

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**OTIMIZAÇÃO DE MANCAIS DE ESCORA CIRCULARES COM  
SAPATAS PLANAS**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**CLAUDIO JOSÉ CAVALCANTE BLANCO**

**FLORIANÓPOLIS, JULHO DE 1998**

OTIMIZAÇÃO DE MANCAIS DE ESCORA CIRCULARES  
COM SAPATAS PLANAS

CLAUDIO JOSÉ CAVALCANTE BLANCO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA  
PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO  
ENGENHARIA E CIÊNCIAS TÉRMICAS, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

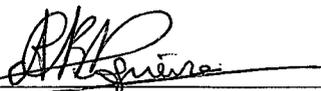


Prof. Alvaro Toubes Prata, Ph. D.  
Orientador

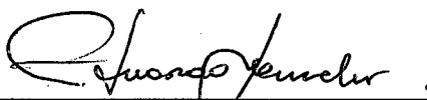


Prof. Júlio César Passos, Dr.  
Coordenador do Curso

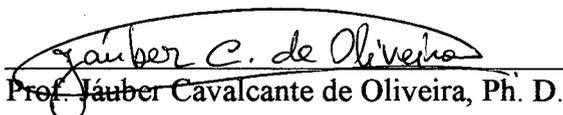
Banca Examinadora:



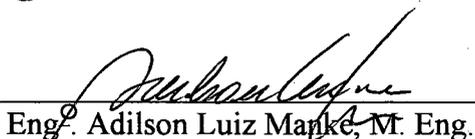
Prof. Antônio Carlos Ribeiro Nogueira, Dr.  
Presidente



Prof. Eduardo Fancello, Dr.



Prof. Jáuber Cavalcante de Oliveira, Ph. D.



Eng. Adilson Luiz Marke, M. Eng.

*Não me entrego sem lutar-  
Tenho ainda coração.  
Não aprendi a me render:  
Que caia o inimigo então.*

*estrofe da música metal contra as nuvens  
Renato Russo*

**Este trabalho é dedicado ao esteio da minha vida-  
minha família; meus pais, José Maria Blanco e  
Maria de Fátima Blanco; meus irmãos,  
Conceição, Lillian, Mauro e Marco Blanco.**

# AGRADECIMENTOS,

a Deus

ao contribuinte brasileiro que patrocinou este trabalho.

ao professor Alvaro Toubes Prata, pela orientação eficaz, pelos conhecimentos transmitidos, não só a nível técnico mas, também a nível humano e principalmente pela confiança depositada em mim nos momentos em que esta confiança faltava-me.

ao professor e amigo André Luiz Amarante Mesquita, por ter dado-me uma chance na iniciação científica.

ao eng<sup>o</sup> Adilson Luiz Manke da EMBRACO S.A, pelas informações pertinentes ao trabalho, principalmente à relativa a condição de contorno da pressão no mancal.

à galera da Mecânica/91, principalmente ao Barra e ao João que me aturam a sete anos.

aos amigos, Bertini, Edgard e Paulo pelos momentos de descontração.

a todos os colegas do NRVA, professores, alunos de pós-graduação, graduação e técnicos pelo ambiente de trabalho saudável.

A todos que de alguma forma contribuíram para a concretização deste trabalho.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS</b>	<b>ix</b>
<b>LISTA DE FIGURAS E TABELAS</b>	<b>xiii</b>
<b>RESUMO</b>	<b>xvii</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>xviii</b>
<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Problema a Ser Estudado e Sua Importância	1
1.2 Revisão Bibliográfica	3
1.3 Objetivos e Contribuições da Dissertação	6
<b>2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA</b>	<b>8</b>
2.1 Introdução	8
2.2 Modelo Físico	8
2.3 Hipóteses Simplificativas	9
2.4 Equação de Reynolds	10
2.4.1 Equações de Navier-Stokes	10
2.4.2 Condições de Contorno	13
2.4.3 Cálculo da Carga Suportada pelo Mancal	15
2.4.4 Cálculo da Potência Consumida pelo Atrito	15
<b>3. METODOLOGIA DE SOLUÇÃO</b>	<b>17</b>
3.1 Introdução	17
3.2 Obtenção do Campo de Pressão	17
3.2.1 Método dos Volumes Finitos	17
3.2.2 Solução das Equações Algébricas	21
3.2.2.1 Direção Radial	21



Circulares e o Mancal de Setores Fresados	80
<b>6. CONCLUSÕES</b>	<b>81</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>84</b>
<b>APÊNDICE I - Método de Newton - Raphson para várias variáveis</b>	<b>86</b>
<b>APÊNDICE II - TDMA</b>	<b>88</b>
<b>APÊNDICE III - CTDMA</b>	<b>90</b>

# LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

a	derivada da potência em relação a $\theta_1$
$a_p, a_n, a_s, a_e, a_w$	coeficientes usados no método dos volumes finitos
A	coeficiente utilizado no TDMA e no CTDMA
b	derivada da potência em relação a $\theta_2$
B	coeficiente utilizado no TDMA e no CTDMA; largura do mancal, utilizado na fórmula do número do mancal
c	derivada da potência em relação a $\Delta h$
C	coeficiente utilizado no TDMA e no CTDMA
d	derivada da potência em relação a $h_1$
D	coeficiente utilizado no TDMA e no CTDMA
$d_f$	diâmetro da fresa, mm
e	derivada da potência em relação a $r_2$
E	coeficiente utilizado no TDMA e no CTDMA
f	derivada da carga em relação a $\theta_1$ ; função a ser otimizada pelo método dos multiplicadores de Lagrange; valor da variável extrapolada
$f_1$	valor da variável obtida com a malha mais refinada
$f_1$	valor da variável obtida com a malha mais grosseira
$f_1, \dots, f_n$	conjuntos de equações utilizadas no método de Newton-raphson
F	coeficiente utilizado no TDMA e no CTDMA; função a ser integrada pela regra de Leibnitz para diferenciação de integrais.
$F_c$	força cisalhante atuante no mancal, [N]
g	derivada da carga em relação a $\theta_2$
$g_j$	conjuntos de restrições impostas ao problema de otimização
G	coeficiente utilizado no CTDMA
h	derivada da carga em relação a $\Delta h$ ; espessura do filme de óleo lubrificante, [ $\mu\text{m}$ ]
$h_1$	espessura do filme de óleo lubrificante entre o rebaixo e a parte móvel do mancal, [ $\mu\text{m}$ ]

$h_2$	espessura do filme de óleo lubrificante entre o ressalto e a parte móvel do mancal, [ $\mu\text{m}$ ]
$h_m$	espessura mínima do filme de óleo lubrificante utilizado na fórmula do número do mancal
$i$	derivada da carga em relação a $h_1$
$j$	derivada da carga em relação a $r_2$
$k$	razão de espessura de filme de óleo lubrificante
$L$	função de Lagrange
$N$	frequência angular da parte móvel do mancal, hz
$nc$	número de pontos nodais na direção $\theta$ , utilizados na discretização do domínio de solução da equação de Reynolds
$nr$	número de pontos nodais na direção $r$ , utilizados na discretização do domínio de solução da equação de Reynolds, número de ressaltos do mancal de escora.
$O$	origem do sistema cilíndrico de coordenadas $r\theta z$
$p$	ordem do método numérico
$p_a$	pressão ambiente, [ $\text{N}/\text{m}^2$ ]
$p_i$	relações de recorrência utilizadas no CTDMA
$P$	pressão, [ $\text{N}/\text{m}^2$ ]
$Pot$	potência consumida pelo mancal, [ $\text{W}$ ]
$q_i$	relações de recorrência utilizadas no CTDMA
$r$	eixo polar do sistema de coordenadas $r\theta z$ , relação entre as malhas utilizadas na extrapolação de Roache
$r_1$	raio interno do mancal, [ $\text{mm}$ ]
$r_2$	raio externo do mancal, [ $\text{mm}$ ]
$r_i$	relações de recorrência utilizadas no CTDMA
$S$	termo fonte utilizado no método dos volumes finitos
$S'$	termo fonte utilizado no TDMA e no CTDMA
$U$	velocidade tangencial do lubrificante, utilizado na fórmula do número do mancal
$V_r$	velocidade do escoamento de óleo na direção $r$ , [ $\text{m}/\text{s}$ ]

$V_z$	velocidade do escoamento de óleo na direção z, [m/s]
$V_r$	velocidade do escoamento de óleo na direção $\theta$ , [m/s]
$W$	carga suportada pelo mancal, [N]
$x$	variável independente utilizada na apresentação da regra de Leibnitz
$x_1, \dots, x_n$	variáveis a serem otimizadas pelo método dos Multiplicadores de Lagrange: variáveis do sistema de equações utilizadas no método de Newton-Raphson
$X^*$	vetor correspondente ao ótimo de f relativo as restrições impostas
$z$	eixo axial do sistema de coordenadas $r\theta z$

### Símbolos Gregos

$\alpha$	variável independente utilizada na apresentação da regra de Leibnitz para diferenciação de integrais
$\Delta$	variação
$\varepsilon \%$	erro relativo percentual
$\phi_i$	sistema de equações utilizado no CTDMA e no TDMA
$\Phi_1, \Phi_2,$	limites de integração utilizados na apresentação da regra de Leibnitz para diferenciação de integrais
$\lambda_j$	multiplicadores de Lagrange
$\lambda^*$	multiplicadores de Lagrange no ponto ótimo da função f
$\Lambda$	número do mancal
$\mu$	viscosidade absoluta do óleo lubrificante, [kg/ms]
$\theta$	eixo angular do sistema de coordenadas $r\theta z$
$\theta_1$	ângulo do rebaixo do mancal, [°]
$\theta_2$	ângulo do ressalto do mancal, [°]
$\rho$	massa específica do óleo lubrificante, [kg/m <sup>3</sup> ]
$\tau$	tensão cisalhante atuante no mancal, [N/m <sup>2</sup> ]
$\omega$	velocidade angular da parte móvel do mancal, [rad/s]

## Índices Inferiores

e	face à direita do ponto P no volume de controle
E	próximo ponto nodal à direita do volume de controle
ext	externo
int	interno
n	face acima do ponto P no volume de controle; valor atual da variável no método de Newton-Raphson
N	próximo ponto nodal acima do volume de controle
NE	próximo ponto nodal à direita de N e acima de E
NW	próximo ponto nodal a à esquerda de N e acima de W
P	ponto nodal no centro do volume de controle
s	face abaixo do ponto P no volume de controle
S	próximo ponto nodal abaixo do volume de controle
SE	próximo ponto nodal à direita de S e abaixo de E
SW	próximo ponto nodal a à esquerda de S e abaixo de W
v	valor da variável na iteração anterior no método de Newton-Raphson
w	face a esquerda do ponto P no volume de controle
W	próximo ponto nodal a esquerda do volume de controle
viz	vizinho

## Abreviações

CTDMA	versão circular do TDMA
TDMA	Algoritmo da Matriz Tridiagonal

# LISTAS DE FIGURAS E TABELAS

## Figuras

1.1	Mancal de escora utilizado em compressores de refrigeradores domésticos	2
1.2	Representação geométrica da sapata de Rayleigh para um mancal de escora circular	3
1.3	Representação geométrica da sapata fresada para um mancal de escora circular	7
2.1	Dimensões características do mancal de escora	9
2.2	Domínio de solução	14
3.1	Discretização do domínio de solução	18
3.2	Volume de controle típico	18
3.3	Malha do domínio de solução discretizado-direção radial	21
3.4	Malha do domínio de solução discretizado-direção circunferencial	23
4.1	Desenho esquemático da sapata fresada para um mancal de escora circular	32
5.1	Distribuição de pressão ao longo da direção circunferencial para um mancal com 4 ressaltos, na posição $r = (r_1 + r_2) / 2$	40
5.2	Malha com 180x25 pontos nodais	41
5.3	Distribuição de pressão em função de x e y para um mancal com 4 ressaltos	42
5.4	Distribuição de pressão ao longo de $\theta$ para um mancal com 4 ressaltos, na posição $r = (r_1 + r_2) / 2$ .	43
5.5	Distribuição de pressão em função de x e y para um mancal com 8 ressaltos	44
5.6	Distribuição de pressão ao longo de $\theta$ para um mancal com 8 ressaltos, na posição $r = (r_1 + r_2) / 2$	44
5.7	Distribuição de pressão em função de x e y para um mancal com 16 ressaltos	45
5.8	Distribuição de pressão ao longo de $\theta$ para um mancal com 16 ressaltos, na posição $r = (r_1 + r_2) / 2$	45

5.9	Distribuição de pressão em função de $x$ e $y$ para o mancal fresado	46
5.10	Distribuição de pressão ao longo de $\theta$ para o mancal fresado, na posição $r = (r_1 + r_2) / 2$	47
5.11	Distribuição de potência em função de $x$ e $y$ para um mancal com 4 ressaltos	48
5.12	Distribuição de potência em função de $x$ e $y$ para um mancal com 8 ressaltos	49
5.13	Distribuição de potência em função de $x$ e $y$ para um mancal com 16 ressaltos	49
5.14	Distribuição de potência em função de $x$ e $y$ para o mancal fresado	50
5.15	Comparação entre a distribuição de pressão ao longo de $\theta$ , com e sem os termos de inércia, para um mancal com 4 ressaltos, na posição $r = (r_1 + r_2) / 2$ .	51
5.16	Comparação entre a distribuição de pressão ao longo de $\theta$ , com e sem os termos de inércia, para um mancal com 8 ressaltos, na posição $r = (r_1 + r_2) / 2$ .	52
5.17	Comparação entre a distribuição de pressão ao longo de $\theta$ , com e sem os termos de inércia, para um mancal com 16 ressaltos, na posição $r = (r_1 + r_2) / 2$ .	53
5.18	Comparação entre a distribuição de pressão ao longo de $\theta$ , com e sem os termos de inércia, para o mancal fresado, na posição $r = (r_1 + r_2) / 2$ .	54
5.19	Potência consumida pelo mancal com 4 ressaltos, com e sem os termos de inércia, em função da frequência angular.	55
5.20	Comparação entre a pressão analítica e a numérica para um setor do mancal com 4 ressaltos, na posição $r = (r_1 + r_2) / 2$	59
5.21	Carga suportada e potência consumida pelo mancal com 4 ressaltos em função de $\theta_1$ ; $r_2$ fixo	60
5.22	Carga suportada e potência consumida pelo mancal com 8 ressaltos em função de $\theta_1$ ; $r_2$ fixo	61
5.23	Carga suportada e potência consumida pelo mancal com 16 ressaltos em função de $\theta_1$ ; $r_2$ fixo	61
5.24	Variações da potência consumida e da espessura $h_2$ em função de $\Delta h$ para um mancal com 4 ressaltos; $r_2$ fixo	62
5.25	Variações da potência consumida e da espessura $h_2$ em função de $\Delta h$ para um mancal com 8 ressaltos; $r_2$ fixo	63
5.26	Variações da potência consumida e da espessura $h_2$ em função de $\Delta h$ para um mancal com 16 ressaltos; $r_2$ fixo	64
5.27	Variações da potência consumida em função de $\Delta h$ e do número de	

ressaltos do mancal; $r_2$ fixo	64
5.28 Carga suportada e potência consumida pelo mancal fresado em função do diâmetro da fresa; $r_2$ fixo	65
5.29 Variações da potência consumida e da espessura $h_2$ em função de $\Delta h$ para o mancal fresado; $r_2$ fixo	66
5.30 Comparação entre o mancal de sapatas retas circulares com 4, 8 e 16 ressaltos e o mancal fresado; $r_2$ fixo	68
5.31 Carga suportada e potência consumida pelo mancal com 4 ressaltos em função de $\theta_1$ ; $r_2$ como um dos parâmetros de otimização	70
5.32 Carga suportada e potência consumida pelo mancal com 8 ressaltos em função de $\theta_1$ ; $r_2$ como um dos parâmetros de otimização	71
5.33 Carga suportada e potência consumida pelo mancal com 16 ressaltos em função de $\theta_1$ ; $r_2$ como um dos parâmetros de otimização	71
5.34 Variações da potência consumida e da espessura $h_2$ em função de $\Delta h$ para um mancal com 4 ressaltos; $r_2$ com um dos parâmetros de otimização	72
5.35 Variações da potência consumida e da espessura $h_2$ em função de $\Delta h$ para um mancal com 8 ressaltos; $r_2$ com um dos parâmetros de otimização	73
5.36 Variações da potência consumida e da espessura $h_2$ em função de $\Delta h$ para um mancal com 16 ressaltos; $r_2$ com um dos parâmetros de otimização	74
5.37 Variações da potência consumida e da espessura $h_2$ em função de $r_2$ para um mancal com 4 ressaltos	75
5.38 Variações da potência consumida e da espessura $h_2$ em função de $r_2$ para um mancal com 8 ressaltos	75
5.39 Variações da potência consumida e da espessura $h_2$ em função de $r_2$ para um mancal com 16 ressaltos	76
5.40 Variações da potência consumida e da espessura $h_2$ em função de $r_2$ e do número de ressaltos do mancal	76
5.41 Carga suportada e potência consumida pelo mancal fresado em função do diâmetro da fresa; $r_2$ como um dos parâmetros de otimização	78
5.42 Variações da potência consumida e da espessura $h_2$ em função de $\Delta h$ para o mancal fresado; $r_2$ com um dos parâmetros de otimização	78

5.43	Variações da potência consumida e da espessura $h_2$ em função de $r_2$ para o mancal fresado	79
5.44	Comparação entre o mancal de sapatas retas circulares com 4, 8 e 16 ressaltos e o mancal fresado em função de $r_2$	80

## **Tabelas**

5.1	Parâmetros geométricos do mancal de escora com setores circulares	38
5.2	Potência consumida e erro percentual relativo à malha extrapolada	40
5.3	Potência consumida e $h_1$ em função do número de ressaltos do mancal	46
5.4	Valores temporários das variáveis para um processo que converge para um resultado físico inexistente	56
5.5	Valores temporários das variáveis para um processo que converge para a geometria ótima	57
5.6	Valores temporários dos coeficientes de sensibilidade	57
5.7	Estimativa inicial das variáveis para mancal com setores circulares e $r_2$ fixo	58
5.8	Parâmetros geométricos ótimos e potência consumida para mancais com setores circulares e $r_2$ fixo	58
5.9	Comparação entre a carga analítica e a numérica	59
5.10	Parâmetros geométricos ótimos para mancal fresado com $r_2$ fixo	65
5.11	Parâmetros geométricos ótimos e potência consumida	69
5.12	Parâmetros geométricos ótimos	77

## RESUMO

O presente trabalho explora a simulação e a otimização de mancais de escora circulares. A formulação do problema de lubrificação hidrodinâmica considerando os termos inerciais centrífugos culmina com uma versão modificada da Equação de Reynolds clássica. Por causa da formulação diferente da clássica, esta equação é denominada equação de Reynolds com termos inerciais. Esta equação é resolvida através do método dos volumes finitos fornecendo o campo de pressão do filme de lubrificante e, conseqüentemente, a carga suportada e a potência consumida pelo mancal. Estes parâmetros de desempenho dependem da geometria do mancal que é otimizada através do método dos Multiplicadores de Lagrange, para suportar uma determinada carga consumindo a menor potência. São analisados dois casos de otimização. O primeiro considerando o raio externo do mancal fixo, e o segundo inclui o raio externo como variável a ser também otimizada, juntamente com os outros parâmetros geométricos, os ângulos do rebaixo e do ressalto do mancal, a altura do ressalto e a distância entre o rebaixo e a parte móvel do mancal. As geometrias otimizadas são: a sapata de Rayleigh com 4, 8 e 16 ressaltos e uma sapata fresada com 4 ressaltos. Uma comparação entre a sapata de Rayleigh e a sapata fresada é feita, e mostra que a sapata fresada possui um desempenho comparável ao da sapata de Rayleigh com 8 ressaltos.

# ABSTRACT

The present work deals with the simulation and optimization of thrust circular bearings. The hydrodynamic lubrication problem is formulated including the inertial terms and a modified version of the classical Reynolds equation is then obtained. Due to the presence of the inertial terms this new equation is named Reynolds Equation with inertial terms. The modified Reynolds Equation is solved through a finite volume methodology and both the resultant load and the viscous power consumption are obtained. These two operational parameters are dependent upon the bearing geometrical parameters which were optimized using the Lagrange Multipliers Method to yield the maximum load with minimum power consumption. Two optimization cases were analyzed. The first is for a fixed bearing external radius and the second include the external radius as a variable to be optimized in conjunction to the others geometrical parameters: pad angles, pad high and distance between bearing and seat. The geometry investigated were: Rayleigh sector-shaped with 4, 8 and 16 pads, and a milled geometry with four pads. A comparison between the Rayleigh sector-shaped pads and the milled bearing indicated that the milled geometry with four pads has a performance comparable to the Rayleigh bearing with eight pads.

## INTRODUÇÃO

### 1.1. PROBLEMA A SER ESTUDADO E SUA IMPORTÂNCIA

Os mancais de escora são basicamente, suportes de partes móveis. São elementos dos mais comuns em todas as máquinas, sendo seu correto dimensionamento fundamental para o bom funcionamento mecânico das mesmas.

Os mancais de escora são utilizados com componentes de máquinas em vários segmentos da indústria, tais como:

- (i) Indústria de transporte - ex.: motores de combustão interna.
- (ii) Indústria de máquinas e equipamentos - ex.: compressores em geral.
- (iii) Indústria energética - ex.: turbinas hidráulicas de eixos verticais.
- (iv) Indústria naval - ex.: eixos propulsores de navios.

No presente trabalho dar-se-á ênfase aos mancais de escora utilizados em compressores herméticos de refrigeração (“freezers”, refrigeradores, bebedouros, balcões frigoríficos, etc.). A investigação e a simulação dos fenômenos físicos envolvidos na operação destes mancais é de extrema importância tecnológica, pois além de permitir avaliar com maior precisão parâmetros construtivos, que em geral são da ordem de micrometros, permite também analisar parâmetros comprometidos com o desempenho destes, tais como carga suportada e potência dissipada.

A figura 1.1, mostra um desenho esquemático do mancal de escora utilizado em compressores de refrigeradores domésticos.

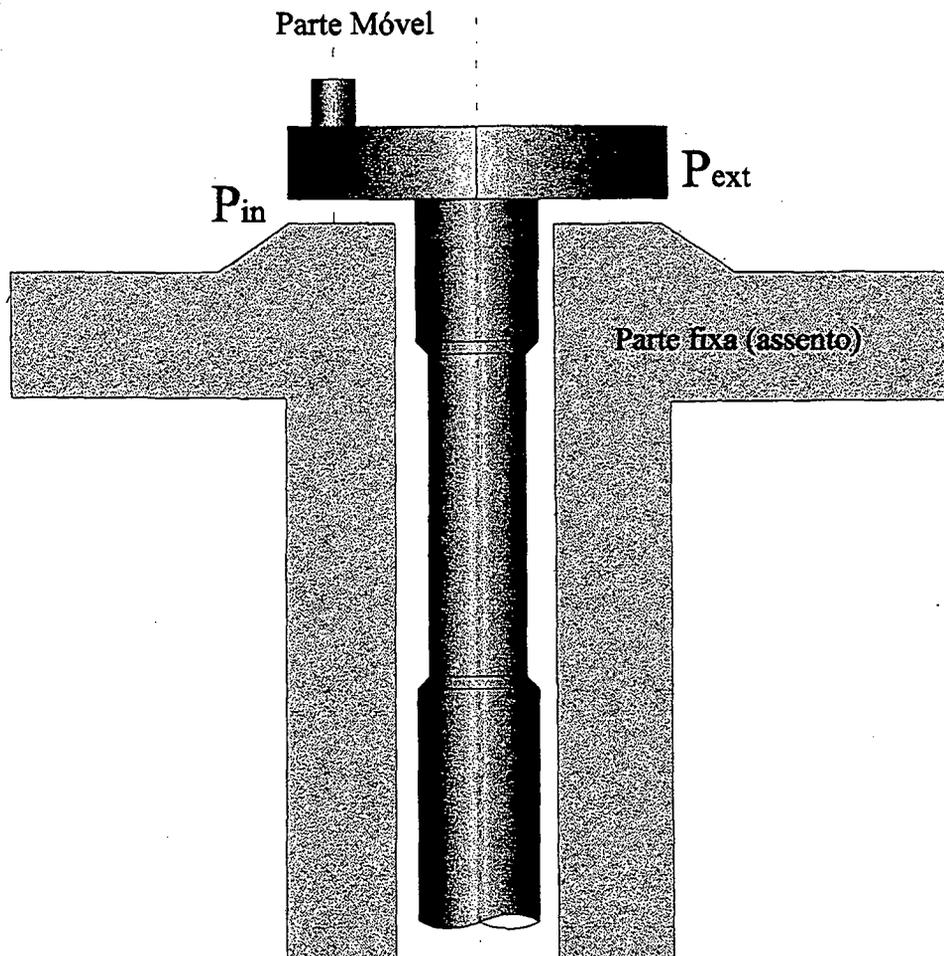


Fig. 1.1 - Mancal de escora utilizado em compressores de refrigeradores domésticos

Existe uma íntima ligação entre os parâmetros de projeto e os parâmetros construtivos, pois é graças à viscosidade do fluido e à geometria da sapata que surge o efeito hidrodinâmico, criando um gradiente de pressão que dá ao mancal de escora a capacidade de suportar carga. Dependendo do valor da folga preenchida com lubrificante que separa a parte móvel da parte fixa do mancal e dos parâmetros geométricos que definem a forma da sapata, o mancal de escora poderá suportar uma maior ou menor carga e dissipar mais ou menos potência. Este fato sugere a existência de um ótimo entre o máximo de carga suportada e o mínimo de potência dissipada em função da folga e dos parâmetros geométricos da sapata, desde que a viscosidade do fluido seja considerada constante.

O mancal de escora típico a ser explorado neste trabalho é ilustrado na figura 1.2 que representa um mancal de escora circular com geometria tipo sapata de Rayleigh com quatro ressaltos. Serão também investigados mancais com oito e dezesseis ressaltos

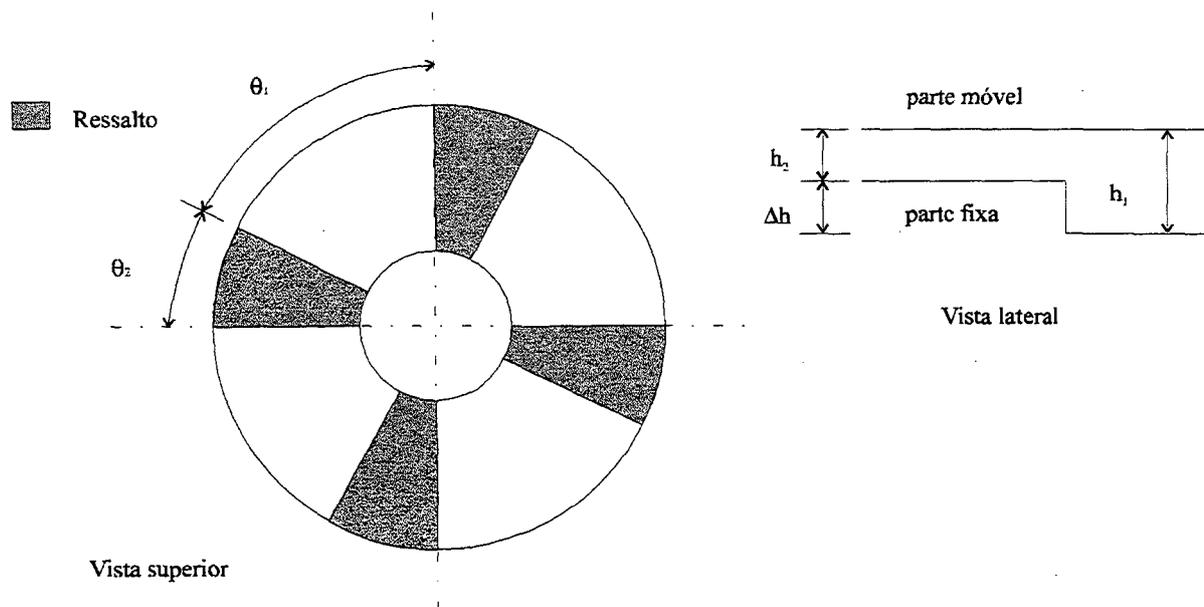


Fig 1.2 - Representação geométrica da sapata de Rayleigh para um mancal de escora circular.

## 1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo da otimização de mancais de escora de sapatas setoriais iniciou-se com Lorde Rayleigh (1918). Desde então surgiram vários trabalhos que objetivaram a criação de técnicas analíticas e numéricas para a determinação da geometria que forneça parâmetros operacionais ótimos tais como carga suportada, potência dissipada, vazão de lubrificante, etc.

A seguir, os trabalhos mais relevantes associados à presente dissertação serão revisados.

Gross (1962) comparou a sapata de Rayleigh a uma sapata híbrida, formada por um plano inclinado e uma sapata de Rayleigh para fluidos incompressíveis e conclui que a primeira é a que possui maior capacidade de suportar carga.

Maday (1968) através do cálculo variacional mostrou que para um mancal de escora aerodinâmico de largura infinita, ou seja, mancal unidimensional operado a gás, a geometria que possui maior capacidade de suporta carga é a sapata híbrida.

Chow et al. (1970) resolveram a equação de Reynolds bidimensional para fluidos compressíveis através do método das diferenças finitas e mostraram através da tentativa e erro que a capacidade de suportar carga de um mancal de escora lubrificado a gás com uma geometria híbrida pode ser maior do que a de um mancal com geometria espiralada, conforme o modelo e as condições investigadas.

Wylie et al. (1970) compararam os resultados da otimização do mancal de escora aerodinâmico a gás de largura infinita com uma sapata inclinada e uma sapata de Rayleigh para uma certa faixa de número do mancal  $\Lambda (= 6\mu UB / h_m^2 p_a)$  e concluíram que somente para valores mais altos de  $\Lambda$  a sapata inclinada suporta mais carga que a sapata de Rayleigh.

