\xi(t)$ e $x(t)$ são diferenciáveis em quase todo ponto $t \geq t_0$, o mesmo vale para $V(x(t), \xi(t))$. Então, para quase todo ponto $t \geq t_0$, $V(x, \xi)$ pode ser diferenciada ao longo das trajetórias contidas em $\Omega_\xi(\rho)$ obtendo-se

$$\dot{V} = \dot{x}' P(\xi) x + x P(\xi) \dot{x} + x' \dot{P}(\xi) x \quad (2.77)$$

Note inicialmente que

$$\begin{aligned}
 \dot{x}'P(\xi)x + x'P(\xi)\dot{x} &= x'(A'P(\xi) + P(\xi)A)x - 2x'P(\xi)B_1\sigma(B_1'P(\xi)x) + 2x'P(\xi)B_2w \\
 &= -x'Q(\xi)x + x'P(\xi)B_1B_1'P(\xi)x - 2x'P(\xi)B_1\sigma(B_1'P(\xi)x) \\
 &\quad - \frac{1}{\gamma^2}x'P(\xi)B_2B_2'P(\xi)x + 2x'P(\xi)B_2w \\
 &\leq -(1-\alpha)x'Q(\xi)x - x'M(\xi)x + \gamma^2w'w
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

onde, no último passo, foi empregado o Lema 2.7.1 e a desigualdade de Young

$$2x'P(\xi)B_2w \leq \frac{1}{\gamma^2}|B_2'P(\xi)x|^2 + \gamma^2|w|^2$$

Por outro lado, para quase todo ponto $t \geq 0$, $\xi(t)$ satisfaz

$$\dot{\xi}(t) \geq -\text{sat}(k(\xi(t) - 1))r(\xi(t), x(t))W(v(x(t), \xi(t))) \tag{2.79}$$

Usando (2.79), (2.27) e (2.23), resulta que

$$\begin{aligned}
 x'\dot{P}(\xi)x &= x'\frac{\partial P}{\partial \xi}x\dot{\xi} \\
 &\leq -x'\frac{\partial P}{\partial \xi}x\text{sat}(k(\xi - 1))r(\xi, x)W(v(x, \xi)) \\
 &\leq x'M(\xi)x\text{sat}(k(\xi - 1))W(v(x, \xi))
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Juntando (2.78) com (2.80) resulta que

$$\dot{V} \leq -(1-\alpha)x'Q(\xi)x + \gamma^2w'w \tag{2.81}$$

Como $\xi(t)$ é absolutamente contínua por partes e $V(x, \xi)$ é C^1 , segue que $V(x(t), \xi(t))$ é absolutamente contínua por partes. Logo, \dot{V} pode ser integrada em qualquer intervalo finito de tempo. Ainda, $V(x(t), \xi(t))$ decresce em cada ponto de descontinuidade de $\xi(\cdot)$, pois $x(\cdot)$ é contínua, $\partial P(\xi)/\partial \xi < 0$ e $\xi(\cdot)$ cresce nestes pontos. Por conseqüência, levando-se em conta que apenas um número finito de descontinuidades existem em cada intervalo finito de tempo, pode-se afirmar que

$$V(t) - V(0) \leq \int_0^t \dot{V}(\tau) d\tau \tag{2.82}$$

Logo, (2.82) e (2.81) fornecem

$$\begin{aligned} V(t) - V(0) &\leq \int_0^t \dot{V}(\tau) d\tau \\ &\leq \gamma^2 \int_0^t w(\tau)' w(\tau) d\tau \\ &\leq \gamma^2 \|w\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.83)$$

mostrando que $V(t)$ é limitada sempre que $w \in \mathcal{L}_2$. Portanto, em particular, $P(\xi)^{1/2}x$ é limitado. Isto, por sua vez, implica que $\xi(t)$ é limitado, isto é, $\exists \tilde{\xi}$ tal que $\xi(t) \in [1, \tilde{\xi}]$, $\forall t \geq t_0$. Pois, caso contrário, $v(t) = |B_1' P^{1/2}(\xi(t)) [P^{1/2}(\xi(t))x(t)]| \rightarrow 0$ à medida que $t \rightarrow \infty$ e existiria $T \geq t_0$ tal que $v(t) \leq \rho/2$, $\forall t \geq T$, levando a uma contradição.

A trajetória de estado $x(t)$ é limitada, como conseqüência de $\xi(t)$ e $V(x(t), \xi(t))$ serem limitados. Integrando \dot{V} novamente, chega-se à seguinte desigualdade de dissipação,

$$\begin{aligned} V(t) - V(t_0) &\leq \int_{t_0}^t \dot{V}(\tau) d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t (\gamma^2 |w(\tau)|^2 - x'Q(\xi)x) d\tau \end{aligned} \quad (2.84)$$

de onde segue que $x \in \mathcal{L}_2$ sempre que $w \in \mathcal{L}_2$. Segue também que $u \in \mathcal{L}_2$, pois $P(\xi)$ é limitada. Claramente, $\tilde{\xi}$ depende de $\|w\|_2$ e $|x(t_0)|$, o que impede a obtenção de ganho \mathcal{L}_2 finito.

Utilizando a desigualdade de Young, pode-se obter a seguinte limitação em norma

$$|\dot{x}(t)| \leq k_1 + |x(t)|^2 + |w(t)|^2 \quad (2.85)$$

onde $k_1 \geq 0$ é uma constante. Como x e w são sinais \mathcal{L}_2 , o lado direito de (2.85) é uniformemente, localmentê integrável (TEEL, 1998), (JONES, 1993, pg. 141). Por conseguinte, a desigualdade (2.85) juntamente com a continuidade absoluta de $x(\cdot)$ implicam que $x(\cdot)$ é uniformemente contínua (TEEL, 1998) em $[t_0, \infty)$. Logo $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ e, conseqüentemente, $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 1$.

Finalmente, fazendo $w = 0$ em (2.81) conclui-se que a origem é globalmente assintoticamente estável.

2.8 Prova do Teorema 2.5.6

Primeiramente, note que a introdução da incerteza aditiva $g(t, x)$ não modifica os argumentos de existência e unicidade de solução apresentados na prova do Teorema 2.4.2. Ainda, todas as soluções do sistema em malha-fechada (2.45), (2.40), (2.28), (2.29) estão contidas no conjunto $\Omega_\xi(\rho)$ (eq. (2.75)).

Considere novamente a função (2.76) e tome sua derivada (para quase todo ponto $t \geq t_0$) ao longo das trajetórias de (2.45), (2.40), (2.28), (2.29) para obter

$$\dot{V} = \dot{x}'P(\xi)x + xP(\xi)\dot{x} + x'\dot{P}(\xi)x \quad (2.86)$$

Para o primeiro termo de (2.86) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}'P(\xi)x + x'P(\xi)\dot{x} &= x'(A'P(\xi) + P(\xi)A)x - 2x'P(\xi)B_1\sigma((1+q(x,\xi))B_1'P(\xi)x - g(t,x)) \\ &\quad + 2x'P(\xi)B_2w \\ &= -x'Q(\xi)x + x'P(\xi)B_1B_1'P(\xi)x \\ &\quad - 2x'P(\xi)B_1\sigma((1+q(x,\xi))B_1'P(\xi)x - g(t,x)) \\ &\quad - \frac{1}{\gamma^2}x'P(\xi)B_2B_2'P(\xi)x + 2x'P(\xi)B_2w \\ &= -(1-\alpha)x'Q(\xi)x - x'M(\xi)x + \gamma^2w'w \\ &\quad + (1+\beta)x'P(\xi)B_1B_1'P(\xi)x - 2x'P(\xi)B_1\sigma(B_1'P(\xi)x) \\ &\quad + 2x'P(\xi)B_1[\sigma(B_1'P(\xi)x) - \sigma((1+q(x,\xi))B_1'P(\xi)x - g(t,x))] \\ &\leq -(1-\alpha)x'Q(\xi)x - x'M(\xi)x + \gamma^2w'w \\ &\quad + 4\frac{|g(t,x)|^2}{q(x,\xi)} \\ &\leq -\frac{(1-\alpha)}{5}x'Q(\xi)x - x'M(\xi)x + \gamma^2w'w \end{aligned} \quad (2.87)$$

onde foi utilizado (2.48), Lema 2.7.1 e o seguinte fato (LIN, 1998a)

$$x'P(\xi)B_1[\sigma(B_1'P(\xi)x) - \sigma((1+q(x,\xi))B_1'P(\xi)x - g(t,x))] \leq 2\frac{|g(t,x)|^2}{q(x,\xi)} \quad (2.88)$$

Nota 2.8.1 Para ver que o fato acima é verdadeiro, note que para qualquer $s > 0$, $u \in \mathbb{R}^m$

e $\eta \in \mathbb{R}^m$, vale que

$$s|u| \geq |\eta| \Rightarrow u' [\sigma(u) - \sigma((1+s)u + \eta)] \leq 0$$

Por outro lado, se $s|u| \leq |\eta|$ então

$$\begin{aligned} u' [\sigma(u) - \sigma((1+s)u + \eta)] &\leq |u| |su + \eta| \\ &\leq \frac{|\eta|}{s} (s|u| + |\eta|) \\ &\leq 2 \frac{|\eta|^2}{s} \end{aligned}$$

★

Seguindo procedimento análogo à prova do Teorema 2.4.2, conclui-se que, para quase todo ponto $t \geq 0$,

$$\dot{\xi}(t) \geq -\text{sat}(k(\xi(t) - 1)) r(\xi(t), x(t)) W(v(x(t), \xi(t))) \quad (2.89)$$

Logo,

$$x' \dot{P}(\xi)x \leq x' M(\xi)x \text{ sat}(k(\xi - 1)) \quad (2.90)$$

implicando, conjuntamente com (2.87), que

$$\dot{V} \leq -\frac{(1-\alpha)}{5} x' Q(\xi)x + \gamma^2 w' w \quad (2.91)$$

A partir de (2.89) e (2.91), todos os resultados seguem conforme a prova do Teorema 2.4.2.

2.9 Comentários Conclusivos

Neste capítulo foi abordada a questão da estabilização global de sistemas lineares com saturação nos atuadores. Através da equação algébrica de Riccati (ou do tipo H_∞) foi construída a lei de controle parametrizada $-B'P(\xi)x$. A estratégia utilizada para obter estabilidade global a partir desta lei de controle foi escalonar o parâmetro ξ de acordo com a evolução do estado do sistema. A monotonicidade de $P(\xi)$ permitiu utilizar este artifício para “ajustar o ganho” da lei de controle e assim a magnitude do sinal de controle.

Um algoritmo de escalonamento desta lei de controle foi proposto o qual se baseia direta-

mente na magnitude de $B'P(\xi)x$, isto é, na condição $|B'P(\xi)x| \leq \rho$. Isto em contraste com as estratégias adotadas em (TEEL, 1995a, MEGRETSKI, 1996, LIN, 1998a) que se baseiam em conjuntos elipsoidais contidos em $\{x : |B'P(\xi)x| \leq \rho\}$, e, portanto, são mais conservativas.

A redução de conservatividade é verificada em dois exemplos de simulação, obtendo-se uma convergência mais rápida do estado para a origem. Diversas propriedades do algoritmo proposto foram também ilustradas com os resultados de simulação, especialmente a influência dos parâmetros ρ , que determina o nível de saturação admissível, e r , que determina a taxa de recuperação do parâmetro escalonado.

O algoritmo proposto também garante propriedades de robustez e atenuação de perturbações as quais são similares às obtidas com os demais algoritmos de escalonamento, mostrando que o ganho em desempenho não implica em perdas significativas de robustez. Por outro lado, o algoritmo proposto pode introduzir descontinuidades no sinal de controle, o que pode ser visto como uma desvantagem, embora as descontinuidades sejam isoladas e, logo, chaveamentos de alta frequência sejam descartados.

Capítulo 3

Seguimento sob Restrições: Uma Abordagem por *Anti-windup*

3.1 Introdução

O problema, assim denominado *windup*, é um efeito não-linear muito conhecido dentro da comunidade científica e profissional de controle e estudado desde longa data (LOZIER, 1956, FERTIK, ROSS, 1967). A essência deste problema está no efeito da saturação sobre o desempenho de um sistema de controle linear, especialmente no caso em que o controlador possui ação integral.

Como a atuação sobre o sistema é limitada pela saturação, a saída do sistema leva mais tempo para atingir o valor da referência. Durante todo este tempo, o controlador tenta aumentar a magnitude do controle através da ação integral; contudo, esta atuação é cortada (limitada) pela saturação, e o processo evolui como que em malha aberta com atuação máxima em sua entrada. Devido a este fato, quando a saída do processo atinge o valor desejado, a ação integral estará com valor muito maior do que o valor de equilíbrio. Como consequência, a saída do sistema é forçada a experimentar uma sobre-elevação para “descarregar” a ação integral. Este efeito é denominado de *sobrecarga da ação integral* (LOZIER, 1956, ÅSTRÖM, RUNDQWIST, 1989).

Em (DOYLE et al., 1987) são estudados 4 casos, incluindo sistemas multivariáveis, ilustrativos do efeito do *windup*. Um dos casos também ilustra o fato de que o controlador não precisa conter ação integral para que se verifique o *windup*.

De forma mais geral, no contexto deste trabalho, entende-se como *windup* todo efeito

adverso de estabilidade e desempenho que aparece em um malha de controle no momento em que o sinal de controle é saturado. O problema do *anti-windup* consiste então em propor modificações na malha de controle com o objetivo de reduzir o efeito do *windup*.

Desta forma, a estratégia do *anti-windup* caracteriza-se por um projeto em duas etapas:

1. O projeto do controlador, denominado *controlador nominal*, é feito desconsiderando-se a existência de saturação.
2. Um controle adicional, denominado *compensador anti-windup*, é introduzido na malha para compensar o *windup*.

Em contraste com o projeto direto de um controle para o sistema com saturação, a estratégia anti-windup permite a separação do projeto nas duas etapas mencionadas. No projeto do compensador nominal objetiva-se atender requisitos de desempenho, e, nesta etapa, as restrições são negligenciadas. Na segunda etapa, objetiva-se garantir estabilidade na presença da saturação, sem maior preocupação com aspectos de desempenho. Não obstante, procura-se preservar, quando possível, o desempenho induzido pelo controlador nominal. Uma vantagem desta metodologia vem do fato de que em muitas aplicações industriais há interesse em manter controladores já projetados em malhas de controle, porém introduzindo modificações adicionais para garantir estabilidade na presença de perturbações e sinais de referência que forcem os limites dos atuadores.

Historicamente, o *anti-windup* tem sido utilizado no seguimento assintótico de referências, especialmente referências constantes, em sistemas lineares envolvendo saturação no controle. Contudo, o foco de atenção sempre recaiu sobre a sobrecarga da ação integral. Nas palavras de K.S. Walgama (WALGAMA, STERNBY, 1990)

“Esta falta de consistência dos estados do controlador que pode degradar o desempenho do controle é definida como o problema geral do *windup*. A tarefa do controlador *anti-windup* é garantir esta consistência.”

Neste capítulo, focaliza-se o problema de seguimento sob restrições e utiliza-se o *anti-windup* como abordagem para propor uma solução para este problema. São consideradas restrições tanto em magnitude como em taxa de variação no sinal de controle.

Os resultados do capítulo 2, embora referentes ao problema de estabilização sob restrições, são diretamente utilizados na solução do problema de seguimento proposta neste capítulo no caso particular em que apenas restrições de magnitude são consideradas.

Este capítulo é organizado da seguinte forma. Primeiramente, na seção 3.2, são apresentados o problema de seguimento sob restrições e as principais abordagens existentes na literatura para este problema. Na seção 3.3 é feita uma revisão técnica-histórica do *anti-windup* e apresentado o *anti-windup* \mathcal{L}_2 . Com base nisto, na seção 3.4 é proposta uma estratégia de controle para seguimento de referência sob restrições. Uma aplicação desta estratégia de controle é desenvolvida na seção 3.5 ilustrando suas propriedades de desempenho. Por fim, são apresentadas as conclusões do capítulo e as provas dos principais resultados.

3.2 Seguimento de Referência com Restrições no Controle

Neste trabalho focaliza-se o problema de seguimento de referência com restrições no controle. São consideradas duas classes principais de sinais de referência.

Definição 3.2.1 *Seja \mathcal{R}_{sp} a classe de funções constantes $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$.* ◁

Definição 3.2.2 *Seja \mathcal{R}_{asp} a classe de funções $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ assintoticamente convergentes, isto é, que são continuamente diferenciáveis e satisfazem $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \bar{r}$, onde $\bar{r} \in \mathbb{R}^p$ é alguma constante.* ◁

A presença de restrições no controle introduz complicações ainda mais severas quando o problema em questão é o seguimento de referência (comparativamente ao problema de estabilização). O efeito mais óbvio é o sobre o desempenho, uma vez que a presença de restrições no controle impossibilita o seguimento de referências arbitrárias. Por conseqüência, torna-se necessário redefinir o critério de desempenho para o sistema em malha fechada, ou seja, decidir a política a ser adotada caso o sistema seja alimentado por sinais de referência “grandes”.

Por outro lado, a presença de sinais externos pode facilmente levar o sistema para além do domínio de controlabilidade para zero e, daí, à instabilidade. Este efeito é mais grave que o primeiro, pois exige que precauções sejam tomadas de antemão para garantir a estabilidade (limitação das trajetórias) do sistema em malha fechada.

Diversas técnicas têm sido estudadas na literatura para abordar este problema. Estas podem ser classificadas quanto aos objetivos de desempenho em duas categorias:

1. **Desempenho garantido.** Neste caso busca-se garantir o desempenho de seguimento para o sistema em malha fechada. O objetivo então é identificar a classe de sinais de

referência admissíveis, isto é, os sinais de referência que o sistema é capaz de seguir com o desempenho exigido (GRAETTINGER, KROGH, 1992).

2. **Desempenho maleável.** Neste caso busca-se flexibilizar o critério de desempenho para o sistema em malha fechada de forma a tolerar certos efeitos das restrições no controle. A estratégia de flexibilização, notadamente dependente da aplicação pretendida, torna-se então determinante para o projeto e o desempenho geral do sistema em malha fechada. Tipicamente, erros de seguimento maiores são tolerados durante transitórios.

No que segue, é feita uma apresentação sucinta das técnicas do seguimento ótimo com restrições (*constrained optimal tracking*), o controle por horizonte deslizante (*receding horizon control* - RHC), o condicionador de referência (*reference governor* - RG) e o *anti-windup* (AW). Para facilitar a exposição, esta seção se concentrará apenas em sistemas lineares discretos com restrições no controle.

3.2.1 Seguimento ótimo com restrições

Considere o sistema linear discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + B\Delta u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $\Delta u \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^p$. Como o interesse é no seguimento assintótico de *set-point* ou, mais genericamente, sinais de referência que convergem para um valor constante, assume-se que já foram incluídos, em (3.1), m integradores em sua entrada, isto é, assume-se que (3.1) possui a seguinte estrutura.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u(t+1) \\ x_p(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ B_p & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x_p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_m \\ B_p \end{bmatrix} \Delta u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} D_p & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x_p(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde x_p representa o estado do processo original com realização (A_p, B_p, C_p, D_p) . Assim, $\Delta u(t)$ fica definido pela relação $\Delta u(t) \doteq u(t+1) - u(t)$.

Considere que o controle u está sujeito a restrições de magnitude e taxa de variação, as

quais são representadas por restrições na entrada $\Delta u(t)$ e no estado $u(t)$,

$$\|u(t)\|_{\infty} \leq M, \quad \|\Delta u(t)\|_{\infty} \leq R \quad (3.3)$$

Um certo sinal de referência $r(t)$ é dado e deseja-se projetar um controle Δu de forma que a saída $y(t)$ siga esta entrada de referência de acordo com um certo critério de desempenho, respeitadas as restrições no controle. Um dos critérios mais comuns é o critério quadrático, ponderando o erro de seguimento, $e = r - y$, e o controle Δu na forma

$$J_N(x_o, r, \Delta \mathbf{u}) = \sum_{t=0}^{N-1} [e(t)' Q e(t) + (\Delta u(t))' R \Delta u(t)] \quad (3.4)$$

onde $R = R' > 0$, $Q = Q'$, $(Q^{1/2}, A)$ é detectável, N determina o horizonte de otimização e $\Delta \mathbf{u} \doteq (\Delta u(0), \Delta u(1), \dots, \Delta u(N-1))$. Em alguns casos pondera-se também o erro final $e(N)$, usualmente, também de forma quadrática $e(N)' P_F e(N)$, onde $P_F = P_F' > 0$.

O problema de seguimento com restrições consiste em resolver o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta \mathbf{u}} J_N(x_o, r, \Delta \mathbf{u}) \\ \text{sujeito a } & \begin{cases} \|u(t)\|_{\infty} \leq M, \quad t = 0, \dots, N-1 \\ \|\Delta u(t)\|_{\infty} \leq R, \quad t = 0, 1, \dots, N-1 \\ x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad t = 0, 1, \dots, N-1 \\ e(t) = r(t) - Cx(t), \quad t = 1, 2, \dots, N \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

O problema de seguimento ótimo com restrições (3.5) pode ser colocado como um problema de programação quadrática (MAYNE, 1995) o qual pode ser facilmente resolvido numericamente. O resultado do problema de otimização é uma seqüência ótima $\Delta \mathbf{u}_N^* = (\Delta u^*(0), \Delta u^*(1), \dots, \Delta u^*(N-1))$ que, aplicada ao sistema (3.1), minimiza o índice de desempenho quadrático (3.4) e satisfaz às restrições impostas no problema. No presente caso em que o horizonte N é finito, com as hipóteses sobre o funcional (3.4), o problema sempre tem solução.

Note-se que a seqüência ótima $\Delta \mathbf{u}_N^*$ obtida é um controle em malha aberta, portanto sujeito a todos os problemas de implementação inerentes a qualquer controle em malha aberta. Recentemente, em (BEMPORAD et al., 1999), uma solução de malha fechada para o problema (3.5) foi proposta. O controle ótimo obtido é dado por uma realimentação de estados a qual

é contínua e afim por partes, onde o número de partes depende de N e $x(0)$, entre outros parâmetros. A construção da lei de controle é feita utilizando-se programação quadrática multi-paramétrica.

No caso do horizonte ser infinito, $N = \infty$, o problema fica mais complexo. Primeiramente, para o problema fazer sentido, é necessário que o seguimento assintótico seja possível para a referência em questão. Segundo, a solução numérica do problema fica difícil, pois o problema passa a ter dimensão infinita. Com relação a este último aspecto, sob certas condições, é possível encontrar a solução do problema de seguimento com horizonte infinito resolvendo-se um problema de horizonte finito (SCOKAERT, RAWLINGS, 1998). A condição para isto ser possível é que a lei de controle correspondente ao seguimento ótimo **sem** restrições satisfaça às restrições de controle envolvidas para todo $t \geq N_o$ para um certo $N_o \geq 0$. Neste caso, a lei de controle ótima para o problema de seguimento com horizonte infinito pode ser construída a partir do problema (3.5) com $N \geq N_o$ incluindo-se um custo sobre o estado final adequado (SCOKAERT, RAWLINGS, 1998, SZNAIER, DAMBORG, 1987).

3.2.2 Controle com horizonte deslizante

No controle com horizonte deslizante um problema de seguimento ótimo com restrições e horizonte finito, como em (3.5), é resolvido a cada instante de amostragem. Da seqüência ótima assim obtida, o primeiro elemento, $\Delta u(0)$, é implementado, isto é, aplicado ao sistema. No instante de amostragem seguinte, todo o processo se repete e, assim, sucessivamente.

Nesta estratégia de controle, o modelo do sistema é utilizado para a predição de seu comportamento futuro na forma

$$\begin{aligned} x_{t+k+1|t} &= Ax_{t+k|t} + B\Delta u_{t+k|t} \\ y_{t+k|t} &= Cx_{t+k|t} \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde $x_{t+k|t}$ representa do estado do sistema no instante $t+k$ predito no instante t . Então, t representa o instante de amostragem e k representa a evolução do sistema dentro da janela de predição. Assume-se que o estado é medido no instante t , isto é, $x_{t|t} = x(t)$.

O custo a ser minimizado é quadrático no erro de seguimento, $e_{t+k|t} \doteq r_{t+k|t} - y_{t+k|t}$, e no controle $\Delta u_{t+k|t}$,

$$J_N(x_t, r, \Delta \mathbf{u}_t) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[e'_{t+k|t} Q e_{t+k|t} + \Delta u'_{t+k|t} R \Delta u_{t+k|t} \right] \quad (3.7)$$

onde $R = R' > 0$, $Q = Q'$, $(Q^{1/2}, A)$ é detectável e N é o horizonte de predição¹, e $\Delta \mathbf{u}_t \doteq (\Delta u_{t|t}, \Delta u_{t+1|t}, \dots, \Delta u_{t+N-1|t})$.

Para calcular o custo J_N (3.7) é necessário conhecer o comportamento futuro do sinal de referência. Em muitas aplicações práticas, como no seguimento de trajetórias em robótica, a referência é de fato conhecida *a priori*. Se este não for o caso, como, por exemplo, no controle manual de vôo, pode-se optar por uma “predição” do sinal referência (MILLER, PACHTER, 1997).

O custo J_N deve ser minimizado com respeito a $\Delta \mathbf{u}_t$, respeitando as restrições envolvidas e a dinâmica (3.6),

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta \mathbf{u}_t} J_N(x_t, r, \Delta \mathbf{u}_t) \\ \text{sujeito a } & \begin{cases} \| u_{t+k|t} \|_{\infty} \leq M, \quad k = 0, \dots, N-1 \\ \| \Delta u_{t+k|t} \|_{\infty} \leq R, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ x_{t|t} = x_t \\ \text{dinâmica (3.6)} \\ e_{t+k|t} = r_{t+k|t} - y_{t+k|t}, \quad k = 1, 2, \dots, N \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

A lei de controle com horizonte deslizante é construída a partir da solução $\Delta \mathbf{u}_t^*$ do problema de otimização (3.8) na forma

$$\Delta u(t) = \Delta u_{t|t}^* \quad (3.9)$$

Nota 3.2.3 *A cada instante de amostragem, um problema de otimização com horizonte N é resolvido obtendo-se uma seqüência ótima de dimensão N . Contudo, esta seqüência é um controle em malha aberta, com seus problemas intrínsecos de implementação. Por isto, na estratégia do controle por horizonte deslizante, apenas o primeiro elemento desta seqüência ótima é implementado. O controle então passa a ser em malha fechada, porque no próximo instante de amostragem, o estado é medido, e nova solução do problema de otimização é obtida a partir desta medição.* *

Nota 3.2.4 *O problema de otimização (3.8) pode facilmente ser colocado como um problema de programação quadrática (MAYNE, 1995). Embora o tratamento de restrições no estado*

¹De forma mais geral pode-se considerar horizontes diferentes para o erro de seguimento (horizonte de predição) e para o controle (horizonte de controle). Por simplicidade, assume-se aqui que os dois coincidem.

não seja o interesse central deste trabalho, estas podem ser diretamente incorporadas no problema (3.8), o que constitui um dos maiores atrativos do controle com horizonte deslizante - a facilidade de lidar com restrições. *

As grandes dificuldades do controle com horizonte deslizante são a garantia de factibilidade do problema de otimização e a garantia de estabilidade (CAMACHO, ALBA, 2000, RAWLINGS, 2000). No caso particular de sistemas lineares com restrições apenas no controle e com um custo do tipo (3.7), sempre há solução para o problema de otimização (3.8), resolvendo-se então o primeiro problema².

A garantia de estabilidade, contudo, é um problema mais complexo, especialmente no caso de seguimento de referência. Os resultados existentes na literatura tratam de estabilidade assintótica da origem, isto é, não tratam especificamente do caso de seguimento de referência. Estas condições de estabilidade estão intimamente ligadas à imposição de custo e restrições no estado final. Estas condições não serão exploradas neste trabalho por não estarem dentro do foco principal. Para o leitor interessado, sugere-se (RAWLINGS, MUSKE, 1993, MICHALSKA, MAYNE, 1993, ZHENG, MORARI, 1995b, CHEN, ALLGÖWER, 1997, KEERTHI, GILBERT, 1998, SCOKAERT et al., 1999).

3.2.3 Condicionador de erro/referência

Embora constituam uma abordagem específica para o problema de seguimento de referência sob restrições, o condicionamento de erro (KAPASOURIS et al., 1988, GILBERT, TAN, 1991) e o condicionador de referência (GILBERT et al., 1995) podem ser vistos como técnicas particulares de *anti-windup*. De fato, ambos baseiam-se na hipótese de existência de um projeto (controle nominal) que desconsidera a existência de restrições e constituem modificações neste laço com o intuito de garantir estabilidade/desempenho. O que torna o condicionador de erro/referência um pouco particular é a forma pela qual a modificação é introduzida, onde conceitos de otimização e conjuntos saída-admissível são utilizados.

Nesta seção é considerada apenas a formulação em tempo discreto. Para o leitor interessado na formulação para sistemas contínuos sugere-se (KAPASOURIS et al., 1988) e referências lá citadas.

Considere que, para um dado sistema linear com restrições no controle, tenha sido proje-

²Não estão sendo consideradas restrições no estado. Estas restrições são, usualmente, as responsáveis por infactibilidade do problema de minimização.

tado um controle linear sem levar em conta estas restrições, e tome a seguinte representação em tempo discreto para o sistema em malha fechada assim obtido

$$\begin{aligned}x_{cl}(t+1) &= A_{cl}x_{cl}(t) + B_{cl}r(t) \\y(t) &= C_{ycl}x_{cl}(t) \\z(t) &= C_{zcl}x_{cl}(t) + D_{zcl}r(t)\end{aligned}\tag{3.10}$$

Nesta representação $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ representa um conjunto de variáveis que devem satisfazer restrições representadas na forma $z \in Z \subset \mathbb{R}^{n_z}$. Tanto restrições no estado como no sinal de controle podem ser colocadas desta forma.

Assume-se que, na ausência de restrições, o sistema (3.10) é internamente estável e apresenta um comportamento satisfatório, segundo algum critério de interesse. A questão é que o sinal de referência pode facilmente levar o sistema a violar os limites da restrição $z \in Z$, a qual deve ser respeitada. Diz-se então que o sinal de referência não é realizável ou, mais formalmente, define-se:

Definição 3.2.5 Para o sistema (3.10), diz-se que uma referência constante r é realizável em regime permanente se a condição de equilíbrio satisfaz a restrição, isto é, $z^e = C_{zcl}x_{cl}^e + D_{zcl}r \in Z$. O conjunto de referências realizáveis em regime permanente é o conjunto

$$R_o \doteq \{r : H_o r \in Z\}\tag{3.11}$$

onde $H_o \doteq D_{zcl} + C_{zcl}(I - A_{cl})^{-1}B_{cl}$. ◁

Definição 3.2.6 Diz-se que o sinal de referência é realizável se a trajetória correspondente satisfaz $z(t) \in Z, \forall t \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ (se não mencionado explicitamente, assume-se condição inicial nula). ◁

Condicionador de erro. O técnica do condicionador de erro restringe-se a sistemas que possuam a estrutura particular de realimentação na qual a entrada do controlador é o sinal de erro $e \doteq r - y$. Adicionalmente, esta técnica permite lidar apenas com restrições de magnitude no sinal de controle. Assim, no contexto do condicionador de erro assume-se que:

Hipótese 3.2.7 Para o sistema (3.10), sejam $z = u, Z = \{u : \text{sat}(u) = u\} = \{u : \|u\|_{\infty} \leq 1\}$ e $D_{zcl} = 0$. ▷

Conforme ilustrado na Figura 3.1, o condicionador de erro (KAPASOURIS et al., 1988, GILBERT, TAN, 1991) consiste em um ganho escalar variável $\lambda(t)$ que atua sobre o sinal de erro $e = r - y$, modificando a entrada do controlador nominal. O objetivo do condicionador de erro é garantir que o sinal de controle $u(t)$ satisfaça os limites da saturação em todo instante de tempo. O ganho escalar $\lambda(t)$ é determinado a todo instante de tempo através de um problema de otimização baseado na medida do estado $x_c(t)$ do controlador nominal. Seja (A_c, B_c, C_c) uma realização do controlador nominal, então $\lambda(t)$ é dado por

$$\lambda(t) = \max_{\zeta} \{0 \leq \zeta \leq 1, A_c x_c(t) + B_c \zeta e(t) \in O_{\infty}(A_c, C_c, Z)\} \quad (3.12)$$

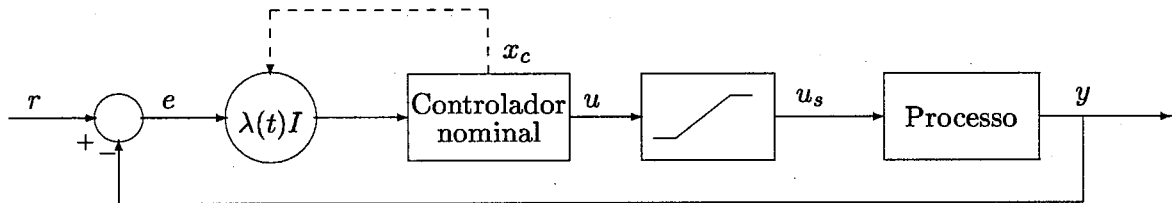


Figura 3.1: Esquema do condicionador de erro.

Note que, com esta estratégia, o estado do controlador nominal x_c estará confinado ao conjunto O_{∞} sempre que iniciar dentro deste conjunto. Além disso, o problema de otimização sempre terá solução se o estado estiver em O_{∞} , pois, por definição, $x_c(t+1)$ estará em O_{∞} se $\lambda(t) = 0$.

Nota 3.2.8 *Nota-se aí, um aspecto “preditivo” do condicionador de referência. Busca-se atuar sobre o erro no instante atual para garantir que no próximo instante de amostragem o sistema continue satisfazendo a restrição no controle.* *

Nota 3.2.9 *Em (KAPASOURIS et al., 1988) o condicionador de erro é considerado para sistemas contínuos, caso em que a obtenção de $\lambda(t)$ envolve a derivada \dot{x}_c . É também sugerida uma escolha para $\lambda(t)$ caso a condição inicial do controlador nominal não esteja dentro do conjunto saída-admissível. O esquema é estendido para sistemas discretos em (GILBERT, TAN, 1991), onde O_{∞} é aproximado por um polítopo, reduzindo consideravelmente a complexidade do problema de otimização (3.12).* *

Este esquema de condicionamento de erro (KAPASOURIS et al., 1988) garante estabilidade \mathcal{L}_{∞} com ganho finito (BIBO) da referência para a saída y . Estas propriedades de

estabilidade para o sistema em malha fechada são possíveis somente no caso em que o sistema é assintoticamente estável em malha aberta, e o controlador nominal é estável no sentido de Lyapunov (equivalentemente, os blocos de Jordan associados a autovalores sobre o eixo imaginário possuem dimensão 1). Sob estas condições, pode-se notar que para $\lambda(t) \equiv 0$, o sistema estabilizará em um valor constante seja qual for o sinal de referência. Este fato norteia a prova de estabilidade para este esquema.

Nota 3.2.10 *O condicionador de erro também garante que se a referência for tal que não ocorre saturação, então a referência não é modificada. Contudo, não há garantia, em princípio, de que para uma referência que causa saturação, mas que converge para um valor realizável em regime permanente, o sistema em malha fechada converge para o mesmo equilíbrio que o sistema nominal (GILBERT et al., 1995).* *

A técnica do condicionador de erro é estendida em (KAPASOURIS et al., 1990) para sistemas lineares instáveis em malha aberta.

Condicionador de referência. Diferentemente do condicionamento de erro, no condicionamento de referência (GILBERT et al., 1995) a modificação é feita diretamente no sinal de referência, e tanto o estado do processo como do controlador nominal são utilizados para efetuar esta modificação. A Figura 3.2 ilustra o esquema básico do condicionamento de referência (compare com a Figura 3.1).

