

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Sobre a Estabilização por Realimentação de Saída
de Sistemas de Controle Utilizando LMI's

Ilca Maria Ferrari Ghiggi

Florianópolis – SC

1998

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Sobre a Estabilização por Realimentação de Saída
de Sistemas de Controle Utilizando LMI's

Dissertação apresentada ao Curso de
Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica, do Centro de
Ciências Exatas da Universidade Federal
de Santa Catarina, para a Obtenção do
Grau de Mestre em Matemática, com
Área de Concentração em Análise
Aplicada

Ilca Maria Ferrari Ghiggi

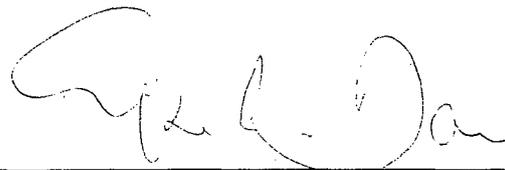
Florianópolis

1998

Sobre a Estabilização por Realimentação de Saída
de Sistemas de Controle Utilizando LMI's

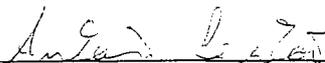
Ilca Maria Ferrari Ghiggi

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de "Mestre", Área de
Concentração em Análise Aplicada, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-
Graduação em Matemática e Computação Científica

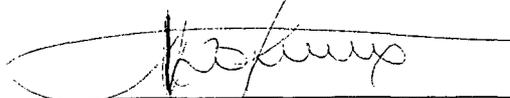


Prof. Dr. Célio Dória
Coordenador

Comissão Examinadora



Prof. Dr. Antonio Leitão
(Orientador - UFSC)



Prof. Dr. Alexandre Trofino
(Membro - UFSC)



Prof. Dr. Geraldo Silva
(Membro - UNESP)



Prof. Dr. Mario Cesar Zambaldi
(Membro - UFSC)

5 de março de 1999

À Emerson.

À Cecília e ao Laurentino

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me feito filha perfeita, capaz e inteligente.

Agradeço aos meus familiares, que sempre deram apoio e compreensão nos momentos difíceis e pelas orações ao meu sucesso, em especial ao meu esposo Emerson, por estar sempre ao meu lado.

Agradeço ao meu orientador Antonio Leitão, por ter confiado em minha capacidade, pelo auxílio e pelas discussões produtivas em torno da minha dissertação. Pela oportunidade de participar do 48º SBA.

Ao Professor Alexandre Trofino, por ter participado como coorientador e ter auxiliado nos assuntos referentes a LMI's.

Aos professores do nivelamento e do mestrado, que deram apoio e condições para que eu pudesse desenvolver minhas potencialidades.

Ao ex-coordenador da pós-graduação Professor Ertzel, por ter me auxiliado no meu ingresso ao mestrado.

A atual coordenação de pós-graduação, bem como a sua secretaria por ter prestado serviços eficientes.

A amiga Maria Elita Pereira, por ter sido uma amiga verdadeira, por ter compartilhado dos momentos difíceis e alegres dessa jornada e pelos momentos de estudos que passamos juntas.

A todos os amigos, que sempre torceram pelo meu sucesso e sempre me incentivaram a continuar minha jornada.

A UNOESC, por ter dado oportunidade de meu afastamento para o mestrado e pelos recursos financeiros oferecidos. Ao Departamento de Ciências Exatas, que continuou a desenvolver o meu trabalho.

A todos que permitiram ao CNPq e a CAPES financiar essa jornada.

SUMÁRIO

NOTAÇÃO	x
RESUMO	xii
ABSTRACT	xiii
INTRODUÇÃO	1
1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA TEORIA DE CONTROLE.....	4
1.1. SISTEMAS DE CONTROLE	4
1.1.1. Forma geral do problema de controle.....	5
1.1.2. Classificação dos sistemas de controle.....	6
1.2. OBSERVABILIDADE	7
1.3. CONTROLABILIDADE	9
1.3.1. Controlabilidade de sistemas discretos.....	11
1.4. ESTABILIDADE DE SISTEMAS AUTÔNOMOS.....	12
1.4.1. Conceitos	13
1.5. ESTABILIDADE SEGUNDO O MÉTODO DE LYAPUNOV.....	15
1.5.1. Função de Lyapunov	15
1.6. EQUAÇÃO MATRICIAL DE LYAPUNOV	17

1.7. ESTABILIDADE PARA SISTEMAS DISCRETOS	19
1.8. DETECTABILIDADE	23
2. DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES	25
2.1. DEFINIÇÃO E UM BREVE HISTÓRICO DAS LMI's	25
2.2. PROPRIEDADES DAS LMI's	28
2.2.1. Linearidade	28
2.1.2. Convexidade	29
2.3. COMPLEMENTO DE SCHUR	29
2.4. LEMAS DA LIMITAÇÃO REAL	31
3. CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA ESTABILIZAÇÃO.....	37
3.1. ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADO	38
3.2. ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA	39
3.3. SISTEMAS DE CONTROLE DISCRETOS	44
3.4. SISTEMAS DE CONTROLE COM INCERTEZAS POLITÓPICAS	47
3.5. PROBLEMA \mathcal{H}_∞	50
3.5.1. Análise do problema \mathcal{H}_∞	51
3.6. PROBLEMA \mathcal{H}_2	53
3.7. PROBLEMA COM PONTO DE OPERAÇÃO DESCONHECIDO	58
3.7.1. Utilização de LMI's para resolver o problema	60
3.7.1.1. Solução do problema auxiliar	61
3.8. PROBLEMA DO OBSERVADOR DINÂMICO	63

3.8.1. Observador Dinâmico.....	63
3.9. CONDIÇÕES NECESSÁRIAS E SUFICIENTES PARA ESTABILIZAÇÃO.....	65
3.9.1. Transformação do espaço estado – análise e suficiência.....	65
CONCLUSÃO	70
BIBLIOGRAFIA.....	72

NOTAÇÃO

A^T	Transposta de A
A^*	Complexa conjugada tranposta de A
A^{-1}	Inversa da matriz A
$A \geq 0$ ($A > 0$)	A é positiva semi-definida (positiva definida)
$\phi(t, t_0)$	Matriz de transição
$\ A\ = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda$	Norma da matriz A
p_A	Polinômio característico da matriz A
$Ke(A)$	Núcleo da matriz A
$tr(A)$	Traço da matriz A
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno
$\ \cdot\ $	Norma Euclidiana
\mathfrak{R}	Espaço dos números reais
\mathfrak{R}^n	Espaço vetorial real de dimensão n
\mathfrak{C}	Espaço dos números complexos

\mathbb{C}^n	Espaço vetorial complexo de dimensão n
$\operatorname{Re}(x)$	Parte real de x
$\operatorname{Im}(x)$	Parte imaginária de x
$L_1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$	Espaço das funções mensuráveis que são Lebesgue integráveis no intervalo $[t_0, t_1]$
$L_p(X)$	Espaço das funções mensuráveis f tal que $ f ^p$ é Lebesgue integráveis em X .
$\dot{x}(t)$	Primeira derivada em relação a variável t
$\nabla v(x)$	Gradiente do vetor v
$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$	Função de transferência $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$
B_δ	Bola de centro zero "0" e raio δ .

RESUMO

Nessa dissertação, é tratado o problema da estabilização de sistemas de controle lineares utilizando a estratégia de controle por realimentação de saída. São investigadas condições tanto suficientes como necessárias e suficientes para garantir a estabilização. Tais condições, são obtidas a partir de uma abordagem via LMI's (Linear Matrix Inequality) da equação matricial de Lyapunov. As condições obtidas são, por fim, aplicadas em diferentes problemas relacionadas à teoria de controle, de onde obtemos uma série de corolários.

ABSTRACT

In this dissertation we analyze the problem of stabilizing linear control systems using output feedback strategy. We investigate sufficient conditions as well as necessary and sufficient conditions to guarantee the system stabilization. Such conditions are obtained using an LMI (Linear Matrix Inequality) approach of the Lyapunov Matrix equation. The developed conditions are also used in some applications related to control theory and we obtain the respective corollaries.

INTRODUÇÃO

Esta dissertação tem como tema a estabilização de sistemas de controle.

O objetivo dessa pesquisa é enunciar condições suficientes, e se possível, necessárias e suficientes para que um sistema de controle seja estabilizável através da realimentação de saída.

Para desenvolver esta dissertação, foi utilizado como ferramenta básica o artigo [16], o qual estudamos e detalhamos. Para isso, foram utilizados livros e artigos que constam na bibliografia.

Esta dissertação consta de três capítulos, onde o primeiro e o segundo fornecem subsídios para entender o terceiro, o qual é o principal capítulo.

No primeiro capítulo, procuramos situar o leitor quanto aos conceitos básicos da teoria de controle, explicando o que é um sistema de controle, quais os tipos de sistemas de controle, quais os tipos de realimentação para um sistema de controle. Qual o significado de observabilidade, controlabilidade, estabilidade de sistemas autônomos, estabilidade segundo o método de Lyapunov, equação matricial de Lyapunov, estabilidade para sistemas discretos e detectabilidade.

Para garantir condições necessárias e suficientes, ou talvez, apenas suficientes, para que um sistema de controle seja estável, utilizamos no terceiro capítulo, inequações matriciais lineares. Fez-se assim necessário, que no segundo capítulo fosse desenvolvida teoria a respeito de LMI's: definição, histórico e as propriedades. Entre as propriedades, as que mais nos interessam são, a convexidade e o complemento de Schur para matrizes de blocos. A fim de trabalhar o problema de controle \mathcal{H}_∞ no terceiro capítulo, demonstramos o lema da limitação real para LMI's, o qual utiliza, em sua demonstração, o lema da limitação real.

No terceiro capítulo, fazemos um estudo sobre estabilização de sistemas de controle por realimentação de estado. Utilizamos para este estudo, a condição de estabilidade segundo Lyapunov, garantindo condições necessárias e suficientes. Na seção 3.2 estudamos a estabilização de sistemas de controle por realimentação de saída. Para isso, também utilizamos a condição de estabilidade segundo Lyapunov, porém obtemos apenas condições suficientes para a estabilização para dois casos: quando o posto da matriz C (matriz da saída) é completo e quando o posto da matriz B (matriz do controle) é completo. O mesmo estudo é feito na seção 3.3, para o caso de sistemas discretos.

Num segundo momento, são desenvolvidas algumas aplicações, que utilizam a estratégia de controle por realimentação de saída. Na seção 3.4, estudamos o problema de controle com incertezas politópicas, isto é, as matrizes (A, C) pertencem a um politopo. Para este tipo de sistema, também são garantidas condições suficientes para estabilização, bem como para o caso de (A, B) pertencer a um politopo. Na seção 3.5, temos uma segunda aplicação: trata-se do problema \mathcal{H}_∞ , o qual procura manter a norma \mathcal{H}_∞ da relação entre a entrada w e a saída z do sistema, abaixo de um certo valor dado. Garantimos assim, condições suficientes para que o problema \mathcal{H}_∞ seja satisfeito.

Na demonstração desse teorema, utilizamos o lema da limitação real para LMI's, desenvolvido no capítulo 2. O mesmo estudo é feito na seção 3.6 para o problema \mathcal{H}_2 , porém queremos minimizar a norma \mathcal{H}_2 da relação entre a entrada w e a saída z do sistema.

Na seção 3.7, é feita uma quarta aplicação são os problemas onde o ponto de equilíbrio $x_e = -A^{-1}Br$ (ponto de operação) é desconhecido. Assim, o problema consiste em encontrar uma lei de controle de realimentação de saída, tal que, x_e seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o sistema. Dessa forma, é elaborado um problema auxiliar e resolvemos para este problema a estabilização. Uma última aplicação, é o problema do observador dinâmico, o qual encontra uma aproximação para o estado, afim de poder escolher o controle. Nesta seção utilizamos o conceito de detectabilidade descrito no capítulo 1.

Todos os teoremas e corolários desenvolvidos nas seções anteriores, garantem apenas condições suficientes para estabilização. Portanto numa última seção, são estudadas condições necessárias e suficientes. Para obter estas condições, faz-se necessário trabalhar com transformações de semelhança, o que implica na perda da convexidade dos problemas. Também para esta aplicação estudamos dois casos: quando o posto da matriz C é completo e quando o posto da matriz B é completo.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA TEORIA DE CONTROLE

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos fundamentais da teoria de controle, dando ênfase ao estudo da questão da observabilidade, controlabilidade, estabilidade e detectabilidade de sistemas lineares. Nosso maior interesse está nos conceitos de controlabilidade e estabilidade, pois tem influência direta nos estudos posteriores.

1.1. SISTEMAS DE CONTROLE

Inicialmente damos uma definição informal para sistema de controle, para isso, faz-se necessário, que antes falemos sobre modelagem matemática.¹

Freqüentemente estamos interessados em explicar matematicamente o funcionamento de certos processos físicos, a fim de fazer previsões sobre como evoluirá o processo após um certo tempo ou até mesmo de influenciá-lo. A essa tradução do processo físico para um sistema matemático, chamamos **modelagem**. Ao executar esta tarefa, encontramos determinados parâmetros e variáveis que representam diretamente a evolução do sistema. À estas variáveis físicas, damos o nome de **estado**.

A fim de influenciar a evolução do sistema, fornecemos um estímulo por meio de uma fonte externa, a qual damos o nome de **entrada do sistema**, com o objetivo de obter uma resposta específica do sistema de controle. A esta resposta, chamamos de **saída do sistema**.