Rohde (1972) através de uma formulação variacional não local determinou o perfil do filme fluido incompressível que minimiza o coeficiente de atrito e a força de atrito para uma dada carga. Para um mancal de escora de largura infinita com uma sapata inclinada e uma sapata de Rayleigh, conclui que a sapata de Rayleigh possui melhor desempenho. Em 1974 Rohde mostrou que uma sapata com degrau trapezoidal possui maior capacidade de suportar carga do que a sapata de Rayleigh.

Constantinescu et al. (1976) concluíram que o efeito da força de inércia provocada pela presença do ressalto de mancais pode ser tanto de aumento como de queda de pressão. Isso depende das condições do escoamento na entrada do ressalto, isto é, a queda de pressão ocorre quando o escoamento é acelerado, enquanto o aumento de pressão ocorre quando o escoamento é desacelerado. A última situação é, entretanto, de interesse prático menor, desde que ocorrerá somente quando a razão de espessura de filme fluido lubrificante,  $K = h_1 / h_2$  for grande.

Gregory et al. (1977) mostraram que devido a fuga de fluido pela lateral em um mancal de largura finita, a capacidade de suportar carga da sapata de Rayleigh passa a ser apenas 3% superior em relação a uma sapata inclinada. Quando o mancal era considerado de largura infinita a

diferença era de 29% e sugeriram que uma sapata curva um pouco semelhante à trapezoidal citada anteriormente deveria ser mais eficiente, pois com isso se evitaria mais a fuga lateral de lubrificante. O cálculo da distribuição de pressão foi feito através do método dos elementos finitos, e a otimização da geometria para maximização da capacidade de suportar carga foi feita através da técnica “Pattern Search” que consiste na definição de uma função objetiva  $Y(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que deve ser otimizada através de perturbações sucessivas nas variáveis  $x_i$ 's, até que não provoquem mais acréscimos significativos em  $Y$ .

Bagci et al. (1983) resolveram a equação da lubrificação bidimensional no plano cartesiano, para um fluido incompressível, com fuga de lubrificante pela lateral de um mancal de escora. Mostrando que ao contrário do que diz a literatura o valor ótimo de  $h_1/h_2$  não é o mesmo quando se considera ou não a fuga de lubrificante pela lateral. Quando se considera a fuga  $h_1/h_2$  é maior. Mostraram também que uma sapata cujo perfil é uma função polinomial de grau dois possui maior capacidade de suportar carga do que a sapata de Rayleigh.

Auloge et al. (1983) concluíram que para a sapata de Rayleigh, o uso de um fluido não newtoniano melhora levemente a máxima capacidade de suportar carga da mesma. A técnica de otimização utilizada foi o princípio Pontryagin de Máximo.

Bourgin et al. (1985) analisaram alguns modelos de fluidos não newtonianos aplicados a sapatas de Rayleigh e otimizaram essa geometria em termos da capacidade de suportar carga ou dissipação de potência aplicando a mesma técnica de Auloge et al. (1983).

Sato et al. (1988) propuseram uma bomba viscosa\* cujos estatores são formados por sapatas de Rayleigh, e para isso resolveram a equação da lubrificação na forma bidimensional em coordenadas polares. A geometria da bomba foi otimizada numericamente através da formulação divergente (Castelli et al., 1968), para obter a máxima vazão de fluido. O desempenho foi

---

\*Uma bomba viscosa é formada por um rotor posicionado na vertical. Esse rotor é cercado por um estator formado por duas partes, uma que cerca a região superior do rotor e outra que cerca a região inferior. O objetivo da bomba viscosa é transportar o fluido da região inferior à região superior através da diferença de pressão causada pelo acionamento do rotor.

comparado com bombas viscosas de sapatas em espirais, com dimensões aproximadamente iguais e a bomba com sapata de Rayleigh apresentou maior vazão e maior gradiente de pressão.

Sato et al. (1992) mostraram que a vazão de fluido de uma bomba viscosa de sapata em espiral otimizada é entre 5% a 10% maior do que a bomba de sapata de Rayleigh otimizada. Porém, para se obter esta diferença, um número elevado de espirais é necessário e a fabricação torna-se cara o que faz a bomba de sapata de Rayleigh possuir desempenho comparável à bomba com sapata em espiral.

### **1.3. OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO**

A motivação principal desta dissertação é a preocupação tecnológica dispensada aos projetos de mancais de escora utilizados em compressores de refrigeradores domésticos com o compromisso da menor dissipação de energia possível na transmissão da mesma do motor elétrico ao pistão que comprime o gás refrigerante. Nestes mancais a carga a ser suportada pelo mancal é o próprio peso do motor elétrico.

O presente trabalho visa a modelação, simulação numérica e otimização de geometrias de mancais de escora, investigando a sapata de Rayleigh e a sapata fresada que é de mais fácil fabricação; estas geometrias serão otimizadas para que dissipem a menor potência suportando uma determinada carga e têm seus desempenhos comparados. Uma representação esquemática do mancal com sapata fresada é apresentada na figura 1.3.

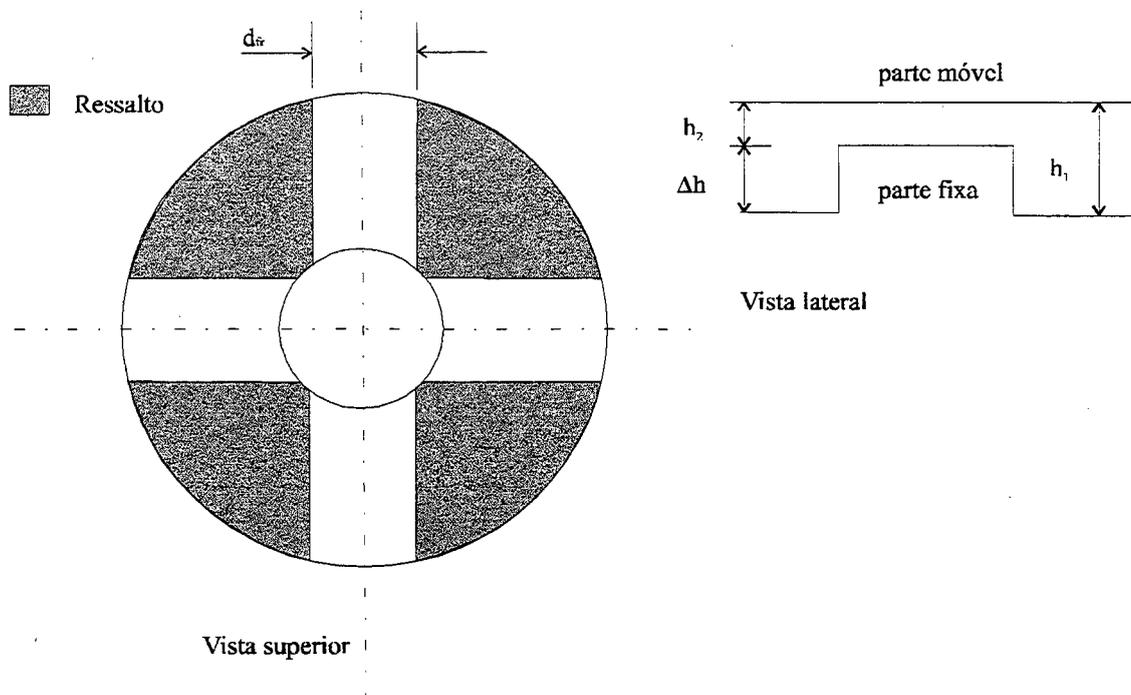


Fig 1.3 - Representação geométrica da sapata fresada para um mancal de escora circular.

O estudo de geometrias otimizadas para mancais de escora a ser conduzida aqui segue a mesma orientação das investigações anteriores realizadas por Oliveira e Prata (1992), Mota e Prata (1995), Teixeira e Prata (1995) e Fernandes e Prata (1996).

# FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

## 2.1 INTRODUÇÃO

As formulações física e matemática de problemas envolvendo mancais de escora, os quais estão inseridos na teoria da lubrificação hidrodinâmica, foram propostas inicialmente por Reynolds (1886). Esta teoria faz parte da Mecânica dos Fluidos, pois a equação básica da lubrificação é derivada das equações de Navier-Stokes em conjunto com a equação da conservação da massa. Na análise de problemas de lubrificação hidrodinâmica busca-se uma equação diferencial, que ao ser resolvida forneça o campo de pressão no filme fluido que separa as partes fixa e móvel do mancal. A integração deste campo de pressão fornece a carga que o mancal é capaz de suportar.

A equação diferencial da pressão é denominada de equação de Reynolds, que é usada comumente desprezando-se os termos inercias (Pinkus e Sternlicht, 1961). Neste trabalho os termos inerciais centrífugos serão considerados e a equação diferencial da pressão será denominada de equação de Reynolds com termos inerciais centrífugos.

## 2.2 MODELO FÍSICO

A figura 2.1 apresenta um mancal de escora destacando suas partes fixa e móvel juntamente com suas dimensões características: raio interno  $r_1$ , raio externo  $r_2$ , ângulo do rebaixo  $\theta_1$ , ângulo do ressalto  $\theta_2$  e espessura do filme de óleo lubrificante  $h$ . A pressão interna  $P_{in}$  e a pressão externa  $P_{ext}$  são conhecidas. O sistema de coordenadas adotado para análise do problema é o sistema cilíndrico  $(r, \theta, z)$ , onde a referência para a coordenada  $z$  é a parte móvel do mancal

que acompanha seu movimento axial, enquanto a parte fixa é a referência para as coordenadas  $r$  e  $\theta$ .

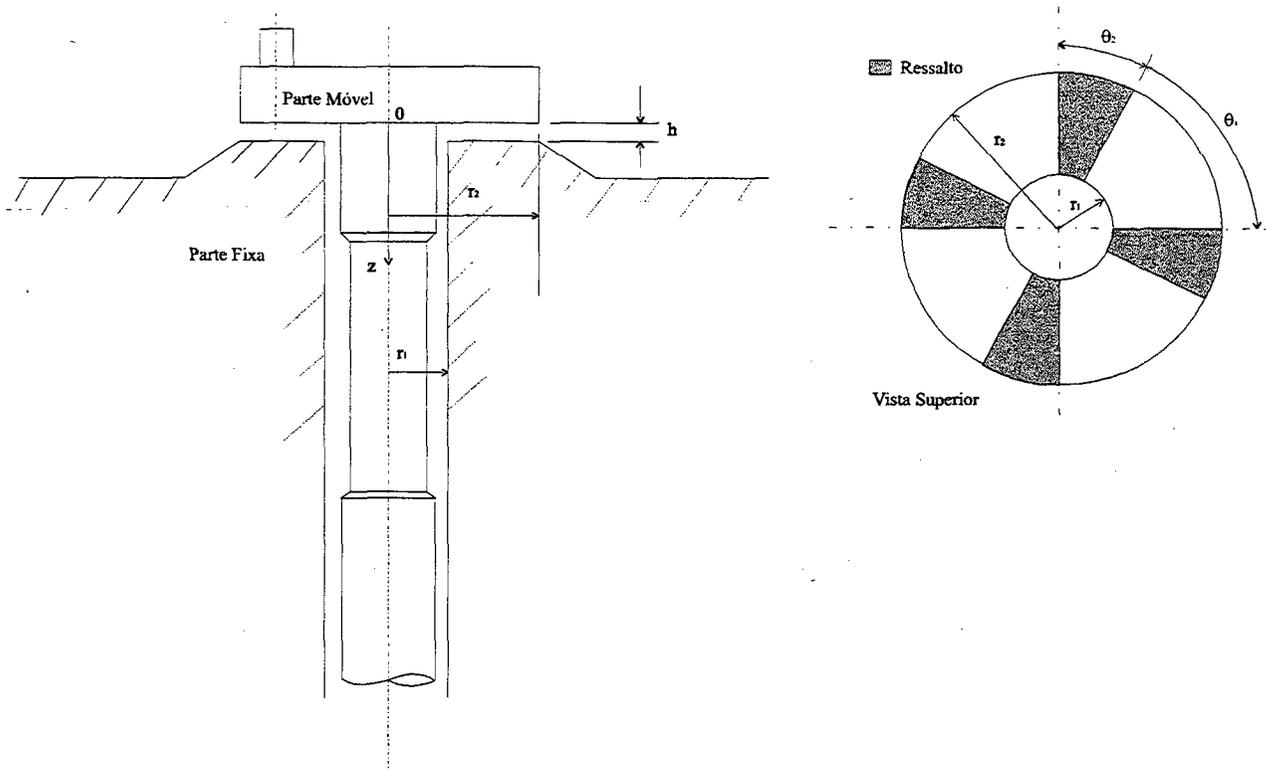


Fig.2.1 - Dimensões características do mancal de escora

### 2.3 HIPÓTESES SIMPLIFICATIVAS

Para obtenção da equação de Reynolds com termos inerciais e centrífugos, assume-se as seguintes hipóteses simplificativas:

- (i) Desprezam-se os efeitos das forças de campo.
- (ii) As forças de inércia são desprezíveis, exceto a centrífuga.
- (iii) A pressão não varia na direção da folga ( $z$ ),  $P=P(r,\theta)$ .
- (iv) Condição de não deslizamento do óleo lubrificante nas superfícies sólidas.

(v) Escoamento laminar.

(vi) Fluido newtoniano.

(vii) Viscosidade constante.

(viii) Fluido incompressível

(ix) Regime permanente.

Tais hipóteses são normalmente utilizadas em problemas desta natureza.

## 2.4. EQUAÇÃO DE REYNOLDS

### 2.4.1. Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas para densidade e viscosidade constantes são:

Componente r:

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right\} \quad (2.1)$$

Componente  $\theta$ :

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right\} \quad (2.2)$$

Componente z:

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (2.3)$$

Assumindo-se as hipóteses simplificativas listadas anteriormente para a geometria apresentada na figura 2.1, obtém-se as seguintes expressões para as equações de Navier-Stokes nas direções  $r$  e  $\theta$ , respectivamente:

$$-\rho \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \quad (2.5)$$

Integrando-se as equações (2.4) e (2.5) na direção da espessura do filme de óleo (direção  $z$  conforme a figura 2.1) e usando as condições de contorno que seguem,

$$z=0 \quad \text{e} \quad r_1 \leq r \leq r_2 \quad \Rightarrow \quad V_\theta = \omega r \quad \text{e} \quad V_r = 0 \quad (2.6)$$

$$z=h \quad \text{e} \quad r_1 \leq r \leq r_2 \quad \Rightarrow \quad V_\theta = 0 \quad \text{e} \quad V_r = 0 \quad (2.7)$$

Em  $z=0$  o óleo lubrificante possui a velocidade da parte móvel do mancal, enquanto que em  $z=h$  (parte fixa do mancal), o fluido é considerado em repouso.

A partir do citado acima, obtém-se as velocidades  $V_r(r, \theta, z)$  e  $V_\theta(r, \theta, z)$ , dadas por,

$$V_r = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial r} (z^2 - zh) + \frac{\rho}{\mu r} \left[ -\frac{1}{240(\mu r)^2} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 (2z^6 - 6hz^5 + 5h^2z^4) + \frac{\omega}{60\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} \left( \frac{3z^5}{h} - 10z^4 + 10hz^3 - 3h^3z \right) - \frac{(\omega r)^2}{12} \left( \frac{z^4}{h^2} - \frac{4z^3}{h} + 6z^2 - 3hz \right) \right] \quad (2.8)$$

$$V_\theta = \frac{1}{2\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} (z^2 - zh) - \omega r \left( \frac{z}{h} - 1 \right) \quad (2.9)$$

A equação (2.8) para  $V_r$  foi obtida após a substituição de  $V_\theta$  dado por (2.9) na versão integrada da equação (2.4).

Considerando agora a equação da conservação da massa simplificada pelas hipóteses apresentadas anteriormente, tem-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (V_z) = 0 \quad (2.10)$$

Integrando-se a equação (2.10) de  $z = 0$  a  $z = h$ , resulta em,

$$\frac{1}{r} \int_0^h \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) dz + \frac{1}{r} \int_0^h \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta) dz + \frac{1}{r} \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} (V_z) dz = 0 \quad (2.11)$$

Aplicando a regra de Leibnitz\* a cada parcela da equação (2.11), tem-se,

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) dz = \frac{\partial}{\partial r} \int_0^h (rV_r) dz - rV_r \frac{dh}{dr} \quad (2.12a)$$

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta) dz = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^h (V_\theta) dz - V_\theta \frac{dh}{d\theta} \quad (2.12b)$$

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial z} (V_z) dz = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h V_z dz \quad (2.12c)$$

Substituindo-se as equações (2.11a) a (2.12c) na equação (2.11) e, posteriormente substituindo, as equações (2.8) e (2.69) na equação resultante, tem-se,

---

\*A regra de Leibnitz para diferenciação de integrais é:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\Phi_1(\alpha)}^{\Phi_2(\alpha)} F(x, \alpha) dx = \int_{\Phi_1(\alpha)}^{\Phi_2(\alpha)} \frac{\partial F}{\partial \alpha} dx - F(\Phi_1, \alpha) \frac{d\Phi_1}{d\alpha} + F(\Phi_2, \alpha) \frac{d\Phi_2}{d\alpha}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ rh^3 \frac{\partial P}{\partial r} + \rho \left[ \frac{\omega h^5}{10\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{3h^7}{280(\mu r)^2} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{3}{10} (\omega r)^2 h^3 \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h^3}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = 6\mu\omega r \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (2.13)$$

A equação (2.13) é bastante semelhante à equação de Reynolds clássica (Cameron, 1966, Pinkus e Sternlicht, 1961), porém incluindo os efeitos inerciais centrífugos, e por isso chamada neste trabalho de equação de Reynolds com termos inerciais centrífugos.

Diferentemente da equação de Reynolds clássica, a equação (2.13) é não linear devido à existência do termo  $(\partial P/\partial \theta)^2$ . A influência deste termo sobre a equação é no entanto pequena devido aos termos que o multiplicam pois, a espessura do filme de óleo lubrificante é da ordem de micrômetros e está elevado a sétima potência; todas as variáveis constantes da equação (2.13) estão listadas na nomenclatura. Embora a equação (2.13) seja de fácil obtenção, tudo indica que a primeira vez que tal equação tenha sido utilizada foi em Oliveira e Prata (1992).

#### 2.4.2 Condições de Contorno

A equação de Reynolds com termos inerciais centrífugos apresentada anteriormente é uma equação elíptica em  $r$  e  $\theta$  e portanto precisa de duas condições de contorno em  $r$  e duas em  $\theta$  para que possa ser resolvida. Em  $r$  as condições de contorno são:

$$r = r_1 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi \Rightarrow P = P_{\text{int}}$$

e

$$r = r_2 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi \Rightarrow P = P_{\text{ext}}$$

(2.14)

No presente trabalho,  $P_{\text{int}} = P_{\text{ext}} = 0$ .

Para  $\theta$  a condição de contorno a ser adotada é a de escoamento periódico (Patankar et al., 1977), ou seja,

$$P(r, \theta) = P(r, \theta + 2\pi) \quad (2.15)$$

Estas condições de contorno são aplicadas à equação de Reynolds com termos inerciais centrífugos, cujo domínio de solução é apresentado na Figura. 2.2. Para a direção  $\theta$  considera-se a simetria apresentada por um mancal de escora com quatro ressaltos e resolve-se apenas para um ressaltos.

Um fato a ser observado é que o óleo ao escoar do ressaltos para o rebaixo experimenta uma abrupta expansão de área o que resulta em grande abaixamento de pressão. Este abaixamento de pressão pode levar a valores bem menores do que a pressão ambiente dando origem ao fenômeno de cavitação do filme de óleo (Santos, 1995 e Santos e Prata 1997). Na presente dissertação, sempre que a pressão assumir valores negativos a metodologia arbitrarará 0 (zero) como sendo o valor da pressão.

Tal prática é muito utilizada em problemas de cavitação e corresponde ao modelo de cavitação associado à condição de Gumbel (Santos e Prata, 1997).

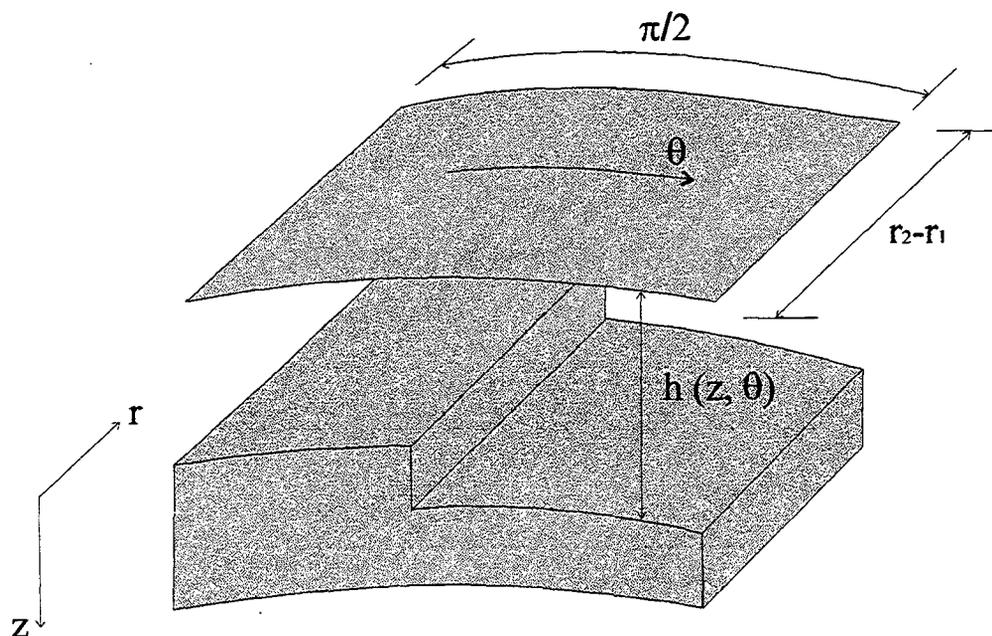


Fig.2.2 - Domínio de Solução

### 2.4.3 Cálculo da Carga Suportada pelo Mancal

A carga suportada pelo mancal é o resultado da integração do campo de pressão, ao longo do domínio de solução, advindo da solução da equação de Reynolds com termos inerciais centrífugos,

$$W = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} P(r, \theta) r dr d\theta \quad (2.16)$$

#### 2.4.4 Cálculo da Potência Consumida pelo Atrito

A potência consumida pelo atrito é o produto da força cisalhante no mancal pela velocidade linear,

$$\text{Pot} = F_c \omega r \quad (2.17)$$

A força cisalhante mostrada na equação acima é dada por,

$$F_c = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \tau r dr d\theta \quad (2.18)$$

onde a tensão cisalhante é dada por,

$$\tau = -\mu \left. \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (2.19)$$

Escolheu-se aqui a superfície da parte móvel do mancal para o cálculo da tensão cisalhante. Derivando  $V_\theta$  que é dada pela equação (2.9) e substituindo  $z = 0$  na equação resultante e voltando à equação (2.19) tem-se,

$$\tau = \frac{h}{2r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\mu \omega r}{h} \quad (2.20)$$

Substituindo (2.20) em (2.18) e o resultado em (2.17) tem-se,

$$\text{Pot} = \frac{\omega}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r1}^{r2} h \frac{\partial P}{\partial \theta} r dr d\theta + \mu \omega^2 \int_0^{2\pi} \int_{r1}^{r2} \frac{r^3}{h} dr d\theta \quad (2.21)$$

Ao resolver-se a equação acima obtém-se a potência consumida em mancais de escora circulares. Convém observar que a equação anterior incorpora o atrito viscoso associado ao escoamento devido ao gradiente de pressão bem como o atrito associado ao escoamento de Couette, primeiro e segundo termos do lado direito, respectivamente.

# METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

## 3.1 INTRODUÇÃO

A solução da equação de Reynolds com termos inerciais, equação (2.13), só pode ser obtida numericamente. Para tal o domínio de solução é dividido em pequenos volumes de controle, e a equação (2.13) é integrada ao longo de cada um destes volumes de controle resultando em um sistema de equações algébricas. A resolução das equações algébricas é feita através do Algoritmo da Matriz Tridiagonal, TDMA, (Patankar, 1980) na direção radial e do TDMA circular, CTDMA, (Patankar et al., 1977) na direção circunferencial, juntamente com uma varredura das linhas em ambas as direções através do método linha por linha (Patankar, 1980).

## 3.2. OBTENÇÃO DO CAMPO DE PRESSÃO

### 3.2.1. Método dos Volumes Finitos

O cálculo da carga suportada, bem como da potência consumida pelo mancal devido ao atrito dependem do campo de pressão atuante no filme de óleo lubrificante. A obtenção do campo de pressão é feita através da integração da equação de Reynolds com termos centrífugos inerciais, equação (2.13), via método dos volumes finitos (Patankar, 1980, Maliska, 1995, Versteeg e Malalasekera, 1995, Ferziger e Perić, 1996). A utilização do método de volumes finitos na integração da equação de Reynolds tem sido realizada com bastante sucesso em mancais radiais tanto em carregamento estático como dinâmico (ver por exemplo Manke, 1991).

A discretização do domínio computacional é apresentada na figura 3.1, que mostra apenas um setor circular em relação às suas coordenadas  $r$  e  $\theta$ . Conforme ilustrado na figura, a cada volume de controle elementar está associado um ponto nodal.

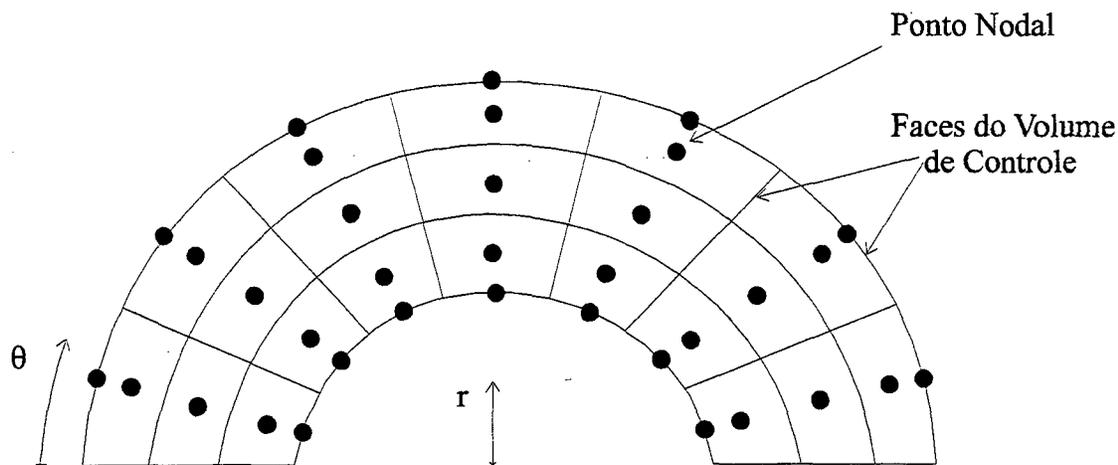


Fig. 3.1 - Discretização do domínio de Solução

Um volume de controle típico é mostrado na figura 3.2, onde o ponto nodal  $P$  é destacado, juntamente com seus oito vizinhos,  $N$ ,  $NE$ ,  $NW$ ,  $S$ ,  $SE$ ,  $SW$ ,  $W$  e  $E$ .

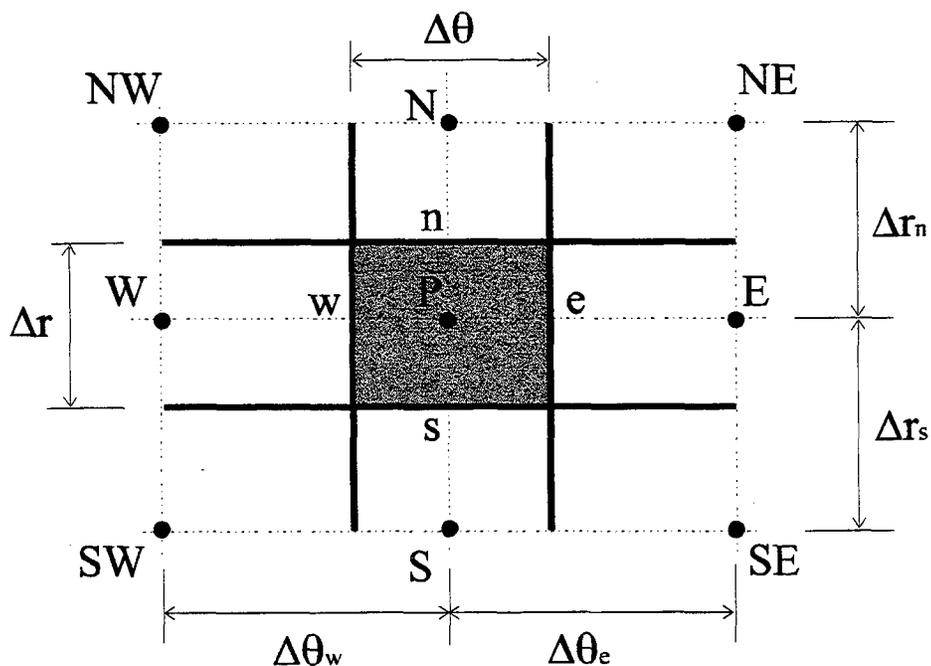


Fig. 3.2 - Volume de controle típico

Integrando a equação (2.14) ao longo do volume de controle típico da figura 3.2, tem-se,

$$\int_s^e \int_w^c \frac{\partial}{\partial r} \left\{ rh^3 \frac{\partial P}{\partial r} + \rho \left[ \frac{\omega h^5}{10\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{3h^7}{280(\mu r)^2} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{3}{10} (\omega r)^2 h^3 \right] \right\} dr d\theta + \int_s^e \int_w^c \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h^3}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) dr d\theta = \int_s^e \int_w^c 6\mu\omega r \frac{\partial h}{\partial \theta} dr d\theta \quad (3.3)$$

Realizando a integração de cada termo de acordo com a prática do método de volumes finitos (Patankar, 1980), resulta em,

$$\begin{aligned} & \left[ \left( rh^3 \frac{\partial P}{\partial r} \right)_n - \left( rh^3 \frac{\partial P}{\partial r} \right)_s \right] \Delta\theta - \frac{3\rho}{280\mu^2} \left\{ \left[ \frac{h^7}{r^2} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 \right]_n - \left[ \frac{h^7}{r^2} \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 \right]_s \right\} \Delta\theta + \\ & + \frac{\omega\rho}{10\mu} \left[ \left( h^5 \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_n - \left( h^5 \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_s \right] \Delta\theta - \frac{3}{10} \omega^2 \rho \left[ \left( h^3 r^2 \right)_n - \left( h^3 r^2 \right)_s \right] \Delta\theta + \\ & + \left[ \left( \frac{h^3}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_e - \left( \frac{h^3}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_w \right] \Delta r = 6\mu\omega (h_e - h_w) r_p \Delta r \end{aligned} \quad (3.4)$$

os limites s, n, w, e representam as faces do volume de controle, e P é o ponto central do volume de controle. As faces dos volumes de controle são alinhadas com a interface entre o rebaixo e o ressalto da sapata e o valor de h nesta interface é calculado através de uma média harmônica entre o rebaixo e o ressalto. Esta média harmônica é utilizada para contornar a indeterminação de h nestes pontos e surge de um tratamento fisicamente consistente da vazão de óleo nestas posições. (Patankar, 1980).

