

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**TÉCNICAS DE CONTROLE APLICADAS A UM ATUADOR HIDRÁULICO**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À**  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE**  
**MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA**


**CRISTIANE CORRÊA PAIM**

**FLORIANÓPOLIS, FEVEREIRO DE 1997**

# TÉCNICAS DE CONTROLE APLICADAS A UM ATUADOR HIDRÁULICO


**CRISTIANE CORRÊA PAIM**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de MESTRE EM ENGENHARIA - ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA e aprovada em sua forma final pelo Programa do Curso de Pós-graduação.



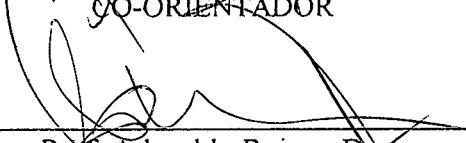
---

Prof. Raul Guenther, Dr.  
ORIENTADOR



---


Prof. Edson Roberto de Pieri, Dr.  
CO-ORIENTADOR



---


Prof. Adroaldo Raizer, Dr.  
COORDENADOR DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO

BANCA EXAMINADORA



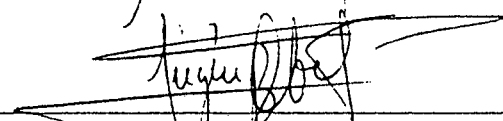
---

Prof. Raul Guenther, Dr.



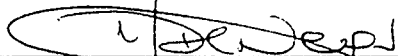
---

Prof. Edson Roberto de Pieri, Dr.



---

Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.



---

Prof. Victor Juliano De Negri, Dr.

*À Evânio, com amor.*

## AGRADECIMENTOS

Aos professores Raul Guenther e Edson Roberto de Pieri pela orientação e amizade demonstrada durante a realização deste trabalho.

Aos professores Eugênio de Bona Castelan Neto e Victor Juliano De Negri, membros da banca examinadora, pelos elogios e valiosas sugestões.

Aos colegas e professores do LCMI (Laboratório de Controle e Microinformática) que tornaram possível a realização deste trabalho.

Aos amigos Danielle Nishida, Emerson Pereira Raposo, André Bittencourt Leal, Lau Cheuk Lung, Edvaldo Machado Jr., Ricardo Ferreira Martins, Max Mauro Dias Santos e Mauro André Barbosa Cunha pela amizade e companheirismo demonstrados nos últimos anos.

Aos colegas de sala - Cleto Cavalcante de Souza Leal, Nardênio Almeida Martins e Valdir Mendes Cardoso - pela paciência em ouvir minhas reclamações e pelo bom humor que tornou mais alegre nossa convivência.

Aos grandes amigos Augusto César Pinto Loureiro da Costa e Mônica Midlej Cardoso da Costa que estiveram presentes nos momentos mais importantes desta jornada.

Aos tios Ademar e Eliane e aos primos Luís Alberto, Jaqueline, Diogo, Wladimir, Eliete, Luciano e Paula por todo seu carinho e incentivo.

A meus pais, Adomiro de Castro Paim e Edi Corrêa Paim, e minha irmã Cristine Paim da Silveira que sempre me deram apoio, incentivo, amor e carinho em todos os momentos desta caminhada.

Um agradecimento especial à Evânio Ramos Nicoleit por todo seu amor.

Agradeço ainda a todos que, de alguma forma, colaboraram para a realização deste trabalho.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	ix
LISTA DE TABELAS .....	xii
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xiii
RESUMO .....	xvii
ABSTRACT .....	xviii
1. INTRODUÇÃO .....	1
2. MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM ATUADOR HIDRÁULICO .....	10
2.1. Introdução .....	10
2.1.1. Princípio da Conservação de Massa .....	12
2.1.2. Princípio da Conservação de Energia .....	15
2.2. Descrição do Atuador Hidráulico .....	17
2.3. Modelo Não-Linear do Atuador Hidráulico .....	18
2.3.1. Equação da Vazão na Servoválvula .....	18
2.3.2. Equação da Continuidade .....	25
2.3.3. Segunda Lei de Newton .....	28
2.3.4. Modelo Não-Linear .....	28
2.4. Modelo Linearizado do Atuador Hidráulico .....	30
3. PROJETO DE CONTROLADORES CLÁSSICOS PARA UM ATUADOR HIDRÁULICO .....	35
3.1. Introdução .....	35

3.2. Projeto dos Controladores de Realimentação de Saída .....	39
3.2.1. Controlador Proporcional (P) .....	40
3.2.2. Controlador Proporcional-Derivativo (PD) .....	45
3.2.3. Controlador Proporcional-Integral (PI) .....	50
3.2.4. Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) .....	55
3.2.5. Compensador em Avanço de Fase .....	65
3.2.6. Compensador em Atraso de Fase .....	73
3.3. Controle no Espaço de Estados Via Imposição de Pólos .....	80
3.4. Resumo .....	85
4. CONTROLADOR EM CASCATA .....	87
4.1. A técnica de Controle em Cascata .....	87
4.2. Controle em Cascata Aplicado ao Atuador Hidráulico .....	92
4.2.1. Seguimento no Subsistema Mecânico .....	93
4.2.2. Seguimento no Subsistema Hidráulico .....	95
4.3. Análise de Estabilidade do Controlador em Cascata .....	97
5. RESULTADOS DE SIMULAÇÕES .....	103
5.1. Descrição das Trajetórias Desejadas .....	103
5.2. Descrição das Simulações Realizadas .....	105
5.3. Resultados das Simulações Utilizando os Controladores Clássicos de Realimentação de Saída .....	106
5.3.1. Posição Desejada Polinomial .....	106
5.3.2. Posição Desejada Senoidal .....	116
5.4. Resultados das Simulações Utilizando os Controladores no Espaço de Estados e em Cascata .....	122

5.4.1. Posição Deseja Polinomial .....	122
5.4.2. Posição Desejada Senoidal .....	125
6. CONCLUSÕES .....	128
APÊNDICE - Cálculo do Ganho de Vazão da Servoválvula .....	131
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	134



## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1.1 - Sistema de controle hidráulico
- Figura 1.2 - Servoválvula do tipo carretel: (a) de 3 vias e (b) de 4 vias
- Figura 1.3 - Servoválvula do tipo bocal-defletor: (a) de 3 vias e (b) de 4 vias
- Figura 1.4 - Servoválvula do tipo tubo-injetor : (a) de 3 vias e (b) de 4 vias
- Figura 1.5 - Servoválvula do tipo carretel com: (a) centro subcrítico, (b) centro crítico e (c) centro supercrítico
- Figura 1.6 - Tipos de cilindros: (a) de ação simples e (b) de ação dupla
- Figura 1.7 - Tipos de cilindros: (a) de haste dupla, (b) posicional e (c) telescópico
- Figura 1.8 - Atuador hidráulico
- Figura 2.1 - Volume de controle
- Figura 2.2 - Escoamento através de um orifício
- Figura 2.3 - Atuador hidráulico
- Figura 2.4 - Servoválvula tipo carretel de 4 vias e centro crítico
- Figura 2.5 - Cilindro atuador
- Figura 3.1 - Sistema com controlador proporcional
- Figura 3.2 - Lugar das Raízes para o sistema com controlador proporcional
- Figura 3.3 - Resposta ao degrau para o sistema com controlador proporcional
- Figura 3.4 - Sistema com controlador proporcional-derivativo
- Figura 3.5 - Lugar das Raízes para o sistema com controlador PD
- Figura 3.6 - Resposta ao degrau para o sistema com PD
- Figura 3.7 - Sistema com controlador proporcional-integral
- Figura 3.8 - Lugar das Raízes para o sistema com controlador PI
- Figura 3.9 - Resposta ao degrau para o sistema com PI
- Figura 3.10 - Sistema com controlador proporcional-integral-derivativo
- Figura 3.11 - Lugar das Raízes para a variação do parâmetro  $K_p$  quando  $K_d = K_i = 0$
- Figura 3.12 - Lugar das Raízes para a variação do parâmetro  $K_d$  quando  $K_p = 0,01$  e  $K_i = 0$

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1.1 - Sistema de controle hidráulico
- Figura 1.2 - Servoválvula do tipo carretel: (a) de 3 vias e (b) de 4 vias
- Figura 1.3 - Servoválvula do tipo bocal-defletor: (a) de 3 vias e (b) de 4 vias
- Figura 1.4 - Servoválvula do tipo tubo-injetor : (a) de 3 vias e (b) de 4 vias
- Figura 1.5 - Servoválvula do tipo carretel com: (a) centro subcrítico, (b) centro crítico e (c) centro supercrítico
- Figura 1.6 - Tipos de cilindros: (a) de ação simples e (b) de ação dupla
- Figura 1.7 - Tipos de cilindros: (a) de haste dupla, (b) posicional e (c) telescópico
- Figura 1.8 - Atuador hidráulico
- Figura 2.1 - Volume de controle
- Figura 2.2 - Escoamento através de um orifício
- Figura 2.3 - Atuador hidráulico
- Figura 2.4 - Servoválvula tipo carretel de 4 vias e centro crítico
- Figura 2.5 - Cilindro atuador
- Figura 3.1 - Sistema com controlador proporcional
- Figura 3.2 - Lugar das Raízes para o sistema com controlador proporcional
- Figura 3.3 - Resposta ao degrau para o sistema com controlador proporcional
- Figura 3.4 - Sistema com controlador proporcional-derivativo
- Figura 3.5 - Lugar das Raízes para o sistema com controlador PD
- Figura 3.6 - Resposta ao degrau para o sistema com PD
- Figura 3.7 - Sistema com controlador proporcional-integral
- Figura 3.8 - Lugar das Raízes para o sistema com controlador PI
- Figura 3.9 - Resposta ao degrau para o sistema com PI
- Figura 3.10 - Sistema com controlador proporcional-integral-derivativo
- Figura 3.11 - Lugar das Raízes para a variação do parâmetro  $K_p$  quando  $K_d = K_i = 0$
- Figura 3.12 - Lugar das Raízes para a variação do parâmetro  $K_d$  quando  $K_p = 0,01$  e  $K_i = 0$

- Figura 3.13 - Lugar das Raízes para a variação do parâmetro  $K_i$  quando  $K_p = 0,01$  e  $K_d = 1 \times 10^{-3}$
- Figura 3.14 - Resposta ao degrau para o sistema com controlador PID
- Figura 3.15 - Sistema com compensador em avanço de fase
- Figura 3.16 - Resposta em frequência para o compensador em avanço com  $K_c = 1$  e  $\alpha = 0,1$
- Figura 3.17 - Resposta em frequência para  $G_p(j\omega)$
- Figura 3.18 - Resposta em frequência para o sistema com compensador em avanço de fase
- Figura 3.19 - Resposta ao degrau para o sistema com compensador em avanço de fase
- Figura 3.20 - Sistema com compensador em atraso de fase
- Figura 3.21 - Resposta em frequência para o compensador em atraso com  $\alpha = 10$  e  $T = 1$
- Figura 3.22 - Resposta em frequência para o sistema com compensador em atraso de fase
- Figura 3.23 - Resposta ao degrau para o sistema com compensador em atraso de fase
- Figura 3.24 - Lugar das Raízes para o sistema com compensador em atraso de fase
- Figura 3.25 - Resposta ao degrau para o sistema com realimentação de estados
- Figura 5.1 - Gráficos de posição e velocidade desejadas polinomial
- Figura 5.2 - Gráficos de posição e velocidade desejadas senoidal
- Figura 5.3 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador P; (b) Controlador PD; (c) Controlador PI
- Figura 5.4 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador PID; (b) Compensador em avanço de fase; (c) Compensador em atraso de fase
- Figura 5.5 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador P; (b) Controlador PD; (c) Controlador PI
- Figura 5.6 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador PID; (b) Compensador em avanço de fase; (c) Compensador em atraso de fase
- Figura 5.7 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador P; (b) Controlador PD; (c) Controlador PI
- Figura 5.8 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador PID; (b) Compensador em avanço de fase; (c) Compensador em atraso de fase
- Figura 5.9 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador P; (b) Controlador PD; (c) Controlador PI
- Figura 5.10 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador PID; (b) Compensador em avanço de fase; (c) Compensador em atraso de fase
- Figura 5.11 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador P; (b) Controlador PD; (c) Controlador PI

- Figura 5.12 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador PID; (b) Compensador em avanço de fase; (c) Compensador em atraso de fase
- Figura 5.13 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ , erro de posição e sinal de controle para o controlador no espaço de estados, sistema sem perturbação e com perturbação
- Figura 5.14 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ , erro de posição e sinal de controle para o controlador em cascata, sistema sem perturbação e com perturbação
- Figura 5.15 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ , erro de posição e sinal de controle para o controlador no espaço de estados, sistema sem perturbação e com perturbação
- Figura 5.16 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ , erro de posição e sinal de controle para o controlador em cascata, sistema sem perturbação e com perturbação

## LISTA DE TABELAS

- Tabela 3.1 - Parâmetros do exemplo padrão
- Tabela 5.1 - Valores de erro máximo de posição dos controladores simulados para o modelo linear nos casos sem e com perturbação
- Tabela 5.2 - Valores de erro máximo de posição dos controladores simulados para o modelo não-linear nos casos sem e com perturbação

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $A$  : área do pistão [ m<sup>2</sup> ]
- $A_j$  : área do orifício  $j$  [ m<sup>2</sup> ]
- $B$  : coeficiente de atrito viscoso do pistão e da carga [ N s / m ]
- $B_l$  : matriz constante
- $C_x$  : matriz de controlabilidade
- $C_d$  : coeficiente de descarga no orifício [ Adm ]
- $C_{ep}$  : coeficiente de fuga externo do pistão [ m<sup>5</sup> / N s ]
- $C_{ip}$  : coeficiente de fuga interno do pistão [ m<sup>5</sup> / N s ]
- $d$  : diâmetro do carretel da servoválvula [m]
- $d(t)$  : perturbação de entrada
- $e$  : erro
- $f_j$  : função não-linear
- $F$  : força gerada ou desenvolvida pelo pistão [ N ]
- $F_L$  : força de carga arbitrária no pistão [ N ]
- $g$  : força hidráulica
- $g_d$  : força desejada
- $G(s)$  : função de transferência do sistema total em malha fechada
- $G_p(s)$  : função de transferência do processo
- $G_o(s)$  : função de transferência do sistema total em malha aberta
- $G_c(s)$  : função de transferência do controlador
- $I$  : matriz identidade
- $K_{ci}$  : coeficiente de vazão-pressão para o ponto de operação  $i$  [ m<sup>5</sup> / (N s) ]
- $K_{qi}$  : ganho de vazão para o ponto de operação  $i$  [ m<sup>2</sup> / s ]
- $K_v$  : coeficiente de erro de velocidade

- K : ganho
- $K_c$  : ganho do compensador
- $\hat{K}_c$  : coeficiente de vazão-pressão nominal da válvula
- $K_d$  : ganho derivativo
- $K_D$  : constante positiva
- $K_i$  : ganho integral
- $K_P$  : constante positiva
- $K_p$  : ganho proporcional
- $\hat{K}_q$  : ganho de vazão nominal da servoválvula
- L : constante positiva
- $\hat{L}$  : constante positiva nominal
- M : massa total do pistão e da carga referida ao pistão [ kg ]
- $M_p$  : sobre-sinal máximo
- $N_{1,2}$  : matrizes positivas definidas
- P : constante positiva
- $p_i$  : pólo i do sistema
- $P_1, P_2$  : pressões nas câmaras 1 e 2 do atuador [ N / m<sup>2</sup> ]
- $P_L$  : a diferença de pressão na carga [ N / m<sup>2</sup> ]
- $\tilde{P}_L$  : erro na diferença de pressões
- $P_{L,d}$  : diferença de pressão desejada
- $P_R$  : pressão de retorno [ N / m<sup>2</sup> ]
- $P_S$  : pressão de suprimento [ N / m<sup>2</sup> ]
- $Q_1, Q_2$  : vazões nas linhas 1 e 2 [ m<sup>3</sup> / s ]
- $Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  : vazões nos orifícios [ m<sup>3</sup> / s ]
- $Q_L$  : vazão de controle [ m<sup>3</sup> / s ]
- $Q_{L,max}$  : vazão máxima da servoválvula [ m<sup>3</sup> / s ]
- $r_c$  : folga radial [ m ]
- $t_s$  : tempo de acomodação

- $u$  : deslocamento linear da servoválvula [ m ]
- $\hat{u}$  : lei de controle nominal
- $u_m$  : curso máximo da servoválvula [ m ]
- $V(t)$  : função real
- $V_{1,2}$  : funções não negativas
- $V_1$  : volume da câmara 1 [ m<sup>3</sup> ]
- $V_2$  : volume da câmara 2 [ m<sup>3</sup> ]
- $V_t$  : volume total do fluido sob compressão em ambas as câmaras [ m<sup>3</sup> ]
- $\hat{V}_t$  : volume total nominal
- $x$  : vetor de estados
- $x_{1d}$  : trajetória desejada para o estado  $x_1$
- $x_{2d}$  : trajetória desejada para o estado  $x_2$
- $y$  : deslocamento do pistão [ m ]
- $\dot{y}$  : velocidade do pistão [ m/s ]
- $\ddot{y}$  : aceleração do pistão [ m<sup>2</sup>/s ]
- $y_d(t)$  : posição desejada do cilindro no instante de tempo  $t$
- $\dot{y}_d(t)$  : velocidade desejada do cilindro no instante de tempo  $t$
- $w$  : gradiente da área da servoválvula
- $\alpha$  : fator de atenuação
- $\beta$  : módulo de elasticidade volumétrico [ N / m<sup>2</sup> ]
- $\hat{\beta}$  : módulo de elasticidade volumétrico nominal
- $\phi$  : ângulo de deficiência de fase
- $\phi(s)$  : equação característica desejada
- $\gamma$  : ângulo das assíntotas com o eixo real [ ° ]
- $\lambda$  : constante positiva
- $\lambda_{1\max}(N_1)$  : maior autovalor da matriz  $N_1$
- $\lambda_{2\min}(N_2)$  : menor autovalor da matriz  $N_2$
- $\mu$  : viscosidade absoluta do fluido [ N s / m<sup>2</sup> ]



$\mu_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ): pólo  $i$  desejado de malha fechada

$\rho$ : massa específica do fluido [ $\text{kg} / \text{m}^3$ ]

$\sigma_a$ : ponto de intersecção das assíntotas com o eixo real

$\omega_d$ : frequência desejada

$\omega_n$ : frequência natural não-amortecida

$\zeta$ : coeficiente de amortecimento

$\Omega$ : sistema em malha fechada

## RESUMO

### **TÉCNICAS DE CONTROLE APLICADAS A UM ATUADOR HIDRÁULICO**

Este trabalho apresenta uma análise sobre o desempenho dinâmico dos principais controladores clássicos e do controlador em cascata. O modelo matemático para o atuador hidráulico é descrito por um conjunto de equações diferenciais não-lineares. Este modelo é então linearizado e utilizado para o projeto dos controladores P, PD, PI, PID, em avanço de fase, em atraso de fase, no espaço de estados e em cascata. Os controladores clássicos são projetados utilizando o método do Lugar das Raízes e o controlador no espaço de estados é projetado utilizando a fórmula de Ackermann para alocação de pólos. O controlador em cascata é projetado respeitando algumas condições de estabilidade. Os controladores projetados são então simulados para diversas situações e seus resultados são comparados em termos de erro de posição e sinal de controle.

Palavras-chave: atuadores hidráulicos, controladores clássicos, controle no espaço de estados, controle em cascata.

## ABSTRACT

### **CONTROL TECHNIQUES APPLIED TO A HYDRAULIC ACTUATOR**

*This work presents an analysis about the dynamic performance of the main classical controllers, and the cascade controller. The mathematical model for the hydraulic actuator is described by a set of nonlinear differential equations. This model is then linearized, and used for designing P, PD, PI, PID, lead, lag, state-space, and cascade controllers. The classical controllers are designed by using Root-Locus Method, and the state-space controller is designed by using Ackermann's formula for pole placement. The cascade controller is designed by concerning some stability conditions. Finally, the controllers are then simulated for various situations, and the results are compared in terms of position error and control signal.*

*Key-words: hydraulic actuators, classical controllers, cascade control, state-space control.*

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Em um sistema de posicionamento deseja-se controlar a posição de saída de acordo com a necessidade de uma dada trajetória. Os sistemas de posicionamento têm aplicações em controle de robôs manipuladores, máquinas de precisão, laminadores, controle de turbinas de hidroelétricas, em máquinas agrícolas, no controle de lemes e flaps de aviões, na operação de antenas e telescópios e em direcionadores de foguetes.

O mais importante elemento do sistema de posicionamento é o atuador, que pode ser elétrico, hidráulico ou pneumático. Os atuadores elétricos mais comuns utilizam motores de corrente contínua (CC) e motores de passo. Sua utilização é adequada para o controle de movimentos precisos, em uma faixa limitada de potência. O atuador pneumático utiliza ar comprimido como fonte de energia. Uma vantagem deste tipo de atuador é que ele amortece as sobrecargas elevadas mas, por outro lado, apresenta a desvantagem de ter potência por unidade de massa menor que dos outros atuadores. Os atuadores hidráulicos têm o mesmo princípio de funcionamento que os atuadores pneumáticos, onde o ar comprimido é substituído por um óleo de alta viscosidade. Este tipo de atuador é adequado ao controle de deslocamentos que exigem grandes esforços.

Neste trabalho estuda-se um sistema de posicionamento constituído de um atuador hidráulico.

As principais vantagens dos atuadores hidráulicos (Merritt, 1967) são:

- com tamanho comparativamente pequeno podem desenvolver grandes forças ou torques;
- o fluido hidráulico atua como lubrificante e torna longa a vida do componente;
- desenvolvem torques relativamente maiores para dispositivos comparativamente menores. Isto ocorre pois em componentes hidráulicos não existem fenômenos do tipo saturação e perdas em materiais magnéticos que existem em máquinas elétricas;
- têm uma velocidade de resposta mais alta com rápidas partidas, paradas e inversões de velocidade, quando comparados com atuadores elétricos;
- podem ser operados sob condições contínuas, intermitentes, de reversão e de parada repentina sem avarias;
- a disponibilidade tanto de atuadores lineares quanto rotativos dá flexibilidade ao projeto do posicionador;
- em virtude de baixas fugas a queda de velocidade é pequena quando as cargas são aplicadas;

As desvantagens dos atuadores hidráulicos (Merritt, 1967) são:

- a potência hidráulica não é prontamente disponível, comparada à potência elétrica;

- o custo de um sistema hidráulico pode ser mais alto do que um sistema elétrico comparável que desempenhe uma função similar;
- perigos de fogo e explosões existem, a menos que sejam usados fluidos resistentes ao fogo;
- óleo contaminado pode causar falhas no funcionamento adequado de um sistema hidráulico;
- em consequência das características complexas não-lineares e de outras envolvidas, o projeto de sistemas hidráulicos sofisticados torna-se bastante difícil. O sistema hidráulico apresenta pólos complexos conjugados pouco amortecidos e próximos do eixo imaginário tornando a resposta dinâmica oscilatória, e apresenta ainda várias não-linearidades. Para um controle eficiente deste tipo de sistema é necessário dar maior ênfase ao problema da resposta oscilatória e não às não-linearidades envolvidas.

O sistema de controle hidráulico, mostrado na Figura 1.1, geralmente possui quatro componentes básicos: uma bomba que coloca o fluido em alta pressão à disposição, um reservatório que armazena o fluido excedente, servoválvulas que são usadas para controlar o vazão do fluido no sistema e um atuador, geralmente um pistão movendo o cilindro com ambos os lados expostos ao fluido hidráulico, que move uma carga mecânica (Burton, 1994).

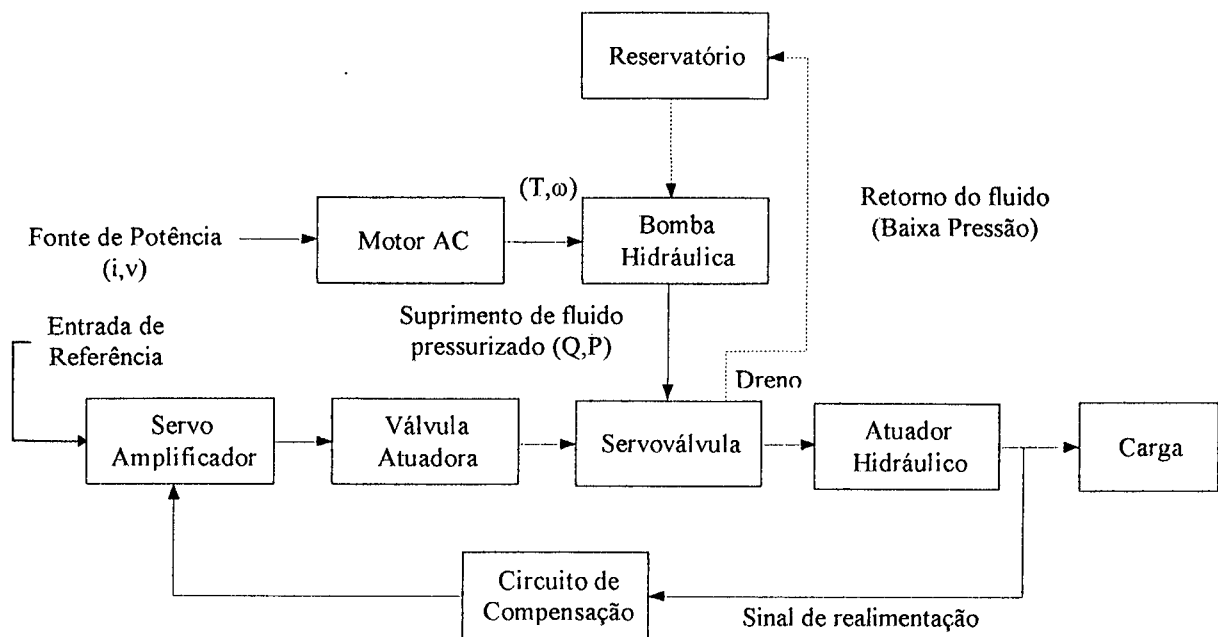


Figura 1.1 - Sistema de controle hidráulico (De Silva, 1989)

A servoválvula é o elemento que converte a energia de acionamento em energia hidráulica, amplificando os níveis de potência. Uma servoválvula é uma válvula direcional que pode assumir infinitas posições e que oferece a característica adicional de controlar tanto a quantidade como a direção de fluxo. Quando acoplada a dispositivos sensores de realimentação adequados, propicia controles precisos de posicionamento, de velocidade ou de aceleração de um atuador (Palmiere, 1989). As servoválvulas são constituídas de dois elementos fundamentais: elemento de acionamento e o(s) elemento(s) de controle.

Existem diversos tipos de servoválvulas que podem ser classificadas quanto ao elemento de acionamento (elétrico ou mecânico), quanto ao número de estágios (um, dois ou três), quanto ao tipo de elemento de controle e quanto ao número de vias (três ou quatro).

Quanto ao tipo de elemento de controle as servoválvulas podem ser do tipo carretel (Figura 1.2), do tipo bocal-defletor (Figura 1.3) e do tipo tubo-injetor (Figura 1.4).

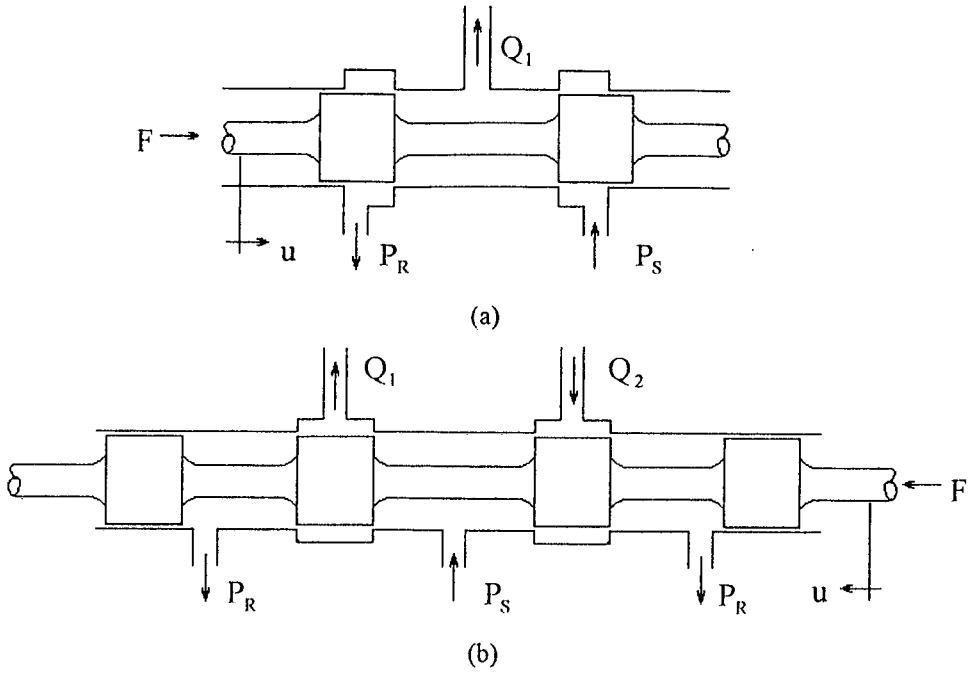


Figura 1.2 - Servoválvulas do tipo carretel: (a) de 3 vias e (b) de 4 vias

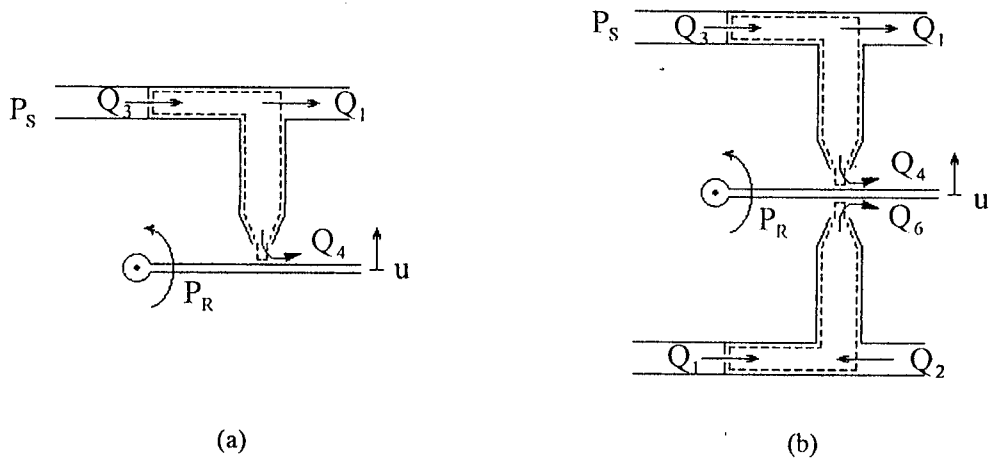


Figura 1.3 - Servoválvulas do tipo bocal-defletor: (a) de 3 vias e (b) de 4 vias

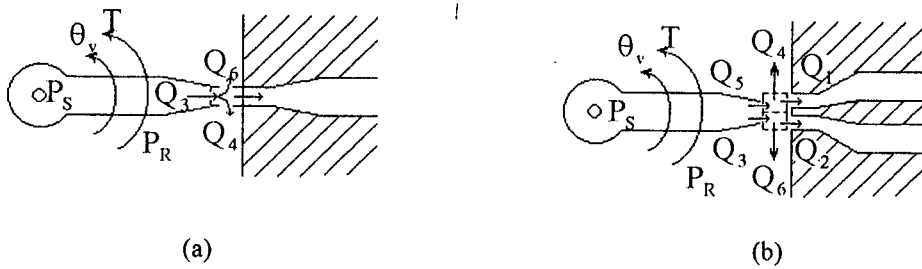


Figura 1.4 - Servoválvulas do tipo tubo-injetor: (a) de 3 vias e (b) de 4 vias



Neste trabalho é considerada uma servoválvula do tipo carretel de 4 vias. O motivo desta escolha se deve ao fato de que o exemplo padrão em estudo utiliza este tipo de servoválvula e também porque sua modelagem é descrita por diversos autores como Merritt (1967) e Stringer (1976) e tem sido objeto de vários estudos devido a sua importância.

A servoválvula do tipo carretel pode, ainda, ser classificada quanto ao tipo de centro: subcrítico, crítico e supercrítico. No centro subcrítico (Figura 1.5a) a sobreposição entre o comprimento do ressalto do carretel e o comprimento do pórtico é negativa. Para o centro crítico (Figura 1.5b) esta sobreposição é nula. E para o centro supercrítico (Figura 1.5c) a sobreposição é positiva.

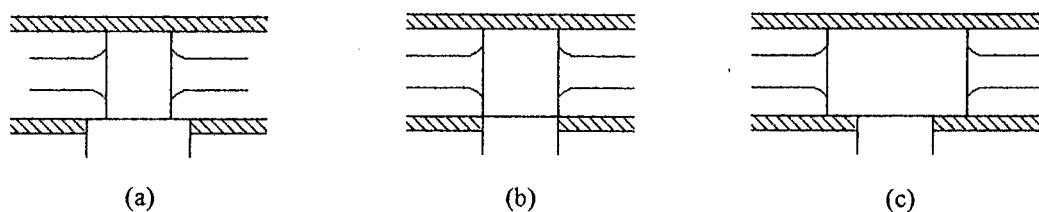


Figura 1.5 - Servoválvula do tipo carretel com: (a) centro subcrítico, (b) centro crítico e (c) centro supercrítico

O cilindro hidráulico tem a função de transformar potência ou energia hidráulica em potência ou energia mecânica. Dentre os diversos tipos de cilindros pode-se destacar dois principais: os de ação simples e os de ação dupla. O cilindro de simples ação (Figura 1.6a) é assim denominado por ter em um sentido, o movimento por efeito de pressão e vazão hidráulica e, no outro, por outro agente qualquer, que não o fluido hidráulico. Este tipo de cilindro pode ter retorno por mola ou por gravidade. Já no cilindro de dupla ação (Figura 1.6b) o movimento do pistão é feito através da entrada do fluido em qualquer um de seus lados (Palmiere, 1989).