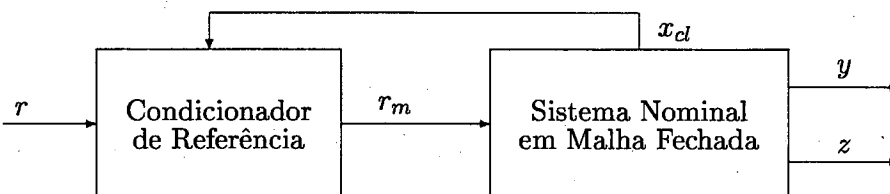


Figura 3.2: Esquema do condicionador de referência.

O sistema em malha fechada é alimentado pela nova referência r_m , a qual é uma versão modificada da referência original r . Os diversos esquemas de condicionamento de referência diferenciam-se pela estratégia de modificação da referência. Destacam-se, pelo menos, três estratégias:

- O condicionador estático;
- O condicionador dinâmico;

- O condicionador estático modificado.

Estas três estratégias são discutidas abaixo. No contexto desta seção, faz-se a seguinte hipótese, a qual não é restritiva considerando-se que (3.10) é um sistema em malha fechada.

Hipótese 3.2.11 *A matriz A_{cl} é Hurwitz; O par (C_{zcl}, A_{cl}) é observável; o conjunto Z é compacto e determinado por um conjunto de desigualdades na forma $Z = \{z \in \mathbb{R}^{n_z} : \eta_i(z) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n_\eta\}$.* ▷

É usual assumir também que as funções η que definem Z sejam lineares, de forma que Z resulta em um politopo. Neste caso a caracterização do conjunto saída-admissível também é dada por um politopo ou, na pior das hipóteses, pode ser aproximada por um politopo.

Nota 3.2.12 *No contexto da Hipótese 3.2.11 tanto restrições no estado quanto no controle podem ser incluídas.*

Condicionador estático. O condicionador estático é a estratégia mais simples para condicionamento de referência. O sistema (3.10) é alimentado pela referência modificada através de um ganho $\kappa(r, x_{cl})$ na forma (GILBERT et al., 1995)

$$\begin{aligned} x_{cl}(t+1) &= A_{cl}x_{cl}(t) + B_{cl}r_m(t) \\ y(t) &= C_{ycl}x_{cl}(t) \\ z(t) &= C_{zcl}x_{cl}(t) + D_{zcl}r_m(t) \\ r_m(t) &= \kappa(r, x_{cl})r(t) \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde

$$\kappa(r, x_{cl}) = \max_{\zeta \in [0, 1]} \left\{ \begin{array}{l} A_{cl}x_{cl}(t) + B_{cl}\zeta r(t) \in O_\infty(A_{cl}, C_{cl}, Z) \\ C_{zcl}x_{cl}(t) + D_{zcl}\zeta r(t) \in Z \end{array} \right\} \tag{3.14}$$

Observa-se que condicionador de referência assim obtido é bastante similar ao condicionador de erro. O ganho $\kappa(r, x_{cl})$ obtido do problema de otimização (3.14) é tal que a nova referência $r_m = \kappa(r, x_{cl})r$ aplicada ao sistema (3.10) mantém o sistema dentro do conjunto saída-admissível e garante que as restrições não são violadas. Note que a última condição em (3.14) é automaticamente satisfeita se $D_{zcl} = 0$.

A despeito da simplicidade, o condicionador de referência (3.14) não apresenta boas propriedades de estabilidade. De fato, é ilustrado em (GILBERT et al., 1995) que oscilações

podem ocorrer mesmo sob as condições da Hipótese 3.2.11. Contudo, no caso em que a referência é tal que as restrições não são violadas, o condicionador estático não atua, e o desempenho do sistema nominal é garantido.

Condicionador dinâmico. No condicionador de referência dinâmico (GILBERT et al., 1995), a referência é modificada de acordo com a dinâmica

$$r_m(t+1) = r_m(t) + \kappa(r, x_G)(r(t) - r_m(t)) \quad (3.15)$$

onde $x_G = (r_m, x_{cl})$ é o estado do sistema aumentado com a dinâmica da referência modificada. O ganho $\kappa(r, x_G)$ é o que deve ser determinado para garantir que as restrições sejam satisfeitas bem como a estabilidade do sistema.

Nota 3.2.13 O ganho $\kappa(r, x_G)$ determina $r_m(t+1)$ como um elemento pertencente ao segmento de reta ligando $r(t)$ a $r_m(t)$. Para $\kappa = 0$, tem-se $r_m(t+1) = r_m(t)$. Para $\kappa = 1$, tem-se o outro extremo, $r_m(t+1) = r(t)$, onde a referência é apenas atrasada em uma amostra. ★

Construindo a representação do sistema aumentado com o estado da referência modificada, pode-se chegar a seguinte representação

$$\begin{aligned} x_G(t+1) &= A_G x_G(t) + B_G \kappa(r, x_G)(r(t) - [I \ 0]x_G(t)) \\ z(t) &= C_G x_G(t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde

$$A_G = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B_{cl} & A_{cl} \end{bmatrix}, \quad B_G = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_G = \begin{bmatrix} D_{zcl} & C_{zcl} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Baseado neste sistema aumentado, o ganho $\kappa(r, x_G)$ é escolhido como a solução do seguinte problema de otimização (GILBERT et al., 1995)

$$\kappa(r, x_G) = \max \{ \zeta \in [0, 1] : A_G x_G(t) + B_G \zeta (r(t) - [I \ 0]x_G(t)) \in O_\infty(A_G, C_G, Z) \} \quad (3.18)$$

Através da escolha (3.18), o sistema em malha fechada (3.16) é forçado a operar dentro do conjunto $O_\infty(A_G, C_G, Z)$. Observe que este conjunto é invariante para o sistema (3.16) com referências constantes e tais que $r(\cdot) = r_m(\cdot)$. Em outros casos, a referência é modificada de forma que a propriedade de invariância seja preservada.

Nota 3.2.14 Como a matriz A_G possui autovalores sobre o círculo de raio unitário, não há garantia de que o conjunto $O_\infty(A_G, C_G, Z)$ seja finitamente determinado. Por isto, usualmente utiliza-se uma aproximação construída da seguinte forma (GILBERT et al., 1995). Seja $Z(\epsilon) \doteq \{z \in \mathbb{R}^{n_z} : \eta_i(z) \leq -\epsilon < 0, i = 1, 2, \dots, n_\eta\}$ e defina (veja Definição 3.2.5 e Teorema B.0.6)

$$\hat{C}_G \doteq \begin{bmatrix} H_o & 0 \\ D_{zcl} & C_{zcl} \end{bmatrix}$$

Então, nas condições da Hipótese 3.2.11, $O_\infty(A_G, \hat{C}_G, Z(\epsilon) \times Z)$ é finitamente determinado e $O_\infty(A_G, \hat{C}_G, Z(\epsilon) \times Z) \subset O_\infty(A_G, C_G, Z)$. À medida que ϵ tende a zero, a aproximação é melhorada. Contudo, no caso de $Z(\epsilon)$ ser um politopo, o número de vértices do politopo $O_\infty(A_G, \hat{C}_G, Z(\epsilon) \times Z)$, em geral, cresce ilimitadamente quando ϵ tende a zero. *

O desempenho do condicionador de referência dinâmico é formalizado no seguinte teorema, cuja prova pode ser encontrada em (GILBERT et al., 1995).

Teorema 3.2.15 Seja $O_\infty^\epsilon \doteq O_\infty(A_G, \hat{C}_G, Z(\epsilon) \times Z)$ e seja $R_o^\epsilon \doteq \{r : H_o r \in Z(\epsilon)\}$ e assuma que $0 \in \text{int}(R_o^\epsilon)$. Para o sistema (3.16) com $\kappa(r, x_G)$ dado por (3.18), $x_G(0) \in O_\infty^\epsilon$ e com referências limitadas, vale que:

- Para todo $t \geq 0$, $r_m(t) \in R_o^\epsilon$, $x_G(t) \in O_\infty^\epsilon$ e $z(t) \in Z$;
- Se $r(t) \rightarrow r_o$ e $\exists t_1 \in \mathbb{Z}$, $t_1 > 0$ tal que $r(t) \in R_o^\epsilon$, $\forall t \geq t_1$, então $\exists t_2 \in \mathbb{Z}$, $t_2 > 0$ tal que $\kappa(r(t), x_G(t)) = 1$, $\forall t \geq t_2$;
- Se $r(t) \rightarrow r_o$ e $r_o \notin R_o^\epsilon$, então, $\kappa(r(t), x_G(t)) \rightarrow 0$ e $r_m(t) \rightarrow r_m^* \in \partial(R_o^\epsilon)$.

O segundo item caracteriza a propriedade de estabilidade mais importante do condicionamento de referência dinâmico. Garante-se que o sistema recupera assintoticamente o desempenho do sistema nominal quando a referência converge para um valor estaticamente realizável. Esta propriedade é uma garantia mais forte comparativamente ao que o condicionamento de erro e o condicionamento estático garantem.

Nota 3.2.16 O primeiro item mostra o principal problema do condicionamento de referência dinâmico. A referência modificada fica restrita a valores que são estaticamente realizáveis, mesmo durante transitórios. Desta forma, o desempenho do sistema como um todo fica

prejudicado, pois valores maiores de referência durante transitórios poderiam acelerar a convergência da resposta do sistema. ★

Condicionador estático modificado. Este problema do condicionador dinâmico é consequência direta da exigência de invariância do conjunto $O_\infty(A_G, C_G, Z)$. Se $(r_m, x_{cl}) \in O_\infty(A_G, C_G, Z)$, necessariamente $r_m \in R_o$. O condicionador estático modificado (MCNAMEE, PACHTER, 1998, MCNAMEE, PACHTER, 1999) tenta atenuar este problema exigindo a invariância de um outro conjunto obtido a partir de $O_\infty(A_G, C_G, Z)$. Conforme (MCNAMEE, PACHTER, 1998, MCNAMEE, PACHTER, 1999), para o condicionador estático será assumido que $r \in \mathbb{R}$, isto é, a referência é escalar.

Como $r \in \mathbb{R}$, $O_\infty(A_G, C_G, Z) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Considere a projeção de $O_\infty(A_G, C_G, Z)$ sobre o espaço definido por $r = 0$, isto é,

$$X_s \doteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists r_m \in R_o \text{ tal que } \begin{bmatrix} r_m \\ x \end{bmatrix} \in O_\infty(A_G, C_G, Z) \right\} \quad (3.19)$$

Então, o condicionador estático modificado consiste em um condicionador estático, isto é, $r_m(t) = \kappa(r(t), x_{cl}(t)) r(t)$, com o ganho $\kappa(r, x_{cl})$ determinado do seguinte problema de otimização,

$$\kappa(r, x_{cl}) = \max \{ \zeta \in [0, 1] : A_{cl} x_{cl}(t) + B_{cl} \zeta r(t) \in X_s, C_{zcl} x_{cl}(t) + D_{zcl} \zeta r(t) \in Z \} \quad (3.20)$$

Como se verifica facilmente, a única diferença entre o condicionador estático modificado e o condicionador estático é o uso do conjunto X_s em lugar de $O_\infty(A_{cl}, C_{zcl}, Z)$. Como ilustrado com um exemplo em (MCNAMEE, PACHTER, 1998), $O_\infty(A_{cl}, C_{zcl}, Z) \in X_s$ e X_s pode ser consideravelmente maior. Também, como o problema de otimização não exige a invariância de $O_\infty(A_G, C_G, Z)$, não há restrição da referência a valores estaticamente realizáveis.

Nota 3.2.17 *A implementação do condicionador estático modificado exige a construção do conjunto X_s , o qual, por sua vez, necessita de $O_\infty(A_G, C_G, Z)$. Em (MCNAMEE, PACHTER, 1998) é apresentado um algoritmo para determinar X_s a partir de $O_\infty(A_G, C_G, Z)$ no caso em que $O_\infty(A_G, C_G, Z)$ é um polítopo. Pode-se também construir X_s a partir de O_∞° (veja Teorema 3.2.15) quando $O_\infty(A_G, C_G, Z)$ não for finitamente determinado. Sendo X_s e Z polítopos, as restrições no problema de otimização (3.20) serão todas lineares, o que simplifica consideravelmente a solução do problema. Em (MCNAMEE, PACHTER, 1998) também*

é apresentado um algoritmo para obter uma aproximação de X_s com um número menor de vértices, permitindo reduzir a complexidade computacional na implementação do condicionador de referência. *

Nota 3.2.18 *Claramente, as restrições são sempre satisfeitas por construção do algoritmo. Também, o problema de otimização sempre tem solução, pois $\kappa = 0$ sempre é solução. Conforme afirmado em (MCNAMEE, PACHTER, 1998) (sem prova), o condicionador de referência modificado garante estabilidade BIBO (entrada limitada, saída limitada). Contudo, não é feito nenhum comentário a respeito do problema das oscilações do condicionador estático mencionado anteriormente (veja (GILBERT et al., 1995)).* *

Como se pode observar, as diversas técnicas de condicionamento de erro e referência procuram garantir que as restrições sejam satisfeitas alimentando o sistema com um sinal de referência modificado. Como o objetivo é o seguimento da referência, busca-se modificar a referência o mínimo possível. Para que o seguimento assintótico seja possível, é claro que a referência deve ser realizável em regime permanente. Contudo, a velocidade da resposta do sistema pode ser aumentada permitindo que o sinal de entrada assuma valores “maiores” durante o transitório. Daí a importância de permitir que o condicionador de referência não fique restrito a valores de referência estaticamente admissíveis.

Nota 3.2.19 *É razoável admitir que se o controlador nominal for projetado com ganhos elevados, pequenos valores de referência podem causar a saturação do sinal de controle. Logo, o projeto do controlador nominal afeta o tamanho dos conjuntos $O_\infty(A_{cl}, C_{zcl}, Z)$, $O_\infty(A_G, C_G, Z)$ e X_s , que, por sua vez, afeta o condicionador de referência.* *

A técnica do condicionador de referência pode ser estendida para sistemas não-lineares. Alguns resultados nesta direção podem ser encontrados em (BEMPORAD, 1998, ANGELI, MOSCA, 1999) e referências lá citadas.

3.3 A Técnica do *Anti-Windup*

Esta seção é desenvolvida para sistemas em tempo contínuo. Um breve histórico do problema do *anti-windup* é apresentado, e a técnica do *anti-windup* \mathcal{L}_2 é desenvolvida mais detalhadamente. Apenas restrições em magnitude são consideradas nesta seção.

Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1u_s + B_2w \\ y &= Cx + D_1u_s + D_2w\end{aligned}\tag{3.21}$$

com $x \in \mathbb{R}^n$, $u_s \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $y \in \mathbb{R}^p$ e com saturação no controle representada por

$$u_s = \text{sat}_M(u)\tag{3.22}$$

Alternativamente, a função de transferência de u_s para y será representada por $G(s)$.

Suponha que um controle (possivelmente não-linear) tenha sido projetado para o sistema (3.21) (desprezando-se o efeito da saturação). Considere a seguinte representação para este controlador.

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= g(x_c, u_c, r) \\ y_c &= k(x_c, u_c, r)\end{aligned}\tag{3.23}$$

onde u_c e y_c são entrada e saída do controlador, respectivamente, e r é a entrada de referência. O controlador (3.23) será denominado de *controlador nominal*. Similarmente, será denominado de *sistema nominal* o sistema (3.21) em malha fechada com (3.23) de acordo com a interconexão³

$$u_c = y, \quad u_s = y_c\tag{3.24}$$

Assuma que o controlador (3.23) foi projetado com o objetivo de garantir um determinado desempenho para o sistema nominal, medido em termos da variável

$$z = C_zx + D_{zu}u_s + D_{zw}w\tag{3.25}$$

Muitas técnicas de *anti-windup* assumem que o controlador nominal é linear na forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= A_cx_c + B_cu_c + E_cr \\ y_c &= C_cx_c + D_cu_c + F_cr\end{aligned}\tag{3.26}$$

sendo que algumas assumem uma estrutura ainda mais particular, representada em termos

³Nesta interconexão u_s é tomada como entrada do sistema, eliminando assim a influência da saturação, equação (3.22).

da variável de Laplace s como,

$$\hat{y}_c = K(s) (\hat{r} - \hat{y}) \quad (3.27)$$

onde $K(s)$ é a matriz de transferência e o acento $\hat{}$ representa a transformada de Laplace do respectivo sinal.

O problema do *windup* foi originalmente atribuído à presença de ação integral no controlador. Técnicas de *anti-windup* foram então concebidas para controladores tipo PID, isto é, situações em que o controlador nominal é do tipo PID. Diversas estratégias, hoje denominadas *ad hoc*, podem ser encontradas na literatura para lidar com este caso: *back-calculation* (FERTIK, ROSS, 1967), *intelligent integrator* (KRIKELIS, 1980), *anti-reset windup* (ÅSTRÖM, WITTENMARK, 1984), e outras (ZENI et al., 1984).

Como ilustrado em (DOYLE et al., 1987), o problema do *windup* não fica restrito aos casos em que controlador possui ação integral. Assim, técnicas mais gerais de anti-windup foram então desenvolvidas admitindo controladores nominais lineares com múltiplas entradas e saídas: *conditioning technique* (HANUS et al., 1987, HANUS, KINNAERT, 1989), *generalized conditioning technique* (WALGAMA et al., 1992, WALGAMA, STERNBY, 1993); técnica baseada em observador (ÅSTRÖM, WITTENMARK, 1984, ÅSTRÖM, HÄGGLUND, 1988); *anti-windup* para controle por modelo interno (ZHENG et al., 1994).

Na técnica baseada em observador (ÅSTRÖM, WITTENMARK, 1984, ÅSTRÖM, HÄGGLUND, 1988), o compensador *anti-windup* consiste em modificar o controlador nominal linear (3.26) na forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c u_c + L(u_s - y_c) \\ y_c &= C_c x_c + D_c u_c \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde $u_s = \text{sat}_M(y_c)$. O compensador de *windup* (3.28) pode ser visto como um observador de estados para o controlador nominal (3.26) (daí a sua denominação) onde se busca fazer o estado observado ser tal que este controlador reproduza o controle saturado u_s .

Em (WALGAMA, STERNBY, 1990) foi observado que diversas técnicas de anti-windup, inclusive a *conditioning technique*, continham propriedades intrínsecas de observação de estados e podiam ser colocadas como casos particulares da técnica baseada em observador (3.28). Resultados similares também foram apresentados em (CAMPO, MORARI, 1990) onde também se relacionou o *anti-windup* (3.28) com o controle por modelo interno.

Mais tarde, em (KOTHARE et al., 1994), todas estas técnicas foram colocadas como casos

particulares da estrutura de *anti-windup* mostrada na Figura 3.3. O controlador nominal, linear e invariante no tempo, possui a estrutura dada na equação (3.27). O compensador *anti-windup* é obtido fazendo-se

$$\hat{u} = U(s)(\hat{r} - \hat{y}) + (I - V(s))\hat{u}_s \quad (3.29)$$

onde $U(s)$ e $V(s)$ constituem uma decomposição fracional linear de $K(s)$, isto é, $K(s) = V^{-1}(s)U(s)$.

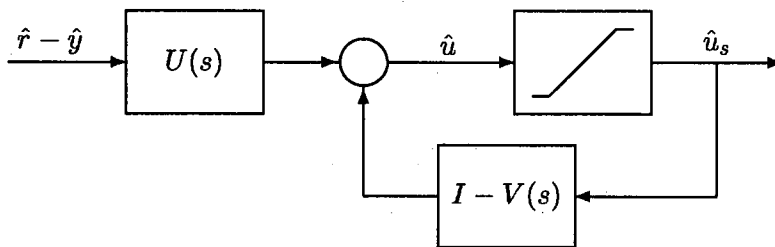


Figura 3.3: Parametrização genérica de controladores *anti-windup* (KOTHARE et al., 1994).

Usando este resultado, uma decomposição fracional particular é proposta em (MIYAMOTO, VINNICOMBE, 1996) permitindo realizar um projeto com desempenho H_∞ . Alguns projetos *anti-windup* baseados em otimização podem ser encontrados em (ZHENG et al., 1994, PARK, CHOI, 1995, CHEN, PERNG, 1997).

Uma metodologia de projeto de compensadores *anti-windup* é também apresentada em (BURGAT, TARBOURIECH, 1998). Esta metodologia trata especificamente do caso em que o controlador nominal possui ação integral e garante estabilidade global para o sistema em malha fechada. A metodologia generaliza o resultado de (KRIKELIS, 1980) (*integrador inteligente*) para sistemas MIMO.

3.3.1 O *anti-windup* \mathcal{L}_2

A maioria das técnicas mencionadas, excluindo-se apenas (PARK, CHOI, 1995, MIYAMOTO, VINNICOMBE, 1996, BURGAT, TARBOURIECH, 1998), não trata a questão da estabilidade de forma adequada. Mesmo em (PARK, CHOI, 1995), garantias de estabilidade global são fornecidas apenas para o caso do sistema em malha aberta ser estável. Similarmente, o resultado de (MIYAMOTO, VINNICOMBE, 1996) só tem garantia de solução para este caso particular.

Resultados mais formais para análise de estabilidade em problemas de *anti-windup* são propostos em (KOTHARE, MORARI, 1999). Estes resultados baseiam-se na teoria de multiplicadores, critério do círculo e critério de Popov e fornecem condições suficientes para estabilidade do sistema em malha-fechada com *anti-windup*. Também, em (KAPOOR et al., 1998), uma metodologia de projeto com garantias de estabilidade para o anti-windup baseado em observador (3.28) foi proposta. A metodologia consiste em projetar L de forma que um certo sistema auxiliar dependente de (3.21) e (3.26) seja passivo.

Como tais resultados aplicam-se apenas ao caso em que o compensador de *windup* é linear, é de se esperar que as hipóteses sejam muito severas, uma vez que os resultados do capítulo 1 mostram limitações das leis de controle lineares no controle de sistemas com restrições nos atuadores. Assim, resultados menos conservativos passam pelo reconhecimento de que leis de controle não-lineares devem ser permitidas no compensador *anti-windup*.

Este reconhecimento aparece em (TEEL, KAPOOR, 1997a), onde é apresentado o *anti-windup* \mathcal{L}_2 , introduzindo uma generalização considerável no problema do *anti-windup*. O esquema proposto admite controladores nominais não-lineares e utiliza-se de controle não-linear para compensar os efeitos da saturação. Desta forma, um tratamento adequado do problema de estabilidade local e global pode ser dado, ao mesmo tempo que os resultados conhecidos sobre a estabilização de sistemas lineares com saturação no controle podem ser diretamente utilizados no projeto do compensador *anti-windup*.

Para apresentar *anti-windup* \mathcal{L}_2 , uma versão perturbada do sistema (3.21), (3.22), (3.25) é utilizada,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u_s + B_2 w + \Phi(\phi_o, x, u, w) \\ y &= Cx + D_1 u_s + D_2 w \\ z &= C_z x + D_{zu} u_s + D_{zw} w \\ u_s &= \sigma(u) \end{aligned} \tag{3.30}$$

onde Φ é uma perturbação dinâmica estável com estado inicial ϕ_o . Por simplicidade, assume-se que o controle nominal é linear e dado por (3.26) com sinal de referência r na classe \mathcal{R}_{asp} . Assume-se também que o sistema nominal em malha fechada, isto é, (3.30) e (3.26) com $u_c = y$ e $u_s = y_c$, é bem colocado e internamente estável. No contexto do *anti-windup* \mathcal{L}_2 , a função saturação $\sigma(\cdot)$ pode ser mais geral que $\text{sat}_M(\cdot)$. Os requisitos formais são estabelecidos adiante.

No que segue, assinala-se com um til (\sim) as variáveis do sistema nominal em malha fechada

((3.30), (3.26) com $u_c = y$ e $u_s = y_c$). O problema do *anti-windup* \mathcal{L}_2 é definido para um conjunto compacto $\mathcal{U}_e \subset \mathbb{R}^m$ como segue (TEEL, KAPOOR, 1997a).

Definição 3.3.1 *O problema nominal global do anti-windup \mathcal{L}_2 para o conjunto \mathcal{U}_e consiste em (TEEL, KAPOOR, 1997a) encontrar um compensador dinâmico*

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \Sigma_{aw}(\xi(0), y_c) \quad (3.31)$$

onde ξ é o estado do compensador, tal que o sistema em malha fechada (3.30) (com $\Phi \equiv 0$), (3.29), (3.31) na forma

$$u = y_c + v_1, \quad u_c = y + v_2 \quad (3.32)$$

satisfaça

1. Se $\xi(0) = 0$ e $\tilde{y}_c(t) = \sigma(\tilde{y}_c(t))$, $\forall t \geq 0$, então $z(t) = \tilde{z}(t)$, $\forall t \geq 0$;
2. Se $\text{dist}_{\mathcal{U}_e}(\tilde{y}_c(\cdot)) \in \mathcal{L}_2$, então $(z - \tilde{z})(\cdot) \in \mathcal{L}_2$.

A versão local consiste em satisfazer estas duas condições para condições iniciais, perturbações e referências tais que $|\xi(0)|$ e $\|\text{dist}_{\mathcal{U}_e}(\tilde{y}_c(\cdot))\|_2$ são suficientemente pequenas. A versão robusta consiste em satisfazer estas condições para todo Φ com ganho incremental ⁴ \mathcal{L}_2 suficientemente pequeno. \triangleleft

O papel do conjunto \mathcal{U}_e é, basicamente, estabelecer o conjunto de valores admissíveis para o sinal de controle em regime permanente. Assume-se que este conjunto satisfaz a seguinte hipótese, em conjunto com a função saturação.

Hipótese 3.3.2 *Seja $\mathcal{U}_e \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto tal que existem $L > 0$ e $b > 0$ tais que, para todo $u, v \in \mathbb{R}^m$ e $\mu \in \mathcal{U}_e$,*

$$\begin{aligned} |\sigma(u + \mu) - \mu - u| &\leq L|\sigma(u + \mu) - \mu| \\ |\sigma(u + v) - \sigma(u)| &\leq \min\{L|v|, b\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

\triangleright

⁴Diz-se que Φ possui ganho incremental \mathcal{L}_2 finito se existe $c_g > 0$ tal que $\|\Phi(x_2, u_2, d) - \Phi(x_1, u_1, d)\|_2 \leq c_g \|\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ u_2 - u_1 \end{bmatrix}\|_2$.

Nota 3.3.3 A primeira inequação em (3.33) implica que $\sigma(\mu) = \mu$, $\forall \mu \in \mathcal{U}_e$ (tome $u = 0$). Pode-se mostrar que, no caso em que $\sigma(\cdot) = \text{sat}_M(\cdot)$, qualquer escolha para \mathcal{U}_e como conjunto compacto estritamente contido em $\{u : \text{sat}_M(u) = u\} = \{u : |u_i| \leq M\}$ satisfaz a Hipótese 3.3.2. A necessidade desta inclusão ser estrita pode ser entendida com o seguinte exemplo. Considere o sistema $\dot{x} = \text{sat}(u) + d$ com $d = -1$ e tome $\mathcal{U}_e = [-1, 1]$. Suponha que o controle nominal possua ação integral de forma que $\tilde{x}(t)$ converge para zero no infinito. Neste caso $\tilde{y}_c(t) = \tilde{u}(t)$ converge exponencialmente para 1 e, logo, $\text{dist}_{\mathcal{U}_e}(\tilde{u}) \in \mathcal{L}_2$. Contudo, para qualquer $\epsilon > 0$, $x(0) \leq -\epsilon$ implica $x(t) \leq -\epsilon$ para todo t e, logo, $x(t) \notin \mathcal{L}_2$. Assim, nem o anti-windup \mathcal{L}_2 local teria solução. ★

O primeiro requisito da Definição 3.3.1 garante que o compensador *anti-windup* não modifica o desempenho do sistema nominal nas condições em que não ocorre saturação. O segundo requisito estabelece uma condição de estabilidade do sistema em malha fechada e, ao mesmo tempo, uma medida da degradação de desempenho do sistema em função do nível de saturação do sinal de controle. Note que garantias só são fornecidas para o caso em que $\text{dist}_{\mathcal{U}_e}(\tilde{u}) \in \mathcal{L}_2$. Em particular, isto requer que o sinal de controle em regime permanente seja realizável, isto é, $\tilde{y}_c(t) = \sigma(\tilde{y}_c(t))$ em regime permanente.

O seguinte lema é necessário para a solução do problema do *anti-windup* \mathcal{L}_2 . Este lema é uma generalização dos resultados de (MEGRETSKI, 1996, TEEL, 1996b), e se fundamenta, parcialmente, na construção (2.19) apresentada no capítulo 2. O resultado do Teorema 2.4.2 também pode ser adaptado para este fim.

Lema 3.3.4 Considere a Hipótese 3.3.2. Para o sistema

$$\dot{\xi} = A\xi + B[\sigma(u + \eta(t)) - \eta(t)] \quad (3.34)$$

onde (A, B) é estabilizável,

1. existe uma realimentação $u = \kappa(\xi)$, globalmente Lipschitz, tal que o ganho \mathcal{L}_2 de $\text{dist}_{\mathcal{U}_e}(\eta(\cdot))$ para $\xi(\cdot)$ é finito para $|\xi(0)|$ e $\|\text{dist}_{\mathcal{U}_e}(\eta(\cdot))\|_2$ suficientemente pequenos;
2. se $\dot{x} = Ax + Bu$ é ANCBC, então existe uma lei de controle $u = \kappa(\xi)$, globalmente Lipschitz, tal que $\text{dist}_{\mathcal{U}_e}(\eta(\cdot)) \in \mathcal{L}_2$ implica $\xi(\cdot) \in \mathcal{L}_2$;
3. se existe $P = P' > 0$ tal que $A'P + PA \leq 0$, $\kappa(\xi)$ no item 2 pode ser tomada como $\kappa(\xi) = -B'P\xi$;

4. se A for Hurwitz o ganho \mathcal{L}_2 de $\text{dist}_{\mathcal{U}_e}(\eta(\cdot))$ para $\xi(\cdot)$ é finito com a lei de controle do item 3.

◦

O próximo teorema formaliza as condições para existência de solução para o problema do *anti-windup* \mathcal{L}_2 (TEEL, KAPOOR, 1997a).

Teorema 3.3.5 Para o sistema (3.30), (3.26), (3.24) o problema do *anti-windup* \mathcal{L}_2

1. sempre tem solução local, tanto nominal quanto robusta;
2. tem solução global nominal se e somente se o sistema linear $\dot{x} = Ax + B_1 u$ é ANCBC;
3. tem solução global robusta se e somente se A for Hurwitz;

Sempre que uma solução existe, o problema é resolvido com o seguinte compensador

$$\dot{\xi} = A\xi + B_1[\sigma(y_c + v_1) - y_c] \quad (3.35)$$

$$v_1 = k(\xi) \quad (3.36)$$

$$v_2 = -C\xi - D_1[\sigma(y_c + v_1) - y_c] \quad (3.37)$$

onde $\kappa(\xi)$ é obtido do Lema 3.3.4. •

A Figura 3.4 ilustra o diagrama de blocos do sistema em malha-fechada com compensador *anti-windup*. Este compensador atua na entrada da planta, v_1 , e na entrada do controlador nominal, v_2 . Note que a dinâmica do compensador *anti-windup* é obtida de uma cópia parcial da dinâmica da planta (3.30).

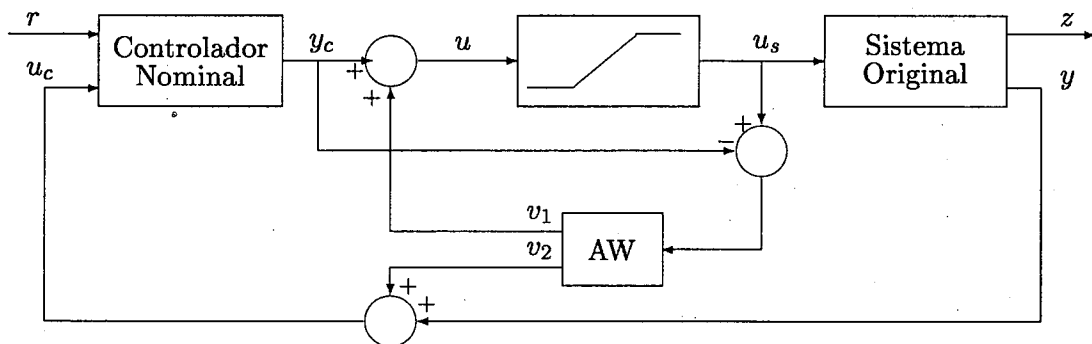


Figura 3.4: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada com *anti-windup* \mathcal{L}_2 .

Nota 3.3.6 *As condições para existência de um compensador de windup global são as mesmas condições para um sistema linear com saturação no controle ser globalmente estabilizável por realimentação de estados. Isto é consequência do Lema 3.3.4, o qual é uma extensão dos resultados do capítulo 2. Por outro lado, a existência de solução local não é surpreendente, uma vez que, localmente, o sistema se comporta como um sistema linear, permitindo a obtenção do desempenho requerido.* *

Nota 3.3.7 *Considere o caso particular em que o sistema (3.30) é estável em malha aberta e o controle nominal possui a estrutura (3.27). Seja $P(s)$ a matriz de transferência de u_s para $\bar{y} \doteq -y$. Para $v_1(\xi) \equiv 0$, o sinal de controle u no sistema anti-windup em malha fechada resulta*

$$\begin{aligned}\hat{u} &= K\hat{r} - K\hat{y} + KP(\hat{u}_s - \hat{u}) \\ (I + KP)\hat{u} &= K(\hat{r} - \bar{y}) + KP\hat{u}_s \\ \hat{u} &= (I + KP)^{-1}K(\hat{r} - \bar{y}) + (I + KP)^{-1}KP\hat{u}_s \\ \hat{u} &= (I + KP)^{-1}K(\hat{r} - \bar{y}) + [I - (I + KP)^{-1}]\hat{u}_s\end{aligned}\quad (3.38)$$

Comparando (3.38) com (3.29) nota-se que os dois coincidem para $U = (I + KP)^{-1}K$ e $V = (I + KP)^{-1}$. Logo, o esquema de anti-windup (3.29) é um caso particular do anti-windup \mathcal{L}_2 . O fato de $(I + KP)$ ser inversível é consequência da hipótese do sistema nominal ser bem colocado. *

Note que o Teorema 3.3.5, para o caso local, não garante nenhuma região de atração ou limites específicos sobre a magnitude da referência, perturbações e condições iniciais envolvidas. Este problema é melhor tratado em (TEEL, 1999), onde é proposto um projeto específico para o caso de sistemas lineares com modos instáveis e saturação em magnitude no controle. O projeto é conduzido utilizando-se uma função de Lyapunov quadrática, fato que introduz um grau de conservatividade considerável em relação ao domínio de estabilidade e a magnitude de $\|\text{dist}_{\mathcal{U}_e}(\tilde{u}_s)\|_2$. Neste projeto ainda exige-se que a referência e as perturbações sejam tais que o sinal de controle seja realizável em regime permanente. A técnica proposta na seção 3.4 estende estes resultados para o caso em que há limitação tanto em magnitude como em taxa de variação do sinal de controle bem como os sinais de referência admissíveis são mais gerais.

