

JOSÉ DE OLIVEIRA

**CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS LINEARES A PARÂMETROS
VARIANTES NO TEMPO: TÉCNICAS DE ANÁLISE E SÍNTESE**

FLORIANÓPOLIS

2000

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS LINEARES A PARÂMETROS
VARIANTES NO TEMPO: TÉCNICAS DE ANÁLISE E SÍNTESE**

Tese submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

José de Oliveira



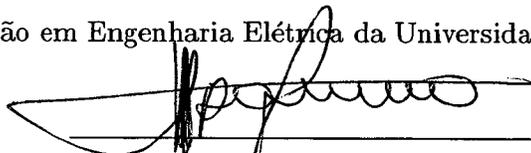
03364176

Florianópolis, novembro de 2.000.

**CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS LINEARES A PARÂMETROS
VARIANTES NO TEMPO: TÉCNICAS DE ANÁLISE E SÍNTESE**

José de Oliveira

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Controle Robusto*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.



Prof. Alexandre Trofino Neto, Dr.
Orientador

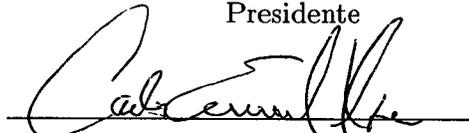


Prof. Aguinaldo Silveira e Silva, Ph.D.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:



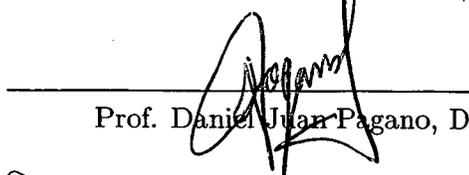
Prof. Alexandre Trofino Neto, Dr.
Presidente



Prof. Carlos E. de Souza, Dr.
Co-Orientador



Prof. Ricardo H. C. Takahashi, Dr.



Prof. Daniel Juan Pagano, Dr.



Prof. Aguinaldo Silveira e Silva, Ph.D.

À minha esposa Suzette, e filha Larissa...

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me guiado em mais esta etapa da minha vida.

Sou especialmente grato aos professores Alexandre Trofino Neto e Carlos E. de Souza pela orientação e co-orientação do trabalho e principalmente pelo apoio, dedicação, paciência e amizade.

Aos membros da banca pelas críticas e contribuições que levaram ao aprimoramento deste.

Sou muitíssimo grato à minha esposa Suzette, e minha filha Larissa, pela compreensão da minha ausência no lar durante os estudos.

À minha família pelo carinho e apoio constante, tanto na minha formação pessoal como profissional.

Aos amigos que perto ou distantes deram força e incentivo, especialmente aos do DEE.

Aos professores do LCMI pelo apoio e dedicação.

Aos colegas de curso que de uma forma ou de outra deram muita energia e estímulo.

Ao programa de Pós-Graduação da UFSC e seus funcionários pela oportunidade e auxílio.

À CAPES, UDESC, UFSC pelo apoio para a realização deste.

Gostaria de agradecer ainda àquelas pessoas que me apoiaram e me ajudaram na conclusão do presente trabalho apesar de não terem sido citadas.

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

**CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS LINEARES A PARÂMETROS
VARIANTES NO TEMPO: TÉCNICAS DE ANÁLISE E SÍNTESE**

José de Oliveira

Novembro/2.000

Orientador: Prof. Alexandre Trofino Neto, Dr.

Área de Concentração: Controle Robusto.

Palavras-chave: sistemas LPV, função de Lyapunov com dependência paramétrica, controle LPV, estabilidade bi-quadrática.

Número de Páginas: 110

Este trabalho trata dos problemas de performance \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas lineares a parâmetros variantes no tempo. Os critérios de performance \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são obtidos empregando uma função de Lyapunov com dependência quadrática nos parâmetros do sistema. Os critérios de performance usados admitem que os parâmetros do sistema e suas respectivas taxas de variação sejam confinados numa região convexa. Sob estas considerações, obtém-se desigualdades matriciais que apresentam condições suficientes destinadas aos casos de análise e síntese onde os critérios de performance \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são otimizados.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering.

**ROBUST CONTROL OF LINEAR SYSTEMS WITH TIME VARYING
PARAMETER: ANALYSIS AND SYNTHESIS**

José de Oliveira

November /2.000

Advisor: Prof. Alexandre Trofino Neto, Dr.

Area of Concentration: Robust Control.

Keywords: LPV systems, quadratic parameter-dependent Lyapunov functions, LPV control, bi-quadratic stability.

Number of Pages: 110

This work deals with the problem of \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ performance for linear systems with time varying parameter. The \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ performance indices are based on a parameter dependent Lyapunov function with quadratic dependence on the system parameters as well as on the system state. This stability notion is appropriate to deal with real parameters with magnitude and rate of variation confined to a given convex region. Sufficient conditions based on linear matrix inequalities are developed for the \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ performance analysis and control of linear systems with time varying parameter with guaranteed \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ performance.

Sumário

	xi
1 Introdução	1
1.1 Sistemas Lineares a Parâmetro Variante	2
1.2 A evolução dos Estudos para Sistemas LPV	4
1.3 Organização do Texto	5
2 Fundamentos para Estudo de Sistema LPV	7
2.1 Desigualdades Matriciais Lineares - LMI	7
2.1.1 Propriedades da LMI	8
2.1.2 Complemento de Schur	9
2.1.3 Formulação LMI Utilizando Restrições Algébricas	10
2.2 Pacotes Computacionais	11
2.2.1 Complexidade computacional	12
2.3 Superfície Politópica	12
2.4 Representação do Sistema LPV	14
2.5 Noções de Estabilidade para sistemas LPV	15
2.5.1 Funções de Lyapunov a Parâmetro Dependente	16
2.6 Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞	18
2.6.1 Norma \mathcal{H}_2 para Sistemas Variantes no Tempo	18
2.6.2 Norma \mathcal{H}_∞ para Sistemas Variantes no Tempo	20
2.7 Considerações Finais	23

3	Análise de Sistemas LPV	24
3.1	Estabilidade Robusta	24
3.2	Performance Robusta \mathcal{H}_2	27
3.2.1	Abordagem Primal	27
3.2.2	Abordagem Dual	30
3.3	Performance Robusta \mathcal{H}_∞	34
3.3.1	Abordagem Primal	34
3.3.2	Abordagem Dual	37
3.4	Exemplos Numéricos	40
3.4.1	Estabilidade Robusta	40
3.4.2	Performance Robusta \mathcal{H}_2	41
3.4.3	Performance Robusta \mathcal{H}_∞	42
3.5	Considerações Finais	44
4	Síntese para Sistemas LPV	46
4.1	Controle Robusto	46
4.2	Controle Robusto \mathcal{H}_2	49
4.2.1	Abordagem Primal	49
4.2.2	Abordagem Dual	52
4.3	Controle Robusto \mathcal{H}_∞	57
4.3.1	Abordagem Primal	57
4.3.2	Abordagem Dual	61
4.4	Exemplos Numéricos	65
4.4.1	Controle Robusto \mathcal{H}_2	65
4.4.2	Controle Robusto \mathcal{H}_∞	68
4.5	Considerações Finais	70
5	Sistemas LPV a Tempo Discreto	72
5.1	Representação do sistema LPV discreto	72
5.2	Custo garantido para sistemas discretos	74
5.3	Norma H_∞ para sistemas discretos	76
5.4	Funções de Lyapunov a Parâmetro Dependente	78

5.5	Estabilidade Robusta	79
5.6	Performance Robusta com Custo Garantido	81
5.7	Performance Robusta \mathcal{H}_∞	83
5.8	Exemplos Numéricos	87
5.8.1	Estabilidade Robusta	88
5.8.2	Performance Robusta com Custo Garantido	88
5.8.3	Performance Robusta \mathcal{H}_∞	90
5.9	Controle Robusto	91
5.10	Controle Robusto com Custo Garantido	94
5.11	Controle Robusto \mathcal{H}_∞	97
5.12	Exemplos Numéricos	100
5.12.1	Controle Robusto com Custo Garantido	100
5.12.2	Controle Robusto \mathcal{H}_∞	101
5.13	Considerações Finais	104
6	Conclusões e Perspectivas	105

Simbologia

\triangleq	Igual pordefinição
$Tr\{\dots\}$	Matriz traço
$diag\{\dots\}$	Matriz diagonal
X'	Transposta de X
X^*	Complexa conjugada transposta de X
X^+	Pseudo Inversa Moore-Penrouse de X
$X > 0$ ($X \geq 0$)	X é positiva (semi) definida
\mathfrak{R}	Conjunto dos números reais
\mathfrak{R}_+	Reais não negativos, i.e., $\mathfrak{R}_+ = [0, \infty)$
\mathfrak{R}^n	O espaço vetorial usual n -dimensional
$\mathfrak{R}^{n \times m}$	denota o conjunto de matrizes reais de dimensão $n \times m$
I_n	Matriz identidade de dimensão $n \times n$
\mathcal{L}_2	É o espaço de funções absolutamente integráveis
\mathcal{N}_X	Núcleo de X
$\ \cdot\ _2 \triangleq (\int_0^\infty \ \cdot\ ^2 dt)^{1/2}$	Onde $\ \cdot\ $ é a norma Euclidiana
$G(s) \sim (A, B, C, D)$	Sistema $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ com realização (A, B, C, D)
$Co(A_i)_{i=1, \dots, r}$	É o politopo definido pela combinação convexa dos vértices A_i

Capítulo 1

Introdução

O objetivo básico da teoria de controle é a obtenção de controladores que atendam os requisitos de projeto sobre o processo real. A busca por estes controladores é realizada utilizando-se modelos que geralmente apresentam um certo grau de incerteza em relação à descrição precisa destes processos, tais como, dinâmicas não modeladas, incertezas paramétricas, ruídos, etc. Sob esta abordagem ressalta-se a importância de dispor-se de técnicas que permitam não apenas a análise da robustez de um dado sistema de controle, mas também de técnicas de projeto que permitam considerar as estimativas das incertezas e informações sobre as perturbações que afetam o processo.

Dentro da evolução da teoria de controle, a utilização das desigualdades matriciais lineares LMIs, cuja sigla vem do Inglês "Linear Matrix Inequalities", tem se apresentado como uma ferramenta eficiente na busca por soluções de problemas de análise e síntese que diariamente se apresentam nesta área.

Um histórico da evolução das desigualdades matriciais lineares na teoria de controle pode ser encontrado em [1].

O surgimento de métodos computacionais eficientes para a solução de LMIs, fez com que elas se tornassem amplamente utilizadas na teoria de controle.

Pode-se ainda mencionar que pela formulação LMI, requisitos de desempenho e robustez podem ser simultaneamente tratados.

A formulação LMI, de um problema de controle é bastante flexível e pode em muitos casos ser modificada com a incorporação de novas restrições impostas ao problema.

Inúmeras são as formulações LMIs que têm aparecido na literatura, e a busca por estas, tem se tornado um tema de pesquisa bastante explorado na abordagem de problemas de controle, tendo em vista a flexibilidade e a eficiência numérica que uma formulação por desigualdades matriciais lineares possibilita.

Objetiva-se neste trabalho apresentar formulações LMI para os casos de análise e síntese, abordando o problema de performance para sistemas lineares variantes no tempo do tipo LPV (Linear Parameter Varying), empregando a definição de estabilidade bi-quadrática.

1.1 Sistemas Lineares a Parâmetro Variante

Um sistema linear variante no tempo pode ser descrito por um sistema de equações de estados do tipo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

onde as matrizes de representação de estados $A(t), B(t), C(t), D(t)$, dependem do tempo.

A busca de solução para problemas nesta representação, exige o conhecimento, a priori, da dependência temporal e da representação de estado $A(t), B(t), C(t), D(t)$, para uma solução em tempo real. Devido a estas dificuldades, a representação de sistemas nesta formulação não apresenta interesse prático.

Uma representação que tem sido amplamente utilizada para sistemas variantes no tempo, é apresentada abaixo.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

Sistemas que admitem esta formulação são conhecidos como sistemas lineares a parâmetro variante (sistemas LPV), cuja sigla LPV vem do Inglês "Linear Parameter Varying". Nestes, a dependência temporal da representação de estados aparece através da dependência paramétrica $\theta(t)$. Esta representação não é genérica, mas inúmeros são os exemplos práticos que admitem esta formulação.

Quando $\theta(t)$ representa elementos incertos do modelo normalmente se supõe o conheci-

mento a priori de limitantes para $\theta(t)$ e em alguns casos para $\dot{\theta}(t)$ também.

Quando $\theta(t)$ representa parâmetros cujos valores são conhecidos em tempo real podemos utilizar esses parâmetros na própria lei de controle para ajustá-la à medida que o modelo evolui no tempo. Com isto podemos melhorar o desempenho do sistema. Nesses casos se supõe o conhecimento a priori de limitantes para $\theta(t)$ e em alguns casos para $\dot{\theta}(t)$ também.

A abordagem clássica, comumente usada para controlar um sistema LPV, é realizar diferentes controladores para determinados pontos de funcionamento do sistema, associado à valores pré-definidos do parâmetro $\theta(t)$, figura 1.1. Assim o controle global do sistema pode então ser obtido por interpolação dos controles locais de cada ponto de funcionamento, por meio de uma estratégia de comutação entre os diferentes controladores locais.

Esta abordagem põe as seguintes questões:

1. Como escolher os pontos de funcionamento onde se fará a concepção da lei de controle?
2. O que se pode dizer da estabilidade global?

Isto é, mesmo que o sistema seja estável quando se fixa o parâmetro $\theta(t)$, ele pode vir a se tornar instável quando $\theta(t)$ evolui e introduz sua própria dinâmica.

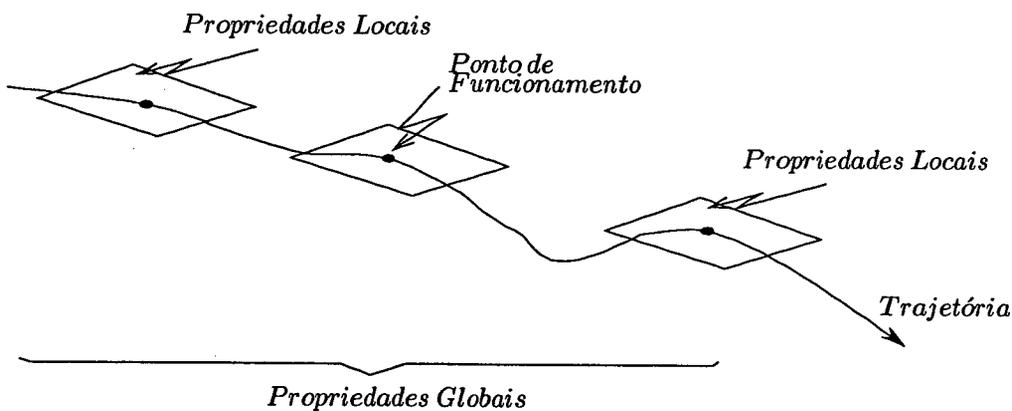


Figura 1.1: Propriedades Locais e Globais.

Estas dificuldades conduzem à uma outra abordagem para o controle de sistemas LPV. Nesta, o controle é descrito por uma representação de estados dada por

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c(\theta(t))x_c(t) + B_c(\theta(t))y(t) \\ u = C_c(\theta(t))x_c(t) + D_c(\theta(t))y(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

e faz uma utilização explícita do parâmetro $\theta(t)$.

Veja referências seguintes para maiores detalhes: [2], [3], [4],[5] e [6].

A dependência temporal das variáveis $x(t)$, $u(t)$, $z(t)$, $\theta(t)$ será omitida por questão de simplicidade.

1.2 A evolução dos Estudos para Sistemas LPV

Dentro da classe de sistemas lineares variantes no tempo, aquela em que a variação temporal das matrizes do modelo de estado aparece como função de um dado vetor de parâmetros tem sido objeto de muito estudo nos últimos anos. Na literatura esta classe é conhecida como sistema lineares com dependência paramétrica LPV. Os trabalhos em [7], [8], [9], [10], [11], [5] e [12] tratam desta classe de sistema.

Uma ferramenta usual para o estudo da estabilidade de sistemas LPV tem sido a função de Lyapunov, sendo que esta pode ou não apresentar uma dependência nos parâmetros do sistema. Neste contexto, foram propostas noções de estabilidade tais como *quadrática* e *afim-quadrática* [8], [9], [10], [13], [3].

As técnicas apresentadas em [14], [2] para sistemas LPV fazem uso de uma função de Lyapunov fixa. De acordo com [6] tais abordagens podem ser conservativas uma vez que elas permitem uma taxa de variação paramétrica arbitrária.

Um melhor resultado tem sido obtido quando uma função de Lyapunov com dependência paramétrica é utilizada, isto é, para cada valor de θ , obtém-se uma função de Lyapunov diferente.

Funções de Lyapunov do tipo Lur'e-Postnikov são obtidas para sistemas com dependência paramétrica quando o critério de Popov é empregado. Nesta abordagem a função de Lyapunov apresenta uma estrutura particular, veja [15].

O conceito de função de Lyapunov com dependência paramétrica afim resulta em um maior grau de liberdade o que pode conduzir a resultados menos conservativos quando comparado aos métodos que empregam Popov.

Em [3], utiliza-se uma função de Lyapunov com dependência paramétrica afim supondo que o parâmetro e sua taxa de variação pertençam a um polítopo convexo. Empregando-se a noção de multi-convexidade, LMIs que apresentam condições suficientes são propostas.

Com os trabalhos de Haddad and Bernstein [15], houve um aumento no interesse por métodos de análise e síntese que empregam funções de Lyapunov com dependência paramétrica. Grande parte destes resultados empregam uma função de Lyapunov com dependência paramétrica afim [8], [10], [16] e [15].

Os trabalhos de [17], [10] e [15] tratam o problema de síntese sob a abordagem \mathcal{H}_2 e nestes as condições obtidas não são convexas.

Sob o conceito de estabilidade afim-quadrática, controladores dinâmicos do tipo LPV foram apresentados em [6]. Nestes estudos o problema de obter uma formulação convexa ficou em aberto.

Recentemente, uma função de Lyapunov com dependência paramétrica, que é mais geral que a função de Lyapunov com dependência afim, foi apresentada em [4], [5]. Resultados correlatos podem ser encontrados em [18] e [19]. Esta nova função de Lyapunov $v(x, \theta)$ é bi-quadrática, isto é, quadrática em θ e em x .

Este trabalho trata dos problemas de performance robusta e controle robusto. Utilizando a definição de estabilidade bi-quadrática, são apresentadas desigualdades matriciais que resolvidas sob o objetivo de otimização convexa permitem que limitantes superiores para os critérios de performance \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ sejam encontrados.

1.3 Organização do Texto

Além desta introdução, o texto está organizado nos seguintes capítulos.

O Capítulo 2, apresenta um conjunto de ferramentas visando a obtenção de condições LMI para problemas de análise, síntese e performance aplicados à classe de sistemas LPV. Também, neste capítulo, apresentam-se as principais noções de estabilidade utilizadas no controle de sistemas LPV.

O Capítulo 3 aborda o problema de performance robusta \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ utilizando a noção de estabilidade bi-quadrática.

O Capítulo 4 aborda o problema de controle robusto \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ utilizando também a noção de estabilidade bi-quadrática.

O Capítulo 5 aborda os problemas de estabilidade robusta e controle robusto para sistema LPV a tempo discreto. Neste, os problemas de custo garantido e performance \mathcal{H}_∞ são tratados e para tanto a noção de estabilidade bi-quadrática é empregada.

O Capítulo 6, apresenta as conclusões e considerações finais fazendo uma análise crítica do trabalho e identificando perspectivas futuras.

Capítulo 2

Fundamentos para Estudo de Sistema LPV

O objetivo deste capítulo é apresentar ferramentas da teoria de controle de modo a facilitar a compreensão dos capítulos subsequentes. Os resultados aqui apresentados permitem o estudo dos casos de análise e síntese visando atender os critérios de performance \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , para sistemas do tipo LPV. Com estes resultados estamos interessados em obter formulações do tipo LMI para os referidos estudos.

2.1 Desigualdades Matriciais Lineares - LMI

A representação de uma desigualdade matricial linear é dada pela seguinte forma

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m F_i x_i > 0 \quad (2.1)$$

para desigualdades estritas, e

$$F(x) \geq 0 \quad (2.2)$$

para desigualdades não estritas. Aqui $x \in \mathfrak{R}^n$ é a variável a ser sintonizada e $F_i = F_i^t \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, m$ são matrizes constantes dadas.

O problema de encontrar uma solução x tal que $F(x) > 0$ é chamado um problema de

factibilidade LMI. A LMI (2.1) é uma restrição convexa sobre x , isto é, o conjunto $\{x / F(x) > 0\}$ é convexo.

A formulação LMI, permite que vários problemas possam ser resolvidos simultaneamente, neste caso, se possuirmos k restrições na forma LMI, a representação

$$F(x) = \text{diag}\{F_0(x), F_1(x), \dots, F_k(x)\} > 0 \quad (2.3)$$

é também um problema na forma de uma LMI.

Esta versatilidade apresentada pela formulação LMI faz com que ela encontre muitas aplicações na teoria de controle.

2.1.1 Propriedades da LMI

Apresentam-se a seguir as propriedades que são atribuídas a uma formulação LMI, sendo que estas estão relacionadas às noções de funções e conjuntos convexos [20]. O fato de o conjunto solução de uma formulação LMI ser convexo é fundamental no desenvolvimento de algoritmos eficientes para a solução de uma LMI.

Linearidade

Embora a representação (2.1) seja uma forma muito empregada para representação de uma LMI, observa-se que nesta representação $F(x)$ não é linear em x , pois $F(0) = F_0 \neq 0$. Na realidade a equação (2.1) é afim em x , isto é, uma relação que mapeia retas paralelas em retas paralelas e pontos finitos em pontos finitos. Mas, cabe notar que (2.1) pode ser representada de forma equivalente por

$$\mathcal{F}(x_0, x) = \mathcal{F}(\tilde{x}) \triangleq F_0 x_0 + \sum_{i=1}^m F_i x_i > 0, \quad x_0 > 0 \quad (2.4)$$

através de uma transformação, onde \mathcal{F} é linear em $\tilde{x} = [x'_0 \quad x']'$.

Convexidade

O conjunto solução de uma LMI é convexo (quando não é vazio). Isto é, o segmento de reta que une quaisquer dois pontos do conjunto também pertence ao conjunto.

Para provar, consideremos que y e z sejam dois pontos que satisfaçam (2.1) e seja $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$, onde $0 \leq \alpha \leq 1$. Substituindo na definição temos

$$F_0 + \sum_{i=1}^m F_i x_i = F_0 + \sum_{i=1}^m F_i (\alpha y_i + (1 - \alpha)z_i) =$$

$$F_0 + \sum_{i=1}^m F_i z_i + \alpha \sum_{i=1}^m F_i (y_i - z_i) = \tag{2.5}$$

$$(1 - \alpha)(F_0 + \sum_{i=1}^m F_i z_i) + \alpha(F_0 + \sum_{i=1}^m F_i y_i) > 0$$

o que completa a prova, pois conclui-se que x também é solução da LMI. É importante observar que todos conjuntos afins são convexos.

2.1.2 Complemento de Schur

O complemento de Schur na verdade não é uma propriedade da LMI, mas sim uma propriedade de matrizes [21] que é extremamente útil em várias aplicações.

Seja uma matriz quadrada M com as seguintes partições

$$M \triangleq \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

com P quadrada e não singular. Se adicionalmente $S - RP^{-1}Q$ também for não singular, teremos que a matriz M será não singular. Isto, vem diretamente de

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -P^{-1}Q \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ R & S - RP^{-1}Q \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Tomando o determinante de (2.7) encontraremos

$$\det(M) = \det(P) \cdot \det(S - RP^{-1}Q) \tag{2.8}$$

e a matriz $S - RP^{-1}Q$ é chamada de complemento de Schur de P em M .

Similarmente assumindo que S seja inversível, o complemento de Schur de S em M é dado por $P - RS^{-1}Q$.

A aplicação do complemento de Schur à matrizes semi definidas e definidas positivas será

apresentado na forma dos seguintes lemas.

Lema 2.1 (Complemento de Schur) *Seja R^+ a pseudo-inversa da matriz R . As seguintes desigualdades são equivalentes.*

- $\begin{bmatrix} P & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0$
- $R \geq 0, \quad P - SR^+S' \geq 0, \quad S(I - RR^+) = 0$

Lema 2.2 (Complemento de Schur para desigualdades estritas) *As seguintes desigualdades são equivalentes*

- $\begin{bmatrix} P & S \\ S' & R \end{bmatrix} > 0$
- $R > 0, \quad P - SR^{-1}S' > 0$

O complemento de Schur é uma ferramenta que é amplamente utilizada na conversão de desigualdades não lineares em LMI. Exemplificaremos sua aplicação sobre a seguinte desigualdade matricial:

$$A'P + PA + PBR^{-1}B'P + Q < 0 \quad (2.9)$$

onde $A, B, Q = Q', R = R' > 0$ são matrizes dadas e $P = P'$ é a variável. Note que (2.9) é quadrática em P , devido ao termo $PBR^{-1}B'P$. Aplicando o Lema 2.2, a desigualdade acima pode ser reescrita na forma

$$\begin{bmatrix} -A'P - PA - Q & PB \\ B'P & R \end{bmatrix} > 0 \quad (2.10)$$

que é uma LMI.

2.1.3 Formulação LMI Utilizando Restrições Algébricas

Algumas LMIs com restrição de estrutura podem ser reescritas de forma alternativa eliminando-se a restrição.

O problema de eliminação de variáveis é tratado pelo lema a seguir onde uma formulação LMI é obtida para o caso em que uma desigualdade matricial aparece em conjunto com uma dada restrição de igualdade.

Lema 2.3 *Seja $M \in \mathcal{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica e $C \in \mathcal{R}^{m \times n}$ uma matriz dada. A condição $x'Mx < 0$ está satisfeita para todo $x : Cx = 0$ se existe uma matriz $L \in \mathcal{R}^{n \times m}$ tal que*

$$M + LC + C'L' < 0 \quad (2.11)$$

Prova: Se (2.11) é satisfeita, basta pré e pós multiplicar por x para obter $x'Mx + x'LCx + x'C'L'x < 0$. Logo para todo $x : Cx = 0$ temos $x'Mx < 0$.

△△

Cabe ainda salientar que o Lema 2.3 apresenta condições de necessidade e suficiência quando não existem incertezas nas matrizes M , C . Como nas abordagens apresentadas a seguir, existem incertezas na matriz C , somente a condição de suficiência é obtida. Para maiores detalhes veja [1].

2.2 Pacotes Computacionais

Com o surgimento de algoritmos de pontos interiores para a solução de problemas de otimização convexa, tornou-se possível solucionar numericamente LMIs de forma mais rápida e eficiente.

