

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Estabilização em Duas Etapas de Sistemas Descritores

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina
como requisito parcial à obtenção do grau de

Mestre em Engenharia Elétrica

por

Roberta A. M. de Mendonça

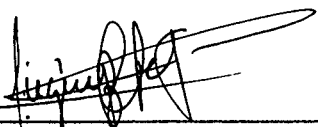
Florianópolis, 17 de abril de 1998.

Estabilização em Duas Etapas de Sistemas Descritores

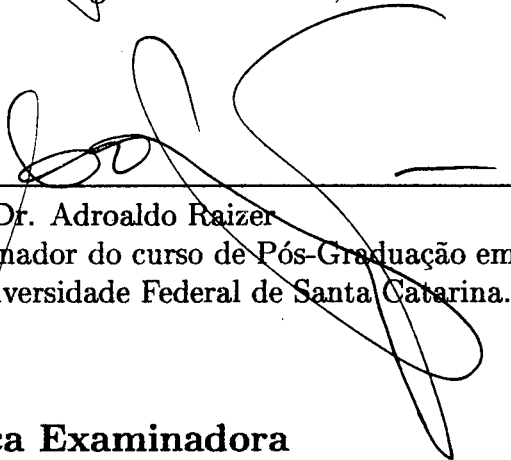
Roberta A. M. de Mendonça

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia** na especialidade **Engenharia Elétrica**, área de concentração **Controle, Automação e Informática Industrial**, e aprovada em sua forma final pelo curso de Pós-Graduação.

Florianópolis, 17 de abril de 1998.

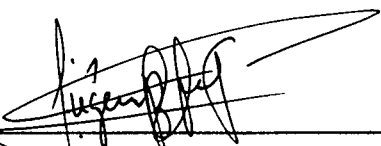


Prof. Dr. Eugênio B. Castelan, orientador

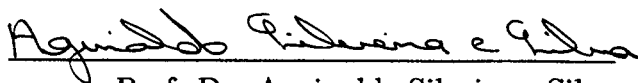


Prof. Dr. Adroaldo Raizer
coordenador do curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
da Universidade Federal de Santa Catarina.

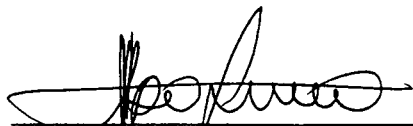
Banca Examinadora



Prof. Dr. Eugênio B. Castelan, orientador
DAS/UFSC



Prof. Dr. Aginaldo Silveira e Silva
GSP/EEL/UFSC



Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto
DAS/UFSC



Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.
DELET/UFRGS

a Deus, criador dos céus e da terra ...

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, a quem eu devo tudo o que sou.

Ao meu amado esposo, companheiro e amigo, Gerson de Mendonça, por seu apoio, compreensão e dedicação.

Ao professor Eugênio de Bona Castelan Neto pelo incentivo, competência e dedicação na orientação deste trabalho.

Aos meus pais, sogros, irmãos, cunhadas pelo interesse e apoio.

Aos membros da banca examinadora, pela disposição e avaliação deste trabalho.

Aos amigos e companheiros do DAS e a todos que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

Resumo

Os Sistemas Descritores são sistemas dinâmicos compostos por equações diferenciais e equações algébricas. Possuem algumas particularidades que justificam o uso de técnicas especiais para a resolução do problema de estabilização. Estas particularidades diferenciam tais sistemas dos sistemas normais, os quais são compostos apenas por equações diferenciais.

O objetivo deste trabalho é estudar o problema Estabilização de Sistemas Descritores por Realimentação de Estados, utilizando um procedimento em duas etapas que torne o sistema regular, estável e livre de impulsões. Propõe-se também, uma extensão para tratar o problema de Estabilização de Sistemas Descritores por Realimentação de Saída, no caso de Sistemas Descritores, caracterizados por medidas independentes das variáveis algébricas e diferenciais.

O Sistema é representado na forma algébrica-diferencial. Após a primeira etapa do algoritmo, responsável por regularizar o sistema e livrá-lo de impulsões, utiliza-se uma representação intermediária do sistema que desacopla as equações algébricas das equações diferenciais. Esta separação, permite o posicionamento de pólos para a estabilização do sistema propriamente dita, desenvolvida na segunda etapa do algoritmo num sistema diferencial normal de ordem reduzida.

São também apresentados resultados para o posicionamento de autoestrutura finita de estabilização por realimentação de estados e por realimentação de saída, bem como exemplos ilustrativos de tais procedimentos.

Sumário

1	Introdução Geral	1
2	Sistemas Descritores	5
2.1	Introdução	5
2.2	Equivalência	6
2.2.1	Primeira Forma Equivalente	6
2.2.2	Segunda Forma Equivalente	7
2.2.3	Terceira Forma Equivalente	8
2.3	Estrutura de um Sistema Singular	8
2.3.1	Autoestrutura Relativa	8
2.4	Resposta Temporal	10
2.5	Estabilidade	12
2.6	Controlabilidade e Observabilidade	14
3	Estabilização por Realimentação de Estados	18
3.1	Introdução	18
3.2	Apresentação do Problema de Estabilização	19
3.3	Condições para a Resolução do Problema de Estabilização	19
3.4	Metodologia para Estabilização	20
3.4.1	Representação Algébrica-Diferencial	20
3.4.2	Metodologia para Estabilização em Duas Etapas	22
3.4.3	Algoritmo para Estabilização	25
3.5	Discussão	25
3.6	Posicionamento de Autoestrutura Finita	28
3.7	Exemplo	30
3.8	Conclusões	33
4	Estabilização por Realimentação de Saída	34
4.1	Introdução	34

4.2	Apresentação do Problema	35
4.3	Resultados Preliminares	36
4.4	Estabilização de Saída para Sistemas MADI	37
4.4.1	Estabilização em Duas Etapas	37
4.4.2	Algoritmo de Estabilização	40
4.5	Discussão	41
4.6	Posicionamento de Autoestrutura Finita	43
4.7	Exemplo	45
4.8	Conclusões	47
5	Conclusão	48
A		51
A.1	Determinação de K_2	51
B		54
B.1	Matriz Nilpotente	54
B.2	Desigualdade de Sylvester	54

Capítulo 1

Introdução Geral

Os sistemas descritores (também chamados sistemas singulares, ou ainda sistemas generalizados) são sistemas dinâmicos compostos por uma mistura de equações diferenciais (ou à diferença) e equações algébricas. Os sistemas descritores aparecem com frequência na representação de muitos sistemas físicos, tais como: sistemas elétricos de potência, sistemas de controle, engenharia aeroespacial, projeto de reatores nucleares, análise de redes, sistemas econômicos, etc [7] [20] [21] [22] [27] [28] [34] [42] [31].

Devido à presença conjunta de equações diferenciais e algébricas, o problema de controle destes sistemas apresenta certas características que o diferenciam do controle dos sistemas representados apenas por equações diferenciais, aos quais nos referiremos como sistemas normais. Em particular, um sistema descritor pode apresentar comportamento impulsivo ou com descontinuidades na origem, dependendo de algumas condições estruturais, da consistência das condições iniciais, bem como da função de excitação [20] [23] [29]. Além disso, de um ponto de vista estrutural, a dinâmica do sistema pode ser vista como uma composição de dois subsistemas: um subsistema de dinâmica lenta, que corresponde a um sistema normal (de ordem reduzida), associado aos autovalores finitos do sistema, e um subsistema de dinâmica rápida, associado aos autovalores infinitos do sistema.

Estuda-se, então, o problema de controle de sistemas descritores lineares para a obtenção de três propriedades fundamentais que tornam o sistema em malha fechada [20] [22]:

- *regular*, garantindo a existência e unicidade da solução para um sistema descritor;
- *livre de impulsões*, significando que o sistema descritor não possui modos impulsivos em sua solução; e

- *estável*, significando que todos os autovalores finitos do sistema estão localizados na região adequada do plano complexo.

Cobb (1981) [8], foi o primeiro a descobrir uma realimentação de estados que elimina as impulsões do sistema, utilizando a decomposição em dois subsistemas: o subsistema lento e o subsistema rápido. Atendidas certas condições de controlabilidade, esta realimentação posiciona os autovalores infinitos em posições finitas do plano complexo. A partir da eliminação das impulsões, é possível estabilizar o sistema através de uma mudança na sua dinâmica lenta, o que significa nada mais que posicionar os pólos finitos em posições adequadas, resolvendo-se, assim, o problema de controle em duas etapas.

Outros algoritmos propostos na literatura de controle de sistemas descritores também baseam-se nas duas etapas descritas acima, veja, por exemplo, [8] [20] [41]. Na primeira etapa, é garantida a regularidade do sistema e que o sistema é livre de impulsões, e na segunda etapa posiciona-se os pólos instáveis do sistema em posições adequadas do plano complexo, garantindo, assim, a estabilidade deste. Nos algoritmos descritos em [8] [20], após a primeira etapa, utiliza-se uma troca de coordenadas para representar o sistema em dois subsistemas desacoplados que contém os modos dinâmicos finitos, a serem estabilizados, e os modos "não dinâmicos" infinitos obtidos na primeira etapa.

O algoritmo originalmente proposto por Cobb [8] baseia-se na decomposição do sistema na chamada forma de Weistrass [22], enquanto o algoritmo descrito em [20] usa a decomposição do sistema na forma algébrica-diferencial, para a realização da primeira etapa, e uma troca de coordenadas adequada para o desacoplamento necessário para a segunda etapa. Por outro lado o algoritmo proposto recentemente por Varga [41] utiliza transformações ortogonais para construir a solução do problema de estabilização, sendo assim, bastante atrativo do ponto de vista numérico.

No método de Varga [41], obtém-se apenas um desacoplamento parcial após a primeira etapa, pois apenas os modos dinâmicos finitos são desacoplados dos modos não dinâmicos. Com este desacoplamento parcial dos subsistemas, obtém-se um ganho significativo em termos de operações a serem realizadas para obtenção da matriz de realimentação de estados [41].

Existem também outros métodos para estabilização que utilizam o controle por realimentação de estados, eliminando as impulsões e posicionando os autovalores finitos de malha fechada, os quais não utilizam o procedimento em duas etapas descrito acima. Entre estes métodos podemos citar uma extensão do método de posicionamento de autoestrutura de Moore [25] desenvolvida em [1] [32] e um método descrito em [44] que estabelece uma matriz de realimentação que posiciona os autovalores finitos e os infinitos

do sistema de malha fechada. Pode-se citar ainda um procedimento de posicionamento de pólos, utilizando um controle proporcional derivativo, baseado apenas nas transformações ortogonais das matrizes [3] e um procedimento que considera a construção de um controlador descentralizado [14] que estabiliza o sistema e o livra de impulsões .

Dentro do contexto acima descrito, apresenta-se um algoritmo para a estabilização de sistemas descritores em duas etapas utilizando o controle por realimentação de estados. Os passos deste algoritmo são, essencialmente, baseados na representação do sistema numa forma algébrica-diferencial e no desacoplamento das equações diferenciais das algébricas. Uma particularidade do algoritmo desenvolvido é que este desacoplamento pode ser obtido como solução de um sistema de equações algébricas, de forma numericamente estável.

Seguindo o mesmo procedimento apresentado para o caso de estabilização por realimentação de estados, apresenta-se ainda neste trabalho uma extensão dos resultados obtidos para resolver um problema de estabilização de sistemas descritores por realimentação estática das saídas. Para a aplicação desta técnica, supõe-se que a equação de saída associada à representação algébrica-diferencial do sistema possui uma estrutura particular, bloco-diagonal, que proporciona uma independência entre as medidas algébricas e diferenciais das variáveis de estado do sistema.

Este trabalho é apresentado da seguinte forma. No capítulo 2, apresenta-se resultados básicos da teoria de sistemas descritores necessários para a compreensão do problema de controle tratado no decorrer deste trabalho. Dentre estes resultados, encontra-se uma descrição resumida das três formas equivalentes para a representação de sistemas descritores, a introdução do conceito de estabilidade e a análise da resposta temporal do sistema representado na primeira forma equivalente. Em vista disto, estuda-se o comportamento da estrutura de pólos finitos e no infinito e nas duas últimas seções apresenta-se os conceitos necessários para garantir a existência de uma lei de controle para a realimentação de estados e saídas respectivamente.

No capítulo 3, descreve-se o problema de estabilização por realimentação estática de estados e as condições para a existência da solução e para a resolução deste problema representado na forma algébrica-diferencial. Esta forma é apresentada em uma das seções deste capítulo, onde descreve-se sua forma geral e como obtê-la. Ainda neste capítulo encontram-se os algoritmos de estabilização em dois passos e uma comparação com o algoritmo proposto por Varga [41]. E para finalizar apresenta-se um algoritmo para posicionamento de auto-estrutura finita seguido de um exemplo ilustrativo.

No capítulo 4, apresenta-se a extensão dos resultados obtidos no capítulo 3, a fim de se obter estabilização de sistemas descritores através de realimentação estática das saídas, como citado anteriormente. Apresenta-se as condições de Controlabilidade e

Observabilidade que garantem a existência da solução do problema de estabilização, bem como uma comparação com a técnica utilizada por Varga, caso fosse utilizada para realimentação de saída. Para completar o desenvolvimento da metodologia proposta, apresenta-se o algoritmo para a estabilização e um algoritmo para posicionamento de auto-estrutura finita.

O capítulo 5 é destinado à exposição das conclusões gerais e algumas sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros utilizando a teoria de sistemas descritores e outras ferramentas utilizadas para a estabilização de sistemas lineares tais como: LMIs, Controle Ótimo e Funções de Lyapunov.

