

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**CONTROLE DE TORQUE DO MOTOR DE INDUÇÃO COM A
CONSIDERAÇÃO DE INCERTEZAS PARAMÉTRICAS:
ABORDAGEM BASEADA NA ENERGIA**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU
DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

LUIZ CARLOS DE SOUZA MARQUES

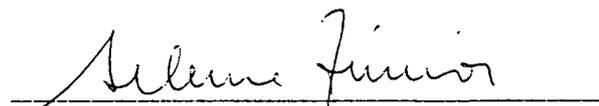
FLORIANÓPOLIS, OUTUBRO DE 1996

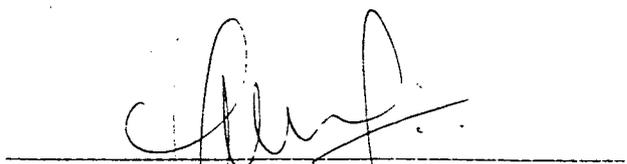
**CONTROLE DE TORQUE DO MOTOR DE INDUÇÃO
COM A CONSIDERAÇÃO DE INCERTEZAS PARAMÉTRICAS
- ABORDAGEM BASEADA NA ENERGIA -**

LUIZ CARLOS DE SOUZA MARQUES

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

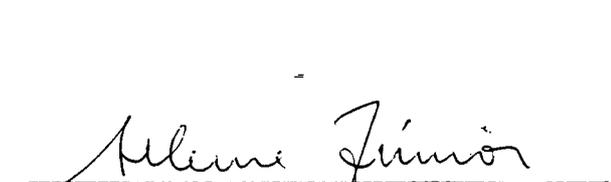
**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO SISTEMAS DE CONTROLE,
E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO**


Prof. SELEME ISAAC SELEME JR., Dr.
Orientador


Prof. EDSON ROBERTO DE PIERI, Dr.
Co-Orientador


Prof. ADROALDO RAIZER, Dr.
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

BANCA EXAMINADORA:


Prof. SELEME ISAAC SELEME JR., Dr.
Orientador


Prof. EDSON ROBERTO DE PIERI, Dr.
Co-Orientador


Prof. IVO BARBI, Dr.


Prof. PEDRO LUIS DIAS PERES, Dr.

Dedico este trabalho a
Jacqueline, Gabriel e Júlia,
pelo apoio e carinho.

Agradecimentos

Sou especialmente grato ao Dr. Seleme Isaac Seleme Jr., professor do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, que na qualidade de orientador deste trabalho soube conduzi-lo com ética e eficiência. Seu exemplo de dedicação à pesquisa e ao ensino muito me estimularam no transcorrer do trabalho. Agradeço, sobretudo, sua amizade e camaradagem.

Agradeço ao Dr. Edson Roberto De Pieri, professor do Laboratório de Controle, Automação e Informática Industrial - LCMI - da UFSC, que na qualidade de co-orientador deste trabalho soube dar preciosas contribuições. Agradeço, também, sua amizade e confiança.

Agradeço ao Dr. Ivo Barbi, professor do Instituto de Eletrônica de Potência - INEP - da UFSC, por sua participação na banca examinadora desta dissertação. Seus questionamentos e sugestões enriqueceram o resultado final deste trabalho.

Agradeço ao Dr. Pedro Luis Dias Peres, professor do Departamento de Engenharia Elétrica da UNICAMP, pela participação na banca examinadora desta dissertação. Sua criteriosa análise do texto, com sugestões e questionamentos, muito contribuiu para a versão final deste trabalho.

Registro o meu agradecimento à Reitoria da UDESC, nas pessoas dos Magníficos Reitor e Vice-Reitor, respectivamente, Raimundo Zumblik e Jorge de Oliveira Musse, pelo apoio que recebi ao longo deste projeto de capacitação.

Agradeço à Direção do Centro de Ciências Tecnológicas - CTC - da UDESC, na pessoa da professora Dra. Regina Maria de Felice Souza, pelo incentivo e apoio prestados ao longo deste trabalho.

Sou muitíssimo grato a todos os companheiros do Departamento de Engenharia Elétrica da UDESC que acreditaram nas minhas potencialidades e apoiaram o meu aperfeiçoamento profissional. A conclusão deste trabalho é, certamente, uma vitória deste grupo.

Agradeço a todos os professores e colegas do LCMI pela camaradagem.

Agradeço à Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior -CAPES- pelo auxílio financeiro que recebi ao longo do trabalho.

Resumo

Este trabalho trata do controle do motor de indução para acionamentos de elevada exigência dinâmica. Inicialmente, apresenta um estudo sobre a modelagem do motor de indução e os princípios gerais do controle vetorial. A parte final é dedicada a apresentação de uma proposta para o controle não linear, que leva em conta as variações paramétricas.

A primeira parte do trabalho inclui um estudo detalhado sobre a modelagem do motor de indução, para objetivos de controle. Transformações entre sistemas de coordenadas e diferentes representações de estado são desenvolvidas, permitindo a obtenção dos principais modelos em uso e a compreensão das suas propriedades dinâmicas.

Em função da importância que a técnica do controle vetorial desempenha no controle do motor de indução, uma revisão nos seus princípios é feita, incluindo diagramas de implementação dos métodos direto e indireto.

A segunda parte apresenta, como principal contribuição deste trabalho, um controlador não linear para o motor de indução, baseado num observador de estados de ordem completa, que busca o seguimento das referências de posição e velocidade através do seguimento de uma trajetória de torque que minimiza a energia magnética do motor. Esta abordagem, além de otimizar o fator de potência, conduz a bons resultados em termos de desempenho dinâmico e rendimento.

O problema da variação dos parâmetros elétricos do motor também é discutido. Uma proposta de controlador adaptativo, que adapta dois parâmetros elétricos críticos, a resistência

de rotor e a relação entre a indutância mútua e a indutância de rotor, é apresentada. A adaptação baseia-se em dois modelos de referência, um de torque e outro de perdas rotóricas.

Resultados de simulação ilustram o desempenho obtido com o uso dos controladores nominal e adaptativo em tarefas clássicas de posicionamento e controle de velocidade. Uma comparação com um controlador equivalente, que não minimiza a energia magnética, é feita. Os resultados mostram uma significativa redução no consumo de energia quando a estratégia de minimizar a energia magnética do motor é empregada.

Abstract

This work deals with the induction motor control applied to high performance dynamics drives. First, we study the induction motor modeling and the principles of field-oriented control, then we propose a nonlinear control scheme which considers the presence of parameter drift.

As for the first part, a complete study of the induction motors modeling, for control purpose, is taken. Model transformations due to reference frames and state variables changes are detailed, permitting both the attainment of the principal models used and the understanding of its dynamic properties.

Due the significance of the technique of field orientation to the induction motor control, a review of the field orientation approach is presented, including diagrams of the direct and indirect method implementation.

The second part presents, as the main contribution of this work, a nonlinear controller for the induction motor, based on a full state observer to track a smooth torque trajectory which minimizes the magnetic energy in the motor, in order to achieve position and speed tracking. This approach optimizes the power factor which results in a good performance dynamics and efficiency.

The problem of the time-varying parameters is also discussed. An adaptive controller, which adapts two critical electrical parameters, the rotor resistance and the mutual/rotor inductance ratio, is presented. The parameter adaptation is based in two different models, a torque model and a rotor losses model.

Simulation results show the nominal and adaptive controller behaviors for standard position and speed control tasks. A comparison with an equivalent controller which does not minimize the magnetic energy is made. The results obtained show a much better behavior, in terms of energy consumption, when a controller which minimizes the magnetic energy is used.

Índice

Introdução Geral	19
1 Modelagem do Motor de Indução Trifásico	25
1.1 Introdução	25
1.2 Modelos Trifásicos	27
1.2.1 Abordagem Baseada nas Equações Circuitais	27
1.2.2 Abordagem Baseada na Equação de Lagrange	34
1.3 Transformação de Sistema de Coordenadas	37
1.3.1 Transformação Geral Trifásico-Bifásica	38
1.4 Modelos Bifásicos	42
1.4.1 Modelo no Sistema de Coordenadas Síncrono	42
1.4.2 Modelo no Sistema de Coordenadas Estacionário	51
1.5 Representação no Espaço de Estado	54
1.5.1 Sistema de Coordenadas Estacionário	55
1.6 Modelo Derivado da Abordagem Lagrangeana no Sistema de Coordenadas Estacionário	62
1.7 Conclusão	70
2 Controle Vetorial do Motor de Indução	72
2.1 Introdução	72

2.2	Princípios do Controle Vetorial	74
2.3	Controle Vetorial Direto	77
2.4	Controle Vetorial Indireto	79
2.5	Controle Vetorial com Alimentação em Tensão	80
2.6	Conclusão	82
3	Controle em Seguimento de Torque com Minimização de Energia	83
3.1	Introdução	83
3.2	O Sub-sistema Mecânico	84
3.3	O Sub-sistema Elétrico	86
3.3.1	O Modelo do Motor	86
3.3.2	O Modelo de Referência para o Vetor de Estado	88
3.3.3	O Observador de Estados	97
3.3.4	A Entrada Direta (Pré-alimentação)	98
3.3.5	A Realimentação	99
3.4	Simulação	100
3.4.1	Parâmetros do motor e sistema mecânico	101
3.4.2	O Modelo de Perdas	101
3.4.3	A Energia Absorvida da Fonte de Alimentação	104
3.4.4	Trajetórias de Referência para Posição e Velocidade	104
3.4.5	Torques Resistentes de Carga	104
3.4.6	Ganhos dos Sub-Sistemas Elétrico e Mecânico	105
3.4.7	Resultados de Simulação	105
3.5	Conclusão	111
4	Adaptação de Parâmetros Elétricos	114

4.1	Introdução	114
4.2	Adaptação de Parâmetros no Controle em Seguimento de Torque com Minimização de Energia	118
4.2.1	Análise da Sensibilidade às Variações Paramétricas	119
4.2.2	Adaptação da Relação entre as Indutâncias Mútua e de Rotor ($\hat{\theta}$)	123
4.2.3	Adaptação da Resistência de Rotor	125
4.3	Simulação do Controlador Adaptativo	130
4.4	Conclusão	138
	Conclusão Geral	140
A	Casos Particulares da Transformação Trifásico-Bifásica	155
A.1	Transformação do Sistema de Coordenadas Trifásico para o Sistema de Coordenadas que Gira com o Rotor (ab)	155
A.2	Transformação do Sistema de Coordenadas Trifásico para o Sistema de Coordenadas Estacionário ($\alpha\beta$)	157
A.3	Transformação do Sistema de Coordenadas Trifásico para o Sistema de Coordenadas Síncrono (dq)	159
B	Transformação entre os Sistemas de Coordenadas Bifásicos	161
B.1	Transformação entre os Sistemas de Coordenadas Estacionário e que Gira com o Rotor	161
B.2	Transformação entre os Sistemas de Coordenadas Estacionário e Síncrono	163
B.3	Transformação entre os Sistemas de Coordenadas Síncrono e que Gira com o Rotor	165
C	Modelo do Motor de Indução no Sistema de Coordenadas que Gira com o	

Rotor

167

D Modelos de Estado no Sistema de Coordenadas Síncrono

171

Lista de Figuras

1.1	Representação esquemática da máquina trifásica	27
1.2	Representação de um sistema trifásico (123) e de um sistema bifásico ($d_g q_g$) .	38
1.3	Diagrama de transformações entre modelos de representação do motor de indução	41
2.1	Representação espacial do princípio do controle vetorial	74
2.2	Diagrama de blocos do controle vetorial direto com alimentação em corrente	78
2.3	Diagrama de blocos do controle vetorial indireto com alimentação em corrente	79
2.4	Diagrama de blocos do controle vetorial com alimentação em tensão	81
3.1	Representação do motor de indução através dos sub-sistemas elétrico e mecânico	84
3.2	Diagrama de blocos do controle do sistema mecânico	85
3.3	Diagrama de blocos do controlador em seguimento de torque	86
3.4	Resposta ao controle de posição com minimização de energia - (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetórias de referência e real do torque.	106
3.5	Resposta ao controle de posição com minimização de energia - (a) Trajetórias de referência e real da corrente de estator de eixo direto. (b) Trajetórias de referência e real da corrente de estator de eixo em quadratura.	106

3.6	Resposta ao controle de posição com minimização de energia - (a) Trajetórias de referência e real do fluxo rotórico de eixo direto. (b) Trajetórias de referência e real do fluxo rotórico de eixo em quadratura.	107
3.7	Resposta ao controle de posição com fluxo constante - (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetórias de referência e real do torque. . . .	108
3.8	Resposta ao controle de posição com fluxo constante - (a) Trajetórias de referência e real da corrente de estator de eixo direto. (b) Trajetórias de referência e real da corrente de estator de eixo em quadratura.	108
3.9	Resposta ao controle de posição com fluxo constante - (a) Trajetórias de referência e real do fluxo de rotor de eixo direto. (b) Trajetórias de referência e real do fluxo de rotor de eixo em quadratura.	109
3.10	Resposta ao controle de posição - (a) Consumo de energia e perdas para operação com minimização de energia magnética. (b) Consumo de energia e perdas para operação com fluxo constante.	110
3.11	Resposta ao controle de velocidade com minimização de energia - (a) Trajetórias de referência e real da velocidade. (b) Trajetórias de referência e real do torque.	110
3.12	Resposta ao controle em seguimento de velocidade com fluxo constante - (a) Trajetórias de referência e real da velocidade. (b) Trajetórias de referência e real do torque.	111
3.13	Resposta ao controle de velocidade - (a) Energia consumida e perdas para operação com minimização de energia. (b) Energia consumida e perdas para a operação com fluxo constante.	112

4.1	Resposta com controlador nominal em presença de variação da resistência de estator - (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetórias de referência e real do torque.	120
4.2	Resposta com controlador nominal em presença de variação da resistência de rotor - (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetórias de referência e real do torque.	120
4.3	Resposta com controlador nominal em presença de variação da indutância de estator - (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetórias de referência e real do torque.	121
4.4	Resposta com controlador nominal em presença de variação da indutância de rotor - (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetórias de referência e real do torque.	122
4.5	Resposta com controlador nominal em presença de variação da indutância mútua estator-rotor - (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetória de referência e real do torque.	122
4.6	Diagrama de blocos do controlador adaptativo em seguimento de torque com observação de estados.	129
4.7	Resposta com controlador nominal em presença de variações paramétricas (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetórias de referência e real do torque.	131
4.8	Resposta com controlador adaptativo em presença de variações paramétricas (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetórias de referência e real do torque.	132

4.9	Resposta com controlador adaptativo em presença de variações paramétricas	
	(a) Trajetórias de referência e real da corrente de estator de eixo direto. (b) Trajetórias de referência e real da corrente de estator de eixo em quadratura. (c) Trajetórias de referência e real do fluxo de rotor de eixo direto. (d) Trajetórias de referência e real do fluxo de rotor de eixo em quadratura.	133
4.10	Resposta com controlador adaptativo em presença de variações paramétricas	
	(a) Trajetórias real e observada da corrente de estator de eixo direto. (b) Trajetórias real e observada da corrente de estator de eixo em quadratura. (c) Trajetórias real e observada do fluxo de rotor de eixo direto. (d) Trajetórias real e observada do fluxo de rotor de eixo em quadratura.	134
4.11	Controle em seguimento de posição (a) Trajetórias real e adaptada da resistência de rotor. (b) Trajetórias real e adaptada de θ	135
4.12	Consumo de energia e perdas com controlador adaptativo em seguimento de posição.	135
4.13	Resposta com controlador nominal em presença de variações paramétricas -	
	(a) Trajetórias de referência e real da velocidade. (b) Trajetórias de referência e real do torque.	136
4.14	Resposta com controlador adaptativo em presença de variações paramétricas -	
	(a) Trajetórias de referência e real da velocidade. (b) Trajetórias de referência e real do torque.	137
4.15	Consumo de energia e perdas com controlador adaptativo em seguimento de velocidade.	137
B.1	Representação dos sistemas de coordenadas estacionário ($\alpha\beta$) e que gira com o rotor (ab)	162
B.2	Representação dos sistemas de coordenadas estacionário ($\alpha\beta$) e síncrono (dq)	163

B.3 Representação dos sistemas de coordenadas síncrono (dq) e que gira com o rotor (ab)	165
---	-----

Introdução Geral

As máquinas elétricas girantes assumiram um papel de grande relevância na sociedade moderna. Por constituírem-se num meio extremamente eficiente de conversão eletromecânica de energia, proporcionaram o surgimento de um modelo de desenvolvimento baseado na energia elétrica. Esta modalidade de energia tem como principal atrativo a grande facilidade de manuseio e transporte. Porém, a nível dos processos produtivos, a necessidade básica é de energia na forma mecânica. Assim, nos extremos do modelo de desenvolvimento fundamentado na industrialização encontram-se as máquinas elétricas. De um lado os geradores de energia elétrica que constituem-se na principal forma de obtenção desta energia e, no outro, os motores elétricos transformando a energia da forma elétrica para a mecânica.

Muitas das tarefas envolvidas nos processos produtivos não exigem nenhum tipo de controle, seja de posição, velocidade ou torque. São aplicações onde a máquina deve ser operada em velocidade aproximadamente constante não requerendo nenhuma ação de controle sobre o motor de acionamento. Porém, o avanço da automação dos processos tem exigido o uso crescente de acionamentos controlados de alto desempenho dinâmico, onde a precisão na posição ou na velocidade é requerida. Nestas aplicações, o controle do torque é um ponto fundamental para assegurar boa resposta dinâmica.

Até meados da década de oitenta, os acionamentos elétricos para aplicações onde o controle rápido e preciso da posição ou da velocidade constituía-se num requisito fundamental eram feitos invariavelmente com motores CC. As características próprias deste motor pro-

duzem uma ortogonalidade entre os campos magnéticos de estator e de rotor, o que acaba por se traduzir num desacoplamento entre a corrente de campo, responsável pelo fluxo de entreferro, e a corrente de armadura, que estabelece o torque da máquina. Em função deste desacoplamento natural, torna-se relativamente simples projetar um sistema para o controle da posição ou da velocidade que apresente um bom desempenho dinâmico. Porém, o elevado preço, a grande necessidade de manutenção e a ocorrência de faiscamentos no comutador, inviabilizando o uso em áreas contaminadas por substâncias inflamáveis, sempre foram fatores desfavoráveis aos motores CC. Estes aspectos impulsionaram a busca de alternativas para a substituição do motor CC nos acionamentos controlados. Quantidades substanciais de recursos foram canalizadas para a pesquisa de acionamentos CA que apresentassem elevada performance dinâmica com robustez mecânica e baixo custo.

A forma construtiva simples do motor de indução em gaiola, que garante grande robustez eletromecânica e baixo custo de fabricação, sempre foi um fator atrativo para o setor industrial. Entretanto, a complexidade envolvida no seu controle, em função de caracterizar-se como uma planta não linear, fortemente acoplada e multivariável, constitui-se numa dificuldade à sua utilização em acionamentos controlados. Assim, num primeiro momento, o seu uso ficou restrito às aplicações que não requeriam qualquer tipo de controle.

As primeiras tentativas de controle da velocidade do motor de indução foram feitas com o uso da técnica do controle escalar. A implementação do controle escalar pode ser feita com base no controle da velocidade síncrona ou no controle do escorregamento. Somente as implementações baseadas no controle da velocidade síncrona têm importância prática para o motor de gaiola. Neste método, a velocidade é controlada a partir da frequência elétrica. Os acionamentos baseados no controle escalar não conseguem alcançar altos desempenhos dinâmicos, ficando muito aquém da performance atingida pelos acionamentos CC. Encontram utilização em acionamentos à velocidade variável com pequena exigência dinâmica.

O estabelecimento da teoria do controle vetorial, no início dos anos setenta com os trabalhos de Hasse [36] e Blaschke [8], introduziu a base teórica para a operação do motor de indução com desempenho semelhante ao do motor CC. Esta teoria está fundamentada numa transformação de sistema de coordenadas que permite o desacoplamento no controle do fluxo e do torque. Assim, o motor de indução é operado de forma análoga ao motor CC. Entretanto, para que o desacoplamento ocorra, é necessário que exista alinhamento entre o fluxo do motor e um dos eixos do sistema de coordenadas síncrono, o que exige o conhecimento preciso da posição espacial do fluxo. A nível de implementação, o alinhamento pode ser obtido da medição direta do fluxo, no chamado método direto, ou através da estimação da posição do fluxo no método indireto. A grande desvantagem que o método direto apresenta é a necessidade de instalação de dispositivos sensores de fluxo no entreferro do motor, fragilizando e elevando o custo do acionamento. Em função disto, foi praticamente abandonado. O método indireto, por sua vez, apresenta uma grande sensibilidade em relação às variações paramétricas do motor, notadamente da constante de tempo rotórica, exigindo o uso de técnicas de adaptação paramétrica.

Num primeiro momento, houve grande dificuldade para a implementação do controle vetorial, em função da complexidade envolvida a nível de controle e da inexistência de tecnologia adequada. Somente no início dos anos oitenta surgiram as primeiras implementações experimentais. Isto tornou-se factível a partir dos avanços da eletrônica de potência e da microeletrônica. Na atualidade, com o desenvolvimento de microprocessadores e chaves eletrônicas de alta velocidade a custos acessíveis, o controle vetorial já é uma realidade nos acionamentos industriais.

Ao longo dos 25 anos de existência da teoria do controle vetorial, o problema da adaptação de parâmetros no controle indireto do motor de indução recebeu grande ênfase. Técnicas de estimação recursiva e adaptação por modelos de referência têm sido empregadas. O uso

de observadores de estados, notadamente observadores de fluxo rotórico, também mereceu atenção haja vista a impossibilidade de acesso direto as grandezas rotóricas no motor de gaiola. Ultimamente, as pesquisas têm se voltado à busca de controladores baseados em estimadores de posição e/ou velocidade, em substituição aos sensores. O objetivo é o de reduzir custos e aumentar a robustez do acionamento.

O estabelecimento da teoria do controle vetorial também proporcionou o uso do servomotor síncrono de ímãs permanentes (servo CA) em acionamentos controlados de baixa potência. Com a aplicação desta técnica, o motor síncrono de ímãs permanentes atinge um desempenho tão bom quanto o motor CC, com a vantagem de não apresentar contatos deslizantes o que o torna mais robusto, com menor comprimento axial, menor inércia e livre de faiscamentos. Outra característica interessante que esta máquina apresenta é o elevado rendimento devido à não existência de perdas rotóricas. Entretanto, tem como desvantagem o custo bastante elevado.

Com o avanço da teoria do controle não linear, outras formas de controle do motor de indução têm sido propostas. Pode-se citar os métodos baseados em conceitos da geometria diferencial, que visam a linearização do sistema através da realimentação, seja do estado, seja da relação entrada/saída [22], [72], o controle baseado na teoria dos modos deslizantes [80], [85]. Uma abordagem baseada nas propriedades energéticas e dissipativas do motor é proposta por Ortega e Espinosa [76]. Os autores tratam do problema da regulação do torque do motor de indução utilizando as equações de Lagrange obtidas a partir da energia total do sistema. Uma série de outros trabalhos foram desenvolvidos com base nesta abordagem [75], [14], [15]. Seleme *et. al.* [83] estudam o problema do seguimento de trajetória de torque com otimização da energia magnética do motor.

Embora o controle do motor de indução tenha evoluído significativamente desde o surgimento da teoria do controle vetorial, alguns aspectos ainda esperam por uma solução mais

adequada. A melhoria na relação entre performance dinâmica e rendimento, sem sombra de dúvida, é um deles. O problema da variação paramétrica é outro ponto que ainda não foi resolvido de forma satisfatória.

Este trabalho trata do controle não linear do motor de indução. Apresenta um controlador adaptativo em seguimento de trajetória de torque, baseado na observação completa dos estados, que opera com chaveamento entre o controle a mínima energia e o controle a fluxo constante. A operação a mínima energia é feita entre os limites estabelecidos para os valores de mínimo e de máximo fluxo de rotor.

O Capítulo 1 trata da modelagem do motor de indução para os objetivos de controle. Apresenta uma transformação genérica de sistemas de coordenadas que permite, a partir do modelo trifásico estabelecido nos referenciais de estator e de rotor, a obtenção de modelos bifásicos estabelecidos num único referencial que gira com uma velocidade genérica. Pela particularização da velocidade do referencial, são obtidos modelos bifásicos nos sistemas de coordenadas síncrono e estacionário. Inclui uma modelagem derivada da equação de Lagrange e modelos de representação no espaço de estado.

O Capítulo 2 apresenta os princípios teóricos do controle vetorial do motor de indução. Mostra os esquemas básicos de implementação dos métodos direto e indireto, com controle em corrente e em tensão.

O Capítulo 3 apresenta uma proposta para o controle não linear do motor de indução em seguimento de trajetória de torque. A partir do movimento mecânico desejado, trajetórias de referência para o torque eletromagnético e para os estados do sistema são estabelecidas de forma a atender os objetivos de controle. Para relaxar a necessidade da medição dos fluxos rotóricos, é empregado um observador de estados de ordem completa. A estratégia de controle é a de minimizar a energia magnética do motor, quando da operação entre os limites de mínimo e de máximo fluxo, visando a obtenção de bons rendimento e fator de

potência. Entretanto, sempre que o fluxo rotórico atingir os níveis mínimo ou máximo pré-estabelecidos, o controle passa a ser feito com fluxo constante. Uma série de resultados de simulação ilustram o desempenho obtido com o uso deste controlador.

O Capítulo 4 trata da adaptação de parâmetros elétricos no controle não linear em seguimento de torque. Apresenta uma proposta para a adaptação da resistência de rotor e da relação entre a indutância mútua e a indutância de rotor, baseada em modelos de referência. A adaptação da relação de indutâncias é feita a partir do erro entre o torque estimado, obtido de grandezas medidas, e a saída de um modelo de referência de torque que opera em paralelo com a máquina. Para a adaptação da resistência de rotor é utilizado um modelo de referência de perdas rotóricas. Resultados de simulação são apresentados, no controle de posição e velocidade, sob a consideração de severas variações paramétricas.

Capítulo 1

Modelagem do Motor de Indução

Trifásico

1.1 Introdução

O motor de indução é uma máquina com estrutura magnética cilíndrica, tanto no estator quanto no rotor. Por isso, desprezando-se o efeito das ranhuras, o entreferro pode ser considerado constante. A máquina trifásica geralmente apresenta enrolamentos de estator idênticos e defasados de 120 graus elétricos no espaço. Quanto ao rotor, pode ter um dos seguintes tipos construtivos:

1. bobinado¹, que caracteriza-se pela presença de enrolamentos ligados a anéis coletores;
2. de gaiola, onde os condutores são na forma de barras, injetados nas ranhuras sem qualquer isolação e curto-circuitados nos extremos por anéis condutores.

Assim, na máquina de rotor bobinado o rotor é acessível, o que não ocorre no motor de gaiola. O motor de rotor bobinado é considerado uma máquina especial, com uso muito

¹O motor de indução que apresenta o rotor bobinado também é conhecido por **motor de anéis**.

restrito, principalmente às aplicações que requerem elevado torque de partida. O motor de rotor em gaiola, por sua vez, é uma máquina de ampla utilização e grande interesse graças ao baixo custo e a elevada robustez.

Os modelos apresentados neste capítulo são válidos para qualquer tipo construtivo de motor de indução trifásico e simétrico.

As seguintes hipóteses simplificativas foram admitidas:

1. os enrolamentos estatóricos são idênticos e igualmente defasados entre si;
2. os enrolamentos rotóricos são idênticos e igualmente defasados entre si;
3. o entreferro é constante;
4. o material ferromagnético não sofre saturação;
5. a densidade de fluxo magnético no entreferro só apresenta componente radial e sua distribuição espacial é considerada senoidal;
6. não serão consideradas as perdas magnéticas.

Os modelos trifásicos são desenvolvidos a partir de duas abordagens distintas. Uma baseada nas equações circuitais da máquina e outra baseada em relações energéticas oriundas da aplicação da equação de Lagrange. A obtenção dos modelos bifásicos é feita com o uso de uma transformação trifásico-bifásica genérica, que muda o sistema de representação trifásico, estabelecido em dois referenciais distintos, para uma representação bifásica num único referencial.

1.2 Modelos Trifásicos

1.2.1 Abordagem Baseada nas Equações Circuitais

A Figura 1.1 mostra uma representação do motor de indução trifásico.

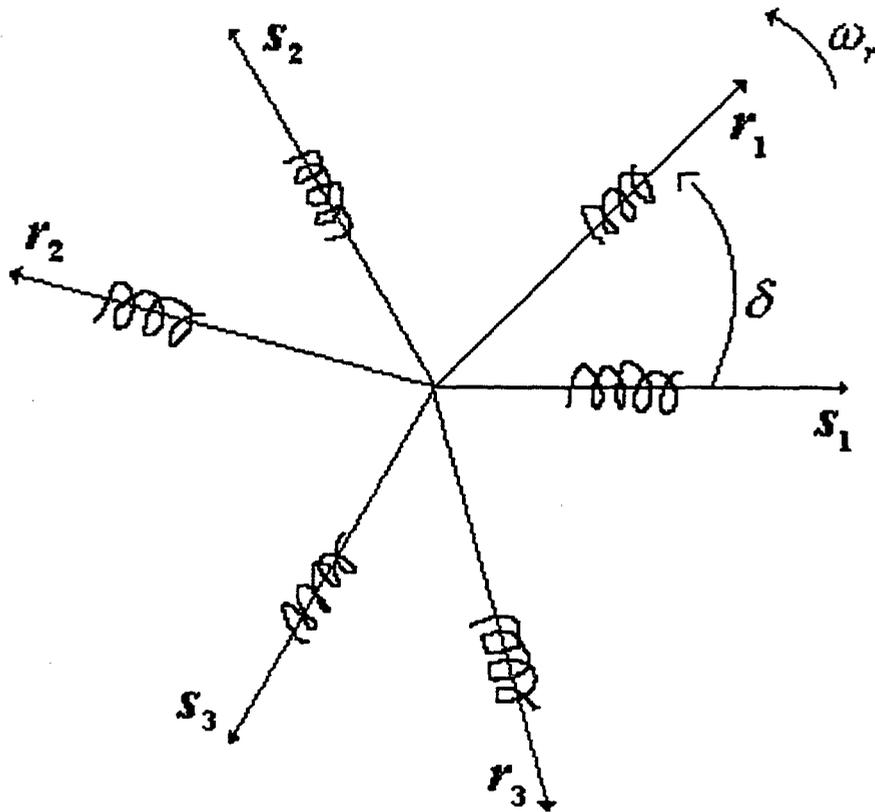


Figura 1.1: Representação esquemática da máquina trifásica

s_1 , s_2 e s_3 representam as fases do estator; r_1 , r_2 e r_3 as fases do rotor e ω_r é a velocidade angular mecânica do rotor. A posição angular elétrica do rotor é dada por

$$\delta = \int v\omega_r dt + \delta_0$$

onde v é o número de pares de pólos do motor e δ_0 dá a posição inicial.

Em função das hipóteses simplificativas adotadas, as relações para os parâmetros elétricos ficam

$$\begin{aligned}
 L_{s_1}^{123} &= L_{s_2}^{123} = L_{s_3}^{123} = L_s^{123} \\
 L_{r_1}^{123} &= L_{r_2}^{123} = L_{r_3}^{123} = L_r^{123} \\
 M_{s_{12}} &= M_{s_{13}} = M_{s_{23}} = M_s \\
 M_{r_{12}} &= M_{r_{13}} = M_{r_{23}} = M_r \\
 R_{s_1} &= R_{s_2} = R_{s_3} = R_s \\
 R_{r_1} &= R_{r_2} = R_{r_3} = R_r
 \end{aligned}$$

onde:

L_s^{123} = indutância própria de estator, por fase;

L_r^{123} = indutância própria de rotor, por fase;

M_s = indutância mútua entre duas fases de estator;

M_r = indutância mútua entre duas fases de rotor;

R_s = resistência de estator, por fase;

R_r = resistência de rotor, por fase.

As indutâncias mútuas entre os enrolamentos de estator e rotor são funções senoidais da posição angular, δ , como segue:

$$\begin{aligned}
 M_{s_1 r_1} &= M_{sr} \cos \delta & M_{s_1 r_2} &= M_{sr} \cos \left(\delta + \frac{2\pi}{3} \right) & M_{s_1 r_3} &= M_{sr} \cos \left(\delta - \frac{2\pi}{3} \right) \\
 M_{s_2 r_1} &= M_{sr} \cos \left(\delta - \frac{2\pi}{3} \right) & M_{s_2 r_2} &= M_{sr} \cos \delta & M_{s_2 r_3} &= M_{sr} \cos \left(\delta + \frac{2\pi}{3} \right) \\
 M_{s_3 r_1} &= M_{sr} \cos \left(\delta + \frac{2\pi}{3} \right) & M_{s_3 r_2} &= M_{sr} \cos \left(\delta - \frac{2\pi}{3} \right) & M_{s_3 r_3} &= M_{sr} \cos \delta
 \end{aligned}$$

A aplicação das leis básicas da física aos circuitos elétricos de estator e rotor permite a escrita das seguintes equações, na forma matricial compacta:

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \dot{\boldsymbol{\phi}}_s \quad (1.1)$$

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{R}_r \mathbf{I}_r + \dot{\boldsymbol{\phi}}_r \quad (1.2)$$

com

$$\mathbf{V}_s = [V_{s1}, V_{s2}, V_{s3}]^T \quad \mathbf{V}_r = [V_{r1}, V_{r2}, V_{r3}]^T \quad (1.3)$$

$$\mathbf{I}_s = [i_{s1}, i_{s2}, i_{s3}]^T \quad \mathbf{I}_r = [i_{r1}, i_{r2}, i_{r3}]^T \quad (1.4)$$

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_s = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\phi}_s = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{s1} & \phi_{s2} & \phi_{s3} \end{bmatrix}^T \quad (1.6)$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_r = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\phi}_r = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{r1} & \phi_{r2} & \phi_{r3} \end{bmatrix}^T \quad (1.7)$$

ϕ_s e ϕ_r são, respectivamente, os vetores de fluxo enlaçado com os enrolamentos de estator e de rotor. V_s e V_r representam, respectivamente, os vetores de tensão de estator e tensão de rotor e I_s e I_r os vetores de corrente de estator e de rotor. R_s é a matriz de resistências de estator e R_r é a matriz de resistências rotóricas.

Os vetores de fluxo enlaçado, ϕ_s e ϕ_r , podem ser escritos como:

$$\phi_s = L_{ss}I_s + M_{sr}I_r \quad (1.8)$$

$$\phi_r = M_{rs}I_s + L_{rr}I_r \quad (1.9)$$

onde as matrizes de indutâncias de estator e rotor são

$$L_{ss} = \begin{bmatrix} L_s^{123} & M_s & M_s \\ M_s & L_s^{123} & M_s \\ M_s & M_s & L_s^{123} \end{bmatrix} \quad L_{rr} = \begin{bmatrix} L_r^{123} & M_r & M_r \\ M_r & L_r^{123} & M_r \\ M_r & M_r & L_r^{123} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

e a matriz de indutâncias mútuas estator-rotor é

$$M_{sr} = M_{sr} \begin{bmatrix} \cos \delta & \cos \left(\delta + \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\delta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left(\delta - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \delta & \cos \left(\delta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left(\delta + \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\delta - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \delta \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

M_{sr} e M_{rs} guardam a seguinte relação entre si:

$$M_{rs} = M_{sr}^T$$

As derivadas temporais dos fluxos de estator e de rotor, obtidas de (1.8) e (1.9), são

$$\dot{\phi}_s = L_{ss}\dot{I}_s + M_{sr}\dot{I}_r + \delta \frac{\partial M_{sr}}{\partial \delta} I_r \quad (1.12)$$

$$\dot{\phi}_r = L_{rr}\dot{I}_r + M_{rs}\dot{I}_s + \delta \frac{\partial M_{rs}}{\partial \delta} I_s \quad (1.13)$$

Assim, pela substituição de (1.12) em (1.1) e de (1.13) em (1.2), as equações das tensões de estator e de rotor ficam

$$V_s = R_s I_s + L_{ss}\dot{I}_s + M_{sr}\dot{I}_r + \delta \frac{\partial M_{sr}}{\partial \delta} I_r \quad (1.14)$$

$$V_r = R_r I_r + L_{rr}\dot{I}_r + M_{rs}\dot{I}_s + \delta \frac{\partial M_{rs}}{\partial \delta} I_s \quad (1.15)$$

Relativamente à dinâmica mecânica do sistema motor-carga, ela pode ser modelada por

$$\tau_m = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c, \quad (1.16)$$

onde τ_m representa o torque eletromagnético, $b\omega_r$ o torque associado às perdas mecânicas do motor, $J\dot{\omega}_r$ é o torque acelerante do sistema motor-carga (J é o momento de inércia do sistema) e τ_c é o torque resistente ou torque de carga.