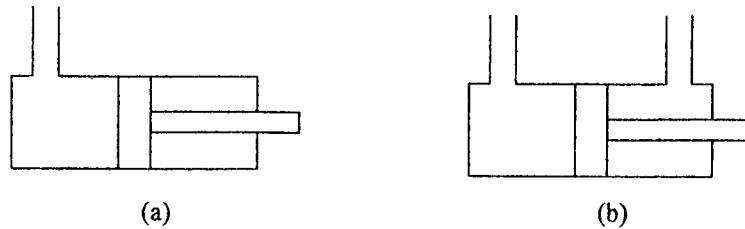


Figura 1.6 - Tipos de cilindros: (a) de ação simples e (b) de ação dupla

Pode-se ainda classificar os cilindros quanto à construção como, cilindro de haste dupla (Figura 1.7a), posicional (Figura 1.7b) e telescópico (Figura 1.7c)

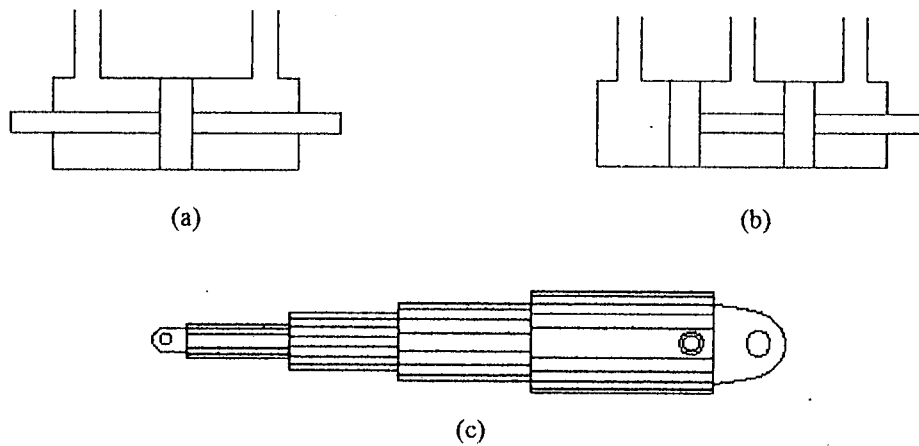


Figura 1.7 - Tipos de cilindros: (a) de haste dupla, (b) posicional e (c) telescópico

Será utilizado aqui o cilindro de ação dupla e haste dupla, pois este proporciona força e velocidade iguais em ambos os sentidos do movimento (avanço e retorno) desde que a vazão e a pressão permaneçam inalteradas.

Este trabalho considera um atuador hidráulico composto de uma servoválvula de 4 vias com centro crítico e um cilindro de dupla ação e haste dupla, como mostrado na Figura 1.8.

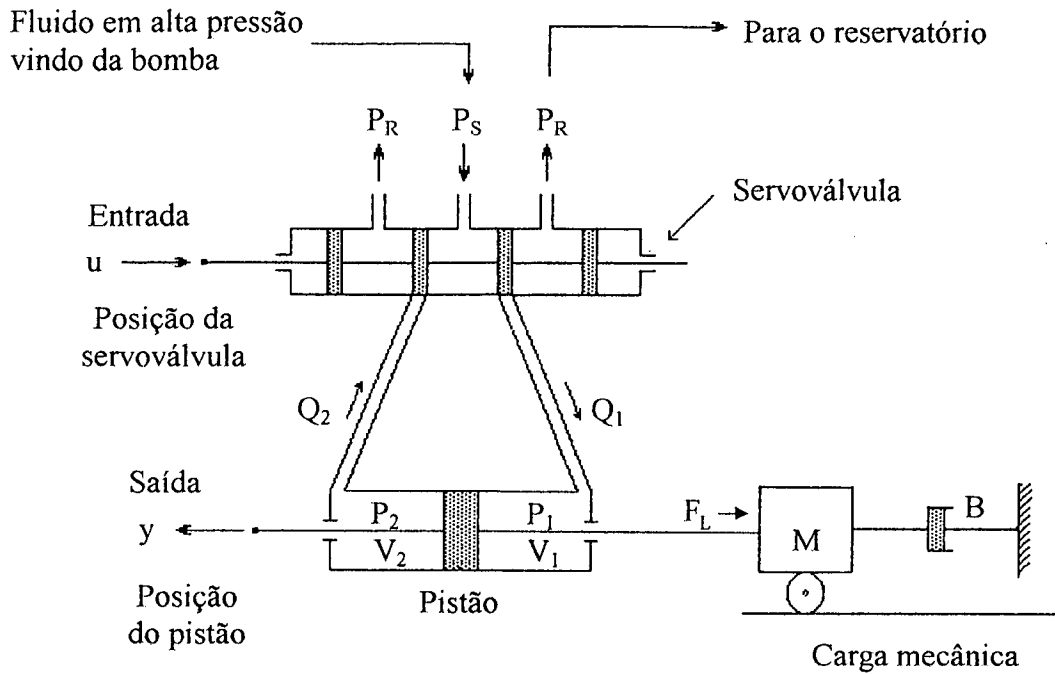


Figura 1.8 - Atuador hidráulico

Dependendo da posição da servoválvula, a câmara 1 ou a câmara 2 do atuador é exposta ao fluido em alta pressão ( $u > 0$  e  $u < 0$ , respectivamente). Se  $u > 0$ ; então o fluido será forçado para dentro da câmara 1, movendo o pistão na direção  $+y$ , e vice-versa se  $u < 0$ .

Neste trabalho são descritos e projetados controladores clássicos de realimentação de saída com base no método do Lugar das Raízes e um controlador com realimentação de estados utilizando-se o método da alocação de pólos. É apresentada ainda a estratégia de controle em cascata desenvolvida por Guenther e De Pieri (1996). O objetivo é comparar o desempenho do sistema em malha fechada com o controlador em cascata com o obtido usando os controladores clássicos.

O desempenho dinâmico dos controladores apresentados é comparado através de simulações. Resultados similares são obtidos para o modelo não-linear.

O capítulo 2 apresenta a modelagem matemática do atuador hidráulico em estudo. O projeto dos controladores clássicos de realimentação de saída e do controlador no espaço de estados é descrito no Capítulo 3. O Capítulo 4 descreve a estratégia de controle em cascata. Os resultados de simulações realizadas para os diversos controladores projetados são mostrados no Capítulo 5. Os resultados destas simulações confirmam a precisão da estratégia em cascata. O capítulo 6 traz as conclusões obtidas com o desenvolvimento deste trabalho.

## **CAPÍTULO 2**

### **MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM ATUADOR HIDRÁULICO**

Neste capítulo apresenta-se a modelagem matemática de um atuador hidráulico utilizado em sistemas de posicionamento. O modelo não-linear é obtido através das equações da continuidade, da vazão em servoválvulas e da segunda Lei de Newton. O modelo obtido é descrito por um sistema de terceira ordem, representado aqui através de variáveis de estado.

Este modelo de terceira ordem é então linearizado em torno do ponto central de operação. O modelo linearizado também é mostrado na forma de variáveis de estado.

#### **2.1 INTRODUÇÃO**

Nos sistemas hidráulicos a energia é transmitida e transformada através do fluido hidráulico que escoar através dos componentes do sistema.

O fluido hidráulico é caracterizado através de suas propriedades físicas e o seu escoamento é descrito por meio de variáveis denominadas variáveis descritivas.

As propriedades físicas de interesse para a caracterização do fluido são a massa específica, o módulo de elasticidade e a viscosidade.

A massa específica  $\rho$  é definida como a quantidade de massa por unidade de volume, dada em  $\text{kg/m}^3$ .

O módulo de elasticidade  $\beta$ , medido em  $\text{N/m}^2$ , é uma medida da compressibilidade do fluido, e é definido pela relação diferencial

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{\beta} \quad (2.1)$$

onde  $d\rho$  é o incremento na massa específica de um líquido que inicia em uma massa específica  $\rho$  e é então exposto a um incremento de pressão  $dP$ . Para muitos líquidos hidráulicos o módulo de elasticidade é muito grande, na ordem de  $6,9 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ , indicando que grandes mudanças na pressão são necessárias para modificar a massa específica, ainda que em pequena quantidade; isto justifica a consideração típica de que o líquido é incompressível. A equação (2.1) pode ser vista como a relação constitutiva que conecta a pressão e a massa específica do líquido.

A viscosidade  $\mu$ , medida em  $\text{Ns/m}^2$ , é a propriedade de atrito pela qual a dissipação de energia ocorre em um fluido corrente. Este atrito causa o arraste de objetos através de um fluido e também resulta em perdas de pressão.

A dinâmica dos escoamentos fluidos é, em geral, descrita através da velocidade e da pressão estática do fluido. Por isso, estas variáveis são muitas vezes chamadas de variáveis descritivas que constituem o estado do sistema (Burton, 1994). A pressão  $P$  é a força por unidade de área, e é medida em  $\text{N/m}^2$ . A pressão  $P$  em um fluido é análoga à energia potencial em sistemas newtonianos. Para definir a velocidade de um escoamento, é preciso especificar três componentes de velocidade, usualmente denotadas por  $u$ ,  $v$  e  $w$  nas direções

x, y e z, respectivamente, exatamente como para uma partícula newtoniana. Assim, o estado de um líquido corrente é determinado por um total de quatro variáveis independentes: u, v, w e P.

As relações básicas empregadas para a modelagem de sistemas hidráulicos são obtidas através de dois princípios básicos: o princípio da conservação de massa e o princípio da conservação de energia. A partir do princípio da conservação de massa obtém-se a equação da continuidade e a partir do princípio da conservação da energia obtém-se a equação geral da vazão em orifícios.

### 2.1.1 Princípio da Conservação de Massa

O princípio da conservação de massa para um volume de controle qualquer estabelece que “o *fluxo líquido de massa através da superfície de controle é igual à variação da massa no interior do volume de controle*” (Blackburn, 1960).

Seja o escoamento através de um volume de controle de forma arbitrária. Em princípio, a velocidade de cada partícula de fluido pode assumir qualquer direção e, desse modo, o fluxo de massa em termos vetoriais, para um elemento de massa  $dm = \rho dV$ , atravessando uma área elementar  $dA$  da superfície de controle é de  $dm = \rho \vec{v} dA$ .

Assim sendo, o princípio da conservação de massa aplicado a este volume de controle genérico, pode ser expresso por

$$\oint_{s.c.} \rho \vec{v} dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{v.c.} \rho dV = 0 \quad (2.2)$$

O primeiro termo da equação representa o fluxo líquido de massa através da superfície de controle, e o segundo, a variação da massa no interior do volume de controle.

Considere o volume de controle da Figura 2.1, onde o escoamento é unidirecional e em regime permanente.

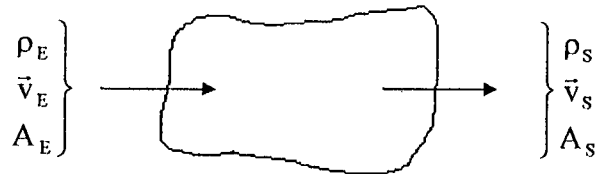


Figura 2.1 - Volume de controle

onde

$\rho_E$  e  $\rho_S$  são as massas específicas de entrada e de saída, respectivamente

$\vec{v}_E$  e  $\vec{v}_S$  são as velocidades de entrada e de saída, respectivamente

$A_E$  e  $A_S$  são as áreas de entrada e de saída, respectivamente

Empregando a convenção de que a normal à superfície aponta para fora do volume de controle, o vetor velocidade pode ser substituído pela velocidade escalar, e a equação (2.2) se reduz a

$$\int_{\Lambda_E} \rho_E (-v_E) dA + \int_{\Lambda_S} \rho_S v_S dA + \frac{d(\rho V)}{dt} = 0 \quad (2.3)$$

cuja integração fornece



$$-\rho_E v_E A_E + \rho_S v_S A_S + \frac{d(\rho V)}{dt} = 0 \quad (2.4)$$

Considerando que a vazão é dada pelo produto da velocidade pela área ( $Q = vA$ ), a equação (2.4) fica

$$\rho_E Q_E - \rho_S Q_S = \rho \frac{dV}{dt} + V \frac{d\rho}{dt} \quad (2.5)$$

Admite-se que a massa é uniformemente distribuída no volume de controle tal que  $\rho_E = \rho_S = \rho$ . Então, a equação (2.5) se reduz simplesmente a

$$\rho(Q_E - Q_S) = \rho \frac{dV}{dt} + V \frac{d\rho}{dt}$$

ou ainda,

$$Q_E - Q_S = \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (2.6)$$

Utilizando a equação (2.1), que relaciona o incremento na massa específica com o módulo de elasticidade e o incremento na pressão:

$$d\rho = \rho \frac{dP}{\beta} \quad (2.7)$$

e substituindo (2.7) em (2.6) tem-se

$$Q_E - Q_S = \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\beta} \frac{dP}{dt} \quad (2.8)$$

A equação (2.8) é forma geral mais usual da equação da continuidade.

### 2.1.2 Princípio da Conservação de Energia

Se os efeitos da viscosidade são ignorados, de modo que não existe dissipação de energia, e se o escoamento é considerado incompressível e constante (velocidades de escoamento e pressão não variam com o tempo em qualquer localização no fluxo), a soma da energia cinética com a energia potencial, é conservada

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + P = \text{cte} \quad (2.9)$$

A equação (2.9) é conhecida como *Equação de Bernoulli*. A energia cinética por unidade de volume é  $\frac{1}{2}\rho v^2$ , onde  $v$  é a velocidade. Existem também duas fontes de energia potencial: devido a gravidade,  $\rho g z$ , onde  $z$  é a altura acima de um nível de referência arbitrariamente estabelecido, e devido a pressão  $P$ .

Uma aplicação fundamental da equação de Bernoulli em sistemas hidráulicos, permite descrever como se comporta o escoamento potencial através de um orifício de uma canalização, quando se leva em conta uma brusca redução da seção de escoamento.

Seja o escoamento em regime permanente de um fluido ideal através de um orifício, como mostrado na Figura 2.2.

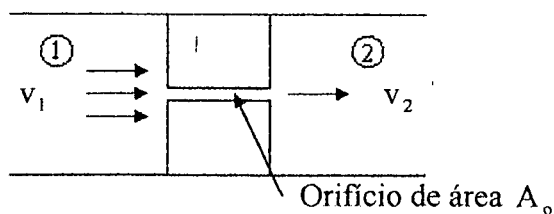


Figura 2.2 - Escoamento através de um orifício

O fluido em uma câmara com alta pressão  $P_1$  é dirigido através de um pequeno orifício de área  $A_o$ , para uma segunda câmara com pressão menor  $P_2$ . Para passar através do orifício o fluido precisa ser acelerado com uma velocidade relativamente alta acarretando uma queda de pressão. Assume-se a pressão e a velocidade do fluido como sendo relacionadas pela equação de Bernoulli (2.9).

A velocidade na seção de entrada  $v_1$  é desprezível em relação à velocidade  $v_2$ . Aplicando a equação de Bernoulli entre as duas seções e considerando que não existe variação na altura tem-se

$$P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \approx P_1 \quad (2.10)$$

Resolvendo a relação da velocidade  $v_2$  do fluxo através do orifício obtém-se

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_1 - P_2)} \quad (2.11)$$

Considerando que ( $Q = vA$ ) a equação (2.11) passa a exprimir a relação entre a vazão, a queda de pressão no orifício e a área do mesmo, ou seja:

$$Q = A_o \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_1 - P_2)} \quad (2.12)$$

Em escoamentos através de orifícios ocorrem perdas por atrito e a vazão é menor que a dada pela equação (2.12). Para levar em conta tais perdas, introduz-se um fator de perda que é o coeficiente de descarga  $C_d < 1$ . O coeficiente de descarga depende da geometria do orifício e das características do escoamento e é obtido experimentalmente. Desta forma, a equação (2.12) torna-se

$$Q = C_d A_o \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_1 - P_2)} \quad (2.13)$$

A equação (2.13) é conhecida com a equação geral de vazão através de orifícios

## 2.2 DESCRIÇÃO DO ATUADOR HIDRÁULICO

O atuador hidráulico<sup>1</sup> em estudo (Figura 2.3) consiste de um cilindro controlado por uma servoválvula do tipo carretel de 4 vias e centro crítico, em que o fluido sob pressão é usado como um mecanismo de transmissão de energia. Este tipo de atuador é normalmente usado em robôs manipuladores.

Assume-se que a entrada  $u(t)$  é uma função conhecida. Precisa-se desenvolver um modelo matemático que conecta esta entrada conhecida  $u(t)$  ao movimento  $y(t)$  da massa  $M$  (saída).

O sistema funciona da seguinte forma: uma bomba fornece fluido hidráulico em uma alta pressão  $P_s$ . Dependendo da posição da servoválvula, a câmara 1 ou a câmara 2 do cilindro atuador é exposta ao fluido em alta pressão ( $u > 0$  e  $u < 0$ , respectivamente). Suponha  $u > 0$ ; então o fluido é forçado para dentro da câmara 1, movendo o pistão na direção  $+y$ , e vice-versa se  $u < 0$ . Este movimento, contudo, sofre a resistência da carga mecânica (Burton, 1994). O objetivo do controle de posição é fazer com que a posição do sistema hidráulico siga a trajetória desejada, tão precisamente quanto possível apesar da perturbação provocada pela carga ( $F_L$ ).

---

<sup>1</sup> Neste trabalho, como mencionado no Capítulo 1, o termo “atuador hidráulico” é utilizado para designar o conjunto servoválvula+cilindro.

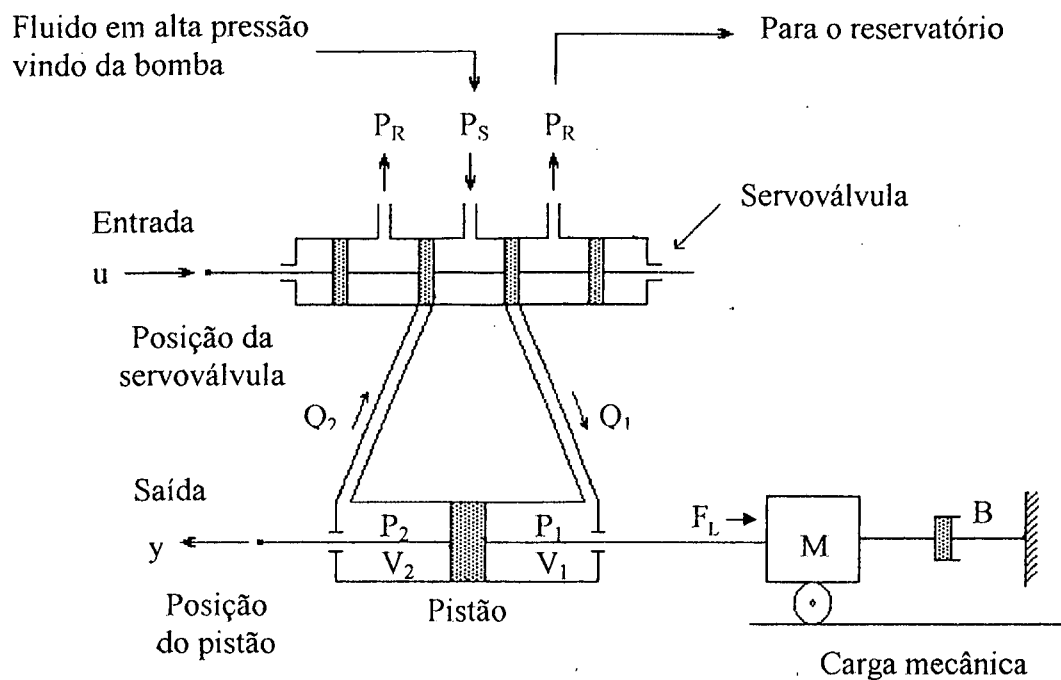


Figura 2.3 - Atuador hidráulico

## 2.3 MODELO NÃO-LINEAR DO ATUADOR HIDRÁULICO

Para a obtenção do modelo não-linear do atuador hidráulico utilizam-se, como mencionado anteriormente, as equações da continuidade, da vazão nas servoválvulas e a segunda Lei de Newton.

### 2.3.1 Equação da Vazão na Servoválvula

Seja a servoválvula tipo carretel de 4 vias e centro crítico utilizada no atuador hidráulico em consideração (Figura 2.3), mostrada em detalhes na Figura 2.4.

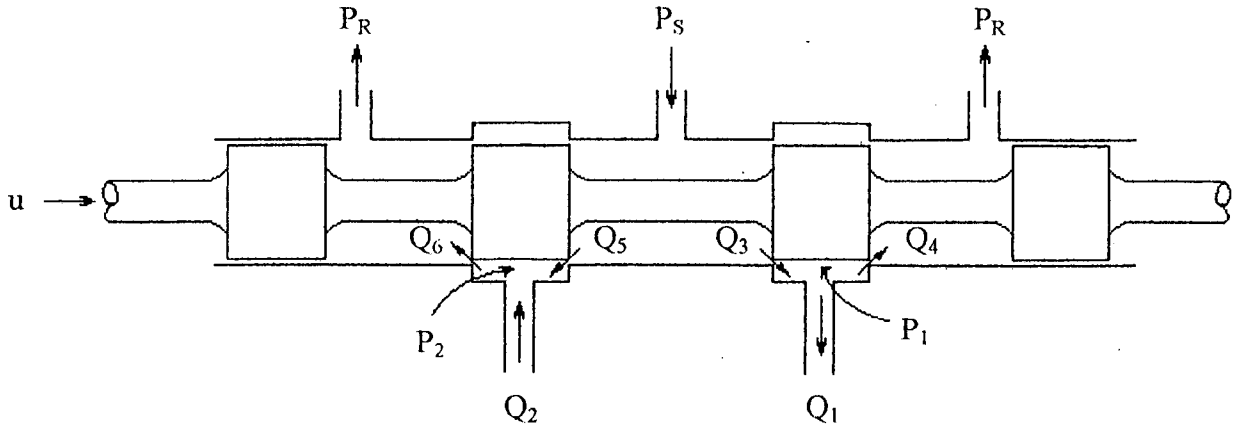


Figura 2.4 - Servoválvula tipo carretel de 4 vias e centro crítico

A vazão de fluido para a câmara 1 do cilindro ( $Q_1$ ) é a diferença entre a vazão de fluido vindo da bomba ( $Q_3$ ), e a vazão que vai para o reservatório ( $Q_4$ ), ou seja

$$Q_1 = Q_3 - Q_4 \quad (2.14)$$

A vazão de fluido que vem da câmara 2 do cilindro ( $Q_2$ ) é somada com a vazão que vem da bomba ( $Q_5$ ), resulta na vazão que vai para o reservatório ( $Q_6$ ). Assim

$$Q_2 = Q_6 - Q_5 \quad (2.15)$$

onde

$Q_1$  e  $Q_2$  são as vazões nas linhas 1 e 2 [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]

$Q_3$ ,  $Q_4$ ,  $Q_5$  e  $Q_6$  são as vazões nos orifícios [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]

A partir da equação geral das vazões nos orifícios (2.13) e admitindo que os coeficientes de descarga em todos eles são iguais a  $C_d$ , tem-se:

$$Q_3 = C_d A_3 \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_S - P_1)} \quad (2.16)$$

$$Q_4 = C_d A_4 \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_1 - P_R)} \quad (2.17)$$

$$Q_5 = C_d A_5 \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_S - P_2)} \quad (2.18)$$

$$Q_6 = C_d A_6 \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_2 - P_R)} \quad (2.19)$$

onde

$A_j$  é a área do orifício  $j$  [ m<sup>2</sup> ]

$P_S$  é a pressão de fornecimento [ N / m<sup>2</sup> ]

$P_R$  é a pressão de retorno [ N / m<sup>2</sup> ]

$\rho$  é a massa específica do fluido [ kg / m<sup>3</sup> ]

As áreas dos orifícios são funções que dependem das características construtivas e do deslocamento da servoválvula (Merritt, 1967). De uma forma geral

$$A_j = f_j(u) \quad \text{com } j = 3,4,5,6 \quad (2.20)$$

onde

$u$  é o deslocamento linear da servoválvula

$f_j$  é uma função não-linear

Para  $u > 0$  a vazão que vai para o reservatório ( $Q_4$ ) é o vazamento da região onde a pressão é  $P_1$  para a região onde a pressão é  $P_R < P_1$ . Neste mesmo caso, a vazão que vem da bomba ( $Q_5$ ) é o vazamento da região onde a pressão é  $P_S$  para a região onde a pressão é  $P_2 < P_S$ .

Nas servoválvulas de centro crítico os vazamentos  $Q_4$  e  $Q_5$  ocorrem devido às imperfeições geométricas e às folgas entre os pistões dos carretéis e seus pórticos (Merritt, 1967).

Desconsiderando as imperfeições geométricas e desprezando a vazão através das folgas têm-se:

Para  $u \geq 0$

$$Q_4 = Q_5 = 0 \quad (2.21)$$

Com isso, considerando (2.16) e (2.19), as equações (2.14) e (2.15) resultam

$$Q_1 = C_d A_3 \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_S - P_1)} \quad (2.22)$$

$$Q_2 = C_d A_6 \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_2 - P_R)} \quad (2.23)$$

Para  $u < 0$  a vazão que vai para o reservatório ( $Q_6$ ) é o vazamento da região onde a pressão é  $P_2$  para a região onde a pressão é  $P_R < P_2$ . Neste mesmo caso, a vazão que vem da bomba ( $Q_3$ ) é o vazamento da região onde a pressão é  $P_S$  para a região onde a pressão é  $P_1 < P_S$ .



Para  $u \leq 0$

$$Q_3 = Q_6 = 0 \quad (2.24)$$

Neste caso, considerando (2.17) e (2.18), as equações (2.14) e (2.15) resultam

$$Q_1 = -C_d A_4 \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_1 - P_R)} \quad (2.25)$$

$$Q_2 = -C_d A_5 \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_S - P_2)} \quad (2.26)$$

Define-se (Merritt, 1967):

$$Q_L = \frac{Q_1 + Q_2}{2} \quad (2.27)$$

e

$$P_L = P_1 - P_2 \quad (2.28)$$

onde

$Q_L$  é a vazão de controle [  $m^3 / s$  ]

$P_L$  é a queda de pressão na carga [  $N / m^2$  ]

Substituindo (2.22) e (2.23) em (2.27) tem-se para  $u \geq 0$

$$Q_L = \frac{C_d}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho}} (A_3 \sqrt{P_S - P_1} + A_6 \sqrt{P_2 - P_R}) \quad (2.29)$$

E substituindo (2.25) e (2.26) em (2.27) tem-se para  $u \leq 0$

$$Q_L = -\frac{C_d}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho}} (A_4 \sqrt{P_1 - P_R} + A_5 \sqrt{P_S - P_2}) \quad (2.30)$$

Parte-se agora para a combinação das equações (2.28), (2.29) e (2.30) de modo a obter a vazão de controle como função de a entrada e da queda de pressão na carga. A maioria das servoválvulas possuem orifícios iguais e simétricos (Merritt, 1967) o que, através da equação (2.20), permite escrever:

Para orifícios iguais:

$$f_3(u) = f_6(u) \quad (2.31)$$

$$f_4(u) = f_5(u) \quad (2.32)$$

Para orifícios simétricos:

$$f_3(u) = f_5(-u) \quad (2.33)$$

$$f_4(u) = f_6(-u) \quad (2.34)$$

Considerando geometria ideal e o emprego de pórticos retangulares pode-se escrever a função  $f_j$  como

$$f_j(u) = w |u| \quad \text{com } j=3,4,5,6 \quad (2.35)$$

onde  $w$  é o gradiente da área da servoválvula [ m ].

A partir das equações (2.31) a (2.34) e da equação (2.35) pode-se dizer que as áreas são todas iguais a  $w |u|$  e levando-se em conta que o coeficiente de descarga  $C_d$  e a densidade  $\rho$  também são iguais pode-se escrever

$$Q_L = Q_1 = Q_2 \quad (2.36)$$

A equação (2.36) aplicada às equações (2.22) e (2.23) ou (2.25) e (2.26) resulta em

$$P_S + P_R = P_1 + P_2 \quad (2.37)$$

A partir da definição de  $P_L$  e da equação (2.37) pode-se escrever

$$P_1 = \frac{P_S + P_R + P_L}{2} \quad (2.38)$$

$$P_2 = \frac{P_S + P_R - P_L}{2} \quad (2.39)$$

A substituição das equações (2.35), (2.38) e (2.39) nas equações (2.29) e (2.30), fornece:

Para  $u \geq 0$

$$Q_L = \frac{C_d}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho}} \left[ w|u| \sqrt{\frac{2P_S - P_S - P_R - P_L}{2}} + w|u| \sqrt{\frac{P_S + P_R - P_L - 2P_R}{2}} \right]$$

$$Q_L = \frac{C_d}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho}} \left[ 2w|u| \sqrt{\frac{P_S - P_R - P_L}{2}} \right] \quad (2.40)$$

Para  $u \leq 0$

$$Q_L = -\frac{C_d}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho}} \left[ w|u| \sqrt{\frac{P_S + P_R + P_L - 2P_R}{2}} + w|u| \sqrt{\frac{2P_S - P_S - P_R + P_L}{2}} \right]$$

$$Q_L = -\frac{C_d}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho}} \left[ 2w|u| \sqrt{\frac{P_S - P_R + P_L}{2}} \right] \quad (2.41)$$

Então temos a equação de vazão não-linear para qualquer  $u$  combinando as equações (2.40) e (2.41), assim

$$Q_L = \frac{C_d}{\sqrt{\rho}} wu \sqrt{P_S - P_R - \frac{u}{|u|} P_L} \quad (2.42)$$

Como normalmente  $P_S \gg P_R$ , a pressão de retorno  $P_R$  será desprezada, ou seja,  $P_R = 0$  (Stringer, 1976). Então a equação (2.42) fica reduzida a

$$Q_L = Ku \sqrt{P_S - \text{sign}(u)P_L} \quad (2.43)$$

onde a constante

$$K = \frac{C_d w}{\sqrt{\rho}} \quad (2.44)$$

A equação (2.43) é a Equação de Vazão Não-Linear para uma servoválvula tipo carretel de 4 vias de centro crítico com geometria ideal e pórticos retangulares.

### 2.3.2 Equação da Continuidade

Obtida a equação da vazão de controle para a servoválvula aplica-se agora a equação da continuidade (2.8) para cada câmara do cilindro

$$Q_1 = \frac{dV_1}{dt} + \frac{V_1}{\beta} \frac{dP_1}{dt} \quad (2.45)$$

$$-Q_2 = \frac{dV_2}{dt} + \frac{V_2}{\beta} \frac{dP_2}{dt} \quad (2.46)$$

onde

$P_1, P_2$  são as pressões nas câmaras 1 e 2 do cilindro atuador [ N / m<sup>2</sup> ]

$\beta$  é o módulo de elasticidade do fluido [ N / m<sup>2</sup> ]

$V_1$  é o volume de fluido da câmara 1 [ m<sup>3</sup> ]

$V_2$  é o volume de fluido da câmara 2 [ m<sup>3</sup> ]

Considere o cilindro na posição central (Figura 2.5) quando  $y = 0$ .

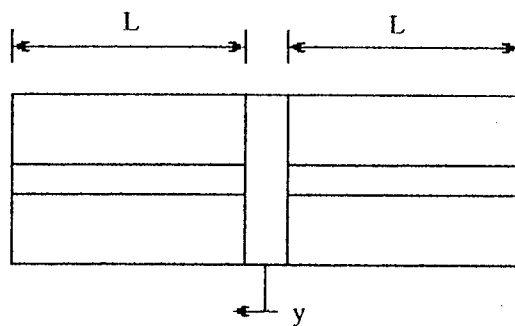


Figura 2.5 - Cilindro atuador

Quando o cilindro está em uma posição fora do centro, isto é,  $y \neq 0$ , os volumes nas câmaras do pistão são

$$V_1 = A(L + y) \quad (2.47)$$

$$V_2 = A(L - y) \quad (2.48)$$

onde  $L$  é o comprimento da câmara e  $A$  é a área do pistão..

De (2.47) e (2.48) verifica-se que

$$\frac{dV_1}{dt} = -\frac{dV_2}{dt} = A \frac{dy}{dt} \quad (2.49)$$

Substituindo (2.47), (2.48) e (2.49) em (2.45) e (2.46) resulta

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{\beta}{A(L+y)} \left[ Q_1 - A \frac{dy}{dt} \right] \quad (2.50)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{\beta}{A(L-y)} \left[ A \frac{dy}{dt} - Q_2 \right] \quad (2.51)$$

Considerando a equação (2.35) e substituindo as equações (2.50) e (2.51) na equação (2.28) chega-se a

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{\beta}{A(L+y)} \left[ Q_L - A \frac{dy}{dt} \right] + \frac{\beta}{A(L-y)} \left[ Q_L - A \frac{dy}{dt} \right] \quad (2.52)$$

Combinando esta equação com a expressão (2.43) que fornece a vazão na servoválvula obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{dP_L}{dt} = & \frac{\beta}{A(L+y)} \left[ Ku\sqrt{P_s - \text{sign}(u)P_L} - A \frac{dy}{dt} \right] + \\ & + \frac{\beta}{A(L-y)} \left[ Ku\sqrt{P_s - \text{sign}(u)P_L} - A \frac{dy}{dt} \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

A equação (2.53) apresenta uma natureza não-linear devido à equação da vazão na servoválvula e a dependência do volume com o deslocamento do cilindro. As não-linearidades aparecem no termos de raiz quadrada e nos termos  $1/(L+y)$  e  $1/(L-y)$ .

