

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS

ANÁLISE DE CUSTO-VOLUME-LUCRO SOB CONDIÇÕES DE RISCO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA  
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

JOSÉ DÉCIO DE ALMEIDA LEITE

FLORIANÓPOLIS  
SANTA CATARINA-BRASIL  
MARÇO/1981

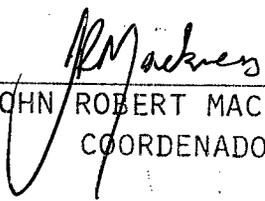
ANÁLISE DE CUSTO-VOLUME-LUCRO SOB CONDIÇÕES DE RISCO

JOSÉ DÉCIO DE ALMEIDA LEITE

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO  
DO TÍTULO DE

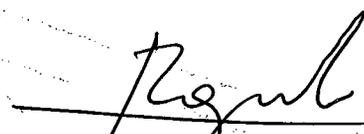
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E APROVADA EM  
SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

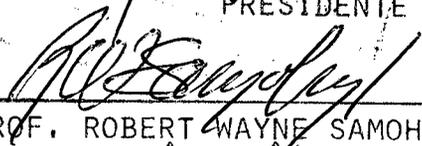


PROF. JOHN ROBERT MACKNESS, PH.D  
COORDENADOR

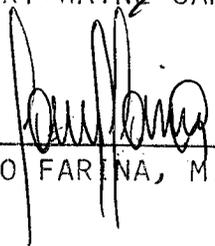
BANCA EXAMINADORA:



PROF. RICARDO GONZALO ROJAS LEZANA, M.SC.  
PRESIDENTE



PROF. ROBERT WAYNE SAMOBYL, PH.D



PROF. PAULO FARINA, M.SC



0.249.272-3

UFSC-BU

À minha esposa

Alciélia

Aos meus filhos

Alisson,

Daniela e

Décio

Aos meus pais

Solidonio e

Antonia

Aos meus sogros

Alcides e

Maria da Penha

## AGRADECIMENTOS

A todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho e de maneira especial as seguintes pessoas e instituições:

- Ao Prof. Celso de Paiva Leite que tanto me incentivou para a realização do curso de mestrado e a conseqüente elaboração deste trabalho;

- Ao Prof. Ricardo Gonzalo Rojas Lezana, pela sua orientação correta e acima de tudo pela sua amizade, compreensão e muito boa vontade em todas as ocasiões que o procurei para orientar esta dissertação;

- À UFPB pela oportunidade que me foi dada para realização do curso;

- À CAPES pelo auxílio financeiro;

- À Sra. Maria de Lourdes Sousa Born pelos excelentes trabalhos de datilografia;

- Aos colegas, professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas da UFSC pelo convívio e apoio que nos foi dado.

## R E S U M O

O estudo das relações entre os custos, o nível de atividade e o lucro operacional das empresas, constitui um instrumento de vital importância para a tomada de decisões no que diz respeito à definição de níveis futuros de atividade, fixação de preços, seleção de linhas de produtos, alocação de recursos, etc.. Contudo, tal estudo, denominado comumente análise de custo - volume - lucro, apresenta uma limitação bastante importante derivada do fato de considerar a totalidade das variáveis envolvidas na análise como sendo dados conhecidos e com um comportamento perfeitamente definido, isto é, como variáveis determinísticas.

O presente trabalho visa superar esta limitação através da consideração do risco associado a cada uma das variáveis envolvidas na análise de custo - volume - lucro, as quais serão consideradas como sendo variáveis aleatórias independentes com distribuições normais de probabilidade.

A análise de custo - volume - lucro sob condições de risco, desenvolvida neste trabalho, é aplicável tanto em empresas monoprodutoras quanto em empresas multiprodutoras.

## A B S T R A C T

The study of the relationships between costs, activity levels and operating profit is very important in decision taking about prices, product lines, resource allocation, etc. The conventional study of cost-volume-profit relationships is limited in value by the necessity to consider all variables as deterministic functions. In this dissertation, the risk associated with each variable is incorporated into the cost volume profit analysis, each variable being treated as independent and random with normally distributed behaviour.

The model is applicable in both one product and multiproduct companies.

