Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica

Teoria Quase-Linear de Kato e a KdV Transicional

Jorge Richard Chávez Fuentes

Florianópolis

Março de 1998

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica

Teoria Quase-Linear de Kato e a KdV Transicional

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais.

Jorge Richard Chávez Fuentes

Florianópolis

Março de 1998

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

JORGE RICHARD CHÁVEZ FUENTES

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de "Mestre", área de concentração em equações diferenciais parciais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-graduação em Matemática e Computação Científica.

....

ETZEL RITTER VON STOCKERT
Coordenador

Comissão Examinadora:

Rafael José Iorio Jr.
....
Prof. Dr. Rafael Iorio Junior (IMPA)

....
Prof. Dr. Eduardo Arbieto Alarcón (UFSC - Orientador)

P. Otterson
....
Prof. Dr. Paul James Otterson (UFSC)

Jardel Morais Pereira
....
Prof. Dr. Jardel Morais Pereira (UFSC)

FLORIANÓPOLIS, 12 DE MARÇO DE 1998

A meus pais Alejandro e Juana.

A minha irmã Elba.

Agradecimentos

À CAPES pelo suporte econômico durante a realização deste trabalho. Ao Prof. Eduardo Arbieto Alarcón pela orientação nos estudos e apoio nas horas difíceis. Aos companheiros do Mestrado, em especial à Ana Paula, Márcio Pinto Villela, Marcos Calçada e Gentil Lopes da Silva, pela sua amizade. A Félix Pedro Q. Gómez pela sua disposição para discutir comigo algums problemas de EDP. Ao Prof. Aldrovando Luiz Araújo Azeredo pela sugestões no trabalho de digitação. A meus grandes amigos Carlos Vargas e Mauricio Zevallos por seu apoio e comunicação permanente. A todos aqueles que contribuiram de algum jeito na conclusão deste trabalho. Porém, meu agradecimento todo especial é para minha família pelo apoio moral na distância.

Florianópolis, março de 1998

Sumario

Notações

$\mathbb{N}$: conjunto dos numeros naturais

$\mathbb{Z}$: conjunto dos numeros inteiros

$\mathbb{R}$: conjunto dos numeros reais

$\mathbb{Z}^+$: $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{R}^+$: conjunto dos $r \in \mathbb{R}$ tal que $r \geq 0$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}^+)^n$

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$

$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$

$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$

$[A, B] = AB - BA$ (comutador dos operadores A e B)

$Y \hookrightarrow X$: o conjunto (espaço) Y esta imerso denso e continuamente em X

$B(Y, X)$: o espaço dos operadores limitados de Y em X.

$t \to 0^+$: $t \to 0$, $t > 0$

$\rho(A)$: o conjunto resolvente do operador A

$R(\lambda; A)$: o operador resolvente do operador A

$B|_{\mathfrak{D}(A)} = A$: $Bx = Ax \; \forall x \in \mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{D}(A)$ dominio de A

$\|\mathfrak{U}\|_{\infty, \mathfrak{B}(\mathfrak{X})} = \sup_{t,s \in \Delta} \|\mathfrak{U}(t, s)\|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{S})}$

$\|f\|_{\infty, \mathfrak{X}} = \sup_{[0,T]} \|f(t)\|_{\mathfrak{X}}$

$\|f\|_{1, \mathfrak{X}} = \int_0^T \|f(t)\|_{\mathfrak{X}} \, dt.$

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos a teoria linear e quase-linear de T. Kato e fazemos uma aplicação á equação de Korteweg-de Vries transcional (t - KdV), a saber,

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + g(t) u \partial_x u = 0, \ t, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Mostramos que o problema de Cauchy associado a esta equação tem solução única local no espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > 3/2$, para uma função g apropriada.

Abstract

In this work we develop the Katoŝ theory of linear and quasilinear equations and present am appplication to the Korteweg-de Vries Transitional (t - KdV) equation

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + g(t) u \partial_x u = 0,\ t,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

We show that the Cauchy problem associate to this equation has a unique and local solution on Sobolev space $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > 3/2$, with am apropiate function g.

Introdução

Neste trabalho desenvolvemos a teoria linear e quase-linear de T Kato e fazemos uma aplicação dela à equação de Korteweg-de Vries transicional (t-kdV), a saber,

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + g(t)\partial_x u = 0 \qquad t, x \in \mathbb{R}.$$

Mostramos que o problema de Cauchy associado a esta equação tem solução única local no espaço de Sobolev $H^3(\mathbb{R})$ para uma função g apropriada.

Esta equação descreve, de modo aproximado, o movimento de uma onda solitária que se propaga entre duas camadas rasas de fluidos, de densidades aproximadamente iguais, sendo a camada inferior menor que a superior. O efeito na mudança na profundidade da camada inferior, que a onda sofre quando se aproxima da praia, resulta no coeficiente do termo não linear.

Enquanto a teoria de Kato, ela aparece na década dos anos 50 com seu paper *Integration of the equation of evolution in a Banach Space* [8] em 1953 e a partir de então vem sendo estudada e aplicada amplamente na solução do problema de Cauchy para equações não lineares. A idéia de Kato é basicamente uma ampliação do método dos semigrupos. Isto é, em termos gerais, dado um problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t u &= Au \\ u(0) &= \phi \end{aligned} \tag{1}$$

se o operador diferencial A gera um semigrupo de classe C^0, $S(t),\ t \geq 0$, então a solução deste problema está dada em termos deste semigrupo, mais precisamente

$$u(t) = S(t)\phi$$

é a solução de (1). Agora se o operador A depende de t, isto é, $A = A(t)$, então se este operador satisfaz certas condições aparecem uns operadores $\mathfrak{U}(t,s)$ $t,s \geq 0$ chamados de evolução e a solução do problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t u &= A(t)u + f(t) \\ u(0) &= \phi \end{aligned} \tag{2}$$

está dada, analogamente à (1), em termos destes operadores, mais precisamente

$$u(t) = \mathfrak{U}(t,0)\phi + \int_0^t \mathfrak{U}(t,r)f(r)\,dr$$

é a solução de (2).

Finalmente Kato extende estas idéias para equações quase-lineares, i.e., equações da forma

$$\partial_t u = A(t,u)u + f(t,u) \tag{3}$$

onde $A(t,u)$ é um operador linear para cada $t \in [0,T]$ e cada u e f é uma função dada. Para cada função $t \mapsto v(t)$ em um certo espaço de Banach, considere-se o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t u &= A(t,v(t))u + f(t,v(t)) \\ u(0) &= \phi \end{aligned} \tag{4}$$

Aplicando então as idéias da solução de (2) (Teoria Linear, capítulo (3)) obtem-se uma aplicação $v \mapsto u_v$ onde u_v é única solução de (4). Prova-se então que o espaço de Banach mencionado acima pode ser escolhido de modo que a aplicação $t \mapsto v(t)$ seja uma contração. Logo por um argumento de ponto fixo prova-se que (3) tem solução com $u(0) = \phi$.

O presente trabalho está baseado e inspirado fundamentalmente em [5] e [12]. Porém para maiores informações o leitor pode consultar a ampla bibliografia ao final.

Capítulo 1

Resultados Básicos

Neste capítulo apresentamos conceitos e resultados a serem utilizados ao longo dos capítulos seguintes. Omitimos as demonstrações por se tratarem de resultados conhecidos os quais poderão ser encontrados na bibliografia ao final, especialmente em [6],[13] volumes I e II e [1].

1.1 Derivação de Funções Vetoriais

Definição 1.1. Seja $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathfrak{X}$ uma função definida no intervalo $\langle a, b\rangle$ e com valores num espaço de Banach $\mathfrak{X}$, (real ou complexo). Diz-se que f é diferenciável no ponto $t_o \in \langle a, b\rangle$ se existir, na norma de $\mathfrak{X}$, o limite

$$f'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

dito *derivada* de f no ponto t_0. Diz-se que f é diferenciável em $\Omega \subset \langle a, b\rangle$ se f for diferenciável em todo ponto de Ω. São válidas para a diferenciação de funções vetoriais as regras a seguir, cuja demonstração é análoga ao caso numérico:

a) Se f é diferenciável no ponto t_0 então

$$f(t) - f(t_0) = (t - t_0)f'(t_0) + \alpha(t - t_0),$$

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\alpha(t - t_0)}{t - t_0} = 0$$

Em particular se f é diferenciável no ponto t_0, então f é contínua neste ponto.

b) Se f é uma função constante, i.e., se $f(t) = x_0 \; \forall \, t \in \langle a, b \rangle$ onde $x_0 \in \mathfrak{X}$, então f é diferenciável em todo ponto de $\langle a, b \rangle$ e

$$f'(t) = 0 \quad \forall \, t \in \langle a, b \rangle$$

c) Se f e g forem diferenciáveis no ponto t_0 então $f + g$ é diferenciável no ponto t_0 e

$$(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$$

d) Se h é uma função numérica definida em $\langle a, b \rangle$ e diferenciável no ponto t_0, e $f : \langle a, b \rangle \mapsto \mathfrak{X}$ é diferenciável no ponto t_0, então hf diferenciável em t_0 e

$$(h.f)'(t_0) = h'(t_0)f(t_0) + h(t_0)f'(t_0)$$

Teorema 1.1. *Se $f'(t) = 0 \, \forall \, t \in \langle a, b \rangle$ então f é constante em $\langle a, b \rangle$.*

Teorema 1.2. *Se f e g são duas funções definidas em $\langle a, b \rangle$ com valores em uma álgebra de Banach e diferenciáveis em um ponto $t_0 \in \langle a, b \rangle$ então fg é diferenciável em t_0 e*

$$(f.g)'(t_0) = f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0)$$

1.2 Integração de Funções Vetoriais

Seja $f : [a, b] \mapsto \mathfrak{X}$ onde $\mathfrak{X}$ é um espaço de Banach (real ou complexo), uma função contínua. Dada uma partição π de $[a, b]$, i.e., $n + 1$ números reais $t_0, t_1, \ldots t_n$, satisfazendo a condição

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

e n números reais $\xi_i i = 1, \ldots, n$, $\xi_i \in < t_{i-1}, t_i >$ fica definida uma soma de Riemann de f

$$\sigma_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

Seja

$$|\pi| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\, t_i - t_{i-1} \,\}$$

Com os mesmos argumentos do caso numérico demonstra-se que $\sigma_\pi(f)$ tem um limite, $x \in \mathfrak{X}$, quando $|\pi| \to 0$. De modo mais preciso: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\| \, \sigma_\pi(f) - x \, \| < \epsilon$$

para toda π tal que $|\pi| < \delta$. Como no caso numérico diz-se que x é a *integral de* f em $[a, b]$ e escreve-se

$$x = \lim_{|\pi| \to 0} \sigma_\pi(f) = \int_a^b f(t)\, d\,t$$

São válidas as seguintes regras usuais do caso numérico, a saber:

a) Se k é uma constante

$$\int_a^b k f(t)\, d\,t = k \int_a^b f(t)\, d\,t$$

b)

$$\int_a^b (f + g)(t)\, d\,t = \int_a^b f(t)\, d\,t + \int_a^b g(t)\, d\,t$$

c) Se $a \leq c \leq b$ então

$$\int_a^b f(t)\, d\,t = \int_a^c f(t)\, d\,t + \int_c^b f(t)\, d\,t$$

d)

$$\| \int_a^b f(t)\, d\,t \| \leq \int_a^b \| \, f(t) \, \| \; d\,t$$

Teorema 1.3 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Seja* $F \colon [a, b] \to \mathfrak{X}$ *uma função diferenciável e* $F'(t) = f(t),\ t \in [a, b]$. *Então*

$$\int_a^b f(\tau)\, d\,\tau = F(b) - F(a)$$

Teorema 1.4. *Sejam* $A : \mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}$ *um operador fechado e* f *uma função contínua em* $[a, b]$, *com valores em* $\mathfrak{D}(A)$ *e tal que* Af *seja contínua em* $[a, b]$. *Então*

$$\int_a^b f(t)\,dt \in \mathfrak{D}(A)$$

e

$$A \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b Af(t)\,dt$$

Teorema 1.5. *A integral imprópria de uma função contínua,* $f : [a, \infty > \mapsto \mathfrak{X}$ *é definda exatamente como no caso numérico:*

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{\xi \to \infty} \int_a^\xi f(t)\,dt$$

quando este limite existe. Nesse caso diz-se que a integral

$$\int_a^\infty f(t)\,dt$$

é convergente.

1.3 A Transformada de Fourier

Definição 1.2. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de f é a função $\widehat{f} = \mathfrak{F}f$ definida por

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e

$$x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$$

é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.6. *A transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é uma função contínua e limitada e satisfaz a desigualdade*

$$\| \widehat{f} \|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-n/2} \| f \|_{L^1}$$

Em particular, a aplicação $f \mapsto \widehat{f}$ é um operador limitado de $L^1(\mathbb{R}^n)$ em $L^\infty\mathbb{R}^n$. Mais ainda, vale o lema de Riemann-Lebesgue, i.e.,

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$$

Definição 1.3. Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a convolução de f e g á função definida por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

Teorema 1.7 (Teorema de Young). *Sejam $p, q, r \in [1, \infty]$ tais que $p^{-1} + q^{-1} = 1 + r^{-1}$. Então se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ a convolução $(f * g) \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\| f * g \|_{L^r} \leq \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^q}$$

Teorema 1.8. *A convolução de funções mensuráveis, quando definida, tem as seguintes proprieades algébricas*

a) $f * g = g * f$

b) $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g) \quad \lambda \in \mathbb{C}$

c) $(f * g) * h = f * (g * f)$

d) $f * (g + h) = f * g + f * h$

Definição 1.4. O espaço de Schwartz, denotado por $S(\mathbb{R}^n)$ é a coleção das $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tais que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\| f \|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

com $\alpha,\ \beta \in (\mathbb{Z}^+)^n$

Claramente $S(\mathbb{R}^n)$ está formado por funções que junto com suas derivadas de toda ordem decrescem rapidamente.

Entre as propriedades mais importantes de $S(\mathbb{R}^n)$ está o fato de estar "contido" e ser denso nos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$. Mais precisamente:

a) $S(\mathbb{R}^n) \subsetneq L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \in [1, \infty]$, no sentido que toda função f de $S(\mathbb{R}^n)$ é mensurável e define uma classe de equivalencia em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Em particular quando $1 \leq p < \infty$, f é integrável Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$.

b) $\overline{S(\mathbb{R}^n)}^{L^p(\mathbb{R}^n)} = L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \in [1, \infty[$, no sentido que, se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ existe uma sequência $\{f\}_{k \geq 1}$ contida em $S(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} \| f - f_k \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$$

Teorema 1.9. *Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Este teorema permite definir a transformada inversa pela fórmula

$$\overset{\vee}{f}(x) = (\mathcal{F}^{-1} f)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad f \in S(\mathbb{R}^n)$$

Teorema 1.10. *A transformada de Fourier*

$$\mathcal{F} \colon L^2(\mathbb{R}^n) \mapsto L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$f \longrightarrow \widehat{F} = \mathcal{F} f$$

definida como a única extensão linear da transformada em $S(\mathbb{R}^n)$ a $L^2(\mathbb{R}^n)$, é um operador unitário. Em particular satisfaz a seguinte importante propriedade:

$$\| f \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \| \widehat{f} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

a igualdade de acima é chamada de "identidade de Parseval".

1.4 Distribuições Temperadas

A família de seminormas $\| f \|_{\alpha,\beta}$ define uma topologia no espaço $S(\mathbb{R}^n)$ onde α, β variam sobre toda a coleção de multi-índices $(\mathbb{Z}^+)^n$.

Definição 1.5. Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathbb{R}^n)$. Então f_n converge a $f \in S(\mathbb{R}^n)$ no sentido de $S(\mathbb{R}^n)$ se e somente se

$$\| f_n - f \|_{\alpha,\beta} \to 0 \qquad (f_n \xrightarrow{s} f)$$

quando $n \to \infty$ para todo par α, β de multi-índices.

Definição 1.6. O conjunto das distribuições temperadas, denotado por $S'(\mathbb{R}^n)$, é o dual topológico de $S(\mathbb{R}^n)$. Em outras palavras, $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ se e só se $T\colon S(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{C}$ é um funcional linear contínuo. (Note que para verificar que um funcional linear $T\colon S(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{C}$ é contínuo, basta provar que $T\varphi_n \to T\varphi$ para toda $\varphi_n \xrightarrow{s} \varphi$)

Uma distribuição típica é por exemplo aquela definida por funções $L^p(\mathbb{R}^n)$ através da fórmula

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx, \qquad f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Precisamente a aplicação linear

$$f \in L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow T_f \in S'(\mathbb{R}^n)$$

é contínua e injetiva o que permite identificar $L^p(\mathbb{R}^n)$ com um subconjunto de $S'(\mathbb{R}^n)$. Uma das grandes vantagens das distribuições é que elas são *infinitamente diferenciáveis* e esta derivada ainda é uma distribuição. Defini-se esta derivada por

$$(\partial^\alpha f)\varphi) = (-1)^{|\alpha|} f(\partial^\alpha \varphi)$$

onde $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Em particular $f \in S(\mathbb{R}^n)$ então $\partial^\alpha f \in S(\mathbb{R}^n)$ $\forall \alpha$ e define uma distribuição temperada também denotada por $\partial^\alpha f$

atrvés da fórmula

$$\partial^\alpha f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha f(x)\varphi(x)dx \qquad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

segue-se daqui

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha f(x)\varphi(x)dx &= \partial^\alpha f(\varphi) \\ &= (-1)^{|\alpha|} f(\partial^\alpha) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial^\alpha \varphi(x)dx \end{aligned}$$

Sua transformada de Fourier $\widehat{f} \in S'(\mathbb{R}^n)$ é definida como

$$\widehat{f}(\varphi) = f(\widehat{\varphi}) \qquad \forall\, \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Similarmente se define a transformada inversa.

Teorema 1.11. *A transformada de Fourier*

$$\mathfrak{F}\colon S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$$

deixa o $L^2(\mathbb{R}^n)$ *invariante e*

$$\mathfrak{F}|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

é um perador linear unitário (ou seja, preserva norma e é sobre). O mesmo vale para a transformada inversa $\mathfrak{F}^{-1}$.

A topologia em $S'(\mathbb{R}^n)$ pode ser descrita da seguinte maneira:

Definição 1.7. Seja $\{f_n\} \subset S'(\mathbb{R}^n)$. Então $f_n \to f \in S'(\mathbb{R}^n)$ quando $n \to \infty$ se e só se $f_n(\varphi) \to f(\varphi)\ \forall\, \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.12. *Seja* $f \in S'(\mathbb{R}^n)$. *Então* $\overset{\vee}{f}$ *e* $\widehat{f}$ *são distribuições temperedas. Aém disso,* $\widehat{f}^{\vee} = f = \overset{\vee\wedge}{f}$ *e a aplicação* $f \to \widehat{f}$ *é contínua, com inversa contínua.*

Vamos agora generalizar a relação entre a derivada e a transformada de Fourier para o caso de $S'(\mathbb{R}^n)$. Para isso, seja $Q(\mathbb{R}^n)$ a coleção das funções em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de crescimento lento, i.e., $\psi \in Q(\mathbb{R}^n)$ se e só se $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e, para todo multi-índice α, existe uma constante $C(\alpha)$ e um inteiro não-negativo $N(\alpha)$ satisfazendo

$$|\partial^\alpha \psi(x)| \leq C(\alpha)(1+|x|^2)^{N(\alpha)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com $|x|$ suficientemente grande. Em outras palavras, os elementos de $Q(\mathbb{R}^n)$ são as funções tais que elas e todas as suas derivadas são limitadas por polinômios fora de alguma bola centrada na origem.

Teorema 1.13. *Sejam $\psi \in Q(\mathbb{R}^n)$ e $f \in S'(\mathbb{R}^n)$. Então*

a) ψ define um elemento de $S'(\mathbb{R}^n)$ da maneira usual, i.e.,

$$\psi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)dx, \qquad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

b) o funcional linear ψf definido por

$$(\psi f)(\varphi) = f(\psi\varphi), \qquad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

é um elemnto de $S'(\mathbb{R}^n)$, chamado o produto da distribuição temperada f com a função ψ;

c) valem as fórmulas

$$\xi^\alpha f = (-i)^\alpha(\partial^\alpha f)^\wedge$$
$$(\partial^\alpha \widehat{f}) = (-i)^\alpha (x^\alpha f)^\wedge$$

onde $x^\alpha f$ (resp. $\xi^\alpha f$) denota o produto da função $\psi(x) = x^\alpha$ (resp. $\psi(\xi) = \xi^\alpha$) com a distribuição f (resp. $\widehat{f}$).

Definição 1.8. Seja $s \in \mathbb{R}$. Os espaços de Sobolev (com base em $L^2(\mathbb{R}^n)$) em $\mathbb{R}^n$ são os seguintes subconjuntos de $S'(\mathbb{R}^n)$:

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) \mid (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

onde o produto $(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}$ é definido como acima.

O espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, é de Hilbert quando munido do produto interno,

$$\langle f, h\rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi.$$

A norma correspondente é evidentemente,

$$\| f \|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Em particular tem-se que $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$, no sentido da indentificação com as distribuições.

Teorema 1.14. *Sejam $s, s' \in \mathbb{R}$. Então*

a) $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ se $s \geq s'$.

b) $S(\mathbb{R})$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$ $\forall\, s \in \mathbb{R}$, no sentido que toda "função" f em $H^s(\mathbb{R}^n)$ pode ser aproximada por uma sequencia $\{f_k\}_{k\geq 1}$ em $S(\mathbb{R}^n)$ na norma de $H^s(\mathbb{R}^n)$.

c) se $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ então $\partial^\alpha f \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ e vale

$$\| \partial^\alpha f \|_{s-|\alpha|} \leq \| f \|_s$$

d) Se $s > n/2$ então $H^s(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra de Banach com respeito ao produto de funções. Isto é, se $f, g \in H^s(\mathbb{R}^n)$ então $fg \in H^s(\mathbb{R}^n)$ com

$$\| fg \|_s \leq C_s \| f \|_s \| g \|_s \qquad \forall\, f, g \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

É interessante e extremamente útil observar que se s é suficientemente grande então os elementos de $H^s(\mathbb{R}^n)$ são funções contínuas. Mais precisamente, vale o lema de Sobolev:

Teorema 1.15. *Seja $s > n/2$. Então $H^s(\mathbb{R}^n)$ está continuamente imerso em $C_\infty(\mathbb{R}^n)$, o espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{C}$ que tendem a zero quando $|x| \to \infty$ e vale a desigualdade*

$$\| f \|_{L^\infty} \leq C_s \| f \|_s$$

Outro resultado útil será a seguinte estimativa:

Teorema 1.16. *Sejam* $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$. *Então*

$$\| [J^t, f]g \|_0 \leq C\big(\| \nabla f \|_A \| g \|_{t-1} + \| \nabla f \|_{t-1} \| g \|_A \big) \quad \forall t \geq 1$$

onde $\| g \|_A = \| \widehat{g} \|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ *e* $J^s = (1-\Delta)^{s/2}$

Finalmente mais um teorema que sera útil no Capítulo 5.

