

Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

DESENVOLVIMENTO TEÓRICO E INVESTIGAÇÃO EXPERI-
MENTAL DA FUNÇÃO DECREMENTO ALEATÓRIO

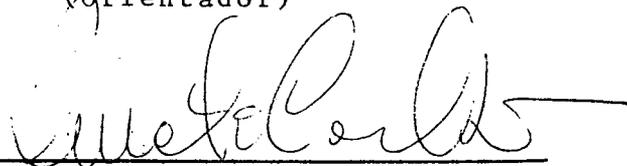
Tese submetida à Universidade Federal de Santa
Catarina para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia.

Julio Maciel Treiguer

Florianópolis, março - 1981

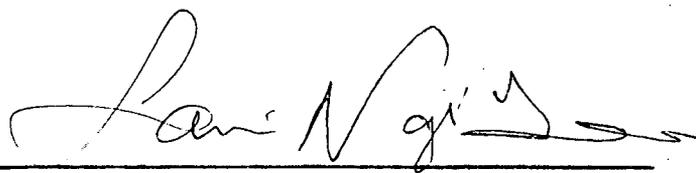
Esta tese foi julgada para obtenção do título de Mestre em Engenharia - especialidade Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação.

Prof. Rajamani Doraiswami, Ph.D
(orientador)



Prof. Renato Carlson, Dr. Ing.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

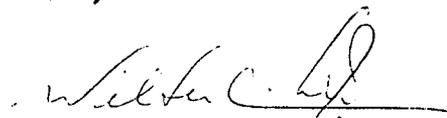
Banca examinadora:



Prof. Samir Nagi Yousri Gerges, Ph.D



Prof. José João de Espindola, Ph.D



Prof. Walter Celso de Lima, L.D

A Elizabeth,

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Aos departamentos de Engenharia Elétrica e Mecânica da U.F.S.C., e em particular ao Laboratório de Vibrações e Acústica e aos professores Rajamani Doraiswami , Samir Nagi Yousri Gerges, José João de Espíndola e Walter Celso de Lima.

A Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia da U.F.R.J. onde foi iniciado o trabalho.

Aos meus colegas e amigos que ajudaram na sua realização, ao professor Jean Pierre Courtiat pela sua colaboração, ao professor Jules Ghislain Slama pela ideia inicial e colaboração e também ao Centro de Processamento de Dados da U.F.R.G.S.

o autor

R E S U M O

Este trabalho tem como finalidade demonstrar teoricamente e experimentalmente que o uso da Função Decremento Aleatório (FDA), torna mais confiável a detecção de falhas e a identificação de sistemas mecânicos lineares, do que os métodos clássicos - função densidade espectral, função autocorrelação e função correlação cruzada.

Com este objetivo desenvolveu-se simulações teóricas de um sistema de "2" graus de liberdade, sendo a FDA calculada e analisada através de várias técnicas. Determinou-se limites de confiança para um sistema simulado em boas condições fazendo-se comparações com sistemas que apresentavam problemas. Foram feitas ainda comparações com os métodos clássicos já referidos e análise dos dados retirados de um sistema montado em laboratório.

O trabalho teve como suporte um programa desenvolvido em linguagem FORTRAN, que tem capacidade para gerar as respostas de sistemas mecânicos lineares de um e dois graus de liberdade, incluindo um filtro passa-baixa. O programa calcula ainda a FDA e seu desvio padrão, densidade espectral, autocorrelação e a correlação cruzada. Os dados experimentais foram obtidos através de um sistema montado em laboratório, sendo analisados por um Analisador de Fourier HP 5451c em conjunto com o programa acima.

Como conclusão verificou-se que este método completa de forma útil os métodos clássicos, sendo facilmente aplicável em sistemas práticos. Seu principal interesse na identificação dos parâmetros é dado pela facilidade com que permite separar os modos que ocorrem próximos da mesma frequência natural e, no caso da detecção de falhas, é dado pelo fato da FDA não variar significativamente com a mudança na excitação.

A B S T R A C T

The objective of this work is to demonstrate theoretically and experimentally, that the use of Random Decrement Function (RDF) in mechanical system identification and failure detection is more reliable than the classical methods such as spectral density function, auto and cross correlation functions.

A theoretical simulation for "2" degree of freedom system was developed and the RDF was calculated and analysed using different techniques, the confidence limits for a simulated healthy system was calculated and compared with an unhealthy system. Results were compared with the classical methods as well as measured data taken from a simple mechanical system.

A FORTRAN program was developed which can generate a single degree and two degree of freedom linear systems response, which includes a random excitation with a low-pass filter. The program calculates the RDF and its standard deviation, spectral density function, auto and cross correlation functions. The experimental measurement was taken from a laboratory set-up and was analysed using the HP Fourier Analyser 5451c and the above developed program.

Conclusions show that this method complement in a useful form the classical methods and is readily applicable to practical systems. The principal interest of this method in system identification is given by its simplicity which allows separation of closed mode and for failure detection the independence of RDF on the excitation of the system.

ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO	1
II - DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO DA FUNÇÃO DECREMENTO ALEATÓRIO	5
II.1 - Introdução	5
II.2 - Descrição da Função Decremento Aleatório. (Processo Gráfico)	6
II.3 - Sistema de um Grau de Liberdade	10
II.3.1 - Forma Geral da Resposta Livre	11
II.3.2 - Resposta Impulsiva e ao Degrau	13
II.3.3 - Resposta Forçada e Geral	14
II.3.4 - Função Decremento Aleatório	15
II.3.5 - Relação entre a Função Decremento e a estrutura	21
II.3.6 - Exemplos ilustrativos	23
II.4 - Sistema de ℓ Graus de Liberdade (Pequenos Amortecimentos)	27
II.4.1 - Resposta Geral	28
II.4.2 - Função Decremento Aleatório	31
II.4.3 - Exemplos ilustrativos	37
II.5 - Conclusão	42
III - ANÁLISE DA FUNÇÃO DECREMENTO ALEATÓRIO	43
III.1 - Introdução	43
III.2 - Sistema de um Grau de Liberdade	44
III.2.1 - Método do Decremento Logarítmico	44
III.2.2 - Método de Largura de Banda para o Ponto de Meia Potência	49
III.2.3 - Método dos Mínimos Quadrados	51

III.3 - Comparação entre os Resultados Calculados e os Parâmetros do Sistema	58
III.4 - Sistema de dois Graus de Liberdade (Pequenos Amortecimentos)	59
III.4.1 - Método do Decremento Logarítmico	60
III.4.2 - Método de Largura de Banda para o Ponto de Meia Potência	62
III.4.3 - Método dos Mínimos Quadrados	66
III.5 - Comparação entre os Resultados Calculados e os Parâmetros do Sistema	69
III.6 - Conclusão	71
IV - DETECÇÃO DE FALHAS	73
IV.1 - Introdução	73
IV.2 - Sistema de um Grau de Liberdade (Pequenos Amortecimentos)	74
IV.2.1 - Estimativa da Região Padrão	74
IV.2.2 - Utilização da Região Padrão	77
IV.3 - Sistema de dois Graus de Liberdade (Pequenos Amortecimentos - Frequências Próximas)	84
IV.3.1 - Estimativa da Região Padrão	83
IV.3.2 - Utilização da Região Padrão	85
IV.4 - Considerações Práticas	91
IV.5 - Conclusão	95
V - MÉTODOS CLÁSSICOS	96
V.1 - Introdução	96
V.2 - Função Densidade Espectral	97
V.3 - Função Autocorrelação	106
V.4 - Função Correlação Cruzada	118
V.5 - Conclusão	129

VI - INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL PARA A DETERMINAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DE VIBRAÇÃO DE UM SISTEMA MECÂNICO	130
VI.1 - Introdução	130
VI.2 - Desenvolvimento da experiência e sistema utilizado	130
VI.3 - Montagem da experiência	132
VI.4 - Medições	134
VI.5 - Cálculo do fator de amortecimento através da resposta livre	135
VI.5.1 - Obtenção da fórmula do fator de amortecimento	136
VI.5.2 - Gráficos do amortecimento em dB da resposta livre	137
VI.5.3 - Resultados	140
VI.6 - Processamento de dados	141
VI.6.1 - Determinação da função densidade espectral da excitação (sistema desacoplado)	142
VI.6.2 - Cálculo das características através da função densidade espectral da resposta e módulo ao quadrado da função transferência	143
VI.6.3 - Cálculo das características através da função decremento aleatório no tempo e na frequência	150
VI.7 - Comparação entre os resultados	163
VI.8 - Conclusão	164
VII - CONCLUSÃO E SUGESTÕES	165
VII.1 - Conclusão	166
VII.2 - Sugestões	168
APÊNDICE A	170
ESTRUTURA DOS PROGRAMAS	170
APÊNDICE B	190
EXCITAÇÕES E RESPOSTAS DOS SISTEMAS SIMULADOS (TEMPO)	190
APÊNDICE C	206
MODELOS MATEMÁTICOS DOS SISTEMAS SIMULADOS	206
APÊNDICE D	212
VARIAÇÃO DA FUNÇÃO DECREMENTO ALEATÓRIO COM O NÍVEL DE SELEÇÃO "A" E O NÚMERO DE TRECHOS "N"	212

APÊNDICE E	218
INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE PONTOS E INTERVALO DE AMOSTRAGEM SOBRE O CÁLCULO DOS PARÂMETROS E A DETECÇÃO DE FALHAS DOS SISTEMAS SIMULADOS	218
APÊNDICE F	230
EXCITAÇÃO DOS SISTEMAS SIMULADOS (FREQUÊNCIA)	230
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	239

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Atualmente procuram-se desenvolver novas técnicas com a finalidade de aprimorar a detecção de falhas em estruturas.

Um problema a ser solucionado seria o fato de poder detectar estas falhas quando a estrutura está em seu uso normal, o que acarretaria uma vantagem econômica muito grande.

Um outro problema a ser resolvido seria o estudo da deterioração nas estruturas, isto é, a determinação de possíveis falhas antes de sua total ruptura, o que otimizaria o problema da segurança.

Através de inspeções visuais ou monitoração de emissões acústicas teriam-se algumas possibilidades, mas seja devido a pequenas falhas não passíveis de serem observadas visualmente ou devido ao ruído ambiente, um ou o outro método apresentam problemas.

Uma outra possibilidade na detecção de falhas seria uso de métodos de análise das vibrações estruturais, e dentre estes uma possível solução seria dada pela função de cremento aleatório, |4|.

Esta função também apresenta vantagens na identificação dos fatores de amortecimento e frequências dos modos, $|4|$, $|8|$.

O presente trabalho tem como objetivo a identificação dos parâmetros de sistemas mecânicos e a detecção de falhas, quando estes estão sujeitos à variações devido à modificações na excitação aleatória.

Para a simulação, os sistemas mecânicos a serem considerados são lineares, discretos e invariantes no tempo, sendo dado um tratamento matemático para um e l graus de liberdade. No caso de l graus de liberdade considera-se sempre pequenos amortecimentos e o desacoplamento das equações diferenciais, que o representam, é dado pela análise modal.

O sistema prático é constituído por uma viga montada sobre um vibrador. Neste caso o sistema assemelha-se a um sistema de 1º grau de liberdade, devido a excitação de somente um de seus modos.

Sabe-se que a resposta aleatória de um sistema contém toda a informação necessária para a sua identificação, mas não pode ser usada porque, neste caso a informação encontra-se mascarada por ruído. Precisa-se então utilizar métodos de análise desta resposta.

Para este fim utilizou-se a função decréscimo aleatório, sendo apresentado o seu desenvolvimento matemático no capítulo II. A utilização desta função para identifica-

ção dos parâmetros do sistema é dada no capítulo III, e sua aplicação na detecção de falhas no capítulo IV.

Existem ainda outros métodos conhecidos, para análise da resposta aleatória do sistema, tais com: função densidade espectral, função autocorrelação e função correlação cruzada. No capítulo V mostra-se a utilização destes métodos.

No capítulo VI foram desenvolvidos testes com o objetivo de verificar na prática a função decremento aleatório. Neste caso comparou-se os resultados encontrados pela função decremento com os resultados obtidos pelos métodos — resposta livre, função densidade espectral média e módulo ao quadrado da função transferência do sistema.

As sugestões e conclusões estão apresentadas no capítulo VII.

No apêndice A, mostram-se os programas que contêm as simulações das excitações dos sistemas de 1º e 2º graus de liberdade utilizados, e também as simulações das funções acima consideradas. No caso da função decremento aleatório é encontrada também a sua variância, podendo-se estimar uma região de confiança para a detecção de falhas

No apêndice B, são apresentadas as excitações e respostas no tempo dos sistemas simulados.

No apêndice C, são apresentados os modelos matemáticos utilizados para os sistemas de 1º e 2º graus de liberdade. A simulação dos sistemas é feita pelo método Runge-Kutta, e no caso do sistema de 2º graus de liberdade a resposta é retirada de uma das massas consideradas.

No apêndice D, são apresentadas diversas situações onde a função de decaimento aleatório é obtida em função do nível de seleção "A", e o número de trechos retirados "N".

No apêndice E, analisa-se a influência do número de pontos e o intervalo de amostragem sobre o cálculo dos parâmetros e a detecção de falhas dos sistemas simulados, estabelecendo-se assim critérios para a sua utilização.

No apêndice F, são apresentadas as excitações na frequência dos sistemas simulados, fazendo-se comentários a respeito da influência da banda usada pelo filtro sobre as frequências naturais.

CAPÍTULO II

DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO DA FUNÇÃO

DECREMENTO ALEATÓRIO

II.1 - INTRODUÇÃO

Os sistemas de vibrações podem ser classificados em dois tipos de modelos matemáticos: discreto e contínuo. O modelo discreto possui um número finito de graus de liberdade e o contínuo um número infinito. O número de graus de liberdade de um sistema pode ser definido como o número de coordenadas independentes suficientes para descrever o seu movimento.

Como ilustração será verificado a seguir o número de graus de liberdade ℓ de um sistema quando o seu movimento se processa no espaço.

Sendo: N_m = número de massas

C = número de equações de restrição

o número de graus de liberdade do sistema será:

$$\ell = 3N_m - C \quad (\text{II.1})$$

Muitos sistemas de vibração tem propriedades distribuídas, possuindo então infinitos graus de liberdade; isto porque ele só será completamente descrito quando o movimento for conhecido em todos os seus pontos. Mas, em muitos casos, estas propriedades são fortemente não uniformes podendo-se construir modelos discretos sem perder muito o carácter geral do

desenvolvimento. Neste caso, tem-se um número finito de parâmetros para descrever as propriedades do sistema, que terá então um número finito de graus de liberdade.

O estudo a seguir será feito considerando o modelo como um sistema mecânico discreto linear e invariante no tempo.

II.2 - DESCRIÇÃO DA FUNÇÃO DECREMENTO ALEATÓRIO (PROCESSO GRÁFICO) |4|

Seja um sistema mecânico linear invariante no tempo qualquer, cuja resposta impulsiva é $h(t)$, com condições iniciais e excitação externa $f(t)$, ambas arbitrárias.

A resposta $y(t)$, considerando o princípio da superposição, é dada por:

$$y(t) = y_f(t) + y_\ell(t) \quad (\text{II.2})$$

onde $y_f(t)$ é a resposta forçada, e $y_\ell(t)$ é a resposta livre.

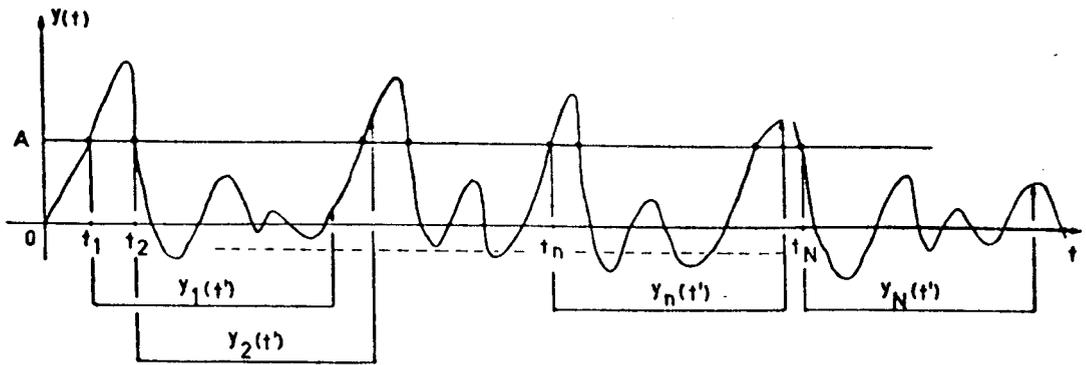
Supondo conhecida a resposta $y(t)$, será utilizado o seguinte procedimento mostrado na figura (II.1):

- 1 - Fixa-se um nível de seleção A.
- 2 - A cada passagem da resposta $y(t)$ por este nível, um trecho $y_n(t')$ de tamanho $t'_{\text{máx}}$ é retirado, onde $t' = t - t_n$ é a variável independente.

- 3 - É subtraído de cada trecho $y_n(t')$ o nível de seleção A.
- 4 - Faz-se a média sobre estes novos trechos encontrando-se a função de decremento aleatório, assim:

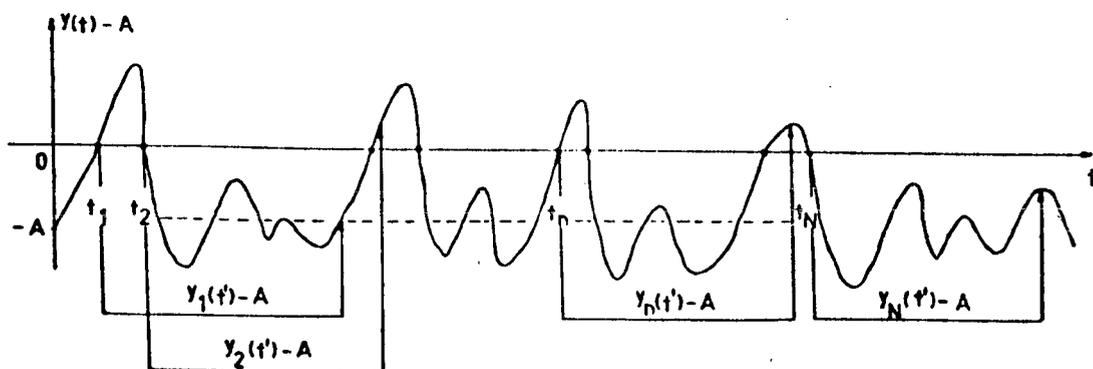
$$d_{y_c}(t') = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y_n(t') - A) \quad (\text{II.3})$$

onde N é o número de trechos retirados de $y(t)$ para um dado nível de seleção A, e o índice "c" indica valor calculado.



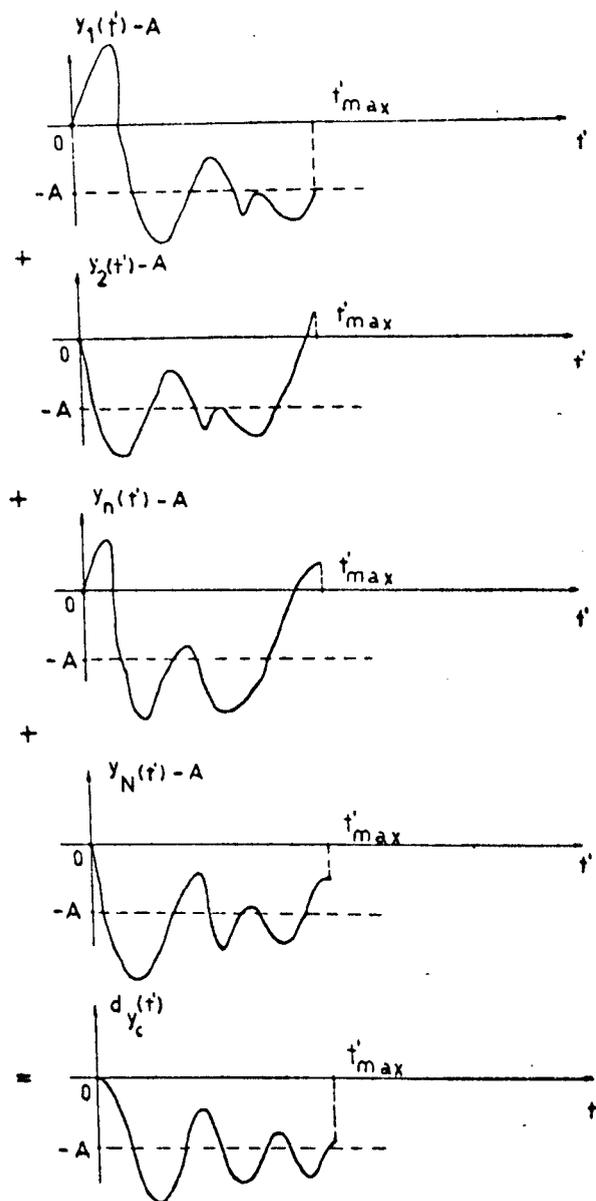
- (a) - Distribuição de retirada de trechos da resposta $y(t)$, para um nível de seleção préfixado A.

Fig.(II.1) Processo gráfico para obtenção da função de decremento aleatório.



(b) - Distribuição de retirada de trechos da resposta $y(t)$ subtraída do nível A

Fig.(II.1) Processo gráfico para obtenção da função de decaimento aleatório



(c) - Desenvolvimento para obtenção da função decremento aleatório.

Fig.(II.1) Processo gráfico para obtenção da função decremento aleatório.

Aumentando o número de médias N , tem-se maior precisão na determinação da função $d_y(t')$.

O nível de seleção A , o número de trechos ou número de médias N , o tamanho da resposta $t_{\text{máx}}$, e o tamanho da função $t'_{\text{máx}}$, serão estipulados mais adiante.

A subtração de A dos trechos selecionados $y_n(t')$, tem a finalidade de pradonizar a função $d_y(t')$, fazendo com que inicie com amplitude zero em $t' = 0$, ou $t = t_n$.

É importante salientar que a função só teria a forma apresentada na figura (II.1.c) se:

- a - O sistema tivesse um grau de liberdade, tendo então só uma frequência natural.
- b - O sistema tivesse mais de um grau de liberdade, mas existis_ se um modo dominante o qual teria uma frequência natural principal.

II.3 - SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE

A equação que representa a forma geral de um sistema mecânico de um grau de liberdade é:

$$y''(t) + 2\eta_1\omega_1 y'(t) + \omega_1^2 y(t) = f(t) \quad (\text{II.4})$$

onde η_1 é o fator de amortecimento viscoso e
 ω_1 é a frequência natural do sistema
 $f(t)$ é uma excitação aleatória

II.3.1 - Forma Geral da Resposta Livre

a - Determinação explícita da resposta livre:

Na prática $\eta_1 < 1$, e como também deseja-se conhecer a frequência, o caso de maior interesse é o de subamortecimento, onde $0 < \eta_1 < 1$, tendo-se então para a resposta livre a expressão:

$$y_\ell(t) = A e^{-\eta_1 \omega_1 t} \cos(\omega_1^* t - \phi_1) \quad (t \geq 0) \quad (\text{II.5})$$

$$\text{onde: } \omega_1^* = \omega_1 (1 - \eta_1^2)^{1/2} \quad (\text{II.6})$$

é a frequência da vibração livre amortecida.

A expressão (II.5) indica que o movimento pode ser visto como oscilatório de frequência ω_1^* e ângulo de fase ϕ_1 , com amplitude amortecida exponencialmente devido ao fator $A e^{-\eta_1 \omega_1 t}$.

Usando as condições iniciais:

$$y_\ell(0) = y(0)$$

$$y_\ell'(0) = y'(0)$$

encontra-se

$$\phi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\dot{y}(0) + y(0) \eta_1 \omega_1}{y(0) \omega_1^*} \quad (\text{II.7})$$

$$A = \frac{y(0)}{\cos \phi_1} = \frac{y(0)}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{\dot{y}(0) + y(0) \eta_1 \omega_1}{y(0) \omega_1^*}\right)^2}}} \quad (\text{II.8})$$

b - Considerando somente o deslocamento inicial

Neste caso: $y_\ell(0) = y(0)$

$$\dot{y}_\ell(0) = 0$$

$$e \quad \phi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\eta_1}{(1-\eta_1^2)^{1/2}} \quad (\text{II.9})$$

$$A = \frac{y(0)}{(1-\eta_1^2)^{1/2}} \quad (\text{II.10})$$

então

$$y_{\ell, y(0)}(\tilde{t}) = \frac{y(0)}{(1-\eta_1^2)^{1/2}} e^{-\eta_1 \omega_1 \tilde{t}} \cos(\omega_1^* \tilde{t} - \operatorname{arctg} \frac{\eta_1}{(1-\eta_1^2)^{1/2}}) \quad (\text{II.11})$$

($t \geq 0$)

c - Considerando somente a velocidade inicial

Neste caso: $y_{\ell}(0) = 0$

$$y'_{\ell}(0) = y'(0)$$

$$e \quad \phi_1 = \arctg(\infty) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{II.12})$$

$$A = \frac{y'(0)}{\omega_1^*} \quad (\text{II.13})$$

então

$$y_{\ell, y'(0)}(t) = \frac{y'(0)}{\omega_1^*} e^{-\eta_1 \omega_1 t} \text{sen}(\omega_1^* t) \quad (t \geq 0) \quad (\text{II.14})$$

Usando o princípio da superposição, tem-se a forma geral da resposta livre dada por:

$$y_{\ell}(t) = \frac{e^{-\eta_1 \omega_1 t}}{\omega_1^*} \text{sen}(\omega_1^* t) y'(0) + \frac{e^{-\eta_1 \omega_1 t}}{(1-\eta_1^2)^{1/2}} \cos(\omega_1^* t - \arctg \frac{\eta_1}{(1-\eta_1^2)^{1/2}}) y(0) \quad (t \geq 0) \quad (\text{II.15})$$

II.3.2 - Resposta Impulsiva e Resposta ao Degrau

A função transferência do sistema é $|1|$:

$$H_1(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 2j\omega\eta_1\omega_1 + \omega_1^2} \quad (\text{II.16})$$

e a sua transformada inversa dará a resposta impulsiva

$$h_1(t) = \frac{e^{-\eta_1 \omega_1 t}}{\omega_1^*} \text{sen } \omega_1^* t \quad (t \geq 0) \quad (\text{II.17})$$

a resposta ao degrau é encontrada aplicando a transformada inversa na expressão abaixo |1|

$$G_1(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{j\omega} \quad (\text{II.18})$$

sendo então:

$$g_1(t) = \frac{1}{\omega_1^2} \left[1 - \frac{1}{(1-\eta_1^2)^{1/2}} e^{-\eta_1 \omega_1 t} \cos(\omega_1^* t - \arctg \frac{\eta_1}{(1-\eta_1^2)^{1/2}}) \right] \quad (\text{II.19})$$

(t ≥ 0)

onde $g_1(t)$ e $G_1(\omega)$ são respectivamente a resposta ao degrau no tempo e na frequência.

II.3.3 - Resposta Forçada e Resposta Geral

Sendo a excitação causal, a resposta forçada é dada pela integral de convolução:

$$y_f(t) = \int_0^t f(\tau) h_1(t-\tau) d\tau \quad (\text{II.20})$$

Usando (II.15) e (II.20) encontra-se a resposta geral

$$y(t) = y_f(t) + y_\ell(t)$$

$$= \int_0^t f(\tau) h_1(t-\tau) d\tau + \frac{e^{-\eta_1 \omega_1 t}}{\omega_1^*} \text{sen}(\omega_1^* t) y'(0) + \frac{e^{-\eta_1 \omega_1 t}}{(1-\eta_1^2)^{1/2}} \cos\left(\omega_1^* t - \arctg \frac{\eta_1}{(1-\eta_1^2)^{1/2}}\right) y(0)$$

$$(t \geq 0) \quad (\text{II.21})$$

ou ainda usando (II.17) e (II.19), tem-se:

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) h_1(t-\tau) d\tau + h_1(t) y'(0) + (1-\omega_1^2 g_1(t)) y(0)$$

$$(t \geq 0) \quad (\text{II.22})$$

II.3.4 - Função Decremento Aleatório

Sabendo que:

$$d_{y_c}(t') = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y_n(t') - A) \quad (t' \geq 0)$$

$$t' \in [0, t'_{\text{máx}}]$$

vê-se que a função é na verdade, uma estimação do valor médio estatístico da resposta de um processo aleatório $\{y_n(t')\}$, subtraído do nível de seleção A [2], assim:

$$d_y(t') = E[y_n(t') - A] \quad (t' \geq 0) \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{II.23})$$

$$t' \in [0, t'_{\text{máx}}]$$

onde E , indica média estatística.

Sendo $A = y(t_n)$, $n = 1, 2, \dots, N$ e usando a equação (II.22), (II.23) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
d_y(t') &= E \left[\int_0^{t'} f_n(\tau) h_1(t'-\tau) d\tau \right] + h_1(t') E \left[y'(t_n) \right] - \\
&- \omega_1^2 g_1(t') E \left[y(t_n) \right] ; \quad y(t_n) = A \quad (II.24) \\
&(t' \geq 0) \quad (n = 1, 2, \dots, N) \\
&t' \in [0, t'_{\max}]
\end{aligned}$$

Pode-se ver que para um número determinado de trechos retirados N , tem-se:

$$\begin{aligned}
E[y'(t_n)] &= 0 \\
E[y(t_n)] &= y(t_n) \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (II.25)
\end{aligned}$$

(II.25) é evidente, pois as condições iniciais consecutivas de velocidade tem sinais contrários e as condições iniciais de deslocamento são as mesmas e iguais a $y(t_n)$.

Concluindo, a análise de (II.24), comuta-se a operação de média e de integração no termo referente a resposta forçada.

$$\begin{aligned}
E[y_{fn}(t')] &= E \left[\int_0^{t'} f_n(\tau) h_1(t'-\tau) d\tau \right] = \int_0^{t'} E[f_n(\tau)] h_1(t'-\tau) d\tau \\
&(n = 1, 2, \dots, N) \quad (II.26)
\end{aligned}$$

fazendo a mudança de variáveis $t = t' - \tau$

$$E[y_{fn}(t')] = \int_0^{t'} E[f_n(\tau)] h_1(t'-\tau) d\tau = \int_0^{t'} E[f_n(t'-t)] h_1(t) dt \quad (\text{II.27})$$

$$(n = 1, 2, \dots, N)$$

Supondo que os N trechos retirados, $y_n(t')$, $n = 1, 2, \dots, N$, formem um processo estacionário tem-se:

$$E[y_{fn}(t')] = \int_0^{t'} E[f_n(t'-t)] h_1(t) dt = E[f_n(t')] \int_0^{t'} h_1(t) dt \quad (\text{II.28})$$

$$(n = 1, 2, \dots, N)$$

chamando $\xi_1(t') = \int_0^{t'} h_1(t) dt =$

$$= e^{-\eta_1 \omega_1 t'} \left(-\frac{\eta_1}{\omega_1^* \omega_1} \text{sen} \omega_1^* t' - \frac{\cos \omega_1^* t'}{\omega_1^2} \right) + \frac{1}{\omega_1^2}$$

e $C_1 = E[f_n(t')]$, $(n = 1, 2, \dots, N)$, (II.28) fica:

$$E[y_{fn}(t')] = C_1 \xi_1(t') \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{II.29})$$

levando (II.25), (II.29) em (II.24) obtém-se:

$$d_y(t') = C_1 \xi_1(t') - \omega_1^2 y(tn) g_1(t') \quad (t' \geq 0) \quad (\text{II.30})$$

$$t' \in [0, t'_{\max}]$$

$$(n = 1, 2, \dots, N)$$

a - Processo estacionário de média nula ($C_1 = 0$)

Então (II.30) se torna:

$$d_y(t') = -\omega_1^2 y(t_n) g_1(t') \quad (t' \geq 0); t' \in [0, t'_{\text{máx}}] \quad (\text{II.31})$$

$$(n = 1, 2, \dots, N)$$

(II.31) indica que a função decrémento aleatório, representa a *resposta ao degrau do sistema*.

Sendo $y(t_n) = y(0)$ e considerando (II.11) e (II.19), (II.31) se torna:

$$d_y(t') = y_{\ell, y(0)}(t') - y(0) \quad (\text{II.32})$$

$$(t' \geq 0)$$

(II.32) indica que a função decrémento aleatório é a *resposta livre do sistema à condição inicial de deslocamento, $y(0)$ subtraída desta mesma condição*.

Substituindo (II.11) em (II.32) tem-se:

$$d_y(t') = \frac{y(0)}{(1-\eta_1^2)^{1/2}} e^{-\eta_1 \omega_1 t'} \cos(\omega_1^* t' - \phi_1) - y(0) \quad (t' \geq 0)$$

$$t' \in [0, t'_{\text{máx}}]$$

$$\phi_1 = \text{arctg} \frac{\eta_1}{(1-\eta_1^2)^{1/2}} \quad (\text{II.33})$$

Como considera-se subamortecimento, onde $0 < \eta_1 < 1$, o ângulo de fase e a frequência das vibrações livres amortecidas estarão nos domínios:

$$0 < \phi_1 < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \omega_1^* < \omega_1$$

b - Processo estacionário de média não nula ($C_1 \neq 0$)

Então (II.30) é expressa por:

$$d_y(t') = \frac{y(0)}{(1-\eta_1^2)^{1/2}} e^{-\eta_1 \omega_1 t'} \cos(\omega_1^* t' - \phi_1) - y(0) + C_1 \xi_1(t')$$

$$(t' \geq 0) \quad t' \in [0, t'_{\max}]$$

(II.34)

$$\phi_1 = \arctg \frac{\left[1 - (1-\eta_1^2) \left(1 - \frac{C_1 \xi_1(t')}{y(0)} \right)^2 \right]^{1/2}}{(1-\eta_1^2)^{1/2} \left(1 - \frac{C_1 \xi_1(t')}{y(0)} \right)}$$

onde ϕ_1 é encontrado considerando a condição inicial $dy(t') \Big|_{t'=0} = 0$

c - Processo ergódico

Neste caso $C_1 = \overline{f(t)}$ e $C_1 \xi_1(t') = \overline{y(t)}$ e

(II.34) se torna:

$$d_y(t') = \frac{y(0)}{(1-\eta_1^2)^{1/2}} e^{-\eta_1 \omega_1 t'} \cos(\omega_1^* t' - \phi_1) - y(0) + \overline{y(t)} \quad (t' \geq 0)$$

$$t' \in [0, t'_{\text{máx}}]$$

$$\phi_1 = \arctg \frac{\left[1 - (1-\eta_1^2) \left(1 - \frac{\overline{y(t)}}{y(0)} \right)^2 \right]^{1/2}}{(1-\eta_1^2)^{1/2} \left(1 - \frac{\overline{y(t)}}{y(0)} \right)} \quad (\text{II.35})$$

sendo a excitação um ruído branco gaussiano ergódico ou um ruído colorido ergódico de média nula, $\overline{f(t)} = 0$, e (II.35) se reduz para (II.33).

d - Processo não estacionário

Supondo a existência de solução para integral, faz-se:

$$C_1 \xi_1(t') = Z_1(t') = \int_0^{t'} E[f_n(t'-t)] h_1(t) dt, \text{ onde } Z_1(t') \text{ é a res}$$

posta forçada do sistema, quando a excitação é o valor médio do processo.

Então (II.34) será expressa por:

$$d_y(t') = \frac{y(0)}{(1-\eta_1^2)^{1/2}} e^{-\eta_1 \omega_1 t'} \cos(\omega_1^* t' - \phi_1) - y(0) + Z_1(t') \quad (t' \geq 0)$$

$$t' \in [0, t'_{\text{máx}}]$$

$$\phi_1 = \arctg \frac{\left[1 - (1-\eta_1^2) \left(1 - \frac{Z_1(t')}{y(0)} \right)^2 \right]^{1/2}}{(1-\eta_1^2)^{1/2} \left(1 - \frac{Z_1(t')}{y(0)} \right)} \quad (\text{II.36})$$

II.3.5 - Relação entre a Função Decremento e a estrutura

a - Estrutura com carregamento de média nula:

Neste caso, $C_1 = 0$, e a função é dada por (II.33) ou (II.35) quando a excitação tem média temporal nula, isto é, oscila em torno de $[-y(0)]$ terminando com este valor.

$$\lim_{t' \rightarrow \infty} d_y(t') = -y(0)$$

Em termos estruturais, isto indica que a estrutura não está carregada, oscilando então em torno do seu ponto de equilíbrio estático.

b - Estrutura com carregamento de média não nula e constante

Neste caso, $C_1 \neq 0$, e a função é dada por (II.34) ou (II.35), isto é oscila em torno de $[-y(0) + \frac{C_1}{\omega_1}]$ ou $[-y(0) + \overline{y(t)}]$, terminando com este valor.

$$\lim_{t' \rightarrow \infty} d_y(t') = -y(0) + \frac{C_1}{\omega_1} = -y(0) + \overline{y(t)}$$

o que indica que a estrutura está carregada, oscilando então fora do seu ponto de equilíbrio estático.

c - Estrutura com carregamento de média não nula e flutuante

Neste caso $C_1 \xi_1(t') = Z_1(t')$ e a função é da da por (II.36). Existindo $\lim_{t' \rightarrow \infty} Z_1(t')$, oscilará em torno de

$[-y(0) + \lim_{t' \rightarrow \infty} Z_1(t')]$ terminando com este valor

$$\lim_{t' \rightarrow \infty} d_y(t') = -y(0) + \lim_{t' \rightarrow \infty} Z_1(t')$$

então a estrutura esta carregada e oscila fora do seu ponto de equilíbrio estático.

OBS: Na prática, considera-se o processo ergódico, neste caso a padronização da função (necessária para a determinação de falhas) é feita zerando a média temporal da resposta do sistema $[\overline{y(t)} = 0]$, sem ser preciso conhecer a sua entrada.

OBS: Não considerando as condições iniciais, e sendo o processo ergódico, pode-se escrever $E[y_n(t')] = E[y_{fn}(t')] = \overline{y(t)}$. Mas, se existir condições iniciais como no caso da função de decre_{mento} aleatório, $E[y_n(t')] \neq E[y_{fn}(t')]$, e a função então, pode ser encarada como o valor médio estatístico de um pro_{cesso} não estacionário menos o nível de seleçã_o $d_y(t') = E[y_n(t')] - A$.

II.3.6 - Exemplos Ilustrativos

Com objetivo de verificar através de simulação a teoria apresentada nas seções anteriores, serão vistos aqui diversos exemplos de cálculos para a função de decaimento aleatório. O sistema utilizado está apresentado no apêndice C.

Os valores necessários à simulação estão apresentados abaixo, onde o intervalo de amostragem e a frequência natural foram escolhidos de tal forma que evitem o problema de "aliasing".

Os valores restantes foram obtidos através de diversos testes simulados, sendo estes os melhores para os casos apresentados.

Valores escolhidos:

Intervalo de amostragem, $T = 0,001$ s

Nível de seleção, ($A = 300$ para $\eta_1 < 0,05$), ($A = 50$ para $\eta_1 > 0,05$)

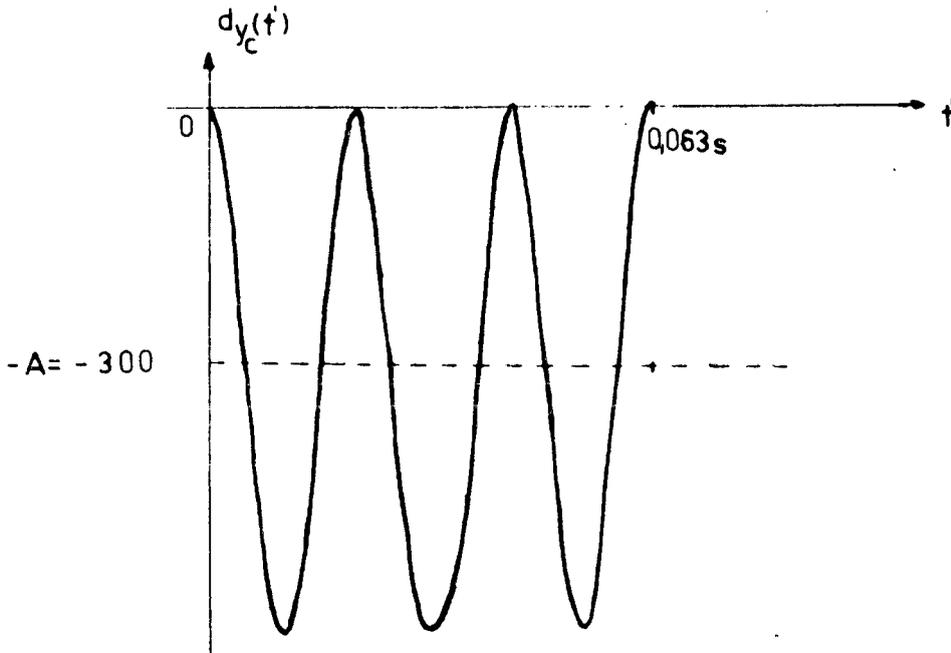
Frequência natural, $\omega_1 = 300$ rd/s

Número de médias, $N = 700$

Tamanho da função, $t'_{\text{máx}} = 0,063$ s

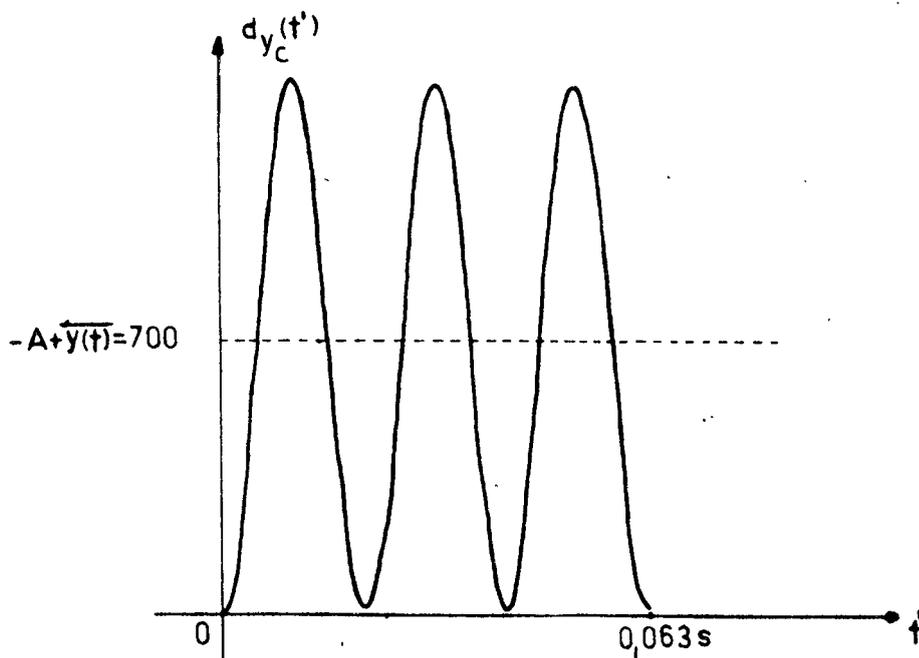
OBS: A função de decaimento aleatório calculada para um grau de liberdade é dada pela notação, $d_{y_c}(t')$, e devido a limitações computacionais foram considerados só 64 pontos.

Fator de amortecimento, $\eta_1 = 0,001$



a.1 - Excitação: 1º ruído colorido de média nula, $\overline{f(t)} = 0, \overline{y(t)} = 0$, tamanho da resposta do sistema, $t_{m\acute{a}x} = 7,515$ s.

Neste caso a função está padronizada. isto é, oscila em torno de $[-A = -y(0)]$.

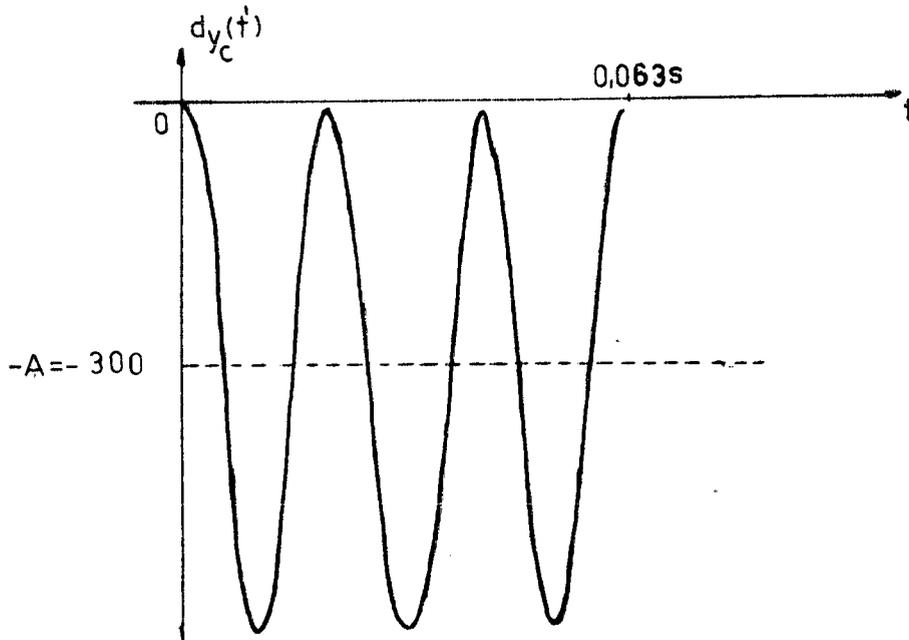


a.2 - Excitação: 1º ruído colorido de média não nula, $\overline{f(t)} \neq 0, \overline{y(t)} \neq 0$, $t_{m\acute{a}x} = 8,069$ s.

Fig. II.2 - Função de decaimento aleatório (sistema de um grau de liberdade - pequenos amortecimentos).

Neste caso tem-se distorções introduzidas pela função $\xi_1(t')$, pois $y(t) = f(t) \xi_1(t')$, e a oscilação se dá em torno de $[-A + \overline{y(t)} = -y(0) + \overline{y(t)}]$.

OBS: O valor médio da resposta do sistema é, $\overline{y(t)} = 1000$.



a.3 - Excitação: 1º ruído colorido de média não nula, $\overline{f(t)} \neq 0$, $\overline{y(t)} = 0$, $t_{\text{máx}} = 7,766$ s.

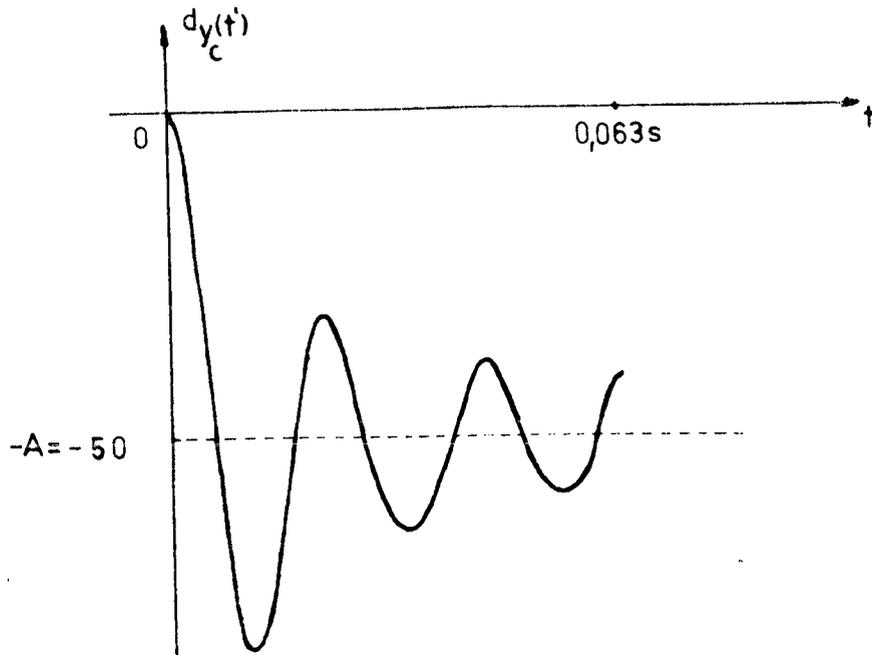
Fig. II.2 - Função de decaimento aleatório (sistema de um grau de liberdade - pequenos amortecimentos).

Neste caso, é zerada a média temporal da resposta do sistema, $\overline{y(t)} = 0$, e a função está padronizada, $\xi_1(t') = 0$, oscilando em torno de $-A = -y(0)$. Esta é a situação prática onde não é preciso conhecer a entrada. A função é similar à do caso a1.

b - Amortecimentos maiores que 0,05

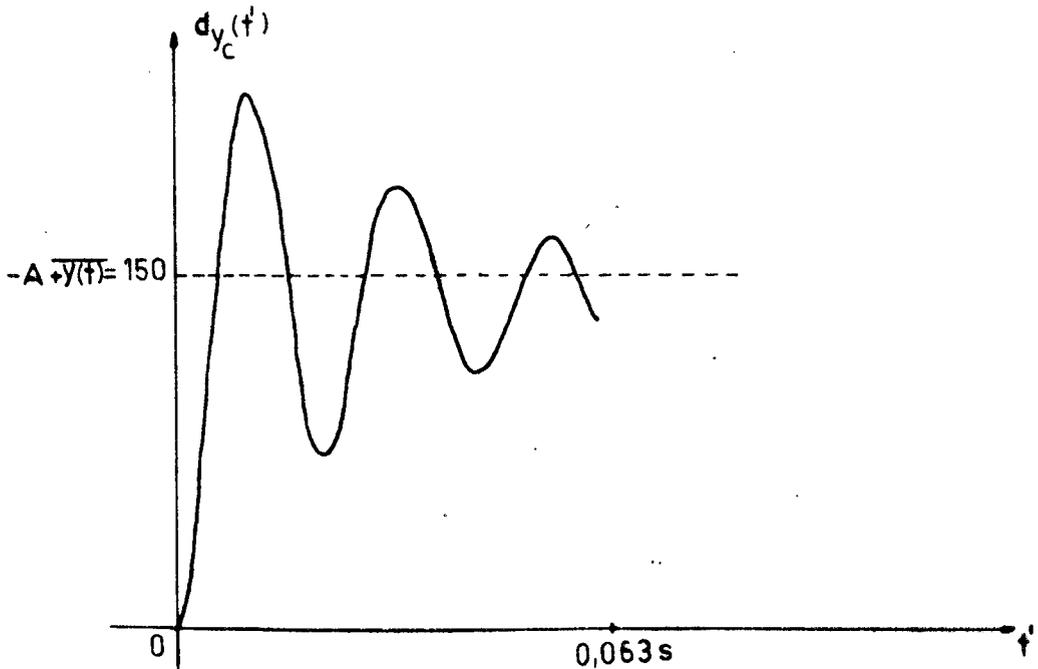
Considerando os casos anteriores, com $\eta_1 = 0,1$, tem-se:

Analogamente ao caso a1



b1 - Excitação: ruído colorido de média nula, $\overline{f(t)} = 0, \overline{y(t)} = 0,$
 $t_{\text{máx}} = 9,502 \text{ s}$

analogamente ao caso a2

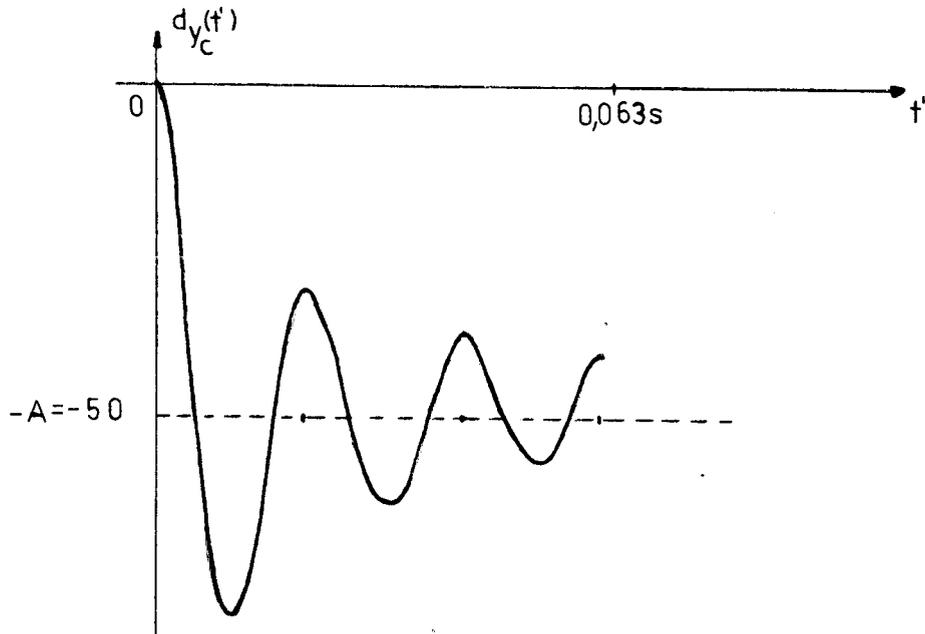


b2 - Excitação: ruído colorido de média não nula, $\overline{f(t)} \neq 0, \overline{y(t)} \neq 0,$
 $t_{\text{máx}} = 25,116 \text{ s}$

Fig. II.3 - Função de decaimento aleatório (sistema de um grau de liberdade - amortecimentos maiores que 0,05).

OBS: O valor médio da resposta do sistema é, $\overline{y(t)} = 200$

analogamente ao caso a3



b3 - Excitação: ruído colorido de média não nula, $\overline{f(t)} \neq 0$, $\overline{y(t)} = 0$,
 $t_{\text{máx}} = 9,396\text{s}$

Fig. II.3 - Função de decaimento aleatório (sistema de um grau de liberdade - amortecimentos maiores que 0,05).

II.4 - SISTEMA COM ℓ GRAUS DE LIBERDADE (PEQUENOS AMORTECIMENTOS)

A equação matricial que representa a forma geral de um sistema mecânico de ℓ graus de liberdade é:

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [c]\{\dot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (\text{II.37})$$

onde $[m]$, $[c]$ e $[k]$, são matrizes simétricas reais ($\ell \times \ell$), chamadas matrizes de massa, amortecimento e rigidez, sendo $\{q(t)\}$ e $\{Q(t)\}$ vetores ℓ -dimensionais que representam respectivamente

as coordenadas e forças generalizadas.

II.4.1 - Resposta Geral

A solução do sistema de equações (II.37) será encontrada através da análise modal [1]. A análise modal se baseia numa transformação de coordenadas e tem como objetivo expressar (II.37) em termos de um novo conjunto de coordenadas, de tal forma que as equações fiquem desacopladas.

Considerando as l soluções do problema de autovalor associado com as matrizes $[k]$ e $[m]$, tem-se:

$$[k][b] - [m][b][\omega^2] = [0] \quad (\text{II.38})$$

onde: $[\omega^2]$ é uma matriz diagonal dos autovalores ou frequências naturais ao quadrado do sistema.

$[b]$ é uma matriz $(l \times l)$ constante e não singular, chamada matriz modal, sendo as suas colunas os autovetores ou vetores modais do sistema, os quais representam fisicamente os modos naturais:

com o objetivo de encontrar-se as amplitudes únicas para os modos normaliza-se a matriz modal.

$$\begin{aligned}
 [b]^T [m] [b] &= [1] \\
 [b]^T [k] [b] &= [\omega^2]
 \end{aligned}
 \tag{II.39}$$

onde: $[b]^T$ é a transposta da matriz modal

$[1]$ é a matriz unitária.

sendo os autovetores ortogonais, e por isso linearmente independentes, o vetor resposta do sistema $\{q(t)\}$, pode ser visto como uma combinação linear destes autovetores:

$$\{q(t)\} = [b] \{\psi_{(t)}\} \quad (t \geq 0) \tag{II.40}$$

(II.40) indica que a transformação de coordenadas é feita através da matriz modal $[b]$, que pode ser vista como um operador que transforma o vetor $\{\psi_{(t)}\}$ em $\{q(t)\}$, onde $\{\psi_{(t)}\}$ são as novas coordenadas generalizadas.

Fisicamente (II.40) mostra que a solução de (II.37), para qualquer tempo, pode ser vista como uma superposição dos modos normais, multiplicadas pelas novas coordenadas generalizadas $\{\psi_{(t)}\}$, as quais são a medida da participação de cada modo.

Sendo $[b]$ constante tem-se:

$$\begin{aligned}
 \{q'(t)\} &= [b] \{\psi'(t)\} \\
 \{q''(t)\} &= [b] \{\psi''(t)\}
 \end{aligned}
 \tag{II.41}$$

Substituindo (II.40) e (II.41) em (II.37) e multiplicando os seus termos por $[b]^T$ para preservar a simetria, tem-se:

$$[b]^T [m] [b] \{\psi''(t)\} + [b]^T [c] [b] \{\psi'(t)\} + [b]^T [k] [b] \{\psi(t)\} = \{N(t)\} \quad (\text{II.42})$$

onde: $\{N(t)\} = [b]^T \{Q(t)\}$, é um vetor ℓ -dimensional que representa as forças generalizadas associadas a $\{\psi(t)\}$.

Usando o esquema de normalização (II.39) em (II.42), tem-se:

$$\{\psi''(t)\} + [C] \{\psi'(t)\} + [\omega^2] \{\psi(t)\} = \{N(t)\} \quad (\text{II.43})$$

onde: $[C] = [b]^T [c] [b]$, é uma matriz $(\ell \times \ell)$ simétrica, em geral não diagonal. Mas se for considerado pequenos amortecimentos, o acoplamento introduzido pelos termos não diagonais pode ser desprezado.

então considerando a notação

$$[C] = [-2\eta\omega] \quad (\text{II.44})$$

Substituindo (II.44) em (II.43), tem-se:

$$\{\psi''(t)\} + [2\eta\omega] \{\psi'(t)\} + [\omega^2] \{\psi(t)\} = \{N(t)\} \quad (\text{II.45})$$

(II.45) representa um conjunto de ℓ equações da forma:

$$\psi_i''(t) + 2\eta_i \omega_i \psi_i'(t) + \omega_i^2 \psi_i(t) = N_i(t) \quad (i=1,2,\dots,\ell) \quad (\text{II.46})$$

comparando com (II.22) tem-se a solução:

$$\psi_i(t) = \int_0^t N_i(\tau) h_i(t-\tau) d\tau + h_i(t) \psi_i'(0) + (1-\omega_i^2 g_i(t)) \psi_i(0) \quad (\text{II.47})$$

$$(i = 1, 2, \dots, \ell)$$

$$(t \geq 0)$$

de (II.40) vê-se que a resposta da 1ª massa do sistema é:

$$q_1(t) = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \psi_i(t) \quad (i=1,2,\dots,\ell) \quad (\text{II.48})$$

$$(t \geq 0)$$

II.4.2 - Função Decremento Aleatório

Analogamente a (II.23) pode-se escrever:

$$d_{q_1}(t') = E \left[q_1^{(n)}(t') - A \right] \quad (t' \geq 0) \quad (\text{II.49})$$

$$(n=1,2,\dots,N)$$

$$t' \in [0, t'_{\text{máx}}]$$

Usando (II.48), tem-se:

$$d_{q_1}(t') = E \left[\sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \psi_{in}(t') - A \right] \quad (t' \geq 0) \quad (\text{II.50})$$

$$(n=1,2,\dots,N)$$

$$t' \in [0, t'_{\text{máx}}]$$

sendo $A = q_1(t_n) = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \psi_i(t_n)$ $n=1,2,\dots,N$; comutando a operação de média e de soma e usando (II.47), (II.50) pode ser escrita como:

$$d_{q_1}(t') = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} E \left[\int_0^{t'} N_{in}(\tau) h_i(t'-\tau) d\tau \right] + \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} h_i(t') E \left[\psi_i(t_n) \right] - \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \omega_i^2 g_i(t') E \left[\psi_i(t_n) \right] \quad \begin{array}{l} (t' \geq 0) \\ (n=1,2,\dots,N) \\ t' \in [0, t'_{\text{máx}}] \end{array} \quad (\text{II.51})$$

Considerando um número determinado de trechos retirados N ; de forma análoga à |Seção II.3.4|, tem-se:

$$\begin{aligned} E \left[\psi_i(t_n) \right] &= 0 & (n=1,2,\dots,N) \\ E \left[\psi_i(t_n) \right] &= \Psi_i(t_n) & (i=1,2,\dots,\ell) \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

Comutando a operação de média e de integração no termo forçado de (II.51), tem-se:

$$E \left[q_{1f}^{(n)}(t') \right] = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} E \left[\int_0^{t'} N_{in}(\tau) h_i(t'-\tau) d\tau \right] = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \int_0^{t'} E \left[N_{in}(\tau) \right] h_i(t'-\tau) d\tau \quad (n = 1,2,\dots,N) \quad (\text{II.53})$$

fazendo a mudança de variáveis $t = t' - \tau$

$$E \left[q_{1f}^{(n)}(t') \right] = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \int_0^{t'} E \left[N_{in}(\tau) \right] h_i(t'-\tau) d\tau = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \int_0^{t'} E \left[N_{in}(t'-t) \right] h_i(t) dt \quad (n = 1,2,\dots,N) \quad (\text{II.54})$$

Supondo que os N trechos retirados da resposta da l^a massa do sistema, $q_1^{(n)}(t')$ $n = 1, 2, \dots, N$, formem um processo estacionário tem-se:

$$E \left[q_{1f}^{(n)}(t') \right] = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \int_0^{t'} E \left[N_{in}(t'-t) \right] h_i(t) dt = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} E \left[N_{in}(t') \right] \int_0^{t'} h_i(t) dt$$

(II.55)

($n=1, 2, \dots, N$)

$$\text{sendo } \xi_i(t') = \int_0^{t'} h_i(t) dt = e^{-\eta_i \omega_i t'} \left(-\frac{\eta_i}{\omega_i^* \omega_i} \text{sen} \omega_i^* t' - \frac{\cos \omega_i^* t'}{\omega_i^2} \right) + \frac{1}{\omega_i^2}$$

e $C_i = E \left[N_{in}(t') \right]$, ($n=1, 2, \dots, N$), ($i=1, 2, \dots, \ell$), (II.55) fica:

$$E \left[q_{1f}^{(n)}(t') \right] = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} C_i \xi_i(t') \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (II.56)$$

substituindo (II.52) e (II.56) em (II.54) tem-se:

$$d_{q_1}(t') = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \left[C_i \xi_i(t') - \omega_i^2 \psi_i(t_n) g_i(t') \right] \quad (t' \geq 0)$$

(II.57)

($n=1, 2, \dots, N$)

$t' \in [0, t'_{\text{máx}}]$

ou

$$d_{q_1}(t') = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} C_i \xi_i(t') - \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \omega_i^2 \psi_i(t_n) g_i(t') \quad (t' \geq 0)$$

(II.58)

($n=1, 2, \dots, N$)

$t' \in [0, t'_{\text{máx}}]$

a - Processo estacionário de média nula ($C_i = 0$) ($i=1, 2, \dots, \ell$)

Obtem-se para (II.58) a forma:

$$d_{q_1}(t') = - \sum_{i=1}^{\ell} b^{(i)} \omega_i^2 \psi_i(t_n) g_i(t') \quad (t' \geq 0) \quad (\text{II.59})$$

(n=1, 2, ..., N)

$t' \in [0, t'_{\text{m\acute{a}x}}]$

(II.59) indica que a função decremento aleatório representa o somatório das respostas ao degrau relativas aos modos normais.

Sendo $\psi_i(t_n) = \psi_i(0)$, analogamente a (II.32) pode-se escrever:

$$d_{q_1}(t') = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \left[\psi_{\ell, \psi_i(0)}(t') - \psi_i(0) \right] \quad (t' \geq 0) \quad (\text{II.60})$$

$t' \in [0, t'_{\text{m\acute{a}x}}]$

(II.60) indica que a função decrescimento aleatório é um somatório das respostas homogêneas às condições iniciais de deslocamento, relativas aos modos normais, subtraída destas mesmas condições.

