

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**Estimadores de Estado Ortogonais com Restrições
de Igualdade e Desigualdade para a Modelagem
Não-Reduzida da Rede Externa**

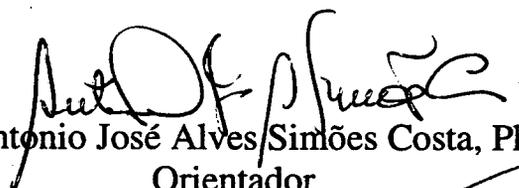
Tese submetida como parte dos requisitos para a obtenção
do grau de Doutor em Engenharia Elétrica

José Paulo da Silva Gouvêa

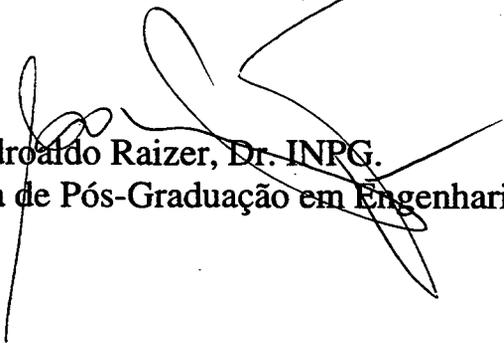
**Estimadores de Estado Ortogonais com Restrições
de Igualdade e Desigualdade para a Modelagem Não-Reduzida
da Rede Externa**

José Paulo da Silva Gouvêa

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de **DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA**, Área de Concentração em Sistemas de Energia, aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica



Prof. Antonio José Alves Simões Costa, Ph. D.
Orientador



Prof. Adroaldo Raizer, Dr. INPG.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

BANCA EXAMINADORA



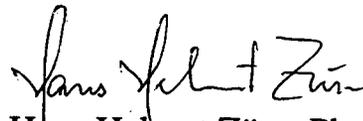
Prof. Antonio José Alves Simões Costa, Ph. D.



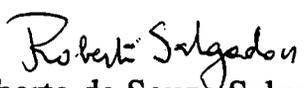
Prof. Alexandre Pinto Alves da Silva, Ph. D.



Prof. Alcir Monticelli, D. Sc.



Prof. Hans Helmut Zürn, Ph. D.



Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph. D.

À Lúcia, companheira e amiga de todas as horas e que sem a qual,
a realização deste trabalho teria sido muito mais difícil.
Ao meu querido filho José Guilherme, que tantas alegrias me dá e
a quem eu nem sempre posso dedicar toda a atenção que ele
merece e precisa.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Antônio José Alves Simões Costa meu agradecimento especial pela orientação, dedicação e amizade demonstradas durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho, em especial aos professores do Grupo de Sistemas de Potência da UFSC, particularmente ao Prof. Roberto de Sousa Salgado que muito me ajudou.

À Universidade Federal de Santa Catarina pelo apoio material.

À Universidade Federal do Espírito Santo e à CAPES pelo apoio financeiro.

Aos professores e colegas do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Espírito Santo pelo apoio que me deram na realização deste trabalho e por terem assumido encargos maiores para suportar o afastamento de mais um professor.

Aos colegas do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica pela amizade, apoio e incentivo que sem eles, este trabalho teria sido muito mais difícil.

Em especial, quero agradecer aos amigos Marcelo, Robson, Flávio, Ricardo e Kátia pela amizade, apoio e incentivo e pelas enormes e incansáveis discussões que me ajudaram em muito a compreender o mundo e desenvolver este trabalho.

RESUMO

Este trabalho aborda o desenvolvimento de um estimador de estados não-linear baseado em Rotações de Givens com restrições de igualdade e desigualdade não lineares. As restrições de igualdade são processadas pelo Método dos Pesos com Refinamento Iterativo, um procedimento iterativo em duas etapas. As restrições de desigualdade são processadas transformando-se o problema de Mínimos Quadrados com Restrições de Desigualdade em um problema do tipo Mínima Distância, que pode ser resolvido como um Problema de Mínimos Quadrados com Restrições de Não-Negatividade (Problema NNLS) equivalente, de fácil solução. Um método alternativo também implementado transforma as restrições de desigualdade em restrições de igualdade pela utilização de variáveis de folga. O Problema de Mínimos Quadrados com Restrições de Igualdade e de Não-Negatividade resultante é resolvido utilizando-se uma combinação do Método dos Pesos com Refinamento Iterativo e do Método NNLS. Os estimadores propostos são aplicados à modelagem não reduzida do Sistema Externo de uma rede elétrica, tanto pela utilização do Método em Um Passo, como pela utilização do Método em Dois Passos. Os testes são realizados utilizando-se os sistemas de 30 e 118 barras do IEEE e um sistema realístico construído a partir da redução do Sistema Sul-Sudeste Brasileiro, de 340 barras. Como forma de testar os modelos obtidos para a rede externa, esta é anexada à rede interna e diversas contingências são simuladas. Os resultados obtidos na Análise de Contingências são então comparados com os resultados do caso base obtidos via um Fluxo de Potência convencional.

ABSTRACT

This Thesis focuses on the development of an orthogonal non-linear state estimator based on Givens rotations capable of processing non-linear equality and inequality constraints. The equality constraints are processed by the Iteratively Refined Weighting Method, an iterative process executed in two steps. The inequality constraints are processed transforming the Least Squares Problem with Inequality Constraints into a Least Distance Programming Problem. The LDP Problem can be solved as a Non-Negative Least Squares Problem (NNLS Problem) of simple solution. Another method implemented in this work transforms the inequality constraints into equality constraints using slack variables. The resulting Non-Negative Least Squares Problem with Equality Constraints is solved using the Iteratively Refined Weighting Method associated with the NNLS Algorithm. The proposed estimator is applied to external system solutions in Power System Analysis using both the One-Pass and the Two-Pass Methods. The test systems used are the 30 and 118 IEEE bus systems and a 340 bus reduced system based on the Southeastern Brazilian System. The External System model obtained is connected to the Internal System and several contingences are simulated. The corresponding results are compared with the results obtained with a Power Flow Program.

SUMÁRIO

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Sumário	vii
Índice de Tabelas	xii
Índice de Figuras	xv
Simbologia	xvi
Capítulo 1: Introdução	1
1.1. Introdução	1
1.2. Formas de Modelagem do Sistema Externo.	3
1.3. Objetivos Gerais do Trabalho	6
1.3.1. Panorama Atual do Problema de Estimação de Estados com Restrições.	6
1.3.2. Pesquisa Desenvolvida neste Trabalho	8
1.4. Organização do Trabalho	8
Capítulo 2: A Modelagem Não-Reduzida do Sistema Externo	10
2.1. Introdução	10
2.2. A Solução da Rede Externa via Fluxo de Potência	10
2.3. A Solução da Rede Externa via Estimação de Estados	12
2.3.1. O Método de Geisler e Bose	13
2.3.2. O Método de Monticelli e Wu	14
2.3.3. O Método de Geisler e Nowak	16

2.3.4. O Método de Lu, Liu e Vemuri	16
2.3.5. O Método de Nucera e Gilles	17
2.3.6. O Método de Simões Costa e Tardio	19
2.4. Comentários Finais	21
Capítulo 3: Estimadores de Estado com Restrições de Igualdade e Desigualdade	23
3.1. Introdução	23
3.2. Estimadores de Estados com Restrições de Igualdade	24
3.2.1. Método da Equação Normal com Restrições de Igualdade	25
3.2.2. Método da Matriz Aumentada com Restrições de Igualdade	27
3.3. Métodos Ortogonais de Givens com Restrições de Igualdade	28
3.3.1. Método da Matriz de Espaço Nulo	28
3.3.2. Método da Eliminação Direta	33
3.4. Estimadores de Estados com Restrições de Desigualdade	35
3.5. Considerações Finais	42
Capítulo 4: O Problema dos Mínimos Quadrados Linear com Restrições de Igualdade	43
4.1. Introdução	43
4.2. Solução do Problema LSE Utilizando uma Base do Espaço Nulo da Matriz de Restrições	44
4.3. Solução de um Problema de Mínimos Quadrados Linear com Restrições de Igualdade Lineares por Eliminação Direta	45
4.4. O Método dos Pesos	47
4.5. O Método de Heath	49
4.6. O Método dos Pesos com Refinamento Iterativo	50
4.7. Considerações Finais	52
Capítulo 5: O Problema dos Mínimos Quadrados Linear com Restrições de Desigualdade Lineares	54
5.1. Introdução	54
5.2. O Problema de Mínimos Quadrados Linear com Restrições Lineares	55
5.3. O Problema Geral de Otimização	56
5.3.1. Caracterização das Restrições	56
5.3.2. Movimento a Partir de um Ponto Inicial Viável	57
5.3.3. Condição de Otimalidade para x^*	58
5.4. O Problema dos Mínimos Quadrados com Restrições de	

Não-Negatividade	59
5.5. O Problema LDP	62
5.6. Transformação de um Problema LSI em um Problema LDP	66
5.7. Outras Formas de Solução do Problema LSI	67
5.8. Considerações Finais	69
Capítulo 6: Estimadores de Estado Ortogonais-Sequenciais com Restrições de Igualdade e Desigualdade	71
6.1. Introdução	71
6.2. Construção de um Estimador de Estados Ortogonal-Sequencial com Restrições de Igualdade e Desigualdade pelo Método da Transformação LSI/LDP	71
6.3. Construção de um Estimador de Estados Ortogonal-Sequencial com Restrições Utilizando-se Variáveis de Folga	78
6.4. Aspectos Práticos da Implementação	80
6.5. Os Programas Desenvolvidos	85
6.5.1. Algoritmo do Programa EENLR	85
6.5.2. Algoritmo do Programa EENLRID	86
6.5.3. Algoritmo do Programa EENLVF	88
6.6. Considerações Finais	89
Capítulo 7: Resultados	92
7.1. Introdução	92
7.2. Procedimentos de Simulação	93
7.2.1. Procedimentos de Validação do Estimador de Estados com Restrições de Igualdade (EENLR)	93
7.2.2. Procedimentos para a Validação do Estimador de Estados com Restrições de Igualdade e Desigualdade	94
7.2.2.1. Testes Preliminares	94
7.2.2.2. Procedimentos para a Simulação da Representação Explícita do Sistema Externo	94
7.3. Estimador com Restrições de Igualdade via MPRI	97
7.3.1. Sistema de 30 Barras do IEEE	98
7.3.2. Sistema de 118 Barras do IEEE	98
7.3.3. Sistema Sul-Sudeste de 340 Barras	100
7.4. Validação dos Estimadores com Restrições de Igualdade e Desigualdade	101
7.5. A Representação Não-Reduzida do Sistema Externo	105
7.5.1. Resultados da Estimção de Estados	106
7.5.1.1. Sistema de 30 Barras do IEEE	106

7.5.1.2. Sistema de 118 Barras do IEEE	109
7.5.1.3. Sistema Sul-Sudeste Brasileiro de 340 Barras	112
7.5.2. Resultados da Análise de Contingências	115
7.5.2.1. Sistema de 30 Barras do IEEE	115
7.5.2.2. Sistema de 118 Barras do IEEE	118
7.5.2.3. Sistema Sul-Sudeste Brasileiro de 340 Barras	121
7.6. Considerações Finais	125
Capítulo 8 Conclusões	127
8.1. Introdução	127
8.2. Conclusões	127
8.3. Sugestões para Trabalhos Posteriores	131
Referências Bibliográficas	134
Apêndice A: Métodos Ortogonais via Rotações de Givens	141
Apêndice B: Dados dos Sistemas-Teste Utilizados: Caso Base	148
B.1. Sistema de 30 Barras do IEEE	148
B.1.1. Dados de Barra	148
B.1.2. Dados de Linha (em p.u.)	149
B.2. Sistema de 118 Barras do IEEE	150
B.2.1. Dados de Barra	150
B.2.2. Dados de Linha	152
B.3. Sistema de 340 Barras Reduzido do Sistema Sul-Sudeste Brasileiro	156
B.3.1. Dados de Barra	156
B.3.2. Dados de Linha	162
Apêndice C: Resultados da Estimação de Estados	172
C.1. Sistema de 30 Barras do IEEE	172
C.2. Sistema de 118 Barras do IEEE	173
Apêndice D: Resultados da Análise de Contingências	177
D.1. Sistema de 30 Barras do IEEE	177

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 7.1: Sistemas-teste utilizados.	97
Tabela 7.2: Estimativas para as injeções nulas: Sistema IEEE-30 barras.	98
Tabela 7.3: Estimativas para as injeções nulas: Sistema IEEE-118 barras com 332 telemidas.	99
Tabela 7.4: Número de Iterações para o Sistema de 340 barras.	100
Tabela 7.5: Tempo total de cpu.	101
Tabela 7.6: Características dos Sistemas-teste Utilizados; Estimadores com Restrições de Igualdade e Desigualdade.	102
Tabela 7.7: Número de iterações necessárias à convergência.	104
Tabela 7.8: Tempo total de c.p.u.	105
Tabela 7.9: Sistema IEEE-30 barras.	106
Tabela 7.10: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Externo (em p.u.) para o Sistema IEEE-30 barras.	108
Tabela 7.11: Tempo Total de c. p. u. em segundos: Sistema IEEE- 30 barras com restrições.	109
Tabela 7.12: Sistema IEEE-118 barras.	109
Tabela 7.13: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Externo (em p.u.) para o Sistema IEEE-118 barras.	111
Tabela 7.14: Tempo Total de c. p. u. em segundos: Sistema IEEE-118 barras. Problema com restrições.	112
Tabela 7.15: Sistema SSE-340 barras.	113

Tabela 7.16: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Externo (em p.u.) para o Sistema SSE-340 barras.	114
Tabela 7.17: Sistema IEEE-30 barras: Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno. Contingência em estudo: perda da linha entre as barras 2 e 4.	116
Tabela 7.18: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema de 30 barras do IEEE: Contingência considerada: perda da linha entre a barra 2 e 4.	116
Tabela 7.19: Sistema IEEE-30 barras: Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno: Contingência em estudo: perda da linha entre as barras 1 e 2.	117
Tabela 7.20: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema de 30 barras do IEEE: Contingência considerada: perda da linha entre as barras 1 e 2.	117
Tabela 7.21: Sistema IEEE-30 barras: Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno: Contingência em estudo: perda da linha entre as barras 6 e 7.	118
Tabela 7.22: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema de 30 barras do IEEE: Contingência considerada: perda da linha entre as barras 6 e 7.	118
Tabela 7.23: Sistema IEEE-118 barras: Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno: Contingência considerada: perda da linha entre as barras 89 e 90.	119
Tabela 7.24: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema de 118 barras do IEEE: Contingência considerada: perda da linha entre as barra 89 e 90.	119
Tabela 7.25: Sistema IEEE-118 barras: Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno: Contingência considerada: perda da linha entre as barras 80 e 96.	120
Tabela 7.26: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema de 118 barras do IEEE: Contingência considerada: perda da linha entre as barra 80 e 96.	120
Tabela 7.27: Sistema IEEE-118 barras: Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno: Contingência considerada: perda da linha entre as barras 100 e 104.	121

- Tabela 7.28:** Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema de 118 barras do IEEE: Contingência considerada: perda da linha entre as barra 100 e 104. 121
- Tabela 7.29:** Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema SSE-340 barras: Contingência considerada: perda da linha entre as barras 2 e 23. 122
- Tabela 7.30:** Desvios em injeções de potência reativa nas barras do Sistema Interno considerando a perda da linha entre as barras 2 e 23. 122
- Tabela 7.31:** Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema SSE-340 barras: Contingência considerada: perda da linha entre as barras 19 e 29. 123
- Tabela 7.32:** Desvios em injeções de potência reativa nas barras do Sistema Interno considerando a perda da linha entre as barras 19 e 29. 123
- Tabela 7.33:** Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema SSE-340 barras: Contingência considerada: perda da linha entre as barras 59 e 62. 124
- Tabela 7.34:** Desvios em injeções de potência reativa nas barras do Sistema Interno considerando a perda da linha entre as barras 59 e 62. 124
- Tabela 7.35:** Perdas nas linhas de transmissão do Sistema de 340 barras. 125

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 7.1.: Sistema IEEE 30 barras.	107
Figura 7.2.: Sistema IEEE 118 barras.	110

SIMBOLOGIA

Neste trabalho, as matrizes e vetores estão em negrito, as variáveis escalares estão em caracteres normais e as variáveis inteiras em itálico.

Diversos símbolos podem possuir significados diferentes. Contudo, sua utilização é restrita a um determinado capítulo.

Abreviaturas

- COS:** Centro de Operações do Sistema;
- LDP:** refere-se ao Problema de Programação de Mínima Distância (*Least Distance Programming*);
- LS:** refere-se ao Problema de Mínimos Quadrados Irrestrito (*Least Squares*);
- LSE:** refere-se ao Problema de Mínimos Quadrados com Restrições de Igualdade (*Least Squares with Equality Constraints*);
- LSI:** refere-se ao Problema de Mínimos Quadrados com Restrições de Desigualdade (*Least Squares with Inequality Constraints*);
- LSIE:** refere-se ao Problema de Mínimos Quadrados com Restrições de Igualdade e Desigualdade (*Least Squares with Inequality and Equality Constraints*);
- MP:** Método dos Pesos;
- MPRI:** Método dos Pesos com Refinamento Iterativo;
- MMEN:** Método da Matriz do Espaço Nulo;
- NNLS:** refere-se ao Problema de Mínimos Quadrados com Restrições de Não-Negatividade (*Non-Negativity Least Squares*);
- NNLSE:** refere-se ao Problema de Mínimos Quadrados com Restrições de Não-Negatividade e Igualdade;
- SE:** Sistema Externo;
- SI:** Sistema Interno;

Operadores

$\frac{d}{d}$ - derivada total de uma dada função;

$\frac{\partial}{\partial}$ - derivada parcial de uma dada função;

Δ - diferença entre o valor de uma variável obtido na iteração corrente com relação ao valor obtido na iteração anterior;

∇ - vetor gradiente de uma função;

$[]^{-1}$ - inversão de uma matriz;

$[]^T$ - transposição de uma matriz;

$\| \|_{\infty}$ - norma infinita de um vetor;

$\| \|$ - norma quadrática ou Euclidiana de um vetor.

Simbologia

A: matriz dos coeficientes em um sistema de equações lineares;

b: vetor do lado direito em um sistema de equações lineares;

b: vetor dos limites correspondente às restrições de igualdade;

B: matriz do espaço nulo de **G**;

d: vetor contendo os limites inferiores definidos pela função **f(x)**;

D: matriz diagonal, contendo os fatores de ponderação obtidos pela aplicação do Método das Rotações de Givens com três multiplicadores;

E: matriz dos coeficientes em um problema de mínimos quadrados linear;

ϵ, ϵ : limite de tolerância para a convergência do método de Newton;

f: vetor do lado direito em um problema de mínimos quadrados linear;

f(x): função vetorial não linear que relaciona as equações correspondentes às restrições de desigualdade com as variáveis de estado;

F: matriz Jacobiana calculada no ponto $\mathbf{x}=\mathbf{x}^k$ correspondente à função **f(x)**;

S: matriz Jacobiana correspondente às restrições de desigualdades transformada;

g(x): função vetorial não linear que relaciona as equações correspondentes às restrições de igualdade com as variáveis de estado;

G: matriz Jacobiana calculada no ponto $\mathbf{x}=\mathbf{x}^k$ correspondente à função **g(x)**;

h(x): função vetorial não linear que relaciona cada telemedida da rede às variáveis de estados;

H: matriz Jacobiana calculada no ponto $\mathbf{x}=\mathbf{x}^k$ correspondentes à função **h(x)**; respectivamente;

I: matriz Identidade;

I_r: matriz identidade de ordem r ;

J(x): função objetivo a ser minimizada contendo o somatório dos quadrados dos resíduos correspondentes aos erros de medição;

K: matriz ortogonal;

$\ell(*)$: função Lagrangeana;

m : n.º de telemedidas;

M: matriz Jacobiana aumentada, formada por **H** e pela inclusão da matriz **G** ponderada pelo coeficiente μ ;

n : n.º de variáveis de estado;

N : n.º de barras da rede;

p : n.º de restrições de desigualdade;

Q: matriz ortogonal que triangulariza uma matriz de posto completo qualquer;

r : n.º de restrições de igualdade;

r: vetor dos resíduos correspondentes aos erros de estimação;

R: matriz diagonal das covariâncias dos erros de medição, de ordem $m \times m$

t : símbolo para transposição de uma matriz;

T: matriz de transformação que triangulariza uma matriz retangular pelo Método das Rotações de Givens com três multiplicadores;

U: matriz triangular superior;

U_T : matriz triangular superior de diagonal unitária;

x : o vetor correspondente às n variáveis de estados (módulo e ângulo da tensão nas N barras do sistema);

z : vetor contendo as telemidas obtidas via SCADA ou pseudo-medidas;

λ, γ : vetores dos multiplicadores de Lagrange;

μ : valor do coeficiente da função barreira no Método dos Pontos Interiores;

μ : fator de peso utilizado na ponderação das restrições de igualdade no Método dos Pesos com Refinamento Iterativo;

Capítulo 1

Introdução

1.1. Introdução

Em Bose e Clements [BOS87], a segurança de um sistema de potência é definida como sendo a sua habilidade permanecer em seu estado normal de operação quando da ocorrência de alguma contingência. E é justamente a Análise de Segurança que justifica a existência, nos modernos Centros de Operação do Sistema (COS), de um complexo aparato computacional que nos possibilita a monitoração e a Análise de Contingências em tempo real do sistema de energia elétrica ou parte dele. Desse aparato fazem parte o sistema de aquisição de dados e controle do sistema em tempo real (SCADA), os sistemas computacionais e o *software* necessário à construção do modelo da rede elétrica em tempo real. Fazem parte deste software o Configurador de Redes, o Observador de Rede, o Estimador de Estados, apenas para citar os principais [BOS87].

A Análise de Contingências é a principal ferramenta utilizada na Análise de Segurança. A Análise de Contingências é realizada sobre um modelo da rede determinado em tempo real. Sobre este modelo, os efeitos de diversas contingências possíveis são estudados, permitindo ao operador atuar da melhor maneira possível de forma a minimizar os efeitos de uma determinada contingência que venha a ocorrer, ou ainda tomar as medidas cabíveis para evitar sua ocorrência ou minimizar seus efeitos.

A questão principal contudo, é obter-se o modelo da rede em tempo real. A todo instante, chegam ao COS telemidas provenientes de toda a rede, contendo informações sobre o "status" de disjuntores, tensão nas barras de carga ou geração, medidas de fluxo de potência ativa e reativa em linhas de transmissão, medidas de injeção de potência ativa ou reativa nas barras de carga ou geração.

É função do Estimador de Estados a filtragem de todo esse conjunto de telemidas e a determinação do estado do sistema pela minimização de uma função custo, representada pelo somatório do quadrado dos desvios ponderados dos erros de medição.

Cabe ao Configurador de Redes a determinação da configuração física da rede em tempo real, utilizando-se das telemidas digitais referentes ao status dos disjuntores e de dados contidos em arquivos montados "*off-line*", onde constam os modelos matemáticos de todos os componentes da rede.

Ao Observador compete determinar se é possível ou não ao Estimador de Estados determinar o estado da rede, representado pelo módulo e ângulo da tensão em todas as barras do sistema [BOS87]. Em outras palavras, se a quantidade e a localização das telemidas for tal que o sistema seja observável, isto significa que seu estado é determinável. Caso o sistema seja não observável, o Observador deverá apontar todas as ilhas observáveis do sistema.

Como as diversas empresas que constituem um sistema elétrico operam de maneira interligada, a região não observável do sistema pode ser várias vezes maior que a parcela observável, normalmente identificada com a área monitorada de atuação de uma determinada empresa.

A definição do que é sistema interno ou externo está relacionada com a definição destas regiões. O Sistema Interno seria, do ponto de vista de um COS particular, a região observável de todo o sistema. Logo, o Sistema Externo é constituído por todas as regiões não-observáveis do sistema interligado. Esta é uma definição bem geral pois inclui a definição tradicional de Sistema Externo, definido em termos das áreas diretamente monitoradas por uma determinada empresa do sistema interligado. Assim, o Sistema Interno é definido como sendo uma área monitorada e controlada por uma determinada empresa. As áreas controladas pelas outras empresas constituem o Sistema Externo. As áreas não monitoradas dentro do Sistema Interno são tratadas como ilhas não-observáveis e seus estados podem ser estimados juntamente com os estados da parte observável da rede interna [GSC96]. Neste trabalho, é adotada a primeira definição para Sistema Externo.

Com a utilização do Estimador de Estados, não é necessário conhecer-se o Sistema Externo para obter-se a situação atual do Sistema Interno. Já no caso da Análise de Contingências, o mesmo não ocorre. Para que os resultados da Análise de Contingências sejam realísticos, é importante a representação razoavelmente precisa da reação da rede externa a uma contingência ocorrida na rede interna. Para poder avaliar as consequências de uma determinada contingência, postulada como um caso futuro, a estimação de estados não pode ser utilizada pela inexistência de telemidas do Sistema Externo. Logo, um Fluxo de Potência deverá ser simulado para a avaliação de contingências.

Um modelo do tipo Fluxo de Potência (injeções de potência ativa e reativa nas barras de carga, injeção de potência ativa e módulo de tensão nas barras de geração, conhecidos deterministicamente, mais a existência de uma barra de folga, tomada como referência para módulo de tensão e ângulo) pode ser obtido para o Sistema Interno a partir dos resultados fornecidos pelo Estimador de Estados, para a contingência em estudo. Se forem conhecidos os fluxos de potência do Sistema Externo injetados nas barras de fronteira do Sistema Interno, é possível se executar um Fluxo de Potência apenas para o Sistema Interno. Contudo, devido à resposta do Sistema Externo à contingência em estudo, os fluxos injetados nas barras de fronteira tornam-se diferentes de seu valor atual.

Portanto, torna-se necessário adicionar-se ao Sistema Interno um modelo para o Sistema Externo de forma tal que a resposta do Sistema Externo às contingências em estudo possa ser representada da forma mais acurada possível.

1.2. Formas de Modelagem do Sistema Externo

A maneira usual de estabelecer-se um modelo "*on line*" do tipo Fluxo de Potência para a Análise de Segurança de sistemas interligados envolve três passos principais [WUM83, MON85]:

- 1 - determinação do estado atual do Sistema Interno via estimação de estados;
- 2 - modelagem do Sistema Externo;
- 3 - anexação do modelo do Sistema Externo ao Sistema Interno para Análise de Contingências.

O Sistema Externo pode ser representado por um modelo não reduzido do tipo Fluxo de Potência ou por uma rede reduzida equivalente (Equivalentes Externos). Em [BOS87,DEC80/1,DEC80/2,EXT94] são apresentadas revisões e análise crítica das diferentes formas de representação de Sistemas Externos.

A representação do Sistema Externo tem por objetivo simular as reações da rede externa quando da ocorrência de alterações no Sistema Interno (rede de interesse) causadas por alguma perturbação (perda de linha, transformadores, geradores, etc.).

Os Equivalentes Externos podem ser utilizados quando as informações que dispomos sobre a rede externa são insuficientes ou não confiáveis para a construção de um modelo não-reduzido.

Os Equivalentes Externos mais comumente utilizados são de dois tipos: os Equivalentes Ward [MON79] e os Equivalentes REI [DIM75,TIN77]. Nestes métodos, a rede externa é reduzida "*off line*" às barras de fronteira com o Sistema Interno. A vantagem desta forma de representação do Sistema Externo é que nenhuma informação em tempo real da rede externa é absolutamente necessária para torná-lo observável. As variações nas cargas e gerações do Sistema Externo podem ser consideradas "*on line*" realizando-se ajustes nas injeções de potência ativa e reativa nas barras de fronteira, de modo a garantir o chamado balanço de potência na fronteira ("*power matching*"). Quando ocorrem mudanças na topologia da rede externa, o modelo torna-se inadequado e faz-se necessário atualizá-lo de modo que ele reflita estas alterações.

Na obtenção do Equivalente Ward, a rede é dividida em rede externa, de fronteira e rede interna. Na formulação básica [WUF83], toda a rede externa é reduzida às barras de fronteira da rede interna via Eliminação de Gauss da parte da Matriz Admitância de Barra referente à rede externa. A parte da matriz Y_{barra} correspondente à rede interna não é afetada pela Eliminação de Gauss.

Devido às dificuldades do Equivalente Ward básico em representar o efeito das barras de geração (barras PV) do Sistema Externo, foi sugerido, na tentativa de obter-se resultados mais precisos, que a Eliminação de Gauss fosse aplicada apenas às barras de carga (barras PQ) da rede externa. O equivalente externo assim obtido é um Equivalente Ward apenas das barras PQ, com retenção das barras PV. Este tipo de equivalente é conhecido na literatura como Equivalente Ward-PV [BOS87].

Monticelli, Deckman, Garcia e Stott [MON79] desenvolveram um tipo de Equivalente Ward que procura reunir a simplicidade do Ward básico com as vantagens do Ward-PV: é o Equivalente Ward Estendido. O Ward Estendido é um Equivalente Ward com suporte reativo adicional nas barras de fronteira fornecido por barras PV fictícias conectadas a elas.

O Equivalente REI ("*Radial, Equivalent and Independent*") foi proposto por Dima [DIM75] e difundido por Tinney e Powell [TIN77]. A ideia básica do Equivalente REI [WUM83] é agregar as injeções de um grupo de barras em uma única barra fictícia. Esta injeção agregada é redistribuída a suas barras através de uma rede radial denominada de Rede REI. Após a agregação, as barras com injeção zero são eliminadas por Eliminação de Gauss. Os passos básicos na construção de um Equivalente REI [WUM83] são os seguintes:

- remover as injeções de todas as barras a serem agregadas;
- construir a Rede REI e anexá-la a estas barras;
- adicionar todas as injeções e injetar o resultado no nó central da Rede;
- proceder a Eliminação de Gauss, eliminando todos os nós com injeção zero.

O valor das admitâncias que conectam o nó central às barras de fronteira do Sistema Interno são calculadas com base na solução de um Fluxo de Potência para o Sistema Externo de tal modo que as injeções da Rede REI sejam iguais às injeções originais.

O uso de Equivalentes Externos possui algumas limitações [EXT94]. Em primeiro lugar, o Equivalente Externo não tem a capacidade de refletir alterações nas características operacionais do Sistema Externo, afetando a solução obtida para o Sistema Interno. Como consequência, existe a necessidade de contínua atualização do Equivalente. Em segundo lugar, as informações provenientes de telemedições ou de dados projetados para o Sistema Externo são de difícil implementação quando da atualização do Equivalente. Em terceiro lugar, não é possível a modelagem de eventos significativos como a perda de linhas de transmissão ou outros equipamentos de produção da rede externa e seu impacto sobre o Sistema Interno. Finalmente, o uso de Equivalentes para as ilhas não observáveis do Sistema Interno não permite uma análise completa destas ilhas, havendo a necessidade de atualização "*on line*" do modelo para que este possa refletir mudanças nas condições operacionais. Contudo, o uso de Equivalentes

Externos encontra larga aplicação onde o intercâmbio de informações entre empresas vizinhas é muito pequeno ou não existe, ou a disponibilidade de memória nos computadores dificulta o uso de modelos externos mais elaborados.

Uma abordagem atualmente bem aceita para a modelagem do Sistema Externo é a utilização de modelos que procuram representar parte da rede externa explicitamente, isto é, parte da rede externa é representada através de um modelo não-reduzido [MON85, DEC80/1, DEC80/2, GEI83, NUC91, SIM96, LUL90, GEI87]. Para tornar esta parte da rede externa observável, o status dos disjuntores são considerados em suas posições normais, as cargas são supostas proporcionais às cargas do Sistema Interno e a geração é obtida através de um Despacho Econômico para o Sistema Externo (geração economicamente despachada). As equações da rede externa são então resolvidas para se obter o modelo em tempo real para o Sistema Externo. Os algoritmos utilizados para a solução da rede podem ser o Fluxo de Potência [DEC80/1, DEC80/2] ou o Estimador de Estados [GEI83, GEI87, MON85, SIM87, GEL85, NUC91] ou uma combinação dos dois [LUL90].

Como o principal objetivo é estudar os efeitos do Sistema Externo sobre o Sistema Interno quando da ocorrência de uma contingência neste, a representação do Sistema Externo não precisa ser exata. Basta que seja adequada, isto é, que a resposta do Sistema Externo frente a uma contingência ocorrida no Sistema Interno seja bem representada.

A principal fonte de erros no modelo do Sistema Externo está relacionada com os dados supostos para o Sistema Externo em tempo real (status de disjuntores, cargas e geração) [BOS86]. Erros relacionados com status de disjuntores parecem provocar erros mais significativos quando da realização da Análise de Contingência do que erros relacionados com grandezas analógicas. Em outras palavras, é mais importante conhecer o status operacional de linhas e unidades geradores importantes do que conhecer com precisão o valor de cargas ou gerações. Quanto mais eletricamente próximos os erros de modelagem estiverem do Sistema Interno, maior serão seus efeitos sobre os resultados da Análise de Contingências. Outra fonte importante de erros está na consideração sobre o valor dos intercâmbios entre áreas externas vizinhas [BOS86].

Bose [BOS86] mostrou que a modelagem por Equivalentes Externos produz erros maiores que a modelagem não-reduzida do Sistema Externo. Entre os Equivalentes Externos, o Equivalente REI apresentou os maiores erros. No caso da representação não reduzida, a solução das equações da rede via Fluxo de Potência tende a apresentar grandes desvios de potência nas barras de fronteira quando erros nos dados estão presentes. A utilização do Estimador de Estados tende a dissipar estes erros para longe das barras de fronteira além de fornecer uma indicação sobre a localização deles.

Em [WUM83], Monticelli e Wu propõem uma abordagem unificada para o problema da modelagem da rede externa. O Sistema Externo é dividido em duas

partes: o Sistema Externo Interior e o Exterior (*Inner and Outer External Systems*). O Sistema Externo Interior é representado de maneira não-reduzida segundo um modelo do tipo Fluxo de Potência. O Sistema Externo Exterior é reduzido e representado por um Equivalente. Os passos básicos da abordagem unificada são assim definidos [WUM83]:

- 1, Defina o Sistema Externo Interior.
2. Construa um Equivalente para o Sistema Externo Exterior e o substitua por este Equivalente.
3. Atualize as injeções nas barras de fronteiras Exteriores.
4. Realize a Estimação de Estados para o Sistema Interno.
5. Faça o Balanço de Potência nas barras de fronteiras Interiores.
6. Atualize o modelo para o Sistema Externo sempre que necessário (“*boundary matching*”).

A grande vantagem desta abordagem é a economia de recursos computacionais (tempo de processamento na obtenção do modelo da rede externa e memória).

1.3. Objetivos Gerais do Trabalho

1.3.1. Panorama Atual do Problema de Estimação de Estados com Restrições.

Como foi mostrado acima, a tendência atual na modelagem da rede externa é a utilização de modelos tipo Fluxo de Potência permitindo a representação explícita (não reduzida) das áreas do Sistema Externo mais próximas às fronteiras do Sistema Interno. Para tanto, uma *buffer zone* é definida, isto é, a área do Sistema Externo que será modelada explicitamente. As áreas restantes do Sistema Externo ou serão equivalentadas ou ignoradas. Para a obtenção do modelo da parte da rede que será representada explicitamente, um programa do tipo Fluxo de Potência pode ser utilizado. Contudo, a utilização de um Estimador de Estados apresenta melhores resultados, pois permite a detecção e identificação de erros na modelagem e menores desvios de potência nas barras de fronteira [EXT94].

A estimação de estados pode abranger o total do sistema interligado (Sistema Interno mais Sistema Externo) em um único passo, exigindo a utilização de um conjunto de medidas críticas para o Sistema Externo de modo a evitar que erros nas considerações de carga ou topologia feitas para a rede externa contaminem o estado estimado da rede interna. Alternativamente, os estados da rede interna e externa podem ser estimados sequencialmente, utilizando-se o maior grau de redundância possível para a rede externa (métodos em dois passos). Contudo, como será visto posteriormente, os métodos em dois passos exigem a manipulação dos pesos associados às pseudo-medidas exigidas para tornar o

Sistema Externo observável, o que pode gerar instabilidade numérica e erros durante o processo de estimação, obrigando o uso de estimadores numericamente mais robustos como os baseados em métodos ortogonais.

Atualmente, duas famílias de Estimadores de Estado estão sendo preferencialmente utilizados pela indústria: os estimadores baseados no Método da Matriz Aumentada (também conhecido pelo nome de Método de Hachtel) e os estimadores ortogonais-sequenciais que utilizam as rotações de Givens como método de solução para o problema dos mínimos quadrados ponderados.

Outro aspecto recentemente abordado pela literatura é o uso de um estimador de estados com restrições de igualdade e desigualdade para a modelagem da rede externa de sistemas de potência [CLE95, SAL97]. O uso de restrições de igualdade, permite a incorporação ao modelo de informações de alto grau de confiança, como injeções nulas em barras de transferência. O uso de restrições de desigualdade permite a modelagem de cargas em barras do Sistema Externo, bem como a consideração dos limites operacionais das unidades geradoras e linhas de transmissão do Sistema Externo.

A estimação de estados é um problema de otimização cuja função objetivo é a soma ponderada dos quadrados dos erros de estimação. O método inicialmente escolhido para resolvê-lo foi o Método de Gauss-Newton que, aplicado ao problema dos mínimos quadrados, originava um método de solução conhecido como o da Equação Normal, conforme proposto por Schweppe em 1970 [SCH70]. Aschmoneit, em 1977 [ASC77] desenvolveu uma nova formulação deste método, incorporando restrições de igualdade ao problema original e resolvendo-o por Gauss-Newton. Este método é conhecido na literatura como Método da Equação Normal com Restrições de Igualdade.

Como o Método da Equação Normal pode apresentar problemas numéricos, foram desenvolvidos métodos mais robustos, como os métodos ortogonais de Golub [SIM81/1] e Givens [SIM81/2], ambos aplicados à Estimação de Estados em Sistemas de Potência por Simões Costa e Quintana e o Método da Matriz Aumentada [GIE85]. Um aspecto do Método da Matriz Aumentada é que este já pode incorporar restrições de igualdade em sua formulação básica. Todos os métodos mencionados são conceitualmente equivalentes ao Método de Gauss-Newton, com convergência quadrática.

Em 1985 Simões Costa e Seleme incorporaram restrições de igualdade ao Método de Givens [SEL85]. Quintana, Scott e Chikiani publicaram sua versão do Método de Givens com restrições de igualdade em 1986 [QSC86].

A incorporação de restrições de desigualdade ao Estimador de Estados é mais problemática, visto as dificuldades dos métodos de Newton para manipulá-las.

Com a popularização dos Métodos de Pontos Interiores e sua aplicação ao problema do Fluxo de Potência Ótimo, Clements et ali [CLE95] aplicou-os ao problema dos mínimos quadrados ponderados utilizando uma formulação

semelhante a empregada no Método da Matriz Aumentada, obtendo bons resultados. Kliokys [KLI95] fez o mesmo, mas utilizou uma formulação semelhante à empregada no Método da Equação Normal.

1.3.2. Pesquisa Desenvolvida neste Trabalho.

O objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento de um modelo para a representação da rede externa, pela utilização de um Estimador de Estados ortogonal-sequencial utilizando rotações de Givens e a inclusão de restrições de igualdade e de desigualdade. A solução para o sistema interligado pode ser obtida em um passo, sem que o estado estimado para a rede interna seja contaminado pelos erros de modelagem da rede externa, ou ainda em dois passos, utilizando-se a maior quantidade de informações possíveis sobre a rede externa.

O uso de restrições de igualdade, conforme já mencionado acima, permite a incorporação ao modelo de informações de alto grau de confiança, como injeções nulas em barras de transferência. O uso de restrições de desigualdade permite a modelagem de cargas em barras do Sistema Externo, bem como a consideração dos limites operacionais das unidades geradoras e linhas de transmissão do Sistema Externo.

Uma outra motivação deste trabalho foi a inexistência de um Estimador de Estados numericamente robusto baseado no Método de Givens capaz de processar restrições de desigualdade ou restrições de igualdade de forma mais eficiente. Com a crescente desregulamentação do setor elétrico no mundo e em particular no Brasil, o desenvolvimento de estimadores numericamente robustos torna-se ainda mais importante face às novas características e objetivos do sistema elétrico brasileiro e das empresas recém privatizadas.

Tal estimador é bem vindo, não apenas para a modelagem da rede externa, mas também para permitir a incorporação ao modelo de informações como os limites operacionais de diversos equipamentos pertencentes ao sistema interno e aumentar a precisão do estimador em regiões de baixa redundância do sistema interno.

1.4. Organização do Trabalho

Este trabalho está subdividido em sete capítulos e quatro apêndices.

O primeiro capítulo compreende uma introdução, onde o problema a ser abordado é identificado e uma revisão bibliográfica é apresentada. Ainda no primeiro capítulo, são apresentados os objetivos e a motivação do presente trabalho.

No segundo capítulo é feita uma revisão completa dos métodos de modelagem do Sistema Externo existente na literatura.

O terceiro capítulo é dedicado aos estimadores de estados com restrições. Uma breve revisão dos métodos existentes na literatura é realizada.

O Capítulo 4 é dedicado à apresentação dos métodos existentes na literatura destinados a resolver um problema de Mínimos Quadrados com Restrições de Igualdade mas que utilizem transformações ortogonais.

O Capítulo 5 apresenta os métodos baseados em transformações ortogonais destinados à solução de um Problema de Mínimos Quadrados com Restrições de Desigualdade.

O estimador proposto neste trabalho é apresentado no Capítulo 6.

No sétimo capítulo são apresentados e analisados os resultados obtidos pelos estimadores ortogonais-sequenciais não-lineares com restrições de igualdade e desigualdade via rotações de Givens com três multiplicadores desenvolvidos neste trabalho.

Finalmente, no Capítulo 8 são apresentadas as conclusões finais sobre este trabalho e propostas para estudos posteriores.

No Apêndice A, são apresentados o conceito de transformações ortogonais, de rotações de Givens e as formas de realizá-las.

No Apêndice B são apresentados os dados dos sistemas-teste utilizados neste trabalho.

No Apêndice C são apresentados os resultados numéricos obtidos com os estimadores desenvolvidos e, finalmente, no Apêndice D os resultados obtidos na Análise de Contingências.

Capítulo 2

A Modelagem não-reduzida do Sistema Externo

2.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados de maneira sucinta os principais métodos de representação não-reduzida do Sistema Externo. Ao final do capítulo, são feitas considerações sobre as vantagens e desvantagens de cada método.

2.2. A Solução da Rede Externa via Fluxo de Potência [DEC80/1, DEC80/2, LEO94]

Os dados necessários para a construção de um modelo do tipo Fluxo de Potência são as injeções de potência ativa e reativa nas barras PQ (barras de carga), as injeções de potência ativa e o módulo da tensão nas barras de geração (barras PV) e a existência de uma barra de referência onde o módulo e o ângulo da tensão são pré-especificados (barra de folga). Estes dados identificam o ponto de operação do sistema e servem de base para o cálculo de seu estado. Como, por definição, o Sistema Interno é considerado observável, seu estado pode ser determinado por meio de um Estimador de Estados utilizando-se de um conjunto redundante de telemidas disponíveis no COS do Sistema Interno.

Contudo, como o Sistema Externo precisa ser representado por um modelo do tipo Fluxo de Potência para ser posteriormente anexado ao modelo do Sistema Interno para proceder-se à Análise de Contingências, o conhecimento do ponto real de operação também é necessário. Alguns dados do Sistema Externo podem estar disponíveis em tempo real devido à troca de informações entre Centros de Operação do Sistema. Entretanto, a maior parte desses dados não está disponível em tempo real para o COS do Sistema Interno. O uso de dados extrapolados ou calculados "*off-line*" a partir do ponto real de operação do Sistema Interno é praticamente obrigatório, caso contrário o estado da rede externa não pode ser calculado e seu modelo determinado.

Uma forma de se obter um ponto de operação compatível com o estado atual do Sistema Interno a partir de dados extrapolados é utilizar-se um Programa de Fluxo de Potência para o Sistema Externo e barras de fronteira. Os dados de

entrada para o Fluxo de Potência do Sistema Externo consistem de [WUM83, DEC80/1, DEC80/2]:

- valores extrapolados para as injeções de potência ativa e reativa nas barras PQ do Sistema Externo;
- valores extrapolados para as injeções de potência ativa e módulo da tensão nas barras PV externas;
- módulo e ângulo estimados da tensão em todas as barras de fronteira, consideradas como barras de folga. Esses valores são obtidos na Estimação de Estados executada para o Sistema Interno.

Quando o modelo assim obtido para o Sistema Externo é conectado ao Sistema Interno, o estado deste, obtido via Estimação de Estados, não deve ser alterado. Em outras palavras, a solução obtida para o Sistema Interno para a rede completa deve ser a mesma obtida pelo Estimador de Estados para o Sistema Interno. Isto é conseguido via ajustes no modelo do Sistema Externo, o chamado balanço de potência ("*power matching*"), descrito a seguir [WUM83]:

- via Estimação de Estados, calcule o fluxo de potência das barras de fronteira para o Sistema Interno;
- tomando as barras de fronteira como barras de folga com valores obtidos da Estimação de Estados e o Sistema Externo desconectado do Sistema Interno, calcule os fluxos de potência do Sistema Externo para as barras de fronteira;
- em cada barra de fronteira, adicione injeções de potência de tal forma que os fluxos fiquem balanceados.

Resumindo, a solução da rede externa via Fluxo de Potência exige que sejam executados em tempo real um Estimador de Estados para o Sistema Interno e um Fluxo de Potência para o Sistema Externo. Um dos problemas mencionados na literatura sobre esta forma de modelagem é a ocorrência de desvios de potência ("*power mismatches*") nas barras de fronteira quando da existência de erros nos dados do Sistema Externo, principalmente erros topológicos [WUM83, EXT94, GEI83]. Estes grandes desvios de potência ocorrem devido à própria estrutura do programa de Fluxo de Potência, já que as perdas do sistema e todos os desvios de potência são "jogados" na barra de folga. Isto dificulta inclusive a identificação destes erros. Outra desvantagem deste método é a impossibilidade de serem aproveitadas informações provenientes de telemidas do Sistema Externo, do tipo fluxo de potência em linhas de grande importância, ou ainda pseudo-medidas de injeção em barras de passagem.

Na tentativa de minimizar estes problemas, Lu e seus colaboradores [LEO94] propõem a utilização de programação linear difusa para minimizar os

desvios de potência nas barras de fronteira e tornar os resultados obtidos mais aceitáveis e próximos dos valores esperados para a rede externa.

2.3. A Solução da Rede Externa via Estimação de Estados [EXT94, GEI83, GEI87, GEL85, LUL90, MON85, NUC91, SAN91, SIM96, WUM83]

A utilização da Estimação de Estados para a solução da rede externa foi sugerida inicialmente por Geisler e Bose [GEI83] e posteriormente implementada por Geisler e Tripathi [GEL85]. O uso da Estimação de Estados foi sugerido para se tirar vantagem da redundância de informações existente na fronteira entre o Sistema Externo e o Interno e possibilitar a utilização de telemidas provenientes do Sistema Externo, tratadas com muita facilidade pelo Estimador. Pela não existência da barra de folga no Estimador (isto é, de uma barra que feche o balanço de potência), os desvios de potência provenientes dos erros de modelagem (tanto erros topológicos como erros nos dados) tendem a se distribuir ao longo da rede, reduzindo os desvios de potência nas barras de fronteira. Além disso, o uso do Estimador de Estados fornece uma boa indicação sobre a origem e a localização desses erros.

Outra vantagem do uso do Estimador de Estados para a solução da rede externa é que o mesmo programa pode ser utilizado tanto para o Sistema Interno quanto para o Sistema Externo.

Os Sistemas Interno e Externo podem ser resolvidos em apenas um passo [MON85, SIM96], em dois passos [GEI83, GEI87, GEL85, NUC91] ou ainda em três passos [LUL90], combinando o uso de um Fluxo de Potência com o Estimador.

Nos métodos em um passo, o Estimador de Estados é rodado simultaneamente para a rede interna e externa, sendo que o conjunto de telemidas referentes à rede externa é composto unicamente de medidas críticas, isto para evitar a contaminação do estado estimado da rede interna por erros de modelagem da rede externa.

Nos métodos em dois passos, primeiro é estimado o estado da rede interna. Em seguida, é estimado o estado apenas da rede externa, utilizando-se para tal de todas as medidas disponíveis.

Nos métodos em três passos, após a estimação do estado da rede interna, é obtida a solução da rede externa por meio de um Fluxo de Potência. A partir dos resultados obtidos pelo Fluxo de Potência e utilizando-se as telemidas obtidas em tempo real para a rede externa, é rodado um Estimador de Estados para a rede interna mais a externa.

Os dados requeridos para a modelagem da rede externa são do mesmo tipo dos dados requeridos pelo Sistema Interno. A qualidade destes dados é que vai determinar a precisão da modelagem da rede externa. Na modelagem não-reduzida

da rede externa, esta é considerada em estado normal de operação. Isto quer dizer que todos os equipamentos que estariam programados para estarem em operação em um determinado instante de tempo são assim considerados, todos os disjuntores são considerados em seu *status* normal e as potências injetadas nas barras são calculadas por extrapolação a partir dos dados do Sistema Interno ou a partir de dados obtidos em tempo real, ou ainda a partir dos fatores de distribuição da carga. Os dados relativos às barras de geração são obtidos como resultado do Despacho Econômico executado para as condições normais de operação da rede externa.

A seguir, os métodos de solução são apresentados na ordem em que foram publicados.

2.3.1. O Método de Geisler e Bose [GEI83]

Utilizando-se das telemidas disponíveis, o estado da rede interna é determinado pelo uso de um Estimador de Estados. O Sistema Externo é representado de forma explícita através de um modelo do tipo Fluxo de Potência onde o estado externo é determinado por meio de um Estimador de Estados, executado apenas para a rede externa, constituindo este o segundo passo do método. Para melhorar a qualidade e precisão dos resultados, o método trabalha com um alto nível de redundância de dados na fronteira. Este alto nível de redundância é obtido deslocando-se a fronteira para as barras do Sistema Interno pertencentes à primeira vizinhança das verdadeiras barras de fronteira. A rede externa a ser resolvida fica então definida pela nova fronteira. Essa nova fronteira é denominada de fronteira externa e a fronteira original de interna.

Como a rede externa é resolvida por meio de um Estimador de Estados, é associado a cada tipo de medida um peso cujo valor depende de sua origem. Aos dados relativos às barras de fronteiras internas e externas são associadas medidas de fluxo e injeção de peso elevado, calculadas a partir da solução obtida para a rede interna. Da mesma forma são tratadas os valores de tensão e ângulos relativos às barras de fronteira internas e externas (fator de peso = 100). Todas as telemidas disponíveis para a rede externa são utilizadas (telemidas de fluxo, de injeção ou de tensão - fator de peso = 1.0). As tensões relacionadas com barras de tensão regulada também são adicionadas ao conjunto de medidas disponíveis (fator de peso = 0.1). Finalmente, às barras em que nenhum tipo de telemida ou pseudo-telemida conforme descrito acima é disponível, são associadas pseudo-telemidas de injeção calculadas da forma usual, seja utilizando-se fatores de proporcionalidade entre a carga do Sistema Interno e do Externo, seja via Despacho Econômico (fator de peso = 0.1). Desta forma, o Sistema Externo será sempre observável.

O método propõe a utilização de um Estimador de Estados onde as barras de injeção nula são tratadas como restrições de igualdade. Nenhum tipo de detecção e

identificação de erros grosseiros é realizada devido à baixa redundância das medidas disponíveis.

Uma indicação da existência de erros na modelagem da rede externa é a existência de uma grande diferença entre o valor associado a uma determinada medida de injeção e seu valor estimado. Isto também ajuda na localização destes erros.

As limitações existentes para os valores de tensão e injeção nas barras podem ser consideradas através da manipulação dos fatores de peso associados a cada medida. Por exemplo, se a tensão e a injeção de reativos em uma mesma barra estiverem fora dos limites, o fator de peso associado à medida de tensão é diminuído e o fator de peso associado à medida de injeção aumentado, permitindo que o limite de reativos seja reforçado.

Este método foi implementado e testado em um sistema real, o sistema da Florida Light and Power Company, por Geisler e Tripathi [GEL85]. Em [GEL85], os autores realizaram uma comparação com um método cuja solução da rede é baseada em Fluxo de Potência. Os resultados obtidos comprovaram a superioridade do método proposto por Geisler e Bose em relação aos métodos do tipo Fluxo de Potência. Uma das vantagens da utilização dos métodos de solução da rede externa baseados em Estimação de Estados está na sua capacidade de processar dados redundantes, o que permite modificar as injeções na rede externa de forma que o erro total da solução, os desvios nas injeções nas barras de fronteira e o número de violações nas restrições operacionais sejam minimizados.

Apesar deste método ter sido aplicado a sistemas reais, é preciso notar que a manipulação heurística dos pesos associados às medidas pode provocar uma grande disparidade entre seus valores, sendo esta uma bem conhecida fonte de instabilidade numérica nos algoritmos de solução do problema de mínimos quadrados em geral e nos de estimação de estados em particular [GOL89, LAW95].

Um outro problema relatado na literatura quando da implementação prática deste método [ASS94], foi o aparecimento de bolsões de barras não-observáveis ao longo da fronteira do Sistema Interno com o Externo, obrigando à utilização de pseudo-medidas de injeção para tornar a região observável.

2.3.2. O Método de Monticelli e Wu [MON85]

Este método combina a estimação dos estados da rede interna com a modelagem da rede externa. Um Estimador de Estados do tipo desacoplado rápido com algumas modificações, cobrindo tanto o Sistema Interno quanto o Externo simultaneamente, é utilizado. Os dados operacionais do Sistema Externo, injeções de potência e tensões de barra, são tratados como pseudo-medidas pelo Estimador de Estados. A parte relativa à modelagem da rede externa não pode afetar os estados estimados para a rede interna. Dito de outra maneira, o estado estimado

para a rede interna nestas condições deverá ser o mesmo que se obteria caso o Estimador fosse rodado para o Sistema Interno somente. Isto é verdade somente se o conjunto de dados que constituem o elenco de medidas da rede externa for não-redundante, isto é, composto apenas de medidas críticas. Pode ser demonstrado que se um conjunto de medidas não-redundantes for utilizado para representar a rede externa, o estado estimado para a rede interna dependerá apenas das medidas referentes ao Sistema Interno, independentemente do valor das pseudo-medidas do Sistema Externo [MON85].

Para permitir alterações na formulação da estimação de estados quando da alteração do conjunto de pseudo-medidas, os autores propõem a retenção de todas as variáveis importantes como pseudo-medidas na formulação. Em cada iteração, seriam ativadas apenas as pseudo-medidas necessárias para tornar a rede externa minimamente observável. As outras pseudo-medidas seriam tornadas "dormentes". Uma medida é considerada "dormente" se sua presença não afeta o resultado final da estimação [GAR79]. Esta técnica é utilizada também para reforçar os limites operacionais de uma determinada barra da rede externa. Por exemplo, em uma barra de geração externa, P, Q e V entram como pseudo-medidas. Inicialmente, P e V estão ativos e Q é deixada como dormente, enquanto ela estiver dentro de seus limites. Quando uma violação de limites ocorre, a pseudo-medida Q é então ativada em $Q = Q_{lim}$ e a pseudo-medida V é tornada dormente. Q_{lim} é o limite máximo ou mínimo de potência reativa injetada em uma determinada barra.

Para tornar uma determinada medida "dormente", esta é substituída por um valor tal que seu resíduo seja zero. Neste caso, sua presença não afetará o resultado final da estimação [GAR79, MON85].