Teorema 1.17. *Seja* $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. *Então o operador* $(1-\Delta)^{s/2}$ *é uma isometria sobrejetiva de* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *em* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *onde*

$$\mathfrak{D}((1-\triangle)^{s/2}) = H^s(\mathbb{R}^n)$$

$$(1-\triangle)^{s/2} = \mathfrak{F}^{-1}((1+M_0)^{s/2})\mathfrak{F}$$

$$\mathfrak{D}(M_0) = \{\, g \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid |\xi|^2 g \in L^2(\mathbb{R}^n) \,\}$$

$$(M_0 g)(\xi) = |\xi|^2 g(\xi)$$

Capítulo 2

Semigrupos de Operadores Limitados

Neste capítulo trataremos sobre alguns conceitos básicos de teoria de Semigrupos de Operadores Lineares Limitados, que , serão úteis para nossos própositos. Definiremos e caracterizaremos o gerador infinitesimal de um semigrupo e daremos uma demonstração detalhada do teorema principal deste capítulo: o teorema de Hille-Yosida-Philips. Para maiores informações o leitor deve consultar [12], assim como [13] e [2].

Definição 2.1. Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Banach e $\mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ o espaço de operadores lineares limitados em X. Diz-se que a família

$$S = \{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+} \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{X})$$

é um semigrupo se

$$i)\ S(0) = I \tag{2.1a}$$

$$ii)\ S(t+s) = S(t)S(s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+ \tag{2.1b}$$

Diz-se que um semigrupo S é de classe C^0 se

$$iii)\ \lim_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\|_{\mathfrak{X}} = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{X} \tag{2.1c}$$

Uma aplicação do teorema de limitação uniforme mostra que:

Lema 2.1. *Se* S *é um semigrupo de classe* C^0, *então a aplicação* $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \|S(t)\|$ *é uniformemente limitada em intervalos limitados.*

E como consequência imediata deste lema temos a seguinte proposição:

Proposição 2.1. *Todo semigrupo de classe* C^0 *é fortemente contínuo em* $\mathbb{R}^+$ *, i.e. se* $t_0 \in \mathbb{R}^+$ *então*

$$\lim_{t \to t_0} S(t)x = S(t_0)x \qquad \forall x \in \mathfrak{X}$$

O seguinte lema permitirá demonstrar que a aplicação $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \|S(t)\|$ está majorada pela expressão $Me^{\omega t}$, muito útil para questões relacionadas com a continuidade.

Lema 2.2. *Seja* $\mathfrak{P}$ *uma função subaditiva* ($\mathfrak{P}(s+t) \leq \mathfrak{P}(s) + \mathfrak{P}(t)$) *em* $\mathbb{R}^+$ *e limitada superiormente em todo intervalo limitado. Então*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\mathfrak{P}(t)}{t} = \inf_{t>0} \frac{\mathfrak{P}(t)}{t} \tag{2.2}$$

Proposição 2.2. *Seja* S *um semigrupo de clase* C^0. *Então*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\log \|S(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log \|S(t)\|}{t} = \beta_0 \tag{2.3}$$

e para cada $\beta > \beta_0$ *existe uma constante* $M \geq 1$ *tal que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\beta t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.4}$$

Prova. Como

$$\begin{aligned} \log \|S(t+s)\| &= \log \|S(t)S(s)\| \\ &\leq \log \|S(t)\| \|S(s)\| \\ &= \log \|S(t)\| + \log \|S(s)\| \end{aligned}$$

então $\log \|S(t)\|$ é subaditiva e pelo lema 2.1 é limitada superiormente em todo intervalo limitado., Logo, pelo lema 2.2 usando $\mathcal{P}(t) = \log \|S(t)\|$ tem-se 2.3. Seja $\beta > \beta_0$, então existe t_0 tal que para $t > t_0$ tem-se

$$\frac{\log \|S(t)\|}{t} < \beta. \tag{2.5}$$

Mas $\|S(t)\|$ é limitada no intervalo $[0, t_0]$, i.e., existe $M(t_0)$ tal que $\|S(t)\| \leq M(t_0) \quad \forall t \in [0, t_0]$ onde $M(t_0) \geq 1$ pois $\|S(0)\| = \|I\| = 1$. Se $\beta \geq 0$ tem-se, então de 2.5

$$\log \|S(t)\| \leq \beta t + \log M(t_0) \qquad \forall t \geq 0$$

e fazendo $M = M(t_0)$ se consegue a estimativa 2.4. Agora se $\beta > 0$ ainda de 2.5 tem-se

$$\log \|S(t)\| \leq \beta t - \beta_0 t_0 + \log M(t_0) \qquad \forall t \geq 0$$

e fazendo $M = M(t_0)e^{-\beta t_0}$ conseguimos de novo 2.4. Em ambos os casos $M \geq 1$. □

Definição 2.2. Seja S um semigrupo de classe C^0 sobre $\mathcal{X}$. O operador $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &= \left\{ \varphi \in \mathcal{X} \mid \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)\varphi - \varphi}{t} \quad \text{existe} \right\} \\ A\varphi &= \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)\varphi - \varphi}{t} \end{aligned} \tag{2.6}$$

é conhecido como o gerador infinitesimal do semigrupo.

Observamos que $\mathcal{D}(A)$ não é vazio pois $0 \in \mathcal{D}(A)$ e portanto o gerador infinitesimal de um semigrupo C^0 sempre existe. Aliás, $A\varphi$ não é outra coisa que

$$A\varphi = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)\varphi - \varphi}{t} = \left. \frac{d^+ S(t)\varphi}{dt} \right|_{t=0}$$

donde vem o nome de gerador infinitesimal.

No caso do semigrupo exponencial $S(t) = e^{tA}$ onde $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ não é difícil ver que seu gerador é precisamente o operador A cujo domínio é todo $\mathcal{X}$. Nem sempre, porém o gerador está definido em todo $\mathcal{X}$ e menos ainda ele é limitado. O usual é precisamente o contrário, como demonstra o seguinte:

Exemplo. Seja $N_t \quad \forall t > 0$ a função definida em $\mathbb{R}^n$ por

$$N_t(x) = (2\pi t)^{-n/2} e^{-\|x\|/2t}$$

onde

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Tomemos $\mathfrak{X} = L^2(\mathbb{R}^n)$ e definimos $S(t)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ por

$$i)\ S(0)f = f$$

$$ii)\ S(t)f = N_t * f, \quad t > 0$$

Já que $N_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\|N_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = (2\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|/2t} dx = 1$$

e $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então segundo o teorema de Young $N_t * f$ está bem definido e $N_t * f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Claramente $S(t)$ é um operador linear em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e pelo mesmo teorema de Young temos

$$\|N_t * f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|N_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

donde $S(t) \in \mathfrak{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$. vejamos em seguida que $S(t)$ verifica 2.1b aproveitando que $\mathfrak{F}$, a transformada de Fourier, é um operador injetivo em $L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(N_t * N_s)(\xi) &= (2\pi)^{n/2}\mathfrak{F}(N_t)(\xi)\,\mathfrak{F}(N_s)(\xi) \\ &= (2\pi)^{n/2}(2\pi)^{-n/2}e^{-t\|\xi\|^2}(2\pi)^{-n/2}e^{-s\|\xi\|^2} \\ &= (2\pi)^{n/2}e^{-(t+s)\|\xi\|^2} \\ &= \mathfrak{F}(N_{t+s})(\xi)\end{aligned}$$

donde $N_t * N_s = N_{t+s}$ e portanto $S(t+s)f = N_t * f = (N_t * N_s) * f = N_t * (N_s * f) = S(t)S(s)f$. Agora, aplicando a identidade de parseval conseguimos 2.1c. Vejamos isto

$$\begin{aligned}
\|N_t * f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} =& \|e^{-t|.|^2}\hat{f} - \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
=& \|(e^{-t|.|^2} - 1)\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
=& |e^{-t|.|} - 1| \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0, \qquad t \to 0^+
\end{aligned}$$

Logo $S(t)$ é um semigrupo de classe C^0. Calculemos seu gerador infinitesimal

$$\begin{aligned}
\|\frac{S(t)f - f}{h} - g)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} =& \|\mathfrak{F}\left(\frac{S(t)f - f}{h} - g\right)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
=& \|\frac{\mathfrak{F}(N_t * f) - \mathfrak{F}(f)}{t}\mathfrak{F}(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
=& \|\frac{e^{-t|.|^2}\mathfrak{F}(f) - \mathfrak{F}(f)}{t} - \mathfrak{F}(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
=& \|\frac{e^{-t|.|^2 - 1}}{t}\mathfrak{F}(f) - \mathfrak{F}(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

donde $Af = g$, se e só se ,$-|\xi|^2\mathfrak{F}(f) = \mathfrak{F}(g)$. Mas sabe-se que $-|\xi|^2\mathfrak{F}(f) = \mathfrak{F}(\Delta f)$. Logo, $A\,f = g$, se e só se, $\mathfrak{F}(\Delta f) = \mathfrak{F}(g)$ e portanto, se e só se $\Delta f = g$. Conclui-se daqui que

$$\mathfrak{D}(A) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \Delta f \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\} = H^2(\mathbb{R}^n)$$

Logo $\mathfrak{D}(A)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$e aliás, ele não é limitado (veja por exemplo [6]). Para ver outros exemplos remetemos o leitor a [2].

Lema 2.3. *Seja* $u\colon \mathbb{R}^+ \to \mathfrak{X}$ *uma função contínua no espaço de Banach* $\mathfrak{X}$. *Então*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(\tau)d\tau = u(t)$$

Lema 2.4. *Seja* A *o gerador infinitesimal do semigrupo* C^0 $S(t)\,t \geq 0$. *Então para cada* $x \in \mathfrak{X}$ $\int_0^t S(\tau)xd\tau \in \mathfrak{D}(A)$ *e*

$$A\int_0^t S(\tau)xd\tau = S(\tau)x - x$$

Prova. Seja $h > 0$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\int_0^t (S(\tau)x d\tau =&\frac{1}{h}\int_0^t (S(\tau+h)x - S(\tau))\, d\tau\\
=&\frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} S(\tau)x\, d\tau - \int_0^t S(\tau)x\, d\tau\right)\\
=&\frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} S(\tau)x\, d\tau - \int_0^h S(\tau)x\, d\tau - \int_0^t S(\tau)x\, d\tau\right)\\
=&\frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} S(\tau)x\, d\tau - \int_0^h S(\tau)x\, d\tau\right)
\end{aligned}
$$

e pelo lema anterior esta última expressão converge para $S(t)x - x$ quando $h \to 0^+$. □

Proposição 2.3. *Seja S um semigrupo C^0 e A seu gerador infinitesimal. Se $x \in \mathfrak{D}(A)$, então $S(t)x \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathfrak{X}) \cap C(\mathbb{R}^+, \mathfrak{D}(A))$ e,*

$$
\frac{d\,S(t)x}{d\,t} = A\,S(t)x = S(t)Ax, \qquad t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.7}
$$

Prova. Seja $x \in \mathfrak{D}(A)$ e $t_0 \in \mathbb{R}^+$, então

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{S(t_0+h)x - S(t_0)x}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{S(t_0)S(h)x - S(t_0)x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^+} S(t_0)\left(\frac{S(h)x - x}{h}\right)\\
&=S(t_0) \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}\\
&=S(t_0)Ax
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

já que

$$
\frac{S(h)S(t_0)x - S(t_0)x}{h} = \frac{S(t_0)S(h)x - S(t_0)x}{h}
$$

então

$$
\lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)S(t_0)x - S(t_0)x}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(t_0)S(h)x - S(t_0)x}{h} = S(t_0)Ax
$$

e portanto $S(t_0)x \in \mathfrak{D}(A)$, logo

$$
\lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)S(t_0)x - S(t_0)x}{h} = AS(t_0)x \tag{2.9}
$$

de 2.8 e 2.9 conclui-se que

$$\frac{d^+S(t)x}{dt}|_{t=t_0} = AS(t_0)x = S(t_0)Ax \qquad \forall\, t_0 \in \mathbb{R}^+ \tag{2.10}$$

Agora, se $t_0 \in <0, \infty>$ e $h > 0$ é suficientemente pequeno tem-se

$$\frac{S(t_0)x - S(t_0-h)x}{h} = \frac{S(t_0-h+h)x - S(t_0-h)x}{h}$$
$$= S(t_0-h)\left(\frac{S(h)x - x}{h}\right)$$

donde

$$\frac{S(t_0)x - S(t_0-h)x}{h} - S(t_0)Ax =$$
$$S(t_0-h)\left(\frac{S(h)x-x}{h} - Ax\right) + \big(S(t_0-h) - S(t_0)\big)Ax$$

Mas $\|S(t_0-h)\left(\frac{S(h)x-x}{h} - Ax\right)\| \leq Me^{\beta(t_0-h)}\|\frac{S(h)x-x}{h} - Ax\| \to 0, \quad h \to 0^+$ e $\|\big(S(t_0-h) - S(t_0)\big)Ax\| \leq \|S(t_0-h)Ax - S(t_0)Ax\| \to 0 \quad h \to 0^+$ devido à continuidade de $S(t_0)Ax$. Assim

$$\frac{d^-S(t)x}{dt}|_{t=t_0} = S(t_0)Ax = \frac{d^+S(t)Ax}{dt}\Big|_{t=t_0} \qquad \forall\, t_0 \;\; <0,\infty> \tag{2.11}$$

De 2.10, e 2.11 obtemos

$$\frac{d\,S(t)x}{dt} = S(t_0)Ax = AS(t)x, \qquad t \in \mathbb{R}^+; \quad x \in \mathfrak{D}(A)$$

Agora, já que $S(t)Ax$ é contínua em $\mathbb{R}^+$ e $S(t)x$ é diferenciável com $\frac{dS(t)x}{dt} = S(t)Ax$ em $\mathbb{R}^+$, então $S(t)x \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathfrak{X})$. Também $S(t)x \in \mathfrak{D}(A)$ como foi provado e dotando a $\mathfrak{D}(A)$ da norma do gráfico conclui-se que $S(t)x \in C(\mathbb{R}^+, \mathfrak{D}(A))$. $\square$

Proposição 2.4. *Seja S um semigrupo de classe C^0 sobre $\mathfrak{X}$ e $u\colon \mathbb{R}^+ \to \mathfrak{X}$ uma função com valores no espaço de Banach $\mathfrak{X}$. Se existirem $u'(s_0)$ e $S'(t-t_0)u(s_0) = \frac{d\,S(t-s)u(s_0)}{d\,s}\Big|_{s=s_0}$ então*

$$\frac{d\,S(t-s)u(s)}{d\,s}\Big|_{s=s_0} = S(t-s_0)u'(s_0) - S(t-t_0)u(s_0)$$

Prova.

$$
\begin{aligned}
&\frac{S(t-s_0+h)u(s_0+h)-S(t-s_0)u(s_0)}{h}= \\
&S(t-s_0-h)\left(\frac{u(s_0)+h)-u(s_0)}{h}\right)+ \\
&\left(\frac{S(t-s_0-h)-S(t-s_0)}{h}\right)u(s_0)
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

A primeira somatória da equação (2.12) no membro direito converge para $S(t-s_0)u'(s_0)$ pois

$$
\begin{aligned}
\| S(t-s_0-h)\left(\frac{u(s_0+h)-u(s_0)}{h}\right) - S(t-s_0)u'(s_0) \|= \\
\| S(t-s_0-h)\left(\frac{u(s_0+h)-u(s_0)}{h}\right) - S(t-s_0-h)u'(s_0)+ \\
S(t-s_0-h)u'(s_0) - S(t-s_0)u'(s_0) \|\leq \\
\| S(t-s_0-h) \| \| \frac{u(s_0+h)-u(s_0)}{h} - u'(s_0) \| + \\
\| S(t-s_0-h)u'(s_0) - S(t-s_0)u'(s_0) \|
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Já que $\| S(t-s_0-h) \|\leq M\, e^{\beta(t-s_0-h)}$ e $S(t-s_0)u'(s_0)$ é contínua, o membro direito de 2.13 converge a zero quando $h \to 0$. Em relação à segunda somatória de (2.12) é claro que esta converge para $-S'(t-s_0)u(s_0)$. □

Com estas duas proposições podemos fazer uma importante observação. Se A é o gerador infinitesimal do semigrupo C^0 $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, então a função

$$
u(t) = S(t)u_0 \tag{2.14}
$$

é a única solução do problema de valor inicial

$$
\begin{aligned}
\frac{d\,u(t)}{dt} &= A\,u(t) \\
u(0) &= u_0
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Para verificar a unicidade suponhamos a existência de uma outra solução $v(t)$ e definamos $w(s) = S(t-s)v(s)$. Então pela proposição 2.4 temos

$$\begin{aligned}\frac{dw(s)}{ds} =& S(t-s)v'(s) - S'(t-s)v(s)\\ =& S(t-s)Av(s) - S(t-s)Av(s)\\ =& 0\end{aligned}$$

e assim $w(t) = w(0)$ ou $v(t) = S(t)u_0 = u(t)$.

A seguinte proposição caracteriza o gerador infinitesimal de um semigrupo C^0. Como vimos no exemplo acima ele tem domínio denso e não é limitado. Mais precisamente temos:

Proposição 2.5. *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C^0 então A é fechado e densamente definido.*

Prova. Seja $x \in \mathfrak{X}$. Então $\int_0^h S(\tau)x\,d\tau \in \mathfrak{D}(A)$ $\forall h \geq 0$ devido ao lema (2.4) Agora, pelo lema (2.3)

$$x_n = \frac{1}{(1/n)} \int_0^{1/n} S(\tau)\,d\tau \to S(0)x = x, \qquad n \to \infty$$

e portanto $\overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{X}$.

Seja agora $x_n \in \mathfrak{D}(A)$ com $x_n \to x$ em $\mathfrak{X}$ e $Ax_n \to y$ em $\mathfrak{X}$.

$$\begin{aligned}\frac{S(h)x - x}{h} &= \lim_{n\to\infty} \frac{S(h)x_n - x_n}{h}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)Ax_n\,d\tau.\end{aligned}$$

Esta última igualdade é verdadeira a partir da proposição (2.3). Efetivamente, sendo $w \in \mathfrak{D}(A)$ e $h_1, h_2 \geq 0$ arbitrários temos , integrando a equação (2.7)

$$S(h_2)w - S(h_1)w = \int_{h_1}^{h_2} S(\tau)Aw\,d\tau$$

Agora

$$\| \frac{1}{h}\int_0^h S(t)Ax_n dt - \frac{1}{h}\int_0^h S(t)y \| = \| \frac{1}{h}\int_0^h S(t)(Ax_n - y)dt \|$$

$$\leq \frac{1}{h}\int_0^h \| S(t) \| \| Ax_n - y) \| \ dt = \| Ax_n - y \| \ \frac{1}{h}\int_0^h \| S(t) \| \ dt$$

Já que a norma é uma função contínua, então $(1/h)\int_0^h \| S(t) \| \ dt$ é uma constante e, portanto

$$\| Ax_n - y \| \ \frac{1}{h}\int_0^h \| S(t) \| \ dt \quad n \to \infty \qquad \text{pois} \quad Ax_n \to y$$

Logo

$$\frac{S(h)x - x}{h} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)Ax_n\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)y\, d\tau \to y \qquad \text{quando} \quad h \to 0$$

i.e. $Ax = y$. □

Proposição 2.6. *Seja S um semigrupo de classe C^0 com gerador infinitesimal A. Se $\lambda > \beta_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\log\|S(t)\|}{t}$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt \quad \forall\, x \in \mathfrak{X}$$

Prova. Seja $\lambda > \beta_0$, então $\lambda > \beta > \beta_0$ e pela proposição (2.2) existe uma constante M tal que $\| S(t) \| \leq M e^{\beta t}, \quad t \in \mathbb{R}^+$. Logo fazendo

$$x_t = \int_0^t e^{-\lambda\tau}\, S(\tau)\, d\tau, \qquad x \in \mathfrak{X}$$

temos

$$\| x_t - x_r \| = \| \int_r^t e^{-\lambda\tau} S(\tau)x \, d\tau \|$$

$$\leq \int_r^t e^{-\lambda\tau} M e^{\beta\tau} \| x \| \, x \, d\tau$$

$$= M \| x \| \int_r^t e^{(-\lambda+\beta)\tau} \, d\tau$$

$$= \frac{M \| x \|}{-\lambda+\beta} \left(e^{(-\lambda+\beta)\tau} \Big|_r^t \right)$$

$$= \frac{M \| x \|}{-\lambda+\beta} \left(e^{(-\lambda+\beta)r} - e^{(-\lambda+\beta)t} \right) \to 0; \quad r, t \to \infty$$

Assim a família $\{x_t\}$ é de Cauchy e existe o limite

$$\lim_{t\to\infty} x_t = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda\tau} S(\tau)x \, d\tau$$

portanto

$$R_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} S(\tau)x \, d\tau$$

está bem definido. Aliás

$$\| R_\lambda(x) \| = \| \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda\tau} S(\tau)x \, d\tau \|$$

$$\leq \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda\tau} M e^{\beta\tau} \| x \| \, x \, d\tau$$

$$= M \| x \| \int_0^t e^{(-\lambda+\beta)\tau} \, d\tau$$

$$= \frac{M \| x \|}{\lambda-\beta} \lim_{t\to\infty} (1 - e^{(-\lambda+\beta)t})$$

$$= \frac{M \| x \|}{\lambda-\beta}$$

i.e. $R_\lambda(x)$ é um operador (linear) limitado.