Comparando com (II.33) tem-se:

$$d_{q_1}(t') = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \left[\frac{\psi_i(0)}{(1-\eta_i^2)^{1/2}} e^{-\eta_i \omega_i t'} \cos(\omega_i^* t' - \phi_i) - \psi_i(0) \right] \quad (t' \geq 0)$$

$t' \in [0, t'_{\text{m\acute{a}x}}]$

$$\phi_i = \text{arctg} \frac{\eta_i}{(1-\eta_i^2)^{1/2}} \quad (\text{II.61})$$

Como o caso considerado é de subamortecimento, onde $0 < \eta_i < 1$, os ângulos de fase e as frequências das vibrações livres amortecidas relativas aos modos normais estarão nos domínios:

$$0 < \phi_i < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \omega_i^* < \omega_i$$

b - Processo estacionário de média não nula ($C_i \neq 0$) ($i=1,2,\dots,\ell$)

Neste caso tem-se para (II.58):

$$d_{q_1}(t') = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \left[\frac{\psi_i(0)}{(1-\eta_i^2)^{1/2}} e^{-\eta_i \omega_i t'} \cos(\omega_i^* t' - \phi_i) - \psi_i(0) \right] + C_i \xi_i(t')$$

($t' \geq 0$)

$t' \in [0, t'_{\text{máx}}]$ (II.62)

$$\phi_i = \text{arctg} \frac{\left[1 - (1-\eta_i^2) \left(1 - \frac{C_i \xi_i(t')}{\psi_i(0)} \right)^2 \right]^{1/2}}{(1-\eta_i^2)^{1/2} \left(1 - \frac{C_i \xi_i(t')}{\psi_i(0)} \right)}$$

onde ϕ_i é encontrado considerando a condição inicial $d_{q_1}(t') \Big|_{t'=0} = 0$

c - Processo ergódico

Neste caso $C_i = \overline{N_i(t)}$ ($i=1,2,\dots,\ell$) e $\sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} C_i \xi_i(t') = \overline{q_1(t)}$ e (II.62) fica:

$$d_{q_1}(t') = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \left[\frac{\psi_i(0)}{(1-\eta_i^2)^{1/2}} e^{-\eta_i \omega_i t'} \cos(\omega_i^* t' - \phi_i) - \psi_i(0) \right] + \overline{q_1(t)}$$

($t' \geq 0$)

$t' \in [0, t'_{\text{máx}}]$

$$\overline{q_1(t)} = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \overline{\psi_i(t)} \quad (II.63)$$

$$\phi_i = \arctg \frac{\left[1 - (1 - \eta_i^2) \left(1 - \frac{\psi_i(t)}{\psi_i(0)} \right)^2 \right]^{1/2}}{(1 - \eta_i)^2 \left(1 - \frac{\psi_i(t)}{\psi_i(0)} \right)}$$

sendo as excitações ruídos gaussianos ergódicos ou ruídos coloridos ergódicos de média nula, $\overline{N_i(t)} = 0$ ($i=1,2,\dots,\ell$), (II.63) se reduz a (II.61).

d - Processo não estacionário

Existindo solução para a integral, considera-se

$$\sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} C_i \xi_i(t) = Z(t') = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} Z_i(t') = \sum_{i=1}^{\ell} b^{(i)} \int_0^{t'} E \left[N_{in}(t'-t) \right] h_i(t) dt,$$

onde $Z_i(t')$ é a resposta forçada do sistema, quando a excitação é o valor médio do processo, referente a um modo normal.

então (II.62) se torna:

$$d_{q_1}(t') = \sum_{i=1}^{\ell} b^{(i)} \left[\frac{\psi_i(0)}{(1 - \eta_i^2)^{1/2}} e^{-\eta_i \omega_i t'} \cos(\omega_i^* t' - \phi_i) - \psi_i(0) \right] + Z(t')$$

(II.64)

$(t' \geq 0) \quad t' \in [0, t'_{\max}]$

$$\phi_i = \arctg \frac{\left| 1 - (1 - \eta_i^2) \left(1 - \frac{Z_i(t')}{\psi_i(0)} \right)^2 \right|^{1/2}}{(1 - \eta_i^2)^{1/2} \left(1 - \frac{Z_i(t')}{\psi_i(0)} \right)}$$

OBS: A relação entre a função e a estrutura é análoga à seção (II.3.5), lembrando que agora trabalha-se com os modos nor

$$\text{mais, } A = q_1(0) = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \psi_i(0) .$$

OBS: Da mesma forma, a situação prática é considerar o processo ergódico. Neste caso zerando a média temporal da resposta da 1.^a massa do sistema $\overline{q_1(t)} = 0$, a função fica padronizada. Como considera-se condições iniciais, a função é o valor médio estatístico de um processo não estacionário menos o nível de seleção A.

OBS: Como o sistema tem vários graus de liberdade, será detectado o fenômeno de batimento. Esta situação prejudica a determinação dos parâmetros do sistema. Será visto no Capítulo III um método que faz esta determinação, nestas circunstâncias.

II.4.3 - Exemplos Ilustrativos

Analogamente à seção II.3.6 serão vistos aqui exemplos de simulações para a função de decaimento aleatório. Neste caso serão considerados somente pequenos amortecimentos.

Foi utilizado para simulação um sistema de dois graus de liberdade apresentado no apêndice C.

Da mesma forma anterior os intervalos de amostragem e as frequências naturais foram escolhidos com o objetivo de evitar o problema de "aliasing".

Os valores restantes foram obtidos através de diversos testes simulados, sendo estes os melhores para os casos apresentados.

Valores escolhidos:

Nível de seleção, A = 100 para frequências afastadas

A = 400 para frequências próximas

Número de médias, N = 500 para frequências afastadas

N = 700 para frequências próximas

Tamanho da função, $t'_{\text{máx}} = 0,063 \text{ s}$

Fatores de amortecimento, $\eta_1 = 0,001$, $\eta_2 = 0,04$

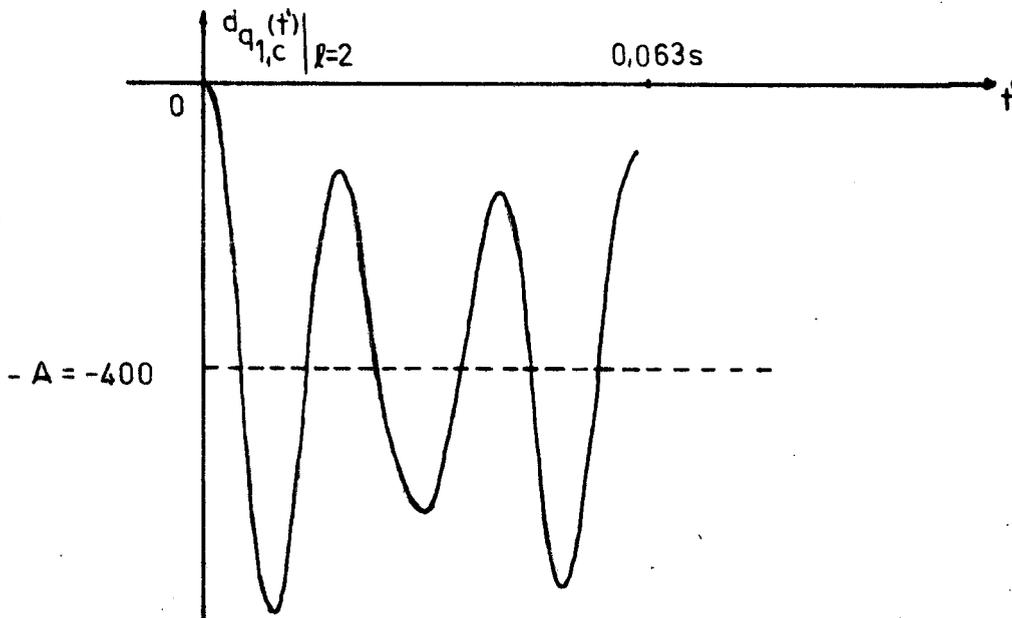
Obs.: A função de decaimento aleatório calculada para dois graus de liberdade é dada pela notação, $d_{q_{1,c}}(t') \Big|_{\ell=2}$, e devido às limitações computacionais foram considerados só 64 pontos.

a - Frequências próximas (fenômeno de batimento muito aparente)

Período de amostragem, $T = 0,001 \text{ s}$

1.ª frequência natural, $\omega_1 = 300 \text{ rd/s}$

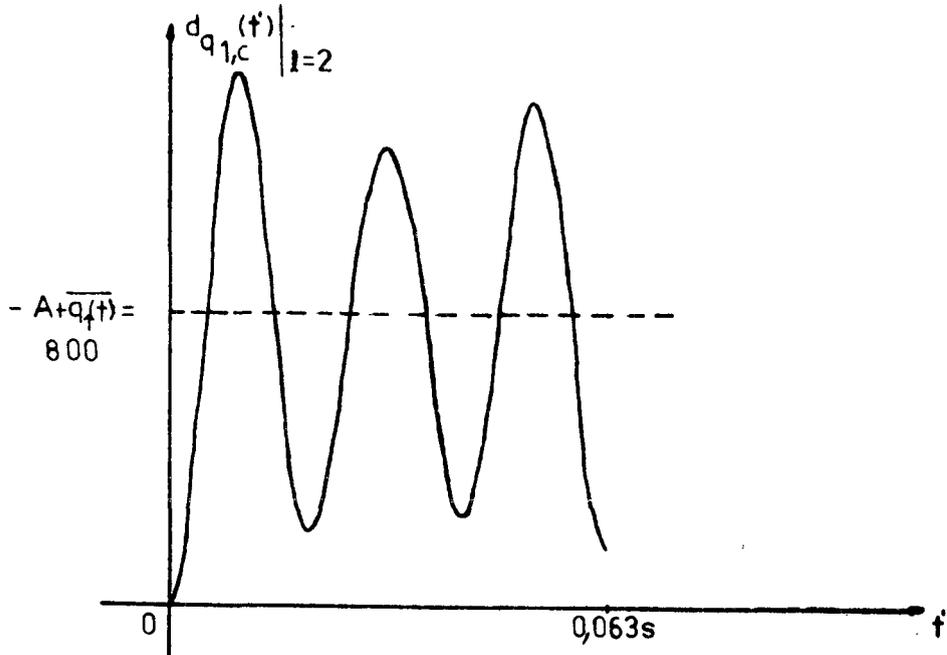
2.ª frequência natural, $\omega_2 = 400 \text{ rd/s}$



a.1 - Excitações: 1ª e 2ª ruídos coloridos de média nula, $\overline{N_1(t)} = \overline{N_2(t)} = 0$, $\overline{q_1(t)} = 0$, $t_{\text{máx}} = 7,113 \text{ s}$.

Fig. II.4 - Função de decaimento aleatório (sistema de dois graus de liberdade - frequências próximas).

A oscilação ocorre em torno de $-A = -q_1(0) = \sum_{i=1}^2 b_1^{(i)} \psi_i(0)$, e a função está padronizada.



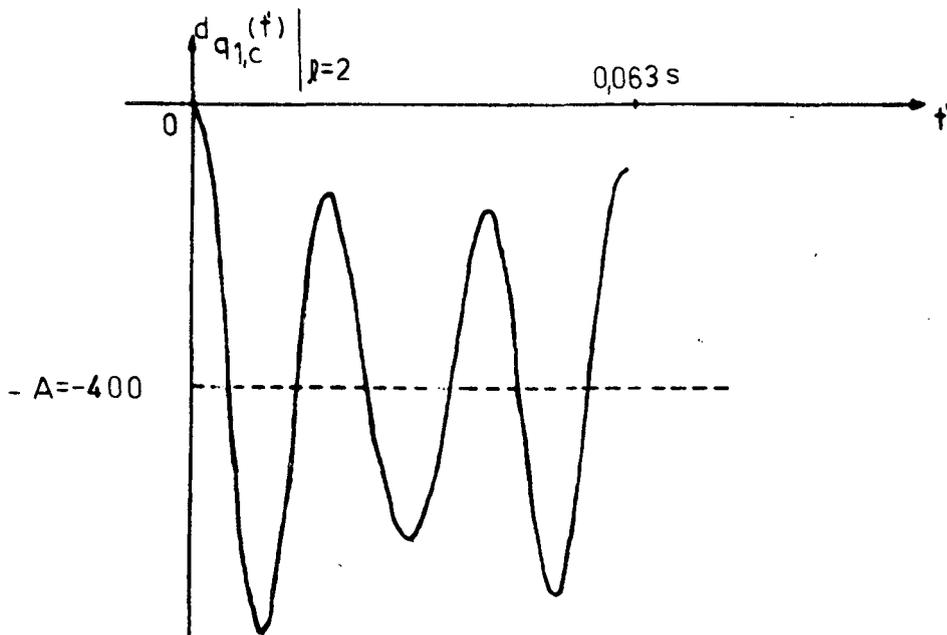
a2 - Excitações: 1ª e 2ª ruídos coloridos de média não nula, $\overline{N_1(t)} \neq 0, \overline{N_2(t)} \neq 0,$
 $\overline{q_1(t)} \neq 0, t_{\text{máx}} = 8,018 \text{ s}$

Sendo $\overline{q_1(t)} = \sum_{i=1}^2 b_1^{(i)} \overline{N_i(t)} \xi_i(t')$, ocorrerão distorções introduzidas pelas

funções $\xi_i(t')$ ($i=1,2$), e a oscilação ficará em torno de

$$\left[-A + \overline{q_1(t)} = -q_1(0) + \overline{q_1(t)} \right]$$

Obs.: O valor médio da resposta do sistema é, $\overline{q_1(t)} = 1200$



a3 - Excitações: 1ª e 2ª ruídos coloridos de média não nula,
 $\overline{N_1(t)} \neq 0, \overline{N_2(t)} \neq 0, \overline{q_1(t)} = 0, t_{\text{máx}} = 7,113 \text{ s}.$

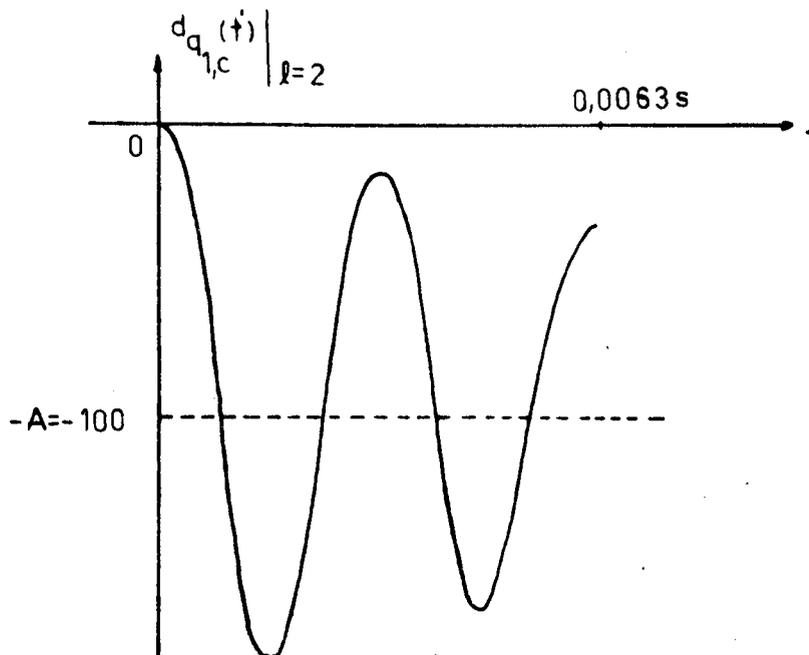
Fig. II.4 - Função de decaimento aleatório (sistema de dois graus de liberdade - frequências próximas).

A função oscila em torno de $-A = -q_1(0)$, pois forçou-se $\overline{q_1(t)} = 0$. As distorções anteriores $\xi_i(t')$ ($i=1,2$) foram canceladas e a função está padronizada. Como anteriormente, Seção II.3.6, esta é a situação prática, onde não é preciso conhecer a entrada, e a função é a mesma do caso a1.

b - Frequências afastadas (modo dominante)

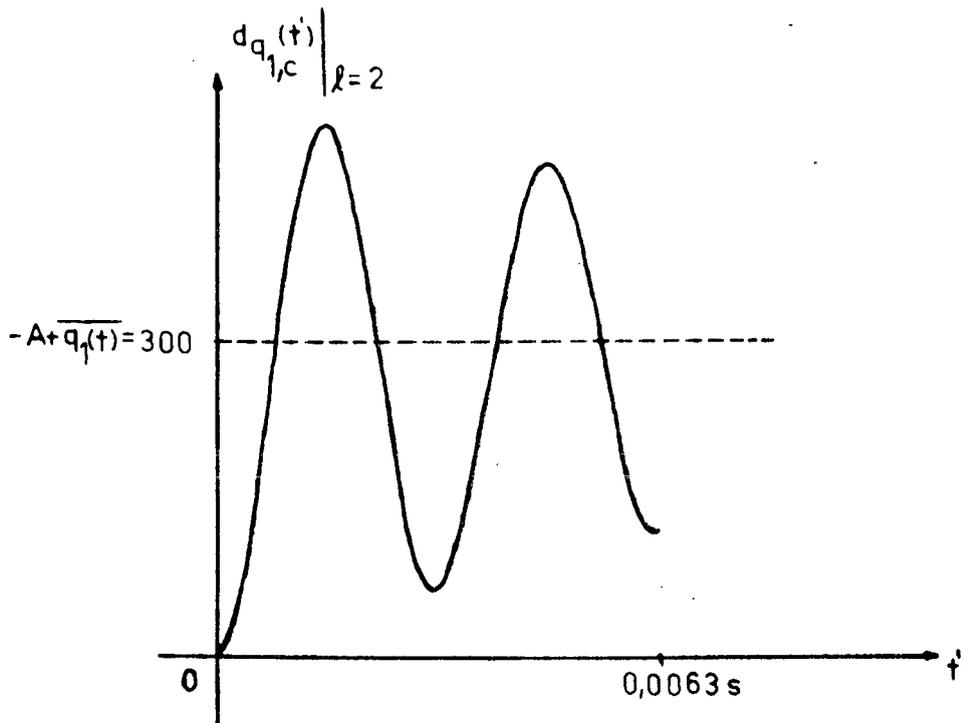
Considerando os casos anteriores com, $\omega_1 = 300$ rd/s, $\omega_2 = 2000$ rd/s, $T = 0,0001$ s, tem-se:

analogamente ao caso a1



b1 - Excitações: 1ª e 2ª ruídos coloridos de média nula, $\overline{N_1(t)} = \overline{N_2(t)} = 0, \overline{q_1(t)} = 0$
 $t_{\text{máx}} = 0,802$ s

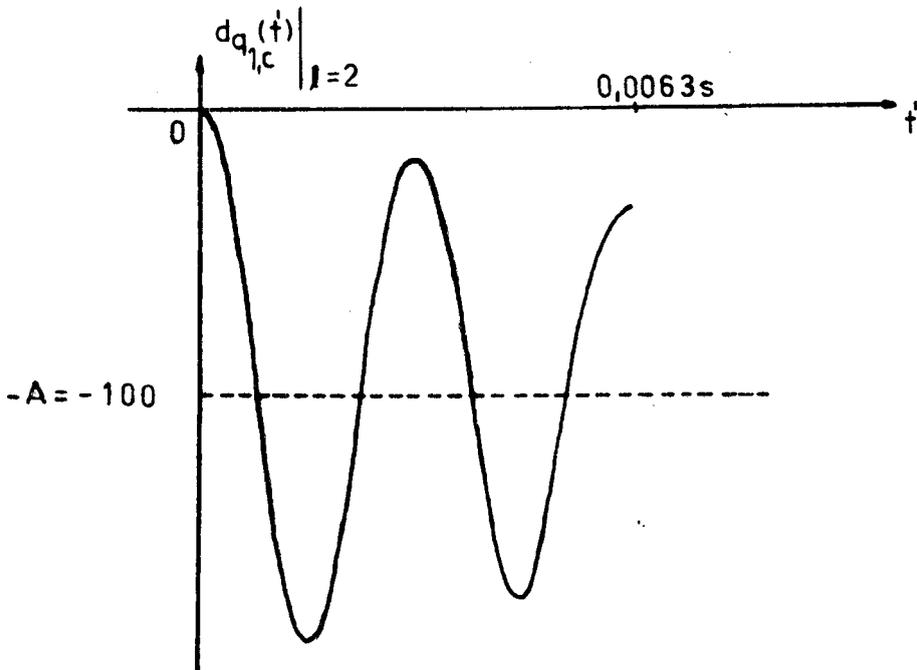
Fig. II.5 - Função de decaimento aleatório (sistema de dois graus de liberdade - frequências afastadas).



b2 - Excitações: 1ª e 2ª ruídos coloridos de média não nula, $\overline{N_1(t)} \neq 0$,

$$\overline{N_2(t)} \neq 0, \overline{q_1(t)} \neq 0, t_{\text{máx}} = 0,814 \text{ s}$$

Obs.: O valor médio da resposta do sistema é, $\overline{q_1(t)} = 400$
analogamente ao caso a3



b3 - Excitações: 1ª e 2ª ruídos coloridos de média não nula, $\overline{N_1(t)} \neq 0$,

$$\overline{N_2(t)} \neq 0, \overline{q_1(t)} = 0, t_{\text{máx}} = 0,802 \text{ s}$$

Obs.: A forma da função neste caso, como no caso b1, se assemelha à de um grau de liberdade.

Fig. II-5 Função de decaimento aleatório (sistema com dois graus de liberdade - frequências afastadas).

II.5 - CONCLUSÃO

Com o desenvolvimento do capítulo verificou-se teoricamente que a função de decaimento aleatório é a resposta livre do sistema de um grau de liberdade sujeito a um deslocamento inicial subtraída deste deslocamento.

Se o sistema for de vários graus de liberdade, a função terá as mesmas características acima; mas neste caso estará relacionada com o somatório das respostas livres referentes aos modos normais.

Se o processo for ergódico e as excitações, ruídos coloridos, a função continuará sendo representativa da resposta livre, bastando anular a média temporal da resposta do sistema.

Na prática para obtermos a função com as características acima, deve-se considerar um número de trechos e um nível de seleção adequados.

CAPÍTULO III

ANÁLISE DA FUNÇÃO DECREMENTO ALEATÓRIO

III.1 - INTRODUÇÃO

Sabe-se que a função de decremento aleatório resulta de uma média feita sobre trechos retirados da resposta do sistema N, onde estes trechos são retirados considerando-se um determinado nível de seleção A.

Escolhendo A e N convenientes, vê-se que a relação (sinal-ruído) aumenta, o que evidencia os parâmetros característicos do sistema.

Serão considerados agora alguns métodos para identificação do sistema:

- a - Método do decremento logarítmico
- b - Método de largura de banda para o ponto de meia potência
- c - Método dos mínimos quadrados | 5 |.

Para sistemas de um grau de liberdade e pequenos amortecimentos todos os métodos são válidos, mas se os amortecimentos forem maiores o método de largura de banda para o ponto de meia potência fica prejudicado.

Para sistemas de vários graus de liberdade, encontra-se o fenômeno de batimento, neste caso, a melhor solução é separar os modos, usando-se o método dos mínimos quadrados.

Considera-se o processo ergódico, sendo a excitação um ruído colorido de média não nula. Anula-se a média da resposta do sistema e soma-se o nível de seleção A à função de decaimento aleatório. Pode-se então comparar a função com a resposta livre, relativa à condição inicial de deslocamento.

III.2 - SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE

Considerando $d_y^*(t') = d_y(t') + A$, e usando (II.35), onde $A = y(0)$, $\overline{y(t)} = 0$, tem-se:

$$d_y^*(t') = \frac{A}{(1-\eta_1^2)^{1/2}} e^{-\eta_1 \omega_1 t'} \cos(\omega_1^* t' - \phi_1) \quad (t' \geq 0)$$

$$\omega_1^* = \omega_1 (1-\eta_1^2)^{1/2} \quad (\text{III.1})$$

$$\phi_1 = \text{arctg} \frac{\eta_1}{(1-\eta_1^2)}$$

III.2.1 - Método do decaimento logarítmico

Com o índice c indicando valor calculado e o decaimento logarítmico definido por:

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \frac{d_{y_1}^*}{d_{y_{1+j}}^*} \quad (j=1,2,3,\dots) \quad (\text{III.2})$$

$$\text{onde } d_{y_1}^* = A = d_{y_c}^*(0)$$

$d_{y_{1+j}}^*$ ($j=1,2,3\dots$), é a amplitude dos picos positivos seguintes.

j , é o número de picos negativos, entre as amplitudes tomadas.

o fator de amortecimento calculado é:

$$\eta_{1,c} = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad (\text{III.3})$$

Sendo $\Delta t'$, o intervalo de tempo entre $d_{y_1}^*$ e $d_{y_{1+j}}^*$, a frequência natural calculada é:

$$\omega_{1,c} = \frac{2\pi j}{\Delta t' (1 - \eta_{1,c}^2)^{1/2}} \quad (\text{III.4})$$

para pequenos amortecimentos, δ é pequeno, e (III.3) e (III.4) ficam:

$$\eta_{1,c} \approx \frac{\delta}{2\pi} \quad (\text{III.5})$$

$$\omega_{1,c} \approx \frac{2\pi j}{\Delta t'} \quad (\text{III.6})$$

neste caso a amplitude tem variação linear com o período de oscilação.

a - Cálculo dos parâmetros (pequenos amortecimentos, $\eta_1 < 0,05$)

Considerando o caso a_3 , Sec. II.3.6, onde somamos o nível de seleção A à função, tem-se:

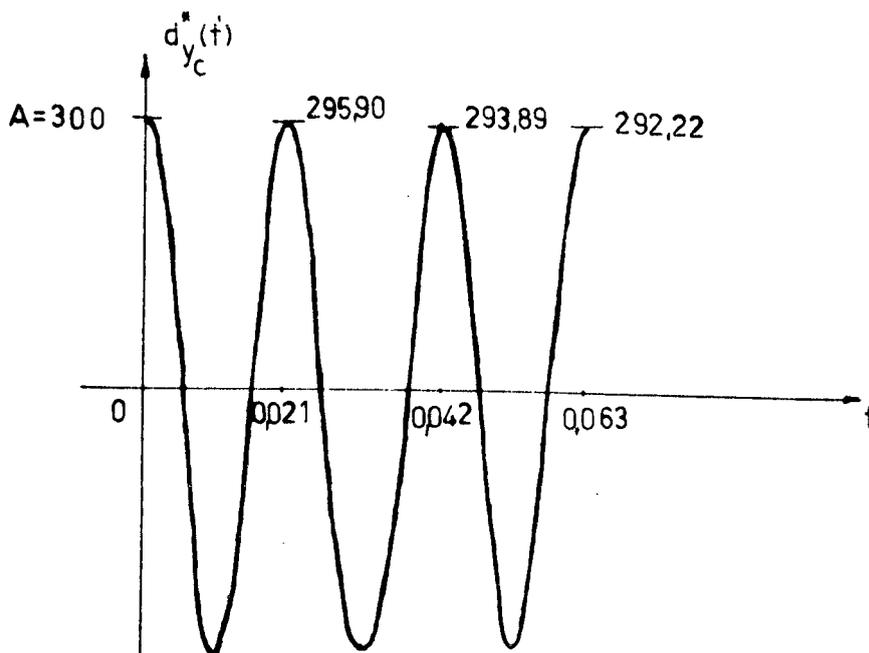


Figura III.1 (Função de decreimento aleatório $+A$), $(\overline{y(t)}=0)$, $(\eta_1 < 0,05)$

Neste caso é indiferente o uso das fórmulas (III.3) e (III.4) ou (III.5) e (III.6). Usando (III.5) e (III.6) forma-se a tabela:

j	1	2	3	valor médio
$\eta_{1,c}$	0,00219	0,00164	0,00139	0,00174
$\omega_{1,c}$ (rd/s)	299,199	299,199	299,199	299,199

Tabela III.1 Parâmetros calculados para diferentes valores de pico (fórmula para pequenos amortecimentos)

b - Cálculo dos parâmetros (amortecimentos maiores que 0,05)

Considerando o caso b.3, Seção II.3.6, onde é somado o nível de seleção A à função, tem-se:

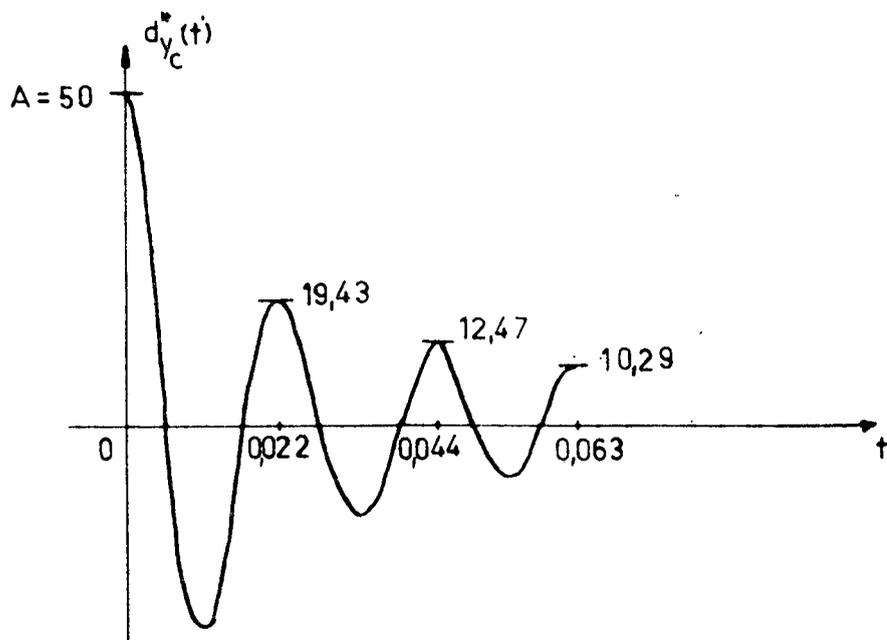


Figura III.2 (Função de decaimento aleatório $+A$), $(\overline{y(t)} = 0)$,
($\eta_1 > 0,05$)

Neste caso os valores encontrados por (III.5) e (III.6), teriam menos consistência, pois tem-se pequenas não linearidades na variação da amplitude com o período de oscilação. Usando (III.3) e (III.4) forma-se a tabela.

j	1	2	3	valor médio
$\eta_{1,c}$	0,148	0,109	0,084	0,114
$\omega_{1,c}$ (rd/s)	288,813	287,338	300,249	292,133

Tabela III.2 - Parâmetros calculados para diferentes valores de pico (fórmula geral).

Obs.: A consistência nos valores calculados para os parâmetros, ($\omega_{1,c}$ e $\eta_{1,c}$ = constante para $j=1,2,\dots$) indicam um comprimento de registro confiável para a função de decaimento aleatório. Sabendo-se que os parâmetros usados pelo sistema simulado foram, $\omega_1 = 300$ rd/s, $\eta_1 = 0,001$ para pequenos amortecimentos e $\eta_1 = 0.1$ para amortecimentos maiores, vê-se que a diferença entre estes e os calculados diminuem com o aumento de j , podendo-se considerar como calculados os últimos valores quando ($j=3$). No caso considerou-se os valores médios.

- A Tabela III.1 e III.2 indicam um comprimento de registro de três períodos de oscilação. No artigo de Cole [4] ele considerou quatro oscilações. Mais comentários sobre os resultados serão feitos na seção III.3.

III.22-Método de largura de banda para o ponto de meia potência

Considera-se $D_{y_c}^*(f)$ a transformada de Fourier de (III.1), e seu módulo $|D_{y_c}^*(f)|$.

Para pequenos amortecimentos a frequência natural calculada é dada por:

$$\omega_{1,c} = 2\pi f_{1 \text{ pico}} \quad (\text{III.7})$$

onde $f_{1 \text{ pico}}$ é a frequência de pico de $|D_{y_c}^*(f)|$, e o fator de amortecimento é:

$$\eta_{1,c} = \frac{\Delta f_1}{2f_{1,c}} = \frac{f_{1 \text{ máx}} - f_{1 \text{ mín}}}{2f_{1,c}} \quad (\text{III.8})$$

onde Δf_1 é a largura de banda do sistema para os pontos de meia potência, que são dados por:

$$|D_{y_c}^*(f_{1 \text{ máx}})| = |D_{y_c}^*(f_{1 \text{ mín}})| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |D_{y_c}^*(f_{1 \text{ pico}})|$$

a - Cálculo dos parâmetros (pequenos amortecimento, $\eta_1 < 0,05$)

O módulo da transformada de Fourier da função dada pela Figura III.1 é:

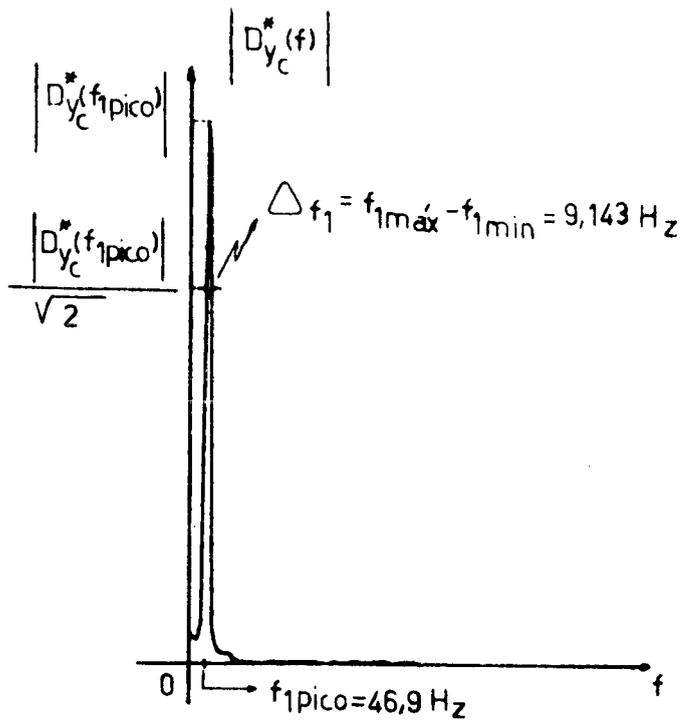


Figura III.3 Função decremento aleatório na frequência
($\eta_1 < 0,05$)

Usando (III.7) e (III.8) tem-se para os valores dos parâmetros:

$$\omega_{1,c} = 294,681 \text{ rd/s}$$

$$\eta_{1,c} = 0,0975$$

Obs.: Comentários sobre os resultados serão feitos na seção III.3.

Obs.: A exatidão no cálculo dos parâmetros para amortecimentos maiores que 0,05, fica comprometida, pois neste caso $\omega_{1,c} \neq 2\pi f_{1\text{pico}}$

III.2.3 - Método dos mínimos quadrados

$$\text{Fazendo } D_1 = \frac{A}{(1-\eta_1^2)^{1/2}} \text{ e } \alpha_1 = -\eta_1\omega_1, \quad (\text{III.1})$$

pode ser escrita como:

$$d_y^*(t') = D_1 e^{\alpha_1 t'} \cos(\omega_1^* t' - \phi_1) \quad t' \geq 0 \quad (\text{III.9})$$

Este é um método iterativo que tem como objetivo determinar as sucessivas correções necessárias para estimação dos parâmetros de (III.9).

Ao contrário do método usual que utiliza o critério dos mínimos quadrados diretamente, este método resulta em um conjunto de equações lineares que tem solução analítica conhecida.

(III.9) pode ser escrita simbolicamente como:

$$d_y^* = d_y^*(t') = d_y^*(t', D_1, \alpha_1, \omega_1^*, \phi_1) \quad (\text{III.10})$$

sendo $d_{y_c}^*(t'_k)$ ($k = 1, 2, \dots, K$) os K pontos dados, pode-se definir os resíduos $r(t'_k)$ como:

$$r(t'_k) = d_y^*(t'_k, D_1, \alpha_1, \omega_1^*, \phi_1) - d_{y_c}^*(t'_k) \quad (\text{III.11})$$

$$(k = 1, 2, \dots, K)$$

Sendo dado os valores iniciais $D_{10}, \alpha_{10}, \omega_{10}^*, \phi_{10}$ para os parâmetros verdadeiros $D_1, \alpha_1, \omega_1^*, \phi_1$, estes podem ser expressos como:

$$\begin{aligned} D_1 &= D_{10} + \Delta D_1 \\ \alpha_1 &= \alpha_{10} + \Delta \alpha_1 \\ \omega_1^* &= \omega_{10}^* + \Delta \omega_1^* \\ \phi_1 &= \phi_{10} + \Delta \phi_1 \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

onde $\Delta D_1, \Delta \alpha_1, \Delta \omega_1^*, \Delta \phi_1$ são as correções a serem determinadas.

Substituindo (III.12) em (III.11) e passando para o lado esquerdo da igualdade $d_{y_c}^*(t'_k)$, pode-se escrever as equações residuais:

$$r(t'_k) + d_{y_c}^*(t'_k) = d_{y_c}^*(t'_k, D_{10} + \Delta D_1, \alpha_{10} + \Delta \alpha_1, \omega_{10}^* + \Delta \omega_1^*, \phi_{10} + \Delta \phi_1) \quad (\text{III.13})$$

$$(k = 1, 2, \dots, K)$$

considerando $d_{y_c}^*(t'_k, D_{10} + \Delta D_1, \alpha_{10} + \Delta \alpha_1, \omega_{10}^* + \Delta \omega_1^*, \phi_{10} + \Delta \phi_1)$ função de $D_1, \alpha_1, \omega_1^*, \phi_1$, para um dado $t' = t'_k$, e sabendo que todas as derivadas parciais existem e são contínuas na região $0 \leq t' \leq 1$, a expansão em série de Taylor em torno do ponto $(D_{10}, \alpha_{10}, \omega_{10}^*, \phi_{10})$ é:

$$r(t'_k) + d_{y_c}^*(t'_k) = d_{y_c}^*(t'_k, D_{10}, \alpha_{10}, \omega_{10}^*, \phi_{10}) + \Delta D_1 \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1} \right)_o + \Delta \alpha_1 \left(\frac{\partial d^*}{\partial \alpha_1} \right)_o + \Delta \omega_1^* \left(\frac{\partial d^*}{\partial \omega_1^*} \right)_o + \Delta \phi_1 \left(\frac{\partial d^*}{\partial \phi_1} \right)_o + \sum_{j=1}^{\infty} R_j$$

$$(k = 1, 2, \dots, K) \quad (\text{III.14})$$

onde

$$R_j = \frac{1}{j!} \left[\left(\Delta D_1 \frac{\partial}{\partial D_1} + \Delta \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \Delta \omega_1^* \frac{\partial}{\partial \omega_1^*} + \Delta \phi_1 \frac{\partial}{\partial \phi_1} \right)^j d_{y_c}^*(t'_k, D_{10}, \alpha_{10}, \omega_{10}^*, \phi_{10}) \right]_o$$

e o símbolo "o" significa que depois da diferenciação os valores numéricos das derivadas parciais são calculados para $t' = t'_k, D_1 = D_{10}, \omega_1^* = \omega_{10}^*, \phi_1 = \phi_{10}$.

Como $(\Delta D_1, \Delta \alpha_1, \Delta \omega_1^*, \Delta \phi_1) \ll 1$, e todas as derivadas parciais são limitadas, os termos R_j tendem a zero, podendo ser despre-

zados.

Considerando $\lambda_1(t'_k) = d^*(t'_k, D_{10}, \alpha_{10}, \omega_{10}^*, \phi_{10}) - d^*(t'_k)$, e sabendo que $R_j \approx 0$ ($j = 2, 3, \dots$) (III.14) pode ser escrita como:

$$r(t'_k) = \Delta D_1 \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1} \right)_0 + \Delta \alpha_1 \left(\frac{\partial d^*}{\partial \alpha_1} \right)_0 + \Delta \omega_1^* \left(\frac{\partial d^*}{\partial \omega_1^*} \right)_0 + \Delta \phi_1 \left(\frac{\partial d^*}{\partial \phi_1} \right)_0 + \lambda_1(t'_k) \quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (\text{III.15})$$

(III.15) é um conjunto de K equações residuais as quais são lineares para as correções ΔD_1 , $\Delta \alpha_1$, $\Delta \omega_1^*$, $\Delta \phi_1$.

Usando o critério dos mínimos quadrados tem-se:

$$\sum_{k=1}^K r^2(t'_k) = \text{mínimo}$$

e será satisfeito quando as derivadas parciais de primeira ordem em relação a todas as incógnitas, calculadas no ponto $(D_{10}, \alpha_{10}, \omega_{10}^*, \phi_{10})$, forem iguais a zero.

Derivando parcialmente em relação a ΔD_1 tem-se

$$\frac{\partial}{\partial \Delta D_1} \sum_{k=1}^K r^2(t'_k) = \sum_{k=1}^K \frac{\partial r^2(t'_k)}{\partial \Delta D_1} = 0 \quad (\text{III.16})$$

Substituindo (III.15) em (III.16) fica-se com:

$$\sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1} \right)_o \left[\Delta D_1 \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1} \right)_o + \Delta \alpha_1 \left(\frac{\partial d^*}{\partial \alpha_1} \right)_o + \Delta \omega_1^* \left(\frac{\partial d^*}{\partial \omega_1^*} \right)_o + \Delta \phi_1 \left(\frac{\partial d^*}{\partial \phi_1} \right)_o + \lambda_1 (t'_k) \right] = 0 \quad (\text{III.17})$$

rearranjando tem-se:

$$\begin{aligned} - \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1} \right)_o \lambda_1 (t'_k) = & \Delta D_1 \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1} \right)_o^2 + \Delta \alpha_1 \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1} \right)_o \left(\frac{\partial d^*}{\partial \alpha_1} \right)_o + \\ & + \Delta \omega_1^* \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1} \right)_o \left(\frac{\partial d^*}{\partial \omega_1^*} \right)_o + \Delta \phi_1 \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1} \right)_o \left(\frac{\partial d^*}{\partial \phi_1} \right)_o \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Procedendo de forma análoga para as outras correções, $\Delta \alpha_1$, $\Delta \omega_1^*$, $\Delta \phi_1$, forma-se um conjunto de quatro equações lineares com quatro incógnitas. O valor numérico das correções pode ser obtido matricialmente, ou seja:

$$\underline{Ax} = \underline{b} \quad (\text{III.19})$$

isto é, determina-se o vetor \underline{x} tal que (III.17) seja satisfeita onde:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \Delta D_1 \\ \Delta \alpha_1 \\ \Delta \omega_1^* \\ \Delta \phi_1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1}\right)_0^2 & \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1}\right)_0 \left(\frac{\partial d^*}{\partial \alpha_1}\right)_0 & \dots & \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1}\right)_0 \left(\frac{\partial d^*}{\partial \phi_1}\right)_0 \\ \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial d^*}{\partial \alpha_1}\right)_0 \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1}\right)_0 & \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial d^*}{\partial \alpha_1}\right)_0^2 & \dots & \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial d^*}{\partial \alpha_1}\right)_0 \left(\frac{\partial d^*}{\partial \phi_1}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial d^*}{\partial \phi_1}\right)_0 \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1}\right)_0 & \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial d^*}{\partial \phi_1}\right)_0 \left(\frac{\partial d^*}{\partial \alpha_1}\right)_0 & \dots & \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial d^*}{\partial \phi_1}\right)_0^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

$$\underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1}\right)_0 \lambda_1(t'_k) \\ \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial d^*}{\partial \alpha_1}\right)_0 \lambda_1(t'_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial d^*}{\partial \phi_1}\right)_0 \lambda_1(t'_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1}\right)_0 \left[d_{y_c}^*(t'_k) - d_y^*(t'_k, D_{10}, \dots, \phi_{10}) \right] \\ \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial d^*}{\partial \alpha_1}\right)_0 \left[d_{y_c}^*(t'_k) - d_y^*(t'_k, D_{10}, \dots, \phi_{10}) \right] \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\mathcal{K}} \left(\frac{\partial d^*}{\partial \phi_1}\right)_0 \left[d_{y_c}^*(t'_k) - d_y^*(t'_k, D_{10}, \dots, \phi_{10}) \right] \end{bmatrix}$$

(III.22)

Como truncou-se a série de Taylor, (III.14), as correções calculadas ΔD_1 , $\Delta \alpha_1$, $\Delta \omega_1^*$, $\Delta \phi_1$, tem valores aproximados, somando-as agora aos valores iniciais D_{10} , α_{10} , ω_{10}^* , ϕ_{10} , tem-se novos valores iniciais, podendo-se repetir novamente o processo.

O processo é repetido até que os valores incrementais estejam suficientemente pequenos, por exemplo:

$$\max(|\Delta D_1 / D_{10}|, |\Delta \alpha_1 / \alpha_{10}|, |\Delta \omega_1^* / \omega_{10}^*|, |\Delta \phi_1 / \phi_{10}|) \leq 10^{-4} \quad (\text{III.23})$$

Para ter-se uma rápida convergência é necessário que a estimativa inicial do fator de amortecimento η_1 , e da frequência natural ω_1 , estejam próximos dos valores verdadeiros, porque os parâmetros em questão dependem destes.

III.3 - COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS CALCULADOS E OS PARÂMETROS DO SISTEMA

a - Pequenos amortecimentos ($\eta_1 < 0,05$)

SISTEMA		MÉTODO a		MÉTODO b	
η_1	ω_1 (rd/s)	$\eta_{1,c}$	$\omega_{1,c}$ (rd/s)	$\eta_{1,c}$	$\omega_{1,c}$ (rd/s)
0,001	300	0,00174	299,199	0,0975	294,681

Tabela III.3

Obs.: Neste caso pode-se verificar que o fator de amortecimento calculado pelo método "a" é impreciso, (erro%=74%), e pelo método "b" é muito inconsistente. Para as frequências encontra-se bons resultados, o método "a" indica um erro% de 0,3% e o método "b" 1,7%.

b - Amortecimentos maiores que 0,05

SISTEMA		MÉTODO a		MÉTODO b	
η_1	ω_1 (rd/s)	$\eta_{1,c}$	$\omega_{1,c}$ (rd/s)	$\eta_{1,c}$	$\omega_{1,c}$ (rd/s)
0,1	300	0,114	292,133	—	—

Tabela III.4

Obs.: Neste caso o método "a" apresenta um resultado razoável para o fator de amortecimento, (erro % = 14%), e a frequência encontrada é boa, (erro % = 2,7%). O método "b" não pode ser aplicado. Não foi estabelecido um critério para o erro percentual mas os valores acima dão uma boa idéia das precisões alcançadas.

- Devido a limitações computacionais usou-se só 64 pontos para a função de decaimento aleatório, o que prejudicou o cálculo dos parâmetros. Para maiores detalhes ver apêndice E. Os espectros da excitação serão dados no apêndice F.

- Usando-se um maior número de pontos, ou considerando-se outros exemplos de sistemas teriam-se algumas modificações nas conclusões, mas sempre ocorreriam casos onde a determinação dos parâmetros é bastante imprecisa. Não foram feitos cálculos dos parâmetros usando-se o método dos mínimos quadrados mas este seria uma boa solução pois apresenta em qualquer dos casos resultados consistentes, [5].

III.4 - SISTEMA DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE (PEQUENOS AMORTECIMENTOS)

Considerando $d_{q_1}^*(t') \Big|_{\ell=2} = d_{q_1}(t') \Big|_{\ell=2} + A$, e usando (II.63), onde:

$$A = q_1(0) = \sum_{i=1}^2 b_1^{(i)} \psi_i(0), \quad \overline{q_1(t)} = \sum_{i=1}^2 b_1^{(i)} \overline{\psi_i(t)} = 0, \text{ tem-se:}$$

$$d_{q_1}^*(t') \Big|_{\ell=2} = \frac{A_1}{(1-\eta_1^2)^{1/2}} e^{-\eta_1 \omega_1 t'} \cos(\omega_1^* t' - \phi_1) + \frac{A_2}{(1-\eta_2^2)^{1/2}} e^{-\eta_2 \omega_2 t'} \cos(\omega_2^* t' - \phi_2) \quad (\text{III.24})$$

$$\omega_1^* = (1-\eta_1^2)^{1/2} \quad \omega_2^* = (1-\eta_2^2)^{1/2}$$

$$\phi_1 = \arctg \frac{\eta_1}{(1-\eta_1^2)^{1/2}} \quad \phi_2 = \arctg \frac{\eta_2}{(1-\eta_2^2)^{1/2}}$$

Sendo

$$A_1 = b_1^{(1)} \psi_1(0) \quad e \quad A_2 = b_1^{(2)} \psi_2(0)$$

Obs.: Para ter-se desacoplamento entre as equações diferenciais do movimento, considera-se sempre pequenos amortecimentos, (η_1 e $\eta_2 < 0,05$).

III.4.1- Método do decremento logarítmico

Sabe-se que este método pressupõe um de-
crescimento exponencial para ter-se possibilidade de calcular
os parâmetros. Se o sistema tiver vários graus de liberdade,
ocorreram não linearidades introduzidas pelo fenômeno de batimen-
to, comprometendo a consistência dos parâmetros calculados, o que
torna o método inviável.

Se o sistema é de dois graus de liberdade e
contém frequências um pouco próximas, ocorrerá um forte fenô-
meno de batimento, figura III.5, evidenciando a inviabilidade
do método.

Considerando o caso a3, Seção II.4.3, onde
é somado o nível de seleção A à função tem-se:

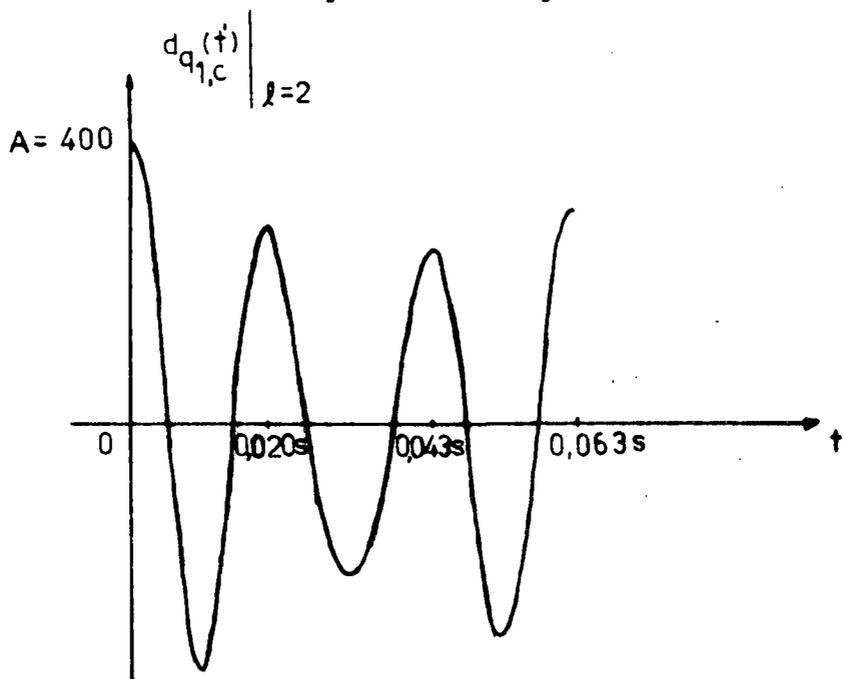


Figura III.5 Função de decremento aleatório $+A$, $(\overline{q_1(t)}=0)$, (fre-
quências próximas).

Mas se as frequências forem muito afastadas, a função se assemelha à do sistema de um grau de liberdade. Neste caso, por interesse didático, pode-se calcular os parâmetros.

Sendo $\eta_{12,c}$ e $\omega_{12,c}$ os parâmetros calculados, pode-se ver pela Tabela III.5, que estes se aproximam dos parâmetros referentes ao segundo modo, η_2 e ω_2 .

Considerando o caso b3, seção II.4.3, onde soma-se o nível de seleção A à função tem-se:

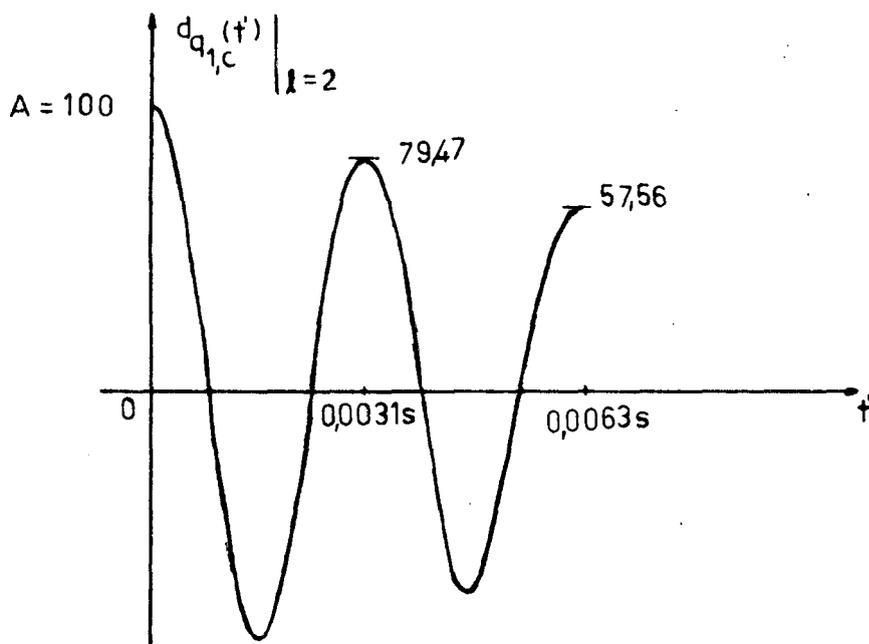


Figura III.6 - (Função decaimento aleatório +A), $(\overline{q(t)} = 0)$,
(Frequências afastadas).

analogamente a (III.5) e (III.6) tem-se:

$$\eta_{12,c} \cong \frac{\delta}{2\pi}$$

(III.25)

$$\omega_{12,c} \cong \frac{2\pi j}{\Delta t'}$$

e pode-se formar a tabela:

j	1	2	Valor Médio
$\eta_{12,c}$	0,0366	0,0439	0,0402
$\omega_{12,c}^{(rd/s)}$	2026,834	1994,662	2010,748

Tabela III.5 - Parâmetros calculados para diferentes valores de pico (frequências afastadas).

Obs.: Neste caso também foram considerados os valores médios. Comentários sobre os resultados serão feitos na seção III.5.

III.4.2- Método de largura de banda para o ponto de meia potência

Sendo $D_{q_{1,c}}^*(f) \Big|_{\ell=2}$ a transformada de Fourier

de (III.24), e o seu módulo $\left| D_{q_{1,c}}^*(f) \right|_{\ell=2}$, tem-se:

$$\left| D_{q_{1,c}}^*(f) \right|_{\ell=2} = \left| D_{q_{1,c}}^*(f) \right|_1 + \left| D_{q_{1,c}}^*(f) \right|_2 \quad (\text{III.26})$$

Onde $\left| D_{q,1,c}^* (f) \right|_1$ e $\left| D_{q,1,c}^* (f) \right|_2$ são os módulos da transformada de Fourier dos termos à direita da igualdade de (III.24).

Analogamente à um grau de liberdade as frequências naturais calculadas, considerando pequenos amortecimentos, são:

$$\omega_{1,c} = 2\pi f_{1\text{pico}} \quad (\text{III.27})$$

$$\omega_{2,c} = 2\pi f_{2\text{pico}}$$

e os fatores de amortecimentos são dados por:

$$\eta_{1,c} = \frac{f_{1\text{máx}} - f_{1\text{min}}}{2f_{1,c}} = \frac{\Delta f_1}{2f_{1,c}} \quad (\text{III.28})$$

$$\eta_{2,c} = \frac{f_{2\text{máx}} - f_{2\text{min}}}{2f_{2,c}} = \frac{\Delta f_2}{2f_{2,c}}$$

b.1 - Cálculo dos parâmetros (frequências próximas)

O módulo da transformada de Fourier da função dada pela Figura III.5 é:

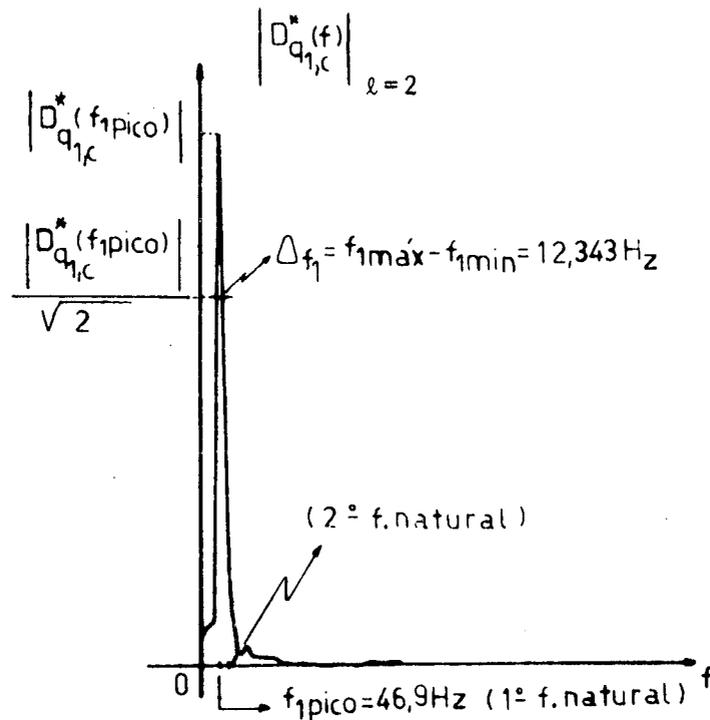


Figura III.7 Função de decremento aleatório na frequência (frequências próximas).

Na Figura III.7 observa-se que para o segundo modo, é impossível obter os parâmetros calculados. Usando (III.27) e (III.28) para o primeiro modo obtêm-se:

$$\eta_{1,c} = 0,1316$$

$$\eta_{2,c} = \text{---}$$

$$\omega_{1,c} = 294,681 \text{ rd/s}$$

$$\omega_{2,c} = \text{---}$$

b.2 - Calculo dos parâmetros (frequências afastadas)

O módulo da transformada de Fourier da função dada pela Figura III.6 é:

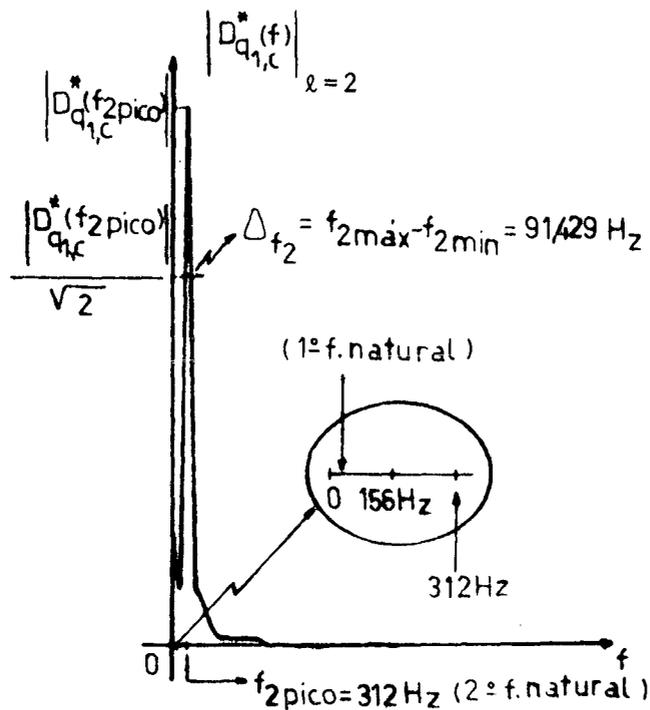


Figura III.8 Função decremento aleatório na frequência (frequências afastadas)

Na Figura III.8 observamos que para o primeiro modo, é impossível obter os parâmetros calculados. Usando (III.27) e (III.28) para o segundo modo obtem-se:

$$\eta_{1,c} = \text{---}$$

$$\eta_{2,c} = 0,1465$$

$$\omega_{1,c} = \text{---}$$

$$\omega_{2,c} = 1960,354 \text{ rd/s}$$

Obs.: Mais comentários sobre os resultados serão feitos na seção III.5.

III.4.3- Método dos mínimos quadrados

$$\text{Fazendo } D_1 = \frac{A_1}{(1-\eta_1^2)^{1/2}}, \quad D_2 = \frac{A_2}{(1-\eta_2^2)^{1/2}} \quad e$$

$\alpha_1 = -\eta_1 \omega_1$, $\alpha_2 = -\eta_2 \omega_2$ (III.24) pode ser escrita como:

$$d_{q_1}^*(t') \Big|_{\ell=2} = D_1 e^{\alpha_1 t'} \cos(\omega_1^* t' - \phi_1) + D_2 e^{\alpha_2 t'} \cos(\omega_2^* t' - \phi_2) \quad (\text{III.29})$$

$$t' \geq 0$$

Sendo os valores iniciais $D_{10}, \alpha_{10}, \dots, \phi_{20}$, as correções a serem determinadas $\Delta D_1, \Delta \alpha_1, \dots, \Delta \phi_2$, e os k pontos dados $d_{q_{1,c}}^*(t'_k) \Big|_{\ell=2}$ ($k = 1, 2, \dots, K$).

$$e \text{ ainda definindo } \lambda_2(t'_k) = d_{q_1}^*(t'_k, D_{10}, \alpha_{10}, \dots, \phi_{20}) \Big|_{\ell=2} -$$

$$- d_{q_{1,c}}^*(t'_k) \Big|_{\ell=2}$$

Analogamente a um grau de liberdade, forma-se um conjunto de oito equações lineares com oito incógnitas. O valor numérico das correções podem ser obtidos matricialmente, ou seja:

$$C \underline{z} = \underline{d} \quad (\text{III.30})$$

isto \bar{e} , determina-se o vetor \underline{z} tal que (III.30) seja satisfeita, onde:

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \Delta D_1 \\ \Delta \alpha_1 \\ \vdots \\ \Delta \phi_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

$$C = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1} \Big|_{q_1, l=1} \right)^2 & \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1} \Big|_{q_1, l=1} \right) \left(\frac{\partial d^*}{\partial \alpha_1} \Big|_{q_1, l=2} \right) & \dots & \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1} \Big|_{q_1, l=2} \right) \left(\frac{\partial d^*}{\partial \phi_2} \Big|_{q_1, l=2} \right) \\ \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d^*}{\partial \alpha_1} \Big|_{q_1, l=2} \right) \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1} \Big|_{q_1, l=2} \right) & \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d^*}{\partial \alpha_1} \Big|_{q_1, l=2} \right)^2 & \dots & \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d^*}{\partial \alpha_1} \Big|_{q_1, l=2} \right) \left(\frac{\partial d^*}{\partial \phi_2} \Big|_{q_1, l=2} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d^*}{\partial \phi_2} \Big|_{q_1, l=2} \right) \left(\frac{\partial d^*}{\partial D_1} \Big|_{q_1, l=2} \right) & \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d^*}{\partial \phi_2} \Big|_{q_1, l=2} \right) \left(\frac{\partial d^*}{\partial \alpha_1} \Big|_{q_1, l=2} \right) & \dots & \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d^*}{\partial \phi_2} \Big|_{q_1, l=2} \right)^2 \end{bmatrix}$$

(III.32)

$$\underline{d} = - \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d_{q_1}^*}{\partial D_1} \Big|_{\ell=2} \right) \lambda_2(t'_k) \\ \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d_{q_1}^*}{\partial \alpha_1} \Big|_{\ell=2} \right) \lambda_2(t'_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial d_{q_1}^*}{\partial \phi_2} \Big|_{\ell=2} \right) \lambda_2(t'_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^K \frac{\partial d_{q_1}^*}{\partial D_1} \Big|_{\ell=2} \left[d_{q_1,c}^*(t'_k) \Big|_{\ell=2} - d_{q_1}^*(t'_k, D_{10}, \dots, \phi_{20}) \Big|_{\ell=2} \right] \\ \sum_{k=1}^K \frac{\partial d_{q_1}^*}{\partial \alpha_1} \Big|_{\ell=2} \left[d_{q_1,c}^*(t'_k) \Big|_{\ell=2} - d_{q_1}^*(t'_k, D_{10}, \dots, \phi_{20}) \Big|_{\ell=2} \right] \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^K \frac{\partial d_{q_1}^*}{\partial \phi_2} \Big|_{\ell=2} \left[d_{q_1,c}^*(t'_k) \Big|_{\ell=2} - d_{q_1}^*(t'_k, D_{10}, \dots, \phi_{20}) \Big|_{\ell=2} \right] \end{bmatrix}$$

(III.33)

Da mesma forma soma-se as correções calculadas $\Delta D_1, \Delta \alpha_1, \dots, \Delta \phi_2$, aos valores iniciais $D_{10}, \alpha_{10}, \dots, \phi_{20}$ e repete-se o processo até que os valores incrementais estejam suficientemente pequenos, por exemplo:

$$\max(|\Delta D_1/D_{10}|, |\Delta \alpha_1/\alpha_{10}|, \dots, |\Delta \phi_2/\phi_{20}|) \leq 10^{-4} \quad (\text{III.34})$$

III.5 - COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS CALCULADOS E OS PARÂMETROS DO SISTEMA

a - Frequências Próximas

SISTEMA	η_1	ω_1 (rd/s)	η_2	ω_2 (rd/s)
		0,001	300	0,04
Parâmetros Calculados	$\eta_{1,c}$	$\omega_{1,c}$	$\eta_{2,c}$	$\omega_{2,c}$
Método a	-	-	-	-
Método b	0,1316	294,681	-	-

Tabela III.6.

