CLÁUDIA REGINA FLORES BOLDA

GEOMETRIA E VISUALIZAÇÃO:

Desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração

Mestrado em Educação:
Educação e Ciência

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

FLORIANÓPOLIS

1997

CLÁUDIA REGINA FLORES BOLDA

Geometria e Visualização:

Desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal de Santa Catarina como exigência parcial para a obtenção do título de mestre em Educação - área Educação e Ciência, sob a orientação da Profª Drª REGINA FLEMMING DAMM.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

FLORIANÓPOLIS

1997

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO

"GEOMETRIA E VISUALIZAÇÃO".

Dissertação submetida ao Colegiado do Curso de Mestrado em Educação do Centro de Ciências da Educação em cumprimento parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação.

APROVADO PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 10/11/97

Dra. Regina Fleming Damm (Orientadora) Regina F. Damm

Dra. Silvia Dias Alcântara Machado (Examinadora) Silvia D. A. Machado

Dr. Méricles Thadeu Moretti (examinador) Moretti

Dr. Arno Blass (suplente) Arno Blass

Cláudia Regina Flores Bolda
Cláudia Regina Flores Bolda

Florianópolis, Santa Catarina, agosto de 1997.

Ao Leonardo, meu filho, que a cada dia me ensina que a vida pode ser vista de muitas maneiras.

AGRADECIMENTOS

A elaboração desta dissertação teve participações especiais as quais agradeço neste momento:

- a REGINA FLEMMING DAMM, por seus numerosos conselhos, sua amizade e toda a ajuda que me deu. Agradeço pela dedicação especial, orientação paciente e competente em todos os momentos deste trabalho.

- a Monsieur RAYMOND DUVAL, por sua disponibilidade e que através de seu brilhante conhecimento soube ter paciência e sabedoria de um mestre contribuindo com valiosas observações, sugestões e críticas pertinentes a este trabalho. Ao senhor eu gostaria de exprimir meus profundos agradecimentos;

- a minha MÃE, que desde a criação do projeto o qual gerou esta dissertação, esteve sempre disposta a ler meus escritos, corrigindo-os e dando novas idéias. A senhora meu especial agradecimento por ter me ensinado a lutar por tudo que se acredita;

- ao ELTON, companheiro de todos os momentos, por sua compreensão e apoio, contribuindo a seu modo e tornando esta caminhada mais especial;

- aos alunos que que tão gentilmente me receberam e permitiram a aplicação prática deste trabalho, assim como, às escolas que possibilitaram esta aplicação;

- ao Professor Méricles Thadeu MORETTI, por sua disponibilidade, gentileza e sugestões para a realização da análise de dados que se encontram neste trabalho;

- ao Professor Naôraldo COELHO, por sua ajuda e sugestões na editoração deste trabalho, além de poder contar sempre com seu apoio;

- ao Professor Arno Blass por sua leitura paciente de todo trabalho, sugestões e correções.

- a todos que de uma forma ou de outra auxiliaram na realização desta dissertação, meu muito obrigado.

SUMÁRIO

RESUMO

A presente dissertação aborda o papel heurístico das figuras na resolução de problemas, a fim de levantar aspectos ligados à visualização. Realiza-se um estudo sobre a organização perceptiva das figuras tendo-se, como referencial teórico, os princípios da organização da percepção estabelecidos pela Psicologia da Gestalt. A partir desta premissa e junto à teoria das apreensões de R. Duval, opera-se um tratamento puramente figural de reconfiguração pela análise de problemas que envolvem cálculo de áreas. Contudo, tal análise fica envolta por diferentes fatores que interferem na visibilidade e na aplicação desta operação figural.

Esta discussão é fruto da aplicação de uma seqüência didática desenvolvida junto a três turmas de alunos de 5ª série do 1º grau, nos anos letivos de 1996 e 1997, numa média de 12 aulas por turma. Servindo-se daqueles fatores, propuseram-se diferentes problemas que envolvessem o uso de figuras para chegar à solução pela operação de reconfiguração.

A realização desta seqüência didática nos deu condições para mostrar, a propósito de uma aprendizagem da operação de reconfiguração, a necessidade de levar em conta a importância e a complexidade das habilidades visuais na aprendizagem da Matemática.

RÉSUMÉ

Cette dissertation a pour but d'aborder le rôle heuristique des figures dans la résolution de problèmes, afin d'y faire déterminer les aspects qui sont en rapport avec la visualisation. On fait une étude portant sur l'organisation perceptive des figures et qui a pour référentiel théorique les principes de l'organisation de la perception établis par la Psychologie de la Gestalt. A partir de cette prémisse-là et avec la théorie des appréhensions de R. DUVAL, il se produit, au moyen d'une analyse de problèmes qui impliquent le calcul d'aires, un traitement purement figuratif de la reconfiguration. Cependant, telle analyse se trouve entourée de différents facteurs qui vont influer sur la visibilité et sur l'application de cette opération-là.

Ce débat est le fruit de l'application d'une séquence didactique développée auprès de trois classes d'élèves de la 5ème série du 1er degré, pendant les années scolaires de 1996 et 1997. Cela signifie, en moyenne, 12 leçons par classe d'élèves. En se servant de ces facteurs-là, on a proposé de différents problèmes dont la solution demandait l'emploi de figures au moyen d'une opération de reconfiguration.

La réalisation de cette séquence didactique nous a donné des conditions de montrer - à propos de l'apprentissage de l'opération de reconfiguration -, le besoin de prendre en considération l'importance et la complexité des habilités visuelles dans l'apprentissage de la Mathémathique.

INTRODUÇÃO

No ensino da geometria se reconhece que as figuras são um suporte intuitivo e que desempenham um papel heurístico. Mas a intuição heurística que traz uma figura levanta percepções distintas e envolve outros tantos fatores que podem auxiliar ou dificultar este papel heurístico.

Muito mais importante do que esta função heurística das figuras é realizar estudos que tragam à tona procedimentos cognitivos que permitam às figuras realmente desempenharem este papel.

A visualização de uma figura não ocorre num simples olhar. Ela é muito mais complexa, pois todo objeto visível pode não só ter diferentes maneiras de ser descrito, mas de ser visto.

A organização perceptiva que possibilita a identificação e a associação deste objeto com algo significativo vai depender das leis gestálticas da percepção. Contudo, estas leis não bastam para explicar o porquê de nossos alunos verem ou não, imediatamente, numa figura, um caminho heurístico que possa conduzir à solução de um problema. É preciso identificar as diferentes operações puramente figurais, que estão associadas a tratamentos matemáticos pertinentes, para, então, analisar o poder heurístico da figura e definir as possibilidades de uma aprendizagem de leitura de figuras.

A busca de uma aquisição de tratamentos figurais, conduzindo nossos alunos a um caminho heurístico na resolução de problemas e, levando-os a adquirir um crescimento em suas habilidades visuais, se faz o ponto primordial desta pesquisa.

As figuras geométricas constituem um registro semiótico de representação, que lidam com tratamentos específicos. Para analisar o funcionamento das figuras, R. Duval distinguiu diferentes apreensões de uma mesma figura. Este trabalho de dissertação deter-se-á sobre a "apreensão operatória" das figuras, pois é esta apreensão que permite às figuras desempenharem seu papel heurístico.

Esta apreensão se faz em função de modificações que podem ser realizadas na figura. Há várias famílias de operações de modificações figurais. O estudo de uma, entre tantas, particularmente tomou nossa atenção: a operação de reconfiguração.

A escolha desta operação se deu porquanto, historicamente, esta foi a primeira operação figural a ser mobilizada, permitindo a resolução de problemas de cálculos de áreas. Além disso, um trabalho desenvolvido a partir desta operação nos permite ver que esta modificação funciona sobre configurações perceptivamente bastante diferentes, sendo imediatamente mais visível em alguns problemas do que em outros.

Tarefa importante a ser realizada é a determinação de fatores que interferem na visibilidade e na aplicação desta operação figural. Esta determinação é essencial por dois aspectos:

1) permite uma exploração sistemática de todas as configurações possíveis;

2) permite uma análise do poder heurístico de uma figura para um problema bem determinado.

Para encaminhar esta pesquisa fez-se necessária a realização dos seguintes procedimentos:

- Buscar respostas às seguintes questões:
    - *como uma figura é organizada perceptivamente?*
    - *como uma figura adquire um estatuto de figura geométrica?*

- como uma figura pode funcionar de maneira heurística?

- por que, nem sempre, uma figura tem um papel heurístico?

- Desenvolver uma seqüência didática com alunos de 5ª série de 1º grau, a fim de colher dados para uma análise da aquisição de tratamentos puramente figurais. Esta seqüência é desenvolvida com exercícios que envolvem problemas com figuras que permitem a realização da operação de reconfiguração, sendo que estas figuras são escolhidas com base nos fatores que foram determinados anteriormente.

Mas estes encaminhamentos só são uma análise inicial para conduzir aquilo que é essencial nesta pesquisa: mostrar, a propósito de uma aprendizagem da operação de reconfiguração, a necessidade de levar em conta a importância e a complexidade, tanto cognitiva como semiótica, dos tratamentos figurais na aprendizagem da Matemática.

CAPÍTULO I

DEFINDO O PROBLEMA

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem a finalidade de resgatar o uso de figuras geométricas, valorizando o papel intuitivo que elas oferecem, a fim de desenvolver no aluno hábitos heurísticos.

Para alcançar esta finalidade, uma seqüência de atividades será desenvolvida, em que figuras são analisadas quanto a sua produtividade heurística. Desta forma, procuraremos encontrar e classificar variáveis que auxiliam ou que inibem a resolução de um exercício de geometria, tendo como procedimento o tratamento figural.

A utilização de uma figura, ou seja, o auxílio de uma figura na compreensão de um problema dado e na resolução deste, exige muito mais que ler o enunciado do problema e olhar a figura para chegar à solução. É por isto que nossa pesquisa se apóia nos estudos realizados sobre a Percepção e sobre a Psicologia da Gestalt e, além disso, nos estudos realizados por R. Duval, a respeito das várias apreensões que uma mesma figura oferece.

Contudo, o que pretendemos explorar aqui nesta pesquisa é basicamente o papel heurístico[1] de uma figura na resolução de um problema de geometria, donde fatores ligados às leis gestálticas e ao próprio funcionamento da figura poderão ser explicitados e analisados, sendo desta forma o nosso objeto de estudo.

---

[1] Heurístico é entendido aqui como o conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas, pelo qual, eventualmente complementado com os procedimentos didáticos do professor, tenta-se levar o aluno a descobrir por si mesmo a verdade.

Entendemos que tal pesquisa só poderá ser realizada a partir da observação e da análise do comportamento do aluno diante de cada exercício dado contendo uma figura. Pretendemos analisar, a partir desta observação, como as variáveis que interferem na visualização de um tratamento puramente figural possibilita a compreensão e a solução do problema proposto.

Acreditamos ainda que, ao valorizar as figuras no ensino de geometria, oferecendo ao aluno a oportunidade de buscar e encontrar na própria figura a solução do problema dado, teremos alunos com uma maior competência heurística.

Neste primeiro capítulo buscamos uma delimitação para as questões que eventualmente queremos responder a fim de dar conta daquilo que é o objetivo mais amplo de nosso trabalho: **a visualização**[2].

---

[2] Visualização neste trabalho se refere à habilidade de representar, transformar, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre informação visual.

1.1 GEOMETRIA : DA ANTIGUIDADE AO ENSINO E APRENDIZAGEM

É comumente admitido que a geometria deve ter iniciado provavelmente na antiguidade, a partir de origens muito modestas.

Ao fazer a história dos egípcios, Heródoto - historiador grego - refere-se às origens da geometria, no seu livro II (Euterpe), do seguinte modo:

> *"Disseram-me que este rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido a sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra. Eu creio que foi daí que nasceu a Geometria e que depois ela passou aos gregos"* (*Apud* CARAÇA, p. 3).

De fato, as primeiras considerações que o homem fez a respeito da geometria, parecem ter se originado de simples observações que surgem da capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar formas e tamanhos. O próprio fato de ter-se tido a necessidade de delimitar a terra levou à noção de figuras geométricas simples, tais como retângulos, quadrados e triângulos.

Por terem sido, estas figuras elementares, fruto de uma geometria de observação ou melhor, como foi caracterizada, "geometria do subconsciente", é que elas foram consideradas não só pelo seu valor prático, utilitário, ou por seu valor estético, mas também pelo seu papel heurístico. Poderíamos, aqui, ilustrar esta questão com as muitas demonstrações do Teorema de Pitágoras, mas vamos ressaltar uma delas, por se tratar de uma demonstração unicamente representada no registro figural : a demonstração hindu[3] do teorema de Pitágoras, que é representada pela figura seguinte:

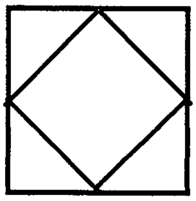


FIG.1- *Figura Hindu*

Este é um belo exemplo de demonstração, o qual se justifica apenas através do registro figurativo, sem qualquer apelo ao registro discursivo. Naturalmente transformações são feitas na figura: translações, rotações e simetrias, que servem para justificar matematicamente os reagrupamentos operados nela. Sendo assim, o importante nesta atividade de demonstração é reconhecer aquilo que a figura oferece, ou seja, é o papel heurístico da figura que está sendo levado em consideração.

A geometria é, então, considerada como um instrumento para compreender, descrever e interagir com o espaço no qual vivemos, mas cresceu gradualmente até alcançar a dimensão enorme que tem hoje, podendo assim, também ser considerada como parte da Matemática, a mais intuitiva, concreta e ligada à realidade. Mas não é só isso que comporta a ela, para Weeler (1981, p. 352),

> ... *"melhor do que o estudo do espaço, a geometria é a investigação do "espaço intelectual" já que, embora comece com a visão, ela caminha em direção ao pensamento, vai do que pode ser percebido para o que pode ser concebido."* (*Apud* MACHADO, 1995, p. 53).

Desta forma, pode-se destacar dois aspectos principais do ensino e aprendizagem da geometria: *a visão da geometria como ciência do espaço e a visão da geometria como uma estrutura lógica.*

---

[3] No capítulo III faremos uma maior análise desta demonstração.

A geometria, enquanto ciência do espaço é, muitas vezes, desenvolvida nas quatro séries iniciais da escola, trabalhando-se mais a observação e a representação. Por outro lado, para as séries mais avançadas é reservado o ensino da geometria enquanto estrutura lógica, raciocínio e sistematização do conhecimento geométrico. Porém, há um consenso de que estes dois aspectos estão ligados, pois alguns níveis apreendidos na geometria do espaço são essenciais à aprendizagem da geometria enquanto estrutura lógica.

Mas, se encararmos a geometria como a ciência do espaço em geral, muitas questões surgem, e de imediato, nesta pesquisa a respeito da visualização.

Esta questão nos remete a pensar de que forma a visualização, considerada como uma habilidade, pode ser desenvolvida, a fim de que auxilie no processo ensino-aprendizagem da geometria. E, é claro, será este o fio condutor de nossa pesquisa.

1.2 A REAL SITUAÇÃO DO ENSINO DA GEOMETRIA

A geometria foi considerada, durante séculos, como indispensável à formação intelectual dos indivíduos e ao desenvolvimento da capacidade de hábitos de raciocínios. Desde a antiguidade, desempenha um papel fundamental na conquista de conhecimentos artísticos, científicos e matemáticos, pela grande importância das imagens e sobretudo das figuras. Estas não eram consideradas só pelo seu valor prático, utilitário, ou por seu valor estético, mas também pelo seu papel heurístico.

Nos últimos tempos, no Brasil, verificou-se um abandono do ensino da geometria, cujas conseqüências vêm se constituindo numa preocupação para os educadores matemáticos. Afinal, a ausência do ensino de geometria pode estar prejudicando a formação dos alunos, por privá-los da possibilidade do desenvolvimento integral dos processos de pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos.

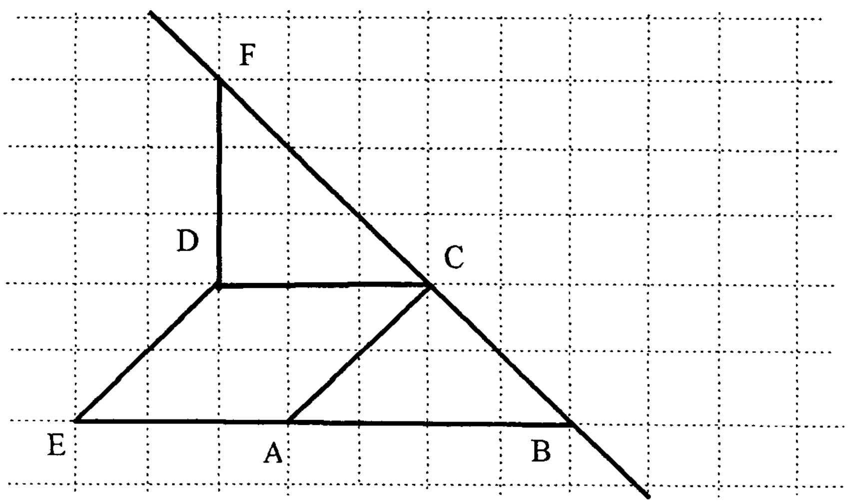
Um projeto de pesquisa está sendo desenvolvido no Brasil, em cooperação com a França, visando levantar questões relativas ao ensino da Matemática de 1º e 2º graus. Este projeto, que tem como título "Programa de Pesquisa sobre o Ensino da Matemática", envolve professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, bem como, professores de algumas universidades da França, estabelecendo-se um verdadeiro intercâmbio de estudos ligados ao ensino da Matemática.

Um dos objetivos deste projeto é o ensino de geometria. A primeira etapa, dentro deste objetivo, é detectar a real situação do ensino de geometria. Para isto, um questionário foi aplicado a 392 alunos em 18 classes. Também, foram realizadas entrevistas com professores a fim de encontrar justificativas para os resultados obtidos neste questionário. Este questionário foi organizado de maneira que os alunos pudessem ser confrontados com alguns tipos de atividades. Estas atividades foram planejadas em função de dois critérios: que os conhecimentos mobilizados dêem relevância a noções matemáticas comuns e elementares, e que os conhecimentos implicados pelas questões dêem relevância a competências heurísticas gerais, cuja aquisição parece indispensável para a formação dos alunos.

Então, o que se pedia no questionário era, na verdade, distinguir formas sobre uma figura e encontrar algumas relações entre elas. Desta maneira as questões não exigiam conhecimentos particulares ou especializados, e sim, questões habituais, sobre assuntos previstos no programa oficial de matemática do 1º e 2º graus.

Um dos problemas proposto neste questionário é o seguinte:

"Observe bem o desenho abaixo:



Complete cada frase escolhendo na lista seguinte a palavra que mais convém: ***quadrado, cubo, retângulo, trapézio, paralelogramo, paralelas, perpendiculares, triângulo.***

a) A figura ACDE é um ....

b) As retas DC e EB são ....

c) As retas FD e DC são ....

d) A figura DCBE é um .... "

Esta foi a primeira questão proposta no questionário, com o interesse de proporcionar aos alunos um aquecimento e esperando uma taxa de acerto de 90%, já que consistia apenas numa simples atividade de identificação de algumas figuras planas. Mas, que ingenuidade a nossa!

Como esta atividade de identificação de figuras planas elementares se faz num nível de simples reconhecimento perceptivo ou de discriminação de propriedades características, é evidente que o erro de um único item coloca em dúvida o valor de acerto, isoladamente, dos demais itens.

Isto é claro, pois reconhecer um trapézio e não reconhecer um parelogramo não pode significar a aquisição de um conhecimento matemático. De um ponto de vista cognitivo, a identificação de uma figura implica na sua discriminação em relação a outras figuras e o seu reconhecimento em contextos variados.

Desta forma, parece razoável considerar como aceitável, para esta questão, apenas o acerto aos quatro itens. Neste sentido, somente 149 alunos do 1º ano do 2º grau, ou seja um pouco mais que a terça parte da amostragem testada, significando uma taxa de 38%, estão em condições de identificar figuras planas.

Um outro problema[4] proposto neste questionário aos alunos, e que exigia apenas a utilização da figura para resolvê-lo, é o seguinte :

---

[4] Este problema, juntamente com a figura, foi retirado da tese de Ana MESQUITA, 1989, p. 39, para ser utilizado neste questionário que o projeto se propôs realizar.

"Na figura, AI é a diagonal do retângulo ASIE.

Comparar as áreas dos dois retângulos hachurados OURS e LUNE.

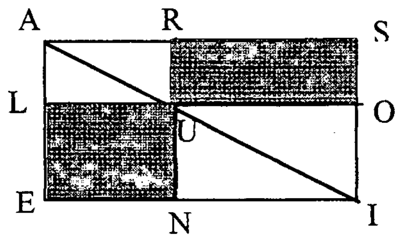
Assinale a resposta correta :

( ) OURS tem a maior área

( ) As duas áreas são iguais

( ) LUNE tem a maior área

Justifique sua resposta: "



Os resultados obtidos foram :

OURS =LUNE	OURS > LUNE	LUNE > OURS	ausência de resposta
212 (54%)	35 (9%)	57 (15%)	88 (22%)

Com estes resultados, constatou-se que a maioria dos alunos que optaram pela alternativa "OURS = LUNE", justificaram esta igualdade de áreas fazendo apenas uma operação de recorte de um dos dois pedaços obtidos, recobrindo o outro pedaço. Nas palavras de um aluno : *"o retângulo LUNE se dividido certo pode formar o OURS e vice-versa".*

Este procedimento adotado pelos alunos é previlegiado pelo fato de que a relação dos lados dos triângulos AIE e AIS, obtidos a partir da diagonal AI, estão relacionados com a metade ou o dobro do retângulo considerado, LUNE ou OURS. Porém, este não é uma procedimento interessante, mostrando apenas a pouca produtividade que a figura tem para o nosso aluno.

Os únicos procedimentos de resolução interessantes deste problema são aqueles que encontram sub-figuras na figura inicial, e utilizam estas sub-figuras sem recorte, movimentando-as, a fim de encontrar a solução do problema a partir da visualização desta figura como um todo. Isto, sim, mostraria a competência heurística do aluno diante do problema proposto.

Numa análise geral dos resultados obtidos de todas as questões propostas no questionário, verificou-se haver um predomínio da ausência de respostas (mais de 50%) sobre as respostas dadas (corretas ou erradas). Este predomínio pode indicar que parte da geometria não é ensinada nestas classes, ou talvez ensinada de forma inadequada, já que o que se revela não é tanto a ausência dos conhecimentos que são julgados indispensáveis num currículo de matemática, mas, sim, a não aquisição do sentido destes conhecimentos.

A segunda etapa do projeto diz respeito à formação de professores. Desta forma se faz necessário repensarmos o papel da geometria nos currículos atuais e então pesquisarmos meios que possam resgatá-la de forma adequada para a formação do futuro cidadão.

1.3 O REGISTRO FIGURATIVO: OBJETO DE AUXÍLIO, MAS TAMBÉM DE ESTUDO

Na nossa realidade escolar, o ensino de geometria não tem sido considerado como um forte aliado para o desenvolvimento das noções espaciais, tão pouco para o desenvolvimento das estruturas lógicas do pensamento. Em geral, em nossas escolas, o ensino de geometria fica limitado ao aprendizado de nomes de figuras, fórmulas, notações e, raramente, algumas demonstrações .

MESQUITA, (1989, p. 3), focaliza a geometria da seguinte maneira:

> *"A geometria é um domínio da matemática no qual fazemos permanentemente um apelo a três registros:*
>
> *- registro figurativo, ligado ao sistema perceptivo visual, com leis de organização próprias a este sistema;*
>
> *- registro da língua natural, com possibilidades de descrição e de explicação do estatuto dos enunciados;*
>
> *- registro da língua simbólica, com possibilidades próprias de escrita e de recurso a fórmulas."*

Mas o professor, que de alguma forma procura ensinar a geometria, não tem muito interesse em oferecer ao seu aluno a possibilidade de raciocinar nos vários registros[5], talvez por ele mesmo desconhecer estes vários registros que envolvem a geometria. Na maior parte, trabalha-se somente no registro da língua natural ou no registro da linguagem simbólica, não se dando o devido valor ao registro figurativo.

---

[5] Registro aqui é usado para designar os diferentes sistemas semióticos que podem ser utilizados para apresentar uma informação ou para objetivar uma representação mental. Assim, toda troca de registro compreende uma reorganização completa da forma como um conhecimento é apresentado ou objetivado num registro; ou seja, não são os mesmos aspectos que aparecem e que devem ser levados em consideração.

Porém, as informações retiradas de um registro figurativo nos permitem apreender com mais facilidade a situação do que o simples enunciado, possibilitando-nos analisar a situação em conjunto, explorar diferentes aspectos e até antecipar o resultado de um problema geométrico.

É neste sentido que POLYA, 1994, p. 83 a 55, em seu livro *"A Arte de resolver problemas"*, chama a atenção para a utilização de figuras na resolução de problemas, considerando-as não como objetos sem "vida" e, sim, como importante auxílio para problemas de todos os tipos. Isto ele explica porque:

- **uma figura pode estar na nossa imaginação ou pode ser desenhada**; dependendo da situação, é mais fácil imaginá-la, mas se tivermos que examinar muitos detalhes, é preferivel desenhá-la;

- **as figuras planas são fáceis de desenhar**, podem ser construídas cuidadosamente a mão livre e com rapidez;

- **podemos tratar, separar e recombinar todos os detalhes oferecidos no problema com o uso de uma figura**; através da figura é muito mais fácil analisar todos os detalhes oferecidos pelo problema, uma vez que é muito mais difícil imaginar todos os detalhes simultaneamente.

Mesmo sendo as figuras consideradas como um auxílio, poucos são os professores que buscam em seus alunos, e de modo consciente, a capacidade de representar. Em sua maioria, aqueles que utilizam alguma representação em geometria na resolução de problemas (as figuras geométricas por exemplo), consideram natural para o aluno a visualização espacial e mais, a visualização da solução do problema naquela figura.

Bem, as figuras planas nos são particularmente familiares e os problemas de Geometria Plana, especialmente acessíveis; contudo, analisar a situação e encontrar a solução do problema, nem sempre é percebido pelos alunos.

Para compreender claramente o problema não basta olhar simplesmente uma figura; é preciso considerar cada parte, cada dado da figura, olhá-los separadamente, em seguida reunir o que convém, considerando-o como um todo, procurando ver simultaneamente as várias conexões exigidas no problema. Quer dizer, a exploração visual de uma figura exige muito mais do que a identificação de sub-figuras que parecem ser impostas imediatamente ao primeiro olhar, é preciso focalizar o olhar sobre outros dados que não são vistos imediatamente.

Na verdade uma figura geométrica pode ser interpretada de várias maneiras, e a percepção intervém na construção de uma destas interpretações, principalmente quando o leitor (da figura) não dispõe de outros conhecimentos que lhe permitam ultrapassar esta primeira leitura perceptiva da figura. Assim, pode-se mostrar que os aspectos perceptivos da figura podem favorecer ou, ao contrário, dificultar a leitura geométrica de uma figura pelos alunos (Duval, 1988).

O papel da percepção deveria então ser analisado, no ensino de geometria;

> *"é preciso, pois, distinguir ao lado da percepção pura e essencialmente receptiva, tal como a que resulta de uma centralização dada, uma "atividade perceptiva" que começa com as mudanças de centralização (ou descentralização) e que consiste em comparações, transposições, antecipações, etc."* (PIAGET & INHELDER, 1993, p. 31).

Isto introduz, naturalmente, a idéia que a apreensão de uma figura geométrica não pode ser pura e simplesmente uma apreensão perceptiva. De fato, a utilização de uma figura em geometria envolve três outras apreensões diferentes, cada uma reorganizando, de uma maneira específica, a gestalt percebida: **a**

apreensão discursiva, a apreensão seqüencial e a apreensão operatória (DUVAL, 1994).

Assim, o papel das figuras no ensino de geometria, bem como o funcionamento de uma figura geométrica, deve ser motivo de atenção e de estudo, pois, na realidade, para muitos alunos, a figura assume um papel insignificante nas resoluções matemáticas, elas não têm funcionado como uma ferramenta heurística.

1.4 AS PESQUISAS DESENVOLVIDAS SOBRE O REGISTRO FIGURAL

No ensino de geometria se reconhece que as figuras têm um suporte intuitivo e desempenham um papel heurístico. Mas a intuição heurística que dá uma figura geométrica depende de percepções distintas, as quais são motivos para estudos e pesquisas, no sentido de que *"pode-se melhor aprender a ler uma figura como pode-se aprender a ler um texto, ou mais sutilmente uma radiografia".* (Mesquita, 1989. p.168).

Dentro desta perspectiva, destacamos, basicamente, duas pesquisas:

Ana Maria JORGE LOBO DE MESQUITA, 1989 - O aspecto central de seu trabalho está destinado à importância dos aspectos figurativos e a sua influência nos comportamentos heurísticos e argumentativos dos alunos. Trabalha com a geometria ligada a três registros: figurativo, linguagem natural e linguagem simbólica, os quais, às vezes interagem ou se opõem. Propõe uma seqüência de atividades a alunos, em que ocorre a confrontação destes registros, por um lado, e, por outro a pregnância do registro figurativo. Conclui que a maneira como o aluno resolve o exercício está ligada a fatores tais como: o tipo de questão, a existência ou não de obstáculos heurísticos, o tipo de apreensão que a figura exige, o estatuto da figura. Diz mais, que a forma de discurso pode ser mais fácil se algumas destas características, o obstáculo heurístico por exemplo, não estiverem presentes.

Tudo isto nos sugere que uma continuidade destes estudos se faz necessária, principalmente quanto à produtividade heurística desempenhada por uma figura, a qual exige muito mais que o esforço perceptivo do aluno.

Virginia PADILLA SANCHEZ,1992 - Revalorizou o uso das figuras no ensino de Geometria, mostrando, em sua pesquisa, a importância de uma aprendizagem dos diferentes tratamentos figurais que dão às figuras o seu papel heurístico. Tal aprendizagem fica envolta num estudo sobre os fatores que influenciam a visibilidade de uma operação figural (a reconfiguração).