A grande vantagem deste método é eliminar a necessidade de se executar um estimador de estados separado para a rede externa. A solução da rede externa é obtida ao mesmo tempo que os estados estimados para a rede interna, sem que estes sejam afetados por erros de modelagem provenientes da rede externa. Através da manipulação das medidas externas, tornando-as medidas dormentes ou ativando-as, as variáveis de barras podem ser mantidas dentro de seus limites sem que a convergência do método seja visivelmente afetada.

As críticas feitas a este método giram em torno de dois pontos básicos. O primeiro ponto é que se um conjunto não-redundante de medidas do tipo injeções de potência ativa e reativa e módulo da tensão de barra é utilizado, o resultado obtido pela estimação de estados é equivalente ao obtido via um Fluxo de Potência, não havendo, portanto, as vantagens oferecidas pelo Estimador de Estados. O segundo ponto refere-se à real necessidade de um método em apenas um passo, visto que o ganho de tempo é irrelevante se comparado aos métodos em dois passos [Bose, na Discussion de MON85]. Outro aspecto das críticas recebidas pelo método diz respeito às vantagens oferecidas pela utilização de dados redundantes: resultados mais precisos, dispersão dos erros de modelagem ao longo de todas as barras da rede externa e não apenas nas de fronteira, como no caso do

Fluxo de Potência ou da estimação de estados com dados não-redundantes e, finalmente, a possibilidade de identificação e localização dos erros de modelagem da rede externa.

2.3.3. O Método de Geisler e Nowak [GEI87]

Este é um método de solução da rede externa em dois passos desenvolvido para resolver o problema da modelagem de uma rede constituída por múltiplas ilhas observáveis. Em geral, a parte observável de uma rede de energia elétrica não consiste em apenas uma ilha observável. O Sistema Interno é constituído por múltiplas ilhas observáveis separadas por seções da rede externa. Cada uma dessas ilhas têm a sua própria referência angular, gerando uma matriz ganho do tipo bloco-diagonal. Dessa forma, a solução de cada ilha é computada independentemente. Na solução da rede externa, uma ilha observável é selecionada como referência global sendo que as outras ilhas precisam ser ligadas à ela, sem que a solução estimada para a rede interna seja afetada. Isto implica em que todas as tensões nodais e diferenças angulares de todas as ilhas permaneçam constantes. Isto é alcançado pela utilização de um Estimador de Estados com restrições de igualdade.

Primeiramente, as barras de fronteira da ilha tomada como referência global são tratadas como barras de referência para a solução da rede externa. Para as barras de fronteira das ilhas restantes, são escritas as seguintes restrições lineares:

$$\Delta E_{jk} = \mu(k_{jk} - (\delta_j - \delta_k)) = 0 \quad (2.1)$$

$$\Delta E_t = \alpha(k_t - V_t) = 0 \quad (2.2)$$

onde δ_j , δ_k e V_i representam ângulos e módulo da tensão, k_{jk} e k_t representam diferenças angulares e tensões constantes, respectivamente, determinadas na estimação de estado da rede interna, e α e μ são escalares arbitrários.

2.3.4. O Método de Lu, Liu e Vemuri [LUL90]

Este método é na realidade em três passos, embora os autores o considerem em dois. No primeiro passo, os estados da rede interna são estimados. Para a solução da rede externa, é proposta uma combinação de Fluxo de Potência e Estimador de Estados, constituindo o segundo e o terceiro passos. Estes dois passos, são considerados pelos autores como apenas um, dividido em duas etapas:

- simulação dos dados da rede externa;
- estimação dos estados da rede externa.

Na primeira etapa, uma solução preliminar para a rede externa é obtida mediante a utilização de um Fluxo de Potência, considerando-se todas as barras da maior ilha observável do sistema como barras de folga. Dessa forma, a solução obtida nesta etapa será a mesma obtida na estimação de estados (primeiro passo) para a ilha de referência. Para as outras ilhas, contudo, isto não ocorre. Os fluxos de potência em linhas e magnitudes de tensão são armazenados para serem reutilizados na etapa da estimação de estados.

Na segunda etapa, todos os dados disponíveis sobre o Sistema Externo são utilizados para refinamento do modelo externo. Nesta etapa é executado um Estimador de Estados para toda a rede (interna + externa). Aos dados relativos à rede interna são atribuídos fatores de peso de maior magnitude. Os fluxos e tensões estimados no primeiro nível para as ilhas observáveis de menor magnitude entram como pseudo-medidas. Quanto aos dados do Sistema Externo, eles são de dois tipos: telemidas que recebem um fator de peso de magnitude mediana, e dados provenientes da primeira etapa, isto é, os resultados do Fluxo de Potência, principalmente fluxos de potência ativa e reativa em linhas de transmissão, que recebem um fator de peso de menor magnitude. A utilização deste tipo de dados tem por objetivo melhorar o condicionamento da matriz ganho do Estimador de Estados.

Caso o resultado da primeira etapa forneça pequenos desvios de potência nas barras de fronteiras, não é necessário executar-se a segunda etapa.

As maiores críticas a este método dizem respeito à ineficiência do algoritmo do Fluxo de Potência para a modelagem da rede externa e da não necessidade de executá-lo no segundo passo. O método, no seu todo, não é computacionalmente eficiente. O método proposto para tratar diversas ilhas observáveis não é adequado, principalmente pela existência de métodos numericamente robustos e capazes de processar restrições de igualdade [GEI87].

Apesar das críticas que este método recebeu (ver "Discussão" de [LUL90]), Sanderson e seus colaboradores implementaram-no em um ambiente de tempo real no sistema da Western Area Power Administration, com bons resultados [SAN91].

2.3.5. O Método de Nucera e Giles [NUC91]

Neste método, os autores desenvolveram uma formulação do tipo bloco-diagonal para a solução da estimação de estados com restrições de igualdade. A estrutura em blocos é formada baseada em uma nova formulação do Método da Matriz Aumentada de Hachtel, preservando algumas características do Método da Equação Normal com Restrições de Igualdade. Neste método, as restrições de igualdade são tratadas via multiplicadores de Lagrange, permitindo que a fatoração triangular prossiga de forma que a matriz aumentada seja sempre

definida-positiva. Para a solução da rede interna, uma formulação em blocos mista é proposta. Para a solução da rede externa, a estrutura é puramente de blocos 2x2. Além disso, um algoritmo do tipo desacoplado rápido é utilizado, tanto para a rede interna quanto para a rede externa.

Considere o seguinte problema:

$$\min J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})]^t \mathbf{W}[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (2.3)$$

s.a.

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

e

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{W}_A^{1/2}[\mathbf{z}_A - \mathbf{h}_A(\mathbf{x})] \quad (2.5)$$

Note que no segundo conjunto de restrições de igualdade, nem todas as medidas precisam estar incluídas. O vetor dos resíduos \mathbf{r} foi particionado como $[\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B]^t$, onde \mathbf{r}_A refere-se às medidas que formarão linhas com elementos do tipo Jacobiano (Método de Hachtel) e \mathbf{r}_B às medidas que serão tratadas convencionalmente, como no Método da Equação Normal.

Resolvendo o problema acima pelo Método de Newton, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{H}_B^t \cdot \mathbf{W}_B \cdot \mathbf{H}_B & \mathbf{H}_A^t \cdot \mathbf{W}_A^{-1/2} & \mathbf{C}^t \\ \mathbf{W}_A^{-1/2} \cdot \mathbf{H}_A & \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^t \\ \mu^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_B^t \cdot \mathbf{W}_B \cdot \Delta \mathbf{z}_B \\ \Delta \mathbf{z}_A \\ -\mathbf{c}(\mathbf{x}^k) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

onde, na k-ésima iteração,

$$\Delta \mathbf{z}_A = \mathbf{W}_A^{1/2}[\mathbf{z}_A - \mathbf{h}_A(\mathbf{x}^k)] \quad (2.7)$$

$$\Delta \mathbf{z}_B = [\mathbf{z}_B - \mathbf{h}_B(\mathbf{x}^k)] \quad (2.8)$$

e

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k \quad (2.9)$$

Caso todas as medidas estejam em \mathbf{H}_B , a formulação torna-se a da Equação Normal com restrições de igualdade. Caso todas as medidas estejam em \mathbf{H}_A , a formulação torna-se a da Matriz Aumentada de Hachtel. Este método, portanto, pode ser considerado como um método híbrido.

A formulação do tipo bloco-diagonal é obtida da seguinte forma:

- as medidas de injeções são incluídas em \mathbf{H}_A e as medidas de fluxo e tensão em \mathbf{H}_B ;
- cada medida de injeção deverá estar emparelhada, isto é, estar na mesma linha que a variável de estado ao qual ela está associada. Esta informação é um subproduto dos programas de observabilidade.

A solução para a rede externa é obtida utilizando-se a mesma formulação descrita acima. De modo a obter-se uma referência angular comum, é associada a cada barra da rede externa uma medida ou pseudo-medida de injeção (ou injeção nula). Dessa forma, a estrutura da matriz ganho torna-se estritamente em blocos 2×2 já que cada barra é emparelhada com sua própria medida de injeção.

Tanto para a rede interna quanto para a externa, as barras com injeções nulas são agrupadas em c .

2.3.6. O Método de Simões Costa e Tardío [SIM96]

O método proposto em [SIM96] para a solução da rede externa é em apenas um passo. A solução da rede externa é obtida simultaneamente com a da rede interna. De forma a evitar a contaminação do estado estimado para a rede interna por erros de modelagem da rede externa, é proposta a utilização de um conjunto de medidas não-redundantes para a rede externa. Qualquer tipo de medida pode ser utilizada, sejam telemidas do tipo Fluxo de Potência (medidas de injeções ou de módulo de tensões) ou medidas de fluxo em linhas.

Na verdade, a parte central do trabalho de Simões Costa e Tardío é no desenvolvimento de um algoritmo capaz de selecionar, de um conjunto de medidas e pseudo-medidas de diferentes níveis de confiança, o conjunto de medidas não-redundantes de maior confiança, ou maior peso, já que para cada medida é associado um peso, de acordo com sua origem ou grau de confiança. Vale ressaltar que os pesos utilizados na qualificação das telemidas ou pseudo-medidas disponíveis não participam dos cálculos do Estimador de Estados, não contribuindo assim para o mau condicionamento numérico das matrizes envolvidas no processo de estimação. Para tanto, um algoritmo baseado em técnica combinatória, utilizando o conceito de matrôides ponderados é utilizado. Trata-se

de um observador de rede cujo resultado final é a máxima árvore geradora observável da rede de interesse.

Um matróide $M \{S, T\}$ é uma estrutura matemática, onde S é um conjunto finito e T uma sub-família de conjuntos independentes de S , tal que:

- o conjunto vazio é um conjunto independente;
- se $I \in T$, então todos os subconjuntos de I são independentes;
- Se $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, \dots, y_{n+1}\} \in T$, então existe $y_i \in Y - X$ tal que $X \cup y_i$ é também um conjunto independente.

Encontrar a intersecção de dois matróides é determinar um conjunto independente de máxima cardinalidade comum aos dois matróides [QUI82].

Um matróide $M_1 = \{E, T\}$ pode ser associado a um grafo G , onde E é o conjunto de arestas de G e T é o conjunto de todos os sub-grafos acíclicos de G . Outro tipo de matróide de interesse nos estudos de observabilidade de redes elétricas é o matróide de partição. Considere um grafo de medição de uma rede elétrica G_m . Seja A o conjunto de todas as medidas disponíveis e B o conjunto de variáveis de estado. Se um grafo bipartido for construído ligando os conjuntos A e B , de forma que cada aresta ligue uma determinada medida à variável de estado a ela associada, podemos definir um matróide de partição $M_2 = \{E_b, T_2\}$, onde E_b é o conjunto das arestas de G_b e T_2 é o conjunto de todos os emparelhamentos completos entre A e B .

Portanto, determinar se uma rede é observável equivale a determinar a intersecção de dois matróides M_1 e M_2 , onde M_1 é o matróide associado ao grafo de medição da rede e M_2 é um matróide de partição conforme descrito acima.

Se a cada aresta do grafo de medição G_m for associado um peso, obtém-se um grafo ponderado. Uma máxima árvore geradora é uma árvore geradora na qual a soma dos pesos é máxima. Um matróide ponderado é um matróide no qual são atribuídos pesos a seus elementos. Quando efetua-se a intersecção de dois matróides ponderados, determina-se um conjunto independente de máxima cardinalidade e máximo peso, comum aos dois matróides.

Este método é uma generalização de um algoritmo de intersecção de matróides desenvolvido por Simões Costa e Quintana [QUI82] para a determinação da árvore geradora observável do grafo de medição de uma rede elétrica. A generalização consiste na introdução de um laço externo ao algoritmo básico. Em cada execução do laço interno, só são considerados para a expansão da floresta observável aquelas arestas cujos pesos correntes são os maiores. Se o conjunto de arestas não for suficiente para formar uma árvore geradora observável, os pesos máximos são redefinidos e a busca da árvore geradora observável é reiniciada. A redefinição dos pesos permite aumentar o número de arestas do grafo de medição a serem processados pelo laço interno através da inclusão das arestas cujos pesos são imediatamente inferiores ao máximo anterior. Este mecanismo de

“expansão controlada” assegura que a árvore geradora observável encontrada seja máxima.

Após a determinação da máxima árvore geradora observável, as pseudo-medidas externas selecionadas para serem utilizadas na estimação de estados global serão aquelas associadas às arestas da árvore que foi criada por medidas provenientes do Sistema Externo.

Um dos aspectos mais importantes deste método é a possibilidade de construir-se um modelo para a rede externa utilizando-se as telemidas ou pseudo-medidas da mais alta confiança, tendo garantida a observabilidade da rede externa. Evita-se assim que o modelo seja deteriorado pela utilização de pseudo-medidas menos confiáveis. Outro aspecto importante, é que qualquer tipo de medida pode ser utilizado, inclusive medidas de fluxo em linhas.

Este método, com algumas modificações, foi utilizado por Gouvêa e Simões Costa em [GSC96] na alocação de pseudo-medidas críticas em áreas não observáveis de um sistema elétrico.

2.4. Comentários Finais

Como pode ser observado pelos métodos apresentados e pela atualidade em suas proposições, ainda há muito o que pesquisar na área da Representação Explícita de Sistemas Externos.

Alguns questões ainda permanecem sem resposta:

- Nos métodos em dois passos, é gerado um conjunto de medidas baseado em telemidas obtidas da rede externa e em pseudo-medidas calculadas a partir de dados extrapolados baseados no ponto de operação do Sistema Interno e em dados conhecidos do Sistema Externo. Estas telemidas e pseudo-medidas possuem graus de confiança muito diferentes. Portanto, são atribuídos pesos a estas medidas de acordo com a sua origem. São estes pesos que formarão a matriz de ponderação R^{-1} ou W presentes nos algoritmos de Estimação de Estados. O resultado é que a matriz de ponderação será constituída por pesos com valores que variam da ordem de 10 a 10000. Além disso, estes pesos são manipulados de forma a evitar que os limites operacionais das grandezas de barra sejam violados. Contudo, este espalhamento nos valores dos pesos provocam um mau condicionamento da matriz ganho, prejudicando a eficiência do Estimador de Estados, podendo causar, inclusive, a não convergência do Estimador. A questão a ser resolvida é: como tratar pseudo-medidas de diversos graus de confiança sem a manipulação dos pesos da matriz de ponderação? Ou ainda, como evitar a violação das restrições operacionais sem a necessidade da manipulação dos pesos? O uso de restrições de igualdade e desigualdades é a resposta a este problema.

- Os defensores dos métodos em dois passos afirmam que o maior problema dos métodos em um passo é a utilização de um conjunto de medidas não-redundantes para a rede externa, o que torna os resultados obtidos equivalente aos obtidos pelo Fluxo de Potência. Isto é verdadeiro quando apenas medidas do tipo módulo de tensão ou injeções é utilizado, como pode ser facilmente verificado analisando-se a Equação Normal:

$$(\mathbf{H}^t \mathbf{W} \mathbf{H}) \Delta \mathbf{x}^k = \mathbf{H}^t \mathbf{W} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)] \quad (2.10)$$

Se um conjunto de medidas críticas for utilizado, a matriz \mathbf{H} é quadrada e não singular. Se a Equação Normal for multiplicada pela matriz $(\mathbf{H}^t \cdot \mathbf{W})^{-1}$, (\mathbf{W} é sempre não-singular), obtém-se:

$$\mathbf{H} \Delta \mathbf{x}^k = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)] \quad (2.11)$$

Caso o vetor das medidas \mathbf{z} contenha apenas medidas de injeção e de módulo de tensão, a equação acima é a mesma do Fluxo de Potência. Contudo, o mesmo não ocorre se medidas de fluxo estiverem presentes em \mathbf{z} .

- A utilização de um conjunto de medidas redundantes obtido para a rede externa via pseudo-medidas calculadas a partir de dados extrapolados baseados no ponto atual de operação do Sistema Interno fornece resultados superiores aos obtidos pelo Método de Simões Costa e Tardío, que utiliza um conjunto de medidas críticas de alta confiança? Esta é outra pergunta que procura-se responder neste trabalho. Contudo, em sistemas mal condicionados, o uso de apenas medidas críticas pode causar problemas de convergência, mesmo com o uso de um estimador ortogonal-sequencial. Em certos sistemas, a convergência só pode ser obtida se um plano de medição adequado e com alto grau de redundância for utilizado (ver Capítulo 7).

Capítulo 3

Estimadores de Estado

Com Restrições de Igualdade e Desigualdade

3.1. Introdução

Este capítulo é dedicado aos estimadores de estados com restrições de igualdade e desigualdade incorporadas ao modelo de otimização já existentes na literatura.

Na seção 3.2 são apresentados os estimadores com restrições de igualdade, particularmente os baseados no Método da Equação Normal com Restrições de Igualdade [ASC77] e o Método da Matriz Aumentada de Hachtel [GJE85]. Na seção 3.3 são apresentados dois estimadores ortogonais-sequenciais baseados em rotações de Givens, denominados neste trabalho de Método da Matriz de Espaço Nulo [SEL85] e Método da Eliminação Direta [QSC86].

A seção 3.4 aborda os estimadores de estados com restrições de desigualdade existentes na literatura que utilizam o Método dos Pontos Interiores, desenvolvidos por Clements *et alii* [CLE95] e Kliokys [KLI95].

Finalmente, na seção 3.5 são apresentados os comentários finais a respeito dos métodos apresentados e o método proposto neste trabalho é justificado.

Neste capítulo, \mathbf{x} é o vetor correspondente às n variáveis de estados (módulo e ângulo da tensão nas N barras do sistema), \mathbf{z} é o vetor contendo as m telemidas obtidas via SCADA ou pseudo-medidas, $\mathbf{h}(\cdot)$ é uma função vetorial não linear que relaciona cada medida em \mathbf{z} às variáveis de estados em \mathbf{x} . $\mathbf{g}(\cdot)$ é uma função não linear que representa as r restrições de igualdade, no caso injeções de potência ativa e reativa nulas em barras de transferência. \mathbf{H} e \mathbf{G} são as matrizes Jacobianas calculadas no ponto $\mathbf{x}=\mathbf{x}^k$ correspondentes às funções \mathbf{h} e \mathbf{g} , respectivamente e \mathbf{R} é uma matriz diagonal contendo os pesos associados a cada telemida.

3.2. Estimadores de Estado com Restrições de Igualdade

Há duas décadas e meia, Schweppe introduziu a Estimação de Estados em Sistemas de Potência. Desde então, a abordagem predominante tem sido a solução do problema via o Método dos Mínimos Quadrados Ponderados. Muita pesquisa foi desenvolvida na tentativa de desenvolverem-se métodos computacionalmente eficientes e numericamente robustos para resolver o problema dos mínimos quadrados.

Inicialmente, as implementações de Estimadores de Estado em Sistemas de Potência foram baseados no Método da Equação Normal. Contudo, problemas de mau condicionamento numérico associados ao Método da Equação Normal levou ao desenvolvimento de estimadores numericamente mais estáveis. Os principais métodos aplicados incluem o Método da Matriz Aumentada de Hachtel e os Métodos Ortogonais de Golub e Givens. Uma comparação entre estas abordagens pode ser encontrada em [HOL88], em [WUF90] e em [HEA84].

Os problemas numéricos em Estimação de Estados em Sistemas de Potência são resultado do mau condicionamento da matriz Jacobiana causado por [GAR91]:

- pesos elevados utilizados na representação de restrições de igualdade associadas às barras de injeção nula;
- linhas longas terminando em linhas curtas;
- ramos de impedância nula;
- número muito grande de telemidas de injeções;
- problemas numéricos associados aos métodos utilizados na solução do problema de equações lineares resultante.

Particularmente, os Métodos de Hachtel e Givens são hoje muito utilizados pela indústria pois são estes que apresentam um melhor comportamento do ponto de vista numérico, pois evitam o cálculo da Matriz de Observação (ou Matriz Ganho). Em [NUC91] uma nova formulação para o Método de Hachtel é apresentada, utilizando uma formulação do tipo bloco-diagonal utilizando os resultados do Observador de Rede para montar a matriz Jacobiana. Já em [VEM91], são introduzidos melhoramentos à fatoração ortogonal utilizando rotações de Givens e uma comparação entre diversos esquemas de ordenação para este tipo de Estimador é apresentado. Além disso, em um estudo comparativo entre diversos métodos para a solução do problema de Mínimos Quadrados Ponderados, Heath em [HEA84] optou pelo Método Ortogonal de Givens devido à sua estabilidade numérica e eficiência computacional quando técnicas de ordenação eficientes são utilizadas.

Sendo o problema dos Mínimos Quadrados Ponderados um problema de otimização, é natural a incorporação de restrições ao problema original.

Barras sem carga ou geração são conhecidas como barras de injeções nulas. Neste tipo de barras, dispõe-se de “medidas perfeitas” de injeções de potência ativa e reativa. A formulação convencional do problema de mínimos quadrados irrestrito é incapaz de tratar de modo apropriado estas “medidas perfeitas”. Inicialmente, eram atribuídos a estas medidas pesos maiores que as telemedidas convencionais. Contudo, esta prática pode levar a mau condicionamento numérico da matriz ganho e à não-convergência do estimador sob determinadas circunstâncias.

Aschmoneit *et alii* [ASC77] foram os primeiros a propor a inclusão de restrições de igualdade à formulação do estimador de estados para a modelagem de barras com injeções nulas.

3.2.1. Método da Equação Normal com Restrições de Igualdade.

Seja r o número de restrições de igualdade definido pelas barras de injeções nulas na rede e $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ o vetor $r \times 1$ das equações correspondentes a estas restrições. Assim, o problema dos mínimos quadrados com restrições de igualdade pode ser expresso como:

$$\min J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})]^t \mathbf{R}^{-1}[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (3.1)$$

sujeito a:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

Este problema de minimização restrita pode ser resolvido pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, com a incorporação das restrições de igualdade à função objetivo:

$$\min \ell(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2}[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})]^t \mathbf{R}^{-1}[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] \right) + \lambda^t \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

Aplicando-se as condições de Karush-Kuhn-Tucker,

$$\left. \frac{\partial \ell(\mathbf{x})}{\partial (\mathbf{x})} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} = -(\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}))^t \mathbf{R}^{-1}[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})] + \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}})\lambda = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{O} & \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})^t & \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}})^t & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{k+1} \\ \gamma^{k+1} \\ \Delta \mathbf{x}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{z} \\ -\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}^k) \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Da mesma forma que no Método da Equação Normal com Restrições de Igualdade, a matriz dos coeficientes não é positiva-definida. Dessa forma, é necessário sempre testar-se o valor do pivot durante a fatoração triangular para evitar problemas de “overflow”. Embora o número de equações seja consideravelmente maior que o do Método da Equação Normal, o número de operações em ponto flutuante é bem menor. Outro aspecto importante deste método é que a matriz ganho não precisa ser calculada, o que evita a deterioração do número de condicionamento da matriz dos coeficientes.

3.3. Métodos Ortogonais de Givens com Restrições de Igualdade

3.3.1. Método da Matriz de Espaço Nulo

Em 1985, Seleme e Simões Costa [SEL85] desenvolveram um estimador ortogonal-sequencial baseado em rotações de Givens com restrições de igualdade.

Seja o seguinte problema de mínimos quadrados com restrições de igualdade:

$$\min J(\mathbf{x}) = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (3.18)$$

s. a.

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

Após a linearização, a função objetivo a ser minimizada passa a ser:

$$\min J(\Delta \mathbf{x}) = [\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k]^t \mathbf{R}^{-1} [\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k] \quad (3.20)$$

s.a.

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{b} \quad (3.21)$$

onde \mathbf{G} e \mathbf{H} são definidas conforme as equações (3.6) e (3.7), $\Delta \mathbf{z}$ segundo a equação (3.9) e $\Delta \mathbf{b}$ por:

$$\Delta \mathbf{b} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \quad (3.22)$$

Convém observar que \mathbf{x}^k é o vetor de estados estimado em torno do qual se faz a linearização das equações não lineares (3.18) e (3.19).

Em cada iteração, o problema a ser resolvido é um problema de mínimos quadrados ponderados linear, com restrição de igualdade lineares.

Incorporar as restrições de igualdade ao problema de mínimos quadrados significa encontrar uma solução que minimize a função objetivo definida pela equação (3.18) e simultaneamente satisfaça as restrições definidas pela equação (3.19).

Por hipótese, considera-se que o número de restrições de igualdade é menor que o número de variáveis de estados, o que implica que o sistema de equações definido pela equação (3.21) é indeterminado, isto é, admite infinitas soluções [CHE88]. A solução geral deste sistema indeterminado [CHE88, LAW95] é obtida através do uso de transformações ortogonais.

A matriz \mathbf{G} da equação (3.19) é retangular de dimensão $(r \times n)$, onde r é o número de restrições de igualdade e n o número de variáveis de estados. Cada restrição de igualdade corresponde a uma injeção de potência nula. Por hipótese, estas equações são independentes o que implica que o posto da matriz \mathbf{G} é r .

Como o sistema de equações formado pelas restrições de igualdade é indeterminado, qualquer uma de suas infinitas soluções pode ser expressa como uma combinação linear de $(n-r)$ soluções linearmente independentes [SEL85, LAW95]. Isto é, o espaço solução das equações (3.21) tem dimensão $(n-r)$.

Dentre todas as soluções da equação (3.21), seja $\Delta \mathbf{x}_0$ aquela de mínima norma euclidiana. Então, a solução geral da equação (3.21) pode ser expressa como [SEL85]:

$$\Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\Delta \mathbf{y} \quad (3.23)$$

onde:

- $\Delta \mathbf{x}$: solução geral para a equação (3.21);
- $\Delta \mathbf{x}_0$: solução de mínima norma euclidiana de (3.21);
- $\Delta \mathbf{y}$: vetor $(n-r) \times 1$, arbitrário;
- \mathbf{B} : matriz $n \times (n-r)$ de posto $(n-r)$, que deve satisfazer à seguinte condição:

$$\mathbf{GB} = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

As colunas da matriz \mathbf{B} são, portanto, vetores da base do núcleo (ou espaço nulo) da matriz \mathbf{G} , justificando o nome dado ao método. Os elementos do vetor $\Delta \mathbf{y}$ são os coeficientes das combinações lineares que geram todas as soluções do

sistema $\mathbf{G} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$, sendo $\mathbf{0}$ a matriz nula de dimensão $r \times (n-r)$ e $\mathbf{0}$ o vetor nulo, de dimensão $n \times 1$.

O vetor $\Delta \mathbf{x}_0$ de mínima norma euclidiana que aparece na solução geral dada pela equação (3.23) pode ser obtido como:

$$\Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{G}^+ \Delta \mathbf{b} \quad (3.25)$$

onde \mathbf{G}^+ é a matriz pseudo-inversa de \mathbf{G} , dada por

$$\mathbf{G}^+ \equiv \mathbf{G}^t (\mathbf{G}\mathbf{G}^t)^{-1} \quad (3.26)$$

Calcular a pseudo-inversa pela equação (3.26) é muito dispendioso pois envolve a inversão de uma matriz. Uma forma computacionalmente mais eficiente de obtê-la é através de transformações ortogonais como descrito a seguir [GOL89].

Uma matriz \mathbf{Q} é ortogonal se $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^t = \mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade. Seja \mathbf{Q} uma matriz $n \times n$, ortogonal, definida de modo que:

$$\mathbf{Q}\mathbf{G}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

onde:

\mathbf{U} : matriz triangular superior $r \times r$;

\mathbf{O} : matriz nula $(n-r) \times r$.

O método utilizado para determinar-se a matriz \mathbf{Q} utiliza rotações de Givens com três multiplicadores, conforme descrito em [GEN74].

Da equação (3.27) e da ortogonalidade de \mathbf{Q} , obtêm-se:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^t & \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{Q} \quad (3.28)$$

Substituindo-se (3.28) em (3.26), lembrando que \mathbf{Q} é uma matriz ortogonal e rearranjando os termos resultantes, chega-se à [SEL85]:

$$\mathbf{G}^+ = \mathbf{Q}^t \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{U}^{-t} \quad (3.29)$$

onde:

\mathbf{I}_r : matriz identidade de ordem r ;

\mathbf{U}^{-t} : matriz transposta inversa da matriz \mathbf{U} .

Além disso, a matriz \mathbf{Q} pode ser particionada como:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

onde \mathbf{Q}_1 é uma matriz $r \times r$ e \mathbf{Q}_2 $(n-r) \times n$.

Substituindo (3.29) em (3.25), obtém-se:

$$\Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{Q}^t \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{U}^{-t} \Delta \mathbf{b} \quad (3.31)$$

ou usando (3.30):

$$\Delta \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^t & \mathbf{Q}_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{U}^{-t} \Delta \mathbf{b} = \mathbf{Q}_1^t \mathbf{U}^{-t} \Delta \mathbf{b} \quad (3.32)$$

Das equações (3.27) e (3.30) é fácil ver que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \mathbf{G}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{Q}_1 \mathbf{G}^t = \mathbf{U} \\ \mathbf{Q}_2 \mathbf{G}^t = \mathbf{O} \end{cases} \quad (3.33)$$

ou,

$$\mathbf{G} \mathbf{Q}_2^t = \mathbf{O} \quad (3.34)$$

Das equações (3.24) e (3.34), conclui-se que

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}_2^t \quad (3.35)$$

Assim sendo, a solução geral da equação das restrições de igualdade é dada por:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{Q}_1^t \mathbf{U}^{-t} \Delta \mathbf{b} + \mathbf{Q}_2^t \Delta \mathbf{y} \quad (3.36)$$

Segundo esta equação, a solução geral fica explicitada em termos de $\Delta \mathbf{y}$, que passa a ser a incógnita do problema. Como o sistema de equações das restrições de igualdade por si só não define a solução para o vetor de estados $\Delta \mathbf{x}$, visto que seu posto é deficiente, esta solução virá da solução do problema dos mínimos quadrados definido pela função custo J , definida pela equação (3.18) ou (3.20). Trata-se então, de buscar uma solução para o problema dos mínimos quadrados que satisfaça a expressão da solução geral das equações de restrições de igualdade dada pela equação (3.36). Para tanto, a função custo J é alterada, sendo expressa em função de $\Delta \mathbf{y}$.

Portanto, para cada passo do processo iterativo de solução do problema de mínimos quadrados tem-se que:

$$J(\Delta \mathbf{y}) = [\Delta \mathbf{w} - \mathbf{M}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{y}]^t \mathbf{R}^{-1} [\Delta \mathbf{w} - \mathbf{M}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{y}] \quad (3.37)$$

onde:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{H}(\mathbf{x}^k) \mathbf{Q}_2^t \quad (3.38)$$

e

$$\Delta \mathbf{w} = \Delta \mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}_0 \quad (3.39)$$

Está-se diante agora, de um problema de mínimos quadrados ponderados irrestrito que pode ser resolvido pelo Método de Givens.

O valor de \mathbf{x}^{k+1} a ser utilizado na próxima iteração é calculado por:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k \quad (3.40)$$

onde $\Delta \mathbf{x}^k$ é a solução obtida para o problema dos mínimos quadrados ponderados com restrições de igualdade obtido na iteração anterior.

Para teste de convergência do problema é utilizado o critério de uma tolerância limite " ε " estabelecida previamente:

$$\max |\Delta \mathbf{x}_i| \leq \varepsilon \quad (3.41)$$

3.3.2. Método da Eliminação Direta

Este método foi apresentado em 1986 por Quintana, Scott e Chikhiani [QSC86]. Baseia-se no Método da Eliminação Direta apresentado por Lawson e Hanson em [LAW95] para a solução de um problema de mínimos quadrados linear com restrições de igualdade lineares.

Seja o seguinte problema de mínimos quadrados com restrições de igualdade:

$$\begin{aligned} \min \{f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|^2\} \\ \text{s.a.} \\ \mathbf{Cx}=\mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde \mathbf{A} ($m \times n$) e \mathbf{C} ($p \times n$) são matrizes e \mathbf{b} ($m \times 1$) e \mathbf{c} ($p \times 1$) são vetores.

A introdução de p restrições de igualdade reduz um sistema sobredeterminado $m \times n$ a um sistema de ordem $[m \times (n - p)]$. Logo, o problema de estimação de estados em sistemas de potência com restrições de igualdade pode ser transformado em um problema irrestrito utilizando eliminações elementares para remover-se p colunas da matriz de coeficientes. Isto é equivalente a escrever-se p variáveis do problema em função das restantes $n - p$ e resolver-se o problema resultante.

Inicialmente é formada a matriz aumentada $\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix}$. Esta matriz é então particionada em:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

com \mathbf{C}_1 : $p \times p$, \mathbf{C}_2 : $p \times (n - p)$, \mathbf{A}_1 : $m \times p$ e \mathbf{A}_2 : $m \times (n - p)$. Caso seja necessário, deve-se proceder a uma reordenação das colunas da matriz \mathbf{C}_1 de forma que esta seja não-singular. O vetor \mathbf{x} é particionado de forma semelhante em $[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2]^t$, com \mathbf{x}_1 : $p \times 1$ e \mathbf{x}_2 : $n - p \times 1$.

As restrições $\mathbf{Cx}=\mathbf{d}$ podem ser rescritas como:

$$\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{d} \quad (3.44)$$

Como \mathbf{C}_1 é não-singular, \mathbf{x}_1 pode ser escrito em função de \mathbf{x}_2 . Assim:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{C}_1^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2) \quad (3.45)$$

Substituindo a equação (3.45) no problema de mínimos quadrados linearizado obtém-se:

$$\min\{\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 = \|\hat{\mathbf{A}}_2 \mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{b}}\|^2\} \quad (3.46)$$

onde $\hat{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{C}_2$ e $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{d}$.

A equação (3.46) define a função objetivo de um problema irrestrito de ordem $n - p$. Um algoritmo geral para a solução do problema de mínimos quadrados com restrições de igualdade pode ser desenvolvido diretamente do desenvolvimento exposto acima:

1. Forma-se a matriz aumentada e a particiona-se de forma que \mathbf{C}_1 seja não-singular, obtendo-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{d} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

2. Reduzir \mathbf{C}_1 à sua forma triangular superior $\hat{\mathbf{C}}_1$ utilizando rotações de Givens. As rotações aplicadas a \mathbf{C}_1 precisam ser aplicadas a \mathbf{C}_2 e \mathbf{d} . Nesta fase, a ordenação de colunas é necessária para tornar \mathbf{C}_1 não singular. As restrições linearmente dependentes são eliminadas. O resultado é

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_1 & \hat{\mathbf{C}}_2 & \hat{\mathbf{d}} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

3. Eliminar \mathbf{A}_1 por uma série de Eliminações de Gauss. As modificações serão aplicadas a \mathbf{A}_2 e \mathbf{b} . A matriz aumentada toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_1 & \hat{\mathbf{C}}_2 & \hat{\mathbf{d}} \\ \mathbf{O} & \hat{\mathbf{A}}_2 & \hat{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

4. Resolver o problema de mínimos quadrados irrestrito expresso pela equação (3.46) para \mathbf{x}_2 . Novamente, métodos ortogonais via rotações de Givens são utilizados.

5. Resolver o sistema de equações lineares (3.45) para \mathbf{x}_1 .

3.4. Estimadores de Estados com Restrições de Desigualdade

A incorporação de restrições de desigualdade ao problema de estimação de estados é um avanço recente. O Método de Gauss-Newton, tradicionalmente utilizado na solução do problema de otimização representado pela minimização da soma dos quadrados dos resíduos dos erros de estimação, torna trabalhosa e computacionalmente dispendiosa a incorporação ao modelo deste tipo de restrições, tornando-a inviável para a operação em tempo real.

No Método de Newton, do qual o Método de Gauss-Newton é uma aproximação, as restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade, sendo colocadas sobre seus limites. Em cada iteração, o sinal dos multiplicadores de Lagrange deve ser testado para verificar quais restrições permanecem no limite e quais devem ser retiradas das equações de restrições. Portanto a matriz ganho tem sua estrutura modificada de iteração para iteração.

Um outro aspecto a ser considerado é o da motivação para a inclusão de restrições de desigualdade. Com a crescente utilização da representação explícita do Sistema Externo, freqüentemente não-observável e do qual se dispõem poucas informações confiáveis, a utilidade de um estimador capaz de processar restrições deste tipo tornou-se evidente. Cargas, por exemplo, podem ser modeladas pela utilização de quatro restrições de desigualdade. Restrições de desigualdade podem ser utilizadas no balizamento da solução da rede externa, evitando que os limites operacionais em determinados pontos do sistema externo sejam violados ou que resultados absurdos sejam obtidos em áreas distantes da fronteira onde as informações são escassas e incertas.

Com a introdução dos Métodos de Pontos Interiores para Estimação de Estados, a incorporação de restrições de desigualdade ao modelo de otimização tornou-se viável.

Tal método foi introduzido na Estimação de Estados por Singh e Alvarado [SIN93] em um estimador linear baseado na soma ponderada dos valores absolutos dos erros de estimação. Em 1997 Singh e seus colaboradores publicaram outro artigo sobre o Estimador LAV com restrições de desigualdades destinado à modelagem da rede externa. Neste artigo é utilizado um método baseado em funções de penalidades [SAL97].

Em 1992, Clements, Davis e Frey [CLE95] desenvolveram uma formulação baseada no Método de Pontos Interiores para a solução do problema dos mínimos quadrados ponderados com restrições de igualdade e desigualdade.

O problema da estimação de estados foi assim formulado por Clements e seus colaboradores:

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{r}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} \quad (3.50)$$

s. a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{r} - \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{f}(\mathbf{x}) &\leq \mathbf{0}
 \end{aligned}
 \tag{3.51}$$

A metodologia do Método de Pontos Interiores quando aplicada à Programação Não-Linear é bastante simples. Através da utilização de variáveis de folga, as restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade. Dessa forma, o problema pode ser assim formulado:

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{r}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}
 \tag{3.52}$$

s. a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{r} - \mathbf{z} + \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}
 \end{aligned}
 \tag{3.53}$$

Como as variáveis de folga devem ser sempre positivas, uma função barreira logarítmica é incorporada à função objetivo, juntamente com as restrições de igualdade através da utilização de multiplicadores de Lagrange. Assim, o problema a ser resolvido transforma-se em um problema de minimização irrestrito, expresso pela função Lagrangeana abaixo:

$$\min \ell = \frac{1}{2} \mathbf{r}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} - \mu \sum_{k=1}^p \ln s_k - \lambda' [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}] - \rho' \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \pi' [\mathbf{r} - \mathbf{z} + \mathbf{h}(\mathbf{x})]
 \tag{3.54}$$

onde p é o número de restrições de desigualdade, λ , ρ e π são multiplicadores de Lagrange e $\mu > 0$ é o parâmetro de ajuste da função barreira. Seu valor é forçado a zero a medida que as iterações do método prosseguem.

O problema de minimização irrestrito representado pela equação (3.54) é resolvido aplicando-se as condições de Karush-Kuhn-Tucker de primeira ordem e resolvendo-se o sistema de equações não lineares resultante pelo Método Iterativo de Newton-Raphson:

No ponto ótimo, tem-se que [CLE95]:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{s}} \ell &= -\mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e} - \lambda = 0 \\
\nabla_{\lambda} \ell &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{s} = 0 \\
\nabla_{\rho} \ell &= -\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \\
\nabla_{\pi} \ell &= -\mathbf{r} + \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \\
\nabla_{\mathbf{r}} \ell &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} - \pi = 0 \\
\nabla_{\mathbf{x}} \ell &= -\mathbf{F}^t \lambda - \mathbf{G}^t \rho - \mathbf{H}^t \pi = 0 \\
\mathbf{s} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

onde $\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_m)$ e $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^t$.

O sistema de equações expresso em (3.55) quando da aplicação do Método de Newton-Raphson implica nas seguintes aproximações:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{x}) &\approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{F} \Delta \mathbf{x} \\
\mathbf{g}(\mathbf{x}) &\approx \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{G} \Delta \mathbf{x} \\
\mathbf{h}(\mathbf{x}) &\approx \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} \\
\mathbf{F} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) \\
\mathbf{G} &= \mathbf{G}(\mathbf{x}^k) \\
\mathbf{H} &= \mathbf{H}(\mathbf{x}^k) \\
\mathbf{S}^{-1} \mathbf{e} &\approx (\mathbf{S}^k)^{-1} \mathbf{e} - (\mathbf{S}^k)^{-2} \Delta \mathbf{s}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Após estas aproximações terem sido feitas e $\Delta \mathbf{s}$ e \mathbf{r} terem sido eliminados, resulta o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{H} \\ \mathbf{F}^t & \mathbf{G}^t & \mathbf{H}^t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \rho \\ \pi \\ \Delta \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \\ -\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

onde

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{S}^k)^2 \tag{3.58}$$

Como a matriz dos coeficientes da equação (3.57) é semi-definida positiva, simétrica e esparsa, vários métodos podem ser empregados para resolver o sistema de equações lineares acima.

A solução de (3.57) é utilizada para calcular-se a direção dos desvios em \mathbf{x} , λ , ρ e π . Para evitar violações em restrições de desigualdades, um fator de passo α é utilizado. Dessa forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \alpha \Delta \mathbf{x} \\ \pi^{k+1} &= \pi^k + \alpha \Delta \pi \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \alpha \Delta \lambda \\ \rho^{k+1} &= \rho^k + \alpha \Delta \rho \end{aligned} \quad (3.59)$$

O fator de passo α é escolhido de forma tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{k+1}) < \mathbf{0}$, isto é, que \mathbf{x}^{k+1} permaneça no interior da região viável.

O ponto inicial \mathbf{x}^0 é escolhido de forma tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) < \mathbf{0}$. Ele pode ser escolhido como o estado previamente estimado ou a partida plana pode ser utilizada. Caso isso não seja possível, um problema adicional semelhante à Fase I da programação linear deverá ser resolvido para obter-se \mathbf{x}^0 . O valor inicial para o vetor das variáveis de folga é escolhido como $\mathbf{s}^0 = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$.

O valor inicial do parâmetro da função barreira, μ é escolhido como sendo 1.0. Seu valor, contudo, deve ser ajustado a cada iteração, de modo que ele tenda a zero à medida que as iterações prosseguem. Tal ajuste é calculado utilizando-se a diferença entre o valor da função objetivo do problema dual e o do problema primal.

O problema dual de (3.52/3.53) é:

$$\max \frac{1}{2} \mathbf{r}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} - \lambda^t \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \rho^t \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \pi^t [\mathbf{r} - \mathbf{z} + \mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (3.60)$$

s. a

$$\begin{aligned} -\mathbf{F}^t \lambda - \mathbf{G}^t \rho - \mathbf{H}^t \pi &= \mathbf{0} \\ \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} - \pi &= \mathbf{0} \\ \lambda &\leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.61)$$

O “gap” de dualidade, isto é, a diferença entre a função objetivo primal e a dual é:

$$\delta = \lambda^t \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \rho^t \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \pi^t [\mathbf{r} - \mathbf{z} + \mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (3.62)$$

δ é uma quantidade positiva se as variáveis primais e duais são viáveis e é zero no ponto ótimo.

Clements e seus colaboradores adotaram o seguinte valor para μ :

$$\mu = \frac{\delta}{(n + p)^2} \quad (3.63)$$

Como critério de convergência, Clements *et alii* adotaram o valor relativo do gap de dualidade, isto é, se

$$\frac{\delta}{\mathbf{r}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}} < \varepsilon \quad (3.64)$$

onde ε é um número suficientemente pequeno.

Já a modelagem adotada por Kliokys [KLI95] é mais simples e considera apenas restrições de desigualdade:

$$\min J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})]'\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (3.65)$$

s. a

$$\mathbf{l} \leq \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u} \quad (3.66)$$

Seguindo a metodologia do Método de Pontos Interiores, as restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade pela introdução de variáveis de folga ao modelo e é incorporada uma barreira logarítmica à função objetivo. Assim, a formulação original do problema pode ser reescrita como:

$$\min \left\{ J(\mathbf{x}) - \mu \sum_{i=1}^p \ln s_i - \mu \sum_{i=1}^p \ln t_i \right\} \quad (3.67)$$

s. a

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} &= \mathbf{u} \\ \mathbf{u} - \mathbf{l} &= \mathbf{s} + \mathbf{t} \end{aligned} \quad (3.68)$$

onde \mathbf{l} e \mathbf{u} representam os limites inferiores e superiores respectivamente, que as variáveis de estados devem respeitar. As variáveis de folga \mathbf{s} e \mathbf{t} são vetores cujos elementos são todos números positivos.

Este problema de otimização restrita é transformado em um problema de otimização irrestrita pela incorporação das restrições à função objetivo utilizando-se a técnica dos multiplicadores de Lagrange. Assim:

$$\begin{aligned} \min \ell = & J(\mathbf{x}) - \mathbf{y}^t [\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} - \mathbf{u}] - \mathbf{w}^t [\mathbf{u} - \mathbf{l} - \mathbf{s} - \mathbf{t}] \\ & - \mu \sum_{i=1}^p \ln(s_i) - \mu \sum_{i=1}^p \ln(t_i) \end{aligned} \quad (3.69)$$

As condições necessárias de primeira ordem para o ótimo tomam a forma:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] - \mathbf{G}^t \mathbf{y} = 0 \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mathbf{y}} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{s} + \mathbf{u} = 0 \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mathbf{w}} = -\mathbf{u} + \mathbf{l} + \mathbf{s} + \mathbf{t} = 0 \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{w} - \mathbf{y} - \mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e} = 0 \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{w} - \mu \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e} = 0 \quad (3.74)$$

onde $\mathbf{S} = \text{diag}(s_i)$ e $\mathbf{T} = \text{diag}(t_i)$ e $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^t$. \mathbf{y} e \mathbf{w} são multiplicadores de Lagrange.

As equações acima definem um sistema de equações não lineares que necessita ser resolvido para as variáveis primais \mathbf{s} , \mathbf{t} , e \mathbf{x} e para as variáveis duais \mathbf{y} e \mathbf{w} . O Método de Newton-Raphson é utilizado, partindo-se do ponto interior $[\mathbf{x}^0, \mathbf{s}^0, \mathbf{t}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{w}^0]$. O parâmetro μ tende a zero à medida que as iterações prosseguem. Dessa forma, o sistema de equações lineares que deverá ser resolvido a cada iteração passa a ser:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z} + \mathbf{G}^t (\mathbf{y} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{d} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{c}) \quad (3.75)$$

$$\Delta y = -[S^{-1}(W - Y) + T^{-1}W]G\Delta x - T^{-1}c + S^{-1}d \quad (3.76)$$

$$\Delta w = -T^{-1}[WG\Delta x + c] \quad (3.77)$$

$$\Delta t = G\Delta x + g(x) - l - t \quad (3.78)$$

$$\Delta s = -G\Delta x + u - g(x) - s \quad (3.79)$$

onde a matriz ganho é definida como:

$$K = H^t R^{-1} H + G^t [S^{-1}(W - Y) + T^{-1}W]G \quad (3.80)$$

e $Y = \text{diag}(y)$, $W = \text{diag}(w)$, $\Delta z = z - h(x)$, $c = W[g(x) - l] - \mu.e$ e $d = -(W - Y)[g(x) - u] - \mu.e$.

A matriz ganho é simétrica e positiva definida. Contudo, ela não é constante e deve ser refatorada a cada iteração.

Da mesma forma que no algoritmo de Clements, um fator de passo α é utilizado ao atualizarem-se as variáveis de otimização de modo a garantir que o ponto de operação seja interior à superfície viável. Assim:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha\Delta x \\ w^{k+1} &= w^k + \alpha\Delta w \\ y^{k+1} &= y^k + \alpha\Delta y \\ s^{k+1} &= s^k + \alpha\Delta s \\ t^{k+1} &= t^k + \alpha\Delta t \end{aligned} \quad (3.81)$$

A atualização do parâmetro da função barreira é feita da seguinte forma, para cada iteração:

$$\mu = \frac{(w - y)^t s + w^t t}{c(n + 2p)^2} \quad (3.82)$$

onde c é um parâmetro ajustável, que dependerá do tamanho da rede e do número de restrições.

O critério de convergência escolhido por Kliokys é:

$$\|\Delta x\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

e

$$\mu < \nu$$

Em [KLI95], ε e ν foram escolhidos igual a 10^{-4} e 10^{-8} respectivamente.

3.5. Considerações Finais

Neste capítulo, foram apresentados os estimadores capazes de processar restrições de igualdade e desigualdade existentes na literatura.

O estimador desenvolvido por Kliokys pode ser visto como o Método da Equação Normal estendido de modo a possibilitar a inclusão de restrições. Contudo, ele mantém as principais características do Método da Equação Normal tanto as positivas, quanto as negativas. Do ponto de vista numérico, é pouco robusto, visto que mantém a necessidade do cálculo da matriz ganho ($\mathbf{H}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}$) e também da matriz ganho relativa às restrições ($\mathbf{G}' \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}$). Do ponto de vista da eficiência computacional, o método apresenta alguns problemas, visto que a matriz ganho \mathbf{K} (equação (3.71)), necessita ser calculada a cada iteração, até a convergência final do processo iterativo. Além disso, o Método trabalha com um parâmetro ajustável c , utilizado no cálculo do parâmetro da função barreira μ , que, dependendo de seu valor, pode alterar a velocidade de convergência.

O estimador desenvolvido por Clements mantém as principais características do Método da Matriz Aumentada, método este que apresenta bom desempenho numérico e computacional.

Contudo, os estimadores baseados no Método de Pontos Interiores possuem uma característica em comum: o problema do valor inicial do vetor de estados \mathbf{x} . O ponto inicial deve ser interior à superfície viável, isto é, deve satisfazer às restrições de desigualdade o que, no caso da modelagem da rede externa, o seu cálculo pode tornar-se um problema adicional.

O estimador ortogonal-sequencial com restrições de igualdade desenvolvido por Seleme e Simões Costa baseado em rotações de Givens é numericamente robusto mas sua eficiência computacional é prejudicada pelo fato da esparsidade da matriz \mathbf{H} ser destruída quando de sua multiplicação por \mathbf{Q}_2' (equação 3.38)). A mesma situação ocorre com o método proposto por Quintana, Scott e Chikhiani. Quando a matriz \mathbf{A}_1 é fatorada via Eliminações de Gauss, estas transformações também devem ser aplicadas à matriz \mathbf{A}_2 , o que pode provocar um enchimento considerável na matriz resultante. Além disso, o método exige a ordenação das colunas de \mathbf{C}_1 de modo que esta seja sempre não-singular. Este tópico será abordado com mais detalhes no próximo capítulo.

Capítulo 4

O Problema dos Mínimos Quadrados Linear com Restrições de Igualdade

4.1. Introdução

O Problema de Mínimos Quadrados Linear com Restrições de Igualdade Lineares (Problema LSE) pode ser assim formulado:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{E}\mathbf{x} - \mathbf{f}\|^2 \\ \text{s. a.} \quad & \\ \mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Neste capítulo são apresentados diversos algoritmos destinados a resolver o Problema LSE. Cinco métodos são apresentados, todos utilizando transformações ortogonais como técnica de solução.

Em [LAW95] são apresentados três algoritmos desenvolvidos para a solução de um problema de mínimos quadrados linear com restrições de igualdade lineares (Problema LSE) que podem ser utilizados para transformar um problema do tipo LSIE (Problema de Mínimos Quadrados com Restrições de Igualdade e Desigualdade) em um problema do tipo LSI (apenas com restrições de desigualdade).

Cada um dos três métodos pode ser considerado como sendo composto de três estágios:

1. Reduz-se o problema original em um de menor ordem;
2. Resolve-se o problema de menor ordem;
3. Transforma-se sua solução de modo a se obter a solução do problema original.

O primeiro método a ser descrito neste capítulo faz uso de uma base ortogonal para o espaço nulo da matriz de coeficientes das restrições de igualdade. O método exige tanto uma pré-multiplicação como uma pós-multiplicação da

matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}$ por matrizes ortogonais. É conhecido como o Método da Matriz de Espaço Nulo e é apresentado na Seção 4.2.

O segundo método utiliza eliminação direta na remoção das restrições de igualdade. É conhecido como Método da Substituição Direta e é abordado na Seção 4.3.

O terceiro método, resolve o Problema LSE como um problema de mínimos quadrados ponderados, atribuindo pesos maiores às linhas da matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}$ correspondentes às restrições de igualdade. É o Método dos Pesos descrito na Seção 4.4.

O quarto método apresentado neste capítulo foi desenvolvido por Heath em [HEA82] a partir de modificações no Método da Equação Normal com Restrições de Igualdade (ver Capítulo 3). O método faz uso extensivo de transformações ortogonais e não necessita calcular a Matriz de Informação. É apresentado na Seção 4.5.

O quinto método foi desenvolvido por Van Loan em [VAL85] e denominado neste trabalho como Método dos Pesos com Refinamento Iterativo. Ele é dividido em duas etapas. Na primeira etapa, o Problema LSE é resolvido pelo Método dos Pesos utilizando-se ponderações das linhas da matriz dos coeficientes correspondentes às restrições de igualdade pouco superiores aos utilizados na ponderação das demais linhas da matriz de coeficientes. Na segunda etapa, os resíduos associados às restrições de igualdade são minimizados. Este método, como será mostrado na Seção 4.6, é o que se aplica melhor ao processamento das restrições de igualdade em um problema de Mínimos Quadrados Ponderados.

Finalmente, na seção 4.7 são apresentados alguns comentários adicionais relativos aos métodos apresentados. São, também, discutidos tópicos relacionados à implementação de cada método e às dificuldades e problemas inerentes a eles.

4.2. Solução do Problema LSE Utilizando uma Base do Espaço Nulo da Matriz de Restrições

Uma maneira alternativa de apresentar-se o Método da Matriz de Espaço Nulo introduzido no capítulo anterior, é apresentada por Lawson e Hanson em [LAW95].

Considere o Problema LSE dado em (4.1). As equações correspondentes às restrições de igualdade podem ser eliminadas com uma correspondente redução no número de variáveis independentes. Sendo \mathbf{K} uma matriz ortogonal que triangularize a matriz das restrições de igualdade \mathbf{G} pela direita, defina \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 a partir de:

$$\mathbf{x} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

onde \mathbf{y}_1 possui dimensão $r \times 1$ e \mathbf{y}_2 , $(n-r) \times 1$. Se as transformações ortogonais representadas pela matriz \mathbf{K} forem aplicadas às matrizes \mathbf{G} e \mathbf{E} simultaneamente, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}}_1 & \mathbf{O} \\ \bar{\mathbf{E}}_1 & \bar{\mathbf{E}}_2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Então, $\bar{\mathbf{y}}_1$ é determinado como a solução do sistema triangular inferior $\bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{b}$ e $\bar{\mathbf{y}}_2$ é a solução do seguinte Problema LS:

$$\min \frac{1}{2} \left\| \bar{\mathbf{E}}_2 \cdot \mathbf{y}_2 - (\mathbf{f} - \bar{\mathbf{E}}_1 \bar{\mathbf{y}}_1) \right\|^2 \quad (4.4)$$

4.3. Solução de um Problema de Mínimos Quadrados Linear com Restrições de Igualdade Lineares por Eliminação Direta

Seja o Problema LSE definido em (4.1). É suposto que o posto de \mathbf{G} é r e o de $\begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}$ é n . É necessário que a matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}$ esteja ordenada de forma que as r primeiras colunas de \mathbf{G} sejam linearmente independentes.