Obs.: Da Tabela III.6 observa-se que o único resultado mais consistente é dado pela frequência natural do primeiro modo calculada pelo método de largura de banda. (erro % = 1,7%). No caso do fator de amortecimento o resultado foi muito impreciso. Não foi possível calcular os outros valores.

b - Frequências Afastadas

SISTEMA	η_1	ω_1 (rd/s)	η_2	ω_2 (rd/s)
		0,001	300	0,04
Parâmetros Calculados	$\eta_{1,c}$	$\omega_{1,c}$	$\eta_{2,c}$	$\omega_{2,c}$
Método a	-	-	0,0402	2010,748
Método b	-	-	0,1465	1960,354

Tabela III.7.

Obs.: Da Tabela III.7 observa-se que:

1. Com o uso do decremento logarítimo foi possível uma de terminação boa dos parâmetros do segundo modo, por este ser neste caso particular, um modo muito dominante. O erro percentual tanto para o fator de amortecimento como para a frequência foi de 0,5%.

2. O uso do método de largura de banda permitiu uma boa determinação da frequência natural do segundo modo (erro % = 2%). No caso do fator de amortecimento o resultado foi bastante impreciso (erro % = 275%). Não foi estabelecido um critério para o erro percentual mas os valores acima dão uma boa idéia das precisões alcançadas.

Obs.: O cálculo dos parâmetros ficou prejudicado pelos pequenos intervalos de amostragem no tempo e pequeno número de pontos considerados para a função de decaimento aleatório, o que resultou em grandes intervalos na frequência. O que escondeu no caso das frequências próximas a frequência natural do 2º modo, e no caso das frequências afastadas a frequência natural do 1º modo. Para maiores detalhes ver apêndice E. Os espectros da excitação serão dados no apêndice F.

- O fato de aumentar-se o intervalo de amostragem no tempo pode reduzir perigosamente o número de pontos por período da função de decaimento e o aumento do número de pontos não é possível no momento devido a limitações computacionais. Mas mesmo se assim fosse feito ou se fossem considerados outros exemplos de sistemas, teriam-se casos onde seria impossível ou bastante imprecisa a determinação dos parâmetros.
- Um critério que pode ser usado para encontrar-se as frequências naturais dos modos seria:

$$f_2 - f_1 > \frac{\Delta f_1}{2} + \frac{\Delta f_2}{2}$$

onde f_1 e f_2 são respectivamente as frequências naturais do 1º e 2º modo, e Δf_1 e Δf_2 são respectivamente a largura de banda para o ponto de meia potência do 1º e 2º modo. Mas mesmo numa situação favorável como essa a consistência na determinação dos fatores de amortecimento ficaria comprometida, e além disso a escolha do número de pontos e o período de amostragem no tempo continuariam sendo importantes.

Obs.:O cálculo dos parâmetros usando o método dos mínimos quadrados não foi feito, mas este seria uma boa solução pois apresenta em qualquer situação resultados consistentes |5|.

III.6 - CONCLUSÃO

Com o desenvolvimento do capítulo verificou-se que mesmo com o uso da função de decaimento aleatório, o método do decaimento logarítmico e o método de largura de banda apresentam problemas quanto à determinação dos parâmetros do sistema.

Inicialmente tem-se um problema no uso do método de largura de banda quando considera-se grandes amortecimentos, pois neste caso a frequência de pico é diferente da frequência natural.

Mas o problema principal surge quando considera-se um sistema com vários graus de liberdade. Neste caso, o método do decaimento logarítmico não pode ser aplicado, a não ser em casos extremos onde existe um modo muito dominante.

Considerando-se ainda, que o sistema tem modos que ocorrem próximos da mesma frequência natural o método de largura de banda se apresenta inconsistente quanto ao cálculo dos fatores de amortecimento.

Este método apresenta ainda problemas de imprecisão quando do uso de um número reduzido de pontos.

Felizmente os problemas na determinação dos parâmetros podem ser solucionados, porque o uso da função decremento aleatório permite a utilização do método dos mínimos quadrados. Este método calcula de forma consistente os parâmetros, mesmo quando os modos têm frequências próximas.

CAPÍTULO IV

DETECÇÃO DE FALHAS

IV.1 - INTRODUÇÃO

Foi visto na capítulo II que, considerando-se um determinado número de trechos retirados N , e sendo o processo ergódico onde anula-se a média temporal da resposta do sistema, a função de decaimento aleatório oscilará em torno do nível de seleção A , sendo A a condição inicial de deslocamento do sistema.

Se agora, para o mesmo ponto do sistema, mantém-se o mesmo nível de seleção A , anterior, e varia-se a excitação aleatória, a forma e a escala da função de decaimento aleatório não se alteram bastando para isso estabelecer-se um novo número de trechos retirados N . Isto ocorre mesmo quando a amplitude não tem variação linear com o período de oscilação, como no caso de sistemas com dois graus de liberdade.

Considerando o fato anterior, a função de decaimento aleatório encontrada quando tinha-se a primeira excitação, pode ser usada para obter-se uma região padrão para a detecção de falhas.

A situação de falha apresentada é dada por uma variação brusca dos parâmetros do sistema.

Serão utilizados como exemplos, sistemas de um grau de liberdade com pequenos amortecimentos, e de dois graus de liberdade com pequenos amortecimentos e frequências próximas.

As excitações dos sistemas são ruídos coloridos de média não nula. Serão anuladas a média das respostas, o que corresponde as situações apresentadas no caso a3 seção II.3.6 para um grau de liberdade e no caso a3 seção II.4.3 para dois graus de liberdade.

O estudo sobre detecção de falhas deve ser mais desenvolvido, podendo-se então observar situações práticas tais como: variações no tempo da função decremento aleatório quando desenvolvem-se na estrutura falhas causadas por fadiga.

IV.2 - SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE (PEQUENOS AMORTECIMENTOS)

IV.2.1 - Estimativa da região padrão para a função decremento aleatório

Sabe-se que, devido as condições iniciais, a função decremento aleatório é uma estimativa do valor médio estatístico de um processo aleatório não estacionário menos o nível de seleção A, assim reescrevendo (II.23) tem-se:

$$d_y(t') = E[y_n(t') - A] \quad (t' \geq 0) \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

ou

$$d_y(t') = E[y_n(t')] - A \quad (t' \geq 0) \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{IV.1})$$

onde o valor médio do processo pode ser dado por:

$$\mu_y(t') = E[y_n(t')] = \int_{-\infty}^{\infty} p(y_n(t')) y_n(t') dy_n \quad (t' \geq 0) \quad (\text{IV.2})$$

$$(n = 1, 2, \dots, N)$$

sendo $y_n(t')$ e $p(y_n(t'))$ ($n = 1, 2, \dots, N$) respectivamente a função amostra e a função densidade da probabilidade do processo não estacionário.

A variância do processo é:

$$\sigma_y^2(t') = E\left[\left((y_n(t') - A) - d_y(t')\right)^2\right] \quad (t' \geq 0) \quad (\text{IV.3})$$

$$(n = 1, 2, \dots, N)$$

ou substituindo (IV.1) e (IV.2) em (IV.3) tem-se:

$$\sigma_y^2(t') = E\left[\left(y_n(t') - \mu_y(t')\right)^2\right] \quad (t' \geq 0) \quad (\text{IV.4})$$

$$(n = 1, 2, \dots, N)$$

(IV.4), pode ser escrita ainda como:

$$\sigma_y^2(t') = E\left[y_n^2(t')\right] - \mu_y^2(t') \quad (t' \geq 0) \quad (\text{IV.5})$$

$$(n = 1, 2, \dots, N)$$

ou

$$\sigma_y^2(t') = \int_{-\infty}^{\infty} p(y_n(t')) y_n^2(t') d_{y_n} - \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(y_n(t')) y_n(t') d_{y_n} \right]^2 \quad (\text{IV.6})$$

(t' ≥ 0)

(n = 1, 2, ..., N)

e o desvio padrão do processo é:

$$\sigma_y(t') = \left[E[y_n^2(t')] - \mu_y^2(t') \right]^{1/2} \quad (t' \geq 0) \quad (\text{IV.7})$$

(n = 1, 2, ..., N)

sendo N o número de funções amostra, e $\mu_{y_c}(t'_k)$ (k = 1, 2, ..., K) as k médias amostrais estimadas, os k desvios padrões da amostra são estimados por:

$$\sigma_{y_c}(t'_k) = \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n^2(t'_k) - \mu_{y_c}^2(t'_k) \right]^{1/2} \quad (t'_k \geq 0) \quad (\text{IV.8})$$

(k = 1, 2, ..., K)

(n = 1, 2, ..., N)

sendo N ≥ 30 a região padrão para a estimação da média do processo $\mu_{y_c}(t'_k)$ (k = 1, 2, ..., K) é dada por, |9|:

$$\mu_{y_c}(t'_k) \pm p \sigma_{y_c}(t'_k) \quad (t'_k \geq 0) \quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (\text{IV.9})$$

e da mesma forma a região padrão para estimação da função decre-

mento aleatório $d_{y_c}(t'_k)$ ($k = 1, 2, \dots, K$), é:

$$d_{y_c}(t'_k) \pm p \sigma_{y_c}(t'_k) \quad (t'_k \geq 0) \quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (\text{IV.10})$$

onde $d_{y_c}(t'_k)$ ($k = 1, 2, \dots, K$), são as k amplitudes calculadas da função decremento aleatório quando se tem N elementos amostrais e "p" é um valor constante positivo que depende do nível de confiança desejado. Se ocorrer situações onde $N < 30$, a aproximação é insuficiente devendo-se usar a teoria das pequenas amostras, [9]. No caso o algoritmo indicou que para ter-se bons resultados, $N \gg 30$, podendo-se usar (IV.9) e (IV.10).

Considerando-se um nível de confiança de 80%, tem-se $p = 1,28$, e (IV.10) fica:

$$d_{y_c}(t'_k) \pm 1,28 \sigma_{y_c}(t'_k) \quad (t'_k \geq 0) \quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (\text{IV.11})$$

IV.2.2 - Utilização da região padrão

a - Variação na excitação

Para uma nova excitação e mantendo os parâmetros do sistema, será calculada uma nova função decremento aleatório.

Os valores escolhidos são dados na seção

II.3.6-a, onde N foi modificado a t_{\max} assume novo valor, assim:

$$A = 300$$

$$\omega_1 = 300 \text{ rd/s}$$

$$N = 800$$

$$t'_{\max} = 0,063 \text{ s}$$

$$\eta_1 = 0,001$$

$$t_{\max} = 9,025 \text{ s}$$

$$T = 0,001 \text{ s}$$

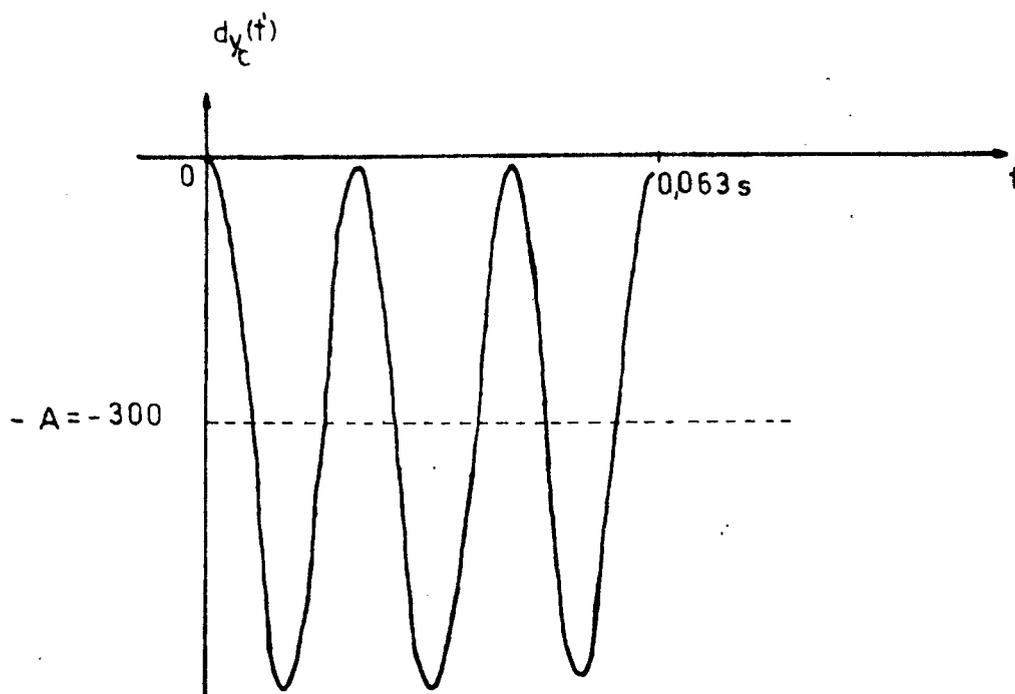


Figura IV.1 - Função de decaimento aleatório, variação na excitação, sistema de 1ª G.L.

b - Variação na frequência

Para a mesma excitação anterior varia-se a frequência natural e calcula-se uma nova função de decaimento aleatório.

Os valores escolhidos são dados na seção II.3.6 - a, onde ω_1 e N foram modificados e t_{\max} assume novo valor, assim:

$$\begin{aligned} A &= 300 \\ \omega_1 &= 700 \text{ rd/s} \\ N &= 500 \\ t'_{\max} &= 0,063 \text{ s} \\ \eta_1 &= 0,001 \\ t_{\max} &= 25,840 \text{ s} \\ T &= 0,001 \text{ s} \end{aligned}$$

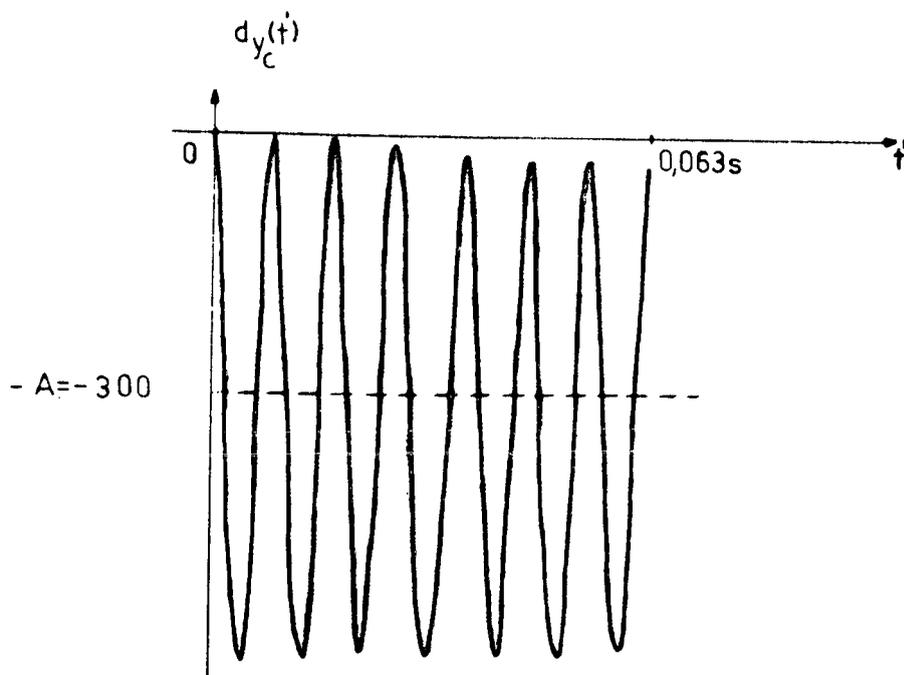


Fig. IV.2 - Função de decaimento aleatório, variação na frequência natural, sistema de 1ª G.L.

c - Verificação dos resultados

A região padrão é dada por (IV.11) onde $dy_c(t'_k)$ ($k=1,2,\dots,K$) é a função de decaimento aleatório calculada quando tinha-se a excitação inicial, considerada agora como valor médio padrão, caso a₃ seção II.3.6:

Usando (IV.11) e os resultados anteriores forma-se a tabela:

f_k	excitação inicial - região padrão				nova excit. Parâmetros iguais	excit. inicial variação em ω_1
	$d_{y_c}(t_k)$	$\sigma_{y_c}(t_k)$	$d_{y_c}(t_k) +$ $1,28 \sigma_{y_c}(t_k)$	$d_{y_c}(t_k) -$ $1,28 \sigma_{y_c}(t_k)$	$d_{y_c}(t_k)$	$d_{y_c}(t_k)$
0,000	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,001	-8,8	229,7	285,2	-302,8	-7,6	-66,2
0,002	-39,1	466,8	558,4	-636,6	-35,7	-239,9
0,003	-92,4	680,7	778,9	-963,7	-87,2	-415,2
0,004	-164,1	838,9	909,7	-1035,4	-157,6	-549,6
0,005	-247,7	925,2	936,6	-1431,9	-240,1	-574,5
0,006	-335,9	931,3	856,2	-1527,9	-327,5	-466,2
0,007	-420,7	856,9	676,1	-1517,5	-411,9	-269,5
0,008	-494,7	709,8	413,8	-1403,2	-486,0	-67,1
0,009	-551,3	506,1	96,5	-1199,1	-543,2	-1,8
0,010	-584,7	278,9	-227,7	-941,7	-577,9	-72,0*
0,011	-592,1	173,8	-369,6	-814,6	-587,3	-244,7*
0,012	-573,3	358,9	-113,9	-1032,7	-571,2	-417,4
0,013	-529,9	582,2	215,3	-1275,1	-530,9	-549,1
0,014	-465,8	766,3	515,1	-1446,7	-469,8	-572,1
0,015	-386,7	887,2	748,9	-1522,3	-393,4	-463,7
0,016	-299,9	932,4	893,6	-1493,4	-308,5	-268,7
0,017	-218,1	897,5	935,7	-1361,9	-222,6	-69,5
0,018	-134,1	786,2	872,2	-1140,4	-143,5	-6,5
0,019	-69,7	610,4	711,6	-851,0	-78,1	-77,5
0,020	-25,8	392,8	476,9	-528,6	-32,4	-248,3
0,021	-4,1	197,9	249,2	-257,4	-10,3	-417,2*
0,022	-11,9	258,5	318,9	-342,8	-13,4	-546,2*
0,023	-42,5	476,3	567,2	-652,2	-41,3	-567,6
0,024	-95,9	680,4	775,0	-966,8	-91,9	-460,0
0,025	-167,4	832,5	898,2	-1233,0	-160,7	-267,2
0,026	-250,4	914,9	920,7	-1421,5	-241,2	-71,7
0,027	-337,6	919,5	839,4	-1514,6	-326,4	-11,2
0,028	-421,2	846,0	661,7	-1504,1	-408,6	-82,5

Tabela IV.1 - Verificação dos resultados - sistema de 1º G. L.

t'_k	excitação inicial - região padrão				nova excit. parâmetros iguais	excit. inicial variação em ω_1
	$d_{y_c}(t'_k)$	$\sigma_{y_c}(t'_k)$	$d_{y_c}(t'_k) +$ $1,28 \sigma_{y_c}(t'_k)$	$d_{y_c}(t'_k) -$ $1,28 \sigma_{y_c}(t'_k)$	$d_{y_c}(t'_k)$	$d_{y_c}(t'_k)$
0,029	-493,6	702,7	405,9	-1393,1	-480,7	-252,1
0,030	-548,6	506,9	100,2	-1197,4	-536,5	-418,3
0,031	-580,5	296,8	-200,6	-960,5	-570,3	-545,5
0,032	-586,7	212,9	-314,2	-859,2	-579,2	-565,5
0,033	-567,2	377,4	-84,1	-1050,3	-563,2	-458,1
0,034	-523,4	587,5	228,6	-1275,4	-523,5	-266,8
0,035	-459,3	763,4	517,9	-1436,5	-463,5	-74,3
0,036	-380,6	878,8	744,3	-1505,5	-388,7	-16,1
0,037	-294,5	920,7	883,9	-1472,9	-305,6	-88,2
0,038	-208,7	885,0	924,1	-1341,5	-221,6	-256,9
0,039	-130,8	775,4	661,7	-1123,3	-144,0	-420,7
0,040	-67,6	604,3	705,9	-841,1	-80,0	-545,7
0,041	-24,8	396,5	482,7	-532,3	-35,3	-564,1*
0,042	-6,1	222,7	278,9	-291,2	-13,9	-456,4*
0,043	-12,4	281,4	347,8	-372,6	-16,9	-266,1
0,044	-43,5	484,7	576,9	-663,9	-44,4	-76,4
0,045	-97,3	679,9	772,9	-967,6	-94,3	-20,4
0,046	-169,0	825,9	888,2	-1226,2	-161,7	-93,5
0,047	-251,9	904,6	905,9	-1409,8	-240,7	-261,3
0,048	-338,6	907,8	823,4	-1500,6	-324,1	-422,6
0,049	-421,3	835,4	648,0	-1490,6	-404,6	-545,3
0,050	-492,7	695,7	397,8	-1383,2	-475,1	-561,8
0,051	-546,5	507,2	102,7	-1195,7	-529,3	-454,0
0,052	-577,4	311,5	-178,7	-976,1	-562,1	-265,1
0,053	-582,7	241,9	-273,1	-892,3	-570,4	-78,3*
0,054	-562,4	392,7	-59,7	-1065,1	-554,2	-24,6*
0,055	-518,2	591,9	239,4	-1275,8	-514,8	-98,7
0,056	-454,0	760,6	519,6	-1427,7	-455,9	-265,5
0,057	-375,7	871,1	739,3	-1490,7	-382,5	-424,2
0,058	-290,4	910,3	874,8	-1455,6	-301,1	-544,4
0,059	-205,6	873,8	912,9	-1324,1	-219,0	-559,0
0,060	-128,9	765,9	851,5	-1109,3	-143,5	-451,1
0,061	-67,0	599,1	699,8	-833,8	-81,5	-263,7
0,062	-25,4	400,0	486,6	-537,4	-38,6	-80,1
0,063	-7,8	242,7	302,9	-318,5	-18,7	-28,9

Tabela IV.1 - Verificação dos resultados-sistema de 1º G.L.(continuação)

Obs: Os valores assinalados com asterisco estão fora da região padrão.

Da tabela IV.1, conclui-se que a mudança significativa na função de decremento aleatório ocorre quando os parâmetros do sistema se modificam, e não quando a excitação varia. Isto possibilita a detecção de modificações no sistema, (falhas), independentemente das variações na excitação aleatória.

IV.3 - SISTEMA DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE (PEQUENOS AMORTECIMEN-
TOS - FREQUÊNCIAS PRÓXIMAS)

IV.3.1-Estimativa da região padrão para a função de decremen-
to aleatório

Analogamente a um grau de liberdade e sendo $\ell = 2$, de (II.49) vemos que a função de decremen- to aleatório é dada por:

$$d_{q_1}(t') \Big|_{\ell=2} = E \left[q_1^{(n)}(t') \Big|_{\ell=2} - A \right] \quad (t' \geq 0) \\ (n = 1, 2, \dots, N)$$

ou

$$d_{q_1}(t') \Big|_{\ell=2} = E \left[d_{q_1}^{(n)}(t') \Big|_{\ell=2} \right] - A \quad (t' \geq 0) \quad (IV.12) \\ (n = 1, 2, \dots, N)$$

Sendo também neste caso $N \gg 30$, analogamen- te a (IV.10) a região padrão para estimação da função de decre- mento aleatório $d_{q_1}(t'_k) \Big|_{\ell=2}$ ($k = 1, 2, \dots, K$) é:

$$d_{q_1}(t'_k) \Big|_{\ell=2} \pm p \sigma_{q_1, c}(t'_k) \Big|_{\ell=2} \quad (t'_k \geq 0) \quad (IV.13) \\ (k = 1, 2, \dots, K)$$

Usando neste caso um nível de confiança

de 68,27%, $p = 1$, e (IV.13) fica:

$$d_{q_{1,c}}^{(t'_k)} \Big|_{\ell=2} \pm \sigma_{q_{1,c}}^{(t'_k)} \Big|_{\ell=2} \quad (t'_k \geq 0) \quad (\text{IV.14})$$

$$(k = 1, 2, \dots, K)$$

IV.3.2 - Utilização da região padrão

a - Variação na excitação

Para uma nova excitação e mantendo-se os parâmetros do sistema, calcula-se uma nova função de decaimento aleatório.

Os valores escolhidos são dados na seção II.4.3-a, onde N foi modificado e t_{\max}' assume novo valor, assim:

$$A = 400$$

$$\omega_1 = 300 \text{ rd/s}$$

$$\omega_2 = 400 \text{ rd/s}$$

$$N = 900$$

$$t_{\max}' = 0,063 \text{ s}$$

$$\eta_1 = 0,001$$

$$\eta_2 = 0,04$$

$$t_{\max} = 9,187 \text{ s}$$

$$T = 0,001 \text{ s}$$

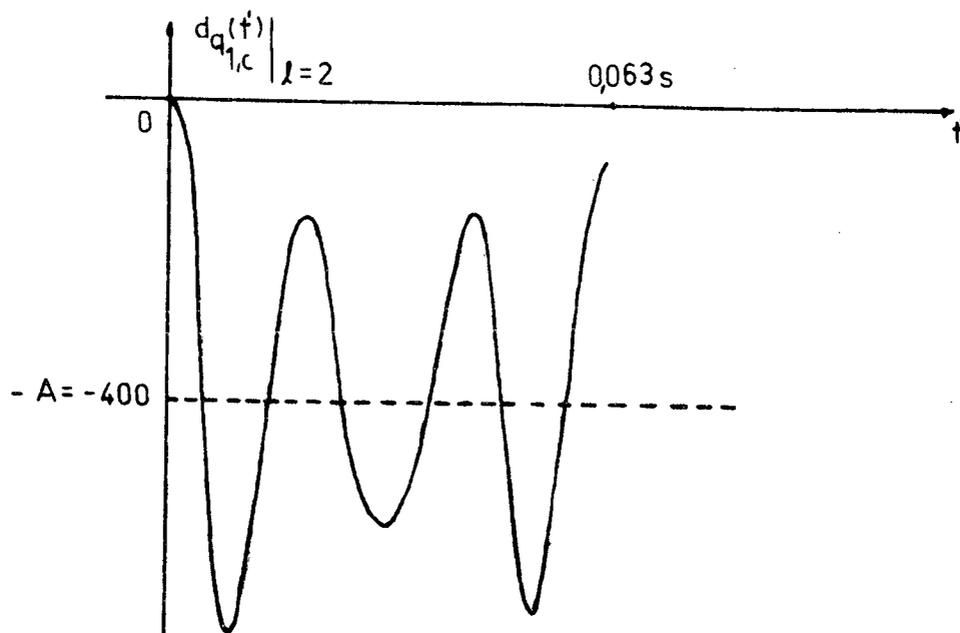


Figura IV.3 - Função de decremento aleatório de variação na excitação, sistema de 2º G.L.

b - Variação nas frequências

Para a mesma excitação anterior varia-se as frequências e calcula-se uma nova função de decremento aleatório.

Os valores escolhidos são dados na seção II.4.3-a, onde ω_1 , ω_2 foram modificados e t_{\max} assume novo valor, assim:

$$A = 400$$

$$\omega_1 = 600 \text{ rd/s}$$

$$\omega_2 = 700 \text{ rd/s}$$

$$N = 700$$

$$t'_{\max} = 0,063 \text{ s}$$

$$\eta_1 = 0,001$$

$$\eta_2 = 0,04$$

$$t_{\max} = 28,852 \text{ s}$$

$$T = 0,001 \text{ s}$$

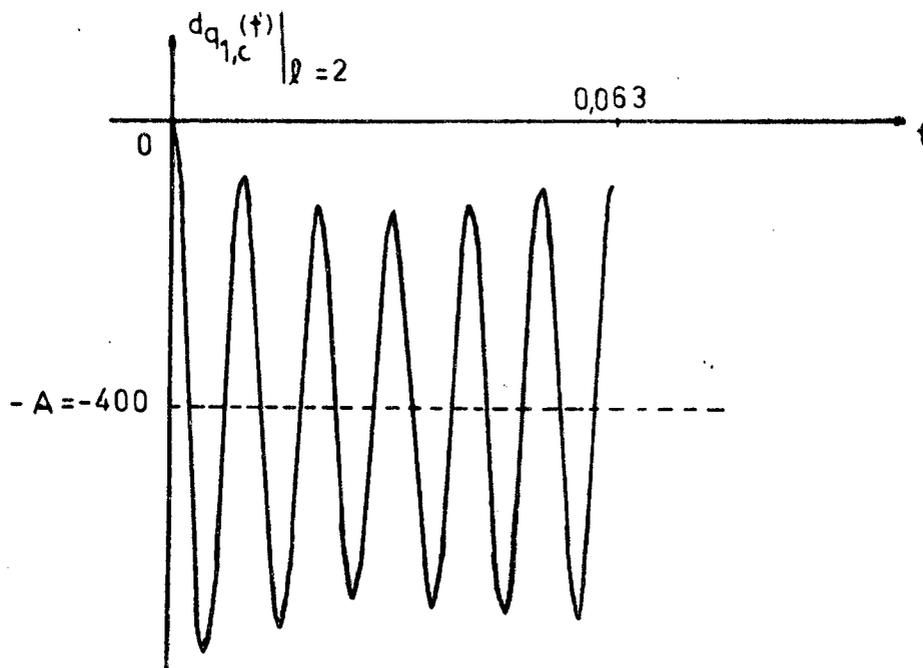


Figura IV.4 - Função decaimento aleatório, variação nas frequências, sistema de 2º G.L.

c - Verificação dos resultados

Analogamente a região padrão é dada por (IV.14)

onde $d_{q_{1,c}}(t'_k) \Big|_{\ell=2}$ ($k = 1, 2, \dots, K$) é a função de decremento aleatório calculada quando tinha-se a excitação inicial, sendo agora considerada como valor médio padrão.

Usando (IV.14) e os resultados anteriores forma-se a tabela:

t'_k	EXCITAÇÕES INICIAIS - REGIÃO PADRÃO				NOVAS EXCIT. PARÂMETROS IGUAIS	EXCIT. INICIAIS VARIÇÃO EM ω_1 E ω_2
	$d_{q_{1,c}}(t'_k) _{\ell=2}$	$\sigma_{q_{1,c}}(t'_k) _{\ell=2}$	$d_{q_{1,c}}(t'_k) _{\ell=2}$ $+\sigma_{q_{1,c}}(t'_k) _{\ell=2}$	$d_{q_{1,c}}(t'_k) _{\ell=2}$ $-\sigma_{q_{1,c}}(t'_k) _{\ell=2}$	$d_{q_{1,c}}(t'_k) _{\ell=2}$	$d_{q_{1,c}}(t'_k) _{\ell=2}$
0,000	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,001	-12,5	472,8	460,3	-485,3	-10,2	-50,4
0,002	-59,6	927,8	868,2	-986,7	-48,7	-203,5
0,003	-142,8	1302,6	1159,8	-1445,4	-120,8	-421,9
0,004	-251,7	1540,5	1288,9	-1792,1	-219,1	-624,6
0,005	-373,1	1617,3	1244,2	-2020,4	-333,8	-738,9
0,006	-492,8	1531,9	1039,1	-2024,7	-452,0	-726,9
0,007	-598,5	1307,2	708,7	-1905,7	-559,5	-597,1
0,008	-679,8	995,8	316,0	-1675,6	-642,9	-399,3
0,009	-729,0	705,2	-23,8	-1434,2	-692,5	-205,4
0,010	-743,0	637,8	-105,2	-1380,8	-703,3	-83,6*
0,011	-722,8	848,1	125,3	-1570,9	-676,3	-74,7
0,012	-672,2	1125,2	453,0	-1797,4	-618,3	-178,1
0,013	-597,4	1341,1	743,7	-1938,5	-539,6	-353,3
0,014	-507,0	1451,9	944,9	-1958,9	-450,6	-536,7
0,015	-410,9	1451,1	1040,2	-1862,0	-361,6	-665,4
0,016	-318,5	1354,9	1036,4	-1673,4	-281,1	-697,9
0,017	-237,2	1197,3	960,1	-1434,5	-215,7	-626,5
0,018	-173,9	1029,4	855,5	-1203,3	-169,8	-479,2
0,019	-135,0	916,0	781,0	-1051,0	-145,2	-307,9
0,020	-123,7	909,2	385,5	-1032,9	-142,2	-170,5
0,021	-139,6	997,7	858,1	-1137,3	-159,3	-111,3
0,022	-179,0	1123,2	944,2	-1302,2	-192,6	-148,3
0,023	-235,3	1234,1	998,8	-1469,4	-237,2	-266,4
0,024	-300,2	1301,9	1001,7	-1602,1	-288,8	-424,9
0,025	-367,0	1317,4	950,4	-1684,4	-342,9	-570,6
0,026	-429,1	1286,6	857,5	-1715,7	-395,5	-655,3
0,027	-482,9	1225,4	742,5	-1708,3	-442,5	-651,9
0,028	-527,9	1153,7	625,8	-1681,6	-481,4	-562,0

Tabela IV.2 - Verificação de resultados - sistema de 2º G. L.

τ'_k	EXCITAÇÕES INICIAIS - REGIÃO PADRÃO				NOVAS EXCIT. PARÂMETROS IGUAIS	EXCIT. INICIAIS VARIÇÃO EM ω_1 E ω_2
	$d_{q_{1,c}}(\tau'_k) _{\ell=2}$	$\sigma_{q_{1,c}}(\tau'_k) _{\ell=2}$	$d_{q_{1,c}}(\tau'_k) _{\ell=2}$ $+\sigma_{q_{1,c}}(\tau'_k) _{\ell=2}$	$d_{q_{1,c}}(\tau'_k) _{\ell=2}$ $-\sigma_{q_{1,c}}(\tau'_k) _{\ell=2}$	$d_{q_{1,c}}(\tau'_k) _{\ell=2}$	$d_{q_{1,c}}(\tau'_k) _{\ell=2}$
0,029	-563,4	1092,3	528,9	-1655,7	-510,8	-415,4
0,030	-589,5	1058,9	469,4	-1648,4	-530,3	-261,3
0,031	-605,6	1060,6	455,0	-1666,2	-540,9	-151,1
0,032	-610,1	1090,4	480,3	-1700,5	-543,6	-121,8
0,033	-600,7	1133,7	533,0	-1734,4	-538,8	-183,7
0,034	-576,0	1176,0	600,0	-1752,0	-525,7	-316,9
0,035	-535,8	1210,3	674,5	-1746,1	-503,0	-477,0
0,036	-482,3	1235,4	753,1	-1717,7	-470,6	-609,6
0,037	-419,9	1252,3	832,4	-1673,2	-428,1	-669,1
0,038	-353,0	1259,1	906,1	-1612,1	-376,5	-634,1
0,039	-287,8	1248,7	960,9	-1536,5	-319,9	-515,4
0,040	-230,7	1213,6	982,9	-1444,3	-263,3	-352,6
0,041	-186,5	1152,5	966,0	-1339,0	-211,8	-201,6
0,042	-158,5	1078,8	920,3	-1237,3	-171,1	-115,4
0,043	-150,0	1023,2	873,2	-1173,2	-145,6	-124,9
0,044	-163,5	1021,9	858,4	-1185,4	-139,2	-228,1
0,045	-199,0	1089,7	890,7	-1288,7	-154,7	-390,4
0,046	-254,5	1202,7	948,2	-1457,2	-192,9	-554,7
0,047	-326,3	1315,0	988,7	-1641,3	-252,3	-662,9
0,048	-408,7	1383,6	974,9	-1792,3	-327,6	-676,4
0,049	-493,6	1381,0	887,4	-1874,5	-411,1	-588,9
0,050	-572,6	1299,6	727,0	-1872,2	-493,8	-429,9
0,051	-637,2	1152,6	515,4	-1789,8	-566,8	-255,0
0,052	-679,1	981,1	302,0	-1660,2	-622,6	-126,3
0,053	-694,2	863,8	169,6	-1558,0	-655,3	-897,5
0,054	-680,0	885,2	205,2	-1565,2	-660,4	-158,6
0,055	-637,0	1035,8	398,8	-1672,8	-636,2	-308,7
0,056	-570,5	1226,5	656,0	-1797,0	-584,6	-486,7
0,057	-487,0	1380,0	893,0	-1867,0	-510,5	-629,1
0,058	-394,1	1451,5	1057,4	-1845,6	-421,2	-685,3
0,059	-300,9	1421,6	1120,7	-1722,5	-326,6	-635,0
0,060	-217,5	1294,4	1076,9	-1511,9	-236,2	-496,4
0,061	-152,0	1098,2	946,2	-1250,2	-159,1	-318,3
0,062	-110,5	892,9	782,9	-1003,4	-103,0	-164,1
0,063	-96,6	781,5	684,9	-878,1	-742,9	-88,0

Tabela IV.2 - Verificação dos resultados - sistema de 2º G.L.
(continuação)

Obs.: O valor assinalado com asterisco está fora da região padrão.

Analogamente a um grau de liberdade, a tabela IV.2 indica que a mudança significativa na função decremento aleatório só ocorre quando os parâmetros do sistema se modificam (falhas).

Obs.: Em uma situação prática pode-se dizer que o emprego da função decremento aleatório para detecção de falhas, não precisa ser em condições de laboratório, (aonde se conhece a excitação), podendo ser usada em condições de serviço, (excitação desconhecida).

Obs.: Em medidas de amortecimento de sistemas de um grau de liberdade, a região padrão pode ser usada para especificar um comprimento de registro necessário na obtenção de amortecimentos de determinada precisão.

Obs.: Seria interessante verificar para que tipo tende a distribuição em torno da função decremento aleatório nos tempos t'_k ($k = 1, 2, \dots, K$). Para sistemas de um grau de liberdade foi indicado no artigo de Cole [4], um histograma para vários níveis de seleção, mostrando que tende a uma distribuição Gaussiana em torno de $d_y(t'_p)$, onde t'_p é o período de oscilação.

IV.4 - CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS

No artigo de Cole [4], ele procurou, com base em algumas hipóteses teóricas, formar uma sequência de testes práticos, tendo como objetivo analisar experimentalmente a função decremento aleatório. Esta seção tem o objetivo de transcrever estas hipóteses, os tipos de testes realizados bem como as conclusões obtidas.

a - Hipóteses

a.1 - Inicialmente ele considerou que as falhas produzidas por fa
diga em estruturas pudessem introduzir graus de liberda-
de adicionais, (variações estruturais), sendo estas exci
tadas pelas forças aleatórias de entrada.

a.2 - A seguir considerou que com o aumento da falha é de se
esperar que as frequências dos modos diminuam, e que ao
atingirem as regiões de baixas frequências o rompimento
da estrutura ou já ocorreu ou é iminente. Como deseja-
-se detectar as variações estruturais antes da ruptura to
tal da estrutura com o objetivo de tomar ações correti
vas, utiliza-se um filtro passa-banda localizado nas al
tas frequências.

a.3 - Em terceiro lugar considerou que as variações estrutu-
rais causam mudanças na função de decremento aleatório de
vido ao:

a.3.1 - Acoplamento dinâmico entre os modos na largura de ban
da do filtro

a.3.2 - Acoplamento não linear nas frequências sub-harmôni-
cas.

a.3.3 - Amortecimento por fricção.

b - Considerações para realização dos testes

b.1 - A banda de frequência do filtro deve ser encontrada com a

ajuda da densidade espectral e deve estar localizada nas regiões de alta densidade modal.

- b.2 - Deve-se encontrar a função decremento aleatório padrão para um ponto particular da estrutura sem falhas, sujeita a todas as condições de carregamento e mudanças ambientais.
- b.3 - Deve-se encontrar a região padrão para um nível de confiança que depende de quanto crítica é a estrutura.
- b.4 - É necessário um aparelho detector para identificar somente variações na voltagem dos picos da função decremento.

c - Testes realizados por Cole [4] - conclusões obtidas

- c.1 - Teste: cálculo da função densidade espectral com a estrutura com ou sem falhas, e utilizando ou não o filtro.

Conclusão: mesmo com a utilização do filtro não ocorreram modificações significativas na densidade espectral, quando a estrutura apresenta falhas.

- c.2 - Teste: cálculo da função decremento aleatório, quando a estrutura apresenta ou não falhas, variando a banda de frequência do filtro e escolhendo um determinado ponto da estrutura.

Conclusão: ocorrem mudanças significativas na função decremento aleatório quando a estrutura apresenta fa

lhas, mas estas mudanças, para serem significativas, dependem da banda de frequência usada pelo filtro, e de uma boa localização para o transdutor.

c.3 - Teste: cálculo da função decréscimo aleatório em intervalos de tempos diferentes, enquanto a falha se desenvolve na estrutura, utilizando o filtro com a banda pré-estabelecida.

Conclusão: utilizando uma boa faixa para o filtro a mudança significativa na função decréscimo aleatório devido ao desenvolvimento da falha surge bem antes da ruptura total da estrutura.

c.4 - Teste: cálculo da função decréscimo aleatório em intervalos de tempos diferentes, enquanto a falha se desenvolve na estrutura, sem a utilização do filtro.

Conclusão: neste caso também ocorre mudanças na função decréscimo aleatório devido ao desenvolvimento da falha, mas não são significativas.

Obs.: Como pode-se ver de c.1 a função densidade espectral não pode ser usada diretamente para detectar falhas, mas como citado em b.1, serve para identificar a banda de frequência do filtro. Isto se deve ao fato de que a função densidade espectral nos indica as regiões de alta densidade modal, aonde os efeitos de pequenas falhas na estrutura apareceriam, mas seriam de difícil detecção.

Obs.: De maneira geral, dos testes práticos, tira-se duas conclusões importantes para detecção de falhas: para a detec

ção de uma falha específica é necessário uma banda particular de frequência para o filtro e também uma boa localização para o transdutor. Para maiores informações sobre a banda de frequência a ser usada pelo filtro a localização do transdutor, bem como os testes em geral, ver o artigo de Cole |4|.

IV.5 - CONCLUSÃO

Com base no desenvolvimento do capítulo pode-se ver que a função de decremento aleatório para um ou dois graus de liberdade não se modifica significativamente com a variação da excitação do sistema, só ocorrendo modificações significativas na função, quando os parâmetros se alteram. O que possibilita então a detecção destas alterações (falhas) independentemente das variações na excitação aleatória.

CAPÍTULO V

MÉTODOS CLÁSSICOS

V.1 - INTRODUÇÃO

Serão considerados alguns métodos conhecidos tais como:

Função densidade espectral de potência

Função autocorrelação

Função correlação cruzada

Dependendo do enfoque dado, cada um destes métodos apresenta problemas no que se refere à identificação dos parâmetros do sistema e à detecção de falhas. Alguns destes problemas serão mostrados ao longo do capítulo.

Os sistemas serão os mesmos considerados no capítulo II, para um e ℓ graus de liberdade. A simulação será feita para sistemas de um grau de liberdade com pequenos amortecimentos, e de dois graus de liberdade com pequenos amortecimentos e frequências próximas.

O processo é ergódico, e as comparações de vem ser feitas com o caso a₃ seção II.3.6 para um grau de liberdade e o caso a₃ seção II.4.3 para dois graus de liberdade. As excitações serão em geral ruídos brancos, pois só neste caso os métodos apresentados são representativos do sistema.

Em alguns casos, para esclarecimentos, serão considerados como excitações ruídos coloridos, sendo anulada a média da resposta do sistema. Em caso de situações de falha, estas serão dadas por variações bruscas dos parâmetros do sistema.

V.2 - FUNÇÃO DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA

A função densidade espectral de potência da resposta do sistema "r(t)" é definida como, |10|:

$$S_r(\omega) = |H(\omega)|^2 S_e(\omega) \quad (V.1)$$

onde: $H(\omega)$ é a função transferência do sistema e $S_e(\omega)$ a função densidade espectral de potência da excitação

podendo ser obtida diretamente de um conjunto de médias do valor absoluto quadrático da transformada de Fourier, dos N trechos retirados da resposta do sistema, de comprimento $t'_{\text{máx}}$.

$$S_r(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{t'_{\text{máx}}} |R_{t'_{\text{máx},n}}(\omega)|^2 \quad (V.2)$$

Considerando o processo ergódico, (V.2) fica:

$$S_r(\omega) = \lim_{t'_{\text{máx}} \rightarrow \infty} \frac{1}{t'_{\text{máx}}} |R_{t'_{\text{máx}}}(\omega)|^2 \quad (V.3)$$

a - Problemas relacionados com o método

a.1 - Pode-se ver de (V.1) que $S_r(\omega)$ depende em amplitude e forma de $S_e(\omega)$, só sendo então representativa do sistema quando a excitação é um ruído branco. Neste caso (V.1) pode ser reescrita como:

$$S_r(\omega) = |H(\omega)|^2 S_0$$

onde S_0 é um valor constante. Assim o uso da função densidade espectral de potência para detecção de falhas em condições de serviço, apresenta problemas, porque depende da excitação.

a.2 - A função densidade espectral de potência é usada para obter a energia dos modos e apresenta picos nas frequências destes modos. Para sistemas de um grau de liberdade e sistemas de mais graus de liberdade com picos separados, pode-se encontrar os parâmetros do sistema usando o método de largura de banda para o ponto de meia potência, capítulo III. Para a função densidade o fator de amortecimento é obtido medindo a largura de banda na metade do valor de pico. As frequências encontradas são razoáveis, mas os fatores de amortecimento não têm muita consistência.

O método se torna mais impreciso quando a amplitude varia não linearmente com o período de oscilação, como no caso de muitos graus de liberdade, também neste caso a proximida-

de muito grande dos picos torna impossível o cálculo dos fatores de amortecimento.

b - Sistema de um grau de liberdade (pequenos amortecimentos)

Neste caso, usando (V.1), a função densidade espectral de potência da resposta do sistema "y(t)" tendo excitação "f(t)", é:

$$S_y(\omega) = |H_1(\omega)|^2 S_f(\omega) \quad (V.4)$$

onde: $H_1(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 2j\omega\eta_1\omega_1 + \omega_1^2}$, considerando 1024 pontos tomados a uma razão de amostragem de 1000 amostras por segundo, e usando (V.3), a função densidade espectral calculada é dada por:

$$S_{y_c}(\omega) = \frac{1}{t_k} \left| Y_{t_k}(\omega) \right|^2 \quad (V.5)$$

onde $Y_{t_k}(\omega)$ é a transformada rápida de Fourier de um trecho de comprimento, $t_k' = KT$, da resposta do sistema de um grau de liberdade, sendo:

$K = 1024$, número de amostras

$T = 0.001s$, período de amostragem

e os parâmetros calculados do sistema são:

$$\omega_{1,c} = 2\pi f_{1,pico}$$

(V.6)

$$\eta_{1,c} = \frac{\Delta f_1}{2f_{1,c}} = \frac{f_{1,m\acute{a}x} - f_{1,m\grave{i}n}}{2f_{1,c}}$$

b.1 - Exemplos ilustrativos

O programa usado para simular a expressão V.5 é dado por diagrama em blocos no apêndice A seção A.2.2.1, os parâmetros do sistema são $\omega_1 = 300$ rd/s e $\eta_1 = 0,001$ sendo a excitação o ruído branco Gaussiano "inicial" (1º ruído branco).

Neste caso utilizou-se a variável f , e considerou-se só frequências positivas.

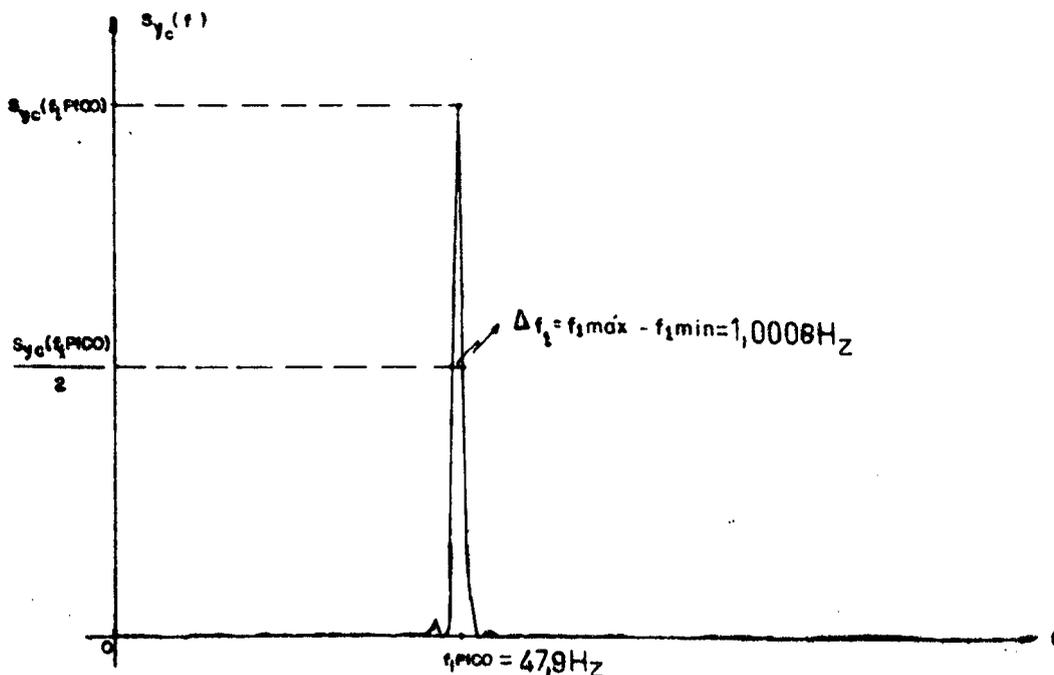


Figura V.1 - Função densidade espectral de potência, um grau de liberdade, pequenos amortecimentos.

e usando (V.6), tem-se:

$$\eta_{1,c} = 0,0104$$

$$\omega_{1,c} = 300,965 \text{ rd/s}$$

Para melhor visualização da função densidade espectral, será utilizada uma escala monolog, assim a Figura V.1, fica:

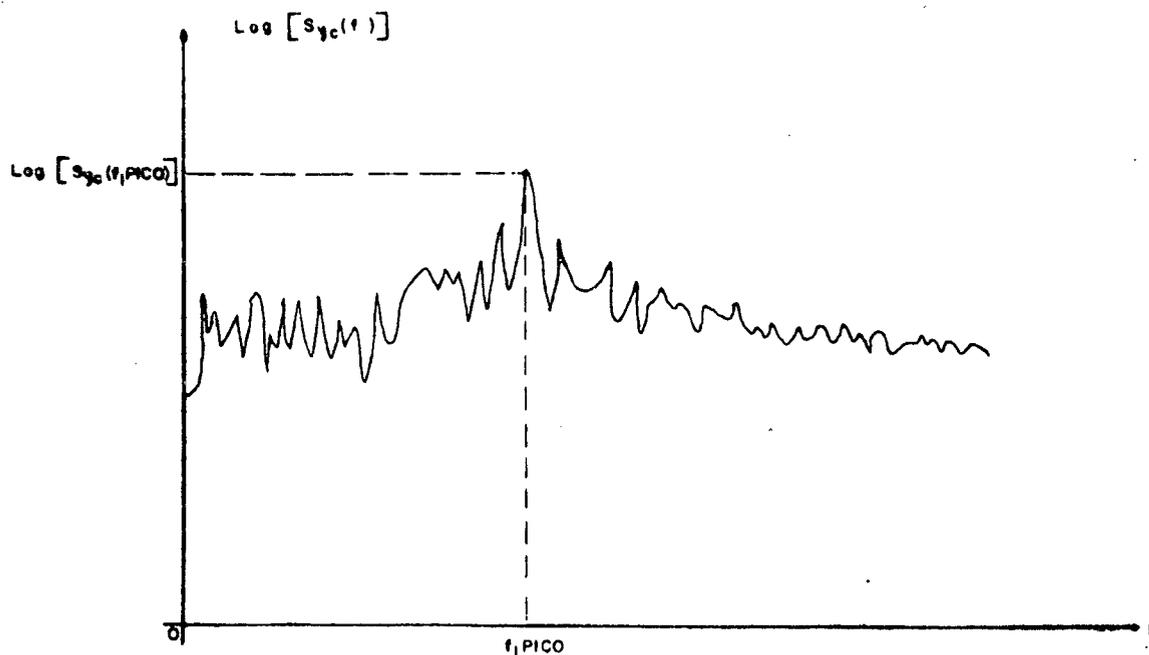


Figura V.2 - Função densidade espectral de potência um grau de liberdade, pequenos amortecimentos, (escala monolog).

c - Sistema de ℓ graus de liberdade (pequenos amortecimentos - frequências próximas)

Neste caso, usando (V.1), a função densidade

espectral de potência da resposta do sistema, referente ao i ésimo modo normal " $\psi_i(t)$ " tendo excitação " $N_i(t)$ ", é:

$$S_{\psi_i}(\omega) = |H_i(\omega)|^2 S_{N_i}(\omega) \quad (i = 1, 2, \dots, \ell)$$

onde

(V.7)

$$H_i(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 2j\omega\eta_i\omega_i + \omega_i^2}$$

considerando 1024 pontos tomados a uma razão de amostragem de 1000 amostras por segundo, e usando (V.3), a função densidade espectral calculada referente ao i ésimo modo normal é

$$S_{\psi_{i,c}}(\omega) = \frac{1}{t'_k} |\Psi_{i,t'_k}(\omega)|^2 \quad (i = 1, 2, \dots, \ell) \quad (V.8)$$

onde $\Psi_{i,t'_k}(\omega)$ ($i = 1, 2, \dots, \ell$) é a transformada rápida de Fourier de um trecho de comprimento, $t'_k = KT$, da resposta do sistema referente ao i ésimo modo normal, sendo:

$K = 1024$, número de amostras

$T = 0.001s$, período de amostragem

sabendo que a resposta da 1ª massa do sistema é dada por (II.48), reescrevendo tem-se:

$$q_1(t) = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \psi_i(t) \quad (t \geq 0) \quad (\text{V.9})$$

e a sua transformada de Fourier é:

$$Q_1(\omega) = \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \psi_i(\omega)$$

então a função densidade espectral calculada referente a resposta da 1ª massa do sistema é dada por:

$$S_{q_{1,c}}(\omega) = \frac{1}{t_k'} \left| Q_{1,t_k'}(\omega) \right|^2 = \frac{1}{t_k'} \left| \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \psi_{i,t_k'}(\omega) \right|^2 \quad (\text{V.10})$$

sendo o sistema de dois graus de liberdade, (V.10) se torna:

$$S_{q_{1,c}}(\omega) \Big|_{\ell=2} = \frac{1}{t_k'} \left| \sum_{i=1}^2 b_1^{(i)} \psi_{i,t_k'}(\omega) \right|^2 \quad (\text{V.11})$$

e os parâmetros calculados do sistema são dados por:

$$\omega_{1,c} = 2\pi f_{1\text{pico}}$$

$$\omega_{2,c} = 2\pi f_{2\text{pico}}$$

$$\eta_{1,c} = \frac{\Delta f_1}{2f_{1,c}} = \frac{f_{1\text{máx}} - f_{1\text{min}}}{2f_{1,c}}$$

$$\eta_{2,c} = \frac{\Delta f_2}{2f_{2,c}} = \frac{f_{2\text{máx}} - f_{2\text{min}}}{2f_{2,c}}$$

(V.12)

c.1 - Exemplos ilustrativos

O programa usado para simular a expressão V.11 é dado por diagrama em blocos no apêndice A seção A.2.2.2, os parâmetros do sistema são $\omega_1 = 300$ rd/s, $\omega_2 = 400$ rd/s e $\eta_1 = 0,001$, $\eta_2 = 0,04$ sendo as excitações ruídos brancos Gaussianos "iniciais" (1º e 2º ruído branco).

Analogamente ao caso b.1 utilizou-se a variável f , e considerou-se só frequências positivas.

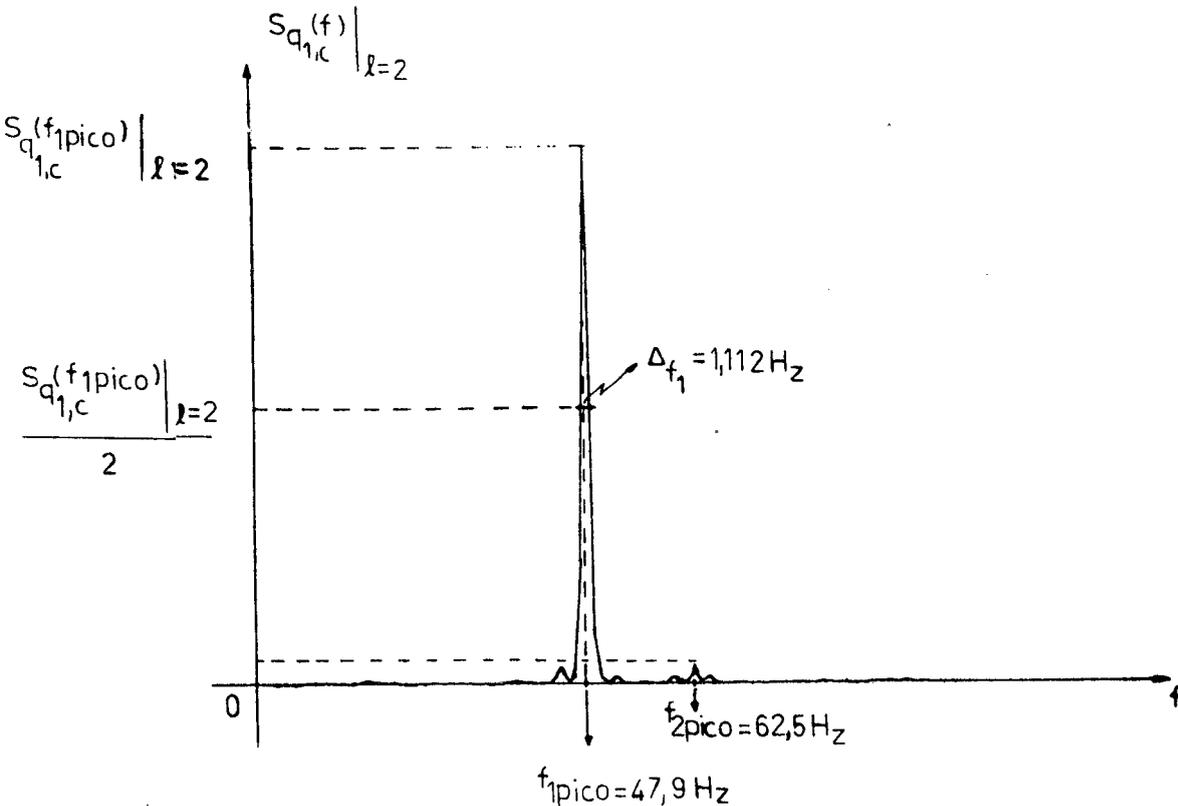


Figura V.3 - Função densidade espectral de potência, dois graus de liberdade, frequências próximas.

e usando (V.12), tem-se:

$$\eta_{1,c} = 0,0116$$

$$\eta_{2,c} = \text{---}$$

$$\omega_{1,c} = 300,965 \text{ rd/s}$$

$$\omega_{2,c} = 392,690 \text{ rd/s}$$

Para melhor visualização da função densidade de espectral, será utilizado uma escala monolog, assim a figura V.3 fica:

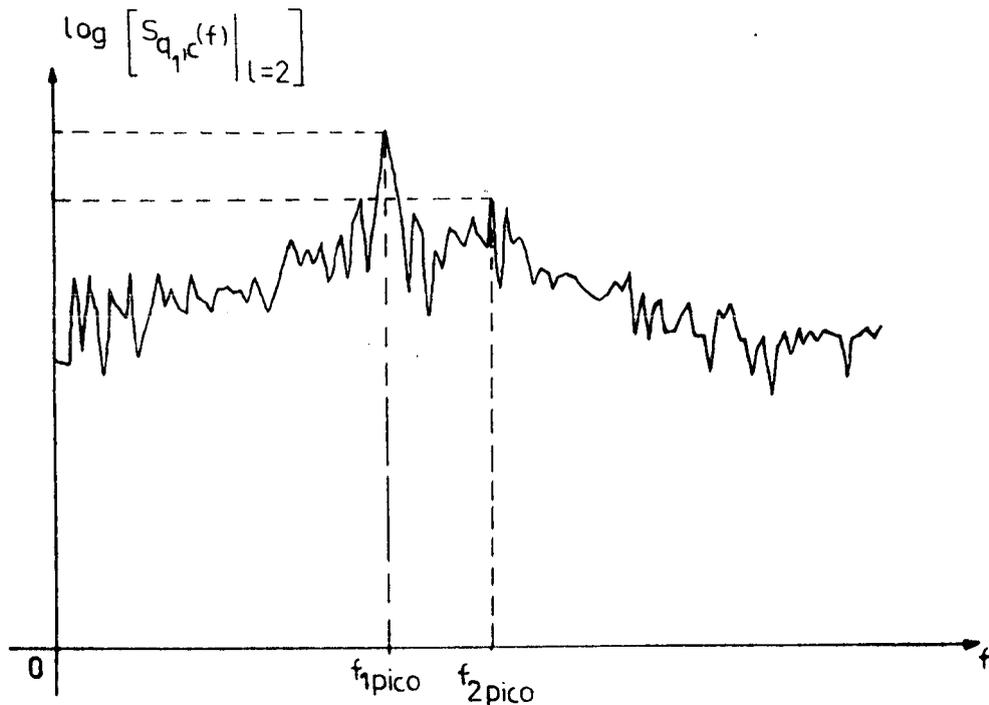


Figura V.4 - Função densidade espectral de potência, 2º graus de liberdade, frequências próximas, escala monolog.

Obs.: Comparando os parâmetros calculados dos casos b.1 e c.1 com os respectivos parâmetros dados, pode-se verificar que as frequências calculadas diferem muito pouco, mas os fatores de amortecimentos calculados não tem consistência.

- No caso de 2º graus de liberdade, apesar das frequências serem próximas os picos apresentam-se distanciados o suficiente, permitindo mesmo de forma imprecisa o cálculo do fator de amortecimento do primeiro modo. Para o segundo modo o cálculo foi muito impreciso.
- Os fatores de amortecimentos calculados do sistema de 2º graus de liberdade apresentam-se mais incorretos que do sistema de 1º grau de liberdade, devido a variação não linear da amplitude com o período de oscilação.
- Este método ficou em parte prejudicado pelo baixo número de pontos considerados, (apêndice E). No capítulo VI além

de considerar-se mais pontos rez-se médias sobre as funções densidades encontradas o que melhorou bastante o cálculo dos parâmetros.

V.3 - FUNÇÃO AUTOCORRELAÇÃO

Considerando o processo ergódico a função autocorrelação da resposta do sistema "r(t)", é definida como, |10|:

$$R_r(t') = \overline{r(t)r(t+t')} = \lim_{t'_{\max} \rightarrow \infty} \frac{1}{t'_{\max}} \int_{-t'_{\max}/2}^{t'_{\max}/2} r(t)r(t+t') dt \quad (V.13) \quad (t' > 0)$$

ou como a transformada de Fourier da função densidade espectral de potência da resposta do sistema:

$$R_r(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_r(\omega) e^{j\omega t'} d\omega \quad (V.14)$$

usando (V.1), tem-se:

$$R_r(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_e(\omega) e^{j\omega t'} d\omega \quad (V.15)$$

ou ainda usando (V.3), (V.14) pode ser escrita como:

$$R_r(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{t'_{\max} \rightarrow \infty} \frac{|R_{t'_{\max}}(\omega)|^2}{t'_{\max}} \right] e^{j\omega t'} d\omega \quad (V.16)$$

onde $R_{t'_{\max}}(\omega)$ é a transformada de Fourier da resposta do siste

ma de tamanho t'_{\max} .

a - Problemas relacionados com o método

a.1 - (V.15) indica que a função autocorrelação só será representativa do sistema se a excitação for um ruído branco. Neste caso $S_e(\omega) = S_0$ e (V.15) pode ser escrita como:

$$R_R(t') = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 e^{j\omega t'} d\omega .$$

a.2 - Para sistemas de um grau de liberdade excitados por ruído branco, a função autocorrelação tem escala diferente mas forma igual a função decremento aleatório acrescida do nível de seleção A, existindo pequena diferença entre as funções no fim do registro. Esta diferença se acentuará quando o sistema tiver mais graus de liberdade.