Prova: (do Teorema 3.3.5) Será provada apenas a suficiência. Para uma prova completa veja (TEEL, KAPOOR, 1997a). Considere a seguinte transformação de coordenadas $(\zeta_p, \zeta_c, \xi) \doteq (x - \xi - \tilde{x}, x_c - \tilde{x}_c, \xi)$ e seja $\zeta \doteq [\zeta_p, \zeta_c]'$. Nas novas coordenadas o sistema em malha fechada (3.30), (3.26), (3.32), (3.35)-(3.37) tem a seguinte representação.

$$\dot{\zeta} = A_{cl}\zeta + \begin{bmatrix} \Phi(x, \sigma(y_c + v_1), d) - \Phi(\tilde{x}, \tilde{y}_c, d) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\dot{\xi} = A\xi + B_1[\sigma(y_c + v_1) - y_c] \quad (3.40)$$

$$v_1 = k(\xi) \quad (3.41)$$

onde A_{cl} é a matriz de estado do sistema nominal em malha fechada com $\Phi \equiv 0$. Para $\xi(0) = 0$, $(\zeta_p(0), \zeta_c(0)) = (0, 0)$, e $\sigma(\tilde{y}_c(t)) = \tilde{y}_c(t)$ para todo $t \geq 0$, segue de (3.39)-(3.41) (como $v_1(0) = 0$) que $(\zeta_p, \zeta_c, \xi) = (0, 0, 0)$. Por sua vez, isto implica $z(\cdot) = \tilde{z}(\cdot)$, e o item 1 da definição do problema do *anti-windup* \mathcal{L}_2 fica provado.

Da transformação de coordenadas pode-se obter

$$\begin{aligned} |y_c - \tilde{y}_c| &\leq c_1|\zeta| \\ |x - \tilde{x}| &\leq |\zeta| + |\xi| \\ z - \tilde{z} &= C_z(\zeta_p + \xi) + D_{zu}[\sigma(y_c + v_1) - \tilde{y}_c] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Como $\kappa(\cdot)$ é globalmente Lipschitz, usando (3.33) obtém-se

$$\begin{aligned} |\sigma(y_c + v_1) - \tilde{y}_c| &= |\sigma(y_c - \tilde{y}_c + \kappa(\xi) + \tilde{y}_c) - \sigma(\tilde{y}_c) + \sigma(\tilde{y}_c) - \tilde{y}_c| \\ &\leq L|y_c - \tilde{y}_c + \kappa(\xi)| + |\sigma(\tilde{y}_c) - \tilde{y}_c| \\ &\leq L|y_c - \tilde{y}_c| + L_2|\xi| + |\sigma(\tilde{y}_c) - \tilde{y}_c| \\ &\leq L_1|\zeta| + L_2|\xi| + \text{dist}_{\mathcal{U}_e}(\tilde{y}_c) \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde $L_1 = c_1L$ e $L_2 = L_fL$ e L_f é a constante de Lipschitz de $\kappa(\cdot)$.

Como A_{cl} é, por hipótese, Hurwitz e Φ possui ganho incremental finito limitado por c_g , segue que existem $c_1 > 0$ e $\gamma_1(\cdot) \in \mathcal{K}$ tais que (3.39) satisfaz

$$\|\zeta(\cdot)\|_2 \leq \gamma_1(\|\zeta(0)\|) + c_2c_g \left(\|(x - \tilde{x})(\cdot)\|_2 + \|(\sigma(y_c + v_1) - \tilde{y}_c)(\cdot)\|_2 \right) \quad (3.44)$$

Utilizando (3.42) e (3.43), chega-se a seguinte relação, onde $L_3 \doteq 1 + L_1$ e $L_4 \doteq 1 + L_2$,

$$\| \zeta(\cdot) \|_2 \leq \gamma_1(|\zeta(0)|) + c_2 c_g \left(L_3 \| \zeta(\cdot) \|_2 + L_4 \| \xi(\cdot) \|_2 + \| \text{dist}_{\mathcal{U}_e}(\tilde{y}_c(\cdot)) \|_2 \right) \quad (3.45)$$

Das propriedades da função distância e de (3.33), segue que

$$\text{dist}_{\mathcal{U}_e}(y_c) \leq \text{dist}_{\mathcal{U}_e}(\tilde{y}_c) + |y_c - \tilde{y}_c| \quad (3.46)$$

De (3.46), (3.42), e do Lema 3.3.4, segue que existem funções $\gamma_i(\cdot) \in \mathcal{K}$, $i = 2, 3, 4$, tais que (3.40) satisfaz

$$\| \xi(\cdot) \|_2 \leq \gamma_2(|\xi(0)|) + \gamma_3 (\| \text{dist}_{\mathcal{U}_e}(\tilde{y}_c(\cdot)) \|_2) + \gamma_4 (\| \zeta(\cdot) \|_2) \quad (3.47)$$

De (3.47) e (3.45) segue que, para c_g , condições iniciais, e $\| \text{dist}_{\mathcal{U}_e}(\tilde{y}_c) \|_2$ suficientemente pequenos, γ_3 e γ_4 podem ser tomadas como lineares, e o teorema do pequeno ganho (veja apêndice C) é aplicável, donde se conclui que $\zeta(\cdot) \in \mathcal{L}_2$ e $\xi(\cdot) \in \mathcal{L}_2$ desde que $\text{dist}_{\mathcal{U}_e}(\tilde{y}_c(\cdot)) \in \mathcal{L}_2$. Logo $(z - \tilde{z})(\cdot) \in \mathcal{L}_2$. Na hipótese de A ser Hurwitz, γ_3 e γ_4 são lineares e o resultado vale globalmente em $\| \text{dist}_{\mathcal{U}_e}(\tilde{y}_c(\cdot)) \|_2$ e nas condições iniciais, para c_g suficientemente pequeno. •

3.4 AW para Sistemas com Magnitude e Taxa de Variação Limitadas

Nesta seção, uma estratégia baseada em *anti-windup* é apresentada para o problema de seguimento de referência em sistemas lineares com modos instáveis e com limitação em magnitude e taxa de variação no sinal de controle. A estratégia estende resultados anteriores em diferentes direções:

- O resultado de (TEEL, 1999) é estendido para sinais de referência mais gerais, dando-se um tratamento mais detalhado ao domínio de estabilidade e considerando-se também taxa de variação limitada no sinal de controle;
- Os resultados de (GILBERT et al., 1995, MILLER, PACHTER, 1998, MCNAMEE, PACHTER, 1998, MCNAMEE, PACHTER, 1999) são estendidos com condições de estabilidade menos restritivas e independentes do controlador nominal projetado;
- O resultado apresentado pode ser visto como uma construção mais explícita do resultado

de (TEEL, KAPOOR, 1997b) para o caso de sistemas lineares com modos instáveis e com limitação em magnitude e taxa de variação no sinal de controle.

Vale lembrar que o caso combinado de restrições em magnitude e taxa de variação no sinal de controle tem sido menos abordado na literatura. Além disso, grande parte dos resultados dizem respeito a sistemas de tempo discreto. Veja-se, por exemplo, praticamente toda a literatura sobre o condicionador de referência (GILBERT, TAN, 1991, GILBERT et al., 1995, BEMPORAD et al., 1997, MILLER, PACHTER, 1998, MCNAMEE, PACHTER, 1998) e, similarmente, a literatura de controle por horizonte deslizante (RAWLINGS, MUSKE, 1993, SCOKAERT, MAYNE, 1998, SCOKAERT, RAWLINGS, 1998, CAMACHO, ALBA, 2000, RAWLINGS, 2000). No contexto de sistemas de tempo contínuo, alguns resultados podem ser encontrados em (KAPASOURIS et al., 1988, SHEWCHUN, FERON, 1997, LIN, 1998a, TEEL, KAPOOR, 1997b).

Considere um sistema linear contendo modos instáveis. Sejam $u_s \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ e $z \in \mathbb{R}^q$ a sua entrada, saída de variáveis mensuráveis e saída de desempenho, respectivamente. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ o seu estado e, sem perda de generalidade, considere a seguinte representação para o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu_s = \begin{bmatrix} A_- & A_{12} \\ 0 & A_+ \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_- \\ B_+ \end{bmatrix} u_s \quad (3.48)$$

$$y = C_y x + D_y u_s \quad (3.49)$$

$$z = C_z x + D_z u_s, \quad (3.50)$$

onde A_+ contém todos os autovalores com parte real estritamente positiva (modos instáveis) e A_- contém todos os demais. Seja

$$x \doteq \begin{bmatrix} x_- \\ x_+ \end{bmatrix}$$

com $x_+ \in \mathbb{R}^{n_+}$ e $x_- \in \mathbb{R}^{n_-}$ o particionamento do estado correspondente à decomposição modal apresentada.

Será considerado o caso em que a entrada de controle u_s do sistema (3.48)-(3.50) é limitada em magnitude e taxa de variação. Tais restrições serão representadas aumentando-se o estado

do sistema com o modelo

$$\dot{u}_s = R \operatorname{sgn}(\operatorname{sat}_M(u) - u_s), \quad (3.51)$$

onde $u \in \mathbb{R}^m$ é a nova entrada de controle, sgn é a função sinal, sat_M é a função saturação com limite em M e R é o valor máximo da taxa de variação. Desta forma, assume-se que todas as entradas de controle possuem as mesmas restrições. Este modelo corresponde ao modelo 4 da Tabela 1.2.

Considere que um controle, possivelmente não-linear, tenha sido projetado para o sistema (3.48)-(3.50) de forma a atender certos requisitos de desempenho, sem levar em conta as restrições no controle. Represente este controlador, denominado *controlador nominal*, na forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= g(x_c, u_c, r) \\ y_c &= k(x_c, u_c, r), \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ é o estado, $r \in \mathbb{R}^d$ é uma entrada de referência, $u_c \in \mathbb{R}^p$ e $y_c \in \mathbb{R}^m$ são entrada e saída do controlador, respectivamente.

O controlador nominal (3.52) em malha fechada com o sistema (3.48)-(3.50) na forma

$$u_s = y_c, \quad u_c = y, \quad (3.53)$$

constitui o *sistema nominal*, o qual está ilustrado no diagrama de blocos da Figura 3.5. Em relação ao sistema nominal, assume-se que:

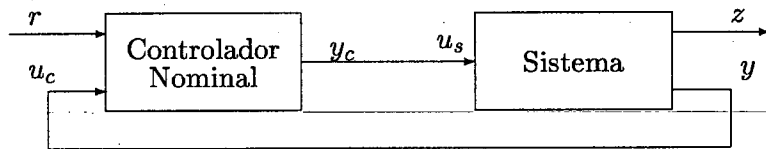


Figura 3.5: Diagrama de blocos do sistema nominal.

Hipótese 3.4.1 *O projeto do controlador nominal (3.52) é tal que:*

1. *O sistema nominal é bem colocado, isto é, fica garantida existência e unicidade de solução;*
2. *O sistema nominal é internamente estável. Em particular, isto requer que o par (A, B)*

seja estabilizável e o par (C_y, A) detectável;

3. Garante convergência assintótica da variável de desempenho na forma

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = r.$$

4. Garante que, para cada referência constante r , existe um único equilíbrio (x^*, x_c^*) para o sistema nominal, o qual é globalmente assintoticamente estável.

▷

Definição 3.4.2 De acordo com o item 4 da Hipótese 3.4.1, defina o mapa de equilíbrio $E: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ como

$$E(r) \doteq (x^*, u^*) = (x^*, y_c^*) \quad (3.54)$$

onde y_c^* é o controle associado ao equilíbrio do sistema nominal (x^*, x_c^*) , correspondente à entrada de referência r . Defina também a variedade de equilíbrio $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ como o conjunto de todos os pares estado-entrada (x, u_s) do sistema linear (3.48) associados a um equilíbrio do sistema nominal. Em função do mapa de equilíbrio E (3.54), tem-se

$$\mathcal{E} \doteq \{(x, u_s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \exists r \in \mathbb{R}^q \text{ tal que } (x, u_s) = E(r)\}.$$

◁

3.4.1 O compensador anti-windup

Como o projeto do controlador nominal negligencia as restrições de magnitude e taxa de variação no sinal de controle, problemas de estabilidade e desempenho podem aparecer quando este controlador é colocado em malha fechada com o sistema real, isto é, com as interconexões

$$u_c = y, \quad u = y_c \quad (3.55)$$

A questão da estabilidade é especialmente crítica devido ao fato do sistema (3.48) possuir modos instáveis (autovalores com parte real estritamente positiva). Daí advém a necessidade de introduzir um controle adicional, o compensador *anti-windup*, para compensar os efeitos

das restrições no controle garantindo domínios de estabilidade para o sistema em malha-fechada.

Por outro lado, o desempenho induzido pelo controlador nominal é desejável para o sistema em malha-fechada. Apesar de não ser possível garantir este desempenho globalmente, ao menos localmente (onde não há influência das restrições no controle), é desejável que o sistema em malha-fechada se comporte como o sistema nominal.

Assim, o projeto do *anti-windup* deve acomodar estes dois requisitos principais, isto é, respeitar o desempenho induzido pelo controlador nominal, ao mesmo tempo que garante estabilidade para o sistema em malha-fechada. A estrutura de *anti-windup* apresentada em (TEEL, 1999) contempla estes requisitos apenas no caso em que há limitação somente em magnitude no sinal de controle e o sinal de referência é realizável, conservativamente, em regime permanente. Nesta seção propõe-se uma extensão do resultado de (TEEL, 1999) a qual permite tratar os casos de taxa de variação limitada no sinal de controle e referências não-realizáveis em regime permanente.

O projeto a ser apresentado utiliza-se de uma estrutura para o compensador *anti-windup* similar à utilizada em (TEEL, 1999). Especificamente, a estrutura do compensador *anti-windup* é dada por

$$\dot{\xi} = A\xi + B(u_s - y_c) \quad (3.56)$$

$$v_1 = \alpha(x_+, u_s, x_+ - \xi_+, \xi, y_c) - y_c \quad (3.57)$$

$$v_2 = -C_y \xi - D_y(u_s - y_c), \quad (3.58)$$

onde $\xi \in \mathbb{R}^n$; u , x_+ e y_c são variáveis do sistema (3.48)-(3.50) e do controlador nominal (3.52); e $\alpha : \mathbb{R}^{n_+} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n_+} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função a ser projetada. O compensador *anti-windup* (3.56)-(3.58) é conectado em malha fechada com o sistema (3.48)-(3.50), (3.51) e o controlador nominal (3.52) de acordo com

$$u = y_c + v_1, \quad u_c = y + v_2. \quad (3.59)$$

Nota 3.4.3 O compensador *anti-windup* (3.56)-(3.58) utiliza a parcela x_+ do estado do sistema. Nem sempre esta informação é mensurável diretamente, podendo ser necessária a medição completa do estado para obter-se tal informação. Caso o estado não seja mensurável,

valor admissível de u_s . Utilizando-se argumentos de continuidade de soluções com relação à condição inicial, conclui-se que o sistema poderá levar um tempo arbitrariamente grande para mover-se de uma condição inicial arbitrariamente próxima de um destes equilíbrios. Este fato tem sido verificado na literatura (veja, por exemplo, (MILLER, PACHTER, 1998)) e é conhecido como o stickiness effect. *

A Nota 3.4.5 justifica a escolha de \mathcal{U} como um conjunto estritamente contido em \mathcal{V}_+ , com o objetivo de evitar que o sistema tenha comportamento muito lento em determinadas condições de operação. Baseado no conjunto \mathcal{U} , considere a seguinte definição.

Definição 3.4.6 Para $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}_+$, satisfazendo a Hipótese 3.4.4, sejam

1. \mathcal{F} um conjunto compacto estritamente contido em \mathcal{U} ;
2. $\mathcal{F}_+ \doteq \{x_+ \in \mathbb{R}^{n_+} : \exists u_s \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } (x_+, u_s) \in \mathcal{F}\}$
3. $\mathcal{P} : \mathbb{R}^{n_+} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{F}_+$ uma função contínua tal que

$$x_+ \in \mathcal{F}_+ \Rightarrow \mathcal{P}(x_+) = x_+ . \quad (3.60)$$

◀

O papel dos conjuntos \mathcal{F} , \mathcal{F}_+ e da função \mathcal{P} serão melhor explicitados na seqüência da Propriedade 3.4.7. Em termos dos conjuntos \mathcal{U} , \mathcal{F} e da função projeção \mathcal{P} , a propriedade a seguir estabelece formalmente os requisitos de estabilidade e desempenho desejados para o sistema *anti-windup* em malha fechada.

Propriedade 3.4.7 Denote por um til ($\tilde{\cdot}$) as variáveis correspondentes ao sistema nominal em malha fechada iniciadas em $(\tilde{x}(0), \tilde{x}_c(0)) = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_{c0})$. Então, o sistema *anti-windup* em malha fechada (3.48)-(3.50), (3.51), (3.52), (3.56)-(3.58), (3.59) é tal que para $(x(0), x_c(0)) = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_{c0})$,

1. Se $\xi(0) = 0$, $u_s(0) = \tilde{y}_c(0)$, e existe um conjunto compacto \mathcal{F}_0 e constantes positivas M_0, R_0 , tais que,

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_+(t), \tilde{y}_c(t)) &\in \mathcal{F}_0 \subset \text{int}(\mathcal{F}) \\ |\tilde{y}_c(t)| &\leq M_0 < M, \quad |\dot{\tilde{y}}_c(t)| \leq R_0 < R, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

então $z(t) = \bar{z}(t)$, $\forall t \geq 0$.

2. Se a condição inicial satisfaz $(x_+(0), u_s(0)) \in \mathcal{U}$ e r é limitada, então $(x_+(t), u_s(t)) \in \mathcal{U}$, $\forall t \geq 0$ e todas as trajetórias são limitadas.

3. Se a condição inicial satisfaz $(x_+(0), u_s(0)) \in \mathcal{U}$ e se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{x}_-(t), \tilde{x}_+(t), \tilde{x}_c(t)) = (\tilde{x}_-, \tilde{x}_+, \tilde{x}_c), \quad (3.61)$$

então $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_-(t), x_+(t), x_c(t), \xi(t), u_s(t), z(t)) = (x_-^*, \mathcal{P}(\tilde{x}_+^*), x_c^*, \xi^*, u_s^*, z^*)$.

▷

A obtenção dos requisitos estabelecidos na Propriedade 3.4.7 para o sistema *anti-windup* em malha fechada recai sobre o projeto da função α , principal parâmetro de projeto do compensador *anti-windup*. Os papéis dos conjuntos \mathcal{U} , \mathcal{F} e da função \mathcal{P} e uma interpretação dos itens da propriedade 3.4.7 são considerados a seguir.

- O item 1 da Propriedade 3.4.7 estabelece as condições nas quais o sistema em malha-fechada deve reproduzir o desempenho do sistema nominal. Duas ocorrências podem impedir que o sistema em malha-fechada se comporte como o sistema nominal. Primeiro, porque os atuadores podem atingir seus limites. Segundo, porque a trajetória do estado pode estar se aproximando da fronteira da região de operação. A primeira situação é levada em conta diretamente, enquanto que a segunda é considerada através do conjunto \mathcal{F} . Assim, \mathcal{F} determina uma sub-região dentro da região de operação do sistema em malha-fechada onde a operação é considerada segura e o desempenho nominal pode ser reproduzido. O conjunto \mathcal{F} é um parâmetro de projeto que pode ser escolhido arbitrariamente dentro das condições da Definição 3.4.6. Quanto maior o conjunto \mathcal{F} , maior a região em que se procura respeitar a atuação do controle nominal.
- O item 2 da Propriedade 3.4.7 se refere à região de operação \mathcal{U} . O conjunto \mathcal{U} deve ser positivamente invariante para a parcela da trajetória $(x_+(t), u_s(t))$, independentemente do sinal de referência. Ao mesmo tempo, exige-se que as trajetórias do sistema em malha-fechada sejam limitadas. Este item, além de impor a necessidade do sistema ficar restrito à região de operação, também impõe a propriedade de entrada limitada - estado limitado com relação ao sinal de referência.

- Se o sinal de referência não é realizável em regime permanente, o sistema anti-windup em malha-fechada não poderá atingir o mesmo estado de equilíbrio atingido pelo sistema nominal. É desejável, contudo, que o estado de equilíbrio atingido esteja próximo, segundo algum critério, daquele atingido pelo sistema nominal. A função \mathcal{P} é responsável por fazer este mapeamento entre o equilíbrio do sistema nominal e o equilíbrio do sistema anti-windup em malha-fechada. O item 3 da Propriedade 3.4.7 estabelece então que o equilíbrio atingido pelo sistema anti-windup em malha-fechada deve ser tal que $x_+^* = \mathcal{P}(\tilde{x}_+^*)$. A função \mathcal{P} é definida como uma identidade dentro do conjunto \mathcal{F}_+ de forma que, se o equilíbrio do sistema nominal é tal que $\tilde{x}_+^* \in \mathcal{F}_+$, então o sistema anti-windup convergirá para o mesmo equilíbrio. O item 3 também exige que a convergência seja assintótica para qualquer condição inicial consistente com a região de operação \mathcal{U} .

Nota 3.4.8 A função \mathcal{P} pode, em princípio, ser definida livremente para pontos fora de \mathcal{F}_+ . Uma escolha possível é a projeção ortogonal sobre o conjunto \mathcal{F}_+ , isto é, tal que

$$|\mathcal{P}(x_+) - x_+| = \text{dist}_{\mathcal{F}_+}(x_+), \quad \forall x_+ \in \mathbb{R}^{n+}$$

★

3.4.3 Projeto de α

O projeto direto de α para atender aos requisitos da Propriedade 3.4.7 é muito difícil. Nesta seção, é apresentada uma estratégia de projeto para α que se baseia na realização de um projeto de uma lei de controle mais simplificada. Para introduzir esta metodologia, considere as seguintes definições

Definição 3.4.9 Com base nos conjuntos \mathcal{F} e \mathcal{U} , defina uma função $\beta : \mathbb{R}^{n+} \times \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$, contínua em todos seus argumentos e tal que

$$\beta(x_+, u_s) \doteq \begin{cases} 1, & \text{if } (x_+, u_s) \in \mathcal{F} \\ 0, & \text{if } (x_+, u_s) \in \partial\mathcal{U} \cup \mathcal{U}^c. \end{cases} \quad (3.62)$$

◁

De acordo com a Definição 3.4.9, o papel da função β é localizar a parcela $(x_+(t), u_s(t))$ da trajetória em relação aos conjuntos \mathcal{F} e \mathcal{U} . A liberdade na escolha de β está apenas na

região $\mathcal{F}^c \cap \text{int}(\mathcal{U})$ e sua influência sobre o desempenho do sistema em malha-fechada não é significativa. Portanto, β não é vista como um parâmetro de projeto. Uma escolha possível para a função β é

$$\beta(x_+, u_s) \doteq \min \left\{ 1, \frac{\text{dist}_{(\partial\mathcal{U}\cup\mathcal{U}^c)}(x_+, u_s)}{\inf_{z \in \mathcal{F}} \text{dist}_{(\partial\mathcal{U}\cup\mathcal{U}^c)}(z)} \right\}.$$

Teorema 3.4.10 *Sejam $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{n+} \times \mathbb{R}^m$, \mathcal{F} , \mathcal{F}_+ , \mathcal{E} , \mathcal{P} e β como nas Definições 3.4.6, 3.4.2 e 3.4.9. Considere a notação da Propriedade 3.4.7.*

Então, o sistema anti-windup em malha-fechada (3.48)-(3.50), (3.51), (3.52), (3.56)-(3.58, (3.59) satisfaz os requisitos da Propriedade 3.4.7 para qualquer escolha de α na forma

$$\alpha(x_+, u_s, \eta_+, \xi, y_c) \doteq \gamma(x_+, u_s, \mathcal{P}(\eta_+), \xi, y_c) + \beta(x_+, u_s) (y_c - \gamma(\eta_+, y_c, \eta_+, 0, y_c)) \quad (3.63)$$

onde a função $\gamma: \mathbb{R}^{n+} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n+} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é continuamente diferenciável e tal que para cada $r \in \mathbb{R}^q$ (e seu correspondente par de equilíbrio $(\tilde{x}_-, \tilde{x}_+, \tilde{y}_c^*) = E(r)$) e para qualquer condição inicial $(x_-(0), x_+(0), u_s(0)) \in \mathbb{R}^{n-} \times \mathcal{U}$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. A lei de controle

$$u = \gamma(x_+, u_s, \mathcal{P}(\tilde{x}_+^*), x - \tilde{x}^*, \tilde{y}_c^*) \quad (3.64)$$

garante estabilidade assintótica de um equilíbrio $(x_-^*, x_+^*, u_s^*) \in \mathbb{R}^{n-} \times \mathcal{F}$ para o sistema (3.48), (3.51) com região de atração incluindo $\mathbb{R}^{n-} \times \mathcal{U}$ e com $x_+^* = \mathcal{P}(\tilde{x}_+^*)$;

2. Para qualquer $\tilde{x}_+^* \in \mathbb{R}^{n+}$ e $u, \tilde{y}_c^* \in \mathbb{R}^m$,

$$\gamma(\tilde{x}_+^*, u, \tilde{x}_+^*, 0, \tilde{y}_c^*) = \tilde{y}_c^*; \quad (3.65)$$

3. Para qualquer escolha de funções assintoticamente convergentes para zero $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$ e $\varepsilon_4(t)$, a lei de controle

$$u = \gamma(x_+, u_s, \Gamma(\tilde{x}_+^* + \varepsilon_1(t)), x - \tilde{x}^* + \varepsilon_2(t), \tilde{y}_c^* + \varepsilon_3(t)) + \beta(x_+, u_s)\varepsilon_4(t) \quad (3.66)$$

para o sistema (3.48), (3.51), é tal que \mathcal{U} é positivamente invariante, e todas as trajetórias são limitadas.

Com base no projeto da função γ , conforme os requisitos estabelecidos no Teorema 3.4.10, uma função α pode ser diretamente obtida de (3.63), a qual garante que o sistema *anti-windup* em malha fechada atende a todos os requisitos da Propriedade 3.4.7. É importante então comparar o nível de dificuldade do projeto de γ com o nível de dificuldade que se teria no projeto direto de α .

Um primeiro aspecto está associado aos requisitos de desempenho no projeto de α estarem associados ao sistema *anti-windup* em malha fechada enquanto que os requisitos para o projeto de γ estão ligados somente ao sistema original (3.48), (3.51). Assim, as dinâmicas, tanto do controle nominal como do compensador anti-windup, não afetam o projeto de γ .

Um outro aspecto é que o projeto de γ não utiliza informações de desempenho do sistema nominal, consistindo basicamente em um problema de estabilização, ao invés de estabilização mais desempenho, na presença de restrições de magnitude e taxa de variação no sinal de controle. Assim, resultados existentes na literatura sobre este problema podem ser diretamente aplicados no projeto de γ , em especial os resultados de (BLANCHINI, 1999, SHEWCHUN, FERON, 1997).

Nota 3.4.11 *Neste ponto fica mais clara a política adotada com relação ao seguimento do sinal de referência. O desempenho do sistema nominal com relação ao seguimento da referência é reproduzido pelo sistema anti-windup em malha-fechada enquanto os limites do sinal de controle não são atingidos e a trajetória é tal que a parcela $(x_+(t), u_s(t)) \in \mathcal{F}$. Quando os limites dos atuadores são atingidos, isto passa a não ser mais possível e o compensador anti-windup passa a atuar devido ao fato de $u_s \neq u$. Contudo, o sistema continua, dentro das limitações dos atuadores, buscando seguir o sistema nominal. Este comportamento muda quando a trajetória do sistema deixa o conjunto \mathcal{F} . Neste ponto, a lei de controle α passa a mudar de acordo com a função β e, quando a trajetória atinge a fronteira de \mathcal{U} , fica determinada apenas por γ . Das propriedades da função γ , verifica-se que o sistema passa a objetivar o seguimento de $\mathcal{P}(\tilde{x}_+(t))$, ao invés de $\tilde{x}_+(t)$, isto é, o seguimento da referência original passa a ser ignorado, e todos os esforços são direcionados para manter o estado limitado e dentro da região de operação \mathcal{U} .*

Note-se que, em contraste com a política adotada em (GILBERT et al., 1995), a modificação da referência através de \mathcal{P} só é introduzida quando a trajetória do sistema atinge a fronteira de \mathcal{F} . Note-se também que o sinal de referência pode assumir qualquer valor, seja

ele realizável ou não, em regime permanente. ★

Em algumas situações particulares, o projeto de γ pode ser simplificado. A seção seguinte discute duas destas situações.

3.4.4 Situações particulares

Ausência de modos sobre o eixo $j\omega$: No caso em que o sistema (3.48) não tem autovalores sobre o eixo imaginário, o estado x_- é limitado sempre que o sinal de referência e a parcela x_+ forem limitados. Assim, o item 3 do Teorema 3.4.10 reduz-se a garantir a invariância de \mathcal{U} , uma vez que isto implicará nas limitação das trajetórias. Contudo, como β é zero na fronteira de \mathcal{U} , isto é equivalente a exigir que a lei de controle

$$u = \gamma(x_+, u_s, \mathcal{P}(\tilde{x}_+^* + \varepsilon_1(t)), x - \tilde{x}^* + \varepsilon_2(t), \tilde{y}_c^* + \varepsilon_3(t)) \quad (3.67)$$

torne \mathcal{U} positivamente invariante para quaisquer funções $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ e $\varepsilon_3(t)$ assintoticamente convergentes para zero.

Uma simplificação adicional que pode ser introduzida no projeto de γ para este caso particular está relacionada ao seu quarto argumento. Considere, por exemplo, a seguinte estrutura para γ ,

$$\gamma(x_+, u_s, \mathcal{P}(\tilde{x}_+^*), x - \tilde{x}^*, \tilde{y}_c^*) = \gamma_1(x_+, u_s, \mathcal{P}(\tilde{x}_+^*), \tilde{y}_c^*) + \beta(x_+, u_s) \gamma_2(x_- - \tilde{x}_-^*),$$

Nesta estrutura, γ_2 atua sobre os modos estáveis do sistema (3.48) e, pode-se assumir $\gamma_2(0) = 0$. Eventualmente, γ_2 pode ser escolhido identicamente zero, caso em que nenhuma ação será realizada sobre os modos estáveis.

Na fronteira de \mathcal{U} , o efeito de γ_2 é zerado pela função β . Logo, γ_2 não tem efeito sobre a invariância de \mathcal{U} e esta pode ser obtida através do seguinte controle em lugar de (3.67).

$$u = \gamma_1(x_+, u_s, \mathcal{P}(\tilde{x}_+^* + \varepsilon_1(t)), \tilde{y}_c^* + \varepsilon_3(t)),$$

Por conseqüência, os itens 2 e 3 do Teorema 3.4.10 são independentes de γ_2 e, se $\gamma_2 \equiv 0$, o quarto argumento de γ fica descartado. Assim, para atender aos requisitos do Teorema 3.4.10 é suficiente projetar γ_1 com base apenas na parcela x_+ do estado do sistema.

Sem modos instáveis: No caso particular em que o sistema não contém modos instáveis, isto é, $n_+ = 0$, a região de controlabilidade para zero engloba todo o espaço de estados R^n (veja Lema 1.5.3 e (SCHMITENDORF, BARMISH, 1980, SHEWCHUN, FERON, 1997)). Como a parcela do estado x_+ não existe neste caso, as funções β e \mathcal{P} não tem mais significado, e a saída (3.57) fica simplificada na forma

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha(x_+, u_s, x_+ - \xi_+, \xi, y_c) && - y_c \\ &= \gamma_0(u_s, \xi, y_c) + y_c - \gamma_0(y_c, 0, y_c) && - y_c \\ &= \kappa(\xi), \end{aligned} \tag{3.68}$$

onde se fez a escolha $\gamma_0(u_s, \xi, y_c) = \kappa(\xi) + y_c$, independente da variável u_s . Se $\kappa(0) = 0$, o item 2 do Teorema 3.4.10 fica satisfeito. Os itens 1 e 3 do teorema resumem-se a garantir estabilidade assintótica global do sistema original (3.48) com restrições de magnitude e taxa de variação no sinal de controle e na presença de perturbações assintoticamente convergentes para zero. O projeto de $\kappa(\cdot)$ atendendo a estes requisitos pode ser feito empregando-se resultados existentes na literatura (TEEL, 1996a, SHEWCHUN, FERON, 1997, LIN, 1998b, LAUVDAL, 1998, FREEMAN, PRALY, 1998). No caso do sistema estar sujeito apenas a restrições em magnitude, o compensador anti-windup (3.56)-(3.58) reduz-se ao compensador anti-windup \mathcal{L}_2 (3.35)-(3.37).

3.5 Estudo de Caso

Nesta seção será considerado um exemplo ilustrativo do problema de seguimento de referência com restrições no controle. Através deste exemplo, algumas propriedades de desempenho da técnica baseada em *anti-windup* proposta na seção 3.4 são elucidadas. Uma análise comparativa com as técnicas de seguimento ótimo, controle com horizonte deslizante e condicionamento de referência é também apresentada.

Os resultados apresentados nesta seção são baseados em (BARBU et al., 1999), porém diversas extensões são feitas para tornar a análise mais abrangente. Consiste em um controle da taxa de variação do ângulo de *pitch* em um controle manual de vôo, onde é considerado apenas o modelo longitudinal da aeronave.

Considere o seguinte sistema linear contínuo correspondente a um modelo linearizado da

dinâmica longitudinal de uma aeronave.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad c = [0 \quad 1] \quad (3.69)$$

Como estado tem-se $x = [\alpha, q]'$, onde α é o ângulo de ataque e q é a taxa de variação do ângulo de *pitch* (*pitch rate*). A entrada u_s representa do efeito concentrado da atuação, e considera-se que é limitada em magnitude ($M = 0.35$) e taxa de variação ($R = 0.7$) na forma

$$\dot{u}_s = R \operatorname{sgn}(\operatorname{sat}_M(u) - u_s) \quad (3.70)$$

O problema de seguimento consiste em projetar um controle tal que o desempenho do sistema em malha fechada reproduza o desempenho do seguinte *modelo de referência*,

$$G_r(s) \doteq \frac{y_r(s)}{r_r(s)} = \frac{s+1}{s^2+1.5s+1} \quad (3.71)$$

Para atingir tal objetivo, uma escolha possível para o controle nominal é a ilustrada na Figura 3.7 com

$$C_{ff}(s) = \frac{s+1}{1.5s+1}, \quad C_{fb}(s) = \frac{1.5s+1}{8s}, \quad K_s = \frac{1}{8}[-6 \quad 2] \quad (3.72)$$

Pode-se verificar facilmente que a função de transferência de r para y coincide com $G_r(s)$.

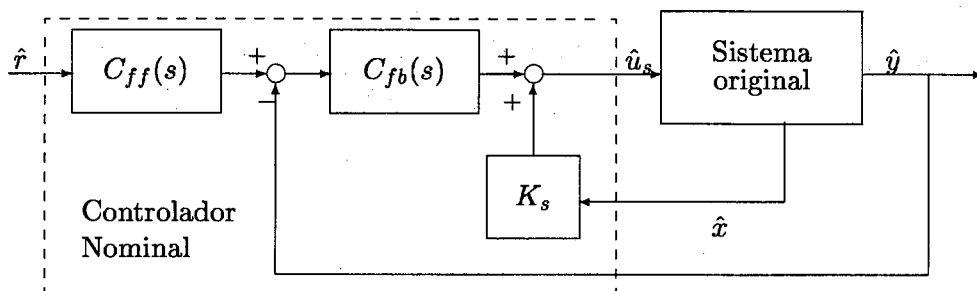


Figura 3.7: Controle nominal.

Para o sistema nominal em malha fechada (Figura 3.7) a variedade de equilíbrio \mathcal{E} pode ser obtida como

$$\mathcal{E} = \left\{ (x_1, x_2, u_s) = \left(r, r, -\frac{r}{2} \right), r \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.73)$$

Com uma transformação de coordenadas adequada, o sistema (3.69) pode ser diagonalizado na forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_+ \\ \dot{x}_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_+ \\ x_- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u_s \quad (3.74a)$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_+ \\ x_- \end{bmatrix} \quad (3.74b)$$

A presença de um autovalor no semiplano direito indica que o domínio de controlabilidade para zero é limitado na direção de x_+ . No presente caso, o domínio do controlabilidade para zero pode ser determinado explicitamente como

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_+ \times \mathbb{R} \quad (3.75)$$

$$\mathcal{V}_+ = \{(x_+, u) : |u| \leq M, v(x_+, u, M, R) < 0\} \quad (3.76)$$

onde

$$v(x_+, u, M, R) = -[(x_+ + b_1 u + b_1 R)e^{(M-u)/R} - b_1(R + 2M)] \\ [(x_+ + b_1 u - b_1 R)e^{(M+u)/R} + b_1 R] \quad (3.77)$$

Para evitar a operação do sistema próximo à fronteira do domínio de controlabilidade para zero, foi adotada como região de operação \mathcal{U} o conjunto

$$\mathcal{U} = \{(x_+, u) : |u| \leq M, v(x_+, u, \tilde{M}, \tilde{R}) \leq 0\} \quad (3.78)$$

onde $\tilde{M} = 0.7M$ e $\tilde{R} = 0.7R$. Por fim, o conjunto \mathcal{F} é escolhido uma contração de \mathcal{U} , isto é, para $\delta > 0$ pequeno,

$$\mathcal{F} = \{(x_+, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (1 + \delta)(x_+, u) \in \mathcal{U}\} \quad (3.79)$$

Para o presente caso, foi adotado $\delta = 0.01$, significando que os conjuntos \mathcal{F} e \mathcal{U} são muito similares, porém $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ estritamente.