### 2.3.3 Segunda Lei de Newton

A equação do modelo não-linear é obtida pela aplicação da segunda Lei de Newton para forças no pistão. Da Figura 2.3 verifica-se que a força resultante é

$$F = AP_L = M\ddot{y} + B\dot{y} + F_L \quad (2.54)$$

onde

$F$  é a força gerada ou desenvolvida pelo pistão [ N ]

$M$  é a massa total do pistão e da carga referida ao pistão [ kg ]

$B$  é o coeficiente de atrito viscoso do pistão e da carga [ N s / m ]

$F_L$  é a força de carga arbitrária no pistão [ N ]

### 2.3.4 Modelo Não-Linear

O modelo não-linear do atuador hidráulico (incluindo servoválvula + cilindro) é descrito pelas equações (2.53) e (2.54), ou seja,

$$M \frac{d^2y}{dt} + B \frac{dy}{dt} + F_L = AP_L \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_L}{dt} = & \frac{\beta}{A(L+y)} \left[ Ku\sqrt{P_s - \text{sign}(u)P_L} - A \frac{dy}{dt} \right] + \\ & + \frac{\beta}{A(L-y)} \left[ Ku\sqrt{P_s - \text{sign}(u)P_L} - A \frac{dy}{dt} \right] \end{aligned} \quad (2.56)$$

Este modelo pode ser descrito em termos de variáveis de estado. Escolhendo-se como componentes do estado  $y$ ,  $\dot{y}$  e  $P_L$ , (Burton, 1994) ou seja,

$$x_1 = y \quad (2.57)$$

$$x_2 = \dot{y} \quad (2.58)$$

$$x_3 = P_L \quad (2.59)$$

Então:

$$\dot{x}_1 = \dot{y} \quad (2.60)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} \quad (2.61)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{P}_L \quad (2.62)$$

Isolando  $\ddot{y}$  em (2.53) e substituindo o resultado em (2.61) tem-se

$$\dot{x}_2 = -\frac{B}{M}x_2 + \frac{A}{M}x_3 - \frac{F_L}{M} \quad (2.63)$$

Substituindo a equação (2.54) em (2.62) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = & \frac{\beta}{A(L+x_1)} \left[ Ku\sqrt{P_s - \text{sign}(u)x_3} - Ax_2 \right] + \\ & - \frac{\beta}{A(L-x_1)} \left[ -Ku\sqrt{P_s - \text{sign}(u)x_3} + Ax_2 \right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

Então o modelo não-linear para o sistema de posicionamento hidráulico pode ser descrito como:



$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.65)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{B}{M}x_2 + \frac{A}{M}x_3 - \frac{F_L}{M} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = & \frac{\beta}{A(L+x_1)} \left[ Ku\sqrt{P_s - \text{sign}(u)x_3} - Ax_2 \right] + \\ & - \frac{\beta}{A(L-x_1)} \left[ -Ku\sqrt{P_s - \text{sign}(u)x_3} + Ax_2 \right] \end{aligned} \quad (2.67)$$

## 2.4 MODELO LINEARIZADO DO ATUADOR HIDRÁULICO

O Modelo Linear para o atuador hidráulico em estudo é obtido a partir da linearização da equação da vazão de controle (2.43).

Para obter-se uma aproximação linear da equação (2.43), expande-se esta equação em Série de Taylor em torno de um ponto de operação  $i$ , ou seja

$$\begin{aligned} Q_L(u, P_L) = & Q_L(u_i, P_{Li}) + (u - u_i) \frac{\partial Q_L(u, P_L)}{\partial u} \Big|_i + (P_L - P_{Li}) \frac{\partial Q_L(u, P_L)}{\partial P_L} \Big|_i + \\ & + \frac{1}{2!} \left\{ (u - u_i)^2 \frac{\partial^2 Q_L(u, P_L)}{\partial u^2} \Big|_i + 2(u - u_i)(P_L - P_{Li}) \frac{\partial^2 Q_L(u, P_L)}{\partial u \partial P_L} \Big|_i \right\} + \\ & + \frac{1}{2!} (P_L - P_{Li})^2 \frac{\partial^2 Q_L(u, P_L)}{\partial P_L^2} \Big|_i + \dots \end{aligned} \quad (2.68)$$

Considerando que se trabalhe próximo do ponto de operação  $i$ , os termos  $(u - u_i)$  e  $(P_L - P_{Li})$  serão suficientemente pequenos de tal forma que  $(u - u_i)^2$ ,  $(u - u_i)(P_L - P_{Li})$ ,

$(P_L - P_{L_i})^2$  .... são desprezíveis (De Negri, 1987). Assim, a equação (2.68) pode ser escrita como

$$Q_L(u, P_L) = Q_L(u_i, P_{L_i}) + \left. \frac{\partial Q_L(u, P_L)}{\partial u} \right|_i u + \left. \frac{\partial Q_L(u, P_L)}{\partial P_L} \right|_i P_L \quad (2.69)$$

Definem-se dois importantes coeficientes da servoválvula:

Ganho de vazão para o ponto de operação  $i$  [ $m^2 / s$ ]:

$$K_{qi} = \left. \frac{\partial Q_L(u, P_L)}{\partial u} \right|_i \quad (2.70)$$

Coefficiente de vazão-pressão para o ponto de operação  $i$  [ $m^5 / (N s)$ ]:

$$K_{ci} = - \left. \frac{\partial Q_L(u, P_L)}{\partial P_L} \right|_i \quad (2.71)$$

O ponto  $i = 0$  é chamado de ponto central de operação. Neste ponto

$$Q_{L_0} = u_0 = P_{L_0} = 0 \quad (2.72)$$

Então, a equação (2.69) torna-se

$$Q_L = \left. \frac{\partial Q_L}{\partial u} \right|_{i=0} u + \left. \frac{\partial Q_L}{\partial P_L} \right|_{i=0} P_L \quad (2.73)$$

ou

$$Q_L = K_q u - K_c P_L \quad (2.74)$$

que é a equação da vazão linearizada em torno de um ponto central de operação.

O ganho de vazão para o ponto central de operação fica:

$$K_q = K\sqrt{P_s} \quad (2.75)$$

O coeficiente de vazão-pressão para o ponto central de operação fica:

$$K_c = 0 \quad (2.76)$$

Na prática o coeficiente central de vazão-pressão  $K_c$  pode ser aproximado por (Merritt, 1967):

$$K_c = \frac{\pi w r_c^2}{32\mu} \quad (2.77)$$

onde

$r_c$  é a folga radial [ m ]

$\mu$  é a viscosidade absoluta do fluido [ N s / m<sup>2</sup> ]

Substituindo a equação (2.74) na equação (2.52) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dP_L}{dt} = & \frac{\beta}{A(L+y)} \left[ K_q u - K_c P_L - A \frac{dy}{dt} \right] + \\ & - \frac{\beta}{A(L-y)} \left[ - (K_q u - K_c P_L) + A \frac{dy}{dt} \right] \end{aligned} \quad (2.78)$$

Como o ponto de operação é  $i = 0$  isto significa que o pistão está colocado no centro ( $y = 0$ ), então

$$V_t = V_1 + V_2 = 2AL \quad (2.79)$$

ou, ainda

$$AL = \frac{V_t}{2} \quad (2.80)$$

onde  $V_t$  é o volume total do fluido sob compressão em ambas as câmaras [  $m^3$  ].

Fazendo  $y = 0$  e substituindo a equação (2.80) na equação (2.78) tem-se

$$\frac{dP_L}{dt} = -\frac{4\beta}{V_t} \left[ A \frac{dy}{dt} + K_q u - K_c P_L \right] \quad (2.81)$$

A equação (2.54) definida pela segunda Lei de Newton não é alterada para o modelo linear.

As equações (2.81) e (2.54) são equações básicas do modelo linearizado.

Utilizando-se a transformada de Laplace com condições iniciais nulas pode-se escrever

$$Y(s) = \frac{\frac{A}{M} \frac{4\beta}{V_t} K_q U(s) + \frac{1}{M} \left( s + \frac{4\beta}{V_t} K_c \right) F_L}{s^3 + \left( \frac{B}{M} + \frac{4\beta}{V_t} K_c \right) s^2 + \left( \frac{A^2}{M} \frac{4\beta}{V_t} + \frac{B}{M} \frac{4\beta}{V_t} K_c \right) s} \quad (2.82)$$

O modelo linearizado do sistema de posicionamento hidráulico também pode ser descrito através da representação por variáveis de estado. Utilizando os mesmos estados definidos para o modelo não-linear, tem-se

$$\dot{x}_1 = \dot{y} \quad (2.83)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} \quad (2.84)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{P}_L \quad (2.85)$$

Novamente isolando  $\ddot{y}$  na equação (2.54) e substituindo o resultado na equação (2.84) tem-se

$$\dot{x}_2 = -\frac{B}{M}x_2 + \frac{A}{M}x_3 - \frac{F_L}{M} \quad (2.86)$$

Substituindo a equação (2.81) em (2.85) tem-se

$$\dot{x}_3 = -\frac{4\beta}{V_t}Ax_2 - \frac{4\beta}{V_t}K_c x_3 + \frac{4\beta}{V_t}K_q u \quad (2.87)$$

Então o modelo linearizado para o sistema de posicionamento hidráulico pode ser resumido da seguinte forma

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.88)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{B}{M}x_2 + \frac{A}{M}x_3 - \frac{F_L}{M} \quad (2.89)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{4\beta}{V_t}Ax_2 - \frac{4\beta}{V_t}K_c x_3 + \frac{4\beta}{V_t}K_q u \quad (2.90)$$

As equações (2.88), (2.89) e (2.90) representam o modelo linearizado do atuador hidráulico. Estas equações serão utilizadas nos capítulos 3 e 4 quando for estudado o problema de controle.

## CAPÍTULO 3

---

### PROJETO DE CONTROLADORES CLÁSSICOS PARA UM ATUADOR HIDRÁULICO

Neste capítulo são apresentados os projetos dos principais controladores de realimentação de saída para um atuador hidráulico proposto como exemplo padrão em (Davidson,1990). São considerados os projetos dos controladores proporcional (P), proporcional-integral (PI), proporcional-derivativo (PD), proporcional-integral-derivativo (PID), compensadores em avanço e em atraso de fase. Além disso é apresentada a descrição do projeto de um controlador por realimentação de estados através da alocação de pólos.

#### 3.1 INTRODUÇÃO

O projeto dos controladores é feito utilizando a função de transferência em malha aberta do sistema, a equação de estados e as especificações de desempenho. A entrada e a saída do sistema são relacionadas através da equação (2.82), definida no Capítulo 2 e apresentada a seguir:

$$Y(s) = \frac{\frac{A}{M} \frac{4\beta}{V_t} K_q U(s) + \frac{1}{M} \left( s + \frac{4\beta}{V_t} K_c \right) F_L}{s^3 + \left( \frac{B}{M} + \frac{4\beta}{V_t} K_c \right) s^2 + \left( \frac{A^2}{M} \frac{4\beta}{V_t} + \frac{B}{M} \frac{4\beta}{V_t} K_c \right) s} \quad (3.1)$$

Desprezando a perturbação representada pela carga  $F_L$ , a função de transferência do sistema em malha aberta é

$$G_p(s) = \frac{Y}{U} = \frac{\left( \frac{A^2 4\beta}{M V_t} K_q \right)}{s^3 + \left( \frac{B}{M} + \frac{4\beta}{V_t} K_c \right) s^2 + \left( \frac{A^2 4\beta}{M V_t} + \frac{B 4\beta}{M V_t} K_c \right) s} \quad (3.2)$$

No projeto aqui considerado, os valores dos parâmetros utilizados são os do exemplo proposto pelo "IFAC Theory Committee Report", apresentado em Davidson (1990). Estes parâmetros são mostrados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Parâmetros do exemplo padrão

Parâmetro	Mínimo	Máximo	Nominal
Módulo de elasticidade volumétrico: $\beta$ [N/m <sup>2</sup> ]	$9 \times 10^8$	$16 \times 10^8$	$14 \times 10^8$
Massa: M [kg]	50	300	128,7
Coefficiente de atrito: B [Ns/m]	50	564	163
Volume total do fluido: $V_t$ [m <sup>3</sup> ]			$0,874 \times 10^{-3}$
Área do pistão: A [m <sup>2</sup> ]	$1,05 \times 10^{-3}$	$1,11 \times 10^{-3}$	$1,075 \times 10^{-3}$
Força de carga arbitrária no pistão: $F_L$ [N] (*)	0	$8 \times 10^3$	$3 \times 10^3$
Máxima vazão da servoválvula: $Q_{L,max}$ [m <sup>3</sup> /s]		$8,66 \times 10^{-4}$	
Pressão de suprimento: $P_s$ [N/m <sup>2</sup> ] (**)			$6,9 \times 10^6$
Coefficiente de vazão-pressão: $K_c$ [m <sup>5</sup> /Ns]	$1 \times 10^{-14}$	$1,5 \times 10^{-10}$	$2,4 \times 10^{-12}$

(\*) O valor nominal de  $F_L$  foi escolhido de acordo com a relação

$$\left| \frac{F_L}{M} \right|_{\max} = \frac{2 P_s A}{3 M} \quad (3.3)$$

definida em (Yun & Cho, 1991), de onde obtém-se  $F_L < 4941\text{N}$ . Adota-se o valor nominal de

$$F_L = 3000\text{N} \quad (3.4)$$

(\*\*) O valor da pressão de suprimento  $P_s$  não é dado no exemplo padrão. Foi adotado o valor normalmente usado de 1000 psi, ou seja,  $6,9 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  (Merritt, 1967).

O exemplo padrão não define um valor para o parâmetro  $K_q$ . Por isso, o valor nominal deste parâmetro é calculado no Apêndice, resultando em  $K_q = 0,73 \text{ m}^2/\text{s}$ .

Substituindo os valores nominais (dados na Tabela 3.1) na equação (3.1) tem-se a função de transferência em malha aberta do atuador hidráulico para o exemplo padrão

$$G_p(s) = \frac{4 \times 10^7}{s^3 + 17s^2 + 5,76 \times 10^4 s} \quad (3.5)$$

cujas raízes da equação característica são

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \\ p_2 &= -\sigma - j\omega = -8,5 - j239,85 \\ p_3 &= -\sigma + j\omega = -8,5 + j239,85 \end{aligned} \quad (3.6)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \sigma &= 8,5 \\ \omega &= 239,85 \end{aligned} \quad (3.7)$$

A frequência natural e o amortecimento dos pólos complexos conjugados resultam



$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} = 240 \text{ Hz} \quad (3.8)$$

$$\zeta = \frac{\sigma}{\omega_n} = 0,035 \quad (3.9)$$

O modelo linear do atuador hidráulico (3.5) constitui-se, portanto, em um sistema dinâmico de terceira ordem, com um pólo na origem e pólos complexos conjugados rápidos e pouco amortecidos.

O sistema é representado através de variáveis de estado, como mostrado no capítulo 2:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.10)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{B}{M}x_2 + \frac{A}{M}x_3 - \frac{F_L}{M} \quad (3.11)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{4\beta}{V_t}Ax_2 - \frac{4\beta}{V_t}K_c x_3 + \frac{4\beta}{V_t}K_q u \quad (3.12)$$

Substituindo os parâmetros do exemplo padrão resulta:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.13)$$

$$\dot{x}_2 = -1,27x_2 + 8,35 \times 10^{-6}x_3 - 23,31 \quad (3.14)$$

$$\dot{x}_3 = -6,9 \times 10^9 x_2 - 15,38x_3 + 4,74 \times 10^{12} u \quad (3.15)$$

As especificações de desempenho para o sistema são no domínio do tempo: sobre-sinal de no máximo 10% e tempo de acomodação de 1 segundo para o critério de 2% e no domínio da frequência: margem de fase maior do que 65° e erro à entrada rampa menor do que 1%.

### 3.2 PROJETO DOS CONTROLADORES DE REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA

Nesta seção é apresentado o projeto dos controladores clássicos de realimentação de saída utilizando especificações nos domínios do tempo e da frequência. Para isto serão utilizados o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz (Ogata, 1993), o método do Lugar das Raízes (Ogata, 1993), o método do contorno das raízes (Kuo, 1985) e os diagramas de bode (Ogata, 1993).

O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz (por alguns autores chamado apenas de critério de Routh) é um método algébrico que dá informação sobre a estabilidade absoluta de um sistema linear invariante no tempo. O critério testa se alguma raiz da equação característica está no semiplano direito do plano complexo  $s$ .

O método do Lugar das Raízes é um importante método auxiliar para a determinação da estabilidade e para a análise de sistemas de controle. O Lugar das Raízes é o gráfico das raízes da equação característica de um sistema a malha fechada, em função do ganho. É obtido representando em um plano complexo  $s$ , as raízes da equação característica do sistema em malha fechada quando o ganho  $K$  varia de  $0$  a  $\infty$ . Este método fornece uma clara identificação dos efeitos do ajuste do parâmetro  $K$ .

O método do contorno das raízes é derivado do método do Lugar das Raízes quando mais de um parâmetro varia. Ele consiste em escolher um parâmetro e manter fixos os demais observando o Lugar das Raízes quando o parâmetro escolhido é variado de  $0$  a  $\infty$ .

O projeto no domínio da frequência é simples e direto. O gráfico da resposta em frequência indica claramente a maneira pela qual o sistema deve ser modificado a fim de

obter as especificações desejadas. No projeto no domínio da frequência utilizam-se os diagramas de bode quando as especificações são dadas em termos de margens de ganho ou de margens de fase.

### 3.2.1 Controlador Proporcional (P)

No controle proporcional, a saída do controlador é um sinal diretamente proporcional ao erro, que é uma função do tempo, ou seja

$$u(t) = K_p e(t) \quad (3.17)$$

onde  $K_p$  é o ganho proporcional e  $e(t)$  é o erro. A saída do controlador depende apenas da amplitude do erro no instante de tempo. A função de transferência  $G_c(s)$  para o controlador é

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (3.18)$$

O sistema com controlador proporcional tem um diagrama de blocos como o mostrado na Figura 3.1. O resultado é a função de transferência de malha aberta

$$G_o(s) = K_p G_p(s) \quad (3.19)$$

onde  $G_p(s)$  é a função de transferência do processo.

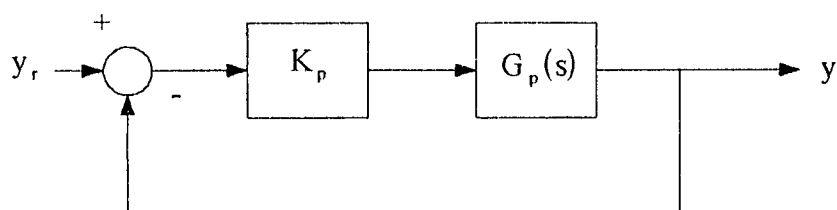


Figura 3.1 - Sistema com controlador proporcional

A função de transferência do atuador hidráulico com um controlador proporcional em malha aberta é

$$G_o(s) = \frac{4 \times 10^7 K_p}{s^3 + 17s^2 + 5,76 \times 10^4 s} \quad (3.20)$$

cujos pólos são os mesmos dados na equação (3.6).

Em malha fechada a função de transferência do sistema fica

$$G(s) = \frac{4 \times 10^7 K_p}{s^3 + 17s^2 + 5,76 \times 10^4 s + 4 \times 10^7 K_p} \quad (3.21)$$

O Lugar das raízes em relação a  $K_p$  para o sistema com controlador proporcional é mostrado na Figura 3.2.

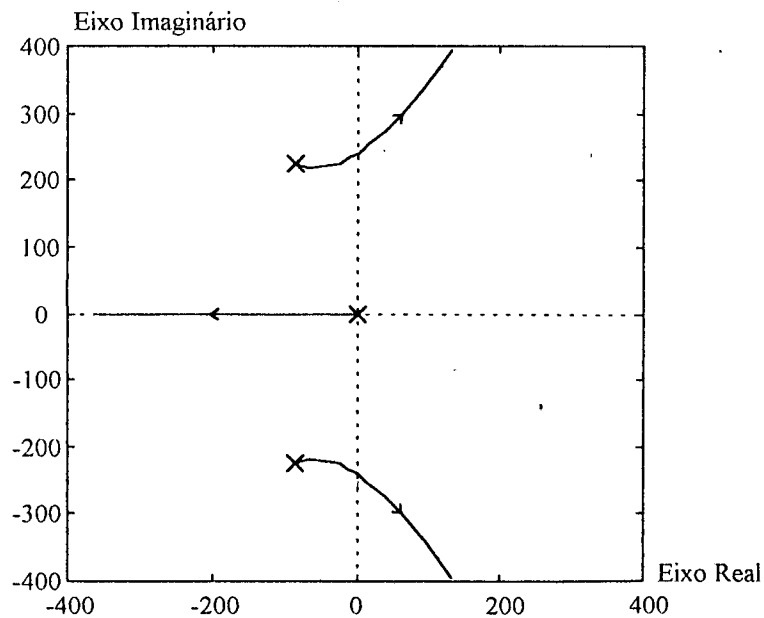


Figura 3.2 - Lugar das Raízes para o sistema com controlador proporcional

Através de regras para o traçado do Lugar das Raízes podemos determinar o ganho para o qual este intercepta o eixo imaginário, ou seja, o valor de  $K_p$  que torna o sistema instável.

Para a obtenção da intersecção do Lugar das Raízes com o eixo imaginário utiliza-se o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz com a equação característica do sistema em malha fechada (Ogata, 1993).

Para o sistema com controlador proporcional tem-se a partir do critério de Routh-Hurwitz a seguinte tabela de coeficientes

$s^3$	1.	57552
$s^2$	17	$4 \times 10^7 K_p$
$s^1$	$5,76 \times 10^4 - 2,35 \times 10^6 K_p$	
$s^0$	$4 \times 10^7 K_p$	

Para que o sistema seja estável é necessário que

$$5,76 \times 10^4 - 2,35 \times 10^6 K_p > 0 \quad (3.22)$$

$$4 \times 10^7 K_p > 0 \quad (3.23)$$

A partir da desigualdade (3.22) tem-se

$$K_p < 2,45 \times 10^{-2} \quad (3.24)$$

E a partir da desigualdade (3.23) tem-se

$$K_p > 0 \quad (3.25)$$

Então, unindo as condições dadas pelas desigualdades (3.24) e (3.25) tem-se

$$0 < K_p < 2,45 \times 10^{-2} \quad (3.26)$$

O sistema em malha aberta apresenta um pólo simples na origem e um par de pólos complexos conjugados pouco amortecidos. Esta configuração de pólos dá ao sistema um comportamento de primeira ordem ao qual está superposta um dinâmica oscilatória.

Em malha fechada, a medida que o ganho proporcional  $K_p$  é aumentado o pólo da origem desloca-se sobre o eixo real em direção ao semiplano esquerdo enquanto que, os pólos complexos deslocam-se na direção oposta, como pode ser visto na Figura 3.2.

Inicialmente o pólo simples está localizado à direita dos pólos complexos tendo assim, uma influência maior na resposta do sistema. A partir do momento que o pólo simples passa a localizar-se à esquerda dos pólos complexos estes passam a ter maior influência tornando o sistema com um comportamento de sistema de segunda ordem, deixando-o mais oscilatório.

No projeto o ganho proporcional  $K_p$  é escolhido de forma que a influência dos pólos complexos seja pequena não deixando que a resposta do sistema torne-se oscilatória.

Esta escolha é realizada através de simulações variando o parâmetro  $K_p$ , dentro dos limites definidos pela equação (3.26), de modo a alcançar as especificações de desempenho. Este procedimento resulta em

$$K_p = 0,01 \quad (3.27)$$

O controlador proporcional assim definido tem como resposta ao degrau de amplitude 0,1 m uma curva sem sobre-sinal e com um tempo de acomodação de 0,58 segundos, como pode ser visto na Figura 3.3.

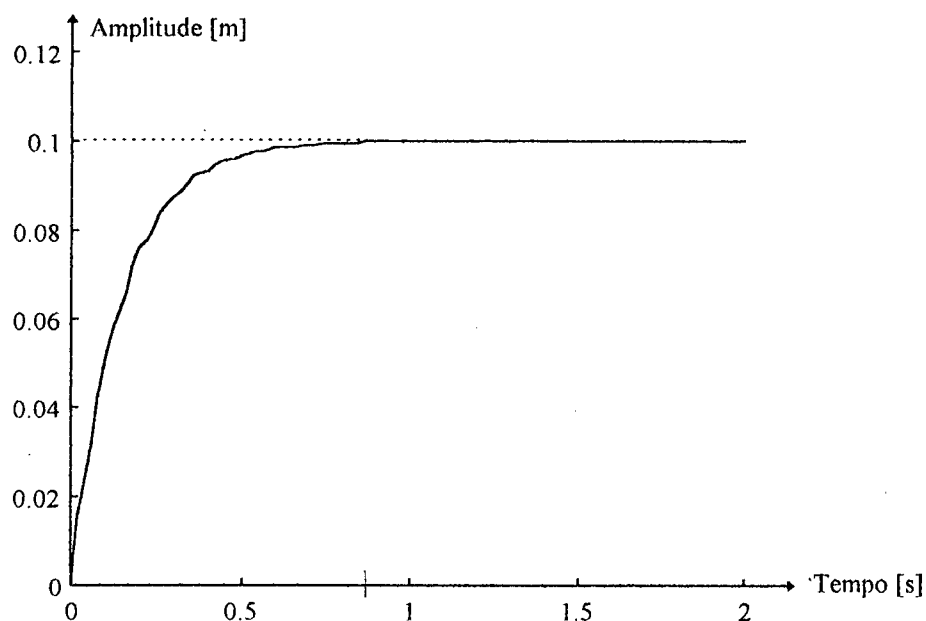


Figura 3.3 - Resposta ao degrau para o sistema com controlador proporcional

Vale salientar que a utilização de um controlador do tipo proporcional acrescenta baixa robustez com uma taxa de variação de ganho muito pequena ( $0 \leq K_p \leq 0,01$ ). Desta forma uma pequena perturbação ou variação nos parâmetros do sistema pode acarretar instabilidade.

### 3.2.2 Controlador Proporcional-Derivativo (PD)

Um sistema com controlador PD é mostrado na Figura 3.4.

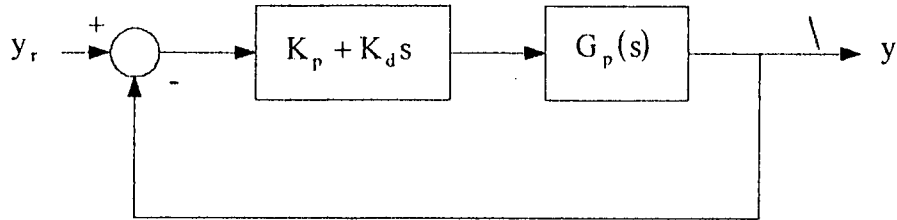


Figura 3.4 - Sistema com controlador Proporcional-Derivativo

O controlador PD combina os efeitos do controle proporcional com o controle derivativo, e sua função de transferência é

$$G_c(s) = K_p + K_d s \quad (3.23)$$

onde  $K_p$  é o ganho proporcional e  $K_d$  é o ganho derivativo.

A função de transferência do sistema com controlador PD em malha aberta é

$$G_o(s) = (K_p + K_d s) \frac{4 \times 10^7}{s^3 + 17s^2 + 5,76 \times 10^4 s} \quad (3.29)$$

Em malha fechada a função de transferência fica:

$$G(s) = \frac{4 \times 10^7 (K_p + K_d s)}{s^3 + 17s^2 + (5,76 \times 10^4 + 4 \times 10^7 K_d) s + 4 \times 10^7 K_p} \quad (3.30)$$

Utilizando o critério da estabilidade de Routh-Hurwitz tem-se a seguinte tabela de coeficientes



$$\begin{array}{rcl}
 s^3 & 1 & 5,76 \times 10^4 + 4 \times 10^7 K_d \\
 s^2 & 17 & 4 \times 10^7 K_p \\
 s^1 & (5,76 \times 10^4 + 4 \times 10^7 K_d) - 2,35 \times 10^6 K_p & \\
 s^0 & 4 \times 10^7 K_p & 
 \end{array}$$

Pelo critério da estabilidade tem-se que:

$$(5,76 \times 10^4 + 4 \times 10^7 K_d) - 2,35 \times 10^6 K_p > 0 \quad (3.31)$$

$$4 \times 10^7 K_p > 0 \quad (3.32)$$

Da desigualdade (3.31) tem-se

$$K_p < \frac{K_d + 1,4 \times 10^{-3}}{6 \times 10^{-2}} \quad (3.33)$$

e da desigualdade (3.32) tem-se

$$K_p > 0 \quad (3.34)$$

Então, unindo as condições dadas pelas desigualdades (3.33) e (3.34) tem-se

$$0 < K_p < \frac{K_d + 1,4 \times 10^{-3}}{6 \times 10^{-2}} \quad (3.35)$$

Para confirmar a condição dada pela desigualdade (3.35) utiliza-se o método do Lugar das Raízes.

Os ângulos das assíntotas do Lugar das Raízes com o eixo real são dados por:

$$\gamma = \frac{180^\circ(2k+1)}{n-m} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-m-1 \quad (3.36)$$

onde  $n$  é o número de pólos e  $m$  é o número de zeros do sistema em malha aberta.

Para o sistema com controlador PD tem-se:

$$\begin{aligned} \gamma &= 90^\circ(2k+1) \quad \text{para } k = 0, 1, \\ \gamma &= \pm 90^\circ \end{aligned} \quad (3.37)$$

Este valor de  $\gamma$  implica que as assíntotas são retas paralelas ao eixo imaginário no Lugar das raízes.

O centróide, ponto de intersecção das assíntotas com o eixo real, é dado por:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=0}^n \text{Re}(p_i) - \sum_{j=0}^m \text{Re}(z_j)}{n-m} \quad (3.38)$$

onde  $\sum_{i=0}^n \text{Re}(p_i)$  e  $\sum_{j=0}^m \text{Re}(z_j)$  representam, respectivamente, a soma das partes reais dos pólos e dos zeros do sistema com controlador PD em malha aberta.

Então, para o sistema em estudo:

$$\sigma_a = \frac{-17 + K_p/K_d}{2} \quad (3.39)$$

Como as assíntotas são retas paralelas ao eixo imaginário (pois  $\gamma = \pm 90^\circ$ ), para que elas fiquem no semiplano esquerdo, ou seja, dentro da condição de estabilidade, é necessário que  $\sigma_a$  seja menor que zero. Então:

$$\frac{K_p}{K_d} < 17 \quad (3.40)$$

ou seja,  $K_p < 17K_d$ .

A condição (3.33) diz que  $K_p < 16,67K_d + 0,0233$ . Se for desprezado o termo 0,0233 as condições (3.33) e (3.40) são semelhantes.

O gráfico do Lugar das Raízes para o sistema com controlador PD pode ser visto na Figura 3.5.

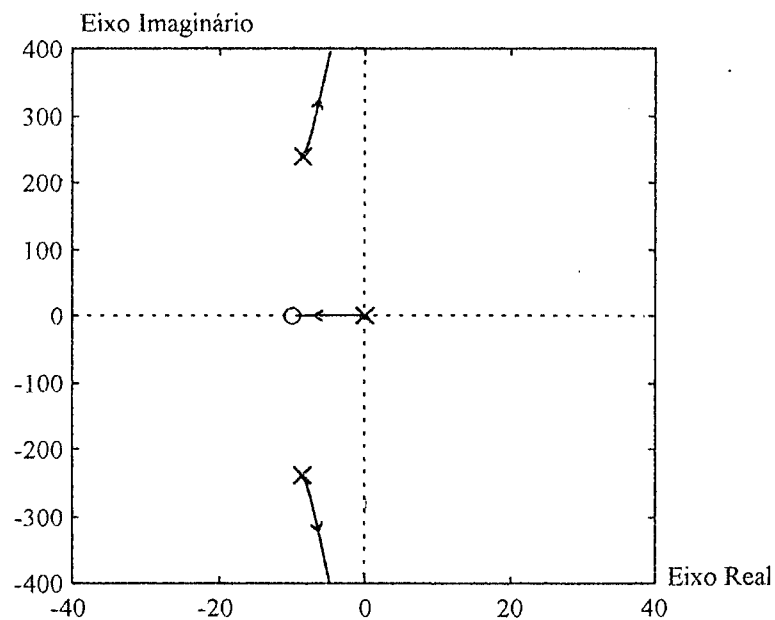


Figura 3.5 - Lugar das raízes para o sistema com controlador PD

O projeto de  $K_p$  e  $K_d$  é feito através de simulações variando estes ganhos e observando a resposta a um degrau de modo que a condição (3.35) e as especificações de desempenho sejam satisfeitas. Assim, chega-se aos valores

$$K_p = 0,01 \quad (3.41)$$

$$K_d = 0,001 \quad (3.42)$$

Então a função de transferência do controlador PD fica

$$G_c(s) = 0,001(s + 10) \quad (3.43)$$

A resposta ao degrau de amplitude 0,1 m para o sistema com controlador PD, definido na equação (3.43), não apresenta sobre-sinal e tem um tempo de acomodação de 0,84 segundos, como pode ser visto através da Figura 3.6.