A visualização em sua pesquisa, é considerada como fundamental para a cognição humana, além de ser uma questão de muita complexidade e que deveria ser mais bem estudada. Conforme suas palavras,

> *"Existem diferentes pesquisas que experimentam fazer utilizar as possibilidades heurísticas do registro figural. Elas insistem na importância da " visualização " - Mas elas não apresentam análises precisas sobre a especificidade dos diferentes tratamentos figurais subjacentes à "visualização" e sobre os fatores que, ou os favorecem ou os inibem, segundo as situações"* (PADILLA, 1992, p. 42).

Existe mesmo uma concordância entre os educadores matemáticos e pesquisadores de que a visualização é importante porque ela amplia uma visão intuitiva e global e a compreensão de muitas áreas da Matemática.

Como a geometria inclui muitos elementos visuais, muito tem sido escrito e realizado em teoria e pesquisas sobre a interrelação entre a visualização e a aprendizagem da geometria. Mas, poucos são os estudos que consideram a visualização como uma habilidade que pode ser desenvolvida, e ainda, o quê ou quais atividades conduziriam a um tal desenvolvimento.

1.5 ENTENDENDO MELHOR O PROBLEMA

A partir dos resultados encontrados com a realização do projeto "Programa de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática", numa parceria com CAPES/ COFECUB, envolvendo Brasil e França, podemos confirmar o pouco caso que é dado ao ensino de geometria em nossas escolas.

Os problemas que foram propostos aos alunos, e principalmente aqueles que podiam ter solução utilizando-se unicamente os dados que a figura oferece, mostrou que, para nossos alunos, e alunos de 2º grau, a figura assume um papel insignificante nas resoluções matemáticas, ou seja, ela não tem funcionado como uma ferramenta heurística. Na verdade, para eles, as figuras não passam de objetos "mortos", os quais nada realmente podem contribuir na resolução de problemas. Mas é necessário, então, fazer algo, tornar "vivas" estas imagens que decorrem de um texto, para que elas assim estimulem o aluno, e este por sua vez consiga chegar à resolução do problema dado.

Na realidade, precisamos é tomar consciência da importância do papel da figura no ensino da geometria, e além disso entender que o registro figurativo levanta muitas outras questões, que não só o aspecto perceptivo. Nas palavras de Duval (1994)

> *"Há, de fato, um tratamento figural heurístico que é independente das atividades de construção e que independente de toda atividade de raciocínio, sem o que o recurso ao registro das figuras seria somente uma astúcia para apresentar o desenvolvimento de um raciocínio sob uma forma supostamente mais imediatamente acessível. Ora, o tratamento figural se revela pouco evidente e muito difícil para enganar muitos alunos. "Vê-se ou não vê-se", como dizem, em um tom*

debochado, os alunos que se saem bem e, em um tom resignado, aqueles que não se saem bem." (DUVAL, 1994, p. 136).

Existem pesquisas que têm valorizado o registro figurativo em geometria, trazendo contribuições para o ensino, e principalmente abrindo caminhos e mostrando que utilizar uma figura exige muito mais que uma simples olhada, a olhada panorâmica, e que ao contrário, exige, sim, uma aprendizagem de leitura da figura. Mas elas não têm direcionado seus esforços e nem se aprofundado para a questão da visualização, e em particular como a própria PADILLA SANCHEZ diz:

"O que chamamos de visualização, e cujo papel é fundamental para a cognição humana, não é uma questão constante e evidente. É sobretudo uma questão de tratamento, cuja complexidade escondida deve ser descrita" (PADILLA SANCHEZ, 1992, p. 189).

Virginia Padilla Sanchez, que em sua tese evidenciou a importância de uma aquisição de tratamentos puramente figurais para a aprendizagem de cálculo de áreas de figuras planas, diz ainda que

*"É preciso também, e este ponto é essencial, empreender estudos mais precisos para determinar a influência de cada um dos fatores de visibilidade e de complexidade que nós distinguimos" (*PADILLA SANCHEZ, 1992, p. 189).

Neste sentido, como professores e como pesquisadores, buscamos encontrar atividades que auxiliem o efetivo amadurecimento destas questões, levando-se em consideração a possibilidade de um desenvolvimento das habilidades visuais, através de uma aprendizagem efetiva de leitura de figuras geométricas.

O objetivo desta pesquisa é, então, desenvolver uma seqüência didática, em que serão trabalhadas atividades de geometria elementar que podem ser resolvidas através de figuras geométricas. Estas figuras serão escolhidas de maneira que ofereçam uma variabilidade de fatores que auxiliem ou que inibam a resolução do problema dado, além de possibilitarem que a figura seja modificada de várias maneiras.

Porém é bom esclarecer que **a finalidade desta seqüência *não é trabalhar um conhecimento matemático específico*, como unidades de medidas, perímetro ou cálculo de área, mas *através de um conhecimento matemático levar o aluno a adquirir uma capacidade de visualização.***

Contudo, surgem algumas indagações a respeito da utilização de uma figura, que, aliás, são problemas paradoxais do ensino de geometria elementar.

Uma delas é que utilizamos figuras como um objeto de ajuda para compreender melhor a linguagem empregada no enunciado de um problema dado, mas isto se faz com a idéia de que basta olhar simplesmente para a figura e, assim, encontrar a solução do problema. Neste caso a figura é considerada como sendo um dado intuitivo que se basta por ela mesma.

Outra é que, permanecer na primeira olhada de uma figura impede, muitas vezes, que focalizemos nossa atenção em outras partes dela, tornando-nos incapazes de discernir elementos de solução possíveis para o problema dado.

Mas a verdade é que a grande maioria dos alunos tem dificuldade em utilizar figuras como um auxílio na resolução de problemas, principalmente no sentido de olhá-las com uma maior profundidade, ou seja, com um olhar matemático.

Além disso, existe uma outra questão que envolve a utilização de figuras na resolução de problemas, e esta pode ser colocada da seguinte maneira: <u>mesmo sabendo que as figuras auxiliam na resolução de um problema, porque, às vezes, elas não têm realmente desempenhado este papel?</u>

Para resolver todas estas indagações é preciso responder três tipos de questões:

1) quais são as operações específicas ao registro das figuras e que permitem às figuras ser uma ajuda heurística?

2) porque as figuras não funcionam sempre como uma ajuda heurística?

3) a organização de seqüências didáticas permitem aos alunos compreender o funcionamento das figuras não só em uma dada situação matemática, mas em situações matemáticas diferentes?

1.6 TENTANDO RESOLVER NOSSO PROBLEMA

A fim de responder as questões levantadas anteriormente e buscar soluções para nosso problema, nós nos apoiamos em nosso referencial teório, bem como na própria relação teoria/prática. Esta relação será possível, uma vez que este trabalho de pesquisa tem por objetivo o desenvolvimento de uma seqüência didática.

A resposta para a primeira questão, nós vamos buscar na Psicologia da Gestalt e na Teoria das Apreensões de DUVAL, sobretudo na apreensão operatória.

Para a questão dois, buscamos auxílio nos trabalhos de tese de Ana Maria Jorge Lobo de MESQUITA e Virgínia Padilla SANCHEZ. Reservando-se, aqui, o direito ao pesquisador de analisar junto aos seus alunos as causas desta problemática.

Este trabalho, se apoiando no estudo das respostas das questões um e dois, irá se concentrar na questão três. Então, proporemos tarefas a alunos sobre algumas situações matemáticas variando as figuras colocando e os fatores que facilitam ou que inibem o tratamento puramente figural.

Surge, então, nossa hipótese:

Um trabalho que leva em conta os diferentes fatores que influenciam na visibilidade de tratamentos puramente figurais deve capacitar os alunos a utilizar heuristicamente as figuras dentro de diferentes situações matemáticas. E, ainda, auxiliá-los a melhor compreender a matemática com o auxílio das figuras.

CAPÍTULO II

O FUNCIONAMENTO DE UMA FIGURA GEOMÉTRICA

INTRODUÇÃO

É comum ressaltar o papel intuitivo ou heurístico que as figuras têm na representação geométrica. Vários são os motivos que nos levam a crer que as figuras são, de fato, um auxílio na resolução de problemas. Mesmo sendo as figuras consideradas como um objeto de auxílio, porque, às vezes, elas não passam de objetos "mortos" sem nada contribuir ao nosso aluno na solução de um problema?

Porque a abordagem exclusivamente psicológica da percepção das figuras, aquela imediata, não dá condições ao aluno de olhar a figura num nível mais profundo, com um olhar matemático.

Isto introduz, naturalmente, a idéia de que a apreensão de uma figura geométrica não pode ser pura e simplesmente uma apreensão perceptiva. De fato, Duval, 1988, distinguiu três outras formas, autônomas, de interpretação para uma mesma figura: **a apreensão operatória, a apreensão discursiva e a apreensão seqüêncial.**

A exploração visual de uma figura exige muito mais que a percepção isolada de formas elementares, como um traço, um quadrado ou um círculo. É preciso focalizar o olhar sobre outros dados que não são impostos imediatamente ao olhar, se apoiar na correspondência entre a visão de uma seqüência de sub-figuras pertinentes e a organização do discurso, possibilitando uma real exploração heurística da figura.

Então, neste capítulo, pretendemos analisar **como uma figura pode funcionar de maneira heurística** e **como analisá-la em relação às suas possibilidades heurísticas**.

Além disso, fatores ligados à produtividade heurística da figura interferem na visibilidade de um tratamento puramente figural. Assim, outra tarefa é responder **porque nem sempre uma figura tem um papel heurístico**.

Todas estas questões nos confirmam que "ver" sobre uma figura requer um aprendizado. Mesmo porque, quando vemos alguma coisa, algum objeto físico, pode-se não somente ter diferentes maneiras de dizer o que vemos, mas, este objeto pode, também, ser visto de diferentes maneiras, ser visto diversamente. (AUSTIN, 1971, p. 125 e 126).

O fato é que, dado um objeto, este pode ser organizado, perceptivamente, de muitas maneiras. Portanto, é necessário também, um estudo que possibilite à compreensão de **como acontece a organização perceptiva das figuras.**

Através deste estudo poderemos notar que a leitura de uma figura geométrica não advém de uma atividade matemática. Os tratamentos figurais parecem levantar leis de organização da percepcão visual, as quais merecem uma análise semiótica[6] concernente à determinação de unidades de base que constituem o registro figural, a possibilidade de articulação destas unidades na figura e, ainda, a modificação de uma figura inicial numa outra figura para fins heurísticos.

[6] Semântica relativa ao estudo das relações entre sinais e símbolos, e daquilo que eles representam.

2.1- A ORGANIZAÇÃO PERCEPTIVA DAS FIGURAS

A teoria da Gestalt[7] é, por um lado, uma filosofia e, por outro, uma psicologia. De um lado ela introduz as noções de forma ou de estrutura na interpretação do mundo físico, assim como do mundo biológico e mental. Por outro, ela aplica estas mesmas noções no domínio especial da psicologia, em problemas precisos e concretos. Ela é dedicada, sobretudo, ao estudo da percepção, da aprendizagem e solução de problemas, vendo estes elementos como algo determinado pela realidade do campo visto como um todo.

O que nos interessa, aqui neste trabalho, é a investigação dos fatores perceptivos e intelectuais que têm intervenção nas situações de organização[8] da percepção visual, ou melhor, dos princípios que regem os modos como os olhos percebem os objetos no espaço. De fato, encontramos estes fatores nos trabalhos com que a Escola Gestaltiana renovou os estudos sobre a percepção e sobre o pensamento.

Os princípios da organização da percepção

Uma figura é uma organização de elementos[9]*, de um campo perceptivo não homogêneo, que constitui um todo que se destaca do conjunto deste campo.*

O fato de podermos distinguir uma figura depende da existência de um contorno[10] que separa a figura de um fundo.

---

[7] A palavra Gestalt é traduzida como "configuração" ou "forma", porém é preciso entender que estas palavras não expressam o sentido verdadeiro que os fundadores da teoria quiseram dar-lhe. Neste sentido, é bom deixar claro que não é que um objeto **tenha** uma forma, mas que ele **é** uma forma, e mais, a palavra Gestalt não é somente aplicada a configurações geométricas, ela também é sinônimo de estrutura, organização.

[8] O termo "organização" é usado tanto para designar o processo de organizar o padrão de estímulo quanto para indicar o resultado desse processo, isto é, o percepto específico que se obtém.

[9] Estes elementos podem ser pontos, traços ou zonas. Os pontos e os traços caracterizam-se respectivamente, por seu aspecto discreto ou contínuo. As zonas caracterizam-se por sua forma, ou seja, seu contorno.

[10] O contorno tem a função de dar à figura a forma distintiva. Ele é percebido como "pertencente" à figura, e não ao fundo. Neste trabalho, o contorno desempenha um papel importante por apresentar a característica de mutabilidade, quer dizer, na inversão figura-fundo, o contorno passa de uma figura para outra, e a aparência deste se transforma acentuadamente. É esta característica que, às vezes,

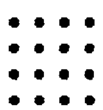
Quando olhamos para as partes de um campo diferenciado, o contorno divide o estímulo no olho em duas regiões. A forma de ambas as regiões não pode ser simultaneamente observada: só uma ou outra será vista. O lado cuja forma é visível, ou seja, que se salienta do resto, é chamado de figura.

Como a maioria das percepções é de padrões complexos de estímulos e não de figuras únicas em fundos homogêneos, a análise do agrupamento perceptual, ou seja, a organização perceptual de uma figura, é parte importante neste nosso estudo.

Todos os padrões de estímulos podem provocar um número muito grande de organizações perceptuais. Os estímulos são organizados a fim de satisfazerem ao critério da boa figura[11].

A Psicologia da Gestalt apresentou certo número de importantes "princípios da organização perceptual", baseados no estudo experimental da natureza organizada da percepção, e que foram demonstrados com desenhos de pontos e linhas semelhantes, conforme apresentamos a seguir:

Agrupamento por proximidade: *elementos próximos no tempo e no espaço tendem a ser percebidos juntos.*

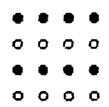


---

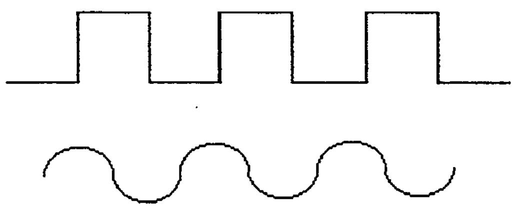
faz com que a reunião de partes seja difícil, tal como ocorre com as peças de um quebra-cabeças de armar, que parecem muito diferentes e não são facilmente encaixadas, embora tenham contornos iguais.
Para saber mais sobre a funcionabilidade do contorno de uma figura, leia KRECH e CRUTCHFIELD, 1971, p. 102 e103.

[11] "Boa figura" é aquela que tende a ser mais contínua, mais simétrica, mais fechada, mais unificada.Porém, o que pode ser uma boa figura para um indivíduo, pode não ser para outro. E isto pode refletir o importante papel da aprendizagem e da experiência passada, na gênese da boa figura.

Agrupamento por semelhança: *elementos que tenham características em comum, quer dizer, maior semelhança, seja pela cor, tamanho,etc., tendem a se agrupar.*



Agrupamento por boa continuidade: *a tendência dos elementos para acompanhar outros, de maneira a permitir a continuidade de uma linha, de uma curva, de um movimento, numa direção já estabelecida.*



Agrupamento por fechamento*: a tendência dos elementos de se agrupar de maneira a constituir uma figura total mais fechada ou mais completa.*

Agrupamento por simetria: *a preferência pelo agrupamento que leve a todos simétricos ou equilibrados, e não a todos assimétricos.*

A série seguinte de figuras[12] ilustra como estes princípios interferem na visualização de figuras que utilizamos em geometria.

---

[12] Estas figuras foram retiradas do artigo de Duval, p. 123, 1994.

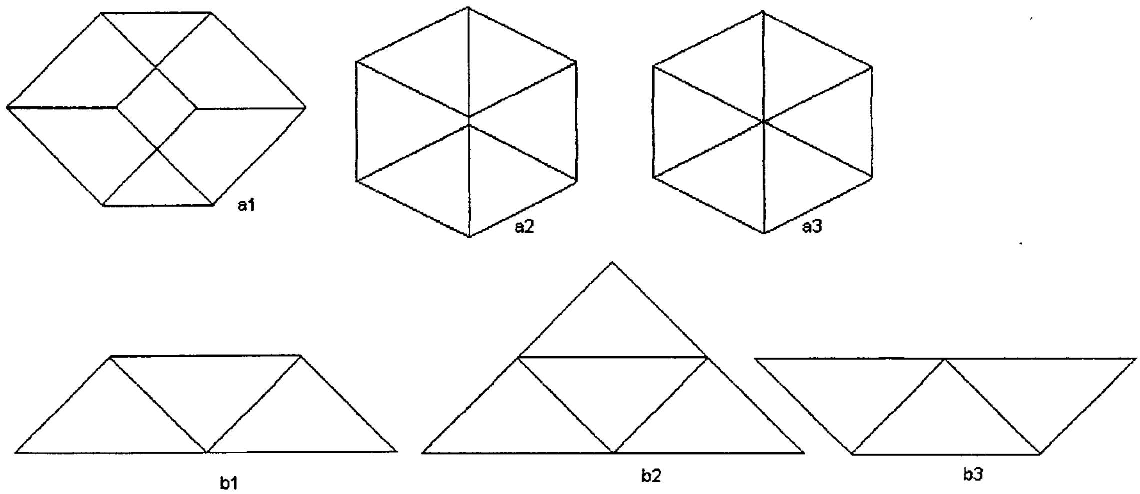


FIG. 2 - *A série das figuras de a1-a3 ilustra o papel da lei de simetria na organização de uma forma em 2D ou em 3D. Quanto mais simétrica é a figura, mais difícil será a identificação desta em 3D.*

A série das figuras b1-b3 ilustra o papel da lei de fechamento e a importância do contorno na identificação de uma forma. Basta notar como é mais difícil identificar b2 do que b1 na figura b3, principalmente se elas não são vistas em conjunto e não podem ser comparadas.

Estes princípios, que determinam o estabelecimento da organização perceptual, conduzem à formação de todos constituídos de partes.

Segundo GUILLAUME, 1937:

> *"A figura se destaca do fundo indiferenciado que a envolve, mas ela possui também uma organização interior. Esta pode ser extremamente simples, um círculo de cor homogênea e diferente daquela do fundo não tem verdadeiras partes distintas. Quando a figura é mais complicada, ela fica uma unidade, um todo, mas um todo articulado, composto de partes ou membros que são unidades secundárias, tendo, mesmo numa percepção global, não analítica, uma existência psicológica real; são*

fragmentos divididos arbitrariamente, mas sua existência e seus limites naturais são dados como aqueles do todo e com eles" (GUILLAUME,1937, p.67).

Esses todos e essas partes possuem qualidades perceptuais, de maneira que, *"as propriedades de um todo não podem ser consideradas apenas como uma soma das propriedades separadas"* (KRECH e CRUTCHFIELD, 1971, p. 108). E ainda, *"as propriedades dos todos dependem, até certo ponto, da natureza de seus elementos constituintes, também as propriedades das partes dependem da natureza do todo"* (Idem, p. 108).

Tudo isto explica a tendência que temos, ao olhar uma figura, de identificar ou reconhecer imediatamente uma forma em 2D ou 3D, seja no espaço ou no plano, pois este reconhecimento imediato se faz em função das leis gestálticas de organização da percepção.

Trata-se da apreensão imediata e espontânea, a **apreensão perceptiva.**

Esta forma de apreensão está ligada diretamente às leis gestálticas da organização da percepção e, em particular, às figuras geométricas, a lei de fechamento e continuidade. *"Esta lei de fechamento e de continuidade tem grande importância nas figuras que habitualmente são apresentadas aos alunos. Por um lado ela provoca uma certa resistência ao esquecimento da forma que aparece em favor dos traços organizados em uma forma percebida (ou somente de alguns traços); por outro, ela exclui outras reorganizações menos simples e impede assim ver outras formas"* (Duval, 1988, p. 59).

Assim, ao considerarmos as figuras geométricas na resolução de problemas, não basta esta apreensão imediata, pois esta depende somente das constatações vistas de uma forma mais geral, panorâmica, o que não permite levar em conta os diferentes funcionamentos da figura. Para que realmente a figura desempenhe o seu papel heurístico é preciso olhá-la com um olhar mais profundo.

2.2- FIGURA GEOMÉTRICA: como uma figura adquire um estatuto de figura geométrica.

Uma figura adquire um estatuto de figura geométrica quando:

1°) é olhada em relação a uma denominação (seja um...) ou em relação a uma hipótese (as retas são paralelas...).

Neste caso trata-se de uma **apreensão discursiva**.

Segundo Duval, 1994, a apreensão discursiva de uma figura "*corresponde a uma explicitação de outras propriedades matemáticas de uma figura como aquelas indicadas pela legenda ou pelas hipóteses*" (DUVAL, 1994, p. 124).

Na verdade, as propriedades matemáticas que garantem às figuras o seu estatuto de figura geométrica estão explicitadas, de alguma forma, no enunciado do problema e não vistas simplesmente na figura. Assim, a figura é olhada a partir daquilo que é dado no enunciado.

Isto supõe uma subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva, pois uma mesma figura do ponto de vista perceptivo pode ser uma figura geométrica diferente se as hipóteses dadas no enunciado forem modificadas.

2°) é construída a partir das ordens de construção.

Trata-se da **apreensão seqüencial.**

Numa tarefa de construção as figuras possuem uma certa autonomia em relação ao discurso, quer dizer, aquilo que é dito no enunciado, as hipóteses, não tem interferência nesta atividade, tornando a figura de certa forma independente.

A função da apreensão seqüencial de uma figura é, portanto, de reprodução da figura e, neste caso, a apreensão perceptiva funciona apenas como um controle, um termômetro, para determinar se a construção da figura é coerente.

Mas a atividade de construção de uma figura impõe certas limitações que são próprias a cada figura e que só mudam em função do instrumento utilizado, tais como a régua ou o compasso... . Estas limitações não são sempre contornáveis por aproximações sucessivas de um traçado, mas isto não modifica radicalmente a figura, nem impede a realização da construção da mesma. E, mesmo que a figura seja uma figura inexata, segundo Polya 1994, p. 84, "*não haverá nenhum perigo se nos concentrarmos nas conexões lógicas e percebermos que a figura é um objeto de auxílio...*".

2.3- O PAPEL HEURÍSTICO DE UMA FIGURA GEOMÉTRICA: como uma figura pode funcionar de maneira heurística.

O papel intuitivo e heurístico que as figuras têm na representação geométrica é uma opinião comumente admitida. As figuras *"permitem analisar uma situação em conjunto, são um meio mais direto para explorar os diferentes aspectos, antecipar os resultados e selecionar uma solução para o problema"* (Duval, 1994, p. 121).

De fato, as figuras representam um auxílio na resolução de problemas. Mas, para a maioria de nossos alunos elas não tem cumprido este papel. Confunde-se a percepção de formas elementares isoladas como um traço, um quadrado ou um círculo com a percepção de figuras que ilustram situações geométricas e que, por sua vez, são combinações destas formas elementares. Isto porque se trabalha com as figuras somente numa abordagem exclusivamente psicológica da percepção, aquela imediata, a qual não dá condições ao aluno de olhar a figura num nível mais profundo, com um olhar matemático.

É preciso, portanto, focalizar o olhar sobre outros dados que não são impostos imediatamente ao olhar, é preciso se apoiar na correspondência entre a visão de uma seqüência de sub-figuras pertinentes e a organização do discurso, possibilitando uma real exploração heurística da figura.

A percepção das formas elementares dá lugar a um reconhecimento imediato: vê-se imediatamente. Mas, a percepção do conjunto destas formas nos leva a realizar muitas reconfigurações possíveis, de que nem sempre vemos todas, e nem imediatamente.

Trata-se da **apreensão operatória** da figura.

Segundo Duval, 1988, p. 62, esta forma de apreensão "*é centrada sobre as modificações possíveis de uma figura inicial, e em seguida, sobre as reorganizações perceptivas que estas modificações acarretam*". Ela permite dar um sentido dinâmico às características da figura, podendo-se, assim, fazer manipulações, física ou mental, sobre todo ou parte da figura.

Como toda figura pode ser modificada de muitas maneiras, Duval, 1988, distinguiu três grandes tipos de modificação : a modificação merológica, ótica e posicional.

2.3.1- AS MODIFICAÇÕES DE UMA FIGURA

a) Modificação Merológica:

A modificação merológica consiste na divisão de uma figura em partes, para em seguida combiná-las em uma outra figura. É uma modificação que mostra a figura como um todo fracionado, ou seja, "*ela se faz em função da relação entre parte e todo*" (Duval, 1988, p. 62).

Este fracionamento pode ser homogêneo ou heterogêneo.

No caso em que as partes obtidas têm a mesma forma que o todo, o fracionamento é dito *homogêneo*, se não, fala-se de um fracionamento *não-homogêneo* (Duval, 1988, p. 62).

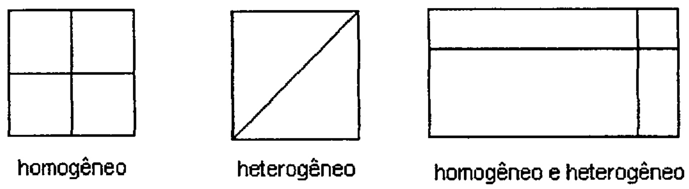


FIG. 3 - *Note que na primeira figura as partes obtidas pelo fracionamento têm a mesma forma que o todo: quadrados. Na segunda figura, têm-se formas diferentes que aquela do todo: triângulos. Já, na terceira figura, podemos notar formas iguais à do todo e formas diferentes: retângulos e quadrado.*

O fracionamento de uma figura, ou o exame desta a partir de suas partes elementares permite a aplicação da operação de reconfiguração intermediária.

Esta operação consiste na complementariedade de formas, ou seja, as partes obtidas pelo fracionamento podem ser reagrupadas em sub-figuras incluídas na figura inicial.

Assim, é esta operação que constitui a produtividade heurística da figura.

A modificação merológica de uma figura não é única[13], além disso, ela pode ser **global** ou **analítica** *"global se ela é centrada sobre a divisão de toda a figura inicial, analítica se é centrada sobre as partes elementares* desta figura" (Mesquita, 1989 a, p.11).

Por estar presente na iniciação do raciocínio geométrico, assim como na ilustração de numerosos tratamentos matemáticos relativos à comparação e ao cálculo de superfícies, este tipo de modificação desempenha um papel importante neste trabalho. É sobre este tipo de modificação que iremos nos apoiar.

b) Modificação Ótica :

Este tipo de modificação consiste em aumentar, diminuir ou deformar uma figura. Ela transforma a figura em outra.

Utiliza-se este tipo de modificação para os problemas relativos à homotetia ou à perspectiva.

c) Modificação Posicional:

Consiste no deslocamento da figura no plano ou no deslocamento do plano em relação ao plano fronto-paralelo. Trata-se, na maior parte das vezes, na realização de translações ou de rotações das figuras em relação aos eixos do campo do qual a figura se destaca

Todas estas modificações apresentam duas características essenciais, as quais Duval, 1994, p. 127, definiu assim:

---

13 Mesquita, 1989 b, mostrou haver, sobre uma mesma figura, caminhos diferentes de modificá-la para chegar à solução do problema.

1) Toda modificação de uma figura dada pode ser realizada sem recorrer a teoremas ou a definições, nem mesmo a técnicas de construção.

2) A modificação de uma figura dada só envolve as leis e os parâmetros que determinam a organização de uma figura. Pois toda figura é essencialmente organizada por muitos elementos, estímulos, traços... E, por um mesmo conjunto de elementos, pode-se ter organizações diferentes, logo figuras visualmente diferentes.

Estas duas características nos mostram a independência da apreensão operatória em relação à apreensão discursiva e seqüencial.

Por outro lado vê-se a proximidade entre a apreensão operatória e a apreensão perceptiva. Mesmo se esta mobilização não se faz nos mesmos níveis de tratamento, pois, num caso, o tratamento é automático, isto é, imediato na escala do controle consciente, no outro, o tratamento consiste em operações efetuadas conscientemente, de maneira tateante, tomando um tempo que pode variar consideravelmente. Contudo, todas as duas mobilizam as mesmas leis e os mesmos parâmetros de organização de elementos de uma figura que permitem reconhecer um objeto em 2D ou em 3D.

