

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**UMA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE CÁLCULO  
DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL**

**MARIA DAS GRAÇAS VIANA DE SOUSA DIOGO**

**FLORIANÓPOLIS, SC  
Outubro/2000**

**UMA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE CÁLCULO  
DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL**

**MARIA DAS GRAÇAS VIANA DE SOUSA DIOGO**

**Dissertação apresentada ao Curso de Engenharia  
de Produção da Universidade Federal de Santa  
Catarina como requisito para a obtenção do título  
de mestre em Engenharia de Produção.**

**Orientador: Prof. Dr. Álvaro G. R. Lezana**

**Florianópolis**  
**2000**

UMA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE CÁLCULO DE FUNÇÕES DE  
UMA VARIÁVEL REAL

MARIA DAS GRAÇAS VIANA DE SOUSA DIOGO

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia de Produção

Especialidade Engenharia de Produção e aprovada em sua forma final pelo  
Programa de Pós-Graduação



---

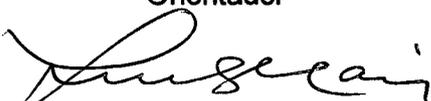
Ricardo Miranda Barcia, Ph.D.  
Coordenador do Curso

Banca examinadora:



---

Alvaro Guillermo R. Lezana, Dr.  
Orientador



---

Luiz Fernando Jacinto Maia, Dr.



---

Tomaz Daniel M. Rodrigues, Dr.

Florianópolis, Dezembro de 2000

## DEDICATÓRIA

*Dedico este trabalho à minha filha, Maria Augusta, à Euclides e Diamantina, meus avós e a Junot e Odisséia meus pais, muito amados.*

## AGRADECIMENTO

*Aos meus pais, Junot e Odisséia e avós, Eucides e Diamantina, pela educação princípios e valores a mim transmitidos e que hoje norteiam meus horizontes.*

*A minha tia Odinéia, responsável pelo despertar do educador em meu raciocínio lógico matemático.*

*Ao meu primo Lauro Eucides, por descortinar em mim o mundo de interrelações entre a Matemática e a Computação.*

*Ao meu orientador, professor Doutor Álvaro G. R. Lezana, pela oportunidade, apoio, incentivo, crédito e importante e valiosa orientação nesta caminhada.*

*Aos colegas e todos os amigos e familiares que direta ou indiretamente colaboraram para a concretização deste projeto.*

*À minha filha que sempre se fez presente com seu apoio irrestrito.*

*À Deus por ter me iluminado.*

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	viii
<b>RESUMO</b> .....	xxii
<b>ABSTRACT</b> .....	xxiii
<b>1– INTRODUÇÃO</b> .....	23
1.1. O problema .....	23
1.2. Um Breve Esboço Histórico .....	28
1.3. Formulação, Delimitação e Alcance do Problema.....	32
1.4. Objetivos .....	33
1.4.1. Objetivo Geral .....	33
1.4.2. Objetivos Específicos.....	33
1.5. Organização do Trabalho .....	34
<b>2 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	35
2.1. Jogos Empresariais .....	35
2.2. Tecnologia e Educação .....	38
2.3. Ensino da Matemática .....	40
2.4. Modelagem Matemática .....	48
2.4.1. Limite. Noção intuitiva .....	48
2.4.2. Limite – Definição .....	52
2.4.3. Derivada .....	71
2.4.4. Integral Definida – Noção intuitiva.....	77
2.4.5. Integral Definida – Definição .....	89
2.4.6. Paradoxos .....	91

<b>3 – OS JOGOS - <math>CAL_{\infty}</math></b> .....	104
3.1. Introdução .....	104
3.1.1. Generalidades .....	104
3.1.2. Objetivos Gerais .....	105
3.1.3. Procedimentos Gerais .....	105
3.2. Descrição dos Jogos - $CAL_{\infty}$ .....	106
3.2.1. Módulo $CAL_{\infty}$ – limf – I: Limite Noção Intuitiva .....	108
3.2.2. Módulo $CAL_{\infty}$ – limf – II: Limite - Definição .....	115
3.2.3. Módulo $CAL_{\infty}$ – $f'$ – Derivada da função $f$ .....	127
3.2.4. Módulo $CAL_{\infty}$ – $\int f$ : Integral definida da função $f$ .....	131
3.2.5. Módulo $CAL_{\infty}$ – ZEN: Paradoxos .....	146
<b>4 – CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b> .....	153
<b>ANEXOS</b> .....	157
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	249

## LISTA DE FIGURAS

### Capítulo I

Figura 1 – Área sob $y=e^{-x}$ .....	27
Figura 2 – Triângulo característico .....	31

### Capítulo II

Figura 1 – Exágono regular inscrito .....	48
Figura 2 – Triângulo isósceles com vértice no centro e base tangente à circunferência .....	49
Figura 3 – Exágono regular inscrito .....	50
Figura 4 – Triângulo isósceles com vértice no centro e base tangente à circunferência .....	51
Figura 5 – Representação geométrica de $W$ .....	53
Figura 6 – Representação geométrica de $W$ e de $V$ para uma curva $f$ .....	54
Figura 7 – Curva onde $\lim f(x) = b$ e $f(a) = b$ .....	54
Figura 8 – Curva onde $\lim f(x) = b$ e $f(a) \neq b$ .....	55
Figura 9 – Curva onde $\lim f(x) = b$ e $\exists f(a)$ .....	55
Figura 10 – Curva onde $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $f(a) = b$ .....	55
Figura 11 – Curva onde $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $f(a) \neq b$ .....	56
Figura 12 – Curva onde $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $f(a) \neq b$ .....	56
Figura 13 – curva onde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $f(a) = b$ .....	56

Figura 14 – Curva onde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\nexists f(a)$ .....	57
Figura 15 – Curva onde $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $f(a) \neq b$ .....	57
Figura 16 – Curva onde $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $f(a) = b$ .....	57
Figura 17 – Curva onde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $f(a) = b$ com retângulos de base $\delta_1 + \delta_2$ .....	58
Figura 18 – Curva onde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\nexists f(a)$ com retângulos de base $\delta_1 + \delta_2$ .....	58
Figura 19 – Curva onde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = e f(a) \neq b$ com retângulos de base $\delta_1 + \delta_2$ .....	58
Figura 20 – Curva onde $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $f(a)=b$ com retângulos de base $\delta_1 + \delta_2$ .....	59
Figura 21 – Curva onde $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $f(a) \neq b$ com retângulos de base $\delta_1 + \delta_2$ .....	59
Figura 22 – Curva onde $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $f(a) \neq b$ com retângulos de base $\delta_1 + \delta_2$ .....	59
Figura 23 – Curva onde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $f(a) = b$ com retângulos de base $\delta_1 + \delta_2$ .....	60
Figura 24 – Curva onde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\nexists f(a)$ com retângulos de base $\delta_1 + \delta_2$ .....	60
Figura 25 – Curva onde $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $f(a) \neq b$ com retângulos de base $\delta_1 + \delta_2$ .....	60

Figura 26 – Curva onde  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) = b$  com retângulos  
de base  $\delta_1 + \delta_2$  ..... 61

Figura 27 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$  com retângulos  
de base  $\delta_1 + \delta_2$  ..... 63

Figura 28 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$  com destaque para o  
retângulos de base  $2\delta_1$  ..... 64

Figura 29 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$  com destaque para o  
retângulo de base  $2\delta$  ..... 64

Figura 30 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$  com retângulos de base  
 $\delta_1 + \delta_2$ ,  $2\delta$ , e  $2\delta$  ..... 66

Figura 31 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$  com retângulos de base  $2\delta$  ... 66

Figura 32 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) \neq b$  com retângulos de base  $2\delta$  ... 66

Figura 33 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $\exists f(a)$  com retângulos de base  $2\delta$  ..... 66

Figura 34 – Curva onde  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) = b$  com retângulos de base  $2\delta$  ..... 67

Figura 35 – Curva onde  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) = b$  com retângulos de base  $2\delta$  ..... 67

Figura 36 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) \neq b$  com retângulos de base  $2\delta$  .. 67

- Figura 37 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$  com retângulos de base  $2\delta$  ... 68
- Figura 38 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $\exists f(a)$  com retângulos de base  $2\delta$  ..... 68
- Figura 39 – Curva onde  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) \neq b$  com retângulos de base  $2\delta$  ..... 68
- Figura 40 – Curva onde  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) = b$  com retângulos de base  $2\delta$  ..... 69
- Figura 41 – Representação gráfica de  $0 < d(x, 5) < 4$ ..... 69
- Figura 42 – Representação gráfica de  $0 < d(x, a) < \delta$  ..... 69
- Figura 43 – Reta secante à curva  $f$  nos pontos  $P$  e  $A_1$  ..... 73
- Figura 44 – Retas secantes que se aproximam da reta tangente..... 75
- Figura 45 – Área sob curva  $y = bx^2$  ..... 77
- Figura 46 – Destaque para a área sob a curva e a área do retângulo NOPM... 78
- Figura 47 – Destaque para a área sob a curva e a soma das áreas dos retângulos  $N_1OPQ_1$  e  $M_1P_1PM$ ..... 78
- Figura 48 – Destaque para a área sob a curva e a soma das áreas dos retângulos  $N_2OP_1S_2, Q_2P_1P_2V_2$  e  $M_2P_2PM$ ..... 79
- Figura 49 – Destaque para a área sob a curva e a área do retângulo DABC.... 81
- Figura 50 – Destaque para a área sob a curva e a soma das áreas dos retângulos  $A_1AB_1D_1$  e  $DB_1BC$  ..... 82
- Figura 51 – Destaque para a área sob a curva e a soma das áreas dos retângulos  $A_1ACC_1$  e  $C_2CDD_1$  e  $D_2DBB_1$  ..... 83
- Figura 52 – Destaque para a área sob a curva e a área do retângulo  $A_1ABB_1$  . 85
- Figura 53 – Destaque para a área sob a curva e a soma das áreas sob a curva e a soma das áreas dos retângulos  $A_1ACC_1$  e  $C_2CBB_1$  ..... 85

Figura 54 – Destaque para a área sob a curva e a norma das áreas dos retângulos $A_1ACC_1$ e $C_2CDD_1$ e $D_2DBB_1$ .....	86
Figura 55 – Destaque para a área sob a curva e a soma das áreas dos quatro retângulos .....	89
Figura 56 – Destaque para a área sob a curva e a soma das áreas dos quinze retângulos.....	90
Figura 57 – Posição inicial do corredor.....	92
Figura 58 – Primeiro descolamento do corredor.....	93
Figura 59 – Segundo deslocamento do corredor.....	93
Figura 60 – Terceiro deslocamento do corredor.....	94
Figura 61 – N-ésimo deslocamento do corredor.....	95
Figura 62 – Três primeiras posições do coelho .....	96
Figura 63 – Sucessão de alturas que a bola assume .....	97
Figura 64 – Sucessão de alturas e o tempo gasto pela bola.....	98
Figura 65 – Representação de três alturas assumidas pela bola.....	101

### Capítulo III

Figura 1 – Codificação dos botões circulares da tela 1.....	107
---	-----

## LISTA DE ANEXOS

<b>Tela 1:</b>	Tela principal da parte I do software $CAL_{\infty}$ .....	158
<b>Tela 2:</b>	Tela inicial do jogo I do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – I: Limite – Noção Intuitiva, para calcular o perímetro da circunferência através do perímetro de polígonos regulares inscritos .....	159
<b>Tela 3:</b>	Mostra um triângulo regular, inscrito na circunferência e o perímetro do mesmo .....	160
<b>Tela 4:</b>	Mostra um quadrado inscrito na circunferência e o perímetro do mesmo .....	161
<b>Tela 5:</b>	Mostra um pentágono regular, inscrito na circunferência e o perímetro do mesmo .....	162
<b>Tela 6:</b>	Mostra um hexágono regular, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo .....	163
<b>Tela 7:</b>	Mostra um heptágono regular, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo .....	164
<b>Tela 8:</b>	Mostra um octógono regular, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo .....	165
<b>Tela 9:</b>	Mostra um polígono regular de nove lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo .....	166
<b>Tela 10:</b>	Mostra um polígono regular de dez lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo .....	167
<b>Tela 11:</b>	Mostra um polígono regular de onze lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo .....	168

<b>Tela 12:</b>	Mostra um polígono regular de doze lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo.....	169
<b>Tela 13:</b>	Mostra um polígono regular de dezoito lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo.....	170
<b>Tela 14:</b>	Mostra um polígono regular de dezenove lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo.....	178
<b>Tela 15:</b>	Mostra um polígono regular de vinte lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo.....	172
<b>Tela 16:</b>	Mostra um polígono regular de vinte e um lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo.....	173
<b>Tela 17:</b>	Mostra um polígono regular de vinte e dois lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo.....	174
<b>Tela 18</b>	Mostra um polígono regular de vinte e três lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo.....	175
<b>Tela 19</b>	Mostra um polígono regular de vinte e quatro lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo.....	176
<b>Tela 20</b>	Mostra um polígono regular de vinte e cinco lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo.....	177
<b>Tela 21</b>	Mostra um polígono regular de vinte e seis lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo.....	178
<b>Tela 22</b>	Mostra um polígono regular de vinte e sete lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo.....	179
<b>Tela 23</b>	Tela inicial do jogo II do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – I: Limite – Noção Intuitiva, para calcular a área do círculo através da área de polígonos regulares inscritos.....	180

<b>Tela 24:</b>	Mostra um triângulo regular inscrito numa circunferência, e a área do mesmo .....	181
<b>Tela 25:</b>	Mostra um polígono regular de vinte e quatro lados, inscrito numa circunferência e a área do mesmo .....	182
<b>Tela 26:</b>	Tela inicial do jogo III do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – I: Limite – Noção Intuitiva, para calcular o perímetro da circunferência através do perímetro de polígonos regulares circunscritos.....	183
<b>Tela 27:</b>	Mostra um quadrado circunscrito e o perímetro do mesmo .....	184
<b>Tela 28:</b>	Mostra um polígono regular de vinte e quatro lados, circunscrito e o perímetro do mesmo .....	185
<b>Tela 29:</b>	Tela inicial do jogo IV do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – I: Limite – Noção Intuitiva, para calcular a área do círculo através da área de polígonos regulares circunscritos .....	186
<b>Tela 30:</b>	Mostra um triângulo equilátero circunscrito e a área do mesmo.....	187
<b>Tela 31:</b>	Mostra um polígono regular de vinte e quatro lados, circunscrito e a área do mesmo .....	188
<b>Tela 32:</b>	Tela inicial do primeiro jogo do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – I: Limite – Definição, ou seja, jogo (4a) .....	189
<b>Tela 33:</b>	Tela que representa a definição I de limite, para $y = 66,391$ , no jogo (4a) .....	190

<b>Tela 34:</b>	Tela que representa a definição I de limite, para $y = 67,391$ , no jogo (4a) .....	191
<b>Tela 35:</b>	Tela que representa a definição I de limite, para $y = 68,391$ , no jogo (4a) .....	192
<b>Tela 36:</b>	Tela que representa a definição I de limite, para $y = 71,391$ , no jogo (4a) .....	193
<b>Tela 37:</b>	Tela que representa a definição I de limite, para $y = 77,000$ , no jogo (4a) .....	194
<b>Tela 38:</b>	Tela que representa a definição II de limite, para $x = 77,00$ , no jogo (4a) .....	195
<b>Tela 39:</b>	Tela que representa a definição II de limite, para $x = 78,000$ , no jogo (4a) .....	196
<b>Tela 40:</b>	Tela que representa a definição II de limite, para $x = 79,000$ , no jogo (4a) .....	197
<b>Tela 41:</b>	Tela que representa a definição II de limite, para $x = 81,000$ , no jogo (4a) .....	198
<b>Tela 42:</b>	Tela que representa a definição II de limite, para $x = 87,000$ , no jogo (4a) .....	199
<b>Tela 43:</b>	Tela que representa a definição II de limite, para $x = 89,000$ , no jogo (4a) .....	200
<b>Tela 44:</b>	Tela que representa a definição II de limite, para $x = 120,700$ , no jogo (4a) .....	201

<b>Tela 45:</b>	Tela que representa a definição II de limite, para $x = 113,700$ , no jogo (4a) .....	202
<b>Tela 46:</b>	Tela que representa a definição II de limite, para $x = 100,700$ , no jogo (4a) .....	203
<b>Tela 47:</b>	Tela que representa a definição II de limite, para $x = 93,700$ , no jogo (4a) .....	204
<b>Tela 48:</b>	Tela que representa a definição II de limite, para $x = 90,700$ , no jogo (4a) .....	205
<b>Tela 49:</b>	Tela inicial do jogo (4b), do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – II: Limite – Definição .....	206
<b>Tela 50:</b>	Tela inicial do jogo (4c), do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – II: Limite – Definição .....	207
<b>Tela 51:</b>	Tela inicial do jogo (4d), do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – II: Limite – Definição .....	208
<b>Tela 52:</b>	Tela inicial do jogo (4e) do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – II: Limite – Definição .....	209
<b>Tela 53:</b>	Tela inicial do jogo (4f), do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – II: Limite – Definição .....	210
<b>Tela 54:</b>	Tela inicial do jogo (4g), do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – II: Limite – Definição .....	211

<b>Tela 55:</b>	Tela inicial do jogo (4h), do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – II: Limite – Definição .....	212
<b>Tela 56:</b>	Tela inicial do jogo (4i), do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – II: Limite – Definição (4h) .....	213
<b>Tela 57:</b>	Tela inicial do jogo (4j), do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – II: Limite – Definição .....	214
<b>Tela 58:</b>	Tela que representa a definição III de limite, para $y = 66,391$ , no jogo (4j) .....	215
<b>Tela 59:</b>	Tela que representa a definição III de limite, para $y = 67,391$ , no jogo (4j) .....	216
<b>Tela 60:</b>	Tela que representa a definição III de limite, para $y = 70,391$ , no jogo (4j) .....	217
<b>Tela 61:</b>	Tela que representa a definição III de limite, para $y = 73,391$ , no jogo (4j) .....	218
<b>Tela 62:</b>	Tela que representa a definição IV de limite, para $x = 76,00$ , no jogo (4j) .....	219
<b>Tela 63:</b>	Tela que representa a definição IV de limite, para $x = 83,00$ , no jogo (4j) .....	220
<b>Tela 64:</b>	Tela que representa a definição IV de limite, para $x = 90,00$ , no jogo (4j) .....	221
<b>Tela 65:</b>	Tela que representa a definição IV de limite, para $x = 103,00$ , no jogo (4j) .....	222

<b>Tela 66:</b>	Tela que representa a definição IV de limite, para $x = 93,00$ , no jogo $\textcircled{4j}$ .....	223
<b>Tela 67:</b>	Tela inicial do jogo $\textcircled{4k}$ do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – II: Limite – Definição .....	224
<b>Tela 68:</b>	Tela inicial do jogo $\textcircled{4l}$ do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – II: Limite – Definição .....	225
<b>Tela 69:</b>	Tela inicial do jogo $\textcircled{4m}$ do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – II: Limite – Definição .....	226
<b>Tela 70:</b>	Tela inicial do jogo $\textcircled{4n}$ ,do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – II: Limite – Definição .....	227
<b>Tela 71:</b>	Tela inicial do jogo $\textcircled{4p}$ ,do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – II: Limite – Definição .....	228
<b>Tela 72:</b>	Tela inicial do jogo $\textcircled{4q}$ do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – II: Limite – Definição .....	229
<b>Tela 73:</b>	Tela inicial do jogo $\textcircled{4r}$ ,do Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – II: Limite – Definição .....	230
<b>Tela 74:</b>	Tela inicial do jogo d Módulo $CAL_{\infty}$ - f' .....	231

<b>Tela 75:</b>	Tela que pode finalizar a visualização geométrica e algébrica da definição de derivada .....	232
<b>Tela 76:</b>	Tela do jogo I – Problema I, do Módulo $CAL_{\infty}$ - $\int f$ , quando a partição tem um intervalo .....	233
<b>Tela 77:</b>	Tela do jogo I – Problema I, do Módulo $CAL_{\infty}$ - $\int f$ , quando a partição tem dois intervalos.....	234
<b>Tela 78:</b>	Tela do Jogo I – Problema I, do Módulo $CAL_{\infty}$ - $\int f$ , quando a partição tem vinte intervalos.....	235
<b>Tela 79:</b>	Tela que pode finalizar a visualização geométrica e algébrica da definição de integral, com 9999 elementos na partição.....	236
<b>Tela 80:</b>	Tela do jogo II – Problema II, do Módulo $CAL_{\infty}$ - $\int f$ , quando a partição tem um intervalo.....	237
<b>Tela 81:</b>	Tela do Jogo II – Problema II, do Módulo $CAL_{\infty}$ - $\int f$ , quando a partição tem 5 intervalos .....	238
<b>Tela 82:</b>	Tela que pode finalizar a visualização geométrica e algébrica da definição de integral, com 9999 elementos na partição.....	239
<b>Tela 83:</b>	Tela do jogo III – Problema III, do Módulo $CAL_{\infty}$ - $\int f$ , quando a partição tem um elemento.....	240

<b>Tela 84:</b>	Tela do jogo III – Problema III, do Módulo $CAL_{\infty} - \int f$ , quando a partição tem cinco elementos .....	241
<b>Tela 85:</b>	Tela do jogo III – Problema III, do Módulo $CAL_{\infty} - \int f$ , quando a partição tem 99 elementos.....	242
<b>Tela 86:</b>	Tela inicial do Módulo $CAL_{\infty} - ZEN$ , paradoxo – I.....	243
<b>Tela 87:</b>	Tela que permite a visualização do jogo, onde a distância a ser percorrida é $1.66533453693773 \times 10^{-16}$ .....	244
<b>Tela 88:</b>	Tela inicial do Módulo $CAL_{\infty} - ZEN$ , paradoxo – II.....	245
<b>Tela 89:</b>	Tela que permite a visualização do jogo, onde a vantagem entre a tartaruga é $1,08420217248552 \cdot 10^{-18}$ .....	246
<b>Tela 90:</b>	Tela inicial do Módulo $CAL_{\infty} - ZEN$ , Paradoxo III. ....	247
<b>Tela 91:</b>	Tela que permite a visualização do jogo, onde a altura da bola é 0,008985051500 .....	248

# UMA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE CÁLCULO DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL.

**Maria das Graças Viana de Sousa Diogo.**

## RESUMO

A dificuldade no ensino aprendizagem dos conceitos de limite, de derivada e de integral, provocada pela rigorosa abstração presente em suas respectivas definições, comprometem o desempenho dos alunos na disciplina de Análise Real do Curso de Matemática.

Este trabalho constrói uma modelagem matemática e didático-pedagógico do protótipo de um software educacional com experiências matemáticas em forma de jogos computacionais dentro dos referidos conceitos para um curso de cálculo de função de uma variável real.

O software é composto de duas partes. A parte I foi desenvolvida em linguagem CLIPPER 5.1, usando imagens por Paint Brush, 256 cores e biblioteca gráfica CLBC 3.0, executado em ambiente Windows 95 ou 98, com janela para MS-DOS, contemplando os conteúdos referentes ao ensino da Noção Intuitiva de Limite e a Definição de Limite. A parte II foi construída com a ferramenta Visual Basic 5.0 em ambiente operacional 95 ou 98 com jogos sobre Derivada, sobre Integral e sobre os Paradoxos.

A avaliação deste protótipo deve ser feita em futuros estudos e sua utilização deve ser tratada como uma alternativa para o ensino de cálculo pois o respeito as diferenças individuais é condição indispensável para o sucesso do recurso didático.

## **AN ALTERNATIVE FOR TEACHING CALCULUS OF FUNCTIONS OF A REAL VARIABLE.**

### **ABSTRACT**

The difficulty in teaching the concepts of Limit, Derivada, and Integral caused by the rigorous abstraction present in their respective definitions, promises the students performance in the subject REAL ANALYSIS in the Mathematical course.

This research constructs a mathematical and didactic pedagogical pattern of an educational software, with mathematic experiences in the shape of computation games in the referred concepts for a calculus course of function of a real variable.

The software is composed of two parts: The first part was developed in Clipper 5.1 language, using images by Paint Brush 256 colors and a CLBC 3.0 graphical library performing in windows 95 or 98, with MS-DOS window, regarding the referent contents to the teaching of The Intuitive Notions of the Limit and the Limit Definition. The second one was constructed with the Basic 5.0 visual tool in operational surrounding 95 or 98 with games on Derivada, on Integral and on the paradoxes.

The evaluation of this pattern must be done in future studies and its use must be dealt as an alternative for the calculus teaching, therefor, in regard of individual diversities, it is an indispensable condition for the success of the didactic recourse.

# I - INTRODUÇÃO

## 1.1. O Problema

A abstração e percepção de estruturas têm tido um papel importante no estudo da natureza e da matemática, disciplina em que símbolos abstratos são postos em ação construindo a linguagem da ciência.

Mesmo existindo os símbolos a preocupação com a precisão da comunicação é relevante porque ensinar para quem aprendeu errado requer uma etapa a mais, para que se desfça o preconceito, isto é; a correção do conceito errado na mente confusa do aluno antes que ele tome conhecimento da verdade.

O comunicador tem também que levar em consideração as categorias de receptores pois existem as mentes curiosas que desejam saber mas não possuem os pré-requisitos e a estes deve ser oferecidos conceitos aproximados porém corretos e que em nada prejudiquem o rigor da definição.

Existem também os que já conhecem o conceito de maneira geral que deverão ser aprofundados, e as mentes que sabem perfeitamente do que está sendo tratado mas querem criticar e para estes a comunicação deverá ser tão rigorosa quanto flexível a fim de que o interlocutor participe contribuindo e não bloqueando o processo.

Concluí-se que os conteúdos devem ser enunciados de maneira diferenciada dependendo do grupo a que pertença o receptor e também levando

em conta os pré-requisitos ou conhecimentos anteriores e os esquemas individuais.

É reconhecido também que os símbolos utilizados na aquisição de conceitos, na comunicação de conhecimentos novos, em explicações, para provocar reflexão, para mostrar estruturas, para automatizar as manipulações rotineiras, para recuperar informação e nas atividades mentais criativas, constroem uma gama de linguagens especializadas que abrem caminho para o entendimento, interpretação, reconhecimento, crítica e/ou transformação do mundo.

No homem a flexibilidade, a criatividade e a inovação permitem transcender fronteiras, ligar domínios, efetuar justaposições raras e faz com que ele se aventure criando novos sistemas simbólicos o que constata-se por exemplo, com a rápida evolução das linguagens computacionais.

**GARDNER**, (1994) lança um desafio e mesmo uma esperança a humanidade, mais especificamente aos sistemas educacionais, quando diz que, a possível descoberta do perfil intelectual de um indivíduo, não deve servir para rotulá-lo e/ou retê-lo em classes e dentro dessas classes em estágios de desenvolvimento, mas sim para viabilizar e assegurar o fornecimento das opções e do potencial necessários à aquisição de competência em qualquer campo que ele e a sociedade na qual está inserido considerem importante.

Logo, a elaboração de técnicas e/ou métodos para minimizar as dificuldades do aluno na aprendizagem dos conceitos abstratos, deve ser uma das metas educacionais de relevância pois já se percebe que muitos dentre os

mais brilhantes e os melhores jovens estão se evadindo das tradicionais áreas de diversão do intelecto - Matemática e Física – para a ciência da computação. Alguns deles consideram a Matemática demasiado rígida e que os estudos, análises e observações nessa área abrangem temas intoleravelmente maçantes.

Conhecidos os pontos fortes e os pontos fracos deve-se promover o desenvolvimento dos primeiros e/ou trabalhar atenciosamente para diluição dos pontos fracos.

Deve-se pois, identificar o perfil do aluno e estabelecer uma correspondência entre aluno e método, e assim, diante dos talentos e dos caminhos que serão revelados, apossem-se do otimismo matemático, da postura de exímios jogadores e eternos aprendizes que diante de um desafio não recua nem tenta destruí-lo antes de conhecê-lo, mas procura saber sobre ele, pensar antes dele e melhor que ele, tomá-lo como referência e superá-lo.

A abstração depurada que a disciplina “Análise Real”, do curso de Matemática exige, tem sua origem nos conceitos e definições de limite, derivação e integração, apresentadas aos alunos, pela primeira vez, nos conteúdos de cálculo diferencial e integral de funções de uma variável real.

É realizado aqui, um trabalho onde exercícios são elaborados em forma de jogos educacionais, tendo o computador como aliado para atuar no processo de ensino e aprendizagem dos referidos conteúdos, privilegiando o aprendizado da matemática através do fazer matemática e permitindo que sejam explorados aspectos que o material tradicional não permite pois o computador obriga a explicação do processo e é capaz de transportar o homem a um mundo

que está muito além do mundo dos sentidos físicos, lá onde surpresas podem estar escondidas aos olhos da finitude, por exemplo:

I) Dadas as seqüências:

$$(a_n) = \left( \frac{1}{n} \right) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right) e$$

$$(b_n) = \left( \frac{1}{n^2} \right) = \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots \right)$$

Afirma-se que  $a_n > b_n$  para  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 2$ , mas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

II) Dadas as seqüências:

$$(a_n) = \left( \frac{n^2 + n + 1}{n} \right) = \left( 3, \frac{7}{2}, \frac{13}{3}, \frac{21}{4}, \dots, \frac{n^2 + n + 1}{n}, \dots \right) e$$

$$(b_n) = \left( \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} \right) = \left( \frac{4}{2}, \frac{9}{8}, \frac{16}{18}, \dots, \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2}, \dots \right)$$

Afirma-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$$

III) Observando a equação a seguir:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$$

Do lado esquerdo tem-se uma infinidade de parcelas, algo incompleto que é igual a uma quantidade finita, completa.

IV) Considere a função  $y = e^{-x}$  e seu gráfico:

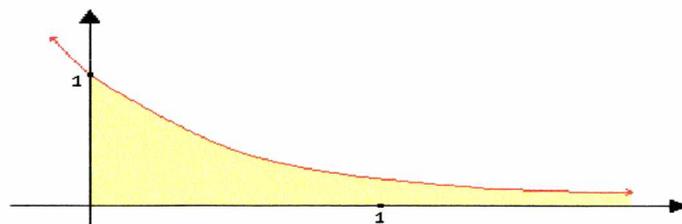


Figura 1 – Área sob  $y = e^{-x}$

Assegura-se que a área sob a curva quando  $x$  varia de zero a  $+\infty$  é igual a 1.

Isto porque a área sob a curva neste intervalo é  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$  que é

calculada assim:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -e^{-x} \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ -e^{-b} - \left( -e^0 \right) \right] = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -e^{-b} + 1 \right] = 1 \end{aligned}$$

Concluí-se assim que a intuição é um componente necessário mas não suficiente no raciocínio lógico-matemático e que o rigor do cálculo pode adquirir maior beleza, leveza, confiabilidade e comunicabilidade quando se constrói novos paradigmas pedagógicos totalmente compatíveis com a realidade do século XXI.

## 1.2. Um Breve Esboço Histórico

O cálculo tem em Newton e Leibniz seus criadores, no século XVII, com trabalhos independentes.

Issac Newton (1642-1727), filho póstumo de um proprietário agrícola, nasceu em Woolsthorpe, na Inglaterra. Ao terminar seus estudos de graduação na Universidade de Cambridge, devido a uma peste bubônica, recolheu-se em sua aldeia natal durante o período de 1665-1666. Foi nessa época que sua criatividade atingiu o auge. As grandes idéias que o celebrizaram foram : a teoria da gravitação, da ótica e do cálculo. No cálculo, foi até ao cálculo da tangente a uma curva num de seus pontos e o respectivo raio de curvatura.

A polêmica entre Newton e Gottfried Wilhwlm Leibniz (1646-1716) em torno da paternidade do cálculo, ocorreu porque Newton rejeitava patologicamente, as controvérsias e por isso as datas de suas descobertas não são as datas de suas publicações.

Em Method of fluxions (EVES, 1995, p. 439), escrito em 1671 e publicado em 1736, Newton chama variável  $x$  de fluente,  $\dot{X}$  de taxa de variação do fluente, o mesmo que hoje é chamado de derivada de  $x$  em relação a  $t$  e fluxo do fluente era portanto  $\ddot{X}$  e assim por diante.

Um incremento infinitamente pequeno de um fluente  $x$ , num intervalo de tempo infinitamente pequeno  $0$ , foi denominado de momento de um fluente. Assim, o momento do fluente  $x$  era escrito como  $\dot{X}0$  e Newton afirmava que, sempre que  $\dot{X}0$  aparecesse multiplicado por potências de  $0$  maiores ou iguais a 2, seriam desprezados, por exemplo:

Dada a equação  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2 = 0$ , substituindo  $x = x + \dot{X}0$  e  $y = y + \dot{Y}0$ , tem-se:

$$\left(x + \dot{X}0\right)^2 + \left(y + \dot{Y}0\right)^2 - 4\left(x + \dot{X}0\right) - 2\left(y + \dot{Y}0\right) + 2 = 0$$

$$x^2 + 2x\dot{X}0 + (\dot{X}0)^2 + y^2 + 2y\dot{Y}0 + (\dot{Y}0)^2 - 4x - 4\dot{X}0 - 2y - 2\dot{Y}0 + 2 = 0$$

como  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2 = 0$  tem-se,

$$2x\dot{X}0 + 2y\dot{Y}0 + (\dot{Y}0)^2 + (\dot{X}0)^2 - 4\dot{X}0 - 2\dot{Y}0 = 0$$

como  $(\dot{Y}0)^2 = (\dot{X}0)^2 = 0$ , tem-se:

$$2x\dot{X}0 + 2y\dot{Y}0 - 4\dot{X}0 - 2\dot{Y}0 = 0 \text{ dividindo tudo por 0 tem-se:}$$

$$2x\dot{X} + 2y\dot{Y} - 4\dot{X} - 2\dot{Y} = 0, \text{ que é exatamente a derivada da equação}$$

dada  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2 = 0$ .

Pode-se dizer que Newton é um dos maiores sábios da humanidade. Há quem diga, como Alexandro Pope, que: "*A natureza e as leis da natureza jaziam ocultas na noite; Deus disse, 'Faça-se Newton', e a luz se fez*". (EVES, 1995, p.441).

Leibniz diz que : "*Tomando a matemática desde o início do mundo até a época em que Newton viveu, o que ele fez foi, em grande escala, a metade melhor*". (EVES, 1995, p. 441).

Já Newton apud AVES (1995, p. 441) em sua modéstia avalia seu próprio trabalho dizendo:

*“Não sei o que o mundo pensa de mim; mas eu mesmo me considero tão somente um menino que brincando na areia da praia, se diverte ao encontrar um seixo arredondado ou uma concha mais bonita que as comuns, enquanto o grande oceano da verdade jaz indecifrável ante meus olhos”.*

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), com pai e avô paterno professores universitários, nasceu em Leipzig e além de matemático foi jurista, historiador, filólogo e teólogo.

Leibniz definia a derivada como o quociente de grandezas infinitamente pequenas, e denotava-as como  $dx$  e  $dy$ , enquanto que Newton a entendia como limite de um quociente que tende a zero,  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , por isso anotava

derivada como  $\dot{X}$ ,  $\dot{Y}$  e  $\frac{\dot{Y}}{\dot{X}}$  enquanto que a notação de Leibniz para  $\frac{\dot{Y}}{\dot{X}}$  é

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx}$$

Em 1672, Leibniz conheceu Christiaan Huygnes (1629 – 1695), em uma de suas missões diplomáticas em Paris, o qual o influencia a pesquisar matemática com mais afinco, e aconselhado pelo novo amigo leu Pascal. Inspirado nesta obra (Publicações sobre Problemas Geométricos) definiu “triângulo característico”, assim: Dada uma curva  $Z$  e um ponto  $P$  qualquer da mesma, o triângulo retângulo formado por lados infinitesimais,  $dx$ ,  $dy$  e  $ds$  formado pelos pontos  $A B P$ , na figura abaixo, é um triângulo característico.

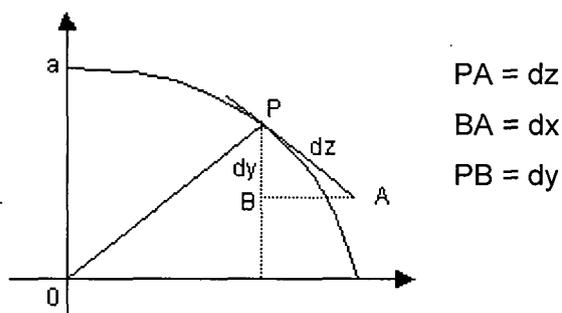


Figura 2 – Triângulo característico

Com essa idéia do triângulo característico Leibniz, antes de deixar Paris, tinha descoberto o teorema fundamental do cálculo e muito do seu Cálculo Formal.

Como conseqüência de sua personalidade e de seus estudos, sonhava com a reunião das seitas conflitantes, cristianização da China e concebia planos de uma teoria lógico-matemática, padronizada pela lógica simbólica e linguagens formais. Em outras palavras, ele antevia a criação da informática para a unificação do pensamento humano.

Neste sonho Leibniz foi antecedido por Descartes em 10 de novembro de 1619, que quando adentrava em sua sala, teve uma visão e em seguida, exausto, dormiu e teve três sonhos e os interpretou como a unificação e o esclarecimento do conhecimento através de um único método: o método da razão.

A geração atual está implementando, em todas as áreas, o sonho desses gênios, com o advento da informática.

A integral foi definida como soma, por volta de 1820, pelo matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857).

Em 1854, George Friearich Riemann (1826 – 1866), matemático alemão, realizou estudos de um aprofundamento impar sobre integral e é a ele que é devido as somas de Riemann e Integral de Riemann.

Riemann estabeleceu os critérios de integrabilidade de uma função partindo da exigência de convergência para as suas “somas de Riemann”.

E assim, depois de 150 anos do surgimento do cálculo no século XVII com Newton e Leibniz iniciava em 1820 a formulação rigorosa do cálculo e o surgimento da Análise.

### **1.3. Formulação, Delimitação e Alcance do Problema**

Uma das causas da dificuldade que os alunos do Curso de Matemática da Universidade Federal de Rondônia apresentam diante do grau de abstração exigido pela disciplina Análise Real, é a pseudo-aprendizagem dos conceitos de limite, derivada e integral que fazem parte da ementa de cálculo diferencial e integral de uma variável real e são pré-requisitos importantes e indispensáveis para a construção do pensamento abstrato inerente à Análise.

Esta dificuldade não é sem motivo, porque a história nos mostra que até a comunidade científica demorou 150 anos para iniciar a formulação rigorosa do cálculo, mesmo com toda dedicação e a excelente compreensão intuitiva que possuíam seus sábios.

A elaboração de um material didático específico, em forma de jogos educacionais computadorizados é uma alternativa para que o gargalo do curso de matemática na Universidade Federal de Rondônia seja diluído.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo Geral

- Construir o protótipo de um software educacional com experiências matemáticas, em forma de jogos computacionais, dentro do conceito de: limite, derivação e integração de funções de uma variável real.

### 1.4.2. Objetivos Específicos

- Propiciar condições para que o educando desenvolva a prontidão necessária à transposição da fase intuitiva para a fase da abstração rigorosa, de forma saudável, contínua, prazerosa e sem bloqueios;
- Tratar o intelecto de forma racional fundamentando-se nos esquemas lógicos;
- Facilitar a compreensão dos conceitos e estruturas matemáticas; através de jogos didáticos;
- Eliminar os bloqueios adquiridos no decorrer do processo ensino-aprendizagem dos conceitos de limite, derivação e integração, evitando assim um desgaste que leva o aluno ao desinteresse e conseqüentemente à evasão, reprovação e repetência.

## 1.5. Organização do Trabalho

Mediante a formulação, delimitação e alcance do problema e da definição dos objetivos deste trabalho, já especificados no capítulo I, o capítulo II foi utilizado para fazer uma fundamentação teórica relativa ao ensino da matemática, ao ensino de limite, derivada e integração, noções básicas indispensáveis no tratamento rigoroso dado ao cálculo diferencial e integral pela disciplina de análise real do curso de licenciatura em matemática, através de jogos computacionais, como uma alternativa refinada pela modernidade revolucionária do século XXI.

Ainda no capítulo II, é apresentada uma modelagem matemática iniciando com o estudo de limite, de derivada e de integração, de forma intuitiva e rigorosa, através de definição generalizada, finalizando com uma abordagem especial para os paradoxos, questionamentos filosóficos que põem em cheque o domínio do postulado V de Euclides que afirma: ...*“O todo é sempre maior que qualquer uma de suas partes próprias”*...(AABOE, ASGER: 1984), fazendo com que essa verdade fique restrita aos conjuntos finitos.

No capítulo III é feita a introdução e descrição dos jogos  $CAL_{\infty}$ .

Finalizando com o capítulo IV, destinado às conclusões e recomendações.

## II - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1. Jogos Empresariais

A teoria dos jogos surgiu com John Von Neumann em 1928. O primeiro livro da série bibliográfica importante nesta área foi, A Teoria dos Jogos e o Comportamento Econômico, escrito por Neumann e o matemático e economista Oskar Morgenstern.

A solução de questões como:

1. Tomar decisão diante de estratégias escolhidas por outros e com dados aparentemente incompletos;
2. Tomar decisão estratégica sobre cooperar ou agir agressivamente na busca de recompensa e detectar quais as hipóteses que implicam em agressão racional ou cooperação racional;
3. Codificar as relações sociais e relacioná-las com as regras morais, como comportamento humano real, com o comportamento racional egoísta ou não; e
4. Quando e quanto as pessoas são mais cooperativas e/ou racionais e/ou agressivas;

exige de especialistas, uma modelagem com fundamentação teórica profunda, refinada e interdisciplinar.

As questões sérias como competição num mercado globalizado, onde permanecer na posição de preferência é um desafio; são problemas de maximização de recompensas e minimização de perdas, de um grupo que toma decisões que podem ser resultante de observações estratégicas simples e/ou inovadoras, mas podem chegar a modelos de programação linear, de equações diferenciais onde as variáveis sofrem interferências determinantes de todas as áreas inclusive da comportamental.

Na vida, a todo o instante faz-se opções, portanto o jogo está presente em todas as atividades do homem e é por isso que a Teoria dos Jogos foi bem recebida e tem revolucionado os paradigmas em todos os ramos da ciência.

Em 1955 foi desenvolvido o Rand Corporation Game Monopologs que servia para simular o abastecimento da Força Aérea Americana e ser empregado em negócios em geral, mas o primeiro jogo considerado Jogo Empresarial foi o Top Management Decision Game (1956), levado para a Universidade de Washington em 1957, para ser incorporado como método de ensino em sala de aula.

Em resposta às necessidades dos sistemas, dos usuários e usuários em potencial, os modelos matemáticos e todos os outros estudiosos de Teoria dos Jogos foram se aperfeiçoando e aproximando cada vez mais estes jogos da realidade das empresas.

A simulação, objetivando quantificar o maior número possível de fatores e relações de forma que a atenção da administração fosse focalizada nos

riscos reais dos empreendimentos que passam por uma análise e julgamento cuidadosos, ganhou com o progresso dos computadores e deu um salto qualitativo e quantitativo através da simulação digital, programação matemática, teoria das filas, modelos probabilísticos e técnicas pedagógicas que aliadas foram responsáveis por todo atual desenvolvimento dos Jogos Empresariais que na computação, agora, é uma das áreas da Inteligência Artificial que mais tem sido explorada.

A relação promissora entre jogos e computadores existe desde quando os computadores foram criados.

O século XIX foi premiado pelos trabalhos de Charles Babbage, quando pensou em programar sua Máquina Analítica para jogar xadrez e mais tarde em construir uma máquina para jogar o jogo da velha. Na década de 50, Claude Shannon e em seguida Alan Turing descreveram mecanismo que poderiam ser usados em um programa para jogar xadrez, mas o primeiro programa operacional para jogar damas aprendendo com seus erros, deve-se a Arthur Samuel, no início dos anos 60. No entanto, hoje já existem programas que se baseiam em modelos de redes neurais, tentando explorar o funcionamento da mente, levando até a descoberta de que os neurônios são dispositivos extremamente lentos, quando comparados a computadores digitais.

Os jogos de empresa no ensino são alternativas que a escola abraça como reforço para que a necessidade de aprender perca a passividade e se transforme na vontade de aprender/jogar, e o estudante/jogador, cria as estratégias e age tomando decisões que são avaliadas a cada passo/jogada, sempre enriquecidas pelas experiências dos grupos.

Hoje os jogos podem contar com recursos multimídia, proporcionando acesso fácil a sons, imagens, vídeos, hipertexto e interatividade, a realidade virtual que explode criando ambientes multisensoriais e a Internet que derruba fronteiras eliminando os muros das escolas e expandindo o Ensino à Distância.

## **2.2. Tecnologia e Educação**

A era da informação versus revolução tecnológica, desafia os educadores, conscientes de que, somente adquirir computadores, construir softwares e criar novas linguagens, é aderir ao deslumbramento acrítico pela modernização sem adentrar no campo da ação-reflexão. Isto é instrumentalizar, o que não é o mesmo que renovar, criar e inovar.

Esta era exige mudanças multidimensionais, por exemplo: na produção de referenciais teórico-metodológicos para a aplicação nas salas de aula do ensino regular e para a especialização e capacitação de professores, onde esta produção tem como alvo a educação do presente, com olhos no futuro, onde o passado contribui para esta construção, delineando a clientela e o ambiente, os verdadeiros avanços, alguns recuos e muitos desvios, o que confere a estes projetos, características específicas e em alguns aspectos até mesmo a unicidade.

Sendo o Brasil, um país onde a educação recebe as sobras do sistema econômico, dominado pelo capitalismo selvagem, num panorama onde o salário dos professores tem patamares inaceitáveis; as condições de vida da população encontram-se em deteriorização; sendo o terceiro no mundo em desemprego; com professores mal qualificados e não qualificados e tratados como culpados pela repetência, evasão e todos os insucessos do sistema; é que

bons projetos em Tecnologia Educacional foram totalmente impedidos de massificar o uso do computador nas escolas.

A era dos computadores atinge a humanidade de forma e intensidade nunca vista, pois amplia e/ou substitui as capacidades intelectuais do homem de maneira muitas vezes imprevisíveis.

Assim a escola enfrenta, aos tropeços, este grande desafio, devido a toda esta fragilidade que o contexto a submete, tendo como única saída a parceria com o empresariado que só começa a participar quando percebe que, falência maior no sistema educacional compromete consideravelmente a qualidade da sua produção, pois necessitam de mão de obra cada vez mais refinada.

Agora ações deverão ser definitivamente implementadas pois a escola encontra-se sitiada.

Com a perda do poder pedagógico da televisão por vários motivos e principalmente por ser um recurso onde a prática mantém o aluno passivo. Com a aderência administrativa recebida pelo computador que também invade de forma avassaladora o dia a dia dos alunos, e respondem a demandas científicas e tecnológicas em todos os níveis, tanto econômico como social e se apresenta como recurso de grande valia para os professores, que estão substituindo o receio da perda de espaço pela sensação de uma grande, prazerosa e próspera aliança, é que a tecnologia está atingindo a escola e orientando a educação do indivíduo para que ele possa, além de criá-la, desfrutar dela e refletir sobre as mudanças que ela provoca de forma desenfreada e conflituosa, oferecendo a todos um mundo de incertezas e riscos, exigindo um sujeito criativo, que se

apose da tecnologia, compreenda-a e assuma o seu comando de forma plural e multidimensional.

A Escola como tutora de processos intelectuais tem que capacitar os professores, que atualmente para não serem marginalizados pela globalização, assumem o ônus como autodidatas numa escola onde Papert penetrou aliando-se a Piaget e ao computador, que em rede, é a grande onda que bane a ignorância e o isolamento, e quebra as frágeis barreiras dos que encobrem a verdade para manipular, pelo poder que o desconhecimento dos dominados lhes outorga.

A Educação para uma Escola renovada, apoia-se no trinômio: professor-aluno-computador, onde o professor é o facilitador, o aluno o construtor do seu próprio conhecimento e o computador um auxiliar, maior que um catalizador, na interação entre os três, o objeto de estudo, as estratégias pedagógicas, o método e o conteúdo.

### **2.3. Ensino da Matemática**

Aprender não significa internalizar cópias da realidade externa, mas criar estruturas lógicas para que o estudante atue nesta realidade de formas cada vez mais flexíveis e complexas.

O conhecimento e a sabedoria são buscas contínuas do indivíduo para adquirir capacidade de adaptação ao meio ambiente e restabelecer seu estado de equilíbrio interno perdido, ao deparar-se com a necessidade de resolver

novas situações-problema na tentativa incessante de entender o mundo ao seu redor, compreender seus eventos e sistematizar suas idéias num todo coerente.

O ser humano herda estruturas sensoriais e neurológicas que o predispõe a criação dos esquemas ou estruturas mentais que quando estimuladas tanto pelo plano físico como social promovem o desenvolvimento da inteligência. Portanto, o sujeito não herda a inteligência ele recebe hereditariamente a capacidade de aprendizagem que deverá ser desenvolvida e exercitada nas experiências do dia a dia.

A modificação e adaptação desses esquemas é que enriquecem tanto as atitudes comportamentais como a vida mental do ser humano, provocando um contínuo desenvolvimento e enriquecimento desses esquemas, sendo esta a essência do crescimento mental do ser humano.

Esse entendimento deve nortear toda atividade educacional desde a elaboração dos currículos, programas e atividades em sala de aula, em grupo ou individual, tendo o aluno como participante ativo no processo.

Para o professor interessado em aprendizagem inteligente, isto é, na formação de estruturas conceituais, comunicadas e manipuladas por meio de símbolos, a matemática é um dos melhores e dos mais concretos exemplos.

O empirismo chega a colocar, equivocadamente, a Matemática como um divisor de águas entre as pessoas, isto é, “as que podem fazer matemática” e as que “não podem ou pensam que não podem e se bloqueiam totalmente ao ver um símbolo matemático”.

Modificar esta postura é um objetivo do educador e para isso deverá

concentrar-se cuidadosamente nos porquês dos fracassos e insucessos que não poderão receber uma avaliação punitiva, mas deverão ser vistos como janelas que os alunos abrem para que o professor, como nos programas de realidade virtual, penetre nas suas estruturas mentais e desbloqueie seus esquemas.

O problema particular da Matemática e o seu poder, estão vinculados a sua grande abstração e generalização, construídas por todas as gerações de seus estudiosos.

Um conceito matemático ao ser comunicado através de uma definição deve fazer-se acompanhar de uma bateria de exemplos e contra-exemplos e somente após assegurar-se que os conceitos que lhe servem de pré-requisito já estejam formados na mente do aluno.

Um bom professor deve estimular o aluno a elaborar uma definição estudando com ele uma coleção adequada de experiências matemáticas vivenciadas e formada de exemplos e contra-exemplos.

No ensino de Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável real tem-se um grande nível de abstração que é pré-requisito de Análise Real, uma disciplina que trabalha a formulação rigorosa do Cálculo.

Para exemplificar esta abstração, pode-se citar a definição de limite de uma função  $f$  de uma variável real  $x$ , quando  $x$  tende para  $a$ , isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - b| < \varepsilon,$$

sendo  $\varepsilon$  e  $\delta$  tão pequenos quanto se queira.

Para que o aluno chegue a uma efetiva aprendizagem da definição

acima, ele deverá por si mesmo e com a ajuda do professor, construir um sistema conceitual formado de conhecimentos básicos anteriores que irão servir de suporte para esse processo e ao mesmo tempo fará com que ele se sinta estimulado e seguro para dar continuidade a novas aprendizagens.

Até mesmo Newton, em sua modéstia, soube valorizar seus antecessores, isto é, as estruturas conceituais dos primeiros matemáticos e cientistas quando disse: *“Si yo he visto un poco más lejos que otros, es por haberme apoyado sobre hombros de gigantes”*. (SKEMP, 1993, p. 33).

O professor e a didática por ele utilizada poderão facilitar e/ou acelerar o processo ensino aprendizagem, desde que ele não cometa o erro de tornar-se passivo e nem adote atitudes metodológicas utópicas, intervindo aleatoriamente para imprimir a marca da sua vontade e da sua própria história, sem ter o conhecimento do mundo do aluno e das etapas do desenvolvimento do mesmo.

A mesma atitude pedagógica deverá ser assumida quando da apresentação da definição de derivada de uma função  $f$  no ponto de abscissa  $x_0$ , isto é,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

que aplicando a definição de limite pode ser escrita como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, se } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ então}$$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

Da mesma forma procede-se ao afirmar que em determinadas condições a integral de uma função  $f(x)$  é um limite, isto é;

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x$$

e que se é um limite então pode-se reescrevê-la da seguinte forma:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que, se  $\|\Delta\| < \delta$  então,

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon, \text{ para } \|\Delta\| = \max\{x_i - x_{i-1}\}$$

Para se promover à aprendizagem de conceitos matemáticos, que possuem alto nível de abstração como limite, derivada e integral, deve-se lançar mão de jogos para que a força do lúdico transforme o que deveria ser aborrecido, imposto e maçante, em uma atividade habitual e prazerosa, criando analogias, convenções, linguagem própria e competência para superar-se e adaptar-se continuamente.

Os jogos diante da necessidade de solucionar uma situação-problema, constroem possibilidades de adaptação por meio de integração pelas ações do mundo exterior e o ser (assimilação) e/ou por modificações internas das estruturas mentais (acomodação). (MACEDO, et all. 1997, p. 127 – 128).

Os jogos apresentados neste trabalho privilegiam a repetição, a analogia e o caráter coletivo para aqueles que querem jogar, nas formas de jogos de exercícios, jogos simbólicos, jogos de regra e de construção.

Aqui, a repetição tem caráter lúdico, ou seja, sentido funcional; é a

alimentação do processo ensino-aprendizagem, é fonte de prazer, de compreensão de ações em forma de esquemas, e “não repetir” seria punição, causaria dor, e levaria o sistema a óbito.

As analogias por assimilação deformantes, através de inovações e modificações, produzem linguagens, criam convenções e propiciam a teorização.

As estruturas dos jogos de exercícios, que envolvem o “como fazer”, e as dos jogos simbólicos, que são a base do “porquê fazer”, são adicionadas às estruturas dos jogos de regras que se fundamentam na coordenação entre o “como e o porquê” através da assimilação recíproca, onde as regras, os critérios de vitória ou derrota, regulam e direcionam a conduta dos jogadores que deverão ter competência majorante, a cada jogada, a cada partida, e em cada situação desafiadora da vida saiba coordenar pontos de vista diferentes, raciocinar por recorrência, e conhecer os jogos no sentido simbólico e operatório.

Os jogos de construção possibilitam a reconstrução do real e propiciam o desenvolvimento da imaginação, da criatividade, da vivência antecipada do real, subordinam a forma ao conteúdo, dão ênfase ao processo e na matemática, promovem a problematização, enriquecida pelo estabelecimento de relações e necessidades, através da superação de dificuldades que são apresentadas gradativamente no contexto do jogo.

Antes mesmo que os jogos vencessem os radicais inflexíveis, de esquemas cristalizados e pudessem ocupar o seu devido lugar nos sistemas educacionais, a globalização desencadeou uma grande revolução que provocou uma mudança de paradigma pedagógico, e a escola dos nossos dias está sendo

obrigada a introduzir o computador como ferramenta para facilitar o processo de expressão do pensamento, que Papert denominou de paradigma construcionista, isto é, a abordagem pela qual o aprendiz constrói, através do computador, o seu próprio conhecimento. (VALENTE, 1998, p. 40).

A diferença entre construcionismo de Papert e construtivismo de Piaget está no uso do computador. No construcionismo o aluno interage com os objetos em estudo através do computador, usando uma linguagem de programação, onde as idéias são descritas e o computador as executa e o aluno, após uma fase de reflexão, realiza um processo de depuração de sua idéia original tanto conceitualmente, como estrategicamente, enquanto que no construtivismo de Piaget o aluno observa e descreve o objeto sem utilizar o computador como mediador.

Para que o computador seja usado de maneira efetiva na educação, necessita-se do microcomputador, do software educativo, do professor capacitado na utilização do micro-computador como meio educacional e do aluno, todos como ingredientes de igual importância no processo e numa relação de total interação.

No momento em que o aprendiz depura as dificuldades de compreensão, ou quando deseja majorar seus conhecimentos, o professor estará sendo testado em sua prática pedagógica através de um grande desafio: “como, quando, quanto e onde” interferir para complementar e/ou impulsionar o processo cognitivo vivido pelo aluno.

As atividades complementares desenvolvidas no computador e/ou fora dele implicam em ajustes que terão que atender as especificidades do objeto em estudo, as diferenças individuais dos alunos e os diferentes contextos de aprendizagem.

Sob o olhar avaliativo, contínuo e dinâmico do professor o aluno deverá evoluir na aprendizagem dos conceitos em estudo e o professor, longe de ser contemplativo, deve crescer no entendimento perfeito e claro de como e porquê o aluno em observação está aprendendo ou não, numa interrelação de construção ativa do saber.

Para isso os erros e acertos de cada estudante oferecem as pistas que o professor necessita, para redefinir e adaptar suas estratégias e o uso dos recursos pedagógicos de maneira efetiva, onde trabalhos individuais e/ou em pequenos grupos devem ser desenvolvidos continuamente obedecendo um plano norteador.

Nesse processo o professor não será apenas um experimentador mas deverá ser um habilidoso, ardiloso e perspicaz parceiro no jogo da construção do saber que, atento, não permite que estratégias massificadas, impeçam o aluno de construir o seu conhecimento e ser feliz a um só tempo.

Justifica-se assim o trabalho de elaboração de um software para ser usado no ensino de cálculo, mais especificamente como suporte na aprendizagem dos conceitos de limite, derivada e integral, de funções de uma variável real.

## 2.4. Modelagem Matemática

### 2.4.1. Limites – Noção Intuitiva

Nesta seção são elaborados modelos matemáticos para a resolução de problemas que nos leve intuitivamente à noção de limite.

#### Problema I

Calcular a área de um círculo de raio  $R$  usando a aproximação por polígonos regulares, inscritos no círculo.

#### Resolução

Seja  $A$  a área do círculo e  $A_n$  a área do polígono regular de  $n$  lados inscritos no círculo.

Sabe-se que:

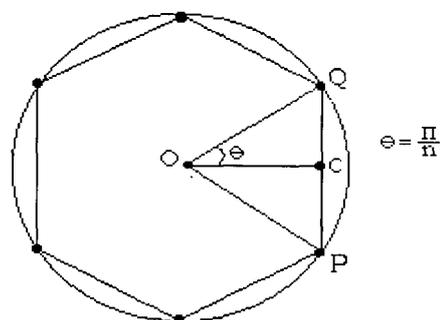


Figura 1 – Hexágono regular inscrito

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

$$A_n = n \times \text{área do triângulo POQ} =$$

$$= n \times (2 \times \text{área do triângulo POC}) =$$

$$= 2n \times \text{área do triângulo POC} =$$

$$= 2n \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{PC} \times \overline{OC}\right) =$$

$$= \boxed{n \times \overline{PC} \times \overline{OC}} \quad \textcircled{1}$$

$$\text{Mas } \overline{PC} = R \sin \theta$$

$$\overline{OC} = R \cos \theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{n} \therefore n = \frac{\pi}{\theta}$$

Substituindo estes valores em  $\textcircled{1}$  tem-se

$$A_n = \frac{\pi}{\theta} R \operatorname{sen} \theta \cdot R \cos \theta$$

$$A_n = \frac{\pi}{\theta} R^2 |\operatorname{sen} \theta \cos \theta| \quad \text{para } \forall \theta = \frac{\pi}{n} \text{ ou, como}$$

$$\frac{\operatorname{Sen} 2\theta}{2} = \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \theta$$

Substituindo (3) em (2) tem-se:

$$A_n = \frac{\pi}{\theta} R^2 \frac{|\operatorname{sen} 2\theta|}{2}$$

$$A_n = \pi R^2 \frac{|\operatorname{sen} 2\theta|}{2\theta}$$

Quando  $n$  tender para infinito,  $\theta = \frac{\pi}{n}$  tenderá para zero, portanto,

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{\theta \rightarrow 0} \pi R^2 \frac{|\operatorname{Sen} 2\theta|}{2\theta} = \\ &= \pi R^2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Sen} 2\theta}{2\theta} = \pi R^2 \cdot 1 = \pi R^2. \end{aligned}$$

### Problema II

Calcular a área do círculo de raio  $R$ , usando uma aproximação por polígonos regulares circunscritos.

#### Resolução:

Seja  $A$  a área do círculo e  $A_n$  a área do polígono regular circunscrito de  $n$  lados.

Sabe-se que  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$

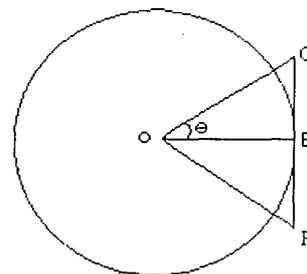


Figura 2 – Triângulo isósceles com vértice no centro e base tangente à circunferência.

$A_n = n \times \text{área do triângulo POQ}$

$= n \times (2 \times \text{área do triângulo EOQ})$

$= n \times 2 \left( \frac{1}{2} \times R \times \overline{EQ} \right) = nR\overline{EQ} = nR (R \operatorname{tg}\theta) =$

$= nR^2 |\operatorname{tg}\theta| = \frac{\pi}{\theta} R^2 |\operatorname{tg}\theta| = \pi R^2 \left| \frac{\operatorname{tg}\theta}{\theta} \right| \therefore$

$$A_n = \pi R^2 \frac{|\operatorname{tg}\theta|}{\theta}$$

$$A = \lim_{\theta \rightarrow 0} \pi R^2 \frac{|\operatorname{tg}\theta|}{\theta} = \pi R^2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{|\operatorname{sen}\theta|}{\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta} =$$

$$= \pi R^2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{|\operatorname{sen}\theta|}{\theta} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{|\cos\theta|} =$$

$$= \pi R^2 \cdot 1 \cdot 1 = \pi R^2, \text{ para } \theta = \frac{\pi}{n}$$

### Problema III

Calcular o perímetro de uma circunferência usando a aproximação por polígonos regulares inscritos.

### Resolução

Seja  $P$  o perímetro do círculo e  $P_n$  o perímetro do polígono regular, inscrito, de  $n$  lados.

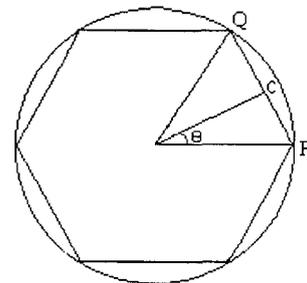


Figura 3 – Exágono regular inscrito

**Sabe-se assim que:**

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$$

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$$

$$P_n = n \times 2 \times \overline{PC}, \text{ mas } \overline{PC} = R \text{ sen } \theta \text{ logo,}$$

$$P_n = n \times 2 R \text{ sen } \theta, n = \frac{\pi}{\theta} \text{ logo,}$$

$$P_n = \frac{\pi}{\theta} 2R |\text{sen } \theta| = 2 \pi R \frac{|\text{sen } \theta|}{\theta} \therefore$$

$$P_n = 2\pi R \frac{|\text{sen } \theta|}{\theta} \text{ e } \theta = \frac{\pi}{n}.$$

$$\text{Como } P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \text{ então } P = \lim_{\theta \rightarrow 0} 2\pi R \frac{|\text{sen } \theta|}{\theta} =$$

$$= 2 \pi R \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{|\text{sen } \theta|}{\theta} = 2 \pi R \cdot 1 = 2 \pi R$$

#### Problema IV

Calcular o perímetro da circunferência de raio R usando uma aproximação de polígonos regulares circunscritos.