Mostremos em seguida que $R_\lambda = R(\lambda; A)$. Seja $h > 0$. Para $x \in \mathfrak{X}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\left(\frac{S(h)-I}{h}\right) R_\lambda(x) &= \frac{S(h)-I}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\, S(\tau)x\, d\tau \\
&= \frac{S(h)-I}{h} \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda\tau}\, S(\tau)x\, d\tau \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{S(h)-I}{h} \int_0^t e^{-\lambda\tau}\, S(\tau)x\, d\tau \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{h} \int_0^t (S(h)-I)e^{-\lambda\tau}\, S(\tau)x\, d\tau \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{h} \int_0^t e^{-\lambda\tau}(S(h+\tau)x - S(\tau)x)\, d\tau
\end{aligned}$$

Já que $\lim\limits_{t\to 0+} \int_0^t e^{-\lambda\tau}\, S(h+\tau)x\, d\tau$ e $\lim\limits_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda\tau}\, S(\tau)x\, d\tau$ existem, então

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{S(h)-I}{h}\right) R_\lambda(x) = \\
&= \frac{1}{h} \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda\tau}\, S(h+\tau)x\, d\tau - \frac{1}{h} \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda\tau}\, S(\tau)x\, d\tau \\
&= \frac{1}{h} \lim_{t\to\infty} \int_h^{t+h} e^{-\lambda(\tau-h)}\, S(\tau)x\, d\tau - \frac{1}{h} \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda\tau}\, S(\tau)x\, d\tau \\
&= \frac{1}{h} \lim_{t\to\infty} e^{\lambda h} \int_h^{t+h} e^{-\lambda\tau}\, S(\tau)x\, d\tau - \frac{1}{h} \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda\tau}\, S(\tau)x\, d\tau \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h} \lim_{t\to\infty} \left(\int_0^{t+h} e^{-\lambda\tau}\, S(\tau)x\, d\tau - \int_0^h e^{-\lambda\tau}\, S(\tau)x\, d\tau \right) \\
&- \frac{1}{h} \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda\tau} S(\tau)x\, d\tau
\end{aligned}$$

$$=\frac{e^{\lambda h}}{h}\lim_{t\to\infty}\int_0^{t+h} e^{-\lambda\tau}\,S(\tau)x\,d\tau-\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda\tau}\,S(\tau)x\,d\tau$$

$$-\frac{1}{h}\lim_{t\to\infty}\int_0^{t} e^{-\lambda\tau}S(\tau)x\,d\tau$$

$$=\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\,S(\tau)x\,d\tau-\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda\tau}x\,d\tau-\frac{1}{h}\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}S(\tau)x\,d\tau$$

$$=\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\,S(\tau)x\,d\tau-\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda\tau}\,S(\tau)x\,d\tau$$

$$=\frac{e^{\lambda h}-1}{h}R_\lambda(x)-\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda\tau}\,S(\tau)x\,d\tau$$

Logo

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)R_\lambda(x)=\lambda R_\lambda(x)-e^{\lambda h}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda\tau}\,S(\tau)x\,d\tau=$$

$$\lambda R_\lambda(x)-x$$

donde

$$\big(\lambda I-A\big)R_\lambda(x)=x \tag{2.16}$$

Agora, $x\in\mathfrak{D}(A)$. Então

$$R_\lambda(Ax)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}\,S(\tau)Ax\,d\tau$$

$$=\int_0^{t} e^{-\lambda\tau}\,\frac{d}{d\tau}(S(\tau)x)\,d\tau$$

Integrando por partes temos

$$
\begin{aligned}
R_\lambda(Ax) &= \lim_{t\to\infty}\left(e^{-\lambda\tau}\,S(\tau)x\Big|_0^t + \lambda\int_0^t e^{-\lambda\tau}\,S(\tau)x\,d\tau\right)\\
&= \lim_{t\to\infty}\left(\int_0^t e^{-\lambda\tau}\,S(\tau)x\,d\tau - e^{-\lambda t}\,S(t)x - x\right)\\
&=\lambda R_\lambda(x) - x
\end{aligned}
$$

donde $R_\lambda(Ax) = \lambda R_\lambda(x) - x$ e então

$$R_\lambda(\lambda I - A)x = x. \tag{2.17}$$

De (2.16) e (2.17) conclui-se $R(\lambda; A) = R_\lambda$ $\square$

Para provar o teorema de Hille-Yosida-Philips necessitaremos do seguinte lema:

Lema 2.5. *Seja S um semigrupo de classe C^0 e A seu gerador infinitesimal. Se $\lambda > \beta_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\log\|S(t)\|}{t}$, então*

$$i)\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda; A)x = (-1)^n\, n!\, R(\lambda; A)^{n+1}$$

$$ii)\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(-t)^n S(t)x\,dt \qquad \forall\, x \in \mathfrak{X}$$

Teorema 2.1 (de Hille-Yosida-Philips). *Para que um operador linear A, definido em $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{X}$, e com valores em $\mathfrak{X}$ seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C^0 é suficiente e necessário que*

a) A seja fechado e densamente definido em $\mathfrak{X}$.

b) Existam M e β reais tais que para cada $\lambda > \beta$, $\lambda \in \rho(A)$ e

$$\| R(\lambda; A)^n \| \leq \frac{M}{(\lambda - \beta)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prova. Suficiência: Consiste em construir certos operadores conhecidos como aproximantes de Yosida, da forma $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I$ com $\lambda > \beta$ e mostrar que o semigrupo e^{tA_λ} se aproxima fortemente, quando $\lambda \to \infty$ a um semigrupo de classe C^0 com gerador infinitesimal A. No que segue vamos fazer uma série de afirmações que conduzem aos nosso objetivo.

Afirmação 1. $AR(\lambda; A)x \underset{\forall x \in \mathfrak{X}}{=} (\lambda R(\lambda; A) - I)x \underset{\forall x \in \mathfrak{D}(A)}{=} R(\lambda; A)Ax \qquad \lambda \in \rho(A).$

Cada uma das expressões dos extremos é igual a do centro. Demonstraremos a primeira igualdade, sendo a segunda completamente
análoga.

$$(A - \lambda I)R(\lambda; A) = -I$$

então $AR(\lambda; A) - \lambda R(\lambda; A) = -I$

$$AR(\lambda; A) = \lambda R(\lambda; A) - I$$

Afirmação 2. $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda; A)x = x \qquad \forall x \in \mathfrak{X}$

Se $x \in \mathfrak{D}(A)$, então $\| \lambda R(\lambda; A)x - x \| = \| R(\lambda; A)Ax \|$. Assim

$$\| \lambda R(\lambda; A)x - x \| = \| R(\lambda; A)Ax \| \leq \| R(\lambda; A) \| \, \| Ax \| \leq \frac{M}{\lambda - \beta} \| Ax \| \to 0$$

quando $\lambda \to \infty$. Agora, já que $\mathfrak{D}(A)$é denso em $\mathfrak{X}$, então para qualquer $x \in \mathfrak{X}$ podemos escolher $y \in \mathfrak{D}(A)$ suficientemente próximo de x. Aliás, levando em conta que $\| \lambda R(\lambda; A) \| \leq |\lambda| \frac{M}{\lambda - \beta}$, então

$$\begin{aligned}
\| \lambda R(\lambda; A)x - x \| &\leq \| \lambda R(\lambda; A)(x - y) \| + \| \lambda R(\lambda; A)y - y \| + \| y - x \| \\
&\leq |\lambda| \Big(\frac{M}{\lambda - \beta}\Big) \| y - x \| + \| \lambda R(\lambda; A)y - y \| + \| x - y \| \\
&= \Big(|\lambda| \frac{M}{\lambda - \beta} + 1\Big) \| x - y \| + \| \lambda R(\lambda; A)y - y \| \to 0
\end{aligned}$$

quando $\lambda \to \infty$.

Afirmação 3. $\lim\limits_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax \qquad \forall x \in \mathfrak{D}(A)$

Devido à afirmação (1) tem-se, para $x \in \mathfrak{D}(A)$

$$A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I = \lambda R(\lambda; A)$$

logo

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda; A)Ax = Ax$$

já que A_λ é um operador linear limitado, então ele gera o semigrupo C^0 $\{e^{tA_\lambda}\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Afirmação 4. $\| e^{tA_\lambda} \| \leq M e^{t\beta\lambda(\lambda-\beta)^{-1}}$

$$\begin{aligned}
\| e^{tA_\lambda} \| &= \| e^{t(\lambda^2 R(\lambda;A)-\lambda I)} \| \\
&= \| e^{t(\lambda^2 R(\lambda;A)-t\lambda I)} \| \\
&= \| e^{t\lambda^2 R(\lambda;A)} e^{-t\lambda I} \| \\
&= \| (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t\lambda)^k I^k}{k!}) e^{t\lambda^2 R(\lambda;A)} \| \\
&= \| (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t\lambda)^k}{k!} I^k) e^{t\lambda^2 R(\lambda;A)} \| \\
&= \| (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t\lambda)^k}{k!}) e^{t\lambda^2 R(\lambda;A)} \| \\
&= e^{-\lambda t} \| e^{t\lambda^2 R(\lambda;A)} \| \\
&= e^{-\lambda t} \| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda^2)^k \, [R(\lambda; A)]^k}{k!} \| \\
&\leq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda^2)^k \, \| R(\lambda; A)^k \|}{k!} \\
&\leq e^{-\lambda t} M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda^2)^k}{k!(\lambda-\beta)^k} \\
&= M e^{t\beta\lambda(\lambda-\beta)^{-1}}
\end{aligned}$$

Afirmação 5. $A_\lambda e^{sA_\mu} = e^{sA_\mu} A_\lambda$

$$A_\lambda e^{sA_\mu} = A_\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A_\mu^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A_\lambda A_\mu^k}{k!}$$

logo, é suficiente mostrar que $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$. Por indução pode-se mostrar que $A_\lambda A_\mu^n = A_\mu^n A_\lambda$. Mas

$$A_\lambda A_\mu = \lambda A R(\lambda; A) \mu A R(\mu; A) = \lambda A R(\lambda; A) \mu R(\mu; A) A$$

em $\mathfrak{D}(A)$ devido à afirmação(1), logo

$$\begin{aligned} A_\lambda A_\mu &= \lambda\mu A(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1}A \\ &= \lambda\mu A[(\mu I - A)(\lambda I - A)]^{-1}A \\ &= \lambda\mu A[(\lambda I - A)(\mu I - A)]^{-1}A \\ &= \lambda\mu AR(\mu; A)R(\lambda; A)A \\ &= \mu AR(\mu; A)\lambda AR(\lambda; A) \\ &= A_\mu A_\lambda \qquad \forall\, x \in \mathfrak{D}(A) \end{aligned}$$

segue por densidade que $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$ em $\mathfrak{X}$.

Afirmação 6. $\forall\, \gamma > \beta \quad \exists\, M_\gamma \mid \lambda, \mu > M_\gamma$ tem-se

$$\| e^{tA_\mu}x - e^{tA_\lambda}x \| \leq M^2 te^{\gamma t} \| A_\mu x - A_\lambda x \| \qquad \forall\, x \in \mathfrak{X}$$

Seja $x \in \mathfrak{X}$. Então

$$\begin{aligned} \| e^{tA_\mu}x - e^{tA_\lambda}x \| &= \| \int_o^t \frac{d}{ds}(e^{(t-s)A_\lambda}e^{sA_\mu})x\, d\, s \| \\ &= \| \int_o^t \left(e^{t-s)A_\lambda}e^{sA_\mu}A_\mu x - e^{(t-s)A_\lambda e^{sA_\mu})}x\right) d\, s \| \\ &\leq \left(\int_o^t \| e^{(t-s)A_\lambda}e^{sA_\mu}A_\mu \| \, d\, s \right) \| A_\mu x - A_\lambda x \| \\ &\leq \left(\int_o^t \| e^{(t-s)A_\lambda} \| \| e^{sA_\mu} \| \, d\, s \right) \| A_\mu x - A_\lambda x \| \end{aligned}$$

Agora, da afirmação (4) $\| e^{tA_\lambda} \| \leq Me^{t\beta\lambda(\lambda-\beta)^{-1}}$. Já que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \beta\lambda(\lambda - \beta)^{-1} = \beta$, então se $\gamma > \beta$ $(\gamma = \beta + \epsilon)$ existe M_γ tal que $\beta\lambda(\lambda - \beta)^{-1} < \gamma$ sempre que $\lambda > M_\gamma$

e assim $\| e^{tA_\lambda} \| \leq M e^{t\gamma}$, logo

$$\left(\int_o^t \| e^{(t-s)A_\lambda} \| \| e^{sA_\mu} \| \, d\, s\right) \| A_\mu x - A_\lambda x \| \leq$$

$$\left(\int_o^t M e^{(t-s)\gamma} M e^{s\gamma} d\, s\right) \| A_\mu x - A_\lambda x \| = M^2 t e^{t\gamma} \| A_\mu x - A_\lambda x \|$$

sempre que $\lambda, \mu > M_\gamma$.

Afirmação 7. Mostraremos agora que e^{tA_λ} se aproxima fortemente de um operador linear limitado quando $\lambda \to \infty$

Seja $x \in \mathfrak{D}(A)$. Então, pela afirmação (6) tem-se que

$$\| e^{tA_\mu} x - e^{tA_\lambda} x \| \leq M^2 t e^{t\gamma} \| A_\mu x - A_\lambda x \| + M^2 t e^{t\gamma} \| Ax - A_\lambda x \|$$

e esta última expressão converge a zero devido à afirmação (3). Agora, já que $\overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{X}$, tem-se para um $y \in \mathfrak{D}(A)$ suficientemente próximo de $x \in \mathfrak{X}$ o seguinte:

$$\begin{aligned} &\| e^{tA_\mu} x - e^{tA_\lambda} x \| \leq \\ &\qquad \| e^{tA_\mu} \| \| y - x \| + \| e^{tA_\mu} y - e^{tA_\lambda} y \| + \| e^{tA_\lambda} \| \| y - x \| \\ &\qquad\qquad \leq 2M^2 e^{t\gamma} \| y - x \| + \| e^{tA_\mu} y - e^{tA_\lambda} y \| \to 0; \quad \lambda, \mu \to \infty \end{aligned}$$

Portanto, $\{e^{tA_\lambda} x\}$ converge quando $\lambda \to \infty$ para todo $x \in \mathfrak{X}$.

Seja $S(t)x = \lim\limits_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} x$, x fixo em $\mathfrak{X}$, então $S(t)$ é um operador linear limitado. A linearidade é imediata.

$$\begin{aligned} \| S(t)x \| &= \| \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} x \| \\ &= \lim_{\lambda \to \infty} \| e^{tA_\lambda} x \| \\ &\leq \lim_{\lambda \to \infty} M e^{t\beta\lambda(\lambda-\beta)^{-1}} \| x \| \\ &= M\, e^{t\beta} \| x \| \end{aligned}$$

Afirmação 8. A família $\{e^{tA_\mu}x\}$ converge uniformemente para $S(t)x$ em intervalos limitados de $\mathbb{R}^+$, por exemplo $[0,T]$, quando $\mu \to \infty$ $\forall\, x$ fixo em $\mathfrak{X}$.

Da afirmação (6) tem-se

$$\begin{aligned} \| e^{tA_\mu}x - e^{tA_\lambda}x \| &\leq M^2 te^{t\gamma} \| A_\mu x - A_\lambda x \| \\ &\leq M^2 Te^{T\gamma} \| A_\mu x - A_\lambda x \| \end{aligned}$$

fazendo $\lambda \to \infty$ tem-se

$$\| e^{tA_\mu}x - S(t)x \| \leq M^2 Te^{T\gamma} \| A_\mu x - A_\lambda x \| \to 0 \qquad \mu \to \infty$$

Afirmação 9. A família $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ é um semigrupo de classe C^0 com gerador infinitesimal A.

$$\text{i)} S(0)x = x \qquad \forall\, x \in \mathfrak{X}, \quad \text{logo} \quad S(0) = I$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} S(t+s)x &= \lim_{\lambda\to\infty} e^{(t+s)A_\lambda}x \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}x \\ &= S(t)S(s)x \qquad \forall\, x \in \mathfrak{X} \end{aligned}$$

onde a última igualdade obtem-se do seguinte

$$\begin{aligned} \| e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}x - S(t)S(s)x \| \leq \| e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}x - e^{tA_\lambda}S(s)x \| + \\ + \| e^{tA_\lambda}S(s)x - S(t)S(s)x \| \end{aligned}$$

e o membro direito desta desigualdade converge para zero quando $\lambda \to \infty$, já que $\| e^{tA_\lambda} \| \leq M^2 te^{t\gamma}$ e $S(s)x \in \mathfrak{X}$.

iii) Já que $e^{tA_\lambda}x \to S(t)x$ uniformemente sobre $[0,T]$ quando $\lambda \to \infty$ e para cada $\lambda \geq 0$, $e^{tA_\lambda}x$ é contínua em $[0,T]$, então $S(t)x$ é contínua em $[0,T]$ e portanto, contínua em 0^+.

Agora vejamos que A gera $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Seja B o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ (sabemos que ele sempre existe) e seja

$x \in \mathfrak{D}(A)$. Então

$$
\begin{aligned}
S(t)x - x &= \lim_{\lambda\to\infty} (e^{tA_\lambda}x - x) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{\tau A_\lambda} A_\lambda x \tau \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{\tau A_\lambda}(A_\lambda x - Ax)\tau \\
&+ \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{\tau A_\lambda} Ax\tau
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

$$
\begin{aligned}
\| \int_0^t e^{\tau A_\lambda}(A_\lambda x - Ax)\, d\,\tau \| &\leq \int_0^t \| e^{\tau A_\lambda} \| \, \| A_\lambda x - Ax \| \; d\,\tau \\
&\leq \| A_\lambda x - Ax \| \; M^2 \int_0^t \tau e^{\gamma\tau}\, d\,\tau \to 0, \qquad \lambda \to \infty
\end{aligned}
$$

logo, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{\tau A_\lambda}(A_\lambda x - Ax)\, d\,\tau = 0$
Já que $e^{\tau A_\lambda} Ax$ converge uniformemente a $S(\tau)Ax$ sobre $[0, t]$ e para cada $\lambda \geq 0$, $e^{\tau A_\lambda} Ax$ é contínua em $[0, t]$ então podemos introduzir o limite dentro da integral em (2.18) e assim $S(t)x - x = \int_0^t S(\tau)Ax\, d\,\tau$ logo,

$$
\frac{S(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau)Ax\, d\,\tau
$$

$$
Bx = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau)Ax\, d\,\tau = Ax \qquad \forall\, x \in \mathfrak{D}(A)
$$

e portanto $A \subset B$ ($\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{D}(B)$ e $B\big|_{\mathfrak{D}(A)} = A$). Agora pela hipótese $\lambda \in \rho(A)$ $\forall\, \lambda > \beta$ e como B gera $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ segue pela proposição (2.6) que $\lambda \in \rho(A)$ para λ suficientemente grande. Logo, se λ é suficientemente grande, temos $\lambda \in \rho(B) \cap \rho(B)$. Para tais valores de λ temos $(\lambda I - A)\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{X}$. Logo já que $A \subset B$ tem-se $(\lambda I - B)\mathfrak{D}(A) = (\lambda I - A)\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{X}$, donde $\mathfrak{D}(A) = (\lambda I - A)^{-1} = \mathfrak{X} = \mathfrak{D}(B)$ e portanto $A = B$.

Necessidade:

Seja S um semigrupo de classe C^0. Pela proposição (2.5) tem-se que A é fechado e densamente definido. Agora, para cada $\beta > \beta_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\log\|S(t)\|}{t}$ existe pela proposição (2.2) M tal que $\| S(t) \| \leq M e^{\beta t}, \quad t \in \mathbb{R}^+$. Pela proposição (2.6) se $\lambda > \beta$ então $\lambda \in \rho(A)$ e pelo lema (2.5) segue

$$R(\lambda; A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{n-1} S(t) x \, dt$$

logo

$$\| R(\lambda; A)^n \| \leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-(\lambda-\beta)t} t^{n-1} \, dt$$

integrando por partes esta última integral tem-se:

$$\| R(\lambda; A)^n \| \leq \frac{M}{(\lambda - \beta)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Como consequência imediata deste teorema tem-se o teorema de Hille-Yosida.

Corolário 2.1. *Para que um operador A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo C^0 de contrações (i.e. $M = 1$,$\beta = 0$ na estimativa (2.4)) é suficiente e necessário que*

a) A seja fechado e densamente definido.

b) Se $\lambda > 0$ então $\lambda \in \rho(A)$ e $\| R(\lambda; A) \| \leq \frac{1}{\lambda}$

O que segue tem importância própria, mas será particularmente útil no presente trabalho quando trataremos da (t-KdV) no capítulo 5. Em princípio, temos uma notação:

Notação. Para simplificar a linguagem, vamos escrever $A \in \mathcal{G}(\mathfrak{X}, M, \beta)$ para dizer que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C^0 se for satisfeita a condição:

$$\| S(t) \| \leq M \, e^{\beta t}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Proposição 2.7. *$A - \beta I \in \mathcal{G}(\mathfrak{X}, M, 0)$ se e só se $A \in \mathcal{G}(\mathfrak{X}, M, \beta)$.*

Prova. Já que $(\lambda I - (A - \beta I))^{-1} = ((\lambda I + \beta I) - A)^{-1}$, então

$$\lambda \in \rho(A - \beta I) \Leftrightarrow \lambda + \beta \in \rho(A), \qquad \text{donde}$$

$$\mathbb{R}^+ \subset \rho(A - \beta I) \Leftrightarrow \mathbb{R}^+ + \beta \subset \rho(A)$$

e

$$\| R(\lambda; A - \beta I)^n \| \leq \frac{M}{\lambda^n} \Leftrightarrow \| R(\lambda + \beta; A)^n \| \leq \frac{M}{\lambda^n}, \qquad \lambda > 0$$

Portanto, pondo λ no lugar de $\lambda + \beta$ no segundo membro desta última equivalência,

$$\| R(\lambda; A - \beta I)^n \| \leq \frac{M}{\lambda^n} \Leftrightarrow \| R(\lambda + \beta; A)^n \| \leq \frac{M}{\lambda^n}, \qquad \lambda > 0 \tag{2.19}$$

Além disto,

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{D}(A - \beta I)} = \mathfrak{X} &\Leftrightarrow \overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{X} \\ A - \beta I \quad \text{é} \quad \text{fechado} &\Leftrightarrow A \quad \text{é} \quad \text{fechado} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Logo pelo teorema 2.1 de (2.19) e (2.20) segue asserção feita. □

Definição 2.3. Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Hilbert com produto interno $\langle\, . \,\rangle_{\mathfrak{X}}$ e $A : \mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ um operador linear. Diz-se que A é dissipativo com respeito a $\langle\, . \,\rangle_{\mathfrak{X}}$ se

$$Re\,\langle Ax, x\rangle_{\mathfrak{X}} \leq 0 \qquad \forall\, x \in \mathfrak{D}(A)$$

Em seguida temos um teorema perturbativo, tipo Kato-Rellich, para geradores de semigrupos de contrações. Mas antes temos o seguinte lema, que é um caso particular do teorema de Lumer-Philips. Para a demonstração remetemos o leitor a [2].