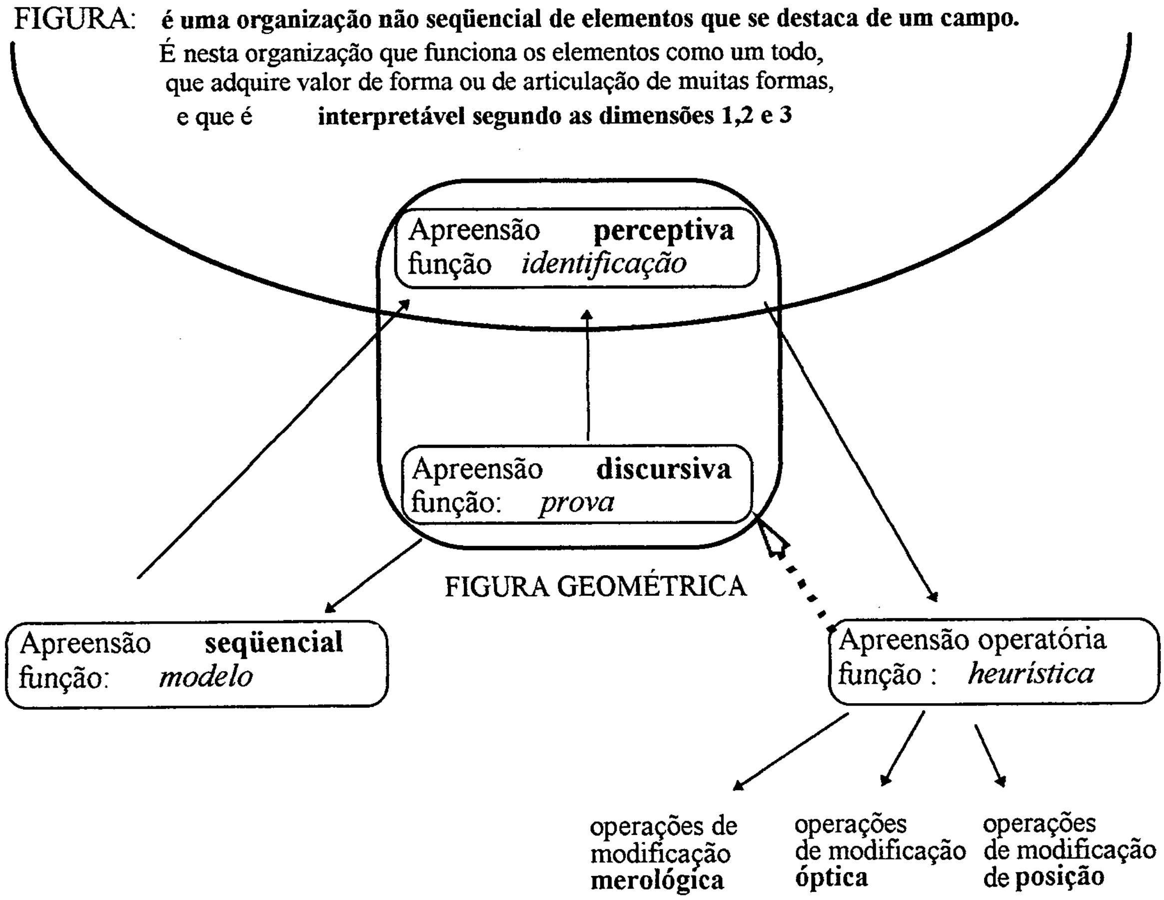
A importância de considerarmos estas modificações em nosso estudo, bem como no processo ensino-aprendizagem, é que ao utilizar uma figura na resolução de problemas, seja ela dada com o problema, ou que deve ser construída a partir do enunciado do problema, *"há geralmente uma das modificações figurais possíveis que mostra a idéia da solução ou da demonstração. É a modificação figural heuristicamente pertinente".*

Isto nos explica como uma figura pode funcionar de maneira heurística.

2.3.2- OS CIRCUITOS DAS APREENSÕES DE UMA FIGURA GEOMÉTRICA.

A complexidade cognitiva da geometria depende muito das figuras que utilizamos na resolução dos problemas (mesmo se elas são vistas mentalmente). Como vimos anteriormente **não há uma, mas quatro apreensões possíveis de uma figura.**

O esquema que vamos apresentar abaixo é um esquema proposto por DUVAL, 1997, e que tem a finalidade de nos mostrar as articulações e os circuitos entre estas quatro apreensões da figura.



Deste esquema podemos observar que nenhuma apreensão funciona isoladamente, mas sim uma em função da outra.

Para a aprendizagem da geometria o importante são as articulações e os circuitos que se podem estabelecer entre estas apreensões, assim sendo, o ensino deveria dar condições de diferenciá-las, bem como proporcionar as seguintes articulações entre elas:

1. a articulação entre apreensão perceptiva e apreensão discursiva
(para ter aquilo que chamamos de figura geométrica)

2. a articulação entre apreensão discursiva e apreensão seqüencial

3. a articulação entre apreensão perceptiva e apreensão operatória
(o que corresponde a visualização, sendo que para visualização não é precisa a mobilização de teoremas ou proposições)

4. a articulação entre apreensão operatória e apreensão discursiva
(esta articulação permite unir a heurística e a prova)

Permanecer sem a aprendizagem destas articulações é permanecer numa aprendizagem de reprodução de passos, de aplicação de conhecimentos somente em contextos particulares e locais, não possibilitando uma verdadeira compreensão da geometria.

Este trabalho se fixa na apreensão operatória por ter ela a função heurística, dando-nos condições de explorar a visualização.

2.4- A EXPLORAÇÃO DE UMA FIGURA GEOMÉTRICA: como analisar uma figura em relação às suas possibilidades heurísticas.

Para analisarmos uma figura geométrica quanto a suas possibilidades heurísticas é preciso entender e determinar as unidades figurais elementares que semioticamente constituem uma figura, bem como as sub-figuras que a compõem. É sobre estas unidades figurais que realizamos tratamentos específicos, ou seja, tratamentos figurais, e sobre elas é que podemos analisar as figuras.

É bem importante não confundirmos unidade figural com sub-figura:

- *unidade figural é cada uma das formas de base nas quais toda figura pode ser analisada;*

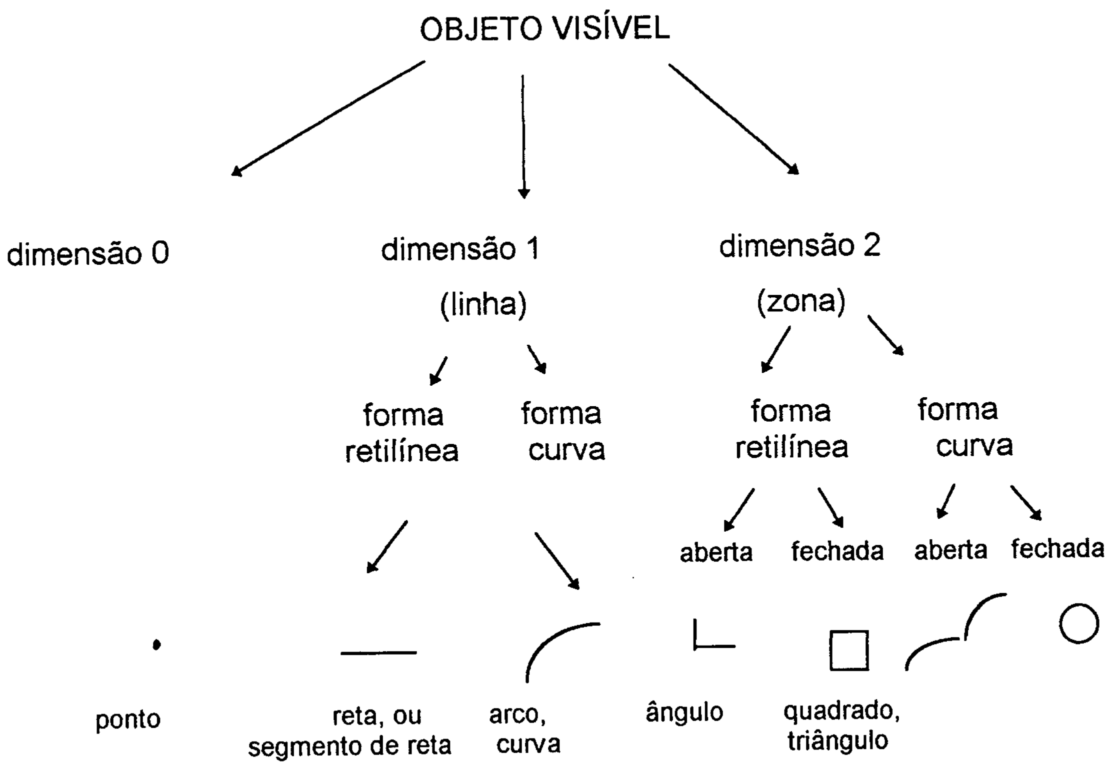
- *sub-figura é o resultado de uma divisão da figura, que depende das necessidades do problema dado. Elas podem constituir uma unidade figural ou uma combinação de unidades figurais.*

As unidades figurais elementares são formas identificáveis que não podem ser decompostas em formas mais simples, a menos que mudemos de dimensão, nem podem ser distinguidas por critérios de tamanho. Baseando-se nestas condições e, a fim de determinar as unidades figurais que, semioticamente, constituem uma figura geométrica, Duval,1995, p. 175, reagrupou nossas variações visuais em dois grandes grupos. O quadro seguinte tem o objetivo de mostrar como ele fez isto:

1º grupo			2º grupo		
Variações ligadas ao número de dimensão			Variações qualitativas		
dimensão zero	dimensão um	dimensão dois	forma	tamanho ou orientação	cor

O cruzamento dos valores da variável visual qualitativa com a variável de dimensão permite, então, determinarmos os elementos constitutivos de uma figura: as unidades figurais.

A fim de mostrar a heterogeneidade destas unidades figurais, e ainda aquelas que são pertinentes ao registro das figuras geométricas, Duval , 1995, p. 177, faz a seguinte classificação e mostra como no quadro seguinte:



Analisando as figuras geométricas a partir destas unidades figurais que foram classificadas, Duval, 1995, faz as seguintes constatações :

- "*Uma figura geométrica é sempre uma configuração de pelo menos duas destas unidades figurais elementares*" (Duval, 1995, p. 178).

Quer dizer, então, que um quadrado com suas diagonais, uma reta e um ponto marcado sobre esta reta ou ao redor desta reta, um círculo e seu centro, são configurações de duas unidades figurais elementares, formando, assim, uma figura geométrica.

- *"As unidades figurais elementares de dimensão 2 (contorno fechado de uma zona) são estudadas, em geometria, como configurações de unidades figurais de dimensão 1 (forma "linha")"* (ibid., p. 178).

Isto porque, quando se passa da representação figural ao discurso da língua natural, faz-se, automaticamente, uma mudança de dimensão, pois *"no registro das figuras há predominância perceptiva das unidades de dimensão 2, enquanto que no registro do discurso em língua natural, onde são definidos os objetos representados pela figura, há predominância das unidades de dimensão 1 e 0".* (ibid., p. 178 e 179).

- *"Um mesmo "objeto" matemático pode ser representado por unidades figurais diferentes"* (ibid., p. 179).

Por exemplo, o ponto. Ele pode ser representado por três unidades figurais diferentes : a comum, de dimensão 0, ou seja, um ponto simplesmente e as de dimensão 2, como no caso da intersecção de duas retas, ou semi-retas.

Estas constatações clareiam nosso pensamento a respeito de algumas das dificuldades encontradas na aprendizagem da geometria, principalmente aquelas encontradas na articulação do registro do discurso matemático com o das figuras geométricas.

Contudo, esta questão nos remeteria a um outro trabalho, exigindo um maior aprofundamento. Neste momento cabe-nos, somente, a compreensão do funcionamento e das possibilidades heurísticas do registro figurativo.

Mas, a exploração de uma figura geométrica, em função de suas possibilidades heurísticas, nos remete a uma seqüência de sub-figuras, que deve ser mais bem compreendida.

A apreensão operatória, como já vimos anteriormente, nos permite ver uma variedade de sub-figuras que não são vistas imediatamente ao primeiro olhar. Estas sub-figuras são diferentes reorganizações que representam algumas ou todas as unidades figurais elementares da figura inicial. Mas, mesmo que sejam diferentes, elas têm em comum as unidades figurais de dimensão 0, 1 ou 2, da figura inicial, por isso pode-se formar seqüências diferentes de sub-figuras.

Surge então um questionamento:

Como uma das seqüências de sub-figuras pode ser o caminho heurístico para a resolução do problema dado?

A resposta depende de dois pontos:

1) de fatores que permitem ver imediatamente a configuração pertinente ao problema, ou, ao contrário, que tornam difícil a visibilidade desta configuração.

2) da possibilidade de mudança de registro.

Neste último caso o que ocorre é uma correspondência entre a figura e o enunciado.

Devido à heterogeneidade dimensional das unidades figurais, *"um vai e vem constante entre unidades figurais de dimensões diferentes implica em saltos na percepção da figura"* (Duval, 1995, p. 191), pois, a exploração heurística das figuras privilegia as unidades de dimensão 2, sobre aquelas de dimensão inferior; já a aplicação de definições ou teoremas, na sub-figura selecionada, privilegia as unidades de dimensão 1 e 0.

Na resolução de um problema de geometria, a articulação entre o discurso e figura se faz necessário, e esta realiza-se em dois níveis de funcionamento: global e local.

A articulação local se efetua no limite de um raciocínio, ela se apóia nas unidades figurais de dimensão 0 ou 1. Já a articulação global é aquela que diz respeito ao processo de resolução de problemas; ela se apóia na correspondência entre a visão de uma seqüência de sub-figuras pertinentes à modificação da figura e que conduz à solução do problema, e a organização do discurso. Esta articulação global é que constitui a essência da atividade geométrica possibilitando uma real exploração heurística da figura.

2.5- OS FATORES DE VISIBILIDADE DOS TRATAMENTOS PURAMENTE FIGURAIS: porque uma figura nem sempre tem um papel heurístico.

Como vimos anteriormente, para uma figura dada num problema determinado, há muitas maneiras de modificá-la a fim de encontrar um caminho heuristicamente pertinente que mostre a idéia da solução do problema. A cada um destes tipos de modificações correspondem tratamentos específicos e operações figurais específicas. Por exemplo: para a modificação merológica, uma operação que pode ser realizada é a operação de reconfiguração; para a modificação óptica, a deformação; para modificação posicional, a rotação.

É a possibilidade da realização destas operações figurais que garante a produtividade heurística das figuras.

Mas, nem sempre pode-se perceber, numa figura, a operação heuristicamente pertinente. A visibilidade desta operação vai depender de diferentes fatores que podem facilitar ou, ao contrário, dificultar a apreensão operatória da figuras que conduz à solução do problema dado.

São estes fatores os responsáveis pelo fato de que nossos alunos vêem ou não vêem a operação figural que sugere a solução do problema.

Como esta pesquisa se limita ao estudo da operação de reconfiguração, uma tarefa importante é levantar os fatores que intervém sobre esta operação, avaliando o papel intuitivo das figura e analisando as dificuldades que eles podem acarretar sobre estas figuras.

No capítulo seguinte faremos um estudo mais aprofundado sobre esta operação figural.

CAPÍTULO III

UMA OPERAÇÃO DE TRATAMENTO PURAMENTE FIGURAL: A OPERAÇÃO DE RECONFIGURAÇÃO

INTRODUÇÃO

Devido às circunstâncias de vida do homem que o levaram a reconhecer configurações físicas, comparar formas e tamanhos, a geometria deve mesmo ter se iniciado em tempos muito remotos, na antiguidade, como relatam os autores que escrevem sobre a história da Matemática.

A necessidade de delimitar a terra levou à noção de figuras geométricas simples, tais como retângulos, quadrados e triângulos. Mas, antes mesmo de aparecerem os primeiros homens que colecionaram tais figuras e tentaram formular princípios fundamentais das artes construtivas, era o traçado na areia o único método resolutivo dos problemas geométricos, levando o homem a desenvolver um hábito de ver e buscar nas imagens a solução dos problemas. Desta forma, as figuras eram consideradas sobretudo por seu valor heurístico.

Parece que as mais velhas demonstrações matemáticas consistiam em dar uma certeza apoiada no visível; seria necessário ver concretamente, então os antigos matemáticos preocupavam-se apenas com as relações que podiam obter geometricamente.

A seguinte ilustração, retirada do livro Maravilhas da Matemática, Lancelot Hogben , 1970, p. 70, nos comprova que meio milênio antes dos gregos, os chineses já haviam descoberto regras gerais importantíssimas relativas às figuras, e que, talvez, a concepção de uma das proposições mais importantes de todo o campo da geometria, o teorema "pitagórico", não tenha sido totalmente ocidental.

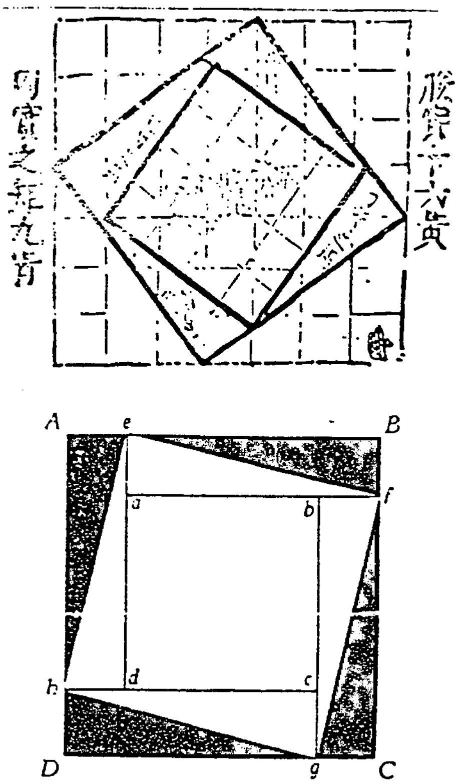


Fig. 19

O *Livro de Chou Pei Suan King*, escrito provàvelmente cêrca de 40 d. C., é atribuído, pela tradição oral, a uma fonte muito mais antiga que a descoberta, pelo geômetra grego, do chamado Teorema de Pitágoras, isto é, que o quadrado da hipotenusa de triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos. Êste antiquíssimo exemplar de mosaico, de uma velha edição do *Chou Pei*, — reproduzido na História da Matemática de Smith — demonstra a veracidade do teorema. Com um triângulo retângulo, como o *eBf* da figura, e três outros triângulos retângulos que lhe sejam iguais, pode-se formar o quadrado. Em seguida, traçam-se dois retângulos iguais a *eafB*, cada um constituído de dois triângulos iguais a *efB*. Quando lermos o Capítulo 4, aprenderemos a armar êste quebra-cabeças chinês, muito menos complicado, aliás, que o de Euclides. Para isto basta verificar que:

O triângulo $efB = \frac{1}{2}$ retângulo $eafB = \frac{1}{2}\, Bf \cdot eB$.

Quadrado $ABCD$ = quadrado $efgh$ + 4 vezes o triângulo $efB = ef^2 + 2\, Bf \cdot eB$

Também o quadrado $ABCD = Bf^2 + eB + 2\, Bf \cdot eB$.

Portanto: $ef^2 + 2\, Bf \cdot eB = Bf^2 + eB^2 + 2\, Bf \cdot eB$.

Logo: $ef^2 = Bf^2 + eB^2$.

Os chineses usavam um princípio que era enunciado como "dada uma figura geométrica, pode-se sempre fragmentá-la em vários pedaços, e se dispusermos os pedaços de outra maneira diferente daquela que estava no início, obter-se-á, então, uma nova figura que terá sempre a mesma superfície que a primeira". Na verdade, os matemáticos chineses utilizavam um princípio de invariância das áreas e dos volumes, e utilizavam as figuras como se fossem um quebra-cabeça, onde as peças deste podiam ser manipuladas concretamente.

Também a geometria de "Os Elementos" de Euclides é uma geometria das figuras, onde as figuras planas são encaradas segundo a forma e a grandeza, e estas podem ser somadas, subtraídas, divididas ou até comparadas. Neste livro encontram-se demonstrações, apresentadas por Euclides, mas que já eram conhecidas por egípcios e sumerianos há dois mil anos. Trata-se de demonstrações referentes à medição de terras.

Ainda, em "Os Elementos", mostra-se como se calcula a área de um retângulo, pela soma de uma trama de quadrados e, também, que qualquer triângulo pode ser subdividido em dois triângulos retângulos, permitindo-se calcular a área de qualquer triângulo. Esta técnica de Euclides é, na verdade, o método do agrimensor. *"Qualquer figura limitada por lados retos pode ser subdividida em triângulos"* (Hogben,1970, p. 140).

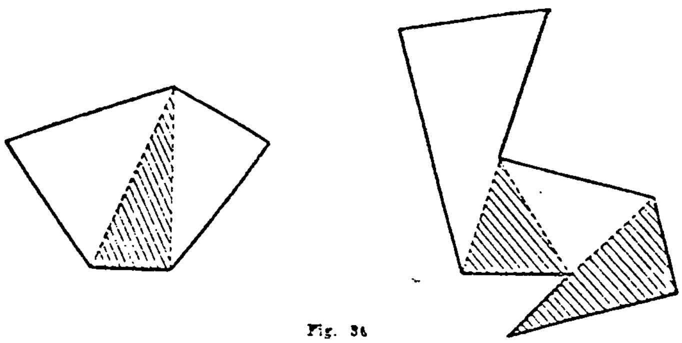


Fig. 36

Sabendo calcular a área de um triângulo qualquer, podemos medir a superfície de qualquer terreno, desde que limitado por linhas retas.

Em "A divisão de figuras", significativa obra de Euclides, há uma coleção de proposições relativas à divisão de configurações planas.

Tudo isto nos leva a crer que a possibilidade de raciocínios através do registro figural é tarefa muito antiga. Uma figura era decomposta em muitas outras sub-figuras e naturalmente transformações eram realizadas, tais como translações, rotações e simetrias, que permitiam a comparação de áreas e a transposição de elementos. Esta atividade, denominada operação de reconfiguração, é uma operação que pode ser efetuada visivelmente, pois ela pode sempre ser materializada ou expressa num registro das representações figurais, conservando a área da superfície onde ela se aplica, isto é, a área é um invariante sob a operação de reconfiguração. Esta propriedade permitiu à operação de reconfiguração desempenhar um papel heurístico importante através da história da Matemática; ela foi um suporte intuitivo na demonstração de teoremas e na resolução de problemas.

Atualmente, nosso ensino deixa de lado esta fabulosa tarefa, apesar de que no início da aprendizagem da geometria, os problemas que podem ser propostos aos alunos, aqueles cuja resolução não requer a utilização de um corpus explícito de definições de teoremas, repousa sobretudo no papel intuitivo de uma figura, ou seja sobre a operação de reconfiguração.

3.1- A OPERAÇÃO DE RECONFIGURAÇÃO

Toda figura pode ser modificada de muitas maneiras. Pode-se dividir as unidades figurais elementares de dimensão 2, que compõem a figura, em outras unidades figurais, homogêneas ou heterogêneas, igualmente de dimensão 2. Num fracionamento homogêneo, as partes obtidas têm a mesma forma que o todo, enquanto que num fracionamento heterogêneo as partes obtidas não têm. Estas partes elementares, obtidas pelo fracionamento, podem ser recombinadas em muitas sub-figuras, todas incluídas na figura inicial, modificando o contorno global da figura, ou não (Duval, 1988, p. 64).

Pode-se também aumentar a figura ou diminuí-la, deslocá-la por translação ou por rotação, etc.. Estas modificações, que não são de mesma natureza, levantam, cada uma delas, operações específicas que constituem a produtividade heurística das figuras (Duval, 1988, p. 62-63).

Aqui, examinaremos melhor a operação de reconfiguração, que é uma operação de tratamento puramente figural e que diz respeito às modificações merológicas.

A **reconfiguração** é a operação que consiste em reorganizar uma ou muitas sub-figuras[14], diferentes de uma figura dada, em uma outra figura. Uma sub-figura pode ser uma unidade figural elementar de dimensão 2 ou um reagrupamento de unidades figurais elementares, igualmente de dimensão 2. Naturalmente, se for o caso, pode-se aumentar o número das partes da figura, fazendo um fracionamento de suas unidades elementares de dimensão 2. Desta forma a " *reconfiguração é um tratamento que consiste na divisão de uma figura em sub-figuras, na sua comparação, e no seu reagrupamento eventual em uma figura de um contorno global diferente*" (Duval, 1995, p. 185).

---

[14] É importante não confundir "**unidade figural elementar**" e "**sub-figura**". As unidades figurais elementares são as unidades de base representativas que semióticamente constituem uma figura geométrica. As sub-figuras são o resultado de uma divisão da figura que depende das necessidades de um problema proposto: elas podem ser uma unidade figural ou uma combinação de unidades figurais.

Também é importante não confundir a **figura inicial** e a **transformação desta figura, a qual é realizada** pela aplicação de tratamentos figurais, através de um dos três tipos de modificações, para fins heurísticos. A figura inicial é a figura que se pode construir segundo os dados do enunciado de um problema.

As modificações realizadas na figura, para fins heurísticos, podem ser feitas graficamente, quando acrescentamos um ou mais traços na figura inicial, ou fisicamente, quando recortamos ou dobramos a figura inicial, ou até mesmo mentalmente. O interesse no fracionamento de uma figura é que se tem a possibilidade de realizar a operação de reconfiguração.

Assim, a operação de reconfiguração é uma operação que pode ser "apresentada na percepção visível", pois ela pode sempre ser materializada ou expressa num registro das representações figurais, conservando a área da superfície sobre a qual ela se aplica: isto é, a área é um invariante sob a operação de reconfiguração. Esta propriedade permitiu à operação de reconfiguração, desempenhar um papel heurístico importante ao longo da história da Matemática; ela foi um suporte intuitivo na demonstração de teoremas e nas resoluções de problemas (PADILLA, 1992, p. 12).

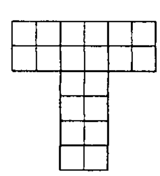
Portanto, esta operação permite engajar, imediatamente, tratamentos tais como:

- a medida de áreas por soma ou por subtração de partes elementares.

- colocar em evidência a equivalência de dois reagrupamentos intermediários.

- a reconstituição da figura inicial em uma outra figura por deslocamento de elementos (Padilla, 1992, p.9).

O recurso à operação de reconfiguração pode ser bem ilustrado num exemplo. Seja uma figura formada por vinte quadradinhos. Pode-se decompô-la em quatro pedaços superponíveis?



Este problema pede explicitamente uma reconfiguração por conjunto. O fracionamento da figura já foi dado, podendo ser este um fator que auxilia na execução do exercício. Porém o reagrupamento pertinente das partes elementares forma sub-figuras que não são convexas, e este pode ser um fator inibidor para encontrar a reconfiguração pertinente.

De fato, este problema foi proposto por Padilla, a alunos de 11-13 anos, e este fator, a não convexidade das sub-figuras, foi considerado como um obstáculo. Além disso, foi constatado que os alunos gastam de 3 min a 10 min para resolvê-lo (Padilla, 1990, p. 236-238).

Faz-se necessário, então, realizar um estudo sobre quais variáveis auxiliam ou inibem a realização da operação de reconfiguração, uma vez que a possibilidade de uma aprendizagem de tratamentos puramente figurais tem permitido uma melhor desenvoltura dos alunos em geometria (Padilla, 1990, p.188).

Consideramos então, que a operação de reconfiguração é importante, pois através da prática dos movimentos realizados na figura, aprimora-se a percepção e, ainda, propicia-se um desenvolvimento de habilidades tais como a visualização.

3.2- AS VARIÁVEIS QUE INTERFEREM NA VISUALIZAÇÃO DA OPERAÇÃO DE RECONFIGURAÇÃO

O papel intuitivo de uma figura geométrica depende de muitos fatores. Estes fatores podem desempenhar um papel facilitador, ou ao contrário, podem ocultar a apreensão operatória que conduz à solução do problema proposto. O fato de que os alunos "vêem" rapidamente ou, "não vêem" a operação figural que sugere um tratamento matemático pertinente, depende destes fatores.

Para o caso específico da operação de reconfiguração, levantamos quatro grupos de variáveis que influenciam a visibilidade e a complexidade da aplicação da operação de reconfiguração.

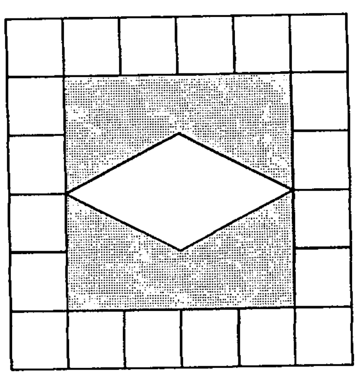
1. Variáveis relativas a uma partição suporte, extrínseca às figuras ou às sub-figuras a reconfigurar.

Para este grupo de variáveis, consideram-se as seguintes situações :

a) <u>um fundo constituído por um quadriculado regular de quadrados.</u>

É o caso do seguinte exemplo:

Observe a figura hachurada.
Calcule sua área. Explique como você a encontrou
Obs.: A área de cada quadradinho do fundo quadriculado é 1 cm^2.



Neste exemplo o fundo deve ser projetado, pois as sub-figuras visualmente percebidas se inscrevem num fundo regular de quadriculado.

Observamos que o suporte quadriculado é uma ajuda para a aplicação da operação de reconfiguração. De fato, como bem caracteriza Padilla, 1990, p. 243-248, o fundo quadriculado leva o aluno a dois tipos de procedimentos: a reconfiguração de pequenos quadrados e a reconfiguração da forma global em uma outra forma global.

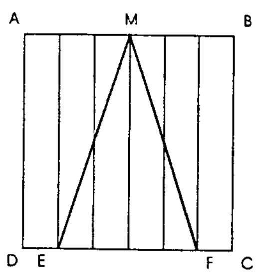
Mas, por outro lado, a existência de um fundo quadriculado pode ter um efeito perturbador; ele pode induzir à leitura da figura em partes, apegando o leitor a pontos muito particulares e levando-o a procedimentos de contagem para chegar à solução do problema.

Ainda, este suporte pode viciar o leitor, que procura materializar um fundo quadriculado em figuras que são apresentadas sem este, na tentativa de encontrar a solução do problema através de procedimentos de contagem. No entanto, este procedimento não é dos mais interessantes, ele leva o leitor numa busca incessante da solução do problema.

b) <u>um fundo constituído por faixas regulares de retângulos</u>.

Este caso pode ser ilustrado com o seguinte exemplo:

ABCD é um quadrado dividido em partes iguais. Mostre que as áreas AMED, MEF e MBCF são iguais.



Podemos levantar as seguintes observações referentes a este primeiro grupo de variáveis:

1) Elas favorecem a operação de reconfiguração.

2) Pode-se supor que um fundo regular quadriculado constitui um fator mais forte para favorecer a reconfiguração que um fundo regular de faixas.

3) O fundo é dado ou, ao contrário, ele não é dado e deve ser projetado, pois as sub-figuras visualmente percebidas se inscrevem num fundo regular de quadriculado.

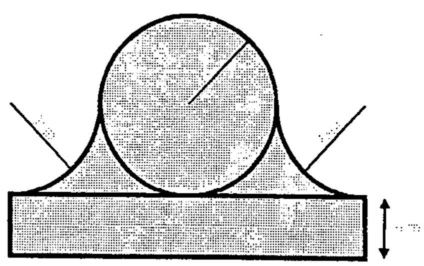
2. Variáveis relativas às unidades figurais elementares ou às sub-figuras a considerar.