1.1.1. Forma geral do problema de controle

Considere a família de sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias - EDO's, em que um determinado número de variáveis que dependem do tempo $x_1(t) \dots x_n(t)$, podem ser influenciadas por um outro conjunto de variáveis $u_1(t), \dots, u_n(t)$ que podemos escolher da forma que nos for conveniente. Assim a evolução de um sistema de controle é descrita por uma equação do tipo

$$(1.1) \quad \dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t)),$$

¹ As definições feitas para estes conteúdos foram baseadas em [6], [7] e [8].

onde $\dot{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathcal{R}^n$ é denominado vetor de **variáveis de estado** (tais variáveis representam no tempo t as condições as quais se encontram o processo que está sendo modelado) e $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T \in \mathcal{R}^m$ é denominado vetor de **variáveis de controle** do sistema.

O sistema de controle pode ser não autônomo, como é o caso do sistema (1.1), ou autônomo, como é o caso do sistema abaixo:

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)),$$

onde $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathcal{R}^n$ e $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T \in \mathcal{R}^m$.

Supondo que a dinâmica do sistema (1.1) é linear em $x \in \mathcal{R}^n$ e $u \in \mathcal{R}^m$ temos o caso particular:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

onde $A(t) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ e $B(t) \in \mathcal{R}^{n \times m}$, para todo $t \in \mathcal{R}$. Muitas vezes, considera-se ainda que a evolução do sistema pode ser acompanhada através de um vetor $y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t))^T \in \mathcal{R}^p$, que depende do estado x , denominado **saída do sistema**.

Se a função que descreve y em função de x também for linear em x , podemos escrever:

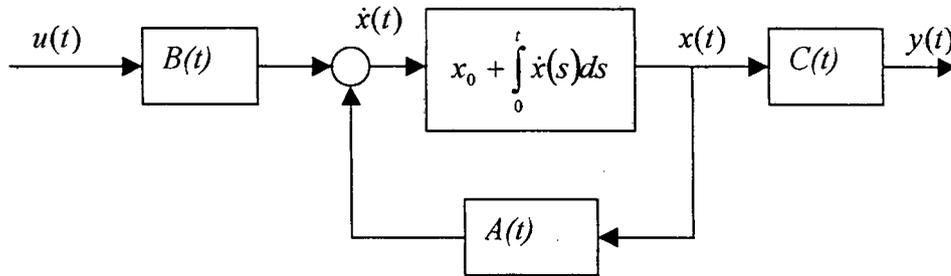
$$y(t) = C(t)x(t),$$

onde $C(t) \in \mathcal{R}^{p \times n}$, para todo $t \in \mathcal{R}$.

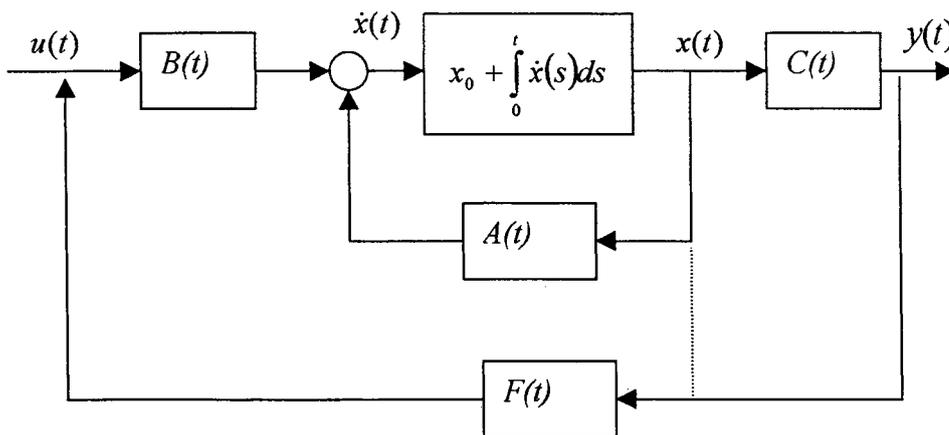
1.1.2. Classificação dos sistemas de controle

Os sistemas de controle são classificados de acordo com a estratégia de controle utilizada:

- a) Sistema de controle de **malha aberta**, é aquele no qual a estratégia de controle u , é escolhida a priori sem considerar a saída do sistema. Observe abaixo o diagrama de blocos do sistema de malha aberta, o qual representa o fluxo de informações realizadas através de cada componente do sistema linear.



- b) Sistema de controle de **malha fechada**, é aquele no qual a estratégia de controle é escolhida de acordo com a saída do sistema. Abaixo segue o diagrama de bloco:



1.2. OBSERVABILIDADE

Considere o sistema de controle:

$$(1.2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases},$$

onde $t \in [t_0, t_1]$, $A(t) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ e $C(t) \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ são consideradas contínuas e $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ é a variável de estado do sistema, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ é o controle exercido sobre o sistema e $y(t) \in \mathfrak{R}^p$ é a saída do sistema. Quando $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ são matrizes constantes, o sistema linear (1.2) é chamado **autônomo** e o representamos por (A, B, C) .

Estamos interessados em saber sob quais condições é possível, a partir do conhecimento da entrada e da saída do sistema, reconstruir o estado inicial $x_0 = x(t_0) \in \mathfrak{R}^n$, pois conhecido x_0 , é possível calcular as variáveis de estado para qualquer tempo $t \in [t_0, t_1]$.

Definição 1.1: Um sistema é observável em $[t_0, t_1]$, quando para toda função $x \in C^1([t_0, t_1], \mathfrak{R}^n)$ a condição

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad C(t)x(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

implicar em $x(t_0) = 0$.

Pode-se dizer também que se o sistema (1.2) é observável, então a aplicação linear

$$G: \mathfrak{R}^n \rightarrow C([t_0, t_1], \mathfrak{R}^n)$$

$$x_0 \rightarrow C(\cdot)\phi(\cdot, t_0)x_0$$

é injetiva. Onde $\phi(\cdot, t_0)$ é a matriz de transição do sistema (1.1).

Nos teoremas a seguir damos condições necessárias e suficientes para que o sistema de controle (1.2) seja observável.

Teorema 1.1: *Seja $P = \int_{t_0}^{t_1} \phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \phi(t, t_0) dt$, onde $\phi^T(\cdot, \cdot)$ é a transposta da matriz de transição, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) *O sistema (1.2) é observável em $[t_0, t_1]$;*
- b) *A matriz P é positiva definida;*
- c) *Os vetores colunas de $C(t)\phi(t, t_0)$ constituem um conjunto linearmente independente.*

Demonstração: Pode ser vista em [13] no capítulo 7.

□□□

Teorema 1.2: *Seja (A, B, C) um sistema autônomo, então (A, B, C) é observável se e*

somente se o posto de Q é n . Com $Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$.

Demonstração: Pode ser vista em [12] no capítulo 7.

□□□

1.3. CONTROLABILIDADE

Saber como e quando um determinado estado pode ser atingido por um sistema a partir da escolha de uma estratégia de controle, é nosso objeto de estudo nesta seção. Assim consideremos o sistema de controle (1.2), com $u \in L_1([t_0, t_1]; \mathfrak{R}^m)$ (espaço das funções mensuráveis que são Lebesgue integráveis no intervalo $[t_0, t_1]$).

Definição 1.2: O sistema (1.2) é dito controlável em $[t_0, t_1]$, quando para todo par de estados $x_0, x_1 \in \mathfrak{R}^n$, existe um controle $u \in L_1([t_0, t_1]; \mathfrak{R}^m)$ de forma que a solução x do problema de valor inicial

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0$$

satisfaz também a condição

$$x(t_1) = x_1.$$

Percebemos pela definição acima, que para avaliar a controlabilidade de um sistema não necessitamos da equação $y(t) = C(t)x(t)$.

Observação 1.1: Quando a função $u \in L_1([t_0, t_1]; \mathfrak{R}^m)$ controla a evolução do estado x a partir do estado inicial $x_0 \in \mathfrak{R}^n$, até o estado final $x_1 \in \mathfrak{R}^n$ através da dinâmica $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, usamos a notação

$$(t_0, x_0) \xrightarrow{u} (t_1, x_1).$$

Os teoremas se que seguem, apresentam condições necessárias e suficientes para que o sistema (1.2) seja controlável.

Teorema 1.3: Seja $M = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, t) B(t) B^T(t) \phi^T(t_1, t) dt$, então as seguintes afirmações

são equivalentes:

- a) O sistema (1.2) é controlável;
- b) A matriz M é definida positiva;
- c) As linhas da matriz $\phi(t_1, t) B(t)$ são linearmente independentes em $[t_0, t_1]$.

Demonstração: Pode ser vista em [13] no capítulo 7. □□□

Teorema 1.4: Seja (A, B, C) um sistema autônomo, então (A, B, C) é controlável se e somente se a matriz $Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ possui posto n .

Demonstração: Pode ser vista em [13] no capítulo 7. □□□

Definição 1.3: Diz-se que um sistema é **controlável ao zero**, se para todo $x_0 \in \mathfrak{R}^n$ existe uma função $u \in L_1([t_0, t_1]; \mathfrak{R}^m)$ satisfazendo:

$$(t_0, x_0) \xrightarrow{u} (t_1, 0).$$

1.3.1. Controlabilidade de sistemas discretos

Considere o sistema de controle discreto autônomo:

$$x_{k-1} = Ax_k + Bu_k, \quad k=0,1,\dots,N-1,$$

onde $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$. Assim como nos sistemas contínuos, dizemos que um sistema discreto é **controlável**, quando para todo par de estados $x_0, x_N \in \mathcal{R}^n$ existe uma estratégia de controle $u = (u_0, \dots, u_{N-1}) \in \mathcal{R}^{m \times N}$ que satisfaz

$$(1.3) \quad \begin{cases} x_{k-1} = Ax_k + Bu_k \\ x_0 = z_0, \quad x_N = z_N \end{cases}, \quad k=0,1,\dots,N-1.$$

Representamos este fato com a notação:

$$(0, z_0) \xrightarrow{u} (N, z_N).$$

Utilizando a fórmula de recorrência em (1.3) temos

$$x_N = A^N x_0 + \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} B u_i,$$

através da qual obtemos

$$x_N - A^N x_0 = S(A, B)u, \quad \text{onde } S(A, B) = [A^{N-1}B \mid \dots \mid AB \mid B];$$

O sistema (1.3) é controlável quando o posto de $S(A, B)$ for igual a n .

1.4. ESTABILIDADE DE SISTEMAS AUTÔNOMOS

A estabilidade de um sistema é determinada pela sua resposta às entradas ou perturbações. Sistemas de controle instáveis, aumentam significativamente pequenos ruídos com o tempo e são os que apresentam maior grau de dificuldade em seu estudo. Consequentemente, testar a estabilidade de sistemas de controle é extremamente importante.

1.4.1. Conceitos

Considere a EDO da forma

$$(1.4) \quad \dot{x} = f(x),$$

com $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, uma função continuamente diferenciável em D . Um ponto $x \in D$ é **ponto de equilíbrio** da EDO se $f(x) = 0$.

As definições abaixo podem ser encontradas em [11] e [12].

Definição 1.4: Suponha que $\bar{x} \in D$ é um ponto de equilíbrio da equação (1.4). Então \bar{x} é um **ponto de equilíbrio estável**, se dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $\|x(0) - \bar{x}\| < \delta$ ² implica que a solução $x(t)$, que inicia em $x(0)$, existe no intervalo $[0, \infty)$ e satisfaz $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ para $0 \leq t < \infty$.

Definição 1.5: \bar{x} é um **ponto de equilíbrio assintoticamente estável**, se existe um $\delta > 0$ tal que $\|x(0) - \bar{x}\| < \delta$ implica que $x(t) \rightarrow \bar{x}$ quando $t \rightarrow \infty$, onde $x(t)$ é a solução do sistema com condição inicial $x(0)$.

² $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana.

No teorema abaixo são discutidas condições necessárias para que um ponto de equilíbrio seja estável.

Teorema 1.5: *Seja f como na equação (1.4). Suponha que $f(\bar{x}) = 0$ e \bar{x} é um ponto de equilíbrio estável. Então os autovalores $df(\bar{x})$ tem parte real não positiva, ou seja $\max\{\text{Re}(\lambda); \lambda \text{ é autovalor de } df(\bar{x})\} \leq 0$.*

Demonstração: Ver [11] capítulo 9.

□□□

Observação 1.2: Para o caso de sistemas do tipo $\dot{x}(t) = Ax(t)$, com $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ constante, temos, do teorema acima, que $\bar{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio estável se os autovalores de A tem parte real não positiva. Ainda para esse sistema, temos que $\bar{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável se $\max\{\text{Re}(\lambda); \lambda \text{ é autovalor de } A\} < 0$, mas nesse caso temos que as soluções convergem exponencialmente para 0 quando $t \rightarrow \infty$. Essa propriedade é denominada **estabilidade exponencial**.

Definição 1.6: Uma matriz A é **estável**, se o ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$, for um ponto de equilíbrio estável para o sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$.³

³ Encontramos também a definição de que ao invés de dizer que a matriz é estável, diz-se que o sistema é estável.