#### Resolução:

Seja P o perímetro da circunferência e  $P_n$  o perímetro do polígono regular, de lados, circunscritos.

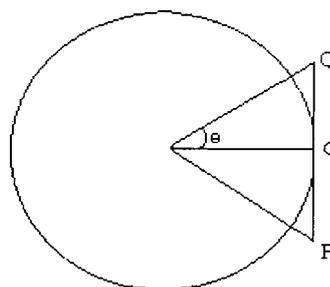


Figura 4 – Triângulo isósceles com vértice no centro e base tangente à circunferência.

Temos que:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$$

$$P_n = n \times 2 \times PC = n \times 2 (R \text{ tg } \theta); \text{ como } n = \frac{\pi}{\theta}$$

$$P_n = \frac{\pi}{\theta} 2R \text{ tg } \theta = 2\pi R \frac{|\text{tg } \theta|}{\theta} = 2\pi R \frac{|\text{sen } \theta|}{\theta} \cdot \frac{1}{|\cos \theta|}$$

$$\text{Portanto, } P_n = 2\pi R \frac{|\text{sen } \theta|}{\theta} \cdot \frac{1}{|\cos \theta|}$$

$$\text{Mas, } P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{\theta \rightarrow 0} P_n$$

$$P = \lim_{\theta \rightarrow 0} 2\pi R \frac{|\text{sen } \theta|}{\theta} \cdot \frac{1}{|\cos \theta|} = 2\pi R \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} =$$

$$= 2\pi R \cdot 1 \cdot 1 = 2\pi R$$

#### 2.4.2. Limite - Definição

O objetivo desta seção é elaborar uma seqüência de exercícios para elucidar a abstração da definição de limite de uma função  $f$  de variável real  $x$ , isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} (fx) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que:}$$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon, \text{ onde } \varepsilon \text{ e } \delta \text{ são números reais}$$

maiores que zero e infinitesimais.

Para isso, trabalha-se com várias definições onde o nível de abstração será gradativamente apresentado. Primeiro evita-se a simbologia matemática de praxe. Assim,

#### Definição I

Limite da função  $f$  quando  $x$  se aproxima de  $a$  é igual a  $b$ , se, e somente se, para todo intervalo  $W$  de centro em  $b$  e raio  $\varepsilon > 0$  no eixo dos  $y$ , existe em correspondência um intervalo  $V$ , de amplitude  $\delta_1 + \delta_2$  no eixo dos  $x$ , que contém  $a$ , tal que:

Se  $x$  for qualquer ponto de  $V$  e diferente de  $a$ , afirma-se que todos os pontos  $(x, f(x)) \neq (a, f(a))$ , do gráfico da função, estarão contidos no interior do retângulo de altura  $2\varepsilon$  e base igual à amplitude de  $V$ , qualquer que seja o valor de  $\varepsilon > 0$  e tão pequeno quanto se queira.

Pela extensão que esta definição apresenta, tornando-se enfadonha, maçante e cansativa, sente-se a necessidade de reduzi-la sem que o rigor e a veracidade da definição sejam prejudicados. Para isso, se lança mão de símbolos matemáticos para substituir expressões a seguir especificadas:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , substituirá a expressão:

“limite da função  $f$  quando  $x$  se aproxima de  $a$  é igual a  $b$ ”

2.  $\Leftrightarrow$ , substituirá a expressão: “se, e somente se”;

3.  $\forall W = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ , substituirá a expressão: “para todo o intervalo  $W$  de centro em  $b$  e raio  $\varepsilon > 0$  no eixo dos  $y$ ”, representada graficamente na figura abaixo:

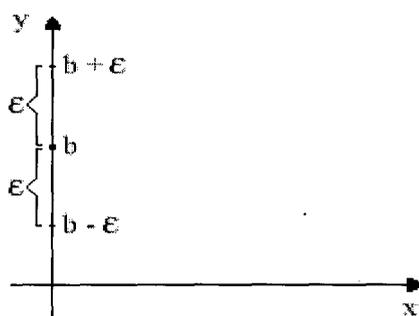


Figura 5 – Representação Geométrica de  $W$ .

4.  $\exists V = (a - \delta_1, a + \delta_2)$ , substituirá a expressão: “existe em correspondência um intervalo  $V$  de amplitude  $\delta_1 + \delta_2$ , no eixo dos  $x$ ”, representada graficamente na figura abaixo:

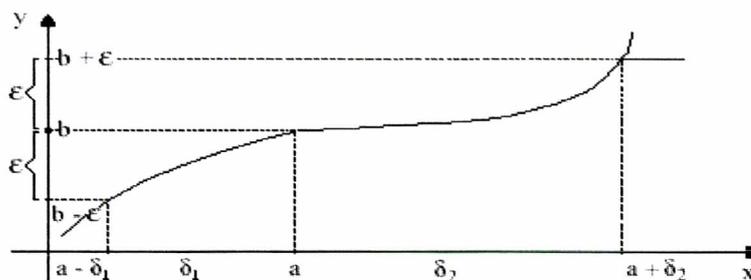


Figura 6 – Representação Geométrica de W e de V para uma curva

5.  $\forall x \in V$  e  $x \neq a$ , substituirá a expressão: “se x for qualquer ponto de V e diferente de a”.

Reescreve-se agora a definição I, usando as expressões simbólicas acima apresentadas.

**Definição I**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow$$

$$\forall W = (b - \varepsilon, b + \varepsilon), \exists V = (a - \delta_2, a + \delta_1) \text{ tal que}$$

$\forall x \in V$  e  $x \neq a \Rightarrow$  os pontos  $(x, f(x)) \neq (a, f(a))$  do gráfico da função f estão todos contidos no interior do retângulo de altura  $2\varepsilon$  e base  $\delta_1 + \delta_2$ , onde  $\varepsilon > 0$  e  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  são números reais quaisquer tão pequenos quantos se queira.

Observa-se nas figuras seguintes do BLOCO I e BLOCO II de exercícios, exemplos e contra-exemplos de situações de existência do  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e de não existência do  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  à luz da Definição I.

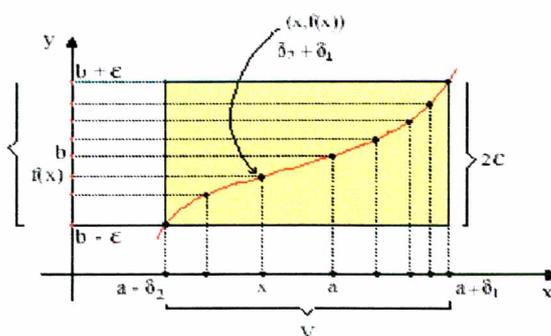


Figura 7 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$

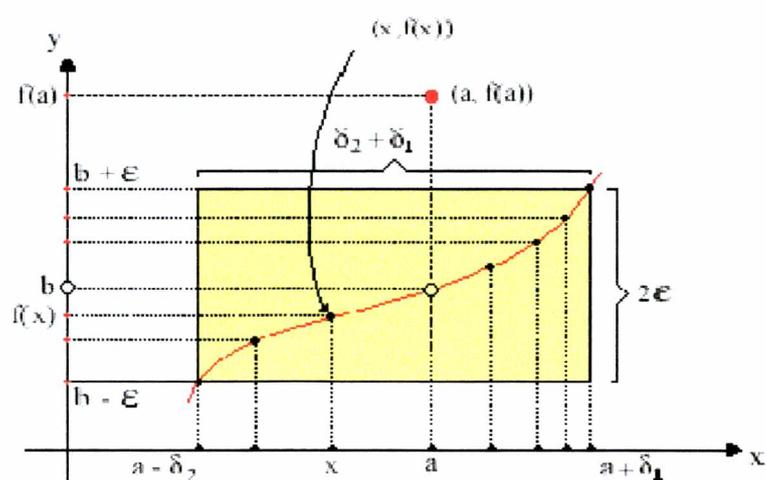


Figura 8 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) \neq b$

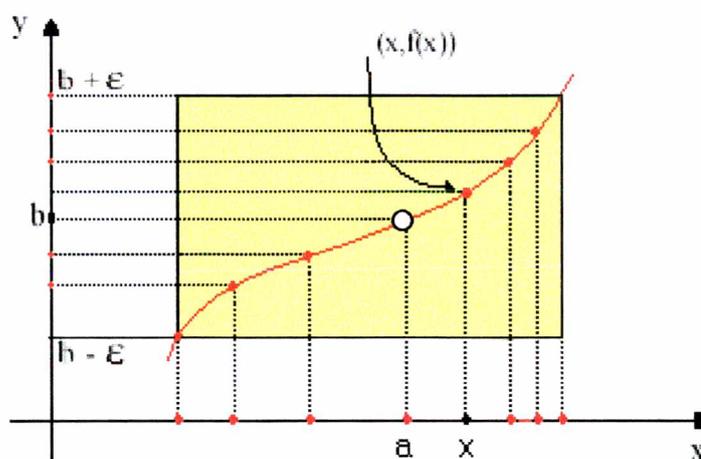


Figura 9 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $\nexists f(a)$

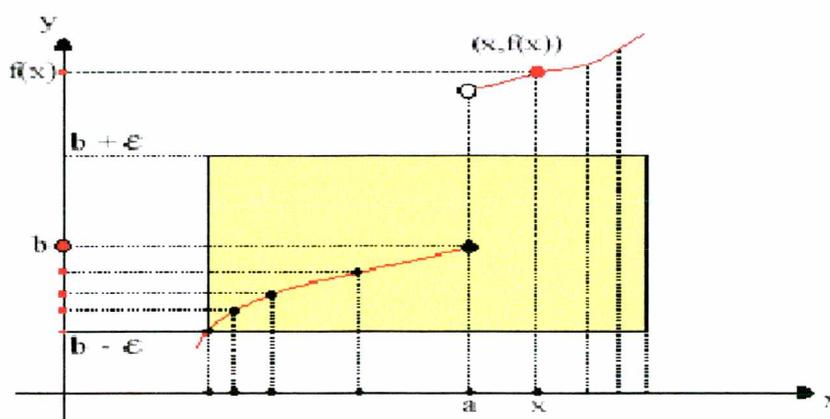


Figura 10 - Curva onde  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) = b$

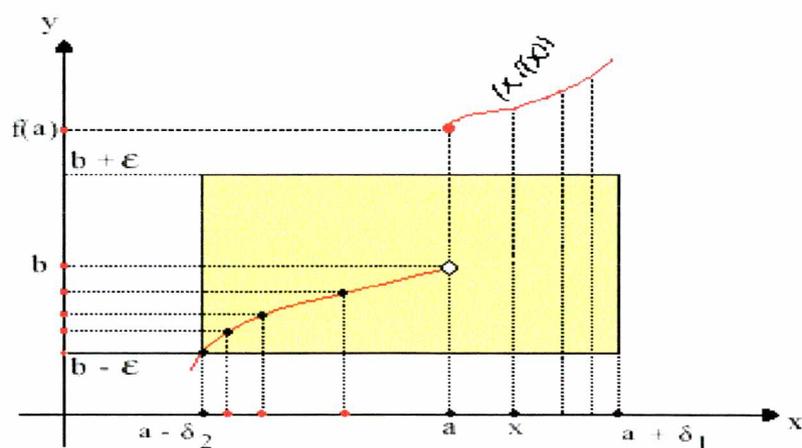


Figura 11 – Curva onde  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) \neq b$

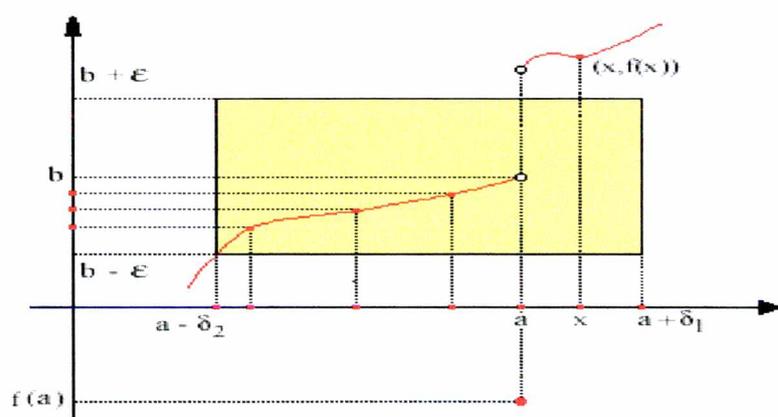


Figura 12 – Curva onde  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) \neq b$

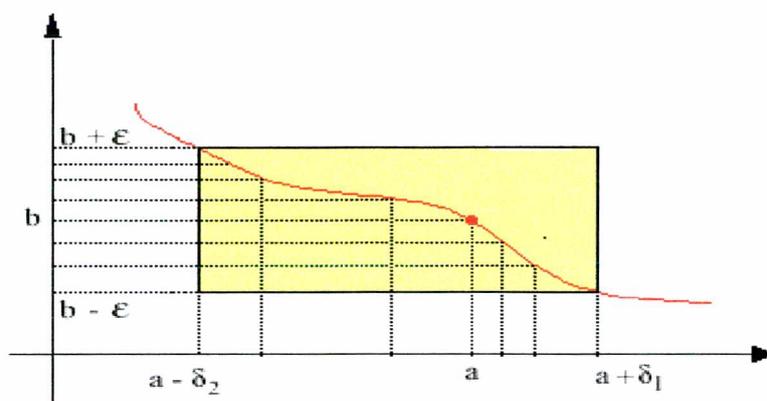


Figura 13 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$

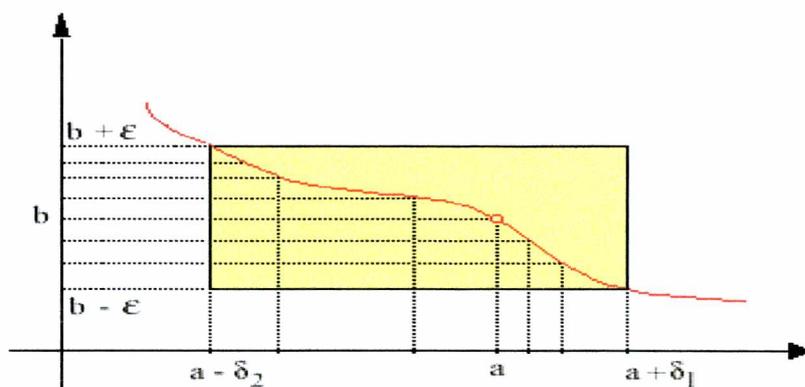


Figura 14 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $\nexists f(a)$

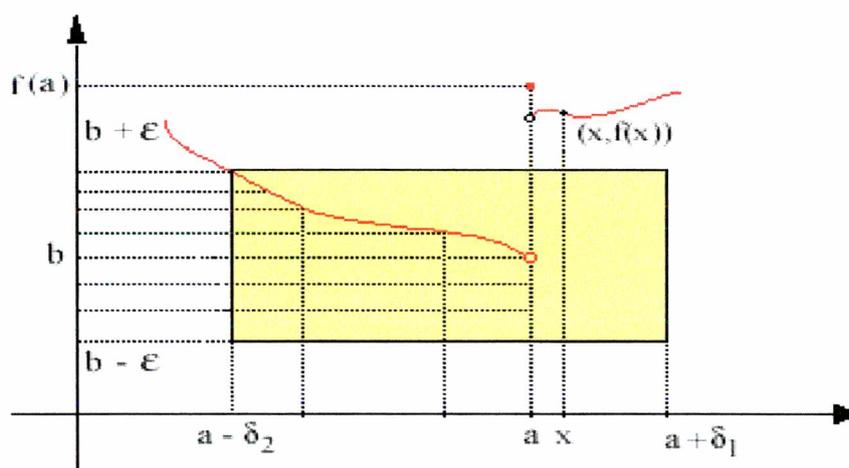


Figura 15 – Curva onde  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) \neq b$

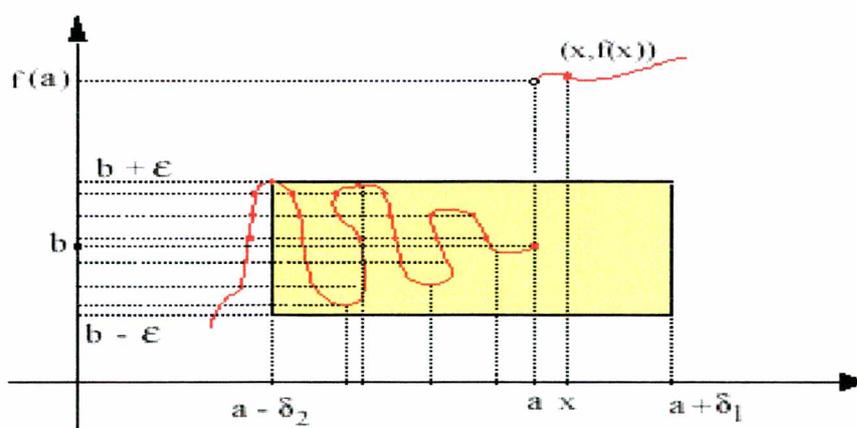


Figura 16 – Curva onde  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) = b$

## BLOCO II

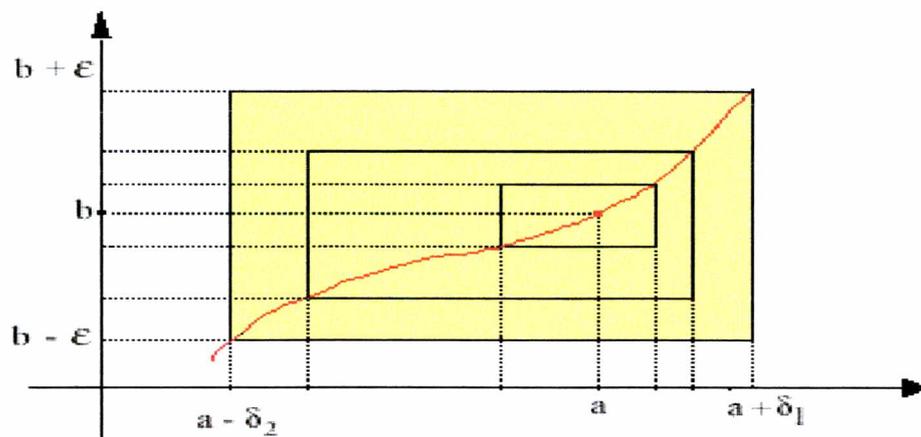


Figura 17 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$  com retângulos de base  $\delta_1 + \delta_2$

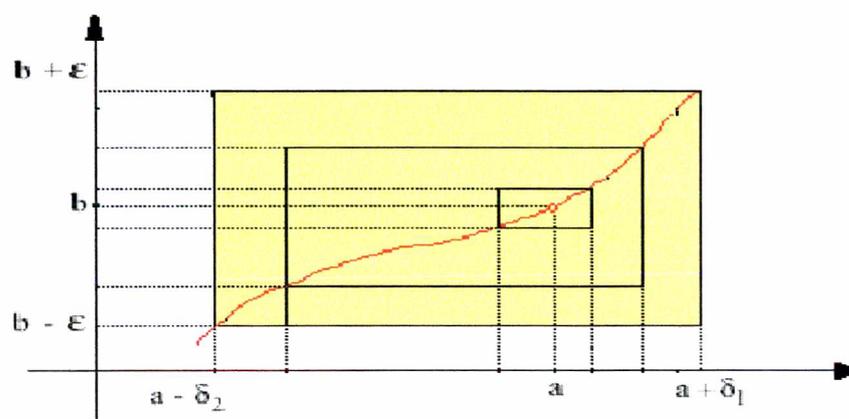


Figura 18 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $\nexists f(a)$  com retângulos de base  $\delta_1 + \delta_2$

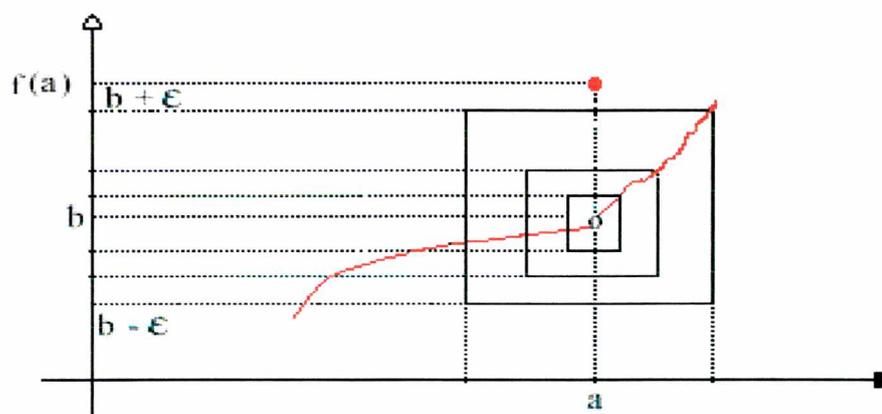


Figura 19 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) \neq b$  com retângulos de base  $\delta_1 + \delta_2$

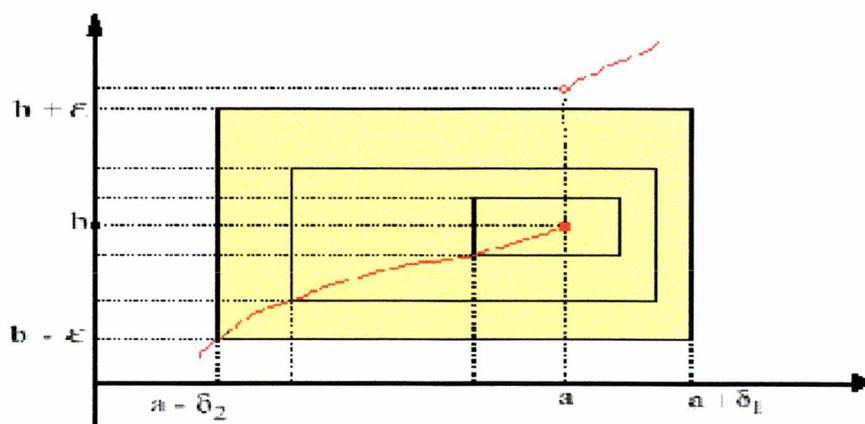


Figura 20 – Curva onde  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) = b$  com retângulos de base  $\delta_1 + \delta_2$

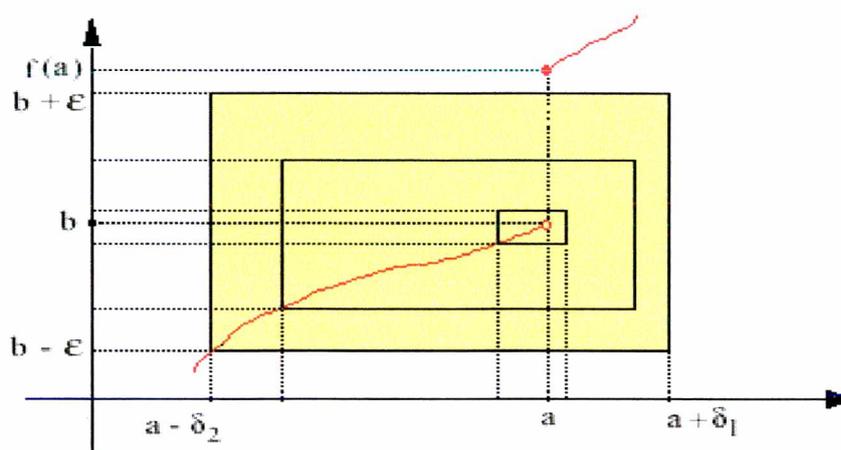


Figura 21 – Curva onde  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) \neq b$  com retângulos de base  $\delta_1 + \delta_2$

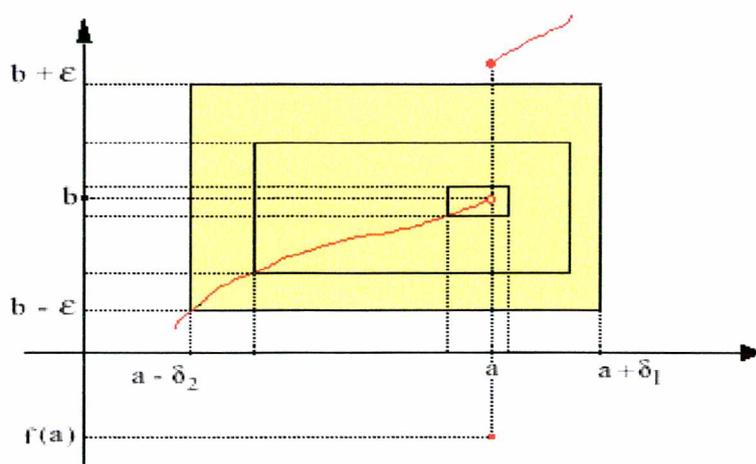


Figura 22 – Curva onde  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) \neq b$  com retângulos de base  $\delta_1 + \delta_2$

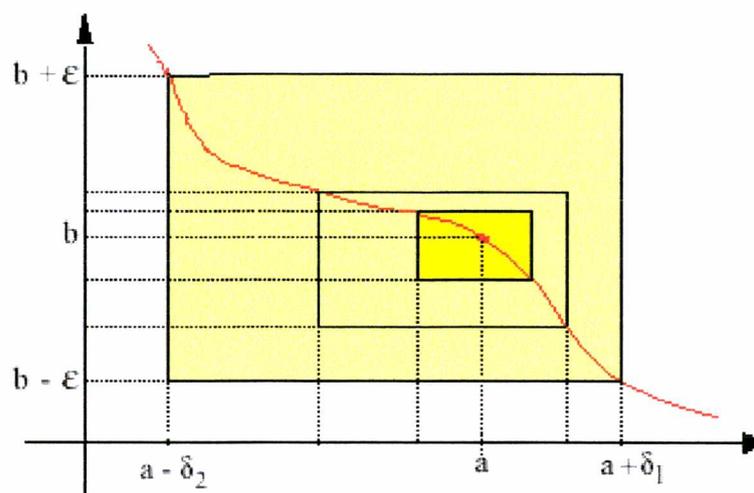


Figura 23 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$  com retângulos de base  $\delta_1 + \delta_2$

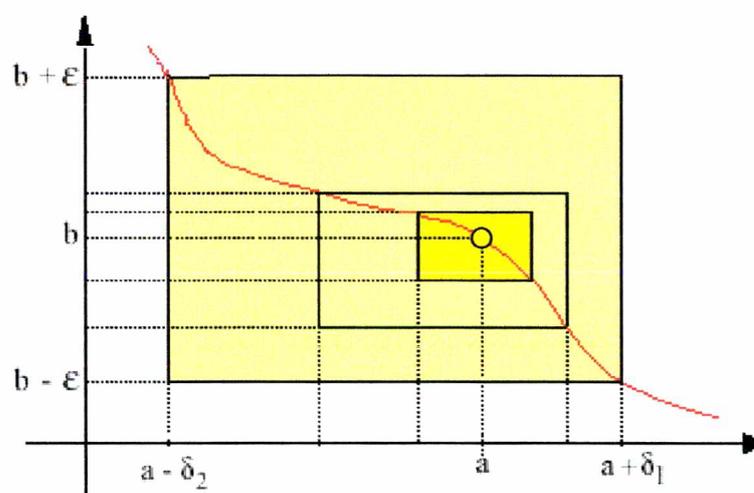


Figura 24 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $\nexists f(a)$  com retângulos de base  $\delta_1 + \delta_2$

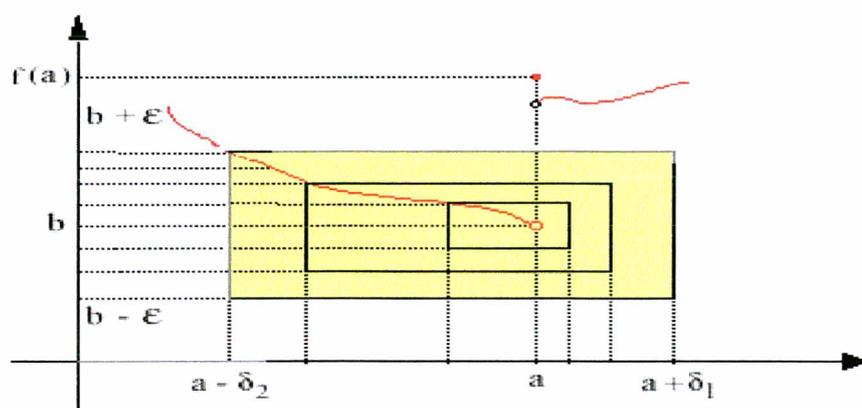


Figura 25 – Curva onde  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) \neq b$  com retângulos de base  $\delta_1 + \delta_2$

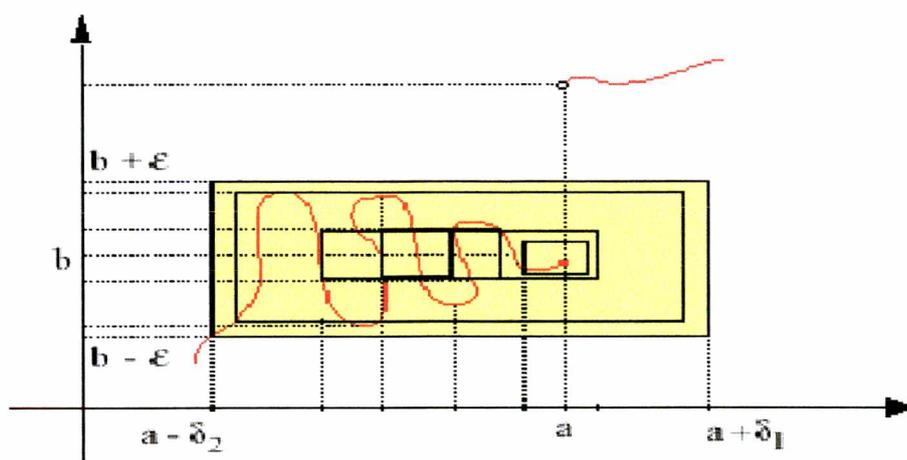


Figura 26 – Curva onde  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) = b$  com retângulos de base  $\delta_1 + \delta_2$

De acordo com essa definição as figuras 7, 8, 9, 13, 14, 17, 18, 19, 23, e 24 são exemplos de situações onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e as figuras 10, 11, 12, 15, 16, 20, 21 22, 25 e 26 são contra exemplos, isto é, situações onde  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Pode ser observado que ao mesmo tempo que  $x \in (a - \delta_1, a + \delta_2)$  e  $x \neq a$  assume valores cada vez mais próximos de  $a$ , os pontos  $(x, f(x)) \neq (a, f(a))$  não conseguem sair do interior do retângulo e também  $f(x)$  não consegue sair do interior de  $w = (b - \epsilon, b + \epsilon)$ , e mais, se  $x$  se aproxima de  $a$  então  $f(x)$  se aproxima de  $b$ , isto é:

**Se  $x \rightarrow a$  então  $f(x) \rightarrow b$**

Então reescreve-se a definição I de forma equivalente.

**Definição II**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow$$

$\forall W = (b - \epsilon, b + \epsilon), \exists V = (a - \delta_1, a + \delta_2)$  tal que:

Se  $x \in V$  e  $x$  se aproxima de  $a$  então  $f(x) \in W$  e se aproxima de  $b$ .

Nas figuras de 7 à 16 do Bloco I de exercícios é constatado as definições I e II para um único retângulo, ou seja, para um único intervalo  $W$ , mas as definições são verdadeiras para qualquer que seja  $W$  com raio  $\varepsilon > 0$  e tão pequeno quanto se queira.

Por isso constrói-se o Bloco II de figuras, onde variando os intervalos e conseqüentemente os retângulos, faz-se  $\varepsilon$  assumir valores positivos e tão pequenos quanto se queira para mostrar que as definições I e II continuam sendo verdadeiras.

Outras constatações podem ser feitas, observando os Blocos I e II de exercícios:

1ª) Por que nas duas definições se tem a condição  $x \neq a$  e /ou  $(x, f(x)) \neq (a, f(a))$  ?

Porque a existência ou não da imagem de  $a$  não consegue influenciar em nada as afirmações:  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e / ou  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Para constatação deste fato observa-se:

- nas figuras 7, 13, 17 e 23:

$\exists f(a)$  e além disso  $f(a) = b$  e também  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  com  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

- nas figuras 8, 18:

$\exists f(a)$  e  $\exists f(a) \neq b$  e também  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  com  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

- nas figuras 9, 14, 19, 24

$$\nexists f(a) \text{ mas } \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

- nas figuras 10, 11, 20, 26

$$\exists f(a) \text{ e } f(x) = b \text{ e } \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

- nas figuras 11, 12, 15, 21, 22, 25

$$\exists f(a) \text{ e } f(a) \neq b \text{ e } \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Concluí-se por isso que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  não é uma propriedade local porque é independente de  $f(a)$ , isto é, da imagem de  $a$ .

Afirmamos que o  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  é o estudo do comportamento da curva nas proximidades de  $a$ , isto é, se  $x$  tende para  $a$ , então  $f(x)$  tende para  $b$ , ou seja,  $x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow b$ , o que é o mesmo que;  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .

Observando as três figuras seguintes:

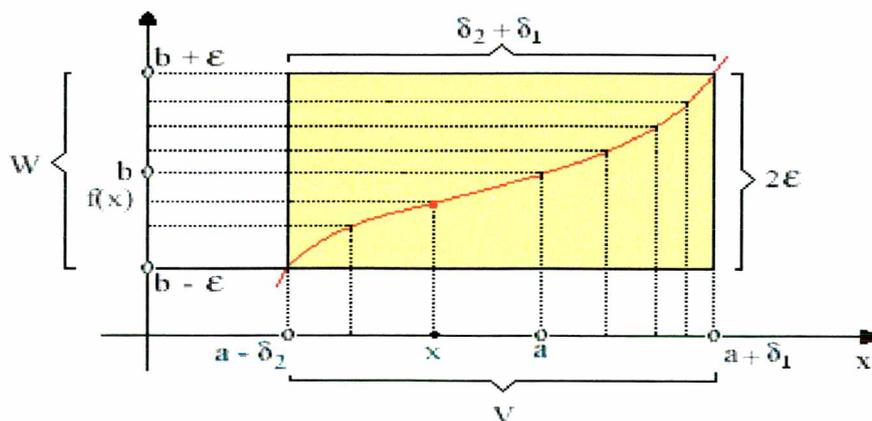


Figura 27 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$  com retângulos de base  $\delta_1 + \delta_2$

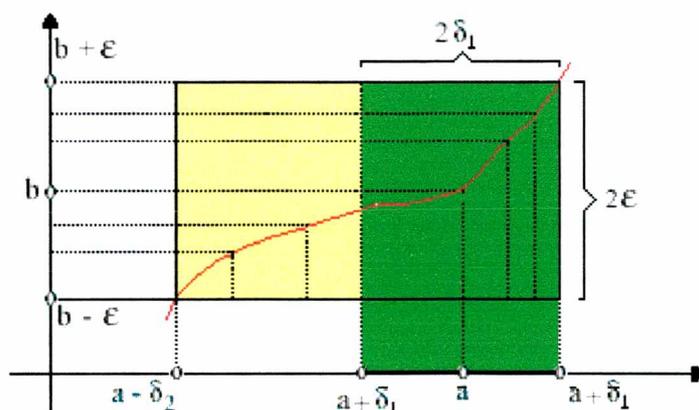


Figura 28 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$  com destaque para o retângulo de base  $2\delta_1$

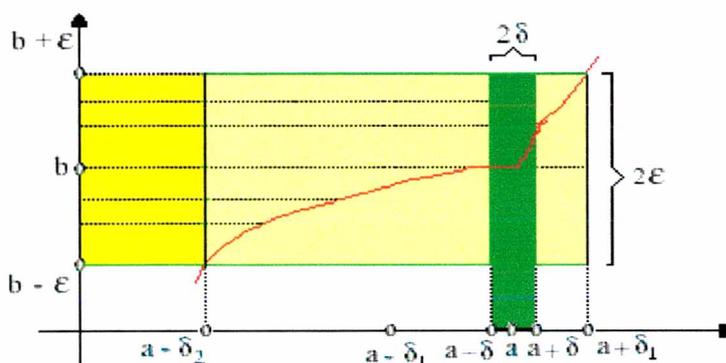


Figura 29 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$  com destaque para o retângulo de base  $2\delta$

Nota-se que a figura 27 ilustra as definições I e II e observa-se que  $W = (b - \epsilon, b + \epsilon)$  é um intervalo simétrico de centro em  $b$  e raio  $\epsilon > 0$  e  $V = (a - \delta_2, a + \delta_1)$  não é um intervalo simétrico, ele contém  $a$ , mas  $a$  não é o centro de  $V$ .

Na figura 28, verifica-se que  $V = (a - \delta_2, a + \delta_1)$  contém um intervalo simétrico  $(a - \delta_1, a + \delta_1)$  de raio igual a  $\delta_1 = \min \{\delta_1, \delta_2\}$  e que para o retângulo de altura  $2\epsilon$  e base  $2\delta_1$  as definições continuam sendo verdadeiras.

Logo, se pode substituir o intervalo  $V = (a-\delta_2, a+\delta_1)$  das definições I e II pelo intervalo  $(a-\delta, a+\delta)$  de centro em  $a$  e raio  $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ , (figura 28).

Na figura 29, verifica-se que o raio do intervalo  $(a-\delta, a+\delta)$  pode ser menor que o  $\min \{\delta_1, \delta_2\}$  o que não prejudica em nada as definições I e II conclui-se que  $\delta \leq \min \{\delta_1, \delta_2\}$ .

Rescrevendo a definição I, tem-se a definição III:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (b - \varepsilon, b + \varepsilon),$$

$\exists (a-\delta, a+\delta)$  tal que se  $x \neq a$  e  $x \in (a-\delta, a+\delta)$  então os pontos  $(x, f(x))$  do gráfico, exceto possivelmente  $(a, f(a))$  estarão todos no interior do retângulo de altura  $2\varepsilon$  e base  $2\delta$ , para  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  tão pequeno quanto se queira e  $\delta \leq \min \{\delta_1, \delta_2\}$ . (fig. 29).

Portanto modifica-se a apresentação da definição II, escrevendo, a seguir, a definição IV.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (b - \varepsilon, b + \varepsilon),$$

$\exists (a-\delta, a+\delta)$  tal que para  $x \neq a \in (a-\delta, a+\delta)$ , se  $x$  se aproxima de  $a$ , então  $f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$  e  $f(x)$  se aproxima de  $b$  para valores de  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  tão pequenos quanto se queira.

No Bloco III de exercícios são apresentados, graficamente, situações de existência e não existência de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  a luz das definições III e IV.

### **Bloco III de exercícios**

Variando-se os valores de  $\varepsilon$ , são encontrados para cada  $\varepsilon$  um retângulo novo.

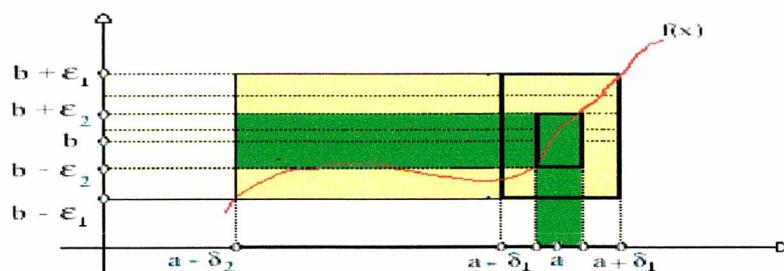


Figura 30 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$  com retângulos de base  $\delta_1 + \delta_2$ ,  $2\delta_1$ , e  $2\delta$

### Outros exemplos

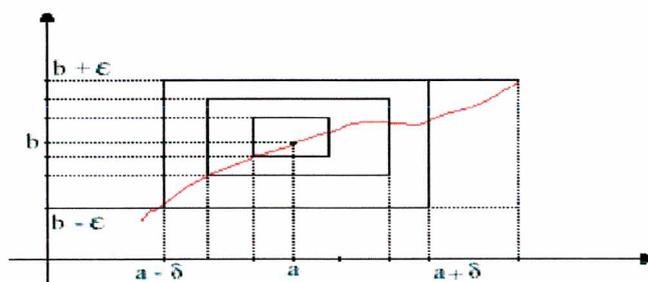


Figura 31 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$  com retângulos de base  $2\delta$

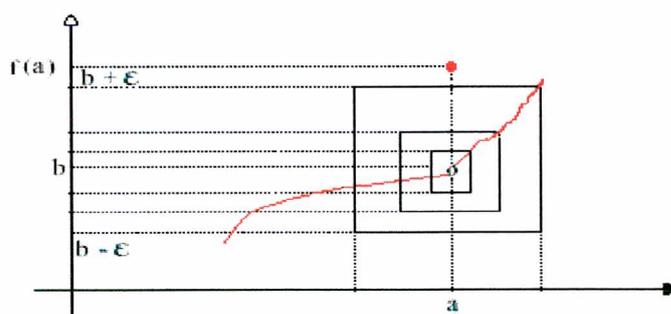


Figura 32 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) \neq b$  com retângulos de base  $2\delta$

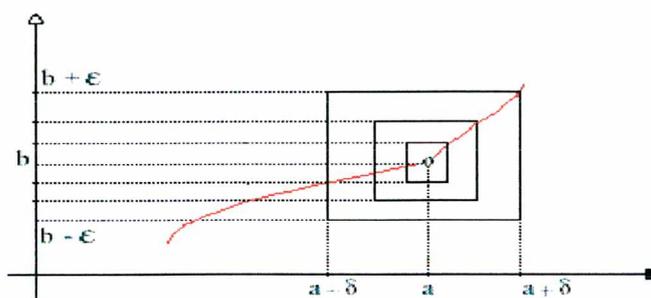


Figura 33 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) \neq b$  com retângulos de base  $2\delta$

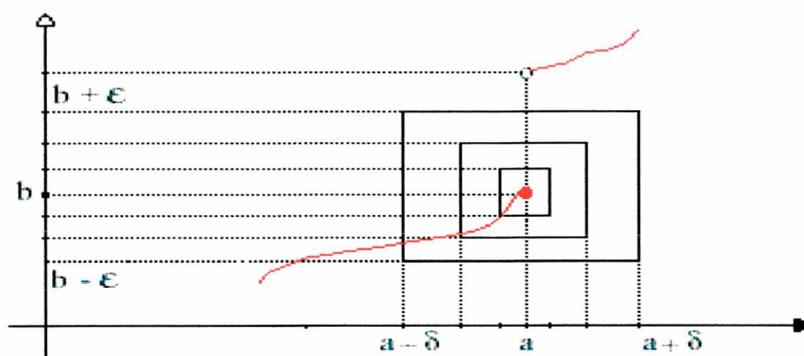


Figura 34 – Curva onde  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) = b$  com retângulos de base  $2\delta$

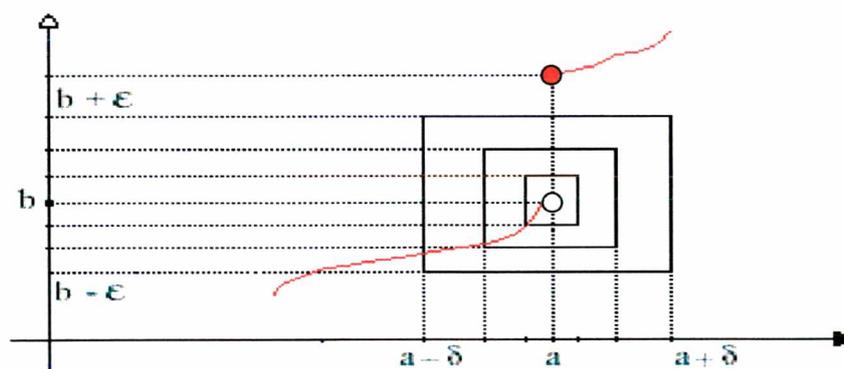


Figura 35 – Curva onde  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) = b$  com retângulos de base  $2\delta$

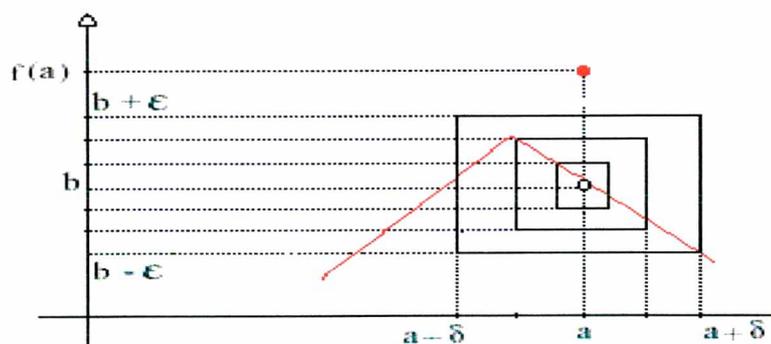


Figura 36 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) \neq b$  com retângulos de base  $2\delta$

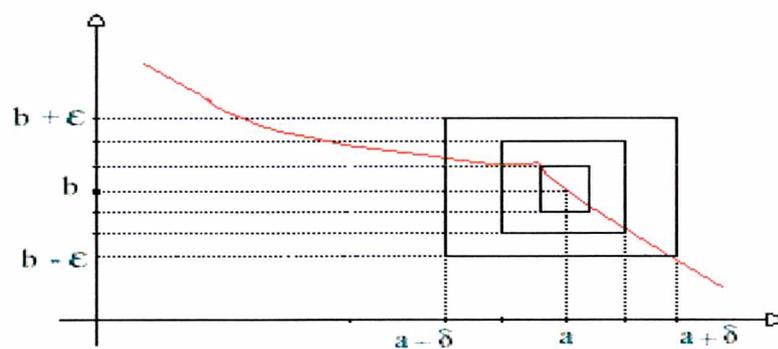


Figura 37 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$  com retângulos de base  $2\delta$

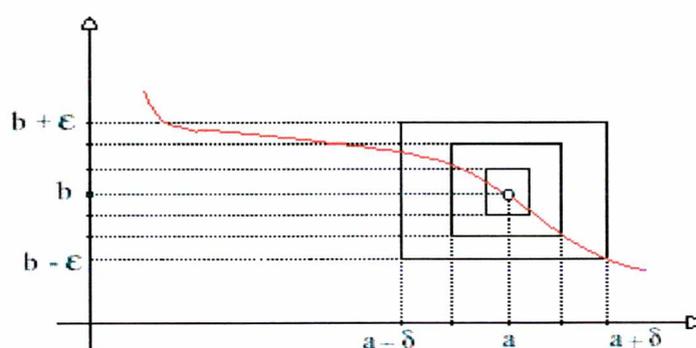


Figura 38 – Curva onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $\nexists f(a)$  com retângulos de base  $2\delta$

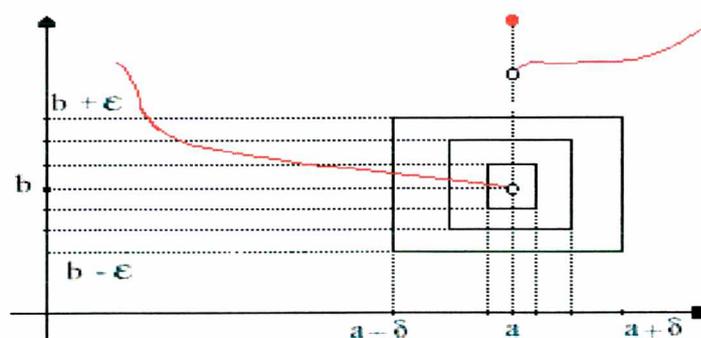


Figura 39 – Curva onde  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) \neq b$  com retângulos de base  $2\delta$

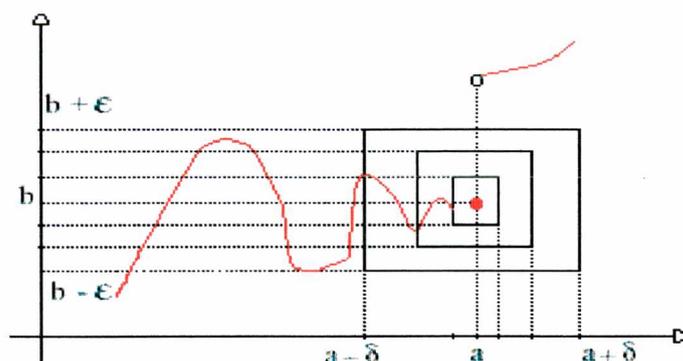


Figura 40 – Curva onde  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) = b$  com retângulos de base  $2\delta$

Faz-se agora a introdução da simbologia de distância nas definições III e IV.

A figura 41 abaixo é a representação gráfica do intervalo  $(1, 9)$  de centro  $a = 5$  e raio  $\delta = 4$ .

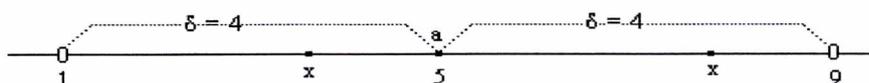


Figura 41 – Representação gráfica de  $d < d(x, 5) < 4$

$\delta$  é a distância do centro 5 aos extremos, isto é,  $\delta = d(1, 5) = d(5, 9) = 5 - 1 = 9 - 5 = 4$ .

Afirmar que  $x \in (1, 9)$  é dizer que a distância de  $x$  a 5 é menor que o raio do intervalo, ou seja,  $d(x, 5) < 4$ , e que se  $x = 5$ ,  $d(5, 5) = 0$

Então a expressão:  $x \neq 5$  e  $x \in (1, 9)$  é equivalente à:  $0 < d(x, 5) < 4$

Para generalizar considera-se na figura 42, o intervalo  $(a-\delta, a+\delta)$ , de centro  $a$  e raio  $\delta$ ,

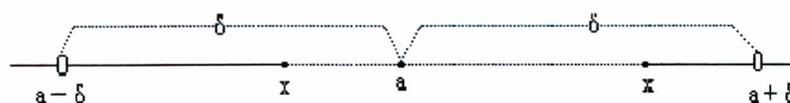


Figura 42 – Representação gráfica de  $0 < d(x, a) < \delta$

e concluí-se que a expressão  $x \neq a$  e  $x \in (a-\delta, a+\delta)$  é equivalente a  $0 < d(x, a) < \delta$ .

Com isso a definição III se transforma-se na definição V, isto é:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (a-\varepsilon, b+\varepsilon), \exists (a-\delta, a+\delta) \text{ tal que};$$

Se  $0 < d(x, a) < \delta$  então os pontos  $(x, f(x))$  do gráfico de  $f$ , exceto possivelmente  $(a, f(a))$  estarão todos no interior do retângulo de altura  $2\varepsilon$  e base  $2\delta$ , para  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  tão pequeno quanto se queira e  $\delta \leq \min \{\delta_1, \delta_2\}$ .

Conseqüentemente a expressão  $f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$  pode ser substituído por  $d(f(x), b) < \varepsilon$ , e aqui não se necessita exigir que  $d(f(x), b) > 0$  porque  $f(x)$  pode ser igual a  $b$ , como nas figuras 30, 31, 34, 37 e 40 do Bloco III de exercícios.

Portanto a definição IV será substituída pela definição VI,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (b-\varepsilon, b+\varepsilon), \exists (a-\delta, a+\delta) \text{ tal que}$$

Se  $0 < d(x, a) < \delta$  então  $d(f(x), b) < \varepsilon$  e  $f(x)$  se aproxima de  $b$  para valores de  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  tão pequenos quanto se queira.

A expressão  $\forall (b-\varepsilon, b+\varepsilon), \exists (a-\delta, a+\delta)$  pode ser representada por, “ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ”, que é o procedimento executado nos exercícios, isto é, varia-se apenas o raio  $\varepsilon$  do intervalo  $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$  e em correspondência o raio  $\delta$  do intervalo  $(a-\delta, a+\delta)$  também irá variar.

E a definição V transforma-se na definição VII

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$$

Se  $0 < d(x, a) < \delta$  então os pontos do gráfico de  $f$ ,  $(x, f(x))$  pertencerão ao interior do retângulo de altura  $2\varepsilon$  e base  $2\delta$ , para  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  tão

pequeno quanto se queira.

Da mesma forma a definição VI transforma-se na definição VIII

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que:}$$

Se  $0 < d(x, a) < \delta$  então  $d(f(x), b) < \varepsilon$ , para  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  tão pequeno quanto se queira.

Faz-se agora, a introdução da simbologia de módulo nas definições, pois sabe-se que distância de 9 a 5 é o mesmo que módulo de  $9 - 5$ , isto é,  $d(9, 5) = |9 - 5|$ .

Assim, a definição VII assume a sua forma definitiva, transformando-se na definição IX

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que,}$$

Se  $0 < |x - a| < \delta$  então os pontos do gráfico de  $f$ ,  $(x, f(x))$  pertencerão ao interior do retângulo de altura  $2\varepsilon$  e base  $2\delta$ , para  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  tão pequeno quanto se queira.

Da mesma forma, a definição VIII chega a sua forma definitiva na definição X

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que,}$$

Se  $0 < |x - a| < \delta$  então  $|f(x) - b| < \varepsilon$ , para  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  tão pequeno quanto se queira.

### 2.4.3. Derivada

#### **Definição:**

Seja  $f$  uma função, definida num intervalo aberto  $I$  e  $x_0 \in I$ : A

derivada de  $f$  em  $x_0$  é

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ fazendo } x = x_0 + \Delta x$$

onde  $\Delta x$  representa um acréscimo que será dado ao  $x_0$  e portanto  $\Delta x$  tenderá a zero se  $x$  tender para  $x_0$ .

Logo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

para esse limite é de praxe usar uma das seguintes notações

$$\left. \frac{d f(x)}{dx} \right|_{x = x_0} \quad \text{ou } f'(x) \quad \text{ou } D_x f$$

Como a derivada é um limite escreve-se a sua definição usando  $\varepsilon$  e

$\delta$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

Geometricamente  $f'(x_0)$  é o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto de abscissa  $x_0$ .

A construção deste conceito passa por diversos estágios conforme colocado a seguir:

### Estágio I

Dados dois pontos de uma curva  $P = (x_0, f(x_0))$  e  $A_1 = (x_1, f(x_1))$ , determinar a equação da reta secante a esta curva nos pontos  $P$  e  $A_1$ .

**Solução:**

Seja  $y = m x + b$  a equação da reta  $S$  secante à curva, que passa por  $P$  e  $A_1$ .

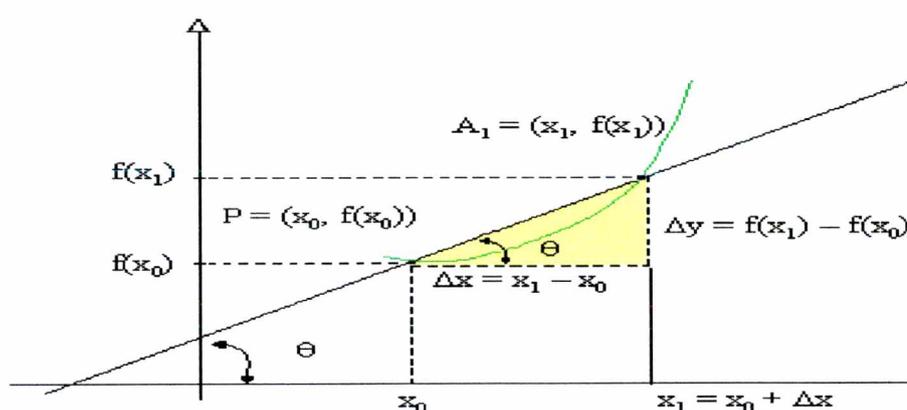


Figura 43 – Reta secante à curva  $f$  nos pontos  $P$  e  $A_1$

Observando a figura 43, acima, conclui-se:

Como  $m$  é o coeficiente angular da reta  $S$  então  $m = \operatorname{tg} \theta$  e

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \text{ então}$$

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Substituindo o valor de  $m$  na equação da reta  $y = mx + b$ , tem-se:

$$Y = \left[ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] x + b$$

Para calcular o valor de  $b$   $x$  e  $y$  são substituídos pelas coordenadas

do  $P$

$$f(x_0) = \left[ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] x_0 + b \quad \therefore$$

$$b = f(x_0) - \left[ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] x_0$$

Voltando à equação  $y = mx + b$  para substituir os valores de  $m$  e  $b$  e obter a equação da reta secante à curva .

$$Y = \left[ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] x + \left( f(x_0) - \left[ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] x_0 \right)$$

## ESTÁGIO II

Calcular a equação da reta tangente a curva num ponto  $P = (x_0 ; f(x_0))$  conhecido.

### Solução:

Seja  $Y = ax + b$  a equação da reta  $t$  tangente a curva no ponto  $P = (x_0, f(x_0))$  , então afirmamos que:  $a = f'(x_0)$ , isto é ,  $Y = f'(x_0) x + b$ .  
Substituindo em seguida  $y$  e  $x$  pelas coordenadas de  $P$  tem-se :

$$f(x_0) = f'(x_0) x_0 + b$$

$$b = f(x_0) - f'(x_0) x_0$$

Substituindo o valor de  $b$  encontrado , é obtido:

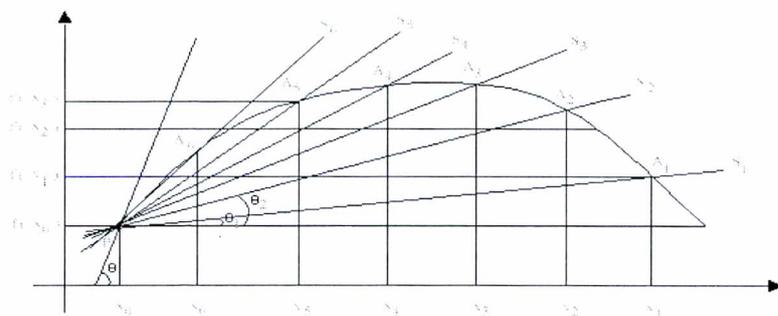
$y = f'(x_0) x + f(x_0) - f'(x_0) x_0$  que é a equação da reta tangente à curva.

Na tela do computador, aparecerá o gráfico de uma curva escolhida previamente pelo programa e a reta tangente num ponto  $P$  da curva colocando o

coeficiente angular da mesma em destaque.

O aluno escolherá o ponto  $A_1(x_1, f(x_1))$  e o computador traçará o gráfico da reta secante  $S$ , e destacará numa tabela o valor  $m$ , do coeficiente angular da mesma. Em seguida, escolherá o ponto  $A_2 = (x_2, f(x_2))$  e todo o processo se repetirá. Este processo será iterado com os pontos  $A_n$  se aproximando do ponto  $P$  e o aluno constatará que  $S_n \rightarrow t$  e algebricamente os coeficientes angulares  $m_n \rightarrow a$  (coeficiente angular da tangente).

A figura 44, a seguir, mostra geometricamente o processo acima descrito.



**Figura 44 – Retas secantes que se aproximam da reta tangente**

$$\text{Secante } S_1 ; \text{ ângulo } \theta_1 ; m_1 = \text{tg } \theta_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\text{Secante } S_2 ; \text{ ângulo } \theta_2 ; m_2 = \text{tg } \theta_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

$$\text{Secante } S_3 ; \text{ ângulo } \theta_3 ; m_3 = \text{tg } \theta_3 = \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}$$

O mesmo se repetindo para  $S_4, S_5, S_6$  e por indução para  $S_n$ .

Portanto;

$$\text{Secante } S_n, \text{ ângulo } \theta_n; m_n = \text{tg } \theta_n = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

Assim, fica fácil observar que a seqüência de retas secantes, ( $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, \dots, S_n, \dots$ ) se aproxima da reta  $t$  tangente à curva, isto é; “quando o  $P$  permanece fixo e  $A$  percorre a curva se aproximando de  $P$  tanto quanto se queira, as retas secantes vão se aproximando da reta tangente  $t$  e por isso afirmar-se que  $(m_1, m_2, \dots, m_n, \dots)$  se aproxima do coeficiente angular de  $t$ , porque  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n, \dots)$  tende para  $\theta$ , ângulo que a reta tangente faz com o eixo dos  $x$  ou qualquer reta paralela a este eixo.

$$\begin{aligned} \text{Portanto } a &= \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \\ &= \lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \end{aligned}$$

O coeficiente angular da reta tangente a uma curva num ponto fixo  $P$ , é chamado de derivada de  $f$  no ponto  $P$  de abscissa  $x_0$ , isto é:

$$a = \left. \frac{d f(x)}{dx} \right|_{x = x_0} \quad \text{ou}$$

$$a = f'(x_0) \quad \therefore$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

#### 2.4.4. Integral Definida - Noção Intuitiva

Considerando as curvas  $f(x) = bx^2$  e  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Sabe-se que  $\int_0^a bx^2 dx = \frac{ba^3}{3}$  e que  $\int_1^2 \frac{1}{2}x^2 dx = 7/6$ , porque  $\int_0^a bx^2 dx =$

$$b \int_0^a x^2 dx = b \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = b \frac{a^3}{3} - b \cdot \frac{0^3}{3} = b \frac{a^3}{3} \text{ e}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

Mostra-se que calculando a área sob estas curvas, a primeira num intervalo  $[0, a]$  e a segunda num intervalo de  $[1, 2]$ , usando o método de aproximação por área de retângulos, obtém-se os mesmos resultados.

Para isso são resolvidos três exercícios de cálculo de área sob curva, pelos métodos de aproximação de áreas de retângulos de altura máxima ou áreas de retângulos de altura mínima, conforme problemas colocados a seguir:

##### Problema I

Calcular a área  $S$  limitada pelas curvas  $y = 0$ ,  $x = a$  e  $f(x) = bx^2$

Método: aproximação por retângulos de altura máxima.