Obs.: Para diminuir a diferença entre as funções é necessário aumentar o tamanho do registro [4].

a.3 - Do que foi citado antes vê-se que se o sistema for excitado por ruído branco e tiver um grau de liberdade, (modos isolados), os parâmetros podem ser obtidos pelos métodos apresentados no capítulo III, mas para sistemas de mais graus de liberdade o método para separar os modos é mais difícil que o dos mínimos quadrados, [11].

a.4 - A função autocorrelação se altera com as modificações nos parâmetros do sistema podendo-se então identificar falhas, mas considerando as propriedades abaixo:

$$1. \lim_{t' \rightarrow \infty} R_r(t') = (\overline{r(t)})^2$$

$$2. R_r(0) = \overline{r^2(t)}$$

pode-se ver que, se a excitação for um ruído branco a autocorrelação oscilará em torno da origem terminando com este valor, o que facilitaria a determinação de um padrão para detecção de falhas, mas existirá a dependência da autocorrelação com a intensidade das amplitudes da excitação. Assim uma mudança na intensidade destas amplitudes causaria modificações na autocorrelação e alarmes falsos de falhas poderiam ser detectados.

b - Sistema de um grau de liberdade (pequenos amortecimentos)

Neste caso, usando (V.15), a função autocorrelação da resposta do sistema, "y(t)", sendo a excitação "f(t)", é dada por:

$$R_y(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_1(\omega)|^2 S_f(\omega) e^{j\omega t'} d\omega \quad (V-17)$$

onde

$$H_1(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 2j\omega\eta_1\omega_1 + \omega_1^2}$$

considerando 1024 pontos tomados a uma razão de amostragem de 1000 amostras por segundo, e usando (V.16), a função autocorrelação calculada é dada por:

$$R_{y_c}(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{|Y_{t'_k}(\omega)|^2}{t'_k} \right] e^{j\omega t'} d\omega \quad (V.18)$$

onde $Y_{t'_k}(\omega)$ é a transformada rápida de Fourier de um trecho de comprimento, $t'_k = KT$, da resposta do sistema de um grau de liberdade, sendo:

$$K = 1024$$

$$T = 0.001 \text{ s}$$

com a excitação um ruído branco e usando:

$$|H_1(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\eta_1\omega_1)^2}, \quad S_f(\omega) = S_0$$

V.17 pode ser escrita como:

$$R_y(t') = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\eta_1\omega_1)^2} e^{j\omega t'} d\omega \quad (V.19)$$

b.1 - Exemplos Ilustrativos

O programa usado para simular a expressão V.18 é dado por diagrama em blocos no apêndice A seção A.2.3.1. Os gráficos apresentados só possuem valores positivos no tempo.

b.1.1 - Comparação com a função de decaimento aleatório

A excitação é a "inicial" e os parâmetros do sistema são:

$$\eta_1 = 0,001$$

$$\omega_1 = 300 \text{ rd/s}$$

e no caso da função de decaimento aleatório:

$$A = 4000$$

$$N = 500$$

$$t'_{\text{máx}} = 0,063 \text{ s}$$

$$t_{\text{máx}} = 9,082 \text{ s}$$

sendo a excitação o 1º ruído branco Gaussiano, tem-se:

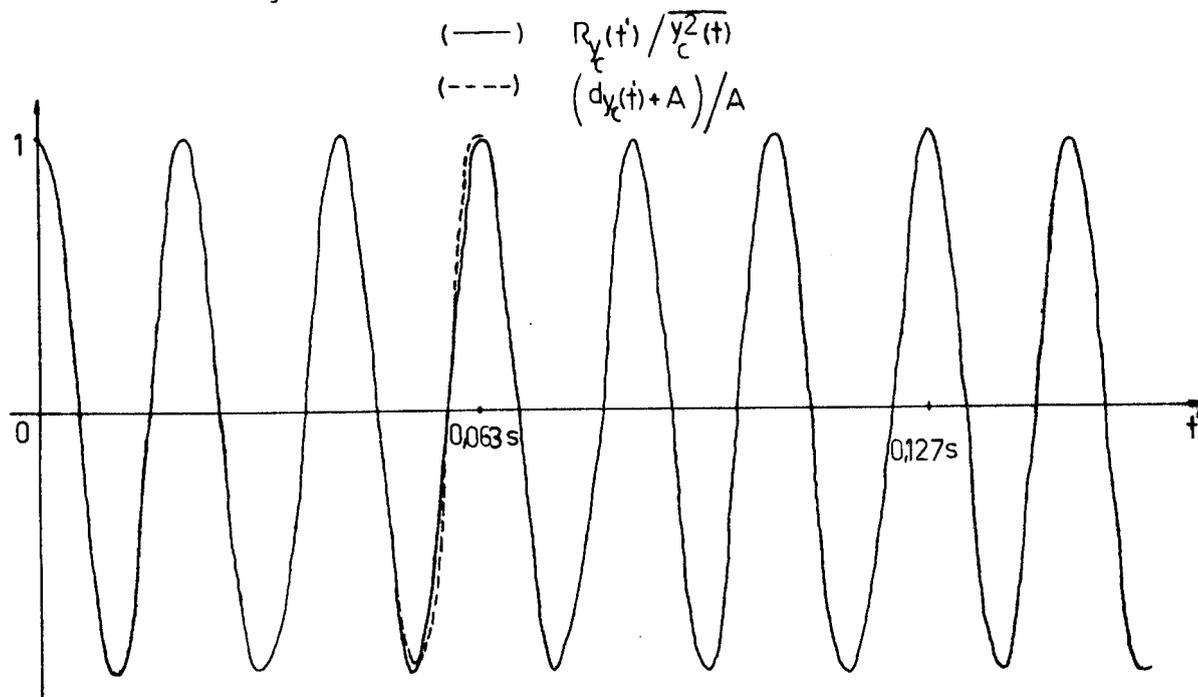


Figura V.5 - Comparação entre a função autocorrelação e a função de decaimento aleatório (1º ruído branco Gaussiano).

Obs.: Quando a excitação é um ruído branco Gaussiano ocorre uma pequena diferença entre as funções no fim do registro.

Obs.: Para comparação as funções foram normalizadas. E no caso da função decremento aleatório foram usados 64 pontos.

b.1.2 - Variação na autocorrelação devido a mudanças na excitação

A excitação é um ruído branco Gaussiano, sendo os parâmetros do sistema os mesmos do caso anterior:

$$\eta_1 = 0,001$$

$$\omega_1 = 300 \text{ rd/s}$$

sendo a excitação inicial (1º ruído branco), tem-se:

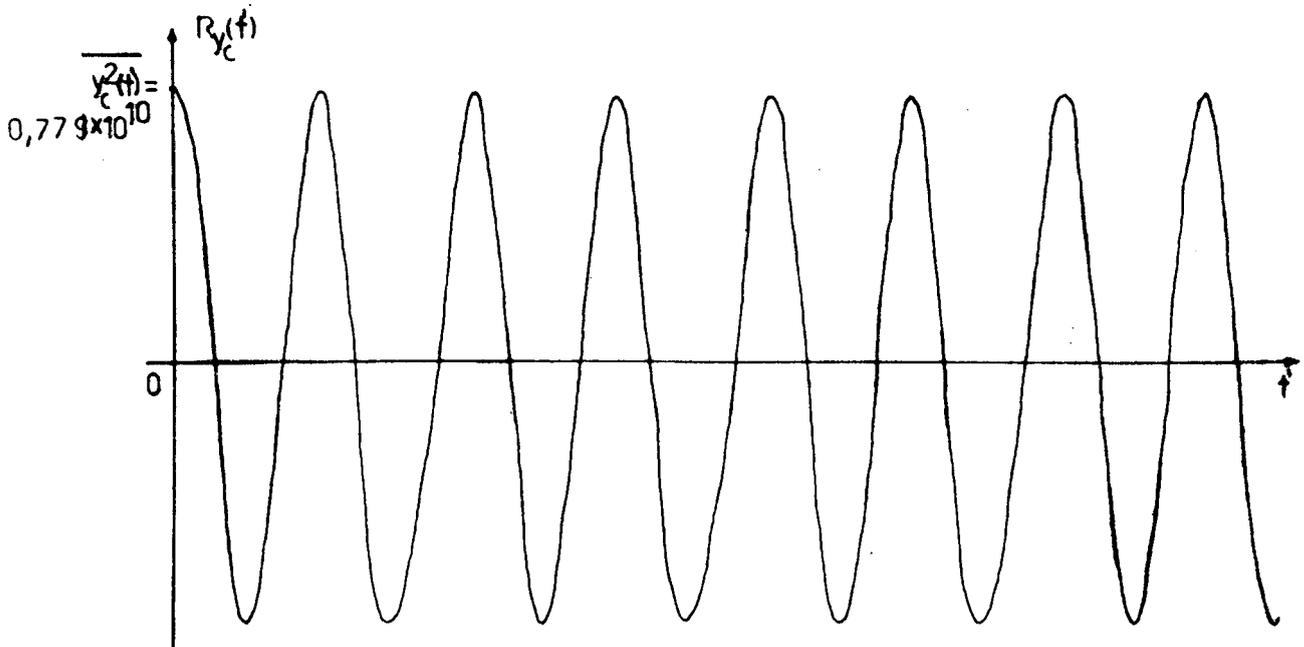


Figura V.6 - Função autocorrelação (excitação inicial - 1º ruído branco).

considerando agora uma nova excitação (2º ruído branco), tem-se:

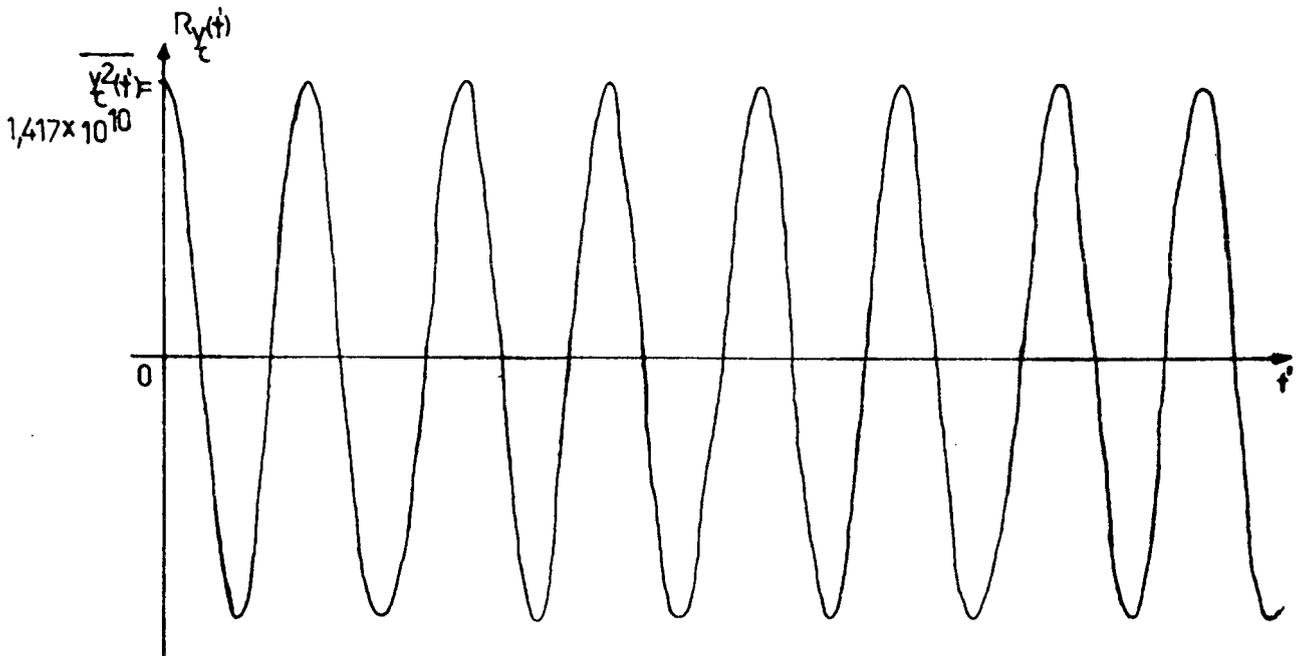


Figura V.7 - Função autocorrelação (nova excitação - 2º ruído branco).

Obs.: As Figuras V.6 e V.7 indicam que com a variação da excitação a função autocorrelação se alterou significativamente devido a modificações em S_0 .

b.1.3 - Variação na autocorrelação devido a mudança no fator de amortecimento

A excitação considerada é o ruído branco Gaussiano "inicial". Sendo os parâmetros do sistema dados por:

$$\eta_1 = 0,01$$

$$\omega_1 = 300 \text{ rd/s}$$

tem-se:

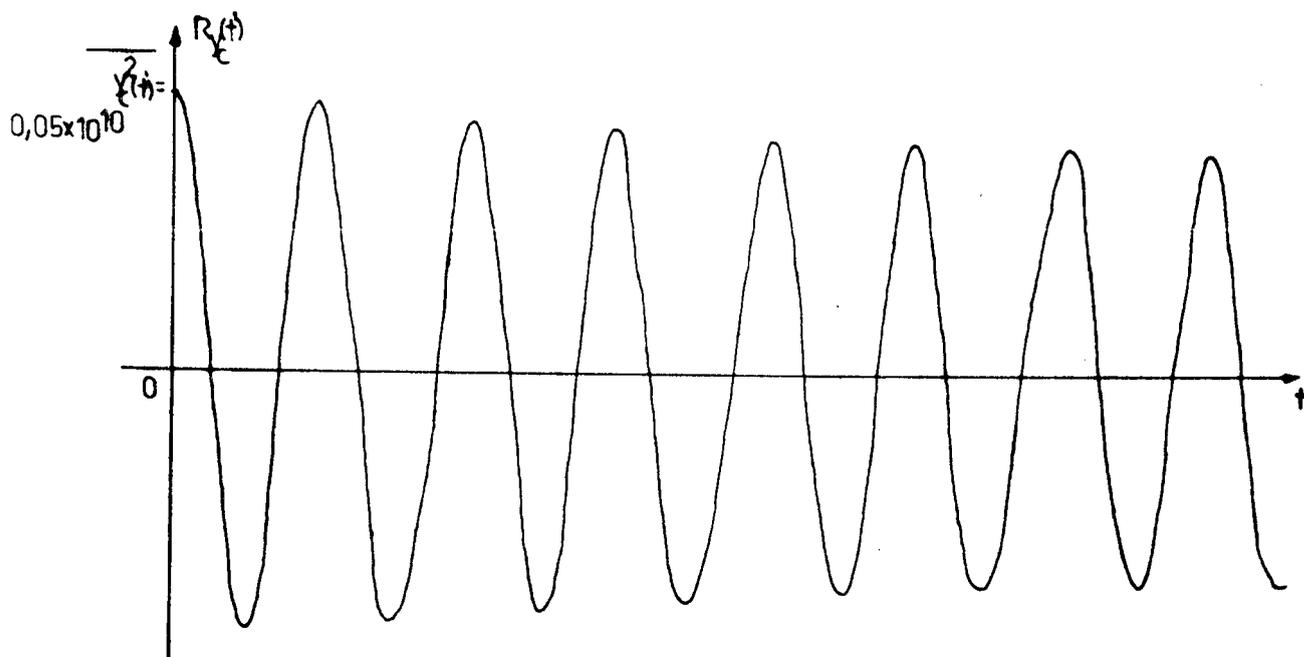


Figura V.8 - Função autocorrelação com o fator de amortecimento modificado.

Obs.: Comparando a Figura V.8 com a Figura V.6, verifica-se que a função autocorrelação se altera com mudanças nos parâmetros do sistema.

c - Sistema de ℓ graus de liberdade (pequenos amortecimentos - frequências próximas)

Neste caso, usando (V.15) a função autocorrelação da resposta do sistema, referente ao i ésimo modo normal, " $\psi_i(t)$ ", sendo a excitação " $N_i(t)$ " é:

$$R_{\psi_i}(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_i(\omega)|^2 S_{N_i}(\omega) e^{j\omega t'} d\omega$$

(i = 1, 2, \dots, \ell)

onde

(V.20)

$$H_i(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 2j\omega\eta_i\omega_i + \omega_i^2}$$

considerando 1024 pontos tomados a uma razão de amostragem de 1000 amostras por segundo, e usando (V.16), a função autocorrelação calculada referente ao i-ésimo modo normal é dada por:

$$R_{\psi_{i,c}}(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{|\Psi_{i,t'_k}(\omega)|^2}{t'_k} \right] e^{j\omega t'} d\omega$$

(i = 1, 2, \dots, \ell)

onde $\Psi_{i,t'_k}(\omega)$ (i = 1, 2, \dots, \ell) é a transformada rápida de Fourier de um trecho de comprimento, $t'_k = KT$, da resposta do sistema referente ao i-ésimo modo normal, sendo:

$$K = 1024$$

$$T = 0.001 \text{ s}$$

usando (V.10), a função autocorrelação calculada referente a resposta da 1ª massa do sistema, " $q_1(t)$ ", é dada por:

$$\begin{aligned}
 R_{q_{1,c}}(t') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{|Q_{1,t'_k}(\omega)|^2}{t'_k} \right] e^{j\omega t'} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\left| \sum_{i=1}^{\ell} b_1^{(i)} \psi_{i,t'_k}(\omega) \right|^2}{t'_k} \right] e^{j\omega t'} d\omega \quad (V.22)
 \end{aligned}$$

sendo o sistema de dois graus de liberdade, (V.22) fica:

$$R_{q_{1,c}}(t') \Big|_{\ell=2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\left| \sum_{i=1}^2 b_1^{(i)} \psi_{i,t'_k}(\omega) \right|^2}{t'_k} \right] e^{j\omega t'} d\omega \quad (V.23)$$

ou sendo (V.9) dada por:

$$q_1(t) = b_1^{(1)} \psi_1(t) + b_1^{(2)} \psi_2(t) \quad (t \geq 0)$$

a função autocorrelação do sistema de dois graus de liberdade é, |6|.

$$\begin{aligned}
 R_{q_1}(t') \Big|_{\ell=2} &= \left[b_1^{(1)} \right]^2 R_{\psi_1}(t') + \left[b_1^{(1)} b_1^{(2)} \right] R_{\psi_1 \psi_2}(t') + \\
 &+ \left[b_1^{(1)} b_1^{(2)} \right] R_{\psi_2 \psi_1}(t') + \left[b_1^{(2)} \right]^2 R_{\psi_2}(t') \quad (V.24)
 \end{aligned}$$

e considerando as excitações $N_1(t)$ e $N_2(t)$ ruídos brancos, $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ serão estatisticamente independentes, e as correlações cruzadas entre os modos se anulam.

$$R_{\psi_1 \psi_2}(t') = R_{\psi_2 \psi_1}(t') = 0 \quad (V.25)$$

substituindo (V.25) em (V.24), tem-se:

$$R_{q_1}(t') \Big|_{\ell=2} = \left[b_1^{(1)} \right]^2 R_{\psi_1}(t') + \left[b_1^{(2)} \right]^2 R_{\psi_2}(t') \quad (V.26)$$

considerando $S_{N_1}(\omega) = S_1$ e $S_{N_2}(\omega) = S_2$ valores constantes e substituindo (V.20) em (V.26), tem-se:

$$\begin{aligned} R_{q_1}(t') \Big|_{\ell=2} &= \frac{S_1 \left[b_1^{(1)} \right]^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_1(\omega)|^2 e^{j\omega t'} d\omega + \\ &+ \frac{S_2 \left[b_1^{(2)} \right]^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_2(\omega)|^2 e^{j\omega t'} d\omega \end{aligned} \quad (V.27)$$

ou ainda usando (V.21) em (V.26), a função autocorrelação calculada, referente a resposta da 1ª massa do sistema " $q_1(t)$ ", quando as excitações são ruídos brancos Gaussianos é dada por:

$$\begin{aligned} R_{q_{1,c}}(t') \Big|_{\ell=2} &= \frac{\left[b_1^{(1)} \right]^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{|\Psi_{1,t'_k}(\omega)|^2}{t'_k} \right] e^{j\omega t'} d\omega + \\ &+ \frac{\left[b_1^{(2)} \right]^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{|\Psi_{2,t'_k}(\omega)|^2}{2\pi} \right] e^{j\omega t'} d\omega \end{aligned} \quad (V.28)$$

c.1 - Exemplos ilustrativos

O programa usado para simular a expressão V.28 é dado por diagrama em blocos no apêndice A seção A.2.3.2. Os gráficos apresentados sô possuem valores positivos no tempo.

c.1.1 - Comparação com a função de decaimento aleatório

As excitações são as "iniciais" e os parâmetros do sistema são:

$$\eta_1 = 0,001$$

$$\eta_2 = 0,04$$

$$\omega_1 = 300 \text{ rd/s}$$

$$\omega_2 = 400 \text{ rd/s}$$

e no caso da função de decaimento aleatório:

$$A = 500$$

$$N = 500$$

$$t'_{\text{máx}} = 0,063 \text{ s}$$

$$t_{\text{máx}} = 5,201 \text{ s}$$

sendo as excitações ruídos brancos Gaussianos, tem-se:

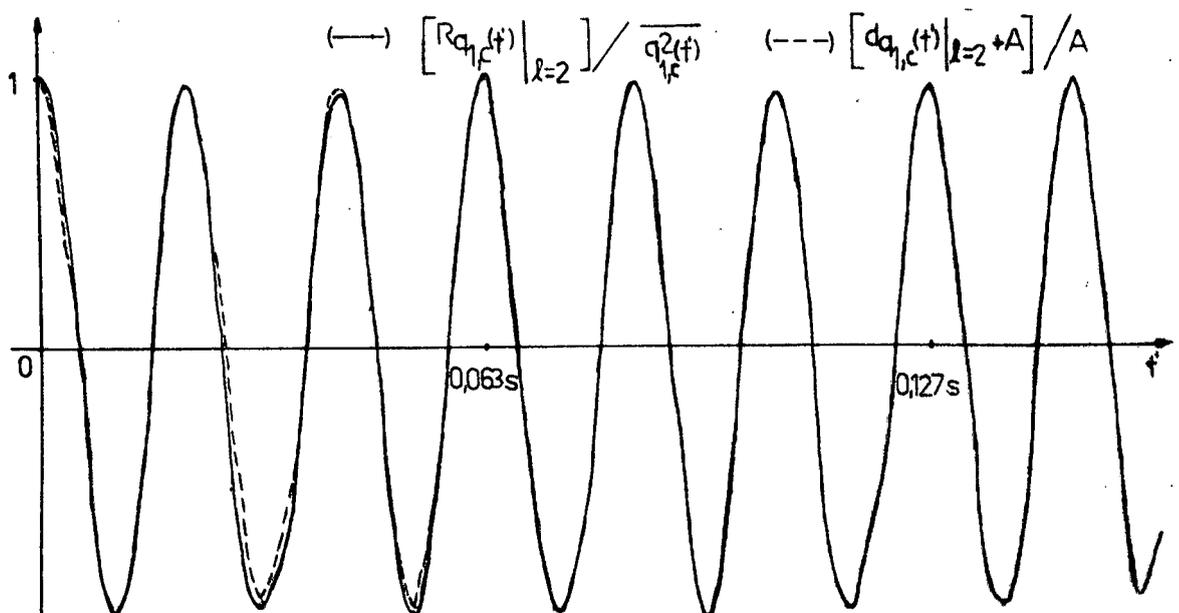


Figura V.9 - Comparação entre a autocorrelação e o decaimento aleatório (1º e 2º ruído branco Gaussiano).

Obs.: Da Figura V.9 verifica-se o fenômeno de batimento e a diferença significativa entre as funções. No caso da função de decaimento aleatório considerou-se 64 pontos.

Obs.: Se fossem considerados como excitações ruidos coloridos, as correlações cruzadas dos modos, apresentadas por (V.24) se fariam sentir e a autocorrelação não seria representativa do sistema.

V.4 - FUNÇÃO CORRELAÇÃO CRUZADA

Considerando o processo ergódico a função correlação cruzada entre a excitação "e(t)" e a resposta do sistema "r(t)", é definida como [10]:

$$R_{er}(t') = \overline{e(t)r(t+t')} = \lim_{t'_{\max} \rightarrow \infty} \frac{1}{t'_{\max}} \int_{-t'_{\max}/2}^{t'_{\max}/2} e(t)r(t+t') dt \quad (V.29)$$

ou como

$$R_{er}(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S_e(\omega) e^{j\omega t'} d\omega \quad (V.30)$$

sendo a função densidade espectral de potência da excitação dada por:

$$S_e(\omega) = \lim_{t'_{\max} \rightarrow \infty} \left| E_{t'_{\max}}(\omega) \right|^2 ,$$

(V.30) pode ser escrita como:

$$R_{er}(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \lim_{t'_{\max} \rightarrow \infty} |E_{t'_{\max}}(\omega)|^2 e^{j\omega t'} d\omega \quad (V.31)$$

onde $E_{t'_{\max}}(\omega)$ é a transformada de Fourier da excitação do sistema de tamanho t'_{\max} .

a - Problemas relacionados com o método

a.1 - (V.30) indica que a função correlação cruzada é usada para identificação de sistemas quando a excitação é um ruído branco. Neste caso $S_e(\omega) = S_0 = \text{constante}$, e (V.30) pode ser escrita como:

$$R_{er}(t') = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t'} d\omega = S_0 h(t')$$

onde $h(t')$ é a resposta impulsiva do sistema.

a.2 - Para sistemas de um grau de liberdade excitado por ruído branco, (modos isolados), pode-se determinar os seus parâmetros por qualquer dos três métodos apresentados no capítulo III. Sendo os sistemas de mais graus de liberdade excitados por ruído branco, a correlação cruzada será proporcional a soma das respostas impulsivas, podendo-se usar o método dos mínimos quadrados, para separar os modos. Mas se a excitação for um ruído colorido, a correlação cruzada não será representativa do sistema.

a.3 - A função correlação cruzada altera-se com as modificações nos parâmetros do sistema, podendo-se então identificar falhas. Considerando-se as propriedades abaixo:

$$1. \lim_{t' \rightarrow \infty} R_{er}(t') = \overline{e(t)} \overline{r(t)}$$

$$2. R_{er}(0) = \overline{e(t) r(t)}$$

pode-se ver que; se a excitação for um ruído branco a correlação cruzada oscilará em torno da origem, terminando com este valor, o que facilitaria a determinação de um padrão para detecção de falhas. Mas infelizmente haverá dependência em relação a intensidade das amplitudes da excitação e resposta do sistema.

a.4 - O principal problema com a correlação cruzada está no facto de precisar-se conhecer a excitação, não sendo possível trabalhar em condições de serviço.

b - Sistema de um grau de liberdade (pequenos amortecimentos)

Neste caso, usando (V.30), a função correlação cruzada entre a excitação "f(t)", e a resposta do sistema, "y(t)", é dada por:

$$R_{fy}(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega) S_f(\omega) e^{j\omega t'} d\omega \quad (V.32)$$

onde

$$H_1(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 2j\omega\eta_1\omega_1 + \omega_1^2}$$

considerando 1024 pontos tomados a uma razão de amostragem de 1000 amostras por segundo, e usando (V.31), a função correlação cruzada $\bar{R}_{fy,c}$ é dada por:

$$R_{fy,c}(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega) \frac{|F_{t'_k}(\omega)|^2}{t'_k} e^{j\omega t'} d\omega \quad (V.33)$$

onde $F_{t'_k}(\omega)$ é a transformada rápida de Fourier de um trecho de comprimento, $t'_k = KT$, da excitação do sistema de um grau de liberdade, sendo:

$$K = 1024$$

$$T = 0,001 \text{ s}$$

sendo a excitação um ruído branco, (V.32) pode ser escrita como:

$$R_{fy}(t') = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{-\omega^2 + 2j\omega\eta_1 + \omega_1^2} e^{j\omega t'} d\omega = \frac{S_0}{2\pi} h_1(t') \quad (V.34)$$

b.1 - Exemplos ilustrativos

O programa usado para simular a expressão V.33 é dado por diagrama em blocos no apêndice A seção A.2.4.1. Os gráficos apresentados são possuem valores positivos no tempo.

b.1.1 - Variação na correlação cruzada devido a mudança na excitação.

A excitação é um ruído branco Gaussiano, sendo os parâmetros do sistema:

$$\eta_1 = 0,001$$

$$\omega_1 = 300 \text{ rd/s}$$

sendo a excitação inicial, tem-se:

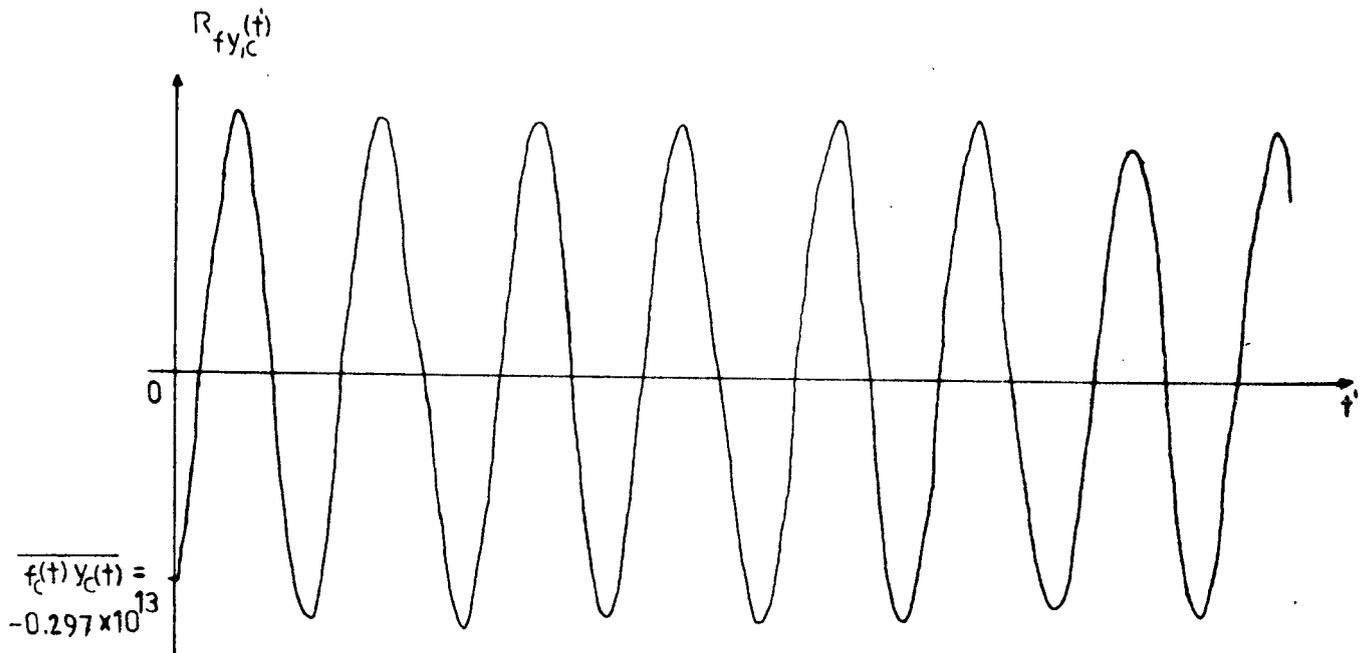


Figura V.10 - Função correlação cruzada, excitação inicial, 1º ruído branco Gaussiano.

considerando uma nova excitação, tem-se:

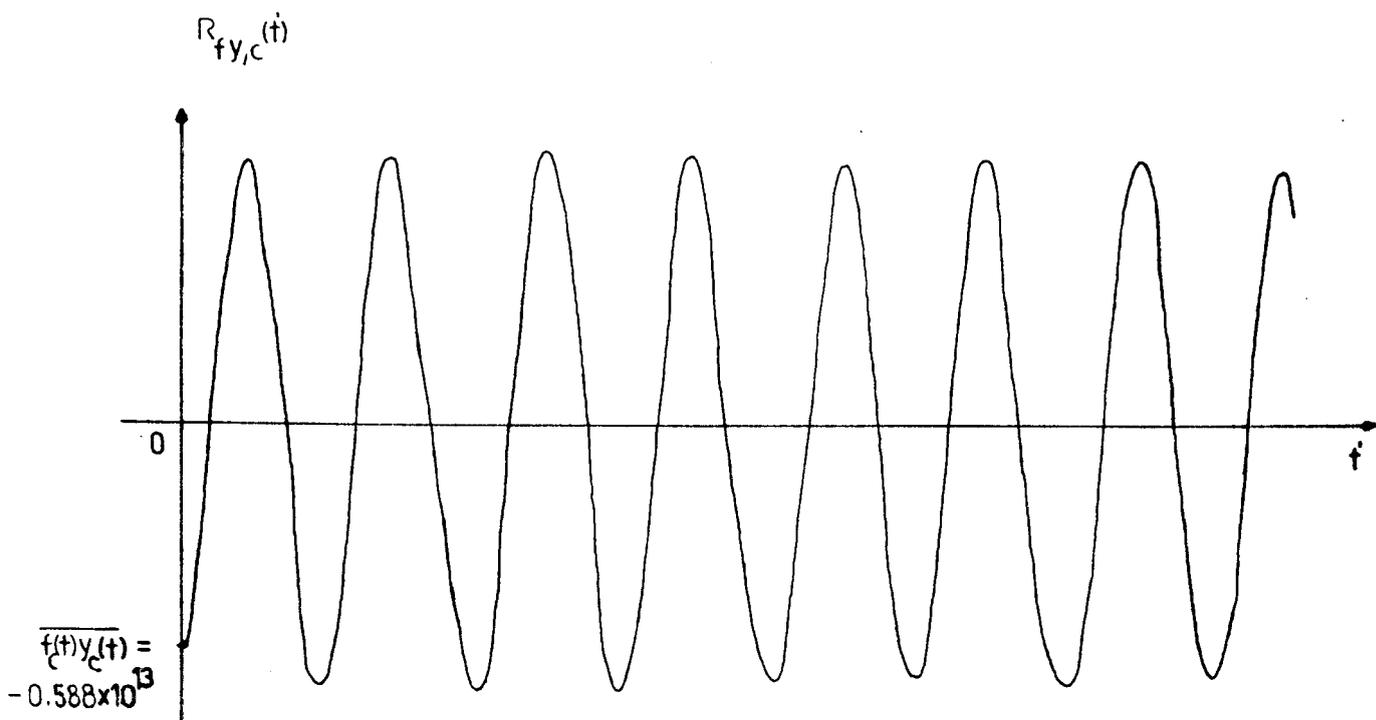


Figura V.11 - Função correlação cruzada, nova excitação, 2º ruído branco Gaussiano.

Obs.: Comparando a Figura V.10 com V.11 pode-se ver que a correlação cruzada se alterou significativamente devido a mudança em S_0 .

b.1.2 - Variação na correlação cruzada devido a mudança no fator de amortecimento

A excitação considerada é o ruído branco Gaussiano "inicial". Sendo os parâmetros do sistema dados por:

$$\eta_1 = 0,01$$

$$\omega_1 = 300 \text{ rd/s}$$

tem-se:

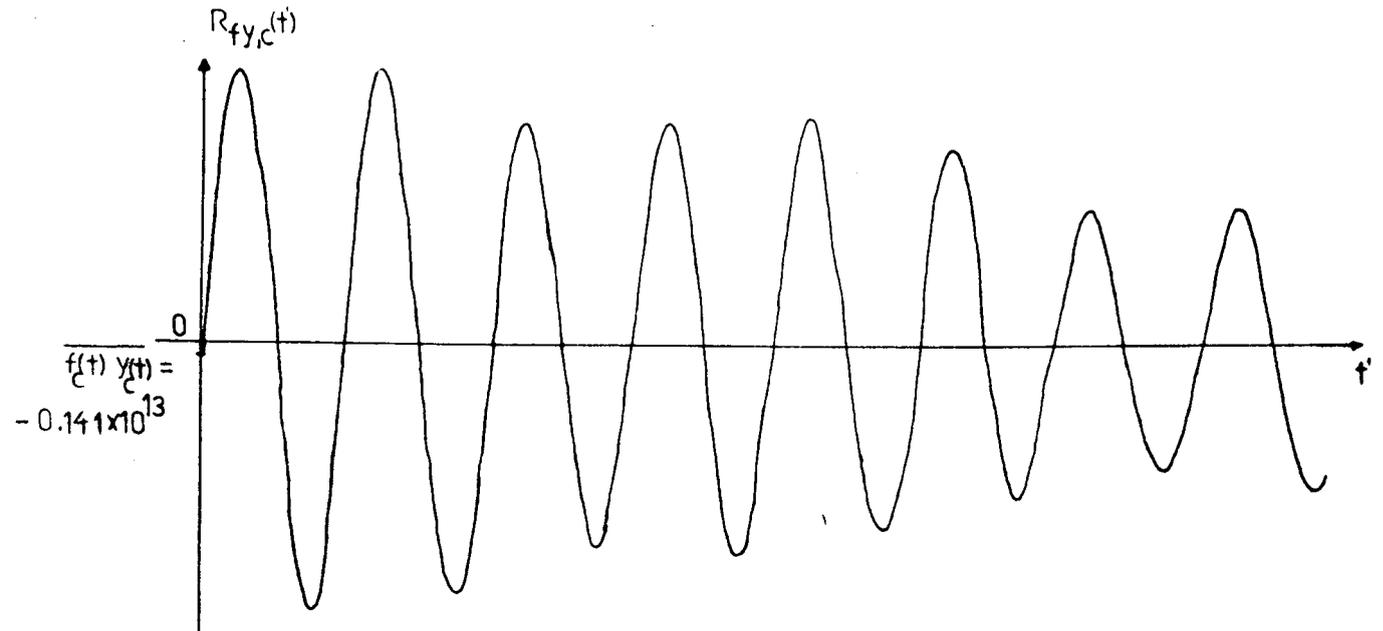


Figura V.12 - Função correlação cruzada com fator de amortecimento modificado, 1º ruído branco Gaussiano.

Obs.: Comparando a Figura V.12 com a Figura V.10, verifica-se que a função correlação cruzada se altera com mudanças nos pa râ m et ros do sistema.

c - Sistema de ℓ graus de liberdade (pequenos amortecimentos - frequências próximas)

Neste caso, usando (V.30), a função correlação cruzada entre a excitação " $N_i(t)$ ", e a resposta do sistema " $\psi_i(t)$ ", referentes ao i ésimo modo normal, é dada por:

$$R_{N_i \psi_i}(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_i(\omega) S_{N_i}(\omega) e^{j\omega t'} d\omega \quad (V.35)$$

(i = 1, 2, \dots, \ell)

onde

$$H_i(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 2j\omega\eta_i\omega_i + \omega_i^2}$$

considerando 1024 pontos tomados a uma razão de amostragem de 1000 amostras por segundo, e usando (V.31), a função correlação cruzada calculada referente ao i ésimo modo normal é dada por:

$$R_{N_i \psi_{i,c}}(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_i(\omega) \frac{|N_{i,t'_k}(\omega)|^2}{t'_k} e^{j\omega t'} d\omega \quad (V.36)$$

(i = 1, 2, \dots, \ell)

onde $N_{i,t'_k}(\omega)$ (i = 1, 2, \dots, \ell) é a transformada rápida de Fourier de um trecho de comprimento, $t'_k = KT$, da excitação do sistema referente ao i ésimo modo normal, sendo:

$$K = 1024$$

$$T = 0,001 \text{ s}$$

e a correlação cruzada entre as excitações de entrada " $N_i(t)$ " ($i = 1, 2, \dots, \ell$) e a resposta da 1.^a massa do sistema " $q_1(t)$ " é dada por |6|:

$$R_{N^*q_1}(t') = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} \begin{bmatrix} b_1^{(k)} \end{bmatrix} R_{N_i\psi_k}(t') \quad (V.37)$$

onde

$$q_1(t) = \sum_{k=1}^{\ell} \begin{bmatrix} b_1^{(k)} \end{bmatrix} \psi_k(t) \quad e \quad N^*(t) = \sum_{i=1}^{\ell} N_i(t) \quad (V.38)$$

assim para um sistema de dois graus de liberdade tem-se:

$$\begin{aligned} R_{N^*q_1}(t') \Big|_{\ell=2} &= \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \end{bmatrix} R_{N_1\psi_1}(t') + \begin{bmatrix} b_1^{(2)} \end{bmatrix} R_{N_1\psi_2}(t') + \\ &+ \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \end{bmatrix} R_{N_2\psi_1}(t') + \begin{bmatrix} b_1^{(2)} \end{bmatrix} R_{N_2\psi_2}(t') \end{aligned} \quad (V.39)$$

como não existe correlação cruzada entre as excitações e resposta de modos diferentes (V.39) pode ser escrita como:

$$R_{N^*q_1}(t') \Big|_{\ell=2} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \end{bmatrix} R_{N_1\psi_1}(t') + \begin{bmatrix} b_1^{(2)} \end{bmatrix} R_{N_2\psi_2}(t') \quad (V.40)$$

Considerando as excitações $N_1(t)$ e $N_2(t)$ ruídos brancos, $S_{N_1}(\omega) = S_1$ e $S_{N_2}(\omega) = S_2$ são valores constantes, substituindo então (V.35) em (V.40) temos:

$$R_{N^*q_1}(t') \Big|_{\ell=2} = \frac{S_1 [b_1^{(1)}]}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega) e^{j\omega t'} d\omega + \frac{S_2 [b_1^{(2)}]}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_2(\omega) e^{j\omega t'} d\omega \quad (V.41)$$

ou

$$R_{N^*q_1}(t') \Big|_{\ell=2} = \frac{S_1 [b_1^{(1)}]}{2\pi} h_1(t) + \frac{S_2 [b_1^{(2)}]}{2\pi} h_2(t) \quad (V.42)$$

onde $h_1(t)$ e $h_2(t)$ são respectivamente a resposta impulsiva do primeiro e segundo modo, ou ainda usando (V.36) em (V.40), a função correlação cruzada calculada, entre as excitações, " $N_1(t)$ ", " $N_2(t)$ ", e a resposta da 1ª massa do sistema " $q_1(t)$ ", de dois graus de liberdade é dada por:

$$R_{N^*q_1,c}(t') \Big|_{\ell=2} = \frac{[b_1^{(1)}]}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega) \frac{|N_{1,t'_k}(\omega)|^2}{t'_k} e^{j\omega t'} d\omega + \\ + \frac{[b_1^{(2)}]}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_2(\omega) \frac{|N_{2,t'_k}(\omega)|^2}{t'_k} e^{j\omega t'} d\omega \quad (V.43)$$

c.1 - Exemplos ilustrativos

O programa usado para simular a expressão V.43 é dado por diagrama em blocos no apêndice A seção A.2.4.2. Os gráficos apresentados sô possuem valores positivos no tempo.

c.1.1 - Comparação entre a função correlação cruzada quando a excitação é um ruído branco e um ruído colorido

As excitações são as "iniciais" e os parâmetros do sistema são:

$$\eta_1 = 0,001$$

$$\eta_2 = 0,04$$

$$\omega_1 = 300 \text{ rd/s}$$

$$\omega_2 = 400 \text{ rd/s}$$

sendo as excitações ruídos brancos Gaussianos, tem-se

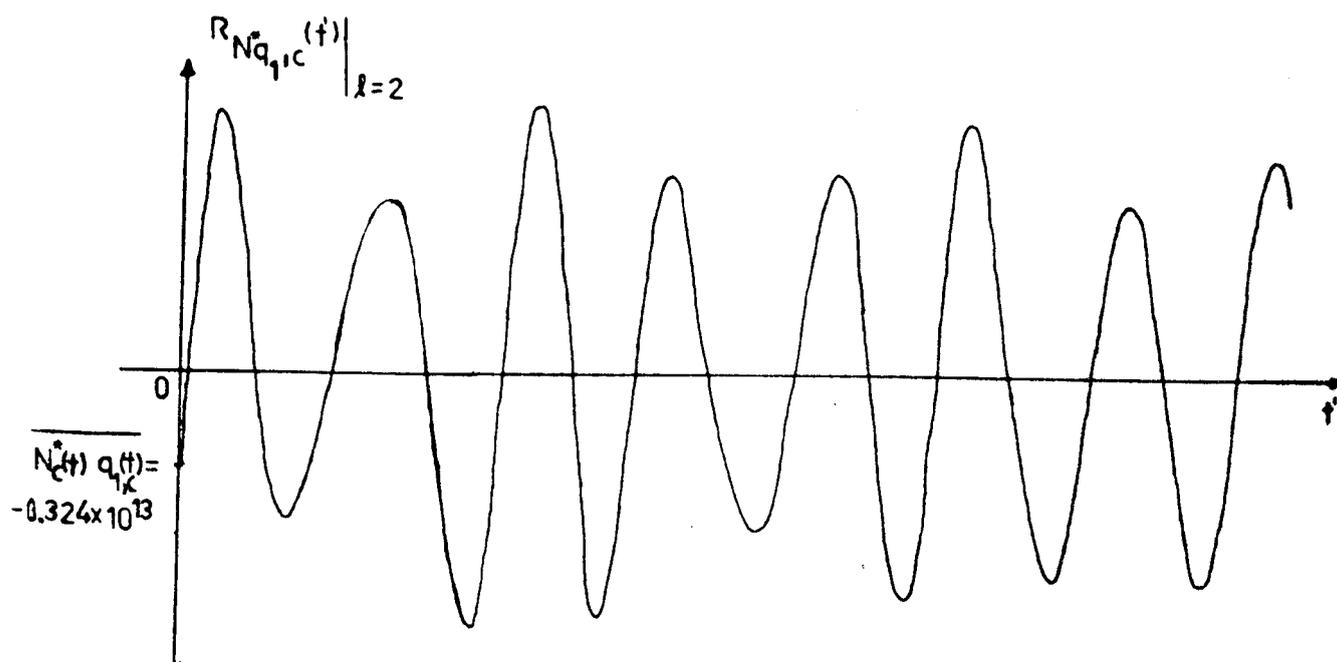


Figura V.13 - Função correlação cruzada, excitações iniciais (1º e 2º ruído branco Gaussiano).

sendo as excitações ruídos coloridos, e anulando a média da res-

posta do sistema, tem-se:

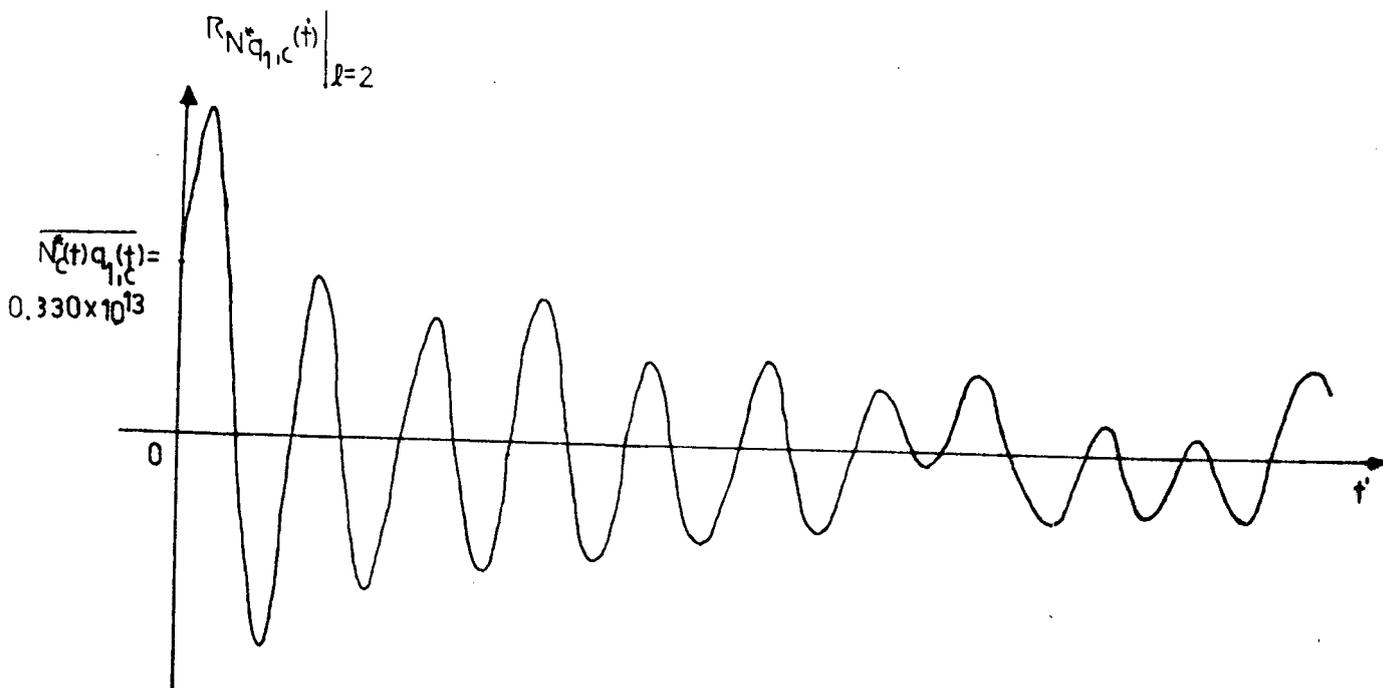


Figura V.14 - Função correlação cruzada, excitações iniciais (1º e 2º ruído colorido).

Obs.: Comparando a figura V.13 com V.14 pode-se verificar que, a função quando a excitação é um ruído colorido, não é proporcional a soma das respostas impulsivas do sistema.

V.5 - CONCLUSÃO

Tendo em vista o desenvolvimento do capítulo, verifica-se que os métodos apresentados, encontram limitações para suas utilizações na detecção de falhas e identificação dos parâmetros do sistema.

CAPÍTULO VI

INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL PARA A DETERMINAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DE VIBRAÇÃO DE UM SISTEMA MECÂNICO

VI.1 - INTRODUÇÃO

Até o momento foram utilizados sistemas mecânicos de um e dois graus de liberdade simulados usando o processo Runge Kutta.

Neste capítulo será usado um sistema mecânico montado em laboratório com o objetivo de verificar na prática o cálculo das características de vibração obtidas através da função de decaimento aleatório.

A verificação é feita comparando os resultados obtidos pela função de decaimento com os resultados encontrados por:

- resposta livre do sistema
- função densidade espectral da resposta do sistema
- módulo ao quadrado da função de transferência do sistema.

VI.2 - DESENVOLVIMENTO DA EXPERIÊNCIA E SISTEMA UTILIZADO

O sistema é constituído por uma viga montada simetricamente sobre um vibrador. As dimensões da viga são:

comprimento = 70cm

largura = 1,25 cm

espessura = 0,25 cm

Pode-se verificar pelos valores acima que a viga tem espessura e largura pequenas comparadas com o comprimento, o que permite obter-se os modos de vibração bem separados, isto é, um sistema unidimensional.

Foi desenvolvido um teste inicial para determinação dos modos de vibração da viga, sendo a excitação neste caso uma senóide com frequência variável.

Calculou-se a seguir o fator de amortecimento com o auxílio da resposta livre do sistema.

Os teste seguintes foram feitos considerando como excitação um ruído colorido com largura de banda préfixada, tendo como frequência central a frequência de um dos modos em questão.

Neste caso, inicialmente, estando o sistema desacoplado determinou-se a função densidade espectral média da excitação através de um teste " on-line ".

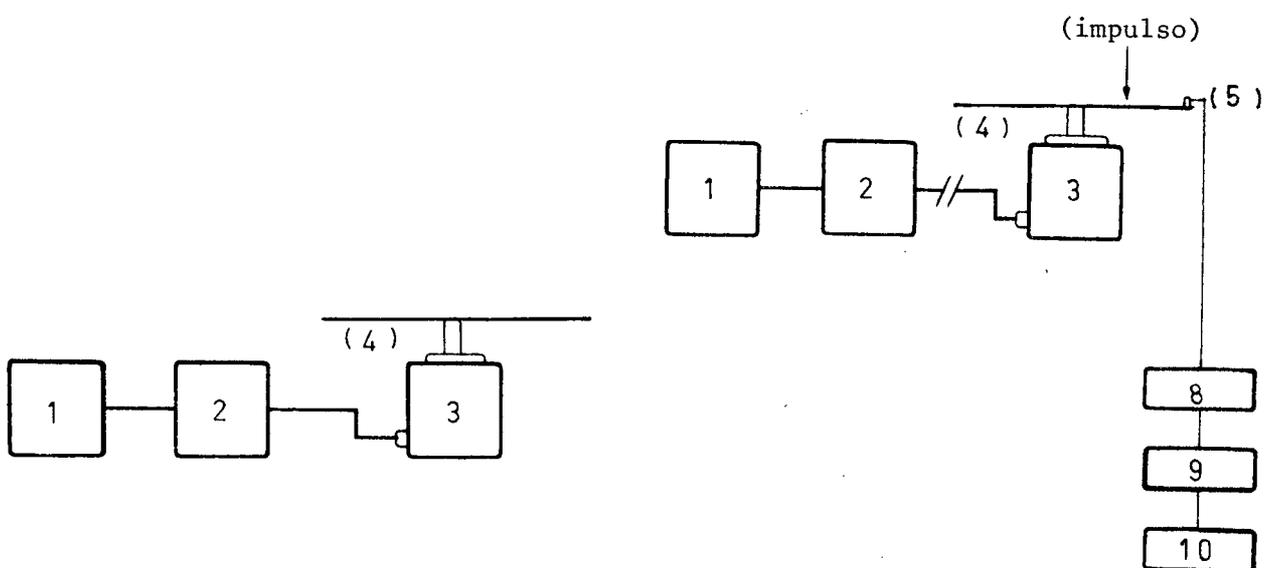
A seguir com o sistema acoplado, gravou-se a excitação e a resposta do sistema em fita magnética e procedeu-se a testes " off-line " para determinação das funções densidades espectrais médias da excitação e resposta. Para maior precisão no cálculo das características determinou-se também a razão entre as

funções densidade da resposta e excitação, isto é, o módulo ao quadrado da função transferência.

Para o último teste gravou-se um trecho da resposta do sistema em fita de papel, e procedeu-se também a testes " off-line " para o cálculo das características do sistema através de alguns exemplos da função de decaimento aleatório no tempo e na frequência.

Obs.: Além da impressão das funções densidade e decaimento, imprimiu-se a excitação e a resposta no tempo, no caso do sistema acoplado.

VI.3 - MONTAGEM DA EXPERIÊNCIA



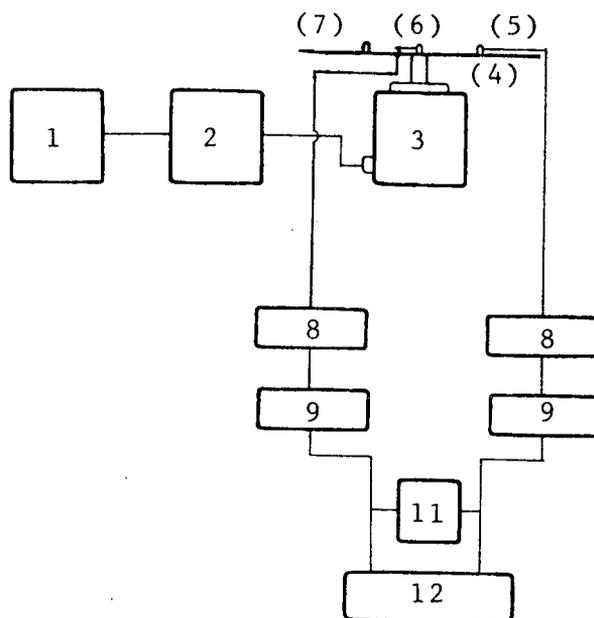
a - Determinação dos modos da viga.

b - Cálculo e impressão da resposta livre.

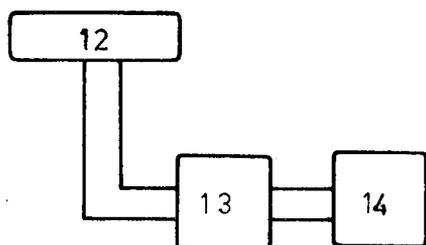
Figura VI.1 - Conjunto experimental



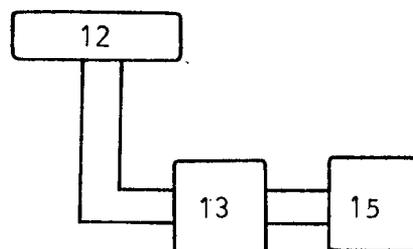
c - Cálculo e impressão da função densidade espectral da excitação. (sistema desacoplado).



d - Gravação da resposta e excitação. (sistema acoplado).

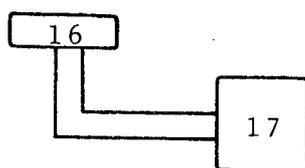


e - Cálculo e impressão da funções densidade espectral da resposta, excitação e módulo ao quadrado da função transferência. Impressão da resposta e excitação no tempo. (sistema acoplado).



f - Perfuração em fita de papel da resposta. (sistema acoplado).

Figura VI.1 - Conjunto experimental (continuação)



g - Passagem de fita de papel para fita magnética da resposta, (sistema acoplado). Cálculo e impressão da função de decaimento aleatório no tempo e na frequência.

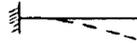
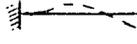
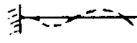
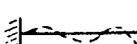
Figura VI.1 - Conjunto experimental (continuação).

- | | |
|--|--|
| (1) Gerador-seno e ruído (B&K1027) | (2) Amplificador de potência (B&K2712) |
| (3) Vibrador (B&K4808) | (4) Viga |
| (5) Acelerômetro-resposta (B&K4344) | (6) Acelerômetro-excitação (B&K 4343) |
| (7) Massa-equilibrada e peso do acelerômetro | (8) Pré-amplificador (B&K2615) |
| (9) Amplificador de medida (B&K2607) | (10) Registrador de nível (B&K2305) |
| (11) Osciloscópio (H2V13A) | (12) Gravador de fita magnética (B&K7003) |
| (13) Sistema analisador de Fourier (hp5451c) | (14) Ploter digital (hp7210A) |
| (15) Perfuradora de fita | (16) Leitora de fita de papel-terminal Burroughs |
| (17) Programa Fortran-fita JM0001-biblioteca-CPD-UFRGS | |

Obs.: No caso da gravação da resposta e excitação, (sistema acoplado), o acelerômetro referente a resposta está colocado sobre a máxima amplitude do 1º modo.

VI.4 - MEDIÇÕES

Com o teste inicial, figura VI.1.a, determinou-se as frequências naturais dos quatro primeiros modos.

modo fundamental	- $f \approx 22$ Hz	
1º modo	- $f \approx 122$ Hz	
2º modo	- $f \approx 342$ Hz	
3º modo	- $f \approx 664$ Hz	

O 1º modo foi escolhido para representar um sistema de 1º grau de liberdade, porque tem frequência suficientemente alta para o trabalho, e está bastante distante dos modos mais próximos.

Usando agora como frequência central 122 Hz e uma banda de 100 Hz para o ruído de excitação do sistema, realizou-se a gravação da excitação e resposta no caso do sistema acoplado, figura VI.1.d. No caso do sistema desacoplado não foi feita gravação porque o teste foi "on-line", figura VI.1.c.

VI.5 - CÁLCULO DO FATOR DE AMORTECIMENTO ATRAVÉS DA RESPOSTA LIVRE

Neste caso foi utilizado o conjunto experimental dado pela figura VI.1.b.

Como mostra esta figura a resposta livre foi obtida através da aplicação de um impulso sobre a viga, sendo impressa graficamente por um registrador de nível (B & K2305).

Obs.: Neste caso o vibrador (B&K4808) não foi excitado, servindo somente como suporte para a viga.

VI.5.1 - Obtenção da fórmula do fator de amortecimento.

O registrador de nível imprime o amortecimento da resposta livre do sistema em dB. Assim, sendo o sistema unidimensional, (1º grau de liberdade), a resposta livre é dada por (II.5) capítulo II, tendo a sua amplitude amortecida por $A e^{-\eta_1 \omega_1 t}$

onde A é uma constante,

η_1 é o fator de amortecimento,

ω_1 é a frequência natural do sistema,

definindo $F = A e^{-\eta_1 \omega_1 t}$, o amortecimento da resposta livre do sistema em dB é dado por:

$$F_{dB} = 20 \log(A e^{-\eta_1 \omega_1 t}) \quad (\text{VI.1})$$

considerando $A = 1$, (VI.1) pode ser escrita da forma:

$$F_{dB} = -8,686 \eta_1 \omega_1 t \quad (\text{VI.2})$$

definindo T_{20} o tempo necessário para ocorrer uma queda de 20 dB, tem-se $F_{dB} = -20$ dB e sabendo que $\omega_1 = 2\pi f_1$, o fator de amortecimento pode ser calculado de (VI.2), isto é:

$$\eta_1 = \frac{0,366}{f_1 T_{20}} \quad (\text{VI.3})$$

Como considerou-se como frequência natural do sistema a frequência do 1º modo, $f_1 = 122$ Hz e (VI.3) pode ser novamente escrita como:

$$\eta_1 = \frac{0,003}{T_{20}} \quad (\text{VI.4})$$

VI.5.2 - Gráficos do amortecimento em dB da resposta livre.

Considerou-se cinco exemplos para a resposta livre, nos três primeiros a velocidade do papel foi de $v_p = 3$ cm/seg. e para os dois últimos $v_p = 10$ cm/seg.

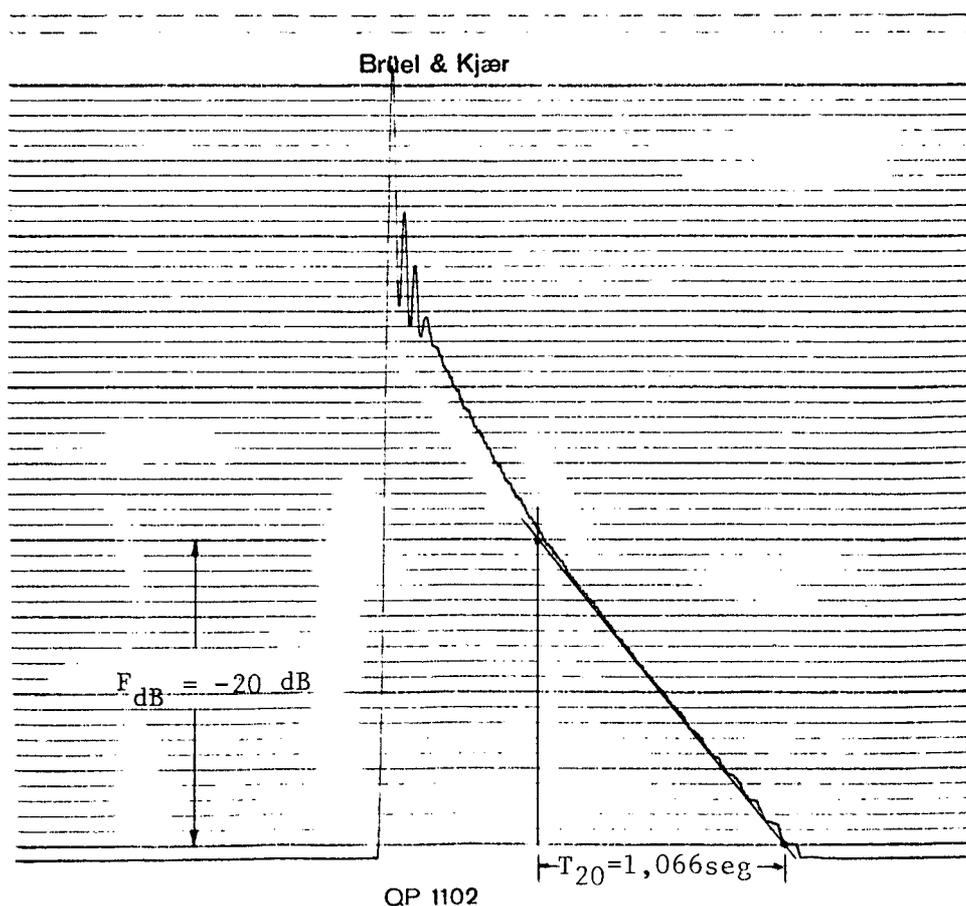


Figura VI.2 - Amortecimento em dB da resposta livre.
(1º exemplo $v_p = 3$ cm/seg.)