1.5. ESTABILIDADE SEGUNDO O MÉTODO DE LYAPUNOV

Na definição de estabilidade para sistemas lineares autônomos que foi feita em § 1.4.1, os critérios utilizados necessitam da análise dos autovalores e do polinômio característico da matriz A . No entanto, para sistemas de ordem mais elevada, esses cálculos requerem um custo computacional elevado. Sendo assim, torna-se importante a obtenção de um método que não requeira este estudo. Lyapunov, em sua tese de doutorado, em 1892, atacou este problema, encontrando um método direto para determinar a estabilidade. A condição suficiente deste método requer a determinação de uma função escalar v , dita função de Lyapunov. A função v deve tender a um ponto de equilíbrio ao longo da trajetória a medida que o tempo cresce.⁴

1.5.1. Função de Lyapunov

Definição 1.7: Uma função $v: U \rightarrow \mathfrak{R}$, onde U é uma vizinhança de \bar{x} , é denominada **função de Lyapunov** para o sistema $\dot{x} = f(x)$ quando satisfaz:

- a) v é contínua em U e continuamente diferenciável em $U \setminus \{\bar{x}\}$, ou seja, v é continuamente diferenciável para todo $x \in U$ com $x \neq \bar{x}$.
- b) $v(\bar{x}) = 0$, $v(x) > 0$ para todo $x \in U$, $x \neq \bar{x}$;

⁴ Para saber mais sobre a tese de doutorado de Lyapunov veja [9] capítulo 5.

c) $\langle \nabla v(x), f(x) \rangle \leq 0$, para todo $x \in U \setminus \{\bar{x}\}$;⁵

v é denominada **função de Lyapunov estrita** quando em (c) tivermos uma desigualdade estrita.

Observação 1.3: No caso do sistema $\dot{x} = Ax$ temos que uma função $v: U \rightarrow \mathfrak{R}$, onde U é uma vizinhança de \bar{x} , é denominada **função de Lyapunov quadrática**, quando satisfaz:

a) v é da forma $v(x) = \langle x, Px \rangle$, onde P é simétrica positiva definida⁶;

b) $v(0) = 0$, $v(x) > 0$ para todo $x \in U, x \neq 0$;

c) $\langle (A^T P + PA)x, x \rangle \leq 0$

A seguir apresentamos condições suficientes para que \bar{x} seja um ponto de equilíbrio estável ou assintoticamente estável.

Teorema 1.6: *Seja $v: U \rightarrow \mathfrak{R}$, onde U é uma vizinhança de \bar{x} , uma função de Lyapunov para o sistema $\dot{x} = f(x)$. Então \bar{x} é um ponto de equilíbrio estável.*

Demonstração: Pode ser vista em [11] no capítulo 9.

□□□

⁵ Onde $\langle \nabla v(x), f(x) \rangle \leq 0$, significa que o produto interno entre o gradiente da função v e a função f é menor ou igual a zero.

⁶ Uma matriz simétrica real P é positiva definida, ou seja, $P > 0$ se $\langle Px, x \rangle > 0 \forall x \neq 0$.

Corolário 1.1: *Seja $v:U \rightarrow \mathfrak{R}$, onde U é uma vizinhança de \bar{x} , uma função de Lyapunov estrita para o sistema $\dot{x} = f(x)$. Então o ponto de equilíbrio \bar{x} é assintoticamente estável.*

Demonstração: Pode ser vista em [11] no capítulo 9. □□□

Observação 1.4: Dizemos que $\bar{x} = 0$ é ponto **quadraticamente estável**, ou simplesmente estável, do sistema $\dot{x} = Ax$, se $v:U \rightarrow \mathfrak{R}$, onde U é uma vizinhança de 0, for uma função de Lyapunov quadrática para o sistema.

1.6. EQUAÇÃO MATRICIAL DE LYAPUNOV

A fim de garantir a estabilidade do sistema linear $\dot{x}(t) = Ax(t)$, estuda-se a **equação matricial de Lyapunov** descrita por $A^T P + PA = -I$, da qual podemos deduzir condições necessárias e suficientes para que o sistema seja estável. Para isso vemos o lema 1.1 e o teorema 1.7. a seguir.

Lema 1.1: *Sejam U, V e $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$. Se U e V são matrizes estáveis, então a única solução da equação matricial $UX + XV + W = 0$ que é dada por $X = \int_0^{\infty} e^{tU} W e^{tV} dt$, com*

$X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ também será uma matriz estável.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, da hipótese de U e $V \in \mathcal{H}^{n \times n}$ serem matrizes estáveis, existem constantes $c \geq 0$ e $\beta > 0$ tais que $\|e^{tU}\| \leq ce^{-\beta t}$, $\|e^{tV}\| \leq ce^{-\beta t}$, $t \geq 0$.

$$\|e^{tX}\| = \left\| e^{\int_0^t e^{UW} e^{VW} dt} \right\| \leq e^{\int_0^t \|e^{UW} e^{VW}\| dt} \leq e^{\int_0^t c^2 e^{-2\beta t} dt} = e^{c^2 \frac{1}{2\beta} \|W\|}.$$

Logo X é estável.

Note que para $T > 0$ temos

$$\begin{aligned} e^{tU} W e^{tV} - W &= \int_0^t \frac{d}{dt} (e^{tU} W e^{tV}) dt = \\ &= \int_0^t (U e^{tU} W e^{tV} + e^{tU} W V e^{tV}) dt = \int_0^t (U e^{tU} W e^{tV} + e^{tU} W e^{tV} V) dt \end{aligned}$$

Passado ao limite quando $T \rightarrow \infty$ obtemos

$$-W = UX + XV \text{ para } X = \int_0^\infty e^{tU} W e^{tV} dt.$$

Suponha que X_1 e X_2 sejam ambas soluções de $UX + XV + W = 0$ e defina

$\bar{X} := X_1 - X_2$. Logo \bar{X} é solução de

$$U\bar{X} + \bar{X}V = 0.$$

Temos então

$$\bar{X} = \int_0^\infty e^{tU} 0 e^{tV} dt$$

e portanto

$$X_1 = X_2.$$

Provando assim a unicidade de solução. □□□

Teorema 1.7: Seja $A \in \mathcal{H}^{n \times n}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) A é uma matriz estável;

b) Existe uma matriz positiva definida $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ tal que $A^T P + PA = -I$.

Demonstração: Como A é estável, a existência da matriz P decorre do Lema 1.1, com

$$U = A^T, V = A \text{ e } X = P.$$

Reciprocamente, se P satisfaz a equação $A^T P + PA = -I$, definamos

$$v(x) := \langle x, Px \rangle, x \in \mathcal{R}^n.$$

Temos então que a função diferenciável v satisfaz $v(0) = 0$, $v(x) > 0$, $\forall x \neq 0$ e ainda

$$\begin{aligned} \langle \nabla v(x), Ax \rangle &= \langle Px + P^T x, Ax \rangle = \langle A^T Px, x \rangle + \langle x, PAx \rangle = \\ &= \langle (A^T P + PA)x, x \rangle = -\langle x, x \rangle. \end{aligned}$$

Isto é, v é uma função de Lyapunov estrita. Logo, pelo Corolário 1.1, $\bar{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Pela Definição 1.6, A é estável. $\square\square\square$

1.7. ESTABILIDADE PARA SISTEMAS DISCRETOS

Fazemos aqui uma análise semelhante a apresentada em 1.6 para os sistemas do tipo:

$$(1.5) \quad x_{k+1} = Ax_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

onde $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ e $x_k \in \mathcal{R}^n$.

Definição 1.8: O ponto de equilíbrio \bar{x} do sistema (1.5) é denominado **estável**, quando dado $\delta > 0$ para todo $x_0 \in B_\delta$ ⁷ temos $x_k \in B_\delta$, $k = 1, 2, \dots$.

Definição 1.9: O ponto de equilíbrio \bar{x} do sistema (1.5) é denominado **atrativo**, quando para todo $x_0 \in \mathcal{R}^n$ temos $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$.

Podemos perceber que se \bar{x} é atrativo, então também é estável. No próximo teorema damos condições necessárias e suficientes para a estabilidade do sistema (1.5).

Teorema 1.8: *Dado o sistema linear discreto (1.5) as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) O ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$ é atrativo;
- b) O operador A considerado como elemento do espaço $L_1(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^n)$ é contrativo, isto é:

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathcal{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < 1.$$

Demonstração: Suponha que $\bar{x} = 0$ é ponto de equilíbrio atrativo, então $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = 0$.

Seja λ um autovalor de A e x_0 o respectivo autovetor. Logo $x_k = A^k x_0 = \lambda^k x_0$. Portanto

⁷ B_δ significa Bola de centro zero e raio δ .

$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda^k x_0\| = 0$, o que implica que $|\lambda| < 1$. Como λ é arbitrário, temos que $\|A\| < 1$, pois

$$\|A\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda, \text{ que é equivalente a } \|A\| := \sup_{x \in \mathfrak{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \quad \square \square \square$$

No teorema acima, caso \bar{x} seja estável, temos $\|A\| \leq 1$.

Definição 1.10: Uma função $v: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ é denominada função de Lyapunov quadrática para o sistema (1.5), quando satisfaz:

- a) v é da forma: $v(x) = \langle x, Px \rangle$, onde P é simétrica positiva definida;
- b) $v(Ax) < v(x)$ para todo $x \in \mathfrak{R}^n \setminus \{0\}$.

Segue abaixo uma condição suficiente para que o sistema (1.5) seja estável.

Lema 1.2: *Seja v uma função de Lyapunov quadrática para o sistema (1.5). Então o ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$ é atrativo.*

Demonstração: Seja λ um autovalor de A e x o respectivo autovetor. Por hipótese v é uma função de Lyapunov. Assim

$$|\lambda|^2 \langle x, Px \rangle = \langle Ax, PAx \rangle < \langle x, Px \rangle,$$

logo $|\lambda| < 1$. Como λ é arbitrário, pelo Teorema 1.8, $\bar{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio atrativo. □□□

Do Lema 1.2 obtemos para os sistemas discretos um resultado análogo ao Teorema 1.7.

Teorema 1.9: *O ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$ do sistema (1.5) é atrativo se e somente se existe uma matriz positiva definida P tal que $A^T P A - P < 0$.*

Demonstração: Suponha que $\bar{x} = 0$ é ponto de equilíbrio atrativo do sistema. Seja λ um autovalor de A , x_0 seu respectivo autovetor e P uma matriz positiva definida. Assim

$$\langle P A x_0, A x_0 \rangle - \langle P x_0, x_0 \rangle = |\lambda|^2 \langle P x_0, x_0 \rangle - \langle P x_0, x_0 \rangle,$$

do Teorema 1.8 temos que $\|A\| < 1$, ou seja, $|\lambda| < 1$.

Logo

$$\langle P A x_0, A x_0 \rangle - \langle P x_0, x_0 \rangle < 0.$$

Como λ é arbitrário,

$$A^T P A - P \text{ é definida negativa.}$$

Reciprocamente, se $A^T P A - P < 0$, basta observar que $v(x) := \langle x, P x \rangle$ define uma função de Lyapunov quadrática para o sistema. □□□

Corolário 1.2: *Se o ponto de equilíbrio \bar{x} do sistema (1.5) é atrativo, então existe uma função de Lyapunov quadrática para o sistema.*

□□□

1.8. DETECTABILIDADE

Consideremos a aplicação $G: \mathcal{R}^n \rightarrow C([t_0, t_1], \mathcal{R}^n)$

$$x_0 \rightarrow Ce^{A(t-t_0)}x_0$$

Definição 1.11: O núcleo da aplicação G é denominado **subespaço não observável** do sistema (1.2).⁸

Seja p_A o polinômio característico da matriz A , considere a decomposição

$$p_A(\lambda) = p^+(\lambda)p^-(\lambda),$$

onde os polinômios p^+ e p^- são escolhidos de forma a possuírem raízes respectivamente em $\{\lambda \in \mathcal{C} / \text{Re}(\lambda) \geq 0\}$ e $\{\lambda \in \mathcal{C} / \text{Re}(\lambda) < 0\}$.

Definimos assim os espaços

$$(1.6) \quad X^+(A) := Ke(p^+(A)) \text{ e } X^-(A) := Ke(p^-(A)),$$

onde $Ke(p^-(A))$ é o núcleo da matriz $p^-(A)$.

Definição 1.12: Seja (A, C) um sistema autônomo, N seu subespaço não observável e $X^+(A)$, $X^-(A)$ definidos como em (1.6). O sistema (A, C) é denominado **detectável** quando $N \subset X^-(A)$.

⁸ A teoria de subespaço não observável pode ser vista em [1] e [14].

Teorema 1.10: Dadas $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $C \in \mathcal{R}^{p \times n}$ são equivalentes as afirmações:

- a) (A, C) é detectável;
- b) Se $v \in \mathcal{C}^n$ é autovetor de A e seu autovalor λ satisfaz $\text{Re}(\lambda) \geq 0$, então $Cv \neq 0$;
- c) (A^T, C^T) é estabilizável;
- d) Existe $L \in \mathcal{R}^{n \times l}$ tal que a matriz $(A + LC)$ é estável.

Demonstração: Ver em [14] capítulo 5.

□□□

CAPÍTULO 2

DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES (LMI's)

Neste capítulo, damos a definição de LMI, ferramenta que será utilizada no próximo capítulo e analisamos suas principais propriedades. Fazemos um estudo do complemento de Schur, o que requer análise do algoritmo de Gauss generalizado. Na terceira seção, apresentamos o teorema da limitação real. Tal resultado é necessário para a demonstração do

Teorema 3.1, que representa um dos principais resultados analisados nesta dissertação.

2.1. DEFINIÇÃO E UM BREVE HISTÓRICO DAS LMI's

Uma desigualdade matricial linear (LMI) é uma inequação da seguinte forma:

$$(2.1) \quad F(x) \stackrel{\Delta}{=} F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0,$$

onde $x \in \mathcal{R}^m$ é a variável e $F_i = F_i^T \in \mathcal{R}^{n \times n}$ para $i = 0, \dots, m$, são matrizes simétricas constantes. $F(x) > 0$ significa que $F(x)$ é positiva definida.