Para este grupo de variáveis são levantados os seguintes casos:

a) As unidades figurais, ou as sub-figuras, a considerar para a reconfiguração são dadas ou, ao contrário, deve-se efetuar uma partição.

Neste caso, tratamentos auxiliares são realizados na figura, ou seja, traços suplementares são acrescentados nela, a fim de identicar as sub-figuras que são pertinentes à reconfiguração. É o que podemos observar no exemplo seguinte:

A figura sombreada é constituída de semi-circunferências e de segmentos. Calcule sua área.
Explique como você a obteve:

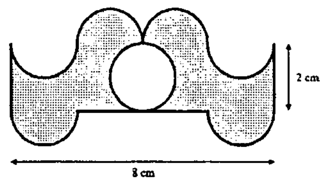


Este é um fator que pode aumentar o grau de complexidade de visibilidade quando se aplica a reconfiguração. Vai depender do número de traços que será necessário acrescentar na figura, bem como das características do contorno, pois, fazer na figura tais tratamentos auxiliares e discernir quais sub-figuras são pertinentes para a reconfiguração exige que o aluno já tenha percebido qual o caminho a tomar para chegar à solução do problema.

b) As unidades figurais a considerar são pedaços de unidades figurais de dimensão dois: quartos de círculo, semi-círculos, triângulos retângulos... .

Neste caso há uma complementaridade das formas das unidades figurais, e isto favorece a reconfiguração. Pode-se observar este caso no seguinte exemplo:

Observe a figura hachurada. Calcule sua área.

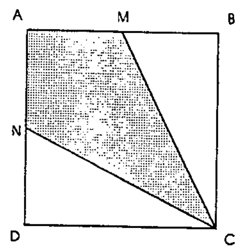


O contorno da figura representa uma ajuda para a aplicação da operação de reconfiguração. A figura é não convexa, faltam-lhe metades de círculos, mas a olhada gestáltica sobre a figura nos mostra onde se encontram as outras metades para regularizar a figura.

A complementaridade de formas é um fator que auxilia na visibilidade da operação de reconfiguração, isto porque se tem uma tendência geral de, em certas figuras, organizá-las de maneira que as vejamos completas ou fechadas, e não incompletas.

Mas, no problema apresentado a seguir, as características do contorno não são uma ajuda para a aplicação da operação de reconfiguração por complementaridade de formas.

A figura representa um quadrado ABCD. M e N são os meios dos lados AB e AD, respectivamente. Qual a fração que representa a parte hachurada do quadrado?



c1) <u>Um deslocamento no plano basta para ajustar entre elas as unidades figurais.</u>

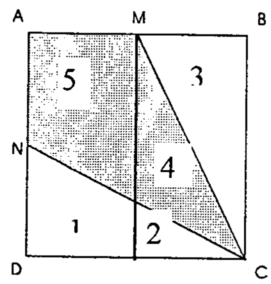
Neste caso modificações posicionais (rotações ou translações) são realizadas com as sub-figuras, a fim de colocá-las no lugar pertinente para ter solução do problema.

Dependendo do número de modificações posicionais que devem ser realizadas, este pode ser um fator que interfere na complexidade da aplicação da operação de reconfiguração.

c2) <u>Deve-se sair do plano, por exemplo, para efetuar uma rotação</u>.

É o que acontece na figura do problema anterior. Para resolver este problema, através de passos heurísticos, pode-se fazer tranformações na parte hachurada, ou na parte branca.

Como, neste momento nos interessa ilustrar o fator acima mencionado, importam as transformações realizadas na parte branca da figura, pois neste caso necessitamos efetuar três modificações posicionais das partes elementares: uma rotação, uma translação e uma simetria axial.



Reconfigurando (1+2) e 3 em um retângulo, tem-se a metade de um quadrado. Mas 4 e 5 não se reconfiguram em um retângulo. É preciso, portanto, deslocar (1+2) colocando-o em cima de (2+4).

d) <u>Não há, ou ao contrário, há duplo emprego de uma unidade figural.</u>

Neste caso temos um emprego de uma unidade figural nas duas reconfigurações que devem ser comparadas.

É o que R. Duval chama de obstáculo do "desdobramento" de objetos, e, na verdade, constitui mesmo um obstáculo para muitos alunos, pois é necessária a identificação de um mesmo objeto sob pontos de vista diferentes.

Este fato pode ser bem observado no exemplo que ilustra a situação c2. Note que ao deslocar o triângulo DCN uma porção da parte hachurada AMCN aparece simultâneamente em AMCN e no triângulo deslocado.

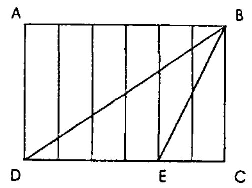
3. Variáveis relativas à (ou às) reconfiguração (ões) a obter:

Para este grupo de variáveis consideram-se os casos em que a reconfiguração é convexa ou não convexa.

Esta convexidade deve ser analisada em dois níveis: local e global.

Em nível global, quando a solução do problema exige que se olhe uma reconfiguração completa da figura inicial. É o que pode ser notado no exemplo seguinte:

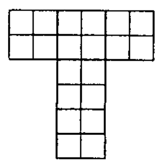
> Dividimos um retângulo ABCD em partes iguais. Qual é a fração da área do retângulo que representa a área do triângulo BED?



Neste caso a figura inicial tem uma forma convexa. Ela não tem aquela complementaridade de formas. Isto torna o tratamento figural mais complexo.

No local as sub-figuras pertinentes à reconfiguração são não convexas. Podemos ver esta situação no exemplo seguinte:

> Esta figura é formada por vinte quadradinhos. Divida-a em quatro pedaços, de mesma área e mesma forma.



O reagrupamento pertinente das partes elementares forma sub-figuras que não são convexas. Uma sub-figura não convexa é mais difícil de se destacar da figura do que uma sub-figura convexa.

Isto ocorre por causa da tendência que temos em ver figuras que sejam mais contínuas, mais simétricas, mais unificadas, quer dizer, é a lei gestáltica da simplicidade do contorno que está em jogo na organização da percepção.

Este é um fator que desempenha um papel importante para discernir, entre as várias reconfigurações possíveis, aquela que é matemáticamente pertinente.

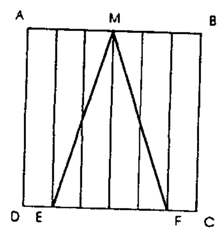
4. Variáveis relativas à complexidade da (ou das) reconfiguração (ões) a efetuar:

Levanta-se, para este grupo de variáveis, os tipos de deslocamentos que devem ser efetuados com as sub-figuras pertinentes. Estes tipos de deslocamentos têm uma ligação com o contorno da figura.

a) <u>A reconfiguração pode ser realizada no quadro da figura de início.</u>

Neste caso as sub-figuras são deslocadas do próprio interior da figura ou, ao contrário, algumas sub-figuras devem sair do contorno da figura de início. Pode-se observar este caso no seguinte exemplo:

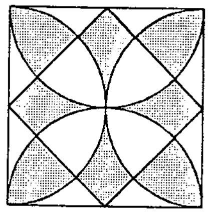
ABCD é m quadrado dividido em partes iguais. Mostre que as áreas AMED, MEF e MBCF são iguais.



b) <u>A reconfiguração pode ser realizada no quadro de uma única sub-figura.</u>

É o que acontece quando se aplica a reconfiguração na figura do problema seguinte:

Observe a figura. Calcule a área da parte hachurada.



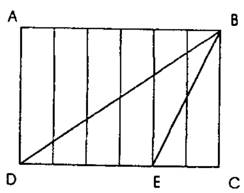
c) A reconfiguração deve ser efetuada de maneira independente das duas sub-figuras.

Para esta situação três possibilidades podem ocorrer:

- as reconfigurações obtidas dão lugar a uma única operação (reunião de duas configurações, Ex. 1)
- contagem das zonas hachuradas e não hachuradas (Ex. 2)
- ou, ainda, a realização de várias operações.

Exemplo 1:

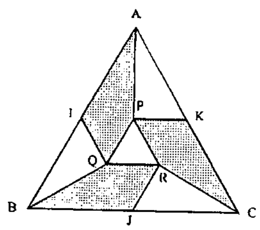
Dividimos um retângulo ABCD em partes iguais. Qual é a fração da área do retângulo que representa a área do triÂngulo BED?



Exemplo 2:

ABC é um triângulo equilátero e I, J, K são os meios dos seus lados. P, Q, R são os meios dos lados do triângulo IJK.

Compare a área da região hachurada e da região não hachurada.



( ) a região hachurada tem a maior área.

( ) a região não hachurada tem a maior área.

( ) as duas regiões tem áreas iguais.

Todos estes fatores que foram classificados, em cada grupo de variáveis que levantamos, permitem avaliar o grau de visibilidade da reconfiguração pertinente (pois várias reconfigurações são sempre possíveis sobre uma mesma figura) e analisar com precisão o grau de complexidade da aplicação da operação de reconfiguração.

3.3 - ALGUNS EXEMPLOS DE RECONFIGURAÇÃO NA ANTIGUIDADE.

Demonstrações do Teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras, assim atribuído devido à forte tradição grega que associa o nome de Pitágoras à afirmação de que "a área do quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os catetos" , é uma das proposições mais importantes de todo o campo da geometria, e que apresenta uma variedade de demonstrações algébricas e geométricas.

A seguir iremos mostrar, em caráter de ilustração, algumas demonstrações deste teorema, aquelas que são resolvidas com o uso da operação de reconfiguração e, sobretudo, aquelas que consideramos serem acessíveis ao uso em sala de aula.

Exemplo 1: A demonstração de Euclides

A seguinte demonstração é considerada uma das mais antigas e se encontra na Proposição 47, I do livro *Os Elementos* de Euclides. Vamos apresentá-la de forma um tanto abreviada, conforme Howard Eves, 1992, nos apresenta, para uso em sala de aula, em Tópicos de História da Matemática, p. 55 e 56.

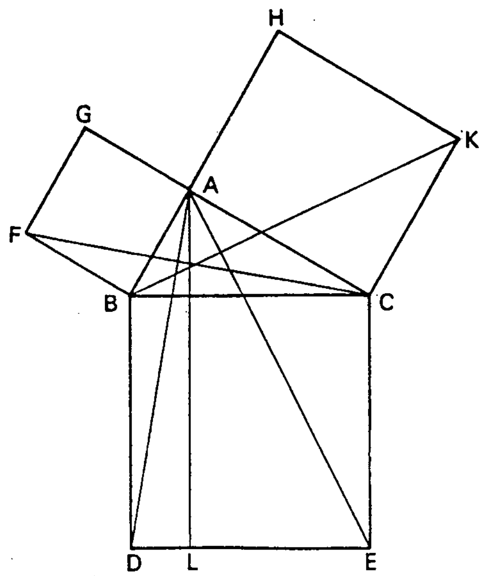


FIGURA [9] - 2. — *Demonstração de Euclides*

Suponhamos que o ângulo *BAC* da Figura [9] - 2 seja o ângulo reto do triângulo *ABC*. Os quadrados *BG*, *BE* e *CH* são construídos sobre os respectivos lados, e *AL* é traçada paralela a *BD* (ou *CE*).

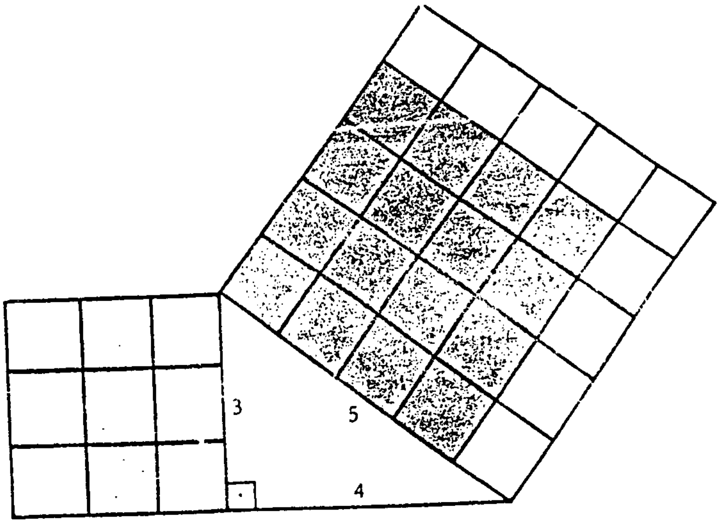
Mostra-se que os pontos *C*, *A*, *G* assim como os pontos *B*, *A*, *H* são colineares. Então se prova que o triângulo *ABD* é congruente ao triângulo *FBC* (Euclides dizia-os "iguais") pela Proposição 4, I, que é a afirmação de Euclides do caso L.A.L. de congruência. O paralelogramo *BL* é o dobro do triângulo *ABD* e o quadrado *BG* é o dobro do triângulo *FBC*, portanto o paralelogramo *BL* é igual ao quadrado *BG*.

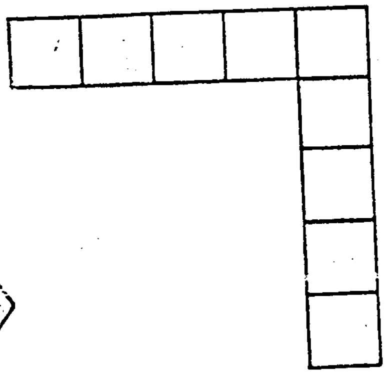
Analogamente, pode-se provar que o paralelogramo *CL* é igual ao quadrado *CH*. Por conseguinte o quadrado *BDEC*, formado pelos dois paralelogramos *BL* e *CL*, é igual aos dois quadrados *BG* e *CH*. C.Q.D.

Esta é uma demonstração baseada na equivalência de áreas que exige, para a aplicação da operação de reconfiguração, a identificação de partes elementares, além de traços que devem ser realizados sobre a figura. Além disso, o contorno da figura impede, de certa forma, a visibilidade da aplicação da operação de reconfiguração. Também, como o obstáculo do desdobramento está presente, pode aumentar o grau de complexidade e diminuir assim, o grau de visibilidade desta operação.

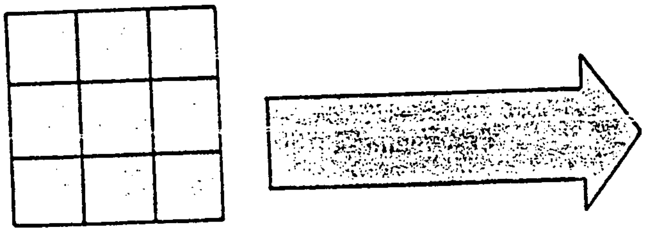
Exemplo 2: A demonstração de Pitágoras

Com a mesma figura usada na demonstração anterior, porém vista de forma diferente, Oscar Guelli em Contando a História da Matemática: A invenção dos números, p. 39 a 41, explora de maneira bastante agradável uma demonstração que é atribuída a Pitágoras.

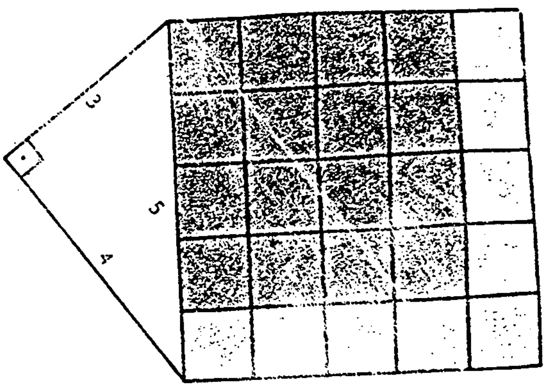




Para que o quadrado aplicado sobre o menor lado do triângulo caiba no quadrado maior, basta dispor os quadradinhos de outro modo. Veja:



Portanto, $3^2 + 4^2 = 5^2$.

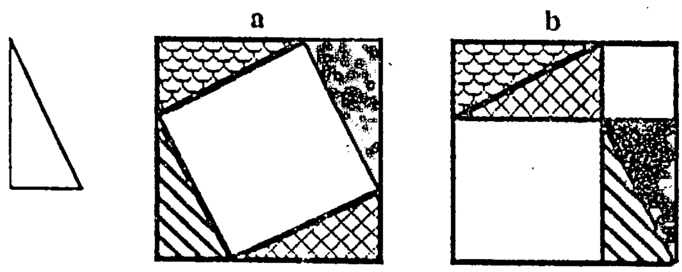


Esta demonstração se baseia na transposição de elementos. Aí, traços complementares são necessários para a identificação de partes elementares. Uma reconfiguração por conjunto de formas é exigido, e neste caso, obtém-se uma sub-figura não convexa que pode dificultar a visibilidade da operação de reconfiguração. Porém, como as partes elementares, obtidas pelo fracionamento, constituem sub-figuras convexas, o grau de visibilidade pode aumentar.

Contudo é uma maneira bastante interessante de levar nossos alunos a demonstrarem o teorema de Pitágoras, e a terem o contato com o mesmo.

Exemplo 3: A figura hindu

Esta é uma demonstração de origem hindu, que é realizada por transposição de elementos a partir de quatro exemplares de triângulos retângulos dispostos num quadrado.



Com os quatro triângulos retângulos, dispostos de maneira conveniente, forma-se um grande quadrado de lado igual à soma dos catetos dos triângulos retângulos (fig. a). A complementaridade dos quatro triângulos neste grande quadrado é o quadrado da hipotenusa, quer dizer, a área da região formada quando se tiram os quatro triângulos retângulos é igual ao quadrado da hipotenusa.

A reconfiguração dos quatro triângulos, obtendo-se assim a figura, exige três modificações posicionais: três rotações e, como o reagrupamento destes quatro triângulos forma uma sub-figura não convexa, temos aí uma dificuldade em visualizar a aplicação da operação de reconfiguração.

Reconfigurando de outra maneira os quatro triângulos (fig.b), vê-se que a complementaridade destes quatro triângulos no grande quadrado é, agora, a soma dos quadrados dos catetos dos triângulos retângulos, quer dizer, a área da região formada quando se tiram os quatro triângulos retângulos é igual à soma dos quadrados dos catetos dos triângulos retângulos.

A figura b é formada pelos quatro triângulos retângulos que são reconfigurados a partir de três modificações posicionais: três translações. Desta forma obtém-se um reagrupamento não convexo de duas figuras convexas: os dois retângulos, formados cada um por dois triângulos. Estes dois fatores tornam difícil a visibilidade da aplicação da operação de reconfiguração. De fato, encontrar o reconfiguração pertinente dos quatro triângulos retângulos entre aquelas que são possíveis, não é uma tarefa imediatamente visível aos olhos.

Ainda, na figura b, são necessários tratamentos auxiliares para se obter os dois quadrados que complementam esta figura, ou seja, as sub-figuras. Deve-se, então, efetuar quatro traços suplementares que determinam os dois quadrados, os quais podem ser facilmente encontrados, pois as características do contorno ajudam a encontrá-los no grande quadrado.

O fato de ter seis modificações posicionais, quatro traços suplementares, sub-figuras não convexas, torna difícil a visibilidade da aplicação da operação de reconfiguração. Mas o fato de ter um contorno que ajuda na aplicação desta operação, e ainda, de não ter o obstáculo do desdobramento, aumenta o grau de visibilidade para a aplicação desta operação.

Este é um exemplo de figura bastante interessante para ser utilizado junto aos alunos.

Ele ainda permite demonstrar um produto notável: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

CAPÍTULO IV
DESCRIÇÃO DA EXPERIÊNCIA

INTRODUÇÃO

Neste capítulo nosso objetivo é relatar a experiência realizada com alunos de 5ª série do 1º grau, a fim de verificar se nossa hipótese, apresentada no capítulo I, faz sentido, levando em conta o referencial teórico construído.

Para tentar dar uma resposta às questões levantadas anteriormente e verificar a validade de nossa hipótese, trabalhamos com aproximadamente noventa alunos de 5ª série do 1º grau, compondo 3 turmas, de duas escolas distintas.

A seqüência didática foi desenvolvida durante o ano letivo de 1996 (com duas turmas), e durante o ano letivo de 1997 (com uma turma), realizando, em cada turma, dez seções de 45 min. Estas seções foram divididas em etapas. Na primeira etapa, foi realizado um trabalho com o geoplano[15], com o objetivo de dar noções sobre o cálculo de áreas.

Na segunda etapa, foi aplicado um questionário contendo seis problemas a serem resolvidos com o uso de figuras, com o propósito de uma futura análise.

Na terceira etapa, foi desenvolvido uma série de atividades. Estas atividades eram compostas por exercícios de cáculos de áreas e que podiam ser solucionados com o uso da figura dada em cada um deles. Este era um momento rico no qual buscava-se criar nos alunos uma capacidade de encontrar na figura a solução do problema dado, além de, verificar junto a eles seu comportamento diante de cada atividade.

---

[15] O geoplano é um material concreto que serve de auxílio para o professor desenvolver, entre outros, conhecimentos matemáticos, tais como cálculo de áreas e perímetros de figuras elementares simples. Este material é um quadro (de madeira), num tamanho suficiente que o aluno possa ter em suas mãos, onde são dispostos pregos numa mesma distância um do outro.

E, finalmente, na quarta etapa, um questionário foi aplicado contendo seis problemas a serem resolvidos por meio de figuras, a fim de verificar os resultados obtidos com o trabalho realizado.

O objetivo da seqüência didática, desenvolvida neste trabalho de dissertação, não é trabalhar um conhecimento matemático específico (o cálculo de área por exemplo), mas trabalhando com um conhecimento matemático específico (neste caso com o cálculo de área), levar os alunos a adquirir uma capacidade de visualização.

4.1- PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

a) *Revisão bibliográfica e delimitação teórica*

Um levantamento da bibliografia existente sobre o assunto que desejamos desenvolver nesta pesquisa foi realizado, bem como uma análise da situação quanto ao estudo da geometria. Da leitura dos trabalhos existentes, procuramos clarear teoricamente nosso objeto de pesquisa e, também, extrair problemas interessantes a serem explorados com os alunos. Esta escolha dos problemas se deu com base na análise da situação, nos vários fatores que interferem na visualização da aplicação da operação de reconfiguração, assim como no referencial teórico trabalhado.

A revisão bibliográfica nos confirmou o pouco caso que o ensino tem dado à aprendizagem da geometria no Brasil. Em trabalhos voltados ao papel heurístico de uma figura e à aprendizagem de leitura destas, basicamente, o que encontramos foram os trabalhos realizados por R. DUVAL e as pesquisas desenvolvidas por Virginia PADILLA SANCHEZ e Ana MESQUITA, realizadas na França. Além do estudo destes trabalhos, um estudo sobre a Psicologia da GESTALT fez-se necessário por trazer contribuição a nosso trabalho de pesquisa.

Com esta revisão bibliográfica feita, e definido nosso referencial teórico, estabelecemos a hipótese e o problema da pesquisa, possibilitando o início do trabalho efetivo com os alunos nas escolas.

b) *Delimitação do local e turmas para realização da pesquisa*

Por ser nosso assunto de pesquisa o desenvolvimento de competências heurísticas, e este, lidar com a percepção, achamos que um trabalho em 5ª série do 1º grau seria bastante produtivo.

Também, com a finalidade de verificar a mesma validade deste trabalho com alunos de idades e séries diferentes, buscamos a realização do mesmo, em turmas de 1º ano do 2º grau. Contudo, a receptividade de professores e escola em dar disponibilidade ao desenvolvimento do trabalho na 5ª série do 1º grau não foi a mesma encontrada para o efetivo desenvolvimento do trabalho no 1° ano do 2° grau. Isto ocorreu basicamente por dois motivos: um, porque diziam que os alunos nada tinham visto de geometria nas séries anteriores (não teriam capacidade em realizar as atividades); e o outro, porque diziam precisar cumprir com o programa (pois já o consideravam atrasado) e, portanto, não podiam ceder o período de que necessitávamos para desenvolver nossa pesquisa.

Mesmo assim, aplicamos uma seqüência didática numa turma de 1º ano do 2º grau. Esta amostra, que foi bastante reduzida, em torno de 16 alunos, pois era uma turma do curso noturno, não será considerada em nossa pesquisa para fins de análise, nem será objeto de um estudo mais aprofundado. Apenas mostraremos os questionários que foram utilizados, que se encontram no Anexo I.

Para de fato efetivar nossa pesquisa, trabalhamos, então, em duas escolas: uma particular e outra pública estadual. Na escola particular trabalhamos com duas turmas de 5ª série, e na pública, com uma turma, num total de aproximadamente noventa alunos. Em ambas as escolas, o interesse e a participação pelo trabalho foi bastante positiva.

c) *As hipóteses e os objetivos perseguidos*

Para a organização de nosso trabalho nós nos apoiamos em algumas **hipóteses** cognitivas e didáticas. São elas:

- Se apresentarmos ao aluno uma figura, sua capacidade de leitura lhe permitirá reconhecer as formas elementares, ou sub-figuras, contidas na figura inicial.

- Se propormos aos alunos exercícios apropriados para a exploração de possibilidades heurísticas que uma figura oferece, em particular, pela aplicação da operação de reconfiguração, eles melhorarão seus desempenhos e encontrarão a solução para o problema proposto.

- Se dermos a oportunidade de os alunos confrontarem e analisarem entre si as produções realizadas por eles, eles terão mais condições de explorar todas as possibilidades heurísticas das figuras.

O objetivo geral, para o desenvolvimento desta seqüência didática, nas três turmas, é:
desenvolver, a partir de um conhecimento matemático específico, o cálculo de áreas, a capacidade de visualização.

Os objetivos específicos são:

- Trabalhar, junto com os alunos, na execução de exercícios apropriados para a exploração das possibilidades heurísticas que uma figura oferece.

- Classificar os diferentes fatores que interferem na visualização da operação de reconfiguração.

- Confrontar as possibilidades heurísticas de uma figura, a partir das produções realizadas pelos próprios alunos, trabalhando a questão do erro.

d) *Os problemas propostos*

Procuramos propor aos alunos problemas acessíveis, e que não requerem explicitamente, para a resolução, definições ou teoremas particulares, mas que sejam sobretudo "ricos" para a aplicação da apreensão operatória das figuras. Nestes problemas, a figura que ilustra o enunciado proposto pode ser reconfigurada de muitas maneiras, de forma que todas permitem a aplicação da operação de reconfiguração. Além disso, as figuras que foram escolhidas para compor o enunciado dos problemas propostos apresentam uma variedade de fatores que interferem na visualização da aplicação da reconfiguração, tanto auxiliando-a quanto inibindo-a.

Foram utlizados vinte e dois problemas; destes, seis foram usados no questionário inicial, seis no questionário final e dez durante as atividades. Eles serão apresentados no decorrer desta dissertação.

e) *As etapas da seqüência didática*

Quatro etapas diferentes foram realizadas neste trabalho com os alunos de 5ª série do 1º grau. São elas:

<u>Primeira etapa: atividade inicial - noção de cálculo de área.</u>

Como os problemas propostos aos alunos requerem o conhecimento sobre cálculo de área, e a maioria não trabalhou este conhecimento na escola, se fez necessária a realização de um breve trabalho para a exploração da noção intuitiva dos alunos a respeito de cálculo de áreas. Como esta etapa refere-se a uma parte introdutória da seqüência didática, utilizamos apenas duas, das dez seções. Construímos junto aos alunos e com o auxílio de um único material didático a noção de cálculo de área.

A atividade foi procedida da seguinte forma: cada dupla de alunos recebeu um quadro de pregos (geoplano) e elásticos. O pesquisador orientou algumas atividades que levassem os alunos à construção de figuras simples tais como, quadrado e retângulo. Cada lado da figura surgia da contagem de pregos e esta era delimitada por um elástico. A partir delas exploravam-se vários conhecimentos matemáticos, tais como: potenciação, unidades de medidas, cálculos de perímetros, cálculos de áreas, e até a visualização de figuras, de mesma área, em posições diferentes. Na seqüência, passava-se a construção de figuras de formas diferentes mas com mesma área. Era aí que surgia a grande oportunidade de concretizar a noção de cálculo de áreas.

Segunda etapa: aplicação do questionário inicial.

Nesta etapa um questionário, chamado questionário inicial (A), Anexo II, foi aplicado aos alunos, no qual deveriam responder os problemas propostos, explicitando sua forma de raciocínio.

Após esta aplicação do questionário, o pesquisador voltou em uma outra seção e então, neste espaço, foram mostrados os problemas que resolveram no questionário inicial.

Alguns dos problemas resolvidos pelos próprios alunos foram selecionados e, com o auxílio do retro-projetor foram mostrados. A finalidade desta exposição é, partindo dos erros, levar os alunos a descobrir na figura um caminho que conduza à solução do problema e, ainda, indicar as várias maneiras de se solucionar um mesmo exercício.

Terceira etapa: seqüência de atividades.

Diferentes exercícios foram propostos, a partir de situações que apresentam uma variação sistemática de figuras em função dos fatores que influenciam na visualização quando se aplica a operação de reconfiguração.

Aqui, os alunos trabalharam em dupla e puderam contar com o auxílio do pesquisador para o desenrolar das atividades.

O pesquisador voltou com estas atividades numa outra seção com a finalidade de corrigi-las em classe, junto com os alunos, explorando as diferentes soluções propostas. Nesta fase, foram colocados em evidência os diferentes tipos de reconfiguração que foram utilizados. Partindo de resoluções feitas por eles mesmos, os próprios alunos íam descobrindo o que havia de errado em algumas resoluções e íam encontrando a maneira correta e, até mesmo, outras várias maneiras de chegar à solução do problema proposto. Este tipo de trabalho foi realizado com o retroprojetor e, usando canetas específicas para transparências, os próprios alunos se propunham a manusear as figuras que ficavam estampadas na tela branca para todos olharem.

Quarta etapa: Aplicação do questionário final.

Nesta etapa foi aplicado o questionário final (A*) para uma futura avaliação, mediante as atividades realizadas.

f) *Os instrumentos de análise*

Os instrumentos de análise para a seqüência didática levaram em consideração a apreensão operatória de figuras e a produtividade heurística dos alunos diante dos fatores que interferem na visualização da operação de reconfiguração.