Seja a partição

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

onde \mathbf{G}_1 possui dimensão $r \times r$, \mathbf{E}_1 , $m \times r$, \mathbf{G}_2 , $r \times (n-r)$ e \mathbf{E}_2 , $m \times (n-r)$ e

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

A equação $\mathbf{G}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ correspondente às restrições de igualdade pode ser resolvida para \mathbf{x}_1 , o que fornece

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{G}_1^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{G}_2\mathbf{x}_2) \quad (4.7)$$

Substituindo a expressão acima para \mathbf{x}_1 em $\frac{1}{2}\|\mathbf{E}\mathbf{x} - \mathbf{f}\|^2$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\mathbf{E}\mathbf{x} - \mathbf{f}\|^2 &= \frac{1}{2}\|\mathbf{E}_1\mathbf{G}_1^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{G}_2\mathbf{x}_2) + \mathbf{E}_2\mathbf{x}_2 - \mathbf{f}\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{G}_2)\mathbf{x}_2 - (\mathbf{f} - \mathbf{E}_1\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{d})\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|\bar{\mathbf{E}}_2\mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{f}}\|^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde

$$\bar{\mathbf{E}}_2 \equiv \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{G}_2 \quad (4.9)$$

e

$$\bar{\mathbf{f}} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{E}_1\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{d} \quad (4.10)$$

Para se obter a solução do Problema LSE, primeiro obtém-se a solução do problema de mínimos quadrados irrestrito

$$\min \frac{1}{2}\|\bar{\mathbf{E}}_2\mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{f}}\|^2 \quad (4.11)$$

para finalmente se calcular

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{G}_1^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{G}_2\mathbf{x}_2) \quad (4.12)$$

Há várias formas de implementação do algoritmo descrito acima. Uma delas, proposta por Björk e Golub [BJG67] supõe a fatoração QR da matriz \mathbf{C}_1 de modo que

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{Q}_1^t \bar{\mathbf{G}}_1 \quad (4.13)$$

onde \mathbf{Q}_1 é ortogonal e $\bar{\mathbf{G}}_1$ triangular superior. Então as equações (4.9) e (4.10) podem ser reescritas como

$$\bar{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{E}_2 - (\mathbf{E}_1(\bar{\mathbf{G}}_1)^{-1})(\mathbf{Q}_1\mathbf{G}_2) \equiv \mathbf{E}_2 - \bar{\mathbf{E}}_1\bar{\mathbf{G}}_1 \quad (4.14)$$

e

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f} - (\mathbf{E}_1(\bar{\mathbf{G}}_1)^{-1})(\mathbf{Q}_1\mathbf{d}) \equiv \mathbf{f} - \bar{\mathbf{E}}_1\bar{\mathbf{d}} \quad (4.15)$$

As transformações ortogonais que triangularizam \mathbf{G}_1 devem ser aplicadas também a \mathbf{G}_2 e \mathbf{d} . A matriz $\bar{\mathbf{E}}_1$ é calculada como a solução do sistema triangular

$$\bar{\mathbf{E}}_1\bar{\mathbf{G}}_1 = \mathbf{E}_1 \quad (4.16)$$

O próximo passo é calcular

$$\bar{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{E}_2 - \bar{\mathbf{E}}_1\bar{\mathbf{G}}_1 \quad (4.17)$$

e

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f} - \bar{\mathbf{E}}_1\bar{\mathbf{d}} \quad (4.18)$$

A matriz $\bar{\mathbf{E}}_2$ é triangularizada via transformações ortogonais, estas mesmas transformações são aplicadas sobre $\bar{\mathbf{f}}$, obtendo-se:

$$\mathbf{Q}_2[\bar{\mathbf{E}}_2 \quad \bar{\mathbf{f}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{r}_2 \\ 0 & \mathbf{s} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Finalmente, a solução pode ser obtida resolvendo-se o sistema triangular

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}}_1 & \bar{\mathbf{G}}_2 \\ 0 & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Este método é muito semelhante ao aplicado por Quintana, Scott e Chikhiani em [QSC86] como visto na Seção 3.3.2.

4.4. O Método dos Pesos

Uma forma de se obter uma solução aproximada para o Problema LSE é resolver o problema de mínimos quadrados irrestrito dado por:

$$\min \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mu \mathbf{G} \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mu \mathbf{b} \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (4.21)$$

para um μ elevado. Por exemplo, se as linhas da matriz \mathbf{H} forem ponderadas com pesos da ordem de $1.0 \times 10^{+5}$, um peso elevado seria algo em torno de $1.0 \times 10^{+16}$.

Para se ter uma idéia da qualidade do resultado obtido na solução do problema representado pela equação (4.21), lança-se mão da Decomposição em Valores Singulares (SVD) [GOL89]. Assim, seja

$$\mathbf{U}^t \mathbf{E} \mathbf{X} = \text{diag}(h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n) = \mathbf{D}_E \in R^{m \times n}$$

$$\mathbf{V}^t \mathbf{G} \mathbf{X} = \text{diag}(g_1 \ g_2 \ \dots \ g_r) = \mathbf{D}_G \in R^{r \times n}$$

a Decomposição em Valores Singulares Generalizada (GSVD) de $(\mathbf{H} \ \mathbf{G})$ onde se propõe que ambas as matrizes tenham posto completo. Sendo $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_m)$, $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_r)$ e $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n)$, então é possível mostrar que a solução exata para o problema LSE é [LAW95]:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \frac{\mathbf{v}_i^t \mathbf{b}}{g_i} \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{u}_i^t \mathbf{f}}{h_i} \mathbf{x}_i \quad (4.22)$$

enquanto que a solução para o problema expresso pela equação (4.21) é dada por:

$$\mathbf{x}(\mu) = \sum_{i=1}^r \frac{h_i \mathbf{u}_i^t \mathbf{f} + \mu^2 g_i \mathbf{v}_i^t \mathbf{b}}{h_i^2 + \mu^2 g_i^2} \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{u}_i^t \mathbf{f}}{h_i} \mathbf{x}_i \quad (4.23)$$

e $\mathbf{x}(\mu) \rightarrow \mathbf{x}$ quando $\mu \rightarrow \infty$.

A grande vantagem deste método na solução do problema LSE é não ser necessária nenhuma rotina especial. O mesmo código utilizado para resolver um problema LS irrestrito pode ser utilizado para este método. Contudo, como se pode observar analisando-se a equação (4.23), a precisão de $\mathbf{x}(\mu)$ é dependente do valor de μ . Desse modo, em certas situações torna-se necessária a utilização de pesos muito grandes para obter-se um valor aceitável para \mathbf{x} e isto pode causar severos problemas numéricos [GOL89, BJK95, VAL85], principalmente se a matriz a ser fatorada é mal condicionada.

O ideal seria obter-se um valor aceitável para \mathbf{x} , utilizando-se pesos correspondentes às restrições de igualdade não muito diferentes dos utilizados

para ponderar-se as outras linhas da matriz \mathbf{E} . Neste contexto a proposta de Van Loan de refinamento iterativo dos pesos [VAL85], torna-se bastante atraente.

4.5. O Método de Heath [HEA82]

O Método dos Multiplicadores de Lagrange aplicado ao problema LSE consiste na introdução de um vetor ($r \times 1$) λ de multiplicadores de Lagrange na solução do sistema linear aumentado de ordem ($n + q$)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^t \mathbf{E} & \mathbf{G}^t \\ \mathbf{G} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^t \mathbf{f} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Este sistema pode ser resolvido diretamente por fatoração via blocos 2×2 ou 4×4 (Método da Equação Normal com Restrições de Igualdade) ou utilizando-se o seguinte algoritmo [HEA82]:

1. Resolver $\mathbf{E}^t \mathbf{E} \mathbf{y} = \mathbf{E}^t \mathbf{f}$ para \mathbf{y} ;
2. Resolver $\mathbf{E}^t \mathbf{E} \mathbf{J} = \mathbf{G}^t$ para a $n \times r$ matriz \mathbf{J} ;
3. $\mathbf{M} = \mathbf{G} \mathbf{J}$;
4. $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{G} \mathbf{y}$;
5. Resolver $\mathbf{M} \lambda = \mathbf{r}$;
6. $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{J} \lambda$.

Os métodos ortogonais possuem um desempenho numérico superior ao algoritmo apresentado acima. Além disso, o cálculo dos multiplicadores de Lagrange pode ser evitado. Seja

$$\mathbf{Q} \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

onde \mathbf{R} é uma matriz triangular superior de ordem $n \times n$. Como a norma Euclidiana é invariante sob transformações ortogonais a solução de um Problema LS irrestrito é $\mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{c}$ (ver Apêndice). Nota-se que o vetor \mathbf{y} no passo 1 é simplesmente a solução de um Problema LS irrestrito. Além disso, se definir-se a matriz \mathbf{K} como a solução do sistema de equações lineares $\mathbf{R}^t \mathbf{K} = \mathbf{G}^t$, tem-se que:

$$\mathbf{M} = \mathbf{G} \mathbf{J} = \mathbf{G} (\mathbf{E}^t \mathbf{E})^{-1} \mathbf{G}^t = \mathbf{G} (\mathbf{R}^t \mathbf{R})^{-1} \mathbf{G}^t = \mathbf{K}^t \mathbf{K} \quad (4.26)$$

A formação explícita da matriz \mathbf{M} pode ser evitada computando-se seu fator de Cholesky via transformações ortogonais (ver Capítulo 6):

$$\mathbf{TK} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^t \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

onde \mathbf{T} é uma matriz ortogonal de ordem n e \mathbf{L} é uma matriz triangular inferior de ordem r .

O sistema de equações lineares para λ no passo 5 pode ser substituído pelo sistema $\mathbf{L}^t\mathbf{L}\lambda = \mathbf{r}$. Nota-se, entretanto, que λ é imediatamente multiplicado por \mathbf{J} no passo 6 e que

$$\mathbf{J}\lambda = (\mathbf{E}^t\mathbf{E})^{-1}\mathbf{G}^t\lambda = (\mathbf{R}^t\mathbf{R})^{-1}\mathbf{R}^t\mathbf{K}\lambda = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{T}^t \begin{bmatrix} \mathbf{L}^t \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \lambda = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{T}^t \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

onde \mathbf{s} é definido como $\mathbf{L}^t\lambda$. Logo, é desnecessário o cálculo de λ , bastando resolver-se o sistema $\mathbf{L}\mathbf{s} = \mathbf{r}$. Chega-se, assim, ao seguinte algoritmo para a solução do Problema LSE [HEA82]:

1. Calcular \mathbf{R} e \mathbf{c} via Rotações de Givens;
2. Resolver o sistema $\mathbf{R}\mathbf{y} = \mathbf{c}$;
3. Resolver $\mathbf{R}^t\mathbf{K} = \mathbf{G}^t$;
4. Proceder à fatoração ortogonal de \mathbf{K} ;
5. $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{G}\mathbf{y}$;
6. Resolver $\mathbf{L}\mathbf{s} = \mathbf{r}$;
7. $\mathbf{u} = \mathbf{T}^t \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$;
8. Resolver $\mathbf{R}\mathbf{z} = \mathbf{u}$;
9. $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$.

Dos métodos apresentados nesta seção, este é o único ainda não implementado em conexão com a Estimção de Estados em Sistemas de Potência.

4.6. O Método dos Pesos com Refinamento Iterativo [VAL85]

O método desenvolvido por Van Loan permite a solução do problema LSE utilizando-se o Método dos Pesos sem, contudo, empregar pesos muito acima dos convencionalmente utilizados na ponderação das demais linhas da matriz \mathbf{E} . A idéia básica do algoritmo é minimizar os resíduos correspondentes às restrições de

igualdade obtidos na solução do problema via o Método dos Pesos convencional. Trata-se de um algoritmo iterativo e a prova de sua convergência é mostrada em [VAL85].

Este algoritmo foi desenvolvido para a solução do problema LSE linear, com restrições lineares.

Algoritmo proposto por Van Loan: Método dos Pesos com Refinamento Iterativo

1. Escolha μ e calcule a solução $\mathbf{x}(\mu)$ para o problema LS expresso em (4.21);

2. Faça $k = 0$;

3. Faça $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}(\mu)$;

4. Faça

$$\delta^k = \mathbf{b} - \mathbf{G}\mathbf{x}^k \quad (4.29)$$

5. Resolva o problema de mínimos quadrados expresso por:

$$\min \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mu\mathbf{G} \end{pmatrix} \Delta\mathbf{x}^k - \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mu\delta^k \end{pmatrix} \right\|^2 \quad (4.30)$$

6. Faça

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta\mathbf{x}^k \quad (4.31)$$

7. Teste de Convergência (explicitado a seguir). Caso a convergência não tenha sido obtida, faça $k \leftarrow k + 1$ e retorne ao passo 4. Caso contrário, a solução foi obtida e o processo iterativo é encerrado.

É importante ressaltar que a matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mu\mathbf{G} \end{bmatrix}$ é fatorada apenas uma única vez.

Assim:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mu\mathbf{G} \end{bmatrix} = [\mathbf{Q}_1(\mu) \quad \mathbf{Q}_2(\mu)] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\mu \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

resultando que

$$\mathbf{R}_\mu \mathbf{x}(\mu) = \mathbf{Q}_1(\mu)^t \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mu \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

e

$$\mathbf{R}_\mu \Delta \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{Q}_1(\mu)^t \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mu \delta^{(k)} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

A escolha do parâmetro μ é muito importante na aplicação deste algoritmo. Sendo *machep* a precisão da máquina utilizada, testes descritos em [VAL85] sugerem que valores inferiores a $(\text{machep})^{-1/2}$ garantem, de maneira geral, um bom desempenho do algoritmo. Valores superiores a este podem exigir uma ordenação conveniente de linhas e colunas para garantir-se a estabilidade numérica do método.

Sendo ε uma dada tolerância, quando

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{G}\mathbf{x}^k\| \leq \varepsilon \|\mathbf{G}\|_\infty \|\mathbf{x}^k\| \quad (4.35)$$

o processamento iterativo das restrições de igualdade é dado como concluído.

4.7. Considerações Finais

Neste capítulo, foram apresentados diversos métodos para a solução de um Problema de Mínimos Quadrados com Restrições de Igualdade. É proposta deste trabalho o desenvolvimento de um estimador de estados com restrições de igualdade e desigualdade para ser utilizado na modelagem da rede externa (não observável) de um sistema elétrico. A rede elétrica é representada por um conjunto de equações não lineares que relacionam as observações (telemidas provenientes da rede) com o estado do sistema (tensões complexas nas barras). A Matriz de Observação formada a partir da linearização das equações da rede é bastante esparsa de ordem $m \times n$, onde m é o número de observações e n o número de estados a serem estimados. Portanto, os métodos a serem utilizados na solução deste problema particular de mínimos quadrados devem preservar a esparsidade do sistema. Além disso, os métodos devem ser computacionalmente eficientes e numericamente estáveis.

Os métodos utilizados por Simões Costa e Seleme [SEL85] e Quintana, Scott e Chikhiani [QSC86] para o processamento das restrições de igualdade possuem uma característica em comum: a redução da esparsidade da Matriz de

Observação pela aplicação de transformações ortogonais no primeiro e produtos matriciais no segundo.

O Método proposto por Heath possui também, alguns inconvenientes, como a necessidade de se resolver um sistema matricial de equações no passo 3 e a fatoração QR de uma matriz cheia no passo 4 (ver Seção 4.5). Além disso, o algoritmo resolve sistemas lineares de equações em três etapas diferentes: passo 2, passo 6 e passo 8.

Sendo assim, a escolha recai sobre o Método dos Pesos com Refinamento Iterativo. Este método preserva a esparsidade da Matriz de Observação pois as restrições de igualdade são em primeira etapa tratadas como telemidas convencionais. Este procedimento acarreta outra vantagem do método. É a possibilidade do processamento de erros grosseiros antes que a segunda etapa do método seja realizada. Outra vantagem do método é sua estabilidade numérica, pois pesos bem inferiores aos utilizados pelo Método dos Pesos são utilizados.

Capítulo 5

O Problema dos Mínimos Quadrados Linear com Restrições de Desigualdade Lineares

5.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados diversos algoritmos destinados a resolver o Problema de Mínimos Quadrados com Restrições de Desigualdade, conhecido como Problema LSI. Todos os métodos apresentados resolvem o problema LSI utilizando transformações ortogonais.

Na seção 5.2 são definidos os tipos de problemas de mínimos quadrados conforme nomenclatura definida por Lawson e Hanson em [LAW 95].

Na Seção 5.3 são revistos alguns conceitos fundamentais da teoria de otimização, tais como as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker, multiplicadores de Lagrange e outros conceitos necessários ao entendimento deste Capítulo.

Na seção 5.4 é apresentado o Problema de Mínimos Quadrados com Restrições de Não-Negatividade, doravante denominado de Problema NNLS, e sua solução.

Na seção 5.5 o problema de mínimos quadrados conhecido como “Least Distance Programming”, doravante designado como Problema LDP, é analisado.

A seção 5.6 mostra como um problema do tipo mínimos quadrados com restrições de desigualdade (Problema LSI) pode ser transformado em um problema do tipo LDP.

Na seção 5.7 é apresentada uma forma de se converter um problema LSI em um problema LSE com restrições de não-negatividade (Problema>NNLSE) utilizando-se variáveis de folga.

Finalmente, na seção 5.8 são apresentados alguns comentários adicionais relativos aos métodos apresentados e são discutidos tópicos relacionados com a implementação de cada método e as dificuldades e problemas inerentes a eles.

5.2. O Problema de Mínimos Quadrados Linear com Restrições Lineares

Os Problemas de Mínimos Quadrados Linear com Restrições podem ser representados genericamente como [LAW95]:

1. Problema LSIE: Mínimos Quadrados com Restrições de Igualdade e Desigualdade

$$\begin{aligned} & \min \frac{1}{2} \|\mathbf{E}\mathbf{x} - \mathbf{f}\|^2 \\ & \text{s. a.} \\ & \mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{F}\mathbf{x} \geq \mathbf{d} \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde \mathbf{E} é uma matriz $m \times n$, \mathbf{f} um vetor $m \times 1$, \mathbf{G} uma matriz $r \times n$, \mathbf{b} um vetor $r \times 1$, \mathbf{F} uma matriz $p \times n$ e \mathbf{d} um vetor $p \times 1$. Além disso, $m \geq n$ e $r, p \leq n$.

2. Problema LSE: Mínimos Quadrados com Restrições de Igualdade

$$\begin{aligned} & \min \frac{1}{2} \|\mathbf{E}\mathbf{x} - \mathbf{f}\|^2 \\ & \text{s. a.} \\ & \mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned} \tag{5.2}$$

3. Problema LSI: Mínimos Quadrados com Restrições de Desigualdade

$$\begin{aligned} & \min \frac{1}{2} \|\mathbf{E}\mathbf{x} - \mathbf{f}\|^2 \\ & \text{s. a.} \\ & \mathbf{F}\mathbf{x} \geq \mathbf{d} \end{aligned} \tag{5.3}$$

4. Problema LDP: Problema de Mínima Distância

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \\ \text{s. a} & \\ \mathbf{F}\mathbf{x} & \geq \mathbf{d} \end{aligned} \quad (5.4)$$

5. Problema NNLS: Mínimos Quadrados com Restrições de Não-Negatividade

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} \|\mathbf{E}\mathbf{x} - \mathbf{f}\|^2 \\ \text{s. a} & \\ \mathbf{x} & \geq 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

O Problema NNLS é o de mais fácil solução. A idéia básica para resolver o Problema LSIE é transformá-lo em um problema LSI pela eliminação das restrições de igualdade e em seguida, transforma-se o Problema LSI em um problema LDP através de uma simples mudança de variáveis. Finalmente, o Problema LDP é resolvido como um problema NNLS equivalente.

5.3. O Problema Geral de Otimização

5.3.1. Caracterização das Restrições

Seja o seguinte problema de otimização, na qual as restrições são representadas por um conjunto de desigualdades:

$$\begin{aligned} \min & J(\mathbf{x}) \\ \text{s. a.} & \\ \mathbf{F}\mathbf{x} & \geq \mathbf{d} \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde $J(\mathbf{x})$ é a função objetivo a ser minimizada, \mathbf{F} é a matriz dos coeficientes das restrições formada por vetores linha \mathbf{f}_i^t e \mathbf{d} é o vetor do lado direito contendo os limites às variáveis de estimação \mathbf{x} .

Há três situações distintas que são assumidas pelas inequações que representam as restrições em um dado ponto \mathbf{x} :

- restrições satisfeitas, mas não no limite, isto é, $\mathbf{f}_i^t \mathbf{x} > d_i$, chamadas restrições inativas;
- restrições satisfeitas e no limite, isto é, $\mathbf{f}_i^t \mathbf{x} = d_i$, denominadas restrições ativas;
- restrições não satisfeitas, isto é, $\mathbf{f}_i^t \mathbf{x} < d_i$, chamadas restrições violadas.

Em termos gerais, duas situações podem ser previstas com relação à solução inicial do problema (5.6):

- solução inicial viável, onde todas as restrições são satisfeitas;
- solução inicial inviável, para o qual algumas restrições de desigualdade são violadas.

Naturalmente, a solução do problema (5.6) a partir de uma solução viável é mais fácil. Contudo, em estimação de estados, nem sempre é possível obter-se uma solução viável inicial. Os métodos apresentados neste capítulo não requerem uma solução inicial viável para a solução do Problema LSI (Problema 5.3). Caso \mathbf{E} seja a Matriz Identidade e \mathbf{f} um vetor nulo, o problema LSI converte-se num problema do tipo LDP.

5.3.2. Movimento a Partir de um Ponto Inicial Viável

Seja \mathbf{x}^k uma solução inicial viável. Se a i -ésima restrição é satisfeita neste ponto e inativa, ou seja $\mathbf{f}_i^t \mathbf{x} > d_i$, movimentos incrementais a partir de \mathbf{x}^k são possíveis em todas as direções sem violar a restrição considerada. Isto é, para qualquer vetor \mathbf{p} , $\mathbf{x}^k + \xi \mathbf{p}$ será viável para uma escolha adequada de $|\xi|$.

Uma restrição ativa, por outro lado, restringe os movimentos a partir de um ponto viável. Se a i -ésima restrição é tal que $\mathbf{f}_i^t \mathbf{x} = d_i$, existem dois tipos de movimentos que manterão a solução viável. Se \mathbf{p} satisfaz

$$\mathbf{f}_i^t \mathbf{p} = 0 \tag{5.7}$$

a direção \mathbf{p} corresponde a um movimento ao longo da restrição i e esta permanece ativa para todos os pontos $\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{p}$, para qualquer α . Se \mathbf{p} é tal que $\mathbf{f}_i^t \mathbf{p} > 0$, então

$$\mathbf{f}_i^t (\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{p}) = d_i + \alpha \mathbf{f}_i^t \mathbf{p} > d_i \tag{5.8}$$

isto é, a i -ésima restrição se torna inativa no ponto $\mathbf{x}^k + \alpha\mathbf{p}$. O vetor \mathbf{p} representa, portanto, um movimento com a direção apontando para o interior da região viável.

5.3.3. Condição de Otimalidade para \mathbf{x}^*

Para determinar se o ponto \mathbf{x}^* é a solução ótima do Problema LSI, deve-se inicialmente, identificar as restrições ativas em \mathbf{x}^* . Portanto, seja $\hat{\mathbf{F}}$ uma matriz de ordem $t \times n$ cujas linhas correspondem às restrições ativas em \mathbf{x}^* . A condição necessária para que \mathbf{x}^* seja a solução ótima é [BAZ93]:

$$\nabla J(\mathbf{x}^*) = \hat{\mathbf{F}}^t \boldsymbol{\lambda} \quad (5.9)$$

onde $\nabla J(\mathbf{x}^*)$ é o gradiente da função objetivo calculado no ponto \mathbf{x}^* e $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange das restrições.

Esta condição assegura que $J(\cdot)$ é estacionária para todos os movimentos de \mathbf{x}^* ao longo das restrições ativas. Entretanto, desde que os movimentos a partir de \mathbf{x}^* direcionados para o interior da região viável correspondem também a soluções viáveis, o ponto \mathbf{x}^* não será ótimo se houver alguma direção \mathbf{p} de movimento descendente, isto é, ao longo da qual $J(\mathbf{x})$ diminua. Para evitar esta possibilidade é necessário assegurar que, para qualquer vetor \mathbf{p} satisfazendo $\hat{\mathbf{F}}\mathbf{p} \geq 0$, $\nabla^t J(\mathbf{x}^*)\mathbf{p} \geq 0$. Desde que, pela equação (5.9)

$$\nabla^t J(\mathbf{x}^*)\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{f}_1^t \mathbf{p} + \lambda_2 \mathbf{f}_2^t \mathbf{p} + \dots + \lambda_t \mathbf{f}_t^t \mathbf{p} \quad (5.10)$$

onde t é o número de restrições ativas, a condição desejada é representada por:

$$\nabla^t J(\mathbf{x}^*)\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{f}_1^t \mathbf{p} + \lambda_2 \mathbf{f}_2^t \mathbf{p} + \dots + \lambda_t \mathbf{f}_t^t \mathbf{p} \geq 0 \quad (5.11)$$

onde $\mathbf{f}_i^t \mathbf{p} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, t$.

Esta condição só será satisfeita se $\lambda_i \geq 0$, para $i = 1, 2, \dots, t$, isto é, \mathbf{x}^* não será ótimo se houver multiplicadores de Lagrange negativos, pois isto indica que ainda existe alguma direção ao longo da qual é possível reduzir o valor da função objetivo.

Para se estabelecer o conjunto total das condições de otimalidade para o Problema LSI, deve-se fazer a imposição adicional de que todas as t linhas de $\hat{\mathbf{F}}$ sejam linearmente independentes (Condição de Regularidade) [BAZ93, FIA90].

Portanto, as condições de otimalidade para o Problema LSI podem ser resumidas como:

- $\mathbf{f}_i^t \mathbf{x}^* > d_i$, para as restrições inativas e $\mathbf{f}_i^t \mathbf{x}^* = d_i$ para as restrições ativas;
- $\nabla J(\mathbf{x}^*) = \mathbf{F}^t \boldsymbol{\lambda}$, onde \mathbf{F} corresponde às restrições ativas;
- $\lambda \geq 0$ para as restrições ativas;
- as colunas de \mathbf{F} devem ser linearmente independentes.

Estas condições são conhecidas como as “Condições de Karush-Kuhn-Tucker” para o Problema LSI. É comum ainda atribuir-se multiplicadores de Lagrange nulos às restrições inativas. Assim:

- $\lambda_i = 0$ para as restrições inativas.

A caracterização de uma solução para o Problema LSI é derivada das condições de otimalidade descritas acima. O algoritmo para obtenção da solução ótima envolve basicamente três estágios:

- a transformação do Problema LSI em um Problema LDP equivalente;
- a solução de um Problema NNLS;
- a normalização adequada do vetor solução do problema anterior.

A descrição detalhada destes três estágios é o tópico abordado nas próximas seções.

5.4. O Problema dos Mínimos Quadrados com Restrições de Não-Negatividade [LAW95, MED93]

Diversos métodos podem ser aplicados na resolução do Problema NNLS, expresso por (5.5). Destes, um dos mais simples [LAW95, MED93] consiste em utilizar o negativo da direção fornecida pelo vetor gradiente como direção de busca.

Seja a função Lagrangeana para o Problema NNLS:

$$\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} (\mathbf{E}\mathbf{x} - \mathbf{f})^t (\mathbf{E}\mathbf{x} - \mathbf{f}) - \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{x} \quad (5.12)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange ou vetor das variáveis duais. Aplicando-se a condição necessária para ponto estacionário, tem-se que:

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{E}^t \mathbf{r} = \nabla J(\mathbf{x}) \quad (5.13)$$

onde \mathbf{r} corresponde ao vetor de resíduos e é expresso como $\mathbf{E}\mathbf{x}-\mathbf{f}$ e $J(\cdot)$ é a função objetivo do Problema (5.5).

Quando a solução ótima é encontrada, aplicam-se as condições de folga de complementariedade, ou seja:

- Se $x_i > 0$, $\lambda_i = \nabla_i J(\mathbf{x}) = 0$
- Se $x_i = 0$, $\lambda_i = \nabla_i J(\mathbf{x}) > 0$

o que corresponde a dizer que:

1. Para as variáveis no interior da região viável ($x_i > 0$) não há direção ao longo da qual a função objetivo tenha o seu valor reduzido, em virtude da condição $\nabla_i J(\mathbf{x}) = \lambda_i = 0$.
2. Para as variáveis no limite da região viável ($x_i = 0$) a única direção ao longo do qual poderia haver decréscimo no valor da função objetivo é a do vetor gradiente no sentido oposto ao daquele vetor. Porém, nesta direção, a i -ésima componente do vetor \mathbf{x} tem novo valor igual a $x_i = -\alpha \nabla_i J(\mathbf{x})$ (para α entre zero e um) posicionando-o fora da região viável, o que não é permitido.

Baseados nas constatações acima, que na realidade são conseqüências da aplicação das condições de Karush-Kuhn-Tucker ao Problema NNLS (Condição de Folga de Complementariedade), Lawson e Hanson [LAW95] desenvolveram um algoritmo bastante simples e eficiente para resolvê-lo.

Dois conjuntos de índices são criados e modificados ao longo da execução do algoritmo. No conjunto Z são colocados os índices das variáveis que tenham seu valor igual a zero e no conjunto R os índices das variáveis que tenham valores diferentes de zero. Se uma determinada variável assumir um valor menor que zero, o algoritmo ou tentará torná-la maior que zero ou a fixará em zero e moverá seu índice do conjunto R para o conjunto Z .

O algoritmo proposto por Hanson e Lawson pode ser resumido nos seguintes passos:

1. Faça $R = \emptyset$ (conjunto vazio) e $Z = [1, 2, 3, \dots, n]$. $\mathbf{x}=0$;
2. Calcule o negativo do vetor gradiente $\mathbf{w} = \mathbf{E}^t (\mathbf{f} - \mathbf{E}\mathbf{x})$;
3. Se $Z = \emptyset$ ou se $w_i \leq 0$ para todo $i \in Z$, FIM;
4. Encontre um índice $t \in Z$ tal que $w_t = \max(w_i : i \in Z)$;
5. Mova o índice t do conjunto Z para R ;
6. Seja \mathbf{E}_R uma matriz $m \times n$ definida como

$$\text{coluna } j \text{ de } \mathbf{E}_R = \begin{cases} \text{coluna } j \text{ de } \mathbf{E} \text{ se } j \in R \\ 0 \text{ se } j \in Z \end{cases}$$

Calcule o vetor $(n \times 1)$ \mathbf{p} como a solução para o problema de mínimos quadrados irrestrito definido por $\mathbf{E}_R \mathbf{p} \equiv \mathbf{f}$. Apenas os componentes de \mathbf{p} que pertencem a R poderão ser determinados resolvendo-se este problema irrestrito.

Faça $p_j = 0$ para $j \in Z$;

7. Se $p_j > 0$ para todo $j \in R$, então faça $\mathbf{x} = \mathbf{p}$ e vá ao passo 2;

8. Calcule o mínimo $\alpha = x_j / (x_j - p_j)$ para todo $j \in R$;

9. Faça $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \alpha(\mathbf{p} - \mathbf{x})$;

10. Retirar do conjunto R todos os índices j em que $x_j = 0$;

11. Retornar ao passo 6.

Ao final da execução do algoritmo, o vetor \mathbf{x} satisfaz

$$\begin{aligned} x_i &> 0 \text{ para } i \in R \text{ e} \\ x_i &= 0 \text{ para } i \in Z \end{aligned}$$

e é uma solução para o Problema NNLS.

O vetor dual \mathbf{w} satisfaz:

$$\begin{aligned} w_j &= 0 \text{ para } j \in R \text{ e} \\ w_j &\leq 0 \text{ para } j \in Z \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{w} = \mathbf{E}'(\mathbf{f} - \mathbf{E}\mathbf{x}).$$

No passo 1 do algoritmo NNLS uma solução inicial ($\mathbf{x} = 0$) é especificada e parte-se de um conjunto vazio de índices R . Este conjunto armazena os índices j tal que $x_j > 0$. No passo 2, calcula-se o negativo do vetor gradiente o qual no caso particular deste problema, corresponde ao negativo do vetor dos multiplicadores de Lagrange. Correspondentemente, o passo 3 pode ser interpretado como uma verificação das condições de Karush-Kuhn-Tucker. O processo é encerrado se $\lambda \geq 0$ ou seja, para um vetor solução não-negativo. Se esta condição não for satisfeita, é incluído no conjunto R , nos passos 4 e 5, o índice correspondente ao maior componente (positivo) do vetor \mathbf{w} (o negativo do gradiente). Este componente está associado à restrição mais violada na solução corrente. No passo 6 é formada a submatriz \mathbf{E}_R , constituída pelas colunas da matriz \mathbf{E} correspondente aos índices do conjunto R . O sistema linear $\mathbf{E}_R \mathbf{p} \approx \mathbf{f}$ é resolvido. Este sistema de equações não é

representado por uma igualdade já que ele poderá ser sub- ou sobre-determinado, dependendo do número de restrições constantes no conjunto R e da dimensão do vetor solução. No passo 7, verifica-se a condição de não-negatividade. Se esta for satisfeita, retorna-se ao passo 2. Se existirem elementos do vetor p negativos, no passo 8 calcula-se um escalar α mínimo de forma que todos os componentes do vetor solução x se tornem maiores ou iguais a zero. No passo 10, exclui-se do conjunto R os índices j tais que $x_j = 0$, pois estas restrições no limite implicam em $\lambda_j > 0$ (ou $w_j < 0$), o que não satisfaz a condição requerida para j pertencer ao conjunto R e retorna-se ao passo 6. Os passos 6 a 10 constituem uma malha secundária na qual a saída depende de que a condição estabelecida no passo 7 seja satisfeita.

O algoritmo NNLS possui duas características básicas:

- as restrições que estão fora da região viável são processadas individualmente;
- sempre se determina uma solução não-negativa.

A maior dificuldade deste algoritmo sob o ponto de vista computacional está no passo 6, onde um sistema linear de ordem variável ao longo das iterações deve ser resolvido. Este sistema pode ser sub- ou sobre-determinado. Para contornar tal problema recomenda-se a utilização de um método baseado em transformações ortogonais como, por exemplo, reflexões de Householder ou rotações de Givens, genericamente denominadas de fatoração QR (ou QU, conforme a nomenclatura adotada neste trabalho).

Convém ressaltar que o problema de mínimos quadrados a ser resolvido no passo 6 difere do problema previamente resolvido no mesmo passo 6 (na iteração anterior) apenas no fato da matriz E_R ter tido uma coluna adicionada no passo 5 ou uma coluna eliminada no passo 10. Portanto, não é necessário uma nova fatoração QR completa da matriz E_R mas apenas deve-se proceder à sua atualização.

5.5. O Problema LDP [LAW95, MED93]

A solução para o Problema LDP, representado por (5.4), pode ser obtida através de uma normalização conveniente do vetor dos resíduos obtido a partir da solução de um Problema NNLS, cuja construção será mostrada a seguir [LAW95].

Seja o problema de mínimos quadrados com restrições de não-negatividade

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} [\mathbf{E}\mathbf{u} - \mathbf{f}]' [\mathbf{E}\mathbf{u} - \mathbf{f}] \\ \text{s. a} & \\ \mathbf{u} & \geq 0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

onde o vetor \mathbf{u} tem dimensão $p \times 1$, o vetor \mathbf{f} , $n+1$ e a matriz \mathbf{E} , $(n+1 \times p)$. Os dois últimos são construídos a partir da matriz \mathbf{F} e do vetor \mathbf{d} do Problema LDP original como mostrado abaixo:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^t \\ \mathbf{d}^t \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Conforme mostrado na seção anterior, o vetor dos multiplicadores de Lagrange para o Problema NNLS é dado por:

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{E}^t (\mathbf{E}\mathbf{u} - \mathbf{f}) \geq 0 \quad (5.16)$$

ou, em termos do vetor de resíduos \mathbf{r} (de dimensão $n \times 1$ neste caso) definido anteriormente,

$$\mathbf{E}^t \mathbf{r} \geq 0 \quad (5.17)$$

o que pode ser re-escrito como:

$$[\mathbf{F} \mid \mathbf{d}] \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \\ r_{n+1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.18)$$

ou

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{d}r_{n+1} \geq 0 \quad (5.19)$$

onde,

$$\bar{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

A equação (5.19) pode ser reescrita, dividindo-se ambos os lados por $-r_{n+1}$. Isto fornece:

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{r}}(-r_{n+1})^{-1} - \mathbf{d} \geq 0 \quad (5.21)$$

resultando finalmente em

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{r}}(-r_{n+1})^{-1} \geq \mathbf{d} \quad (5.22)$$

Comparando-se a equação (5.22) com o sistema de equações lineares que representa o conjunto de restrições de desigualdade no Problema LDP, representado por (5.4), observa-se que é possível definir a solução deste Problema como:

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{r}}(-r_{n+1})^{-1} \quad (5.23)$$

o que resulta em

$$\mathbf{F}\mathbf{x} \geq \mathbf{d} \quad (5.24)$$

e que corresponde ao conjunto original de restrições de desigualdade. As equações (5.13), (5.22) e (5.23) demonstram, portanto, que o Problema LDP pode ser resolvido normalizando-se convenientemente a solução de um Problema NNLS.

O vetor dos resíduos \mathbf{r} pode então ser re-escrito como

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^t \mathbf{u} \\ \mathbf{d}^t \mathbf{u} - 1 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

e, portanto, o último componente dos resíduos é dado por

$$r_{n+1} = \mathbf{d}^t \mathbf{u} - 1 \quad (5.26)$$

A função objetivo do Problema NNLS pode ser reescrita como:

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{r}^t (\mathbf{E}\mathbf{u} - \mathbf{f}) = \frac{1}{2} (\mathbf{r}^t \mathbf{E}\mathbf{u} - \mathbf{r}^t \mathbf{f}) \quad (5.27)$$

No entanto, de acordo com a equação (5.6),

$$\mathbf{r}^t \mathbf{E} \mathbf{u} = \nabla^t J(\mathbf{u}) \mathbf{u} \quad (5.28)$$

e, com base na definição do vetor \mathbf{f} ,

$$\mathbf{r}^t \mathbf{f} = r_{n+1} \quad (5.29)$$

o que fornece para a equação (5.27)

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} [\nabla^t J(\mathbf{u}) \mathbf{u} - r_{n+1}] \quad (5.30)$$

Mas, as condições de Karush-Kuhn-Tucker estabelecem que

- $\nabla_i J(\mathbf{u}) = 0$ para $u_i > 0$
- $\nabla_i J(\mathbf{u}) > 0$ para $u_i = 0$

o que faz com que o produto $\nabla^t J(\mathbf{u}) \mathbf{u}$ seja igual a zero no ponto ótimo. Portanto,

$$\|\mathbf{r}\|^2 = -r_{n+1} \quad (5.31)$$

A análise das equações (5.23), (5.26) e (5.31) permite as seguintes observações [LAW95, MED93]:

1. Existe solução viável para o Problema LDP apenas se $\|\mathbf{r}\|^2 \neq 0$.
2. No caso de solução viável, $(\mathbf{d}^t \mathbf{u} - 1) = r_{n+1} \neq 0$, tal que duas situações podem ocorrer:

- Conjunto completo de restrições de não-negatividade no limite, ou seja, $\mathbf{u} = 0$. Isto implica em $\mathbf{d}^t \mathbf{u} = 0$ e $r_{n+1} = -\|\mathbf{r}\|^2 = -1$, o que por comparação com os multiplicadores de Lagrange do Problema LDP revela que não há nenhuma restrição $\mathbf{f}_i^t \mathbf{x} \geq d_i$ no limite.

- Apenas algumas restrições de não-negatividade no limite, ou $\mathbf{u} \geq 0$. Neste caso, $\mathbf{d}^t \mathbf{u} \neq 0$ e $0 > r_{n+1} = \mathbf{d}^t \mathbf{u} - 1 > -1$. Comparando-se o vetor \mathbf{u} com

os multiplicadores de Lagrange do Problema LDP observa-se que para cada $u_i > 0$ corresponde uma restrição no limite.

3. Se $r_{n+1} = -\|\mathbf{r}\|^2 = 0$, não é possível obter solução viável para o Problema LDP, o que implica na existência de restrições conflitantes.

O algoritmo de solução do Problema LDP pode, então, ser assim resumido [LAW95]:

1. Defina a matriz \mathbf{E} e o vetor \mathbf{f} a partir da matriz de restrições \mathbf{F} e do vetor de limites \mathbf{d} ;
2. Resolva o Problema NNLS $\min \|\mathbf{E}\mathbf{u} - \mathbf{f}\|^2$ s. a. $\mathbf{u} \geq 0$;
3. Calcule o vetor dos resíduos $\mathbf{r} = \mathbf{E}\mathbf{u} - \mathbf{f}$;
4. Se $\|\mathbf{r}\|^2 = 0$, o problema não possui solução. Vá ao passo 6;
5. Para $j = 1, n$, calcule $\bar{x} = -r_j / r_{n+1}$;
6. FIM.

5.6. Transformação de um Problema LSI em um Problema LDP [LAW95, BJO96]

Considere o Problema LSI expresso abaixo,

$$\begin{aligned} & \min \|\mathbf{E}\mathbf{x} - \mathbf{f}\|^2 \\ & \text{s. a} \\ & \mathbf{F}\mathbf{x} \geq \mathbf{d} \end{aligned} \tag{5.32}$$

onde \mathbf{E} é uma matriz $m \times n$, \mathbf{f} um vetor $m \times 1$, \mathbf{F} uma matriz $p \times n$ e \mathbf{d} um vetor $p \times 1$. De várias formas, uma decomposição ortogonal da matriz \mathbf{E} pode ser obtida de modo que

$$\mathbf{E} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{K}^t = [\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{K}^t \tag{5.33}$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz ortogonal de dimensões $m \times m$, \mathbf{K} é outra matriz ortogonal de dimensões $n \times n$ e \mathbf{U} pode ser obtida como uma matriz diagonal ou triangular superior, de ordem $n \times n$.

Seja o vetor \mathbf{y} definido como uma mudança ortogonal de variáveis baseada na matriz \mathbf{K} da equação (5.33):

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}\mathbf{y} \quad (5.34)$$

Sendo assim, a função objetivo do Problema LSI pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}) &= \|\mathbf{f} - \mathbf{E}\mathbf{x}\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^t \mathbf{f} \\ \mathbf{Q}_2^t \mathbf{f} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{U}\mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{U}\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{f}_2\|^2 \end{aligned} \quad (5.35)$$

onde

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{Q}_i^t \mathbf{f}, \quad i = 1, 2 \quad (5.36)$$

Fazendo-se uma nova mudança de variáveis,

$$\mathbf{s} = \mathbf{U}\mathbf{y} - \mathbf{f}_1 \quad (5.37)$$

pode-se escrever a nova função objetivo como sendo:

$$J(\mathbf{s}) = \|\mathbf{s}\|^2 + \|\mathbf{f}_2\|^2 \quad (5.38)$$

Portanto, o Problema LSI original é equivalente, exceto pela adição de um termo constante $\|\mathbf{f}_2\|^2$, ao seguinte Problema LDP:

$$\begin{aligned} \min J(\mathbf{s}) &= \|\mathbf{s}\|^2 \\ \text{s. a} & \\ \mathbf{F}\mathbf{K}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{s} &\geq \mathbf{d} - \mathbf{F}\mathbf{K}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{f}_1 \end{aligned} \quad (5.39)$$

Após a solução deste Problema LDP ter sido encontrada, a solução para o Problema LSI original pode ser obtida a partir das equações (5.34) e (5.37). A soma dos quadrados dos resíduos do problema original pode ser calculado pela equação (5.38).

5.7. Outras Formas de Solução do Problema LSI

Uma forma alternativa de resolver-se o Problema LSI ou mesmo o LSIE é transformá-lo em um Problema>NNLSE (Mínimos Quadrados com Restrições de Não-Negatividade e Igualdade) pela utilização de variáveis de folga. Este

problema pode então ser resolvido utilizando-se o Método dos Pesos com Refinamento Iterativo (MPRI) descrito na seção 4.6 para o processamento das restrições de igualdade e o Algoritmo NNLS descrito na seção 5.4 para o processamento das restrições de não-negatividade. Em [HAS81], Haskell e Hanson propõem um método semelhante para a solução do Problema LSIE. A diferença básica é que estes autores utilizam o Método das Penalidades de Powell e Reid para o processamento das restrições de igualdade.

Seja o Problema LSIE abaixo:

$$\begin{aligned}
 & \min \| \mathbf{E}\mathbf{x} - \mathbf{f} \|^2 \\
 & \text{s.a} \\
 & \mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
 & \mathbf{F}\mathbf{x} \geq \mathbf{d}
 \end{aligned}
 \tag{5.40}$$

Utilizando-se variáveis de folga, o conjunto de restrições de desigualdade do Problema LSIE pode ser transformado em um conjunto de restrições de igualdade com restrições de não-negatividade sobre as variáveis de folga. Assim, sendo m o número de observações, r o número de restrições de igualdade e p é o número de restrições de desigualdade. temos que:

$$\begin{aligned}
 & \min \| \mathbf{E}\mathbf{x} - \mathbf{f} \|^2 \\
 & \text{s. a} \\
 & \mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
 & \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{d} \\
 & \mathbf{s} \geq \mathbf{0}
 \end{aligned}
 \tag{5.41}$$

\mathbf{s} é o vetor correspondentes às variáveis de folga, de dimensão $p \times 1$.

Se o MPRI for utilizado na solução do problema NNLSE, expresso pela equação (5.41) acima, podemos rescreve-lo como:

$$\begin{aligned}
 & \min \| \mathbf{E}'\mathbf{x}' - \mathbf{f}' \|^2 \\
 & \text{s. a} \\
 & \mathbf{s} \geq \mathbf{0}
 \end{aligned}
 \tag{5.42}$$

onde \mathbf{E}' é uma matriz de dimensão $(m+r+p) \times (n+p)$ e definida como:

$$\mathbf{E}' = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ \mu\mathbf{G} & 0 \\ \mu\mathbf{F} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

onde \mathbf{I} é a matriz Identidade e \mathbf{x}' é o novo vetor de variáveis de estado, com dimensão $(n+p) \times 1$ e dado por:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Finalmente, \mathbf{f}' , o novo vetor do lado direito, com dimensão $(m+r+p) \times 1$, é dado por:

$$\mathbf{f}' = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mu\mathbf{b} \\ \mu\mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

As restrições de não-negatividade aplicam-se apenas a uma parte das variáveis de estado, isto é, às variáveis de folga. Portanto, para o Algoritmo NNLS poder ser utilizado neste caso, certas modificações precisam ser feitas:

- no passo 1, o conjunto Z é definido como $Z = [i, i = n+1, n+p]$;
- a matriz \mathbf{E}_R definida no passo 6 contém as $m+r$ primeiras linhas correspondentes às matrizes \mathbf{E} e \mathbf{G} originais e as n primeiras colunas correspondentes às variáveis de estados contidas no vetor \mathbf{x} original;
- nenhum índice i pertencente ao conjunto de índices $O = [j, j = 1, n]$ poderá pertencer ao conjunto Z ou R ;

Feitas as modificações descritas acima, o Algoritmo NNLS poderá ser utilizado normalmente para obter-se a solução do Problema>NNLSE.

5.8. Considerações Finais

Nesta seção, foram apresentados diversos métodos para a solução de um Problema de Mínimos Quadrados com Restrições de Desigualdade.

No caso do processamento das restrições de desigualdade, dois métodos podem ser utilizados: a transformação do Problema LSI em um problema do tipo LDP e sua solução utilizando o Algoritmo NNLS conforme descrito na seção 5.4; ou a transformação das restrições de desigualdade em igualdade pela utilização de variáveis de folga. Neste último caso, a solução do problema>NNLSE resultante pode ser obtida se utilizando o Algoritmo NNLS modificado e o Método dos Pesos com Refinamento Iterativo conforme descrito na seção anterior.

Cada um dos dois métodos possui vantagens e desvantagens. A vantagem do Método LDP é a redução das dimensões do problema. A Matriz de Observação é fatorada apenas uma vez por iteração do laço externo não-linear e a matriz transformada, embora cheia, é de pequenas dimensões ($p \times n$, onde p é o número de restrições de desigualdade). Por sua vez, sua fatoração é feita utilizando-se um algoritmo desenvolvido por Lawson e Hanson [LAW95]. Este algoritmo parte da suposição de que a matriz já foi inicialmente fatorada. Como no algoritmo NNLS apenas uma coluna da matriz é modificada de iteração para iteração, não é necessário refatorá-la, mas apenas atualizá-la. A grande desvantagem deste método é a inversão da matriz triangular superior resultante da fatoração da Matriz de Observação.

No método que utiliza variáveis de folga, a inversão acima mencionada é desnecessária. Contudo o método apresenta a desvantagem do aumento das dimensões do problema pela inclusão das variáveis de folga. Além disso, quando da aplicação do Algoritmo NNLS, a matriz a ser fatorada em cada iteração é de dimensão superior à do Método LDP. O número de iterações para se obter a convergência do Algoritmo NNLS também é maior devido ao aumento no número de variáveis de estado.

Como os dois métodos possuem vantagens e desvantagens que aparentemente são difíceis de serem precisamente quantificadas em termos de eficiência computacional, ambos foram implementados e os resultados obtidos são apresentados no Capítulo 7.

No próximo capítulo é mostrado como os algoritmos descritos neste capítulo foram implementados e utilizados na solução de um Problema de Mínimos Quadrados Não-Linear com Restrições de Igualdade e Desigualdade Não-Lineares.

Capítulo 6

Estimadores de Estados Ortogonais-Sequenciais com Restrições de Igualdade e Desigualdade

6.1. Introdução

Neste Capítulo é mostrado como os métodos de solução dos Problemas NNLS, LDP, LSI e LSIE podem ser utilizados na solução de um problema de mínimos quadrados ponderados com restrições de igualdade e desigualdade e sua aplicação à Estimação de Estados em Sistemas de Potência. Na seção 6.2, demonstra-se como o Estimador Ortogonal-Sequencial baseado na transformação de um Problema LSIE em um Problema LDP é constituído. Na seção 6.3 é discutido o estimador baseado no uso de variáveis de folga. Na seção 6.4 são apresentados alguns aspectos práticos da implementação computacional tais como técnicas de esparsidade e ordenação ótima. Finalmente, na seção 6.5 são discutidas as vantagens e desvantagens de cada estimador.

6.2. Construção de um Estimador de Estados Ortogonal-Sequencial com Restrições de Igualdade e Desigualdade pelo Método da Transformação LSI/LDP

Nesta seção, os algoritmos apresentados nas seções anteriores são utilizados na construção de um Estimador de Estados Ortogonal-Sequencial com Restrições de Igualdade e Desigualdade baseado em rotações de Givens, utilizando um modelo de medição não-linear.

O Problema da Estimação de Estados com Restrições é definido como um Problema de Mínimos Quadrados Ponderados com Restrições de Igualdade e Desigualdade e é assim formulado:

$$\begin{aligned}
\min J(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})]^t \mathbf{R}^{-1}[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] \\
\text{s. a} & \\
\mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \mathbf{b} \\
\mathbf{f}(\mathbf{x}) &\geq \mathbf{d}
\end{aligned} \tag{6.1}$$

onde \mathbf{z} é um vetor $m \times 1$ contendo as medidas efetuadas ou projetadas na rede elétrica ou, no caso de porções não observáveis da rede, pseudomedidas projetadas a partir da porção observável; $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ é um vetor de funções não-lineares que relacionam o vetor de estados \mathbf{x} , de ordem $n \times 1$, com o vetor \mathbf{z} ; \mathbf{R} é a matriz diagonal das covariâncias dos erros de medição, de ordem $m \times m$; $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ é um vetor de funções não-lineares, de ordem $r \times 1$, que relacionam o vetor de estados \mathbf{x} com o vetor \mathbf{b} , contendo informações determinísticas sobre a rede elétrica (tais como injeções nulas em certas barras do sistema) e $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é um vetor de funções não-lineares, de ordem $p \times 1$, que relaciona o vetor de estados \mathbf{x} com determinados limites superiores ou inferiores assumidos pelas variáveis de estados ou pelas próprias funções que as relacionam. Estes limites estão contidos no vetor \mathbf{d} .

Em Sistemas de Potência, o estado a ser estimado corresponde ao módulo e ao ângulo das tensões nas barras do sistema. O ângulo da tensão em uma determinada barra é fixado em zero grau e é tomado como referência. Sendo N o número de barras do sistema, o número de variáveis de estado a serem estimadas n é $(2.N - 1)$.

A técnica de solução do problema de mínimos quadrados via rotações de Givens exige que a função que relaciona as variáveis de otimização com o vetor de observações seja linear, bem como as funções \mathbf{g} e \mathbf{f} das restrições. Portanto, para tal técnica poder ser utilizada, o modelo de medição deve ser linearizado.

Dessa forma, o problema de mínimos quadrados ponderados com um modelo de medição linearizado em torno do ponto de operação do sistema \mathbf{x}^k fica sendo:

$$\begin{aligned}
\min J(\Delta\mathbf{x}^k) &= \frac{1}{2}[\Delta\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x}^k]^t \mathbf{R}^{-1}[\Delta\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x}^k] \\
\text{s. a} & \\
\mathbf{G}(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x}^k &= \Delta\mathbf{b} \\
\mathbf{F}(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x}^k &\geq \Delta\mathbf{d}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

onde:

$\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)$, doravante designada apenas como \mathbf{H} , é a matriz Jacobiana do vetor \mathbf{h} , calculada no ponto $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k$ e definida como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{H} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} \quad (6.3)$$

$\mathbf{G}(\mathbf{x}^k)$, doravante designada apenas como \mathbf{G} é a matriz Jacobiana do vetor \mathbf{g} , calculada no ponto $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k$ e definida como:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{G} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} \quad (6.4)$$

$\mathbf{F}(\mathbf{x}^k)$, doravante designada apenas como \mathbf{F} , é a matriz Jacobiana do vetor \mathbf{f} , calculada no ponto $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k$ e definida como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{F} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} \quad (6.5)$$

e

$$\Delta \mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \quad (6.6)$$

$$\Delta \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \quad (6.7)$$

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \quad (6.8)$$

A nova estimativa para o ponto de operação em estudo é calculada como:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k \quad (6.9)$$

Com o objetivo de simplificar ainda mais a notação, o sobrescrito k , que indica a iteração em curso na solução do problema de estimação de estados será omitido. A matriz de ponderação \mathbf{R}^{-1} é incorporada aos termos lineares da equação (6.2) e, com um certo abuso de notação, ignorada.

O método adotado para a eliminação das restrições de igualdade é o Método dos Pesos com Refinamento Iterativo desenvolvido por Van Loan em [VAL85] e utilizado pela primeira vez na estimação de estados em sistemas de potência por Gouvêa e Simões Costa em [GSC98/1].

As restrições de igualdade são inicialmente tratadas como telemidas convencionais ponderadas com um peso um pouco superior aos utilizados na ponderação da demais telemidas. Assim, a nova Matriz Jacobiana (ou Matriz de Observações) fica sendo:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mu\mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

e o vetor do lado direito,

$$\Delta\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{z} \\ \mu\Delta\mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

A segunda etapa do Método dos Pesos com Refinamento Iterativo só será realizada após o processamento das restrições de desigualdade.