No capítulo 1, vimos uma condição necessária formulada por Lyapunov sobre a estabilidade de um sistema linear. Trata-se da existência de uma matriz $P > 0$ tal que

$$(2.2) \quad A^T P + PA < 0.$$

Suponha que A e $P \in \mathcal{R}^{2 \times 2}$. Assim

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} < 0,$$

podemos escrever essa desigualdade como:

$$p_{11} \begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{bmatrix} + p_{12} \begin{bmatrix} 2a_{21} & a_{11} + a_{22} \\ a_{11} + a_{22} & 2a_{12} \end{bmatrix} + p_{22} \begin{bmatrix} 0 & a_{21} \\ a_{21} & 2a_{22} \end{bmatrix} < 0,$$

fazendo uma comparação com a inequação (2.1), podemos perceber que se trata de uma LMI. De fato trata-se da mais antiga e famosa LMI. De acordo com Lyapunov (veja capítulo 1) a inequação (2.2) possui solução $P > 0$ se dada qualquer matriz $Q > 0$ for possível resolver a equação $A^T P + PA + Q = 0$.

O próximo acontecimento histórico, muito importante após a contribuição de Lyapunov, ocorreu em 1940. Lur'e, Postnikov e outros pesquisadores aplicaram o método de Lyapunov para alguns problemas práticos na engenharia de controle,

especialmente em problemas de estabilidade de sistemas de controle com uma não linearidade em seu funcionamento. Através deles não explicitou-se a forma de desigualdades matriciais (seus critérios de estabilidade, de fato tem a forma de uma LMI). Estas desigualdades eram reduzidas para desigualdades polinomiais, as quais eram checadas manualmente.

A próxima descoberta importante surge pouco antes de 1960, quando Yakubovick, Popov, Kalman e outros pesquisadores conseguiram reduzir a solução da LMI, que surgiu no problema de Lur'e, para simples critério gráfico, usando o que podemos chamar de Lema de Kalman-Yakubovick-Popov (KYP). Este resultado esta no critério de Popov, critério do Círculo, critério de Tsytkin e muitas variações.¹

O lema de KYP e extensões são estudados intensamente na outra metade de 1960. São encontradas as idéias de passividade e critério de pequeno ganho por Zames e Sandberg; também é encontrada a idéia de controle de otimização quadrática. Em meados de 1970, eles perceberam que a LMI do lema de KYP pode ser resolvida não somente pelo método do gráfico, mas também pela solução da equação algébrica de Riccati. A dificuldade na solução da LMI's foi notada por Anderson e Vognitlerd.

O próximo acontecimento importante ocorreu em 1971 com Willems, que através de uma simples observação percebe que as LIM's, por serem convexas, tem vantagens em relação as equações algébricas na utilização de métodos computacionais. Pyatnitskii e Skorodinskii foram os primeiros pesquisadores a explicitar claramente e completamente essa questão. Eles reduziram o problema original de Lur'e para um

¹ Para saber sobre estes critérios veja [4].

problema de otimização convexa envolvendo LMI's, os quais eles resolviam utilizando o algoritmo do elipsoide.

Em 1984, N. Karmakar introduziu um novo algoritmo de programação linear que resolve problemas lineares em tempo-polinomial. Então em 1988, Nesterov e Nemirovskii desenvolveram métodos de pontos interiores que são aplicados diretamente em problemas convexos envolvendo LMI's, em particular, para problemas encontrados em teoria de controle. Este método resolve problemas utilizando LMI's em um espaço de tempo bem mais curto que os métodos que surgiram anteriormente.²

2.2. PROPRIEDADES DAS LMI's

2.2.1. Linearidade

Apesar do nome desigualdade linear, note que a inequação $F(x) > 0$ em (2.1) não é linear em x . Na verdade exigimos que os autovalores de $F(x)$ sejam positivos.

Observando a função $F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i$, percebemos facilmente que trata-se de uma

função afim em x . Portanto $F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0$ é na verdade uma Inequação

Matricial Afim, apesar de na literatura ser conhecida como LMI. A convexidade da restrição (2.1) é analisada no próximo item.

2.2.2. Convexidade

Sejam $x, y \in \mathfrak{R}^n$, tais que:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \text{ e } F(y) = F_0 + \sum_{i=1}^m y_i F_i > 0,$$

dado $\lambda \in [0,1]$ tome a combinação linear convexa $\lambda x + (1 - \lambda)y$. Então:

$$\begin{aligned} F(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= F_0 + \sum_{i=1}^m (\lambda x + (1 - \lambda)y)_i F_i = F_0 + \lambda \sum_{i=1}^m x_i F_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m y_i F_i = \\ &= F_0 + \lambda F_0 - \lambda F_0 + \lambda \sum_{i=1}^m x_i F_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m y_i F_i = \\ &= (1 - \lambda) F_0 + \lambda F_0 + \lambda \sum_{i=1}^m x_i F_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m y_i F_i = \\ &= (1 - \lambda) \left[F_0 + \sum_{i=1}^m y_i F_i \right] + \lambda \left[F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \right] > 0. \end{aligned}$$

Portanto $\lambda x + (1 - \lambda)y$ também é solução da inequação. Implicando que o conjunto solução da LMI (2.1) é convexo.

Observação 2.1: Usaremos a denominação que $F(x) > 0$ é **uma LMI convexa** ao invés de dizer que $F(x) > 0$ possui conjunto solução convexo.

2.3. COMPLEMENTO DE SCHUR

² Para saber sobre a história das LMI's na teoria de controle veja [3].

Definição 2.1: Dada a matriz $A \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$, com $a_{11} \neq 0$, utilizando o método de Gauss para

diagonalizar a matriz A obtemos $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 0 & a_{22} - a_{12} \frac{a_{21}}{a_{11}} \end{bmatrix}$. Ao elemento $a_{22} - a_{12} \frac{a_{21}}{a_{11}}$, dá-se

o nome de **Complemento de Schur**.

Caso A seja uma matriz de blocos com A_{11} não singular, o complemento de Schur é analogamente dado por $A_{22} - A_{12} A_{11}^{-1} A_{21}$, onde A_{11}^{-1} é a inversa da matriz A_{11} .

Enunciemos assim o teorema a seguir, o qual fornece condições necessárias e suficientes para que uma matriz seja positiva definida.

Teorema 2.1: *Seja $A = (A_{ij})$ para $1 \leq i, j \leq p$ uma matriz simétrica, onde $A_{ij} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e seja $B = (B_{ij})$ a matriz gerada a partir de A pelo algoritmo generalizado de Gauss, onde $B_{ij} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$. Então A é positiva definida se e somente se B_{ii} o for para $i = 1, \dots, p$.*

Demonstração: Seja $A = (A_{ij})_{i,j=1}^p$ uma matriz de blocos simétrica, onde $A_{ij} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e seja

$B = (B_{ij})_{j \geq i=1}^p$ a matriz de blocos triangular superior obtida a partir do algoritmo de Gauss

generalizado, então aplicando o método de Gauss para a matriz B , obtemos os pivôs da

matriz A ; mas estes também são os pivôs da matriz $B = (B_{ii})_{i=1}^p$. Logo A é positiva

definida se e somente se $(B_{ii})_{i=1}^p$ é positiva definida. □□□

Corolário 2.1: Seja $H = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}$; então H é positiva definida se e somente se $A > 0$ e $D - BA^{-1}B^T > 0$.

Demonstração: Segue diretamente do teorema 2.1. □□□

Observação 2.2: Exigir que $A > 0$ e $D - BA^{-1}B^T > 0$, é o mesmo que exigir que $A > 0$ e o complemento de Schur de \tilde{H} seja positivo definido, onde $\tilde{H} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - BA^{-1}B^T \end{bmatrix}$ é a matriz resultante da aplicação do algoritmo de Gauss generalizado à H .

2.4. LEMAS DA LIMITAÇÃO REAL

A fim de demonstrar o teorema 3.5 no capítulo seguinte, analisamos nesta seção o teorema da limitação real para LMI's, o qual utiliza em sua demonstração o teorema da limitação real, sendo este, apenas enunciado .

Para isso calculamos a transformada de Laplace do sistema:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ z = Cx + Du \end{cases}$$

Assim

$$\begin{cases} L(\dot{x}) = L(Ax + Bu) \\ L(z) = L(Cx + Du) \end{cases}$$

Definindo $L(x) := X$, $L(u) := U$ e $L(z) := Z$, temos

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Z(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}, \quad \forall s \in \mathcal{C}$$

$$\begin{cases} (sI - A)X(s) = x(0) + BU(s) \\ Z(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}, \quad \forall s \in \mathcal{C}$$

$$Z(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + HU(s)$$

onde $H := C(sI - A)^{-1}B + D$, é a função de transferência associada ao sistema (2.3).

A norma infinita da função de transferência é dada por:

$$\|H\|_{\infty} = \sup_u \frac{\|H(u)\|_2}{\|u\|_2}.$$

Isto é o quociente entre as $\|\cdot\|_2$ da saída e entrada do sistema.

Lema 2.1: *Suponha A estável e seja H a matriz definida como acima. Dado $\gamma > 0$, são equivalentes as afirmações:*

i) $\|H\|_{\infty} < \gamma$

ii) $\gamma^2 I - D^T D > 0$ e existe uma única matriz P tal que

$$(2.4) \quad PA + A^T P + [PB + C^T D](\gamma^2 I - D^T D)^{-1}[D^T C + B^T P] + C^T C = 0$$

com $A + B(\gamma^2 I - D^T D)^{-1}[D^T C + B^T P]$ estável.

Demonstração: Pode ser encontrada em [15].

□□□

Lema 2.2: Suponha H como acima e suponha que $\gamma \in \mathcal{R}$ é tal que $\gamma > 0$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\|H\|_\infty < \gamma$ e A é estável.

ii) A é estável, $\gamma^2 I - D^T D > 0$ e existe uma única matriz P tal que

$$(2.5) \quad PA + A^T P + [PB + C^T D](\gamma^2 I - D^T D)^{-1}[D^T C + B^T P] + C^T C = 0,$$

com $A + B(\gamma^2 I - D^T D)^{-1}[D^T C + B^T P]$ estável.

iii) Existe uma solução $X > 0$ para a inequação algébrica de Riccati.

$$XA + A^T X + [XB + C^T D](\gamma^2 I - D^T D)^{-1}[D^T C + B^T X] + C^T C < 0.$$

iv) Existe um $X > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \text{ além disso, neste caso } X > P \geq 0.$$

Demonstração:

(i) \Leftrightarrow (ii) Segue do Lema 2.1.

(i) \Leftrightarrow (iii) Se $\|H\|_\infty < \gamma$ então pela continuidade, para alguma matriz R não

singular suficientemente pequena, temos que:

$$T(s) := \begin{bmatrix} H(s) \\ R(sI - A)^{-1} B \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \\ R & 0 \end{bmatrix}, \text{ onde } T(s) \text{ é a função de transferência e}$$

satisfaz $\|T\|_\infty < \gamma$. Pelo item (ii) existe uma solução X para a equação de Riccati

associada com T .

$$(2.6) \quad XA + A^T X + [XB + C^T D](\gamma^2 I - D^T D)^{-1}[D^T C + B^T X] + C^T C + R^T R = 0.$$

Comparando a equação de Riccati associada com T e associada com H , percebemos que elas diferem apenas de um termo não singular $R^T R$ o qual é positivo definido. Logo

$$(2.7) \quad XA + A^T X + [XB + C^T D](\gamma^2 I - D^T D)^{-1}[D^T C + B^T X] + C^T C < 0.$$

Reciprocamente, se a desigualdade (2.7) acontece para um $X > 0$, então existe uma matriz não singular R tal que (2.6) acontece, pelo lema da limitação real

temos que $\|T\|_\infty < \gamma \Rightarrow \left\| \begin{bmatrix} H(s) \\ R(sI - A)^{-1}B \end{bmatrix} \right\| < \gamma$. Assim, podemos concluir que $\|H\|_\infty < \gamma$.

A estabilidade de A é implicada por X ser positiva definida;

De fato,

$$\text{defina} \quad Q = [XB + C^T D](\gamma^2 I - D^T D)^{-1}[D^T C + B^T X] + C^T C + R^T R.$$

Desde que R é não singular nós temos que $Q \geq R^T R > 0$. Da teoria de Lyapunov segue que A é estável se $X > 0$.

(iii) \Leftrightarrow (iv) O complemento de Schur aplicado em

$$\left[\begin{array}{cc|c} A^T X + XA & XB & C^T \\ \hline B^T X & -\gamma^2 I & D^T \\ \hline C & D & -I \end{array} \right] < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T X + XA & XB \\ B^T X & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C^T C & XB + C^T D \\ B^T X + D^T C & -\gamma^2 I + D^T D \end{bmatrix} < 0.$$

Novamente pelo complemento de Schur, se e somente se:

$$A^T X + XA + C^T C + [XB + C^T D](\gamma^2 I - D^T D)^{-1}[B^T X + D^T C] < 0$$

Falta mostrar que para algum X que satisfaça a desigualdade acima nós temos $X > P$.