Capítulo 2

Sistemas Descritores

2.1 Introdução

Os sistemas descritores, em tempo contínuo, são sistemas dinâmicos descritos por uma mistura de equações algébricas e diferenciais. A equação dinâmica que descreve os sistemas descritores tem a forma:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^p$, representam respectivamente os vetores de estado, de entradas de controle e de saídas do sistema ; $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Assume-se que ao longo do texto o posto $(E) = r < n$, caracterizando a singularidade do sistema.

Apresenta-se a seguir a definição de regularidade do par (E, A) , condição necessária e suficiente para a existência e unicidade da solução para um sistema descritor [20] [11].

Definição 2.1.1 : *Sejam dadas duas matrizes $(E, A) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. O par (E, A) é chamado regular se existe uma constante escalar $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha E + A| \neq 0$ ou, simplesmente, $|sE - A| \neq 0$.*

Muito embora o sistema homogêneo (não controlado) possa ser não regular, é importante ressaltar que é possível garantir a unicidade da solução de um sistema de malha fechada através da aplicação de uma entrada de controle adequada [33]. Neste capítulo detém-se, principalmente, na análise de sistemas descritores onde o par (E, A) é suposto ser regular. Nos dois capítulos subsequentes, aborda-se o problema de *regularização* em malha fechada pela utilização de realimentação de estados e estática das saídas.

2.2 Equivalência

As equações que descrevem um sistema real ou um modelo matemático podem ser obtidas através da seleção de variáveis de estado apropriadas. Esta seleção não é única, existindo assim, formas equivalentes para a representação dos sistemas. A utilização de representações equivalentes tem importância tanto para a análise e compreensão de sistemas descritores, como para o desenvolvimento de resultados teóricos e de algoritmos para o cálculo de leis de controle que modifiquem adequadamente a dinâmica do sistema. A seguir, apresenta-se a decomposição do sistema descritor em três formas equivalentes, utilizadas na representação de sistemas descritores, e que nos permitem desenvolver os conceitos e resultados deste trabalho [20].

2.2.1 Primeira Forma Equivalente

A primeira forma equivalente, chamada *Decomposição Padrão*, baseia-se no Lema seguinte [20]:

Lema 2.2.1 : (E, A) é regular se, e somente se, existem duas matrizes não singulares, $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:

$$UEV = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \quad UAV = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde $n_1 + n_2 = n$ e $N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ é uma matriz nilpotente tal que $N^\alpha = 0$, sendo α o índice de nilpotência.

A partir do Lema 2.2.1 deduz-se que para qualquer sistema descritor da forma (2.1), onde (E, A) é regular, existe uma transformação de coordenadas $x = Vz$ tal que o sistema (2.1) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (2.3)$$

onde

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} \quad e \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

são matrizes que satisfazem às condições do lema 2.2.1, com $V_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_1}$ e $V_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_2}$ e $U_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n}$, $U_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n}$. Então,

$$x = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} B \quad (2.5)$$

Esta decomposição não é única. As matrizes U e V podem ser obtidas por exemplo a partir da autoestrutura relativa do par (E, A) [22]. Como será mostrado a seguir, a *Decomposição Padrão* permite a compreensão da estrutura finita e no infinito do sistema e suas consequências no comportamento dinâmico deste.

2.2.2 Segunda Forma Equivalente

Seja $r = \text{posto}(E)$. Sabe-se que existem matrizes não singulares Q e P, de dimensão n , tais que $QEP = \text{diag}(I_r, 0)$. Portanto, utilizando a transformação de coordenadas

$$x = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

tal que o sistema (2.1) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (2.6)$$

onde

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} B \quad (2.7)$$

com $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n-r}$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e $Q_2 \in \mathbb{R}^{n-r \times n}$.

A equação (2.6) representa a Segunda Forma Equivalente para o sistema (2.1), e pode ser obtida por *Decomposição em Valores Singulares* ou *Decomposição QR* [36] [37]. Assim, as matrizes Q e P não são únicas. Pode-se também observar que para a obtenção destas matrizes não é necessário supor a regularidade do sistema original, sendo assim de interesse para o desenvolvimento de resultados práticos.

Sob esta decomposição, o sistema é representado por equações algébricas e equações diferenciais dando origem a uma *Forma Algébrica-Diferencial* que será utilizada posteriormente para representar o sistema a ser tratado neste estudo. A parte diferencial representa um subsistema dinâmico e a parte algébrica representa a conexão entre os subsistemas. Assim, observa-se que os sistemas descritores podem ser vistos como um sistema composto formado por alguns sistemas interconectados.

2.2.3 Terceira Forma Equivalente

Com base na definição de regularidade e assumindo o par (E,A) regular, sempre existe um escalar α tal que $|\alpha E + A| \neq 0$. Sejam, portanto, as matrizes de transformação:

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= (\alpha E + A)^{-1} \\ \bar{P} &= I_n\end{aligned}$$

Então,

$$\bar{Q}A = I_n - \alpha(\alpha E + A)^{-1}E.$$

Assim, o sistema (2.1) é equivalente a:

$$\hat{E}\dot{x}(t) = (I - \alpha\hat{E})x(t) + \hat{B}u(t) \quad (2.8)$$

onde $\hat{E} = \bar{Q}E$ e $\hat{B} = \bar{Q}B$.

O sistema (2.8) representa a terceira forma equivalente do sistema (2.1). Logo, para um valor fixo de α , a terceira forma equivalente é única em relação à equivalência algébrica (similaridade) [20]. Ao contrário das duas decomposições anteriores, este tipo de representação do sistema descritor não será explorada neste trabalho.

2.3 Estrutura de um Sistema Singular

2.3.1 Autoestrutura Relativa

Para definir a autoestrutura relativa do par (E,A) , toma-se a autoestrutura finita do sistema, sendo λ_i as raízes do equação $\Delta(s) = |sE - A| = 0$ e define-se

$$\eta_i = \dim N(\lambda_i E - A).$$

onde $N(\cdot)$ denota o espaço nulo.

Para os autovalores finitos distintos, os autovetores correspondentes são representados por v_{ij} e definidos por:

$$(\lambda_i E - A) v_{ij} = 0 \quad j \in \bar{\eta}_i \quad (2.9)$$

onde $\bar{\eta}_i = \{1, 2, \dots, \eta_i\}$.

Para os autovalores finitos iguais, de multiplicidade $k > 1$, os autovetores correspondentes são representados por v_{ij}^k e definidos por:

$$(\lambda_i E - A) v_{ij}^{k+1} = -E v_{ij}^k, \quad k > 1 \quad (2.10)$$

Se $|E| \neq 0$, a relação acima pode ser utilizada para gerar os autovetores v_{ij} recursivamente, a partir do autovetor de maior posto. Esta construção nos fornece a autoestrutura de $E^{-1}A$.

Caso a condição citada $|E| \neq 0$ não seja verificada, significa que o sistema possui autovalores infinitos. Neste caso, definiremos $\eta = \dim N(E)$ e utilizaremos a autoestrutura infinita do par (E, A) para a determinação dos autovetores correspondentes:

- Para autovalores infinitos de grau 1, teremos os autovetores correspondentes representados por $v_{\infty j}$ e definidos pela relação:

$$E v_{\infty j} = 0, \quad j \in \bar{\eta} \quad (2.11)$$

onde $\bar{\eta} = \{1, 2, \dots, \eta\}$.

- Para os autovalores infinitos de multiplicidade $k > 1$, teremos os autovetores correspondentes representados por $v_{\infty j}^k$ e definidos pela relação:

$$E v_{\infty j}^{k+1} = A v_{\infty j}^k, \quad k > 1. \quad (2.12)$$

Escrevendo-se os autovetores como colunas de duas matrizes não singulares, onde V corresponde à matriz de autovetores relativos aos autovalores finitos e infinitos e W corresponde à matriz de autovetores relativos aos autovalores finitos e infinitos multiplicados pelas matrizes E e A respectivamente, tem-se:

$$V = \begin{bmatrix} v_{ij}^k & v_{\infty j}^k \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} E v_{ij}^k & A v_{\infty j}^k \end{bmatrix}$$

Fazendo $P = V$ e $Q = W^{-1}$ e calculando-se a matriz abaixo obtém-se:

$$Q(sE - A)P = \begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_1 & 0 \\ 0 & sN - I_{n_2} \end{bmatrix}$$

o que resulta na *Forma de Weierstrass* do par $(sE - A)$, semelhante à *Decomposição Padrão* (2.3), onde A_1 é uma matriz que contém os autovalores finitos de (E, A) e N é uma matriz nilpotente representando os autovalores infinitos da autoestrutura relativa [22].

Sabe-se que as posições em que os autovalores de um sistema se encontram são importantes, pois influenciam nas propriedades estáticas e dinâmicas de um sistema linear invariante no tempo. O estudo de posicionamento de autovalores é de suma importância na análise de sistemas descritores, sabendo-se que estes sistemas além de autovalores finitos possuem autovalores infinitos que afetam as propriedades da resposta destes.

Em particular, a discussão acima permite definir:

- Autovalores finitos

O polinômio característico para o sistema singular é dado por:

$$\Delta(s) = |sE - A| = a_{n_1}s^{n_1} + \dots + a_1s + a_0.$$

Os valores finitos de s que satisfazem $\Delta(s) = |sE - A| = 0$ são chamados autovalores finitos do sistema. Usa-se $\sigma(E, A) = \{s \mid s \in \mathcal{C}, s \text{ finito}, |sE - A| = 0\}$ para determinar o conjunto de autovalores finitos do sistema. Devido à singularidade da matriz E , o número de autovalores finitos é sempre menor que n para sistemas descritores [22].

- Autovalores infinitos

A estrutura de autovalores infinitos é determinada pelos zeros de $(sE - A)$ no infinito, o que corresponde a $(\frac{1}{s}E - A)$ para $s = 0$.

Os autovalores finitos do sistema estão diretamente ligados à estabilidade da resposta do sistema, enquanto os autovalores infinitos estão diretamente ligados à presença de modos impulsivos na resposta transitória do sistema, como será visto a seguir.

2.4 Resposta Temporal

Estando o sistema escrito na forma padrão (2.3), e considerando o fato de que

$$N^\alpha = 0 \tag{2.13}$$

pela definição de matriz nilpotente (*ver Apêndice B*), o sistema pode ser dividido em dois subsistemas e a solução destes podem ser representadas como segue:

- o subsistema lento: correspondente a um sistema normal de ordem r associado aos autovalores finitos do par (E, A) , cujas trajetórias são escritas unicamente por:

$$z_1(t) = e^{A_1 t} z_1(0) + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau \quad (2.14)$$

- o subsistema rápido: associado aos autovalores infinitos do par (E, A) , cuja solução única é dada por:

$$z_2(t) = - \sum_{i=1}^{\alpha-1} \delta^{(i-1)}(t) N^i z_2(0) - \sum_{i=0}^{\alpha-1} N^i B_2 u^{(i)} \quad (2.15)$$

sendo u^i a i -ésima derivada de $u(t)$ e $\delta(t)$ a função impulso unitário.

O subsistema lento é uma equação diferencial ordinária, a qual possui uma única solução para uma condição inicial $z_1(0)$ e para qualquer função parcialmente contínua $u(t)$. Este subsistema determina a estabilidade de (2.1), visto que os autovalores finitos são determinados apenas pela matriz A_1 .

Os termos impulsivos na resposta dependem da multiplicidade dos autovalores no infinito. Assim, se tivermos $\alpha > 1$ na relação (2.13), tal que os autovalores infinitos possuam multiplicidade $k > 1$, existirão valores de $z_2(0)$ tal que a resposta possua termos impulsivos em $z_2(t)$. Por outro lado, se tivermos $N = 0$, o que corresponde a $\alpha = 1$, a resposta do sistema não possui termos impulsivos e o sistema é livre de impulsões. Logo, pode-se constatar que os autovalores infinitos e conseqüentemente os termos impulsivos, estão diretamente relacionados ao subsistema rápido. Para maiores detalhes o leitor pode consultar [2] [20] [22].

Sabe-se que mesmo que não existam termos impulsivos na resposta do sistema, pode-se observar a presença de saltos finitos instantâneos na origem dos tempos devido à inconsistência das condições iniciais, o que pode ser prejudicial para o desempenho do sistema. Desta forma, este estudo se concentra no caso onde o sistema não possui impulsões, ou seja, $N = 0$.

No instante inicial, a resposta do sistema é dada por:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{A_1 t} z_1(0) \\ z_2(t) &= - \sum_{i=1}^{\alpha-1} \delta^{(i-1)}(t) N^i z_2(0) \end{aligned}$$

e

$$z(0-) = \begin{bmatrix} z_1(0-) \\ z_2(0-) \end{bmatrix}.$$

Para $t > 0$, $z_2(t) = 0$. Logo,

$$z(0+) = \begin{bmatrix} \lim_{t \rightarrow 0+} z_1(t) \\ \lim_{t \rightarrow 0+} z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(0-) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, se $z_2(0-) \neq 0$, pode se observar que $z(0+) \neq z(0-)$, o que implica na inconsistência da condição inicial, e o sistema possui descontinuidades no instante inicial. A referência [23], pode ser consultada para uma melhor compreensão de como estes saltos são influenciados pela lei de controle e como tais influências podem ser exploradas para reduzi-los através de uma realimentação apropriada.

2.5 Estabilidade

Estabilidade é uma propriedade importante a ser considerada no desenvolvimento deste estudo, considerando-se que um sistema prático instável corre o risco de não funcionar satisfatoriamente ou até mesmo ser destruído ao ser implementado. Logo, esta propriedade garante um bom desempenho da solução do sistema assegurando o funcionamento satisfatório deste.