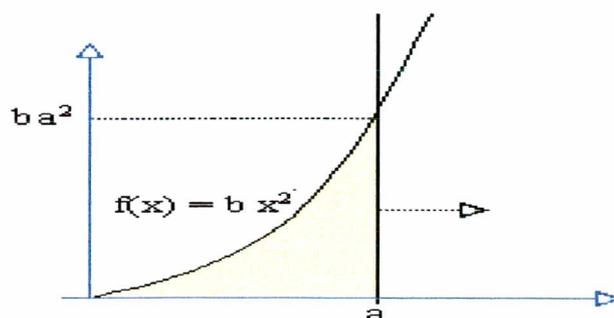
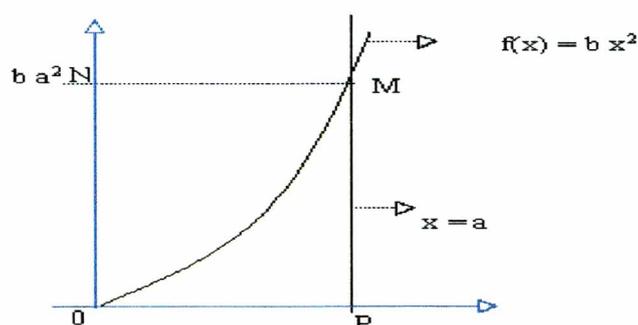


Figura 45 – Área sob curva  $y = bx^2$

**Solução:**

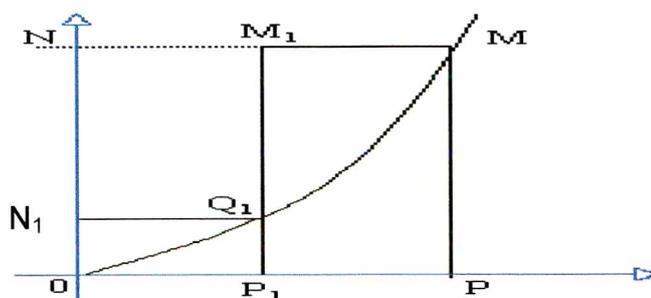


**Figura 46 – Destaque para a área sob a curva e a área do retângulo NOPM**

Observando a figura 46, afirma-se que:

Se  $A_1$  for a área do retângulo MNOP, então  $A_1 = aba^2 = ba^3$  e

$A_1 > S$



**Figura 47 – Destaque para a área sob a curva e a soma das áreas dos retângulos  $N_1OP_1Q_1$ , e  $M_1P_1PM$ .**

Na figura 47:

$P_1$  é o ponto médio de  $OP$ , por isso tem abcissa  $a/2$ , e como consequência a ordenada de  $a/2$  é  $N_1$  e

$$N_1 = f\left(\frac{a}{2}\right) = b\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b\frac{a^2}{4}.$$

A área  $A_2$  é a soma das áreas dos retângulos  $N_1OP_1Q_1$  e  $M_1P_1PM$ ,

isto é:

$$\text{a área de } N_1 O P_1 Q_1 = \frac{a}{2} \cdot f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2} \left(b \frac{a^2}{4}\right) = b \frac{a^3}{8}$$

$$\text{a área de } M_1 P_1 P M = \frac{a}{2} \cdot f(a) = \frac{a}{2} \cdot b a^2 = b \frac{a^3}{2}$$

$$A_2 = ba^3/8 + ba^3/2 = \frac{ba^3 + 4ba^3}{8} = \frac{5ba^3}{8}$$

Logo  $A_1 > A_2 > S$ , ou seja,

$$ba^3 > \frac{5ba^3}{8} > S$$

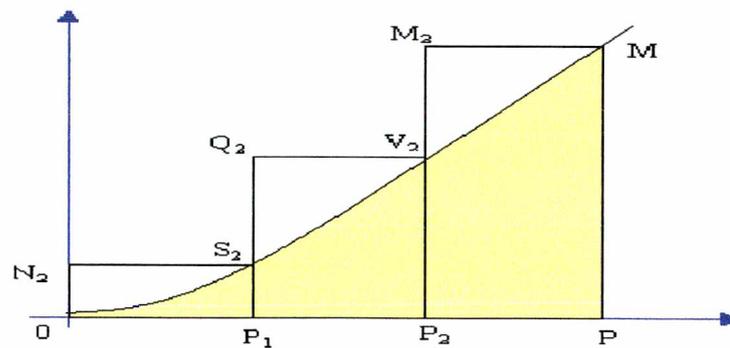


Figura 48 – Destaque para a área sob a curva e a soma das áreas dos retângulos  $N_2 O P_1 S_2$ ,  $Q_2 P_1 P_2 V_2$  e  $M_2 P_2 P M$

Na figura 48:

$P_1$  e  $P_2$  dividem  $\overline{OP}$  em três partes iguais.

$P_1$  tem abcissa  $\frac{a}{3}$

$P_2$  tem abcissa  $2\frac{a}{3}$

$N_2$  tem ordenada igual a  $f\left(\frac{a}{3}\right) = b \frac{a^2}{9}$

$$Q_2 \text{ tem ordenada igual a } f\left(2 \frac{a}{3}\right) = b \frac{4a^2}{9}$$

$$M_2 \text{ tem ordenada igual a } f(a) = ba^2$$

$$\text{A área de } N_2 O P_1 S_2 = \frac{a}{3} \cdot f\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{a}{3} \left(b \frac{a^2}{9}\right) = b \frac{a^3}{27}$$

$$\text{A área de } Q_2 P_1 P_2 V_2 = \frac{a}{3} \cdot f\left(\frac{2a}{3}\right) = \left(\frac{a}{3}\right) \left(b \frac{4a^2}{9}\right) = 4b \frac{a^3}{27}$$

$$\text{A área de } M_2 P_2 P M = \frac{a}{3} \cdot f(a) = \left(\frac{a}{3}\right) (b a^2) = b \frac{a^3}{3}$$

A área  $A_3$  é a soma das áreas desses retângulos. Então:

$$A_3 = \frac{ba^3}{27} + 4b \frac{a^3}{27} + b \frac{a^3}{3} = \frac{ba^3 + 4ba^3 + 9ba^3}{27} = \frac{14ba^3}{27}$$

Logo  $A_1 > A_2 > A_3 > S$

$$b a^3 > \frac{5 b a^3}{8} > \frac{14 b a^3}{27}$$

Para calcular  $A_n$ , constrói-se  $n$  retângulos, dividindo  $\overline{OP}$  em  $n$  partes iguais. Dessa maneira tem-se  $n$  retângulos de base  $a/n$ , de tal forma que:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a}{n} \cdot b \left(\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{a}{n} \cdot b \left(\frac{2a}{n}\right)^2 + \frac{a}{n} \cdot b \left(\frac{3a}{n}\right)^2 + \dots + \frac{a}{n} \cdot b \left(\frac{na}{n}\right)^2 = \\ &= \frac{a}{n} \cdot b \left(\frac{a}{n}\right)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2) = \\ &= \frac{a}{n} \cdot b \left(\frac{a}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{6} n (n+1) (2n+1)\right) = \\ &= \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{6} \left(\frac{a}{n}\right)^2 [n (n+1) (2n+1)] = \frac{ba^3}{6} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

Conforme observação conclui-se que:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \therefore$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ba^3}{6} \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \cdot \left( 2 + \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$S = \frac{ba^3}{3}$$

## Problema II

Calcular a área da região S limitada pelas curvas  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  e  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

## Solução

Método A – aproximação por retângulos de altura máxima.

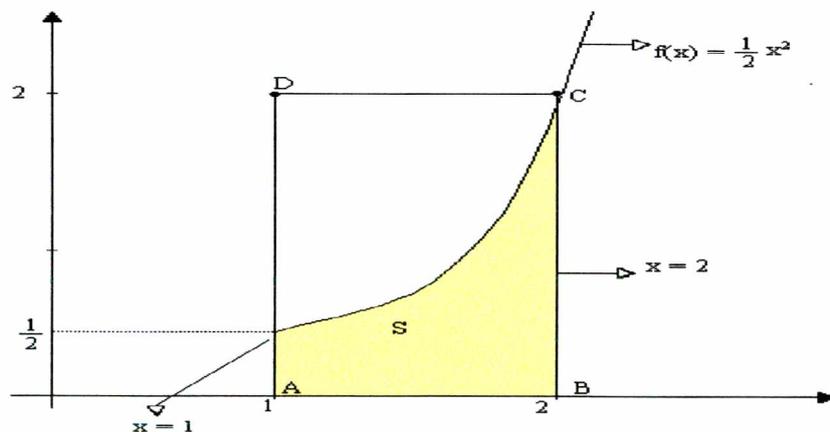
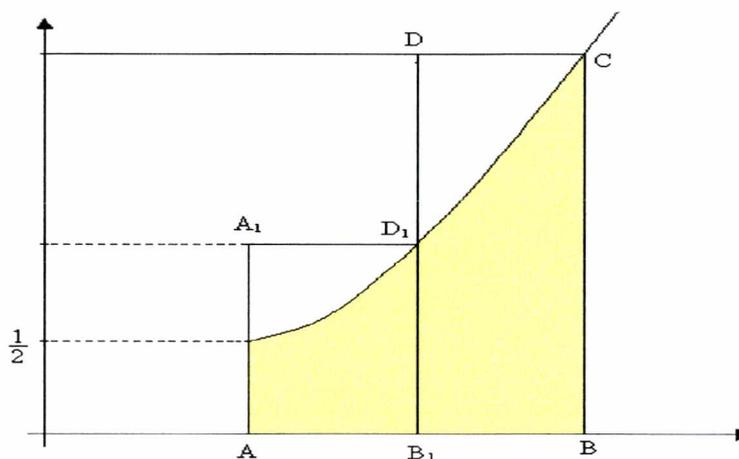


Figura 49 – Destaque para a área sob a curva e a área do retângulo DABC

Considerando a figura 49, afirma-se que:

A área  $S_1$  do retângulo ABCD é 1.  $f(2) = 1 \cdot 2 = 2$ . logo  $S_1 > S$ .



**Figura 50 – Destaque para a área sob a curva e a soma das áreas dos retângulos  $A_1 AB_1 D_1$ , e  $DB_1 BC$**

Na figura 50, onde:

$B_1$  é o ponto médio de  $AB$ , com abcissa  $3/2$  e como consequência a ordenada de  $A$ , é

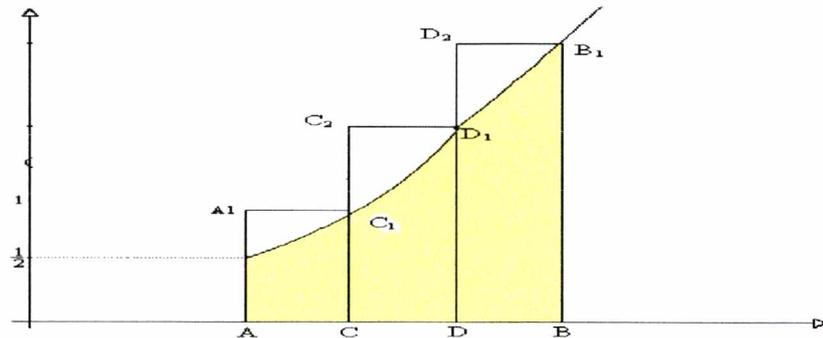
$f\left(\frac{3}{2}\right)$  e a área do retângulo  $AB_1 D_1 A_1$  é

$$\frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{16}$$

A área do retângulo  $B_1 B C D$  é  $\frac{1}{2} \cdot f(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2)^2 = 1$

A área  $S_2$  sendo a soma das áreas desses retângulos será:

$$S_2 = \frac{1}{2} f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} f(2) = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16} \text{ logo, } S_1 > S_2 > S$$



**Figura 51 – Destaque para a área sob a curva e a soma das áreas dos retângulos  $A_1ACC_1$ ,  $C_2CDD_1$  e  $D_2DBB$**

Na figura 51, onde os pontos C e D dividem  $\overline{AB}$  em três partes iguais.

$$\text{C tem abcissa } \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

$$\text{D tem abcissa } \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

$$C_1 \text{ tem ordenada } f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{18}$$

$$D_1 \text{ tem ordenada } f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{18}$$

$$B_1 \text{ em ordenada } f(2) = \frac{1}{2} (2)^2 = 2$$

$$\text{A área de } A C C_1 A_1 \text{ é } \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{18} = \frac{16}{54}$$

$$\text{A área de } C D D_1 C_2 \text{ é } \frac{1}{3} f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{18} = \frac{25}{54}$$

$$\text{A área de } D B B_1 D_2 \text{ é } \frac{1}{3} f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

Denominando  $S_3$  como a soma das áreas dos três quadrados especificados acima, tem-se:

$$\begin{aligned}
 S_3 &= \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{3} f\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{1}{3} f(2) = \\
 &= \frac{16}{54} + \frac{25}{54} + \frac{2}{3} = \frac{16 + 25 + 36}{54} = \frac{77}{54} \text{ e } S_1 > S_2 > S_3 > S
 \end{aligned}$$

Para calcular  $S_n$  constrói-se  $n$  retângulos, dividindo  $\overline{AB}$  em  $n$  partes iguais. Desta forma são obtidos  $n$  retângulos de base  $1/n$ , de tal forma que:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{n} f\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{n+2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n+n}{n}\right) = \\
 S_n &= \frac{1}{n} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \frac{1}{2} \left(\frac{n+2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \frac{1}{2} \left(\frac{n+n}{n}\right)^2 = \\
 S_n &= \frac{1}{n} \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} \left[ (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (n+n)^2 \right] \\
 S_n &= \frac{1}{2} \frac{1}{n^3} \left[ (n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 4n + 4) + \dots + (n^2 + 2n^2 + n^2) \right] \\
 S_n &= \frac{1}{2} \frac{1}{n^3} \left[ \begin{array}{ccc} (n^2 + n^2 + \dots + n^2) & + & (2n + 4n + \dots + 2n^2) & + & (1 + 4 + 9 + \dots + n^2) \\ \text{n parcelas} & & \text{n parcelas} & & \text{n parcelas} \end{array} \right] \\
 S_n &= \frac{1}{2} \frac{1}{n^3} \left[ n \cdot n^2 + n(2 + 4 + 6 + \dots + 2n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \right] \\
 S_n &= \frac{1}{2} \frac{1}{n^3} \left\{ n^3 + n \left[ \frac{(2+2n)n}{2} \right] + \frac{1}{6} [n(n+1)(2n+1)] \right\} \\
 S_n &= \frac{1}{2} \frac{1}{n^3} \left\{ n^3 + n^2(1+n) + \frac{1}{6} [n(1+n)(2n+1)] \right\} \\
 S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1+n}{n} \right) + \frac{1}{12} \frac{1}{n^2} (1+n)(2n+1) \\
 S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} + 1 \right) + \frac{1}{12} \frac{(1+n)}{n} \frac{(2n+1)}{n}
 \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} + 1 \right) + \frac{1}{12} \left( \frac{1}{n} + 1 \right) \left( 2 + \frac{1}{n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 2 =$$

$$= 1 + \frac{1}{6} = \frac{6+1}{6} = \frac{7}{6}$$

Como  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  então  $S = \frac{7}{6}$

### Problema III

Calcular a área  $S$  limitada pelas curvas  $y = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = 1$  e  $f(x) = \frac{1}{2} x^2$

Método B – aproximação por retângulos de altura mínima.

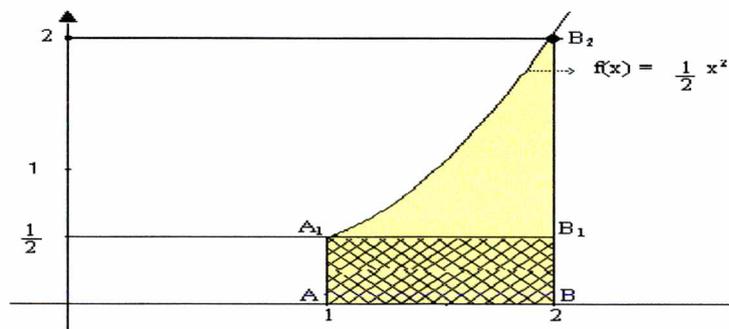


Figura 52 – Destaque para a área sob a curva e a área do retângulo  $A_1 ABB_1$ ,

Na figura 52, sendo  $S$  a área sob a curva, afirma-se que a área  $S_1$  do retângulo  $AB B_1 A_1$  é menor que  $S$  e  $S_1 = 1 \cdot f(1) = 1 \cdot \frac{1}{2} (1)^2 = \frac{1}{2}$  logo  $S > S_1$ .

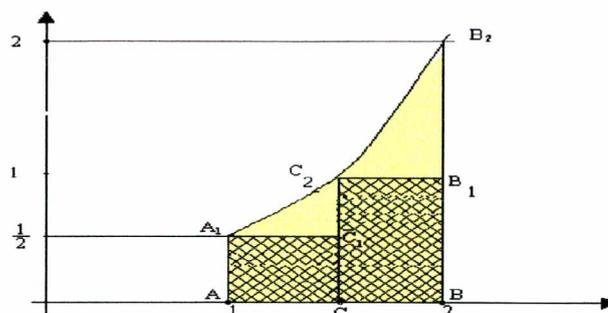


Figura 53 – Destaque para a área sob a curva e a soma das áreas dos retângulos  $A_1 ACC_1$ , e  $C_2CBB_1$ .

Na figura 53, tem-se:

C é o ponto médio de  $\overline{AB}$ , por isso tem abscissa  $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

A área do retângulo  $AC C_1 A_1$  é  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{4}$

A área do retângulo  $CBB_1 C_2$  é  $\frac{1}{2} f\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{16}$

Fazendo  $S_2$  igual à soma da área dos dois retângulos tem-se

$$S_2 = \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{2} f\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} = \frac{13}{16}$$

Logo,  $S > S_2 > S_1$

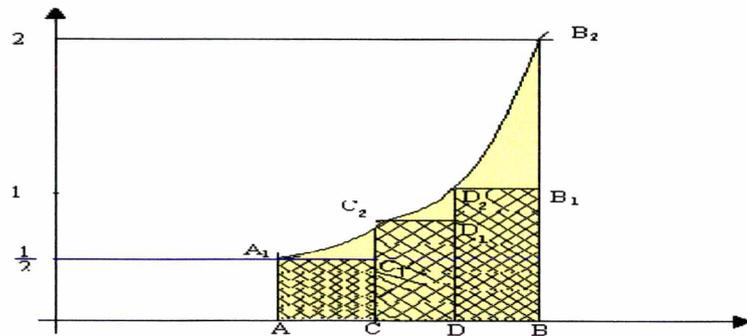


Figura 54 - Destaque para a área sob a curva e a norma das áreas dos retângulos  $A_1 ACC_1$  e  $C_2 CDD_1$ , e  $D_2 DBB_1$ .

Na figura 54.

Os pontos C e D dividem  $\overline{AB}$  em três partes iguais, por isso:

C tem abscissa  $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

D tem abscissa  $1 + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$D_2$  tem ordenada  $f\left(\frac{5}{3}\right) = f\left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right)^2$

$$C_2 \text{ tem ordenada } f\left(\frac{4}{3}\right) = f\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2$$

$$A_1 \text{ tem ordenada } f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2$$

$$\text{A área do retângulo } A C C_1 A_1 \text{ é } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{6}$$

$$\text{A área do retângulo } C D D_1 C_2 \text{ é } \frac{1}{3} \cdot f\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{16}{9} = \frac{16}{54}$$

$$\text{A área do retângulo } D B B_1 D_2 \text{ é } \frac{1}{3} \cdot f\left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{9} = \frac{25}{54}$$

Sendo,  $S_3$  a soma da área desses retângulos, então:

$$S_3 = \frac{1}{3} f(1) + \frac{1}{3} f\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} f\left(1 + \frac{2}{3}\right), \text{ de tal forma que: } S > S_3 > S_2 > S_1.$$

Para calcular  $S_n$  constrói-se  $n$  retângulos, dividindo  $\overline{AB}$  em  $n$  partes iguais. Desta forma obtém-se retângulos de base  $1/n$ . Assim:

$$S_n = \frac{1}{n} f(1) + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{n}{n}\right) \therefore$$

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \left[ 1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \left[ 1 + \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n+2}{n}\right)^2 + \left(\frac{n+3}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n+n}{n}\right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \left[ 1 + \frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{(n+2)^2}{n^2} + \frac{(n+3)^2}{n^2} + \dots + \frac{(n+n)^2}{n^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \left\{ 1 + \frac{1}{n^2} \left[ (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (n+n)^2 \right] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{1}{n} \left\{ 1 + \frac{1}{n^2} \left[ (n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 4n + 4) + (n^2 + 6n + 9) + \dots + (n^2 + 2n^2 + n^2) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2n} \left\{ 1 + \frac{1}{n^2} \left[ \begin{array}{c} (n^2 + n^2 + \dots + n^2) \\ n \text{ parcelas} \end{array} + \begin{array}{c} (2n + 4n + 6n + \dots + 2n^2) \\ n \text{ parcelas} \end{array} + \dots + \begin{array}{c} (1 + 4 + 9 + \dots + n^2) \\ n \text{ parcelas} \end{array} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2n} \left\{ 1 + \frac{1}{n^2} \left[ n n^2 + n (2 + 4 + 6 + \dots + 2n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{2n} \left\{ 1 + \frac{1}{n^2} \left[ n^3 + n \left( \frac{2 + 2n}{2} \right) n + \frac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1) \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{2n} \left\{ 1 + \frac{1}{n^2} \left[ n^3 + n^2 (1 + n) + \frac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1) \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{2n} \left\{ 1 + \left[ n + (1 + n) + \frac{1}{6} \left( \frac{n + 1}{n} \right) (2n + 1) \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n} + \left[ 1 + \left( \frac{1}{n} + 1 \right) + \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 2 + \frac{1}{n} \right) \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} + 1 \right) + \frac{1}{12} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 2 + \frac{1}{n} \right) \\
S_n &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} + 1 \right) + \frac{1}{12} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 2 + \frac{1}{n} \right) = \\
S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot 2 \\
S &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3+3+1}{6} = \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

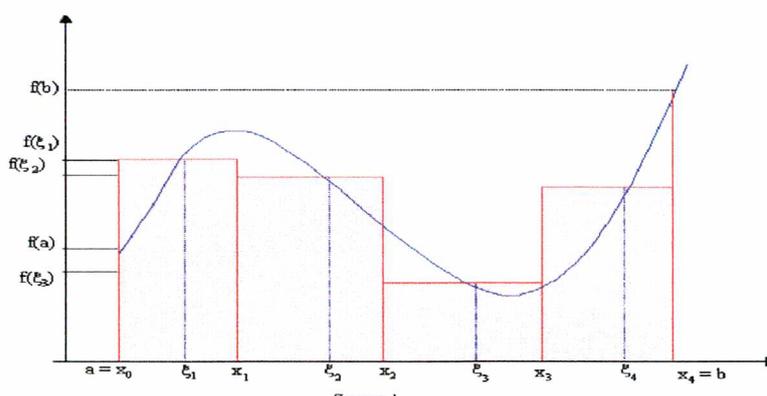
### 2.4.5. Integral Definida - Definição:

Seja  $f$  uma função definida em  $[a, b]$  e  $f$  contínua em  $[a, b]$ , então a integral definida de  $f$  de  $a$  até  $b$ , denotada por  $\int_a^b f(x) dx$  será dada por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x, \quad \text{caso exista o referido limite, e}$$

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  e  $\|\Delta\|$  é a norma da partição  $\Delta$ , isto é, é o comprimento do maior subintervalo da partição  $\Delta$ , ou seja  $\|\Delta\| = \max \{ |x_i - x_{i-1}| \}$ .

Esta definição é uma generalização dos exercícios anteriores, com uma pequena diferença no que se refere as alturas dos retângulos, que serão  $f(\xi_i)$  tomadas aleatoriamente para  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , e portanto podendo ser máxima, mínima ou nem máxima e nem mínima.



**Figura 55 - Destaque para a área sob a curva e a soma das áreas dos retângulos**

No gráfico acima vamos dividir o intervalo  $[a, b]$  em quatro subintervalos escolhendo três quaisquer pontos desse intervalos, isto é  $x_1, x_2, x_3$  e chamaremos  $a = x_0$  e  $b = x_4$ . Formando assim, os seguintes subintervalos:  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, x_3]$  e  $[x_3, x_4]$ .

O conjunto  $\Delta = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_4]\}$  é denominado uma

partição  $\Delta$  de  $[a, b]$ . Escolhe-se agora, um ponto em cada subintervalo da partição, por exemplo:  $\xi_2 \in [x_1, x_2]$ ,  $\xi_3 \in [x_2, x_3]$  e  $\xi_4 \in [x_3, x_4]$  e  $\xi_1 \in [x_0, x_1]$ .

Considerando cada retângulo de altura  $f(\xi_i)$  e base igual  $\Delta_i x$ , que corresponde ao tamanho do subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Assim, na figura 55, teremos quatro retângulos cujas áreas são:

$$A_1 = f(\xi_1) (x_1 - x_0) = f(\xi_1) \Delta_1 x;$$

$$A_2 = f(\xi_2) (x_2 - x_1) = f(\xi_2) \Delta_2 x;$$

$$A_3 = f(\xi_3) (x_3 - x_2) = f(\xi_3) \Delta_3 x;$$

$$A_4 = f(\xi_4) (x_4 - x_3) = f(\xi_4) \Delta_4 x;$$

A soma  $\sum_{i=1}^4 A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$  denotada por

$$\sum_{i=1}^4 A_i = f(\xi_1) (x_1 - x_0) + f(\xi_2) (x_2 - x_1) + f(\xi_3) (x_3 - x_2) + f(\xi_4) (x_4 - x_3) =$$

$$f(\xi_1) \Delta_1 x + f(\xi_2) \Delta_2 x + f(\xi_3) \Delta_3 x + f(\xi_4) \Delta_4 x = \sum_{i=1}^4 f(\xi_i) \Delta_i x$$

é denominada Soma de RIEMANN (Georg Friedrich Riemann – 1826 à 1866).

Apresentaremos, na seqüência, a figura 56, onde  $\Delta$  é formada por quinze subintervalos.

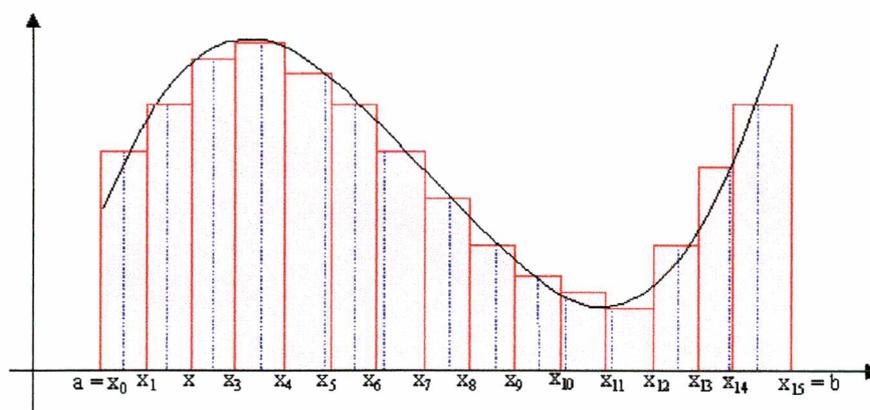


Figura 56 – Destaque para a área sob a curva e a soma das áreas dos quinze retângulos

Aqui, a soma de Riemann será:

$$\sum_{i=1}^{15} f(\xi_i) \Delta_i x = f(\xi_1) \Delta_1 x + f(\xi_2) \Delta_2 x + f(\xi_3) \Delta_3 x + f(\xi_4) \Delta_4 x + f(\xi_5) \Delta_5 x + \\ f(\xi_6) \Delta_6 x + f(\xi_7) \Delta_7 x + f(\xi_8) \Delta_8 x + f(\xi_9) \Delta_9 x + f(\xi_{10}) \Delta_{11} x + f(\xi_{12}) \Delta_{12} x + \\ f(\xi_{13}) \Delta_{13} x + f(\xi_{14}) \Delta_{14} x + f(\xi_{15}) \Delta_{15} x$$

Repetindo esse raciocínio para partições onde a quantidade de subintervalos seja muito grande, conclui-se que a área  $A$  sobre a curva é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i, \text{ mas quando } n \text{ tende a infinito, o comprimento de}$$

cada subintervalo tende a zero, portanto  $\|\Delta\|$  tende a zero, ou seja: se  $n \rightarrow \infty$  então  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  logo,

$$A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x$$

Portanto, a integral definida é a área sob a curva e é um limite, podendo-se reescrever sua definição da seguinte forma:

Se  $f$  for uma função definida no intervalo fechado  $[a, b]$ , então a integral definida de  $f$  de  $a$  até  $b$  é:

$$A = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x; \text{ isto é para todo } \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que}$$

toda partição  $\Delta$  para a qual  $\|\Delta\| < \delta$  então

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - A \right| < \varepsilon$$

#### 2.4.6. Paradoxos

Os paradoxos estudados nesse momento são aqueles em que: “o fato de um evento ter de ocorrer um número infinito de vezes não implica que seja

infinito o intervalo de tempo durante o qual a série de eventos ocorrerá”.

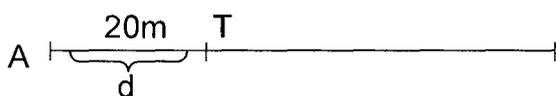
#### 2.4.6.1. Zenão e os Paradoxos

Por volta de 450 anos a.c., Zenão de Eléia, com os seus paradoxos, mostrava como facilmente pode-se chegar a conclusões ridículas quando se parte de hipóteses de sistemas rivais. Suas argumentações funcionam também como um raciocínio acautelador aos matemáticos ao lidarem com limites. (AABOE, 1984 : 51 – 52)

Focaliza-se aqui o paradoxo conhecido como paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, que em síntese é o seguinte: “O maior corredor grego, Aquiles, vai disputar uma corrida com uma tartaruga, deixando que ela fique com alguns metros de vantagem antes que ele comece a correr. Nesta situação diz Zenão:

“Aquiles não alcançará a tartaruga”. Esta afirmação contraria a expectativa gerada pela experiência, e como defesa, Zenão elabora uma linha de raciocínio que poderá ser interpretada da seguinte forma:

Supondo que 20 metros é a vantagem que Aquiles deu à tartaruga e que a velocidade de Aquiles seja 200 vezes a velocidade da tartaruga, isto é:



**Figura 57 – Posição inicial dos corredores**

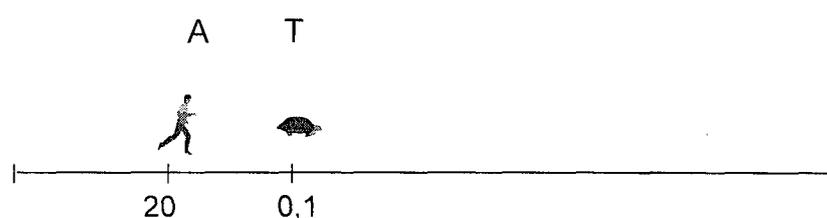
$V_A = 200 V_T$ ; multiplicando a igualdade por  $t$  (relativo a tempo), tem-se:

$V_A t = 200 V_T t$ , mas como  $V_A t = d_A$ ; distância percorrida por Aquiles em um dado instante  $t$  e  $V_T t = d_T$  distância percorrida pela tartaruga no mesmo intervalo de tempo que Aquiles percorreu o espaço  $d_A$ , portanto:  $d_A = 200 d_T$

Então quando Aquiles fizer o seu primeiro deslocamento  $d_{A1} = 20$ , a tartaruga se deslocará pela segunda vez e portanto  $20 = 200 d_{T2} \therefore$

$$d_{T2} = \frac{20}{200} = 20 \times 0,005 = 0,1$$

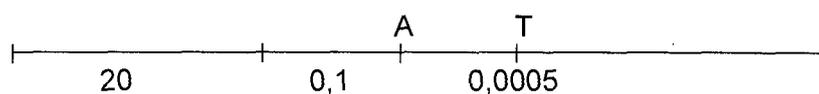
O deslocamento total de Aquiles será 20 e o da tartaruga será  $20 + 0,1$ , isto é:



**Figura 58 – Primeiro deslocamento do corredor**

Agora, Aquiles fará o seu segundo deslocamento, percorrendo 0,1 isto é,  $d_{A2} = 0,1$  e a tartaruga fará o seu terceiro deslocamento e portanto  $0,1 = 200 d_{T3} \therefore d_{T3} = 0,1 \times 0,005 = 20 \times 0,005 \times 0,005 = 20 \times (0,005)^2 = 0,0005$ .

O deslocamento total de Aquiles será  $20 + 0,1$ , e o deslocamento total da tartaruga será  $20 + 0,1 + 0,0005$ , isto é;



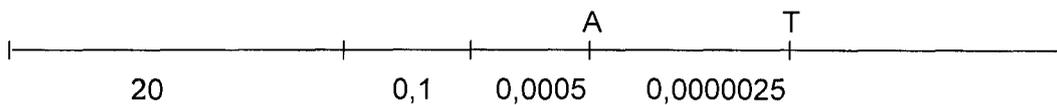
**Figura 59 – Segundo deslocamento do corredor**

Quando Aquiles fizer o seu terceiro deslocamento, isto é  $d_{A3} = 0,0005$  então a tartaruga fará o seu quarto deslocamento e portanto  $0,0005 = 200 d_{T4} \therefore$

$$d_{t4} = \frac{0,0005}{200} = 0,0005 \times 0,005 \therefore d_{t4} = 20 \times (0,005)^2 \times 0,005 = 20 \times (0,005)^3 =$$

$$0,0000025 \therefore d_{t4} = 0,0000025$$

O deslocamento total de Aquiles será  $20 + 0,1 + 0,0005$  e o deslocamento total da tartaruga será  $20 + 0,1 + 0,0005 + 0,0000025$ . Assim,



**Figura 60 – Terceiro deslocamento do corredor**

Quando Aquiles percorrer  $0,0000025$ , ou seja, o seu quarto deslocamento, a tartaruga se deslocará pela quinta vez e portanto  $0,0000025 = 200 d_{T5} \therefore$

$$d_{T5} = 0,0000025 \times 0,005$$

$$d_{T5} = 20 \times (0,005)^3 \times 0,005$$

$$d_{T5} = 20 \times (0,005)^4$$

Resumindo:

$$d_{T2} = 20 \times 0,005$$

$$d_{T3} = 20 \times (0,005)^2$$

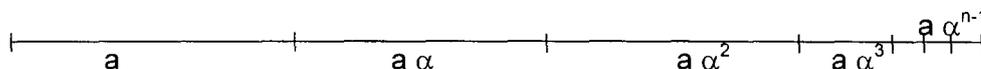
$$d_{T4} = 20 \times (0,005)^3$$

$$d_{T5} = 20 \times (0,005)^4$$

e por indução conclui-se que;  $d_{Tn} = 20 \times (0,005)^{n-1}$ . Generalizando mais ainda, é possível supor que a vantagem oferecida por Aquiles à Tartaruga seja uma constante **a** qualquer e a fórmula acima assumirá a seguinte forma:

$d_{Tn} = a \times (0,005)^{n-1}$ . Se a relação entre a velocidade de Aquiles e a velocidade da tartaruga for  $V_T = \alpha V_A$  e  $0 < \alpha < 1$  tem-se:

$$d_{Tn} = a \times \alpha^{n-1}$$



**Figura 61 – N-ésimo deslocamento do corredor**

$d_{Tn} = a \alpha^{n-1}$  será a distância entre Aquiles e a tartaruga quando Aquiles estiver na  $(n-1)$  – ésima posição e a tartaruga na  $n$  – ésima. A sucessão  $(d_{Tn})$  será:

$$(a, a \alpha, a \alpha^2, a \alpha^3, \dots, a \alpha^{n-1}, \dots)$$

Portando,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a \alpha^{n-1} = a \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{n-1} = a \cdot 0 = 0$ , porque  $0 < \alpha < 1$ .

Então Aquiles e a tartaruga só se encontrarão quando for feita uma infinidade de medições, num espaço de tempo finito e num percurso total também finito.

#### 2.4.6.2. Outro Paradoxo

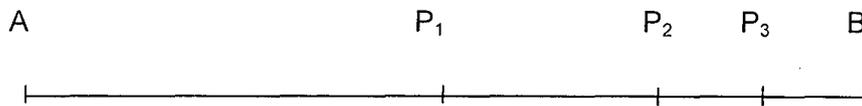
O raciocínio usado por Zenão foi o mesmo empregado na solução do seguinte problema:

Dado um segmento  $\overline{AB}$ . Marque o ponto  $P_1$  no ponto médio de  $\overline{AB}$ . Considerando o segmento  $\overline{P_1B}$  nele marque o ponto  $P_2$ , médio de  $\overline{P_1B}$ . Considerando em seguida, o segmento  $\overline{P_2B}$  marque o seu ponto médio  $P_3$ , e da mesma forma com o segmento  $\overline{P_3B}$  continuando com esse procedimento.

Mais concretamente, considerando que o segmento  $\overline{AB}$  é a largura da rua que um coelho tentará atravessar, mas o primeiro salto levará o coelho ao

meio da rua; o segundo salto levará o coelho ao meio do percurso restante e assim sucessivamente. Afirma-se que o coelho nunca chegará do outro lado da rua.

Explicação:



**Figura 62 – Três primeiras posições do coelho**

Seja a largura da rua a distância de A até B, isto é,  $d(A, B) = x$ .

Após o primeiro salto o coelho estará a uma distância  $\frac{x}{2}$  da outra margem da rua.

Após o segundo salto, o coelho estará a uma distância  $\left(\frac{x}{2}\right) : 2 = \frac{x}{4}$  da outra margem, e assim sucessivamente, até que após o  $n$  – ésimo salto o coelho se encontrará a uma distância  $\frac{x}{2^n}$  da margem oposta da rua.

A sucessão  $(d_n)$  das distâncias a serem percorridas pelo coelho é

$\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2^2}, \frac{x}{2^3}, \dots, \frac{x}{2^n}, \dots\right)$ , termo geral desta seqüência é  $d_n = \frac{x}{2^n}$ , e pode-se

afirmar que:  $d = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{2^n} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = x \cdot 0 = 0$ .

Logo, para o coelho atravessar esta rua ele terá que dar uma quantidade infinita de saltos.

### 2.4.6.3. Outro Paradoxo

#### Problema:

Uma bola de ping-pong cai de uma mesa de altura  $x$ . Ao se chocar com o solo ela sobe a uma altura  $x_1$ , e assim sucessivamente até parar. Supondo a inexistência da resistência do ar, somente o coeficiente de restituição do material e do solo  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ ; é o que garante que a bola irá parar.

O paradoxo está em que se pode provar que a bola quicará uma quantidade infinita de vezes até parar.

#### Demonstração

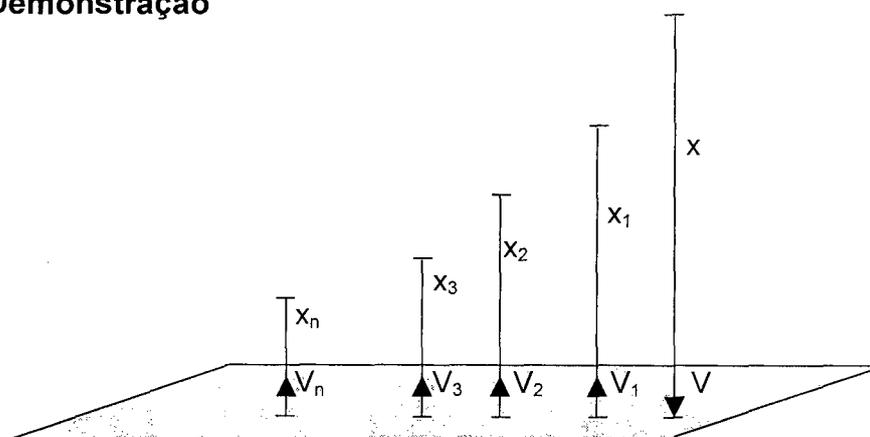


Figura 63 – Sucessão de alturas que a bola assume

Dados:

$V$  = velocidade imediatamente antes do primeiro choque.

$V_1$  = velocidade imediatamente após o primeiro choque.

Sabemos que:

$$V_1 = -\alpha V \quad \therefore \quad \boxed{V_1^2 = \alpha^2 V^2} \quad (1)$$

$$0^2 = V_1^2 - 2gx_1 \quad \therefore \quad \boxed{V_1^2 = 2gx_1} \quad (2)$$

$$V^2 = 0^2 + 2gx \quad \therefore \quad \boxed{V^2 = 2gx} \quad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1) temos:

$$2gx_1 = \alpha^2 2gx \therefore$$

$$\boxed{x_1 = \alpha^2 x} \quad (4)$$

Repetindo o mesmo raciocínio conclui-se que:  $\boxed{x_2 = \alpha^2 x_1} \quad (5)$

Substituindo 4 em 5 temos  $x_2 = \alpha^2 (x^2 x) = \alpha^4 x \therefore x_2 = \alpha^4 x \therefore$

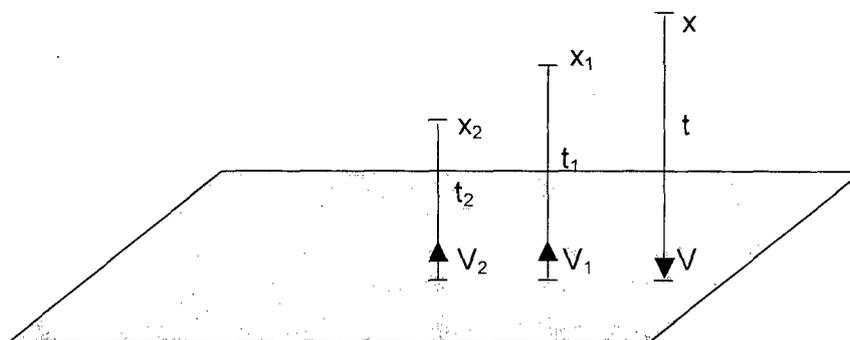
$$\boxed{x_2 = (\alpha^{2.2})x} \quad (6)$$

Por indução tem-se  $x_n = \alpha^{2^n} x$ , e que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{2^n} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{2^n}$$

como  $0 < \alpha < 1$  então,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \cdot 0 = 0$  portanto a bola irá parar no solo somente quando o evento ocorrer uma infinidade de vezes.

Entretanto, é possível calcular o tempo que a bola gasta para parar.



**Figura 64 – Sucessão de alturas e o tempo gasto pela bola**

-  $t$  é o tempo que a bola gasta na primeira queda, isto é, para descer da altura  $x$ .

$$V = 0 + gt \therefore V = gt \therefore t = \frac{V}{g}$$

-  $t_1$  é o tempo que a bola gasta na primeira subida, isto é, para subir a altura  $x_1$ .

$$0 = V_1 - g t_1 \quad \therefore \quad V_1 = g t_1 \quad \therefore \quad t_1 = \frac{V_1}{g}$$

Lembrando que a bola subiu a altura  $x_1$  no tempo  $t_1$ , mas descera a altura  $x_1$  e para isso gastará o mesmo tempo  $t_1$  e a velocidade imediatamente antes do 2º choque no solo será  $V_1$ .

Portanto o tempo gasto até aqui será de  $T_{\text{total}} = t + 2 t_1 + 2 t_2$ :

-  $t_2$  é o tempo gasto na segunda subida, isto é, para subir a altura  $x_2$ .

$$0 = V_2 - g t_2 \quad \therefore \quad V_2 = g t_2 \quad \therefore \quad t_2 = \frac{V_2}{g}$$

Mas para descer a altura  $x_2$  gastará o mesmo tempo  $t_2$  que levou para subir a altura  $x_2$  e chegará ao solo, no instante imediatamente anterior ao choque como solo, com a mesma velocidade  $V_2$ .

Portanto o tempo gasto até aqui será de  $T_{\text{total}} = t + 2 t_1 + 2 t_2$

E assim sucessivamente até ao  $n$  – ésimo choque com o solo. Logo, o tempo total para  $n$  choques é:

$$T_{\text{total}} = t + 2t_1 + 2t_2 + 2t_3 + \dots + 2t_n \quad \text{e,} \quad T_{\text{total}} = \frac{V}{g} + \frac{2V_1}{g} + \frac{2V_2}{g} + \frac{2V_3}{g} + \dots + \frac{2V_n}{g}$$

Mas  $V_1 = - \alpha V$  e o sinal negativo é só para indicar que as velocidades têm sentidos opostos, isto é;  $V$  é de descida e  $V_1$  é de subida e que, como o que interessa por hora é o tempo, despreza-se o sinal negativo e usa-se a fórmula  $V_1 = \alpha V$

$$V_2 = \alpha V_1 \quad \therefore$$

$$V_2 = \alpha (\alpha V)$$

$$V_2 = \alpha^2 V$$

$$V_3 = \alpha V_2$$

$$V_3 = \alpha (\alpha^2 V)$$

$V_3 = \alpha^3 V$ , e assim sucessivamente até  $V_n = \alpha^n V$  Então:

$$T_{\text{total}} = \frac{V}{g} + 2 \frac{(\alpha V)}{g} + 2 \frac{(\alpha^2 V)}{g} + 2 \frac{(\alpha^3 V)}{g} + \dots + 2 \frac{(\alpha^n V)}{g} + \dots =$$

$$T_{\text{total}} = \frac{V}{g} + 2 \frac{(\alpha V)}{g} + 2 \frac{(\alpha^2 V)}{g} + \dots + 2 \frac{(\alpha^n V)}{g} + \dots =$$

$$= \frac{V}{g} + 2 \frac{V}{g} + (\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^n + \dots) =$$

$$= \frac{V}{g} + 2 \frac{V\alpha}{g} \frac{1}{1-\alpha} =$$

$$= \frac{V}{g} \left( 1 + \frac{2\alpha}{1-\alpha} \right)$$

Logo  $T_{\text{total}} = \frac{V}{g} \left( 1 + \frac{2\alpha}{1-\alpha} \right)$ , mas

$$V^2 = 2gx \therefore V = \sqrt{2gx}$$

Portanto  $T_{\text{total}} = \frac{\sqrt{2gx}}{g} \left( 1 + \frac{2\alpha}{1-\alpha} \right)$

$$T_{\text{total}} = \sqrt{\frac{2x}{g}} \left( 1 + \frac{2\alpha}{1-\alpha} \right)$$

Como  $g$  é constante,  $x$  é sempre finito e conhecido e  $\alpha$  também é constante para cada tipo de solo, temos que o tempo é um número real conhecido. Supondo-se que:

$$x = 100 \text{ m}$$

$$g \cong 10 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha = 1/3$$

então

$$T_{\text{total}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{10}} \left( 1 + \frac{2 \cdot (1/3)}{1 - 1/3} \right) = \sqrt{20} (1 + 1) = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5} \text{ s.}$$

Pode-se também calcular o espaço percorrido pela bola desde que cai a primeira vez até parar.

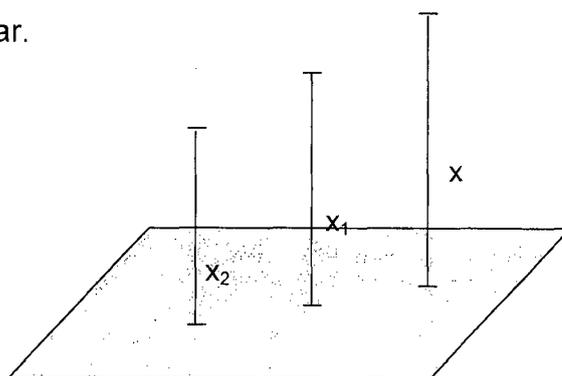


Figura 65 – Representação de três alturas assumidas pela bola

Sabe-se  $x_n = \alpha^{2n} x$

$$X_{\text{total}} = x + 2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_n + \dots = x + \alpha^2 x + 2\alpha^4 x + \dots + 2\alpha^{2n} x + \dots = x + 2x [\alpha^2 + \alpha^4 + \dots + \alpha^{2n} + \dots]; \quad 0 < \alpha < 1 \therefore$$

Para calcular  $X_{\text{total}}$  no caso onde  $\alpha = \frac{1}{3}$  e  $x = 100$

$$X_{\text{total}} = 100 + 2 \cdot 100 \frac{(1/3)^2}{1 - (1/3)^2} = 100 + 200 \frac{1/9}{1 - 1/9} = 100 + 200 \frac{1/9}{8/9}$$

$$= 100 + 200 \cdot \frac{1}{8} = 100 + 25 = 125 \text{ m}$$

Percebe-se que trabalhar no infinito não é exatamente o mesmo que trabalhar no contexto do finito. Para reforçar esta diferença é colocado a seguir, um exemplo, suplementar.

#### 2.4.6.4. Exemplos

A propriedade associativa, dentro do corpo dos reais, para a já conhecida operação adição, é verdadeira, se o número de parcelas for finito. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 &= \\ &= [2 + (-2)] + [2 + (-2)] + [2 + (-2)] = 0 = \\ &= 2 + [(-2) + 2] + [(-2) + 2] + (-2) = 0 \end{aligned}$$

Porém num caso onde o número de parcelas for infinito a propriedade não é válida. Assim:

$$\begin{aligned} [2 + (-2)] + [2 + (-2)] + [2 + (-2)] + [2 + (-2)] + [2 + (-2)] + \dots = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 0 \\ = 2 + [(-2) + 2] + [(-2) + 2] + [(-2) + 2] + [(-2) + 2] + [(-2) + 2] + \dots = 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 2 \end{aligned}$$

Usando-se a comutatividade e associatividade para um número finito de parcelas, o resultado da soma não se alterará. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 2 + (-2) + 2 + (-2) + 2 + (-2) &= 0 \\ [(-2) + (-2)] + [(-2) + 2] + [2 + 2] &= -4 + 0 + 4 = 0 \end{aligned}$$

A validade da propriedade não ocorrerá para um número infinito de parcelas. Por exemplo:

$$[2 + (-2)] + [2 + (-2)] + [2 + (-2)] + \dots = 0$$

Mas

$$(2+(-2)+2+(-2)+2+(-2)+2+(-2)+\dots) =$$

$$(2+2+2+2+\dots)+((-2)+(-2) + (-2) + (-2)+\dots) =$$

$$2+2+2+(2+2+2+2+\dots)+((-2)+(-2)+(-2)+(-2)+\dots) =$$

$$2+2+2+[2+(-2)]+[2+(-2)] +[2 + (-2)]+\dots = 6+0+0+0+0+\dots = 6$$

Portanto  $0 = 6$

Sabe-se que:

$$2+(-2)+2+(-2)+2+(-2)+2+(-2)+\dots =$$

$$(2+2+2+2+\dots)+((-2)+(-2)+(-2)+(-2)+\dots) =$$

$$\infty + (-\infty) = \infty - \infty = -\infty + \infty =$$

Essa diferença pode ser igual a zero, a dois, a seis, menos dois, menos seis, pode assumir uma infinidade de valores, não podemos determinar um único valor para  $+\infty - \infty$ , por isso se trata de uma indeterminação.

## III - OS JOGOS – CAL

∞

### 3.1 - Introdução

#### 3.1.1: Generalidades

A má utilização dos jogos, relacionou-os tão fortemente com banalidades e passatempo fúteis, sem direcionamento cognitivo e social que os transformou em atividades extra-classe o que impediu a alguns de reconhecer nos mesmos, os aspectos educacionais positivos na habilitação competente de indivíduos integralmente socializados, inteligentes, criativos, investigadores, responsáveis, alegres, felizes, tão firmes quanto flexíveis, verdadeiramente sábios, para os quais a vida não será adversária, mas parceira a lhes oferecer situações desafiadores que o levem a constantes superações e não obstáculos bloqueadores.

Com a globalização os paradigmas educacionais estão sendo pulverizados, surpreendendo os céticos e os indiferentes e transformando-os em participantes na corrente dos otimistas que tiveram seus sonhos checados e estão sendo obrigados a trabalhar duro pois, os sonhos de hoje ou são rapidamente transformados em realidade ou já estarão ultrapassados amanhã.

Na escola do século XXI não só os jogos serão parte integrante da mesma, mas os jogos computacionais também, como uma consequência da revolução tecnológica vivida pela sociedade do nosso século, à luz dos paradigmas construtivistas e construcionistas, ou esta escola será parte do museu da humanidade, catalogada como Escola do Século XVIII.

### 3.1.2. Objetivos Gerais do $CAL_{\infty}$

Estes jogos,  $CAL_{\infty}$ , tem como objetivo:

- auxiliar o professor e o aluno no processo ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral de Funções de uma variável real;
- promover a auto competição no aluno, buscando sempre situações de equilíbrio após cada obstáculo superado e tratado como desafio;
- construir uma relação prazerosa e alegre, através do jogo, entre o aluno e as experiências que o conduzem à aprendizagem;
- desenvolver a competição cooperativa entre os alunos;
- oferecer ao aluno um tratamento socializado promovendo-o à posição de sujeito ativo na construção do saber lógico-matemático;
- promover competência, autoconfiança e diminuir a ansiedade ao fim de cada etapa vencida e cada objetivo alcançado pelo aluno;
- colaborar para que o aluno se encante com a beleza intrínseca da estrutura matemática do Cálculo Diferencial e Integral, embutida nos conceitos de limite, derivada e integral.

### 3.1.3. Procedimentos Gerais

Os procedimentos gerais para a operacionalização dos jogos são:

- o facilitador proporá a formação de grupos afins, de no máximo

três alunos, para cada computador que poderão ser formados por opção e escolha dos próprios alunos;

- o professor poderá interferir para resolver possíveis impasses, evitar a mesmice improdutiva e possibilitar maior integração e repasse de experiências enriquecedoras;
- o educador tem que estar consciente de que:
  - indivíduos visuais terão necessidade de ler as instruções para que possam compreender a atividade e apresentarão dificuldade de entendimento se receberem as orientações de forma oral;
  - com os auditivos ocorrerá o inverso, isto é, entenderão melhor as orientações orais e apresentarão dificuldades ao receberem orientações escritas;
  - com os alunos cinestésicos a aprendizagem se dará com mais facilidade quando receberem estímulos que promovam o envolvimento emocional dos mesmos com a tarefa a ser executada e neste caso o diálogo e o questionamento serão pontos de partida para a escolha da motivação adequada.

### 3.2. Descrição dos Jogos $CAL_{\infty}$

Os jogos  $CAL_{\infty}$  foram organizados num software composto por duas partes. A parte I contém os jogos do Módulo  $CAL_{\infty}$  – limf – I e do Módulo  $CAL_{\infty}$  – limf II. A parte II contém os jogos do Módulo  $CAL_{\infty}$  – f', do Módulo  $CAL_{\infty}$  – f, e do Módulo  $CAL_{\infty}$  – ZEN.

A parte I foi elaborada com a linguagem CLIPPER 5.1, usando imagens produzidas por PAINT BRUSH, 256 cores e biblioteca gráfica CLBC 3.0, executado em ambiente Windows 95 ou 98, com janela para MS DOS.

A parte II foi construída com a ferramenta Visual Basic 5.0 em ambiente operacional 95 ou 98.

Para a utilização da parte I do software, localiza-se o ícone CAL na tela de início do windows e efetua-se, no mesmo, dois cliques para que a tela principal seja trazida para o vídeo. Ver Tela 1 na página 158 em anexo.

Nesta tela, que foi denominada de Tela 1 em anexo, posicionando-se o mouse em qualquer um dos seus botões, a barra de mensagem exibirá sua função e/ou conteúdo.

Com o objetivo de facilitar a visualização e o entendimento da descrição dessa tela, faça-se uma correspondência biunívoca entre os botões circulares da mesma e os botões numerados da figura 1 abaixo.

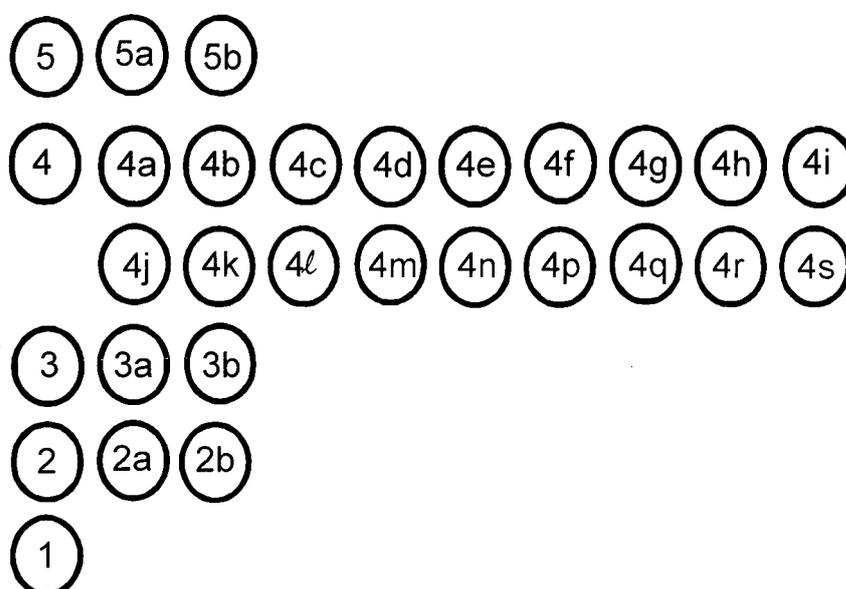


Figura 1 – Codificação dos botões circulares da tela 1

Para sair do programa e retornar à tela inicial do windows é só clicar uma vez no botão 1.

### 3.2.1. Módulo $CAL_{\infty}$ -limf – I: Limite – Noção Intuitiva

Este módulo é composto de quatro jogos:

- dois jogos com polígonos inscritos, para a solução de dois problemas, um de cálculo do perímetro de circunferência e o outro de cálculo de área do círculo;
- dois jogos com polígonos circunscritos, para a solução de dois problemas, um de cálculo de perímetro da circunferência, e outro de cálculo de área do círculo.

Os quatro jogos deste módulo, têm o objetivo de construir a aprendizagem do conceito intuitivo de limite, o que ocorrerá naturalmente, como consequência das constatações geométricas e algébricas que cada jogo evidencia.

#### **Jogo I – Problema I**

**Tarefa:** Calcular o perímetro da circunferência

**Método:** Aproximação por polígonos regulares inscritos.

#### **Constatações Geométricas:**

- o perímetro de cada polígono é menor do que o perímetro da circunferência;
- o perímetro do polígono será maior quanto mais lados o polígono tiver;

- o perímetro dos polígonos cresce indefinidamente;
- o perímetro dos polígonos não ultrapassa o perímetro da circunferência;
- a partir de um determinado número de lados, o perímetro do polígono se confunde com o perímetro da circunferência.

#### **Constatações Algébricas:**

- se  $P_n$  simboliza o perímetro do polígono de  $n$  lados então a seqüência  $(P_n) = (P_3, P_4, P_5, \dots, P_n, \dots)$  é crescente e limitada e seus valores se aproximam do perímetro da circunferência.

#### **Jogo II – Problema II**

**Tarefa:** Calcular a área do círculo.

**Método:** Aproximação por polígonos regulares inscritos.

#### **Constatações Geométricas:**

- a área de cada polígono é uma parte da área do círculo;
- a área do polígono será maior quanto mais lados o polígono tiver;
- a área dos polígonos cresce mas não indefinidamente;
- a área dos polígonos não ultrapassa a área do círculo;
- a partir de um determinado número de lados, a área do polígono se confunde com a área do círculo.

#### **Constatações Algébricas:**

- se  $A_n$  simboliza a área do polígono de  $n$  lados então a seqüência matemática  $(A_n) = (A_3, A_4, A_5, \dots, A_n, \dots)$  é crescente e limitada e

seus valores se aproximam da área do círculo para valores de  $n$  muitos grandes.

### **Jogo III – Problema III**

**Tarefa:** Calcular o perímetro da circunferência.

**Método:** Aproximação por polígonos regulares circunscritos.

#### **Constatações Geométricas:**

- o perímetro de cada polígono é maior que o perímetro da circunferência;
- o perímetro dos polígonos diminui mas não diminui indefinidamente;
- o perímetro dos polígonos não fica menor que o perímetro da circunferência;
- a partir de um determinado número de lados o perímetro do polígono se confunde com o perímetro da circunferência.

#### **Constatações Algébricas:**

- se  $P_n$  simboliza o perímetro do polígono de  $n$  lados então a seqüência  $(P_n) = (P_3, P_4, P_5, \dots, P_n, \dots)$  é decrescente, limitada e seus valores se aproximam do perímetro da circunferência.

### **Jogo IV – Problema IV**

**Tarefa:** Calcular a área do círculo.

**Método:** Aproximação por polígonos regulares circunscritos.

#### **Constatações Geométricas:**

- a área do círculo é uma parte da área do polígono.

- a área do polígono será menor quanto mais número de lados o polígono tiver;
- a área de um polígono nunca fica menor que a área do círculo;
- a partir de um determinado número de lados a área do polígono se confunde com área do círculo.

#### **Constatações Algébricas:**

- se  $A_n$  simboliza a área do polígono de  $n$  lados então a seqüência  $(A_n) = (A_3, A_4, A_5, \dots, A_n, \dots)$  é decrescente, limitada e seus valores se aproximam da área do círculo para valores de  $n$  muito grande.

#### **Procedimentos, no software, para a utilização dos jogos do**

#### **Módulo $CAL_{\infty}$ - limf – I – Limite Noção Intuitiva.**

Clicando uma vez no botão (2) os botões (2a) e (2b) ficarão azuis e com permissão para serem abertos. Em seguida, um só clique em (2a) trará para o video a tela 2 do jogo I, usado para calcular o perímetro da circunferência por polígonos regulares inscritos. A tela 2 está exposta na página 2, em anexo.

Na base dessa tela estão três retângulos e da direita para a esquerda, o primeiro mostra a fórmula geral para calcular o perímetro do polígono regular inscrito, de  $n$  lados.

O segundo exhibe o raio da circunferência da tela, a fórmula para o cálculo do perímetro e o valor do perímetro da mesma.

O terceiro retângulo é o local onde pode ser solicitado o número de

lados do polígono, ou seja, clicando, seguidamente, na seta que aponta para baixo, o número de lados do polígono vai aumentando e na seta que aponta para cima, o número de lados do polígono vai diminuindo.

Se o  $n^{\circ}$  de lados for 3, o triângulo aparecerá inscrito na circunferência e a faixa azul, vertical, na margem direita da tela, exibirá o valor do perímetro desse triângulo. Ver tela 3 em anexo, na página 160.

Este processo é repetido para cada polígono e a finalidade desta iteração é chegar a um  $n^{\circ}$  de lados que permita evidenciar as constatações geométricas e algébricas listadas, anteriormente no jogo I.

Quando se desejar finalizar o jogo, basta um clique, no botão  do terceiro retângulo.

Clicando uma vez no botão (2b), será aberto o jogo II, onde se calcula a área do círculo, por polígonos regulares inscritos, iniciando com a tela 23 exposta na página 180, em anexo.

Com a finalidade de melhor ilustrar este procedimento, é apresentada a seqüência de telas que foi descrita em anexo, da página 158 à página 248.

Na base dessa tela estão três retângulos, da direita para a esquerda, o primeiro mostra a fórmula geral para calcular a área do polígono regular inscrito, de  $n$  lados. O segundo exhibe o raio do círculo da tela, a fórmula para o cálculo da área e o valor da área do mesmo.

O terceiro retângulo é o local onde pode ser solicitado o número de

lados do polígono isto é, clicando, seguidamente, na seta que aponta para baixo, o nº de lados do polígono vai aumentando e na seta que aponta para cima, para que o nº de lados do polígono vai diminuindo.

Fazendo  $n = 3$ , o triângulo aparecerá inscrito no círculo e a faixa azul, vertical, na margem direita da tela, exibirá o valor da área desse triângulo.

Este processo é repetido para cada polígono e a finalidade desta iteração é chegar a um nº de lados que permita evidenciar as constatações geométricas e algébricas listadas, anteriormente, no jogo II.

Quando se desejar finalizar o jogo, basta um clique no botão  do terceiro retângulo.