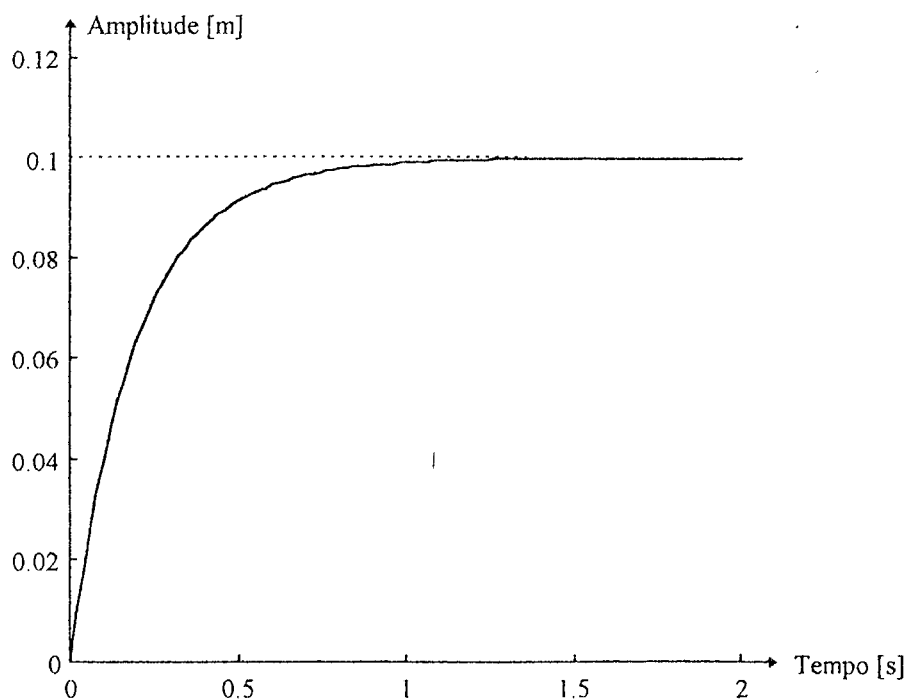


Figura 3.6 - Resposta ao degrau para o sistema com controlador PD

### 3.2.3 Controlador Proporcional-Integral (PI)

Um sistema com um controlador PI é mostrado na Figura 3.7.

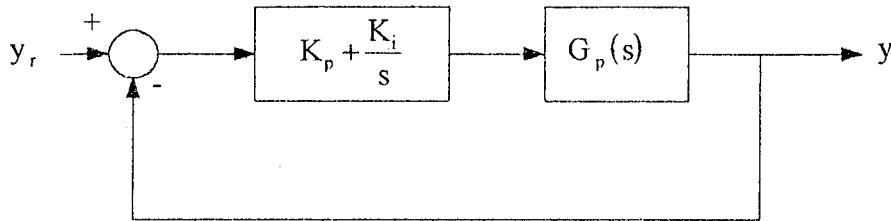


Figura 3.7 - Sistema com controlador Proporcional-Integral

A função de transferência do controlador PI é da seguinte forma

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (3.44)$$

onde  $K_p$  é o ganho proporcional e  $K_i$  é o ganho integral.

A função de transferência do sistema com controlador em malha aberta é

$$G_o(s) = \left( K_p + \frac{K_i}{s} \right) G_p(s) \quad (3.45)$$

ou seja,

$$G_o(s) = \frac{4 \times 10^7 (K_p s + K_i)}{s^4 + 17s^3 + 5,76 \times 10^4 s^2} \quad (3.46)$$

Em malha fechada a função de transferência do sistema fica:

$$G(s) = \frac{4 \times 10^7 (K_p s + K_i)}{s^4 + 17s^3 + 5,76 \times 10^4 s^2 + 4 \times 10^7 (K_p s + K_i)} \quad (3.47)$$

Utilizando o critério de Routh-Hurwitz tem-se a tabela de coeficientes abaixo:

$s^4$	1	$5,76 \times 10^4$	$4 \times 10^7 K_i$
$s^3$	17	$4 \times 10^7 K_p$	
$s^2$	$(5,76 \times 10^4 - 2,35 \times 10^6 K_p)$	$4 \times 10^7 K_i$	
$s^1$	$4 \times 10^7 K_p - \frac{6,8 \times 10^8 K_i}{5,76 \times 10^4 - 2,35 \times 10^6 K_p}$		
$s^0$	$4 \times 10^7 K_i$		

Para satisfazer as condições de estabilidade do critério Routh-Hurwitz é necessário que

$$5,76 \times 10^4 - 2,35 \times 10^6 K_p > 0 \quad (3.48)$$

$$\left( 4 \times 10^7 K_p - \frac{6,8 \times 10^8 K_i}{5,76 \times 10^4 - 2,35 \times 10^6 K_p} \right) > 0 \quad (3.49)$$

$$4 \times 10^7 K_i > 0 \quad (3.50)$$

Da desigualdade (3.48) tem-se

$$K_p < 2,45 \times 10^{-2} \quad (3.51)$$

Da desigualdade (3.49) tem-se

$$2,3 \times 10^{12} K_p - 9,4 \times 10^{13} K_p^2 - 6,8 \times 10^8 K_i > 0 \quad (3.52)$$

E da desigualdade (3.50) tem-se

$$K_i > 0 \quad (3.53)$$

A partir do lugar das raízes pode-se retirar informações que confirmam as condições para os parâmetros do controlador PI.

Os ângulos das assíntotas com o eixo real são dados por:

$$\begin{aligned} \gamma &= 60^\circ(2k + 1) \quad k = 0,1,2 \\ \gamma &= \pm 60^\circ, 180^\circ \end{aligned} \quad (3.54)$$

O centróide, calculado a partir da equação (3.38), é dado por:

$$\sigma_u = \frac{-17 + (K_i/K_p)}{3} \quad (3.55)$$

Para que o ponto de intersecção das assíntotas com o eixo real fique no semiplano esquerdo é preciso que

$$\frac{K_i}{K_p} < 17 \quad (3.56)$$

O gráfico do Lugar das raízes para o sistema com controlador PI é mostrado na Figura 3.8.

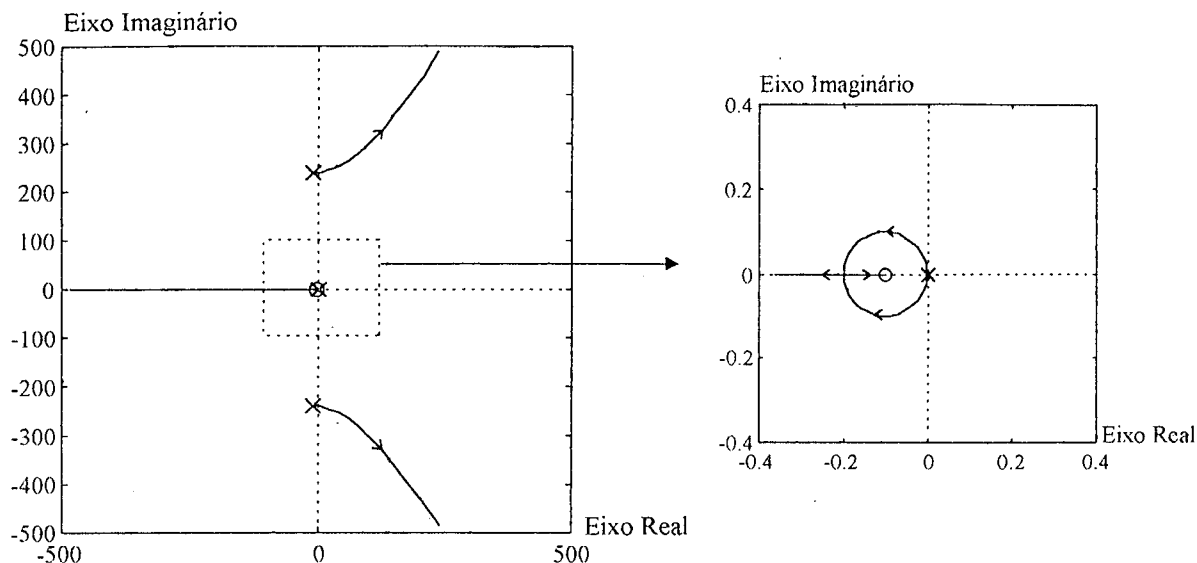


Figura 3.8 - Lugar das Raízes para o sistema com controlador PI

Dividindo a equação (3.52) por  $K_p$  e considerando o pior caso da equação (3.56), ou seja,  $K_i/K_p = 17$ , tem-se

$$K_p < 2,44 \times 10^{-2} \quad (3.57)$$

A equação (3.57) comprova o que foi obtido com o critério de Routh-Hurwitz através da equação (3.51).

Variando os valores de  $K_p$  e  $K_i$ , através de simulações e respeitando os limites estabelecidos pelo critério de Routh-Hurwitz, obtém-se os parâmetros que melhor se adaptam as especificações de desempenho, são eles:

$$K_p = 0,01 \quad (3.58)$$

$$K_i = 0,001 \quad (3.59)$$



Então o controlador PI fica

$$G_c(s) = \frac{0,01}{s}(s + 0,1) \quad (3.60)$$

A Figura 3.9 mostra a resposta ao degrau de amplitude 0,1 para o sistema com controlador PI, apresentando uma resposta com sobre-sinal de 1,3% e com um tempo de acomodação de 0,50 segundos.

O sistema é bastante lento pois o ganho  $K_i$  precisa ser pequeno para que as especificações de desempenho sejam alcançadas. Apesar de não aparecer na Figura 3.9, o sistema vai para o valor final sem erro de posição.

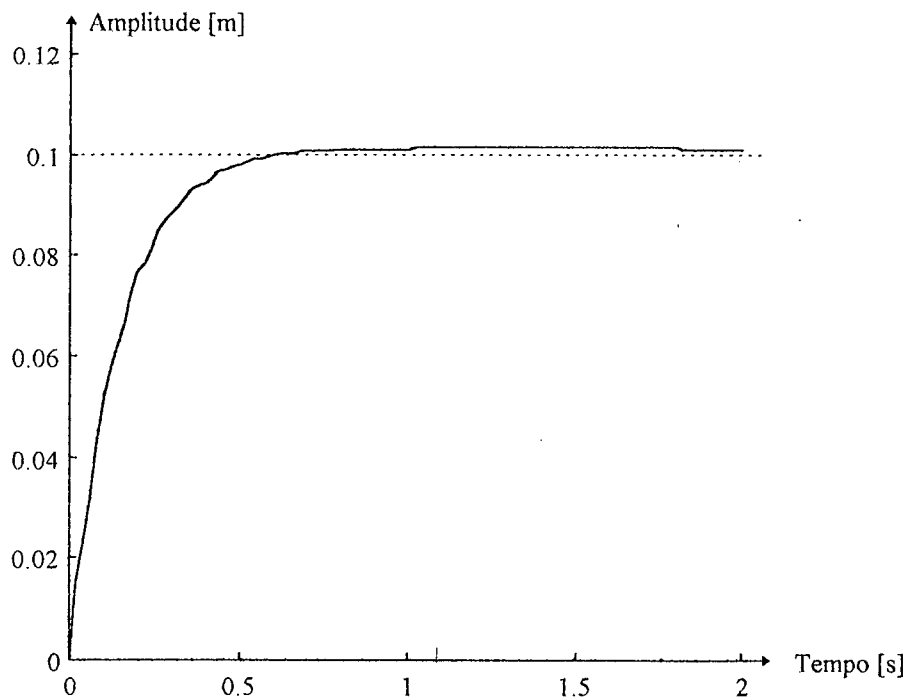


Figura 3.9 - Resposta ao degrau para o sistema com controlador PI

### 3.2.4 Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID)

O Controlador PID é aquele que une as características das três ações de controle, proporcional, integral e derivativa, como mostrado na Figura 3.10.

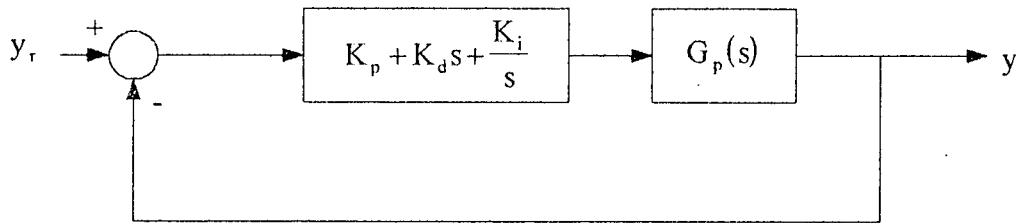


Figura 3.10 - Sistema com controlador proporcional-integral-derivativo

O sistema com este controlador tem a saída

$$y(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int_0^t e(\tau) dt \quad (3.61)$$

onde  $K_p$  é o ganho proporcional,  $K_d$  é o ganho derivativo e  $K_i$  é o ganho integral.

Aplicando a transformada de Laplace na equação (3.61) obtém-se a seguinte função de transferência

$$G_c(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} \quad (3.62)$$

A função de transferência em malha aberta para o sistema da Figura 3.10 é

$$G_o(s) = \left( K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} \right) G_p(s) \quad (3.63)$$

ou seja,

$$G_o(s) = \frac{4 \times 10^7 (K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s^4 + 17s^3 + 5,76 \times 10^4 s^2} \quad (3.64)$$

Em malha fechada tem-se

$$G(s) = \frac{4 \times 10^7 (K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s^4 + 17s^3 + (5,76 \times 10^4 + 4 \times 10^7 K_d) s^2 + 4 \times 10^7 K_p s + 4 \times 10^7 K_i} \quad (3.65)$$

que tem a seguinte equação característica:

$$s^4 + 17s^3 + (5,76 \times 10^4 + 4 \times 10^7 K_d) s^2 + 4 \times 10^7 K_p s + 4 \times 10^7 K_i = 0 \quad (3.66)$$

Será utilizado aqui, o método do contorno das raízes (Kuo, 1985) para a obtenção dos valores dos ganhos  $K_p$ ,  $K_d$  e  $K_i$  do controlador PID.

O método do contorno das raízes pode ser ilustrado considerando a equação característica

$$Q(s) + K_1 P_1(s) + K_2 P_2(s) + K_3 P_3(s) = 0 \quad (3.67)$$

onde  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$  são os parâmetros variáveis e  $Q(s)$ ,  $P_1(s)$ ,  $P_2(s)$  e  $P_3(s)$  são polinômios em  $s$ .

O primeiro passo é fazer dois parâmetros iguais a zero. Sejam  $K_2 = K_3 = 0$ , então a equação (3.67) se torna

$$Q(s) + K_1 P_1(s) = 0 \quad (3.68)$$

O Lugar das Raízes desta equação pode ser obtido dividindo ambos os membros por  $Q(s)$ , ou seja

$$1 + \frac{K_1 P_1(s)}{Q(s)} = 0 \quad (3.69)$$

A construção do Lugar das Raízes desta equação é obtido a partir da configuração dos pólos e zeros de

$$\frac{K_1 P_1(s)}{Q(s)} \quad (3.70)$$

Restaurando o parâmetro  $K_2$  e mantendo  $K_3 = 0$  a equação (3.67) torna-se

$$Q(s) + K_1 P_1(s) + K_2 P_2(s) = 0 \quad (3.71)$$

Dividindo a equação (3.70) por  $Q(s) + K_1 P_1(s)$  tem-se

$$1 + \frac{K_2 P_2(s)}{Q(s) + K_1 P_1(s)} = 0 \quad (3.72)$$

E o contorno das raízes é baseado nos pólos e zeros de

$$\frac{K_2 P_2(s)}{Q(s) + K_1 P_1(s)} \quad (3.73)$$

Restaurando o parâmetro  $K_3$  a equação (3.67) não é alterada e dividindo ambos os lados da equação por  $Q(s) + K_1 P_1(s) + K_2 P_2(s)$  tem-se

$$1 + \frac{K_3 P_3(s)}{Q(s) + K_1 P_1(s) + K_2 P_2(s)} \quad (3.74)$$

O contorno das raízes é baseado nos pólos e zeros de

$$\frac{K_3 P_3(s)}{Q(s) + K_1 P_1(s) + K_2 P_2(s)} \quad (3.75)$$

Aplica-se agora o método descrito acima ao sistema em estudo.

Fazendo  $K_d = K_i = 0$  o controlador PID torna-se apenas um controlador proporcional e a equação característica (3.66) torna-se

$$s^3 + 17s^2 + 5,76 \times 10^4 s + 4 \times 10^7 K_p = 0 \quad (3.76)$$

onde

$$Q(s) = s^3 + 17s^2 + 5,76 \times 10^4 s$$

$$P_1(s) = 4 \times 10^7$$

$$K_1 = K_p$$

O contorno das raízes quando varia  $K_p$  é desenhado a partir dos pólos e dos zeros de:

$$\frac{K_1 P_1(s)}{Q(s)} = \frac{4 \times 10^7 K_p}{s^3 + 17s^2 + 5,76 \times 10^4 s} \quad (3.77)$$

como mostrado na Figura 3.11.

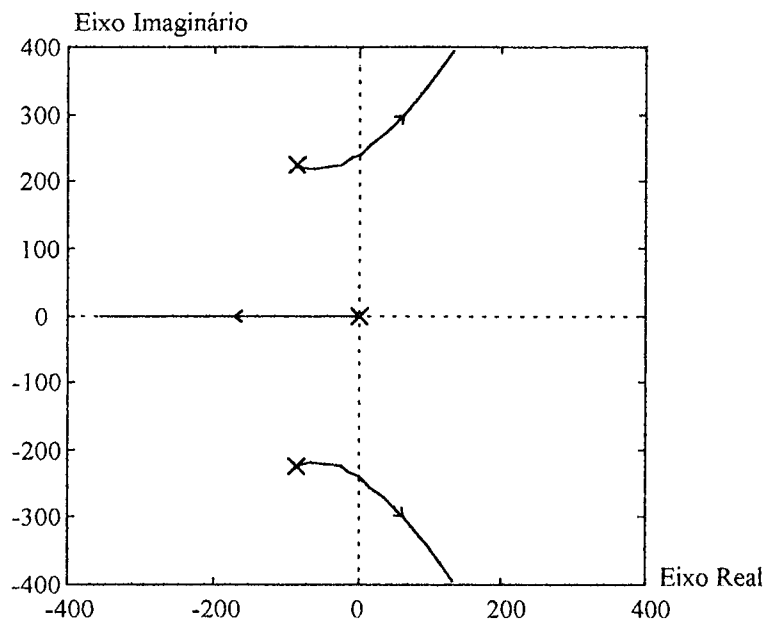


Figura 3.11 - Lugar das Raízes para a variação do parâmetro  $K_p$  quando  $K_d = K_i = 0$

Como era esperado o gráfico da Figura 3.11 é idêntico ao Lugar das Raízes para o controlador proporcional. Então a condição de estabilidade será a mesma definida na equação (3.24) e será adotado o mesmo valor de  $K_p$  definido na equação (3.27), ou seja

$$K_p = 0,01$$

Definido o valor de  $K_p$ , o passo seguinte é fazer  $K_p = 0,01$  e manter  $K_i = 0$ , observando como  $K_d$  varia. A equação característica (3.66) então torna-se

$$s^3 + 17s^2 + (5,76 \times 10^4 + 4 \times 10^7 K_d)s + 4 \times 10^5 = 0 \quad (3.78)$$

onde

$$Q(s) = s^3 + 17s^2 + 5,76 \times 10^4 s + 4 \times 10^5$$

$$P_2(s) = 4 \times 10^7$$

$$K_2 = K_d$$

Agora o contorno das raízes quando  $K_d$  varia é desenhados a partir dos pólos e dos zeros de:

$$\frac{K_2 P_2(s)}{Q(s)} = \frac{4 \times 10^7 K_d s}{s^3 + 17s^2 + 5,76 \times 10^4 s + 4 \times 10^5} \quad (3.79)$$

como mostrado na Figura 3.12.

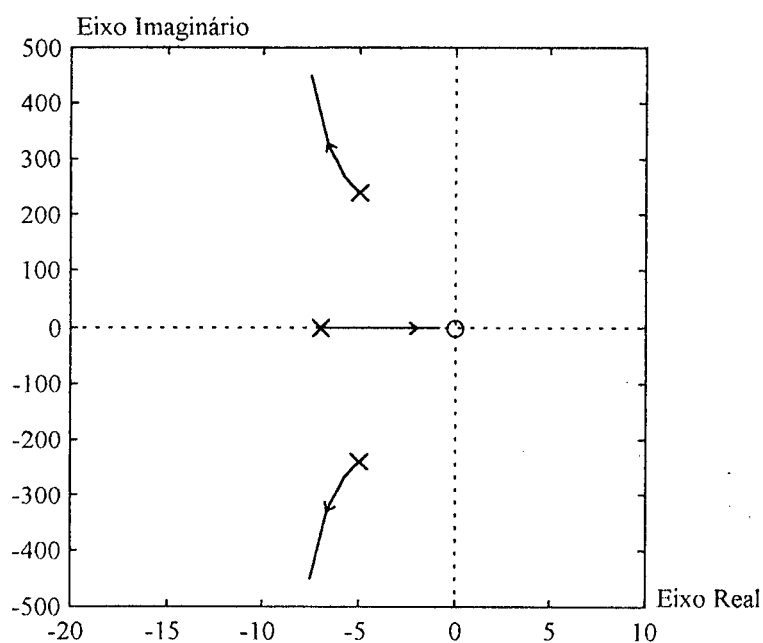


Figura 3.12 - Lugar das Raízes para  $K_d$  quando  $K_p = 0,01$  e  $K_i = 0$

Aplicando o critério de Routh-Hurwitz para a equação característica dada na equação (3.78) tem-se a seguinte tabela de coeficientes:

$s^3$	1	$5,76 \times 10^4 + 4 \times 10^7 K_d$
$s^2$	17	$4 \times 10^5$
$s^1$	$3,41 \times 10^4 + 4 \times 10^7 K_d$	
$s^0$	$4 \times 10^5$	

A condição de estabilidade é

$$3,41 \times 10^4 + 4 \times 10^7 K_d > 0$$

$$K_d > -8,52 \times 10^{-8} \quad (3.80)$$

Como os parâmetros do controlador devem ser positivos, basta que  $K_d$  seja positivo para o sistema ser estável. A medida que o valor de  $K_d$  aumenta, a parte imaginária dos pólos complexos também aumenta, deixando o sistema mais oscilatório. Escolhe-se o ganho derivativo de modo que a parte imaginária dos pólos complexos aumente pouco. O valor de  $K_d$  que satisfaz as condições descritas acima é  $1 \times 10^{-3}$ .

Falta agora definir o valor do parâmetro  $K_i$ . Com  $K_p = 0,01$  e  $K_d = 1 \times 10^{-3}$  a equação característica (3.66) torna-se

$$s^4 + 17s^3 + 9,176 \times 10^4 s^2 + 4 \times 10^5 s + 4 \times 10^7 K_i = 0 \quad (3.81)$$

onde

$$Q(s) = s^4 + 17s^3 + 9,76 \times 10^4 s^2 + 4 \times 10^5 s$$

$$P_3(s) = 4 \times 10^7$$

$$K_3 = K_i$$

Os contornos das raízes quando  $K_i$  varia são desenhados a partir dos pólos e dos zeros de:

$$\frac{K_3 P_3(s)}{Q(s)} = \frac{4 \times 10^7 K_i}{s^4 + 17s^3 + 6,16 \times 10^4 s^2 + 4 \times 10^5 s} \quad (3.82)$$

como mostrado na Figura 3.13.



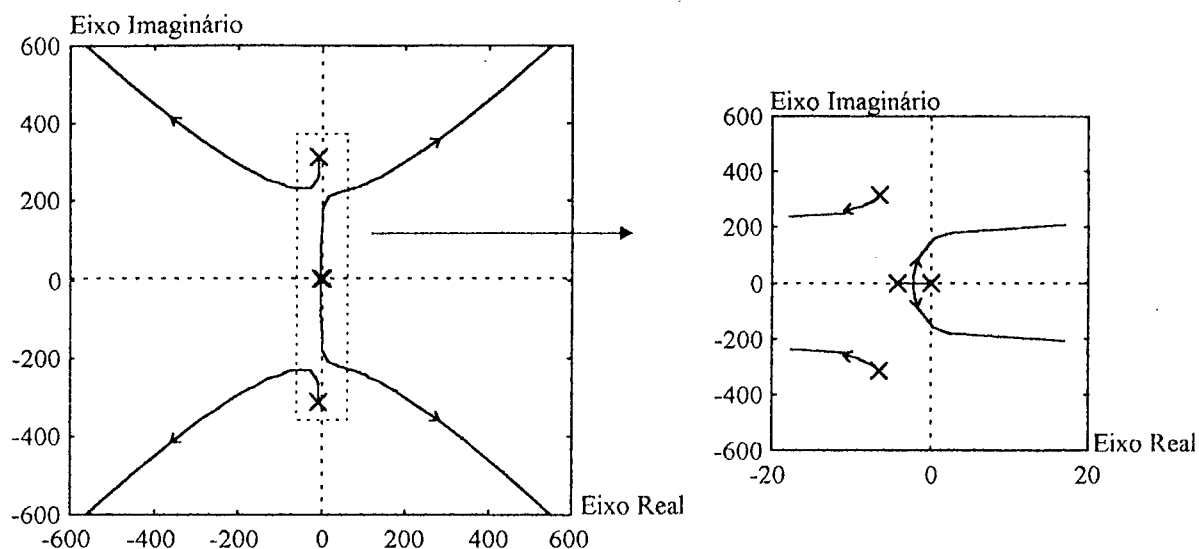


Figura 3.13 - Lugar das Raízes para a variação de  $K_i$  quando  $K_p = 0,01$  e  $K_d = 1 \times 10^{-3}$

Aplicando o critério da estabilidade de Routh-Hurwitz em (3.81) tem-se a seguinte tabela de coeficientes

$s^4$	1	$9,76 \times 10^4$	$4 \times 10^7 K_i$
$s^3$	17	$4 \times 10^5$	
$s^2$	$7,4 \times 10^4$	$4 \times 10^7 K_i$	
$s^1$	$4 \times 10^5 - 9,2 \times 10^3 K_i$		
$s^0$	$4 \times 10^7 K_i$		

As condições de estabilidade são

$$4 \times 10^5 - 9,2 \times 10^3 K_i > 0 \quad (3.83)$$

$$4 \times 10^7 K_i > 0 \quad (3.84)$$

Da desigualdade (3.83) tem-se

$$K_i < 43,5 \quad (3.85)$$

E da desigualdade (3.84) tem-se

$$K_i > 0 \quad (3.86)$$

Unindo as condições (3.85) e (3.86) tem-se

$$0 < K_i < 43,5 \quad (3.87)$$

Como pode ser visto através da Figura 3.13, a medida que o ganho  $K_i$  é aumentado as duas raízes reais deslocam-se uma em direção à outra e depois em direção ao semiplano direito do plano complexo, enquanto que os pólos complexos deslocam-se em direção oposta. Variando  $K_i$  dentro dos limites estabelecidos na equação (3.87) os pólos complexos conjugados praticamente não se alteram.

Para que as duas raízes permaneçam sobre o eixo real é necessário que  $K_i < 1,02 \times 10^{-2}$ .

Foram realizadas simulações variando o valor do parâmetro  $K_i$  e observando a resposta ao degrau para o atuador hidráulico com controlador PID. A partir destas simulações chegou-se à:

$$K_i = 1 \times 10^{-3} \quad (3.88)$$

Então a função de transferência do controlador PID fica:

$$G_c(s) = \frac{1 \times 10^{-3} s^2 + 1 \times 10^{-2} s + 1 \times 10^{-3}}{s} \quad (3.89)$$

A resposta ao degrau para o sistema com controlador PID é mostrada na Figura 3.14, apresentando um sobre-sinal de 1,2 % e tempo de acomodação de 0,8 segundos.

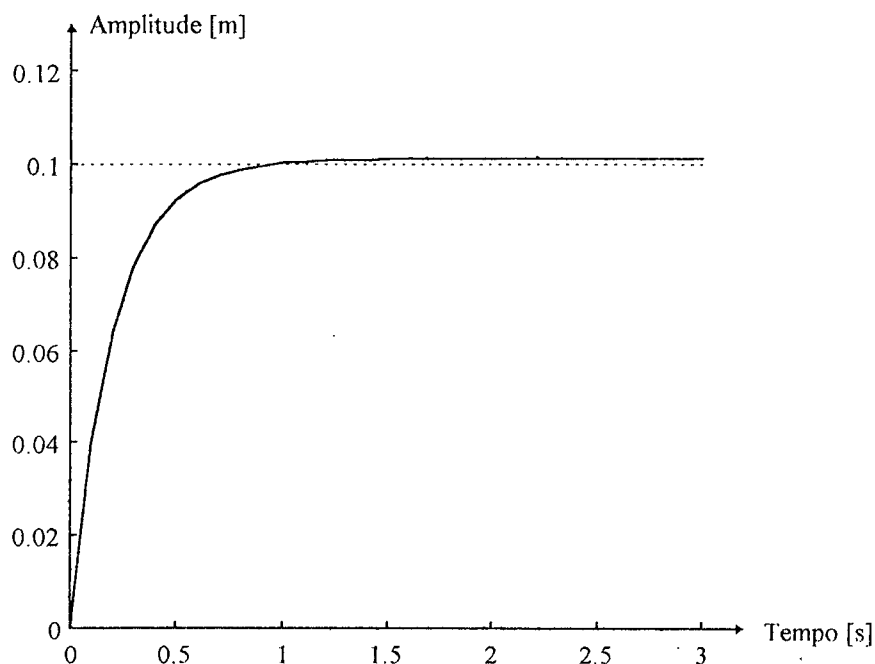


Figura 3.14 - Resposta ao degrau para o sistema com controlador PID

Da mesma forma que para o controlador PI, os ganhos do controlador PID precisam ser pequenos para que as especificações de desempenho sejam alcançadas, isto faz com que a resposta seja lenta. Como no caso do controlador PI, apesar de não aparecer na Figura 3.14, o sistema atinge o seu valor final sem erro de posição.

A síntese dos métodos de controle apresentados até aqui é baseada no método do Lugar das Raízes. A seguir serão apresentados dois tipos de controladores cuja técnica de síntese é baseada na resposta em frequência do sistema.

### 3.2.5 Compensador em Avanço de Fase

Para diminuir a amplificação nas altas frequências do controlador PD, um pólo simples é adicionado ao seu denominador. Assim, o avanço de fase ainda ocorre, mas a amplificação nas altas frequências é limitada. O resultado desta adição de um pólo no denominador gera o compensador em avanço de fase.

Um compensador em avanço de fase, mostrado na Figura 3.15, possui a seguinte função de transferência:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 1/T}{s + 1/\alpha T} \quad \alpha < 1 \quad (3.90)$$

onde  $(1/T)$  é o zero do compensador,  $(1/\alpha T)$  é o pólo do compensador e  $K_c = K/\alpha$ . Desde que  $\alpha < 1$  o zero está sempre colocado à direita do pólo no plano complexo. Para um valor pequeno de  $\alpha$ , o pólo está localizado distante e à esquerda. O valor mínimo  $\alpha$  está limitado pela implementação física da rede em avanço e é considerado aproximadamente 0,07 (Ogata, 1993).

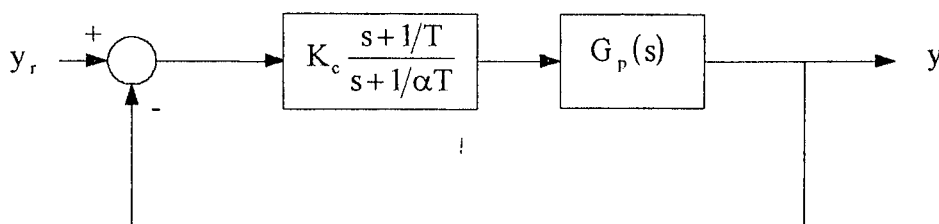


Figura 3.15 - Sistema com compensador em avanço de fase

A Figura 3.16 mostra a resposta em frequência (módulo e fase) para a compensação em avanço de fase com  $K_c = 1$  e  $\alpha = 0,1$ .

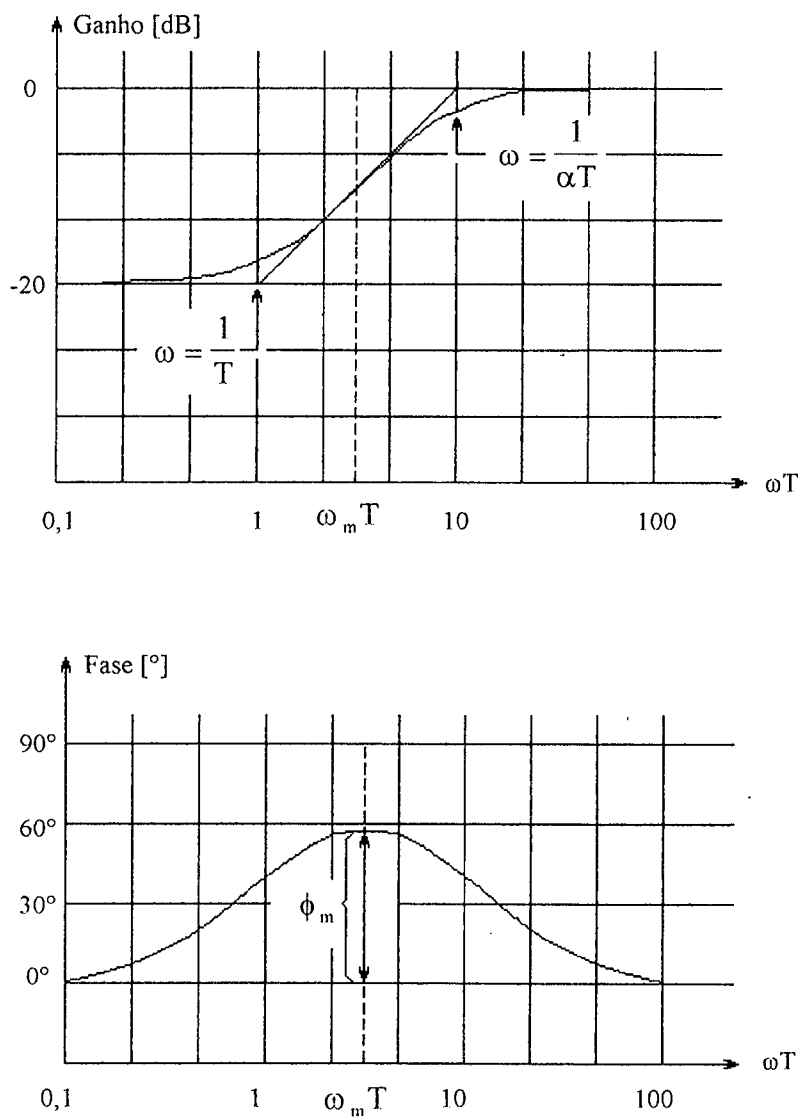


Figura 3.16 - Resposta em frequência para o compensador em avanço com  $K_c = 1$  e  $\alpha = 0,1$

As frequências de canto para o compensador em avanço são  $\omega = 1/T$  e  $\omega = 1/(\alpha T)$ . Examinando a Figura 3.16 observa-se que  $\omega_m$  é a média geométrica das duas frequências de canto, ou

$$\log \omega_m = \frac{1}{2} \left( \log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T} \right) \quad (3.91)$$

De onde obtém-se

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad (3.92)$$

A máxima contribuição de fase, isto é, o pico da curva de fase de  $G_c(s)$ , corresponde a

$$\text{sen } \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (3.93)$$

Um compensador em avanço deve modificar a curva da resposta em frequência de modo a obter um ângulo de avanço de fase suficiente para ajustar o atraso de fase do sistema.