Por simplicidade, considera-se apenas a estabilidade assintótica do sistema descritor autônomo:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) \quad , \quad \text{com } x(0) = x_0. \quad (2.16)$$

Aplicando a transformação de coordenadas $x = Pz$, o sistema (2.16) é equivalente ao sistema autônomo na forma padrão:

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

onde

$$\begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{1o} \\ z_{2o} \end{bmatrix}.$$

Para $t > 0$, o sistema (2.17) tem como solução:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{A_1 t} z_1(0) \\ z_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Como, para $t > 0$ apenas o subestado z_1 determina a dinâmica do sistema, tem-se que a condição

$$\|z(t)\|_2 < \|P\|_2^{-1} \alpha e^{-\beta t} \|z(0)\|_2, \quad \alpha, \beta > 0$$

é verdadeira se, e somente se, $z_1(t)$ satisfaz a

$$\|z_1(t)\|_2 < \|P\|_2^{-1} \alpha e^{-\beta t} \|z(0)\|_2, \quad t > 0,$$

o que é equivalente a $\sigma(A_1) = \sigma(E, A) \in \mathcal{C}^-$ [20].

Em vista deste resultado, pode-se escrever o seguinte teorema, que define a estabilidade do sistema (2.16) [20].

Teorema 2.5.1 : *O sistema (2.16) é assintoticamente estável se todos os autovalores finitos definidos pelo conjunto $\sigma(E, A) = \{s \mid s \in \mathcal{C}, s \text{ finito}, |sE - A| = 0\}$, estão no semiplano esquerdo do plano complexo \mathcal{C}^- para sistemas contínuos e no interior do círculo unitário para sistemas discretos.*

Nota-se que na definição de estabilidade desconsidera-se o instante $t = 0$, em função do possível comportamento impulsivo e descontínuo da solução neste instante [23].

- Exemplo 1 : Dado sistema abaixo que descreve o circuito apresentado em [20]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} V_s(t) \quad (2.18)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (2.19)$$

Através das matrizes de transformação U e V abaixo:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o sistema pode ser escrito na sua forma padrão equivalente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} V_s(t) \quad (2.20)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Analisando-se o sistema representado na forma padrão acima, pode-se concluir, dado $N = 0$, que o sistema não possui modos impulsivos. E calculando-se os autovalores finitos do sistema verificamos que estes se encontram nas posições $\{-0.5 + 0.8660254i, -0.5 - 0.8660254i\}$ do plano complexo. Logo, pode-se afirmar que o sistema é estável.

- Exemplo 2 : Dado sistema descritor abaixo [20]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_s(t) \quad (2.22)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x \quad (2.23)$$

Neste exemplo verifica-se que o sistema acima é composto apenas pelo subsistema rápido e que o índice de nilpotência da matriz N é $\alpha = 3$ (ver apêndice B). Logo, o sistema possui apenas pólos infinitos, e sendo a multiplicidade do pólo maior que 1, o sistema possui termos impulsivos na resposta de estados.

2.6 Controlabilidade e Observabilidade

As definições de *controlabilidade* e *observabilidade* para sistemas de controle normais, podem ser extendidas para sistemas descritores. No entanto diferentes tipos de *controlabilidade* e *observabilidade* podem ser identificadas no caso de sistemas descritores [19] [20] [43]. Nesta seção estuda-se as propriedades para um sistema descritor a partir das seguintes condições:

1. $\text{posto}([\alpha E - \beta A \ B]) = n, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{C}^2 \setminus \{(0, 0)\};$
2. $\text{posto}([\lambda E - A \ B]) = n, \quad \forall \lambda \in \mathcal{C};$
3. $\text{posto}([E \ AS_\infty \ B]) = n$, onde as colunas de S_∞ geram o espaço nulo de E , ou seja, $N(E)$.

Para sistemas regulares, estas condições caracterizam a controlabilidade do sistema.

Definição 2.6.1 : *Seja o par (E, A) regular. O sistema descritor representado por (E, A, B) é completamente controlável (C-Controlável) se, e somente se, a condição 1 é satisfeita.*

□

Assim, o sistema descritor que satisfaz à condição 1 é controlável somente se,

$$\text{posto}([E \ B]) = n. \quad (2.24)$$

A controlabilidade completa assegura que para qualquer estado inicial e final $x_0, x_f \in \mathbb{R}^n$ do sistema, existe um controle admissível que transfere o sistema de x_0 para x_f no tempo finito [20] [43].

Uma definição menos restritiva de controlabilidade é dada a seguir:

Definição 2.6.2 : *Seja o par (E, A) regular. O sistema representado por (E, A, B) é fortemente controlável (F-Controlável) se, e somente se, as condições 2 e 3 são satisfeitas.*

□

Observa-se que a C-Controlabilidade implica a F-Controlabilidade. Por sua vez, a condição 2 é derivada da condição 1, para $\beta \neq 0$ e $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$, e a condição 3 é derivada da relação (2.24), sendo porém mais fraca. Os sistemas regulares que satisfazem à condição 3 são usualmente chamados de sistemas *controláveis no infinito* ou *impulso-controláveis* [8] [42]. Para tais sistemas, os modos impulsivos podem ser eliminados por uma lei de controle adequadamente determinada.

As condições de controlabilidade estão diretamente relacionadas ao posicionamento de autovalores finitos no plano complexo e à condição que permite a mudança de autovalores infinitos para posições finitas por uma realimentação de estados. Estas condições são conservadas sob algumas transformações do sistema, especificamente sob a aplicação de transformações de equivalência não singulares e de uma lei de controle de realimentação de estados proporcional.

Também pode-se estender as definições acima de forma a se obter os conceitos de *observabilidade*.

Definição 2.6.3 : *Seja o par (E, A) regular, o sistema representado por (E, A, C) é completamente observável (C-Observável) se, e somente se, a condição 1 é satisfeita para o sistema dual, representado por (E^T, A^T, C^T) .*

□

Definição 2.6.4 : *Seja o par (E, A) regular, o sistema representado por (E, A, C) é fortemente observável (F-Observável) se, e somente se, as condições 2 e 3 são satisfeitas para o sistema dual, representado por (E^T, A^T, C^T) .*

□

Existem outras formas para se definir controlabilidade e observabilidade que não serão tratadas neste estudo [2] [20] [22]. A maioria das definições relacionadas à dinâmica de sistemas descritores contínuos no tempo, dependem da regularidade do par (E, A) . Este conceito é restrito pelo fato de que a regularidade não é assegurada por uma realimentação linear proporcional e muitos sistemas práticos estariam fora das análises propostas por tais definições. Tendo-se em vista tais restrições, em [33], é introduzido um novo conceito de *regularizabilidade*. Trata-se de uma extensão da regularidade e corrige as deficiências até então existentes. Com base neste novo conceito, as definições relacionadas à dinâmica de sistemas descritores são modificadas a fim de se adaptarem à modificação introduzida. As condições que nos permitem resolver os problemas de controle tratados nos próximos capítulos são baseadas nas definições (2.6.2) e (2.6.4). Em particular, mostra-se que não é necessário considerar o sistema descritor a controlar regular para resolver os problemas colocados.

- Exemplo 3 : Dado o sistema representado abaixo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.82 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.23 & 0 & 0 \\ 1.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.56 & 0 & 0 & 1.01 \\ 0 & 0 & 1.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.41 & -6.64 & -2.34 \\ 0 & 0 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1.72 & -15.48 & 0 \\ 7. & 0 & -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

O sistema pode ainda ser representado na Segunda Forma Equivalente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 & 0 & 0 \\ -1.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.01 & 0 & -1.56 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & 9 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \\ 0.5 & 0 & -2.85 \\ 0 & -8.09 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

sob as matrizes de transformação,

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.5813953 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.2195122 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

encontradas neste caso particular através da decomposição do sistema em valores singulares, o que nos leva à *Forma Algébrica-Diferencial*.

Analisando-se o sistema, pode-se afirmar que é não regular, instável e possui dois autovalores infinitos e três autovalores finitos posicionados em $\{-1.5, 0, 0\}$. No entanto, verificada a condição de fortemente controável e fortemente observável, nota-se que o sistema é estabilizável através da aplicação de uma lei de controle de realimentação de estados ou de realimentação das saídas apropriadas.

Capítulo 3

Estabilização por Realimentação de Estados

3.1 Introdução

Neste capítulo, descreve-se o problema de estabilização de sistemas descritores utilizando-se o controle por realimentação de estados bem como as condições necessárias e suficientes para a existência da solução do problema.

Dentro deste contexto, apresenta-se um procedimento para a resolução do problema descrito, através de um algoritmo para a estabilização em duas etapas. Na primeira etapa, as impulsões são eliminadas e a regularidade do sistema é assegurada através de uma matriz de realimentação de estados preliminar. Na segunda etapa, a matriz de realimentação é determinada a fim de mover os autovalores (instáveis) do sistema modificado, após a primeira etapa para posições adequadas do plano complexo. Em particular, a segunda etapa recai necessariamente em um problema de estabilização de um sistema normal de ordem reduzida. Os passos deste algoritmo são, como colocado no capítulo introdutório, baseados na representação do sistema numa forma algébrica-diferencial e na utilização de uma representação intermediária do sistema que desacopla as equações diferenciais das algébricas, logo após a primeira etapa, pela utilização de uma transformação adequada.

Vários algoritmos propostos na literatura de controle de sistemas descritores baseam-se nas duas etapas descritas acima [8] [20] [41]. Entre estes, o algoritmo proposto recentemente por Varga [41] utiliza transformações ortogonais para construir a solução do problema de estabilização, sendo assim bastante atrativo do ponto de vista numérico. Aproveitando-se os resultados obtidos por Varga, faz-se uma comparação

entre o procedimento utilizado neste capítulo e suas implicações caso fosse utilizada a metodologia desenvolvida por Varga na resolução de um dos passos deste algoritmo.

Em seguida, utiliza-se os resultados de base obtidos para estudar o problema de posicionamento de autoestrutura por realimentação de estados utilizando diretamente a representação algébrica-diferencial. Para finalizar, ilustra-se a utilização do algoritmo proposto, através de um exemplo numérico.

3.2 Apresentação do Problema de Estabilização

Considere o sistema descritor representado pela equação de estados linear e invariante no tempo :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.1)$$

onde $x \in \mathfrak{R}^n$ e $u \in \mathfrak{R}^m$, representam respectivamente os vetores de estado e de entradas de controle do sistema ; $E \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ e $\text{posto}(E) = r < n$.

O problema de estabilização a ser tratado consiste na determinação de uma lei de controle tipo realimentação de estados,

$$u(t) = Fx(t), \quad (3.2)$$

com $F \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, tal que o sistema em malha fechada,

$$E\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) \quad (3.3)$$

representado por $(E, A + BF, B)$, seja *regular, livre de impulsões e assintoticamente estável*.

3.3 Condições para a Resolução do Problema de Estabilização

As condições para que (E, A, B) seja estabilizável no sentido colocado na secção 2.6 são dadas a seguir. Elas descrevem fundamentalmente a possibilidade de mover os autovalores finitos instáveis para r posições estáveis e os autovalores infinitos para posições finitas no plano complexo [20] [22] [41] (vide definição 2.6.2).

Teorema 3.3.1 : *A solução do problema de estabilização existe se, e somente se, o sistema (E, A, B) é fortemente estabilizável, isto é,*

1. *posto $([\lambda E - A \ B]) = n$, para todo λ finito, $\lambda \in C^+$.*
2. *posto $([E \ AS_\infty \ B]) = n$, onde as colunas de S_∞ geram o espaço nulo de E .*

□

As condições 1 e 2 do Teorema 3.3.1 podem, obviamente, ser reescritas para o sistema representado em diferentes coordenadas. Em particular, na próxima seção utiliza-se a representação do sistema na forma algébrica-diferencial, mais adequada que a decomposição padrão para o desenvolvimento de algoritmos [41].

A demonstração da necessidade da condição 1 para a resolução do problema de estabilização pode ser encontrada em [20]. Uma interpretação da condição 2 é mostrada a seguir, utilizando-se a representação do sistema na forma algébrica-diferencial.

3.4 Metodologia para Estabilização

Mostra-se de maneira construtiva que, satisfeitas as condições do teorema acima apresentado, é sempre possível construir uma realimentação de estados solução para o problema de estabilização. Para tanto, utiliza-se a representação do sistema descritor (3.1) na forma algébrica-diferencial e a reformulação correspondente das condições do teorema 3.3.1.

3.4.1 Representação Algébrica-Diferencial

Como citado no capítulo anterior, existem duas matrizes, Q e P , não singulares, tais que o sistema descritor (3.1) seja equivalente a [20]:

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (3.4)$$

onde

$$QEP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad QAP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$QB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad x = P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

com $A_{11} \in \mathfrak{R}^{r \times r}$ e $A_{22} \in \mathfrak{R}^{n-r \times n-r}$. As matrizes Q e P podem ser determinadas, por exemplo, a partir de uma decomposição em valores singulares da matriz E. Neste caso, temos $Q^T Q = I$ e $P^T P = I$ [36] [37].

Lema 3.4.1 : *Assuma que o sistema esteja na forma (3.4). Então se A_{22} é inversível:*

1. *O par $(sE - A)$ é regular.*
2. *O sistema (3.1) não possui modos impulsivos.*
3. *Os autovalores finitos do sistema são dados por $\sigma(A_{11} + A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$.*

Demonstração : Se A_{22}^{-1} existe, temos para o sistema (3.4):

$$\det(sE - A) = \det \begin{pmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\det(sE - A) = \det\{-A_{22}\} \det\{(sI - A_{11}) - (A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\}$$

que por definição é não nulo [17]. Portanto (E, A) é regular.

Além disso, os autovalores finitos do sistema correspondem às raízes da equação característica

$$\det(sE - A) = \det\{(sI - A_{11}) - (A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\} = 0$$

e como $(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \in \mathfrak{R}^{r \times r}$, esta equação possui r raízes finitas. Assim, como o número de autovalores finitos satisfaz a $r = \text{posto}(E)$, o sistema não possui modos impulsivos [2].