As derivadas da pressão nas faces foram aproximadas por interpolação linear,

$$\frac{\partial P}{\partial r} \Big|_n = \frac{P_N - P_P}{\Delta r_n} \quad e \quad \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_s = \frac{P_P - P_S}{\Delta r_s} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} \Big|_e = \frac{P_E - P_P}{\Delta r_e} \quad e \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} \Big|_w = \frac{P_P - P_W}{\Delta r_w} \quad (3.6)$$

Substituindo as expressões (3.5) e (3.6) em (3.4) e após alguns manipulações algébricas, tem-se,

$$a_p P_p = a_N P_N + a_s P_s + a_E P_E + a_w P_w + S \quad (3.7)$$

ou

$$a_p P_p = \sum a_{VIZ} P_{VIZ} + S \quad (3.8)$$

A expressão acima representa a equação de Reynolds com termos inerciais centrífugos discretizada para um volume do domínio de solução. Para uma malha igualmente espaçada nas direções radial e circunferencial ( $\Delta r_n = \Delta r_s = \Delta r$  e  $\Delta \theta_e = \Delta \theta_w = \Delta \theta$ ), tem-se,

$$a_p = a_N + a_s + a_E + a_w \quad (3.9)$$

$$a_N = \frac{h_n^3 \Delta \theta r_n}{\Delta r} \quad e \quad a_s = \frac{h_s^3 \Delta \theta r_s}{\Delta r} \quad (3.10)$$

$$a_E = \frac{h_e^3 \Delta r}{r_e \Delta \theta} \quad e \quad a_w = \frac{h_w^3 \Delta r}{r_w \Delta \theta} \quad (3.11)$$

e

$$S = \frac{3\rho}{280\mu^2} \left\{ \frac{h_s^7}{r_s^2} \left[ \frac{P_E + P_{SE} - P_w - P_{SW}}{4} \right]^2 - \frac{h_n^7}{r_n^2} \left[ \frac{P_E + P_{NE} - P_w - P_{NW}}{4} \right]^2 \right\} +$$

$$+ \frac{\rho \omega h_n^5}{10\mu} \left( \frac{P_E + P_{NE} - P_w - P_{NW}}{4} \right) - \frac{\rho \omega h_s^5}{10\mu} \left( \frac{P_E + P_{SE} - P_w - P_{SW}}{4} \right) -$$

$$- \frac{3}{10} \omega^2 \rho \Delta \theta (h_n^3 r_n^2 - h_s^3 r_s^2) - 6\mu \omega r_p \Delta r (h_e - h_w) \quad (3.12)$$

As pressões que surgem no termo fonte, S, são assumidas da última iteração, ou seja, para estas pressões foi aplicada uma formulação totalmente explícita. Tal prática torna mais simples o tratamento da não linearidade presente na equação de Reynolds com termos inerciais centrífugos.

### 3.2.2. Solução das Equações Algébricas.

#### 3.2.2.1. Direção Radial

A equação (3.8) representa uma equação típica do sistema de equações algébricas obtido a partir de cada volume de controle do domínio discretizado. A variável do ponto P é dependente dos pontos nodais vizinhos (E, W, N, S, NE, NW, SE, SW) e para cada ponto nodal, tem-se uma equação algébrica, que ao ser resolvida fornece a pressão para aquele ponto. Sendo assim, o conjunto de pontos nodais do domínio discretizado juntamente com as equações que representam estes pontos, formam um sistema de equações determinado, pois cada variável possui sua respectiva equação.

A solução do sistema de equações algébricas na direção radial será obtida pelo Algoritmo da Matriz Tri-Diagonal — TDMA. Em uma dimensão o TDMA fornece, sem iterações, a solução do sistema de equações algébricas. A seguir será apresentada uma variante do TDMA, denominada de método linha por linha, que pode ser empregado para casos bidimensionais.

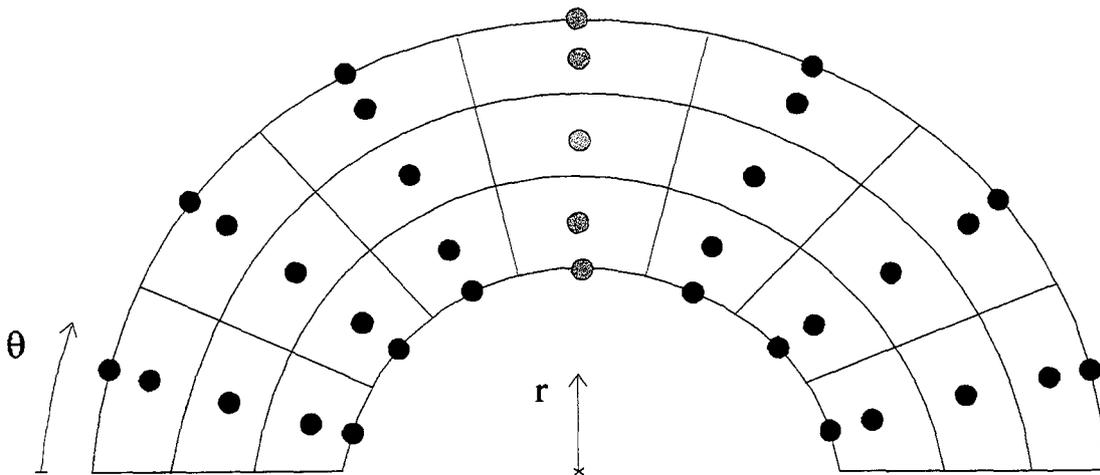


Fig. 3.3 - Malha do domínio de solução discretizado - direção radial

Considere o domínio de solução discretizado, conforme mostra a figura 3.3, com seus pontos nodais e uma linha em destaque. O método consiste em aplicar o TDMA a cada linha de pontos nodais na direção radial. Por exemplo, supõe-se que os pontos nodais vizinhos da

esquerda e da direita dos pontos nodais em destaque da figura anterior sejam conhecidos. Desta maneira, o caráter bidimensional representado pela equação (3.8) torna-se unidimensional e a equação algébrica para a pressão pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_P P_P = a_N P_N + a_S P_S + S' \quad (3.13)$$

onde,

$$S' = a_E P_E + a_W P_W + S \quad (3.14)$$

A equação (3.13) pode ser resolvida pelo TDMA e este mesmo processo pode ser aplicado à linha seguinte e assim sucessivamente, até todo o domínio ser varrido, sempre atualizando o campo de pressão calculado. Para transportar eficazmente as informações dos contornos do domínio, sugere-se fazer duas varreduras no domínio de solução através do TDMA da seguinte forma: linhas radiais da esquerda para a direita, e linhas radiais da direita para a esquerda. No apêndice II é apresentado o algoritmo TDMA.

### 3.2.2.2. Direção Circunferencial

A solução do sistema de equações algébricas na direção circunferencial será obtida pelo algoritmo CTDMA. Semelhante ao TDMA, o CTDMA fornece, sem iterações, a solução do sistema de equações na direção circunferencial. A principal diferença entre o CTDMA e o TDMA está nas condições de contorno. No TDMA elas são físicas enquanto que no CTDMA as mesmas são computacionais devido à geometria ser circular, ou seja, as informações da fronteira a leste são iguais as da fronteira a oeste, conforme observado na figura 3.4. A seguir será apresentada uma variante do CTDMA que pode ser empregado para casos bidimensionais.

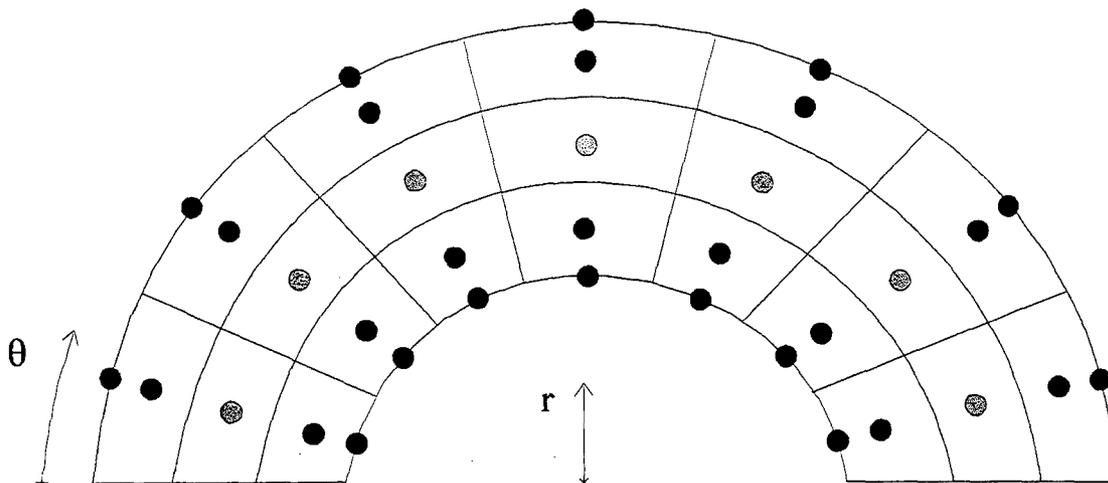


Fig. 3.4 - Malha do domínio de solução discretizado - direção circunferencial

Considere o domínio de solução discretizado, conforme a figura 3.4 com seus pontos nodais e uma linha em destaque. O método consiste em aplicar o CTDMA a cada linha de pontos nodais na direção circunferencial. Por exemplo, supõem-se que os pontos nodais vizinhos de cima e de baixo dos pontos nodais em destaque da figura anterior sejam conhecidos. Desta maneira, o caráter bidimensional representado pela equação (3.8) torna-se unidimensional e a equação algébrica para a pressão pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_p P_p = a_e P_e + a_w P_w + S' \quad (3.15)$$

onde,

$$S' = a_n P_n + a_s P_s + S \quad (3.16)$$

A equação (3.15) pode ser resolvida pelo CTDMA e este mesmo processo pode ser aplicado à linha seguinte e assim sucessivamente, até que todo o domínio seja varrido, sempre atualizando o campo de pressão calculado. Por este motivo é conhecido como CTDMA linha por linha. Para transportar eficazmente as informações dos contornos do domínio, sugere-se fazer na direção circunferencial duas varreduras através do CTDMA da seguinte forma: linhas circunferenciais de baixo para cima, e linhas circunferenciais de cima para baixo. No apêndice III é apresentado o algoritmo CTDMA.

A aplicação da metodologia descrita anteriormente culmina com a obtenção do campo de pressão.

### 3.3. CARGA SUPORTADA PELO MANCAL

Com o campo de pressão é possível obter a carga suportada pelo mancal. Para isto escrever-se-á a equação (2.16) através de somatórios, os quais representam uma integração numérica. Assim,

$$W = \sum_{j=2}^{nr-1} \left( \sum_{i=1}^{nc} P_{i,j} \Delta\theta \right) r_j \Delta r \quad (3.17)$$

onde,

$nr$  - número de pontos nodais na direção radial.

$nc$  - número de pontos nodais na direção circunferencial.

$P_{i,j}$  - matriz que representa o campo de pressão.

$r_j$  - vetor que representa a posição radial.

Nota-se que, na direção radial, o contador  $j$  vai de 2 a  $nr-1$ . Isto ocorre porque, conforme é mostrado na figura 3.1, na discretização da direção radial, os pontos da fronteira não representam um volume de controle, sendo usados somente para a aplicação das condições de contorno.

### 3.4. POTÊNCIA CONSUMIDA PELO ATRITO

Procedimento semelhante ao aplicado para a carga suportada pelo mancal será aplicado para a potência consumida pelo atrito. Porém, conforme requerido na equação (2.21), precisa-se antes conhecer a espessura do filme lubrificante e a derivada da pressão em relação a  $\theta$ .

A espessura do filme lubrificante é conhecida conforme sua variação com  $\theta$ , ou seja,

$$h_{i,j} = h_1 \quad \text{para} \quad 0 \leq \theta < \theta_1 \quad (3.18)$$

e

$$h_{i,j} = h_2 \quad \text{para} \quad \theta_1 < \theta < \theta_2 \quad (3.19)$$

Usando-se o campo de pressão discretizado, a derivada da pressão em relação a  $\theta$  é dada por,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}} \quad (3.20)$$

onde foi adotada uma aproximação central para calcular a derivada.

Assim, usando-se a equação (3.20) e considerando-se  $h_{i,j}$  como mostrado nas equações (3.18) e (3.19), a equação (2.21) pode ser escrita como,

$$\text{Pot} = \sum_{j=2}^{nr-2} \left[ \sum_{i=1}^{nc} \left( \frac{\omega}{2} h_{i,j} \left. \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|_{i,j} r_j + \mu \omega^2 \frac{r_j^3}{h_{i,j}} \right) \Delta \theta \right] \Delta r \quad (3.21)$$

As considerações feitas para a equação (3.17) são válidas também para a equação (3.21).

### 4.1. INTRODUÇÃO

Otimização pode ser definido como um processo de procura de parâmetros que fornece o máximo ou o mínimo valor de uma função, comumente chamada função objetiva. O método de otimização pode ser: uma técnica de programação matemática, de processo estocástico, ou ainda um método estatístico (Rao, 1996).

O problema ao qual se refere este trabalho é determinar a melhor geometria para um mancal de escora, que permita suportar uma mesma carga consumindo a menor potência. O método a ser utilizado na solução deste problema de otimização será o método dos Multiplicadores de Lagrange, que esta inserido nas técnicas lineares de programação matemática.

### 4.2. MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Este método consiste em otimizar uma função  $f(X)$  com um conjunto de restrições, as quais também podem ser funções representadas por ,

$$g_j(X) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.1)$$

onde  $X$  representa as variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Defini-se a função de Lagrange,  $L$ , pela introdução dos multiplicadores de Lagrange,  $\lambda_j$ , para cada restrição,  $g_j(X)$  como,

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(X) + \lambda_1 g_1(X) + \lambda_2 g_2(X) + \dots + \lambda_m g_m(X) \quad (4.2)$$

Sendo  $L$  uma função de  $n+m$  variáveis,  $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , a condição para um ponto crítico de  $L$ , é dada por,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \text{ para } i=1, 2, \dots, n \quad (4.3)$$

As equações (4.1) e (4.3) representam um conjunto de  $n+m$  equações com um número igual de incógnitas,  $x_i$  e  $\lambda_j$ . A solução deste sistema de equações é dada por,

$$X^* = \begin{Bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^* \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda^* = \begin{Bmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_m^* \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

O vetor  $X^*$  corresponde ao ótimo de  $f(X)$  relativo as restrições impostas. O vetor  $\lambda^*$  representa a sensibilidade de  $f(X)$  em relação às restrições, ou seja, como  $f(X)$  varia com as restrições, (Rao, 1996). O asterisco representa a solução ótima.

Neste ponto do texto caberia uma discussão sobre a natureza do ponto crítico, ou seja, se o mesmo é de mínimo, máximo, sela, cume ou vale. Tal discussão é geralmente importante em problemas matemáticos. Para problemas de natureza física, como os que são explorados aqui, pontos de sela, cume ou vale são raros. E em vista disto uma elaboração mais aprofundada sobre a natureza do ponto crítico é deixada para a literatura especializada (Rao, 1996 e Stoecker, 1989).

### 4.3. SAPATA DE RAYLEIGH

A função objetiva que se deseja minimizar no presente trabalho é a potência consumida por atrito. Para mancais de escora com sapata de Rayleigh, a potência consumida por atrito é dada por,

$$\text{Pot} = \text{Pot}(\theta_1, \theta_2, \Delta h, h_1, r_2) \quad (4.5)$$

No presente caso, a otimização do mancal estará sujeito às seguintes restrições:

a) A carga que o mancal deve suportar é igual a 12 N.

$$W = W(\theta_1, \theta_2, \Delta h, h_1, r_2) = \sum_{j=2}^{nr-1} \left( \sum_{i=1}^{nc} P_{i,j} \Delta \theta \right) r_j \Delta r = 12 \text{ N} \quad (4.6)$$

Esta carga é típica para compressores alternativos de refrigeração doméstica.

b) A soma entre o ângulo do rebaixo e do ressalto do mancal deve ser igual a  $\frac{2\pi}{nr}$

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{2\pi}{nr} \quad (4.7)$$

onde, nr é o número de ressaltos do mancal.

Para a situação em consideração, os seguintes parâmetros serão fixados e permanecerão invariantes:  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\omega$  e  $r_1$ .

Aplicando o método dos Multiplicadores de Lagrange, a este problema particular tem-se

$$L(\theta_1, \theta_2, \Delta h, h_1, r_2) = \text{Pot}(\theta_1, \theta_2, \Delta h, h_1, r_2) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j \quad (4.8)$$

ou

$$L(\theta_1, \theta_2, \Delta h, h_1, r_2) = \text{Pot}(\theta_1, \theta_2, \Delta h, h_1, r_2) + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \quad (4.9)$$

onde,

$$g_1 = W(\theta_1, \theta_2, \Delta h, h_1, r_2) - 12 \quad (4.10)$$

e

$$g_2 = \theta_1 + \theta_2 - \frac{2\pi}{nr} \quad (4.11)$$

Assim, desenvolvendo a equação indicial (4.3), tem-se

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \text{Pot}}{\partial \theta_1} + \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \theta_1} + \lambda_2 = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \text{Pot}}{\partial \theta_2} + \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \theta_2} + \lambda_2 = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta h} = \frac{\partial \text{Pot}}{\partial \Delta h} + \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \Delta h} = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial h_1} = \frac{\partial \text{Pot}}{\partial h_1} + \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial h_1} = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_2} = \frac{\partial \text{Pot}}{\partial r_2} + \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial r_2} = 0 \quad (4.16)$$

Rescrevendo-se as equações anteriores de uma maneira mais compacta, resulta em

$$a + \lambda_1 f + \lambda_2 = 0 \quad (4.17)$$

$$b + \lambda_1 g + \lambda_2 = 0 \quad (4.18)$$

$$c + \lambda_1 h = 0 \quad (4.19)$$

$$d + \lambda_1 i = 0 \quad (4.20)$$

$$e + \lambda_1 j = 0 \quad (4.21)$$

onde,

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial \text{Pot}}{\partial \theta_1} & , & & f &= \frac{\partial W}{\partial \theta_1} \\ b &= \frac{\partial \text{Pot}}{\partial \theta_2} & , & & g &= \frac{\partial W}{\partial \theta_2} \\ c &= \frac{\partial \text{Pot}}{\partial \Delta h} & , & & h &= \frac{\partial W}{\partial \Delta h} \\ d &= \frac{\partial \text{Pot}}{\partial h_1} & , & & i &= \frac{\partial W}{\partial h_1} \\ e &= \frac{\partial \text{Pot}}{\partial r_2} & , & & j &= \frac{\partial W}{\partial r_2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Subtraindo-se a equação (4.18) da equação (4.17), tem-se

$$a - b + \lambda_1 (f - g) = 0 \quad (4.23)$$

Substituindo sucessivamente as equações (4.19), (4.20) e (4.21) na equação (4.23), obtém-se respectivamente,

$$a - b + \frac{c}{h}(g - f) = 0 \quad (4.24)$$

$$a - b + \frac{d}{i}(g - f) = 0 \quad (4.25)$$

$$a - b + \frac{e}{j}(g - f) = 0 \quad (4.26)$$

As equações anteriores juntamente com as duas que representam as restrições  $g_1$  e  $g_2$  impostas ao problema,

$$W(\theta_1, \theta_2, \Delta h, h_1, r_2) - 12 = 0 \quad (4.27)$$

e

$$\theta_1 + \theta_2 - \frac{2\pi}{nr} = 0 \quad (4.28)$$

formam um sistema de cinco equações com cinco incógnitas. Este sistema de equações será resolvido pelo método de Newton-Raphson para várias variáveis, conforme o apêndice I. O que se busca são os valores de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\Delta h$ ,  $h_1$  e  $r_2$  que satisfazem as equações (4.24) a (4.28). Para tal estabelece-se uma estimativa inicial para as variáveis,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\Delta h$ ,  $h_1$  e  $r_2$ , e através do método de Newton-Raphson, calculam-se incrementos para  $\Delta\theta_1$ ,  $\Delta\theta_2$ ,  $\Delta(\Delta h)$ ,  $\Delta h_1$  e  $\Delta r_2$  que permitem determinar novos valores para  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\Delta h$ ,  $h_1$  e  $r_2$ . Verifica-se então a convergência, e se esta não foi atingida o novo valor calculado passa a ser a nova estimativa. O processo é repetido até que a convergência seja atingida. Na convergência as equações de (4.24) a (4.28) serão aproximadamente iguais a zero e os últimos valores calculados para  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\Delta h$ ,  $h_1$  e  $r_2$  serão considerados os valores ótimos.

#### 4.4. SAPATA FRESADA

Para a sapata fresada com 4 ressaltos a função objetiva, que se deseja minimizar, também é a potência consumida porém, os parâmetros dos quais ela é função são outros,

$$\text{Pot} = \text{Pot} (d_f, \Delta h, h_1, r_2) \quad (4.29)$$

onde  $d_f$  é o diâmetro da fresa.

A partir da figura 1.3, que é reapresentada na figura 4.1, pode-se deduzir que,

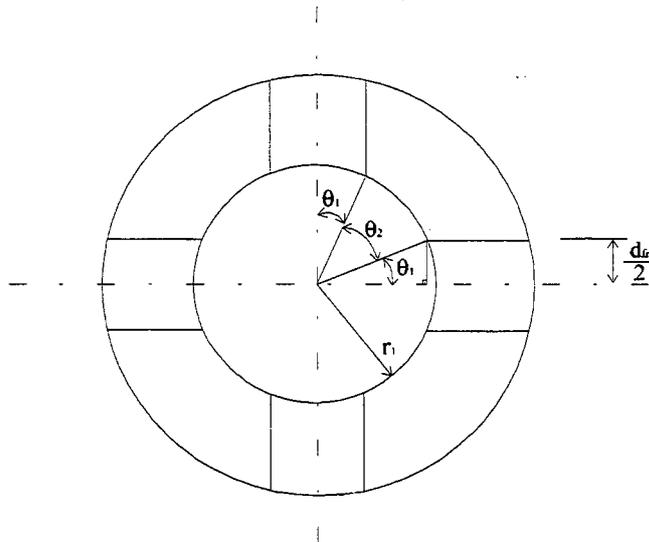


Fig 4.1 - Desenho esquemático da sapata fresada para um mancal de escora circular.

$$d_f = 2r_1 \text{sen } \theta_1 \quad (4.30)$$

e a restrição geométrica agora passa a ser,

$$2\theta_1 + \theta_2 = \frac{2\pi}{4} \quad (4.31)$$

Desta forma tanto a potência dissipada por atrito viscoso como a carga suportada pelo mancal voltam a ser funções das mesmas variáveis analisadas para a sapata de Rayleigh, ou seja,

$$\text{Pot} = \text{Pot} (\theta_1, \theta_2, \Delta h, h_1, r_2) \quad (4.5)$$

$$W = W (\theta_1, \theta_2, \Delta h, h_1, r_2) \quad (4.6)$$

Em virtude do exposto, a equação (4.17), válida para sapatas de Rayleigh, sofrerá uma pequena mudança para a sapata fresada, devido a restrição geométrica ser um pouco diferente, e tornar-se

$$a + \lambda_1 f + 2\lambda_2 = 0 \quad (4.32)$$

As outras equações advindas da aplicação dos Multiplicadores de Lagrange são as mesmas estabelecidas para a sapata de Rayleigh. Assim repetindo-se os mesmos passos adotados naquele caso, chega-se a

$$a - 2b + \frac{c}{h}(2g - f) = 0 \quad (4.33)$$

$$a - 2b + \frac{d}{i}(2g - f) = 0 \quad (4.34)$$

$$a - 2b + \frac{e}{j}(2g - f) = 0 \quad (4.35)$$

As equações anteriores juntamente com as duas advindas das restrições,

$$W(\theta_1, \theta_2, \Delta h, h_1, r_2) - 12 = 0 \quad (4.27)$$

e

$$2\theta_1 + \theta_2 - \frac{2\pi}{4} = 0 \quad (4.36)$$

formam o sistema de equações a ser resolvido por Newton-Raphson, e já discutido na seção anterior. A solução deste sistema de equações fornece os valores ótimos para  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\Delta h$ ,  $h_1$  e  $r_2$ ,

para o mancal fresado. Como  $d_{fr}$  é determinado a partir de  $\theta_1$  através da equação (4.30), tem-se na verdade os valores ótimos para  $d_{fr}$ ,  $\Delta h$ ,  $h_1$  e  $r_2$ .

#### 4.5. ALGORITMOS DE SOLUÇÃO

Com a apresentação das metodologias de solução, tanto do problema de lubrificação hidrodinâmica, bem como do problema de otimização, resta agora explorar os algoritmos associados a cada uma destas metodologias.

O primeiro problema, associado à equação da lubrificação, consiste na determinação do campo de pressão capaz de suportar uma determinada carga. Nota-se que da forma como é posto o problema da lubrificação, uma vez estabelecidos os parâmetros construtivos e de operação, ou seja,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\Delta h$ ,  $h_1$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\omega$  a equação da lubrificação fornece um campo de pressão que quando integrado ao longo do domínio resulta em uma carga  $W$  suportada pelo mancal. No caso da carga ser fornecida como parâmetro deve-se procurar o campo de pressão que resultará nesta carga dada. Do ponto de vista do mancal, este ajuste no campo de pressão que resultará em  $W$  é feito através do parâmetro  $h_1$ , que normalmente não é conhecido a priori. Assim, o primeiro algoritmo a ser explorado consiste na determinação do afastamento entre o mancal e o seu assento,  $h_1$ , que possibilita ao mancal suportar a carga pré - estabelecida. A este algoritmo dar-se-á o nome de algoritmo 1.

O algoritmo 2 a ser explorado na seqüência, será utilizado para resolver o problema de otimização proposto neste trabalho, tanto para a sapata de Rayleigh quanto para a sapata fresada.

##### 4.5.1 Algoritmo 1

1. Arbitrar  $h_1$ , com  $h_2 = h_1 - \Delta h$ .
2. Resolver a equação (3.7) para obtenção do campo de pressão.

3. Calcular a carga suportada pelo mancal, equação (3.17), e a potência consumida pelo atrito viscoso, equação (3.21).
4. Calcular por Newton-Raphson um novo valor de  $h_1$  de forma que o mancal suporte a carga pré-estabelecida.
5. Calcular a nova carga suportada pelo mancal.
6. Retornar ao passo 2 até que o critério de convergência do passo 5 seja atingido.

#### 4.5.2 Algoritmo 2

1. Arbitrar  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\Delta h$ ,  $h_1$  e  $r_2$ , com  $h_2 = h_1 - \Delta h$ .
2. Resolver a equação de Reynolds para obtenção do campo de pressão.
3. Calcular a carga suportada pelo mancal e a potência consumida.
4. Repetir os passos 2 e 3 a cada variação de um parâmetro para calcular numericamente:
  - a) As derivadas primeiras da potência e da carga em relação a cada uma das variáveis mantendo as outras constantes.
  - b) As derivadas segundas da potência e da carga com dois parâmetros variando e mantendo os outros constantes
  - c) As derivadas segundas da potência e da carga em relação a cada uma das variáveis mantendo as outras constantes

(As derivadas primeiras são necessárias para o sistema de equações provenientes dos Multiplicadores de Lagrange, as derivadas segundas são necessárias para a resolução desse sistema de equações por Newton - Raphson).

- 
5. Calcular os novos valores de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\Delta h$ ,  $h_1$  e  $r_2$  por Newton-Raphson.
  6. Verificar quanto ao critério de convergência o sistema de equações proveniente dos multiplicadores de Lagrange.
  7. Retornar ao passo 2 até que o critério de convergência do passo 6 seja atingido.

### RESULTADOS E DISCUSSÕES

#### 5.1. INTRODUÇÃO

Este capítulo é dividido em três partes. A primeira parte apresenta os resultados do código computacional cujo enfoque principal é a solução do problema de mecânica dos fluidos. Este código computacional foi implementado a partir do algoritmo 1, apresentado no capítulo 4, seção 4.5.1.

A segunda parte do capítulo apresenta os resultados do código computacional cujo enfoque principal é a otimização dos parâmetros geométricos do mancal de escora, com o objetivo de consumir a menor potência suportando uma determinada carga. Este código computacional foi implementado a partir do algoritmo 2, apresentado no capítulo 4, e foi usado tanto para explorar os mancais com setores circulares como para o mancal com setor fresado, sendo que para o último o código sofre uma pequena modificação devido à mudança na restrição geométrica, conforme mostrado na seção 4.4. Nesta etapa o raio externo do mancal,  $r_2$ , foi mantido constante.