Os conjuntos \mathcal{V}_+ , \mathcal{U} e \mathcal{F} estão ilustrados na Figura 3.8. A variedade de equilíbrio também

⁵Para tornar a figura mais didática, foi utilizado um valor maior para δ , $\delta = 0.05$, na determinação do

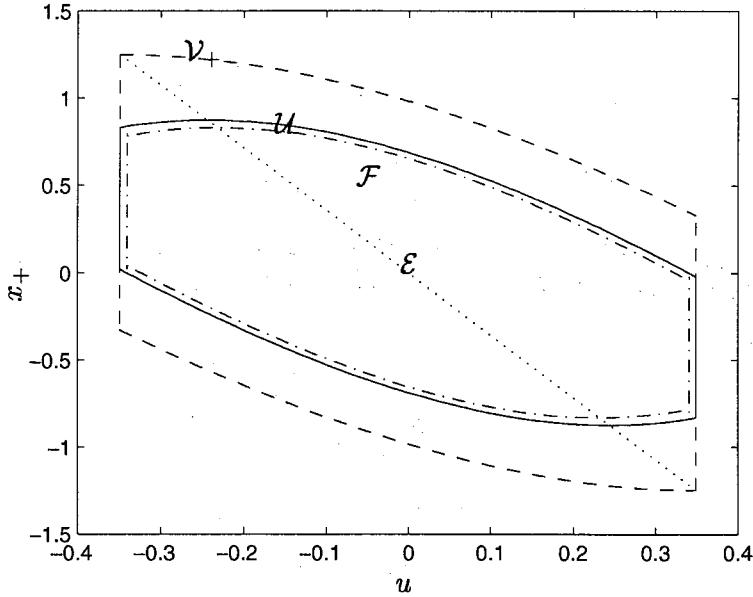


Figura 3.8: Conjuntos \mathcal{V}_+ , \mathcal{U} , \mathcal{F} e \mathcal{E} .

esta mostrada na mesma figura.

Como o sistema não contém autovalores com parte real nula, recai-se em um dos casos particulares mencionados na seção 3.4.4 e γ pode ser projetada com base no subsistema x_+ . Para os conjuntos \mathcal{U} e \mathcal{F} descritos acima, a lei de controle

$$\gamma(\zeta_1, \zeta_2) = -\frac{1}{b_1}(\zeta_1 + K(\zeta_1 - \zeta_2)) \quad (3.80)$$

satisfaz as condições do Teorema 3.4.10 para $K \in (0, K_{max})$ onde $K_{max} = \frac{e^{2M/R} - 1}{e^{2M/R}(2M/R - 1) + 1}$.

Note que no equilíbrio, $u = -x_+/b_1 = \gamma(x_+, x_+)$, satisfazendo o item 2 do teorema. Também, a lei de controle $u_s = \gamma(x_+, \eta_+^*)$ estabiliza globalmente o ponto $x_+ = \eta_+^*$ na ausência de restrições. Com isto, para provar os itens 1 e 3 do teorema, basta provar a invariância de \mathcal{U} . Isto pode ser feito analisando as trajetórias do sistema sobre a fronteira de \mathcal{U} e concluindo que, para K dentro da faixa especificada, nenhuma trajetória deixa \mathcal{U} .

O projeto do compensador *anti-windup* fica terminado com uma escolha para β . Esta é

escolhida como uma função contínua na forma ⁶

$$\beta(x_+, u) = \begin{cases} 0, & v(x_+, u, \tilde{M}, \tilde{R}) \leq 0 \\ \min\{1, K_v v(x_+, u, \tilde{M}, \tilde{R})\}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.81)$$

O desempenho da estratégia *anti-windup* para seguimento de referência com restrições no controle é analisado a seguir. O desempenho desejado é determinado pelo modelo de referência (3.71). A análise é feita para um sinal de referência r_r consistindo em degraus na forma

$$r_r = \begin{cases} A_r & 0 \leq t < 4s \\ -A_r & 4s \leq t < 8s \\ 0 & 8s \leq t \leq 12s \end{cases} \quad (3.82)$$

A Figura 3.9 ilustra a resposta do sistema *anti-windup* e do modelo de referência. Também mostra o sinal de controle do sistema *anti-windup*. Para este caso, o sistema *anti-windup* reproduz com boa precisão o sinal de referência, resultando em um bom desempenho de seguimento, pois praticamente não há atuação dos limites dos atuadores.

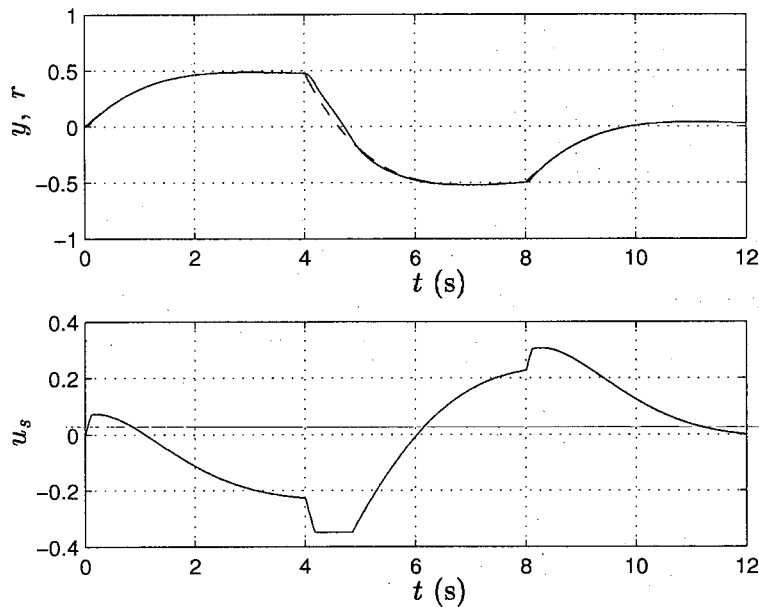


Figura 3.9: Resposta do sistema *anti-windup* em malha fechada para $A_r = 0.45$ (linha sólida). Sinal de referência (linha tracejada).

⁶Basta escolher K_v suficientemente grande para que $\beta = 1$ em \mathcal{F} .

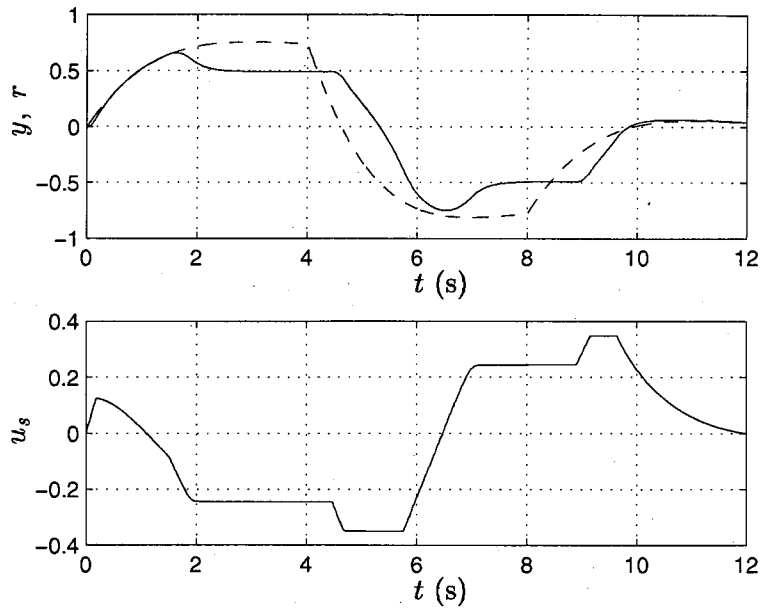


Figura 3.10: Resposta do sistema *anti-windup* em malha fechada para $Ar = 0.7$.

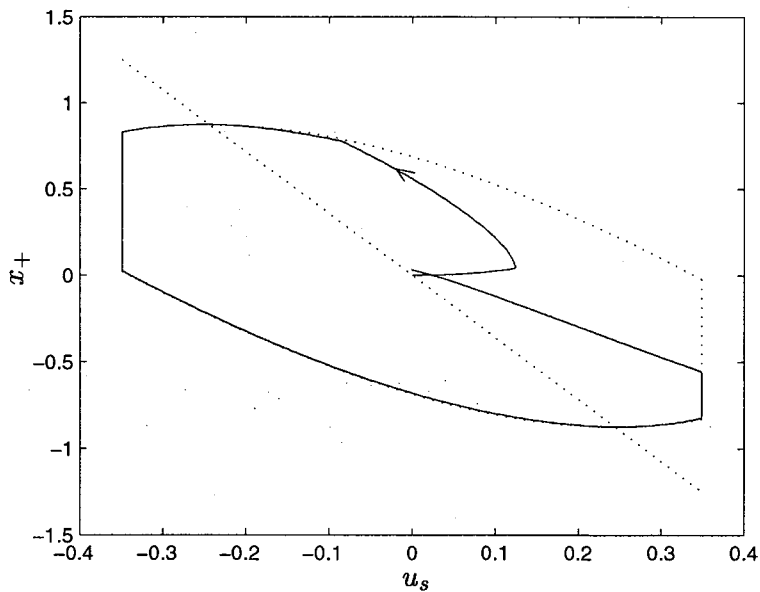


Figura 3.11: Resposta do sistema *anti-windup* em malha fechada para $Ar = 0.7$ (linha sólida). Vista no plano (x_+, u_s) em conjunto com a região de operação \mathcal{U} e a variedade de equilíbrio (linha pontilhada).

Na Figura 3.10 tem-se a resposta do sistema *anti-windup* e do modelo de referência para um sinal de referência maior, no caso $Ar = 0.7$. Observa-se que o erro de seguimento é maior

neste caso, especialmente em torno do degrau para baixo na referência. Pare este sinal de referência, os limites do atuador são atingidos, bem como a fronteira da região de operação \mathcal{U} . Isto é melhor ilustrado na Figura 3.11, onde se tem a mesma trajetória da Figura 3.10 mostrada no plano (x_+, u_s) juntamente com a região de operação \mathcal{U} . Nota-se que o sistema opera grande parte do tempo na fronteira da região de operação. Inicialmente, o sistema opera apenas com o limite de taxa de variação no atuador fazendo um seguimento preciso da referência. Ao atingir a fronteira de \mathcal{U} , o sistema é impedido de continuar o seguimento e limita-se a garantir a invariância de \mathcal{U} . Somente no final do ensaio o sistema consegue voltar ao seguimento preciso do sinal de referência.

Para propiciar uma análise comparativa de desempenho, são apresentados, a seguir, resultados obtidos da aplicação de outras técnicas de seguimento de referência sob restrições ao presente problema. Foram consideradas as técnicas de seguimento ótimo com restrições, controle com horizonte deslizante e o condicionamento de referência. Para a aplicação destas técnicas o sistema (3.69) e o controlador nominal (Figura 3.7) foram discretizados com período de amostragem $T_a = 0.1s$.

Seguimento ótimo com restrições. Nesta análise procura-se responder a seguinte pergunta. Dadas as restrições do problema, o que pode ser feito de *melhor*, em termos de seguimento da referência em questão?

Para tratar esta questão, um problema de seguimento ótimo com restrições é formulado de acordo com a seção 3.2.1. O sistema (3.69) em tempo discreto é aumentado com um integrador na entrada conforme (3.2), e o problema de otimização (3.5) é resolvido para $Q = 1$, $R = 1$ e $N = 120$. Ao problema (3.5) são acrescentadas restrições para forçar a operação do sistema dentro do conjunto \mathcal{U} . Para tanto, uma aproximação politópica do conjunto \mathcal{U} é considerada (Figura 3.12) para permitir a solução do problema como um programa quadrático.

A trajetória ótima obtida para as mesmas condições da Figura 3.10 está mostrada na Figura 3.13. Como seria de se esperar, devido à natureza preditiva do controle ótimo, o seguimento da referência é mais preciso que o obtido com o *anti-windup*. Nota-se, contudo, as mesmas limitações de seguimento nos instantes próximos aos picos de cima e de baixo da resposta, mostrando que estas não são limitações do *anti-windup* em si, mas são devidas à região de operação.

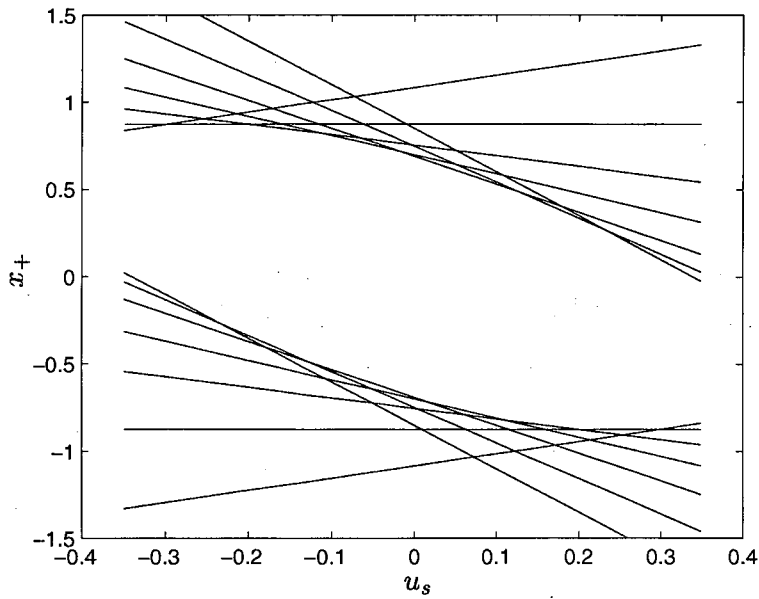


Figura 3.12: Aproximação politópica do conjunto \mathcal{U} .

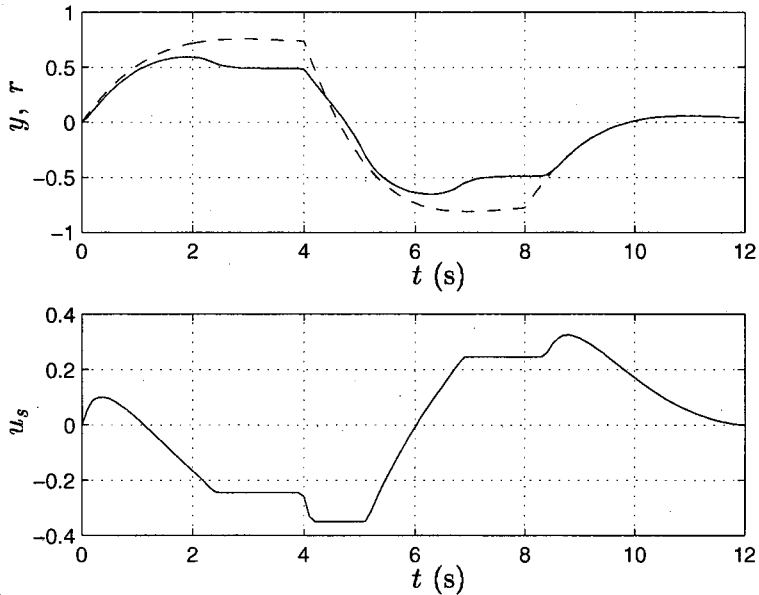


Figura 3.13: Seguinto ótimo com restrições para $Ar = 0.7$ (linha sólida). Sinal de referência (linha tracejada).

Esta estratégia de seguimento ótimo, embora produza um bom resultado, não é prática, pois o controle obtido é em malha aberta. O propósito de incluir este resultado é apenas para fins de comparação.

Controle com horizonte deslizante. A estratégia de controle com horizonte deslizante descrita na seção 3.2.2 é também aplicada ao presente estudo de caso. O problema (3.8) é resolvido *on-line* a cada instante de amostragem, e o controle implementado de acordo com (3.9). Para a solução deste problema é considerado um horizonte $N = 20$ e pesos $Q = R = 1$.

A Figura 3.14 ilustra os resultados obtidos. Quando a restrição da região de operação \mathcal{U} é considerada, o controle com horizonte deslizante fornece desempenho similar ao seguimento ótimo (Figura 3.13). Neste caso, a restrição da região de operação garante estabilidade, pois garante limitação do estado instável que, juntamente a limitação do controle, garante limitação do estado estável x_{-} .

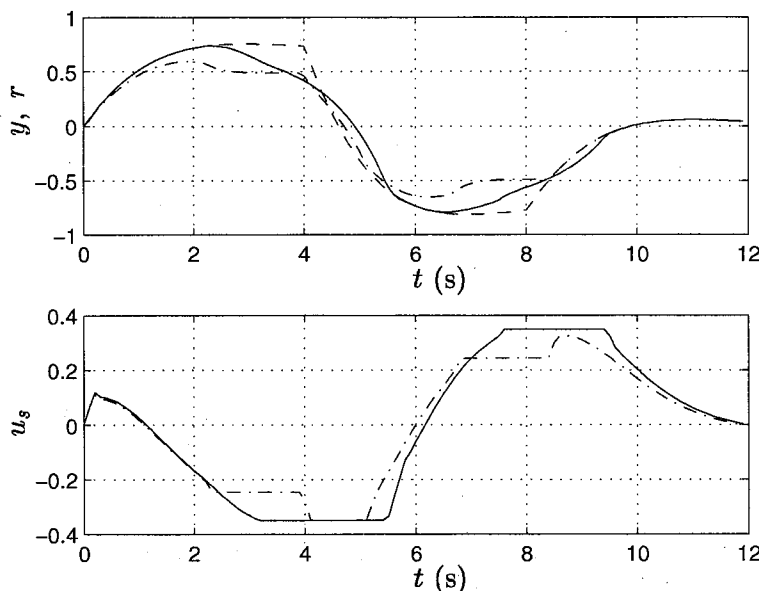


Figura 3.14: Controle com horizonte deslizante para $Ar = 0.7$ e horizonte $N = 20$ implementado sem (sólida) e com (traço-ponto) a restrição da região de operação \mathcal{U} . Sinal de referência (tracejada).

Por outro lado, observa-se que o seguimento da referência é mais preciso quando a restrição da região de operação não é considerada, mostrando que, permitindo-se uma maior região de operação, é possível obter resultados melhores para sinais de referência específicos. Contudo, neste caso, existem sinais de referência para os quais esta estratégia de controle é instável, especialmente sinais que não são realizáveis em regime permanente.

Condicionamento de referência. Primeiramente o sistema (3.16) é construído a partir de (3.69) e do controlador nominal ⁷ (Figura 3.7) com saída $z(k) = (u(k), u(k+1) - u(k))$. O conjunto de restrições é então determinado como $Z = \{(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |u| \leq M; |v| \leq RT_a\}$. Com isto, uma aproximação do conjunto saída admissível é obtida de acordo com a Nota 3.2.14 para $\epsilon = 0.3M$. Para obtenção desta aproximação foi utilizado (GILBERT et al., 1995, Algoritmo 3.2). Esta aproximação é representada por 304 desigualdades lineares ⁸.

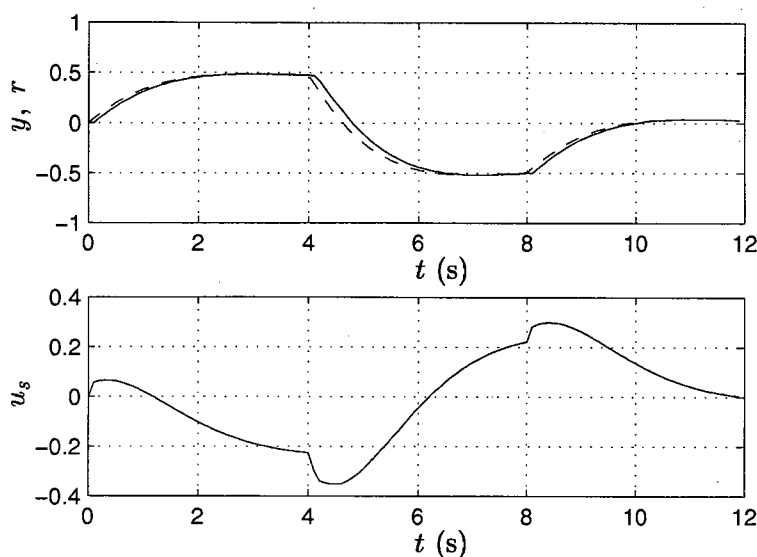


Figura 3.15: Resposta do condicionador de referência para $Ar = 0.45$ (linha sólida). Referência (linha tracejada).

Com o conjunto saída admissível assim obtido, o condicionador de referência (3.18) é implementado por meio de um programa linear resolvido *on-line*. Os resultados estão nas Figuras 3.15 e 3.16, as quais mostram simulações nas mesmas condições das Figuras 3.9 e 3.10. Observa-se que o condicionador de referência produz uma resposta com forma similar a referência, porém com erro de seguimento considerável no caso da Figura 3.16. Também, observa-se que o erro de seguimento no início da simulação é maior que no caso do *anti-windup*. Isto é inerente ao condicionador de referência que limita, *a priori*, o sinal de referência a valores admissíveis em regime permanente. O *anti-windup*, por outro lado, somente modifica o controle nominal quando necessário, fato que lhe confere uma resposta mais próxima da

⁷O controlador nominal possui um modo não-observável de sua saída, o qual pode ser removido para fins de cálculo do conjunto saída admissível.

⁸Não houve preocupação em eliminar desigualdades redundantes, de modo que existem desigualdades desnecessárias.

linear (mais rápida) no início.

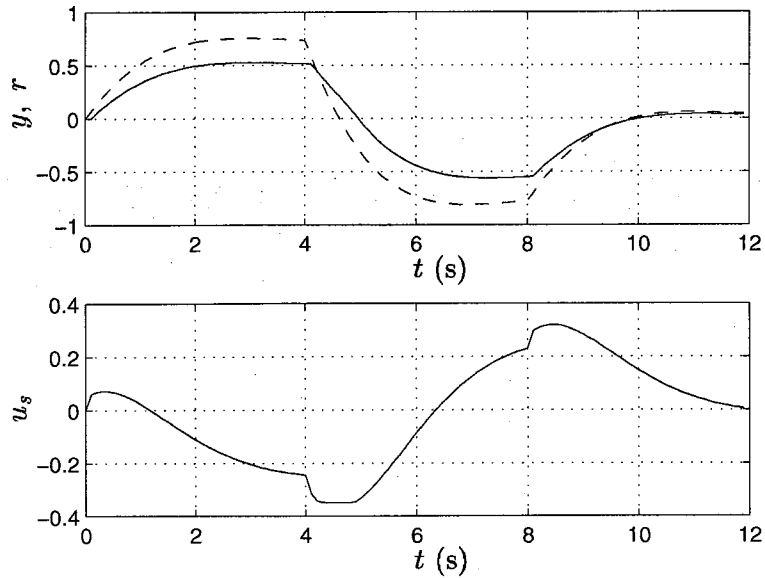


Figura 3.16: Resposta do condicionador de referência para $Ar = 0.7$ (linha sólida). Referência (linha tracejada).

3.6 Prova do Teorema 3.4.10

Na prova do teorema 3.4.10 utiliza-se o resultado do Lema 1.4.1.

O teorema será provado mostrando que, sob as condições estabelecidas sobre γ , a função α definida por (3.63) é tal que todos os itens da Propriedade 3.4.7 são satisfeitos.

Sejam $X \doteq x - \xi$, $Y \doteq y + v_2$, $z_\xi \doteq C_z \xi + D_z (u - y_c)$ e $Z \doteq z - z_\xi$. A representação do sistema *anti-windup* em malha fechada (3.48)-(3.50), (3.51), (3.52), (3.56)-(3.58, (3.59) nas novas coordenadas (X, x, x_c, u) resulta,

$$(X, x_c) \begin{cases} \dot{X} = AX + By_c \\ Y = C_y X + D_y y_c \\ Z = C_z X + D_z y_c \\ \dot{x}_c = g(x_c, Y, r) \\ y_c = k(x_c, Y, r) \end{cases} \quad (3.83)$$

$$(x, u_s) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu_s \\ \dot{u}_s = R \operatorname{sgn}(\operatorname{sat}_M(u) - u_s), \\ u = \gamma(x_+, u_s, \mathcal{P}(X_+), x - X, y_c) + \beta(x_+, u_s)(y_c - \gamma(X_+, y_c, X_+, 0, y_c)) \end{cases} \quad (3.84)$$

Note que o sistema nesta forma possui uma estrutura em cascata, onde o subsistema (X, x_c) alimenta o subsistema (x, u_s) .

Item 1. Sejam as seguintes condições iniciais para o sistema anti-windup em malha-fechada

$$x(0) = \tilde{x}(0) \quad (3.85)$$

$$x_c(0) = \tilde{x}_c(0) \quad (3.86)$$

$$u(0) = \tilde{y}_c(0) \quad (3.87)$$

$$\xi(0) = 0. \quad (3.88)$$

Assim, $(X(0), x_c(0)) = (\tilde{x}(0), \tilde{x}_c(0))$ e, como as equações descrevendo o subsistema (X, x_c) (3.83) coincidem com as equações descrevendo o sistema nominal, segue que

$$X(t) = \tilde{x}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.89)$$

$$Z(t) = \tilde{z}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.90)$$

$$y_c(t) = \tilde{y}_c(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.91)$$

Basta provar que, sob as condições deste item, $(x(t), u_s(t)) = (X(t), y_c(t))$ é a única solução⁹ do subsistema (x, u_s) (3.84). Deste fato, segue imediatamente que $z_\xi(t) = 0, \forall t \geq 0$, e daí $z(t) = \tilde{z}(t), \forall t \geq 0$.

Para a prova da unicidade será utilizado o Lema 1.4.1 após derivar limites sobre $|u|$ e $|\dot{u}|$. Primeiramente note que

$$\mathcal{P}(X_+(t)) = X_+(t) = \tilde{x}_+(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (3.92)$$

fato que segue da hipótese $(\tilde{x}_+(t), \tilde{y}_c(t)) \in \mathcal{F}, \forall t \geq 0$ em conjunto com a equação (3.89) e a propriedade (3.60) de $\mathcal{P}(\cdot)$.

Adicionalmente, se $(x_+, u_s) \in \mathcal{F}$, segue da compacidade de \mathcal{F} e das equações (3.48),

⁹Pode-se facilmente verificar que esta constitui uma solução. Porém, não é possível afirmar a sua unicidade diretamente, pois o lado direito de (3.84) não é localmente Lipschitz.

(3.51), que existe $L > 0$ tal que

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_+ \\ \dot{u}_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_+ x_+ + B_+ u_s \\ R \operatorname{sgn}(\operatorname{sat}_M(u) - u_s) \end{vmatrix} \leq L. \quad (3.93)$$

Sejam $\delta \doteq \inf_{x \in \mathcal{F}_0} \operatorname{dist}_{\partial \mathcal{F}}(x)$ e $T \doteq \delta/L$. Uma vez que \mathcal{F}_0 é um conjunto compacto estritamente contido em \mathcal{F} , a partir da desigualdade (3.93) e invocando a continuidade de soluções com relação ao tempo, pode-se afirmar que para qualquer $t_o \geq 0$ (note que T não depende de t_o),

$$(x_+(t_o), u_s(t_o)) \in \mathcal{F}_0 \implies (x_+(t), u_s(t)) \in \mathcal{F}, \quad \forall t \in [t_o, t_o + T], \quad (3.94)$$

De (3.85) obtém-se $x_+(0) = \tilde{x}_+(0)$, o qual combinado com (3.87) e com a hipótese de que $(\tilde{x}_+(t), \tilde{u}(t)) \in \mathcal{F}_0, \forall t$, permite concluir que $(x_+(0), u_s(0)) \in \mathcal{F}_0$. Assim, de (3.94) obtém-se que $(x_+(t), u_s(t)) \in \mathcal{F}, \forall t \in [0, T]$, e utilizando-se (3.91), a definição de β , e (3.92), o sinal de controle u é dado por

$$u(t) = \tilde{y}_c(t) + \gamma(x_+(t), \tilde{y}_c, X_+(t), x(t) - X(t), \tilde{y}_c) - \gamma(X_+(t), \tilde{y}_c, X_+(t), 0, \tilde{y}_c), \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.95)$$

Utilizando a compacidade de \mathcal{F} e a diferenciabilidade de γ , podem-se encontrar funções contínuas, não-negativas e não-decrescentes $\rho_i, i = 1, 2, 3$, tais que $\rho_1(0) = \rho_2(0) = 0$, e para todo $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq |\tilde{y}_c(t)| + \rho_1(|x(t) - X(t)|) \\ |\dot{u}(t)| &\leq |\dot{\tilde{y}}_c(t)| + \rho_2(|x(t) - X(t)|) + \rho_3(|x(t) - X(t)|) |\dot{x}(t) - \dot{X}(t)|, \end{aligned} \quad (3.96)$$

Como $x(0) = X(0), u_s(0) = \tilde{y}_c(0)$ e pela continuidade das funções $\rho_i, i = 1, 2, 3$, para cada $\epsilon > 0$, existe $T_\epsilon > 0$, independente das condições iniciais, tal que (lembrando que $\xi = x - X$)

$$\max \left\{ \rho_1(|x(t) - X(t)|), \rho_2(|x(t) - X(t)|) + \rho_3(|x(t) - X(t)|) |\dot{x}(t) - \dot{X}(t)| \right\} \leq \epsilon, \quad \forall t \in [0, T_\epsilon].$$

Assim, levando em conta as hipóteses $|\tilde{y}_c(t)| \leq M_0 < M, |\dot{\tilde{y}}_c(t)| \leq R_0 < R$, e escolhendo

$\epsilon = \min\{M - M_0, R - R_0\}$, as equações em (3.96) podem ser limitadas conforme

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq M \\ |\dot{u}(t)| &\leq R, \end{aligned} \quad \forall t \in [0, T_\epsilon]. \quad (3.97)$$

As desigualdades em (3.97) permitem fazer uso do Lema 1.4.1 para obter que

$$(x(t), u_s(t)) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}_c(t)), \quad \forall t \in [0, T_\epsilon],$$

é a única solução do subsistema (x, u_s) (3.84) para as condições iniciais (3.85) e (3.87) no intervalo $[0, T_\epsilon]$. Logo, $(x_+(T_\epsilon), u(T_\epsilon)) = (\tilde{x}_+(T_\epsilon), \tilde{y}_c(T_\epsilon)) \in \mathcal{F}_0$, e o mesmo argumento pode ser repetido para estender a solução para o intervalo $[T_\epsilon, 2T_\epsilon]$, e, assim, sucessivamente, até o tempo T . Como T é uniforme com relação ao tempo inicial, a solução pode ser estendida até o infinito, e o item 1 da Propriedade 3.4.7 está satisfeito.

Item 2. Como as equações do subsistema (X, x_c) (3.83) coincidem com as do sistema nominal e, por hipótese, $(\tilde{x}(t), \tilde{x}_c(t)) \rightarrow (\tilde{x}^*, \tilde{x}_c^*)$,

$$\begin{aligned} X(t) &= \tilde{x}^* - \epsilon_2(t) \\ X_+(t) &= \tilde{x}_+^* + \epsilon_1(t) \\ y_c(t) &= \tilde{y}_c^* + \epsilon_3(t), \end{aligned}$$

onde $\epsilon_1(t)$, $\epsilon_2(t)$ e $\epsilon_3(t)$ são funções assintoticamente convergentes para zero e $\tilde{y}_c^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}_c(t)$. Como, por hipótese do Teorema 3.4.10 (item 2), $\gamma(x_+, y_c, x_+, 0, y_c) = y_c$ para quaisquer x_+ e y_c , então, por continuidade de γ ,

$$\epsilon_4(t) := y_c(t) - \gamma(X_+(t), y_c(t), X_+(t), 0, y_c(t)) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty,$$

e u pode ser escrito como

$$\begin{aligned} u(t) &= \gamma(x_+(t), u_s(t), \mathcal{P}(\tilde{x}_+^* + \epsilon_1(t)), x(t) - \tilde{x}^* + \epsilon_2(t), \tilde{y}_c^* + \epsilon_3(t)) \\ &\quad + \beta(x_+(t), u_s(t)) \epsilon_4(t). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Do item 3 do Teorema 3.4.10, conclui-se que para qualquer condição inicial $(x_+(0), u_s(0)) \in \mathcal{U}$, resulta $(x_+(t), u(t)) \in \mathcal{U}$, $\forall t \geq 0$ e $(x(t), u(t))$ é limitado. Conseqüentemente, todos os estados são limitados, e o item 2 da Propriedade 3.4.7 está satisfeito.

Item 3. Como $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$ e $\varepsilon_4(t)$ na equação (3.98) são convergentes para zero, o item 3 do Teorema 3.4.10 garante limitação das trajetórias. Devido à hipótese (3.61) no item 3 da Propriedade 3.4.7 e devido a (3.89)-(3.91), segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (X_-(t), X_+(t), x_c(t)) = (\tilde{x}_-, \tilde{x}_+, \tilde{x}_c). \quad (3.99)$$

Baseado em resultados sobre a estabilidade de sistemas em cascata (SEPULCHRE et al., 1997, cap. XX) aplicados sobre o sistema em cascata (3.83), (3.84), a estabilidade interna do sistema nominal e a hipótese de estabilidade do item 1 do Teorema 3.4.10 (lembrando que as trajetórias do sistema anti-windup em malha-fechada são limitadas) são suficientes para garantir a propriedade de convergência (lembrando que $\xi = x - X$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_-(t), x_+(t), x_c(t), \xi(t), u_s(t)) = (x_-^*, x_+^*, x_c^*, \xi^*, u_s^*).$$

Adicionalmente, pela equação (3.63) e das propriedades de γ , segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(x_+(t), u_s(t), \mathcal{P}(\tilde{x}_+^*), x(t) - \tilde{x}^*, \tilde{y}_c^*),$$

Daí, pelo item 1 do Teorema 3.4.10, $x_+^* = \mathcal{P}(\tilde{x}_+^*)$, garantindo que o item 3 da Propriedade 3.4.7 está satisfeita.

3.7 Comentários Conclusivos

O problema de seguimento de referência para sistemas lineares com modos instáveis e com restrições tanto em magnitude como em taxa de variação no sinal de controle foi considerado. Uma estratégia de controle foi proposta a qual segue a abordagem do *anti-windup*.

Resultados de simulação foram apresentados para um controle do ângulo de *pitch* de uma aeronave, mostrando as principais propriedades da estratégia proposta. Também foram apresentados resultados comparativos com outras estratégias de controle, a saber: controle ótimo sob restrições, controle com horizonte deslizante e condicionamento de referência.

A estratégia de controle proposta não impõe restrições sobre a magnitude do sinal de referência, como é o caso no condicionador de referência. Também, a técnica permite total liberdade no projeto do desempenho de seguimento local (para sinais de pequena magnitude). No condicionador de referência, por outro lado, o controle local projetado interfere no domínio

de estabilidade garantido, pois o conjunto saída admissível é dependente do estado do controle nominal.

A vantagem em não impor restrições na magnitude do sinal de referência é que, desta forma, pode-se manipular o sinal de referência para obter transições mais rápidas do sistema em malha fechada.