A expressão da potência total que o motor absorve da rede elétrica é

$$P_t = I_s^T V_s + I_r^T V_r \quad (1.17)$$

Desta forma, a substituição das equações das tensões, (1.14) e (1.15), em (1.17), leva a

$$\begin{aligned} P_t = & I_s^T R_s I_s + I_s^T L_{ss} \dot{I}_s + I_s^T M_{sr} \dot{I}_r + I_s^T \frac{\partial M_{sr}}{\partial \delta} I_r \dot{\delta} + \\ & + I_r^T R_r I_r + I_r^T L_{rr} \dot{I}_r + I_r^T M_{rs} \dot{I}_s + I_r^T \frac{\partial M_{rs}}{\partial \delta} I_s \dot{\delta} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Da potência total que o motor absorve, uma parte é dissipada em calor, outra fica armazenada no campo magnético e o restante transforma-se em torque eletromagnético. As parcelas correspondentes às perdas joule de estator e de rotor são facilmente identificadas pelos termos $\mathbf{I}_s^T \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s$ e $\mathbf{I}_r^T \mathbf{R}_r \mathbf{I}_r$, respectivamente. A energia armazenada no campo magnético pode ser escrita como

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{I}_s^T \mathbf{L}_{ss} \mathbf{I}_s + \frac{1}{2} \mathbf{I}_r^T \mathbf{L}_{rr} \mathbf{I}_r + \frac{1}{2} \mathbf{I}_s^T \mathbf{M}_{sr} \mathbf{I}_r + \frac{1}{2} \mathbf{I}_r^T \mathbf{M}_{rs} \mathbf{I}_s \quad (1.19)$$

Portanto, a parcela da potência de entrada que é utilizada para armazenar energia no campo magnético do motor, representada pela derivada temporal de (1.19), fica

$$\begin{aligned} \dot{W} = & \mathbf{I}_s^T \mathbf{L}_{ss} \dot{\mathbf{I}}_s + \mathbf{I}_r^T \mathbf{L}_{rr} \dot{\mathbf{I}}_r + \frac{1}{2} \mathbf{I}_s^T \mathbf{M}_{sr} \dot{\mathbf{I}}_r + \frac{1}{2} \mathbf{I}_r^T \mathbf{M}_{rs} \dot{\mathbf{I}}_s + \frac{1}{2} \mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \dot{\delta} + \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{I}_r^T \mathbf{M}_{rs} \dot{\mathbf{I}}_s + \frac{1}{2} \mathbf{I}_s^T \mathbf{M}_{sr} \dot{\mathbf{I}}_r + \frac{1}{2} \mathbf{I}_r^T \frac{\partial \mathbf{M}_{rs}}{\partial \delta} \mathbf{I}_s \dot{\delta} \end{aligned} \quad (1.20)$$

e a equação (1.18) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$P_t = \mathbf{I}_s^T \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{I}_r^T \mathbf{R}_r \mathbf{I}_r + \dot{W} + \frac{1}{2} \mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \dot{\delta} + \frac{1}{2} \mathbf{I}_r^T \frac{\partial \mathbf{M}_{rs}}{\partial \delta} \mathbf{I}_s \dot{\delta} \quad (1.21)$$

Como

$$\mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \dot{\delta} = \mathbf{I}_r^T \frac{\partial \mathbf{M}_{rs}}{\partial \delta} \mathbf{I}_s \dot{\delta},$$

a equação da potência absorvida pelo motor toma a forma

$$P_t = \mathbf{I}_s^T \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{I}_r^T \mathbf{R}_r \mathbf{I}_r + \dot{W} + \mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \dot{\delta}, \quad (1.22)$$

de onde pode ser identificado que o termo

$$\mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \dot{\delta},$$

corresponde à potência mecânica, P_m , associada ao torque eletromagnético. Como o torque

eletromagnético é relacionado com a potência mecânica p_m

$$\tau_m = \frac{P_m}{\omega_r}, \quad (1.23)$$

pode ser reescrito na forma

$$\tau_m = \frac{\mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \dot{\delta}}{\omega_r} \quad (1.24)$$

Para finalizar, o uso da relação

$$\omega_r = \frac{\dot{\delta}}{v} \quad (1.25)$$

permite obter uma expressão para o conjugado eletromagnético desenvolvido pelo motor, que é função das correntes de estator, das correntes de rotor e de indutâncias, como segue

$$\tau_m = v \mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \quad (1.26)$$

A substituição de (1.26) em (1.16), leva a equação mecânica a tomar a forma

$$v \mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r = b \omega_r + J \dot{\omega}_r + \tau_c \quad (1.27)$$

Assim, o conjunto das equações (1.14), (1.15) e (1.27), agrupadas a seguir, representa o modelo completo da máquina de indução trifásica:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_s &= \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{L}_{ss} \dot{\mathbf{I}}_s + \mathbf{M}_{sr} \dot{\mathbf{I}}_r + \dot{\delta} \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{V}_r &= \mathbf{R}_r \mathbf{I}_r + \mathbf{L}_{rr} \dot{\mathbf{I}}_r + \mathbf{M}_{rs} \dot{\mathbf{I}}_s + \dot{\delta} \frac{\partial \mathbf{M}_{rs}}{\partial \delta} \mathbf{I}_s \\ v \mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \mathbf{I}_r &= b \omega_r + J \dot{\omega}_r + \tau_c \end{aligned} \quad (1.28)$$

1.2.2 Abordagem Baseada na Equação de Lagrange

O modelo trifásico do motor de indução, com grandezas projetadas em coordenadas de estator e de rotor, pode ser obtido com o uso da equação de Lagrange. Esta abordagem é baseada em relações de energia, apresentando a característica de destacar melhor as propriedades físicas do sistema. Esta característica pode ter grande valia, notadamente em sistemas de maior complexidade, onde as relações energéticas não sejam evidentes.

A equação de Lagrange é expressa por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = Q \quad (1.29)$$

onde L representa a função Lagrangeana do sistema, \mathbf{q} as coordenadas generalizadas e Q as forças generalizadas do sistema.

A escolha do vetor

$$\mathbf{q} = \left[\int i_{s1}, \int i_{s2}, \int i_{s3}, \int i_{r1}, \int i_{r2}, \int i_{r3}, \theta_r^m \right]^T$$

como vetor de coordenadas generalizadas permite que o Lagrangeano do sistema seja escrito como

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}, \quad (1.30)$$

onde

$$\dot{\mathbf{q}} = [i_{s1}, i_{s2}, i_{s3}, i_{r1}, i_{r2}, i_{r3}, \omega_r]^T$$

e

$$D = \begin{bmatrix} L_s^{123} & M_s & M_s & M_{s_1r_1} & M_{s_1r_2} & M_{s_1r_3} & 0 \\ M_s & L_s^{123} & M_s & M_{s_2r_1} & M_{s_2r_2} & M_{s_2r_3} & 0 \\ M_s & M_s & L_s^{123} & M_{s_3r_1} & M_{s_3r_2} & M_{s_3r_3} & 0 \\ M_{s_1r_1} & M_{s_2r_1} & M_{s_3r_1} & L_r^{123} & M_r & M_r & 0 \\ M_{s_1r_2} & M_{s_2r_2} & M_{s_3r_2} & M_r & L_r^{123} & M_r & 0 \\ M_{s_1r_3} & M_{s_2r_3} & M_{s_3r_3} & M_r & M_r & L_r^{123} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J \end{bmatrix}$$

ou, na forma compacta

$$D = \begin{bmatrix} L_{ss} & M_{sr} & 0 \\ M_{rs} & L_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}$$

O último elemento do vetor de coordenadas generalizadas, θ_r^m , representa o ângulo da posição mecânica do rotor, tendo a seguinte relação com δ :

$$\delta = v\theta_r^m$$

As forças generalizadas são representadas por

$$Q = \begin{bmatrix} V_s \\ V_r \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \\ \omega_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_c \end{bmatrix}$$

Assim, da simetria da matriz D , vem

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = D\dot{q} \quad (1.31)$$

Portanto

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{D}\ddot{\mathbf{q}} + \delta \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \delta} \dot{\mathbf{q}}, \quad (1.32)$$

com

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \delta} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_{rs}}{\partial \delta} & 0 \end{bmatrix}$$

O termo $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$ pode ser escrito como

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 1} \\ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \theta^r} \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

ou

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 1} \\ v \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \delta} \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

atuando somente na equação mecânica.

Deste modo, a equação de Lagrange, que representa o modelo completo da máquina de indução trifásica, toma a forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ss} & \mathbf{M}_{sr} & 0 \\ \mathbf{M}_{rs} & \mathbf{L}_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_s \\ \dot{\mathbf{I}}_r \\ \dot{\omega}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} \delta & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{M}_{rs}}{\partial \delta} \delta & 0 & 0 \\ -\frac{v}{2} \mathbf{I}_r^T \frac{\partial \mathbf{M}_{rs}}{\partial \delta} & -\frac{v}{2} \mathbf{I}_s^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s \\ \mathbf{V}_r \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_r & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \\ \omega_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_c \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

1.3 Transformação de Sistema de Coordenadas

O modelo trifásico do motor de indução, representado por (1.28) (ou equação (1.35)), contém indutâncias que dependem da posição do rotor. Assim, com o rotor em movimento, ocorrem variações em coeficientes das equações diferenciais que descrevem o comportamento dessa máquina, introduzindo grande complexidade ao modelo. Entretanto, a inconveniente dependência temporal das indutâncias mútuas estator-rotor pode ser eliminada pelo uso de transformações de sistemas de coordenadas. Historicamente, quem primeiro fez uso de uma transformação de variáveis na análise de máquinas elétricas foi R. H. Park, com uma publicação datada do final da década de 1920 [77]. Esse trabalho apresentou uma transformação que relacionava variáveis associadas com os enrolamentos de estator (tensões, correntes e fluxos) de uma máquina síncrona com variáveis associadas a enrolamentos fictícios girando com o rotor. Essa transformação, que revolucionou a análise das máquinas elétricas, tem como única propriedade a eliminação de todas as indutâncias variantes no tempo que aparecem nas equações da máquina síncrona. Mais tarde, na década de 1930, H. C. Stanley [84] empregou uma transformação de variáveis na análise da máquina de indução. Ele mostrou que a variação das indutâncias com o tempo, que aparece nas equações de tensão, podia ser eliminada por meio de uma transformação de variáveis que relacionava grandezas rotóricas com grandezas associadas a enrolamentos fictícios estacionários. Nesse caso, as grandezas rotóricas eram transformadas para um referencial fixo no estator. G. Kron [56] introduziu uma transformação de variáveis que eliminava a variação no tempo das indutâncias de uma máquina de indução simétrica, pela transformação das variáveis estatóricas e rotóricas para um referencial girante na velocidade síncrona. D. S. Bereton *et al* [13] empregaram uma mudança de variáveis para a máquina de indução, que também tinha a propriedade de eliminar as variações das indutâncias no tempo, através da transformação das variáveis estatóricas para um referencial fixado no rotor. Ou seja, aplicaram a transformação de Park para a

máquina de indução. Em 1965, P. C. Krause [50] mostrou que todas as transformações utilizadas até então eram casos particulares de uma transformação geral, onde o referencial estaria girando com uma velocidade arbitrária.

1.3.1 Transformação Geral Trifásico-Bifásica

A Figura 1.2 mostra uma representação de um sistema de enrolamentos trifásico (123) e de um sistema de enrolamentos bifásico ($d_g q_g$).

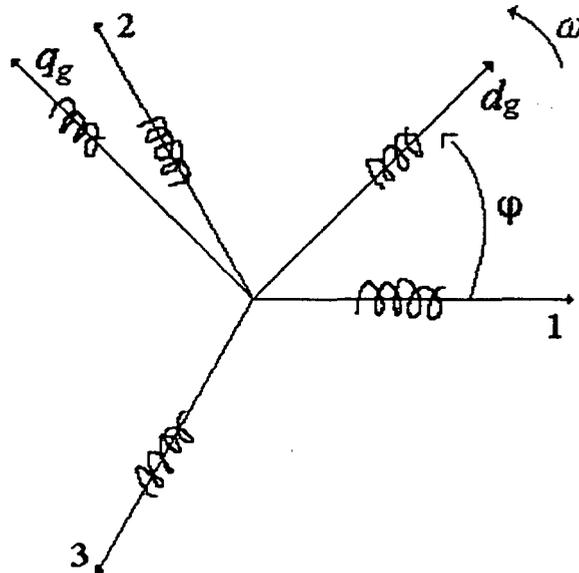


Figura 1.2: Representação de um sistema trifásico (123) e de um sistema bifásico ($d_g q_g$)

O ângulo elétrico da posição do eixo direto (d_g) do sistema bifásico em relação ao eixo 1 do sistema trifásico, φ , é

$$\varphi = \int \omega dt + \varphi_0$$

onde φ_0 dá a posição inicial do sistema bifásico em relação ao sistema trifásico e ω é a velocidade angular mecânica entre os dois sistemas. A transformação da força magnetomotriz

que é produzida pelo sistema trifásico para o sistema bifásico é dada por

$$\begin{bmatrix} F_d \\ F_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \cos \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) \\ -\sin \varphi & -\sin \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

A força magnetomotriz do sistema bifásico é

$$\begin{bmatrix} F_d \\ F_q \end{bmatrix} = n_2 \begin{bmatrix} i'_d \\ i'_q \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

onde n_2 é o número de espiras e i'_d e i'_q são as correntes bifásicas. A força magnetomotriz produzida pelo sistema trifásico é

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = n_3 \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

com n_3 representando o número de espiras e i_1 , i_2 e i_3 as correntes trifásicas. Assim, a transformação das correntes de um sistema para o outro fica

$$\begin{bmatrix} i'_d \\ i'_q \end{bmatrix} = \frac{n_3}{n_2} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \cos \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) \\ -\sin \varphi & -\sin \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Para que essa transformação possa ser invertida, defini-se uma corrente homopolar, i_0 , segundo a expressão

$$i_0 = a \times \frac{n_3}{n_2} (i_1 + i_2 + i_3) \quad (1.40)$$

Substituindo (1.40) em (1.39), vem

$$\begin{bmatrix} i'_d \\ i'_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{n_3}{n_2} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \cos \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) \\ -\sin \varphi & -\sin \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) \\ a & a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

Assim, a transformação genérica trifásico-bifásica toma a forma

$$\mathbf{K} = \frac{n_3}{n_2} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \cos \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) \\ -\sin \varphi & -\sin \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) \\ a & a & a \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

Conforme demonstrado em [2], para que a transformação seja invariante em potência é necessário que seja ortogonal, isto é, que $\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}^T$. Assim,

$$\left(\frac{n_3}{n_2} \right)^2 \begin{bmatrix} \cos \varphi & \cos \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) \\ -\sin \varphi & -\sin \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) \\ a & a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & a \\ \cos \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) & a \\ \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da primeira linha resulta

$$\left(\frac{n_3}{n_2} \right)^2 \left[\cos^2 \varphi + \cos^2 \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos^2 \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) \right] = 1$$

Desta forma, o valor da relação $\frac{n_3}{n_2}$ fica

$$\frac{3}{2} \left(\frac{n_3}{n_2} \right)^2 = 1 \implies \frac{n_3}{n_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Da terceira linha, tira-se

$$\left(\frac{n_3}{n_2}\right)^2 \times 3a^2 = 1$$

Assim, o valor de a é obtido por

$$\frac{2}{3} \times 3a^2 = 1 \implies a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Portanto, a transformação geral trifásico-bifásica fica

$$\mathbf{K} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin \varphi & -\sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

As transformações particulares para os sistemas de coordenadas bifásicos usuais, ou seja, sistema de coordenadas estacionário, síncrono e que gira com o rotor, são mostradas no Apêndice A. O Apêndice B apresenta as transformações entre os referenciais bifásicos.

A Figura 1.3 mostra, de forma esquemática, as relações entre os principais sistemas de coordenadas em uso.

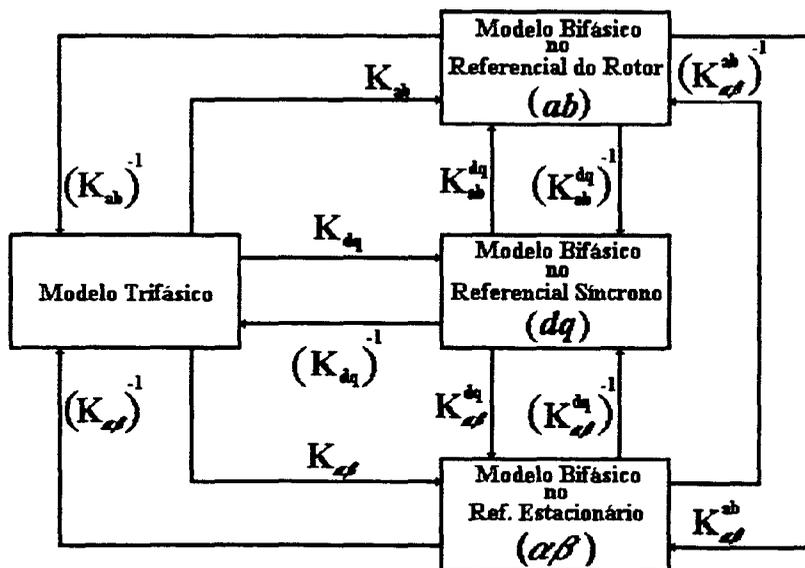


Figura 1.3: Diagrama de transformações entre modelos de representação do motor de indução

Todas as transformações representadas na Figura 1.3, \mathbf{K}_{ab} , \mathbf{K}_{dq} , $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$, \mathbf{K}_{ab}^{dq} , $\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq}$ e $\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{ab}$, são ortogonais e estão desenvolvidas nos Apêndices A e B.

1.4 Modelos Bifásicos

1.4.1 Modelo no Sistema de Coordenadas Síncrono

Este modelo pode ser obtido pela aplicação das transformações \mathbf{K}_{dq}^s , \mathbf{K}_{dq}^r , $(\mathbf{K}_{dq}^s)^{-1}$ e $(\mathbf{K}_{dq}^r)^{-1}$ às equações do modelo trifásico.

O fluxo de estator é obtido a partir de (1.8), como segue:

$$\mathbf{K}_{dq}^s \phi_s = \mathbf{K}_{dq}^s \mathbf{L}_{ss} \mathbf{I}_s + \mathbf{K}_{dq}^s \mathbf{M}_{sr} \mathbf{I}_r \quad (1.44)$$

Como

$$\mathbf{I}_s = (\mathbf{K}_{dq}^s)^{-1} \mathbf{I}_{dq}^s \quad (1.45)$$

$$\mathbf{I}_r = (\mathbf{K}_{dq}^r)^{-1} \mathbf{I}_{dq}^r \quad (1.46)$$

com \mathbf{I}_{dq}^s e \mathbf{I}_{dq}^r representando os vetores das correntes de estator e de rotor no sistema de coordenadas síncrono, respectivamente, a equação (1.44) fica

$$\phi_{dq}^s = \mathbf{K}_{dq}^s \mathbf{L}_{ss} (\mathbf{K}_{dq}^s)^{-1} \mathbf{I}_{dq}^s + \mathbf{K}_{dq}^s \mathbf{M}_{sr} (\mathbf{K}_{dq}^r)^{-1} \mathbf{I}_{dq}^r \quad (1.47)$$

A matriz de indutâncias de estator transformada para o referencial síncrono, é dada por

$$\mathbf{K}_{dq}^s \mathbf{L}_{ss} (\mathbf{K}_{dq}^s)^{-1} = \begin{bmatrix} L_s^{123} - M_s & 0 & 0 \\ 0 & L_s^{123} - M_s & 0 \\ 0 & 0 & L_s^{123} + 2M_s \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

e a matriz de indutâncias mútuas estator-rotor é

$$\mathbf{K}_{dq}^s \mathbf{M}_{sr} (\mathbf{K}_{dq}^r)^{-1} = \frac{3}{2} M_{sr} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

Assim, os fluxos estatóricos no referencial síncrono são

$$\begin{bmatrix} \phi_d^s \\ \phi_q^s \\ \phi_0^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s^{123} - M_s & 0 & 0 \\ 0 & L_s^{123} - M_s & 0 \\ 0 & 0 & L_s^{123} + 2M_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ i_0^s \end{bmatrix} + \frac{3}{2} M_{sr} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^r \\ i_q^r \\ i_0^r \end{bmatrix}$$

Com alimentação estatórica simétrica resulta $i_0^s = 0$ e $i_0^r = 0$ e, portanto

$$\phi_d^s = L_s i_d^s + L_{sr} i_d^r \quad (1.50)$$

$$\phi_q^s = L_s i_q^s + L_{sr} i_q^r \quad (1.51)$$

$$\phi_0^s = 0 \quad (1.52)$$

onde

$$L_s = L_s^{123} - M_s \quad (1.53)$$

e

$$L_{sr} = \frac{3}{2} M_{sr} \quad (1.54)$$

A equação do fluxo rotórico é obtida por um procedimento idêntico ao usado para o fluxo do estator, através da aplicação de \mathbf{K}_{dq}^r em (1.9), como segue:

$$\mathbf{K}_{dq}^r \phi_r = \mathbf{K}_{dq}^r M_{rs} \mathbf{I}_s + \mathbf{K}_{dq}^r L_{rr} \mathbf{I}_r \quad (1.55)$$

Com o uso de (1.45) e (1.46), chega-se a

$$\phi_{dq}^r = \mathbf{K}_{dq}^r M_{rs} (\mathbf{K}_{dq}^s)^{-1} \mathbf{I}_{dq}^s + \mathbf{K}_{dq}^r L_{rr} (\mathbf{K}_{dq}^r)^{-1} \mathbf{I}_{dq}^r \quad (1.56)$$

onde a matriz de indutâncias rotóricas, transformada para o referencial síncrono, é

$$\mathbf{K}_{dq}^r L_{rr} (\mathbf{K}_{dq}^r)^{-1} = \begin{bmatrix} L_r^{123} - M_r & 0 & 0 \\ 0 & L_r^{123} - M_r & 0 \\ 0 & 0 & L_r^{123} + 2M_r \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

e

$$\mathbf{K}_{dq}^r M_{rs} (\mathbf{K}_{dq}^s)^{-1} = \mathbf{K}_{dq}^s M_{sr} (\mathbf{K}_{dq}^r)^{-1} \quad (1.58)$$

Dessa forma, os fluxos rotóricos no referencial síncrono são dados por

$$\begin{bmatrix} \phi_d^r \\ \phi_q^r \\ \phi_0^r \end{bmatrix} = \frac{3}{2} M_{sr} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ i_0^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_r^{123} - M_r & 0 & 0 \\ 0 & L_r^{123} - M_r & 0 \\ 0 & 0 & L_r^{123} + 2M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^r \\ i_q^r \\ i_0^r \end{bmatrix}$$

Para alimentação estatórica simétrica, vem:

$$\phi_d^r = L_{sr}i_d^s + L_r i_d^r \quad (1.59)$$

$$\phi_q^r = L_{sr}i_q^s + L_r i_q^r \quad (1.60)$$

$$\phi_0^r = 0 \quad (1.61)$$

onde

$$L_r = L_r^{123} - M_r \quad (1.62)$$

As equações de tensão são obtidas a partir de (1.1) e (1.2). Para o estator, tem-se:

$$\mathbf{K}_{dq}^s \mathbf{V}_s = \mathbf{K}_{dq}^s \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{K}_{dq}^s \dot{\phi}_s \quad (1.63)$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{V}_{dq}^s = \mathbf{K}_{dq}^s \mathbf{R}_s (\mathbf{K}_{dq}^s)^{-1} \mathbf{I}_{dq}^s + \mathbf{K}_{dq}^s \dot{\phi}_s \quad (1.64)$$

Como \mathbf{R}_s é proporcional à matriz identidade (definida em (1.5)), resulta

$$\mathbf{K}_{dq}^s \mathbf{R}_s (\mathbf{K}_{dq}^s)^{-1} = \mathbf{R}_s \quad (1.65)$$

A transformação da derivada temporal do fluxo de estator é

$$\mathbf{K}_{dq}^s \dot{\phi}_s = \frac{d}{dt} \{ \mathbf{K}_{dq}^s \phi_s \} - \phi_s \frac{d}{dt} \mathbf{K}_{dq}^s \quad (1.66)$$

onde

$$\phi_s \frac{d}{dt} \mathbf{K}_{dq}^s = \begin{bmatrix} \phi_q^s \\ -\phi_d^s \\ 0 \end{bmatrix} v\omega_s \quad (1.67)$$

Assim, podemos escrever

$$\mathbf{K}_{dq}^s \dot{\phi}_s = \dot{\phi}_{dq}^s - \begin{bmatrix} \phi_q^s \\ -\phi_d^s \\ 0 \end{bmatrix} v\omega_s \quad (1.68)$$

A equação de tensão de estator no referencial síncrono é obtida pela substituição de (1.65) e (1.68) em (1.64), o que resulta

$$\mathbf{V}_{dq}^s = \mathbf{R}_s \mathbf{I}_{dq}^s + \dot{\phi}_{dq}^s - \begin{bmatrix} \phi_d^s \\ -\phi_q^s \\ 0 \end{bmatrix} v\omega_s \quad (1.69)$$

Assim, com alimentação estatórica simétrica vem

$$v_d^s = R_s i_d^s + \dot{\phi}_d^s - \phi_q^s v\omega_s \quad (1.70)$$

$$v_q^s = R_s i_q^s + \dot{\phi}_q^s + \phi_d^s v\omega_s \quad (1.71)$$

$$v_0^s = 0 \quad (1.72)$$

A obtenção da tensão de rotor é feita a partir da equação (1.2), como segue:

$$\mathbf{K}_{dq}^r \mathbf{V}_r = \mathbf{K}_{dq}^r \mathbf{R}_r \mathbf{I}_r + \mathbf{K}_{dq}^r \dot{\phi}_r \quad (1.73)$$

que pode ser posta na forma

$$\mathbf{V}_{dq}^r = \mathbf{K}_{dq}^r \mathbf{R}_r (\mathbf{K}_{dq}^r)^{-1} \mathbf{I}_{dq}^r + \mathbf{K}_{dq}^r \dot{\phi}_r \quad (1.74)$$

Da definição de \mathbf{R}_r , feita em (1.5), resulta

$$\mathbf{K}_{dq}^r \mathbf{R}_r (\mathbf{K}_{dq}^r)^{-1} = \mathbf{R}_r \quad (1.75)$$

Como

$$\mathbf{K}_{dq}^r \dot{\phi}_r = \frac{d}{dt} \{ \mathbf{K}_{dq}^r \phi_r \} - \phi_r \frac{d}{dt} \mathbf{K}_{dq}^r \quad (1.76)$$

e

$$\phi_r \frac{d}{dt} \mathbf{K}_{dq}^r = \begin{bmatrix} \phi_q^r \\ -\phi_d^r \\ 0 \end{bmatrix} v (\omega_s - \omega_r) \quad (1.77)$$

a transformação da derivada temporal do fluxo rotórico, fica

$$\mathbf{K}_{dq}^r \dot{\phi}_r = \dot{\phi}_{dq}^r - \begin{bmatrix} \phi_q^r \\ -\phi_d^r \\ 0 \end{bmatrix} v (\omega_s - \omega_r) \quad (1.78)$$

Desta forma, a equação da tensão de rotor no referencial síncrono é

$$\mathbf{V}_{dq}^r = \mathbf{R}_r \mathbf{I}_{dq}^r + \dot{\boldsymbol{\phi}}_{dq}^r - \begin{bmatrix} \phi_q^r \\ -\phi_d^r \\ 0 \end{bmatrix} v (\omega_s - \omega_r) \quad (1.79)$$

Com alimentação estatórica simétrica, a equação (1.79) particulariza-se para:

$$v_d^r = R_r i_d^r + \dot{\phi}_d^r - \phi_q^r v (\omega_s - \omega_r) \quad (1.80)$$

$$v_q^r = R_r i_q^r + \dot{\phi}_q^r + \phi_d^r v (\omega_s - \omega_r) \quad (1.81)$$

$$v_0^r = 0 \quad (1.82)$$

As equações acima definem, portanto, a dinâmica da parte elétrica. A dinâmica da parte mecânica pode ser obtida pela aplicação das transformações de variáveis à equação (1.27):

$$v (\mathbf{I}_{dq}^s)^T \left[(\mathbf{K}_{dq}^s)^{-1} \right]^T \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} (\mathbf{K}_{dq}^r)^{-1} \mathbf{I}_{dq}^r = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c \quad (1.83)$$

Uma vez que a transformação \mathbf{K}_{dq}^s é ortogonal, vem:

$$v (\mathbf{I}_{dq}^s)^T \mathbf{K}_{dq}^s \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} (\mathbf{K}_{dq}^r)^{-1} \mathbf{I}_{dq}^r = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c \quad (1.84)$$

onde

$$\mathbf{K}_{dq}^s \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \alpha} (\mathbf{K}_{dq}^r)^{-1} = L_{sr} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.85)$$

Assim, a equação mecânica no referencial síncrono fica:

$$v L_{sr} \begin{bmatrix} i_d^s & i_q^s & i_0^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^r \\ i_q^r \\ i_0^r \end{bmatrix} = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c$$

o que corresponde a

$$v L_{sr} (i_q^s i_d^r - i_d^s i_q^r) = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c \quad (1.86)$$

Portanto, o modelo dinâmico da máquina de indução simétrica, sob alimentação equilibrada, no referencial síncrono, é dado pelo conjunto das equações (1.50), (1.51), (1.59), (1.60), (1.70), (1.71), (1.80), (1.81) e (1.86), agrupadas abaixo:

• Equação Elétrica

$$\begin{bmatrix} v_d^s \\ v_q^s \\ v_d^r \\ v_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ i_d^r \\ i_q^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi}_d^s \\ \dot{\phi}_q^s \\ \dot{\phi}_d^r \\ \dot{\phi}_q^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\phi_q^s v \omega_s \\ \phi_d^s v \omega_s \\ -\phi_q^r v (\omega_s - \omega_r) \\ \phi_d^r v (\omega_s - \omega_r) \end{bmatrix} \quad (1.87)$$

com,

$$\begin{bmatrix} \phi_d^s \\ \phi_q^s \\ \phi_d^r \\ \phi_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & L_{sr} & 0 \\ 0 & L_s & 0 & L_{sr} \\ L_{sr} & 0 & L_r & 0 \\ 0 & L_{sr} & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ i_d^r \\ i_q^r \end{bmatrix} \quad (1.88)$$

e

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_d^s \\ \dot{\phi}_q^s \\ \dot{\phi}_d^r \\ \dot{\phi}_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & L_{sr} & 0 \\ 0 & L_s & 0 & L_{sr} \\ L_{sr} & 0 & L_r & 0 \\ 0 & L_{sr} & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ i_d^r \\ i_q^r \end{bmatrix} \quad (1.89)$$

• Equação Mecânica

$$v L_{sr} (i_q^s i_d^r - i_d^s i_q^r) = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c$$

Rearranjando (1.87), com o uso de (1.88) e (1.89), a equação elétrica pode ser posta na forma

$$\begin{bmatrix} v_d^s \\ v_q^s \\ v_d^r \\ v_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & L_{sr} & 0 \\ 0 & L_s & 0 & L_{sr} \\ L_{sr} & 0 & L_r & 0 \\ 0 & L_{sr} & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ i_d^r \\ i_q^r \end{bmatrix} + \quad (1.90)$$

$$+ \begin{bmatrix} R_s & -L_s v \omega_s & 0 & -L_{sr} v \omega_s \\ L_s v \omega_s & R_s & L_{sr} v \omega_s & 0 \\ 0 & -L_{sr} v (\omega_s - \omega_r) & R_r & -L_r v (\omega_s - \omega_r) \\ L_{sr} v (\omega_s - \omega_r) & 0 & L_r v (\omega_s - \omega_r) & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ i_d^r \\ i_q^r \end{bmatrix}$$

1.4.2 Modelo no Sistema de Coordenadas Estacionário

Pode ser obtido pela aplicação da transformação que rotaciona o sistema de coordenadas síncrono para o sistema de coordenadas estacionário, $\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}}$ (ver Apêndice B), às equações (1.86), (1.87), (1.88) e (1.89). Para a equação de tensões, o resultado é:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\text{dq}}^{\text{s}} \\ \mathbf{V}_{\text{dq}}^{\text{r}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}})^{-1} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^{\text{s}} \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^{\text{r}} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{\text{dq}}^{\text{s}} \\ \dot{\phi}_{\text{dq}}^{\text{r}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_q^{\text{s}} v \omega_s \\ \phi_d^{\text{s}} v \omega_s \\ -\phi_q^{\text{r}} v (\omega_s - \omega_r) \\ \phi_d^{\text{r}} v (\omega_s - \omega_r) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.91)$$

Dado que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\text{dq}}^{\text{s}} \\ \mathbf{V}_{\text{dq}}^{\text{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\alpha\beta}^{\text{s}} \\ \mathbf{V}_{\alpha\beta}^{\text{r}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}})^{-1} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}})^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{\text{dq}}^{\text{s}} \\ \dot{\phi}_{\text{dq}}^{\text{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{\alpha\beta}^{\text{s}} \\ \dot{\phi}_{\alpha\beta}^{\text{r}} \end{bmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{\text{dq}}^{\text{s}} \\ \phi_{\text{dq}}^{\text{r}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{\text{dq}}^{\text{s}} \\ \phi_{\text{dq}}^{\text{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\cos(\theta_s)\phi_q^{\text{s}} + \sin(\theta_s)\phi_d^{\text{s}}]v\omega_s \\ -[\sin(\theta_s)\phi_q^{\text{s}} + \cos(\theta_s)\phi_d^{\text{s}}]v\omega_s \\ -[\cos(\theta_s)\phi_q^{\text{r}} + \sin(\theta_s)\phi_d^{\text{r}}]v\omega_s \\ -[\sin(\theta_s)\phi_q^{\text{r}} + \cos(\theta_s)\phi_d^{\text{r}}]v\omega_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_q^{\text{s}}v\omega_s \\ \phi_d^{\text{s}}v\omega_s \\ -\phi_q^{\text{r}}v(\omega_s - \omega_r) \\ \phi_d^{\text{r}}v(\omega_s - \omega_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\cos(\theta_s)\phi_q^{\text{s}} + \sin(\theta_s)\phi_d^{\text{s}}]v\omega_s \\ -[\sin(\theta_s)\phi_q^{\text{s}} + \cos(\theta_s)\phi_d^{\text{s}}]v\omega_s \\ -[\cos(\theta_s)\phi_q^{\text{r}} + \sin(\theta_s)\phi_d^{\text{r}}]v(\omega_s - \omega_r) \\ -[\sin(\theta_s)\phi_q^{\text{r}} + \cos(\theta_s)\phi_d^{\text{r}}]v(\omega_s - \omega_r) \end{bmatrix}$$

a equação de tensões no referencial estacionário fica:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\alpha\beta}^{\text{s}} \\ \mathbf{V}_{\alpha\beta}^{\text{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^{\text{s}} \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^{\text{r}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{\alpha\beta}^{\text{s}} \\ \dot{\phi}_{\alpha\beta}^{\text{r}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_{\beta}^{\text{r}}v\omega_r \\ -\phi_{\alpha}^{\text{r}}v\omega_r \end{bmatrix} \quad (1.92)$$

O resultado para a equação de fluxo é:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{\text{dq}}^{\text{s}} \\ \phi_{\text{dq}}^{\text{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{sr} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}})^{-1} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^{\text{s}} \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^{\text{r}} \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{\text{dq}}^{\text{s}} \\ \phi_{\text{dq}}^{\text{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{\alpha\beta}^{\text{s}} \\ \phi_{\alpha\beta}^{\text{r}} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{sr} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}})^{-1} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{dq}})^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{sr} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix}$$

o fluxo no referencial estacionário pode ser escrito do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} \phi_{\alpha\beta}^{\text{s}} \\ \phi_{\alpha\beta}^{\text{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{sr} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^{\text{s}} \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^{\text{r}} \end{bmatrix} \quad (1.93)$$

com

$$\mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} L_s & 0 \\ 0 & L_s \end{bmatrix} \quad (1.94)$$

$$\mathbf{L}_{sr} = \begin{bmatrix} L_{sr} & 0 \\ 0 & L_{sr} \end{bmatrix} \quad (1.95)$$

Assim, de (1.93) tira-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_{\alpha\beta}^s \\ \dot{\phi}_{\alpha\beta}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & L_{sr} \\ L_{sr} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{\alpha\beta}^s \\ \dot{i}_{\alpha\beta}^r \end{bmatrix} \quad (1.96)$$

A equação mecânica do sistema é obtida de (1.86), conforme segue:

$$vL_{sr} (\mathbf{I}_{\alpha\beta}^s)^T \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq})^T \mathbf{I}_{\alpha\beta}^r = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c$$

Como

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq})^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a equação mecânica no referencial estacionário pode ser reescrita como segue:

$$vL_{sr} (i_{\beta}^s i_{\alpha}^r - i_{\alpha}^s i_{\beta}^r) = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c \quad (1.97)$$

Portanto, o modelo dinâmico da máquina de indução simétrica, sob alimentação equilibrada, no referencial estacionário, é dado pelo conjunto das equações (1.92), (1.93), (1.96) e (1.97).