Desde então muitas pesquisas vem sendo desenvolvidas para a criação ou melhora de pacotes computacionais para a solução de problemas de otimização convexa. Os pacotes computacionais mais conhecidos para a solução de LMIs são

- LMILab presente no Matlab que usa o Método Projetivo, criado por Nesterov e Nemirovskii [22] para a solução do problema. Mais detalhes sobre o LMILab podem ser obtido em [23].
- LMITOOL presente no Scilab que usa o Método Primal-Dual desenvolvido por [24].

Além destes dois métodos de solução existem novas abordagens, que buscam melhorar estes algoritmos, buscando principalmente uma melhor eficiência do método para sistemas esparsos. Mais detalhes sobre estes métodos podem ser vista em [25].

Neste trabalho, iremos utilizar o LMITOOL, do Scilab para a solução de LMIs. Mais detalhes sobre o LMITOOL podem ser obtido no site: www.rocq.inria.fr/scilab.

2.2.1 Complexidade computacional

Como já salientamos, umas das mais importantes vantagens no uso de LMI é a existência de pacotes computacionais para a sua solução. Mas como todo problema de otimização convexa, ou SDP (programação semi- definida), pode-se ter dificuldades numéricas na busca de soluções de uma LMI.

Algumas destas dificuldades podem ocorrer devido ao mal condicionamento numérico dos dados, capacidade de memória das máquinas, erros de precisão.

Outro grande problema é o esforço computacional necessário para solucionar as LMIs. Grandes progressos foram feitos com o uso de algoritmos de pontos interiores para a sua solução, garantindo a solução do problema de complexidade polinomial no tempo, ao invés da ordem exponencial dada por outros algoritmos.

Uma aproximação da ordem de grandeza do número de operações para o método primal-dual é dada por:

$$\mathcal{O}(m^\alpha L^\beta).$$

Onde m é o número de variáveis e L é o número de LMIs e $\alpha \cong 2.1$ e $\beta \cong 1.2$. Perceba que o número de operações para a solução do problema via LMI, é dependente do números de LMIs e do números de variáveis a ser buscada. Os softwares hoje existentes são capazes de manipular algumas centenas de variáveis de decisão.

2.3 Superfície Politópica

Um politopo convexo é genericamente definido como sendo qualquer conjunto convexo com um número finito de pontos extremos [3].

Para melhor exemplificar, consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.12)$$

Admita que o sistema (2.12) seja incerto e que as incertezas tenham as seguintes estruturas

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= Co(A_i)_{i=1,\dots,r} \triangleq \{A : A = \sum_{i=1}^r q_i A_i, \quad \sum_{i=1}^r q_i = 1, \quad q_i \geq 0\} \\ \mathcal{B} &= Co(B_j)_{j=1,\dots,s} \triangleq \{B : B = \sum_{j=1}^s g_j B_j, \quad \sum_{j=1}^s g_j = 1, \quad g_j \geq 0\} \\ \mathcal{C} &= Co(C_k)_{k=1,\dots,t} \triangleq \{C : C = \sum_{k=1}^t h_k C_k, \quad \sum_{k=1}^t h_k = 1, \quad h_k \geq 0\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nesta definição, as matrizes A_i, B_j e C_k definem os vértices do politopo para as incertezas nas matrizes A, B, C respectivamente e os escalares q_i, g_j, h_k permitem a combinação convexa destes vértices representando assim os pontos internos a este politopo, bem como a sua superfície limitante.

É comum a seguinte notação para esse politopo.

$$P_v = (A_i, B_j, C_k)$$

com $i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s, k = 1, \dots, t$.

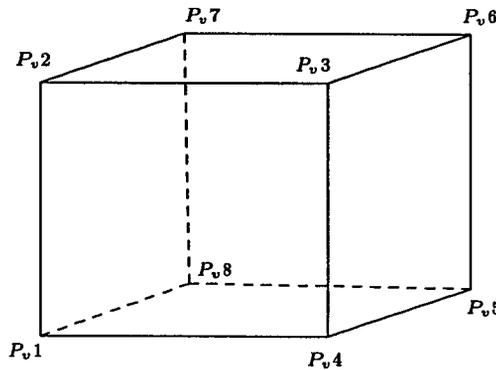


Figura 2.1: Politopo convexo representando um modelo com 3 elementos incertos.

Os pontos internos a este politopo representam modelos admissíveis para o sistema, e são obtidos a partir de combinações lineares convexas dos vértices de P_v . O número de vértices deste politopo é função do número total de elementos incertos nas matrizes A, B e C do

sistema. Sendo $na + nb + nc$ o número de parâmetros incertos em A, B, C respectivamente, o número de vértices é

$$n_v = 2^{na+nb+nc}$$

A figura 2.1 ilustra a representação politópica de um sistema incerto com $na + nb + nc = 3$.

Pela definição acima, nota-se que não há nenhuma referência explícita quanto à existência de um modelo nominal para o sistema tratado.

No caso de definir-se um modelo dentre os possíveis como sendo o nominal, supõe-se que o sistema (2.12) pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_0 + \Delta A)x + (B_0 + \Delta B)u \\ y = (C_0 + \Delta C)x \end{cases} \quad (2.14)$$

com

$$\Delta A = \theta_A A, \quad \Delta B = \theta_B B, \quad \Delta C = \theta_C C$$

Nesta formulação, A_0, B_0 e C_0 representa as matrizes que formam o modelo nominal e A, B e C são matrizes constantes que determinam como θ_A, θ_B e θ_C , afetam os elementos das matrizes A_0, B_0 e C_0 .

2.4 Representação do Sistema LPV

Seja o sistema linear variante no tempo que é dado pela seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x, \quad x(0) = x_0 \quad (2.15)$$

onde a matriz de dinâmica $A(\theta)$ possui uma dependência afim com o parâmetro $\theta(t)$. Isto é

$$A(\theta) = A_0 + \sum_{i=1}^m \theta_i A_i \quad (2.16)$$

$x \in \mathfrak{R}^{n_x}$ é o estado do sistema, $A_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, ($i = 0, 1, \dots, m$) são matrizes conhecidas e θ_i ($i = 1, \dots, m$) são parâmetros reais variantes no tempo que possuem magnitude e taxa

de variação temporal $\dot{\theta}$ limitada.

Supõe-se que cada um dos parâmetros θ_i e sua derivada $\dot{\theta}_i$ sejam limitados, isto é

$$\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i] \quad \dot{\theta}_i \in [\underline{\dot{\theta}}_i, \bar{\dot{\theta}}_i] \tag{2.17}$$

onde $\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i$ e $\underline{\dot{\theta}}_i, \bar{\dot{\theta}}_i$ representam respectivamente o limite inferior e superior para cada parâmetro e sua derivada. Nesses casos θ_i e $\dot{\theta}_i$ são tratados como variáveis independentes. De forma mais genérica podemos ainda supor que $\theta = [\theta_1 \cdots \theta_m]$ e sua derivada $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1 \cdots \dot{\theta}_m]$ estejam limitados por um politopo como indicado a seguir:

$$(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi \stackrel{def}{=} \left\{ (\zeta, \dot{\zeta}) : \begin{bmatrix} \zeta \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} \in C_o(\xi_1 \cdots \xi_{n_v}) \right\} \tag{2.18}$$

onde $\zeta, \dot{\zeta}$ são variáveis auxiliares que definem os valores admissíveis para $(\theta, \dot{\theta})$ respectivamente e C_o é um politopo de vértices ξ_i ($i = 1, \dots, n_v$) conhecidos. Dessa forma podemos considerar casos onde θ_i e $\dot{\theta}_i$ são variáveis dependentes.

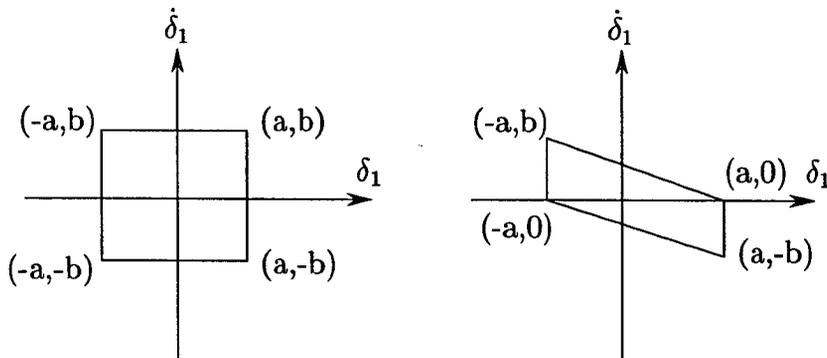


Figura 2.2: Ilustração de duas regiões Π possíveis no caso escalar.

2.5 Noções de Estabilidade para sistemas LPV

Apresenta-se nesta seção definições de estabilidade que se aplicam a sistemas lineares variantes no tempo do tipo LPV. Estas fazem uso dos resultados apresentados a seguir.

Seja o sistema linear

$$\begin{aligned} \tilde{G}: \quad \dot{x} &= A(t)x + B_w(t)w \\ z &= C(t)x + D_w(t)w \end{aligned} \tag{2.19}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída, e $A(t)$, $B_w(t)$, $C(t)$ e $D_w(t)$ são funções de matriz real com dimensão apropriada.

Definição 2.1 *O sistema \tilde{G} é exponencialmente estável se existem números reais e positivos c_1 e c_2 tal que $\|\Phi_{\tilde{G}}(t, \tau)\| \leq c_1 e^{-c_2(t-\tau)}$, $\forall t \geq \tau$, onde $\Phi_{\tilde{G}}(t, \tau)$ é a matriz de transição de $\dot{x} = A(t)x$.*

O seguinte lema permite o estudo da estabilidade, para sistemas variantes no tempo, empregando Lyapunov [26].

Lema 2.4 *Seja o sistema \tilde{G} definido por (2.19). Então qualquer das seguintes afirmações é uma condição suficiente para que os sistema \tilde{G} seja exponencialmete estável.*

1. *Se existe uma função de matriz $X(t)$ definida positiva e limitada em $[0, \infty)$ tal que*

$$-\dot{X}(t) + A(t)X(t) + X(t)A'(t) < 0, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

2. *Se existe uma função de matriz $Y(t)$ definida positiva e limitada em $[0, \infty)$ tal que*

$$\dot{Y}(t) + A'(t)Y(t) + Y(t)A(t) < 0, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

Com estes resultados estamos aptos a apresentar as seguintes definições de estabilidade.

2.5.1 Funções de Lyapunov a Parâmetro Dependente

Condições para estabilidade exponencial do sistema (2.15), (2.18) com uma função de Lyapunov $V(x) = x'P(\theta)x$ são expressas pelas seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} A(\theta)'P(\theta) + P(\theta)A(\theta) + \dot{P}(\theta) < 0, \quad P(\theta) > 0 \\ \forall(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Definição 2.2 O sistema linear (2.15), (2.18) é quadraticamente estável se (2.20) está satisfeita com $\mathcal{P}(\theta) = P_0$ independente do parâmetro θ .

Definição 2.3 ([3]) O sistema linear (2.15), (2.18) é afim-quadraticamente estável se (2.20) está satisfeita com $\mathcal{P}(\theta)$ afim em θ , isto é

$$\mathcal{P}(\theta) = P_0 + \sum_{i=1}^{n_\theta} \theta_i P_i.$$

Definição 2.4 ([5]) O sistema linear (2.15), (2.18) é bi-quadraticamente estável se (2.20) está satisfeita com $\mathcal{P}(\theta)$ quadrática em θ , isto é

$$\mathcal{P}(\theta) = P_0 + P_1 \Theta + \Theta' P_1' + \Theta' P_2 \Theta = \begin{bmatrix} I \\ \Theta \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} I \\ \Theta \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 \\ P_1' & P_2 \end{bmatrix}; \quad P_1 \in \mathbb{R}^{n \times nm}$$

com Θ afim em θ .

△△

Note que a definição de estabilidade quadrática introduz um certo conservativismo, quando aplicada a sistemas que apresentam taxa de variação paramétrica limitada, pois as condições que definem a noção de estabilidade quadrática não dependem da taxa de variação do parâmetro θ .

Note ainda, que a condição $\mathcal{P}(\theta) > 0$, em geral, não implica $P > 0$. As desigualdades em (2.20) devem ser satisfeitas para todo $(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$. Mas como essas desigualdades não são convexas nos parâmetros θ , o problema de verificar quando elas estão satisfeitas para todo $(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$ não é trivial, pois já não basta verificar se as mesmas estão satisfeitas nos vértices da região Π .

2.6 Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞

Em sistemas de controle é normal que o sistema a ser controlado esteja sujeito a perturbações externas, e estas por sua vez, acarretam problemas de performance.

Procedimentos que eliminem o efeito da perturbação sobre o sistema, muitas vezes requerem que hipóteses com alto grau de restrição sejam impostas, e isto pode impossibilitar a aplicação destes sobre determinados sistemas.

Uma abordagem alternativa para o tratamento deste problema, é feita utilizando os conceitos de norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ onde se procura atenuar os efeitos indesejados a níveis satisfatórios dados pelas norma \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ . Para tanto consideremos o sistema de controle representado conforme a figura 2.3.

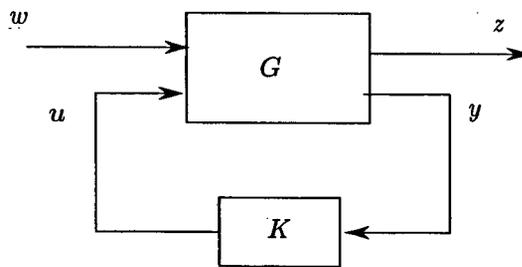


Figura 2.3: Sistema realimentado.

Nela está representado o controlador K , a planta generalizada G , que inclui a planta e todas as funções introduzidas com fins de ponderação. O sinal w contém as entradas externas, incluindo perturbações, ruído dos sensores e comandos; u é a ação de controle; y representa a saída medida para fins de realimentação; e z é um sinal de erro em relação a um objetivo especificado embutido em $G(s)$.

A seguir apresentam-se definições para a norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas lineares variantes no tempo.

2.6.1 Norma \mathcal{H}_2 para Sistemas Variantes no Tempo

Quando as perturbações que afetam o sistema são sinais de ruído, é possível representá-las como a saída de um sistema dinâmico excitado por um impulso. Essa dinâmica pode ser incorporada à planta G , a qual considera-se como sendo excitada por perturbações w

impulsionais. O sinal $z(t)$ será a resposta impulsional do sistema, e a sua norma coincidirá com $\|G_{zw}\|_2$. Se modelarmos as perturbações como processos estocásticos de densidade de potência conhecida, a norma de $\|G_{zw}\|_2$ coincide com o valor RMS da energia do sinal de saída.

A definição da norma \mathcal{H}_2 para funções de transferência é dada por

$$\|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}\{G^*(jw)G(jw)\}dw \quad (2.22)$$

onde $G(s) = C(sI - A)^{-1}B_w + D_w$.

Esta equação é válida se o sistema for estável invariante no tempo e estritamente próprio, ou seja $D_w = 0$. Se o sistema possuir $D_w \neq 0$, então a norma \mathcal{H}_2 será infinita.

Caso o sistema seja modelado por uma representação por variáveis de estado, a norma \mathcal{H}_2 pode ser calculada tomando-se a seguinte definição, que considera t variando no intervalo $[0, T]$. Para sistemas variantes no tempo devemos substituir a noção de função de transferência pela noção de resposta impulsional.

Definição 2.5 [27] *Seja o sistema \tilde{G} definido por (2.19) exponencialmente estável e assuma $D_w(t) = 0$. Então a norma \mathcal{H}_2 de \tilde{G} é definida por*

$$\|\tilde{G}\|_2^2 = \mathcal{E} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T z'(t)z(t)dt \right\} \quad (2.23)$$

quando $x(0) = 0$ e w é um ruído branco de média nula com matriz de densidade de potência igual a identidade, onde \mathcal{E} representa a esperança matemática.

A norma \mathcal{H}_2 pode ser calculada utilizando o gramiano de controlabilidade $Q(t)$ ou o de observabilidade $R(t)$. O lema a seguir apresenta condições para obtenção da norma \mathcal{H}_2 com estes gramianos empregando desigualdades matriciais.

Lema 2.5 [27] *Seja o sistema \tilde{G} definido por (2.19) com $D_w(t) \equiv 0$ e as seguintes condições:*

1. *Se o sistema \tilde{G} é exponencialmente estável, então*

$$\|\tilde{G}\|_2^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{Tr} \{ C(t)Q(t)C'(t) \} dt \quad (2.24)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{Tr} \{ B_w'(t)R(t)B_w(t) \} dt \quad (2.25)$$

onde $Q(t)$ e $R(t)$ satisfazem respectivamente

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) + Q(t)A'(t) + B_w(t)B_w'(t), \quad Q(0) = 0 \quad (2.26)$$

$$-\dot{R}(t) = R(t)A(t) + A'(t)R(t) + C'(t)C(t), \quad R(T) = 0 \quad (2.27)$$

2. Se existe uma função de matriz $P(t)$ e $\tilde{P}(t)$ definida positiva e limitada em $[0, \infty)$ tal que

$$-\dot{P}(t) + A(t)P(t) + P(t)A'(t) + B_w(t)B_w'(t) < 0, \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (2.28)$$

$$\dot{\tilde{P}}(t) + \tilde{P}(t)A(t) + A'(t)\tilde{P}(t) + C'(t)C(t) < 0, \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (2.29)$$

então o sistema \tilde{G} é exponencialmente estável e

$$\|\tilde{G}\|_2^2 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{Tr} \{ C(t)P(t)C'(t) \} dt \quad (2.30)$$

$$\|\tilde{G}\|_2^2 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{Tr} \{ B_w'(t)\tilde{P}(t)B_w(t) \} dt. \quad (2.31)$$

O problema de síntese padrão de otimização \mathcal{H}_2 consiste na obtenção do controlador que minimiza um limitante superior da norma \mathcal{H}_2 de G_{zw} , isto é, entre as perturbações w e as saídas de interesse z . Para maiores detalhes veja [28] [1] [29] [30].

2.6.2 Norma \mathcal{H}_∞ para Sistemas Variantes no Tempo

A norma \mathcal{H}_∞ de uma função de transferência de sistemas invariantes no tempo é calculada como sendo o máximo valor singular de $G(jw)$ para todos os valores de w , isto é

$$\|G(jw)\|_\infty \triangleq \sup_w \bar{\sigma} \{ G(jw) \} \quad (2.32)$$

onde $\bar{\sigma}(\cdot)$ denota o máximo valor singular de $G(jw)$.

Esta norma está associada ao maior ganho que pode existir de alguma das entradas para alguma das saídas, ao longo de todo espectro de frequência. Assim, a minimização da norma \mathcal{H}_∞ de uma função de transferência consiste em abordar o problema de atenuação de perturbação analisando-se o pior caso possível de ganho entrada/saída para o sistema.

No caso de sistemas variantes no tempo representado como em (2.19) a norma \mathcal{H}_∞ será obtida tomando por base a seguinte definição.

Definição 2.6 [27] *Admita que o sistema (2.19) seja exponencialmente estável e seja \tilde{G}_{wz} o operador entrada/saída de w para z de (2.19). Então define-se a norma \mathcal{H}_∞ do operador \tilde{G}_{wz} , ou do sistema (2.19), como sendo*

$$\|\tilde{G}_{wz}\|_\infty = \sup_{w \in \mathcal{L}_2, \|w\|_2 \neq 0} \left\{ \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}, x(0) = 0 \right\}$$

onde $\|\cdot\|_2$ é a norma dois de sinais.

Note que $\|\tilde{G}_{wz}\|_\infty$ representa o ganho induzido pela norma \mathcal{L}_2 de sinais.

A norma \mathcal{H}_∞ pode ser representada da seguinte forma

$$\|\tilde{G}_{wz}\|_\infty = \inf_\gamma \{ \|\tilde{G}_{wz}\|_\infty < \gamma \}.$$

A norma \mathcal{H}_∞ pode ser calculada utilizando a abordagem primal $\Sigma_p = \{A(t), B_w(t), C(t), D_w(t), \mathcal{P}(t), \dot{\mathcal{P}}(t)\}$ ou ainda empregando a abordagem dual $\Sigma_d = \{A'(t), B'_w(t), C'(t), D'_w(t), \mathcal{W}(t), \dot{\mathcal{W}}(t)\}$. O lema a seguir apresenta condições para obtenção da norma \mathcal{H}_∞ sob estas duas abordagens.

Lema 2.6 *O sistema \tilde{G} definido por (2.19) é exponencialmente estável e $\|\tilde{G}\|_\infty < \gamma$ se*

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathcal{P}}(t) + A(t)' \mathcal{P}(t) + \mathcal{P}(t) A(t) & \mathcal{P}(t) B_w(t) \\ B'_w(t) \mathcal{P}(t) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C'(t) \\ D'_w(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(t) & D_w(t) \end{bmatrix} < 0, \mathcal{P}(t) > 0 \quad (2.33)$$

$$\begin{bmatrix} -\dot{\mathcal{W}}(t) + \mathcal{W}(t) A'(t) + A(t) \mathcal{W}(t) & \mathcal{W}(t) C'(t) \\ C(t) \mathcal{W}(t) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_w(t) \\ D_w(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B'_w(t) & D'_w(t) \end{bmatrix} < 0, \mathcal{W}(t) > 0 \quad (2.34)$$

ou respectivamente

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathcal{P}}(t) + A(t)'\mathcal{P}(t) + \mathcal{P}(t)A(t) & \mathcal{P}(t)B_w(t) & C'(t) \\ B_w'(t)\mathcal{P}(t) & -\gamma^2 I & D_w'(t) \\ C(t) & D_w(t) & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \mathcal{P}(t) > 0 \quad (2.35)$$

$$\begin{bmatrix} -\dot{\mathcal{W}}(t) + \mathcal{W}(t)A'(t) + A(t)\mathcal{W}(t) & B_w(t) & \mathcal{W}(t)C'(t) \\ B_w'(t) & -\gamma^2 I & D_w'(t) \\ C(t)\mathcal{W}(t) & D_w(t) & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \mathcal{W}(t) > 0 \quad (2.36)$$

onde a relação de equivalência entre as desigualdades é obtida em termos de $\mathcal{W}(t) = \mathcal{P}(t)^{-1}$.

△△

Apresenta-se a seguir uma interpretação para o Lema 2.6. Seja a equação (2.33) escrita da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathcal{P}}(t) + A(t)'\mathcal{P}(t) + \mathcal{P}(t)A(t) + C(t)'C(t) & (\mathcal{P}(t)B_w(t) + C(t)'D_w(t)) \\ (\mathcal{P}(t)B_w(t) + C(t)'D_w(t))' & D_w(t)'D_w(t) - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.37)$$

Multiplicando (2.37) à direita por $f = [x' \quad w']$ e à esquerda por f' , decorre que

$$\begin{aligned} x'\dot{\mathcal{P}}(t)x + (A(t)x + B_w(t)w)'\mathcal{P}(t)x + x'\mathcal{P}(t)(A(t)x + B_w(t)w) \\ + (C(t)x + D_w(t)w)'(C(t)x + D_w(t)w) - \gamma^2 w'w < 0 \end{aligned}$$

ou seja, com $V(x, t) = x'\mathcal{P}(t)x$ temos

$$\dot{V}(x, t) + z'z - \gamma^2 w'w < 0 \quad (2.38)$$

Integrando (2.38) de 0 à T , com a condição inicial $x(0) = 0$, obtém-se

$$V(x(T), T) + \int_0^T (z'z - \gamma^2 w'w) dt < 0. \quad (2.39)$$

Como $V(x(T), T) \geq 0, \forall T$ conclui-se que

$$\|G_{wz}\|_\infty < \gamma$$

Para o caso de síntese o problema subótimo \mathcal{H}_∞ consiste em encontrar um controlador tal que a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência G_{wz} seja menor que um valor γ pré-especificado. O problema ótimo \mathcal{H}_∞ consiste em encontrar um controlador que minimize essa norma. Para maiores detalhes veja [31] [14] [27].

Com estas definições estamos aptos a apresentar abordagens LMI que permitem a garantia de limitantes para as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ através de um problema de factibilidade envolvendo LMIs, o que será apresentado nos capítulos subsequentes.

2.7 Considerações Finais

Este capítulo teve por objetivo apresentar a formulação LMI e as suas propriedades. A propriedade de convexidade é talvez a mais importante principalmente nos casos quando se trata de sistemas incertos e sistemas variantes no tempo do tipo LPV.

A formulação LMI tem por vantagem permitir uma solução numérica de problemas de controle, uma vez que existem pacotes computacionais, como Scilab e Matlab, que podem ser usados para este fim.

Foi apresentado um conjunto de ferramentas que auxiliam na obtenção de uma formulação LMI. A maior parte dos resultados foram tirados de [1], [3], [2], [27] e [30] onde provas e outros resultados podem ser encontrados.

Apresentou-se também os conceitos de estabilidade quadrática, afim-quadrática e bi-quadrática comentando-se as principais particularidades de cada uma delas.

Por fim, apresentou-se as definições de norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para o caso de sistema variantes no tempo.

Capítulo 3

Análise de Sistemas LPV

Neste capítulo estaremos buscando formulações LMI que apresentem condições suficientes e estejam baseadas em uma função de Lyapunov com dependência quadrática no estado e no parâmetro. Estas formulações serão obtidas visando atender os critérios de performance \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ e terão por base a noção de estabilidade bi-quadrática.

Os valores dos critérios de performance \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ serão obtidos pela solução das LMIs, onde um limitante superior, para os referidos critérios de performance é determinado via otimização convexa.

3.1 Estabilidade Robusta

Ao longo desta seção, apresentam-se condições LMI para análise de estabilidade e performance de sistemas lineares variantes no tempo na seguinte forma:

$$\dot{x} = A(\theta)x, \quad x(0) = x_0, \quad \theta = [\theta_1 \cdots \theta_{n_\theta}]' \quad (3.1)$$

onde a matriz de dinâmica $A(\theta)$ possui uma dependência afim com o parâmetro θ . Isto é

$$A(\theta) = A_0 + \sum_{i=1}^{n_\theta} \theta_i A_i \quad (3.2)$$

$x \in \mathfrak{R}^{n_x}$ é o estado do sistema, $A_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, $i = 0, 1, \dots, n_\theta$ são matrizes conhecidas e θ_i , $i = 1, \dots, n_\theta$ são parâmetros reais que possuem magnitude e taxa de variação temporal $\dot{\theta}_i$ limitada. Admite-se que os parâmetros e suas respectivas taxas de variação possam assumir

qualquer valor dentro de um politopo Π cujos vértices são conhecidos *a priori*.

$$(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi \quad (3.3)$$

Admita que o sistema (3.1) seja representado pela seguinte equação

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \Theta \end{bmatrix} x \quad (3.4)$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_{n_\theta} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x n_\theta} \quad (3.5)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 I_{n_x} & \dots & \theta_{n_\theta} I_{n_x} \end{bmatrix}' \in \mathfrak{R}^{n_x n_\theta \times n_x} \quad (3.6)$$

Empregando (3.4), apresenta-se a seguir um teorema que propõe condições suficientes na análise de estabilidade robusta.