A terceira parte do capítulo difere da segunda apenas pelo fato de nesta etapa o raio externo do mancal,  $r_2$ , ser também otimizado.

#### 5.2. O PROBLEMA DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

O principal resultado proveniente da solução da equação de Reynolds é o campo de pressão, gerado pelo efeito cunha, e causado pela restrição imposta ao escoamento ao passar do

rebaixo para o ressalto do mancal. Serão analisados aqui os campos de pressão para mancais com 4, 8 e 16 ressaltos, através de um código computacional gerado a partir do algoritmo 1.

Os parâmetros geométricos fixos dos mancais estão listados na tabela abaixo, de acordo com o número de ressaltos do mancal.

**Tabela 5.1 Parâmetros Geométricos do Mancal de Escora com Setores Circulares**

	Número de Ressaltos		
	4	8	16
$\theta_1$ (°)	60	25	12,5
$\theta_2$ (°)	30	20	10
$\Delta h$ (µm)	5,00	5,00	5,00
$r_1$ (mm)	10,50	10,50	10,50
$r_2$ (mm)	13,25	13,25	13,25

As propriedades termofísicas do óleo lubrificante e os parâmetros de operação do mancal são listados a seguir. Estas propriedades e estes parâmetros serão os mesmos para todas as simulações envolvidas neste trabalho.

$\mu = 0,00274$ kg/m.s	( viscosidade absoluta do lubrificante )
$\rho = 876$ kg/m <sup>3</sup>	( massa específica do lubrificante )
$N = 60$ Hz	( frequência angular da parte móvel do mancal )
$W = 12$ N	( carga que o mancal deve suportar )

### 5.2.1 Estudo de Malha

Com o intuito de se conhecer a malha que melhor represente os gradientes de pressão, resultados para diferentes malhas serão explorados. A ênfase será dada na variação da pressão ao longo da direção circunferencial uma vez que é nesta direção que ocorrem os maiores gradientes de pressão em virtude das restrições impostas ao escoamento pela presença do ressalto.

Os resultados numéricos serão obtidos também para o que poderia ser a solução exata para o modelo em questão, de acordo com a metodologia apresentada por Roache (1993). A solução exata é obtida por extrapolação da solução numérica e no que segue será denominada de solução extrapolada. Roache mostra que se pode obter uma solução razoável com uma malha mais grosseira, desde que extrapole-se o resultado desta malha mais grosseira em relação a uma malha mais refinada a partir da seguinte formulação.

$$f \cong \frac{f_2 + (f_1 - f_2)r^p}{(r^p - 1)} \quad (5.1)$$

onde,

f - valor da variável extrapolada.

$f_1$  - valor da variável obtida com a malha mais refinada.

$f_2$  - valor da variável obtida com a malha mais grosseira.

r - relação entre as malhas.

p - ordem do método.

O erro entre a solução extrapolada e a solução com a malha mais grosseira não deve ser muito superior ao erro da malha mais refinada em relação a solução extrapolada

A distribuição de pressão em função da posição circunferencial para um mancal com quatro ressaltos é apresentada na figura 5.1 para  $r = (r_1 + r_2) / 2$ . As curvas são mostradas para malhas de 360x48 e 180x24 volumes de controle nas direções circunferenciais e radiais, respectivamente, e para a solução extrapolada. Em virtude da simetria circunferencial, os resultados são apresentados para apenas um ressalto.

Percebe-se que a malha 180x24 comporta-se razoavelmente bem em relação tanto a malha 360x48 quanto ao resultado extrapolado. Nesta análise r e p são respectivamente iguais a 2 e 1. As maiores diferenças entre os resultados são observadas na região da pressão máxima, e correspondem a desvios entre a malha mais grosseira e a solução extrapolada de 8 %. Os desvios entre a malha mais refinada e a solução extrapolada foram de 4%, ou seja, a malha mais grosseira não se afasta muito da solução extrapolada se comparada com a solução mais refinada.

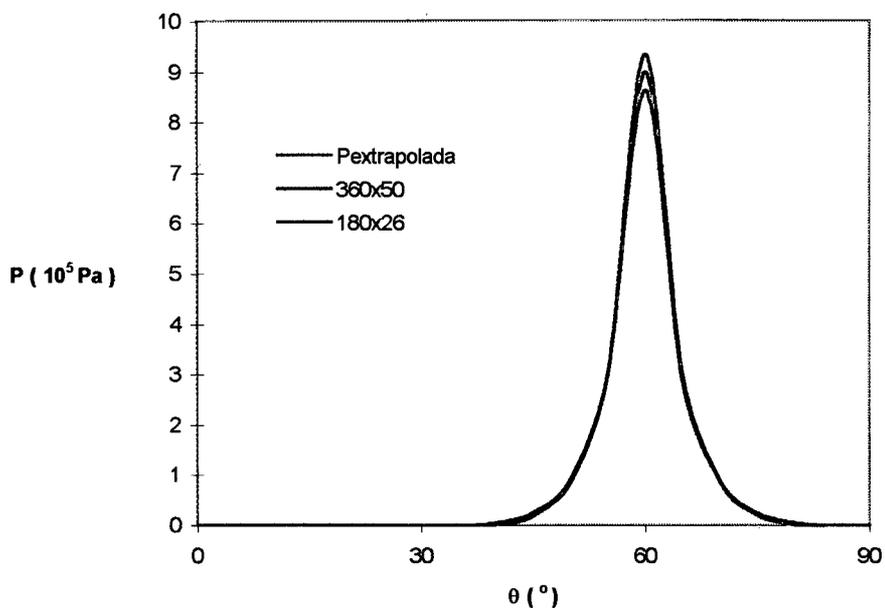


Fig. 5.1 Distribuição de pressão ao longo da direção circunferencial para um mancal com 4 Ressaltos, na posição  $r = (r_1+r_2) / 2$

Um outro resultado a ser apresentado é a potência consumida pelo mancal em função da malha computacional e do resultado extrapolado entre elas e isso é apresentado na tabela 5.1.

**Tabela 5.2 - Potência consumida e erro percentual relativo à malha extrapolada**

	malha (θxr)		res. extr.
	180x26	360x50	
Pot. ( W )	2,46	2,57	2,67
ε %	8	4	-

Também neste caso o resultado da malha 180x26 é satisfatório em relação ao resultado extrapolado já que para se atingir 4% de erro em relação ao resultado extrapolado é necessário que o número de volumes de controle na duas direções seja duas vezes maior, o que acarreta em um tempo computacional da ordem de 13 vezes maior.

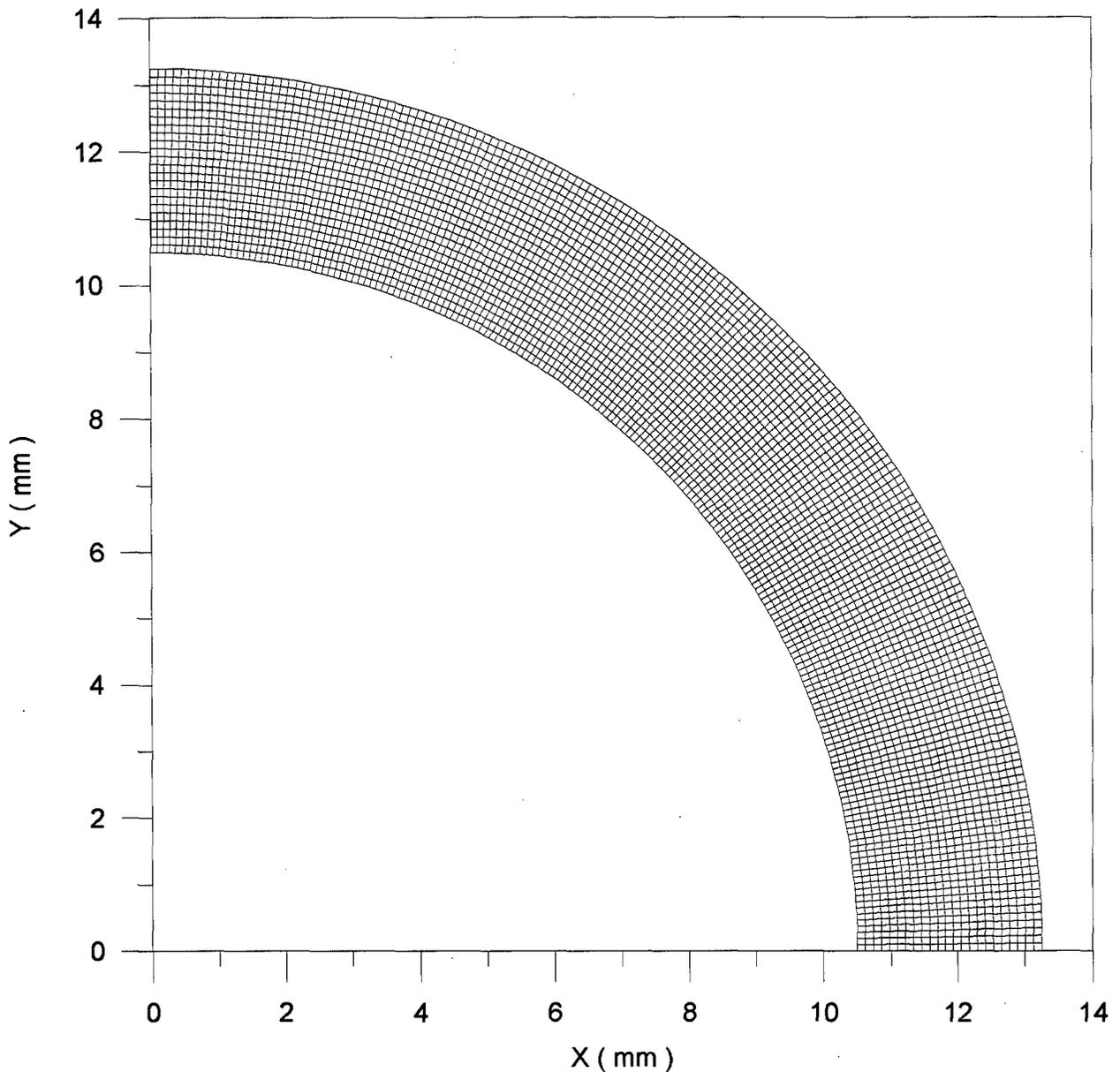


Fig. 5.2 - Malha com 180x25 pontos nodais.

Baseando-se na análise dos resultados anteriores optou-se pelo uso de uma malha com 180x25 pontos nodais. A figura 5.2 apresenta a malha com 180x25 pontos nodais na direção circunferencial e radial respectivamente. Observa-se que a malha apresentada possui os volumes de controle com razão de aspecto bem próxima de um o que é muito conveniente do ponto de vista do método dos volumes finitos uma vez que torna os coeficientes de acoplamento entre o ponto nodal e seus vizinhos (equação 3.7) da mesma ordem de grandeza. Como a malha a ser adotada na simulação de mancais com diferentes números de ressalto possui volumes de controle

sempre do mesmo tamanho, esta isotropia dos volumes de controle dos volumes de controle é mantida nos mancais com oito e dezesseis ressaltos.

### 5.2.2 Campos de Pressão

Com a definição da malha computacional mostrar-se-á agora os resultados de campo de pressão para os mancais com 4, 8 e 16 ressaltos; os parâmetros geométricos são aqueles listados na tabela 5.1. Os resultados são gerados a partir do código computacional implementado através do algoritmo 1.

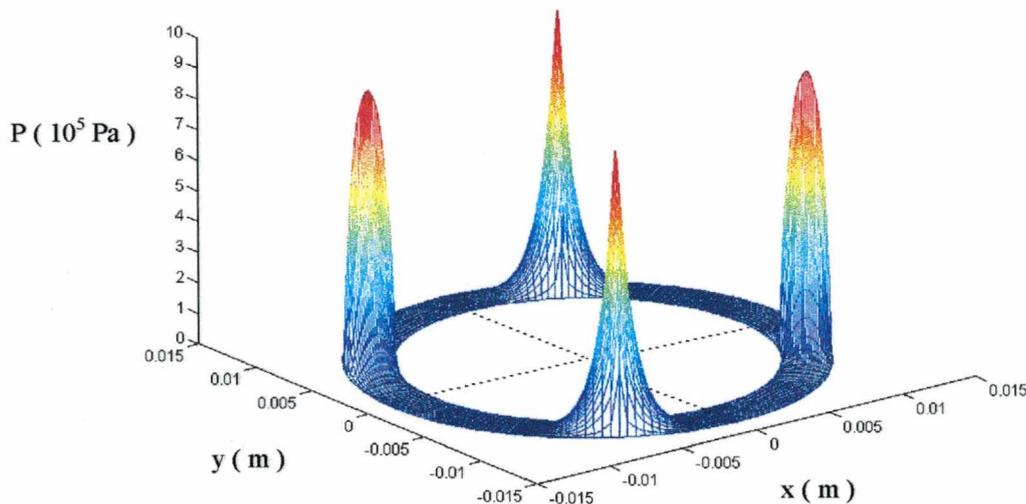


Fig 5.3 - Distribuição de pressão em função de  $x$  e  $y$  para um mancal com 4 ressaltos.

A figura 5.3 apresenta o campo de pressão em função das coordenadas cartesianas,  $x$  e  $y$  para um mancal com 4 ressaltos. Nesta figura fica bem claro 4 picos de pressão nas regiões do mancal onde ficam localizados os ressaltos. Uma análise destes picos de pressão é feita ao se apresentar a figura 5.4 a seguir.

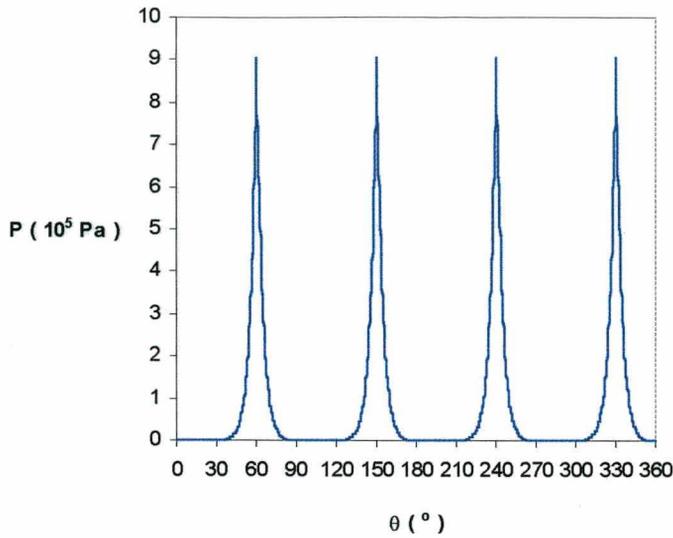


Fig 5.4 - Distribuição de pressão ao longo de  $\theta$  para um mancal com 4 ressaltos, na posição  $r = (r_1 + r_2) / 2$

A figura 5.4 apresenta a distribuição de pressão em função do ângulo  $\theta$  para um mancal com 4 ressaltos. Esta distribuição de pressão foi tomada na seção média da direção radial. Observando-se esta figura nas proximidades de  $\theta = 60^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $240^\circ$  e  $330^\circ$ , percebe-se a existência de um acentuado pico na pressão. São nestas posições que existem mudanças do rebaixo para o ressalto, o que ocasiona uma diminuição da área de escoamento, e provoca este acréscimo de pressão. Nota-se comportamento semelhante para os mancais com 8 e 16 ressaltos, mudando apenas a posição do pico na pressão como mostrar-se-á a seguir.

Um fato importante a ser observado em relação à figura 5.4 é que a região do mancal ativa do ponto de vista de suporte de carga compreende uma faixa radial cuja largura para o mancal com 4 ressaltos é em torno de  $40^\circ$ . Esta região se localiza em cima de cada ressalto.

A figura 5.5 apresenta o campo de pressão em função das coordenadas cartesianas,  $x$  e  $y$  para um mancal com 8 ressaltos. Nesta figura fica bem claro a presença de 8 picos de pressão nas regiões do mancal onde ficam localizados os ressaltos. Uma análise destes picos de pressão é feita ao se discutir a figura 5.6.

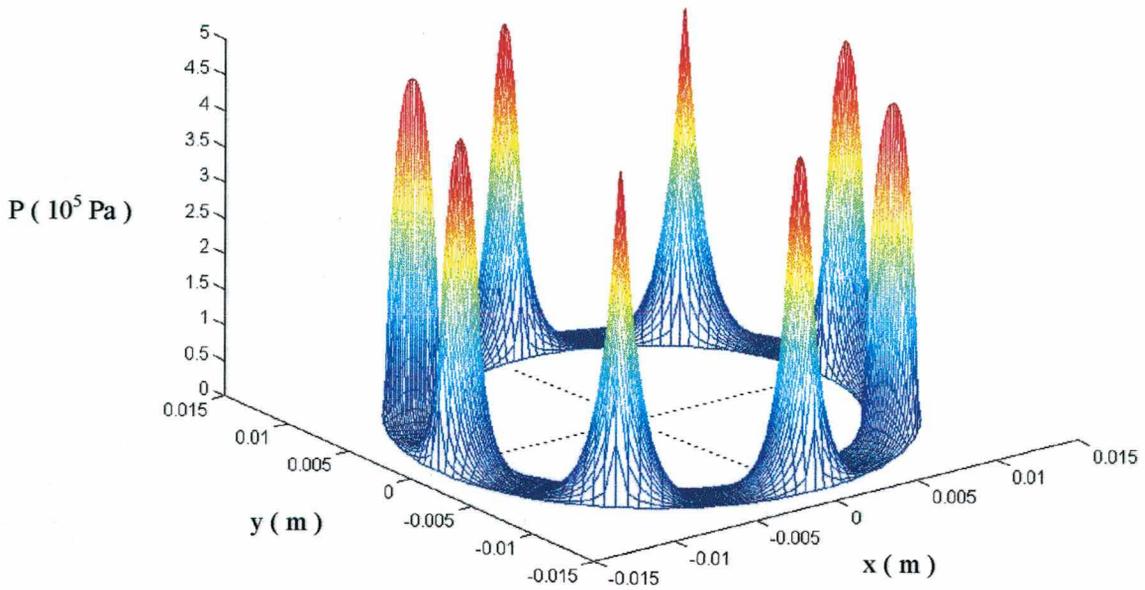


Fig 5.5 - Distribuição de pressão em função de  $x$  e  $y$  para um mancal com 8 ressaltos.

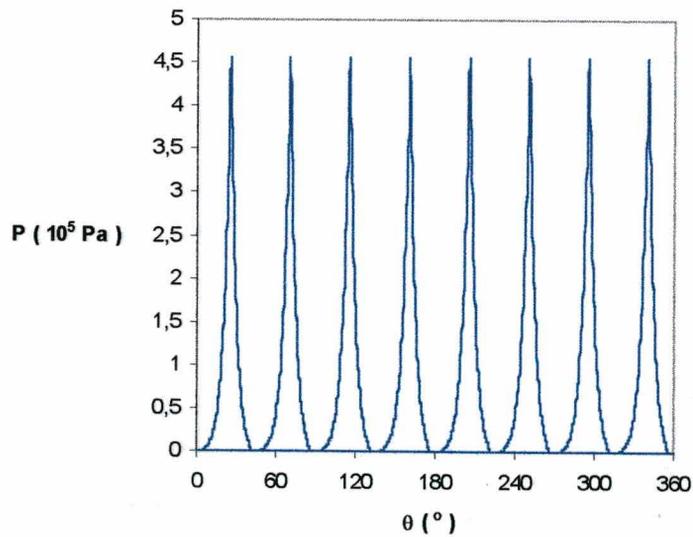


Fig 5.6 - Distribuição de pressão ao longo de  $\theta$  para um mancal com 8 ressaltos,  
na posição  $r = (r_1 + r_2) / 2$

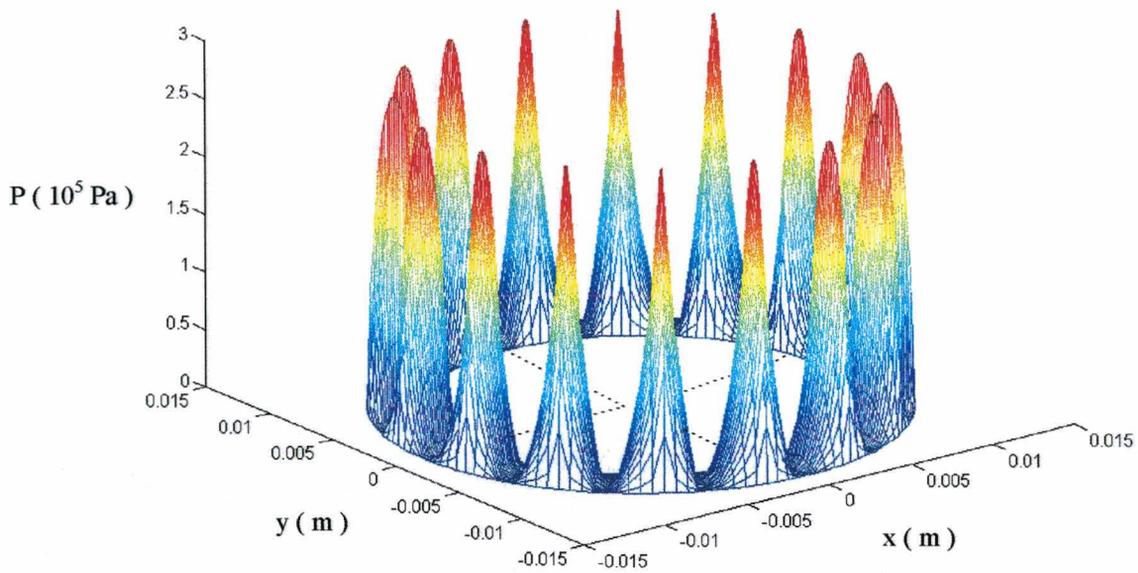


Fig 5.7 - Distribuição de pressão em função de  $x$  e  $y$  para um mancal com 16 ressalto.

A figura 5.7 apresenta o campo de pressão em função das coordenadas cartesianas,  $x$  e  $y$  para um mancal com 16 ressalto. Nesta figura fica bem claro a presença de 16 picos de pressão nas regiões do mancal onde ficam localizados os ressalto. Uma análise destes picos de pressão é feita ao se apresentar a figura 5.8 a seguir.

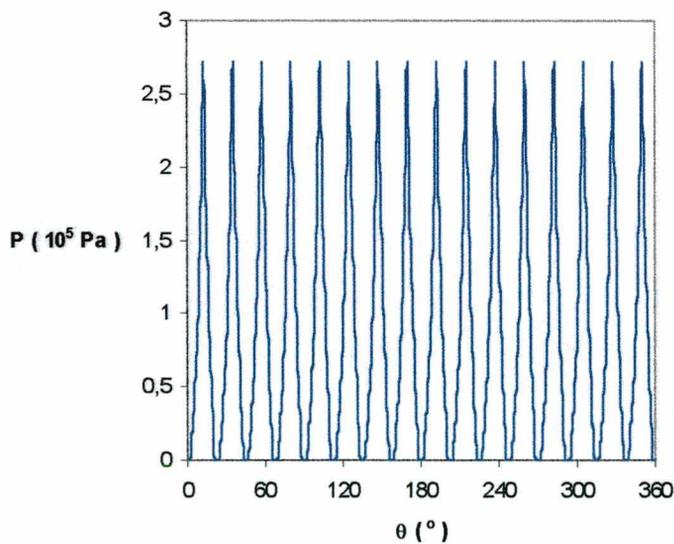


Fig 5.8 - Distribuição de pressão ao longo de  $\theta$  para um mancal com 16 ressalto, na posição  $r = (r_1 + r_2) / 2$

Nas figuras 5.3 a 5.8 percebe-se, que com o aumento do número de ressaltos do mancal, a pressão na interface entre o rebaixo e o ressalto diminui. Isto ocorre devido à existência de um maior número de regiões de restrição ao escoamento. Como a carga a ser suportada é a mesma, e o número de picos de pressão é maior, o valor da pressão em cada pico diminui. Geometricamente este efeito está associado a um aumento de  $h_1$  e  $h_2$ . Assim, estando operando com um maior afastamento do assento, o mancal deverá consumir uma potência viscosa menor. Este resultado é de fato verificado conforme ilustrado na tabela 5.2. Da tabela vê-se que a potência consumida por atrito tende a diminuir com o aumento do número de ressaltos. Conforme explicado este decréscimo na potência consumida ocorre devido ao aumento da espessura de filme fluido,  $h_1$ .

**Tabela 5.3 - Potência Consumida e  $h_1$  em Função do Número de Ressaltos do Mancal**

Nr	4	8	16
Pot. ( W )	2,46	1,90	1,51
$h_1$ ( $\mu\text{m}$ )	7,61	9,19	10,58

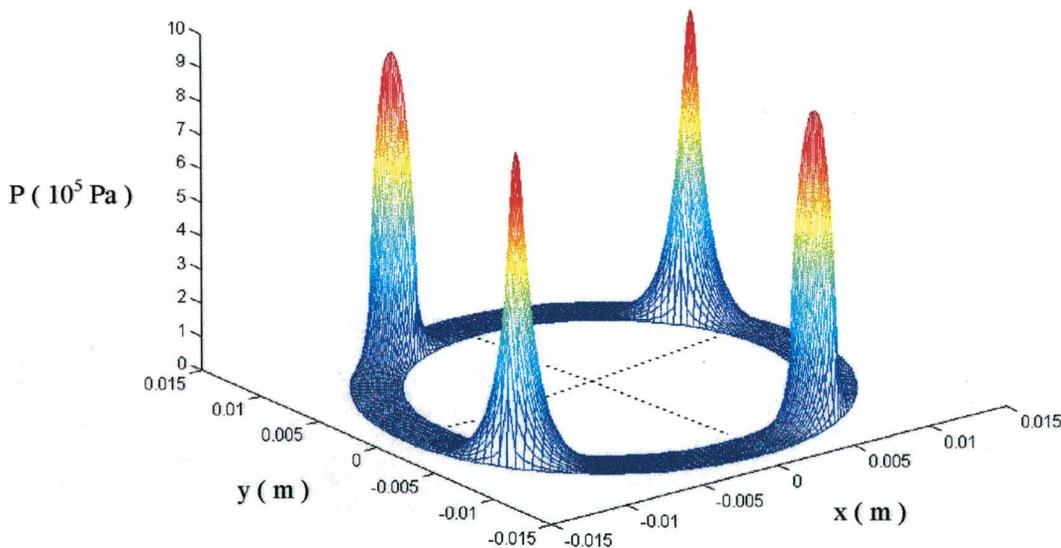


Fig 5.9 - Distribuição de pressão em função de x e y para o mancal fresado.

A figura 5.9 apresenta o campo de pressão em função das coordenadas cartesianas, x e y

para o mancal fresado. Nesta figura fica bem claro a presença dos 4 picos de pressão correspondendo aos 4 ressaltos do mancal fresado. Uma análise destes picos de pressão é feita ao se apresentar a figura 5.10 a seguir.

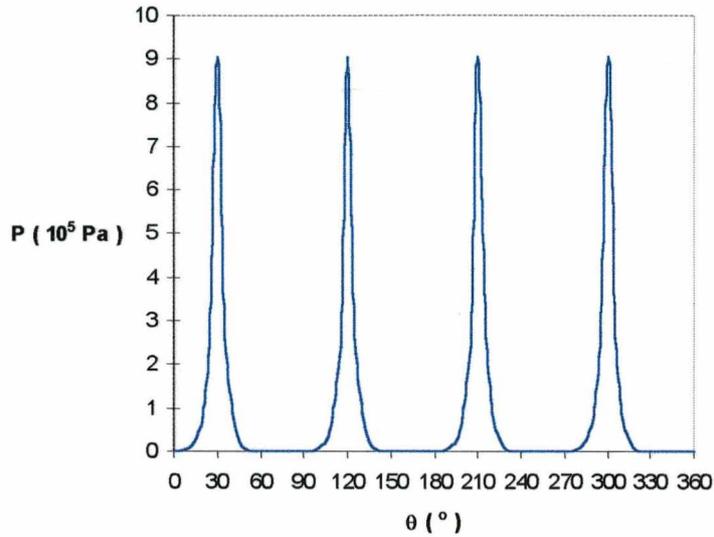


Fig 5.10 - Distribuição de pressão ao longo de  $\theta$  para o mancal fresado na posição  $r = (r_1 + r_2) / 2$

A figura 5.10 apresenta a distribuição de pressão em função do ângulo  $\theta$  para o mancal fresado. Esta distribuição de pressão foi tomada na seção média da direção radial. Observando-se esta figura nas proximidades de  $\theta = 30^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $210^\circ$  e  $300^\circ$ , percebe-se a existência de um acentuado pico na pressão. São nestas posições que existem mudanças do rebaixo para o ressaltado, o que ocasiona uma diminuição da área de escoamento, e provoca este acréscimo de pressão. Foi notado comportamento semelhante para o mancal com 4 ressaltos, mudando apenas a posição do pico na pressão.

Pode-se observar através da figura 5.10, que a exemplo do mancal com 4 ressaltos. A região do mancal ativa do ponto de vista de suporte de carga, compreende uma faixa radial cuja largura para o mancal fresado é em torno de  $40^\circ$ . Esta região se localiza em cima de cada ressaltado.

### 5.2.3 Campos de Potência

A exemplo do que foi feito para o campo de pressão foram também traçados os campos de potência para mancais com 4, 8 e 16 ressalto, utilizando-se também os parâmetros geométricos listados na tabela 5.1. Os resultados também são gerados a partir do código computacional implementado através do algoritmo 1.