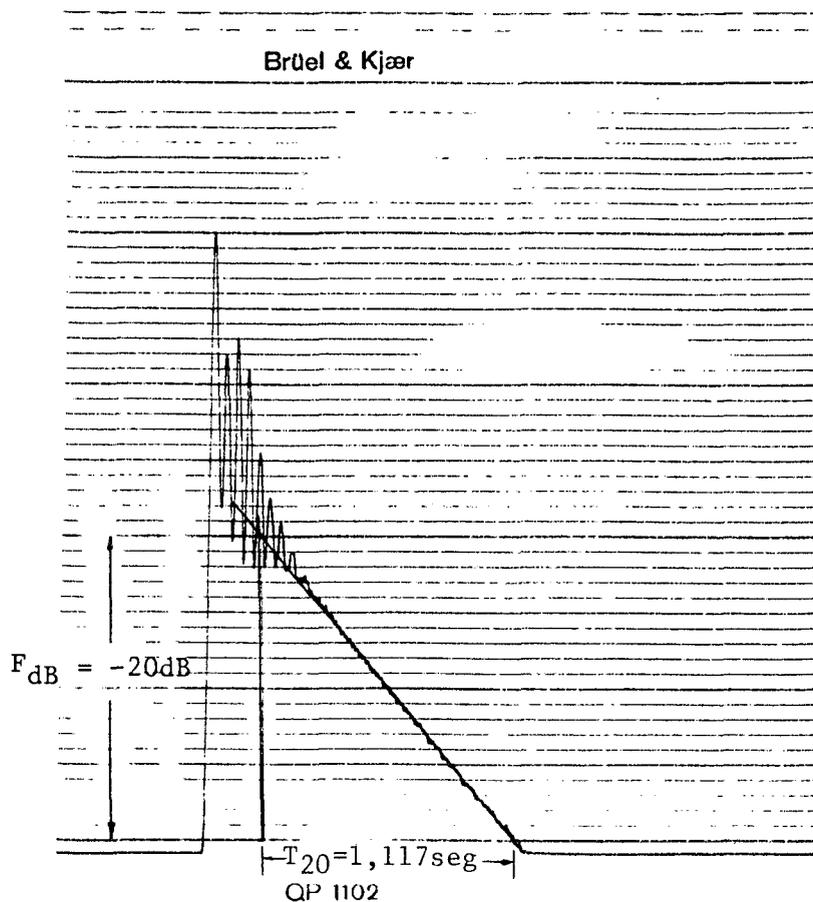


Figura VI.3 - Amortecimento em dB da resposta livre.
(2º exemplo $v_p = 3 \text{ cm/seg.}$)

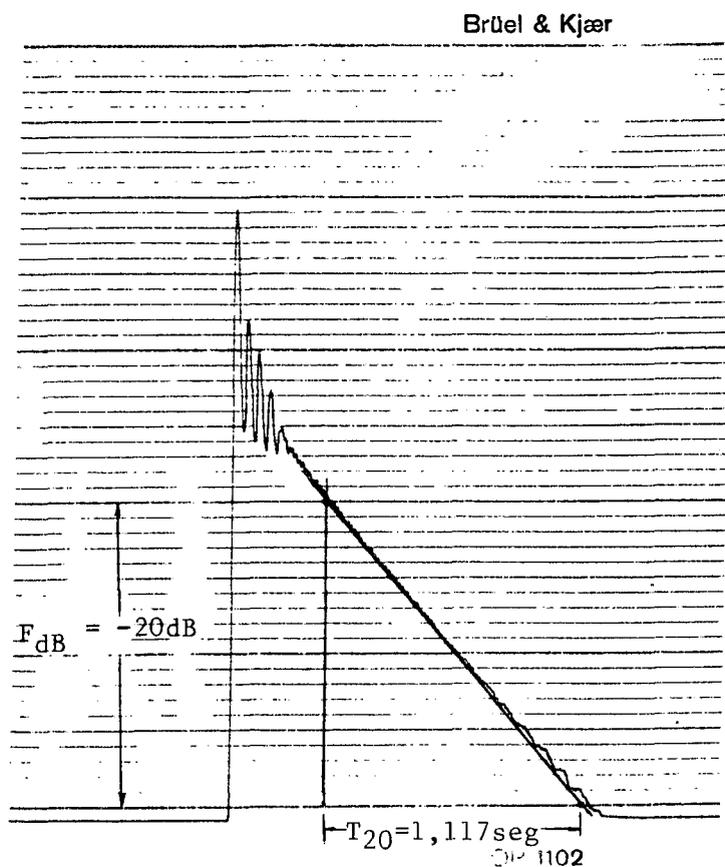


Figura VI.4 - Amortecimento em dB da resposta livre.
(3º exemplo $v_p = 3 \text{ cm/seg.}$)

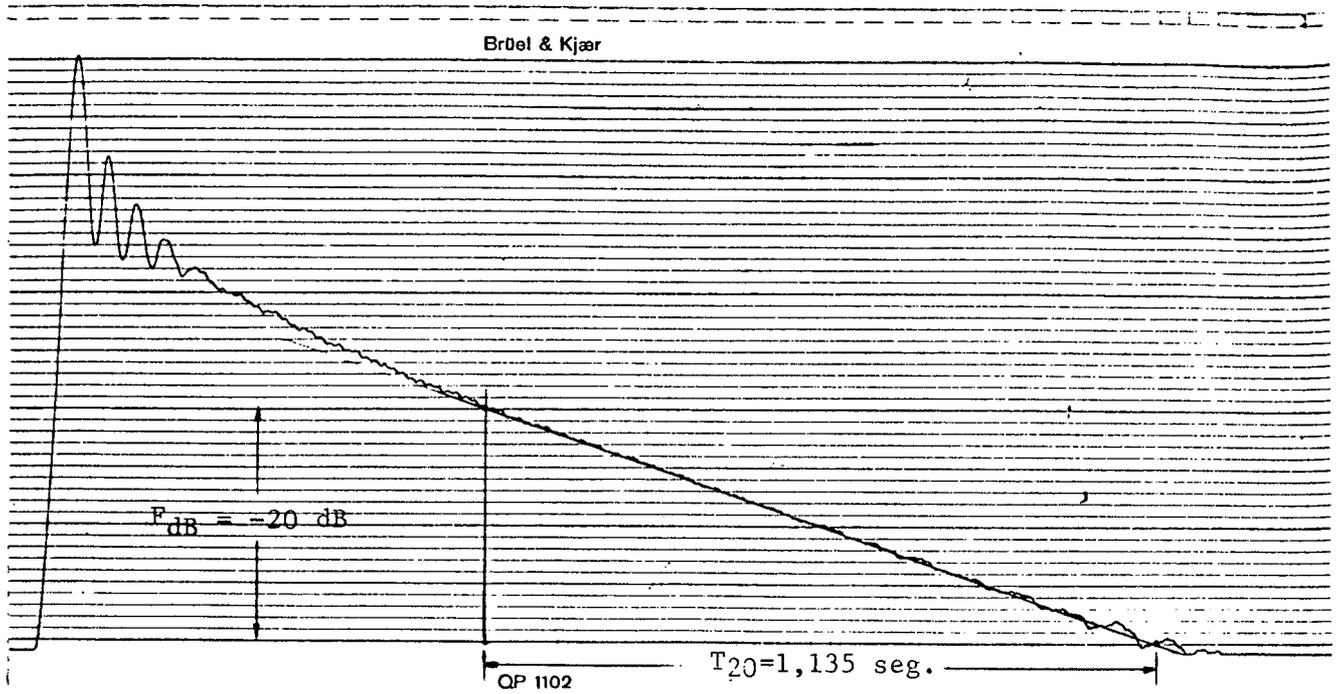


Figura VI.5 - Amortecimento em dB da resposta livre.
(4º exemplo $v_p = 10 \text{ cm/seg.}$)

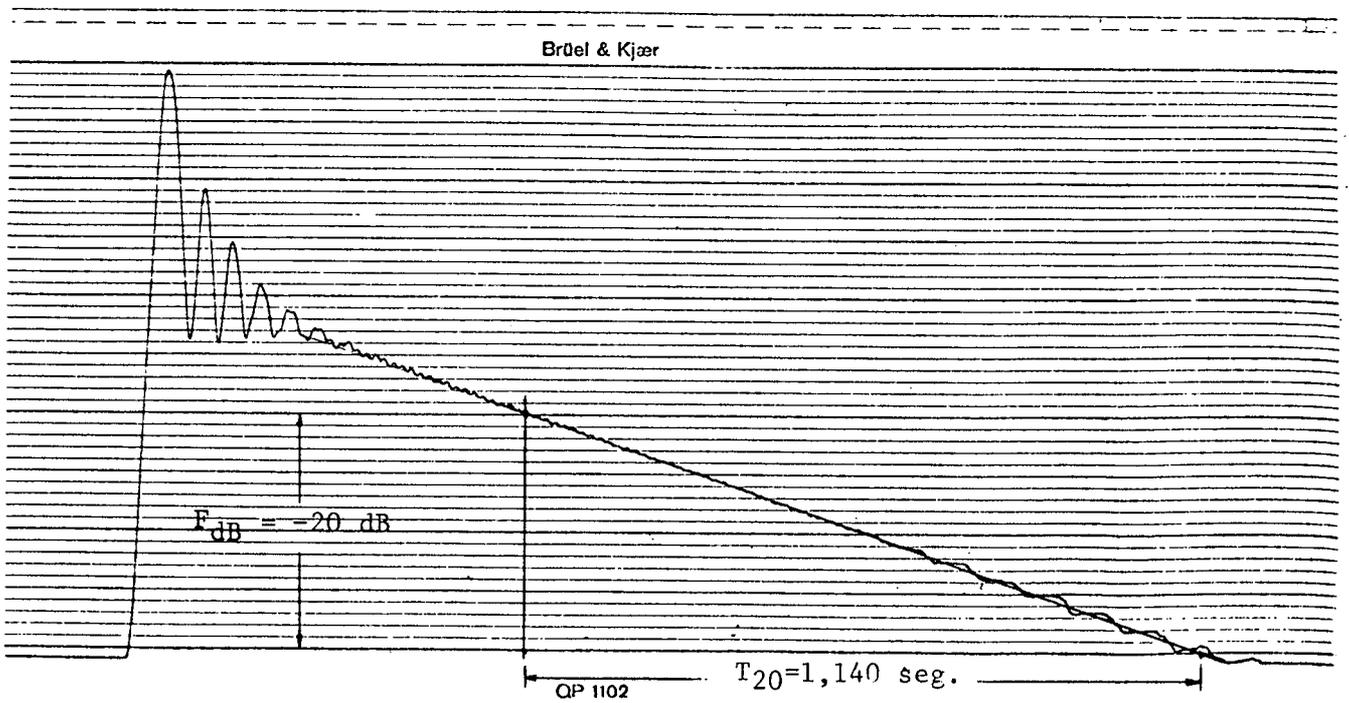


Figura VI.6 - Amortecimento em dB da resposta livre.
(5º exemplo $v_p = 10 \text{ cm/seg.}$)

VI.5.3 - Resultados

Considerando os exemplos dados anteriormente e usando a fórmula (VI.4) pode-se formar a tabela abaixo:

Obs.: O índice "c" para o fator de amortecimento, indica valor calculado.

Exemplo	v_p (cm/seg.)	T_{20} (seg.)	$\eta_{1,c}$
1º	3	1,066	0,00281
2º	3	1,117	0,00269
3º	3	1,117	0,00269
4º	10	1,135	0,00264
5º	10	1,140	0,00263

Tabela VI.1 - Cálculo do fator de amortecimento através da resposta livre do sistema.

sendo o valor médio do fator de amortecimento calculado dado por:

$$\eta_{1,c} = 0,0027$$

Obs.: Comparações com outros resultados serão feitas na seção VI.7.

VI.6 - PROCESSAMENTO DE DADOS

Neste caso, inicialmente, processou-se os dados utilizando-se um sistema analisador de Fourier em conjunto com um ploter digital. Os dados foram processados "on-line", figura VI.1.c, ou "off-line", figura VI.1.e.

O sistema analisador de Fourier contém um conversor analógico digital e necessita como entrada o número de pontos com que se deseja amostrar o sinal e a sua máxima frequência. O sinal depois de digitalizado passou por uma janela de Hanning.

O intervalo de amostragem em qualquer dos casos pode ser encontrado pelo teorema da amostragem no domínio do tempo.

Sendo:

$f_{m\acute{a}x}$, a máxima frequência do sinal,

T , o intervalo de amostragem no tempo,

pelo teorema da amostragem no tempo sabe-se que:

$$T \leq \frac{1}{2 f_{m\acute{a}x}} \quad (\text{VI.5})$$

onde o máximo intervalo de amostragem no tempo ou intervalo de Nyquist é:

$$T = \frac{1}{2 f_{\text{máx}}} \quad (\text{VI.6})$$

sendo ainda:

n , o número de amostragens consideradas para o sinal,

o tamanho do sinal $t_{\text{máx}}$, e o intervalo de amostragem na frequência Δf , são dados respectivamente por:

$$t_{\text{máx}} = n \times T \quad (\text{VI.7})$$

$$\Delta f = \frac{f_{\text{máx}}}{(n/2)} \quad (\text{VI.8})$$

Para o sistema analisador de Fourier usou-se sempre $n=4096$ e $f_{\text{máx}} = 1000$ Hz; aplicando estes valores nas fórmulas (VI.6), (VI.7) e (VI.8), tem-se respectivamente:

$$T = 0,0005 \text{ seg.}$$

$$t_{\text{máx}} = 4,096 \text{ seg.} \quad (\text{VI.9})$$

$$\Delta f = 0,49 \text{ Hz}$$

VI.6.1 - Determinação da função densidade espectral da excitação (sistema desacoplado).

Com os valores dados em (VI.9) processou-se a excitação do sistema através de um teste " on-line ", como mostra a figura VI.1.c.

A seguir será apresentado o gráfico da função densidade espectral média da excitação, (150 trechos de 4096 pontos).

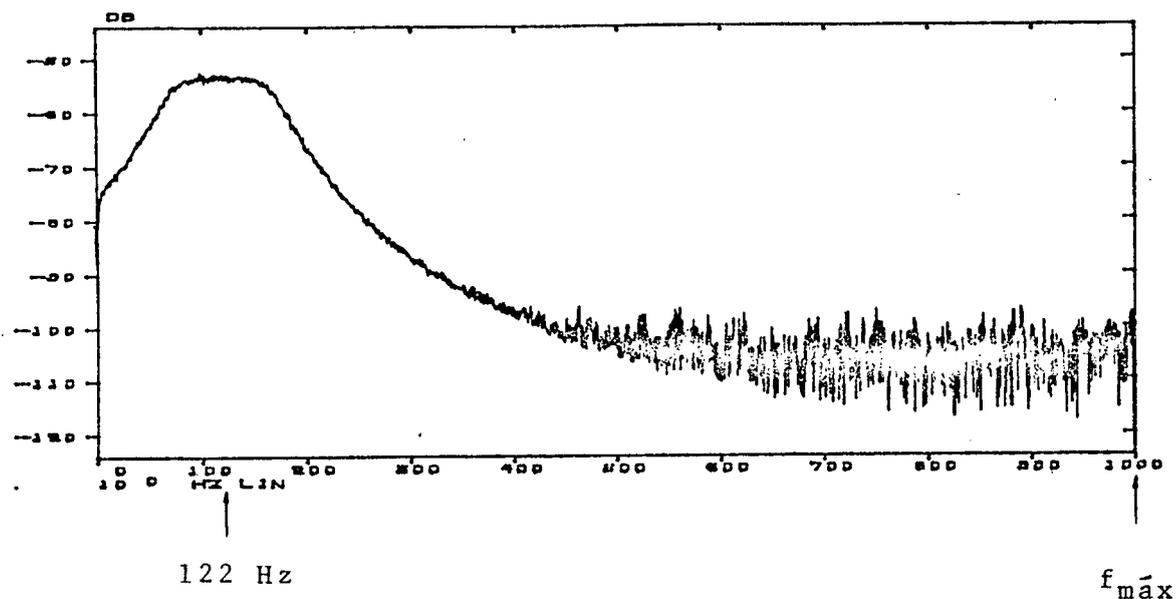


FIGURA VI.7 - Função densidade espectral média da excitação - sistema desacoplado. (escala vertical logarítmica - escala horizontal linear).

Obs.: O objetivo deste teste foi verificar a banda, 100 Hz, e a frequência central, 122 Hz, usadas para a excitação do sistema.

VI.6.2 - Cálculo das características através da função densidade espectral da resposta e módulo ao quadrado da função transferência do sistema.

Com os valores dados em (VI.9) processou-se a excitação e a resposta do sistema através de um teste "off-line" como mostra a figura VI.1.e.

A seguir serão apresentados os gráficos de 4096 pontos da resposta e excitação no tempo. Serão vistos também os gráficos da função densidade espectral média da res

posta e excitação (50 trechos de 4096 pontos), e o gráfico do $\underline{m\ddot{o}}$ dulo ao quadrado da função transferência.

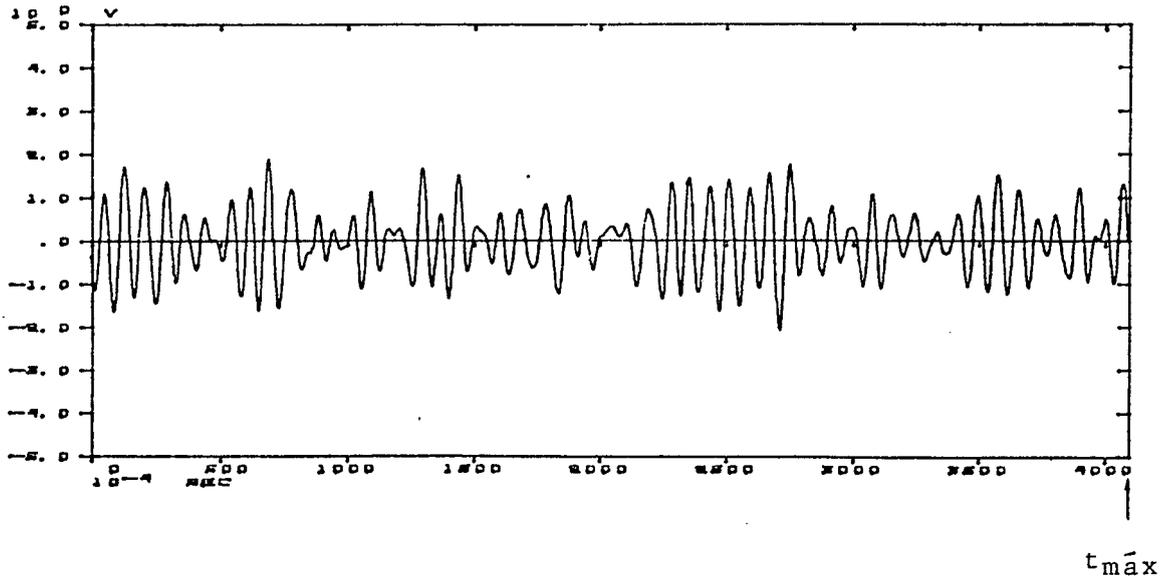


FIGURA VI.8 - Excitação no tempo, (sistema acoplado).

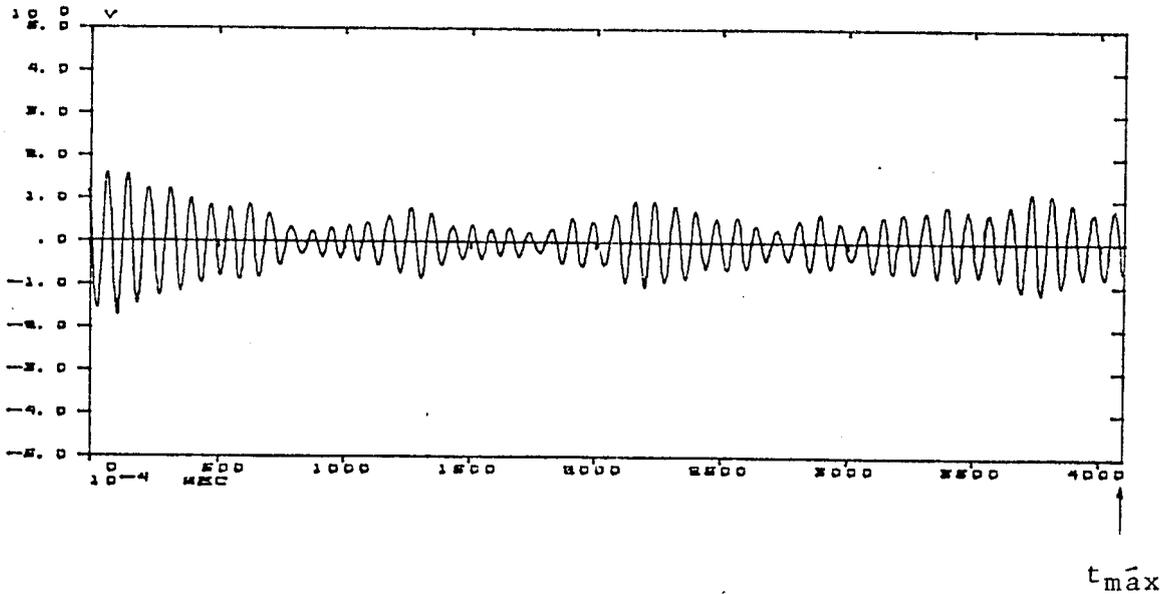


FIGURA VI.9 - Resposta no tempo do sistema.

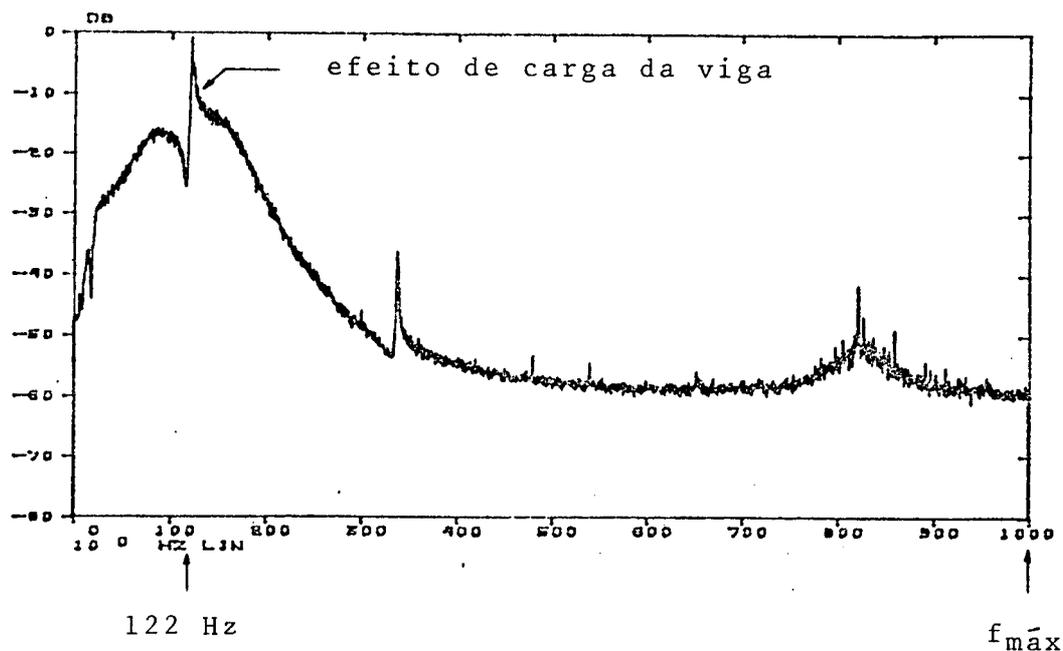


Figura VI.9 - Função densidade espectral média da excitação - sistema acoplado. (escala vertical logarítmica - escala horizontal linear).

Obs.: Neste caso, sendo o vibrador pequeno em comparação com o tamanho da viga, o acoplamento entre estes faz com que a banda de frequência da excitação se apresente descontínua; entretanto a energia perdida antes da frequência natural é compensada pela energia ganha após esta frequência.

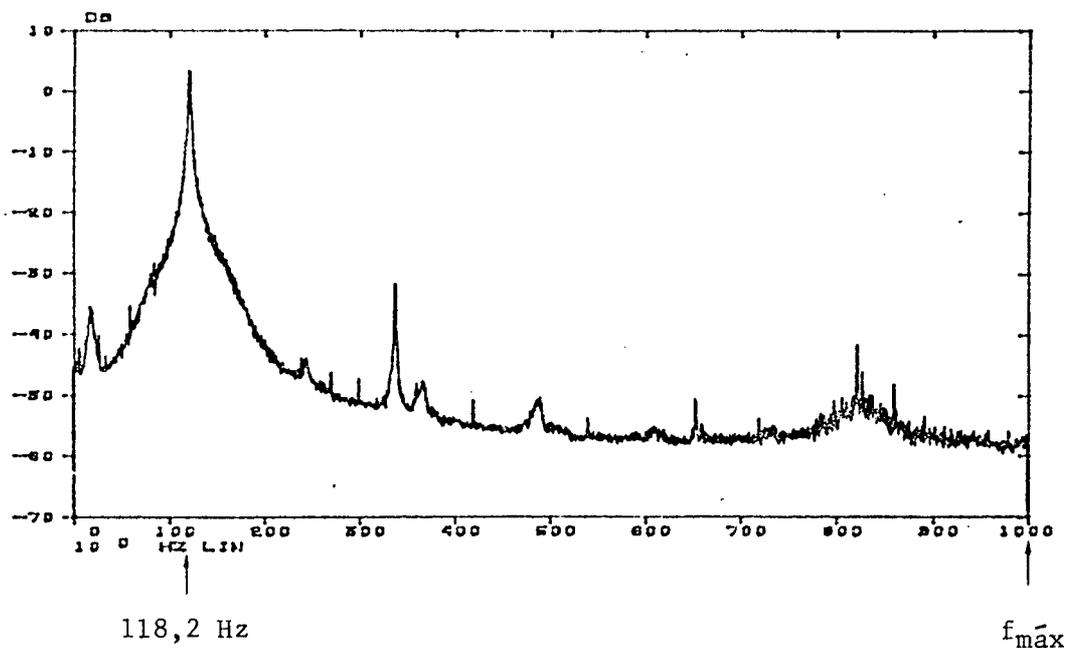


Figura VI.10 - Função densidade espectral média da resposta do sistema. (escala vertical logarítmica - escala horizontal linear).

Teoricamente não seria necessário calcular a razão entre as funções densidade espectral da resposta e excitação, porque a função densidade da excitação se apresenta constante para a banda de frequência escolhida. O mesmo se aplicaria em um caso prático se o vibrador fôsse muito maior que a viga.

No caso apresentado o vibrador é pequeno em comparação com o tamanho da viga, sendo necessário calcular a razão entre as funções densidade. De qualquer forma para um sistema prático deve-se sempre calcula-la.

Assim, o cálculo da razão entre as funções densidade dará o módulo ao quadrado da função transferência do sistema, $|12|$, permitindo encontrar de forma mais consistente as suas características.

Obs.: Neste caso o que se fêz foi normalizar a resposta do sistema em função da sua excitação.

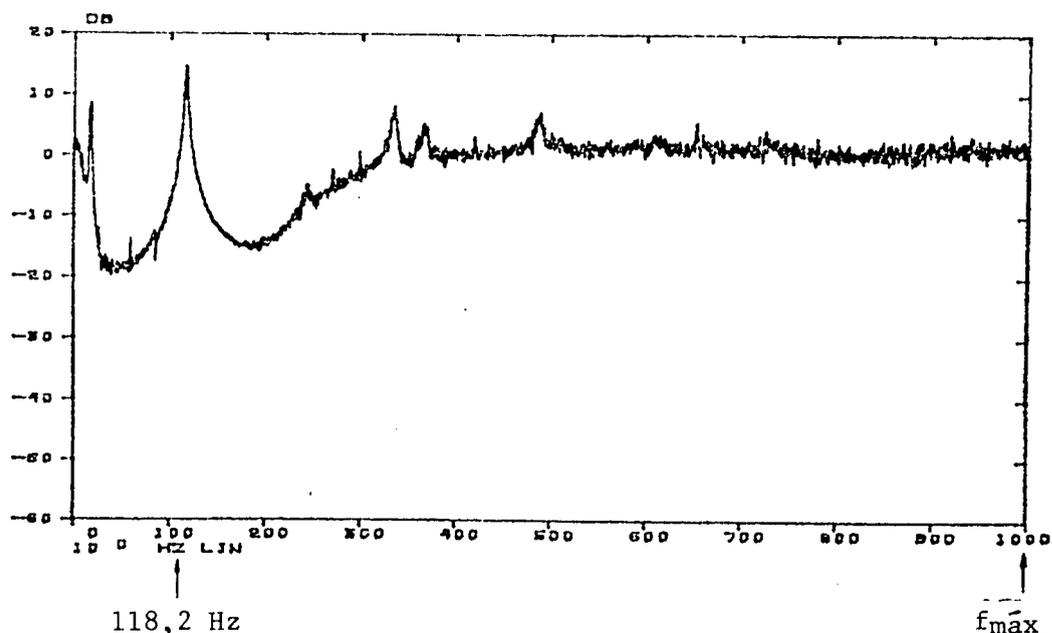


FIGURA VI.11 - Módulo ao quadrado da função transferência.
(escala vertical logarítmica - escala horizontal linear).

O cálculo das características é feito de duas maneiras usando-se as figuras VI.10 e VI.11. Para maior precisão nos cálculos ampliou-se os picos destas figuras.

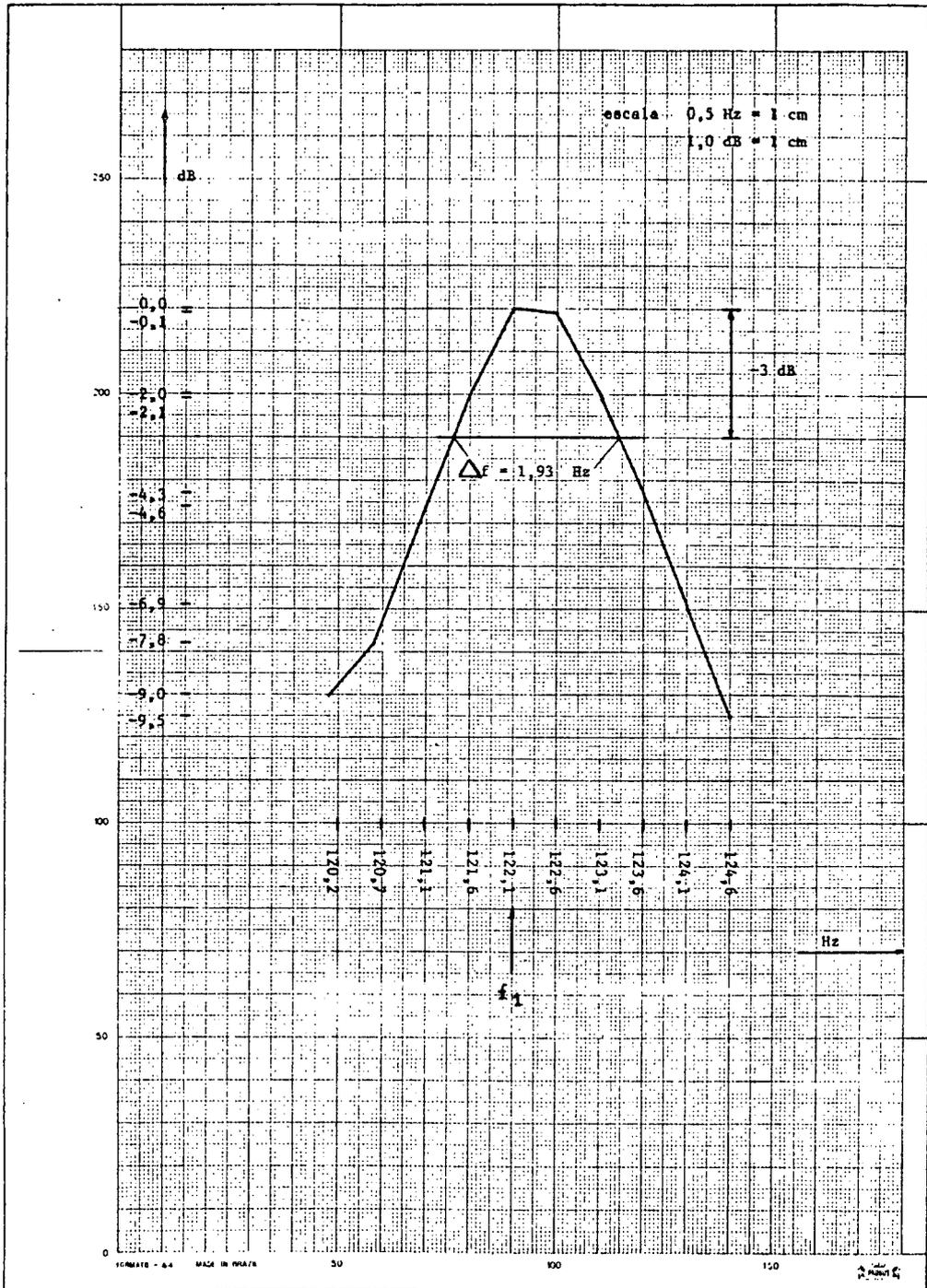


Figura VI.12 - Função densidade espectral média da resposta do sistema - ampliação.

Obs.: Na verdade a ampliação mostrada na figura VI.12 não se relaciona com a figura VI.10, e sim com outro exemplo para função densidade espectral média da resposta, (100 trechos de 4096 pontos). Devido a isto, a frequência natural apresentada na figura VI.12 difere da frequência da figura VI.10, contudo a diferença entre as frequências é pequena.

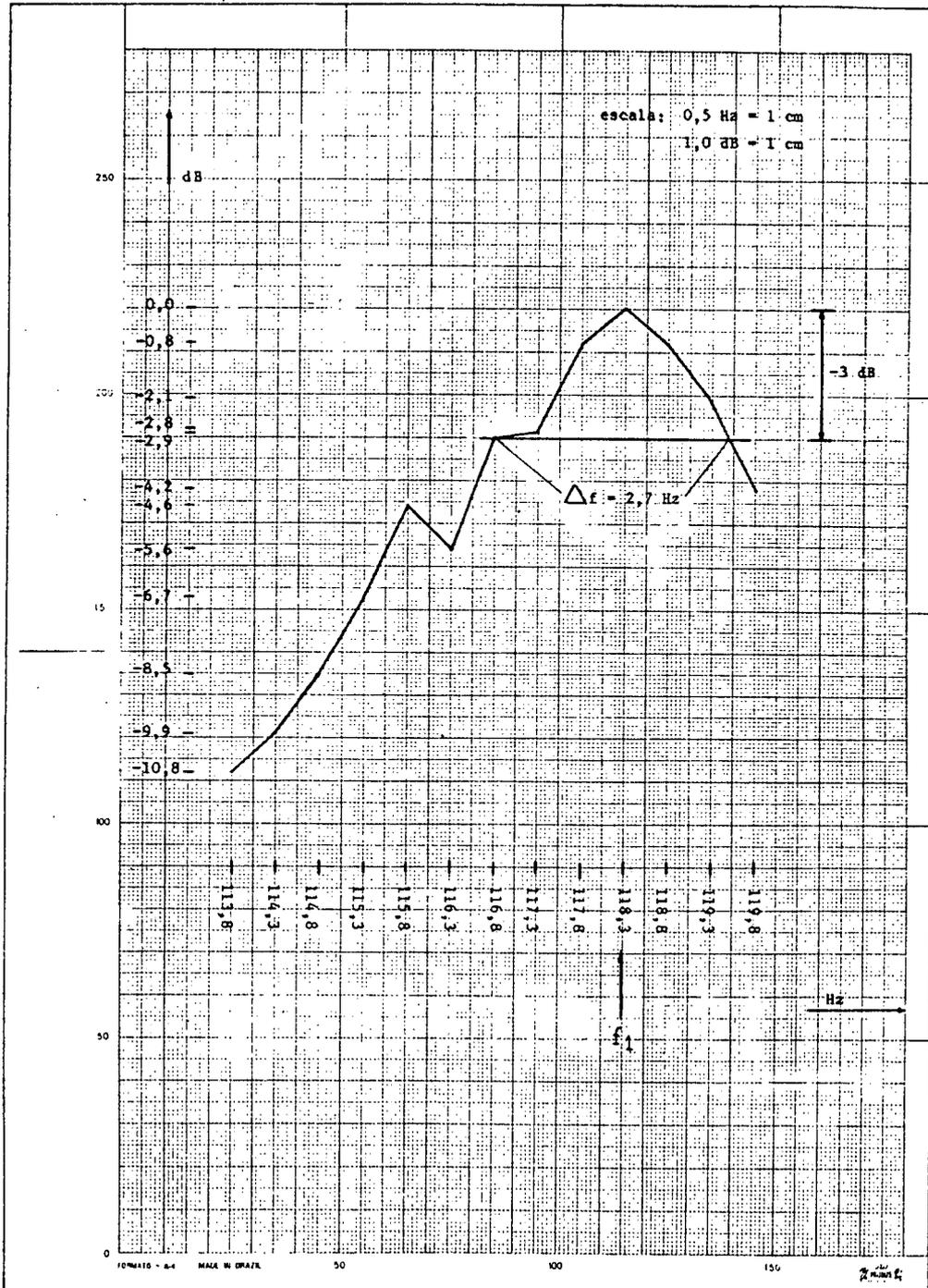


Figura VI.13 - Módulo ao quadrado da função transferência - ampliação.

Em qualquer dos casos a frequência é encontrada diretamente.

Usando-se o método de largura de banda, seção III.2 capítulo III calcula-se o fator de amortecimento.

assim, sendo:

$$\eta_{1,c} = \frac{\Delta f}{2 f_{1,c}} \quad (\text{VI.10})$$

os valores encontrados são:

$$f_{1,c} = 122,1 \text{ Hz}$$

$$\eta_{1,c} = 0,0079$$

para a figura VI.12, e:

$$f_{1,c} = 118,3 \text{ Hz}$$

$$\eta_{1,c} = 0,0114$$

para a figura VI.13.

Obs.: - Comparações com os outros resultados serão feitas na seção VI.7.

- O índice "c" indica valor calculado.

VI.6.3 - Cálculo das características através da função de decaimento aleatório no tempo e na frequência.

Neste caso processou-se a resposta do sistema através de um teste " off-line ", como mostra a figura VI.1.g.

Para o processamento foi utilizado um programa em linguagem FORTRAN que está apresentado no apêndice A, figura A.3.

Um trecho de 10988 pontos da resposta do sistema, foi transferido para fita de papel através de um periférico do sistema analisador de Fourier figura VI.1.f, sendo novamente transferido para fita magnética do CPD da UFRGS através de um terminal Burroughs, servindo agora como banco de dados para o processamento do programa.

O programa pede ainda como dados de entrada:

A : amplitude de retirada de trechos
 N : número de médias
 T : intervalo de amostragem no tempo
 n : número de pontos do sinal, (resposta do sistema)
 n_1 : número de pontos da função de decaimento aleatório.

Para passar para a frequência a função, o programa necessita ainda de: (seção A.1.9 apêndice A).

M : expoente da base 2 para a FFT
 SIGN : sinal indicando transformada direta ou inversa.

Depois de efetuados vários testes, foram escolhidos os cinco melhores exemplos para a função decrémento.

Para os cinco exemplos considerados manteve-se $A = 3500$, variando de exemplo para exemplo o valor de "N" como é visto abaixo:

1º exemplo $N = 460$

2º exemplo $N = 470$

3º exemplo $N = 480$

4º exemplo $N = 490$

5º exemplo $N = 500$

sendo ainda:

$T = 0,0005$ seg.

$n = 10988$.

Como considerou-se $n_1 = 128$, tem-se $M = 8$ e ainda $SIGN = 1$ para a transformada direta.

Usando (VI.7) e os valores de "T" e "n" dados acima tem-se para o tamanho da resposta do sistema, $t_{\text{máx}} = 5,494$ seg.

Obs.: O programa possui uma subrotina para zerar a média do sinal de entrada fazendo com que a função decrémento fique em torno de A, seção II.3.4.a capítulo II.

a - Função decréscimo aleatório no tempo

Serão apresentados aqui os cinco exemplos da função decréscimo aleatório no tempo, será visto também um exemplo onde $A=0$ e $N=500$.

Sendo a frequência usada a do 1º modo, 122 Hz, o período de oscilação da função decréscimo no tempo, será, $t'_m = 0,0082$ seg:

O tamanho da função decréscimo, $t'_{m\acute{a}x}$, pode ser encontrada analogamente a fórmula (VI.7), assim:

$$t'_{m\acute{a}x} = n_1 \times T \quad (\text{VI.11})$$

sendo $n_1=128$ e $T=0,0005$ seg., tem-se $t'_{m\acute{a}x}=0,064$ seg.

O número de períodos da função decréscimo pode ser encontrado calculando-se a razão entre $t'_{m\acute{a}x}$ e t'_m ,

$$\frac{t'_{m\acute{a}x}}{t'_m} \cong 8 \text{ períodos}$$

podendo-se encontrar ainda o número de amostras por período, através da razão entre t'_m e T .

$$\frac{t'_m}{T} \cong 16 \text{ amostras/período}$$

Obs.: Devido a variação no número de médias "N" encontrou-se um número de pontos "n" diferente para cada exemplo. Para maiores detalhes vêr apêndice D.

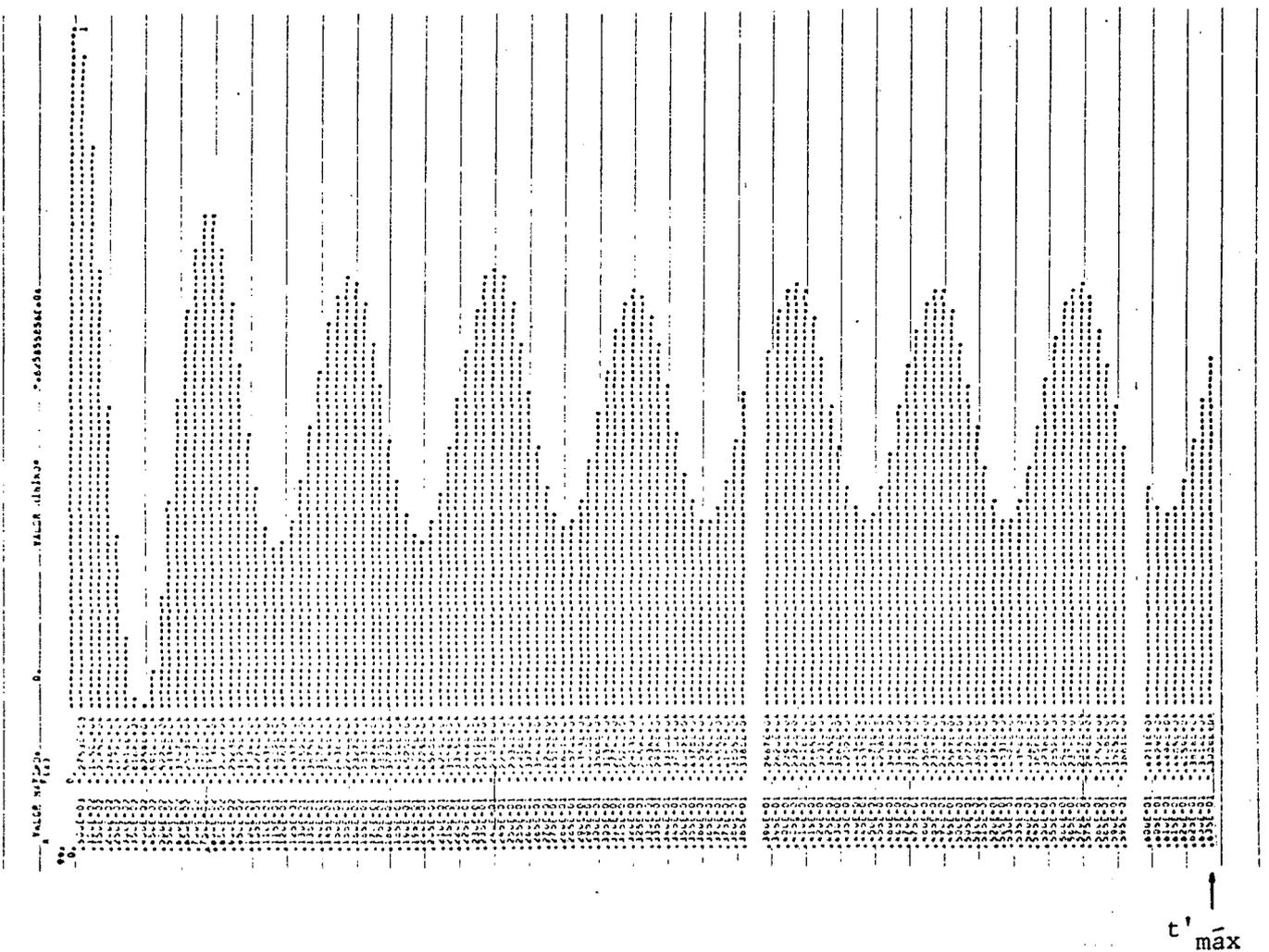


Figura VI.14 - Função de decaimento aleatório no tempo
 (1º exemplo, $N=460$, $n=9220$, $t'_{\text{máx}}=4,61$ seg., $A=3500$)

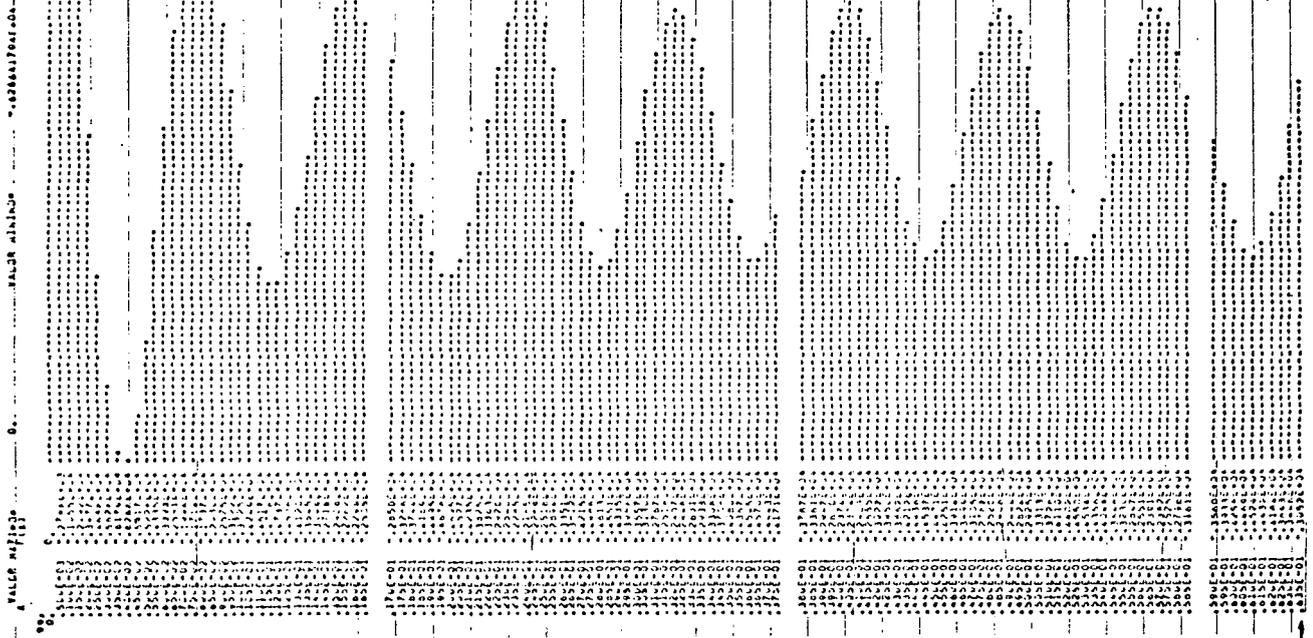


Figura VI.15 - Função decremento aleatório no tempo
 (2º exemplo, N=470, n=9432, $t_{\text{máx}} = 4,716$ seg., A=3500)

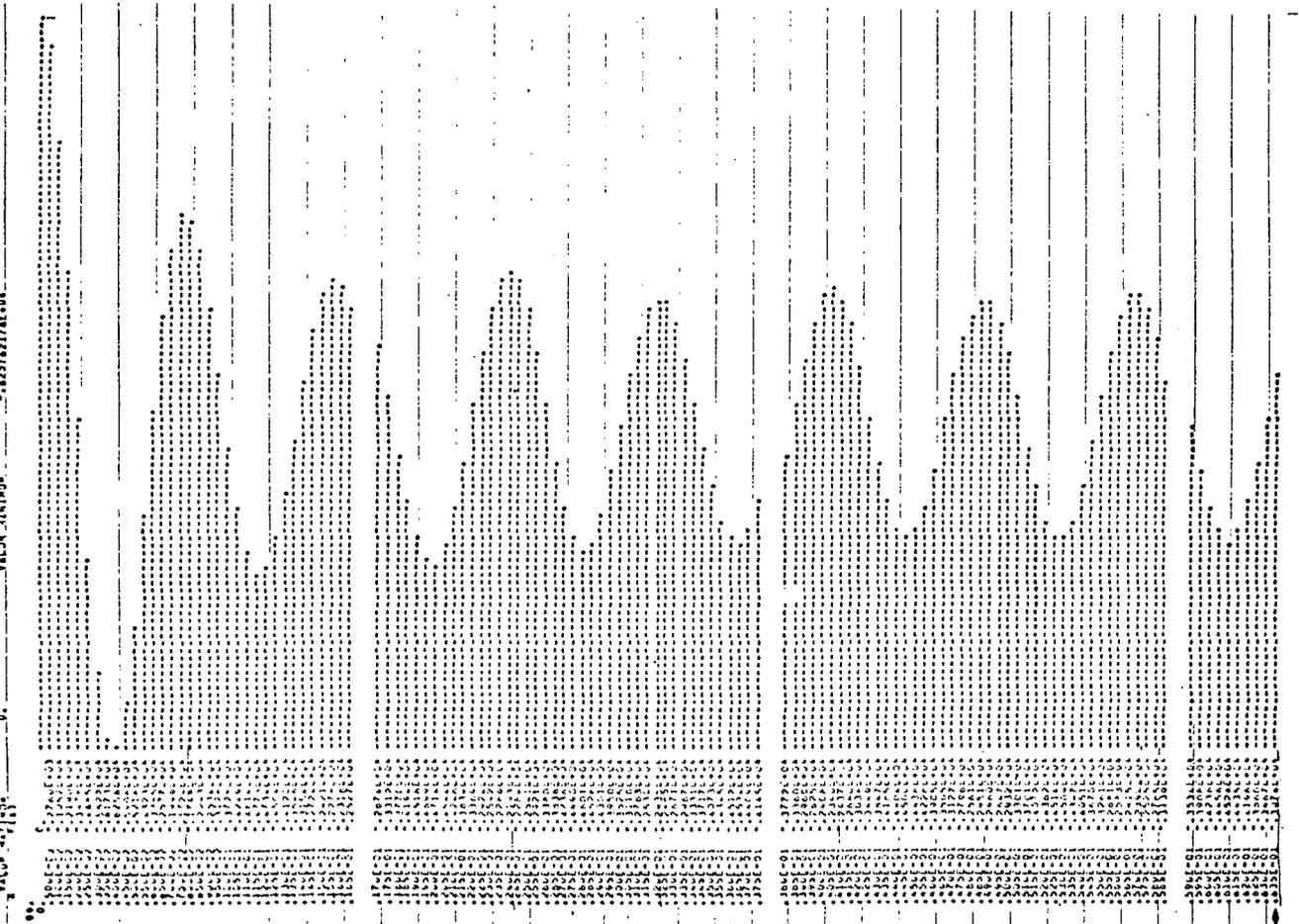


Figura VI.16 - Função decremento aleatório no tempo
 (3º exemplo, N=480, n=9648, $t_{\text{máx}} = 4,824$ seg., A=3500)

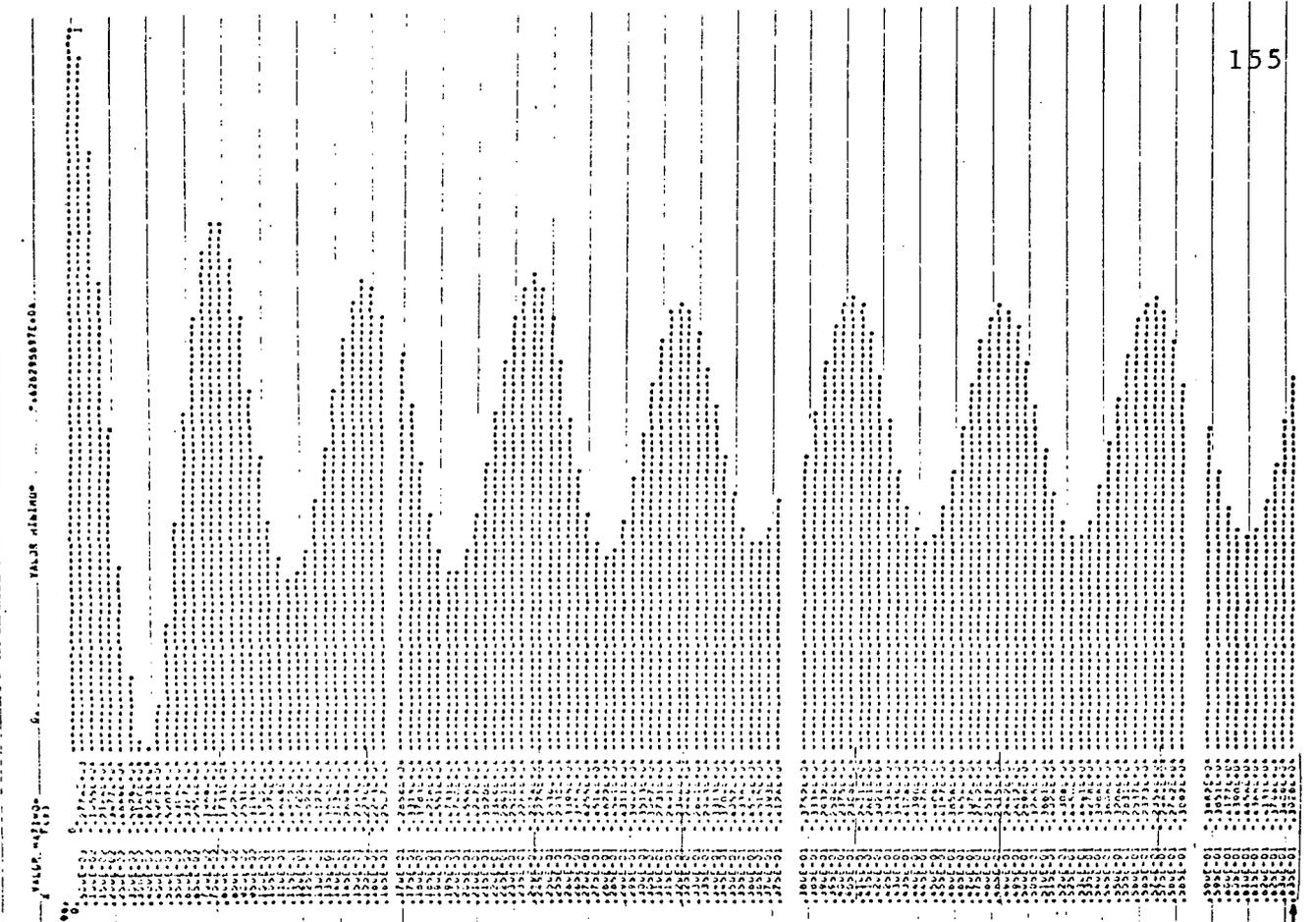


Figura VI.17 - Função decremento aleatório no tempo
 (4º exemplo, N=490, n=9741, $t_{m\acute{a}x}=4,871$ seg., A=3500)

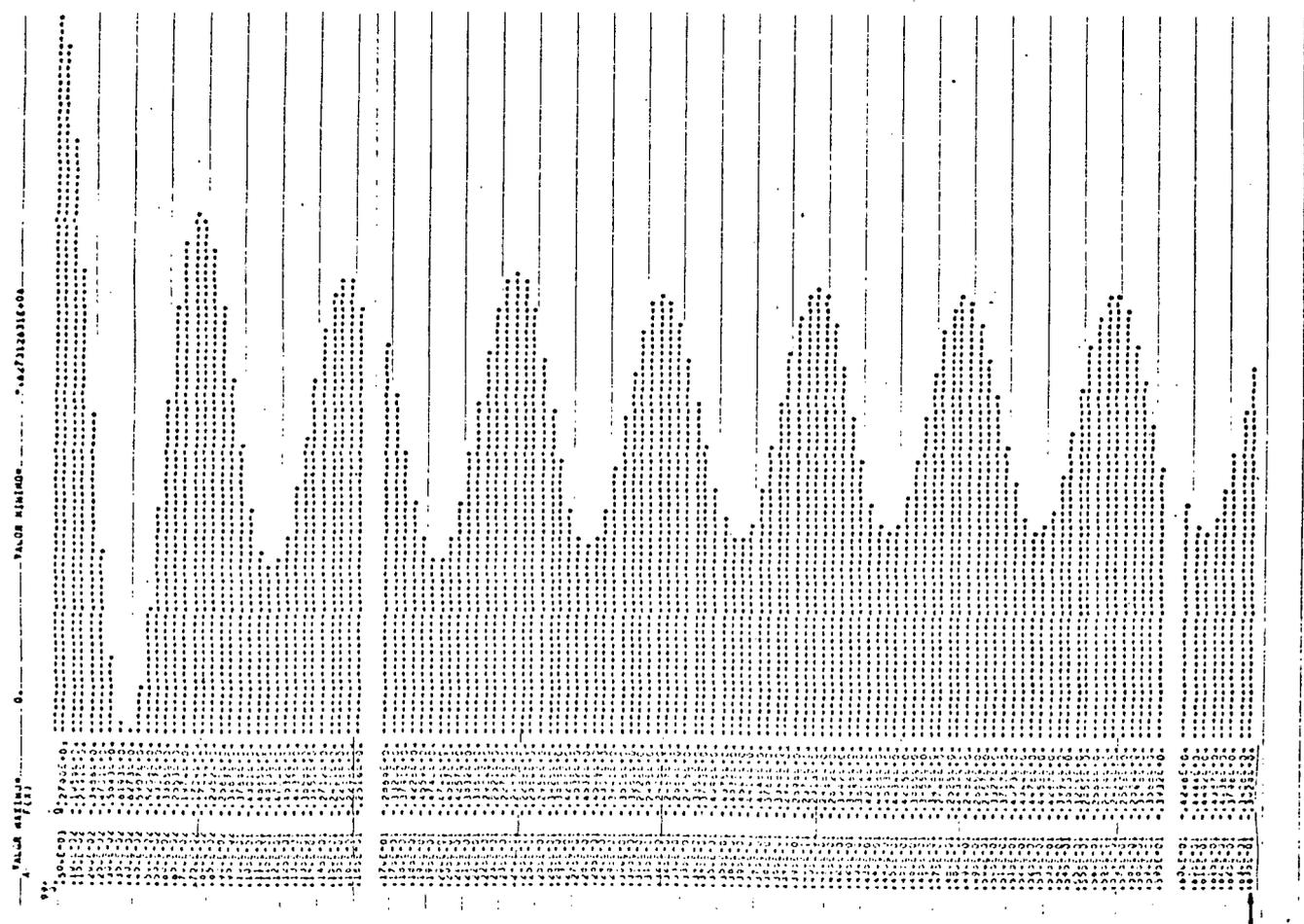


Figura VI.18 - Função decremento aleatório no tempo
 (5º exemplo, N=500, n=9924, $t_{m\acute{a}x}=4,962$ seg., A=3500)

Para o exemplo seguinte usou-se $A=0$ e $N=500$. Da figura abaixo pode-se ver a deformação da função decremento impossibilitando o cálculo das características através do decremento logarítmico.

Apesar do grande número de médias a amplitude de retirada de trechos usada deformou a função decremento, isto é, deve-se fazer uma boa escolha para "A" e "N", maiores detalhes serão apresentados no apêndice D.

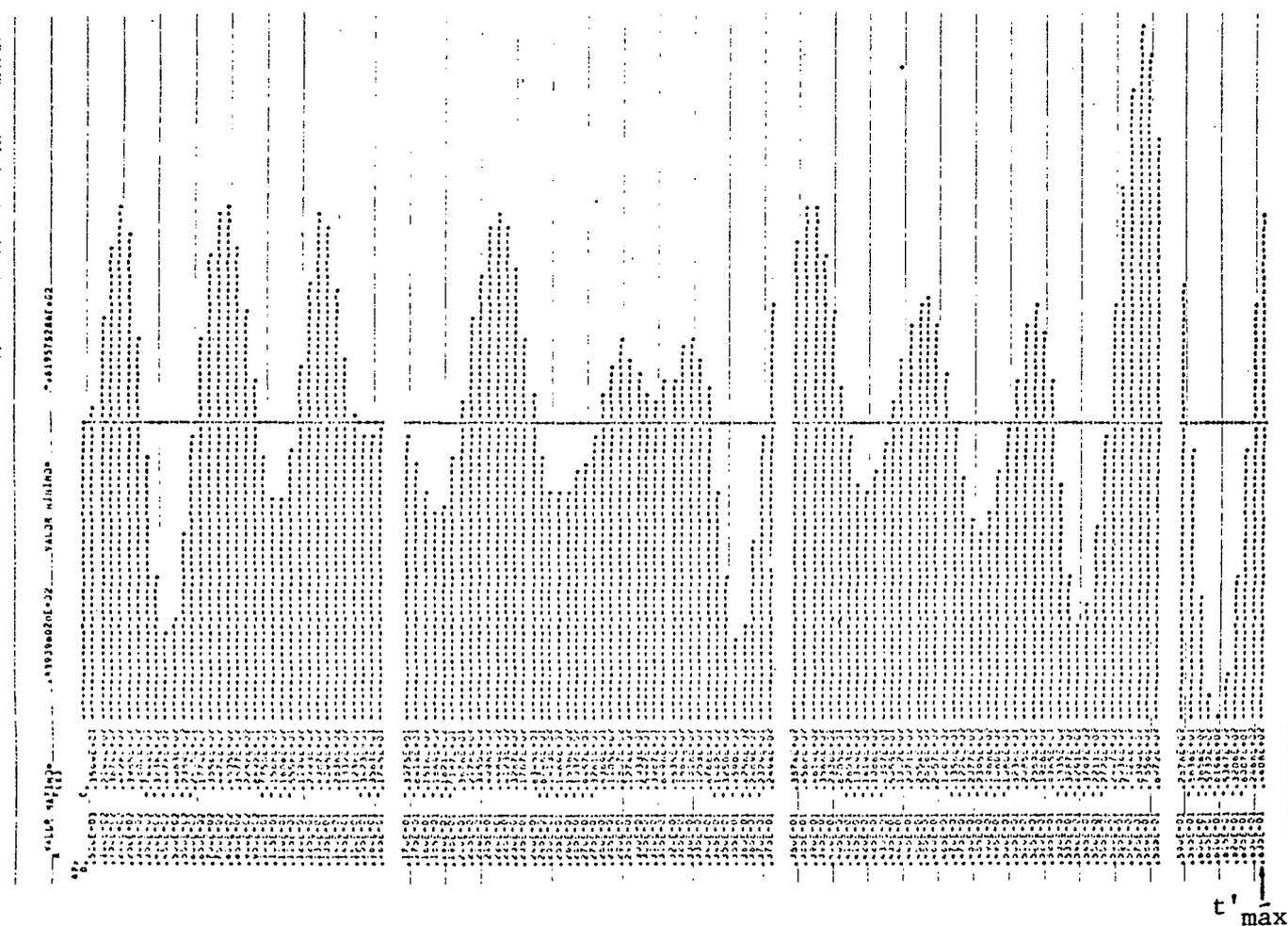


Figura VI.19 - Função decremento aleatório no tempo
(6º exemplo, $N=500$, $n=3928$, $t'_{\text{máx}} = 1,964$ seg. $A=0$)

Usando o método do decremento logatímico , seção III.2.1 capítulo III, pode-se calcular o fator de amortecimento e a frequência para cada oscilação das funções decremento dos primeiros cinco exemplos anteriores.