Teorema 3.1 [5] *Seja o sistema (3.1) e a seguinte notação*

$$A_a = \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} \\ \dot{\Theta} + \Theta A_0 & \Theta \mathcal{A} \end{bmatrix}; \quad \Theta_a = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$C_a = \begin{bmatrix} \Theta & -I_{n_x n_\theta} \end{bmatrix}$$

e seja Π um politopo construído a partir dos valores admissíveis de $(\theta, \dot{\theta})$. Admita que existe uma matriz simétrica $P \in \mathfrak{R}^{n_x(n_\theta+1) \times n_x(n_\theta+1)}$ e matrizes $L, M \in \mathfrak{R}^{n_x(n_\theta+1) \times n_x n_\theta}$ tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas nos vértices do politopo Π .

$$\begin{aligned} A_a' P + P A_a + L C_a + C_a' L' &< 0 \\ P + M C_a + C_a' M' &> 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Então o sistema (3.1) é bi-quadraticamente estável e $V(x, \theta) = x' \mathcal{P}(\theta) x$ com $\mathcal{P}(\theta) = \Theta_a' P \Theta_a$ é uma função de Lyapunov para o sistema.

Prova: A prova pode ser encontrada em [5]. Para tornar o trabalho o mais autocontido possível ela será apresentada a seguir. Admita que as desigualdades do teorema estejam satisfeitas nos vértices do politopo Π . Como as desigualdades (3.8) são afins em $(\theta, \dot{\theta})$ elas são satisfeitas para todo $(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$.

Observe que o espaço nulo de C_a é dado por:

$$\mathcal{N}_{C_a} = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix} = \Theta_a. \quad (3.9)$$

Então com a segunda desigualdade de (3.8) temos que $\forall(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$

$$x' \Theta_a' P \Theta_a x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad x \neq 0$$

isto é $\mathcal{P}(\theta) = \Theta_a' P \Theta_a$ é uma matriz definida positiva para $\forall(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$.

Tomando agora a primeira desigualdade de (3.8) e tendo em mente (3.9), obtemos

$$\Theta_a' (A_a' P + P A_a) \Theta_a < 0. \quad (3.10)$$

Com (3.7), nós temos que (3.10) pode ser escrita como

$$x' \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \right)' P \Theta_a + \Theta_a' P \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \quad (3.11)$$

$$\Theta_a' \begin{bmatrix} A_0' \\ \mathcal{A}' \end{bmatrix} \Theta_a' P \Theta_a + \Theta_a' P \Theta_a \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} \end{bmatrix} \Theta_a x < 0$$

ou equivalentemente,

$$x' (\dot{\mathcal{P}}(\theta) + (A_0 + \mathcal{A}\theta)' \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta)(A_0 + \mathcal{A}\theta)) x < 0, \quad \forall x, \forall(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi \quad (3.12)$$

Logo $V(x, \theta) = x' \mathcal{P}(\theta) x$ é uma função de Lyapunov para o sistema (3.1) e satisfaz a definição de estabilidade bi-quadrática e o teorema está provado.

3.2 Performance Robusta \mathcal{H}_2

3.2.1 Abordagem Primal

Seja o sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x + B_w(\theta)w \\ z &= C(\theta)x \end{aligned} \quad (3.13)$$

com

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 I_{n_x} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_x} \end{bmatrix}, \quad \Theta_a = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix}, \quad \Theta_w = \begin{bmatrix} I_{n_w} \\ \theta_1 I_{n_w} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_w} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$A(\theta) = A_0 + \mathcal{A}\Theta, \quad B_w(\theta) = \mathcal{B}_w\Theta_w, \quad C(\theta) = C\Theta_a$$

onde $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ são respectivamente os vetores de estado, a entrada de perturbação e a saída de performance; \mathcal{A} , \mathcal{B}_w , \mathcal{C} são matrizes dadas de dimensões compatíveis, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}) \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ são parâmetros reais, que podem variar no tempo.

O teorema seguinte permite estudar o problema de performance \mathcal{H}_2 para sistemas variantes no tempo do tipo LPV. Este estudo é feito empregando-se LMIs que apresentam condições suficientes. A solução numérica destas LMIs em conjunto com um problema de otimização convexa permite que um limitante superior para a $\|G_{wz}\|_2$ seja obtido.

Teorema 3.2 *Seja o sistema (3.13) e a seguinte notação*

$$A_a = \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} \\ \dot{\Theta} + \Theta A_0 & \Theta \mathcal{A} \end{bmatrix}; \quad C_a = \begin{bmatrix} \Theta & -I_{n_x n_\theta} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$C_b = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n_x(n_\theta+1)} & 0 & \Theta_a \\ B_w(\theta) & 0 & -I_{n_w} & 0 \end{bmatrix}$$

e seja Π um politopo construído a partir dos valores admissíveis de $(\theta, \dot{\theta})$. Admita que existe uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n_x(n_\theta+1) \times n_x(n_\theta+1)}$, matrizes $L \in \mathbb{R}^{n_w+n_x(n_\theta+2) \times n_x}$, $M \in \mathbb{R}^{n_x(n_\theta+1) \times n_x n_\theta}$, e uma função matricial simétrica $Q(\theta) \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$ e o escalar l que solucionam o seguinte problema de otimização, onde as LMIs estão satisfeitas nos vértices do politopo Π .

minimize $\{l\}$:

$$\begin{bmatrix} A'_a P + P A_a + M C_a + C'_a M' & C' \\ & C \\ & & -I_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.16)$$

$$\begin{bmatrix} Q(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & P \Theta_a & 0 \\ 0 & \Theta'_a P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_{n_x} \end{bmatrix} + L C_b + C'_b L' > 0 \quad (3.17)$$

$$l - \text{Tr}\{Q(\theta)\} \geq 0 \quad (3.18)$$

onde

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i Q_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = 1. \quad (3.19)$$

Então o sistema não forçado $\dot{x} = A(\theta)x$ é bi-quadraticamente estável, com a função de Lyapunov $V(x, \theta) = x' \mathcal{P}(\theta)x$, onde $\mathcal{P}(\theta) = \Theta'_a P \Theta_a$ e a norma \mathcal{H}_2 do sistema satisfaz

$$\|G_{wz}\|_2^2 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{Tr}\{B_w(\theta)' \mathcal{P}(\theta) B_w(\theta)\} dt < l \quad (3.20)$$

Prova: Admita que as LMIs do teorema estejam satisfeitas nos vértices do politopo Π . Como as desigualdades (3.16)-(3.18) são afins em $(\theta, \dot{\theta})$ elas são satisfeitas para $\forall(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$.

Com (3.16) e o complemento de Schur nós temos

$$A'_a P + P A_a + C' C + M C_a + C'_a M' < 0$$

Observe que Θ_a é uma base para \mathcal{N}_{C_a} . Assim,

$$\Theta'_a (A'_a P + P A_a + C' C) \Theta_a < 0$$

$$\dot{\mathcal{P}}(\theta) + A(\theta)' \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A(\theta) + C(\theta)' C(\theta) < 0 \quad (3.21)$$

Agora defina

$$\Psi = \begin{bmatrix} I_{n_w} & 0 \\ 0 & \Theta_a \\ B_w(\theta) & 0 \\ 0 & I_{n_x} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Tomando (3.17), note que Ψ é uma base para \mathcal{N}_{C_b} , com isto nós obtemos

$$\Psi' \begin{bmatrix} Q(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & P \Theta_a & 0 \\ 0 & \Theta'_a P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_{n_x} \end{bmatrix} \Psi = \begin{bmatrix} Q(\theta) & B'_w(\theta) \mathcal{P}(\theta) \\ \mathcal{P}(\theta) B_w(\theta) & \mathcal{P}(\theta) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.23)$$

aplicando agora o complemento de Schur podemos reescrever da seguinte forma

$$\mathcal{P}(\theta) = \Theta'_a P \Theta_a > 0, \quad Q(\theta) - B_w(\theta)' \mathcal{P}(\theta) B_w(\theta) > 0 \quad (3.24)$$

Assim $V(x, \theta) = x' \mathcal{P}(\theta) x > 0$ e de (3.21) nós temos $\dot{V}(x, \theta) < 0$ que mostra a estabilidade bi-quadrática para o sistema não forçado ($w \equiv 0$).

Agora com o Lema 2.5, (3.21), (3.24) nós temos

$$\|G_{wz}\|_2^2 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{Tr}\{B_w(\theta)' \mathcal{P}(\theta) B_w(\theta)\} dt \quad (3.25)$$

e consequentemente com (3.24) e (3.25) nós obtemos

$$\begin{aligned} \|G_{wz}\|_2^2 &< \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{Tr} \{B_w(\theta)' \mathcal{P}(\theta) B_w(\theta)\} dt \\ &< \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{Tr} \{Q(\theta)\} dt \\ &\leq \max_i \text{Tr} \{Q_i\} \leq l. \end{aligned}$$

que completa a prova.

△△

Note que as desigualdades apresentadas no Teorema 3.2 são funções afins nas variáveis L , M , P , l e Q_i , $i = 1, \dots, \ell$, nos vértices do politopo Π . Então a busca por um limitante superior mínimo para a norma \mathcal{H}_2 , é um problema de otimização convexa que pode ser solucionado numericamente como um problema de minimização de autovalores. A solução deste problema de otimização com as desigualdades matriciais, permite encontrar este limitante que é dado por $\|G_{wz}\|_2 < \sqrt{l}$.

3.2.2 Abordagem Dual

Apresenta-se a seguir uma outra formulação LMI para o problema de performance \mathcal{H}_2 . Para tanto, considere que a equação de estados do sistema (3.13) seja reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A_0 + \Theta' \mathcal{A}] x + B_w(\theta) w \\ z &= C(\theta) x \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ é uma matriz conhecida e $\Theta \in \mathbb{R}^{q \times n}$ é uma matriz que depende linearmente dos parâmetros θ_i , e o valor de q depende da estrutura das matrizes A_i , $i = 1, \dots, n_\theta$, e da estrutura de Θ .

Note que a representação de (3.26) sempre existe e não implica em perda de generalidade dado que $A(\theta)$ em (3.13) é afim em θ . Por exemplo, uma escolha direta para \mathcal{A} e Θ é:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{n_\theta} \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 I_{n_x} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_x} \end{bmatrix}.$$

Esta escolha resulta em $q = n_x n_\theta$ que é a maior dimensão admissível para Θ . Observe que a decomposição $\Theta' \mathcal{A}$ de (3.26) não é única. Além do mais, a escolha da dimensão q para Θ está baseada no compromisso entre o grau de conservativismo e o esforço computacional requerido pelo método de análise de estabilidade. Um aumento de q para reduzir o conservativismo do método aumentará o número de variáveis na solução do problema de otimização, o que implica em um aumento do esforço computacional requerido.

Apresenta-se a seguir um teorema que foi obtido para o sistema (3.13) e que destina-se a obtenção de um limitante superior para $\|G_{wz}\|_2$.

Teorema 3.3 *Dado um politopo Π construído a partir dos valores admissíveis de $(\theta, \dot{\theta})$. Seja o sistema (3.26) e a seguinte notação*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} A_0 & -\dot{\Theta}' + A_0 \Theta' \\ \mathcal{A} & \mathcal{A} \Theta' \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_w = \begin{bmatrix} B_w(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_a = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$C_a = \begin{bmatrix} \Theta & -I_q \end{bmatrix}, \quad \Omega(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 & \Theta_a \\ C'(\theta) & 0 & -I & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Admita a existência de uma matriz simétrica P , matrizes L e N , uma função matricial $Q(\theta)$ e o escalar κ que solucionam o seguinte problema de otimização, onde as LMIs estão satisfeitas nos vértices do politopo Π .

minimize $\{\kappa\}$:

$$\begin{bmatrix} \Lambda P + P\Lambda' + LC_a + C_a' L' & \tilde{B}_w \\ \tilde{B}_w' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.29)$$

$$\begin{bmatrix} Q(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & P\Theta_a & 0 \\ 0 & \Theta_a' P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + N\Omega(\theta) + \Omega'(\theta)N' > 0 \quad (3.30)$$

$$\kappa - \text{Tr}\{Q(\theta)\} \geq 0 \quad (3.31)$$

onde

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i Q_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = 1. \quad (3.32)$$

Então o sistema (3.26) é exponencialmente estável para $\forall(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$ com a função de Lyapunov $V(x, \theta) = x' \mathcal{P}(\theta)^{-1} x$, onde

$$\mathcal{P}(\theta) = \Theta_a' P \Theta_a$$

e a norma \mathcal{H}_2 do sistema satisfaz

$$\|G_{wz}\|_2^2 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{Tr} \{C(\theta) \mathcal{P}(\theta) C'(\theta)\} dt < \kappa \quad (3.33)$$

Prova: Admita que as LMIs estejam satisfeitas nos vértices do politopo Π . Como as desigualdades (3.29)-(3.31) são afins em $(\theta, \dot{\theta})$, elas são satisfeitas para $\forall(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$.

Observe que o espaço nulo de C_a é dado por:

$$\mathcal{N}_{C_a} = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix} = \Theta_a. \quad (3.34)$$

CAPÍTULO 3. ANÁLISE DE SISTEMAS LPV

33

Aplicando o complemento de Schur em (3.29) e tendo em mente (3.34), obtemos

$$\Theta'_a(\Lambda P + P\Lambda' + \tilde{B}_w\tilde{B}'_w)\Theta_a < 0. \quad (3.35)$$

Com (3.27), nós temos que (3.35) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \Theta'_a \begin{bmatrix} A_0 \\ \mathcal{A} \end{bmatrix} \Theta'_a P \Theta_a + \Theta'_a P \Theta_a \begin{bmatrix} A_0 \\ \mathcal{A} \end{bmatrix}' \Theta_a \\ & - \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix}' P \Theta_a - \Theta'_a P \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} + B_w(\theta)B'_w(\theta) < 0 \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$-\dot{\mathcal{P}}(\theta) + (A_0 + \Theta'\mathcal{A})\mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta)(A_0 + \Theta'\mathcal{A})' + B_w(\theta)B'_w(\theta) < 0. \quad (3.36)$$

Observe que o espaço nulo de $\Omega(\theta)$, é dado por

$$\mathcal{N}_\Omega = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Theta_a \\ C'(\theta) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Assim com (3.30) nós obtemos

$$\mathcal{N}'_\Omega \begin{bmatrix} Q(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & P\Theta_a & 0 \\ 0 & \Theta'_a P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{N}_\Omega = \begin{bmatrix} Q(\theta) & C(\theta)\mathcal{P}(\theta) \\ \mathcal{P}(\theta)C'(\theta) & \mathcal{P}(\theta) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.38)$$

aplicando agora o complemento de Schur podemos reescrever da seguinte forma

$$\mathcal{P}(\theta) = \Theta'_a P \Theta_a > 0, \quad Q(\theta) - C(\theta)\mathcal{P}(\theta)C'(\theta) > 0 \quad (3.39)$$

Assim $V(x, \theta) = x'\mathcal{P}(\theta)^{-1}x > 0$ e de (3.36) nós temos $\dot{V}(x, \theta) < 0$ que mostra a estabili-

dade exponencial para o sistema não forçado ($w \equiv 0$).

Agora com o Lema 2.5, (3.36), (3.39) resulta

$$\begin{aligned} \|G_{wz}\|_2^2 &< \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{Tr} \{C(\theta)P(\theta)C'(\theta)\} dt \\ &< \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{Tr} \{Q(\theta)\} dt \\ &\leq \max_i \text{Tr} \{Q_i\} \leq \kappa. \end{aligned}$$

que completa a prova.

△△

Observe que o limitante superior para $\|G_{wz}\|_2$ obtido com o Teorema 3.3 é dado por $\|G_{wz}\|_2 < \sqrt{\kappa}$. O valor mínimo deste limitante é obtido numericamente resolvendo um problema de otimização convexa que deve ser solucionado em conjunto com as desigualdades matriciais que envolvem as variáveis L , N , P , κ e Q_i , $i = 1, \dots, \ell$, e os vértices do politopo Π .

3.3 Performance Robusta \mathcal{H}_∞

3.3.1 Abordagem Primal

Seja o sistema linear variante no tempo descrito pela seguinte equação de estado.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x + B_w(\theta)w \\ z &= C(\theta)x + D_w(\theta)w \end{aligned} \tag{3.40}$$

com

$$A(\theta) = A_0 + A\Theta, \quad B_w(\theta) = B_w\Theta_w, \quad C(\theta) = C\Theta_a, \quad D_w(\theta) = D_w\Theta_w$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 I_{n_x} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_x} \end{bmatrix}, \quad \Theta_a = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix}, \quad \Theta_w = \begin{bmatrix} I_{n_w} \\ \theta_1 I_{n_w} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_w} \end{bmatrix}$$

onde $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ são respectivamente os vetores de estado, a entrada de perturbação e a saída de performance; A_0 , \mathcal{A} , B_w , C , D_w são matrizes dadas de dimensões compatíveis, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}) \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ são parâmetros reais, que podem variar no tempo. Se supõe que estes parâmetros e suas respectivas taxas de variação possam assumir qualquer valor dentro de um polítopo Π cujos vértices são conhecidos *a priori*.

A solução das LMIs apresentadas no teorema a seguir em conjunto com o problema de otimização convexa, permite que um limitante superior para a $\|G_{wz}\|_\infty$ seja encontrado.

Teorema 3.4 *Seja o sistema (3.40) e Π um polítopo dado que representa os valores admissíveis de $(\theta, \dot{\theta})$. Seja a notação*

$$C_a = [\Theta \quad -I]$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} -A(\theta) & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Theta_a & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C(\theta) & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & -B_w(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -D_w(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}'_a P & 0 & 0 & C(\theta)' & 0 \\ 0 & 0 & \theta'_a P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P\dot{\theta}_a & P\theta_a & 0 & 0 & P\theta_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta'_a P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I_{n_w} \end{bmatrix}$$

Então, dado um escalar $\gamma > 0$, o sistema (3.40) é bi-quadraticamente estável e $\|G\|_\infty < \gamma$,

se existem matrizes $P' = P$, M e L tais que as LMIs

$$\Psi + M\Phi + \Phi'M' < 0 \quad (3.41)$$

$$P + LC_a + C_a'L' > 0 \quad (3.42)$$

são factíveis em todos os vértices do polítopo Π . Além disso, a função $V(x, \theta) = x'P(\theta)x$, onde $P(\theta) = \Theta_a'P\Theta_a > 0$ é uma função de Lyapunov para o sistema (3.40) não forçado ($w \equiv 0$).

Prova: Admita que as LMIs (3.41) e (3.42) sejam satisfeitas em todos os vértices do polítopo Π . Como as desigualdades são afins em $(\theta, \dot{\theta})$, elas são satisfeitas para todo $(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$.

Visto que Θ_a é uma base para \mathcal{N}_{C_a} , então de (3.42) obtém-se

$$P(\theta) = \Theta_a'P\Theta_a > 0 \quad (3.43)$$

Agora defina

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A(\theta) & 0 \\ \Theta_a & 0 \\ C(\theta) & 0 \\ 0 & B_w(\theta) \\ 0 & D_w(\theta) \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

e note que $\tilde{\Phi}$ é uma base para $\mathcal{N}_{\tilde{\Phi}}$. Tomando (3.41) e fazendo $\tilde{\Phi}'\Psi\tilde{\Phi}$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{P}(\theta) + A(\theta)'P(\theta) + P(\theta)A(\theta) + C(\theta)'C(\theta) & (P(\theta)B_w(\theta) + C(\theta)'D_w(\theta)) \\ (P(\theta)B_w(\theta) + C(\theta)'D_w(\theta))' & D_w(\theta)'D_w(\theta) - \gamma^2 I_{n_z} \end{bmatrix} < 0. \quad (3.45)$$

De (3.45) temos que $V(x, \theta) = x'P(\theta)x$ é função de Lyapunov para o sistema (3.40) não forçado ($w \equiv 0$) e este sistema é bi-quadraticamente estável.

Agora com o Lema 2.6 e (3.45) nós obtemos

$$\|G_{wz}\|_{\infty} < \gamma.$$

△△

O Teorema 3.4 permite encontrar o valor mínimo do limitante superior para $\|G_{wz}\|_{\infty}$. Este limitante é obtido numericamente resolvendo um problema de otimização convexa em conjunto com as desigualdades matriciais onde buscam-se as seguintes variáveis L , M , P , e γ , nos vértices do politopo Π . Este problema de otimização é apresentado a seguir

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \{\gamma^2\} \\ & \text{sujeito à (3.41) – (3.42).} \end{aligned} \tag{3.46}$$

3.3.2 Abordagem Dual

Apresenta-se a seguir uma outra formulação LMI para o problema de performance \mathcal{H}_{∞} . Esta formulação foi obtida tomando-se o dual do sistema (3.40).

A solução das LMIs apresentadas no teorema a seguir em conjunto com um problema de otimização convexa, permite que um limitante superior para $\|G_{wz}\|_{\infty}$ seja encontrado.

Teorema 3.5 *Seja o sistema (3.40) e Π um politopo dado que representa os valores admissíveis de $(\theta, \dot{\theta})$. Seja a notação*

$$C_a = [\Theta \quad -I] \quad \Theta_a = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix}$$

$$\Phi_d = \begin{bmatrix} -A(\theta)' & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Theta_a & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_w(\theta)' & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & -C(\theta)' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -D_w(\theta)' \end{bmatrix}$$

$$\Psi_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\Theta}'_a W & 0 & 0 & B_w(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \Theta'_a W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -W\dot{\Theta}_a & W\Theta_a & 0 & 0 & W\Theta_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta'_a W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_w(\theta)' & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I_{n_z} \end{bmatrix}$$

Então, dado um escalar $\gamma > 0$, o sistema (3.40) é exponencialmente estável e $\|G\|_\infty < \gamma$, se existem matrizes $W' = W$, M e L tais que as LMIs

$$\Psi_d + M\Phi_d + \Phi'_d M' < 0 \quad (3.47)$$

$$W + LC_a + C'_a L' > 0 \quad (3.48)$$

são factíveis em todos os vértices do politopo Π . Além disso, a função $V(x, \theta) = x'P^{-1}(\theta)x$ com $P^{-1}(\theta) = W(\theta)$, onde $W(\theta) = \Theta'_a W \Theta_a > 0$, é uma função de Lyapunov para o sistema (3.40) com $w \equiv 0$.

Prova: Admita que as LMIs (3.47) e (3.48) sejam satisfeitas em todos os vértices do politopo Π . Como estas desigualdades são afins em $(\theta, \dot{\theta})$, elas são satisfeitas para $\forall(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$.

Note que Θ_a é uma base para \mathcal{N}_{C_a} , então de (3.48) nós temos

$$\mathcal{W}(\theta) = \Theta'_a W \Theta_a > 0 \quad (3.49)$$

Agora defina

$$\tilde{\Phi}_d = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A(\theta)' & 0 \\ \Theta_a & 0 \\ B_w(\theta)' & 0 \\ 0 & C(\theta)' \\ 0 & D_w(\theta)' \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

e note que $\tilde{\Phi}_d$ é uma base para $\mathcal{N}_{\tilde{\Phi}_d}$. Tomando (3.47) e fazendo $\tilde{\Phi}'_d \Psi_d \tilde{\Phi}_d$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} -\dot{\mathcal{W}}(\theta) + A(\theta)\mathcal{W}(\theta) + \mathcal{W}(\theta)A(\theta)' + B_w(\theta)B_w(\theta)' & (\mathcal{W}(\theta)C(\theta)' + B_w(\theta)D_w(\theta)') \\ (\mathcal{W}(\theta)C(\theta)' + B_w(\theta)D_w(\theta)')' & D_w(\theta)D_w(\theta)' - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.51)$$

Com o Lema 2.6, (3.49) e (3.51) nós obtemos que o sistema (3.40) não forçado ($w \equiv 0$) é exponencialmente estável e

$$\|G_{wz}\|_\infty < \gamma.$$

Então $V(x, \theta) = x' \mathcal{W}(\theta) x$ com $\mathcal{W}(\theta) = \mathcal{P}^{-1}(\theta)$ é função de Lyapunov para o sistema o que completa a prova. $\Delta\Delta$

O Teorema 3.5 permite encontrar o valor mínimo do limitante superior para $\|G_{wz}\|_\infty$. Este limitante é obtido numericamente resolvendo um problema de otimização convexa em conjunto com as desigualdades matriciais onde buscam-se as seguintes variáveis L , M , W , e γ , nos vértices do politopo Π . Este problema de otimização é apresentado a seguir

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \{\gamma^2\} \\ & \text{sujeito à (3.47) – (3.48).} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Observe que $\mathcal{P}(\theta)^{-1} = W(\theta)$ é a restrição de equivalência dada pelo Lema 2.6. As LMIs obtidas pela abordagem primal e dual estão respectivamente em termos de P e W . Note que $P^{-1} \neq W$, este fato conduz a propriedades diferentes para as respectivas LMIs.

3.4 Exemplos Numéricos

Apresentam-se aqui resultados de simulações obtidos utilizando os teoremas apresentados nas seções anteriores. Para tanto estaremos considerando o politopo Π tal que todo $(\delta, \theta) \in \Pi$.

Observe ainda que as condições de estabilidade afim-quadrática e quadrática são obtidas como casos particulares da bi-quadrática como apresentado em (2.21) fazendo-se respectivamente $P_2 = 0$ e $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ [5].

Os resultados de simulações que serão apresentados foram obtidos com o software Scilab que pode ser obtido gratuitamente no endereço www.inria.fr.

3.4.1 Estabilidade Robusta

Exemplo 3.1 *O sistema apresentado a seguir*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 120 & -18 \end{bmatrix} x + \theta \begin{bmatrix} -108 & 9 \\ -120 & 17 \end{bmatrix} x \tag{3.53}$$

é assintoticamente estável para todo θ fixo no intervalo $0 \leq \theta \leq 1$. Porém ele não é quadraticamente estável, isto é, θ não pode variar arbitrariamente rápido dentro do mesmo intervalo.

Empregando as definições de estabilidade bi-quadrática e afim-quadrática objetiva-se encontrar a máxima taxa de variação $|\dot{\theta}| \leq \alpha_{máx}$ para θ pertencente ao intervalo $0 \leq \theta \leq 1$.

Estabilidade	Limitante superior
<i>Bi-quadrática</i>	$\alpha_{máx} = 66$
<i>Afim-quadrática</i>	$\alpha_{máx} = 62$

Tabela 3.1: Máxima taxa de variação para $0 \leq \theta \leq 1$.