1.5 Representação no Espaço de Estado

Várias representações no espaço de estado podem ser empregadas, conforme o objetivo do estudo. Esta seção apresenta algumas das principais representações em uso.

1.5.1 Sistema de Coordenadas Estacionário

Representação em Correntes Estatóricas e Fluxos Rotóricos

O vetor de estado do sistema elétrico é dado por:

$$\mathbf{x} = \left[i_{\alpha}^s \quad i_{\beta}^s \quad \phi_{\alpha}^r \quad \phi_{\beta}^r \right]^T \quad (1.98)$$

A obtenção do modelo de estado do sistema elétrico pode ser feita a partir de (1.92), com o uso das seguintes transformações de variáveis:

$$i_{\alpha}^r = \frac{1}{L_r} \phi_{\alpha}^r - \frac{L_{sr}}{L_r} i_{\alpha}^s \quad (1.99)$$

$$i_{\beta}^r = \frac{1}{L_r} \phi_{\beta}^r - \frac{L_{sr}}{L_r} i_{\beta}^s \quad (1.100)$$

$$\phi_{\alpha}^s = \sigma L_s i_{\alpha}^s + \frac{L_{sr}}{L_r} \phi_{\alpha}^r \quad (1.101)$$

$$\phi_{\beta}^s = \sigma L_s i_{\beta}^s + \frac{L_{sr}}{L_r} \phi_{\beta}^r \quad (1.102)$$

onde

$$\sigma = 1 - \frac{(L_{sr})^2}{L_s L_r}$$

Assim, as derivadas temporais dos fluxos estatóricos são:

$$\frac{d}{dt}\phi_{\alpha}^s = \sigma L_s \frac{d}{dt}i_{\alpha}^s + \frac{L_{sr}}{L_r} \frac{d}{dt}\phi_{\alpha}^r \quad (1.103)$$

$$\frac{d}{dt}\phi_{\beta}^s = \sigma L_s \frac{d}{dt}i_{\beta}^s + \frac{L_{sr}}{L_r} \frac{d}{dt}\phi_{\beta}^r. \quad (1.104)$$

Assumindo que o motor opera com o rotor em curto-circuito, resultam as seguintes relações para as derivadas temporais dos fluxos rotóricos:

$$\frac{d}{dt}\phi_{\alpha}^r = -R_r \left(\frac{1}{L_r} \phi_{\alpha}^r - \frac{L_{sr}}{L_r} i_{\alpha}^s \right) - v\omega_r \phi_{\beta}^r \quad (1.105)$$

$$\frac{d}{dt}\phi_{\beta}^r = -R_r \left(\frac{1}{L_r} \phi_{\beta}^r - \frac{L_{sr}}{L_r} i_{\beta}^s \right) + v\omega_r \phi_{\alpha}^r \quad (1.106)$$

Deste modo, das equações das tensões estatóricas, tira-se:

$$\frac{d}{dt}i_{\alpha}^s = - \left(\frac{R_s L_r^2 + R_r L_{sr}^2}{\sigma L_s L_r^2} \right) i_{\alpha}^s + \frac{R_r L_{sr}}{\sigma L_s L_r^2} \phi_{\alpha}^r + \frac{L_{sr}}{\sigma L_s L_r} v\omega_r \phi_{\beta}^r + \frac{1}{\sigma L_s} V_{\alpha}^s \quad (1.107)$$

$$\frac{d}{dt}i_{\beta}^s = - \left(\frac{R_s L_r^2 + R_r L_{sr}^2}{\sigma L_s L_r^2} \right) i_{\beta}^s + \frac{R_r L_{sr}}{\sigma L_s L_r^2} \phi_{\beta}^r - \frac{L_{sr}}{\sigma L_s L_r} v\omega_r \phi_{\alpha}^r + \frac{1}{\sigma L_s} V_{\beta}^s \quad (1.108)$$

O modelo de estado para o sistema mecânico é obtido pela substituição de (1.99) e (1.100) em (1.97):

$$vL_{sr} \left[i_{\beta}^s \left(\frac{1}{L_r} \phi_{\alpha}^r - \frac{L_{sr}}{L_r} i_{\alpha}^s \right) - i_{\alpha}^s \left(\frac{1}{L_r} \phi_{\beta}^r - \frac{L_{sr}}{L_r} i_{\beta}^s \right) \right] = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c \quad (1.109)$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{vL_{sr}}{L_r} (i_{\beta}^s \phi_{\alpha}^r - i_{\alpha}^s \phi_{\beta}^r) = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c \quad (1.110)$$

Assim, a equação de estado do sistema mecânico fica

$$\dot{\omega}_r = \frac{vL_{sr}}{JL_r} (i_{\beta}^s \phi_{\alpha}^r - i_{\alpha}^s \phi_{\beta}^r) - \frac{b}{J}\omega_r - \frac{\tau_c}{J} \quad (1.111)$$

O modelo de estado do sistema elétrico é, então, dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{\alpha}^s \\ \dot{i}_{\beta}^s \\ \dot{\phi}_{\alpha}^r \\ \dot{\phi}_{\beta}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & \frac{K}{T_r} & v\omega_r K \\ 0 & -\gamma & -v\omega_r K & \frac{K}{T_r} \\ \frac{L_{sr}}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & -v\omega_r \\ 0 & \frac{L_{sr}}{T_r} & v\omega_r & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha}^s \\ i_{\beta}^s \\ \phi_{\alpha}^r \\ \phi_{\beta}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\alpha}^s \\ V_{\beta}^s \end{bmatrix} \quad (1.112)$$

onde

$$T_r = \frac{L_r}{R_r}, \quad K = \frac{L_{sr}}{\sigma L_s L_r}, \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{R_s L_r^2 + R_r L_{sr}^2}{\sigma L_s L_r^2}. \quad (1.113)$$

Portanto, o modelo de estado do sistema é constituído pelas equações (1.111) e (1.112).

Outros modelos, onde a escolha das variáveis de estado é diferente, podem ser obtidos com o uso de uma matriz de transformação \mathbf{T}_i , tal que:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} i_\alpha^s & i_\beta^s & \phi_\alpha^r & \phi_\beta^r \end{bmatrix}^T \\
 \mathbf{x}_i &= \mathbf{T}_i \mathbf{x} \\
 \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(\omega_r) \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\
 \dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{T}_i \mathbf{A}(\omega_r) \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i + \mathbf{T}_i \mathbf{B} \mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{1.114}$$

com

$$\mathbf{A}(\omega_r) = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & \frac{K}{T_r} & v\omega_r K \\ 0 & -\gamma & -v\omega_r K & \frac{K}{T_r} \\ \frac{L_{sr}}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & -v\omega_r \\ 0 & \frac{L_{sr}}{T_r} & v\omega_r & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Representação em Correntes Estatóricas e Fluxos Estatóricos

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} i_\alpha^s \\ i_\beta^s \\ \phi_\alpha^s \\ \phi_\beta^s \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sigma L_s & 0 & \frac{L_{sr}}{L_r} & 0 \\ 0 & \sigma L_s & 0 & \frac{L_{sr}}{L_r} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{L_{sr}^2 - L_s L_r}{L_{sr}} & 0 & \frac{L_r}{L_{sr}} & 0 \\ 0 & \frac{L_{sr}^2 - L_s L_r}{L_{sr}} & 0 & \frac{L_r}{L_{sr}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_i \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.115)$$

$$\mathbf{T}_i \mathbf{A}(\omega_r) \mathbf{T}_i^{-1} = \begin{bmatrix} -(\alpha + \beta) & -v\omega_r & \frac{\beta}{L_s} & \frac{v\omega_r}{\sigma L_s} \\ v\omega_r & -(\alpha + \beta) & -\frac{v\omega_r}{\sigma L_s} & \frac{\beta}{L_s} \\ -R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_s & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\omega}_r = \frac{v}{J} (i_\beta^s \phi_\alpha^s - i_\alpha^s \phi_\beta^s) - \frac{b}{J} \omega_r - \frac{\tau_c}{J}, \quad (1.116)$$

com

$$\alpha = \frac{R_s}{\sigma L_s}, \quad \beta = \frac{R_r}{\sigma L_r}. \quad (1.117)$$

Representação em Fluxos Estatóricos e Fluxos Rotóricos

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \phi_\alpha^s \\ \phi_\beta^s \\ \phi_\alpha^r \\ \phi_\beta^r \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \sigma L_s & 0 & \frac{L_{sr}}{L_r} & 0 \\ 0 & \sigma L_s & 0 & \frac{L_{sr}}{L_r} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_i^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 & -K & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} & 0 & -K \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_i \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.118)$$

$$\mathbf{T}_i \mathbf{A}(\omega_r) \mathbf{T}_i^{-1} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & R_s K & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & R_s K \\ R_r K & 0 & -\beta & -v\omega_r \\ 0 & R_r K & v\omega_r & -\beta \end{bmatrix}$$

$$\dot{\omega}_r = \frac{vK}{J} (\phi_\beta^s \phi_\alpha^r - \phi_\alpha^s \phi_\beta^r) - \frac{b}{J} \omega_r - \frac{\tau_c}{J} \quad (1.119)$$

Representação em Correntes Estatóricas e Correntes Rotóricas

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} i_\alpha^s \\ i_\beta^s \\ i_\alpha^r \\ i_\beta^r \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{L_{sr}}{L_r} & 0 & \frac{1}{L_r} & 0 \\ 0 & -\frac{L_{sr}}{L_r} & 0 & \frac{1}{L_r} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ L_{sr} & 0 & L_r & 0 \\ 0 & L_{sr} & 0 & L_r \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_i \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -K & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \quad (1.120)$$

$$\mathbf{T}_i \mathbf{A}(\omega_r) \mathbf{T}_i^{-1} = \begin{bmatrix} -\alpha & v\omega_r K L_{sr} & R_r K & v\omega_r \frac{L_{sr}}{\sigma L_s} \\ -v\omega_r K L_{sr} & -\alpha & -v\omega_r \frac{L_{sr}}{\sigma L_s} & R_r K \\ R_s K & -v\omega_r \frac{L_{sr}}{\sigma L_r} & -\beta & -\frac{v\omega_r}{\sigma} \\ v\omega_r \frac{L_{sr}}{\sigma L_r} & R_s K & \frac{v\omega_r}{\sigma} & -\beta \end{bmatrix}$$

$$\dot{\omega}_r = \frac{v L_{sr}}{J} (i_\beta^s i_\alpha^r - i_\alpha^s i_\beta^r) - \frac{b}{J} \omega_r - \frac{\tau_c}{J} \quad (1.121)$$

1.6 Modelo Derivado da Abordagem Lagrangeana no Sistema de Coordenadas Estacionário

Esta seção desenvolve um modelo bifásico derivado da equação de Lagrange, tendo como variáveis de estado as correntes de estator e os fluxos de rotor.

O procedimento usado para a obtenção deste modelo consiste das seguintes etapas:

a) aplicação das transformações $\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s$, $\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r$, $(\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s)^{-1}$ e $(\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1}$ ao modelo Lagrangeano trifásico, representado pela equação (1.35);

b) aplicação de uma transformação de variáveis de estado, passando de um modelo em correntes estatóricas e correntes rotóricas para um modelo em correntes estatóricas e fluxos rotóricos.

A primeira etapa é desenvolvida pela aplicação das transformações $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$ e $(\mathbf{K}_{\alpha\beta})^{-1}$ à equação (1.35), como segue:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{ss} & M_{sr} & 0 \\ M_{rs} & L_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_s \\ \dot{\mathbf{I}}_r \\ \dot{\omega}_r \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial M_{sr}}{\partial \delta} v \omega_r & 0 \\ \frac{\partial M_{rs}}{\partial \delta} v \omega_r & 0 & 0 \\ -\frac{v}{2} \mathbf{I}_r^T \frac{\partial M_{rs}}{\partial \delta} & -\frac{v}{2} \mathbf{I}_s^T \frac{\partial M_{sr}}{\partial \delta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s \\ \mathbf{V}_r \\ 0 \end{bmatrix} - \\
 & - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_r & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \\ \omega_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_c \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{1.122}$$

É interessante notar que adotando $\delta_0 = 0$ resulta $\delta = \int v\omega_r dt = \varphi_r$.

Assim, uma vez que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^r \\ \omega_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{i}}_s \\ \dot{\mathbf{i}}_r \\ \dot{\omega}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1}}{\partial\delta} v\omega_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^r \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{i}}_{\alpha\beta}^s \\ \dot{\mathbf{i}}_{\alpha\beta}^r \\ \dot{\omega}_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{V}_{\alpha\beta}^r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s \\ \mathbf{V}_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

a equação (1.122) fica:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ss} & \mathbf{M}_{sr} & 0 \\ \mathbf{M}_{rs} & \mathbf{L}_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1}}{\partial\delta} v\omega_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^r \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{i}}_{\alpha\beta}^s \\ \dot{\mathbf{i}}_{\alpha\beta}^r \\ \dot{\omega}_r \end{bmatrix} \right\} + \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial\mathbf{M}_{sr}}{\partial\delta} v\omega_r & 0 \\ \frac{\partial\mathbf{M}_{rs}}{\partial\delta} v\omega_r & 0 & 0 \\ -\frac{v}{2}\mathbf{I}_r^T \frac{\partial\mathbf{M}_{rs}}{\partial\delta} & -\frac{v}{2}\mathbf{I}_s^T \frac{\partial\mathbf{M}_{sr}}{\partial\delta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^r \\ \omega_r \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_r & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^r \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{V}_{\alpha\beta}^r \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(1.123)

Como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ss} & \mathbf{M}_{sr} & 0 \\ \mathbf{M}_{rs} & \mathbf{L}_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} & 0 \\ \mathbf{L}_{sr} & \mathbf{L}_r & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ss} & \mathbf{M}_{sr} & 0 \\ \mathbf{M}_{rs} & \mathbf{L}_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1}}{\partial\delta} v\omega_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s \mathbf{M}_{sr} \frac{\partial(\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1}}{\partial\delta} v\omega_r & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r \mathbf{L}_{rr} \frac{\partial(\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1}}{\partial\delta} v\omega_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial\mathbf{M}_{sr}}{\partial\alpha} v\omega_r & 0 \\ \frac{\partial\mathbf{M}_{rs}}{\partial\alpha} v\omega_r & 0 & 0 \\ -\frac{v}{2} \mathbf{I}_r^T \frac{\partial\mathbf{M}_{rs}}{\partial\alpha} & -\frac{v}{2} \mathbf{I}_s^T \frac{\partial\mathbf{M}_{sr}}{\partial\alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s \frac{\partial\mathbf{M}_{sr}}{\partial\alpha} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1} v\omega_r & 0 \\ \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r \frac{\partial\mathbf{M}_{rs}}{\partial\alpha} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s)^{-1} v\omega_r & 0 & 0 \\ -\frac{v}{2} (\mathbf{I}_{\alpha\beta}^r)^T \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r \frac{\partial\mathbf{M}_{rs}}{\partial\alpha} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s)^{-1} & -\frac{v}{2} (\mathbf{I}_{\alpha\beta}^s)^T \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s \frac{\partial\mathbf{M}_{sr}}{\partial\alpha} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_r & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_r & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

a equação (1.123) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} & 0 \\ \mathbf{L}_{sr} & \mathbf{L}_r & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{i}}_{\alpha\beta}^s \\ \dot{\mathbf{i}}_{\alpha\beta}^r \\ \dot{\omega}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1} v\omega_r & 0 \\ \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s)^{-1} v\omega_r & 0 & 0 \\ -\frac{v}{2} (\mathbf{I}_{\alpha\beta}^r)^T \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s)^{-1} & -\frac{v}{2} (\mathbf{I}_{\alpha\beta}^s)^T \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^r \\ \omega_r \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s \mathbf{M}_{sr} \frac{\partial (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1}}{\partial \delta} v\omega_r & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r \mathbf{L}_{rr} \frac{\partial (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s)^{-1}}{\partial \delta} v\omega_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^r \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_r & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^r \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{V}_{\alpha\beta}^r \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_c \end{bmatrix}$$

Verifica-se que:

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s \frac{\partial \mathbf{M}_{sr}}{\partial \delta} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1} v\omega_r = L_{sr} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v\omega_r$$

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r \frac{\partial \mathbf{M}_{rs}}{\partial \delta} (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s)^{-1} v\omega_r = \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s \mathbf{M}_{sr} \frac{\partial (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1}}{\partial \delta} v\omega_r = L_{sr} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v\omega_r$$

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r \mathbf{L}_{rr} \frac{\partial (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r)^{-1}}{\partial \delta} v\omega_r = L_r \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v\omega_r$$

Portanto, a equação (1.35) transformada para o sistema de coordenadas estacionário fica:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} & 0 \\ \mathbf{L}_{sr} & \mathbf{L}_r & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_{\alpha\beta}^s \\ \dot{\mathbf{I}}_{\alpha\beta}^r \\ \dot{\omega}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -L_{sr}\mathcal{J}_2 & -L_r\mathcal{J}_2 & 0 \\ \frac{vL_{sr}}{2} (\mathbf{I}_{\alpha\beta}^r)^T \mathcal{J}_2 & -\frac{vL_{sr}}{2} (\mathbf{I}_{\alpha\beta}^r)^T \mathcal{J}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^r \\ \omega_r \end{bmatrix} + \quad (1.124)$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_r & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta}^r \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{V}_{\alpha\beta}^r \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_c \end{bmatrix}$$

onde

$$\mathcal{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz anti-simétrica (2×2).

A segunda etapa no desenvolvimento do modelo é alcançada com o uso da seguinte transformação de vetor de estado:

$$\begin{bmatrix} i_{\alpha}^s \\ i_{\beta}^s \\ i_{\alpha}^r \\ i_{\beta}^r \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{L_{sr}}{L_r} & 0 & \frac{1}{L_r} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L_{sr}}{L_r} & 0 & \frac{1}{L_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha}^s \\ i_{\beta}^s \\ \phi_{\alpha}^r \\ \phi_{\beta}^r \\ \omega_r \end{bmatrix}$$

A aplicação dessa transformação à equação (1.124) fornece o seguinte resultado:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\alpha\beta}^s \\ \mathbf{V}_{\alpha\beta}^r \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s - \frac{L_{sr}^2}{L_r} & 0 & \frac{L_{sr}}{L_r} & 0 & 0 \\ 0 & L_s - \frac{L_{sr}^2}{L_r} & 0 & \frac{L_{sr}}{L_r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha}^s \\ i_{\beta}^s \\ \phi_{\alpha}^r \\ \phi_{\beta}^r \\ \dot{\omega}_r \end{bmatrix} +$$

$$+ \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v\omega_r & 0 \\ 0 & 0 & -v\omega_r & 0 & 0 \\ \frac{vL_{sr}}{2L_r}\phi_{\beta}^r & -\frac{vL_{sr}}{2L_r}\phi_{\alpha}^r & -\frac{vL_{sr}}{2L_r}i_{\beta}^s & \frac{vL_{sr}}{2L_r}i_{\alpha}^s & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ -R_r\frac{L_{sr}}{L_r} & 0 & \frac{R_r}{L_r} & 0 & 0 \\ 0 & -R_r\frac{L_{sr}}{L_r} & 0 & \frac{R_r}{L_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_{\alpha}^s \\ i_{\beta}^s \\ \phi_{\alpha}^r \\ \phi_{\beta}^r \\ \omega_r \end{bmatrix} \quad (1.125)$$

Uma vez que:

$$\frac{L_{sr}}{L_r}\dot{\phi}_{\alpha}^r = -\frac{L_{sr}}{L_r}v\omega_r\phi_{\beta}^r + \frac{L_{sr}^2R_r}{L_r^2}i_{\alpha}^s - \frac{L_{sr}R_r}{L_r^2}\phi_{\alpha}^r$$

$$\frac{L_{sr}}{L_r} \dot{\phi}_\beta^r = \frac{L_{sr}}{L_r} v \omega_r \phi_\alpha^r + \frac{L_{sr}^2 R_r}{L_r^2} i_\beta^s - \frac{L_{sr} R_r}{L_r^2} \phi_\beta^r$$

$$\frac{(L_r - 1)}{L_r} \dot{\phi}_\alpha^r = -\frac{(L_r - 1)}{L_r} v \omega_r \phi_\beta^r + \frac{(L_r - 1) L_{sr} R_r}{L_r^2} i_\alpha^s - \frac{(L_r - 1) R_r}{L_r^2} \phi_\alpha^r$$

$$\frac{(L_r - 1)}{L_r} \dot{\phi}_\beta^r = \frac{(L_r - 1)}{L_r} v \omega_r \phi_\alpha^r + \frac{(L_r - 1) L_{sr} R_r}{L_r^2} i_\beta^s - \frac{(L_r - 1) R_r}{L_r^2} \phi_\beta^r$$

é possível reescrever a equação (1.125) numa forma mais interessante, para a operação com o rotor curto-circuitado, conforme segue:

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta} \dot{\mathbf{x}}_{\alpha\beta} + [\mathcal{C}_{\alpha\beta}(x_{\alpha\beta}) + \mathcal{R}_{\alpha\beta}] \mathbf{x}_{\alpha\beta} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} V_\alpha^s \\ V_\beta^s \end{bmatrix} + \xi \quad (1.126)$$

onde as matrizes são definidas como:

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\alpha\beta} & 0_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 4} & J \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} (L_s - \frac{L_{sr}^2}{L_r}) \mathcal{I}_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_r} \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\alpha\beta}(\omega_r) & \mathbf{c}_{\alpha\beta}(x_{\alpha\beta}) \\ -\mathbf{c}_{\alpha\beta}^t(x_{\alpha\beta}) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_{\alpha\beta}^T = -\mathcal{C}_{\alpha\beta}$$

$$\mathbf{C}_{\alpha\beta} = \frac{v\omega_r}{2L_r} \begin{bmatrix} 0 & L_{sr}\mathcal{I}_2 \\ L_{sr}\mathcal{I}_2 & -2\mathcal{I}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_{\alpha\beta}(x_{\alpha\beta}) = \frac{vL_{sr}}{2L_r} \begin{bmatrix} -x_{\alpha\beta}^4 & x_{\alpha\beta}^3 & x_{\alpha\beta}^2 & -x_{\alpha\beta}^1 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\alpha\beta} & 0_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 4} & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{L_r^2} \begin{bmatrix} (R_s L_r^2 + R_r L_{sr}^2) \mathcal{I}_2 & -R_r L_{sr} \mathcal{I}_2 \\ -R_r L_{sr} \mathcal{I}_2 & R_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}$$

e

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_c \end{bmatrix}^T$$

com $\mathbf{R}_{\alpha\beta}$ definida positiva, conforme mostrado em [81]. \mathcal{I}_2 representa a matriz identidade (2×2).

O torque eletromagnético desenvolvido pelo motor é:

$$\tau_m = \frac{vL_{sr}}{L_r} (x_{\alpha\beta}^2 x_{\alpha\beta}^3 - x_{\alpha\beta}^1 x_{\alpha\beta}^4) = \mathbf{c}_{\alpha\beta}^T(x_{\alpha\beta}) \mathbf{x}_{\alpha\beta} \quad (1.127)$$

Assim, a equação (1.126) representa o modelo completo do motor de indução no sistema de coordenadas estacionário, tendo como estados as correntes estatóricas, os fluxos rotóricos e a velocidade mecânica.

1.7 Conclusão

Este capítulo apresentou vários modelos de representação dinâmica da máquina assíncrona trifásica e simétrica, para uso em simulação e controle.

Os modelos trifásicos, onde as variáveis de estator são projetadas num referencial estacionário e as variáveis rotóricas num referencial girante com o rotor não são convenientes, principalmente em função dos seguintes aspectos:

1. dependência temporal das indutâncias mútuas entre enrolamentos de estator e de rotor;
2. existência de acoplamento magnético entre enrolamentos de estator;
3. existência de acoplamento magnético entre enrolamentos de rotor.

Estes pontos desfavoráveis são superados pelo emprego de modelos bifásicos projetados num único referencial que, também, têm a propriedade de reduzirem a ordem do sistema de sete para cinco quando o motor tem alimentação simétrica. Embora o comportamento de uma máquina de indução possa ser descrito em qualquer referencial, as representações nos sistemas de coordenadas estacionário, síncrono e que gira com o rotor são as naturalmente escolhidas por estarem relacionadas às velocidades dos enrolamentos de estator, velocidade do campo girante e dos enrolamentos do rotor, respectivamente. As condições de operação da máquina e os objetivos particulares do estudo é que determinam o referencial mais adequado. No caso das tensões estatóricas serem desbalanceadas ou descontínuas e as tensões aplicadas ao rotor serem balanceadas ou nulas, o referencial estacionário se mostra mais conveniente. Para um motor de indução de anéis que apresente o circuito rotórico (externo) desbalanceado e as tensões aplicadas ao estator balanceadas, o referencial fixado no rotor se apresenta como mais conveniente. Tanto o referencial estacionário quanto o referencial síncrono seriam adequados a análise da máquina de indução simétrica, sob condição de alimentação

simétrica.

A representação de estado do motor de indução depende da escolha do sistema de coordenadas e das variáveis de estado. A escolha das variáveis de estado depende dos objetivos que se tenha, se controle do motor ou observação de estados. Para o modelo completo, onde a dinâmica mecânica é incluída, a velocidade mecânica é uma variável de estado. Para as variáveis elétricas, as escolhas mais usadas são correntes estatóricas e fluxos rotóricos, correntes estatóricas e fluxos estatóricos, fluxos estatóricos e fluxos rotóricos e correntes estatóricas e correntes rotóricas. A escolha das correntes de estado se justifica pelo fato de serem mensuráveis. Quando existe o interesse em controlar a norma do fluxo rotórico, justifica-se a escolha das componentes do fluxo do rotor. No caso do controle vetorial, onde é usado um referencial que gira com o fluxo rotórico, a preferência é pelo uso de modelos que envolvam as duas componentes do fluxo do rotor. Quando o objetivo é a observação de estados, a escolha dos modelos com os quatro fluxos ou as quatro correntes pode trazer vantagens quanto ao condicionamento numérico.

O uso de modelos derivados do formalismo de Lagrange, comuns na modelagem de robôs, tem o aspecto positivo de ressaltar propriedades físicas associadas ao processo da conversão eletromecânica da energia.

Capítulo 2

Controle Vetorial do Motor de Indução

2.1 Introdução

A máquina CC de excitação independente apresenta um desacoplamento natural entre a corrente de campo e a corrente de armadura . Esta característica, extremamente vantajosa do ponto de vista do seu controle, resulta da ortogonalidade entre os enrolamentos de campo e de armadura promovida pela ação do comutador. Assim, para a operação com fluxo constante, a corrente de campo é a responsável pelo estabelecimento do nível de fluxo da máquina ao passo que a corrente de armadura é quem produz o torque. Este controle desacoplado entre torque e fluxo representa uma grande facilidade ao projeto dos acionamentos controlados de alto desempenho dinâmico.

O aparecimento dos princípios teóricos do controle vetorial¹, ocorrido no final da década de 1960 e início da década de 1970 com os trabalhos de Hasse [36] e Blaschke [9], permitiu o controle do motor de indução de forma semelhante ao motor CC de excitação independente.

¹A denominação Controle por Campo Orientado também é empregada.

O princípio teórico desta técnica consiste em promover o alinhamento do fluxo da máquina com o eixo direto do sistema de coordenadas síncrono, o que resulta no desacoplamento entre o fluxo e o torque. Desta forma, a componente de eixo direto da corrente de estator controla o fluxo da máquina e a componente de eixo em quadratura controla o torque eletromagnético.

Somente o alinhamento do fluxo de rotor é capaz de promover o desacoplamento completo entre fluxo e torque. Entretanto, é possível a escolha do alinhamento dos fluxos de entreferro ou do fluxo de estator [21]. Para algumas propostas (operação com enfraquecimento de campo, por exemplo) a escolha do alinhamento do fluxo de estator pode trazer vantagens que compensem a perda do decoplamento completo [87].

Os métodos de implementação do controle vetorial, em função do modo como o alinhamento do fluxo é conseguido, dividem-se em:

- Métodos Diretos;
- Métodos Indiretos.

Nos métodos diretos, que têm origem no trabalho de Blaschke [9], o conhecimento da posição do fluxo é obtido do vetor espacial de fluxo. Essa informação pode ser conseguida da medição direta, com o uso de sensores de fluxo instalados no interior da máquina, pela estimação do fluxo de entreferro obtido da medição da terceira harmônica da tensão de estator [51] ou por estimação a partir da medida de grandezas terminais (correntes, tensões, velocidade). No histórico artigo de Blaschke [9], a posição do fluxo é obtida pela medição da onda de fluxo de entreferro através de sensores de efeito Hall montados ortogonalmente na superfície do estator. Entretanto, o uso de sensores instalados no interior da máquina impossibilita o emprego de um motor de linha, elevando o custo do acionamento e reduzindo a robustez do sistema. Assim, implementações do controle vetorial direto baseado em observadores de fluxo [41], [42] ou com o uso da terceira harmônica da tensão de estator [51], [79]

têm recebido maior atenção.

O controle vetorial indireto, cuja origem foi o trabalho de Hasse [36], usa uma relação do escorregamento para estimar a posição do fluxo em relação ao rotor. A posição do fluxo é obtida pela adição da posição estimada do fluxo relativamente ao rotor com a posição do rotor obtida por medição ou estimação. Ao contrário do controle vetorial direto, a implementação do controle vetorial indireto não apresenta problemas em velocidades baixas e, assim, é preferida na maioria dos sistemas que necessitam operar próximo da velocidade zero.

2.2 Princípios do Controle Vetorial

O controle vetorial do motor de indução baseia-se no alinhamento do fluxo da máquina com o sistema de coordenadas síncrono. A Figura 2.1 permite a visualização espacial do princípio desta técnica.

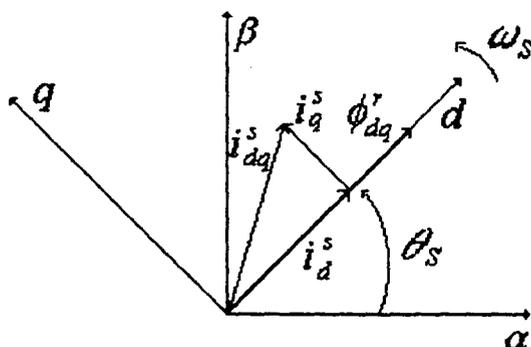


Figura 2.1: Representação espacial do princípio do controle vetorial

θ_s representa o ângulo elétrico entre os referenciais estacionário e síncrono, ϕ_{dq}^r o fluxo do rotor, $\alpha\beta$ os eixos ortogonais do sistema de coordenadas estacionário e dq os eixos do sistema de coordenadas síncrono.

O modelo de estado do motor de indução no referencial síncrono, para rotor curto-circuitado, é dado por (ver Apêndice D, equações (D.1) e (D.2)):

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_d^s \\ \dot{i}_q^s \\ \dot{\phi}_d^r \\ \dot{\phi}_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & v\omega_s & \frac{K}{T_r} & v\omega_r K \\ -v\omega_s & -\gamma & -v\omega_r K & \frac{K}{T_r} \\ \frac{L_{sr}}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & v(\omega_s - \omega_r) \\ 0 & \frac{L_{sr}}{T_r} & -v(\omega_s - \omega_r) & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ \phi_d^r \\ \phi_q^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d^s \\ v_q^s \end{bmatrix}$$

$$\dot{\omega}_r = \frac{vL_{sr}}{JL_r} (i_q^s \phi_d^r - i_d^s \phi_q^r) - \frac{b}{J} \omega_r - \frac{\tau_c}{J}$$

onde o conjugado eletromagnético produzido pelo motor é

$$\tau_m = \frac{vL_{sr}}{L_r} (i_q^s \phi_d^r - i_d^s \phi_q^r) \quad (2.1)$$

O alinhamento do fluxo do rotor com o eixo direto do sistema de coordenadas síncrono implica na inexistência de componente de fluxo rotórico segundo o eixo em quadratura, ou seja:

$$\phi_d^r = \phi_{dq}^r \quad (2.2)$$

$$\phi_q^r = 0$$

com

$$\phi_{dq}^r = \phi_d^r + j\phi_q^r$$

Assim, o modelo de estado da máquina para operação com alinhamento do campo do rotor fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_d^s \\ \dot{i}_q^s \\ \dot{\phi}_d^r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & v\omega_s & \frac{K}{T_r} & v\omega_r K \\ -v\omega_s & -\gamma & -v\omega_r K & \frac{K}{T_r} \\ \frac{L_{sr}}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & v(\omega_s - \omega_r) \\ 0 & \frac{L_{sr}}{T_r} & -v(\omega_s - \omega_r) & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ \phi_d^r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d^s \\ v_q^s \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\dot{\omega}_r = \frac{vL_{sr}}{JL_r} i_q^s \phi_d^r - \frac{b}{J} \omega_r - \frac{\tau_c}{J} \quad (2.4)$$

onde o torque motor, τ_m , passa a ser

$$\tau_m = \frac{vL_{sr}}{L_r} i_q^s \phi_d^r \quad (2.5)$$

A terceira linha de (2.3) pode ser reescrita como

$$\left(\frac{1}{T_r} + p\right) \phi_d^r = \frac{L_{sr}}{T_r} i_d^s \quad (2.6)$$

com p representando o operador $\frac{d}{dt}$.

As equações (2.5) e (2.6) mostram um desacoplamento entre as componentes da corrente de estator. A componente de eixo direto controla o nível de fluxo da máquina enquanto a componente de eixo em quadratura controla o conjugado motor. Assim, existe uma correspondência entre o motor de indução com alinhamento de fluxo rotórico e o motor CC com excitação independente. A componente de eixo direto da corrente estatórica equivale à corrente de campo do motor CC e a componente de eixo em quadratura equivale à corrente de armadura.

A análise das equações (2.5) e (2.6) permite as seguintes conclusões:

- A resposta do fluxo de rotor, ϕ_d^r , à componente de eixo direto da corrente estatórica, i_d^s , possui uma dinâmica de primeira ordem;
- Para operação com fluxo de rotor, ϕ_d^r , constante, é possível controlar o conjugado direto e instantaneamente, através da componente de eixo em quadratura da corrente de estator, i_q^s ;
- É possível realizar o enfraquecimento de campo por meio da componente de eixo direto da corrente de estator, i_d^s .

Da última linha de (2.3) tira-se a relação

$$v\omega_{sl} = v(\omega_s - \omega_r) = \frac{L_{sr}}{T_r} \frac{i_q^s}{\phi_d^r} \quad (2.7)$$

que é usada para promover o alinhamento do fluxo no controle vetorial indireto.

2.3 Controle Vetorial Direto

O caminho natural para a determinação da posição e norma do fluxo rotórico é através da medida direta, com o uso de sensores de efeito Hall ou bobinas sensoras de fluxo. Como citado na Seção 2.1, isto conduz ao uso de motores especiais o que encarece e fragiliza o acionamento.

É possível, entretanto, a utilização do modelo da máquina para estimar a posição e a norma do fluxo. Uma tentativa neste sentido é obtida pela integração da terceira e da quarta linha de (2.3), como segue [60]:

$$\dot{\phi}_d^r = \frac{L_{sr}}{T_r} i_d^s - \frac{1}{T_r} \phi_d^r \quad (2.8)$$

$$\dot{\theta}_s = v\omega_s = \frac{L_{sr} i_d^s}{T_r \phi_d^r} + v\omega_r$$

Como pode ser observado, este procedimento corresponde a uma integração em malha aberta que apresenta o inconveniente de ser pouco robusta em relação às variações paramétricas, mais especificamente da resistência rotórica. Portanto, a sua implementação requer a adaptação da resistência rotórica [32].