Considerando pequenos amortecimentos e usando as formulas (III.1), (III.5) e (III.6) para os picos das figuras VI.14 a VI.18 tem-se a tabela:

j	1º exemplo		2º exemplo		3º exemplo		4º exemplo		5º exemplo	
	$f_{1,c}$	$\eta_{1,c}$								
1	133,3	0,0621	125,0	0,0583	125,0	0,0595	125,0	0,0572	125,0	0,0639
2	125,0	0,0252	121,2	0,0244	121,2	0,0244	121,2	0,0247	125,0	0,0249
3	125,0	0,0264	122,4	0,0261	122,4	0,0271	122,4	0,0260	125,0	0,0263
4	125,0	0,0165	121,2	0,0160	121,2	0,0169	121,2	0,0195	123,1	0,0165
5	125,0	0,0131	121,9	0,0157	121,9	0,0168	121,9	0,0162	123,5	0,0168
6	123,7	0,0118	121,2	0,0124	121,2	0,0126	121,2	0,0121	122,4	0,0135

Tabela VI.2 - Características do sistema - função decremento aleatório no tempo.

Obs.: - Como definido anteriormente, seção III.2.1 capítulo III, j é o número de picos negativos entre as amplitudes tomadas.

- Para todos os exemplos a 1ª amplitude considerada foi a do 2º pico positivo. A amplitude do último pico não foi usada porque o número de amostras que compõem a última oscilação está incompleto, (14 amostras).
- O índice " c " indica valor calculado.

Da tabela VI.2, observa-se que para todos os exemplos as características tendem a diminuir com o aumento de j . Além disso definindo:

$$(\Delta \eta_{1,c})_j = (\eta_{1,c})_j - (\eta_{1,c})_{j+1} \quad (\text{VI.12})$$

$$(j=1, \dots, 6)$$

vê-se que, com o aumento de j , $(\Delta \eta_{1,c})_j$ ($j=1, \dots, 6$) diminui, isto é, $\eta_{1,c}$ aproxima-se assintoticamente de $(\eta_{1,c})_{j=6}$.

Assim, para todos os exemplos, serão consideradas como características calculadas os últimos valores apresentados na tabela VI.2, isto é, quando ($j=6$).

Calculando a média destes valores tem-se:

$$\eta_{1,c} = 0,0125$$

$$f_{1,c} = 121,9 \text{ Hz}$$

Obs.: Comparações com os outros resultados serão feitas na seção VI.7.

b - Função decréscimo aleatório na frequência

Serão apresentados aqui os cinco primeiros exemplos da função decréscimo na frequência.

Sendo $f_{\text{máx}} = 1000$ Hz e $n_1 = 128$ analogamente (VI.8) encontra-se o intervalo de amostragem na frequência, assim:

$$\Delta f = \frac{f_{\text{máx}}}{(n_1/2)} = 15,625 \text{ Hz}$$

A frequência considerada para o sistema é 122 Hz, assim o máximo pico da função para todos os exemplos, se encontra na oitava amostragem.

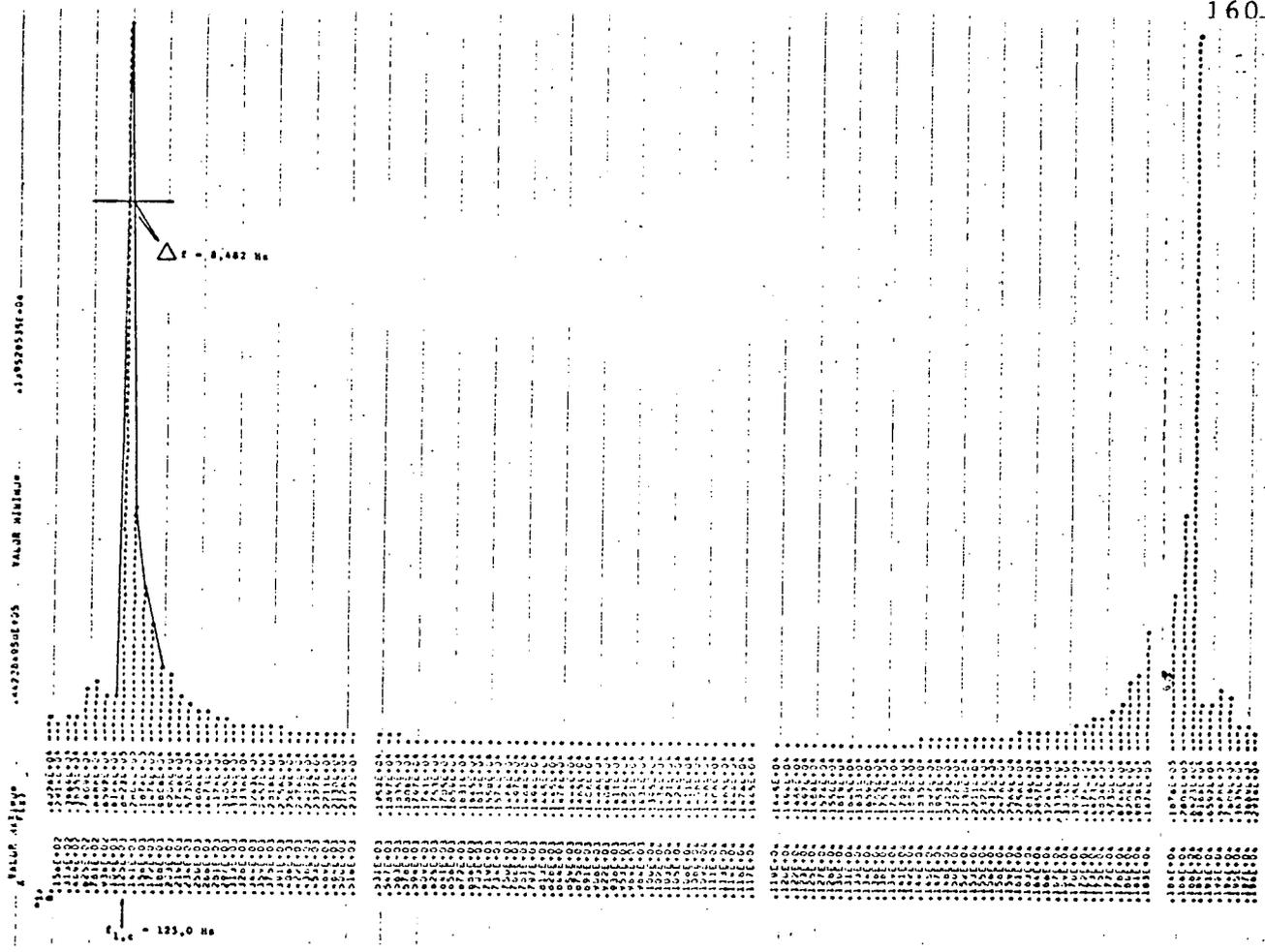


Figura VI.20 - Função de decaimento aleatório na frequência (1º exemplo, N = 460)

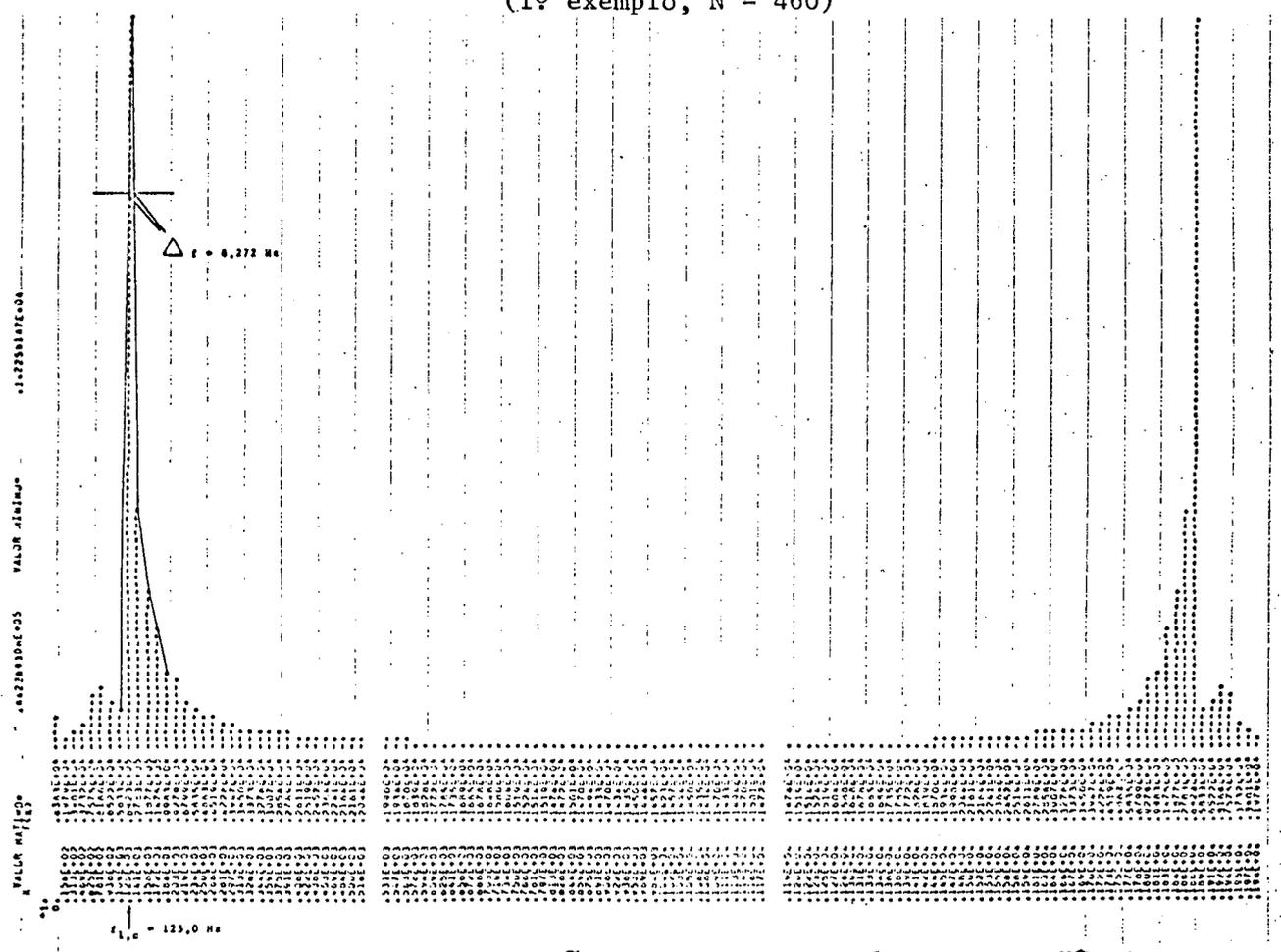


Figura VI.21 - Função de decaimento aleatório na frequência (2º exemplo, N=470)

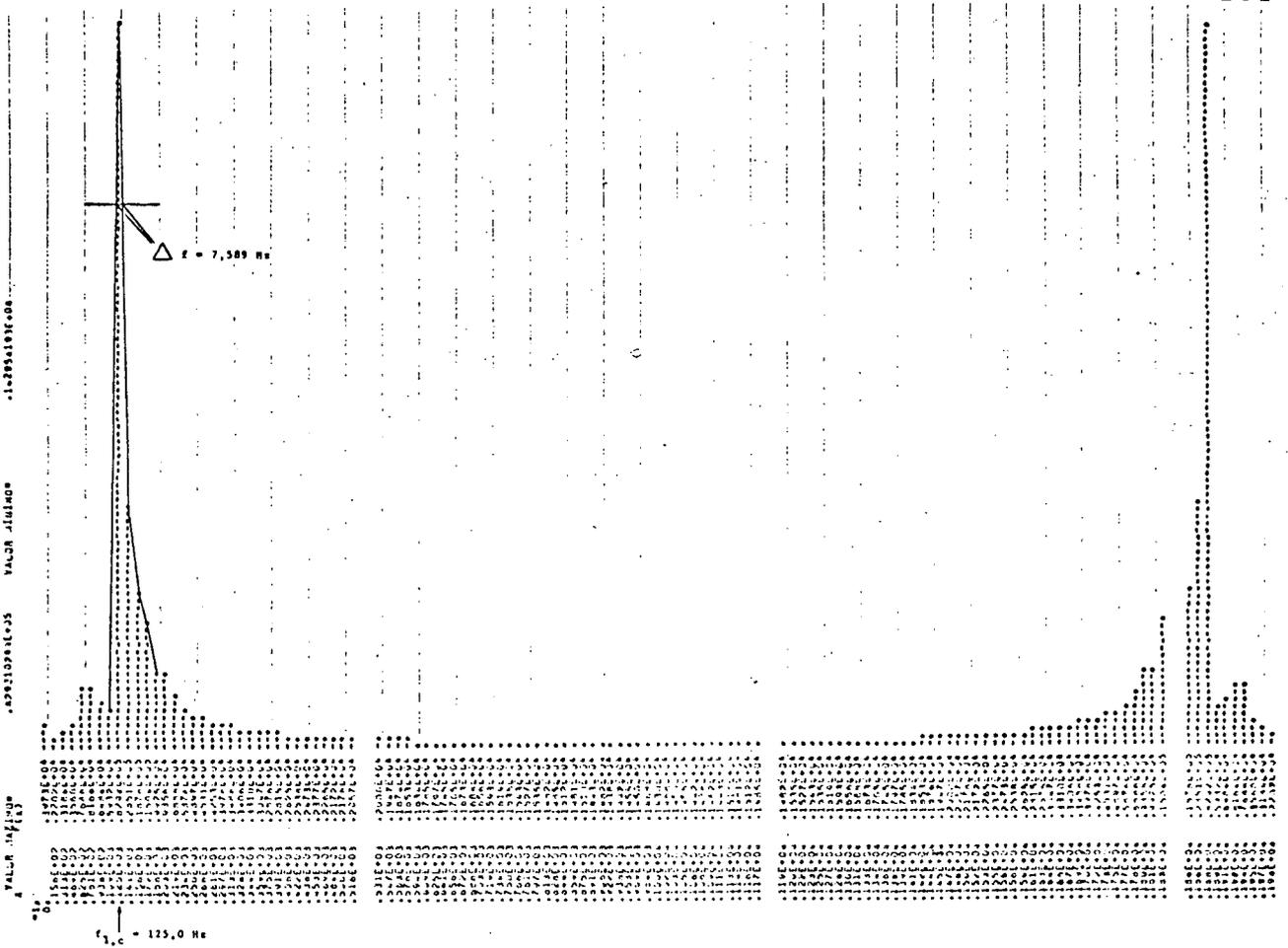


Figura VI.22 - Função de decaimento aleatório na frequência (3º exemplo, N = 480)

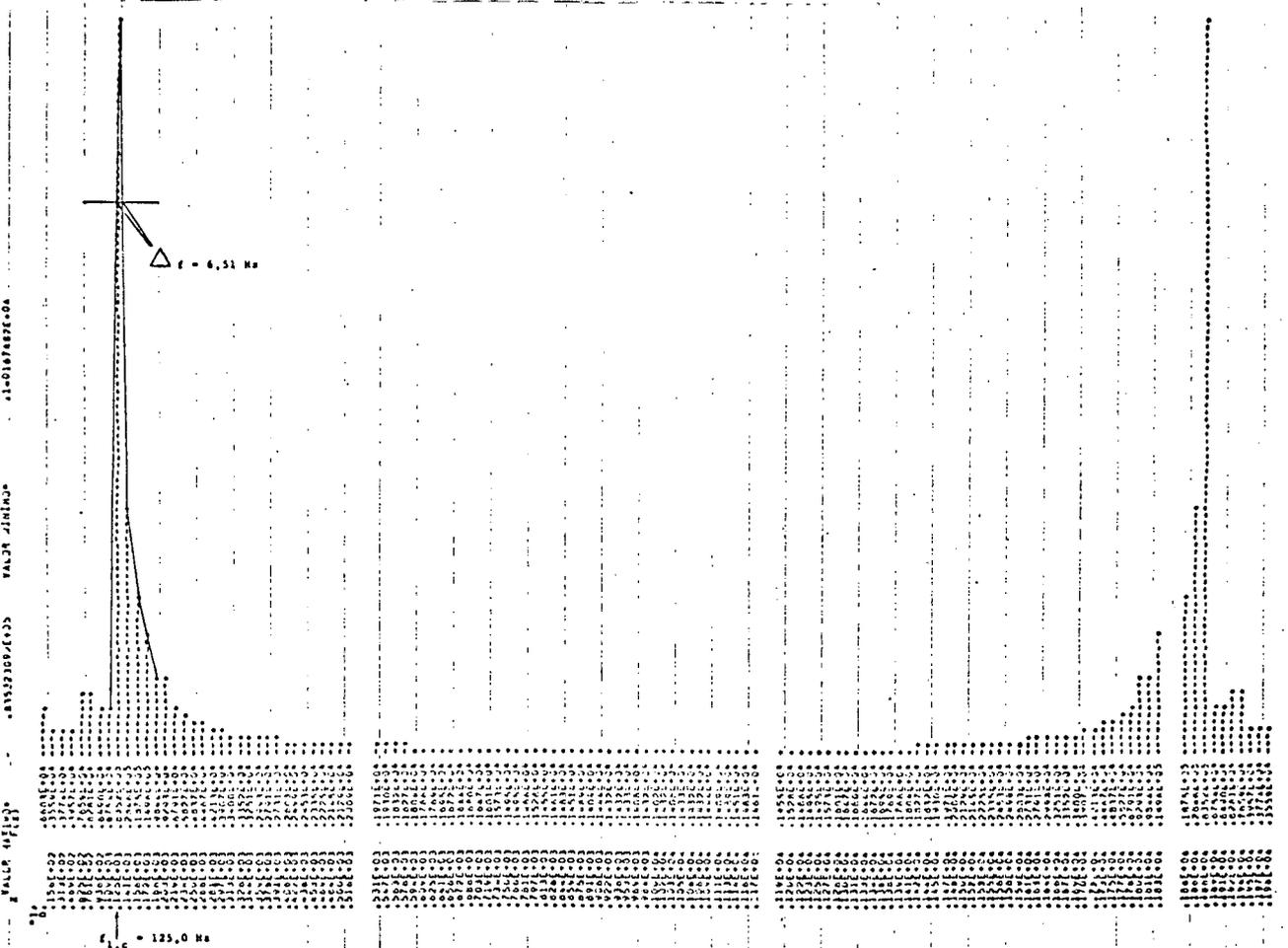


Figura VI.23 - Função de decaimento aleatório na frequência (4º exemplo, N = 490)

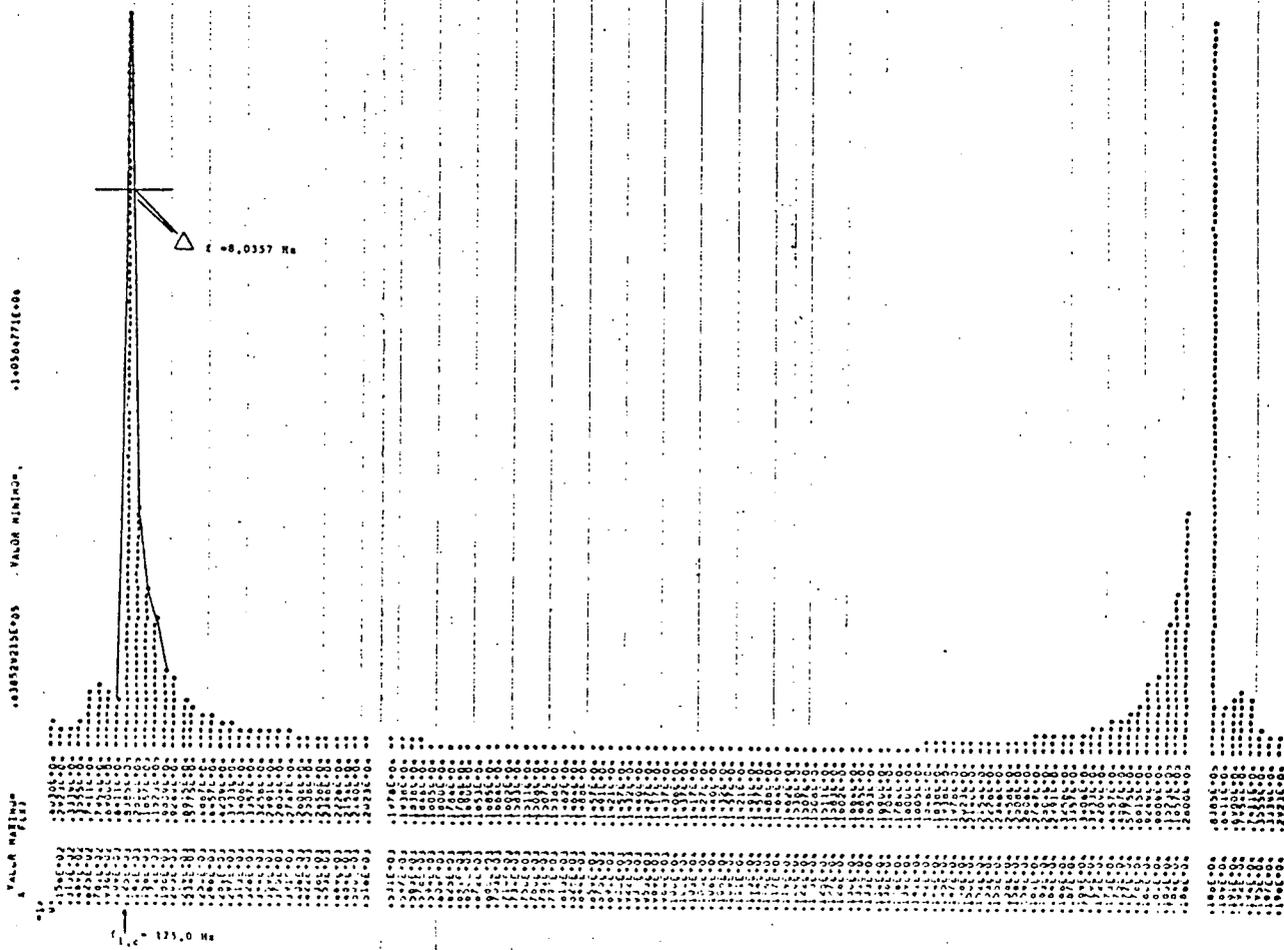


Figura VI.24 - Função de decaimento aleatório na frequência (5º exemplo, N = 500)

Analogamente as figuras VI.12 e VI.13 encontra-se os resultados:

Exemplos	$\eta_{1,c}$	$f_{1,c}$ (Hz)
1º	0,0339	125,0
2º	0,0330	125,0
3º	0,0300	125,0
4º	0,0260	125,0
5º	0,0321	125,0

Tabela VI.3 - Características do sistema - função de decaimento aleatório na frequência.

Calculando a média dos valores acima tem-se, $\eta_{1,c} = 0,0310$ e $f_{1,c} = 125,0$ Hz.

Obs.: Comparações com os outros resultados serão feitas na seção seguinte.

VII.7 - COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS

MÉTODOS	características	
	$\eta_{1,c}$	$f_{1,c}$ (Hz)
resposta livre	0,0027	—
função densidade espectral média	0,0079	122,1
módulo ao quadrado da função transferência	0,0114	118,3
função decremento no tempo	0,0125	121,9
função decremento na frequência	0,0310	125,0

Tabela VI.4 - Características do sistema - comparação entre os resultados.

Sem considerar a resposta livre, que no caso não calcula a frequência, a tabela acima indica para todos os métodos bons resultados para a frequência.

Comparando-se com o método da resposta livre o fator de amortecimento dado pela função decremento aleatório no tempo apresenta-se bastante inconsistente.

No caso da função densidade espectral a pre
cisão ainda não é boa, (erro % = 58 %). Contudo o método conhe
cido mais preciso utilizado foi o do módulo ao quadrado da fun
ção transferência do sistema, neste caso os resultados apresen
tam-se bem melhores, (erro % = 9,6 %).

Para a função decremento na frequência as
comparações indicam que o resultado alcançado é bem menos con-
sistente. Neste caso o baixo número de pontos utilizado preju
dicou a precisão no cálculo das características.

VII.8 - CONCLUSÃO

O uso de um sistema contínuo permitiu a ve-
rificação na prática da função decremento aleatório.

O sistema contínuo assemelhou-se a um siste
ma de 1º grau de liberdade, devido a excitação de somente um
de seus modos, (1º modo), facilitando assim esta verificação.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÃO E SUGESTÕES

VII.1 - CONCLUSÃO

No capítulo II foi visto que a função de decremento aleatório é a resposta livre do sistema relativa à condição inicial de deslocamento, subtraída desta condição. Sendo a condição inicial o próprio nível de seleção ou de retirada de trechos "A".

Foi verificado ainda que para a função de decremento aleatório ter esta forma não é necessário que a excitação seja um ruído branco, bastando anular a média da resposta do sistema.

Sendo o sistema de 1º grau de liberdade e tendo pequenos amortecimentos, o uso da função de decremento aleatório permite a utilização de quaisquer dos três métodos apresentados no capítulo III para identificar os parâmetros do sistema.

Neste caso o fator de amortecimento calculado pelo decremento logarítmico apresentou uma consistência razoável e pelo método de largura de banda foi muito inconsistente. Isto ocorreu em parte devido ao pequeno número de pontos e grande intervalo de amostragem utilizados, ver apêndice E.

Tendo o sistema mais graus de liberdade e pequenos amortecimentos, ainda assim o uso da função decremento se torna válido, pois nesse caso a utilização do método dos mínimos quadrados (capítulo III) determina também de forma consistente os seus parâmetros.

No caso da detecção de falhas, verificou-se no capítulo IV, que esta função se altera com a modificação nos parâmetros dos sistema, mas não se altera significativamente quando ocorre modificações na excitação aleatória, podendo-se então, identificar possíveis falhas independentemente da variação na excitação.

Uma outra vantagem do uso desta função, é o fato de sua análise ser feita no domínio do tempo, eliminando assim o efeito de janela que ocorre no domínio da frequência.

Nos outros métodos apresentados no capítulo V, consideraram-se também sistemas com pequenos amortecimentos, sendo verificada inicialmente uma limitação: para serem representativos do sistema é necessário que a excitação seja um ruído branco.

As outras limitações no caso do uso da função densidade espectral seriam a identificação não confiável dos fatores de amortecimento, a necessidade de conhecer a excitação e ainda a sua variação com as modificações na excitação.

Este método ficou também em parte prejudicado pelo baixo número de pontos considerados (apêndice E). No capítulo VI além de considerar-se mais pontos fêz-se médias sobre as funções densidades encontradas o que melhorou bastante o cálculo dos parâmetros.

As principais limitações no uso da função autocorrelação seriam a impossibilidade de utilizar o método dos mínimos quadrados e também a sua variação com as modificações na excitação.

No caso da função correlação cruzada, algumas das principais limitações seriam a necessidade de conhecer a excitação e a sua variação com as mudanças na excitação.

No capítulo VI procurou-se comparar na prática os resultados obtidos pela função de decaimento aleatório com os resultados encontrados através de métodos conhecidos — resposta livre do sistema, função densidade espectral média e módulo ao quadrado da função transferência.

O método conhecido mais preciso utilizado foi o do módulo ao quadrado da função transferência, neste caso o fator de amortecimento encontrado aproximou-se muito do calculado pela função de decaimento aleatório.

Assim pode-se concluir que a função de decaimen

to aleatório completa de forma útil os métodos clássicos, sendo um dos métodos mais consistentes para detectar falhas e identificar os parâmetros do sistema, quando ocorre variações na excitação. Apresentando bons resultados mesmo quando o sistema considerado é prático.

O principal interesse do uso da função de decre^umento na identificação é dado pela facilidade com que permite separar os modos que ocorrem próximos da mesma frequência natural, e no caso da detecção de falhas, é dado pelo fato de não variar significativamente com a mudança na excitação.

VII.2 - SUGESTÕES

a) Análise estatística da função de decre^umento aleatório. Alguns dos objetivos da análise seriam otimizar o nível de seleção "A" e o número de trechos retirados "N", e com^uparar a função com a resposta livre do sistema à condição inicial de deslocamento.

b) Através de um processo iterativo poderia-se também, otimizar "A" e "N". Uma das finalidades desta otimização seria diminuir o tempo de processamento.

c) Análise computacional dos métodos apresen^utados. Sabe-se que a obtenção da função de decre^umento aleatório é dada por uma média no tempo da resposta do sistema não havendo multiplicações nem a transformação para a frequência. Assim, o

tempo de processamento apresenta-se menor do que nos outros métodos.

d) Desenvolvimento de um programa que separe os modos que ocorrem próximos da mesma frequência natural, usando o método dos mínimos quadrados.

e) Desenvolvimento de um programa que com a variação de "A", calcule a função densidade da probabilidade para um período de oscilação da função decréscimo de um sistema de 1º e 2º graus de liberdade.

f) Aplicações práticas da função decréscimo aleatório. Neste caso pode-se calcular os parâmetros de um sistema prático (2º graus de liberdade), através da aplicação dos mínimos quadrados sobre a função decréscimo da sua resposta. A banda de excitação do sistema deve ser suficiente para retirar só dois modos.

Para uma aplicação mais geral seria necessário escolher de forma mais rigorosa uma boa localização para o transdutor e a utilização de um filtro sobre a vibração retirada da estrutura | 4 | .

g) Desenvolvimento de um programa em microprocessador que permita o cálculo da função decréscimo aleatório em situações práticas de forma "on-line".

APÊNDICE A

ESTRUTURA DOS PROGRAMAS

A.1- RELAÇÃO DAS SUBROTINAS E SUAS FINALIDADES

A.1.1 - Subrotina RUÍDO

Gera através da função RANDOM, interna do computador, um ruído com distribuição uniforme entre 0 e 1. Transforma a seguir a distribuição uniforme em distribuição normal, |7|, obtendo na saída um ruído branco gaussiano, (excitação).

A.1.2 - Subrotina FILTRO

Simula um filtro passa baixa de função transferência dada por:

$$G(\omega) = \frac{d_1 e^{j\omega T}}{e^{2j\omega T} + d_2 e^{j\omega T} + d_3} \quad (\text{A.1})$$

onde $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $d_1 = 0,0114$, $d_2 = -1,027$, $d_3 = 0,264$

Tendo como entrada o ruído branco, o filtro reduz a banda de frequência da excitação.

Obs.: Dependendo da banda desejada para a excitação, a subroti na FILTRO pode ser suprimida ou não.

A.1.3 - Subrotina RKUTTA

Simula um sistema mecânico de um grau de liberdade pelo processo Runge-Kutta.

O sistema é representado por uma equação diferencial de segunda ordem.

Utiliza as subrotinas RUNG e FUN. A subroti na RUNG calcula iterativamente a resposta do sistema e utiliza a subrotina FUN para calcular os argumentos.

A.1.4 - Subrotinas RKUTT1 e RKUTT2

Simulam um sistema mecânico de dois graus de liberdade pelo processo Runge Kutta.

O sistema é representado por duas equações diferenciais de segunda ordem.

Cada subrotina simula uma equação diferencial, tendo excitações e respostas independentes.

A resposta do sistema é dada pela soma das respostas de cada equação diferencial.

Da mesma forma anterior as subrotinas RKUTT1 e RKUTT2 fazem uso das subrotinas RUNG1, RUNG2, FUN1 e FUN2.

As subrotinas RUNG1 e RUNG2 calculam de forma iterativa a resposta de cada equação diferencial e utilizam respectivamente as subrotinas FUN1 e FUN2 para o cálculo dos argumentos.

A.1.5 - Subrotina ZMEDIA

Esta subrotina anula a média temporal de um sinal qualquer.

Tem como entrada a resposta do sistema.

Obs.: Existem alguns casos, mostrados no transcórre do trabalho, nos quais a subrotina ZMEDIA não é usada.

A.1.6 - Subrotina TRECHO

Esta subrotina atua sobre a resposta do sistema, tendo a resposta média temporal nula ou não.

Tem como objetivo encontrar o tamanho necessário da resposta do sistema $t_{\text{máx}}$, tal que dado um nível de seleção A sejam retirados um número de trechos pré-fixados N .

O seu uso é importante, porque conhecendo-se o tamanho da resposta do sistema, $t_{\text{máx}}$, para um dado A e N , podemos a seguir calcular a função de decaimento aleatório, tendo-se pleno conhecimento de todas as variáveis envolvidas.

Obs.: $S\tilde{o}$ é usada quando a função de decremento aleatório é calculada.

A.1.7 - Subrotina DECAL

Esta subrotina é utilizada para gerar a função de decremento aleatório a partir da resposta do sistema, conhecendo-se $t_{\text{máx}}$, A e N.

Como foi descrito na seção II.2, a função de decremento aleatório é essencialmente uma média de trechos de tamanho determinado retirado da resposta do sistema.

Como a resposta do sistema é aleatória a lógica para a retirada de trechos se torna mais complexa.

A seguir serão descritas as principais lógicas utilizadas nesta subrotina.

Pode-se separá-las em duas lógicas principais:

1) Retirada exata de trechos

Esta lógica apresenta pouca probabilidade de uso mas deve ser considerada. Neste caso, o nível de seleção coincide com a amplitude amostrada da resposta do sistema.

Esta lógica pode ser subdividida ainda em:

1.1 - Retirada exata inicial

Quando o trecho é retirado da resposta do sistema em $t = 0$.

1.2 - Retirada exata com inclinação positiva

Neste caso o trecho é retirado tendo a resposta do sistema inclinação positiva. Devem ser consideradas aqui duas novas situações - quando a amplitude seguinte a da retirada do trecho é maior ou menor.

1.3 - Retirada exata com inclinação negativa

Neste caso o trecho é retirado tendo a resposta do sistema inclinação negativa. Da mesma forma anterior deve-se levar em consideração o valor da amplitude amostrada que se segue a retirada do trecho.

2) Retirada interpolada de trechos

Esta lógica tem muito uso, pois em geral o nível de seleção A não coincide com a amplitude amostrada. Sendo o período de amostragem pequeno, é feita uma interpolação através de um segmento de reta encontrando um novo conjunto de amplitudes para o trecho retirado. Este conjunto terá então como primeira amplitude o próprio nível de seleção.

Pode-se subdividir essa lógica em:

2.1 - Retirada interpolada com inclinação positiva

Neste caso a interpolação para a obtenção do trecho é feita tendo a resposta do sistema inclinação positiva.

2.2 - Retirada interpolada com inclinação negativa

Aqui a interpolação é feita tendo a resposta do sistema inclinação negativa.

Obs.: Quando o último trecho retirado não contém todas as amplitudes necessárias para formar o conjunto de amplitudes, as restantes são completadas com zeros.

A.1.8 - Subrotina REGIÃO

Esta subrotina é utilizada para calcular a variância e o desvio padrão da função decrémento aleatório, com a finalidade de obter uma região padrão. A região padrão depende do nível de confiança desejado, no caso 80% para 1ºG.L. e 68,27% para 2ºG.L.

Tem como entrada a função decrémento aleatório.

A.1.9 - Subrotina FFTF e BITREV, |3|

Estas subrotinas trabalham em conjunto e são

utilizadas para achar a transformada rápida de Fourier de um sinal no tempo.

A primeira calcula a transformada rápida de Fourier, mas fora da ordem bittransversa e a segunda ordena os resultados da primeira.

Tem como argumentos o sinal de entrada o número de pontos amostrados N , e ainda M e $SIGN$, onde:

$$N = 2^M$$

e

$SIGN = 1$, para executar a transformada direta.

$SIGN = -1$, para executar a transformada inversa.

O sinal de entrada deve ser uma função complexa, sendo real, o campo imaginário deve ser preenchido com zeros.

A seqüência de utilização é primeiro a FFTF e a seguir a BITREV, que tem como argumentos o sinal de entrada e o número de pontos amostrados.

A.1.10 - Subrotina AUTCO1

Calcula a função autocorrelação da resposta do sistema de um grau de liberdade.

O cálculo é feito passando para a frequência a excitação do sistema com o uso de FFTF e BITREV onde SIGN=1. A seguir é calculado o módulo ao quadrado da excitação na frequência e o resultado é dividido pelo seu tamanho, dando a função densidade espectral da entrada.

Multiplicando ponto a ponto pelo módulo ao quadrado da função transferência do sistema e fazendo a transformada inversa com o uso da FFTF e BITREV com SIGN = -1, obtêm-se a função autocorrelação para um grau de liberdade.

A.1.11 - Subrotina CORC1

Calcula a função correlação cruzada da resposta do sistema de um grau de liberdade.

O cálculo é feito passando para frequência a excitação do sistema com o uso da FFTF e BITREV onde SIGN = 1. A seguir é calculado o módulo ao quadrado da excitação na frequência e o resultado é dividido pelo seu tamanho, dando a função densidade espectral da entrada.

Multiplicando ponto a ponto pela função transferência do sistema e fazendo a transformada inversa com o uso da FFTF e BITREV com SIGN = 1, obtêm-se a função correlação cruzada, para um grau de liberdade.

A.1.12 - Subrotina AUTCO2

Calcula a função autocorrelação da resposta do sistema de dois graus de liberdade.

Analogamente a AUTCO1 calcula a função densidade espectral da excitação de cada equação diferencial independentemente.

Multiplica cada função densidade espectral pelo módulo ao quadrado das respectivas funções transferência.

A seguir faz a transformada inversa de cada termo separadamente somando os resultados, o que nos dá a função autocorrelação para dois graus de liberdade.

A.1.13 - Subrotina CORC2

Calcula a função correlação cruzada da resposta do sistema de dois graus de liberdade.

Analogamente a CORC1 calcula a função densidade espectral da excitação de cada equação diferencial independentemente.

Multiplica cada função densidade espectral pelas suas respectivas funções transferência.

A seguir faz a transformada inversa de cada termo separadamente somando os resultados, o que nos dá a função correlação cruzada para dois graus de liberdade.

A.1.14 - Subrotina GRAFIC

Esta subrotina é utilizada para qualquer saída em gráfico. Tem como argumentos a amplitude, abcissa e o comprimento do sinal.

Pesquisa também a maior e a menor amplitude do sinal. A menor amplitude é subtraída da maior e o resultado é dividido por 100. Este é o menor valor que a subrotina pode representar.

A montagem do gráfico é feita colocando traços verticais para o nível zero e traços horizontais para as amplitudes, onde os seus valores são posicionados através de asteriscos.

Se o sinal só tem valores positivos, os traços verticais indicando o eixo do zero são suprimidos.

Imprime junto com o gráfico o valor das abcissas e das amplitudes.

A.1.15 - Subrotina LERP

Esta subrotina é utilizada no início do programa em FORTRAN que calcula a função de decaimento e serve para ler a resposta do sistema montado em laboratório. A resposta foi inicialmente gravada em fita de papel, sendo a seguir transferida para fita magnética do CPD da UFRGS, servindo agora como banco de dados para o programa, seção VI.4.2 capítulo VI.

A.1.16 - Subrotina RMS

Calcula o valor "RMS" de qualquer sinal no tempo. O valor "RMS" calculado sobre a resposta do sistema é utilizado como referência para a escolha da amplitude de retirada de trechos A, sendo esta necessária ao cálculo da função de decaimento aleatório.

A.2 - PROGRAMAS - DIAGRAMAS EM BLOCO DAS SUBROTINAS

A.2.1 - Programa para gerar a função de decremento aleatório no tempo, no tempo normalizada, na frequência e a região padrão

Obs.: O índice "c" indica valor calculado

A.2.1.1 - Sistema de um grau de liberdade

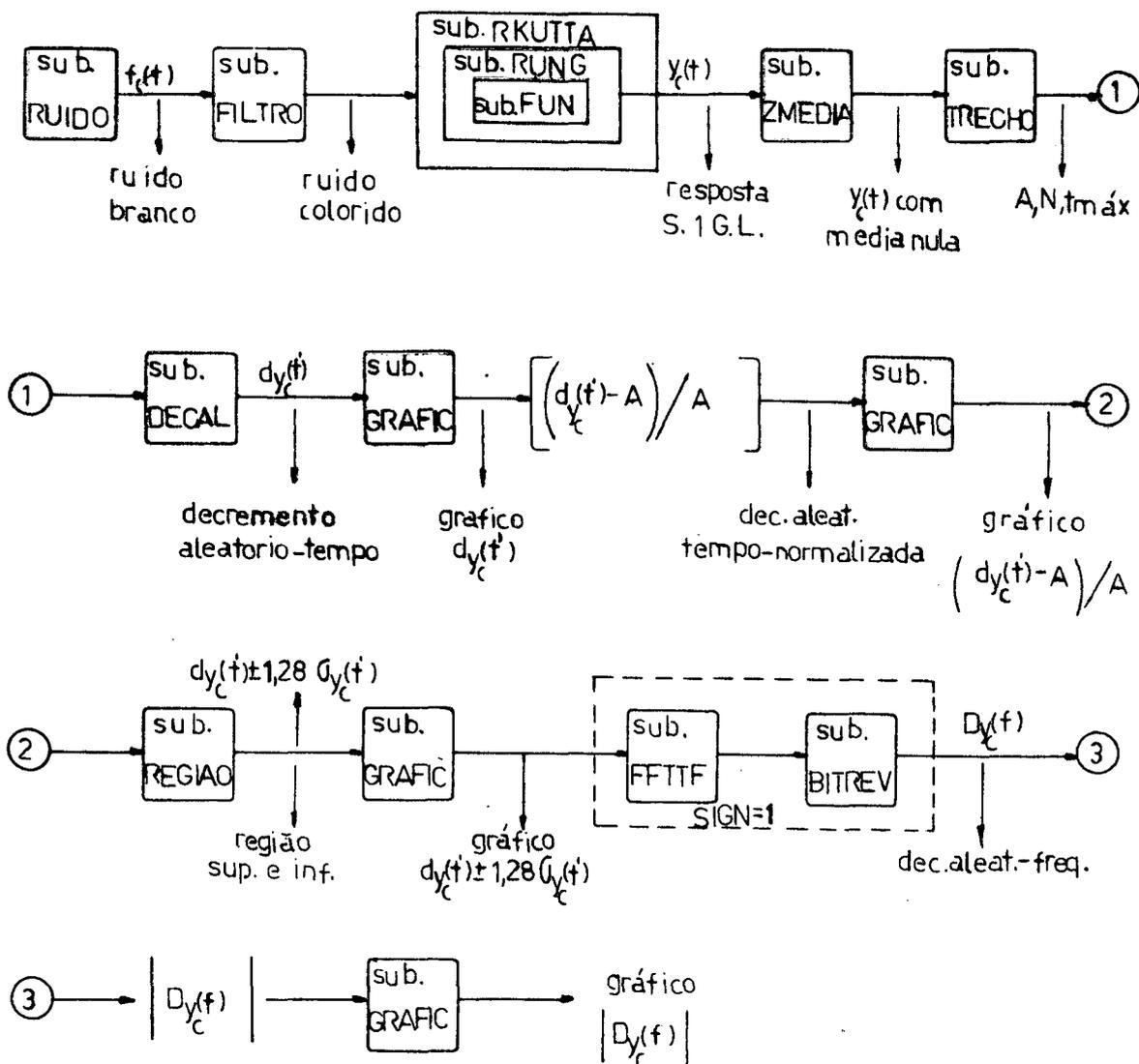


Figura A.1 - Programa para gerar a função de decremento aleatório - sistema de um grau de liberdade.

A.2.1.2 - Sistema de dois graus de liberdade

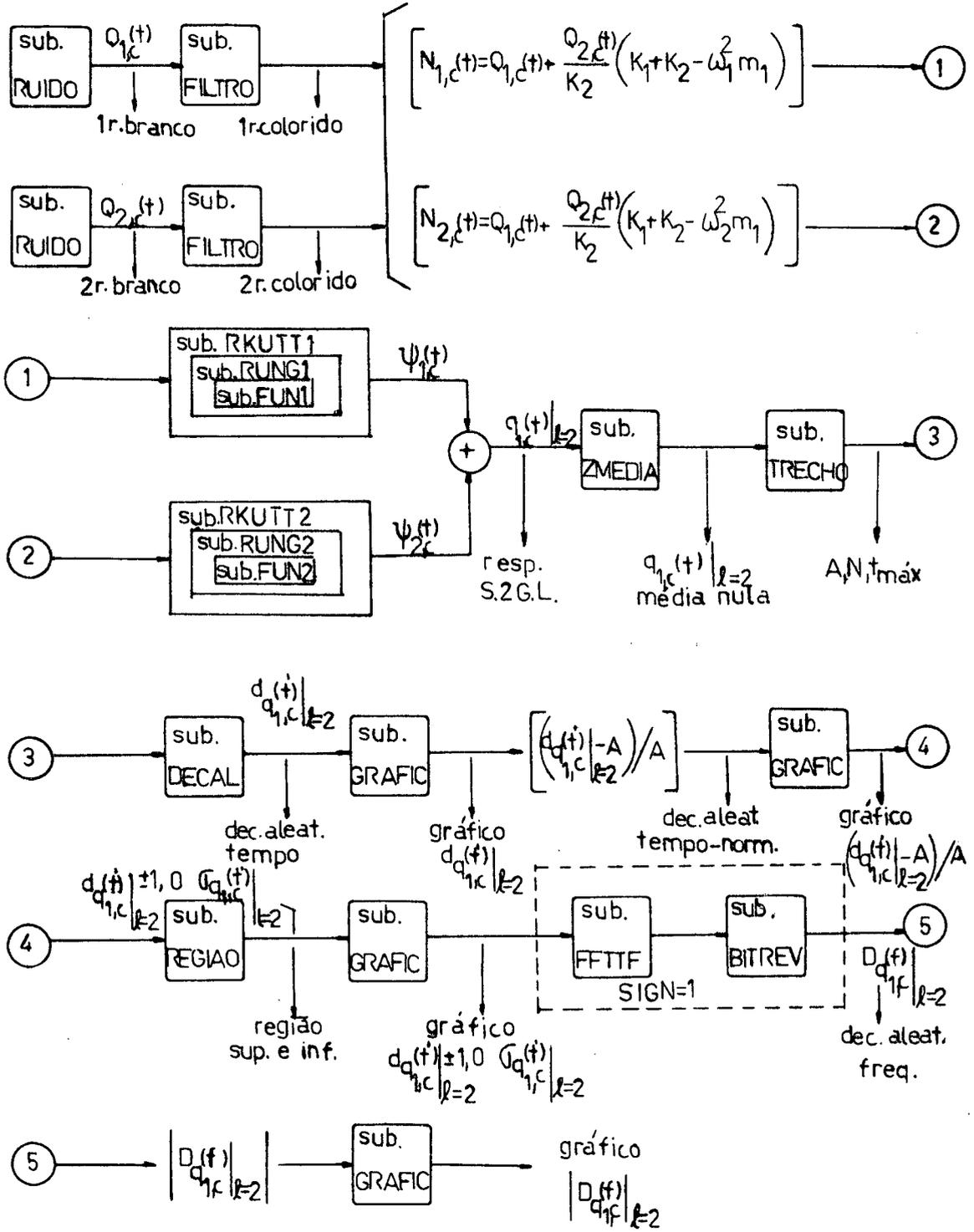


Figura A.2 - Programa para gerar a função decremento aleatório - sistema de dois graus de liberdade.

A.2.1.3 - Sistema montado em laboratório.

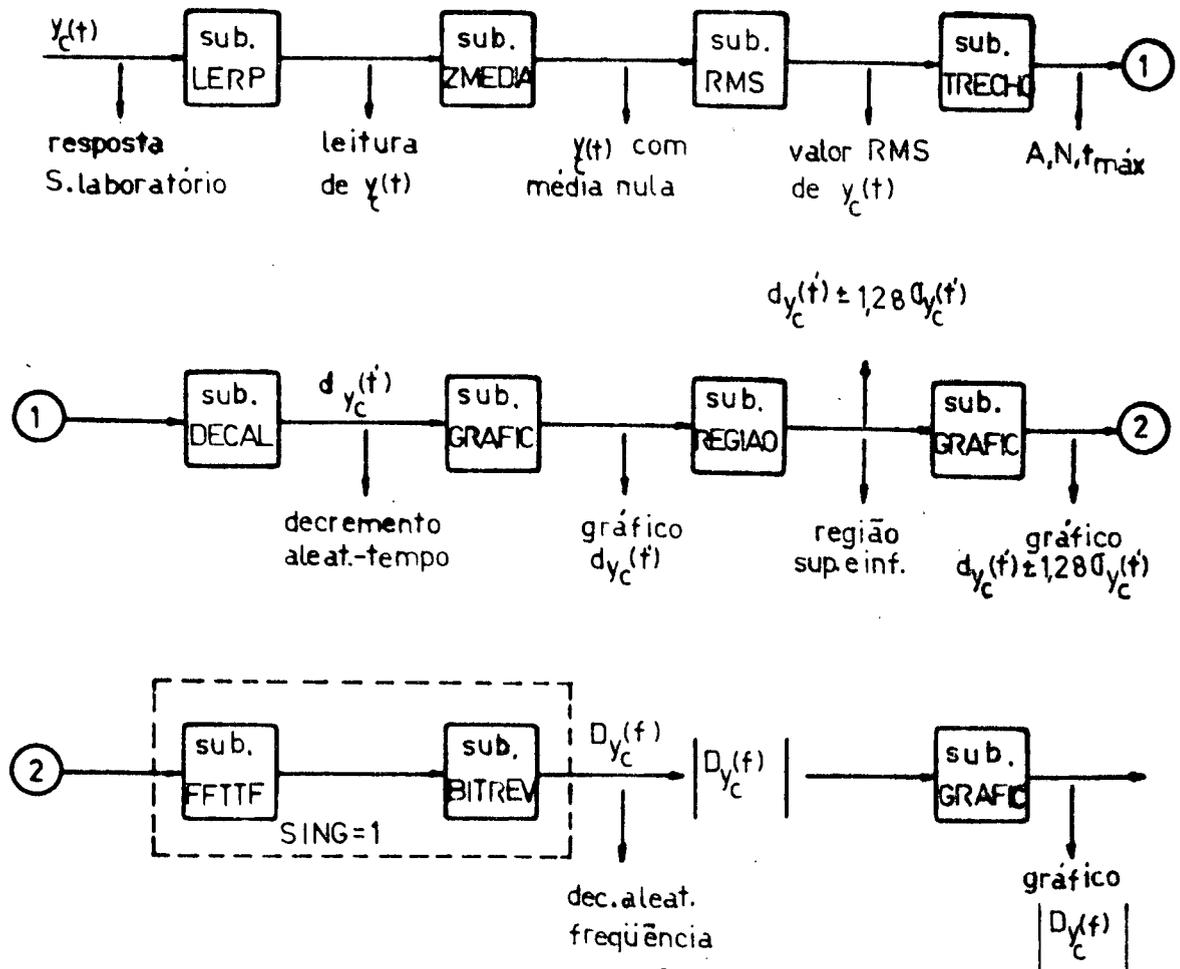


Figura A.3 - Programa para gerar a função decremento aleatório - sistema montado em laboratório.

Obs.: - No caso do sistema montado em laboratório a função decremento aleatório no tempo não foi normalizada.

- Para os sistemas simulados quando é necessário anular a média do ruído colorido a subrotina ZMEDIA é colocada na saída da subrotina FILTRO. Sendo a excitação considerada um ruído branco as subrotinas FILTRO e ZMEDIA são retiradas. A lógica de normalização é usada só para comparação com a função autocorrelação.

A.2.2 - Programa para gerar a função densidade espectral

A.2.2.1 - Sistema de um grau de liberdade.

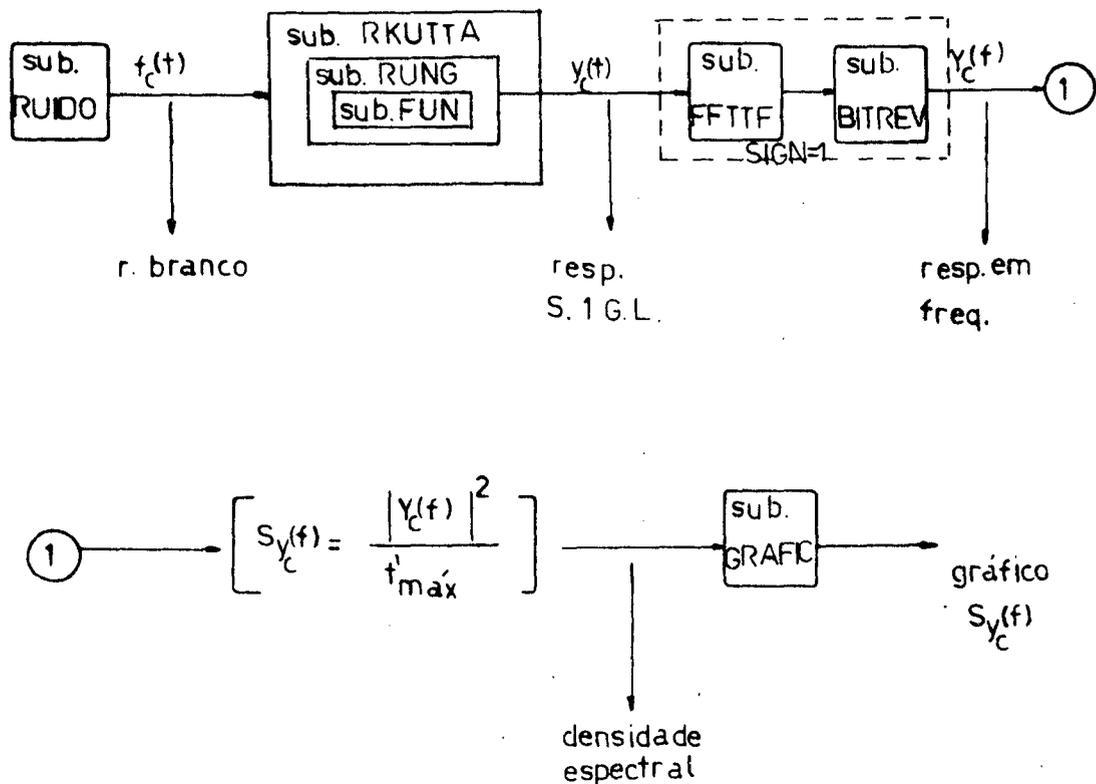


Figura A.4 - Programa para gerar a função densidade espectral - sistema de um grau de liberdade.

A.2.2.2 - Sistema de dois graus de liberdade

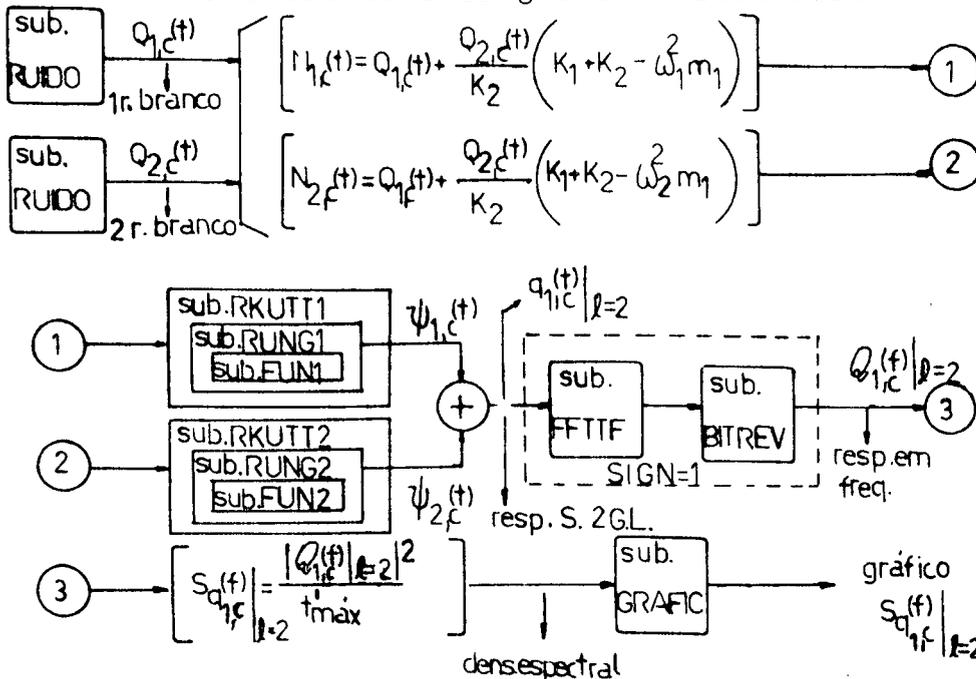
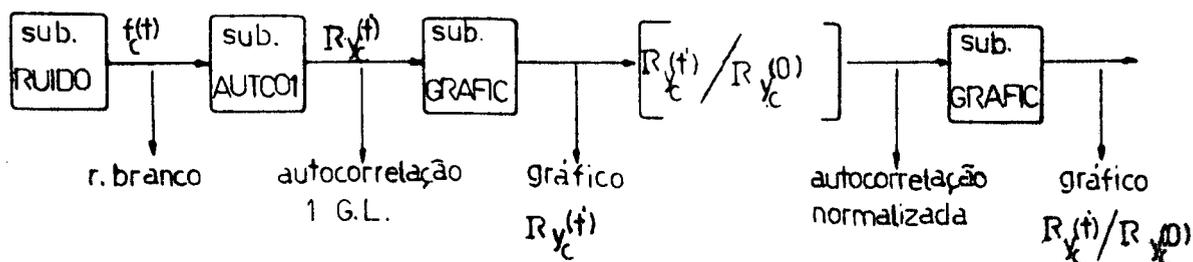


Figura A.5 - Programa para gerar a função densidade espectral - sistema de dois graus de liberdade.

A.2.3 - Programa para gerar a função autocorrelação

A.2.3.1 - Sistema de um grau de liberdade



onde a subrotina AUTCO1 é dada por:

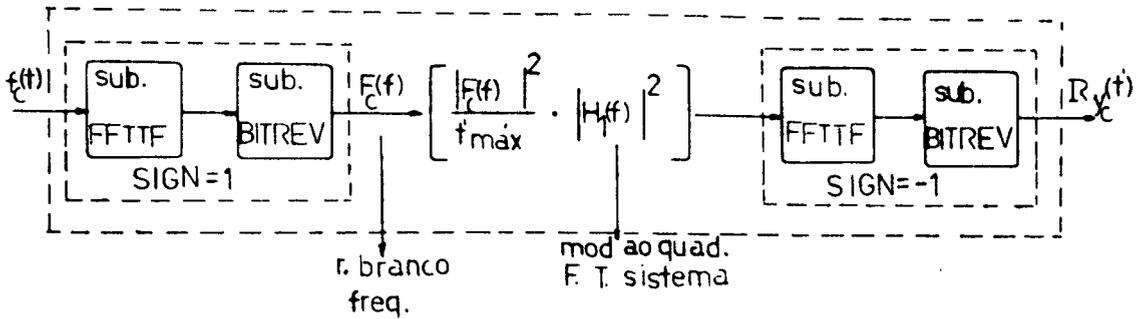
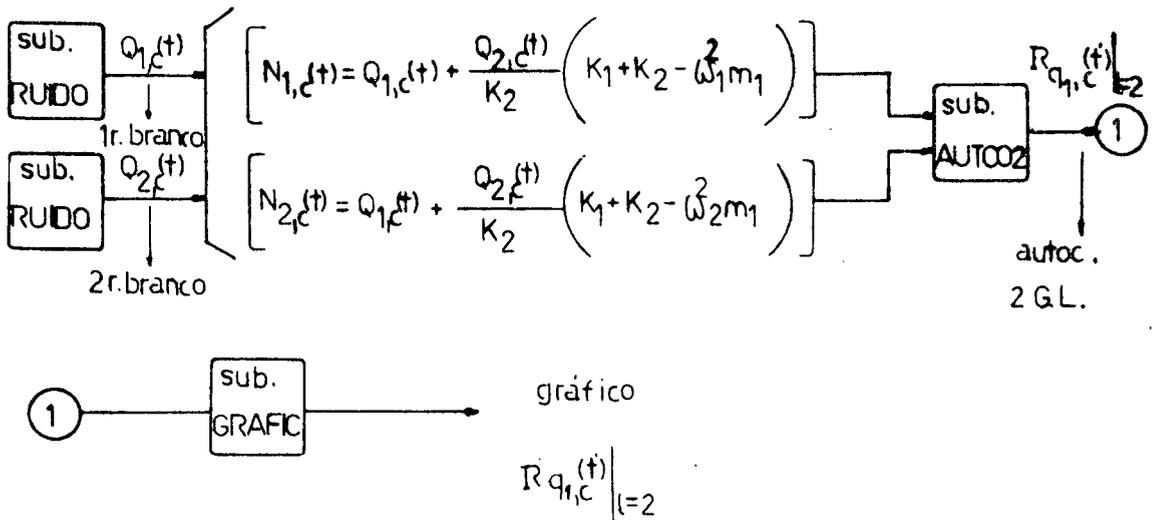


Figura A.6 - Programa para gerar a função autocorrelação - sistema de um grau de liberdade

Obs.: A normalização da autocorrelação é feita somente para o sistema de um grau de liberdade.

A.2.3.2 - Sistema de dois graus de liberdade



onde a subrotina AUTCO2 é dada por:

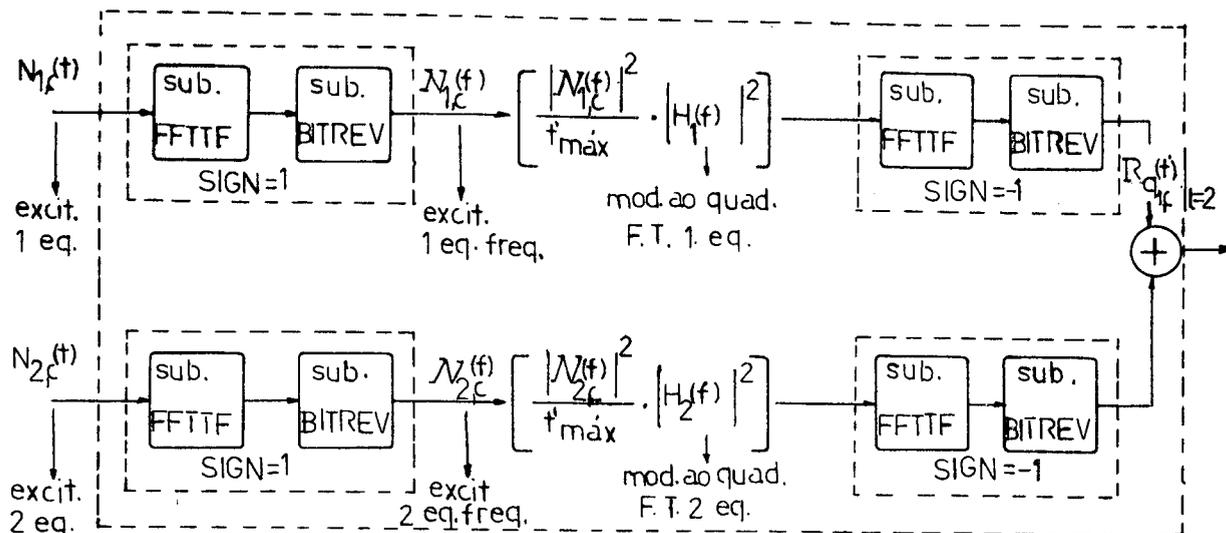
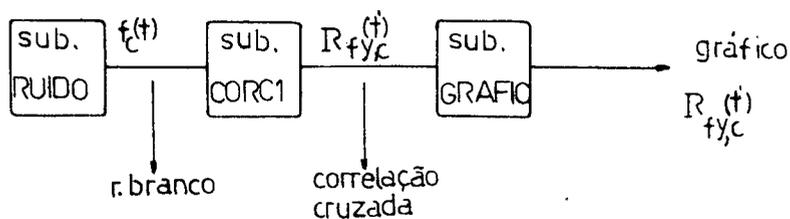


Figura A.7 - Programa para gerar a função autocorrelação - sistema de dois graus de liberdade.