Assim sendo, a etapa seguinte é transformar o Problema LSI resultante da incorporação das restrições de igualdade na Matriz Jacobiana em um Problema LDP. Isto é feito conforme o algoritmo descrito na seção 5.6, introduzindo-se algumas modificações já que a matriz de transformação \mathbf{T} que triangulariza a matriz \mathbf{M} , obtida via rotações de Givens com três ou dois multiplicadores não é rigorosamente ortogonal (veja o Apêndice para maiores detalhes). De fato:

$$\mathbf{T}^t\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{T}^t = \mathbf{D} \quad (6.12)$$

onde \mathbf{D} é uma matriz diagonal. A relação entre \mathbf{T} e uma matriz ortogonal \mathbf{P} que triangularize a matriz \mathbf{M} é dada por [GEN74]:

$$\mathbf{T}\mathbf{D}^{-1/2} \equiv \mathbf{P} \quad (6.13)$$

Talvez a principal característica de um estimador ortogonal-sequencial seja a de que a fatoração QR seja aplicada diretamente sobre a matriz de observação \mathbf{H} (neste caso, a matriz \mathbf{M}).

Assim,

$$\mathbf{T}\mathbf{M} = [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2]\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_T \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

onde \mathbf{U}_T é uma matriz triangular superior de ordem $(n \times n)$.

A fatoração QR da matriz \mathbf{M} é a etapa principal em um estimador ortogonal-sequencial. O termo sequencial significa que cada medida contida no vetor $\Delta\mathbf{w}$ é processada uma por vez, pois as rotações de Givens operam por linha. É nesta fase que ocorre a detecção e o processamento de erros grosseiros [SIM81/2].

Na realidade, a seqüência de rotações de Givens é aplicada sobre a matriz \mathbf{M} aumentada pelo vetor $\Delta\mathbf{w}$, sendo as medidas ponderadas segundo os fatores de peso contidos na matriz \mathbf{R}^{-1} .

Assim,

$$\mathbf{T}[\mathbf{M} \ : \ \Delta\mathbf{w}] = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_T & \Delta\omega_1 \\ \mathbf{O} & \Delta\omega_2 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Concluída a fatoração QR da matriz \mathbf{M} , procede-se à mudança de variáveis necessária para transformar o Problema LSI acima em um Problema LDP da maneira como foi descrito nas seções anteriores.

Para poder-se realizar a transformação de variáveis necessária para se converter um Problema LSI em um Problema LDP, a matriz de transformações que converte a matriz \mathbf{M} em uma matriz triangular superior deve ser ortogonal. Desse modo, torna-se necessário a multiplicação da matriz \mathbf{T} pela matriz de pesos \mathbf{D}^{-1} .

Assim, a função objetivo do Problema LSI pode ser rescrita como:

$$J(\Delta\mathbf{x}) = \|\Delta\mathbf{w} - \mathbf{M}\Delta\mathbf{x}\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^t \mathbf{D}^{-1/2} \Delta\mathbf{w} \\ \mathbf{T}_2^t \mathbf{D}^{-1/2} \Delta\mathbf{w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{U}_T \Delta\mathbf{x} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (6.16)$$

ou

$$J(\Delta\mathbf{x}) = \|\mathbf{D}^{1/2} \mathbf{U}_T \Delta\mathbf{x} - \mathbf{D}^{1/2} \Delta\omega_1\|^2 + \|\mathbf{D}^{1/2} \Delta\omega_2\|^2 \quad (6.17)$$

Portanto, seja $\Delta\mathbf{s}$ uma nova variável definida como:

$$\Delta\mathbf{s} = \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{U}_T \Delta\mathbf{x} - \mathbf{D}^{1/2} \Delta\omega_1 \quad (6.18)$$

Com base nesta nova variável $\Delta\mathbf{s}$, a função objetivo pode ser reescrita como:

$$J(\Delta\mathbf{s}) = \|\Delta\mathbf{s}\|^2 + \|\mathbf{D}^{1/2} \Delta\omega_2\|^2 \quad (6.19)$$

Como o segundo termo da equação (6.19) é uma constante, o problema original, expresso pelas equações (6.1) pode ser reescrito como um problema do tipo LDP em termos de Δs , conforme mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} & \min \|\Delta s\|^2 \\ & \text{s. a} \\ & \mathfrak{S}\Delta s \geq \Delta l \end{aligned} \tag{6.20}$$

onde

$$\mathfrak{S} = \mathbf{F}\mathbf{U}_T^{-1} \mathbf{D}^{-1/2} \tag{6.21}$$

e

$$\Delta l = \Delta l - \mathbf{F}\mathbf{U}_T^{-1} \mathbf{D}^{-1/2} \Delta \omega_1 \tag{6.22}$$

\mathfrak{S} é uma matriz de ordem $p \times n$, Δl de ordem $p \times 1$ e o vetor de incógnitas Δs , $n \times 1$.

O Problema LDP é resolvido utilizando-se o algoritmo descrito na seção 5.5. A solução do Problema LDP é equivalente à solução de um Problema NNLS do tipo

$$\begin{aligned} & \min \|f - \mathbf{E}u\|^2 \\ & \text{s. a} \\ & u \geq 0 \end{aligned} \tag{6.23}$$

onde

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathfrak{S}^t \\ \Delta l \end{bmatrix} \tag{6.24}$$

e

$$f = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.25}$$

Obtida a solução dos Problemas NNLS e LDP, representada pelo vetor Δs , calcula-se o vetor Δx utilizando-se a equação (6.18):

$$U_T \Delta x = D^{-1/2} \Delta s + \Delta \omega_1 \quad (6.26)$$

A próxima etapa é proceder-se ao refinamento iterativo das restrições de igualdade. Nesta fase, os resíduos obtidos pelo Método dos Pesos na primeira etapa do algoritmo para as restrições de igualdade são minimizados. Isto é feito resolvendo-se o seguinte problema de Mínimos Quadrados Irrestrito:

$$\min \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mu \mathbf{G} \end{bmatrix} \delta(\Delta x^k) - \begin{bmatrix} 0 \\ \mu r^k \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (6.27)$$

onde

$$r^k = \mathbf{b} - \mathbf{G} \Delta x^k \quad (6.28)$$

e

$$\Delta x^{k+1} = \Delta x^k + \delta(\Delta x^k) \quad (6.29)$$

O valor inicial para Δx é o obtido pela solução da equação (6.26) e o critério de convergência adotado é o mesmo descrito na seção 4.7. Se

$$\| \mathbf{b} - \mathbf{G} \Delta x^k \| \leq \epsilon \| \mathbf{G} \|_{\infty} \| \Delta x^k \|$$

o processo iterativo de refinamento dos pesos é concluído.

Conforme descrito na seção 4.7 do Capítulo 4, a Matriz Jacobiana aumentada pela matriz $\mu \mathbf{G}$ é fatorada uma única vez por iteração do Método de Newton (laço externo). O problema de mínimos quadrados expresso pela equação (6.27) é resolvido apenas aplicando-se as rotações de Givens calculadas em (6.15) sobre o novo vetor do lado direito. $\delta(\Delta x^k)$ é calculado pela solução do sistema triangular resultante:

$$U_T \delta(\Delta x^{(k)}) = T^t \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mu r^{(k)} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

A nova estimativa para o vetor de estados do sistema é então calculada por:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k \quad (6.31)$$

Como critério de convergência global, é utilizado a comparação entre um limiar e o módulo da diferença entre o estado estimado atual e o obtido na iteração imediatamente anterior. Portanto, se

$$|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \varepsilon \text{ para } i = 1, n,$$

a solução foi encontrada.

Alguns resultados preliminares obtidos com a implementação dos métodos descritos nesta seção aplicados à estimação de estados em sistemas de potência foram publicados por Gouvêa e Simões Costa em [GSC98/2].

6.3. Construção de um Estimador de Estados Ortogonal-Sequencial com Restrições Utilizando-se Variáveis de Folga

Este estimador é, em muitos aspectos, semelhante ao estimador proposto na seção anterior. As restrições de desigualdade são transformadas em igualdades pelo uso de variáveis de folga. Assim, as restrições de igualdade acrescidas pelas restrições de desigualdade serão tratadas da mesma forma, utilizando-se o Método dos Pesos com Refinamento Iterativo.

As equações já linearizadas que definem o problema LSIE são:

$$\begin{aligned} \min J(\Delta \mathbf{x}^k) &= [\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k]^t \mathbf{R}^{-1} [\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k] \\ \text{s. a} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k &= \Delta \mathbf{b} \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k &\geq \Delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Pela introdução de variáveis de folga s positivas, as restrições de desigualdade podem ser transformadas em igualdades. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \min J(\Delta \mathbf{x}^k) &= [\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k]^t \mathbf{R}^{-1} [\Delta \mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k] \\ \text{s. a} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k &= \Delta \mathbf{b} \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k - \mathbf{s} &= \Delta \mathbf{d} \\ \mathbf{s} &\geq 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

Portanto, a nova Matriz Jacobiana é definida como:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 \\ \mu\mathbf{G} & 0 \\ \mu\mathbf{F} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de dimensão $p \times p$. A dimensão da matriz \mathbf{M} é $(m+r+p) \times (n+p)$.

O novo vetor do lado direito é:

$$\Delta\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{z} \\ \mu\Delta\mathbf{b} \\ \mu\Delta\mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

e o novo vetor de estados

$$\Delta\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

Inicialmente, apenas a matriz $\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mu\mathbf{G} \end{bmatrix}$ é fatorada. Nesta etapa, pode-se proceder à detecção e identificação de erros grosseiros.

A etapa seguinte é a aplicação do algoritmo NNLS modificado de forma a resolver-se as restrições de não-negatividade impostas às variáveis de folga:

1. Faça $R = \emptyset$ (conjunto vazio) e $Z = [n+1, n+2, \dots, n+p]$. $\Delta\mathbf{x}=0$;
2. Calcule o negativo do vetor gradiente $\mathbf{w} = \mathbf{M}'^t (\Delta\mathbf{m} - \mathbf{M}\Delta\mathbf{x}')$;
3. Se $Z = \emptyset$ ou se $w_i \leq 0$ para todo $i \in Z$, FIM;
4. Encontre um índice $t \in Z$ tal que $w_t = \max(w_i : i \in Z)$;
5. Mova o índice t do conjunto Z para R ;
6. Seja \mathbf{M}_R uma matriz $(m+r+p \times n+p)$ definida como

$$\text{coluna } j \text{ de } \mathbf{M}_R = \begin{cases} \text{coluna } j \text{ de } \mathbf{M} \text{ se } j \in R \text{ e } j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ 0 \text{ se } j \in Z \end{cases}$$

Calcule o vetor $(n+p) \times 1$ \mathbf{p} como a solução para o problema de mínimos quadrados irrestrito definido por $\mathbf{M}_R\mathbf{p} \equiv \Delta\mathbf{m}$. Apenas os componentes de \mathbf{p} que

pertencem a R e ao conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ poderão ser determinados resolvendo-se este problema irrestrito. Faça $p_j = 0$ para $j \in Z$;

7. Se $p_j > 0$ para todo $j \in R$, então faça $\Delta \mathbf{x}' = \mathbf{p}$ e vá ao passo 2;

8. Calcule o mínimo $\alpha = \Delta x'_j / (\Delta x_j - p_j)$ para todo $j \in R$;

9. Faça $\Delta \mathbf{x} \leftarrow \Delta \mathbf{x} + \alpha \cdot (\mathbf{p} - \Delta \mathbf{x}')$;

10. Retirar do conjunto R todos os índices j em que $\Delta x'_j = 0$;

11. Retornar ao passo 6.

No passo 6, parte da matriz M já foi fatorada anteriormente. Portanto, apenas as linhas de M que pertençam ao conjunto R precisam ser fatoradas.

Obtida a convergência do algoritmo NNLS modificado, o passo seguinte é proceder-se à segunda etapa do processamento das restrições de igualdade. Isto é feito como descrito na seção anterior com a diferença de que a Matriz Jacobiana é aumentada pela inclusão das matrizes μG e μF .

Os critérios de convergência adotados são o mesmo em ambos os algoritmos.

6.4. Aspectos Práticos da Implementação

É bem sabido que a Matriz Jacobiana (ou Matriz de Observações) de um estimador de estados é extremamente esparsa. O número de elementos nulos nesse tipo de matriz é geralmente superior a 90%. Dessa forma, a maneira como essas matrizes são armazenadas é decisivo para garantir-se a eficiência computacional do estimador de estados. Somente os elementos não nulos devem ser armazenados de forma a não apenas diminuir os requisitos de memória, mas também, não efetuar-se operações em ponto flutuante desnecessárias.

Neste trabalho são utilizados dois esquemas de armazenamento compacto: as listas indexadas estáticas e as listas indexadas dinâmicas.

As matrizes estáticas, isto é, que não terão sua estrutura e número de elementos não nulos alterados ao longo do programa, são armazenadas na forma de uma lista indexada composta por três vetores:

- $JCB(i)$: vetor onde os elementos não nulos de uma determinada matriz são armazenados, $i = 1, ndjcb$;
- $JJCB(i)$: vetor de mesma dimensão que JCB , indica a que coluna pertence o elemento de JCB na mesma posição i ;
- $XJCB(i)$: vetor apontador, indica em que elemento de JCB inicia-se uma determinada linha i , $i = 1, njcb$ onde $njcb$ é o número de linhas da matriz.

Pertencem a esta classe de matrizes: a Matriz Jacobiana, as Matrizes Jacobianas correspondentes às restrições de igualdade e desigualdade, a inversa da matriz triangular superior U_T e as listas de adjacências que fornecem a estrutura da rede.

As matrizes cuja estrutura é alterada ao longo do programa são armazenadas em forma de listas indexadas dinâmicas. Este tipo de listas compreendem quatro vetores:

- $R(i)$: vetor de dimensão $nszr$, armazena os valores numéricos dos elementos não nulos de uma determinada matriz R ;
- $JCOL(i)$: armazena o índice das colunas dos elementos armazenados em R ;
- $HEAD(i)$: indica em que posição do vetor R inicia a linha i ;
- $LINK(i)$: da mesma dimensão que R e $JCOL$, indica em R onde é encontrado o próximo elemento pertencente à linha i .

Pertencem a esta classe de matrizes, a matriz triangular U_T , resultante da fatoração QR da Matriz Jacobiana aumentada M .

Durante a fatoração QR da matriz Jacobiana, ocorre um considerável enchimento da matriz triangular superior resultante que sem o uso de um esquema adequado de ordenação, pode se tornar catastrófico e inviabilizar o estimador proposto. Este enchimento pode ser de duas formas: um enchimento intermediário que ocorre na linha que está sendo processada mas que é cancelado posteriormente, e um enchimento permanente, visível na estrutura final da matriz triangular superior U_T . Pode ser mostrado [GEH80] que o enchimento intermediário é função da sequência em que as linhas da Matriz Jacobiana são processadas, enquanto que o enchimento final é função da estrutura da Matriz Jacobiana. A forma de se reduzir o enchimento a níveis razoáveis é proceder a uma ordenação conveniente das linhas e colunas da Matriz Jacobiana.

Se o sistema de equações a ser resolvido é determinado, isto é, a matriz dos coeficientes é quadrada, a Eliminação de Gauss ou a Fatoração de Cholesky podem ser utilizados. Os esquemas de ordenação para estes métodos são bastante conhecidos. Um dos mais utilizados, foi inicialmente proposto por Tinney e Walker em 1967 [TIW67] e é conhecido na literatura como o Método do Mínimo Grau ou Tinney II. Em estimação de estados, a matriz dos coeficientes (Matriz de Observações ou Jacobiana) é retangular com muito mais linhas que colunas. Seja H a matriz Jacobiana calculada em estimação de estados. Então, definimos a Matriz de Informação A como:

$$A = H^t H \quad (6.37)$$

Se a Fatoração de Cholesky for aplicada à matriz A , temos que:

$$A = LL^t \quad (6.38)$$

onde L é o Fator Triangular de Cholesky. Mas,

$$\begin{aligned} H^t Q^t Q H &= \begin{bmatrix} U^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} = U^t U = H^t H \\ &= A = LL^t \end{aligned} \quad (6.39)$$

Das equações (6.39), verifica-se que a matriz triangular superior U , resultante da aplicação das rotações de Givens à matriz H e a matriz L^t são as mesmas, exceto por uma possível troca de sinais em certas linhas.

A matriz U é independente da sequência em que as linhas de H são processadas. Dessa forma, os mesmos algoritmos que determinam um esquema de ordenação para as colunas de A pode ser utilizado para as colunas de H .

George e Heath em [GEH80] propõem o seguinte algoritmo para a solução de um problema LS via rotações de Givens, utilizado neste trabalho:

- Determine a estrutura (não os valores numéricos) de $A = H^t H$;
- Aplique um esquema de ordenação à A , resultando numa matriz de permutação P tal que $A' = P^t A P$ tenha um fator de Cholesky L esparso;
- Aplique um algoritmo de fatoração simbólica à A' e determine a estrutura da matriz L' ;
- Calcule $U' = (L')^t$ processando as linhas de $H' = H P$ uma a uma utilizando rotações de Givens. Aplique as mesmas transformações ao vetor do lado direito. Um esquema de ordenação de linhas pode ser utilizado;
- Resolva o sistema triangular resultante.

Para a ordenação de colunas, o método utilizado neste trabalho é o mesmo sugerido por George e Heath em [GEH80]: o Método do Mínimo Grau de Tinney e Walker [TIW67], comprovado por Vempati *et alii* em [VEM91] como a melhor alternativa em problemas de estimação de estados.

Como a ordem com que as linhas de H são processadas não afeta nem a estrutura da matriz U' nem a estabilidade numérica do método, algum tipo de ordenação de linhas de H pode ser utilizado com o objetivo de minimizar o enchimento intermediário e reduzir o custo computacional total. Vempati e seus colaboradores [VEM91] sugerem diversos esquemas de ordenação de linhas comparando-os entre si. Todos os esquemas são sub-ótimos e envolvem alguma

heurística particular. O esquema adotado neste trabalho é o mesmo sugerido por Simões Costa em [SIM81/2]. As linhas são processadas em ordem crescente com respeito ao menor índice da coluna da matriz H' .

No processamento das restrições de desigualdade é exigida a inversão da matriz triangular superior U_T no cálculo da matriz \mathfrak{S} (ver equação 6.21). A escolha de um algoritmo eficiente neste procedimento é fundamental para a eficiência computacional do Método LDP para o processamento das restrições de desigualdade.

Evidentemente, a inversão explícita da matriz U_T não é necessária. A matriz \mathfrak{S} pode ser calculada diretamente como resultado de um sistema matricial de equações do tipo:

$$\mathfrak{S} U_T = F \quad (6.40)$$

A matriz diagonal de pesos $D^{-1/2}$ é incorporada à matriz U_T . Como as matrizes U_T e F estão armazenadas por linha é necessário a transposição da equação (6.40). Assim:

$$U_T^t \mathfrak{S}^t = F^t \quad (6.41)$$

Como U_T é triangular superior unitária, sua inversa também o é, o que simplifica o algoritmo a ser utilizado em seu cálculo.

O algoritmo escolhido para resolver este sistema matricial de equações é apresentado em [GEO80] e aqui transcrito:

```
for k = 1, p
  for i = 1, n
```

$$f(k,i) = \mathfrak{f}(k,i)$$

$$\begin{bmatrix} f(k,i+1) \\ \vdots \\ f(k,n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{f}(k,i+1) \\ \vdots \\ \mathfrak{f}(k,n) \end{bmatrix} - f(k,i) \begin{bmatrix} \mathbf{u}(i,i+1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(i,n) \end{bmatrix}$$

```
end
end
```

onde f , \mathbf{u} e \mathfrak{f} são colunas das matrizes \mathfrak{S}^t , U_T^t e F^t respectivamente, ou linhas das matrizes \mathfrak{S} , U_T e F .

A matriz \mathfrak{S} é tratada como uma matriz cheia. Seu número de elementos não nulos, dependendo do sistema, pode chegar a 60% do número total de elementos. A matriz \mathfrak{S} possui diversas colunas inteiramente nulas. Como o Problema LDP é resolvido como um Problema NNLS equivalente onde a matriz dos coeficientes é montada a partir da transposta de \mathfrak{S} , várias linhas desta matriz são nulas e devem ser eliminadas antes do Algoritmo NNLS ser executado. Isso faz com que o coeficiente de esparsidade desta matriz diminua ainda mais.

Assim sendo, o sucesso do Algoritmo NNLS depende da maneira como o problema de mínimos quadrados irrestrito do passo 6 é resolvido. De uma iteração para outra do Algoritmo NNLS, apenas uma coluna da matriz E é alterada (ver Capítulo 4). Isso significa que, a cada iteração, não é necessário refatorá-la, mas apenas proceder-se a alterações na matriz fatorada obtida na iteração anterior devido ao acréscimo de uma nova coluna ou a eliminação de uma outra. Maiores detalhes sobre este procedimento podem ser encontrados no Capítulo 24 de [LAW95]. Como neste caso a esparsidade não é um fator a ser considerado, o problema de mínimos quadrados do passo 6 do Algoritmo NNLS é resolvido via Reflexões de Householder (dois multiplicadores, nenhum teste lógico), mais rápidas que as Rotações de Givens (dois multiplicadores, e testes lógicos para garantir a estabilidade numérica ou três multiplicadores sem testes lógicos).

Em [VAL85], mostra-se que é possível se executar o algoritmo do Método dos Pesos com Refinamento Iterativo sem a necessidade do armazenamento da matriz ortogonal Q . Contudo, tal procedimento não foi adotado nesta implementação pois é comum fazer-se o Jacobiano constante a partir de uma determinada iteração. Dessa forma, faz-se necessário armazenar não a matriz Q , mas a sequência de rotações de Givens necessárias á fatoração da matriz Jacobiana, para em seguida aplicá-las aos vetores do lado direito que variam de iteração para iteração.

A opção pelo Método das Rotações de Givens com três multiplicadores (ver Apêndice A) deve-se à sua robustez numérica e ao fato da matriz triangular resultante ser diagonal unitária, fornecendo como subproduto o somatório dos quadrados dos resíduos necessário ao processamento de erros grosseiros. Caso não haja um esquema de controle para se evitar *overflow* ou *underflow* durante a fatoração, o método com dois multiplicadores não é numericamente estável [GEN74, BJO96]. Além disso, a matriz triangular resultante não é diagonal unitária, havendo a necessidade de se calcular o somatório dos quadrados dos resíduos e um pequeno esforço computacional adicional na rotina de substituição reversa. Além disso, testes preliminares realizados mostram que não há ganho significativo em utilizar-se o esquema de rotações de Givens com dois multiplicadores em relação ao esquema com três multiplicadores. Os testes lógicos necessários ao controle da estabilidade numérica do método mais os cálculos adicionais necessários na rotina de substituição reversa e no cálculo do somatório dos quadrados dos resíduos parecem tender a anular a vantagem deste possuir uma

multiplicação a menos que o esquema proposto por Gentleman em [GEN74]. No entanto, testes mais exaustivos são ainda necessários antes de se chegar a conclusões definitivas sobre o assunto.

6.5. Os Programas Desenvolvidos

No decorrer deste trabalho, foram desenvolvidos três estimadores de estado com restrições cujos algoritmos são descritos a seguir.

- **EENLR** - Estimador de Estados Não-Linear com Restrições de Igualdade;
- **EENLRID** - Estimador de Estados Não-Linear com Restrições de Igualdade e Desigualdade via Transformação LSI/LDP;
- **EENLVF** - Estimador de Estados Não-Linear com Restrições de Igualdade e Desigualdade utilizando variáveis de folga.

Todos os três estimadores utilizam técnicas ortogonais (rotações de Givens com três multiplicadores) conforme descrito na seção anterior.

6.5.1. Algoritmo do Programa EENLR

1. Fixar μ ;
2. Determinar a estrutura da matriz Jacobiana $M = \begin{bmatrix} R^{-1/2}H \\ \mu G \end{bmatrix}$
3. Determinar a estrutura da matriz de Informação $A = M^T M$;
4. Reordenar as colunas da matriz A pelo Método do Mínimo Grau, determinando P_c ;
5. Reordenar as linhas de M pelo menor índice de coluna, determinando P_l ;
6. $\rho = 0$
7. **Enquanto** (não convergência em Δx^ρ) **faça**
8. **Se** (M não constante) **então**
 Calcular M
 Fim Se
9. $\Delta w = \begin{bmatrix} R^{-1/2} \Delta z \\ \mu \Delta b \end{bmatrix}$
10. Aplicar rotações de Givens:

$$Q^T(\mu)P_l[M \mid \Delta w]P_c = \begin{bmatrix} R_\mu & \mid & \Delta s \\ O & \mid & \omega \end{bmatrix}$$

11. Resolver $\mathbf{R}_\mu \Delta \mathbf{x}^\rho(\mu) = \Delta \mathbf{s}$

12. $k = 0$;

13. **Enquanto** (não convergência em $\Delta \mathbf{x}^k$) **faça**

14. $\Delta \mathbf{x}^k = \Delta \mathbf{x}^\rho(\mu)$

15. $\mathbf{r}^k = \Delta \mathbf{b} - \mathbf{G} \Delta \mathbf{x}^k$

16. Resolva

$$\min \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{H} \\ \mu \mathbf{G} \end{bmatrix} \delta(\Delta \mathbf{x}^k) - \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \mathbf{r}^k \end{bmatrix} \right\|^2$$

17. $\Delta \mathbf{x}^{k+1} = \Delta \mathbf{x}^k + \delta(\Delta \mathbf{x}^k)$

18. $k \leftarrow k + 1$

Fim enquanto

19. $\mathbf{x}^{\rho+1} = \mathbf{x}^\rho + \Delta \mathbf{x}^k$

20. $\rho \leftarrow \rho + 1$

Fim Enquanto

21. **Fim.**

6.5.2. Algoritmo do Programa EENLRID

1. Fixar μ ;

2. Determinar a estrutura da matriz Jacobiana $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{H} \\ \mu \mathbf{G} \end{bmatrix}$

3. Determinar a estrutura da matriz de Informação $\mathbf{A} = \mathbf{M}' \mathbf{M}$;

4. Reordenar as colunas da matriz \mathbf{A} pelo Método do Mínimo Grau, determinando \mathbf{P}_c ;

5. Reordenar as linhas de \mathbf{M} pelo menor índice de coluna, determinando \mathbf{P}_l ;

6. $\rho = 0$

7. **Enquanto** (não convergência em Δx^p) **faça**

8. **Se** (M não constante) **então**

Calcular M

Fim Se

9.
$$\Delta w = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1/2} \Delta z \\ \mu \Delta b \end{bmatrix}$$

10. Aplicar rotações de Givens:

$$\mathbf{T} \mathbf{P}_1 [\mathbf{M} \mid \Delta w] \mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_T & \mid & \Delta \omega_1 \\ \mathbf{O} & \mid & \Delta \omega_2 \end{bmatrix}$$

11. **Se** ($\Delta x^p > 1.0 \times 10^{-2}$) **então**

Calcular \mathfrak{S}

Fim Se

12.
$$\Delta l = \Delta l - \mathfrak{S} \Delta \omega_1$$

13. Resolva (Algoritmo LDP/NNLS)

$$\min \|\Delta s\|^2$$

s. a

$$\mathfrak{S} \Delta s \geq \Delta l$$

14. Calcule

$$D^{1/2} \mathbf{U}_T \Delta x^p = \Delta s + D^{1/2} \Delta \omega_1$$

15. $k = 0$;

16. **Enquanto** (não convergência em Δx^k) **faça**

17.
$$\Delta x^k = \Delta x^p(\mu)$$

18.
$$r^k = \Delta b - \mathbf{G} \Delta x^k$$

19. Resolva

$$\min \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1/2} \\ \mu \mathbf{G} \end{bmatrix} \delta(\Delta x^k) - \begin{bmatrix} 0 \\ \mu r^k \end{bmatrix} \right\|^2$$

20.
$$\Delta x^{k+1} = \Delta x^k + \delta(\Delta x^k)$$

21.
$$k \leftarrow k + 1$$

Fim enquanto

22. $\mathbf{x}^{\rho+1} = \mathbf{x}^{\rho} + \Delta\mathbf{x}^k$
 23. $\rho \leftarrow \rho + 1$

Fim Enquanto

24. **Fim.**

6.5.3. Algoritmo do Programa EENLVF.

1. Fixar μ ;

2. Determinar a estrutura da matriz Jacobiana $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{H} \\ \mu\mathbf{G} \\ \mu\mathbf{F} \end{bmatrix}$

3. Determinar a estrutura da matriz de Informação $\mathbf{A} = \mathbf{M}'\mathbf{M}$;

4. Reordenar as colunas da matriz \mathbf{A} pelo Método do Mínimo Grau, determinando \mathbf{P}_c ;

5. Reordenar as linhas de \mathbf{M} pelo menor índice de coluna, determinando \mathbf{P}_l ;

6. $\rho = 0$

7. **Enquanto** (não convergência em $\Delta\mathbf{x}^{\rho}$) **faça**

8. **Se** (\mathbf{M} não constante) **então**

Calcular \mathbf{M}

Fim Se

9. $\Delta\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1/2}\Delta\mathbf{z} \\ \mu\Delta\mathbf{b} \\ \mu\Delta\mathbf{d} \end{bmatrix}$

10. Aplicar rotações de Givens:

$$\mathbf{T} \mathbf{P}_l \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{H} & : & \mathbf{R}^{-1/2}\Delta\mathbf{z} \\ \mu\mathbf{G} & & \mu\Delta\mathbf{b} \end{bmatrix} \mathbf{P}_c$$

11. Resolva (Algoritmo NNLS modificado)

$$\min \|\mathbf{M}\Delta\mathbf{x}' - \Delta\mathbf{m}\|^2$$

s. a.

$$s \geq 0$$

12. Calcule $\Delta\mathbf{x}^{\rho}$

13. $k = 0$;

14. **Enquanto** (não convergência em $\Delta \mathbf{x}^k$) **faça**

15.
$$\Delta \mathbf{x}^k = \Delta \mathbf{x}^\rho (\mu)$$

16.
$$\mathbf{r}^k = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{b} \\ \Delta \mathbf{d} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^k$$

17. **Resolva**

$$\min \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{H} \\ \mu \mathbf{G} \\ \mu \mathbf{F} \end{bmatrix} \delta(\Delta \mathbf{x}^k) - \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \mathbf{r}^k \end{bmatrix} \right\|^2$$

18.
$$\Delta \mathbf{x}^{k+1} = \Delta \mathbf{x}^k + \delta(\Delta \mathbf{x}^k)$$

19.
$$k \leftarrow k + 1$$

Fim enquanto

20.
$$\mathbf{x}^{\rho+1} = \mathbf{x}^\rho + \Delta \mathbf{x}^k$$

21.
$$\rho \leftarrow \rho + 1$$

Fim Enquanto

22. Fim.

6.6. Considerações Finais

Conforme mencionado anteriormente, a principal característica de um estimador ortogonal-sequencial é que a fatoração ortogonal QR, baseada em rotações de Givens, é aplicada diretamente sobre a matriz de observação, permitindo que cada medida seja processada sequencialmente, visto que as rotações são aplicadas em uma linha por vez.

A grande vantagem dos estimadores ortogonais-sequenciais é sua robustez numérica, já que eles trabalham diretamente sobre a matriz de observação, aliada a uma técnica eficiente de detecção de erros grosseiros, já que o somatório dos quadrados dos resíduos é um sub-produto do método.

O método proposto faz uso extensivo das rotações de Givens. Na parte central do método, as rotações de Givens são utilizadas na triangularização da matriz de observação modificada. Finalmente, rotações de Givens ou reflexões de Householder podem ser utilizadas para a solução do Problema NNLS equivalente

ao Problema LDP surgido com a mudança de variáveis quando da solução do Problema LSI e no algoritmo NNLS modificado. O algoritmo de solução do Problema NNLS é iterativo, baseado na solução de diversos problemas de mínimos quadrados irrestritos com ordem variável.

Quanto ao fato da solução do Problema NNLS ser iterativa, isto não parece constituir um problema muito sério visto que a dimensão do problema LDP original é pequena, $(p \times n-r)$ onde p é o número de restrições de desigualdade, r o número de restrições de igualdade e n o número de variáveis de estados. Além disso, o problema de mínimos quadrados irrestrito resolvido dentro do algoritmo NNLS é bastante esparso. Isto se deve ao fato de que apenas as colunas da matriz M que tenham seu índice pertencente ao conjunto R dos índices em que o componente correspondente do vetor gradiente é diferente de zero são utilizadas. As outras colunas assumem o valor zero.

Entretanto, no algoritmo NNLS modificado, a dimensão do problema de mínimos quadrados irrestrito é $(m+r+p) \times (n+p)$, embora parte da matriz M seja fatorada anteriormente e não necessite mais ser fatorada nesta etapa. Mesmo assim, a dimensão do sistema triangular que deverá ser resolvido em cada iteração do algoritmo NNLS modificado é $(m+r+p) \times (n+p)$. Uma vantagem dessa abordagem é que não é mais necessária a inversão da matriz triangular U_T como é exigido no estimador que faz uso da transformação LSI/LDP.

Neste trabalho é utilizado um algoritmo para o processamento das restrições de igualdade que alia a simplicidade do Método dos Pesos à estabilidade numérica dos Métodos Ortogonais. O algoritmo proposto aqui utiliza-se de um algoritmo proposto por Van Loan [VAL85] denominado neste trabalho de Método dos Pesos com Refinamento Iterativo. O algoritmo constitui-se de um processo iterativo que permite a utilização de pesos pouco superiores aos utilizados na ponderação convencional das telemidas da rede na ponderação das linhas da matriz Jacobiana correspondentes às restrições de igualdade. Dessa forma em um primeiro momento, as restrições de igualdade são tratadas como telemidas de grau de confiança pouco superior às telemidas convencionais. Em uma etapa posterior, as restrições de igualdade são reprocessadas e o resíduo a elas associado é minimizado. Portanto, o método proposto é dividido em duas etapas principais: primeiro, o problema de Mínimos Quadrados Ponderados com Restrições de Igualdade (Problema LSE) é resolvido atribuindo-se um peso um pouco maior às linhas da matriz Jacobiana correspondentes às restrições de igualdade; na etapa seguinte, é minimizado o resíduo correspondente à estas restrições.

As vantagens deste método são o baixo custo computacional adicional necessário ao processamento das restrições, a estabilidade numérica associada aos métodos ortogonais e ao fato de poder-se processar erros grosseiros antes do reprocessamento das restrições. Como na primeira etapa do algoritmo as restrições de igualdade são tratadas como pseudo-medidas, há a possibilidade de detectar-se

erros grosseiros a elas relacionados, evitando assim, que erros topológicos que possam estar presentes prejudiquem o resultado final.

No próximo capítulo, são apresentados os resultados obtidos com um estimador ortogonal-sequencial não-linear com restrições de igualdade e desigualdade não-lineares para os algoritmos propostos neste trabalho: 1) estimador com restrições de igualdade; 2) estimador com restrições de igualdade e desigualdade utilizando a transformação LSI/LDP e 3) estimador com restrições de igualdade e desigualdade utilizando variáveis de folga.

Capítulo 7

Resultados

7.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos com os estimadores ortogonais-sequenciais não-lineares com restrições de igualdade e desigualdade não lineares desenvolvidos neste trabalho.

Diversos tipos de testes foram realizados: validação do estimador com restrições de igualdade apenas; validação do estimador completo, isto é, com restrições de igualdade e desigualdade; utilização deste tipo de estimador na obtenção de um modelo não reduzido da rede externa e, finalmente, a Análise de Contingências para se verificar a eficácia dos modelos em reproduzir a reação da rede externa face a uma contingência simples (perda de uma linha de transmissão) ocorrida na rede interna.

Os programas foram escritos em FORTRAN e implementados em microcomputadores do tipo Pentium 200 Mhz, com 32 Mbytes de memória RAM.

Ao todo, foram desenvolvidos três estimadores: um estimador ortogonal-sequencial não-linear com restrições de igualdade utilizando o Método dos Pesos com Refinamento Iterativo (MPRI), um estimador ortogonal-sequencial com restrições de igualdade e desigualdade utilizando o MPRI e a transformação LSI/LDP e finalmente um estimador ortogonal-sequencial completo, utilizando variáveis de folga. Os resultados obtidos para cada um destes estimadores são apresentados separadamente.

Este capítulo está assim dividido: na Seção 7.2 é explicado como foram feitas as simulações e os programas auxiliares utilizados; na Seção 7.3 são apresentados os resultados obtidos para o estimador com restrições de igualdade em três sistemas-teste: o IEEE 30 barras, o IEEE 118 barras e o Sistema Sul-Sudeste Brasileiro de 340 barras (SSE-340). Na seção 7.4 são apresentados os resultados obtidos pelos estimadores com restrições de desigualdade para os mesmos sistemas-teste e é feita uma comparação entre o desempenho do estimador LSI/LDP e o estimador que utiliza variáveis de folga, já que os resultados numéricos são os mesmos. Na seção 7.5 são apresentados os resultados obtidos na representação explícita da rede externa (não-observável) de um sistema elétrico. Nestas simulações foram utilizados os sistemas IEEE de 30 e 118 barras. O método em um passo de Simões Costa e Tardio [SIM97] e o método em dois

passos de Geisler e Bose [GEI83] foram utilizados. Nesta mesma seção são apresentados ainda, os resultados obtidos pela Análise de Contingências utilizando-se os modelos da rede externa determinados na seção anterior. Finalmente, na seção 7.6 são discutidos a qualidade e o significado destes resultados.

7.2. Procedimentos de Simulação

Inicialmente, os métodos apresentados neste trabalho foram testados utilizando-se um modelo linear para a rede elétrica (modelo DC), e um estimador DC com restrições de igualdade e desigualdade foi desenvolvido. As restrições de igualdade foram processadas utilizando-se o Método da Matriz de Espaço Nulo [SEL85] e as restrições de desigualdade, o Método da Transformação LSI/LDP. Os resultados obtidos foram apresentados no XI Congresso Brasileiro de Automática e podem ser vistos em [GSS96].

7.2.1. Procedimentos de Validação do Estimador de Estados com Restrições de Igualdade (EENLR)

Basicamente, foram utilizados quatro Sistemas-teste: o IEEE 14 barras, IEEE 30 barras, o IEEE 118 barras e o sistema reduzido de 340 barras baseado no sistema Sul-Sudeste brasileiro. Os resultados obtidos para o sistema de 14 barras do IEEE não são apresentados neste trabalho por serem pouco significativos face à reduzida dimensão do sistema. As características dos demais sistemas-teste podem ser vistas no Apêndice B.

Inicialmente, foi executado um fluxo de carga para todos os sistemas. Obteve-se um plano de medição observável onde constavam telemidas de fluxo ativo e reativo, injeções ativas e reativas e telemidas de tensão. Para tanto, foi utilizado um programa baseado em métodos topológicos descrito em [SIM90] denominado PLAMED. Dado um plano de medição e a topologia da rede, o programa PLAMED determina a árvore geradora observável, os pares e as medidas críticas pela utilização de técnicas de interseção de matróides.

Com os resultados obtidos pelo programa de fluxo de carga e de posse de um plano de medição observável, gerou-se um conjunto de “telemidas” a serem utilizadas pelo estimador de estados pela introdução de ruído aleatório normalmente distribuído nas grandezas indicadas pelo plano de medição. Isto foi feito utilizando-se o programa INPNML. Dados os fluxos em linhas e injeções nas barras de uma rede elétrica e um plano de medição observável, o programa INPNML fornece um conjunto de pseudo-telemidas com ruído aleatório normalmente distribuído. A magnitude deste ruído aleatório introduzido pelo programa INPNML depende da precisão atribuída ao instrumento supostamente utilizado e à semente utilizada em um gerador de números pseudo-aleatórios.

Normalmente, é atribuída uma precisão igual a $1,0 \times 10^{-3}$ a voltímetros e $1,0 \times 10^{-2}$ a medidores de fluxos e injeções. O programa INPNML permite ainda a simulação de erros grosseiros e a identificação das barras com injeções nulas.

Embora o MPRI permita a consideração de qualquer tipo de restrição de igualdade, foram simuladas apenas restrições de igualdade correspondentes a injeções nulas em barras onde não há carga ou geração.

Os resultados obtidos com o MPRI foram comparados com os resultados obtidos pelo Método dos Pesos convencional e com os resultados obtidos pelo Método da Matriz de Espaço Nulo publicados em [SEL85] utilizando-se o mesmo sistema-teste e o mesmo plano de medição.

7.2.2. Procedimentos para a Validação do Estimador de Estados com Restrições de Igualdade e Desigualdade

7.2.2.1. Testes Preliminares

Conforme descrito na Seção anterior, foi gerado um conjunto de telemidas a partir de um caso base de fluxo de carga.

Como teste preliminar, para avaliar a capacidade do estimador de fazer respeitar as restrições de desigualdade e determinar as condições e situações em que tal não fosse possível, erros grosseiros foram introduzidos no plano de medição de forma a originar desvios consideráveis entre o valor real e o valor estimado de injeções ou fluxos em determinadas barras do sistema. Em seguida, restrições de desigualdade foram impostas a estas barras de forma que os efeitos dos erros grosseiros introduzidos fossem neutralizados. As restrições de desigualdades foram simuladas impondo-se limites superiores e inferiores para injeções ativas e reativas, fluxos em linhas e módulos de tensão, limites estes escolhidos baseados no valor real destas grandezas.

Finalmente, restrições de igualdade foram simuladas como duas restrições de desigualdade onde o limite inferior torna-se igual ao limite superior.

Nesta etapa, foram utilizados os sistemas do IEEE de 30 e 118 barras e o sistema SSE-340 barras.

7.2.2.2. Procedimentos para a Simulação da Representação Explícita do Sistema Externo

Como o objetivo de um estimador com restrições de igualdade e desigualdade é a obtenção de um modelo para a representação explícita da rede externa (não observável), também foram feitas diversas simulações neste sentido. O sistema-teste, neste caso, foi subdividido em duas regiões: o sistema interno (região observável, com alta redundância de telemidas) e o sistema externo (não observável).

Um fluxo de carga é então executado para ambos os sistemas para gerar o caso base. Os dados para a rede interna são obtidos pelo programa INPNML sobre o caso base.

Os dados relativos à rede externa são considerados defasados em relação ao sistema interno, isto é, é considerada a existência de uma “janela de tempo” entre os dados do SI e do SE. A magnitude desta janela de tempo depende da velocidade com que as informações chegam da rede externa ao Centro de Operação do Sistema da rede interna. Nas simulações deste trabalho, foram consideradas janelas de tempo variáveis, de um a quinze minutos que, dependendo do horário, podem representar uma variação de carga de 1% a 3%, podendo chegar a 10% em determinadas barras.

Os dados da rede externa podem, na prática, ser adquiridos de diversas formas. Algumas barras da rede externa são diretamente monitoradas pela rede interna e seus dados chegam ao COS da rede interna como telemidas de alta confiança. Dados de outras barras podem chegar à rede interna via elos de comunicação entre as empresas seguindo possíveis acordos de cooperação mútua pré-estabelecidos. Estas telemidas de segundo tipo são normalmente defasadas no tempo em relação às telemidas adquiridas na rede interna. São, portanto, informações que possuem um grau de confiança menor que as obtidas via monitoração própria. Contudo, as barras da rede externa monitoradas pela rede interna ou obtidas via elos de comunicação são insuficientes para tornar a rede externa observável. Há a necessidade da utilização de pseudomedidas obtidas via previsão de carga baseada no estado da rede interna ou simplesmente supondo-se que determinada unidade geradora da rede externa esteja em seus valores nominais. Este tipo de informação é de nível de confiança mais baixo.

Para efeitos de simulação, as barras da rede externa foram classificadas em três tipos, de acordo com a sua carga:

- barras diretamente monitoradas pela rede interna: correspondem às barras de maior carga ou geração. Neste tipo de barras, as informações foram consideradas de alta qualidade e a precisão dos instrumentos de medição foi considerada igual aos utilizados na rede interna: 0,1% do valor da medida para voltímetros e 1% para os demais medidores.
- barras cujas medidas são supostas com “janela de tempo”: correspondem às barras cujas informações chegam à rede interna via elos de comunicação. Correspondem a barras cuja carga ou geração sejam de valor intermediário, isto é, correspondam a unidades geradoras ou barras de carga consideradas de médio porte. Neste caso, a precisão dos instrumentos foi considerada a mesma que a do sistema interno, porém, os dados foram obtidos via um fluxo de carga com dados defasados de 1% a 3% com relação ao caso base utilizado para gerar os dados para o sistema interno e para as barras diretamente monitoradas.

- barras de pequenas cargas ou geração: correspondem às barras cujas informações são obtidas via previsão de carga ou simplesmente supostas em um determinado valor pelo COS da rede interna. Correspondem a barras cuja carga ou geração seja muito pequena. Neste caso, para efeitos de simulação, as informações geradas pelo programa INPNML ao estimador foram obtidas a partir do caso defasado com uma precisão atribuída aos instrumentos de 1% do valor da medida à voltímetros e 10% aos demais medidores.

Com relação a medidas de fluxo de potência, o procedimento adotado foi semelhante. A qualidade da informação de uma telemida de fluxo é considerada a mesma que a proveniente da barra com a qual ela está conectada.

Como o estimador proposto pode ser utilizado tanto em métodos em um passo como em métodos em dois passos, ambos os métodos foram utilizados.

Nos métodos em um passo, para que os dados do sistema interno não sejam contaminados pelos dados do sistema externo, um conjunto de medidas críticas foi selecionado para representar o sistema externo. Um programa baseado na interseção de matrizes ponderados foi utilizado na seleção das medidas disponíveis de maior grau de confiança do sistema externo (ver Capítulo 2, seção 2.3.6). Este programa é denominado de WEMIOR e é descrito em [SIM97]. A ponderação das informações provenientes de todo o sistema foi assim selecionada para que o programa WEMIOR possa gerar a máxima árvore geradora observável correspondente aos sistemas interno + externo: às informações provenientes das barras monitoradas, atribuem-se os pesos 100 para as telemidas de injeções, 80 para as telemidas de tensão e 60 para as telemidas de fluxo (os mesmos pesos adotados para as barras do sistema interno); às informações provenientes das barras defasadas no tempo, atribuem-se os pesos 50 para as telemidas de injeções, 40 para as telemidas de tensão e 30 para as telemidas de fluxo e às informações provenientes das demais barras, o peso 10, independentemente do tipo de informação. As restrições de desigualdade foram escolhidas de forma a moldar a solução obtida para a rede externa à sua representação real, descrita pelos resultados obtidos pelo Fluxo de Carga.

Nos métodos em dois passos (ver Capítulo 2) inicialmente é estimado o estado da rede interna somente, utilizando-se todas as telemidas disponíveis para a rede interna e a fronteira. Dessa forma, as incertezas envolvendo a rede externa não afetam a qualidade da estimação obtida para a rede interna. Em seguida é obtido o modelo para a rede externa também pelo uso de um estimador de estados. A fronteira entre o SE e o SI é trazida para dentro do SI, abrangendo toda a primeira vizinhança entre os dois sistemas. Novamente, todo o conjunto de telemidas disponíveis é utilizado, atribuindo-se valores aos elementos diagonais da matriz de ponderação R^{-1} , diferenciados de acordo com a origem e o grau de confiança nas telemidas e pseudomedidas utilizadas. Estes pesos são

automaticamente gerados pelo programa INPNML e são inversamente proporcionais ao valor numérico atribuído à precisão dos instrumentos de medição, isto é, informações provenientes de instrumentos mais precisos recebem um peso maior.

Como etapa final de validação do estimador proposto, foi realizada a Análise de Contingências para se avaliar a reação do sistema externo a uma contingência no sistema interno. Apenas contingências simples, isto é, perda de uma única linha de transmissão, foram simuladas.

Com o objetivo de se poder melhor avaliar os erros introduzidos pelo modelo estimado do Sistema Externo, os dados correspondentes ao Sistema Interno são os mesmos utilizados no caso base do Fluxo de Potência, tanto para o Método em Um Passo, como para o Método em Dois Passos. Em outras palavras, considerou-se que as medidas do Sistema Interno são perfeitas. Procedendo-se dessa forma, evita-se que erros correspondentes às medidas do Sistema Interno mascarem os erros introduzidos pela modelagem não reduzida da rede externa.

7.3. Estimador com Restrições de Igualdade via MPRI

Apenas restrições de igualdade em barras de injeção nula foram consideradas.

Em todos os casos simulados, o valor do peso utilizado para ponderar as linhas da matriz Jacobiana correspondentes às restrições de igualdade no Método dos Pesos com Refinamento Iterativo foi de $1,0 \times 10^{+9}$. O valor utilizado de ϵ_N no critério de convergência do laço externo foi de $1,0 \times 10^{-3}$. Para ϵ , variável de calibração do critério de convergência do Método dos Pesos com Refinamento Iterativo, utilizou-se $1,0 \times 10^{-2}$.

Um resumo com todas as características dos sistemas-teste utilizados podem ser vistas na Tabela 7.1.

Os símbolos “P”, “Q” e “V” referem-se às grandezas de barra: injeção de potência ativa, injeção de potência reativa e módulo da tensão respectivamente. Os símbolos “t” e “u” correspondem à grandezas de linha: fluxo ativo e fluxo reativo respectivamente.

Tabela 7.1: Sistemas-teste utilizados

Sistema	Restrições		número de telemidas						
	barras	linhas	P	Q	V	P	Q	t	u
IEEE-30 barras	30	41	6	6	10	17	17	34	34
IEEE-118 barras I	118	179	10	10	39	82	82	177	178
IEEE-118 barras II	118	179	13	13	30	30	30	121	121
SSE-BR-340 I	340	494	102	62	198	132	177	494	494
SSE-BR-340 II	340	494	11	8	198	223	199	494	494
SEE-BR-340-III	340	484	104	74	37	98	98	258	259

7.3.1. Sistema de 30 barras do IEEE

A Tabela 7.2 apresenta os resultados obtidos para o Sistema do IEEE de 30 barras. Nesta mesma tabela são apresentados os resultados obtidos por Simões Costa e Seleme [SEL85] utilizando o Método da Matriz de Espaço Nulo, método este considerado “exato”. Neste método, as restrições de igualdade são incorporadas ao modelo e o sistema de equações assim resultante é resolvido utilizando-se um método direto (não iterativo - ver seção 3.3.1 no Capítulo 3). O plano de medição utilizado está representado na Tabela 7.1. O número de iterações necessárias para se obter a convergência para o laço interno correspondente ao Método dos Pesos com Refinamento Iterativo para cada iteração do algoritmo externo (Método de Newton) foi de apenas uma. O algoritmo externo convergiu em três iterações.

A Tabela 7.2 mostra que os resultados obtidos com o Método dos Pesos com Refinamento Iterativo são compatíveis com os obtidos por um método “exato” como o Método da Matriz de Espaço Nulo.

Tabela 7.2: Estimativas para as injeções nulas:

Sistema IEEE-30 barras

MMEN = Método da Matriz de Espaço Nulo

MPRI = Método dos Pesos com Refinamento Iterativo

tipo-barra	MMEN	MPRI
P-6	$-1,95 \times 10^{-7}$	$-1,10 \times 10^{-9}$
Q-6	$4,67 \times 10^{-7}$	$-2,648 \times 10^{-8}$
P-9	$8,37 \times 10^{-8}$	$-5,47 \times 10^{-10}$
Q-9	$3,40 \times 10^{-7}$	$-1,943 \times 10^{-8}$
P-22	$-9,01 \times 10^{-9}$	$1,389 \times 10^{-10}$
Q-22	$3,37 \times 10^{-8}$	$9,729 \times 10^{-10}$
P-25	$2,01 \times 10^{-7}$	$2,958 \times 10^{-9}$
Q-25	$3,93 \times 10^{-7}$	$2,732 \times 10^{-9}$
P-27	$2,95 \times 10^{-7}$	$6,356 \times 10^{-10}$
Q-27	$2,94 \times 10^{-8}$	$1,686 \times 10^{-9}$
P-28	$-6,58 \times 10^{-8}$	$2,712 \times 10^{-11}$
Q-28	$1,09 \times 10^{-7}$	$3,026 \times 10^{-10}$

7.3.2. Sistema de 118 barras do IEEE

Para o sistema de 118 barras do IEEE, foram utilizados os dois planos de medição descritos na Tabela 7.1. Os resultados numéricos obtidos para o Sistema IEEE-118 barras são mostrados na Tabela 7.3.

Como os resultados obtidos foram bastante semelhantes, apenas os resultados obtidos para o segundo plano de medição são apresentados na Tabela 7.3. Na mesma tabela são mostrados ainda os resultados obtidos para o mesmo plano de medição com o Método dos Pesos. Neste caso, o peso utilizado para as restrições de igualdade convertidas em telemidas convencionais foi de $1,0 \times 10^{+30}$.

Tabela 7.3: Estimativas obtidas: Sistema IEEE-118 barras, 332 telemidas
 MP = Método dos Pesos
 MPRI = Método dos Pesos com Refinamento Iterativo

barra / tipo	MPRI $\mu = 1,0 \times 10^{+9}$	MP $\mu = 1,0 \times 10^{+30}$
P-5	$3,918 \times 10^{-7}$	$-5,739 \times 10^{-7}$
P-9	$1,669 \times 10^{-7}$	$-4,201 \times 10^{-7}$
Q-9	$4,496 \times 10^{-7}$	$1,019 \times 10^{-6}$
P-23	$-1,175 \times 10^{-7}$	$-5,271 \times 10^{-8}$
Q-23	$1,472 \times 10^{-7}$	$7,417 \times 10^{-8}$
P-30	$-1,091 \times 10^{-7}$	$2,062 \times 10^{-8}$
Q-30	$3,418 \times 10^{-7}$	$2,785 \times 10^{-7}$
P-37	$-1,606 \times 10^{-7}$	$-8,976 \times 10^{-8}$
Q-37	$2,484 \times 10^{-7}$	$1,492 \times 10^{-7}$
P-38	$3,714 \times 10^{-8}$	$-2,704 \times 10^{-9}$
Q-38	$2,257 \times 10^{-8}$	$2,957 \times 10^{-9}$
Q-47	$5,973 \times 10^{-11}$	$-6,317 \times 10^{-9}$
P-63	$7,843 \times 10^{-9}$	$5,500 \times 10^{-9}$
Q-63	$-2,293 \times 10^{-9}$	$-8,956 \times 10^{-10}$
P-64	$-1,717 \times 10^{-9}$	$2,511 \times 10^{-9}$
Q-64	$1,354 \times 10^{-9}$	$7,989 \times 10^{-10}$
P-68	$-2,409 \times 10^{-8}$	$-1,307 \times 10^{-8}$
Q-68	$5,054 \times 10^{-9}$	$3,160 \times 10^{-9}$
P-71	$4,956 \times 10^{-9}$	$1,593 \times 10^{-9}$
Q-71	$3,674 \times 10^{-9}$	$1,541 \times 10^{-9}$
P-81	$-4,702 \times 10^{-9}$	$-1,825 \times 10^{-9}$
Q-81	$1,275 \times 10^{-9}$	$1,918 \times 10^{-10}$
P-87	$3,267 \times 10^{-11}$	$2,786 \times 10^{-12}$
Q-83	$2,319 \times 10^{-9}$	$8,085 \times 10^{-9}$
P-108	$3,154 \times 10^{-11}$	$-2,280 \times 10^{-11}$
Q-108	$1,053 \times 10^{-11}$	$5,009 \times 10^{-13}$

A Tabela 7.3 mostra que os resultados obtidos pelo Método dos Pesos com Refinamento Iterativo utilizando um peso de apenas $1,0 \times 10^{+9}$ são equivalentes aos obtidos pelo Método dos Pesos com uma ponderação para as restrições de

igualdade igual a $1,0 \times 10^{+30}$, praticamente no limite superior da precisão da máquina.

Como Seleme e Simões Costa não publicaram resultados referentes ao sistema de 118 barras do IEEE não foi possível uma comparação direta entre o MPRI e o Método da Matriz de Espaço Nulo para este sistema.

O número de iterações necessárias à convergência foi de três para o laço externo em ambos os casos e de apenas uma para o laço interno (MPRI) em cada uma das iterações do laço externo e para ambos os casos.