Os resultados de simulação também foram comparados às respostas obtidas com controle ótimo e com controle por horizonte deslizante. Estas técnicas, por sua natureza preditiva, conseguem uma melhor utilização do esforço de controle na tarefa de seguimento da referência. Por outro lado, a estratégia de controle baseada em *anti-windup* tem a vantagem de não exigir a solução de um problema de otimização *on-line* e não exigir o conhecimento do sinal de referência futuro.

Capítulo 4

Compensação de Saturação em Sistemas Não-Lineares

4.1 Introdução

Neste capítulo considera-se o problema de saturação para sistemas não-lineares. A primeira vista, pode parecer estranho, no contexto de sistemas não-lineares, tratar a saturação no controle como algo diferenciado, e não apenas como mais uma não-linearidade no sistema. Entretanto, basta observar que a grande maioria dos sistemas práticos se enquadra na classe de sistemas não-lineares afins, possuindo uma representação na forma

$$\dot{x} = f_a(x) + f_b(x)u \quad (4.1)$$

Para este sistema, as não-linearidades ficam restritas ao estado, enquanto a entrada de controle não sofre a ação direta de não-linearidades. Pois que a saturação no controle é exatamente isto, uma não-linearidade presente no canal de entrada.

O ponto crucial da saturação no controle está em diferenciar drasticamente o comportamento local do sistema (sinais de controle pequenos) de seu comportamento em termos globais (sinais de controle de magnitude maior). Esta separação de comportamentos, contudo, é consistente com os objetivos usuais de projeto, motivo pelo qual a saturação é usualmente negligenciada a priori. Negligenciar a saturação é, sobretudo, uma facilitação do projeto, mesmo no contexto de sistemas não-lineares. Não obstante, negligenciar a saturação é uma consideração muito menos restritiva do que linearizar o sistema em torno de um ponto de

operação. Daí uma das necessidades de considerar o problema da compensação de saturação no contexto de sistemas não-lineares.

Os requisitos de desempenho do sistema recaem usualmente sobre seu comportamento local, em torno do ponto de operação. Em geral, dificilmente será necessário garantir desempenho sobre uma condição de operação do sistema físico a qual é esporádica e, eventualmente, de risco. Contudo, há necessidade de estabelecer garantias para que, mesmo nestas situações adversas e esporádicas, o sistema ainda opere em uma condição “segura”.

Desta observação advém a noção de que os objetivos de controle são distintos em diferentes condições de operação do sistema. Notadamente, de acordo com a discussão elaborada, objetivos de desempenho estão relacionados ao comportamento local do sistema, enquanto estabilidade é um objetivo de controle que deve valer em termos mais globais ¹.

Dado que os objetivos de controle *locais* e *globais* são distintos, é natural a alternativa de projetar controladores distintos para atingir tais objetivos. Naturalmente, segue a necessidade de “juntar”, “unificar” estes controle distintos na tarefa de controlar o sistema em questão. Este passo não é necessariamente simples, uma vez que é preciso preservar o desempenho induzido pelo controlador local, pois, de outra forma, a metodologia não faria sentido.

O problema da compensação da saturação em sistemas não-lineares pode ser visto dentro desta formulação, tendo em vista a divisão natural (local, global) introduzida pela saturação. Tendo em vista que a grande maioria das técnicas de controle para sistemas não-lineares assume que o sinal de controle é ilimitado (REGINATTO, DE PIERI, 1999, REGINATTO, DE PIERI, 1998, REGINATTO, 1998, KHALIL, 1996, SEPULCHRE et al., 1997, KRSTIĆ et al., 1995), pode-se ver como uma vantagem desta abordagem a possibilidade de utilizar estas técnicas para induzir o desempenho local do sistema.

Neste capítulo, a estratégia de unificação de controladores locais e globais proposta em (TEEL, KAPOOR, 1997b) é apresentada na seção 4.2. Com base neste estratégia, são revelados aspectos estruturais do *anti-windup* \mathcal{L}_2 e do controle proposto na Seção 3.4, uma estratégia *anti-windup* para seguimento de referência em sistemas lineares com limitação em magnitude e taxa de variação no sinal de controle.

Esta metodologia de unificação de controladores é particularizada para o problema de compensação de saturação em sistemas não-lineares. É desenvolvida uma aplicação desta metodologia no controle de robôs manipuladores, seção 4.4, através da qual mostram-se as

¹A noção de *global* aqui não está ligada a seu sentido estritamente teórico, mas a noção de que o domínio de validade é muito mais amplo do que a operação em torno do equilíbrio.

pectos de desempenho bem como justifica-se a importância de considerar o problema de compensação de saturação, mesmo no contexto de sistemas não-lineares.

4.2 Unificando Controladores Locais e Globais

Nesta seção é apresentada a estratégia de unificação de controladores locais e globais apresentada em (TEEL, KAPOOR, 1997b). Esta técnica será posteriormente adaptada para a compensação de saturação em sistemas não-lineares, especificamente em robôs manipuladores. Ver-se-á também que esta estratégia fundamenta o projeto *anti-windup* proposto na seção 3.4 para seguimento assintótico de *set-point*.

Considere o sistema não linear

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) + d \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{4.2}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $d \in \mathbb{R}^n$ é uma perturbação constante e não mensurável. Assume-se que f é, ao menos, localmente Lipschitz em (x, u) .

Dada uma referência $r = r^* \in \mathbb{R}^p$, constante, o objetivo geral de controle para o sistema (4.2) é garantir estabilidade e convergência assintótica para um equilíbrio x^* tal que $y^* = h(x^*) = r^*$.

Atacar diretamente o problema de projeto para o sistema (4.2) procurando atender este objetivo de controle é uma tarefa complexa. Uma alternativa para abordar o problema é desdobrá-lo em duas etapas:

1. Um primeiro projeto é realizado para garantir os objetivos locais, isto é, a operação próxima ao ponto de equilíbrio. Neste projeto, utiliza-se um modelo modificado, eventualmente linear, consistente com (4.2) localmente. Por ser um projeto válido apenas localmente, será denominado de *controlador local*.
2. Um segundo projeto é realizado diretamente sobre o sistema (4.2), porém com o objetivo apenas de estabilização, sem levar em conta os requisitos de desempenho local. Este controlador será denominado de *global*.

Uma vez disponíveis estes controles local e global, a técnica apresentada a seguir permite juntá-los dinamicamente de forma que tanto as características de estabilidade garantidas

pelo segundo controlador como as características de desempenho local do primeiro sejam preservadas. Este procedimento será denominado de *unificação* destes controladores.

O entendimento do controle local é formalizado na seguinte hipótese na qual considera-se que r e d são constantes. O caso geral de r e d possivelmente variantes no tempo é considerado nas seções 4.2.5 e 4.2.6.

Hipótese 4.2.1 (Controle local) *Existe uma função $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um controlador na forma*

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= g(x_c, u_c, r) \\ y_c &= k(x_c, u_c, r) \end{aligned} \quad (4.3)$$

tais que para cada valor admissível de d e r , existe um ponto (x^, x_c^*) tal que*

1. $F(x, u) = f(x, u)$ em uma vizinhança \mathcal{N} de (x^*, u^*) onde $u^* = k(x_c^*, x^*, r)$;

2. Para o sistema em malha fechada

$$\dot{x} = F(x, u) + d, \quad y = h(x) \quad (4.4)$$

$$\dot{x}_c = g(x_c, x, r), \quad u = k(x_c, x, r) \quad (4.5)$$

o ponto (x^, x_c^*) é globalmente assintoticamente estável e satisfaz $h(x^*) = r$.*

▷

Exemplo 4.2.1 *Para ficar mais clara relação entre f e F , considere o caso em que o sistema (4.2) consiste em um sistema linear com saturação, isto é, $f(x, u) = Ax + B\text{sat}(u)$. Neste caso, uma escolha direta para F é $F(x, u) = Ax + Bu$, a qual coincide com $f(x, u)$ para u na região linear da saturação.*

★

De acordo com a Hipótese 4.2.1, o controlador local é projetado sobre a dinâmica (4.4), a qual difere da dinâmica do sistema original (4.2). As duas dinâmicas, determinadas por F e f , respectivamente, coincidem em uma vizinhança \mathcal{N} do ponto (x^*, u^*) . Este ponto estabelece o valor de equilíbrio do sistema (4.4)-(4.5) para os valores de r e d em questão.

O fato das duas dinâmicas coincidirem apenas em torno do ponto de equilíbrio é que caracteriza este projeto como *local*. É importante observar que o projeto é local em relação à dinâmica do sistema original (4.2). Em relação à dinâmica modificada (4.4) o projeto é global, isto é, exige-se estabilidade assintótica global do equilíbrio (x^*, x_c^*) de (4.4)-(4.5).

Esta exigência, entretanto, é mais fácil de ser atendida, uma vez que o modelo modificado é, supostamente, mais facilmente estabilizável.

Nota 4.2.2 De acordo com a Hipótese 4.2.1, o ponto (x^*, x_c^*) é um ponto interior de \mathcal{N} . Este ponto estabelece o valor de equilíbrio do sistema (4.4)-(4.5) para os valores de r e d em questão. Note que, quanto a esta hipótese, não há nenhum problema em d e r serem variantes no tempo, desde que sejam tais que o sistema nominal convirja para um equilíbrio em regime permanente e que, no entorno deste equilíbrio, a dinâmica de (4.4) coincida com a de (4.2). Não obstante, esta hipótese impõe restrições sobre os valores admissíveis de d e r . ★

O sistema em malha fechada (4.4)-(4.5) será denominado de *sistema nominal* em malha fechada. De acordo com este sistema, denotando por $(x(t; x_o), x_c(t; x_{c_o}))$ a trajetória de estado no instante t iniciada em (x_o, x_{c_o}) e por $u(t; x_o, x_{c_o})$ o sinal de controle correspondente, defina o conjunto de condições iniciais para as quais a trajetória do sistema fica confinada a \mathcal{N} , isto é,

$$\mathcal{Z} \doteq \{(x_o, x_{c_o}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_c} : (x(t; x_o), u(t; x_o, x_{c_o})) \in \mathcal{N}, \forall t \geq 0\} \quad (4.6)$$

Os requisitos sobre o controlador global são formalizados na hipótese a seguir.

Hipótese 4.2.3 (Controlador global) *Sejam x^* , u^* e \mathcal{N} conforme a Hipótese 4.2.1. Existe uma função $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\alpha(x, x, u) = u, \quad \forall (x, u) \in \mathcal{N} \quad (4.7)$$

e tal que o ponto $x = x^$ constitui um equilíbrio globalmente assintoticamente estável para o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) + d \\ u &= \alpha(x, x^*, u^*) \end{aligned} \quad (4.8)$$

▷

A lei de controle α consiste em uma realimentação estática de estados não linear para o sistema (4.2). Esta lei de controle constitui o *controlador global*, isto é, deve garantir estabilidade assintótica global para o equilíbrio $x = x^*$ do sistema original (4.2). Note que o projeto de α é conduzido sobre o modelo completo e não sobre o modelo modificado do sistema. Não obstante, o estado de equilíbrio é o mesmo obtido do projeto local, isto é, os

controladores local e global devem concordar com relação ao equilíbrio. No sistema nominal (4.4)-(4.5), o equilíbrio é determinado por d e r . No sistema (4.8), o equilíbrio é determinado por x^* e u^* . Como ver-se-á em seguida, o controlador final não necessitará, explicitamente, de x^* e u^* .

Nota 4.2.4 *A propriedade da lei de controle α estabelecida na equação (4.7) é fundamental para garantir que o desempenho induzido pelo controlador nominal seja preservado localmente. Esta exigência não é, em geral, restritiva. Em certos casos, a satisfação desta restrição decorre automaticamente do projeto.* *

4.2.1 A estratégia de unificação

Os controles global e local projetados para o sistema (4.2) atendem a objetivos distintos. O controle local só é válido em torno do equilíbrio, e garante um certo desempenho local. O controle global garante estabilidade global para o sistema, porém não garante desempenho local. Nesta seção é apresentada uma estratégia para unificar estes controladores procurando preservar as propriedades positivas de cada um.

A estratégia de unificação dos controladores local e global consiste em introduzir o seguinte controlador dinâmico, que será denominado de *compensador de unificação*,

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= f(x, u) - F(x - \xi, y_c) \\ v_1 &= \alpha(x, x - \xi, y_c) - y_c \\ v_2 &= -\xi\end{aligned}\tag{4.9}$$

com estado ξ , entradas u , y_c e x , medidas de (4.2) e (4.3), e saídas v_1 e v_2 conectadas em malha fechada com (4.2) e (4.3) na forma $u_c = x + v_2$ e $u = y_c + v_1$. O processo de obtenção do compensador de unificação a partir dos projetos local e global está ilustrado, qualitativamente, na Figura 4.1. O sistema completo em malha fechada fica assim determinado,

$$\text{Planta} \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) + d \\ y = h(x) \end{cases}\tag{4.10}$$

$$\text{Controle local} \quad \begin{cases} \dot{x}_c = g(x_c, u_c, r) \\ y_c = k(x_c, u_c, r) \end{cases}\tag{4.11}$$

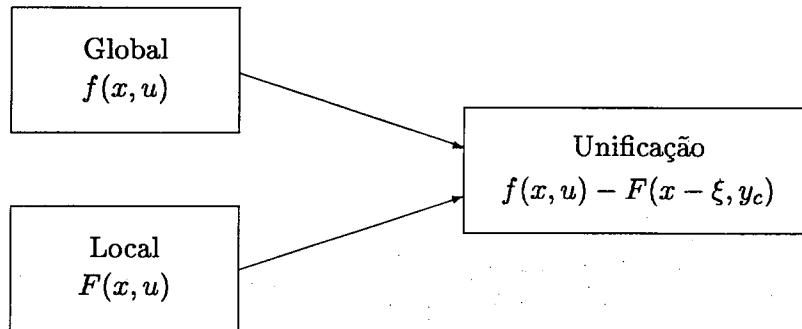


Figura 4.1: Construção do compensador de unificação.

$$\text{Compensador de unificação} \quad \begin{cases} \dot{\xi} = f(x, u) - F(x - \xi, y_c) \\ v_1 = \alpha(x, x - \xi, y_c) - y_c \\ v_2 = -\xi \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\text{Conexões} \quad \begin{cases} u = y_c + v_1 \\ u_c = x + v_2 \end{cases} \quad (4.13)$$

Nota 4.2.5 O compensador de unificação não necessita das medidas de d , nem dos valores de x^* , x_c^* e u^* explicitamente. ★

Antes de apresentar as propriedades do sistema em malha fechada (4.10)-(4.13), a seguinte hipótese é introduzida, a qual se faz necessária para a garantia de validade global dos resultados.

Hipótese 4.2.6 *Sejam x^* e u^* conforme a Hipótese 4.2.1 e seja α conforme a Hipótese 4.2.3. Para o sistema*

$$\dot{x} = f(x, \alpha(x, x^* + \varepsilon_1(t), u^* + \varepsilon_2(t))) + d \quad (4.14)$$

as trajetórias de estado são limitadas, para quaisquer sinais $\varepsilon_1(t)$ e $\varepsilon_2(t)$ que convergem assintoticamente para zero. ▷

A Hipótese 4.2.6 estabelece uma propriedade de estabilidade entrada convergente, estado limitado com relação as entradas $\varepsilon_1(t)$ e $\varepsilon_2(t)$. Esta propriedade é relativamente restritiva no caso geral. Porém, parte dos resultados são válidos sem esta hipótese e, em certos casos particulares, torna-se relativamente fácil atendê-la.

Teorema 4.2.7 *Suponha que as Hipóteses 4.2.1 e 4.2.3 são válidas. Então,*

1. o ponto $(x, x_c, \xi) = (x^*, x_c^*, 0)$ para o sistema (4.10)-(4.13) é localmente assintoticamente estável e a região de atração inclui os conjuntos

$$\mathcal{Z}_l \doteq \{(x, x_c, \xi) : (x, x_c) \in \mathcal{Z}, \xi = 0\} \quad (4.15)$$

$$\mathcal{Z}_g \doteq \{(x, x_c, \xi) : (x - \xi, x_c) = (x^*, x_c^*)\} \quad (4.16)$$

2. com a adição da Hipótese 4.2.6, o equilíbrio $(x, x_c, \xi) = (x^*, x_c^*, 0)$ é globalmente assintoticamente estável.

Prova: Defina $e \doteq x - \xi$, $\varepsilon_1 \doteq e - x^*$ e $\varepsilon_2 \doteq k(x_c, e, r) - u^*$. Nas coordenadas (e, x_c, x) o sistema (4.10)-(4.13) resulta em

$$\text{Subsistema } \begin{matrix} (e, x_c) \\ \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \dot{e} = F(e, k(x_c, e, r)) + d \\ \dot{x}_c = g(x_c, e, r) \end{array} \right. \quad (4.17)$$

$$\text{Subsistema } \begin{matrix} x \\ \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x, \alpha(x, x^* + \varepsilon_1, u^* + \varepsilon_2)) + d \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Reconhece-se imediatamente a estrutura em cascata do sistema resultante, o subsistema (e, x_c) alimentando o subsistema x . Da Hipótese 4.2.1, o ponto $(e, x_c) = (x^*, x_c^*)$ do subsistema (e, x_c) é globalmente assintoticamente estável. Neste ponto de equilíbrio (x^*, x_c^*) , ε_1 e ε_2 são nulos. Logo, da Hipótese 4.2.3 e da estrutura em cascata (veja Teorema C.2.3) de (4.17)-(4.18), segue que o ponto $(e, x_c, x) = (x^*, x_c^*, x^*)$ é localmente assintoticamente estável. Como $e = x - \xi$, o ponto de equilíbrio corresponde a $(x, x_c, \xi) = (x^*, x_c^*, 0)$.

Conjunto \mathcal{Z}_l . A estrutura de (4.9) implica que se $(x, y_c) \in \mathcal{N}$ e $\xi = 0$, então $\dot{\xi} = 0$. Logo, $\xi(0) = 0$ e $(x(0), x_c(0)) \in \mathcal{Z}$ implica $\xi(t) = 0, \forall t \geq 0$. Da Hipótese 4.2.1 e da propriedade 4.7 segue que $(x(t), x_c(t))$ converge assintoticamente para (x^*, x_c^*) .

Conjunto \mathcal{Z}_g . No caso em que $(x(0) - \xi(0), x_c(0)) = (x^*, x_c^*)$, é consequência da Hipótese 4.2.1 que $(e(t), x_c(t)) \equiv (x^*, x_c^*)$ e, logo, $(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \equiv (0, 0)$. Assim, da Hipótese 4.2.3, segue que $x(t)$ converge para x^* . Como $e(t) = x(t) - \xi(t) \equiv x^*$, $\xi(t)$ converge para zero.

Nas condições da Hipótese 4.2.6 a estabilidade global do equilíbrio segue de resultados de estabilidade global de sistemas em cascata (SEPULCHRE et al., 1997). •

Para todas as condições iniciais no conjunto \mathcal{Z}_l , $\xi(t) \equiv 0$ para todo t e o sistema em malha fechada (4.10)-(4.13) se comporta como o sistema nominal em malha fechada, isto é, somente o controle local atua e, logo, seu desempenho é preservado localmente. Para todas condições iniciais em \mathcal{Z}_g , o controlador local está em estado estacionário, e somente o controlador global atua sobre o sistema.

Como resultado do Teorema 4.2.7, o desempenho do controlador local é preservado no conjunto \mathcal{Z}_l . O próximo teorema estabelece que, para condições iniciais pequenas em ξ , a modificação introduzida no controle local também é pequena.

Teorema 4.2.8 *Suponha que as Hipóteses 4.2.1 e 4.2.3 são válidas. Então, para \mathcal{Z}_c um conjunto compacto estritamente contido em \mathcal{Z} (equação 4.6) e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $(x(0), x_c(0)) \in \mathcal{Z}_c$ e $|\xi(0)| \leq \delta$ implicam que as trajetórias de (4.10)-(4.13) satisfazem $|\xi(t)| \leq \epsilon$, $\forall t \geq 0$.*

Prova: De acordo com o Teorema 4.2.7, o ponto $(x, x_c, \xi) = (x^*, x_c^*, 0)$ é localmente assintoticamente estável, o conjunto $\mathcal{Z}_l \times \{0\}$ está incluído na região de atração e as trajetórias iniciadas neste conjunto satisfazem $\xi(t) \equiv 0$. O resultado do teorema então segue da continuidade das soluções com respeito às condições iniciais em intervalos compactos de tempo juntamente com a propriedade de convergência uniforme devida à estabilidade assintótica local. •

É oportuno, neste ponto, considerar alguns casos particulares. O principal propósito é mostrar que, no caso de sistemas lineares com restrições no controle, o compensador de unificação reduz-se ao compensador *anti-windup* apresentado no Capítulo 3.

4.2.2 Especialização para sistemas lineares com saturação no controle

Considere o sistema linear com saturação

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\text{sat}(u) + d \\ y &= Cx + D\text{sat}(u) \end{aligned} \tag{4.19}$$

Considere que o par (A, B) e d satisfazem condições necessárias para que o sistema seja globalmente estabilizável e considere que $u = \kappa(x - x^*) + u^*$, $\kappa(0) = 0$, é uma realimentação de estados não linear que estabiliza globalmente o ponto $x = x^*$ para o sistema (4.19), onde u^* é tal que $Ax^* + B\text{sat}(u^*) + d = 0$. O caso mais simples é quando $d = 0$, isto é, estabilização

da origem $x^* = 0$ e $u^* = 0$.

Nota 4.2.9 *Claramente x^* não pode ser arbitrário. Além de satisfazer a condição de equilíbrio, tem de ser possível levar todas as condições iniciais para x^* com controle limitado. Note que nem sempre é possível estabilizar um equilíbrio x^* que exija um controle saturado. Considere por exemplo o sistema escalar*

$$\dot{x} = \text{sat}(u) + 1$$

Qualquer valor de x é um equilíbrio para este sistema que exige $u^ = -1$ (saturado). Contudo, nenhum equilíbrio $x^* < x(0)$ pode ser alcançado.* ★

Para o sistema (4.19), $f(x, u) = Ax + B\text{sat}(u)$, e uma escolha natural para F é $F(x, u) = Ax + Bu$. Neste caso, $\mathcal{N} = \mathbb{R}^n \times \{u \in \mathbb{R}^m : |u_i| \leq 1, i = 1, \dots, m\}$. Para qualquer projeto de realimentação de saída efetuado sobre o modelo linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + d \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{4.20}$$

o compensador de unificação reduz-se à forma simplificada

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= Ax + B\text{sat}(u) - A(x - \xi) - By_c = A\xi + B[\text{sat}(u) - y_c] \\ v_1 &= \kappa(\xi) + y_c - y_c = \kappa(\xi) \\ v_2 &= -C\xi - D[\text{sat}(u) - y_c] \\ u &= y_c + v_1 \end{aligned} \tag{4.21}$$

O compensador (4.21) é exatamente o compensador *anti-windup* \mathcal{L}_2 desenvolvido na Seção 3.3.1. Note que, neste caso particular, a implementação do compensador de unificação requer somente a medida de y_c , se a função saturação for conhecida.

4.2.3 Sistemas lineares com limitação em magnitude e taxa de variação no sinal de controle

Considere o sistema linear com limitação em magnitude e taxa de variação no sinal de controle, representado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu_s + d \\ u_s &= R \operatorname{sgn}(\operatorname{sat}_M(u) - u_s) \\ y &= Cx + Du_s\end{aligned}\tag{4.22}$$

Uma escolha natural para representar o sistema (4.22) de forma simplificada é negligenciar as restrições de magnitude e taxa de variação no sinal de controle. Isto equivale a fazer $R \rightarrow \infty$ e $M \rightarrow \infty$. O modelo simplificado resultante é linear na forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + d \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{4.23}$$

Note que as dinâmicas de (4.22) e (4.23) possuem dimensões diferentes. Por isto, para o fim de obter a dinâmica do compensador de unificação, o sistema (4.23) é representado, de forma equivalente, através do sistema aumentado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu_s + d \\ \dot{u}_s &= R_\infty \operatorname{sgn}(u - u_s) \\ y &= Cx + Du_s\end{aligned}\tag{4.24}$$

onde R_∞ é tomado suficientemente grande, representando o fato de que não há limitação em taxa de variação. Quando $R_\infty \rightarrow \infty$, o modo deslizante (DECARLO et al., 1996) criado sobre a parcela u_s do estado força a operação do sistema sobre a variedade $u - u_s = 0$, de onde segue a equivalência de (4.23) e (4.24).

De (4.22) e (4.24), a dinâmica do compensador de unificação resulta em

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= Ax + Bu_s - A(x - \xi) - B(u_s - \xi_u) \\ \dot{\xi}_u &= R \operatorname{sgn}(\operatorname{sat}_M(u) - u_s) - R_\infty \operatorname{sgn}(y_c - u_s + \xi_u)\end{aligned}\tag{4.25}$$

Como (i) R é limitado, (ii) $R_\infty \rightarrow \infty$ e (iii) existe uma realimentação negativa de ξ_u através da função sinal, um modo deslizante é criado forçando a operação do sistema (4.25) sobre

a variedade $y_c - u_s + \xi_u = 0$. Logo, $\xi_u = u_s - y_c$, e o compensador de unificação pode ser representado, de forma equivalente, pelo sistema de ordem reduzida

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi + B(u_s - y_c) \\ v_1 &= \alpha(x, x - \xi, y_c) - y_c \\ v_2 &= -C\xi - D(u_s - y_c)\end{aligned}\tag{4.26}$$

onde a função α é obtida do controlador global e a estrutura de v_2 assume que o controlador local é projetado com base na saída y do sistema (4.22).

O compensador (4.26) justifica a escolha da estrutura do compensador de *anti-windup* (3.56)-(3.58) na Seção 3.4.

4.2.4 Sistemas não-lineares com saturação no controle

O objetivo deste capítulo é utilizar esta estratégia de unificação de controladores locais e global para a compensação de saturação em sistemas não-lineares. Por isto, a seguir é desenvolvida a estrutura que o compensador de unificação (4.9) assume neste caso particular. Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \text{sat}(u)) + d \\ y &= h(x, \text{sat}(u))\end{aligned}\tag{4.27}$$

onde a entrada de controle é limitada de acordo com a função saturação. Como o interesse é na compensação da saturação, o modelo modificado escolhido corresponde ao sistema (4.27) sem saturação no controle, isto é, $F(x, u) = f(x, u)$, ou

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) + d \\ y &= h(x, u)\end{aligned}\tag{4.28}$$

Para um certo controlador global α , o compensador de unificação assume a forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= f(x, \text{sat}(u)) - f(x - \xi, y_c) \\ v_1 &= \alpha(x, x - \xi, y_c) - y_c \\ v_2 &= -\xi\end{aligned}\tag{4.29}$$

Note que, ao contrário do caso linear (4.21), a implementação deste compensador requer a medida do estado do sistema, muito embora o controle local possa ser projetado a partir

da realimentação da saída y .

4.2.5 Outros objetivos de controle

A estratégia de unificação apresentada concentrou-se no propósito de seguimento de *set-point*. Esta seção procurará mostrar que a metodologia não se restringe a este caso, podendo abranger outros objetivos de controle.

Para ilustrar este fato, considere o caso em que o controle nominal não é projetado para garantir convergência para um equilíbrio, mas sim para um determinado conjunto compacto \mathcal{W}_c , isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_{\mathcal{W}_c}(x(t), x_c(t)) = 0 \quad (4.30)$$

Com este objetivo de controle, não há mais necessidade que d e r sejam constantes, englobando-se assim casos mais gerais de seguimento de referência e atenuação de perturbações.

Para a estratégia de unificação fazer sentido, é necessário que o conjunto residual \mathcal{W}_c seja consistente com a região \mathcal{N} de coincidência das dinâmicas local e global. Assim, o seguinte deve ser verdade

$$(x, x_c) \in \mathcal{W}_c \implies (x, k(x_c, x, r)) \in \mathcal{N} \quad (4.31)$$

Note que (4.31) também impõe restrições sobre o sinal de referência. Esta inclusão deve ser satisfeita para a classe de sinais de referência de interesse. Contudo, a restrição não é sobre o comportamento temporal de r e sim sobre a gama de valores que r assume.

Como os objetivos de controle foram modificados, o controlador global também deve ser modificado de acordo. Como o objetivo do controle local é levar o estado para \mathcal{W}_c , é natural que o controle global não atue sobre o sistema quando este objetivo é atingido. Logo, um requisito para o controle global é que $\xi(t) \rightarrow 0$ a medida que $(x(t), x_c(t)) \rightarrow \mathcal{W}_c$.

Observando a estrutura em cascata (4.17)-(4.18) nota-se que, mesmo com este objetivo mais geral de controle, o controle unificado ainda preserva o desempenho do controle local. Isto porque esta propriedade não depende dos objetivos de controle do controlador local, mas sim dos seguintes fatos:

1. as dinâmicas f e F coincidirem em \mathcal{N} ;
2. o compensador de unificação é inicializado em zero, $\xi(0) = 0$;
3. a propriedade de α em \mathcal{N} , equação (4.7).

4.2.6 Robustez

A estratégia de unificação de controladores locais e globais foi apresentada considerando que o sistema (4.2) está sujeito a uma perturbação externa constante. Uma questão natural é perguntar se o esquema é robusto à adição de dinâmicas não-lineares de pequena magnitude. Para estudar esta questão, considere que o sistema (4.2) é afetado por uma perturbação $\Sigma_o(z_o, x, d, u)$, possivelmente dinâmica, na forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) + d + \Sigma_o(z_o, x, d, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{4.32}$$

onde Σ_o representa um sistema dinâmico determinado pelo estado inicial z_o e as entradas x , d e u . Assume-se que Σ_o é estável, e, no mais, arbitrário.

O controlador local, neste caso, deve garantir a estabilidade robusta do equilíbrio (x^*, x_c^*) ou, no caso mais geral, convergência para um conjunto compacto \mathcal{W}_c , para o sistema modificado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, u) + d + \Sigma_o(z_o, x, d, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{4.33}$$

Para um dado controlador global α , a estratégia de unificação (4.9) permite obter a seguinte representação para o sistema em malha fechada nas coordenadas (e, x_c, x) (com referência ao sistema (4.17)-(4.18))

$$\text{Subsistema } \begin{matrix} (e, x_c) \\ \left\{ \begin{aligned} \dot{e} &= F(e, k(x_c, e, r)) + d + \Sigma_o(z_o, x, d, u) \\ \dot{x}_c &= g(x_c, e, r) \end{aligned} \right. \end{matrix}\tag{4.34}$$

$$\text{Subsistema } \begin{matrix} x \\ \left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) + d + \Sigma_o(z_o, x, d, u) \\ u &= \alpha(x, x^* + \varepsilon_1, u^* + \varepsilon_2) \end{aligned} \right. \end{matrix}\tag{4.35}$$

Nota-se que a preservação do desempenho do controlador local para trajetórias satisfazendo $\xi(0) = 0$ (equivalentemente, $e(0) = x(0)$) e $(x(t), y_c(t)) \in \mathcal{N}$, $\forall t \geq 0$, continua valendo. Portanto, esta propriedade é robusta à perturbação Σ_o . É claro que a estabilidade robusta deve ser garantida pelo projeto do controlador local, mas o importante é que a estratégia de unificação não destrói esta propriedade.

Por outro lado, nota-se claramente em (4.34)-(4.35) que a estrutura em cascata foi perdida devido à presença da perturbação Σ_o . O estado x perturba o subsistema (e, x_c) por meio da perturbação Σ_o .

Claramente, a estabilidade robusta de (4.34)-(4.35) exige reconsiderações no projeto do controle global α , em função da perturbação Σ . Isto basicamente significa exigir que a estabilidade assintótica global garantida por α seja também robusta à perturbação Σ_o .

Feitas as devidas reconsiderações no projeto do controle global, apesar do sistema (4.34)-(4.35) não ter mais a estrutura cascata, sua estabilidade pode ainda ser testada. Na hipótese de Σ_o ser estável, o teorema do pequeno ganho fornece um formalismo para tanto. Estabelecendo os ganhos não-lineares dos sistemas envolvidos, o teorema do pequeno ganho (veja, por exemplo (TEEL, 1996a, JIANG et al., 1994) e apêndice C) permite determinar uma classe de perturbações Σ_o para as quais a estabilidade robusta de (4.34)-(4.35) e, conseqüentemente, do sistema em malha fechada, fica garantida. Usando esta abordagem, garantidas de robustez para o *anti-windup* \mathcal{L}_2 foram estabelecidas na seção 3.3.1.

4.3 Unificando Controladores Locais e Globais: Uma Generalização

A estratégia de unificação de controladores locais e globais apresentada na seção 4.2 considerou o caso particular em que ambos os controladores local e global garantem estabilidade assintótica global do equilíbrio. Contudo, nem sempre é possível trabalhar com garantias de estabilidade global. Em muitos casos, há interesse apenas de garantir uma certa região de atração para o equilíbrio em questão. Assim, torna-se importante estabelecer condições sob as quais a estratégia de unificação apresentada preserva os domínios de estabilidade garantidos pelos projetos local e global. A proposição estabelecida nesta seção formaliza tais condições.

Considere novamente o sistema (4.2), reproduzido a seguir,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) + d \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{4.36}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $d \in \mathbb{R}^n$ é uma perturbação constante e não mensurável. Assume-se que f é, ao menos, localmente Lipschitz em (x, u) .

Considere que são dados: uma classe de sinais de referência constantes \mathcal{R}_{sp} , uma classe de sinais de perturbação constantes \mathcal{W}_{sp} e um conjunto compacto X_o . O objetivo geral de controle é garantir a estabilidade assintótica do equilíbrio (determinado por r , d e a dinâmica do sistema) de forma que o conjunto X_o esteja incluído na região de atração.

No contexto da técnica de unificação de controladores locais e globais, o problema de

controle não é atacado diretamente. Um primeiro projeto (local) é feito sobre um sistema modificado o qual coincide com (4.36) localmente. Um segundo projeto (global) é feito sobre o sistema completo (4.36), porém com objetivos de controle menos exigentes. Por fim estes controladores são unificados em um só, de forma que o desempenho induzido pelo controle local seja preservado. Nesta seção, busca-se também garantir a preservação da região de atração garantida nos projetos individuais.

A hipótese a seguir formaliza os requisitos que devem ser satisfeitos pelo controle local.

Hipótese 4.3.1 (Controle local) *Existe um controlador na forma*

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= g(x_c, u_c, r) \\ y_c &= k(x_c, u_c, r)\end{aligned}\tag{4.37}$$

onde $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$, $u_c \in \mathbb{R}^n$ e $y_c \in \mathbb{R}^m$, um conjunto compacto $\mathcal{X}_l \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, um conjunto (não necessariamente compacto) $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, e uma função $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que

1. $F(x, u) = f(x, u)$ para todo $(x, u) \in \mathcal{N}$;

2. Para o sistema em malha fechada

$$\dot{x} = F(x, u) + d, \quad y = h(x)\tag{4.38}$$

$$\dot{x}_c = g(x_c, x, r), \quad u = k(x_c, x, r)\tag{4.39}$$

vale que, para qualquer $(x(0), x_c(0), r, d) \in \mathcal{X}_l$, a trajetória $(x(t), x_c(t))$ é limitada e converge uniformemente para um ponto (x^*, x_c^*) tal que

(a) $(x^*, u^*) \in \text{int}(\mathcal{N})$, onde $u^* = k(x^*, x_c^*, r)$,

(b) $h(x^*) = r$.

▷

Conforme estabelece a Hipótese 4.3.1, o controlador local é projetado sobre a dinâmica (4.38), a qual é uma modificação da dinâmica do sistema original (4.36). As duas dinâmicas, determinadas por F e f , respectivamente, coincidem em \mathcal{N} , o qual contém o valor estacionário (x^*, u^*) como um ponto interior.