A.2.4 - Programa para gerar a função correlação cruzada

A.2.4.1 - Sistema de um grau de liberdade



onde a subrotina CORC1 é dada por:

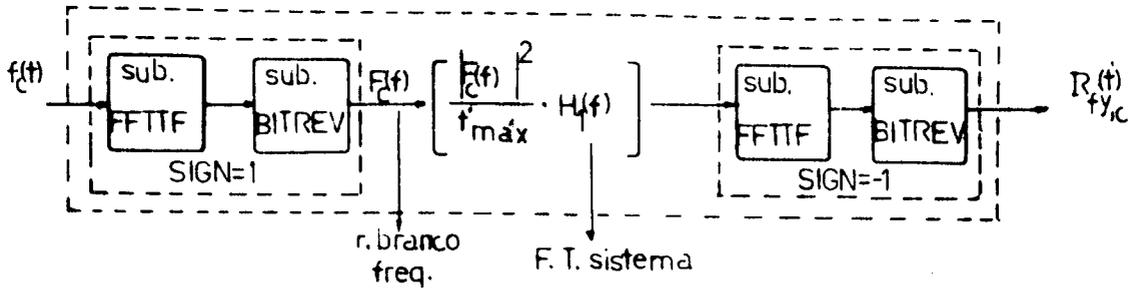
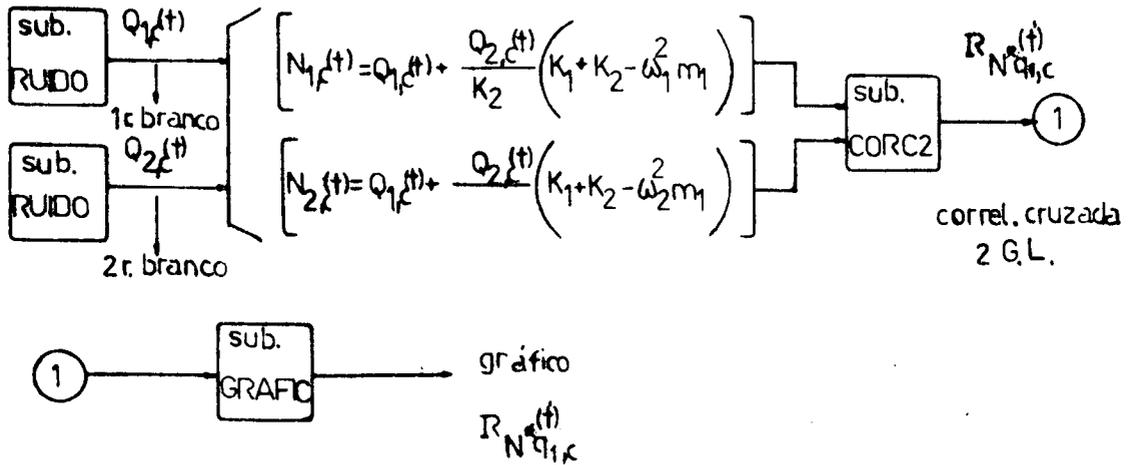


Figura A.8 - Programa para gerar a função correlação cruzada - sistema de um grau de liberdade.

A.2.4.2 - Sistema de dois graus de liberdade



onde a subrotina CORC2 é dada por:

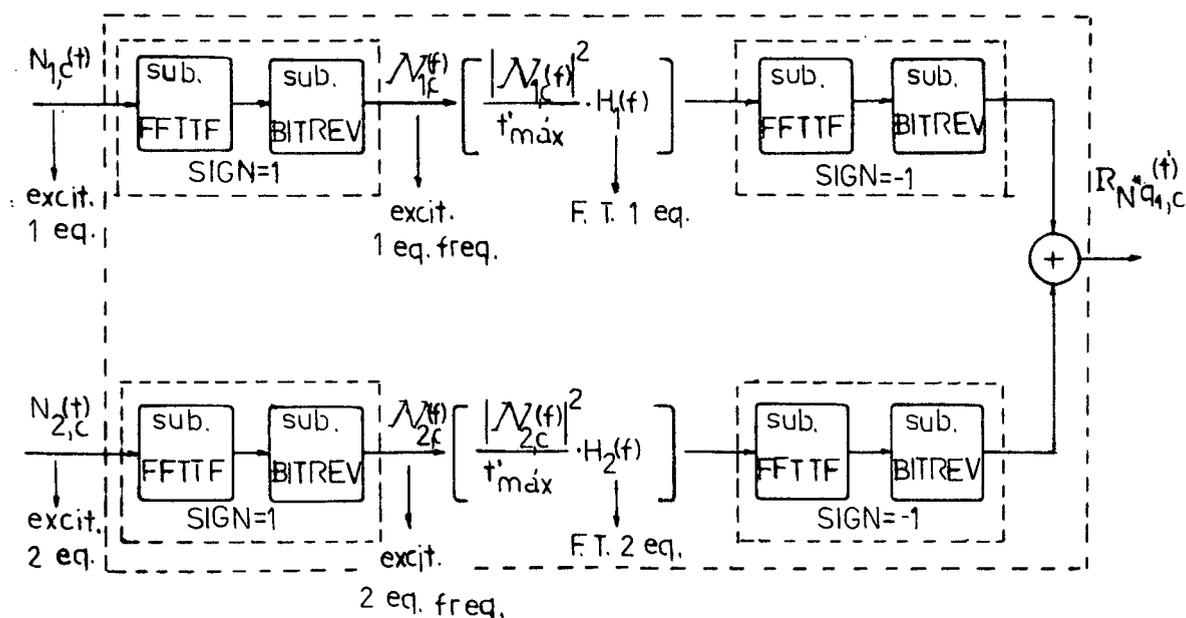


Figura A.9 - Programa para gerar a função correlação cruzada - sistema de dois graus de liberdade.

Obs.: Na determinação da autocorrelação e correlação cruzada os sistemas não foram simulados através do processo Runge-Kutta, e em quase todos os casos as excitações foram ruídos brancos.

APÊNDICE B

EXCITAÇÕES E RESPOSTAS DOS SISTEMAS SIMULADOS (TEMPO)

Neste apêndice serão mostrados os gráficos no tempo de trechos iniciais das excitações e respostas dos sistemas simulados.

As excitações e as respostas podem ser subdivididas:

- 1) quanto ao sistema (um ou dois graus de liberdade)
- 2) quanto a banda de frequência (ruído branco ou colorido)
- 3) quanto ao tipo de excitação (inicial ou nova excitação)

B.1 - EXCITAÇÕES

B.1.1 - Ruídos brancos gaussianos

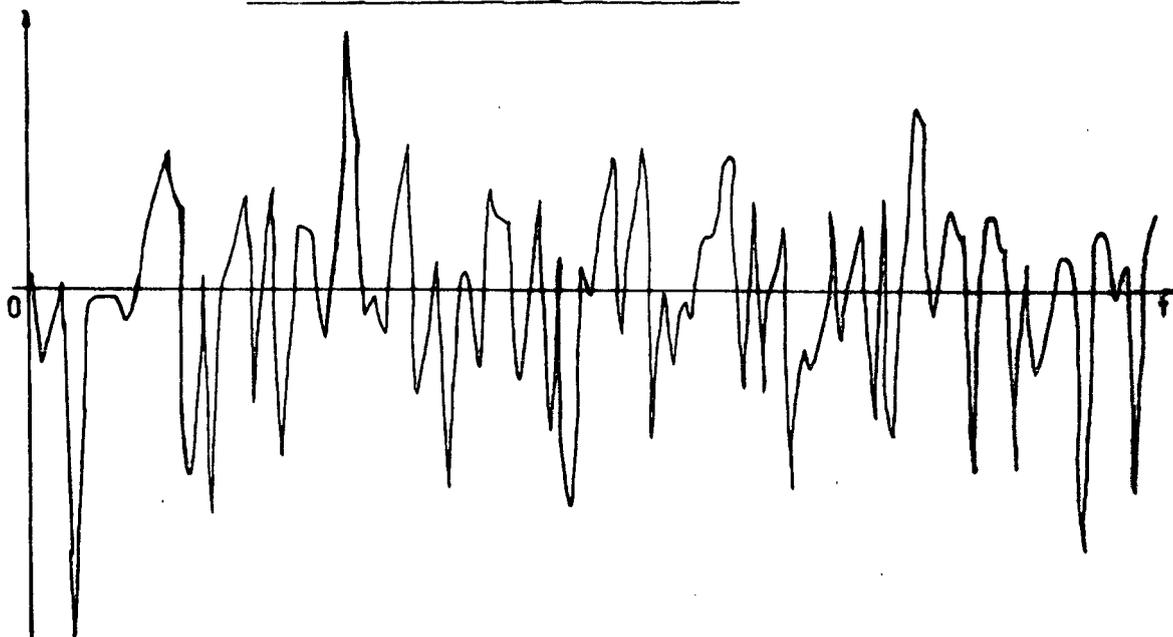


Figura B.1 - Primeiro ruído branco.

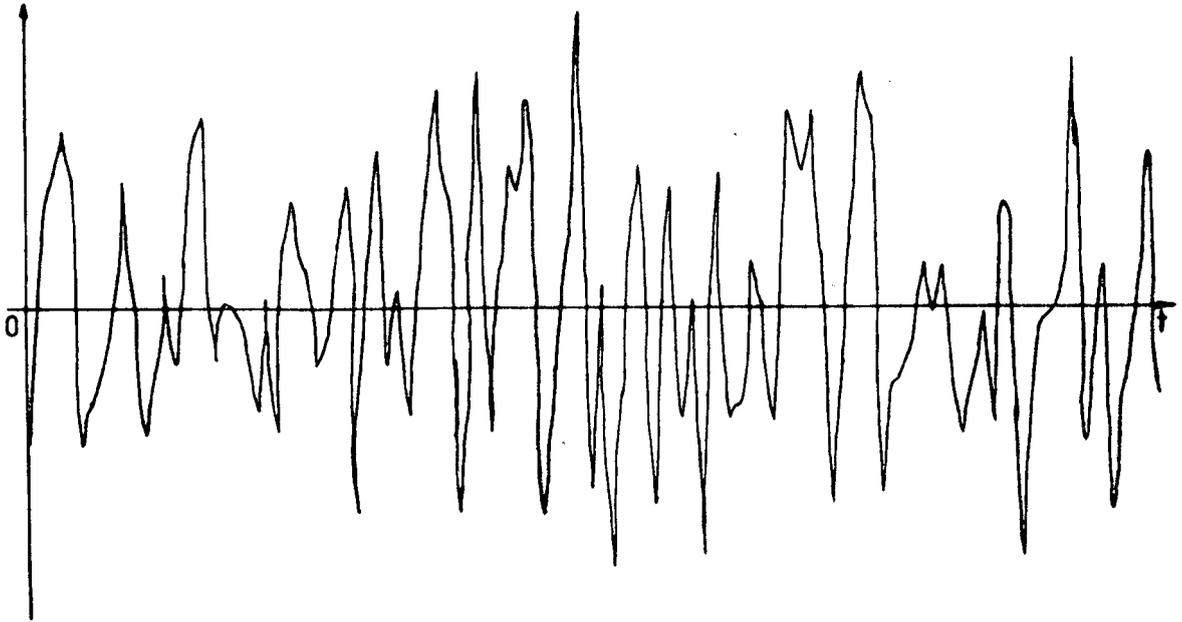


Figura B.2 - Segundo ruído branco.

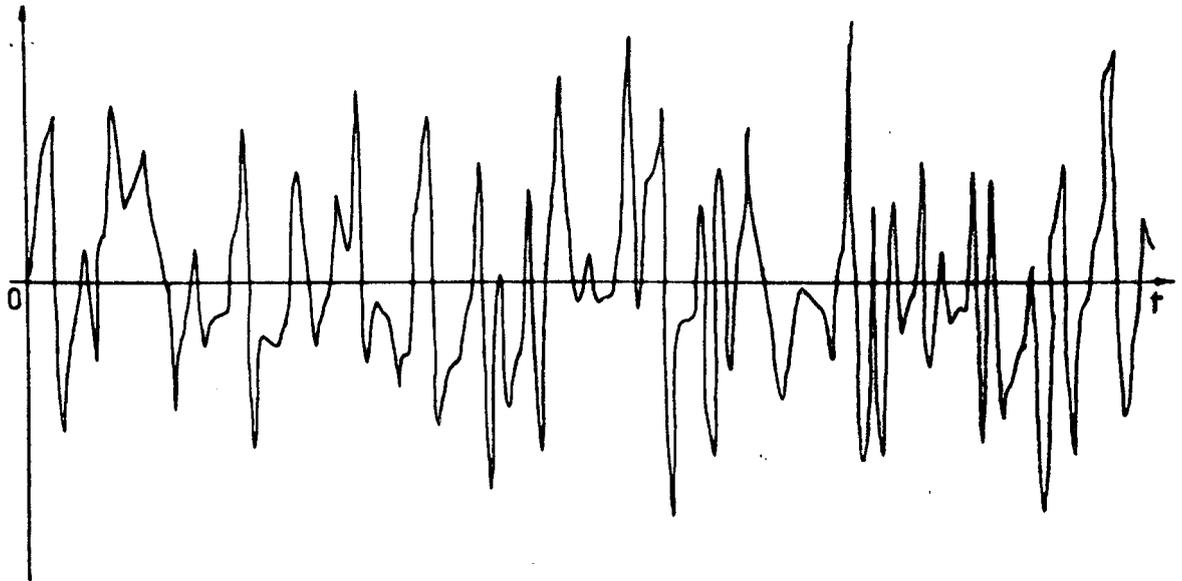


Figura B.3 - Terceiro ruído branco.

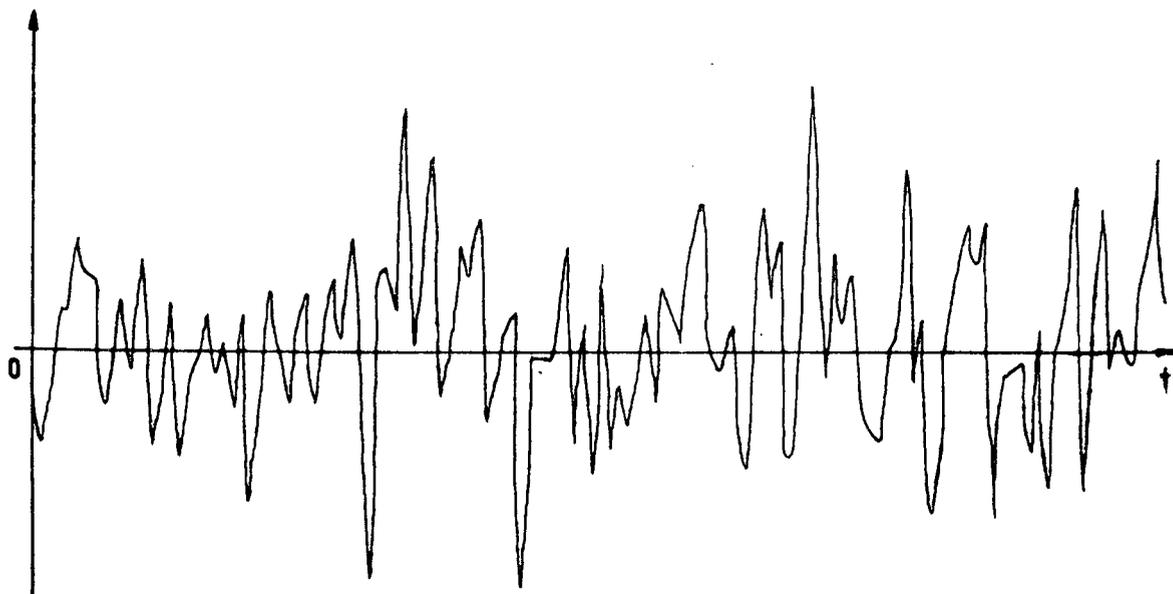


Figura B.4 - Quarto ruído branco.

B.1.2 - Ruídos coloridos

Usando o filtro dado por (A.1), obtem-se:

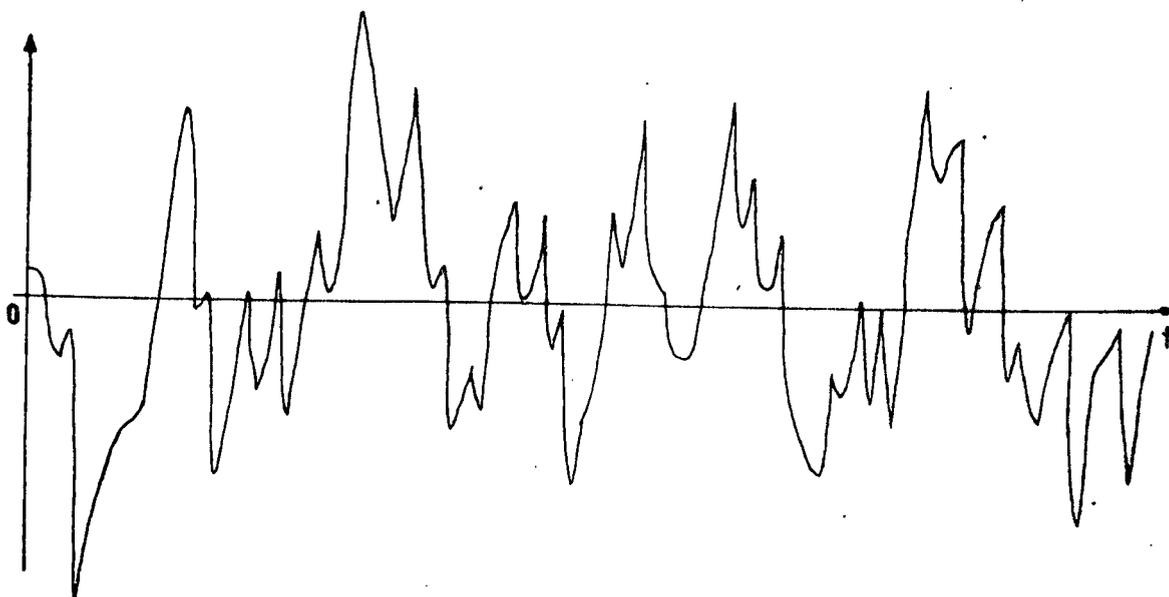


Figura B.5 - Primeiro ruído colorido.

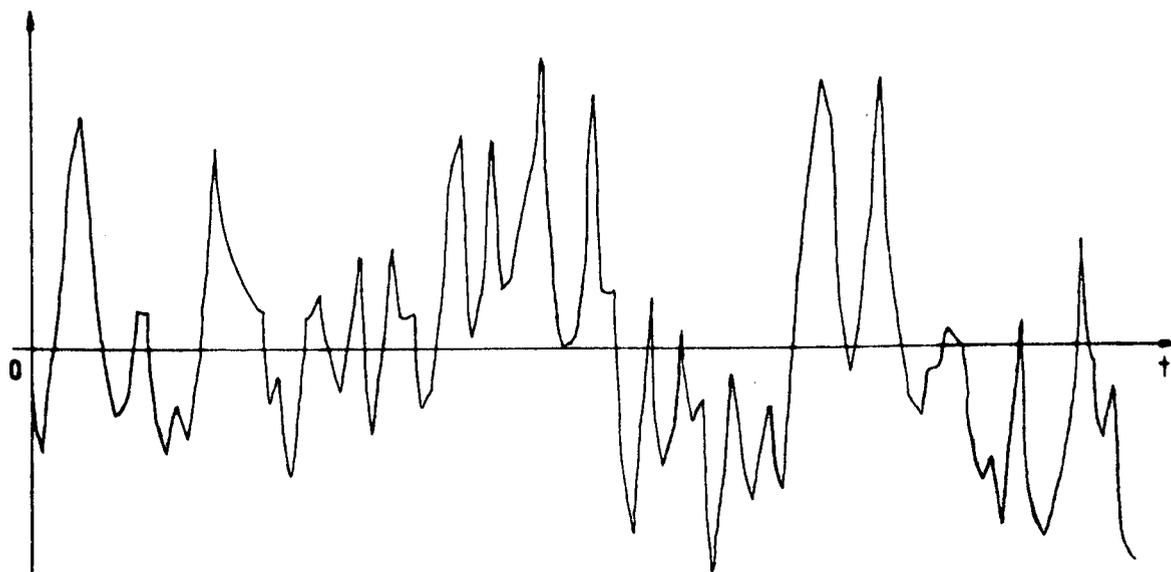


Figura B.6 - Segundo ruído colorido.

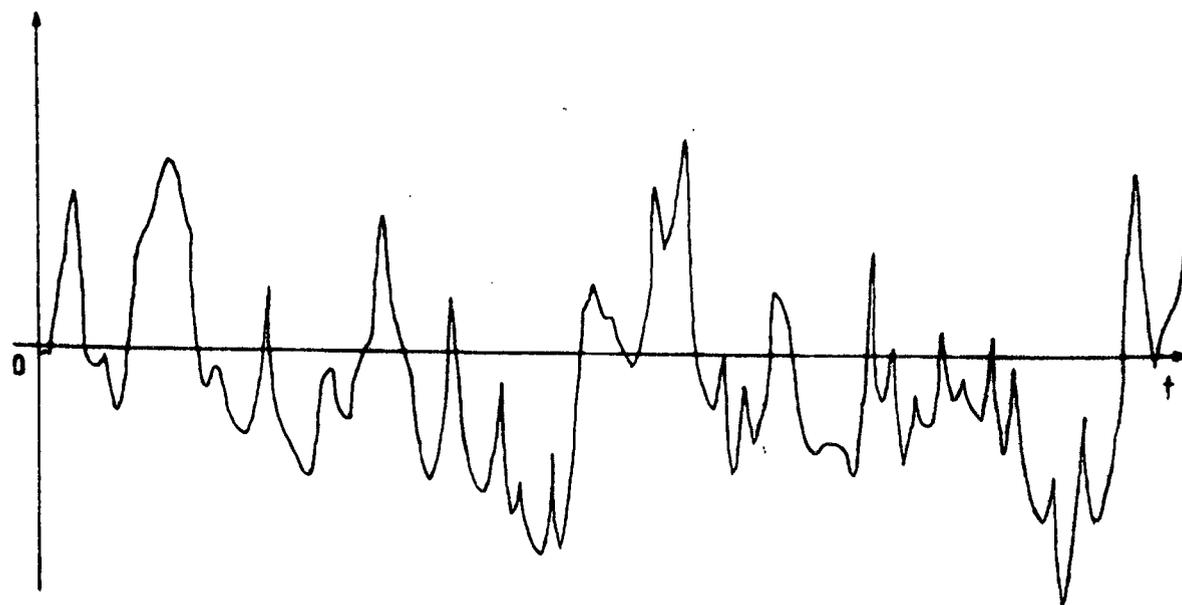


Figura B.7 - Terceiro ruído colorido.

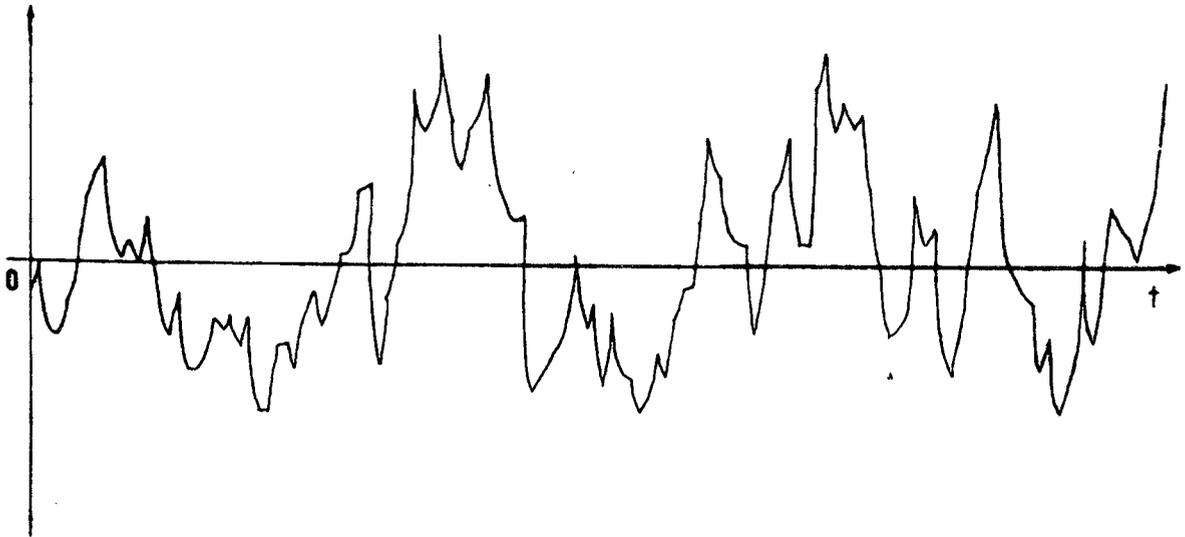


Figura B.8 - Quarto ruído colorido.

Obs.: Para o sistema de um grau de liberdade tem-se a excitação inicial dada pelo primeiro ruído branco ou colorido, sendo a nova excitação dada pelo segundo ruído branco ou colorido.

- Para o sistema de dois graus de liberdade tem-se como excitações iniciais o primeiro e segundo ruídos brancos ou coloridos sendo as novas excitações dadas pelo terceiro e quarto ruídos brancos ou coloridos.
- Para a função de decremento aleatório considerou-se em geral excitações dadas por ruídos coloridos e no caso dos métodos clássicos ruídos brancos.

- Quando considera-se as respostas dos sistemas deve-se le
var em conta também os parâmetros usados.

B.2 - RESPOSTAS DO SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE

B.2.1 - Sendo a excitação inicial o primeiro ruído branco.

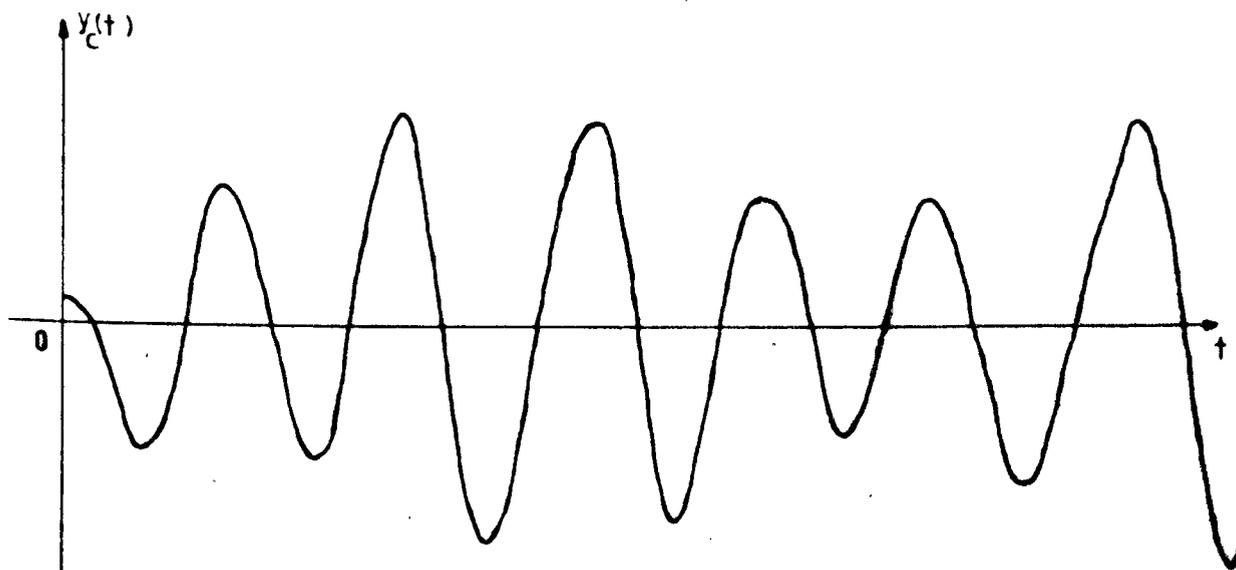


Figura B.9 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,001$, $\omega_1 = 300$ rd/s).

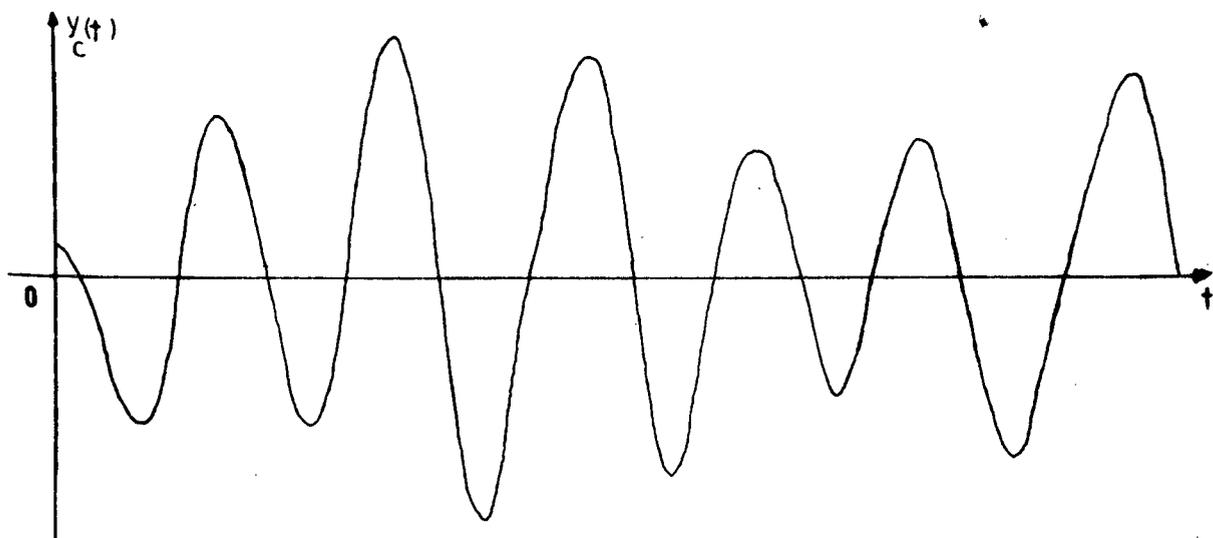


Figura B.10 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,01$, $\omega_1 = 300$ rd/s).

B .2.2 - Sendo a nova excitação o segundo ruído branco.

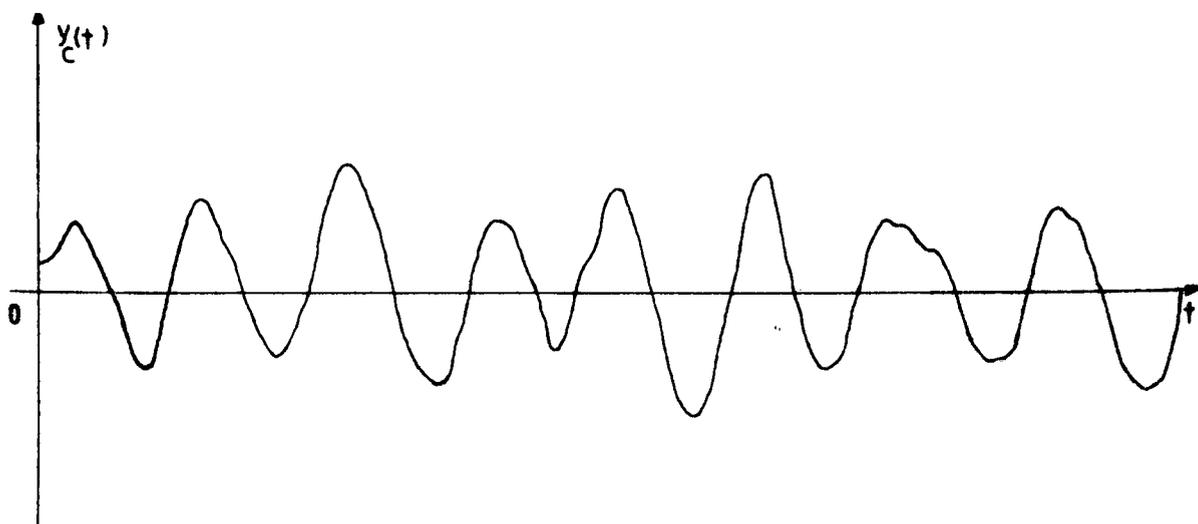


Figura B.11 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,001$, $\omega_1 = 300$ rd/s).

B.2.3 - Sendo a excitação inicial o primeiro ruído colorido de média nula

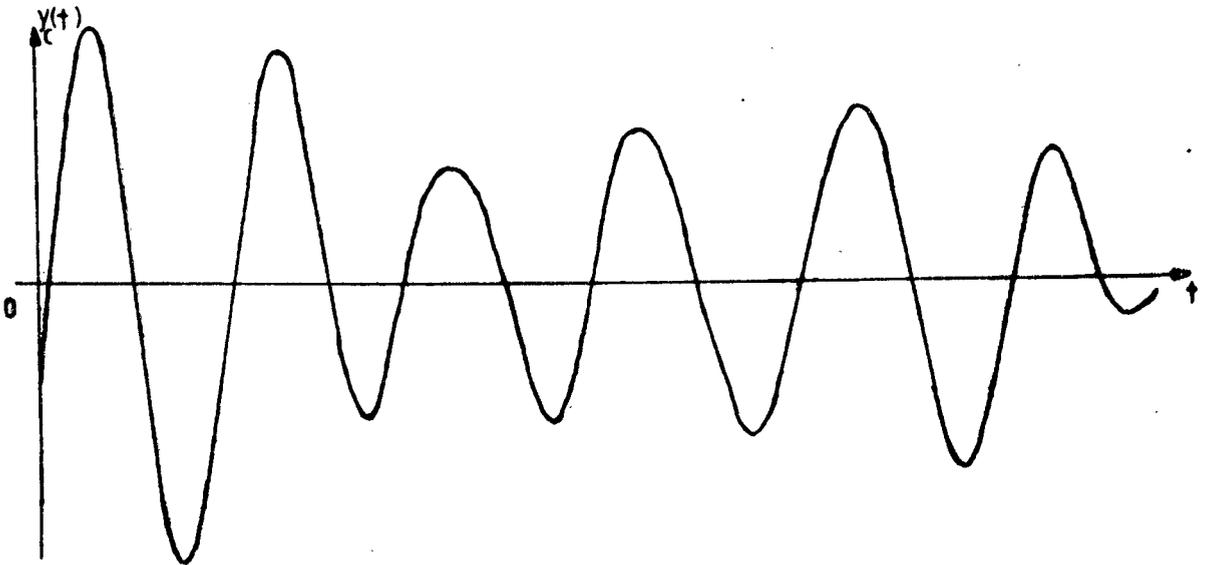


Figura B.12 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,001$, $\omega_1 = 300$ rd/s).

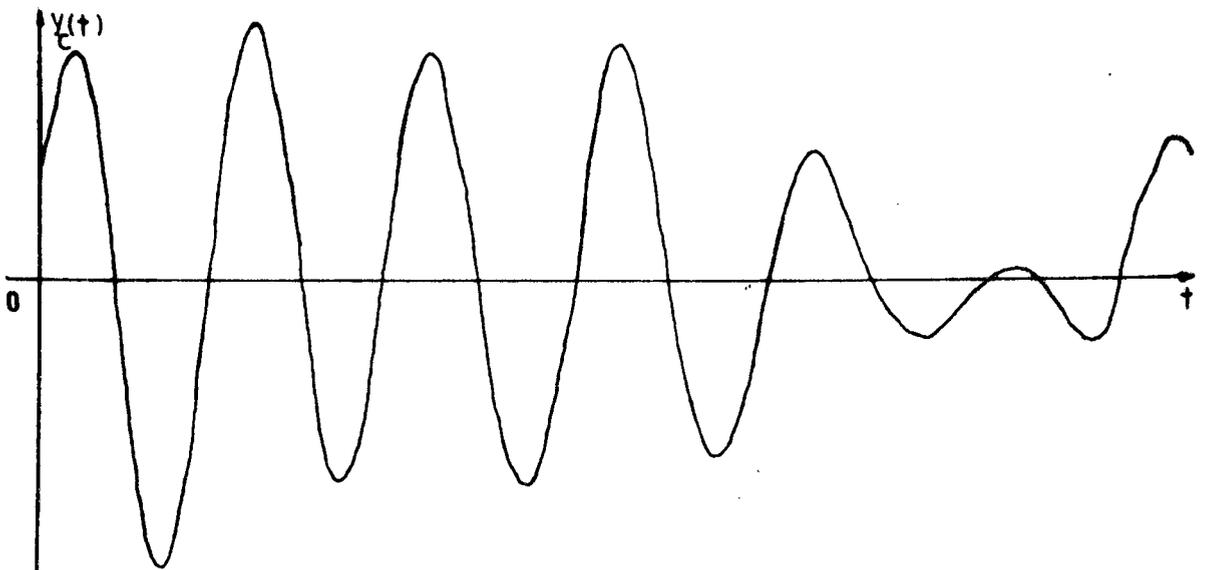


Figura B.13 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,01$, $\omega_1 = 300$ rd/s).

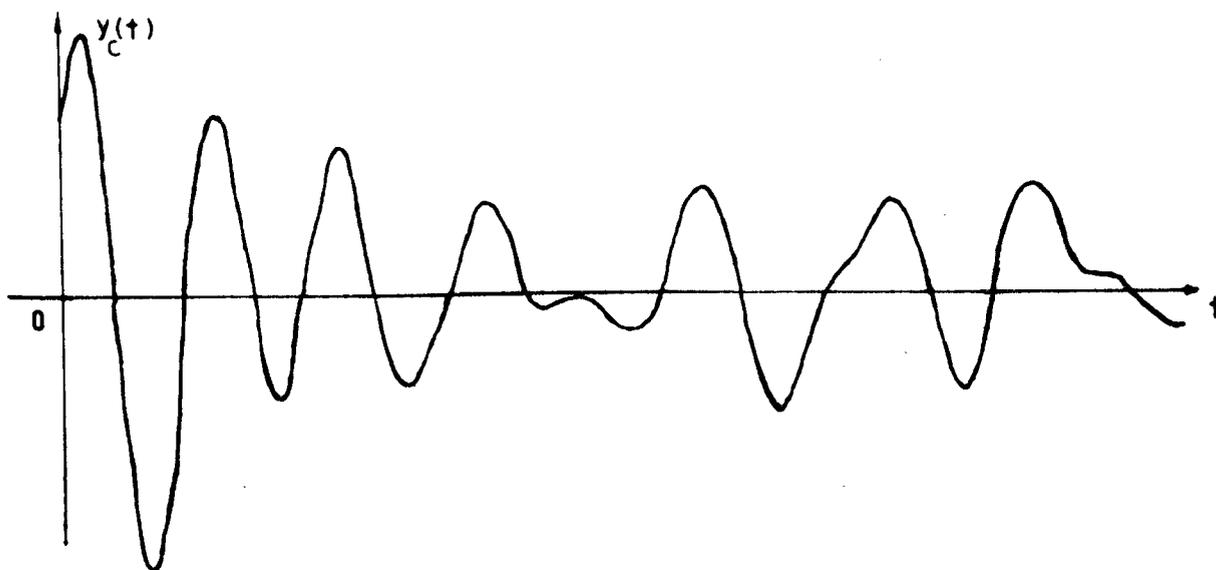


Figura B.14 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,1$, $\omega_1 = 300$ rd/s).

B.2.4 - Sendo a nova excitação o segundo ruído colorido de média nula

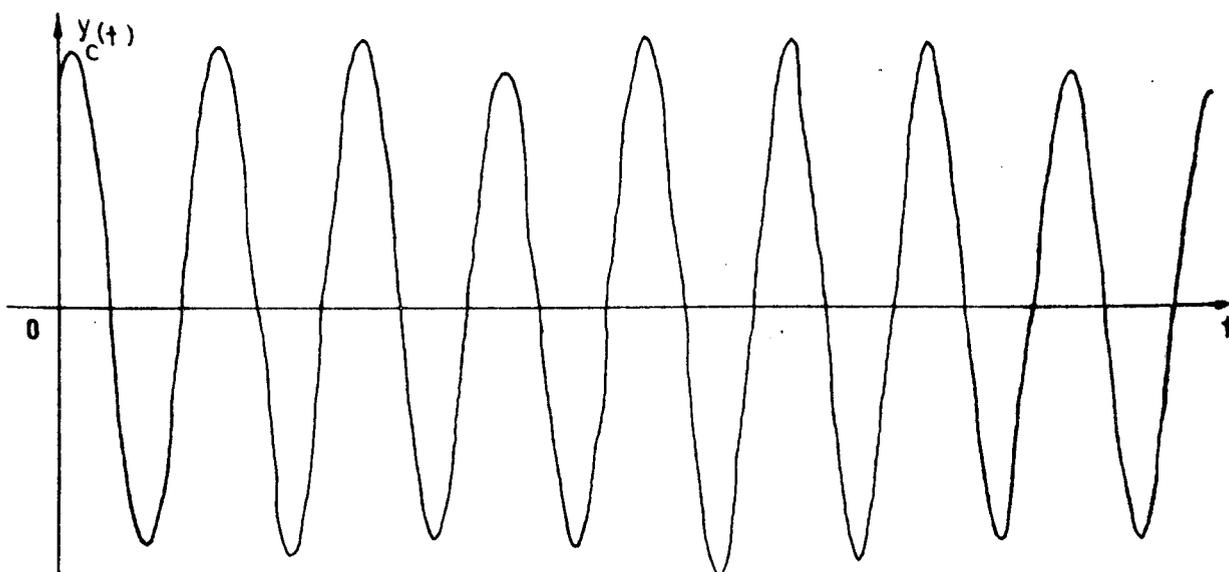


Figura B.15 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,001$, $\omega_1 = 300$ rd/s).

B.2.5 - Sendo a excitação inicial o primeiro ruído colorido de média não nula

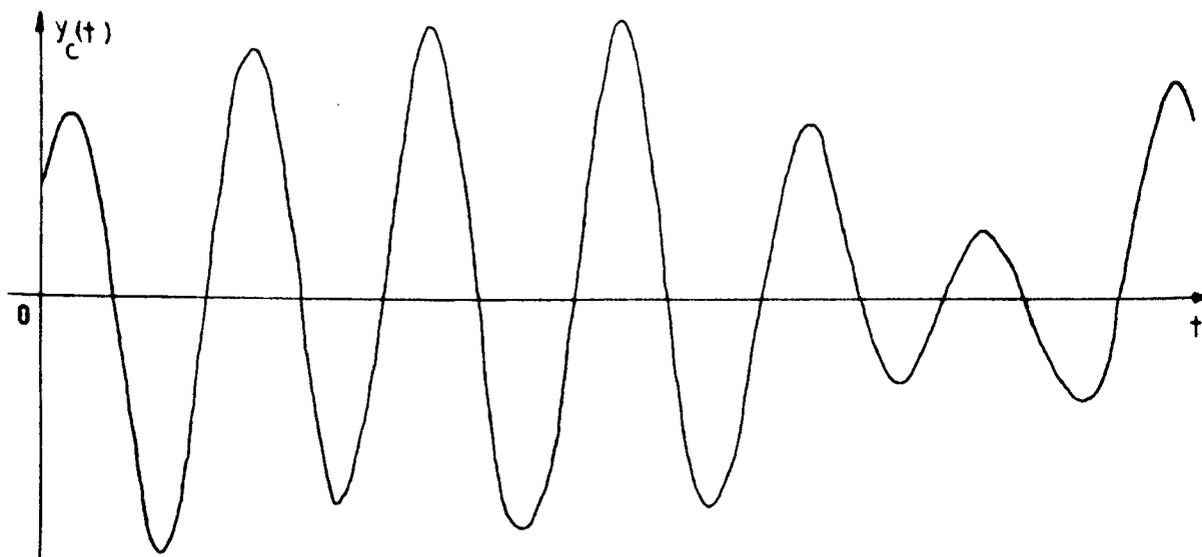


Figura B.16 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,001$, $\omega_1 = 300$ rd/s).

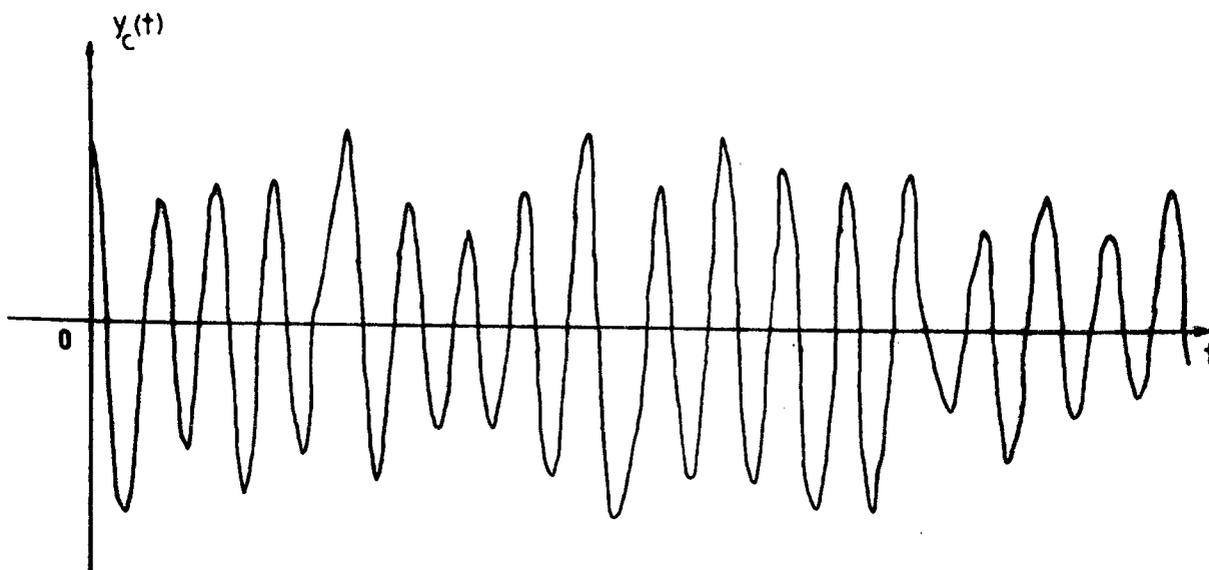


Figura B.17 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,001$, $\omega_1 = 700$ rd/s).

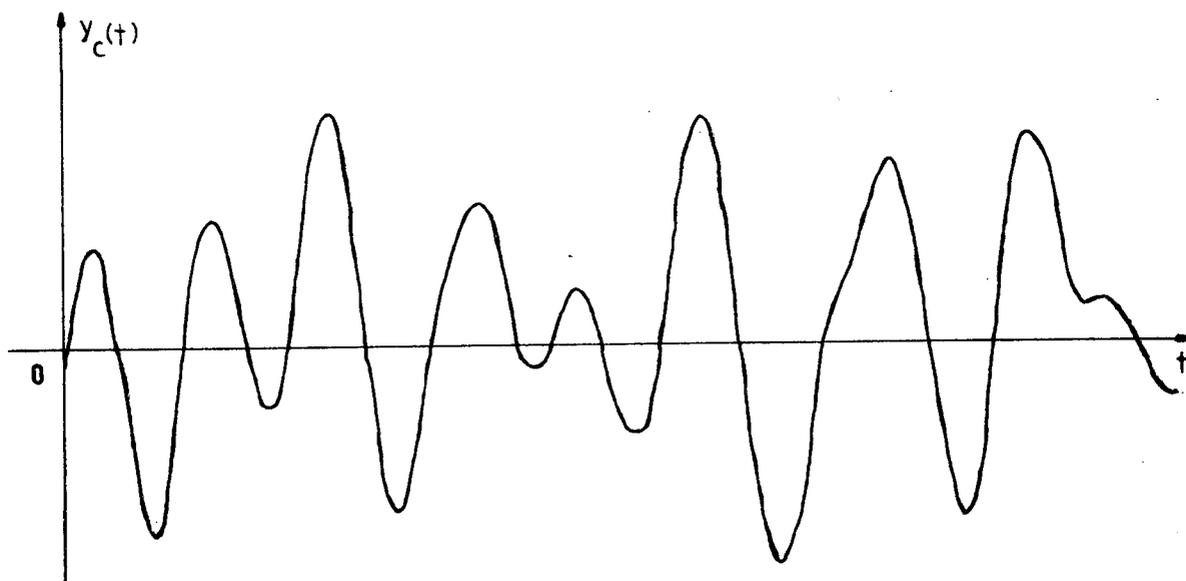


Figura B.18 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,1$, $\omega_1 = 300$ rd/s).

B.2.6 - Sendo a nova excitação o segundo ruído colorido
de média não nula

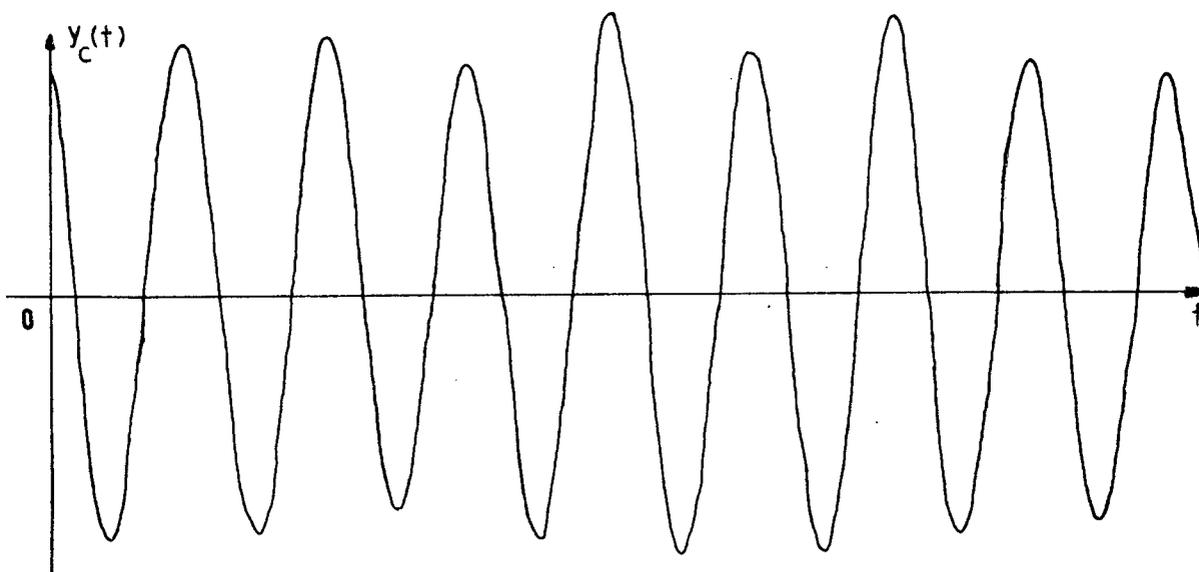


Figura B.19 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,001$, $\omega_1 = 300$ rd/s).

B.3 - RESPOSTAS DO SISTEMA DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

B.3.1 - Sendo as excitações iniciais o primeiro e segundo ruídos brancos

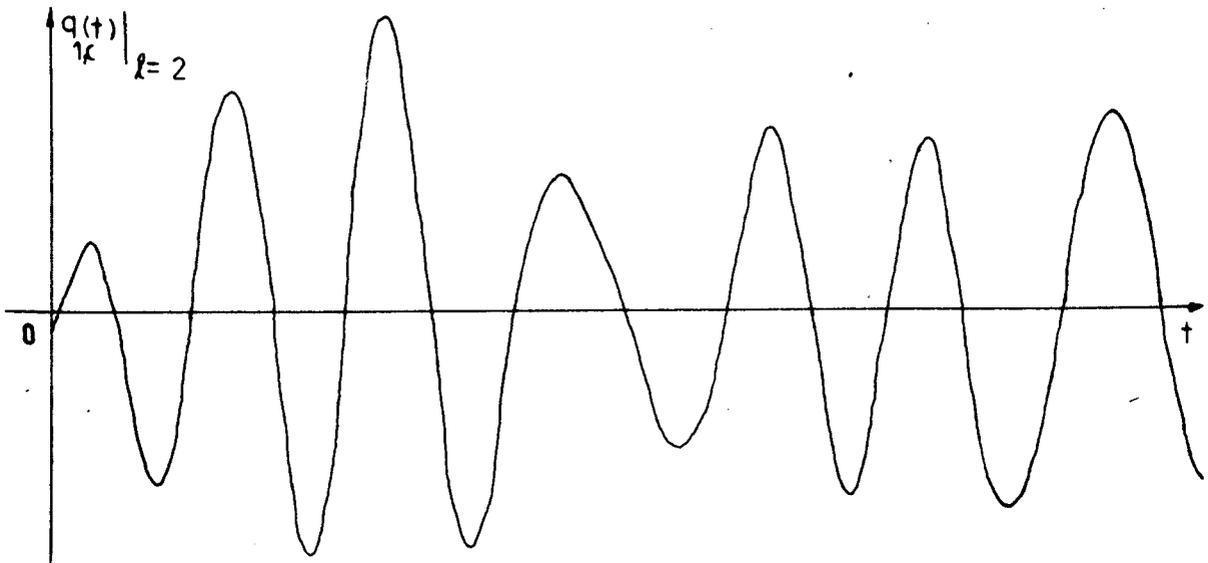


Figura B.20 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,001$; $\omega_1 = 300$ rd/s),
($\eta_2 = 0,04$, $\omega_2 = 400$ rd/s).

B.3.2 - Sendo as excitações iniciais o primeiro e segundo ruídos coloridos de média nula

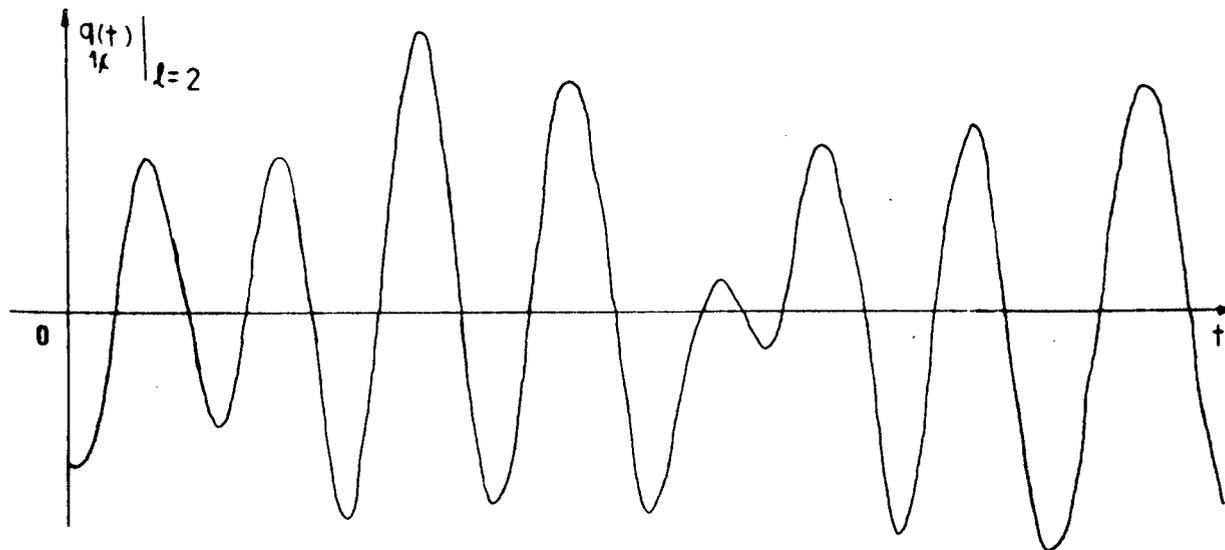


Figura B.21 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,001$, $\omega_1 = 300$ rd/s),
($\eta_2 = 0,04$, $\omega_2 = 400$ rd/s).

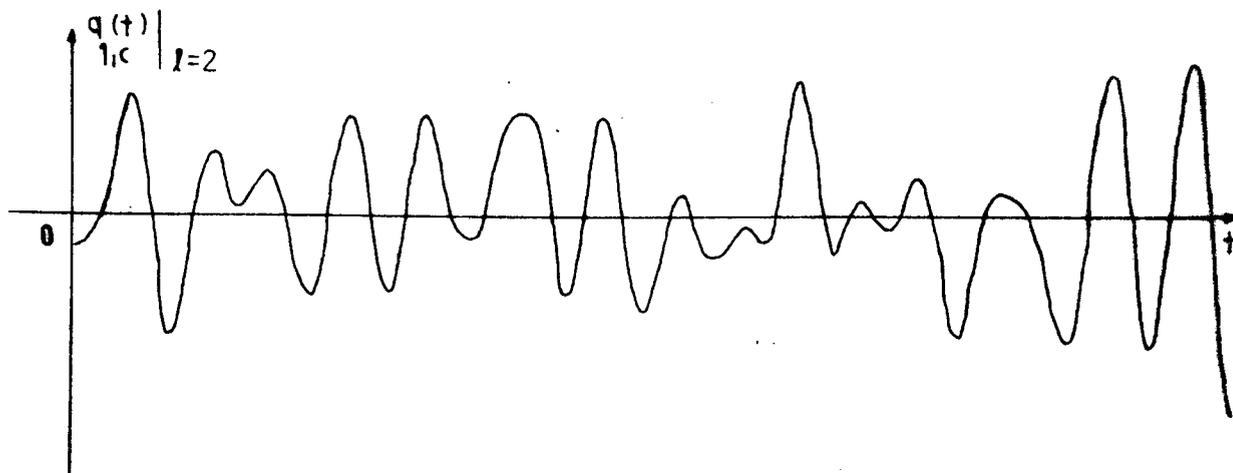


Figura B.22 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,001$, $\omega_1 = 600$ rd/s),
($\eta_2 = 0,04$, $\omega_2 = 700$ rd/s).

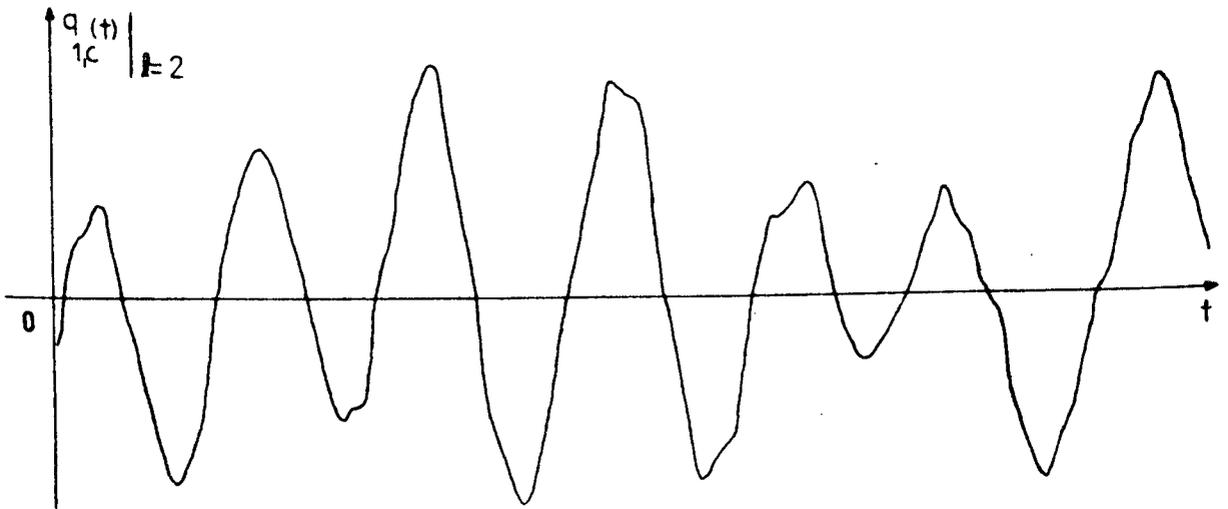


Figura B.23 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,001, \omega_1 = 300 \text{ rd/s}$),
 ($\eta_2 = 0,04, \omega_2 = 2000 \text{ rd/s}$).

B.3.3 - Sendo as novas excitações o terceiro e o quarto
ruídos coloridos de média nula

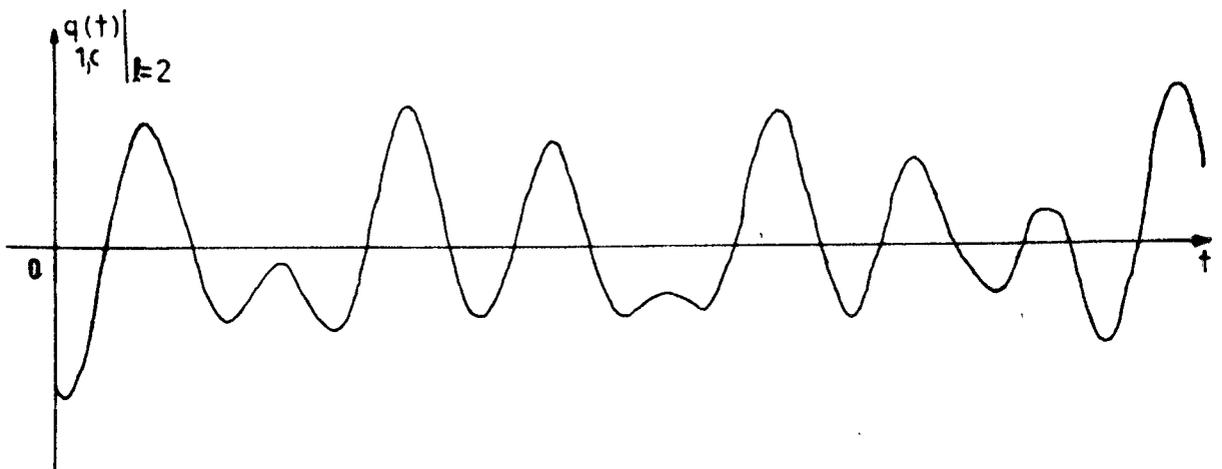


Figura B.24 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,001, \omega_1 = 300 \text{ rd/s}$),
 ($\eta_2 = 0,04, \omega_2 = 400 \text{ rd/s}$),

B.3.4 - Sendo as excitações iniciais o primeiro e segundo ruídos coloridos média não nula.

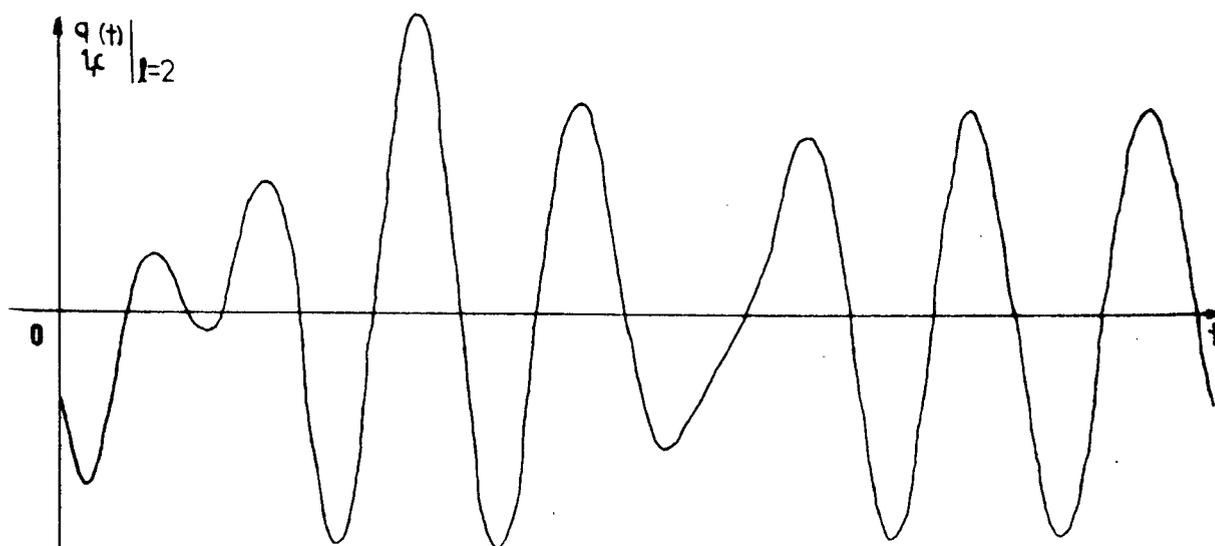


Figura B.25 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,001, \omega_1 = 300$ rd/s),
($\eta_2 = 0,04, \omega_2 = 400$ rd/s).

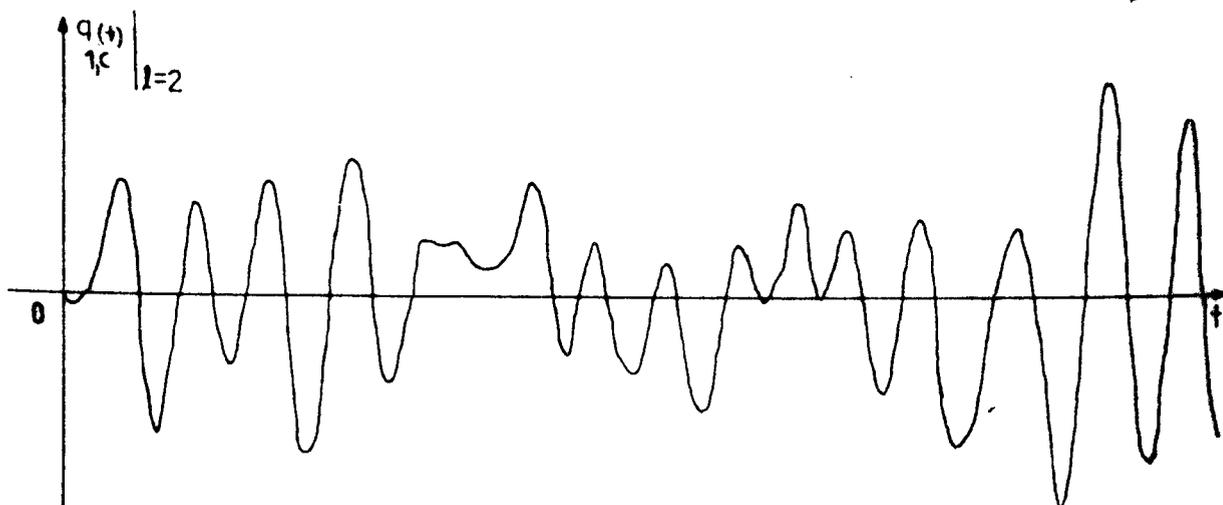


Figura B.26 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,001, \omega_1 = 600$ rd/s),
($\eta_2 = 0,04, \omega_2 = 700$ rd/s).