Estes instrumentos para análise serão:

1) questionário inicial (A)

2) questionário final (A*)

A análise foi feita com base na criação de categorias, levando-se em conta os fatores que auxiliam ou que inibem a aplicação da operação de reconfiguração. A partir destas categorias, uma análise quantitativa com base em percentuais de acertos e erros, foi realizada, levando-se em conta também, uma análise qualitativa.

4.2- AS ATIVIDADES DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Entre o questionário inicial e o questionário final uma série de atividades foi trabalhada com os alunos das 5$^{\underline{as}}$ séries.

A finalidade da realização destas atividades era, de fato, levar os alunos a se aperceberem do papel heurístico da figura na resolução de um problema, possibilitando o desenvolvimento da visualização.

Durante a realização destas atividades os alunos trabalharam em duplas para oportunizar a troca de idéias e procedimentos realizados. Para indicar suas idéias e procedimentos partiu deles a utilização de tratamentos, na figura, tais como: cores, flechas, números ou letras e símbolos variados que criavam.

Como orientador das duplas os alunos contaram apenas com o auxílio do pesquisador, que os provocava na busca de caminhos para a realização de tratamentos puramente figurais, levando-os a uma visualização global da situação proposta.

As figuras contidas nas atividades admitiam aplicar a operação de reconfiguração, assim o pesquisador orientava as duplas a encontrar na figura um meio de modificá-la a fim de encontrar uma nova forma na figura, mais conhecida, e que eles saberiam calcular sua área e, portanto, responder a questão proposta.

Estas atividades foram realizadas em 4 aulas de 45 min, sendo que duas foram para os alunos trabalharem nas atividades propostas e as outras duas para correção, conforme já mencionamos.

A seguir mostraremos estas atividades com alguns exemplos resolvidos pelos próprios alunos.

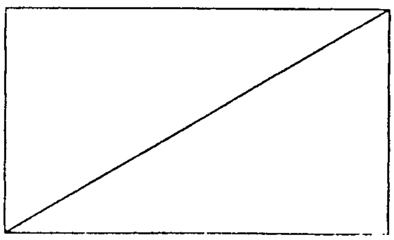
Atividade nº 1

Compare as áreas das figuras 1, 2 e 3. Assinale a alternativa correspondente

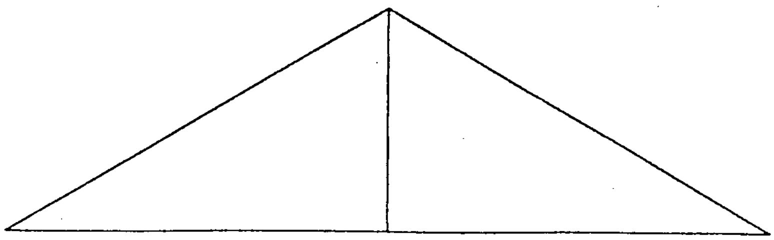
( ) as três figuras têm áreas iguais.

( ) as três figuras têm áreas diferentes.

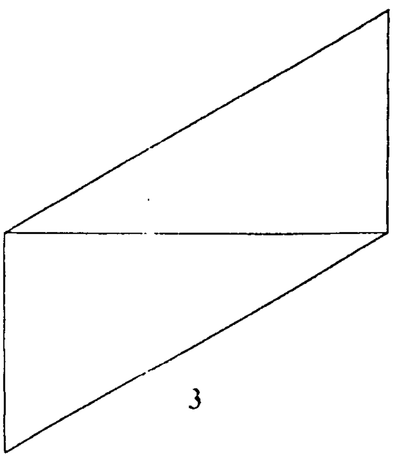
Recorte e monte as suas figuras.



1



2



3

Atividade nº 2

Compare as áreas das figuras 1, 2. Assinale a alternativa que corresponde a sua resposta.

( ) as duas figuras têm áreas diferentes.

( ) as duas figuras têm áreas iguais.

Recorte e monte agora a sua figura

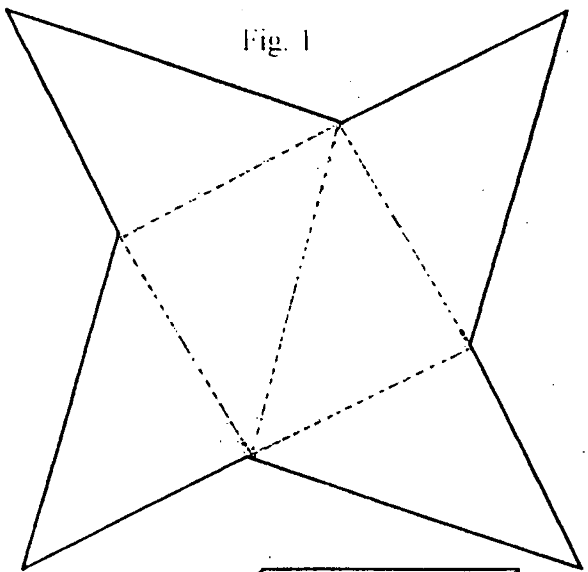


Fig. 1

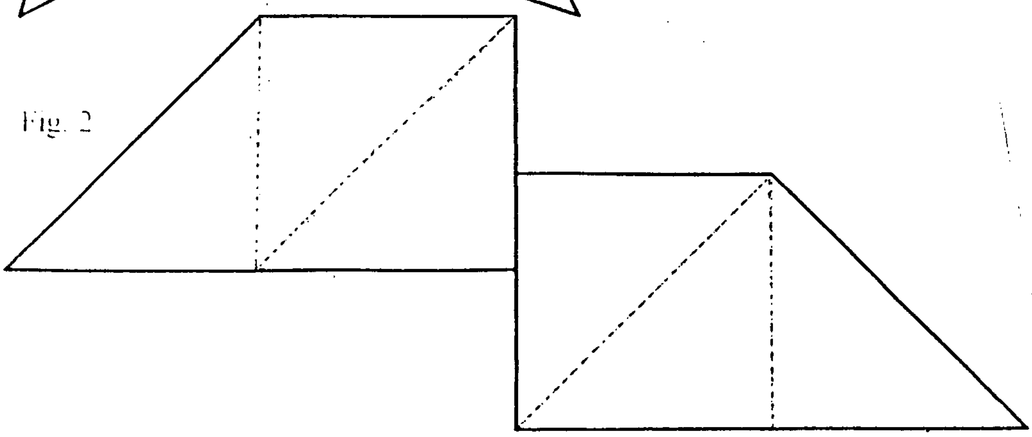


Fig. 2

Análise *a priori* das figuras

A reconfiguração é facilmente visível devido a alguns fatores que interferem sobre ela, são eles:

- *O fracionamento da figura em partes elementares era dado na figura de início.*

Além deste fracionamento já estar presente nas figuras de início, as sub-figuras obtidas por este fracionamento são pedaços de unidades figurais de dimensão 2 (triângulos retângulos), e neste caso há uma *complementaridade de formas* o que facilita a aplicabilidade da operação de reconfiguração.

- *Um deslocamento no plano basta para ajustar as unidades figurais.*

É preciso encontrar o movimento adequado a fim de completar as formas. Este movimento significa ter que "girar" uma das sub-figuras para colocá-la no lugar certo (teria que colocar a peça de cabeça para baixo), completando assim a forma da figura.

- *As sub -figuras são convexas.*

As características do contorno das sub-figuras pertinentes para a reconfiguração constituem sub-figuras convexas.

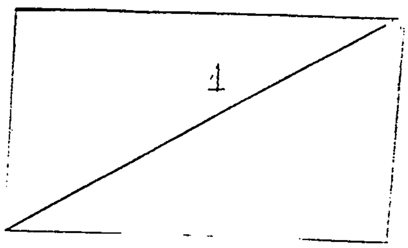
A seguir mostraremos algumas destas atividades resolvidas pelos alunos:

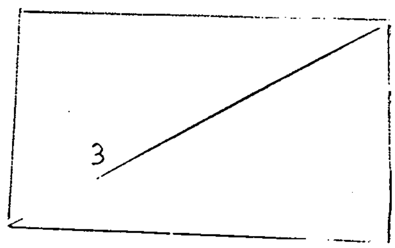
Compare as áreas das figuras 1, 2 e 3. Assinale a alternativa correspondente

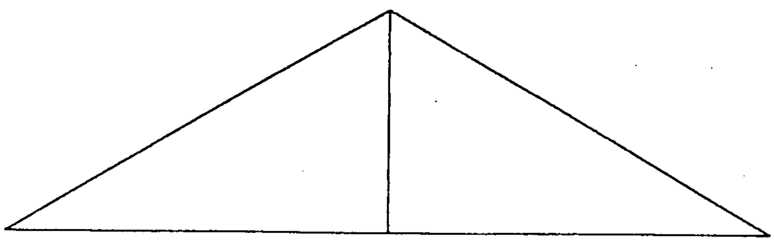
(X) as três figuras têm áreas iguais.

( ) as três figuras têm áreas diferentes

Recorte e monte as suas figuras.







2

Compare as áreas das figuras 1, 2. Assinale a alternativa que corresponde a sua resposta.

(   ) as duas figuras têm áreas diferentes.

(X) as duas figuras têm áreas iguais.

Recorte e monte agora a sua figura

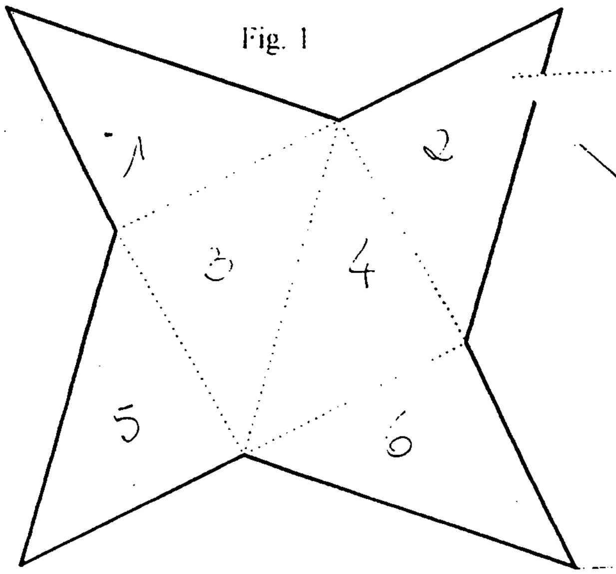
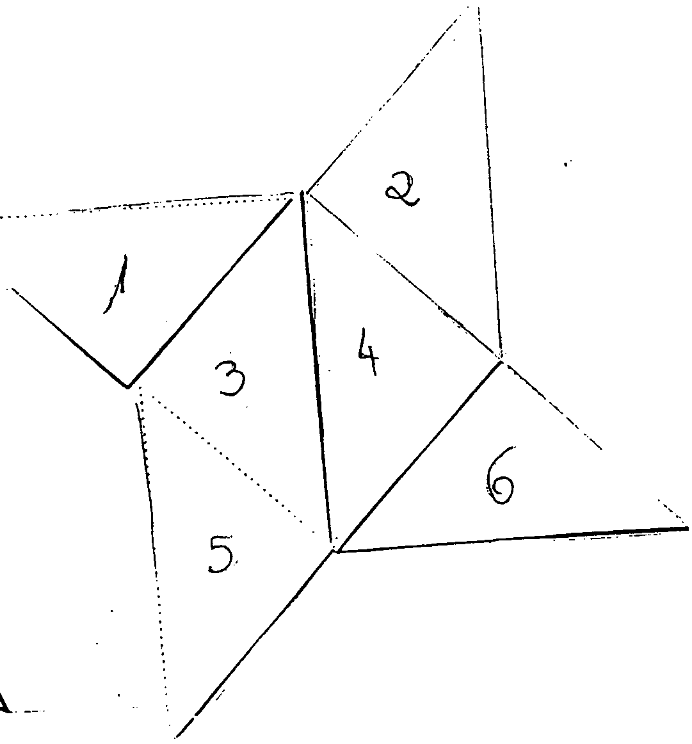
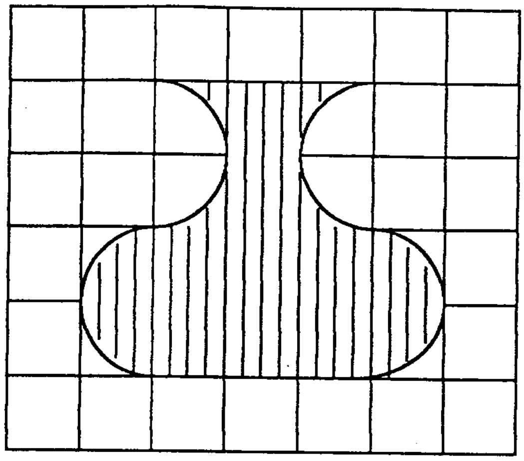


Fig. 1

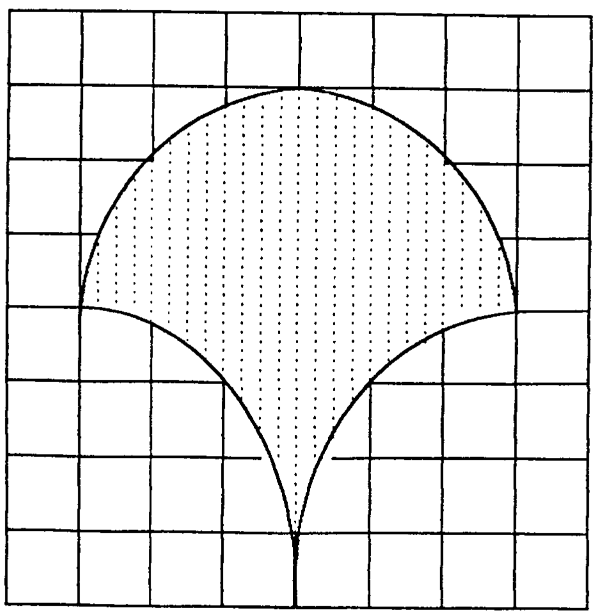


Atividade nº 3 e 4

Qual é a área desta superfície? Explique sua resposta.
(A área de cada quadradinho do fundo quadriculado é 1 cm^2).



Qual é a área desta superfície? Explique.
(A área de cada quadrado do fundo quadriculado é 1 cm^2.



Análise *a priori* das figuras:

Os fatores que basicamente interferiram nas figuras desta atividade foram:

- *As figuras são desenhadas sobre um fundo quadriculado.*

O fundo quadriculado possibilita tratamentos na figura. Pode-se realizar um procedimento de reconfiguração de pequenos quadrados, contando aqueles que são completos e, por complementaridade de formas, procurar aqueles que podem ser completados. Ou, realiza-se um procedimento de reconfiguração global, neste caso busca-se as sub-figuras que devem preencher as formas da figura inicial, obtendo uma nova figura. Para as duas figuras obtem-se um retângulo após a reconfiguração

- *O fracionamento da figura em partes elementares não é dado.*

Para a aplicação da operação de reconfiguração é necessário efetuar tratamentos auxiliares para obter as partes elementares na figura. Traços suplementares são efetuados sobre ela, os quais são facilmente percebidos devido a existência do fundo quadriculado. Estes traços possibilitam a identificação das sub-figuras pertinentes para a aplicação da operação de reconfiguração, proporcionando, assim, uma *complementaridade de formas.*

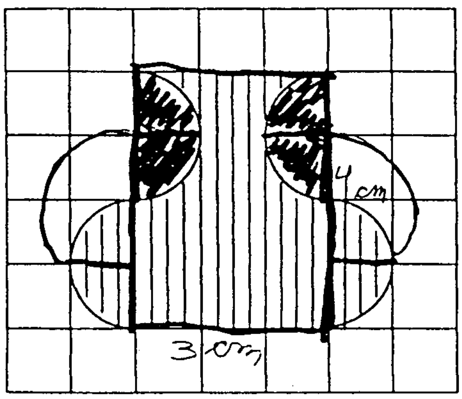
- *As sub-figuras são convexas e não convexas.*

As partes obtidas pelo fracionamento da figura da atividade nº 3 são sub-figuras convexas. Uma olhada gestáltica faz perceber facilmente estas sub-figuras, identificando-se logo onde estão os espaços que devem ser preenchidos.

Na figura da atividade nº 4, se fixarmos o olhar sobre a parte debaixo dela, nos deteremos em sub-figuras não convexas, o que torna um pouco menos visível a reconfiguração.

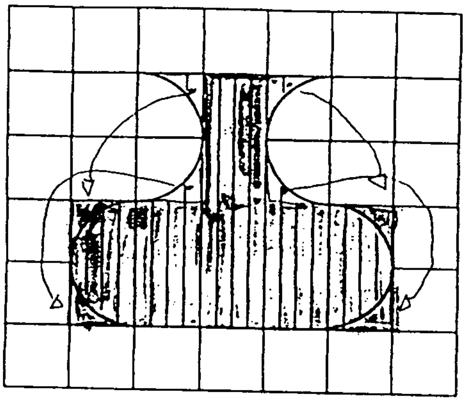
A seguir alguns exemplos de procedimentos realizados pelos alunos para estas duas atividades:

Qual é a área desta superfície? Explique sua resposta.
(A área de cada quadradinho do fundo quadriculado é 1 cm^2).



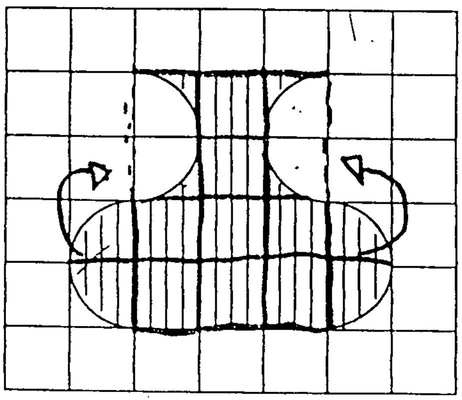
R: A área é 12 cm^2. Porque quando passamos a figura ela ficou com 3 cm de um lado e 4 cm do outro daí, multiplicando deu 12 cm^2 de área

Qual é a área desta superfície? Explique sua resposta.
(A área de cada quadradinho do fundo quadriculado é 1 cm²).

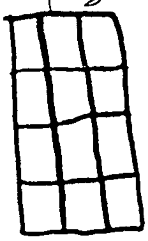


R- Nós tiramos as pontas de cima e colocamos em baixo E a área é de 12 cm²

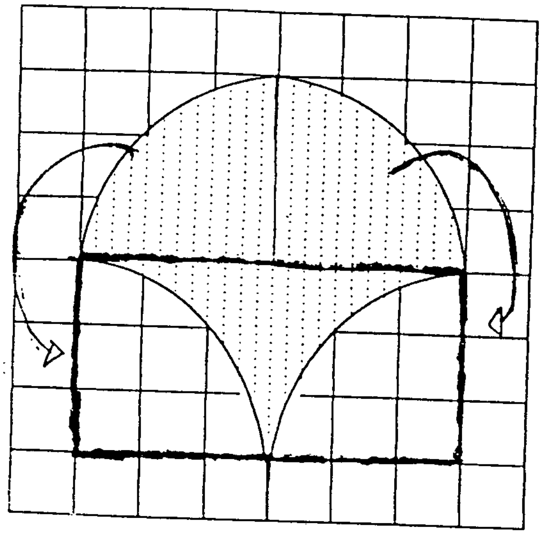
Qual é a área desta superfície? Explique sua resposta.
(A área de cada quadradinho do ~~fundo~~ quadriculado é 1 cm²).



R: A área da superfície dessa figura é 12 cm², juntamos as partes das laterais e a colocamos acima



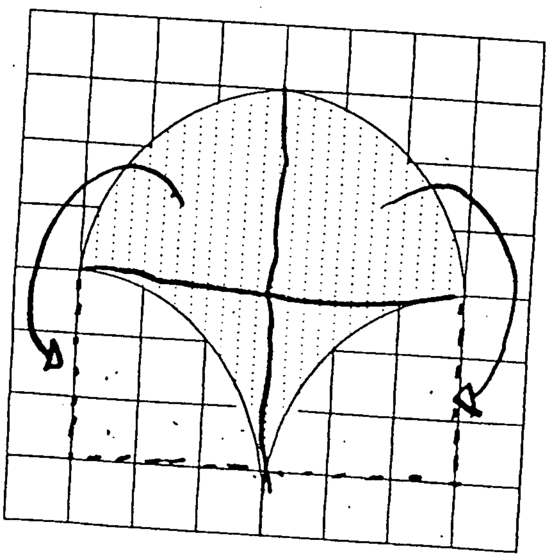
Qual é a área desta superficie? Explique.
(A área de cada quadrado do fundo quadriculado é 1 cm^2.



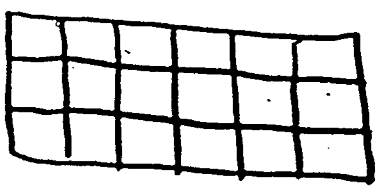
R: Nós tiramos a parte de cima e colocamos em baixo.

R: A area e 18 cm^2.

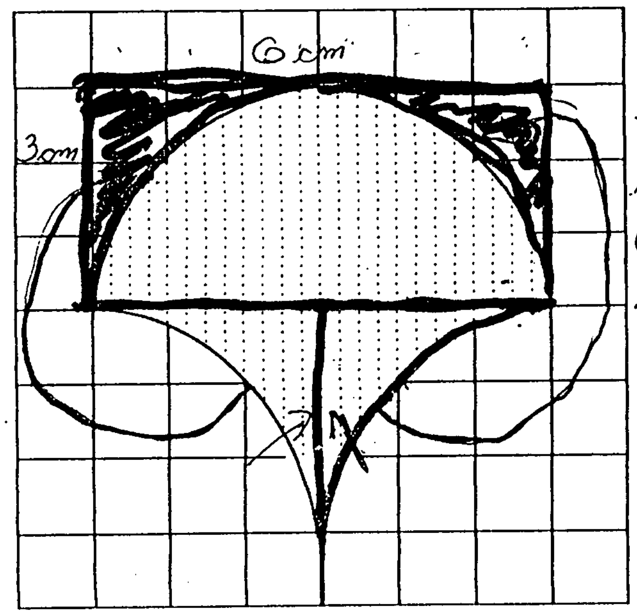
Qual é a área desta superficie? Explique.
(A área de cada quadrado do fundo quadriculado é 1 cm^2.



R: A area da superficie dessa área é de 18 cm^2 porque retiramos as partes de cima e colocamos em baixo



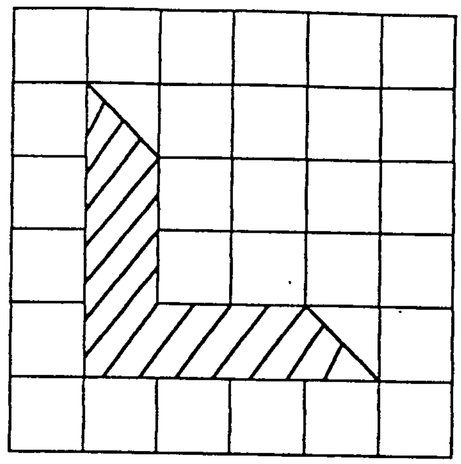
Qual é a área desta superfície? Explique.
(A área de cada quadrado do fundo quadriculado é 1 cm^2.



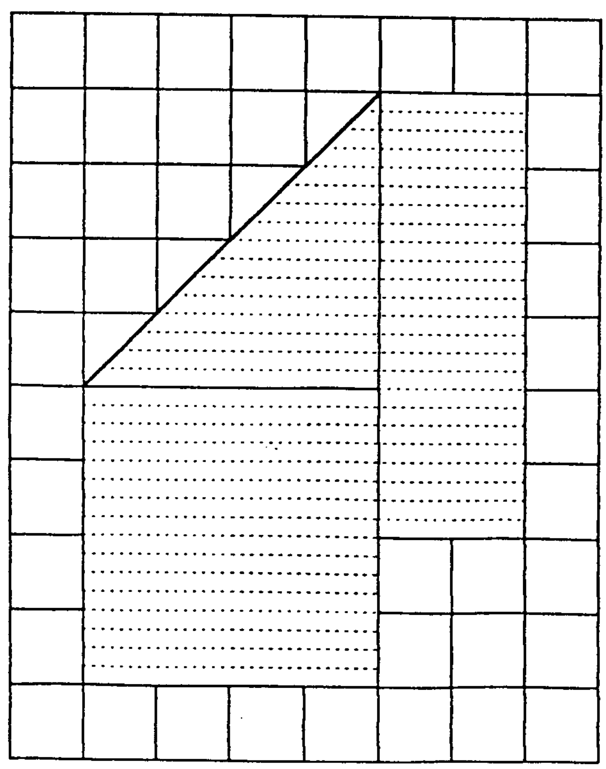
R: A área é 18 cm^2. Porque quando transformamo a figuro num retângulo ela ficou com 3 cm por 6 cm e no multiplicação dos dois deu 18 cm^2 do área.

Atividade nº 5 e 6

Qual é a área da figura hachurada?
Explique como você a conseguiu.
(A área de cada quadrado do fundo quadriculado é 1 cm^2).



Calcule a área da figura hachurada.
Explique como você a encontrou.
Obs.: A área de cada quadradinho do fundo quadriculado é 1 cm^2.



Análise *a priori* das figuras:

Os fatores que interferem na visibilidade e complexidade quando se aplica a operação de reconfiguração são diversos, entre eles destacamos os seguintes para estas duas atividades:

- *As duas figuras são desenhadas sob um fundo quadriculado.*

O fundo quadriculado é um fator de ajuda para a reconfiguração. Ele pode induzir a um procedimento de reconfiguração de pequenos quadrados, pode-se contar aqueles que são completos e, por complementaridade de formas, procurar aqueles que não são. Neste caso é uma reconfiguração local, em que se privilegia o quadriculado do fundo e não a forma global da figura dada.

Pode-se, também, desenvolver um procedimento de reconfiguração global. Assim a figura da atividade nº 5 torna-se um retângulo e a da atividade nº 6 um quadrado. Neste caso privilegia-se a forma global da figura, garantindo uma visualização da situação num todo.

- *Os fracionamentos das figuras em partes elementares não é dado.*

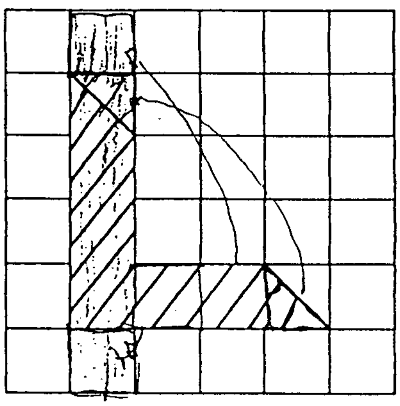
Realmente ele deve ser encontrado. É necessário efetuar, sobre a figura, traços suplementares para a identificação das sub-figuras pertinentes para a reconfiguração. Neste caso, para a figura da atividade nº 6, a complexidade quando se aplica a operação de reconfiguração aumenta, pois o contorno da figura é mais complexo, tendo-se mais partes a completar.

- *Há uma complementaridade de formas.*

Para as duas figuras, as unidades figurais a levar em conta para a reconfiguração são pedaços de unidades figurais de dimensão 2. Neste caso a complementaridade de formas é facilitada devido à olhada gestáltica que nos faz ver onde estão os "buracos" que devem ser preenchidos para tornar a figura numa "boa forma". Porém, para a figura da atividade nº 6, mais deslocamentos no plano serão necessários a fim de obter a figura numa forma global, e isto aumenta a complexidade da reconfiguração.

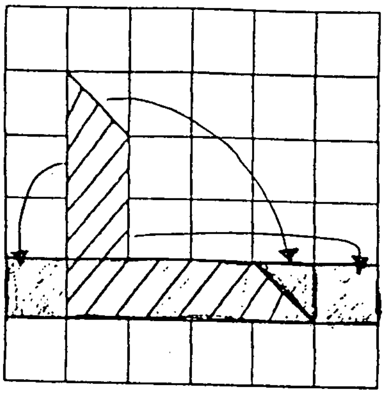
A seguir são apresentados exemplos de procedimentos realizados por alunos a fim de chegar à solução destas atividades:

Qual é a área da figura hachurada?
Explique como você a conseguiu.
(A área de cada quadrado do fundo quadriculado é 1 cm^2).



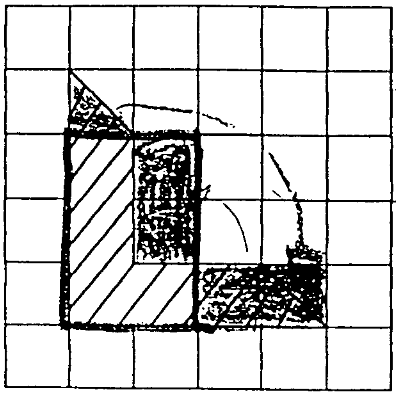
R: A área é de 6 cm^2.
Porque juntamos as partes e formou um retângulo de 6 cm^2.

Qual é a área da figura hachurada?
Explique como você a conseguiu.
(A área de cada quadrado do fundo quadriculado é 1 cm^2).



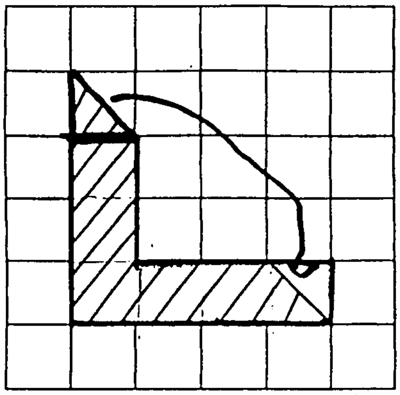
É 6 cm^2
Pegamos as pontas que
estavam pela metade e for-
mou um quadrado
e com os outros dois
quadrados formou
um retângulo.

Qual é a área da figura hachurada?
Explique como você a conseguiu.
(A área de cada quadrado do fundo quadriculado é 1 cm^2).