A convergência para o equilíbrio (x^*, x_c^*) é exigida somente para as condições iniciais em \mathcal{X}_l , o qual caracteriza a região de atração do equilíbrio para cada valor de r e d . Novamente, o controle local deve satisfazer a condição de regulação (desempenho) $h(x^*) = r$.

Definição 4.3.2 *Em conformidade com o sistema (4.38)-(4.39) defina o conjunto*

$$\mathcal{Z}_a \doteq \{(x_o, x_{c_o}, r, d) \in \mathcal{X}_l : (x(t), u(t)) \in \mathcal{N}, \forall t \geq 0\} \quad (4.40)$$

◀

Em seguida é estabelecida a hipótese que caracteriza o projeto do controle global. Neste contexto, a palavra “global” é utilizada para se referir ao projeto efetuado sobre o modelo completo (4.36), e não sobre a garantia de estabilidade, a qual é local, porém com garantia de região de atração.

Hipótese 4.3.3 (Controlador global) *Sejam x^* , u^* e \mathcal{N} conforme a Hipótese 4.2.1. Existe um conjunto $\mathcal{X}_g \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e uma função $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tais que*

$$\alpha(x, x, u) = u, \quad \forall (x, u) \in \mathcal{N} \quad (4.41)$$

e para o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) + d \\ u &= \alpha(x, x^* + \varepsilon_1(t), u^* + \varepsilon_2(t)) \end{aligned} \quad (4.42)$$

vale que,

1. para $\varepsilon_1(t) = 0$, $\varepsilon_2(t) = 0$, e $\forall (x(0), d) \in \mathcal{X}_g$, $x(t)$ é limitado e converge uniformemente para x^* ;
2. $x(t)$ é limitado para todo $(x(0), d) \in \mathcal{X}_g$ e para quaisquer sinais $\varepsilon_1(t)$ e $\varepsilon_2(t)$, funções limitadas e assintoticamente convergentes para zero.

▷

A realimentação não linear de estados α para o sistema (4.36) deve garantir estabilidade assintótica do equilíbrio x^* com região de atração determinada por \mathcal{X}_g para cada valor de d . Mais do que isto, ela deve garantir que as trajetórias de (4.42) permanecem limitadas na presença das perturbações ε_1 e ε_2 .

Nota 4.3.4 *É importante comparar as Hipóteses 4.2.3 e 4.2.6 com a Hipótese 4.3.3. Note que esta última exige as propriedades de estabilidade assintótica do equilíbrio e a propriedade de entrada convergente—estado limitado apenas para as condições iniciais consistentes com \mathcal{X}_g .* ★

Com base nos controles locais e globais estabelecidos de acordo com as Hipóteses 4.3.1 e 4.3.3 e na estratégia de unificação (4.9), o sistema em malha fechada resulta

$$\text{Planta} \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) + d \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.43)$$

$$\text{Controle local} \quad \begin{cases} \dot{x}_c = g(x_c, u_c, r) \\ y_c = k(x_c, u_c, r) \end{cases} \quad (4.44)$$

$$\text{Compensador de unificação} \quad \begin{cases} \dot{\xi} = f(x, u) - F(x - \xi, y_c) \\ v_1 = \alpha(x, x - \xi, y_c) - y_c \\ v_2 = -\xi \end{cases} \quad (4.45)$$

$$\text{Conexões} \quad \begin{cases} u = y_c + v_1 \\ u_c = x + v_2 \end{cases} \quad (4.46)$$

O sistema em malha fechada (4.43)-(4.46) é tal que os domínios de estabilidade dos controles local e global, bem como o desempenho induzido pelo controle local, são preservados no sentido formalizado na seguinte proposição.

Proposição 4.3.5 *Suponha que as Hipóteses 4.3.1 e 4.3.3 são válidas. Denote por $(\tilde{x}(t), \tilde{x}_c(t))$ as trajetórias do sistema local em malha fechada (4.38)-(4.39) e assuma que $(\tilde{x}(t), \tilde{x}_c(t)) \rightarrow (x^*, x_c^*)$ quando $t \rightarrow \infty$. Então, para quaisquer $(x(0) - \xi(0), x_c(0), r, d) \in \mathcal{X}_1$ e $(x(0), d) \in \mathcal{X}_g$, a trajetória $(x(t), x_c(t), \xi(t))$ é limitada e converge uniformemente para o ponto $(x^*, x_c^*, 0)$. Adicionalmente, se $(x(0), x_c(0), r, d) \in \mathcal{Z}_a$ e $\xi(0) = 0$, então $\xi(t) = 0, \forall t \geq 0$.*

A prova da Proposição 4.3.5 segue as mesmas linhas da prova do Teorema 4.2.7 e, por esta razão, é omitida. A proposição formaliza como os domínios de estabilidade obtidos nos projetos local e global são traduzidos em domínios de estabilidade para o sistema em malha fechada.

4.4 Aplicação em Robôs Manipuladores

Robótica é um campo abrangente envolvendo diversas áreas de conhecimento como física, projeto mecânico, estatística, dinâmica, eletrônica, instrumentação (sensores e atuadores), processamento de sinais e projeto de controle. Nesta seção focaliza-se a questão do projeto de controle para robôs manipuladores.

Na maioria das aplicações industriais, os robôs são empregados para executar uma seqüência de tarefas durante um certo período finito de tempo. Um problema básico no controle de tais robôs é garantir que o efetuator final siga uma trajetória previamente planejada, movendo-se pelo espaço livre, até atingir um determinado ponto desejado (LEWIS et al., 1993, SPONG, VIDYASAGAR, 1989, QU, DAWSON, 1996). Na execução de tal objetivo de controle, muitos aspectos entram em jogo, entre os quais a questão inerente de que os atuadores, motores que acionam as juntas, possuem capacidade limitada. Adicionando o fato de que o controle de robôs industriais em geral possui ação integral (LEWIS et al., 1993, SPONG, VIDYASAGAR, 1989, QU, DAWSON, 1996, ROCCO, 1996) é esperado que se encontrem problemas de *windup*.

De um ponto de vista prático, se as exigências de seguimento da referência são fortes, é natural que se procure, antes de mais nada, modificar os atuadores para que os problemas com a saturação sejam minimizados ou aceitar uma operação mais lenta de forma que o esforço de controle seja reduzido. Isto porque, a saturação certamente limitará, como foi ressaltado no Capítulo 3, as possibilidades de seguimento da referência. Por outro lado, tal procedimento nem sempre é viável devido a restrições usualmente alheias ao problema de controle propriamente dito, como custos, peso, tamanho, produtividade, entre outras. Daí que passa a ser razoável aceitar uma certa degradação de desempenho quanto ao seguimento de referência, quando em condições um pouco adversas de operação, desde que o sistema de controle consiga garantir que tal operação seja “segura”. Adicionalmente, a compensação de saturação pode permitir a operação mais rápida do robô pela utilização mais adequada do esforço de controle disponível.

As técnicas de *anti-windup* tradicionais (HANUS et al., 1987, WALGAMA et al., 1992, ÅSTRÖM, HÄGGLUND, 1988, ÅSTRÖM, RUNDQWIST, 1989, ZHENG et al., 1994, KOTHARE, MORARI, 1997, KAPOOR et al., 1998) bem como o *anti-windup* \mathcal{L}_2 (TEEL, KAPOOR, 1997a, TEEL, 1999) e a estratégia de controle proposta na Seção 3.4 são dedicadas a sistemas em que a única não-linearidade envolvida é a saturação no controle, seja em mag-

nitude, taxa de variação ou ambas. Desta forma, estas técnicas não podem ser diretamente aplicadas ao caso de robôs manipuladores, pois estes são sistemas não-lineares.

Embora seja defendido em (LEWIS et al., 1993) que técnicas tradicionais de *anti-windup* podem ser utilizadas em robôs manipuladores após realizada uma linearização exata por meio de realimentação linearizante, é fundamental observar que a saturação de fato ocorre no atuador, e não no controle “virtual” criado a partir da realimentação linearizante. Com base nisso, há uma dificuldade adicional em garantir estabilidade ao sistema completo.

A abordagem de unificação de controladores locais e globais discutida na Seção 4.2 torna-se, então, atrativa para tratar deste problema, permitindo uma formalização adequada para a compensação de saturação em sistemas não-lineares com garantias de estabilidade e robustez.

Nesta seção é considerado a questão da saturação de atuadores em robôs manipuladores. Mostra-se com simulações que a saturação dos atuadores influi significativamente na estabilidade e no desempenho geral do robô. Com base nos resultados da seção 4.2 (veja também (TEEL, KAPOOR, 1997b)), um esquema de compensação de tais efeitos é proposto. A abordagem utilizada é consistente com a idéia de projeto em duas etapas, a saber: primeiramente é projetado um controlador que fornece o desempenho desejado na ausência de saturação; depois, modificações são introduzidas para compensar os efeitos da saturação de forma que o desempenho induzido pelo controlador original seja preservado para sinais de pequena magnitude.

4.4.1 Colocação do problema

O modelo completo do robô manipulador utilizado nesta seção é apresentado no Apêndice A. No que segue, apenas o modelo genérico é apresentado.

Considere um robô manipulador de dois grau de liberdade descrito pela equação diferencial

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tilde{\tau} \quad (4.47)$$

onde $q = [\theta_1, \theta_2]'$ é o vetor de ângulos das juntas, $\tilde{\tau} = [\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2]'$ é o torque nas juntas, M é a matriz de inércia, C engloba os efeitos de forças centrífugas e de Coriolis, e G engloba os termos de gravidade. Assume-se que a dinâmica dos atuadores (motores) tenha sido incluída no modelo acima de forma que $\tilde{\tau}$ é a entrada de controle efetiva do sistema. Por simplicidade de notação, defina, $V(q, \dot{q}) \doteq C(q, \dot{q})\dot{q}$.

As estratégias de controle tradicionais para robôs manipuladores consistem, basicamente,

em dois laços aninhados (LEWIS et al., 1993, ROCCO, 1996): o laço interno, constituído de uma realimentação não-linear estática e atuando como realimentação linearizante ou compensação de gravidade; o laço mais externo, formado por controladores clássicos tipo PD ou PID objetivando fornecer o desempenho de seguimento/regulação desejado.

O controle, assim denominado, *torque computado*, consiste na linearização da dinâmica do erro para o robô manipulador. Seja $e \doteq q_d - q$ o erro entre a trajetória dos ângulos desejada q_d e a trajetória real q . Em termos do erro e , o controle por torque computado é dado por $\tilde{\tau} = \tau_c$, onde

$$\tau_c \doteq M(q)(\ddot{q}_d - u) + V(q, \dot{q}) + G(q) \quad (4.48)$$

e produz uma dinâmica linear para o robô, de u para e , isto é,

$$\ddot{e} = u \quad (4.49)$$

Por outro lado, a *compensação de gravidade* consiste em compensar diretamente os termos de gravidade $G(q)$, porém sem cancelar os demais termos não-lineares do modelo. A compensação de gravidade é implementada como $\tilde{\tau} = \tau_g$, onde

$$\tau_g \doteq u + G(q) \quad (4.50)$$

A dinâmica dos sistema em malha fechada com compensação de gravidade (4.47), (4.50) resulta em

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) = u \quad (4.51)$$

O laço externo é, freqüentemente, composto por um controlador clássico tipo PD ou PID. A ação integral se faz comumente necessária para evitar erros em regime permanente na presença de torques de carga.

No contexto deste estudo, os limites de capacidade dos atuadores em suprir torque às juntas são levados em consideração no projeto. Estes limites são modelados como funções saturação na entrada de torque de cada junta do robô, isto é,

$$\tilde{\tau} = \text{sat}(\tau) \quad (4.52)$$

onde $\text{sat}(\tau) = [\text{sat}(\tau_1), \text{sat}(\tau_2)]'$, e

$$\text{sat}(\tau_i) = \begin{cases} \tau_i^M, & \tau_i \geq \tau_i^M \\ \tau_i, & -\tau_i^M \leq \tau_i \leq \tau_i^M \\ -\tau_i^M, & \tau_i \leq -\tau_i^M \end{cases} \quad (4.53)$$

Com isto, as leis de controle (4.48) e (4.50) passam a ser implementadas, efetivamente, na forma

$$\tau = \tau_c \doteq M(q)u + V(q, \dot{q}) + G(q) \quad (4.54)$$

$$\tau = \tau_g \doteq u + G(q) \quad (4.55)$$

Como as limitações dos atuadores são freqüentemente ignoradas durante o projeto, é esperado que problemas de desempenho e estabilidade possam ocorrer com o sistema em malha fechada. Este fato é especialmente importante no caso em que transições rápidas e de larga magnitude são exigidas do efetuator final do robô, exigindo o esforço máximo dos atuadores. Este problema é ainda mais agravado pela presença de ação integral no controlador, o que é comumente o caso, devido à sobrecarga da ação integral. Tais problemas são melhor ilustrados nas simulações apresentadas nas seções 4.4.3 e 4.4.4, as quais mostram a importância de considerar estratégias de controle capazes de compensar tais efeitos.

4.4.2 Estratégia de controle para compensação de saturação

Conforme ilustrado nas seções 4.2.2 e 4.2.3, tanto o *anti-windup* \mathcal{L}_2 como a estratégia de *anti-windup* proposta no capítulo 3 para seguimento de *set-point* em sistemas lineares com limitação em magnitude e taxa de variação do sinal de controle são aplicações da metodologia de unificação de controladores locais e globais apresentada na seção 4.2. Na seção 4.3 mostrou-se que a metodologia de unificação de controladores locais e globais pode também ser utilizada no contexto *regional*, isto é, quando o controle global objetiva garantir apenas uma região de atração, ao invés de estabilidade global propriamente dita. Estes resultados serão agora empregados como estratégia para compensação de saturação em robôs manipuladores.

Seja $x_p \doteq [q', \dot{q}']' = [x_{p1}, x_{p2}, x_{p3}, x_{p4}]'$. Nestas coordenadas o modelo do robô manipulador resulta na forma

$$\dot{x}_p = f_a(x_p) + f_b(x_p) \text{sat}(\tau) \quad (4.56)$$

onde $f_a : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ e $f_b : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ são dadas por

$$f_a(x_p) \doteq \begin{bmatrix} x_{p3} \\ x_{p4} \\ -M^{-1}(x_p)[V(x_p) + G(x_p)] \end{bmatrix}$$

$$f_b(x_p) \doteq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M^{-1}(x_p) \end{bmatrix}$$

Defina também o seguinte sistema auxiliar, o qual consiste no modelo do robô manipulador sem restrições nos atuadores,

$$\dot{z} = f_a(z) + f_b(z) \tau \quad (4.57)$$

O projeto de um controlador para o sistema (4.56) é usualmente elaborado com base no sistema (4.57), isto é, sem levar em consideração as restrições nos atuadores. Assuma que um certo controlador tenha sido projetado de forma que o sistema em malha fechada (sem saturação) apresente as características de desempenho desejadas. Considere que este controlador possui a seguinte representação, onde q_d é a trajetória desejada para os ângulos das juntas,

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= g(x_c, u_c, q_d) \\ y_c &= k(x_c, u_c, q_d) \end{aligned} \quad (4.58)$$

O controlador (4.58) garante o desempenho desejado quando em malha fechada com (4.57), isto é, $u_c = z$ e $\tau = y_c$. Contudo, quando colocado para operar com o sistema real (4.56), com $u_c = x_p$ e $\tau = y_c$, problemas de estabilidade e desempenho podem surgir devido à presença da saturação no sinal de controle. Seguindo a abordagem da seção 4.3, busca-se introduzir modificações no laço de controle para compensar tais efeitos indesejáveis ao mesmo tempo que se procura preservar, localmente, o desempenho induzido pelo controlador (4.58).

Para obter a região de estabilidade desejada para o robô manipulador na presença de saturação, a lei de controle α do controle "global" é escolhida na forma,

$$\alpha(x, x^*, u^*) = \rho(x, x^*) + u^* \quad (4.59)$$

Desta forma, o compensador de unificação (4.9) fica determinado por ρ e a dinâmica do

robô manipulador como segue,

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= f_a(x_p) - f_a(x_p + v_2) + f_b(x_p) \text{sat}(y_c + v_1) - f_b(x_p + v_2) y_c \\ v_1 &= \rho(x_p, x_p + v_2) \\ v_2 &= -\xi\end{aligned}\tag{4.60}$$

O sistema completo em malha fechada então resulta

$$\text{Robô} \quad \begin{cases} \dot{x}_p = f_a(x_p) + f_b(x_p) \text{sat}(\tau) \end{cases}\tag{4.61}$$

$$\text{Controle local} \quad \begin{cases} \dot{x}_c = g(x_c, x_p - \xi, q_d) \\ y_c = k(x_c, x_p - \xi, q_d) \end{cases}\tag{4.62}$$

$$\text{Compensador de unificação} \quad \begin{cases} \dot{\xi} = f_a(x_p) - f_a(x_p - \xi) + f_b(x_p) \text{sat}(y_c + v_1) - f_b(x_p - \xi) y_c \\ v_1 = \rho(x_p, x_p - \xi) \end{cases}\tag{4.63}$$

$$\text{Conexões} \quad \begin{cases} \tau = y_c + v_1 \\ u_c = x_p - \xi \end{cases}\tag{4.64}$$

Para o sistema em malha fechada (4.61)-(4.64), a Proposição 4.3.5 pode ser diretamente aplicada garantindo um domínio de estabilidade e a preservação do desempenho induzido pelo controle local (4.58) localmente.

Nas próximas seções, esta estratégia de compensação de saturação é estudada para um caso particular de robô manipulador através de simulação. São consideradas diferentes escolhas para os controladores local e “global” e diferentes tarefas para o robô manipulador.

É considerado um robô planar de dois graus de liberdade cujos parâmetros são dados por ² $m_1 = 1.5\text{Kg}$, $m_2 = 1\text{Kg}$, $r_1 = 1.2\text{m}$, e $r_2 = 1\text{m}$. A aceleração da gravidade é tomada como 9.8m/s^2 . O torque máximo produzido pelos atuadores nas juntas 1 e 2 é considerado 50Nm e 20Nm , respectivamente.

4.4.3 Seguimento de *set-point*

Nesta tarefa são utilizadas variações em degrau nos ângulos das juntas buscando-se obter estabilização do ângulo das juntas com pequena (ou nenhuma) sobre-elevação.

Para atingir este objetivo, um controle composto de um controlador PID com estrutura modificada em conjunto com compensação de gravidade é utilizado para induzir o desempenho

²O modelo completo do robô pode ser encontrado no apêndice A.

desejado para o sistema em malha fechada na ausência de saturação. Este controle é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= q_d - q \\ y_c &= K_i x_c - K_p q - K_d \dot{q} + G\end{aligned}\quad (4.65)$$

Para os resultados de simulação, os parâmetros do controlador (4.65) foram ajustados a partir do modelo do robô obtido por meio da realimentação linearizante, equação (4.49), e tal que se obtivesse estabilização rápida com sobre-elevação nula. A sintonia do controlador (4.65) foi baseada em uma alocação de pólos, de onde resultaram os seguintes ganhos: $K_p = \text{diag}\{10935, 3645\}$, $K_i = \text{diag}\{27337.5, 9112.5\}$, e $K_d = \text{diag}\{1093.5, 364.5\}$.

Na Figura 4.2 pode-se observar o comportamento do sistema em malha fechada obtido com o controlador (4.65). Na ausência de saturação, o *set-point* é atingido sem sobre-elevação, e o acoplamento entre as juntas é desprezível, isto é, não há influência dos comandos de posicionamento de uma junta sobre a posição da outra. Este é o desempenho desejado para o robô manipulador para esta tarefa.

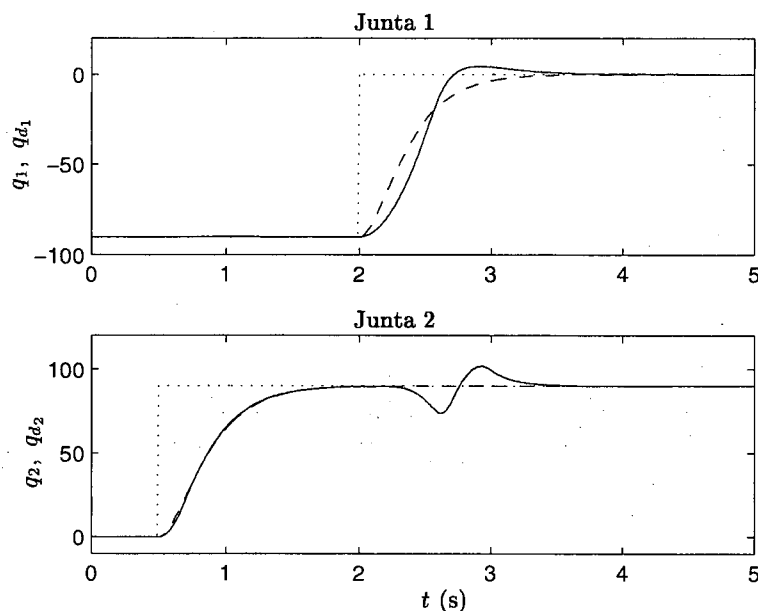


Figura 4.2: Resposta de ângulo das juntas do robô manipulador com controlador (4.65). Sólida: com saturação; Tracejada: sem saturação; Pontilhada: sinal de referência.

Quando o controlador (4.65) é colocado a operar sobre o robô manipulador com saturação, nota-se uma degradação significativa na resposta de ângulo das juntas em dois aspectos principais: na existência de uma sobre-elevação considerável para os mesmos degraus de referência;

na existência de oscilações na resposta devidas ao aumento do acoplamento entre as juntas, especialmente na junta 2. Tal degradação é natural uma vez que o controlador (4.65) não foi projetado para operar na presença de saturação.

Para introduzir o esquema de compensação de saturação proposto, é necessário projetar um controle para cumprir a tarefa de controle "global". No caso, foi utilizado um compensador PD com compensação de gravidade, dado por

$$\rho(x, y) = [K_1, K_2](x - y) + G(x) - G(y) \quad (4.66)$$

Note que, para esta escolha, $\rho(x, x) = 0$ para todo x , satisfazendo a primeira propriedade da lei de controle α (equação (4.41)). Por outro lado, o controlador (4.66) garante estabilidade global para o sistema (4.57) (sem saturação) para sinais de referência constantes e torques de carga nulos. Uma prova deste fato pode ser encontrada em (LEWIS et al., 1993, cap. 3). Deste resultado conclui-se que o controlador (4.66) também garante estabilidade local para o sistema (4.56) (com saturação). Embora seja difícil determinar a região de atração garantida pelo controlador (4.66), os resultados de simulação mostram que esta é consideravelmente maior do que a região de atração que seria obtida utilizando-se diretamente o controle (4.65).

No ajuste de ganhos do controlador global (4.66) focalizou-se mais o domínio de estabilidade, ao invés de desempenho. Foram ajustados os seguintes valores $K_1 = \text{diag}\{256, 64\}$ e $K_2 = \text{diag}\{64, 16\}$.

Com este projeto, o desempenho da estratégia de compensação de saturação é analisada. O sistema completo em malha fechada é construído como em (4.61)-(4.64) utilizando os controladores (4.65) e (4.66). Os resultados comparativos de simulação estão mostrados nas Figuras 4.3 e 4.4.

Em termos de resposta de ângulo das juntas, observa-se na Figura 4.3 que a sobre-elevação é significativamente reduzida (comparativamente ao caso sem compensação de saturação), bem como os efeitos de acoplamento entre as juntas. Com isto, a resposta do sistema fica mais próxima da resposta do sistema sem saturação, evidenciando a diminuição da degradação de desempenho introduzida pela saturação dos atuadores, como pode ser observado na figura.

Na Figura 4.4 compara-se os sinais de controle efetivos obtidos com e sem compensação da saturação. Observa-se que a compensação da saturação aumenta a suavidade do controle bem como reduz o tempo em que os atuadores permanecem saturados, características que são certamente positivas para o desempenho geral do sistema em malha fechada.

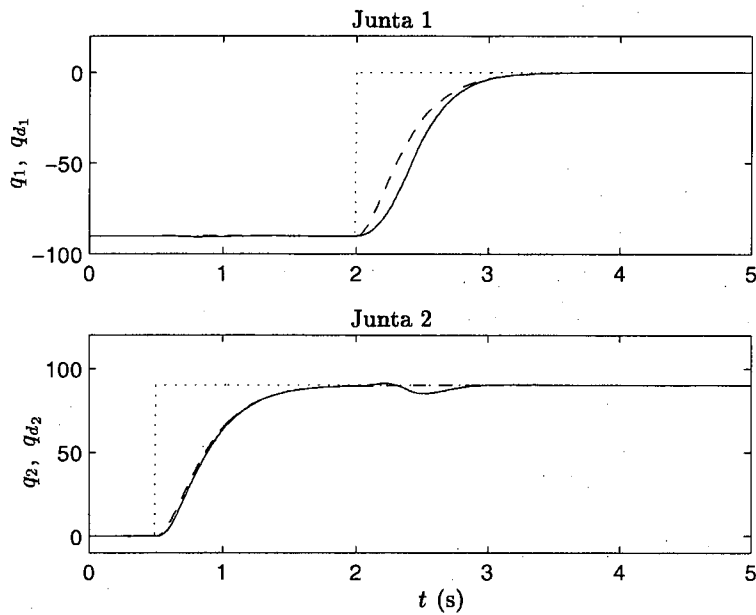


Figura 4.3: Resposta de ângulo das juntas do robô manipulador com controlador (4.65). Sólida: com compensação de saturação; Tracejada: sem saturação; Pontilhada: sinal de referência.

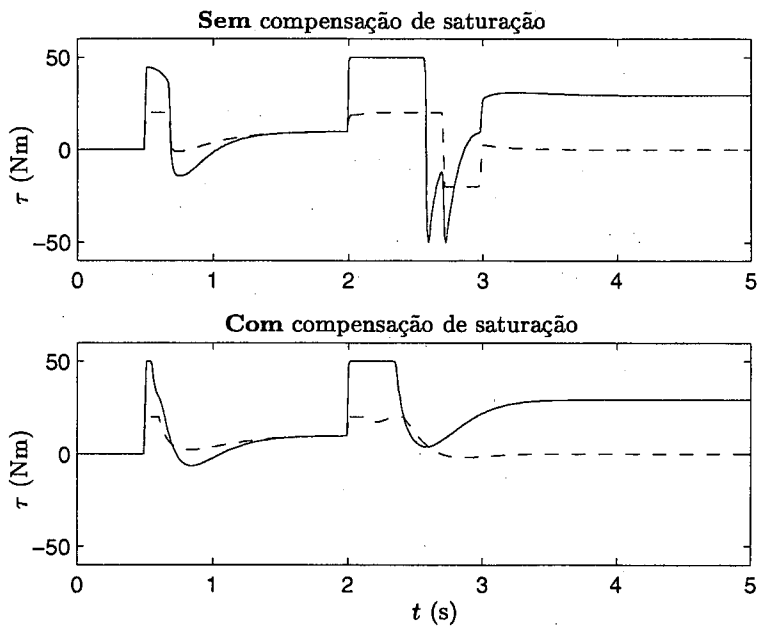


Figura 4.4: Sinal de controle para o robô manipulador com controlador (4.65). Sólida: torque na junta 1; Tracejada: torque na junta 2.

4.4.4 Seguimento de trajetória

Considera-se a seguir o caso de seguimento de referência mais geral. A tarefa escolhida é um movimento senoidal do ângulo das juntas iniciando e terminando no mesmo ponto.

Para esta tarefa de seguimento são analisadas duas escolhas distintas para o controle local, empregando o mesmo controle global utilizado na tarefa de seguimento de *set-point*.

PID + torque computado. Primeiramente, considere o caso que um controle composto por um PID com controle por torque computado é escolhido para induzir o desempenho de seguimento desejado na ausência de saturação. Na notação de (4.58), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= K_i (q_d - q) \\ y_c &= M [x_c + K_p (q_d - q) + K_d (\dot{q}_d - \dot{q})] \\ &\quad + M \ddot{q}_c + V + G \end{aligned} \quad (4.67)$$

Para as simulações foram ajustados os seguintes ganhos, baseado em uma alocação de pólos: $K_p = 102 I$, $K_i = 10 I$, $K_d = 20 I$, onde I é a matriz identidade 2×2 .

A Figura 4.5 ilustra o comportamento do sistema em malha fechada obtido com o controle (4.67). Na ausência de saturação, o objetivo de seguimento é atingido pelo controle proposto com um erro menor que 10^{-3} graus, o qual é considerado satisfatório.

Quando a limitação de torque dos atuadores é introduzida na simulação, pode-se observar, na mesma figura, a degradação resultante no seguimento da referência. O erro de seguimento é considerável em diversos instantes de tempo e a resposta apresenta pequenas oscilações.

Em seguida o esquema de compensação de saturação (4.60) é introduzido. O mesmo controle "global" (4.66) utilizado no seguimento de *set-point* foi utilizado. Contudo, neste caso foram utilizados os seguinte ganhos: $K_1 = 64 I$ e $K_2 = 16 I$.

O comportamento do sistema em malha fechada com compensação de saturação é mostrado na Figura 4.6. Pode-se ver que o desempenho do sistema é recuperado significativamente, em contraste com a resposta do sistema com saturação, porém sem compensação de saturação. O erro máximo de seguimento é significativamente reduzido, especialmente na junta 2. Este resultado ilustra o fato de que a compensação de saturação permite o sistema operar em condições mais extremas com garantia de estabilidade e com desempenho ainda razoável.

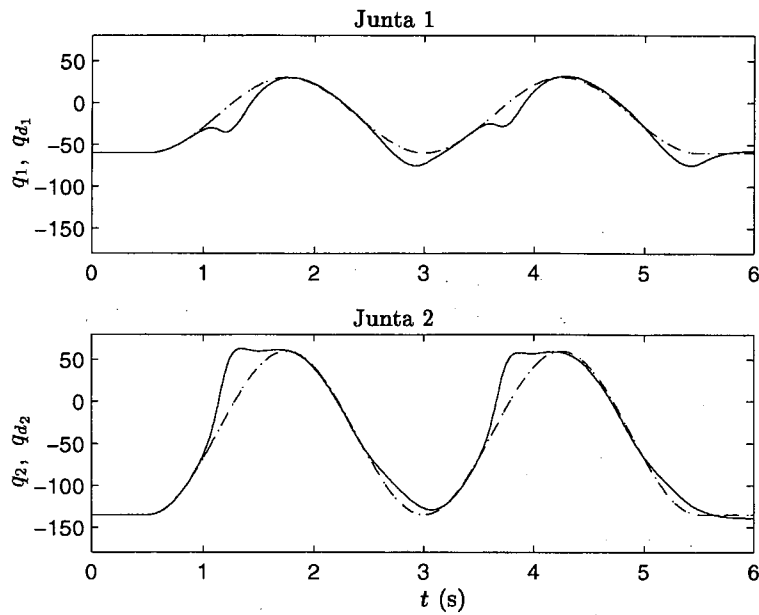


Figura 4.5: Resposta de ângulo das juntas do robô manipulador com controlador (4.67). Sólida: com saturação; Tracejada: sem saturação; Pontilhada: sinal de referência.

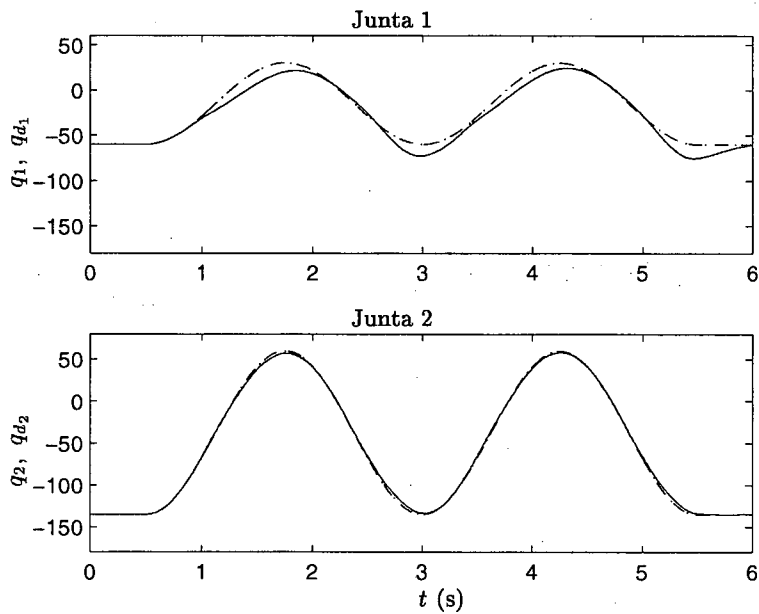


Figura 4.6: Resposta de ângulo das juntas do robô manipulador com controlador (4.67). Sólida: com compensação de saturação; Tracejada: sem saturação; Pontilhada: sinal de referência.

A Figura 4.7 mostra os sinais de controle obtidos com e sem a compensação de saturação. Similarmente ao seguimento de *set-point*, observa-se que a compensação de saturação produz um sinal de controle mais suave e que satura durante menos tempo.

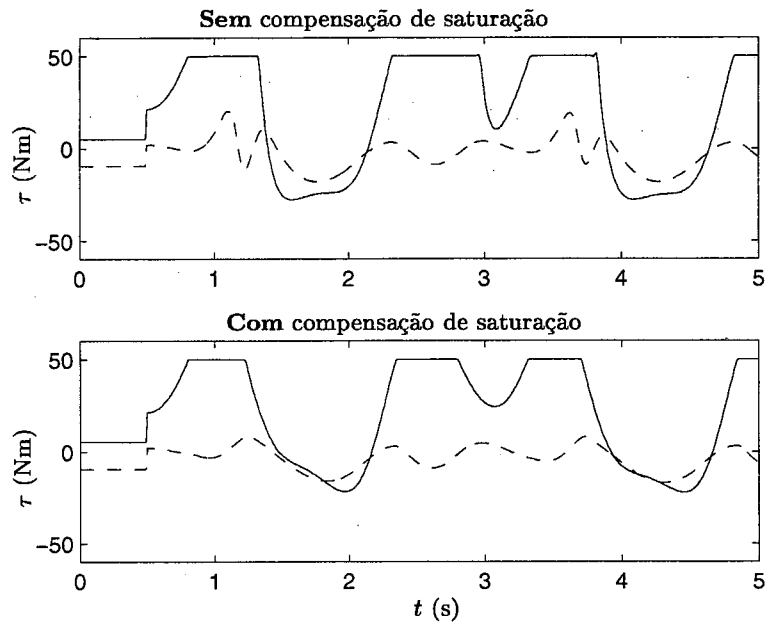


Figura 4.7: Sinal de controle para o robô manipulador com controlador (4.67). Sólida: torque na junta 1; Tracejada: torque na junta 2.

PID + compensação de gravidade. Em seguida é analisada uma escolha alternativa para induzir o desempenho na ausência de saturação. O controlador (4.67) é substituído por um controlador PID com compensação de gravidade dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= K_i(q_d - q) \\ y_c &= x_c + K_p(q_d - q) + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + G \end{aligned} \quad (4.68)$$

onde foram utilizados $K_p = 408 I$, $K_i = 40 I$, $K_d = 80 I$. A sintonia deste controlador também foi baseada na alocação de pólos considerando-se o modelo linear do robô obtido com realimentação linearizante.

Na Figura 4.8 pode-se observar o comportamento do sistema em malha fechada obtido com o controlador (4.68). Na ausência de saturação, o controlador (4.68) permite obter um erro de seguimento menor que 1 grau para a tarefa de seguimento da referência senoidal, o qual é considerado satisfatório. Como pode ser visto na mesma figura, o efeito da saturação é

mais severo neste caso, comparativamente ao resultado mostrado na Figura 4.5 obtido com o controlador local (4.67). A resposta, no presente caso, é inaceitável para o sistema em malha fechada. Este efeito está relacionado aos ganhos mais elevados que são necessários para garantir o erro de seguimento desejado, neste caso. O uso de controle por torque computado permitiu ajustes com ganhos menores.