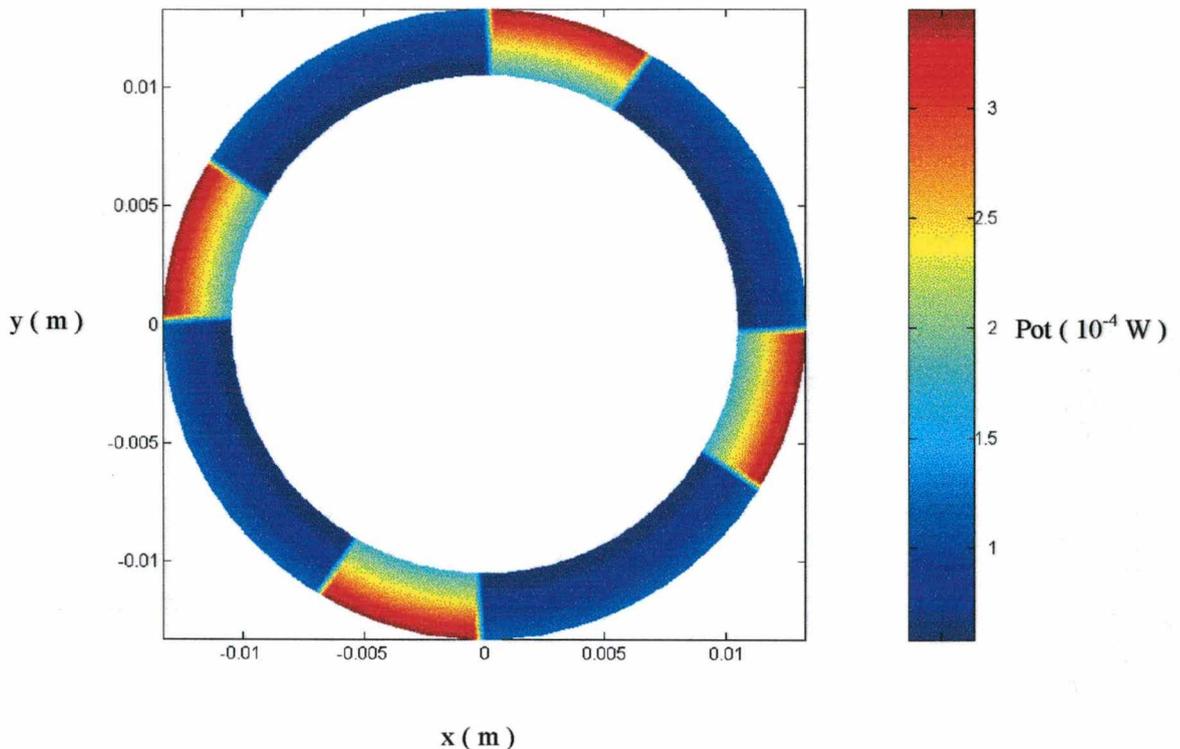


Fig 5.11 - Distribuição de potência em função de x e y para um mancal com 4 ressalto.

A figura 5.11 apresenta o campo de potência em função das coordenadas cartesianas x e y para o mancal com 4 ressalto. Nesta figura pode-se observar o efeito das duas parcelas da potência apresentada na equação (2.21). A primeira diz respeito ao aumento da potência com o gradiente de pressão na direção circunferencial, e isto pode ser observado quando o fluido filme de lubrificante escoar da área do rebaixo para o ressalto do mancal. A segunda diz respeito ao aumento da potência com o aumento da velocidade tangencial, ou seja, com o aumento do escoamento de Couette, como a velocidade tangencial é proporcional ao raio do mancal, observa-se tanto na região de rebaixo como de ressalto do mancal o aumento da potência consumida.

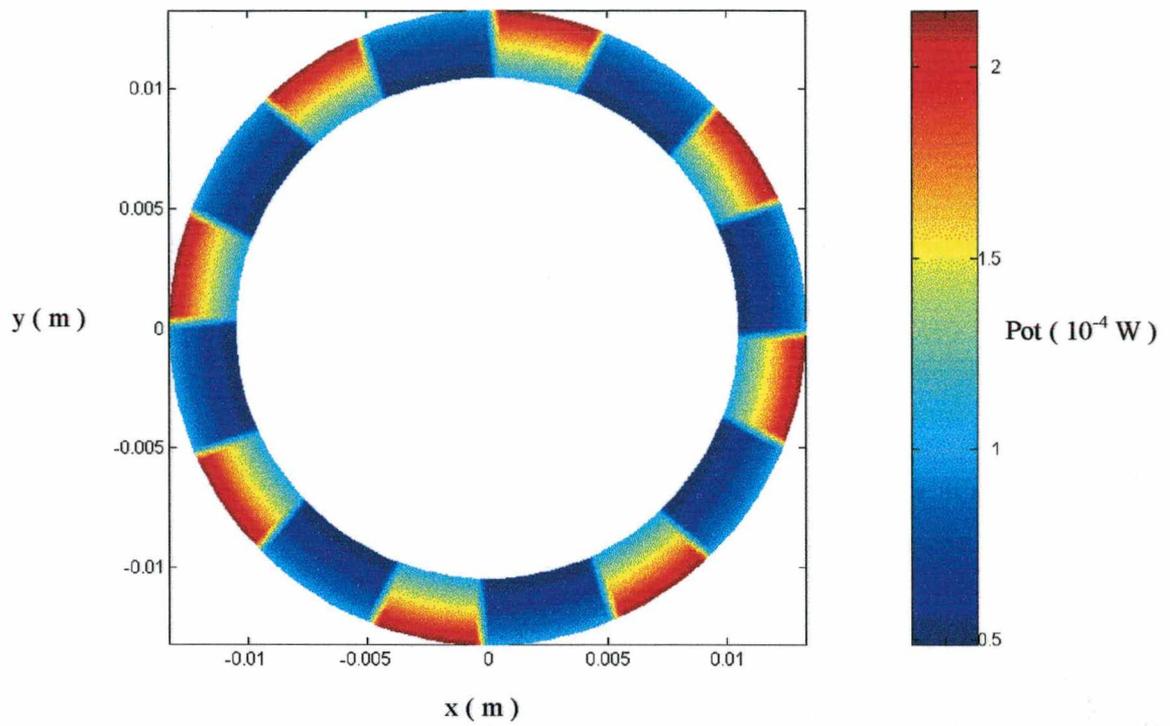


Fig 5.12 - Distribuição de potência em função de x e y para um mancal com 8 ressalto.

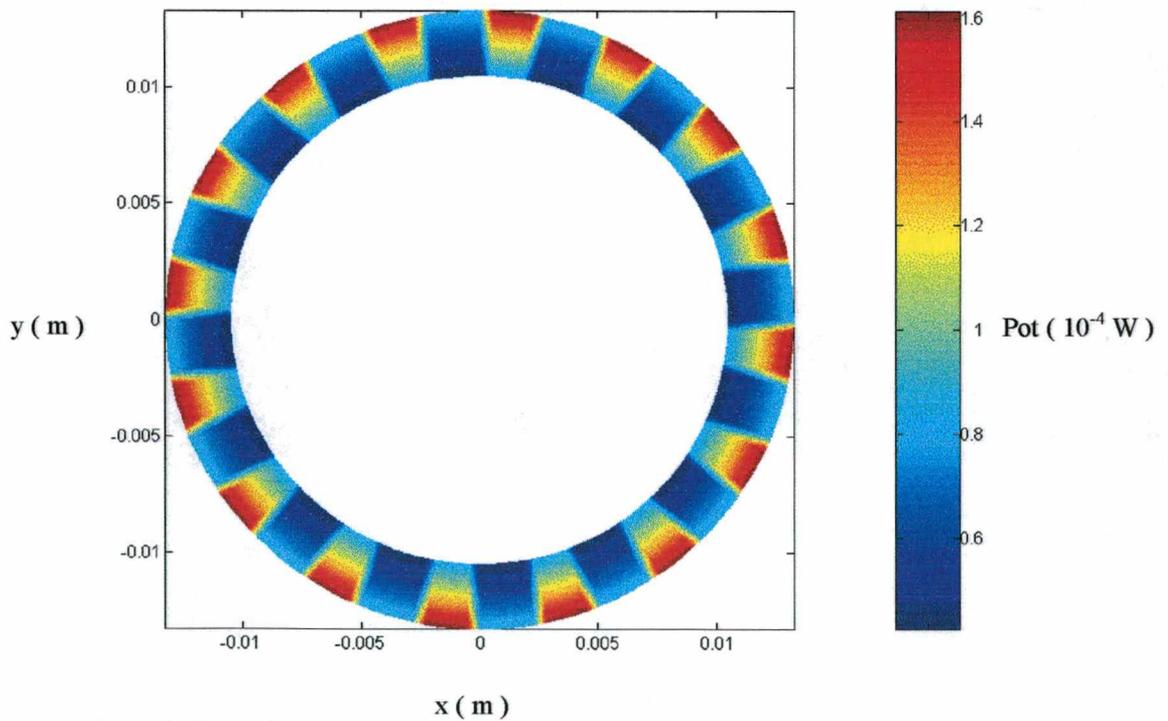


Fig 5.13 - Distribuição de potência em função de x e y para um mancal com 16 ressalto.

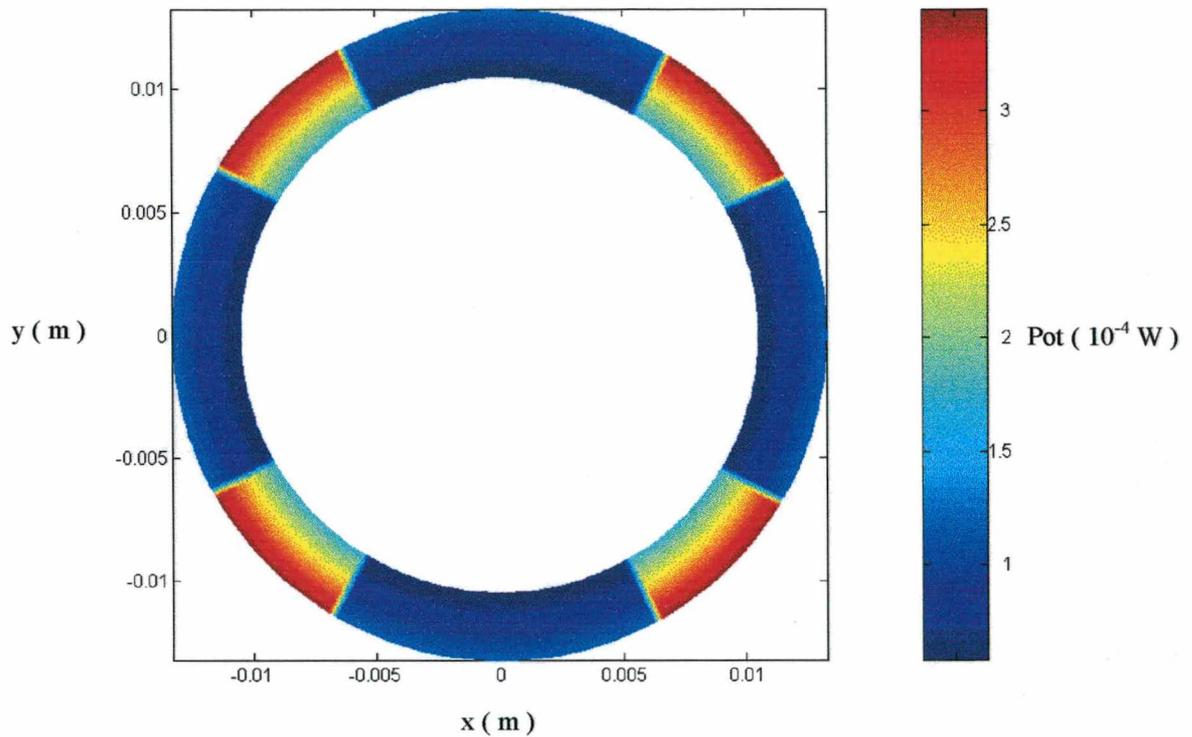


Fig 5.14 - Distribuição de potência em função de x e y para o mancal fresado.

As figuras de 5.12 a 5.14 apresentam o campo de potência para os mancais com 8 e 16 ressaltos; e para o mancal fresado respectivamente. A mesma análise feita em relação à figura 5.11, que apresenta o campo de potência para um mancal com 4 ressaltos pode ser considerada para as figuras de 5.12 a 5.14.

#### 5.2.4 Influência do Termo de Inércia

Com o objetivo de se analisar a influência dos termos inerciais considerados na formulação do problema, as figuras 5.15 a 5.18 apresentam uma comparação entre a distribuição de pressão em função de  $\theta$  para os mancais com 4, 8 e 16 ressaltos; e para o mancal fresado, respectivamente. Uma distribuição de pressão é calculada considerando-se os termos de inércia, e a outra distribuição de pressão sem considerar tais termos. Assumiu-se dois valores de frequência angular, 60Hz e 80Hz. A distribuição de pressão que considera os termos de inércia foi

determinada a partir do algoritmo 1. A distribuição de pressão que não leva em consideração os termos de inércia foi determinada a partir de uma variação do algoritmo 1. Neste algoritmo utiliza-se a equação de Reynolds sem os termos inerciais centrífugos.

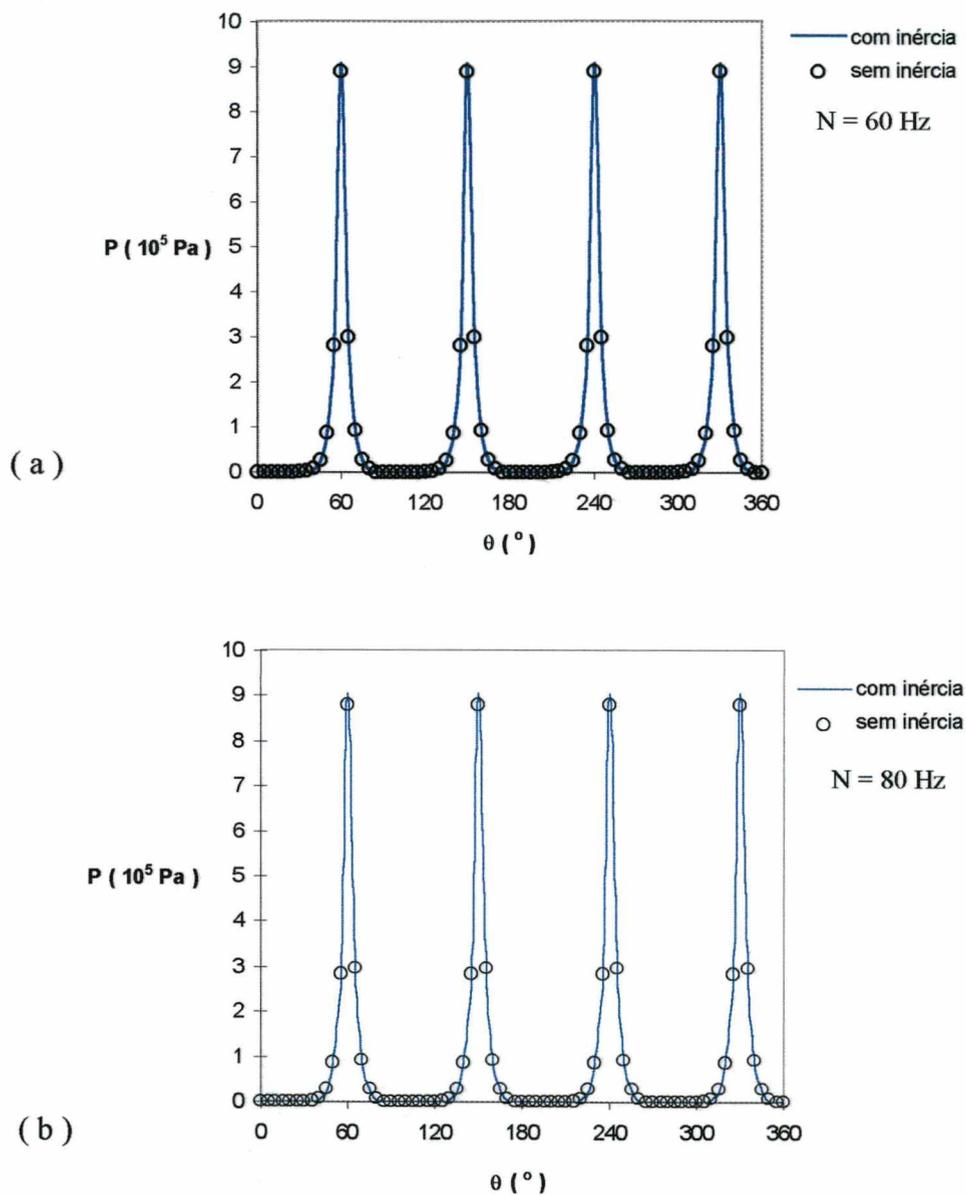


Fig 5.15 - Comparação entre a distribuição de pressão ao longo de  $\theta$ , com e sem o termo de inércia, para um mancal com 4 ressalto, na posição  $r = (r_1 + r_2) / 2$

A partir das figuras 5.15(a) e 5.15(b), percebe-se uma pequena diferença entre os picos de pressão. Quando se considera uma frequência natural de 80 Hz, a inércia se torna maior e a diferença entre os picos de pressão aumenta, em relação à frequência de 60 Hz. Os parâmetros

geométricos são os mesmos apresentados na tabela 5.1. A distribuição de pressão foi determinada a partir do algoritmo 1.

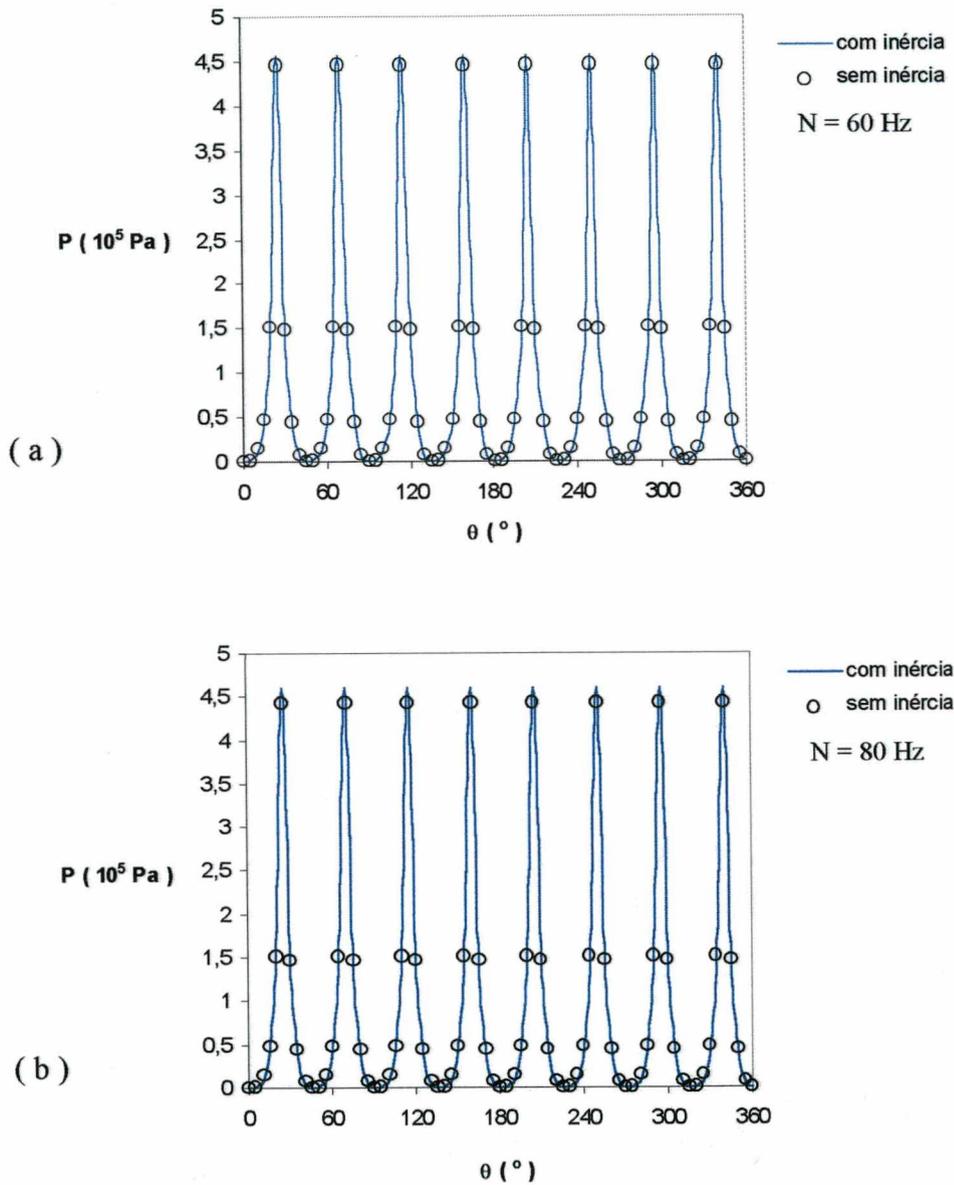


Fig 5.16 - Comparação entre a distribuição de pressão ao longo de  $\theta$ , com e sem os termos de inércia, para um mancal com 8 ressaltos, na posição  $r = (r_1 + r_2) / 2$

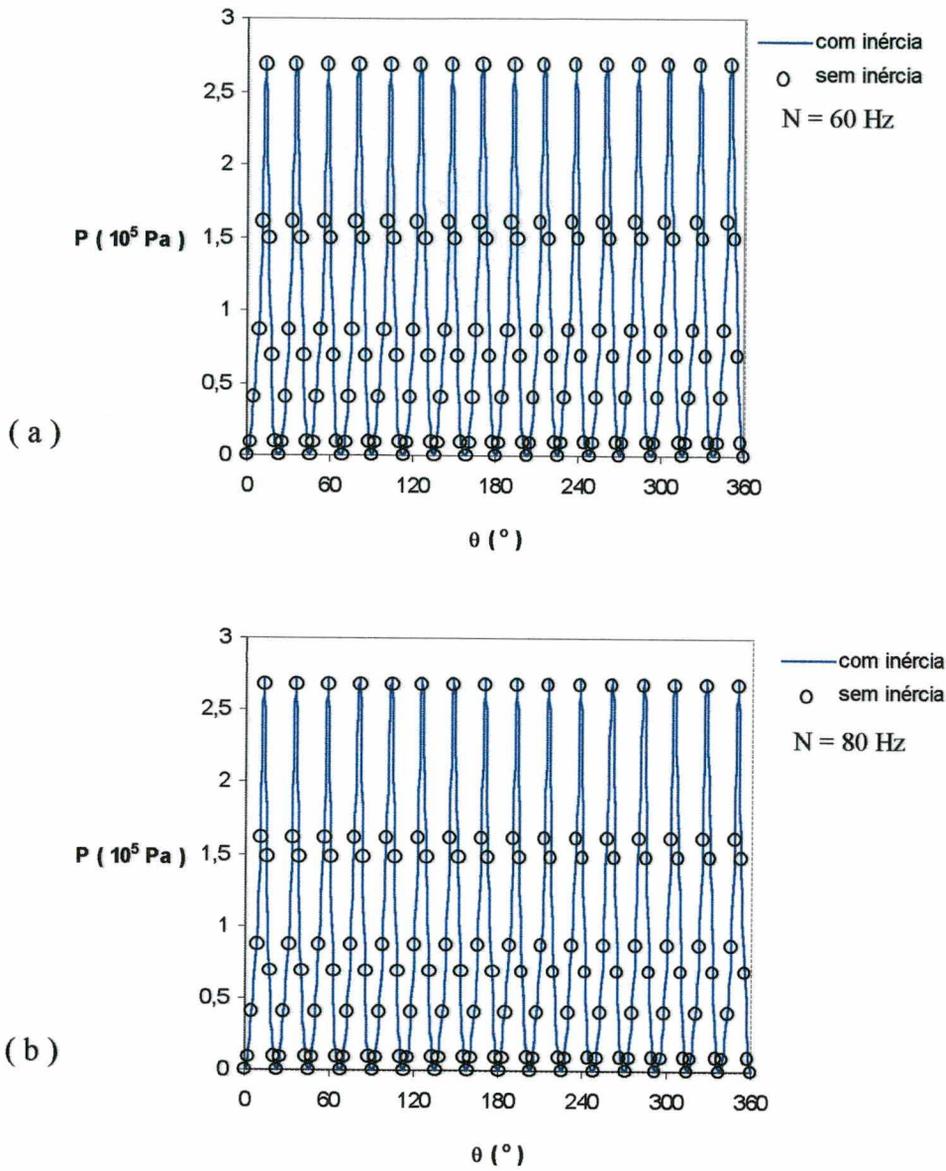


Fig 5.17 - Comparação entre a distribuição de pressão ao longo de  $\theta$ , com e sem o termo de inércia, para mancal com 16 ressaltos, na posição  $r = (r_1 + r_2) / 2$

Os mesmos comentários feitos em relação à figura 5.15 podem ser feitos em relação às figuras 5.16 a 5.18.

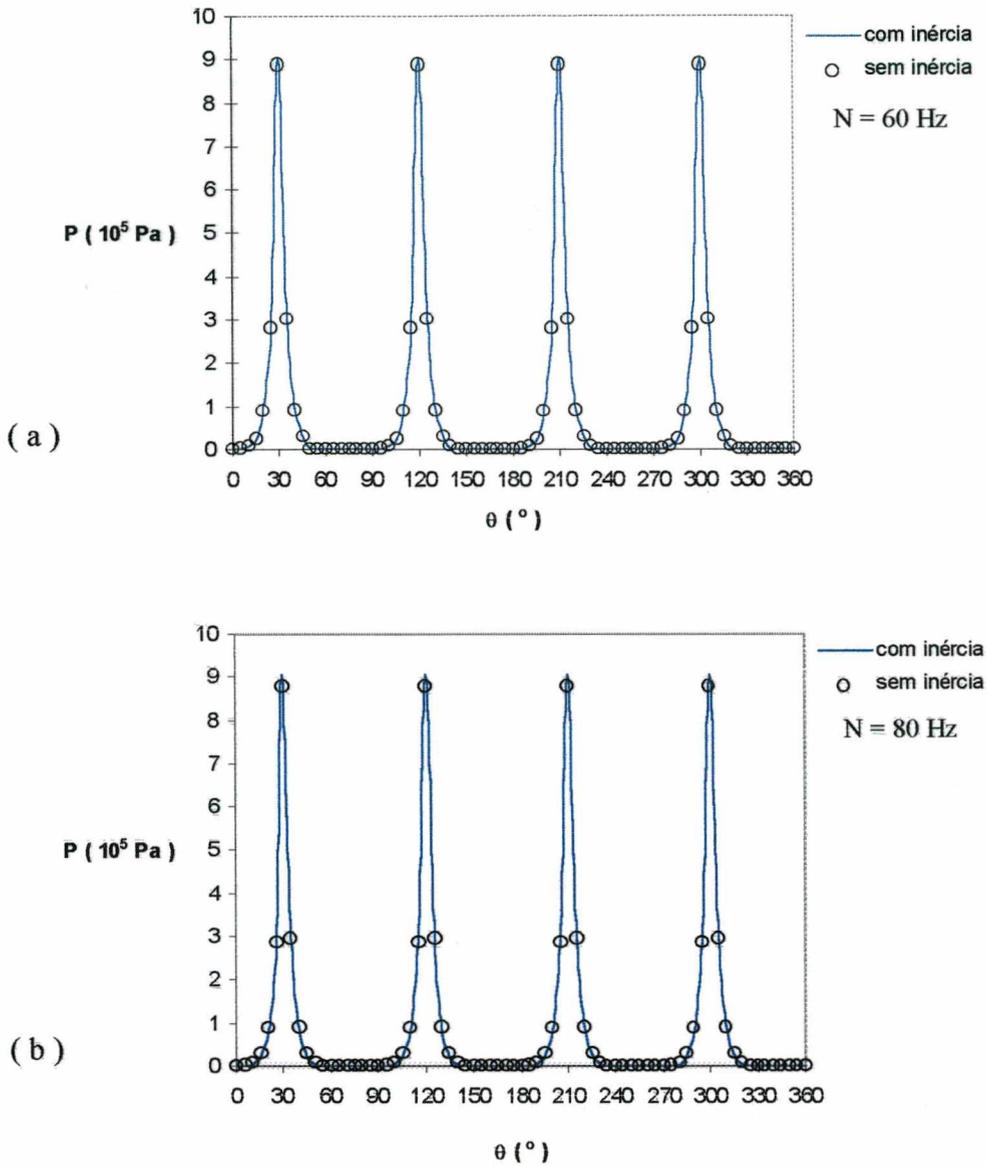


Fig 5.18 - Comparação entre a distribuição de pressão ao longo de  $\theta$ , com e sem o termo de inércia, para o mancal fresado, na posição  $r = (r_1 + r_2) / 2$ .

A figura 5.19 apresenta a variação de potência em função da frequência angular da parte móvel do mancal com 4 ressaltos. O mancal suporta uma carga de 12 N e os parâmetros geométricos são os mesmos apresentados na tabela 5.1. Nesta figura os resultados de potência considerando os termos de inércia são comparados aos resultados de potência sem se levar em consideração estes termos. A exemplo do que se assumiu para a determinação das distribuições de pressão apresentadas nas figuras 5.15 a 5.19, utilizou-se o algoritmo 1 para a determinação

dos resultados considerando-se os termos de inércia, e uma variação deste para os resultados sem se considerar os termos de inércia.

O objetivo da figura 5.19 é mostrar, que ao se incrementar o termo de inércia, ou seja, a frequência angular da parte móvel do mancal, a importância da inclusão dos termos inerciais passa a ser maior. A figura 5.19 mostra que os resultados para a potência consumida pelo mancal são afetados pela inclusão dos termos de inércia somente para valores elevados de frequência.