O procedimento para projetar um compensador em avanço de fase através do método da resposta em frequência é descrito abaixo (Ogata, 1993):

1. Determinar o ganho  $K$  de malha aberta de modo a satisfazer as exigências de coeficiente de erro (Bolton, 1995).
2. Utilizando o ganho  $K$ , calculado no item 1, calcular a margem de fase do sistema não compensado.
3. Determinar o ângulo de avanço de fase  $\phi$  necessário a ser adicionado ao sistema para satisfazer a especificação de margem de fase.
4. Determinar o fator de atenuação  $\alpha$  através da equação (3.93).

5. Determinar a frequência onde

$$|G(j\omega)| = -20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (3.94)$$

6. Selecionar esta frequência como a nova frequência de cruzamento de ganho.

Esta frequência corresponde à equação  $\omega_m = 1/(T\sqrt{\alpha})$ , e o deslocamento de fase máximo  $\phi_m$  ocorre nesta frequência.

7. Determinar a frequência de canto da rede em avanço a partir de

$$\omega = \frac{1}{T} \quad (3.95)$$

$$\omega = \frac{1}{\alpha T} \quad (3.96)$$

Deseja-se determinar um compensador para o sistema de modo que o erro para uma entrada rampa seja menor do que 1% ( $1/K_v < 0,01$ ), ou seja, coeficiente de erro de velocidade estático  $K_v$  deve ser maior do que  $100 \text{ s}^{-1}$  e a margem de fase dever ser de pelo menos  $65^\circ$ .

Seja a função de transferência em malha aberta

$$G_p(s) = \frac{4 \times 10^7}{s^3 + 17s^2 + 5,76 \times 10^4 s} \quad (3.97)$$

Primeiro determina-se o valor de K para satisfazer a especificação do coeficiente de erro de velocidade estático exigido.

Deseja-se  $K_v = 100 \text{ s}^{-1}$ , então

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{4 \times 10^7 K}{s(s^2 + 17s + 5,76 \times 10^4)} = 100$$

$$K = 0,15 \tag{3.98}$$

O segundo passo do projeto é determinar a margem de fase do sistema não compensado com o ganho  $K$  dado na equação (3.98).

A função de transferência do sistema em malha aberta, com o ganho  $K$ , fica

$$G(j\omega) = \frac{6 \times 10^6}{(j\omega)^3 + 17(j\omega)^2 + 5,76 \times 10^4 j\omega} \tag{3.99}$$

A Figura 3.17 mostra as curvas de módulo e fase para  $G_p(j\omega)$ .

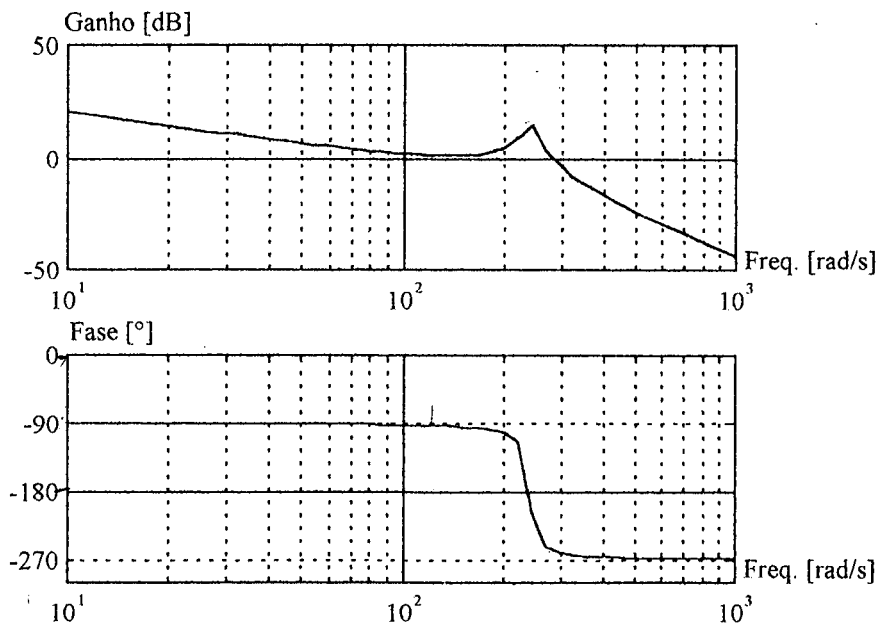


Figura 3.17 - Resposta em frequência para  $G_p(j\omega)$



A partir destes gráficos pode-se retirar as margens de ganho e de fase do sistema:

$$MG = 0,22 \quad \text{ou} \quad MG = -13,2\text{dB} \quad (3.100)$$

$$MF = -76,4^\circ \quad (3.101)$$

onde MG e MF representam as margens de ganho e de fase respectivamente.

Para satisfazer a especificação de  $MF \geq 65^\circ$  precisa-se de um avanço de fase adicional de  $141,4^\circ$ . Para obter a margem de fase especificada, sem diminuir o ganho K, introduz-se o compensador em avanço.

O ângulo de avanço de fase  $\phi$  necessário de ser adicionado ao sistema seria  $141,4^\circ$ , mas normalmente se adiciona  $5^\circ$  para compensar o deslocamento da frequência de cruzamento de ganho. Então

$$\phi_m = 146,4^\circ \quad (3.102)$$

O máximo avanço de fase que o compensador consegue produzir é de  $90^\circ$ . Como pode ser visto através da equação (3.102) é impossível que o compensador consiga produzir o avanço de fase necessário para que a especificação de coeficiente de erro de velocidade seja alcançada. Da Figura 3.17 observa-se que uma forma de tentar alcançar a margem de fase especificada é diminuir o ganho K.

Diminuir o ganho K (sem acrescentar nenhum pólo ou zero ao sistema) significa que o compensador é apenas um controlador proporcional. Como descrito no projeto do controlador proporcional, o ganho que satisfaz as especificações de desempenho é de 0,01.

Para este valor de ganho ( $K = 0,01$ ) o coeficiente de erro de velocidade estático fica  $K_v = 7$ , ou seja, o erro para uma entrada rampa aumento de 1% para 14%.

A resposta em frequência para o sistema compensado (somente com o ganho proporcional  $K = 0,01$ ) pode ser vista na Figura 3.18. Dos gráficos de módulo e fase obtém-se uma margem de fase de  $90^\circ$  e uma margem de ganho de 38,9 dB que satisfazem as especificações do sistema.

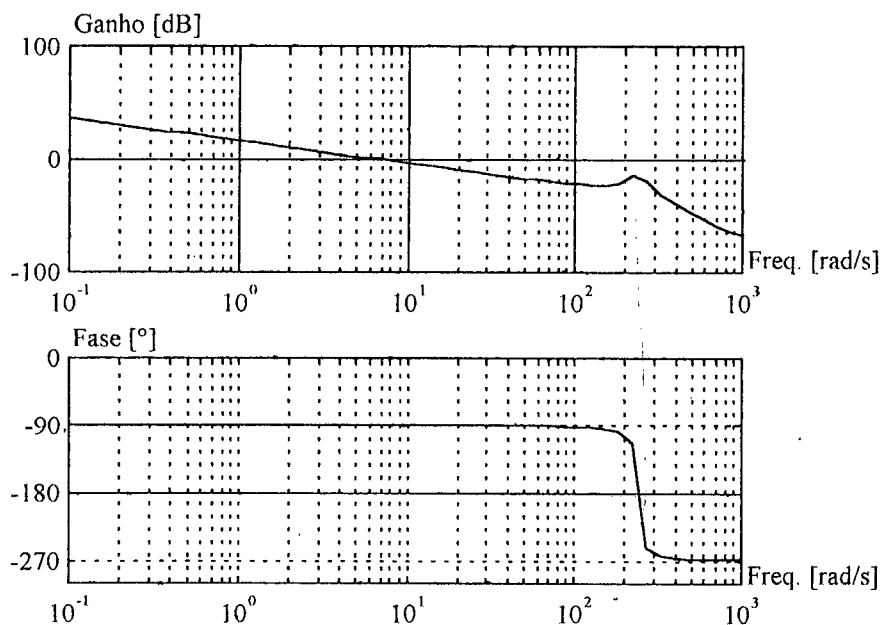


Figura 3.18 - Resposta em frequência para o sistema com compensador em avanço de fase

Através dos resultados mostrados na Figura 3.18 observa-se que a especificação de margem de fase é alcançada sem a necessidade da adição de pólos ou zeros. O compensador em avanço de fase foi transformado então em apenas um controlador proporcional.

A resposta a um degrau de amplitude 0,1 m, mostrada na Figura 3.19, não apresenta sobre-sinal e tem um tempo de acomodação de 0,58 segundos.

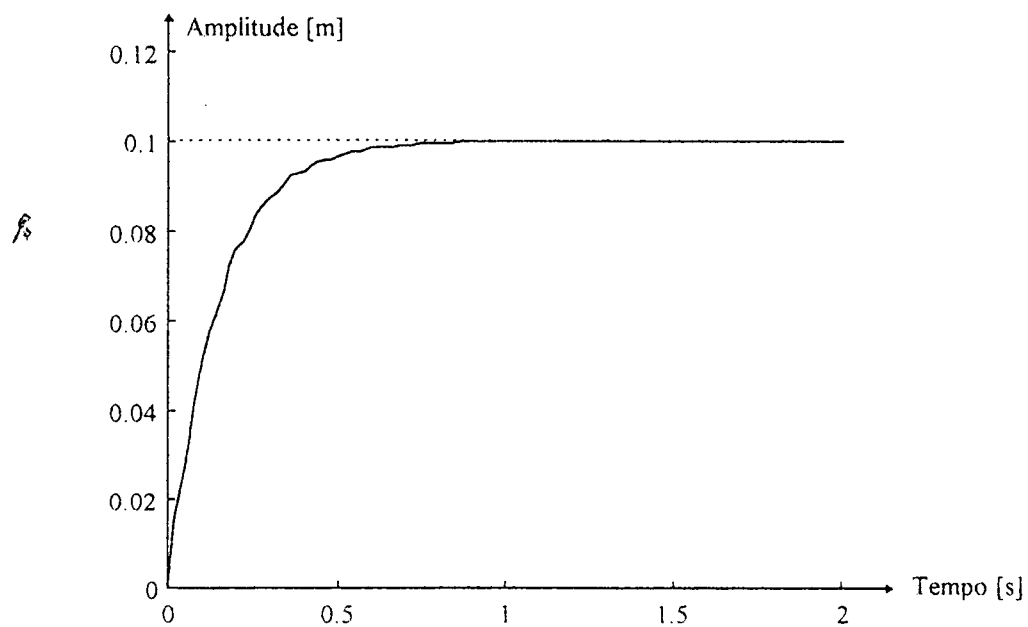


Figura 3.19 - Resposta ao degrau para o sistema com compensador em avanço de fase

### 3.2.6 Compensador em Atraso de Fase

O compensador em atraso de fase, mostrado na Figura 3.20, possui a seguinte função de transferência:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 1/T}{s + 1/\beta T} \quad \beta > 1 \quad (3.103)$$

onde  $K_c = K/\beta$ .

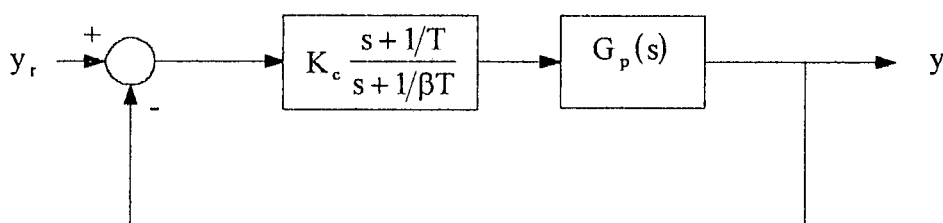


Figura 3.20 - Sistema com compensador em atraso de fase

O pólo do compensador está em  $s = -1/\beta T$  e o zero em  $s = -1/T$ . Como  $\beta > 1$  o pólo está sempre localizado à direita do zero no plano complexo. Esta relação produz um aumento na amplitude das baixas frequências e uma aparente redução de fase na resposta em frequência mostrada na Figura 3.21 e dá à compensação em atraso de fase uma característica essencial do controle integral: um aumento no ganho de baixa frequência. O objetivo do projeto do compensador em atraso é prover um ganho adicional de  $+20 \log \alpha$  na baixa frequência e levar o sistema a uma margem de fase suficiente. O pólo e o zero do compensador em atraso devem ser selecionados menores que a frequência de corte do sistema não compensado para conseguir que o efeito margem de fase seja mínimo. Assim, o compensador em atraso aumenta o ganho DC da malha aberta melhorando as características

da resposta em frequência, sem mudar significativamente as características da resposta transitória.

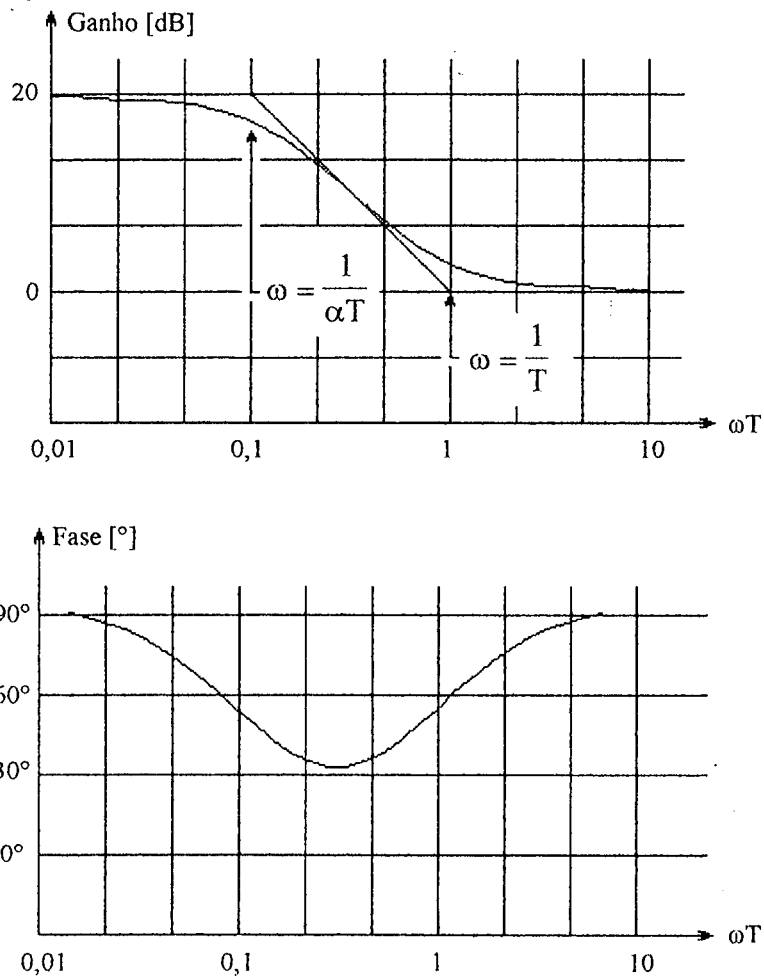


Figura 3.21 - Resposta em frequência para o compensador em atraso com  $\alpha = 10$  e  $T = 1$

O procedimento para projetar um compensador em atraso de fase através do método da resposta em frequência é descrito abaixo:

1. Determinar o ganho  $K$  de malha aberta de modo a satisfazer as exigências de coeficiente de erro.

2. Utilizando o ganho  $K$ , calculado no item anterior, calcular as margens de ganho e de fase do sistema não compensado.
3. Se as especificações de MG e MF não forem satisfeitas, determinar a frequência onde o ângulo de fase da função de transferência em malha aberta é igual a  $-180^\circ$  mais a MF exigida. A margem de fase exigida é a MF especificada mais  $5^\circ$  a  $12^\circ$  que devem ser adicionados para compensar o atraso de fase provocado pelo compensador. Escolher esta frequência como a nova frequência de cruzamento de ganho.
4. Escolher a frequência de canto

$$\omega = \frac{1}{T} \quad (3.104)$$

uma oitava a uma década abaixo da nova frequência de cruzamento de ganho.

5. Determinar a atenuação necessária para que se consiga 0 dB na nova frequência de cruzamento de ganho. Sabendo que esta atenuação é  $-20 \log \beta$ , calcular o valor de  $\beta$  que determina o pólo da rede em atraso

$$\omega = \frac{1}{\beta T} \quad (3.105)$$

6. Utilizando o valor de  $K$  determinado no item 1 e o valor de  $\beta$  obtido no item 5, calcular o ganho  $K_c$  do controlador a partir de

$$K_c = \frac{K}{\beta} \quad (3.106)$$

As especificações de coeficiente de erro de velocidade estático e margem de fase são mantidas as mesmas. Logo, o valor de K será o mesmo obtido para o compensador em avanço de fase e, conseqüentemente, tem-se os mesmos diagramas de Bode e as mesmas MG e MF do caso anterior, ou seja,

$$K = 0,15 \quad (3.107)$$

$$MG = -13,2\text{dB} \quad (3.108)$$

$$MF = -76,4^\circ \quad (3.109)$$

Através do gráfico de fase obtém-se a freqüência onde  $MF=65^\circ+12^\circ=77^\circ$  que é  $\omega=206$ . Escolhe-se  $\omega=206$  como a nova freqüência de cruzamento de ganho.

A freqüência de canto  $\omega=1/T$ , que corresponde ao zero do compensador, será escolhida uma oitava abaixo da nova freqüência de cruzamento de ganho. Então

$$\frac{1}{T} = 103 \quad (3.110)$$

A atenuação necessária para obter-se 0 dB na nova freqüência de cruzamento de ganho é de -5,4 dB, então

$$-20 \log \beta = -5,4$$

$$\beta = 1,86 \quad (3.111)$$

Então a freqüência de canto que corresponde ao pólo do compensador será

$$\frac{1}{\beta T} = 55,4 \quad (3.112)$$

O ganho do controlador pode então ser calculado através da equação (3.106) resultando

$$K_c = 0,08 \quad (3.113)$$

O compensador em atraso de fase é dado por

$$G_c(s) = 0,08 \left( \frac{s + 103}{s + 55,4} \right) \quad (3.114)$$

O sistema compensado possui a seguinte função de transferência em malha aberta

$$G_o(s) = 0,08 \left( \frac{s + 103}{s + 55,4} \right) \left( \frac{4 \times 10^7 \times 0,15}{s^3 + 17s^2 + 5,76 \times 10^4 s} \right) \quad (3.115)$$

Os gráficos de módulo e fase da resposta em frequência do sistema compensado podem ser vistos na Figura 3.22. Destes gráficos obtém-se uma margem de fase de  $82,8^\circ$  e uma margem de ganho de 14,3 dB que satisfazem as especificações do sistema.

A resposta a um degrau de amplitude 0,1 m mostrada na Figura 3.23 apresenta um sobre-sinal de 0,3% e um tempo de acomodação de 0,3 segundos.



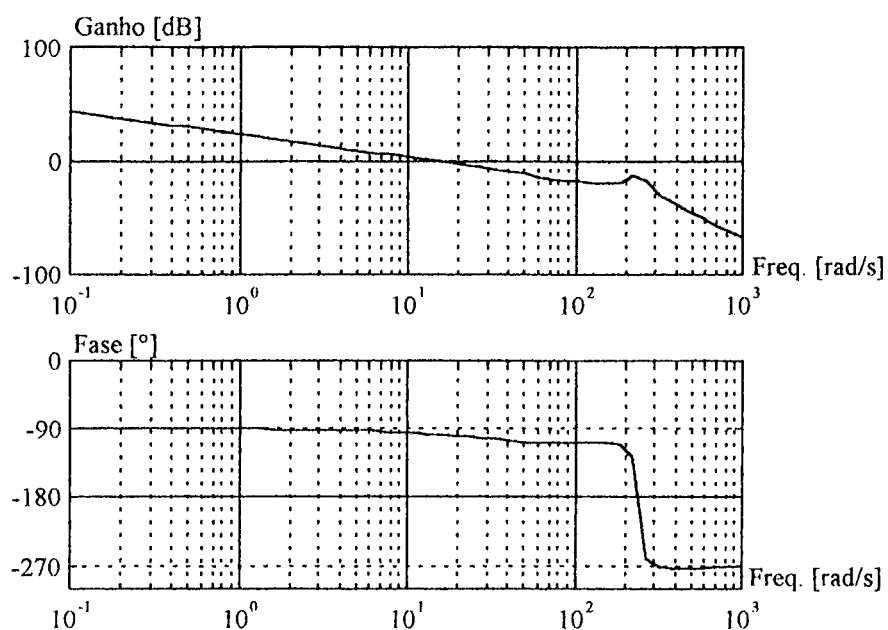


Figura 3.22 - Resposta em frequência para o sistema com compensador em atraso de fase

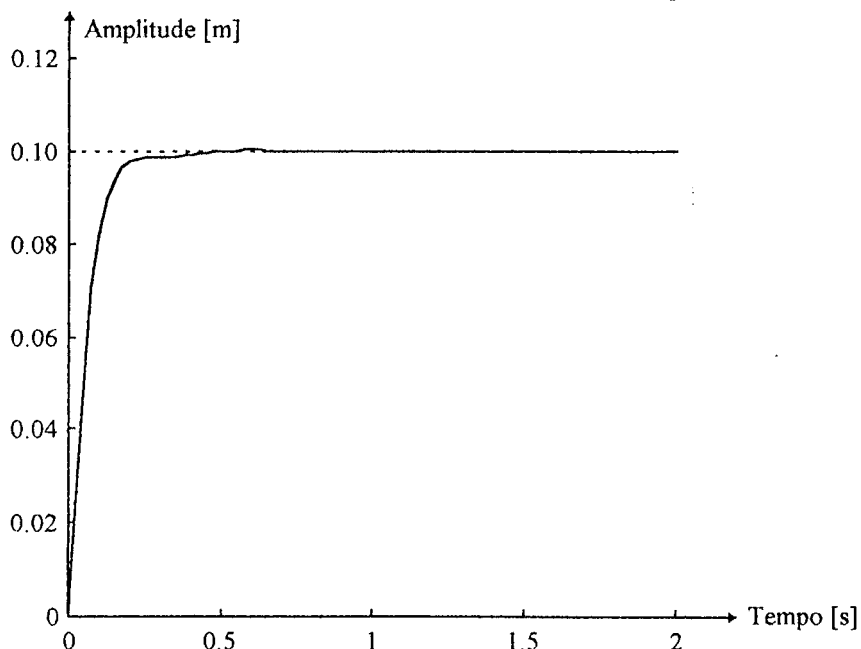


Figura 3.23 - Resposta ao degrau unitário para o sistema com compensador em atraso de fase

Através do gráfico da resposta ao degrau para o sistema com compensador em atraso de fase nota-se que sua resposta é um pouco mais rápida que para os demais controladores de realimentação de saída. Isto pode ser explicado através do gráfico do Lugar das Raízes mostrado na Figura 3.24.

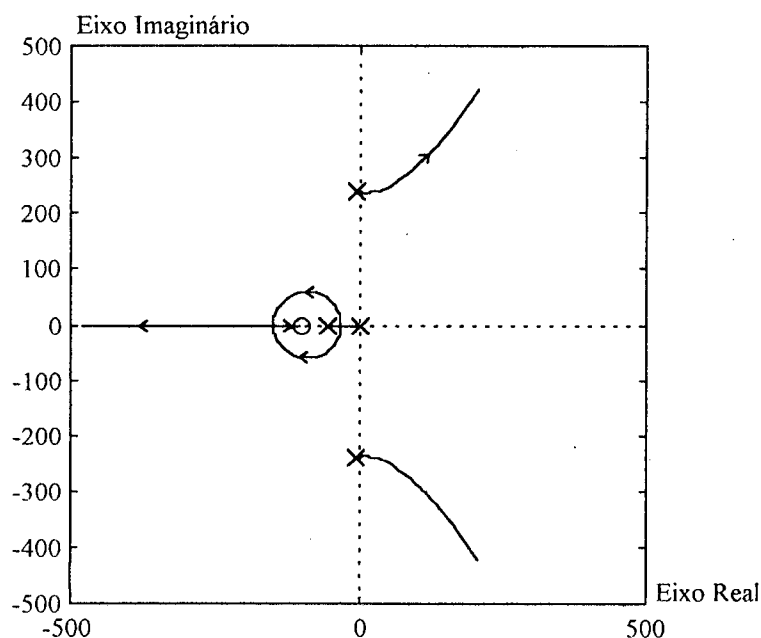


Figura 3.24 - Lugar das Raízes para o sistema com compensador em atraso de fase

Para os controladores anteriormente projetados o pólo (ou zero) adicionado ao sistema estava colocado muito próximo do eixo imaginário. Para o compensador em atraso de fase o pólo e o zero adicionados ao sistema estão colocados afastados do eixo imaginário e por este motivo a resposta ao degrau torna-se mais rápida.

### 3.3 CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS VIA ALOCAÇÃO DE PÓLOS

No projeto de controladores pelo método clássico projeta-se um controlador tal que os pólos em malha fechada dominantes tenham um amortecimento  $\zeta$  e uma frequência natural não-amortecida  $\omega_n$ . No controle no espaço de estados via imposição de pólos são especificados todos os pólos de malha fechada. Para que os pólos em malha fechada possam ser colocados em posições arbitrariamente escolhidas é necessário que o sistema seja completamente controlável pelo estado.

O sistema definido no Capítulo 2:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{B}{M}x_2 + \frac{A}{M}x_3 - \frac{F_l}{M}$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{4\beta}{V_1}Ax_2 - \frac{4\beta}{V_1}K_c x_3 + \frac{4\beta}{V_1}K_q u$$

pode ser colocado na seguinte forma

$$\dot{x} = Fx + Gu \quad (3.116)$$

onde

$x$  é o vetor de estados (n-dimensional)

$u$  é o sinal de controle (escalar)

$F$  é uma matriz constante (n x n)

$G$  é uma matriz constante (n x n)

Define-se o sinal de controle como

$$u = -Kx + v \quad (3.117)$$

onde  $K$  é uma matriz  $(1 \times n)$  denominada matriz de ganho de realimentação de estado e  $v$  é o sinal de entrada.

A condição necessária e suficiente para a imposição arbitrária de pólos é que o sistema seja controlável, ou seja,

$$\text{posto}(C_x) = n \quad (3.118)$$

onde

$$C_x = [G \quad : \quad FG \quad : \quad \dots \quad : \quad F^{n-1}G] \quad (3.119)$$

é a matriz de controlabilidade do sistema.

Satisfeita a condição (3.118) precisa-se encontrar a matriz de realimentação de estado  $K$ . Esta matriz pode ser determinada com o auxílio da fórmula de Ackermann (Franklin, 1994), (Ogata, 1993).

### **Fórmula de Ackermann**

Considere o sistema dado pela equação (3.116). Admite-se que o sistema seja completamente controlável pelo estado e que os pólos de malha fechada desejados estejam em  $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$ .

O uso do controle de realimentação de estado definido na equação (3.117) modifica a equação do sistema para

$$\dot{x} = (F - GK)x \quad (3.120)$$

Define-se

$$\tilde{F} = F - GK \quad (3.121)$$

A equação característica desejada fica

$$\begin{aligned} \phi(s) = |sI - F + GK| &= |sI - \tilde{F}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) \\ &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \end{aligned} \quad (3.122)$$

A fórmula de Ackermann é

$$K = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] C_x^{-1} \phi(F) \quad (3.123)$$

onde  $C_x$  é a matriz de controlabilidade definida na equação (3.119) e

$$\phi(F) = F^n + \alpha_1 F^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} F + \alpha_n \quad (3.124)$$

sendo  $n$  um número inteiro positivo.

Para o sistema de posicionamento hidráulico em estudo tem-se:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1,26 & 8,35 \times 10^{-6} \\ 0 & -6,89 \times 10^9 & -15,38 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4,74 \times 10^{12} \end{bmatrix}$$

Para a determinação da matriz de ganho de realimentação  $K$ , primeiro verifica-se o posto da matriz de controlabilidade do sistema:

$$\text{posto}(C_x) = \text{posto}\begin{bmatrix} F & FG & F^2G \end{bmatrix} = 3 \quad (3.125)$$

Uma vez que o posto da matriz de controlabilidade é 3, é possível a alocação arbitrária de pólos.

Deseja-se alocar os pólos de malha fechada no semiplano esquerdo, todos reais e distantes do eixo imaginário.

Utilizando a fórmula de Ackermann com  $\mu_1 = -1000$ ,  $\mu_2 = -1000$  e  $\mu_3 = -1000$ , obtém-se

$$K = \begin{bmatrix} 2,53 \times 10^1 & 7,42 \times 10^{-2} & 6,29 \times 10^{-10} \end{bmatrix} \quad (1.126)$$

A Figura 3.25 mostra a resposta a um degrau de amplitude 0,1 m para o sistema com a realimentação de estados definida em (1.126).

Pode-se observar, através da Figura 3.25, que a resposta ao degrau do sistema com realimentação de estados é muito mais rápida que para os demais controladores estudados. Enquanto que para os controladores clássicos a resposta apresentava um tempo de acomodação entre 0,5 e 1 segundo, para o sistema com realimentação de estados este tempo se reduz a  $t_s = 7,5 \times 10^{-3}$  segundos.

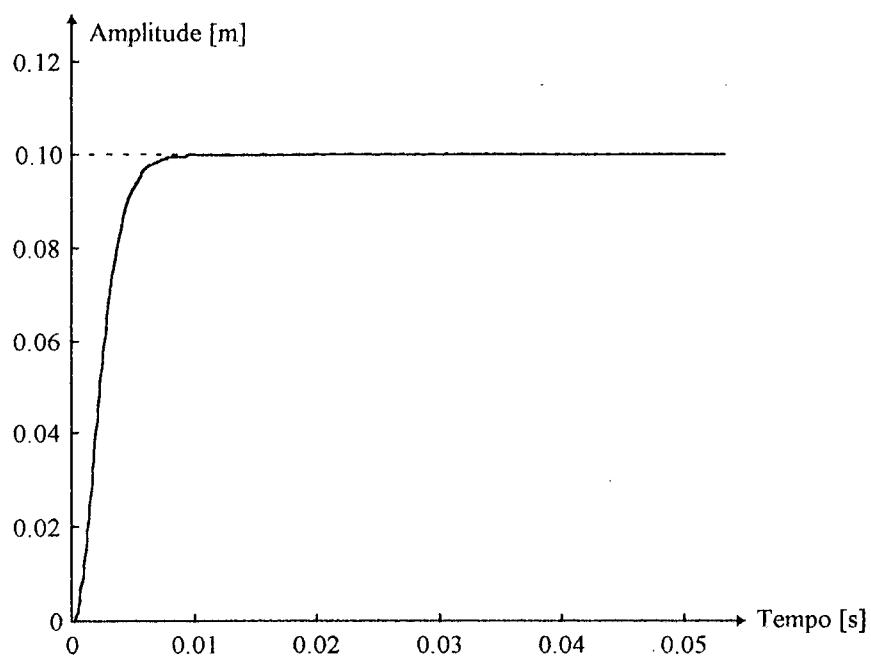


Figura 3.25 - Resposta ao degrau para o sistema com realimentação de estados

No caso da alocação de pólos é feita uma realimentação de estados e não de uma realimentação de saída como para os controladores clássicos e, por este motivo todos os estados devem estar disponíveis para serem medidos ou serem estimados.

### 3.4 RESUMO

Os controladores P, PD e PI são projetados utilizando o critério da estabilidade de Routh-Hurwitz e método do Lugar das Raízes. Estes dois métodos dão uma faixa de variação para cada parâmetro e seus valores são definidos através de simulações buscando atingir as especificações de desempenho.

O controlador PID é projetado utilizando o método do contorno das raízes. Novamente os ganhos do controlador são ajustados através de simulações de modo que as especificações de desempenho sejam alcançadas.

Os compensadores em avanço e em atraso de fase são projetados com o auxílio dos diagramas de Bode sendo, portanto, baseados na resposta em frequência do sistema.

Para o compensador em avanço de fase primeiramente calcula-se o ganho para que a especificação de coeficiente de erro de velocidade estático seja alcançada, depois calcula-se o ângulo de avanço de fase  $\phi$ , através da especificação de margem de fase, e o fator de atenuação  $\alpha$ . A partir dos diagramas de bode determina-se a frequência que produz o deslocamento de fase desejado. Com esta frequência determina-se o pólo e o zero do compensador.

Para o compensador em atraso inicialmente calcula-se o ganho para que a especificação de coeficiente de erro de velocidade estático seja alcançada. A partir do gráfico de fase encontra-se a frequência onde a margem de fase desejada é obtida. Escolhe-se o zero do compensador uma oitava a uma década abaixo desta frequência. A seguir determina-se o



valor de  $\beta$  que produz a atenuação necessária para se conseguir 0 dB na frequência de cruzamento de ganho. Com este  $\beta$  calcula-se o pólo do compensador.

O controlador no espaço de estados é projetado utilizando a alocação arbitrária de pólos, uma vez que o sistema é controlável, com o auxílio da fórmula de Ackermann.