## S U M Á R I O

	PÁG.
LISTA DE FIGURAS .....	x
LISTA DE QUADROS .....	xii
CAPÍTULO I	
1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1. O que é a análise de custo-volume-lucro .....	1
1.2. A inclusão do "Risco" na análise .....	1
1.3. Interrelacionamento das variáveis .....	2
1.4. Um exemplo .....	4
1.5. Tratamento aleatório .....	6
1.6. Relevância do trabalho .....	9
1.7. Metodologia do trabalho .....	9
CAPÍTULO II	
2. ANÁLISE DE CUSTO-VOLUME-LUCRO TRADICIONAL .....	11
2.1. Introdução .....	11
2.2. Pressupostos sob os quais se baseia a análise de custo -volume-lucro .....	12
2.3. Igualdade fundamental .....	13
2.4. Representação gráfica das relações de custo-volume-lu- cro .....	14
2.5. Análise de custo-volume-lucro em empresas monoproduto- ras .....	16
2.5.1. Ponto de equilíbrio .....	16
2.5.2. Margem de contribuição .....	21
2.5.3. Razão de contribuição .....	21
2.5.4. Razão dos custos variáveis .....	22
2.5.5. Deslocamentos do ponto de equilíbrio .....	25
2.5.6. Expressão gráfica e matemática dos deslocamen- tos do ponto de equilíbrio .....	27
2.5.7. Vendas esperadas .....	32
2.5.8. Margem de segurança .....	35

2.6. Análise de custo-volume-lucro em empresas multiprodu- toras .....	37
2.6.1. Ponto de equilíbrio .....	37
2.6.2. Vendas esperadas .....	48
2.6.3. Margem de segurança .....	50
2.6.4. Custos fixos consignáveis a cada produto .....	52
2.7. Importância da análise de custo-volume-lucro .....	54
2.8. Limitações da análise de custo-volume-lucro .....	55

### CAPÍTULO III

3. ANÁLISE DE CUSTO-VOLUME-LUCRO SOB CONDIÇÕES DE RISCO	58
3.1. Introdução .....	59
3.2. Pressupostos da análise de custo-volume-lucro sob con- dições de risco .....	60
3.3. O volume de vendas como variável aleatória em empre- sas monoprodutoras .....	60
3.3.1. Ponto de equilíbrio .....	62
3.3.2. Lucro esperado .....	62
3.3.3. Vendas esperadas .....	63
3.3.4. Margem de segurança .....	64
3.4. O volume de vendas como variável aleatória em empre- sas multiprodutoras .....	65
3.4.1. Ponto de equilíbrio .....	67
3.4.2. Lucro esperado .....	68
3.4.3. Vendas esperadas .....	69
3.5. Volume de vendas, custo variável, custo fixo e preço de vendas consideradas como variáveis aleatórias em empresas monoprodutoras .....	71
3.5.1. Ponto de equilíbrio .....	72
3.5.2. Lucro esperado .....	73
3.5.3. Vendas esperadas e margem de segurança .....	77
3.6. Volume de vendas, custo variável, custo fixo e preço de vendas consideradas como variáveis aleatórias em empresas multiprodutoras .....	77

	PAG.	
3.6.1. Ponto de equilíbrio .....	78	
3.6.2. Lucro esperado .....	79	
3.6.3. Vendas esperadas e margem de segurança .....	83	
CAPÍTULO IV		
4. EXEMPLO ILUSTRATIVO .....	85	
4.1. Introdução .....	85	
4.2. Limitações do exemplo .....	86	
4.3. Análise de custo-volume-lucro sob condições de risco numa empresa monoprodutora .....	86	
4.3.1. Dados do problema .....	87	
4.3.2. Ponto de equilíbrio .....	87	
4.3.3. Lucro esperado .....	95	
4.4. Análise de custo-volume-lucro sob condições de risco numa empresa multiprodutora .....	97	
4.4.1. Dados do problema .....	98	
4.4.2. Ponto de equilíbrio .....	98	
4.4.3. Lucro esperado .....	103	
CAPÍTULO V		
5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....	108	
5.1. Conclusões .....	108	
5.2. Sugestões .....	109	
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	110	
ANEXO 1	Alguns conceitos de probabilidade relacionados com a análise de custo-volume-lucro .....	112
ANEXO 2	Áreas delimitadas para curva normal padrão (ta bela) .....	144