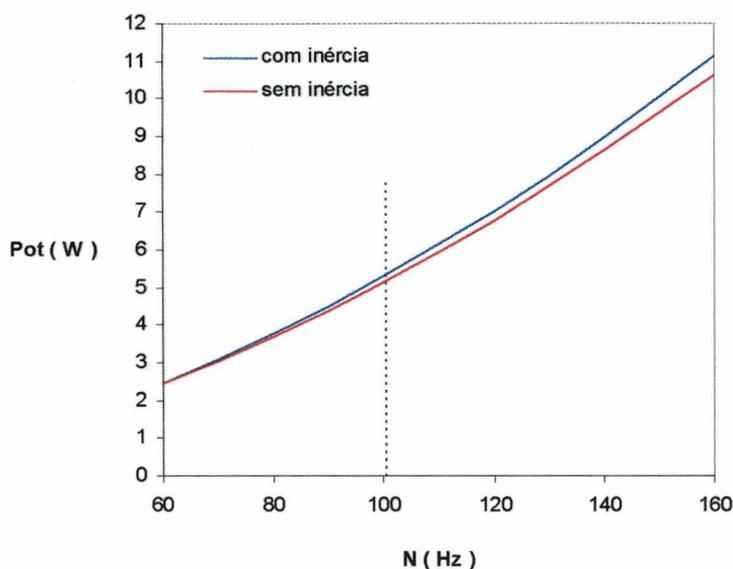


Fig. 5.19 - Potência consumida pelo mancal com 4 ressalto, com e sem o termo de inércia, em função da frequência angular.

Apesar do problema investigado no presente trabalho utilizar  $N = 60$  Hz, optou-se por considerar a formulação que considera o termo de inércia.

### 5.3 O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Após a investigação do problema de mecânica dos fluidos, que incluiu também um estudo de malha, analisar-se-á os resultados provenientes da otimização dos mancais de escora com setores circulares e setores fresados. No problema de otimização foram exploradas duas

situações, uma na qual o raio externo do mancal,  $r_2$  é mantido fixo e outra onde o  $r_2$  também é incluído no processo de otimização.

### 5.3.1 Otimização com Raio externo Fixo

Nesta primeira etapa  $r_2$  foi mantido constante e igual a 13,25 mm e  $r_1$  é um parâmetro advindo do projeto do eixo do compressor e é igual a 10,50 mm. A partir do algoritmo 2 foi implementado um código computacional sem se considerar a variação de  $r_2$ , ou seja, preocupou-se somente com a otimização dos outros parâmetros geométricos do mancal:  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\Delta h$  e  $h_1$ .

#### 5.3.1.1 Mancais de Escora com Setores Circulares

Observando o algoritmo 2, percebe-se a necessidade de uma estimativa inicial para o processo iterativo de otimização. Dependendo dos valores arbitrados para o início da solução numérica o código computacional pode convergir para uma geometria inexistente. Isto pode ser observado na tabela 5.4 para um mancal com 4 ressalto.

**Tabela 5.4 - Valores Temporários das Variáveis para um Processo que Converte para um Resultado Físico Inexistente.**

Iteração	$h_1$ ( $\mu\text{m}$ )	$\Delta h$ ( $\mu\text{m}$ )	$\theta_1$ ( $^\circ$ )	$\theta_2$ ( $^\circ$ )
0	9,00	5,00	80	1
1	5,74	15,8	86	4
2	6,37	15,5	86	4
3	6,29	15,6	86	4
4	6,25	15,6	86	4
5	6,25	15,6	86	4

Observando-se os valores convergidos para  $h_1$  e  $\Delta h$ , percebe-se que  $h_2 = - 9,35 \mu\text{m}$ , ou seja, fisicamente este mancal não existe. Já a tabela 5.5 mostra um processo onde o código computacional converge para a geometria ótima. Neste caso também é considerado um mancal com 4 ressalto.

**Tabela 5.5 - Valores Temporários das Variáveis para um Processo que Converge para a Geometria Ótima.**

Iteração	$h_1$ ( $\mu\text{m}$ )	$\Delta h$ ( $\mu\text{m}$ )	$\theta_1$ ( $^\circ$ )	$\theta_2$ ( $^\circ$ )
0	7,00	5,00	70	5
1	6,80	5,38	79	11
2	7,36	5,38	79	11
3	7,42	5,19	79	11
4	7,44	5,14	79	11
5	7,44	5,14	79	11

Através das tabelas 5.4 e 5.5 percebe-se a que o processo de convergência do problema de otimização se mostrou extremamente dependente das estimativas iniciais. Isto ocorre devido aos valores temporários assumidos pelas derivadas listadas na equação 4.22. Estas derivadas representam coeficientes de sensibilidades entre a função objetiva e as restrições em relação as variáveis que se desejam otimizar. A tabela 5.6 apresenta os valores destas derivadas para o caso explorado na tabela 5.5.

**Tabela 5.6 - Valores Temporários dos Coeficientes de Sensibilidade.**

It	$\partial\text{Pot}/\partial\theta_1$	$\partial\text{Pot}/\partial\theta_2$	$\partial\text{Pot}/\partial\Delta h$	$\partial\text{Pot}/\partial h_1$	$\partial W/\partial\theta_1$	$\partial W/\partial\theta_2$	$\partial W/\partial\Delta h$	$\partial W/\partial h_1$
0	$-2,8 \times 10^{-6}$	$1,4 \times 10^{-11}$	158588,0	-203898,2	-12,4	$8,9 \times 10^{-5}$	1720610,7	-1410937,2
1	$-1,9 \times 10^{-6}$	0,0	172662,1	-226774,4	$-8,9 \times 10^{-4}$	0,0	2362618,5	-2940789,3
2	$-1,9 \times 10^{-6}$	0,0	89456,5	-135740,6	-5,6	$3,2 \times 10^{-7}$	1361532,0	-1741402,4
3	$-1,9 \times 10^{-11}$	0,0	70156,4	-115669,8	-5,7	$1,1 \times 10^{-10}$	1190881,7	-1520373,9
4	$-3,8 \times 10^{-11}$	0,0	66441,2	-11163,9	-1,8	0,0	1157495,9	-1475182,8
5	$-5,4 \times 10^{-11}$	0,0	65900,6	-111109,7	$-2,5 \times 10^{-4}$	0,0	940351,0	-1465590,5
6	$-1,9 \times 10^{-11}$	0,0	65897,7	-111106,8	$-9,5 \times 10^{-5}$	0,0	940333,9	-1465574,3

A grande diferença de magnitude entre os valores destes coeficientes mostra a dificuldade do método dos Multiplicadores de Lagrange em convergir para o ponto ótimo da função objetiva, respeitando as restrições impostas. Esta grande diferença entre os coeficientes de sensibilidade reflete-se na dependência do método com a estimativa inicial. Já que uma estimativa inicial

qualquer pode levar o código computacional a valores ótimos irrealis, como apresentado na tabela 5.4.

**Tabela 5.7 - Estimativa inicial das variáveis com  $R_2$  Fixo**

Nr	4	8	16
$\theta_1$ (°)	70	30	13
$\theta_2$ (°)	5	1	1
$\Delta h$ ( $\mu\text{m}$ )	5,0	6,5	8,1
$h_1$ ( $\mu\text{m}$ )	7,0	10,0	12,00

Os resultados obtidos após a simulação de cada mancal são apresentados na tabela 5.8, também em função do número de ressaltos do mancal.

**Tabela 5.8 - Parâmetros Geométricos Ótimos e Potência Consumida para Mancais com Setores Circulares e  $R_2$  Fixo**

Nr	4	8	16
$\theta_1$ (°)	79	39	18,5
$\theta_2$ (°)	11	6	4
$\Delta h$ ( $\mu\text{m}$ )	5,14	6,35	7,85
$h_1$ ( $\mu\text{m}$ )	7,44	9,36	11,9
Pot (W)	1,95	1,56	1,29

Objetivando-se validar analiticamente o modelo proposto, a tabela 5.9 apresenta valores de carga obtidos com a presente metodologia e a partir da solução analítica apresentada por Pinkus e Sternlicht (1961). Esta solução analítica considera apenas um setor do mancal, prescrevendo pressão nula nas fronteiras e ignorando os termos de inércia. Para efeito de comparação estas mesmas aproximações foram incorporadas na solução numérica. Os resultados da tabela 5.9 foram gerados utilizando os parâmetros geométricos ótimos listados na tabela 5.8.

**Tabela 5.9 - Comparação entre a Carga Analítica e a Numérica**

nr	carga			malha ( $\theta \times r$ )
	Analítica	Numérica		
		C/I	S/I	
4	2,88	3,00	3,05	180x25
8	1,54	1,50	1,54	90x25
16	0,81	0,75	0,77	45x25

Na tabela 5.9 C/I e S/I representam, respectivamente, a solução numérica com os termos de inércia e sem os termos inércia. Os resultados listados nesta tabela apresentam boa concordância entre a solução analítica e a numérica. Isto confirma as conclusões da seção 5.2.4, sobre a inclusão dos termos de inércia e a influência destes nos do campo de pressão, para uma frequência angular de 60 Hz.

Pinkus e Sternlicht apresentam também a solução analítica para o campo de pressão, conforme apresentado na figura 5.6.

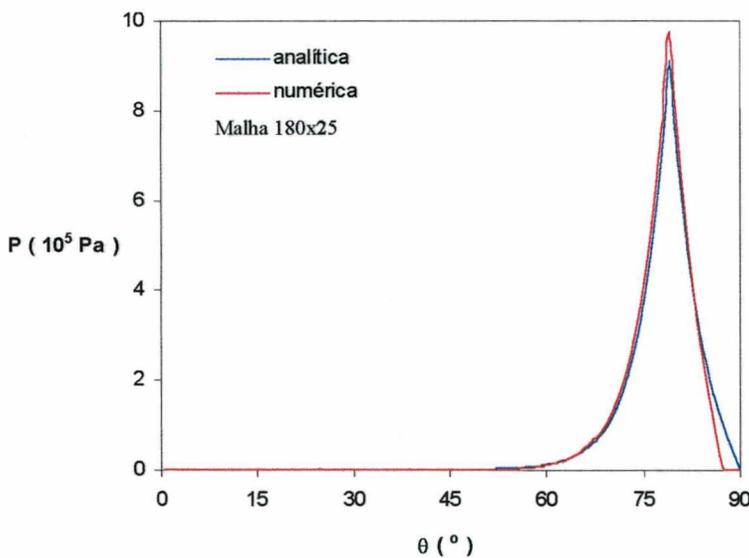


Fig. 5.20 - Comparação entre a pressão analítica e a numérica para um setor do mancal com 4 ressaltos na posição  $r=(r_1+r_2)/2$ .

De acordo com a figura 5.20, as maiores diferenças entre as soluções analíticas e numéricas estão no pico de pressão, e a outra está no final do ressalto.

A partir dos resultados otimizados listados na tabela 5.8, foram construídos alguns gráficos com a finalidade de se explorar os pontos de potência mínima. Dois tipos de gráficos

serão apresentados para os três tipos de mancais analisados, (4, 8 e 16 ressaltos). O primeiro tipo de gráfico mostra como a carga suportada pelo mancal e a potência consumida por atrito, variam em função de  $\theta_1$ . O segundo tipo de gráfico mostra como a potência varia em relação a  $\Delta h$  e  $h_2$ .

A figura 5.21 apresenta para um mancal de 4 ressaltos, a dependência da carga suportada pelo mancal e da potência dissipada com o ângulo  $\theta_1$ . Os valores de  $\Delta h$  e  $h_1$  foram mantidos constantes e iguais a 7,44 e 5,14  $\mu\text{m}$ , respectivamente (valores ótimos extraídos da tabela 5.8).

O objetivo da Figura 5.21 é comprovar que para um mancal com 4 ressaltos  $\theta_1$  ótimo é de fato igual a  $79^\circ$  e  $\theta_2$  é igual a  $11^\circ$ , com os quais o mancal suporta 12 N consumindo 1,95 W de potência.

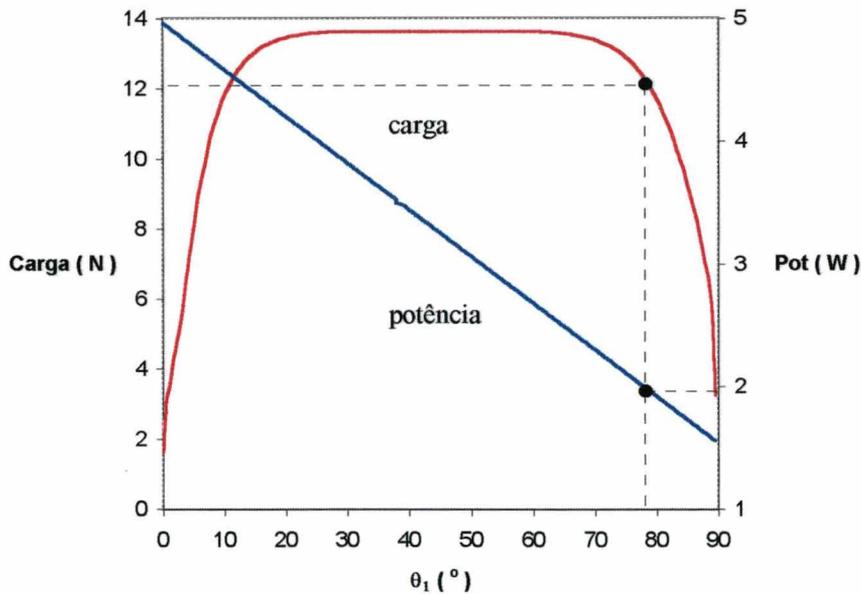


Fig. 5.21 - Carga suportada e potência consumida pelo mancal com 4 ressaltos em função de  $\theta_1$ ;  $r_2$  fixo

Outra informação que pode ser extraída da figura 5.21 é que para uma faixa de  $\theta_1$  que varia aproximadamente de  $20^\circ$  a  $70^\circ$  a derivada da carga em função de  $\theta_1$  é muito pequena, o que prejudica o processo de convergência, já que os Multiplicadores de Lagrange são baseados em derivadas. Logo, afim de favorecer a convergência do método, é melhor que a estimativa inicial seja tomada a partir de  $70^\circ$ .

As figuras 5.22 e 5.23 apresentam o mesmo tipo de gráfico explorado na figura 5.21 porém, para mancais com 8 e 16 ressaltos, respectivamente.

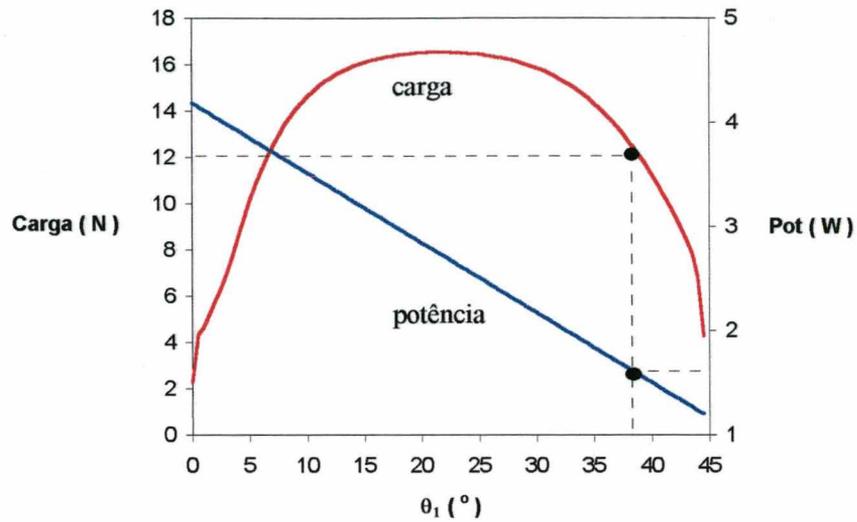


Fig. 5.22 - Carga suportada e potência consumida pelo mancal com 8 ressaltos em função de  $\theta_1$ ;

$r_2$  fixo

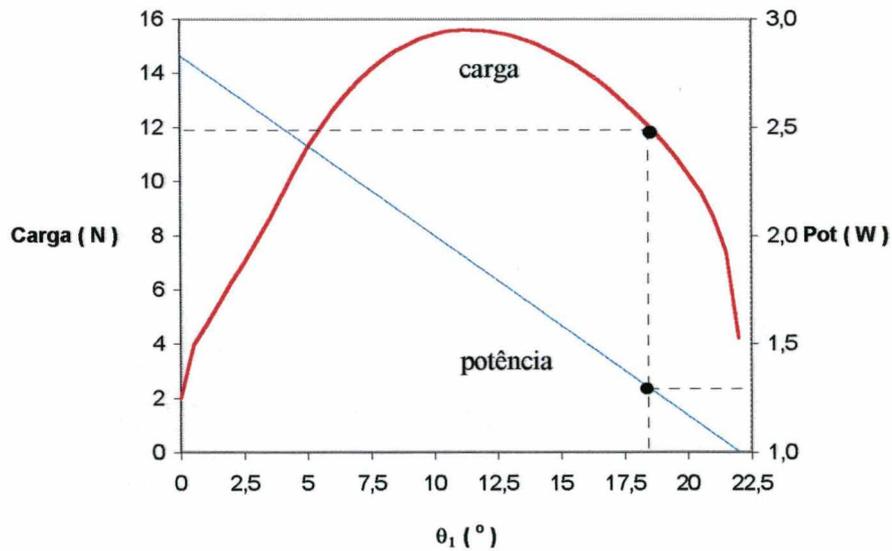


Fig.5.23 - Carga suportada e potência consumida pelo mancal com 16 ressaltos em função de  $\theta_1$ ;

$r_2$  fixo.

A exemplo da figura 5.21 a figura 5.22, também tem por objetivo comprovar os valores ótimos de  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . No caso da figura 5.22,  $\theta_1 = 39^\circ$  e  $\theta_2 = 6^\circ$ , com os quais o mancal com 8 ressaltos suporta 12 N consumindo 1,56 W de potência.

Novamente, da figura 5.23, vê-se que para uma carga de 12 N, a potência mínima de 1,29 W corresponde a  $\theta_1 = 18,5^\circ$  e  $\theta_2 = 4^\circ$ .

Conforme apresentado na tabela 5.3, a estimativa inicial de  $\theta_1$  muda dependendo do número de ressaltos. Tal fato pode ser justificado a partir das figuras 5.21 a 5.23. Para 16 ressaltos, por exemplo, se a estimativa inicial para  $\theta_1$  for menor que  $11^\circ$  a solução pode convergir para uma potência em torno de 2,4 W, conforme observado na figura 5.23.

O segundo tipo de gráfico a ser explorado mostra como a potência consumida pelo mancal varia em relação a  $\Delta h$  e  $h_2$ . Tais gráficos são apresentados nas figuras de 5.24 a 5.25 para mancais com 4, 8 e 16 ressaltos, respectivamente.

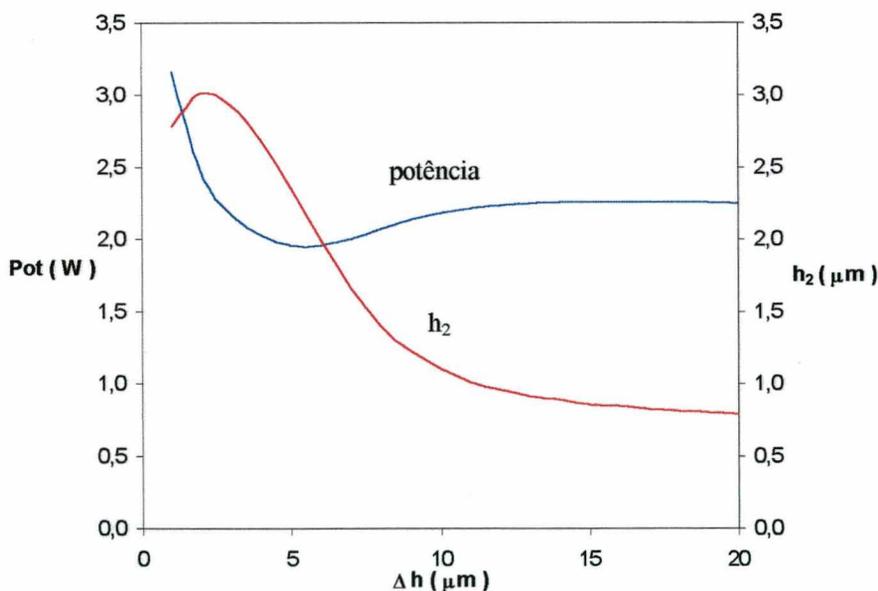


Fig. 5.24 - Variações da potência consumida e da espessura  $h_2$  em função de  $\Delta h$  para um mancal com 4 ressaltos;  $r_2$  fixo

O gráfico acima é construído, tomando-se os valores ótimos de  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , e para cada valor de  $\Delta h$  determina-se  $h_2$  de modo que o mancal suporte 12 N.

A figura 5.24 comprova que para um mancal com 4 ressaltos os valores ótimos para  $\Delta h$  e  $h_1$  são respectivamente 5,14 e 7,44  $\mu\text{m}$ , com os quais o mancal suporta 12 N consumindo 1,95 W.

Na figura 5.24 observa-se, a partir da origem que à medida em que  $\Delta h$  aumenta, primeiro  $h_2$  cresce e após atingir um máximo, tende a diminuir monotonicamente. A interdependência entre  $\Delta h$  e  $h_2$  é governada pela carga suportada pelo mancal que permanece fixa em 12 N. A potência viscosa dissipada pelo mancal depende tanto de  $\Delta h$  como de  $h_2$ . Para  $\Delta h / h_2 \ll 1$  e  $\Delta h / h_2 \gg 1$  a potência é governada por  $h_2$ . Alternativamente, para  $\Delta h / h_2 \sim 1$  ambos os parâmetros afetam a potência. Esta complexa interdependência conduz ao padrão de curva de potência observado na figura 5.24. Comportamento semelhante é observado nas figuras 5.25 e 5.26.

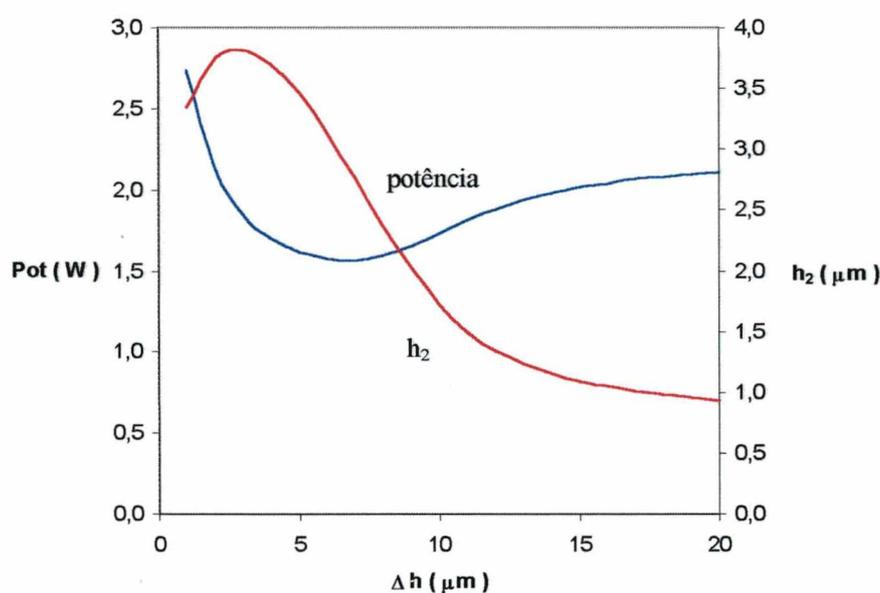


Fig. 5.25 - Variações da potência consumida e da espessura  $h_2$  em função de  $\Delta h$  para um mancal com 8 ressaltos;  $r_2$  fixo

As figuras 5.25 e 5.26 comprovam também os valores ótimos de  $\Delta h$  e  $h_1$  listados na tabela 5.8.

Comparando-se as figuras 5.24 a 5.26 observa-se a diminuição da potência mínima consumida com o aumento do número de ressaltos. Este fenômeno, que já foi comentado quando se discutiu o problema hidrodinâmico, ocorre devido ao efeito cunha, que gera a pressão

hidrodinâmica. Quanto maior o número de ressaltos, maior o número de restrições, que constituem a região ativa do mancal do ponto de vista de carga suportada. Conseqüentemente, a distância entre o mancal e o assento aumenta para mancais com maior número de ressalto, o que resulta numa menor potência dissipada por atrito.

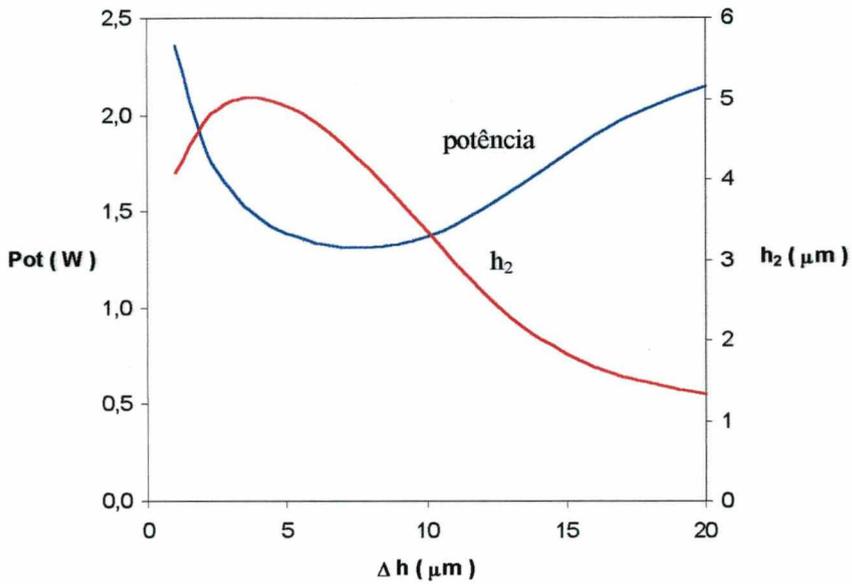


Fig. 5.26 - Variações da potência consumida e da espessura  $h_2$  em função de  $\Delta h$  para um mancal com 16 ressaltos;  $r_2$  fixo.

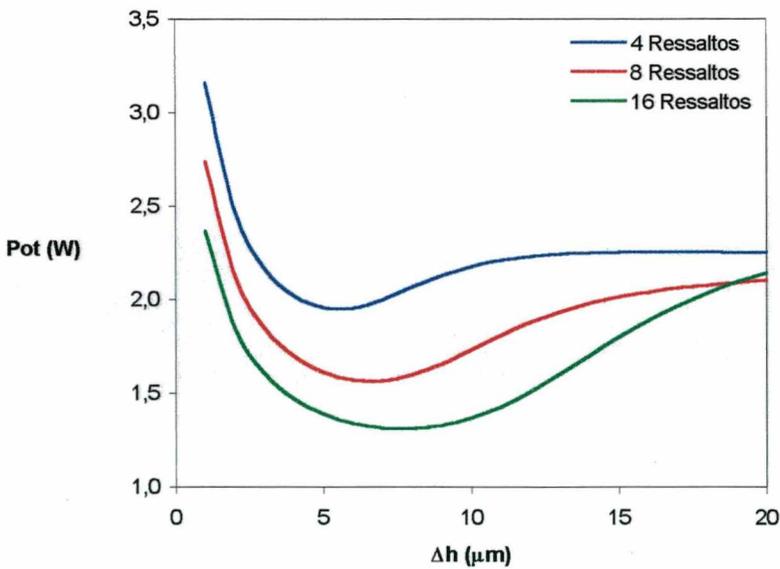


Fig. 5.27 - Variações da potência consumida em função de  $\Delta h$  e do numero de ressaltos do mancal;  $r_2$  fixo.

**5.3.1.2 Mancais de Escora com Setores Fresados**

Os parâmetros geométricos ótimos para o mancal fresado são mostrados na tabela 5.10.

**Tabela 5.10 - Parâmetros Geométricos Ótimos para Mancal Fresado com  $R_2$  Fixo**

mancal fresado	parâmetros geométricos
$d_{fr}$ ( mm )	14,1
$\Delta h$ ( $\mu\text{m}$ )	6,00
$h_1$ ( $\mu\text{m}$ )	7,57

Para o mancal fresado a potência consumida por atrito viscoso calculada utilizando os parâmetros geométricos ótimos é 1,89 W.

Para o mancal de sapata fresada foram traçados dois gráficos com a finalidade de se explorar o ponto de potência mínima. O primeiro gráfico mostra como a carga suportada pelo mancal e a potência consumida variam em função do diâmetro da fresa. O segundo gráfico mostra como a potência varia em relação a  $\Delta h$  e  $h_2$ .

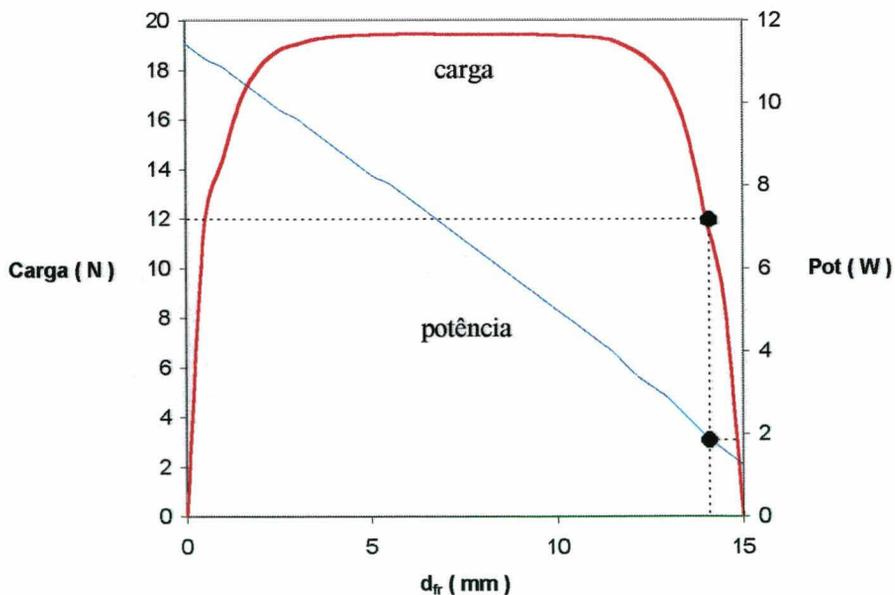


Fig. 5.28 - Carga suportada e potência consumida pelo mancal fresado em função do diâmetro da fresa;  $r_2$  fixo.