Apresenta-se as três telas do jogo, a tela 23, a tela 24 e a tela 25, para ilustrar o procedimento descrito, nas respectivas páginas 180, 181 e 182, em anexo.

Com um só clique o botão (3), os botões (3a) e (3b) ficarão azuis e com permissão para serem abertos. Em seguida, um clique só em (3a) trará para o vídeo a tela 26 apresentada na página 183, em anexo, do jogo III, usado para calcular o perímetro da circunferência por polígonos regulares circunscrito.

Na base dessa tela estão três retângulos, e da direita para a esquerda, o primeiro mostra a fórmula geral para calcular o perímetro do polígono vai aumentando.

Fazendo nº 3, o triângulo aparecerá circunscrito à circunferência e a faixa azul, vertical, na margem direita da tela, exibirá o valor do perímetro do triângulo.

Este processo é repetido para cada polígono e a finalidade desta iteração é chegar a um  $n^{\circ}$  de lados que permita evidenciar as constatações geométricas e algébricas listadas, anteriormente no jogo III.

Quando se desejar finalizar o jogo basta um clique no botão  do terceiro retângulo.

Em anexo apresenta-se as telas 26, 27 e 28 do jogo, às respectivas páginas 183, 184 e 185, para ilustração.

Para abrir o Jogo IV, basta um só clique em (3b) e será mostrada a tela 29 à página 186, em anexo, do jogo que mostra que a área do círculo pode ser determinada calculando-se a área do polígonos regulares circunscritos.

Na base dessa tela estão três retângulos, e da direita para a esquerda, o primeiro mostra a fórmula geral para ser encontrada a área do polígono regular circunscrito, de  $n$  lados. O segundo exibe o raio do círculo da tela, a fórmula para o cálculo da área e o valor dessa área. O terceiro retângulo é o local onde pode ser solicitado o número de lados do polígono, assim clicando, seguidamente, na seta que aponta para baixo, o  $n^{\circ}$  de lados do polígono vai aumentando e na seta que aponta para cima, o  $n^{\circ}$  de lados do polígono vai diminuindo.

Fazendo  $n = 3$ , o triângulo aparecerá circunscrito ao círculo e a faixa azul, vertical, na margem direita da tela, exibirá o valor da área desse triângulo.

Este processo é repetido para cada polígono e a finalidade desta

iteração é chegar a um nº de lados que permita evidenciar as constatações geométricas e algébricas listadas, anteriormente, no jogo IV.

Quando se desejar finalizar o jogo, basta clicar no botão  do terceiro retângulo.

Em anexo serão apresentadas as telas 29, 30 e 31 do jogo, às respectivas páginas 186, 187 e 188, para facilitar a visualização e o entendimento do procedimento descrito.

### 3.2.2. Módulo $CAL_{\infty}$ - lim f – II: Limite – Definição.

Este módulo é composto de dois blocos de jogos que objetivam promover a aprendizagem efetiva e eficiente da definição convencional de limite.

Assim:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que,}$$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \text{ para } \varepsilon \text{ e } \delta \text{ tão pequeno quanto se queira.}$$

A forma que se lê esta definição é:

limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$  é igual a  $b$ , se, e somente se, qualquer que seja  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que:

se  $0 < |x - a| < \delta$  então  $|f(x) - b| < \varepsilon$ , sendo  $\varepsilon$  e  $\delta$  positivos e tão pequenos quanto se queira.

Para melhor entendimento, constrói-se uma seqüência de definições

equivalentes, onde o nível de abstração é gradativamente apresentado, a saber:

### Definição I

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall W = (b - \varepsilon, b + \varepsilon), \exists V = (a - \delta_2, a + \delta_1) \text{ tal que:}$$

$x \in V$  e  $x \neq a \Rightarrow$  os pontos  $(x, f(x))$  do gráfico de  $f$ , são pontos interiores ao retângulo de altura  $2\varepsilon$  e base  $\delta_2 + \delta_1$ , para  $\varepsilon, \delta_1$  e  $\delta_2$ , números reais positivos tão pequenos quanto se queira.

### Definição II

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall W = (b - \varepsilon, b + \varepsilon), \exists V = (a - \delta_2, a + \delta_1), \text{ tal que:}$$

se  $x \in V$  e  $x \neq a$ , e  $x$  se aproximar de  $a$  então  $f(x) \in W$  e  $f(x)$  se aproxima de  $b$ , para  $\varepsilon, \delta_1, \delta_2$  reais positivos tão pequenos quanto se queira.

### Definição III

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall W = (b - \varepsilon, b + \varepsilon), \exists V = (a - \delta, a + \delta),$$

tal que: se  $x \neq a$ , e  $x \in (a - \delta, a + \delta)$  então os pontos  $(x, f(x))$  do gráfico de  $f$ , exceto possivelmente  $(a, f(a))$ , estarão no interior do retângulo de altura  $2\varepsilon$  e base  $2\delta$ , onde  $\delta \leq \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$  e  $\varepsilon, \delta$  são reais positivos tão pequenos quanto se queira.

### Definição IV

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall W = (b - \varepsilon, b + \varepsilon), \exists V = (a - \delta, a + \delta), \text{ tal que:}$$

para  $x \neq a$ , e  $x \in (a - \delta, a + \delta)$  se  $x$  se aproxima de  $a$ , então  $f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  e se aproxima de  $b$ , para  $\varepsilon$  e  $\delta$  reais positivos e tão

pequenos quanto se queira.

### Definição V

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall W = (b - \varepsilon, b + \varepsilon), \exists V = (a - \delta, a + \delta)$ , tal que:

se  $0 < d(x, a) < \delta$  então os pontos  $(x, f(x))$  do gráfico de  $f$ , exceto possivelmente  $(a, f(a))$ , estarão todos no interior do retângulo de altura  $2\varepsilon$  e base  $2\delta$ , para  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  tão pequenos quanto se queira.

### Definição VI

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall W(b - \varepsilon, b + \varepsilon), \exists V(a - \delta, a + \delta)$ , tal que:

se  $0 < d(x, a) < \delta$  então  $d(f(x), b) < \varepsilon$ , para  $\varepsilon$  e  $\delta$  reais positivos tão pequenos quanto se queira.

### Definição VII

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tal que:

se  $0 < d(x, a) < \delta$  então  $(x, f(x))$ , pertencerá ao interior do retângulo de  $2\varepsilon$  e base  $2\delta$  para  $\varepsilon, \delta$ , reais positivos tão pequenos quanto se queira.

### Definição VIII

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tal que:

se  $0 < d(x, a) < \delta$  então  $d(f(x), b) < \varepsilon$ , para  $\varepsilon$  e  $\delta$  tão pequenos quanto se

queira.

### Definição IX

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tal que:

se  $0 < |x - a| < \delta$  então os pontos do gráfico de  $f(x, f(x))$  pertencerão ao interior do retângulo de altura  $2\varepsilon$  e base  $2\delta$ , para  $\varepsilon$  e  $\delta$  tão pequenos quanto se queira.

### Definição X

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tal que:

se  $0 < |x - a| < \delta$  então  $|f(x) - b| < \varepsilon$ , para  $\varepsilon$  e  $\delta$  tão pequenos quanto se queira.

Os Jogos apresentam situações que contemplam às definições I e II, onde  $a$  pertence ao intervalo  $V$ , mas não é o centro de  $V$ , e mostram que a existência ou não de  $f(a)$  não interfere na existência ou não de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Logo, um dos objetivos destas simulações é explorar a seguinte afirmação: "limite não é uma propriedade pontual, mas sim, o estudo do comportamento da função nas proximidades de um ponto.

Ou seja; os jogos mostram situações onde:

$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $b = f(a)$ ;

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ e } b \neq f(a);$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ e } \nexists f(a);$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ e } f(a) = b;$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ e } \exists f(a) \neq b;$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ e } \nexists f(a).$$

O que possibilita concluir que a existência ou não do  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  independe da existência ou não de  $f(a)$  e entender que esta é a justificativa que valida a afirmação destacada no parágrafo anterior, isto é, "limite não é uma propriedade pontual".

O conjunto seguinte de jogos focalizam situações contempladas pela definições III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, onde  $a$  pertence a  $V$  e  $a$  é o centro de  $V$ . Neste caso a base do retângulo é  $2\delta \leq \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ .

Aqui também, os jogos focalizam situações que deixam claro que, "limite não é uma propriedade pontual, mas sim, o estudo do comportamento da função nas proximidades de um ponto. Por isso mostram situações onde:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ e } b = f(a);$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ e } b \neq f(a);$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ e } \nexists f(a);$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ e } f(a) = b;$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ e } \exists f(a) \neq b;$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ e } \nexists f(a).$$

Assim conclui-se que a existência ou não de  $f(a)$  não interfere na existência ou não do  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Nas definições V, VI, VII e VIII são trocadas as expressões  $x \neq a$  e  $x \in V = (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in W = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  por  $0 < d(x, a) < \delta$  e  $d(f(x), b) < \varepsilon$ .

E finalizando, nas definições IX e X apenas foram substituídas as expressões  $0 < d(x, a) < \delta$  e  $d(f(x), b) < \varepsilon$  por expressões equivalentes usando a notação de módulo, a saber;

$$0 < |x - a| < \delta \text{ e } |f(x) - b| < \varepsilon$$

**Procedimentos, no software, para a utilização dos jogos do módulo  $CAL_{\infty}$  -limf- II: Limite-Definição.**

Clicando uma vez no botão ④ os botões ④a, ④b, ④c, ④d, ④e, ④f, ④g, ④h, ④i, ④j, ④k, ④l, ④m, ④n, ④q, ④r, ④s, ficarão azuis e com permissão para serem abertos. Em seguida, um só clique em em ④a trará para o video a tela 32, tela inicial do jogo ④a, que mostra o gráfico de uma função contínua e que se encontra exposta na página 189, em anexo.

Na base dessa tela estão três retângulos, e da direita para a esquerda, o primeiro informa que, nesse jogo,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$ . O segundo exibe a abscissa de **a** (90,000), e a ordenada de **b** (74,779). O terceiro retângulo mostra a ordenada do primeiro ponto da curva  $f(x)$  e ao lado direito desta informação, estão duas setas,  $\nabla$   $\Delta$ . Clicando, seguidamente na seta que aponta para baixo, a ordenada assumirá valores cada vez mais próximos, de **b**, e para cada um destes valores serão construídos retângulos cada vez menores.

Estes retângulos são formados da seguintes maneira: após a escolha de valor da ordenada, o computador determina o valor de  $\varepsilon$ :

Assim: para a ordenada 63,000,  $\varepsilon = b - 63,000 = 74,779 - 63,000 = 11,779$ . Em seguida calcula a ordenada do ponto  $b + \varepsilon$ , simétrico de **b**, determinando desta forma o intervalo, simétrico, de centro em **b** e raio  $\varepsilon$  no eixo dos **y**,  $W = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ . Pela função inversa de  $f(x)$  faz a projeção de  $W$  no eixo dos **x** encontrando assim  $V = (a - \delta_2, a + \delta_1)$  como imagem inversa de  $W$ . Finalizando, constrói o retângulo de altura  $2\varepsilon$  e base  $\delta_2 + \delta_1$ .

A seta que aponta para cima será acionada com um clique, caso se queira retornar a retângulos anteriores ao que estiver no vídeo.

A finalidade da construção desses retângulos é mostrar a existência do limite pela definição I, ou seja:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall W = (b - \varepsilon, b + \varepsilon), \quad \exists V = (a - \delta_2, a + \delta_1) \quad \text{tal que: } x \in V \text{ e}$$

$x \neq a \Rightarrow$  os pontos  $(x, f(x))$  do gráfico de  $f$ , exceto possivelmente  $(a, f(a))$ , são

pontos interiores ao retângulo de altura  $2\varepsilon$  e base  $\delta_2 + \delta_1$ , para  $\varepsilon, \delta_2, \delta_1$ , números reais tão pequenos quanto se queira.

Sabe-se também que, para cada retângulo construído pode-se fazer  $x \in V$  e  $x \neq a$ , se aproximar de  $a$ , isto é, fazer  $x$  se aproximar de 90 tanto por valores menores como por valores maiores que 90. Para executar esta função é que se utiliza o outro conjunto de setas,  $\nabla$   $\wedge$ . Clicando-se, seguidamente, na seta que aponta para baixo,  $\nabla$ , os valores de  $x$  vão se aproximando de 90 por valores menores que 90 e para que este procedimento se torne visível, os pontos correspondentes aos valores de  $x$ , no seio dos  $x$ , aparecerão em cor vermelha.

Ao mesmo tempo os ponto do gráfico correspondentes aos valores assumidos por  $x$  ficarão também vermelhos, e no eixo dos  $y$  as imagens destes  $x$ , em  $W$ , aparecerão destacados, com esta mesma cor e aproximando-se de  $b$ .

Tudo isto, com a finalidade de mostrar a existência do limite, pela definição II, ou seja:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall W = (b - \varepsilon, b + \varepsilon), \exists V = (a - \delta_2, a + \delta_1) \text{ tal que: Se } x \in V \text{ e}$$

$x \neq a$ , e se  $x$  se aproxima de  $a$  então  $f(x) \in W$ , e  $f(x)$  se aproxima de  $b$ , para  $\varepsilon, \delta_2, \delta_1$  números reais positivos tão pequenos quanto se queira.

A seta,  $\Delta$ , que aponta para cima é usada para retornar à tela anterior a que se apresenta no vídeo.

Com o objetivo de facilitar a visualização deste procedimento apresenta-se uma seqüência de telas, desde a tela de número 32 até a de

número 48, em anexo, às páginas de número 189 até a de número 205.

Para entrar no próximo jogo, feche este clicando uma só vez na tecla

localizada no canto superior direito, do terceiro retângulo.

Repetindo este procedimento é possível abrir qualquer um dos jogos dos botões (4a), (4b), ..., (4s).

O jogo (4c) apresenta o gráfico de uma função descontínua, com uma descontinuidade removível. Por isso o primeiro retângulo informa que,

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) \neq b$ . Este é um exemplo de uma função descontínua em

$x = a$ , isto é, onde o ponto  $(a, f(a))$  se encontra fora do retângulo mas o

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  continua sendo **b**. Ver tela 49 à página 206 em anexo.

Reescrevendo a definição I:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall W = (b - \varepsilon, b + \varepsilon), \exists V = (a - \delta_2, a + \delta_1)$  tal que:  $x \in V$  e  $x \neq a$ ,

os pontos  $(x, f(x))$  do gráfico de **f**, exceto possivelmente  $(a, f(a))$  são pontos do interior do retângulo de altura  $2\varepsilon$  e base  $\delta_2 + \delta_1$ , para  $\varepsilon, \delta_2, \delta_1$  números reais

positivos tão pequenos quanto se queira, observa-se nela as expressões ...

$x \neq a$  ... e ... exceto possivelmente  $(a, f(a))$ ... e compreende-se que a finalidade

das mesmas é contemplar as situações de existência do limite em

descontinuidades onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) \neq b$ , isto é, o ponto  $(a, f(a))$  está fora

do retângulo.

Observando a definição II:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall W = (b - \varepsilon, b + \varepsilon), \exists V = (a - \delta_2, a + \delta_1)$  tal que: Se  $x \in V$  e  $x \neq a$ , e se  $x$  se aproxima de  $a$  então  $f(x) \in W$  e  $f(x)$  se aproxima de  $b$ , para  $\varepsilon, \delta_2, \delta_1$  números reais positivos tão pequenos quanto se queira, atenta-se para a expressão...  $x \neq a$ ... e entende-se que, na realidade, o valor de  $f(a)$  não interfere, na existência do  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e assim fica justificada a presença da expressão  $x \neq a$  nesta definição.

O jogo (4c) apresenta o gráfico de uma função descontínua, uma descontinuidade removível. Por isso o primeiro retângulo informa que,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $\neq f(a)$ , o que mais uma vez vem justificar as mesmas expressões ...  $x \neq a$ ... e ... exceto possivelmente  $(a, f(a))$ ... nas definições I e II. Ver tela 50, página 207, em anexo.

O jogo (4d) apresenta o gráfico de uma função descontínua, uma descontinuidade essencial. Por isso o primeiro retângulo informa que,  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) = b$ . O que justifica a não interferência da imagem de  $a$  com a existência ou não do  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Ver tela 51, página 208, em anexo.

O jogo (4e) exhibe o gráfico de uma função contínua. Logo o primeiro retângulo informa que,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$  e as conclusões são as mesmas do jogo (4a). Ver tela 52, página 209 em anexo.

O jogo (4f) é desenvolvido numa função de descontinuidade removível do tipo da simulação onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) \neq b$ . Portanto para (4f) as conclusões são idênticas às do (4c). Ver tela 53, página 210, em anexo.

Em (4g) jogo utiliza uma descontinuidade essencial onde  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) \neq b$ . Ver tela 54, página 211, em anexo.

No exemplo (4h) temos a mesma situação de (4g), isto é, uma descontinuidade essencial onde  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) \neq b$ . Ver tela 55, página 212, em anexo.

Na simulação (4i) a situação é:  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a)$ . Ver tela 56, página 213, em anexo.

Até aqui, os jogos simulam questões onde os retângulos tem altura  $2\varepsilon$  e base  $\delta_1 + \delta_2$  com  $\varepsilon, \delta_1, \delta_2$  reais positivos ou seja  $a \in (a - \delta_2, a + \delta_1)$ .

Construindo-se um retângulo de altura  $2\varepsilon$  e base  $2\delta$  e  $\delta \leq \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , ele estará contido no retângulo de base  $\delta_1 + \delta_2$  e  $a \in (a - \delta, a + \delta)$  e todas as definições que valem para o primeiro retângulo, são verdadeiras também para o segundo.

Assim a definição I se transformará na definição III, isto é

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall W = (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \exists V = (a - \delta, a + \delta)$ , tal que: se

$x \neq a$  e  $x \in (a - \delta, a + \delta)$ , então os pontos  $(x, f(x))$  do gráfico de  $f$ , exceto possivelmente  $(a, f(a))$ , estarão no interior do retângulo de altura  $2\varepsilon$  e base  $2\delta$ ,

onde  $\delta \leq \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$  e  $\varepsilon, \delta_1$  e  $\delta_2$  são reais positivos e tão pequenos quanto se queira.

A definição II se transformará na Definição IV, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon = (b - \varepsilon, b + \varepsilon), \exists (a - \delta, a + \delta), \text{ tal que: para}$$

$x \neq a$  e  $x \in (a - \delta, a + \delta)$ , então  $f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  e  $f(x)$  se aproxima de  $b$ , para  $\varepsilon$  e  $\delta$  reais positivos e tão pequenos quanto se queira.

Com o objetivo de facilitar a aprendizagem de limite, à luz da definição III e da definição IV, é que foram construídas as seguintes simulações:

- o jogo (4j), onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(a) = b$ , é uma variação de (4a) para  $V = (a - \delta, a + \delta)$ . Ver telas, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66; da página 214 até a página 223, em anexo.
- o jogo (4k), onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $\cancel{f}(a)$  é uma outra versão para o (4c) em  $(a - \delta, a + \delta)$ . Ver tela 67, página 224 em anexo.
- o jogo (4l), onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) \neq b$ , como em (4b), mas em  $(a - \delta, a + \delta)$ . Ver tela 68, página 225, em anexo.
- o jogo (4m), onde  $\cancel{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) = b$ , como em (4d), mas para  $(a - \delta, a + \delta)$ . Ver tela 69, página 269, em anexo.
- o jogo (4n), onde  $\cancel{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $f(a) \neq b$ , como (4h), mas em  $(a - \delta, a + \delta)$ . Ver tela 70, página 227, em anexo.
- o jogo (4p), onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) = b$ , é similar a (4e), mas em  $(a - \delta, a + \delta)$ . Ver tela 71, página 228, em anexo.
- o jogo (4q), onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $\cancel{f}(a)$ , é similar a (4f), mas

em  $(a - \delta, a + \delta)$ . Ver tela 72, página 229, do anexo.

- o jogo (4r), onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $f(a) \neq b$  para  $(a - \delta, a + \delta)$ , que é similar ao (4n). Ver tela 73, página 230, em anexo.

### 3.2.3. Módulo - $CAL_{\infty}$ - $f'$ : Derivada da função $f$

O objetivo deste jogo é desenvolver a noção intuitiva de derivada de uma função, promovendo a generalização máxima do conceito.

Tarefa: Dada a curva  $f(x) = \sqrt{80^2 - x^2}$  e a tangente à esta curva no ponto P de coordenadas  $x_0 = -60$  e  $y_0 = 52,91502622130$ , traçar secantes passando pelo ponto P, fixo, e por outro ponto  $A = (x, f(x))$  qualquer, móvel, que se desloca sobre a curva, aproximando-se de P tanto quanto se queira.

Método: Traçar tangente à uma curva pela aproximação de secantes.

#### Constatações Geométricas:

- Dados dois pontos  $P = (x_0, f(x_0))$  e  $A = (x, f(x))$  da curva se forem traçadas retas secantes passando por P e A, P fixo e A móvel deslocando-se sobre a curva na direção de P, teremos uma seqüência de retas secantes que se aproximam da reta tangente à curva no ponto P.
- A inclinação das retas secantes se aproxima da inclinação da reta tangente, a medida que A se aproxima de P.
- Fazer  $A = (x, f(x))$  se aproximar de  $P = (x_0, f(x_0))$  é o mesmo que fazer  $x$  tender para  $x_0$ .

### Constatações Algébricas

- Quando  $A = (x, f(x))$  tende para  $P = (x_0, f(x_0))$  os valores dos coeficientes angulares das retas secantes formam uma seqüência numérica que converge para ao valor do coeficiente angular da reta tangente.

Por todas esta constatações conclui-se que:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ e como } f'(x_0) \text{ é um limite pode-se}$$

escrever:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

**Procedimentos, no software, para a utilização dos jogos do**

**módulo  $CAL_{\infty} - f'$ , do módulo  $CAL_{\infty} - \int f$  e do Módulo  $CAL_{\infty} - ZEN$ .**

Estando-se na tela de início do windows, deve-se clicar em Iniciar e na seqüência, em Programas e finalmente em GRF, para que o software exiba a tela principal dos jogos da parte II, que mostra, na barra de mensagem, o título:

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL, e os subtítulos:

DERIVADA-INTEGRAL – PARADOXOS.

Com um só clique no termo DERIVADA o jogo do módulo  $CAL_{\infty} - f'$

será aberto e a tela de início será apresentada no vídeo. Ver tela 74, página 231, em anexo.

Nesta tela tem-se o gráfico da curva  $f(x) = (80^2 - x^2)^{1/2}$  e da reta tangente a esta curva no ponto de coordenadas  $x = -60$  e  $y = 52,9150$ .

Conforme o mouse desliza pela tela, as coordenadas dos pontos são exibidas no campo [x:  y:  ], localizado no canto direito superior.

Imediatamente abaixo, uma tabela é utilizada para expor, na primeira linha, as coordenadas do ponto P de tangência e o coeficiente angular da reta tangente à curva; e nas linhas subseqüentes, às coordenadas do ponto A e o coeficiente angular de cada reta secante à curva nos pontos P e A. Ver tela 75, página 232, em anexo.

Imediatamente abaixo, um retângulo mostra a equação da curva em estudo, isto é,  $f(x) = (80^2 - x^2)^{1/2}$ ; a equação da derivada  $f'(x) = \frac{-x}{(80^2 - x^2)^{1/2}}$  e o valor da derivada de f em  $x = -60$ , ou seja,  $f'(-60) = 1,1338934190$ .

Para variar a espessura das linhas do gráfico da curva e das retas, tangente e secantes, tem-se as opções 1, 2 e 3 no campo de mesmo nome.

Em  $x =$  , digita-se um valor que pode variar de  $-80$  à  $80$  e em seguida clica-se uma vez no botão **Secante** para que na tela apareça o gráfico da secante que passa pelo ponto P, de tangência, e por A (móvel) que possui a abscissa digitada.

O retângulo identificado pela palavra **Novo** serve para que o jogo seja reiniciado.

Para fechar o jogo e retornar a tela principal basta acionar o botão **Fechar** com um só clique.

Para que o objetivo deste jogo seja alcançado, o professor deve pedir aos alunos que escolham valores de  $x$  que se aproximem  $-60$  para que possam observar na tabela, que a seqüência dos coeficientes angulares das secantes tende para o valor do coeficiente angular da tangente, e geometricamente, fica evidente que a secante passa a tangenciar à curva.

### Conclusão:

$$f'(-60) = \lim_{x \rightarrow -60} \frac{f(x) - f(-60)}{x - (-60)}$$

### Generalizando:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - (x_0)} \text{ e como } f'(x_0) \text{ é um limite pode-se}$$

escrever:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - (x_0)} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 \text{ tal que:}$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

### 3.2.4. Módulo $CAL_{\infty}$ - $\int f$ : Integral Definida da Função $f$

O objetivo dos jogos deste bloco é mostrar que a integral definida,

$\int_a^b f(x) dx$  é a área sob a curva  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$ .

Este módulo é composto de três jogos descritos a seguir.

#### Jogo I – Problema I

Calcular a área da região  $S$  limitada pelas curvas  $f(x) =$

$$\frac{1}{2} x^2, x = 1 \text{ e } x = 2.$$

Método: Aproximação por valores maiores que a área  $S$  da região.

Constatações geométricas e algébricas:

- Na tela 1, tem-se:

- Gráfico de  $f(x) = \frac{1}{2} x^2$  e o retângulo de base  $\Delta x = 1 = 2 - 1$  que é o tamanho do intervalo  $[1, 2]$  e altura igual ao máximo de  $f(x)$  em  $[1, 2]$ , isto é:  $H = f(2)$ .

A área do retângulo é:

$$S_1 = (\Delta x) \cdot H = 1 \cdot f(2) = 1 \cdot \left( \frac{1}{2} 2^2 \right) = 2 \text{ e } S_1 > S.$$

- Na tela 2, tem-se:

- Uma partição do intervalo  $[1, 2]$ , isto é:

$$[1, 2] = \left[1, 1 + \frac{1}{2}\right] \cup \left[1 + \frac{1}{2}, 2\right], \text{ onde o tamanho do primeiro}$$

intervalo é dado por:  $\Delta_1 x = 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$  e o tamanho do segundo intervalo é

$$\Delta_2 x = 2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

- **Dois retângulos:**

O primeiro retângulo tem base  $\Delta_1 x = \frac{1}{2}$  e altura  $H_1$  igual ao

máximo de  $f(x)$  no intervalo  $\left[1, 1 + \frac{1}{2}\right]$ , isto é;

$$H_1 = f\left(1 + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8} \text{ e área igual a}$$

$$\Delta_1 x H_1 = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{9}{16}\right).$$

O segundo retângulo tem base  $\Delta_2 x = \frac{1}{2}$  e altura  $H_2$  igual ao

máximo de  $f(x)$  no intervalo  $\left[1 + \frac{1}{2}, 2\right]$ , isto é;  $H_2 = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$  e portanto,

$$\text{sua área é igual à } \Delta_2 x H_2 = \frac{1}{2} \cdot f(2) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2\right) = 1.$$

A soma das áreas dos dois retângulos é

$$S_2 = (\Delta_1 x) f\left(\frac{3}{2}\right) + \Delta_2 x f(2) = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16}, \text{ e } S_1 > S_2 > S.$$

Na tela 3 tem-se:

- Uma partição do intervalo  $[1, 2]$  em três partes iguais, isto é:

$$[1, 2] = \left[1, 1 + \frac{1}{3}\right] \cup \left[1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] \cup \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] =$$

$$\left[1, \frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3}, 2\right] \text{ onde o tamanho do primeiro intervalo é}$$

$$\Delta_{1,x} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}, \text{ do segundo intervalo } \Delta_{2,x} = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}, \text{ do terceiro}$$

$$\text{intervalo é } \Delta_{3,x} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}.$$

- Três retângulos.

O primeiro retângulo de base  $\Delta_{1,x} = \frac{1}{3}$  e altura  $H_1$  igual ao máximo

de  $f(x)$  no intervalo  $\left[1, \frac{4}{3}\right]$ , isto é:

$$H_1 = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{18}, \text{ tem área igual à } \Delta_{1,x} \cdot H_1 = \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{54}$$

O segundo retângulo de base  $\Delta_{2,x} = \frac{1}{3}$  e altura  $H_2$  igual ao máximo

de  $f(x)$  no intervalo  $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$  isto é;  $H_2 = f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{18}$ , tem área igual à

$$(\Delta_{2,x}) H_2 = \frac{1}{3} \cdot f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{25}{54}.$$

O terceiro retângulo de base  $\Delta_{3,x} = \frac{1}{3}$  e altura  $H_3$  igual ao máximo de

$f(x)$  no intervalo  $\left[\frac{5}{3}, 2\right]$  isto é;  $H_3 = f(2) = \frac{1}{2} (2)^2 = 2$  tem área igual à

$$(\Delta_{3,x}) H_3 = \frac{1}{3} \cdot f(2) = \frac{2}{3}.$$

$$S_3 = (\Delta_{1,x}) f\left(\frac{4}{3}\right) + (\Delta_{2,x}) f\left(\frac{5}{3}\right) + (\Delta_{3,x}) f(2) = \frac{1}{3} f\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{3} f\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{1}{3} f(2) =$$

$$\frac{16}{54} + \frac{25}{54} + \frac{2}{3} = \frac{77}{54}$$

, e  $S_1 > S_2 > S_3 > S$ .

- Na tela  $n$  tem-se:

- Uma partição do intervalo  $[1, 2]$  em,  $n$  partes iguais, isto é;

$$[1, 2] = \left[1, \frac{n+1}{n}\right] \cup \left[\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}\right] \cup \left[\frac{n+2}{n}, \frac{n+3}{n}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{n+(n-1)}{n}, \frac{n+n}{n}\right] \quad \text{onde o}$$

tamanho do primeiro intervalo é  $\Delta_1 x = \frac{1}{n}$ , do segundo é  $\Delta_2 x = \frac{1}{n}$  e assim

sucessivamente  $\Delta_n x = \frac{1}{n}$ .

- $n$  retângulos

O primeiro retângulo de base  $\Delta_1 x = \frac{1}{n}$  e altura  $H_1$  igual ao

máximo de  $f(x)$  no intervalo  $\left[1 + \frac{n+1}{n}\right]$  isto é:  $H_1 = f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ , tem área

igual  $(\Delta_1 x)H_1 = \frac{1}{n} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ .

O segundo retângulo de base  $\Delta_2 x = \frac{1}{n}$  e altura  $H_2$  igual ao máximo

de  $f(x)$  no intervalo  $\left[\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}\right]$ , isto é,  $H_2 = f\left(\frac{n+2}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{n}\right)^2$  e tem a área

igual à  $\Delta_2 x H_2 = \frac{1}{n} f\left(\frac{n+2}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{n}\right)^2$  e assim sucessivamente até o  $n$ -ésimo

retângulo de base  $\Delta_n x = \frac{1}{n}$  e altura  $H_n$  o máximo de  $f(x)$  no intervalo

$\left[\frac{n+(n-1)}{n}, \frac{n+n}{n}\right]$ , isto é;  $H_n = f\left(\frac{n+n}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n+n}{n}\right)^2$ . Portanto a soma das áreas

dos  $n$  retângulos é:

$$S_n = \Delta_1 x f\left(\frac{n+1}{n}\right) + (\Delta_2 x) f\left(\frac{n+2}{n}\right) + \dots + \Delta_n x f\left(\frac{n+n}{n}\right) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + 1\right) + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} + 1\right) \left(\frac{1}{n} + 2\right)$$

$$\text{logo } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 2 = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

Conclue-se que para  $n \rightarrow \infty$  tem se  $S_n \rightarrow \frac{7}{6}$  que é exatamente

$$\int_1^2 \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \frac{(2)^3}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1^3}{3} = \frac{1}{2} \frac{8}{3} - \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}.$$

Então  $S_n \rightarrow S = \int f(x) dx$ . Portanto  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \therefore \int f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  mas

$S_n = (\Delta_1 x) f(\xi_1) + (\Delta_2 x) f(\xi_2) + \dots + (\Delta_n x) f(\xi_n)$  onde  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  são abcissas de

pontos de máximo de  $f(x)$ , logo  $S_n = \sum_{i=1}^n (\Delta_i x) f(\xi_i)$  ou  $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (\Delta_i x)$ , logo

$\int f(x) dx$  é igual  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (\Delta_i x)$ .

**Procedimentos, no software, para a utilização dos jogos do módulo  $CAL_{\infty}$  -  $\int f$ , mais especificamente, jogo I – Problema I.**

Estando-se na tela de início do windows, deve-se clicar “Iniciar”, na seqüência, “Programas” e em seguida “GRF”, para que o software exiba a tela principal dos jogos da parte II, que mostra, na barra de mensagem o título:

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL, e os subtítulos:

DERIVADA - INTEGRAL – PARADOXOS.

Com um só clique no termo "INTEGRAL" o vídeo exibirá as opções: Problema I, Problema II e Problema III. Clicando em Problema I a tela principal deste jogo será apresentada e nela se vê o gráfico da curva  $y = \frac{1}{2} x^2$ .

No canto direito superior desta tela, o campo [x:  y:  ] exibirá as coordenadas do ponto onde o mouse estiver localizado.

Imediatamente abaixo, uma tabela é utilizada para expor e armazenar os seguintes dados: na coluna "Intervalos", a quantidade de intervalos de cada participação; na coluna "Largura", o tamanho de cada intervalo da partição; na coluna "Área", a soma das áreas dos retângulos de cada partição.

Imediatamente abaixo, um retângulo mostra a equação da curva  $f(x) = \frac{1}{2} x^2$ , a integral da curva no intervalo de 1 à 2, ou seja,

$$\int_1^2 \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{7}{6} \cong 1,1666\dots$$

No campo, nº de intervalos  , digita-se a quantidade de intervalos que se deseja na partição. Em seguida, basta um só clique em  para que a tela mostre, em vermelho, todos retângulos associados à partição e na tabela, a soma das áreas de todos esses retângulos.

Fazendo o nº de intervalos crescer muito, isto é; tender para infinito, pode-se observar, na tabela, que a coluna, Área se aproxima cada vez mais do valor de integral da curva, ou seja; 1,1666....

Assim conclui-se que,  $\int_1^2 \frac{1}{2} x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta_i x f(\xi_i)$ .

Para reiniciar este jogo, basta clicar em  e em  para retornar à tela principal.

Para melhor visualização, ver telas: 76, 77, 78 e 79, em anexo às páginas 233, 234, 235, 236, respectivamente.

### Jogo II – Problema II

Calcular a área da região S limitada pelas curvas  $f(x) = \frac{1}{2} x^2$ ,  $x = 1$  e  $x = 2$ .

Método: aproximação por valores menores que a área S da região.

#### Constatações geométricas e algébricas:

- Na tela 1 tem-se:

- gráfico de  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$  e o retângulo de base  $\Delta x = 2 - 1 = 1$  que é o tamanho do intervalo  $[1, 2]$  e altura igual ao mínimo de  $f(x)$  em  $[1, 2]$ , isto é;  $H=f(1)$ .

A área do retângulo é,  $S_1 = \Delta(x) f(1) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2\right) = \frac{1}{2}$  e  $S > S_1$ .

- Na tela 2 tem-se:

- Uma partição do intervalo  $[1, 2]$ , isto é:

$$[1, 2] = \left[1, 1 + \frac{1}{2}\right] \cup \left[1 + \frac{1}{2}, 2\right] \text{ onde o tamanho do primeiro}$$

intervalo é  $\Delta_1 x = 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$  o tamanho do segundo intervalo

$$\Delta_2 x = 2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

- **Dois retângulos**

O primeiro retângulo de base  $\Delta_1 x = \frac{1}{2}$  e altura  $H_1$  igual ao mínimo

de  $f(x)$  no intervalo  $\left[1, 1 + \frac{1}{2}\right]$ , isto é,  $H_1 = f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$  e área igual à

$$(\Delta_1 x) H_1 = (\Delta_1 x) f(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

O segundo retângulo tem base  $\Delta_2 x = \frac{1}{2}$  e altura  $H_2$  igual ao

mínimo de  $f(x)$  no intervalo  $\left[1 + \frac{1}{2}, 2\right]$ , isto é,  $H_2 = f\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} f\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}$ .

Portanto sua área é igual à  $(\Delta_2 x) \cdot H_2 = (\Delta_2 x) \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{16}$ .

A soma da área dos dois retângulos é  $S_2 = \Delta_1 x \cdot H_1 + \Delta_2 x \cdot H_2 =$

$$(\Delta_1 x) f(1) + (\Delta_2 x) f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} = \frac{13}{16} \text{ e } S > S_2 > S_1.$$

- Na tela 3 tem-se:

- Uma partição do intervalo  $[1, 2]$  em três partes iguais, isto é,  $[1, 2] =$

$$\left[1, 1 + \frac{1}{3}\right] \cup \left[1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] \cup \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] = \left[1, \frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3}, 2\right]$$

onde o tamanho do primeiro intervalo é  $\Delta_1x = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$ , do segundo intervalo é

$$\Delta_2x = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}, \text{ do terceiro intervalo é } \Delta_3x = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}.$$

- Três retângulos.

O primeiro retângulo de base  $\Delta_1x = \frac{1}{3}$  e altura  $H_1$  igual ao mínimo de

$f(x)$  no intervalo  $\left[1, \frac{4}{3}\right]$  isto é,  $H_1 = f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$ , e área igual a  $(\Delta_1x) H_1 =$

$(\Delta_1x) f(1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{6}$ . O segundo retângulo de base  $(\Delta_2x) = \frac{1}{3}$  e altura  $H_2$

igual ao mínimo de  $f(x)$  no intervalo  $\left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right]$ , isto é,  $H_2 = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{18}$ , e

tem área igual a  $(\Delta_2x) H_2 = (\Delta_2x) f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{18} = \frac{16}{54}$ .

O terceiro retângulo de base  $\Delta_3x = \frac{1}{3}$  e altura  $H_3$  igual ao mínimo de

$f(x)$  em  $\left[\frac{5}{3}, 2\right]$ , isto é,  $H_3 = f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{18}$ , e tem área igual à

$$(\Delta_3x) H_3 = (\Delta_3x) f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{18} = \frac{25}{54}.$$

$$S_3 = (\Delta_1x) f(1) + (\Delta_2x) f\left(\frac{4}{3}\right) + (\Delta_3x) f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{6} + \frac{16}{54} + \frac{25}{54} =$$

$$\frac{9 + 16 + 25}{54} = \frac{50}{54} \text{ e } S > S_3 > S_2 > S_1.$$

- Na tela n tem-se:

- Uma partição intervalo  $[1, 2]$  em  $n$  partes iguais, isto é;

$$[1, 2] = \left[1, \frac{n+1}{n}\right] \cup \left[\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}\right] \cup \left[\frac{n+2}{n}, \frac{n+3}{n}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{n+(n-1)}{n}, \frac{n+n}{n}\right], \quad \text{onde } o$$

tamanho do primeiro intervalo é  $\Delta_1 x = \frac{1}{n}$ , do segundo intervalo é  $\Delta_2 x = \frac{1}{n}$  e assim

sucessivamente  $\Delta_n x = \frac{1}{n}$ .

- $n$  retângulos.

O primeiro retângulos de base  $\Delta_1 x = \frac{1}{n}$  e altura  $H_1$  igual ao mínimo

de  $f(x)$  em  $\left[1, \frac{n+1}{n}\right]$ , isto é,  $H_1 = f(1) = \frac{1}{2} 1^2 = \frac{1}{2}$ , e área igual à

$$(\Delta_1 x) H_1 = (\Delta_1 x) f(1) = \frac{1}{n} \frac{1}{2}.$$

O segundo retângulo de base  $\Delta_2 x = \frac{1}{n}$  e altura  $H_2$  igual ao mínimo

de  $f(x)$  em  $\left[\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}\right]$ , isto é  $H_2 = f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$  área igual  $(\Delta_2 x) H_2 =$

$$= (\Delta_2 x) f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \quad \text{e assim sucessivamente até o } n\text{-ésimo}$$

retângulo de base  $\Delta_n x = \frac{1}{n}$  e altura  $H_n$  igual ao mínimo de  $f(x)$  em

$\left[\frac{n+(n-1)}{n}, \frac{n+n}{n}\right]$ . Assim,  $H_n = f\left(\frac{n+(n-1)}{n}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n+(n-1)}{n}\right)^2$ , e tem área igual à

$(\Delta_n x) f\left(\frac{n+(n-1)}{n}\right)$ . Portanto, a soma das áreas dos  $n$  retângulos é

$$S_n = (\Delta_1 x) \cdot (1) + (\Delta_2 x) f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \dots + (\Delta_n x) f\left(1 + \frac{1}{n}\right) e$$

$$S_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + 1\right) + \frac{1}{12} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}.$$

Conclui-se que para  $n \rightarrow \infty$  tem-se  $S_n \rightarrow \frac{7}{6}$  que é exatamente

$$\int_1^2 \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{2^3}{3} - \frac{1}{2} \frac{1^3}{3} = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6} e \text{ então, } S_n \rightarrow S = \int f(x) dx, \text{ logo}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad \text{mas} \quad S_n = (\Delta_1 x) f(\xi_1) + (\Delta_2 x) f(\xi_2) + \dots + (\Delta_n x) f(\xi_n) \quad \text{onde}$$

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  são abscissas de pontos de mínimo de  $f(x)$ . Logo,  $S_n = \sum_{i=1}^n (\Delta_i x) f(\xi_i)$

$$\text{ou } S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (\Delta_i x) . \text{ Então } \int f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\Delta_i x) f(\xi_i) .$$

**Procedimento, no software, para a utilização dos jogos do módulo  $CAL_{\infty}$  -  $\int f$ , mais especificamente, Jogo II – Problema II.**

Estando na tela principal dos jogos da parte II, com um clique em “INTEGRAL” e com outro clique em Problema II a tela com o gráfico de  $f(x) = \frac{1}{2} x^2$  volta a ser apresentada.

No canto direito superior desta tela, o campo  $[x:\square \quad y:\square]$  exibirá as coordenadas do ponto da tela onde o mouse estiver localizado.

Imediatamente abaixo, uma tabela é utilizada para expor e

armazenar os seguintes dados: na coluna “Intervalos”, a quantidade de intervalo de cada partição; na coluna “Largura”, o tamanho de cada intervalo da partição; na coluna “Área”, a soma das áreas dos retângulos de cada partição.

Imediatamente abaixo, um retângulo mostra a equação da curva

$f(x) = \frac{1}{2} x^2$ , a integral da curva no intervalo de 1 à 2, ou seja,

$$\int_1^2 \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{7}{6} \cong 1,1666\dots$$

No campo, nº de intervalos , digita-se a quantidade de intervalos que se deseja na partição. Em seguida, basta um só clique em  para que a tela mostre, em vermelho, todos retângulos associados à partição e na tabela, a soma das áreas de todos esses retângulos.

Fazendo, o nº de intervalos crescer muito, isto é; tender para infinito, pode-se observar, na tabela, que os valores da coluna, área, se aproximam cada vez mais do valor do integral,  $\int_1^2 \frac{1}{2} x^2 dx = 1,666\dots$ , enquanto que, geometricamente, esta constatação se faz muito mais rapidamente.

$$\text{Assim conclui-se que } \int_1^2 \frac{1}{2} x^2 dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\Delta_i x) f(\xi_i).$$

Para reiniciar este jogo, basta clicar em  , e em  para retornar à tela principal para melhor compreensão ver telas 81 e 82 às páginas 238 e 239, em anexo.

### Jogo III – Problema III

#### Generalização

Tarefa: Calcular a área sob a curva  $f(x)$  definida no intervalo  $[a, b]$ .

Método:

Aproximação por retângulos cujas respectivas alturas podem ser máxima, mínima e nem máxima nem mínima, ou seja, a altura é tomada como a imagem de um ponto  $\xi_i$  qualquer,  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Aqui toma-se  $\xi_i$  como ponto médio do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ .

- Na tela 1 tem-se:

- O gráfico de uma curva  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$  e  $\Delta = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_4]\}$ , onde  $x_0 = a$  e  $x_4 = b$ , com os pontos  $\xi_i$  sendo médio de cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Constatações Geométricas e Algébricas:

- Na tela 1 tem-se quatro retângulos:

- O primeiro tem base  $x_1 - x_0$  e altura  $f(\xi_1)$ ;
- O segundo tem base  $x_2 - x_1$  e altura  $f(\xi_2)$ ;
- O terceiro tem base  $x_3 - x_2$  e altura  $f(\xi_3)$ ;
- O quarto tem base  $x_4 - x_3$  e altura  $f(\xi_4)$ ;

Logo as áreas dos retângulos são:

$$A_1 = f(\xi_1) (x_1 - x_0) = f(\xi_1) \Delta_1 x$$

$$A_2 = f(\xi_2) (x_2 - x_1) = f(\xi_2) \Delta_2 x$$

$$A_3 = f(\xi_3) (x_3 - x_2) = f(\xi_3) \Delta_3 x$$

$$A_4 = f(\xi_4) (x_4 - x_3) = f(\xi_4) \Delta_4 x$$

$$\text{A soma } S_4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \sum_{i=1}^4 A_i =$$

$$= f(\xi_1) \Delta_1 x + f(\xi_2) \Delta_2 x + f(\xi_3) \Delta_3 x + f(\xi_4) \Delta_4 x =$$

$$= \sum_{i=1}^4 f(\xi_i) \Delta_i x.$$

Na tela, 2 tem-se:

- Uma partição  $\Delta$  com 15 elementos e

$$S_{15} = \sum_{i=1}^{15} f(\xi_i) \Delta_i x = f(\xi_1) \Delta_1 x + f(\xi_2) \Delta_2 x + f(\xi_3) \Delta_3 x + f(\xi_4) \Delta_4 x + f(\xi_5) \Delta_5 x + f(\xi_6) \Delta_6 x$$

$$+ f(\xi_7) \Delta_7 x + f(\xi_8) \Delta_8 x + f(\xi_9) \Delta_9 x + f(\xi_{10}) \Delta_{10} x + f(\xi_{11}) \Delta_{11} x + f(\xi_{12}) \Delta_{12} x + f(\xi_{13}) \Delta_{13} x$$

$$+ f(\xi_{14}) \Delta_{14} x + f(\xi_{15}) \Delta_{15} x.$$

$$\text{A soma } S_{15} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9 + A_{10} + A_{11} +$$

$$A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{15} = \sum_{i=1}^{15} f(\xi_i) \Delta_i x.$$

Na tela n tem-se:

- Uma partição  $\Delta$  com n elementos é:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x = f(\xi_1) \Delta_1 x + f(\xi_2) \Delta_2 x + f(\xi_3) \Delta_3 x + \dots + f(\xi_n) \Delta_n x.$$

Este n representa um número muito grande que é escolhido, constatando-se na tela, que a área sob a curva se confunde com a soma das áreas dos retângulos. Portanto, se  $n \rightarrow \infty$  então  $S_n \rightarrow S$  que é a área sob a curva.

Isto é;  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ : ou seja;  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x$  ou de forma equivalente

$S = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x$  o que equivale dizer:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que,

$$\|\Delta\| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (\Delta_i x) - S \right| < \varepsilon.$$

**Procedimentos, no software, para a utilização dos jogos do produto  $CAL_{\infty} - \int f$ , mais especificamente, jogo III – Problema III.**

Estando na tela principal dos jogos da parte II, com um clique em “INTEGRAL” e a seguir outro clique em Problema III, a tela com o gráfico de  $f(x) = 8 \operatorname{sen}x \frac{x}{5} + 10$  é apresentada.

No canto direito superior desta tela, o campo  $[x: \square \quad y: \square]$  exibirá as coordenadas do ponto da tela onde o mouse estiver localizada.

Imediatamente abaixo, uma tabela é utilizada para expor e armazenar os seguintes dados: na coluna “Intervalos”, a quantidade de intervalos de cada partição; na coluna “Largura”, o tamanho de cada intervalo da partição; na coluna “Área”, a soma das áreas dos retângulos de cada partição.

Imediatamente abaixo, um retângulo mostra a equação da curva  $f(x) = 8 \operatorname{sen} \frac{x}{5} + 10$ ; o integral da curva no intervalo de zero à vinte, ou seja,

$$\int_0^{20} (8 \operatorname{sen} \frac{x}{5} + 10) dx = 266, 1457448345.$$

No campo, nº de intervalos  , digita-se a quantidade de intervalos que se deseja na partição.

Em seguida, basta um só clique em  para que a tela mostre, em vermelho, todos os retângulos associados à partição e na tabela, a soma das áreas de todos esses retângulos.

Fazendo o  $n^{\circ}$  de intervalos crescer muito, isto é; tender para infinito, pode-se observar, na tabela, que os valores da coluna “área”, se aproximam cada vez mais do valor da integral  $\int_0^{20} (8\text{sen} \frac{x}{5} + 10)dx =$  enquanto que, geometricamente, esta constatação se faz muito mais rapidamente.

Para reiniciar este jogo, basta clicar em , e em  para retornar à tela principal.

As telas 83, 84 e 85 em anexo, às páginas 240, 241 e 242, são um recurso para melhor visualização deste procedimento.

### 3.2.5. Módulo $CAL_{\infty}$ - ZEN: Paradoxos

Paradoxo: Conceito que é ou parece contrário ao comum; contrasenso, absurdo, contradição ao menos na aparência (Aurélio, 1988:481).

Na Grécia Antiga, alguns filósofos afirmavam que tudo estava em constante movimento e outros, que o movimento não existia porque tudo estava em repouso constante.

Zenão de Eléia, pertencia ao segundo grupo e justificava com a seguinte linha de raciocínio: para que algo percorra uma determinada distância terá que se deslocar primeiro até a metade do percurso, e antes disso a um quarto do percurso, e antes a um oitavo, e assim sucessivamente e

indefinidamente o que impediria, em definitivo, qualquer deslocamento.

Este raciocínio é usado na explicação do PARADOXO I, a seguir enunciado:

Um coelho quer atravessar uma rua de largura igual à 3 metros, saltando sempre a metade da distância entre ele e a margem oposta.

De acordo com o raciocínio de Zenão, o coelho nunca alcançará a margem oposta, porque a divisão de um número diferente de zero, por outro número diferente de zero, é sempre diferente de zero, e portanto a distância entre o coelho e a margem oposta nunca será zero.

Como não existia o conceito de limite, os pensadores não sabiam que  $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{3}{2^n} + \dots = 3$ .

Para os filósofos, a soma de uma quantidade infinita de parcelas não poderia ter como resultado um número finito. Isso porque o conceito de limite, ainda não tinha sido criado.

#### **Procedimentos para utilização do software $CAL_{\infty}$ - ZEN, Paradoxo I.**

Estando na tela principal dos jogos da parte II, com um clique em "PARADOXOS" e a seguir outro clique em Paradoxo I, e a tela principal do jogo é mostrada. Ver tela 86, página 243, em anexo.

Nesta tela, tem-se um animal que tenta atravessar uma estrada de largura igual a três metros. Para isso basta que, seja efetuado um só clique na

chave  , o animal caminhará até ao próximo ponto que está no meio da estrada e pára. Com um outro clique em  , o animal caminhará até ao próximo ponto assim sucessivamente.

As distâncias percorridas e as distâncias restantes são expostas e armazenadas na tabela que se encontra no canto inferior direito da tela.

Para retornar com o animal à posição inicial é suficiente clicar em  .

Para finalizar o jogo clica-se em  .

## PARADOXO II

Zenão e a corrida entre Aquiles e a tartaruga.

Aquiles aposta corrida com uma tartaruga e dá a ela uma vantagem de 20 metros.

Como Aquiles é 20 vezes mais veloz que a tartaruga, afirmar-se que esta é uma corrida desleal e monótona porque Aquiles não terá competidor, mas Zenão afirma que Aquiles não alcançará a tartaruga.

De acordo com a Fundamentação Teórica dos Paradoxos e o enunciado acima, tem-se as seguintes relações:

1.  $V_A = 20 V_T$  (a velocidade é 20 vezes a velocidade da tartaruga).
2.  $D_T = \frac{d_A}{20}$  , onde  $d_T$  é a vantagem que a tartaruga estará sempre

levando em relação a distância percorrida por Aquiles.

Na realidade  $d_T$  é a vantagem que a tartaruga terá sempre em relação à Aquiles e de acordo com a fundamentação teórica, tem-se  $d_{Tn} = a \cdot \alpha^{n-1}$ , isto é  $d_{Tn} = 20 \cdot (0,05)^{n-1}$  e variando o valor de  $n$  podemos construir a seguinte tabela:

n	$d_A$	$d_T$
1	0	20
2	20	1
3	1	0,05
4	0,05	0,0025
5	0,0025	0,000125
6	0,000125	0,00000625

As distâncias percorridas pela tartaruga formam uma PG onde o termo geral é a  $a_n = 20 \times (0,05)^{n-1}$  isto é: (20; 1; 0,05; 0,0025; 0,000125...) Uma PG infinita de razão  $q$  menor que 1.

$$\text{Portanto, } \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) = \frac{a_1}{1-q} \text{ logo,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 20 \times (0,05)^{n-1} = \frac{20}{1-0,05} = \frac{20}{0,05} = 20 + \frac{100}{95} = 21 + \frac{1}{95}$$

### **Procedimentos para utilização do software $CAL_{\infty}$ , Módulo $CAL_{\infty}$ - ZEN, Paradoxo II**

Estando na tela principal dos jogos da parte II, com um clique em PARADOXOS e a seguir outro clique em PARADOXO II, a tela principal do jogo é mostrada. Ver tela 88, à página 245, em anexo.

Nesta tela, tem-se uma tartaruga e um corredor, Aquiles, em posição de largada para uma corrida, estando a tartaruga com 20 metros de vantagem.

A fundamentação teórica é feita no retângulo localizado no canto inferior esquerdo da tela, onde são mostradas as seguintes relações:

$$1) V_a = 20 V_T$$

$$2) d_T = \frac{d_A}{20}$$

$$3) d_{Tn} = 20 (0,05)^{n-1}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} 20 (0,05)^{n-1} = 21 + \frac{1}{95}$$

A tabela, expõe e armazena: as distâncias percorrida por Aquiles,  $D_{A_i}$ ; e a vantagem que a tartaruga estará sempre levando em relação a distância percorrida por Aquiles.

O botão  é para dar início à corrida até o primeiro posto de parada para a verificação da distância percorrida por Aquiles e da vantagem da tartaruga.

Para que seja dada nova largada, pressione novamente o botão

Para retornar a primeira posição é suficiente pressionar

. Para finalizar o jogo clica-se em  .

### PARADOXO III

O fato de um evento ocorrer um número infinito de vezes, não implica que seja infinito o intervalo de tempo durante o qual a série de eventos ocorrerá.

Por exemplo: uma bola de pingue pongue cai de uma mesa de altura  $x$ . Depois do primeiro choque com o solo ela sobe uma altura  $x_1$ , e torna a descer

e depois subir uma altura  $x_2$ , e assim sucessivamente até parar.

Sabe-se que não existe a resistência do ar, e que o coeficiente de restituição do material do solo e da bola,  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , é o que garante que a bola irá parar. Contudo, na modelagem matemática, prova-se que  $x_n = \alpha^{2n} x$ , para  $0 < \alpha < 1$ . Portanto,  $x_n$  só será zero quando  $\alpha^{2n}$  for igual a zero pois  $x$  é a altura da mesa que é conhecida e constante.

Sendo  $(\alpha^{2n})$  uma seqüência e  $0 < \alpha < 1$ , então  $(\alpha^{2n})$  converge para zero quando  $n \rightarrow \infty$  isto é;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{2n} = 0$ ,  $x_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Então a bola quicará uma infinidade de vezes até parar num espaço de tempo finito, isto é:

$$x_n = \alpha^{2n} x$$

$$T_{Total} = \sqrt{\frac{2x}{g}} \left( 1 + \frac{2\alpha}{1-\alpha} \right)$$

$$T_{Total} = 19 \text{ segundos.}$$

Logo, esta bola estará parada no solo em 19 segundos, mas a seqüência,  $(x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) =$

$$= (5, (0,9)^2 \cdot 5, (0,9)^4 \cdot 5 + \dots + (0,9)^{2n} \cdot 5, \dots),$$

indica que a bola quicará uma infinidade de vezes até parar (paradoxo).

### **Procedimentos para a utilização do $CAL_{\infty}$ - ZEN, Paradoxo III.**

Estando na tela principal dos jogos da parte II do software, com um clique em Paradoxo III, a tela principal do jogo é mostrada. Ver tela 90, página 247, em anexo.

Nesta tela, tem-se uma bola que cai de uma altura de 5m, onde a aceleração da gravidade  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e o coeficiente de restituição é  $\alpha = 0,9$  e o tempo gasto até parar é 19 segundos.

No retângulo localizado no canto inferior esquerdo da tela, são mostrados os seguintes dados:

$x = 5 \text{ m}$  (altura da mesa),

$\alpha = 0,9$  (coeficiente de restituição),

$g = 10 \text{ m/s}^2$  (aceleração da gravidade),

$x_n = \alpha^{2n} x$ .

A tabela, expõem e armazena as alturas após cada choque com o solo.

O botão  é a chave para o início do jogo.

O botão  é para o caso de se querer apagar os dados da tabela e voltar a posição inicial do jogo.

Para finalizar o jogo basta clicar em .

## IV - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Nada prova que aquilo que se aprende, ou se compreende com facilidade, logo seja esquecido. Ao contrário, tem-se a prova experimental de que se esquece facilmente o que se aprendeu na dor, no sofrimento, ou no tédio (MUCHIELLI, 1980:55).

A aprendizagem exige um aluno ativo e participante que imprime ao processo o seu próprio ritmo, e que a introdução dos conceitos novos deva ser feita de forma gradual, progressiva, motivadora e com o feedback garantindo o ajustamento permanente entre conteúdo, ritmo de comunicação, métodos e técnicas e a aprendizagem do aluno.

Neste trabalho, a escolha do jogo como recurso didático na promoção do saber é para lançar mão de força do lúdico, afim de que a busca do mesmo seja prazerosa e criadora de uma relação biunívoca entre felicidade e o aprender.

Compreende-se claramente esta força quando se atenta para Fernando Pessoa em seu poema, **JOGADORES DE XADREZ**, quando diz:

*“Ouvi contar que outrora, quando a Pérsia  
Tinha não sei que guerra,  
Quando a invasão ardia na cidade  
E as mulheres gritavam,  
Dois jogadores de xadrez jogavam  
O seu jogo contínuo.*

*... Ardiam casas, saqueadas eram as arcas e as paredes,  
Violadas, as mulheres eram postas contra os muros caídos,  
Transpassadas de lanças, as crianças  
Eram sangue nas ruas...*

*Caíam cidades, sofram povos, cessem  
A liberdade e a vida.  
... Mas quando a guerra os jogadores interrompa,  
Esteja o rei sem xeque,*

*Aprendamos na história  
Dos calmos jogadores de xadrez  
Como passar a vida.*

*O jogo de xadrez  
Prende a alma toda, mas perdido, pouco  
Pesa, pois não é nada”.*

*(Macedo, 1997).*

Nesta poesia, Fernando Pessoa retrata de forma artística e incontestavelmente bela, a força de um envolvimento prazeroso e lúdico perante até mesmo aos bens de maior valor para o ser humano como, a vida, a pátria, as mulheres, as crianças... e, assim consegue justificar porque os educadores desejam sempre poder contar com o jogo como âncora no processo ensino-aprendizagem.

Quando se propõe então jogos computacionais, multiplica-se ainda mais a capacidade de envolvimento total do jogador, chegando a transcender em muito seus limites físicos.

O processo de construção de um software passa por uma etapa de avaliação, antes que ele seja disponibilizado à clientela-alvo saindo assim, da fase de prototipagem.

Esta etapa é formada por vários estágios onde são desenvolvidas inspeções para a certificação de ausência de erros de instalação/execução e a verificação do atendimento a requisitos mínimos de desempenho. É testada também a dimensão pedagógica do protótipo no que diz respeito à clareza das informações e instruções, a adequação dos objetivos à clientela – alvo, a adequação dos conceitos e fatos e dos exercícios, que deverão ser apresentados com clareza, simplicidade, coerência e cientificidade, através de estratégias eficientes, com telas que atendam aos critérios de compreensibilidade, utilidade, previsibilidade, de uso simples, imediato, intuitivo e motivador.

Para participar desta avaliação, deverá ser escolhida uma amostra estratificada formada por alunos, pedagogos, matemáticos e especialistas em engenharia de software, que não tenham tomado parte na construção do protótipo, mas que sejam escolhidos dentre os usuários em potencial do mesmo.

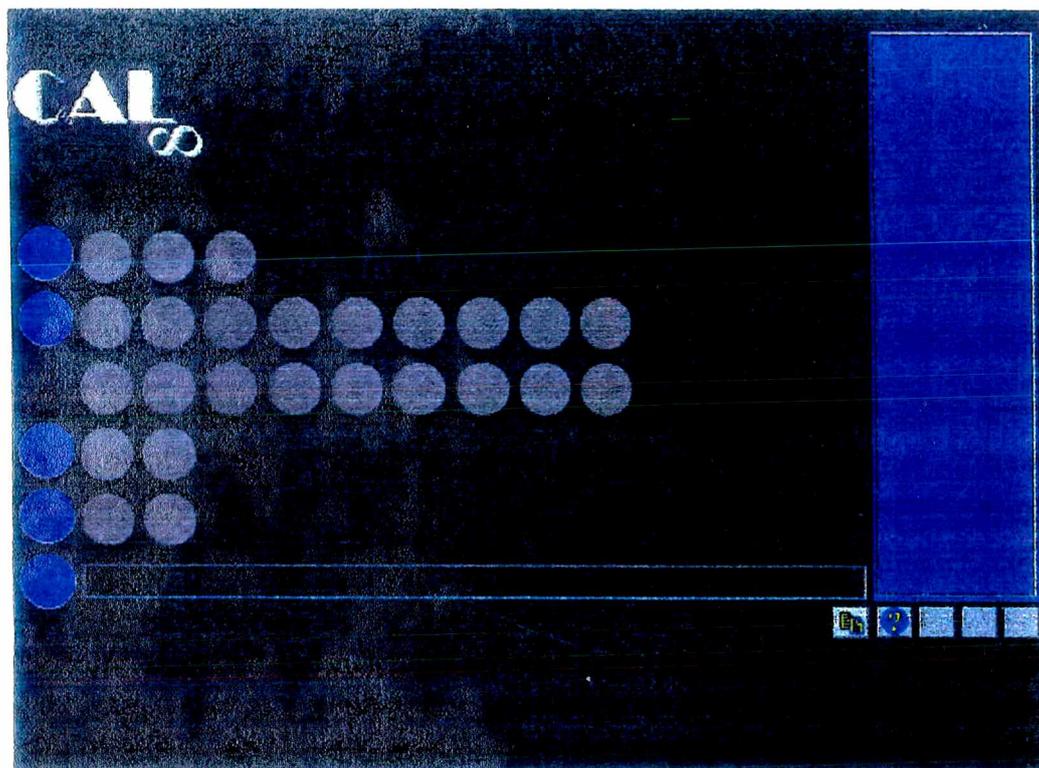
Os participantes da amostra, após tomarem conhecimento do material, através de estudos de forma, individual, em grupo, em seminário e cursos, responderão a questionamentos previamente elaborados, balizados pelos critérios e objetivos propostos, através de instrumentos de avaliação tais como: relatórios escritos e oral com questões livres e/ou abertas, tendo liberdade para oferecer sugestões que reforcem os pontos positivos e eliminem os pontos negativos por eles detectados. Sendo que, no caso específico dos alunos, uma

verificação de aprendizagem do conteúdo deverá ser feita também entre os que aprenderam com o software e os que aprenderam de outra forma.