O emprego de observadores de fluxo do tipo Luenberger [86], filtro de Kalman [78] ou mesmo observadores de fluxo de ordem reduzida (relativamente ao modelo elétrico do motor) tem recebido grande ênfase.

A Figura 2.2 mostra um esquema geral do controle vetorial direto, para alimentação em corrente.

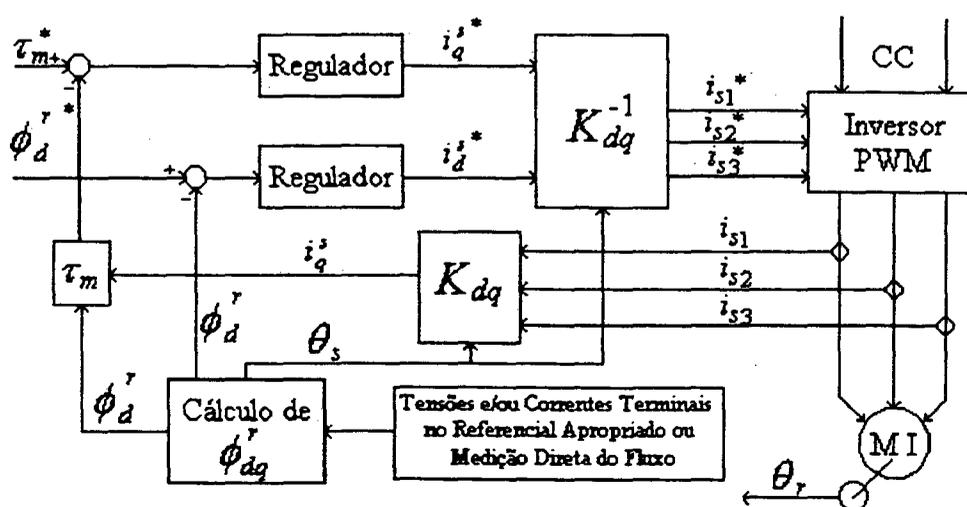


Figura 2.2: Diagrama de blocos do controle vetorial direto com alimentação em corrente

O asterisco sobrescrito dá a indicação de se tratar de uma grandeza de referência.

2.4 Controle Vetorial Indireto

Neste método, o alinhamento do fluxo rotórico com o sistema de coordenadas síncrono é obtido pelo uso da frequência de escorregamento ω_{sl} , dada por (2.7), sem a necessidade da medição ou observação do fluxo do rotor.

A Figura 2.3 mostra o diagrama geral do comando vetorial indireto.

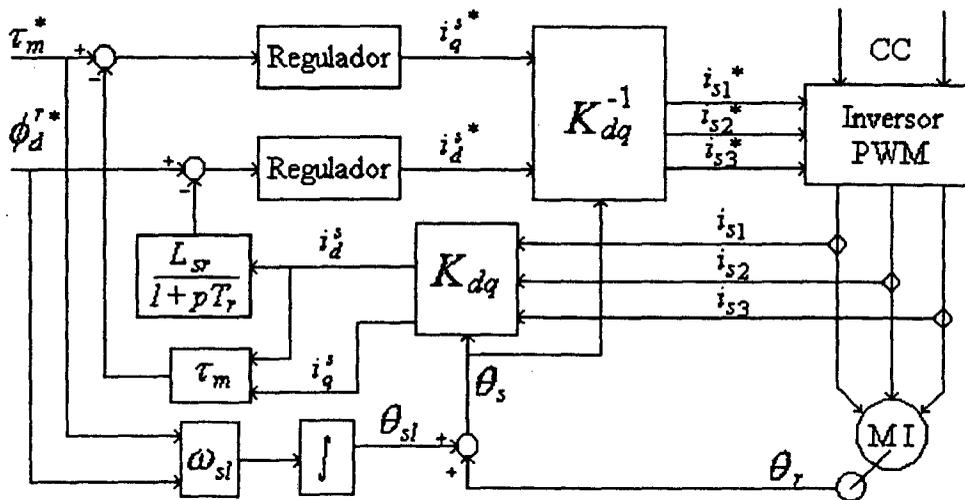


Figura 2.3: Diagrama de blocos do controle vetorial indireto com alimentação em corrente

O conhecimento da posição do rotor, θ_r , obtida por medição ou estimação, se faz necessário pois o ângulo que alinha o fluxo do rotor ao sistema de coordenadas síncrono, θ_s , é obtido pela soma da posição do rotor com a posição relativa entre os referenciais síncrono e que gira com o rotor, θ_{sl} . De (2.7), vem

$$\theta_{sl} = \int v \omega_{sl} dt = \int_0^t \frac{L_{sr}}{T_r} \frac{i_q^s}{\phi_d^{r*}} dt. \quad (2.9)$$

Assim, o ângulo que produz o alinhamento do fluxo do rotor é dado por:

$$\theta_s = \theta_r + \int_0^t \frac{L_{sr}}{T_r} \frac{i_q^s}{\phi_d^{r*}} dt$$

Isto corresponde a uma estimação de θ_s em malha aberta com dependência de parâmetros do motor, notadamente da resistência rotórica (ver [54]). Portanto, variações paramétricas, ocorridas em função de mudanças na temperatura interna do motor, saturação do material ferro-magnético e efeito pelicular, se não forem convenientemente adaptadas provocam erro no alinhamento do fluxo rotórico (tiram de sintonia o controle vetorial) o que pode degradar substancialmente o desempenho do controlador [74].

2.5 Controle Vetorial com Alimentação em Tensão

Embora o controle de fluxo e torque seja realizado pelas componentes da corrente estatórica, o que torna a alimentação em corrente o modo mais lógico de implementar o controle vetorial, isto nem sempre é possível de ser realizado. Este é o caso quando a dinâmica da malha de corrente não é suficientemente rápida. Assim, se faz necessário a implementação com alimentação em tensão. As equações das tensões estatóricas são obtidas de (2.3), como segue:

$$v_d^s = (\gamma\sigma L_s + p\sigma L_s) i_d^s - v\omega_s\sigma L_s i_q^s - \frac{K}{T_r}\sigma L_s\phi_d^r \quad (2.10)$$

$$v_q^s = (\gamma\sigma L_s + p\sigma L_s) i_q^s + v\omega_s\sigma L_s i_d^s + v\omega_r K\sigma L_s\phi_d^r$$

A definição das variáveis

$$v_d^{s'} = (\gamma\sigma L_s + p\sigma L_s) i_d^s \quad (2.11)$$

$$v_q^{s'} = (\gamma\sigma L_s + p\sigma L_s) i_q^s$$

conduz a reescrita de (2.12), como

$$v_d^s = v_d^{s'} - v\omega_s\sigma L_s i_q^s - \frac{K}{T_r}\sigma L_s \phi_d^r \quad (2.12)$$

$$v_q^s = v_q^{s'} + v\omega_s\sigma L_s i_d^s + v\omega_r K\sigma L_s \phi_d^r$$

As variáveis $v_d^{s'}$ e $v_q^{s'}$, como definidas em (2.11), controlam independentemente i_d^s e i_q^s responsáveis, respectivamente, pelo controle do fluxo e do torque. Observa-se a presença de um termo de primeira ordem em $v_d^{s'}$ e $v_q^{s'}$, fazendo com que, mesmo na operação com fluxo constante, exista uma dinâmica na resposta do conjugado ao comando de $v_q^{s'}$.

A Figura 2.4 mostra o diagrama geral do comando vetorial com alimentação em tensão.

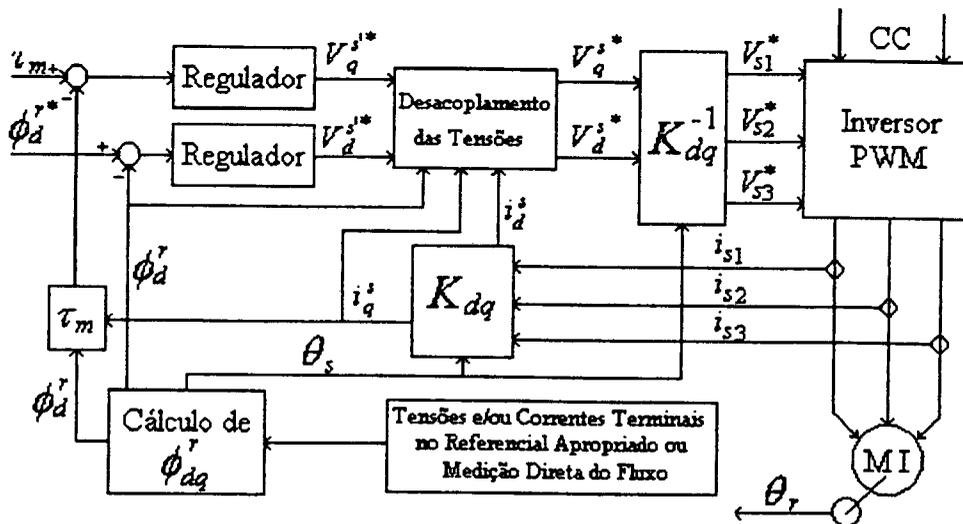


Figura 2.4: Diagrama de blocos do controle vetorial com alimentação em tensão

2.6 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados os princípios gerais do controle vetorial com orientação do fluxo de rotor. A principal dificuldade desta técnica está no conhecimento exato da posição do fluxo, que determina a posição do sistema de coordenadas síncrono. No método direto, existe a necessidade do conhecimento da norma do fluxo e de sua posição espacial o que é feito através da medida direta do fluxo ou então com o uso de observadores. A utilização de sensores de fluxo foi praticamente abandonada pois fragiliza o motor de indução, exigindo uma máquina de construção especial, além de aumentar sensivelmente o custo do acionamento. Embora exista uma grande variedade de observadores de fluxo para uso no controle vetorial direto, a estimação perfeita sobre todas as condições de operação da máquina constitui-se num desafio. O controle vetorial indireto, por sua vez, usa o cálculo do escorregamento e a informação da posição do rotor para encontrar a posição do fluxo. O escorregamento é obtido a partir da medição das correntes terminais com o uso de uma relação que envolve alguns parâmetros elétricos do motor. A posição do rotor pode ser obtida por medição ou, então, pode ser estimada. O principal problema deste método é a sua pouca robustez em relação às variações paramétricas, especialmente da constante de tempo rotórica.

Assim, toda a vez que ocorrer erro no valor estimado ou medido da posição do fluxo, o controle vetorial não mais consegue o desacoplamento perfeito entre conjugado e fluxo ficando o seu desempenho comprometido.

Capítulo 3

Controle em Seguimento de Torque com Minimização de Energia

3.1 Introdução

Este capítulo descreve uma técnica para o controle dinâmico da posição e/ou da velocidade do motor de indução, baseada no seguimento de uma trajetória de referência para o torque, que minimiza a energia magnética. Apresenta uma extensão a alguns trabalhos recentes de Seleme *et alli*, [83], [82], ao considerar o chaveamento da estratégia de controle entre a operação com mínima energia magnética e a operação com fluxo rotórico constante.

O problema é tratado pela consideração de dois sub-sistemas que relacionam-se por meio de uma malha de realimentação, conforme ilustra a Figura 3.1. Um dos sub-sistemas descreve a dinâmica elétrica e o outro a dinâmica mecânica. As componentes da tensão de estator no sistema de coordenadas estacionário, V_{α}^s e V_{β}^s , atuam como entradas para o motor. A velocidade mecânica, ω_r , que corresponde à saída do sistema mecânico, é vista como uma entrada que perturba o sistema elétrico. O torque eletromagnético, τ_m , que representa a saída do sistema elétrico, atua como entrada para o sistema mecânico.

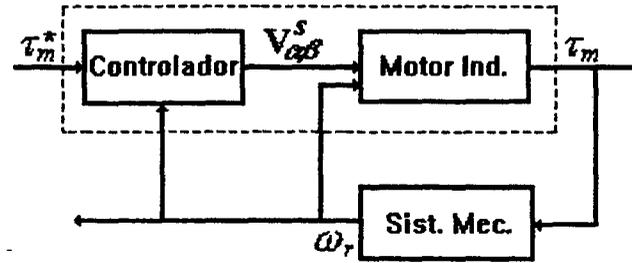


Figura 3.1: Representação do motor através dos sub-sistemas elétrico e mecânico

O controle do motor é conseguido pelo seguimento de uma trajetória de referência para o torque, obtido a partir do seguimento de referências para os estados do motor, que leva o sistema a alcançar as trajetórias de referência para a posição ou a velocidade, com o mínimo consumo de energia magnética.

3.2 O Sub-sistema Mecânico

O movimento de rotação do sistema motor-carga é descrito pela equação diferencial

$$J\ddot{\theta}_r^m = \tau_m - b\dot{\theta}_r^m - \tau_c$$

com θ_r^m representando a posição angular mecânica do rotor ($\dot{\theta}_r^m = \omega_r$).

O controle do sistema mecânico realiza-se pelo seguimento de uma trajetória de referência com a forma

$$\tau_m^* = J\ddot{\theta}_r^{m*} + b\dot{\theta}_r^{m*} + \tau_c - k_v(\dot{\theta}_r^m - \dot{\theta}_r^{m*}) - k_p(\theta_r^m - \theta_r^{m*}) \quad (3.1)$$

onde o asterisco representa o valor de referência.

Assim, a trajetória de referência para o torque eletromagnético do motor é resultado da

soma de um termo de pré-alimentação, que representa o desempenho desejado para o movimento mecânico do sistema, com a saída de um controlador proporcional-derivativo e uma perturbação introduzida pelo torque de carga (ver Figura 3.2).

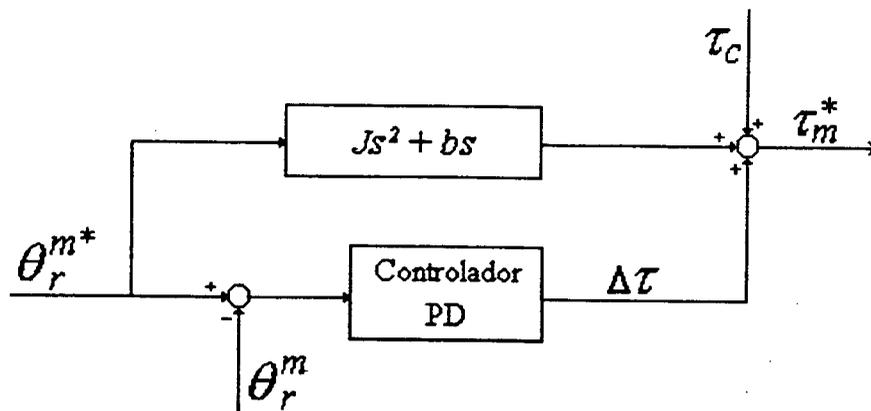


Figura 3.2: Diagrama de blocos do controle do sistema mecânico

A equação de erro do sistema mecânico fica:

$$J (\ddot{\theta}_r^m - \ddot{\theta}_r^{m*}) = - (k_v + b) (\dot{\theta}_r^m - \dot{\theta}_r^{m*}) - k_p (\theta_r^m - \theta_r^{m*}) + (\tau_m - \tau_m^*) \quad (3.2)$$

Desde que os ganhos k_v e k_p tenham valores reais e positivos, a equação (3.2) é a representação de um sistema linear estável, perturbado pelo desvio entre o torque eletromagnético real e o valor do torque de referência para o motor. Assim, o problema consiste em encontrar uma lei de controle, em termos do sub-sistema elétrico, que realize o seguimento da trajetória de torque de referência para, com isto, atingir as trajetórias de referência de posição ou velocidade, com sinais internos limitados.

$$\mathbf{C}_{\alpha\beta} = \frac{v\omega_r}{2L_r} \begin{bmatrix} 0 & L_{sr}\mathcal{J}_2 \\ L_{sr}\mathcal{J}_2 & -2\mathcal{J}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_{\alpha\beta}(x_{\alpha\beta}) = \frac{vL_{sr}}{2L_r} \begin{bmatrix} -x_{\alpha\beta}^4 & x_{\alpha\beta}^3 & x_{\alpha\beta}^2 & -x_{\alpha\beta}^1 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\alpha\beta} & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 4} & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{L_r^2} \begin{bmatrix} (R_s L_r^2 + R_r L_{sr}^2) \mathcal{I}_2 & -R_r L_{sr} \mathcal{I}_2 \\ -R_r L_{sr} \mathcal{I}_2 & R_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_c \end{bmatrix}^T$$

Neste modelo, o torque eletromagnético do motor é

$$\tau_m = \frac{vL_{sr}}{L_r} (x_{\alpha\beta}^2 x_{\alpha\beta}^3 - x_{\alpha\beta}^1 x_{\alpha\beta}^4) = \mathbf{c}_{\alpha\beta}^T(x_{\alpha\beta}) \mathbf{x}_{\alpha\beta} \quad (3.3)$$

As variáveis de estado da parte elétrica são as correntes estatóricas e os fluxos rotóricos.

A variável de estado da parte mecânica é a velocidade do rotor. Assim, o vetor de estado tem a seguinte representação:

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} x_{\alpha\beta}^1 & x_{\alpha\beta}^2 & x_{\alpha\beta}^3 & x_{\alpha\beta}^4 & x_{\alpha\beta}^5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} i_{\alpha}^s & i_{\beta}^s & \phi_{\alpha}^r & \phi_{\beta}^r & \omega_r \end{bmatrix}^T$$

A equação (3.3) mostra que o torque desenvolvido pelo motor é uma função bilinear dos estados elétricos. Isto significa que a trajetória de referência para torque pode ser obtida de

diferentes combinações entre os estados elétricos do motor.

3.3.2 O Modelo de Referência para o Vetor de Estado

Seleme *et al* [83] mostraram uma forma genérica de escrever as trajetórias de referência para o vetor de estado, no sistema de coordenadas síncrono, baseada no modelo nominal dq do motor. O modelo dq do motor é a representação lagrangeana bifásica, no sistema de coordenadas síncrono, tendo como estados elétricos as correntes de estator e de rotor. Este modelo pode ser escrito como

$$\mathcal{D}_{dq}\dot{\mathbf{x}}_{dq} + [\mathcal{N}_{dq}(\omega_s, \omega_r) + \mathcal{R}_{dq}]\mathbf{x}_{dq} = \mathbf{M}\mathbf{V}_{dq}^s + \boldsymbol{\xi} \quad (3.4)$$

onde:

$$\mathcal{D}_{dq} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{dq} & 0_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 4} & J \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{dq} = \begin{bmatrix} L_s \mathcal{I}_2 & L_{sr} \mathcal{I}_2 \\ L_{sr} \mathcal{I}_2 & L_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N}_{dq} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{dq}(\omega_s, \omega_r) & -\mathbf{n}_{dq}(x_{dq}) \\ \mathbf{n}_{dq}^T(x_{dq}) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_{dq} = \begin{bmatrix} L_s \mathcal{J}_2 & L_{sr} \mathcal{J}_2 \\ L_{sr} \mathcal{J}_2 & L_r \mathcal{J}_2 \end{bmatrix} v(\omega_s - \omega_r)$$

$$\mathbf{n}_{dq}(x_{dq}) = v \begin{bmatrix} (L_s x_{dq}^2 + L_{sr} x_{dq}^4) & - (L_s x_{dq}^1 + L_{sr} x_{dq}^3) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathcal{R}_{dq} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{dq} & 0_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 4} & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{dq} = \begin{bmatrix} R_s \mathcal{I}_2 & 0 \\ 0 & R_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_c \end{bmatrix}^T$$

O torque eletromagnético do motor é

$$\tau_m = v L_{sr} (x_{dq}^2 x_{dq}^3 - x_{dq}^1 x_{dq}^4) = -\mathbf{n}_{dq}^T (x_{dq}) \mathbf{x}_{dq} \quad (3.5)$$

O vetor de estado tem a seguinte representação:

$$\mathbf{x}_{dq} = \begin{bmatrix} x_{dq}^1 & x_{dq}^2 & x_{dq}^3 & x_{dq}^4 & x_{dq}^5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} i_d^s & i_q^s & i_d^r & i_q^r & \omega_r \end{bmatrix}^T$$

A obtenção do modelo dq do motor pode ser feita pela aplicação das transformações \mathbf{K}_{dq}^s , \mathbf{K}_{dq}^r , $(\mathbf{K}_{dq}^s)^{-1}$ e $(\mathbf{K}_{dq}^r)^{-1}$ à equação lagrangeana trifásica (1.35).

A equação (3.4) pode ser separada na parte elétrica

$$\mathbf{D}_{dq} \dot{\mathbf{x}}_{dq}^e + [\mathbf{N}_{dq}(\omega_s, \omega_r) + \mathbf{R}_{dq}] \mathbf{x}_{dq}^e - \mathbf{n}_{dq}(x_{dq}) \omega_r = \mathbf{M} \mathbf{V}_{dq}^s \quad (3.6)$$

e na parte mecânica

$$J \ddot{\theta}_r^m = \tau_m - b \dot{\theta}_r^m - \tau_c$$

onde

$$\mathbf{x}_{dq}^e = \begin{bmatrix} x_{dq}^1 & x_{dq}^2 & x_{dq}^3 & x_{dq}^4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} i_d^s & i_q^s & i_d^r & i_q^r \end{bmatrix}^T$$

é o vetor de estado parcial do sistema, correspondente à parte elétrica.

O modelo de referência para os estados do sistema é estabelecido com base nos seguintes objetivos de controle:

- O vetor de estado de referência, representado por

$$\mathbf{x}_{dq}^* = \begin{bmatrix} x_{dq}^{1*} & x_{dq}^{2*} & x_{dq}^{3*} & x_{dq}^{4*} & x_{dq}^{5*} \end{bmatrix}^T$$

gera a trajetória de torque de referência τ_m^* para todo tempo t .

- As trajetórias de referência para os estados produzem o alinhamento do fluxo do rotor com o eixo direto do sistema de coordenadas síncrono.

Assim, as seguintes relações de vínculo podem ser estabelecidas:

$$\tau_m(x_{dq}^*) = \tau_m^*(t) \implies vL_{sr}(x_{dq}^{2*}x_{dq}^{3*} - x_{dq}^{1*}x_{dq}^{2*}) - \tau_m^*(t) = 0 \quad (3.7)$$

$$\phi_q^r = 0 \implies L_m x_{dq}^{2*} + L_r x_{dq}^{4*} = 0 \quad (3.8)$$

O vetor de estado desejado, \mathbf{x}_{dq}^* , deve verificar, para toda e qualquer trajetória de $\tau_m^*(t)$, a equação do modelo dinâmico do motor. Assim, a partir da equação (3.6) pode-se escrever:

$$\mathbf{D}_{dq} \dot{\mathbf{x}}_{dq}^{e*} + [\mathbf{N}_{dq}(\omega_s, \omega_r) + \mathbf{R}_{dq}] \mathbf{x}_{dq}^{e*} - \mathbf{n}_{dq}(x_{dq}^*) \omega_r = \mathbf{M} \mathbf{V}_{dq}^{s*},$$

onde $\mathbf{V}_{dq}^{s*} = \begin{bmatrix} V_d^{s*} & V_q^{s*} \end{bmatrix}^T$ corresponde à entrada desejada.

Desta forma, é possível estabelecer as componentes desejadas da tensão de estator como:

$$\begin{bmatrix} V_d^{s*} \\ V_q^{s*} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^+ \left\{ \mathbf{D}_{dq} \dot{\mathbf{x}}_{dq}^{e*} + [\mathbf{N}_{dq}(\omega_s, \omega_r) + \mathbf{R}_{dq}] \mathbf{x}_{dq}^{e*} - \mathbf{n}_{dq}(x_{dq}^*) \omega_r \right\} \quad (3.9)$$

onde a matriz \mathbf{M}^+ é a pseudo-inversa de \mathbf{M}

$$\mathbf{M}^+ = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

A substituição de (3.9) na equação elétrica do motor (3.6), com $\mathbf{x}_{dq}^e = \mathbf{x}_{dq}^{e*}$, leva a

$$[\mathcal{I}_4 - \mathbf{M}\mathbf{M}^+] \{ \mathbf{D}_{dq} \dot{\mathbf{x}}_{dq}^{e*} + [\mathbf{N}_{dq}(\omega_s, \omega_r) + \mathbf{R}_{dq}] \mathbf{x}_{dq}^{e*} - \mathbf{n}_{dq}(x_{dq}^*) \omega_r \} = 0$$

de onde tiram-se os seguintes vínculos naturais do sistema

$$\begin{aligned} L_{sr} \dot{x}_{dq}^{1*} + L_r \dot{x}_{dq}^{3*} - (L_{sr} x_{dq}^{2*} + L_r x_{dq}^{4*}) v(\omega_s - \omega_r) + R_r x_{dq}^{3*} &= 0 \\ L_{sr} \dot{x}_{dq}^{2*} + L_r \dot{x}_{dq}^{4*} + (L_{sr} x_{dq}^{1*} + L_r x_{dq}^{3*}) v(\omega_s - \omega_r) + R_r x_{dq}^{4*} &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

O uso de (3.8) nas equações (3.10), dá origem a

$$L_{sr} \dot{x}_{dq}^{1*} + L_r \dot{x}_{dq}^{3*} + R_r x_{dq}^{3*} = 0 \quad (3.11)$$

$$(L_{sr} x_{dq}^{1*} + L_r x_{dq}^{3*}) v \omega_{sl} + R_r x_{dq}^{4*} = 0 \quad (3.12)$$

onde

$$\omega_{sl} = (\omega_s - \omega_r)$$

representa a frequência mecânica de escorregamento.

Assim, a partir das quatro relações de vínculo representadas por (3.7), (3.8), (3.11) e (3.12) é possível o estabelecimento das trajetórias de referência para os estados elétricos do motor. A trajetória de referência para a variável de estado mecânica é dada pela trajetória

desejada para o movimento do sistema.

Desta forma o vetor das trajetórias de referência para os estados do motor, no sistema de coordenadas síncrono, fica:

$$\begin{aligned}
 x_{dq}^{1*} &= \frac{1}{L_{sr}} \left[\frac{L_r}{\sqrt{R_r v}} \frac{d}{dt} \left[\sqrt{\frac{\tau_m^*}{\omega_{sl}}} \right] + \sqrt{\frac{R_r}{v}} \sqrt{\frac{\tau_m^*}{\omega_{sl}}} \right] \\
 x_{dq}^{2*} &= \frac{L_r}{L_{sr} \sqrt{R_r v}} \sqrt{\tau_m^* \omega_{sl}} \\
 x_{dq}^{3*} &= -\frac{1}{\sqrt{R_r v}} \frac{d}{dt} \left[\sqrt{\frac{\tau_m^*}{\omega_{sl}}} \right] \\
 x_{dq}^{4*} &= -\frac{1}{\sqrt{R_r v}} \sqrt{\tau_m^* \omega_{sl}} \\
 x_{dq}^{5*} &= \dot{\theta}_r^{m*}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

A análise do conjunto (3.13) permite as seguintes observações:

- Os estados desejados (3.13) são parametrizados em termos do torque desejado τ_m^* e da variável de entrada auxiliar $\omega_{sl}(t)$. Assim, a frequência de escorregamento, ω_{sl} , pode ser considerada como um grau de liberdade para a otimização das trajetórias.
- Existe uma singularidade em (3.13) para $\tau_m^*(t) = 0$ ou $\omega_{sl}(t) = 0$.

Sob a suposição que

$$\lim_{\tau_m^* \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\tau_m^*}{\omega_{sl}}} < \infty \tag{3.14}$$

$$\lim_{\tau_m^* \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \left[\sqrt{\frac{\tau_m^*}{\omega_{sl}}} \right] < \infty \tag{3.15}$$

os estados desejados (3.13) satisfazem os objetivos de seguimento de torque e orientação do fluxo do rotor. Além disso, a equação dinâmica do motor é assegurada para todo $\omega_{sl}(t)$ com sinais de entrada limitados.

Otimização das Trajetórias de Referência para os Estados Elétricos

Como o torque eletromagnético é uma função não linear dos estados elétricos, é possível realizar o seguimento à trajetória de torque de referência privilegiando a eficiência na operação do motor. O critério utilizado baseia-se na minimização da energia magnética armazenada. Tal critério maximiza o fator de potência e tem mostrado ser um bom compromisso em termos das perdas para operação em regime permanente. Na operação em regime transitório este critério corresponde à minimização dos valores instantâneos de correntes e fluxos, produzindo efeitos semelhantes aos obtidos na operação em regime permanente.

A energia magnética do motor na operação com estados desejados, é

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}_{dq}^*) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_{dq}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{x}_{dq}^* \quad (3.16)$$

Assim, o problema consiste em encontrar os valores de ω_{sl} , num dado intervalo de tempo $t_0 \leq t \leq t_f$, que minimizem (3.16).

A função energia (3.16) pode ser escrita em termos do torque desejado τ_m^* e da frequência de escorregamento ω_{sl} , como segue:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}_{dq}^*) = c \left(\frac{\tau_m^* R_r^2}{\omega_{sl} L_r^2 \sigma} + \tau_m^* \omega_{sl} + \frac{R_r}{L_r} \frac{d}{dt} \left[\frac{\tau_m^*}{\omega_{sl}} \right] + \left\{ \frac{d}{dt} \left[\sqrt{\frac{\tau_m^*}{\omega_{sl}}} \right] \right\}^2 \right) \quad (3.17)$$

com

$$c = \frac{L_r \sigma}{2v R_r (1 - \sigma)} \quad ; \quad \sigma = 1 - \frac{(L_{sr})^2}{L_s L_r}$$

Portanto, a solução do problema passa pelo exame da integral da função energia (3.17) para um dado intervalo de tempo, o que só é possível com o uso do cálculo variacional. Em [83] este problema é resolvido numericamente para três trajetórias particulares de torque de

referência. Os resultados apresentados mostram que os valores da frequência de escorregamento que minimizam a energia magnética, ω_{sl}^{opt} , não sofrem desvios significativos do valor de regime permanente, que é dado por:

$$\omega_{sl}^0 = \frac{R_r}{L_r \sqrt{\sigma}} \quad (3.18)$$

Assim, a escolha

$$\omega_{sl}^{opt} = \omega_{sl}^0 = \frac{R_r}{L_r \sqrt{\sigma}} \quad (3.19)$$

conduz à operação do motor com fator de potência bastante próximo do ótimo e valores reduzidos de perdas.

Manter a frequência de escorregamento constante no valor ω_{sl}^0 significa controlar o motor com fluxo variável em função do torque de referência demandado. Entretanto, este procedimento não resolve a singularidade existente em (3.13) para $\tau_m^* = 0$. Uma forma de eliminar este problema, para todo τ_m^* , é obtida pela escolha da frequência de escorregamento como

$$\omega_{sl} = \alpha_a \tau_m^*, \quad (3.20)$$

o que corresponde à operação do motor com fluxo constante. Porém, esta opção não minimiza a energia magnética do motor.

Uma trajetória de referência para o fluxo de rotor pode ser estabelecida por

$$\phi_d^{r*} = L_{sr} x_{dq}^{1*} + L_r x_{dq}^{3*} \quad (3.21)$$

A substituição de (3.13) em (3.21) mostra uma relação entre as trajetórias de referência de fluxo de rotor e torque

$$\phi_d^* = \sqrt{\frac{R_r \tau_m^*}{v \omega_{sl}}} \quad (3.22)$$

Assim, é possível perceber que, com ω_{sl} constante, quando a trajetória de torque tende para valores pequenos, na vizinhança de zero, o fluxo também tende a valores pequenos.

Uma maneira de operar o motor com minimização de energia e ao mesmo tempo garantir a inexistência de singularidades em (3.13) pode ser obtida pelo chaveamento da estratégia de geração das trajetórias de referência entre *a*) aquela que usa a frequência de escorregamento ótima ($\omega_{sl}^{opt} = \omega_{sl}^0$) e *b*) a que usa o fluxo constante ($\omega_{sl} = \alpha_a \tau_m^*$). O chaveamento da estratégia *a*) para a estratégia *b*) é feito sempre que o fluxo atingir um valor mínimo associado a vizinhança de $\tau_m^* = 0$ ou um valor máximo que garanta a operação sem saturação. Na região entre estes dois limites a operação é feita com frequência de escorregamento constante no valor de regime permanente, o que garante alta eficiência.

Operação com Fluxo Constante

Toda vez que a operação com ω_{sl}^{opt} conduzir a valores de fluxo rotórico menores que um valor mínimo que garanta a inexistência de singularidades em (3.13) ou então a valores acima do nível adequado à operação sem saturação, as referências dos estados são geradas com

$$\omega_{sl} = \alpha_a \tau_m^* \quad (3.23)$$

onde a constante positiva α_a determina o nível da componente de eixo direto do fluxo de rotor.

A substituição de (3.23) em (3.13) conduz ao seguinte modelo de referência para os estados

$$\begin{bmatrix} x_{dq}^{1*} & x_{dq}^{2*} & x_{dq}^{3*} & x_{dq}^{4*} & x_{dq}^{5*} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_{\sigma r}} \sqrt{\frac{R_r}{v \alpha_a}} & -\frac{L_r}{L_{\sigma r}} \sqrt{\frac{\alpha_a}{R_r v}} \tau_m^* & 0 & \sqrt{\frac{\alpha_a}{R_r v}} \tau_m^* & \dot{\theta}_r^{m*} \end{bmatrix}^T \quad (3.24)$$

que é limitado dado que τ_m^* é \mathcal{L}_∞ ¹.

Esta escolha remove a singularidade mas não deixa nenhum grau de liberdade para uso na otimização.

Assim, de (3.22) e (3.23) é possível escrever

$$\omega_{sl} = \alpha_{\max} \tau_m^*; \quad \alpha_{\max} = \frac{R_r}{v\phi_{\min}^2}$$

para a frequência de escorregamento associada ao valor de mínimo fluxo rotórico e

$$\omega_{sl} = \alpha_{\min} \tau_m^*; \quad \alpha_{\min} = \frac{R_r}{v\phi_{\max}^2}$$

quando a operação é com fluxo máximo.

Portanto, sintetizando de forma matemática o que foi apresentado nesta seção, as trajetórias de referência para os estados elétricos do motor, no sistema de coordenadas síncrono e com a representação de estado em correntes estatóricas e correntes rotóricas, são as definidas em (3.13) com os valores de frequência de escorregamento, ω_{sl} , dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } \frac{v\phi_{\min}^2}{R_r} \omega_{sl}^{opt} < \tau_m^* < \frac{v\phi_{\max}^2}{R_r} \omega_{sl}^{opt} \implies \omega_{sl} = \omega_{sl}^{opt} = \frac{R_r}{L_r \sqrt{\sigma}} \\ \text{Se } \tau_m^* \leq \frac{v\phi_{\min}^2}{R_r} \omega_{sl}^{opt} \implies \omega_{sl} = \frac{R_r}{v\phi_{\min}^2} \tau_m^* \\ \text{Se } \tau_m^* \geq \frac{v\phi_{\max}^2}{R_r} \omega_{sl}^{opt} \implies \omega_{sl} = \frac{R_r}{v\phi_{\max}^2} \tau_m^* \end{array} \right. \quad (3.25)$$

O vetor de referências para os estados do motor, \mathbf{x}_{dq}^* , é obtido de (3.13), com ω_{sl} dado por (3.25). Para o uso no controlador apresentado neste capítulo, que utiliza o modelo $\alpha\beta$, são necessárias duas transformações, uma de sistema de coordenadas e outra de vetor de estado, como segue:

¹A norma \mathcal{L}_∞ consiste do conjunto das funções mensuráveis $f(\cdot) : R_+ \rightarrow R$ que são essencialmente limitadas no intervalo $[0, \infty)$.

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta}^* = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_2 & 0 & 0 \\ L_{sr}\mathcal{I}_2 & L_r\mathcal{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{dq}^* \quad (3.26)$$

3.3.3 O Observador de Estados

O motor de indução em gaiola apresenta uma forma construtiva que não permite o acesso ao rotor. Para relaxar a necessidade da medição dos fluxos rotóricos, que apresenta os inconvenientes discutidos na Seção 2.1, emprega-se um observador de estados que tem a seguinte estrutura:

$$\mathbf{D}_{\alpha\beta} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{\alpha\beta}^e + [\mathbf{C}_{\alpha\beta}(\omega_r) + \mathbf{R}_{\alpha\beta}] \hat{\mathbf{x}}_{\alpha\beta}^e = \mathbf{M} \begin{bmatrix} V_{\alpha}^s \\ V_{\beta}^s \end{bmatrix} + \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}_{\alpha\beta}^e \quad (3.27)$$

onde

$$\hat{\mathbf{x}}_{\alpha\beta}^e = \begin{bmatrix} \hat{x}_{\alpha\beta}^1 & \hat{x}_{\alpha\beta}^2 & \hat{x}_{\alpha\beta}^3 & \hat{x}_{\alpha\beta}^4 \end{bmatrix}^T$$

representa o vetor estimado para as variáveis elétricas.