Dado X defina $S := X - P$ e subtraímos (2.5) de (2.6). Assim:

$$\left\{ \begin{aligned} &XA + A^T X + [XB + C^T D](\gamma^2 I - D^T D)^{-1} [D^T C + B^T X] + C^T C + R^T R \} - \\ &\{ PA + A^T P + [PB + C^T D](\gamma^2 I - D^T D)^{-1} [D^T C + B^T P] + C^T C \} = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} &(X - P)A + A^T (X - P) + XB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} D^T C + XB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T X + \\ &C^T D(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} D^T C + C^T D(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T X - PB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} D^T C \\ &- PB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T P - C^T D(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} D^T C - C^T D(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T P + R^T R = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(X - P)A + A^T (X - P) + (X - P)B(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} D^T C + XB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T X + \\ &C^T D(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} D^T C + C^T D(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T (X - P) - PB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T P + R^T R = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(X - P)A + A^T (X - P) + (X - P)B(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} D^T C + C^T D(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T (X - P) + \\ &XB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T X - PB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T P + XB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T P - \\ &XB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T P + C^T D(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} D^T C + R^T R = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(X - P)A + A^T (X - P) + (X - P)B(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} (D^T C + B^T P) + \\ &+ C^T D(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T (X - P) + XB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T (X - P) + \\ &XB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T (X - P) + R^T R = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(X - P)A + A^T (X - P) + (X - P)B(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} (D^T C + B^T P) + \\ &+ C^T D(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T (X - P) + PB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T (X - P) \\ &- PB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T (X - P) + XB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T (X - P) + \\ &XB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T (X - P) + R^T R = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(X - P)A + A^T (X - P) + (X - P)B(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} (D^T C + B^T P) + \\ &+ (C^T D + PB)(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T (X - P) + (X - P)(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T (X - P) + R^T R = 0 \end{aligned}$$

$$(X - P)\{A + B(\gamma^2 I - D^T D)^{-1}(D^T C + B^T P)\} + \{A^T + (C^T D + PB)(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T\}(X - P) + (X - P)B(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T (X - P) + R^T R = 0$$

Como $X - P = S$ e chamando $A + B(\gamma^2 I - D^T D)^{-1}(D^T C + B^T P) =: A_p$ que é estável pelo item (ii).

Assim

$$SA_p + A_p^T S + SB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T S + R^T R = 0$$

$$SB(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} B^T S \geq 0 \text{ pois } (\gamma^2 I - D^T D)^{-1} > 0 \text{ por (ii).}$$

Como $R^T R$ é positivo definido pela teoria de Lyapunov (Teorema 1.7 – Capítulo 1)

temos que $S = X - P > 0$ ie, $X > P$. Como no Lema 2.1 foi provado que $P \geq 0$ então

$$X > P \geq 0.$$

□□□

CAPÍTULO 3

CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA ESTABILIZAÇÃO

Neste capítulo, analisamos a questão da estabilização de sistemas de controles lineares através da estratégia de controle por realimentação de saída. Damos ênfase às condições convexas, pois estas podem ser testadas por métodos computacionais eficientes. São analisadas aplicações a sistemas discretos, problemas \mathcal{H}_∞ , problemas \mathcal{H}_2 , problemas com incertezas politópicas, problemas com ponto de operação desconhecido e o problema do observador dinâmico. Todos utilizando a estratégia de controle por realimentação de saída. Avaliamos ainda a questão de necessidade e suficiência para a viabilidade do problema de estabilização.

3.1. ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADO

Vamos considerar o sistema de controle da forma:

$$(3.1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

onde $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ são matrizes conhecidas, com $n > m$, $x(t) \in \mathcal{R}^n$ é a variável de estado do sistema e $u \in \mathcal{R}^m$ é o controle exercido sobre o sistema. O sistema (3.1) é representado simplesmente por (A, B) .

Consideremos o problema de obter o controle como função linear do estado, isto é, $u(t) = -Fx(t)$ com $F \in \mathcal{R}^{m \times n}$. Este tipo de escolha de controlador é denominada de **realimentação de estado** e F é chamada **matriz de ganho**.

A seguir, analisamos condições necessárias e suficientes para que (3.1) seja estabilizável via realimentação de estado. Assim (3.1) se torna:

$$(3.2) \quad \dot{x}(t) = (A - BF)x(t).$$

Do teorema 1.7, temos que (3.2) é estabilizável se e somente se existe uma matriz $P > 0$, tal que:

$$(3.3) \quad P(A - BF) + (A - BF)^T P < 0.$$

Observe que, se $P > 0$ e F , são ambas desconhecidas, então (3.3) não é convexa. Sendo assim, multiplicamos (3.3) em ambos os lados por $W = P^{-1}$, obtemos:

$$(3.4) \quad (A - BF)W + W(A - BF)^T < 0.$$

Definindo $L := FW$ na inequação (3.4), temos:

$$(3.5) \quad AW + WA^T - BL - L^T B^T < 0.$$

Esta inequação é convexa. O problema de encontrar uma solução (W,L) para a LMI (3.5), pode ser resolvido por algoritmos eficientes. (Veja [2]).

Acabamos de demonstrar assim o seguinte teorema, o qual fornece condições necessárias e suficientes para que (3.5) seja solucionável nas variáveis (W,L) .

Teorema 3.1: *O sistema (3.1) é estabilizável através de realimentação de estado se e somente se a LMI (3.5) é factível para algum par (W,L) com $W > 0$.*

□□□

3.2. ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA.

Nesta seção analisamos a possibilidade de extrapolar os resultados em §3.1 para sistemas de controle do tipo:

$$(3.6) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases},$$

onde $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ são matrizes constantes, $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ é a variável de estado do sistema, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ é o controle exercido sobre o sistema e $y(t) \in \mathfrak{R}^p$ é a saída do sistema. Diferente do sistema (3.1), não conhecemos o estado $x(t)$ a cada

instante $t \in \mathfrak{R}$. Dispomos apenas da informação indireta $y(t) = Cx(t) \in \mathfrak{R}^p$, com $p < n$. O sistema (3.6) é representado simplesmente por (A, B, C) .

Supomos um controle da forma $u(t) = -F_0 y(t)$ com $F_0 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, que é uma função linear da saída do sistema. Tal controle, é chamado de **realimentação de saída**. Também podemos escrever $u(t) = -F_0 Cx(t)$ ou equivalentemente $u(t) = -Fx(t)$ com a constante $F = F_0 C$. Escrevendo a equação matricial de Lyapunov para o sistema obtido pela substituição da estratégia de controle em (3.6), concluímos que o sistema (3.6) é estabilizável se e somente se o problema

$$(3.7) \quad \begin{cases} (A - BF_0 C)W + W(A - BF_0 C)^T < 0 \\ W > 0 \end{cases},$$

possui solução.

Novamente obtemos um problema, que em geral não é convexo.

A seguir, analisamos condições suficientes e convexas para que o problema (3.7) seja solucionável. Para isso, necessitamos da seguinte definição:

Definição 3.1: Dadas as matrizes A , B e C sendo C com o posto de linha completo, o **problema (W)** consiste em encontrar matrizes $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $M \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ e $N \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ tais que:

$$(W) \quad \begin{cases} AW + WA^T - BNC - C^T N^T B^T < 0 \\ W > 0, \quad MC = CW \end{cases}$$

(Observe que o problema (W) é convexo).

Teorema 3.2: *Seja (W, N, M) uma solução do problema (W) . Então o controle $u(t) = -NM^{-1}y(t)$, estabiliza o sistema (3.6).*

Demonstração: Por hipótese $C \in \mathcal{R}^{p \times n}$ possui posto p e $W \in \mathcal{R}^{n \times n}$ é positiva definida, então $CW \in \mathcal{R}^{p \times n}$ possui posto p .

Como $CW = MC$, temos que M também possui posto p .

Logo M é não singular.

Escrevendo $C = M^{-1}CW$ e substituindo em (W) temos:

$$\begin{aligned} 0 &> AW + WA^T - BNC - (BNC)^T \\ &= AW - BNM^{-1}CW + WA^T - W(BNM^{-1}C)^T \\ &= (A - BNM^{-1}C)W + W(A - BNM^{-1}C)^T, \end{aligned}$$

definindo $F_0 := NM^{-1}$, temos que:

$$(A - BF_0C)W + W(A - BF_0C)^T < 0,$$

provando assim que o sistema (3.6) é estabilizável com o controle $u(t) = -NM^{-1}y(t)$.

□□□

Observação 3.1: *Seja $v: U \rightarrow \mathcal{R}$, onde $U \subseteq \mathcal{R}^n$ é uma vizinhança de $\bar{x} = 0$, definida por $v(x) := x^T W^{-1}x$, onde W é a matriz do Teorema 3.2. Então $v(x) = x^T W^{-1}x$ é uma função de Lyapunov para o sistema de malha fechada $\dot{x}(t) = (A - BF_0C)x(t)$. De fato:*

i) $v(x) = x^T W^{-1}x$ é uma função quadrática, portanto continuamente diferenciável em U .

ii) Para $x = 0$ temos $v(0) = 0$. Como $W > 0$ temos que $W^{-1} > 0$, então

$$v(x) = x^T W^{-1} x > 0, \text{ para } \forall x \in U \setminus \{0\}.$$

iii) $\nabla v(x) = (W^{-1}x)^T + x^T W^{-1}$. Logo

$$\begin{aligned} \langle \nabla v(x)^T, f(x) \rangle &= \langle W^{-1}x + (x^T W^{-1})^T, (A - BF_0C)x \rangle \\ &= \langle W^{-1}x, (A - BF_0C)x \rangle + \langle (x^T W^{-1})^T, (A - BF_0C)x \rangle \\ &= \langle (A - BF_0C)^T W^{-1}x, x \rangle + \langle W^{-1}x, (A - BF_0C)x \rangle \\ &= \langle (A - BF_0C)^T W^{-1}x, x \rangle + \langle x, W^{-1}(A - BF_0C)x \rangle \\ &= \langle (A - BF_0C)^T W^{-1}x, x \rangle + \langle W^{-1}(A - BF_0C)x, x \rangle \\ &= \langle ((A - BF_0C)^T W^{-1} + W^{-1}(A - BF_0C))x, x \rangle. \end{aligned}$$

Por hipótese $W(A - BF_0C)^T + (A - BF_0C)W < 0$. Multiplicando ambos

os lados por $W^{-1} > 0$ temos $(A - BF_0C)^T W^{-1} + W^{-1}(A - BF_0C) < 0$, o que garante que

$\langle \nabla v(x)^T, f(x) \rangle < 0$ para as trajetórias de $\dot{x}(t) = (A - BF_0C)x(t)$ e $x \neq 0$.

□□□

Supondo agora que B tem posto de coluna completo, obtemos um resultado análogo ao do Teorema 3.2. Para isso é necessário que definamos o seguinte problema, também convexo.

Definição 3.2: Dadas as matrizes A , B e C sendo B com o posto de coluna completo, o **problema (P)** consiste em encontrar, matrizes $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $M \in \mathcal{R}^{m \times m}$ e $N \in \mathcal{R}^{m \times p}$ tais que:

$$(P) \quad \begin{cases} PA + A^T P - C^T N^T B^T - BNC < 0 \\ P > 0 \\ BM = PB \end{cases}$$

Corolário 3.1: *Seja (P, M, N) uma solução do problema (P). Então o controle $u(t) = -M^{-1}Ny(t)$, estabiliza o sistema (3.6).*

Demonstração: Por hipótese $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ possui posto m e $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ é positiva definida, assim $PB \in \mathcal{R}^{n \times m}$ possui posto m .

Do problema (P) temos que $BM = PB$, o que implica em M possuir posto m .

Portanto M é não singular.

Podemos escrever assim $B = PBM^{-1}$ e substituindo em (P), temos:

$$\begin{aligned} 0 > PA + A^T P - BNC - C^T N^T B^T \\ &= PA - PBM^{-1}NC + A^T P - C^T N^T (M^{-1})^T B^T P \\ &= P(A - BM^{-1}NC) + (A - BM^{-1}NC)^T P, \end{aligned}$$

definindo $F_0 := M^{-1}N$, temos:

$$P(A - BF_0C) + (A - BF_0C)^T P < 0,$$

é equivalente a (3.7), logo o sistema (3.6) é estabilizável, com a utilização do controle

$$u(t) = -M^{-1}Ny(t).$$

□□□

Analogamente, a Observação 3.1, é possível mostrar que a função $v: \mathcal{R}^n \supset U \rightarrow \mathcal{R}$, onde U é uma vizinhança de $\bar{x} = 0$, definida por $v(x) = x^T P x$, é uma função de Lyapunov estrita para o sistema de malha fechada $\dot{x}(t) = (A - BF_0 C)x(t)$.

□□□

Observação 3.2: Geralmente, as matrizes possuem posto de linha ou coluna completo, assim o critério utilizado para a utilização dos teoremas é a observação da dimensão do vetor de entrada e do vetor saída. Caso a dimensão do input for maior que o output, utiliza-se o problema (P) e se a dimensão do output for maior que a do input, utiliza-se o problema (W).

3.3. SISTEMAS DE CONTROLE DISCRETOS

Nesta seção consideramos o sistema de tempo discreto:

$$(3.8) \quad \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases},$$

onde $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$, $C \in \mathcal{R}^{p \times n}$ são matrizes constantes, $x_k \in \mathcal{R}^n$ é a variável de estado do sistema, $u_k \in \mathcal{R}^m$ é o controle exercido sobre o sistema e $y_k \in \mathcal{R}^p$ é a saída do sistema, com $p < n$.

Para sistemas de controle discretos, assim como em sistemas de controle contínuos, podemos analisar a estabilidade utilizando a realimentação de saída.