Lema 2.6. *Seja A um operador linear com domínio $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{X}$ denso no espaço de Hilbert $\mathfrak{X}$. Então $A \in \mathcal{G}(\mathfrak{X}, 1, 0)$ se e somente se*

a) A é dissipativo (com respeito à $\langle\, . \,\rangle_{\mathfrak{X}}$).

b) $Im(\lambda I - A) = \mathfrak{X}$ para algum $\lambda > 0$.

Teorema 2.2. *Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Hilbert e $A \in \mathcal{G}(\mathfrak{X}, 1, 0)$. Se $B : \mathfrak{D}(B) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ é dissipativo com respeito à $\langle\,.\,\rangle_{\mathfrak{X}}$ com $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{D}(B)$, e existem constantes a, b com $0 \leq a < (1/2)$ e $b \geq 0$ tais que*

$$\| Bx \| \leq a \| Ax \| + b \| x \| \qquad \forall x \in \mathfrak{D}(A) \tag{2.21}$$

então $A + B \in \mathcal{G}(\mathfrak{X}, 1, 0)$

Prova. Como $A \in \mathcal{G}(\mathfrak{X}, 1, 0)$, A é dissipativo com respeito à $\langle\,.\,\rangle_{\mathfrak{X}}$ segundo o lema (2.6). Já que B é dissipativo , então obviamente $A + B$ também é dissipativo com respeito à $\langle\,.\,\rangle_{\mathfrak{X}}$. Além disto, $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{X}$ é denso em $\mathfrak{X}$. Portanto pelo lema (2.6) de novo, para demonstrar que $A + B \in \mathcal{G}(\mathfrak{X}, 1, 0)$ é suficiente mostrar que $Im(\lambda I - (A + B)) = \mathfrak{X}$, para algum $\lambda > 0$. Mas como $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{D}(B)$,

$$Im(\lambda I - (A + B)) \supset Im[(\lambda I - (A + B))(\lambda I - A)]^{-1} =$$

$$Im[I - B(\lambda I - A)^{-1}] = Im[I - BR(\lambda; A)]$$

donde é suficiente demonstrar que para algum $\lambda > 0$, $I - BR(\lambda; A)$ é inversível em $\mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ e portanto que $\| BR(\lambda; A) \| < 1$

Mas por (2.2) tem-se

$$\begin{aligned} \| BR(\lambda; A) \| &\leq a \| AR(\lambda; A)x \| + b \| R(\lambda; A)x \| = \\ &= a \| [\lambda R(\lambda; A) - I]x \| + b \| R(\lambda; A)x \| \\ &\leq 2a \| x \| + \frac{b}{\lambda} \| x \| \\ &= (2a + \frac{b}{\lambda}) \| x \| \qquad \forall x \in \mathfrak{X} \end{aligned}$$

Portanto, para λ suficientemente grande $(2a + \frac{b}{\lambda}) < 1$ e logo $\| BR(\lambda; A) \| < 1$. $\square$

No que segue faremos algumas referências aos grupos de operadores lineares limitados e apresentaremos um teorema central nestas questões, a saber, o teorema de Stone.

Definição 2.4. Um C^0 grupo no espaço de Banach $\mathfrak{X}$ é uma família $S = \{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ que satisfaz as condições (2.1a) e (2.1b) dos semigrupos e

$$\lim_{t \to 0} \| S(t)x - x \| = 0 \qquad \forall x \in \mathfrak{X}$$

Analogamente, o gerador de S é definido por

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(A) &= \left\{ x \in \mathfrak{X} \mid \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \quad \text{existe} \right\} \\ Ax &= \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \end{aligned} \tag{2.22}$$

Teorema 2.3 (Teorema de Stone). *A é o gerador infinitesimal de um gru po C^0 unitario de operadores lineares limitados, se e só se, $A^* = -A$.*

Para estas últimas questões o leitor pode ver [1] ou [4].

Capítulo 3

Teoria Linear

Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Banach. Para cada $t \in [0,T]$ seja $A(t)\colon \mathfrak{D}(A(t)) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ um operador linear em $\mathfrak{X}$ e $f\colon [0,T] \to \mathfrak{X}$ uma função dada. Estudaremos aqui o problema de Cauchy associado à equação diferencial linear não homogênea

$$\partial_t u(t) = A(t)u(t) + f(t) \tag{L}$$

3.1 A Equação Homogênea

Vamos considerar em primeiro lugar a versão homogênea de (L) a saber,

$$\partial_t u(t) = A(t)u(t) \tag{3.1}$$

Definição 3.1. Uma família com dois parâmetros de operadores lineares limitados $\mathfrak{U}_{(t,s)}$ no triângulo

$$\Delta = \{\, (s,t) \in [0,T] \times [0,T] \mid 0 \leq s \leq t \leq T \,\} \tag{3.2}$$

sobre $\mathfrak{X}$, diz-se que é um sistema de evolução se as seguintes condições são verificadas

$$\mathfrak{U}_{(s,s)} = I \tag{3.3a}$$

$$\mathfrak{U}_{(t,r)}\mathfrak{U}_{(r,s)} = \mathfrak{U}_{(t,s)} \tag{3.3b}$$

e a aplicação $(t, s) \in \Delta \mapsto \mathfrak{U}_{(t,s)}$ é fortemente contínua em relação à topologia de $\mathfrak{X}$, i.e.

$$\| \mathfrak{U}_{(t,s)}x - \mathfrak{U}_{(t_0,s_0)}x \|_x \to 0 \tag{3.4}$$

quando $(t, s) \to (t_0, s_0) \quad \forall\, x \in \mathfrak{X}$.

Definição 3.2. Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Banach. Uma família $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ de geradores infinitesimais de C^0 semigrupos $S_t(s)$ sobre $\mathfrak{X}$, diz-se que é estável em $\mathfrak{X}$ se existirem constantes reais $M \geq 1$ e β (chamadas constantes de estabilidade) tais que para qualquer família finita $\{t_j\}$ com $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq T$ com $k = 1, 2 \ldots$ for satisfeito o seguinte

$$\| \prod_{j=1}^{k} S_{t_j}(s_j) \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{X})} \leq M\, e^{\beta \sum_{j=1}^{k} s_j}, \qquad s_j \geq 0 \tag{3.5}$$

Observação. Já que em geral os operadores $S_{t_j}(s_j)$ não comutam, então o produto em (3.5), assim como todos os produtos a aparecerem neste capítulo, é ordenado temporalmente, i.e. os fatores com $t_j's$ maiores são escritos à *esquerda* daqueles com $t_j's$ menores. Fazemos a observação que a condição de estabilidade generaliza a propriedade dos semigrupos estabelecida em (2.4) do capítulo (2).

Definição 3.3. Sejam S um operador linear em $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ um subespaço de $\mathfrak{X}$. O operador $\tilde{S}$ definido por

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\tilde{S}) &= \{x \in \mathfrak{D}(S) \cap \mathfrak{Y} \mid Sx \in \mathfrak{Y}\} \\ \tilde{S}x &= Sx \qquad \forall\, x \in \mathfrak{D}(\tilde{S}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

é chamado a parte de S em $\mathfrak{Y}$

Definição 3.4. Seja $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ um semigrupo e A seu gerador infinitesimal. De um subespaço de Banach $\mathfrak{Y}$, contínuo e densamente contido em $\mathfrak{X}$, diz-se que é A-admissível se $\mathfrak{Y}$ é um subespaço invariante de $S(t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$ e as restrições de $S(t)$ a $\mathfrak{Y}$, $t \in \mathbb{R}^+$ formam um semigrupo em $\mathfrak{Y}$ (i.e., (2.1c) se satisfaz na topologia de $\mathfrak{Y}$).

O seguinte teorema mostra que se $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ satisfaz as condições (H1)-(H3) abaixo, então pode-se associar um único sistema de evolução com (3.1)

Teorema 3.1. *Seja $A(t)$, $t \in [0,T]$ o gerador infinitesimal de um C^0 semigrupo $S_t(s)$, $s \geq 0$ sobre $\mathfrak{X}$. Assumamos que a família $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ satisfaz as seguintes hipóteses:*

(H1) *$\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ é uma família estável no espaço de Banach $\mathfrak{X}$ com constante de estabilidade M e β*

(H2) *Existe um espaço de Banach $\mathfrak{Y}$ contínuo e densamente contido em $\mathfrak{X}$ tal que $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{D}(A(t))$, $\forall\, t \in [0,T]$ (e portanto, pelo teorema do gráfico fechado, $A(t) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{Y},\mathfrak{X})\ \forall\, t \in [0,T]$) e a aplicação $t \in [0,T] \mapsto A(t)$ é contínua em relação à topologia de $\mathfrak{B}(\mathfrak{Y},\mathfrak{X})$.*

(H3) *$\mathfrak{Y}$ é $A(t)$-admissível $\forall\, t \in [0,T]$ e a família $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ de partes $\tilde{A}(t)$ de $A(t)$ em $\mathfrak{Y}$ é uma família estável em $\mathfrak{Y}$ com constantes de estabilidade $\tilde{M}$ e $\tilde{\beta}$. (Aqui está implícito o fato de que $\tilde{A}(t)$ gera $\tilde{S}_t(s)$, a restrição de $S_t(s)$ a $\mathfrak{Y}$. Para isto veja [12]). Assim, esta condição quer dizer que existem constantes $\tilde{M}$ e $\tilde{\beta}$ tais que*

$$\| \prod_{j=1}^{k} \tilde{S}_{t_j}(s_j) \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{Y})} \leq \tilde{M} e \tilde{\beta} \sum_{j=1}^{k} s_j, \quad s_j \geq 0 \tag{3.7}$$

para toda família finita $\{t_j\}$, $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq T$, $k = 1, 2, \ldots$.

Então dadas as condições (H1)-(H3), existe um único sistema de evolução $\mathfrak{U}_{(t,s)}(t,s) \in \Delta$ em $\mathfrak{X}$ satisfazendo

$$\textbf{(E1)} \quad \| \mathfrak{U}_{(t,s)} \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{X})} \leq M\ e^{\beta(t-s)}, \quad (t,s) \in \Delta \tag{3.8}$$

$$\textbf{(E2)} \quad \frac{\partial^+}{\partial t} \mathfrak{U}_{(t,s)} v \Big|_{t=s} = A(s)v, \quad v \in \mathfrak{Y}, \quad 0 \leq s < T \tag{3.9}$$

$$\textbf{(E3)} \quad \frac{\partial}{\partial s} \mathfrak{U}_{(t,s)} v = -\mathfrak{U}_{(t,s)} A(s) v, \quad v \in \mathfrak{Y}, \quad 0 \leq s < T \tag{3.10}$$

onde as derivadas estão sendo consideradas em relação à topologia de $\mathfrak{X}$.

Prova. Aproximemos $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ da seguinte forma

$$A_n(t) = \begin{cases} A(t_k^n) & t_k^n \leq t < t_{k+1}^n \quad k = 0, 1, 2 \ldots, n-1 \\ \\ A(T) \end{cases} \tag{3.11}$$

onde $t_k^n = k(T/n)$, $k = 0, 1 \ldots, n$.

Vejamos que

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(t) - A(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} = 0$$

uniformemente em $[0, T]$

Seja t_0 fixo em $[0, T]$ e $t \in [0, T]$

$$\| A_n(t) - A(t) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} \leq \| A(t_k^n) - A(t_0) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} + \| A(t) - A(t_0) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} \tag{3.12}$$

Fazendo $t \to t_0$ e pegando n suficientemente grande temos, pela continuidade de $A(t)$ em $[0, T]$

$$\| A(t_k^n) - A(t_0) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} < \epsilon/2, \qquad \| A(t) - A(t_0) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} < \epsilon/2 \tag{3.13}$$

logo voltando a (3.12) tem-se

$$\| A_n(t) - A(t) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} < \epsilon, \quad n \geq N_{\epsilon,t_0}$$

Definamos agora seguinte família de operadores com dois parâmetros $\mathcal{U}_n(t, s)$ em Δ por

$$\mathcal{U}_n(t, s) = \begin{cases} S_{t_j^n}(t - s); \quad t_j^n \leq s \leq t \leq t_{j+1}^n \\ \\ S_{t_k^n}(t - t_k^n) \left[\prod_{j=l+1}^{k-1} S_{t_j^n}(T/n) \right] S_{t_l^n}(t_{l+1}^n - s) \end{cases} \tag{3.14}$$

onde $k > l$, $t_k^n \leq t \leq t_{k+1}^n$ e $t_l^n \leq s \leq t_{l+1}^n$ e verifiquemos, em seguida, que $\mathcal{U}_n(t, s)$, $(t, s) \in \Delta$ é um sistema de evolução. Claramente, $\mathcal{U}_n(t, s)$ é um operador linear limitado em $\mathcal{X}$ para cada $(t, s) \in \Delta$.

i) $\mathcal{U}_n(s, t) = S_{t_j^n}(s - s) = I \ \forall s \in [0, T]$

Para verificar a lei de propagação (3.3b) coloquemos-nos na situação mais complicada, i.e., quando t e s estão em distintos intervalos.

$$\mathfrak{U}_n(t,r) = S_{t_k^n}(t-t_k^n)P_1 S_{t_l^n}(t_{l+1}^n - r), \quad P_1 = \prod_{j=l+1}^{k-1} S_{t_j^n}(T/n)$$

$$\mathfrak{U}_n(r,s) = S_{t_l^n}(r-t_l^n)P_2 S_{t_m^n}(t_m^n - s), \quad P_2 = \prod_{j=m+1}^{l-1} S_{t_j^n}(T/n)$$

Logo

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}_n(t,r)\mathfrak{U}_n(r,s) &= S_{t_k^n}(t-t_k^n)P_1 S_{t_l^n}(t_{l+1}^n - r)S_{t_l^n}(r-t_l^n)P_2 S_{t_m^n}(t_{m+1}^n - s) \\
&= S_{t_k^n}(t-t_k^n)\left[\prod_{j=l+1}^{k-1} S_{t_j^n}(T/n)\right] S_{t_l^n}(t_{l+1}^n - t_l^n)\left[\prod_{j=m+1}^{l-1} S_{t_j^n}(T/n)\right] S_{t_{m+1}^n}(t_m^n - s) \\
&= S_{t_k^n}(t-t_k^n)\left[\prod_{j=m+1}^{k-1} S_{t_j^n}(T/n)\right] S_{t_m^n}(t_{m+1}^n - s) \qquad (t_{l+1}^n - t_l^n) = T/n \\
&= \mathfrak{U}(t,s)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

ii) Verifiquemos agora a condição (3.4).

Seja $(t,s) \to (t_0,s_0)$ em Δ, $x \in \mathfrak{X}$, $P = [\prod_{j=l+1}^{k-1} S_{t_j^n}(T/n)]$ e $x_0 = P S_{t_l^n}(t_{l+1}^n - s_0)x$

$$\begin{aligned}
&\| \mathfrak{U}_n(t,s)x - \mathfrak{U}_n(t_0,s_0)x \|_{\mathfrak{X}} = \\
&\| S_{t_k^n}(t-t_k^n)PS_{t_l^n}(t_{l+1}^n - s)x - S_{t_k^n}(t_0-t_k^n)PS_{t_l^n}(t_{l+1}^n - s_0)x \|_{\mathfrak{X}} \leq \\
&\| S_{t_k^n}(t-t_k^n)PS_{t_l^n}(t_{l+1}^n - s)x - S_{t_k^n}(t-t_k^n)PS_{t_l^n}(t_{l+1}^n - s_0)x \|_{\mathfrak{X}} + \\
&\| S_{t_k^n}(t-t_k^n)PS_{t_l^n}(t_{l+1}^n - s_0)x - S_{t_k^n}(t_0-t_k^n)PS_{t_l^n}(t_{l+1}^n - s_0)x \|_{\mathfrak{X}} \leq \\
&\| S_{t_k^n}(t-t_k^n)P \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{X})} \| S_{t_l^n}(t_{l+1}^n - s)x - S_{t_l^n}(t_{l+1}^n - s_0)x \|_{\mathfrak{X}} + \\
&\| S_{t_k^n}(t-t_k^n)x_0 - S_{t_k^n}(t_0-t_k^n)x_0 \|_{\mathfrak{X}}
\end{aligned}$$

Como $S_t(s)$, $t \in [0,T]$, $s \geq 0$ são C^0 semigrupos em $\mathfrak{X}$ então o lado direito desta última desigualdade converge para zero quando $(t,s) \to (t_0,s_0)$ e (3.4) està verificado. Agora pela definição dos operadores $\mathfrak{U}_n(t,s)$ e a estabilidade da familia

$\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ temos

$$\|\mathfrak{U}_n(t,s)\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{X})} \le M\, e^{\beta(t-s)} \quad (t,s)\in\Delta \tag{3.16}$$

e por (H3) sabemos que

$$\mathfrak{U}_n(t,s)\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{Y} \tag{3.17}$$

Vejamos em seguida que

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{U}_n(t,s)v = A_n(t)\mathfrak{U}_n(t,s)v, \qquad v\in\mathfrak{Y},\ t\neq t_j^n\ j=0,1\ldots,n \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathfrak{U}_n(t,s)v = -\mathfrak{U}_n(t,s)A_n(s)v, \qquad v\in\mathfrak{Y},\ s\neq t_j\ j=0,1\ldots,n \tag{3.19}$$

Efetivamente, seja

$$P=\prod_{j=l+1}^{k-1} S^n_{t_j}(T/n) \text{ e } PS_{t_l^n}(t^n_{l+1}-s)v = v'\in\mathfrak{Y}$$

então pela proposição (2.3) do capítulo (2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{U}_n(t,s)v &= \lim_{h\to 0}\frac{S_{t_k^n}(t+h-t_k^n)v' - S_{t_k^n}(t-t_k^n)v'}{h},\ t\neq t_j,\ j=0\ldots,n\\ &= A_n(t)S_{t_k^n}(t-t_k^n)v'\\ &= A_n(t)\,\mathfrak{U}_n(t,s)v\end{aligned}$$

Do modo similar se consegue (3.19)

Agora, de novo por (H3) tem-se

$$\|\,\mathfrak{U}_n(t,s)\,\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{Y})}\le \widetilde{M}\, e^{\tilde{\beta}(t-s)} \quad (t,s)\in\Delta \tag{3.20}$$

Seja agora $v\in\mathfrak{Y}$ e consideremos a aplicação $r\mapsto \mathfrak{U}_n(t,r)\mathfrak{U}_n(r,s)v$. Devido a (3.18) e (3.19) esta aplicação é diferenciável exceto para um número finito de valores r com $s\le r\le t$. Logo

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_n(t,s)v - \mathfrak{U}_m(t,s)v &= -\int_s^t \frac{\partial}{\partial r}\mathfrak{U}_n(t,r)\mathfrak{U}_m(r,s)v\,dr\\ &= -\int_s^t\Big(\mathfrak{U}_n(t,r)A_m(r)\mathfrak{U}_m(r,s)v - \mathfrak{U}_n(t,r)A_n(r)\mathfrak{U}_m(r,s)v\Big)\,dr\\ &= \int_s^t \mathfrak{U}_n(t,r)\big(A_n(r)-A_m(r)\big)\mathfrak{U}_m(r,s)v\,dr\end{aligned}$$

Logo

$$\| \mathcal{U}_n(t,s)v - \mathcal{U}_m(t,s)v \|_{\mathcal{X}} \leq$$
$$\int_s^t \| \mathcal{U}_n(t,r) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})} \| A_n(r) - A_m(r) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} \| \mathcal{U}_m(r,s) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y})} \| v \|_{\mathcal{Y}} \, dr \tag{3.21}$$

por (3.16) e (3.20) fazendo $\gamma = \max(\beta, \tilde{\beta})$ e substituindo na desigualdade acima tem-se

$$\| \mathcal{U}_n(t,s)v - \mathcal{U}_m(t,s)v \|_{\mathcal{X}} \leq$$
$$M\widetilde{M}e^{\gamma(t-s)} \| v \|_{\mathcal{Y}} \int_s^t \| A_n(r) - A_m(r) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} \, dr \tag{3.22}$$

Agora

$$\| A_n(r) - A_m(r) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} \leq$$
$$\| A_n(r) - A(r) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} + \| A_m(r) - A(r) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} \tag{3.23}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \|A_n(t) - A(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} = 0$ uniformemente em $[0, T]$ segue-se de (3.23) que

$$\| A_n(r) - A_m(r) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} \leq \epsilon \quad \forall r \in [0,T], \quad \text{quando} \quad m,n \to \infty$$

Logo substituindo em (3.22) obtemos

$$\| \mathcal{U}_n(t,s)v - \mathcal{U}_m(t,s)v \|_{\mathcal{X}} \leq M\widetilde{M}e^{\gamma(t-s)} \| v \|_{\mathcal{Y}} \, \epsilon(t-s) \quad m,n \to \infty$$

donde $\mathcal{U}_n(t,s)v$ é de Cauchy em $\mathcal{X}$ e portanto converge para todo $v \in \mathcal{Y}$. Seja

$$\mathcal{U}(t,s)v = \lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_n(t,s)v \quad v \in \mathcal{Y}$$

vejamos em seguida que esta convergência é na verdade para todo $x \in \mathcal{X}$. Seja (v_k)

uma sequência em $\mathfrak{Y}$ que converge para x na topologia de $\mathfrak{X}$, logo

$$\| \mathfrak{U}_n(t,s)x - \mathfrak{U}_m(t,s)x \|_{\mathfrak{X}} \leq$$

$$\| \mathfrak{U}_n(t,s)x - \mathfrak{U}_n(t,s)v_k \|_{\mathfrak{X}} + \| \mathfrak{U}_n(t,s)v_k - \mathfrak{U}_m(t,s)v_k \|_{\mathfrak{X}} +$$

$$\| \mathfrak{U}_m(t,s)v_k - \mathfrak{U}_m(t,s)x \|_{\mathfrak{X}} \leq$$

$$\| \mathfrak{U}_n(t,s) \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{X})} \| x - v_k \|_{\mathfrak{X}} + \| \mathfrak{U}_n(t,s)v_k - \mathfrak{U}_m(t,s)v_k \|_{\mathfrak{X}} +$$

$$\| \mathfrak{U}_m(t,s) \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{X})} \| v_k - x \|_{\mathfrak{X}} \leq$$

$$2M e^{\beta(t-s)} \| v_k - x \|_{\mathfrak{X}} + \| \mathfrak{U}_n(t,s)v_k - \mathfrak{U}_m(t,s)v_k \|_{\mathfrak{X}}$$

Fixando k suficientemente grande ($k > N_1$) nesta última desigualdade, conseguimos

$$\| \mathfrak{U}_n(t,s)x - \mathfrak{U}_m(t,s)x \|_{\mathfrak{X}} \leq 2M e^{\beta(t-s)}\epsilon + M\tilde{M} e^{\gamma(t-s)} \| v \|_{\mathfrak{Y}} \, \epsilon(t-s)$$