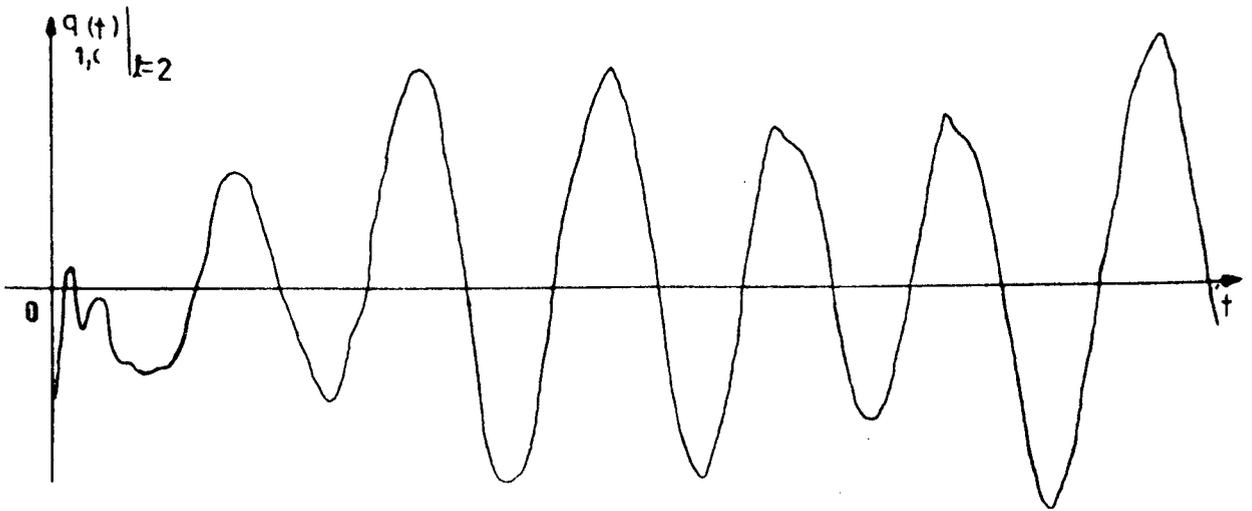


Figura B.27 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,001, \omega_1 = 300 \text{ rd/s}$),
 $(\eta_2 = 0,04, \omega_2 = 2000 \text{ rd/s})$.

B.3.5 - Sendo as novas excitações o terceiro e quarto ruídos coloridos de média não nula

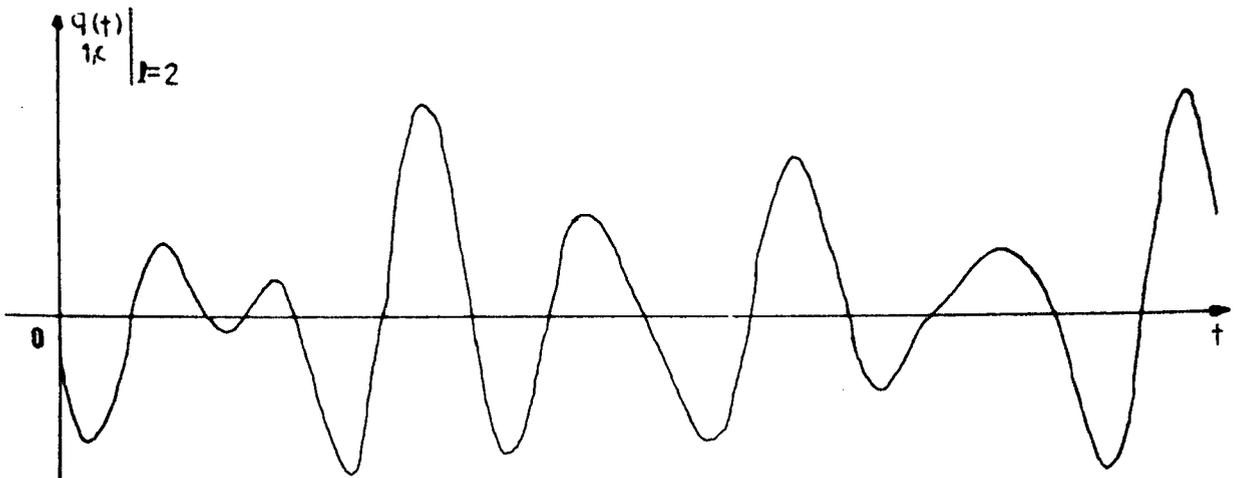


Figura B.28 - Parâmetros - ($\eta_1 = 0,001, \omega_1 = 300 \text{ rd/s}$),
 $(\eta_2 = 0,04, \omega_2 = 400 \text{ rd/s})$.

Obs.: O intervalo de amostragem usado para gerar as excitações e as respostas dos sistemas é $T = 0,001 \text{ s}$.

AFÊNDICE C

MODÊLOS MATEMÁTICOS DOS SISTEMAS SIMULADOS

C.1 - SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE

Foi usado um sistema, (massa - mola - amortecedo), dado matematicamente por:

$$y''(t) + 2\eta_1\omega_1 y'(t) + \omega_1^2 y(t) = f(t)$$

onde

$$\omega_1^2 = \frac{K_1}{m_1}$$

(C.1)

$$2\eta_1\omega_1 = \frac{C_1}{m_1}$$

Para simulação pelo método Runge-Kutta transforma-se (C.1) em equações de estado:

fazendo

$$s_1(t) = y(t)$$

$$s_1'(t) = s_2(t) = y'(t)$$

$$s_2'(t) = y''(t) = -2\eta_1\omega_1 y'(t) - \omega_1^2 y(t) + f(t)$$

assim as equações de estado são dadas por:

$$\begin{aligned} s_1'(t) &= s_2(t) \\ s_2'(t) &= -2\eta_1\omega_1 s_2(t) - \omega_1^2 s_1(t) + f(t) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

C.2 - SISTEMA DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE (PEQUENOS AMORTECIMENTOS)

Foi usado um sistema, (massa-mola-amortecedor),
dado matematicamente por:

$$[m] \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{Bmatrix} + [c] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{Bmatrix} + [k] \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \end{Bmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned} [m] &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ [c] &= \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_3+c_2 \end{bmatrix} \\ [k] &= \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3+k_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

e as duas soluções do problema de autovalor associado com a ma

matriz de massa e de rigidez é dada por (II.38) com $\ell = 2$:

$$\begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_3 + K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1^{(i)} \\ b_2^{(i)} \end{Bmatrix} = \omega_i^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1^{(i)} \\ b_2^{(i)} \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (\text{C.4})$$

considerando a primeira solução os modos normais são:

$$\begin{Bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{K_2} [K_1 + K_2 - \omega_1^2 m_1] \end{Bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{Bmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{K_2} [K_1 + K_2 - \omega_2^2 m_1] \end{Bmatrix}$$

sendo a matriz modal:

$$[b] = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & b_1^{(2)} \\ b_2^{(1)} & b_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{K_2} [K_1 + K_2 - \omega_1^2 m_1] & \frac{1}{K_2} [K_1 + K_2 - \omega_2^2 m_1] \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

e a sua transposta:

$$[b]^T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{K_2} [K_1 + K_2 - \omega_1^2 m_1] \\ 1 & \frac{1}{K_2} [K_1 + K_2 - \omega_2^2 m_1] \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

usando (II.45) e sendo o sistema de dois graus de liberdade (C.3) pode ser dada como:

$$\begin{Bmatrix} \psi_1''(t) \\ \psi_2''(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\eta_1\omega_1 & 0 \\ 0 & 2\eta_2\omega_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1'(t) \\ \psi_2'(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

onde

$$\begin{Bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{Bmatrix} = [b]^T \begin{Bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

substituindo (C.7) em (C.9) e fazendo a multiplicação tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1(t) + \frac{Q_2(t)}{K_2} [K_1 + K_2 - \omega_1^2 m_1] \\ Q_1(t) + \frac{Q_2(t)}{K_2} [K_1 + K_2 - \omega_2^2 m_1] \end{Bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

substituindo (C.10) em (C.8) obtêm-se duas equações diferenciais de segunda ordem desacopladas representativas do sistema, assim:

$$\psi_1''(t) + 2\eta_1\omega_1\psi_1'(t) + \omega_1^2\psi_1(t) = Q_1(t) + \frac{Q_2(t)}{K_2} [K_1 + K_2 - \omega_1^2 m_1] \quad (\text{C.11})$$

$$\psi_2''(t) + 2\eta_2\omega_2\psi_2'(t) + \omega_2^2\psi_2(t) = Q_1(t) + \frac{Q_2(t)}{K_2} [K_1 + K_2 - \omega_2^2 m_1]$$

usando (II.40) as respostas do sistema serão dadas por:

$$\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = [b] \begin{Bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

substituindo (C.6) em (C.12) e multiplicando tem-se:

$$\begin{cases} q_1(t) \\ q_2(t) \end{cases} = \begin{cases} \psi_1(t) + \psi_2(t) \\ \frac{\psi_1(t)}{K_2} [K_1 + K_2 - \omega_1^2 m_1] + \frac{\psi_2(t)}{K_2} [K_1 + K_2 - \omega_2^2 m_1] \end{cases} \quad (C.13)$$

considerando somente a resposta da massa m_1 fica-se com:

$$q_1(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t) \quad (C.14)$$

analogamente a um grau de liberdade (C.11) é transformada em quatro equações de estado sendo simuladas por dois Runge-Kutta

para o primeiro Runge-Kutta tem-se:

$$s_1^{\cdot}(t) = s_2(t)$$

$$s_2^{\cdot}(t) = -2\eta_1 \omega_1 s_2(t) - \omega_1^2 s_1(t) + Q_1(t) + \frac{Q_2(t)}{2} [K_1 + K_2 - \omega_1^2 m_1]$$

e para o segundo Runge-Kutta:

$$s_1^{\cdot}(t) = s_2(t)$$

$$s_2^{\cdot}(t) = -2\eta_2 \omega_2 s_2(t) - \omega_2^2 s_2(t) + Q_1(t) + \frac{Q_2(t)}{2} [K_1 + K_2 - \omega_2^2 m_1]$$

A resposta da massa m_1 do sistema é dada somando as respostas de cada Runge-Kutta como mostra a equação (C.14).

Obs.: Os sistemas tem velocidades e deslocamentos iniciais, dados respectivamente por 10 e 100, em todas as situações consideradas.

APÊNDICE D

VARIAÇÃO DA FUNÇÃO DECREMENTO ALEATÓRIO COM O NÍVEL DE SELEÇÃO "A" E O NÚMERO DE TRECHOS "N"

Este apêndice mostra exemplos da função de decremento aleatório para alguns valores de A e N.

Tem como objetivo indicar uma relação prática entre A, N e o tamanho da resposta do sistema t_{\max} , de tal forma que a obtenção da função de decremento aleatório fique mais otimizada.

Será considerado como exemplo o sistema simulado de um grau de liberdade tendo como parâmetros $\omega_1=0,001$ e $\eta_1=300$ rd/s, e como entrada o primeiro ruído branco.

No capítulo V seção (V.3) foi feita uma comparação entre a autocorrelação e o decremento aleatório, neste caso tinha-se para a função de decremento aleatório não normalizada a forma:

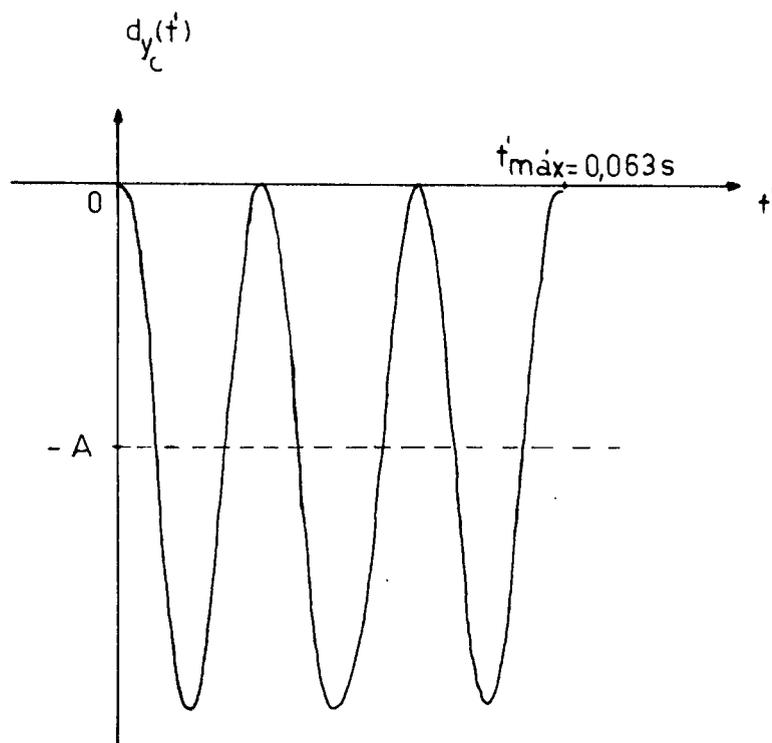


Figura D.1 - Função de decaimento aleatório, $A = 4000$; $N = 500$; $t'_{\text{m\acute{a}x}} = 9,082$ Seg.

com a diminuição de A e mantendo N fixo, tem-se:

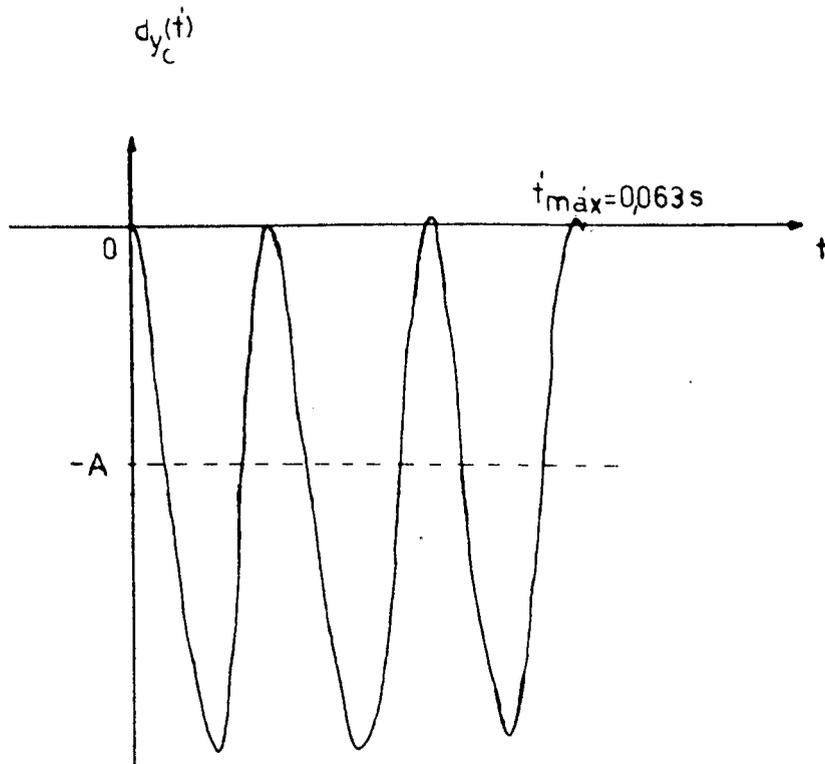


Figura D.2 - Função de decaimento aleatório, $A = 100$; $N = 500$; $t_{m\acute{a}x} = 5,221$ Seg.

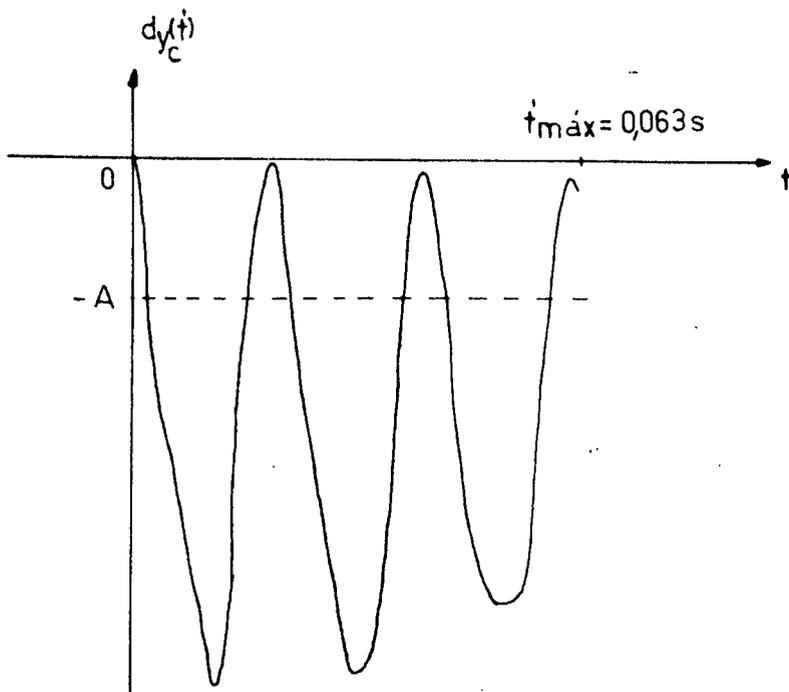


Figura D.3 - Função de decaimento aleatório, $A = 5$; $N = 500$; $t_{m\acute{a}x} = 5,221$ Seg.

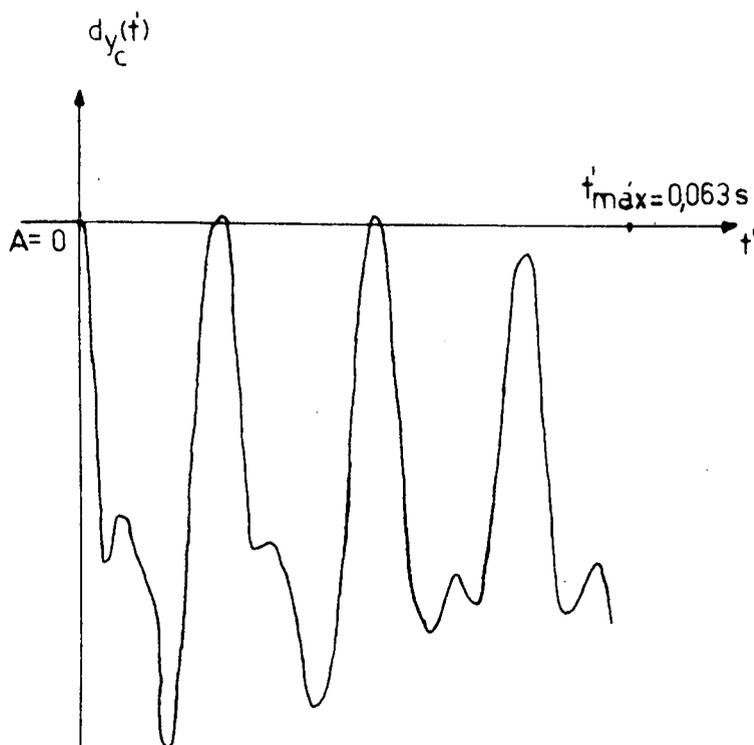


Figura D.4 - Função de decaimento aleatório, $A = 0$; $N = 500$; $t_{\text{máx}} = 5,220 \text{ Seg.}$

Como pode ser visto pelos gráficos apresentados, com a diminuição de A mantendo N fixo a função se apresenta cada vez mais deformada devido a uma maior componente de ruído, sendo então necessário aumentar o número de trechos retirados N .

Considerando o caso dado na Figura D.2 e aumentando N teremos:

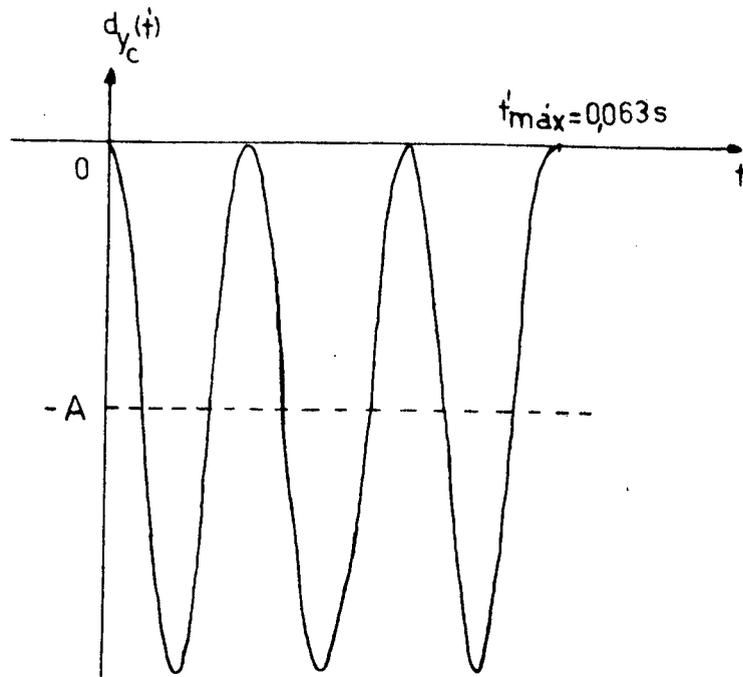


Figura D.5 - Função de decremento aleatório, $A = 100$, $N = 995$; $t_{máx} = 10,406$ seg

Pode-se ver pela Figura D.5 que, se A diminuir o aumento de N faz com que a função novamente se apresente sem distorção.

Considerando ainda a mesma situação apresentada na Figura D.1 e, aumentando A mantendo N fixo a função não se apresenta deformada mas o tamanho necessário para a resposta do sistema aumenta.

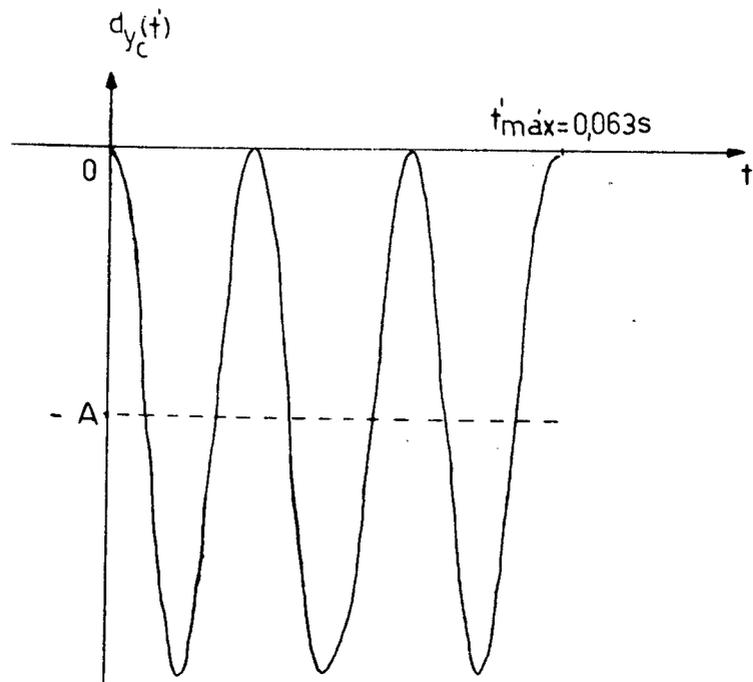


Figura D.6 - Função de decremento aleatório, $A = 4500$; $N = 500$; $t_{m\acute{a}x} = 10,404$ Seg.

Deve então existir um compromisso na escolha de A pois, se por um lado A for muito pequeno, o número de trechos necessários será excessivo o que aumentaria $t_{m\acute{a}x}$ e o processamento. Por outro lado se A for muito grande $t_{m\acute{a}x}$ aumentará desnecessariamente.

Obs.: No artigo do Cole [4], a função de decremento aleatório foi obtida considerando $N = 500$ e A igual ao valor RMS do sinal.

Obs.: Foram usados 64 pontos para determinação da função, e o período de amostragem é $T = 0,001$ S.

APÊNDICE E

INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE PONTOS E INTERVALO DE AMOSTRAGEM SOBRE O CÁLCULO DOS PARÂMETROS E A DETECÇÃO DE FALHAS DOS SISTEMAS SIMULADOS

Dependendo do número de pontos "n" e do intervalo de amostragem "T" escolhidos, os parâmetros dos sistemas terão maior ou menor precisão, podendo em alguns casos não serem calculados.

No caso da função de decremento aleatório estes cálculos foram feitos tanto no tempo como na frequência, seção III.2.1 e III.2.2 para 1º grau de liberdade e seção III.4.1 e III.4.2 para 2º graus de liberdade, capítulo II.

Foram feitos também cálculos dos parâmetros para a função densidade espectral, seção V.2-b para 1º grau de liberdade e seção V.2-c para 2º graus de liberdade, capítulo V.

A seguir será apresentado de forma rápida o teorema da amostragem no tempo, sendo dado logo após critérios, |4|, para a utilização de "n" e "T" quando do cálculo dos parâmetros, devendo-se também considerar critérios para a detecção de falhas, capítulo IV.

Serão apresentados também os valores de "n", "T" e das frequências naturais usadas ao longo do trabalho, fazendo-se uma análise crítica dos resultados alcançados.

E-1 - TEOREMA DA AMOSTRAGEM NO TEMPO

O teorema da amostragem no tempo estabelece que: um sinal que não tem componentes de frequência acima da frequência $f_{m\acute{a}x}$ Hz, deve ser determinado de forma única pelas suas amostragens tomadas a intervalos uniformes menores ou iguais a $1/2 f_{m\acute{a}x}$.

assim sendo:

T , o máximo intervalo de amostragem no tempo, $f_{m\acute{a}x}$, a máxima frequência do sinal, tem-se:

$$T = \frac{1}{2f_{m\acute{a}x}} \quad (E.1)$$

pode-se dizer ainda que:

$$\Delta f = \frac{1}{t_{m\acute{a}x}} \quad (E.2)$$

$$f_a = 2 \times f_{m\acute{a}x} = \frac{1}{T} \quad (E.3)$$

$$t_{m\acute{a}x} = n \times T \quad (E.4)$$

onde:

Δf , é o intervalo amostragem na frequência

$t_{m\acute{a}x}$, é o máximo tamanho do sinal

n , é número de amostragens consideradas para o sinal

f_a , é frequência mínima de amostragem.

Obs.: Por uma questão de coerência com as notações anteriores, no caso da função decremento, " n " e " $t_{m\acute{a}x}$ " das fórmulas acima são substituídos por " n_1 " e " $t'_{m\acute{a}x}$ ".

E-2 - CRITÉRIO USADO PARA DETECÇÃO DE FALHAS

Neste caso serão analisadas as funções decremento aleatório dadas no capítulo IV, sendo suficiente que a frequência do mais alto modo considerado seja menor ou igual a máxima frequência de amostragem da função decremento aleatório, isto é:

$$f_m \leq f_{m\acute{a}x} \quad (E.5)$$

ou usando (E.1), tem-se:

$$f_m \leq \frac{1}{2T} \quad (E.6)$$

onde f_m é a frequência do mais alto modo considerado.

Tanto para sistemas de 1º grau, como de 2º graus de liberdade, o intervalo de amostragem no tempo usado foi 0,001 seg., assim usando (E.1); tem-se:

$$f_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2T} = 500 \text{ Hz}$$

Para qualquer dos exemplos apresentados no capítulo IV, a maior frequência natural considerada foi 700 rd/s ou 111,41 Hz, o que satisfaz as fórmulas (E.5) ou (E.6).

E.3 - CRITÉRIOS USADOS PARA O CÁLCULO DOS PARÂMETROS

Neste caso serão analisadas as funções decrémen-
to no tempo e na frequência dadas no capítulo II e III, e tam-
bém as funções densidade espectral dadas no capítulo V.

E.3.1 - Função decrémento aleatório no tempo

É necessário e suficiente para o cálculo dos pa-
râmetros que a função decrémento tenha entre dois a quatro pe-
ríodos de oscilação, assim a razão entre a máxima frequência
de amostragem da função decrémento e a frequência do mais al-
to modo deve estar na região:

$$8 \leq \frac{f_{\text{máx}}}{f_m} \leq 16 \quad (\text{E.7})$$

onde f_m é a frequência do mais alto modo em questão,

ou sendo t'_m o período de oscilação da função decrémento para
o mais alto modo, e usando (E.1) e (E.4), tem-se:

$$\frac{n_1}{32} \leq \frac{t'_{\text{máx}}}{t'_m} \leq \frac{n_1}{16} \quad (\text{E.8})$$

Para todos os exemplos considerou-se $n_1 = 64$,
assim (E.8) pode ser escrita da forma:

$$2 \leq \frac{t'_{\text{máx}}}{t'_m} \leq 4 \quad (\text{E.9})$$

considerando ainda, " n_a " o número de amostras por período da função de decaimento pode-se escrever:

$$n_a = \frac{t'_m}{T} \quad (E.10)$$

Para o sistema de 1º grau de liberdade, pequenos e grandes amortecimentos, considerou-se $T = 0,001$ seg. e a frequência natural 47,7 Hz.

Usando-se (E.4) onde $n_1 = 64$, tem-se $t'_{m\max} = 0,064$ seg., e para frequência natural dada $t'_m = 0,021$ seg., tendo-se então:

$$\frac{t'_{m\max}}{t'_m} \cong 3 \text{ períodos}$$

Para o sistema de 2º grau de liberdade, frequências próximas, considerou-se também $T = 0,001$ seg., sendo a maior frequência natural 63,7 Hz, da mesma forma anterior como $n_1 = 64$ e no caso $t'_m = 0,015$ seg., tem-se:

$$\frac{t'_{m\max}}{t'_m} \cong 4 \text{ períodos}$$

Obs.: Neste caso os parâmetros não foram calculados porque o método do decaimento logarítmico não pode ser aplicado.

No caso do sistema de 2º graus de liberdade, frequências afastadas, considerou-se $T = 0,0001$ seg., onde a maior frequência natural é 318,3 Hz, assim sendo $n_1 = 64$ tem-se $t'_{m\max} = 0,0064$ seg. e $t'_m = 0,0031$ seg., o que dará:

$$\frac{t_{m\acute{a}x}}{t_m} \cong 2 \text{ per\u00edodos}$$

Obs.: - Neste caso devido ao modo dominante foi poss\u00edvel calcular os par\u00e2metros usando o decremento logar\u00edtmico.

- Pode-se observar que qualquer dos casos apresentados satisfaz a equa\u00e7\u00e3o (E.9).
- Para o sistema de 2\u00b0 graus de liberdade sempre considerou-se pequenos amortecimentos.

E.3.2 - Fun\u00e7\u00e3o decremento aleat\u00f3rio na freq\u00f4\u00eancia

Neste caso a precis\u00e3o no c\u00e1lculo dos par\u00e2metros depende do intervalo de amostragem na freq\u00f4\u00eancia " Δf ", que por sua vez depende de " n_1 " e " T ".

Para todos os exemplos $n_1 = 64$ e usando (E.2) e (E.4), tem-se:

$$\Delta f = \frac{1}{64XT} \quad (E.11)$$

Para o sistema de 1\u00b0 grau de liberdade, pequenos e grandes amortecimentos, considerou-se $T = 0,001$ seg. e usando (E.11) tem-se $\Delta f = 15,625$ Hz. Assim a amostragem no eixo das freq\u00f4\u00eancias \u00e9 dada por:

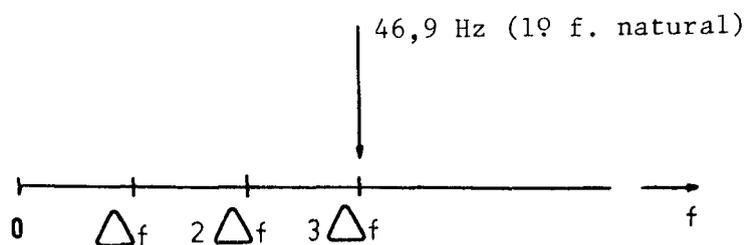


Figura E.1 - Amostragem no eixo das frequências. Função decrémen-
to aleatório. (1º grau de liberdade - pequenos e
grandes amortecimentos).

A frequência natural usada no sistema simulado foi 47,7 Hz, assim o pico da função decrémen-
to na frequência para pequenos amortecimentos, figura III.3 capítulo III, apare-
ce na terceira amostragem.

Obs.: - Neste caso o " Δf " usado foi suficiente para mostrar
a frequência natural do sistema simulado, mas a preci-
são no cálculo dos fatores de amortecimentos poderia
ser melhorada se fosse usado " n_1 " maior.

- Para grandes amortecimentos a função decrémen-
to na frequência não foi calculada porque a frequência de
pico é diferente da frequência natural.

Para o sistema de 2º grau de liberdade, frequências próximas e pequenos amortecimentos, considerou-se também $T=0,001$ seg., sendo então $\Delta f=15,625$ Hz. Assim analogamente a 1º grau de liberdade, a amostragem no eixo das frequências é dada por:

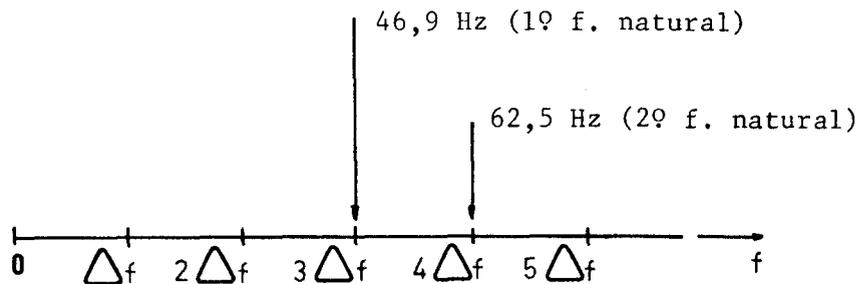


Figura E.2 - Amostragem no eixo das frequências. Função de de^ucre^mento aleat^orio. (2º grau de liberdade - frequências próximas - pequenos amortecimentos).

As frequências naturais usadas neste caso foram 47,7 Hz e 63,7 Hz; da figura III.7 capítulo III, vê-se que a função de de^ucre^mento tem o pico na 1ª frequência natural (3ª amostragem), e que devido ao grande " Δf " o pico para a 2ª frequência natural não aparece (4ª amostragem).

Para o sistema de 2º grau de liberdade, frequências afastadas e pequenos amortecimentos, considerou-se $T = 0,0001$ seg., usando (E.11) tem-se $\Delta f=156,25$ Hz. Assim a amostragem no eixo das frequências é dada por:

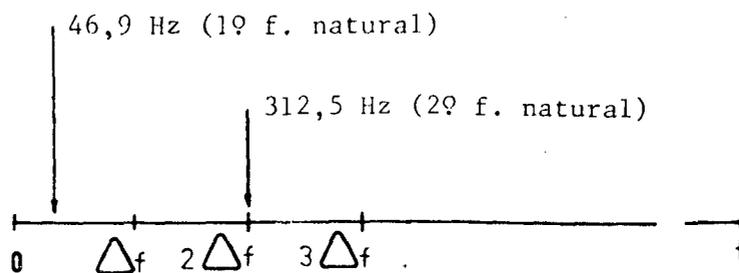


Figura E.3 - Amostragem no eixo das frequências. Função decemento aleatório. (2º graus de liberdade - frequências afastadas - pequenos amortecimentos).

As frequências naturais usadas neste caso foram 47,7 Hz e 318,3 Hz; da figura III.8 capítulo III, vê-se que a função decemento tem o pico na 2ª frequência natural (1ª amostragem), e que devido ao grande " Δf " o pico para a 1ª frequência natural está escondido antes da 1ª amostragem.

Obs.: - Para todos os casos apresentados e principalmente para o sistema de 2º graus de liberdade, a determinação dos parâmetros ficou prejudicada devido ao grande " Δf " usado. Para diminuir " Δf " deve-se aumentar " n_1 " e ou " T ". O aumento de " n_1 " não pode ser feito no momento devido a limitações computacionais e o aumento em " T ", sendo " n_1 " constante, não deve prejudicar os critérios apresentados nas seções E.2 e E.3.1.

- O fato de ter-se " T " pequeno somente prejudica o cálculo dos parâmetros no caso da função decemento na

frequência. O aumento de "T" aumentaria o número de períodos da função de decaimento no tempo, podendo-se sem prejuízo para o cálculo dos parâmetros ultrapassar 4 períodos. Entretanto o número de amostras por período não deve ser muito reduzido, fórmula (E.10).

- Para o sistema montado em laboratório, capítulo VI, usou-se $T=0,0005$ seg. e $n_1=128$ sendo a frequência natural 122 Hz, assim a função de decaimento teve neste caso 8 períodos e 16 amostras por período.

E.3.3 - Função densidade espectral

Neste caso analogamente a seção E.3.2, a precisão no cálculo dos parâmetros depende do intervalo de amostragem na frequência " Δf ", que por sua vez depende de "n" e "T".

Tanto para 1º grau de liberdade como para 2º graus de liberdade usou-se $T=0,001$ seg. e $n=1024$, assim de (E.2) e (E.4) tem-se $\Delta f=0,977$ Hz.

Para o sistema de 1º grau de liberdade, pequenos amortecimentos, a frequência natural usada foi 47,7 Hz, assim o pico da função densidade espectral, figura V.1 capítulo V, aparece na amostragem 49, ver figura E.4:

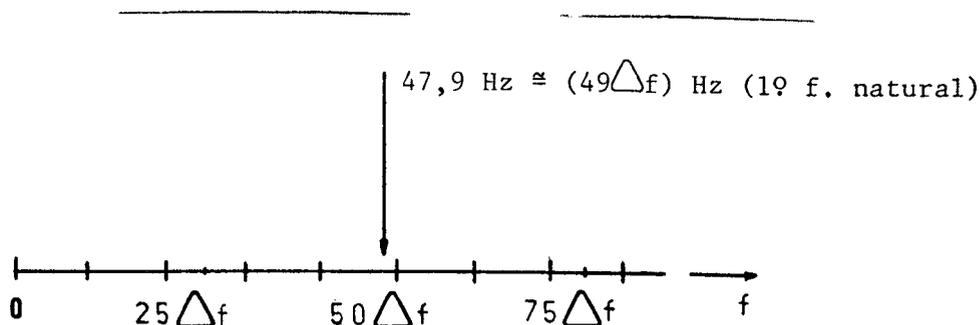


Figura E.4 - Amostragem no eixo das frequências. Função densidade espectral. (1º grau de liberdade - pequenos amortecimentos).

Para o sistema de 2º graus de liberdade, pequenos amortecimentos e frequências próximas, as frequências naturais usadas foram 47,7 Hz e 63,7 Hz, assim os picos da função densidade espectral, figura V.3 capítulo V, aparecem respectivamente nas amostragens 49 e 64, ver figura E.5:

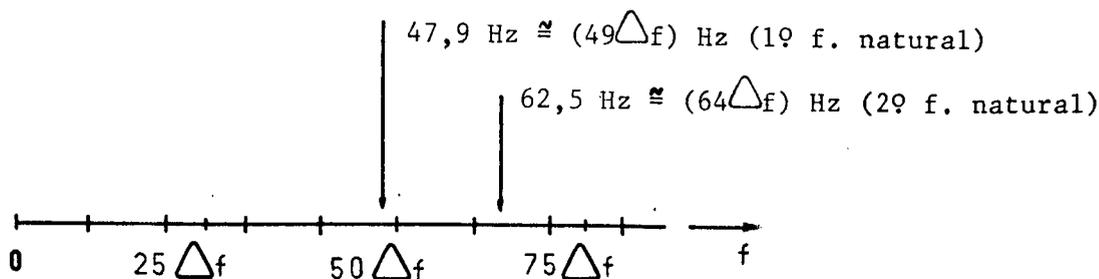


Figura E.5 - Amostragem no eixo das frequências. Função densidade espectral. (2º graus de liberdade - frequências próximas - pequenos amortecimentos).

Obs.: - Neste caso o " Δf " usado foi suficiente para mostrar as frequências naturais dos sistemas simulados. Contudo não foi suficiente para calcular com precisão os fatores de amortecimento. Para o sistema de 29 graus de liberdade isto se torna mais evidente, devendo-se aumentar "n" e ou "T".

- Para o sistema montado em laboratório, capítulo VI, usou-se a média de 50 ou 100 trechos da função densidade espectral, tendo-se para cada trecho 4096 amostras, o que determinou com maior precisão os parâmetros.

- Para não ocorrer confusão é importante lembrar que, " n_1 " e " $t'_{m\acute{a}x}$ " são respectivamente o número de pontos e o tamanho da função decréscimo, enquanto "n" e " $t_{m\acute{a}x}$ " são o número de pontos e o tamanho da excitação ou resposta do sistema.

APÊNDICE F

EXCITAÇÃO DOS SISTEMAS SIMULADOS (FREQUÊNCIA)

Neste apêndice serão vistos trechos iniciais das excitações na frequência dos sistemas simulados. Serão feitos também comentários a respeito da influência da banda usada pelo filtro, apêndice A seção A.1.2, sobre as frequências naturais dos sistemas.

As excitações apresentadas tem 1024 pontos amostrados no tempo a uma razão de 1000 amostras por segundo, assim:

$T = 0,001$ seg., é o intervalo de amostragem no tempo,

e $\Delta f = \frac{1}{1024 \times T}$ Hz, é o intervalo de amostragem na frequência.

Para todos os gráficos, devido ao uso da subrotina GRAFIC, apêndice A seção A.1.14, a escala horizontal é linear e começa na origem, a vertical é linear não inicia na origem e se apresenta diferente de gráfico para gráfico.

F.1 - RUÍDOS BRANCOS GAUSSIANOS

Considerando neste caso:

" $(a_1 - a_2)$ " a distância entre a maior e a menor amplitude para o trecho em questão,

e "a" = $\frac{a_1 + a_2}{2}$

tem-se $[a \gg (a_1 - a_2)]$, mostrando que, em relação a origem, os espectros dos ruídos brancos são praticamente constantes, isto é, serão apresentados a seguir espectros amplificados de ruídos sem o nível "DC".

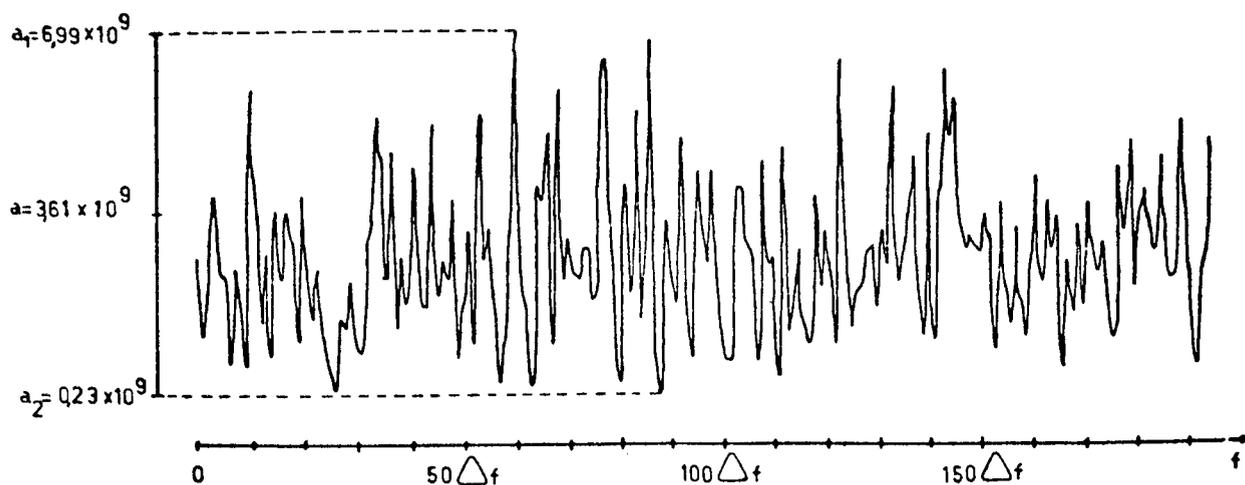


Figura F.1 - 1º ruído branco na frequência.

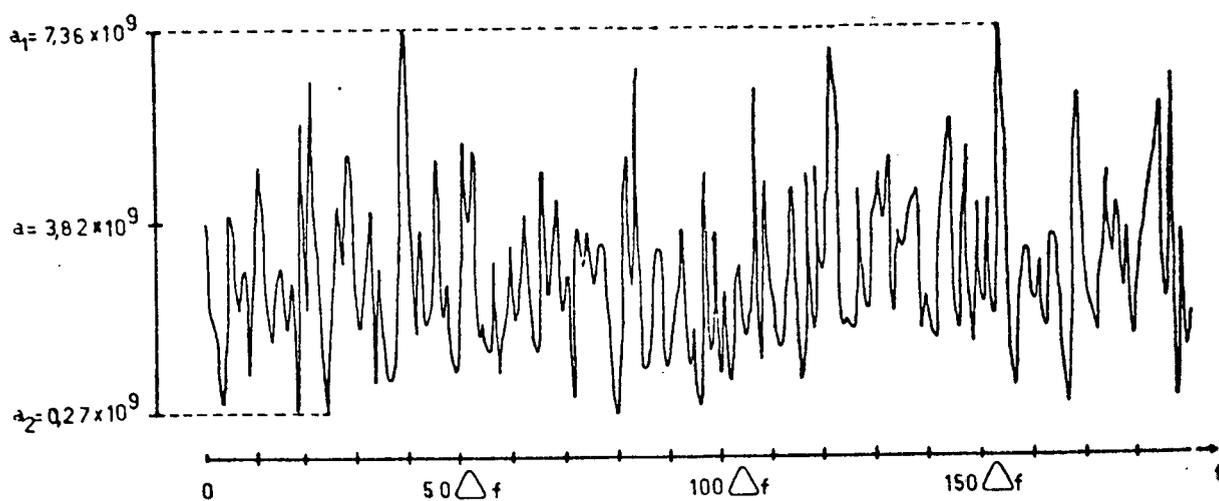


Figura F.2 - 2º ruído branco na frequência.

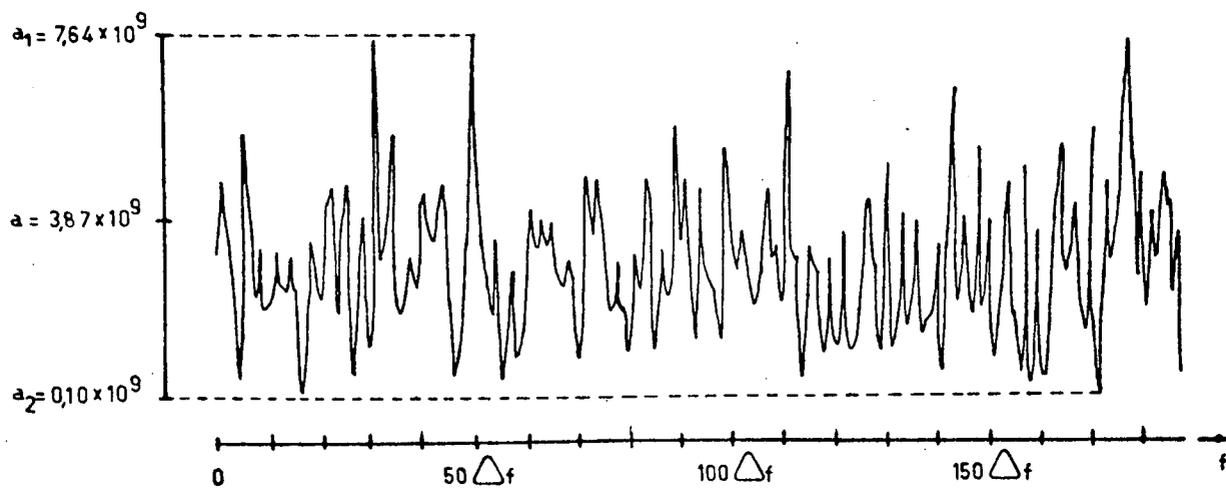


Figura F.3 - 39 ruído branco na frequência.

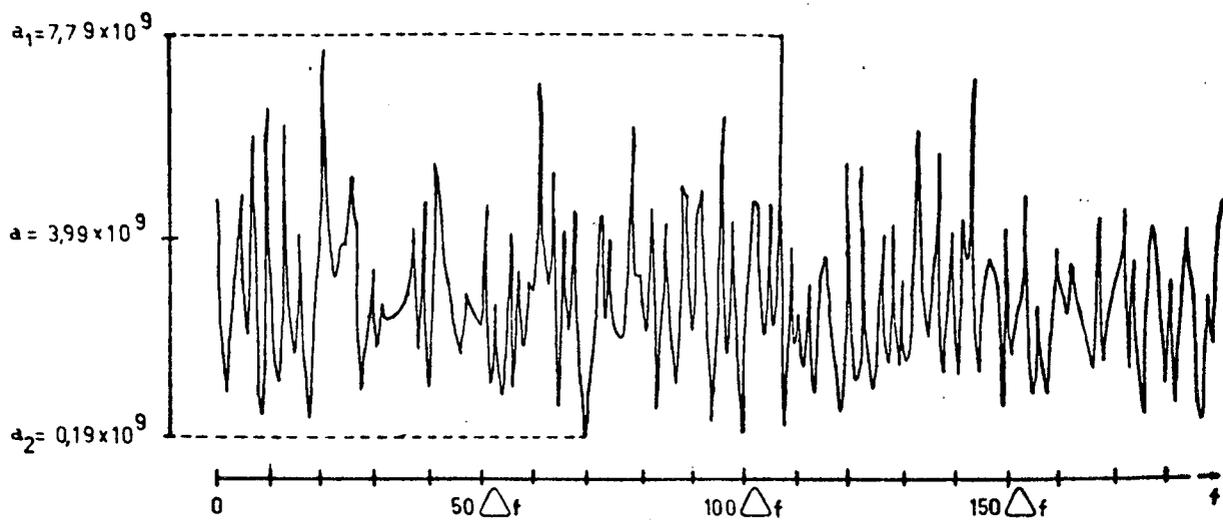


Figura F.4 - 49 ruído branco na frequência.

F.2 - RUÍDOS COLORIDOS

Da mesma forma que na seção anterior, os espectros das respostas do filtro estão amplificadas e sem o nível "DC".

Devido ao intervalo de frequência utilizado, os valores de frequências mostrados aproximam-se das frequências naturais do sistema simulado.

Serão assinalados nos gráficos a maior e a menor amplitude dando uma idéia da queda apresentada pelo filtro.

Obs.: A escala horizontal utilizada aqui é diferente da anterior.

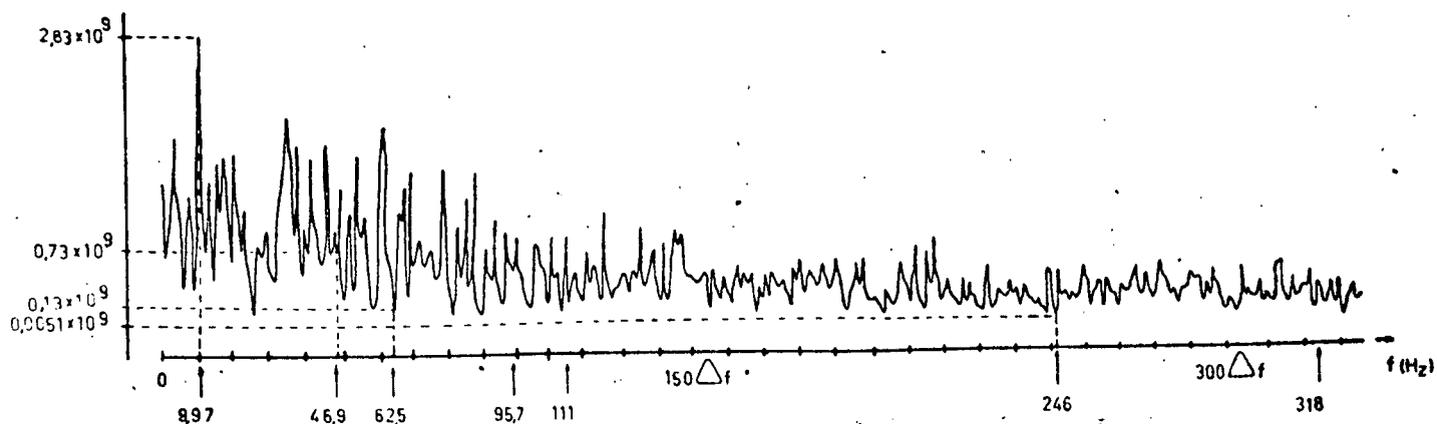


Figura F.5 - 1º ruído colorido na frequência.

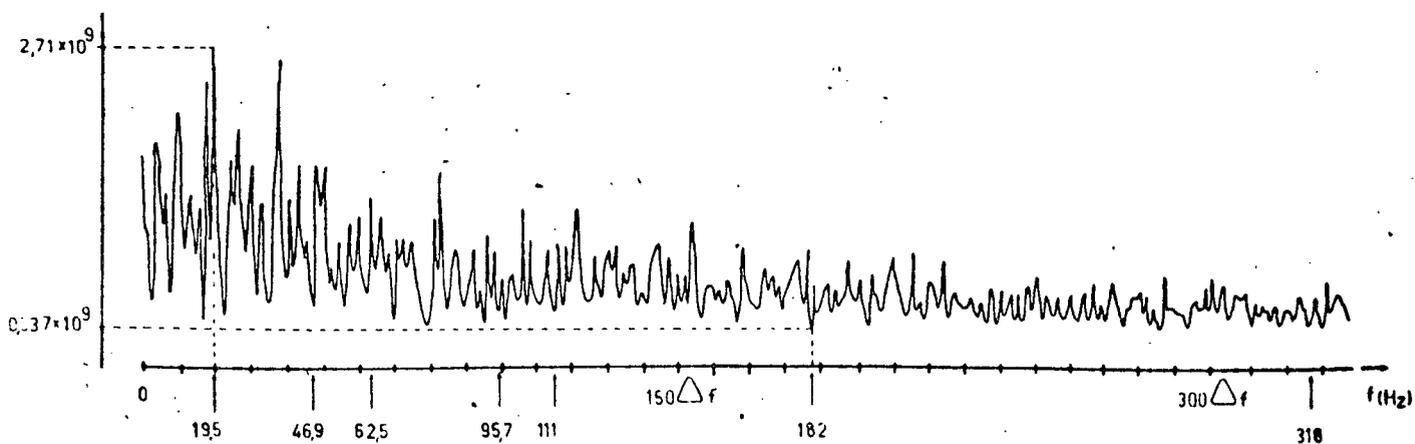


Figura F.6 - 29 ruído colorido na frequência.

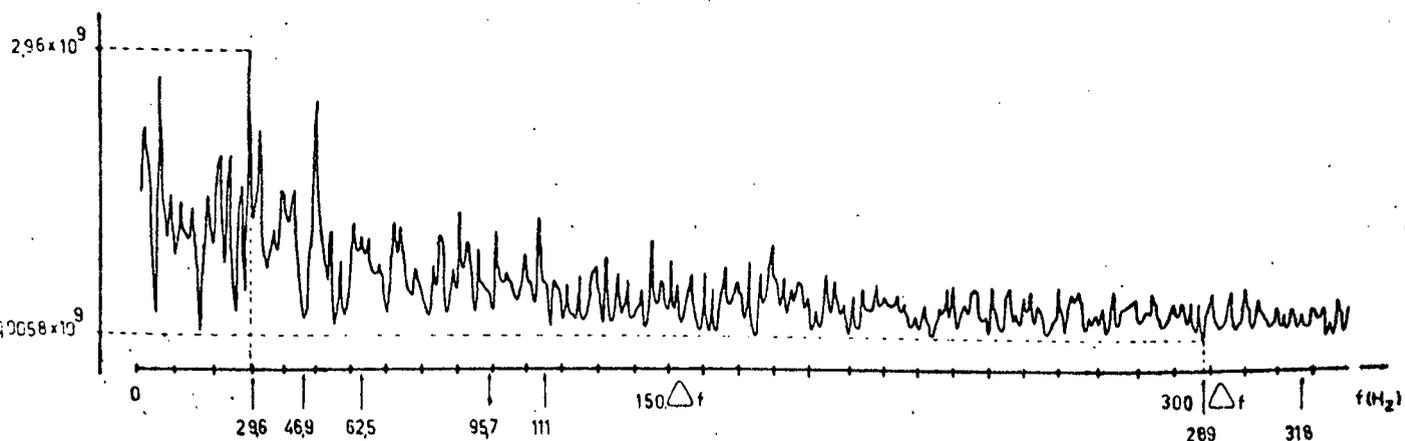


Figura F.7 - 39 ruído colorido na frequência.

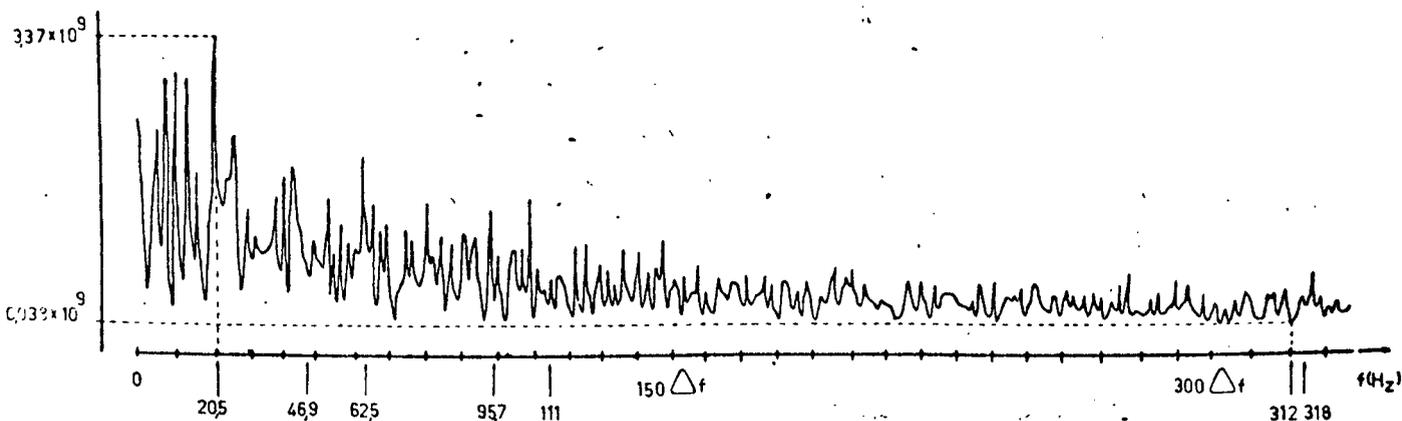


Figura F.8 - 4º ruído colorido na frequência.

F.3 - INFLUÊNCIA DA BANDA USADA PELO FILTRO SOBRE AS FREQUÊNCIAS NATURAIS

a - Sistema de um grau de liberdade

Neste caso tanto para pequenos amortecimentos como grandes amortecimentos considerou-se para frequência natural do sistema, 47,7 Hz sendo a excitação o 1º ruído colorido, capítulo II seção II.3.6.

Observando a figura F.5 verifica-se que esta frequência está na banda do filtro.

Para a detecção de falhas, capítulo IV seção IV.2.2, com a mesma frequência natural variou-se a excitação (2º ruído colorido), ou mantendo-se a excitação variou-se a frequência natural, 111,4 Hz. Também nestes casos as frequências naturais estão

dentro da banda do filtro, figura F.5 e F.6.

Obs.: Para os casos apresentados acima observa-se que, apesar da banda do filtro não estar centralizada na frequência natural, esta foi suficiente para excitar os modos de vibração.

b - Sistema de dois graus de liberdade

b.1 - Frequências próximas

Neste caso as frequências naturais consideradas para o sistema foram 47,7 Hz e 63,7 Hz sendo as excitações o 1º e 2º ruído colorido, capítulo II seção II.4.3-a.

Considerou-se para determinação da função de decremento aleatório a resposta da 1ª massa do sistema, capítulo II seção II.4.2, sendo esta excitada pelo 1º ruído colorido, assim só é necessário deter-se na figura F.5. Desta figura vê-se que as frequências naturais encontram-se na banda do filtro.

Uma análise simples da influência da banda do filtro sobre os modos de vibração, pode ser feita comparando-se as razões entre as amplitudes da função de decremento e da resposta do filtro referentes as frequências naturais.

Para a amplitude da função de decremento aleatô-

rio na frequência tem-se; figura III.8 capítulo III:

- 9196 para 1ª frequência natural
- 1686 para 2ª frequência natural
- sendo a razão entre elas 0,183

Para a amplitude do 1º ruído colorido tem-se;

figura F.5:

- $0,73 \times 10^9$ para 1ª frequência natural
- $0,13 \times 10^9$ para 2ª frequência natural
- sendo a razão entre elas 0,178

As razões apresentadas são praticamente as mesmas, o que indica que a resposta do filtro excitou por igual os modos de vibração.

No caso da detecção de falhas manteve-se as excitações anteriores e variou-se as frequências naturais, 95,5 Hz e 111,4 Hz, ou manteve-se as frequências naturais e variou-se as excitações, (3º e 4º ruído colorido), neste caso também a 1ª massa do sistema foi excitada pelo 3º ruído devendo somente deter-se na figura F.7. Das figuras F.5 e F.7 vê-se que as frequências mantiveram-se dentro da banda do filtro.

Obs.: Devido a proximidade entre as frequências naturais, a influência do filtro sobre estas deve ser praticamente a mesma.

b.2 -Frequências afastadas

Neste caso, as frequências naturais usadas foram 47,7 Hz e 318,3 Hz sendo as excitações o 1º e 2º ruído colorido capítulo II seção II.4.3-b.

Da mesma forma anterior, só é necessário deter-se na figura F.5, e como tem-se frequências afastadas a influência do filtro sobre estas deve ser bastante diferente.

Devido a grande frequência natural do 2º modo este poderia não ter sido excitado, mas observando-se a tabela III.5 ou a figura III.8 capítulo III, vê-se que este se apresenta como o modo dominante.

Obs.: Para os casos apresentados acima pode-se verificar que a banda de frequência utilizada pelo filtro foi suficiente para excitar os modos de vibração.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- | 1 | MEIROVITCH, L., "Elements of vibration analysis",
Internationals Student edition, McGraw-Hill Kogakusha,
Ltd., 1975.
- | 2 | SLAMA, J.G., TREIGUER, J.M., "Processamento do sinal no con
trole do estado de uma estrutura", Anais do I Congresso
Internacional do Processamento do Sinal, COPPE, UFRJ,
Rio de Janeiro, julho, 1978.
- | 3 | ACHILLES, G.D., "Análise Espectral de Sinais", COE776,
COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.
- | 4 | COLE, HENRY A., JR., "On-line failure detection and damping
measurement of aerospace structures by random decrement
signatures", NASA CR-2205, mars, 1973.
- | 5 | WILCOX, P.R., CRAWFORD, W.L., "A least squares method for
the reduction of free-oscillation data", NASA TND-4503,
june, 1968.
- | 6 | WILLIAM T. THOMSON, "Theory of vibration with Application"
Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, USA,
1965.
- | 7 | RABINER, L.R., GOLD, B., "Theory and applications of digital
signal processing". Prentice-Hall, INC. Englewood Cliffs,
New Jersey, USA, 1975.
- | 8 | B. DARRAS, "Identification de systèmes vibrants par la
méthode du décroément aléatoire", T.O.N.E.R.A.
- | 9 | MURRAY R. SPIEGEL, "Schaum's outline of Theory and Problems
of Estatistics", McGraw-Hill, Inc., 1975.

- |10| ACHILLES, G.D., "Teoria de Sinais", COE77 , COPPE-UFRJ,
Rio de Janeiro, 1978.
- |11| BHAT, WAMAN V., WILEY, JOHN F., "An evaluation of random
analysis methods for the determination of panel damping",
NASA CR-114423, Feb., 1972.
- |12| LHATI, B.P., "An introduction to random signals and communi-
cation theory", International Textbook Company, Scranton,
Pennsylvania, 1968.