O vetor $\bar{\mathbf{x}}_{\alpha\beta}^e$ representa o erro de estimação, assim

$$\bar{\mathbf{x}}_{\alpha\beta}^e = \mathbf{x}_{\alpha\beta}^e - \hat{\mathbf{x}}_{\alpha\beta}^e$$

com

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta}^e = \begin{bmatrix} x_{\alpha\beta}^1 & x_{\alpha\beta}^2 & x_{\alpha\beta}^3 & x_{\alpha\beta}^4 \end{bmatrix}^T$$

e

$$\mathbf{F} := \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{2 \times 2}^e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{2 \times 2}^e = k^e \mathcal{I}_2 > 0$$

A equação de erro do observador, obtida pela substituição das equações elétricas do modelo do motor (1.126) na equação do observador (3.27), é

$$\mathbf{D}_{\alpha\beta} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\alpha\beta}^e + [\mathbf{C}_{\alpha\beta}(\omega_r) + (\mathbf{F} + \mathbf{R}_{\alpha\beta})] \bar{\mathbf{x}}_{\alpha\beta}^e = 0 \quad (3.28)$$

com

$$\mathbf{C}_{\alpha\beta}(\omega_r) = -\mathbf{C}_{\alpha\beta}(\omega_r)^T, \quad (\mathbf{F} + \mathbf{R}_{\alpha\beta}) > 0$$

Este observador, que é não linear e de ordem completa para os estados elétricos, tem como sinais de realimentação as componentes da corrente de estator no sistema de coordenadas estacionário. Apresenta a vantagem de ser menos sensível a ruídos nas variáveis medidas do que os observadores de fluxo de ordem reduzida [86].

3.3.4 A Entrada Direta (Pré-alimentação)

A partir das trajetórias de referência para os estados o termo de entrada direta é definido por:

$$\begin{bmatrix} V_{\alpha}^{s*} \\ V_{\beta}^{s*} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^T \left\{ \mathcal{D}_{\alpha\beta} \dot{\mathbf{x}}_{\alpha\beta}^* + [\mathbf{C}_{\alpha\beta}(\omega_r, \mathbf{x}_{\alpha\beta}^*) + \mathcal{R}_{\alpha\beta}] \mathbf{x}_{\alpha\beta}^* + (\omega_r - \omega_r^*) \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{\alpha\beta}(x_{\alpha\beta}) \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.29)$$

com

$$C_{\alpha\beta}(\omega_r, \mathbf{x}_{\alpha\beta}^*) = \begin{bmatrix} C_{\alpha\beta}(\omega_r) & \mathbf{c}(\mathbf{x}_{\alpha\beta}^*) \\ -\mathbf{c}^T(\mathbf{x}_{\alpha\beta}^*) & 0 \end{bmatrix}$$

3.3.5 A Realimentação

Para acrescentar amortecimento ao sistema, acelerando a resposta em seguimento de trajetória de torque, é introduzida uma realimentação proporcional baseada na estimação dada pelo observador

$$\Delta \mathbf{V}_{2 \times 1} = \mathbf{K}_{2 \times 5} (\hat{\mathbf{x}}_{\alpha\beta}^p - \mathbf{x}_{\alpha\beta}^*) \quad (3.30)$$

com

$$\mathbf{K}_{2 \times 5} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1 = k_1 \mathcal{I}_2 > 0 \quad , \quad \mathbf{K}_2 = -\frac{v L_{sr}}{2L_r} \omega_r^* \mathcal{J}_2$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{\alpha\beta}^p = \begin{bmatrix} x_{\alpha\beta}^1 & x_{\alpha\beta}^2 & \hat{x}_{\alpha\beta}^3 & \hat{x}_{\alpha\beta}^4 \end{bmatrix}^T$$

Assim, as tensões de entrada no motor são a soma dos termos direto e realimentado, como segue:

$$\mathbf{V}_{\alpha\beta}^s = \begin{bmatrix} V_{\alpha}^s \\ V_{\beta}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{\alpha}^{s*} \\ V_{\beta}^{s*} \end{bmatrix} + \Delta \mathbf{V} \quad (3.31)$$

A substituição de (3.31) em (1.126) conduz à seguinte equação de erros

$$D_{\alpha\beta}\dot{\mathbf{e}} + [C_{\alpha\beta}(\omega_r, \mathbf{e}) + \mathcal{R}_{\alpha\beta} + \mathcal{K}]\mathbf{e} + \mathcal{S}\mathbf{e} - \mathcal{K}\bar{\mathbf{x}}_{\alpha\beta}^P = 0 \quad (3.32)$$

onde

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_{\alpha\beta} - \mathbf{x}_{\alpha\beta}^*, \quad \bar{\mathbf{x}}_{\alpha\beta}^P = \mathbf{x}_{\alpha\beta} - \hat{\mathbf{x}}_{\alpha\beta}^P, \quad x_{\alpha\beta}^{5*} = \omega_r^*$$

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \frac{vL_{sr}\omega_r^*}{2L_r} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{J}_2 \\ -\mathcal{J}_2 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ -2\mathbf{c}^T(\mathbf{x}_{\alpha\beta}^*) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_1^T & \mathbf{K}_2 & 0 \\ \mathbf{K}_2^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{\alpha\beta}(\omega_r, \mathbf{e}) := \begin{bmatrix} C_{\alpha\beta}(\omega_r) & \mathbf{c}(\mathbf{e}) \\ -\mathbf{c}^T(\mathbf{e}) & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{K}_1 = k_1 \mathcal{I}_2 > 0, \quad \mathbf{K}_2 = -\frac{vL_{sr}\omega_r^*}{2L_r} \mathcal{J}_2$$

3.4 Simulação

Esta seção apresenta resultados de simulação obtidos com o uso das seguintes estratégias de controle: a) operação com minimização de energia magnética e b) operação com fluxo constante. O objetivo é o de comparar o desempenho da estratégia de minimização de energia com o da operação com fluxo constante, estratégia adotada no controle vetorial clássico. A análise é feita pela observação das respostas ao seguimento das trajetórias de referência e pela quantificação do consumo de energia e perdas.

Todos os resultados foram gerados com o *Simnon 1.0 da SSPA Systems*.

3.4.1 Parâmetros do motor e sistema mecânico

Os parâmetros adotados nos estudos de simulação foram os do motor utilizado no trabalho [45]. Os valores nominais são:

Tensão de Linha (trifásica)	220 V/380 V	
Corrente de Linha (trifásica)	4,9 A/2,8 A	
Frequência	60 Hz	
Potencia	2,2 kW	
Velocidade	1750 rpm	
Resistência de estator (R_s)	0.687 Ω	
Resistência de rotor (R_r)	0.842 Ω	
Indutância própria de estator (L_s)	0.08397 H	(3.33)
Indutância própria de rotor (L_r)	0.08528 H	
Indutância mútua estator-rotor (L_{sr})	0.08136 H	
Momento de inércia do sistema (J)	0.030 $kg.m^2$	
Coefficiente de fricção (b)	0.010 $N.m.s/rad$	
Coefficiente de perdas por correntes de Foucoult (k_e)	0.012 $W.s/Wb^2$	
Coefficiente de perdas por histerese (k_h)	0.012 $W.s/Wb^2$	

3.4.2 O Modelo de Perdas

Na operação de um motor elétrico, sem levar em conta as perdas mecânicas (atrito e ventilação), ocorrem perdas joule nos enrolamentos e perdas nos núcleos de estator e rotor. A perda nos núcleos é a soma da perda por correntes parasitas e da perda por histerese. Para

uma faixa limitada de frequências e fluxo distribuído senoidalmente no entreferro, a perda nos núcleos pode ser modelada como uma função da frequência de excitação, f_e , e do fluxo de entreferro, ϕ^m , como

$$P_c = (k_h + k_e f_e) f_e \phi^m$$

onde k_h e k_e são coeficientes para as perdas por histerese e correntes parasitas, respectivamente.

As perdas elétricas da máquina podem, então, ser modeladas por

$$P_l = (x_{\alpha\beta}^{12} + x_{\alpha\beta}^{22}) R_s + (i_{\alpha}^r + i_{\beta}^r) R_r + (k_h + k_e f_e) f_e \phi^m \quad (3.34)$$

onde i_{α}^r e i_{β}^r representam as componentes da corrente de rotor no sistema de coordenadas estacionário, obtidas de

$$\begin{aligned} i_{\alpha}^r &= \frac{x_{\alpha\beta}^3 - L_{sr} x_{\alpha\beta}^1}{L_r} \\ i_{\beta}^r &= \frac{x_{\alpha\beta}^4 - L_{sr} x_{\alpha\beta}^2}{L_r} \end{aligned} \quad (3.35)$$

A frequência elétrica é dada por

$$f_e = \frac{v(\omega_r + \omega_{sl})}{2\pi}$$

com ω_{sl} obtido de (3.19) ou (3.23), conforme a operação seja com escorregamento constante ou fluxo constante.

As componentes do fluxo de entreferro no sistema de coordenadas estacionário podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha}^m &= L_{sr}x_{\alpha\beta}^1 + L_{sr}i_{\alpha}^r \\ \phi_{\beta}^m &= L_{sr}x_{\alpha\beta}^2 + L_{sr}i_{\beta}^r\end{aligned}\tag{3.36}$$

As componentes do fluxo de rotor, por sua vez, podem ser postas na forma

$$\begin{aligned}x_{\alpha\beta}^3 &= L_{sr}x_{\alpha\beta}^1 + L_r i_{\alpha}^r \\ x_{\alpha\beta}^4 &= L_{sr}x_{\alpha\beta}^2 + L_r i_{\beta}^r\end{aligned}\tag{3.37}$$

Assim, eliminando as correntes de rotor de (3.36) com o uso de (3.37), resulta

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha}^m &= \frac{L_{sr}}{L_r}x_{\alpha\beta}^3 - \frac{L_{sr}}{L_r}(L_r - L_{sr})x_{\alpha\beta}^1 \\ \phi_{\beta}^m &= \frac{L_{sr}}{L_r}x_{\alpha\beta}^4 - \frac{L_{sr}}{L_r}(L_r - L_{sr})x_{\alpha\beta}^2\end{aligned}$$

onde $(L_r - L_{sr})$ representa a indutância de dispersão do rotor. Considerando desprezível a influência da indutância de dispersão do rotor, as componentes do fluxo de entreferro podem ser aproximadas por

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha}^m &= \frac{L_{sr}}{L_r}x_{\alpha\beta}^3 \\ \phi_{\beta}^m &= \frac{L_{sr}}{L_r}x_{\alpha\beta}^4\end{aligned}\tag{3.38}$$

Desta forma, o fluxo de entreferro no sistema de coordenadas estacionário, que entra no modelo de perdas (equação (3.34)), pode ser aproximado como

$$\phi^m = \sqrt{\phi_{\alpha}^{m2} + \phi_{\beta}^{m2}}$$

com ϕ_{α}^m e ϕ_{β}^m dados por (3.38).

3.4.3 A Energia Absorvida da Fonte de Alimentação

A avaliação da energia consumida da fonte de alimentação é feita através do seguinte modelo:

$$E_{in} = \int_0^{t_f} (V_\alpha x_{\alpha\beta}^1 + V_\beta x_{\alpha\beta}^2) dt$$

3.4.4 Trajetórias de Referência para Posição e Velocidade

A trajetória de referência adotada para a posição, em todas as simulações, é dada por

$$\begin{cases} \text{Se } t < 0.4 \text{ então } \alpha_d = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \\ \text{Se } t \geq 0.4 \text{ então } \alpha_d = -\frac{\pi}{2} + \frac{12\pi}{10} \left(1 - e^{-10(t-0.4)^2}\right)^3 \text{ rad} \end{cases}$$

Para a velocidade, a trajetória de referência adotada é

$$\begin{cases} \text{Se } t < 0.2 \text{ então } \dot{\alpha}_d = 135 \text{ rad/s} \\ \text{Se } t \geq 0.2 \text{ então } \dot{\alpha}_d = 135 + 45 \left(1 - e^{-10(t-0.2)^2}\right)^3 \text{ rad/s} \end{cases}$$

3.4.5 Torques Resistentes de Carga

Na operação em seguimento de posição, o modelo de carga adotado foi o de um pêndulo invertido, cujo torque resistente é

$$\tau_L = mgl \cos \alpha,$$

com $mgl = 10 \text{ N.m}$.

Na operação em seguimento de velocidade, foi considerada uma carga que oferece um torque resistente linear com a velocidade, do tipo

$$\tau_L = c_1 + c_2\omega,$$

onde $c_1 = 1 \text{ N.m}$ e $c_2 = 0.001 \text{ N.m.s/rad}$.

3.4.6 Ganhos dos Sub-Sistemas Elétrico e Mecânico

Os ganhos do controlador foram ajustados nos seguintes valores:

Ganhos do Sub-Sistema Elétrico

Ganhos do Sub-Sistema Mecânico

Controle de Posição e Velocidade

Controle de Posição

Controle de Velocidade

$$k_1 = -40$$

$$k_p = 10$$

$$k_p = 1$$

$$k_e = 1/\sigma$$

$$k_v = 1$$

$$k_v = 3$$

Nas simulações com o controlador operando a fluxo constante (sem minimização de energia) o valor empregado para o fluxo de rotor foi de $\phi_{dq}^r = \phi_d^r = 1.2 \text{ Wb}$. Nas simulações do controlador com minimização de energia magnética (operando a fluxo variável), os limites de mínimo e máximo fluxo de rotor foram $\phi_{\min} = 0.2 \text{ Wb}$ e $\phi_{\max} = 1.2 \text{ Wb}$.

3.4.7 Resultados de Simulação

As Figuras 3.4, 3.5 e 3.6 mostram resultados do controle em seguimento de posição com minimização de energia magnética.

A Figura 3.4 (a) apresenta a trajetória de referência e a trajetória real da posição angular, respectivamente θ_r^m e θ_r^m . A Figura 3.4 (b) mostra as trajetórias de referência e real do torque eletromagnético, respectivamente τ_m^* e τ_m .

A Figura 3.5 (a) mostra as trajetórias desejada e real da corrente de estator de eixo

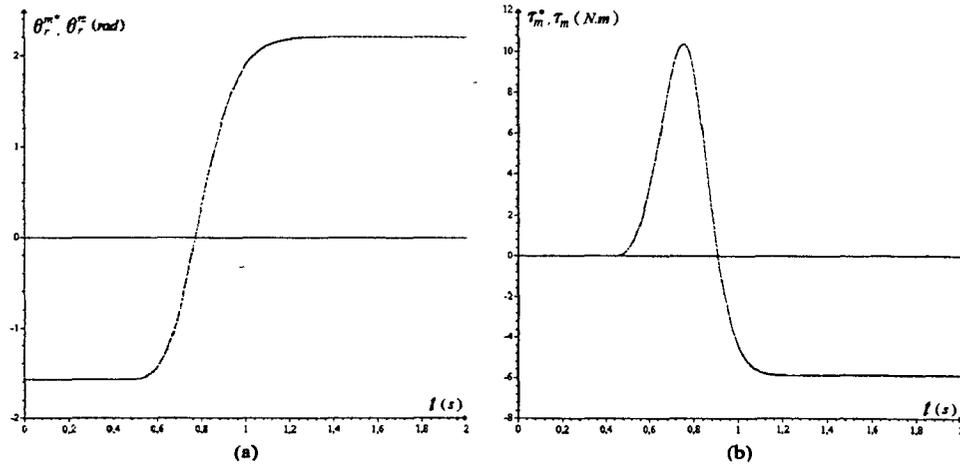


Figura 3.4: Resposta ao controle de posição com minimização de energia - (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetórias de referência e real do torque.

direto, $x_{\alpha\beta}^1$ e $x_{\alpha\beta}^1$, e a Figura 3.5 (b) as trajetórias desejada e real da corrente de estator de eixo em quadratura, $x_{\alpha\beta}^2$ e $x_{\alpha\beta}^2$.

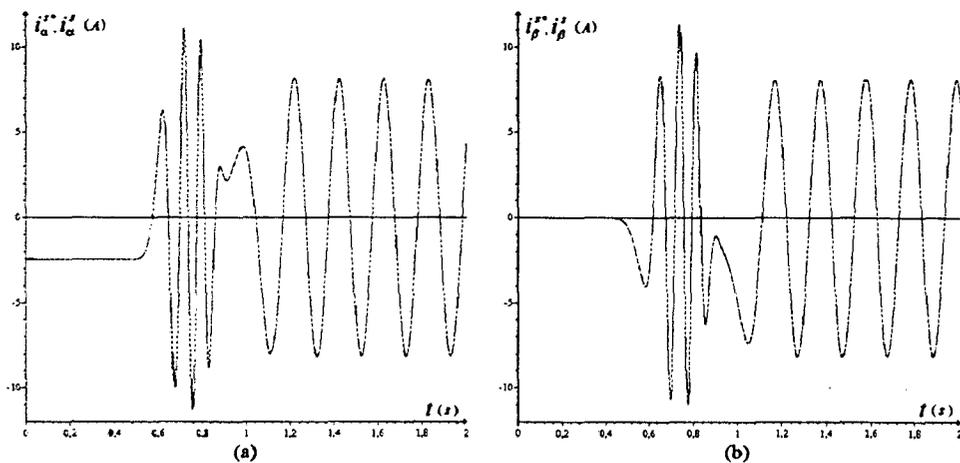


Figura 3.5: Resposta ao controle de posição com minimização de energia - (a) Trajetórias de referência e real da corrente de estator de eixo direto. (b) Trajetórias de referência e real da corrente de estator de eixo em quadratura.

A Figura 3.6 (a) apresenta as trajetórias de referência e real do fluxo de rotor de eixo direto, $x_{\alpha\beta}^3$ e $x_{\alpha\beta}^3$, e a Figura 3.6 (b) as trajetórias de referência e real do fluxo de rotor de eixo em quadratura, $x_{\alpha\beta}^4$ e $x_{\alpha\beta}^4$.

A análise das Figuras 3.4, 3.5 e 3.6 mostra que o controlador nominal, operando com o

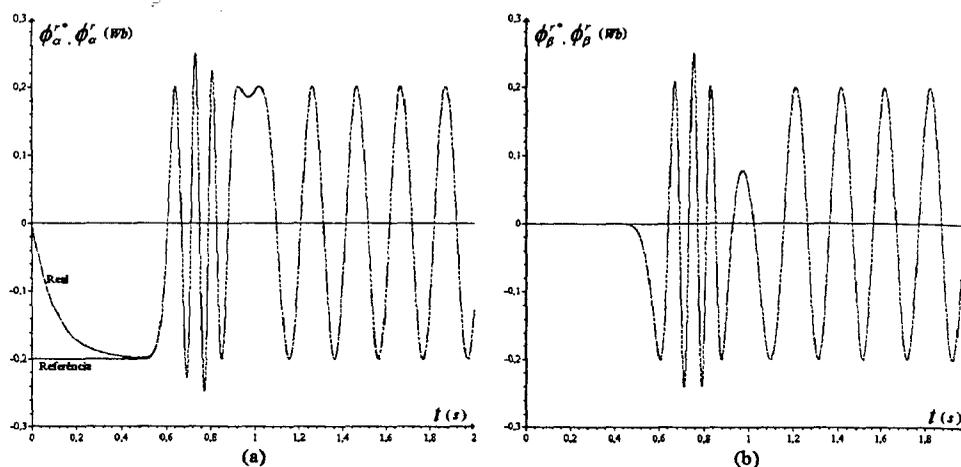


Figura 3.6: Resposta ao controle de posição com minimização de energia - (a) Trajetórias de referência e real do fluxo rotórico de eixo direto. (b) Trajetórias de referência e real do fluxo rotórico de eixo em quadratura.

critério da minimização da energia magnética, alcançou um ótimo desempenho no seguimento das trajetórias de referência de estado e, conseqüentemente, no seguimento da trajetória de referência de torque.

As Figuras 3.7, 3.8 e 3.9 mostram resultados de simulação do controle em seguimento de posição para a operação com fluxo constante, ou seja, sem minimização de energia magnética. Apresentam as trajetórias de referência e real para a posição, o torque e o fluxo de rotor, respectivamente.

Como pode ser visto das Figuras 3.7, 3.8 e 3.9, o desempenho do controlador nominal operando com fluxo constante, em termos do seguimento às referências dos estados e a referência do torque, é semelhante ao obtido para a operação com minimização de energia. Porém, em termos do consumo de energia e das perdas, o critério da minimização de energia magnética leva a uma economia substancial, como mostra a Figura 3.10.

A Figura 3.10 (a) mostra a energia absorvida da fonte de alimentação, E_{in} , e a energia dissipada em perdas eletromagnéticas, E_l ($E_l = \int_0^t P_l dt$) para a operação com minimização de energia magnética. No intervalo de tempo de 2 segundos, a energia consumida e as perdas

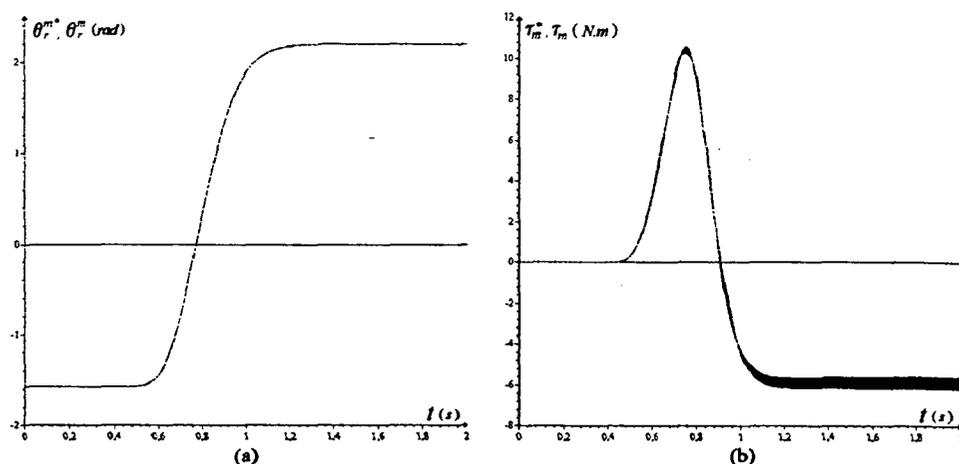


Figura 3.7: Resposta ao controle de posição com fluxo constante - (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetórias de referência e real do torque.

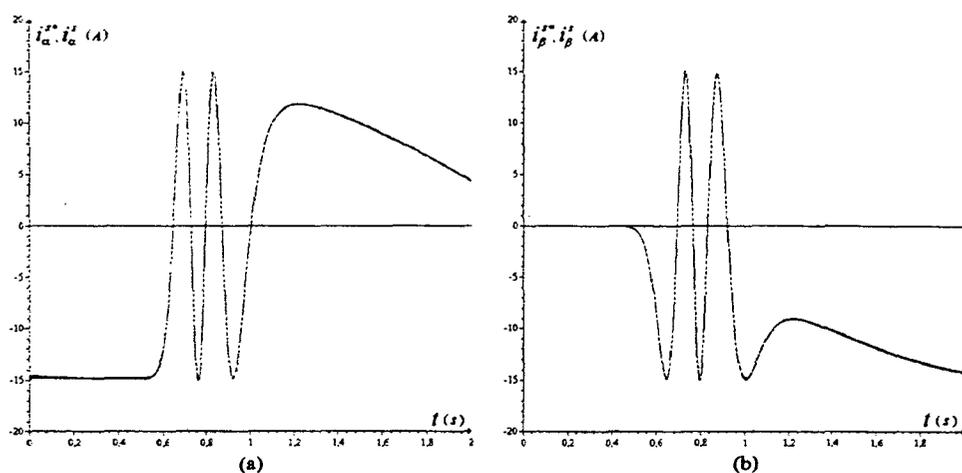


Figura 3.8: Resposta ao controle de posição com fluxo constante - (a) Trajetórias de referência e real da corrente de estator de eixo direto. (b) Trajetórias de referência e real da corrente de estator de eixo em quadratura.

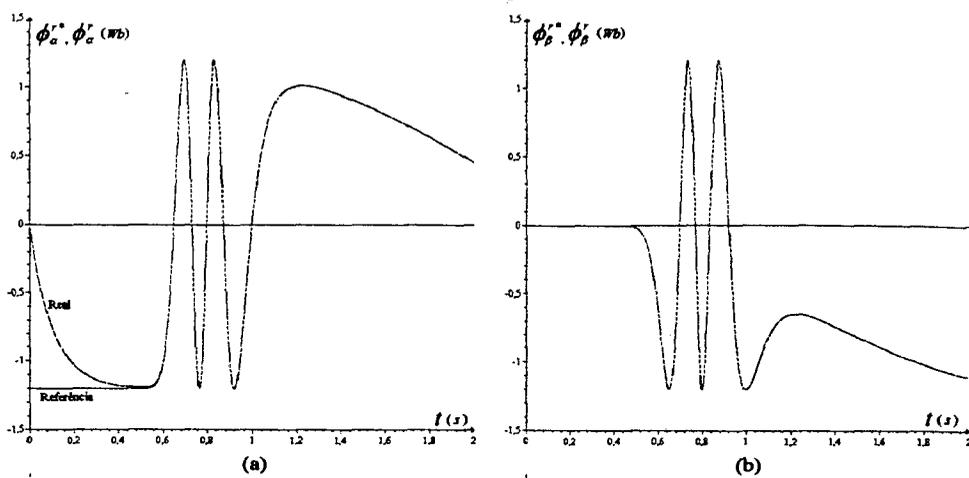


Figura 3.9: Resposta ao controle de posição com fluxo constante - (a) Trajetórias de referência e real do fluxo de rotor de eixo direto. (b) Trajetórias de referência e real do fluxo de rotor de eixo em quadratura.

foram de 146,78 J e 128,25 J, respectivamente. A Figura (b) mostra a energia absorvida da fonte e a energia dissipada em perdas para a operação com fluxo rotórico constante. Os valores de consumo de energia e perdas, para o mesmo intervalo de tempo de 2 segundos, foram de 340,15 J e 313,78 J, respectivamente.

A Figura 3.11 mostra o desempenho do controlador nominal com minimização de energia, no seguimento de trajetória de velocidade. A Figura 3.11 (a) mostra as trajetórias de referência e real da velocidade. A Figura 3.11 (b) apresenta as trajetórias de referência e real para o torque.

A Figura 3.11 mostra um bom desempenho do controlador nominal, com minimização de energia magnética, no controle de velocidade.

A Figuras 3.12 resulta da simulação do controle em seguimento de velocidade com fluxo constante.

O desempenho alcançado no controle de velocidade com fluxo constante é semelhante ao obtido para a operação com minimização de energia. Como era de se esperar, também no caso do controle de velocidade o consumo de energia e as perdas eletromagnéticas são

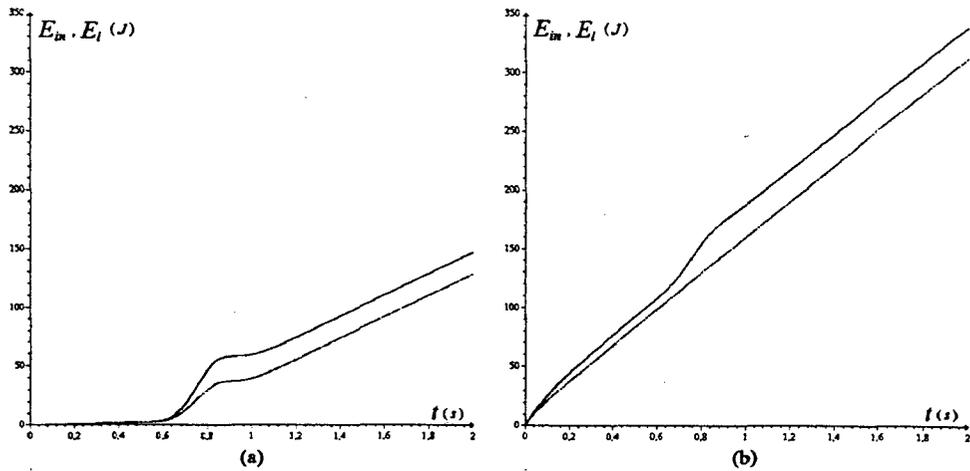


Figura 3.10: Resposta ao controle de posição - (a) Consumo de energia e perdas para operação com minimização de energia magnética. (b) Consumo de energia e perdas para operação com fluxo constante.

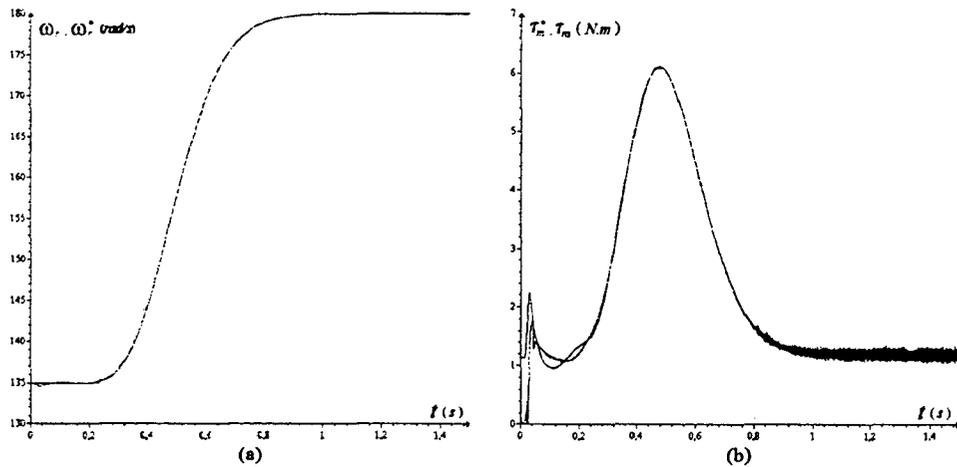


Figura 3.11: Resposta ao controle de velocidade com minimização de energia - (a) Trajetórias de referência e real da velocidade. (b) Trajetórias de referência e real do torque.

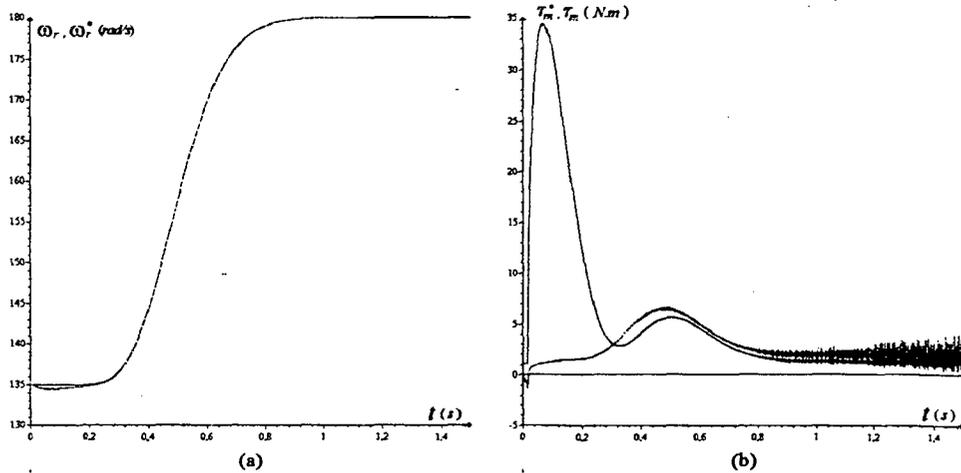


Figura 3.12: Resposta ao controle em seguimento de velocidade com fluxo constante - (a) Trajetórias de referência e real da velocidade. (b) Trajetórias de referência e real do torque.

substancialmente maiores para a operação com fluxo constante. A Figura 3.13 (a) mostra a energia consumida da rede de alimentação e a energia dissipada em perdas eletromagnéticas quando do controle em seguimento de referência de velocidade com minimização de energia magnética. O consumo de energia no intervalo de 1,5 segundos foi de 587,69 J e as perdas ficaram em 56,31 J. A Figura 3.13 (b) mostra a energia absorvida da fonte de alimentação e a energia dissipada em perdas quando do controle em seguimento de velocidade com fluxo constante. O consumo de energia e as perdas, no mesmo tempo de 1,5 segundos, foram de 1078,8 J e 528,57 J, respectivamente.

3.5 Conclusão

Este capítulo apresentou um controlador nominal em seguimento de torque que minimiza a energia magnética do motor. A estimação das variáveis rotóricas é feita por um observador não linear de ordem completa que apresenta a vantagem de ser menos sensível a ruídos nas variáveis medidas do que os observadores de ordem reduzida. A frequência de escorregamento é usada como um grau de liberdade na construção das trajetórias ótimas. Isto é possível

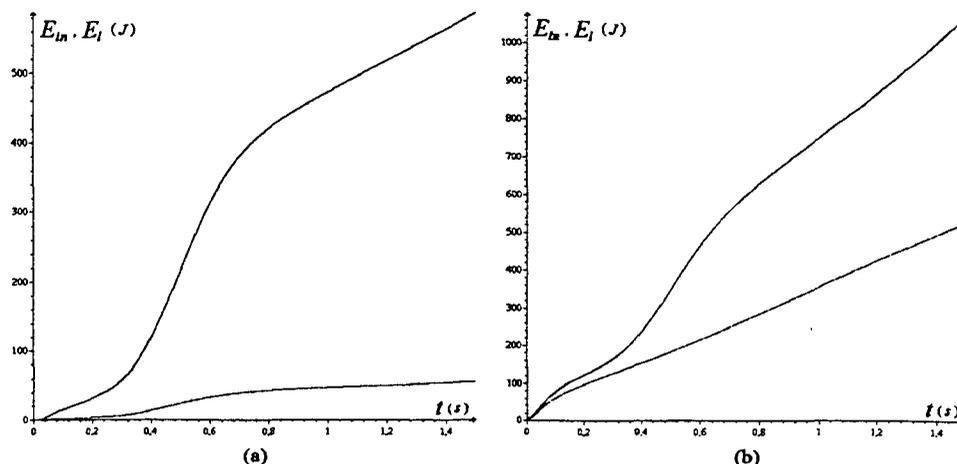


Figura 3.13: Resposta ao controle de velocidade - (a) Energia consumida e perdas para operação com minimização de energia. (b) Energia consumida e perdas para a operação com fluxo constante.

porque o torque é uma função bilinear dos estados e pode ser obtido através de diferentes combinações entre eles. Embora neste trabalho o critério adotado foi a minimização da energia magnética, outras funções convexas de custo poderiam ser escolhidas como, por exemplo, perdas nos enrolamentos, uma função quadrática da norma da corrente de estator, alguma função ponderada das perdas ôhmicas e energia magnética, etc.

Uma contribuição apresentada neste capítulo, em relação ao proposto em [83], é dada pela inclusão de um chaveamento entre estratégias de geração das trajetórias de referência para os estados. Quando a trajetória de referência de torque tende a valores na vizinhança de zero, levando ao risco da singularidade nas trajetórias ótimas, a estratégia de controle é alterada para operação com fluxo constante. Esta forma híbrida de controle mostrou-se eficiente na superação da singularidade existente nas trajetórias ótimas.

Os resultados de simulação mostram um bom desempenho do controlador em seguimento de trajetória e comprovam que a estratégia de controlar o motor com fluxo variável, buscando a minimização da energia magnética, é vantajosa em termos da redução de perdas, quando comparada a estratégia de controle com fluxo constante.

O esquema de controle apresentado é baseado nos parâmetros nominais do motor podendo sofrer alguma degradação no seu desempenho quando em presença de variações paramétricas.

Capítulo 4

Adaptação de Parâmetros Elétricos

4.1 Introdução

Este capítulo propõe uma extensão ao controlador em seguimento de torque apresentado no Capítulo 3, pela inclusão de um procedimento adaptativo que leva em consideração as variações de parâmetros do modelo do motor.