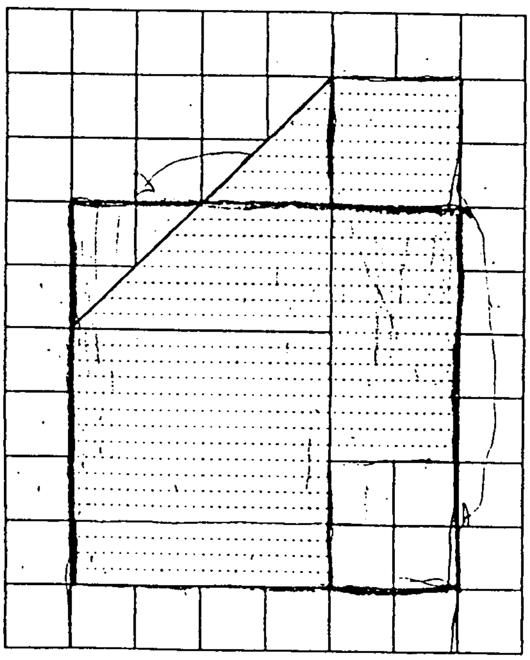
Pegando uma ponta e juntando
com a outra outra quadrada.
Os dois quadrados que sobraram
e colocar para cima formaram um
retângulo.
A área é de 6 cm^2.

Qual é a área da figura hachurada?
Explique como você a conseguiu.
(A área de cada quadrado do fundo quadriculado é 1 cm^2).



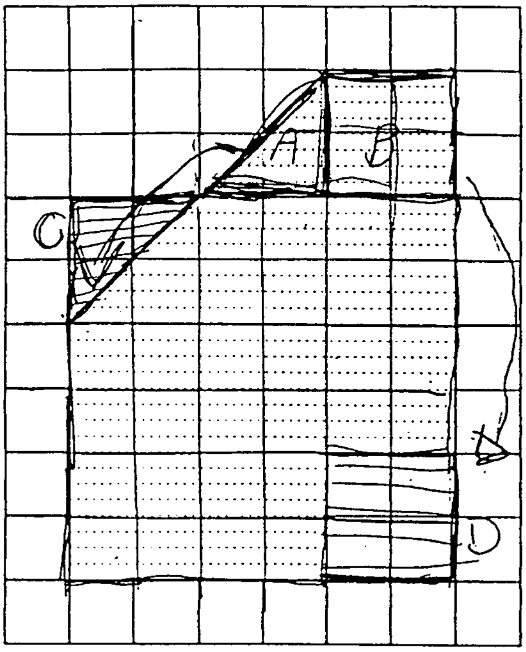
A área é 6 cm^2
A gente pegou as partes q/ es-
tavam sobrando, encaixa-
mos e calculamos.

Calcule a área da figura hachurada.
Explique como você a encontrou.
Obs.: A área de cada quadradinho do fundo quadriculado é 1 cm^2.



R.: A área é de 36 cm^2.
Porque juntamos as partes que so-
bravam e formou um quadrad
de 36 cm^2

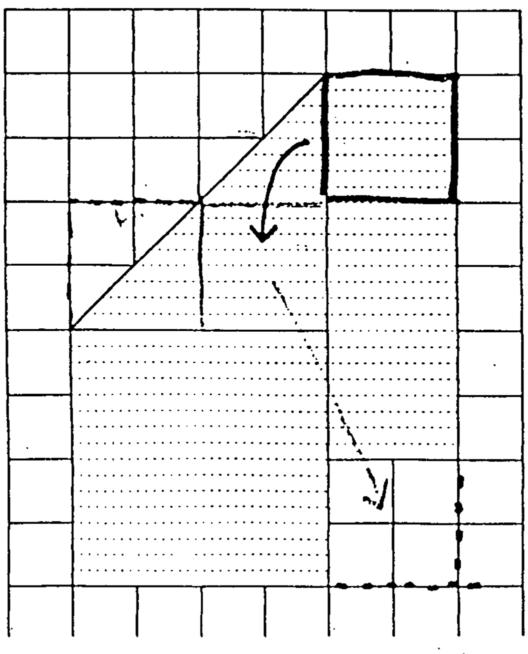
Calcule a área da figura hachurada.
Explique como você a encontrou.
Obs.: A área de cada quadradinho do fundo quadriculado é 1 cm^2.



R: Encontramos juntando a parte A na C e B na D.

R: A área é 36 cm^2.

Calcule a área da figura hachurada.
Explique como você a encontrou.
Obs.: A área de cada quadradinho do fundo quadriculado é 1 cm^2.



R: Fazendo como um quebra-cabeças Você monta um quadrado de 6cm x 6 que dá 36cm²

Atividade nº 7

Descubra como é possível cortar a figura 1 em duas peças iguais, de modo que elas possam recobrir completamente a figura 2.

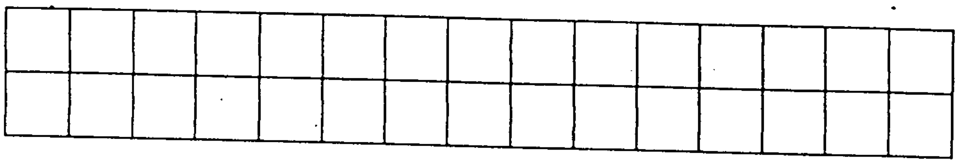


fig. 2

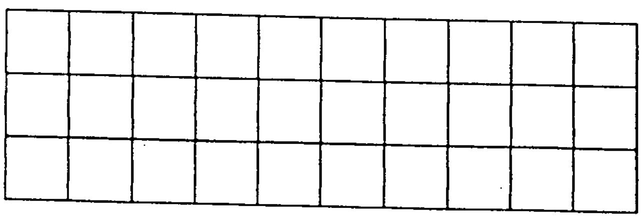


fig. 1

Anállise *a priori* da figura:

Este problema necessita, explicitamente, uma reconfiguração por conjunto de quadrados, a partir de um *fracionamento já dado,* que é o *fundo quadriculado.* Esta reconfiguração é a solução para o problema, mas alguns fatores interferem na visibilidade deste procedimento:

- *O reagrupamento pertinente das partes elementares forma sub - figuras que são não convexas.*

Este é um fator que desempenha um papel importante para encontrar a reconfiguração pertinente entre aquelas que são possíveis.

- *As sub-figuras devem ser deslocadas do interior da própria figura.*

O fato de que a reconfiguração deve ser efetuada no quadro da figura de início é um fator que aumenta o grau de complexidade na visibilidade da operação de reconfiguração.

A seguir alguns exemplos de solução deste problema realizados pelos alunos:

Descubra como é possível cortar a figura 1 em duas peças iguais, de modo que elas possam recobrir completamente a figura 2.

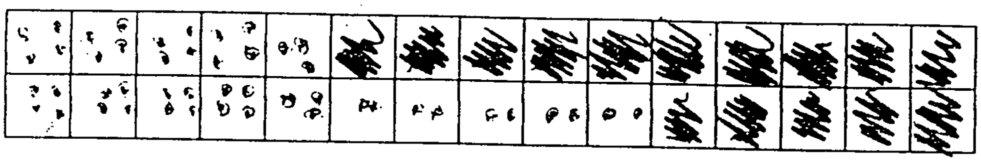


fig. 2

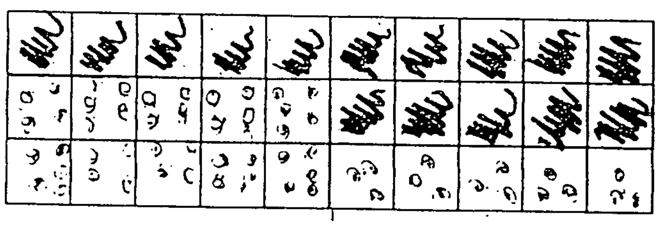


fig. 1

Atividade n° 8

Dividir o quadrado (fig. 1) em duas partes de maneira a reconstruir a figura 2 com estes pedaços.

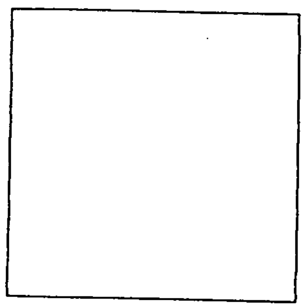


fig. 1

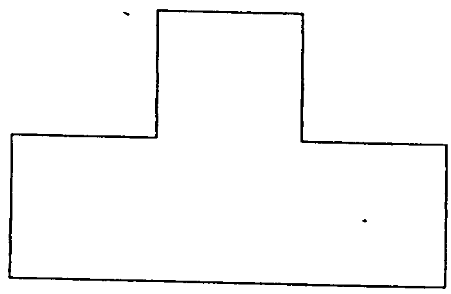


fig. 2

<u>Análise *a priori* da figura:</u>

A aplicação da operação de reconfiguração é pouco visível nesta figura pois, além de diferentes fatores que intervêm sobre ela, é necessária a identificação de duas sub-figuras distintas que são pertinentes para a reconfiguração.

Os fatores que intervêm na reconfiguração são:

- *A figura não é desenhada sobre um fundo quadriculado.*

Se a figura estivesse desenhada sobre um fundo quadriculado, as sub-figuras pertinentes para a reconfiguração seriam mais bem visíveis. Poder-se-ia tentar uma reconfiguração por conjunto de formas.

- *O fracionamento da figura não é dado.*

Ele deve ser efetuado sobre a figura, a fim de encontrar as partes elementares.

- *A reconfiguração é convexa e não convexa.*

As sub-figuras pertinentes para a reconfiguração resultam em uma forma que é convexa e outra que é não convexa. A união destas duas é que vai formar a figura que deve ser reconstruída e que, por sua vez, é uma figura não convexa. Isto dificulta o grau de visibilidade da operação de reconfiguração, pois a simplicidade de contorno, segunda as leis da Gestalt, não é mais respeitada.

A seguir são apresentadas algumas destas atividades resolvidas pelos alunos:

Dividir o quadrado (fig. 1) em duas partes de maneira a reconstruir a figura 2 com estes pedaços.

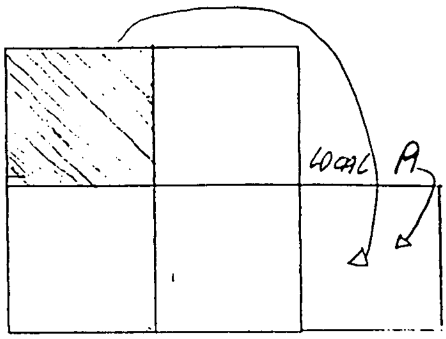


fig. 1

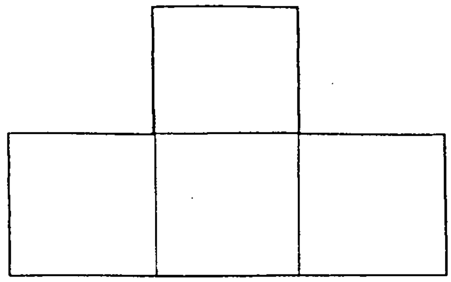


fig. 2

Responda: As áreas das figuras 1 e 2 são iguais ou diferentes? Explique sua resposta.

são iguais porque se nós transferirmos a figura hachurada e colocar no local A e temos duas figuras iguais

Dividir o quadrado (fig. 1) em duas partes de maneira a reconstruir a figura 2 com estes pedaços.

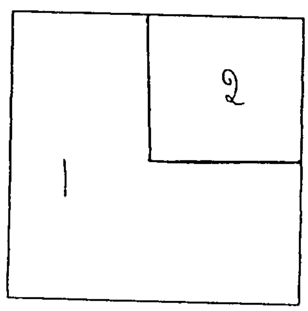


fig. 1

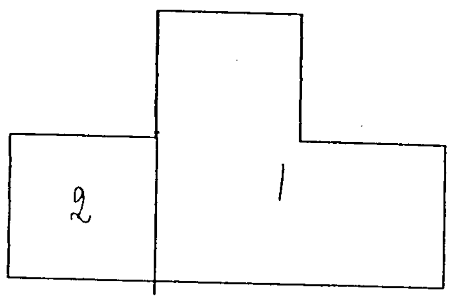


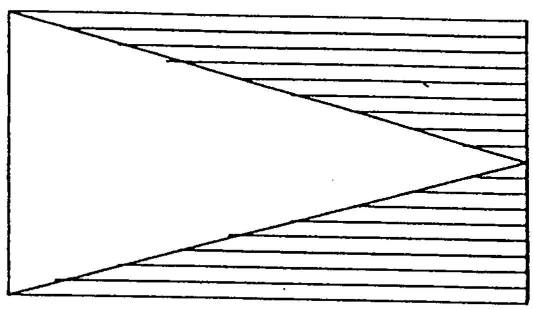
fig. 2

Responda: As áreas das figuras 1 e 2 são iguais ou diferentes? Explique sua resposta.

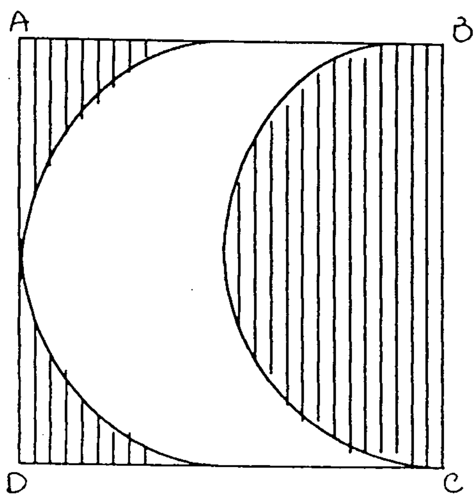
Sim repartindo a um e formando a dois elas ficam iguais

Atividade n° 9 e 10

1. A figura abaixo foi obtida dividindo o retângulo a partir do meio de um lado.
Determine a fração que representa a parte hachurada do retângulo. Explique como você a encontrou.



2. No quadrado ABCD abaixo, compare as áreas das regiões hachuradas e da região não hachurada.



Assinale com X a resposta que você achar correta:
( ) A região hachurada tem a maior área.
( ) As duas áreas são iguais.
( ) A região não hachurada tem a maior área.

Justifique sua resposta.

Análise *a priori* das figuras:

Para as duas figuras envolvidas nestas duas atividades, os fatores que intervêm na visibilidade ou na complexidade da aplicação da operação de reconfiguração são:

- *As figuras não são desenhadas sobre um fundo quadriculado.*

- *O fracionamento das figuras em partes elementares não é dado no início.*

De fato, tratamentos auxiliares são necessários nas duas figuras, a fim de identificar as sub-figuras pertinentes para a reconfiguração; contudo, com apenas um traço é possível a identificação destas partes.

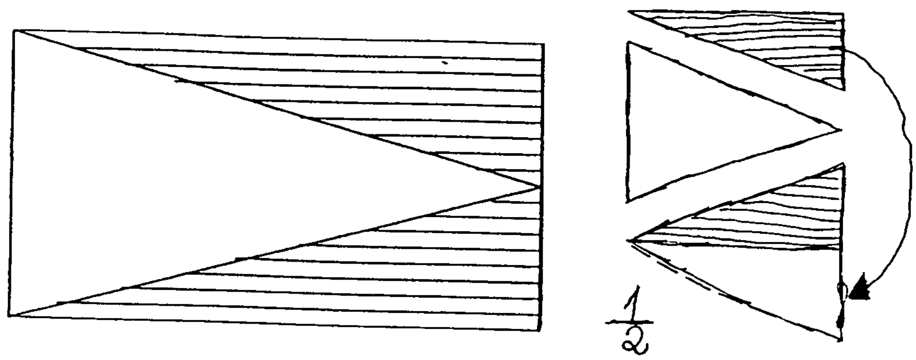
- *Um deslocamento no plano basta para ajustar as unidades figurais.*

Na figura da atividade nº 9 uma rotação é suficiente para ajustar as partes e obter a figura inicial dividida em dois retângulos, mas, neste caso, o *obstáculo do desdobramento* se faz presente, pois a parte hachurada que deve ser deslocada deve ser vista preenchendo o espaço em branco, e onde ela estava deve ser visto o espaço em branco. Também, para esta mesma figura, um outro procedimento pode ser feito, e neste caso se faz necessário sair do quadro da própria figura para determinar as sub-figuras que serão, desta vez, dois triângulos.

Já na figura da atividade nº 10 os dois deslocamentos possíveis se fazem dentro do quadro da própria figura.

A seguir exemplos de como os alunos encontraram a solução para estas duas atividades:

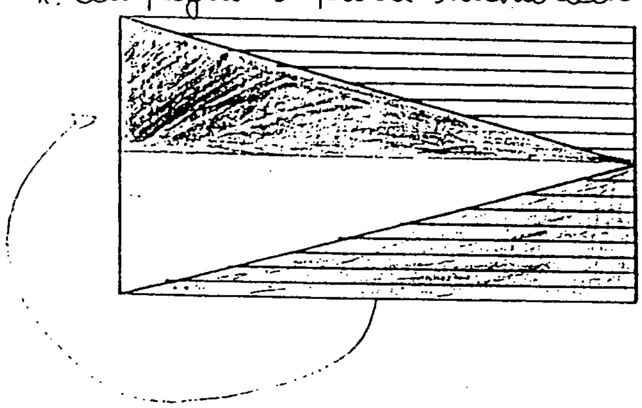
A figura abaixo foi obtida dividindo o retângulo a partir do meio de um lado.
Determine a fração que representa a parte hachurada do retângulo. Explique como você a encontrou.



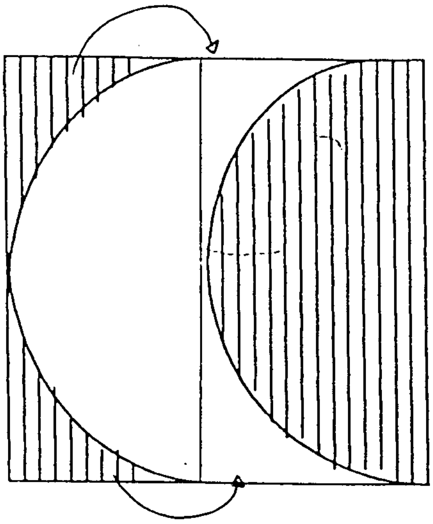
A figura abaixo foi obtida dividindo o retângulo a partir do meio de um lado.
Determine a fração que representa a parte hachurada do retângulo. Explique como você a encontrou.

R: Eu peguei a parte hachurado de baixo e coloquei em cima, formando um retângulo.

R: A fração é $\frac{1}{2}$.



. No quadrado ABCD abaixo, compare as áreas das regiões hachuradas e da região não hachurada.



Assinale com X a resposta que você achar correta:

( ) A região hachurada tem a maior área.

(X) As duas áreas são iguais.

( ) A região não hachurada tem a maior área.

Justifique sua resposta.

Pegamos a parte hachurada e colocamos na outra parte, ficou um retângulo.

4.3- ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE AS ATIVIDADES REALIZADAS.

A experiência de ensino que realizamos ocupou um período breve no ano letivo dos alunos que foram envolvidos. Seria necessário uma continuidade no trabalho, com os alunos, para dar-lhes mais condições de aplicar a reconfiguração, mesmo quando ela não era totalmente visível. Apesar disso, esta experiência serviu, pelo menos, para nos mostrar que os fatores de visibilidade e de complexidade desempenham um papel importante na visualização das figuras, e que merecem uma atenção maior no ensino.

As reconfigurações por complementaridade de formas foram as que mais tiveram sucesso. Isto é claro, pois para realizar este tipo de procedimento, a figura traz consigo mais fatores que possibilitam a visibilidade da aplicação da reconfiguração.

As atividades que permitiam a manipulação das sub-figuras, utilizando-se recorte e colagem, foram consideradas como fáceis pelos alunos. O fato deles poderem manipular as sub-figuras como se elas fossem peças de um quebra-cabeça auxiliou bastante na execução destas atividades e os fez crescer na maneira de olhar esta e as outras atividades que prosseguiram.

Quando as figuras apresentadas traziam um fundo suporte, o fundo quadriculado por exemplo, a reação dos alunos era privilegiar este fundo, fixando seu olhar em pequenas partes da figura e aos poucos ir completando a figura inicial a fim de obter uma nova forma para a figura. Para dar o resultado do exercício, eles usavam um procedimento de contagem. Porém, este procedimento torna-se um pouco mais complicado e cansativo para determinadas figuras (a da atividade nº 4, por exemplo), não oportunizando a visão global da figura. Entretanto, a medida que as atividades foram sendo trabalhadas, este fato, aos poucos, foi sendo neutralizado.

De certa forma, os alunos aprenderam a explorar a figura dada para a resolução de um problema, descobrindo caminhos, reconfigurando de várias maneiras. Nos seus procedimentos, preferiram representar as transformações feitas por desenhos, com a utilização de cores, flechas ou símbolos. Tudo isto partiu da iniciativa deles. O pesquisador apenas encaminhava as atividades e tornava público os diferentes procedimentos realizados.

Percebeu-se que um entusiasmo, bastante grande, com as atividades tomou conta das turmas. A princípio, o que lhes parecia um assunto totalmente desconhecido, aos poucos foi influenciando suas idéias, lhes proporcionando um maior crescimento, se não em aprendizagem constatável objetivamente, mas em maneiras de pensar.

Muitas foram as dificuldades no encaminhamento destas atividades. Uma delas, e que mais nos causou transtornos, é a falta do ensino, que nossos alunos têm, de geometria em nossas escolas. É importante colocarmos que não relatamos, detalhadamente, o trabalho desenvolvido com alguns conceitos da geometria, tais como sistema de medidas, cálculo de área, perímetro, identificação de figuras elementares, pois nosso objeto, neste trabalho de dissertação, não era a construção de um conhecimento matemático específico. Até mesmo, verificou-se, a grande dificuldade que alunos têm em representações fracionárias.

Também a compreensão do enunciado de problema nos deteve a atenção em alguns momentos. Transferir a idéia do enunciado para a figura não é tarefa tão simples e imediata, merece um estudo maior e mais aprofundado. Nesta pesquisa nos detivemos apenas em auxiliá-los naquelas atividades específicas.

É claro que, para uma melhor aprendizagem de tratamentos figurais, a fim de desenvolver competências heurísticas, nossos alunos necessitam que o ensino volte a valorizar a heurística, as figuras na resolução de problemas e sua interpretação. Através desta seqüência podemos observar que é possível esta aprendizagem, mas que é necessário uma conscientização de nossos professores, de que este não é um trabalho realizado num período estanque do ano letivo e, sim, um hábito que deve ser criado junto aos nossos alunos durante todo o período de aprendizagem, tornando-se um hábito constante no ensino, pois acreditamos que só assim estaremos permitindo aos nossos alunos ampliar seu espaço de visualização.

CAPÍTULO V

ANÁLISE DOS DADOS

INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os principais resultados da pesquisa, procurando-se fazer uma análise e discussão dos dados obtidos.

Estes dados são provenientes dos questionários inicial e final aplicados durante a seqüência didática. Eles envolveram uma população total de 188 alunos de 2 escolas de Florianópolis, sendo uma privada e uma pública.

Para maior clareza de como se deu a análise destes questionários, apresenta-se, logo no início, uma visão geral do que ocorreu.

A seguir são analisados os dados recolhidos de cada destes questionários, inicial e final , fazendo-se uma confrontação de seus resultados.

Através desta confrontação pretendemos avaliar a ocorrência de uma mudança de comportamento assim como, um aumento na produtividade heurística dos alunos envolvidos.

5.1- APRESENTAÇÃO DOS QUESTIONÁRIOS

Os questionários foram elaborados com o objetivo de apresentar ao aluno problemas que pudessem ser resolvidos a partir de uma figura.

Estas figuras eram, sobretudo, "ricas" para a aplicação da operação de reconfiguração. Elas podiam ser reconfiguradas de muitas maneiras, o que possibilitava um enriquecimento de estratégias entre os alunos.

A escolha destas figuras objetivou, também, permitir uma variação na gama de fatores que intervêm na aplicação da operação de reconfiguração, tornando esta mais ou menos complexa.

O questionário dito **A** é o questionário que foi aplicado na parte inicial da seqüência didática, e o questionário dito **A*** é aquele que foi aplicado no final da seqüência didática. Estes questionários encontram-se no Anexo II.

O quadro a seguir é uma radiografia teórica da análise dos problemas envolvidos nestes questionários. Ele tem a finalidade de mostrar as variações que serão pertinentes para a nossa análise de dados.

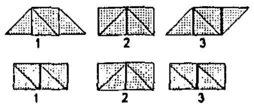
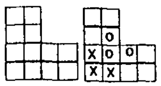
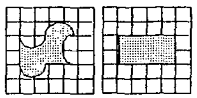
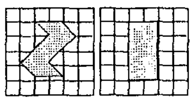
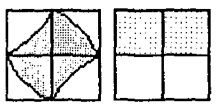
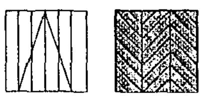
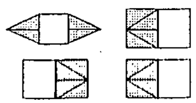
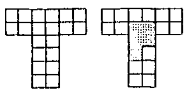
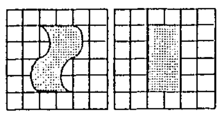
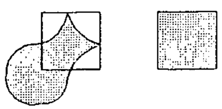
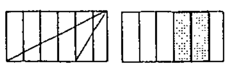
figura inicial + reconfiguração possível	fundo suporte		tratamento possível		fatores que intervem na reconfiguração		complexidade do tratamento figural
	quadriculado /	outro	contagem	/ reconfiguração	auxiliam /	inibem	
 1-A			X	X	fracionamento dado complementaridade de formas		
 2-A	X			X		não convexidade das sub-figuras	
 3-A	x		x	x	complementaridade de formas		
 4-A	X		X	X	complementaridade de formas		
 5-A	X		X	X	complementaridade de formas		
 6-A		X		X	fundo em faixas retangulares	reconfiguração interna à figura inicial	

figura inicial + reconfiguração possível	fundo suporte		tratamento possível		fatores que intervem na reconfiguração		complexidade do tratamento figural
	quadriculado /	outro	contagem /	reconfiguração	auxiliam /	inibem	
 1-A*			X	X	fracionamento dado complementaridade de formas		
 2-A*	X			X		não convexidade das sub-figuras	
 3-A*				X	complementaridade de formas	a figura inicial é não convexa	
 4-A*	X		X	X	fundo quadriculado complementaridade de formas		
 5-A*				X	complementariade de formas	fracionamento não é dado	
 6-A*		X		X	fundo em faixas retangulares		X

5.2- APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Para analisar os resultados obtidos a partir dos questionários utilizados em nossa pesquisa, levantamos alguns fatores que desempenham o papel de facilitador ou, ao contrário, de inibidor sobre a visibilidade, quando se aplica a operação de reconfiguração, interferindo de forma decisiva na produtividade do aluno.

Os questionários foram aplicados em três turmas, designadas, para fim de referenciação rápida, como A, B e C.

A tabela seguinte mostra o número de alunos envolvidos, em cada turma, tanto na aplicação do questionário inicial como do final.

turma	questionário inicial	questionário final	total
A	30	31	62
B	29	32	61
C	33	32	65
	92	95	188

Fazendo uma análise proporcional dos resultados destas turmas que se encontram no quadro de dados no Anexo III, pode-se caracterizar as turmas A e B como quase que homogêneas, por apresentarem resultados bem próximos para quase todos os problemas envolvidos nos questionários, levando-nos a englobá-las numa única, doravante referida como **D**.

Já a turma C apresenta resultados numericamente inferiores aos das outras, fazendo-nos analisá-la separadamente das outras duas, apesar de a variação numérica de acertos ser praticamente a mesma na turma D.

Sendo assim, daqui para a frente, para efeito de análises, falaremos em duas turmas: a **D** com um total de 59 alunos envolvidos no questionário A e 63 no questionário A* ; e a turma **C**, com 33 alunos envolvidos no questionário A e 32 no questionário A*.

O quadro seguinte mostra o número de acertos e erros para cada problema do questionário inicial; mostra, também, o fator predominante que interfere na visibilidade da aplicação da operação de reconfiguração e, o tipo de erro predominante. Ambos podem justificar o êxito ou o fracasso dos alunos diante dos problemas.

Primeiro quadro: Dados do questionário inicial

População envolvida:

Turma D = 59 alunos **Turma C = 33 alunos**

Problema	Acertos		Erros		Tipo de erro predominante	Fator predominante
	D	C	D	C		
1-A	52 (88%)	24 (73%)	7 (12%)	9 (27%)		- complementaridade de formas - fracionamento dado
4-A	29 (49%)	9 (27%)	24 (40%)	15 (45%)	procedimento de contagem	- complementaridade de formas - fundo quadriculado
3-A	21 (35%)	7 (21%)	31 (52%)	15 (45%)	procedimento de contagem	- complementaridade de formas - fundo qudriculado
5-A	12 (20%)	4 (12%)	39 (66%)	13 (39%)	procedimento de contagem	- complementaridade de formas - fundo quadriculado
6-A	19 (32%)	3 (9%)	16 (27%)	5 (15%)		- reconfiguração interna à figura inicial
2-A	10 (16%)	2 (6%)	45 (76%)	26 (78%)	manipulação das sub-figuras não convexas	- não-convexidade das sub-figuras

Deste primeiro quadro constatamos:

1) para ambas as turmas ocorre uma variação numérica dos acertos aos vários problemas, que é mais acentuada na turma D.

Isto mostra que, mesmo para uma turma aparentemente "fraca", a utilização de figuras na resolução de problemas levanta as mesmas problemáticas que são consideradas naquela turma possivelmente mais "forte".

Na verdade, a visibilidade de uma figura é intrínseca ao indivíduo. Ela está relacionada às leis gestálticas da organização da percepção. E os fatores que afetam esta visibilidade, seja para auxiliar ou para inibir o tratamento figural, se comportam de maneira idêntica para grupos de alunos diferentes, ou seja, aquela figura que parece fácil para um grupo de alunos continua sendo fácil para um outro grupo de alunos com características diferentes do outro.

2) existem fatores que são predominantes e que interferem de forma decisiva no tratamento figural.

De fato, para cada problema, há vários fatores que interferem na sua resolução, mas há aqueles que se sobressaem, agindo de forma predominante e sendo, quase sempre, responsáveis pelo acerto ou erro do aluno.