Logo $\mathfrak{U}_n(t,s)x$ converge em $\mathfrak{X}$. Seja

$$\mathfrak{U}(t,s)x = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{U}_n(t,s)x \quad x \in \mathfrak{X}, \;\; (t,s) \in \Delta$$

então

$$\| \mathfrak{U}_n(t,s)x - \mathfrak{U}(t,s)x \|_{\mathfrak{X}} \leq \epsilon \quad (t,s) \in \Delta$$

para n suficientemente grande ($n > N$). Tomando supremo em Δ tem-se

$$\sup_{\Delta} \| \mathfrak{U}_n(t,s)x - \mathfrak{U}(t,s)x \|_{\mathfrak{X}} \leq \epsilon \quad n > N$$

e portanto a convergência $\mathfrak{U}_n(t,s)x \to \mathfrak{U}(t,s)x$ é uniforme em Δ, donde $\mathfrak{U}(t,s)$ é fortemente contínua na topologia de $\mathfrak{X}$. Vejamos que $\mathfrak{U}(t,s)$ é um sistema de evolução em $\mathfrak{X}$.

i)$\mathfrak{U}(s,s)x = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{U}_n(s,s)x = x \quad \forall x \in \mathfrak{X}$, então $\mathfrak{U}(s,s) = I$

Seja $x_0 = \mathfrak{U}(r,s)x$.

$$\| \mathfrak{U}_n(t,r)\mathfrak{U}_n(r,s)x - \mathfrak{U}(t,r)\mathfrak{U}(r,s)x \| \leq$$

$$\| \mathfrak{U}_n(t,r)\mathfrak{U}_n(r,s)x - \mathfrak{U}_n(t,r)\mathfrak{U}(r,s)x \| +$$

$$\| \mathfrak{U}_n(t,r)\mathfrak{U}(r,s)x - \mathfrak{U}(t,r)\mathfrak{U}(r,s)x \| \leq$$

$$\| \mathcal{U}_n(t,r) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{X}} \| \mathcal{U}_n(r,s)x - \mathcal{U}(r,s)x \| +$$

$$\| \mathcal{U}_n(t,r)x_0 - \mathcal{U}(t,r)x_0 \| \leq$$

$$\| \mathcal{U}_n(r,s)x - \mathcal{U}(r,s)x \| \, M e^{\beta(t-r)} + \| \mathcal{U}_n(t,r)x_0 - \mathcal{U}(t,r)x_0 \| \to 0$$

quando $n \to \infty$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_n(t,r)\mathcal{U}_n(r,s)x = \mathcal{U}(t,r)\mathcal{U}(r,s)x$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_n(t,s)x = \mathcal{U}(t,r)\mathcal{U}(r,s)x$$

$$\mathcal{U}(t,s)x = \mathcal{U}(t,r)\mathcal{U}(r,s)x$$

donde $\mathcal{U}(t,s) = \mathcal{U}(t,r)\mathcal{U}(r,s)$ em Δ.

ii) Já foi estabelecido que a aplicação $(t,s) \mapsto \mathcal{U}(t,s)$, $(t,s) \in \Delta$ é fortemente contínua em $\mathcal{X}$. Agora, de (3.16) segue

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{U}(t,s) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})} &= \sup_{\|x\|=1} \| \lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_n(t,s)x \|_{\mathcal{X}} \\
&= \sup_{\|x\|=1} \lim_{n\to\infty} \| \mathcal{U}_n(t,s)x \|_{\mathcal{X}} \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \lim_{n\to\infty} M e^{\beta(t-s)} \| x \|_{\mathcal{X}} \\
&= M e^{\beta(t-s)} \quad (t,s) \in \Delta
\end{aligned}$$

o que prova (E1).

Para provar (E2) e (E3) consideremos a aplicação $r \mapsto \mathcal{U}_n(t,r)S_\tau(r-s)v$ com $v \in \mathcal{Y}$. Esta função é diferenciável exceto para um número finito de valores de r. Agora

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_n(t,s)v - S_\tau(t-s)v &= -\int_s^t \frac{\partial}{\partial r}\mathcal{U}_n(t,r)S_\tau(r-s)\,dr \\
&= \int_s^t \mathcal{U}_n(t,r)\big(A_n(r) - A(\tau)\big)S_\tau(r-s)\,dr
\end{aligned}$$

e portanto

$$\| \mathcal{U}_n(t,s)v - S_\tau(t-s)v \|_{\mathcal{X}} \leq M\tilde{M} e^{\gamma(t-s)} \| v \|_{\mathcal{Y}} \int_s^t \| A_n(r) - A(\tau) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} \, dr$$

Tomando limite e aproveitando a convergência uniforme de $\|A_n(t) - A(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})}$ em $[0, T]$

$$\begin{aligned} &\| \mathcal{U}(t,s)v - S_\tau(t-s)v \|_{\mathcal{X}} \leq \\ &M\tilde{M}e^{\gamma(t-s)} \| v \|_{\mathcal{Y}} \int_s^t \| A(r) - A(\tau) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} \, dr \end{aligned} \tag{3.24}$$

Expressando o lado esquerdo de (3.24) numa forma adequada, fazendo $\tau = s$ e dividindo por $(t - s)$ tem-se

$$\begin{aligned} &\| \frac{\mathcal{U}(t,s) - \mathcal{U}(s,s)}{t-s}v - \frac{S_s(t-s) - I}{t-s}v \| \leq \\ &M\tilde{M}e^{\gamma(t-s)} \| v \|_{\mathcal{Y}} \frac{1}{t-s} \int_s^t \| A(r) - A(s) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} \, dr \end{aligned}$$

Logo, já que a aplicação $t \mapsto A(t)$ é contínua na topologia $\mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ tem-se

$$\begin{aligned} &\lim_{t \to s^+} \| \frac{\mathcal{U}(t,s) - \mathcal{U}(s,s)}{t-s}v - \frac{S_s(t-s) - I}{t-s}v \| \leq \\ &M\widetilde{M} \| v \|_{\mathcal{Y}} \| A(s) - A(s) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} = 0 \end{aligned}$$

e portanto $\frac{\partial^+}{\partial t}\mathcal{U}(t,s)v\Big|_{t=s} = A(s)v$ o que prova (E2).

Um argumento análogo, fazendo $\tau = t$ em (3.24) e tomando $s \to t^-$, conduz a

$$\frac{\partial^-}{\partial s}\mathcal{U}(t,s)v\Big|_{t=s} = -A(t)v \tag{3.25}$$

Agora, para $s < t$, (E2) junto com a continuidade forte de $\mathcal{U}(t,s)$ em $\mathcal{X}$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^+}{\partial s}\mathcal{U}(t,s)v &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\mathcal{U}(t,s+h)v - \mathcal{U}(t,s)v\Big) \\ &= \lim_{h\to 0} \mathcal{U}(t,s+h)\left(\frac{v - \mathcal{U}(s+h,s)v}{h}\right) \\ &= -\mathcal{U}(t,s)A(s)v \end{aligned}$$

e para $s \leq t$ temos, devido a (3.25)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^-}{\partial s}\mathcal{U}(t,s)v &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\mathcal{U}(t,s)v - \mathcal{U}(t,s-h)v\Big) \\ &= \lim_{h\to 0} \mathcal{U}(t,s)\left(\frac{v - \mathcal{U}(s,s-h)v}{h}\right) \\ &= -\mathcal{U}(t,s)A(s)v \end{aligned}$$

juntando estes dois resultados tem-se (E3). Só resta provar que $\mathcal{U}(t,s)$ é único. Suponhamos que $\mathcal{V}(t,s)$, $(t,s) \in \Delta$ seja um sistema de evolução que satisfaz (E1)-(E3). Para $v \in \mathcal{Y}$ consideramos a função $r \mapsto \mathcal{V}(t,r)\mathcal{U}_n(r,s)v$. Já que $\mathcal{V}(t,s)$ satisfaz (E3), segue da construção de $\mathcal{U}_n(t,s)$ que esta função é diferenciável exceto para um número finito de valores de r; logo

$$\mathcal{V}(t,s)v - \mathcal{U}_n(t,s)v = \int_s^t \mathcal{V}(t,r)\Big(A(r) - A_n(r)\Big)\mathcal{U}_n(r,s)v dr\, d$$

donde

$$\|\mathcal{V}(t,s)v - \mathcal{U}_n(t,s)v\|_{\mathcal{X}} \leq M\tilde{M}e^{\gamma(t-s)}\|v\|_{\mathcal{Y}} \int_s^t \|A(r) - A_n(r)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})}\, dr.$$

De novo, aproveitando a convergência uniforme de $\|A_n(r) - A(r)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})}$ em $[0,T]$ e passando ao limite na igualdade anterior, tem-se $\mathcal{V}(t,s)v = \mathcal{U}(t,s)v$ para todo $v \in \mathcal{Y}$. Um argumento de densidade nos dá igualdade para todo $x \in \mathcal{X}$; vejamos isto:

Seja, como sempre, $v_n \to x$ com $\{v_n\}_{x\geq 1}$ em $\mathcal{X}$.

$$\| \mathcal{V}(t,s)x - \mathcal{U}(t,s)x \|_{\mathcal{X}} \leq$$

$$\| \mathcal{V}(t,s)x - \mathcal{U}(t,s)v_n \|_{\mathcal{X}} + \| \mathcal{U}(t,s)v_n - \mathcal{U}(t,s)x \|_{\mathcal{X}} \leq$$

$$\| \mathcal{V}(t,s) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})} \| x - v_n \|_{\mathcal{X}} + \| \mathcal{U}(t,s) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})} \| v_n - x \|_{\mathcal{X}}$$

e já que $\mathcal{V}(t,s)$ satisfaz (E1) temos

$$\| \mathcal{V}(t,s)x - \mathcal{U}(t,s)x \|_{\mathcal{X}} \leq 2Me^{\gamma(t-s)} \| x - v_n \|_{\mathcal{X}} \to 0, \quad n \to \infty$$

Logo, $\mathcal{V}(t,s)x = \mathcal{U}(t,s)x \quad \forall\, x \in \mathcal{X}$ e o teorema está provado $\square$

Este teorema, na verdade não resolve a equação (3.1) e só conseguimos provar que $D_t^+\mathcal{U}(t,s)v\big|_{t=s} = A(s)v$ com $v \in \mathcal{Y}$ e $0 \leq t \leq T$. No seguinte teorema serão dadas as condições adicionais paara conseguir a solução de (3.1).

Teorema 3.2. *Seja $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ uma família de geradores infinitesimais que satisfaz as condições do teorema* (3.1) *e seja $\mathcal{U}(t,s)$, $(t,s) \in \Delta$ o sistema de evolução construido nele. Se*

(E4) $\mathfrak{U}(t,s)\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{Y} \quad (t,s) \in \Delta$ *e*

(E2) *para cada* $v \in \mathfrak{Y}$, $\mathfrak{U}(t,s)v$ *é contínua em* Δ *na topologia de* $\mathfrak{Y}$.

Então, para cada $v \in \mathfrak{Y}$, *a função* $u(t)\colon [0,T] \to \mathfrak{X}$ *definida por*

$$u(t) = \mathfrak{U}(t,s)v \tag{3.26}$$

satisfaz a equação (3.1) *com derivada calculada na topologia de* $\mathfrak{X}$.

Prova. Seja $u(t) = \mathfrak{U}(t,s)v$, $v \in \mathfrak{Y}$, $(t,s) \in \Delta$. Por (E2) temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^+}{\partial t}\mathfrak{U}(t,s)v &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathfrak{U}(t+h,s)v - \mathfrak{U}(t,s)v}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathfrak{U}(t+h,t) - I}{h}\mathfrak{U}(t,s)v\\ &= A(t)\mathfrak{U}(t,s)v\end{aligned}$$

Agora fazendo

$$f(t) = \mathfrak{U}(t,s)v\colon [0,T] \mapsto \mathfrak{X}$$

$$g(r) = A(r)\mathfrak{U}(r,s)v\colon [0,T] \mapsto \mathfrak{X}$$

vejamos que $g(r)$ é contínua na topologia de $\mathfrak{X}$.

$$\| A(r)\mathfrak{U}(r,s)v - A(r_0)\mathfrak{U}(r_0,s)v \|_{\mathfrak{X}} \leq$$

$$\| A(r)\mathfrak{U}(r,s)v - A(r)\mathfrak{U}(r_0,s)v \|_{\mathfrak{X}} + \| A(r)\mathfrak{U}(r_0,s)v - A(r_0)\mathfrak{U}(r_0,s)v \|_{\mathfrak{X}} \leq$$

$$\| A(r) \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{Y},\mathfrak{X})} \| \mathfrak{U}(r,s)v - \mathfrak{U}(r_0,s)v \|_{\mathfrak{X}} +$$

$$\| A(r) - A(r_0) \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{Y},\mathfrak{X})} \| \mathfrak{U}(r_0,s) \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{Y},\mathfrak{X})} \| v \|_{\mathfrak{Y}}$$

e o membro direito converge para zero quando $r \to r_0$. Assim, pela proposição (2.5) de [3] , já que $f'_+(t) = g(t)$ tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{U}(t,s)v = f'(t) = g(t) = A(t)\mathfrak{U}(t,s)v = A(t)u(t).$$

□

Para conseguir um sistema de evolução $\mathfrak{U}(t,s)v$ que satisfaça (E1)-(E3) substituimos a condição (H3) pelo seguinte:

(H3)' Existe uma família $\{Q(t)\}_{t\in[0,T]}$ de isomorfismos de $\mathfrak{Y}$ sobre $\mathfrak{X}$ tal que para cada $v \in \mathfrak{Y}$ $Q(t)v$ é continuamente diferenciável na topologia de $\mathfrak{X}$ em $[0,T]$ e

$$Q(t)A(t)Q(t)^{-1} = A(t) + B(t) \tag{3.27}$$

onde $B(t), \quad t \in [0,T]$ é uma família fortemente contínua de operadores limitados sobre $\mathfrak{X}$ e a relação (3.27) deve ser entendida de maneira estrita, isto é, se $v \in \mathfrak{Y}$, então $Q(t)^{-1}v \in \mathfrak{D}(A(t)),\ A(t)Q(t)^{-1}v \in \mathfrak{Y}$ e vale a igualdade

$$Q(t)A(t)Q(t)^{-1}v = A(t)v + B(t)v$$

Para demonstrar o teorema principal desta seção precisamos dos seguintes lemas para cujas provas o leitor pode ver [12].

Lema 3.1. *As condições (H1) e (H3)' implicam (H3).*

Lema 3.2. *Seja $\mathfrak{U}(t,s)$ $(t,s) \in \Delta$ um sistema de evolução em um espaço de Banach $\mathfrak{X}$ satisfazendo $\| \mathfrak{U}(t,s) \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{X}} \leq M$ com $(t,s) \in \Delta$. Se $H(t)$ é uma família fortemente contínua de operadores lineares limitados em $\mathfrak{X}$, então existe uma única família de operadores lineares limitados $\mathfrak{V}(t,s)$, $(t,s) \in \Delta$ sobre $\mathfrak{X}$ tal que*

$$\mathfrak{V}(t,s)x = \mathfrak{U}(t,s)x + \int_s^t \mathfrak{V}(t,r)H(r)\mathfrak{U}(r,s)x\,dr \tag{3.28}$$

e $\mathfrak{V}(t,s)x$ é contínua em Δ.

Teorema 3.3. *Seja $A(t)$ $t \in [0,T]$ o gerador infinitesimal de um C^0 semigrupo $S_t(s)$, $s \geq 0$ sobre $\mathfrak{X}$. Se a família $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ satisfaz as condições (H1), (H2), (H3)', então existe um único sistema de evoluç ao $\mathfrak{U}(t,s)$ $(t,s) \in \Delta$ em $\mathfrak{X}$ que satisfaz (E1)-(E5).*

Prova. Do lema (3.1) segue que $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ satisfaz as condições (H1), (H2) e (H3) e portanto, pelo teorema (3.1) existe um único sistema de evolução $\mathfrak{U}(t,s)$ que satisfaz (E1), (E2) e (E3). Seja $v \in \mathfrak{Y}$ e denotemos a derivada de $Q(t)v$ por

$\dot{Q}(t)v$. façamos $C(t) = \dot{Q}(t)Q^{-1}(t)$, $t \in [0, T]$. Claramente $\{C(t)\}_{t\in[0,T]}$ é uma família fortemente contínua de operadores lineares limitados sebre $\mathfrak{X}$. Seja $W(t, s)$ a única solução da equação integral

$$W(t,s)x = \mathfrak{U}(t,s)x + \int_s^t W(t,r)[B(r) + C(r)]\mathfrak{U}(r,s)x\,dr \quad x \in \mathfrak{X} \tag{3.29}$$

A existência, unicidade e propriedades de $W(t, s)$ segue do lema (3.2) .

Pela nossa hipótese sobre $Q(t)$ segue-se facilmente que para todo $x \in \mathfrak{X}$, $Q^{-1}(t)$ é diferenciável em $\mathfrak{Y}$ e

$$\frac{d}{dt}\big(Q^{-1}(t)x\big) = -Q^{-1}(t)\dot{Q}(t)Q^{-1}(t)x \tag{3.30}$$

Efetivamente, a afirmação segue da fórmula:

$$\frac{Q^{-1}(t+h) - Q^{-1}(t)}{h} = Q^{-1}(t+h)\left(\frac{Q(t) - Q(t+h)}{h}\right)Q^{-1}(t)$$

tomando limite quando $h \to 0$

Seja $Q(t,r) = \mathfrak{U}(t,r)Q^{-1}(r)$ De (E3) e (3.30) segue que para todo $x \in \mathfrak{X}$, $r \mapsto Q(t,r)x$ é diferenciável em $\mathfrak{X}$ e

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}Q(t,r)x &= -\,\mathfrak{U}(t,r)A(r)Q^{-1}(r)x - \mathfrak{U}(t,r)Q^{-1}(r)\dot{Q}(r)Q^{-1}(r)x \\ &= -\,\mathfrak{U}(t,r)A(r)Q^{-1}(r)x - Q(t,r)C(r)x\end{aligned}$$

Mas, para todo $v \in \mathfrak{Y}$ temos por (H3)'

$$A(r)Q^{-1}(r)v = Q^{-1}(r)(A(r) + B(r))v$$

e por isto para $v \in \mathfrak{Y}$ tem-se

$$\frac{\partial}{\partial r}Q(t,r)v = -Q(t,r)(A(r) + B(r) + C(R))v \tag{3.31}$$

Sejam $\mathfrak{U}_n(t, s)$ os operadores construidos na prova do teorema (3.1), então por (3.18)

$$\frac{\partial}{\partial r}\mathfrak{U}_n(r,s)v = A_n(r)\mathfrak{U}_n(r,s)v, \quad v \in \mathfrak{Y} \tag{3.32}$$

onde está última igualdade é válida para todo $s \leq r$ exceto para um número finito de valores de r.

Combinando (3.31) e (3.32) achamos

$$\frac{\partial}{\partial r} Q(t,r)\mathfrak{U}_n(r,s)v = -Q(t,r)\big(A(r)+B(r)+C(R)-A_n(r)\big)\mathfrak{U}_n(r,s)v$$

integrando desde $r = s$ até $r = t$ tem-se

$$\begin{aligned} &Q^{-1}(t)\mathfrak{U}_n(t,s)v - Q(t,s)v = \\ &-\int_s^t Q(t,r)\big(A(r)+B(r)+C(R)-A_n(r)\big)\mathfrak{U}_n(r,s)v\,dr \end{aligned} \tag{3.33}$$

De (E1) e (3.20) e pela convergência uniforme $A_n(r) \longrightarrow A(r)$ em $[0,T]$ e $\mathfrak{U}_n(r,s)v \longrightarrow \mathfrak{U}(r,s)v$ em Δ segue, passando ao limite em (3.33)

$$Q^{-1}(t)\mathfrak{U}(t,s)v - Q(t,s)v = -\int_s^t Q(t,r)\big(B(r)+C(R)\big)\mathfrak{U}(r,s)v\,dr$$

e daqui

$$Q(t,s)v = Q^{-1}(t)\mathfrak{U}(t,s)v + \int_s^t Q(t,r)\big(B(r)+C(R)\big)\mathfrak{U}(r,s)v\,dr \tag{3.34}$$

Já que todos os operadores de (3.34) são limitados e $\mathfrak{Y}$ é denso em $\mathfrak{X}$, temos

$$Q(t,s)x = Q^{-1}(t)\mathfrak{U}(t,s)x + \int_s^t Q(t,r)\big(B(r)+C(R)\big)\mathfrak{U}(r,s)x\,dr \tag{3.35}$$

Agora, multiplicando (3.29) pela esquerda por $Q^{-1}(t)$ tem-se

$$\begin{aligned} &Q^{-1}(t)W(t,s)x = \\ &Q^{-1}(t)\mathfrak{U}(t,s)x + \int_s^t Q^{-1}(t)W(t,r)\big(B(r)+C(R)\big)\mathfrak{U}(r,s)x\,dr \end{aligned} \tag{3.36}$$

De (3.35) e pela unicidade de solução de (3.36) segue

$$\mathfrak{U}(t,s)Q^{-1}(s) = Q(t,s) = Q^{-1}(t)W(t,s)$$

donde

$$\mathfrak{U}(t,s) = Q^{-1}(t)W(t,s)Q(s)$$

Agora, desta última expressão segue que $\mathfrak{U}(t,s)\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{Y}$, já que $W(t,s) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{Y},\mathfrak{X})$. Assim $\mathfrak{U}(t,s)$ satisfaz (E4). Aliás, da continuidade de $W(t,s)x$ em Δ e das propriedades de $Q(t)$ e $Q^{-1}(t)$ segue que $\mathfrak{U}(t,s)$ é fortemente contínua em $\mathfrak{Y}$ no triângulo Δ e satisfaz (E5). □

3.2 A Equação Não Homogênea

O objetivo desta seção consiste em provar que o problema de Cauchy associado à equação (L), a saber

$$\begin{cases} \partial_t u = A(t)u + f(t) & 0 \leq t \leq T \\ \\ u(0) = \phi \end{cases} \tag{3.37}$$

é bem posto.