□

Utilizando-se a representação do sistema (3.1) na forma algébrica-diferencial e o fato de que as propriedades de controlabilidade são invariantes em relação à uma troca de coordenadas, obtém-se a partir do teorema 3.3.1 o corolário seguinte:

Corolário 3.4.1 : *A solução do problema de estabilização existe se, e somente se, na representação algébrica-diferencial o sistema descritor satisfizer as condições abaixo:*

1. $\text{posto} \left(\begin{bmatrix} \lambda I - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ -A_{21} & -A_{22} & B_2 \end{bmatrix} \right) = n$, para todo λ finito, $\lambda \in C^+$.

$$2. \text{ posto } ([A_{22} \ B_2]) = n - r.$$

Demonstração : Salienta-se apenas que para a representação algébrica-diferencial (3.4) do sistema descritor, temos:

$$\text{posto } ([E \ AS_\infty \ B]) = \text{posto } \left(\begin{bmatrix} I & 0 & A_{12} & B_1 \\ 0 & 0 & A_{22} & B_2 \end{bmatrix} \right) = n, \quad (3.5)$$

se, e somente se, $\text{posto } ([A_{22} \ B_2]) = n - r$.

□

A partir da condição 2 do corolário, verifica-se que para a eliminação de impulsões, é necessário e suficiente que os autovalores nulos de A_{22} sejam controláveis. Este resultado, básico para a realização da primeira etapa do algoritmo, é apresentado na forma a seguir:

Lema 3.4.2 : *Existe $F_{22} \in \mathfrak{R}^{m \times n-r}$ tal que $A_{22} + B_2 F_{22}$ é inversível se, e somente se, $\text{posto } ([A_{22} \ B_2]) = n - r$.*

Demonstração : A condição acima é equivalente a

$$\text{posto } ([\lambda I_{n-r} - A_{22} \ | \ B_2]) = n - r, \quad \text{para } \lambda = 0.$$

Isto significa que, se $\lambda = 0$ é autovalor de A_{22} , ele é um autovalor controlável do par (A_{22}, B_2) e, portanto, existe $F_{22} \in \mathfrak{R}^{m \times n-r}$ tal que $\lambda = 0$ não pertence ao espectro de $(A_{22} + B_2 F_{22})$ e portanto, $(A_{22} + B_2 F_{22})$ é inversível.

□

3.4.2 Metodologia para Estabilização em Duas Etapas

O resultado a seguir consiste, basicamente, na demonstração da suficiência das condições estabelecidas no corolário 3.4.1, e em consequência, no teorema 3.3.1.

Proposição 3.4.1 : *Seja o sistema descritor (3.4) fortemente estabilizável. Então, sempre existe uma matriz de realimentação de estados $F = [F_{11} \ F_{22}]$, tal que o sistema em malha fechada*

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1 F_{11} & A_{12} + B_1 F_{22} \\ A_{21} + B_2 F_{11} & A_{22} + B_2 F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

é regular, não tem modos impulsivos e seus autovalores finitos são estáveis.

Demonstração : Pode ser feita em duas etapas.

- Primeira Etapa : Define-se

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + v(t) \quad (3.7)$$

tal que $(A_{22} + B_2 F_{22})$ seja inversível. A existência de F_{22} é garantida pelo Lema 3.4.2 e, pode por exemplo, ser construída utilizando técnicas de posicionamento parcial de autovalores para deslocar os autovalores nulos de A_{22} [9] [41]; Em particular, pode-se colocar a matriz A_{22} na forma de Schur, separando-se os autovalores nulos dos autovalores não nulos e, a seguir, reposicionar os autovalores nulos em posições adequadas do plano complexo [9].

A aplicação de (3.7) garante pelo Lema 3.4.1 que o sistema de malha fechada abaixo é regular e livre de impulsões:

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}(F_{22}) \\ A_{21} & A_{22}(F_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} v(t) \quad (3.8)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{12}(F_{22}) &= A_{12} + B_1 F_{22} \\ A_{22}(F_{22}) &= A_{22} + B_2 F_{22} \end{aligned}$$

- Segunda Etapa : Consiste em definir

$$v(t) = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

tal que os r autovalores finitos de malha fechada sejam estáveis. Note que $v(t)$ garante as propriedades já estabelecidas no Passo 1.

Assim, após eliminar-se as impulsões do sistema e assegurar-se a regularidade deste pela aplicação de $u(t)$, dada em (3.7), multiplica-se o sistema descritor resultante, (3.8), (pela esquerda) pela matriz L da forma :

$$L = \begin{bmatrix} I_r & -A_{12}(F_{22})A_{22}^{-1}(F_{22}) \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(F_{22}) & 0 \\ A_{21} & A_{22}(F_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(F_{22}) \\ B_2 \end{bmatrix} v(t) \quad (3.11)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{11}(F_{22}) &= A_{11} - A_{12}(F_{22})A_{22}^{-1}(F_{22})A_{21} \\ B_1(F_{22}) &= B_1 - A_{12}(F_{22})A_{22}^{-1}(F_{22})B_2 \end{aligned}$$

O par $(A_{11}(F_{22}), B_1(F_{22}))$ é estabilizável [20]. Como $A_{11}(F_{22}) \in \mathfrak{R}^{r \times r}$ e $r = \text{posto}(E)$, a matriz F_{11} deve ser escolhida tal que

$$\sigma(A_{11}(F_{22}) + B_1(F_{22})F_{11}) \in \mathcal{C}^-.$$

Definindo-se uma matriz de realimentação de estados F_{11} tal que os r autovalores finitos de malha fechada pertençam ao semiplano esquerdo, a partir da aplicação de (3.9) tem-se:

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(F_{22}) & 0 \\ A_{21} & A_{22}(F_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(F_{22})F_{11} & 0 \\ B_2F_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(F_{11}, F_{22}) & 0 \\ A_{21}(F_{11}) & A_{22}(F_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{21}(F_{11}) &= A_{21} + B_2F_{11} \\ A_{11}(F_{11}, F_{22}) &= A_{11}(F_{22}) + B_1(F_{22})F_{11} \end{aligned}$$

Devido à forma bloco-triangular das matrizes envolvidas em (3.13) pode-se verificar que o conjunto de autovalores finitos de malha fechada é :

$$\sigma(E, A + BF) = \sigma(A_{11}(F_{22}) + B_1(F_{22})F_{11}) \in \mathcal{C}^-$$

□

É importante salientar que a matriz L definida por (3.10), também é utilizada em [20] como parte de uma transformação de coordenadas que desacopla os subsistemas lento e rápido obtidos após a primeira etapa. Do ponto de vista algorítmico, a demonstração acima implica num procedimento de cálculo mais simples e econômico, comparado por exemplo a procedimentos que utilizem transformações ortogonais para o desacoplamento do sistema, pois o desacoplamento obtido em (3.10) é apenas parcial.

3.4.3 Algoritmo para Estabilização

Baseado nos resultados anteriores, apresenta-se a seguir um algoritmo genérico para a estabilização de um sistema descritor da forma (3.1). Para tanto, assume-se que o sistema (E, A, B) seja fortemente estabilizável.

- Primeiro passo : Encontrar matrizes ortogonais Q e P , tais que :

$$QEP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad QAP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad QB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Estas matrizes podem ser obtidas por decomposição em valores singulares ou decomposição Q-R [2] [36] [37].

- Segundo passo : Calcular $F_{22} \in \mathfrak{R}^{m \times n-r}$ tal que $A_{22} + B_2 F_{22}$ seja não singular.

$$A_{12}(F_{22}) = A_{12} + B_1 F_{22}$$

$$A_{22}(F_{22}) = A_{22} + B_2 F_{22}$$

- Terceiro passo : Encontrar a matriz $X \in \mathfrak{R}^{r \times (n-r)}$ tal que $X A_{22}(F_{22}) = A_{12}(F_{22})$ e fazer

$$A_{11}(F_{22}) = A_{11} - X A_{21}$$

$$B_1(F_{22}) = B_1 - X B_2$$

- Quarto passo : Calcular $F_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times r}$, tal que $\sigma(A_{11}(F_{22}) + B_1(F_{22})F_{11}) \in \mathcal{C}^-$.
- Quinto passo : Calcular a matriz de realimentação de estados na base original que estabiliza o sistema no sentido colocado:

$$F = [F_{11} \ F_{22}]P^T$$

3.5 Discussão

O algoritmo descrito acima é bastante similar ao algoritmo proposto por Varga [41], que utiliza apenas transformações ortogonais para a realização dos passos envolvidos

no procedimento de estabilização. Concentrando-se, então, na segunda etapa do procedimento descrito na demonstração da proposição 3.4.1, e comparando-a com a etapa correspondente no algoritmo de Varga, que utilizaria uma matriz de transformação ortogonal $T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ao invés da matriz bloco-diagonal L tem-se:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$$

tal que

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12}(F_{22}) \\ A_{22}(F_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_2 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{R}_2 \in \mathfrak{R}^{(n-r) \times (n-r)}$$

então,

$$\begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11}(T) & 0 \\ A_{21}(T) & R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}(F_{22}) \\ A_{21} & A_{22}(F_{22}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_1(T) \\ B_2(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Pode-se notar que o problema de estabilização a ser resolvido por Varga seria encontrar F_{11} tal que $\sigma(T_{11}, A_{11}(T) + B_1(T)F_{11}) \in \mathcal{C}^-$, onde $T_{11} \in \mathfrak{R}^{r \times r}$.

Muito embora a matriz $L = \begin{bmatrix} I_r & -X \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$, utilizada no presente trabalho, não seja ortogonal, o sistema de equações

$$XA_{22}(F_{22}) = A_{12}(F_{22}) \tag{3.14}$$

pode ser resolvido de forma numericamente estável pela utilização de Eliminação Gaussiana com pivotamento ou por outros métodos de resolução de sistemas lineares. A tabela a seguir compara o número de operações envolvidas na obtenção das matrizes correspondentes ao passo 3 nos dois algoritmos [13] [15] [37]:

<i>Proposto</i>	<i>Varga</i>
<p><i>Resolução de $XA_{22} = A_{12}$ por Eliminação Gaussiana</i></p> $\frac{2(n-r)^3}{3} + \frac{(n-r)^2}{2} \text{ flops}$	<p><i>Decomposição Q-R :</i></p> $T \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_2 \end{bmatrix}$ $2(n-r)^2 \left(\frac{2n-r}{3}\right) \text{ flops}$
$A_{11} = A_{11} - XA_{21}$ $r^2(2n - 2r - 1) \text{ flops}$	$A_{11} = T_{11}A_{11} + T_{12}A_{21}$ $r^2(2n - 1) \text{ flops}$
$B_1 = B_1 - XB_2$ $rm(2n - 2r - 1) \text{ flops}$	$B_1 = T_{11}B_1 + T_{12}B_2$ $rm(2n - 1) \text{ flops}$

A Decomposição Q-R pode ser obtida através de algoritmos baseados nas transformações de Householder, Block Householder, Givens e Fast Givens. Em todos estes algoritmos o número de operações em pontos flutuantes está na ordem de $O(n^2)$ [13] [15]. No entanto, os resultados desta tabela são baseados no algoritmo que utiliza a Transformação de Householder para a obtenção desta decomposição.

Para a resolução do sistema linear, os resultados utilizados são relativos à Eliminação Gaussiana com Pivotamento Parcial. Assim, do ponto de vista do número de operações em pontos flutuantes, observa-se uma vantagem na utilização da transformação bloco triangular L .

Note-se ainda que no passo 2 é razoável considerar-se que F_{22} seja tal que $A_{22} + B_2F_{22}$, além de não singular, tenha um bom condicionamento numérico em vista da solução de (3.14). Além disso, no passo 4 do algoritmo proposto, qualquer procedimento para estabilização de sistemas normais pode ser aplicado para o cálculo da matriz F_{11} , o que pode ser considerado vantajoso, tanto do ponto de vista algorítmico, quanto do ponto de vista teórico, em relação ao procedimento de Varga.

Na seção a seguir, utiliza-se a transformação L para mostrar algumas relações existentes entre a utilização do modelo do sistema na forma algébrica-diferencial e o sistema de ordem reduzida para o posicionamento dos pólos finitos.

3.6 Posicionamento de Autoestrutura Finita

Considera-se a matriz de realimentação de estados F_{11} que posiciona λ_i como um autovalor finito de $A_{11}(F_{22}) + B_1(F_{22})F_{11}$. Assim, a formulação seguinte fornece a relação entre as matrizes de malha aberta, os autovalores de malha fechada, o autovetor associado $v_i^1 \in \mathfrak{R}^r$ e a matriz de realimentação F_{11} [25].

$$\left[A_{11}(F_{22}) - \lambda_i I_r \quad | \quad B_1(F_{22}) \right] \begin{bmatrix} v_i^1 \\ w_i \end{bmatrix} = 0 \quad (3.15)$$

onde

$$w_i = F_{11}v_i^1 \in \mathfrak{R}^m \quad (3.16)$$

Alguns algoritmos de posicionamento de autovalores/autovetores por realimentação de estados consistem na escolha de r triplos (λ_i, v_i^1, w_i) satisfazendo r equações como (3.15). Em particular, a partir da escolha de $V_1 = [v_1^1, v_2^1, \dots, v_r^1]$ tal que V_1 é não singular, a matriz F_{11} solução da equação

$$F_{11} \begin{bmatrix} v_1^1 & , & v_2^1 & , & \dots & , & v_r^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & , & w_2 & , & \dots & , & w_r \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

é tal que (λ_i, v_i^1) são os autovalores/autovetores de $A_{11}(F_{22}) + B_1(F_{22})F_{11}$ [25].