A figura 5.28 mostra a carga suportada pelo mancal e a potência consumida por atrito, em função do diâmetro da fresa. Na construção das curvas de carga e de potência os valores de  $\Delta h$  e  $h_1$  permaneceram inalterados e iguais a, respectivamente, 6,00 e 7,57 $\mu\text{m}$  (valores ótimos segundo a tabela 5.10).

Com a figura 5.28 comprova-se que para um mancal com 4 ressaltos o diâmetro da fresa ótimo é igual a 14,1mm, com o qual o mancal suporta 12 N consumindo 1,89 W de potência.

Outra informação que pode ser extraída da figura 5.28 é que para uma faixa de valores do diâmetro da fresa, que varia aproximadamente de 5 a 13 mm a derivada da carga em função do diâmetro da fresa é muito pequena. Isto prejudica o processo de convergência da solução numérica uma vez que os Multiplicadores de Lagrange são baseados em derivadas. Assim, vê-se da figura 5.28 que a estimativa inicial deve ser tomada a partir de 13 mm, pois do contrário o código computacional converge para um ponto que suporta 12 N de carga mas, não consome a potência mínima, conforme já explorado anteriormente.

O segundo gráfico a ser apresentado para o mancal fresado mostra como a potência consumida varia em função de  $\Delta h$  e  $h_2$ , conforme figura 5.29. Na construção das curvas indicadas na figura, o diâmetro da fresa foi mantido constante e igual ao valor otimizado de 14,1 mm. Para cada valor de  $\Delta h$ , o valor indicado para  $h_2$  é aquele que fornece a carga suportada de 12 N.

A figura 5.29 comprova que para um mancal fresado os valores ótimos para  $\Delta h$  e  $h_1$  são respectivamente 6,00 e 7,57  $\mu\text{m}$ , com os quais o mancal suporta 12 N consumindo 1,89 W de potência.

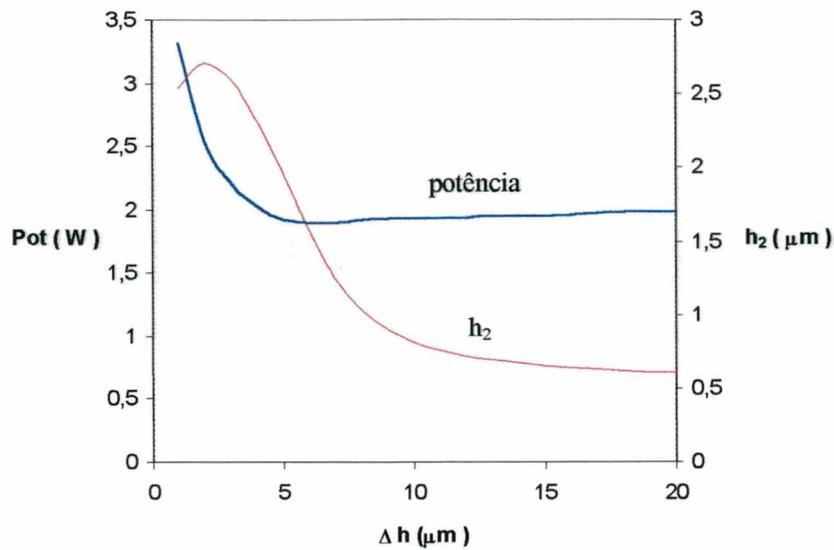


Fig. 5.29 - Variações da potência consumida e da espessura  $h_2$  em função de  $\Delta h$  para o mancal fresado;  $r_2$  fixo.

### 5.3.1.3. Comparação entre o Desempenho do Mancal de Sapatas Circulares e o Mancal Fresado

A figura 5.30 apresenta uma comparação da potência consumida entre o mancal de sapatas retas circulares com 4, 16 e 8 ressaltos, e o mancal fresado.

Ao se comparar estes dois tipos de mancais percebe-se que o desempenho do mancal fresado é superior ao do mancal com 4 ressaltos. O bom desempenho do mancal fresado ocorre porque a geometria da sapata fresada dificulta a fuga radial de lubrificante devido à ação da força centrífuga. Como o ressalto do mancal fresado está inclinado em relação a linha radial, o lubrificante que tenderia a escoar na direção radial pela ação da força centrífuga experimenta uma ação adicional do efeito cunha. Isto resulta em níveis de pressão mais elevados e, por conseguinte, em afastamentos maiores entre o mancal e seu assento reduzindo a potência dissipada por atrito. No mancal com setores circulares, os ressaltos estão alinhados radialmente e desta forma não há efeito cunha associado ao escoamento de óleo devido à força centrífuga.

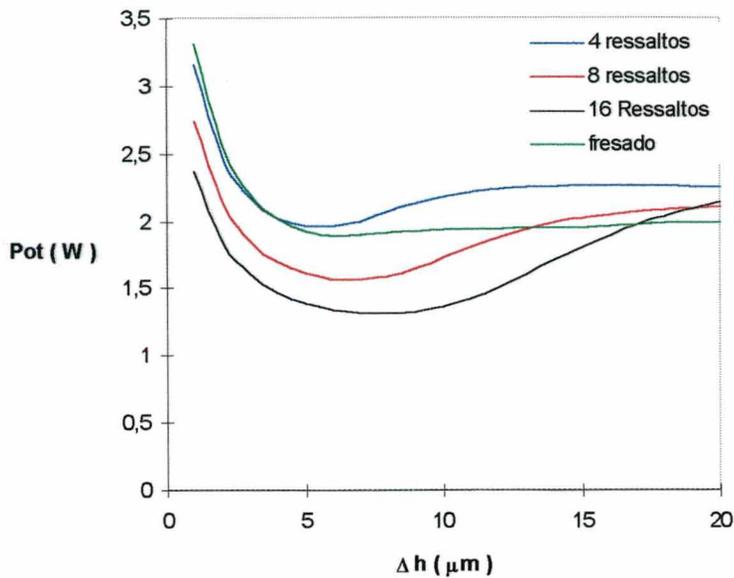


Fig. 5.30 - Comparação entre o mancal de sapatas retas circulares com 4, 8 e 16 ressalto e o mancal fresado;  $r_2$  fixo.

### 5.3.2 Otimização com Raio Externo Variável

Nesta segunda etapa do trabalho a otimização de  $r_2$ , foi considerada juntamente com os outros parâmetros geométrico do mancal:  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\Delta h$  e  $h_1$ . A partir do algoritmo 2 foi implementado um código computacional considerando estas cinco variáveis.

#### 5.3.2.1 Mancais de Escora com Setores Circulares

Para todos os casos a serem explorados a viscosidade, massa específica e rotação do mancal serão mantidos constantes com valores iguais àqueles adotados na primeira parte do trabalho e listados na secção 5.2. Adicionalmente,  $r_1$  também será fixado em 10,50 mm, que é o mesmo valor utilizado anteriormente quando  $r_2$  não foi incluído nos parâmetros a serem otimizados.

Os resultados obtidos após a simulação de cada mancal são mostrados na tabela 5.11, em função do número de ressaltos do mancal.

**Tabela 5.11 - Parâmetros Geométricos Ótimos e Potência Consumida**

Nr	4	8	16
$\theta_1$ (°)	81,5	41,5	21
$\theta_2$ (°)	8,5	3,5	1,5
$\Delta h$ ( $\mu\text{m}$ )	15,00	10,00	13,00
$h_1$ ( $\mu\text{m}$ )	15,03	10,02	13,02
$r_2$ (mm)	10,58	10,55	10,54
Pot (W)	0,852	0,697	0,425

Um aspecto a ser observado na otimização do mancal quando  $r_2$  é incluído no processo de otimização é a grande dependência das estimativas iniciais na convergência da solução numérica. Esta convergência só é alcançada quando as estimativas iniciais se aproximam dos parâmetros ótimo, indicando a grande dificuldade de se aplicar o método dos Multiplicadores de Lagrange ao presente problema.

A partir dos resultados listados na tabela 5.11 foram construídos gráficos com a finalidade de se explorar a dependência da potência consumida por atrito com os diferentes parâmetros do mancal. Três tipos de gráficos serão apresentados para os três tipos de mancais analisados (4, 8 e 16 ressaltos). O primeiro gráfico mostra como a força suportada pelo mancal e a potência consumida por este variam em função de  $\theta_1$ . O segundo tipo mostra como a potência varia em relação a  $\Delta h$  e  $h_2$ , e o terceiro tipo explora a dependência da potência consumida por atrito em relação a  $r_2$ .

A figura 5.31 apresenta a carga suportada pelo mancal e a potência consumida por atrito em função de  $\theta_1$ , mantidos os outros parâmetros constantes e iguais aos valores ótimos apresentados na tabela 5.11. Observa-se na figura 5.31 que embora a carga suportada pelo mancal seja pouco afetada por  $\theta_1$ , isto não acontece com a potência consumida por atrito que decresce linearmente com  $\theta_1$ . Este resultado é esperado uma vez que  $\theta_1$  está associado à região de rebaixo e quanto maior esta região menor a potência associada ao atrito viscoso. Como se observa na

figura 5.31, o valor ótimo de  $\theta_1$  é aquele em que a potência é mínima sem que para isto a carga deixe de ser 12 N.

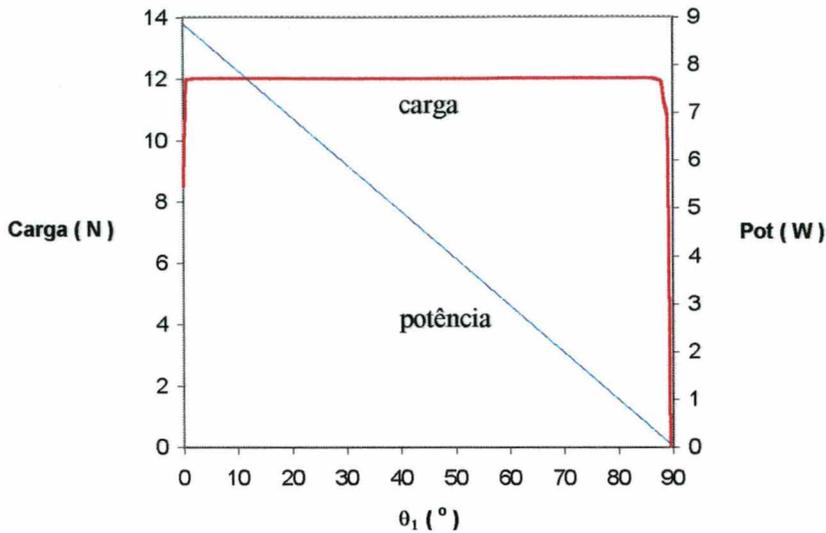


Fig. 5.31 - Carga suportada e potência consumida pelo mancal com 4 ressalto em função de  $\theta_1$ ,  $r_2$  como um dos parâmetros de otimização.

Outro aspecto visível com auxílio da figura 5.31 está associado à convergência do algoritmo computacional. Para grande parte da curva de carga versus  $\theta_1$  a derivada  $\partial W/\partial \theta$ , é nula o que explica a dificuldade de se convergir para a solução ótima a partir de valores estimados.

Comparando-se a figura 5.31 com a figura 5.21, por exemplo, verifica-se que a figura 5.31 apresenta uma região de carga constante muito mais acentuada do que aquela observada na figura 5.21.

As figuras 5.32 e 5.33 apresentam o mesmo tipo de gráfico apresentado na figura 5.31 porém, para mancais com 8 e 16 ressalto, respectivamente.

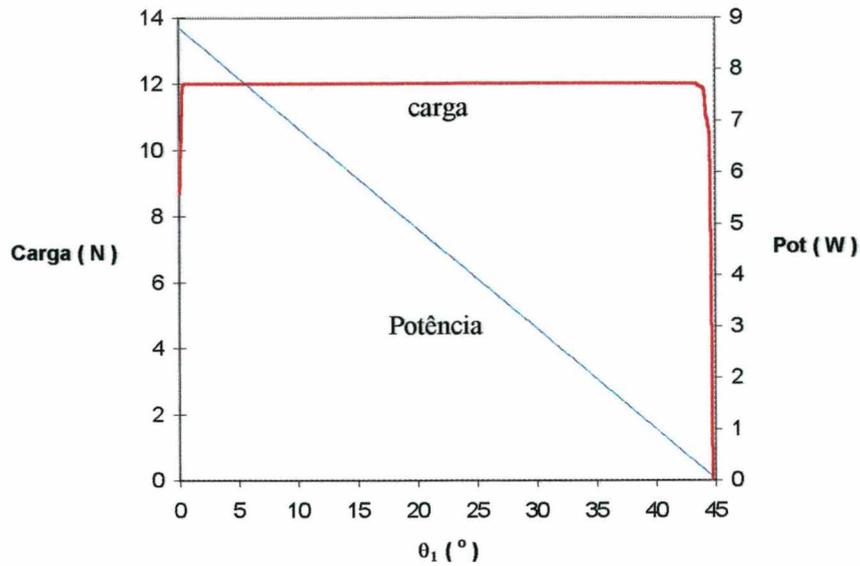


Fig. 5.32 - Carga suportada e potência consumida pelo mancal com 8 ressaltos em função de  $\theta_1$ ;  $r_2$  como um dos parâmetros de otimização.

A construção dos gráficos apresentados nas figuras 5.32 e 5.33 seguem os mesmos passos da construção do gráfico apresentado na figura 5.31, sendo que a única diferença está no número de ressaltos do mancal, e, consecutivamente no valor ótimo para  $\theta_1$ . Novamente, tudo o que foi dito em relação a convergência do algoritmo de otimização para a figura 5.31 se aplica igualmente para as figuras 5.32 e 5.33.

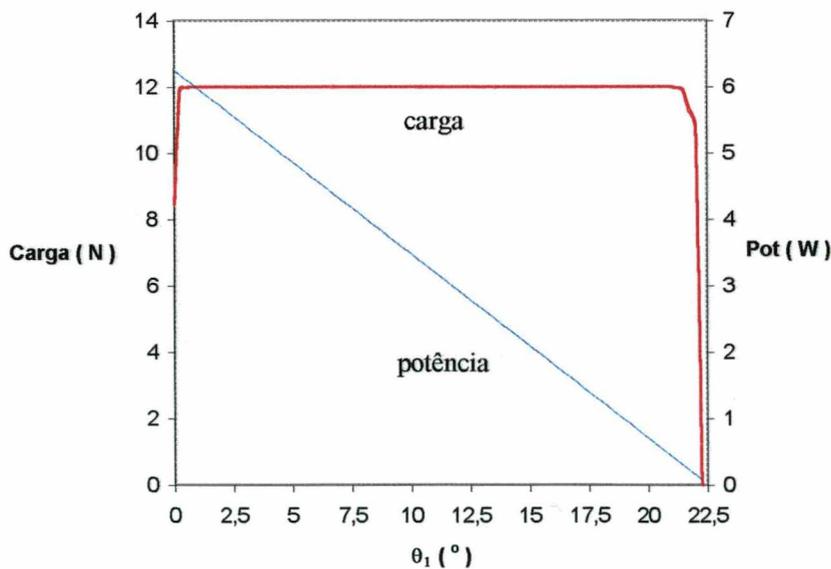


Fig. 5.33 - Carga suportada e potência consumida pelo mancal com 16 ressaltos em função de  $\theta_1$ ;  $r_2$  como um dos parâmetros de otimização.

Comparando-se as figuras 5.21 a 5.23 com as figuras 5.31 a 5.33 percebe-se que nas últimas não existe um excesso de carga suportada acima de 12 N. Este excesso existia nas figuras 5.21 a 5.23 devido ao fato de  $r_2$  ainda não ter sido otimizado.

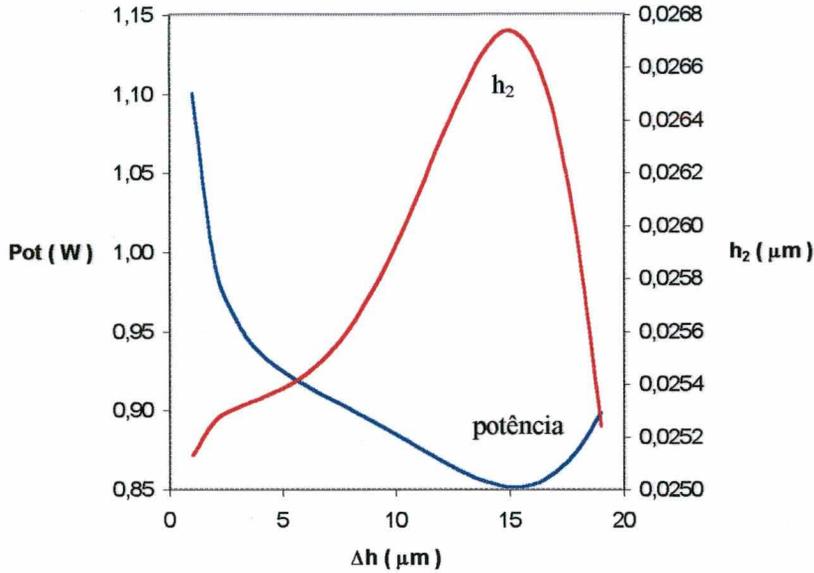


Fig. 5.34 - Variações da potência consumida e da espessura  $h_2$  em função de  $\Delta h$  para um mancal com 4 ressaltos;  $r_2$  como um dos parâmetros de otimização.

O segundo tipo de gráfico a ser explorado mostra como a potência consumida pelo mancal varia em relação a  $\Delta h$  e  $h_2$ . Tais gráficos são apresentados nas figuras de 5.34 a 5.36 para mancais com 4, 8 e 16 ressaltos, respectivamente.

O gráfico anterior é construído da mesma forma que o gráfico apresentado na figura 5.24, agora tomando-se também o valor ótimo de  $r_2$ .

A figura 5.34 comprova que para um mancal com 4 ressaltos os valores ótimos para  $\Delta h$  e  $h_2$  são respectivamente 15,00 e 0,0267  $\mu\text{m}$ , com os quais o mancal suporta 12 N consumindo 0,8516 W.

Observando-se a figura 5.34 percebe-se que a potência consumida varia pouco com  $\Delta h$ , o que também ocasiona problemas de convergência. Principalmente nas proximidades do ponto de potência mínima. O mesmo comportamento é observado nas figuras 5.35 e 5.36.

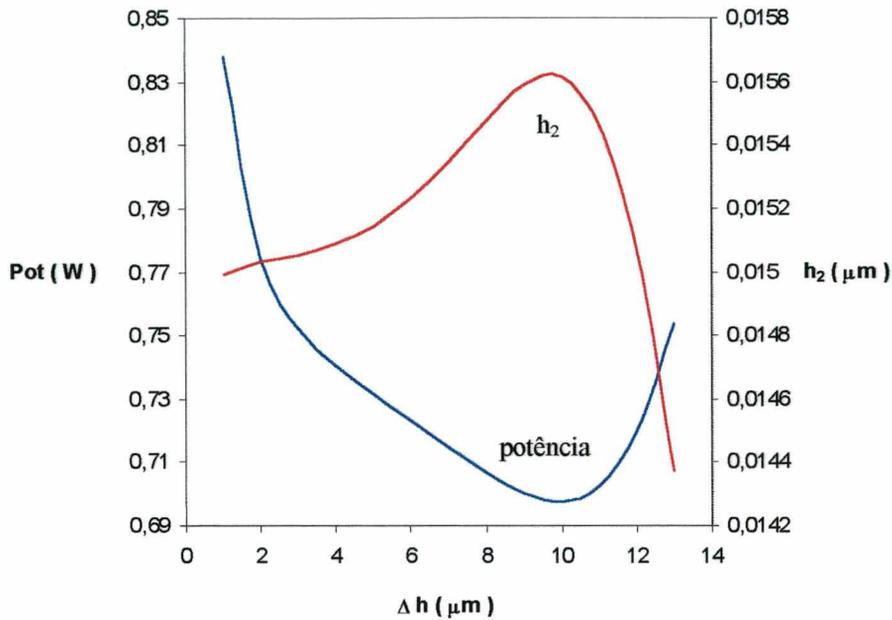


Fig. 5.35 - Variações da potência consumida e da espessura  $h_2$  em função de  $\Delta h$  para um mancal com 8 ressaltos;  $r_2$  como um dos parâmetros de otimização.

A figura 5.35 comprova que os valores ótimos para  $\Delta h$  e  $h_2$  são respectivamente 10,00 e 0,0156  $\mu\text{m}$ , com os quais o mancal suporta 12 N consumindo 0,697 W de potência. Do mesmo modo, para a figura 5.36, verifica-se que os valores ótimos para  $\Delta h$  e  $h_2$  são, respectivamente, 13,00 e 0,0181  $\mu\text{m}$ , que conduzem a uma potência consumida de 0,425 W.

Os valores ótimos para  $r_2$  encontrados nos mancais com 4, 8 e 16 sapatas estão muito próximos de  $r_1 = 10,50$  mm conforme observado na tabela 5.11. estes resultados estão associados à grande dependência da potência dissipada pelo mancal com a área da superfície do ressalto, que por sua vez varia com o quadrado de  $r_2$ . Assim, era esperado que os valores ótimos para  $r_2$  tenderiam a ser muito próximos a  $r_1$ . Para compensar a pequena área disponível para suportar a carga, os valores de  $h_2$  reduziram-se de duas ordem de grandeza. Certamente que valores tão baixos de  $h_2$  implicam em dificuldades adicionais associadas à fabricação e operação dos mancais. A abordagem de tais aspectos foge ao escopo do presente trabalho mas, poderiam ser incluídas na formulação do problema como restrições adicionais, em adição as equações (4.6) e (4.7). Por

exemplo, os valores de  $h_2$  não poderiam ser menores do que um determinado valor mínimo, imposto por tolerâncias de fabricação e operação.

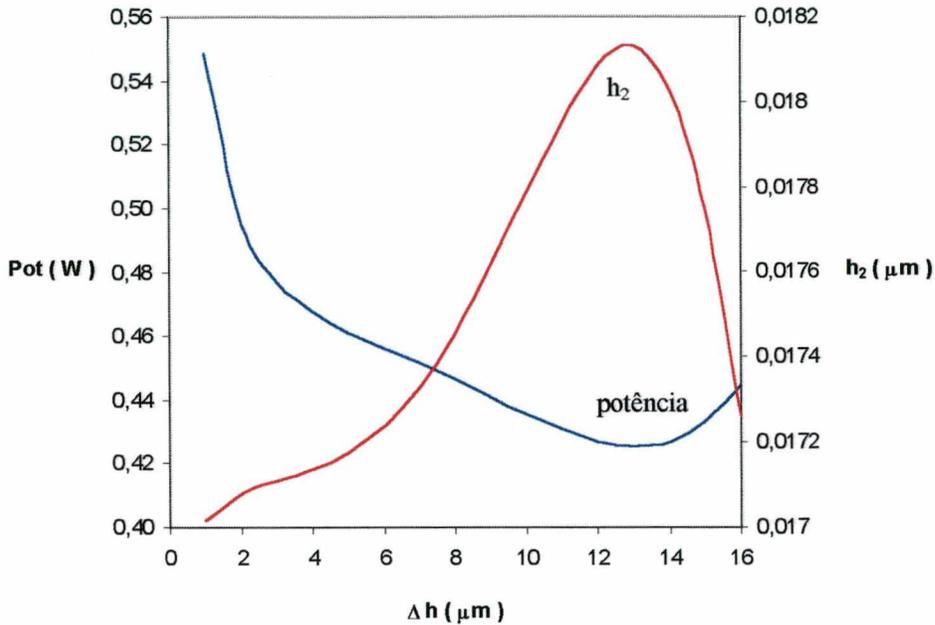


Fig. 5.36 - Variações da potência consumida e da espessura  $h_2$  em função de  $\Delta h$  para um mancal com 16 ressaltos;  $r_2$  como um dos parâmetros de otimização.

O terceiro tipo de gráfico a ser explorado mostra como a potência consumida pelo mancal varia em relação a  $r_2$  e  $h_2$ , como mostram as figuras de 5.37 a 5.39 para mancais com 4, 8 e 16 ressaltos, respectivamente. Nestas figuras a carga suportada pelo mancal é de 12 N e os valores de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\Delta h$  são os valores ótimos listados na tabela 5.11.

O primeiro aspecto a ser observado nas figuras 5.37 a 5.39 é a forma não monotônica com que a potência varia com  $r_2$ . Nos três gráficos observa-se a existência de mínimos locais. Outro aspecto interessante a ser observado é que esses mínimos locais associados a pontos de vale se tornam mais acentuados à medida em que o número de ressaltos aumenta.

Os valores de potência mínima apresentados na tabela 5.11 são corroborados pelas figuras 5.37 a 5.39. Para todos os três números de ressaltos investigados, há uma grande tendência da potência consumida por atrito aumentar para valores de  $r_2$  menores do que o mínimo.

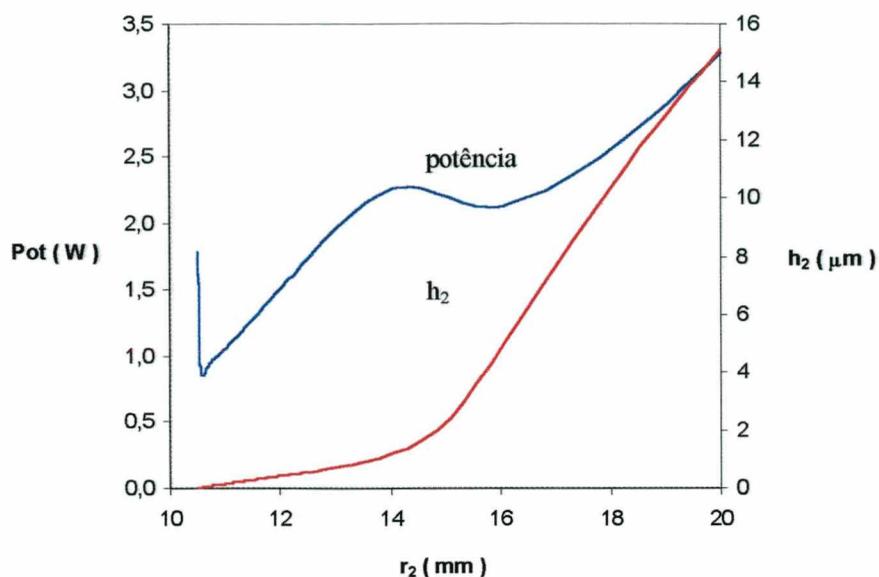


Fig. 5.37 - Variações da potência consumida e da espessura  $h_2$  em função de  $r_2$  para um mancal com 4 ressaltos

Comparando-se as figuras 5.37 a 5.39 observa-se a diminuição da potência consumida com o aumento do número de ressaltos. Este mesmo efeito já havia sido observado para  $r_2$  fixo.

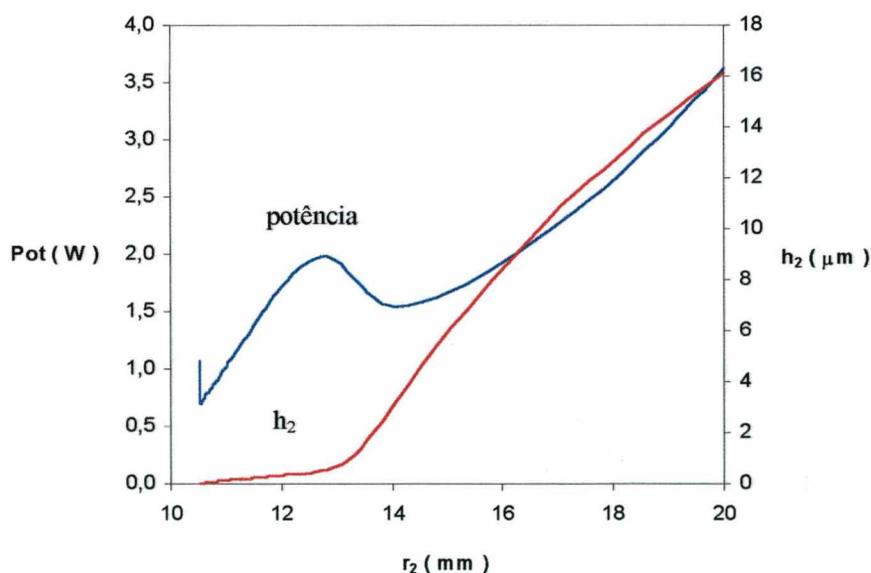


Fig. 5.38 - Variações da potência consumida e da espessura  $h_2$  em função de  $r_2$  para um mancal com 8 ressaltos

Conforme explorado anteriormente, aumentando-se o número de ressaltos, aumenta-se os pontos de restrição ao escoamento fazendo com que a pressão aumente e o mancal se afaste do seu assento o que reduz a potência viscosa dissipada.