Note que um menor conservativismo foi obtido com a definição de estabilidade bi-quadrática uma vez que esta é mais geral que a noção de estabilidade afim-quadrática.

3.4.2 Performance Robusta \mathcal{H}_2

Exemplo 3.2 Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B_w(\theta)w(t) \\ z(t) &= C(\theta)x(t) \end{aligned} \tag{3.54}$$

onde o parâmetro θ é um escalar e

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -1.65 - 1.3\theta & -9.5 - 20\theta \\ 2\theta & -7 - 10\theta \end{bmatrix}, B_w(\theta) = \begin{bmatrix} 2.1 + 2.2\theta & -3.75 + 0.5\theta \\ -4 - 6\theta & -3.5 - 5\theta \end{bmatrix}, C(\theta) = I_{2 \times 2}.$$

Este sistema possui um parâmetro incerto e é quadráticamente estável para $|\theta| \leq 0.765$.

A Figura 3.1, foi obtida a partir do Teorema 3.2, (abordagem primal) para θ pertencente ao intervalo $|\theta| \leq 0.6$. Nela apresenta-se o valor do limitante superior do custo \mathcal{H}_2 obtido para o sistema (3.54) em função do limitante superior da taxa de variação.

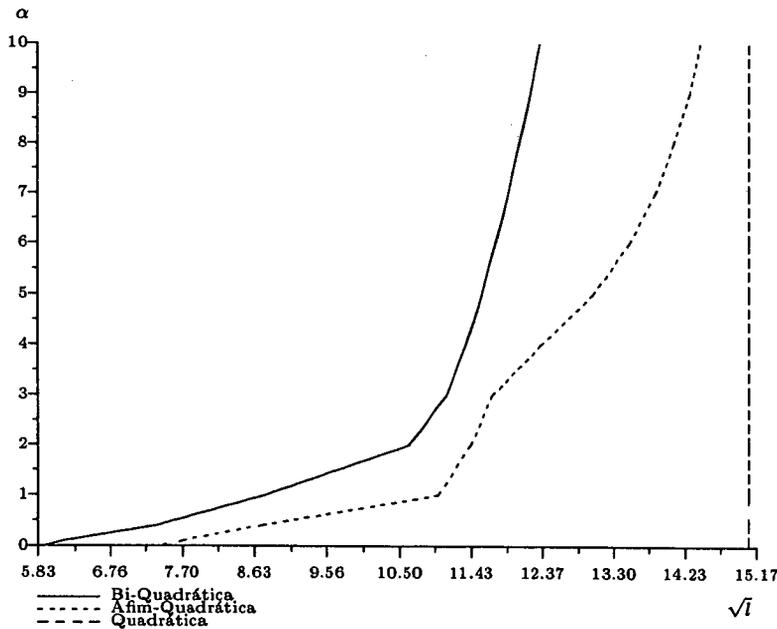


Figura 3.1: Custo \mathcal{H}_2 para $|\theta| \leq 0.6$ e $|\dot{\theta}| \leq \alpha$. (abordagem primal)

A Figura 3.2 foi obtida empregando o Teorema 3.3 (abordagem dual). Nela apresenta-se resultados de simulações que foram obtidos para o sistema (3.54) sob as mesmas condições

anteriores.

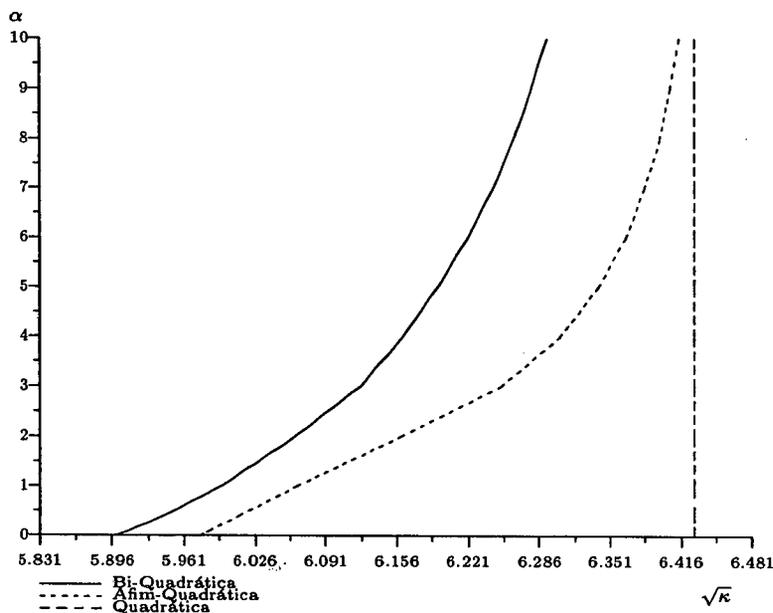


Figura 3.2: Custo \mathcal{H}_2 para $|\theta| \leq 0.6$ e $|\dot{\theta}| \leq \alpha$. (abordagem dual)

Note que para este exemplo os resultados obtidos com a abordagem dual são melhores resultados.

3.4.3 Performance Robusta \mathcal{H}_∞

Exemplo 3.3 Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B_w(\theta)w(t) \\ z(t) &= C(\theta)x(t) + D_w(\theta)w(t) \end{aligned} \tag{3.55}$$

onde

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -1 - 1.3\theta & 0.5 - 20\theta \\ -1 + 2\theta & -2 - 10\theta \end{bmatrix}, \quad B_w(\theta) = \begin{bmatrix} 1 + 2.2\theta & -4 + 0.5\theta \\ -1 - 6\theta & -1 - 5\theta \end{bmatrix},$$

$$C(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_w(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A Figura 3.3, foi obtida a partir do Teorema 3.4, (abordagem primal) para θ pertencente ao intervalo $[0,1]$. Nela apresenta-se o valor do limitante superior do custo \mathcal{H}_∞ obtido para o sistema (3.55) em função do limitante superior da taxa de variação.

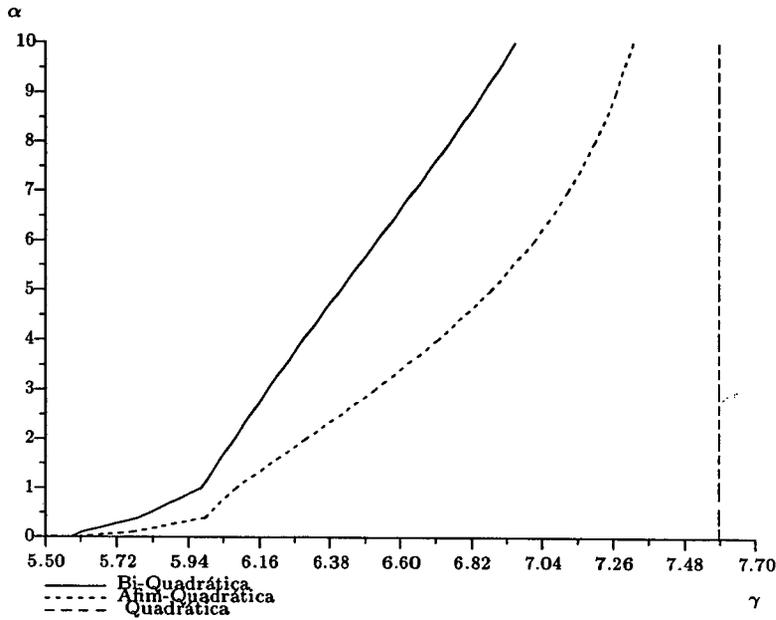


Figura 3.3: Valor minimizado de γ para $\theta \in [0,1]$ e $|\dot{\theta}| \leq \alpha$. (abordagem primal)

A Figura 3.4 foi obtida empregando o Teorema 3.5 (abordagem dual). Nela apresenta-se resultados de simulações que foram obtidos para o sistema (3.55) sob as mesmas condições anteriores.

Note que neste caso não houve uma diferença significativa entre os resultados obtidos para a abordagem primal e dual.

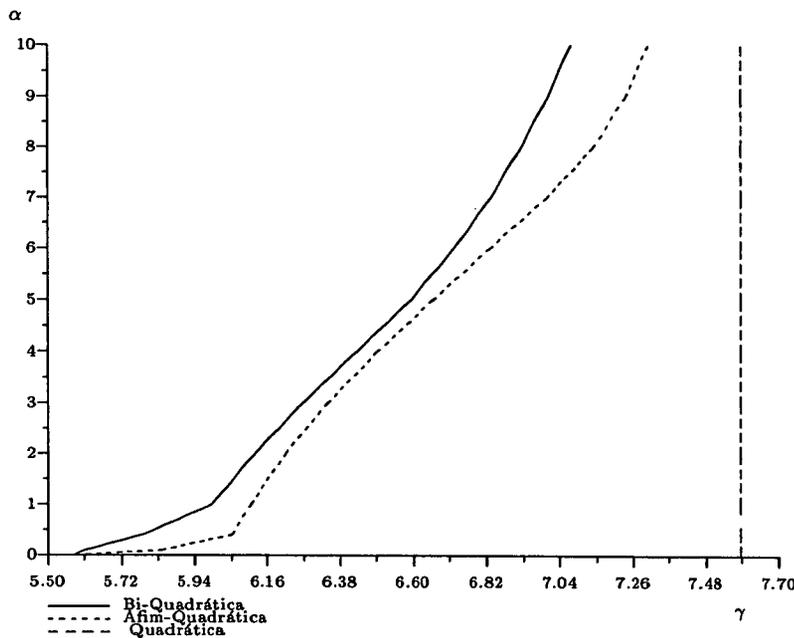


Figura 3.4: Valor minimizado de γ para $\theta \in [0, 1]$ e $|\dot{\theta}| \leq \alpha$. (abordagem dual)

3.5 Considerações Finais

Neste capítulo abordou-se o problema de análise de estabilidade e performance \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas variantes no tempo do tipo LPV.

A busca por um limitante superior mínimo para cada um dos respectivos critérios de performance \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ pode ser realizada através de um problema de otimização convexa.

Na obtenção dos resultados deste capítulo, empregou-se a noção de estabilidade bi-quadrática. Neste conceito de estabilidade a função de Lyapunov a ser determinada é quadrática no estado x e no parâmetro θ . Além disso, pode-se impor restrições de estrutura na função de Lyapunov para obter os casos de estabilidade quadrática e afim-quadrática como casos particulares.

Resultados de simulações foram apresentados, e destes pode-se observar que a utilização da estabilidade bi-quadrática conduz a resultados menos restritivos. Isto se justifica pelo fato de a noção de estabilidade bi-quadrática ser mais geral que as demais.

No caso de performance empregando a norma \mathcal{H}_2 , note do exemplo apresentado que um melhor resultado foi obtido com as LMIs elaboradas empregando a abordagem dual. Este fato

não significa, de modo geral, que os resultados obtidos pela abordagem dual sejam melhores que os obtidos pela abordagem primal. Como os limitantes superiores possuem propriedades diferentes, um melhor resultado pode ser obtido empregando-se uma ou outra abordagem dependendo do sistema em questão.

O mesmo ocorre no caso de performance empregando a norma \mathcal{H}_∞ . Observe que as as LMIs obtidas pela abordagem primal e dual apresentam propriedades diferentes, isto é, elas foram obtidas a partir do Lema 2.3 com majorações diferentes.

Capítulo 4

Síntese para Sistemas LPV

Este capítulo apresenta condições LMI para o projeto de controladores para sistemas LPV. Na formulação deste problema consideram-se os índices de performance \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Os critérios de performance \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são atendidos resolvendo-se um problema de otimização convexa, onde busca-se minimizar um limitante superior para as norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ respectivamente.

São apresentados métodos de síntese por realimentação de estado, onde a técnica proposta permite o projeto de controladores com dependência paramétrica afim (controlador LPV), bem como controladores com ganhos fixos (controlador robusto), considerando respectivamente o caso dos parâmetros estarem ou não disponíveis "on-line".

4.1 Controle Robusto

Seja um sistema linear variante no tempo descrito por

$$\dot{x} = (A_0 + \sum_{i=1}^{n_\theta} \theta_i A_i)x + B_u u. \quad (4.1)$$

O sistema (4.1) pode ainda ser representado da seguinte forma

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix} x + B_u u \quad (4.2)$$

com

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_{n_\theta} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x n_\theta}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 I_{n_x} & \cdots & \theta_{n_\theta} I_{n_x} \end{bmatrix}' \in \mathfrak{R}^{n_x n_\theta \times n_x}$$

onde A_0 , \mathcal{A} e B_u são matrizes constantes dadas de dimensões compatíveis, $x \in \mathfrak{R}^{n_x}$, $u \in \mathfrak{R}^{n_u}$ são respectivamente os vetores de estados e entrada de controle; $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta})$ é um vetor de parâmetros reais variante no tempo limitado em magnitude e taxa de variação.

O sistema (4.1) é considerado como um sistema linear com dependência paramétrica do tipo LPV, onde $\theta_i(t)$, $i = 1, \dots, n_\theta$, estão disponíveis "on-line", contudo, suas trajetórias não estão disponíveis *a priori*. Supõe-se que os valores de $\theta_i(t)$ e $\dot{\theta}(t)$, para todo $t \geq 0$, pertence ao politopo Π . Neste caso, objetiva-se projetar um controle por realimentação de estado com dependência paramétrica afim que estabilize o sistema realimentado.

A lei de controle que procuramos é do tipo

$$u = K(\theta)x, \quad K(\theta) = K_0 + \sum_{i=1}^{n_\theta} K_i \theta_i. \quad (4.3)$$

Apresenta-se a seguir uma solução para o problema acima.

Teorema 4.1 *Seja o sistema (4.1) e Π um politopo dado que representa os valores admissíveis de $(\theta, \dot{\theta})$. Seja a notação*

$$A_a = \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} \\ \dot{\Theta} + \Theta A_0 & \Theta \mathcal{A} \end{bmatrix}; \quad \Theta_a = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix}$$

$$C_a = \begin{bmatrix} \Theta & -I \end{bmatrix}; \quad B_a = \Theta_a B_u.$$

Se existem matrizes $W = W' > 0$, F_a , L e N , tais que as seguintes condições são satisfeitas em todos os vértices do politopo Π

$$W A_a' + A_a W + B_a F_a + F_a' B_a' + L C_a + C_a' L' < 0 \quad (4.4)$$

$$N C_a = C_a W. \quad (4.5)$$

Então existe uma realimentação de estado do tipo (4.3) tal que o sistema em malha fechada é bi-quadraticamente estável, onde os K_i ganhos da lei de controle são dadas por:

$$[K_0 \quad K_1 \cdots K_{n_\theta}] = F_a W^{-1} \quad (4.6)$$

e $V(x, \theta) = x' \Theta'_a W^{-1} \Theta_a x$ é uma função de Lyapunov para o sistema em malha fechada.

Prova: Como as condições (4.4) e (4.5) são afins em $(\theta, \dot{\theta})$ e são satisfeitas em todos os vértices de Π , por convexidade elas são satisfeitas para todo $(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$.

Defina $P = W^{-1}$, assim obtém-se

$$\mathcal{P}(\theta) = \Theta'_a P \Theta_a > 0, \quad \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \Pi.$$

Devido ao fato de N ser não singular da restrição (4.5) temos $C_a P = N^{-1} C_a$. Além disso, considerando (4.3) e (4.6) pode-se estabelecer que $F_a P \Theta_a = K(\theta)$. Logo, multiplicando (4.4) à direita por $P \Theta_a$ e à esquerda por $(P \Theta_a)'$ e lembrando que Θ_a é uma base para \mathcal{N}_{C_a} , obtém-se

$$\dot{\mathcal{P}}(\theta) + A'_c \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A_c < 0. \quad (4.7)$$

onde $A_c = A(\theta) + B_u K(\theta)$.

Assim $V(x, \theta) = x' \mathcal{P}(\theta) x$ e $\dot{V}(x, \theta)$ são calculadas ao longo das trajetórias do sistema (4.1) em malha fechada com a lei de controle de (4.3) e (4.6). Logo $V(x, \theta)$ é uma função de Lyapunov para o sistema em malha fechada, e portanto, este sistema é bi-quadraticamente estável.

△△

O sistema realimentado com os ganhos (4.6) passa a ter a seguinte formulação

$$\dot{x}(t) = [(A_0 + B_u K_0) + (A_1 + B_u K_1) \theta_1 + \cdots + (A_{n_\theta} + B_u K_{n_\theta}) \theta_{n_\theta}] x.$$

Quando os parâmetros θ não estão disponíveis "on-line", eles não podem aparecer na lei de controle (4.3). Neste caso os elementos das matrizes K_i são assumidos como nulos.

Note no Teorema 4.1, que a lei de controle admitirá as matrizes K_i nulas, se as partições correspondentes da matriz F_a em (4.6) forem zeradas e a matriz W admitir uma estrutura bloco diagonal. Observe ainda, que a remoção dos parâmetros da lei de controle, não implica em removê-los da função de Lyapunov, mantendo-se assim as condições de robustez desejada.

Uma característica interessante da lei de controle apresentada em (4.3) é que ela possui uma dependência paramétrica afim, o que facilita a implementação "on-line", quando comparada às técnicas de controle apresentadas em [18], [6], nas quais a dependência paramétrica é não linear.

4.2 Controle Robusto \mathcal{H}_2

Esta seção trata do problema de projeto de uma lei de controle baseada na noção de estabilidade bi-quadrática. Objetiva-se encontrar um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 que seja válido $\forall(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$. Dentro desta abordagem, a estabilidade e o custo \mathcal{H}_2 para o sistema em malha fechada estão baseados em uma função de Lyapunov do tipo bi-quadrática.

Nós estaremos buscando por formulações LMI que apresentem condições suficientes para estabilização do sistema.

4.2.1 Abordagem Primal

Seja o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x + B_w(\theta)w + B_u u \\ z &= C(\theta)x + D_u(\theta)u \end{aligned} \quad (4.8)$$

com

$$A(\theta) = A_0 + \mathcal{A}\Theta \quad , \quad B_w(\theta) = B_w\Theta_w \quad , \quad C(\theta) = C\Theta_a \quad , \quad D_u(\theta) = D_u\Theta_u$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 I_{n_x} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_x} \end{bmatrix} \quad , \quad \Theta_a = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix} \quad , \quad \Theta_w = \begin{bmatrix} I_{n_w} \\ \theta_1 I_{n_w} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_w} \end{bmatrix} \quad , \quad \Theta_u = \begin{bmatrix} I_{n_u} \\ \theta_1 I_{n_u} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_u} \end{bmatrix}$$

onde $A_0, \mathcal{A}, B_w, B_u, C, D_u$ são matrizes constantes dadas de dimensões compatíveis, $x \in \mathfrak{R}^{n_x}$, $u \in \mathfrak{R}^{n_u}$, $w \in \mathfrak{R}^{n_w}$, $z \in \mathfrak{R}^{n_z}$ são respectivamente os estados, a entrada de controle, a entrada de perturbação e a saída de performance; $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta})$ é um vetor de parâmetros reais variante no tempo limitado em magnitude e taxa de variação.

O sistema (4.8) é considerado como um sistema linear com dependência paramétrica do tipo LPV, onde $\theta_i(t)$, $i = 1, \dots, n_\theta$, estão disponíveis "on-line". Se supõe que os valores de $\theta_i(t)$ e $\dot{\theta}(t)$, para todo $t \geq 0$, pertence ao politopo Π . Neste caso, objetiva-se projetar um controle por realimentação de estado com dependência paramétrica afim que minimize um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 do sistema realimentado.

Teorema 4.2 *Seja o sistema (4.8) e a notação seguinte*

$$A_a = \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} \\ \dot{\Theta} + \Theta A_0 & \Theta \mathcal{A} \end{bmatrix}; \quad B_a = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix} B_u \quad (4.9)$$

$$C_a = \begin{bmatrix} \Theta & -I \end{bmatrix}; \quad C_b = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times n_w} & \Theta'_a & -I_{n_x} \end{bmatrix}.$$

E seja Π um politopo construído a partir dos valores admissíveis de $(\theta, \dot{\theta})$. Admita que existe uma matriz simétrica $W \in \mathfrak{R}^{n_x(n_\theta+1) \times n_x(n_\theta+1)}$, matrizes $F_a \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x(n_\theta+1)}$, $L \in \mathfrak{R}^{n_w + n_x(n_\theta+2) \times n_x}$, $M \in \mathfrak{R}^{n_x(n_\theta+1) \times n_x n_\theta}$, $N \in \mathfrak{R}^{n_x n_\theta \times n_x n_\theta}$, uma função matricial $Q(\theta) \in \mathfrak{R}^{n_w \times n_w}$ e o escalar l que solucionam o seguinte problema de otimização, onde as LMIs estão satisfeitas nos vértices do politopo Π .

minimize $\{l\}$:

$$\begin{bmatrix} W A'_a + A_a W + F'_a B'_a + B_a F_a + M C_a + C'_a M' & W C' + F'_a D_u(\theta)' \\ C W + D_u(\theta) F_a & -I_{n_x} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} Q(\theta) & 0 & B_w(\theta)' \\ 0 & W & 0 \\ B_w(\theta) & 0 & 0_{n_x} \end{bmatrix} + L C_b + C'_b L' > 0 \quad (4.11)$$

$$l - \text{Tr}\{Q(\theta)\} \geq 0 \quad (4.12)$$

$$N C_a = C_a W \quad (4.13)$$

onde

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i Q_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = 1. \quad (4.14)$$

Então o sistema (4.8), em malha fechada com a lei de controle (4.3), onde os ganhos K_i são dados por

$$[K_0 \ K_1 \ \dots \ K_{n_\theta}] = F_a W^{-1} \quad (4.15)$$

é bi-quadraticamente estável e um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 é dado por $\|G_{wz}\|_2 < \sqrt{l}$. Sob estas condições, $V(x, \theta) = x'P(\theta)x$, com $P(\theta) = \Theta'_a W^{-1} \Theta_a$, é uma função de Lyapunov para o sistema não forçado ($w \equiv 0$) em malha fechada.

Prova: Como as desigualdades em (4.10)-(4.13) são afins em $(\theta, \dot{\theta})$ e estão satisfeitas nos vértices de Π , por convexidade elas estão satisfeitas $\forall (\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$.

Defina

$$\Phi = \begin{bmatrix} I_{n_w} & 0 \\ 0 & I_{n_x(n_\theta+1)} \\ 0 & \Theta'_a \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

e observe que Φ é uma base para \mathcal{N}_{C_b} . De (4.11) nós obtemos

$$\Phi' \begin{bmatrix} Q(\theta) & 0 & B'_w(\theta) \\ 0 & W & 0 \\ B_w(\theta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi = \begin{bmatrix} Q(\theta) & B'_w(\theta)\Theta'_a \\ \Theta_a B_w(\theta) & W \end{bmatrix} > 0 \quad (4.17)$$

Aplicando o complemento de Schur obtém-se

$$W > 0, \quad Q(\theta) - B_w(\theta)'P(\theta)B_w(\theta) > 0 \quad (4.18)$$

Note na expressão acima que W é inversível, este fato é uma condição necessária para a obtenção de (4.3) via (4.15).

Agora defina $C_f = CW + D_u(\theta)F_a$ e $P = W^{-1}$. Aplicando o complemento de Schur em (4.10)

nós temos

$$WA'_a + A_aW + F'_aB'_a + B_aF_a + C'_fC_f + MC_a + C'_aM' < 0 \quad (4.19)$$

Devido ao fato de N ser não singular da restrição (4.13) temos $C_aP = N^{-1}C_a$. Note que Θ_a é uma base para \mathcal{N}_{C_a} . Logo, multiplicando (4.19) à direita por $P\Theta_a$ e à esquerda por $(P\Theta_a)'$, obtém-se

$$\Theta'_a[(A_a + B_aF_aP)'P + P(A_a + B_aF_aP) + PC'_fC_fP]\Theta_a < 0$$

Com (4.3) e (4.15) nós obtemos $F_aP\Theta_a = K(\theta)$ e portanto $C_fP\Theta_a = C(\theta) + D_u(\theta)K(\theta)$. Após algumas manipulações algébricas empregando (4.9) nós obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}(\theta) + [A(\theta) + B_uK(\theta)]'\mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta)[A(\theta) + B_uK(\theta)] \\ + [C(\theta) + D_u(\theta)K(\theta)]'[C(\theta) + D_u(\theta)K(\theta)] < 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Observe ainda que, $\mathcal{P}(\theta) = \Theta'_aW^{-1}\Theta_a > 0$ em conjunto com (4.20), assegura que $V(x, \theta) = x'\mathcal{P}(\theta)x$ é uma função de Lyapunov para o sistema não forçado ($w \equiv 0$) em malha fechada.

A prova segue como apresentado no Teorema 3.2 caso de análise.

△△

4.2.2 Abordagem Dual

Dentro desta abordagem, a equação de estados do sistema (4.8) será escrita como segue

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A_0 + \Theta'A]x + B_w(\theta)w + B_uu \\ z &= C(\theta)x + D_u(\theta)u \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{n_\theta} \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 I_{n_x} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_x} \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

O sistema (4.21) realimentado com a lei de controle (4.3) é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Theta'_a \left(\tilde{A} + \tilde{B}_{u_v} K_v \right) x + B_w(\theta) w \\ z &= [C(\theta) + D_u(\theta) \Theta'_u K_v] x \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde

$$K_v = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \\ \vdots \\ K_{n_\theta} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_0 \\ \mathcal{A} \end{bmatrix}, \quad \Theta_a = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix}, \quad \Theta_u = \begin{bmatrix} I_{n_u} \\ \theta_1 I_{n_u} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_u} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\tilde{B}_{u_v} = \text{diag}\{B_u, \dots, B_u\}.$$

Seja a seguinte notação

$$\Lambda = \begin{bmatrix} A_0 & -\dot{\Theta}' + A_0 \Theta' \\ \mathcal{A} & \mathcal{A} \Theta' \end{bmatrix}, \quad C_a = \begin{bmatrix} \Theta & -I \end{bmatrix}, \quad S'_v = \begin{bmatrix} S'_0 & S'_1 & \dots & S'_{n_\theta} \end{bmatrix}'.$$

Objetiva-se projetar um controlador do tipo LPV dado por (4.3) que assegure a condição de estabilidade exponencial para o sistema realimentado e permita que um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 para todo $(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$ seja encontrado.