Finalizando, recomenda-se que o protótipo do software *CAL* aqui apresentado, seja tratado como uma alternativa para o ensino de cálculo e não como a única opção, porque o respeito às diferenças individuais é condição indispensável para o sucesso do recurso didático aplicado e que o processo de avaliação do mesmo seja uma sugestão para futuros trabalhos e estudos específicos na área de avaliação e controle de sistemas.

# ANEXOS

Tela 1:  
Tela principal da parte I do software *CAL<sub>∞</sub>*



## Tela 2:

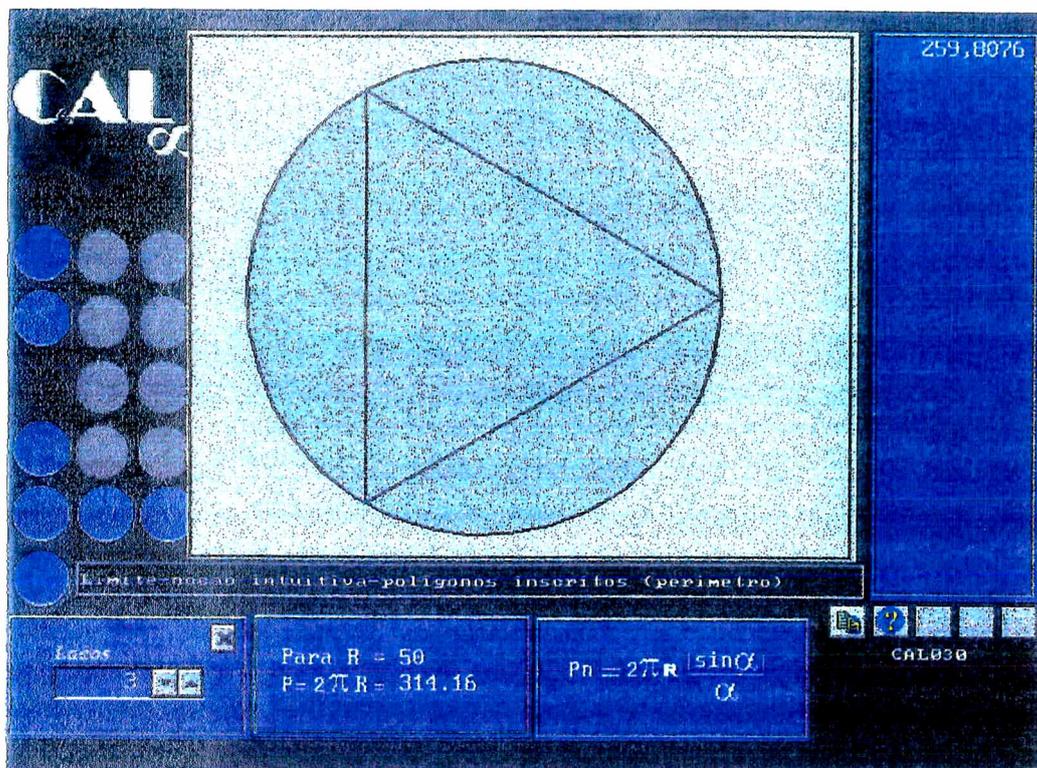
Tela inicial do jogo I do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf - I: Limite - Noção Intuitiva, para calcular o perímetro da circunferência através do perímetro de polígonos regulares inscritos

The screenshot shows the initial screen of the CAL software. The main window displays a large blue circle on a light blue background. To the left of the circle is a grid of smaller blue circles. Below the circle, a text box contains the title: "Tela 2 - noção intuitiva - polígonos inscritos (perímetro)". At the bottom, there is a control panel with several fields and buttons:

- A field labeled "Lados" with the value "3" and a small square icon.
- A field labeled "Para R = 50" with the value "P = 2πR = 314.16".
- A field showing the formula  $P_n = 2\pi R \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$ .
- A small icon of a question mark and a small square icon.
- The text "CAL030" in the bottom right corner.

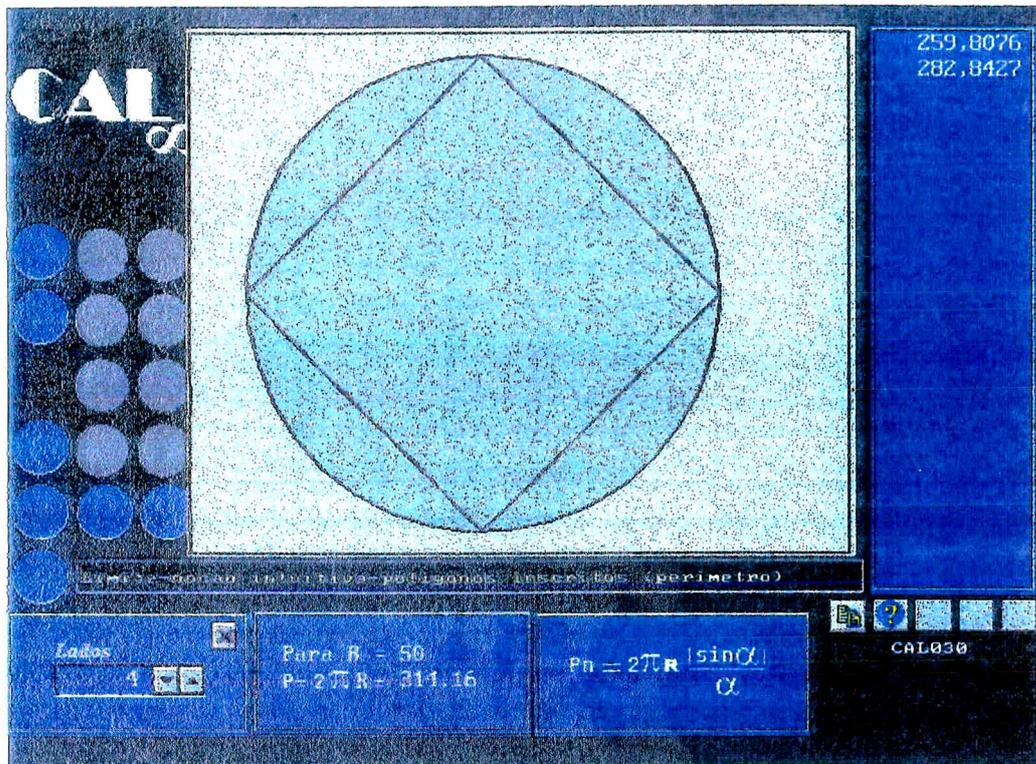
## Tela 3:

Mostra um triângulo regular, inscrito na circunferência e o perímetro do mesmo



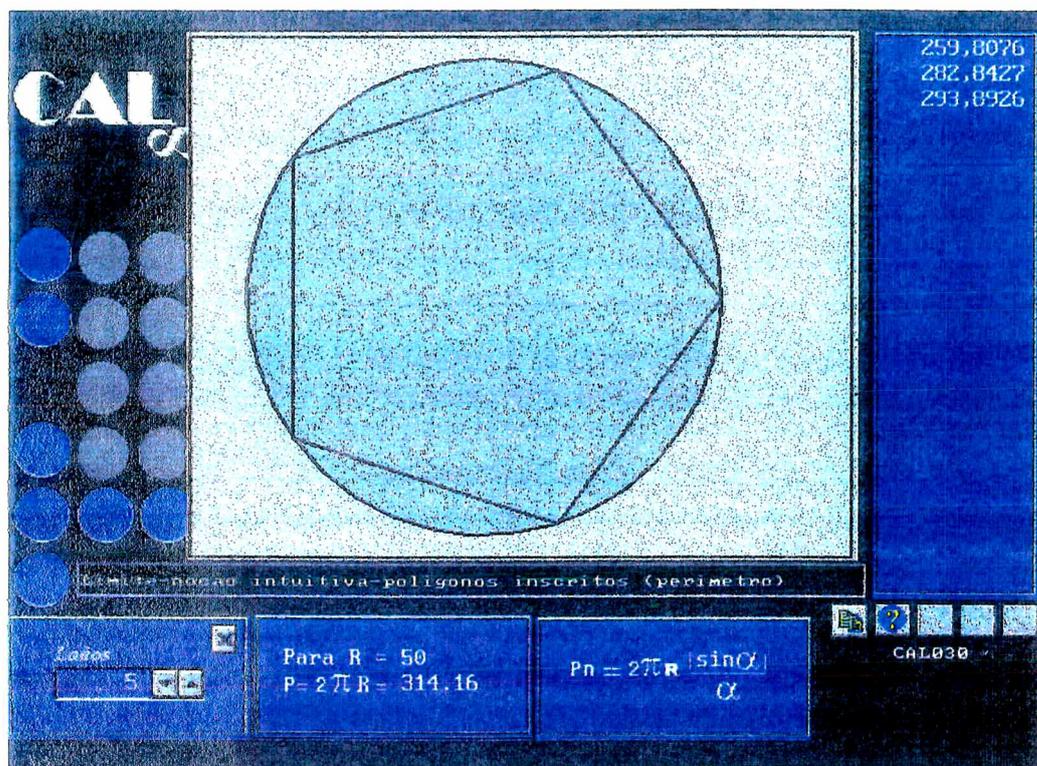
## Tela 4:

Mostra um quadrado inscrito na circunferência  
e o perímetro do mesmo



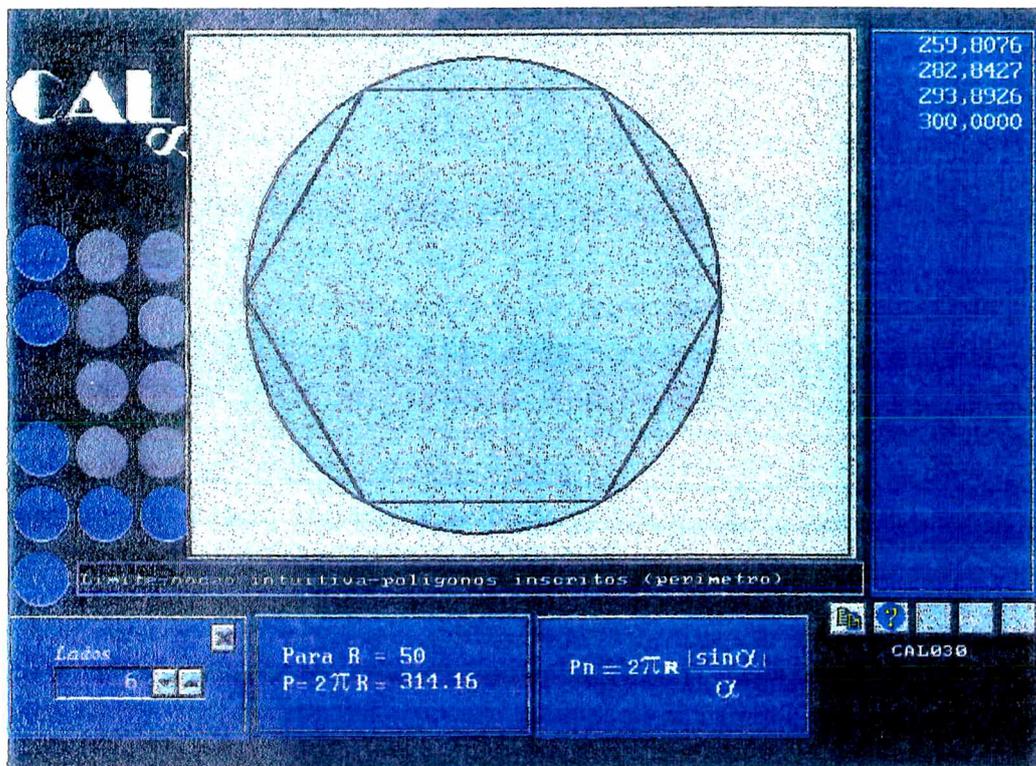
## Tela 5:

Mostra um pentágono regular, inscrito na circunferência  
e o perímetro do mesmo



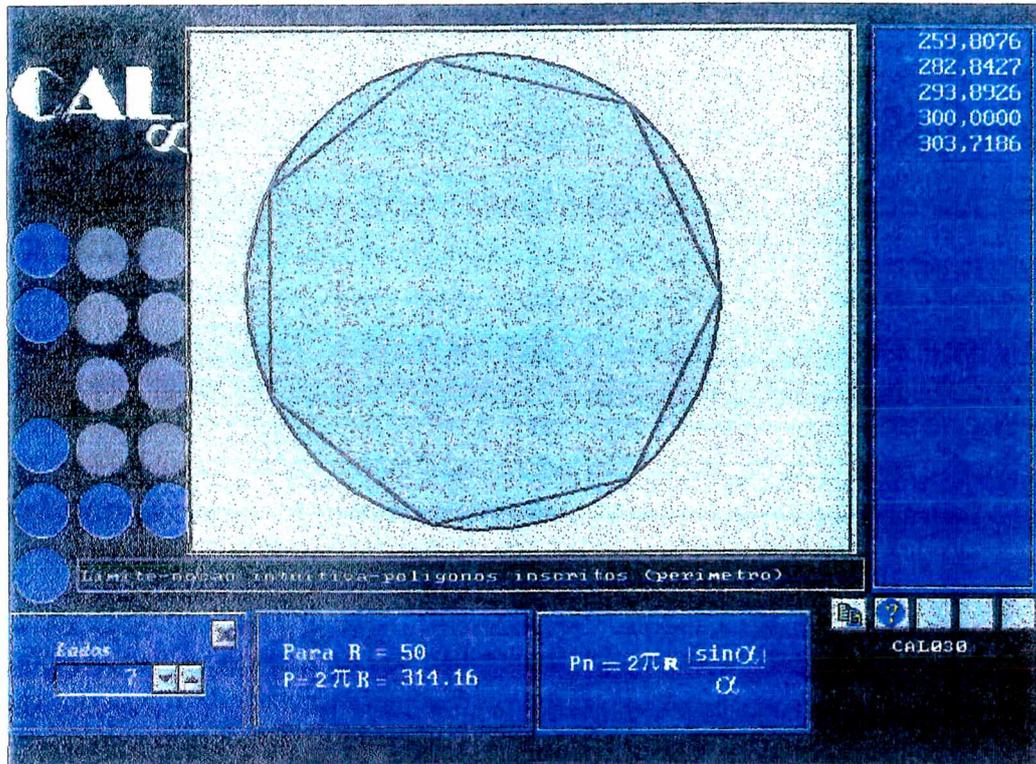
## Tela 6:

Mostra um hexágono regular, inscrito numa circunferência  
e o perímetro do mesmo



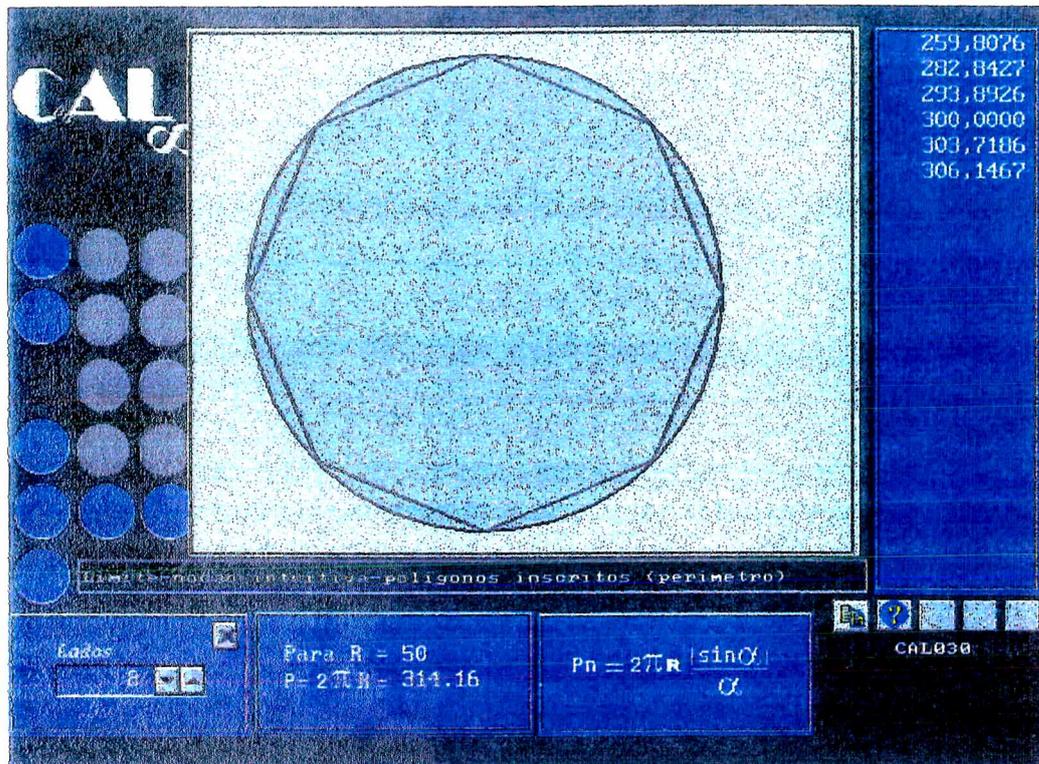
## Tela 7:

Mostra um heptágono regular, inscrito numa circunferência  
e o perímetro do mesmo



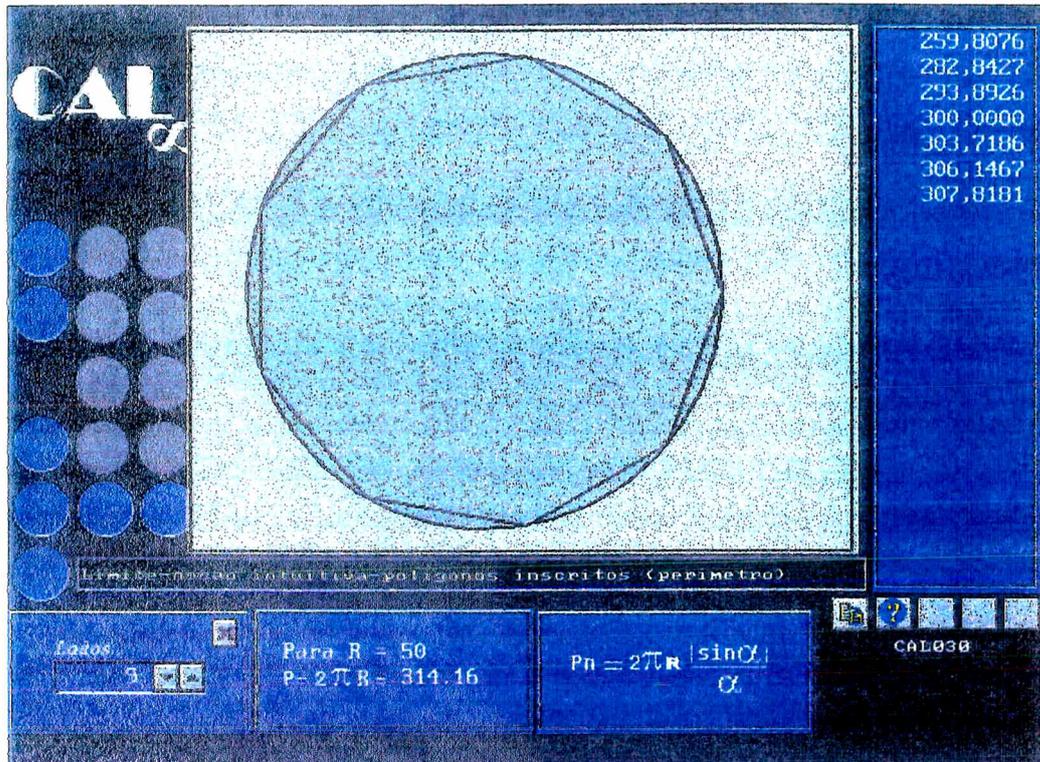
## Tela 8:

Mostra um octógono regular, inscrito numa circunferência  
e o perímetro do mesmo



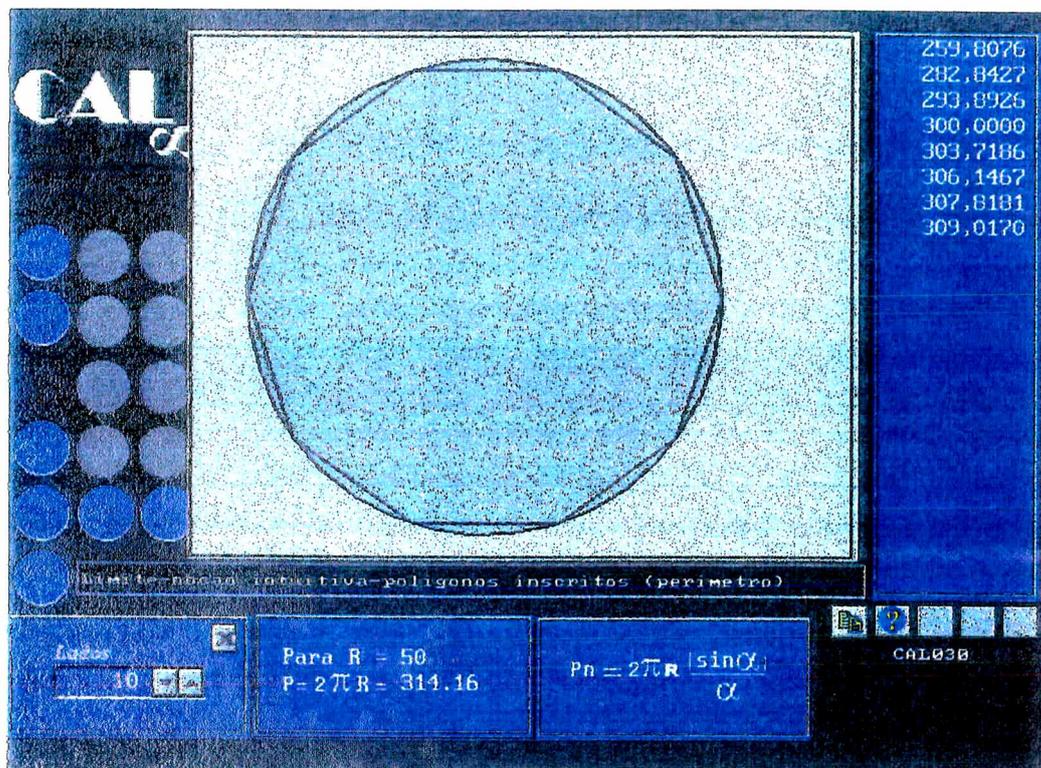
## Tela 9:

Mostra um polígono regular de nove lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo



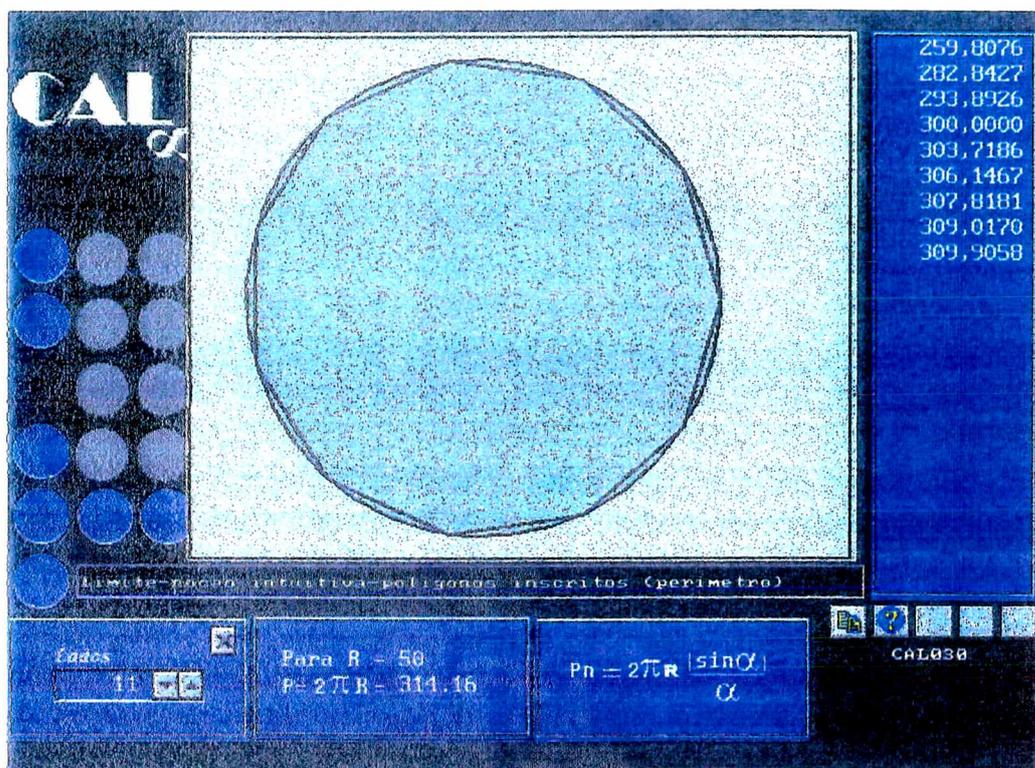
## Tela 10:

Mostra um polígono regular de dez lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo



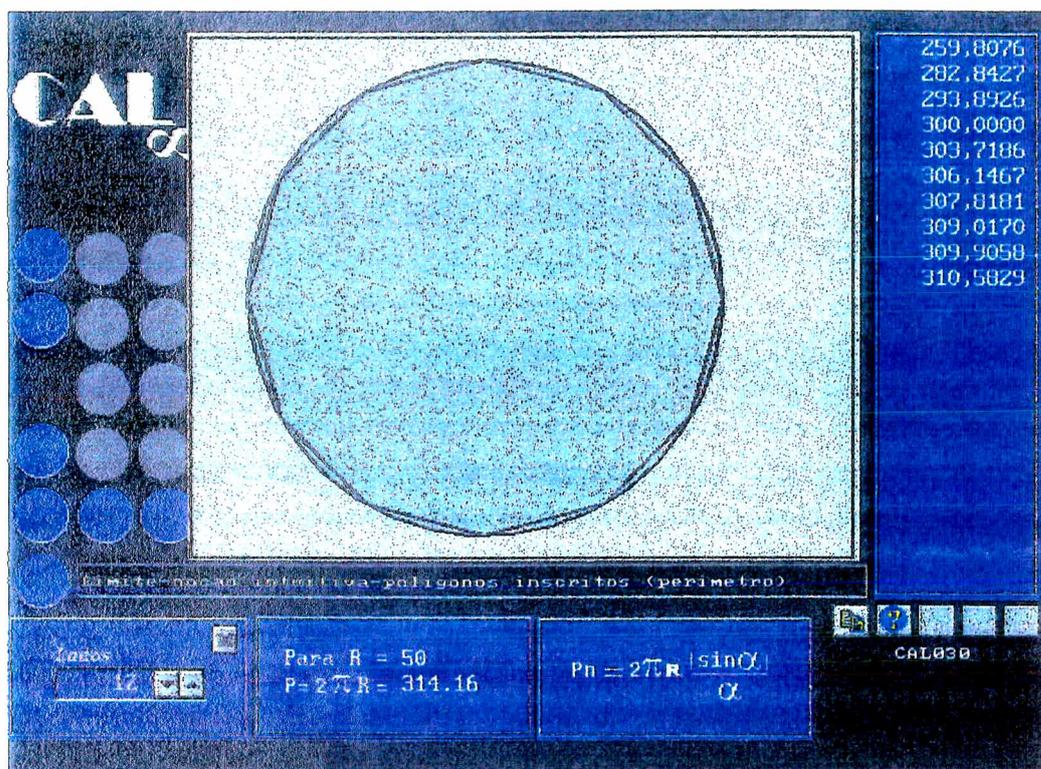
## Tela 11:

Mostra um polígono regular de onze lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo



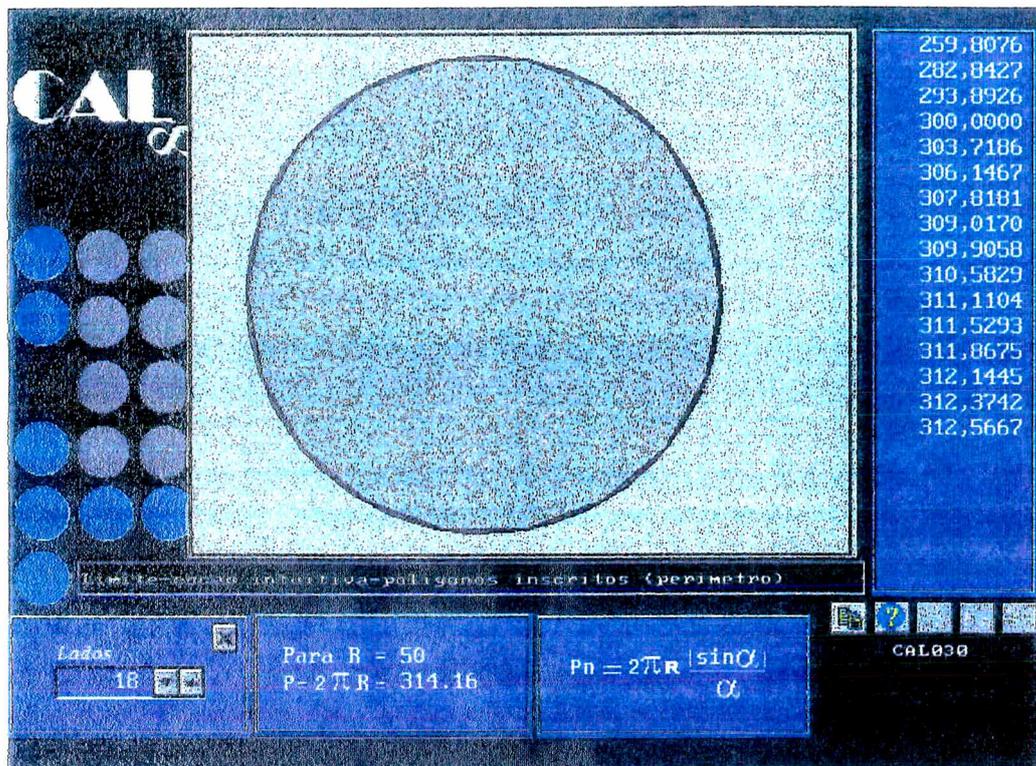
## Tela 12:

Mostra um polígono regular de doze lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo



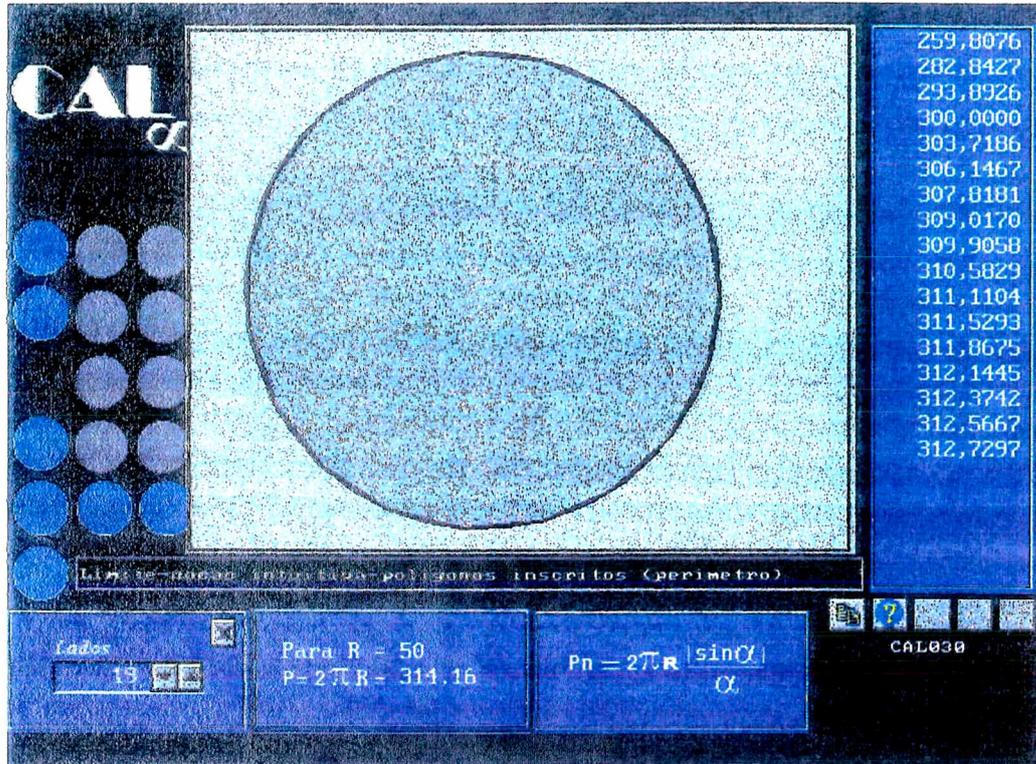
## Tela 13:

Mostra um polígono regular de dezoito lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo



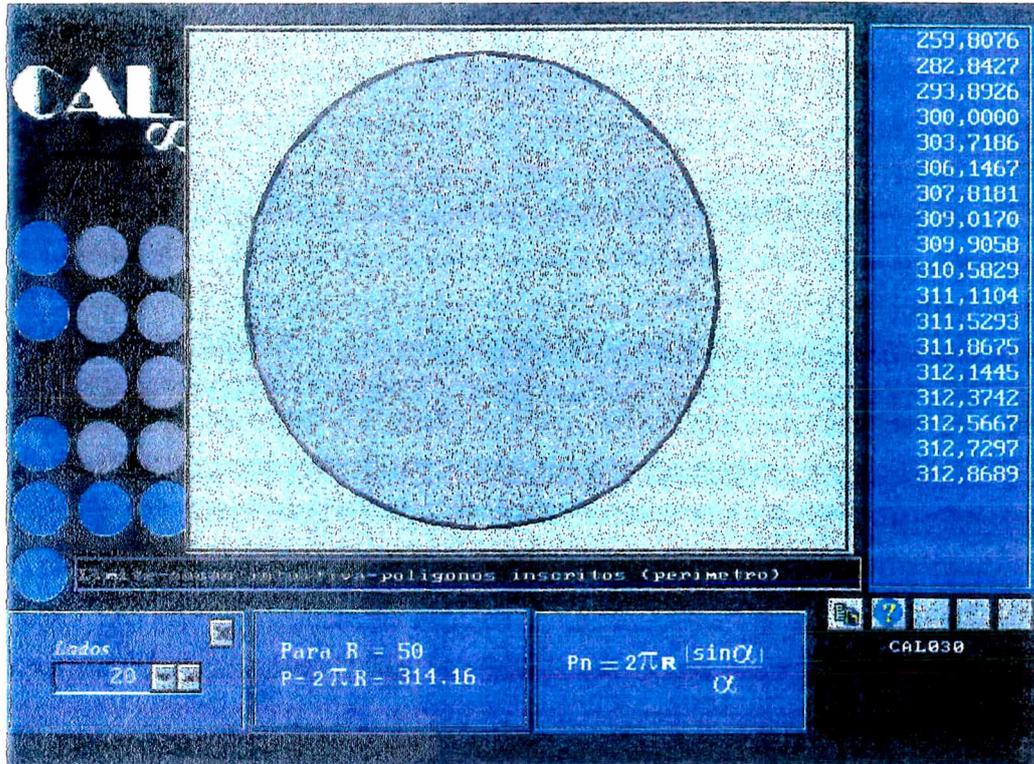
## Tela 14:

Mostra um polígono regular de dezenove lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo



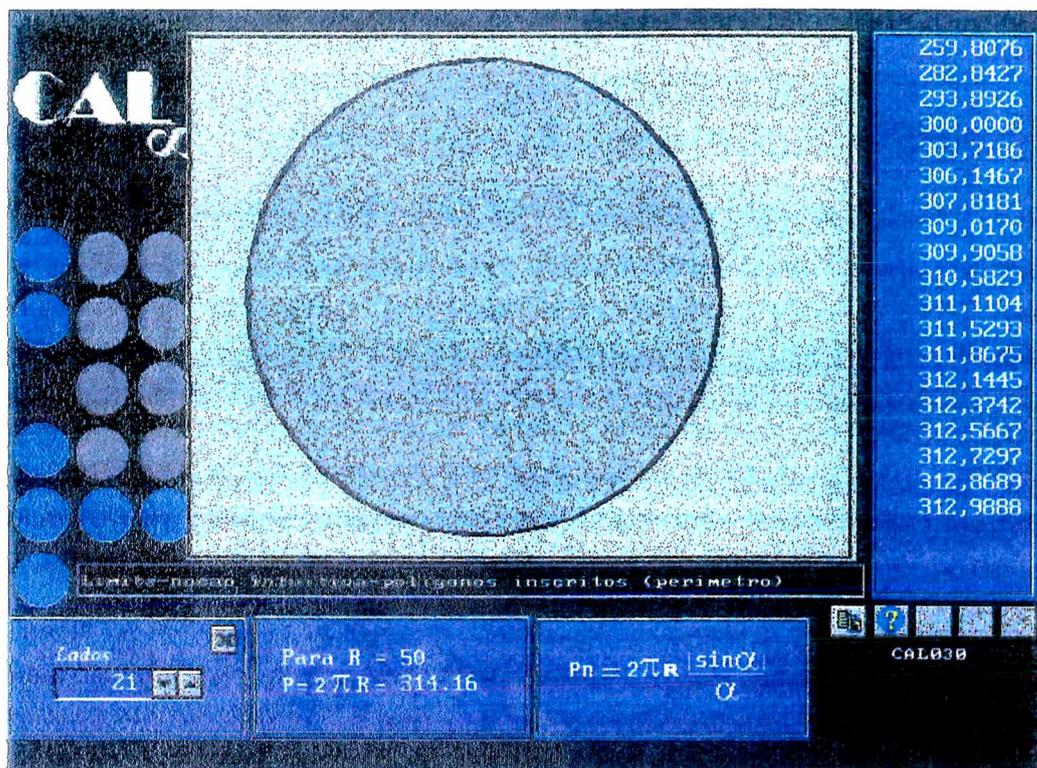
## Tela 15:

Mostra um polígono regular de vinte lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo



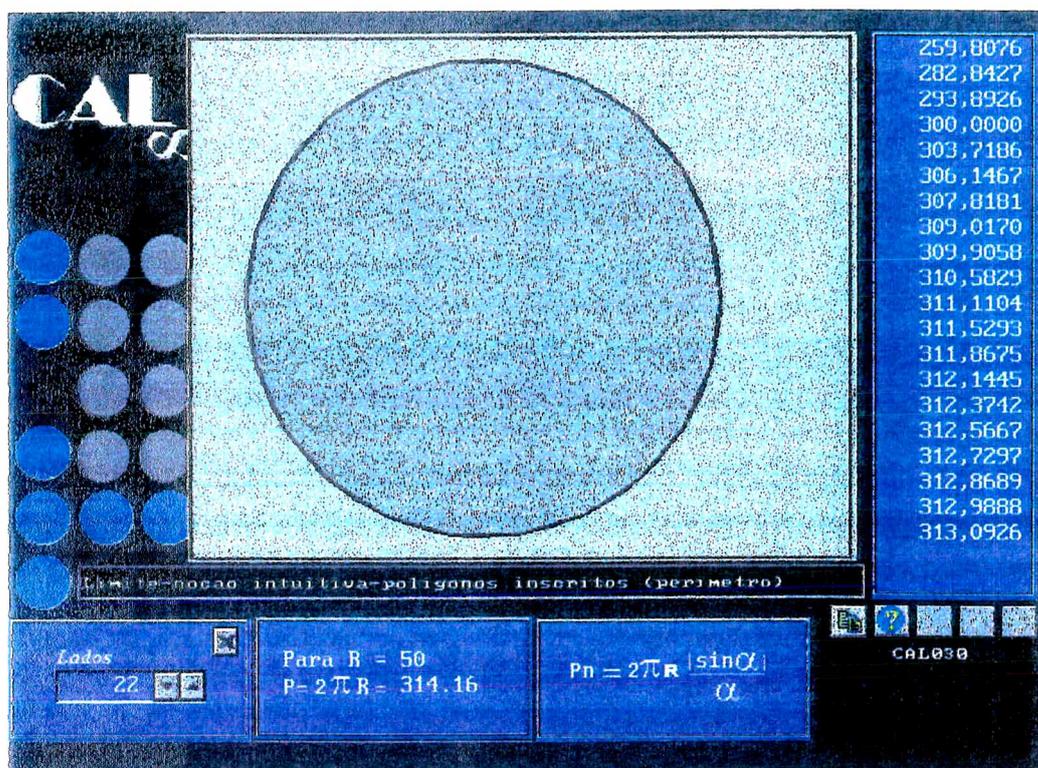
## Tela 16:

Mostra um polígono regular de vinte e um lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo



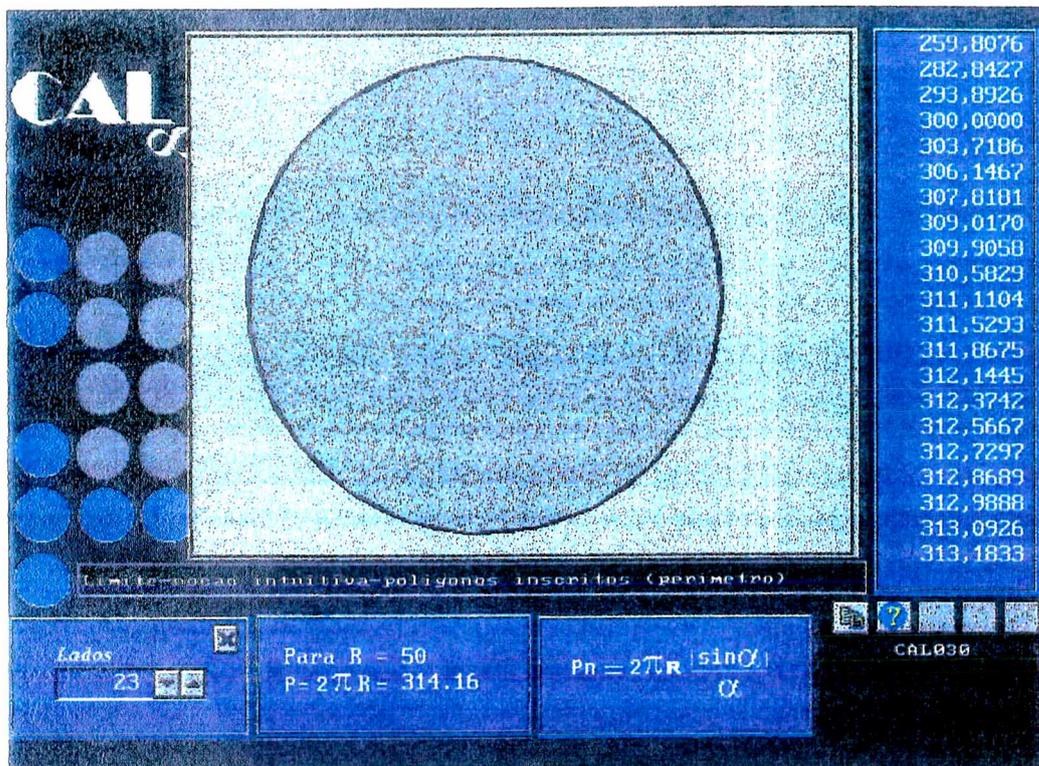
## Tela 17:

Mostra um polígono regular de vinte e dois lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo



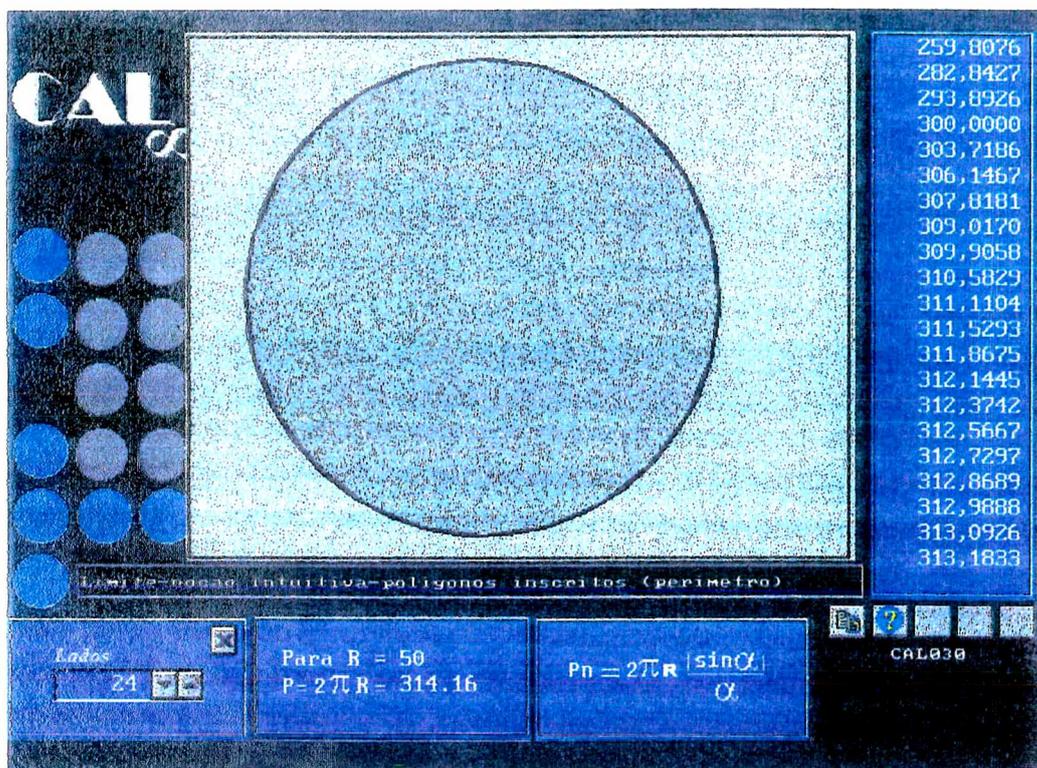
## Tela 18

Mostra um polígono regular de vinte e três lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo



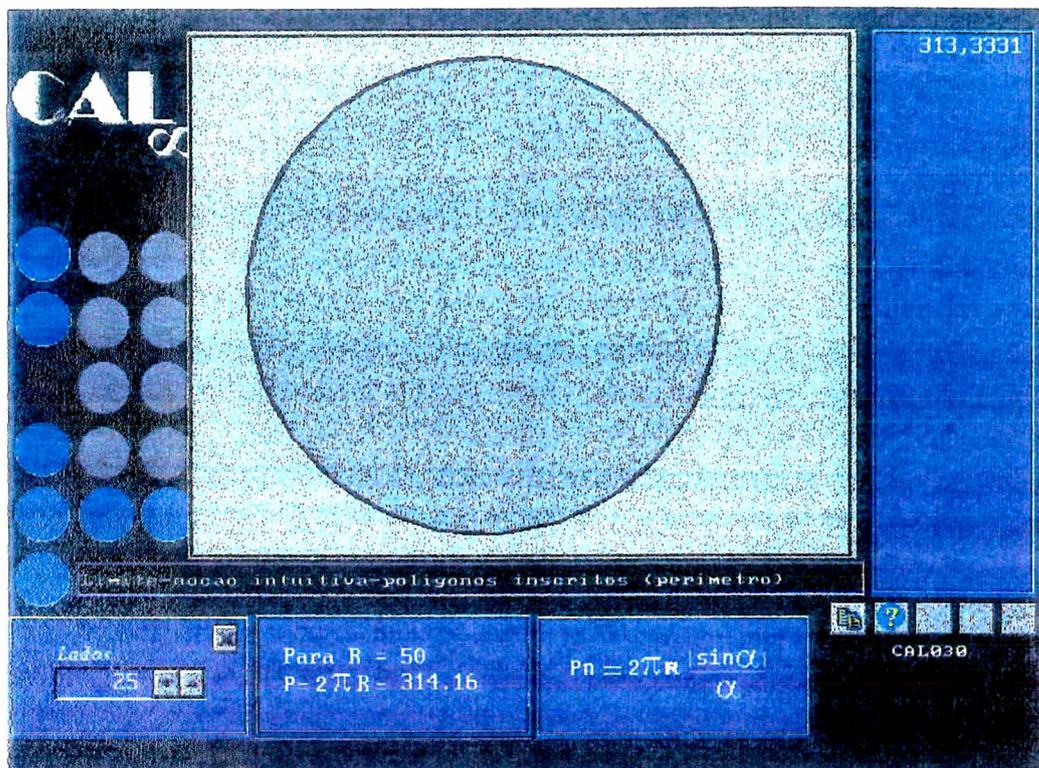
## Tela 19

Mostra um polígono regular de vinte e quatro lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo



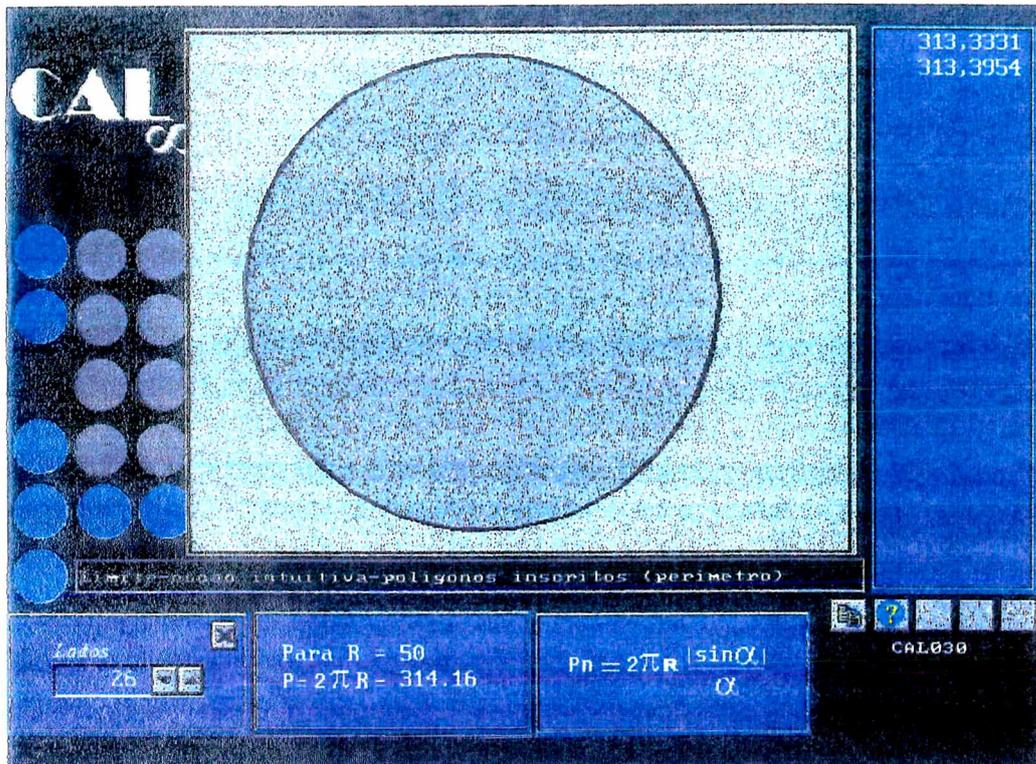
## Tela 20

Mostra um polígono regular de vinte e cinco lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo



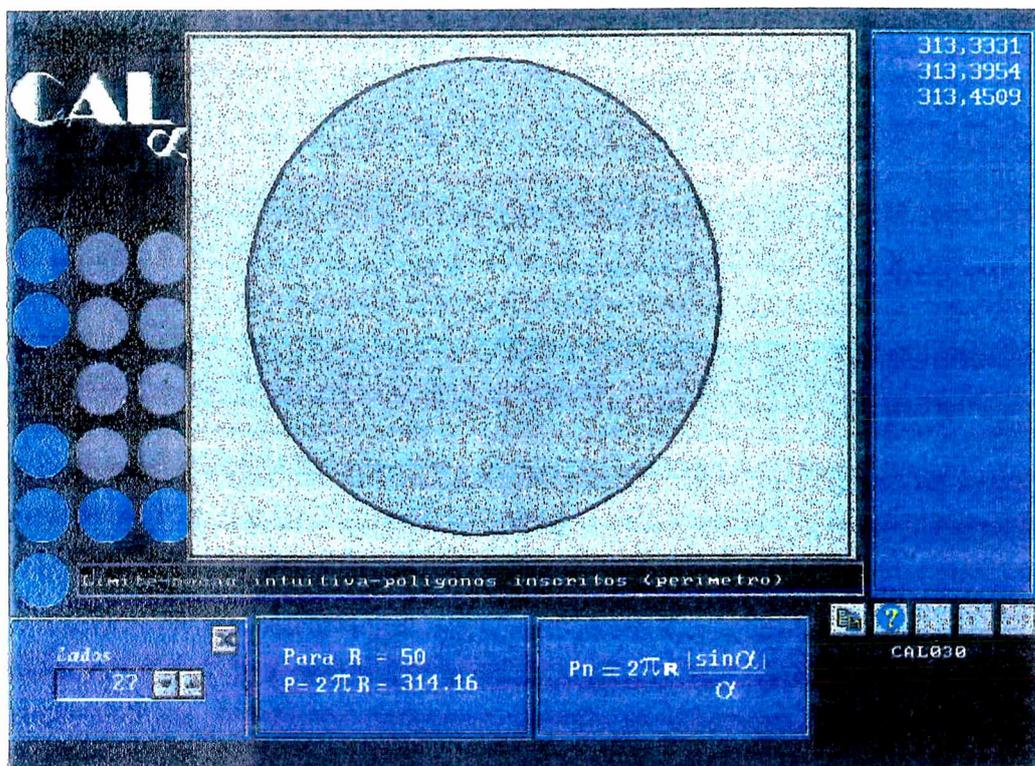
## Tela 21

Mostra um polígono regular de vinte e seis lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo



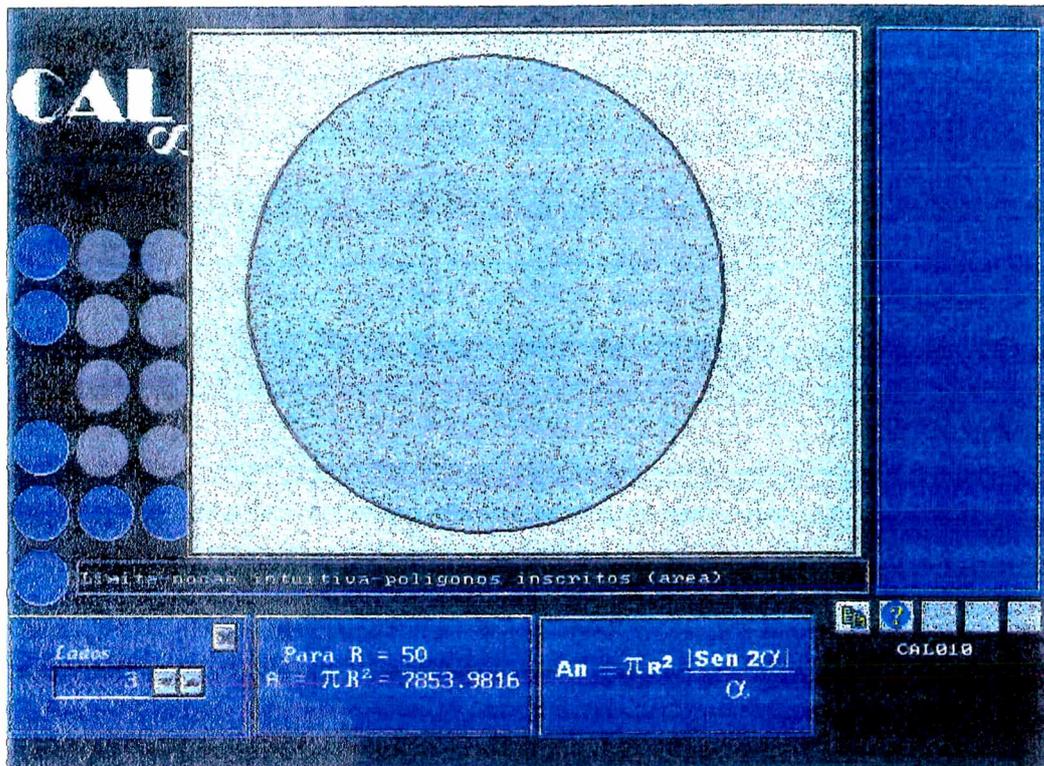
## Tela 22:

Mostra um polígono regular de vinte e sete lados, inscrito numa circunferência e o perímetro do mesmo



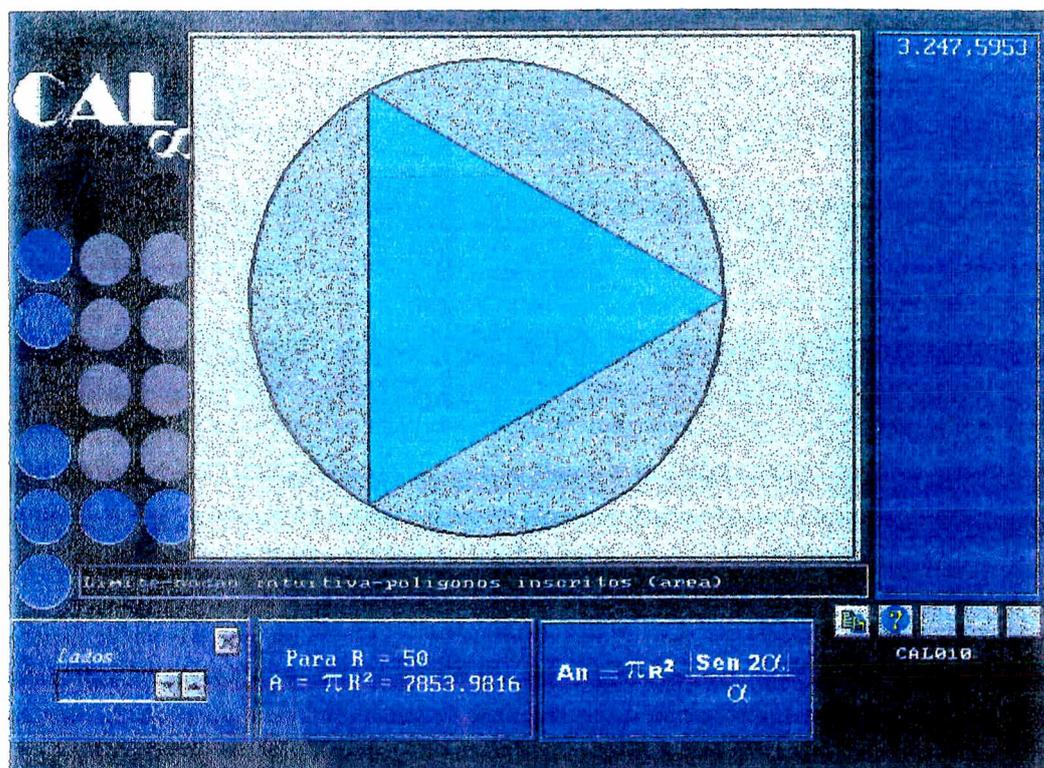
## Tela 23:

Tela inicial do jogo II do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf - I: Limite - Noção Intuitiva, para calcular a área do círculo através da área de polígonos regulares inscritos



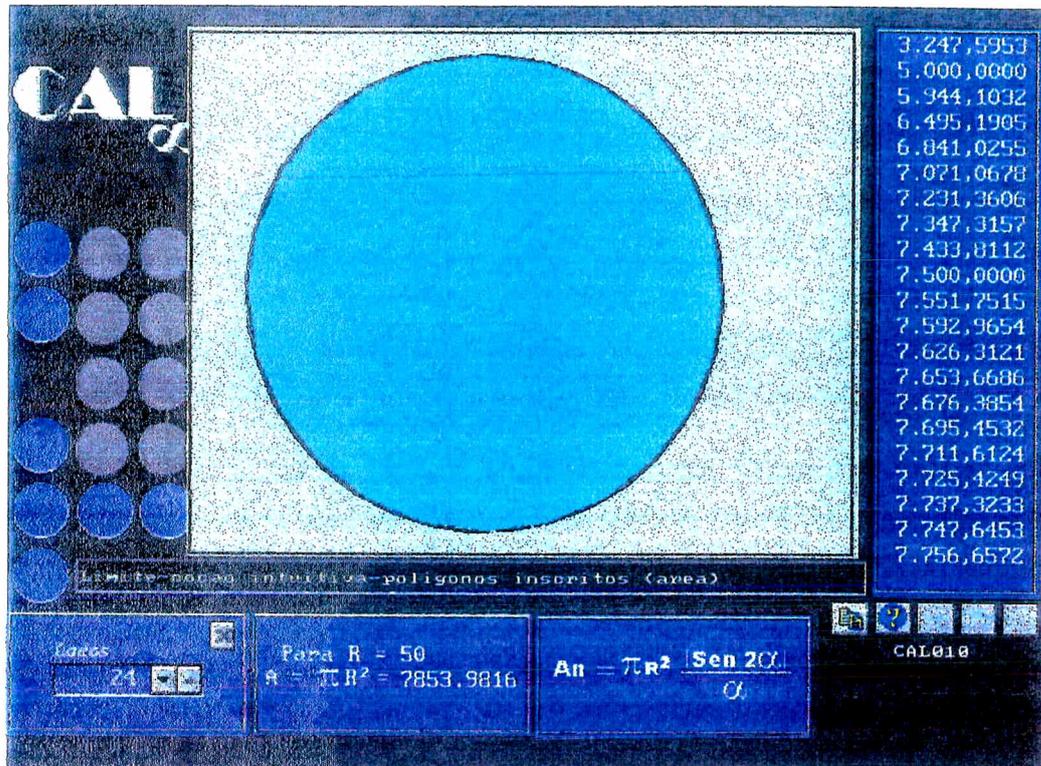
## Tela 24:

Mostra um triângulo regular inscrito numa circunferência,  
e a área do mesmo



## Tela 25:

Mostra um polígono regular de vinte e quatro lados, inscrito numa circunferência e a área do mesmo



## Tela 26:

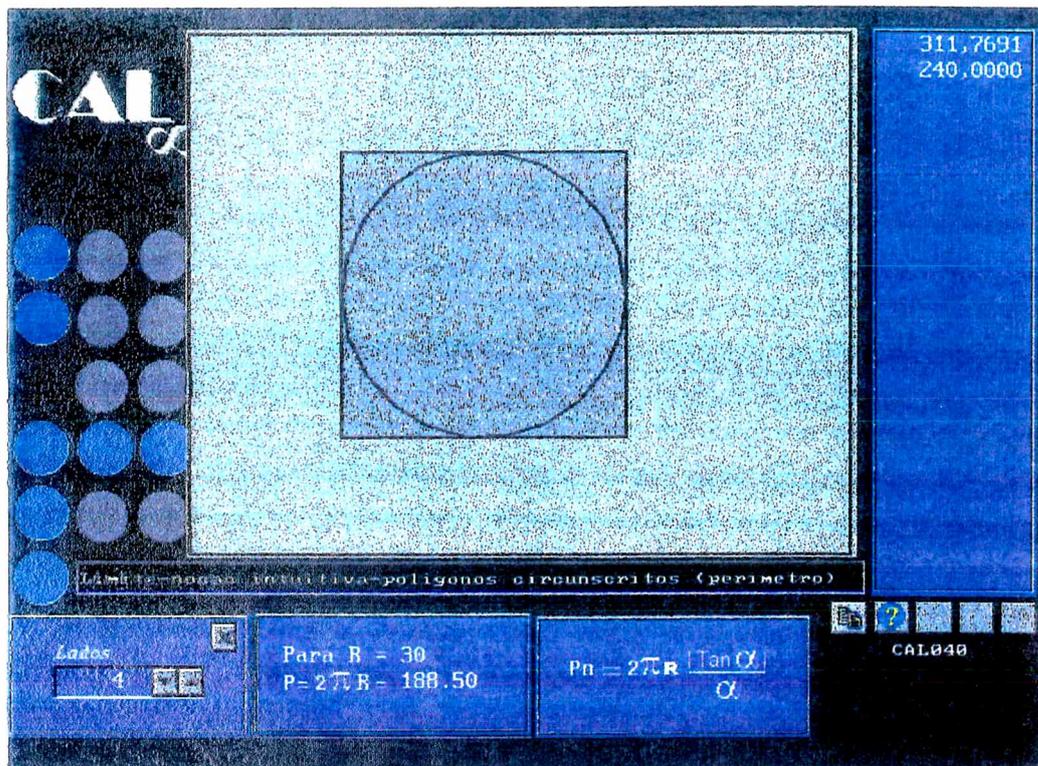
Tela inicial do jogo III do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf – I: Limite – Noção Intuitiva, para calcular o perímetro da circunferência através do perímetro de polígonos regulares circunscritos

The screenshot shows the initial screen of the game 'CAL'. The interface is divided into several sections:

- Top Left:** The logo 'CAL' with a subscript  $\infty$ .
- Center:** A large square area containing a blue circle.
- Left Side:** A vertical column of blue circles of varying sizes, representing a sequence of polygons.
- Bottom Panel:** A control area with several fields:
  - Lados:** A field containing the number '3'.
  - Para R = 30**
  - P =  $2\pi R = 188.50$**
  - Formula:**  $P_n = 2\pi R \frac{\tan(\alpha)}{\alpha}$
  - Bottom Right:** A small icon and the text 'CAL040'.