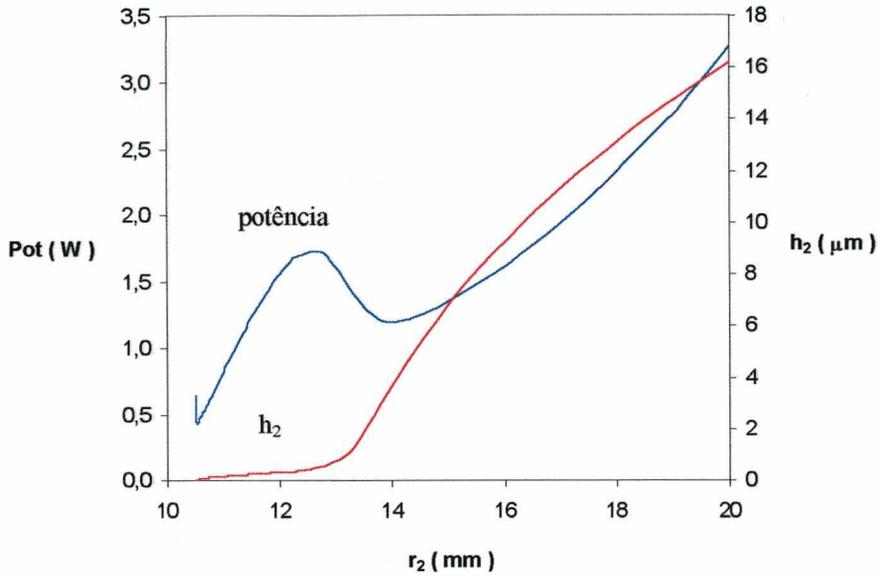


Fig. 5.39 - Variações da potência consumida e da espessura  $h_2$  em função de  $r_2$  para um mancal com 16 ressaltos

A figura 5.40 apresenta de forma comparativa o desempenho dos três mancais investigados em relação a  $r_2$ .

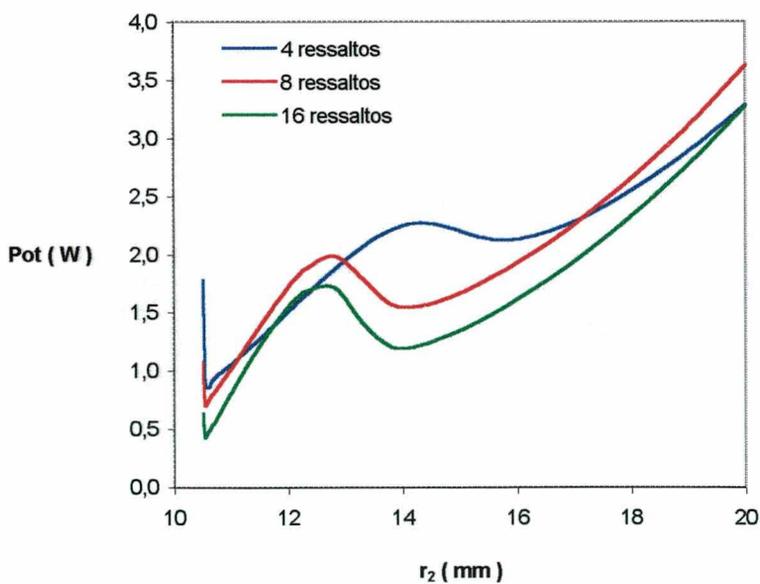


Fig. 5.40 - Variações da potência consumida em função de  $r_2$  e do número de ressaltos do mancal

### 5.3.2.2 Mancais de Escora com Setores Fresados

Os parâmetros geométricos ótimos para o mancal fresado estão listados na tabela 5.8. Para o mancal fresado a potência consumida calculada através dos parâmetros geométricos ótimos é igual a 0,705 W.

**Tabela 5.12 - Parâmetros Geométricos Ótimos**

mancal fresado	parâmetros geométricos
$d_f$ ( mm )	13,92
$\Delta h$ ( $\mu\text{m}$ )	14,60
$h_1$ ( $\mu\text{m}$ )	14,63
$r_2$ ( mm )	10,59

Para o mancal de sapata fresada foram também construídos três gráficos com a finalidade de se explorar os pontos de potência mínima. O primeiro gráfico mostra como a força suportada pelo mancal e a potência consumida por este variam em função do diâmetro da fresa. O segundo gráfico mostra como a potência varia em relação a  $\Delta h$  e  $h_2$ , e o terceiro é semelhante ao segundo sendo que a variação da potência é explorada em função de  $r_2$ . Os gráficos serão mostrados na ordem citada acima.

A figura 5.41 apresenta a carga em função do diâmetro da fresa. Este gráfico é construído mantendo-se a carga fixa bem como os parâmetros ótimos, exceto o diâmetro da fresa.

A figura 5.41 comprova que para um mancal fresado com 4 ressaltos, quando a otimização de  $r_2$  é considerada, o diâmetro da fresa ótimo é igual a 13,92 mm, com o qual o mancal suporta 12 N consumindo 0,705 W.

Novamente observa-se um grande platô na curva de carga versus o diâmetro da fresa. Conforme já explorado, neste platô  $\partial W/\partial\theta_1 \cong \partial W/\partial\theta_2 \cong 0$ , o que dificulta o processo de convergência da solução numérica.

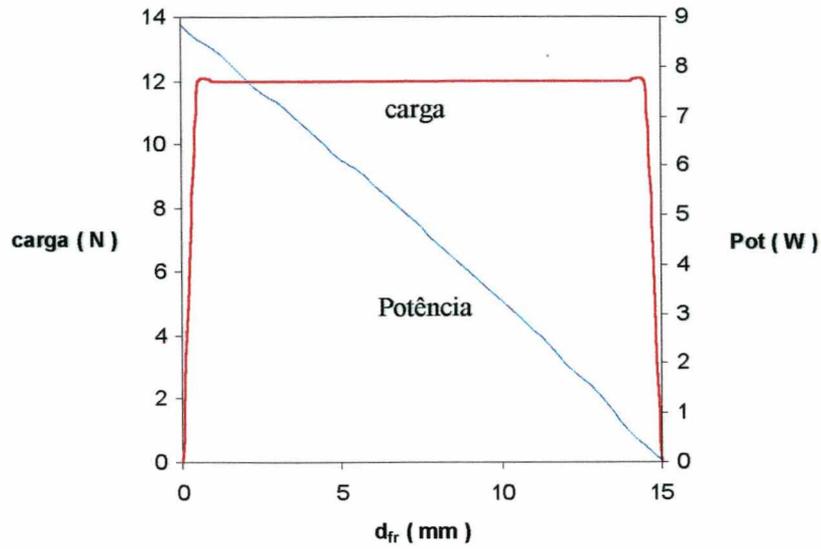


Fig. 5.41 - Carga suportada e potência consumida pelo mancal fresado em função do diâmetro da fresa;  $r_2$  como um dos parâmetros de otimização.

O segundo tipo de gráfico mostra como a potência consumida pelo mancal fresado varia em relação a  $\Delta h$  e  $h_2$ , como apresentado na figura de 5.42.

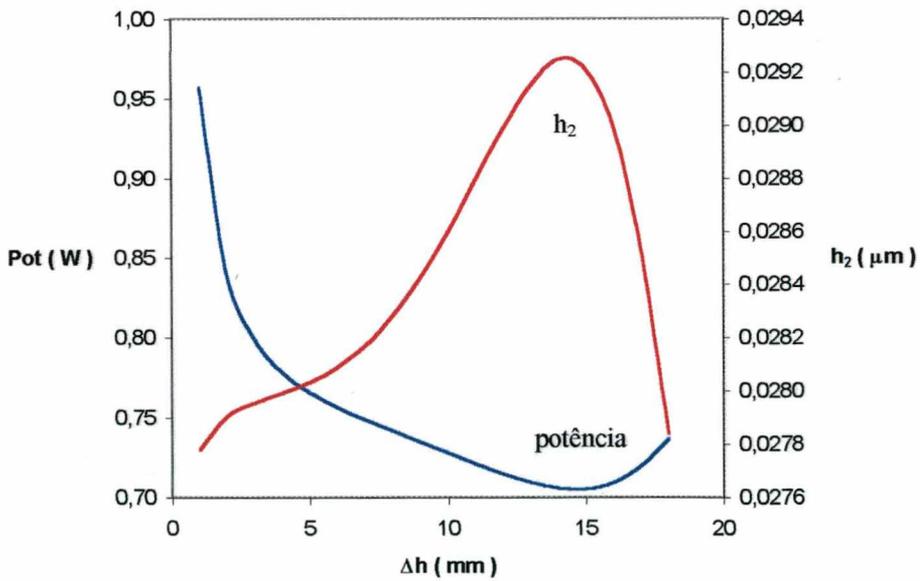


Fig. 5.42 - Variações da potência consumida e da espessura  $h_2$  em função de  $\Delta h$  para o mancal fresado;  $r_2$  como um dos parâmetros de otimização.

A figura 5.42 comprova que para um mancal fresado, quando a otimização de  $r_2$  é considerada, os valores ótimos para  $\Delta h$  e  $h_2$  são respectivamente 14,99 e 0,03  $\mu\text{m}$ , com os quais o mancal suporta 12 N consumindo 0,705 W de potência por atrito viscoso.

Da mesma forma que a figura 5.41, na figura 5.42 tanto a carga como os parâmetros ótimos, exceto  $\Delta h$ , foram mantidos constantes.

Diferentemente do que ocorre nas figuras 5.24 a 5.26 e de forma semelhante ao que ocorre nas figuras 5.34 a 5.36, a figura 5.42 mostra que a potência mínima coincide com os máximos valores de  $h_2$ . Tal fato justifica-se em virtude dos baixos valores de  $h_2$  obtidos quando  $r_2$  é incluído como parâmetro de otimização.

O terceiro gráfico a ser explorado para o mancal fresado com  $r_2$  sendo otimizado mostra como a potência consumida pelo mancal varia em função de  $r_2$  e  $h_2$ , conforme apresentado na figura 5.43.

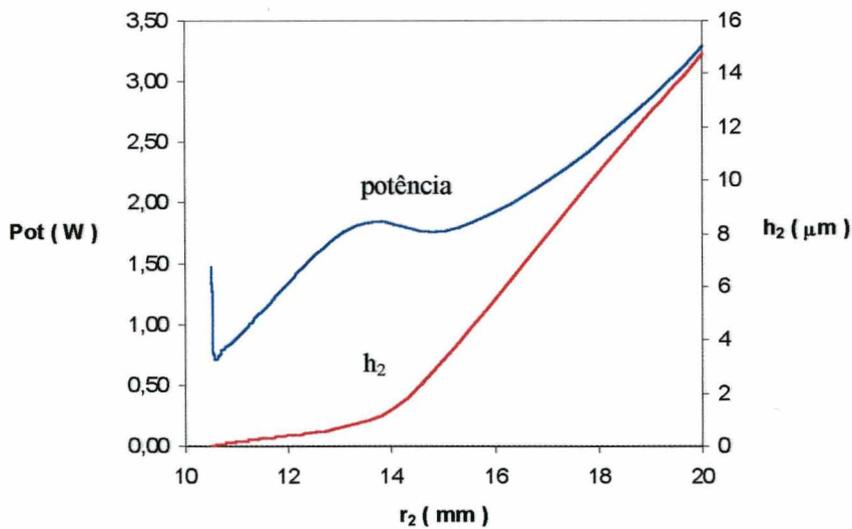


Fig. 5.43 - Variações da potência consumida e da espessura  $h_2$  em função de  $r_2$  para o mancal fresado

O gráfico anterior é construído da mesma forma que os gráficos apresentados nas figuras 5.37 a 5.39 porém, ou seja, para todos os pontos a carga suportada é mantida fixa e igual a 12 N.

No entanto, enquanto  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\Delta h$  foram mantidos constantes nas figuras 5.37 a 5.39, na figura 5.39 os parâmetros fixados foram  $\Delta h$  e o diâmetro da fresa.

Através da figura 5.43 vê-se que para o mancal fresado o valor ótimo de  $r_2$  é igual a 10,59 mm, com o qual o mancal suporta 12 N consumindo 0,705 W de potência.

Na figura 5.43 observa-se a presença de um ponto de vale para  $r_2$  aproximadamente igual a 15 mm.

### 5.3.2.3. Comparação entre o Desempenho do Mancal de Sapatas Circulares e o Mancal Fresado

A figura 5.44 mostra uma comparação da potência consumida em função de  $r_2$  entre o mancal de sapatas circulares com 4, 8 e 16 ressalto e o mancal fresado.

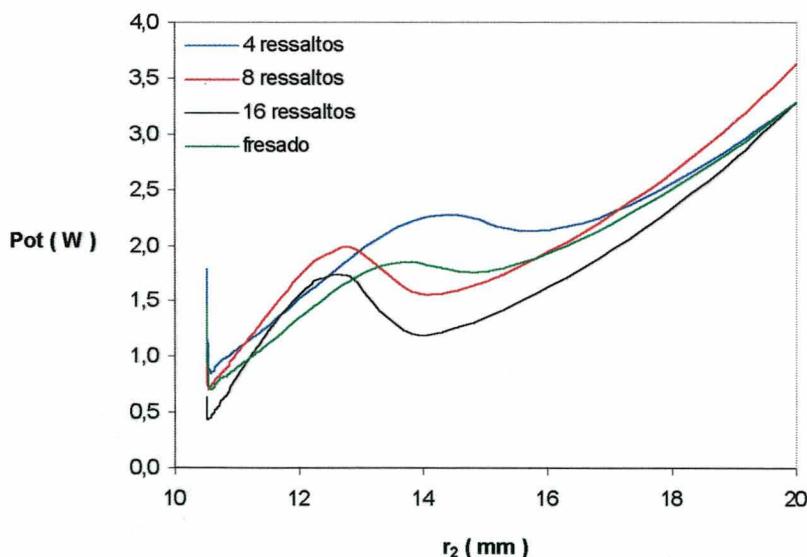


Fig. 5.44 - Comparação entre o mancal de sapatas retas circulares com 4, 8 e 16 ressalto e o mancal fresado em função de  $r_2$ .

De uma maneira geral pode-se afirmar que o mancal fresado possui um desempenho do ponto de vista de potência consumida, melhor do que o mancal com 4 ressalto.

### CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou, uma formulação matemática que incluiu à equação de Reynolds os termos inerciais centrífugos. Por este motivo a equação diferencial da pressão foi denominada de equação de Reynolds com termos inerciais centrífugos. Esta equação foi usada para a simulação do problema de lubrificação hidrodinâmica bem como para a otimização das sapatas, com setor circular e fresada. Já que os parâmetros de desempenho do mancal, carga suportada e potência consumida, advêm da integração do campo de pressão.

A otimização foi feita através do método dos Multiplicadores de Lagrange, para dois casos. O primeiro manteve  $r_2$  fixo e o segundo considerou também  $r_2$  como variável a ser otimizada juntamente com  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\Delta h$  e  $h_1$ .

As principais conclusões do trabalho são citadas a seguir:

1. Nas regiões de mudança do rebaixo para o ressalto do mancal existe um acentuado pico de pressão, ocasionado pela diminuição da área de escoamento. Estes picos de pressão são provenientes do efeito cunha e este fenômeno é que proporciona a capacidade de suportar carga ao mancal.
2. Com o aumento do número de ressaltos do mancal, a pressão na interface entre o rebaixo e o ressalto diminui. Isto ocorre devido à existência de um maior número de regiões de restrição ao escoamento. Como a carga a ser suportada é a mesma, e o número de picos de pressão é maior, o valor da pressão em cada pico diminui. Assim o mancal opera com um afastamento maior do assento, e conseqüentemente consome menos potência.

3. O código computacional desenvolvido para resolver o problema de otimização, através do método dos Multiplicadores de Lagrange, mostrou-se eficaz, porém muito dependente da estimativa inicial.
4. Para o problema de otimização onde  $r_2$  foi mantido constante a potência consumida pelo mancal depende tanto de  $\Delta h$  como de  $h_2$ . Para  $\Delta h/h_2 \ll 1$  e  $\Delta h/h_2 \gg 1$  a potência é governada por  $h_2$ . Alternativamente, para  $\Delta h/h_2 \sim 1$  ambos os parâmetros afetam a potência.
5. O desempenho do mancal fresado é superior ao do mancal de setor circular com 4 ressaltos.
6. Os valores ótimos para  $r_2$  encontrados nos mancais com 4, 8 e 16 ressaltos estão muito próximos de  $r_1$ . Estes resultados estão associados à grande dependência da potência consumida pelo mancal com a área da superfície do ressalto, que por sua vez varia com o quadrado de  $r_2$ . Para compensar a pequena área disponível para suportar carga, os valores de  $r_2$  reduziram-se de duas ordens de grandeza.
7. No problema de otimização incluindo  $r_2$  como variável. Nota-se que a potência mínima coincide com os valores máximos de  $h_2$ .
8. A inclusão dos termos de inércia na equação de Reynolds só se justifica para valores de frequência de rotação do eixo acima de 100 Hz.

Outras pesquisas podem ser feitas, por exemplo a aplicação de um método de otimização que não seja fundamentado em derivadas. Já que os Multiplicadores de Lagrange apresentou problemas de convergência devido às derivadas da função objetiva e das restrições em relação às variáveis apresentarem valores bastante diferentes. Sugere-se também a inclusão de uma restrição de desigualdade em relação a  $h_2$ . Esta restrição faz-se necessária para que  $h_2$  e  $r_2$  não sejam inferiores a um determinado valor, que impossibilitem a fabricação e a operação do mancal.

O aumento do número de ressaltos do mancal fresado é também sugerido. Já que com 4 ressaltos o desempenho do mancal fresado é superior ao do mancal de setor circular com 8

ressaltos. Espera-se que o mancal fresado com 8 e 16 ressaltos, por exemplo, possuam desempenhos superiores aos dos mancais de setor circular com 8 e 16 ressaltos.

No presente trabalho otimizou-se apenas os parâmetros geométricos, considerando-se fixas as formas das sapatas, tanto do mancal com setores circulares quanto do mancal fresado. Uma boa sugestão de otimização seria a da forma da sapata. Por exemplo uma sapata curva.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Auloge, J., Y.; Bourgin, P.; Gay, B. The Optimum Design of One-Dimensional Bearings With Non-Newtonian Lubricants. *Journal of Lubrication Technology*, v. 105, pp. 391-395, July, 1983.
- Bagci, C., Singh, A., P. Hydrodynamic Lubrication of Finite Slider Bearings: Effect of One Dimensional Film Shape, and Their Computer Aided Optimum Designs. *Journal of Lubrication Technology*, v. 105, pp. 48-66, January, 1983.
- Bourgin, P.; Gay, B. The Optimum Rayleigh Bearing in Terms of Load Capacity or Friction for Non-Newtonian Lubricants. *Journal of Lubrication Technology*, v. 107, pp. 59-67, January, 1985.
- Cameron, A. *The Principles of Lubrication*. Longmans: London, 1966.
- Castelli, V., and Pirvics, J., "Review of Numerical Methods in Gas Bearing Film Analysis," *ASME Journal of Lubrication Technology*, v. 90, pp. 777-792, October, 1968.
- Chow, C., Y.; Cheng, H., S; Wilcock, D., F. Optimum Surface Profile for the Enclosed Pocket Hydrodynamic Gas Thrust Bearing. *Journal of Lubrication Technology*, v. 92, pp. 318-324, April, 1970.
- Fernandes, J. R. S. e Prata, A. T., Estudo de Formas Alternativas para Sapatas em Mancais Axiais de Escora, Relatório de Pesquisa, RHAE / CNPq / UFSC, 1996.
- Ferziger, J. H. and Peric, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, 1996.
- Fox, R. W. e McDonald, A, T. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*, Guanabara, 1988.
- Gregory, E., W.; Maday, C., J. A Class of Maximum Load Capacity Sector Thrust Bearings. *Journal of Lubrication Technology*, v. 99, pp. 180-186, April, 1977.
- Gross, W. A. *Gas Filme Lubrication*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962.
- Maday, C., J. The One-Dimensional Optimum Hydrodynamic Gas Slider Bearing. *Journal of Lubrication Technology*, v. 90, pp. 281-284, January, 1968.
- Maliska, C., R. *Transferência de Calor e Mecânica dos fluidos computacional*. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora., 1995.
- Manke, A. L., Uma Metodologia de Cálculo para a Simulação de Mancais Radiais Submetidas a Carregamento Dinâmicos, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC, 1991.

- Mota, M. A. A e Prata, A. T., Estudo do acoplamento entre mancais de Escora e Radiais Finitos, Relatório de Pesquisa, RHAÉ / CNPq / UFSC, 1995.
- Oliveira, J. C. e Prata, A. T., Estudo dos Efeitos Bidimensionais em Mancais de Escora, Relatório de Pesquisa, RHAÉ / CNPq / UFSC, 1992.
- Patankar, S. V.; Liu, C., H.; Sparrow, E., M. Fully Developed Flow and Heat Transfer in Ducts Having Streamwise-Periodic Variations of Cross-Sectional Area. *Journal of Heat Transfer*, v. 99, pp. 180-186, May, 1977.
- Patankar, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York: Hemisphere Publishing Corp., 1980.
- Pinkus, O & Sternlichy, B. *Theory of Hydrodynamic Lubrication*. New York: John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962.
- Rao, S., *S. Engineering Optimization Theory and Praticce*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 3rd edition, New York, 1996.
- Roache, P., J. A Method for Uniform Reporting of Grid Refinement Studies. *Quantification of Uncertainty in Computacional Fluid Dynamics*. v. 158, pp. 109-120, 1993
- Rohde, S., M. The Optimum Slider Bearing in Terms of Friction. *Journal of Lubrication Technology*, v. 94, pp. 275-279, July, 1972.
- Santos, E. S. S., Carregamento Dinâmico de Mancais Radiais com Cavitação do Filme de Óleo, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC, 1995.
- Santos, E. S. S. e Prata, A. T., Carregamento Dinâmico de Mancais Radiais com Cavitação do Filme de Óleo, Anais do XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica ( CD-ROM), Bauru, 8 a 12 de Dezembro, 1997.
- Sato, Y.; Ono, K.; Moriguchi, N. Analysis of Viscous Pumps with Shrouded Rayleigh-Steps Using Compressible Fluid. *Journal of Tribology*. v. 110, pp. 597-601, October, 1988.
- Sato, Y.; Knight, J.D. Perfomance Characteristics of Shrouded Rayleigh-Step and Spiral Groove Viscous Pumps. *Journal of Tribology*. v. 114, pp. 499-506, July, 1992.
- Stoecker, W. F. *Design of Thermal Systems*: McGraw-Hill Book Company, 3rd edition, 1989.
- Teixeira, L. A. e Prata, A. T., Simulação e Otimização de Mancais Radiais, Workshop “Lubrificação e Escoamento de Refrigerante em Compressores”, UFSC / EMBRACO, 1995.
- Versteeg, H. K. and Malalasekera, W., *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*, Longman Scientific and Technical, 1995.
- Wylie, G., M.; Maday, C., J. The Optimum One-Dimensional Hydrodynamic Gas Rayleigh Step Bearing. *Journal of Lubrication Technology*, v. 92, pp. 504-508, July, 1970.

---

## MÉTODO DE NEWTON-RAPSHON PARA VÁRIAS VARIÁVEIS

O Newton-Rapshon para várias variáveis é um método iterativo para resolução de sistemas de equações cujo procedimento é o seguinte.

1. Escrever as equações da seguinte forma.

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

.

.

.

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

2. Assumir temporariamente valores para  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

3. Calcular  $f_1, f_2, \dots, f_n$  com os valores temporários de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

4. Calcular as derivadas parciais de todas as funções em relação a todas as variáveis.

5. Usar a expansão em série de Taylor para cada uma das funções, afim de estabelecer o sistema de equações. Assim, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix}$$

6. Resolver o sistema de equações para determinar  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$
7. Corrigir  $x_1, x_2, \dots, x_n$  com os  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  calculados no passo 6, da seguinte forma

$$x_{1,n} = x_{1,v} - \Delta x_1$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$x_{n,n} = x_{n,v} - \Delta x_n$$

onde  $x_{1,n}, \dots, x_{n,n}$  são os novos valores de  $x$  calculados, enquanto  $x_{1,v}, \dots, x_{n,v}$  são os valores de  $x$  assumidos temporariamente.

8. Testar a convergência, se o valor absoluto de  $f_1, \dots, f_n$  ou de  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$  satisfazem o critério de convergência, o sistema está resolvido, senão voltar ao passo 3

No algoritmo2 aplica-se o método descrito acima. Os  $x_1, \dots, x_n$  são os parâmetros geométricos a serem otimizados,  $\theta_1, \theta_2, \Delta h, h_1$  e  $r_2$ . As funções  $f_1, \dots, f_n$  são as equações de (4.10) a (4.14) para o caso de  $r_2$  variável, se  $r_2$  for fixo, o sistema de equações possuirá uma equação a menos.

Para explorar o TDMA, considere a equação (3.13),

$$a_p P_p = a_N P_N + a_s P_s + S'$$

porém escrita da seguinte forma para uma variável  $\phi$  qualquer,

$$A_i \phi_i = B_i \phi_{i+1} + C_i \phi_{i-1} + D_i \quad (1)$$

Para um "i" qualquer procura-se uma relação da forma,

$$\phi_i = E_i \phi_{i+1} + F_i \quad (2)$$

Fazendo  $i = i - 1$  na equação (2), tem-se,

$$\phi_{i-1} = E_{i-1} \phi_i + F_{i-1} \quad (3)$$

Substituindo-se (3) em (1), resulta em,

$$\phi_i = \frac{B_i}{A_i - C_i E_{i-1}} \phi_{i+1} + \frac{C_i F_{i-1} + D_i}{A_i - C_i E_{i-1}} \quad (4)$$

Comparando (4) e (2), tem-se,

$$E_i = \frac{B_i}{A_i - C_i E_{i-1}} \quad \text{e} \quad F_i = \frac{C_i F_{i-1} + D_i}{A_i - C_i E_{i-1}} \quad (5)$$

Nota-se que para  $i=1$  não existe  $\phi_{i-1}$ , logo o coeficiente associado à mesma é feito igual a 0 (zero), ou seja,  $C_1 = 0$ , resultando em:

$$E_1 = \frac{B_1}{A_1} \quad \text{e} \quad F_1 = \frac{D_1}{A_1} \quad (6)$$

e para  $i = n$  percebe-se que  $A_n = 0$ , pois  $\phi_{i+1}$  não existe, logo a equação (2) conduz a,

$$\phi_n = F_n \quad (7)$$

Feita essa exploração pode-se escrever o algoritmo para aplicação do TDMA.

1. Calcular  $E_1$  e  $F_1$  através da equação (6).
2. Usar as relações de recorrência (5), obtendo  $E_i$  e  $F_i$  para  $i = 2, 3, \dots, n$ .
3. Fazer  $\phi_n = F_n$ .
4. Usar a equação (2) calculando  $\phi_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Para explorar o CTDMA, considere a equação (3.15),

$$a_p P_p = a_E P_E + a_w P_w + S'$$

porém escrita da seguinte forma para uma variável  $\phi$  qualquer,

$$A_i \phi_i = B_i \phi_{i+1} + C_i \phi_{i-1} + D_i \quad (1)$$

Devido a variável  $\phi$  assumir os mesmos valores periodicamente, tem-se,

$$\text{para } i = 1, \quad \phi_{i-1} = \phi_{n-1} \quad (2)$$

$$\text{para } i = n - 1, \quad \phi_{i+1} = \phi_1 \quad (3)$$

Para um "i" qualquer procura-se uma relação da forma,

$$\phi_i = E_i \phi_{i+1} + F_i \phi_{n-1} + G_i \quad (4)$$

Fazendo  $i = i - 1$  na equação (4), tem-se,

$$\phi_{i-1} = E_{i-1} \phi_i + F_{i-1} \phi_{n-1} + G_{i-1} \quad (5)$$

Substituindo-se (5) em (1), resulta em,

$$\phi_i = \frac{B_i}{A_i - C_i E_{i-1}} \phi_{i+1} + \frac{C_i F_{i-1} + D_i}{A_i - C_i E_{i-1}} \phi_{n-1} + \frac{C_i G_{i-1} + D_i}{A_i - C_i E_{i-1}} \quad (6)$$

Comparando (6) e (4), tem-se,

$$E_i = \frac{B_i}{A_i - C_i E_{i-1}}, \quad F_i = \frac{C_i F_{i-1} + D_i}{A_i - C_i E_{i-1}} \quad e \quad G_i = \frac{C_i G_{i-1} + D_i}{A_i - C_i E_{i-1}} \quad (7)$$

Substituindo  $i = 1$  nas equações (1) e (4) e comparando-as, tem-se,

$$E_1 = \frac{B_1}{A_1}, \quad F_1 = \frac{D_1}{A_1} \quad e \quad G_1 = \frac{D_1}{A_1} \quad (8)$$

O próximo passo é encontrar o valor de  $\phi_{n-1}$ . Isso pode ser feito escrevendo a equação (1) para  $i = n-1$  e substituindo para  $\phi_1$  em termos de  $\phi_2$  e  $\phi_{n-1}$ , até que  $\phi_{n-1}$  seja a única incógnita da equação. Esta seqüência de cálculos pode ser expressa por,

$$p_1 = A_{n-1}, \quad q_1 = B_{n-1} \quad e \quad r_1 = D_{n-1} \quad (9)$$

e, para  $i = 2, 3, \dots, n-2$ ,

$$p_i = p_{i-1} - q_{i-1} F_{i-1}, \quad q_i = q_{i-1} E_{i-1} \quad e \quad r_i = r_{i-1} + q_{i-1} G_{i-1} \quad (10)$$

consecutivamente,

$$\phi_{n-1} = \frac{(q_{n-2} + C_{n-1})G_{n-2} + r_{n-2}}{p_{n-2} - (q_{n-2} + C_{n-1})(E_{n-2} + F_{n-2})} \quad (11)$$

Com a determinação de  $\phi_{n-1}$ . A equação (4) pode ser usada para calcular os valores de  $\phi_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n-2$ .

Feita essa exploração pode-se escrever o algoritmo para aplicação do CTDMA.

1. Calcular  $E_1$ ,  $F_1$  e  $G_1$  através da equação (8); e  $p_1$ ,  $q_1, r_1$  através da equação (9).
2. Usar as relações de recorrência (7) e (10), obtendo  $E_i$ ,  $F_i$ ,  $G_i$ ,  $p_i$ ,  $q_i$ ,  $r_i$  para  $i = 2, 3, \dots, n-2$ .
3. Calcular  $\phi_{n-1}$  através da equação (11).
4. Usar a equação (4), calculando  $\phi_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n-2$ .