Ligados a estes fatores, outros podem desempenhar papel importante, tanto para facilitar como para inibir a aplicação da operação de reconfiguração.

DETERMINAÇÃO DOS FATORES FECHADOS À VARIAÇÃO DOS RESULTADOS

O quadro apresentado também nos sugere uma classificação dos problemas de acordo com o número de acertos e os fatores que facilitam, ou, ao contrário, dificultam a aplicação da operação de reconfiguração.

A seguir faremos uma análise dos problemas que estão envolvidos, caracterizando esta classificação e procurando justificar a organização do quadro acima apresentado.

Problema 1-A

Este é o problema que apresentou o maior número de acertos, tanto na turma D (com 52 acertos), como na turma C (com 24).

Isto se justifica porque as propriedades do contorno são uma ajuda para a aplicação da operação de *reconfiguração por complementaridade de formas*, permitindo obter uma forma global familiar. Além disso, a reconfiguração pode ser realizada de outras formas, ela não é única neste problema. O aluno pode escolher qualquer uma das sub-figuras dadas na figura inicial para deslocar e modificar a figura de outras maneiras, que não sejam necessariamente para obter a figura inicial num retângulo, por exemplo.

Mas este não é o único fator que auxilia o aluno; outros também participam para que ele consiga resolver o problema facilmente. Os *traços suplementares são dados* na figura inicial dispensando tratamentos auxiliares; tampouco é requerido um fundo suporte para ajudar a encontrar as sub-figuras pertinentes à reconfiguração. As *sub-figuras estão dadas* na figural inicial.

Como as sub-figuras são dadas na figura inicial, um outro procedimento que pode ser feito é a contagem de "peças" que cada figura tem. E como a figura é visivelmente simples, já trazendo as sub-figuras que devem ser contadas, a contagem é igualmente simples.

Problemas 4-A e 3-A

Os dois problemas têm *um fundo quadriculado* e um *contorno que facilita a complementaridade de formas.*

Para obter as sub-figuras pertinentes à reconfiguração são requeridos tratamentos auxiliares que vão permitir a identificação destas sub-figuras. Mas o fato de ter um fundo quadriculado e um contorno que ajuda torna fácil a execução destes tratamentos auxiliares. Basta prolongar as linhas do fundo quadriculado sob a figura e facilmente as sub-figuras serão vistas.

A reconfiguração para estas duas questões pode ser realizada de maneira local (completando os pequenos quadradinhos) ou global (transformando a figura inicial numa outra figura, um retângulo neste caso).

A reconfiguração local fica muito frágil, uma vez que ela privilegia o fundo quadriculado e o procedimento adotado será de contagem dos pequenos quadradinhos. Isto não quer dizer que aqueles que chegaram na forma global destas figuras, o retângulo, não tenham usado o procedimento de contagem, pelo contrário, usaram, mas tiveram maior possibilidade de acerto.

Nota-se, então, que o erro predominante depende deste fundo quadriculado que parece induzir a contagem dos pequenos quadrados como um procedimento único de resolução.

As tabelas abaixo mostram esta situação. Da quantidade de erros para cada uma destas questões, separamos aqueles que usaram a contagem como procedimento único, que nos parece um número bastante significativo.

3-A

turma	procedimento contagem	outros procedimentos	total de erros
D	19	12	31
C	13	2	15

4-A

turma	procedimento contagem	outros procedimentos	total de erros
D	17	7	24
C	11	4	15

Este fato explica o porque do grande número de acertos para o problema A-1 e não para estes dois; afinal eles apresentam o mesmo fator visual predominante.

Ainda, para o problema 3-A o acerto foi menor. Isso se dá devido ao contorno desta figura. Sua forma arredondada torna-se visualmente mais difícil para a aplicação da reconfiguração .

Parece mesmo que a aprendizagem fica muito condicionada aos fotores que influenciam na visibilidade de um tratamento figural. Aquele fator visual que pode ora facilitar, pode também dificultar.

Problema 5-A

Este problema tem um *fundo quadriculado* e um *contorno que auxilia na complementaridade de formas.*

As sub-figuras pertinentes à reconfiguração são facilmente identificadas devido a este fundo quadriculado, que sugere onde elas se encontram e para onde devem ser deslocadas a fim de regularizar a figura.

Porém, da mesma forma que nos problemas 3-A e 4-A, este fundo quadriculado parece induzir ao procedimento de contagem, levando muitos alunos ao fracasso. Mesmo assim, o número de acertos, 12 para a turma D e 4 para a turma C, caiu bastante em relação a estas outras duas questões.

Nesta questão é preciso, então, ver três aspectos: o acerto matemático, o acerto visual e o erro.

O acerto matemático se dá quando o aluno conclui o exercício corretamente. O acerto visual se dá quando o aluno faz uma boa reconfiguração, mas utiliza o procedimento de contagem dos quadrados para dar a resposta matemática, que neste caso será errada. E o erro se dá quando o aluno de fato erra toda a questão.

A tabela a seguir mostra a situação das turmas analisadas, a partir dos erros nesta questão e segundo os critérios que definimos acima.

turma	acerto	acerto visual com erro mat.	erro
D	12	23	16
C	4	4	9

É claro que em nossa apresentação de dados, exposta no primeiro quadro, consideramos como erro para esta questão tanto quando o aluno errou totalmente, como também quando acertou visualmente mas errou matemáticamente.

Mas convém olhar que dos 39 erros da turma D, 23 alunos fizeram uma boa reconfiguração, ou seja, visualmente estaria correto, mas usaram a contagem de quadrados para dar a resposta matemática, chegando assim ao erro. O mesmo verifica-se para a turma C, só que em quantidades menores.

Isto explica a queda de acertos para esta questão, uma vez que o fator visual predominante é o mesmo que nos problemas anteriores.

É claro que para o acerto total deste problema (12 na turma D e 4 na turma C), era preciso ousar mais, era preciso estabelecer uma relação entre figura e enunciado.

Problema 6-A

Apesar da figura deste problema *trazer as faixas retangulares* que é um auxílio para a aplicação da operação de reconfiguração, ele não se mostrou fácil para a resolução. Poucos foram os que acertaram, 19 da turma D e 3 da turma C. Houve mais respostas em branco do que propriamente erradas. Assim, não podemos selecionar um erro predominante. O aluno errou porque realmente não sabia o que fazer diante deste problema.

O que levou a queda de acertos neste problema é o fato da *reconfiguração ser interna à figura inicial.* Além disso, tem-se que fazer tratamentos sobre <u>oito unidades figurais perceptivamente organizadas em</u>

torno de uma simetria axial. De qualquer forma é um tratamento um pouco menos custoso pois a figura é simétrica.

Problema 2-A

A resolução deste problema pede, explicitamente, uma reconfiguração por conjunto de formas.

Este conjunto de formas é um reagrupamento pertinente de partes elementares que deve ser construído e não simplesmente destacado da figura. Mas, de toda forma, ele constitui uma sub-figura que deve sair do interior da própria figura.

É um tanto difícil encontrar este reagrupamento pertinente à reconfiguração, uma vez que o resultado dele é a obtenção de sub-figuras não convexas.

É preciso mais para chegar à solução deste problema, deve-se efetuar modificações posicionais das sub-figuras. O número de operações e manipulações que deve ser realizado para descobrir e colocar corretamente as sub-figuras no lugar torna ainda mais difícil a resolução deste problema.

Tudo isto justifica a queda enorme de acertos e o alto número de erros. A resolução deste problema, aliás, exige, muito mais que um olhar atento. É preciso recorrer à experiência, à memória; é preciso, sobretudo, recorrer à construção que garanta as sub-figuras pertinentes à solução do problema.

Outro fato que marca a solução destes problemas e que causou grande parte do fracasso dos alunos frente a eles, é a compreensão do enunciado e a relação dele com a figura. De fato, a coordenação entre figura e discurso não é tarefa tão simples. Ela envolve outros elementos que merecem uma atenção maior, exigindo mesmo um estudo mais específico.

ANÁLISE DE ALGUNS ERROS EM FUNÇÃO DOS FATORES

Para o problema 2-A

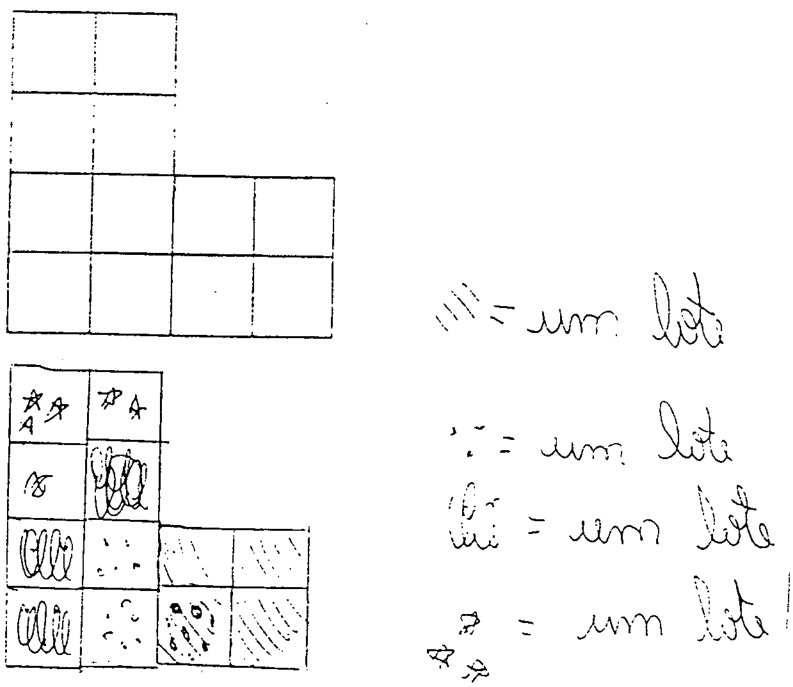
Os dois exemplos seguintes mostram a interferência da não convexidade das sub-figuras na realização da operação de reconfiguração.

Este é um fator predominante que levou muitos alunos ao erro. Eles descobrem as sub-figuras pertinentes à solução do problema, mas não conseguem manipulá-las a fim de ter a real solução do problema.

Problema nº 2 - A

Um terreno em forma de L, como mostra a figura abaixo, deve ser dividido em quatro lotes de mesma área e de mesma forma. Descubra como serão esses lotes.

Explique como você fez.

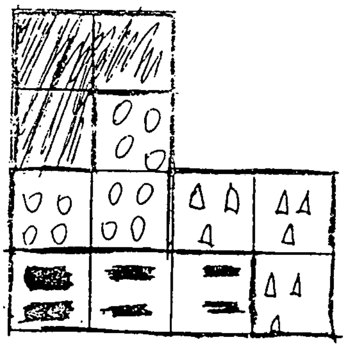


R = Eu dividi todos em três quadradinhos.

Problema n° 2 - A

Um terreno em forma de L, como mostra a figura abaixo, deve ser dividido em quatro lotes de mesma área e de mesma forma. Descubra como serão esses lotes.

Explique como você fez.



Como está figura tem que ser dividida em quatro partes iguais deveremos somar tudo e dividir por quatro.

E vimos (~~[illegible]~~) então que dá três quadrados para cada parte.

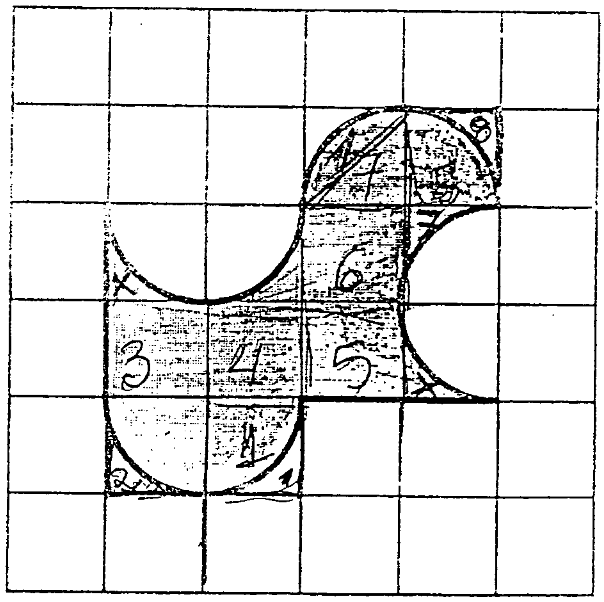
Para o problema 3-A e 4-A

Os exemplos seguintes mostram o predomínio do fundo quadriculado levando os alunos ao procedimento de contagem que geraram a maior parte dos erros.

Problema nº 3 - A

Qual é a área desta superfície? Explique sua resposta.

(A área de cada quadradinho do fundo quadriculado é 1 cm^2.)



R: 8,5 cm^2

É só você (~~[illegible]~~) montar retirando os quadradinhos pequenos (método) formando 1 quadrado.

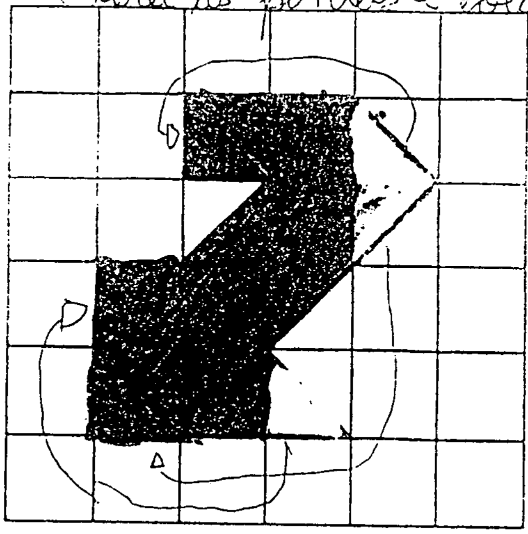
Problema nº 4 - A

Calcule a área da figura hachurada. Explique como você a obteve.

Obs.: A área de cada quadradinho do fundo quadriculado é 1 cm^2.

7[illegible] cm^2

Eu tirei as pontas e coloquei outras



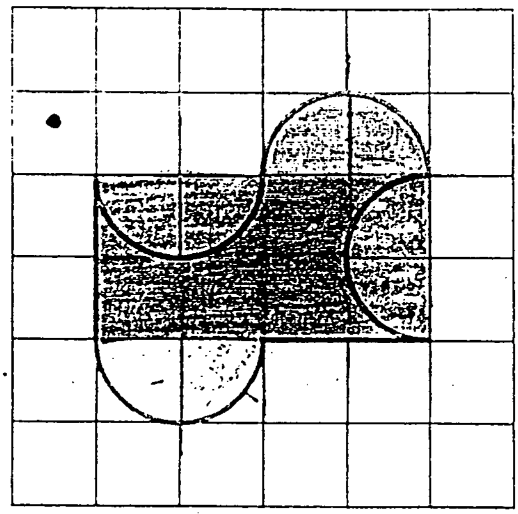
Os exemplos acima mostram que o aluno vê uma reconfiguração local, predominando o fundo quadrado e utilizando o procedimento de contagem de área de cada quadradinho para dar a solução do problema

A seguir um exemplo típico onde o aluno faz uma boa reconfiguração, mas, não acredita no tratamento figural e utiliza o procedimento de contagem para dar a solução do problema que levará ao seu erro.

Problema nº 3 - A

Qual é a área desta superfície? Explique sua resposta.

(A área de cada quadradinho do fundo quadriculado é 1 cm^2.)



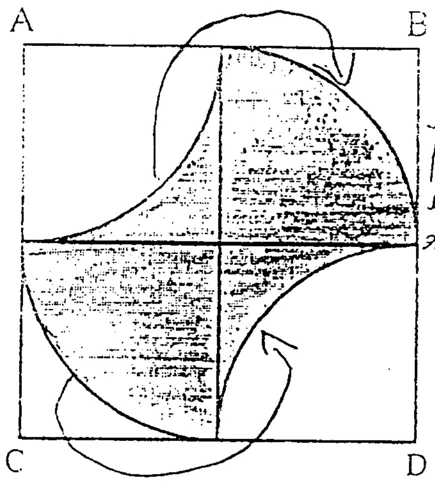
R: É [illegible] quadrados ([illegible]) pois é só formalo em um retangulo e contar os quadradinhos.

Para o problema 5-A

Os dois exemplos seguintes caracterizam a situação em que o aluno faz uma boa reconfiguração na figura deste problema, mas não realiza uma coordenação entre a figura e o que diz no enunciado, deixando, mais uma vez, que o fundo quadriculado dirija sua solução. Desta forma ele faz um procedimento de contagem dos quadrados.

Problema nº 5 - A

ABCD é um quadrado de lado 4 cm. Calcule a área da superficie hachurada. Explique como você a encontrou.

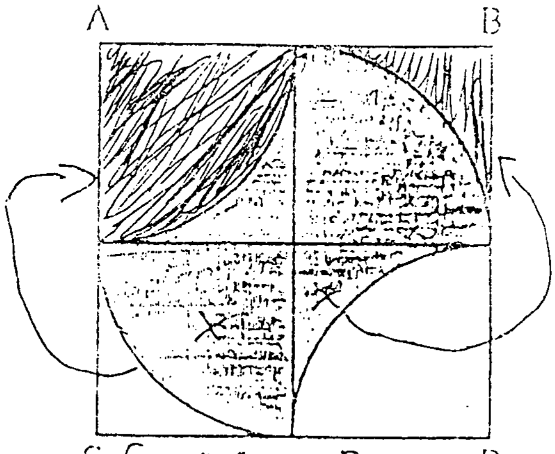


A área é 2cm². Peguei as partes menores que estavam nos quadra A e B tran-
portei para o B e transportei a área me-
nor que estava no quadrante C e passei para o D.

Problema nº 5 - A

ABCD é um quadrado de lado 4 cm. Calcule a área da superficie hachurada. Explique como você a encontrou.

2cm²



C C -> A D -> B D

Segundo quadro: Dados do questionário final

População envolvida:

Turma D = 63 alunos **Turma C = 32 alunos**

Problema	Acertos		Erros		Fator predominante
	D	C	D	C	
1-A*	61 (97%)	29 (90%)	2 (3%)	3 (9%)	fracionamento dado complementaridade de formas
5-A*	53 (84%)	6 (19%)	3 (4%)	6 (19%)	complementaridade de formas
3-A*	49 (78%)	10 (31%)	10 (16%)	4 (12%)	complementaridade de formas
4-A*	48 (76%)	11 (34%)	7 (11%)	4 (12%)	complementaridade de formas fundo quadriculado
2-A*	37 (59%)	9 (28%)	24 (38%)	16 (50%)	não convexidade das sub-figuras
6-A*	15 (24%)	1 (3%)	25 (39%)	11 (34%)	maior complexidade de tratamento

Comparando os resultados apresentados no primeiro quadro com os resultados deste segundo quadro, constatamos que ocorreu:

1) um aumento nas taxas de acerto;

2) uma homogeneização nas taxas de acertos.

Concernente ao primeiro ponto pode-se verificar claramente esta conclusão fazendo as seguintes comparações:

- para a questão 1, passa-se de uma margem de acertos de 88% para 97% na turma D, e de 73% para 90% na turma C;

- para as questões 3, 4 e 5, passa-se de uma margem de acertos compreendida entre 20% e 49% para uma margem de acertos compreendida entre 76% e 84% na turma D, e uma margem compreendida entre 12% e 27% para 19% e 34% na turma C;

- para a questão 2, passa-se de uma margem de acertos de 16% para 59% na turma D e, de 6% para 28% na turma C.

Para a turma D estes dados representam um ganho de 20 a 30 alunos. Para a turma C o ganho já é menor. Mas, de qualquer forma, observa-se este ganho para todas as questões.

É claro que se houve **aumento nas taxas** de acerto, a aprendizagem ocorreu, mas é muito mais importante ressaltarmos o segundo ponto. Esta **aproximação das taxas** de acerto nos mostra que não é aleatório o acerto de uma ou de outra questão, ele acontece porque o aluno sabe resolver. Além disso verifica-se que não há diferença sensível entre a maior parte das questões, apesar das variações de acerto passarem de 20% e 80% para 76% e 97%, excluindo-se, é claro, a questão 6, pois para esta questão há um salto brutal na complexidade do tratamento figural.

Esta aproximação nos resultados pode, também, ser caracterizada analisando a situação dos problemas 4-A e 3-A (questionário inicial - primeiro quadro), em que se observa que não são os mesmos alunos, ou pelo menos não a grande parte, que resolve 3-A e também 4-A (ver cruzamento de dados no Anexo IV).

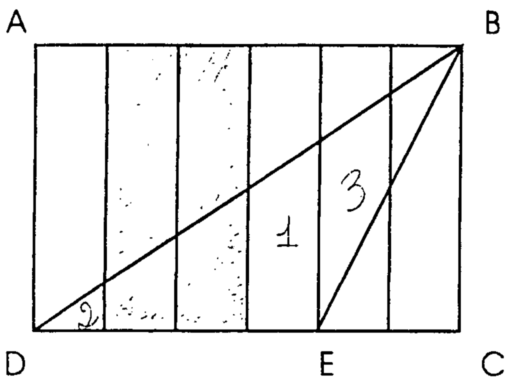
Situação diferente podemos verificar neste último quadro. A aproximação dos resultados é visível e grande entre as questões 5-A*, 3-A* e 4-A*, podendo ainda considerarmos próximos destes os resultados de 1-A* e 2-A*, conforme as marcações em negrito e pontilhados que colocamos no quadro acima (ver cruzamento de dados destas questões no Anexo IV).

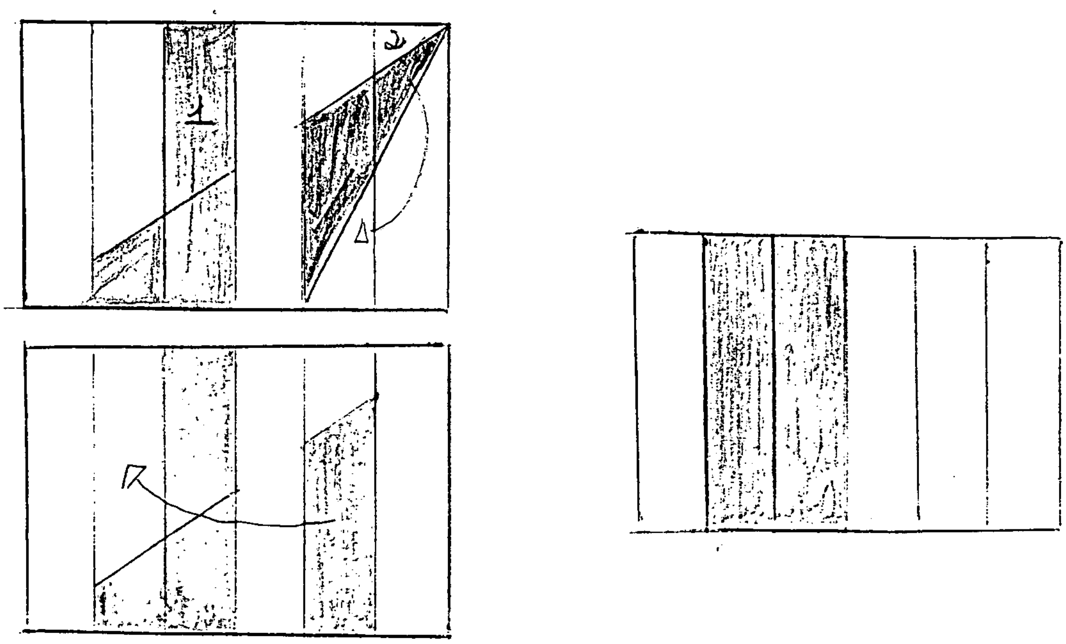
A queda no acerto da questão 6-A* é devida ao grande custo de tratamento figural que o problema exige. A figura apresenta, praticamente, os mesmos fatores que a figura da questão 6-A. Mas, sendo até mesmo surpresa para nós, o fator que predominou e que fatamente levou ao resultado da questão 6-A* é a maior complexidade de tratamentos exigidos nesta figura em relação à figura do problema 6-A.

Na figura do problema 6-A* temos que realizar tratamentos sobre 14 unidades figurais perceptivamente não organizadas em torno de uma simetria axial. Isto torna o tratamento figural bastante custoso e não seria numa curta aprendizagem que nossos alunos conseguiriam resolvê-lo.

Observem-se os procedimentos que este aluno fez para chegar à solução deste problema.

Problema nº 6 - A*
Dividimos um retângulo ABCD em partes iguais. Qual é a fração da área do retângulo que representa a área do triângulo BED?
Explique como você a encontrou.





5.3- ALGUMAS CONSIDERAÇÕES FINAIS

O propósito de recolher e analisar os dados obtidos através de nossa seqüência didática é confirmar se houve uma aquisição de tratamentos figurais. Para isso é preciso olhar e verificar do primeiro para o segundo quadro de dados, três constatações:

1) aumento na taxa de acertos;

2) estabilidade na taxa de acertos;

3) transferência da aprendizagem para outras questões radicalmente diferentes.

A primeira constatação é visivelmente observada comparando os resultados de acertos do primeiro quadro com os do segundo quadro.

Também pode ser visivelmente notada no último quadro a segunda constatação. Constata-se que os resultados de acertos ocorrem com uma certa estabilidade de uma questão para outra. Consideramos esta constatação como sendo mais importante, pois uma boa aprendizagem deve atenuar ou apagar a variação de acertos.

Estes dois fatos ocorridos e constatados na análise dos dados nos mostram que os fatores que interferem na visualização da operação figural, e que introduzem a diferença nos resultados foram neutralizados, ocorrendo aquilo que nos garante a aquisição da aprendizagem: uma homogeneização seguida de um aumento nos resultados de acertos.

A terceira constatação, é o que consideramos mais frágil de confirmar em nossa pesquisa, uma vez que a seqüência didática desenvolvida ocupou um prazo curto no período escolar. Para, de fato, garantir esta questão, seria necessária uma continuidade na pesquisa, já que este fato só poderia ser mais bem observado ao longo do tempo.

Desta forma, os resultados adquiridos e analisados a partir da aprendizagem realizada durante a seqüência didática, nos mostra uma aquisição de tratamentos figurais para a resolução de problemas. Mas mostra, também, que, um tratamento figural aparentemente simples pode tornar-se longo e complicado, exigindo do aluno habilidade e desenvoltura, assim como um grande cálculo matemático.

A turma C caracterizou-se por apresentar resultados menores, porém relativamente proporcionais as outras turmas analisadas. Talvez fosse preciso um tempo de trabalho um pouco mais longo ou a realização de tarefas com mais explicações verbais para facilitar a conscientização e aumentar aprendizagem desta população de alunos.

CONCLUSÃO

A geometria é um campo da Matemática que lida com atividades cognitivas bastante diferenciadas. Tomar consciência desta heterogeneidade abre caminhos para a descoberta de uma aprendizagem específica destas atividades.

Aqui, nesta pesquisa, transcorremos por aquilo que chamamos de visualização de figuras geométricas. Para isto dirigimos nossa atenção sobre os tratamentos ligados à "apreensão operatória" das figuras, oportunizando uma aprendizagem da operação de reconfiguração, buscando a neutralidade dos fatores que inibem a aplicação desta operação, a fim de obter alunos com uma maior desenvoltura no tratamento com figuras.

Assim, os alunos são introduzidos ao registro das figuras, registro de representação que tem suas operações e seus tratamentos próprios, e que é independente de toda e qualquer subordinação teórica. E é esta particularidade que torna as figuras um objeto de exploração heurística.

Uma aprendizagem de tratamentos figurais deve conduzir os alunos a uma conscientização das possibilidades heurísticas do registro figurativo, levando-os a um crescimento visual e a uma desenvoltura na sua capacidade interpretativa da Matemática como um todo, bem como do mundo que lhes rodeia.

Mas isto que chamamos "aprender a ler uma figura" não é tarefa tão simples e imediata. Este trabalho de pesquisa desenvolvido reencontra resultados que foram encontrados na França há alguns anos atrás, com a pesquisa realizada por Virgínia Padilla Sanchez, em 1992.

Estes resultados comprovam que a apreensão visual é, de fato, ignorada em nosso ensino, ou que, nem mesmo é considerada como uma atividade que exige muito mais que olhar simplesmente. Todavia, um tratamento figural é uma atividade bastante complexa, que pode tornar-se longa e complicada como um grande cálculo, mesmo quando, aparentemente, parece ser muito simples.

Portanto, no Brasil, em situações diferentes daquelas que Padilla encontrou na França, nós nos deparamos com resultados semelhantes. Que as dificuldades na visualização não estão ligadas ao ensino, mas sim, que elas são intrínsecas ao indivíduo, que estão diretamente ligadas ao funcionamento cognitivo de cada ser.

A partir dos resultados encontrados em nossa pesquisa podemos, de fato, concluir que a dificuldade na visualização está centrada basicamente em dois pontos:

1) em ver a figura, ver como se vê uma radiografia, vê-la a partir de todas as possibilidades que ela pode oferecer;

2) em se apropriar desta leitura, ter apreendido a capacidade de leitura de figuras, neutralizando fatores que possam interferir na busca errada da solução do problema.

Este trabalho que acabamos de concluir é apenas uma pequena contribuição para o desenvolvimento daquilo que chamamos de aprender a ver. E isto não é o suficiente para ajudar nossos alunos a utilizar figuras de maneira heurística na resolução de problemas, pois se observou que, mesmo sendo neutralizados os fatores que ocultam a visibilidade da aplicação da operação de reconfiguração, mesmo ocorrendo uma homogeneização seguida de um aumento nos resultados de acertos encontrados a partir da seqüência didática realizada, há problemas com figuras que exigem um custo de tratamento figural muito maior, tornando esta atividade bastante complexa. E isto porque? Porque eles não são capazes de ver corretamente a figura inicial, aquela que é ligada à situação do problema.

Aprender a ver não é somente dispor de figuras isoladas de um contexto as quais se aplicarão tratamentos figurais. É, sim, utilizar as figuras iniciais realizando uma mudança de registro, a correspondência entre figura e enunciado, possibilitando assim as transformações na figura inicial, que a levarão a uma figura que mostra a solução do problema. Só assim as figuras funcionarão de maneira heurística.