Teorema 3.4. *Seja* $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ *uma família de geradores infinitesimais de* C^0 *semigrupos sobre* $\mathfrak{X}$ *que satisfaz as hipóteses do teorema* (3.3). *Suponha que* $\phi \in \mathfrak{Y}$ *e* $f \in C([0,T];\mathfrak{X}) \cap L^1([0,T];\mathfrak{Y})$. *Então* $u \in C([0,T];\mathfrak{Y}) \cap C^1([0,T];\mathfrak{X})$ *dada por* (3.38) *satisfaz* (3.37)

$$u(t) = \mathfrak{U}(t,0)\phi + \int_0^t \mathfrak{U}(t,r)f(r)\,dr \tag{3.38}$$

Prova. Como $C([0,T];\mathfrak{Y})$ é denso em $L^1([0,T];\mathfrak{Y})$ existe uma sequencia $\{f_n\}_{n\geq 1}$ em $C([0,T];\mathfrak{Y})$ tal que $f_n \xrightarrow{L^1} f$; isto é $\|f_n - f\|_{1,\mathfrak{Y}} \to 0$ quando $n \to \infty$. Para cada n definimos as seguintes funções continuas de $[0,T]$ em $\mathfrak{Y}$.

$$u_n(t) = \mathfrak{U}(t,0)\phi + \int_0^t \mathfrak{U}(t,r)f_n(r)\ dr \quad t \in [0,T].$$

Vejamos que u_n converge uniformemente a u sobre $[0,T]$ em $\mathfrak{Y}$

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u(t)\|_{\mathfrak{Y}} &= \|\int_0^t \mathfrak{U}(t,r)(f_n(r) - f(r))\ dr\|_{\mathfrak{Y}} \\ &\leq \int_0^t \|\mathfrak{U}(t,r)(f_n(r) - f(r))\|_{\mathfrak{Y}}\ dr \\ &\leq \int_0^t \|\mathfrak{U}(t,r)\|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{Y})}\|f_n(r) - f(r)\|_{\mathfrak{Y}}\ dr \end{aligned} \tag{3.39}$$

Já que $\|\mathfrak{U}(t,r)\|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{Y})} \leq Me^{\beta(t-r)} \leq Me^{\beta T}$ (vide 5) então substituindo em (3.39) tem-se

$$
\begin{aligned}
\|u_n(t) - u(t)\|_{\mathcal{Y}} &\leq M e^{\beta T} \int_0^t \|f_n(r) - f(r)\|_{\mathcal{Y}}\, dr \\
&\leq M e^{\beta T} \int_0^T \|f_n(r) - f(r)\|_{\mathcal{Y}}\, dr \\
&= M e^{\beta T} \|f_n - f\|_{1,\mathcal{Y}}.
\end{aligned}
$$

Logo $\|u_n - u\|_{\infty,\mathcal{Y}} = \sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_{\mathcal{Y}} \leq M e^{\beta T} \|f_n - f\|_{1,\mathcal{Y}}$, onde $u \in C([0,T;\mathcal{Y})$ por ser o limite uniforme de funções continuas.

Agora vejamos que (3.38) é solução de (3.37). Como $v(t) = \mathcal{U}(t,0)\phi$ satisfaz a equação homogênea com condição inicial ϕ é suficiente provar que

$$
w(t) = \int_0^t \mathcal{U}(t,r) f(r)\, dr \tag{3.40}
$$

é solução de (3.37) com ϕ substituida por zero. De (3.40) é claro que $w(0) = 0$. resta calcular $\partial_t w(t)$.

Seja $h > 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{w(t+h) - w(t)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} \mathcal{U}(t+h,r) f(r)\, dr - \int_0^t \mathcal{U}(t,r) f(r)\, dr \right) \\
&= \int_0^t \frac{\mathcal{U}(t+h,r) - \mathcal{U}(t,r)}{h} f(r)\, dr + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \mathcal{U}(t+h,r) f(r)\, dr
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

O teorema da convergência dominada implica então que o primeiro termo converge para $A(t)w(t)$ enquanto o segundo converge para $f(t)$ por ser o valor médio de uma função contínua no intervalo $[t, t+h]$. Argumento análogo vale para $h < 0$. Portanto $w(t)$ satisfaz a equação diferencial (3.37). $\square$

O seguinte teorema estabelece a dependência da solução tanto no dado inicial como nos coeficientes da equação. Considere

$$
\begin{cases}
\partial_t u' = A'(t) u' + f'(t) \quad 0 \leq t \leq T \\[2em]
u'(0) = \phi'
\end{cases}
$$

Suponha que as condições do teorema (3.3) da seção 3.1 são satisfeitas por $A'(t)$ com os mesmos $\mathfrak{Y}$ e Q e seja satisfeitos $\mathfrak{U}'(t,s)$ o operador de evolução associado. Em primeiro lugar temos

Teorema 3.5. *Sejam* $\phi \in \mathfrak{Y}$, $\phi' \in \mathfrak{Y}$, $f \in L^1([0,T];\mathfrak{Y})$, $f' \in L^1([0,T];\mathfrak{X})$ *e* u, u' *as soluções correspondentes. Então*

$$\| u' - u \|_{\infty,\mathfrak{X}} \leq \| \mathfrak{U}' \|_{\infty,\mathfrak{B}(\mathfrak{X})} \left(\| \phi' - \phi \|_{\mathfrak{X}} + \| f' - f \|_{1,\mathfrak{X}} + \| (A' - A)u \|_{1,\mathfrak{X}} \right)$$

onde

$$\| f \|_{\infty,\mathfrak{X}} = \sup_{[0,T]} \| f(t) \|_{\mathfrak{X}}, \qquad \| f \|_{1,\mathfrak{X}} = \int_0^T \| f(t) \|_{\mathfrak{X}} \, dt$$

Prova. Observe que podemos escrever $u'(t) - u(t) = v_1(t) + v_2(t)$ com

$$v_1(t) = \mathfrak{U}'(t,0)\phi' - \mathfrak{U}'(t,0)\phi + \int_0^t \mathfrak{U}'(t,r)(f'(r) - f(r))\,dr \tag{3.42}$$

$$v_2(t) = \mathfrak{U}'(t,0)\phi - \mathfrak{U}(t,0)\phi + \int_0^t \big(\mathfrak{U}'(t,r) - \mathfrak{U}(t,r)\big) f(r)\,dr \tag{3.43}$$

logo

$$\| v_1(t) \|_{\mathfrak{X}} \leq \| \mathfrak{U}' \|_{\infty,\mathfrak{B}(x)} (\| \phi' - \phi \|_{\mathfrak{X}} + \| f' - f \|_{1,\mathfrak{X}})$$

Resta, portanto estimar $v_2(t)$

$$\frac{d\mathfrak{U}'(t,r)\mathfrak{U}(r,s)\phi}{ds} = -\mathfrak{U}'(t,r)A'(r)\mathfrak{U}(r,s)\phi + \mathfrak{U}'(t,r)A(r)\mathfrak{U}(r,s)\phi$$

$$\mathfrak{U}'(t,s)\phi - \mathfrak{U}(t,s)\phi = \int_s^t \mathfrak{U}'(t,\xi)(A'(\xi) - A(\xi))\mathfrak{U}(\xi,s)\phi\,d\xi. \tag{3.44}$$

Substituindo (3.44) em (3.43)

$$
\begin{aligned}
v_2(t) &= \int_0^t \mathcal{U}'(t,\xi)(A'(\xi) - A(\xi))\mathcal{U}(\xi,0)\phi \, d\xi \\
&\quad + \int_0^t \int_r^t \mathcal{U}'(t,\xi)(A'(\xi) - A(\xi))\mathcal{U}(\xi,r)f(r) \, d\xi dr \\
&= \int_0^t \mathcal{U}'(t,\xi)(A'(\xi) - A(\xi))\mathcal{U}(\xi,0)\phi \, d\xi \\
&\quad + \int_0^t \int_0^\xi \mathcal{U}'(t,\xi)(A'(\xi) - A(\xi))\mathcal{U}(\xi,r)f(r) \, dr d\xi \\
&= \int_0^t \mathcal{U}'(t,\xi)(A'(\xi) - A(\xi)) \left[\mathcal{U}(\xi,0)\phi + \int_0^\xi \mathcal{U}(\xi,r)f(r) \, dr\right] d\xi \\
&= \int_0^t \mathcal{U}'(t,\xi)(A'(\xi) - A(\xi))u(\xi) \, d\xi .
\end{aligned}
$$

logo,

$$\| v_2(t) \|_{\mathfrak{X}} \leq \| \mathcal{U}' \|_{\infty,\mathcal{B}(\mathfrak{X})} \| \left(A' - A\right)u \|_{1,\mathfrak{X}} .$$

□

Corolário 3.1. *Sejam $\phi \in \mathfrak{Y}$, $f \in L^1([0,T];\mathfrak{Y})$. Então* (3.37) *tem no máximo uma solução.*

Prova. O resultado segue imediatamente do teorema anterior tomando $\phi = \phi'$, $f = f'$ e $A = A'$. □

Finalmente, apresentaremos dois resultados que serão úteis no próximo capítulo, e para sua demonstração o leitor pode ver [5].

Vamos supor, por simplicidade, que o isomorfismo $S(t)$ não depende do tempo, ou seja, $Q(t) = Q$ é constante.

Teorema 3.6. *Sejam ϕ, $\phi' \in \mathfrak{Y}$, $f, f' \in L^1([0,T];\mathfrak{Y})$ e u, u' as soluções correspondentes de* (3.37). *Então*

$$\| u' - u \|_{\infty,\mathfrak{Y}} \leq k'\big(\| \phi' - \phi \|_{\mathfrak{Y}} + \| f' - f \|_{1,\mathfrak{Y}} + \| (B' - B)Qu \|_{1,\mathfrak{X}} \big) + \| h \|_{\infty,\mathfrak{X}}$$

onde a constante k' depende apenas de $\| \mathcal{U}' \|_{\infty,\mathcal{B}(\mathfrak{X})}$, $\| B' \|_{\infty,\mathfrak{X}}$ e

$$\left\{ \begin{aligned} h(t) &= \big(\mathcal{U}'(t,0) - \mathcal{U}(t,0)\big)Q\phi + \int_0^t \big(\mathcal{U}'(t,s) - \mathcal{U}(t,s)\big)g(s)\, d\, s \\ g(s) &= Qf(s) - B(s)Qu(s) \end{aligned} \right. \tag{3.45}$$

Além do teorema acima, vamos precisar do teorema da convergência que segue. Considere os problemas de Cauchy

$$\partial_t u^n = A^n(t)u^n(t) + f^n(t) \quad 0 \le t \le T, \;\; u^n(0) = \phi^n \tag{L^n}$$

com $n = 1, 2 \ldots$. Suponha que a família $\{A^n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ satisfaz as condições (H1), (H2) e (H3)' uniformemente em n, i.e., os índices de estabilidade M, β de $\{A^n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ independem de n. Além disto, suponha também que $\{\| B^n \|_{1,\mathfrak{X}}\}_{n=1}^{\infty}$ é limitada e que $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ e Q são os mesmos para todos os problemas. Segue imediatamente que os operadores de evolução $\{\mathfrak{U}^n(t,s)\}_{n=1}^{\infty}$ associados a $\{A^n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ existem e são uniformemente limitados tanto em $\mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ como em $\mathfrak{B}(\mathfrak{Y})$.

Teorema 3.7. *Além das hipóteses acima, suponha que*

$$A^n(t) \xrightarrow{s} A(t) \;\; em \;\; \mathfrak{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}) \;\; q.t.p.$$
$$\lim_{|E| \to 0} \int_E \| A^n(t) \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{Y},\mathfrak{X})} \, dt \to \; uniformemente$$

onde $\xrightarrow{s}$ *e* $|\ |$ *denotam a convergência forte e a medida de Lebesgue respectivamente.*

Então

$$\mathfrak{U}^n(t,r) \xrightarrow{s} \mathfrak{U}(t,r) \quad em \;\; \mathfrak{B}(\mathfrak{X})$$

uniformemente em relação a $0 \le r \le t \le T$. *Mais ainda, se* $\phi^n \to \phi$ *em* $\mathfrak{X}$ *e* $f^n \to f$ *em* $L^1([0,T]; \mathfrak{Y})$ *segue que se* $u^n \to u$ *em* $C([0,T]; \mathfrak{X})$ *onde* u^n *e* u *são as soluções de* (L^n) *e* (L).

Capítulo 4

Teoria Quase-Linear

O objetivo deste capítulo consiste em estender a teoria desenvolvida no capítulo anterior para equações ditas quase-lineares, i.e., equações da forma

$$\partial_t u = A(t,u)u + f(t,u) \tag{Q}$$

onde $A(t,u)$ é um operador linear para cada $t \in [0,T]$ e cada u e f é uma função dada (em geral não–linear).

A idéia básica envolvida no que segue é muito simples: para cada função $t \to v(t)$ em certo espaço de Banach considera-se o problema de Cauchy linear

$$\begin{aligned} &\partial_t u = A(t,v(t))u + f(t,v(t)) \\ &u(0) = \phi. \end{aligned} \tag{L^v}$$

Aplicando a teoria do capitulo anterior obtem-se uma aplicação $v \mapsto u^v$ onde u^v é a única solução de L^v. Prova-se então que o espaço de Banach de funções mencionado acima pode ser escolhido de modo que a aplicação $v \mapsto u^v$ seja uma contração. Segue então que o ponto fixo encontrado é solução de L^v com $u(0) = \phi$.

Na prova do teorema principal deste capítulo vamos precisar dos seguintes lemas que se seguem da hipótese $\mathfrak{X}$

Lema 4.1. *Se $g\colon [0,T] \to \mathfrak{Y}$ é limitada na norma de $\mathfrak{Y}$ e contínua em relação à topologia de $\mathfrak{X}$ então g é fracamente contínua (e portanto fortemente mensurável) como função com valores em $\mathfrak{Y}$*

Lema 4.2. *Se um subconjunto de $\mathfrak{Y}$ é convexo, fechado e limitado então ele é fechado em $\mathfrak{X}$.*

Teorema 4.1. *Seja $[0,T] \times W$ com W uma bola aberta em $\mathfrak{Y}$ e $T > 0$. Logo, se*

Hipótese(X) *Sejam $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ espaços de Banach reais reflexivos com $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X}$ denso e continuamente. Existe uma isometria linear sobrejectiva de $\mathfrak{Y}$ em $\mathfrak{X}$.*

Hipótese (A1) *Existe β real tal que se $(t,y) \in [0,T] \times W$ o operador $A(t,y)$ gera um semigrupo de classe C^0 $S_{t,y}(s)$ $s \geq 0$ tal que*

$$\| S_{t,y}(s) \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{X})} \leq e^{\beta s} \quad s \geq 0 \quad \forall \ (t,y) \in [0,T] \times W \tag{4.1}$$

Hipótese (A2) *Existe $\lambda_1 > 0$ tal que $\forall (t,y) \in [0,T] \times W$ existe $Q(t,y)$ com*

$$\begin{aligned} &RA(t,y)R^{-1} = A(t,y) + Q(t,y) \\ &Q(t,y) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{X}), \quad \| Q(t,y) \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{X})} \leq \lambda_1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

A igualdade 4.2 deve ser entendida no sentido estrito, i.e.,

$$x \in \mathfrak{D}(A(t,y)) \Longleftrightarrow R^{-1}x \in \mathfrak{D}(A(t,y))$$

e $A(t,y)R^{-1}x \in \mathfrak{Y}$. Onde R é a isometria da hipótese **Hipótese (A1)**.

Hipótese (A3) *Para cada $(t,y) \in [0,T] \times W$, $A(t,y) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$ no sentido que*

$$\begin{aligned} &\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{D}(A(t,y)) \quad \forall (t,y) \in [0,T] \times W \\ &A(t,y)\big|_{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Além disso, para cada $y \in W$ a função $t \in [0,T] \rightarrow A(t,y)$ pertence a $C([0,T]; \mathfrak{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}))$, $\exists \mu_1 > 0$ tal que $\forall t \in [0,T]$ fixo a aplicação $y \rightarrow A(t,y)$ é Lipschitz no sentido que

$$\| A(t,y) - A(t,z) \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{Y},\mathfrak{X})} \leq \mu_1 \| y - z \|_{\mathfrak{X}} \tag{4.4}$$

Hipótese (A4) *Seja y_0 o centro de W. Então $\forall (t,y) \in [0,T]\times W$ tem-se $A(t,y)y_0 \in \mathfrak{Y}$. Existe $\lambda_2 \geq 0$ tal que*

$$\| A(t,y)y_0 \|_{\mathfrak{Y}} \leq \lambda_2 \quad \forall (t,y) \in [0,T] \times W \tag{4.5}$$

Hipótese (f1) *A função $f\colon [0,T] \times W \to \mathfrak{Y}$ é limitada, i.e., existe $\lambda_3 \geq 0$ tal que*

$$\| f(t,y) \|_{\mathfrak{Y}} \leq \lambda_3 \quad \forall (t,y) \in [0,T] \times W \tag{4.6}$$

Para cada $y \in W$ fixo, a aplicação $t \to f(t,y)$ é contínua de $[0,T]$ em $\mathfrak{X}$. $\exists \mu_2 \geq 0$ tal que para cada $t \in [0,T]$ fixo, a aplicação $y \in W \mapsto f(t,y)$ é Lipschitz em $\mathfrak{X}$, i.e.

$$\| f(t,y) - f(t,z) \|_{\mathfrak{X}} \leq \mu_2 \| y - z \|_{\mathfrak{X}} \tag{4.7}$$

Então, se $\phi \in W$ existem $T' \in < 0,T]$ e uma única $u \in C([0,T'];\mathfrak{Y}) \cap C^1([0,T'];\mathfrak{X})$ que resolve o problema de Cauchy associado a (Q) com $u(0) = \phi$

Prova. Seja $R > 0$ e ω_o o centro da bola W tal que

$$\| \phi - w_0 \|_{\mathfrak{Y}} < R \quad \overline{B_{\mathfrak{Y}}(w_0, R)}^{\mathfrak{Y}} \subset W$$

onde $B_{\mathfrak{Y}}(y,\rho)$ denota a bola aberta de raio ρ na topologia $\| \ \|_{\mathfrak{Y}}$.

Seja

$$E = E(T') = \{ v\colon [0,T'] \to \mathfrak{Y} / v \in C([0,T'];\mathfrak{X}), \| v(t) - w_0 \|_{\mathfrak{Y}} \leq R \ \forall t \in [0,T'] \}$$

(pelo tanto $v(t) \in W$) onde $T' < T$ é um número positivo a ser determinado adiante.

se $v \in E$ defina

$$A^v(t) = A(t, v(t))$$

Então por (A1) $A^v(t)$ pertence a $\mathcal{G}(\mathfrak{X}, 1, \beta)$. Portanto a familia $\{A^v(t)\}_{t \in [0.T']}$ é estável com constantes de estabilidade 1, β, i.e.,

$$\| \prod_{j=1}^{N} S_{t_j}(s_j) \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{X})} \leq e^{\beta \sum_{j=1}^{N} s_j}$$

para toda sequência finita $\{t_j\}$ com $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_N \leq T'$ e $s_j \geq 0$ onde $A^v(t)$ gera S_t. Vejamos isto

$$\begin{aligned}
\| \prod_{j=1}^{N} S_{t_j}(s_j) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})} &\leq \prod_{j=1}^{N} \| S_{t_j}(s_j) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})} \\
&\leq \prod_{j=1}^{N} e^{\beta s_j} \\
&= e^{\beta \sum_{j=1}^{N} s_j}
\end{aligned}$$

Agora vejamos que a aplicação $t \in [0, T'] \to A^v(t)$ é contínua na norma de $\mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$

$$\| A^v(t) - A^v(t_0) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} \leq$$

$$\| A(t, v(t)) - A(t, v(t_0)) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} + \| A(t, v(t_0)) - A(t_0, v(t_0)) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} \leq$$

$$\mu_1 \| v(t) - v(t_0) \|_{\mathcal{X}} + \| A(t, v(t_0)) - A(t_0, v(t_0)) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})}$$

logo tem-se a continuidade desejada devido a hipótese (A3). Notemos que por (A2) tem-se

$$RA^v(t)R^{-1} = A^v(t) + Q^v(t)$$

$$Q^v(t) = Q(t, v(t)) \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \quad \| Q^v(t) \|_{\mathcal{X}} \leq \lambda_1$$

Então pela hipótese (X) R satisfaz trivialmente a condição (H3)' do teorema (3.3) no capítulo 3 pois R é constante com respeito à t. Resta ver que a família $\{Q^v(t)\}_{t \in [0,T']}$ é fortemente contínua em $\mathcal{X}$.

Seja $y \in \mathcal{Y}$. Então

$$R^{-1}Q^v(t)y = A^v(t)R^{-1}y - R^{-1}A^v(t)y \tag{4.8}$$

como $R^{-1}y \in \mathcal{Y}$ segue, da continuidade $t \in [0, T'] \mapsto A^v(t)$, que o lado direito de (4.8) é contínuo na norma de $\mathcal{X}$. Vejamos

$$\begin{aligned}
&\|A^v(t)R^{-1}y - R^{-1}A^v(t)y - A^v(t_0)R^{-1}y + R^{-1}A^v(t_0)y\|_{\mathcal{X}} \\
&\leq \|A^v(t)R^{-1}y - A^v(t_0)R^{-1}y\|_{\mathcal{X}} + \|R^{-1}A^v(t)y - R^{-1}A^v(t_0)y\|_{\mathcal{X}} \\
&\leq \|(A^v(t) - A^v(t_0))R^{-1}y\|_{\mathcal{X}} + \|R^{-1}(A^v(t)y - A^v(t_0)y)\|_{\mathcal{X}} \\
&\leq \|A^v(t) - A^v(t_0)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})}\|R^{-1}y\|_{\mathcal{Y}} + \|R^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}\|A^v(t) - A^v(t_0)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})}\|y\|_{\mathcal{Y}}.
\end{aligned}$$

Consequentemente $t \in [0,T] \mapsto R^{-1}Q^v(t)y$ é continua na norma de $\mathfrak{X}$. Como $\mathfrak{Y}$ é denso em $\mathfrak{X}$ segue que $t \in [0,T'] \mapsto R^{-1}Q^v(t)x$ é contínua $\forall\ x \in \mathfrak{X}$. Logo $Q^v(t)x = R(R^{-1}Q^v(t)x)$ é continua como aplicação de $[0,T]$ em $\mathfrak{X}$, $\forall x \in \mathfrak{X}$.

Os resultados acima mostram que as hipóteses (H1), (H2) e (H3)' do teorema linear são satisfeitas. Existe portanto um único sistema de evolução $\mathfrak{U}^v(t,s)$, $0 \leq s \leq T'$ com as propriedades descritas nos teoremas (3.1) e (3.3) do capítulo 3.