Teorema 4.3 *Seja o sistema (4.8) e seja Π um politopo construído a partir dos valores de $(\theta, \dot{\theta})$. Admita que existe uma matriz simétrica P , matrizes L, N, R, S uma função matricial simétrica $Q(\theta)$, e o escalar κ que solucionam o seguinte problema de otimização, onde as LMIs estão satisfeitas nos vértices do politopo Π .*

minimize $\{\kappa\}$:

$$\begin{bmatrix} \Lambda P + P \Lambda' + \tilde{B}_{u_v} S'_v \Theta'_a + \Theta_a S'_v \tilde{B}'_{u_v} + L C_a + C'_a L' & B_w(\theta) \\ B'_w(\theta) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.25)$$

$$\mathcal{Y}(\theta) + N\Omega_c(\theta) + \Omega_c(\theta)'N' > 0 \quad (4.26)$$

$$\kappa - \text{Trace}\{Q(\theta)\} \geq 0 \quad (4.27)$$

$$R\Theta'_a = \Theta'_a P \quad (4.28)$$

onde

$$\mathcal{Y}(\theta) = \begin{bmatrix} Q(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & P\Theta_a & 0 & \Theta_a S'_v & 0 \\ 0 & \Theta'_a P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_v \Theta'_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\Omega_c(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 & 0 & 0 & \Theta_a \\ C'(\theta) & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ D'_u(\theta) & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta_u & -I & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i Q_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = 1. \quad (4.31)$$

O controlador LPV (4.3) será obtido com

$$\begin{bmatrix} K'_0 & K'_1 & \dots & K'_{n_\theta} \end{bmatrix}' = S_v R^{-1}. \quad (4.32)$$

Assim, o sistema (4.23) é exponencialmente estável para todo $(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$ e um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 será dado por $\|G_{wz}\| < \sqrt{\kappa}$. Sob estas condições $V(x, \theta) = x'P(\theta)^{-1}x$, com $P(\theta) = \Theta'_a P \Theta_a$, é uma função de Lyapunov com dependência paramétrica para o sistema não forçado ($w \equiv 0$) em malha fechada.

Prova: Como as condições (4.25)-(4.28) são afins em $(\theta, \dot{\theta})$ e estão satisfeitas nos vértices de Π , por convexidade elas estão satisfeitas $\forall(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$.

Admita que a matriz $\mathcal{P}(\theta) = \Theta'_a P \Theta_a$ seja positiva definida para todo $(\theta, \dot{\theta})$. A seguir, mostraremos que qualquer matriz R que satisfaz (4.28), não é singular. A prova será feita por contradição, suponha que existe um vetor $x \in \mathfrak{R}^n$ diferente de zero tal que $Rx = 0$. Com (4.28) e levando em conta que $\Theta'_a \Theta_a > 0$, nós obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= R(\Theta'_a \Theta_a)(\Theta'_a \Theta_a)^{-1}x \\ &= \mathcal{P}(\theta)(\Theta'_a \Theta_a)^{-1}x \end{aligned}$$

que é uma contradição, pois $\mathcal{P}(\theta) > 0$ e $(\Theta'_a \Theta_a)^{-1}x \neq 0$ para todo $(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$.

Tendo em vista a não singularidade de R e tomando (4.32) e (4.28) chega-se a:

$$S_v \Theta'_a = K_v \Theta'_a P. \quad (4.33)$$

Note que o espaço nulo de C_a é dado por

$$\mathcal{N}_{C_a} = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix} = \Theta_a$$

Agora aplicando o complemento de Schur em (4.25) podemos reescrevê-la como

$$(\Lambda + \tilde{B}_{u_v} K_v \Theta'_a)P + P(\Lambda + \tilde{B}_{u_v} K_v \Theta'_a)' + LC_a + C'_a L' + B_w(\theta)B'_w(\theta) < 0$$

ou ainda

$$\Theta'_a \left[(\Lambda + \tilde{B}_{u_v} K_v \Theta'_a)P + P(\Lambda + \tilde{B}_{u_v} K_v \Theta'_a)' + B_w(\theta)B'_w(\theta) \right] \Theta_a < 0. \quad (4.34)$$

Tomando (4.24) e substituindo em (4.34) resulta

$$-\dot{\mathcal{P}}(\theta) + \Theta'_a(\tilde{A} + \tilde{B}_{u_v} K_v)\mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta)(\tilde{A} + \tilde{B}_{u_v} K_v)'\Theta_a + B_w(\theta)B'_w(\theta) < 0. \quad (4.35)$$

Seja \mathcal{N}_{Ω_c} o espaço nulo de $\Omega_c(\theta)$

$$\mathcal{N}_{\Omega_c} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Theta_a \\ C'(\theta) & 0 \\ D'_u(\theta) & 0 \\ \Theta_u D'_u(\theta) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Então pré multiplicando (4.26) por \mathcal{N}'_{Ω_c} e pós multiplicando por \mathcal{N}_{Ω_c} e utilizando (4.33) nós obtemos

$$\begin{bmatrix} Q(\theta) & [C(\theta) + D_u(\theta)\Theta'_u K_v]\mathcal{P}(\theta) \\ \mathcal{P}(\theta)[C(\theta) + D_u(\theta)\Theta'_u K_v]' & \mathcal{P}(\theta) \end{bmatrix} > 0. \quad (4.37)$$

Com o complemento de Schur a desigualdade acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\theta) &= \Theta'_a P \Theta_a > 0 \\ Q(\theta) - [C(\theta) + D_u(\theta)K(\theta)]\mathcal{P}(\theta)[C(\theta) + D_u(\theta)K(\theta)]' &> 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Assim $V(x, \theta) = x'\mathcal{P}(\theta)^{-1}x$ e de (4.35) nós temos que $\dot{V}(x, \theta) < 0$ que mostra a estabilidade exponencial para o sistema não forçado ($w \equiv 0$) em malha fechada. A prova é concluída como apresentado no Teorema 3.3.

△△

No caso em que os parâmetros não estão disponíveis para medida, eles não poderão aparecer na lei de controle (4.3). Neste caso os elementos das matrizes K_i , são assumidos como nulos. Note no Teorema 4.3, que a lei de controle admitirá as matrizes K_i nulas, se as partições correspondentes da matriz S_v em (4.32) forem zeradas. Observe ainda, que a remoção dos parâmetros da lei de controle, não implica em removê-los da função de Lyapunov, mantendo-se assim as condições de robustez desejada.

4.3 Controle Robusto \mathcal{H}_∞

4.3.1 Abordagem Primal

Seja o sistema linear variante no tempo descrito pela seguinte equação de estados

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x + B_w(\theta)w + B_u(\theta)u \\ z &= C(\theta)x + D_w(\theta)w + D_u(\theta)u \end{aligned} \quad (4.39)$$

com

$$\begin{aligned} A(\theta) &= A_0 + \mathcal{A}\Theta, \quad B_w(\theta) = B_w\Theta_w, \quad B_u(\theta) = B_u\Theta_u \\ C(\theta) &= C\Theta_a, \quad D_w(\theta) = D_w\Theta_w, \quad D_u(\theta) = D_u\Theta_u \end{aligned}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 I_{n_x} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_x} \end{bmatrix}, \quad \Theta_a = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix}, \quad \Theta_w = \begin{bmatrix} I_{n_w} \\ \theta_1 I_{n_w} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_w} \end{bmatrix}, \quad \Theta_u = \begin{bmatrix} I_{n_u} \\ \theta_1 I_{n_u} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_u} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

onde $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ são respectivamente os vetores de estado, entrada de perturbação e a saída de performance; A_0 , \mathcal{A} , B_w , B_u , C , D_w , D_u , são matrizes dadas de dimensões compatíveis, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}) \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ são parâmetros reais, que podem variar no tempo.

O sistema (4.39) é considerado como um sistema linear com dependência paramétrica do tipo LPV, onde $\theta_i(t)$, $i = 1, \dots, n_\theta$, estão disponíveis "on-line". A única informação conhecida *a priori* é que os valores de $\theta_i(t)$ e $\dot{\theta}(t)$, para todo $t \geq 0$, pertence ao politopo Π . Neste caso, objetiva-se projetar um controle por realimentação de estado com dependência paramétrica afim, dado por (4.3), que minimize um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema realimentado.

Uma solução para o problema acima é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 4.4 *Seja o sistema (4.39) e Π um politopo dado que representa os valores admissíveis de $(\theta, \dot{\theta})$. Seja a notação*

$$\Psi_c = \begin{bmatrix} WA'_a + A_aW + LC_a + C'_aL' & F'_aB'_u(\theta) & 0 & WC' + F'_aD'_u(\theta) \\ B_u(\theta)F_a & 0 & B_w(\theta) & 0 \\ 0 & B'_w(\theta) & -\gamma^2I & \Theta'_wD'_w \\ CW + D_u\Theta_uF_a & 0 & D_w\Theta_w & -I \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} \Theta'_a & -I_{n_x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde

$$A_a = \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} \\ \dot{\theta} + \theta A_0 & \theta \mathcal{A} \end{bmatrix}; \quad C_a = [\Theta \quad -I]. \quad (4.42)$$

Se existem matrizes $W > 0$, F_a , L , M , e N , um escalar $\gamma > 0$, tais que as seguintes condições são satisfeitas em todos os vértices do politopo Π :

$$\Psi_c + M\Phi_c + \Phi'_cN' < 0 \quad (4.43)$$

$$NC_a = C_aW \quad (4.44)$$

Então existe uma realimentação de estado do tipo (4.3), onde os K_i ganhos da lei de controle são dados por:

$$\begin{bmatrix} K_0 & K_1 \cdots K_{n_\theta} \end{bmatrix} = F_aW^{-1} \quad (4.45)$$

tal que o sistema em malha fechada é bi-quadraticamente estável, e $V(x, \theta) = x'\Theta'_aW^{-1}\Theta_ax$ é uma função de Lyapunov para o sistema não forçado em malha fechada.

Prova: Como (4.43) e (4.44) são afins em $(\theta, \dot{\theta})$ e estão satisfeitas nos vértices de Π , por convexidade elas estão satisfeitas $\forall(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$.

Com $W > 0$ defina $P = W^{-1}$, assim obtém-se

$$\mathcal{P}(\theta) = \Theta'_a P \Theta_a > 0, \quad \forall(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi \quad (4.46)$$

Agora defina

$$\tilde{\Phi}_c = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \Theta'_a & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_z} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

e note que $\tilde{\Phi}_c$ é uma base para $\mathcal{N}_{\tilde{\Phi}_c}$. Então de (4.43) obtemos

$$\tilde{\Phi}'_c \Psi_c \tilde{\Phi}_c = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda} & \Theta_a B_w(\theta) & WC' + F'_a D'_u(\theta) \\ B'_w(\theta) \Theta'_a & -\gamma^2 I & D'_w(\theta) \\ CW + D_u(\theta) F_a & D_w(\theta) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.48)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} = & WA'_a + A_a W + LC_a + C'_a L' + \Theta_a B_u \Theta_u F_a \\ & + F'_a \Theta'_u B'_u \Theta'_a. \end{aligned}$$

Devido ao fato de N ser não singular da restrição (4.44) temos $C_a P = N^{-1} C_a$. Note que Θ_a é uma base para \mathcal{N}_{C_a} . Além disso, considerando (4.3) e (4.45) pode-se estabelecer que $F_a P \Theta_a = K(\theta)$. Logo, multiplicando (4.48) à direita por

$$T = \begin{bmatrix} P \Theta_a & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_z} \end{bmatrix}$$

e à esquerda por T' , obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathcal{P}}(\theta) + A'_c \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A_c & \mathcal{P}(\theta) B_w(\theta) & C'_c \\ B'_w(\theta) \mathcal{P}(\theta) & -\gamma^2 I & D'_w(\theta) \\ C_c & D_w(\theta) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.49)$$

onde

$$A_c = A(\theta) + B_u(\theta)K(\theta)$$

$$C_c = C(\theta) + D_u(\theta)K(\theta).$$

Aplicando o complemento de Schur à desigualdade (4.49) obtemos

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathcal{P}}(\theta) + A'_c \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A_c + C'_c C_c & \mathcal{P}(\theta) B_w(\theta) + C'_c D_w(\theta) \\ (\mathcal{P}(\theta) B_w(\theta) + C'_c D_w(\theta))' & D'_w(\theta) D_w(\theta) - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.50)$$

A prova segue como apresentado no caso de análise no Teorema 3.4.

△△

O Teorema 4.4 fornece um método de projeto de realimentação de estado \mathcal{H}_∞ sub ótima, com dependência paramétrica afim, para sistemas lineares variantes no tempo do tipo LPV. O método proposto é baseado na solução de um problema do tipo LMI, e como tal, pode ser resolvido numericamente de maneira eficiente via métodos de otimização convexa. Note que a lei de controle que minimiza o limitante superior para a norma $\|G_{zw}\|_\infty$, utilizando o Teorema 4.4, pode ser obtida resolvendo-se o seguinte problema de otimização convexa

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \{\gamma^2\} \\ & \text{sujeito à (4.43)-(4.44).} \end{aligned} \quad (4.51)$$

4.3.2 Abordagem Dual

Seja o sistema (4.39) realimentado com a lei de controle (4.3). Em malha fechada o sistema será dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Theta'_a (\tilde{A} + \tilde{B}_{u_v} K_v) x + \Theta_a(t)' \tilde{B}_w w \\ z &= \Theta'_z (\tilde{C} + \tilde{D}_{u_v} K_v) x + \Theta_z(t)' \tilde{D}_w w \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_0 \\ \mathcal{A} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_w = \begin{bmatrix} B_{w_0} \\ B_w \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_w = \begin{bmatrix} D_{w_0} \\ D_w \end{bmatrix}, \quad \Theta_z = \begin{bmatrix} I_{n_z} \\ \theta_1 I_{n_z} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta} I_{n_z} \end{bmatrix}$$

$$S_v = \begin{bmatrix} S'_0 & S'_1 & \cdots & S'_{n_\theta} \end{bmatrix}' \quad K_v = \begin{bmatrix} K'_0 & K'_1 & \cdots & K'_{n_\theta} \end{bmatrix}'$$

$$\tilde{B}_{u_v} = \text{diag} \{B_u(\theta), \dots, B_u(\theta)\} \quad \tilde{D}_{u_v} = \text{diag} \{D_u(\theta), \dots, D_u(\theta)\}$$

Λ , Θ_a , C_a são dados por (3.27).

Objetiva-se projetar um controlador do tipo LPV dado por (4.3) que assegure a condição de estabilidade exponencial para o sistema realimentado e permita que um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ para todo $(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$ seja encontrado.

O teorema a seguir apresenta uma solução para o problema acima.

Teorema 4.5 *Seja o sistema (4.39) e Π um politopo dado que representa os valores admissíveis de $(\theta, \dot{\theta})$. Seja a notação*

$$\Psi_{d_v} = \begin{bmatrix} \Lambda P + P \Lambda' + J C_a + C'_a J' & P \Theta_a & \tilde{B}_{u_v} S_v & 0 & \tilde{B}_w \\ \Theta'_a P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S'_v \tilde{B}'_{u_v} & 0 & 0 & S'_v D'_{u_v} \Theta_z & 0 \\ 0 & 0 & \Theta'_z D_{u_v} S_v & -\gamma^2 I & \Theta'_z \tilde{D}_w \\ \tilde{B}'_w & 0 & 0 & \tilde{D}'_w \Theta_z & -I_{n_w} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{d_v} = \begin{bmatrix} C_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & \tilde{C}'\Theta_z & 0 \\ \Theta'_a & 0 & -I & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se existem matrizes $P = P'$, L , M , R , S_v , e o escalar $\gamma > 0$, tais que as seguintes condições são satisfeitas em todos os vértices do politopo Π :

$$\Psi_{d_v} + L\Phi_{d_v} + \Phi'_{d_v}L' < 0 \quad (4.53)$$

$$P + MC_a + C'_aM' > 0 \quad (4.54)$$

$$R\Theta'_a = \Theta'_aP. \quad (4.55)$$

Então existe uma realimentação de estado do tipo (4.3), onde os K_i ganhos da lei de controle são dados por:

$$\begin{bmatrix} K'_0 & K'_1 & \dots & K'_{n_\theta} \end{bmatrix}' = S_v R^{-1} \quad (4.56)$$

tal que o sistema em malha fechada é exponencialmente estável e $\|G_{wz}\|_\infty < \gamma$, e $V(x, \theta) = x'P(\theta)^{-1}x$, com $P(\theta) = \Theta'_a P \Theta_a$, é uma função de Lyapunov para o sistema em malha fechada.

Prova: Como (4.53)-(4.55) são afins em $(\theta, \dot{\theta})$ e estão satisfeitas nos vértices de Π , por convexidade elas estão satisfeitas para todo $(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$.

Defina \mathcal{N}_{C_a} como o espaço nulo de C_a

$$\mathcal{N}_{C_a} = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix} = \Theta_a.$$

Com (4.54) temos que a matriz $P(\theta) = \Theta'_a P \Theta_a$ é positiva definida para todo $(\theta, \dot{\theta}) \in \Pi$. Mostra-se a seguir que qualquer R que satisfaz (4.55), não é singular. A prova será feita por

contradição. Suponha que existe um vetor $x \in \mathfrak{R}^n$ diferente de zero tal que $Rx = 0$. Com (4.55) e levando em conta que $\Theta'_a \Theta_a > 0$, nós obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= R(\Theta'_a \Theta_a)(\Theta'_a \Theta_a)^{-1}x \\ &= \mathcal{P}(\theta)(\Theta'_a \Theta_a)^{-1}x \end{aligned}$$

que é uma contradição, pois $\mathcal{P}(\theta) > 0$ e $(\Theta'_a \Theta_a)^{-1}x \neq 0$ para todo $(\theta, \theta) \in \Pi$.

Tendo em vista a não singularidade de R e tomando (4.56) e (4.55) chega-se a:

$$S_v \Theta'_a = K_v \Theta'_a P. \quad (4.57)$$

Agora defina

$$\tilde{\Phi}_d = \begin{bmatrix} \Theta_a & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}' \Theta_z & 0 \\ \Theta'_a \Theta_a & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_w} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

e note que $\tilde{\Phi}_{d_v}$ é uma base para $\mathcal{N}_{\tilde{\Phi}_{d_v}}$. Então de (4.53) nós obtemos $\tilde{\Phi}'_{d_v} \Psi_{d_v} \tilde{\Phi}_d$, que resulta em

$$\begin{bmatrix} \Theta'_a \hat{\Lambda} \Theta_a & \Theta'_a (\Theta'_z \tilde{C} \Theta'_a P + \Theta'_z \tilde{D}_{u_v} S_v \Theta'_a)' & B_w(\theta) \\ (\Theta'_z \tilde{C} \Theta'_a P + \Theta'_z \tilde{D}_{u_v} S_v \Theta'_a) \Theta_a & -\gamma^2 I & D_w(\theta) \\ B'_w(\theta) & D'_w(\theta) & -I_{n_w} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.59)$$

onde

$$\hat{\Lambda} = \Lambda P + P \Lambda' + \tilde{B}_{u_v} S_v \Theta'_a + \Theta_a S'_v \tilde{B}'_{u_v}.$$

Agora substituindo (4.57) em (4.59) obtém-se

$$\begin{bmatrix} -\dot{\mathcal{P}}(\theta) + \Theta'_a A_c \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A'_c \Theta_a & \mathcal{P}(\theta) C'_c \Theta_z & B_w(\theta) \\ (\mathcal{P}(\theta) C'_c \Theta_z)' & -\gamma^2 I_{n_x} & D_w(\theta) \\ B_w(\theta)' & D_w(\theta)' & -I_{n_w} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.60)$$

onde

$$\begin{aligned} A_c &= (\tilde{A} + \tilde{B}_{uv} K_v) \\ C_c &= (\tilde{C} + \tilde{D}_{uv} K_v). \end{aligned}$$

Aplicando Schur em (4.60) chega-se

$$\begin{bmatrix} -\dot{\mathcal{P}}(\theta) + \Theta'_a A_c \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A'_c \Theta_a + B_w(\theta) B_w(\theta)' & \mathcal{P}(\theta) C'_c \Theta_z + B_w(\theta) D_w(\theta)' \\ (\mathcal{P}(\theta) C'_c \Theta_z + B_w(\theta) D_w(\theta))' & D_w(\theta) D_w(\theta)' - \gamma^2 I_{n_w} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.61)$$

A prova segue como apresentado no Teorema 3.5.

△△

O Teorema 4.5 também nos permite resolver o problema de síntese que consiste em minimizar um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ . Este limitante é obtido numericamente resolvendo um problema de otimização convexa em conjunto com as desigualdades matriciais onde buscam-se as seguintes variáveis P , L , M , R , S_v e γ , nos vértices do politopo Π . Este problema de otimização é apresentado a seguir

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \{\gamma^2\} \\ & \text{sujeito à (4.53) – (4.55).} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Note que a matriz de ganho K_i obtida pela formulação dual não exige que a matriz $P > 0$, como ocorre na abordagem primal, este fato, dependendo do sistema utilizado, pode tornar uma abordagem mais restrita que a outra.

4.4 Exemplos Numéricos

Nesta seção apresentam-se resultados de simulações utilizando os teoremas obtidos para as seguintes condições: controle robusto \mathcal{H}_2 e controle robusto \mathcal{H}_∞ .

4.4.1 Controle Robusto \mathcal{H}_2

Exemplo 4.1 *Seja o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x + B_w(\theta)w + Bu \\ z &= C(\theta)x + D(\theta)u \end{aligned} \tag{4.63}$$

onde

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -4.1 - 3\theta & 1 \\ -2\theta & 2 - 3.2\theta \end{bmatrix}, \quad B_w(\theta) = \begin{bmatrix} -0.03 - 0.3\theta \\ -0.47 + 0.9\theta \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O sistema acima é instável para $\theta < 0.248596$. Considere o problema de projeto de um controlador por realimentação de estado que estabilize o sistema (4.63) e que garanta um desempenho \mathcal{H}_2 para todo θ satisfazendo $|\theta| \leq 3$ e $|\dot{\theta}| \leq 5$. Primeiro consideraremos o caso em que o parâmetro θ não está disponível "on-line". Neste caso o parâmetro θ não aparece na lei de controle. Utilizando o Teorema 4.2 (abordagem primal), obtém-se que a realimentação de estado que fornece o menor limitante superior \sqrt{l} para \mathcal{H}_2 é dada por

$$u(t) = (K_0 + \theta K_1)x(t) \tag{4.64}$$

onde

$$K_0 = \begin{bmatrix} -1.37885 & -9.96657 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\sqrt{l} = 20.805078$. A função de Lyapunov correspondente para o sistema em malha fechada é

$$V(x, \theta) = x' \begin{bmatrix} I_2 \\ \theta I_2 \end{bmatrix}' W^{-1} \begin{bmatrix} I_2 \\ \theta I_2 \end{bmatrix} x \quad (4.65)$$

onde

$$W = \begin{bmatrix} 2.18671 & 0.27021 & 0. & 0. \\ 0.27021 & 0.28356 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 2.18671 & 0.27021 \\ 0. & 0. & 0.27021 & 0.28356 \end{bmatrix}.$$

Considere agora o caso em que o parâmetro θ está disponível "on-line". Neste caso as matrizes de ganho obtidas para a realimentação de estado (4.64) são

$$K_0 = \begin{bmatrix} -0.38157 & -6.19712 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.52168 & 1.23790 \end{bmatrix}$$

e o menor limitante superior para \mathcal{H}_2 é $\sqrt{l} = 18.408419$. A função de Lyapunov correspondente para o sistema em malha fechada é dada por (4.65) com

$$W = \begin{bmatrix} 3.31302 & 0.33510 & 0. & 0. \\ 0.33510 & 0.34925 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 3.31302 & 0.33510 \\ 0. & 0. & 0.33510 & 0.34925 \end{bmatrix}.$$

Empregando agora o Teorema 4.3 (abordagem dual), apresentam-se resultados de simulações que foram obtidos para o sistema (4.63) sob as mesmas condições anteriores. Admita inicialmente que θ não está disponível "on-line". As matrizes de ganho obtidas para a realimentação de estado (4.64) são

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0.20404 & -11.6110 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0. & 0. \end{bmatrix}$$

e o menor limitante superior para \mathcal{H}_2 é $\sqrt{\kappa} = 47.945916$. A função de Lyapunov correspondente para o sistema em malha fechada é

$$V(x, \theta) = x' \left(\begin{bmatrix} I_2 \\ \theta I_2 \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} I_2 \\ \theta I_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} x \quad (4.66)$$

onde

$$P = \begin{bmatrix} 10.6963 & 2.41044 & 0. & 0. \\ 2.41044 & 1.65915 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 10.6963 & 2.41044 \\ 0. & 0. & 2.41044 & 1.65915 \end{bmatrix}$$

Considerando que o parâmetro θ está disponível em tempo real. Neste caso as matrizes de ganho obtidas para a realimentação de estado (4.64) são

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0.52960 & -8.33783 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.82145 & 0.18369 \end{bmatrix}$$

e o menor limitante superior para \mathcal{H}_2 é $\sqrt{\kappa} = 29.894193$. A função de Lyapunov correspondente para o sistema em malha fechada é dada por (4.66) com

$$P = \begin{bmatrix} 8.07719 & 0.41893 & 0. & 0. \\ 0.41893 & 0.44750 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 8.07719 & 0.41893 \\ 0. & 0. & 0.41893 & 0.44750 \end{bmatrix}$$

Os valores do custo \mathcal{H}_2 apresentados acima são maiores do que o apresentado em [18]. Contudo nos estudos aqui apresentados a lei de controle apresenta uma dependência afim em θ enquanto que em [18] a lei de controle é uma função não linear em θ .

Note que para este exemplo um melhor resultado foi obtido empregando-se a formulação LMI elaborada a partir da abordagem primal.