Através do projeto dos diversos controladores clássicos observa-se a limitação de ganho que estes apresentam. Esta limitação nos ganhos, decorrente do critério da estabilidade ou das especificações de projeto, é o fator que dificulta a aplicação destes controladores no atuador hidráulico em estudo.

Procurando solucionar os problemas causados devido a estas limitações de ganho é proposto o controlador em cascata descrito no próximo capítulo.

## **CAPÍTULO 4**

### **CONTROLADOR EM CASCATA**

Neste capítulo é apresentado um algoritmo de controle para o atuador hidráulico descrito e modelado no capítulo 2, desenvolvido por Guenther e De Pieri (1996). O algoritmo é fundamentado em uma metodologia de redução de ordem, a partir da qual define-se uma estratégia de controle em cascata.

O controle em cascata é baseado no modelo linear de terceira ordem, descrito na equação (2.81), obtido da linearização das equações diferenciais não-lineares que representam o comportamento dinâmico dos atuadores hidráulicos.

Utilizando o projeto de controle em cascata e baseado no método da estabilidade de Lyapunov demonstra-se que o erro de malha fechada é globalmente exponencialmente estável. Isto permite a obtenção de uma performance dinâmica melhor do que a obtida com os controladores clássicos. Além disso, o controlador em cascata introduz boas características de robustez ao sistema em malha fechada.

#### **4.1 A TÉCNICA DE CONTROLE EM CASCATA**

O modelo linearizado do atuador hidráulico, definido no capítulo 2, é representado pelas equações:

$$M\ddot{y} + B\dot{y} = AP_L \quad (4.1)$$

$$\frac{V_t}{4\beta K_q} \dot{P}_L + \frac{K_c}{K_q} P_L + \frac{A}{K_q} \dot{y} = u \quad (4.2)$$

De acordo com Burton (1994), pode-se definir o vetor de estados  $x = [y \ \dot{y} \ P_L]^T$ , então as equações (4.1) e (4.2) podem ser reescritas na representação de estados como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Fx + Gu \\ y &= Hx \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{M} & \frac{A}{M} \\ 0 & -\frac{4\beta A}{V_t} & -\frac{4\beta K_c}{V_t} \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4\beta K_q}{V_t} \end{bmatrix}$$

$$H = [1 \ 0 \ 0]$$

A estratégia de controle em cascata aqui apresentada é formulada a partir da definição do problema de seguimento de trajetória aplicado a atuadores hidráulicos.

Definição 4.1: O problema de seguimento de trajetória aplicado ao atuador hidráulico consiste em obter um deslocamento “u” do carretel de modo que  $[y(t) \ \dot{y}(t)]^T$  siga  $[y_d(t) \ \dot{y}_d(t)]^T$ , onde  $y_d(t)$  é a posição desejada do cilindro no instante de tempo t.

Da equação (4.3) e da definição 4.1 verifica-se que o seguimento da trajetória de saída do sistema é efetivamente um seguimento parcial do estado.

Para uma generalização, é importante notar que as equações (4.1) e (4.2) podem ser reescritas como

$$\dot{x}_1 = h_1(x_1, x_2, t) \quad (4.4)$$

$$\dot{x}_2 = h_2(x_1, x_2, t) + B_2(x_1, x_2, t)u \quad (4.5)$$

onde  $x_1 \in \mathfrak{R}^{n-m}$ ,  $x_2 \in \mathfrak{R}^m$  e  $u \in \mathfrak{R}^m$ ,  $n$  é a ordem do sistema modelado por (4.4) e (4.5) e  $m$  é a ordem do subsistema (4.5).

No caso geral, quando o objetivo principal é o seguimento parcial do estado, pode-se reformular a definição 4.1 para o problema de seguimento de trajetória para o sistema descrito pelas equações (4.4) e (4.5) como segue.

Definição 4.2 - O controle de seguimento de trajetória do sistema descrito pelas equações (4.4) e (4.5) consiste em projetar uma lei de controle "u" tal que o vetor  $x_1(t)$  siga uma trajetória desejada  $x_{1d}(t)$ .

Um sistema na forma das equações (4.4) e (4.5) é chamado "regular" se  $\det(B_2) \neq 0$  (Luk'anov e Utkin 1981). Para sistemas regulares, Utkin (1987) propõe uma técnica baseada no "desacoplamento" utilizando o controle por modos deslizantes. Esta técnica é resumida a seguir.

De acordo com Utkin (1987) é possível desacoplar o sistema descrito pelas equações (4.4) e (4.5) quando o objetivo do controle é o seguimento de trajetórias conforme a definição 4.2. Para tanto decompõe-se o vetor de estados e define-se a parcela  $x_2$  como o sinal de controle associado ao subsistema (4.4). Assim, projeta-se

$$x_2 = -\pi(x_1), \quad \pi: \mathcal{R}^{n-m} \rightarrow \mathcal{R}^m \quad (4.6)$$

de acordo com algum critério de desempenho.

Define-se também uma superfície de deslizamento  $S(x_1, x_2)$  como

$$S(x_1, x_2) = x_2 + \pi(x_1) \quad (4.7)$$

Pode-se então projetar uma lei de controle "u" descontínua tal que  $S(x_1, x_2) \equiv 0 \quad \forall t > t_a$ , onde  $t_a$  é o tempo necessário para a trajetória do sistema atingir a superfície  $S(x_1, x_2) = 0$ . A condição  $\det(B_2) \neq 0$  em (4.4) e (4.5) garante que esta lei de controle u existe (De Carlo et al. 1988).

Se  $S(x_1, x_2) = 0$ , o comportamento do sistema em malha fechada está no modo deslizante e (4.4) representa um sistema de ordem reduzida controlado por  $x_2$  segundo a lei (4.6).

A técnica de controle em cascata apresentada na seqüência é inspirada no desacoplamento de sistemas. Considera-se o caso em que  $h_1$  é linear em  $x_2$  e o sistema é representado pelas equações (4.4) e (4.5). Assim, as equações (4.4) e (4.5) podem ser reescritas na forma

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, t) + B_1 x_2 \quad (4.8)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) + B_2(x_1, x_2, t)u \quad (4.9)$$

onde  $B_1$  é uma matriz constante e  $f_2 \equiv h_2$ .

Seja  $x_{2d}$  o sinal de controle de (4.8). Define-se o erro de seguimento como

$$\tilde{x}_2 = x_2 - x_{2d} \quad (4.10)$$

Substituindo (4.10) em (4.8), obtém-se

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, t) + B_1 x_{2d} + B_1 \tilde{x}_2 \quad (4.11)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) + B_2(x_1, x_2, t)u \quad (4.12)$$

A equação (4.11) pode ser interpretada como um subsistema dinâmico controlado por  $x_{2d}$ . Este subsistema está sujeito a uma perturbação dada por  $d(t) = B_1 \tilde{x}_2$ .

A técnica de controle em cascata consiste em controlar o subsistema (4.11) através de  $x_{2d}$ , de forma que  $x_1$  siga  $x_{1d}(t)$  e  $x_2$  no subsistema (4.12) siga  $x_{2d}(t)$  através da aplicação de um sinal de controle  $u(t)$ .

Por este motivo, o projeto do controlador consiste de dois passos:

- (i) Estabelecer uma lei de controle  $x_{2d}$  tal que  $x_1$  siga  $x_{1d}(t)$  na presença de uma perturbação  $d(t)$ ;
- (ii) Estabelecer uma lei de controle  $u(t)$  como definido em (4.12) tal que  $x_2$  siga  $x_{2d}(t)$ .

## 4.2 CONTROLE EM CASCATA APLICADO AO ATUADOR HIDRÁULICO

A inspeção das equações (4.1) e (4.2) indica que elas podem ser escritas na forma (4.11) e (4.12). De fato, o sistema (4.1) e (4.2) pode ser interpretado como um subsistema mecânico (4.1) acionado pela força hidráulica  $g = AP_L$ , ao qual esta superposto um subsistema que fornece uma diferença de pressões  $P_L$ , quando acionado pelo deslocamento “u” do carretel. Esta interpretação fundamenta a descrição do modelo (4.1) e (4.2) em cascata.

Para descrever (4.1) e (4.2) como um sistema em cascata, define-se  $g_d = P_{Ld}A$  como a força desejada para que a massa  $M$  siga uma trajetória desejada  $y_d(t)$ . Seja

$$\tilde{P}_L = P_L - P_{Ld} \quad (4.13)$$

o erro na diferença de pressões. Usando a equação (4.13) pode-se reescrever as equações (4.1) e (4.2) como:

$$M\ddot{y} + B\dot{y} = AP_{Ld} + A\tilde{P}_L \quad (4.14)$$

$$\frac{V_t}{4\beta K_q} \dot{P}_L + \frac{K_c}{K_q} P_L + \frac{A}{K_q} \dot{y} = u \quad (4.15)$$

Claramente, este sistema esta na forma em cascata como definido nas equações (4.11) e (4.12). A equação (4.14) pode ser vista como um subsistema mecânico de segunda ordem acionado pela força desejada  $g_d$  sujeita a uma perturbação de entrada  $d = A\tilde{P}_L$ . A equação (4.15) representa o subsistema hidráulico.

De acordo com o estabelecido anteriormente, o projeto do controlador em cascata para o atuador hidráulico pode ser resumido como segue:

- (i) Estabelecer uma lei de controle  $g_d$  para o subsistema mecânico (4.14) tal que o deslocamento do cilindro siga uma trajetória desejada  $y_d(t)$  na presença da perturbação  $d = A\tilde{P}_L$ . Pode-se calcular a diferença de pressão desejada através da relação:

$$P_{L,d} = \frac{g_d}{A} \quad (4.16)$$

- (ii) Estabelecer uma lei de controle  $u$  tal que  $P_L$  siga  $P_{L,d}(t)$  definido em (4.16).

Neste trabalho a lei de controle para o subsistema mecânico  $g_d$  é projetada com base no controlador proposto por Slotine e Li (1987). A lei de controle para “u” é sintetizada de forma a obter boas características de performance para o seguimento no subsistema hidráulico.

#### 4.2.1 Seguimento no Subsistema Mecânico

De acordo com Slotine e Li (1987)  $g_d$  é obtido por

$$g_d = M\ddot{y}_r + B\dot{y}_r - K_D s \quad (4.17)$$

onde  $K_D$  é uma constante positiva e  $\dot{y}_r$  é a velocidade de referência. De fato,  $\dot{y}_r$  pode ser obtida modificando a velocidade desejada como segue



$$\dot{y}_r = \dot{y}_d - \lambda \tilde{y} \quad (4.18)$$

$$\tilde{y} = \dot{y} - y_d \quad (4.19)$$

$$s = \dot{y} - \dot{y}_r = \dot{\tilde{y}} - \lambda \tilde{y} \quad (4.20)$$

onde  $\lambda$  é uma constante positiva e  $s$  representa uma medida do erro de seguimento de velocidade.

Substituindo (4.17) em (4.14) a equação do erro no subsistema mecânico torna-se

$$M\dot{s} + (B + K_D)s = A\tilde{P}_1 \quad (4.21)$$

Considere a função não negativa:

$$2V_1 = Ms^2 + P\tilde{y}^2 \quad (4.22)$$

onde  $P$  é uma constante positiva definida na seqüência. A derivada em relação ao tempo da equação (4.22) é

$$\dot{V}_1 = Ms\dot{s} + P\tilde{y}\dot{\tilde{y}} \quad (4.23)$$

Das equações (4.21) e (4.22) obtém-se

$$\dot{V}_1 = -(B + K_D)s^2 + P\tilde{y}\dot{\tilde{y}} + As\tilde{P}_1 \quad (4.24)$$

A expressão (4.24) é usada na análise da estabilidade apresentada na seqüência.

### 2.4.2 Seguimento no Subsistema Hidráulico

Para alcançar o seguimento no subsistema hidráulico (4.15) propõe-se a lei de controle

$$u = \hat{u} - K_p \tilde{P}_L \quad (4.25)$$

onde  $\hat{u}$  é uma lei de controle nominal, isto é, esta lei é projetada para o sistema representado pelos valores nominais dos parâmetros do sistema hidráulico e  $K_p$  é uma constante positiva.

O projeto de  $\hat{u}$  e  $K_p$  é baseado na função escalar não negativa  $V_2$ :

$$2V_2 = L\tilde{P}_L^2 \quad (4.26)$$

onde  $L = \frac{V_1}{4\beta K_q}$  é uma constante positiva.

Derivando a relação (4.26) em relação ao tempo em conjunto com a equação (4.15), levando em conta os erros de diferença de pressão  $\tilde{P}_L(t)$  e a lei de controle definida em (4.25) obtém-se

$$\dot{V}_2 = -\tilde{P}_L \left[ (u^* - \hat{u}) + K_p \tilde{P}_L \right] \quad (4.27)$$

onde

$$u^* = L\dot{P}_{Ld} + \frac{K_c}{K_q} P_L + \frac{A}{K_q} \dot{y} \quad (4.28)$$

A expressão (4.27) é usada na análise de estabilidade apresentada a seguir.

De acordo com o esquema de controle em cascata proposto, o deslocamento do carretel “u” é então calculado utilizando a relação

$$u = \hat{u} - K_p(P_L - P_{L,d}) \quad (4.29)$$

com o controle nominal  $\hat{u}$  dado por

$$\hat{u} = \hat{L}\dot{P}_{L,d} + \frac{\hat{K}_c}{\hat{K}_q} P_L + \frac{\hat{A}}{\hat{K}_q} \dot{y} \quad (4.30)$$

onde  $\hat{L} = \frac{\hat{V}_t}{4\hat{\beta}\hat{K}_q}$  é a constante determinada a partir dos valores nominais do volume  $\hat{V}_t$ , do módulo de elasticidade volumétrico nominal  $\hat{\beta}$ , do coeficiente de fluxo da válvula  $\hat{K}_q$ , do coeficiente de pressão da válvula  $\hat{K}_c$ , e da área da seção transversal do pistão atuador  $\hat{A}$ .

A diferença de pressão desejada  $P_{L,d}$  da equação (4.29) é calculada usando as equações (4.16) e (4.17):

$$P_{L,d} = \frac{g_d}{\Lambda} = \frac{1}{\Lambda} (M\ddot{y}_r + B\dot{y}_r - K_D s) \quad (4.31)$$

A derivada da diferença de pressão desejada  $\dot{P}_{L,d}$  usada na equação (4.30) é a derivada em relação ao tempo de (4.31), cujo cálculo envolve relações  $d^3 y_r / dt^3 = y_r^{(3)}$  e  $ds/dt = \dot{s}$ . Das equações (4.18) e (4.20) verifica-se a necessidade de conhecer a aceleração do cilindro  $\ddot{y}$  para calcular  $\dot{P}_{L,d}$ .

No caso em que os parâmetros do subsistema mecânico são conhecidos  $\ddot{y}$  pode ser calculada usando a equação (4.1). Procedendo desta forma e empregando as expressões (4.18) e (4.20) obtém-se:

$$\dot{P}_{1,d} = \frac{1}{A} \left[ \left( \frac{K_D B}{M} - \lambda K_D \right) \dot{y} - A \left( \frac{K_D}{M} + \lambda \right) P_{1,d} + M y_d^{(3)} + (B + K_D + \lambda M) \ddot{y}_d + \lambda (B + K_D) \dot{y}_d \right] \quad (4.32)$$

Pode-se notar de (4.28) e (4.32) que, no caso em que os parâmetros do subsistema mecânico são conhecidos, o sinal  $u^*$  é obtido medindo  $y$ ,  $\dot{y}$  e  $P_{1,d}$ , isto é, o vetor de estados associado com o sistema (4.1) e (4.2).

### 4.3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DO CONTROLADOR EM CASCATA

Considere agora o modelo matemático linear do atuador hidráulico e o controlador em cascata. Neste caso, o sistema em malha fechada é  $\Omega = \{(4.14), (4.15), (4.17), (4.25)\}$ , ou seja

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} M\ddot{y} + B\dot{y} = AP_{1,d} + A\tilde{P}_{1,d} \\ \frac{V_1}{4\beta K_q} \dot{P}_{1,d} + \frac{K_c}{K_q} P_{1,d} + \frac{A}{K_q} \dot{y} = u \\ g_d = M\ddot{y}_r + B\dot{y}_r - K_D s \\ u = \hat{u} - K_p \tilde{P}_{1,d} \end{array} \right. \quad (4.33)$$

Assume-se que a trajetória desejada  $y_d(t)$  e suas derivadas de até terceira ordem são uniformemente limitadas.

Seja  $\rho = [\tilde{y} \quad \dot{\tilde{y}} \quad \ddot{\tilde{y}}]^T$  o vetor de erros de seguimento de  $\Omega$ .

Para demonstrar a estabilidade exponencial da malha fechada  $\Omega$  utiliza-se o lema de convergência apresentado a seguir.

Lema 4.1 (Slotine e Li, 1991) - Se uma função real  $V(t)$  satisfaz a desigualdade

$$\dot{V}(t) + \alpha V(t) \leq 0 \quad (4.34)$$

onde  $\alpha$  é um número real, então

$$V(t) \leq V(0)e^{-\alpha t} \quad (4.35)$$

Prova: Seja a função  $Z(t)$  definida por:

$$Z(t) = \dot{V} + \alpha V \quad (4.36)$$

A equação (4.34) implica que  $Z(t)$  é não positivo. A solução da equação de primeira ordem (4.36) é

$$V(t) = V(0)e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-r)} Z(r) dr \quad (4.37)$$

Como  $Z(t)$  é negativo, o segundo termo do lado direito da equação é não positivo, então

$$\dot{V}(t) \leq V(0)e^{-\alpha t} \quad (4.38)$$

Teorema 4.1. O sistema  $\Omega$  descrito acima é exponencialmente estável em relação à origem do vetor de erros de seguimento  $\rho$ .

Prova: Considere a função de Lyapunov

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} \rho^T N_1 \rho \quad (4.39)$$

onde  $V_1$  e  $V_2$  foram definidas em (4.22) e (4.26), respectivamente. A matriz  $N_1$  é dada por

$$N_1 = \begin{bmatrix} \lambda^2 M + P & \lambda M & 0 \\ \lambda M & M & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Para o caso em que os parâmetros do atuador hidráulico são conhecidos  $u = u^*$ .

Então, de acordo com (4.24) e (4.27), a derivada em relação ao tempo de (4.39) é

$$\dot{V} = -(B + K_D)s^2 + P\tilde{y}\dot{\tilde{y}} + A_s\tilde{P}_L - K_P\tilde{P}_L^2 \quad (4.41)$$

Usando a equação (4.20)

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -(B + K_D)\dot{\tilde{y}}^2 - [2\lambda(B + K_D) - P]\tilde{y}\dot{\tilde{y}} - \lambda^2(B + K_D)\tilde{y}^2 + \\ & + \lambda A\tilde{y}\tilde{P}_L + A\dot{\tilde{y}}\tilde{P}_L - K_P\tilde{P}_L^2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Define-se

$$P = 2\lambda(B + K_D) \quad (4.43)$$

então

$$\dot{V} = -\rho^T N_2 \rho \quad (4.44)$$

onde

$$N_2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 (B + K_D) & 0 & -\frac{1}{2} \lambda A \\ 0 & B + K_D & -\frac{1}{2} A \\ -\frac{1}{2} \lambda A & -\frac{1}{2} A & K_P \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

A matriz  $N_2$  é positiva definida se duas condições são verificadas:  $B + K_D > 0$  e  $(B + K_D)K_P > \frac{1}{2}A^2$ . Como a primeira condição é satisfeita por definição, a segunda fornece a condição suficiente em termos dos parâmetros do controlador

$$(B + K_D)K_P > \frac{1}{2}A^2 \quad (4.46)$$

Neste caso,  $N_2 > 0$ , e

$$\dot{V}(t) = -\rho^T N_2 \rho \leq 0 \quad (4.47)$$

Seja  $\lambda_{\max}(N_1)$  o maior autovalor da matriz  $N_1$ , e  $\lambda_{\min}(N_2)$  o menor autovalor da matriz  $N_2$ , e seja  $\gamma = \lambda_{\min}(N_2)/\lambda_{\max}(N_1)$ . Como  $N_1$  e  $N_2$  são matrizes positivas definidas, conseqüentemente todos os escalares definidos acima são positivos. Com isso,

$$\rho^T N_1 \rho \leq \rho^T \lambda_{\max}(N_1) I \rho \quad (4.48)$$

$$\rho^T N_2 \rho \geq \rho^T \lambda_{\min}(N_2) I \rho \quad (4.49)$$

onde  $I$  é a matriz identidade. Desta forma,

$$\rho^T N_2 \rho \geq \frac{\lambda_{\min}(N_2)}{\lambda_{\max}(N_1)} \rho^T [\lambda_{\max}(N_1) I] \rho \geq \gamma V(t) \quad (4.50)$$

Usando este resultado combinado com (4.47) é possível escrever

$$\dot{V}(t) \leq -\gamma V(t) \quad (4.51)$$

ou seja,

$$\dot{V}(t) + \gamma V(t) \leq 0 \quad (4.52)$$

De acordo com o lema 4.1 a expressão (4.52) torna-se

$$V(t) = \frac{1}{2} \rho^T N_1 \rho \leq V(0) e^{-\gamma t} \quad (4.53)$$

De (4.52) e usando a relação  $\rho^T N_1 \rho \geq \lambda_{\min}(N_1) \|\rho(t)\|^2$  pode-se afirmar que o vetor de erros  $\rho$  associado ao sistema  $\Omega$  converge exponencialmente para a origem com uma taxa de convergência maior que  $\gamma/2$ .

Se a expressão (4.46) é verificada então pode-se utilizar ganhos tão grandes quanto necessário a fim de que os requisitos de performance possam ser atingidos, isto é, não existem limitações de ganho do ponto de vista matemático. Esta limitação existe, no entanto, do ponto de vista prático.

A estrutura dinâmica do atuador hidráulico apresenta pólos complexos conjugados pouco amortecidos fazendo com que o ganho proporcional de realimentação fique restrito a pequenos valores, e isto limita o desempenho em malha fechada.



Os controladores clássicos introduzem pólos e zeros na malha fechada que, em geral, não alteram a localização dos pólos complexos conjugados pouco amortecidos. Conseqüentemente, usando estes controladores não se consegue alterar o desempenho do sistema. Uma maneira de contornar este problema é utilizar uma realimentação de estados. Teoricamente é possível alocar os pólos arbitrariamente uma vez que o sistema definido pelas equações (4.1) e (4.2) é controlável. O amortecimento adequado dos pólos complexos pode, no entanto, necessitar de ganhos e sinais de controle elevados, ou seja, de grandes deslocamentos da servoválvula. Como o deslocamento da servoválvula é limitado, o sinal de controle pode saturar e isto constitui uma limitação física do problema que deve ser levada em conta em uma implementação prática.

## **CAPÍTULO 5**

### **RESULTADOS DE SIMULAÇÕES**

Neste capítulo são apresentados os resultados das simulações realizadas para os diversos controladores projetados. Na seção 5.1 são descritas as trajetórias desejadas para serem seguidas pelo sistema hidráulico. Na seção 5.2 são descritas as simulações realizadas. Os resultados das simulações para os controladores de realimentação de saída são mostrados na seção 5.3. Os resultados para o controlador no espaço de estados juntamente com o controlador em cascata são mostrados na seção 5.4.

#### **5.1 DESCRIÇÃO DAS TRAJETÓRIAS DESEJADAS**

Em todos os casos simulados foram utilizadas duas trajetórias desejadas para serem seguidas pelo atuador hidráulico.

Na primeira pretende-se estudar o comportamento do atuador no deslocamento do pistão até uma posição desejada. Para tanto, utiliza-se um polinômio de terceira ordem como uma forma de suavizar um degrau, como é comum no planejamento de trajetórias em robôs manipuladores (veja Craig, 1986). Neste caso são especificadas as posições inicial e final e velocidades (nulas) nestes dois instantes.

Se a posição a ser alcançada após o tempo de 1 segundo é  $y_d(1) = 0,1$  m, a função que descreve a trajetória é

$$y_d(t) = \begin{cases} y_d(0) + 0,3t^2 - 0,2t^3 & t < 1 \\ y_d(0) + 0,1 & t \geq 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\dot{y}_d(t) = \begin{cases} 0,6t - 0,6t^2 & t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases} \quad (5.2)$$

Os gráficos de  $y_d(t)$  com  $y_d(0) = 0$  e  $\dot{y}_d(t)$  são mostrados na Figura 5.1.

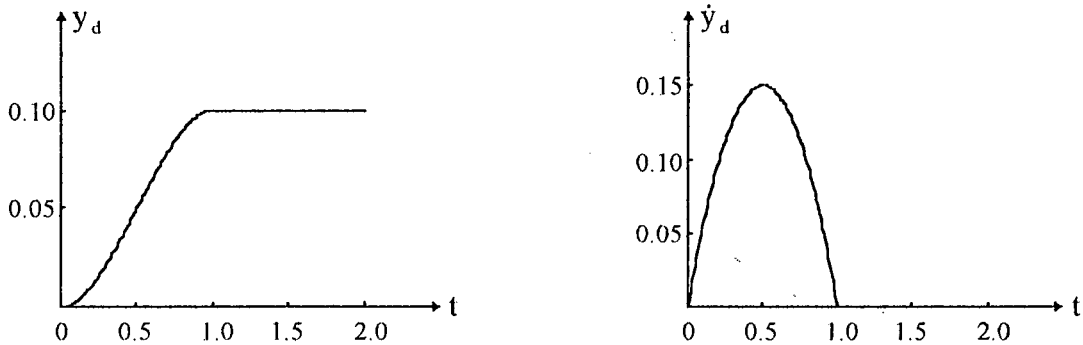


Figura 5.1 - Gráficos de posição e velocidade desejadas polinomial

Com a trajetória senoidal deseja-se estudar o comportamento do atuador hidráulico no seguimento de uma trajetória. Para tanto utilizam-se as funções

$$y_d(t) = y_d(0) + 0,1 \times \text{sen}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)t\right] \quad (5.3)$$

$$\dot{y}_d(t) = 0,1 \times \left(\frac{\pi}{2}\right) \times \text{cos}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)t\right] \quad (5.4)$$

Os gráficos de  $y_d(t)$  com  $y_d(0) = 0$  e  $\dot{y}_d(t)$  são mostrados na Figura 5.2.

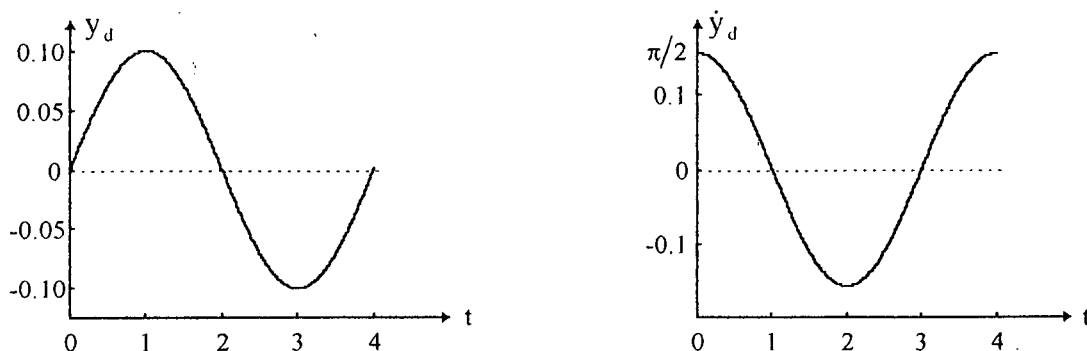


Figura 5.2 - Gráficos de posição e velocidade desejadas senoidal

## 5.2 DESCRIÇÃO DAS SIMULAÇÕES REALIZADAS

O modelo linear, assim chamado daqui para frente, é o modelo linearizado em torno de um ponto central “0” de operação (descrito no capítulo 2). Este modelo foi simulado para os casos sem perturbação e com perturbação, caracterizada por uma força atuando na massa  $M$  (veja Figura 2.3).

O modelo não-linear, também descrito no capítulo 2, foi simulado de duas formas:

- (i) considerando uma posição inicial  $y_d(0) = 0$ , ou seja, o cilindro está em sua posição central;
- (ii) considerando uma posição inicial  $y_d(0) = 0,25$ , ou seja, o cilindro está colocado em uma posição inicial fora centro.

Os projetos dos controladores, mostrados nos capítulos 3 e 4, foram realizados considerando o modelo linearizado do sistema de posicionamento hidráulico descrito no capítulo 2. No projeto, este modelo foi considerado sem perturbação e submetido a uma

entrada do tipo degrau para verificar se as especificações foram cumpridas pelos controladores projetados.

Foram realizadas simulações para todos os controladores reproduzindo as condições de projeto. Também foram realizadas simulações para os modelos linear e não-linear utilizando as duas entradas desejadas para a posição. Tanto para a entrada polinomial quanto para a entrada senoidal foram considerados os casos do sistema sem perturbação e com perturbação.

Todas as simulações foram realizadas com o auxílio do programa (SIMNON, 1993).

### **5.3 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES UTILIZANDO OS CONTROLADORES CLÁSSICOS DE REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA**

#### **5.3.1 Posição Desejada Polinomial**

Nas Figuras 5.3 e 5.4 estão apresentados os resultados das simulações realizadas com o modelo linear e sem perturbação para os controladores clássicos de realimentação de saída. As simulações foram realizadas utilizando os controladores com os ganhos definidos no capítulo 3 menos para o compensador em atraso de fase que precisa ter seu ganho  $K$  diminuído para  $K = 0,02$  para manter a estabilidade.

Através das Figuras 5.3 e 5.4 observa-se que o erro máximo de posição apresentado por todos os controladores varia de 0,006 a 0,020 m. Isto representa um erro variando de 6 a 20% em torno do valor desejado para a posição, o que é um valor muito elevado.

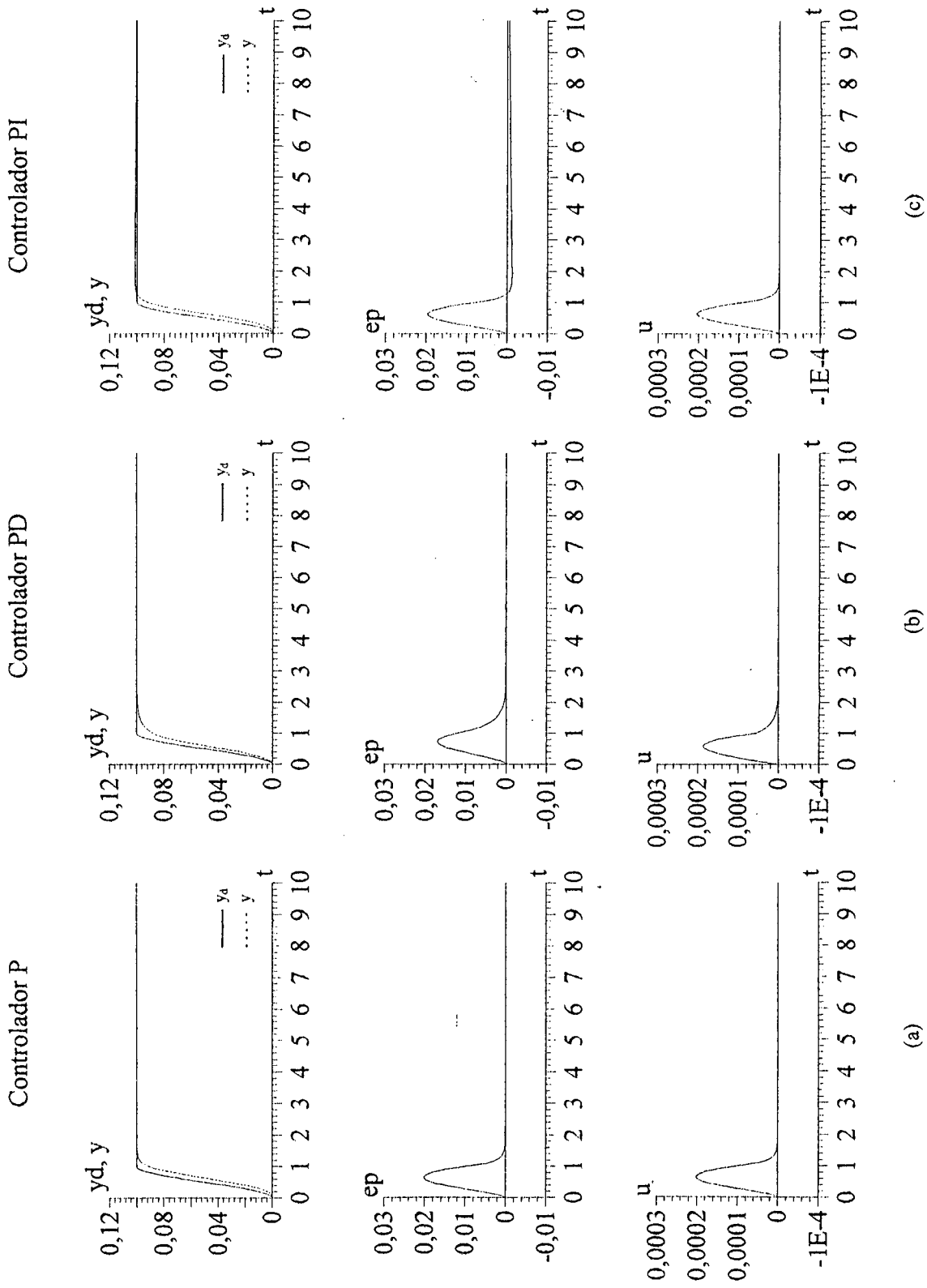
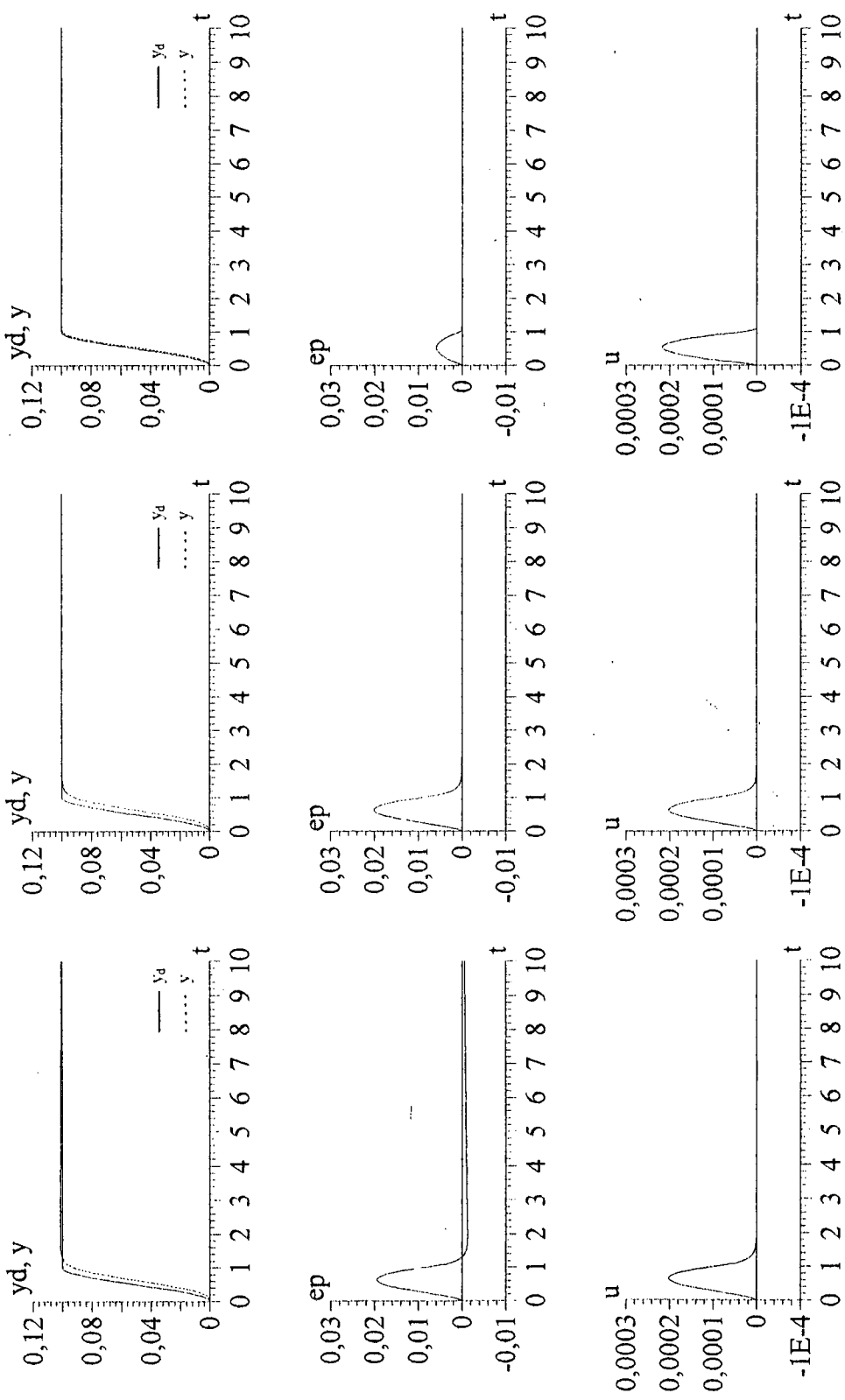


Figura 5.3 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador P; (b) Controlador PD; (c) Controlador PI

Controlador PID

Compensador em avanço de fase

Compensador em atraso de fase



(a)

(b)

(c)

Figura 5.4 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador PID; (b) Compensador em avanço de fase; (c) Compensador em atraso de fase

Consegue-se diminuir os erros que aparecem para os controladores aumentando seus ganhos. Este aumento nos ganhos dos controladores é limitado pelas condições de estabilidade e o máximo sinal de controle que o sistema suporta.