Seja $f^v(t) = f(t, v(t))$, vejamos que $f^v \in C([0,T'];\mathfrak{X}) \cap L^1([0,T'];\mathfrak{Y})$

$$\| f^v(t) - f^v(t_0) \|_{\mathfrak{X}} \leq$$

$$\| f(t,v(t)) - f(t,v(t_0)) \|_{\mathfrak{X}} + \| f(t,v(t_0)) - f(t_0,v(t_0)) \|_{\mathfrak{X}}$$

$$\leq \mu_2 \| v(t) - v(t_0) \|_{\mathfrak{X}} + \| f(t,v(t_0)) - f(t_0,v(t_0)) \|_{\mathfrak{X}}$$

e a continuidade segue imediatamente. Por outro lado tem-se que $\| f^v(t) \|_{\mathfrak{Y}} = \| f(t,v(t)) \|_{\mathfrak{Y}} \leq \lambda_3 \quad \forall t \in [0,T']$. Logo já que f^v é limitada na norma de $\mathfrak{Y}$ e contínua na topologia de $\mathfrak{X}$, segue pelo lema (4.1), que $f^v \in L^\infty([0,T'];\mathfrak{Y})$ de onde $f^v \in L^1([0,T'];\mathfrak{Y})$.

Assim sendo, podemos aplicar o teorema (3.4) do capítulo 3 para obter a única solução $u^v(t)$ do problema:

$$\begin{aligned} &\partial_t u^v = A^v(t)u^v + f^v(t) \\ &u^v(0) = \phi \end{aligned} \qquad (L^v)$$

Ela é dada por

$$u^v(t) = \mathfrak{U}^v(t,0)\phi + \int_0^t \mathfrak{U}^v(t,s) f^v(s)\, d\, s.$$

e

$$u^v \in C([0,T'];\mathfrak{Y}) \cap C^1([0,T'];\mathfrak{X})$$

Vejamos em seguida que existe $T' \in]0,T]$ tal que a aplicação $v \mapsto Fv = u^v$ transforma E em E. Já vimos que $u^v \in C([0,T'];\mathfrak{X})$ qualquer que seja $T' \in]0,T]$. Resta provar que T' pode ser escolhido de modo a termos $\| u^v(t) - w_0 \|_{\mathfrak{Y}} \leq R\ \forall t \in [0,T']$.

Para isto observamos que

$$
\begin{aligned}
u^v(t) - w_0 &= \mathfrak{U}^v(t,0)\phi + \int_0^t \mathfrak{U}^v(t,s) f^v(s)\, d\, s - w_0 \\
&= \mathfrak{U}^v(t,0)(\phi - w_0) + \mathfrak{U}^v(t,0)w_0 - w_0 + \int_0^t \mathfrak{U}^v(t,s) f^v(s)\, d\, s \\
&= \mathfrak{U}^v(t,0)(\phi - w_0) + \mathfrak{U}^v(t,0)w_0 - \mathfrak{U}^v(t,t)w_0 + \int_0^t \mathfrak{U}^v(t,s) f^v(s)\, ds \\
&= \mathfrak{U}^v(t,0)(\phi - w_0) - \int_0^t \partial_s \mathfrak{U}^v(t,s) w_0 ds + \int_0^t \mathfrak{U}^v(t,s) f^v(s) ds \\
&= \mathfrak{U}^v(t,0)(\phi - w_0) + \int_0^t \mathfrak{U}^v(t,s) A^v(s) w_0 ds + \int_0^t \mathfrak{U}^v(t,s) f^v(s)\, ds \\
&= \mathfrak{U}^v(t,0)(\phi - w_0) + \int_0^t \mathfrak{U}^v(t,s)(A^v(s)w_0 + f^v(s))\, d\, s
\end{aligned}
$$

Agora já que

$$\| \mathfrak{U}^v(t,t') \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{Y})} \leq e^{(\beta+\lambda_1)T'} \tag{4.9}$$

(vide [5]) e $\| A^v(s)w_0 \|_{\mathfrak{Y}} \leq \lambda_2$ por (A4) e $\| f^v(t) \|_{\mathfrak{Y}} \leq \lambda_3$ por (f1) segue que

$$\| u^v(t) - w_0 \|_{\mathfrak{Y}} \leq \left(e^{(\beta+\lambda_1)T'}\right)\left(\| \phi - w_0 \|_{\mathfrak{Y}} + (\lambda_2 + \lambda_3)T'\right) \tag{4.10}$$

como $\| \phi - w_0 \|_{\mathfrak{Y}} < R$ é possível escolher $T' > 0$ tal que o lado direito de (4.10) ainda é menor do que R como desejamos. Agora, se v e w pertencem a E considere a métrica

$$d(v,w) = \sup_{[0,T']} \| v(t) - w(t) \|_{\mathfrak{X}}$$

Munido dela, o conjunto E se torna um espaço métrico completo. Vejamos isto, seja $\{v_n\}$ uma sequência de Cauchy em E, isto é

$$d(v_n, v_m) = \sup_{[o,T']} \| v_n(t) - v_m(t) \|_{\mathfrak{X}} \to 0 \qquad m,n \to \infty \tag{4.11}$$

então

$$\| v_n(t) - v_m(t) \|_{\mathfrak{X}} \leq d(v_n, v_m) \to 0 \qquad m,n \to \infty$$

Logo $\{v_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathfrak{X}$ e portanto converge, para $v(t) \in \mathfrak{X}$ já que $\mathfrak{X}$ é completo.

Agora já que $\overline{B_{\mathfrak{Y}}(\omega_o, R)}^{\mathfrak{Y}}$ é um subconjunto convexo, fechado e limitado de $\mathfrak{Y}$ então ele é também fechado em $\mathfrak{X}$ devido ao Lema 4.2 e já que $v_n(t)$ converge para $v(t)$ na norma $\mathfrak{X}$ então $v(t) \in \overline{B_{\mathfrak{Y}}(\omega_o, R)}^{\mathfrak{Y}} \subset W \subset Y$.

Definamos enseguida a seguinte função

$$\begin{aligned} v : [o, T] &\rightarrow \mathfrak{Y} \\ t &\mapsto v(t) \end{aligned}$$

Queremos mostrar que $v_n \rightarrow v$ e que $v \in E$. Note em principio que

$$\| v(t) - w_o \|_{\mathfrak{Y}} \leq R, \quad \forall t \in [o, T'].$$

Por outro lado de (4.11) segue

$$\sup_{[o,T']} \| v_n(t) - v(t) \|_{\mathfrak{X}} \leq \epsilon, \quad n > N_\epsilon \tag{4.12}$$

e então para todo $t \in [o, T']$ tem-se

$$\| v_n(t) - v(t) \|_{\mathfrak{X}} \leq \epsilon, \quad n > N_\epsilon \tag{4.13}$$

é dizer $\{v_n\}$ converge uniformente para v em $[o, T']$. Agora já que para cada n, $v_n \in C([o, T']; \mathfrak{X})$ então $v \in C([o, T']; \mathfrak{X})$. A convergencia $v_n \rightarrow v$ segue de (4.13).

Agora vejamos que existe $T' \in]o, T]$tal que a aplicação $F : E \rightarrow E$ é uma contração.

Utilizando as equações satisfeitas por $u^v = Fv$ e $u^w = Fw$ tem-se

$$Fv(t) - Fw(t) = \int_0^t \mathfrak{U}^v(t, s) \left((A^v(s) - A^w(s)) Fw(s) + f^v(s) - f^w(s) \right) ds$$

Como

$$\begin{aligned} \| \mathfrak{U}^v(t, s) \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{X})} &\leq e^{\beta T'} \quad \text{segue que} \\ d(Fw, Fv) &\leq e^{\beta T'} (\| f^w - f^v \|_{1,\mathfrak{X}} + \| (A^v - A^w) Fw \|_{1,\mathfrak{X}} \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato que $Fw \in C([0,T];\mathcal{Y})$.

Mas por **(f1)** temos

$$
\begin{aligned}
\| f^w(t) - f^v(t) \|_{\mathcal{X}} &\leq \mu_2 \| w(t) - v(t) \|_{\mathcal{X}} \quad \text{e portanto} \\
\| f^w - f^v \|_{1,\mathcal{X}} &= \int_0^{T'} \| (f^w - f^v)(s) \|_{\mathcal{X}} \, ds \\
&\leq \int_0^{T'} \mu_2 \| w(t) - v(t) \|_{\mathcal{X}} \, ds \\
&\leq \mu_2 d(w,v) T'
\end{aligned}
$$

Além disso

$$
\begin{aligned}
\| (A^v(t) - A^w(t) F w(t) \|_{\mathcal{X}} &\leq \| A^v(t) - A^w(t) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})} \| Fw(t) \|_{\mathcal{Y}} \\
&\leq \mu_1 \| w(t) - v(t) \|_{\mathcal{X}} (\| w_o \|_{\mathcal{Y}} + R)
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\| (A^w - A^v) Fw \|_{1,\mathcal{X}} \leq \mu_1 d(w,v) T' (\| w_o \|_{\mathcal{Y}} + R)
$$

Consequentemente,

$$
d(Fw, Fv) \leq T' e^{\beta T'} (\mu_2 + \mu_1 \| w_o \|_{\mathcal{Y}} + \mu_1 R) d(w,v).
$$

Assim existe $T' > 0$ tal que o factor que multiplica a $d(w,v)$ pode ser escolhido menor que 1. Aplicando o Teorema do ponto fixo a F obtem-se a solução procurada.

$\square$

No seguinte teorema estabelecemos a continuidade da aplicação $\phi \mapsto u$ onde u é a solução de 4.2 com $u(0) = \phi$ (dependência contínua). Na verdade estabelecemos um resultado muito mais geral que engloba tanto o dado inicial quanto os coeficientes da equação. Considere a sequência de equações:

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u^n = A^n(t, u^n) u^n + f^n(t, u^n) \\
&u^n(0) = \phi^n \qquad t \in [0,T] \; n = 1, 2 \ldots
\end{aligned}
\tag{Q^n}
$$

para a qual valem (A1)-(A4) e (f1) com os mesmos $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$, J, W. É preciso também supor

Hipótese (A5) Existe $\mu_3 > 0$ tal que

$$\| Q(t,y) - Q(t,z) \|_{\mathfrak{B}(\mathfrak{X})} \leq \mu_3 \| y - z \|_{\mathfrak{X}} \tag{4.14}$$

quaisquer que sejam $t \in [0,T]$ e y, z e z

Hipótese (f2) Existe $\mu_4 > 0$ tal que

$$\| f(t,y) - f(t,z) \|_{\mathfrak{Y}} \leq \mu_4 \| y - z \|_{\mathfrak{Y}}$$

para todo $t \in [0,T]$ e $y, z \in W$.

Teorema 4.2. *Suponha que (Q^n) satisfaz $\mathfrak{X}$, (A1)-(A5), (f1) e (f2) uniformemente em relação a n, i.e., as constantes $\beta, \lambda_1, \cdots, \mu_4$ podem ser escolhidas independentemente de n. Suponha ainda que para cada $(t,y) \in [0,T] \times W$ temos*

$$A^n(t,y) \xrightarrow{s} A(t,y) \quad em\, \mathfrak{B}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}) \tag{4.15}$$

$$Q^n(t,y) \xrightarrow{s} Q(t,y) \quad em\, \mathfrak{B}(\mathfrak{X}) \tag{4.16}$$

$$f^n(t,y) \to f(t,y) \quad em\, \mathfrak{Y} \tag{4.17}$$

quando $n \to \infty$. Então se $\phi, \phi^n \in W$, $\phi^n \to \phi$ em $\mathfrak{Y}$ existem $T'' \in (0,T]$ e únicas $u^n, u \in C([0,T'']; \mathfrak{Y}) \cap C^1([0,T'']; \mathfrak{X})$ soluções de (Q^n) e (Q) respectivamente com $u^n(0) = \phi^n$, $u(0) = \phi$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T'']} \| u^n(t) - u(t) \|_{\mathfrak{Y}} = 0$$

Prova. Seja E o espaço de funções definido na prova do teorema anterior. Para cada $v \in E$ considere a sequência de problemas lineares:

$$\begin{aligned} &\partial_t u^n = A^{n,v}(t)u^n + f^{n,v}(t) \qquad t \in [0,T] \\ &u^n(0) = \phi^n \qquad n = 1, 2 \dots \\ &A^n(t) = A^n(t, v(t)), \qquad f^{n,v}(t) = f^n(t, v(t)). \end{aligned} \tag{$L^{n,v}$}$$

Tendo em vista as hipóteses feitas acima existe uma única solução u^n de $(L^{n,v})$ definida em $[0,T]$. Consequentemente a relação $F^n v = u^n$ define uma contração em E se T'' é suficientemente pequeno. O ponto fixo correspondente é então a solução de (Q^n). Utilizando a uniformidade que estamos supondo é fácil verificar que T' pode ser escolhido independentemente de n. O mesmo vale para o fator de contração das F^n. Sem perda de generalidade podemos supor que tanto o tempo de existência quanto o fator de contração associados a (4.2) são os mesmos que aqueles correspondentes as (Q^n). Agora note que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T']} \| u^n(t) - u(t) \|_{\mathbf{X}} = 0 \tag{4.18}$$

De fato, como $F^n u^n = u^n$ e $Fu = u$ temos

$$\begin{aligned} &d(u^n, u) = d(F^n u^n, Fu) \leq \\ &d(F^n u^n, F^n u) + d(F^n u, Fu) \leq \gamma d(u^n, u) + d(F^n u, Fu). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Então

$$\begin{aligned} d(u^n, u) &= \gamma d(u^n, u) + d(F^n u, Fu) \\ (1-\gamma) d(u^n, u) &= d(F^n u, Fu) \end{aligned}$$

isto é

$$\sup_{[0,T]} \|u^n(t) - u(t)\|_{\mathbf{X}} = \frac{1}{1-\gamma} d(F^n u, Fu)$$

onde $\gamma < 1$ é o fator de contração comum as F^n. Basta portanto provar que se $v \in E$

$$\lim_{n\to\infty} (F^n v, Fv) = 0 \tag{4.20}$$

Mas (4.20) expressa simplesmente a dependência contínua da solução linear (L^v).A relação (4.20) segue então do teorema (3.7) do capítulo anterior uma vez que

$$\begin{aligned} A^{n,v}(t) - A^v(t) &= A^n(t, v(t)) - A(t, v(t)) \xrightarrow{s} 0 \\ f^{n,v}(t) - f^v(t) &= f^n(t, v(t)) - f(t, v(t)) \xrightarrow{s} 0 \end{aligned} \tag{4.21}$$

em $\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ e $\mathcal{Y}$ respectivamente e $\| A^n(t,y) \|_{\mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})}$ é uniformemente limitada em t, y e n .

Agora tendo em vista o teorema (3.6) do capítulo anterior

$$\| u^n - u \|_{\infty,\mathcal{Y}} \leq$$

$$k\Big(\| \phi^n - \phi \|_{\mathcal{Y}} + \| f^n - f \|_{1,\mathcal{Y}} + \| (Q^n - Q)Ju \|_{1,\mathcal{X}} \Big) + \| h^n \|_{\infty,\mathcal{X}} \quad (4.22)$$

onde k depende de R e T' mas não de n e

$$f^n(t) = f^n(t, u^n(t)) \qquad f(t) = f(t, u(t))$$

$$Q^n(t) = Q(t, u^n(t)) \qquad Q(t) = Q(t, u(t))$$

$$h^n(t) = \Big(\mathcal{U}^n(t,0) - \mathcal{U}(t,0)\Big)J\phi + \int_0^t (\mathcal{U}^n(t,s) - \mathcal{U}(t,s))\, d\,s$$

$$g(s) = Jf(s) - Q(s)Ju(s)$$

Agora

$$\| f^n - f \|_{1,\mathcal{Y}} = \int_0^{T'} \| f^n(t, u^n(t)) - f(t, u(t)) \|_{\mathcal{Y}}\ d\,t \leq$$

$$\mu_4 T' \| u^n - u \|_{\infty,\mathcal{Y}} + \int_o^{T'} \| (f^n - f)(t, u(t)) \|_{\mathcal{Y}}\ d\,t \quad (4.23)$$

Agora

$$\begin{aligned} \| (Q^n - Q)Ju \|_{1,\mathcal{X}} &\leq \int_0^{T'} \| \big(Q^n(t, u^n(t)) - Q(t, u(t))\big)Ju(t) \|_{\mathcal{X}}\ d\,t \\ &\leq \mu_3 T' \int_o^{T'} \| u^n - u(t) \|_{\mathcal{Y}} \| Ju(t) \|_{\mathcal{X}}\ d\,t \\ &+ \int_0^{T'} \| \big(Q^n - Q\big)(t, u(t)Ju(t) \|_{\mathcal{X}}\ d\,t \\ &\leq \mu_3 T' \| u^n - u \|_{\infty,\mathcal{Y}} (\| w_0 \|_{\mathcal{Y}} + R) \\ &+ \int_0^{T'} \| \big(Q^n - Q\big)(t, u(t))Ju(t) \|_{\mathcal{X}}\ d\,t \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde utilizamos (f2), (A5), a uniformidade em n e

$$\| Ju(t) \|_{\mathcal{X}} = \| u(t) \|_{\mathcal{Y}} \leq \| w_0 \|_{\mathcal{Y}} + R.$$

Escolhendo T' de modo que $T'(\mu_4 + \mu_3(\| w_0 \|_{\mathcal{Y}} + R)) < 1$ os termos contendo $\| u^n - u \|_{\infty,\mathcal{Y}}$ em (4.23) e (4.24) podem ser absorvidos pelo lado esquerdo de (4.22). Como

$$\lim_{n\to\infty} \| \phi^n - \phi \|_{\mathcal{Y}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{T'} \| (f^n - f)(t, u(t)) \|_{\mathcal{Y}} \, dt = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{T'} \| (Q^n - Q)(t, u(t)) Ju \|_{\mathcal{X}} \, dt = 0$$

para completar a demonstração do teorema resta provar que

$$\lim_{n\to\infty} \| h^n \|_{\infty,\mathcal{X}} = 0 \tag{4.25}$$

Mas $g \in L^\infty([0, T']; \mathcal{X})$ e portanto para obter (4.25) é suficiente mostrar que

$$\mathcal{U}^n(t, s) \xrightarrow{s} \mathcal{U}(t, s) \qquad \text{em} \quad \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \tag{4.26}$$

uniformemente em relação a $0 \leq s \leq t \leq T$. A convergência em (4.22) segue do teorema (3.7) do capítulo anterior uma vez que

$$\begin{aligned} A^n(t, u^n(t)) - A(t, u(t)) &= [A^n(t, u^n(t)) - A^n(t, u(t))] \\ &\quad + [A^n(t, u(t)) - A(t, u(t))] \xrightarrow{s} 0 \end{aligned}$$

em $\mathcal{B}(\mathcal{X})$

$\square$

Capítulo 5

A KdV Transicional

Neste capítulo aplicamos a teoria quase-linear de Kato desenvolvida no capítulo 4 para provar que o problema de Cauchy para a equação de Korteweg-de Vries (KdV) transicional possue solução única local para $\phi \in H^3(\mathbb{R})$.

Teorema 5.1. *Seja $\phi \in H^3(\mathbb{R})$. Então existe $T > 0$ tal que o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + g(t)u\partial_x u & = 0 \qquad t \geq 0 \; x \in \mathbb{R} \\ u(0) = \phi \end{cases} \tag{5.1}$$

com $g \in C(\mathbb{R})$ tem solução única $u \in C([0,T]; H^3(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T]; L^2(\mathbb{R}))$.

Prova. A prova consiste em verificar as hipóteses do teorema (4.1) do capítulo 4.

Hipótese (X)

Seja $\mathfrak{Y} = H^3(\mathbb{R})$ e $\mathfrak{X} = L^2(\mathbb{R})$. Então pelo que sabemos dos resultados básicos $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ são espaçoes de Banach reais e reflexivos (pois em particular são espaçõs de Hilbert) com $\mathfrak{Y}$ contido em $\mathfrak{X}$ densa e continuamente. Além como vimos no capitulo 1 o operador

$$J^3 = (1 - \partial_x^2)^{3/2}$$

é uma isometria sobrejetiva de $H^3(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$.

Hipótese (A1)

Para verificar esta hipótese vamos utilizar o argumento perturbativo estabelecido no Teorema 2.2 do capitulo 2. Considere os operadores

$$A_o\colon D(A_o) = H^3(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

$$\phi \mapsto A_o\phi = -\partial_x^3\phi$$

e

$$D(A_1(t,y)) = \{\phi \in L^2(\mathbb{R}) / -g(t)y\partial_x\phi \in L^2(\mathbb{R})\}$$

$$A_1(t,y)\phi = -g(t)y\partial_x\phi,\ \phi D(A_1(t,y))$$

onde $(t,y) \in [0,T] \times W$ com $T > 0$ e W uma bola aberta em $H^3(\mathbb{R})$ de raio r arbitrariamente grande e centrada na origem.

O operador A_o é "skew-adjoint" i.e. iA_0 é autoadjunto ou equivalentemente $< A_o u, u >= 0\ \forall u \in D(A_o)$. Esta afirmação segue-se rapidamente de

$$< A_o u, u >= \int_{\mathbb{R}} -\partial_x^3 u \cdot u\, dx = -\int_{\mathbb{R}} u \cdot \partial_x^3 u\, dx = - < A_o u, u > .$$

Do teorema do Stone segue que A_o gera um grupo unitario e assim um semigrupo de contrações em $\mathfrak{X} = L^2(\mathbb{R})$, e portanto, pelo corolário do teorema Hille-Yosida-Phillips, se $\lambda > 0$ então $\lambda \in \rho(A_o)$.

Vejamos que o operador $A_1(t,y) - \beta I$ (definido em $D(A_1(t,y))$) é dissipativo para $\beta = \frac{1}{2}\|g\|_{L^\infty([o,T])}C_2 r$ onde C_2 é uma determinada constante positiva.

$$\begin{aligned}
< -g(t)y\partial_x\phi, \phi > &= \int_{\mathbb{R}} -g(t)y\partial_x\phi \cdot \phi\, dx = -1/2\int_{\mathbb{R}} g(t)y\partial_x\phi^2\, dx \\
&= 1/2\int_{\mathbb{R}} g(t)(\partial_x y)\phi^2\, dx \\
&\le \frac{1}{2}\|g\|_{L^\infty([o,T])}\|\partial_x y\|_{L^\infty}\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\le \frac{1}{2}\|g\|_{L^\infty([o,T])}C_2\|\partial_x y\|_2\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\le \frac{1}{2}\|g\|_{L^\infty([o,T])}C_2\|y\|_3\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\le \frac{1}{2}\|g\|_{L^\infty([o,T])}C_2 r\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Fazendo $\beta = \frac{1}{2}\|g\|_{L^\infty([o,T])}C_2 r$ tem-se

$$< -g(t)y\partial_x\phi, \phi > \leq \beta\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \beta < \phi, \phi >$$

e daqui $A_1(t,y) - \beta I$ é dissipativo.