Todas estas constatações colocam em evidência a necessidade e a importância de diferentes tratamentos figurais que possibilitem às figuras desempenharem seu papel heurístico.

Isto que chamamos de ver uma figura é portanto fundamental em geometria, e não é, de forma alguma, uma atividade constante e evidente. É sobretudo uma questão de tratamento, cuja complexidade deve ser considerada e analisada na aprendizagem da geometria.

BIBLIOGRAFIA

01. *A Educação Matemática em Revista. Geometria.* SBEM - nº 4 - 1º semestre- I995

02. ARAÚJO, Maria Auxiliadora Sampaio. *Porque ensinar Geometria nas séries iniciais de 1º grau.* A Educação Matemática em Revista- SBEM. n° 3- 2º sem. I994.

03. ANNA FRANCHI , at alli.. *Geometria no 1º grau: da composição e da decomposição de figuras às fórmulas de área.* São Paulo: CRL Balieiro, 1992. Coleção ensinando-aprendendo, aprendendo-ensinando;7.

04. AUSTIN J. L. (1971). *Le Langage de la Perception.* Librairie Armand Colin . Paris.

05. BOYER, Carl B. *História da Matemática.* Trad.: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

06. *Boletim Gepem - Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática,* nº 32, ano XVIII, 1994.

07. *Bolema - Boletim de Educação Matemática.* Ano 3, nº 5 - 1988. UNESP - Rio Claro.

08. BONNEFOND, Gérard, at alli. *Collection Pythagore, 4e Mathématiques. Hatier Paris, 1988.*

09. CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Lisboa. 1975

10. DOUADY, Régine. *Evolução da Relação com o Saber em Matemática na Escola Primária: uma crônica sobre cálculo mental.* In: Em Aberto, INEP, Brasília, ano 14, n° 62, p.33-42, abr/jun, 1994.

11. DUVAL, R. (1988) *Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM de Strasbourg, p.57-74.

12.DUVAL, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée.* In: Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Strasbourg, IREM, v. V, p.37-65.

13. DUVAL, R. (1994). *Primière Partie: Représentations et registres de représentation.* (xérox).

14.DUVAL,R. *Why To Teach Geometry?* IREM Strasbourg. (xérox)

15. DUVAL, R. (1994) *Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique.* REPERES -. n° 17. IREM de Strasbourg.

16. DUVAL, R. (1995) *Sémiosis et Pensée Humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Peter Lang S. A. Suisse.

17. DUVAL, R. (1997) *La Géométrie et les Variables de Visualisation.* (xérox)

18. FRANCES R. (1981) *La Perception. Que sais-je?* Presses Universitaires de France

19. GUELLI, Oscar. *Contando a História da Matemática- A invenção dos números.* São Paulo, Editora Ática;, 1992.

20. GUELLI, Oscar. *Contando a História da Matemática- Equação: o idioma da álgebra.* São Paulo, Editora Ática;, 1992.

21. GUELLI, Oscar. *Contando a História da Matemática- Dando corda na trigonometria.* São Paulo, Editora Ática;, 1992.

22.GIOVANNI E GIOVANNI JR. *Matemática - Pensar e Descobrir*, 8. São Paulo, FTD, 1996.

23 GUILLAUME, Paul. *La psychologie de la Forme.* Ernest Flammarion, Éditeur. 1942.

24. HANSON. N. R. *Observação e Interpretação.* In: MORGENBESER. S. (org.). *Filosofia da ciência.* S. Paulo. Cultrix.1975.

25. HOCHBERG, Juliano. *Percepção.* Trad.: Álvaro Cabral. Curso de Psicologia Moderna. Zahar Editores. Rio de Janeiro.1966.

26. HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da Matemática - Influências e Função da Matemática nos conhecimentos humanos.* Trad.: Paulo Moreira da Silva, Roberto Bins e Henrique Carlos Pfeifer. Editora Globo, 2ª edição- 3ª impresão. Porto Alegre. 1970.

27. HOWARD, Eves. *Tópicos de História da Matemática* - para sala de aula- Geometria. (Trad. : Hygino H. Domingues). Atual Editora Ltda, 1994.

28. LABORDE, Colette (l988). *Problemes de L'enseignement de la Géométrie au college.* Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 1. pp. 75-93. IREM de Strasbourg.

29. LABORDE C. (1990). L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phènomènes didactiques, Recherches en didactique des mathématiques, vol.9, nº 3, pp.337-63.

30. LABORDE, Colette (1994). *Enseigner la géométrie: permanences et révolutions.* Bulletin APMEP - nº 396.

31. LOVELL, K. *O desenvolvimento dos conceitos matemáticos e científicos na criança.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1988.

32. MACHADO, Nilson José. *Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua.* São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1990. (Coleção educação contemporânea; 59).

33. MACHADO, Nilson José. *Epistemologia e Didática: As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente.* São Paulo: Cortez, 1994.

34. MESQUITA, A. (1989) *A influência de aspects figuratis dans l'argumentation des élèves en géométrie.* Thèse de doctorat. Université Louis Pasteur.

35. MESQUITA, A. et PADILLA, V. (1990) *Point d'ancrage en géométrie.* Dans L'Ouvert. Journal de l'APMEP d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg, nº 58, pp. 30-35.

36. MESQUITA A. L., 1989. *Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie. Educational Studies in Mathematics.* vol. 20, nº 1, pp. 55-77.

37. PADILLA, V.(1990) *Les figures aident-elles à voir en géométrie*? Annales de Didactique et des Sciences Cognitives 3, pp.223-252.

38. PADILLA, V. (1992) *L' influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'appresntissage des mathématiques.*Thèse de doctorat. Universite Louis Pasteur.

39. PAVANELLO, Regina Maria.(1993) *O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências.* Revista Zetetiké, 7, ano I- nº1/1993.

40. PIAGET, Jean e INHELDER, Bärbel. *A representação do espaço na criança.*(Trad. : Bernardina Machado de Albuquerque).Porto Alegre: Artes Médicas. 1993.

41. POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo enfoque do método matemático.*Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro, Interciência Ltda, 1994.

42.KRECH, D. e CRUTCHFIELD R. *Elementos de Psicologia.* Primeiro Volume. Trad.: Dante Moreira Leite e Miriam L. Moreira Leite. 3ª edição.

Livraria Pioneira Editora, São Paulo, 1971.

43. Relatório de Atividades para o projeto de cooperação - 174/95: "Programa de Pesquisa sobre Ensino de Matemática.". Outubro, 1994 - Agosto 1996.

44. RIBEIRO, J. P. *Gestalt. Terapia: Refazendo um Caminho.* São Paulo. Summus Editorial. 1985.

45. THIOLLENT, Michel. *Metodologia da pesquisa-ação.* São Paulo, Cortez; Autores Associados, 1985. (Coleção temas básicos de pesquisa-ação).

46. SAIZ, Irma. *Análise De Situações Didáticas Em Geometria Para Alunos Entre 4 e 7 Anos.* In: Construtivismo Pós-Piagetiano: um novo paradigma sobre aprendizagem. Org.: Esther Pillar Grossi e Jussara Bordin. Petrópolis, RJ: Vozes, 1993.

ANEXO I

QUESTIONÁRIOS UTILIZADOS NO 1º ANO DO 2º GRAU

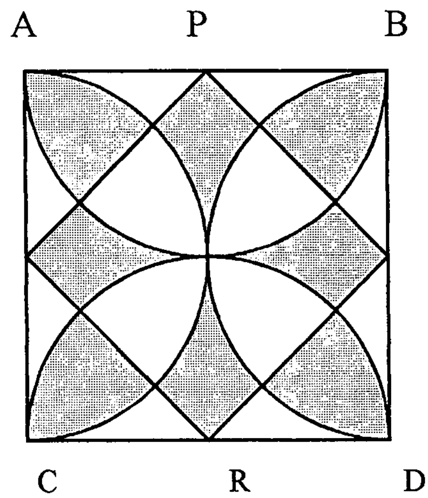
Escola: Série:

Nome: Idade:

Questionário B

Problema nº 1 - B

ABCD é um quadrado e P, Q, R, S são os meios dos lados.
Compare a área da região hachurada e da região não hachurada.
Marque com um **X** a alternativa correspondente a sua resposta:



( ) a região hachurada tem a maior área.

( ) a região não hachurada tem a maior área.

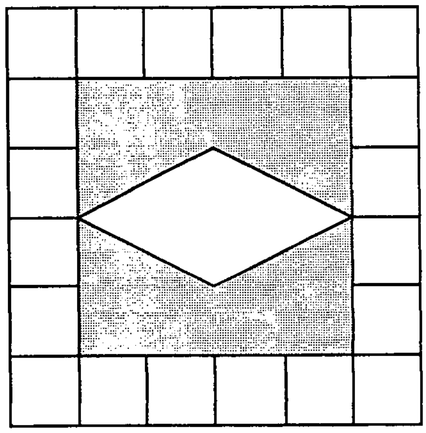
( ) as duas regiões tem áreas iguais.

Justifique sua resposta:

Problema nº 2 - B
Observe a figura hachurada.

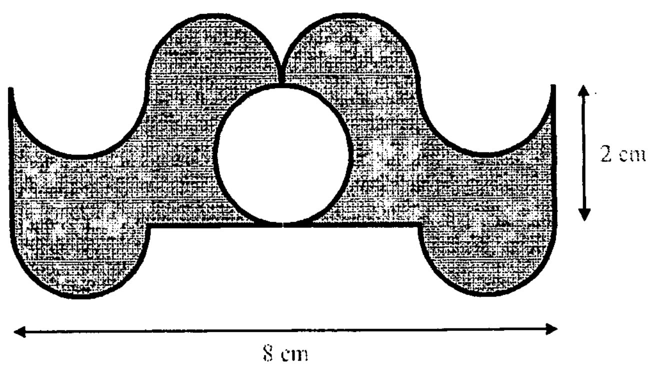
Calcule sua área. Explique como você a encontrou.

Obs.: A área de cada quadradinho do fundo quadriculado é 1 cm².



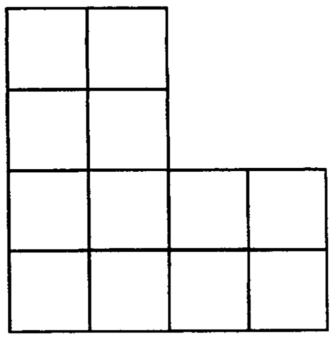
Problema nº 3 - B

A figura é constituída de semi - circunferência de 1 cm de raio e de segmentos. Calcule sua área. Explique como você a obteve.



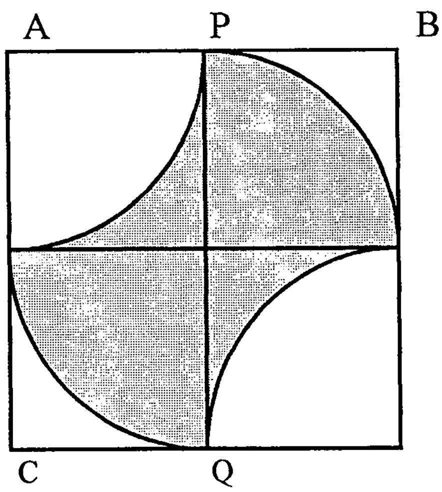
Problema nº 4 - B

Um terreno em forma de L, como mostra a figura abaixo, deve ser dividido em quatro lotes de mesma área e de mesma forma. Descubra como serão esses lotes. Explique como você fez.



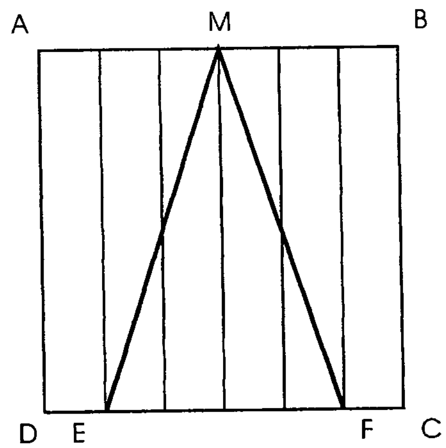
Problema nº 5 - B

ABCD é um quadrado e P, Q, R, S são os meios dos lados.Qual a fração que representa a parte hachurada do quadrado?
Explique sua resposta.



Problema nº 6 - B

ABCD é um quadrado dividido em partes iguais. Mostre que as áreas AMED, MEF e MBCF são iguais.



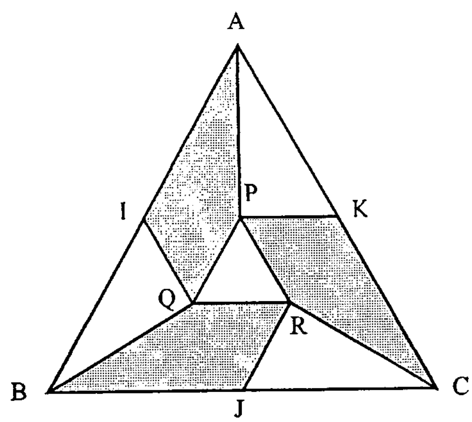
Escola: Série:

Nome: Idade:

Questionário B*

Problema nº 1 - B*

ABC é um triângulo equilátero e I, J, K são os meios dos seus lados. P, Q, R são os meios dos lados do triângulo IJK.
Compare a área da região hachurada e da região não hachurada.



Marque com um **X** a alternativa correspondente a sua resposta:

( ) a região hachurada tem a maior área.

( ) a região não hachurada tem a maior área.

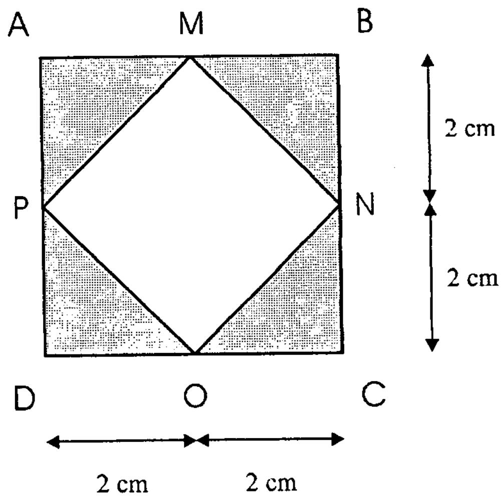
( ) as duas regiões tem áreas iguais.

Justifique sua resposta:

Problema nº 2 - B*

A figura representa um quadrado ABCD. M, N, O e P são os meios dos lados do quadrado.

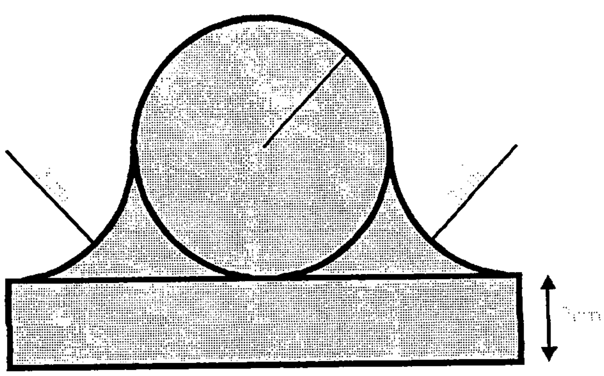
Calcule a área da parte hachurada. Explique como você a obteve.



Problema nº 3 - B*

A figura sombreada é contituída de semi-circunferências e de segmentos. Calcule sua área.

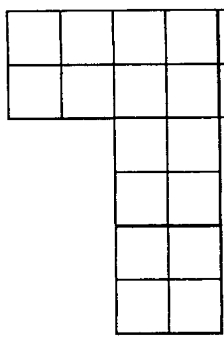
Explique como você a obteve.



Problema n° 4 - B*

Esta figura é formada por cinco quadrados. Divida-a em quatro pedaços, de mesma área e mesma forma.

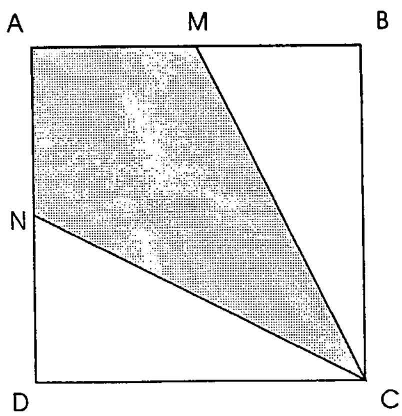
Marque sobre a figura os traços da divisão, explicando seu procedimento.



Problema n° 5 - B*

A figura abaixo representa um quadrado ABCD. M e N são os meios dos lados AB e AD, respectivamente. Qual a fração que representa a parte hachurada do quadrado?

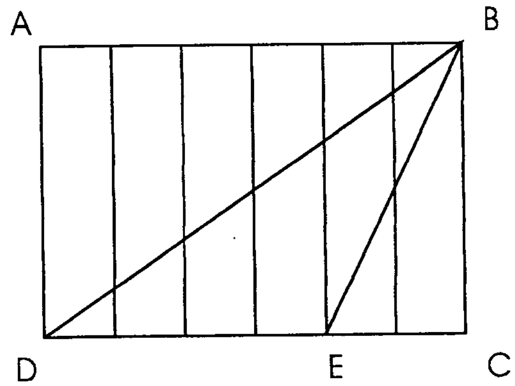
Explique como você a encontrou.



Problema nº 6 - B*

Dividimos um retângulo ABCD em partes iguais. Qual é a fração da área do retângulo que representa a área do triângulo BED?

Explique como você a encontrou.



ANEXO II

QUESTIONÁRIOS UTILIZADOS NA COLETA DE DADOS

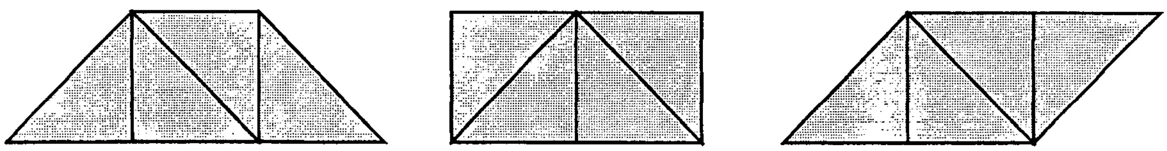
Escola: **Série:**

Nome: **Idade:**

Questionário A

Problema n° 1 - A

Compare as áreas das figuras 1, 2 e 3. Assinale a alternativa correspondente a sua resposta.



1 2 3

( ) a figura 1 tem a maior área.

( ) a figura 2 tem a maior área.

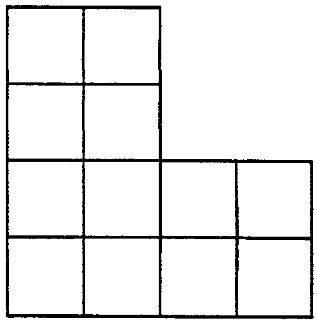
( ) a figura 3 tem a maior área.

( ) as três figuras tem áreas iguais.

Justifique sua reposta:

Problema n° 2 - A

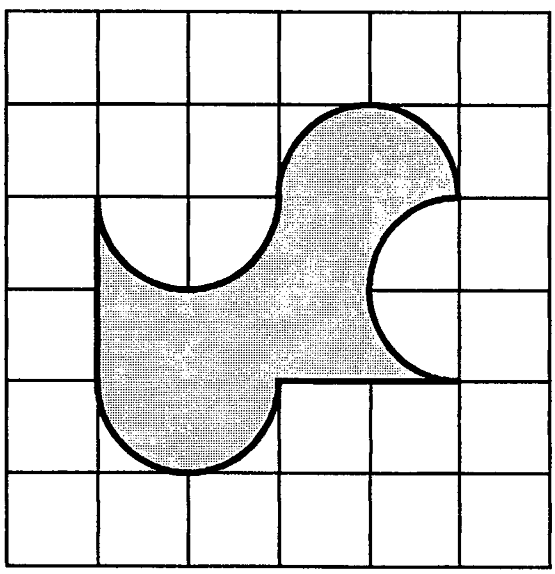
Um terreno em forma de L, como mostra a figura abaixo, deve ser dividido em quatro lotes de mesma área e de mesma forma. Descubra como serão esses lotes. Explique como você fez.



Problema n° 3 - A

Qual é a área desta superfície? Explique sua resposta.

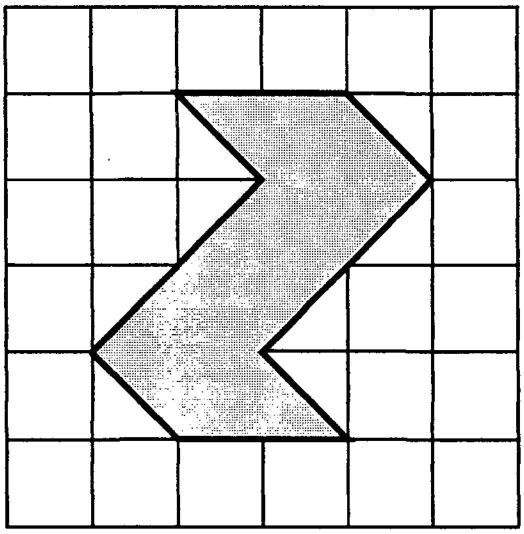
(A área de cada quadradinho do fundo quadriculado é 1 cm^2.)



Problema nº 4 - A

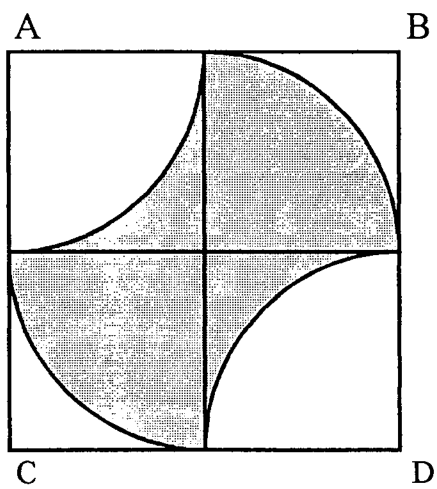
Calcule a área da figura hachurada. Explique como você a obteve.

Obs.: A área de cada quadradinho do fundo quadriculado é 1 cm^2.



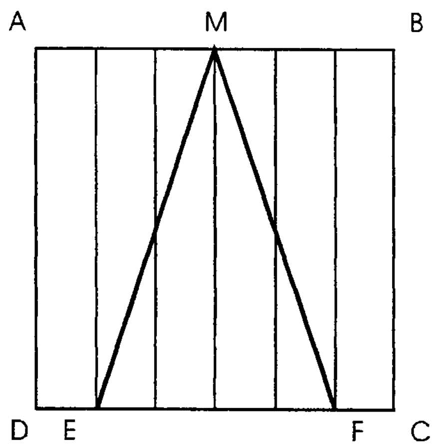
Problema nº 5 - A

ABCD é um quadrado de lado 4 cm. Calcule a área da superfície hachurada. Explique como você a encontrou.



Problema nº 6 - A

ABCD é um quadrado dividido em partes iguais. Mostre que as áreas AMED, MEF e MBCF são iguais.



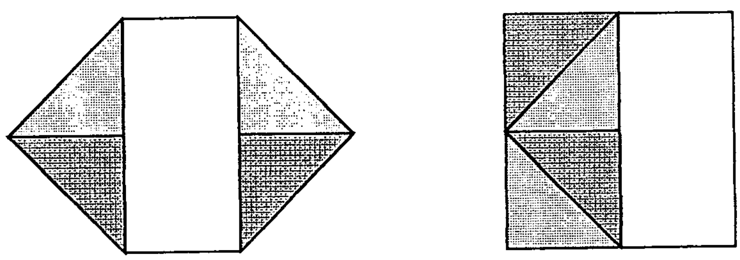
Escola: **Série:**

Nome: **Idade:**

Questionário A*

Problema n° 1 - A*

Compare as áreas das figuras seguintes. Assinale com um X a resposta que você achar correta:



1 2

( ) a figura 1 tem a maior área.

( ) a figura 2 tem a maior área.

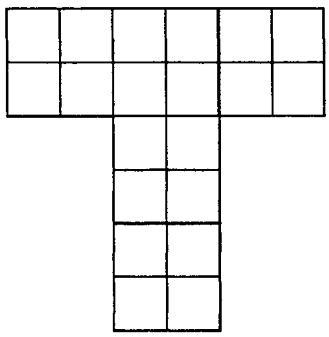
( ) as duas figuras tem áreas iguais.

Justifique sua reposta:

Problema n° 2 - A*

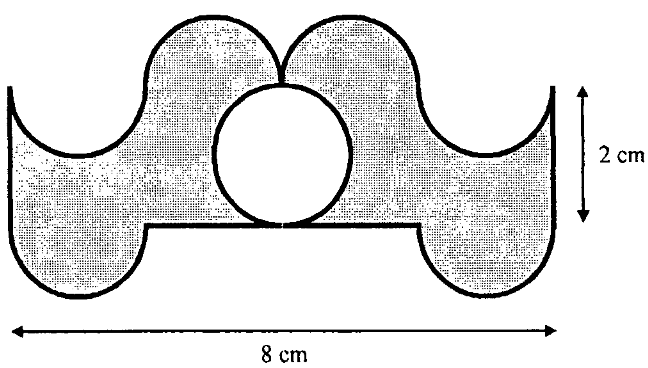
Esta figura é formada por vinte quadradinhos. Divida-a em quatro pedaços, de mesma área e mesma forma.

Marque sobre a figura os traços da divisão, explicando seu procedimento.



Problema n° 3 - A*

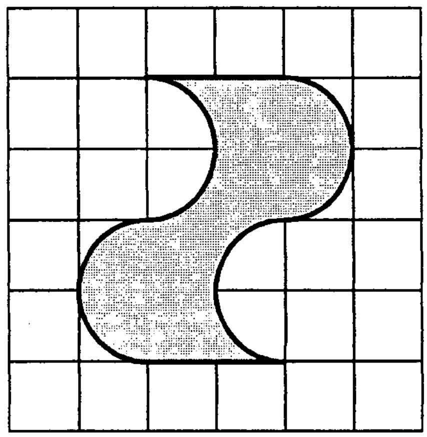
Observe a figura hachurada. Calcule sua área. Explique como você a obteve.



Problema nº 4 - A*

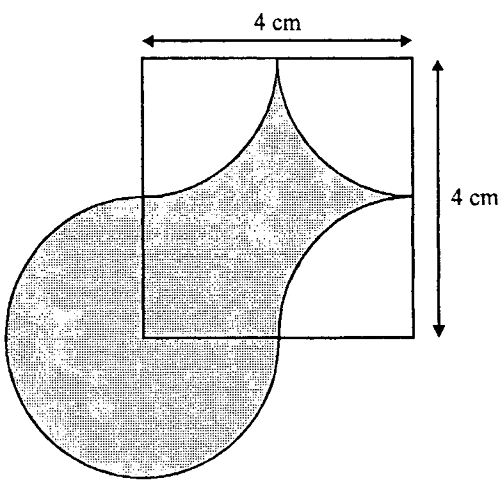
Calcule a área da figura hachurada. Explique como você a obteve.

Obs.: A área de cada quadradinho do fundo quadriculado é 1 cm^2.



Problema nº 5 - A*

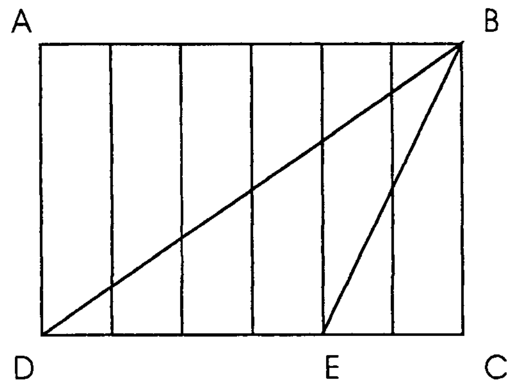
Observe a figura abaixo. Calcule a área da superfície hachurada. Explique como você a encontrou.



Problema nº 6 - A*

Dividimos um retângulo ABCD em partes iguais. Qual é a fração da área do retângulo que representa a área do triângulo BED?

Explique como você a encontrou.



ANEXO III

TABELA DE DADOS

Questionário Inicial

Turmas: **A = 30 alunos** **B = 29 alunos** **C = 33 alunos**

1-A

turma	acerto	erro	branco
A	26	4	-
B	26	3	-
C	24	9	-

2-A

turma	acerto	erro	branco
A	5	25	-
B	5	20	4
C	2	26	5

3-A

turma	acerto	erro	branco
A	10	16	4
B	11	15	3
C	7	15	11

4-A

turma	acerto	erro	branco
A	18	10	2
B	11	14	4
C	9	15	9

5-A

turma	acerto	erro	branco
A	7	18	5
B	5	21	3
C	4	13	16

6-A

turma	acerto	erro	branco
A	9	7	14
B	10	9	10
C	3	5	25

Questionário Final

Turmas : **A = 31 alunos** **B = 32 alunos** **C = 32 alunos**

1-A*

turma	acerto	erro	branco
A	30	1	-
B	31	1	-
C	29	3	-

2-A*

turma	acerto	erro	branco
A	19	12	-
B	18	12	2
C	9	16	6

3-A*

turma	acerto	erro	branco
A	24	5	2
B	25	5	2
C	10	4	18

4-A*

turma	acerto	erro	branco
A	28	-	3
B	20	7	5
C	11	4	17

5-A*

turma	acerto	erro	branco
A	26	2	3
B	27	1	4
C	6	6	10

6-A*

turma	acerto	erro	branco
A	12	12	7
B	3	13	16
C	1	11	10

ANEXO IV

CRUZAMENTO DE DADOS

Resultados efetivos

Resultados teóricos

3-A

		acerto	erro	
4-A	acerto	16	12	28
	erro	3	17	20
		19	29	48

11	17
8	12

Para as questões 4-A e 3-A o teste de independência dá significativo.

Para as próximas questões a aplicação do teste não se faz necessária.

3-A*

		acerto	erro
4-A*	acerto	40	7
	erro	6	1

4-A*

		acerto	erro
5-A*	acerto	44	6
	erro	1	0

3-A*

		acerto	erro
5-A*	acerto	44	8
	erro	0	2