Nota-se também que os controladores não apresentam erro de posição em regime permanente. Este resultado também é válido para os controladores PI e PID apesar disto não ser mostrado claramente nas Figuras 5.3 e 5.4.

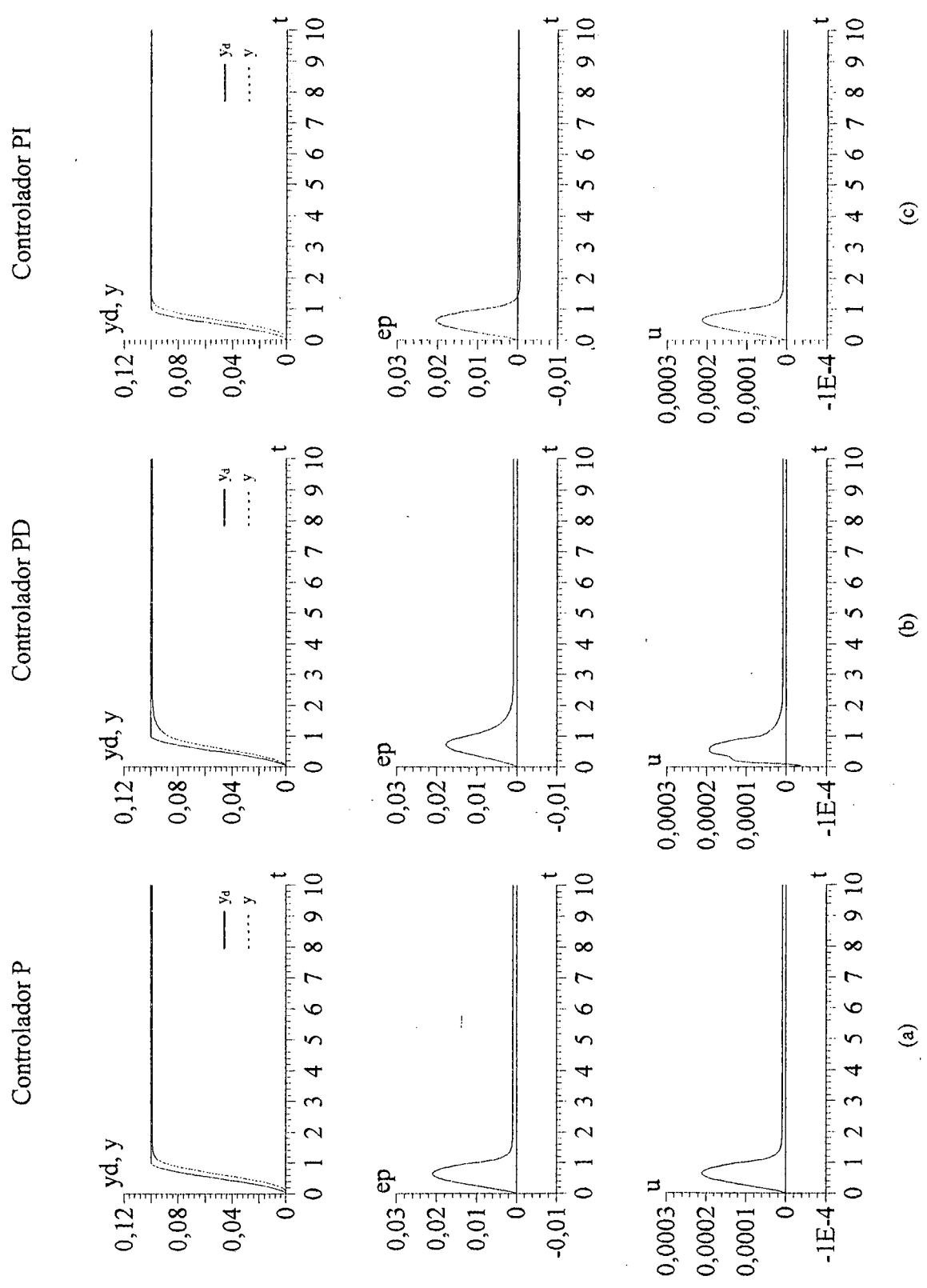
Cabe salientar que os controladores foram simulados com os ganhos obtidos no capítulo 3 e, por este motivo, os controladores PI e PID apresentam um comportamento lento devido aos seus ganhos serem pequenos para satisfazer as especificações de desempenho.

Incluída a perturbação de 3000 N, chega-se aos resultados mostrados nas Figuras 5.5 e 5.6.

Através destas figuras nota-se que os resultados obtidos são semelhantes aos do sistema sem perturbação com um pequeno aumento no valor máximo do erro de posição como pode ser constatado através da Tabela 5.1.

Devido à presença da perturbação aparecem erros em regime permanente, que antes não existiam, para os controladores P, PD e em avanço de fase.





(a)

(b)

(c)

Figura 5.5 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador P; (b) Controlador PD; (c) Controlador PI

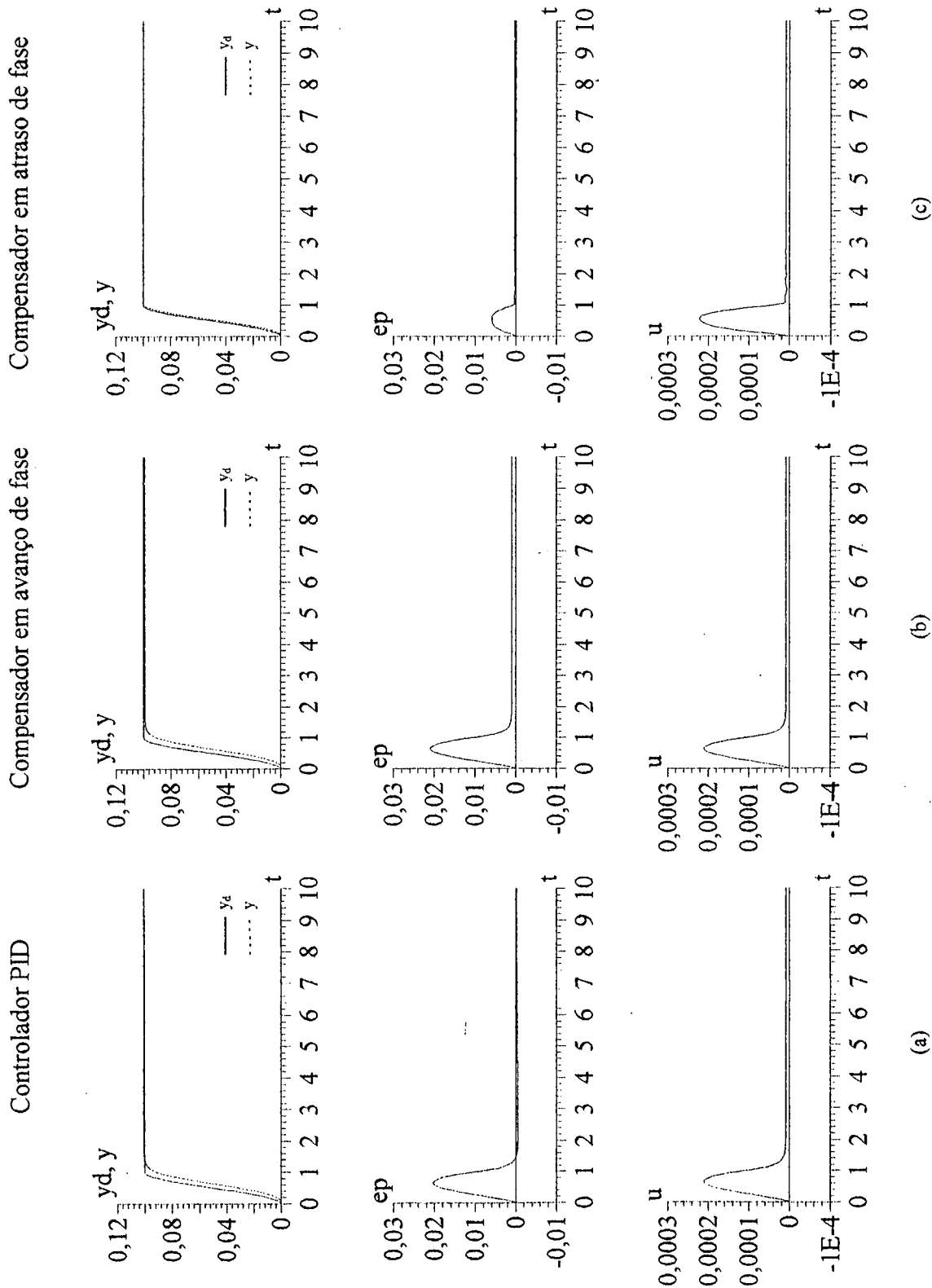


Figura 5.6 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador PID; (b) Compensador em avanço de fase; (c) Compensador em atraso de fase

Tabela 5.1 - Valores de erro máximo de posição dos controladores simulados para o modelo linear nos casos sem e com perturbação

Controlador	Parâmetros	Erro Máximo de Posição	
		sem perturbação	com perturbação
P	$K_p = 0,01$	0,020	0,021
PD	$K_p = 0,01$ $K_d = 0,001$	0,017	0,018
PI	$K_p = 0,01$ $K_i = 0,001$	0,020	0,021
PID	$K_p = 0,01$ $K_i = 0,001$ $K_d = 0,001$	0,019	0,020
Avanço	$K = 0,01$	0,020	0,021
Atraso	$K_c = 0,02$ $p = 55,4$ $z = 103$	0,006	0,007

O modelo não-linear foi simulado utilizando os controladores projetados com base no modelo linear e sem perturbação (capítulo 3).

Este modelo foi simulado de duas formas: considerando uma condição inicial nula (cilindro colocado no centro) e considerando uma condição inicial diferente de zero para a posição (cilindro colocado fora do centro).

Os resultados das simulações mostram que o modelo não-linear se comporta de forma similar ao modelo linear a não ser para o controlador PI e o compensador em atraso de fase que precisam ter seus ganhos diminuídos para permanecerem estáveis. O ganho proporcional do controlador PI é alterado para  $K_p = 0,001$  e o ganho integral permanece o mesmo, ou seja,  $K_i = 0,001$ . O ganho do compensador em atraso de fase é reduzido para  $K_c = 0,001$  enquanto o pólo e o zero não são alterados, ou seja,  $p = 55,4$  e  $z = 103$ . Como consequência desta redução nos ganhos, estes controladores apresentaram erros maiores.

Os resultados da simulação para o modelo não-linear, sem perturbação e cilindro colocado fora do centro são mostrados nas Figuras 5.7 e 5.8. Nestas figuras o controlador PI e o compensador em atraso estão com seus ganhos modificados para evitar a instabilidade do sistema.

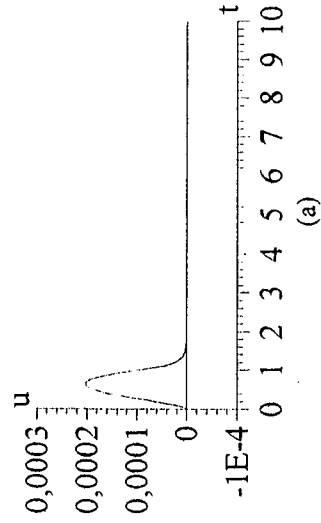
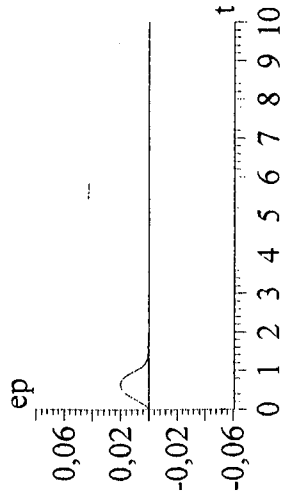
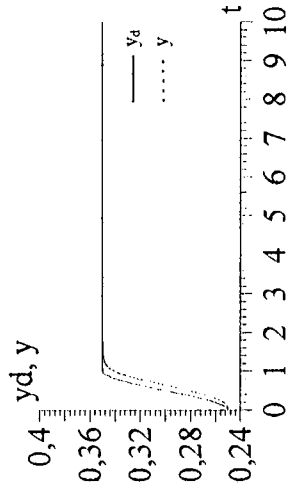
Se fosse incluída a perturbação os resultados mostrados nas Figuras 5.7 e 5.8 não apresentariam modificações significativas, como pode ser comprovado através dos dados da Tabela 5.2.

Tabela 5.2 - Valores de erro máximo de posição dos controladores simulados para o modelo não-linear nos casos sem e com perturbação

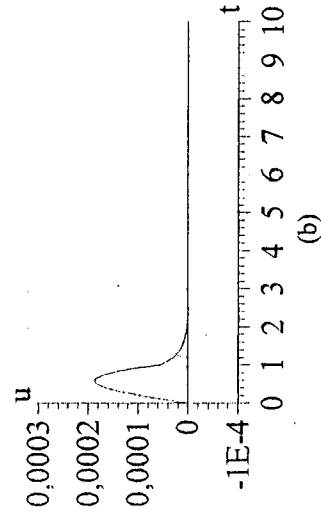
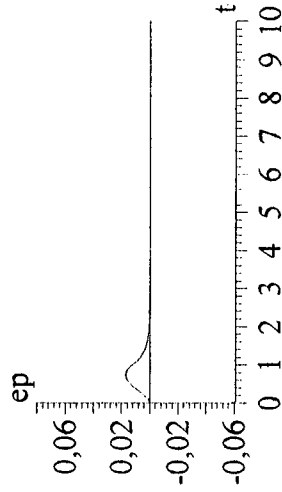
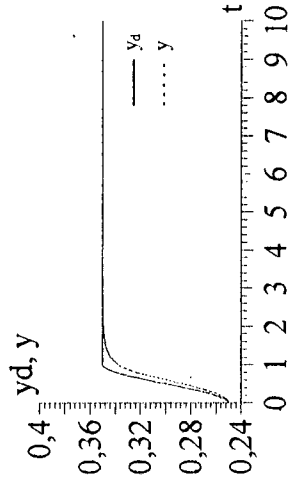
Controlador	Parâmetros	Erro Máximo de Posição	
		sem perturbação	com perturbação
P	$K_p = 0,01$	0,020	0,025
PD	$K_p = 0,01$ $K_d = 0,001$	0,017	0,021
PI	$K_p = 0,001$ $K_i = 0,001$	0,070	0,075
PID	$K_p = 0,01$ $K_i = 0,001$ $K_d = 0,001$	0,019	0,025
Avanço	$K = 0,01$	0,020	0,025
Atraso	$K_c = 0,001$ $p = 55,4$ $z = 103$	0,065	0,070

Os resultados obtidos para o modelo não-linear com o cilindro colocado no centro, em termos de erro de posição e sinal de controle, são muito parecidos com os obtidos para o caso do cilindro colocado fora do centro, tanto para o sistema sem perturbação como para o sistema com perturbação.

Controlador P



Controlador PD



Controlador PI

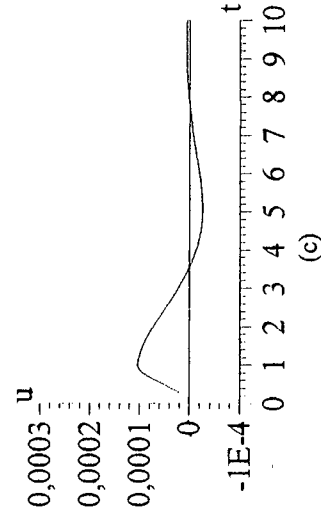
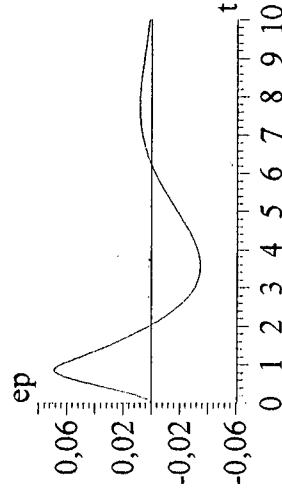
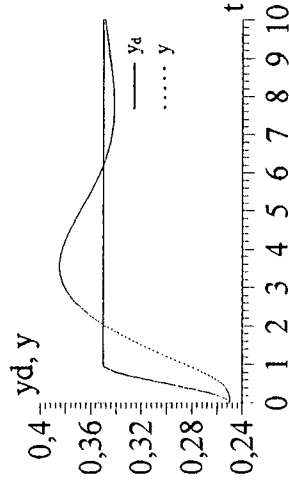


Figura 5.7 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador P; (b) Controlador PD; (c) Controlador PI

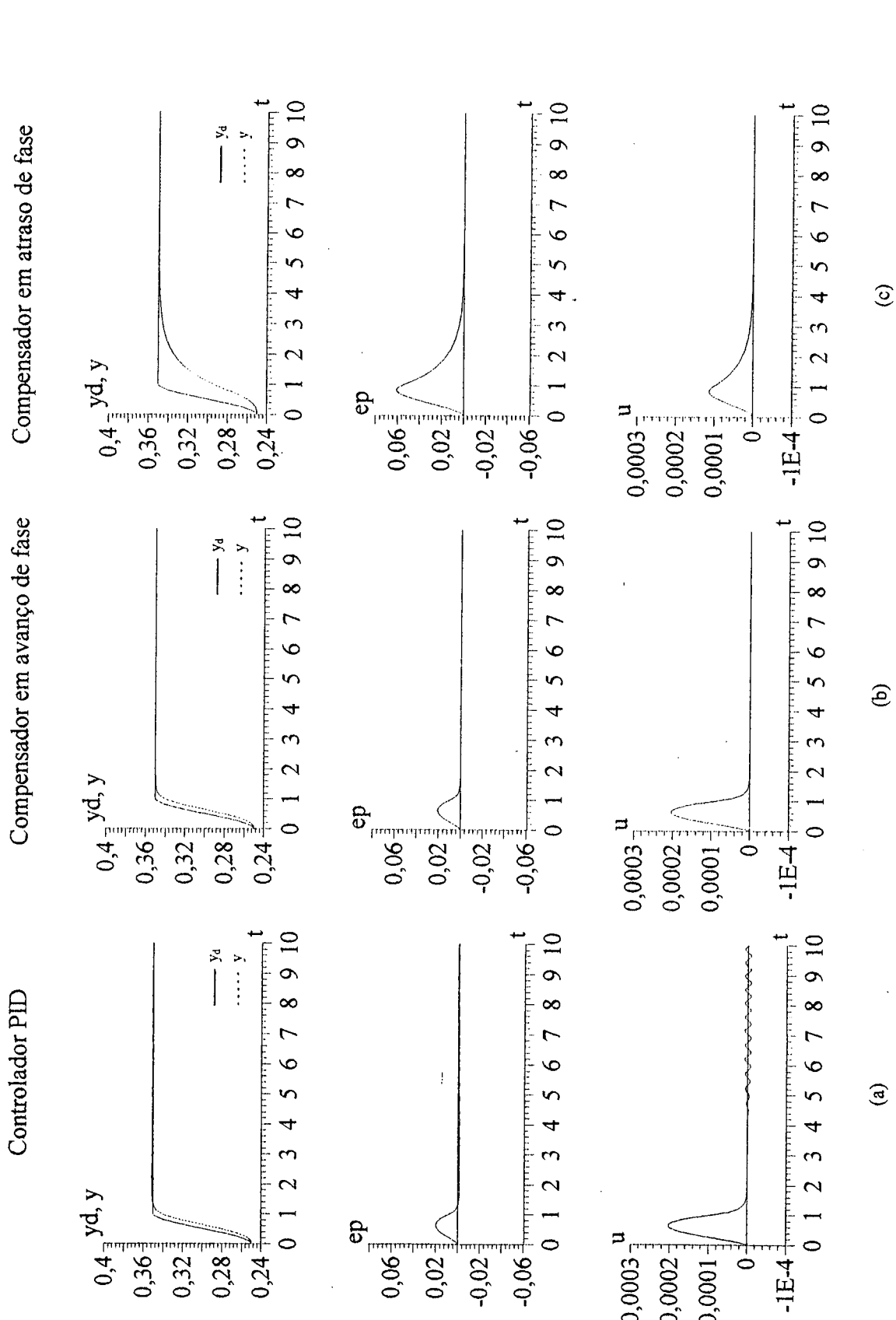


Figura 5.8 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador PID; (b) Compensador em avanço de fase; (c) Compensador em atraso de fase

Fazendo uma comparação entre os modelos linear e não-linear constata-se que eles são muito parecidos mostrando que, neste sistema, o ponto em torno do qual o sistema foi linearizado não traz modificações significativas aos resultados.

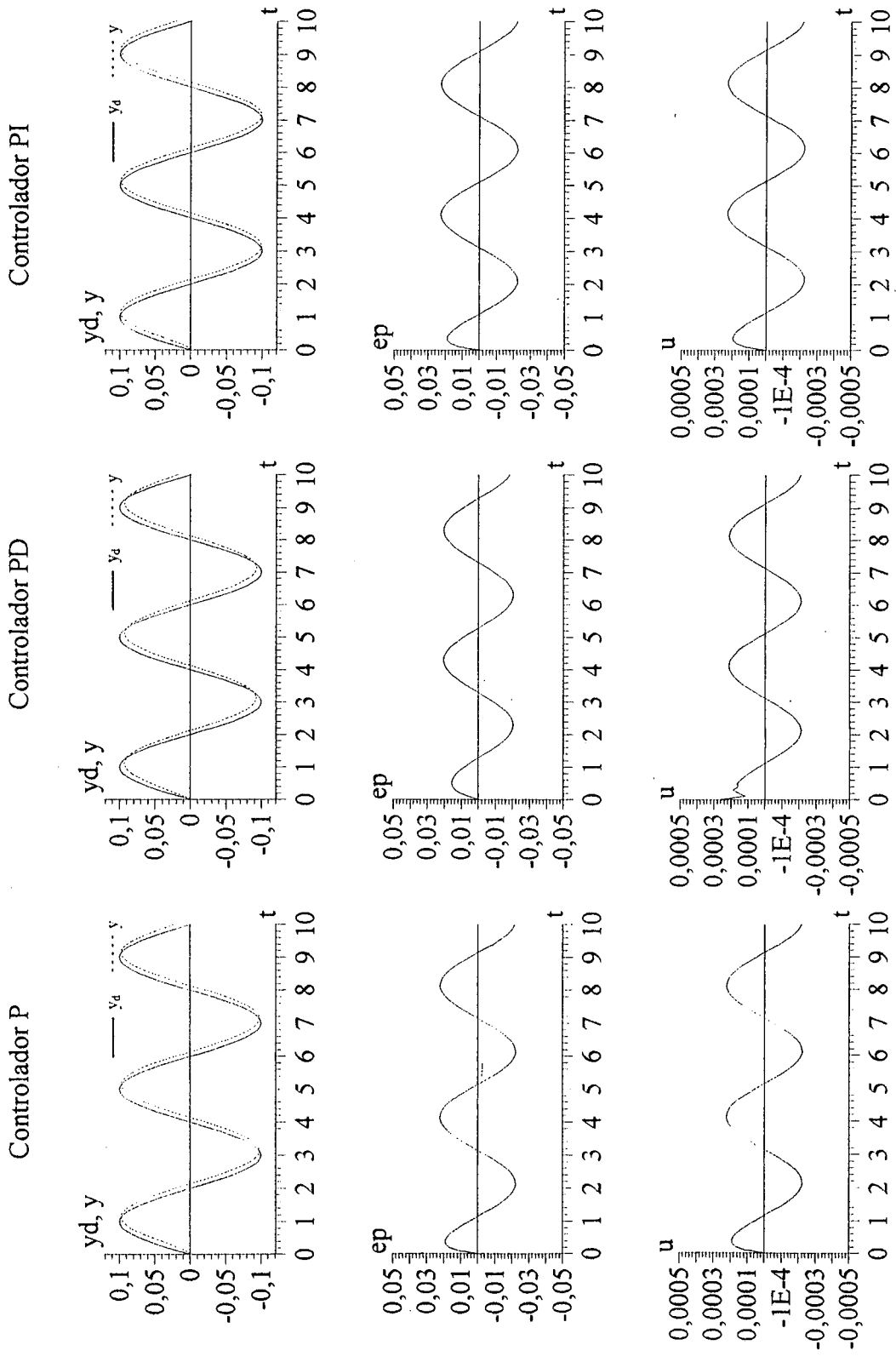
### 5.3.2 Posição Desejada Senoidal

Para a simulação com o modelo linear, sem perturbação, os controladores clássicos de realimentação de saída têm como resultados os gráficos de posição desejada e posição do sistema, erro de posição e sinal de controle mostrados nas Figuras 5.9 e 5.10.

As respostas do sistema com os controladores clássicos de realimentação de saída apresentam erros de seguimento na forma senoidal. Isto ocorre pois estes controladores apresentam sinal de controle proporcional ao erro de posição, que por sua vez apresenta a mesma forma que a entrada desejada. Como a posição desejada tem a forma senoidal o erro de posição terá a mesma forma.

Como se pode observar, na Figura 5.9, para o controlador PD ocorre um pico no início do sinal de controle, isto ocorre pois a velocidade inicial do processo é nula e a velocidade inicial desejada é  $\pi/2$ . Esta diferença entre as velocidades desejada e do processo é o erro de velocidade e tem um efeito visível neste controlador pois o mesmo se utiliza diretamente do cálculo deste erro para gerar o sinal de controle.

Se for incluída a perturbação os resultados obtidos são semelhantes aos das Figuras 5.9 e 5.10.



(a) (b) (c)

Figura 5.9 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador P; (b) Controlador PD; (c) Controlador PI



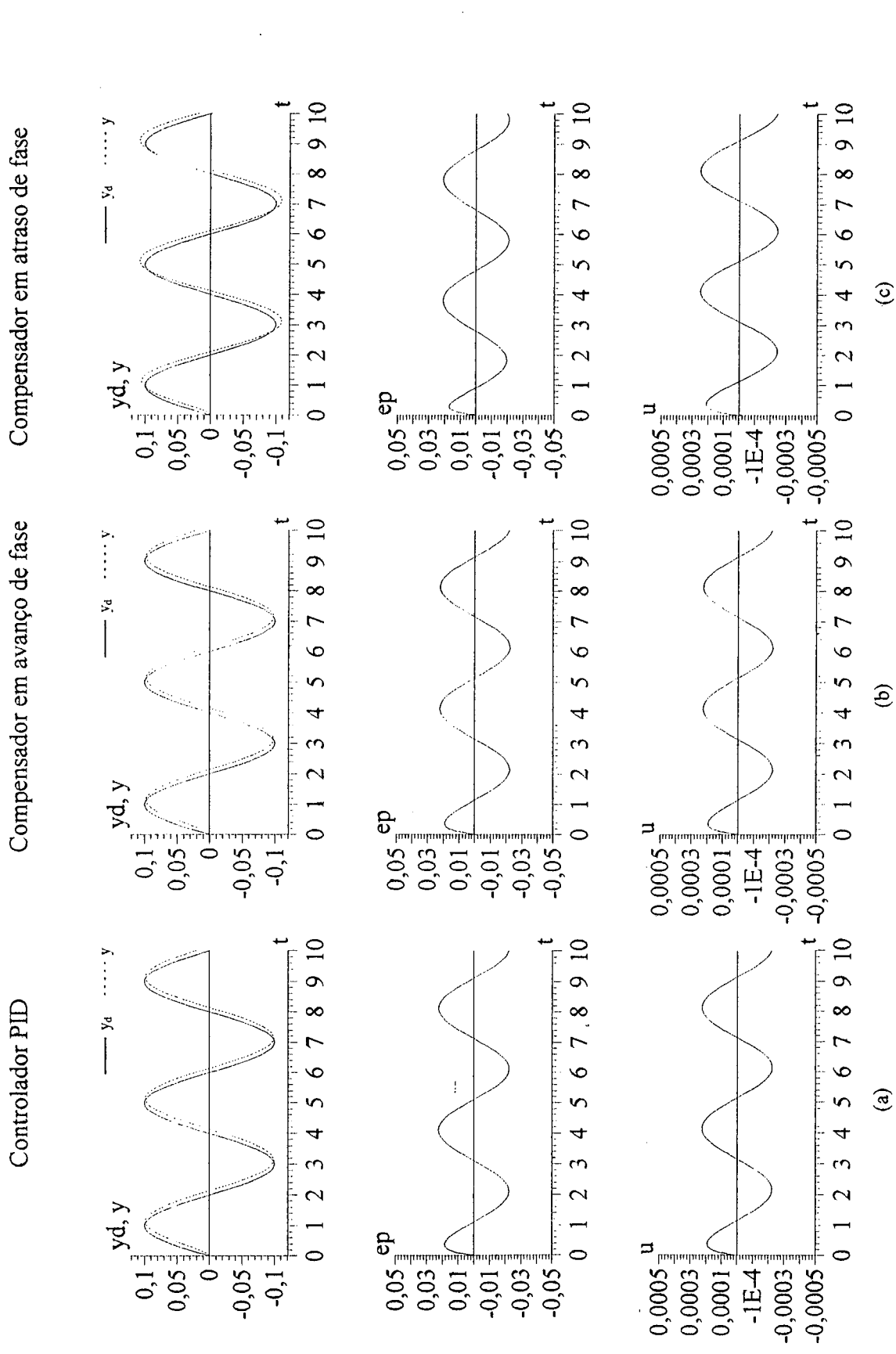


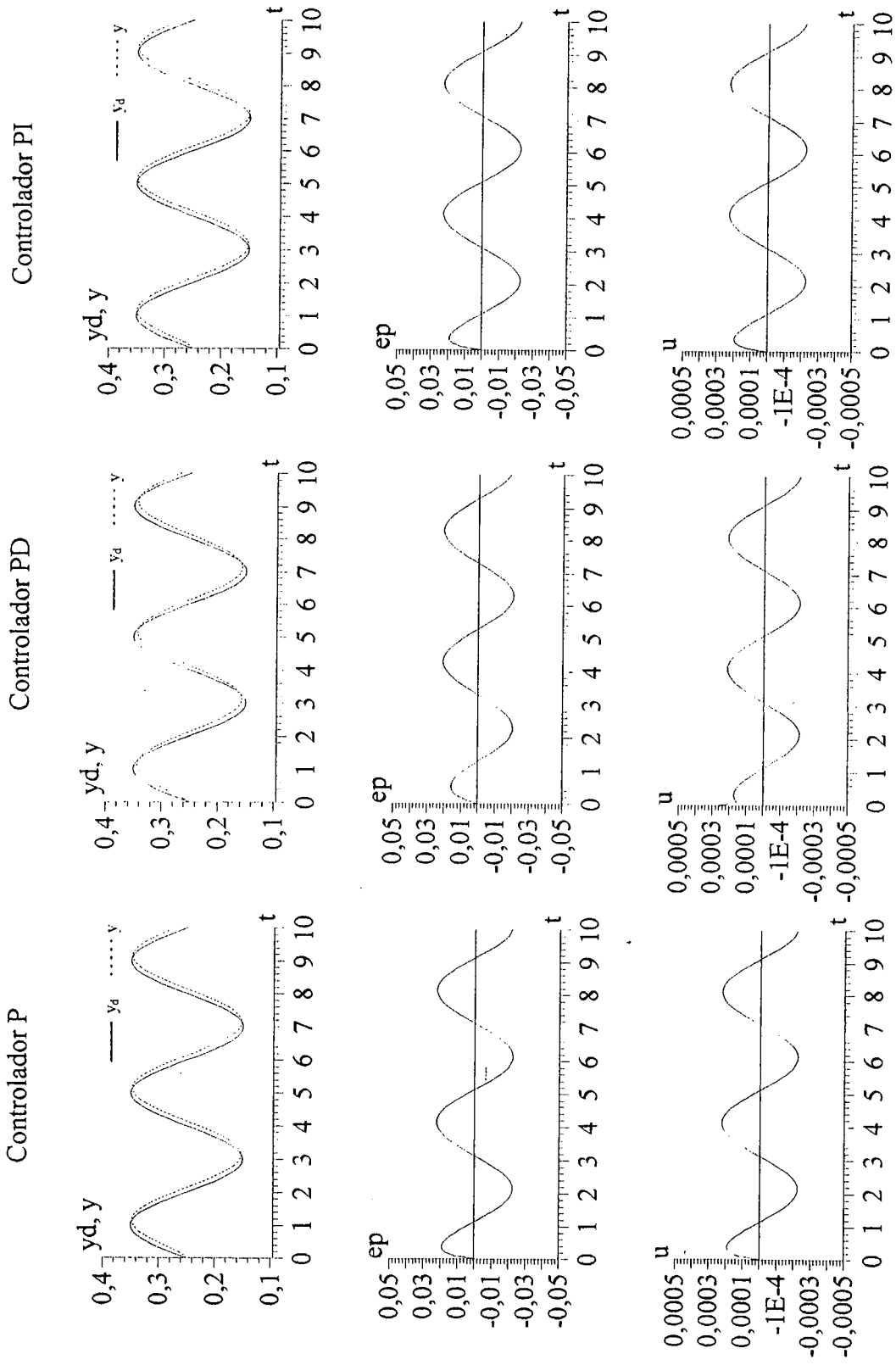
Figura 5.10 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador PID; (b) Compensador em avanço de fase; (c) Compensador em atraso de fase

As Figuras 5.11 e 5.12 mostram os resultados das simulações utilizando o modelo não-linear e cilindro colocado fora do centro.