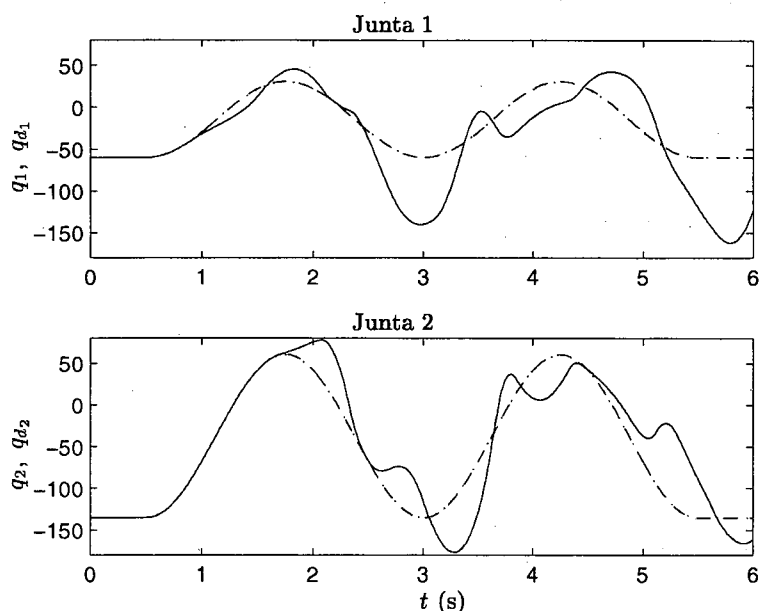


Figura 4.8: Resposta de ângulo das juntas do robô manipulador com controlador (4.68). Sólida: com saturação; Tracejada: sem saturação; Pontilhada: sinal de referência.

Não obstante a degradação mais significativa do desempenho em função da saturação, a estratégia de compensação de saturação ainda permite obter uma recuperação de desempenho significativa. Isto pode ser observado na Figura 4.9, a qual mostra a resposta do robô com controle local (4.68) e com compensação de saturação. Para este caso, o mesmo compensador (4.66) foi utilizado, porém com ganhos $K_1 = \text{diag}\{256, 64\}$ e $K_2 = \text{diag}\{64, 16\}$.

Uma melhoria significativa no sinal de controle também é verificada neste caso, até mais evidente que nos casos anteriores, como ilustra a Figura 4.10. Como resultado da compensação de saturação introduzida, o tempo em que os atuadores permanecem saturados foi significativamente reduzido sendo que, na junta 2, não foi mais observada a saturação.

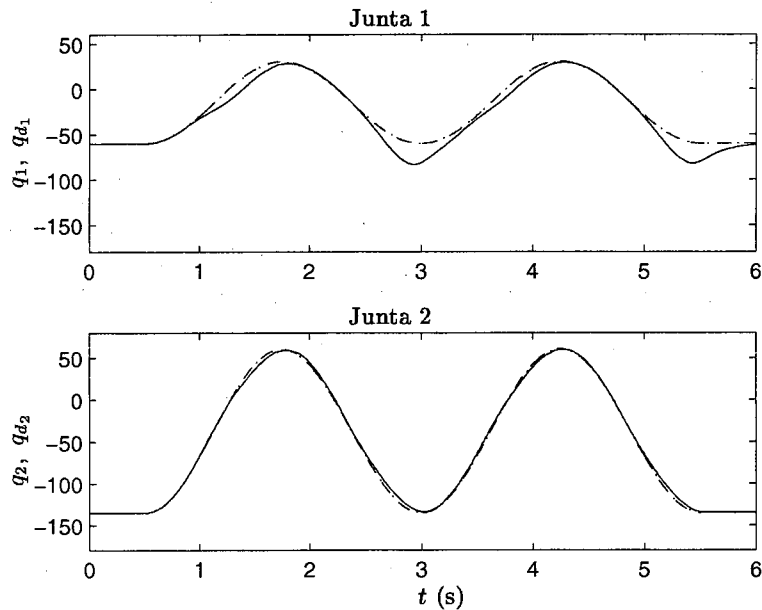


Figura 4.9: Resposta de ângulo das juntas do robô manipulador com controlador (4.68). Sólida: com compensação de saturação; Tracejada: sem saturação; Pontilhada: sinal de referência.

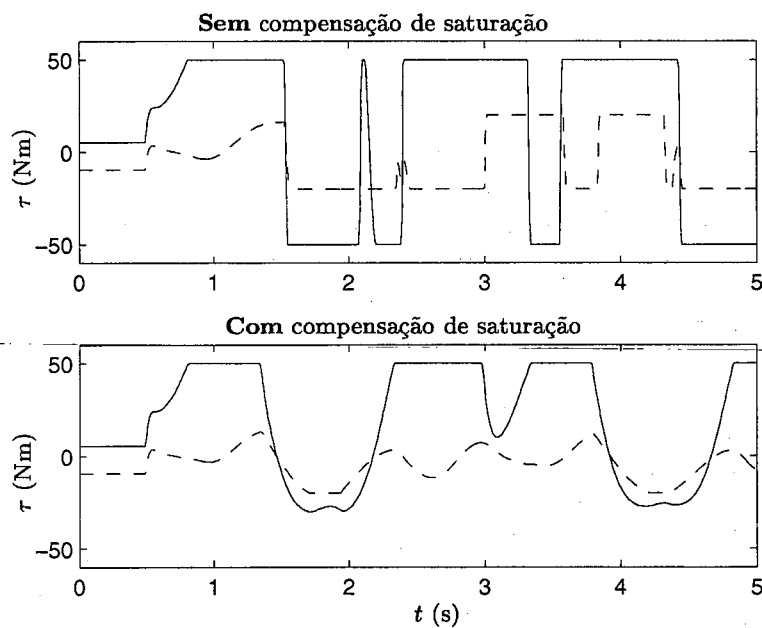


Figura 4.10: Sinal de controle para o robô manipulador com controlador (4.68). Sólida: torque na junta 1; Tracejada: torque na junta 2.

A Tabela 4.1 condensa as comparações de desempenho obtidas através dos resultados de simulação. São utilizados três índices de desempenho para comparar o desempenho nas condições de operação: linear (isto é, sem saturação); com saturação, porém sem compensação de saturação; com compensação de saturação. Os índices de desempenho utilizados foram os seguintes:

$$\begin{aligned} \text{IAE} &: \int_0^{t_f} |q_d(t) - q(t)| dt \\ \text{ISE} &: \sqrt{\int_0^{t_f} |q_d(t) - q(t)|^2 dt} \\ \text{SUP} &: \sup_{t \in [0, t_f]} |q_d(t) - q(t)| \end{aligned}$$

Nota-se a significativa melhoria de desempenho obtida com a introdução da compensação de saturação em praticamente todos os casos e, em especial, na junta 2.

	Junta 1						Junta 2					
	Torque computado			Comp. gravidade			Torque computado			Comp. gravidade		
	IAE	ISE	SUP	IAE	ISE	SUP	IAE	ISE	SUP	IAE	ISE	SUP
Lin.	0	0	0	0	0	0	0.04	0.02	0.01	0.03	0.02	0.01
Sat.	0.61	0.41	0.53	0.92	0.70	1.07	2.87	1.68	1.78	2.44	1.45	1.61
Comp.	0.59	0.32	0.27	0.15	0.09	0.09	.64	0.39	0.42	0.20	0.11	0.10

Tabela 4.1: Comparação de desempenho de seguimento de referência.

Embora a estratégia de compensação de saturação utilizada permita grande flexibilidade com relação ao projeto do controles local e global, o desempenho do sistema em malha fechada dependerá do ajuste dos parâmetros destes controladores, pois sempre haverá interação entre as ações de cada um deles. Assim, é de se esperar que diferentes ajustes dos controladores PID utilizados neste estudo de caso conduzam a resultados diferentes, muito embora o efeito da compensação da saturação sobre a estabilidade do sistema deva ser o mesmo.

4.5 Comentários Conclusivos

Uma metodologia de compensação de saturação em sistemas não-lineares foi desenvolvida com base na estratégia de unificação de controladores locais e globais apresentada em (TEEL, KAPOOR, 1997b). Também, este esquema de unificação foi adaptado para o caso em que o controle “global” garante um determinado domínio de estabilidade, ao invés de estabilidade global, e deseja-se que a estratégia de unificação preserve este domínio, além de preservar o

desempenho do controle local, sempre que possível.

Esta metodologia foi aplicada ao controle de robôs manipuladores e resultados de simulação foram apresentados. Estes resultados mostram o efeito significativo da saturação sobre o desempenho/estabilidade do sistema e ilustram os benefícios da compensação de saturação. A introdução de compensação de saturação permite uma recuperação significativa do desempenho do sistema que fora originalmente projetado sem considerar a existência de saturação no controle.

Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho foram abordados alguns aspectos do problema de projeto de controladores não-lineares para sistemas com restrições nos atuadores. Foram propostas alternativas de solução no contexto dos seguintes problemas:

1. Estabilização global de sistemas lineares com saturação nos atuadores;
2. Seguimento de *set-point*, ou, no caso mais geral, referências limitadas que convergem para um valor constante, para sistemas lineares com modos instáveis e com restrições tanto em magnitude como em taxa de variação do sinal de controle, utilizando a técnica do *anti-windup*;
3. Compensação de saturação no problema de seguimento de *set-point* em sistemas não-lineares com saturação nos atuadores.

Foram considerados estudos de casos ilustrando a efetiva contribuição dos controles propostos, inclusive fazendo-se comparações com técnicas de controle existentes na literatura.

Estabilização. O algoritmo de escalonamento proposto permitiu reduzir a conservatividade inerente aos algoritmos baseados em conjuntos elipsoidais positivamente invariantes. Como resultado, obteve-se uma melhoria de desempenho observada como uma convergência mais rápida do estado do sistema nos dois estudos de caso considerados. Mostrou-se também que o ganho em desempenho obtido com o algoritmo de escalonamento proposto, comparativamente aos algoritmos existentes, não impõe perdas significativas em termos de robustez para o sistema em malha fechada nem em incremento de complexidade computacional. Em certas situações, o algoritmo proposto pode introduzir descontinuidades no sinal de controle, o que pode ser visto como uma desvantagem deste algoritmo, embora tais descontinuidades sejam isoladas, eliminando assim a possibilidade de chaveamentos de alta frequência.

Seguimento. A técnica do *anti-windup* foi utilizada como abordagem para propor uma estratégia de controle para seguimento de referências assintoticamente convergentes para um valor constante no contexto de sistemas lineares com restrições nos atuadores. A estratégia de controle abrange sistemas lineares com modos instáveis e com limitação tanto em magnitude como em taxa de variação do sinal de controle.

O seguimento de referência através do *anti-windup* proposto apresenta propriedades atraídas como as relacionadas a seguir.

- Liberdade total no projeto do controle nominal, isto é, o controle que induz o desempenho de seguimento desejado quando o sinal de referência e as condições iniciais são tais que o sistema opera na região linear dos atuadores;
- Nenhuma restrição sobre a magnitude do sinal de referência é imposta a priori;
- É garantida a preservação do desempenho induzido pelo controle nominal, sempre que possível;
- Permite utilizar técnicas de controle já desenvolvidas para estabilização robusta de sistemas lineares com restrições no controle;
- Decompõe o projeto em dois estágios: um local, visando desempenho; um outro “global”, visando garantia de estabilidade.

Estas propriedades oferecem uma certa flexibilidade de projeto, conjuntamente com uma *quase* separação de objetivos de desempenho e estabilidade no projeto. Ao mesmo tempo, o fato de não restringir a magnitude do sinal de referência permite que esta possa ser utilizada para obter transições mais rápidas para o sistema em malha fechada, utilizando mais efetivamente o esforço de controle disponível.

Compensação. Através do estudo do controle de um robô manipulador, mostrou-se a importância e as vantagens de dispor de estratégias para compensação de saturação mesmo em sistemas não-lineares. Uma das motivações para tal vem do fato de que a grande maioria das técnicas de controle disponíveis para sistemas não-lineares considera o sinal de controle ilimitado. Assim, estratégias de compensação de saturação podem tornar mais viável a aplicação destas técnicas.

A estratégia de unificação de controladores locais e globais desenvolvida em (TEEL, KAPOOR, 1997b) mostrou-se atrativa para o propósito da compensação de saturação em

sistemas não-lineares, fornecendo um formalismo adequado para o tratamento do problema. Esta mesma estratégia fundamenta a técnica do *anti-windup* \mathcal{L}_2 e a contribuição apresentada para seguimento de referência no contexto de sistemas lineares. Uma extensão desta técnica foi proposta e aplicada na compensação de saturação no controle de robôs manipuladores. Os resultados de simulação atestam melhorias significativas de desempenho/estabilidade obtidas com a estratégia de compensação de saturação proposta.

Conclusão geral. Virtualmente todo sistema físico está sujeito a restrições de magnitude e/ou taxa de variação em sua entrada. Devido a simplificações de projeto e ao fato de que muitos sistemas reais são operados em torno de um ponto de operação, normalmente estas restrições são negligenciadas na fase de projeto. Contudo, variações de referência e/ou perturbações podem facilmente levar o sistema a atingir os limites dos atuadores, comprometendo estabilidade e desempenho do projeto original. Esta é uma primeira motivação para o problema da compensação de saturação. Por estas razões, pode-se supor que muitos sistemas físicos são superdimensionados para evitar que os limites dos atuadores sejam ultrapassados. Alternativas para compensação de saturação podem, portanto, contribuir para redução de custos e/ou aumento de produtividade, explorando de forma mais adequada as potencialidades do sistema.

Desta forma, o tratamento mais adequado de restrições no controle é um problema de importância prática considerável. Neste contexto, encaixam-se as técnicas do *anti-windup* e a unificação de controladores locais e globais, permitindo que os controle projetados inicialmente, negligenciando-se as restrições nos atuadores, possam ser reutilizados integralmente e apenas adicionados de modificações que garantem estabilidade em condições extremas de operação. Além disso, do ponto de vista de aplicações, os esquemas de controle em uso pouco contemplam as restrições nos atuadores, de onde pode ser vislumbrada a utilização prática das técnicas desenvolvidas neste trabalho.

Perspectivas

A abordagem da equação de Riccati e o algoritmo de escalonamento proposto no capítulo 2 poderiam ser estendidos para sistemas lineares descritores. A questão de realimentação de saída também poderia ser abordada.

No contexto do *anti-windup* \mathcal{L}_2 , a síntese de $\kappa(\xi)$ tal que minimize $\|z\|_2$ é um problema

importante que poderia ser atacado.

A contribuição ao seguimento de *set-point* apresentada no capítulo 3 carece de uma análise de robustez adequada quanto a incertezas paramétricas nas matrizes A e B do sistema original. Um projeto mais explícito de γ também seria desejável.

O capítulo 4 abre diversas frentes que poderiam ser melhor exploradas. Uma contribuição importante seria relaxar a necessidade do controle global garantir estabilidade assintótica do equilíbrio, para garantir apenas convergência para um conjunto que contém o equilíbrio. Desta forma, apenas o controle local seria responsável por garantir o equilíbrio do sistemas em malha fechada.

No contexto da aplicação a robôs manipuladores uma primeira perspectiva é a implementação prática da lei de controle proposta para verificar sua funcionalidade em uma aplicação real. Também cabe uma análise mais detalhada da garantia de estabilidade para o robô manipulador, além de extensões para classes mais gerais de robôs, considerando mais graus de liberdade e flexibilidade nas juntas, a qual sempre ocorre quando robôs, considerados rígidos, operam em velocidades elevadas.

Publicações do Autor

1. R. Reginatto and E. R. De Pieri. Saturation compensation for robot manipulators. In *XIII Congresso Brasileiro de Automática*, pg. 955-960, Florianópolis, Brasil, Setembro 2000.
2. R. Reginatto, A. R. Teel, and E. R. De Pieri. Enhanced performance global stabilization of linear systems with saturating actuators. In *XIII Congresso Brasileiro de Automática*, pg. 949-954, Florianópolis, Brasil, Setembro 2000.
3. R. Reginatto, A. R. Teel, and E. R. De Pieri. Robustness and enhanced performance for linear systems with saturating actuators. In *3rd IFAC Symposium on Robust Control Design, ROCOND'2000*, Prague, Czech Republic, Jun. 21-23, 2000.
4. R. Reginatto, A. R. Teel, and E. R. De Pieri. Stabilization of saturated linear systems: A scheduling mechanism based on the control signal. Relatório técnico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, Janeiro, 2000.
5. C. Barbu, R. Reginatto, A. R. Teel, and L. Zaccarian. Anti-windup for exponentially unstable linear systems with inputs limited in magnitude and rate. In *American Control Conference*, Chicago, IL, June 2000.
6. C. Barbu, R. Reginatto, A. R. Teel, and L. Zaccarian. Anti-windup for exponentially unstable linear systems with inputs limited in magnitude and rate. Technical report, University of California at Santa Barbara, Santa Barbara, USA, February 2000.
7. C. Barbu, R. Reginatto, A. R. Teel, and L. Zaccarian. Anti-windup design for manual flight control. In *American Control Conference*, San Diego, CA, June 1999, pages 3186-3190.

8. R. Reginatto and E.R. De Pieri. Nonlinear robust control design: A survey. *Ciência e Engenharia*, 1(4):1-8, Jan./Junho 1999.
9. R. Reginatto and E. R. De Pieri. Some nonlinear robust control design approaches. In *XII Congresso Brasileiro de Automática*, volume 4, pg. 1443-1450, Uberlândia, MG, Brasil, Setembro de 1998.
10. Romeu Reginatto. Controle Robusto de Sistemas Não-Lineares: Técnicas de Projeto. Relatório técnico RT 002/98, DAS, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, Fevereiro de 1998.
11. A. S. Bazanella, R. Reginatto, and R. Valiatti. Robustness margins for global asymptotic stability in indirect field-oriented control of induction motors. In *XIII Congresso Brasileiro de Automática*, pg. 1048-1053, Florianópolis, Brasil, Setembro de 2000.
12. A. S. Bazanella and R. Reginatto. Robustness margins for indirect field-oriented control of induction motors. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 45(6):1226-1231, June 2000.
13. A. Bazanella, R. Reginatto, and R. Valiati. On Hopf bifurcations in indirect field oriented control of induction motors: Designing a robust PI controller. In *Conference on Decision and Control*, pages 689-694, Phoenix, USA, December 1999.
14. A. S. Bazanella and R. Reginatto. Robustness margins for indirect field-oriented control of induction motors. In *Conference on Decision and Control*, pages 1001-1006, Tampa, Florida, December 1998.
15. C. C. Pain, A. S. Bazanella, and R. Reginatto. Uma Nova Abordagem para a Adaptação Paramétrica em Controle por Orientação de Campo de Motores de Indução. In *Anais do XII Congresso Brasileiro de Automática*, pg. 1811-1816, Uberlândia, Brasil, Setembro de 1998.

Apêndice A

Modelagem do Robô Manipulador

Neste apêndice é apresentado o modelo completo de um robô manipulador de dois graus de liberdade. Este modelo foi utilizado para obter os resultados de simulação apresentados no Capítulo 4.

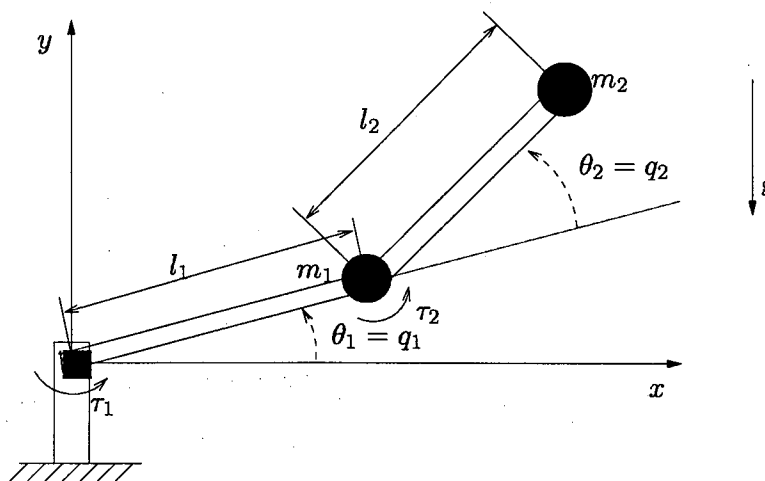


Figura A.1: Esquemático de um robô manipulador planar de 2 graus de liberdade.

A Figura A.1 ilustra esquematicamente um robô planar de dois graus de liberdade. Supõe-se que a massa dos braços esteja concentrada nas extremidades, representadas por m_1 e m_2 . Os braços possuem comprimentos l_1 e l_2 , respectivamente. O torque aplicado em cada junta é representado por τ_1 e τ_2 . O ângulo medido em cada junta é representado por θ_1 e θ_2 , respectivamente. A aceleração da gravidade é representada por g . São desprezados os atritos nas juntas e as dinâmicas dos atuadores.

Os ângulos nas juntas 1 e 2 correspondem às coordenadas de trabalho, e serão também representados por q_1 e q_2 , respectivamente. Considere também a notação vetorial

$$q \doteq \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

e a representação usual de derivadas temporais \dot{q} e \ddot{q} .

Com estas hipóteses e a notação introduzida, o modelo do robô planar ilustrado na Figura A.1 é dado por (LEWIS et al., 1993)

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (\text{A.2})$$

onde,

$$M(q) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2 \cos(q_2) & m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(q_2) \\ m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(q_2) & m_2l_2^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -2m_2l_1l_2 \sin(q_2)\dot{q}_2 & -m_2l_1l_2 \sin(q_2)\dot{q}_2 \\ m_2l_1l_2 \sin(q_2)\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)g l_1 \cos(q_1) + m_2g l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ m_2g l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Neste modelo, M representa a matriz de inércia, G representa o efeito da gravidade e C representa o efeito da força centrífuga e de Coriolis.

Para considerar torques de carga nas juntas, basta substituir τ_1 e τ_2 na equação (A.2) pelo torque líquido aplicado na respectiva junta.

Apêndice B

Conjuntos Saída Admissíveis

Neste apêndice é apresentado o conceito de conjunto saída admissível bem como um conjunto de resultados que permitem sua utilização na análise e projetos de sistemas com restrições no controle. Todos os resultados são apresentados no contexto de sistemas lineares discretos, embora o conceito de conjunto saída admissível seja independente do fato do sistema ser contínuo ou discreto no tempo. Os resultados apresentados são particularmente importantes para o capítulo 3.

Considere o sistema linear discreto.

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) \\z(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{B.1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ e $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. A saída z representa um conjunto de variáveis do sistema que estão sujeitas a restrições.

Todas as definições apresentadas no capítulo 1 no contexto de sistemas contínuos, possuem definições análogas para sistemas discretos. Em particular, os Lemas 1.3.4 e 1.3.5 continuam válidos com a devida substituição de $\overline{C^-}$, no Lema 1.3.5, pelo disco fechado de raio unitário.

Definição B.0.1 Para o sistema (B.1), um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito admissível para a saída z com respeito ao conjunto $Z \subset \mathbb{R}^{n_z}$ se $CA^t X \subset Z$, $\forall t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Abreviadamente, diz-se que X é (A, C, Z) -admissível ou saída-admissível. O conjunto X é dito saída-admissível máximo, e é representado por $O_\infty(A, C, Z)$, se contém todos os conjuntos (A, C, Z) -admissíveis. \triangleleft

Um conjunto saída-admissível não necessariamente é invariante para o sistema (B.1). Não obstante, $O_\infty(A, C, Z)$ é positivamente invariante e, mais do que isto, é o maior conjunto

positivamente invariante tal que as trajetórias de (B.1) satisfazem a restrição $z(t) \in Z, \forall t \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$.

Nota B.0.2 *Em particular, para o sistema $x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$, $O_\infty(A+BK, K, U)$ é o maior conjunto positivamente invariante obtido pela lei de controle linear $u = Kx$ e tal que o controle satisfaz a restrição $u(t) \in U, \forall t \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$. Necessariamente, $O_\infty(A+BK, K, U)$ é um subconjunto da região de linearidade da lei de controle $u = Kx$ (em geral bem menor). A igualdade só se verifica em alguns casos particulares (CASTELAN, 1992). **

A seguir são estabelecidas algumas propriedades de conjuntos saída-admissíveis as quais serão importantes para a apresentação do condicionador de referência. Provas destes resultados podem ser encontradas em (GILBERT, TAN, 1991).

O primeiro teorema estabelece propriedades de $O_\infty(A, C, Z)$ relacionadas com propriedades de Z . Quando o contexto permitir, utilizar-se-á O_∞ para denotar $O_\infty(A, C, Z)$.

Teorema B.0.3 *As propriedades de fechamento, convexidade e simetria de O_∞ são herdadas das propriedades correspondentes de Z . Adicionalmente,*

1. *Se (C, A) é observável, então Z limitado implica O_∞ limitado.*
2. *Se A é Lyapunov estável, então $0 \in \text{int}(Z)$ implica $0 \in \text{int}(O_\infty)$.*
3. *Para $\alpha \in \mathbb{R}$, $O_\infty(A, C, \alpha Z) = \alpha O_\infty(A, C, Z)$*
4. *Se $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é não singular, então $O_\infty(A, C, Z) = T O_\infty(T^{-1}AT, CT, Z)$.*
5. *Se (C, A) é detectável e $C = [C_1 \ 0]$, $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}$ com (C_1, A_1) observável, então $O_\infty(A, C, Z) = O_\infty(A_1, C_1, Z)$.*

O próximo teorema estabelece condições para que O_∞ possa ser descrito por um conjunto de desigualdades.

Teorema B.0.4 *Suponha que A é Lyapunov estável e o conjunto Z é dado por*

$$Z = \{z \in \mathbb{R}^{n_z} : F_i(z) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n_f\} \quad (\text{B.2})$$

onde, para $i = 1, \dots, n_f$, $F_i : \mathbb{R}^{n_z} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e tais que $F_i(0) \leq 0$. Então, $0 \in O_\infty(A, C, Z)$ e

$$O_\infty(A, C, Z) = \{x \in \mathbb{R}^n : F_i(CA^t x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n_f, t \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\} \quad (\text{B.3})$$

De acordo com a descrição (B.3), O_∞ é determinado por um número infinito de desigualdades. Diz-se que O_∞ é determinado finitamente se existe t^* tal que

$$O_\infty(A, C, Z) = \{x \in \mathbb{R}^n : F_i(CA^t x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n_f, t = 0, 1, \dots, t^*\} \quad (\text{B.4})$$

O próximo lema fornece condições para que O_∞ seja determinado finitamente. As condições são apenas suficientes, mas existem exemplos que evidenciam dificuldades em enfraquecê-las.

Teorema B.0.5 *Suponha que: (i) A é Schur-estável¹, (ii) (C, A) é observável, (iii) Z é limitado, e (iv) $0 \in \text{int}(Z)$. Então, O_∞ é determinado finitamente.*

A condição mais forte para a determinação finita de O_∞ é a primeira, que requer que A seja Schur-estável. Quando A é apenas Lyapunov estável não há garantia de que O_∞ seja determinado finitamente. Neste caso, é possível obter-se uma aproximação de O_∞ a qual é determinável finitamente. O seguinte teorema estabelece as condições para tal.

Teorema B.0.6 *Sejam,*

$$C = \begin{bmatrix} C_L & C_s \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A_s \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_L & 0 \\ C_L & C_s \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

com (C, A) observável e A_s Hurwitz. Baseado em Z (eq. (B.2)) defina,

$$Z(\epsilon) = \{z \in \mathbb{R}^{n_z} : F_i(z) \leq -\epsilon, i = 1, 2, \dots, n_f\} \quad (\text{B.6})$$

Então, para cada $\epsilon \in (0, -\max\{F_i(0), i = 1, \dots, n_f\})$, $O_\infty(A, \tilde{C}, Z(\epsilon) \times Z)$ é determinado finitamente e

$$O_\infty(A, C, Z(\epsilon)) \subset O_\infty(A, \tilde{C}, Z(\epsilon) \times Z) \subset O_\infty(A, C, Z) \quad (\text{B.7})$$

¹A é Schur-estável sse todos os seus autovalores estão no interior do círculo de raio unitário.

Assim, de acordo com o Teorema B.0.6, ao invés de determinar-se $O_\infty(A, C, Z)$ (que não é determinável finitamente), encontra-se $O_\infty(A, \tilde{C}, Z(\epsilon) \times Z)$, o qual sempre é determinável finitamente para algum ϵ dentro das condições do teorema. Este conjunto pode então ser utilizado como uma aproximação de $O_\infty(A, C, Z)$ cuja precisão depende de ϵ e pode ser inferida de (B.7).

Apêndice C

Estabilidade de Sistemas Não-Lineares

C.1 Conceitos Básicos

Definição C.1.1 *Uma função contínua $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ pertence a classe \mathcal{G} se for não-decrescente. Uma função contínua $\alpha : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ pertence a classe \mathcal{K} se for estritamente crescente e $\alpha(0) = 0$. Ela é uma função da classe \mathcal{K}_{∞} se, adicionalmente, $a = \infty$ e $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$. Uma função contínua $\beta : [0, a) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ pertence a classe \mathcal{KL} se, para todo s fixo, $\beta(r, s)$ pertence a classe \mathcal{K} com respeito a r e, para todo r fixo, o mapa $\beta(r, s)$ é decrescente em s e $\beta(r, s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$. \triangleleft*

Considere o sistema não-linear

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{C.1}$$

onde $f : [0, \infty) \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições usuais de existência e unicidade de solução (KHALIL, 1996) e $X \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio que contém a origem como ponto interior. Considere, sem perda de generalidade, que a origem é um ponto de equilíbrio de C.1, isto é, $f(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$.

A definição usual de estabilidade no sentido de Lyapunov utiliza o formalismo de ϵ, δ 's (KHALIL, 1996, YOSHIKAWA, 1966). O seguinte lema fornece uma caracterização em termos de funções de classe \mathcal{K} e \mathcal{KL} , a qual é mais concisa. Para uma prova deste resultado veja (KHALIL, 1996).

Lema C.1.2 *O equilíbrio $x = 0$ de C.1 é*

- *uniformemente estável se e somente se existir uma função $\alpha(\cdot) \in \mathcal{K}$ e uma constante $c > 0$, independente de t_0 , tais que*

$$|x(t)| \leq \alpha(|x(t_0)|), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall |x(t_0)| \leq c \quad (\text{C.2})$$

- *UAS se e somente se existir uma função $\beta(\cdot, \cdot) \in \mathcal{KL}$ e uma constante $c > 0$ tais que*

$$|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall |x(t_0)| \leq c \quad (\text{C.3})$$

- *GUAS se e somente se a condição C.3 for satisfeita para toda estado inicial $x(t_0)$.*
- *exponencialmente estável (ES) se a condição C.3 for satisfeita com*

$$\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}, \quad k > 0, \quad \gamma > 0$$

Ainda, é globalmente exponencialmente estável (GES) se esta condição for satisfeita para qualquer estado inicial.

◊

O teorema seguinte constitui o alicerce do segundo método de Lyapunov (KHALIL, 1996).

Teorema C.1.3 *Seja $V : [0, \infty) \times X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável e sejam $\alpha_1(\cdot) \in \mathcal{K}$ e $\alpha_2(\cdot) \in \mathcal{K}$ tais que para todo $t \geq t_0$ e todo $x \in X$*

$$\alpha_1(|x|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(|x|) \quad (\text{C.4})$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W(x) \quad (\text{C.5})$$

para algum $W(x)$. As seguintes sentenças são verdadeiras.

- *Se $W(x) \geq 0$, então $x = 0$ é uniformemente estável.*
- *Se $W(x) \geq \alpha_3(|x|) \in \mathcal{K}$, então $x = 0$ é UAS.*
- *se $\alpha_1(|x|) \geq k_1 |x|^c$, $\alpha_2(|x|) \leq k_2 |x|^c$ e $W_3(x) \geq k_3 |x|^c$ para algumas constantes positivas k_1, k_2, k_3, c , então $x = 0$ é exponencialmente estável;*

Ainda, se todas as condições do teorema forem satisfeitas globalmente e $\alpha_1(|x|)$ for radialmente ilimitada, então a característica do equilíbrio $x = 0$ é global. Finalmente, para sistemas autônomos (invariantes no tempo), $V(t, x)$ pode ser escolhida independente de t e a qualificação uniformemente pode ser suprimida. •

Definição C.1.4 Considere o sistema não-linear autônomo

$$\dot{x} = f(x) \quad (\text{C.6})$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e com as hipóteses usuais de existência e unicidade de solução. Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de conjunto invariante em relação ao sistema C.6 se

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Um conjunto M é chamado conjunto positivamente invariante se

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \geq 0$$

◀

A noção de invariância pode auxiliar na prova de estabilidade assintótica, conforme estabelece o teorema de LaSalle (KHALIL, 1996, SLOTINE, LI, 1991).

Teorema C.1.5 Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e seja $\Omega \subset X$ um conjunto compacto e positivamente invariante em relação ao sistema C.6. Seja $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ em Ω . Seja $E \doteq \{x \in \Omega : \dot{V}(x) = 0\}$ e seja M o maior conjunto invariante contido em E . Então se $x(0) \in \Omega$, $x(t)$ tende a M a medida que $t \rightarrow \infty$. •

Para os sistemas não-autônomos, um resultado similar é possível, porém o conjunto para o qual as trajetórias convergem não pode ser determinado tão precisamente. O resultado baseia-se no lema de Barbalat (KHALIL, 1996, SLOTINE, LI, 1991).

Lema C.1.6 Considere o sistema C.1 e seja $V(t, x)$ uma função limitada inferiormente. Se $\dot{V}(t, x)$ é semidefinida negativa e uniformemente contínua em t , então $\dot{V}(t, x) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. ◦

C.1.1 Estabilidade com Relação a Conjuntos Compactos

Uma caracterização mais geral de estabilidade é a estabilidade com relação a conjuntos compactos. Os seguintes resultados apresentam caracterizações em termos de funções de classe \mathcal{K} e \mathcal{KL} , e em termos de funções de Lyapunov (LIN et al., 1996a, LIN, 1992).

Teorema C.1.7 *Seja $M \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto e invariante para o sistema (C.6). Então (C.6) é globalmente assintoticamente estável com relação a M se e somente se existir uma função $\beta \in \mathcal{KL}$ tal que*

$$\text{dist}_M(x(t)) \leq \beta(\text{dist}_M(x_0), t), \quad \forall t \geq 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Teorema C.1.8 *O sistema (C.6) é globalmente assintoticamente estável com relação a M se e somente se existir uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável em $(\mathbb{R}^n - M)$ e que satisfaz*

1. existem $\alpha_1 \in \mathcal{K}_\infty$, $\alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ tais que

$$\alpha_1(\text{dist}_M(x)) \leq V(x) \leq \alpha_2(\text{dist}_M(x))$$

2. existe uma função contínua e positiva definida α_3 tal que

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_3(\text{dist}_M(x))$$

C.1.2 Estabilidade Entrada-Estado - ISS

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{C.7}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{L}_\infty^m$ e $f(0, 0) = 0$. A seguinte definição é devida a Sontag (SONTAG, 1990, SONTAG, 1995, SONTAG, WANG, 1996).

Definição C.1.9 *O sistema (C.7) é entrada-estado-estável (ISS) se existirem funções $\beta \in$*

\mathcal{KL} e $\gamma \in \mathcal{K}$ tais que $\forall u \in \mathcal{L}_\infty^m$ e $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ a solução $x(t)$ com $x(0) = x_0$ existe e satisfaz ¹ para todo $t \geq 0$

$$|x(t)| \leq \max\{\beta(|x_0|, t), \gamma(\|u_t\|_\infty)\} \quad (\text{C.8})$$

onde u_t é o truncamento de u em t . O sistema (C.7) é dito localmente ISS se (C.8) valer para $\|u_t\|_\infty$ e $|x_0|$ suficientemente pequenos.