Aplicando o Teorema 1.9 para o sistema $x_{k+1} = (A - BF_0C)x_k$, com a estratégia de controle $u_k = -F_0y_k$, temos que o sistema (3.8) é estabilizável se e somente se o problema abaixo possui solução:

$$\begin{cases} (A - BF_0C)^T W (A - BF_0C) - W < 0 \\ W > 0 \end{cases}$$

Utilizando o complemento de Schur verificamos que as desigualdades acima, são equivalentes a:

$$(3.9) \quad \begin{bmatrix} -W & (A - BF_0C)^T W \\ W(A - BF_0C) & -W \end{bmatrix} < 0$$

Enunciamos a seguir, um teorema que garantirá condições suficientes, para que o sistema (3.8) seja estabilizável por realimentação de saída.

Teorema 3.3: *Dadas as matrizes A , B e C sendo C com o posto de linha completo, e $W \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $M \in \mathcal{R}^{p \times p}$ e $N \in \mathcal{R}^{m \times p}$ tais que:*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -W & WA^T - C^T N^T B^T \\ AW - BNC & -W \end{bmatrix} < 0 \\ W > 0, \quad MC = CW \end{cases}$$

Então a estratégia de controle $u_k = -NM^{-1}y_k$, estabiliza o sistema (3.8).

Demonstração: Seja $C \in \mathcal{R}^{p \times n}$ com posto p e $W \in \mathcal{R}^{n \times n}$ positiva definida. Assim CW possui posto p , por hipótese $CW = MC$, então M também possui posto p . Logo é não singular.

Portanto, podemos escrever $C = M^{-1}CW$, obtendo:

$$0 > \begin{bmatrix} -W & WA - C^T N^T B^T \\ AW - BNC & -W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W & W(A - BNM^{-1}C)^T \\ (A - BNM^{-1}C)W & -W \end{bmatrix},$$

definindo $F_0 := NM^{-1}$, temos:

$$\begin{bmatrix} -W & W(A - BF_0C)^T \\ (A - BF_0C)W & -W \end{bmatrix} < 0.$$

Concluimos que o sistema (3.8) é estabilizável através do controle $u_k = -NM^{-1}y_k$.

□□□

Novamente, como no caso dos sistemas contínuos, obtemos resultados análogos para o caso em que B possui posto de coluna completo.

Corolário 3.2: *Dadas as matrizes A , B e C , sendo B com o posto de coluna completo, e matrizes $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $M \in \mathcal{R}^{m \times m}$ e $N \in \mathcal{R}^{m \times p}$ tais que:*

$$\left\{ \begin{bmatrix} -P & A^T P - C^T N^T B^T \\ PA - BNC & -P \end{bmatrix} < 0 \right. \\ \left. P > 0, \quad BM = PB \right.$$

Então a estratégia de controle $u_k = -M^{-1}Ny_k$, estabiliza o sistema (3.8).

Demonstração: A demonstração é análoga ao Teorema 3.3.

□□□

3.4. SISTEMAS DE CONTROLE COM INCERTEZAS POLITÓPICAS

Os métodos de controle utilizados nas sessões 3.1 e 3.2 consideram que os modelos que utilizamos para representar os sistemas os representam perfeitamente.

Examinamos nesta seção, a situação em que conhecemos algumas propriedades do problema que esta sendo modelado. Assim, para garantir estabilidade e performance do modelo, levamos em conta determinadas incertezas do problema, ou seja, permitimos que as matrizes (A, C) pertençam a um conjunto Ω convexo e fechado.

Da forma:

$$\Omega = \left\{ (A, C), (A, C) = \sum_{i=1}^j \lambda_i (A_i, C_i), \lambda_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^j \lambda_i = 1 \right\},$$

onde as matrizes A_i e C_i são conhecidas. Pela definição podemos notar que as matrizes (A_i, C_i) são os vértices do politopo Ω .

Nessas condições, enunciamos o seguinte teorema, o qual fornece condições suficientes para que o sistema contínuo (A, B, C) seja estabilizável. Por realimentação de saída.

Teorema 3.4: *Sejam as matrizes A , B e C , onde B possui posto de coluna completo e $(A, C) \in \Omega$.*

Se o problema

$$\begin{cases} \Phi_i(P, N) = A_i^T P + PA_i - C_i^T N^T B^T - BNC_i < 0, \forall i = 1 \dots j \\ BM = PB \\ P > 0 \end{cases}$$

é factível, então o sistema (3.6) com $(A, C) \in \Omega$ é estabilizável via realimentação de saída com a matriz de ganho $F_0 := M^{-1}N$.

Demonstração: Sejam $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ com posto m , e $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ positiva definida. Assim PB tem posto m , como $PB = BM$, temos que M possui posto m .

Portanto, M é não singular, dessa forma $B = PBM^{-1}$.

Substituindo $B = PBM^{-1}$ na primeira equação do problema e definindo $F_0 := M^{-1}N$

temos:

$$\begin{aligned} \Phi_i(P, N) &= PA_i + A_i^T P - BNC_i - C_i^T N^T B^T \\ &= PA_i - PBM^{-1}NC_i + A_i^T P - C_i^T N^T M^{-T} B^T P \\ &= P(A_i - BM^{-1}NC_i) + (A_i - BM^{-1}NC_i)^T P \\ &= P(A_i - BF_0C_i) + (A_i - BF_0C_i)^T P. \end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j \lambda_i \Phi_i &= \sum_{i=1}^j \lambda_i (PA_i + A_i^T P - BNC_i - C_i^T N^T B^T) \\ &= \sum_{i=1}^j \lambda_i PA_i + \sum_{i=1}^j \lambda_i A_i^T P - \sum_{i=1}^j \lambda_i BNC_i - \sum_{i=1}^j \lambda_i C_i^T N^T B^T \\ &= PA + A^T P - BNC - C^T N^T B^T. \end{aligned}$$

Como $\Phi_i(P, N) < 0$ e $\lambda_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, j$; então $\sum_{i=1}^j \lambda_i \Phi_i < 0$. Logo

$PA + A^T P - BNC - C^T N^T B^T < 0$, $P > 0$ e $BM = PM$. Isto é, as condições do problema (P) são satisfeitas. Pelo Corolário 3.1, temos que o sistema (3.6) é estabilizado pelo controle $u(t) = -M^{-1}Ny(t)$. $\square\square\square$

Suponhamos que no sistema (3.6), $(A, B) \in \Omega$, onde

$\Omega = \left\{ (A, B), (A, B) = \sum_{i=1}^j \lambda_i (A_i, B_i), \lambda_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^j \lambda_i = 1 \right\}$. Analogamente ao Teorema 3.4 é

possível estabelecer condições suficientes para que o sistema (A, B, C) seja estabilizável.

Corolário 3.3: Sejam as matrizes A , B e C , onde C possui posto de linha completo e $(A, B) \in \Omega$.

Se o problema

$$\begin{cases} \Phi_i(W, N) = A_i W + W A_i^T - B_i N C - C^T N^T B_i^T < 0; \forall i = 1 \dots j \\ MC = CW \\ W > 0 \end{cases}$$

é factível, então o sistema (3.6) com $(A, B) \in \Omega$ é estabilizável por realimentação de saída, com a matriz de ganho $F_0 := NM^{-1}$.

Demonstração: É análoga a demonstração do Teorema 3.4. $\square\square\square$

3.5. PROBLEMA \mathcal{H}_∞

Consideremos o sistema descrito por:

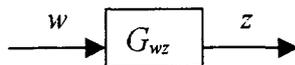
$$(3.10) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w + B_u u \\ z = C_z x + D_{wz} w + D_{uz} u, \\ y = C_y x \end{cases}$$

onde $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B_u \in \mathcal{R}^{n \times m}$, $B_w \in \mathcal{R}^{n \times q}$, C_z e $C_y \in \mathcal{R}^{p \times n}$, $D_{wz} \in \mathcal{R}^{p \times q}$ e $D_{uz} \in \mathcal{R}^{p \times m}$,

ainda:

- $x \in \mathcal{R}^n$ é a variável de estado;
- $u \in \mathcal{R}^m$ é o controle fornecido ao sistema;
- $w \in \mathcal{R}^q$ é uma entrada desconhecida, inerente ao próprio sistema;
- $y \in \mathcal{R}^p$ é a saída medida do sistema;
- $z \in \mathcal{R}^p$ é a saída de performance do sistema.

Um problema importante em controle é garantir que a norma \mathcal{H}_∞ do operador G_{wz} , da perturbação w para a saída z no sistema (3.10) em malha fechada, estará limitada por um valor dado que representa o maior ganho saída/entrada tolerável em termos da norma dois de sinais.



A norma infinita da função de transferência é dada por:

$$\|G_{wz}\|_\infty := \sup_w \frac{\|G_{wz}(w)\|_2}{\|w\|_2},$$

$\forall w \in L_2(X)$, onde $L_2(X)$ é o espaço das funções mensuráveis f tal que $|f|^2$ seja Lebesgue integrável em X .

Note que $\|G_{wz}\|_\infty$ representa o maior ganho que a saída $z = G_{wz}w$ pode apresentar para uma qualquer entrada w , em termos da norma $\|\cdot\|_2$.

Definição 3: O problema subótimo \mathcal{H}_∞ consiste em encontrar uma lei de controle u , tal que a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência em malha fechada G_{wz} , seja menor do que um valor pré-especificado γ , ou seja $\|G_{wz}\|_\infty < \gamma$. O problema ótimo \mathcal{H}_∞ consiste em encontrar uma lei de controle que minimize esta norma. Nesta seção, nós estamos interessados em estudar o problema subótimo \mathcal{H}_∞ , o qual é chamado, simplesmente de problema \mathcal{H}_∞ .

3.5.1. Análise do problema \mathcal{H}_∞

No teorema a seguir mostramos que o problema (W) , pode ser utilizado para resolver problemas de controle \mathcal{H}_∞ com realimentação de saída, dando condições suficientes para que exista uma lei de controle para o sistema (3.10) e a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência em malha fechada seja limitada.

Teorema 3.5: *Seja o sistema descrito pelas equações (3.10), com C_y matriz de posto de linha completo e $\gamma \in \mathcal{R}$ com $\gamma > 0$.*

Defina $\phi(W, N) = WA^T + AW - B_u NC_y - C_y^T N^T B_u^T$. Sejam ainda W, M e N matrizes satisfazendo:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \phi(W, N) & B_w & WC_z^T - C_y^T N^T D_{uz}^T \\ B_w^T & \gamma^2 I & D_{wz}^T \\ C_z W - D_{uz} N C_y & D_{wz} & -I \end{bmatrix} \leq 0 \\ MC_y = C_y W, \quad W > 0 \end{cases}$$

Então para $u(t) = -NM^{-1}y(t)$ a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência do sistema de malha fechada satisfaz $\|G_{wz}\| < \gamma$.

Demonstração: Aplicando a estratégia de controle $u(t) := -F_0 y(t)$ ao sistema (3.10)

obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_f x(t) + B_f w(t) \\ z(t) = C_f x(t) + D_f w(t) \end{cases}$$

Com A_f, B_f, C_f e D_f definidas por: $A_f = A - B_u F_0 C_y$; $B_f = B_w$; $C_f = C_z - D_{uz} F_0 C_y$;

$$D_f = D_{wz}.$$

Da hipótese do teorema temos:

$$0 \geq \begin{bmatrix} WA^T + AW - B_u NC_y - C_y^T N^T B_u^T & B_w & WC_z^T - C_y^T N^T D_{uz}^T \\ B_w^T & \gamma^2 I & D_{wz}^T \\ C_z W - D_{uz} N C_y & D_{wz} & -I \end{bmatrix},$$

ainda da hipótese temos $C_y = M^{-1} C_y W$, logo

$$\begin{aligned}
0 &\geq \begin{bmatrix} WA^T + AW - B_u NM^{-1} C_y W - WC_y^T (M^{-1})^T N^T B_u^T & B_w & WC_z^T - (M^{-1} C_y W)^T N^T D_{uz}^T \\ B_w^T & \gamma^2 I & D_{wz}^T \\ C_z W - D_{uz} NM^{-1} C_y W & D_{wz} & -I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} W(A - B_u NM^{-1} C_y)^T + (A - B_u NM^{-1} C_y) W & B_w & WC_z - (M^{-1} C_y W)^T N^T D_{uz}^T \\ B_w^T & \gamma^2 I & D_{wz}^T \\ C_z W - D_{uz} NM^{-1} C_y W & D_{wz} & -I \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Definindo a matriz de ganho $F_0 := NM^{-1}$ temos:

$$\begin{aligned}
0 &\geq \begin{bmatrix} W(A - B_u F_0 C_y)^T + (A - B_u F_0 C_y) W & B_w & WC_z - WC_y^T F_0^T D_{uz}^T \\ B_w^T & \gamma^2 I & D_{wz}^T \\ C_z W - D_{uz} F_0 C_y W & D_{wz} & -I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} WA_f^T + A_f W & B_f & WC_f^T \\ B_f^T & -\gamma^2 I & D_f^T \\ C_f W & D_f & -I \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

O lema da limitação real para LMI's, garante que $\|G_{wz}\|_\infty < \gamma$, onde G_{wz} é a função de transferência do sistema de malha fechada (A_f, B_f, C_f, D_f) .

□□□

O caso análogo para o problema (P), não é analisado, pois em suas hipóteses aparecem condições que não são convexas.