Concentrando-se na relação (3.15) que descreve, para um dado λ_i , o conjunto de autovetores de malha fechada, candidatos a serem posicionados e suas respectivas direções tem-se da definição de $(A_{11}(F_{22}), B_1(F_{22}), F_{11})$ que:

$$\left[A_{11} - A_{12}(F_{22})A_{22}^{-1}(F_{22})A_{21} - \lambda_i I_r \quad | \quad B_1 - A_{12}(F_{22})A_{22}^{-1}(F_{22})B_2 \right] \begin{bmatrix} v_i^1 \\ w_i \end{bmatrix} = 0 \quad (3.18)$$

é equivalente a

$$\left[A_{11} - \lambda_i I_r \quad | \quad A_{12}(F_{22}) \quad | \quad B_1 \right] \begin{bmatrix} v_i^1 \\ v_i^2 \\ w_i \end{bmatrix} = 0 \quad (3.19)$$

onde

$$v_i^2 = -A_{22}^{-1}(F_{22})A_{21}v_i^1 - A_{22}^{-1}(F_{22})B_2w_i \quad (3.20)$$

Esta última relação pode ser reescrita como :

$$A_{22}(F_{22})v_i^2 + A_{21}v_i^1 + B_2w_i = 0$$

e (3.18) pode ser equivalentemente substituída por :

$$\begin{bmatrix} A_{11} - \lambda_i I_r & A_{12}(F_{22}) & B_1 \\ A_{21} & A_{22}(F_{22}) & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^1 \\ v_i^2 \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

O desenvolvimento acima é resumido pela seguinte proposição :

Proposição 3.6.1 : *Seja $F_{22} \in \mathbb{R}^{m \times n-r}$ uma matriz tal que $A_{22}(F_{22}) = A_{22} + B_2 F_{22}$ seja não singular. Considere o conjunto*

$$\left(\lambda_i, \begin{bmatrix} v_i^1 \\ v_i^2 \end{bmatrix}, w_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

tal que (3.21) é verificada. Se $[v_1^1, v_2^1, \dots, v_r^1]$ é de posto completo e F_{11} verifica

$$F_{11} [v_1^1, v_2^1, \dots, v_r^1] = [w_1, w_2, \dots, w_r]$$

então

$$\left(\lambda_i, \begin{bmatrix} v_i^1 \\ v_i^2 \end{bmatrix} \right)$$

para $i = 1, 2, \dots, r$, são os autovalores finitos e os autovetores correspondentes do sistema em malha fechada

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} [F_{11} \quad F_{22}] \right) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

□

Observe que, como resultado do procedimento de posicionamento de autovalores e autovetores, resultante da aplicação da proposição 3.6.1, tem-se na base original

$$F = [F_{11} \quad F_{22}] \begin{bmatrix} P_1^T \\ P_2^T \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Então, na base original, a matriz F pode ser vista como a soma de duas matrizes

de realimentação de estados,

$$F = F_1 + F_2,$$

onde,

- $F_1 = F_{11}P_1^T$ posiciona os autovalores finitos de malha fechada, e
- $F_2 = F_{22}P_2^T$ elimina as impulsões e garante a regularidade do sistema.

Apesar do desenvolvimento apresentado nesta seção ter sido obtido a partir da representação do sistema descritor na forma algébrica-diferencial, a proposição pode ser reformulada na base original. A formulação do problema na forma algébrica-diferencial, além de facilitar o desenvolvimento acima, será verificada no próximo capítulo para tratar o problema de estabilização de saídas, cobrindo assim os propósitos deste trabalho.

3.7 Exemplo

Dado o sistema descritor representado pelas matrizes abaixo, como apresentado no capítulo anterior, o problema consiste em se determinar uma matriz de realimentação F tal que o sistema em malha fechada seja regular, estável, livre de impulsões, e que os autovalores finitos do sistema sejam $\{-1, -2, -3\}$.

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.82 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.23 & 0 & 0 \\ 1.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.56 & 0 & 0 & 1.01 \\ 0 & 0 & 1.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.41 & -6.64 & -2.34 \\ 0 & 0 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1.72 & -15.48 & 0 \\ 7. & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Primeiro passo: As matrizes não singulares, Q e P , encontradas que transformam

o sistema na forma algébrica-diferencial são :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.5813953 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.2195122 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o que nos resulta as matrizes:

$$QEP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad QAP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 & 0 & 0 \\ -1.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.01 & 0 & -1.56 & 0 \end{bmatrix}$$

$$QB = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \\ 0.5 & 0 & -2.85 \\ 0 & -8.09 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como já foi visto anteriormente, o sistema é não regular, instável e possui os autovalores finitos posicionados em $\{0, 0, -1.5\}$.

Segundo passo: A matriz de realimentação F_{22} calculada tal que $A_{22} + B_2 F_{22}$ seja não singular é :

$$F_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

o que implica nas matrizes de realimentação:

$$A_{12}(F_{22}) = \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 1. & -1. \\ 2.8536585 & -2.8536585 \end{bmatrix} \quad A_{22}(F_{22}) = \begin{bmatrix} -0.45 & 0.45 \\ -1.56 & 0 \end{bmatrix}$$

e nos garante que o sistema é, neste momento, regular e livre de impulsões.

Terceiro passo: A matriz X solução do sistema $XA_{22}(F_{22}) = A_{12}(F_{22})$ é:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2.2222222 & 0 \\ -6.3414634 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes resultantes da transformação são:

$$A_{11}(F_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.1511628 \\ -2.4444444 & 0 & 0 \\ -6.9756098 & 0 & -1.5 \end{bmatrix} \quad B_1(F_{22}) = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0.5 & -8.097561 & 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores da matriz $A_{11}(F_{22})$ são $\{0, 0, -1.5\}$.

Quarto passo: Aplicando-se o posicionamento de autoestrutura [25] encontra-se a matriz F_{11} tal que os autovalores em malha fechada de $A_{11}(F_{22}) + B_1(F_{22})F_{11}$ estejam nas posições $\{-1, -2, -3\}$:

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 0.2849284 & -0.0228016 & -0.3931591 \\ -0.4674067 & -0.0274957 & -0.0429487 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quinto passo: A matriz de realimentação $F = [F_{11} \ F_{22}]P^T$, na base original, é dada por:

$$F = \begin{bmatrix} -0.2849284 & 0 & 0.3931591 & 0 & -0.0228016 \\ 0.4674067 & 0 & 0.0429487 & 0 & -0.0274957 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtém-se em malha fechada:

$$A + BF = \begin{bmatrix} -3.2204012 & 2.34 & 1.1060161 & -2.34 & 0.1732225 \\ 1.1 & -0.45 & 0 & 0.45 & 0 \\ 0 & 1.56 & 0 & 0 & 1.01 \\ -7.7255328 & 0 & 1.9913884 & 0 & 0.3864141 \\ -1.994499 & 1 & 2.7521136 & -1 & -0.1596110 \end{bmatrix}$$

Pode-se verificar que o par $(E, A+BF)$ possui r autovalores finitos de malha fechada posicionados em $\{-1, -2, -3\}$.

3.8 Conclusões

Apresentou-se, no decorrer deste capítulo, um procedimento geral para a estabilização de sistemas descritores por realimentação de estados, dividido em duas etapas. Este procedimento tem por objetivo obter um sistema em malha fechada regular, livre de impulsões e estável, garantidas algumas condições de estabilizabilidade do sistema.

Na primeira etapa, calcula-se uma realimentação de estados preliminar que torna o sistema regular e livre de impulsões. A partir da representação do sistema na forma algébrica-diferencial, utiliza-se uma representação intermediária que desacopla parcialmente as equações diferenciais do sistema das equações algébricas. O uso desta representação, possibilita reduzir a segunda etapa do algoritmo ao cálculo de uma matriz de realimentação de estados que estabiliza um sistema normal de ordem reduzida, associado às equações diferenciais, ou alocar seus autovalores em posições adequadas do plano complexo a fim de se estabilizar o sistema.

Visto que no procedimento de estabilização de sistemas descritores, proposto recentemente por Varga, estão envolvidas transformações ortogonais como ferramentas para desacoplar o sistema e reduzir a ordem deste, observa-se que o procedimento proposto neste estudo é mais simples e mais econômico, pois consegue reduzir o número de operações de pontos flutuantes envolvidas na estabilização do sistema.

Como extensão dos resultados obtidos neste capítulo, pode-se citar o procedimento em duas etapas para tratar o problema de estabilização de sistemas descritores por realimentação estática das saídas, para uma classe de sistemas tal que a representação algébrica-diferencial possua uma equação de saída com estrutura bloco-diagonal. Este estudo é apresentado no capítulo seguinte, bem como as condições envolvidas na determinação da solução deste problema.

Além disso, pode ser de interesse introduzir nas duas etapas procedimentos que permitam atingir especificações complementares, tais como a minimização dos "saltos" existentes devido a condições iniciais não consistentes ou ao desempenho da entrada de controle e suas derivadas. Estes saltos são descritos com propriedade em [23].

Capítulo 4

Estabilização por Realimentação de Saída

4.1 Introdução

No capítulo anterior, estudou-se o problema de estabilização de sistemas descritores por realimentação de estados. Considerando-se os resultados obtidos, faz-se uma extensão para resolver um problema de estabilização de sistemas descritores por realimentação de saída. Neste caso, os sistemas são também representados na forma algébrica-diferencial, sendo caracterizados pela independência das medidas das variáveis algébricas e das variáveis diferenciais, implicando numa estrutura, *bloco-diagonal*, da equação de saída. Por admitirem este tipo de representação, estes sistemas serão chamados Sistemas Descritores de Medidas Algébricas-Diferenciais Independentes (MADI). Para exemplificar praticamente os Sistemas Descritores MADI, pode-se citar os Sistemas de Potência [16] [12] [10].

Devido à estrutura bloco-diagonal na equação de saída destes sistemas, pode-se resolver o problema de estabilização em duas etapas, como no algoritmo apresentado no capítulo anterior [8] [41], sob a condição do sistema ser fortemente estabilizável e fortemente detectável. A primeira etapa é utilizada para garantir a regularidade do sistema e eliminar as impulsões, e a segunda para posicionar os autovalores instáveis em posições adequadas do plano complexo que tornam o sistema assintoticamente estável. Após a primeira etapa, aplica-se ao sistema uma transformação particular intermediária que reduz a ordem do sistema descritor original, facilitando a estabilização propriamente dita, na segunda etapa do algoritmo.

É importante observar-se que as condições para a resolução de um problema de

realimentação de saída de um Sistema MADI será derivado de algumas condições conhecidas para a solução de um problema geral de estabilização de Sistemas Descritores por realimentação de saída da forma:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4.2)$$

Observe-se que $E = I_n$ no sistema acima, corresponde ao exemplo clássico de sistemas diferenciais, ou sistemas normais. O sistema (4.1) e (4.2) podem ser facilmente colocados na representação algébrica-diferencial, onde a equação de saída não possui, em geral uma estrutura especial. Assim, pode-se mostrar como uma estrutura bloco-diagonal da equação de saída pode ser utilizada para resolver o problema apresentado e como técnicas de estabilização de sistemas normais por realimentação de saídas podem ser utilizadas nestes casos.

Nas duas seções seguintes, apresenta-se alguns resultados conhecidos da teoria de controle de sistemas descritores lineares adaptados para o caso de Sistemas Descritores MADI, e resultados preliminares que garantem a existência da solução do problema de estabilização por realimentação de saída. Na seção 4 apresenta-se um algoritmo em duas etapas para estabilizar esta classe de sistemas e uma discussão que abrange alguns resultados provenientes da utilização deste procedimento. Um destes resultados é considerado na seção 5, utilizando-se posicionamento de autovalores. As duas últimas seções são destinadas para a apresentação de exemplos numéricos e conclusões.

4.2 Apresentação do Problema

Consideremos um sistema descritor representado por um conjunto de equações algébricas e diferenciais da forma:

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde $x_1 \in \mathbb{R}^r$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y_1 \in \mathbb{R}^{p_1}$ e $y_2 \in \mathbb{R}^{p_2}$; I_r é uma matriz identidade de

dimensão r e as outras matrizes envolvidas possuem dimensões apropriadas. Assume-se que $\text{posto}(C_{11}) = p_1$ e $\text{posto}(C_{22}) = p_2$.

A particularidade do sistema (4.3), (4.4) é que as medidas das variáveis algébricas e diferenciais (ou combinações delas) são independentes, como enfatizados pela estrutura da equação de saída (4.4). A lei de controle a ser utilizada é uma realimentação estática da saída, $u(t) = K y(t)$, $K \in \mathfrak{R}^{m \times (p_1 + p_2)}$, que pode ser reescrita como:

$$u(t) = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

onde $K_1 \in \mathfrak{R}^{m \times p_1}$ and $K_2 \in \mathfrak{R}^{m \times p_2}$.

Assim, o sistema em malha fechada é dado por:

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1 K_1 C_{11} & A_{12} + B_1 K_2 C_{22} \\ A_{21} + B_2 K_1 C_{11} & A_{22} + B_2 K_2 C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

e o problema de estabilização de saída de Sistemas Descritores MADI a ser tratado é o seguinte:

Dado um Sistema Descritor MADI (4.3) e (4.4) encontrar uma lei de controle de realimentação estática de saída (4.5) tal que o sistema em malha fechada (4.6) seja regular, livre de impulsões e assintoticamente estável.

4.3 Resultados Preliminares

As proposições seguintes são baseadas nas definições (2.6.2) e (2.6.4), resultados apresentados no capítulo 2 para a controlabilidade e observabilidade aplicados aos sistemas descritores representados na Forma Algébrica-Diferencial (4.1) (4.2). Estes resultados são básicos para a resolução do problema de estabilização por realimentação das saídas de Sistemas Descritores MADI.