4.4.2 Controle Robusto \mathcal{H}_∞

Exemplo 4.2 *Seja o sistema (4.63). Considere o caso de projeto de um controlador por realimentação de estados que estabilize o sistema e garanta desempenho \mathcal{H}_∞ para θ satisfazendo $|\theta| \leq 3$ e $|\dot{\theta}| \leq 5$. Inicialmente considere o caso em que o parâmetro θ não seja disponível "on-line". Neste caso, o parâmetro θ não pode ser utilizado na lei de controle. Utilizando o Teorema 4.4 (abordagem primal), obtém-se que a realimentação de estado que fornece o menor limitante superior γ para $\|G_{zw}\|_\infty$ é dada por*

$$u(t) = (K_0 + \theta K_1)x(t) \quad (4.67)$$

onde

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0.28902 & -14.76292 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\gamma = 9.490078$. A função de Lyapunov correspondente para o sistema em malha fechada é

$$V(x, \theta) = x' \begin{bmatrix} I_2 \\ \theta I_2 \end{bmatrix}' W^{-1} \begin{bmatrix} I_2 \\ \theta I_2 \end{bmatrix} x \quad (4.68)$$

onde

$$W = \begin{bmatrix} 1.55930 & 0.30288 & 0 & 0 \\ 0.30288 & 0.19767 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.55930 & 0.30288 \\ 0 & 0 & 0.30288 & 0.19767 \end{bmatrix}$$

Considere agora o caso em que o parâmetro θ esta disponível "on-line", ou seja, θ poderá

ser utilizado na lei de controle, resultando assim uma realimentação de estado com dependência paramétrica. Neste caso as matrizes de ganho obtidas para a realimentação de estado (4.67) são

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0.26720 & -16.25338 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.62925 & 1.87771 \end{bmatrix}$$

e $\gamma = 8.7108272$. A função de Lyapunov correspondente para o sistema em malha fechada é dada por (4.68) com

$$W = \begin{bmatrix} 1.86488 & 0.26135 & 0 & 0 \\ 0.26135 & 0.16259 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.86488 & 0.26135 \\ 0 & 0 & 0.26135 & 0.16259 \end{bmatrix}$$

Utilizando agora o Teorema 4.5 (abordagem dual), considere inicialmente o caso em que o parâmetro θ não seja disponível "on-line". Neste caso as matrizes de ganho obtidas para a realimentação de estado (4.67) são

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0.40728 & -26.1718 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\gamma = 2.1824892$. A função de Lyapunov correspondente para o sistema em malha fechada é

$$V(x, \theta) = x' \left(\begin{bmatrix} I_2 \\ \theta I_2 \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} I_2 \\ \theta I_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} x \quad (4.69)$$

onde

$$P = \begin{bmatrix} 0.29213 & 0.05692 & 0 & 0 \\ 0.05692 & 0.03718 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.29213 & 0.05692 \\ 0 & 0 & 0.05692 & 0.03718 \end{bmatrix}.$$

Considere agora o caso em que o parâmetro θ esteja disponível "on-line", ou seja, θ poderá ser utilizado na lei de controle, resultando assim uma realimentação de estado com dependência paramétrica. Neste caso as matrizes de ganho obtidas para a realimentação de estado (4.67) são

$$K_0 = \begin{bmatrix} 1.24401 & -11.8088 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.34404 & 4.78696 \end{bmatrix}$$

e $\gamma = 2.1700194$. A função de Lyapunov correspondente para o sistema em malha fechada é dada por (4.69) com

$$P = \begin{bmatrix} 0.28801 & 0.05622 & 0 & 0 \\ 0.05622 & 0.03682 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.28801 & 0.05622 \\ 0 & 0 & 0.05622 & 0.03682 \end{bmatrix}.$$

Observe que um melhor resultado para a norma \mathcal{H}_∞ foi obtido utilizando a formulação LMI elaborada a partir da abordagem dual.

4.5 Considerações Finais

Este capítulo apresentou formulações LMI destinadas aos casos de síntese e performance para sistemas lineares variantes no tempo do tipo LPV.

Fazendo-se uso da noção de estabilidade bi-quadrática obteve-se formulações LMI que apresentam condições suficientes tanto na abordagem primal como dual.

Os critérios de performance \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são obtidos resolvendo-se um problema de otimização convexa onde busca-se um limitante superior para as normas em \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ respectivamente.

A técnica de síntese, aqui proposta, permite o projeto de controladores com dependência paramétrica (controlador LPV), bem como controladores de ganhos fixos (controlador robusto). A obtenção destes controladores está vinculada ao fato de os parâmetros do sistema serem ou não disponíveis "on-line" através de medida ou estimação.

Resultados numéricos que permitem ilustrar a aplicação dos teoremas desta seção foram apresentados, e destes pode-se observar que os resultados são mais ou menos restritivos dependendo da formulação empregada, primal ou dual.

Como esperado os resultados apresentados para o caso quando os parâmetros θ estão disponíveis "on-line" são menos restritos quando comparados ao caso onde estes parâmetros não são disponíveis "on-line".

A técnica aqui apresentada permite que uma lei de controle afim seja obtida pela solução de LMIs em conjunto com uma condição de igualdade. Contudo esta condição pode acrescentar restrições ao resultado tendo em vista que ela faz com que a matriz P da função de Lyapunov seja bloco diagonal.

A implementação "on-line" de uma lei de controle por realimentação de estado com dependência paramétrica afim aqui proposta é mais fácil que a de controladores cuja dependência paramétrica é não linear, como por exemplo [18], [6], [32].

Comparando as formulações LMIs obtidas no caso das norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ pela abordagem primal e dual, note que a matriz de ganho K_i obtida pela abordagem primal requer que $P > 0$ ($V(x, \theta) = \Theta'_a P \Theta_a$), o que não ocorre na abordagem dual. Note ainda que as LMIs obtidas apresentam condições suficientes, então não se pode afirmar que um melhor resultado pode ser obtido com uma ou outra formulação ficando este relacionado às características próprias do sistema em estudo.

Capítulo 5

Sistemas LPV a Tempo Discreto

Neste capítulo, estudam-se os problemas de estabilidade robusta e estabilização robusta para sistemas LPV discretos.

Para tal são apresentadas condições LMIs que permitem a solução desses problemas visando atender os critérios de custo garantido e performance \mathcal{H}_∞ .

A prova da estabilidade é feita utilizando uma função de Lyapunov com dependência paramétrica, empregando-se a definição de estabilidade bi-quadrática.

Para o problema de estabilização robusta dois tipos de controladores são apresentados: controlador LPV e controlador robusto.

No estudo onde objetiva-se atender os critérios de custo garantido e performance \mathcal{H}_∞ , determina-se um limitante superior para estes critérios através da solução de um problema de otimização convexa.

As formulações aqui obtidas derivam quase que diretamente da abordagem dada para o caso de sistemas a tempo contínuo.

5.1 Representação do sistema LPV discreto

Seja o sistema

$$x(k+1) = A(\theta(k))x(k) \tag{5.1}$$

tal que a matriz de dinâmica $A(\theta(k))$ possui uma dependência afim com o parâmetro $\theta(k)$. Isto é

$$A(\theta(k)) = A_0 + \sum_{i=1}^{n_\theta} A_i \theta_i(k) \quad (5.2)$$

onde $x(k) \in \mathfrak{R}^{n_x}$ é o estado do sistema, $A_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ ($i = 0, 1, \dots, n_\theta$) são matrizes conhecidas e $\theta_i(k)$ ($i = 1, \dots, n_\theta$) são parâmetros reais que possuem magnitude e taxa de variação temporal $\delta(k) \triangleq \theta(k+1) - \theta(k)$ limitadas. Admite-se que os parâmetros e suas respectivas taxas de variação possam assumir qualquer valor dentro de um politopo Π cujos vértices são conhecidos a priori.

$$(\theta(k), \delta(k)) \in \Pi \quad (5.3)$$

Para definir esses limites usaremos a seguinte notação:

$$(\theta(k), \delta(k)) \in \Pi \triangleq \left\{ (\zeta, \eta) : \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix} \in C_o(\xi_1 \dots \xi_{n_v}) \right\} \quad (5.4)$$

onde ζ, η são variáveis auxiliares que definem os valores admissíveis para $(\theta(k), \delta(k))$ respectivamente; $C_o(\xi_1, \dots, \xi_{n_v})$ é um politopo de vértices ξ_i ($i = 1, \dots, n_v$) conhecidos. A estrutura particular de $\theta(k)$ e sua variação temporal $\delta(k)$ é especificada através dos vértices.

Note que para o sistema (5.1) os valores de $\theta(k)$ dependem dos valores de $\theta(k-1)$ e $\delta(k-1)$. Esta dependência exige cuidado na hora de definir os valores admissíveis de $\theta(k)$, $\delta(k)$ em (5.4).

Como exemplo seja a figura 5.1 (a) onde $a, b, c, d \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} -b &\leq \theta(k) \leq a \\ -d &\leq \delta(k) \leq c \quad \forall k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5.5)$$

Note que $\theta(k) = a$ e $\delta(k) = c$ são valores admissíveis de incerteza. Porém como $\theta(k+1) = \delta(k) + \theta(k)$ temos $\theta(k+1) = a + c$ que está fora da região definida em (5.5) indicando incoerência na forma de definir a região admissível. Para contornar essa dificuldade podemos definir a região admissível da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 & -b \leq \theta(k) \leq a \\
 & -d - \frac{d}{b}\theta(k) \leq \delta(k) \leq c - \frac{c}{a}\theta(k) \quad \forall k = 0, 1, \dots
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

como ilustra a figura 5.1 (b).

Para que (5.6) ocorra para todo $k = 0, 1, \dots$, devemos ter $c \leq a$ e $d \leq b$.

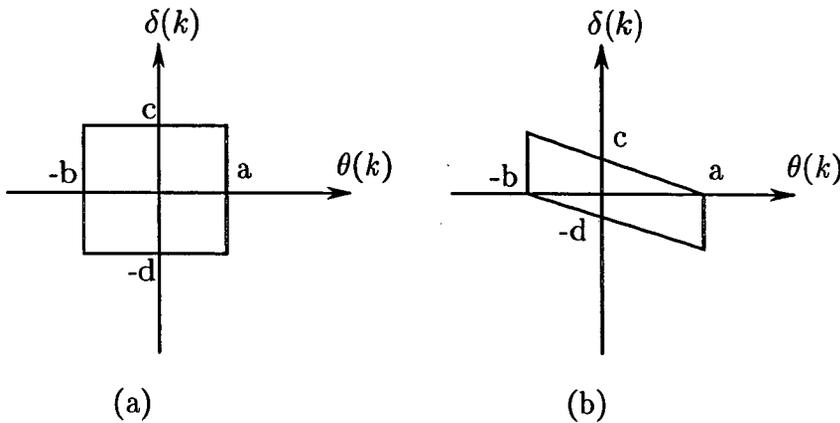


Figura 5.1: Ilustração de duas regiões Π possíveis no caso escalar.

Quando $c = a$ e $d = b$ o parâmetro $\theta(k)$ pode passar de um extremo do intervalo ao outro em um único instante de tempo. Esta situação é tipicamente considerada em problemas de estabilidade quadrática onde não se tem restrição na taxa de variação dos parâmetros. Quando $c < a$ e $d < b$ teremos restrição na taxa de variação. O caso $c = d = 0$ considera que o parâmetro é invariante no tempo.

A partir de agora estaremos supondo que o politopo Π em (5.3) será definido de forma coerente, como acima ilustrado.

5.2 Custo garantido para sistemas discretos

Seja o sistema linear

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= A(\theta(k))x(k) \quad \forall x(0) \in \Pi_0; \quad (\theta(k), \delta(k)) \in \Pi \\
 z(k) &= C(\theta(k))x(k)
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada, $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída, $A(\theta(k)), C(\theta(k))$

são matrizes reais com dimensões apropriadas, Π_0 e Π são politopos obtidos respectivamente a partir das condições iniciais e com o parâmetro e sua taxa de variação.

A norma \mathcal{L}_2 de sinais a horizonte finito é dada por

$$\|z\|_{2,[0, N]}^2 = \sum_0^N z'(k)z(k) \quad (5.8)$$

onde N é qualquer inteiro positivo.

Definição 5.1 *Admita que o sistema (5.7) seja exponencialmente estável, defina custo garantido como sendo uma constante J tal que*

$$\|z\|_{2,[0, N]}^2 \leq J, \quad \forall x(0) \in \Pi_0; \quad (\theta(k), \delta(k)) \in \Pi, \quad \forall N \in I^+. \quad (5.9)$$

△△

O lema a seguir será utilizado na obtenção dos resultados que serão apresentados ao longo deste capítulo onde o problema de custo garantido é tratado.

Lema 5.1 *Seja o sistema (5.7), se existe matriz $P(\theta(k)) > 0$ tal que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas $\forall x(0) \in \Pi_0; \quad (\theta(k), \delta(k)) \in \Pi$*

$$A'(\theta(k))P(\theta(k+1))A'(\theta(k)) - P(\theta(k)) + C'(\theta(k))C(\theta(k)) < 0 \quad (5.10)$$

$$J - x'(0)P(\theta(k))x(0) \geq 0. \quad (5.11)$$

Então o sistema é exponencialmente estável e

$$\|z\|_{2,[0, N]}^2 \leq J, \quad \forall x(0) \in \Pi_0; \quad (\theta(k), \delta(k)) \in \Pi, \quad \forall N \in \Pi^+. \quad (5.12)$$

Prova: Com (5.10) temos que o sistema (5.7) é exponencialmente estável, então as seguintes condições estão satisfeitas para todo $x(k) \neq 0$.

$$V(x(k)) = x'(k)P(\theta(k))x(k) > 0$$

$$\Delta(V(x(k))) = x'(k)(P(\theta(k)) + A'(\theta(k))P(\theta(k+1))A(\theta(k)))x(k) < 0$$

onde Δ é o operador diferença ($\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$).

Impondo $\Delta(V(x(k))) < -x'(k)C'(\theta(k))C(\theta(k))x(k) = -z'(k)z(k)$, temos (5.10) como condição a ser satisfeita. Por outro lado, se (5.10) está satisfeita temos que aplicando o somatório dos dois lados de 0 à N

$$V(x(N)) - V(x(0)) < - \sum_0^N z'(k)z(k)dt$$

logo $\|z(k)\|_{2,[0,N]}^2 < V(x(0)) - V(x(N))$ como $\Delta(V(x(k))) < 0$ temos $V(x(N)) < V(x(0)) \forall N$ e assim

$$\|z(k)\|_{2,[0,N]}^2 < V(x(0)) = x'(0)P(\theta(k))x(0) \leq J$$

o que completa a prova.

5.3 Norma H_∞ para sistemas discretos

Seja o sistema linear

$$\begin{aligned} G: \quad x(k+1) &= A(k)x(k) + B_w(k)w(k) \\ z(k) &= C(k)x(k) + D_w(k)w(k) \end{aligned} \tag{5.13}$$

onde $x(k) \in \mathfrak{R}^n$ é o estado, $w(k) \in \mathfrak{R}^{n_w}$ é a entrada, $z(k) \in \mathfrak{R}^{n_z}$ é a saída, e $A(k)$, $B_w(k)$, $C(k)$ e $D_w(k)$ são funções de matriz real com dimensão apropriada.

O problema \mathcal{H}_∞ para o caso discreto é definido de forma análoga ao caso contínuo dado pela Definição 2.6. A busca por um limitante superior para o problema \mathcal{H}_∞ será obtido fazendo uso do seguinte resultado.

Lema 5.2 *Seja o sistema G definido por (5.13). Então o sistema G é exponencialmente estável e $\|G\|_\infty < \gamma$ se existe matriz $\mathcal{P}(k)$ tal que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas.*

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}(k) > 0 \\ &\begin{bmatrix} -\mathcal{P}(k) + A(k)'\mathcal{P}(k+1)A(k) & A(k)'\mathcal{P}(k+1)B_w(k) \\ B_w(k)'\mathcal{P}(k+1)A(k) & B_w(k)'\mathcal{P}(k+1)B_w(k) - \gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C'(k) \\ D_w'(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(k) & D_w(k) \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Além disso, $V(x(k)) = x(k)'P(k)x(k)$ é uma função de Lyapunov para o sistema não forçado.

△△

Apresenta-se a seguir uma interpretação para o Lema 5.2. Seja a equação (5.14) escrita da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} A'(k)P(k+1)A(k) - P(k) + C'(k)C(k) & A'(k)P(k+1)B_w(k) + C'(k)D_w(k) \\ (A'(k)P(k+1)B_w(k) + C'(k)D_w(k))' & B_w'(k)P(k+1)B_w(k) + D_w'(k)D_w(k) - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.15)$$

Multiplicando (5.15) à direita por $\Phi = [x' \quad w'] \neq 0$ e à esquerda por Φ' , decorre que

$$\begin{aligned} & [A(k)x(k) + B_w(k)w(k)]'P(k+1)[A(k)x(k) + B_w(k)w(k)] \\ & - x(k)'P(k)x(k) + [C(k)x(k) + D_w(k)w(k)]'[C(k)x(k) + D_w(k)w(k)] \\ & \quad - \gamma^2 w(k)'w(k) < 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

ou seja

$$[V(x(k+1)) - V(x(k))] + z(k)'z(k) - \gamma^2 w(k)'w(k) < 0 \quad (5.17)$$

Efetuando-se o somatório de (5.17) de 0 à N , com a condição inicial $x(0) = 0$, obtém-se

$$V(x(N)) + \sum_0^N (z(k)'z(k) - \gamma^2 w(k)'w(k)) < 0 \quad (5.18)$$

Como $V(x(N)) \geq 0, \forall N > 0$, conclui-se que

$$\|G\|_\infty < \gamma.$$

Com estes resultados estamos aptos a apresentar abordagens LMI que permitem tratar os problemas de custo garantido e de norma \mathcal{H}_∞ através de um problema de factibilidade, o que será apresentado nas seções subsequentes.

5.4 Funções de Lyapunov a Parâmetro Dependente

Condições para estabilidade exponencial do sistema (5.1), (5.3) com uma função de Lyapunov $V(x(k)) = x(k)'P(\theta(k))x(k)$ são expressas pelas seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} A(\theta(k))'P(\theta(k+1))A(\theta(k)) - P(\theta(k)) < 0, \quad P(\theta(k)) > 0 \\ \forall(\theta(k), \delta(k)) \in \Pi. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Definição 5.2 *O sistema linear (5.1), (5.3) é quadraticamente estável se (5.19) está satisfeita com $P(\theta(k)) = P_0$ independente do parâmetro $\theta(k)$.*

Definição 5.3 *O sistema linear (5.1), (5.3) é afim-quadraticamente estável se (5.19) está satisfeita com $P(\theta(k))$ afim em $\theta(k)$, isto é*

$$P(\theta(k)) = P_0 + \sum_{i=1}^{n_\theta(k)} \theta(k)_i P_i.$$

Definição 5.4 ([5]) *O sistema linear (5.1), (5.3) é bi-quadraticamente estável se (5.19) está satisfeita com $P(\theta(k))$ quadrática em $\theta(k)$, isto é*

$$P(\theta(k)) = P_0 + P_1\Theta(k) + \Theta(k)'P_1' + \Theta(k)'P_2\Theta(k) = \begin{bmatrix} I \\ \Theta(k) \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} I \\ \Theta(k) \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 \\ P_1' & P_2 \end{bmatrix}; \quad P_1 \in \mathfrak{R}^{n \times nm}$$

com $\Theta(k)$ afim em $\theta(k)$.

△△

Como já mencionado para o caso contínuo, note que a definição de estabilidade quadrática é conservadora quando aplicada a sistemas que apresentam taxa de variação paramétrica limitada, pois as condições que definem a noção de estabilidade quadrática não dependem da taxa de variação do parâmetro $\theta(k)$.

Da Definição 5.4, nota-se que a condição $P(\theta(k)) > 0$, em geral, não implica $P > 0$. As desigualdades em (5.19) devem ser satisfeitas para todo $(\delta(k), \theta(k)) \in \Pi$. Mas como essas

desigualdades não são convexas nos parâmetros incertos, o problema de verificar quando elas estão satisfeitas para todo $(\delta(k), \theta(k)) \in \Pi$ não é trivial, pois já não basta verificar se as mesmas estão satisfeitas nos vértices de Π .

5.5 Estabilidade Robusta

Consideremos que o sistema (5.1) tenha a seguinte representação

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(k) \end{bmatrix} x(k) \quad (5.21)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_{n_\theta} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x n_\theta} \\ \Theta(k) &= \begin{bmatrix} \theta_1(k) I_{n_x} & \cdots & \theta_{n_\theta}(k) I_{n_x} \end{bmatrix}' \in \mathfrak{R}^{n_x n_\theta \times n_x} \\ \Delta\Theta(k) &= \Theta(k+1) - \Theta(k) \in \mathfrak{R}^{n_x n_\theta \times n_x} \\ (\Theta(k), \Delta\Theta(k)) &\in \Pi \end{aligned}$$

Com esta representação apresenta-se a seguir um teorema que possui condições suficientes e permite o estudo do caso de análise.

Teorema 5.1 *Seja Π um politopo dado que define os valores admissíveis de $(\Theta(k), \Delta\Theta(k))$. Considere o sistema (5.1) e a notação:*

$$A_a = \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} \\ (\Delta\Theta(k) + \Theta(k))A_0 & (\Delta\Theta(k) + \Theta(k))\mathcal{A} \end{bmatrix} \quad C_a = \begin{bmatrix} \Theta(k) & -I \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

O sistema (5.1) é bi-quadraticamente estável se existir uma matriz simétrica $P \in \mathfrak{R}^{n_x(n_\theta+1) \times n_x(n_\theta+1)}$ e matrizes $M \in \mathfrak{R}^{n_x(n_\theta+1) \times n_x n_\theta}$, $L \in \mathfrak{R}^{n_x(2n_\theta+2) \times n_x(2n_\theta+2)}$ tais que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas em todo os vértices de Π .

$$\begin{bmatrix} -P & A_a' P \\ P A_a & -P \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} C_a & 0 \\ A_a & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_a & 0 \\ A_a & -I \end{bmatrix}' M' < 0 \quad (5.23)$$

$$P + LC_a + C_a' L' > 0 \quad (5.24)$$

Prova: Ela pode ser encontrada em [5] mas será apresentada a seguir para tornar o trabalho o mais autocontido possível. Admita que as LMIs do teorema estejam satisfeitas nos vértices de Π . Como as desigualdades (5.23) e (5.24) são afins em $(\theta(k), \delta(k))$ elas são satisfeitas para todo $(\theta(k), \delta(k)) \in \Pi$.

Note que o espaço nulo de C_a é dado por:

$$\mathcal{N}_{C_a} = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(k) \end{bmatrix} = \Theta_a. \quad (5.25)$$

Então com (5.24) temos que para todo $(\theta(k), \delta(k)) \in \Pi$

$$x'(k) \Theta_a' P \Theta_a x(k) > 0, \quad \forall x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad x(k) \neq 0$$

isto é $\mathcal{P}(\theta(k)) = \Theta_a' P \Theta_a$ é uma matriz definida positiva para $\forall (\theta(k), \delta(k)) \in \Pi$.

Tomando agora a desigualdade (5.23) e multiplicando à direita por

$$T = \begin{bmatrix} \Theta_a \\ A_a \Theta_a \end{bmatrix} x(k) \quad (5.26)$$

e à esquerda por T' , obtém-se

$$x'(k) (\Theta_a' A_a' P A_a \Theta_a - \Theta_a' P \Theta_a) x(k) < 0. \quad (5.27)$$

Substituindo em (5.27) Θ_a e A_a e lembrando que $\Theta(k+1) = \Delta \Theta(k) + \Theta(k)$ obtém-se

$$x'(k) ((A_0 + \mathcal{A} \Theta(k))' \mathcal{P}(\Theta(k+1)) (A_0 + \mathcal{A} \Theta(k)) - \mathcal{P}(\Theta(k))) x(k) < 0 \quad (5.28)$$

Logo $V(x(k), \theta(k))$ é uma função de Lyapunov para o sistema (5.1) e satisfaz a definição de estabilidade bi-quadrática, o que completa a prova.

△△

5.6 Performance Robusta com Custo Garantido

Seja o sistema linear

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(k) \end{bmatrix} x(k) \\ z(k) &= C_z(\theta(k))x(k) \end{aligned} \quad (5.29)$$

onde $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ são respectivamente os vetores de estado e de performance; $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x n_\theta}$ é uma matriz conhecida e $\Theta(k) \in \mathbb{R}^{n_x n_\theta \times n_x}$ é uma matriz de incertezas que depende linearmente dos parâmetros $\theta_i(k)$.

O teorema a seguir apresenta formulações LMIs que forneçam condições suficientes permitindo tratar o problema de custo garantido, via otimização.

Teorema 5.2 *Seja o sistema (5.29) e a seguinte notação*

$$\begin{aligned} A_a &= \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} \\ (\Delta\Theta(k) + \Theta(k))A_0 & (\Delta\Theta(k) + \Theta(k))\mathcal{A} \end{bmatrix}; \quad \Theta_a = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(k) \end{bmatrix} \\ C_b &= \begin{bmatrix} 0 & -I_{n_x(n_\theta+1)} & 0 & \Theta_a \\ x(0) & 0 & -I_{n_w} & 0 \end{bmatrix} \\ C_{2a} &= \begin{bmatrix} C_0 & \cdots & C_{n_\theta} \end{bmatrix}; \quad C_a = \begin{bmatrix} \Theta(k) & -I \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Sejam Π e Π_0 politopos construídos respectivamente a partir dos valores admissíveis de $(\theta(k), \delta(k))$ e $x(0)$. Admita que existe uma matriz simétrica P , matrizes L , M e o escalar J que solucionam o seguinte problema de otimização, onde as LMIs estão satisfeitas nos vértices de Π e Π_0 .

minimize $\{J\}$:

$$\begin{bmatrix} -P + C'_{2a}C_{2a} & A'_aP \\ PA_a & -P \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} C_a & 0 \\ A_a & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_a & 0 \\ A_a & -I \end{bmatrix}' M' < 0 \quad (5.31)$$

$$\begin{bmatrix} J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & P\Theta_a & 0 \\ 0 & \Theta'_aP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_{n_x} \end{bmatrix} + LC_b + C'_bL' > 0 \quad (5.32)$$

Então o sistema (5.29) é bi-quadraticamente estável com a função de Lyapunov $V(x(k), \theta(k)) = x'(k)P(\theta(k))x(k)$ e custo garantido dado por

$$\|z\|_{2,[0, N]}^2 \leq J, \quad \forall x(0) \in \Pi_0; \quad (\theta(k), \delta(k)) \in \Pi \quad (5.33)$$

Prova: Admita que as LMIs do teorema estejam satisfeitas nos vértices de Π e Π_0 . Como as desigualdades (5.31)-(5.32) são afins em $(\theta(k), \delta(k))$ e em $x(0)$, elas são satisfeitas para todo $(\theta(k), \delta(k)) \in \Pi$ e todo $x(0) \in \Pi_0$. Defina

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Theta_a \\ x(0) & 0 \\ 0 & I_{n_x} \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Tomando (5.32), note que Ψ é uma base para \mathcal{N}_{C_b} , com isto nós obtemos

$$\Psi' \begin{bmatrix} J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & P\Theta_a & 0 \\ 0 & \Theta'_aP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_{n_x} \end{bmatrix} \Psi = \begin{bmatrix} J & x'(0)P(\theta(k)) \\ P(\theta(k))x(0) & P(\theta(k)) \end{bmatrix} > 0. \quad (5.35)$$

Aplicando agora o complemento de Schur podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$P(\theta(k)) = \Theta'_aP\Theta_a > 0, \quad J - x'(0)P(\theta(k))x(0) > 0. \quad (5.36)$$

Assim $P(\theta(k))$ é uma matriz definida positiva para $\forall(\theta(k), \delta(k)) \in \Pi$.

Observe que Θ_a é uma base para \mathcal{N}_{C_a} . Tomando agora a desigualdade (5.31) e multiplicando à direita por

$$T = \begin{bmatrix} \Theta_a \\ A_a \Theta_a \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

e à esquerda por T' , obtém-se

$$(\Theta_a' A_a' P A_a \Theta_a - \Theta_a' P \Theta_a + \Theta_a' C_{2a}' C_{2a} \Theta_a) < 0. \quad (5.38)$$

Substituindo em (5.38) Θ_a e A_a e lembrando que $\Theta(k+1) = \Delta\Theta(k) + \Theta(k)$ obtém-se

$$(A_0 + \mathcal{A}\Theta(k))' \mathcal{P}(\Theta(k+1))(A_0 + \mathcal{A}\Theta(k)) - \mathcal{P}(\Theta(k)) + C_z(\theta(k))' C_z(\theta(k)) < 0. \quad (5.39)$$

Logo $V(x(k), \theta(k))$ é uma função de Lyapunov para o sistema, e portanto, este sistema é bi-quadraticamente estável.