□□□

3.6. PROBLEMA \mathcal{H}_2

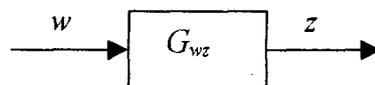
Consideremos o sistema descrito por:

$$(3.11) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w + B_u u \\ z = C_z x + D_{uz} u \\ y = C_y x \end{cases},$$

onde $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B_u \in \mathcal{R}^{n \times m}$, $B_w \in \mathcal{R}^{n \times q}$, C_z e $C_y \in \mathcal{R}^{p \times n}$ e $D_{uz} \in \mathcal{R}^{p \times m}$ e ainda:

- $x \in \mathcal{R}^n$ é a variável de estado;
- $u \in \mathcal{R}^m$ é o controle fornecido ao sistema;
- $w \in \mathcal{R}^q$ é uma entrada desconhecida, inerente ao próprio sistema;
- $y \in \mathcal{R}^p$ é a saída medida do sistema;
- $z \in \mathcal{R}^p$ é a saída de performance do sistema.

Consideremos a seguir o problema de minimizar a norma dois do operador G_{wz} de w para z no sistema (3.11) em malha fechada. Este problema pode ser interpretado como a minimização da norma dois da saída para um impulso na entrada.



A teoria desenvolvida aqui pode ser encontrada em [5] e em [4].

Temos que a função de transferência G_{wz} do sistema (3.11) é :

$$G_{wz} = C_z (sI - A)^{-1} B_w.$$

A norma dois da função de transferência é dada por:

$$\begin{aligned}\|G_{wz}\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(G^*(j\omega)G(j\omega))d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|G(j\omega)\|_F^2 d\omega = \\ &= \langle g, g \rangle = \int_0^{\infty} \text{tr}(g^T(t)g(t))dt = \int_0^{\infty} \|g(t)\|_F^2 dt,\end{aligned}$$

onde $g(t) \in \mathcal{R}^{n \times m}$ é a transformada inversa de $G_{wz}(j\omega)$, ou seja, é a matriz de transição do sistema (3.11) em malha fechada.

Se possuímos a representação por variáveis de estado de G_{wz} , então a norma em \mathcal{H}_2 para funções de transferência, pode ser calculada através do graminiiano de controlabilidade ou do graminiiano de observabilidade.

O Graminiano de Controlabilidade L_c é definido como solução da equação:

$$A^T L_c + L_c A + BB^T = 0.$$

Pelo Lema 1.1, temos que $L_c = \int_0^{\infty} e^{tA} BB^T e^{tA^T} dt$.

O Graminiano de Observabilidade L_o é definido como solução da equação:

$$AL_o + L_o A^T + C^T C = 0.$$

Assim pelo Lema 1.1, temos que $L_o = \int_0^{\infty} e^{tA} C^T C e^{tA^T} dt$.

Observemos que:

$$\text{tr}(CL_c C^T) = \text{tr} \int_0^{\infty} (C e^{At} B)(B^T e^{At} C^T) dt = \int_0^{\infty} \text{tr}(g(t)g^T(t)) dt = \langle g, g \rangle = \|G_{wz}\|_2^2$$

e

$$\text{tr}(B^T L_o B) = \text{tr} \int_0^{\infty} (B^T e^{-At} C^T) (C e^{-At} B) dt = \int_0^{\infty} \text{tr}(g^T(t) g(t)) dt = \langle g, g \rangle = \|G_{wz}\|_2^2,$$

onde $g(t) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ é definida por $g(t) = C e^{-At} B$.

Logo

$$\|G_{wz}\|_2^2 = \text{tr}(CL_c C^T): AL_c + L_c A^T + BB^T = 0,$$

$$\|G_{wz}\|_2^2 = \text{tr}(B^T L_o B): A^T L_o + L_o A + C^T C = 0.$$

Essas equações somente são válidas se o sistema for estável e estritamente próprio, ou seja, $D_{wz} = 0$.¹

A norma pode também ser calculada por um problema de otimização [2]:

$$\|G_{wz}\|_2^2 = \min \left\{ \text{tr}(CL_c C^T): AL_c + L_c A^T + BB^T \leq 0, L_c > 0 \right\},$$

$$\|G_{wz}\|_2^2 = \min \left\{ \text{tr}(B^T L_o B): A^T L_o + L_o A + C^T C \leq 0, L_o > 0 \right\}.$$

Definição 3.4: O problema \mathcal{H}_2 consiste em encontrar uma lei de controle tal que a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência em malha fechada G_{wz} seja minimizada.

No teorema a seguir, mostramos que o problema (\mathcal{W}), pode ser utilizado para resolver problemas de controle \mathcal{H}_2 com realimentação de saída, dando condições suficientes para que exista um controlador para o sistema (3.11), tal que a norma dois da função de transferência seja minimizada.

¹ Se o sistema possuir $D_{wz} \neq 0$, então sua norma em \mathcal{H}_2 será infinita.

Teorema 3.6: *Considere o sistema dado em (3.11), e suponha que o posto de C_y seja máximo. Sejam W , N , M e L satisfazendo:*

$$\min \operatorname{tr}(L): \begin{cases} AW + WA^T - B_u NC_y - C_y^T N^T B_u^T + B_w B_w^T \leq 0 \\ C_y W = M C_y \\ (C_z W - D_{uz} N C_y) W^{-1} (C_z W - D_{uz} N C_y)^T - L \leq 0 \\ W > 0 \end{cases}$$

Então para $u(t) = -Fy(t)$, com $F = NM^{-1}$ temos que o sistema é estável e

$$\|G_{wz}\|_2^2 \leq \operatorname{tr}(L).$$

Demonstração: Aplicando a estratégia de controle $u(t) = -Fy(t)$ ao sistema (3.11)

obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_f x(t) + B_f w(t) \\ z(t) = C_f x(t) \end{cases},$$

com A_f , B_f e C_f definidos por $A_f := A - B_u F C_y$; $B_f := B_w$; $C_f := C_z - D_{uz} F C_y$. Da

hipótese do teorema, temos $C_y = M^{-1} C_y W$ assim:

$$AW + WA^T - B_u N M^{-1} C_y W - W C_y^T (M^{-1})^T N^T B_u^T + B_w B_w^T \leq 0,$$

definindo $F := N M^{-1}$, temos:

$$A_f W + W A_f^T + B_w B_w^T \leq 0.$$

Como $\|G_{wz}\|_2^2 = \min \{ \operatorname{tr}(C_f L_c C_f^T) : A L_c + L_c A^T + B_w B_w^T \leq 0, L_c > 0 \}$,

temos:

$$\|G_{wz}\|_2^2 = \min \{ \operatorname{tr}(C_f L_c C_f^T) : A L_c + L_c A^T + B_w B_w^T \leq 0, L_c > 0 \} \leq \operatorname{tr}(C_f W C_f^T).$$

Da hipótese de que L satisfaz:

$$(C_f W C_f^T) - L \leq 0,$$

temos:

$$\text{tr}(C_f W C_f^T) \leq \text{tr}(L).$$

$$\text{Portanto } \|G_{wz}\|_2^2 \leq \text{tr}(L).$$

□□□

O caso análogo não é enunciado devido ao fato de deixar de ser convexo.

3.7. PROBLEMA COM PONTO DE OPERAÇÃO DESCONHECIDO

Considere o sistema linear

$$(3.12) \quad \dot{x} = Ax + Bu,$$

onde $x \in \mathfrak{R}^n$, $u \in \mathfrak{R}^p$, $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathfrak{R}^{n \times p}$. Seja $u = r + v$, onde r é uma constante desconhecida e v é o controle efetivamente aplicado ao sistema. Note que o sistema livre ($v=0$) associado a (3.12), é:

$$(3.13) \quad \dot{x} = Ax + Br$$

E seu ponto de equilíbrio é dado por $x_e = -A^{-1}Br$. Este ponto é denominado **ponto de operação**.²

O problema consiste em encontrar uma lei de controle de realimentação de saída v , tal que, x_e seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o sistema

² A abordagem sobre ponto de operação utilizada nesta dissertação é baseada em [17]

de malha fechada. Note que o controle v não permite a mudança da posição original do ponto de operação x_e .

Note que se r é conhecido, recaímos no problema de estabilização usual, pois uma vez calculado x_e , basta fazer a mudança de variável $y = x - x_e$, para que o estado y satisfaça a dinâmica $\dot{y} = Ay + Bv$.

Consideremos a estratégia de controle como função linear do estado

$$(3.14) \quad v = K(x - x_e)$$

Se nós não conhecemos o ponto de operação, esta lei de controle não pode ser implementada. Ao invés de (3.14), podemos aplicar o controle dinâmico como função linear do estado.

$$(3.15) \quad v = K(x - \hat{x}_e)$$

$$(3.16) \quad \hat{x}'_e = E(x - \hat{x}_e),$$

com $E \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ uma matriz não singular. A nova variável \hat{x}_e pode ser vista como uma estimativa de x_e e a equação (3.16) representa um estimador linear.

Podemos perceber que o equilíbrio x_e é invariante com a realimentação (3.15)-(3.16). Desta forma, fazemos a mudança de variáveis $z = x - x_e$, $y = \hat{x}_e - x_e$. Obtendo assim:

$$\dot{y} = E(z - y),$$

e ainda

$$\dot{z} = Ax + Br + Bv = A(z + x_e) + Br + BK(z - y) = Az + BK(z - y).$$

Assim o sistema de malha fechada, com o controle (3.14) é descrito por:

$$(3.17) \quad \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A_{cl} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}, \text{ onde } A_{cl} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ E & -E \end{bmatrix}$$

O ponto de equilíbrio dessa equação é a origem $z = y = 0$. Portanto, o problema de estabilizar (3.12) se reescreve como o problema de encontrar matrizes K e E , tal que, a origem do sistema (3.17) seja assintoticamente estável.

3.7.1. Utilização de LMI's para resolver o problema:

Considere as seguintes matrizes:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_a = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}; C_a = [I \quad -I] \text{ e } F_a = \begin{bmatrix} K \\ E \end{bmatrix}.$$

Então podemos escrever a matriz A_{cl} do sistema dinâmico em (3.17) como:

$$(3.18) \quad A_{cl} = A_a + B_a F_a C_a$$

Com esta equação, o problema de encontrar matrizes K , E tal que o sistema (3.17) é assintoticamente estável, é equivalente a encontrar a matriz F_a tal que A_{cl} seja estável. Este problema pode ser visto como um problema de estabilização por realimentação de saída para o sistema auxiliar fictício:

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_a u_a(t) \\ y_a(t) = C_a x_a(t) \end{cases}$$

3.7.1.1. Solução do problema auxiliar

Uma condição necessária e suficiente para que o sistema de malha fechada (3.17) seja assintoticamente estável, é a existência de uma matriz simétrica P , de dimensões compatíveis, tal que as seguintes desigualdades matriciais são satisfeitas.

$$(3.19) \quad \begin{cases} A_{cl}^T P + PA_{cl} < 0 \\ P > 0 \end{cases},$$

Podemos observar que o problema de encontrar P e F_a tal que (3.19) seja satisfeito, não é convexo.

Pré multiplicamos e pós multiplicamos a equação de Lyapunov por $W = P^{-1}$ e obtemos

$$(3.20) \quad \begin{cases} WA_{cl}^T + A_{cl}W < 0 \\ W > 0 \end{cases}.$$

Dessa forma, podemos enunciar o seguinte teorema, o qual permite encontrar uma matriz que satisfaz (3.20), garantindo que (3.18) seja estabilizável.

Teorema 3.7: *Sejam matrizes, A_a , B_a e C_a , sendo C_a com posto de linha completo, e sejam W , M e N tais que:*

$$\begin{cases} A_a W + WA_a^T + B_a N C_a + C_a^T N^T B_a^T < 0 \\ W > 0 \\ M C_a = C_a W \end{cases}.$$

Defina $F_a := NM^{-1}$. Então a matriz A_{cl} em (3.18) e W satisfazem (3.20).

Demonstração: Tomemos $u(t) = F_a y(t)$, então do Teorema 3.2, temos que o sistema auxiliar fictício é estável, pelo critério de Lyapunov temos que existe $P > 0$ tal que (3.19) é satisfeito. □□□

Corolário 3.4: *Sejam matrizes A_a , B_a e C_a , onde B_a tem posto de coluna completo, e P , M e N matrizes satisfazendo:*

$$\begin{cases} PA_a + A_a^T P - C_a^T N^T B_a^T - B_a N C_a < 0 \\ P > 0 \\ B_a M = P B_a \end{cases}$$

Defina $F_a := M^{-1}N$. Então a matriz A_{cl} em (3.18) e $P > 0$ satisfazem (3.19).

Demonstração: É semelhante a demonstração do Teorema 3.7. □□□

Observação 3.3: Podemos também estender os resultados acima para o caso de sistemas de tempo discreto, controle \mathcal{H}_∞ e controle robusto para sistemas com incertezas politópicas. Quando $C_a = I$ o Problema (W) é reduzido à uma técnica de LMI usual, para resolver o problema de estabilização por realimentação de estado, dessa forma a igualdade $MC_a = C_a W$ se torna redundante e pode ser eliminada.

3.8. PROBLEMA DO OBSERVADOR DINÂMICO

Mesmo o sistema de controle sendo controlável e observável, ele pode não ser estabilizável por realimentação de saída. Uma alternativa é a utilização do observador dinâmico para encontrar uma aproximação para o estado, e utilizar essa aproximação para implementar o controle.

3.8.1. Observador Dinâmico

Consideremos o sistema (3.6). O observador dinâmico é definido pelo sistema:

$$(3.21) \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) + L(w(t) - y(t)) \\ w(t) = Cz(t) \end{cases},$$

o qual é um sistema paralelo ao sistema (3.6). O controle deste sistema é dado pelo controle do sistema usual adicionado de uma componente da forma $L(w - y)$, com $L \in \mathcal{R}^{n \times l}$ escolhido de modo que $(A + LC)$ seja estável. Definindo $\varepsilon := x - z$ a diferença entre os estados do observador dinâmico e do sistema original, satisfazendo:

$$\dot{\varepsilon} = A\varepsilon - L(Cz - Cx) = (A + LC)\varepsilon.$$

Se $(A + LC)$ é estável, obtemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$.