Os parâmetros que aparecem nos modelos das máquinas elétricas podem variar dos valores nominais em função da temperatura, frequência e saturação magnética. A temperatura influencia significativamente o valor da resistência dos enrolamentos. No interior da máquina, a temperatura é determinada pela energia térmica dissipada em perdas (fortemente dependente da condição de carga), por fatores ambientais como temperatura e altitude e pela capacidade do sistema de refrigeração em transferir o calor gerado internamente para o ambiente externo. A máxima temperatura admissível no interior de uma máquina elétrica é ditada pela estabilidade do material isolante. Assim, dependendo do tipo de isolante empregado, temperaturas maiores ou menores são admitidas. No caso dos motores de indução normalmente encontrados no mercado (classe de isolamento B ou F), dependendo da temperatura do ambiente de serviço, podem ocorrer variações na temperatura dos enrolamentos de

até 130°C.

A frequência elétrica de operação, por sua vez, pode afetar o valor da resistência dos enrolamentos de duas maneiras: através do efeito pelicular e pela influência nas perdas magnéticas. Em função do efeito pelicular, alterações de frequência produzem alterações no valor da resistência efetiva do enrolamento. No motor de indução de gaiola, este efeito pode ter importância prática para a resistência de rotores de barras profundas e de rotores de dupla gaiola, quando operados com escorregamentos elevados. As perdas magnéticas por correntes parasitas e histerese são dependentes da frequência elétrica. Assim, as variações de frequência representam uma pequena contribuição para a variação da temperatura interna do motor e, por conseguinte, para alterações nos valores das resistências de estator e rotor.

A saturação do material ferromagnético é um fenômeno bastante frequente durante a operação de uma máquina elétrica, ocorrendo principalmente na região dos dentes de estator e rotor. Este fenômeno pode afetar todas as indutâncias da máquina, à exceção das indutâncias de dispersão que podem ser consideradas razoavelmente independentes. O seu efeito é o de reduzir o valor das indutâncias em relação ao valor não saturado.

Uma referência, em termos das variação de parâmetros na operação do motor de indução, é apresentada em [54]. Neste trabalho encontra-se um indicativo de que elevações de temperatura da ordem de 130°C em relação ao valor da temperatura ambiente provocariam elevações no valor da resistência de rotor da ordem de 50 por cento sobre o seu valor a frio. Em relação à saturação do material ferromagnético, as indicações são que a mesma poderia reduzir as indutâncias próprias e mútuas para valores da ordem de 80 por cento dos valores não saturados. É importante perceber que as alterações nos valores das resistências, fundamentalmente causadas pelas variações de temperatura, se dão de forma bastante lenta enquanto que as variações nas indutâncias, associadas ao fenômeno da saturação, ocorrem rapidamente.

Portanto, pelo exposto, conclui-se que variações paramétricas significativas podem ocorrer nos acionamentos controlados do motor de indução. A desconsideração dessas variações no modelo da planta pode levar a degradações severas no desempenho do controle.

A performance do controle vetorial indireto do motor de indução depende fortemente da precisão com que os parâmetros do motor são conhecidos, notadamente da resistência rotórica [69]. Se os parâmetros usados no controle não estão em sintonia com os parâmetros reais do sistema, o controlador não consegue desacoplar perfeitamente as componentes da corrente estatórica que produzem fluxo e torque, resultando na degradação do desempenho do acionamento. Por isso, o problema da adaptação de parâmetros no controle vetorial indireto tem recebido grande ênfase. Técnicas de estimação recursiva e controle adaptativo têm sido propostas para contornar o problema. Entre as primeiras publicações que tratam da abordagem da adaptação paramétrica no controle vetorial indireto do motor de indução está o trabalho de Garcés [32]. Ele propõem um método de adaptação da constante de tempo rotórica que desconsidera as incertezas nas indutâncias próprias e mútua. A abordagem é baseada num modelo de referência que representa uma expressão modificada da potência reativa. Desprezando as incertezas nas indutâncias, esta função depende exclusivamente da constante de tempo rotórica e pode ser calculada para a máquina a partir dos valores medidos de correntes e tensões de estator. O erro entre o valor da função calculado para a máquina e o valor extraído do modelo é utilizado para efetuar a adaptação da constante de tempo do rotor. Matsuo e Lipo [73] apresentam um método recursivo de identificação da resistência do rotor para uso no controle vetorial indireto. O processo de identificação usa correntes de seqüência negativa injetadas nos enrolamentos de estator. Através das informações obtidas da medição das tensões de seqüência negativa de estator, o valor da resistência do rotor é calculado. Todas as técnicas que utilizam a injeção de sinais para a estimação de parâmetros trazem como consequência negativa alguma perturbação no desempenho do acionamento.

No caso específico deste método, a interação entre as forças magnetomotrizes de sequência positiva e de sequência negativa dá origem a um torque pulsante de segunda harmônica que produz vibrações mecânicas. Assim, para minimizar os efeitos da ressonância mecânica os testes com injeção de componentes de sequência negativa devem ser feitos por períodos curtos e com intervalos de tempo longos entre testes. Neste método, o cálculo da resistência rotórica é feito para uma condição de regime permanente e não são levados em consideração as incertezas nas indutâncias. Lorenz e Lawson [69] propõe um esquema adaptativo para o controle vetorial indireto do motor de indução que é baseado num modelo de referência de torque eletromagnético. O torque eletromagnético desenvolvido pelo motor é estimado a partir da medição de correntes e tensões de estator. A saída do modelo de referência é o torque elétrico, obtido das equações do motor com alinhamento perfeito do fluxo de rotor com o eixo direto do sistema de coordenadas síncrono. O erro entre o valor estimado para o torque do motor e o valor de referência indica a falta de sintonia entre o modelo de controle e o motor, sendo usado na adaptação do ganho de escorregamento. O principal problema deste método é a forte dependência que o torque estimado apresenta em relação à resistência estática, para operação em baixas velocidades. Erros no valor da resistência de estator conduzem a erros no valor do torque estimado, o que pode tornar-se crítico para baixas velocidades. Em altas velocidades o torque estimado é praticamente insensível à resistência de estator. Holtz e Thimm [38] descrevem um método de identificação de parâmetros de uma máquina de indução em tempo real. A identificação é baseada na avaliação da trajetória dinâmica da corrente de estator. Um modelo analítico que tem como sinais de entrada as tensões de estator e a velocidade mecânica é operado em paralelo com a máquina real. O erro entre as duas trajetórias de corrente, a gerada pelo modelo analítico e a medida da máquina, é uma consequência do desvio dos parâmetros do modelo em relação aos valores reais e serve como um indicador para o esquema de identificação de parâmetros. O método do

gradiente é usado para sintonizar os parâmetros do modelo com os valores reais da máquina. A influência de erros de medida é minimizado por um algoritmo de mínimos quadrados. São identificadas as resistências e reatâncias de estator e rotor. O método produz resultados satisfatórios para todas as condições de operação da máquina, incluindo operação em baixas velocidades, porém exige um esforço computacional considerável.

4.2 Adaptação de Parâmetros no Controle em Seguimento de Torque com Minimização de Energia

O Capítulo 3 apresentou um controle não linear para o motor de indução, com observação de estados, que minimiza a energia magnética. A análise das equações (3.13), (3.25), (3.27) e (3.29), mostra que as variações paramétricas ou mesmo erros na estimação dos valores nominais dos parâmetros do modelo do motor, afetam a geração das trajetórias de referência para os estados, os termos de alimentação direta e o desempenho do observador, notadamente nas componentes do fluxo de rotor que são observadas em malha aberta. Em função disto, variações paramétricas e/ou erros de estimação podem degradar o desempenho dinâmico do controlador.

Uma das formas de levar em conta as variações paramétricas no controle de uma planta é através dos controladores adaptativos. Existem diferentes abordagens para o projeto de controladores adaptativos, como a Programação de Ganhos (Gain Scheduling), os Sistemas Adaptativos por Modelos de Referência (Model Reference Adaptive Systems) e os Controladores Auto-ajustáveis (Self Tuning Regulators). No caso específico do controle do motor de indução, as técnicas empregadas enquadram-se nas abordagens do Controle por Modelos de Referência e do Controle Auto-ajustável.

Esta Secção apresenta um procedimento para a adaptação de parâmetros elétricos do

motor que se utiliza de modelos de referência. Inicialmente, uma análise de sensibilidade é feita, por meio de resultados de simulação, com o intuito de identificar os parâmetros em relação aos quais o controlador é menos robusto. Com base nos resultados desta análise, uma proposta para a adaptação de parâmetros elétricos é apresentada. Vários resultados de simulação ilustram os resultados obtidos com o controlador adaptativo proposto.

4.2.1 Análise da Sensibilidade às Variações Paramétricas

Esta subseção tem o objetivo de realizar um estudo, por meio de resultados de simulação, da sensibilidade do controlador nominal em relação às variações paramétricas. O procedimento adotado foi o de promover variações independentes em cada um dos parâmetros elétricos do motor, mantendo os demais constantes no valor nominal, e simular o comportamento do controlador nominal no seguimento de posição e velocidade. Os torques resistentes, os ganhos do controlador e as trajetórias de referência para a posição e a velocidade foram os mesmos adotados na Seção 3.4.

As Figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 mostram o seguimento às trajetórias de referência de posição e torque quando da ocorrência de variações, respectivamente, da resistência de estator, da resistência de rotor, da indutância de estator, da indutância de rotor e da indutância mútua estator-rotor.

A Figura 4.1 mostra resultados do controlador nominal em presença da variação da resistência de estator. O comportamento adotado para a resistência de estator foi

$$R_s = 0.33t + 0.35 \quad \Omega$$

Os demais parâmetros, R_r , L_s , L_r e L_{sr} , foram considerados constantes no valor nominal.

É possível observar um bom seguimento às referências de posição e torque, mostrando que

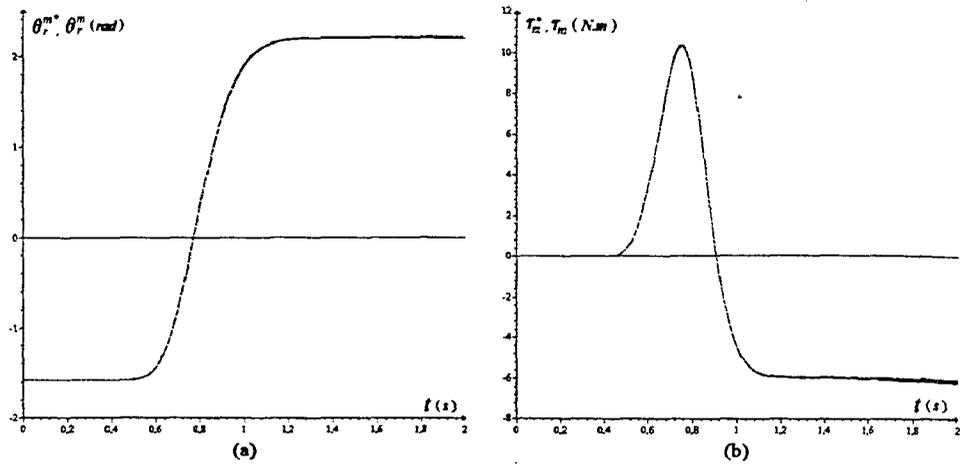


Figura 4.1: Resposta com controlador nominal em presença de variação da resistência de estator - (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetórias de referência e real do torque.

o controlador nominal é bastante robusto em relação às variações da resistência de estator.

A Figura 4.2 foi obtida considerando uma variação na resistência de rotor dada por

$$R_r = 0.42t + 0.42 \Omega$$

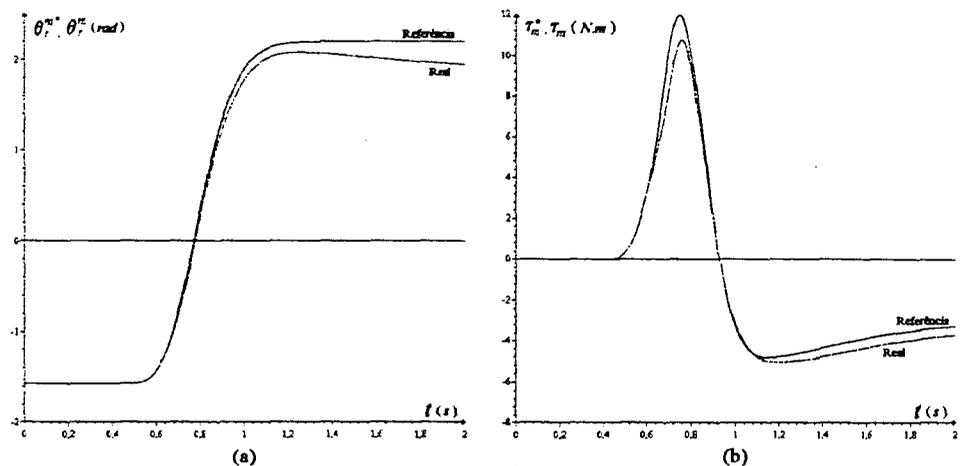


Figura 4.2: Resposta com controlador nominal em presença de variação da resistência de rotor - (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetórias de referência e real do torque.

Observa-se que o erro entre o valor real da resistência de rotor e valor utilizado no controle

causa erros no seguimento da referência de torque e, conseqüentemente, no seguimento à trajetória desejada para a posição.

A Figura 4.3 resultou de uma simulação onde a indutância de estator foi considerada como

$$L_s = 0.1 + 0.016 \sin(\pi t)$$

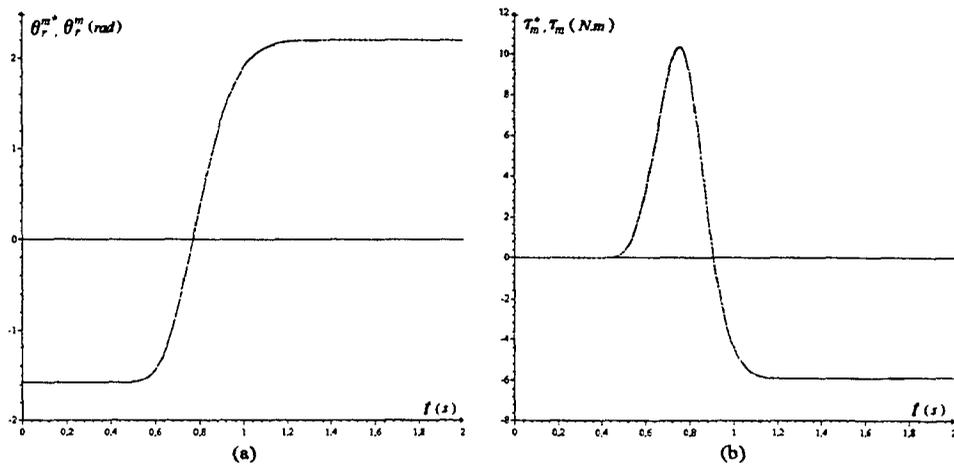


Figura 4.3: Resposta com controlador nominal em presença de variação da indutância de estator - (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetórias de referência e real do torque.

Não é perceptível qualquer influência da variação de L_s no desempenho do controlador nominal.

A Figura 4.4, mostra os resultados obtidos para um comportamento da indutância de rotor modelado por

$$L_r = 0.1 + 0.016 \sin(\pi t)$$

Verifica-se que a variação de L_r degrada significativamente o desempenho do controlador.

Por fim, a Figura 4.5 mostra as trajetórias de posição e torque obtidas com o controlador

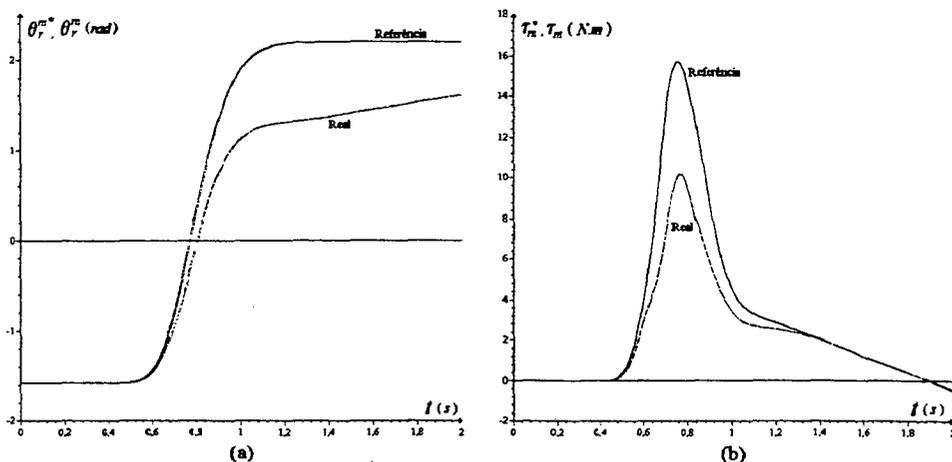


Figura 4.4: Resposta com controlador nominal em presença de variação da indutância de rotor - (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetórias de referência e real do torque.

nominal em presença de variações na indutância mútua estator-rotor. A indutância mútua estator-rotor foi considerada como

$$L_{sr} = 0.097 + 0.016 \sin(\pi t)$$

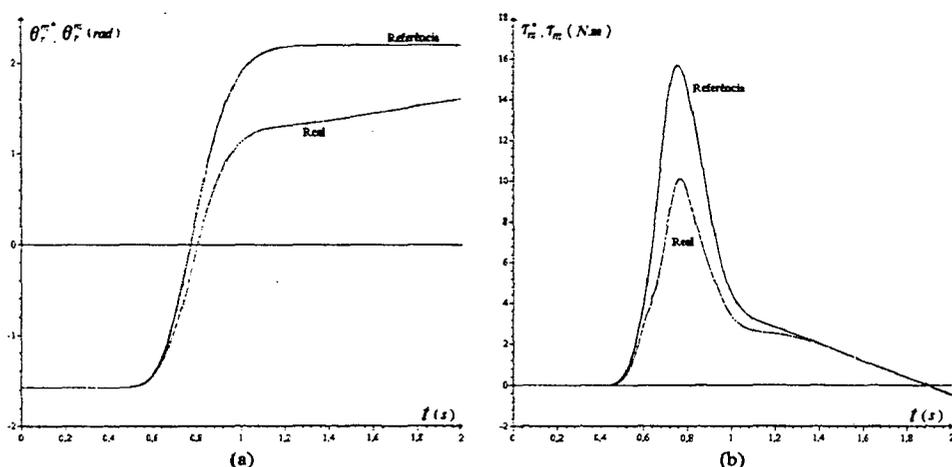


Figura 4.5: Resposta com controlador nominal em presença de variação da indutância mútua estator-rotor - (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetória de referência e real do torque.

Observa-se que a variação no valor de L_{sr} também afeta substancialmente o desempenho

do controlador nominal em seguimento de posição.

Assim, a partir do conjunto destes resultados de simulação, é possível concluir que o desempenho do controlador nominal é mais sensível aos erros na indutância de rotor, na indutância mútua estator-rotor e na resistência de rotor.

Portanto, é de se esperar que a adaptação adequada destes três parâmetros ou de parâmetros que se relacionem de forma direta com estes, deva ser capaz de restaurar o desempenho do controlador em seguimento de torque com minimização de energia.

Verificou-se também, por meio de resultados de simulações, que as variações paramétricas pouco afetam o controlador nominal em seguimento de velocidade.

Com base nesta análise optou-se pela adaptação do valor estimado da relação entre a indutância mútua e a indutância de rotor (\hat{L}_{sr}/\hat{L}_r) e a adaptação do valor estimado da resistência de rotor \hat{R}_r .

Por simplicidade será considerado que

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{L}_{sr}}{\hat{L}_r}$$

4.2.2 Adaptação da Relação entre as Indutâncias Mútua e de Rotor ($\hat{\theta}$)

O parâmetro $\hat{\theta}$ é adaptado com o uso de um modelo de referência de torque eletromagnético, dado por

$$\tau^* = v\hat{\theta} \left(x_{\alpha\beta}^2 \hat{x}_{\alpha\beta}^3 - x_{\alpha\beta}^1 \hat{x}_{\alpha\beta}^4 \right) \quad (4.1)$$

onde $x_{\alpha\beta}^1$ e $x_{\alpha\beta}^2$ são as correntes de estator obtidas por medição e $\hat{x}_{\alpha\beta}^3$ e $\hat{x}_{\alpha\beta}^4$ são os fluxos rotóricos observados.

Para evitar a necessidade da medição direta do torque produzido pelo motor, o que não é viável em aplicações industriais, usa-se uma estimativa do seu valor obtida de

$$\hat{\tau} = v \left(x_{\alpha\beta}^2 \hat{\phi}_\alpha^s - x_{\alpha\beta}^1 \hat{\phi}_\beta^s \right) \quad (4.2)$$

onde $\hat{\phi}_\alpha^s$ e $\hat{\phi}_\beta^s$ são as componentes do fluxo de estator no sistema de coordenadas síncrono, calculadas por

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_\alpha^s &= \int \left(V_\alpha^s - x_{\alpha\beta}^1 \hat{R}_s \right) dt \\ \hat{\phi}_\beta^s &= \int \left(V_\beta^s - x_{\alpha\beta}^2 \hat{R}_s \right) dt \end{aligned} \quad (4.3)$$

Assim, o valor estimado do torque eletromagnético é obtido facilmente da medição de correntes e tensões de estator.

Esta forma de estimar o fluxo de estator é interessante pela pequena dependência que apresenta em relação aos parâmetros do motor. Com velocidades da ordem da nominal ou superiores, a queda de tensão na resistência de estator é desprezível fazendo com que a estimação seja praticamente independente dos parâmetros da máquina. Entretanto, para operação com baixas velocidades a estimação do fluxo tem uma dependência significativa da resistência de estator. Assim, erros na estimação da resistência de estator conduzem a erros na estimação do fluxo de estator e, conseqüentemente, no valor estimado do torque eletromagnético. Um modo de viabilizar a utilização deste estimador de torque em baixas velocidades, como é o caso do controle de posição, é obtido pelo uso do valor medido da resistência de estator. A medição em tempo real pode ser feita sem maiores custos, haja vista que os enrolamentos de estator são acessíveis e a periodicidade da medição pode ser pequena (as resistências variam lentamente).

A lei de adaptação usada, baseada no erro entre o torque estimado e a saída do modelo de referência de torque, é

$$\frac{d}{dt}\hat{\theta} = \gamma_t (\hat{\tau} - \tau^*) x_{\alpha\beta}^2 \quad (4.4)$$

onde γ_t é o ganho de adaptação de $\hat{\theta}$.

No esquema adaptativo por modelos de referência, em geral, o erro não é usado numa relação linear para estabelecer a correção do parâmetro estimado. O sinal de erro frequentemente é multiplicado por uma ou mais entradas fazendo com que as saídas não relacionadas com as entradas conhecidas tendam a não influenciar o processo de adaptação [69].

4.2.3 Adaptação da Resistência de Rotor

A resistência do rotor é adaptada com o uso do seguinte modelo de referência para as perdas rotóricas:

$$P_r^* = (\hat{i}_\alpha^2 + \hat{i}_\beta^2) \hat{R}_r \quad (4.5)$$

onde \hat{i}_α^r e \hat{i}_β^r são as correntes de rotor estimadas, calculadas de

$$\hat{i}_\alpha^r = \frac{\hat{x}_{\alpha\beta}^3 \hat{\theta}}{\hat{L}_{sr}} - x_{\alpha\beta}^1 \hat{\theta} \quad (4.6)$$

$$\hat{i}_\beta^r = \frac{\hat{x}_{\alpha\beta}^4 \hat{\theta}}{\hat{L}_{sr}} - x_{\alpha\beta}^2 \hat{\theta} \quad (4.7)$$

As perdas rotóricas são estimadas de

$$\hat{P}_r = V_\alpha^s x_{\alpha\beta}^1 + V_\beta^s x_{\alpha\beta}^2 - (x_{\alpha\beta}^1 + x_{\alpha\beta}^2) \hat{R}_s + \hat{\tau} \omega_r \quad (4.8)$$

com $\hat{\tau}$ dado por (4.2).

A lei de adaptação da resistência de rotor, com base no erro entre as perdas rotóricas

estimadas e a saída do modelo de referência, é

$$\frac{d}{dt} \hat{R}_r = \frac{\gamma_r (\hat{P}_r - P_r^*)}{(\hat{i}_\alpha^2 + \hat{i}_\beta^2) + \varepsilon} \quad (4.9)$$

onde ε é um fator que evita a ocorrência de singularidade quando da passagem simultânea de \hat{i}_α^r e \hat{i}_β^r por zero e γ_r é o ganho de adaptação da resistência de rotor.

Assim, no controlador adaptativo, as trajetórias de referência para os estados, no sistema de coordenadas síncrono, ficam

$$\begin{aligned} x_{dq}^{1*} &= \frac{1}{\hat{L}_{sr}} \left[\frac{\hat{L}_{sr}}{\hat{\theta} \sqrt{\hat{R}_r v}} \frac{d}{dt} \left[\sqrt{\frac{T_m^*}{\omega_{sl}}} \right] + \sqrt{\frac{\hat{R}_r}{v}} \sqrt{\frac{T_m^*}{\omega_{sl}}} \right] \\ x_{dq}^{2*} &= \frac{1}{\hat{\theta} \sqrt{\hat{R}_r v}} \sqrt{T_m^* \omega_{sl}} \\ x_{dq}^{3*} &= -\frac{1}{\sqrt{\hat{R}_r v}} \frac{d}{dt} \left[\sqrt{\frac{T_m^*}{\omega_{sl}}} \right] \\ x_{dq}^{4*} &= -\frac{1}{\sqrt{\hat{R}_r v}} \sqrt{T_m^* \omega_{sl}} \\ x_{dq}^{5*} &= \hat{\theta}_r^{m*} \end{aligned} \quad (4.10)$$

com

$$\omega_{sl} = \omega_{sl}^{opt} = \frac{\hat{R}_r \hat{\theta}}{\hat{L}_{sr} \sqrt{1 - \frac{\hat{L}_{sr} \hat{\theta}}{\hat{L}_s}}} \quad (4.11)$$

para a operação com escorregamento constante,

$$\omega_{sl} = \hat{\alpha}_{\max} T_m^*; \quad \hat{\alpha}_{\max} = \frac{\hat{R}_r}{v \phi_{\min}^2}$$

para a operação com fluxo rotórico constante no valor mínimo e

$$\omega_{sl} = \hat{\alpha}_{\min} \tau_m^*; \quad \hat{\alpha}_{\min} = \frac{\hat{R}_r}{v\phi_{\max}^2}$$

para a operação com fluxo rotórico constante no valor máximo.

O termo de entrada direta fica

$$\begin{bmatrix} V_\alpha^{s*} \\ V_\beta^{s*} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^T \left\{ \hat{\mathcal{D}}_{\alpha\beta} \dot{\mathbf{x}}_{\alpha\beta}^* + \left[\hat{\mathcal{C}}_{\alpha\beta}(\omega_r, \mathbf{x}_{\alpha\beta}^*) + \hat{\mathcal{R}}_{\alpha\beta} \right] \mathbf{x}_{\alpha\beta}^* + (\omega_r - \omega_r^*) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_{\alpha\beta}^*) \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (4.12)$$

com

$$\hat{\mathcal{D}}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_{\alpha\beta} & 0_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 4} & J \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{D}}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} (\hat{L}_s - \hat{L}_{sr}\hat{\theta}) \mathcal{I}_2 & 0 \\ 0 & \frac{\hat{\theta}}{\hat{L}_{sr}} \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{C}}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}(\omega_r) & \hat{\mathbf{c}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_{\alpha\beta}^*) \\ -\hat{\mathbf{c}}_{\alpha\beta}^T(\mathbf{x}_{\alpha\beta}^*) & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}}_{\alpha\beta} = \frac{v\omega_r\hat{\theta}}{2\hat{L}_{sr}} \begin{bmatrix} 0 & \hat{L}_{sr}\mathcal{J}_2 \\ \hat{L}_{sr}\mathcal{J}_2 & -2\mathcal{J}_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{c}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_{\alpha\beta}^*) = \frac{v\hat{\theta}}{2} \begin{bmatrix} -x_{\alpha\beta}^{4*} & x_{\alpha\beta}^{3*} & x_{\alpha\beta}^{2*} & -x_{\alpha\beta}^{1*} \end{bmatrix}^T$$

$$\hat{\mathcal{R}}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_{\alpha\beta} & 0_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 4} & b \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{R}}_{\alpha\beta} = \left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{L}_{sr}} \right)^2 \begin{bmatrix} \left(\frac{R_s \hat{L}_{sr}^2}{\hat{\theta}^2} + \hat{R}_r \hat{L}_{sr}^2 \right) \mathcal{I}_2 & -\hat{R}_r \hat{L}_{sr} \mathcal{I}_2 \\ -\hat{R}_r \hat{L}_{sr} \mathcal{I}_2 & \hat{R}_r \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} > 0$$

O observador de estados é dado por

$$\hat{\mathbf{D}}_{\alpha\beta} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{\alpha\beta}^e + [\hat{\mathbf{C}}_{\alpha\beta}(\omega_r) + \hat{\mathbf{R}}_{\alpha\beta}] \hat{\mathbf{x}}_{\alpha\beta}^e = \mathbf{M} \begin{bmatrix} V_{\alpha}^s \\ V_{\beta}^s \end{bmatrix} + \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}}_{\alpha\beta}^e \quad (4.13)$$

e a realimentação fica

$$\Delta \mathbf{V}_{2 \times 1} = \mathbf{K}_{2 \times 5} (\hat{\mathbf{x}}_{\alpha\beta}^p - \mathbf{x}_{\alpha\beta}^*) \quad (4.14)$$

com

$$\mathbf{K}_{2 \times 5} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1 = k_1 \mathcal{I}_2 > 0 \quad , \quad \mathbf{K}_2 = -\frac{v\hat{\theta}}{2} \omega_r^* \mathcal{J}_2$$

A Figura 4.6 mostra, em diagrama de blocos, o controlador adaptativo em seguimento de torque

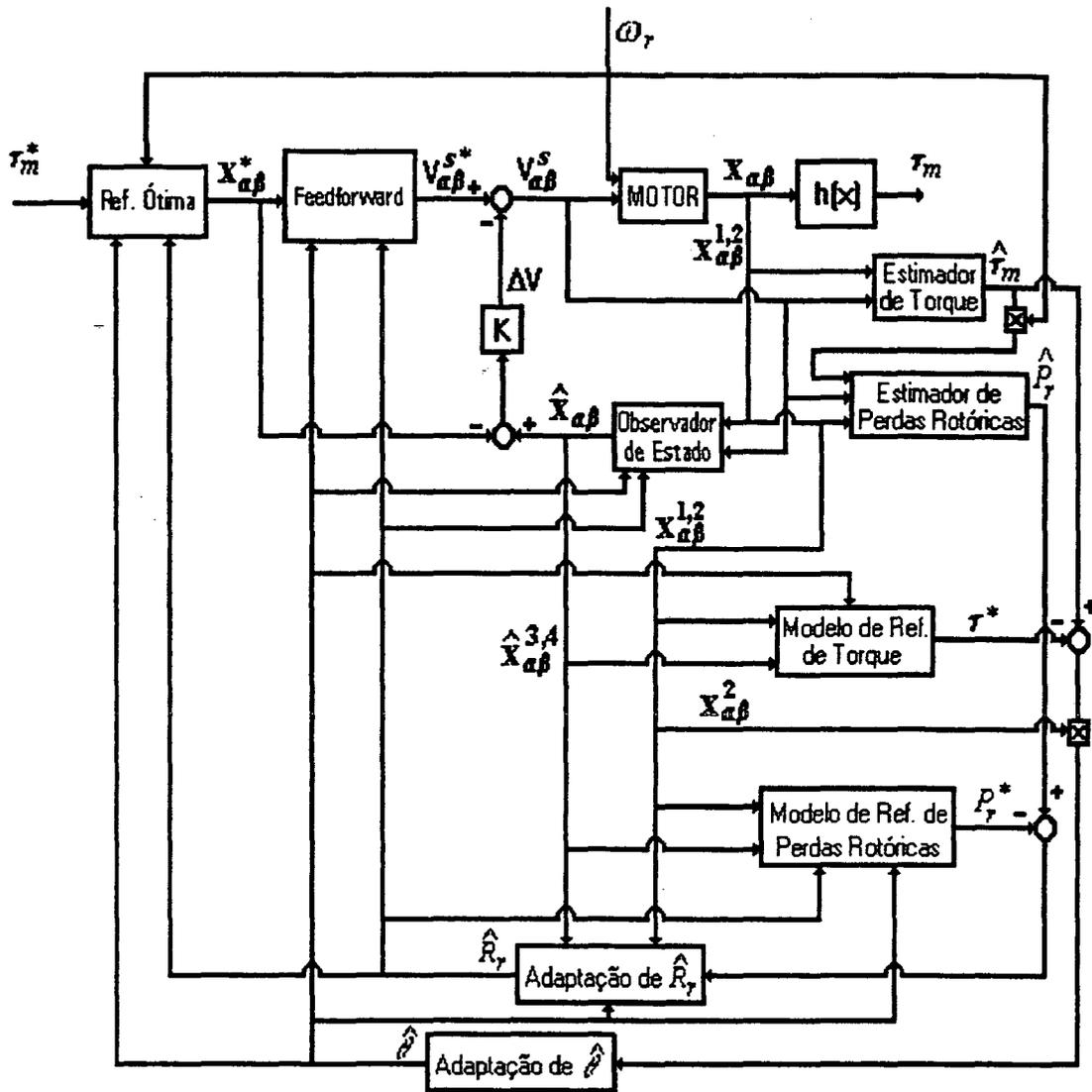


Figura 4.6: Diagrama de blocos do controlador adaptativo em seguimento de torque com observação de estados.

4.3 Simulação do Controlador Adaptativo

Esta Seção apresenta resultados de simulação do controlador adaptativo.

Os parâmetros elétricos do motor, em todas as simulações, foram modelados por

$$R_s = 0.687 \quad \Omega$$

$$R_r = 0.42t + 0.42 \quad \Omega$$

$$L_s = 0.1 + 0.016 \sin(\pi t) \quad H$$

$$L_r = 0.1 + 0.016 \sin(\pi t) \quad H$$

$$L_{sr} = 0.097 + 0.016 \sin(\pi t) \quad H$$

o que representa uma variação paramétrica extremamente severa, servindo como um excelente teste para a avaliação do desempenho do controlador proposto.

A nível de controle, foram estimados os seguintes valores para os parâmetros elétricos que não são adaptados :

$$\hat{R}_s = 0.687 \quad \Omega$$

$$\hat{L}_s = 0.084 \quad H$$

$$\hat{L}_{sr} = 0.081 \quad H$$

Os valores iniciais adotados para os parâmetros que sofrem adaptação foram:

$$\hat{R}_r = 0.842 \quad \Omega$$

$$\hat{\theta} = 0.952941$$

O modelo de perdas elétricas e magnéticas, as trajetórias de referência para a posição

e velocidade, os torques resistentes de carga e os ganhos foram os mesmos empregados nas simulações da Seção 3.4.

Os aspectos analisados foram:

- desempenho dinâmico no controle de posição e velocidade;
- consumo de energia e perdas elétricas e magnéticas.

Inicialmente, a Figura 4.7 mostra as respostas do seguimento de posição e torque obtidas com o controlador nominal.

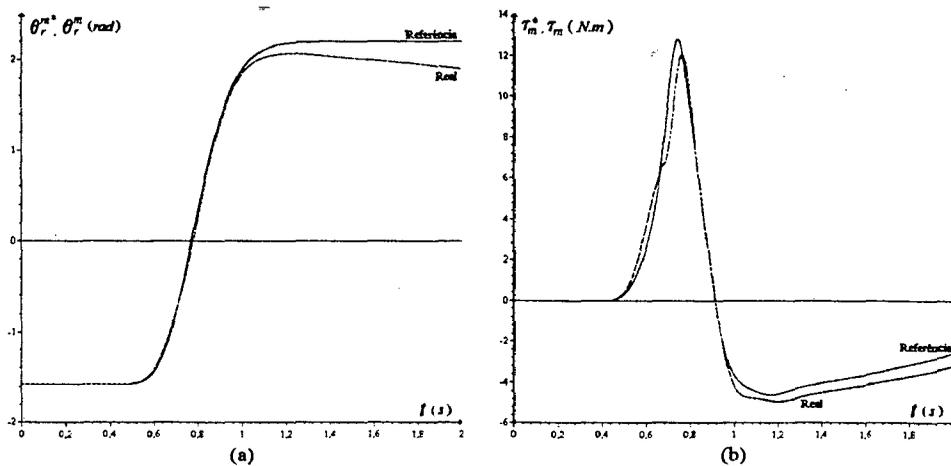


Figura 4.7: Resposta com controlador nominal em presença de variações paramétricas (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetórias de referência e real do torque.