O uso de $\|u_t\|_\infty$ ou simplesmente $\|u\|_\infty$ é indiferente na definição. A definição estabelece que o estado $x(t)$ é limitado para todo $u(t)$ limitado. Também que o equilíbrio $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável para $u \equiv 0$. A função $\gamma(\cdot)$ é chamada de *ganho* \mathcal{L}_∞ não-linear de (C.7).

Nota C.1.10 Se o equilíbrio $x = 0$ de (C.7) com $u \equiv 0$ for assintoticamente estável, então (C.7) é localmente ISS. Contudo, o mesmo não vale no caso global. *

O próximo teorema caracteriza ISS em termos de funções *ISS-Lyapunov* (SONTAG, 1995, SONTAG, 1990, SONTAG, 1989).

Teorema C.1.11 O sistema (C.7) é ISS se e somente se uma das seguintes condições for satisfeita:

1. existem uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável e positiva definida, funções α_1 e α_2 de classe \mathcal{K}_∞ , ρ e α_3 de classe \mathcal{K} , tais que

$$\begin{aligned} \alpha_1(|x|) &\leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \\ |x| \geq \rho(\|u\|_\infty) &\Rightarrow \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u) \leq -\alpha_3(|x|), \quad \forall x, u \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

2. existem uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável e positiva definida, funções α_1 , α_2 , α_3 e α_4 da classe \mathcal{K}_∞ , tais que

$$\begin{aligned} \alpha_1(|x|) &\leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u) &- \alpha_3(|x|) + \alpha_4(\|u\|), \quad \forall x, u \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

O sistema (C.6) é localmente ISS se e somente se uma destas condições se verificar em uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. •

¹A definição seria equivalente se fosse tomada a soma de β e γ ao invés do máximo entre elas, pois $\max\{a, b\} \leq a + b \leq \max\{2a, 2b\}$.

C.2 Estabilidade de Sistemas em Cascata

Considere a composição em cascata na forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \xi) \\ \dot{\xi} &= a(\xi)\end{aligned}\tag{C.11}$$

com $f(0, 0) = 0$ e $a(0) = 0$. O objetivo desta seção é estabelecer condições sobre o sistema (C.11) para concluir sobre a estabilidade da origem $(x, \xi) = (0, 0)$ a partir da estabilidade individual dos subsistemas x e ξ . Os resultados desta seção podem ser encontrados em (SEPULCHRE et al., 1997, KHALIL, 1996).

Teorema C.2.1 *Considere o sistema (C.11) com as seguintes hipóteses:*

1. o equilíbrio $x = 0$ do subsistema $\dot{x} = f(x, 0)$ é LAS;
2. o equilíbrio $\xi = 0$ do subsistema $\dot{\xi} = a(\xi)$ é LAS;

Então, o equilíbrio $(x, \xi) = (0, 0)$ é LAS. •

Não é possível estender este resultado diretamente para o caso global. O sistema (C.12) é um exemplo em que os equilíbrio dos subsistemas individuais é GAS, mas o sistema completo não é.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 + x^3\xi \\ \dot{\xi} &= -\xi\end{aligned}\tag{C.12}$$

Garantia de estabilidade global do sistema em cascata (C.11) pode ser obtida com a hipótese de estabilidade entrada-estado.

Teorema C.2.2 *Considere o sistema (C.11) com as seguintes hipóteses:*

1. o subsistema $\dot{x} = f(x, \xi)$ é ISS (tomando ξ com entrada);
2. o equilíbrio $\xi = 0$ do subsistema $\dot{\xi} = a(\xi)$ é GAS;

Então, o equilíbrio $(x, \xi) = (0, 0)$ é GAS. •

A hipótese de ISS para o subsistema x de (C.11) é consideravelmente restritiva. O resultado mais geral para garantia de estabilidade global de (C.11) é estabelecido a seguir.

Teorema C.2.3 *Considere o sistema (C.11) com as seguintes hipóteses:*

1. o equilíbrio $x = 0$ de $\dot{x} = f(x, 0)$ é GAS;
2. o equilíbrio $\xi = 0$ do subsistema $\dot{\xi} = a(\xi)$ é GAS;

Então, o equilíbrio $(x, \xi) = (0, 0)$ é LAS e, adicionalmente, todas as trajetórias limitadas são convergentes. •

Em outras palavras, o Teorema C.2.3 estabelece que a estabilidade assintótica global dos equilíbrios individuais conjuntamente com a limitação de todas as trajetórias constitui condição suficiente para estabilidade assintótica global da origem do sistema em cascata (C.11).

C.3 Estabilidade de Sistemas Interconectados

Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \xi) \\ \dot{\xi} &= g(\xi, x)\end{aligned}\tag{C.13}$$

com $f(0, 0) = 0$ e $g(0, 0) = 0$. Para o sistema (C.13), a estabilidade assintótica local dos subsistemas $\dot{x} = f(x, 0)$ e $\dot{\xi} = g(\xi, 0)$ não é suficiente para garantir a estabilidade assintótica da origem. O seguinte teorema fornece condições suficientes para tal, em termos de uma condição de pequeno ganho.

Teorema C.3.1 *Considere o sistema (C.13) com as seguintes hipóteses:*

1. o subsistema $\dot{x} = f(x, 0)$ é localmente ISS com ganho γ_x ;
2. o subsistema $\dot{\xi} = g(\xi, 0)$ é localmente ISS com ganho γ_ξ ;
3. existe $\delta > 0$ tal que $(\gamma_x \circ \gamma_\xi)(s) < s$, $\forall s \in (0, \delta)$.

Então, o equilíbrio $(x, \xi) = (0, 0)$ é LAS. •

A versão global deste resultado requer que a condição de pequeno ganho (item 3) seja válida globalmente, como estabelece o resultado a seguir.

Teorema C.3.2 *Considere o sistema (C.13) com as seguintes hipóteses:*

1. o subsistema $\dot{x} = f(x, 0)$ é (globalmente) ISS com ganho γ_x ;
2. o subsistema $\dot{\xi} = g(\xi, 0)$ é (globalmente) ISS com ganho γ_ξ ;

$$3. (\gamma_x \circ \gamma_\xi)(s) < s, \quad \forall s \in (0, \infty)$$

Então, o equilíbrio $(x, \xi) = (0, 0)$ é GAS. •

C.4 Ganho \mathcal{L}_2 e Teorema de Pequeno Ganho

Como o conceito de ganho \mathcal{L}_2 e o teorema do pequeno ganho foram utilizados ao longo do trabalho, estes são desenvolvidos nesta seção para maior completude do trabalho. Estes resultados podem ser encontrados em maiores detalhes em (KHALIL, 1996, TEEL et al., 1996, VAN DER SHAFT, 1996, DESOER, VIDYASAGAR, 1975)

Definição C.4.1 *Seja $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma função Lebesgue mensurável. A norma \mathcal{L}_2 de w é definida como a seguinte integral (se existir)*

$$\|w\|_2 \doteq \sqrt{\int_0^\infty |w(t)|^2 dt}. \quad (\text{C.14})$$

Diz-se que $w \in \mathcal{L}_2$ se $\|w\|_2 < \infty$. ◁

Definição C.4.2 *Diz-se que o sistema não-linear*

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (\text{C.15})$$

possui ganho \mathcal{L}_2 menor ou igual a $\gamma(\cdot)$ se existir $\beta \in \mathcal{G}$ tal que, para qualquer $u \in \mathcal{L}_2$ e qualquer condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, as trajetórias de (C.15) existem para todo $t \geq 0$ e satisfazem

$$\|x\|_2 \leq \gamma(\|u\|_2) + \beta(|x_0|). \quad (\text{C.16})$$

Diz-se que o ganho \mathcal{L}_2 é finito se $\gamma(s) = \bar{\gamma}s$ e $\beta(s) = \bar{\beta}s$ para alguns $\bar{\gamma} > 0$ e $\bar{\beta} \geq 0$. ◁

Para sistemas não-lineares afins, o ganho \mathcal{L}_2 finito pode ser caracterizado através da inequação de Hamilton-Jacobi-Isaacs, conforme estabelece o próximo teorema.

Teorema C.4.3 *Considere o sistema não-linear*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Seja $\bar{\gamma} > 0$ e assumamos que exista uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável e positiva semidefinida que satisfaz

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2\bar{\gamma}^2} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} g(x) \right)' + \frac{1}{2} h'(x) h(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{C.18})$$

Então, o sistema (C.17) possui ganho \mathcal{L}_2 finito menor ou igual a $\bar{\gamma}$ de u para y . •

Para o caso linear, a caracterização é dada pelo conhecido Lema da Limitação Real (*Bounded Real Lemma*).

Lema C.4.4 Para o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

com A Hurwitz, $\|y\|_2 \leq \bar{\gamma} \|u\|_2 + \bar{\beta} |x_0|$ se e somente se existir $P = P' \geq 0$ tal que

$$A'P + PA + \frac{1}{\bar{\gamma}^2} PBB'P + C'C \leq 0 \quad (\text{C.20})$$

◦

O teorema a seguir fornece uma condição de pequeno ganho para garantir estabilidade global de sistemas interconectados. Este resultado pode ser encontrado em (TEEL et al., 1996).

Teorema C.4.5 Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \xi) \\ \dot{\xi} &= g(\xi, x) \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

com as seguintes hipóteses:

1. o subsistema $\dot{x} = f(x, u)$ é GAS e possui ganho \mathcal{L}_2 menor ou igual a γ_x ;
2. o subsistema $\dot{\xi} = g(\xi, u)$ é GAS e possui ganho \mathcal{L}_2 menor ou igual a γ_ξ ;
3. $(\gamma_x \circ \gamma_\xi)(s) < s, \quad \forall s \in (0, \infty)$

Então, o equilíbrio $(x, \xi) = (0, 0)$ é GAS. •

Referências Bibliográficas

- ANGELI, D.; MOSCA, E.; 1999. Command governors for constrained nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 44, n. 4, p. 816–819.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T.; 1988. *Automatic Tuning of PID Controllers*. Research Triangle Park : Instrument Society of America.
- ÅSTRÖM, K. J.; RUNDQWIST, L.; 1989. Integrator windup and how to avoid it. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (1989 : Pittsburgh, PA). *Proceedings*. p. 1693–1698.
- ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B.; 1984. *Computer Controlled Systems Theory and Design*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall.
- ATHANS, M.; FALB, P.; 1966. *Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications*. USA : McGraw-Hill Book Co.
- BARBU, C.; REGINATTO, R.; TEEL, A. R. et al.; 1999. Anti-windup design for manual flight control. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (June, 1999 : San Diego, CA). *Proceedings*. p. 3186–3190.
- 2000a. Anti-windup for exponentially unstable linear systems with inputs limited in magnitude and rate. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (June, 2000 : Chicago, IL). *Proceedings*.
- 2000b. *Anti-windup for exponentially unstable linear systems with inputs limited in magnitude and rate*. Santa Barbara, USA. Technical report - University of California at Santa Barbara.
- BEMPORAD, A. 1998. Reference governor for constrained nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 43, n. 3, p. 415–419.

- BEMPORAD, A.; CASAVOLA, A.; MOSCA, E.; 1997. Nonlinear control of constrained linear systems via predictive reference management. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 42, n. 3, p. 340-349.
- BEMPORAD, A.; MORARI, M.; DUA, V. et al.; 1999. *The Explicit Linear Quadratic Regulator for Constrained Systems*. Zürich. Technical Report AUT99-16 - ETH.
- BITSORIS, G.; GRAVALOU, E.; 1995. Comparison principle, positive invariance and constrained regulation of nonlinear systems. *Automatica*, v. 31, n. 2, p. 217-222.
- BLANCHINI, F. 1999. Set invariance in control - a survey. *Automatica*, v. 35, n. 11, p. 1747-1761.
- BOYD, S.; El Ghaoui, L.; FERON, E. et al.; 1994. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. In: *SIAM Studies in Applied Mathematics*, v. 15. Philadelphia, USA : SIAM.
- BURGAT, C.; TARBOURIECH, S.; 1998. Intelligent anti-windup for systems with input magnitude saturation. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, v. 8, p. 1085-1100.
- CAMACHO, E.; BORDONS, C.; JOHNSON, M.; 1999. *Model Predictive Control*. In: *Advanced Textbooks in Control and Signal Processing*. Great Britain : Springer-Verlag.
- CAMACHO, E. F.; ALBA, C. B.; 2000. Controle preditivo baseado em modelo, em espanhol. Notas de seminário. Florianópolis.
- CAMPO, P. J.; MORARI, M.; 1990. Robust control of processes subject to saturation nonlinearities. *Comput. Chem. Engng.*, v. 14, p. 343-358.
- CAMPO, P. J.; MORARI, M.; NETT, C. N.; 1989. Multivariable anti-windup and bumpless transfer: a general theory. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (1989 : Pittsburgh). *Proceedings*. p. 1706-1711.
- CASAVOLA, A.; MOSCA, E.; 1998. Global regulation of null-controlable input-saturated systems with arbitrary l_2 state disturbances. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (December, 1998 : Tampa, FL). *Proceedings*. p. 377-382.
- CASTELAN, E. B. 1992. *Sur l'invariance positive et la commande sous contraintes de systèmes linéaires multivariés*. Toulouse, França. PhD thesis - Université Paul Sabatier.

- CASTELAN, E. B.; HENNET, J. C.; 1992. Eigenstructure assignment of state constrained linear continuous time systems. *Automatica*, v. 28, n. 3, p. 605–611.
- CHAN, C. W.; HUI, K.; 1998. On the existence of globally stable actuator saturation compensators. *Int. Journal of Control*, v. 69, n. 6, p. 773–788.
- CHEN, C. Y.; PERNG, M. H.; 1997. Optimal anti-windup control of saturating discrete-time MIMO systems. *Int. J. Control*, v. 67, n. 6, p. 933–959.
- CHEN, H.; ALLGÖWER, F.; 1997. A quasi-infinite predictive control scheme for constrained nonlinear systems. *Automatica*, .
- DE NICOLAO, G.; MAGNI, L.; SCATTOLINI, R.; 1996. On the robustness of receding-horizon control with terminal constraints. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 41, n. 3, p. 452–453.
- 1998. Stabilizing receding-horizon control of nonlinear time-varying systems. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 43, n. 7, p. 1030–1036.
- DECARLO, R. A.; ZAK, S. H.; DRAKUNOV, S. V.; 1996. Variable structure, sliding-mode controller design. In: LEVINE, W. S. (ed.). *The Control Handbook*. USA : CRC Press. p. 941–951.
- DESOER, C. A.; VIDYASAGAR, M.; 1975. *Feedback Systems: Input-Output Properties*. London : Academic Press.
- DOYLE, J. C.; SMITH, R. S.; ENNS, D. F.; 1987. Control of plants with input saturation nonlinearities. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (1987 : Minneapolis). *Proceedings*. p. 1034–1039.
- FERTIK, H. A.; ROSS, C. W.; 1967. Direct digital control algorithm with anti-windup feature. *ISA Transactions*, v. 6, p. 317–328.
- FILIPPOV, A. 1988. *Differential equations with discontinuous righthand sides*. In: *Mathematics and Its Applications (Soviet Series)*. The Netherlands : Kluwer Academic Publishers.
- FLEMING, W.; RISHEL, R.; 1975. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. In: *Applications of Mathematics*, v. 1. New York : Springer-Verlag.

- FREEMAN, R.; PRALY, L.; 1998. Integrator backstepping for bounded controls and control rates. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 43, n. 2, p. 258–262.
- FULLER, A. T. 1969. In-the-large stability of relay and saturating control systems with linear controller. *Int. Jornal of Control*, v. 10, p. 457–480.
- GILBERT, E. G.; KOLMANOVSKY, I.; TAN, K. T.; 1995. Discrete-time reference governors and the nonlinear control of systems with state and control constraints. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, v. 5, p. 487–504.
- GILBERT, E. G.; TAN, K. T.; 1991. Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 36, n. 9, p. 1008–1020.
- Gomes da Silva Jr., J. M. 1998. *Sur la stabilité locale de systèmes linéaires avec saturation des commandes*. Toulouse, França. PhD thesis - Université Paul Sabatier.
- Gomes da Silva Jr., J. M.; TARBOURIECH, S.; 1997. Analysis of local stability of linear systems with saturating controls: a polyhedral approach. In: 3RD IFAC CONFERENCE ON SYSTEM STRUCTURE AND CONTROL (SSC 97) (October, 1997 : Bucarest, Romênia). *Proceedings*. p. 168–172.
- 1998. Local stabilization of linear discrete-time systems with saturating controls: an lmi-based approach. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (1998 : Philadelphia, USA). *Proceedings*. p. 92–96.
- GOOSSENS, M.; MITTELBACH, F.; SAMARIN, A.; 1994. *The Latex Companion*. USA : Addison-Wesley.
- GRAETTINGER, T. J.; KROGH, B. H.; 1992. On the computation of reference signals constraints for guaranteed tracking performance. *Automatica*, v. 28, n. 6, p. 1125–1141.
- HANUS, R.; KINNAERT, M.; 1989. Control of constrained multivariable systems using conditioning technique. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (1989 : Pittsburgh). *Proceedings*. p. 1712–1718.
- HANUS, R.; KINNAERT, M.; HENROTTE, J. L.; 1987. Conditioning technique, a general anti-windup and bumpless transfer method. *Automatica*, v. 23, p. 729–739.

- HESS, R.; SNELL, S.; 1997. Flight control system design with rate saturating actuators. *J. Guidance, Control, Dynamics*, v. 20, n. 1, p. 90–96.
- HINDI, H.; BOYD, S.; 1998. Analysis of linear systems with saturation using convex optimization. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (December, 1998 : Tampa, FL). *Proceedings*. p. 903–908.
- JIANG, Z.; TEEL, A.; PRALY, L.; 1994. Small-gain theorem for ISS systems and applications. *Math. Cont. Signals Systems*, v. 7, p. 95–120.
- JOHANSSON, M. 1999. *Piecewise Linear Control Systems*. Sweden. PhD thesis - Lund Institute of Technology.
- JONES, F. 1993. *Lebesgue Integration on Euclidean Space*. USA : Jones and Bartlett Publishers.
- KAPASOURIS, P.; ATHANS, M.; STEIN, G.; 1988. Design of feedback control systems for stable plants with saturating actuators. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (December, 1988 : Austin, Texas). *Proceedings*. p. 469–479.
- 1990. Design of feedback control systems for unstable plants with saturating actuators. In: IFAC SYMP. NONLINEAR CONTROL SYSTEM DESIGN (1990). *Proceedings*. Oxford : Pergamon Press. p. 302–307.
- KAPOOR, N.; TEEL, A. R.; DAOUTIDIS, P.; 1998. An anti-windup design for linear systems with input saturation. *Automatica*, v. 34, n. 5, p. 559–574.
- KEERTHI, S. S.; GILBERT, E. G.; 1998. Optimal infinite-horizon feedback laws for a general class of constrained discrete-time systems: Stability and moving-horizon approximations. *J. Opt. Theory Applic.*, v. 57, n. 2.
- KHALIL, H. 1996. *Nonlinear Systems*. 2nd edn. USA : Prentice Hall.
- KOTHARE, M. V.; CAMPO, P. J.; MORARI, M. et al.; 1994. A unified framework for the study of anti-windup designs. *Automatica*, v. 30, n. 12, p. 1869–1883.
- KOTHARE, M. V.; MORARI, M.; 1997. Stability analysis of anti-windup control scheme: a review and some generalizations. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE (1997). *Proceedings*.

- 1999. Multiplier theory for stability analysis of anti-windup control systems. *Automatica*, v. 35, p. 917–928.
- KRIKELIS, N. J. 1980. State feedback integral control with intelligent integrator. *Int. J. Control*, v. 32, p. 465–473.
- KRSTIĆ, M.; KANELLAKOPOULOS, I.; KOKOTOVIĆ, P.; 1995. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. In: *Adaptive and Learning Systems for Signal Processing, Communications, and Control*. USA : John Wiley & Sons, INC.
- LASSERRE, J. B. 1993. Reachable, controllable sets and stabilizing control of constrained linear systems. *Automatica*, v. 29, n. 2, p. 531–536.
- LAUVDAL, T. 1997. Stabilization of a pitch axis flight control experiment with input rate saturation. In: AM. INST. AERONAUTICS ASTRONAUTICS (1997). *Proceedings*. p. 1055–1065.
- 1998. *Stabilization of Linear Systems with Input Magnitude and Rate Saturations*. Norway. PhD thesis - Norwegian University of Science and Technology.
- LEWIS, F.; ABDALLAH, C.; DAWSON, D.; 1993. *Control of Robot Manipulators*. New York : MacMillan Publishing co.
- LIN, Y. 1992. *Lyapunov Function Techniques for Stabilization*. New Jersey. PhD thesis - Graduate School New Brunswick Rutgers.
- LIN, Y.; SONTAG, E.; 1995. Control-Lyapunov universal formulas for restricted inputs. *Control Theory and Advanced Technology*, v. 10, p. 1981–2004.
- LIN, Y.; SONTAG, E. D.; WANG, Y.; 1996a. A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability. *SIAM J. Cont. Opt.*, v. 34, n. 1, p. 124–160.
- LIN, Z. 1998a. Global control of linear systems with saturating actuators. *Automatica*, v. 34, n. 7, p. 897–905.
- 1998b. Semi-global stabilization of discrete-time linear systems with position and rate-limited actuators. *Syst. Cont. Letters*, v. 34, p. 313–322.
- LIN, Z.; PACTER, M.; BANDA, S. et al.; 1997. Stabilizing feedback design for linear systems with rate-limited actuators. In: TARBOURIECH, S.; GARCIA, G.; (eds). *Control*

- of Uncertain Systems with Bounded Controls, Lec. Notes Cont. Inf. Sci.*. Great Britain : Springer, v. 227. chapter 10, p. 173–186.
- 1999. State and output feedback design for robust tracking of linear systems with rate limited actuators. In: IFAC TRIENNIAL WORLD CONGRESS (1999 : Beijing, P.R. China). *Proceedings*. p. 163–168.
- LIN, Z.; SABERI, A.; 1993. Semi-global exponential stabilization of linear systems subject to input saturation via linear feedbacks. *Syst. Cont. Letters*, v. 21, n. 3, p. 225–239.
- 1995. A semi-global low-and-high gain design technique for linear systems with input saturation - stabilization and disturbance rejection. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, v. 5, p. 381–398.
- LIN, Z.; SABERI, A.; TEEL, A. R.; 1996b. The almost disturbance decoupling problem with internal stability for linear systems subject to input saturation - state feedback case. *Automatica*, v. 32, n. 4, p. 619–624.
- LIU, W.; CHITOUR, Y.; SONTAG, E.; 1996. On finite-gain stabilizability of linear systems subject to input saturation. *SIAM J. Cont. Opt.*, v. 34, n. 4, p. 1190–1219.
- LOZIER, J. C. 1956. A steady-state approach to the theory of saturable servo systems. *IRE Transactions on Automatic Control*, p. 19–39.
- MAYNE, D. Q. 1995. Optimization in model predictive control. In: BERBER, R. (ed.). *Methods of Model Based Process Control, Nato Advanced Study Institute series: E*. Dordrecht, Netherlands : Kluwer Academic Publishers, v. Applied Sciences 293. p. 367–398.
- MAZENC, F.; PRALY, L.; 1996. Adding integrations, saturated controls, and stabilization of feedforward systems. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 41, n. 11, p. 1559–1578.
- MCNAMEE, J.; PACHTER, M.; 1998. The construction of the set of stable states for constrained systems with open-loop unstable plants. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (June, 1998 : Philadelphia). *Proceedings*. p. 3364–3368.
- 1999. Efficient nonlinear reference governor algorithms for constrained tracking control systems. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (June, 1999 : San Diego). *Proceedings*. p. 3549–3553.

- MEGRETSKI, A. 1996. \mathcal{L}_2 BIBO output feedback stabilization with saturated control. In: TRIENNIAL IFAC WORLD CONGRESS (1996 : San Francisco, USA). *Proceedings*. p. 435–440.
- MICHALSKA, H.; MAYNE, D. Q.; 1993. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 38, n. 11, p. 1623–1633.
- MILLER, R. B.; PACHTER, M.; 1997. Maneuvering flight control with actuators constraints. *J. Guidance, Control, Dynamics*, v. 20, n. 4, p. 729–734.
- 1998. Manual flight control with saturating actuators. *IEEE Control Systems*, v. 18, n. 1, p. 10–19.
- MIYAMOTO, A.; VINNICOMBE, G.; 1996. Robust control of plants with saturation non-linearity based on coprime factor representation. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (December, 1996 : Kobe, Japan). *Proceedings*. p. 2838–2840.
- NIU, W.; TOMIZUKA, M.; 1998. A robust anti-windup controller design for motion control systems with asymptotic tracking subject to actuator saturation. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (Dez/16-18, 1998 : Tampa, FL). *Proceedings*. p. 915–920.
- PARK, J. K.; CHOI, C. H.; 1995. Dynamic compensation method for multivariable control systems with saturating actuators. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 40, n. 9, p. 1635–1640.
- PITTET, C.; TARBOURIECH, S.; BURGAT, C.; 1997. *Stability Regions for Linear Systems with Saturating Controls via Circle and Popov Criteria*. France. Technical Report 97078 - LAAS, CNRS.
- POLAK, E. 1971. *Computational Methods in Optimization: A Unified Approach*. In: *Mathematics in Science and Engineering*. New York : Academic Press.
- QI, K. Z.; FISHER, D. G.; 1994. Robust stability of model predictive control. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (June, 1994 : Baltimore). *Proceedings*. p. 3258–3262.
- QU, Z.; DAWSON, D.; 1996. *Robust Tracking of Robot Manipulators*. New York : IEEE Press.
- RAWLINGS, J. B. 2000. Tutorial overview of model predictive control. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 20, n. 3, p. 38–52.

- RAWLINGS, J. B.; MUSKE, K. R.; 1993. The stability of constrained receding horizon control. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 38, n. 10, p. 1512-1516.
- REGINATTO, R. 1998. *Controle Robusto de Sistemas Não-Lineares: Técnicas de Projeto*. Florianópolis, Brasil. Relatório Técnico RT 002/98 - DAS, Universidade Federal de Santa Catarina.
- REGINATTO, R.; DE PIERI, E. R.; 1998. Some nonlinear robust control design approaches. In: XII CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA (14-18 Set., 1998 : Uberlândia, Brasil). *Anais*. p. 1443-1450.
- 1999. Nonlinear robust control design: A survey. *Ciência e Engenharia*, v. 1, n. 4, p. 1-8.
- 2000. Saturation compensation for robot manipulators. In: XIII CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA (September, 2000 : Florianópolis, Brasil). *Anais*. p. 955-960.
- REGINATTO, R.; TEEL, A. R.; DE PIERI, E. R.; 2000a. Enhanced performance global stabilization of linear systems with saturating actuators. In: XIII CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA (September, 2000 : Florianópolis, Brasil). *Anais*. p. 949-954.
- 2000b. Performance enhancement and robustness for linear systems with saturating actuators. In: 3RD IFAC SYMPOSIUM ON ROBUST CONTROL DESIGN, RONCOND'2000 (Jun. 21-23, 2000 : Prague, Czeck Republic). *Preprints*.
- 2000c. *Stabilization of saturated linear systems: A scheduling mechanism based on the control signal*. Florianópolis, Brazil. Relatório técnico - Universidade Federal de Santa Catarina.
- ROCCO, P. 1996. Stability of PID control for industrial robot arms. *IEEE Trans. Robot Autom.*, v. 12, n. 4, p. 606-614.
- RUNDQWIST, L.; HILLGREN, R.; 1996. Phase compensation of rate limiters in JAS 93 Grippen. In: AIAA FLIGHT MECHANICS CONFERENCE (July 29-31, 1996 : San Diego, CA). *Proceedings*. p. 2634-2642.

- SABERI, A.; LIN, Z.; STOORVOGEL, A. A.; 1996a. Semiglobal stabilization of linear discrete-time systems subject to input saturation via linear feedback - an ARE-based approach. *Syst. Cont. Letters*, v. 24, p. 125-132.
- SABERI, A.; LIN, Z.; TEEL, A. R.; 1996b. Control of linear systems with saturating actuators. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 41, n. 3, p. 368-378.
- SCHMITENDORF, W. E.; BARMISH, B. R.; 1980. Null controllability of linear systems with constrained controls. *SIAM J. Cont. Opt.*, v. 18, n. 4, p. 327-345.
- SCOKAERT, P. O. M.; MAYNE, D. Q.; RAWLINGS, J. B.; 1999. Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability). *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 44, n. 3, p. 648-654.
- SCOKAERT, P. O.; MAYNE, D. Q.; 1998. Min-Max feedback model predictive control for constrained linear systems. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 43, n. 8, p. 1136-1142.
- SCOKAERT, P. O.; RAWLINGS, J. B.; 1998. Constrained linear quadratic regulation. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 43, n. 8, p. 1163-1169.
- SEPULCHRE, R.; JANKOVIĆ, M.; KOKOTOVIĆ, P. V.; 1997. *Constructive Nonlinear Control*. In: *Communication and Control Engineering*. Great Britain : Springer-Verlag.
- SHAMMA, J. S. 1999. Anti-windup via constrained regulation with observers. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (June, 1999 : San Diego, USA). *Proceedings*. p. 2481-2485.
- SHEWCHUN, J. M.; FERON, E.; 1997. High performance bounded control of systems subject to input and input rate constraints. In: AIAA - AMERICAN INST. AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS (1997). *Proceedings*.
- SLOTINE, J.; LI, W.; 1991. *Applied Nonlinear Control*. USA : Prentice-Hall International Editors.
- SMIRNOV, G. V. 1996. Stabilizations by constrained controls. *SIAM J. Cont. Opt.*, v. 34, n. 5, p. 1616-1649.
- SONTAG, E. 1989. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 34, n. 4, p. 435-443.

- 1990. Further facts about input-to-state stabilization. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 35, n. 4, p. 473–476.
- 1995. On the input-to-state stability property. *European Journal of Control*, v. 1, p. 24–36.
- SONTAG, E. D. 1984. An algebraic approach to bounded controllability of linear systems. *Int. Journal of Control*, v. 39, n. 1, p. 181–188.
- SONTAG, E. D.; SUSSMANN, H. J.; 1990. Nonlinear output feedback design for linear systems with saturating actuators. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (December, 1990 : Honolulu, Hawaii). *Proceedings*. p. 3414–3416.
- SONTAG, E.; WANG, Y.; 1996. New characterizations of input-to-state stability. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 41, n. 9, p. 1283–1294.
- SPONG, M.; VIDYASAGAR, M.; 1989. *Robot Dynamics and Control*. New York : John Wiley and Sons.
- STENGEL, R. 1994. *Optimal Control and Estimation*. USA : Dover Publications, Inc.
- SUARÉS, R.; RAMÍREZ, J. A.; SZNAIER, M. et al.; 1997. \mathcal{L}_2 disturbance attenuation for linear systems with bounded controls: an ARE-based approach. In: TARBOURIECH, S.; GARCIA, G.; (eds). *Control of Uncertain Systems with Bounded Controls, Lec. Notes Cont. Inf. Sci.*. Great Britain : Springer, v. 227. chapter 2, p. 25–38.
- SUSSMANN, H. J.; SONTAG, E. D.; YANG, Y.; 1994. A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 39, n. 12, p. 2411–2424.
- SUSSMANN, H. J.; YANG, Y.; 1991. On the stabilization of multiple integrators by means of bounded feedback controls. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (December, 1991 : Brighton, England). *Proceedings*. p. 70–72.
- SZNAIER, M.; DAMBORG, M. J.; 1987. Suboptimal control of linear systems with state and control inequality constraints. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (December, 1987 : Los Angeles, CA). *Proceedings*. p. 761–762.

- TARBOURIECH, S.; GARCIA, G.; 1997. Stabilization of linear discrete-time systems with saturating control and norm-bounded time-varying uncertainties. In: TARBOURIECH, S.; GARCIA, G.; (eds). *Control of Uncertain Systems with Bounded Controls, Lec. Notes Cont. Inf. Sci.*. Great Britain : Springer, v. 227. chapter 5, p. 75–96.
- TARBOURIECH, S.; Gomes da Silva Jr., J. M.; 2000. Synthesis of controllers for continuous-time delay systems with saturating controls via LMIs. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 45, n. 1, p. 105–111.
- TEEL, A. R. 1992. Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Syst. Cont. Letters*, v. 18, p. 165–171.
- 1994. Additional stability results with bounded controls. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (December, 1994 : Lake Buena Vista, FL). *Proceedings*. p. 133–136.
- 1995a. Linear systems with input nonlinearities: Global stabilization by scheduling a family of \mathcal{H}_∞ -type controllers. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, v. 5, p. 399–411.
- 1995b. Semi-global stabilizability for linear null controllable systems with input nonlinearities. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 40, n. 1, p. 96–100.
- 1996a. A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 41, n. 9, p. 1256–1270.
- 1996b. On L_2 performance induced by feedbacks with multiple saturations. *ESAIM: Control, Optim. Calc. of Variations*, v. 1, p. 225–240.
URL: <http://www.emath.fr/cocv/>
- 1998. Advanced nonlinear systems analysis: Class handouts. ECE, UCSB.
- 1999. Anti-windup for exponentially unstable linear systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, v. 9, p. 701–716.
- TEEL, A. R.; GEORGIU, T. T.; PRALY, L. et al.; 1996. Input-output stability. In: LEVINE, W. S. (ed.). *The Control Handbook*. USA : CRC Press. chapter 56.2, p. 895–908.
- TEEL, A. R.; KAPOOR, N.; 1997a. The \mathcal{L}_2 anti-windup problem: Its definition and solution. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE (July, 1997 : Brussels). *Proceedings*.

- 1997b. Uniting local and global controllers. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE (July, 1997 : Brussels). *Proceedings*.
- VAN DER SHAFT, A. V. 1996. *L₂-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. In: *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Great Britain : Springer-Verlag.
- WALGAMA, K. S.; RONNBACK, S.; STERNBY, J.; 1992. Generalization of conditioning technique for anti-windup compensators. *IEE Proc. D*, v. 139, n. 2, p. 109–118.
- WALGAMA, K. S.; STERNBY, J.; 1990. Inherent observer property in a class of anti-windup compensators. *Int. J. Control*, v. 52, p. 705–724.
- 1993. Conditioning technique for multiinput multioutput processes with input saturation. *IEE Proc. D*, v. 140, n. 4, p. 231–241.
- WREDENHAGEN, G. F.; BELANGER, P. R.; 1994. Piecewise-linear LQ control for systems with input constraints. *Automatica*, v. 30, n. 3, p. 403–416.
- YOSHIZAWA, T. 1966. *Stability Theory by Liapunov's Second Method*. Japan : The Mathematical Society of Japan.
- ZACCARIAN, L. 2000. *Uniting Local and Global Controllers for anti-windup synthesis*. Italy. PhD thesis - University of Rome, Tor Vergata.
- ZENI, N.; CASTELAN, E. B.; LEMOS, R. S. N. et al.; 1984. Controle discreto de velocidade de um motor de corrente contínua: Uma técnica de limitação dinâmica da corrente de armadura. In: 5^o CONGR. BRAS. AUTOMÁTICA/1^o CONGR. LAT.-AMERIC. AUTOMÁTICA (1984 : Campina Grande). *Anais*. p. 304–308.
- ZHENG, A.; KOTHARE, M. V.; MORARI, M.; 1994. Anti-windup design for internal model control. *Int. J. Control*, v. 60, n. 5, p. 1015–1024.
- ZHENG, A.; MORARI, M.; 1994. Stability of model predictive control with soft constraints. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (December, 1994 : Lake Buena Vista, FL). *Proceedings*. p. 1018–1023.
- 1995a. Control of linear unstable systems with constraints. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (June, 1995 : Seattle, WA). *Proceedings*. p. 3704–3708.

- 1995b. Stability of model predictive control with mixed constraints. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, v. 40, n. 10, p. 1818–1823.
- ZHENG, Z. Q.; MORARI, M.; 1993. Robust stability of constrained model predictive control. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (June, 1993 : San Francisco, CA). *Proceedings*. p. 379–383.