A análise da estabilidade de $(A + LC)$ nos leva ao conceito de **detectabilidade**, discutido no capítulo 1.

Utilizando a estratégia de controle $u = Fz$, para o sistema (A,B,C) , obtemos o sistema acoplado para (x, z) :

$$(3.22) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + BFz \\ \dot{z} = (A + BF + LC)z - LCx \end{cases}$$

que está associado a matriz

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & BF \\ -LC & A + BF + LC \end{bmatrix}.$$

Se a matriz \hat{A} for estável, conseguimos atingir nosso objetivo inicial e estabilizar (A,B,C) através do sistema acoplado (3.22). Esta abordagem nos permite, além de estabilizar o processo, reconstruir seu estado.

$\varepsilon = x - z$, assim:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BF)x + BF\varepsilon \\ \dot{\varepsilon} = (A + LC)\varepsilon \end{cases},$$

portanto a matriz \hat{A} é semelhante a matriz

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A + LC \end{bmatrix},$$

logo estabilizar \hat{A} é equivalente a estabilizar \tilde{A} , ou seja, a nossa tarefa se resume em determinar F e L tal que as matrizes $(A+BF)$ e $(A+LC)$ sejam estáveis .

Pelo Teorema 3.1, $(A+BF)$ é estável se e somente se existir um par (W,L) tal que a LMI (3.5) seja factível . Pelo teorema 1.10, $(A+LC)$ é estável se e somente se (A,C) for detectável.

3.9. CONDIÇÕES NECESSÁRIAS E SUFICIENTES PARA ESTABILIZAÇÃO

3.9.1. Transformação do espaço estado - análise e suficiência.

A fim de fortalecermos o Teorema 3.2 e o Corolário 3.1, isto é, dar-lhes condições necessárias e suficientes para a estabilização do sistema (3.6) estudaremos transformações de semelhança. Sendo assim, seja $T_0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$, uma matriz não singular e defina a matriz $T = T_0 T_0^T$.

Seja $x(t)$ o vetor estado do sistema (3.6) e $x_0(t) = T_0^{-1}x(t)$ o estado transformado. Com isso obtemos o sistema

$$(3.23) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t) \\ y(t) = \mathcal{C}x(t) \end{cases},$$

com $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = (T_0^{-1}AT_0, T_0^{-1}B, CT_0)$.

Definindo $\mathcal{W} = T_0^{-1}W(T_0^{-1})^T$ e escrevendo o Problema (W) para o sistema $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$,

temos:

$$\begin{cases} \mathcal{A}\mathcal{W} + \mathcal{W}\mathcal{A}^T - \mathcal{B}\mathcal{N}\mathcal{E} - \mathcal{E}^T \mathcal{N}^T \mathcal{B}^T < 0 \\ \mathcal{W} > 0 \\ \mathcal{M}\mathcal{E} = \mathcal{C}\mathcal{W} \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} T_0^{-1}(AW + WA^T - BNCT_0T_0^T - T_0T_0^TC^TN^TB^T)(T_0^{-1})^T < 0 \\ W > 0 \\ MCT_0T_0^T = CW \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} AW + WA^T - BNCT_0T_0^T - T_0T_0^TC^TN^TB^T < 0 \\ W > 0 \\ MCT_0T_0^T = CW \end{cases}, \text{ como } T = T_0T_0^T$$

↓

$$(W_T) \quad \begin{cases} AW + WA^T - BNCT - TC^TN^TB^T < 0 \\ W > 0, T > 0 \\ MCT = CW \end{cases}$$

Similarmente, para o problema (P), obtemos:

$$(P_T) \quad \begin{cases} PA + A^TP - C^TN^TB^TT^{-1} - T^{-1}BNC < 0 \\ P > 0, T > 0 \\ T^{-1}BM = PB \end{cases}$$

Fica assim fácil de perceber que a factibilidade do problema (W), depende da representação particular do espaço de estado. No entanto, existe uma transformação de semelhaça levando o problema (W) em problema (W_T), que é factível, se e somente se, o sistema (3.6) é estabilizável via realimentação de saída. Como pode ser visto no teorema abaixo:

Teorema 3.8: *O sistema (A,B,C) é estabilizável através do controle por realimentação de saída, se e somente se existe uma matriz T de forma que o problema (W_T) seja factível em (T, W, M, N).*

Demonstração: (\Rightarrow) Suponha que o sistema (A, B, C) seja estabilizável por realimentação de saída. Então existe uma matriz $F_0 \in \mathcal{R}^{m \times p}$ de dimensão compatível tal que $(A - BF_0C)$ é estável. Logo existe $W > 0$ tal que

$$(A - BF_0C)W + W(A - BF_0C)^T < 0.$$

Assim:

$$AW - BF_0CW + WA^T - WC^T F_0^T B^T < 0.$$

Dado um escalar $\alpha > 0$, definamos $T := \alpha W$, temos que $T > 0$, logo existe $T_0 > 0$, tal que $T = T_0 T_0^T$. Portanto, T_0 é uma transformação de semelhança.

$$AW - B \frac{1}{\alpha} F_0 C \alpha W + WA^T - \alpha WC^T \frac{1}{\alpha} F_0^T B^T < 0$$

definindo $N = \frac{1}{\alpha} F_0$, temos:

$$AW + WA^T - BNCT - TC^T N^T B^T < 0.$$

Logo, (W_T) está satisfeito com $M = I$, $T = W$ e $F_0 = N$.

(\Leftarrow) Por hipótese existe T_0 não singular, de forma que o problema (W_T) possui solução. Da última desigualdade de (W_T) e pelo fato de C ter posto p , temos que CW tem posto p . Assim $MCT \in \mathcal{R}^{p \times n}$ possui posto p , portanto o posto de M é p , o que implica que M é não singular. Podemos escrever então: $C = M^{-1}CWT^{-1}$. Substituindo na primeira equação de (W_T) temos:

$$AW + WA^T - BNM^{-1}CWT^{-1}T - T(T^{-1})^T WC^T (M^{-1})^T N^T B^T < 0.$$

Definindo $F_0 := NM^{-1}$, a desigualdade acima se reescreve como:

$$AW + WA^T - BF_0CW - WC^T F_0^T B^T < 0 \text{ ou}$$

$$(A - BF_0C)W + W(A - BF_0C)^T < 0.$$

Como $W > 0$, temos que o sistema (3.6) é estabilizável, pelo controle $u(t) = F_0 y(t)$.

□□□

Observação 3.4: Note que o Problema (W) é invariante à mudança de variável T_0 que satisfaça a relação $CT=RC$ para alguma matriz inversível $R \in \mathcal{R}^{n \times n}$.

De fato, (W, M, N) é solução do Problema (W_T), com $T = T_0 T_0^T$ satisfazendo $CT=RC$, se e somente se $(W, \tilde{M}, \tilde{N})$ for solução do Problema (W).

Analogamente o Problema (P) é invariante à mudança de variável T_0 satisfazendo a condição $T^{-1}B = BR$, para alguma matriz inversível $R \in \mathcal{R}^{n \times n}$.

As transformações ortogonais $T_0 T_0^T = I$, são um exemplo de transformação que satisfazem esta condição. □□□

Observação 3.5: Caso a transformação T não seja conhecida, os problemas (W_T) e (P_T) deixam de ser convexos. Assim [17] apresenta um procedimento para a escolha da matriz T , como um problema de otimização para LMI's. Tal problema consiste em :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{W, P, N, M} \text{traço}(P + W) \\ \text{sujeito a} \\ A^T P + PA + MC + C^T M^T < 0 \\ WA^T + AW + BN + N^T B^T < 0 \\ P - I > 0, \quad W - I > 0 \end{array} \right.$$

A minimização do traço de $(W + P)$ com as restrições $P > I$ e $W > I$, torna as matrizes P e W tão próximas quanto possível de I . Se não for possível encontrar uma solução para

o problema de otimização, então não é possível encontrar uma matriz F_0 tal que $(A + BF_0C)$ seja exponencialmente estável. Por outro lado, quando existe solução para o problema de minimização com as restrições, então candidatas naturais para a matriz T são $T = W$ e $T = P^{-1}$.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram apresentadas diversas maneiras de analisar a estabilidade de sistemas de controle. Estes resultados foram apresentados de forma sistemática, até chegar a abordagem via LMI's.

No primeiro capítulo, foram apresentados resultados básicos para a compreensão dos problemas de controle, esses resultados foram desenvolvidos de forma bem didática, a fim de que os leitores menos familiarizados com os conceitos da teoria de controle, tivessem condições de acompanhar o trabalho desenvolvido no terceiro capítulo.

No segundo capítulo, foram apresentadas definições e propriedades das LMI's. Apresentamos também a relação entre uma matriz de blocos ser positiva definida com o seu complemento de Schur. Uma demonstração simples para a formulação LMI do

lema da limitação real foi apresentada, tomando a formulação usual desse lema¹ como ponto de partida.

No terceiro capítulo, apresentamos condições necessárias e suficientes para a estabilização de sistemas de controle que utilizam a estratégia de realimentação de estado, utilizando abordagem via LMI da equação matricial de Lyapunov. Apresentamos condições suficientes para a estabilidade de sistemas de controle, utilizando a estratégia de controle de realimentação de saída. São definidos dois tipos diferentes de problemas, o problema (P) para o caso da dimensão do input ter dimensão maior que o output e o problema (W) para o caso da dimensão do output ter dimensão maior que o input. Esses dois tipos de problemas apresentam desigualdades matriciais convexas, o que é uma vantagem, pois podemos solucioná-los através do pacote computacional SCILAB. A fim de mostrar que a aplicabilidade desses problemas é grande e de fácil utilização, são feitas aplicações a problemas de estabilidade de sistemas discretos, problemas com incertezas politópicas, problema \mathcal{H}_∞ , problema \mathcal{H}_2 , problema com ponto de operação desconhecido e o problema do observador dinâmico.

Provamos também que os problemas (P) e (W) são sensíveis a transformações de semelhança, pois geram LMI's que não são convexas. Para resolver o problema da convexidade, faz-se necessário que se encontre uma matriz T . Em [17] encontramos um problema de otimização para LMI's, o qual apresenta candidatas naturais para a matriz T , caso possua solução. A explicação do motivo pelo qual a existência de

¹ A este lema, nos limitamos a apenas enunciá-lo pois sua demonstração é extensa e foge dos nossos propósitos. Porém sua demonstração pode ser encontrada em [15]

solução para o problema de otimização implica em $T = W$ ou $T = P^{-1}$, não foi efetuado neste trabalho, podendo-se assim dar uma continuidade a pesquisa realizada.

Uma contribuição desse trabalho que vale a pena ressaltar, é uma simplificação da demonstração do teorema 3.8, o qual já havia sido demonstrado em [16].

BIBLIOGRAFIA

- [1] ATHANS, M., FALB, P.L., *Optimal control: an introduction to the theory and its applications*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
- [2] BOYD, S., GHAOUI L.E., FERON E., BALAKRISHNAN V., *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM, Philadelphia, 1994.
- [3] _____; *History of linear matrix inequalities in control theory*. American Control Conference, Maryland, junho 1994.
- [4] CRUSIUS, C.A.R., *Formulação LMI para problemas de performance e robustez*. Florianópolis, 1996. Dissertação para obtenção do grau de mestre em engenharia elétrica- Universidade Federal de Santa Catarina.

- [5] DAILEY, R.L., GLOVER, K., GREEN, M., LIMBEER, D., H_∞ and μ Methods for Robust Control, 30th IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL. Brighton – England, 1991.
- [6] D'AZZO, J., HOUPIS, C.H., *Análise e Projeto de sistemas de controle lineares*, Tradução por Bernardo Severo da Silva Filho. 2.ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1984. Tradução de: Linear Control System Analysis and Design.
- [7] DISTEFANO, J.J., STULBERUD, A., WILLIAMS, I.J., *Sistemas de retroação e controle: com aplicações para engenharia, física e biologia*, Tradução por Ostend Abilhôa Cardim. McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1972. Tradução de: Theory and problems of feedback and control systems: with applications to the engineering, physical and life sciences.
- [8] ELGERD, O.I., *Control systems theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.
- [9] GANTMACHER, F.R. *Applications of the theory of matrices*, Interscience Publishers, New York, 1959.
- [10] _____. *The theory of matrices*. 2.ed. Chelsea Publishing Company, New York, 1990.
- [11] HIRSH, M. SMALE, S., *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, Academic Press, New York, 1974.

- [12] KNOWLES, G., *An Introduction to applied optimal control*, Academic Press, London, 1981.
- [13] LEIGH, J. R., *Functional analysis and linear control theory*, Academic Press, London, 1980.
- [14] LEITÃO, A., **Tópicos em Teoria de Controle. XXII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL.** SBM, Santos-SP, 1999.
- [15] MEINSMA, G., *Robust Control for Linear Systems*, Department of Electrical and Computer Engineering. University of New Castle, Australia, 1995.
- [16] TROFINO, A., CRUSIUS, C.A.R., *Sufficient LMI conditions for output feedback control problems*, A ser publicado no jornal IEEE – Transaction on Automatic Control em junho de 1999.
- [17] TROFINO, A., BAZANELLA, A.S., FISCHMAN, A., *Designing robust controllers with operating point tracking*, IFAC Conference on System Structure and Control, Nantes, França, junho de 1998