Como era previsível, observa-se que as variações paramétricas impostas ao motor provocaram erros no seguimento às referências de posição e de torque.

A Figura 4.8 mostra as respostas ao seguimento de posição e torque obtidas com o controlador adaptativo.

Embora o seguimento à referência de torque não seja perfeito, é possível perceber uma melhoria significativa no seguimento à referência de posição. Isto mostra que apesar da imposição de variações paramétricas bastante severas, certamente muito superiores àquelas

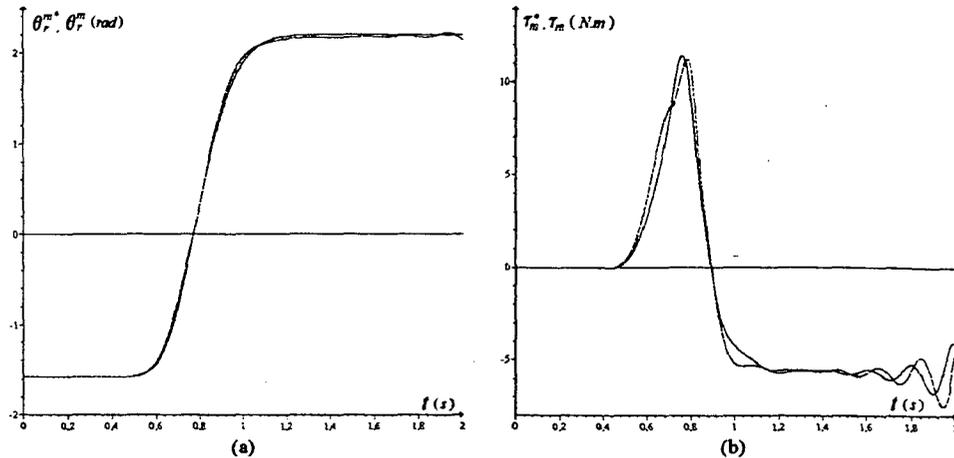


Figura 4.8: Resposta com controlador adaptativo em presença de variações paramétricas (a) Trajetórias de referência e real da posição. (b) Trajetórias de referência e real do torque.

verificadas na prática, o controle adaptativo proposto conseguiu um desempenho bastante satisfatório.

A Figura 4.9 mostra as trajetórias de referência e real das componentes da corrente de estator e das componentes do fluxo de rotor.

Observa-se, das Figuras 4.9 (a) e 4.9 (b), que o seguimento as trajetórias de referência das componentes das correntes de estator é perfeito. Isto se deve à existência de realimentação nas correntes. Das Figuras 4.9 (c) e 4.9 (d) percebe-se pequenos desvios em relação às referências de fluxo de rotor de eixo direto e de eixo em quadratura, causados pelos erros de observação de fluxo, que é feito em malha aberta.

A Figura 4.10 mostra as trajetórias reais e observadas das componentes da corrente de estator e das componentes dos fluxos de rotor.

A Figura 4.11 (a) mostra a trajetória real e adaptada da resistência de rotor e a Figura 4.11 (b) mostra a trajetória real do parâmetro θ e a trajetória do parâmetro adaptado $\hat{\theta}$.

Na Figura 4.12 é apresentado o consumo de energia e as perdas eletromagnéticas do controlador adaptativo em seguimento de torque.

A comparação com a Figura 3.10 (a) mostra que o procedimento de adaptação de

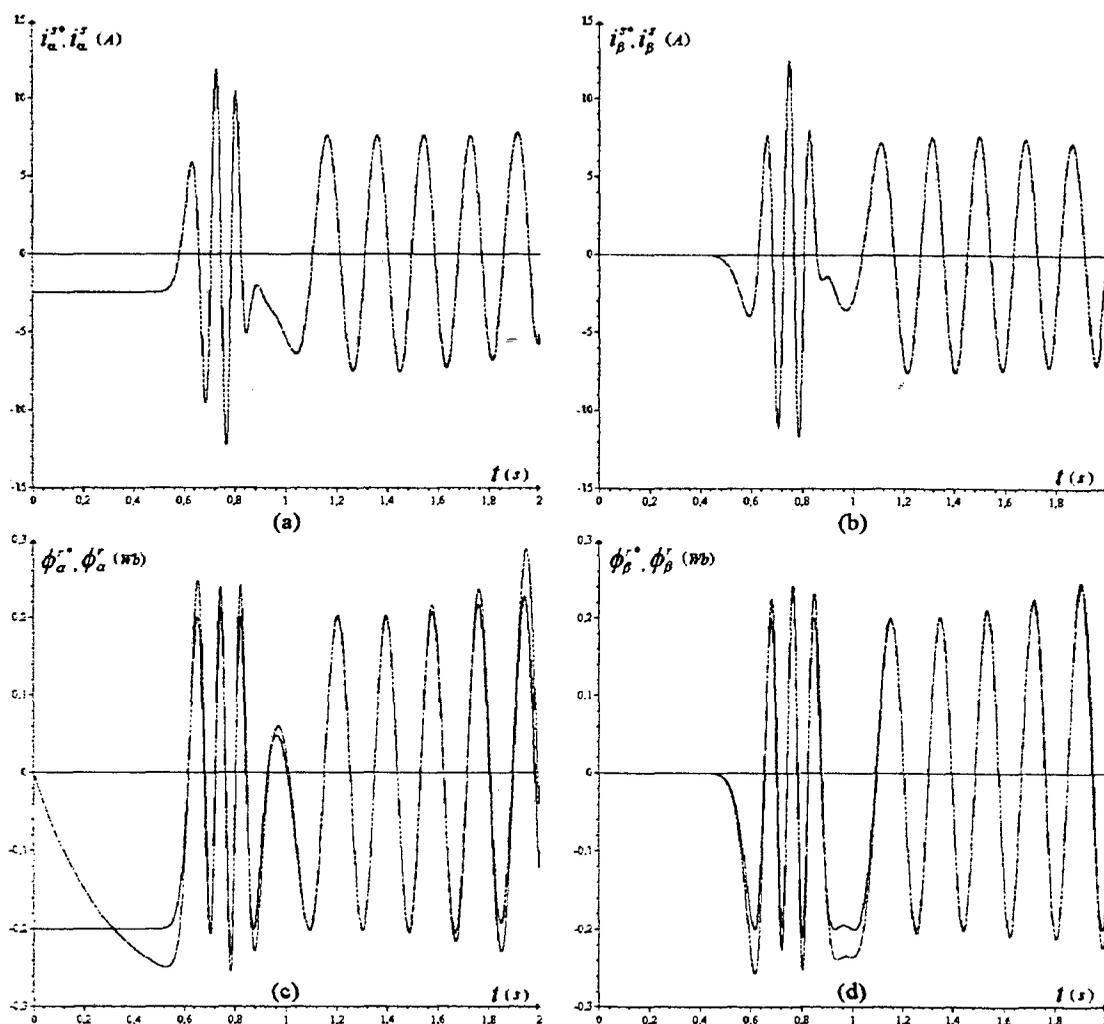


Figura 4.9: Resposta com controlador adaptativo em presença de variações paramétricas (a) Trajetórias de referência e real da corrente de estator de eixo direto. (b) Trajetórias de referência e real da corrente de estator de eixo em quadratura. (c) Trajetórias de referência e real do fluxo de rotor de eixo direto. (d) Trajetórias de referência e real do fluxo de rotor de eixo em quadratura.

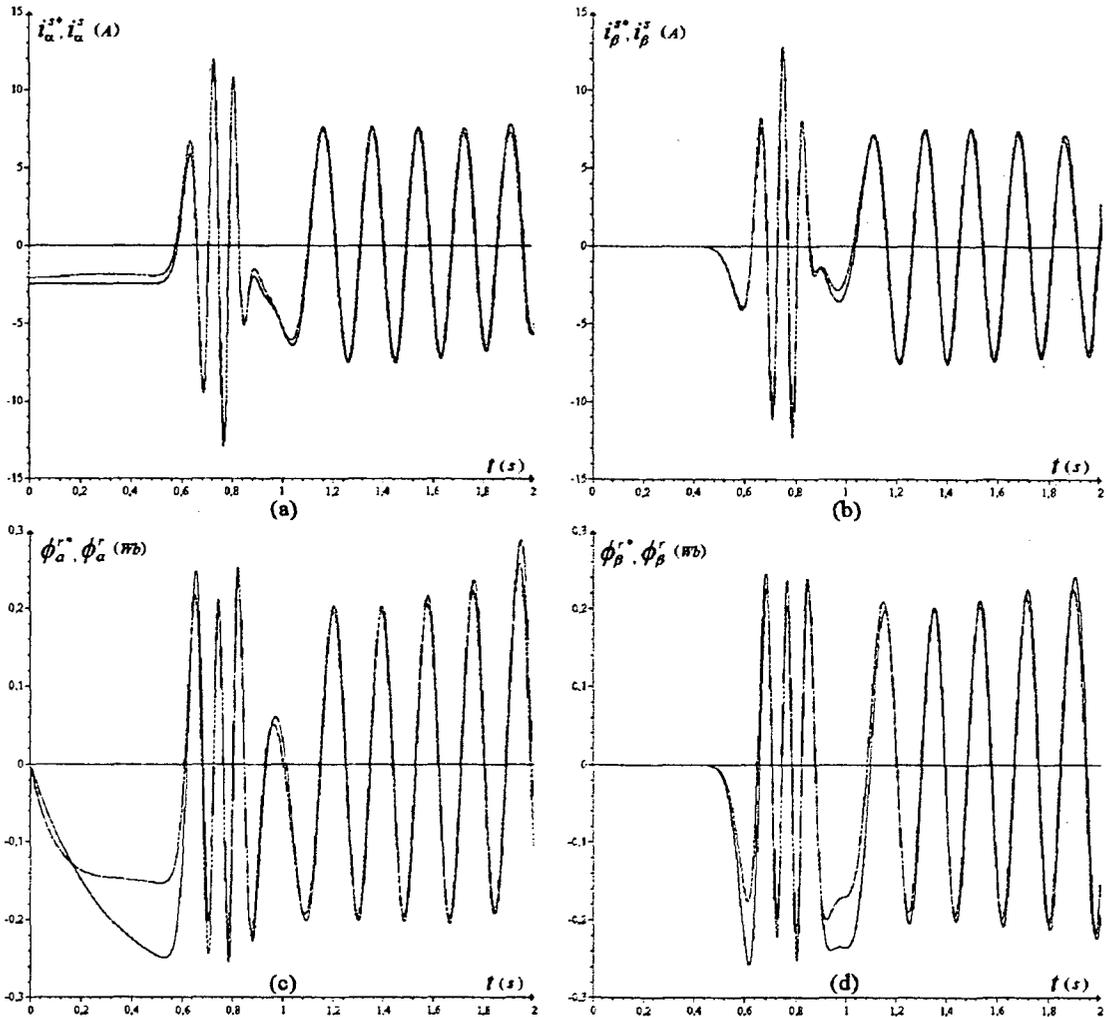


Figura 4.10: Resposta com controlador adaptativo em presença de variações paramétricas (a) Trajetórias real e observada da corrente de estator de eixo direto. (b) Trajetórias real e observada da corrente de estator de eixo em quadratura. (c) Trajetórias real e observada do fluxo de rotor de eixo direto. (d) Trajetórias real e observada do fluxo de rotor de eixo em quadratura.

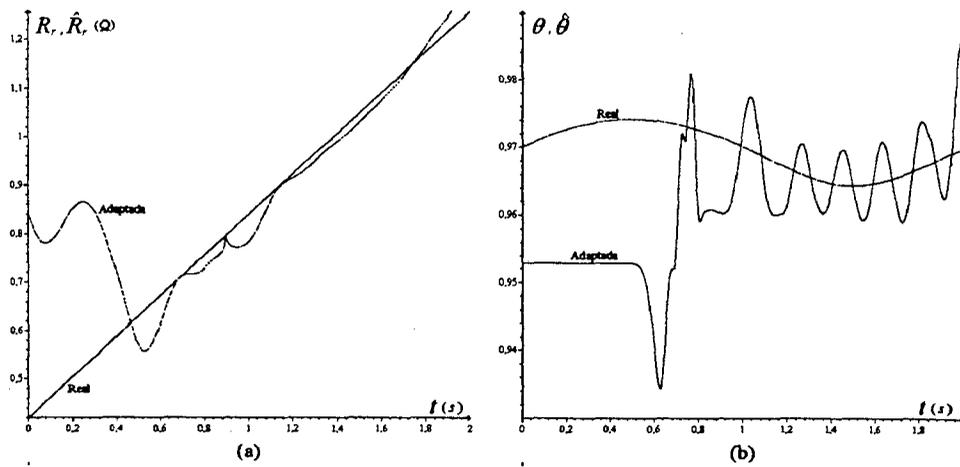


Figura 4.11: Controle em seguimento de posição (a) Trajetórias real e adaptada da resistência de rotor. (b) Trajetórias real e adaptada de θ .

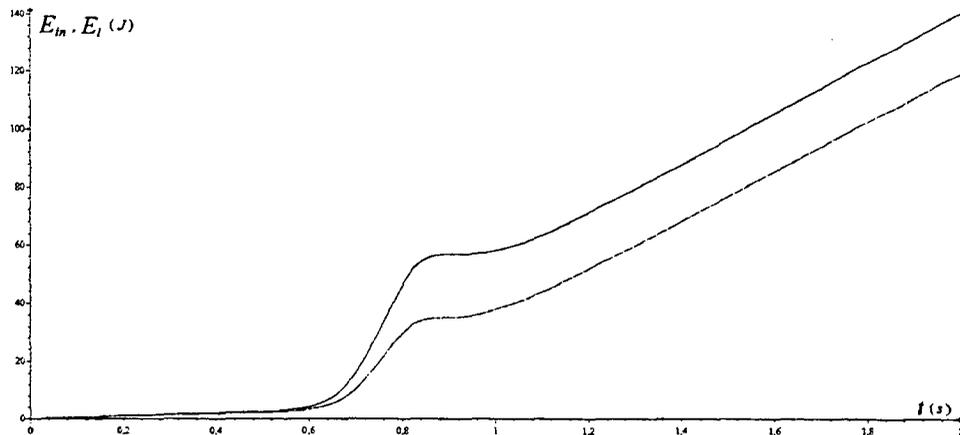


Figura 4.12: Consumo de energia e perdas com controlador adaptativo em seguimento de posição.

parâmetros não interferiu no desempenho do consumo de energia e perdas.

As Figuras 4.13, 4.14 e 4.15 servem para a análise do controle em seguimento de referência de velocidade.

Primeiramente, a Figura 4.13 mostra o desempenho do controlador nominal. A Figura 4.13 (a) mostra o seguimento a referência de velocidade e a Figura 4.13 (b) o seguimento a referência de torque.

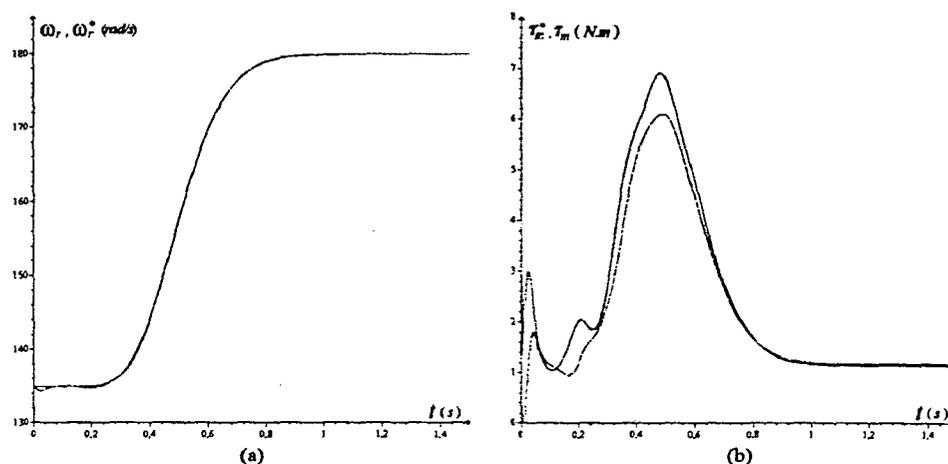


Figura 4.13: Resposta com controlador nominal em presença de variações paramétricas - (a) Trajetórias de referência e real da velocidade. (b) Trajetórias de referência e real do torque.

Verifica-se que a ocorrência de variações paramétricas severas pouco afeta o desempenho no controle de velocidade. É verdade que o seguimento à referência de torque não é perfeito mas isso não chega a afetar o desempenho no seguimento a trajetória de velocidade.

As Figuras 4.14 (a) e (b) mostram, respectivamente, o seguimento à referência de velocidade e o seguimento à referência de torque obtidos com o controlador adaptativo.

Pode ser visto que o seguimento à trajetória de torque é melhor do que o obtido sem adaptação paramétrica (Figura 4.13 (b)). O seguimento a trajetória de velocidade é praticamente perfeito.

Para finalizar a análise, uma comparação entre a Figura 4.15 e a Figura 3.13 mostra que, também no controle de velocidade, o procedimento de adaptação não afetou o consumo de

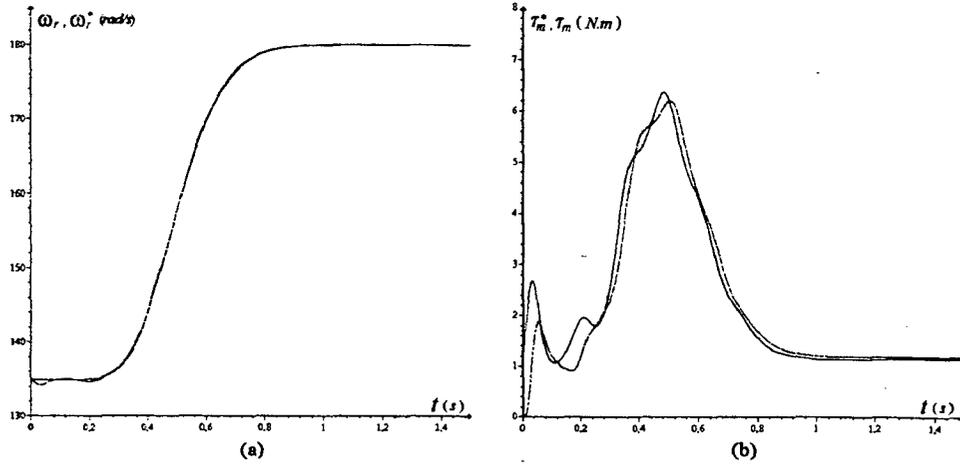


Figura 4.14: Resposta com controlador adaptativo em presença de variações paramétricas - (a) Trajetórias de referência e real da velocidade. (b) Trajetórias de referência e real do torque.

energia e perdas do controlador em seguimento de torque com minimização de energia.

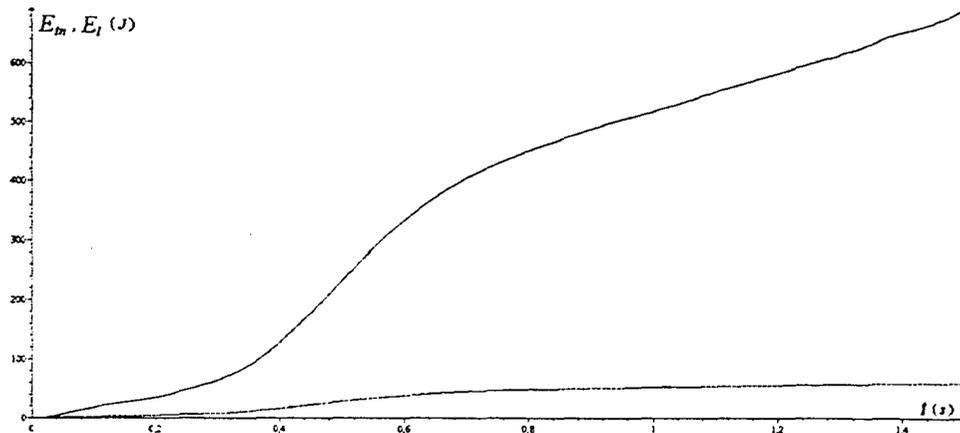


Figura 4.15: Consumo de energia e perdas com controlador adaptativo em seguimento de velocidade.

4.4 Conclusão

Este capítulo apresentou um procedimento para a adaptação de parâmetros elétricos no controle em seguimento de torque do motor de indução. Sabe-se que a resistência dos enrolamentos e as indutâncias próprias e mútuas sofrem variações em torno de seus valores nominais, principalmente em função de alterações de temperatura, frequência e saturação magnética. Assim, com o objetivo de verificar os efeitos das variações paramétricas no desempenho do controlador nominal, foi feita uma série de simulações. Foram consideradas variações isoladas de todos os parâmetros elétricos do motor. Os resultados mostraram que o controlador nominal apresentado no Capítulo 3 é bastante robusto em relação às variações da resistência de estator e da indutância de estator. Porém, o mesmo não foi verificado em relação às variações da indutância de rotor, da indutância mútua estator-rotor e da resistência de rotor.

Os resultados obtidos das simulações sugerem que não é necessária a adaptação completa dos parâmetros elétricos. Fazer o controlador adaptativo em relação à resistência de rotor, à indutância de rotor e à indutância mútua, ou então, a parâmetros diretamente relacionados a estes, garantiria um bom desempenho mesmo quando da ocorrência de variações paramétricas no motor. A opção adotada foi a de adaptar somente a resistência de estator e a relação entre a indutância mútua estator-rotor e a indutância de rotor.

O procedimento de adaptação dos parâmetros foi baseado em modelos de referência. Para a adaptação da relação de indutâncias utilizou-se um modelo de referência de torque eletromagnético. O torque eletromagnético estimado é obtido a partir de grandezas estatóricas medidas. A adaptação da resistência de rotor é feita com base num modelo de referência de perdas rotóricas. O valor estimado para as perdas rotóricas é obtido a partir dos valores

medidos das tensões e correntes de estator e da velocidade mecânica que é assumida ser medida diretamente ou derivada da medição da posição.

O desempenho do controlador adaptativo foi testado com a variação simultânea de todos os parâmetros elétricos do motor, à exceção da resistência de estator que foi considerada constante. O desempenho obtido para o controle de posição e velocidade foi satisfatório. A adaptação da resistência de estator foi bastante razoável. A adaptação da relação entre a indutância mútua e a indutância de rotor, θ , apresentou um comportamento oscilatório que se reflete na trajetória de posição. Este fato orienta para a necessidade de ser investigado o uso de outra lei de adaptação ou até mesmo outro modelo de referência.

Conclusão Geral

O controle automático do motor de indução é um tema que aglutina diferentes áreas do conhecimento, como a eletrotécnica, a eletrônica de potência e a teoria de controle. As características de baixo custo, elevada robustez e não existência de contatos deslizantes, inerentes ao motor de indução, tornam esta máquina potencialmente atrativa para os acionamentos industriais. Sem sombra de dúvida, estas características têm sido motivadoras para o estudo de novas estratégias de controle, que apresentem alto desempenho dinâmico. Do ponto de vista da teoria do controle, o fato do motor de indução caracterizar-se como um sistema não linear, multivariável, com forte acoplamento entre variáveis e que não permite o acesso às grandezas de rotor também é extremamente atraente, tornando-o um caso de estudo rico para a aplicação de técnicas de controle não linear, da observação de estados, do controle adaptativo, da estimação de parâmetros, do controle robusto, entre outras.

O primeiro passo na implementação de qualquer técnica de controle automático do motor de indução é a escolha da modelagem adequada. Os modelos trifásicos convencionais, onde as grandezas de estator são referidas a um referencial estacionário e as grandezas rotóricas a um referencial girante com a velocidade do rotor, não são adequados para o uso no controle. Nestes modelos as indutâncias mútuas estator-rotor apresentam dependência temporal o que torna a solução das equações dinâmicas uma tarefa complexa. Um passo importantíssimo na modelagem das máquinas CA ocorreu com o estabelecimento da transformação de Park. Embora originalmente válida apenas para a máquina síncrona, foi o ponto de partida para

a formulação de transformações genéricas válidas também para a máquina de indução. Com o uso de transformações adequadas entre sistemas de coordenadas, modelos bifásicos num único referencial podem ser obtidos, eliminando a dependência temporal das indutâncias. Existem diferentes transformações que permitem a passagem da representação trifásica em dois referenciais para uma representação bifásica num referencial único. No Capítulo 1 deste trabalho, foi apresentada uma transformação genérica invariante em potência. A escolha entre as diferentes representações no espaço de estados e os diferentes sistemas de coordenadas depende dos objetivos do estudo.

O estabelecimento da teoria do controle vetorial foi um marco no desenvolvimento dos acionamentos controlados das máquinas CA. O seu advento juntamente com a evolução da microeletrônica e eletrônica de potência permitiram a aplicação dos motores CA em acionamentos com exigência de elevada performance dinâmica. As técnicas mais recentes para o controle do motor de indução, baseadas na teoria do controle não linear são, na verdade, uma evolução do controle vetorial.

As implementações do controle vetorial direto, embora apresentando a vantagem de serem pouco sensíveis às variações paramétricas, praticamente foram abandonadas por requisitarem a instalação de dispositivos sensores de fluxo no interior da máquina o que fragiliza e encarece o acionamento. O desempenho do controle vetorial indireto, por sua vez, é fortemente afetado pelos erros de estimação dos parâmetros do motor, notadamente erros na estimação da constante de tempo rotórica. Por esta razão, têm sido bastante difundida a aplicação da abordagem do controle adaptativo e da estimação recursiva de parâmetros no controle vetorial indireto do motor de indução.

A hipótese do alinhamento entre o fluxo e o referencial síncrono, assumida no controle vetorial, nem sempre é alcançada na operação do motor de indução em razão, principalmente, dos erros na estimação do escorregamento ou na estimação do fluxo. Este fato acarreta

um desempenho insatisfatório do acionamento, principalmente em tarefas que envolvam o controle de posição.

O acionamento a fluxo constante, que é tradicionalmente utilizado no controle vetorial do motor de indução, não é a melhor estratégia de controle quanto se tem em mente a redução das perdas. Foi demonstrado no Capítulo 3, que existem outras estratégias que favorecem a operação do motor com menores perdas como, por exemplo, a minimização da energia magnética.

Na atualidade, técnicas de controle não linear baseadas na realimentação de estados, no controle por modos deslizantes e em propriedades energéticas e dissipativas têm sido propostas para o motor de indução. O Capítulo 3 apresentou uma metodologia baseada no controle não linear em seguimento de torque. A estratégia de controle empregada também busca a minimização da energia magnética do motor, resultando na operação com fluxo variável. Entretanto, quando o fluxo atinge valores limites de mínimo fluxo ou de máximo fluxo o controle muda a estratégia para a operação com fluxo constante, não mais ocorrendo a minimização da energia magnética. Desta forma, quanto maior for o intervalo de operação com fluxo variável melhor será o rendimento do motor. O limite de máximo fluxo visa manter o fluxo dentro de valores que não levem a saturação do material ferromagnético. O limite de mínimo fluxo, por outro lado, serve para evitar a ocorrência de singularidades quando da passagem do torque eletromagnético por zero. Embora as correntes estatóricas sejam medidas diretamente, o controlador baseia-se num observador de ordem completa para os estados elétricos. Esta opção encontra justificativa no fato do controle baseado numa observação completa de estados, com a inclusão das correntes estatóricas, ser menos susceptível aos ruídos de medição. Os resultados de simulação mostram que esta estratégia de controle apresenta um desempenho bastante satisfatório na realização das tarefas mecânicas propostas. O seguimento da trajetória mecânica desejada, seja em posição ou em velocidade, é alcançado com

um bom desempenho dinâmico. Um dos pontos mais significativos é a redução das perdas do motor, quando comparada à estratégia de controlar o motor exclusivamente com fluxo constante. Este fato, claramente ilustrado nos estudos de simulação, mostra que o rendimento do acionamento não depende apenas do projeto do motor e do projeto do conversor mas, também, depende da estratégia de controle empregada.

Apesar do número significativo de publicações que tratam do controle vetorial do motor de indução com as abordagens da adaptação paramétrica e da estimação recursiva de parâmetros, a inclusão das variações paramétricas no controle do motor de indução ainda não encontra-se satisfatoriamente resolvido a nível teórico, fundamentalmente no que diz respeito aos estudos da estabilidade dos controladores. O Capítulo 4 trata da adaptação de parâmetros elétricos no controle não linear em seguimento de torque. Resultados de simulação mostram que o controlador nominal proposto no Capítulo 3 não é robusto em relação às variações da resistência de rotor, da indutância de rotor e da indutância mútua. Assim, um procedimento para a adaptação da resistência de rotor e da relação entre a indutância mútua e a indutância de rotor é proposto. A adaptação da resistência de rotor é feita com base no erro entre a saída de um modelo de referência de perdas rotóricas e o seu valor estimado a partir das medidas da corrente e da tensão de estator e da velocidade mecânica. A adaptação da relação de indutâncias ocorre a partir do erro entre um modelo de referência de torque e o seu valor estimado. O estimador de torque empregado é sensível a erros na resistência de estator para baixas velocidade. Como forma de resolver este problema é sugerida a medição em tempo real da resistência de estator. Os resultados de simulação, com o motor submetido a severas variações paramétricas, mostram um desempenho satisfatório do controlador adaptativo. O procedimento adotado para a adaptação de parâmetros não interferiu nas perdas do motor.

As principais contribuições deste trabalho foram:

- Apresentar um estudo detalhado sobre a modelagem do motor de indução, para objetivos de controle.
- Testar o controle em seguimento de torque com a inclusão de uma estratégia de chaveamento entre a operação com mínima energia magnética e a operação com fluxo constante.
- Propor um procedimento adaptativo para alguns parâmetros elétricos utilizados no controle não linear em seguimento de torque.

Este trabalho deixa como perspectivas de continuidade os seguintes temas, entre outros:

- Estudo de outros critérios para a otimização das trajetórias de referência dos estados;
- Estudo, com grau de profundidade maior, do problema das incertezas paramétricas no controle em seguimento de torque com minimização de energia;
- Implementação e testes, em bancada de ensaios, da metodologia proposta para o controle em seguimento de torque e minimização de energia.
- Estudo comparativo entre o acionamento do motor de indução com a metodologia proposta e outras alternativas de acionadores elétricos.

Bibliografia

- [1] D. J. ATKINSON, P. P. ACARNLEY, and J. W. FINCH. Observers for induction motor state and parameter estimation. *IEEE Trans. on Industry Application*, 27(6):1119–1127, 1991.
- [2] I. BARBI. *Teoria Fundamental do Motor de Indução*. Editora da UFSC, 1985.
- [3] N. S. BEDROSSIAN. Linearizing coordinate transformations and riemann curvature. *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, páginas 80–85, 1992.
- [4] A. BELLINI, A. DE CARLI, G. FIGALLI, G. ULIVI. Design procedure of pwm voltages for induction motor drives. *Proc. of the IFAC World Congress*, volume 3, páginas 367–372, 1987.
- [5] A. BELLINI, G. FIGALLI, G. ULIVI. A microcomputer-based optimal control system to reduce the effects of the parametric variations and speed measurement errors in induction motor drives. *IEEE Trans. on Industry Application*, IA-22(1):42–50, 1986.
- [6] A. BELLINI, G. FIGALLI, G. ULIVI. Analysis and design of a microcomputer-based observer for an induction machine. *Automatica*, 24(4):549–555, 1988.
- [7] R. BELLMAN, S. DREYFUS. *Applied Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.

- [8] F. BLASCHKE. The principle of field orientation as applied to the new transvektor closed-loop control system for rotating-field machines. *Siemens Review*, (5):217–220, 1972.
- [9] F. BLASCHKE. *Das Verfahren der Feldorientierung zur Regelung der Drehfeldmaschine*, (*The method of Field Orientation for Control of Three Phase Machines*). Tese de Doutorado, Technical University of Braunschweig, Braunschweig, Germany, 1974.
- [10] M. BODSON, J. CHIASSON, R. NOVOTNAK. High-performance motion control of an induction motor by input-output linearization. *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, páginas 3386–3390, 1993.
- [11] B. K. BOSE. *Power Electronics and AC Drives*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1986.
- [12] B. K. BOSE. Power electronics and motion control-technology status and recent trends. *IEEE Trans. on Industry Application*, 29(5):902–909, 1993.
- [13] D. S. BRERETON, D. G. LEWIS, C. G. YOUNG. Representation of induction motor loads during power systems stability studies. *AIEE Trans.*, 76:451–461, 1957.
- [14] C. CANUDAS DE WIT, R. ORTEGA, S. I. SELEME JR. Robot motion control using induction motor drives. *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, volume 2, páginas 533–538, 1993.
- [15] C. CANUDAS DE WIT, S. I. SELEME JR. Robust torque regulation for induction motors: The minimum energy approach. *Proc. of the IFAC World Congress*, volume 4, páginas 73–76, 1992.
- [16] C. C. CHAN, W. S. LEUNG, C. W. NG. Adaptive decoupling control of induction motor drives. *IEEE Trans. on Industry Application*, 37(1):41–47, 1990.

- [17] J. CHATELAIN. *Machines Electriques*. Dunod, Paris, 1983.
- [18] J. CHIASSON, A. CHAUDHARI, M. BODSON. Nonlinear controllers for the induction motor. *Proc. of the IFAC Nonlinear Contr. Syst. Design Symp.*, páginas 150–155, 1992.
- [19] P. M. DALTON, V. J. GOSBELL. Flux tracking in induction machines by means of volt-ampere quantities. *IEEE Trans. on Industry Application*, 26(1):137–142, 1990.
- [20] A. DE CARLI. Control strategies for electrical drives. *Proc. of the IFAC World Congress*, volume 8, páginas 183–190, 1990.
- [21] R. W. DE DONCKER, D. W. NOVOTNY. The universal field oriented controller. *IEEE Trans. on Industry Application*, 30(1):92–100, 1994.
- [22] A. DE LUCA, A. ULIVI. Design of an exact nonlinear controller for induction motors. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 34(12):1304–1307, 1989.
- [23] L. C. DE SOUZA MARQUES, S. I. SELEME JR. Controle do motor de indução em seguimento de torque com incertezas paramétricas - abordagem baseada na energia. *Congresso Brasileiro de Automática*, volume 2, páginas 1113–1118, 1996.
- [24] L. C. DE SOUZA MARQUES, S. I. SELEME JR. Minimum energy torque tracking of induction motors with parameter uncertainty. *World Automation Congress*, 1996.
- [25] M. DEPENBROCK. Direct self-control of inverter-fed induction machine. *IEEE Trans. on Power Electronics*, 3(4):420–429, 1988.
- [26] Y. DOTE. Existence of limit cycle and stabilization of induction motor via new nonlinear observer. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-24(3):421–428, 1979.

- [27] G. ESPINOSA, R. ORTEGA. Nonlinear control of induction motors: An energy based approach. *IV Congreso Latinoamericano de Control Automatico*, volume 2, páginas 531–536, 1990.
- [28] G. ESPINOSA, R. ORTEGA. An output feedback globally stable controller for induction motors. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40(1):138–143, 1995.
- [29] P. FAMOURI, J. J. CATHEY. Loss minimization control of an induction motor drive. *IEEE Trans. on Industry Application*, 27(1):32–37, 1991.
- [30] J. FETZ, K. OBAYASHI. High efficiency induction motor drive with good dynamic performance for electric vehicles. *Proc. of the Power Electronics Specialist Conference*, páginas 921–927, 1993.
- [31] G. FIGALLI, M. LA CAVA, L. TOMASI. An optimal feedback control for a bilinear model of induction motor drives. *Int. Journal of Control*, 39(5):1007–1016, 1984.
- [32] G. FIGALLI, M. LA CAVA, L. TOMASI. Feedback control for the discrete non-linear model of induction motor drives. *Int. Journal of Systems Science*, 21(9):1741–1754, 1990.
- [33] L. GARCES. Parameter adaptation for the speed controlled static ac with squirrel cage induction motor. *Conf. Rec. of the IEEE-IAS Annual Meeting*, páginas 843–850, 1979.
- [34] G. GEORGIU. Adaptive feedback linearisation and tracking for induction motors. *Proc. of the IFAC Workshop on Evaluation of Adaptive Contr. Strategies in Ind. Appl.*, páginas 255–260, 1989. Pergamon Press.
- [35] H. GOLDSTEIN. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Co., 1980. Second Edition.