7.3.3. Sistema Sul-Sudeste de 340 barras

Nos sistemas anteriores, os *taps* dos transformadores foram considerados em suas posições nominais. Contudo, para o sistema de 340 barras, é impossível obter-se a convergência no fluxo de carga para esta situação. Dessa forma, os *taps* fora do valor nominal foram também modelados no estimador de estados sob a forma de parâmetros. Este sistema possui 494 linhas de transmissão e foram utilizados três planos de medição, como pode ser visto na Tabela 7.1. Devido ao grande número de barras com injeções nulas neste sistema, apenas os resultados mais significativos são apresentados. De forma geral, o valor obtido pelo estimador para uma injeção nula ficou na média de $1,0 \times 10^{-10}$, variando entre 10^{-3} e 10^{-15} . Os resultados menos precisos foram os obtidos para as barras 110, 125, 126 e 284, onde a injeção de potência ativa ficou na casa de 1.3×10^{-3} . Nas barras 9, 119, 132, 138, 146, 185 e 287 o resultado ficou na casa dos 10^{-4} . O resultado menos preciso para a injeção reativa foi de 2.4×10^{-3} na barra 185. Nas demais barras, variou entre 10^{-5} e 10^{-14} . No 2º. plano de medição, onde o número de restrições de igualdade é bastante reduzido, este tipo de situação não ocorreu, ficando todos os valores de injeções nulas na casa dos 10^{-10} . No terceiro caso, os resultados obtidos foram equivalentes ao 1º. caso.

Tabela 7.4: Número de Iterações para o Sistema de 340 barras

Caso	Número de Iterações (Método de Newton)	
	MPEI	MP
SEE-BR-340-I	5	5
SEE-BR-340-II	5	5
SEE-BR-340-III	5	15

Os resultados obtidos para as injeções nulas quando o Método dos Pesos foi utilizado ficaram na casa dos 10^{-7} . Nos três casos, foi utilizado um peso de $1,0 \times 10^{+30}$. Contudo, para o caso SEE-BR-340-III houve dificuldades de convergência causada, certamente, por problemas numéricos, devido à preponderância de

telemidas de injeção sobre telemidas de fluxo, como pode ser visto na Tabela 7.1. Como consequência, o número de iterações necessárias à convergência foi de 15, causando um aumento enorme no tempo total de c. p. u. (ver Tabela 7.5). A tabela 7.4 apresenta o número de iterações obtido com o sistema de 340 barras.

Finalmente, a Tabela 7.5 apresenta os tempos computacionais obtidos em um microcomputador Pentium 200MHz com 32 Mbytes de memória RAM, para os três planos de medição correspondentes aos sistemas de 118 barras e 340 barras.

Tabela 7.5: Tempo total de cpu

Sistema	Tempo total de CPU (s)	
	MPRI	MP
IEEE-118-I	0,66	0,62
IEEE-118-II	0,39	0,38
SSE-BR-340-I	6,40	5,10
SSE-BR-340-II	5,16	4,98
SEE-BR-340-III	1,80	9,27

7.4. Validação dos Estimadores com Restrições de Igualdade e Desigualdade

Nesta etapa, foram simulados diversos tipos de restrições de desigualdade:

- restrições de injeções de potência ativa em barras de carga ou geração: são restrições do tipo

$$P_{i\text{MIN}} \leq P_i \leq P_{i\text{MAX}}$$

onde os limites superiores e inferiores foram escolhidos a partir da solução do caso base obtida via um Fluxo de Carga. Há duas restrições de potência ativa em cada barra onde foram impostos limites na geração ou na excursão da carga.

- restrições de injeções de potência reativa em barras de carga ou geração: são restrições do tipo

$$Q_{i\text{MIN}} \leq Q_i \leq Q_{i\text{MAX}}$$

onde, da mesma forma que para as injeções ativas, os limites inferiores e superiores foram escolhidos a partir da solução do caso base. Novamente, para cada barra com limitações de potência reativa, há duas restrições de desigualdade.

- restrições em módulo de tensão:

$$V_{i\text{MIN}} \leq V_i \leq V_{i\text{MAX}}$$

- restrições de fluxo ativo em linhas de transmissão e transformadores:

$$t_{ij\text{MIN}} \leq t_{ij} \leq t_{ij\text{MAX}}$$

$$t_{ji\text{MIN}} \leq t_{ji} \leq t_{ji\text{MAX}}$$

Neste caso, para cada linha com limitações de fluxo ativo, correspondem quatro restrições de desigualdade.

Diversos planos de medição foram utilizados. As restrições de desigualdade foram escolhidas de forma a se evitar incompatibilidades entre elas ou impossibilidade física de cumpri-las.

Foram utilizados os sistemas do IEEE de 30 barras (G30b-1 e G30b-2), 118 barras (G118-1 e G118-2) e o sistema de 340 barras baseado no Sistema Sul-Sudeste Brasileiro (G340-1 a G340-10).

Um resumo com todas as características dos sistemas-teste utilizados nesta etapa do trabalho pode ser visto na Tabela 7.6.

Tabela 7.6: Características dos Sistemas-teste Utilizados; Estimadores com Restrições de Igualdade e Desigualdade.

Sistema-teste	número de telemidas						No. de barras c/ restrições de igualdade em		no. de barras/linhas c/ restrições de desigualdade em			
	P	Q	V	t	u	total	P	Q	P	Q	V	t
G30b-1	10	10	9	25	21	75	6	6	4	2	2	-
G30b-2	14	14	13	29	28	98	6	6	4	2	2	-
G118-1*	82	82	39	179	178	558	10	10	7	7	10	-
G118-2	63	63	55	113	113	407	12	12	10	11	3	-
G340-1	98	98	37	259	258	750	104	74	24	23	10	-
G340-2*	98	98	37	259	258	750	104	74	24	23	10	-
G340-3	98	98	37	259	258	750	104	74	-	-	10	-
G340-4	98	98	37	259	258	750	104	74	12	-	10	-
G340-5	233	233	159	580	580	1785	9	10	24	23	10	-
G340-6*	137	164	159	580	580	1620	104	74	24	23	10	-
G340-7	137	164	159	580	580	1620	-	-	24	23	10	-
G340-8	137	164	159	580	580	1620	104	71	24	23	10	9
G340-9	137	164	159	580	580	1620	104	71	24	23	10	17
G340-10	98	98	37	259	259	750	104	74	24	23	10	17

Com o objetivo de testar a capacidade do estimador de fazer cumprir as restrições de desigualdade impostas, erros grosseiros foram introduzidos em determinados pontos do sistema, procurando-se corrigi-los pela imposição das restrições de desigualdades (G118-1, G340-2 e G340-6, marcados com um (*) na Tabela 7.6). Além disso, restrições de igualdade foram simuladas através de restrições de desigualdade, simplesmente estreitando-se a faixa permitida de variação de uma determinada variável de tal forma que o limite superior torne-se igual ao limite inferior.

Este conjunto de sistemas-teste foram utilizados tanto com o estimador EENLRID (que utiliza a Transformação LSI/LDP) como com o estimador EENLVF (que utiliza variáveis de folga).

A capacidade do estimador de obter a solução desejada a partir de diferentes pontos de partida também foi testada. Dois tipos de partidas foram utilizadas:

- *Partida plana:* corresponde a

$$V^0 = 1.00 \text{ p.u.}$$

$$\theta^0 = 0.^\circ$$

onde V e θ representa o estado a ser estimado nas barras do sistema, isto é, módulo e ângulo da tensão respectivamente.

- *Partida utilizando-se valores específicos para módulo e ângulo da tensão nas barras do sistema:* neste caso, o ponto inicial utilizado foi o obtido a partir da solução de um fluxo de carga onde uma “janela de tempo” foi simulada (ver seção 7.2). Procurou-se, assim, simular uma partida obtida da solução imediatamente anterior da estimação de estados.

Não houve preocupação com o fato de os pontos de partida não serem interiores à região viável quando o estimador EENLRID foi utilizado, visto que o Método da Transformação LSI/LDP não o exige. O mesmo ocorre com o estimador EENLVF pois este também utiliza o algoritmo NNLS no processamento das restrições de não-negatividade.

O número de iterações necessárias a cada estimador para obter-se a convergência em cada um dos casos e sistemas-teste pode ser visto na Tabela 7.7.

As condições de operação no caso base para cada sistema-teste podem ser vistas no Apêndice B.

Em todos os casos simulados, todas as restrições de desigualdades foram satisfeitas.

Tabela 7.7: Número de iterações necessárias à convergência

PP = Partida plana

SFC = Ponto inicial obtido pela solução do Fluxo de Potência considerando a existência de uma “janela de tempo”

sistema	Número de iterações			
	EENLRID		EENLVF	
	PP	SFC	PP	SFC
G30b-1	3	-	3	-
G30b-2	3	-	3	-
G118-1*	5	-	5	-
G118-2	3	-	3	-
G340-1	13	6	13	6
G340-2*	13	5	13	5
G340-3	5	3	5	3
G340-4	8	4	8	5
G340-5	20	8	20	9
G340-6*	20	8	20	8
G340-7	17	3	17	3
G340-8	20	8	20	8
G340-9	20	8	20	8
G340-10	13	5	13	5

A Tabela 7.8 apresenta os tempos totais de c.p.u. obtidos em um microcomputador Pentium 200 Mhz, 32 Mbytes RAM para cada um dos sistemas e casos simulados.

Os tempos computacionais obtidos com o estimador EENLVF (com variáveis de folga) foram bem superiores aos obtidos pelo estimador EENLRID (transformação LSI/LDP). Isso não significa que o estimador EENLVF não possa ser utilizado na operação em tempo real de um sistema elétrico. O principal motivo de se ter obtido tempos muito elevados para este estimador, é a forma como este foi implementado. Conforme mencionado nos Capítulos 5 e 6, o sucesso do algoritmo NNLS depende da forma como o problema de mínimos quadrados irrestrito do passo 6 é resolvido. Em cada iteração do algoritmo NNLS, é resolvido um problema de mínimos quadrados irrestrito cuja única diferença para o problema resolvido na iteração anterior é que uma coluna da matriz dos coeficientes foi retirada ou uma outra incorporada. Assim, não é necessário refatorar novamente a matriz dos coeficientes mas apenas proceder a alterações

que reflitam estas alterações [LAW95]. Isto foi feito no algoritmo NNLS utilizado no estimador EENLRID mas não no algoritmo NNLS modificado utilizado no estimador EENLVF. O objetivo inicial do desenvolvimento do estimador EENLVF era apenas poder se comparar os resultados numéricos obtidos pelo estimador EENLRID com outro método, possibilitando a verificação da qualidade dos resultados obtidos. Neste aspecto a implementação do estimador EENLVF foi bem sucedida pois os resultados numéricos obtidos com ambos os estimadores foram praticamente os mesmos (com pequenas diferenças a partir do quarto algarismo significativo).

Tabela 7.8: Tempo total de c.p.u.

sistema	EENLRID		EENLVF	
	PP	SFC	PP	SFC
G30b-1	0,22	-	0,22	-
G30b-2	0,22	-	0,22	-
G118-1*	0,99	-	4,06	-
G118-2	1,21	-	12,19	-
G340-1	11,75	7,14	-	119,3
G340-2*	11,64	6,15	-	101,0
G340-3	2,47	2,25	-	4,77
G340-4	2,75	2,19	-	10,48
G340-5	27,3	12,25	-	290,2
G340-6	20,89	10,93	-	246,0
G340-7	14,11	4,84	-	60,69
G340-8	33,62	14,2	-	-
G340-9	39,43	14,91	-	-
G340-10	19,88	9,71	-	-

7.5. A Representação Não Reduzida do Sistema Externo

Os procedimentos de simulação adotados já foram descritos na seção 7.2.2. Apenas o estimador EENLRID foi utilizado.

Nesta fase dos testes, três sistemas-teste foram utilizados: o IEEE 30 barras, o IEEE 118 barras e o sistema SSE 340 barras. Os casos bases a partir da qual os dados para os sistemas internos foram gerados podem ser vistos no Apêndice B.

O mesmo conjunto de restrições de igualdade e desigualdade foram utilizados em ambos os métodos para cada um dos sistemas-teste utilizados.

7.5.1. Resultados da Estimação de Estados

7.5.1.1. Sistema de 30 barras do IEEE

Inicialmente, o IEEE-30 barras é subdividido em duas regiões, correspondentes ao Sistema Interno e ao Sistema Externo. As barras 1 a 8 constituem o Sistema Interno (SI) e as barras 9 a 30 o Sistema Externo (SE), como pode ser visto na Figura 7.1. A fronteira entre o SI e SE é constituída pelas barras 4, 6 e 8 (SI) e pelas barras 9, 10, 12 e 28 (SE). No Método em Dois Passos, com a incorporação da fronteira, o SE expandido ficou com 25 barras e 33 linhas. Um quadro resumo com todas as características dos sistemas e sub-sistemas utilizados podem ser vistos na Tabela 7.9. Convém ressaltar que o conjunto de medidas críticas utilizado no Método em Um Passo refere-se apenas ao Sistema Externo. Para o Sistema Interno foi utilizado um conjunto de medidas redundantes. Isto vale para todos os sistemas-teste mostrados neste trabalho.

Tabela 7.9: Sistema IEEE-30 barras

número de telemidas						No. de barras c/ restrições de igualdade em		no. de barras/linhas c/ restrições de desigualdade em		
P	Q	V	t	u	total	P	Q	P	Q	V
Método em Um Passo (medidas críticas para o SE) 30 barras - 41 linhas										
10	10	9	25	21	75	6	6	4	2	2
Método em Dois Passos (Medidas Redundantes)										
Sistema Interno – 8 barras, 11 linhas										
4	4	4	10	10	32	1	1	-	-	-
Sistema Externo – 25 barras, 33 linhas										
14	14	10	22	21	81	5	5	4	2	2

Para uma comparação rigorosa, os resultados dos testes com os dois métodos foram comparados com os resultados do fluxo de potência. Para maiores detalhes, a Tabela C.1.1 do Apêndice C, apresenta as injeções de potência ativa e reativa obtidas no fluxo de potência e na estimação de estados com restrições pelos dois métodos e os desvios em p. u. nas injeções nas barras do Sistema Externo com relação às injeções do fluxo de potência. A Tabela C.1.2 no mesmo Apêndice, apresenta os mesmos resultados para o caso irrestrito. Inicialmente, o plano de medição escolhido para o SE no Método em Dois Passos continha 79 medidas. Contudo, desvios muito grandes foram observados nas barras 10, 11 e 24. A simples introdução de uma telemida de injeção ativa e uma de injeção

reativa na barra 24 fez reduzir drasticamente estes desvios. Contudo, desvios de maior dimensão surgiram nas barras 16 e 17 que não puderam ser eliminados com a simples introdução de telemidas.

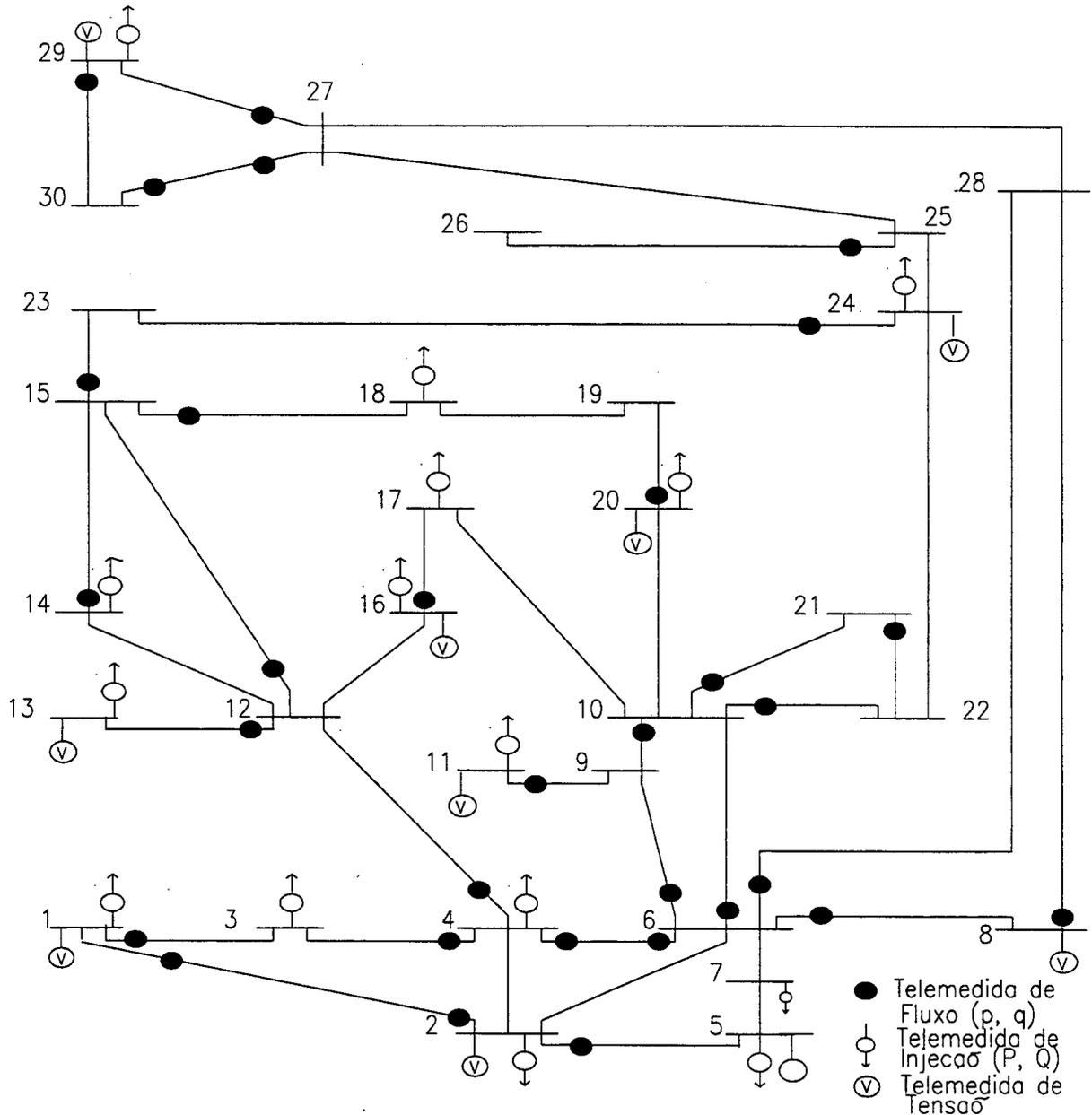


Figura 7.1: O Sistema de 30 barras do IEEE, incluindo o plano de medição utilizado no Método em Um Passo

Os desvios de potência nas barras de fronteira que podem ser vistos na Tabela C.1 do Apêndice C são bastante reduzidos. Assim, através de telemidas

na fronteira consegue-se minimizar os desvios na fronteira. Através do uso de restrições de desigualdade ficam bastante reduzidos os desvios nas demais barras do Sistema Externo. Evitam-se desta maneira, os ajustes nos pesos da matriz \mathbf{R}^{-1} para afastar os erros de modelagem de regiões próximas da fronteira, conforme proposto em [GEI83]. Estes ajustes podem ser vistos como indesejáveis devido a problemas numéricos que estes podem originar devido à disparidade nos pesos utilizados na ponderação da matriz Jacobiana. Os desvios de potência no sistema externo são de fato reduzidos e não estão confinados a uma determinada região.

Uma indicação da presença de erros são as diferenças existentes nas barras de fronteira. Já que ambos os métodos têm a tendência de fechar o balanço de potência justamente na fronteira, uma medida do erro pode ser obtida conhecendo-se o somatório de todos os desvios de potência obtidos em todas as barras do Sistema Externo [MON85] com relação aos valores reais obtidos no fluxo de potência. A Tabela 7.10 apresenta estes desvios para os dois Métodos utilizados. A Tabela apresenta também, os desvios médios em p.u., isto é, o desvio total dividido pelo número de barras do Sistema Externo ($nbse$) e os desvios máximos obtidos. O número em parênteses após o valor do desvio máximo indica a barra onde este foi obtido.

Como pode ser visto pela tabela 7.10, a redução no somatório dos valores absolutos dos resíduos foi significativa com o uso de restrições, tanto para o Método em Um Passo, como para o Método em Dois Passos. Neste sistema, obtiveram-se melhores resultados com o Método em Um Passo em ambas as situações. Observa-se, também, que as maiores reduções no somatório dos módulos dos desvios são obtidas para as potências reativas.

Tabela 7.10: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Externo (em p.u.) para o Sistema IEEE-30 barras

	Método em Um Passo		Método em Dois Passos	
	Prob. c/ restr.	Prob. s/ restr.	Prob. c/ restr.	Prob. s/ restr.
$\sum \Delta P_i $	0,043	0,26531	0,206	0,711471
$\sum \Delta P_i / nbse$	0,001954	0,0121	0,009364	0,03234
$ \Delta P _{max}$	0,008 (13)	0,0783 (19)	0,041 (14)	0,1002 (20)
$\sum \Delta Q_i $	0,302	1,13934	1,380	1,553667
$\sum \Delta Q_i / nbse$	0,013727	0,05179	0,062727	0,07068
$ \Delta Q _{max}$	0,081 (29)	0,4674 (20)	0,313 (16)	0,2991 (14)

Para o Método em Um Passo, a convergência do estimador com restrições foi obtida em três iterações. O mesmo número foi obtido tanto para o SI quanto

para o SE no Método em Dois Passos. Resultados idênticos foram obtidos pelo estimador irrestrito.

Os tempos computacionais obtidos podem ser vistos na Tabela 7.11.

Tabela 7.11: Tempo Total de c. p. u. em segundos
Sistema IEEE-30 barras

Método em Um Passo (SI+SE)	0,22
Método em Dois Passos	
Sistema Interno	0,04
Sistema Externo	0,16

7.5.1.2. Sistema de 118 barras do IEEE

O Sistema Interno é formado pelas barras 74 a 112 e pela barra 118. As restantes formam o Sistema Externo, como pode ser visto na Figura 2, retirada de [SQP92]. A fronteira entre o SI e o SE é constituída pelas barras 68, 69 e 70 no SE e pelas barras 74, 75, 77 e 81 no SI. Com a incorporação da fronteira entre o SI e o SE, o SE ficou com 82 barras e 123 linhas. A Tabela 7.12 apresenta um quadro resumindo as características dos sistemas Interno e Externo nos dois métodos.

Tabela 7.12: Sistema IEEE-118 barras

Número de telemidas						no. de barras c/ restrições de igualdade em		no. de barras/linhas c/ restrições de desigualdade em		
P	Q	V	t	u	total	P	Q	P	Q	V
Método em Um Passo (medidas críticas para o SE)										
54	54	32	132	132	404	12	13	12	11	3
Método em Dois Passos (medidas redundantes)										
Sistema Interno – 40 barras, 58 linhas										
29	30	24	47	47	177	1	2	-	-	-
Sistema Externo – 82 barras, 123 linhas										
52	52	35	81	81	301	10	9	10	11	3

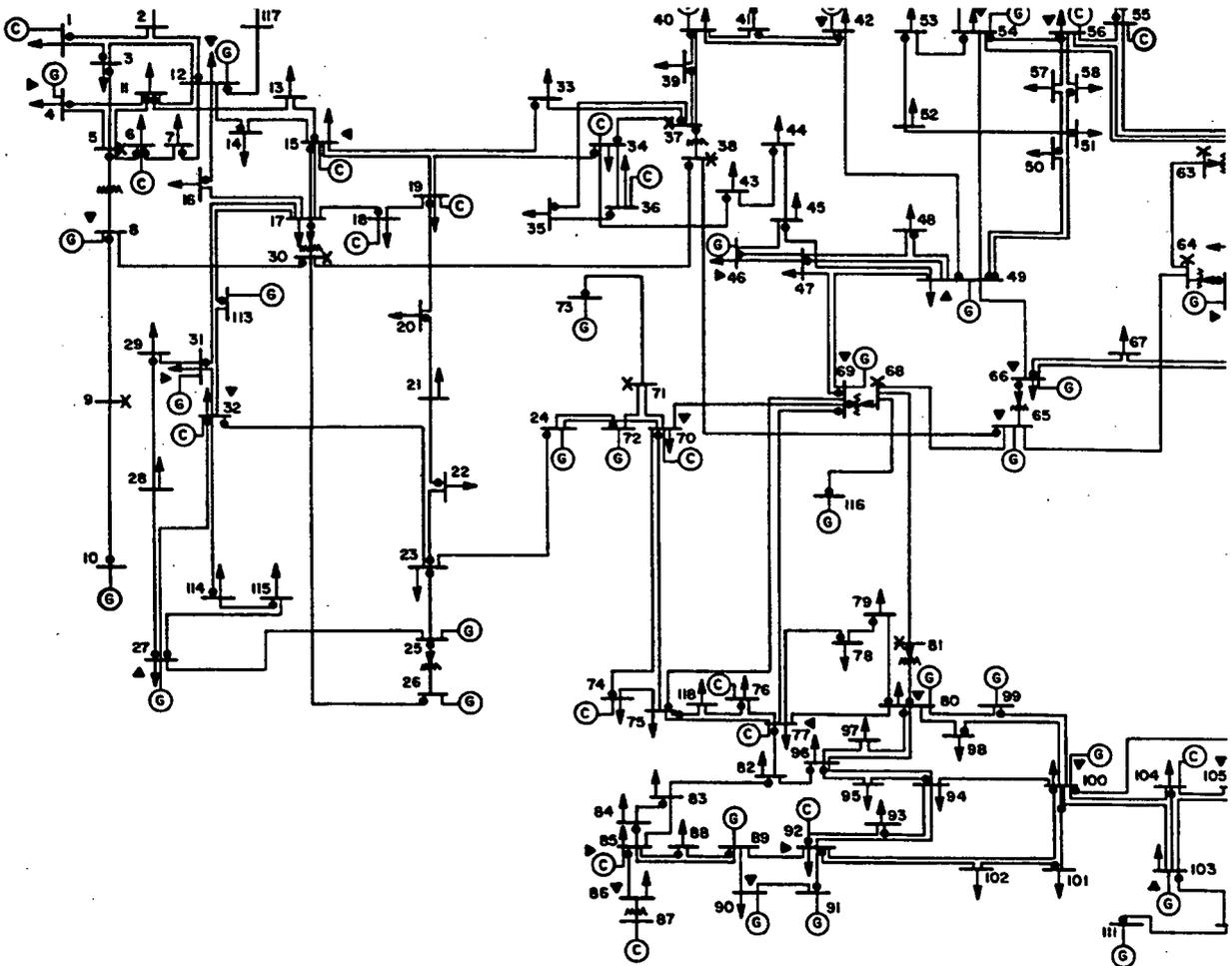


Figura 7.2: Sistema IEEE-118 barras

- telemida de fluxo de potência ativa e reativo
- ▼ telemida de injeção ativa e reativa

Desta vez, desvios extremamente elevados foram observados nas barras 113, 114, 115 e 116 quando o Método em Um Passo foi utilizado. Para corrigi-los foi necessário a introdução de telemidas adicionais de injeção de potência ativa e reativa na barra 114.

Similarmente ao sistema-teste anterior, os resultados obtidos pelos dois métodos de representação explícita da rede externa foram comparados com os resultados obtidos pelo fluxo de carga. Para maiores detalhes, a Tabela C.2.1 no Apêndice C, apresenta os desvios em p.u. das injeções de potência ativa e reativa entre os resultados obtidos pelo estimador de estados com restrições nos dois métodos e os resultados obtidos pelo fluxo de carga para as barras do Sistema Externo e de fronteira. Já a Tabela C.2.2 no mesmo Apêndice, apresenta os resultados obtidos com o estimador sem restrições.

Neste caso, desvios maiores podem ser observados nas barras correspondentes ao Sistema Externo. Isto deve-se ao fato dos valores em p.u. correspondentes às injeções serem superiores aos existentes no sistema de 30 barras o que faz aumentar a influência da “janela de tempo” sobre os resultados obtidos.

A Tabela 7.13 apresenta o somatório dos desvios nas barras do SE, o desvio médio de potência para ambos os métodos e os máximos desvios de injeções de potência ativa e reativa com relação ao caso base. O número entre parênteses após o valor do máximo desvio corresponde à barra onde este ocorreu.

Tabela 7.13: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Externo (em p.u.) para o Sistema IEEE-118 barras

	Método em Um Passo		Método em Dois Passos	
	Prob. C/ restr.	Prob. s/ restr.	Prob. C/ restr.	Prob. s/ restr.
$\sum \Delta P_i $	2,814	5,27966	2,08706	3,48087
$\sum \Delta P_i / nbe$	0,03608	0,067688	0,026757	0,04463
$ \Delta P _{max}$	0,307 (29)	0,5931 (35)	0,2492 (66)	0,4330 (68)
$\sum \Delta Q_i $	2,845	22,6487	5,4954	7,93618
$\sum \Delta Q_i / nbe$	0,03647	0,290368	0,07045	0,10174
$ \Delta Q _{max}$	0,290 (57)	8,8922 (36)	1,326 (115)	0,809 (115)

Os desvios em relação ao Fluxo de Carga correspondentes às barras do Sistema Interno são bastante reduzidos. Isto era esperado visto que os dados utilizados na estimação de estados do SI foram considerados de alta confiança. Como no Método em Um Passo foram utilizadas apenas medidas críticas na modelagem da rede externa, não houve contaminação dos resultados obtidos para a rede interna. No caso do Método em Dois Passos, a estimação de estados da rede interna foi realizada em uma etapa anterior e independente dos dados da rede externa.

Como pode ser observado pela Tabela 7.13, os resultados obtidos pelo Método em Dois Passos quando não são utilizadas restrições, são bem melhores que os obtidos pelo Método em Um Passo. Isso deve-se ao fato da presença de problemas numéricos encontrados quando o Método em Um Passo foi utilizado. Estes problemas numéricos são evidenciados pela obtenção de desvios absurdos na potência reativa injetada nas barras 35 (-6,498 p.u.) e 36 (8,892 p.u.) e pela dificuldade em se obter a convergência (10 iterações no caso com restrições e 7 no caso irrestrito). Pequenas alterações introduzidas na ponderação das telemidas associadas às barra 35 e 36 fizeram o somatório dos desvios de potência ativa cair para 4,226 p.u. e o somatório dos desvios de potência reativa para 9,617. O desvio de potência reativa na barra 35 caiu para -2,395 e o da barra 36 para 3,110. Contudo, os dados constantes nas Tabelas 7.13 e C.2.1 referem-se à primeira alternativa.

Porém, quando o conjunto de restrições foi imposto, os resultados obtidos pelo Método em Um Passo referentes à parte reativa, foram melhores que os obtidos pelo Método em Dois Passos.

O Método em Um Passo convergiu em 10 iterações. No Método em Dois Passos, o SI convergiu em 3 iterações e o SE em 5 iterações. No caso irrestrito, o Método em Um Passo convergiu em 7 iterações. No Método em Dois Passos, o estimador irrestrito convergiu em 3 iterações para o SI e em 4 para o SE.

Os tempos totais de c.p.u. obtidos para os dois métodos podem ser vistos na Tabela 7.14.

Tabela 7.14: Tempo Total de c. p. u. em segundos
Sistema IEEE-118 barras
Problema com restrições

Método em Um Passo (SI+SE)	1,87
Método em Dois Passos	
Sistema Interno	0,20
Sistema Externo	0,77

7.5.1.3. Sistema Sul-Sudeste brasileiro de 340 barras

Novamente, ambos os métodos foram utilizados na determinação do modelo não reduzido da rede externa.

O sistema SSE-340 barras foi assim subdividido:

- *Sistema Interno*: barra 1 à barra 91 - 91 barras, 97 linhas.
- *Sistema Externo*: barra 92 à barra 340 - 239 barras, 395 linhas.
- *Fronteira*:
 - SI: 36 barras - 1, 4, 7, 12, 14, 17, 19, 21, 28, 38, 47, 55, 58, 59, 60, 61, 64, 65, 66, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 89, 90, 91.
 - SE: 29 barras - 92, 93, 94, 116, 118, 119, 121, 122, 123, 126, 130, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 140, 141, 144, 145, 148, 150, 151, 153, 154, 199, 315, 321.
- *Linhas de intercâmbio*: 48 linhas - 1, 9, 15, 28, 32, 33, 38, 43, 46, 53, 63, 72, 77, 79, 81, 82, 83, 84, 85, 88, 89, 90, 93, 97, 98, 99, 103, 104, 106, 107, 111, 115, 118, 120, 121, 124, 125, 128, 131, 132, 133, 134, 136, 141, 142, 143, 144 e 145.

Os planos de medição utilizados e o número de restrições de igualdade e desigualdade podem ser visto na Tabela 7.15.

O segundo passo do Método em Dois Passos corresponde à estimação do estado da rede externa ampliada pela incorporação à esta das barras pertencentes à primeira ou à segunda vizinhança da fronteira entre o SI e o SE. Para este sistema-teste, optou-se pela ampliação do SE até a segunda vizinhança das barras de fronteira entre o Sistema Externo e o Sistema Interno. Isto fez com que o Sistema Externo ampliado englobasse quase que a totalidade do Sistema Interno. Assim sendo, o Sistema Externo ampliado tornou-se o sistema total de 340 barras. A diferença entre este novo sistema e o sistema utilizado no Método em Um Passo é que os dados referentes às barras do Sistema Interno foram obtidos a partir da estimação de estados do Sistema Interno calculada no Primeiro Passo do método e ponderadas com um peso superior aos utilizados para as telemidas e pseudomedidas utilizadas para a rede externa.

Tabela 7.15: Sistema SSE-340 barras

número de telemidas						no. de barras c/ restrições de igualdade em		no. de barras/linhas c/ restrições de desigualdade em			
P	Q	V	t	u	total	P	Q	P	Q	V	t
Método em Um Passo (medidas críticas para o SE)											
98	98	55	279	279	809	104	74	16	28	42	17
Método em Dois Passos (medidas redundantes)											
Sistema Interno: 91 barras, 97 linhas											
43	43	17	96	96	295	6	5	-	-	-	-
Sistema Externo Ampliado: 340 barras, 498 linhas											
140	140	159	494	494	1599	102	72	16	28	43	17

Para este sistema foram utilizadas restrições de desigualdade de injeções de potência ativa e reativa, módulos de tensão e fluxos de potência ativa em linhas de transmissão. Diferentemente dos casos anteriores, as restrições de injeções de potência ativa e reativa e de módulos de tensão foram impostas apenas em barras de geração importantes do Sistema Externo. Os limites utilizados para injeções de potência ativa e reativa correspondem aos limites de potência máxima e mínima que pode ser gerada pelas unidades de cada barra. Para os módulos de tensão, admitiu-se uma variação entre 1,052 e 0,98 p.u. em todas as barras e para as restrições de fluxo ativo foi adotado o módulo do limite máximo de fluxo tolerado pela linha em questão. Ao todo, o número total de restrições de desigualdades impostas ao sistema foi de 240.

Devido à grande dimensão do sistema de 340 barras, os desvios obtidos nas barras do Sistema Externo com relação ao resultado do fluxo de carga não são apresentados individualmente. Contudo, o somatório dos desvios e o desvio médio nas barras do sistema externo podem ser vistos na Tabela 7.16.

No Método em Um Passo, utilizando-se a partida plana, não foi possível obter-se a convergência utilizando-se o estimador com restrições. Para o caso irrestrito, esta só foi obtida após 8 iterações o que denota a existência de problemas numéricos. O número elevado de restrições de desigualdade (240) também dificulta a obtenção da convergência. No entanto, para uma partida com um ponto obtido a partir do resultado do fluxo de carga obtido utilizando-se dados supostamente “defasados no tempo”, procurando-se simular os resultados obtidos em uma estimativa de estados imediatamente anterior à atual, (janela de tempo), o método convergiu em apenas 3 iterações. O tempo total de c.p.u. obtido foi de 3,35s.

No Método em Dois Passos, a estimativa dos estados do Sistema Interno foi obtida em 3 iterações utilizando-se a partida plana. O tempo total de c.p.u. obtido foi de 1,42 s. Já no segundo passo, a convergência foi obtida após 3 iterações utilizando-se como partida um ponto obtido a partir do fluxo de carga obtido utilizando-se dados supostamente “defasados no tempo”, conforme descrito no parágrafo anterior. O tempo total de c.p.u. obtido foi de 5,49 s.

Tabela 7.16: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Externo (em p.u.) para o Sistema SSE-340 barras

	Método em Um Passo		Método em Dois Passos	
	Prob. C/ restr.	Prob. s/ restr.	Prob. C/ restr.	Prob. S/ restr.
$\sum \Delta P_i $	14,33091	38,56484	5,89435	11,52892
$\sum \Delta P_i / nbe$	0,05755	0,1548789	0,02466	0,04824
$ \Delta P _{max}$	-1,9522 (243)	-1,7090 (240)	-1,2423 (240)	-1,1365 (240)
$\sum \Delta Q_i $	3,59194	12,11955	1,42791	2,93948
$\sum \Delta Q_i / nbe$	0,014425	0,0486729	0,00597	0,0123
$ \Delta Q _{max}$	-0,2146 (246)	-0,7902 (299)	0,0704 (216)	0,2318 (224)

Desta vez, o Método em Dois Passos apresentou resultados bem superiores aos obtidos com o Método em Um Passo. Novamente, problemas numéricos estiveram presentes quando um plano contendo áreas de muito baixa redundância (medidas críticas) foi utilizado. Esta talvez seja a maior desvantagem do Método em Um Passo com relação ao Método em Dois Passos. O primeiro mostrou-se extremamente sensível a problemas de natureza numérica causada pela baixa redundância local (no caso, a área abrangida pela rede externa) de telemedidas.

7.5.2. Resultados da Análise de Contingências

Os testes da Análise de Contingências simples constituem na simulação do desligamento de uma linha de transmissão do Sistema Interno e a execução de um fluxo de carga a partir dos resultados da estimação de estados obtidos para o Sistema Externo. Em seguida, estes resultados foram comparados com os valores do fluxo de carga do caso base que também considera a linha de transmissão retirada.

Para fins de comparação entre os resultados e com o objetivo de se poder verificar com exatidão a qualidade do modelo obtido da rede externa, os dados utilizados para o sistema interno correspondem aos dados reais, obtidos no caso base. Em outras palavras, considerou-se que a estimação do Sistema Interno foi obtida utilizando-se medidas perfeitas. Os dados utilizados para o Sistema Externo foram os obtidos pela Estimação de Estados com restrições. Procedendo-se assim, tem-se que os desvios resultantes referem-se apenas a erros na modelagem da rede externa já que os erros obtidos pela estimação de estados na rede interna foram eliminados pela consideração de medidas perfeitas.

Para cada sistema-teste, foram analisados três casos considerando apenas contingências simples.

7.5.2.1. Sistema de 30 barras do IEEE

A primeira contingência considerada foi a retirada de operação da linha de transmissão entre as barras 2 e 4 do Sistema Interno.

Como a barra de folga (barra 1), responsável pelo balanço de potência ativa, pertence ao Sistema Interno, todo o desvio de injeção de potência ativa com relação às injeções ativas obtidas no Fluxo de Carga (caso base) concentraram-se nesta barra. O desvio obtido foi de 0,0005 p.u. Como não existe uma barra de folga para potência reativa, os desvios com relação ao caso base ficaram distribuídos em várias barras do sistema interno. No entanto, a maioria das barras do Sistema Interno apresentaram desvios nulos também para a parte reativa. A Tabela 7.17 apresenta estes desvios. A Tabela D.1 do Apêndice D apresenta os resultados obtidos para todas as barras do Sistema Interno.

Tabela 7.17: Sistema IEEE-30 barras
 Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno
 Contingência em estudo: perda da linha entre as barras 2 e 4

barra	fluxo de potência		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
	P	Q	P	Q	ΔP	ΔQ	P	Q	ΔP	ΔQ
1	2,383	-,689	2,386	-,6838	-,0028	-,0052	2,384	-,6710	-,0005	-,0180
2	-,2170	,8687	-,2170	,8767	,0000	-,0080	-,2170	,8925	,0000	-,0239
5	-,9420	,1358	-,9420	,1426	,0000	-,0067	-,9420	,1564	,0000	-,0205
8	-,1000	-,0588	-,1000	-,0230	,0000	-,0357	-,1000	,0440	,0000	-,1028

A Tabela 7.18 apresenta o somatório dos desvios e os desvios médios nas injeções de potência ativa e reativa para as barras do Sistema Interno.

Tabela 7.18: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema de 30 barras do IEEE
 Contingência considerada: perda da linha entre a barra 2 e 4
 $nbi = \text{no. de barras do Sistema Interno}$

	Método em Um Passo	Método em Dois Passos
$\sum \Delta P_i $	$2,8 \times 10^{-3}$	$5,0 \times 10^{-4}$
$\sum \Delta P_i / nbi$	0,00035	0,0000625
$\sum \Delta Q_i $	0,0556	0,1652
$\sum \Delta Q_i / nbi$	0,00695	0,02065

A segunda contingência considerada foi a perda da linha entre as barras 1 e 2. A Tabela 7.19 apresenta os desvios de potência ativa e reativa com relação ao caso base. As barras onde os desvios são nulos não constam da Tabela.

Como no caso anterior, todo o desvio em potência reativa ficou concentrado na barra 1 (barra de folga). Já os desvios em potência reativa ficaram distribuídos entre diversas barras do Sistema Interno.

Tabela 7.19: Sistema IEEE-30 barras
Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno
Contingência em estudo: perda da linha entre as barras 1 e 2

barra	fluxo de potência		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
	P	Q	P	Q	ΔP	ΔQ	P	Q	ΔP	ΔQ
1	2,7794	,3457	2,7853	,3539	-,0059	-,0082	2,7880	,3672	-,0086	-,0215
2	-,2170	,9780	-,2170	,9938	,0000	-,0157	-,2170	1,0261	,0000	-,0481
5	-,9420	,2157	-,9420	,2226	,0000	-,0070	-,9420	,2364	,0000	-,0208
8	-,1000	,1676	-,1000	,2035	,0000	-,0359	-,1000	,2693	,0000	-,1018

A Tabela 7.20 apresenta o somatório dos módulos dos desvios de potência ativa e reativa e os desvios médios por barra do Sistema Interno.

Tabela 7.20: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema de 30 barras do IEEE
Contingência considerada: perda da linha entre as barras 1 e 2

	Método em Um Passo	Método em Dois Passos
$\sum \Delta P_i $	$5,900 \times 10^{-3}$	$8,60 \times 10^{-3}$
$\sum \Delta Q_i / nbi$	0,0006965	0,001075
$\sum \Delta Q_i $	$6,679 \times 10^{-2}$	0,1921
$\sum \Delta Q_i / nbi$	0,00834875	0,0240125

Finalmente, foi simulada a perda da linha entre as barras 6 e 7 do Sistema Interno. A Tabela 7.21 apresenta os desvios obtidos para as barras do Sistema Interno onde estes não foram nulos. A Tabela 7.22 por sua vez, apresenta o módulo do somatório dos desvios de potência ativa e reativa e os desvios médios por barra do Sistema Interno.

Tabela 7.21: Sistema IEEE-30 barras
Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno
Contingência em estudo: perda da linha entre as barras 6 e 7

barra	fluxo de potência		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
	P	Q	P	Q	ΔP	ΔQ	P	Q	ΔP	ΔQ
1	2,4067	-,7700	2,4092	-,7656	-,0025	-,0045	2,4065	-,7543	,0002	-,0157
2	-,2170	1,0990	-,2170	1,1136	,0000	-,0146	-,2170	1,1439	,0000	-,0449
8	-,1000	-,2362	-,1000	-,2000	,0000	-,0362	-,1000	-,1321	,0000	-,1041

Tabela 7.22: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema de 30 barras do IEEE
Contingência considerada: perda da linha entre as barras 6 e 7

	Método em Um Passo	Método em Dois Passos
$\sum \Delta P_i $	$2,5 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{-4}$
$\sum \Delta P_i / nbi$	$3,125 \times 10^{-4}$	$2,5 \times 10^{-5}$
$\sum \Delta Q_i $	$5,53 \times 10^{-2}$	0,16476
$\sum \Delta Q_i / nbi$	0,0069125	0,020595

Novamente, como era de se esperar, os desvios em potência ativa ficaram concentrados na barra de folga, enquanto que os desvios em potência reativa ficaram distribuídos entre diversas barras do Sistema Interno.

Em todos os três casos simulados, os resultados obtidos pelo Método em Um Passo foram melhores que os obtidos pelo Método em Dois Passos.

7.5.2.2. Sistema de 118 barras do IEEE

Novamente, três contingências simples foram analisadas.

A primeira contingência considerada foi a perda da linha de transmissão entre as barras 89 e 90 do Sistema Interno.

A Tabela 7.23 apresenta os desvios de potência obtidos para as barras do Sistema Interno onde estes não foram nulos. Os resultados completos podem ser vistos na Tabela D.2.1 no Apêndice D.

Tabela 7.23: Sistema IEEE-118 barras
 Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno
 Contingência considerada: perda da linha entre as barras 89 e 90

barra	fluxo de potência		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
	P	Q	P	Q	ΔP	ΔQ	P	Q	ΔP	ΔQ
80	4,790	1,8752	4,790	1,8741	,0000	,0011	4,7900	1,8767	,0000	-,0015
87	,0000	,0966	,0000	,0966	,0000	,0000	,0000	,0965	,0000	,0001
89	6,252	,0660	6,252	,0660	,0000	,0000	6,2520	,0656	,0000	,0004
100	2,219	,6280	2,219	,6280	,0000	,0000	2,2190	,6279	,0000	,0001

A Tabela 7.24 apresenta os desvios totais e médios para as barras do Sistema Interno obtidos na Análise de Contingências.

Tabela 7.24: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema de 118 barras do IEEE
 Contingência considerada: perda da linha entre as barra 89 e 90

	Método em Um Passo	Método em Dois Passos
$\sum \Delta P_i $	0,0000	0,0000
$\sum \Delta P_i / barra$	0,0000	0,0000
$\sum \Delta Q_i $	0,0011	0,0021
$\sum \Delta Q_i / barra$	$2,75 \times 10^{-5}$	$5,25 \times 10^{-5}$

Como a barra de folga, neste sistema a barra 69, pertence ao Sistema Externo, os desvios em potência ativa para o Sistema Interno foram todos nulos. Já os desvios correspondentes à potência reativa ficaram distribuídos entre algumas barras do Sistema Interno.

A segunda contingência analisada foi a perda da linha entre as barras 80 e 96.

A Tabela 7.25 apresenta os desvios de potência ativa e reativa para as barras do Sistema Interno onde estes não foram nulos. Os resultados completos podem ser encontrados no Apêndice D, Tabela D.2.2.

Tabela 7.25: Sistema IEEE-118 barras
Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno
Contingência considerada: perda da linha entre as barras 80 e 96

barra	fluxo de potência		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
	P	Q	P	Q	ΔP	ΔQ	P	Q	ΔP	ΔQ
80	4,7900	1,7661	4,7900	1,7650	,0000	,0011	4,7900	1,7675	,0000	-,0014
87	,0000	,1022	,0000	,1022	,0000	,0000	,0000	,1021	,0000	,0001
89	6,2520	-,0370	6,2520	-,0370	,0000	,0000	6,2520	-,0375	,0000	,0005
100	2,2190	,6643	2,2190	,6643	,0000	,0000	2,2190	,6641	,0000	,0002

A Tabela 7.26 apresenta o somatório do módulo dos desvios de potência ativa e reativa, os desvios médios por barra do Sistema Interno e os desvios máximos obtidos, sempre com relação aos resultados obtidos no caso base.

Tabela 7.26: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema de 118 barras do IEEE
Contingência considerada: perda da linha entre as barra 80 e 96

	Método em Um Passo	Método em Dois Passos
$\sum \Delta P_i $	0,0000	0,0000
$\sum \Delta P_i / nbi$	0,0000	0,0000
$\sum \Delta Q_i $	$1,17 \times 10^{-3}$	$2,195 \times 10^{-3}$
$\sum \Delta Q_i / nbi$	$2,9225 \times 10^{-5}$	$5,4875 \times 10^{-5}$

Novamente, os desvios em potência ativa foram nulos e os em potência reativa ficaram distribuídos entre poucas barras do Sistema Interno.

A terceira contingência analisada foi a perda da linha entre as barras 100 e 104.

Da mesma forma que nos casos anteriores, as Tabelas 7.27 e 7.28 apresentam os resultados mais significativos.

Tabela 7.27: Sistema IEEE-118 barras
 Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno
 Contingência considerada: perda da linha entre as barras 100 e 104

barra	fluxo de potência		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
	P	Q	P	Q	ΔP	ΔQ	P	Q	ΔP	ΔQ
80	4,7900	1,8840	4,7900	1,8829	,0000	,0011	4,7900	1,8854	,0000	-,0014
87	,0000	,0945	,0000	,0945	,0000	,0000	,0000	,0944	,0000	,0001
89	6,2520	-,0980	6,2520	-,0980	,0000	,0000	6,2520	-,0984	,0000	,0004
100	2,2190	,4207	2,2190	,4207	,0000	,0000	2,2190	,4206	,0000	,0001

Novamente, os resultados obtidos confirmam o que já era esperado: se a barra de folga pertence ao Sistema Externo, o resíduo total de potência ativa é nulo pois este tende a concentrar-se na barra de folga (barra 69) pois esta faz o balanço de potência do sistema. Da forma como os programas de fluxo de potência são feitos, todas as perdas do sistema e neste caso, os desvios devido aos erros de modelagem da rede externa são absorvidos pela potência total gerada na barra de folga.

Tabela 7.28: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema de 118 barras do IEEE
 Contingência considerada: perda da linha entre as barra 100 e 104

	Método em Um Passo	Método em Dois Passos
$\sum \Delta P_i $	0,0000	0,0000
$\sum \Delta P_i / nbi$	0,0000	0,0000
$\sum \Delta Q_i $	0,0011	$2,043 \times 10^{-3}$
$\sum \Delta Q_i / nbi$	$2,75 \times 10^{-5}$	$5,1075 \times 10^{-5}$

7.5.2.3. Sistema Sul-Sudeste brasileiro de 340 barras

Da mesma forma que nos sistemas anteriores, três contingências simples foram analisadas.

A primeira contingência em estudo foi a perda da linha de transmissão entre as barras 2 e 23 do Sistema Interno.

Devido às dimensões do sistema SSE-340, apenas os desvios totais e médios das injeções ativas e reativas nas barras do Sistema Interno são apresentados na Tabela 7.29.

Tabela 7.29: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema SSE-340 barras
Contingência considerada: perda da linha entre as barras 2 e 23.

	Método em Um Passo	Método em Dois Passos
$\sum \Delta P_i $	1,7444	2,1653
$\sum \Delta P_i / nbi$	0,01896	0,02379
$\sum \Delta Q_i $	0,561668	0,403205
$\sum \Delta Q_i / nbi$	0,006105	0,00443

Novamente, os desvios obtidos são bem reduzidos. Neste caso, todo o desvio nas injeções de potência ativa (1,7444 p.u.) ocorreu na barra de folga (barra 1 - FURNAS), independentemente do método utilizado, comprovando o que já foi dito acima. Já os desvios em Q ficaram distribuídos em várias barras como pode ser visto na Tabela 7.30.

Tabela 7.30: Desvios em injeções de potência reativa nas barras do Sistema Interno considerando a perda da linha entre as barras 2 e 23.

Barra	Desvio em p.u.	
	Método em Um Passo	Método em Dois Passos
1	-0,1575	-,0669
10	-0,0099	-,0058
14	-0,0024	,0015
16	-0,140	-,0071
24	-0,516	-,0282
25	-0,123	-,0059
40	-0,0063	-,0038
41	-0,128	-,0077
44	-0,265	-,0127
73	-0,0003	,0004
81	-0,0048	-,0043
85	-0,2225	-,2171
86	0,0000	-0,0006
87	0,0401	,0413
92	-0,0002	,0000

A segunda contingência em estudo foi a perda da linha entre as barras 19 e 29. A Tabela 7.31 mostra o somatório do módulo dos desvios de potência ativa e reativa, bem como os desvios médios por barra do Sistema Interno.

Tabela 7.31: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema SSE-340 barras
Contingência considerada: perda da linha entre as barras 19 e 29

	Método em Um Passo	Método em Dois Passos
$\sum \Delta P_i $	1,7403	2,1651
$\sum \Delta P_i / nbi$	0,01541	0,02379
$\sum \Delta Q_i $	0,567619	0,407724
$\sum \Delta Q_i / nbi$	0,00623	0,00445

Novamente, os desvios em potência ativa concentraram-se na barra de folga. Os desvios em potência reativa ficaram distribuídos entre várias barras do Sistema Interno como pode ser visto na Tabela 7.32.

Tabela 7.32: Desvios em injeções de potência reativa nas barras do Sistema Interno considerando a perda da linha entre as barras 19 e 29

barra	desvio em p.u.	
	Método em Um Passo	Método em Dois Passos
1	-,1581	-,0678
10	-,0099	-,0060
14	,0025	,0016
16	-,0139	-,0072
24	-,0544	-,0297
25	-,0126	-,0061
40	-,0063	-,0039
41	-,0129	-,0080
44	-,0273	-,0132
73	0,0000	,0003
81	-,0048	-,0043
85	-,2238	-,2176
86	,0005	,0006
87	-,0402	-,0414

Finalmente, a terceira contingência considerada foi a perda da linha entre as barras 56 e 62.

As Tabelas 7.33 e 7.34 resumem os resultados obtidos.

Tabela 7.33: Desvios Totais e Médios de Potência nas barras do Sistema Interno (em p.u.) para o Sistema SSE-340 barras
Contingência considerada: perda da linha entre as barras 59 e 62

	Método em Um Passo	Método em Dois Passos
$\sum \Delta P_i $	1,740	2,1648
$\sum \Delta P_i / nbi$	0,0191	0,02377
$\sum \Delta Q_i $	0,560831	0,404279
$\sum \Delta Q_i / nbi$	0,00616	0,00444

Tabela 7.34: Desvios em injeções de potência reativa nas barras do Sistema Interno considerando a perda da linha entre as barras 59 e 62

barra	desvio em p.u.	
	Método em Um Passo	Método em Dois Passos
1	-,1580	-,0677
10	-,0094	-,0058
14	,0024	,0015
16	-,0134	-,0069
24	-,0521	-,0284
25	-,0122	-,0058
40	-,0060	-,0037
41	-,0122	-,0075
44	-,0264	-,0126
73	,0003	,0004
81	-,0049	-,0044
85	-,2226	-,2173
86	,0006	,0006
87	-,0404	-,0417

Embora o Método em Dois Passos tenha fornecido resultados melhores que o Método em Um Passo na Estimação de Estados, o modelo determinado para a rede externa obtido pelo Método em Um Passo obteve um resultado melhor que o modelo obtido pelo Método em Dois Passos para a parte ativa quando da

realização da Análise de Contingências. O mesmo pode ser observado quando comparam-se as perdas nas linhas de transmissão obtidas quando da execução de um Fluxo de Potência da rede completa (isto é, com o modelo obtido para a rede externa conectada à rede interna), como pode ser visto na Tabela 7.35.

Tabela 7.35: Perdas nas linhas de transmissão do Sistema de 340 barras

	Caso base	Método em Um Passo	Método em Dois Passo
Perdas (p. u.)	18,034	18,0286	18,1322

7.6. Considerações Finais

O Método dos Pesos com Refinamento Iterativo (MPRI) mostrou ser um método bastante confiável e os resultados numéricos obtidos foram semelhantes aos obtidos por um método “exato” (no caso, o Método da Matriz de Espaço Nulo - ver Tabela 7.2). O tempo computacional adicional é um preço pequeno a se pagar por sua maior estabilidade numérica se comparado com o Método do Pesos. Embora este, em situações normais, seja computacionalmente mais rápido que o MPRI, em situações onde problemas numéricos estejam presentes pode-se tornar menos eficiente que o MPRI, devido a dificuldades em se obter convergência (ver Tabela 7.7).