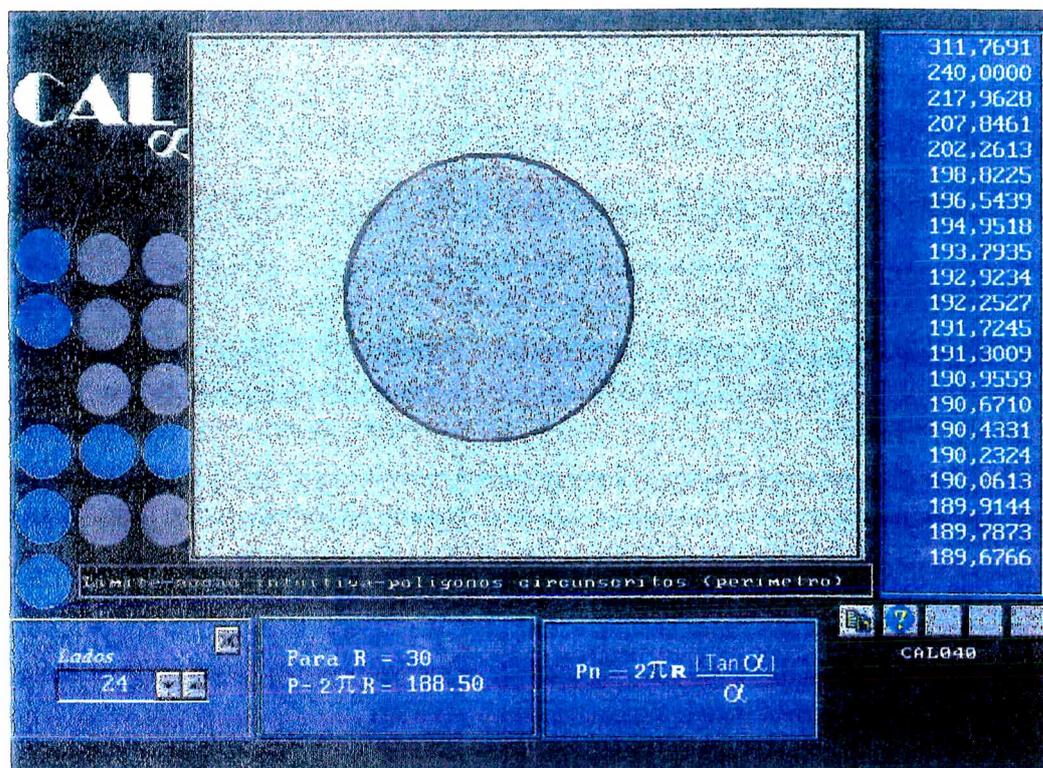
## Tela 27:

Mostra um quadrado circunscrito e o perímetro do mesmo



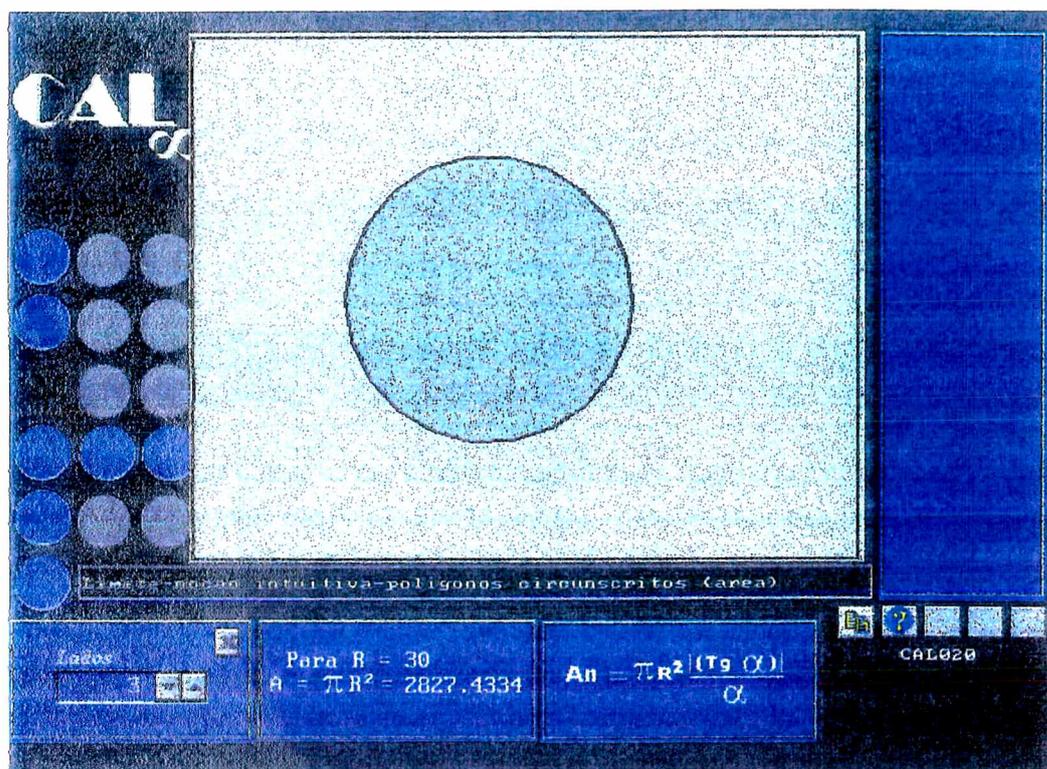
## Tela 28:

Mostra um polígono regular de vinte e quatro lados, circunscrito e o perímetro do mesmo



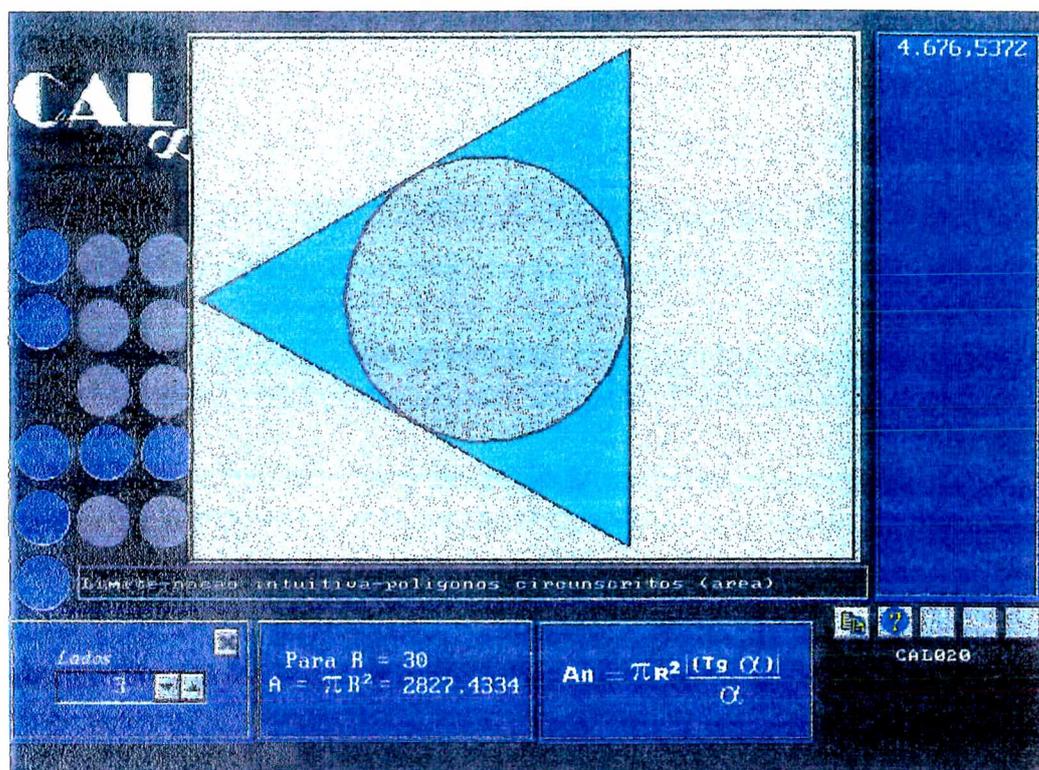
## Tela 29:

Tela inicial do jogo IV do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf - I: Limite - Noção Intuitiva, para calcular a área do círculo através da área de polígonos regulares circunscritos



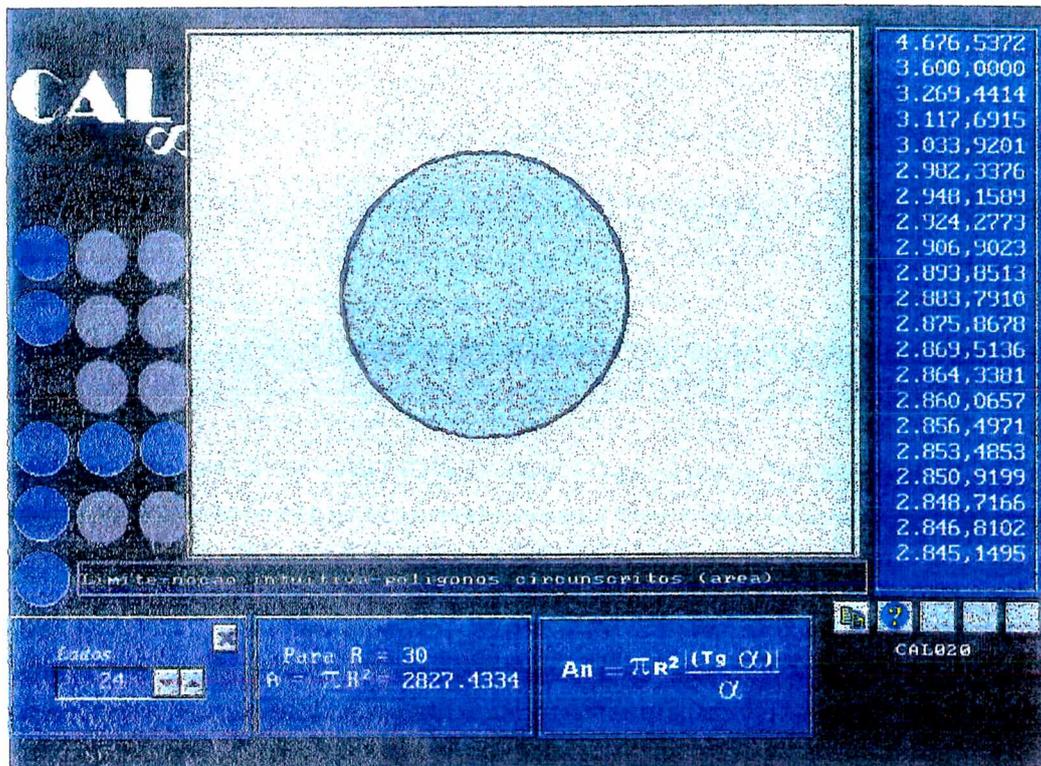
## Tela 30:

Mostra um triângulo equilátero circunscrito e a área do mesmo



## Tela 31:

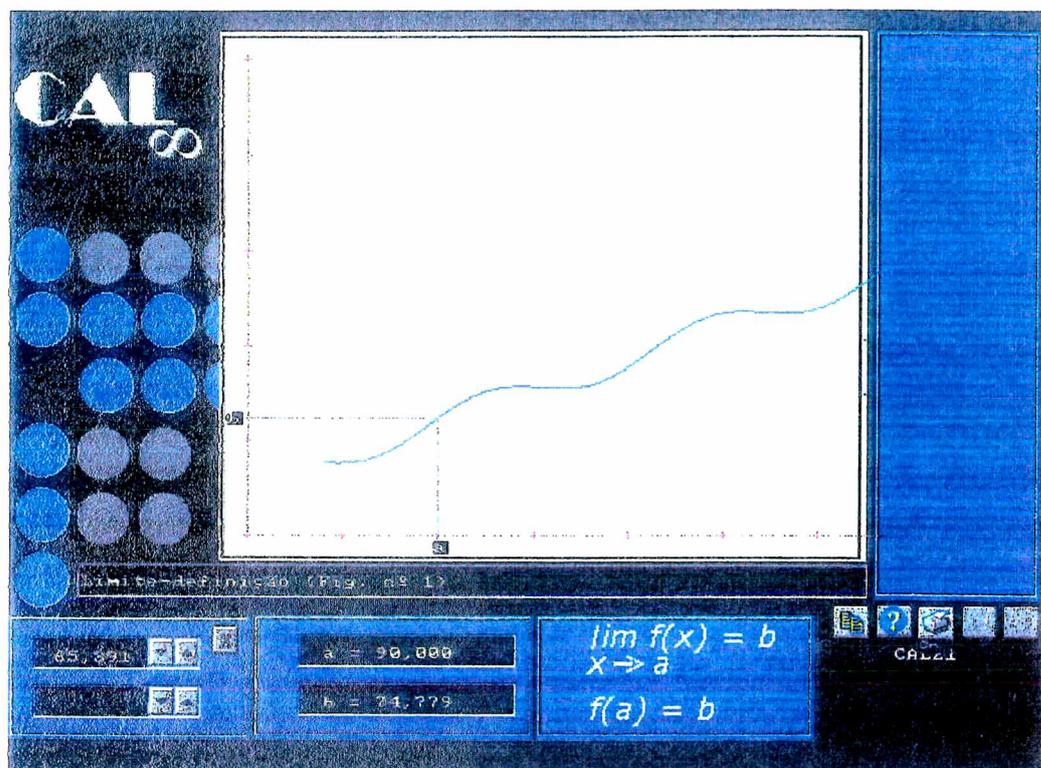
Mostra um polígono regular de vinte e quatro lados, circunscrito e a área do mesmo



Tela 32:

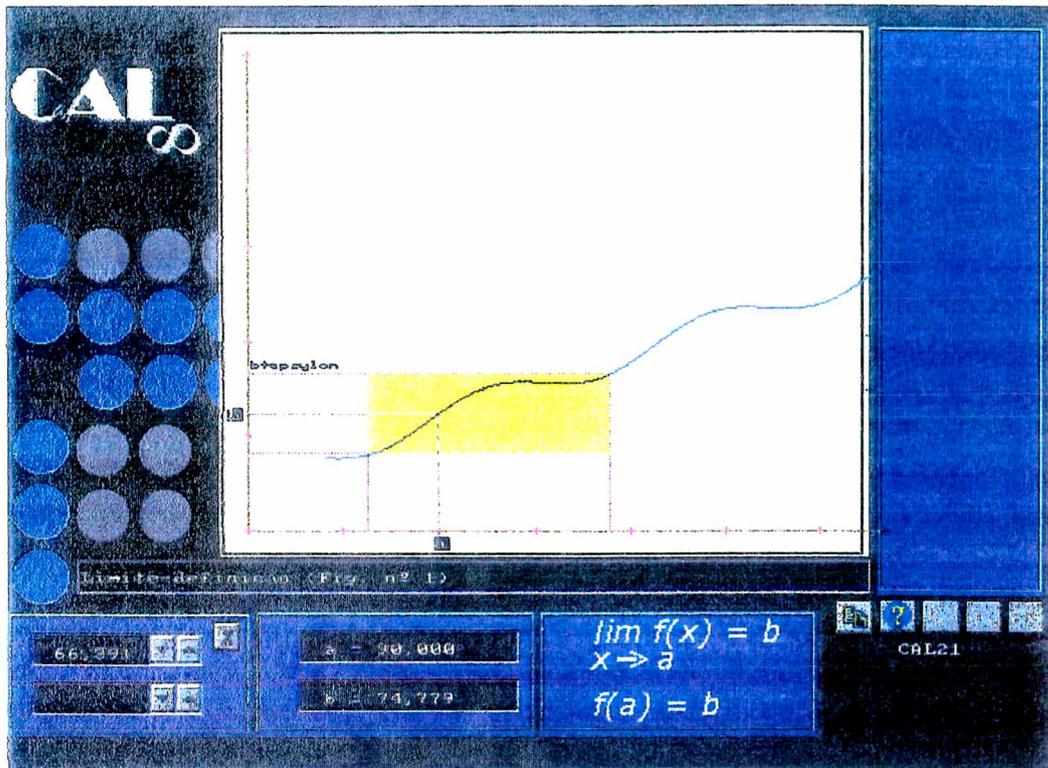
Tela inicial do primeiro jogo do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf - I: Limite -

Definição, ou seja, jogo (4a)



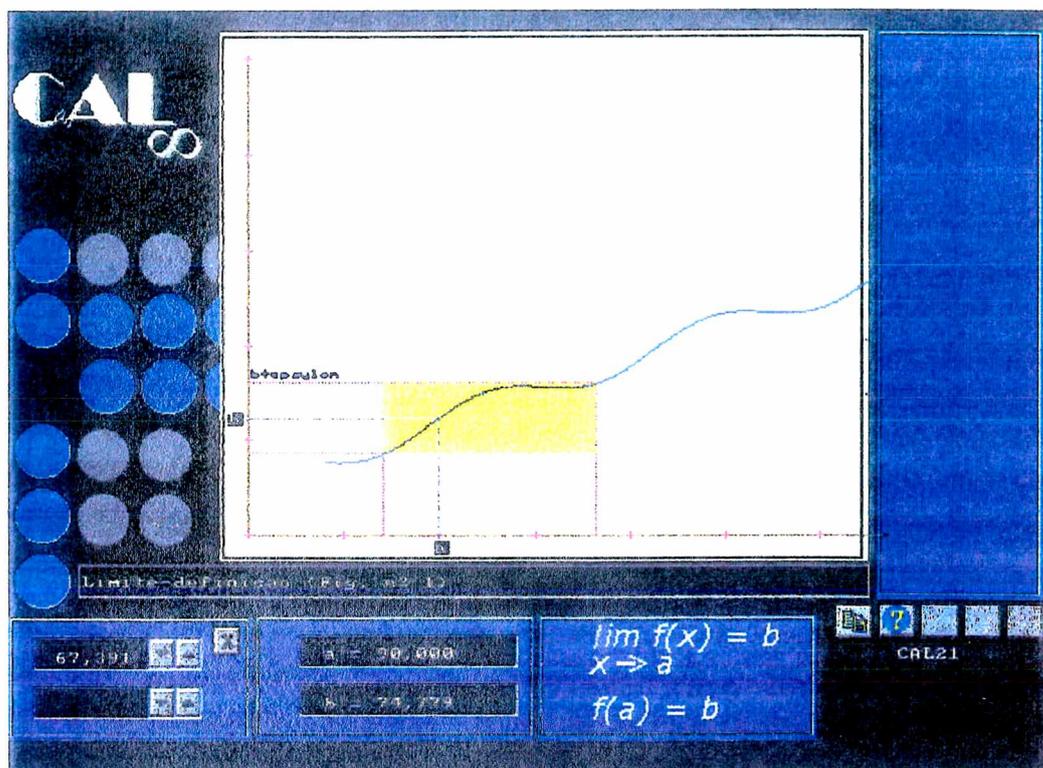
## Tela 33:

Tela que representa a definição I de limite,  
para  $y = 66,391$ , no jogo 4a



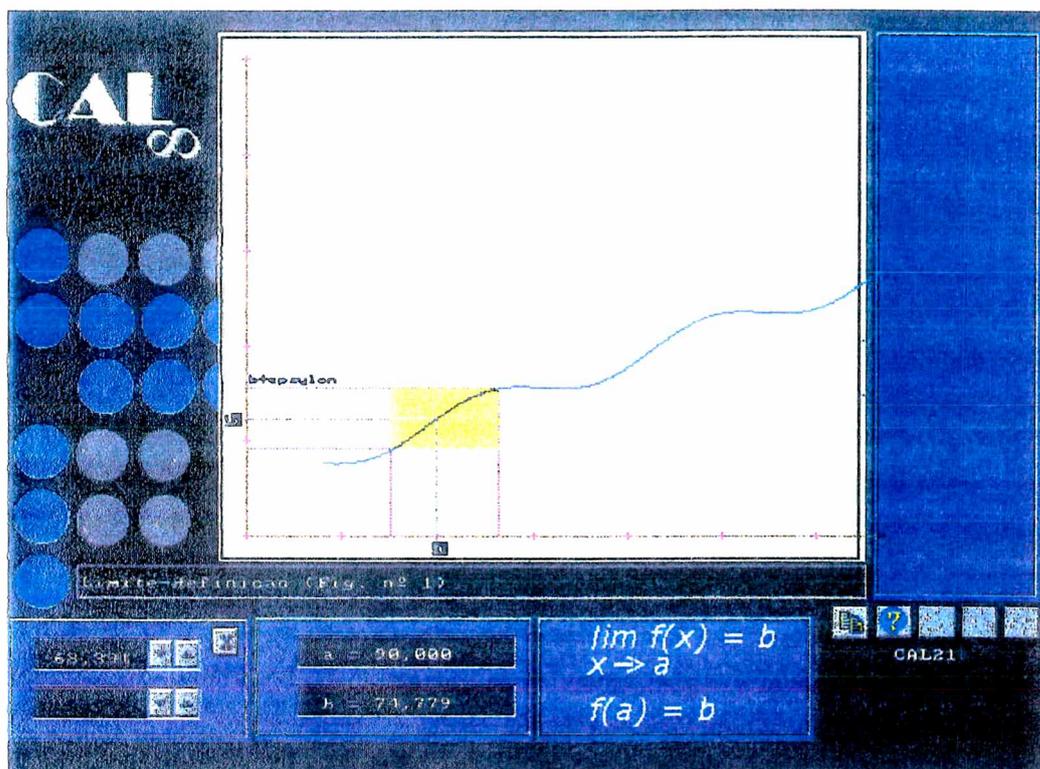
## Tela 34:

Tela que representa a definição I de limite,  
para  $y = 67,391$ , no jogo (4a)



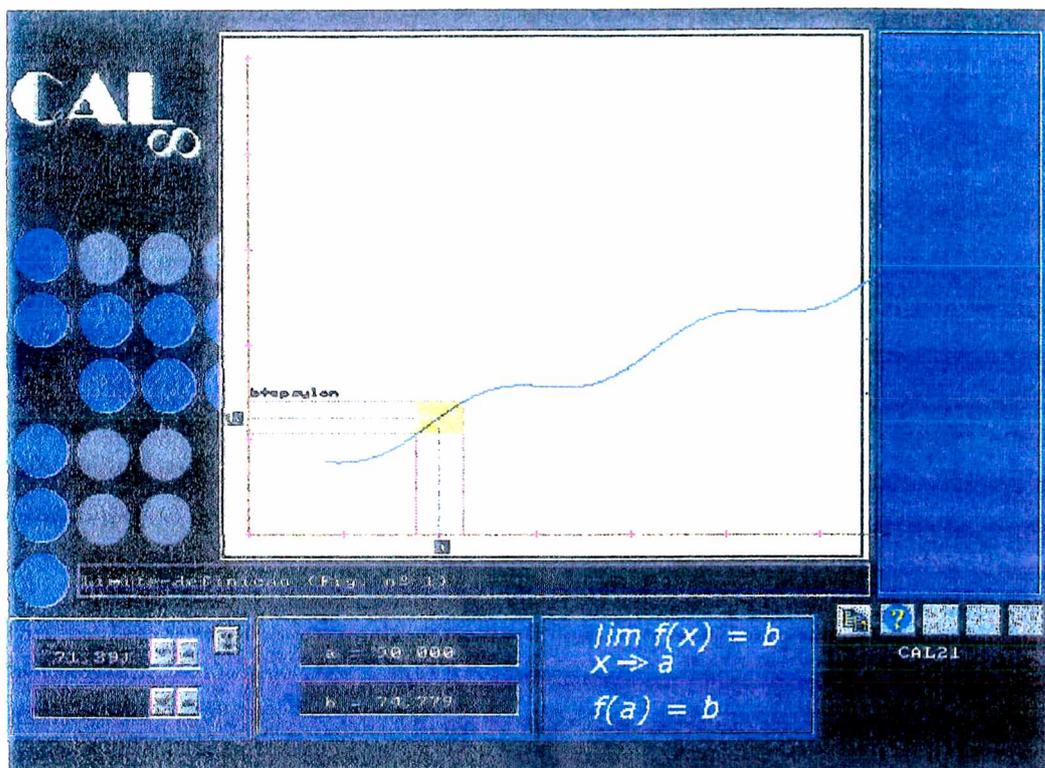
## Tela 35:

Tela que representa a definição I de limite,  
para  $y = 68,391$ , no jogo (4a)



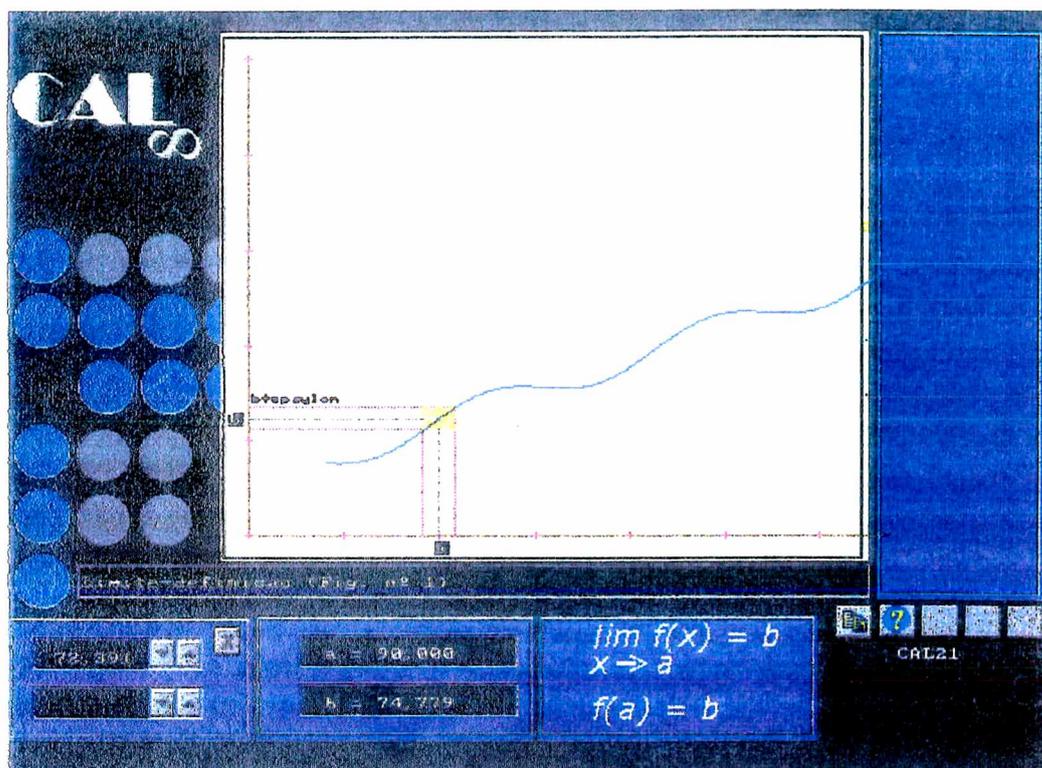
## Tela 36:

Tela que representa a definição I de limite,  
para  $y = 71,391$ , no jogo (4a)



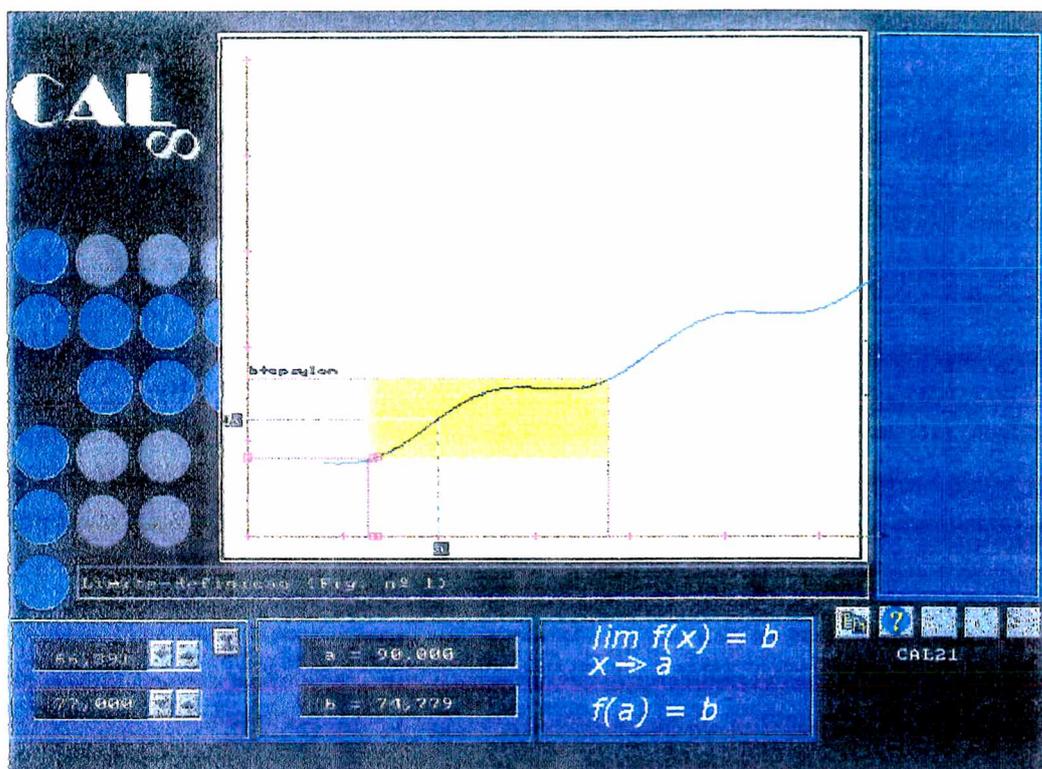
## Tela 37:

Tela que representa a definição I de limite,  
para  $y = 77,000$ , no jogo (4a)



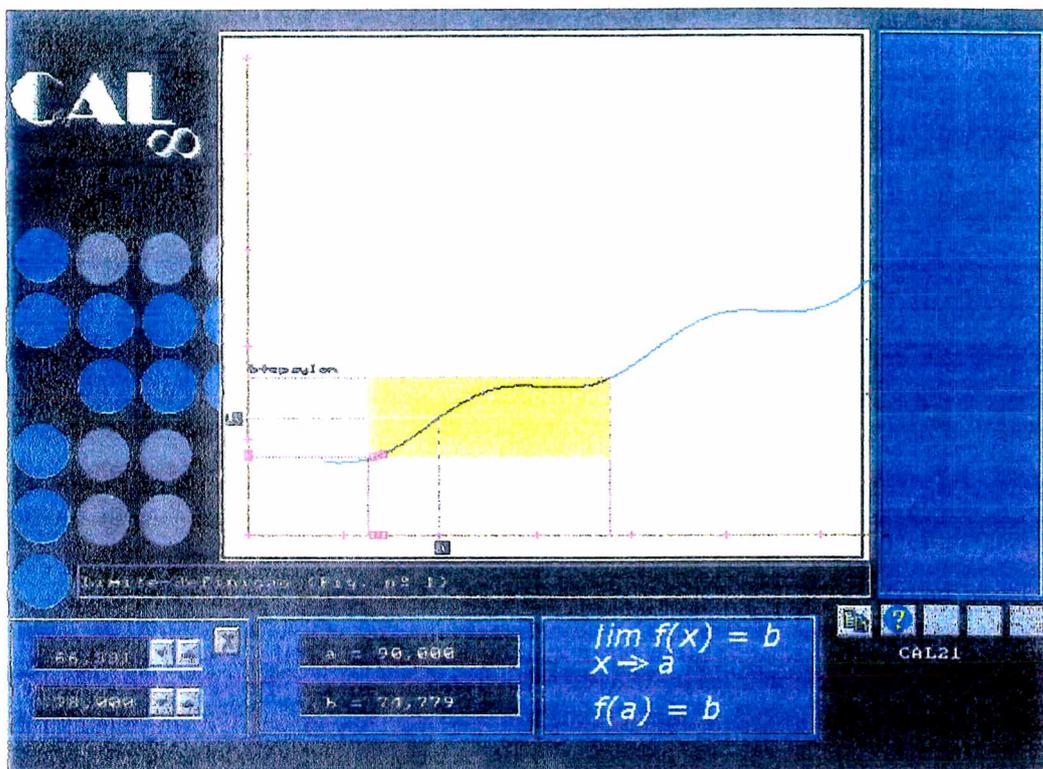
## Tela 38:

Tela que representa a definição II de limite,  
para  $x = 77,00$ , no jogo (4a)



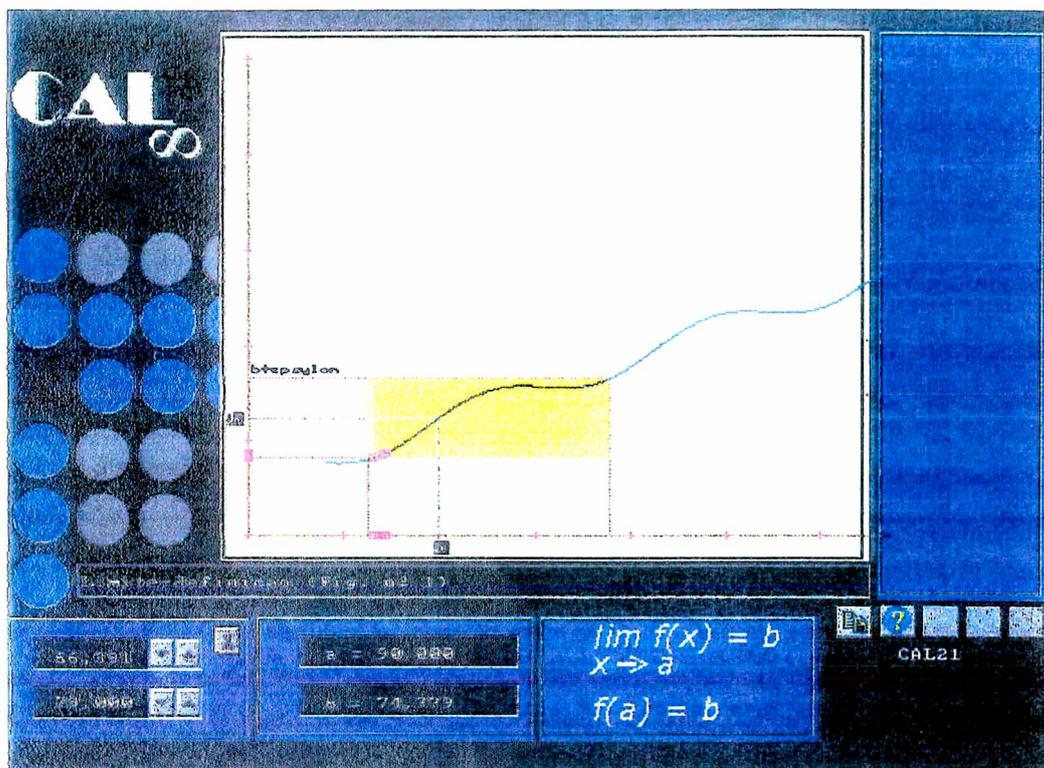
## Tela 39:

Tela que representa a definição II de limite,  
para  $x = 78,000$ , no jogo (4a)



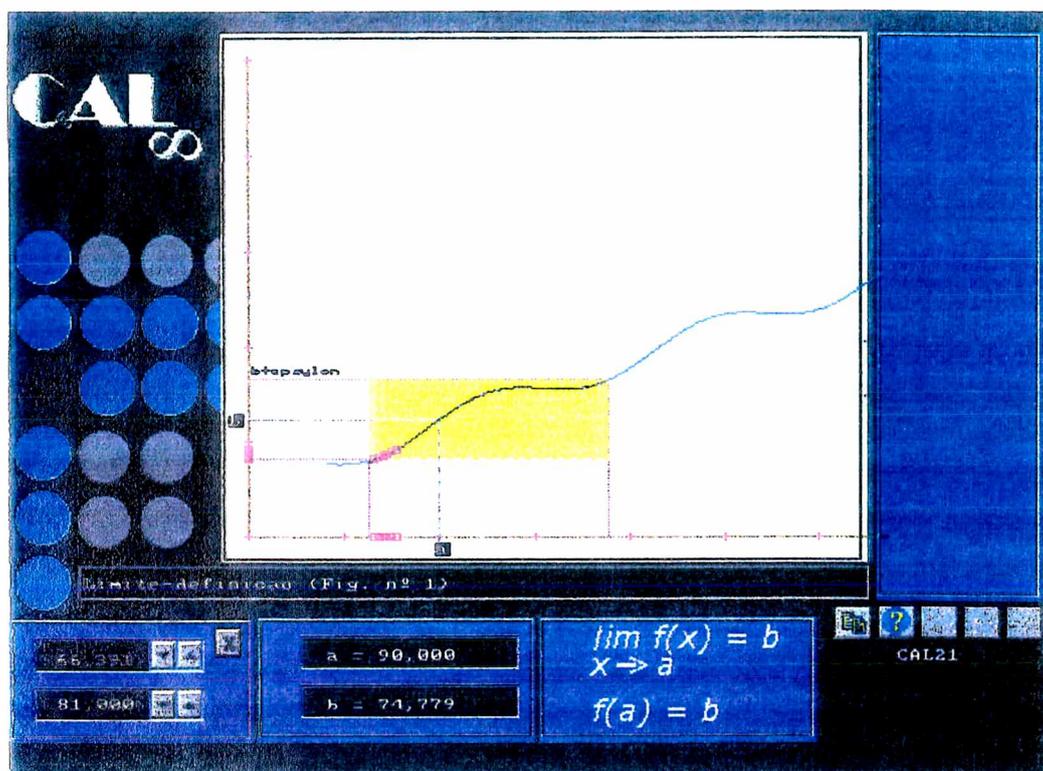
## Tela 40:

Tela que representa a definição II de limite,  
para  $x = 79,000$ , no jogo (4a)



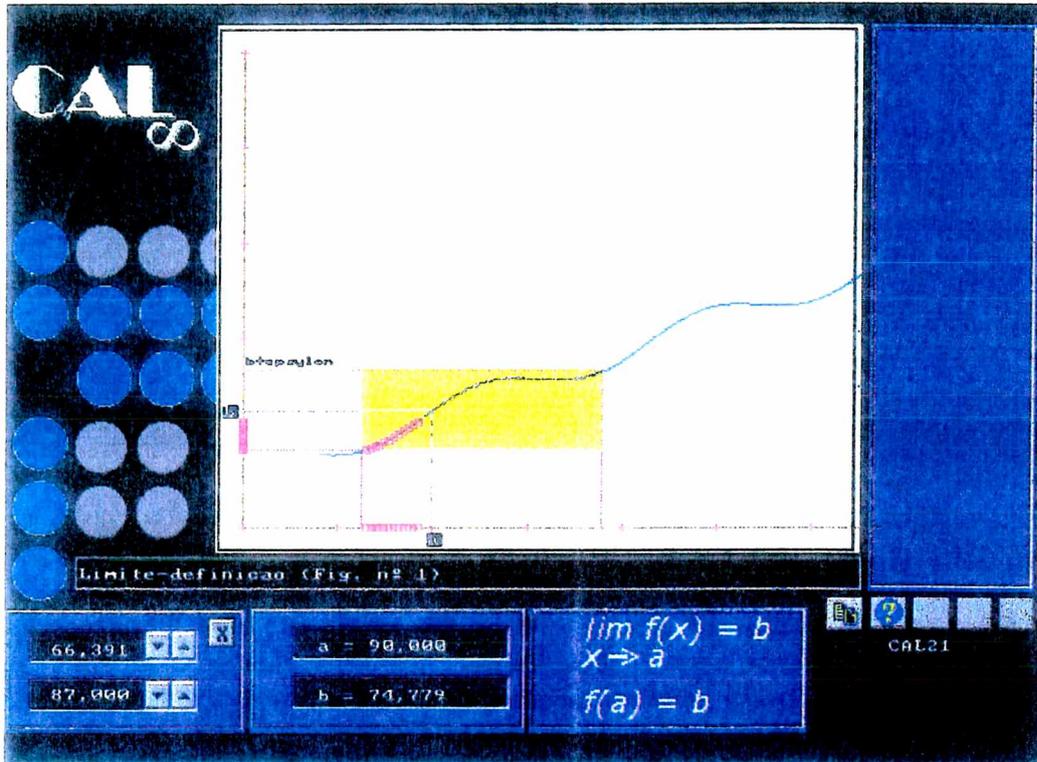
## Tela 41:

Tela que representa a definição II de limite,  
para  $x = 81,000$ , no jogo (4a)



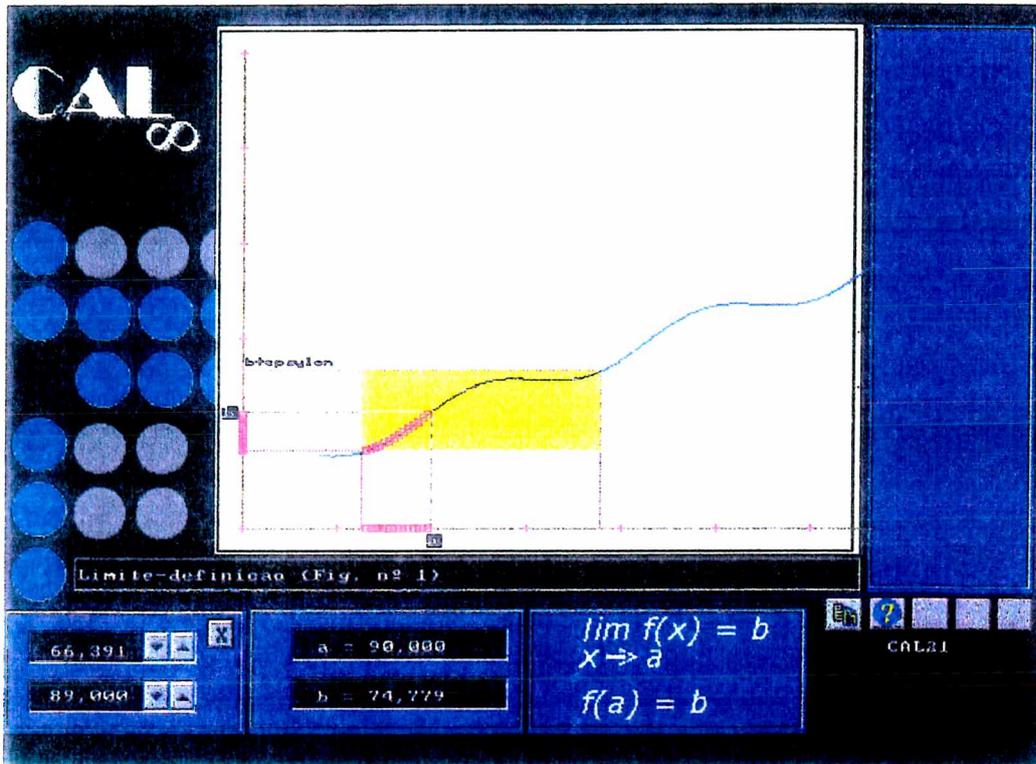
## Tela 42:

Tela que representa a definição II de limite,  
para  $x = 87,000$ , no jogo 4a



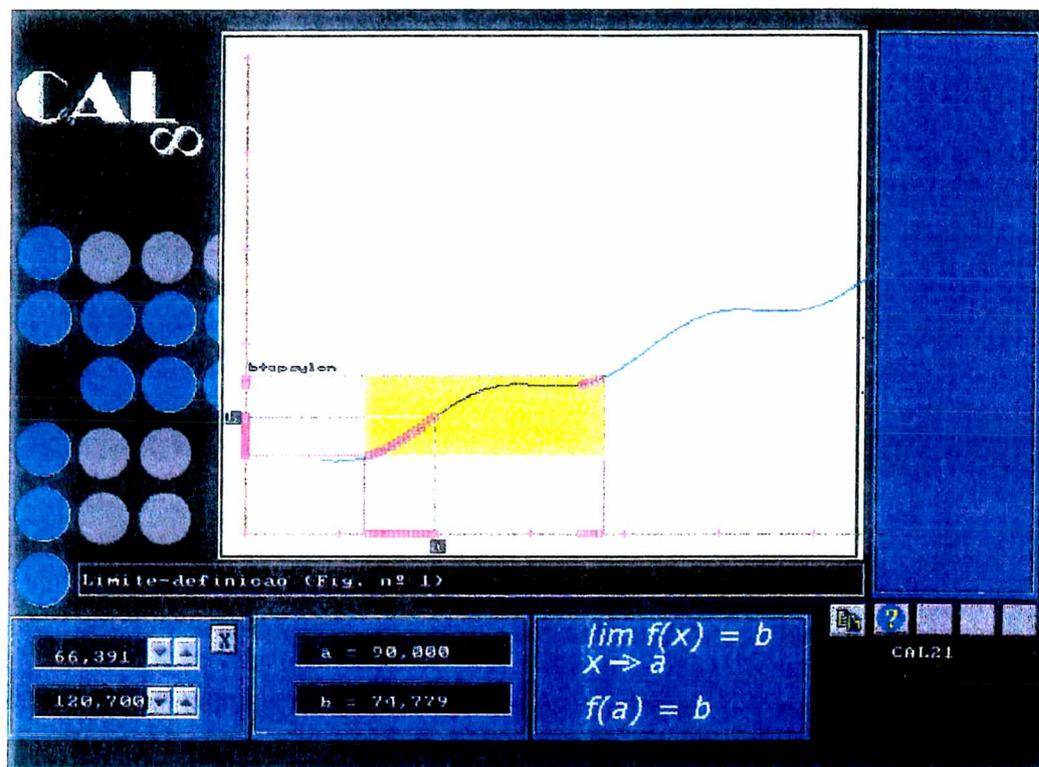
## Tela 43:

Tela que representa a definição II de limite,  
para  $x = 89,000$ , no jogo (4a)



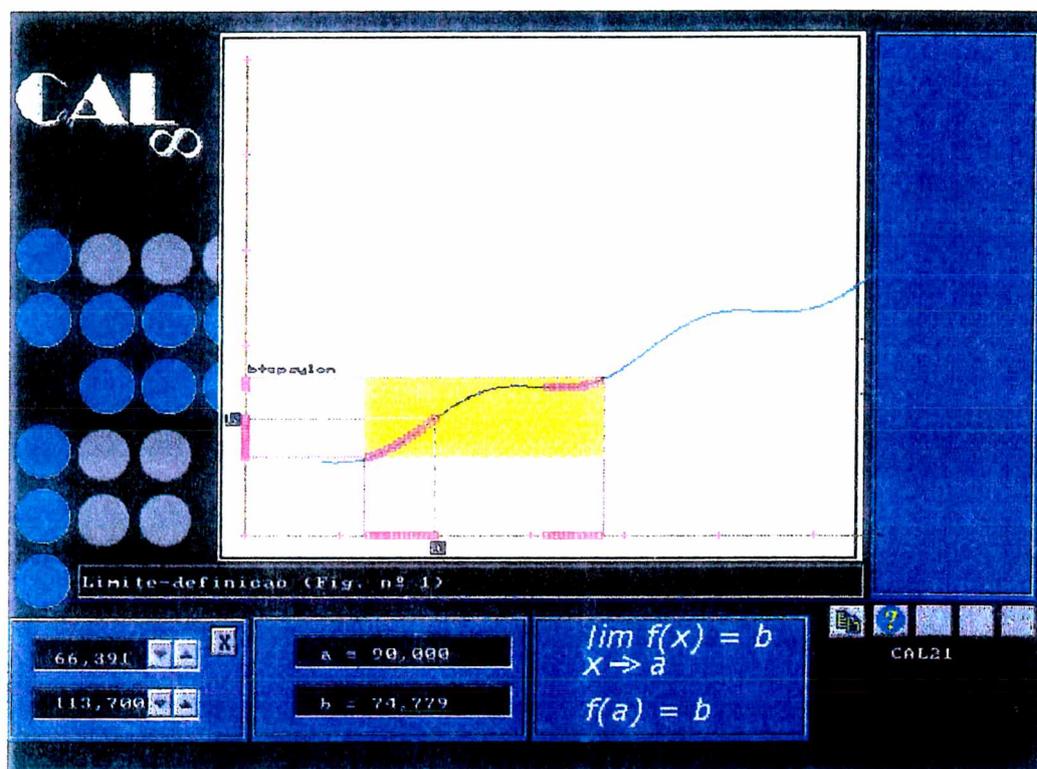
## Tela 44:

Tela que representa a definição II de limite,  
para  $x = 120,700$ , no jogo (4a)



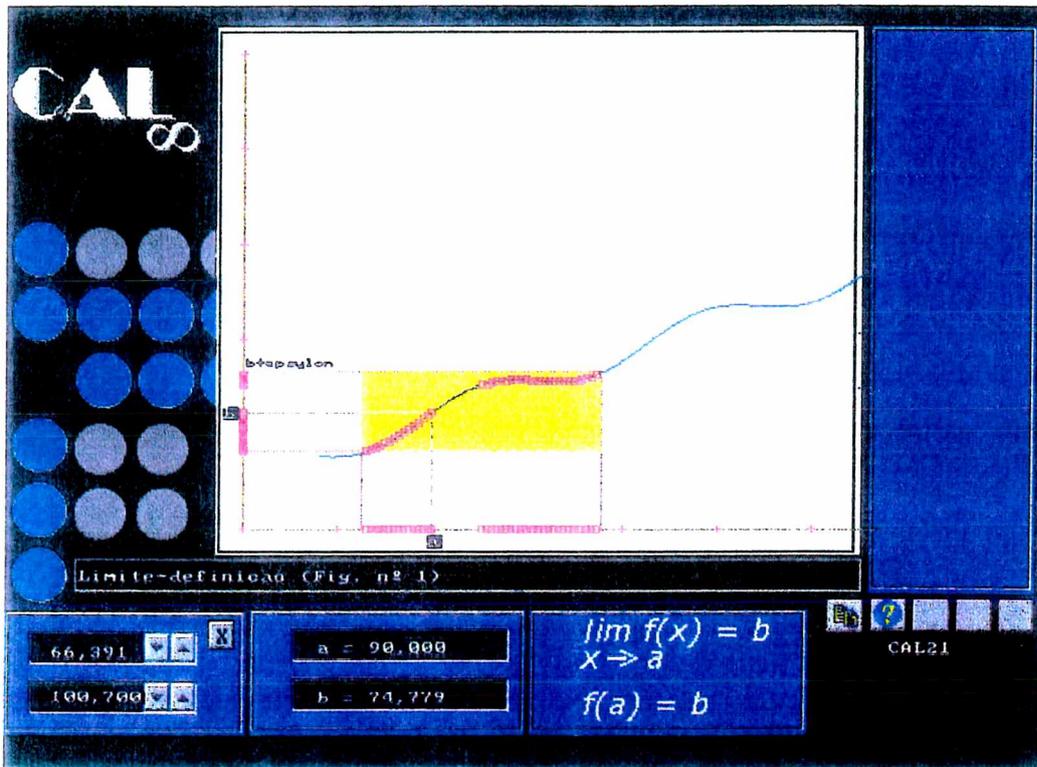
## Tela 45:

Tela que representa a definição II de limite,  
para  $x = 113,700$ , no jogo (4a)



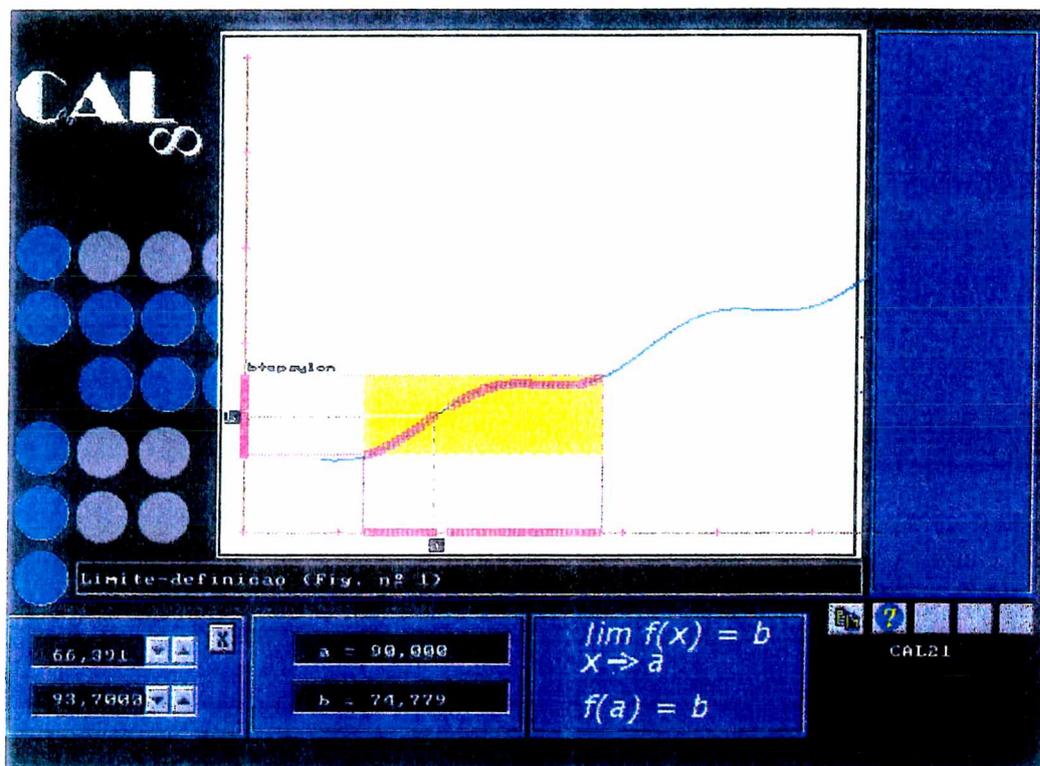
## Tela 46:

Tela que representa a definição II de limite,  
para  $x = 100,700$ , no jogo (4a)



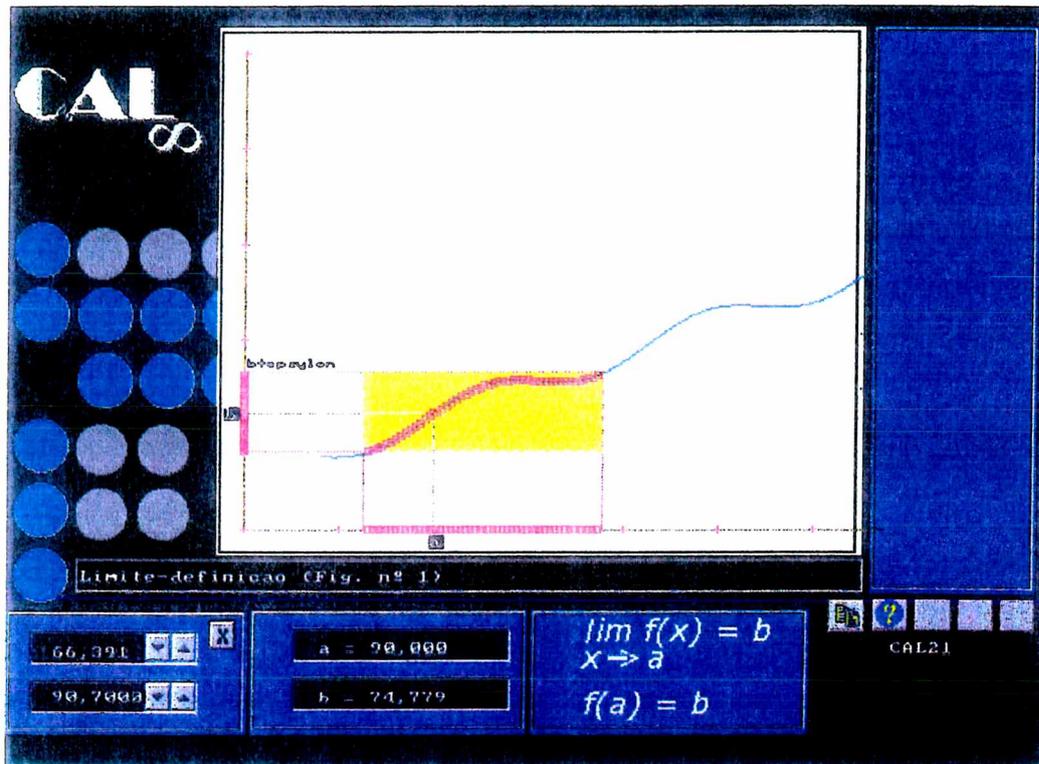
## Tela 47:

Tela que representa a definição II de limite,  
para  $x = 93,700$ , no jogo (4a)



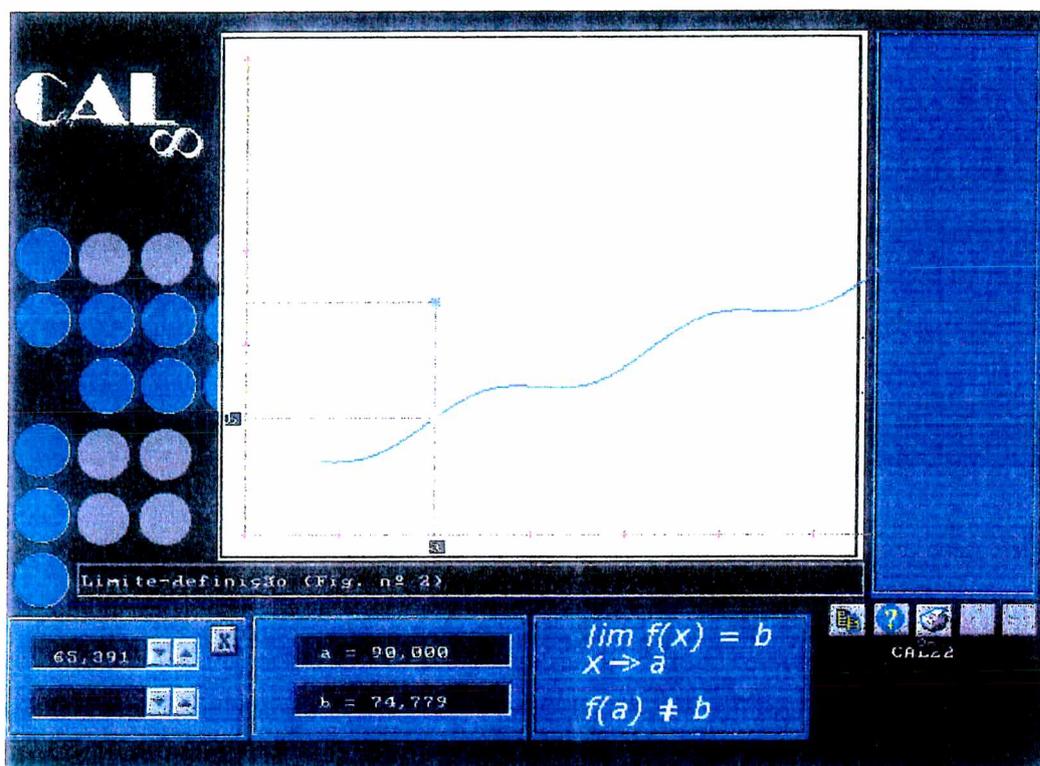
## Tela 48:

Tela que representa a definição II de limite,  
para  $x = 90,700$ , no jogo 4a



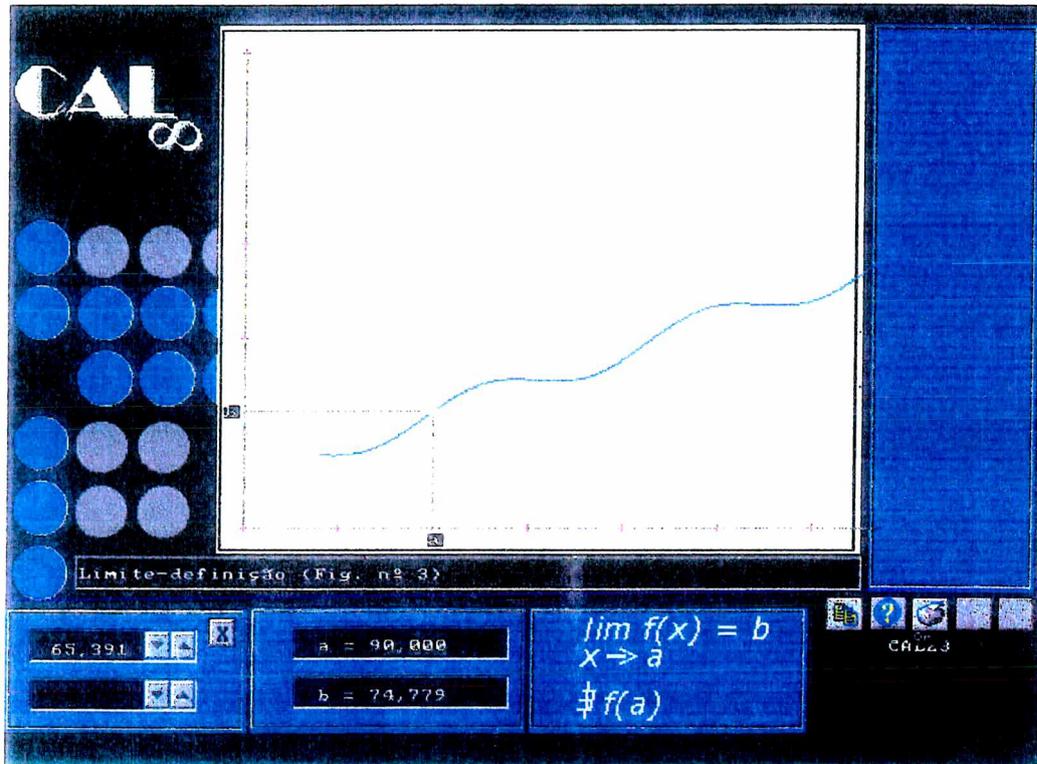
## Tela 49:

Tela inicial do jogo , do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf - II: Limite - Definição



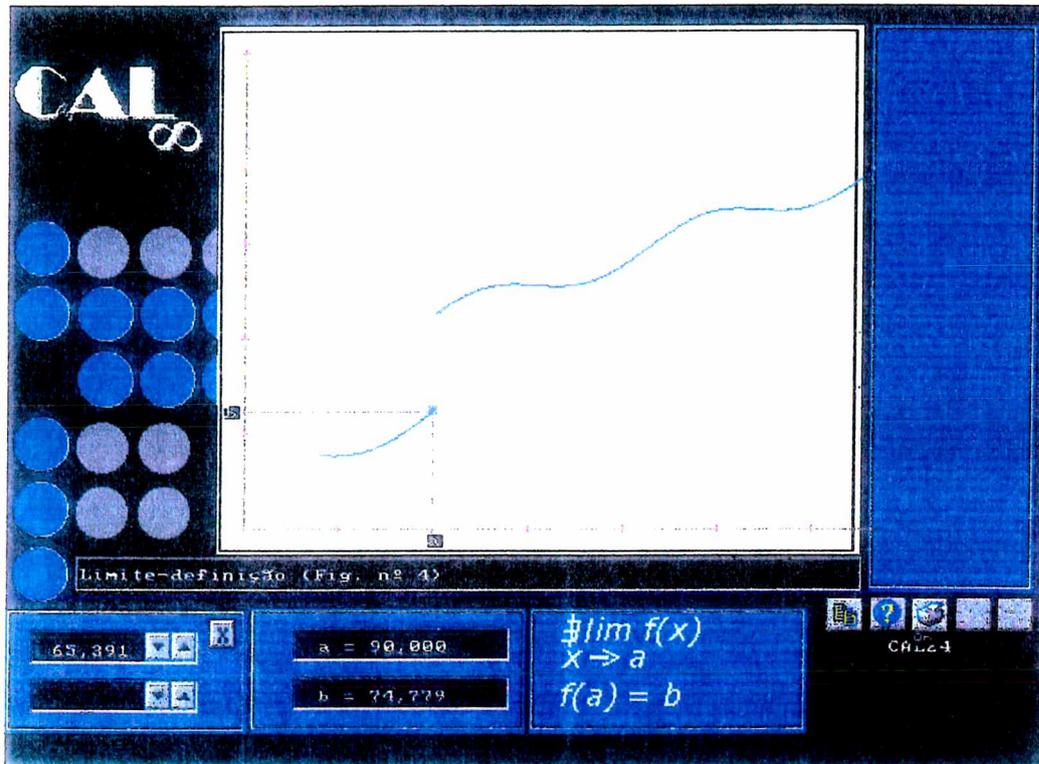
## Tela 50:

Tela inicial do jogo (4c), do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf - II: Limite - Definição



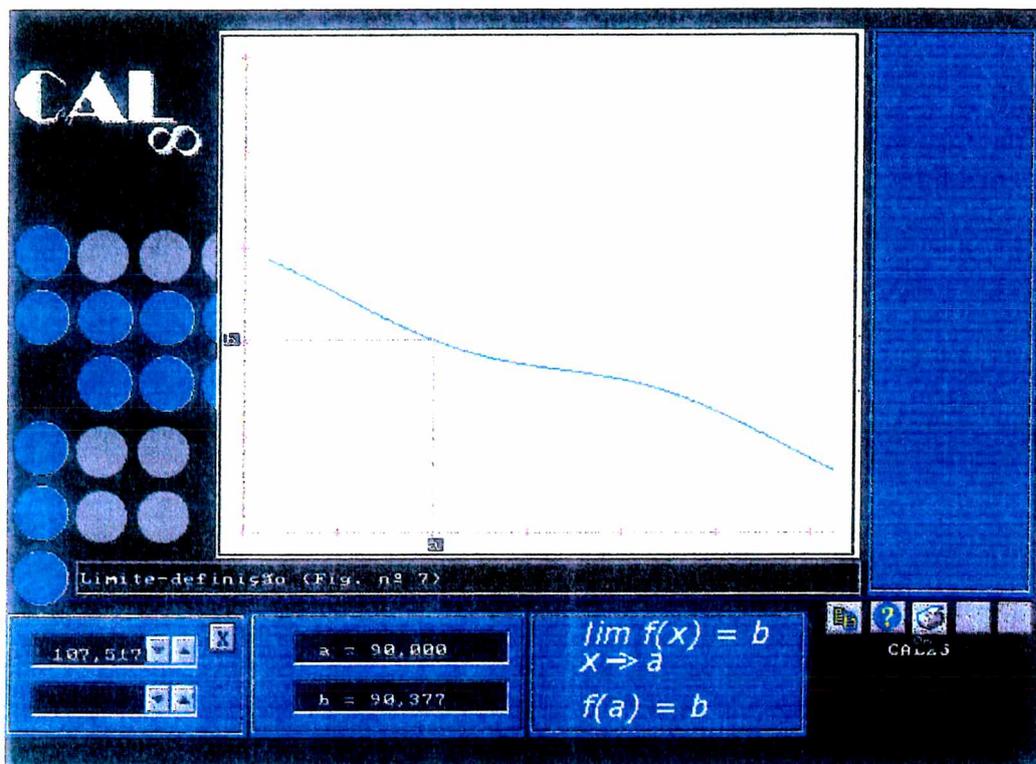
## Tela 51:

Tela inicial do jogo (4d), do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf - II: Limite - Definição



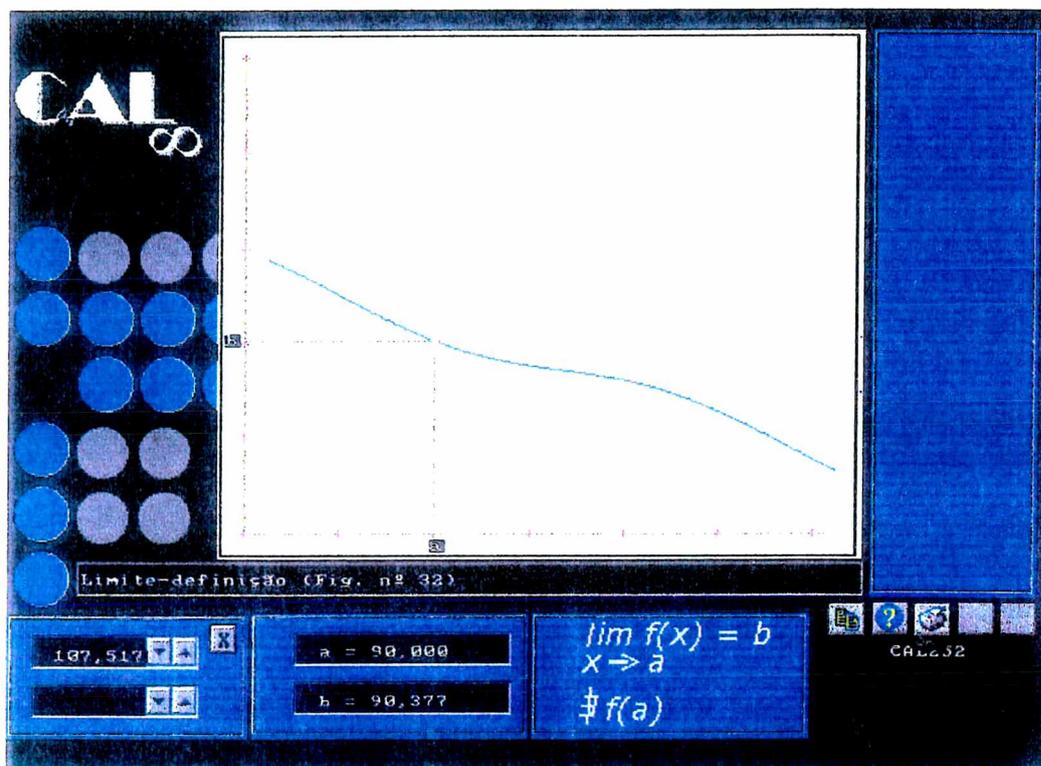
## Tela 52:

Tela inicial do jogo (4e) do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf - II: Limite - Definição



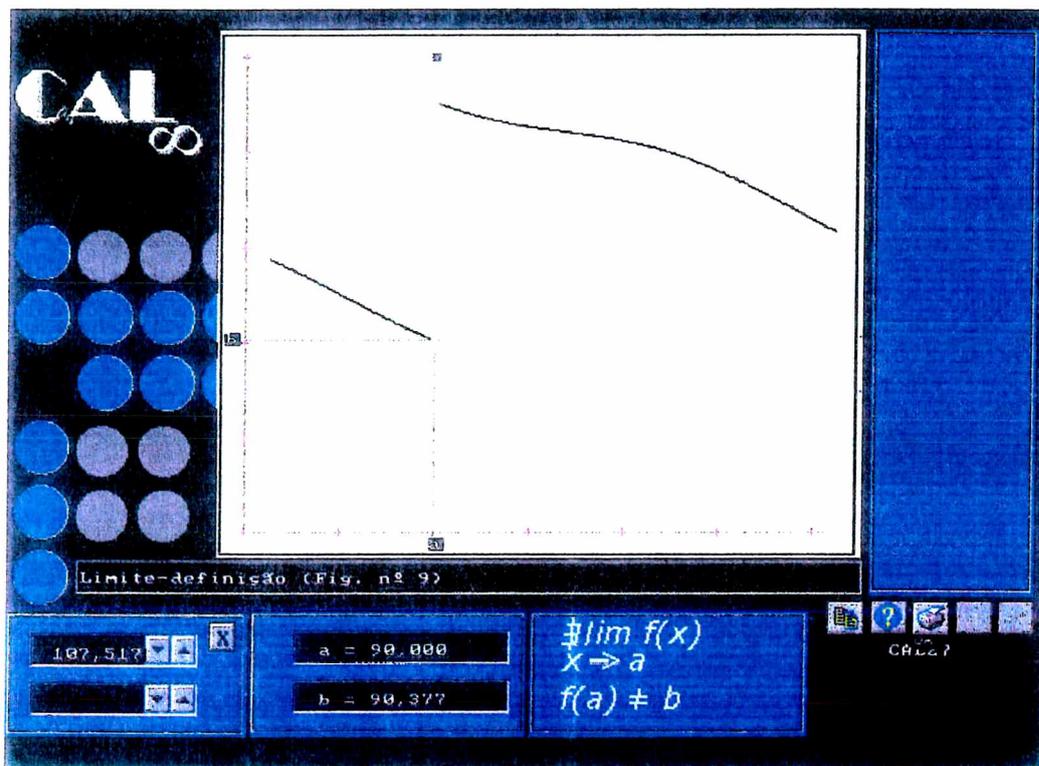
## Tela 53:

Tela inicial do jogo  $\textcircled{4f}$ , do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf - II: Limite - Definição



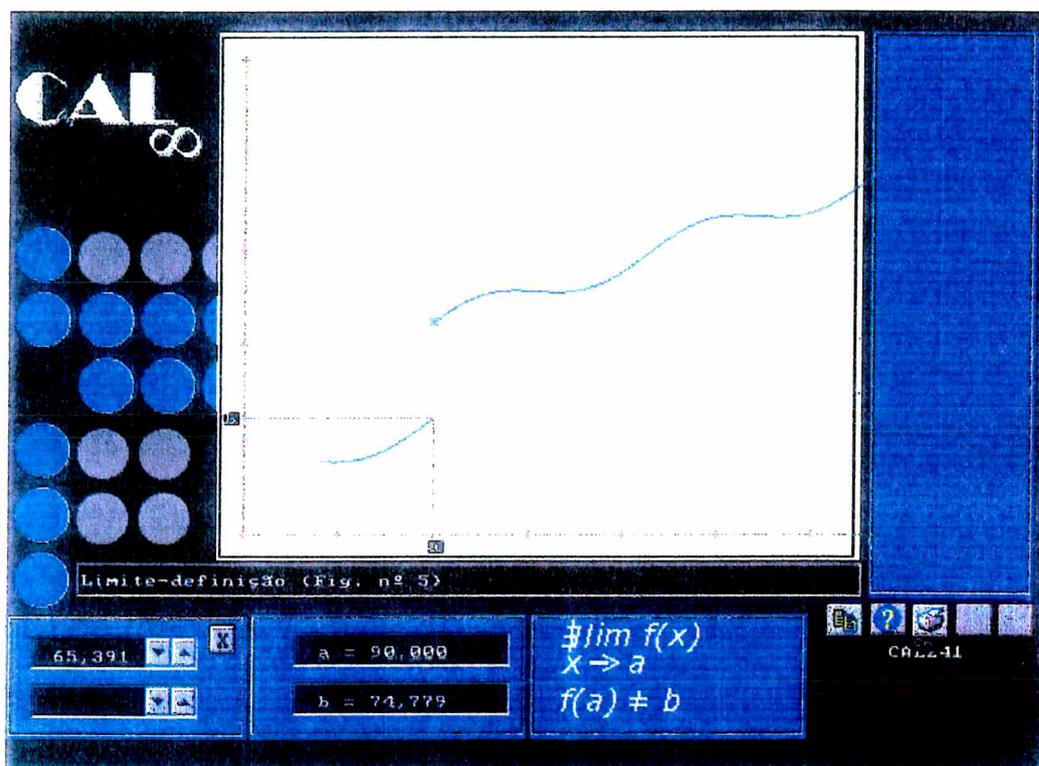
## Tela 54:

Tela inicial do jogo (4g), do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf - II: Limite - Definição



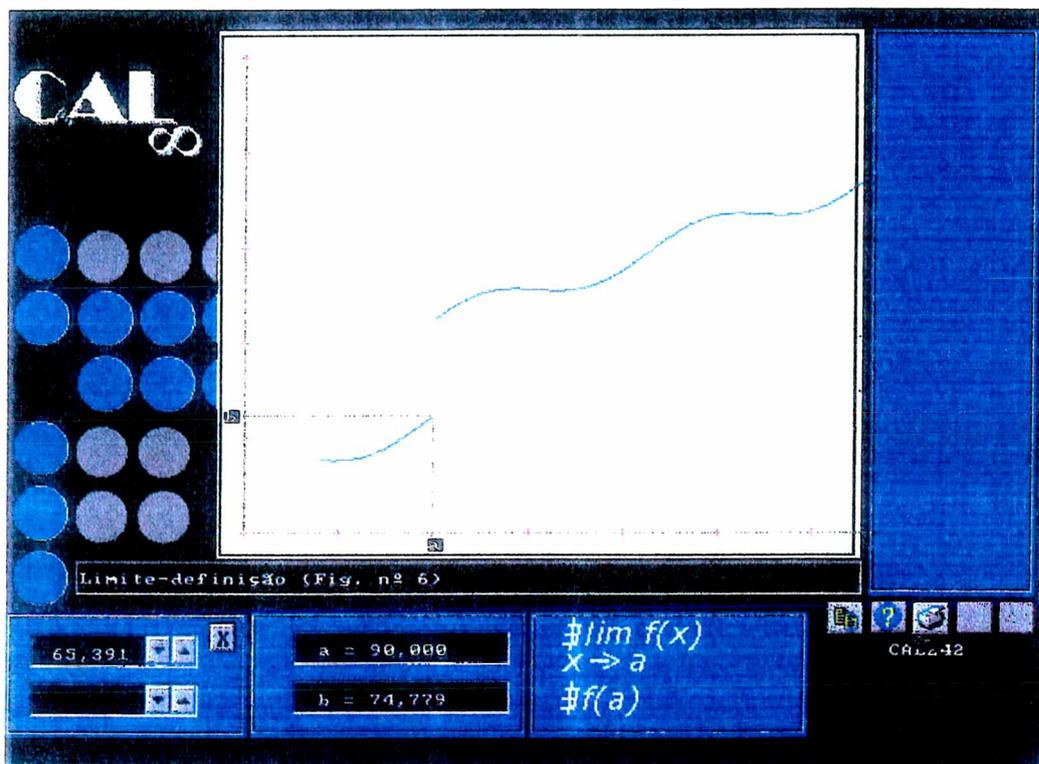
## Tela 55:

Tela inicial do jogo ④h, do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf - II: Limite -- Definição



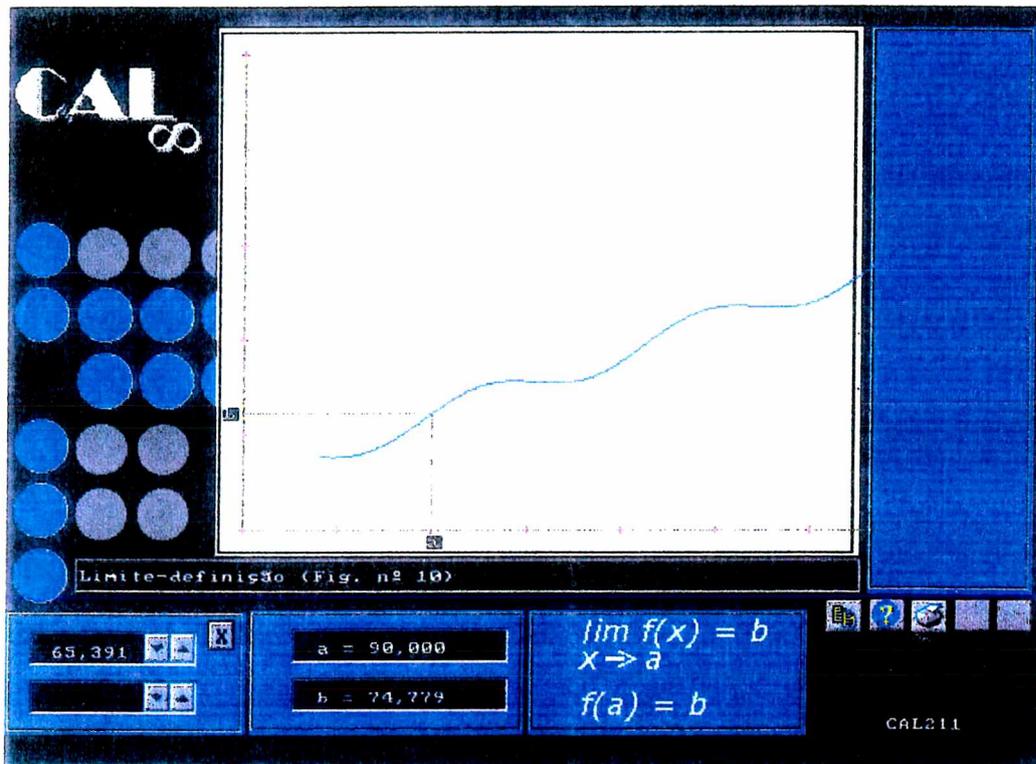
## Tela 56:

Tela inicial do jogo ④i, do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf - II: Limite - Definição



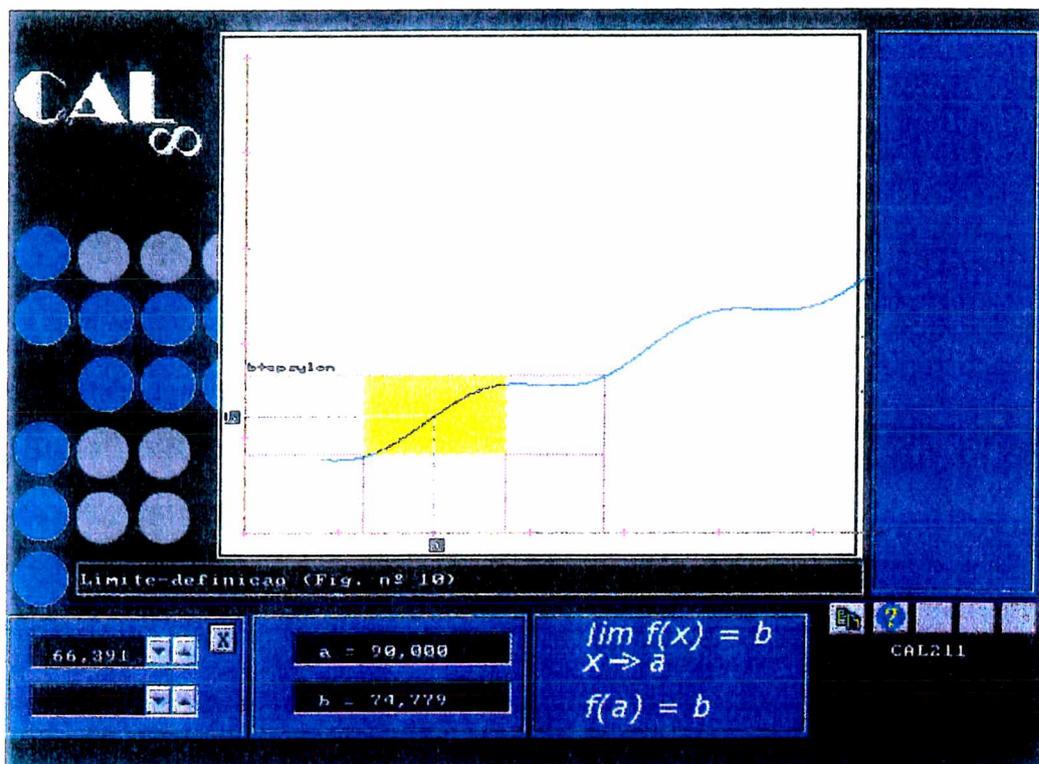
## Tela 57:

Tela inicial do jogo (4j), do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf - II: Limite - Definição



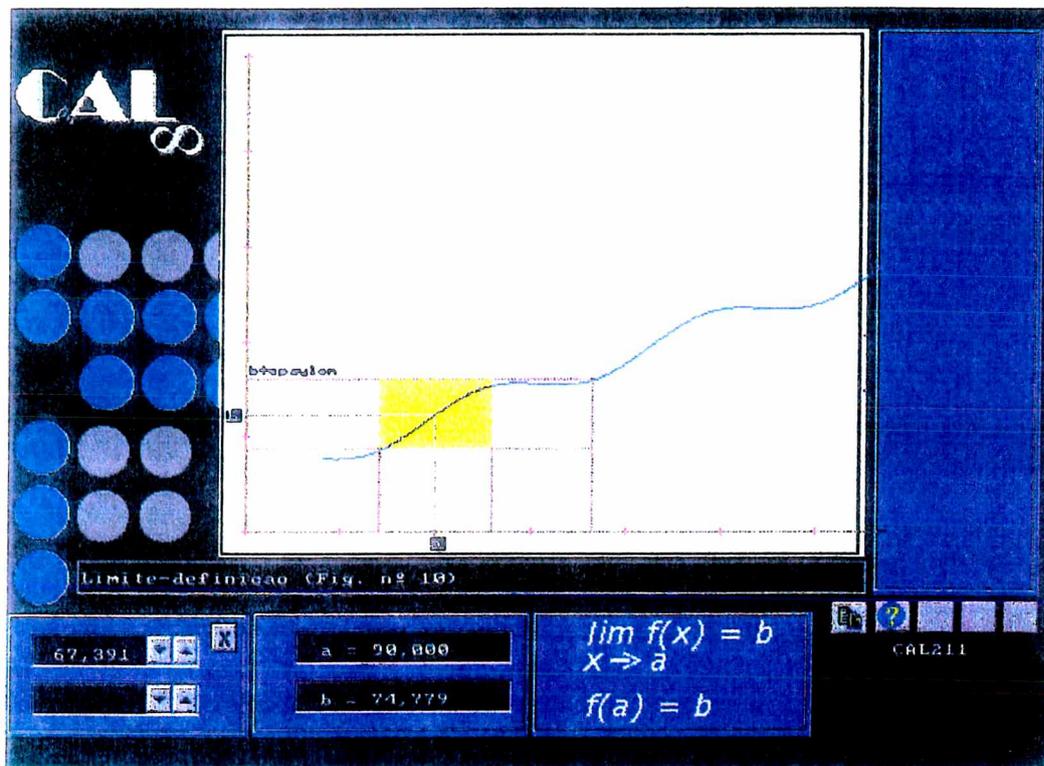
## Tela 58:

Tela que representa a definição III de limite,  
para  $y = 66,391$ , no jogo (4j)



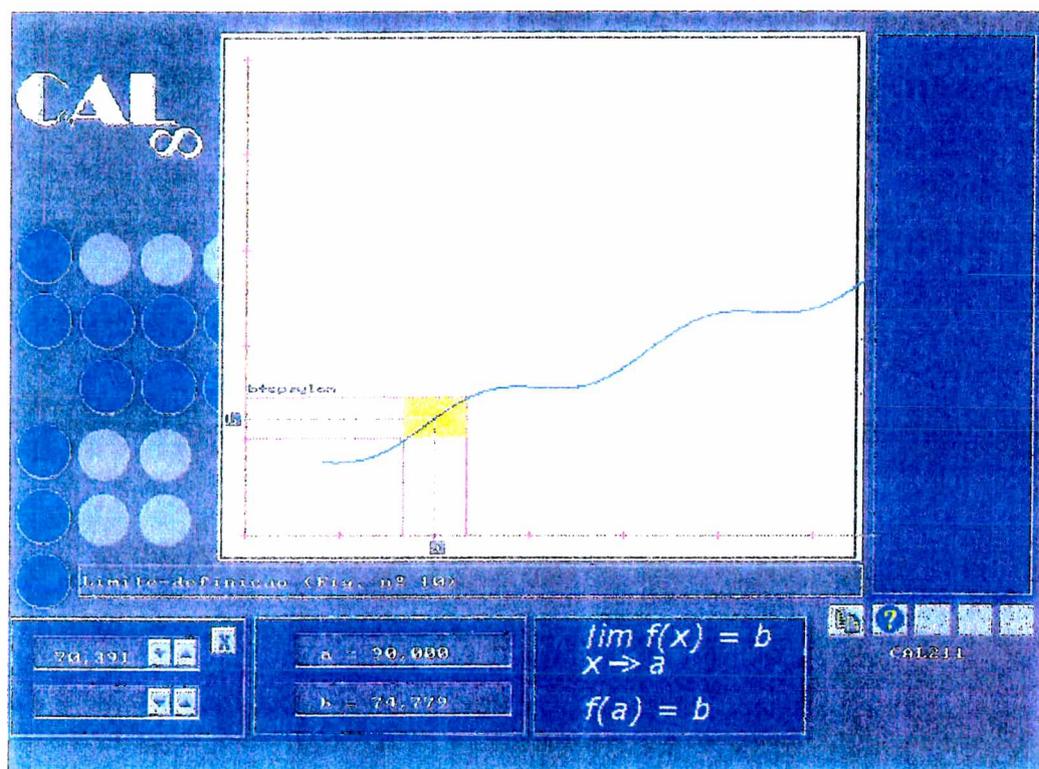
## Tela 59:

Tela que representa a definição III de limite,  
para  $y = 67,391$ , no jogo (4j)



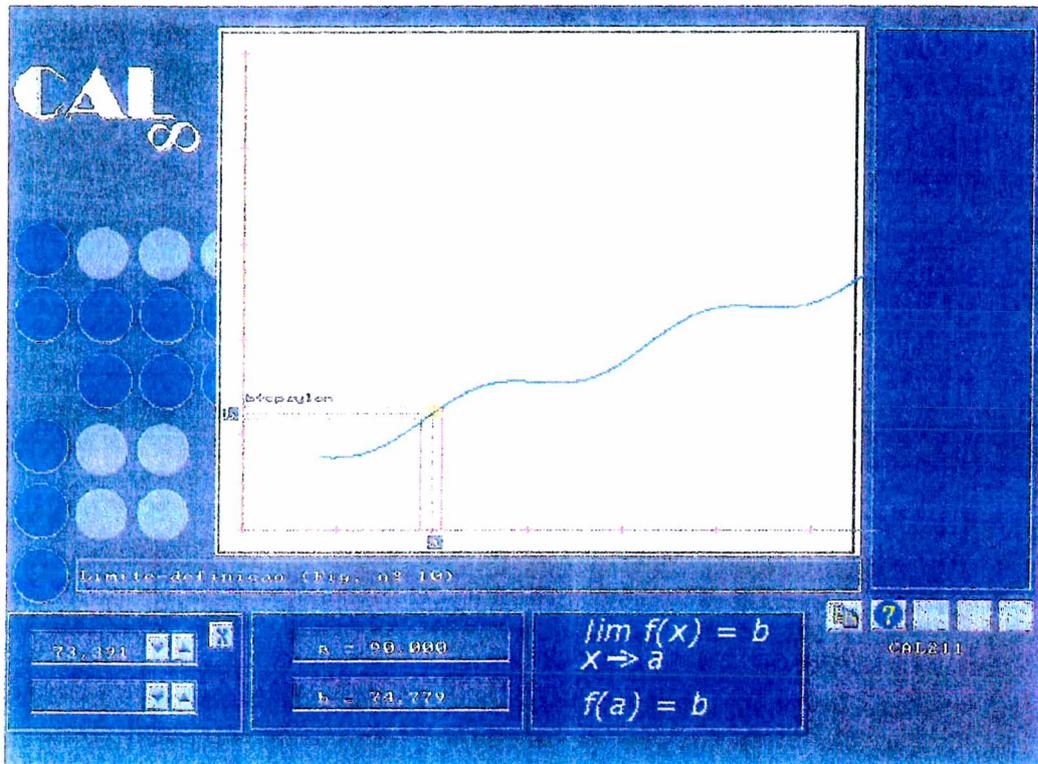
## Tela 60:

Tela que representa a definição III de limite,  
para  $y = 70,391$ , no jogo (4j)



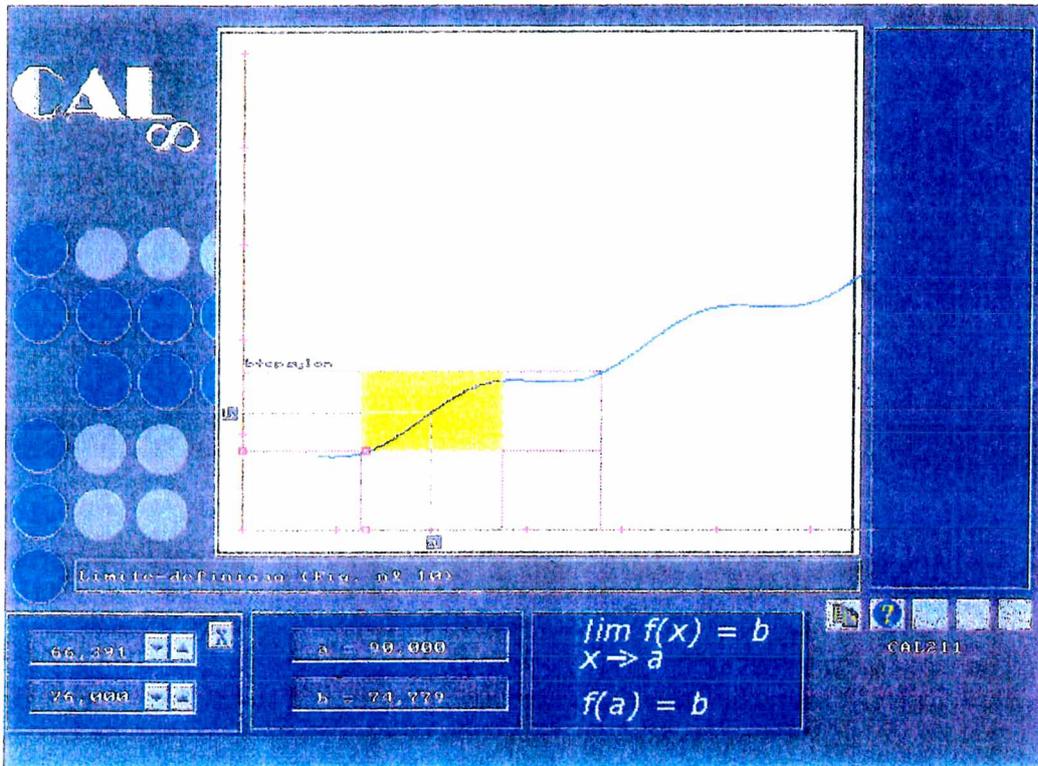
## Tela 61:

Tela que representa a definição III de limite,  
para  $y = 73,391$ , no jogo (4j)



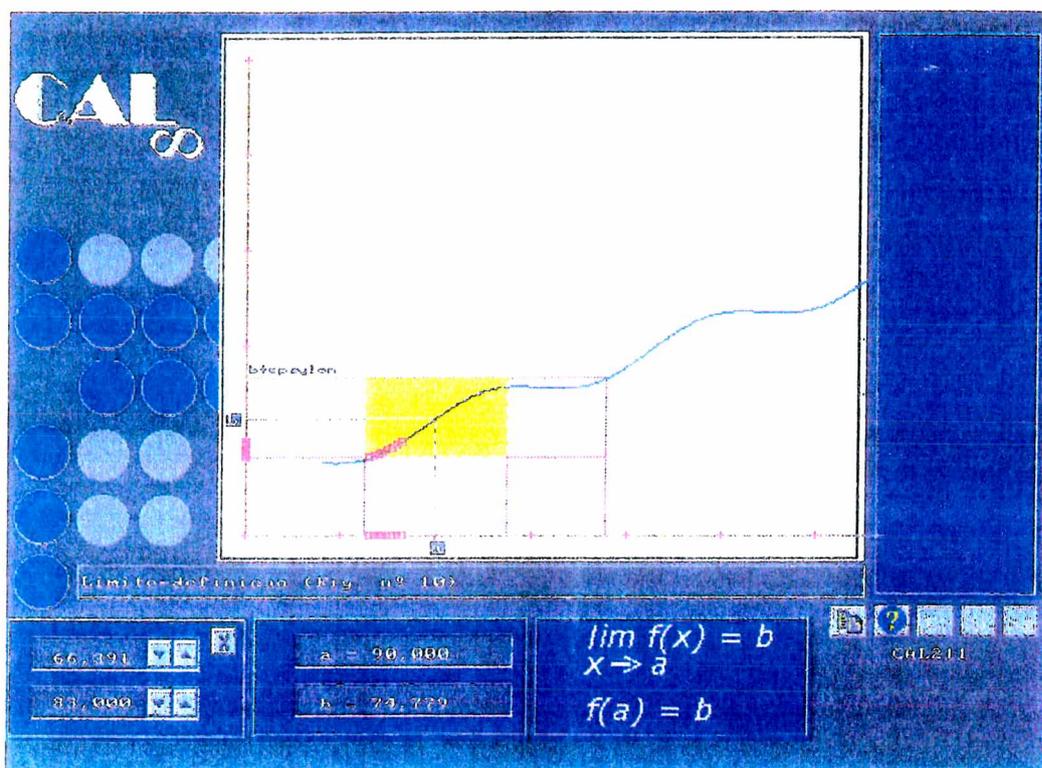
## Tela 62:

Tela que representa a definição IV de limite,  
para  $x = 76,00$ , no jogo (4j)



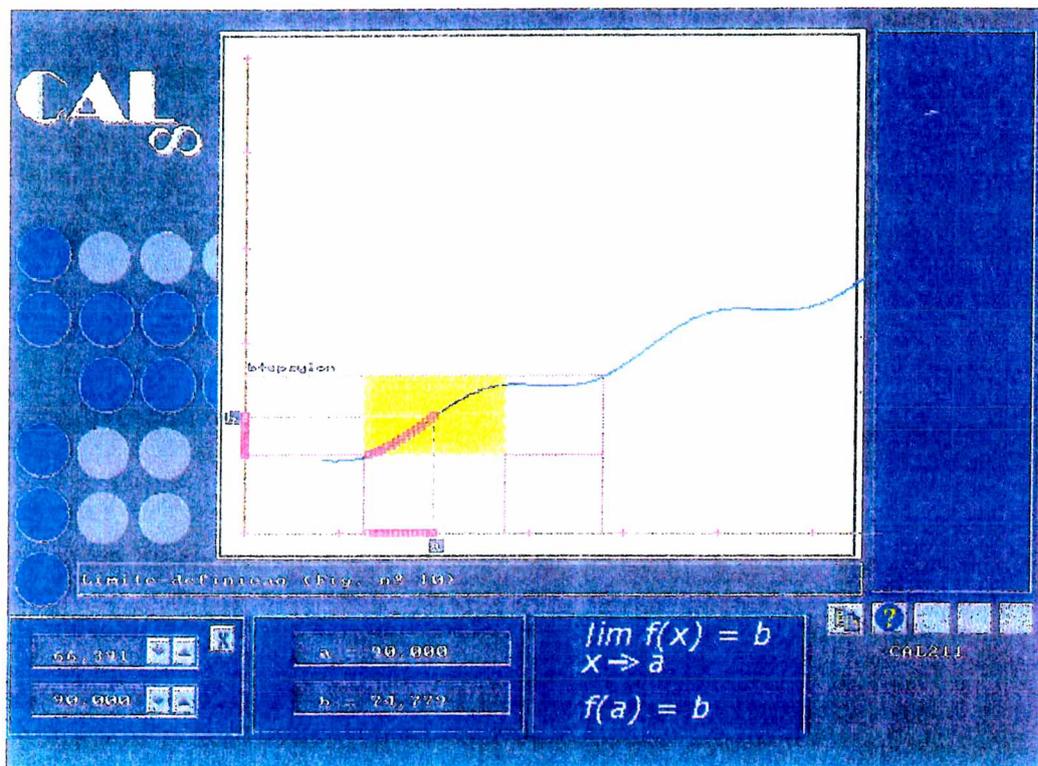
## Tela 63:

Tela que representa a definição IV de limite,  
para  $x = 83,00$ , no jogo (4j)



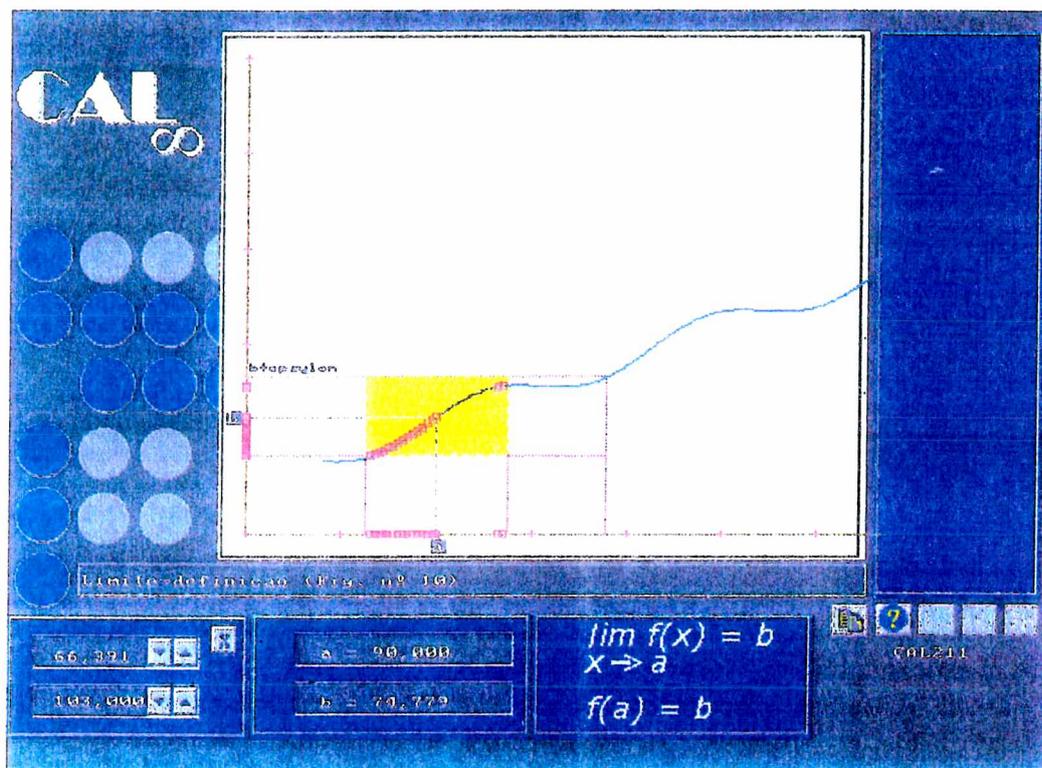
## Tela 64:

Tela que representa a definição IV de limite,  
para  $x = 90,00$ , no jogo (4j)



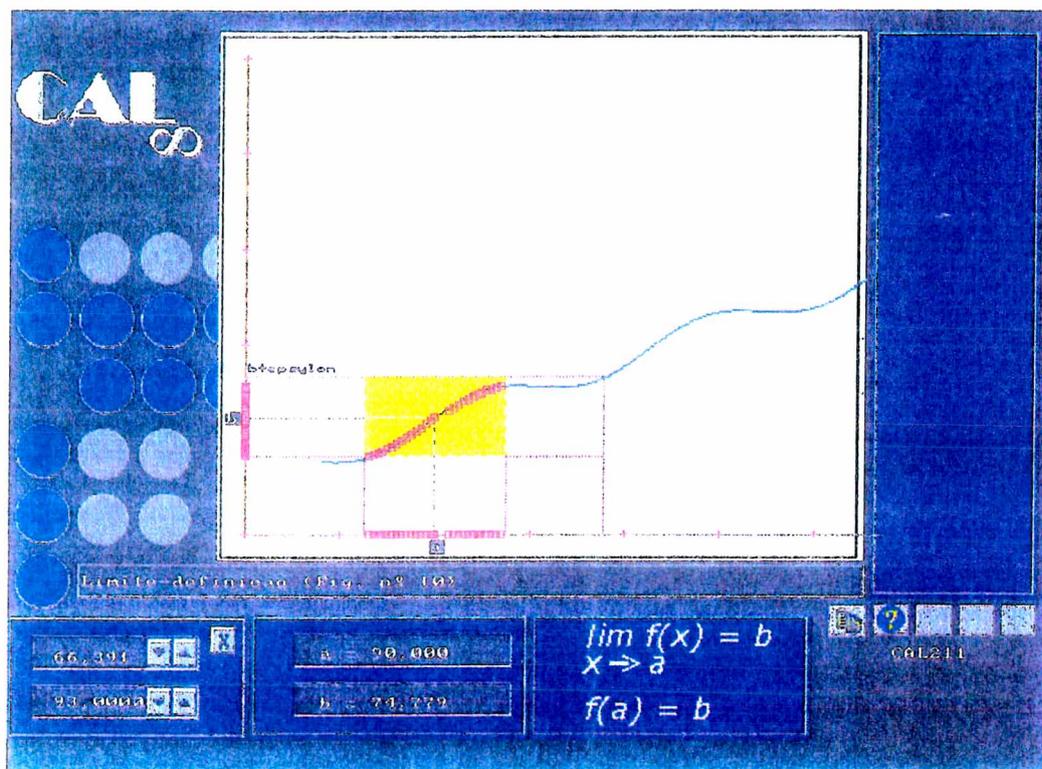
## Tela 65:

Tela que representa a definição IV de limite,  
para  $x = 103,00$ , no jogo (4j)



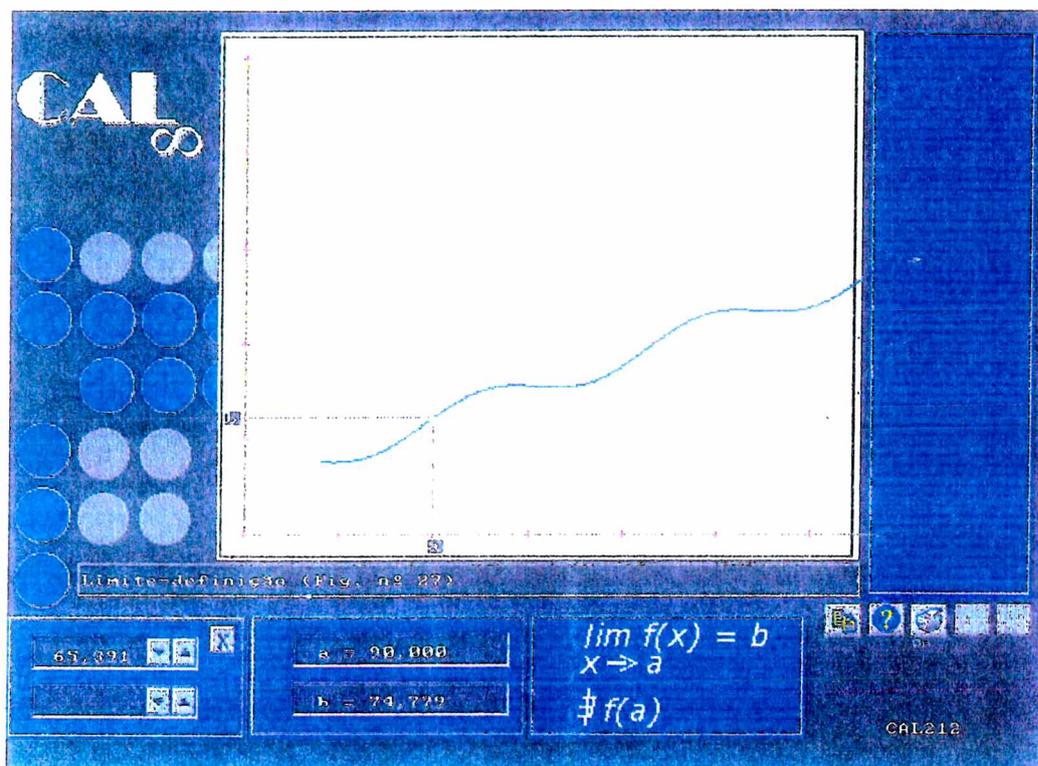
## Tela 66:

Tela que representa a definição IV de limite,  
para  $x = 93,00$ , no jogo (4j)



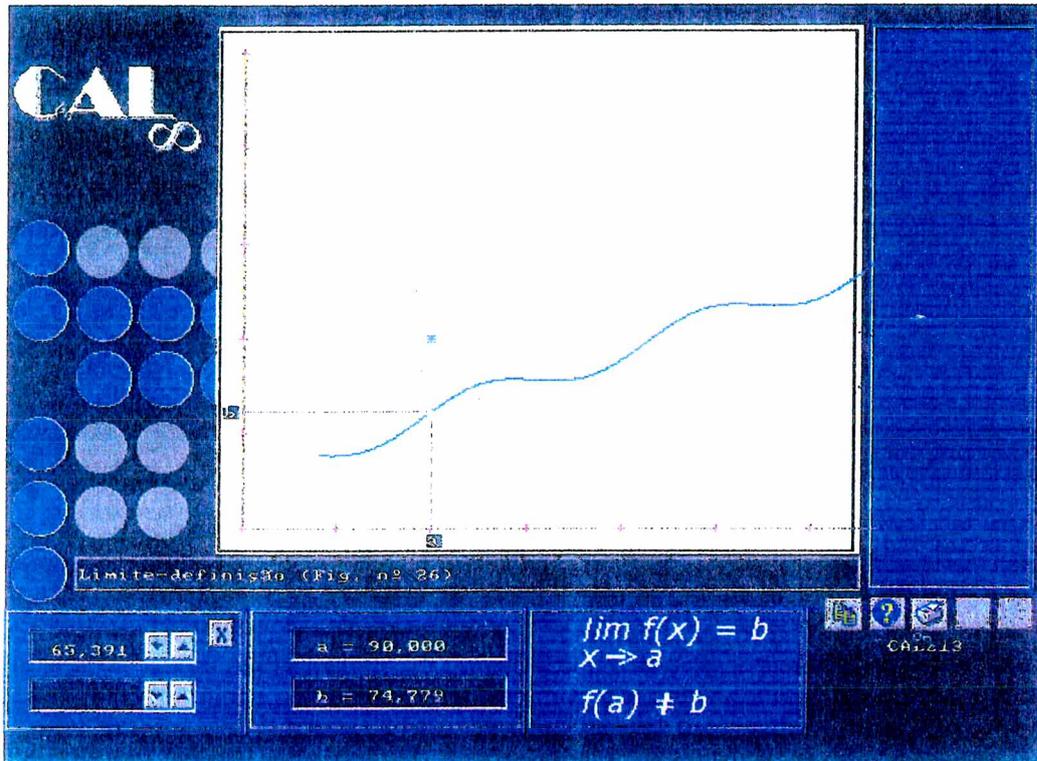
## Tela 67:

Tela inicial do jogo (4k) do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf -- II: Limite -- Definição



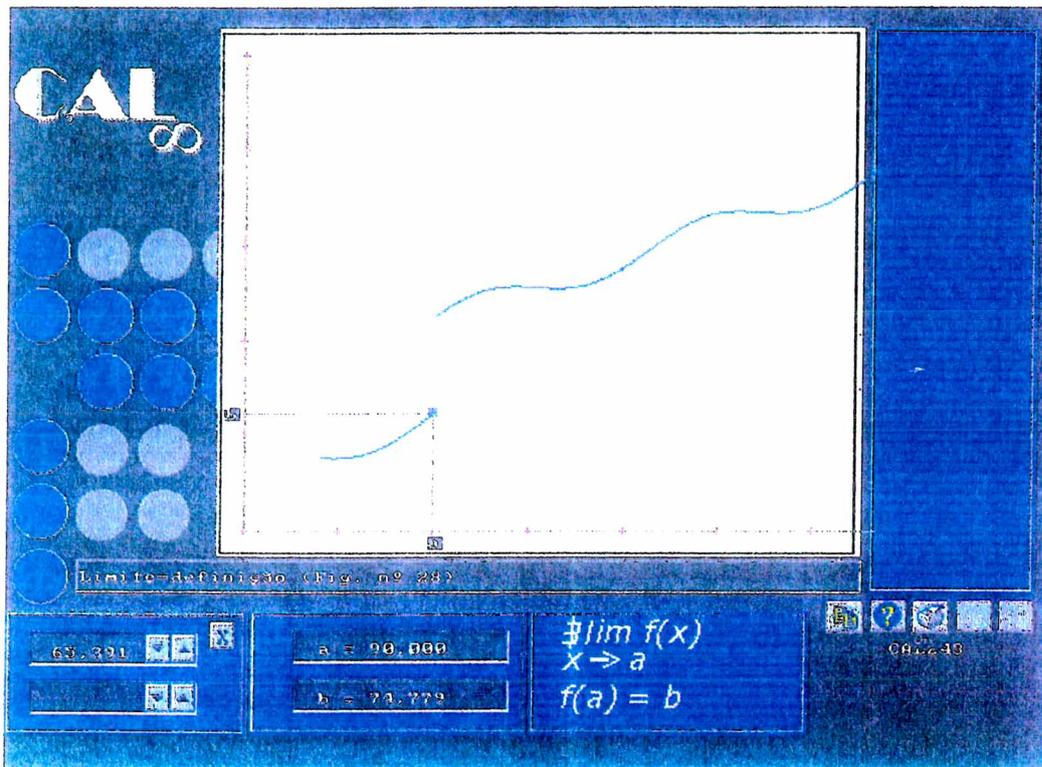
## Tela 68:

Tela inicial do jogo (41) do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf - II: Limite - Definição



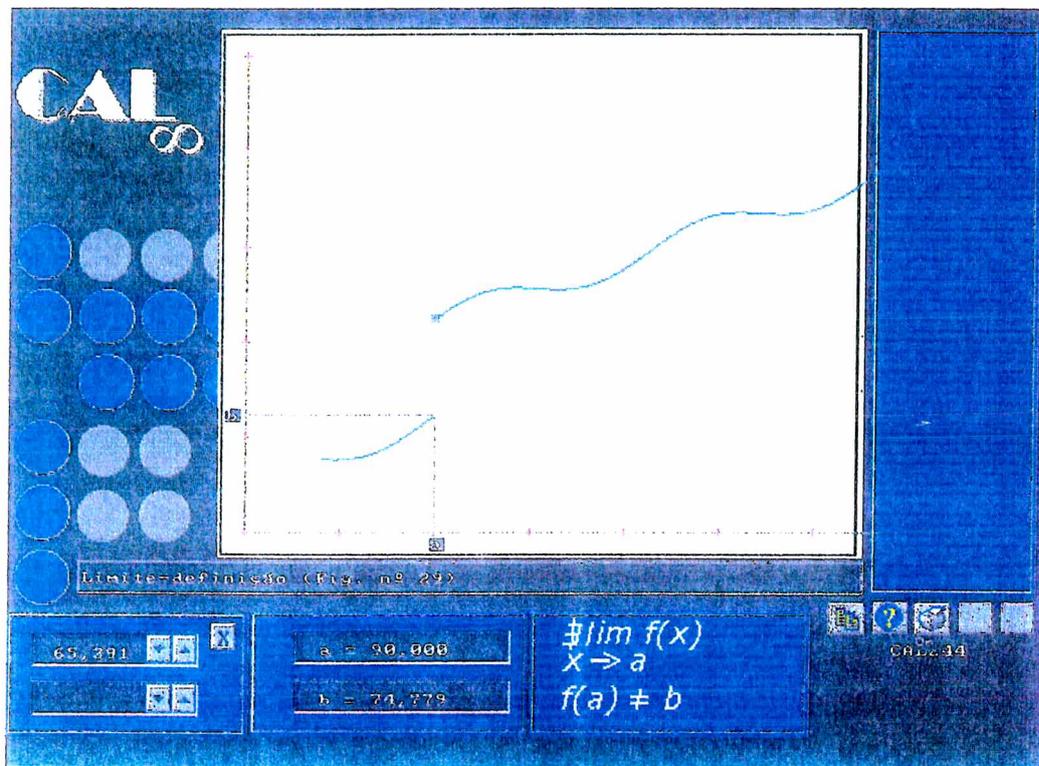
## Tela 69:

Tela inicial do jogo (4m) do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf - II: Limite - Definição



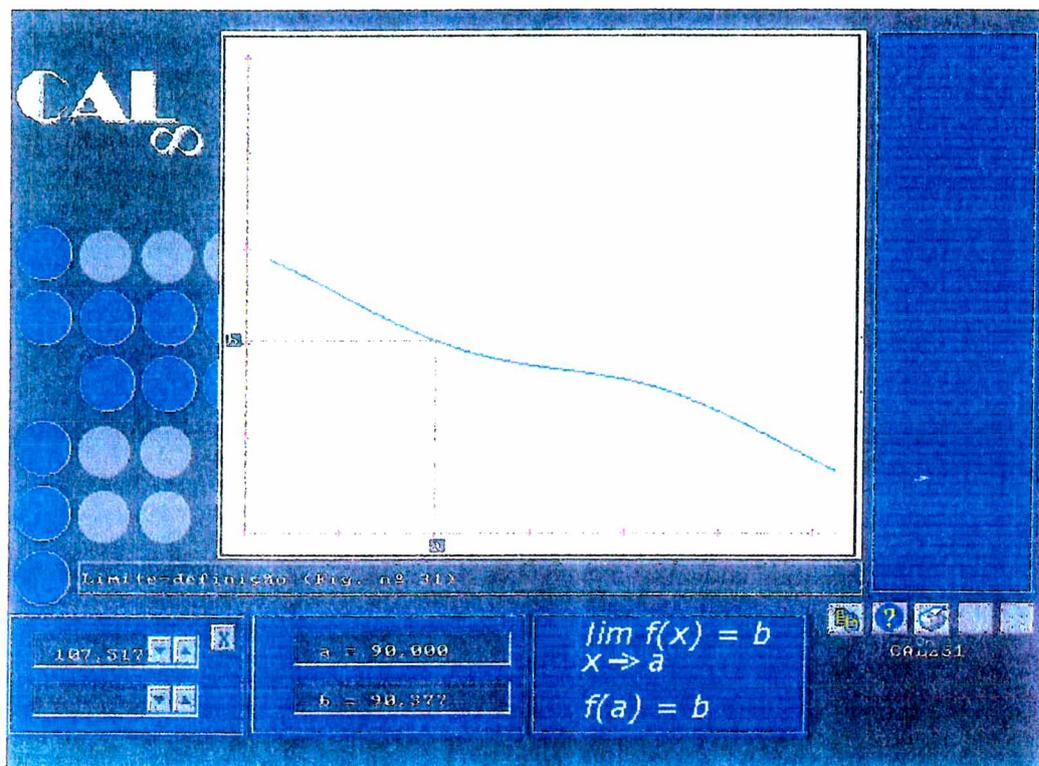
## Tela 70:

Tela inicial do jogo (4n), do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf – II: Limite – Definição



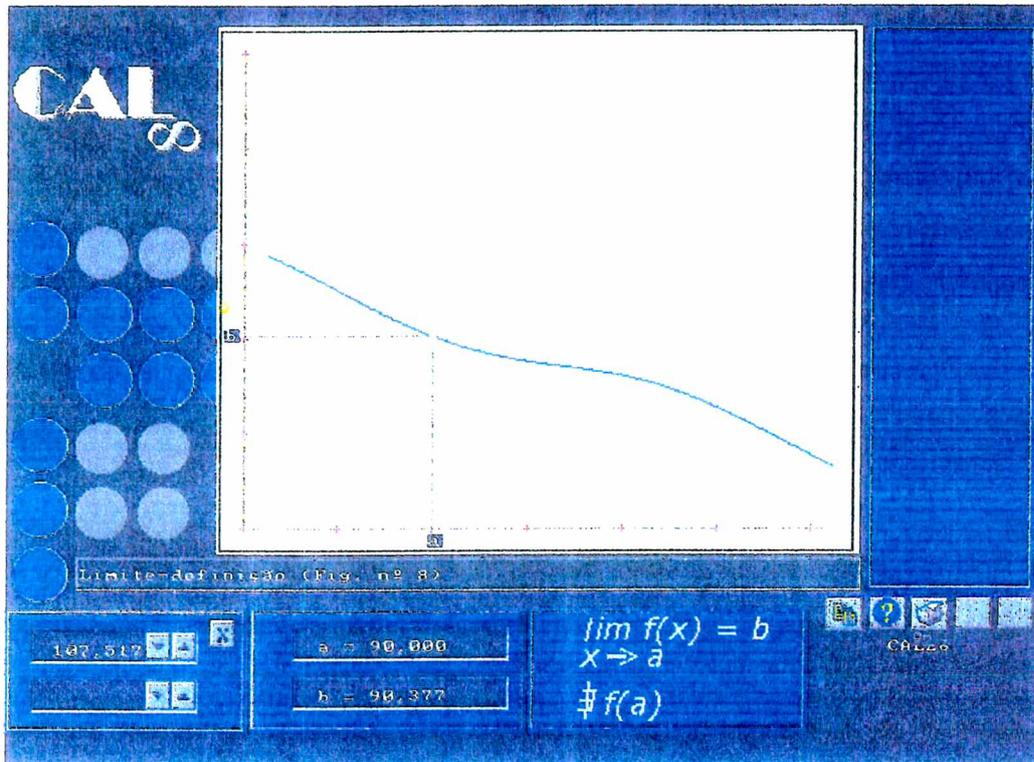
## Tela 71:

Tela inicial do jogo (4p), do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf - II: Limite - Definição



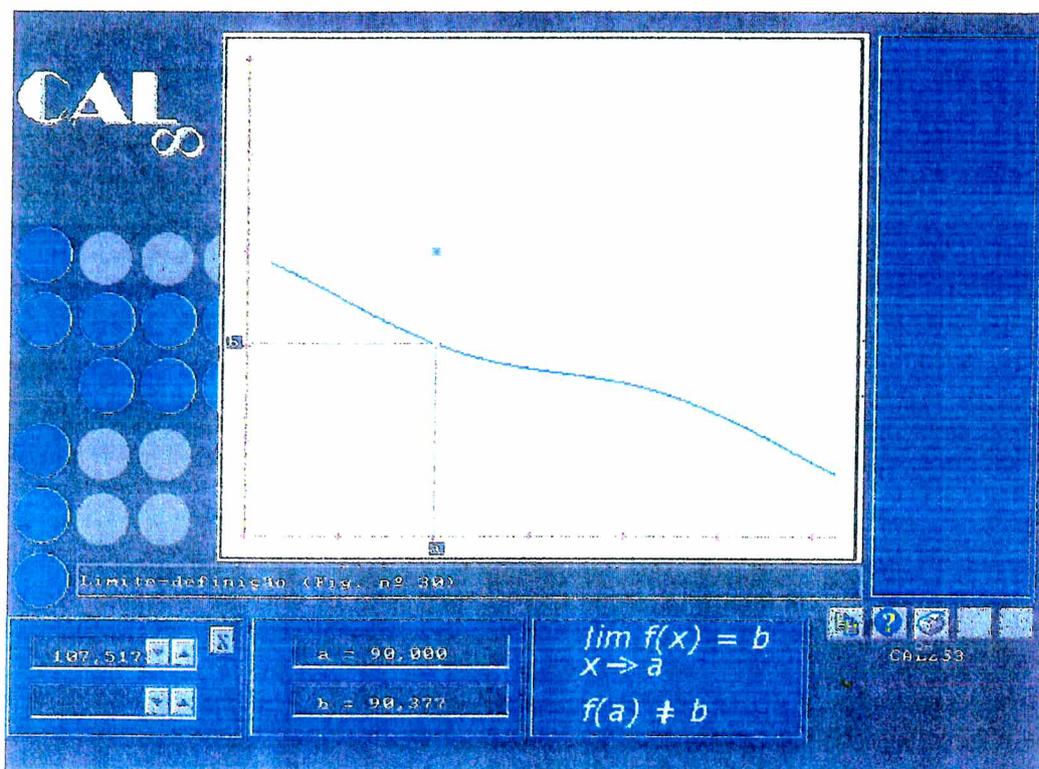
## Tela 72:

Tela inicial do jogo (4q) do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf – II: Limite – Definição