- [36] H. GOLDSTEIN. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Co., 1980. Second Edition.
- [37] W. HAHN. *Theory and Application of Liapunov's Direct Method*. Prentice-Hall Inc., 1963.
- [38] K. HASSE. *Zur Dynamic Drezahlgeregelter Antriebe mit Stromrichtergespeisten Asynchronkurzschlußläufermaschinen, (On the Dynamics of Speed Control of Static AC Drives with Squirrel-Cage Induction Machines)*. Tese de Doutorado, Technical University of Darmstadt, Darmstadt, Germany, 1969.
- [39] E. Y. Y. HO, P. C. SEN. Decoupling control of induction motor drives. *IEEE Trans. on Industry Application*, 35(2):253–262, 1988.
- [40] J. HOLTZ, T. THIMM. Identification of the machine parameters in a vector-controlled induction motor drive. *IEEE Trans. on Industry Application*, 27(6):1111–1118, 1991.
- [41] Y. HORI, T. UMENO. Robust flux observer based field orientation (fofo) controller. *Proc. of the IFAC World Congress*, páginas 197–202, 1989.
- [42] M. ISHIDA, K. IWATA. A new slip frequency detector of an induction motor utilizing rotor slot harmonics. *IEEE Trans. on Industry Application*, IA-20(3):575–582, 1984.
- [43] P. L. JANSEN, R. D. LORENZ. A physically insightful approach to the design and accuracy assessment of flux observers for field oriented induction machine drives. *IEEE Trans. on Industry Application*, 30(1):101–110, 1994.
- [44] P. L. JANSEN, R. D. LORENZ, D. W. NOVOTNY. Observer-based direct field orientation: Analysis and comparison of alternative methods. *IEEE Trans. on Industry Application*, 30(4):945–953, 1994.

- [45] I. KANELLAKOPOULOS, P. T. FREIN, F. DISILVESTRO. Nonlinear flux-observer-based control of induction motors. *Proc. of the American Control Conference*, volume 2, páginas 1700–1704, 1992.
- [46] H. K. KHALIL. *Nonlinear Systems*. Mc Millan Pub., 1992.
- [47] D.-I. KIM, I. HA, M. KO. Control of induction motors via feedback linearization with input-output decoupling. *Int. Journal of Control*, 51(4):863–883, 1990.
- [48] D. S. KIRSCHEN, D. W. NOVOTNY, T. A. LIPO. On-line efficiency optimization of a variable frequency induction motor drive. *IEEE Trans. on Industry Application*, IA-21(4):610–616, 1985.
- [49] D. S. KIRSCHEN, D. W. NOVOTNY, T. A. LIPO. Optimal efficiency control of an induction motor drive. *Trans. on Energy Conversion*, EC-2(1):70–76, 1987.
- [50] D. S. KIRSCHEN, D. W. NOVOTNY, W. SUWANWISOOT. Minimizing induction motor losses by excitation control in variable frequency drives. *IEEE Trans. on Industry Application*, IA-20(5):1244–1250, 1984.
- [51] P. C. KRAUSE. *Analysis of Electric Machinery*. Mc Graw Hill Inc., 1986.
- [52] P. C. KRAUSE, C. H. THOMAS. Simulation of symmetrical induction machinery. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, 84:1038–1053, 1965.
- [53] L. KREINDLER, J. C. MOREIRA, A. TESTA, T. A. LIPO. Direct field orientation controller using the stator phase voltage third harmonic. *IEEE Trans. on Industry Application*, 30(2):441–447, 1994.
- [54] R. KRISHNAN, A. S. BHARADWA. A review of parameter sensitivity and adaptation in indirect vector controlled induction motor drive systems. *Proc. of the Power Electronics Specialist Conference*, páginas 560–566, 1990.

- [55] R. KRISHNAN, F. C. DORAN. A method of sensing line voltages for parameter adaptation of inverter-fed induction motor servo drives. *IEEE Trans. on Industry Application*, 23(4):617–622, 1987.
- [56] R. KRISHNAN, F. C. DORAN. Study of parameter sensitivity in high performance inverter-fed induction motor drive systems. *IEEE Trans. on Industry Application*, 23(4):623–635, 1987.
- [57] R. KRISHNAN, F. C. DORAN, T. S. LATOS. Identification of thermally safe load cycles for an induction motor position servo. *IEEE Trans. on Industry Application*, 23(4):636–643, 1987.
- [58] G. KRON. *Equivalent Circuits of Electric Machinery*. John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y., 1951.
- [59] Z. KRZEMINSKI. Nonlinear control of induction motor. *Proc. of the IFAC World Congress*, volume 3, páginas 349–354, 1987.
- [60] H. KUBOTA, K. MATSUSE. Speed sensorless field-oriented control of induction motor with rotor resistance adaptation. *IEEE Trans. on Industry Application*, 30(5):1219–1224, 1994.
- [61] A. KUSKO, D. GALLER. Control means for minimisation of losses in ac and dc motor drives. *IEEE Trans. on Industry Application*, IA-19(4):561–570, 1983.
- [62] W. LEONHARD. *Control of Electric Drives*. Springer-Verlag, 1985.
- [63] W. LEONHARD. Microcomputer control of high-performance dynamic ac drives: A survey. *Automatica*, 22(1):1–19, 1986.

- [64] W. LEONHARD. 30 years space vectors, 20 years field orientation, 10 years digital signal processing with controlled ac-drives, a review (part 1). *EPE Journal*, 1(1):14–20, 1991.
- [65] W. LEONHARD. 30 years space vectors, 20 years field orientation, 10 years digital signal processing with controlled ac-drives, a review (part 2). *EPE Journal*, 1(2):93–101, 1991.
- [66] W. LEONHARD. Controlled ac drives, a successful transfer from ideas to industrial practice. *Workshop on Control Education and Technology Transfer Issues*, páginas 195–206, 1995.
- [67] R. LESSMEIER, W. SCHUMACHER, W. LEONHARD. Microprocessor-controlled ac-servo drives with synchronous or induction motors: Which is preferable? *IEEE Trans. on Industry Application*, IA-22(5):812–819, 1986.
- [68] T. A. LIPO, K. C. CHANG. A new approach to flux and torque-sensing in induction machines. *IEEE Trans. on Industry Application*, IA-22(4):731–737, 1986.
- [69] X. Z. LIU, G. C. VERGHESE, J. H. LANG, M. K. ÖNDER. Generalizing the Blondel-park transformation of electrical machines: Necessary and sufficient conditions. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 36(8):1058–1067, 1989.
- [70] R. D. LORENZ, D. B. LAWSON. Performance feedforward current regulators for field oriented induction machine controllers. *IEEE Trans. on Industry Application*, 23:597–602, 1987.
- [71] R. D. LORENZ, D. B. LAWSON. A simplified approach to continuous on-line tuning of field-oriented induction machine drives. *IEEE Trans. on Industry Application*, 26(3):420–424, 1990.

- [72] R. D. LORENZ, S. YANG. Ac induction servo sizing for motion control applications via loss minimizing real-time flux control. *IEEE Trans. on Industry Application*, 28(3):589–593, 1992.
- [73] R. D. LORENZ, S. YANG. Efficiency-optimized flux trajectories for closed-cycle operation of field-orientation induction machine drives. *IEEE Trans. on Industry Application*, 28(3):574–580, 1992.
- [74] R. MARINO, S. PERESADA, P. VALIGI. Adaptive input-output linearizing control of induction motors. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 38(2):208–221, 1993.
- [75] T. MATSUO, T. A. LIPO. A rotor parameter identification scheme for vector-controlled induction motor drives. *IEEE Trans. on Industry Application*, IA-21(4):624–632, 1985.
- [76] K. B. NORDIN, D. W. NOVOTNY, D. S. ZINGER. The influence of motor parameter deviations in feedforward field orientation drive system. *IEEE Trans. on Industry Application*, IA-21(5):1009–1015, 1985.
- [77] R. ORTEGA, C. CANUDAS DE WIT, S. I. SELEME JR. Nonlinear control of induction motors: Torque tracking with unknown load disturbance. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 38(11):1675–1680, 1993.
- [78] R. ORTEGA, G. ESPINOSA. Torque regulation of induction motors. *Automatica*, 29(3):621–633, 1993.
- [79] R. H. PARK. Two-reaction theory of synchronous machines - generalized method of analysis - part i. *AIEE Trans.*, 48:716–727.
- [80] M. PIETRIAZAK-DAVID, B. DE FORNEL, A. M. N. LIMA, K. JELASSI. Digital control of an induction motor drive by a stochastic estimator and airgap magnetic flux feedback loop. *IEEE Trans. on Power Electronics*, 7(2):393–403, 1992.

- [81] F. PROFUMO, G. GRIVA, M. PASTORELLI, J. C. MOREIRA, R. DE DONCKER. Universal field oriented controller based on air gap flux sensing via third harmonic stator voltage. *IEEE Trans. on Industry Application*, 30(2):448–455, 1994.
- [82] A. SABANAVIC, F. BILALOVIC. Sliding mode control of ac drives. *IEEE Trans. on Industry Application*, 25(1):70–75, 1989.
- [83] S. I. SELEME JR. *Commande à Énergie Minimale de la Machine Asynchrone : Application à la Robotique*. Tese de Doutorado, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, 1994.
- [84] S. I. SELEME JR. Optimal energy reference observer-based torque tracking: A nonlinear feedback control in the $\alpha\beta$ frame. *Proc. of the IEEE/SMC'95 Conference*, volume 5, páginas 4446–4451, 1995.
- [85] S. I. SELEME JR., M. PETERSSON, C. CANUDAS DE WIT. The torque tracking of induction motors via magnetic energy optimization. *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, páginas 1838–1843, 1994.
- [86] H. C. STANLEY. An analysis of the induction motor. *AIEE Trans.*, 57:751–755, 1938.
- [87] V. I. UTKIN. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 22(2):212–222, 1987.
- [88] G. C. VERGHESE, S. R. SANDERS. Observers for flux estimation in induction machines. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 35(1):85–94, 1988.
- [89] X. XU, D. W. NOVOTNY. Selection of the flux reference for induction machines in the field oriented drives. *IEEE Trans. on Industry Application*, 28(6):1353–1358, 1992.

Apêndice A

Casos Particulares da Transformação Trifásico-Bifásica

A.1 Transformação do Sistema de Coordenadas Trifásico para o Sistema de Coordenadas que Gira com o Rotor (*ab*)

No sistema de coordenadas que gira com o rotor, o referencial bifásico tem a velocidade do rotor. Isto significa que a velocidade genérica do referencial, ω , assume o valor particular da velocidade do rotor ω_r . Para a transformação das grandezas estatóricas, admitindo-se $\varphi_0 = 0$, o ângulo φ particulariza-se para $\varphi_r = \int v\omega_r dt$. Assim, a transformação fica com a seguinte forma

$$\mathbf{K}_{ab}^s = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \varphi_r & \cos \left(\varphi_r - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\varphi_r + \frac{2\pi}{3} \right) \\ -\sin \varphi_r & -\sin \left(\varphi_r - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left(\varphi_r + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Portanto, as variáveis nos dois sistemas de coordenadas relacionam-se por

$$\mathbf{I}_{ab}^s = \mathbf{K}_{ab}^s \mathbf{I}_s \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{V}_{ab}^s = \mathbf{K}_{ab}^s \mathbf{V}_s \quad (\text{A.3})$$

$$\phi_{ab}^s = \mathbf{K}_{ab}^s \phi_s \quad (\text{A.4})$$

com

$$\mathbf{I}_{ab}^s = [i_a^s \ i_b^s \ i_0^s]^T \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{V}_{ab}^s = [v_a^s \ v_b^s \ v_0^s]^T \quad (\text{A.6})$$

$$\phi_{ab}^s = [\phi_a^s \ \phi_b^s \ \phi_0^s]^T \quad (\text{A.7})$$

$$\phi_s = [\phi_{s1} \ \phi_{s2} \ \phi_{s3}^t]^T \quad (\text{A.8})$$

e, \mathbf{I}_s e \mathbf{V}_s definidos de acordo com (1.4) e (1.3), respectivamente. Para as grandezas rotóricas, resulta $\varphi = 0$. Desta forma, a transformação fica

$$\mathbf{K}_{ab}^r = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

As relações entre as variáveis são

$$\mathbf{I}_{ab}^r = \mathbf{K}_{ab}^r \mathbf{I}_r \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{V}_{ab}^r = \mathbf{K}_{ab}^r \mathbf{V}_r \quad (\text{A.11})$$

$$\phi_{ab}^r = \mathbf{K}_{ab}^r \phi_r \quad (\text{A.12})$$

onde,

$$\mathbf{I}_{ab}^r = [i_a^r \ i_b^r \ i_0^r]^T \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{V}_{ab}^r = [v_a^r \ v_b^r \ v_0^r]^T \quad (\text{A.14})$$

$$\phi_{ab}^r = [\phi_a^r \ \phi_b^r \ \phi_0^r]^T \quad (\text{A.15})$$

$$\phi_r = [\phi_{r1} \ \phi_{r2} \ \phi_{r3}]^T \quad (\text{A.16})$$

e \mathbf{I}_r e \mathbf{V}_r definidos de acordo com (1.4) e (1.3), respectivamente.

A.2 Transformação do Sistema de Coordenadas Trifásico para o Sistema de Coordenadas Estacionário ($\alpha\beta$)

No sistema de coordenadas estacionário, a velocidade angular do referencial bifásico, ω , é nula. Assim, com $\varphi_0 = 0$, resulta que $\varphi = 0$ na transformação das variáveis do estator.

Desse modo, a transformação assume a forma

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta}^s = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

As variáveis relacionam-se por

$$\mathbf{I}_{\alpha\beta}^s = \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s \mathbf{I}_s \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{V}_{\alpha\beta}^s = \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s \mathbf{V}_s \quad (\text{A.19})$$

$$\phi_{\alpha\beta}^s = \mathbf{K}_{\alpha\beta}^s \phi_s \quad (\text{A.20})$$

com,

$$\mathbf{I}_{\alpha\beta}^s = [i_\alpha^s \ i_\beta^s \ i_0^s]^T \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{V}_{\alpha\beta}^s = [v_\alpha^s \ v_\beta^s \ v_0^s]^T \quad (\text{A.22})$$

$$\phi_{\alpha\beta}^s = [\phi_\alpha^s \ \phi_\beta^s \ \phi_0^s]^T \quad (\text{A.23})$$

Para a transformação das variáveis rotóricas, o ângulo da posição entre os referenciais, φ , assume o valor $-\varphi_r$. A matriz de transformação fica

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta}^r = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(-\varphi_r) & \cos\left(-\varphi_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(-\varphi_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(-\varphi_r) & -\sin\left(-\varphi_r - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\varphi_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

As relações para as variáveis rotóricas são

$$\mathbf{I}_{\alpha\beta}^r = \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r \mathbf{I}_r \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{V}_{\alpha\beta}^r = \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r \mathbf{V}_r \quad (\text{A.26})$$

$$\phi_{\alpha\beta}^r = \mathbf{K}_{\alpha\beta}^r \phi_r \quad (\text{A.27})$$

onde,

$$\mathbf{I}_{\alpha\beta}^r = [i_\alpha^r \ i_\beta^r \ i_0^r]^T \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{V}_{\alpha\beta}^r = [v_\alpha^r \ v_\beta^r \ v_0^r]^T \quad (\text{A.29})$$

$$\phi_{\alpha\beta}^r = [\phi_\alpha^r \ \phi_\beta^r \ \phi_0^r]^T \quad (\text{A.30})$$

A.3 Transformação do Sistema de Coordenadas Trifásico para o Sistema de Coordenadas Síncrono (dq)

No sistema de coordenadas síncrono o referencial bifásico gira na velocidade do campo síncrono. Portanto, resulta $\omega = \omega_s$, onde ω_s representa a velocidade síncrona mecânica. Na transformação das grandezas estatóricas, com a consideração de que $\varphi_0 = 0$, o ângulo elétrico da posição entre os referenciais, φ , assume o valor $\varphi_s = \int v\omega_s dt$. Portanto, a transformação fica:

$$\mathbf{K}_{dq}^s = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \varphi_s & \cos \left(\varphi_s - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\varphi_s + \frac{2\pi}{3} \right) \\ -\sin \varphi_s & -\sin \left(\varphi_s - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left(\varphi_s + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

As variáveis ficam relacionadas por

$$\mathbf{I}_{dq}^s = \mathbf{K}_{dq}^s \mathbf{I}_s \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbf{V}_{dq}^s = \mathbf{K}_{dq}^s \mathbf{V}_s \quad (\text{A.33})$$

$$\boldsymbol{\phi}_{dq}^s = \mathbf{K}_{dq}^s \boldsymbol{\phi}_s \quad (\text{A.34})$$

com,

$$\mathbf{I}_{dq}^s = [i_d^s \ i_q^s \ i_0^s]^T \quad (\text{A.35})$$

$$\mathbf{V}_{dq}^s = [v_d^s \ v_q^s \ v_0^s]^T \quad (\text{A.36})$$

$$\boldsymbol{\phi}_{dq}^s = [\phi_d^s \ \phi_q^s \ \phi_0^s]^T \quad (\text{A.37})$$

Para as grandezas rotóricas, resulta $\varphi = \int v(\omega_s - \omega_r) dt$, ou seja, $\varphi = \varphi_s - \varphi_r$. Desse modo, a transformação toma a forma

$$\mathbf{K}_{dq}^r = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_s - \varphi_r) & \cos\left[(\varphi_s - \varphi_r) - \frac{2\pi}{3}\right] & \cos\left[(\varphi_s - \varphi_r) + \frac{2\pi}{3}\right] \\ -\sin(\varphi_s - \varphi_r) & -\sin\left[(\varphi_s - \varphi_r) - \frac{2\pi}{3}\right] & -\sin\left[(\varphi_s - \varphi_r) + \frac{2\pi}{3}\right] \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

A transformação entre variáveis rotóricas é dada por

$$\mathbf{I}_{dq}^r = \mathbf{K}_{dq}^r \mathbf{I}_r \quad (\text{A.39})$$

$$\mathbf{V}_{dq}^r = \mathbf{K}_{dq}^r \mathbf{V}_r \quad (\text{A.40})$$

$$\phi_{dq}^r = \mathbf{K}_{dq}^r \phi_r \quad (\text{A.41})$$

com,

$$\mathbf{I}_{dq}^r = [i_d^r \ i_q^r \ i_0^r]^T \quad (\text{A.42})$$

$$\mathbf{V}_{dq}^r = [v_d^r \ v_q^r \ v_0^r]^T \quad (\text{A.43})$$

$$\phi_{dq}^r = [\phi_d^r \ \phi_q^r \ \phi_0^r]^T \quad (\text{A.44})$$

Apêndice B

Transformação entre os Sistemas de Coordenadas Bifásicos

B.1 Transformação entre os Sistemas de Coordenadas Estacionário e que Gira com o Rotor

A Figura B.1 é uma representação dos sistemas de coordenadas estacionário e que gira com o rotor. A posição do sistema de coordenadas que gira com o rotor relativamente ao sistema de coordenadas estacionário é $\theta_r = \int v\omega_r dt + \theta_{r_0}$, onde θ_{r_0} representa a posição inicial entre os dois sistemas. As relações entre as coordenadas nos dois referenciais são:

$$f_\alpha = f_a \cos \theta_r - f_b \sin \theta_r, \quad (\text{B.1})$$

$$f_\beta = f_a \sin \theta_r + f_b \cos \theta_r, \quad (\text{B.2})$$

$$f_0^{\alpha\beta} = f_0^{ab}. \quad (\text{B.3})$$

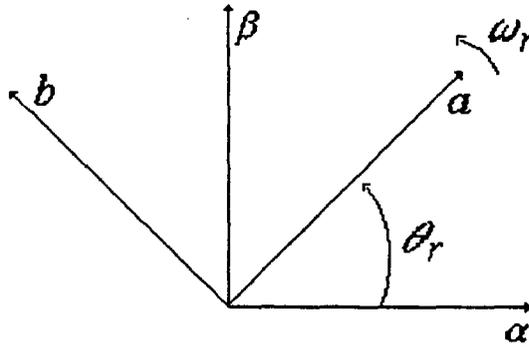


Figura B.1: Representação dos sistemas de coordenadas estacionário ($\alpha\beta$) e que gira com o rotor (ab)

Usando uma representação matricial compacta, a relação entre as variáveis nos dois sistemas de representação fica

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta} = \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{ab}} \mathbf{F}_{\text{ab}} \quad (\text{B.4})$$

onde:

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} f_\alpha & f_\beta & f_0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.5})$$

é o vetor de variáveis genéricas no sistema de coordenadas estacionário,

$$\mathbf{F}_{\text{ab}} = \begin{bmatrix} f_a & f_b & f_0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.6})$$

é o vetor de variáveis genéricas no sistema de coordenadas que gira com o rotor e

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{ab}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r & -\sin \theta_r & 0 \\ \sin \theta_r & \cos \theta_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

representa a matriz de rotação do sistema de coordenadas que gira com o rotor para o sistema de coordenadas estacionário. A transformação inversa é dada por:

$$(\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{ab}})^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \sin \theta_r & 0 \\ -\sin \theta_r & \cos \theta_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Assim,

$$\mathbf{F}_{\text{ab}} = (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{\text{ab}})^{-1} \mathbf{F}_{\alpha\beta} \quad (\text{B.9})$$

B.2 Transformação entre os Sistemas de Coordenadas Estacionário e Síncrono

A Figura B.2 mostra uma representação dos sistemas de coordenadas síncrono e estacionário. O sistema de coordenadas síncrono tem velocidade angular ω_s relativamente ao sistema de coordenadas estacionário. A posição angular entre os dois sistemas de coordenadas é $\theta_s = \int v \omega_s dt + \theta_{s0}$, com θ_{s0} representando a posição inicial entre eles. A relação entre

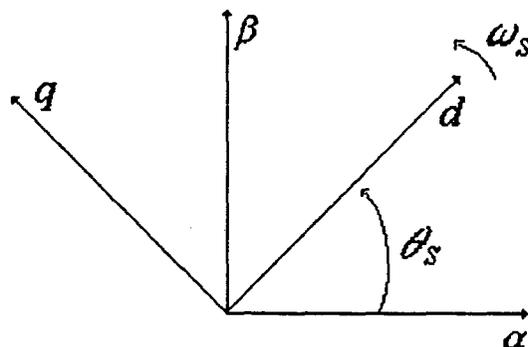


Figura B.2: Representação dos sistemas de coordenadas estacionário ($\alpha\beta$) e síncrono (dq)

as variáveis nos dois sistemas de coordenadas fica:

$$f_{\alpha} = f_d \cos \theta_s - f_q \sin \theta_s \quad (\text{B.10})$$

$$f_{\beta} = f_d \sin \theta_s + f_q \cos \theta_s \quad (\text{B.11})$$

$$f_0^{\alpha\beta} = f_0^{dq} \quad (\text{B.12})$$

Desta forma,

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta} = \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq} \mathbf{F}_{dq} \quad (\text{B.13})$$

onde:

$$\mathbf{F}_{dq} = \begin{bmatrix} f_d & f_q & f_0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.14})$$

representa o vetor de variáveis genéricas no sistema de coordenadas síncrono e a matriz de rotação do sistema de coordenadas síncrono para o sistema de coordenadas estacionário é

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq} = \begin{bmatrix} \cos \theta_s & -\sin \theta_s & 0 \\ \sin \theta_s & \cos \theta_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

A matriz de transformação inversa fica:

$$\left(\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_s & \sin \theta_s & 0 \\ -\sin \theta_s & \cos \theta_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Assim, a transformação das variáveis do sistema de coordenadas estacionário para o sistema de coordenadas síncrono, é dada por

$$\mathbf{F}_{dq} = \left(\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{dq} \right)^{-1} \mathbf{F}_{\alpha\beta} \quad (\text{B.17})$$

B.3 Transformação entre os Sistemas de Coordenadas Síncrono e que Gira com o Rotor

A Figura B.3 mostra uma representação dos sistemas de coordenadas síncrono e que gira na velocidade do rotor. A velocidade angular mecânica de escorregamento é ω_{sl} , ou seja, a velocidade relativa entre os sistemas de coordenadas síncrono e o que gira com o rotor. A posição angular entre os dois sistemas de coordenadas é dada por $\theta_{sl} = \int v\omega_{sl}dt + \theta_{sl_0}$, onde θ_{sl_0} representa a posição inicial. A relação entre as variáveis nos dois sistemas é :

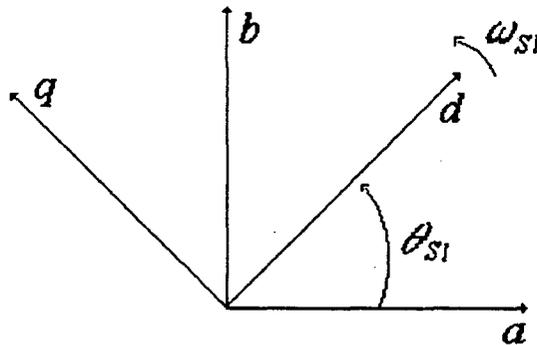


Figura B.3: Representação dos sistemas de coordenadas síncrono (dq) e que gira com o rotor (ab)

$$f_a = f_d \cos \theta_{sl} - f_q \sin \theta_{sl} \quad (\text{B.18})$$

$$f_b = f_d \sin \theta_{sl} + f_q \cos \theta_{sl} \quad (\text{B.19})$$

$$f_0^{ab} = f_0^{dq} \quad (\text{B.20})$$

Assim,

$$\mathbf{F}_{ab} = \mathbf{K}_{ab}^{dq} \mathbf{F}_{dq} \quad (\text{B.21})$$

onde,

$$\mathbf{K}_{ab}^{dq} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{sl} & -\sin \theta_{sl} & 0 \\ \sin \theta_{sl} & \cos \theta_{sl} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

representa a matriz de rotação do sistema de coordenadas síncrono para o sistema de coordenadas que gira com o rotor. A transformação inversa é:

$$(\mathbf{K}_{ab}^{dq})^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{sl} & \sin \theta_{sl} & 0 \\ -\sin \theta_{sl} & \cos \theta_{sl} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

Portanto,

$$\mathbf{F}_{dq} = (\mathbf{K}_{ab}^{dq})^{-1} \mathbf{F}_{ab} \quad (\text{B.24})$$

Apêndice C

Modelo do Motor de Indução no Sistema de Coordenadas que Gira com o Rotor

Este modelo pode ser obtido pela aplicação da transformação que rotaciona o sistema de coordenadas síncrono para o sistema de coordenadas que gira com o rotor, \mathbf{K}_{ab}^{dq} , às equações (1.86), (1.87), (1.88) e (1.89).

Para a equação de tensões, resulta:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ab}^{dq} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{ab}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{dq}^s \\ \mathbf{V}_{dq}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ab}^{dq} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{ab}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{ab}^{dq})^{-1} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & (\mathbf{K}_{ab}^{dq})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ab}^s \\ \mathbf{I}_{ab}^r \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ab}^{dq} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{ab}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{dq}^s \\ \dot{\phi}_{dq}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ab}^{dq} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{ab}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_q^s v \omega_s \\ \phi_d^s v \omega_s \\ -\phi_q^r v (\omega_s - \omega_r) \\ \phi_d^r v (\omega_s - \omega_r) \end{bmatrix}$$

Uma vez que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ab}^{dq} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{ab}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{dq}^s \\ \mathbf{V}_{dq}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{ab}^s \\ \mathbf{V}_{ab}^r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ab}^{dq} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{ab}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{ab}^{dq})^{-1} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & (\mathbf{K}_{ab}^{dq})^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ab}^{dq} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{ab}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{dq}^s \\ \dot{\phi}_{dq}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{ab}^s \\ \dot{\phi}_{ab}^r \end{bmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ab}^{dq} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{ab}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{dq}^s \\ \phi_{dq}^r \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ab}^{dq} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{ab}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{dq}^s \\ \phi_{dq}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\cos(\theta_{sl})\phi_q^s + \sin(\theta_{sl})\phi_d^s]v(\omega_s - \omega_r) \\ [-\sin(\theta_{sl})\phi_q^s + \cos(\theta_{sl})\phi_d^s]v(\omega_s - \omega_r) \\ -[\cos(\theta_{sl})\phi_q^r + \sin(\theta_{sl})\phi_d^r]v(\omega_s - \omega_r) \\ [-\sin(\theta_{sl})\phi_q^r + \cos(\theta_{sl})\phi_d^r]v(\omega_s - \omega_r) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ab}^{dq} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{ab}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_q^s v \omega_s \\ \phi_d^s v \omega_s \\ -\phi_q^r v (\omega_s - \omega_r) \\ \phi_d^r v (\omega_s - \omega_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\cos(\theta_{sl})\phi_q^s + \sin(\theta_{sl})\phi_d^s]v\omega_s \\ [-\sin(\theta_{sl})\phi_q^s + \cos(\theta_{sl})\phi_d^s]v\omega_s \\ -[\cos(\theta_{sl})\phi_q^r + \sin(\theta_{sl})\phi_d^r]v(\omega_s - \omega_r) \\ [-\sin(\theta_{sl})\phi_q^r + \cos(\theta_{sl})\phi_d^r]v(\omega_s - \omega_r) \end{bmatrix}$$

a equação de tensões no sistema de coordenadas que gira com o rotor fica

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{ab}^s \\ \mathbf{V}_{ab}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ab}^s \\ \mathbf{I}_{ab}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{ab}^s \\ \dot{\phi}_{ab}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\phi_b^s v \omega_r \\ \phi_a^s v \omega_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

A equação de fluxos, é obtida por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ab}^{dq} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{ab}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{dq}^s \\ \phi_{dq}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ab}^{dq} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{ab}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{sr} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{ab}^{dq})^{-1} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & (\mathbf{K}_{ab}^{dq})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ab}^s \\ \mathbf{I}_{ab}^r \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ab}^{dq} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{ab}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{dq}^s \\ \phi_{dq}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{ab}^s \\ \phi_{ab}^r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ab}^{dq} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{K}_{ab}^{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{sr} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{ab}^{dq})^{-1} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & (\mathbf{K}_{ab}^{dq})^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{sr} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix}$$

tira-se que

$$\begin{bmatrix} \phi_{ab}^s \\ \phi_{ab}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{sr} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ab}^s \\ \mathbf{I}_{ab}^r \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Assim, para a derivada temporal dos fluxos, vem

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_{ab}^s \\ \dot{\phi}_{ab}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & L_{sr} \\ L_{sr} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{ab}^s \\ \dot{i}_{ab}^r \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

A equação mecânica é obtida por

$$vL_{sr} (\mathbf{I}_{ab}^s)^T \mathbf{K}_{ab}^{dq} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{K}_{ab}^{dq})^T \mathbf{I}_{ab}^r = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c \quad (\text{C.5})$$

Uma vez que

$$\mathbf{K}_{ab}^{dq} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{K}_{ab}^{dq})^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a equação mecânica do sistema no referencial que gira com o rotor fica

$$vL_{sr} (i_b^s i_a^r - i_a^s i_b^r) = b\omega_r + J\dot{\omega}_r + \tau_c \quad (\text{C.6})$$

Assim, o conjunto das equações (C.1), (C.3), (C.4) e (C.6) representa o modelo dinâmico do motor de indução, no sistema de coordenadas que gira com o rotor, para alimentação equilibrada.

Apêndice D

Modelos de Estado no Sistema de Coordenadas Síncrono

Representação em Correntes Estatóricas e Fluxos Rotóricos

Nesta representação, o vetor de estados é :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_d^s & i_q^s & \phi_d^r & \phi_q^r \end{bmatrix}^T$$

Com o uso da transformação entre o referencial estacionário e o referencial síncrono, aplicada às equações (1.111) e (1.112), o modelo é estabelecido como segue :

Modelo de Estado do Sistema Elétrico

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_d^s \\ \dot{i}_q^s \\ \dot{\phi}_d^r \\ \dot{\phi}_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & v\omega_s & \frac{K}{T_r} & v\omega_r K \\ -v\omega_s & -\gamma & -v\omega_r K & \frac{K}{T_r} \\ \frac{L_{sr}}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & v(\omega_s - \omega_r) \\ 0 & \frac{L_{sr}}{T_r} & -v(\omega_s - \omega_r) & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ \phi_d^r \\ \phi_q^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d^s \\ v_q^s \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

Modelo de Estado do Sistema Mecânico

$$\dot{\omega}_r = \frac{vL_{sr}}{JL_r} (i_q^s \phi_d^r - i_d^s \phi_q^r) - \frac{b}{J} \omega_r - \frac{\tau_c}{J}. \quad (D.2)$$

Os modelos abaixo também são empregados:

Representação de Estado em Correntes Estatóricas e Fluxos Estatóricos

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ \phi_d^s \\ \phi_q^s \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sigma L_s & 0 & \frac{L_{sr}}{L_r} & 0 \\ 0 & \sigma L_s & 0 & \frac{L_{sr}}{L_r} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{L_{sr}^2 - L_s L_r}{L_{sr}} & 0 & \frac{L_r}{L_{sr}} & 0 \\ 0 & \frac{L_{sr}^2 - L_s L_r}{L_{sr}} & 0 & \frac{L_r}{L_{sr}} \end{bmatrix}; \mathbf{T}_i \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (D.3)$$

$$\mathbf{T}_i \mathbf{A}(\omega_r) \mathbf{T}_i^{-1} = \begin{bmatrix} -(\alpha + \beta) & v(\omega_s - \omega_r) & \frac{\beta}{L_s} & \frac{v\omega_r}{\sigma L_s} \\ -v(\omega_s - \omega_r) & -(\alpha + \beta) & -\frac{v\omega_r}{\sigma L_s} & \frac{\beta}{L_s} \\ -R_s & 0 & 0 & v\omega_s \\ 0 & -R_s & -v\omega_s & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\omega}_r = \frac{v}{J} (i_q^s \phi_d^s - i_d^s \phi_q^s) - \frac{b}{J} \omega_r - \frac{\tau_c}{J}. \quad (D.4)$$

Representação de Estado em Fluxos Estatóricos e Fluxos Rotóricos

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \phi_d^s \\ \phi_q^s \\ \phi_d^r \\ \phi_q^r \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \sigma L_s & 0 & \frac{L_{sr}}{L_r} & 0 \\ 0 & \sigma L_s & 0 & \frac{L_{sr}}{L_r} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_i^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 & -K & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} & 0 & -K \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{T}_i \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

$$\mathbf{T}_i \mathbf{A}(\omega_r) \mathbf{T}_i^{-1} = \begin{bmatrix} -\alpha & v\omega_s & R_s K & 0 \\ -v\omega_s & -\alpha & 0 & R_s K \\ R_r K & 0 & -\beta & v(\omega_s - \omega_r) \\ 0 & R_r K & -v(\omega_s - \omega_r) & -\beta \end{bmatrix}$$

$$\dot{\omega}_r = \frac{vK}{J} (\phi_q^s \phi_d^r - \phi_d^s \phi_q^r) - \frac{b}{J} \omega_r - \frac{\tau_c}{J}. \quad (\text{D.6})$$

Representação de Estado em Correntes Estatóricas e Correntes Rotóricas

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ i_d^r \\ i_q^r \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{L_{sr}}{L_r} & 0 & \frac{1}{L_r} & 0 \\ 0 & -\frac{L_{sr}}{L_r} & 0 & \frac{1}{L_r} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ L_{sr} & 0 & L_r & 0 \\ 0 & L_{sr} & 0 & L_r \end{bmatrix}; \mathbf{T}_i \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -K & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_i \mathbf{A}(\omega_r) \mathbf{T}_i^{-1} = \begin{bmatrix} -\alpha & v(\omega_s + \omega_r K L_{sr}) & R_r K & v\omega_r \frac{L_{sr}}{\sigma L_s} \\ -v(\omega_s + \omega_r K L_{sr}) & -\alpha & -v\omega_r \frac{L_{sr}}{\sigma L_s} & R_r K \\ R_s K & -v\omega_r \frac{L_{sr}}{\sigma L_r} & -\beta & v\left(\omega_s - \frac{\omega_r}{\sigma}\right) \\ v\omega_r \frac{L_{sr}}{\sigma L_r} & R_s K & -v\left(\omega_s - \frac{\omega_r}{\sigma}\right) & -\beta \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

$$\dot{\omega}_r = \frac{v L_{sr}}{J} (i_q^s i_d^r - i_d^s i_q^r) - \frac{b}{J} \omega_r - \frac{\tau_c}{J} \quad (\text{D.8})$$