O MPRI também mostrou ser compatível com os Métodos de Transformação LSI/LDP e das Variáveis de Folga na solução de um Problema LSIE. Os tempos computacionais obtidos para o sistema de 340 barras demonstraram sua aplicabilidade a sistemas de médio e grande porte.

Os resultados também demonstraram ser possível a utilização de um estimador com restrições de igualdade e desigualdade baseado em transformações ortogonais para a modelagem não reduzida da rede externa. Os tempos computacionais obtidos pelo Método da Transformação LSI/LDP provam que este método pode ser utilizado na operação em tempo real de um sistema de potência. Quanto ao Método das Variáveis de Folga, modificações precisam ser introduzidas para torná-lo viável (ver Capítulo 8). Os desvios entre os valores estimados e reais das injeções ativas e reativas, bastante reduzidos, acentuam as vantagens de se utilizar estimadores com restrições na modelagem da rede externa. Embora o uso de restrições de desigualdade não contribui necessariamente na redução destes desvios, elas moldam a solução final de modo a evitar desvios localizados em determinadas barras do sistema externo e evitam que limites operacionais conhecidos de equipamentos e linhas da rede externa sejam violados.

Observando-se os resultados da Análise de Contingências, conclui-se que a representação não reduzida de rede externa é muito eficiente e o uso de restrições

de igualdade e desigualdade praticamente anulam os desvios nas barras de fronteira tornando confiáveis os resultados obtidos. Além disso, caso a barra de folga situa-se na rede externa, os desvios obtidos de potência ativa com relação ao caso base obtido pela utilização de um modelo exato para a rede externa são sempre nulos.

Na Análise de Contingências, para cada sistema-teste, os resultados obtidos nos três casos analisados foram praticamente os mesmos. Isso era esperado visto que o modelo utilizado para a rede externa em cada um dos sistemas-teste era o mesmo.

No próximo capítulo são apresentadas as conclusões finais sobre este trabalho e sugestões para estudos posteriores.

Capítulo 8

Conclusões

8.1. Introdução

Este capítulo está subdividido em três seções. A Seção 8.2 apresenta as conclusões sobre os estimadores desenvolvidos e as formas de representação explícita do sistema externo e a Seção 8.3 contém as sugestões para trabalhos posteriores.

8.2. Conclusões

A primeira constatação de tudo que foi apresentado neste trabalho é que os estimadores ortogonais com restrições de igualdade e desigualdade propostos são viáveis e podem ser utilizados na operação em tempo real de sistemas de potência. Os tempos computacionais obtidos foram relativamente baixos e garantem a afirmação acima.

Os estimadores desenvolvidos preenchem uma lacuna, pois até agora não havia sido desenvolvido um estimador de estados em sistema de potência baseado em técnicas ortogonais capaz de processar restrições de igualdade e desigualdade.

As vantagens dos estimadores ortogonais são bem conhecidas. Vale a pena lembrar a sua estabilidade numérica e as vantagens próprias do método no processamento de erros grosseiros. O somatório dos quadrados dos resíduos, por exemplo, é um subproduto do método. Os métodos ortogonais permitem ainda que o processamento dos erros grosseiros seja realizado antes da convergência final ter sido obtida.

O Método dos Pesos com Refinamento Iterativo (MPRI) demonstrou ser bastante confiável e numericamente estável. Sua utilização em conjunto com os métodos ortogonais é preferível ao Método dos Pesos devido aos problemas numéricos que a utilização de pesos muito elevados na ponderação das linhas da Matriz Jacobiana pode ocasionar. Em comparação com os resultados obtidos por um método “exato” (o Método da Matriz de Espaço Nulo), o MPRI obteve resultados melhores. Do ponto de vista computacional, o MPRI é mais eficiente que os métodos da Substituição Direta e da Matriz de Espaço Nulo visto que estes métodos tendem a aumentar o número de elementos não nulos na Matriz Jacobiana

devido às pré- e pós-multiplicações de matrizes pela Matriz Jacobiana exigidas por ambos os métodos.

O fato das restrições de igualdade serem tratadas como pseudo-medidas na primeira etapa do MPRI permite que erros de modelagem envolvendo as restrições de igualdade sejam detectados antes do refinamento Iterativo (segunda etapa do método) ser realizado, evitando assim que o resultado final seja contaminado por eles.

Entretanto, a grande vantagem do MPRI é a possibilidade de se obter resultados comparáveis aos obtidos com o Método dos Pesos, sem a necessidade de serem utilizados pesos elevados para as linhas correspondentes às restrições de igualdade. Dessa forma, não se corre o risco de divergência devido a problemas numéricos causados pela grande disparidade de pesos entre as linhas da matriz Jacobiana. O custo computacional a ser pago é relativamente pequeno.

O Método da Transformação LSI/LDP parece, à primeira vista, complicado e de difícil implementação. No entanto, o método foi facilmente implementado exigindo poucas alterações no estimador com capacidade para processar apenas restrições de igualdade, como pode ser observado nos algoritmos apresentados no Capítulo 6. Nele, um problema de mínimos quadrados com restrições de desigualdade (Problema LSI) é transformado em um problema do tipo Mínima Distância (LDP) através de uma simples mudança de variáveis. O Problema LDP é então resolvido como um problema do tipo NNLS, isto é, um problema de mínimos quadrados com restrições de não-negatividade.

Pelo fato das restrições de desigualdade também serem processadas utilizando-se métodos ortogonais (no caso do Algoritmo NNLS, reflexões de Householder) , o método também é numericamente robusto. Tanto rotações de Givens quanto reflexões de Householder podem ser utilizadas na solução do Problema NNLS. Contudo, neste caso específico, as reflexões de Householder são preferíveis pois a matriz \mathfrak{S} contendo as restrições de desigualdade após a transformação LSI/LDP é relativamente cheia e o número de operações em ponto flutuante necessárias para fatorá-la é menor utilizando-se reflexões de Householder, um método com apenas dois multiplicadores e nenhum teste lógico, do que rotações de Givens, com três multiplicadores.

O Algoritmo NNLS é uma técnica bastante eficiente de solução do problema de mínimos quadrados com restrições de não-negatividade. Sua eficiência está relacionada ao fato de não ser necessário refatorar a matriz dos coeficientes de uma iteração para outra do método, pois apenas uma linha é acrescentada ou retirada da matriz. Portanto, ao invés de refatorá-la, procede-se a modificações na matriz já fatorada.

Este procedimento não foi implementado no estimador de estado com variáveis de folga (EENLVF), sendo este um dos fatores responsáveis pelos tempos computacionais extremamente elevados obtidos. Neste estimador, as restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade pela utilização de

variáveis de folga, transformando o problema geral contendo restrições de igualdade e desigualdade (Problema LSIE) em um problema do tipo>NNLSE, isto é, um problema de mínimos quadrados com restrições de igualdade e restrições de não-negatividade. As restrições de igualdade são processadas pelo MPRI e as de não-negatividade utilizando-se o Algoritmo>NNLS modificado descrito no Capítulo 6. Um outro fator que tende a aumentar o tempo computacional do estimador EENLVF é o aumento das dimensões do problema devido à introdução das variáveis de folga.

Durante os testes realizados, observou-se que a introdução de restrições de igualdade e sua solução pelo MPRI não afeta de forma nenhuma as propriedades de convergência do Método de Gauss-Newton utilizado na solução do problema não-linear representado pela estimação de estados em sistemas de potência. Contudo, o mesmo não ocorre quando restrições de desigualdade são introduzidas. À medida que o número de restrições vai aumentando, há uma tendência em aumentar o número de iterações necessárias para se obter a convergência. Particularmente, as restrições de injeção de potência reativa são as que apresentam mais dificuldades do ponto de vista da convergência do algoritmo de Gauss-Newton. Se combinadas com restrições de fluxo de potência, dificultam ainda mais a obtenção da convergência se for utilizada a partida plana. Nesta situação, pode tornar-se necessário a utilização como ponto de partida, um ponto mais próximo da solução final. Neste trabalho, utilizou-se um ponto de partida obtido a partir da solução de um fluxo de carga “defasado”, isto é, calculado em um tempo supostamente anterior ao tempo atual (em torno de 15 a 30 minutos o que implica em variações de cargas em torno de 10%).

O ponto de partida necessário aos programas EENLRID (Transformação LSI/LDP) e EENLVF (variáveis de folga + algoritmo>NNLS modificado) não necessita ser um “ponto interior” à região viável. Em condições normais, a partida plana é suficiente. Contudo, quando o sistema em estudo tende a gerar uma matriz Jacobiana numericamente mal condicionada e o número de restrições de desigualdade é muito grande, havendo combinação de restrições de injeções de potência reativa com restrições de fluxo de potência, pode ser necessária a utilização não de um ponto de partida interior, mas sim de um ponto próximo ao da solução final. Esta não é uma imposição do algoritmo>NNLS, mas sim do Método de Gauss-Newton utilizado na solução do problema de mínimos quadrados não-linear (laço externo).

Inicialmente pensou-se que grandes desvios entre o valor estimado e o valor real de uma determinada variável pudessem ser drasticamente reduzidos pela utilização de restrições de desigualdade. Contudo, testes revelaram que nem sempre isso é possível. Sempre que um desvio é eliminado ou minimizado em um determinado ponto do sistema pela utilização de restrições de desigualdade, novos desvios tendem a surgir em outros pontos do sistema de forma que o erro total permanece o mesmo ou até aumente (este fato foi observado no sistema G340-2,

mostrado no Capítulo 7). Com efeito, os desvios surgidos devido a erros grosseiros introduzidos foram corrigidos através de restrições de desigualdade. Contudo, o erro total nas injeções de potência ativa e reativa (somatório dos módulos dos desvios de potência ativa e reativa nas barras do sistema em relação a um caso base tomado como referência) aumentou com relação ao caso onde não foram utilizadas restrições de desigualdade.

Portanto, a natureza das restrições de desigualdade a serem utilizadas e as partes do sistema onde elas serão impostas devem ser escolhidos de maneira criteriosa e cuidadosa. Seu efeito na redução do erro total é limitado. Nos sistemas de 30 e 118 barras do IEEE foi possível reduzir-se bastante o erro total pela introdução das restrições de desigualdade. Já no sistema de 340 barras, toda a redução do erro total foi causada pela eliminação dos desvios nas barras de injeção nula (restrições de igualdade).

A importância do uso das restrições de desigualdade não está na possível redução dos erros de estimação. Restrições de desigualdade também não devem ser utilizadas na estimação de estados de uma rede completamente observável por meio de telemedições, já que sua utilização poderia mascarar os resultados obtidos. Sua importância está sim, na modelagem não reduzida de uma rede não observável de um sistema elétrico interligado. Em outras palavras, está na modelagem não reduzida do Sistema Externo.

As informações provenientes da rede externa são em sua maior parte escassas e de pouca confiança, o que justifica que a mesma é não-observável. Para torná-la observável, pseudo-medidas necessitam ser utilizadas. A rede externa é considerada em estado normal de operação. Sua carga é estimada tendo por base o carregamento do sistema interno e sua geração é estimada ou em sistemas com predominância de geração termelétrica, suposta economicamente despachada [GEI83]. As restrições de desigualdade permitem a consideração dos limites operacionais dos equipamentos conhecidos da rede externa e a modelagem de determinadas cargas as quais se sabe estarem contidas em um determinado intervalo $[P_{min}, P_{max}; Q_{min}, Q_{max}]$. Neste contexto é que faz sentido a utilização de restrições de desigualdade.

As restrições de igualdade, por representarem informações determinísticas sobre a rede, também devem ser utilizadas com cuidado para se evitar erros de modelagem. Como as restrições de igualdade são tratadas inicialmente como telemedidas, o que contribui para a observabilidade da rede, há possibilidade de se detectar este tipo de erro durante o processamento de erros grosseiros.

Quanto à forma de modelagem explícita da rede externa, o Método em Dois Passos apresentou resultados superiores ao Método em Um Passo quando problemas numéricos estão presentes na estimação de estados. O uso de medidas críticas pode piorar o condicionamento numérico da Matriz Jacobiana, causando problemas numéricos e deteriorando a qualidade dos resultados. No caso do sistema IEEE-30 barras, contudo, o Método em Um Passo apresentou resultados

superiores ao Método em Dois Passos. Neste sistema não foi detectada a presença de problemas numéricos. No caso irrestrito, o Método em Um Passo também mostrou ser mais vulnerável a problemas numéricos que o Método em Dois Passos. Observou-se que, quando restrições de igualdade e desigualdade são utilizadas, a redução no erro total de estimação com relação ao caso irrestrito, é bem maior no Método em Um Passo do que no Método em Dois Passos.

Os resultados obtidos pela Análise de Contingência, entretanto, mostraram que o modelo da rede externa obtido pelo Método em Um Passo é mais adequado que o modelo obtido pelo Método em Dois Passos. Isto pode ser observado nos sistemas IEEE-30 barras e no Sistema de 340 barras. Neste último, os resultados obtidos para a parte reativa da rede foram melhores no Método em Dois Passos que no Método em Um Passo.

Concluindo, o método a ser utilizado na obtenção de um modelo não-reduzido da rede externa depende do sistema considerado. Os resultados obtidos neste trabalho não excluem em absoluto nenhum dos dois métodos como também não aponta nenhum deles como o melhor absoluto.

Em síntese, os testes demonstraram a importância da utilização de restrições de igualdade e desigualdade na estimação de estados destinada à modelagem não reduzida da rede externa. Os resultados obtidos são superiores aos obtidos por um estimador convencional e bem mais confiáveis, visto que os limites operacionais dos equipamentos da rede externa são todos satisfeitos. Os tempos computacionais obtidos permitem a sua utilização em tempo real. A necessidade de utilização de um ponto de partida próximo ao da solução final não constitui um problema muito sério, pois sempre se pode utilizar como ponto inicial a solução da estimação de estados obtida na varredura imediatamente anterior [BOS87].

Observando-se os resultados da Análise de Contingências, conclui-se que a representação não reduzida de rede externa é muito eficiente e o uso de restrições de igualdade e desigualdade praticamente anulam os desvios nas barras de fronteira, tornando confiáveis os resultados obtidos.

8.3. Sugestões Para Trabalhos Posteriores

Ainda há muito o que fazer na área abrangida por este trabalho.

Primeiramente, é necessário investigar qual o tipo de rotações de Givens é a mais apropriada para a solução do problema de estimação de estados em sistemas de potência. O método com três multiplicadores parece, a primeira vista, menos eficiente do ponto de vista computacional do que o método com dois multiplicadores (ver Apêndice A para mais detalhes) pois envolve uma operação a mais em ponto flutuante por rotação. Contudo, o método com dois multiplicadores é, em sua formulação original, numericamente instável [GEN74]. Posteriormente, o método foi aperfeiçoado [GOL89] havendo a introdução de esquemas que evitam a possibilidade de *overflow* ou *underflow*, constituindo-se nas escolhas s

ou c , dependendo das condições numéricas existentes no momento em que a escolha deve ser feita (ver Apêndice A). Essa possibilidade de dois caminhos distintos implica na existência de testes lógicos que diminuem a eficiência computacional do método com dois multiplicadores. Além disso, a matriz triangular resultante do método com três multiplicadores é diagonal unitária, fornecendo como sub-produto o somatório dos quadrados dos resíduos dos erros de estimação, necessário à detecção da presença de erros grosseiros. Já no método com dois multiplicadores, a matriz triangular resultante não é diagonal unitária e o somatório dos quadrados dos resíduos deve ser calculado separadamente. Esta é uma questão importante na área dos estimadores ortogonais e vários testes são necessários para determinar de forma definitiva qual dos dois métodos é mais adequado à solução do problema de estimação de estados em sistemas de potência.

Outro ponto deixado em aberto por este trabalho é a aplicação do MPRI a outros tipos de restrições de igualdade que não sejam barras de injeção nula. Num dos métodos de representação do sistema externo descrito no Capítulo 2 [GEI87], há a necessidade de impor-se restrições de igualdade ao estado previamente estimado em certas barras de fronteira. Trata-se de um método de solução da rede externa em dois passos desenvolvido para resolver o problema da modelagem de uma rede constituída por múltiplas ilhas observáveis (Sistema Interno) separadas por seções da rede externa não observável. Cada uma dessas ilhas tem a sua própria referência angular, gerando uma matriz ganho do tipo "bloco-diagonal". Dessa forma, a solução de cada ilha é computada independentemente. Na solução da rede externa, uma ilha observável é selecionada como referência global sendo que as outras ilhas precisam ser ligadas à ela, sem que a solução estimada para a rede interna seja afetada. Isto implica em que todas as tensões nodais e diferenças angulares de todas as ilhas permaneçam constantes. Isto é alcançado pela utilização de um Estimador de Estados com restrições de igualdade.

Mesmo no Método de Geisler e Bose [GEI83] (o Método em Dois Passos utilizado nas simulações feitas neste trabalho) os estados estimados nas barras de fronteira do Sistema Interno, calculados no primeiro passo, poderiam ser tratados como restrições de igualdade quando da estimação do estado da rede externa no segundo passo.

No Capítulo 4, foi descrito um outro método para o processamento de restrições de igualdade ainda não implementado em estimação de estados em sistemas de potência. Trata-se do método de Heath [HEA82] e sua aplicabilidade à estimação de estados em sistemas de potência deve ser investigada.

Apesar dos resultados preliminares desfavoráveis apresentados no Capítulo 7, o método utilizando variáveis de folga para o processamento das restrições de desigualdade descrito nos Capítulos 5 e 6 não deve ser desconsiderado. Um dos motivos do método ter apresentado baixo desempenho computacional é o fato da matriz dos coeficientes ser parcialmente refatorada em cada iteração do algoritmo NNLS modificado. Em [LAW95], são apresentados diversos métodos de

modificação de uma matriz já fatorada quando uma linha é adicionada ou eliminada da matriz dos coeficientes, de forma a se evitar uma nova fatoração desta matriz. Se estes métodos forem devidamente aplicados ao método com variáveis de folga, há possibilidades de que este torne-se competitivo com o Método da Transformação LSI/LDP.

Na indústria, os algoritmos desacoplados são os mais utilizados, pois aliam um bom desempenho numérico a baixos tempos de processamento. Portanto, torna-se necessário avaliar o desempenho do MPRI associado a estes tipos de algoritmos que utilizem técnicas ortogonais.

O desenvolvimento de um estimador de estados desacoplado com restrições de igualdade e desigualdade também é fundamental se se deseja desenvolver um *software* aplicável à modelagem da rede externa e que desperte o interesse do setor elétrico em sua utilização prática. O método da Transformação LSI/LDP deve, portanto, ser implementado em conjunto com um algoritmo desacoplado que utilize transformações ortogonais para que seu desempenho possa ser avaliado.

Atualmente, para a solução de sistemas de equações lineares de muito grande porte, são utilizados métodos baseados em algoritmos do tipo gradiente conjugado com pré-condicionamento. Em [BNP88] é apresentado um método para a solução de um Problema LSE (Mínimos Quadrados com Restrições de Igualdade) utilizando o Método do Gradiente Conjugado com pré-condicionamento baseado em Série de Taylor, facilmente adaptável para resolver um problema com restrições de desigualdade, seja utilizando-se a Transformação LSI/LDP, seja utilizando-se variáveis de folga. O próprio algoritmo NNLS deve ser modificado de forma que o problema LS nele implícito possa ser resolvido também pelo método do Gradiente Conjugado Pré-condicionado. Sua aplicação à estimação de estados em sistemas de potência de grande porte deve ser objeto de estudos futuros para que se possa determinar sua eficiência e aplicabilidade aos problemas típicos da operação em tempo real de sistemas elétricos e modelagem não-reduzida da rede externa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ASC77] ASCHMONEIT, F. C.; PETERSON, N. M.; ADRIAN, A. C. 'State Estimation with Equality Constraints'. Proc. PICA, pp. 427-436, 1977 .
- [ASS94] ASSADIAN, M.; GODDARD, R. J.; AYNE HONG, H.; FRENCH, D. "Field Operational Experiences with On Line State Estimator". IEEE Trans on Power Systems, Vol. 9, no. 1, pp. 50-58, Feb. 1994.
- [BAZ93] BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. Nonlinear Programming Theory and Algorithms. John Wiley & Sons, 1993.
- [BJG67] BJÖRK, A.; GOLUB, G. H. "Iterative Refinement of Linear Least Square Solution for Householder Transformation". BIT, 7, pp. 322-337.
- [BJO96] BJÖRK, A. "Numerical Methods for Least Squares Problems". Philadelphia, SIAM, 1996. 408 pp.
- [BNP88] BARLOW, J. L.; NICHOLAS, N. K.; PLEMMONSE, R. J. "Iterative Methods for Equality Constrained Least Squares Methods". SIAM J.Sc. Stat. Comput., vol. 9, no. 5, 1988, pp. 892-906.
- [BOS86] BOSE, A. " The Effect of External Modeling Errors on On-Line Security Analysis". IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 1, no. 1, pp 227-232, Feb. 1986.
- [BOS87]BOSE, A.; CLEMENTS, K. A. " Real Time Modeling of Power Networks". Proceedings of the IEEE, vol. 75, no. 12, Dec. 1987.
- [CHE88] CHEN, C. T. Introduction to Linear System Theory. Holt, Reihardt and Winston Inc., 2nd. ed., 1988.

- [CLE95] CLEMENTS, K. A.; DAVIS, P. W.; FREY, K. D. "Treatment of Inequality Constraints in Power System State Estimation. IEEE Trans. on Power Systems, vol. 10, no. 2, pp. 567-574, May 1995.
- [DEC80/1] DECKMANN, S.; PIZOLANTE, A.; MONTICELLI, A.; STOTT B.; ALZAG, O. " Numerical Testing of Power System Load Flow Equivalencing". IEEE Trans. on PAS, Vol. PAS-99, pp. 2292-2300, Nov. 1980.
- [DEC80/2] _____ " Studies on Load Flow Power Systems Equivalencing". IEEE Trans. rans on PAS, Vol. PAS-99, pp. 2301-2310, Nov. 1980.
- [DIM75] DIMO, P. Modal Analysis of Power Systems, Abacus Press, England, 1975.
- [EXT94] EXTERNAL NETWORK MODELING TASK FORCE. "External Network Modeling - Recent Practical Experience " . IEEE Trans on Power Systems. Vol. 9, no. 1, Feb. 1994.
- [FIA90] FIACCO, A. V.; McCORMICK, G. P. Nonlinear Programming. SIAM Classics in Applied Mathematics, 1990.
- [GAR79] GARCIA, A.; MONTICELLI, A.; ABREU, P. "Fast Decoupled State Estimation and Bad Data Processing". IEEE Trans. on PAS, Vol. 98, no. 5, Sep./Oc. 1979, pp. 1645-1652.
- [GAR91] GARCIA, A.; MONTICELLI, A. "Modelling Zero Impedance Branches in Power System State Estimation". IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 4, no. 6, 1991, pp. 1561-1566.
- [GEI83] GEISLER, K. I.; BOSE, A. "State Estimation Based External Network Solution for On-Line Security Analysis". IEEE Trans. on PAS, Vol. PAS-102, pp. 2447-2453, Aug. 1983.
- [GEI87] GEISLER, K. L.; NOWAK, T. G. " Boundary Constrained External Network Power System State Estimator". Proceeding of the IEEE, Vol. 75, pp.1130-1132, Aug. 1987.

- [GEL85] GEISLER, K. I.; TRIPATHI, N. K. " State Estimation Based External Network Solution". IEEE Trans. on PAS, Vol.104, no. 8, pp. 2126- 2132, Aug. 1985.
- [GEN74] GENTLEMAN, W. M. "Least Square Computations by Givens Transformations Without Square Roots". Journal of Inst. Math Applics, no. 12, 1974, pp. 329-336.
- [GE080] GEORGE, A.; HEATH, M. T. "Solution of Linear Least Squares Problems Using Givens Rotations". Linear Algebra and its Applications, vol. 34, pp. 69-83, 1980.
- [GEO81] GEORGE, A.; LIU, J. W. H. Computer Solution of Large Sparse Positive Definite System. Prentice Hall, 1981, 324pp.
- [GIE85] GIELSVIK, A.; AAM, S.; HOLTEN, L. "Hachtel's Augmented Matrix Method - A Rapid Method Improving Numerical Stability in Power System Static State Estimation". IEEE Trans. on PAS, vol. 104, pp. 2987-2993, Nov. 1985.
- [GOL89] GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. Matrix Computations. 2nd Ed., John Hopkins Univ. Press, 1989.
- [GSC96] GOUVÊA, J. P. S.; SIMÕES COSTA, A. J. A. "Pseudo-Measurement Placement in Power System State Estimation". Proc. of the XII Power System Computation Conference, Dresden, August, 19-23, 1996.
- [GSC97] GOUVÊA, J. P. S.; SIMÕES COSTA, A. J. A. "Estimador de Estados Ortogonal com Restrições de Igualdade". Artigo aceito para publicação na Revista Brasileira de Automática.
- [GSC98] GOUVÊA, J. P. S.; SIMÕES COSTA, A. J. A. "Um Método Ortogonal com Restrições de Igualdade e Desigualdade para a Estimação de Estados em Sistemas de Potência". Trabalho a ser apresentado no XII Congresso Brasileiro de Automática, Uberlândia, 14 a 18 de Setembro de 1998.
- [GSS96] GOUVÊA, J. P. S.; SIMÕES COSTA, A. J. A.; SALGADO, R. S. "Desenvolvimento de um Estimador Ortogonal com Restrições para a Modelagem da Rede Externa em Sistemas de Potência". Anais do

XI Congresso Brasileiro de Automática, São Paulo, 2-6 de Setembro, 1996.

- [HAS81] HASKELL, K.; HANSON, R. "An Algorithm for Linear Least Squares Problems with Equality and Non-Negativity Constraints". Mathematical Programming 21, pp. 99-118, 1981.
- [HEA82] HEATH, M. T. "Some Extensions of an Algorithm for Sparse Linear Least Squares Problems". SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol. 3, no. 2, pp. 223-237, June 1982.
- [HEA84] HEATH, M. T. "Numerical Methods for Large Sparse Linear Least Squares Problems". SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol. 5, no. 3, pp. 497-513, September 1984.
- [HOL88] HOLTON, L.; GJELSVIK, A.; WU, F. F. "Comparision of Different Methods for State Estimariion". IEEE Trans. on Power System, vol. 3, no. 4, pp. 1798-1806, Nov. 1988.
- [KLI95] KLIOKYS, E. "Inequality Constrained State Estimation". IEEE/KTH Power Tech Conference. Stockholm, June, 1995.
- [LAW95] LAWSON, C.; HANSON, R. "Solving Least Squares Problems". (reimp. from Prentice-Hall, New Jersey, 1974), Philadelphia, SIAM, 1995.
- [LEO94] LIU, C. N.; LEOU, R. C.; LIU, K. C.; UNUM, M. "A Load Flow and Fuzzy Linear Programming Based External Network Modeling Aproach" IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 9, no. 3, pp. 1293- 1301, Aug. 1994.
- [LUL90] LU, C. N.; LIU, K. C.; VEMURI, S. "An External Network Modeling Aproach for On-Line Security Analysis". IEEE Trnas. on Power Systems, Vol. 5, no. 2, pp. 565-573, May 1990.
- [MED93] MEDEIROS, A. D. R. "Soluções Corretivas de Tensão e Fluxo de Potência Através de Uma Técnica de Mínimos Quadrados". Dissertação de Mestrado. UFSC, Julho de 1993.
- [MON79] MONTICELLI, A.; DECKMANN, S.; GARCIA, A.; STOTT, B. "Real Time External Equivalent for Static Security

Analysis". IEEE trans. on PAS, Vol-PAS 98, pp. 498-508, March/April 1979.

[MON85] MONTICELLI, A. ; WU, F. F. "A Method That Combines Internal State Estimation and External Network Modeling". IEEE Trans. on PAS, Vol PAS-104, no. 1, pp. 91-103, Jan. 1985.

[NUC91] NUCERA, R. R.; GILES, M. L. "A Blocked Sparse Matrix Formulation for the Solution of Equality-Constrained State Estimation". IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 6, no. 1, pp.214-221, Feb. 1991.

[QUI82] QUINTANA, V. H.; SIMÕES COSTA, A.; MANDEL, A. "Power System Topological Observability Using a Direct Graph Theoretic Approach". IEEE Trans. on PAS, vol. 101, no. 3, pp. 617-625, March, 1982.

[QSC86] QUINTANA, V. H.; SCOTT, B. W.; CHIKHIANI, A. Y. "Power System State Estimation with Equality Constraints". IASTED Conf. On High Technology in the Power Industry, Bozeman, Montana, Aug., 1986

[SAL97] SINGH, H.; ALVARADO, F. L.; LIU, W. H. E. "Constrained LAV State Estimator Using Penalty Functions". IEEE Trans. on Power Systems, vol. 12, no. 1, 1997, pp. 383-388.

[SAN91] SANDERSON, P.; CURTIS, R.; ATHOW, D.; LU, C. N.; LIU, K. C.; LETTER, C. "Real Time Complete Model Estimation for Contingency Study - Field Experience". IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 6, no 4, pp 1480-1484, Nov. 1991.

[SCH70] SCHWEPPE, F. C. ; WILDES, J. "Power System Static State Estimation, Part I: Exact Model". IEEE Trans. on PAS, vol. 89, no 1, pp. 120-125, Jan. 1970.

[SEL85] SELEME JR., S. I. "Introdução de Restrições de Igualdade à Estimação de Estados em Sistemas de Potência Utilizando Técnicas Ortogonais Sequenciais". Dissertação de Mestrado, UFSC, Maio, 1985.

- [SIM81/1] SIMOES COSTA, A.; QUINTANA, V. H. "A Robust Numerical Technique for Power System State Estimation". IEEE Trans. on PAS, vol. 100, pp. 691-698, Feb. 1981.
- [SIM81/2] _____ "An Orthogonal Row Processing Algorithm for Power System Sequential State Estimation". IEEE Trans. on PAS, vol. 100, pp. 3791-3800, Aug. 1981.
- [SIM90] SIMÕES, A. J. A.; PIAZZA, T. S.; MANDEL, A. "Qualitative Methods to Solve Qualitative Problems in Power System State Estimation". IEEE Trans. on Power Systems, 1990, vol. 5, no. 3, pp. 2012-2020.
- [SIM96] SIMÕES COSTA, A. J. A.; TARDIO ARZE, M. "Critical Pseudo-Measurement Selection for Unreduced External System Modeling", Internacional Journal of Electric Power & Energy Systems, 1996, vol. 18, fasc. 2, pp. 73-80.
- [SIN93] SINGH, H.; ALVARADO, F. L. "Weighted Least Absolute Value State Estimation using Interior Point Methods". IEEE Summer Meeting, Vancouver, 1993.
- [SQP92] SILVA, A. P. A.; QUINTANA, V. H.; PANG, G. K. H. "Associative Memory Models for Data Processing". Electrical Power & Energy Systems, vol. 14, no. 1, Feb. 1992, pp. 23-32.
- [TIN77] TINNEY, W. F.; POWELL, W. L. "The REI Approach to Power Network Equivalents". Proc. of PICA Conf., pp. 314-320, Toronto, May, 1977.
- [TIW67] TINNEY, W. F.; WALKER, J. W. 'Direct Solution of Sparse Network Equations by Optimally Ordered Triangular Factorization'. Proc. of the IEEE, Vol. 55, 1967, pp. 1801-1809.
- [VAL85] VAN LOAN, Ch. "On the Method of Weighting for Equality Constrained Least-Squares Problems". SIAM J. Numer. Anal., vol. 22, no. 5, pp. 851-864, October 1985.
- [VEM91] VEMPATI, N.; SLUTSKER, I.; W. F. TINNEY. "Enhancements to Givens Rotations for Power System State Estimation". IEEE Trans. on Power Systems., vol. 6, no. 2, pp. 842-849, May 1991.

[WUF90] WU, F. F. "Power System Estimation: a Survey". Electrical Power and Energy Systems, vol. 12, no. 2, pp.80-87, April 1990.

[WUM83], WU, F. F.; MONTICELLI, A. " A Critical Review on External Network Modelling for On Line Security Analysis". Electrical Power and Energy Systems, Vol. 5, pp. 222-235, Oct. 1983.

Apêndice A

Métodos Ortogonais Via Rotações de Givens

O Problema dos Mínimos Quadrados Linear surgiu originalmente da necessidade de ajustar-se um modelo matemático linear a um conjunto de observações. Uma das formas de se diminuir a influência de erros provenientes dessas observações é utilizar-se um grande número de medidas, muito maior que o número de variáveis a serem determinadas (variáveis de estado). O problema resultante é um sistema de equações lineares sobre-determinado, com m equações e n variáveis de estado. Há muitas formas de se definir a melhor solução para este problema. Uma das maneiras mais simples e que leva a um problema computacional de fácil solução é definir o conjunto das variáveis de estado x como sendo a solução do seguinte problema de otimização:

$$\min J = (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^t (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \quad (\text{A1})$$

ou equivalentemente,

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 \quad (\text{A2})$$

onde o símbolo $\| \|$ denota a norma Euclidiana de um vetor. \mathbf{A} é denominada de Matriz de Observações e relaciona as variáveis de estado x com as observações contidas no vetor \mathbf{b} .

Dentre as diversas maneiras que o problema (A1) ou (A2), doravante denominado de Problema LS pode ser resolvido, uma das mais estáveis do ponto de vista numérico é utilizando-se transformações ortogonais [LAW95]. Uma matriz \mathbf{Q} é ortogonal quando $\mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^t = \mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade.

Uma importante propriedade das matrizes ortogonais é o fato de que é preservada a norma Euclidiana de vetores aos quais são aplicadas. Assim,

$$\|\mathbf{Qy}\| = \|\mathbf{y}\| \quad (\text{A3})$$

No contexto do Problema LS, temos que

$$\|Q(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})\|^2 = \|Q\mathbf{Ax} - Q\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 \quad (\text{A4})$$

Se Q for definida como uma transformação ortogonal e particionada como $[Q_1 \ Q_2]$ que ngularize a matriz A , isto é:

$$QA = [Q_1 \ Q_2]A = U \quad (\text{A5})$$

onde U é uma matriz do tipo

$$U = \begin{bmatrix} U_n \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (\text{A6})$$

U_n é uma matriz triangular superior de *rank* n e \mathbf{O} é uma matriz nula de ordem $(m-n) \times n$

Portanto, o uso de transformações ortogonais permite que o Problema LS seja escrito como

$$U_n \mathbf{x} = \mathbf{b}' \quad (\text{A7})$$

onde $\mathbf{b}' = Q_1 \mathbf{b}$ é o novo vetor do lado direito. A equação (A7) descreve um sistema triangular de equações de fácil solução.

As transformações ortogonais mais utilizadas na solução de um Problema LS são as Reflexões de Householder e as Rotações de Givens [LAW95, GOL89]. O esforço computacional exigido pelas transformações ortogonais é superior aos exigidos pela fatoração LU ou decomposição de Cholesky. Contudo, sua estabilidade numérica é bem superior. As Reflexões de Householder operam a matriz A por colunas enquanto que as Rotações de Givens operam por linha. Em Estimação de Estados em Sistemas de Potência, o uso de Rotações de Givens apresenta um desempenho melhor do que as Reflexões de Householder já que a estrutura de dados comumente encontrada nesta classe de Problema LS é organizada por linhas.

A função objetivo representada na equação (5.1) do capítulo 5 pode ser reescrita como:

$$J(\Delta \mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\mathbf{QR}^{-1/2} \Delta \mathbf{z} - \mathbf{QR}^{-1/2} \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}]^t [\mathbf{QR}^{-1/2} \Delta \mathbf{z} - \mathbf{QR}^{-1/2} \mathbf{H} \Delta \mathbf{x}] \quad (\text{A.8})$$

onde:

$$\mathbf{QR}^{-1/2}\Delta\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{z}_1 \\ \Delta\mathbf{z}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

A função objetivo em (A.8) é minimizada através da escolha da solução que satisfaça:

$$\mathbf{U}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{z}_1 \quad (\text{A.10})$$

Por outro lado, a forma clássica das rotações de Givens requer quatro multiplicadores para anular qualquer elemento da matriz. Nestas circunstâncias, as rotações de Givens de um vetor \mathbf{p} com uma linha \mathbf{u}_k do triângulo tomam a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,k} & \dots & u_{n,k} \\ p_1 & \dots & p_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_{1,k} & \dots & u'_{n,k} \\ 0 & \dots & p'_k \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

onde os multiplicadores c e s calculam-se através das expressões:

$$c = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + p_1^2}} \quad \text{e} \quad s = \frac{p_1}{\sqrt{u_1^2 + p_1^2}} \quad (\text{A.12})$$

e

$$u'_i = cu_i + sp_i \quad \text{e} \quad p'_i = -su_i + cp_i \quad (\text{A.13})$$

No método clássico das rotações de Givens, observa-se que o maior esforço computacional fica por conta do cálculo dos quatro multiplicadores. No entanto, o número de multiplicadores pode ser reduzido. Gentleman [GEN74] conseguiu introduzir modificações no algoritmo no sentido de realizar as rotações com apenas três multiplicadores, eliminando a necessidade de realizar a operação de raiz quadrada no cálculo dos mesmos. A versão rápida das rotações de Givens consiste basicamente em se decompor a matriz \mathbf{U} como:

$$\mathbf{U} = \mathbf{D}^{1/2}\bar{\mathbf{U}} \quad (\text{A.14})$$

onde \mathbf{D} é diagonal e a matriz $\bar{\mathbf{U}}$ é triangular superior unitária, isto é, é uma matriz triangular superior em que todos os elementos diagonais são iguais à unidade. Dessa forma, as rotações de Givens tomam a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{c} & \bar{s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{d} u_{1,k} \cdots \sqrt{d} u_{n,k} & \sqrt{d} u_{n+1,k} \\ \sqrt{w} p_1 \cdots \sqrt{w} p_k & \sqrt{w} p_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{d'} \cdots \sqrt{d'} u'_{n+1,k} \\ 0 \cdots \sqrt{w'} p'_{n+1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Observe que um fator de escala \sqrt{w} é também adotado para o novo vetor \mathbf{p} .

As equações que definem a transformação acima podem ser deduzidas usando-se as novas definições de \mathbf{u} , \mathbf{p} , \mathbf{u}' e \mathbf{p}' na equação (A.14) e impondo a condição de que o elemento (2,2) da matriz de rotações seja igual à unidade. As equações de atualização de \mathbf{u} e \mathbf{p} são dadas abaixo:

$$\begin{aligned} d' &= d + w p_i^2 \\ w' &= \frac{dw}{d'} \\ \bar{c} &= \frac{d}{d'} \\ \bar{s} &= \frac{w p_i}{d'} \\ p'_k &= p_k - p_i u_k \\ u'_k &= \bar{c} u_k + \bar{s} p_k \\ k &= 1, n+1 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

As equações (A.15) indicam que ambos os fatores de escala variam em consequência da rotação. Verifica-se também que todas as operações de raiz quadrada foram eliminadas pela aplicação do artifício introduzido pela equação (A.13). O número de multiplicações é também reduzido, já que na atualização dos vetores \mathbf{p} e \mathbf{u} necessitam-se de apenas três multiplicações. Além disso, a introdução dos fatores de escala torna este algoritmo particularmente adequado à solução do problema de mínimos quadrados ponderados. Foi exatamente este algoritmo o utilizado por Simões Costa e Quintana em [SIM812].

Deve ser observado que a matriz de transformações \mathbf{M} , que contém as rotações de Givens com três multiplicadores não é a rigor uma matriz ortogonal. De fato,

$$\mathbf{M}'\mathbf{M} = \mathbf{D} \quad (\text{A.17})$$

A relação entre \mathbf{M} e a matriz ortogonal \mathbf{Q} do método de Givens com quatro multiplicadores é dada por:

$$Q = MD^{-1/2} \quad (\text{A.18})$$

De fato, a matriz $(MD^{-1/2})$ é ortogonal pois

$$(MD^{-1/2})^t (MD^{-1/2}) = D^{-1/2} D D^{-1/2} = I$$

Mais recentemente, Vempati, Slutsker e Tinney [VEM91], além de proporem um esquema mais adequado para a ordenação de linhas e colunas da matriz H com vistas a preservar a esparsidade durante os cálculos, mostraram ser possível realizar as rotações de Givens com apenas dois multiplicadores, usando a seguinte mudança de variáveis:

$$u_i = \sqrt{l_1} u'_i, \quad (\text{A.19.1})$$

$$u'_i = \sqrt{l'_1} u''_i, \quad (\text{A.19.2})$$

$$p_i = \sqrt{l_2} v_i \quad (\text{A.19.3})$$

e

$$p'_i = \sqrt{l'_2} v'_i \quad (\text{A.19.4})$$

No entanto, para esta implementação, existem duas alternativas a serem consideradas:

$$\sqrt{l'_1} = c\sqrt{l_1} \quad \text{e} \quad \sqrt{l'_2} = c\sqrt{l_2} \quad \textit{Escolha-C}$$

$$\sqrt{l'_2} = s\sqrt{l_1} \quad \text{e} \quad \sqrt{l'_1} = s\sqrt{l_2} \quad \textit{Escolha-S}$$

A *Escolha-C* conduz a equações que atualizadas tomam a forma:

$$\begin{aligned} u'_i &= u_i + b_c v_i \\ v'_i &= -a_c u_i + v_i \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

onde,

$$a_c = \frac{v_i}{u_i}, \quad b_c = \frac{v_i l_2}{u_i l_1} \quad g_c = a_c \cdot b_c \geq 0$$

Também,

$$u'_i = u_i(1 + g_c), \quad l'_1 = \frac{l_1}{1 + g_c}, \quad l'_2 = \frac{l_2}{1 + g_c}$$

enquanto que, a *Escolha-S* estabelece as seguintes relações:

$$\begin{aligned} u'_i &= b_s u_i + v_i \\ v'_i &= -u_i + a_s v_i \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

tal que,

$$a_s = \frac{u_i}{v_i}, \quad b_s = \frac{u_i l_1}{v_i l_{21}} \quad e \quad g_s = a_s b_s \geq 0$$

agora,

$$u'_i = v_i(1 + g_s), \quad l'_1 = \frac{l_2}{1 + g_s} \quad e \quad l'_2 = \frac{l_1}{1 + g_s}$$

Gentleman já havia observado a possibilidade de se usar apenas dois multiplicadores, ao invés dos três multiplicadores que propôs em [GEN74]. Sua opção foi baseada no fato de que o uso de dois multiplicadores não é numericamente estável. Contudo Golub e Van Loan [GOL89] mostraram recentemente que é possível garantir a estabilidade numérica do método de Givens com dois multiplicadores, sendo para isto necessário obedecer a seguinte condição durante o processo de ortogonalização:

Se,

$$l_1 u_i^2 \geq l_2 v_i^2, \quad (\text{A.22})$$

então deve-se executar a *Escolha-C*, em caso contrário, a *Escolha-S* é a que deve ser implementada.

Por sua vez, a seleção adequada de γ é conduzida através da seguinte expressão:

$$0 \leq g = \min(g_c, g_s) \leq 1. \quad (\text{A.23})$$

Apêndice B

Dados dos Sistemas-Teste Utilizados:

Caso Base

b.1. Sistema de 30 Barras do IEEE

b.1.1. Dados de Barra

Barra	P	Q	V	delta
1	,2380D+01	-,7405	1,040	,0000
2	-,2170	,9989	1,050	-,5824D+01
3	-,2400D-01	-,1200D-01	1,025	-,6793D+01
4	-,7600D-01	-,1600D-01	1,020	-,8172D+01
5	-,9420	,1192	1,010	-,1352D+02
6	,0000	,0000	1,015	-,9483D+01
7	-,2280	-,1090	1,005	-,1166D+02
8	-,1000	-,1493	1,010	-,9658D+01
9	,0000	,0000	1,023	-,1094D+02
10	-,5800D-01	,1700	1,014	-,1292D+02
11	,2000	,1410	1,050	-,8717D+01
12	-,1120	-,7500D-01	1,023	-,1183D+02
13	,2000	,2059	1,050	-,1033D+02
14	-,6200D-01	-,1600D-01	1,008	-,1283D+02
15	-,8200D-01	-,2500D-01	1,003	-,1298D+02
16	-,3500D-01	-,1800D-01	1,012	-,1258D+02
17	-,9000D-01	-,5800D-01	1,008	-,1304D+02
18	-,3200D-01	-,9000D-02	,9944	-,1370D+02
19	-,9500D-01	-,3400D-01	,9924	-,1393D+02
20	-,2200D-01	-,7000D-02	,9970	-,1374D+02
21	-,1750	-,1120	1,001	-,1342D+02
22	,0000	,0000	1,001	-,1341D+02
23	-,3200D-01	-,1600D-01	,9929	-,1353D+02
24	-,8700D-01	-,2700D-01	,9878	-,1391D+02
25	,0000	,0000	,9834	-,1394D+02
26	-,3500D-01	-,2300D-01	,9651	-,1439D+02
27	,0000	,0000	,9897	-,1368D+02
28	,0000	,0000	1,011	-,1000D+02
29	-,2400D-01	-,9000D-02	,9691	-,1499D+02
30	-,1060	-,1900D-01	,9572	-,1594D+02

b.1.2. Dados de Linha (em p.u.)

linha	de	para	g	b	b ₀
1	1	2	,5225D+01	-,1565D+02	,2615D-01
2	1	3	,1244D+01	-,5096D+01	,2040D-01
3	2	4	,1706D+01	-,5197D+01	,1840D-01
4	2	5	,1136D+01	-,4773D+01	,2090D-01
5	2	6	,1686D+01	-,5117D+01	,1845D-01
6	3	4	,8195D+01	-,2353D+02	,4200D-02
7	4	6	,6413D+01	-,2231D+02	,4500D-02
8	4	12	,0000	-,3906D+01	,0000
9	5	7	,2954D+01	-,7449D+01	,1020D-01
10	6	7	,3590D+01	-,1103D+02	,8500D-02
11	6	8	,6289D+01	-,2201D+02	,4500D-02
12	6	9	,0000	-,4808D+01	,0000
13	6	10	,0000	-,1799D+01	,0000
14	6	28	,4363D+01	-,1546D+02	,6500D-02
15	8	28	,1431D+01	-,4500	,4180D-01
16	9	10	,0000	-,9091D+01	,0000
17	9	11	,0000	-,4808D+01	,0000
18	10	17	,3956D+01	-,1032D+02	,0000
19	10	20	,1785D+01	-,3985D+01	,0000
20	10	21	,5102D+01	-,1098D+02	,0000
21	10	22	,2619D+01	-,5401D+01	,0000
22	12	13	,0000	-,7143D+01	,0000
23	12	14	,1527D+01	-,3173D+01	,0000
24	12	15	,3095D+01	-,6097D+01	,0000
25	12	16	,1952D+01	-,4104D+01	,0000
26	14	15	,2491D+01	-,2251D+01	,0000
27	15	18	,1808D+01	-,3691D+01	,0000
28	15	23	,1968D+01	-,3976D+01	,0000
29	16	17	,1868D+01	-,4379D+01	,0000
30	18	19	,3076D+01	-,6219D+01	,0000
31	19	20	,5882D+01	-,1177D+02	,0000
32	21	22	,1677D+02	-,3413D+02	,0000
33	22	24	,2541D+01	-,3954D+01	,0000
34	23	24	,1461D+01	-,2989D+01	,0000
35	24	25	,1310D+01	-,2288D+01	,0000
36	25	26	,1216D+01	-,1817D+01	,0000
37	25	27	,1969D+01	-,3760D+01	,0000
38	27	28	,0000	-,2525D+01	,0000
39	27	29	,9955	-,1881D+01	,0000
40	27	30	,6875	-,1294D+01	,0000
41	29	30	,9121	-,1723D+01	,0000

b.2 Sistema de 118 Barras do IEEE

b.2.1. Dados de Barra

barra	P	Q	V	delta
1	-,5250	-,2780	,9554	-,1809D+02
2	-,2060	-,9100D-01	,9714	-,1752D+02
3	-,4020	-,1030	,9675	-,1716D+02
4	-,4020	,1697	1,000	-,1332D+02
5	,0000	-,4120	1,001	-,1282D+02
6	-,5380	-,2270	,9849	-,1561D+02
7	-,1960	-,2100D-01	,9864	-,1610D+02
8	-,2890	,5667D-01	1,020	-,7555D+01
9	,0000	,0000	1,045	-,1204
10	,4635D+01	-,5718	1,050	,7683D+01
11	-,7210	-,2390	,9845	-,1596D+02
12	,3900	,9990	,9900	-,1651D+02
13	-,3500	-,1650	,9647	-,1737D+02
14	-,1440	-,1000D-01	,9805	-,1723D+02
15	-,9270	-,3090	,9588	-,1747D+02
16	-,2570	-,1030	,9801	-,1679D+02
17	-,1130	-,3100D-01	,9843	-,1483D+02
18	-,6180	-,3500	,9546	-,1705D+02
19	-,4620	-,2580	,9517	-,1763D+02
20	-,1840	-,3100D-01	,9533	-,1650D+02
21	-,1030	-,5100D-01	,9593	-,1471D+02
22	-,7200D-01	-,3100D-01	,9729	-,1214D+02
23	,0000	,0000	1,003	-,7433D+01
24	-,1360	-,1829	,9900	-,7694D+01
25	,2266D+01	,1470D+01	1,050	-,3335
26	,3234D+01	-,1100D+01	1,020	,1537D+01
27	-,7320	-,3121	,9700	-,1331D+02
28	-,1750	-,7000D-01	,9639	-,1509D+02
29	-,2480	-,4100D-01	,9660	-,1613D+02
30	,0000	,0000	1,007	-,9586D+01
31	-,3730	,3212D-01	,9700	-,1601D+02
32	-,6080	-,2360	,9782	-,1407D+02
33	-,2370	-,9000D-01	,9589	-,1823D+02
34	-,6080	-,1250	,9731	-,1766D+02
35	-,3410	-,9100D-01	,9676	-,1812D+02
36	-,3200	-,1700	,9671	-,1811D+02
37	,0000	,0000	,9785	-,1716D+02
38	,0000	,0000	,9965	-,1165D+02
39	-,2760	-,1130	,9651	-,2091D+02
40	-,6800	,2714	,9700	-,2215D+02
41	-,3800	-,1030	,9653	-,2260D+02
42	-,9980	,2153	,9800	-,2093D+02
43	-,1840	-,7000D-01	,9680	-,1782D+02
44	-,1640	,2000D-01	,9783	-,1539D+02
45	-,5470	-,1230	,9812	-,1355D+02
46	-,9300D-01	,2198	1,010	-,1086D+02
47	-,3500	,0000	1,009	-,8411D+01
48	-,2060	,3100D-01	1,009	-,8985D+01
49	,1212D+01	,7949D-01	1,010	-,7832D+01
50	-,1700	-,4000D-01	,9873	-,1036D+02

barra	P	Q	V	delta
51	-,1700	-,8200D-01	,9549	-,1361D+02
52	-,1810	-,5100D-01	,9454	-,1476D+02
53	-,2330	-,1130	,9377	-,1622D+02
54	-,6660	,2101	,9500	-,1560D+02
55	-,6500	-,2270	,9453	-,1572D+02
56	-,8660	-,1860	,9478	-,1555D+02
57	-,1240	-,3000D-01	,9606	-,1375D+02
58	-,1240	-,3100D-01	,9493	-,1475D+02
59	-,1250D+01	,2997	,9800	-,1050D+02
60	-,7900	-,3000D-01	,9788	-,6098D+01
61	,1648D+01	-,7086	,9800	-,5141D+01
62	-,7900	-,1450	,9834	-,5734D+01
63	,0000	,0000	,9839	-,6617D+01
64	,0000	,0000	,9885	-,4629D+01
65	,4050D+01	-,2310D+01	1,000	-,1113D+01
66	,3650D+01	,1771D+01	1,040	-,1195D+01
67	-,2890	-,7000D-01	1,007	-,4095D+01
68	,0000	,0000	1,007	-,1265D+01
69	,3792D+01	,1215D+01	1,030	,0000
70	-,6700	-,2100	,9762	-,6770D+01
71	,0000	,0000	,9815	-,7169D+01
72	-,1230	-,1739	,9700	-,7931D+01
73	-,6100D-01	,1907	,9900	-,7433D+01
74	-,6900	-,1540	,9504	-,7605D+01
75	-,4820	-,1130	,9575	-,6206D+01
76	-,6900	-,3700	,9252	-,6728D+01
77	-,6270	-,2900	,9913	-,7655
78	-,7210	-,2700	,9872	-,9702
79	-,4010	-,3310	,9905	-,4505
80	,4790D+01	,1889D+01	1,030	,2295D+01
81	,0000	,0000	1,021	-,2963D-01
82	-,5100	-,7000D-01	,9785	,1469
83	-,2060	,0000	,9752	,1344D+01
84	-,1130	-,7000D-01	,9721	,3911D+01
85	-,2480	-,1550	,9782	,5494D+01
86	-,2160	-,1030	,9758	,3801D+01
87	,0000	,9457D-01	1,000	,3607D+01
88	-,4900	-,1030	,9812	,8855D+01
89	,6252D+01	-,9758D-01	1,000	,1313D+02
90	-,1679D+01	,1200	,9800	,6479D+01
91	-,1030	-,5254D-01	,9800	,6438D+01
92	-,6700	-,1030	,9876	,7091D+01
93	-,1230	-,7000D-01	,9803	,4013D+01
94	-,3090	-,1640	,9826	,1811D+01
95	-,4300	-,3200	,9717	,7873
96	-,3900	-,1540	,9830	,5963
97	-,1520	-,9900D-01	1,001	,1087D+01
98	-,3500	-,8000D-01	1,014	,6435
99	-,4310	-,2065	1,000	,2670
100	,2219D+01	,5663	1,010	,1267D+01
101	-,2260	-,1530	,9859	,2831D+01
102	-,5100D-01	-,3100D-01	,9856	,5568D+01
103	,1820	,7174	1,010	-,2659D+01
104	-,4000	-,2580	,9713	-,5325D+01
105	-,3100	-,6000D-01	,9684	-,6472D+01

barra	P	Q	V	delta
106	-,4430	-,1650	,9614	-,6718D+01
107	-,5150	-,3465D-01	,9500	-,9555D+01
108	,0000	,0000	,9684	-,7588D+01
109	-,8000D-01	-,3000D-01	,9681	-,8037D+01
110	-,4000	-,2500	,9714	-,8877D+01
111	,3780	-,2363D-02	,9800	-,7169D+01
112	-,7020	,2429	,9700	-,1202D+02
113	-,6000D-01	-,2068	,9900	-,1495D+02
114	-,8000D-01	-,6000D-01	,9686	-,1430D+02
115	-,2270	-,7000D-01	,9678	-,1430D+02
116	-,1895D+01	-,1651D+01	1,000	-,1666D+01
117	-,2060	-,8200D-01	,9733	-,1810D+02
118	-,3400	-,1550	,9355	-,6939D+01

b.2.2. Dados de Linha

linha	de	para	g	b	b ₀	tap	nt
1	1	2	,2780D+01	-,9167D+01	,1270D-01	,0000	
2	1	3	,6568D+01	-,2159D+02	,5400D-02	,0000	
3	2	12	,4512D+01	-,1486D+02	,7850D-02	,0000	
4	3	5	,1968D+01	-,8820D+01	,1420D-01	,0000	
5	3	12	,1732D+01	-,5726D+01	,2030D-01	,0000	
6	4	5	,2623D+02	-,1192D+03	,1050D-02	,0000	
7	4	11	,4042D+01	-,1331D+02	,8750D-02	,0000	
8	5	6	,3892D+01	-,1766D+02	,7150D-02	,0000	
9	5	8	,0000	-,3745D+02	,0000	1,000	8
10	5	11	,4009D+01	-,1347D+02	,8700D-02	,0000	
11	6	7	,1012D+02	-,4584D+02	,2750D-02	,0000	
12	7	12	,7006D+01	-,2764D+02	,2435D-01	,0000	
13	8	9	,2606D+01	-,3258D+02	,5810	,0000	
14	8	30	,1684D+01	-,1970D+02	,2570	,0000	
15	9	10	,2473D+01	-,3086D+02	,6150	,0000	
16	11	12	,1418D+02	-,4672D+02	,2500D-02	,0000	
17	11	13	,3811D+01	-,1252D+02	,9400D-02	,0000	
18	12	14	,3937D+01	-,1295D+02	,9100D-02	,0000	
19	12	16	,2863D+01	-,1126D+02	,1070D-01	,0000	
20	12	117	,1591D+01	-,6769D+01	,1790D-01	,0000	
21	13	15	,1140D+01	-,3745D+01	,3135D-01	,0000	
22	14	15	,1432D+01	-,4691D+01	,2510D-01	,0000	
23	15	17	,6334D+01	-,2097D+02	,2220D-01	,0000	
24	15	19	,7074D+01	-,2323D+02	,5050D-02	,0000	
25	15	33	,2246D+01	-,7353D+01	,1595D-01	,0000	
26	16	17	,1316D+01	-,5221D+01	,2330D-01	,0000	
27	17	18	,4553D+01	-,1869D+02	,6500D-02	,0000	
28	17	30	,0000	-,2577D+02	,0000	1,000	30
29	17	31	,1777D+01	-,5859D+01	,1995D-01	,0000	
30	17	113	,9228D+01	-,3042D+02	,3850D-02	,0000	
31	18	19	,4378D+01	-,1929D+02	,5700D-02	,0000	
32	19	20	,1759D+01	-,8168D+01	,1490D-01	,0000	
33	19	34	,1128D+01	-,3705D+01	,3160D-01	,0000	
34	20	21	,2426D+01	-,1126D+02	,1080D-01	,0000	
35	21	22	,2123D+01	-,9852D+01	,1230D-01	,0000	
36	22	23	,1293D+01	-,6011D+01	,2020D-01	,0000	