Proposição 4.3.1 : *O sistema (4.3) é fortemente estabilizável se, e somente se, as duas condições abaixo são verificadas:*

1.

$$\text{posto} \left(\begin{bmatrix} \lambda I - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ -A_{21} & -A_{22} & B_2 \end{bmatrix} \right) = n, \quad \forall \lambda \in C^+. \quad (4.7)$$

2.

$$\text{posto}([A_{22} \ B_2]) = n - r \quad (4.8)$$

□

As condições para um sistema (4.3), (4.4) ser fortemente detectável são duais das condições (4.7) e (4.8). Em particular, a condição de detectabilidade, dual da condição 1 de estabilizabilidade, se traduzirá em:

$$\text{posto} \left(\begin{bmatrix} \lambda I_r - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} \\ C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} \right) = n \leftrightarrow \text{posto} \left(\begin{bmatrix} \lambda I_r - A_{11} \\ A_{21} \\ C_{11} \end{bmatrix} \right) = r, \quad \forall \lambda \in C^+, \quad (4.9)$$

pois $C_{22} \in \mathbb{R}^{p_2 \times n-r}$ tem, por hipótese, posto igual a p_2 .

Proposição 4.3.2 : *O sistema (4.3) e (4.4) é fortemente detectável se, e somente se, as duas condições abaixo são verificadas:*

1.

$$\text{posto} \left(\begin{bmatrix} \lambda I_r - A_{11} \\ A_{21} \\ C_{11} \end{bmatrix} \right) = r, \quad \forall \lambda \in C^+. \quad (4.10)$$

2.

$$\text{posto} \left(\begin{bmatrix} A_{22} \\ C_{22} \end{bmatrix} \right) = n - r \quad (4.11)$$

4.4 Estabilização de Saída para Sistemas MADI

4.4.1 Estabilização em Duas Etapas

Mostra-se a seguir que, considerando-se o sistema (4.3), (4.4) fortemente estabilizável e fortemente detectável, o problema de Estabilização de Saída de um sistema MADI também pode ser resolvido em duas etapas:

1. Definindo-se

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + v(t) \quad (4.12)$$

tal que $A_{22} + B_2 K_2 C_{22}$ seja não-singular.

2. Definindo-se

$$v(t) = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

tal que os r autovalores finitos de malha fechada sejam assintoticamente estáveis.

Como ressaltado no capítulo anterior, este tipo de procedimento em duas etapas tem sido utilizado em muitos trabalhos para a estabilização de sistemas descritores por realimentação de estados [8] [41]. Assim, os resultados deste capítulo podem ser vistos como uma extensão direta do procedimento para uma classe de Sistemas Descritores MADI.

As condições (4.8) e (4.11) podem ser equivalentemente reescritas como:

$$\text{posto} \left(\begin{bmatrix} \lambda I - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} \right) = n - r, \quad \text{para } \lambda = 0$$

e

$$\text{posto} \left(\begin{bmatrix} \lambda I - A_{22} \\ C_{22} \end{bmatrix} \right) = n - r, \quad \text{para } \lambda = 0$$

Assim, se $\lambda = 0$ é um autovalor de A_{22} , este autovalor é controlável e observável. A partir destas condições, é sempre possível encontrar K_2 tal que $A_{22} + B_2 K_2 C_{22}$ não possua autovalores iguais a zero e seja, portanto, inversível. (ver apêndice A)

Considere o sistema abaixo, obtido pela substituição de (4.12) em (4.3) e (4.4):

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}(K_2) \\ A_{21} & A_{22}(K_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} v(t) \quad (4.14)$$

onde $K_2 \in \mathfrak{R}^{m \times p_2}$ é tal que $A_{22}(K_2) = A_{22} + B_2 K_2 C_{22}$ seja não-singular e $A_{12}(K_2) = A_{12} + B_1 K_2 C_{22}$.

Pré-multiplicando (4.14) por

$$L = \begin{bmatrix} I_r & -A_{12}(K_2)A_{22}^{-1}(K_2) \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

tem-se:

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(K_2) & 0 \\ A_{21} & A_{22}(K_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(K_2) \\ B_2 \end{bmatrix} v(t) \quad (4.16)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{11}(K_2) &= A_{11} - A_{12}(K_2)A_{22}^{-1}(K_2)A_{21} \\ B_1(K_2) &= B_1 - A_{12}(K_2)A_{22}^{-1}(K_2)B_2 \end{aligned}$$

Substituindo $v(t) = [K_1 \ 0] \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ em (4.16) e (4.17) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(K_1, K_2) & 0 \\ A_{21}(K_1) & A_{22}(K_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{21}(K_1) &= A_{21} + B_2 K_1 C_{11} \\ A_{11}(K_1, K_2) &= A_{11}(K_2) + B_1(K_2) K_1 C_{11} \end{aligned}$$

ou ainda

$$A_{11}(K_1, K_2) = (A_{11} - A_{12}(K_2)A_{22}^{-1}(K_2)A_{21}) + (B_1 - A_{12}(K_2)A_{22}^{-1}(K_2)B_2)K_1 C_{11}$$

A partir do Lema 3.4.1, os autovalores finitos de malha fechada são os autovalores de $A_{11}(K_1, K_2)$, onde a matriz K_1 deve estabilizar $A_{11}(K_1, K_2) = A_{11}(K_2) + B_1(K_2)K_1 C_{11}$. De fato, o problema a ser resolvido nesta etapa é a estabilização por realimentação de saída $v(t) = K_1 y_1(t)$ do sistema normal (4.19) e (4.20):

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}(K_2)x_1(t) + B_1(K_2)v(t) \quad (4.19)$$

$$y_1(t) = C_{11}x_1(t) \quad (4.20)$$

As condições de estabilização para o sistema normal são bem conhecidas e estão diretamente relacionadas às propriedades de estabilizabilidade e detectabilidade do sistema. O resultado seguinte mostra que a aplicação de $u(t) = K_2 y_2(t)$ na primeira etapa, que elimina impulsões, implica na estabilizabilidade e detectabilidade do sistema normal (4.19) e (4.20) [6].

Lema 4.4.1 : *Se o sistema (4.3) e (4.4) é fortemente controlável e fortemente observável, então o sistema (4.19), (4.20) é estabilizável e detectável.*

Demonstração: Mostra-se apenas a parte da demonstração relativa à detectabilidade. A demonstração da estabilizabilidade pode ser feita de forma semelhante (veja [20]).

Por hipótese, $K_2 \in \mathfrak{R}^{m \times p_2}$ é tal que $A_{22} + B_2 K_2 C_{22}$ é de posto completo e (4.10) é satisfeita.

A condição de detectabilidade do sistema (4.19) e (4.20) pode ser verificada a partir da verificação do posto da matriz

$$T(\lambda, K_2) = \begin{bmatrix} \lambda I_r - A_{11}(K_2) \\ C_{11} \end{bmatrix}, \quad \forall \lambda \in C^+.$$

Por outro lado, $T(\lambda, K_2)$ pode ser decomposta em

$$T(\lambda, K_2) = \begin{bmatrix} I_r & -A_{12}(K_2)A_{22}^{-1}(K_2) & 0 \\ 0 & 0 & I_{p_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I - A_{11} \\ A_{21} \\ C_{11} \end{bmatrix}$$

A partir da Desigualdade de Sylvester [6] (ver Apêndice B) verifica-se que

$$\text{posto}(T(\lambda, K_2)) = r, \quad \forall \lambda \in C^+.$$

□

4.4.2 Algoritmo de Estabilização

Pode-se resumir a discussão anterior através da apresentação de um algoritmo genérico para a estabilização de sistemas descritores MADI:

- Primeiro Passo : Calcular $K_2 \in \mathfrak{R}^{m \times p_2}$ tal que $A_{22} + B_2 K_2 C_{22}$ seja não singular e obter :

$$\begin{aligned} A_{12}(K_2) &= A_{12} + B_1 K_2 C_{22} \\ A_{22}(K_2) &= A_{22} + B_2 K_2 C_{22} \end{aligned}$$

- Segundo Passo : Encontrar a matriz $X \in \mathfrak{R}^{(n-r) \times r}$ tal que $X A_{22}(K_2) = A_{12}(K_2)$ e fazer

$$\begin{aligned} A_{11}(K_2) &= A_{11} - X A_{21} \\ B_1(K_2) &= B_1 - X B_2 \end{aligned}$$

- Terceiro Passo : Calcular $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times p_1}$ tal que $\sigma(A_{11}(K_2) + B_1(K_2)K_1C_{11}) \in \mathcal{C}^-$ e obter :

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

4.5 Discussão

Neste procedimento, o sistema é suposto fortemente estabilizável e fortemente detectável, o que implica na existência de duas matrizes K_1 e K_2 que garantem a invertibilidade de $A_{22}(K_2)$ e a estabilidade assintótica dos autovalores finitos de malha fechada. No entanto, pelo fato de se tratar de realimentação de saída, a aplicação destas técnicas particulares na primeira e na segunda etapa dependem da estrutura particular das matrizes envolvidas.

O algoritmo em duas etapas descrito acima é similar ao algoritmo apresentado no capítulo anterior e se assemelha a alguns passos apresentados no algoritmo de Varga [41], para a estabilização por realimentação de estados de sistemas descritores gerais da forma (4.16). Em particular, Varga utilizou transformações ortogonais, para colocar o sistema (4.1) na forma (4.3), para eliminar impulsões e colocar o sistema na forma similar (4.16).

Caso fossem utilizadas as transformações de Varga ao invés de (4.15), deveria-se calcular a transformação ortogonal:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

tal que

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12}(K_2) \\ A_{22}(K_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

e como (4.2) deve ser pré-multiplicado por T, teria-se:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}(K_2) \\ A_{21} & A_{22}(K_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(T) & 0 \\ A_{21}(T) & R_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(T) \\ B_2(T) \end{bmatrix}$$

Assim, calculando

$$\begin{aligned} A_{11}(K_2) &= T_{11}A_{11} + T_{12}A_{21} \\ B_1(K_2) &= T_{11}B_1 + T_{12}B_2 \\ E_1 &= T_{11} \end{aligned}$$

teria-se que encontrar, na segunda etapa, K_1 tal que

$$\sigma(E_1, A_{11}(K_2) + B_1(K_2)K_1C_{11}) \in \mathcal{C}^-.$$

É importante notar que a matriz $L = \begin{bmatrix} I_r & -A_{12}(K_2)A_{22}^{-1}(K_2) \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$ utilizada tanto neste capítulo como no anterior, é não ortogonal. No entanto, esta transformação sempre nos permite obter na segunda etapa um problema de estabilização de saída clássico, cuja solução pode ser determinada por inúmeros algoritmos existentes na literatura. Além do mais, o sistema linear de equações

$$XA_{22}(K_2) = A_{12}(K_2) \tag{4.21}$$

pode ser eficientemente resolvido por Eliminação Gaussiana por pivotamento parcial e é razoável pensar que a matriz K_2 na primeira etapa deve ser tal que $A_{22}(K_2)$, além de não-singular, nos permita obter um sistema de equações lineares bem condicionado.

Assim, desde que a solução de (4.21) é única, o par de ordem reduzida $(A_{11} - A_{12}(K_2)A_{22}^{-1}A_{21}, B_1 - A_{12}(K_2)A_{22}^{-1}B_2)$ pode ser obtido pela operação direta em matrizes completas, utilizando-se operações elementares apropriadas entre as colunas [36] [37].

O uso do sistema de ordem completa, ao invés do sistema reduzido na segunda etapa, também pode ser interessante para descrever o uso de procedimentos particulares de estabilização. A próxima seção explora o uso do sistema de ordem completa para mostrar como algumas técnicas de posicionamento de autoestrutura, podem ser aplicadas ao sistema descritor de ordem completa após a eliminação das impulsões.

4.6 Posicionamento de Autoestrutura Finita

Da mesma forma como foi desenvolvido no capítulo anterior para realimentação de estados, nesta seção apresenta-se um algoritmo de posicionamento de autoestrutura finita similar para realimentação das saídas.

Considera-se na segunda etapa, a matriz de realimentação K_1 que posiciona λ_i como um autovalor de $A_{11}(K_2) + B_1(K_2)K_1C_{11}$. Para simplificar a discussão, considere que o par $(A_{11}(K_2), B_1(K_2))$ é controlável e o par $(C_{11}, A_{11}(K_2))$ é observável. Assim, a equação seguinte fornece a ligação entre as matrizes de malha aberta $A_{11}(K_2)$ e $B_1(K_2)$, o autovalor de malha fechada λ_i , o autovetor associado $v_i^1 \in \mathfrak{R}^r$ e o matriz de realimentação K_1 :

$$\left[A_{11}(K_2) - \lambda_i I_r \quad | \quad B_1(K_2) \right] \begin{bmatrix} v_i^1 \\ w_i \end{bmatrix} = 0 \quad (4.22)$$

com

$$w_i = K_1 C_{11} v_i^1 \in \mathfrak{R}^m \quad (4.23)$$

Assim como para realimentação de estados, alguns algoritmos de posicionamento da estrutura autovalor/autovetor por realimentação das saídas consistem na escolha de p_1 triplos (λ_i, v_i^1, w_i) satisfazendo p_1 equações da forma (4.22). Em particular, a partir da escolha de $V_1 = [v_1^1, v_2^1, \dots, v_{p_1}^1]$ tal que $C_{11}V_1$ é não-singular, a matriz K_1 solução da equação

$$K_1 C_{11} \begin{bmatrix} v_1^1 & , v_2^1 & , \dots & , v_{p_1}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & , w_2 & , \dots & , w_{p_1} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

é tal que (λ_i, v_i^1) são os autovalores/autovetores de malha fechada de $A_{11}(K_2) + B_1(K_2)K_1C_{11}$.