Agora com o Lema 5.1, (5.39) e (5.36) obtemos

$$\|z\|_{2,[0, N]}^2 \leq J, \quad \forall x(0) \in \Pi_0; \quad (\theta(k), \delta(k)) \in \Pi \quad (5.40)$$

o que completa a prova.

△△

Note que o Teorema 5.2 determina, através de um problema de otimização, o valor mínimo do custo que é dado pela relação:

$$\|z\|_{2,[0, N]} < \sqrt{J}.$$

5.7 Performance Robusta \mathcal{H}_∞

Seja o sistema linear descrito pela seguinte equação de estados

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\theta(k))x(k) + B_w(\theta(k))w(k) \\ z(k) &= C_z(\theta(k))x(k) + D_w(\theta(k))w(k) \end{aligned} \quad (5.41)$$

com

$$A(\theta(k)) = A_0 + \mathcal{A}\Theta, \quad B_w(\theta(k)) = \mathcal{B}_w\Theta_w, \quad C_z(\theta(k)) = \mathcal{C}\Theta_a, \quad D_w(\theta(k)) = \mathcal{D}_w\Theta_w$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1(k)I_{n_x} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta}(k)I_{n_x} \end{bmatrix}, \quad \Theta_a = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix}, \quad \Theta_w = \begin{bmatrix} I_{n_w} \\ \theta_1(k)I_{n_w} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta}(k)I_{n_w} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

onde $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ são respectivamente os vetores de estado, entrada de perturbação e a saída de performance; A_0 , \mathcal{A} , \mathcal{B}_w , \mathcal{C} , \mathcal{D}_w são matrizes dadas de dimensões compatíveis, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}) \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ são parâmetros reais, que podem variar no tempo. Se supõe que estes parâmetros e suas taxas de variação possam assumir qualquer valor dentro de um politopo Π cujos vértices são conhecidos *a priori*.

O teorema enunciado a seguir apresenta formulações LMI que possuem condições suficientes para a solução do problema de performance \mathcal{H}_∞ . Ele permite que um limitante superior para a $\|G\|_\infty$ seja obtido resolvendo-se um problema de otimização convexa.

Teorema 5.3 *Seja o sistema (5.41) e Π um politopo dado que representa os valores admissíveis de $(\theta(k), \delta(k))$. Seja a notação*

$$C_a = [\Theta \quad -I], \quad \mathcal{J} = \begin{bmatrix} I \\ \Delta\Theta(k) + \Theta(k) \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} -A(\theta(k)) & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Theta_a & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_z(\theta(k)) & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{J} & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & -B_w(\theta(k)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -D_w(\theta(k)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{J} & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_z(\theta(k))' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{J}'P \\ 0 & 0 & -P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_z(\theta(k)) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I_{n_w} & 0 \\ 0 & PJ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P \end{bmatrix}.$$

Dado um escalar $\gamma > 0$, o sistema (5.41) é bi-quadraticamente estável e $\|G_{wz}\|_\infty < \gamma$, se existem matrizes $P = P'$, M e L tais que as LMIs

$$\Psi + M\Phi + \Phi'M' < 0 \quad (5.43)$$

$$P + LC_a + C_a'L' > 0 \quad (5.44)$$

são factíveis em todos os vértices de Π . Além disso, $V(x(k), \theta(k)) = x'(k)\Theta_a'P\Theta_ax(k)$ é uma função de Lyapunov para o sistema (5.41) não forçado, ($w \equiv 0$).

Prova: Admita que as LMIs (5.43) e (5.44) sejam satisfeitas em todos os vértices de Π . Como estas desigualdades são afins em $(\theta(k), \delta(k))$, elas são satisfeitas para todo $(\theta(k), \delta(k)) \in \Pi$.

Visto que Θ_a é uma base para \mathcal{N}_{C_a} , então de (5.44) obtém-se

$$\mathcal{P}(\theta(k)) = \Theta'_a P \Theta_a > 0.$$

Agora defina

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A(\theta(k)) & 0 \\ \Theta_a & 0 \\ C_z(\theta(k)) & 0 \\ \mathcal{J}A(\theta(k)) & 0 \\ 0 & B_w(\theta(k)) \\ 0 & D_w(\theta(k)) \\ 0 & I \\ 0 & \mathcal{J}B_w(\theta(k)) \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

e note que $\tilde{\Phi}$ é uma base para \mathcal{N}_Φ . Além disso, tomando (5.43) e fazendo $\tilde{\Phi}'\Psi\tilde{\Phi}$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a'_{12} & a_{22} \end{bmatrix} < 0. \quad (5.46)$$

onde

$$\begin{aligned} a_{11} &= A'(\theta(k))P(\theta(k+1))A(\theta(k)) - P(\theta(k)) + C'_z(\theta(k))C_z(\theta(k)) \\ a_{12} &= A'(\theta(k))P(\theta(k+1))B_w(\theta(k)) + C'_z(\theta(k))D_w(\theta(k)) \\ a_{22} &= B'_w(\theta(k))P(\theta(k+1))B_w(\theta(k)) + D_w(\theta(k))'D_w(\theta(k)) - \gamma^2 I \end{aligned}$$

Agora com o Lema 5.2 e (5.46) nós obtemos

$$\|G_{wz}\|_\infty < \gamma.$$

Como $V(x(k), \theta(k)) = x'(k)\mathcal{P}(\theta(k))x(k)$ é função de Lyapunov para o sistema (5.41) não forçado ($w \equiv 0$) este sistema é bi-quadraticamente estável o que completa a prova.

△△

O Teorema 5.3 permite encontrar o valor mínimo do limitante superior para $\|G_{wz}\|_\infty$. Este limitante é obtido numericamente resolvendo-se o seguinte problema de otimização convexa com restrições do tipo LMI

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \{\gamma^2\} \\ & \text{sujeito à (5.43) – (5.44).} \end{aligned} \tag{5.47}$$

5.8 Exemplos Numéricos

Nesta seção são apresentados resultados de simulações utilizando os teoremas obtidos para as seguintes condições: análise de estabilidade, performance robusta com custo garantido e \mathcal{H}_∞ . Para tanto estaremos considerando o politopo apresentado na Figura 5.2 onde $(\delta(k), \theta(k)) \in \Pi(c, d)$.

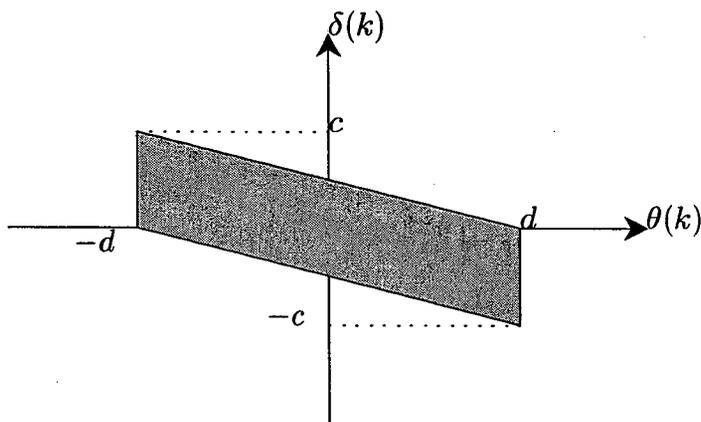


Figura 5.2: Politopo Π indicado pela região em destaque $(\delta(k), \theta(k)) \in \Pi(c, d)$.

Observe que $c = 2d$ representa a condição usual de variação paramétrica na estabilidade quadrática. Pois por geometria observa-se que $\forall \theta(k) \in [-d, d]$ temos que $\theta(k + 1)$ pode assumir qualquer valor no mesmo intervalo, ou seja, não existe restrição na taxa de variação paramétrica. Mesmo sem restrição na taxa de variação paramétrica é possível, nestas situações, utilizar funções de Lyapunov a parâmetro dependente. Note que esta condição é particular do caso discreto e não ocorre para o caso contínuo.

Observe ainda que as condições de estabilidade afim-quadrática e quadrática podem ser

obtidas como casos particulares da bi-quadrática como apresentado em (5.20) fazendo-se respectivamente $P_2 = 0$ e $P_1 = 0, P_2 = 0$ [5].

5.8.1 Estabilidade Robusta

Exemplo 5.1 *O sistema apresentado a seguir*

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9979 & -0.01 \\ 0.01 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \theta(k) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.0008 & 0 \end{bmatrix} x(k) \quad (5.48)$$

é assintoticamente estável para todo $\theta(k)$ constante pertencente ao intervalo $|\theta(k)| \leq 12.4$, porém ele não é quadraticamente estável para $|\theta(k)| > 2.488$.

Empregando as definições de estabilidade bi-quadrática e afim-quadrática objetiva-se encontrar o maior intervalo para d com valores fixos de c tal que $(\delta(k), \theta(k)) \in \Pi(c, d)$.

A Tabela 5.1 apresenta resultados de simulações para $(\delta(k), \theta(k)) \in \Pi(c, d)$.

Estabilidade	Politopo	
Bi-quadrática	$c=0.5$	$d=2.772$
Afim-quadrática	$c=0.5$	$d=2.763$
Bi-quadrática	$c=0.1$	$d=7.441$
Afim-quadrática	$c=0.1$	$d=4.794$
Bi-quadrática	$c=0$	$d=12.4$
Afim-quadrática	$c=0$	$d=12.4$

Tabela 5.1: Resultados de simulações para $(\delta(k), \theta(k)) \in \Pi(c, d)$.

Note que os resultados obtidos com a noção de estabilidade bi-quadrática são menos conservativos que os obtidos com a noção de estabilidade afim-quadrática.

5.8.2 Performance Robusta com Custo Garantido

Exemplo 5.2 *Considere o sistema*

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\theta(k))x(k) \\ z(k) &= C_z(\theta(k))x(k) \end{aligned} \quad (5.49)$$

onde $x(0) = [x(0)_1 \quad x(0)_2]'$ para $x(0)_{1,2} \in [0.5, 1.5]$ e

$$A(\theta(k)) = \begin{bmatrix} 0.523 & -0.307 + \theta(k) \\ 0.307 - \theta(k) & 0.523 \end{bmatrix},$$

$$C_z(\theta(k)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 + \theta(k) \end{bmatrix}.$$

Este sistema possui um parâmetro incerto e é estável para $|\theta(k)|$ fixo no intervalo $[-0.545, 0.545]$. Os resultados apresentados a seguir foram obtidos considerando a Figura 5.2 onde $(\delta(k), \theta(k)) \in \Pi(c, d)$ com $d = 0.5$.

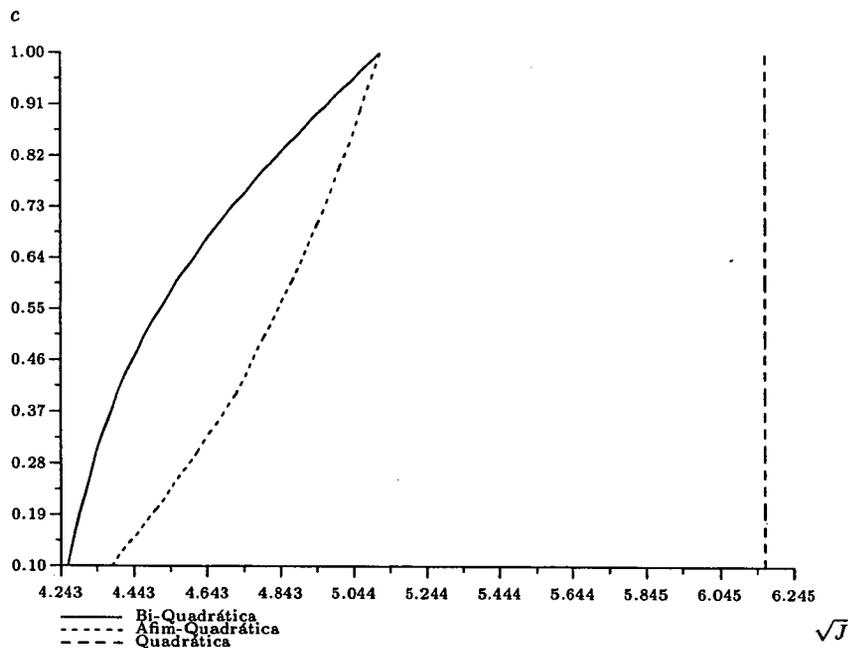


Figura 5.3: Custo \mathcal{H}_2 para $(\theta, \delta) \in \Pi(c, d)$ com $d = 0.5$.

A Figura 5.3, foi obtida a partir do Teorema 5.2. Nela é apresentado o valor minimizado do custo para o sistema (5.49) em função de c para $d = 0.5$. Note que com a definição de estabilidade bi-quadrática os resultados obtidos são menos conservativos. Note ainda que para as mesmas condições de variação paramétrica da estabilidade quadrática ($c=1$) um melhor valor para o custo foi obtido com uma função de Lyapunov com dependência paramétrica, $P(\theta)$ dado por (5.20).

5.8.3 Performance Robusta \mathcal{H}_∞

Exemplo 5.3 Considere o sistema

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\theta(k))x(k) + B_w(\theta(k))w(k) \\ z(k) &= C(\theta(k))x(k) + D_w(\theta(k))w(k) \end{aligned} \tag{5.50}$$

onde

$$A(\theta(k)) = \begin{bmatrix} 0.523 & -0.307 + \theta(k) \\ 0.307 - \theta(k) & 0.523 \end{bmatrix}, \quad B_w(\theta(k)) = \begin{bmatrix} 1 + \theta(k) \\ 1 + \theta(k) \end{bmatrix}$$

$$C_z(\theta(k)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 + \theta(k) \end{bmatrix}, \quad D_w(\theta(k)) = 0.$$

Os resultados apresentados a seguir foram obtidos considerando a Figura 5.2 onde $(\delta(k), \theta(k)) \in \Pi(c, d)$ com $d = 0.5$.

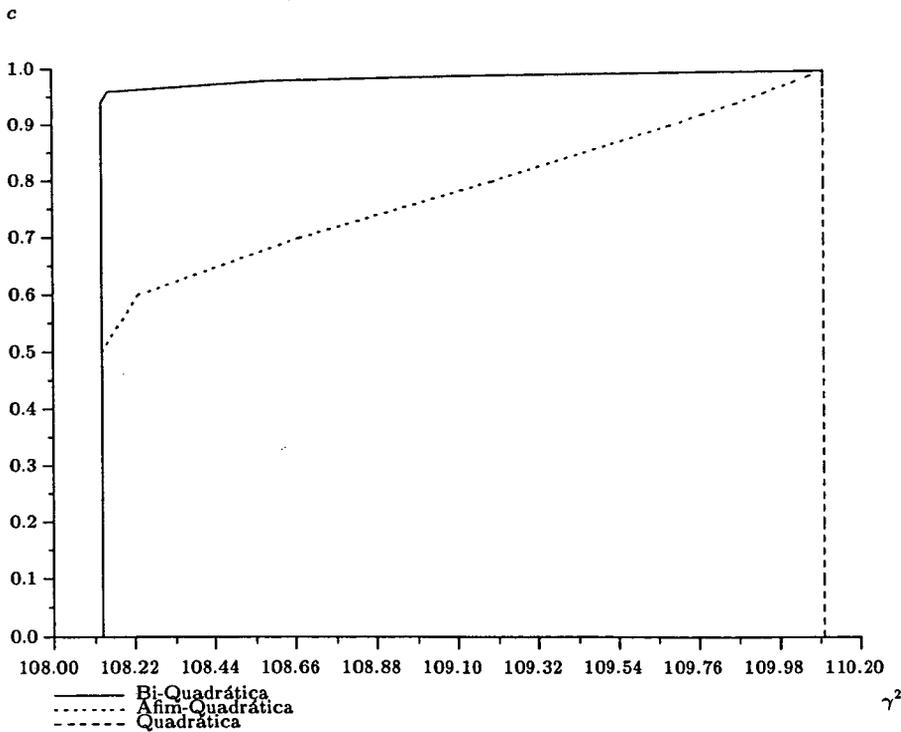


Figura 5.4: Custo \mathcal{H}_∞ para $(\theta, \delta) \in \Pi(c, d)$ com $d = 0.5$.

A Figura 5.4, foi obtida a partir do Teorema 5.3. Nela é apresentado o valor minimizado do custo para o sistema (5.50) em função de c . Note que resultados menos conservativos foram obtidos com a definição de estabilidade bi-quadrática.

5.9 Controle Robusto

Seja um sistema linear descrito por

$$x(k+1) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^m \theta_i(k(\theta)) A_i \right) x(k) + B_u u(k). \quad (5.51)$$

O sistema (5.51) admite ainda a seguinte representação

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \Theta(k) \end{bmatrix} x(k) + B_u u(k) \quad (5.52)$$

com

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_{n_\theta} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_\theta}$$

$$\Theta(k) = \begin{bmatrix} \theta_1(k)I & \dots & \theta_{n_\theta}(k)I \end{bmatrix}' \in \mathfrak{R}^{n_x n_\theta \times n_x}$$

onde A_0, \mathcal{A} são matrizes constantes dadas de dimensões compatíveis, $x \in \mathfrak{R}^{n_x}$, $u \in \mathfrak{R}^{n_u}$ são respectivamente os vetores de estados e entrada de controle; $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta})$ é um vetor de parâmetros reais variante no tempo limitado em magnitude.

O sistema (5.51) é considerado como um sistema linear com dependência paramétrica do tipo LPV, onde $\theta_i(k)$, $i = 1, \dots, n_\theta$, estão disponíveis "on-line", contudo, suas trajetórias não estão disponíveis *a priori*. Admite-se que os valores de $\theta_i(k)$ e $\delta(k)$ pertençam a um polítopo Π . Neste caso, objetiva-se projetar um controle por realimentação de estado com dependência paramétrica afim que estabilize o sistema realimentado.

Busca-se uma lei de controle do tipo

$$u(k) = K(\theta(k))x(k), \quad K(\theta(k)) = K_0 + \sum_{i=1}^{n_\theta} K_i \theta_i(k) \quad (5.53)$$

onde $K_i \in \mathfrak{R}^{n_u \times n}$, $i = 1, \dots, n_\theta$, são matrizes constantes a serem determinadas que assegurem a condição de estabilidade bi-quadrática para o sistema realimentado para todo $(\theta(k), \delta(k)) \in \Pi$.

O teorema a seguir apresenta uma solução para o problema acima.

Teorema 5.4 *Seja o sistema (5.51) e Π um politopo dado que representa os valores admissíveis de $(\theta(k), \delta(k))$. Seja a notação*

$$A_a = \begin{bmatrix} A_0 & A \\ (\Delta\Theta(k) + \Theta(k))A_0 & (\Delta\Theta(k) + \Theta(k))A \end{bmatrix}; \quad B_a = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ (\Delta\Theta(k) + \Theta(k)) \end{bmatrix} B_u$$

$$C_a = \begin{bmatrix} \Theta(k) & -I \end{bmatrix}; \quad \Theta_a = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(k) \end{bmatrix}.$$

Então existe uma realimentação de estado do tipo (5.53) tal que o sistema em malha fechada é bi-quadraticamente estável, se existem matrizes $W = W' > 0$, F_a , L e N , que satisfazem as seguintes condições nos vértices de Π

$$\begin{bmatrix} -W + LC_a + C'_a L' & (A_a W + B_a F_a)' \\ A_a W + B_a F_a & -W \end{bmatrix} < 0 \quad (5.54)$$

$$NC_a = C_a W. \quad (5.55)$$

Neste caso, as matrizes de ganho da lei de controle (5.53) são dadas por

$$[K_0 \quad K_1 \cdots K_m] = F_a W^{-1} \quad (5.56)$$

e $V(x, \theta) = x' \Theta'_a W^{-1} \Theta_a x$ é uma função de Lyapunov para o sistema em malha fechada.

Prova: Como as condições (5.54) e (5.55) são afins em $(\theta(k), \delta(k))$ e são satisfeitas em todos os vértices de Π , por convexidade elas são satisfeitas para todo $(\theta(k), \delta(k)) \in \Pi$.

Definindo $P = W^{-1}$, obtém-se

$$P(\theta(k)) = \Theta'_a P \Theta_a > 0.$$

Tomando (5.54) e aplicando Schur, resulta

$$(A_a W + B_a F_a)' P (A_a W + B_a F_a) - W + L C_a + C_a' L' < 0. \quad (5.57)$$

Devido ao fato de N ser não singular da restrição (5.55) temos $C_a P = N^{-1} C_a$. Além disso, considerando (5.53) e (5.56) pode-se estabelecer que $F_a P \Theta_a = K(\theta)$. Visto que Θ_a é uma base para \mathcal{N}_{C_a} . Então multiplicando (5.57) à direita por $P \Theta_a$ e à esquerda por $(P \Theta_a)'$, obtém-se

$$(A(\theta(k)) + B_u K(\theta(k)))' \mathcal{P}(\theta(k+1)) (A(\theta(k)) + B_u K(\theta(k))) - \mathcal{P}(\theta(k)) < 0. \quad (5.58)$$

Logo $V(x(k), \theta(k))$ é uma função de Lyapunov para o sistema em malha fechada, e portanto, este sistema é bi-quadraticamente estável.

△△

O sistema realimentado com os ganhos (5.56) passa a ter a seguinte formulação

$$x(k+1) = [(A_0 + B_u K_0) + (A_1 + B_u K_1)\theta_1(k) + \dots + (A_{n_\theta} + B_u K_{n_\theta})\theta_{n_\theta}(k)]x(k).$$

Quando os parâmetros $\theta(k)$ não estão disponíveis "on-line", eles não poderão aparecer na lei de controle (5.53). Neste caso as matrizes K_i são assumidas nulas. Note no Teorema 5.4, que a lei de controle admitirá as matrizes K_i nulas, se as partições correspondentes da matriz F_a em (5.56) forem zeradas e a matriz W admitir uma estrutura bloco diagonal. Observe ainda, que a remoção dos parâmetros da lei de controle, não implica em removê-los da função de Lyapunov com dependência paramétrica, mantendo-se assim as condições de robustez desejada.

Uma característica interessante da lei de controle apresentada em (5.53) é que ela possui uma dependência paramétrica afim, o que facilita a implementação "on-line", quando comparada às técnicas de controle apresentadas em [18],[6], nas quais a dependência paramétrica é não linear.

5.10 Controle Robusto com Custo Garantido

Considere o sistema

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\theta(k))x(k) + B_u u(k) \quad \forall x(0) \in \Pi_0; \quad (\theta(k), \delta(k)) \in \Pi \\ z(k) &= C_z(\theta(k))x + D_u(\theta(k))u(k) \end{aligned} \quad (5.59)$$

com

$$A(\theta(k)) = A_0 + \mathcal{A}\Theta(k) \quad , \quad C_z(\theta(k)) = \mathcal{C}\Theta_a \quad , \quad D_u(\theta(k)) = \mathcal{D}_u\Theta_u$$

$$\Theta(k) = \begin{bmatrix} \theta_1(k)I_{n_x} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta}(k)I_{n_x} \end{bmatrix} \quad , \quad \Theta_a = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(k) \end{bmatrix} \quad , \quad \Theta_u = \begin{bmatrix} I_{n_u} \\ \theta_1(k)I_{n_u} \\ \vdots \\ \theta_{n_\theta}(k)I_{n_u} \end{bmatrix}$$

onde A_0 , \mathcal{A} , \mathcal{C} , \mathcal{D}_u são matrizes constantes dadas de dimensões compatíveis, $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ são respectivamente os estados, a entrada de controle e a saída de performance; $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta})$ é um vetor de parâmetros reais variantes no tempo limitado em magnitude.

O sistema (5.59) é considerado como um sistema linear com dependência paramétrica do tipo LPV, onde $\theta_i(t)$, $i = 1, \dots, n_\theta$, estão disponíveis "on-line". Se supõe que os valores de $\theta_i(k)$ e $\delta_i(k)$, pertencem a um politopo Π e as condições iniciais $x(0)$ pertencem ao politopo Π_0 . Neste caso, objetiva-se projetar um controle por realimentação de estado com dependência paramétrica afim, dado por (5.53), que minimize um índice de custo para o sistema realimentado.

Teorema 5.5 *Seja o sistema (5.59) e a seguinte notação*

$$A_a = \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} \\ (\Delta\Theta(k) + \Theta(k))A_0 & (\Delta\Theta(k) + \Theta(k))\mathcal{A} \end{bmatrix}; \quad B_a = \begin{bmatrix} I \\ \Delta\Theta(k) + \Theta(k) \end{bmatrix} B_u \quad (5.60)$$

$$C_a = \begin{bmatrix} \Theta(k) & -I \end{bmatrix}; \quad C_b = \begin{bmatrix} 0 & \Theta'_a & -I_{n_x} \end{bmatrix}.$$

Sejam Π e Π_0 politopos construídos respectivamente a partir dos valores admissíveis de

$(\theta(k), \delta(k))$ e $x(0)$. Admita que existem matrizes $W = W'$, matrizes F_a, L, M, N e um escalar J que solucionam o seguinte problema de otimização, onde as LMIs estão satisfeitas nos vértices de Π e Π_0 .

minimize $\{J\}$:

$$\begin{bmatrix} -W + LC_a + C'_a L' & WA'_a + F'_a B'_a & W[C_z(\theta(k)) \ 0]' + F'_a D'_u(\theta(k)) \\ A_a W + B_a F_a & -W & 0 \\ [C_z(\theta(k)) \ 0] W + D_u(\theta(k)) F_a & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.61)$$

$$\begin{bmatrix} J & 0 & x'(0) \\ 0 & W & 0 \\ x(0) & 0 & 0 \end{bmatrix} + MC_b + C'_b M' \geq 0 \quad (5.62)$$

$$NC_a = C_a W. \quad (5.63)$$

Então o sistema (5.59), em malha fechada com a lei de controle (5.53), onde os ganhos K_i são dados por

$$[K_0 \ K_1 \ \dots \ K_{n_\theta}] = F_a W^{-1}. \quad (5.64)$$

é bi-quadraticamente estável com a função de Lyapunov $V(x(k), \theta(k)) = x'(k)P(\theta(k))x(k)$ para $P(\theta(k)) = \Theta'_a W^{-1} \Theta_a$ e custo garantido dado por

$$\|z\|_{2,[0, N]}^2 \leq J, \quad \forall x(0) \in \Pi_0; \quad (\theta(k), \delta(k)) \in \Pi. \quad (5.65)$$

Prova: Admita que as condições em (5.61)-(5.63) sejam satisfeitas em todos os vértices de Π e Π_0 . Como estas condições são afins em $(\theta(k), \delta(k))$ e em $x(0)$, elas são satisfeitas em todo $(\theta(k), \delta(k)) \in \Pi$ e todo $x(0) \in \Pi_0$.