Linha	de	para	g	b	b ₀	tap	nt
37	23	24	,5186D+01	-,1890D+02	,2490D-01	,0000	
38	23	25	,2348D+01	-,1204D+02	,4320D-01	,0000	
39	23	32	,2217D+01	-,8063D+01	,5865D-01	,0000	
40	24	70	,5685	-,2289D+01	,5100D-01	,0000	
41	24	72	,1196D+01	-,4804D+01	,2440D-01	,0000	
42	25	26	,0000	-,2618D+02	,0000	1,000	26
43	25	27	,1153D+01	-,5910D+01	,8820D-01	,0000	
44	26	30	,1071D+01	-,1153D+02	,4590	,0000	
45	27	28	,2492D+01	-,1114D+02	,1080D-01	,0000	
46	27	32	,3679D+01	-,1213D+02	,9650D-02	,0000	
47	27	115	,2847D+01	-,1287D+02	,9850D-02	,0000	
48	28	29	,2507D+01	-,9974D+01	,1190D-01	,0000	
49	29	31	,8909D+01	-,2731D+02	,4150D-02	,0000	
50	30	38	,1580D+01	-,1838D+02	,2110	,0000	
51	31	32	,2814D+01	-,9301D+01	,1255D-01	,0000	
52	32	113	,1367D+01	-,4512D+01	,4759	,0000	
53	32	114	,3437D+01	-,1558D+02	,8150D-02	,0000	
54	33	37	,1896D+01	-,6488D+01	,1830D-01	,0000	
55	34	36	,1097D+02	-,3375D+02	,2850D-02	,0000	
56	34	37	,2697D+02	-,9904D+02	,4950D-02	,0000	
57	34	43	,1378D+01	-,5610D+01	,2115D-01	,0000	
58	35	36	,2054D+02	-,9353D+02	,1350D-02	,0000	
59	35	37	,4245D+01	-,1918D+02	,6600D-02	,0000	
60	37	38	,0000	-,2667D+02	,0000	1,000	38
61	37	39	,2617D+01	-,8642D+01	,1350D-01	,0000	
62	37	40	,1868D+01	-,5293D+01	,2100D-01	,0000	
63	38	65	,9191	-,1006D+02	,5730	,0000	
64	39	40	,4601D+01	-,1513D+02	,7750D-02	,0000	
65	40	41	,5616D+01	-,1886D+02	,6100D-02	,0000	
66	40	42	,1518D+01	-,5004D+01	,2330D-01	,0000	
67	41	42	,2060D+01	-,6782D+01	,1720D-01	,0000	
68	42	49	,1316D+01	-,5918D+01	,8600D-01	,0000	
69	43	44	,9512	-,3839D+01	,3035D-01	,0000	
70	44	45	,2599D+01	-,1045D+02	,1120D-01	,0000	
71	45	46	,2001D+01	-,6784D+01	,1660D-01	,0000	
72	45	49	,1742D+01	-,4736D+01	,2220D-01	,0000	
73	46	47	,2162D+01	-,7227D+01	,1580D-01	,0000	
74	46	48	,1528D+01	-,4805D+01	,2360D-01	,0000	
75	47	49	,4472D+01	-,1463D+02	,8000D-02	,0000	
76	47	69	,1001D+01	-,3296D+01	,3545D-01	,0000	
77	48	49	,6236D+01	-,1759D+02	,6300D-02	,0000	
78	49	50	,4193D+01	-,1181D+02	,9350D-02	,0000	
79	49	51	,2300D+01	-,6483D+01	,1710D-01	,0000	
80	49	54	,8589	-,2825D+01	,4140D-01	,0000	
81	49	66	,4114D+01	-,2098D+02	,2480D-01	,0000	
82	49	69	,8589	-,2825D+01	,4140D-01	,0000	
83	50	57	,2346D+01	-,6633D+01	,1660D-01	,0000	
84	51	52	,5246D+01	-,1520D+02	,7000D-02	,0000	
85	51	58	,4382D+01	-,1235D+02	,8950D-02	,0000	
86	52	53	,1427D+01	-,5763D+01	,2030D-01	,0000	
87	53	54	,1688D+01	-,7833D+01	,1555D-01	,0000	
88	54	55	,3198D+01	-,1338D+02	,1010D-01	,0000	
89	54	56	,2758D+02	-,9627D+02	,3650D-02	,0000	
90	54	59	,9127	-,4161D+01	,2990D-01	,0000	
91	55	56	,1938D+02	-,5996D+02	,1850D-02	,0000	
92	55	59	,9708	-,4421D+01	,2825D-01	,0000	

linha	de	para	g	b	b ₀	tap	nt
93	56	57	,3264D+01	-,9193D+01	,1210D-01	,0000	
94	56	58	,3264D+01	-,9193D+01	,1210D-01	,0000	
95	56	59	,2535D+01	-,7474D+01	,5520D-01	,0000	
96	59	60	,1439D+01	-,6582D+01	,1880D-01	,0000	
97	59	61	,1391D+01	-,6362D+01	,1940D-01	,0000	
98	59	63	,0000	-,2591D+02	,0000	1,000	63
99	60	61	,1395D+02	-,7135D+02	,7300D-02	,0000	
100	60	62	,3729D+01	-,1701D+02	,7350D-02	,0000	
101	61	62	,5561D+01	-,2538D+02	,4900D-02	,0000	
102	61	64	,0000	-,3731D+02	,0000	1,000	64
103	62	66	,9669	-,4373D+01	,2890D-01	,0000	
104	62	67	,1797D+01	-,8151D+01	,1550D-01	,0000	
105	63	64	,4268D+01	-,4963D+02	,1080	,0000	
106	64	65	,2926D+01	-,3285D+02	,1900	,0000	
107	65	66	,0000	-,2703D+02	,2000D-01	1,000	65
108	65	68	,5351D+01	-,6204D+02	,3190	,0000	
109	66	67	,2073D+01	-,9395D+01	,1340D-01	,0000	
110	68	69	,0000	-,2703D+02	,2000D-01	1,000	68
111	68	81	,4257D+01	-,4914D+02	,4040	,0000	
112	68	116	,2110D+02	-,2482D+03	,8200D-01	,0000	
113	69	70	,1762D+01	-,7458D+01	,6100D-01	,0000	
114	69	75	,2451D+01	-,7383D+01	,6200D-01	,0000	
115	69	77	,2770D+01	-,9054D+01	,5190D-01	,0000	
116	70	71	,6592D+01	-,2653D+02	,4400D-02	,0000	
117	70	74	,2098D+01	-,6923D+01	,1685D-01	,0000	
118	70	75	,1971D+01	-,6494D+01	,1800D-01	,0000	
119	71	72	,1297D+01	-,5234D+01	,2220D-01	,0000	
120	71	73	,4054D+01	-,2125D+02	,5900D-02	,0000	
121	74	75	,6835D+01	-,2256D+02	,5150D-02	,0000	
122	75	77	,1379D+01	-,4588D+01	,2490D-01	,0000	
123	75	118	,5745D+01	-,1906D+02	,6000D-02	,0000	
124	76	77	,1860D+01	-,6199D+01	,1840D-01	,0000	
125	76	118	,5080D+01	-,1685D+02	,6800D-02	,0000	
126	77	78	,2240D+02	-,7386D+02	,6300D-02	,0000	
127	77	80	,8909D+01	-,2731D+02	,3500D-01	,0000	
128	77	82	,3650D+01	-,1045D+02	,4085D-01	,0000	
129	78	79	,8734D+01	-,3903D+02	,3250D-02	,0000	
130	79	80	,3000D+01	-,1354D+02	,9350D-02	,0000	
131	80	81	,0000	-,2703D+02	,2000D-01	1,000	81
132	80	96	,1035D+01	-,5292D+01	,2470D-01	,0000	
133	80	97	,2020D+01	-,1031D+02	,1270D-01	,0000	
134	80	98	,1946D+01	-,8830D+01	,1430D-01	,0000	
135	80	99	,1020D+01	-,4630D+01	,2730D-01	,0000	
136	82	83	,7645D+01	-,2498D+02	,1900D-01	,0000	
137	82	96	,5274D+01	-,1726D+02	,2720D-01	,0000	
138	83	84	,2930D+01	-,6188D+01	,1290D-01	,0000	
139	83	85	,1810D+01	-,6231D+01	,1740D-01	,0000	
140	84	85	,6015D+01	-,1277D+02	,6150D-02	,0000	
141	85	86	,2140D+01	-,7521D+01	,1380D-01	,0000	
142	85	88	,1851D+01	-,9441D+01	,1380D-01	,0000	
143	85	89	,7836	-,5672D+01	,2350D-01	,0000	
144	86	87	,6454	-,4734D+01	,2225D-01	,0000	
145	88	89	,2641D+01	-,1353D+02	,9650D-02	,0000	
146	89	90	,3500D+01	-,1447D+02	,7940D-01	,0000	
147	89	92	,5244D+01	-,2523D+02	,4810D-01	,0000	

linha	de	para	g	b	b ₀	tap	nt
148	90	91	,3327D+01	-,1095D+02	,1070D-01	,0000	
149	91	92	,2189D+01	-,7196D+01	,1635D-01	,0000	
150	92	93	,3284D+01	-,1079D+02	,1090D-01	,0000	
151	92	94	,1763D+01	-,5792D+01	,2030D-01	,0000	
152	92	100	,7103	-,3234D+01	,3860D-01	,0000	
153	92	102	,3755D+01	-,1706D+02	,7300D-02	,0000	
154	93	94	,3808D+01	-,1250D+02	,9400D-02	,0000	
155	94	95	,6415D+01	-,2109D+02	,5550D-02	,0000	
156	94	96	,3251D+01	-,1050D+02	,1150D-01	,0000	
157	94	100	,4836D+01	-,1576D+02	,3020D-01	,0000	
158	95	96	,5206D+01	-,1665D+02	,7350D-02	,0000	
159	96	97	,2127D+01	-,1088D+02	,1200D-01	,0000	
160	98	100	,1181D+01	-,5325D+01	,2380D-01	,0000	
161	99	100	,2596D+01	-,1173D+02	,1080D-01	,0000	
162	100	101	,1659D+01	-,7560D+01	,1640D-01	,0000	
163	100	103	,5312D+01	-,1743D+02	,2680D-01	,0000	
164	100	104	,1033D+01	-,4673D+01	,2705D-01	,0000	
165	100	106	,1078D+01	-,4082D+01	,3100D-01	,0000	
166	101	102	,1871D+01	-,8518D+01	,1420D-01	,0000	
167	103	104	,1709D+01	-,5810D+01	,2035D-01	,0000	
168	103	105	,1828D+01	-,5552D+01	,2040D-01	,0000	
169	103	110	,1136D+01	-,5271D+01	,2305D-01	,0000	
170	104	105	,6507D+01	-,2474D+02	,4950D-02	,0000	
171	105	106	,4391D+01	-,1716D+02	,7150D-02	,0000	
172	105	107	,1460D+01	-,5042D+01	,2360D-01	,0000	
173	105	108	,4641D+01	-,1250D+02	,9200D-02	,0000	
174	106	107	,1460D+01	-,5042D+01	,2360D-01	,0000	
175	108	109	,1117D+02	-,3065D+02	,3800D-02	,0000	
176	109	110	,4225D+01	-,1158D+02	,1010D-01	,0000	
177	110	111	,3557D+01	-,1221D+02	,1000D-01	,0000	
178	110	112	,5248D+01	-,1360D+02	,3100D-01	,0000	
179	114	115	,2027D+02	-,9167D+02	,1400D-02	,0000	

b.3. Sistema de 340 Barras Reduzido do Sistema Sul-Sudeste Brasileiro

b.3.1. Dados de Barra

barra	P	Q	V	delta
1	,4763D+01	,3242D+01	,1050D+01	,0000
2	-,1160D+01	,6600D-02	,1027D+01	,3006D+02
3	-,4970	-,2000	,1001D+01	,4434D+02
4	-,3840	-,1410	,9481	,3122D+02
5	-,1830	,1570D-01	,1011D+01	,3587D+02
6	-,4960	-,2080	,9560	,3505D+02
7	-,7140	-,2690	,9665	,3227D+02
8	,0000	,0000	,1051D+01	,4938D+02
9	,0000	,0000	,1008D+01	,4769D+02
10	,2640D+01	-,6251	,1030D+01	,5358D+02
11	-,4010	-,1600	,9490	,3278D+02
12	-,2990D+01	-,5960	,9722	,3236D+02
13	-,3680	,4210D-01	,9986	,2918D+02
14	-,9860	-,2541	,9719	,3182D+02
15	-,1430	-,6420D-01	,1037D+01	,3944D+02
16	,1220D+01	,2434	,1050D+01	,4398D+02
17	-,5920	-,2560	,9865	,4148D+02
18	-,9610	-,3650	,9586	,3106D+02
19	-,2250D+01	-,7570	,9760	,3303D+02
20	-,5820	-,2550	,9516	,3184D+02
21	-,7230	-,2750	,9614	,3344D+02
22	-,2590	-,9460D-01	,9955	,3347D+02
23	,0000	,0000	,1038D+01	,4022D+02
24	,4370D+01	,5197	,1045D+01	,4568D+02
25	,1504D+01	,1780	,1030D+01	,5163D+02
26	-,3540	-,1350	,1012D+01	,3472D+02
27	-,4050	,7700D-01	,1024D+01	,2775D+02
28	-,5150	-,2080	,9536	,3204D+02
29	-,7460	-,8610D-01	,9729	,3557D+02
30	-,1260D+01	-,4140	,9578	,3086D+02
31	-,1970D+01	-,4530	,9613	,3127D+02
32	-,7440	-,2640	,9617	,3147D+02
33	-,8730	-,3970	,9639	,3176D+02
34	-,1430D+01	-,4710	,9628	,3158D+02
35	-,4500	-,1490	,9585	,3093D+02
36	,0000	,0000	,9982	,3495D+02
37	-,1150D+01	-,4730	,9774	,3824D+02
38	-,9900D-01	-,3490D-01	,9834	,3859D+02
39	-,3620	-,1120	,1012D+01	,4781D+02
40	,1100D+01	,5090	,1040D+01	,5151D+02
41	,2800D+01	,1079D+01	,1040D+01	,5243D+02
42	-,4340	-,1800	,9777	,4021D+02
43	-,4940	,3600	,1025D+01	,3877D+02
44	,1380D+01	,2876	,1040D+01	,4411D+02
45	-,1410D+01	-,8540D-01	,9732	,3758D+02
46	-,3840	-,1550	,9860	,3104D+02
47	-,2800	-,1350	,9983	,3758D+02
48	-,2910	-,1320	,1016D+01	,2751D+02
49	-,9370	-,3170	,9523	,3031D+02
50	-,6310	-,2530	,1023D+01	,3630D+02

barra	P	Q	V	delta
51	-,1150D+01	-,5230	,9810	,3817D+02
52	-,6700	-,2150	,9646	,3020D+02
53	-,4090	-,1630	,1020D+01	,3238D+02
54	-,2710	-,1290	,9602	,3127D+02
55	-,1160	-,5720D-01	,9863	,4252D+02
56	-,3130	-,1200	,1002D+01	,3798D+02
57	-,3080	-,1030	,9663	,3180D+02
58	-,2860	-,7840D-01	,9482	,4105D+02
59	-,2990	-,1310	,9932	,3914D+02
60	-,9490	,3910	,9717	,3610D+02
61	-,1670	-,5600D-01	,9675	,3615D+02
62	-,1730	-,5800D-01	,9733	,3691D+02
63	-,6900D-01	-,2300D-01	,9674	,3626D+02
64	-,3520	-,1170	,9641	,3592D+02
65	-,4350	-,1170	,9502	,3871D+02
66	-,8400D-01	-,2800D-01	,9932	,4418D+02
67	-,7300	-,2920	,9765	,4048D+02
68	-,1240	-,4100D-01	,1001D+01	,4027D+02
69	-,1060D+01	-,1890	,1011D+01	,4062D+02
70	-,1550	-,5200D-01	,1011D+01	,4832D+02
71	-,1050D+01	-,1300	,9846	,3465D+02
72	-,4470	-,2920	,1014D+01	,4224D+02
73	-,1350D+01	-,3655	,9952	,4130D+02
74	-,1350D+01	-,6720	,9949	,4141D+02
75	,0000	,0000	,9982	,4138D+02
76	-,5620	-,2700	,1002D+01	,4163D+02
77	-,1650D+01	-,4710	,9917	,4089D+02
78	-,1190D+01	-,4080	,9974	,4129D+02
79	-,2110D+01	-,3360	,1028D+01	,4992D+02
80	,0000	,0000	,1029D+01	,4987D+02
81	,0000	-,1605D+01	,1034D+01	,4969D+02
82	-,1180D+01	,7120D-01	,9673	,3663D+02
83	-,2480D+01	-,2930	,9644	,2558D+02
84	,0000	,0000	,1044D+01	,5106D+02
85	,1497D+02	-,2260D+01	,1030D+01	,5755D+02
86	-,4340	,9085D-01	,1025D+01	,4475D+02
87	,2500D+01	,7298	,1010D+01	,5172D+02
88	-,1660D+01	-,1200	,1042D+01	,4383D+02
89	-,1710D+01	-,1560	,9791	,3318D+02
90	-,1660D+01	-,2820	,9899	,3340D+02
91	-,1930D+01	-,2980	,9773	,3419D+02
92	-,5780	-,1272	,1008D+01	,4864D+02
93	-,1400D+01	,3294	,9959	,3575D+02
94	-,4270	,7920D-01	,1037D+01	,5110D+02
95	,2250D+01	-,1747D+01	,1020D+01	,5232D+02
96	,7920D+01	-,1198D+01	,1030D+01	,5711D+02
97	-,3670	-,8280D-01	,1008D+01	,4390D+02
98	,5000	,2734	,1030D+01	,5178D+02
99	,1200D+01	,1281	,1030D+01	,5792D+02
100	,2200D+01	,2243	,1030D+01	,5868D+02
101	,6300D+01	,8757	,1030D+01	,5579D+02
102	,1900D+01	,8766	,1040D+01	,4503D+02
103	,1050D+02	,1193D+01	,1050D+01	,6145D+02
104	,6610D+01	,1495	,1040D+01	,5998D+02
105	,6610D+01	,1495	,1040D+01	,5998D+02

barra	P	Q	V	delta
106	,5000D+01	,7061	,1040D+01	,5072D+02
107	,0000	,0000	,1050D+01	,4918D+02
108	,1200D+02	,2261	,1044D+01	,5633D+02
109	,0000	-,1656D+01	,1051D+01	,4719D+02
110	,0000	,0000	,9901	,4471D+02
111	,0000	-,1569D+01	,1023D+01	,4400D+02
112	,0000	-,1563D+01	,1021D+01	,4312D+02
113	,0000	,0000	,1009D+01	,4186D+02
114	-,2850D+01	-,9570	,9873	,3840D+02
115	,0000	-,2193D+01	,1047D+01	,4720D+02
116	-,9700	-,5200D-02	,1010D+01	,4223D+02
117	,0000	-,1576D+01	,1025D+01	,4441D+02
118	,0000	,0000	,1014D+01	,4226D+02
119	,0000	,0000	,1046D+01	,5055D+02
120	-,7750	,2370	,1018D+01	,4732D+02
121	,0000	-,1474D+01	,9914	,3594D+02
122	,0000	-,3194D+01	,1032D+01	,4623D+02
123	-,2380	-,1070	,1048D+01	,4462D+02
124	,0000	-,2080D+01	,1020D+01	,4295D+02
125	,0000	-,1610D+01	,1036D+01	,3768D+02
126	,0000	,0000	,9875	,3545D+02
127	,0000	,0000	,1047D+01	,5206D+02
128	,0000	,0000	,1046D+01	,5241D+02
129	,0000	,0000	,9710	,3173D+02
130	,0000	,0000	,9710	,3173D+02
131	,0000	,0000	,1045D+01	,5276D+02
132	,0000	,0000	,9997	,3981D+02
133	,0000	,0000	,1004D+01	,4199D+02
134	-,4380	-,1170	,9690	,3143D+02
135	-,1730D+01	-,8260	,9500	,3149D+02
136	-,9410	-,2770	,9987	,4911D+02
137	,0000	,0000	,1006D+01	,4939D+02
138	,0000	,0000	,1002D+01	,4457D+02
139	,0000	,0000	,9801	,3939D+02
140	-,1320D+01	-,5910	,9693	,3626D+02
141	-,7220D-01	-,8640	,9743	,3932D+02
142	,0000	,0000	,1025D+01	,5324D+02
143	,0000	,0000	,1025D+01	,5327D+02
144	-,4290	-,1730	,1018D+01	,4938D+02
145	,0000	,0000	,9772	,4264D+02
146	,0000	,0000	,1011D+01	,4698D+02
147	-,1350D+01	-,4570	,9577	,4394D+02
148	,0000	,0000	,1004D+01	,4020D+02
149	-,2490	-,1150D-01	,1012D+01	,4260D+02
150	-,3480	-,3570D-01	,1043D+01	,5512D+02
151	-,9830	-,5730	,9931	,4867D+02
152	,1150	-,1480D+01	,9906	,4486D+02
153	-,1960D+01	,8940	,1019D+01	,4108D+02
154	-,9600	,8500D-01	,9657	,3677D+02
155	-,3520	-,1320	,9860	,4650D+02
156	,0000	-,5965	,9971	,3214D+02
157	-,2720	-,6170D-01	,9801	,2944D+02
158	-,7780	-,1860	,9562	,2722D+02
159	-,1910	-,4900D-01	,9601	,3853D+02
160	-,1110	-,3750D-01	,9901	,4534D+02

barra	P	Q	V	delta
161	-,3990D-01	-,1970D-01	,9774	,2405D+02
162	,2950	-,8280D-01	,1037D+01	,2741D+02
163	-,1470D+01	,4383	,1009D+01	,2133D+02
164	-,4140	-,1040	,1001D+01	,2085D+02
165	-,3120	-,1987	,1000D+01	,2333D+02
166	-,1110D+01	-,1862	,9977	,2179D+02
167	,6200D+02	,7387D+01	,1000D+01	,6062D+02
168	,0000	-,9763D+01	,9931	,5462D+02
169	,0000	-,1577D+01	,1025D+01	,3309D+02
170	,0000	-,3489D+01	,1028D+01	,5137D+02
171	,0000	-,1577D+01	,1025D+01	,3309D+02
172	,0000	-,1577D+01	,1025D+01	,3309D+02
173	,0000	-,3489D+01	,1028D+01	,5137D+02
174	,0000	-,3489D+01	,1028D+01	,5137D+02
175	,0000	,0000	,1010D+01	,4128D+02
176	,0000	,0000	,1022D+01	,4324D+02
177	,0000	,0000	,1022D+01	,4324D+02
178	,0000	-,9960D+01	,1003D+01	,3090D+02
179	,0000	,0000	,9975	,4304D+02
180	,0000	,0000	,9975	,4304D+02
181	,0000	,0000	,9975	,4304D+02
182	,0000	-,9156D+01	,9617	,1732D+02
183	,0000	,0000	,9348	,8477D+01
184	,0000	,0000	,9348	,8477D+01
185	,0000	,0000	,9843	,9849D+01
186	,0000	,0000	,1004D+01	,1037D+02
187	,0000	,1999D+02	,1000D+01	,1087D+02
188	,0000	,0000	,1004D+01	,1037D+02
189	,5100D+02	,6755D+01	,1000D+01	,1184D+02
190	,0000	,0000	,1051D+01	,1150D+02
191	,0000	,0000	,1000D+01	,1184D+02
192	,9680D+01	,3175D+01	,1050D+01	,1337D+02
193	,1200D+02	,4689	,1040D+01	,4608D+02
194	,6000D+01	,2473D+01	,1040D+01	-,1858D+02
195	,2150D+01	-,3150	,1020D+01	,2444D+02
196	,1245D+02	,4878D+01	,1040D+01	-,1809D+02
197	,0000	,0000	,1025D+01	,8784D+01
198	,2290D+01	,6720	,1031D+01	,7035D+01
199	-,1010D+02	,1520D+01	,1021D+01	-,2444D+01
200	-,2380D-01	-,7920	,1026D+01	,2682D+02
201	-,7540D+01	-,2420D+01	,9732	-,3171
202	-,1070D+01	,7450	,9643	,2788D+01
203	,0000	,0000	,9497	-,3063D+01
204	,0000	,0000	,9953	,6635D+01
205	,0000	,0000	,9947	,4471D+01
206	-,9450D+01	-,1710	,1007D+01	-,3468D+02
207	-,1902D+02	,3680D+01	,1015D+01	-,3785D+02
208	-,5740D+01	,3705	,9914	-,7450D+02
209	-,1155D+02	,3280D-01	,1007D+01	-,3611D+02
210	-,1470D+01	,1330D+01	,1005D+01	-,2284D+02
211	-,8260D+01	,2020D+01	,9968	-,4031D+02
212	-,3610D+01	,2450D+01	,1010D+01	-,4167D+02
213	,0000	-,1373D+01	,1028D+01	,6683D+02
214	,1192D+02	-,1289D+01	,1010D+01	,7290D+02
215	-,2290D+01	-,1141D+01	,9771	-,6217D+02

barra	P	Q	V	delta
216	,0000	,2950	,1015D+01	-,4495D+02
217	,0000	,0000	,1076D+01	-,9767
218	,1290D+02	,8702	,1045D+01	,3467D+02
219	,2380D-01	,8130	,1043D+01	,2931D+02
220	,0000	-,3032D+01	,1019D+01	,1664D+02
221	,0000	-,1369D+01	,1003D+01	,6736
222	,0000	-,7977	,1045D+01	,1066D+02
223	-,2950D+01	-,9233D-01	,9748	-,1596D+02
224	,0000	-,1372D+01	,1004D+01	-,3372D+02
225	,0000	,0000	,1042D+01	-,2843D+01
226	,0000	,0000	,1020D+01	-,2511D+02
227	,5140D+01	-,7769	,1042D+01	,3972D+02
228	-,2310	-,1138D+01	,1037D+01	,3865D+02
229	-,1520D+01	,3210	,1041D+01	,3767D+02
230	-,7270D+01	-,1190D+01	,1002D+01	,3864D+02
231	,0000	,8531	,1015D+01	,4241D+02
232	-,3670D+01	-,4240	,9948	,4758D+02
233	,0000	-,2617D+01	,1003D+01	,5549D+02
234	-,3760D+01	-,1350D+01	,1002D+01	,5220D+02
235	-,2730D+01	,7390	,9936	-,4697D+02
236	,6340D+01	-,1940D+01	,1036D+01	,7137D+02
237	,3810D+01	,9847	,1030D+01	,1431D+02
238	,1441D+02	,2732D+01	,1010D+01	,4356D+02
239	,3400D+01	,5955	,1030D+01	,2496D+02
240	-,1877D+02	-,1840D+01	,1009D+01	,8375D+01
241	-,3380D+01	-,6111	,1049D+01	,3784D+02
242	,0000	,0000	,1016D+01	,1830D+02
243	-,1950D+01	-,1370D+01	,1042D+01	,2512D+02
244	,5590D+01	,2529D+01	,1050D+01	,3089D+02
245	-,1023D+02	,4849D+01	,1050D+01	,1570D+02
246	,3780D+01	,2236D+01	,1050D+01	,2254D+02
247	-,5530D+01	,2726D+01	,1020D+01	-,2362D+02
248	,0000	-,6006	,1000D+01	,1114D+01
249	,0000	-,6006	,1000D+01	,1114D+01
250	,0000	,0000	,9996	,1707D+01
251	,0000	,0000	,9996	,1707D+01
252	-,2080D+01	,3030D-01	,9547	-,1027D+02
253	-,1015D+02	-,2957D+01	,9927	,3174D+01
254	-,5520D+01	,1200	,9993	,7069D+01
255	,0000	,0000	,1027D+01	,5890D+01
256	-,4820D+01	,0000	,1003D+01	-,6596
257	,0000	,0000	,1002D+01	,4756
258	,0000	,0000	,1002D+01	,4756
259	,0000	,0000	,9386	-,7667D+01
260	-,3890D+01	,0000	,1004D+01	,2640D+01
261	,2190D+01	,2116D+01	,1030D+01	,5707D+01
262	,3000D-01	,2454	,1020D+01	,5959D+01
263	,0000	,0000	,9939	,4527D+01
264	,0000	,0000	,9937	-,5148
265	-,1100D+02	,0000	,9907	,6531D+01
266	,0000	,0000	,9962	,7323D+01
267	,2620	,9960D-01	,9937	,4057D+01
268	,0000	,0000	,9932	,3694D+01
269	-,2350D+01	,0000	,9932	,3694D+01
270	-,8650D+01	,2870D-01	,9368	-,8716D+01

barra	P	Q	V	delta
271	-,8520D+01	,0000	,9479	-,3960D+01
272	-,5850D+01	-,1075D+01	,9466	-,4424D+01
273	-,4090D+01	-,1076D+01	,9470	-,4565D+01
274	-,8920D+01	,0000	,9930	-,7703
275	-,3980D+01	,0000	,9982	,1192D+01
276	-,5940D+01	,0000	,9482	-,3991D+01
277	-,7200D+01	-,2363D+01	,9923	,4113D+01
278	-,1076D+02	,0000	,9883	,4353D+01
279	-,1066D+02	,1600	,9934	,4016D+01
280	,0000	,0000	,9938	,3525D+01
281	-,8000D+01	,0000	,9936	,2613D+01
282	,0000	,0000	,9996	,1710D+01
283	,0000	,0000	,9938	,2585D+01
284	-,2300D-02	,2730	,9994	,7009D+01
285	,0000	,0000	,9977	,8557D+01
286	-,1220	,3640	,9699	-,5764D+01
287	,0000	-,2691D+01	,9471	-,4275D+01
288	,1236D+02	-,9947	,1035D+01	,4021D+02
289	,5730D+01	,1012D+01	,1050D+01	,4936D+02
290	,2867D+02	-,8014	,1037D+01	,4457D+02
291	,1075D+02	-,2799D+01	,1010D+01	,4439D+02
292	,1790D+01	-,2336	,1010D+01	,4195D+02
293	,1350D+02	-,6890	,1015D+01	,5499D+02
294	,4500D+01	,5472	,1030D+01	,5297D+02
295	,3000D+01	-,8087D-01	,1030D+01	,5857D+02
296	-,3170D+01	-,5687D+01	,1008D+01	,1772D+02
297	,0000	-,1849D+01	,1014D+01	,3170D+02
298	,0000	,0000	,1047D+01	,3458D+02
299	-,2790D+01	,1480D+01	,1047D+01	,3497D+02
300	-,2150D+01	-,7545D+01	,1006D+01	,2221D+02
301	-,1280D+01	-,3110D+01	,1002D+01	,7976D+01
302	-,1270	,4410D+01	,1014D+01	,5704D+01
303	,0000	,0000	,1037D+01	,4038D+02
304	-,2030D+01	,2240	,1001D+01	,9067D+01
305	,0000	,0000	,1045D+01	,3895D+02
306	,0000	,0000	,1036D+01	,3967D+02
307	-,1200	-,1200D-01	,1050D+01	,3717D+02
308	-,5850D+01	-,1854	,1007D+01	,1542D+02
309	-,9100D+01	-,1450D+01	,1001D+01	,1015D+02
310	-,5370D+01	-,3820	,9988	,8051D+01
311	-,8790D+01	,2550	,9995	,7320D+01
312	-,5770D+01	-,7070	,9990	,7349D+01
313	,3710D+01	,1237D+01	,1020D+01	,3072D+02
314	,7050	-,3610D-01	,1000D+01	,2102D+02
315	-,2090D+01	,2480D-01	,1021D+01	,3055D+02
316	-,1660D+01	-,2650	,9912	,1411D+02
317	-,1580D+01	-,2000	,9598	,9137D+01
318	-,6840	-,1120	,1008D+01	,2627D+02
319	-,7010D+01	-,1210D+01	,9919	,9159D+01
320	-,1600D+01	,1960	,9895	,1649D+02
321	,2770D-01	-,2660	,1011D+01	,2476D+02
322	,0000	,2774	,1010D+01	,7349D+01
323	,0000	,0000	,1028D+01	,3237D+02
324	,2690D+01	,3225	,1035D+01	,3784D+02
325	-,1120D+01	,2230	,1042D+01	,3456D+02

barra	P	Q	V	delta
326	-,1840	-,1860D-01	,1025D+01	,3859D+02
327	-,2520	,1280	,1037D+01	,5314D+02
328	-,1840D+01	,3000	,1021D+01	,3796D+02
329	,0000	,0000	,1048D+01	,5036D+02
330	,0000	,0000	,1048D+01	,5056D+02
331	-,3750	,5990D-01	,1048D+01	,4751D+02
332	,0000	,0000	,1036D+01	,4298D+02
333	,0000	,0000	,1027D+01	,3476D+02
334	-,1610D+01	,1160	,1007D+01	,1682D+02
335	-,1220D+01	,1730	,1040D+01	,3569D+02
336	,0000	,0000	,1043D+01	,3902D+02
337	-,5200D+01	,3610	,9696	-,7719D+01
338	-,5590D+01	-,3190	,1005D+01	,8950D+01
339	,2490D+02	,2660D+01	,1030D+01	,2311D+02
340	-,7000	,0000	,9810	,3690D+02

b.3.2. Dados de linhas

linha	de	para	g	b	b ₀	tap	nt
1	1	199	,0000	-,1042D+03	,0000	,0000	
2	2	23	,8533	-,3568D+01	,2336	,0000	
3	2	26	,1528D+01	-,7635D+01	,1129	,0000	
4	2	27	,2374D+01	-,1186D+02	,7268D-01	,0000	
5	2	53	,1721D+01	-,9572D+01	,9285D-01	,0000	
6	3	9	,5010D+01	-,2518D+02	,3420D-01	,0000	
7	3	26	,1195D+01	-,5964D+01	,1445	,0000	
8	4	28	,3427D+01	-,1707D+02	,5045D-01	,0000	
9	4	135	,6305D+01	-,3153D+02	,2735D-01	,0000	
10	5	22	,3846D+01	-,1923D+02	,4500D-01	,0000	
11	5	43	,3846D+01	-,1923D+02	,4500D-01	,0000	
12	6	20	,2428D+01	-,1216D+02	,7050D-01	,0000	
13	6	39	,1027D+01	-,5139D+01	,1696	,0000	
14	7	19	,1625D+02	-,8342D+02	,3970D-01	,0000	
15	7	135	,6132D+01	-,3138D+02	,1054	,0000	
16	8	9	,0000	-,8000D+02	,0000	,9509	
17	8	10	,0000	-,3333D+02	,0000	1,000	8
18	9	37	,8729	-,1261D+02	,1744	,0000	
19	9	39	,7073D+02	-,3360D+03	,1026D-01	,0000	
20	11	135	,6618D+01	-,3654D+02	,2420D-01	,0000	
21	11	151	,8484	-,4392D+01	,1888	,0000	
22	12	14	,7906D+01	-,4320D+02	,2066D-01	,0000	
23	12	19	,6900D+02	-,3611D+03	,4360D-01	,0000	
24	12	23	,1706D+01	-,9503D+01	,3767	,0000	
25	12	34	,3121D+02	-,1460D+03	,2700D-01	,0000	
26	12	37	,8110	-,4052D+01	,2127	,0000	
27	12	57	,6673D+01	-,2892D+02	,1251	,0000	
28	12	130	,4406D+01	-,2286D+02	,3617D-01	,0000	
29	13	46	,3808D+01	-,1904D+02	,4530D-01	,0000	
30	13	48	,1438D+01	-,7198D+01	,1197	,0000	
31	14	23	,9384	-,5249D+01	,1686	,0000	
32	14	130	,9477D+01	-,4917D+02	,1683D-01	,0000	
33	14	134	,3903D+01	-,2182D+02	,4056D-01	,0000	
34	15	16	,0000	-,1416D+02	,0000	1,000	15

linha	de	para	g	b	b ₀	tap	nt
35	15	23	,4657D+01	-,2575D+02	,3450D-01	,0000	
36	15	50	,4716D+01	-,2382D+02	,4065D-01	,0000	
37	17	38	,3378D+01	-,1680D+02	,5130D-01	,0000	
38	17	138	,5010D+01	-,2518D+02	,3420D-01	,0000	
39	18	57	,1445D+02	-,7172D+02	,1195D-01	,0000	
40	19	29	,2527D+01	-,1260D+02	,6840D-01	,0000	
41	19	31	,2025D+02	-,1052D+03	,7740D-01	,0000	
42	19	33	,1024D+02	-,5392D+02	,1850D-01	,0000	
43	19	121	,0000	-,2400D+03	,0000	1,000	19
44	20	34	,4266D+01	-,2147D+02	,4015D-01	,0000	
45	21	54	,3663D+01	-,1832D+02	,4702D-01	,0000	
46	21	148	,2800D+01	-,1118D+02	,7312D-01	,0000	
47	22	36	,5010D+01	-,2518D+02	,3420D-01	,0000	
48	22	46	,5774D+01	-,2878D+02	,2995D-01	,0000	
49	23	24	,0000	-,4237D+02	,0000	1,000	23
50	23	43	,6043D+01	-,3389D+02	,2615D-01	,0000	
51	25	43	,1143	-,6388D+01	,0000	,0000	
52	27	48	,3446D+01	-,1720D+02	,5010D-01	,0000	
53	28	148	,1022D+01	-,5251D+01	,1578	,0000	
54	29	55	,2175D+01	-,1084D+02	,7950D-01	,0000	
55	30	31	,1763D+02	-,1108D+03	,9850D-02	,0000	
56	30	35	,6631D+02	-,3581D+03	,3055D-02	,0000	
57	31	33	,8265D+01	-,4306D+02	,2313D-01	,0000	
58	31	35	,2617D+02	-,1596D+03	,6850D-02	,0000	
59	32	34	,7326D+02	-,3663D+03	,9410D-02	,0000	
60	36	47	,2887D+01	-,1439D+02	,5985D-01	,0000	
61	37	45	,8453D+01	-,4227D+02	,8157D-01	,0000	
62	38	51	,3063D+02	-,1515D+03	,2319D-01	,0000	
63	38	148	,2491D+01	-,1247D+02	,6915D-01	,0000	
64	39	40	,0000	-,1618D+02	,0000	1,000	39
65	39	41	,0000	-,3300D+02	,0000	1,000	39
66	39	42	,2008D+01	-,9947D+01	,8955D-01	,0000	
67	42	45	,4132D+01	-,2044D+02	,4350D-01	,0000	
68	43	44	,0000	-,1391D+02	,0000	1,000	43
69	43	56	,4371D+01	-,1668D+02	,4875D-01	,0000	
70	43	57	,3241D+01	-,1459D+02	,2351	,0000	
71	46	52	,3073D+01	-,1708D+02	,5180D-01	,0000	
72	47	148	,4055D+01	-,2015D+02	,4275D-01	,0000	
73	49	57	,7022D+01	-,3537D+02	,2435D-01	,0000	
74	50	53	,2018D+01	-,1127D+02	,7865D-01	,0000	
75	51	56	,3450D+01	-,1437D+02	,5715D-01	,0000	
76	52	54	,4492D+01	-,2241D+02	,3845D-01	,0000	
77	55	137	,2254D+01	-,1170D+02	,7067D-01	,0000	
78	58	65	,3675D+01	-,1276D+02	,1275D-01	,0000	
79	58	147	,4485D+01	-,1560D+02	,0000	,0000	
80	59	62	,4533D+01	-,1130D+02	,4030D-01	,0000	
81	59	133	,0000	-,1645D+02	,0000	1,000	133
82	60	140	,4359D+02	-,1073D+03	,4300D-02	,0000	
83	60	141	,7598	-,1441D+02	,0000	,0000	
84	61	140	,1380D+02	-,4964D+02	,2500D-02	,0000	
85	61	154	,1526D+01	-,5516D+01	,2265D-01	,0000	
86	62	63	,1043D+02	-,2576D+02	,1800D-01	,0000	
87	63	64	,1568D+02	-,3869D+02	,1200D-01	,0000	
88	64	140	,4668D+01	-,1152D+02	,4030D-01	,0000	
89	65	147	,1290D+01	-,4943D+01	,0000	,0000	

linha	de	para	g	b	b ₀	tap	nt
90	65	154	,4074D+01	-,1594D+02	,1165D-01	,0000	
91	66	67	,4037D+01	-,9474D+01	,4785D-01	,0000	
92	66	70	,2140D+01	-,5185D+01	,2080D-01	,0000	
93	66	144	,1529D+01	-,3410D+01	,3240D-01	,0000	
94	67	68	,2846D+01	-,7028D+01	,6610D-01	,0000	
95	67	69	,9986	-,2468D+01	,4710D-01	,0000	
96	68	69	,6722D+01	-,1658D+02	,2800D-01	,0000	
97	69	145	,0000	-,3290D+02	,0000	,960	145
98	69	153	,2634D+01	-,6507D+01	,7150D-01	,0000	
99	70	144	,1067D+02	-,2635D+02	,4355D-02	,0000	
100	71	89	,6657	-,2526D+01	,0000	,0000	
101	71	90	,4293	-,3255D+01	,0000	,0000	
102	71	91	,3632D+01	-,1898D+02	,4895D-01	,0000	
103	71	126	,7668D+01	-,4178D+02	,1149	,0000	
104	71	132	,1627D+01	-,8404D+01	,9875D-01	,0000	
105	72	73	,3921D+02	-,2215D+02	,3975D-01	,0000	
106	72	93	,2487D+01	-,1263D+02	,6705D-01	,0000	
107	72	118	,0000	-,1000D+05	,1000D-03	,0000	
108	73	75	,8333D+02	-,2500D+03	,5405D-02	,0000	
109	73	76	-,3720D-01	-,1122D+01	,0000	,0000	
110	73	77	,1013D+02	-,5443D+02	,1610D-01	,0000	
111	73	116	,1110	-,1173D+01	,0000	,0000	
112	74	77	,1364	-,1843D+01	,0000	,0000	
113	74	78	,8887D-01	-,1918D+01	,0000	,0000	
114	74	86	,2577D+01	-,1308D+02	,6465D-01	,0000	
115	74	116	,5948D+01	-,2999D+02	,3230D-01	,0000	
116	75	76	,6328D+02	-,3701D+03	,9150D-02	,0000	
117	75	78	,1155D+03	-,6698D+03	,5200D-02	,0000	
118	76	116	,3262D+02	-,1959D+03	,1875D-01	,0000	
119	77	86	,3209D+01	-,1597D+02	,5545D-01	,0000	
120	77	116	,2370	-,1084D+01	,0000	,0000	
121	78	116	,1057	-,1531D+01	,0000	,0000	
122	79	80	,1931D+02	-,1158D+03	,8000D-02	,0000	
123	79	88	,7704	-,3094D+01	,0000	,0000	
124	79	94	,2868	-,1096D+01	,0000	,0000	
125	79	150	,4015D+01	-,2534D+02	,1383	,0000	
126	80	81	,0000	-,2538D+02	,0000	1,000	81
127	81	94	,1118D+02	-,1361D+03	,4471	,0000	
128	81	122	,4594D+01	-,5710D+02	,1064D+01	,0000	
129	82	88	,6194	-,2168D+01	,0000	,0000	
130	82	91	,7945	-,2048D+01	,0000	,0000	
131	82	132	,0000	-,1834D+02	,0000	1,043	132
132	83	93	,1076D+01	-,5659D+01	,0000	,0000	
133	83	126	,1807D+01	-,9429D+01	,8575D-01	,0000	
134	83	321	,1829D+01	-,9361D+01	,8910D-01	,0000	
135	84	85	,0000	-,1220D+03	,0000	,990	84
136	84	119	,1252D+03	-,1577D+04	,1563	,0000	
137	86	87	,0000	-,2075D+02	,0000	1,043	86
138	88	91	,2437	-,1233D+01	,0000	,0000	
139	88	123	,2226D+02	-,1157D+03	,2860D-01	,0000	
140	89	90	,5905	-,8041D+01	,0000	,0000	
141	89	126	,6436D+01	-,4065D+02	,2155D-01	,0000	
142	90	126	,1382D+02	-,7484D+02	,6300D-01	,0000	
143	90	315	,3942D+01	-,2124D+02	,2223	,0000	
144	91	126	,2572D+01	-,1185D+02	,7065D-01	,0000	

linha	de	para	g	b	b ₀	tap	nt
145	91	132	,2312D+01	-,1199D+02	,6920D-01	,0000	
146	92	150	,2251D+01	-,1153D+02	,7330D-01	,0000	
147	92	152	,2392D+01	-,1224D+02	,6903D-01	,0000	
148	93	120	,9120	-,4598D+01	,0000	,0000	
149	94	95	,0000	-,1000D+03	,0000	1,000	95
150	94	127	,7603D+01	-,9611D+02	,6317	,0000	
151	96	131	,0000	-,9709D+02	,0000	1,000	131
152	97	120	,2751D+01	-,1406D+02	,5930D-01	,0000	
153	97	133	,2874D+01	-,1483D+02	,5577D-01	,0000	
154	98	144	,0000	-,1149D+02	,0000	1,010	144
155	99	142	,0000	-,1393D+02	,0000	1,000	142
156	100	143	,0000	-,2210D+02	,0000	1,000	143
157	101	143	,0000	-,1354D+03	,0000	1,000	143
158	102	148	,0000	-,2159D+02	,0000	1,000	148
159	103	150	,0000	-,8701D+02	,0000	1,000	150
160	104	128	,0000	-,4617D+02	,0000	1,000	104
161	105	128	,0000	-,4617D+02	,0000	1,000	105
162	106	122	,0000	-,5952D+02	,0000	1,000	106
163	107	108	,0000	-,8803D+02	,0000	1,000	107
164	107	109	,9413D+01	-,1189D+03	,5110	,0000	
165	107	115	,1538D+02	-,1945D+03	,3123	,0000	
166	109	121	,1994D+01	-,2516D+02	,2413D+01	,0000	
167	109	127	,3750D+01	-,4753D+02	,1278D+01	,0000	
168	109	138	,0000	-,8000D+02	,0000	1,050	109
169	110	115	,0000	-,2536D+02	,0000	,950	110
170	110	145	,6251D+01	-,3194D+02	,1056	,0000	
171	111	112	,4976D+01	-,6290D+02	,9649	,0000	
172	111	116	,0000	-,1600D+03	,0000	1,000	116
173	111	117	,1699D+02	-,2142D+03	,2839	,0000	
174	111	119	,2868D+01	-,3624D+02	,1675D+01	,0000	
175	112	113	,0000	-,1600D+03	,0000	1,000	113
176	112	115	,2630D+01	-,3328D+02	,1824D+01	,0000	
177	113	114	,0000	-,5757D+02	,0000	1,000	114
178	113	139	,5369D+01	-,2767D+02	,1213	,0000	
179	113	146	,2544D+01	-,1320D+02	,2509	,0000	
180	114	154	,6528D+01	-,1763D+02	,2575D-01	,0000	
181	115	119	,3850D+01	-,4859D+02	,1249D+01	,0000	
182	115	121	,2540D+01	-,3216D+02	,1888D+01	,0000	
183	116	139	,1998D+01	-,1034D+02	,8025D-01	,0000	
184	116	141	,2153D+01	-,1103D+02	,7669D-01	,0000	
185	116	149	,1492D+01	-,7659D+01	,1080	,0000	
186	117	118	,0000	-,8000D+02	,0000	1,010	117
187	117	119	,3222D+01	-,4073D+02	,1490D+01	,0000	
188	119	120	,0000	-,2536D+02	,0000	1,050	119
189	119	124	,3915D+01	-,4947D+02	,1227D+01	,0000	
190	119	131	,1138D+02	-,1434D+03	,4259	,0000	
191	120	149	,1373D+01	-,7124D+01	,1166	,0000	
192	120	150	,2380D+01	-,1229D+02	,2704	,0000	
193	122	123	,0000	-,1600D+03	,0000	1,020	123
194	122	125	,1950D+01	-,2465D+02	,2463D+01	,0000	
195	123	156	,1457D+01	-,1112D+02	,4114	,0000	
196	124	125	,5626D+01	-,7129D+02	,8517	,0000	
197	124	127	,4040D+01	-,5123D+02	,1185D+01	,0000	
198	124	176	,0000	,1667D+04	,0000	1,000	176
199	125	126	,0000	-,1600D+03	,0000	,950	126

linha	de	para	g	b	b ₀	tap	nt
200	125	333	,5606D+01	-,7251D+02	,8021	,0000	
201	127	128	,0000	-,1980D+04	,0000	1,000	127
202	127	131	,1138D+02	-,1434D+03	,4259	,0000	
203	129	130	,0000	-,3383D+02	,0000	1,000	129
204	130	134	,1183D+02	-,6146D+02	,1346D-01	,0000	
205	132	150	,2040D+01	-,1057D+02	,3143	,0000	
206	133	149	,4736D+01	-,2458D+02	,3365D-01	,0000	
207	134	135	,2011D+01	-,7458D+01	,1140	,0000	
208	135	148	,8088	-,4105D+01	,2084	,0000	
209	136	137	,5100D+01	-,3892D+02	,2939D-01	,0000	
210	136	143	,2933D+01	-,1513D+02	,5480D-01	,0000	
211	136	151	,1068D+02	-,5453D+02	,1686D-01	,0000	
212	137	143	,3062D+01	-,2335D+02	,4897D-01	,0000	
213	138	148	,5867D+01	-,3026D+02	,1096	,0000	
214	138	152	,5867D+01	-,3026D+02	,1096	,0000	
215	139	140	,0000	-,3236D+02	,0000	1,000	140
216	139	141	,1935D+02	-,9932D+02	,8520D-02	,0000	
217	140	154	,1110D+01	-,3801D+01	,0000	,0000	
218	142	143	,2468D+03	-,1305D+04	,6400D-03	,0000	
219	142	144	,0000	-,2536D+02	,0000	1,000	144
220	143	146	,5414D+01	-,2795D+02	,2688	,0000	
221	143	151	,3798D+01	-,1963D+02	,4215D-01	,0000	
222	144	155	,4246D+01	-,1544D+02	,3010D-01	,0000	
223	146	147	,0000	-,4058D+02	,0000	1,050	146
224	147	155	,3024D+01	-,1100D+02	,4220D-01	,0000	
225	150	152	,1174D+01	-,6070D+01	,1369	,0000	
226	152	153	,0000	-,3061D+02	,0000	,0000	
227	156	157	,0000	-,1645D+02	,0000	1,000	157
228	156	165	,8051	-,6144D+01	,1861	,0000	
229	156	166	,6168	-,4707D+01	,2279	,0000	
230	157	158	,2282D+01	-,1180D+02	,9085D-02	,0000	
231	158	159	,9563	-,2656D+01	,4100D-01	,0000	
232	158	161	,1437D+01	-,3729D+01	,2840D-01	,0000	
233	159	160	,2194D+01	-,5690D+01	,1890D-01	,0000	
234	160	327	,1767D+01	-,5497D+01	,2167D-01	,0000	
235	161	164	,1003D+01	-,2602D+01	,4070D-01	,0000	
236	162	163	,4806D+01	-,1200D+02	,1514	,0000	
237	162	307	,2630D+01	-,6524D+01	,2792	,0000	
238	163	164	,5917D+01	-,2959D+02	,4680D-02	,0000	
239	163	165	,8423	-,9350D+01	,0000	,0000	
240	163	166	,9278	-,2454D+01	,0000	,0000	
241	165	166	,1339D+01	-,1070D+02	,1244	,0000	
242	167	168	,0000	-,5970D+03	,0000	1,000	168
243	168	169	,2250D+01	-,5510D+02	,4343D+01	,0000	
244	168	171	,2250D+01	-,5510D+02	,4343D+01	,0000	
245	168	172	,2250D+01	-,5510D+02	,4343D+01	,0000	
246	169	175	,0000	,1379D+03	,0000	,0000	
247	170	175	,0000	,1282D+03	,0000	,0000	
248	170	178	,2584D+01	-,6400D+02	,3727D+01	,0000	
249	171	175	,0000	,1379D+03	,0000	,0000	
250	172	175	,0000	,1379D+03	,0000	,0000	
251	173	175	,0000	,1282D+03	,0000	,0000	
252	173	178	,2584D+01	-,6400D+02	,3727D+01	,0000	
253	174	175	,0000	,1282D+03	,0000	,0000	
254	174	178	,2584D+01	-,6400D+02	,3727D+01	,0000	