Através da observação das Figuras 5.11 e 5.12 nota-se que os resultados de erro de posição e sinal de controle são semelhantes aos obtidos para o modelo linear.

Se a perturbação for incluída os resultados não são alterados. Colocando o cilindro na sua posição central também não ocorrem alterações significativas.

Como no caso da posição desejada polinomial, os resultados para os modelos linear e não-linear são muito parecidos comprovando que o ponto em torno do qual o sistema foi linearizado não traz modificações significativas aos resultados.



(a)

(b)

(c)

Figura 5.11 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador P; (b) Controlador PD; (c) Controlador PI

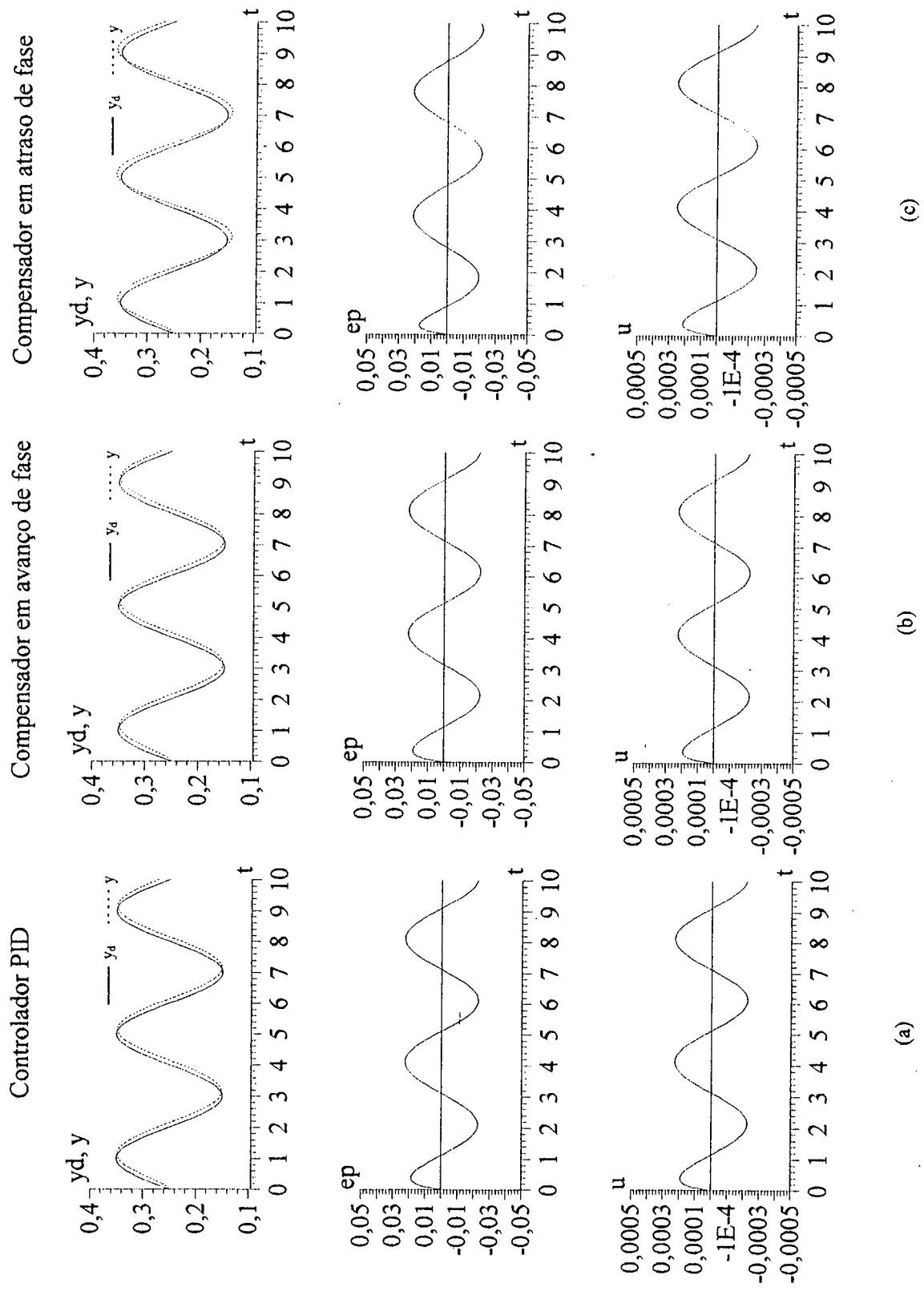


Figura 5.12 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ ,  $e_p$  e  $u$  para: (a) Controlador PID; (b) Compensador em avanço de fase; (c) Compensador em atraso de fase

## 5.4 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES UTILIZANDO OS CONTROLADORES NO ESPAÇO DE ESTADOS E EM CASCATA

### 5.4.1 Posição Desejada Polinomial

Para a simulação com o modelo linear o comportamento do controlador no espaço de estados (EE) é mostrado na Figura 5.13 para os casos sem perturbação e com perturbação.

Como pode ser visto na Figura 5.13, o sistema com controlador EE apresenta um erro máximo de posição de 0,45 mm para o caso sem perturbação. Para o caso com perturbação, este erro aumenta para 0,52 mm e o sistema apresenta um erro em regime permanente de 0,07 mm. Já o sinal de controle apresenta pequena diferença para os dois casos.

O controlador em cascata (CC) quando simulado para o modelo linear e sem perturbação (parâmetros:  $K_p = 1 \times 10^{-9}$ ,  $K_D = 600$  e  $\lambda = 3$ ) apresenta um resultado parecido com o do controlador EE. Quando é incluída a perturbação o controlador em cascata não segue a referência. Se seus ganhos forem aumentados para  $K_D = 5 \times 10^4$  e  $\lambda = 1 \times 10^3$  o sistema volta a seguir a referência mas apresenta um pico inicial no sinal de controle e um erro de posição em regime permanente.

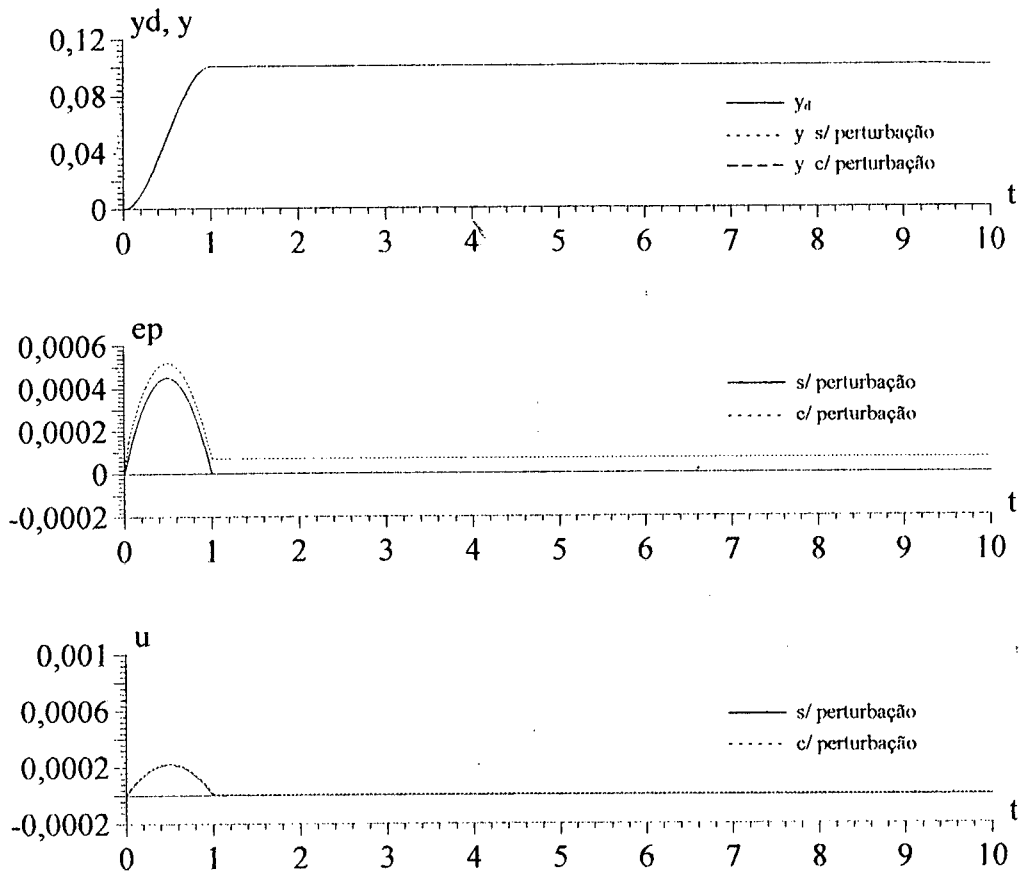


Figura 5.13 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ , erro de posição e sinal de controle para o controlador no espaço de estados, sistema sem perturbação e com perturbação.

Os gráficos de  $y_d(t)$  e  $y(t)$ , erros de posição e sinal de controle para o controlador em cascata sem perturbação e com perturbação, respectivamente, podem ser vistos na Figura 5.14.

Diferentemente do controlador no espaço de estados, para o controlador CC o erro de posição é um valor constante. Para o caso sem perturbação o erro de posição é nulo. Para o caso com perturbação existe um erro em regime permanente de 0,06 mm e o sinal de controle apresenta um pico inicial elevado, porém dentro do valor máximo permitido.

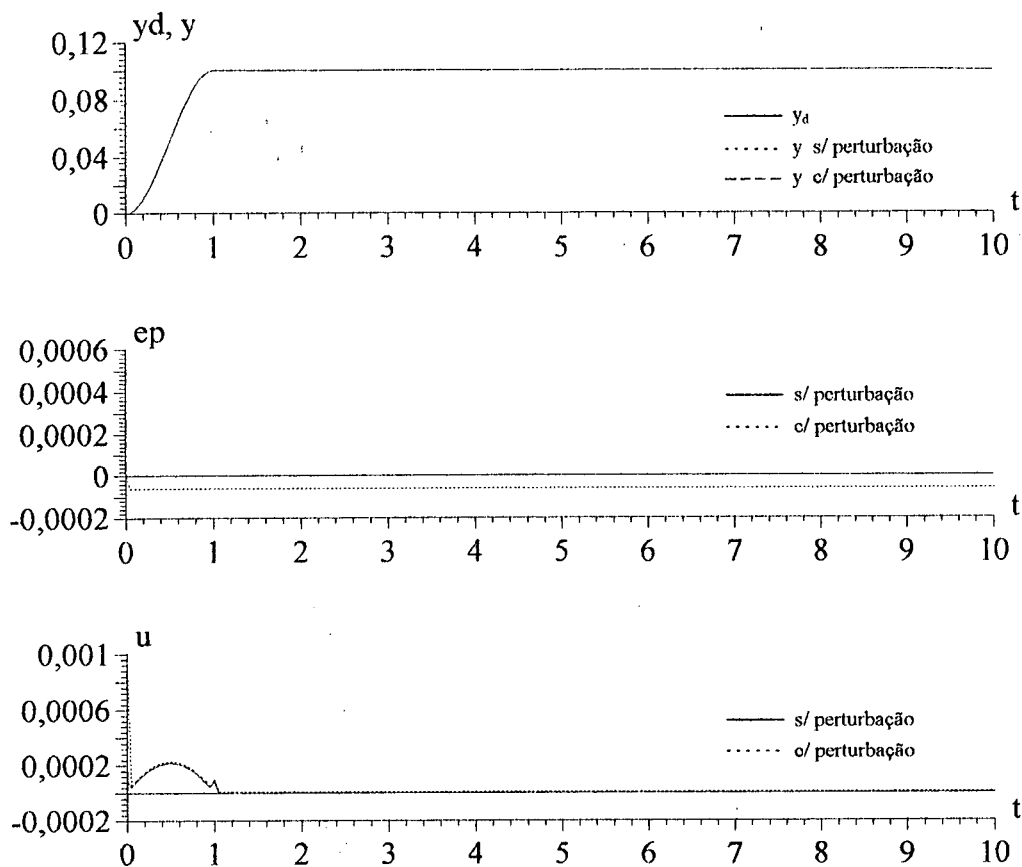


Figura 5.14 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ , erro de posição e sinal de controle para o controlador em cascata, sistema sem perturbação e com perturbação

Para o modelo não-linear os resultados obtidos são semelhantes aos do modelo linear tanto para o sistema sem perturbação como para o sistema com perturbação.

Como pode ser visto através das Figuras 5.13 e 5.14, a vantagem principal do controlador em cascata sobre o controlador no espaço de estados é que ele apresenta menor erro de posição, tanto para o caso sem perturbação como para o caso com perturbação. O elevado pico inicial que aparece no sinal de controle do controlador em cascata, para o caso com perturbação, não diminui sua vantagem sobre o controlador no espaço de estados pois este pico está dentro do limite permitido.

### 5.4.2 Posição Desejada Senoidal

Para a posição desejada senoidal tanto o controlador no espaço de estados quanto o controlador em cascata precisam ter seus ganhos modificados para continuarem estáveis.

O controlador no espaço de estados precisa ter seus pólos de malha fechada trazidos de -1000 para -100 a fim de manter a estabilidade. Esta mudança nos pólos de malha fechada faz com que a matriz de ganho de realimentação seja modificada para  $K = [2,4586 \times 10^{-2} \quad -6,8619 \times 10^{-4} \quad 5,8058 \times 10^{-11}]$ . Os resultados da simulação com o modelo linear e sem perturbação para o controlador EE com os ganhos descritos acima são mostrados na Figura 5.15.

O controlador em cascata precisa ter seus ganhos diminuídos para  $K_p = 1 \times 10^{-10}$ ,  $K_D = 2 \times 10^4$  e  $\lambda = 200$  para manter a estabilidade. A Figura 5.16 mostra os resultados da simulação com o modelo linear e sem perturbação para o controlador CC com os ganhos dados acima.

Como pode ser visto na Figura 5.15, o controlador EE apresenta erro de posição de forma senoidal tanto para o caso sem perturbação como para o caso com perturbação.

O controlador em CC, mostrado na Figura 5.16, apresenta erro nulo para o caso sem perturbação e um erro em regime permanente de 0,745 mm para o caso com perturbação.



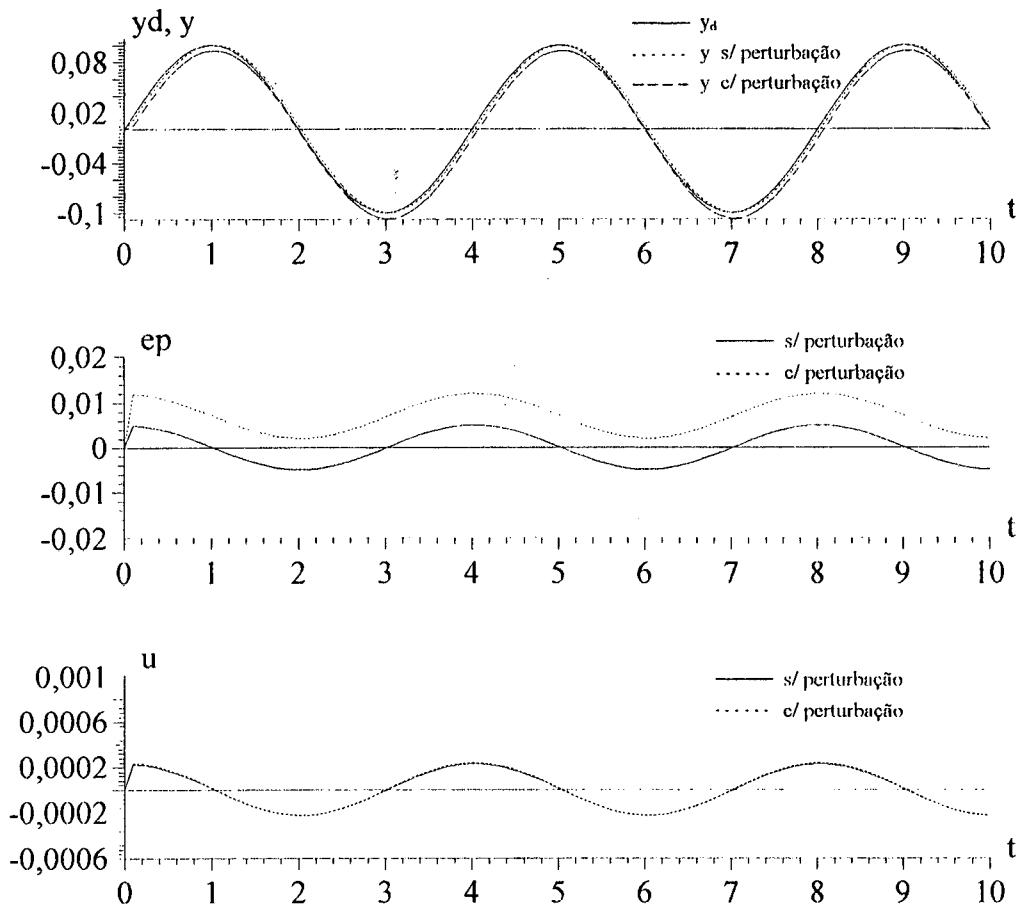


Figura 5.15 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ , erro de posição e sinal de controle para o controlador no espaço de estados, sistema sem perturbação e com perturbação

Da mesma forma que para a posição desejada polinomial, o controlador em cascata leva vantagem sobre o controlador no espaço de estados pois apresenta menor erro de posição.

Para as demais simulações realizadas os resultados se mostraram semelhantes tanto para o controlador no espaço de estados quanto para o controlador em cascata.

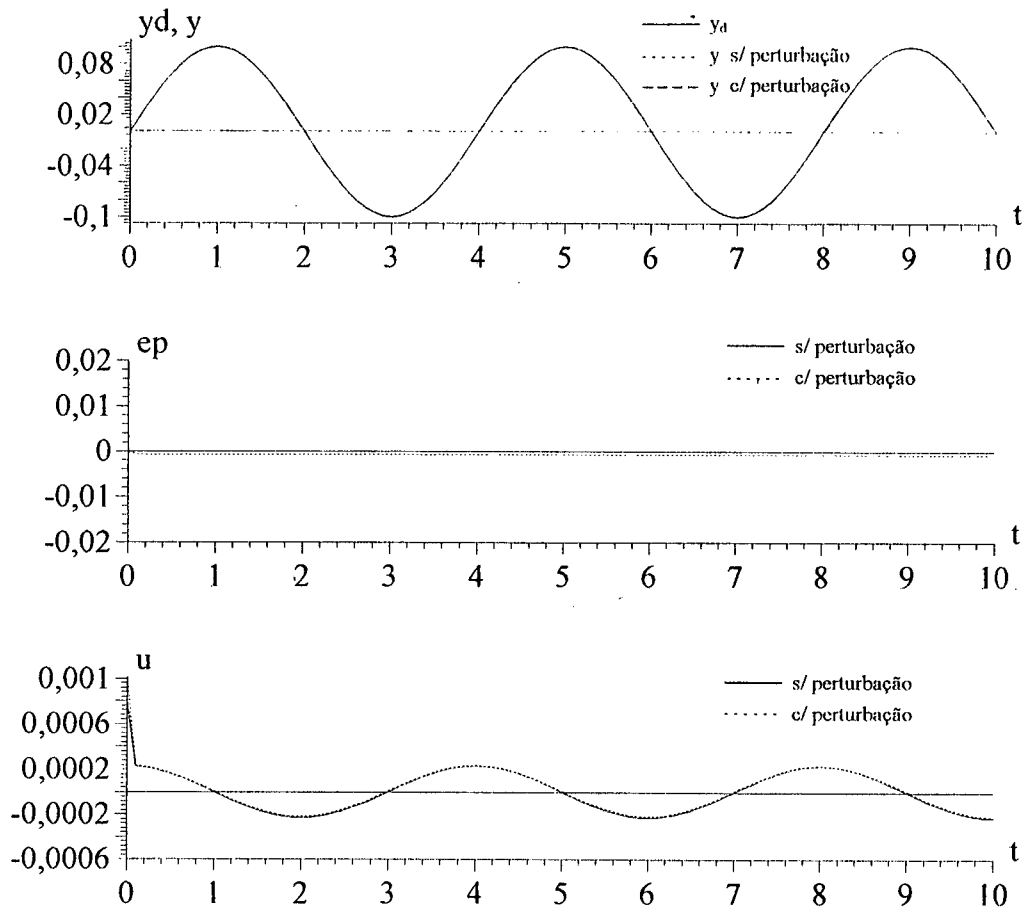


Figura 5.16 - Gráficos de  $y_d$  e  $y$ , erro de posição e sinal de controle para o controlador em cascata, sistema sem perturbação e com perturbação

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES

Ao longo deste trabalho foi apresentada a modelagem matemática para o atuador hidráulico, bem como o projeto dos controladores clássicos, de realimentação de saída e no espaço de estados, e controlador em cascata. Foram realizadas simulações com os modelos descritos no Capítulo 2 utilizando os controladores projetados nos Capítulos 3 e 4.

Levando-se em conta os resultados das simulações realizadas, descritas no Capítulo 5, pode-se destacar que o atuador hidráulico em estudo se comporta de forma similar para o modelos linear e não-linear, confirmando que o modelo linearizado é uma forma eficiente de representação para o modelo não-linear do sistema.

Outro ponto a ser destacado é que o fato do pistão estar centralizado em relação ao cilindro não influencia no comportamento do sistema. Já a inclusão, ou não, da perturbação altera o valor máximo do erro de posição, a presença de erro em regime permanente e o esforço de controle. Para o sistema com perturbação, os erros de posição são um pouco maiores e surge o aparecimento de erros em regime permanente que não ocorriam para o sistema sem perturbação.

Quanto ao desempenho dos controladores estudados cabe ressaltar que os controladores clássicos de realimentação de saída quando comparados com os controladores

no espaço de estados e em cascata apresentam erros de posição muito grandes, independentemente da posição desejada. Os controladores P, PD, PI, PID, em avanço e em atraso de fase apresentam erros máximos de posição variando na casa dos centímetros enquanto que para os controladores no espaço de estados e em cascata este erro varia na casa dos milímetros. Os erros para os controladores clássicos são grandes pois seus ganhos são limitados a valores pequenos devido à presença de pólos complexos conjugados pouco amortecidos no sistema.

Dentre os controladores convencionais estudados, o controlador no espaço de estados é o que apresenta os melhores resultados em termos de erro de posição. Este controlador apresenta um desempenho muito melhor se comparado com os outros controladores clássicos mas deixa a desejar quando comparado com o controlador em cascata pois apresenta um erro de posição máximo maior do que o deste último em todas as situações simuladas. O preço é a necessidade do conhecimento do estado.

O controlador em cascata apresenta resultados melhores que o controlador no espaço de estados para ambas as trajetórias desejadas. Para as simulações sem perturbação este controlador apresenta erro nulo e para as simulações com perturbação o erro é limitado a um valor muito pequeno. Este melhor desempenho do controlador em cascata se deve ao fato de que seus ganhos podem ser elevados até que os requisitos de desempenho sejam alcançados, o que não acontece para os controladores clássicos.

O controlador em cascata apresenta picos elevados no início do sinal de controle para o caso do sistema com perturbação isto no entanto não atrapalha o seu melhor

desempenho sobre o controlador no espaço de estados pois estes picos estão dentro do valor máximo permitido para o sinal de controle.

Pesquisas futuras incluem a implementação prática da estratégia de controle em cascata associada com procedimentos de projetos mais elaborados tais como técnicas de controle robusto e adaptativo aplicadas aos componentes hidráulicos e mecânicos.

## APÊNDICE

### CÁLCULO DO GANHO DE VAZÃO DA SERVOVÁLVULA

O cálculo do ganho de vazão da servoválvula é apresentado aqui através de 2 diferentes métodos de cálculo.

#### Método 1

Os parâmetros  $K_q$  e  $K_c$  dependem do diâmetro da servoválvula, como pode ser visto nas equações abaixo

$$K_q = C_d \pi d \sqrt{\frac{P_s}{\rho}} \quad (1)$$

$$K_c = \frac{d \pi^2 r_c^2}{32 \mu} \quad (2)$$

Como o valor do coeficiente de vazão-pressão  $K_c$  é dado do problema padrão, pode-se calcular o valor do ganho de vazão  $K_q$  isolando o diâmetro do carretel na equação (2) do parâmetro  $K_c$  e substituindo o resultado na equação (1) do parâmetro  $K_q$ .

Substituindo  $K_c = 2,4 \times 10^{-12}$  e isolando  $d$  na equação (2) tem-se

$$d = 4,22 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (3)$$

Obtido o valor do diâmetro do carretel, basta substituí-lo na equação (2) para obter-se o valor do ganho de vazão, o que resulta em

$$K_q = 0,74 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (4)$$

### Método 2

Outra forma de obter o valor do parâmetro  $K_q$  é utilizar o parâmetro  $K_p$  (sensibilidade à pressão) que relaciona o coeficiente de vazão-pressão com o ganho de vazão. Dado o valor de  $K_p$  e conhecido o valor de  $K_c$  calcula-se o valor de  $K_q$ .

Alguns autores, tais como Merritt (1967) e Stringer (1976) sugerem que seja adotado um valor de  $K_p = 3 \times 10^{11} \text{ N/m}^3$  quando não se dispõem do valor de  $K_c$ . No presente caso dispõem-se do valor de  $K_c$  e o dado acima será utilizado para a determinação do valor de  $K_q$ .

Sabendo que (Merritt, 1967)

$$K_p = \frac{K_q}{K_c} \quad (5)$$

e conhecendo-se o valor de  $K_c$ , calcula-se diretamente o valor de  $K_q$ :

$$K_q = 0,72 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (6)$$

Os valores obtidos para o ganho de vazão através dos métodos descritos são muito próximos. Será adotado o valor médio  $K_q = 0,73 \text{ m}^2/\text{s}$  para fins de projeto e simulações.

A partir dos valores de  $K_q$  e a máxima vazão que a servoválvula do exemplo suporta ( $Q_{L,\text{máx}} = 8,66 \times 10^{-4}$ ) pode-se calcular o máximo curso da servoválvula:

$$u_m = \frac{Q_{L,\text{máx}}}{K_q} \quad (7)$$

ou seja,

$$u_m = 1,2 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (8)$$

Este valor de curso máximo da servoválvula representa o máximo sinal de controle que o sistema suporta.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BLACKBURN, J. F.; REETHOF, G.; SHEARER, J. L. **Fluid Power Control**. The M.I.T. Press, Massachusetts, 1960.
- [2] BOLTON, W. **Engenharia de Controle**. São Paulo: Makron Books Editora Ltda., 1995.
- [3] BURTON, T. D. **Introduction To Dynamics Systems Analysis**. McGraw-Hill, Inc., 1994.
- [4] CRAIG, J. J. **Introduction to Robotics: Mechanics and Control**. Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1986.
- [5] D'AZZO, J. J.; HOUPIS, C. H. **Análise e Projeto de Sistemas de Controle Lineares**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Guanabara S.A., 1981.
- [6] DAVIDSON, E. J.; Benchmark Problems for Control System Design. **IFAC Theory Committee Report**, p.30, 1990.
- [7] De NEGRI, V. J. **Modelagem de Servomecanismos Hidráulicos e Simulação de um Servomecanismo Mecânico-Hidráulico**. Florianópolis, 1987. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Santa Catarina.
- [8] De PIERI, E. R.; GUENTHER, R.; PAIM, C. C. Robust Control Applied to Hydraulic Robot Manipulators. **XI Congreso Chileno de Ingeniería Electrica**, Punta Arenas, Chile, 1995, pp. D014 - D019
- [9] De SILVA, C. W. **Control Sensors and Actuators**. New Jersey: Prentice-Hall, 1989.
- [10] FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. **Feedback Control of Dynamic Systems**. Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1994.
- [11] GUENTHER, R.; De PIERI, E.R. Cascade Control of Hydraulic Actuators for Robot Manipulators. **Ninth Workshop on Dynamics and Control**. Rio de Janeiro, Aug., pp 18-19, 1996.
- [12] GUENTHER, R.; De PIERI, E. R. ; PAIM, C. C. and CUNHA, M. A. B. Controle em Cascata de um Atuador Hidráulico. **IV ELAF - Encontro Latino-Americano de Fluidomecânica**, Itajubá, 1997 - aceito.
- [13] HEINTZE, J.; SCHOTHORST, G. v.; WEIDEN, A. J. J. v. d.; TEERHUIS, P. C. Modeling and Control of an Industrial Hydraulic Rotary Vane Actuator. **Proceedings of the IEEE - 32nd Conference on Decision and Control**, San Antonio, Texas, p. 1913-1918, Dec. 1993.

- [14] KUO, B. C. **Sistemas de Controle Automático**. 4. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1985.
- [15] LUKA'NOV, A.G.; UTKIN, V.I. Methods of Reducing Equations for Dynamic Systems to a Regular Form. *Avtomatika i Telemekhanika*, n.4, p. 5-13, Apr. 1981.
- [16] **Manual de Hidráulica Básica 935100-BR**. 7. ed. Sperry Rand. Corp., 1981.
- [17] MERRIT, H.E. **Hydraulic Control Systems**. New York. John Wiley & Sons, Inc., 1967.
- [18] MOOG INC. CONTROLS DIVISION. Catalog 301882. New York.
- [19] NOBLE, B., DANIEL, J.W. **Applied Linear Algebra**. Prentice-Hall, Inc Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1977.
- [20] PALMIERE, A.C. **Manual de Hidráulica Básica**. 7. ed. Porto Alegre. Racine-Albarus Hidráulica, 1989.
- [21] OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 2. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1993.
- [22] SIMNON FOR WINDOWS, Version 1.02, SSPA Systems. **Users Manual**. Göteborg, Sweden, Oct. 1993.
- [23] SLOTINE, J.J.E.; LI, W. On the Adaptive Control of Robot Manipulators. *Int. J. Robotics Research*, v.6, n.3. p. 49-59, 1987.
- [24] SLOTINE, J. J.E. and LI, W. **Applied Nonlinear Control**. Prentice-Hall Inc., 1991.
- [25] STRINGER, J. **Hydraulic Systems Analysis, an Introduction**. London: MacMillan Press Ltd, 1976.
- [26] UTKIN, V.I. Discontinuous Control Systems: State of Art in Theory and Applications. **Preprints IFAC 10th World Congress on Automatic Control**, Munich, v1. P. 75-94, 1987.
- [27] VILENIUS, M.J. Application of Sensitivity Analysis to Electrohydraulic Position Control Servos. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 105, p. 77-82, Jun. 1983.
- [28] WATTON, J. **Fluid Power Systems**, Prentice Hall, Cambridge, England, 1989.
- [29] YUN, J.S.; CHO, H.S. Application of an Adaptive Model Following Control Technique to a Hydraulic Servo System Subjected to Unknown Disturbances. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 113, p. 479-486, Sept. 1991.