Note de (5.61) que $W > 0$ defina $P = W^{-1}$ e

$$\Phi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I_{n_x(n_\theta+1)} \\ 0 & \Theta'_a \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

observe que Φ é uma base para \mathcal{N}_{C_b} . Com (5.62) obtém-se

$$\Phi' \begin{bmatrix} J & 0 & x'(0) \\ 0 & W & 0 \\ x(0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi = \begin{bmatrix} N(\theta(k)) & x'(0)\Theta'_a \\ \Theta_a x(0) & W \end{bmatrix} \geq 0. \quad (5.67)$$

Aplicando o complemento de Schur em(5.67) obtém-se

$$J - x'(0)\mathcal{P}(\theta)x(0) \geq 0. \quad (5.68)$$

Assim $\mathcal{P}(\theta(k)) = \Theta'_a P \Theta_a$ é uma matriz definida positiva para $\forall (\theta(k), \delta(k)) \in \Pi$.

Defina $C_f = [C_z(\theta(k)) \quad 0]W + D_u(\theta(k))F_a$. Aplicando o complemento de Schur em (5.61) nós temos

$$(A_a W + B_a F_a)' P (A_a W + B_a F_a) - W + C'_f C_f + L C_a + C'_a L' < 0. \quad (5.69)$$

Devido ao fato de N ser não singular da restrição de igualdade em (5.63) temos $C_a P = N^{-1} C_a$. Além disso, considerando (5.53) e (5.56) pode-se estabelecer que $F_a P \Theta_a = K(\theta)$. Observe que Θ_a é uma base para \mathcal{N}_{C_a} . Então multiplicando (5.57) à direita por $P \Theta_a$ e à esquerda por $(P \Theta_a)'$, obtém-se

$$\Theta'_a (A_a + B_a F_a P)' P (A_a + B_a F_a P) \Theta_a - \Theta'_a P \Theta + \Theta'_a P C'_f C_f P \Theta_a < 0 \quad (5.70)$$

que ainda pode ser reescrita como

$$A'_c \mathcal{P}(\theta(k+1)) A_c - \mathcal{P}(\theta(k)) + C_c C'_c < 0 \quad (5.71)$$

onde $A_c = (A(\theta(k)) + B_u K(\theta(k)))$ e $C_c = (C_z(\theta(k)) + D_u(\theta(k))K(\theta(k)))$.

A prova segue como apresentado no caso de análise Teorema 5.2.

△△

5.11 Controle Robusto \mathcal{H}_∞

Seja o sistema linear descrito pela seguinte equação de estados

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \Theta(k) \end{bmatrix} x(k) + B_w w(k) + B_u u(k) \\ z(k) &= C_z(\theta(k))x(k) + D_w(\theta(k))w(k) + D_u(\theta(k))u(k) \end{aligned} \quad (5.72)$$

onde $x \in \mathfrak{R}^{n_x}$, $u \in \mathfrak{R}^{n_u}$, $w \in \mathfrak{R}^{n_w}$, $z \in \mathfrak{R}^{n_z}$ são respectivamente os vetores de estado, entrada de controle, entrada de perturbação e a saída de performance; $\mathcal{A} \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x n_\theta}$ é uma matriz conhecida e $\Theta(k) \in \mathfrak{R}^{n_x n_\theta \times n_x}$ é uma matriz de incertezas que depende linearmente dos parâmetros $\theta_i(k)$.

A lei de controle que procuramos é dada por (5.53), para tanto seja o seguinte teorema.

Teorema 5.6 *Seja o sistema (5.72) e Π um polítopo dado que representa os valores admissíveis de $(\theta(k), \delta(k))$. Seja a notação*

$$\begin{aligned} A_a &= \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} \\ (\Delta\Theta(k) + \Theta(k))A_0 & (\Delta\Theta(k) + \Theta(k))\mathcal{A} \end{bmatrix}; \quad B_a = \begin{bmatrix} I \\ (\Delta\Theta(k) + \Theta(k)) \end{bmatrix} B_u \\ B_{2a} &= \begin{bmatrix} I \\ (\Delta\Theta(k) + \Theta(k)) \end{bmatrix} B_w; \quad C_{2a} = \begin{bmatrix} C_z(\theta(k)) & 0 \end{bmatrix}; \quad C_a = \begin{bmatrix} \Theta(k) & -I \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Então, existe um escalar $\gamma > 0$ e uma realimentação de estados do tipo (5.53) tal que o sistema em malha fechada é bi-quadraticamente estável e $\|G_{wz}\|_\infty < \gamma$, se existem matrizes $W = W'$, F_a , L e N , tais que as seguintes condições são satisfeitas em todos os vértices de Π .

$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} -W + LC_a + C_a' L' & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} A_a W + B_a F_a & B_{2a} \\ C_{2a} W + D_u(\theta(k)) F_a & D_w(\theta(k)) \end{array} \right] \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} A_a W + B_a F_a & B_{2a} \\ C_{2a} W + D_u(\theta(k)) F_a & D_w(\theta(k)) \end{array} \right]' < 0$$

$$\left[\begin{array}{cc} -W & 0 \\ 0 & -I \end{array} \right] \tag{5.74}$$

$$NC_a = C_a W \tag{5.75}$$

Neste caso, as matrizes de ganho da lei de controle (5.53) são dadas por

$$[K_0 \quad K_1 \cdots K_m] = F_a W^{-1} \tag{5.76}$$

e $V(x(k), \theta(k)) = x'(k) \Theta_a' W^{-1} \Theta_a x(k)$ é uma função de Lyapunov para o sistema em malha fechada.

Prova: Como as condições (5.74) e (5.75) são afins em $(\theta(k), \delta(k))$ e são satisfeitas em todos os vértices de Π , por convexidade elas são satisfeitas para todo $(\theta(k), \delta(k)) \in \Pi$.

Com $W > 0$ defina $P = W^{-1}$, assim obtém-se

$$P(\theta(k)) = \Theta_a' P \Theta_a > 0.$$

Agora aplicando Schur em (5.74), resulta

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a'_{12} & a_{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{5.77}$$

onde

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= WA'_a PA_a W + WA'_a PB_a F_a + [WA'_a PB_a F_a]' + F'_a B'_a PB_a F_a \\
 &\quad + WC'_{2a} C_{2a} W + WC'_{2a} D_u(\theta(k)) F_a + [WC'_{2a} D_u(\theta(k)) F_a]' \\
 &\quad + F'_a D'_u(\theta(k)) D_u(\theta(k)) F_a - W + LC_a + C'_a L' \\
 a_{12} &= [WA'_a P + F'_a B'_a P] B_{2a} + [WC'_{2a} + F'_a D'_u(\theta(k))] D_w(\theta(k)) \\
 a_{22} &= B'_w(\theta) P(\theta(k+1)) B_w(\theta(k)) + D_w(\theta(k))' D_w(\theta(k)) - \gamma^2 I.
 \end{aligned}$$

Devido ao fato de N ser não singular da restrição de igualdade em (5.75) temos $C_a P = N^{-1} C_a$. Além disso, considerando (5.53) e (5.56) pode-se estabelecer que $F_a P \Theta_a = K(\theta)$. Observe que Θ_a é uma base para \mathcal{N}_{C_a} . Então tomando (5.77) e multiplicando à direita por

$$T = \begin{bmatrix} P \Theta_a & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

e à esquerda por T' , e definindo

$$\begin{aligned}
 A_c &= [A(\theta(k)) + B_u K(\theta(k))] \\
 C_c &= [C_z(\theta(k)) + D_u K(\theta(k))]
 \end{aligned}$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} A'_c P(\theta(k+1)) A_c - P(\theta(k)) + C'_c C_c & A'_c P(\theta(k+1)) B_w(\theta(k)) + C'_c D_w(\theta(k)) \\ (A'_c P(\theta(k+1)) B_w(\theta(k)) + C'_c D_w(\theta(k)))' & B'_w(\theta(k)) P(\theta(k+1)) B_w(\theta(k)) + D_w(\theta(k))' D_w(\theta(k)) - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.79)$$

A prova é concluída como no Teorema 5.3, caso de análise.

△△

O Teorema 5.6 permite encontrar o valor mínimo do limitante superior para $\|G_{wz}\|_\infty$. Este limitante é obtido numericamente resolvendo-se o seguinte problema de otimização convexa com restrições do tipo LMI

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize } \{\gamma^2\} \\
 &\text{sujeito à (5.74) - (5.75).}
 \end{aligned} \quad (5.80)$$

5.12 Exemplos Numéricos

Nesta seção são apresentados resultados de simulações que foram obtidos para o caso de controle robusto com custo garantido e controle robusto \mathcal{H}_∞ . Para tanto estaremos considerando o politopo apresentado na Figura 5.2 onde $(\delta(k), \theta(k)) \in \Pi(c, d)$.

5.12.1 Controle Robusto com Custo Garantido

Exemplo 5.4 *Seja o sistema*

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\theta(k))x(k) + B_u u(k) \\ z(k) &= C_z(\theta(k))x + D_u(\theta(k))u(k) \end{aligned} \tag{5.81}$$

onde $x(0) = [x(0)_1 \quad x(0)_2]'$ para $x(0)_{1,2} \in [0.2, 3.8]$ e

$$A(\theta(k)) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 + 0.06\theta(k) \\ 0.01 & 0.9 + 0.05\theta(k) \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{5.82}$$

$$C_z(\theta(k)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_u(\theta(k)) = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Considere o problema de projeto de um controlador por realimentação de estado que estabilize o sistema (5.81) com custo garantido para todo $(\delta(k), \theta(k)) \in \Pi(c, d)$ onde $d = 1.8$ e $c = 2.5$. Admita a princípio que o parâmetro $\theta(k)$ não esteja disponível "on-line". Neste caso o parâmetro $\theta(k)$ não aparece na lei de controle. Utilizando o Teorema 5.5, obtém-se que a realimentação de estado que fornece o menor limitante superior para o custo J é dada por

$$u(t) = (K_0 + \theta K_1)x(t) \tag{5.83}$$

onde

$$\begin{aligned} K_0 &= \begin{bmatrix} -5.8704193 & 4.3739671 \end{bmatrix} \\ K_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e $J = 31.235373$. A função de Lyapunov correspondente para o sistema em malha fechada é

$$V(x, \theta) = x' \begin{bmatrix} I_2 \\ \theta I_2 \end{bmatrix}' W^{-1} \begin{bmatrix} I_2 \\ \theta I_2 \end{bmatrix} x \quad (5.84)$$

onde

$$W = \begin{bmatrix} 22.022015 & 24.532112 & 0. & 0. \\ 24.532112 & 27.356267 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 22.022015 & 24.532112 \\ 0. & 0. & 24.532112 & 27.356267 \end{bmatrix}$$

Considere agora o caso em que o parâmetro $\theta(k)$ esteja disponível "on-line" ou seja, $\theta(k)$ poderá ser utilizado na lei de controle, resultando assim uma realimentação de estado com dependência paramétrica. Neste caso as matrizes de ganho obtidas para a realimentação de estado (5.83) são

$$K_0 = \begin{bmatrix} -5.8093878 & 4.3168293 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.0304237 & -0.0661658 \end{bmatrix}$$

o valor do custo obtido para o sistema realimentado foi de $J = 26.553178$. A função de Lyapunov correspondente para o sistema em malha fechada é dada por (5.84) com

$$W = \begin{bmatrix} 57.412382 & 63.931293 & 0. & 0. \\ 63.931293 & 71.221367 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 57.412382 & 63.931293 \\ 0. & 0. & 63.931293 & 71.221367 \end{bmatrix}$$

Observe que um melhor valor para o custo é obtido quando o parâmetro $\theta(k)$ é incorporado à lei de controle.

5.12.2 Controle Robusto \mathcal{H}_∞

Exemplo 5.5 Seja o sistema

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(\theta(k))x(k) + B_w w(k) + B_u u(k) \\z(k) &= C(\theta(k))x + D_w(\theta(k))w(k) + D_u(\theta(k))u(k)\end{aligned}\tag{5.85}$$

onde

$$A(\theta(k)) = \begin{bmatrix} 2 + \theta(k) & 0 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C(\theta(k)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_u(\theta(k)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_w(\theta(k)) = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Considere o caso de projeto de um controlador \mathcal{H}_∞ por realimentação de estado para todo $(\delta(k), \theta(k)) \in \Pi(c, d)$ onde $d = 0.2$ e $c = 0.3$. Inicialmente considere o caso em que o parâmetro $\theta(k)$ não seja disponível "on-line". Neste caso, o parâmetro $\theta(k)$ não pode ser utilizado na lei de controle. Utilizando o Teorema 5.6, obtém-se que a realimentação de estado que fornece o menor limitante superior γ é dada por

$$u(t) = (K_0 + \theta K_1)x(t)\tag{5.86}$$

onde

$$K_0 = \begin{bmatrix} -2.1380113 & -0.068735 & -0.9322328 \\ -0.0002950 & -1.000147 & 0.0006447 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

e $\gamma = 0.0201608$. A função de Lyapunov correspondente para o sistema em malha fechada é

$$V(x, \theta(k)) = x' \begin{bmatrix} I_3 \\ \theta(k)I_3 \end{bmatrix}' W^{-1} \begin{bmatrix} I_3 \\ \theta(k)I_3 \end{bmatrix} x \tag{5.87}$$

onde

$$W = \begin{bmatrix} 4111.4914 & -580.0631 & 2582.0627 & 0 & 0 & 0 \\ -580.0631 & 5429.1506 & -1241.3757 & 0 & 0 & 0 \\ 2582.0627 & -1241.3757 & 3648.9514 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4111.4914 & -580.0631 & 2582.0627 \\ 0 & 0 & 0 & -580.0631 & 5429.1506 & -1241.3757 \\ 0 & 0 & 0 & 2582.0627 & -1241.3757 & 3648.9514 \end{bmatrix}$$

Considere agora o caso em que o parâmetro $\theta(k)$ esteja disponível "on-line", ou seja, $\theta(k)$ poderá ser utilizado na lei de controle, resultando assim uma realimentação de estado com dependência paramétrica. Neste caso as matrizes de ganho obtidas para a realimentação de estado (5.86) são

$$K_0 = \begin{bmatrix} -2.2872382 & -0.1437184 & -0.9894052 \\ -0.0004940 & -1.0002456 & 0.0005786 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.9999271 & -0.0000152 & -0.0000817 \\ 0.0000029 & 2.181E - 07 & -0.0000023 \end{bmatrix}$$

e $\gamma = 0.0144461$. A função de Lyapunov correspondente para o sistema em malha fechada é dada por (5.87) com

$$W = \begin{bmatrix} 5419.1353 & -1563.0246 & 5631.5603 & 0 & 0 & 0 \\ -1563.0246 & 5618.1495 & -2397.8178 & 0 & 0 & 0 \\ 5631.5603 & -2397.8178 & 6906.7111 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5419.1353 & -1563.0246 & 5631.5603 \\ 0 & 0 & 0 & -1563.0246 & 5618.1495 & -2397.8178 \\ 0 & 0 & 0 & 5631.5603 & -2397.8178 & 6906.7111 \end{bmatrix}$$

Observe que a incorporação do parâmetro $\theta(k)$ na lei de controle resulta em um melhor valor para o custo.

5.13 Considerações Finais

Neste capítulo apresentou-se formulações LMIs que permitem tratar o problema de análise de estabilidade e síntese de controladores para sistemas a tempo discreto do tipo LPV utilizando-se funções de Lyapunov dependente de parâmetros. Para tanto a noção de estabilidade bi-quadrática foi empregada.

Mostrou-se que os problemas de custo garantido e performance \mathcal{H}_∞ podem ser resolvidos como um problema de otimização convexa, onde um limitante superior para os referidos critérios é buscado.

A técnica de síntese proposta, permite o projeto de controladores com dependência paramétrica (controlador LPV), bem como controladores de ganhos fixos (controlador robusto). A obtenção destes controladores esta vinculada ao fato de os parâmetros do sistema serem ou não disponíveis "on-line" através de medida ou estimação.

Resultados de simulações para os casos de estabilidade robusta e controle robusto foram apresentados.

Os resultados de análise de estabilidade e performance são em geral pouco restritivos. Já para o caso de síntese os resultados são bastante restritivos devido à restrição de igualdade nas condições do problema.

Como esperado, o controlador LPV permite que um melhor índice de desempenho seja obtido em relação ao controlador robusto fixo.

Como já comentado no caso contínuo, a realização de uma lei de controle por realimentação de estado com dependência paramétrica afim facilita a implementação "on-line" quando comparada a controladores cuja dependência paramétrica é não linear [18], [6], [32].

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

O presente trabalho teve como principal objetivo obter formulações do tipo LMI que permitem o estudo da estabilidade e performance de sistemas lineares variantes no tempo do tipo LPV a tempo contínuo e discreto.

Fazendo-se uso de uma noção de estabilidade mais geral, chamada de bi-quadrática, apresentou-se formulações que apresentam condições suficientes e permitem tratar tanto o caso de análise como o de síntese para esta classe de sistemas.

As dimensões das LMIs obtidas com a definição de estabilidade bi-quadrática encontram-se relacionadas com o número de parâmetros θ do sistema. Assim quanto maior for o número de parâmetros θ , maior será o número de variáveis a serem sintonizadas, e como abordado na Seção 2.2.1 isto resulta em um aumento do esforço computacional.

As formulações apresentadas são bastante flexíveis pois basta impor restrições sobre a estrutura da função de Lyapunov para se obter resultados com as definições de estabilidade quadrática e afim-quadrática.

Formulações LMI pelas abordagens primal e dual foram apresentadas.

O problema de performance é tratado via otimização convexa buscando-se um limitante superior para as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Com relação ao problema de análise, este encontra-se resolvido de maneira satisfatória, pois os resultados obtidos utilizando a definição de estabilidade bi-quadrática são menos conservadores quando comparados aos obtidos com as definições de estabilidade quadrática e afim-quadrática.

O problema de síntese foi abordado empregando-se realimentação de estados. A técnica

proposta permitiu o projeto de controladores com dependência paramétrica afim (controlador LPV) bem como controladores com ganhos fixos (controlador robusto), considerando respectivamente o caso de os parâmetros serem ou não disponíveis "on-line".

Com o intuito de se obter uma lei de controle de fácil implementação "on-line" buscou-se obter formulações LMI cujas soluções resultassem em uma lei de controle afim em θ . Para tanto foi necessário acrescentar uma condição de igualdade que deve ser solucionada em conjunto com as LMIs. Esta condição pode acrescentar restrições aos resultados tendo em vista que a matriz P da função de Lyapunov torna-se bloco diagonal.

Na busca por uma abordagem mais promissora foram realizados recentemente estudos no sentido de obter-se formulações LMIs utilizando a definição de estabilidade bi-quadrática para uma lei de controle que não é afim no parâmetro θ [32]. E neste mostra-se que a função de Lyapunov e o controlador são funções racionais dos parâmetros.

Por não utilizar a condição de igualdade $NC_a = C_aW$ os resultados são menos conservativos, pois neste caso a matriz P deixa de ser bloco diagonal. Nesta abordagem a lei de controle é dada por $K(\theta) = F(\theta)P^{-1}(\theta)$ onde as matrizes $F(\theta)$ e $P(\theta)$ são funções quadráticas em θ e são determinadas via LMI. Ainda nesta abordagem é possível obter $K(\theta)$ afim em θ reduzindo-se assim o tempo de implementação "on-line". Isto é possível fazendo $F(\theta)$ afim em θ e $P(\theta)$ independente de θ . Neste caso recai-se na definição de estabilidade quadrática que é mais conservadora quando aplicado a sistemas cuja taxa de variação do parâmetro é limitada.

Este trabalho permitiu que os seguintes artigos fossem elaborados [33], [34], [35], [36], restando ainda a elaboração de artigos referentes a parte que trata de sistemas a tempo discreto.

A partir deste primeiro trabalho novas perspectivas surgiram e atualmente duas outras teses de doutorado estão em andamento na área de sistemas não lineares e sistemas híbridos.

Outras aplicações dentro da teoria de controle podem ser realizadas como exemplo no caso de filtros.

A noção de estabilidade bi-quadrática pode ainda ser estendida de modo que a função de Lyapunov com dependência paramétrica não seja necessariamente quadrática no parâmetro θ , isto é, ela pode assumir uma representação polinomial. Este fato traz como perspectiva a extensão dos resultados aqui apresentados através do uso desta nova definição de estabilidade.

Referências Bibliográficas

- [1] Boyd, S., Ghaoui, L. El, Feron, E., *et al.*. *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics-SIAM books, 1994.
- [2] Apkarian, P., Gahinet, P., Becker, G. Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Baltimore-Maryland, 1994 págs. 856–860.
- [3] Gahinet, P., Apkarian, P., Chilali, M. Affine parameter-dependent Lyapunov functions for real parametric uncertainty. In: *IEEE Conf. on Decision and Control*. Lake Buena Vista-FL, 1994 págs. 2026–2031.
- [4] Trofino, A., de Souza, C.E. *Stability of systems with real uncertainties bounded in size and time variation rate*. Rel. téc., DAS - UFSC, Florianopolis-SC, 1997.
- [5] —. Bi-quadratic stability of uncertain liner systems. In: *38th IEEE Conf. on Decision and Control*. Phoenix, Arizona, USA, 1999 .
- [6] Wu, Fen, Yang, X. H., Packard, A., *et al.*. Induced L_2 -norm control for LPV system with bounded parameter variantion rates. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Seattle-Washington, 1995 .
- [7] Ghaoui, L. El, Scorletti, G. Control of rational systems using linear-fractional representations and LMI. *Automatica*, 1996. volume 32, nº 9, págs. 1273–1284.
- [8] Feron, E., Apkarian, P., Gahinet, P. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, July 1996. volume 41, nº 7, págs. 1041–1046.

- [9] Haddad, W. M., Bernstein, D. S. Parameter dependent Lyapunov functions, constant real parameter uncertainty and the Popov criterion in robust analysis and synthesis. In: *Parts 1 and 2, Proc. 30th IEEE Conf. Decision and Control*. Brighton, UK, 1991 .
- [10] Kapila, V., Haddad, W. M., Erwin, R. S., *et al.*. Robust controller synthesis via shifted parameter-dependent quadratic cost bounds. In: *American Control Conference*. Albuquerque-New Mexico, 1997 .
- [11] Schamma, J. S., Xiong, D. Control of rates constrained linear parameter varying systems. In: *Proceeding of the 34th Conference on Decision and Control*. New Orleans-LA, 95 .
- [12] Wang, F., Balakrishnan, V. Improved stability analysis and gains scheduled controller synthesis for parameter-dependent systems. In: *Proc. 37th IEEE Conf. Decision and Control*. Tampa, FL, 1998 .
- [13] Yu, J., Sideris, A. H_∞ control with parameter-dependent Lyapunov functions. *Systems and Control Letters*, 1997. volume 30, nº 9, págs. 57–69.
- [14] Becker, G., Packard, A. Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback. *Systems and Control Letters*, 1994. volume 23, págs. 205–215.
- [15] Haddad, W. M., Bernstein, D. S. Parameter-dependent Lyapunov functions and the Popov criterion in robust analysis and synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, March 1995. volume 40, nº 3, págs. 536–543.
- [16] Haddad, W. M., Kapila, V. Robust stabilization with slowly time-varying uncertain real parameters. In: *IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans-LA, 1995 págs. 194–195.
- [17] Bernstein, D. S., Haddad, W. M. Robust stability and performance via fixed-order dynamic compensation with guaranteed cost bound. *Math Contr. Sig. Sys.*, 1990. , nº 3, págs. 139–163.
- [18] Sznaier, M. Receding horizon: An easy way to improve performance in LPV systems. In: *Proceedings of the American Control Conference*. 1999 págs. 2257–2261.

- [19] Iwasaki, T. LPV system analysis with quadratic separator. In: *Proceedings of IEEE Conf. Decision and Control*. 1998 .
- [20] Rockafellar, R. T. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
- [21] Gantmacher, F. *The Theory of Matrices*. Chelsea Publishing Company, New York, NY, 2nd edition, 1990.
- [22] Nemirovskii, A., Gahinet, P. The projective method for solving linear matrix inequalities. In: *In Proceedings of the American Control Conference*. 1994 págs. 840-844.
- [23] Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J., et al.. *LMI Control Toolbox: for use with MATLAB..* The Math Works Inc., 1996.
- [24] Vandenberghe, Lieven, S.Boyd. *A primal-dual potential reduction method for problems involving matrix inequalities*. Mathematical Programming, series B, 1994.
- [25] Ghaoui, L. El, Niculescu., S. *Advances in Linear Matrix Inequations Mehods in Control..* SIAM, 2000.
- [26] Ravi, R., Pascoal, A. M., Khargonekar, P. P. Normalized coprime factorazations and the graph metric for linear time-varying systems. In: *Proc. 34th IEEE Conf. Decision and Control*. Honolulu, HI, 1990 .
- [27] Geen, Michael, Limebeer, David J. N. *Linear Robust Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [28] Anderson, B. D., Moore, J. *Optimal Control - Linear Quadratic Methods*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [29] Dailey, R. L. Lecture notes for the workshop on H_∞ and μ methodos for robust control. In: *IEEE Conf. on Decision and Control*. 1991 .
- [30] Zhou, Kemin, Doyle, J. C. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1998.

- [31] Gahinet, P., Apkarian, P. An LMI-based parametrization of all H_∞ controllers with applications. In: *In Proceedings of the Conference on Decision and Control*. 1993 págs. 656–661.
- [32] Trofino, A., de Souza, C.E., de Oliveira, J. Gain-scheduled H_2 and H_∞ control of linear parameter varying systems via parameter-dependent Lyapunov functions. Submetido à publicação .
- [33] de Oliveira, J., Trofino, A., de Souza, C.E. Análise e síntese H_∞ para sistemas LPV. In: *XIII Congresso Brasileiro de Automática*. Florianópolis, 2000 págs. 622–627.
- [34] —. Robust H_2 performance of LPV systems via parameter dependent Lyapunov functions. In: *Proc. 3rd IFAC Symp. on Robust Control Design*. Prague, Czech Republic, 2000 .
- [35] de Oliveira, J., de Souza, C.E., Trofino, A. H_2 Análisis and control of parameter dependent systems via LMI and parameter dependent Lyapunov functions. In: *Proc. 3rd IFAC Symp. on Robust Control Design*. Prague, Czech Republic, 2000 .
- [36] de Souza, C.E., Trofino, A., de Oliveira, J. Robust H_∞ control of uncertain linear systems via parameter-dependent Lyapunov functions. In: *IEEE Conf. on Decision and Control*. Sydney, 2000 .