linha	de	para	g	b	b ₀	tap	nt
255	175	176	,0000	-,2532D+03	,0000	1,000	175
256	176	177	,0000	-,5797D+02	,0000	1,000	177
257	178	179	,0000	,1092D+03	,0000	,0000	
258	178	180	,0000	,1092D+03	,0000	,0000	
259	178	181	,0000	,1092D+03	,0000	,0000	
260	179	182	,2213D+01	-,5449D+02	,4385D+01	,0000	
261	180	182	,2213D+01	-,5449D+02	,4385D+01	,0000	
262	181	182	,2213D+01	-,5449D+02	,4385D+01	,0000	
263	182	183	,0000	-,1266D+03	,0000	1,000	182
264	182	186	,0000	-,4301D+03	,0000	1,000	182
265	183	184	,0000	-,2899D+02	,0000	1,000	184
266	183	185	,0000	,8333D+03	,0000	1,050	185
267	185	223	,2626D+01	-,4121D+02	,1003D+01	,0000	
268	186	187	,0000	,5714D+04	,0000	1,000	187
269	186	188	,0000	-,1500D+03	,0000	,0000	
270	187	189	,5511D+01	-,7597D+02	,6206	,0000	
271	187	254	,2194D+02	-,2261D+03	,1388	,0000	
272	187	265	,2701D+02	-,2881D+03	,2385	,0000	
273	187	285	,3173D+02	-,3564D+03	,2579	,0000	
274	189	190	,0000	-,2174D+03	,0000	1,050	190
275	189	191	,0000	-,1000D+03	,0000	1,000	189
276	189	203	,8056D+01	-,1151D+03	,4441	,0000	
277	189	263	,9628D+01	-,1543D+03	,3834	,0000	
278	190	222	,4864D+01	-,7782D+02	,5310	,0000	
279	192	197	,0000	-,1124D+03	,0000	,999	197
280	193	227	,0000	-,1000D+03	,0000	,0000	
281	194	226	,0000	-,5076D+02	,0000	1,020	226
282	195	200	,3829D+01	-,4062D+02	,2072	,0000	
283	195	228	,1507D+01	-,1591D+02	,5365	,0000	
284	195	242	,6766D+01	-,7183D+02	,1168	,0000	
285	196	226	,0000	-,9804D+02	,0000	1,020	226
286	197	198	,9338D+01	-,9618D+02	,8765D-01	,0000	
287	197	199	,2277D+01	-,2406D+02	,3514	,0000	
288	197	201	,2961D+01	-,3238D+02	,1048D+01	,0000	
289	197	240	,1202D+02	-,1305D+03	,6145D-01	,0000	
290	197	242	,2670D+01	-,2832D+02	,2978	,0000	
291	198	199	,3437D+01	-,3029D+02	,2735	,0000	
292	199	201	,5052D+01	-,4705D+02	,6773	,0000	
293	199	210	,2955D+01	-,3206D+02	,1058D+01	,0000	
294	199	240	,1591D+01	-,1800D+02	,0000	,0000	
295	199	243	,1271	-,1819D+01	,0000	,0000	
296	199	245	,2783	-,3207D+01	,0000	,0000	
297	199	247	,3121	-,1688D+01	,0000	,0000	
298	200	219	,0000	-,3912D+02	,0000	,0000	
299	201	202	,2375D+01	-,2522D+02	,3352	,0000	
300	201	203	,3273D+01	-,3301D+02	,9265	,0000	
301	201	204	,1464D+01	-,1569D+02	,5446	,0000	
302	201	217	,0000	,5556D+02	,0000	,950	201
303	201	309	,6913	-,2228D+01	,0000	,0000	
304	201	338	,8163	-,5644D+01	,0000	,0000	
305	202	203	,3408D+01	-,3604D+02	,2339	,0000	
306	202	225	,0000	,5556D+02	,0000	,950	202
307	203	259	,1204D+02	-,1199D+03	,6292D-01	,0000	
308	203	271	,7663D+02	-,1303D+04	,3589D-01	,0000	
309	203	276	,4122D+02	-,4040D+03	,8745D-01	,0000	

linha	de	para	g	b	b ₀	tap	nt
310	204	205	,0000	-,1010D+03	,0000	1,000	204
311	204	266	,4494D+02	-,4719D+03	,1425D-01	,0000	
312	205	267	,3120D+02	-,1950D+03	,4100D-02	,0000	
313	205	269	,1827D+02	-,1735D+03	,4150D-02	,0000	
314	206	207	,1794D+02	-,3398D+03	,6294	,0000	
315	206	209	,2109D+02	-,4588D+03	,4700	,0000	
316	206	224	,6754D+02	-,1223D+04	,1755	,0000	
317	206	226	,7238D+01	-,1145D+03	,1476D+01	,0000	
318	208	215	,2575D+01	-,2820D+02	,1214D+01	,0000	
319	210	211	,2958D+01	-,3222D+02	,1052D+01	,0000	
320	211	212	,1766D+02	-,1617D+03	,1959	,0000	
321	211	216	,0000	,1667D+03	,0000	1,010	211
322	211	235	,8501D+01	-,9681D+02	,3392	,0000	
323	213	214	,0000	-,1087D+03	,0000	1,000	214
324	213	233	,5787D+01	-,8864D+02	,4232D+01	,0000	
325	213	236	,4868D+01	-,7464D+02	,2234D+01	,0000	
326	215	235	,3091D+01	-,3222D+02	,1095D+01	,0000	
327	216	224	,0000	-,7143D+02	,0000	1,050	224
328	217	221	,0000	-,2381D+02	,0000	1,050	221
329	218	219	,0000	-,1266D+03	,0000	,0000	
330	219	220	,4016D+01	-,6861D+02	,2177D+01	,0000	
331	219	298	,3369D+01	-,5080D+02	,7795	,0000	
332	220	221	,2612D+01	-,4032D+02	,1043D+01	,0000	
333	220	222	,2720D+01	-,4114D+02	,1019D+01	,0000	
334	221	223	,2495D+01	-,3715D+02	,1132D+01	,0000	
335	222	225	,0000	-,2381D+02	,0000	1,050	222
336	223	224	,5624D+01	-,8366D+02	,2003D+01	,0000	
337	223	226	,4509D+01	-,7063D+02	,5876	,0000	
338	223	337	,6126D+01	-,8729D+02	,5175	,0000	
339	224	226	,4224D+01	-,6182D+02	,6760	,0000	
340	227	228	,0000	-,1764D+03	,0000	,0000	
341	227	241	,2775D+01	-,4292D+02	,9777	,0000	
342	227	244	,4639D+01	-,7164D+02	,5745	,0000	
343	228	229	,0000	-,8264D+02	,0000	,0000	
344	228	231	,3310D+01	-,3587D+02	,9421	,0000	
345	230	231	,0000	-,1087D+03	,0000	1,000	231
346	231	234	,5166D+01	-,5678D+02	,1336D+01	,0000	
347	232	234	,0000	-,5480D+02	,0000	,0000	
348	232	340	,8326	-,3887D+01	,1700	,0000	
349	233	234	,0000	-,3115D+03	,0000	1,000	234
350	237	240	,0000	-,3546D+02	,0000	,0000	
351	238	241	,0000	-,1299D+03	,0000	,950	238
352	239	242	,0000	-,2801D+02	,0000	,0000	
353	240	241	,2238	-,9618D+01	,0000	,0000	
354	240	242	,3172D+01	-,3622D+02	,2229	,0000	
355	240	243	,6805	-,5841D+01	,0000	,0000	
356	240	245	,1151D+01	-,3518D+02	,0000	,0000	
357	240	247	,4023	-,3138D+01	,0000	,0000	
358	241	245	,6329	-,7202D+01	,0000	,0000	
359	241	298	,4310D+01	-,7328D+02	,5638	,0000	
360	243	244	,1004D+02	-,1581D+03	,2580	,0000	
361	243	245	,2549	-,4302D+01	,0000	,0000	
362	243	246	,1542D+02	-,2262D+03	,1820	,0000	
363	243	247	,2394	-,1725D+01	,0000	,0000	
364	245	246	,7540D+01	-,1118D+03	,3635	,0000	

linha	de	para	g	b	b ₀	tap	nt
365	245	247	,4717	-,3062D+01	,0000	,0000	
366	248	257	,4000D+02	-,2200D+03	,7100D-02	,0000	
367	248	260	,1525D+02	-,8828D+02	,1775D-01	,0000	
368	249	258	,4000D+02	-,2200D+03	,7100D-02	,0000	
369	249	260	,1525D+02	-,8828D+02	,1775D-01	,0000	
370	250	260	,1525D+02	-,8828D+02	,1775D-01	,0000	
371	250	275	,3375D+02	-,2170D+03	,7300D-02	,0000	
372	250	282	,0000	-,1000D+05	,0000	,0000	
373	251	260	,1525D+02	-,8828D+02	,1775D-01	,0000	
374	251	275	,3375D+02	-,2170D+03	,7300D-02	,0000	
375	251	282	,0000	-,1000D+05	,0000	,0000	
376	252	286	,5261D+01	-,2774D+02	,3075D-01	,0000	
377	253	280	,9231D+02	-,1662D+04	,1859D+01	,0000	
378	254	255	,0000	-,6289D+02	,0000	,0000	
379	254	279	,1589D+02	-,1498D+03	,5715D-01	,0000	
380	254	284	,6870D+01	-,6733D+02	,0000	,0000	
381	255	261	,5099D+02	-,4488D+03	,1500D-01	,0000	
382	256	257	,5935D+01	-,1217D+03	,3635	,0000	
383	256	258	,5935D+01	-,1217D+03	,3635	,0000	
384	259	270	,5155D+02	-,5326D+03	,1640D-01	,0000	
385	260	302	,3000D+02	-,2120D+03	,2020	,0000	
386	261	262	,0000	-,6223D+01	,0000	,956	262
387	261	274	,5597D+01	-,2858D+02	,2770D-01	,0000	
388	263	264	,0000	-,6289D+02	,0000	,0000	
389	263	277	,8439D+02	-,9928D+03	,1440D+01	,0000	
390	263	280	,6154D+02	-,1108D+04	,4660D-01	,0000	
391	263	284	,2829D+02	-,2829D+03	,6420D-01	,0000	
392	264	274	,2264D+03	-,1208D+04	,4000D-02	,0000	
393	265	278	,1794D+02	-,2883D+03	,1920	,0000	
394	266	285	,2028D+02	-,2637D+03	,3932D-01	,0000	
395	267	286	,1836D+01	-,9819D+01	,0000	,0000	
396	268	269	,3846D+03	-,1923D+04	,6000D-03	,0000	
397	271	287	,1196D+03	-,1993D+04	,2750D-01	,0000	
398	272	287	,2171D+03	-,2481D+04	,5760	,0000	
399	273	287	,8197D+02	-,9016D+03	,1584D+01	,0000	
400	279	284	,5258D+01	-,5100D+02	,0000	,0000	
401	280	281	,3255D+02	-,5696D+03	,8186D-01	,0000	
402	281	283	,1220D+03	-,2013D+04	,2751D-01	,0000	
403	282	283	,0000	-,6289D+02	,0000	1,000	282
404	284	304	,0000	-,4167D+03	,0000	1,000	284
405	285	312	,0000	-,4167D+03	,0000	1,000	285
406	286	311	,1284	-,2132D+01	,0000	,0000	
407	286	312	,1673	-,2876D+01	,0000	,0000	
408	286	337	-,2757	-,1555D+02	,0000	,0000	
409	288	299	,0000	-,1250D+03	,0000	,0000	
410	289	332	,0000	-,4739D+02	,0000	1,000	332
411	290	305	,0000	-,2703D+03	,0000	,0000	
412	291	306	,0000	-,1250D+03	,0000	,0000	
413	292	307	,0000	-,2075D+02	,0000	1,025	307
414	293	329	,0000	-,1613D+03	,0000	1,025	329
415	294	331	,0000	-,4484D+02	,0000	1,025	331
416	295	327	,0000	-,2967D+02	,0000	1,000	327
417	296	299	,1243D+01	-,1730D+02	,1645D+01	,0000	
418	296	300	,4122D+01	-,5601D+02	,4893	,0000	
419	296	305	,2693D+01	-,3445D+02	,3891D+01	,0000	

linha	de	para	g	b	b ₀	tap	nt
420	296	308	,5732D+01	-,7052D+02	,4439	,0000	
421	296	309	,3426D+01	-,4215D+02	,6552	,0000	
422	296	312	,1686D+01	-,2128D+02	,1491D+01	,0000	
423	296	338	,3953D+01	-,4666D+02	,7290	,0000	
424	297	300	,3296D+01	-,4266D+02	,6695	,0000	
425	297	315	,0000	-,2304D+02	,0000	1,030	315
426	297	329	,1499D+01	-,2064D+02	,1357D+01	,0000	
427	297	332	,4188D+01	-,5493D+02	,5230	,0000	
428	297	333	,0000	-,7143D+02	,0000	,0000	
429	297	334	,4016D+01	-,5480D+02	,2010D+01	,0000	
430	298	299	,0000	-,7143D+02	,0000	1,015	299
431	299	305	,3082D+01	-,4126D+02	,6504	,0000	
432	299	308	,1411D+01	-,1827D+02	,0000	,0000	
433	299	325	,9324	-,3295D+01	,0000	,0000	
434	300	301	,4195D+01	-,5272D+02	,2409D+01	,0000	
435	300	304	,1627D+01	-,2036D+02	,1558D+01	,0000	
436	300	305	,3119D+01	-,3952D+02	,3343D+01	,0000	
437	300	306	,3245D+01	-,4098D+02	,3209D+01	,0000	
438	300	316	,2448	-,9965	,0000	,0000	
439	300	319	,2488D+01	-,3145D+02	,1071D+01	,0000	
440	301	302	,0000	-,2669D+03	,0000	,0000	
441	301	304	,6113D+01	-,8219D+02	,3611	,0000	
442	301	311	,1679D+02	-,2124D+03	,1430	,0000	
443	301	312	,2614	-,1845D+01	,0000	,0000	
444	302	316	,1544D+01	-,8906D+01	,1662	,0000	
445	303	326	,7570D+01	-,1925D+02	,2311D-01	,0000	
446	303	332	,0000	-,1515D+02	,0000	,0000	
447	304	312	,6774D+01	-,8289D+02	,3710	,0000	
448	304	319	,4985D+01	-,5946D+02	,5410	,0000	
449	304	339	,5011D+01	-,6554D+02	,4405	,0000	
450	305	336	,9792D+01	-,1284D+03	,2132	,0000	
451	306	307	,0000	-,1172D+02	,0000	,990	307
452	306	329	,1597D+01	-,2191D+02	,1273D+01	,0000	
453	306	336	,9792D+01	-,1284D+03	,2132	,0000	
454	307	325	,3860D+01	-,1013D+02	,4450D-01	,0000	
455	307	335	,2948D+01	-,1329D+02	,4200D-01	,0000	
456	308	309	,2760D+01	-,3499D+02	,8720	,0000	
457	308	338	,3575	-,1564D+01	,0000	,0000	
458	309	310	,1413D+02	-,1898D+03	,1442	,0000	
459	309	311	,6794D+01	-,8567D+02	,3538	,0000	
460	309	334	,7662D+01	-,1036D+03	,1048D+01	,0000	
461	309	338	,7715	-,9403D+01	,0000	,0000	
462	310	311	,9680D+01	-,1267D+03	,2163	,0000	
463	311	312	,4908D+01	-,5757D+02	,5980	,0000	
464	311	337	,1687D+01	-,2803D+02	,0000	,0000	
465	311	338	,2558	-,1548D+01	,0000	,0000	
466	311	339	,2094D+01	-,2875D+02	,9697	,0000	
467	312	322	,0000	-,2500D+02	,0000	,0000	
468	312	337	,2199D+01	-,3780D+02	,0000	,0000	
469	312	338	,2744D+01	-,3450D+02	,9495	,0000	
470	313	321	,0000	-,3534D+02	,0000	1,020	321
471	314	316	,2540D+01	-,1505D+02	,9820D-01	,0000	
472	314	317	,2463	-,1993D+01	,0000	,0000	
473	314	320	,3495	-,8950	,0000	,0000	
474	314	321	,4032D+01	-,2401D+02	,0000	,0000	

linha	de	para	g	b	b ₀	tap	nt
475	315	318	,3178D+01	-,1806D+02	,0000	,0000	
476	315	321	,9170	-,5124D+01	,0000	,0000	
477	315	323	,1377D+02	-,7755D+02	,8083D-01	,0000	
478	316	317	,1570D+01	-,8340D+01	,1003	,0000	
479	316	321	,1350D+01	-,7193D+01	,1150	,0000	
480	316	334	-,6148	-,9003D+01	,0000	,0000	
481	317	320	,3925	-,3653D+01	,0000	,0000	
482	318	321	,4627D+01	-,2775D+02	,0000	,0000	
483	320	321	,2435D+01	-,1363D+02	,1186	,0000	
484	323	324	,0000	-,2652D+02	,0000	1,000	323
485	325	335	,5896D+01	-,2659D+02	,2100D-01	,0000	
486	326	328	,1584D+02	-,4158D+02	,1090D-01	,0000	
487	327	328	,6047	-,2287D+01	,0000	,0000	
488	327	330	,0000	-,2141D+02	,0000	1,000	330
489	327	331	,2440	-,1547D+01	,0000	,0000	
490	328	331	,7472	-,3755D+01	,0000	,0000	
491	329	330	,2123D+02	-,2849D+03	,9610D-01	,0000	
492	329	331	,3967D+01	-,5347D+02	,5095	,0000	
493	331	332	,5510D+01	-,7478D+02	,3618	,0000	
494	335	336	,0000	-,2141D+02	,0000	,980	335

Apêndice C

Resultados da Estimação de Estados

Neste Apêndice são apresentados os desvios entre os resultados obtidos pelo fluxo de potência (caso base) e os obtidos pelo estimador de estados com restrições de igualdade e desigualdade para os três sistemas-teste utilizados para as barras do Sistema Externo.

C.1. Sistema de 30 barras do IEEE

Tabela C.1.1. Sistema IEEE-30 barras
Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Externo
Estimador com restrições

barra	fluxo de potência		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
	P	Q	P	Q	ΔP	ΔQ	P	Q	ΔP	ΔQ
9	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
10	-.058	.170	-.057	.165	-.001	.005	-.049	.144	-.009	.026
11	.200	.141	.196	.135	.004	.006	.189	.136	.011	.005
12	-.112	-.075	-.112	-.075	.000	.000	-.081	.021	-.031	-.096
13	.200	.206	.192	.196	.008	.010	.207	.012	-.007	.194
14	-.062	-.016	-.061	-.014	-.001	-.002	-.021	.112	-.041	-.128
15	-.082	-.025	-.084	-.024	.002	-.001	-.083	-.024	.001	-.001
16	-.035	-.018	-.035	-.016	.000	-.002	-.035	.295	.000	-.313
17	-.090	-.058	-.088	-.053	-.002	-.005	-.113	-.259	.023	.201
18	-.032	-.009	-.031	-.008	-.001	-.001	-.064	.006	.032	-.015
19	-.095	-.034	-.095	.002	.000	-.036	-.098	-.008	.003	-.026
20	-.022	-.007	-.019	-.054	-.003	.047	-.022	-.088	.000	.081
21	-.175	-.112	-.175	-.108	.000	-.004	-.175	-.122	.000	.010
22	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
23	-.032	-.016	-.025	-.023	-.007	.007	-.014	.086	-.018	-.102
24	-.087	-.027	-.084	.001	-.003	-.028	-.107	-.055	.020	.028
25	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
26	-.035	-.023	-.037	-.003	.002	-.020	-.040	-.007	.005	-.016
27	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
28	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
29	-.024	-.009	-.030	-.090	.006	.081	-.021	-.090	-.003	.081
30	-.106	-.019	-.103	.028	-.003	-.047	-.108	.038	.002	-.057

Tabela C.1.2. Sistema IEEE-30 barras
Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Externo
Estimador sem restrições

barra	fluxo de potência		Método em um Passo				Método em Dois Passos			
	P	Q	P	Q	ΔP	ΔQ	P	Q	ΔP	ΔQ
9	.0000	.0000	-.0032	.0815	.0032	-.0815	-.0042	.0000	.0042	.0000
10	-.0580	.1700	-.0568	.1649	-.0012	.0051	-.0444	.1649	-.0136	.0051
11	.2000	.1410	.1921	.1315	.0079	.0095	.1922	.1324	.0078	.0086
12	-.1120	-.0750	-.1115	-.0752	-.0005	.0002	-.0637	-.0713	-.0483	-.0037
13	.2000	.2059	.1915	.1924	.0085	.0136	.2145	.3028	-.0145	-.0969
14	-.0620	-.0160	-.0624	-.0135	.0004	-.0025	.0197	.2831	-.0817	-.2991
15	-.0820	-.0250	-.0856	-.0200	.0036	-.0050	-.0728	.0645	-.0092	-.0895
16	-.0350	-.0180	-.0132	.0217	-.0218	-.0397	-.0155	.0673	-.0195	-.0853
17	-.0900	-.0580	-.1074	-.0900	.0174	.0320	-.1713	-.2258	.0813	.1678
18	-.0320	-.0090	-.0309	-.0080	-.0011	-.0010	-.0296	.0205	-.0024	-.0295
19	-.0950	-.0340	-.0167	.3518	-.0783	-.3858	-.0635	.0307	-.0315	-.0647
20	-.0220	-.0070	-.0931	-.4744	.0711	.4674	-.1222	-.2220	.1002	.2150
21	-.1750	-.1120	-.1629	-.1090	-.0121	-.0030	-.1309	-.1108	-.0441	-.0012
22	.0000	.0000	-.0001	.0011	.0001	-.0011	-.0919	-.0873	.0919	.0873
23	-.0320	-.0160	-.0174	.0127	-.0146	-.0287	.0657	.2526	-.0977	-.2686
24	-.0870	-.0270	-.0973	-.0502	.0103	.0232	-.1136	-.0846	.0266	.0576
25	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.0242	-.0384	.0242	.0384
26	-.0350	-.0230	-.0330	-.0220	-.0020	-.0010	-.0330	-.0220	-.0020	-.0010
27	.0000	.0000	-.0013	-.0208	.0013	.0208	.0001	-.0259	-.0001	.0259
28	.0000	.0000	-.0048	.0173	.0048	-.0173	-.0059	.0075	.0059	-.0075
29	-.0240	-.0090	-.0229	-.0090	-.0011	.0000	-.0231	-.0088	-.0009	-.0002
30	-.1060	-.0190	-.1021	-.0180	-.0039	-.0010	-.1022	-.0184	-.0038	-.0006

C.2. Sistema de 118 barras do IEEE

Tabela C.2.1. Sistema IEEE-118 barras
Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Externo
Estimador com restrições

barra	fluxo de potência		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
	P	Q	P	Q	ΔP	ΔQ	P	Q	ΔP	ΔQ
1	-.525	-.278	-.500	-.274	-.025	-.004	-.5000	-.2764	-.0250	-.0016
2	-.206	-.091	-.205	-.089	-.001	-.002	-.1812	-.0765	-.0248	-.0145
3	-.402	-.103	-.405	-.119	.003	.016	-.3793	-.1102	-.0227	.0072
4	-.402	.170	-.365	.037	-.045	.026	-.3641	.1404	-.0379	.0293
5	.000	-.412	.000	-.401	.000	-.011	.0000	-.4956	.0000	.0836
6	-.538	-.227	-.507	-.221	-.031	-.006	-.5230	-.2354	-.0150	.0084
7	-.196	-.021	-.190	-.017	-.006	-.004	-.1900	.0228	-.0060	-.0438
8	-.289	.057	-.030	.027	-.259	.030	-.3290	.0197	.0400	.0370
9	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	4.635	-.572	4.600	-.573	.035	.001	4.6000	-.5321	.0350	-.0398
11	-.721	-.239	-.675	-.228	-.046	-.011	-.7364	-.2494	.0154	.0104
12	.390	.999	.398	.938	-.008	.061	.3810	.9436	.0090	.0554
13	-.350	-.165	-.251	-.172	-.099	.007	-.3511	-.1719	.0011	.0069
14	-.144	-.010	-.073	-.018	-.071	.008	-.1254	-.0160	-.0186	.0060
15	-.927	-.309	-.905	-.304	-.022	-.005	-.1.0166	-.1494	.0896	-.1596

barra	fluxo de potência		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
16	-.257	-.103	-.341	-.100	.084	-.003	-.2575	-.1000	.0005	-.0030
17	-.113	-.031	-.120	-.016	.007	-.015	-.1124	.1647	-.0006	-.1957
18	-.618	-.350	-.605	-.340	-.013	-.010	-.6431	-.2846	.0251	-.0654
19	-.462	-.258	-.468	-.241	.006	-.017	-.4389	-.2075	-.0231	-.0505
20	-.184	-.031	-.203	-.025	.019	-.006	-.1778	-.0030	-.0062	-.0280
21	-.103	-.051	-.090	-.052	-.013	.001	-.0998	-.0447	-.0032	-.0063
22	-.072	-.031	-.057	-.030	-.015	-.001	-.0817	-.0199	.0097	-.0111
23	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.0000	.0000	.0000	.0000
24	-.136	-.183	-.167	-.277	.031	.094	-.1856	-.3064	.0496	.1235
25	2.266	1.470	2.200	1.476	.066	-.006	2.2000	1.3408	.0660	.1291
26	3.234	-1.100	3.200	-1.100	.034	-.000	3.3000	-1.2009	-.0660	.1010
27	-.732	-.312	-.775	-.130	.043	-.182	-.7067	-.1300	-.0253	-.1821
28	-.175	-.070	-.217	-.089	.042	.019	-.1743	-.0939	-.0007	.0239
29	-.248	-.041	-.555	.047	.307	-.088	-.2331	-.0055	-.0149	-.0355
30	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.0000	.0000	.0000	.0000
31	-.373	.032	-.375	.007	.002	.025	-.3591	.0195	-.0139	.0126
32	-.608	-.236	-.672	-.220	.064	-.016	-.6267	-.2317	.0187	-.0043
33	-.237	-.090	-.219	-.100	-.018	.010	-.2086	-.0899	-.0284	-.0001
34	-.608	-.125	-.579	-.121	-.029	-.004	-.5947	-.1265	-.0133	.0015
35	-.341	-.091	-.323	-.290	-.018	.199	-.3566	-.0883	.0156	-.0027
36	-.320	-.170	-.300	.085	-.020	-.255	-.3000	-.2359	-.0200	.0659
37	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.0000	.0000	.0000	.0000
38	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.0000	.0000	.0000	.0000
39	-.276	-.113	-.270	-.140	-.006	.027	-.2684	-.1466	-.0076	.0336
40	-.680	.271	-.680	.249	.000	.022	-.6800	.2267	.0000	.0447
41	-.380	-.103	-.328	-.200	-.052	.097	-.3692	-.1274	-.0108	.0244
42	-.998	.215	-.983	.210	-.015	.005	-.9720	.1940	-.0260	.0213
43	-.184	-.070	-.180	.045	.004	-.115	-.1798	-.0348	-.0042	-.0352
44	-.164	.020	-.160	-.231	-.004	.251	-.1602	-.0753	-.0038	.0953
45	-.547	-.123	-.523	-.120	-.024	-.003	-.5458	-.1181	-.0012	-.0049
46	-.093	.220	-.097	.200	.004	.020	-.0884	.2000	-.0046	.0198
47	-.350	.000	-.342	.000	-.008	.000	-.3588	.0102	.0088	-.0102
48	-.206	.031	-.182	.180	-.024	-.149	-.2036	.0307	-.0024	.0003
49	1.212	.079	1.179	.082	.033	-.003	1.1736	.0775	.0384	.0020
50	-.170	-.040	-.230	-.081	.060	.041	-.1822	-.0587	.0122	.0187
51	-.170	-.082	-.164	-.078	-.006	-.004	-.1712	-.0872	.0012	.0052
52	-.181	-.051	-.180	-.032	-.001	-.019	-.1880	-.0718	.0070	.0208
53	-.233	-.113	-.252	-.177	.019	.064	-.2376	-.1118	.0046	-.0012
54	-.666	.210	-.655	.211	-.011	.001	-.6480	.2143	-.0180	-.0041
55	-.650	-.227	-.629	-.219	-.021	-.008	-.6134	-.2152	-.0366	-.0118
56	-.866	-.186	-.858	-.181	-.008	-.005	-.8496	-.1777	-.0164	-.0083
57	-.124	-.030	-.005	-.320	-.119	.290	-.1042	-.0037	-.0198	-.0263
58	-.124	-.031	-.144	-.050	.020	.019	-.1391	-.0500	.0151	.0190
59	-1.250	.300	-1.230	.300	-.020	.000	-1.2098	.3135	-.0402	-.0139
60	-.790	-.030	-.773	-.038	-.017	.008	-.7652	.1569	-.0248	-.1869
61	1.648	-.709	1.609	-.549	.039	-.160	1.6363	-.6151	.0117	-.0935
62	-.790	-.145	-.780	-.151	-.010	.006	-.8315	-.1747	.0415	.0297
63	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.0000	.0000	.0000	.0000
64	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.0000	.0000	.0000	.0000
65	4.050	-2.310	3.931	-2.200	.119	-.110	3.9026	-2.2752	.1474	-.0348
66	3.650	1.771	3.505	1.765	.145	.006	3.4008	1.6126	.2492	.1584
67	-.289	-.070	-.265	-.084	-.024	.014	-.2553	-.2064	-.0337	.1364
68	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.0000	.0000	.0000	.0000
69	3.792	1.215	3.822	1.200	-.030	.015	3.5873	1.2641	.2045	-.0494
70	-.670	-.210	-.659	-.204	-.011	-.006	-.6591	-.1408	-.0109	-.0692

barra	fluxo de potência		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
			.000	.000	.000	.000	.0000	.0000	.0000	.0000
71	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.0000	.0000	.0000	.0000
72	-.123	-.174	-.145	-.121	.022	-.053	-.1233	-.1123	.0003	-.0616
73	-.061	.191	-.043	.190	-.018	.001	-.0573	.2000	-.0037	-.0093
113	-.060	-.207	.101	-.279	-.161	.072	-.0516	-.1627	-.0084	-.0441
114	-.080	-.060	-.054	-.048	-.026	-.012	.0581	1.1538	-.1381	-1.2138
115	-.227	-.070	-.390	-.139	.163	.069	-.3444	-1.3960	.1174	1.3260
116	-1.895	-1.651	-1.892	-1.659	-.003	.008	-1.8309	-1.5421	-.0641	-.1087
117	-.206	-.082	-.175	-.082	-.031	.000	-.1946	-.0749	-.0114	-.0071

Tabela C.2.2. Sistema IEEE-118 barras
Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Externo
Estimador sem restrições

Barra	Fluxo de carga		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
	P	Q	P	Q	ΔP	ΔQ	P	Q	ΔP	ΔQ
1	-.5250	-.2780	-.4880	-.2670	-.0370	-.0110	-.4876	-.2714	-.0374	-.0066
2	-.2060	-.0910	-.2042	-.0964	-.0018	.0054	-.2191	-.0967	.0131	.0057
3	-.4020	-.1030	-.4097	-.1016	.0077	-.0014	-.3976	-.1113	-.0044	.0083
4	-.4020	.1697	-.4039	.1441	.0019	.0256	-.3550	.1406	-.0470	.0290
5	.0000	-.4120	.0067	-.4138	-.0067	.0018	.0721	-.4385	-.0721	.0265
6	-.5380	-.2270	-.5230	-.2205	-.0150	-.0065	-.5219	-.2342	-.0161	.0072
7	-.1960	-.0210	-.1843	-.0182	-.0117	-.0028	-.2692	.0045	.0732	-.0255
8	-.2890	.0567	-.4358	.1279	.1468	-.0712	-.3191	.0807	.0301	-.0241
9	.0000	.0000	-.0160	.0142	.0160	-.0142	-.0094	.0717	.0094	-.0717
10	4.6350	-.5718	4.5139	-.6020	.1211	.0302	4.5139	-.6020	.1211	.0302
11	-.7210	-.2390	-.6997	-.2289	-.0213	-.0101	-.7345	-.2602	.0135	.0212
12	.3900	.9990	.3747	.9349	.0153	.0641	.3751	.9257	.0149	.0733
13	-.3500	-.1650	-.3396	-.1602	-.0104	-.0048	-.3554	-.1698	.0054	.0048
14	-.1440	-.0100	-.1406	-.0102	-.0034	.0002	-.1377	-.0175	-.0063	.0075
15	-.9270	-.3090	-.9046	-.3044	-.0224	-.0046	-1.0001	-.1624	.0731	-.1466
16	-.2570	-.1030	-.2469	-.0924	-.0101	-.0106	-.2084	.0920	-.0486	-.1950
17	-.1130	-.0310	-.3004	.2364	.1874	-.2674	-.1000	.1406	-.0130	-.1716
18	-.6180	-.3500	-.5986	-.3400	-.0194	-.0100	-.6325	-.2877	.0145	-.0623
19	-.4620	-.2580	-.4543	-.2455	-.0077	-.0125	-.4152	-.2110	-.0468	-.0470
20	-.1840	-.0310	-.1835	-.0299	-.0005	-.0011	-.1714	.0021	-.0126	-.0331
21	-.1030	-.0510	-.0958	-.0499	-.0072	-.0011	-.0981	-.0490	-.0049	-.0020
22	-.0720	-.0310	-.0760	-.0304	.0040	-.0006	-.0766	-.0242	.0046	-.0068
23	.0000	.0000	.2469	.0010	-.2469	-.0010	-.1508	-.0290	.1508	.0290
24	-.1360	-.1829	-.3779	-.2117	.2419	.0288	.0046	-.2053	-.1406	.0224
25	2.2660	1.4699	2.1659	1.4626	.1001	.0073	2.0176	1.3869	.2484	.0830
26	3.2340	-1.0999	3.0641	-1.1292	.1699	.0293	3.3249	-1.1329	-.0909	.0330
27	-.7320	-.3121	-.7088	-.3241	-.0232	.0120	-.7068	-.3608	-.0252	.0487
28	-.1750	-.0700	-.1718	-.0729	-.0032	.0029	-.1733	-.0961	-.0017	.0261
29	-.2480	-.0410	-.2410	-.0311	-.0070	-.0099	-.2047	.0678	-.0433	-.1088
30	.0000	.0000	.4361	-.4296	-.4361	.4296	.1000	-.5548	-.1000	.5548
31	-.3730	.0321	-.3608	.0040	-.0122	.0281	-.3568	.0204	-.0162	.0117
32	-.6080	-.2360	-.5961	-.2291	-.0119	-.0069	-.6237	-.2199	.0157	-.0161
33	-.2370	-.0900	-.2154	-.1523	-.0216	.0623	-.2185	-.1122	-.0185	.0222
34	-.6080	-.1250	-.5822	-.1205	-.0258	-.0045	-.6006	-.1194	-.0074	-.0056
35	-.3410	-.0910	.2511	-6.5887	-.5921	6.4977	-.3659	-.0909	.0249	-.0001
36	-.3200	-.1700	-.7923	8.7222	.4723	-8.8922	-.2702	-.1754	-.0498	.0054
37	.0000	.0000	.0383	-1.7926	-.0383	1.7926	-.0357	-.1261	.0357	.1261
38	.0000	.0000	-.0419	-.0402	.0419	.0402	-.0605	-.0743	.0605	.0743

Barra	Fluxo de carga		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
	P	Q	P	Q	ΔP	ΔQ	P	Q	ΔP	ΔQ
39	-.2760	-.1130	-.2716	-.1070	-.0044	-.0060	-.2637	-.0953	-.0123	-.0177
40	-.6800	.2714	-.6586	.2484	-.0214	.0231	-.6605	.2290	-.0195	.0424
41	-.3800	-.1030	-.3712	-.2124	-.0088	.1094	-.3785	-.1260	-.0015	.0230
42	-.9980	.2153	-.9728	.2196	-.0252	-.0043	-.9709	.1932	-.0271	.0220
43	-.1840	-.0700	-.1905	-.4281	.0065	.3581	-.2997	-.4485	.1157	.3785
44	-.1640	.0200	-.1622	1.0669	-.0018	-1.0469	.0946	1.0423	-.2586	-1.0223
45	-.5470	-.1230	-.5266	-.1199	-.0204	-.0031	-.5522	-.1097	.0052	-.0133
46	-.0930	.2198	-.0810	-.2701	-.0120	.4899	-.1567	-.2691	.0637	.4889
47	-.3500	.0000	-.3962	.0146	.0462	-.0146	-.3563	-.0033	.0063	.0033
48	-.2060	.0310	-.2600	.0405	.0540	-.0095	-.2053	.0179	-.0007	.0131
49	1.2120	.0795	1.1774	.0793	.0346	.0001	1.1728	.0653	.0392	.0142
50	-.1700	-.0400	-.3504	-.0536	.1804	.0136	-.1749	-.0580	.0049	.0180
51	-.1700	-.0820	-.1654	-.0800	-.0046	-.0020	-.1708	-.0898	.0008	.0078
52	-.1810	-.0510	-.2905	.0411	.1095	-.0921	-.1829	-.0681	.0019	.0171
53	-.2330	-.1130	-.0777	-.3352	-.1553	.2222	-.2400	-.1194	.0070	.0064
54	-.6660	.2101	-.6545	.2109	-.0115	-.0008	-.6532	.1983	-.0128	.0119
55	-.6500	-.2270	-.6278	-.2185	-.0222	-.0085	-.6258	-.2314	-.0242	.0044
56	-.8660	-.1860	-.8577	-.1811	-.0083	-.0049	-.8560	-.1949	-.0100	.0089
57	-.1240	-.0300	.1791	-.0193	-.3031	-.0107	-.1217	-.0405	-.0023	.0105
58	-.1240	-.0310	-.2495	-.0364	.1255	.0054	-.1314	-.0765	.0074	.0455
59	-1.2500	.2997	-1.2284	.0142	-.0216	.2854	-1.2114	.2866	-.0386	.0130
60	-.7900	-.0300	-.7686	-.0299	-.0214	-.0001	-.7599	.1313	-.0301	-.1613
61	1.6480	-.7086	1.6194	-.5340	.0286	-.1746	1.6487	-.6251	-.0007	-.0836
62	-.7900	-.1450	-.7755	-.1397	-.0145	-.0053	-.8256	-.1781	.0356	.0331
63	.0000	.0000	.0842	.0182	-.0842	-.0182	-.1165	-.3249	.1165	.3249
64	.0000	.0000	.1722	.0452	-.1722	-.0452	.0666	.5537	-.0666	-.5537
65	4.0500	-2.3100	3.8821	-1.7651	.1679	-.5449	4.1012	-2.2090	-.0512	-.1010
66	3.6500	1.7710	3.4959	1.7949	.1541	-.0239	3.4771	1.6683	.1729	.1027
67	-.2890	-.0700	-.1874	-.0642	-.1016	-.0058	-.2435	-.1515	-.0455	.0815
68	.0000	.0000	-.0787	-.4985	.0787	.4985	-.4330	-.2659	.4330	.2659
69	3.7918	1.2147	3.8214	1.1716	-.0296	.0431	3.8056	1.3007	-.0138	-.0860
70	-.6700	-.2100	-.6601	-.2041	-.0099	-.0059	-.6685	-.1996	-.0015	-.0104
71	.0000	.0000	.0597	-.0580	-.0597	.0580	-.0087	-.0564	.0087	.0564
72	-.1230	-.1739	-.1837	-.0633	.0607	-.1106	-.1169	-.0665	-.0061	-.1074
73	-.0610	.1907	-.0613	.1896	.0003	.0012	-.0613	.1895	.0003	.0012
113	-.060	-.207	-.0597	-.2604	-.0003	.0535	-.0588	-.2305	-.0012	.0237
114	-.080	-.060	-.0817	-.0585	.0017	-.0015	-.0280	-.7269	-.0520	.6669
115	-.227	-.070	-.2208	-.0496	-.0062	-.0204	-.2285	.7333	.0015	-.8033
116	-1.895	-1.651	-1.8933	-1.6370	-.0017	-.0138	-1.8300	-1.5413	-.0650	-.1095
117	-.206	-.082	-.1953	-.0818	-.0107	-.0002	-.1991	-.0904	-.0069	.0084

Apêndice D

Resultados da Análise de Contingências

Neste Apêndice são apresentados os desvios entre os resultados obtidos na Análise de Contingência pelo fluxo de potência (caso base) e os obtidos utilizando-se os dados provenientes da rede externa obtidos pelo estimador de estados com restrições de igualdade e desigualdade. Apenas os resultados obtidos para casos em estudo dos sistemas de 30 e 118 barras são apresentados. Por questões de espaço, os resultados obtidos com o sistema de 340 barras também não são apresentados.

D.1. Sistema de 30 barras do IEEE

Tabela D.1.1. Sistema IEEE-30 barras
Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno
Contingência em estudo: perda da linha entre as barras 2 e 4

barra	fluxo de potência		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
	P	Q	P	Q	ΔP	ΔQ	P	Q	ΔP	ΔQ
1	2.383	-.689	2.386	-.6838	-.0028	-.0052	2.384	-.6710	-.0005	-.0180
2	-.2170	.8687	-.2170	.8767	.0000	-.0080	-.2170	.8925	.0000	-.0239
3	-.0240	-.0120	-.0240	-.0120	.0000	.0000	-.0240	-.0120	.0000	.0000
4	-.0760	-.0160	-.0760	-.0160	.0000	.0000	-.0760	-.0160	.0000	.0000
5	-.9420	.1358	-.9420	.1426	.0000	-.0067	-.9420	.1564	.0000	-.0205
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	-.2280	-.1090	-.2280	-.1090	.0000	.0000	-.2280	-.1090	.0000	.0000
8	-.1000	-.0588	-.1000	-.0230	.0000	-.0357	-.1000	.0440	.0000	-.1028

Tabela D.1.2. Sistema IEEE-30 barras
 Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno
 Contingência em estudo: perda da linha entre as barras 1 e 2

barra	fluxo de potência		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
	P	Q	P	Q	ΔP	ΔQ	P	Q	ΔP	ΔQ
1	2.7794	.3457	2.7853	.3539	-.0059	-.0082	2.7880	.3672	-.0086	-.0215
2	-.2170	.9780	-.2170	.9938	.0000	-.0157	-.2170	1.0261	.0000	-.0481
3	-.0240	-.0120	-.0240	-.012	.0000	.0000	-.0240	-.0120	.0000	.0000
4	-.0760	-.0160	-.0760	-.016	.0000	.0000	-.0760	-.0160	.0000	.0000
5	-.9420	.2157	-.9420	.2226	.0000	-.0070	-.9420	.2364	.0000	-.0208
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	-.2280	-.1090	-.2280	-.109	.0000	.0000	-.2280	-.1090	.0000	.0000
8	-.1000	.1676	-.1000	.2035	.0000	-.0359	-.1000	.2693	.0000	-.1018

Tabela D.1.3. Sistema IEEE-30 barras
 Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno
 Contingência em estudo: perda da linha entre as barras 6 e 7

barra	fluxo de potência		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
	P	Q	P	Q	ΔP	ΔQ	P	Q	ΔP	ΔQ
1	2.4067	-.7700	2.4092	-.7656	-.0025	-.0045	2.4065	-.7543	.0002	-.0157
2	-.2170	1.099	-.2170	1.1136	.0000	-.0146	-.2170	1.1439	.0000	-.0449
3	-.0240	-.0120	-.0240	-.0120	.0000	.0000	-.0240	-.0120	.0000	.0000
4	-.0760	-.0160	-.0760	-.0160	.0000	.0000	-.0760	-.0160	.0000	.0000
5	-.9420	.2922	-.9420	.2922	.0000	.0000	-.9420	.2922	.0000	.0000
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7	-.2280	-.1090	-.2280	-.1090	.0000	.0000	-.2280	-.1090	.0000	.0000
8	-.1000	-.2362	-.1000	-.2000	.0000	-.0362	-.1000	-.1321	.0000	-.1041

D.2. Sistema de 118 barras do IEEE

Tabela D.2.1. Sistema IEEE-118 barras
 Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno
 Contingência considerada: perda da linha entre as barras 89 e 90

barra	fluxo de potência		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
	P	Q	P	Q	ΔP	ΔQ	P	Q	ΔP	ΔQ
74	-.6900	-.1540	-.6900	-.1540	.0000	.0000	-.6900	-.1540	.0000	.0000
75	-.4820	-.1130	-.4820	-.1130	.0000	.0000	-.4820	-.1130	.0000	.0000
76	-.6900	-.3700	-.6900	-.3700	.0000	.0000	-.6900	-.3700	.0000	.0000
77	-.6270	-.2900	-.6270	-.2900	.0000	.0000	-.6270	-.2900	.0000	.0000
78	-.7210	-.2700	-.7210	-.2700	.0000	.0000	-.7210	-.2700	.0000	.0000
79	-.4010	-.3310	-.4010	-.3310	.0000	.0000	-.4010	-.3310	.0000	.0000
80	4.790	1.8752	4.790	1.8741	.0000	.0011	4.7900	1.8767	.0000	-.0015
81	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
82	-.5100	-.0700	-.5100	-.0700	.0000	.0000	-.5100	-.0700	.0000	.0000
83	-.2060	.0000	-.2060	.0000	.0000	.0000	-.2060	.0000	.0000	.0000
84	-.1130	-.0700	-.1130	-.0700	.0000	.0000	-.1130	-.0700	.0000	.0000
85	-.2480	-.1550	-.2480	-.1550	.0000	.0000	-.2480	-.1550	.0000	.0000
86	-.2160	-.1030	-.2160	-.1030	.0000	.0000	-.2160	-.1030	.0000	.0000
87	.0000	.0966	.0000	.0966	.0000	.0000	.0000	.0965	.0000	.0001
88	-.4900	-.1030	-.4900	-.1030	.0000	.0000	-.4900	-.1030	.0000	.0000
89	6.252	.0660	6.252	.0660	.0000	.0000	6.2520	.0656	.0000	.0004
90	-1.679	.6549	-1.679	.6549	.0000	.0000	-1.679	.6549	.0000	.0000
91	-.1030	.4627	-.1030	.4627	.0000	.0000	-.1030	.4627	.0000	.0000
92	-.6700	-.1030	-.6700	-.1030	.0000	.0000	-.6700	-.1030	.0000	.0000
93	-.1230	-.0700	-.1230	-.0700	.0000	.0000	-.1230	-.0700	.0000	.0000
94	-.3090	-.1640	-.3090	-.1640	.0000	.0000	-.3090	-.1640	.0000	.0000
95	-.4300	-.3200	-.4300	-.3200	.0000	.0000	-.4300	-.3200	.0000	.0000
96	-.3900	-.1540	-.3900	-.1540	.0000	.0000	-.3900	-.1540	.0000	.0000
97	-.1520	-.0990	-.1520	-.0990	.0000	.0000	-.1520	-.0990	.0000	.0000
98	-.3500	-.0800	-.3500	-.0800	.0000	.0000	-.3500	-.0800	.0000	.0000
99	-.4310	-.2043	-.4310	-.2043	.0000	.0000	-.4310	-.2043	.0000	.0000
100	2.219	.6280	2.219	.6280	.0000	.0000	2.2190	.6279	.0000	.0001
101	-.2260	-.1530	-.2260	-.1530	.0000	.0000	-.2260	-.1530	.0000	.0000
102	-.0510	-.0310	-.0510	-.0310	.0000	.0000	-.0510	-.0310	.0000	.0000
103	.1820	.7174	.1820	.7174	.0000	.0000	.1820	.7174	.0000	.0000
104	-.4000	-.2580	-.4000	-.2580	.0000	.0000	-.4000	-.2580	.0000	.0000
105	-.3100	-.0600	-.3100	-.0600	.0000	.0000	-.3100	-.0600	.0000	.0000
106	-.4430	-.1650	-.4430	-.1650	.0000	.0000	-.4430	-.1650	.0000	.0000
107	-.5150	-.0347	-.5150	-.0347	.0000	.0000	-.5150	-.0347	.0000	.0000
108	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
109	-.0800	-.0300	-.0800	-.0300	.0000	.0000	-.0800	-.0300	.0000	.0000
110	-.4000	-.2500	-.4000	-.2500	.0000	.0000	-.4000	-.2500	.0000	.0000
111	.3780	-.0024	.3780	-.0024	.0000	.0000	.3780	-.0024	.0000	.0000
112	-.7020	.2429	-.7020	.2429	.0000	.0000	-.7020	.2429	.0000	.0000
118	-.3400	-.1550	-.3400	-.1550	.0000	.0000	-.3400	-.1550	.0000	.0000

Tabela D.2.2. Sistema IEEE-118 barras
Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno
Contingência considerada: perda da linha entre as barras 80 e 96

barra	fluxo de potência		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
	P	Q	P	Q	ΔP	ΔQ	P	Q	ΔP	ΔQ
74	-.6900	-.1540	-.6900	-.1540	.0000	.0000	-.6900	-.1540	.0000	.0000
75	-.4820	-.1130	-.4820	-.1130	.0000	.0000	-.4820	-.1130	.0000	.0000
76	-.6900	-.3700	-.6900	-.3700	.0000	.0000	-.6900	-.3700	.0000	.0000
77	-.6270	-.2900	-.6270	-.2900	.0000	.0000	-.6270	-.2900	.0000	.0000
78	-.7210	-.2700	-.7210	-.2700	.0000	.0000	-.7210	-.2700	.0000	.0000
79	-.4010	-.3310	-.4010	-.3310	.0000	.0000	-.4010	-.3310	.0000	.0000
80	4.7900	1.7661	4.7900	1.7650	.0000	.0011	4.7900	1.7675	.0000	-.0014
81	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
82	-.5100	-.0700	-.5100	-.0700	.0000	.0000	-.5100	-.0700	.0000	.0000
83	-.2060	.0000	-.2060	.0000	.0000	.0000	-.2060	.0000	.0000	.0000
84	-.1130	-.0700	-.1130	-.0700	.0000	.0000	-.1130	-.0700	.0000	.0000
85	-.2480	-.1550	-.2480	-.1550	.0000	.0000	-.2480	-.1550	.0000	.0000
86	-.2160	-.1030	-.2160	-.1030	.0000	.0000	-.2160	-.1030	.0000	.0000
87	.0000	.1022	.0000	.1022	.0000	.0000	.0000	.1021	.0000	.0001
88	-.4900	-.1030	-.4900	-.1030	.0000	.0000	-.4900	-.1030	.0000	.0000
89	6.2520	-.0370	6.2520	-.0369	.0000	.0000	6.2520	-.0375	.0000	.0005
90	-1.679	.1200	-1.679	.1200	.0000	.0000	-1.6790	.1200	.0000	.0000
91	-.1030	-.0428	-.1030	-.0428	.0000	.0000	-.1030	-.0428	.0000	.0000
92	-.6700	-.1030	-.6700	-.1030	.0000	.0000	-.6700	-.1030	.0000	.0000
93	-.1230	-.0700	-.1230	-.0700	.0000	.0000	-.1230	-.0700	.0000	.0000
94	-.3090	-.1640	-.3090	-.1640	.0000	.0000	-.3090	-.1640	.0000	.0000
95	-.4300	-.3200	-.4300	-.3200	.0000	.0000	-.4300	-.3200	.0000	.0000
96	-.3900	-.1540	-.3900	-.1540	.0000	.0000	-.3900	-.1540	.0000	.0000
97	-.1520	-.0990	-.1520	-.0990	.0000	.0000	-.1520	-.0990	.0000	.0000
98	-.3500	-.0800	-.3500	-.0800	.0000	.0000	-.3500	-.0800	.0000	.0000
99	-.4310	-.2059	-.4310	-.2059	.0000	.0000	-.4310	-.2059	.0000	.0000
100	2.2190	.6643	2.2190	.6643	.0000	.0000	2.2190	.6641	.0000	.0002
101	-.2260	-.1530	-.2260	-.1530	.0000	.0000	-.2260	-.1530	.0000	.0000
102	-.0510	-.0310	-.0510	-.0310	.0000	.0000	-.0510	-.0310	.0000	.0000
103	.1820	.7174	.1820	.7174	.0000	.0000	.1820	.7174	.0000	.0000
104	-.4000	-.2580	-.4000	-.2580	.0000	.0000	-.4000	-.2580	.0000	.0000
105	-.3100	-.0600	-.3100	-.0600	.0000	.0000	-.3100	-.0600	.0000	.0000
106	-.4430	-.1650	-.4430	-.1650	.0000	.0000	-.4430	-.1650	.0000	.0000
107	-.5150	-.0347	-.5150	-.0347	.0000	.0000	-.5150	-.0347	.0000	.0000
108	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
109	-.0800	-.0300	-.0800	-.0300	.0000	.0000	-.0800	-.0300	.0000	.0000
110	-.4000	-.2500	-.4000	-.2500	.0000	.0000	-.4000	-.2500	.0000	.0000
111	.3780	-.0024	.3780	-.0024	.0000	.0000	.3780	-.0024	.0000	.0000
112	-.7020	.2429	-.7020	.2429	.0000	.0000	-.7020	.2429	.0000	.0000
118	-.3400	-.1550	-.3400	-.1550	.0000	.0000	-.3400	-.1550	.0000	.0000

Tabela D.2.3. Sistema IEEE-118 barras
Potências injetadas e Desvios nas Barras do Sistema Interno
Contingência considerada: perda da linha entre as barras 100 e 104

barra	fluxo de potência		Método em Um Passo				Método em Dois Passos			
	P	Q	P	Q	ΔP	ΔQ	P	Q	ΔP	ΔQ
74	-.6900	-.1540	-.6900	-.1540	.0000	.0000	-.6900	-.1540	.0000	.0000
75	-.4820	-.1130	-.4820	-.1130	.0000	.0000	-.4820	-.1130	.0000	.0000
76	-.6900	-.3700	-.6900	-.3700	.0000	.0000	-.6900	-.3700	.0000	.0000
77	-.6270	-.2900	-.6270	-.2900	.0000	.0000	-.6270	-.2900	.0000	.0000
78	-.7210	-.2700	-.7210	-.2700	.0000	.0000	-.7210	-.2700	.0000	.0000
79	-.4010	-.3310	-.4010	-.3310	.0000	.0000	-.4010	-.3310	.0000	.0000
80	4.7900	1.8840	4.7900	1.8829	.0000	.0011	4.7900	1.8854	.0000	-.0014
81	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
82	-.5100	-.0700	-.5100	-.0700	.0000	.0000	-.5100	-.0700	.0000	.0000
83	-.2060	.0000	-.2060	.0000	.0000	.0000	-.2060	.0000	.0000	.0000
84	-.1130	-.0700	-.1130	-.0700	.0000	.0000	-.1130	-.0700	.0000	.0000
85	-.2480	-.1550	-.2480	-.1550	.0000	.0000	-.2480	-.1550	.0000	.0000
86	-.2160	-.1030	-.2160	-.1030	.0000	.0000	-.2160	-.1030	.0000	.0000
87	.0000	.0945	.0000	.0945	.0000	.0000	.0000	.0944	.0000	.0001
88	-.4900	-.1030	-.4900	-.1030	.0000	.0000	-.4900	-.1030	.0000	.0000
89	6.2520	-.0980	6.2520	-.0979	.0000	.0000	6.2520	-.0984	.0000	.0004
90	-1.6790	.1200	-1.6790	.1200	.0000	.0000	-1.6790	.1200	.0000	.0000
91	-.1030	-.0524	-.1030	-.0524	.0000	.0000	-.1030	-.0524	.0000	.0000
92	-.6700	-.1030	-.6700	-.1030	.0000	.0000	-.6700	-.1030	.0000	.0000
93	-.1230	-.0700	-.1230	-.0700	.0000	.0000	-.1230	-.0700	.0000	.0000
94	-.3090	-.1640	-.3090	-.1640	.0000	.0000	-.3090	-.1640	.0000	.0000
95	-.4300	-.3200	-.4300	-.3200	.0000	.0000	-.4300	-.3200	.0000	.0000
96	-.3900	-.1540	-.3900	-.1540	.0000	.0000	-.3900	-.1540	.0000	.0000
97	-.1520	-.0990	-.1520	-.0990	.0000	.0000	-.1520	-.0990	.0000	.0000
98	-.3500	-.0800	-.3500	-.0800	.0000	.0000	-.3500	-.0800	.0000	.0000
99	-.4310	-.2063	-.4310	-.2063	.0000	.0000	-.4310	-.2063	.0000	.0000
100	2.2190	.4207	2.2190	.4207	.0000	.0000	2.2190	.4206	.0000	.0001
101	-.2260	-.1530	-.2260	-.1530	.0000	.0000	-.2260	-.1530	.0000	.0000
102	-.0510	-.0310	-.0510	-.0310	.0000	.0000	-.0510	-.0310	.0000	.0000
103	.1820	.9359	.1820	.9359	.0000	.0000	.1820	.9359	.0000	.0000
104	-.4000	-.2580	-.4000	-.2580	.0000	.0000	-.4000	-.2580	.0000	.0000
105	-.3100	-.0600	-.3100	-.0600	.0000	.0000	-.3100	-.0600	.0000	.0000
106	-.4430	-.1650	-.4430	-.1650	.0000	.0000	-.4430	-.1650	.0000	.0000
107	-.5150	.0421	-.5150	.0421	.0000	.0000	-.5150	.0421	.0000	.0000
108	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
109	-.0800	-.0300	-.0800	-.0300	.0000	.0000	-.0800	-.0300	.0000	.0000
110	-.4000	-.2500	-.4000	-.2500	.0000	.0000	-.4000	-.2500	.0000	.0000
111	.3780	.0116	.3780	.0116	.0000	.0000	.3780	.0116	.0000	.0000
112	-.7020	.2596	-.7020	.2596	.0000	.0000	-.7020	.2596	.0000	.0000
118	-.3400	-.1550	-.3400	-.1550	.0000	.0000	-.3400	-.1550	.0000	.0000