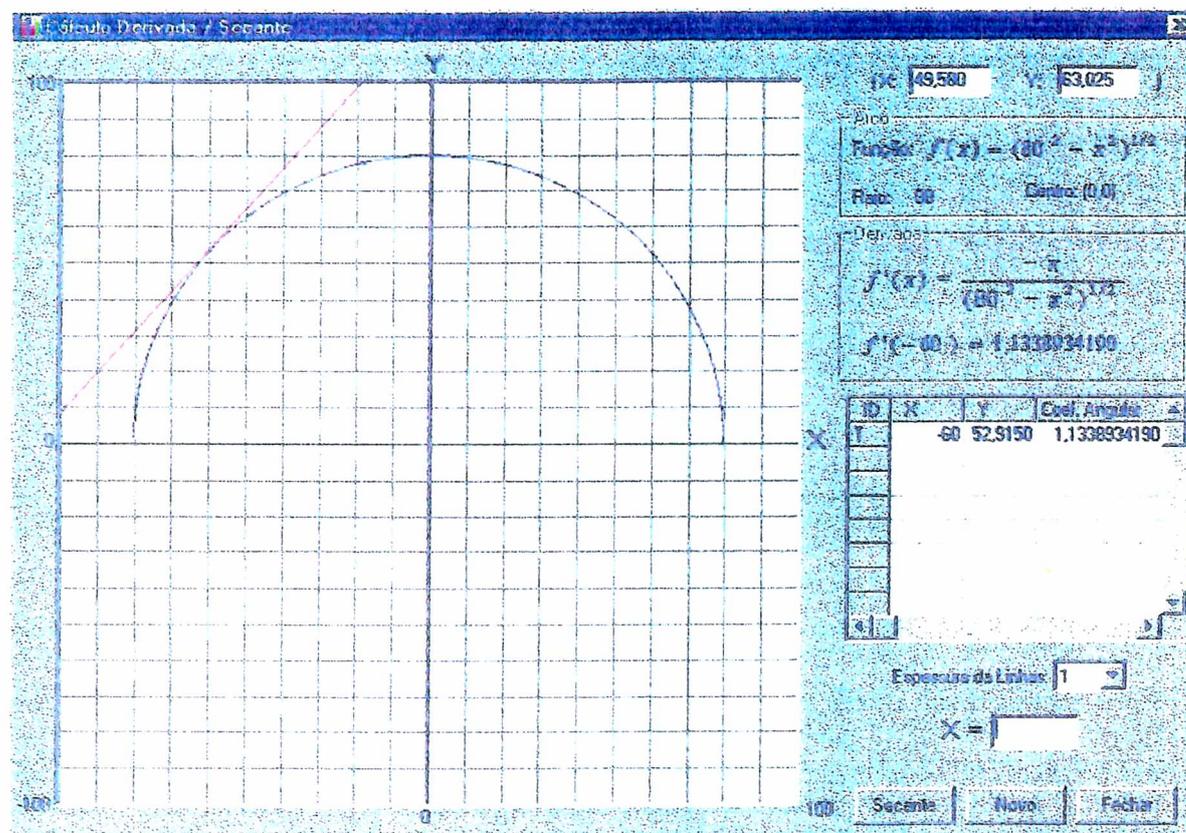


## Tela 73:

Tela inicial do jogo (4r), do Módulo  $CAL_{\infty}$  - limf - II: Limite - Definição

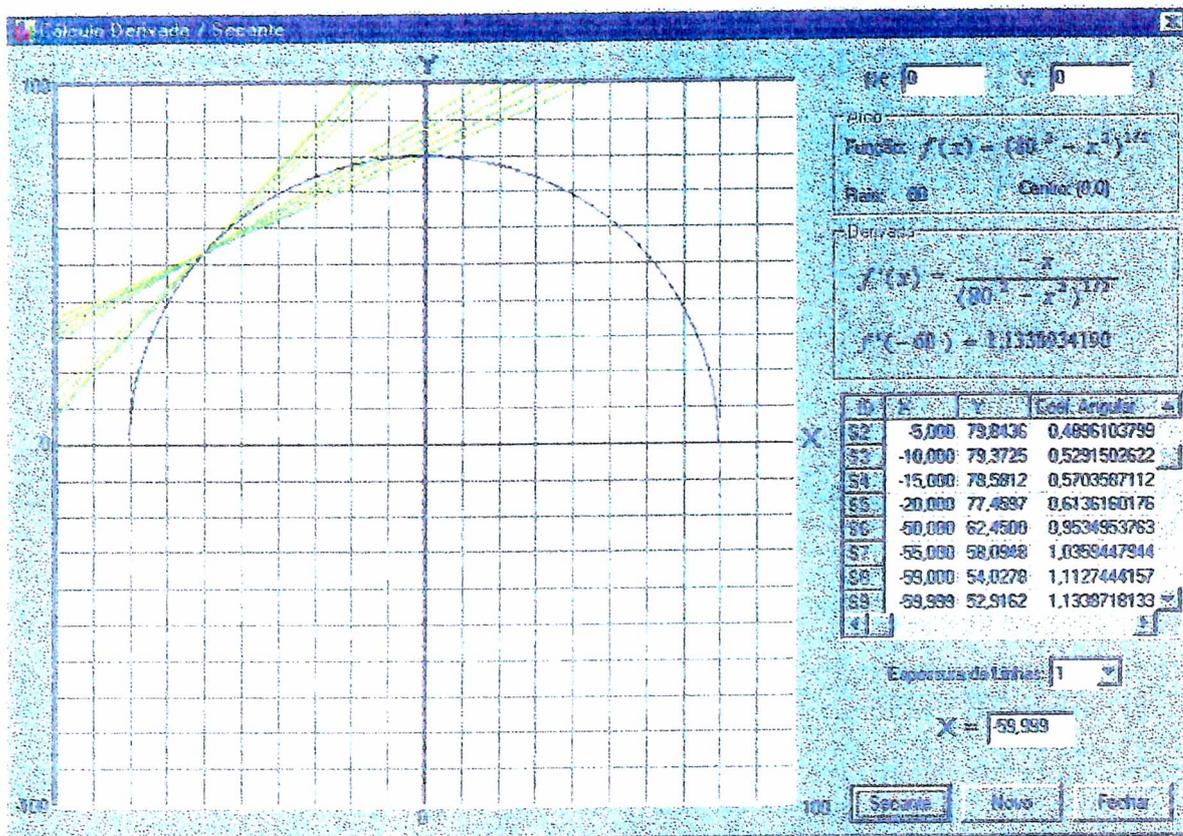


## Tela 74:

Tela inicial do Módulo  $CAL_{\infty} - f'$ 

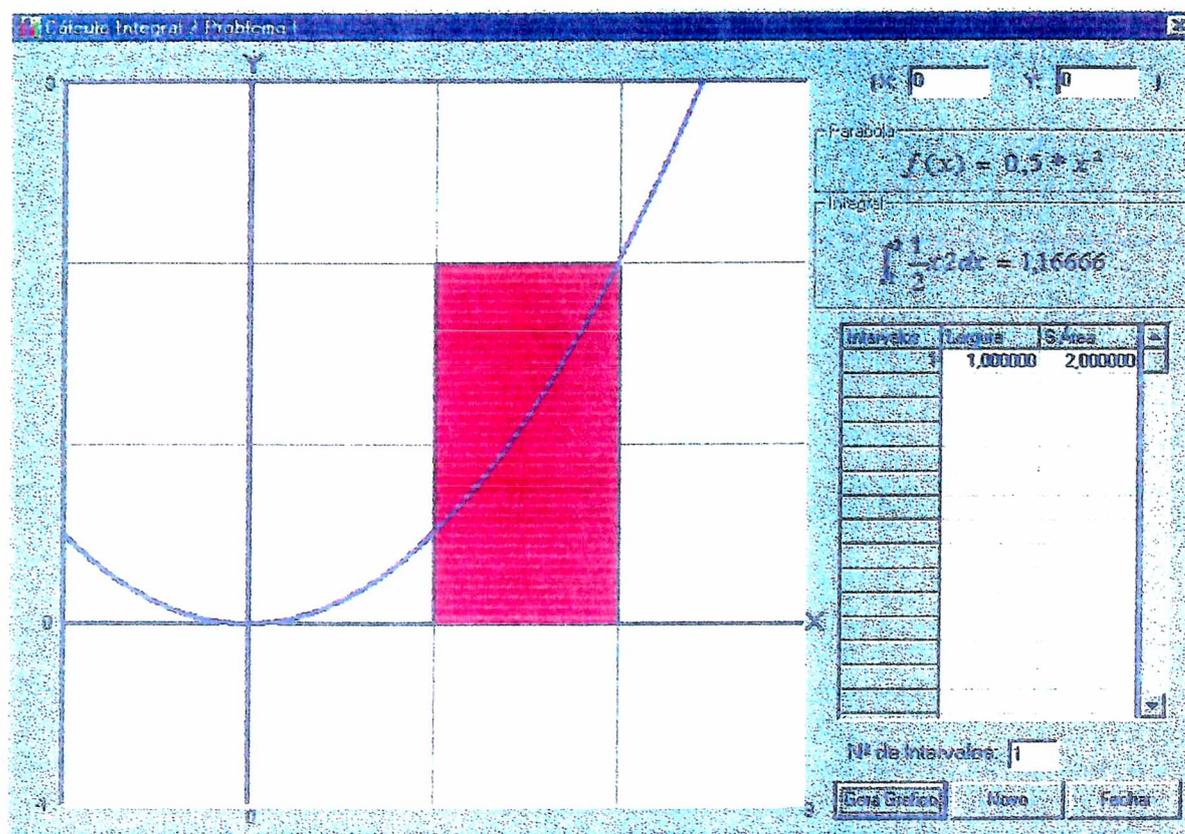
## Tela 75:

Tela que pode finalizar a visualização geométrica e Algébrica da definição de derivada



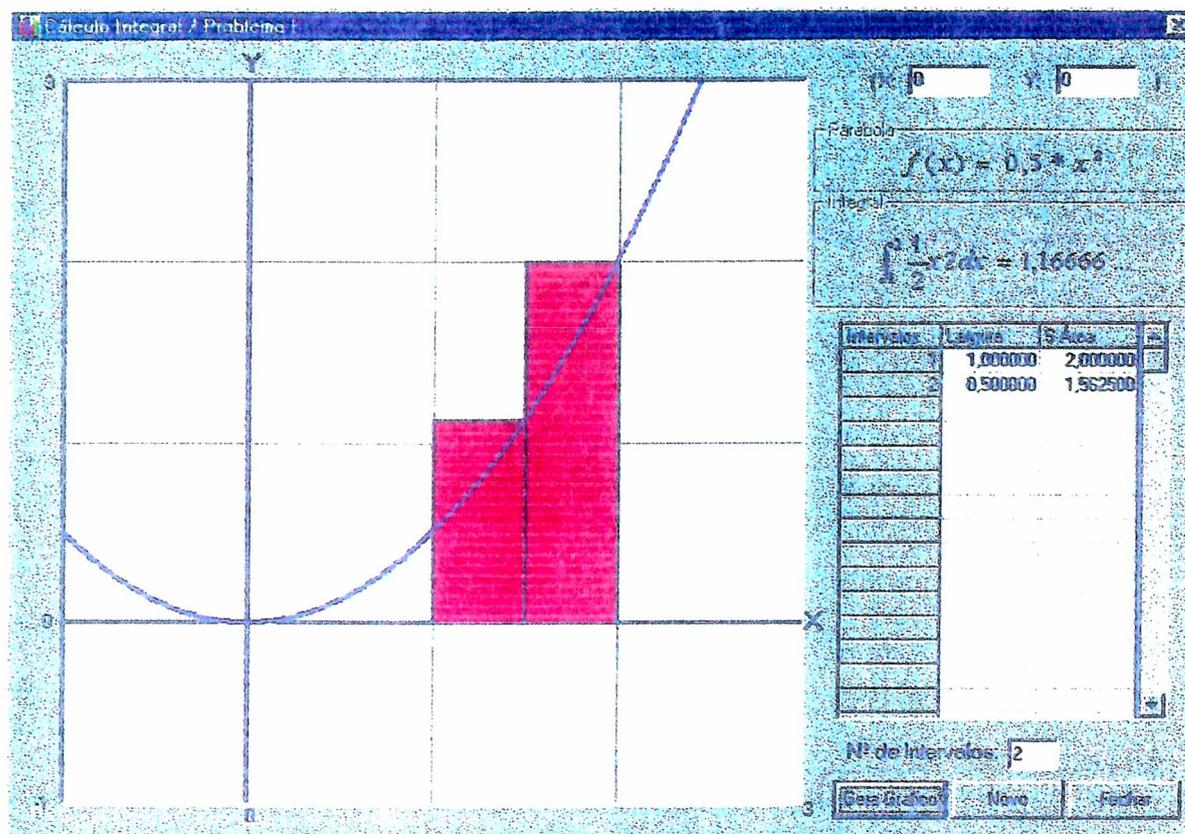
## Tela 76:

Tela do jogo I – Problema I, do Módulo  $CAL_{\infty} - \int f$ ,  
Quando a partição tem um intervalo



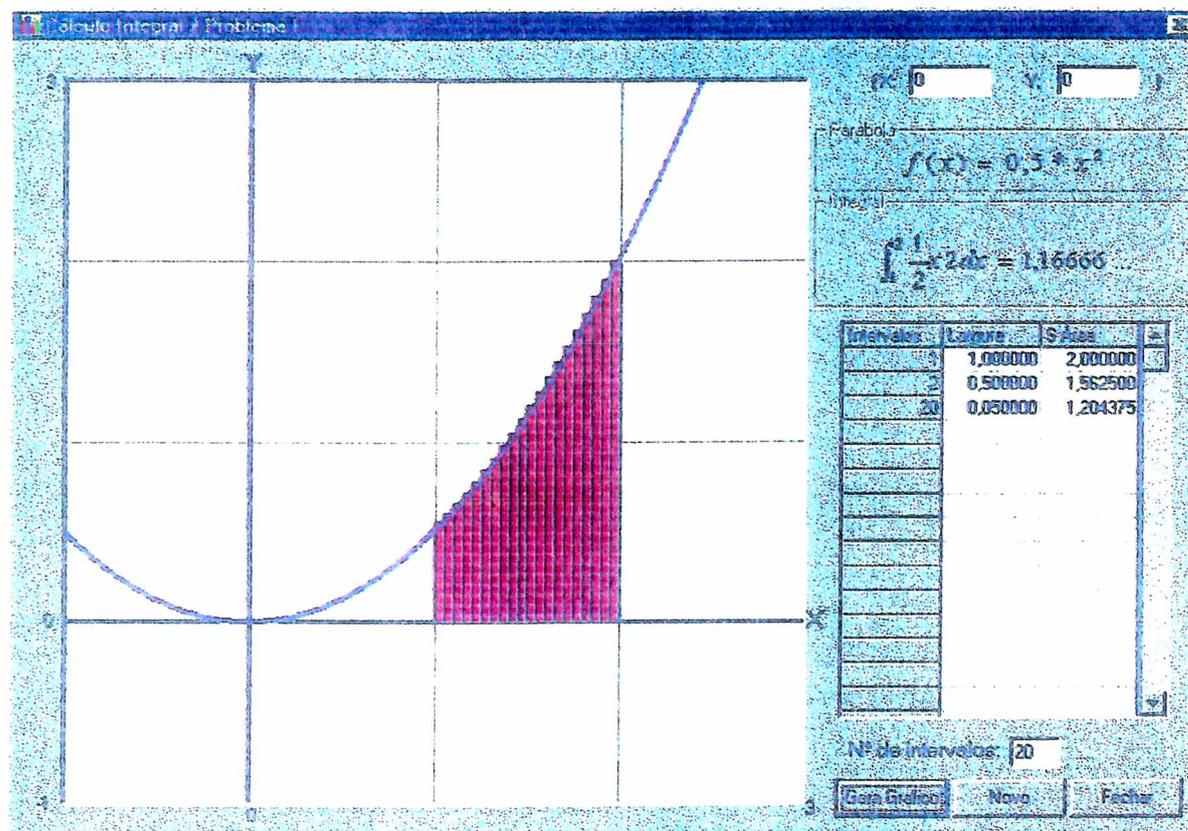
## Tela 77:

Tela do jogo I – Problema I, do Módulo  $CAL_{\infty} - \int f$ ,  
Quando a partição tem dois intervalos



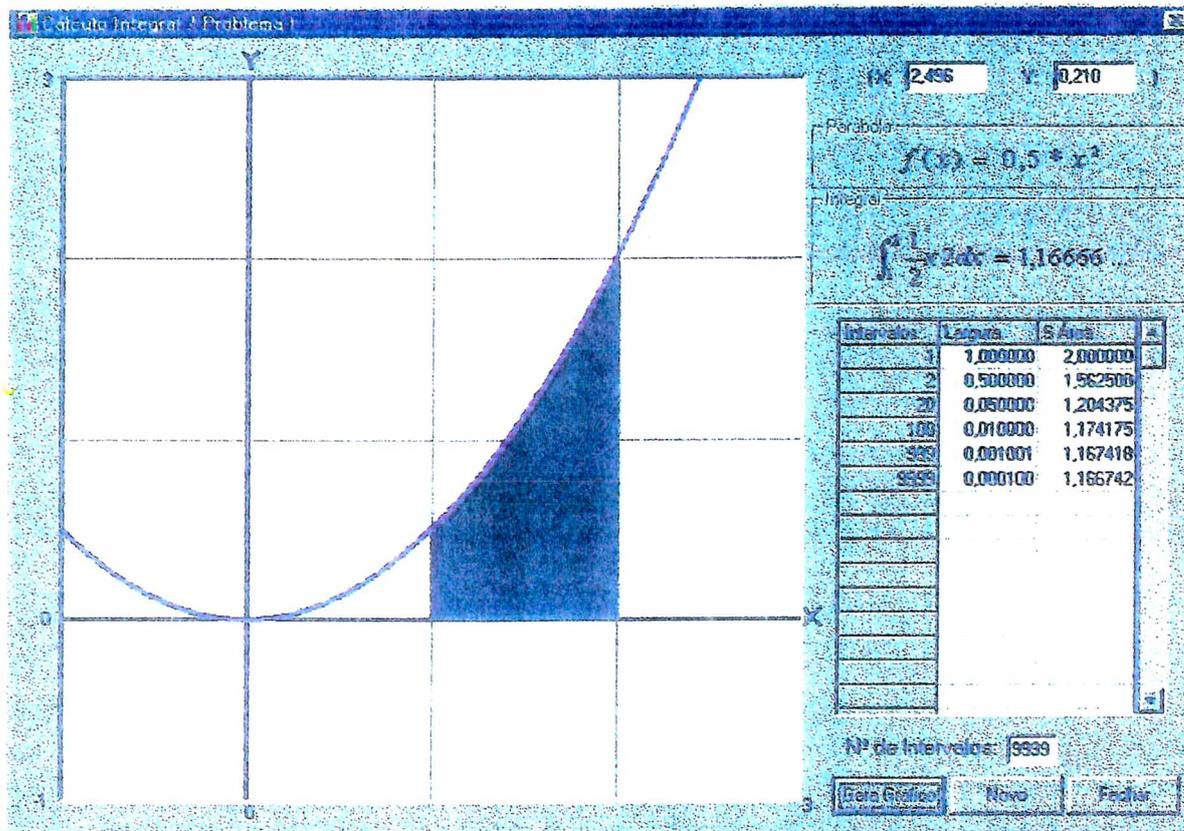
## Tela 78:

Tela do jogo I – Problema I, do Módulo  $CAL_{\infty} - \int f$ ,  
Quando a partição tem vinte intervalos



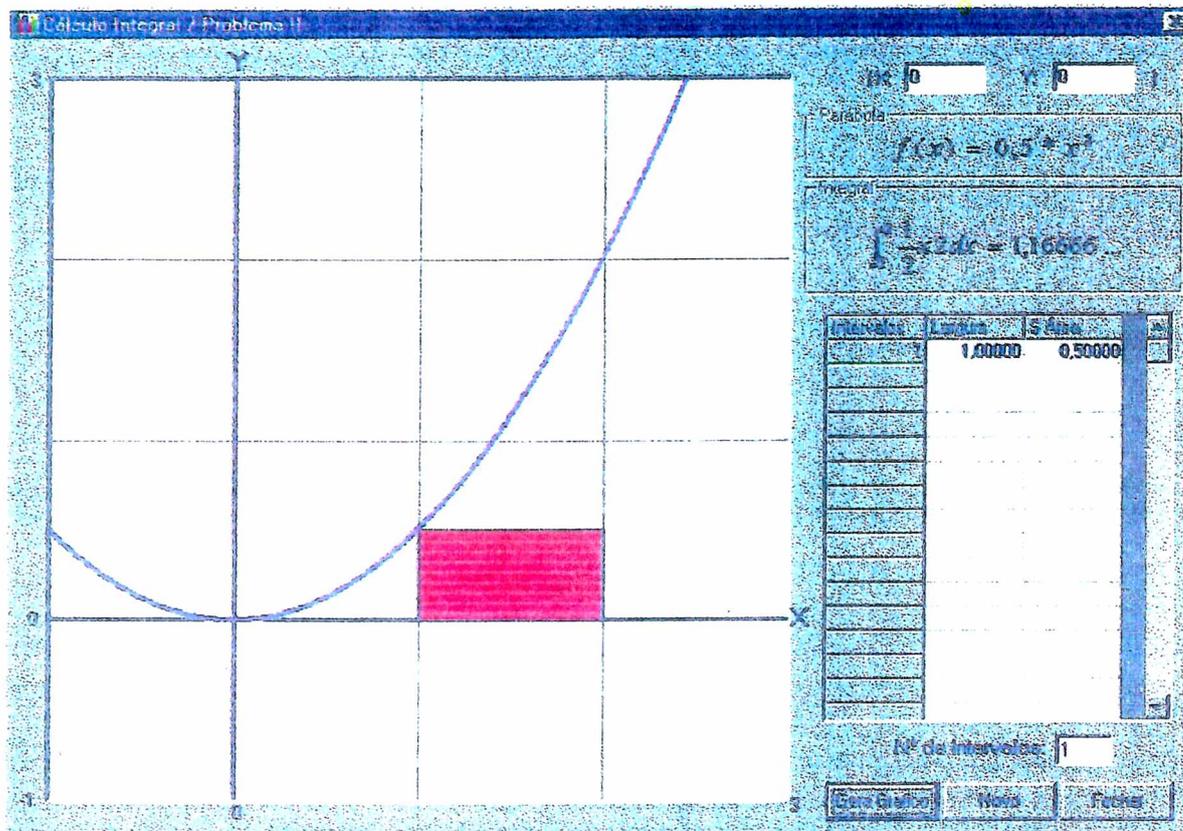
## Tela 79:

Tela que pode finalizar a visualização geométrica e algébrica da definição de integral, com 9999 elementos na partição



## Tela 80:

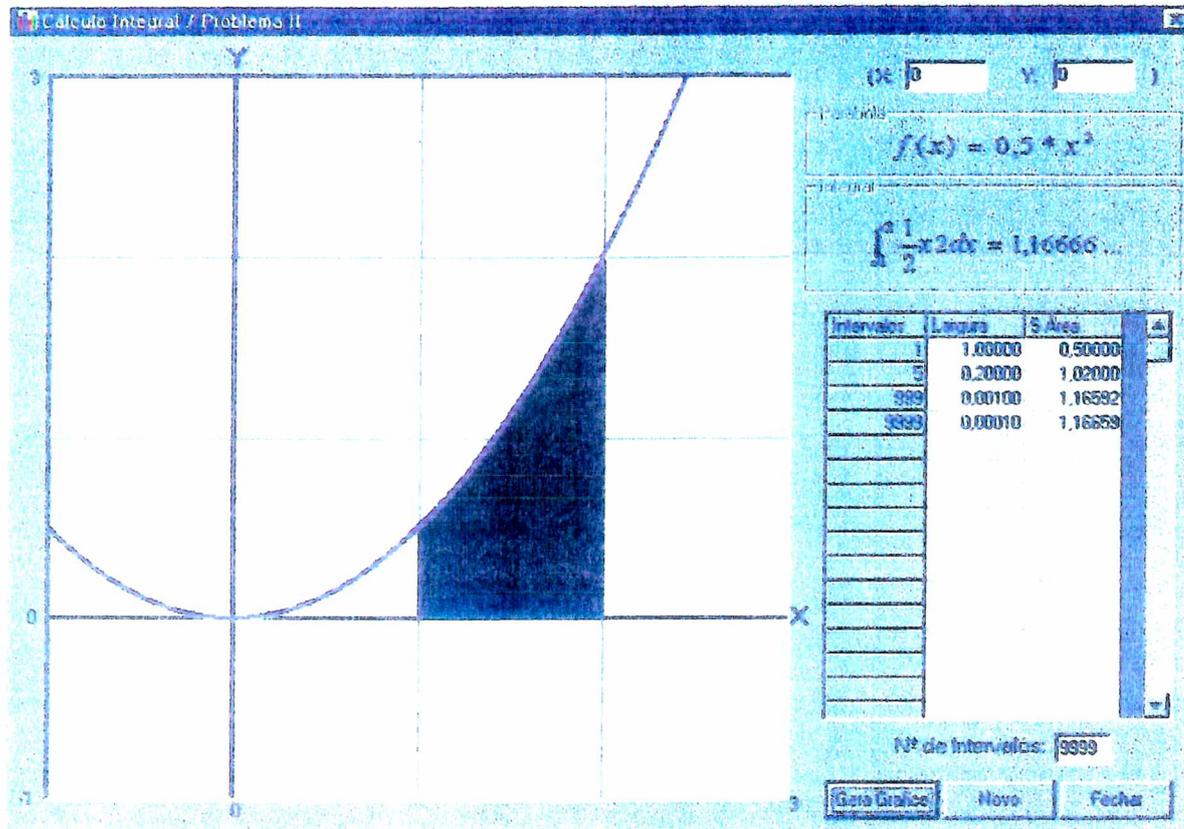
Tela do jogo II - Problema II, do Módulo  $CAL_{\infty}$  -  $\int f$ ,  
Quando a partição tem um intervalo





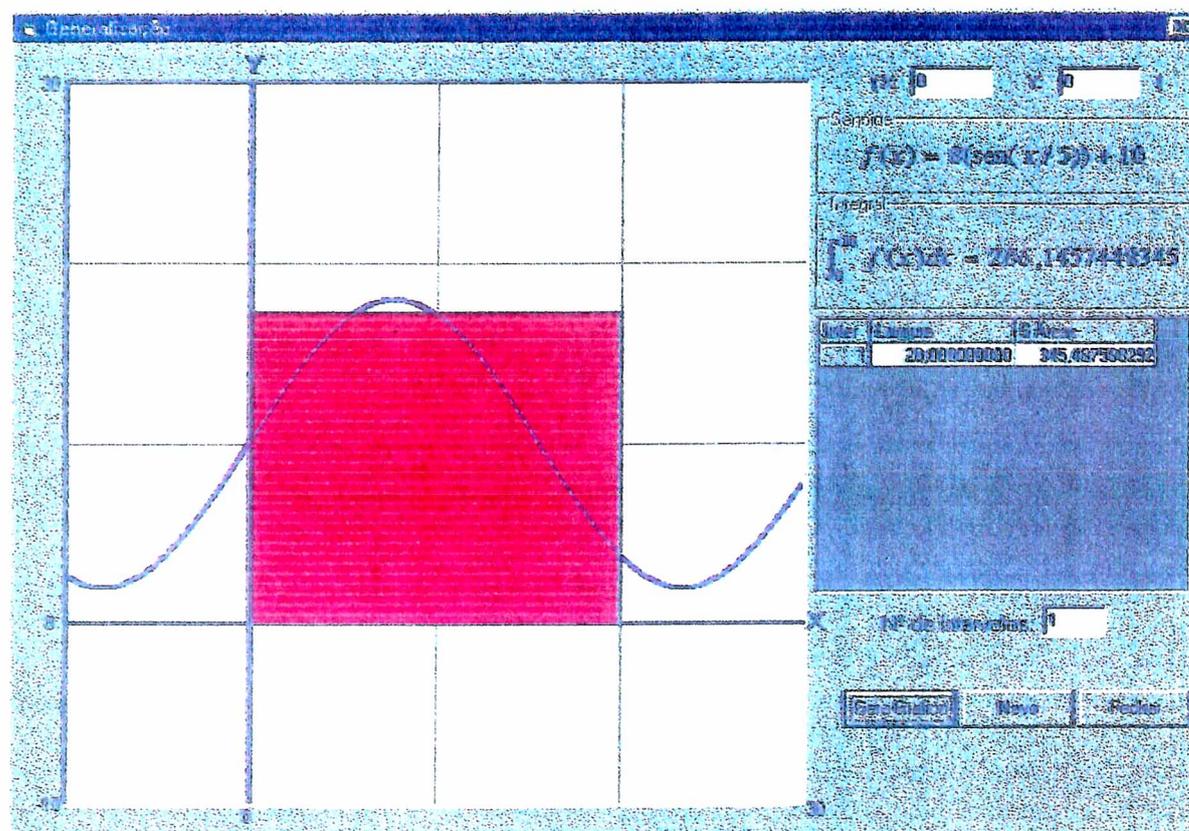
## Tela 82:

Tela que pode finalizar a visualização geométrica e algébrica da definição de integral, com 9999 elementos na partição



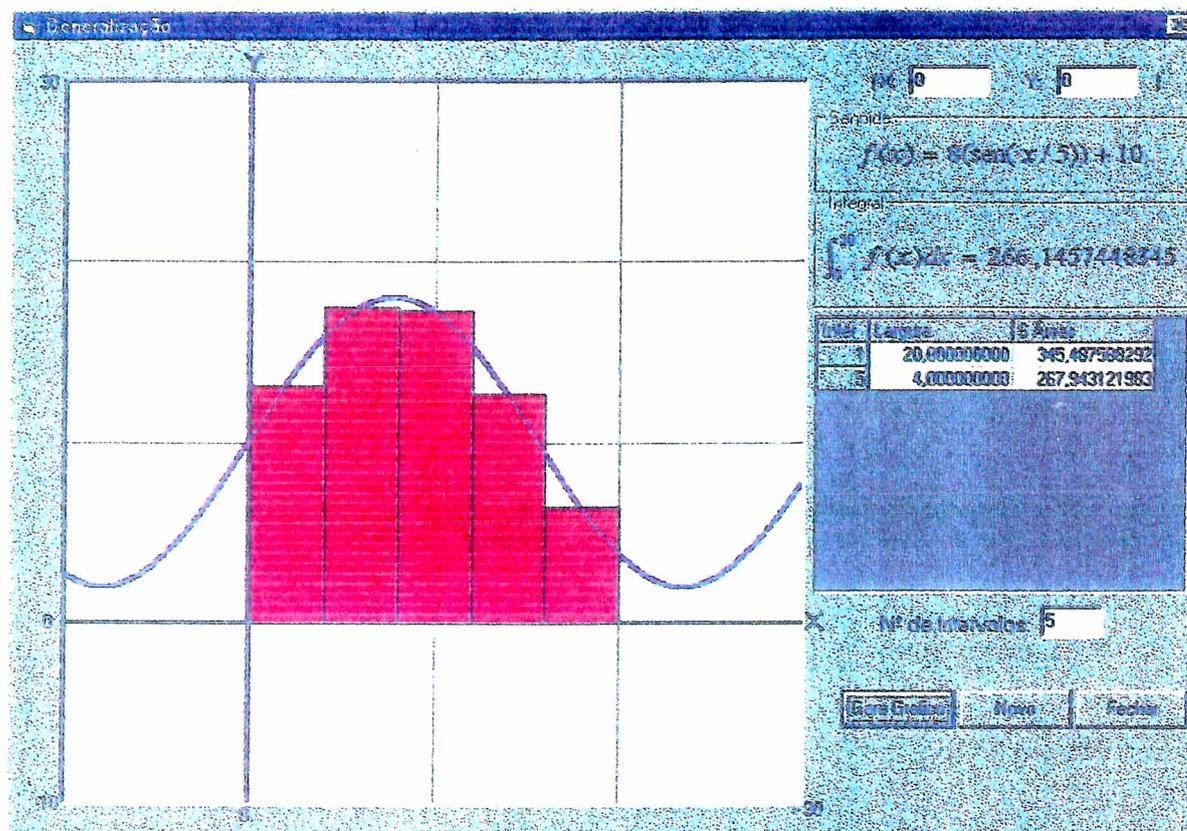
## Tela 83:

Tela do jogo III - Problema III, do Módulo  $CAL_{\infty} - \int f$ ,  
quando a partição tem um intervalo



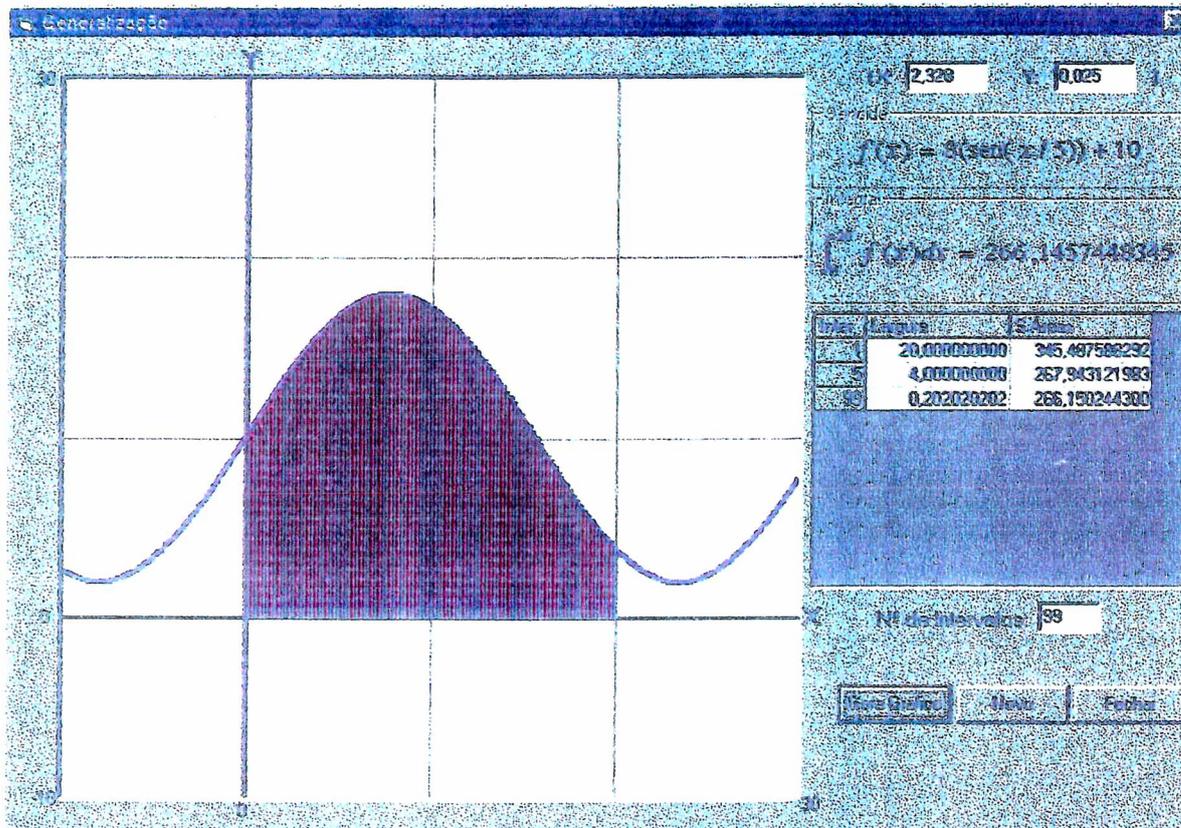
## Tela 84:

Tela do jogo III - Problema III, do Módulo  $CAL_{\infty} - \int f$ ,  
quando a partição tem cinco elementos

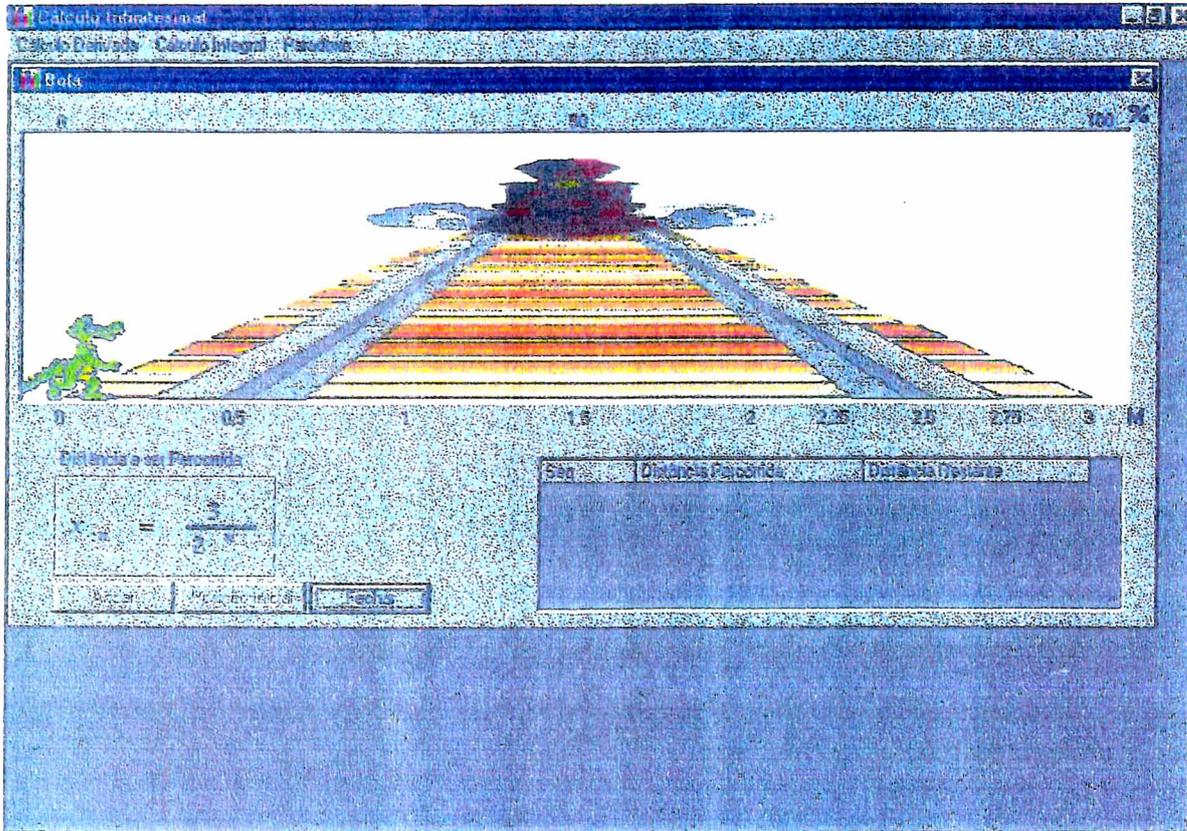


## Tela 85:

Tela do jogo III - Problema III, do Módulo  $CAL_{\infty} - \int f$ ,  
quando a partição tem 99 elementos

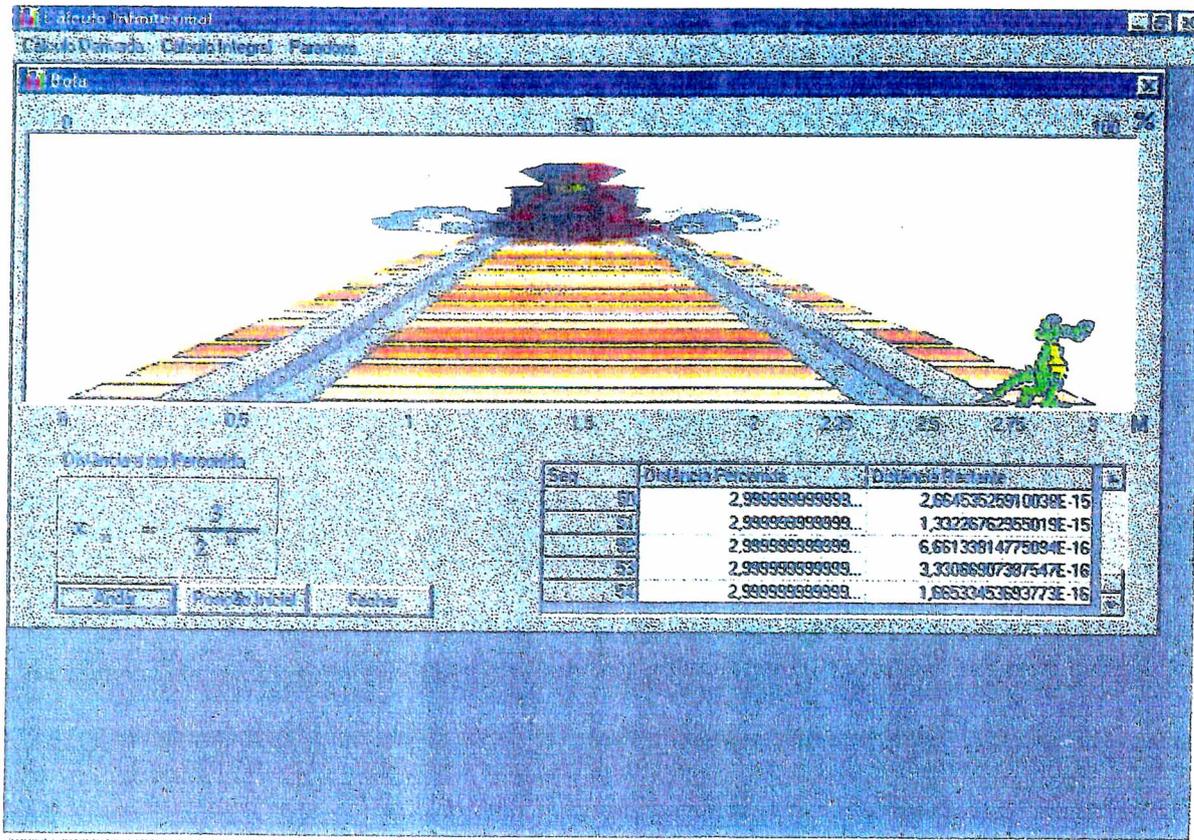


## Tela 86:

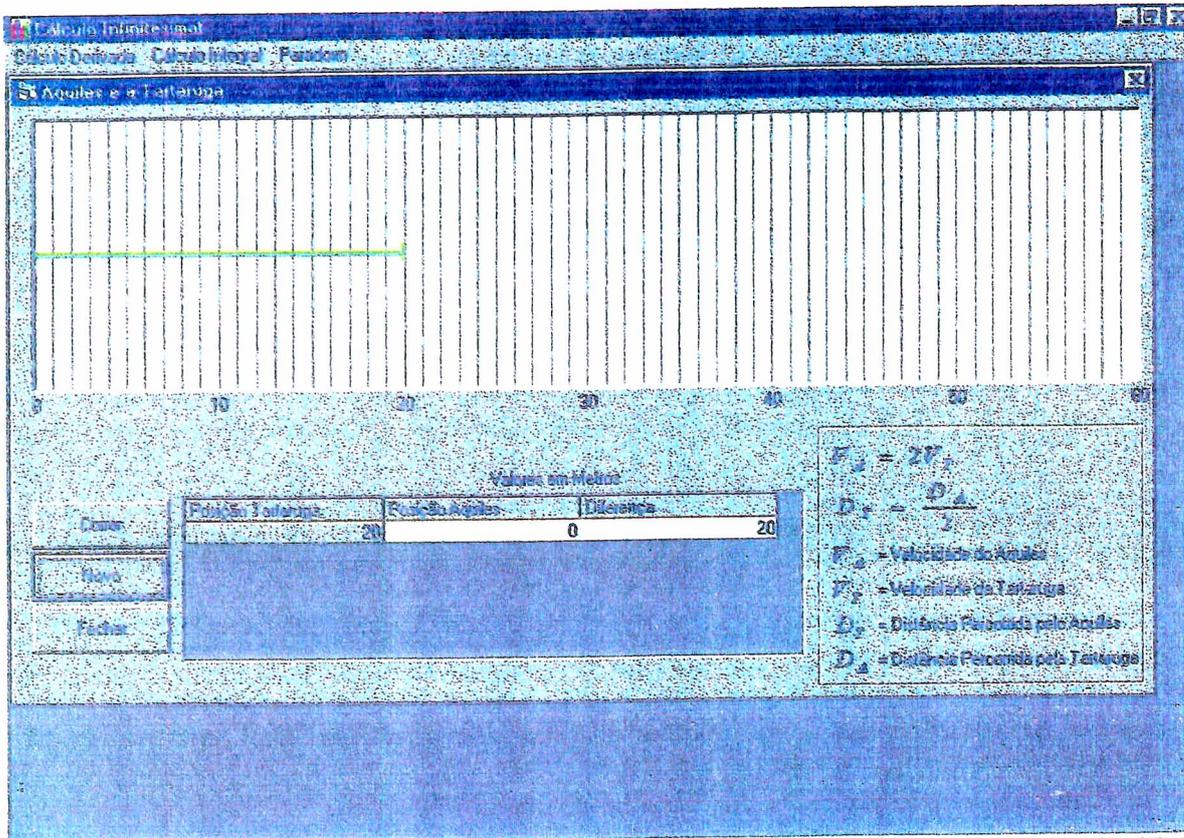
Tela inicial do Módulo  $CAL_{\infty}$  - ZEN, paradoxo - I

## Tela 87:

Tela que permite a visualização do jogo, onde a distância a ser percorrida é  $1,66533453693773 \times 10^{-16}$

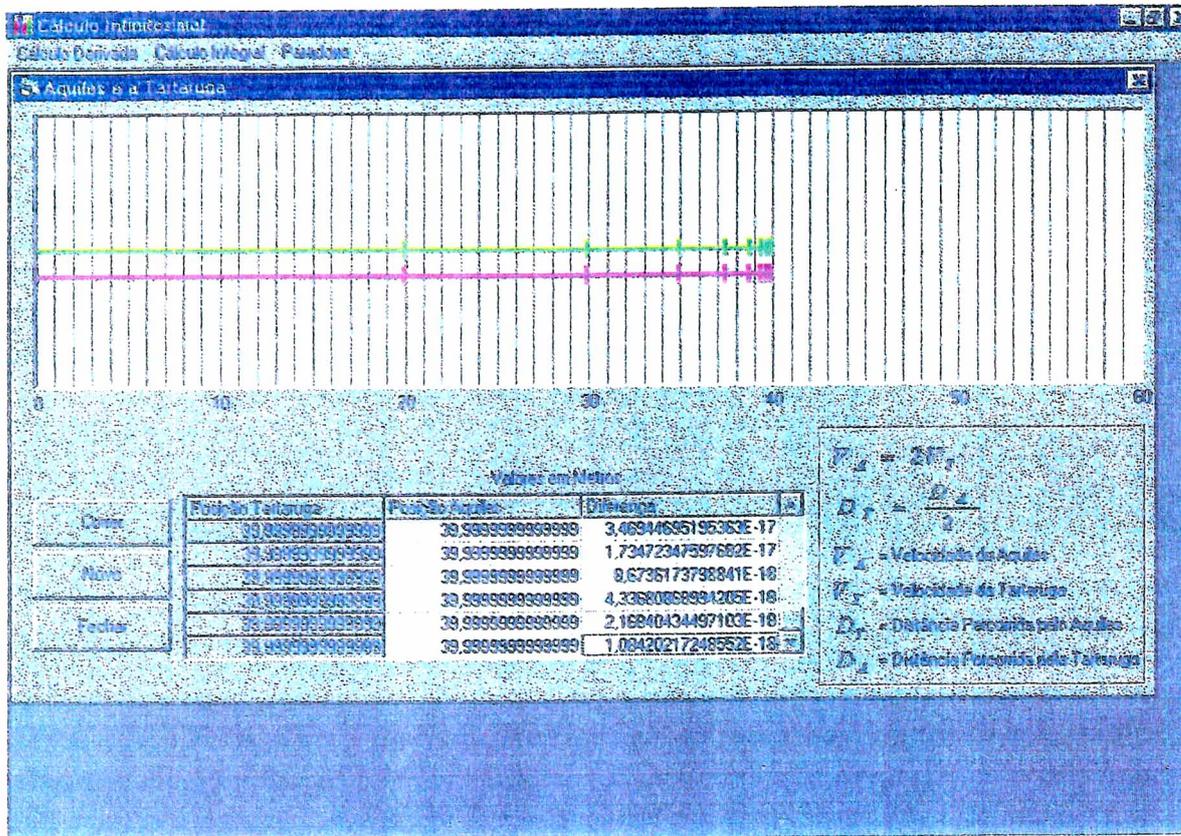


## Tela 88:

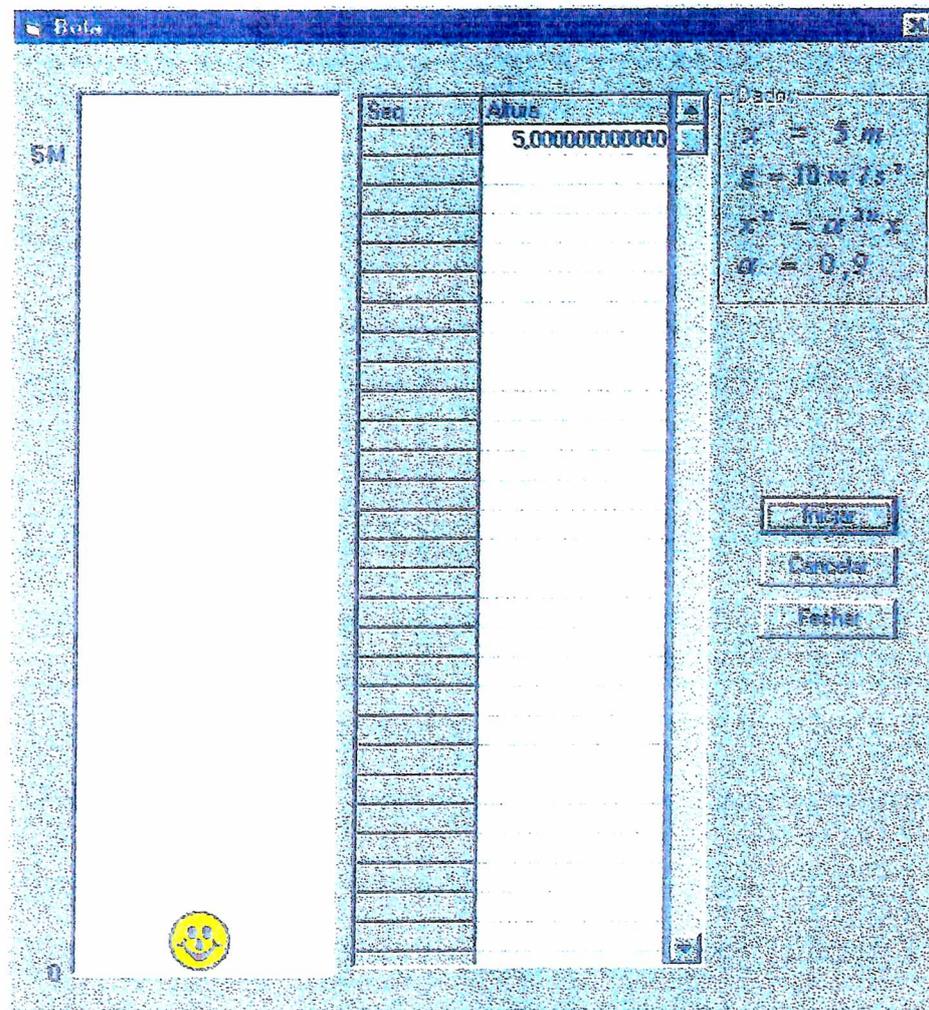
Tela inicial do Módulo  $CAL_{\infty}$  - ZEN, paradoxo - II

## Tela 89:

Tela que permite a visualização do jogo, onde a vantagem entre a tartaruga é  $1,08420217248552 \times 10^{-18}$



## Tela 90:

Tela inicial  $CAL_{\infty}$  - ZEN, paradoxo III

## Tela 91:

Tela que permite a visualização do jogo, onde a altura da bola é 0,008985051500

The screenshot shows a software window titled "Tela 91" with a blue border. On the left, there is a large empty white area with a yellow sad face icon at the bottom. In the center, a table displays a sequence of numbers. On the right, a box contains mathematical parameters, and below it are three buttons: "Iniciar", "Cancelar", and "Fechar".

Seq	Altura
28	0,073904414707
29	0,073904414707
30	0,059862575913
31	0,059862575913
32	0,048488686489
33	0,048488686489
34	0,039275836056
35	0,039275836056
36	0,031813427206
37	0,031813427206
38	0,025768876037
39	0,025768876037
40	0,020872789590
41	0,020872789590
42	0,016906959568
43	0,016906959568
44	0,013694637250
45	0,013694637250
46	0,011092656172
47	0,011092656172
48	0,008985051500

Parameters box:

$$x = 5,01$$

$$g = 10,10 \text{ m/s}^2$$

$$x^n = \alpha^{2n} x$$

$$\alpha = 0,9$$

Buttons: Iniciar, Cancelar, Fechar

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

**AABOE**, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática**. Brasília: SBM, 1984.

**ABREU**, Aline França. **Sistemas de Informações Gerenciais: Uma Abordagem Orientada aos Negócios**. Florianópolis. UFSC, 1998.

**AEBLI**, Hans. **Didática Psicológica. Aplicação à Didática da Psicologia de Jean Piaget**. São Paulo: companhia Editora Nacional, 1978.

**ANDRADE**, Maria Margarida. **Como Preparar Trabalhos para Cursos de Pós-Graduação**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 1997.

**AVILA**, Geraldo Severo de Souza. **Cálculo 1. Funções de uma variável**. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1993. Vol. 1.

\_\_\_\_\_. **Cálculo de função de uma variável**. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1989. Vol. 2.

\_\_\_\_\_. **Introdução à Análise Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA., 1993.

**BORGES**, Carloman Carlos & **FADIGAS**, Inácio de Souza. **Como é possível o ponto não assumir dimensão. Ainda: gerar um ente, no caso da reta, unidimensional? De onde vem tal dimensão?** Folhetim de Educação Matemática ano 6, n.º 76. Núcleo de Educação Matemática OMAR CATUNDA.

**BORGES**, Carloman Carlos & **FADIGAS**, Inácio de Souza. **Paradoxos de Zenão (continuação)**. Folhetim de Educação Matemática OMAR CATUNDA. Universidade Federal de Feira de Santana.

**BOYER**, Cari B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA., 1974.

**BORNIA**, José Carlos. **O Uso do Jogo de Empresas GI. EPS Treinamento de Decisões Relativas a Preço**. Florianópolis: UFSC. Dissertação, 1997.

- CERVO, A. L. & BERVIAN, P. A. Metodologia Científica. 4. ed. São Paulo: MAKRON BOOKS, 1996.**
- COOPER, Robert & SAWAF, Ayman. Inteligência Emocional na Empresa. 2. d. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1997.**
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Da Realidade à Ação. Reflexões sobre Educação e Matemática. São Paulo: Summus, 1986.**
- DAVIS, Philip J. et HERSH, Reuben. A Experiência matemática. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves Editora S. A., 1989.**
- DAVIS, Philip J. et HERSH, Reuben. O Sonho de Descartes. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves Editora S. A., 1988.**
- DEMIDOVITCH, B., et ali. Problemas e Exercícios de Análise Matemática. 4. ed., Editora MIR, 1984.**
- DIENES, Zoltan Paul. As Seis Etapas do Processo de Aprendizagem em Matemática. São Paulo: Herder, 1972.**
- DROUET, Ruth Caribé da Rocha. Distúrbios da Aprendizagem. São Paulo: Editora Ática S. A; 1990.**
- EVES, Haward. Introdução à História da Matemática. Campinas. S.P. UNICAMP, 1995.**
- FERNANDES, Pedro J. Medida e Integração. Rio de Janeiro, IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada – CNPq, 1976.**
- FERRETTI, Celso João. et all. Novas Tecnologias, Trabalho e Educação: Um debate multidisciplinar. 5 ed. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 1999.**
- FILHO, Plínio Cornélio. Modelo de Simulação do GPCP-1: Jogo do Planejamento e Controle da Produção. Florianópolis. UFSC. Dissertação, 1998.**
- GOLEMAN, Daniel. Inteligência Emocional: a teoria Revolucionária que redefine o que é ser inteligente. 10 ed. Rio de Janeiro: Editora Objetiva LTDA, 1995.**

**GOTTMAN**, John et De **CAIRE**, Joan. **Inteligência Emocional: e a arte de educar nossos filhos**. 2 ed. Rio de Janeiro: Editora Objetiva LTDA., 1997.

**GRADNER**, Howard. **Estruturas da Mente. A Teoria das Inteligências Múltiplas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

**GRINSPUN**, Mirian P.S. Zippin et ali. **Educação Tecnológica: desafios e perspectivas**. São Paulo: Cortez, 1999.

**GUIDORIZZI**, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1985, Vol. 1.

**HÖNIG**, Samuel Chaim. **Aplicações da Topologia à Análise**. Rio de Janeiro, MPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada – CNPq, 1976.

**HILLIER**, Frederick S. et **LIEBERMAN**, Gerald J. **Introducción a la Investigación de Operaciones**. 3 ed. México: McGraw-Hill, 1991.

**HÜBNER**, Maria Marta. **Guia para Elaboração de Monografias e Projetos de Dissertação de Mestrado e Doutorado**. São Paulo: Pioneira: Mackenzie. 1998.

**KAMII**, Constance et **DECLARK**, Geórgia. **Reinventado a Aritmética: Implicações da Teoria de Piaget**. 7 ed. São Paulo: Papirus, 1993.

**KAMII**, Constance et **JOSEPH**, Linda Leslie. **Aritmética: Novas Perspectivas Implicações da Teoria de Piaget**. São Paulo: Papirus, 1992.

**KAPLAN**, Wilfred. **Cálculo Avançado**. 2. ed. São Paulo, Editora Edgard Blücher LTDA, 1972.

**LANG**, Serge. **Cálculo**. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1978, Vol. 1 e Vol. 2.

**LAVROFF**, Nicholas. **Divertindo-se com Realidade Virtual: Explore Mundos Artificiais em seu PC**. São Paulo: Berkley, 1994.

**LEITHOLD**, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3.ed. São Paulo, Editora Harbra LTDA, 1994, Vol. 1 e Vol. 2.

**LIMA, Elon Lages Curso de Análise.** 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada – CNPq, 1976. Vol. 1

\_\_\_\_\_. **Análise no Espaço  $R^n$ .** Brasília – DF – Editora Universidade de Brasília, 1970.

\_\_\_\_\_. **Análise Real.** Rio de Janeiro: IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada – CNPq, 1989. Vol. 1

\_\_\_\_\_. **Curso de Análise.** 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada – CNPq, 1981. Vol. 2

\_\_\_\_\_. **Elementos de topologia Geral.** Rio de Janeiro, IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada – CNPq, 1970.

\_\_\_\_\_. **Espaços Métricos.** 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada – CNPq, 1977.

**LIMA, Lauro de Oliveira Lima. A Construção ao Homem Segundo Piaget.** (Uma Teoria da Educação). São Paulo: Summus, 1994.

\_\_\_\_\_. **Lauro de Oliveira. Piaget para Principiantes.** São Paulo: Summus, 1980.

**MACEDO, Lino de. Ensaios construtivistas.** 2 ed. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994.

\_\_\_\_\_. Lino de. Petty, Ana Lúcia Sícoli. **PASSOS, Norimar Christe. Quatro Cores, Senha e Dominó: Oficinas de Jogos em uma Perspectiva Construtivista e Psicopedagógica.** 2 ed. São

**MACHADO, Nilson José. Matemática e Língua Materna.** São Paulo: Cortez Editora, 1990.

\_\_\_\_\_. Nilson José. **Matemática e Realidade.** São Paulo: Cortez Editora, 1989.

**MAIA, L. P. M. Cálculo 1.** São Carlos. São Paulo. Universidade Federal de São Paulo, 1974.

- MAYNARD**, H.B. Maynarol Manual de Engenharia de Produção: Métodos Matemáticos e Estatísticos. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1970.
- MECHELN**, Pedro José Von. **Sistema de Apoio ao Planejamento no Processo de Tomada de Decisão do Jogo de Empresas GI-EPS**. Florianópolis: UFSC. Dissertação, 1997.
- MEDEIROS**, Vitor Hugo da Silva. Questões Críticas para Incorporação da Propaganda em Jogos de Empresas. Florianópolis. UFSC. Dissertação, 1998.
- MOISE**, Edwin. Cálculo. **Um Curso Universitário**. São Paulo, Editora Edgard Blücher LTDA., 1967, Vol. 1., Vol. 2.
- MUCCHIELLI**, Roger. **A Formação de Adultos**. São Paulo: Martins Fontes, 1980.
- NETO**, Ernesto Rosa. **Didática da Matemática**. São Paulo: Editora Ática S. A., 1988.
- OLIVEIRA**, Ramon de. **Informática Educativa: Dos planos e discursos à sala de aula**. 3 ed. Campinas, São Paulo: Papirus, 1999.
- PIAGET**, Jean. **O juízo Moral na Criança**. São Paulo. Summus, 1994.
- PISKUNOV**, N. **Differential and Integral Calculus**. 4.ed., MIR PUBLISHERS MOSCOW, 1981.
- PRATA**, Stephen. **Divertindo-se com a Vida Artificial: A Evolução na Ponta dos Dedos**. Rio de Janeiro: Berkeley Brasil Editora, 1994.
- RANGEL**, Ana Cristina Souza. **Educação Matemática e a Construção do Número pela Criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.
- RICH**, Eliane et **KNIGHT**, Kervin. **Inteligência Artificial**. 2 ed. Rio de Janeiro: Markron Books do Brasil Editora Ltda, 1994.
- ROCHA**, Luiz Augusto de Giordano. **Jogos de Empresa: Desenvolvimento de um Modelo para Aplicação no Ensino de Custos Industriais**. Florianópolis. UFSC. Dissertação, 1997.
- SERRA**, Edgar Vieira Machado. **Uma Proposta para o Ensino de Mercado de Capitais na Abordagem de Jogos de Empresas**. Florianópolis. UFSC. Dissertação, 1998.
- SCHAFRANSKI**, Luiz Erley. **O Protótipo GPCP-1: Jogo do Planejamento e Controle da Produção**. Florianópolis. UFSC. Dissertação, 1999.
- SKEMP**, Richard R. **Psicologia del Aprendizaje de las Matemáticas**. 4 ed. Madri: Ediciones Marata, S. L., 1993.

**THALMANN**, Nadia Magnenat et **THALMANN**, Daniel. Rio de Janeiro: LTC – Livro Técnicos e Científicos Editora, 1993.

**THOMAS**, George B. **Cálculo**. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S. A., 1968, Vol. 1, Vol. 2.

**VARGAS**, Flor Maria Milagros Tapia. **Jogos de Empresas Liderst: Proposição de um Aplicativo Computacional para o Treinamento e Desenvolvimento de Recursos Humanos**. UFSC. Dissertação, 1996.

**VALENTE**, José Armando. **Computadores e Conhecimento. Repensando a Educação**. 2 ed. Campinas – São Paulo: UNICAMP/NIED, 1998.

**WEIL**, Pierre. **D'AMBRÓSIO**, Ubiratan. **CREMA**, Roberto. **Rumo à transdisciplinaridade. Sistemas abertos de conhecimento**. São Paulo: Summus editorial, 1993.