Concentrando-se na relação (4.22), a qual descreve, para um dado λ_i , o conjunto de autovetores de malha fechada alocáveis e as direções de entrada associadas, das definições de $A_{11}(K_2)$ e $B_1(K_2)$ tem-se que:

$$\left[A_{11} - A_{12}(K_2)A_{22}^{-1}(K_2)A_{21} - \lambda_i I_r \quad | \quad B_1 - A_{12}(K_2)A_{22}^{-1}(K_2)B_2 \right] \begin{bmatrix} v_i^1 \\ w_i \end{bmatrix} = 0 \quad (4.25)$$

é equivalente a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_{11} - \lambda_i I_r & A_{12}(K_2) & B_1 & \\ \hline & & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_i^1 \\ v_i^2 \\ w_i \end{bmatrix} = 0 \quad (4.26)$$

onde

$$v_i^2 = -A_{22}^{-1}(K_2)A_{21}v_i^1 - A_{22}^{-1}(K_2)B_2w_i \quad (4.27)$$

Esta última relação pode ser reescrita como:

$$A_{22}v_i^2 + A_{21}v_i^1 + B_2w_i = 0$$

e (4.25) pode ser equivalentemente substituído por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_{11} - \lambda_i I_r & A_{12}(K_2) & B_1 & \\ \hline A_{21} & A_{22}(K_2) & B_2 & \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_i^1 \\ v_i^2 \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

O desenvolvimento acima mostra que, dada K_2 , é possível calcular o ganho de estabilização K_1 , para alocar autovalores finitos e autovetores associados, utilizando-se o sistema normal de ordem reduzida, como também o modelo descritor de ordem completa. A utilização do sistema completo pode ser mais atrativa do ponto de vista numérico, principalmente para sistemas de dimensões superiores, onde, em geral, as matrizes correspondentes possuem algumas propriedades de esparsidade, como é o caso dos Sistemas de Potência. A proposição seguinte resume a discussão acima.

Proposição 4.6.1 : *Seja $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times p_2}$ uma matriz tal que $A_{22}(K_2) = A_{22} + B_2K_2C_{22}$ seja não-singular. Então qualquer conjunto alocável*

$$\left(\lambda_i, \begin{bmatrix} v_i^1 \\ v_i^2 \end{bmatrix}, w_i \right)$$

é tal que (4.28) é verificada. Além do mais, se $C_{11} [v_1^1, v_2^1, \dots, v_{p_1}^1]$ é de posto completo e K_1 satisfaz

$$K_1 C_{11} [v_1^1, v_2^1, \dots, v_{p_1}^1] = [w_1, w_2, \dots, w_{p_1}]$$

então

$$\left(\lambda_i, \begin{bmatrix} v_i^1 \\ v_i^2 \end{bmatrix} \right)$$

para $i = 1, 2, \dots, p_1$, são autovalores finitos e os autovetores correspondentes do sistema

em malha fechada

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

□

Observe-se que nesta seção, explora-se apenas um resultado básico relativo ao problema de posicionamento de autoestrutura por realimentação estática de saídas. Em particular, a utilização do resultado acima permite o posicionamento arbitrário de p_1 autovalores finitos. Os $r - p_1$ autovalores restantes são induzidos pela lei de controle utilizada, não havendo garantia de sua estabilidade. Além disso, se $m_1 + p_1 > r$, onde $m_1 = \text{posto}(B_1)$, mostra-se em [4] [5], que é *quase sempre possível* posicionar autovalores escolhendo apropriadamente o autovetor v_{1p_1} na intersecção de alguns subespaços característicos de $(A_{11}(K_2), B_1(K_2), C_{11})$.

Os resultados existentes em posicionamento de autovalores por realimentação de saída neste campo, são em grande número e não é o nosso objetivo aprofundarmos neste tópico. No entanto, é importante ressaltar-se que estas muitas técnicas de posicionamento de autoestrutura existentes para estabilização de sistemas normais por realimentação de saída, podem ser utilizados no contexto apresentado, se considerações apropriadas forem feitas [38].

4.7 Exemplo

Dado o sistema descritor utilizado no capítulo anterior, representado na Forma Algébrica-Diferencial pelas matrizes abaixo, o problema consiste em determinar uma matriz de realimentação das saídas, K , tal que o sistema em malha fechada seja regular, estável, livre de impulsões, e que os autovalores finitos do sistema sejam $\{-1.5+i, -1.5-i, -6.45\}$.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 & 0 & 0 \\ -1.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1 & 0 & -1.56 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \\ 0.5 & 0 & 2.85 \\ 0 & -8.09 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como já foi visto anteriormente, o sistema é não regular, instável e possui os autovalores finitos posicionados em $\{0, 0, -1.5\}$.

Primeiro passo: A matriz de realimentação K_2 calculada tal que $A_{22} + B_2 K_2 C_{22}$ seja não singular é :

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.2113 \\ 0.7560 \\ 0.7560 \end{bmatrix}$$

o que implica nas matrizes de realimentação:

$$A_{12}(K_2) = \begin{bmatrix} 0 & 6.5930 \\ 0 & 1.4791 \\ 0 & 0.1050 \end{bmatrix} \quad A_{22}(K_2) = \begin{bmatrix} 0 & -6.1162 \\ -1.56 & 0 \end{bmatrix}$$

Segundo passo: A matriz X solução do sistema $X A_{22}(K_2) = A_{12}(K_2)$ é:

$$X = \begin{bmatrix} -1.0780 & 0 \\ -0.2418 & 0 \\ -0.01717 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes resultantes da transformação são:

$$A_{11}(K_2) = \begin{bmatrix} -1.1857 & 0 & 1.15 \\ -0.2660 & 0 & 0 \\ -0.0189 & 0 & -1.5 \end{bmatrix} \quad B_1(K_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0.2794 & 0.4851 \\ 7 & -1.9563 & -0.8912 \\ 0.5 & -0.1389 & -2.8423 \end{bmatrix}$$

Terceiro passo: Aplicando-se o posicionamento de autoestrutura encontra-se a matriz K_1 tal que os autovalores em malha fechada de $A_{11}(K_2) + B_1(K_2) K_1 C_{11}$ estejam nas posições $\{-6.45, -1.5+i, -1.5-i\}$:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.4497 & -1.1638 \\ -0.1241 & 0.3216 \\ 1.1352 & -2.1727 \end{bmatrix}$$

e a matriz de realimentação é dada por:

$$K = \begin{bmatrix} 0.4497 & -1.1638 & 0.2113 \\ -0.1241 & 0.3216 & 0.7560 \\ 1.1352 & -2.1727 & 0.0002 \end{bmatrix}$$

Obtém-se em malha fechada:

$$A + BKC = \begin{bmatrix} -1.5665 & 4.0586 & 1.15 & 0 & 6.5931 \\ 2.0128 & -5.9738 & 0 & 0 & 1.4791 \\ -3.0106 & 5.6102 & -1.5 & 0 & 0.1050 \\ -0.4147 & -3.5798 & 0 & 0 & -6.1163 \\ -0 & -1.01 & 0 & -1.56 & 0 \end{bmatrix}$$

Pode-se verificar que o par $(E, A+BKC)$ possui os autovalores finitos de malha fechada posicionados em $\{-6.45, -1.5+i, -1.5-i\}$.

4.8 Conclusões

Explora-se neste capítulo a estrutura de Sistemas Descritores MADI, para apresentar um procedimento genérico em duas etapas, para se resolver o problema de estabilização por realimentação de saída.

Neste capítulo, mostra-se principalmente resultados relativos à segunda etapa, que permite posicionar p_1 autovalores finitos de malha fechada na região de estabilidade do plano complexo. O uso de uma transformação apropriada do sistema possibilita mostrar que os cálculos da segunda etapa correspondem ao cálculo de uma realimentação de saída e um ganho de estabilização para um sistema normal de ordem reduzida.

Inspirando-se em resultados prévios de [20], apresenta-se no Apêndice A um resultado que permite realizar de maneira sistemática a obtenção da matriz de realimentação utilizada na primeira etapa. Esta construção nos fornece mais liberdade na escolha desta matriz. Estes resultados foram apresentados para um sistema de ordem reduzida, no entanto, estes cálculos podem ser feitos em um modelo descritor de ordem completa.

Este procedimento foi desenvolvido através do uso de posicionamento de autoestrutura, entretanto outras técnicas tais como: LMI, Controle Ótimo, Funções de Lyapunov, Controladores H_∞ , Observadores e Transformações de similaridade podem também ser utilizadas para a estabilização de sistemas descritores.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho, apresentou-se um procedimento geral para a resolução de um problema de controle para a estabilização de sistemas descritores por realimentação estática de estados, dividido em duas etapas, com o objetivo de se obter um sistema em malha fechada *regular, livre de impulsões e estável*. Cumpridas estas três especificações para um sistema descritor, podemos garantir a existência da solução do problema de estabilização proposto e um bom desempenho na resposta do sistema.

No algoritmo proposto, calcula-se, na primeira etapa, uma realimentação de estados preliminar que torna o sistema regular e livre de impulsões. Utiliza-se, também, uma representação intermediária que desacopla parcialmente as equações diferenciais das equações algébricas. O uso desta representação possibilita reduzir a segunda etapa do algoritmo ao cálculo de uma matriz de realimentação de estados que estabiliza um sistema normal de ordem reduzida, associado às equações diferenciais, o que significa alocar os autovalores finitos do sistema em malha fechada do sistema reduzido em posições adequadas do plano complexo.

O sistema é representado na *Forma Algébrica-Diferencial*, uma forma equivalente que pode ser obtida por *Decomposição em Valores Singulares*. Esta decomposição foi escolhida por ser mais apropriada para o desenvolvimento dos resultados apresentados e do algoritmo proposto. Nesta forma, o sistema é representado por equações algébricas e equações diferenciais.

Utilizou-se o procedimento de estabilização de sistemas descritores proposto recentemente por Varga, a fim de se estabelecer uma comparação com o algoritmo deste estudo. A metodologia do algoritmo de Varga também é baseado em duas etapas, sendo que ao desacoplar o sistema para estabilizá-lo e reduzi-lo a um sistema de ordem reduzida, ele utiliza transformações ortogonais. Esta é a principal diferença existente

entre os dois procedimentos, sendo que no algoritmo proposto neste trabalho, utiliza-se uma transformação não ortogonal porém mais simples para desacoplar o sistema. O uso desta transformação possibilita reduzir o número de operações de pontos flutuantes envolvidas no cálculo das matrizes de transformação do sistema.

Como uma extensão dos resultados obtidos para a realimentação de estados, foi proposto um algoritmo para a estabilização de sistemas descritores por realimentação estática das saídas, garantindo-se no sistema algumas propriedades de controlabilidade e observabilidade, necessárias para a existência da solução do problema proposto. Este algoritmo é proposto para uma classe de sistemas também representados na *Forma Algébrica-Diferencial*, tal que se possua uma equação de saída com uma estrutura particular, bloco-diagonal, que separa as variáveis algébricas das diferenciais. A esta classe de sistemas chamamos *Sistemas Descritores MADI* e este procedimento pode ser utilizado para a resolução de uma classe de sistemas encontrados em Sistemas de Potência, tendo-se em vista a estrutura dos modelos utilizados nesta área de atuação.

Assim como para o caso de realimentação de estados, na primeira etapa do algoritmo, garante-se um sistema regular e livre de impulsões e na segunda etapa, posiciona-se os autovalores finitos do sistema, obtido após a primeira etapa e a transformação intermediária, em posições adequadas do plano complexo. Para se realizar a etapa de estabilização propriamente dita, ou seja, posicionar os autovalores finitos de malha fechada em posições adequadas do plano complexo, apresentou-se ainda, neste estudo, um procedimento para o posicionamento de autoestrutura finita tanto para realimentação de estados quanto para realimentação das saídas. Este procedimento é baseado na metodologia de posicionamento de autovalor/autovetor desenvolvida por Moore, embora escrito de tal forma que possibilite a utilização do modelo descritor de ordem completa. A utilização do sistema de ordem completa pode ser mais atrativa do ponto de vista numérico, principalmente para sistemas de dimensões superiores.

Neste estudo, utilizou-se o procedimento em duas etapas para estabilização de sistemas descritores. No entanto, na literatura podemos encontrar outras técnicas que estabilizam sistemas descritores e os tornam livres de impulsões, utilizando Funções de Lyapunov [29] [30] [40] [45], Equações de Riccati [2] [18] [45], Transformações de Similaridade [7], Controladores H_∞ [24] [39], Observadores [26] [35] [46], L.M.I [24] e L.Q.R. [2] [18].

A forma que apresenta uma sugestão para a construção da matriz de realimentação de saída, que garante um sistema regular e livre de impulsões encontra-se no *Apêndice A*. Esta forma possibilita mais graus de liberdade na escolha desta matriz através da escolha da matriz arbitrária Δ , resultado este que pode ser utilizado e explorado em trabalhos futuros.

Além disso, pode ser de interesse introduzir nas duas etapas procedimentos que permitam atingir especificações complementares, como a minimização dos "saltos" existentes no caso de condições iniciais não consistentes ou até mesmo entradas de controle que gerem termos impulsivos na resposta do sistema.

Apêndice A

A.1 Determinação de K_2

O resultado a seguir mostra como, sob as condições das definições 2.6.2 e 2.6.4, é possível construir uma realimentação de saídas para que o sistema seja livre de impulsões.

Lema A.1.1 : *Seja*

$$\text{posto}([A_{22} \ B_2]) = \text{posto} \left(\begin{bmatrix} A_{22} \\ C_{22} \end{bmatrix} \right) = n - r,$$

então, existe K_2 , tal que o sistema em malha fechada

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}(K_2) \\ A_{21} & A_{22}(K_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} v(t) \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\begin{aligned} A_{12}(K_2) &= A_{12} + B_1 K_2 C_{22} \\ A_{22}(K_2) &= A_{22} + B_2 K_2 C_{22} \end{aligned}$$

é livre de impulsões.