É claro que $D(A_o) \subset D(A_1(t,y))$. Se $\phi \in D(A_o)$ então

$$\begin{aligned} \| - g(t)y\partial_x\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|g\|_{L^\infty([o,T])}\|y\|_{L^\infty}\|\partial_x\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \|g\|_{L^\infty([o,T])}C_3\|y\|_3\|\partial_x\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Portanto para todo $\lambda > 0$

$$\| - g(t)y\partial_x\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_3\|g\|_{L^\infty([o,T])}\|y\|_3\|\partial_x(-\partial_x^3 - \lambda I)^{-1}(-\partial_x^3 - \lambda I)\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \tag{5.3}$$

mas o operador $\partial_x(-\partial_x^3 - \lambda I)^{-1}$ é limitado em $L^2(\mathbb{R})$ pois

$$\begin{aligned} \|\partial_x(-\partial_x^3 - \lambda I)^{-1}\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |\frac{\xi}{i\xi^3 - \lambda}|^2|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sup_\xi |\frac{\xi}{i\xi^3 - \lambda}|^2\|\hat{\psi}(\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \qquad \forall\ \psi \in L^2(\mathbb{R}) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Substituindo (5.4) em (5.3) tem-se

$$\| - g(t)y\partial_x\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_3\|g\|_{L^\infty([o,T])}\|y\|_3\|\partial_x(-\partial_x^3 - \lambda I)^{-1}\|_{\mathbf{B}(L^2(\mathbb{R}))}\|(-\partial_x^3 - \lambda I)\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \tag{5.5}$$

A seguir estimaremos a norma de $\partial_x(-\partial_x^3 - \lambda I)^{-1}$:

$$\alpha(\xi) = |\frac{\xi}{i\xi^3 - \lambda}|^2 = \frac{\xi^2}{\xi^6 + \lambda^2}, \qquad \alpha'(\xi) = \frac{2\lambda^2\xi - 4\xi^7}{(\xi^6 + \lambda^2)^2}$$

então $\alpha(\xi)$ tem maximo global em $\xi_{max} = \sqrt[6]{\frac{\lambda^2}{2}}$

Portanto

$$|\frac{\xi}{i\xi^3 - \lambda}|^2 \leq \alpha_{max} = \frac{k}{\lambda^{4/3}}, \quad k > 0 \text{ constante} \tag{5.6}$$

Substituindo (5.6) em (5.5) tem-se

$$\begin{aligned}
\| -g(t)y\partial_x\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq C_3\|g\|_{L^\infty([o,T])}\|y\|_3\frac{k}{\lambda^{4/3}}\|(-\partial_x^3-\lambda I)\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}\\
&\leq C_3\|g\|_{L^\infty([o,T])}\|y\|_3\frac{k}{\lambda^{4/3}}(\|(-\partial_x^3\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}+\lambda\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})})\\
&\leq C_3\|g\|_{L^\infty([o,T])}r\frac{k}{\lambda^{4/3}}(\|A_o\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}+\lambda\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})})
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\|(-g(t)y\partial_x-\beta I)\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \| -g(t)y\partial_x\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}+\beta\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}\\
&\leq C_3\|g\|_{L^\infty([o,T])}r\frac{k}{\lambda^{4/3}}(\|A_o\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}+\lambda\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})})+\beta\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}\\
&\leq \frac{2\beta}{C_2}C_3\frac{k}{\lambda^{4/3}}(\|A_o\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}+\lambda\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})})+\beta\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}\\
&= \frac{2\beta}{C_2}C_3\frac{k}{\lambda^{4/3}}\|A_o\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}+\frac{k}{\lambda^{1/3}}\frac{2\beta}{C_2}C_3\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}\beta\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}\\
&= \frac{2\beta}{C_2}C_3\frac{k}{\lambda^{4/3}}\|A_o\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}++(\frac{k}{\lambda^{1/3}}\frac{2\beta}{C_2}C_3+\beta)\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Para λ suficientemente grande tem-se $\frac{2\beta}{C_2}C_3\frac{k}{\lambda^{4/3}} < 1/2$. Então pelo teorema Perturbativo do capitulo 2 $A_o + A_1(t,y) - \beta I$ gera um semigrupo de contrações em $L^2(\mathbb{R})$ e por conseguinte

$$A(t,y) = A_o + A_1(t,y) \in G(L^2(\mathbb{R}), 1, \beta) \quad \forall (t,y) \in [o,T] \times W$$

Hipótese (A2)

Seja $\phi \in H^3(\mathbb{R})$. Então existe uma única $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $(J^{-3})\psi = \phi$. Agora

$$A(t,y)J^{-3}\phi = -\partial_x^3 J^{-3}\phi - g(t)y\partial_x J^{-3}\phi \tag{5.7}$$

Mas $g(t)y\partial_x J^{-3}\phi = g(t)y\partial_x J^{-6}\psi = g(t)y\partial_x(1-\partial_x^2)^{-3}\psi$ de modo que $(1-\partial_x^2)^{-3}\psi \in H^6(\mathbb{R})$, e portanto

$$\partial_x(1-\partial_x^2)^{-3}\psi \in H^5(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^3(\mathbb{R})$$

e portanto $g(t)y\partial_x(1-\partial_x^2)^{-3}\psi \in H^3(\mathbb{R}) = \mathfrak{Y}$ pois $H^3(\mathbb{R})$ é uma álgebra de Banach. Vejamos enseguida que

$$-\partial_x^3 J^{-3}\phi = J^{-3}(-\partial_x^3)\phi \quad \forall \phi \in H^3(\mathbb{R})$$

Seja $\phi \in S(\mathbb{R})$, então

$$\|-\partial_x^3 J^{-3}\phi - J^{-3}(-\partial_x^3)\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|-i\xi^3(1+M_o)^{-3/2}\hat{\phi} - (1+M_o)^{-3/2}(-i\xi^3)\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$$

donde

$$-\partial_x^3 J^{-3}\phi = J^{-3}(-\partial_x^3)\phi \quad \forall \phi \in S(\mathbb{R})$$

Ja que $-\partial_x^3 J^{-3}$ é um operador limitado de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$ e $J^{-3}(-\partial_x^3)$ é limitado de $H^3(\mathbb{R})$ em $H^3(\mathbb{R})$ então por densidade obtemos o que desejamos. Note que na verdade vale um resultado mais geral, a saber

$$\partial_x^k J^{-3}\phi = J^{-3}\partial_x^k\phi \quad \forall \phi \in S(\mathbb{R}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Assim o lado direito de (5.7) pertence a $H^3(\mathbb{R})$. Consequentemente o lado esquerdo tem a mesma propriedade.

Agora defina $[J^3, -g(t)y]_1 \colon S(\mathbb{R}) \subset H^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. Este operador é limitado. Vejamos isto. Utilizando o Teorema 1.16 do Capitulo 1 tem-se $\forall f \in S(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\|[J^3, -g(t)y]_1 f\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq C(\|\partial_x g(t)y\|_A \|f\|_2 + \|\partial_x g(t)y\|_2 \|f\|_A) \\
&\leq C\|g\|_{L^\infty([0,T])}(\|\partial_x y\|_A \|f\|_2 + \|\partial_x y\|_2 \|f\|_A) \qquad (5.8) \\
&\leq C\|g\|_{L^\infty([0,T])}(\| - i\xi\hat{y}\|_{L^1(\mathbb{R})}\|f\|_2 + \|\partial_x y\|_2 \|\hat{f}\|_{L^1(\mathbb{R})}).
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\|\hat{f}\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)|\hat{f}(\xi)|\left(\frac{1}{1+|\xi|^2}\right) d\xi \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^2} d\xi\right)^{1/2} \qquad (5.9) \\
&= C_1 \|f\|_2
\end{aligned}$$

$$\|\partial_x y\| \leq \|y\|_3 \qquad (5.10)$$

$$\begin{aligned}
\| - i\xi\hat{y}\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |\xi||\hat{y}(\xi)| d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{3/2} |\hat{y}(\xi)| \frac{|\xi|}{(1+|\xi|^2)^{3/2}} d\xi \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^3 |\hat{y}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)^3} d\xi\right)^{1/2} \qquad (5.11) \\
&= C_2 \|y\|_3.
\end{aligned}$$

Substituindo (5.11), (5.10) e (5.9) em (5.8) tem-se

$$\begin{aligned}\|[J^3, -g(t)y]_1 f\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq C\|g\|_{L^\infty([0,T])}(M\|y\|_3 + M\|y\|_3)\|f\|_2, \quad M = \max(C_1, C_2)\\ &\leq 2CMr\|g\|_{L^\infty([0,T])}\|f\|_2.\end{aligned}$$

O que prova a afirmação. Agora extendendo este operador de $S(\mathbb{R})$ a $H^2(\mathbb{R})$ temos o operador limitado:

$$[J^3, -g(t)y]: H^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}).$$

Por outro lado é claro que os operadores

$$\begin{aligned}\tilde{J}^{-3}\colon H^3(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R})\\ \phi &\longmapsto \tilde{J}^{-3}\phi = J^{-3}\phi\end{aligned}$$

e

$$\partial_x\colon H^3(\mathbb{R}) \longrightarrow H^2(\mathbb{R})$$

são limitados.

Agora de (5.7) tem-se

$$\begin{aligned}J^3 A(t,y) J^{-3}\phi &= A_0\phi + J^3(-g(t)y\partial_x J^{-3}\phi)\\ &= A(t,y)\phi + J^3(-g(t)y\partial_x J^{-3}\phi) - (-g(t)y\partial_x J^3 J^{-3}\phi)\\ &= A(t,y)\phi + [J^3, -g(t)y\partial_x]J^{-3}\phi \quad \forall\phi \in H^3(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned}Q_1(t,y)\colon H^3(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R})\\ \phi &\longmapsto Q_1(t,y) = [J^3, -g(t)y\partial_x]J^{-3}\phi\end{aligned}$$

então

$$
\begin{aligned}
Q_1(t,y)\phi &= [J^3, -g(t)y\partial_x]J^{-3}\phi \\
&= J^3(-g(t)y\partial_x J^{-3})\phi - (-g(t)y\partial_x)\phi \\
&= [J^3, -g(t)y]\partial_x J^{-3}\phi + (-g(t)yJ^3\partial_x J^{-3}\phi) - (-g(t)y\partial_x)\phi \\
&= [J^3, -g(t)y]\partial_x J^{-3}\phi + (-g(t)y\partial_x\phi) - (-g(t)y\partial_x)\phi \\
&= [J^3, -g(t)y]\partial_x J^{-3}\phi
\end{aligned}
$$

logo $Q_1(t,y)$ é um operador limitado. De fato $Q_1(t,y)$ pode ser descomposto da seguinte forma:

$$
H^3(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \underset{\tilde{J}^{-3}}{\longrightarrow} H^3(\mathbb{R}) \underset{\partial_x}{\longrightarrow} H^2(\mathbb{R}) \underset{[J^3,-g(t)y]}{\longrightarrow} L^2(\mathbb{R}).
$$

Logo $Q_1(t,y)$ pode ser extendido de $H^3(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$ para obter o operador $Q(t,y) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ com

$$
J^3 A(t)y)J^{-3} = A(t,y) + Q(t,y)
$$

no sentido estrito.

Agora

$$
\|Q(t,y)\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|[J^3, -g(t)y]\|_{\mathcal{B}(H^2(\mathbb{R}),L^2(\mathbb{R}))}\|\partial_x\|_{\mathcal{B}(H^3(\mathbb{R}),H^2(\mathbb{R}))}\|\tilde{J}^{-3}\|_{\mathcal{B}(H^3(\mathbb{R}),H^3(\mathbb{R}))}\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}
$$

$$
\|Q(t,y)\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))} \leq 2CMr\|g\|_{L^\infty([0,T])}\|\partial_x\|_{\mathcal{B}(H^3(\mathbb{R}),H^2(\mathbb{R}))}\|\tilde{J}^{-3}\|_{\mathcal{B}(H^3(\mathbb{R}),H^3(\mathbb{R}))}
$$

então

$$
\lambda_1 = 2CMr\|g\|_{L^\infty([0,T])}\|\partial_x\|_{\mathcal{B}(H^3(\mathbb{R}),H^2(\mathbb{R}))}\|\tilde{J}^{-3}\|_{\mathcal{B}(H^3(\mathbb{R}),H^3(\mathbb{R}))}
$$

isto termina a verificação da hipotese (A2).

Hipótese (A3)

As estimativas feitas na verificação de (A1) mostram que $A(t,y) = -\partial_x^3 - g(t)y\partial_x$ com $\mathcal{D}(A(t,y)) = \mathcal{Y} = H^3(\mathbb{R}) \in \mathcal{B}(H^3(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$.

Efetivamente:

$$\| (-\partial_x^3 - g(t)y\partial_x)\phi \|_0 \leq \| \partial_x^3\phi \|_o + C_3 \| g \|_{L^\infty([o,T])} \| y \|_3 \left(\frac{k}{\lambda^{4/3}} \| \partial_x^3\phi \|_0 + \lambda \| \phi \|_0 \right)$$

$$\leq (1 + C_3 \|g\|_{L^\infty([o,T])} r k \lambda^{-4/3} + \lambda) \|\phi\|_3$$

para todo $\phi \in H^3(\mathbb{R})$

Agora

$$\| A(t,y) - A(t_0,y) \|_{\mathfrak{B}(H^3(\mathbb{R}),L^2(\mathbb{R}))} = \| (-g(t) + g(t_0))y\partial_x \|_{\mathfrak{B}(H^3(\mathbb{R}),L^2(\mathbb{R}))}$$

$$= |g(t) - g(t_0)| \, \| y\partial_x \|_{\mathfrak{B}(H^3(\mathbb{R}),L^2(\mathbb{R})} \to 0$$

pois $g \in C(\mathbb{R})$ o que prova que a função $t \in [0,T] \mapsto A(t,y)$ pertence à $C([0,T]; \mathfrak{B}(H^3(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})))$ para cada y fixo em W.

Quanto a dependência em y temos

$$\| A(t,y)\phi - A(t,z)\phi \|_{L^2(\mathbb{R})} = \| -g(t)(y-z)\partial_x\phi \|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\leq \| g \|_{L^\infty([0,T])} \| (y-z)\partial_x\phi \|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\leq \| g \|_{L^\infty([0,T])} \| y - z \|_{L^2(\mathbb{R})} \| \partial_x\phi \|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

$$\leq \| g \|_{L^\infty([0,T])} \| (y-z) \|_{L^2(\mathbb{R})} C_1 \| \partial_x\phi \|_1$$

$$\leq C_1 \| g \|_{L^\infty([0,T])} \| \phi \|_3 \| y - z \|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Logo

$$\| A(t,y) - A(t,z) \|_{\mathfrak{B}(H^3(\mathbb{R}),L^2(\mathbb{R}))} \leq \| g \|_{L^\infty([0,T])} \| (y-z) \|_{L^2(\mathbb{R})}$$

donde $\mu_1 = \| g \|_{L^\infty([0,T])}$

Hipótese (A4)

Se satisfaz trivialmente já que $y_0 = 0$.

Hipótese (f1)

Também se satisfaz trivialmente já que $f \equiv 0$.

$\square$

Bibliografia

[1] Moreira, A., *Semigrupos de Operadores Lineares e aplicações às equações de evolução.* IM-UFRJ.

[2] Dutray, R., Lions, J. L., *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology.* Springer-Verlag. Vol 5.

[3] Dorroh, J. R., Graff, R. A.,*Integral Equation in Banach Spaces, a General Approch to the Linear Cauchy Problem and Application to the Nonlinear Problem.* Department of Mathematics, Lousiana State University, Baton Rouge, Lousiama 70803.

[4] Goldstein, J. A. *Semigroups of Linear Operators and Applications.* Oxford University, 1985.

[5] Iório, Rafael, Nunes, Wagner, *Introdução às Equações não lineares.* 18^0 Colóquio Brasileiro de Matemática.

[6] Iório, Rafael, Iório, Valeria, *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução.* Projeto Euclides, IMPA/CNPq. (1988).

[7] Iorio, R., *On Kato's Theory of Quasilinear Equation.* Aalborg University, June 1997.

[8] Kato, T., *Integration of the Equation of Evolution in a Banach Space.* Journal of the Mathamatical Society of Japan, vol 5, $n^0 2$,(1953).

[9] Kato, T., *On the Korteweg-de Vries Equation.* Manuscripta Math. 28(1979) 89-99.

[10] Kato, T., *Linear evolution equation of hyperbolic type.* J. Fac. Sci. Univ. of Tokio, vol 17(1970) 241-258.

[11] Kato, T., *Quasi-linear equation of evolution, with applications to partial differential equations.*, Lect. Note in Math, 448,(1975), 25-70.

[12] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag (1983).

[13] Reed, M., Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics.* Academic Press, INC. Orlando. Vol I, II.

Proposição 2.7. *$A - \beta I \in \mathcal{G}(\mathfrak{X}, M, 0)$ se e só se $A \in \mathcal{G}(\mathfrak{X}, M, \beta)$.*

Prova. Já que $(\lambda I - (A - \beta I))^{-1} = ((\lambda I + \beta I) - A)^{-1}$, então

$$\lambda \in \rho(A - \beta I) \Leftrightarrow \lambda + \beta \in \rho(A), \qquad \text{donde}$$

$$\mathbb{R}^+ \subset \rho(A - \beta I) \Leftrightarrow \mathbb{R}^+ + \beta \subset \rho(A)$$

e

$$\| R(\lambda; A - \beta I)^n \| \leq \frac{M}{\lambda^n} \Leftrightarrow \| R(\lambda + \beta; A)^n \| \leq \frac{M}{\lambda^n}, \qquad \lambda > 0$$

Portanto, pondo λ no lugar de $\lambda + \beta$ no segundo membro desta última equivalência,

$$\| R(\lambda; A - \beta I)^n \| \leq \frac{M}{\lambda^n} \Leftrightarrow \| R(\lambda + \beta; A)^n \| \leq \frac{M}{\lambda^n}, \qquad \lambda > 0 \tag{2.19}$$

Além disto,

$$\begin{gathered} \overline{\mathfrak{D}(A - \beta I)} = \mathfrak{X} \Leftrightarrow \overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{X} \\ A - \beta I \quad \text{é} \quad \text{fechado} \Leftrightarrow A \quad \text{é} \quad \text{fechado} \end{gathered} \tag{2.20}$$

Logo pelo teorema 2.1 de (2.19) e (2.20) segue asserção feita. □

Definição 2.3. Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Hilbert com produto interno $\langle\, . \,\rangle_{\mathfrak{X}}$ e $A : \mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ um operador linear. Diz-se que A é dissipativo com respeito a $\langle\, . \,\rangle_{\mathfrak{X}}$ se

$$Re\,\langle Ax, x \rangle_{\mathfrak{X}} \leq 0 \qquad \forall\, x \in \mathfrak{D}(A)$$

Em seguida temos um teorema perturbativo, tipo Kato-Rellich, para geradores de semigrupos de contrações. Mas antes temos o seguinte lema, que é um caso particular do teorema de Lumer-Philips. Para a demonstração remetemos o leitor a [2].

Lema 2.6. *Seja A um operador linear com domínio $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{X}$ denso no espaço de Hilbert $\mathfrak{X}$. Então $A \in \mathcal{G}(\mathfrak{X}, 1, 0)$ se e somente se*

a) A é dissipativo (com respeito à $\langle\, . \,\rangle_{\mathfrak{X}}$).

b) $Im(\lambda I - A) = \mathfrak{X}$ para algum $\lambda > 0$.

Teorema 2.2. *Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Hilbert e $A \in \mathcal{G}(\mathfrak{X}, 1, 0)$. Se $B : \mathfrak{D}(B) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ é dissipativo com respeito à $\langle\, . \,\rangle_{\mathfrak{X}}$ com $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{D}(B)$, e existem constantes a, b com $0 \leq a < (1/2)$ e $b \geq 0$ tais que*

$$\| Bx \| \leq a \| Ax \| + b \| x \| \qquad \forall\, x \in \mathfrak{D}(A) \tag{2.21}$$

então $A + B \in \mathcal{G}(\mathfrak{X}, 1, 0)$

Prova. Como $A \in \mathcal{G}(\mathfrak{X}, 1, 0)$, A é dissipativo com respeito à $\langle\, . \,\rangle_{\mathfrak{X}}$ segundo o lema (2.6). Já que B é dissipativo , então obviamente $A + B$ também é dissipativo com respeito à $\langle\, . \,\rangle_{\mathfrak{X}}$. Além disto, $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{X}$ é denso em $\mathfrak{X}$. Portanto pelo lema (2.6) de novo, para demonstrar que $A + B \in \mathcal{G}(\mathfrak{X}, 1, 0)$ é suficiente mostrar que $Im(\lambda I - (A + B)) = \mathfrak{X}$, para algum $\lambda > 0$. Mas como $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{D}(B)$,

$$Im(\lambda I - (A + B)) \supset Im[(\lambda I - (A + B))(\lambda I - A)]^{-1} =$$

$$Im[I - B(\lambda I - A)^{-1}] = Im[I - BR(\lambda; A)]$$

donde é suficiente demonstrar que para algum $\lambda > 0$, $I - BR(\lambda; A)$ é inversível em $\mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ e portanto que $\| BR(\lambda; A) \| < 1$

Mas por (2.2) tem-se

$$\begin{aligned}
\| BR(\lambda; A) \| &\leq a \| AR(\lambda; A)x \| + b \| R(\lambda; A)x \| = \\
&= a \| [\lambda R(\lambda; A) - I]x \| + b \| R(\lambda; A)x \| \\
&\leq 2a \| x \| + \frac{b}{\lambda} \| x \| \\
&= (2a + \frac{b}{\lambda}) \| x \| \qquad \forall\, x \in \mathfrak{X}
\end{aligned}$$

Portanto, para λ suficientemente grande $(2a + \frac{b}{\lambda}) < 1$ e logo $\| BR(\lambda; A) \| < 1$. $\square$

No que segue faremos algumas referências aos grupos de operadores lineares limitados e apresentaremos um teorema central nestas questões, a saber, o teorema de Stone.

Definição 2.4. Um C^0 grupo no espaço de Banach $\mathfrak{X}$ é uma família $S = \{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ que satisfaz as condições (2.1a) e (2.1b) dos semigrupos e

$$\lim_{t \to 0} \| S(t)x - x \| = 0 \qquad \forall\, x \in \mathfrak{X}$$