Prova : Suponha que $\text{posto}([A_{22} \ B_2]) = \text{posto} \left(\begin{bmatrix} A_{22} \\ C_{22} \end{bmatrix} \right) = n - r$. Sejam \bar{Q} e \bar{P} , duas matrizes não singulares, tais que:

$$\bar{Q} A_{22} \bar{P} = \begin{bmatrix} I_z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{Q} B_2 = \begin{bmatrix} B_2^1 \\ B_2^2 \end{bmatrix}$$

$$C_{22} \bar{P} = \begin{bmatrix} C_{22}^1 & C_{22}^2 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{onde } \text{posto}([A_{22}]) = z.$$

Como

$$\text{posto}([A_{22} \ B_2]) = \text{posto}\left(\overline{Q}[A_{22} \ B_2] \begin{bmatrix} \overline{P} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\right) = \text{posto} \begin{bmatrix} I_z & B_2^1 \\ 0 & B_2^2 \end{bmatrix} = n - r,$$

então, $\text{posto}(B_2^2) = n - r - z$.

Além disso, com $B_2^2 \in \mathfrak{R}^{n-r-z \times m}$, então $n - r - z \leq m$, e B_2^2 é de posto completo por linhas.

Do mesmo modo,

$$\text{posto} \left(\begin{bmatrix} A_{22} \\ C_{22} \end{bmatrix} \right) = \text{posto} \left(\begin{bmatrix} \overline{Q} & 0 \\ 0 & I_{p_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{22} \\ C_{22} \end{bmatrix} \overline{P} \right) = \text{posto} \begin{bmatrix} I_z & 0 \\ C_{22}^1 & C_{22}^2 \end{bmatrix} = n - r,$$

então, $\text{posto}(C_{22}^2) = n - r - z$.

Além disso, com $C_{22}^2 \in \mathfrak{R}^{p_2 \times n-r-z}$, então $n - r - z \leq p_2$, e C_{22}^2 é de posto completo por colunas.

Assim, as matrizes $B_2^2 B_2^{2T}$ e $C_{22}^2 C_{22}^{2T}$ são não singulares.

Seja $K_2 = B_2^{2T} \Delta C_{22}^{2T}$, onde $\Delta \in \mathfrak{R}^{(n-r-z) \times (n-r-z)}$ é de posto completo, teremos:

$$A_{22} + B_2 K_2 C_{22} = \overline{Q}^T \begin{bmatrix} I_z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \overline{P}^T + \overline{Q}^T \left(\begin{bmatrix} B_2^1 \\ B_2^2 \end{bmatrix} B_2^{2T} \Delta C_{22}^{2T} \begin{bmatrix} C_{22}^1 & C_{22}^2 \end{bmatrix} \right) \overline{P}^T$$

$$A_{22} + B_2 K_2 C_{22} = \overline{Q}^T \begin{bmatrix} I_z + B_2^1 B_2^{2T} \Delta C_{22}^{2T} C_{22}^1 & B_2^1 B_2^{2T} \Delta C_{22}^{2T} C_{22}^2 \\ B_2^2 B_2^{2T} \Delta C_{22}^{2T} C_{22}^1 & B_2^2 B_2^{2T} \Delta C_{22}^{2T} C_{22}^2 \end{bmatrix} \overline{P}^T$$

Como $B_2^2 B_2^{2T} \Delta C_{22}^{2T} C_{22}^2$ é inversível, a partir de propriedades de determinante de matrizes, temos:

$$|A_{22} + B_2 K_2 C_{22}| = |B_2^2 B_2^{2T} C_{22}^{2T} C_{22}^2| |I_z + B_2^1 B_2^{2T} C_{22}^{2T} C_{22}^1 - [(B_2^1 B_2^{2T} C_{22}^{2T} C_{22}^2) (C_{22}^{2T} C_{22}^2)^{-1} (B_2^2 B_2^{2T})^{-1} B_2^2 B_2^{2T} C_{22}^{2T} C_{22}^1]|$$

$$|A_{22} + B_2 K_2 C_{22}| = |B_2^2 B_2^{2T} C_{22}^{2T} C_{22}^2| |I_z + B_2^1 B_2^{2T} C_{22}^{2T} C_{22}^1 - B_2^1 B_2^{2T} C_{22}^{2T} C_{22}^1|$$

$$|A_{22} + B_2 K_2 C_{22}| = |B_2^2 B_2^{2T} C_{22}^{2T} C_{22}^2| \neq 0$$

Logo, $(A_{22} + B_2 K_2 C_{22})$ é inversível, demonstrando o resultado. \square

O resultado acima é semelhante ao Lema 3.5.1 em [20]. No entanto, a definição da matriz K_2 dada acima coloca mais graus de liberdade na escolha de K_2 através da matriz arbitrária $\Delta \in \mathfrak{R}^{(n-r-z) \times (n-r-z)}$.

No caso de realimentação de estados, teremos $\begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$. Assim,

a matriz $F_{22} = B_2^{2T} \Delta \bar{P}_2$, com Δ singular e \bar{P}_2 definida a partir de $\bar{P} = [\bar{P}_1 \ \bar{P}_2]$, elimina impulsões.

Apêndice B

B.1 Matriz Nilpotente

Neste apêndice apresentaremos a definição de matriz nilpotente.

A matriz nilpotente N representa a autoestrutura infinita relativa do sistema descritor e é definida por:

$$N = \oplus_{i=1}^{\eta} K_i \quad , \quad \eta = \dim N(E)$$

onde K_i é um bloco de Jordan nilpotente de dimensão α_i .

Além disso, $N^\alpha = 0$, e α é o índice de nilpotência de $(sE - A)$. Quando $\alpha = 1$, tem-se $N = 0$.

- Exemplo: Seja $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Para determinarmos o valor do índice de nilpotência utilizaremos o fato de que $N^\alpha = 0$. Desta forma, teremos $\alpha = 3$. N é portanto um bloco de Jordan de terceira ordem, e o autovalor tem multiplicidade maior que um.

B.2 Desigualdade de Sylvester

Através da Desigualdade de Sylvester, é possível estimar o valor do posto de um produto de matrizes. Esta relação é dada por:

$$\text{posto}(A) + \text{posto}(B) - \text{dim.comum}(A, B) \leq \text{posto}(AB) \leq \min(\text{posto}(A), \text{posto}(B)).$$

Referências Bibliográficas

- [1] V.A. Armentano. Eigenvalue placement for generalized linear systems. *Systems and Control Letters*, 4:199–202, June 1984.
- [2] Douglas J. Bender and Alan J. Laub. The linear quadratic optimal regulator for descriptor systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-32(8):672–688, 1997.
- [3] Angelika Bunse-Gerstner, Volker Mehrmann, and Nancy K. Nichols. Regularization of descriptor systems by derivative and proportional state feedback. *Siam J. Matrix Anal. Appl.*, 13(1):46–67, January 1992.
- [4] Calixte Champetier and Jean-François Magni. Analyse et synthèse de lois de commande modales. *La Recherche Aérospatiale*, 6:17–35, Nov./Dec. 1989.
- [5] Calixte Champetier and Jean-François Magni. On eigenstructure assignment by gain output feedback. *Siam J. Control and Optimization*, 29(4):848–865, July 1991.
- [6] C.T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Holt, Rinehart and Winston, 1996.
- [7] D.L. Chu, H.C. Chan, and D.W.C. Ho. A general framework for state feedback pole assignment of singular systems. *INT. J. Control*, 67(2):135–152, 1997.
- [8] D.J. Cobb. Feedback and pole assignment in descriptor systems. *Int. Journal Control*, 33:1135–1146, 1981.
- [9] Joao M. Gomes da Silva Jr. e Eugênio B. Castelan e José Ribeiro Cury. Sobre posicionamento parcial de autoestrutura. In 10^o CBA/ 6^o CLACA, pages 64–69, Rio de Janeiro, Set. 1994.
- [10] F.D. Freitas e A.S. e Silva e A.J.A. Simoes Costa. Design of decentralized controllers for large power systems considering sparsity. *IEEE Trans. on Power Systems*, 12(1):144–152, 1997.

-
- [11] L.R. Fletcher, BSc, and DPhil. Eigenstructure assignment by output feedback in descriptor systems. *IEE Proceedings*, 135(4):302–308, 1988.
- [12] F.D. Freitas, A.S. e Silva, and A.J.A. Simoes Costa. Coordinate setting of stabilizers for synchronous generators and facts devices in power systems. In *CIGRÉ Symposium on Power Electronics in Power Systems*, pages 320–323, Tokyo, May 1995.
- [13] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 1996.
- [14] Zhi-Hong Guan, Yong-Aing Liu, and Xiang-Cai Wen. Decentralized stabilization of singular and time-delay large-scale control systems with impulsive solutions. *IEEE Trans. Autom. Control*, 40(8):1437–1441, August 1995.
- [15] Nicholas J. Higham. *Accuracy and Stability*. Siam, 1996.
- [16] D.J. Hill and I.M.Y. Mareels. Stability theory for differential/algebraic systems with application to power systems. *IEEE Trans. Circuits Systems*, 37(11):1416–1423, 1990.
- [17] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall, 1980.
- [18] Tohru Katayama and Yoshikazu Onuki. Generalized riccati equation and spectral factorization for discrete-time descriptor systems. In *2nd IFAC Workshop on System Structure and Control*, pages 56–59, Prague, September 1997.
- [19] King and Wah E. Chu. A controllability condensed form and a state feedback pole assignment algorithm for descriptor systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 33(4):1650–1655, April 1988.
- [20] L.Dai. *Singular Control System*. Springer-Verlag, 1989.
- [21] W. Leontief. *Studies in the Structure of American Economy*. Oxford Univ. Press, 1953.
- [22] F.L. Lewis. A survey of linear singular systems. *Circuits Systems Signal Process*, 5(1):3–36, 1986.
- [23] W.Q. Liu, W.Y. Yan, and K.L. Teo. On initial instantaneous jumps of singular systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 40(9):1650–1655, 1995.

- [24] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda. h_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach. *Automatica*, 33(4):669–673, 1997.
- [25] B.C. Moore. On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed-loop eigenvalue assignment. *IEEE Trans. Autom. Control*, 21:689–692, 1976.
- [26] P.C. Muller and M. Hou. On the observer design for descriptor systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-38(11):1666–1671, 1993.
- [27] R.W. Newcomb. The semi-state description of nonlinear time variable circuits. *IEEE Trans. Circuits Systems*, 28:62–71, 1981.
- [28] R.W. Newcomb and B. Dziurla. Some circuits and systems applications of semistate theory. *Circuits Systems Signal Process*, 8(3):235–260, 1989.
- [29] David H. Owens. Consistency and liapunov stability of linear descriptor systems: A geometric analysis. *IMA J. of Mathematical Control and Information*, 2:139–151, 1985.
- [30] D.H. Owens and D.L. Debeljkovic. On non-stability of descriptor systems. In *Proc. of 25th Conference on Decision and Control*, pages 2251–2256, Athens-Greece, December 1986.
- [31] D.H. Owens and R.P. Jones. Iterative solution of constrained differential algebraic systems. *Int. Journal Control*, 27(6):957–974, 1978.
- [32] K.S. Ozcaldiran and F.L. Lewis. A geometric approach to eigenstructure assignment for singular systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 32:629–632, 1987.
- [33] K.S. Ozcaldiran and F.L. Lewis. On the regularizability of singular systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 35(10):1156–1160, October 1990.
- [34] P.N. Paraskevopoulos and F.N. Koumboulis. Decoupling and pole assignment in generalized state space systems. *IEE Proceedings-D*, 138(6):547–560, November 1991.
- [35] M.T. Saidahmed. Generalized reduced order observer for singular systems. In *Proc. 28th Midwest Symp. Circuit Syst.*, pages 492–495, August 1985.
- [36] Gilbert Strang. *Linear Algebra and its Applications*. Harcourt Brace Jovanovich, 1988.

- [37] Gilbert Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley Cambridge Press, 1993.
- [38] V.L. Syrmos, C.T. Abdallah, P. Dorato, and K. Grigoriadis. Static output feedback-a survey. *Automatica*, 33(2):125–137, 1997.
- [39] K. Takaba, N. Morihira, and T. Katayama. h_∞ control for descriptor systems - a j-spectral factorization approach. In *Proc. of the 33rd Conference on Decision and Control*, pages 2251–2256, Lake Buena Vista, December 1994.
- [40] K. Takaba, N. Morihira, and T. Katayama. A generalized lyapunov theorem for descriptor systems. *Systems and Control Letters*, 24:49–51, 1995.
- [41] A. Varga. On stabilization methods of descriptor systems. *Systems and Control Letters*, 24:133–138, 1995.
- [42] G.C. Verghese, B.C. Lèvy, and T. Kailath. A general state space for singular systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 26:811–831, 1981.
- [43] E.L. Yip and R.F. Sincovec. Solvability, controllability and observability of continuous descriptor systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 26:702–707, 1981.
- [44] Petr Zagalak and Vladimir Kucera. Eigenstructure assignment in linear descriptor systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 40:144–147, 1995.
- [45] Q.L. Zhang, G.Z. Dai, and J. Lam. Lyapunov equations and riccati equations for descriptor systems. In *Proc. of 35th Conference on Decision and Control*, pages 4262–4263, Kobe-Japan, December 1996.
- [46] Shou-Yuan Zhang. Generalized functional observer. *IEEE Trans. Autom. Control*, 35(6):733–737, June 1990.