LISTA DE FIGURAS

		PAG.
FIGURA 1	Gráfico de custo-volume-lucro tradicional ...	3
FIGURA 2	Gráfico de custo-volume-lucro sob condições de risco .....	8
FIGURA 3	Representação gráfica das relações entre custo-volume-lucro .....	15
FIGURA 4	Representação gráfica do ponto de equilíbrio	16
FIGURA 5	Forma alternativa para a representação gráfica do ponto de equilíbrio .....	17
FIGURA 6	Representação gráfica do exemplo 1 .....	20
FIGURA 7	Representação gráfica do exemplo 1 num gráfico volume-lucro .....	20
FIGURA 8	Representação gráfica do exemplo 2 .....	24
FIGURA 9	Representação gráfica do exemplo 2 num gráfico volume-lucro .....	25
FIGURA 10	Representação gráfica do deslocamento do ponto de equilíbrio quando há variação do montante de custos fixos .....	28
FIGURA 11	Demonstração gráfica dos deslocamentos do ponto de equilíbrio quando há variação do preço de venda unitário .....	29
FIGURA 12	Demonstração gráfica dos deslocamentos do ponto de equilíbrio quando há variação dos custos variáveis por unidade.....	30
FIGURA 13	Representação gráfica do exemplo 8 .....	42
FIGURA 14	Representação gráfica dos deslocamentos do ponto de equilíbrio em empresas multiprodutoras, quando há variação no montante de custos fixos .....	45
FIGURA 15	Representação gráfica dos deslocamentos do ponto de equilíbrio em empresas multiprodutoras, quando há variação na razão de contribuição ponderada .....	46
FIGURA 16	Representação gráfica das relações de custo-volume-lucro no exemplo 12 .....	53
FIGURA 17	Representação gráfica das relações de custo-volume-lucro no exemplo 12 .....	54

FIGURA 18	Representação gráfica das limitações da análise de custo-volume-lucro .....	56
FIGURA 19	Gráfico da distribuição de probabilidade para o volume de vendas .....	61
FIGURA 20	Gráfico da sobreposição da distribuição de probabilidade do volume de vendas sobre o gráfico de volume-lucro .....	62
FIGURA 21	Representação gráfica de uma função densidade de probabilidade.....	128
FIGURA 22	Representação gráfica de uma distribuição normal .....	131
FIGURA 23	Exemplos gráficos de distribuições normais ..	132
FIGURA 24	Ilustração gráfica de mudanças na média de uma distribuição normal .....	132
FIGURA 25	Distribuição de probabilidade do volume de vendas com $N(10.000, 4.000.000)$ .....	134

LISTA DE QUADROS

		PAG.
QUADRO 01	Quadro comparativo de diversas alternativas do exemplo 11 .....	52
QUADRO 02	Dados referentes a cada produto da empresa multiprodutora .....	66
QUADRO 03	Distribuição do valor esperado e desvio padrão com relação a cada produto da empresa multiprodutora .....	66
QUADRO 04	Parâmetros das distribuições de probabilidade dos volumes de vendas de cada um dos produtos expressos em unidades monetárias ....	67
QUADRO 05	Procedimento para determinar qual a parte do volume de vendas atribuído a cada produto em empresas multiprodutoras .....	70
QUADRO 06	Parâmetros das distribuições das variáveis envolvidas na análise de custo-volume-lucro	72
QUADRO 07	Dados do exemplo ilustrativo nº 1 .....	87
QUADRO 08	Probabilidades do ponto de equilíbrio, expresso em unidades físicas, estar compreendido em diversos intervalos.....	94
QUADRO 09	Probabilidades do ponto de equilíbrio, expresso em unidades monetárias, estar compreendido em diversos intervalos .....	94
QUADRO 10	Probabilidade do lucro operacional estar compreendido em diversos intervalos .....	97
QUADRO 11	Dados do exemplo ilustrativo nº 2 .....	98
QUADRO 12	Probabilidade do ponto de equilíbrio estar compreendido em diversos intervalos.....	103
QUADRO 13	Distribuição de probabilidade para os produtos "A" e "B" do exemplo 13 .....	117

QUADRO 14	Determinação do valor esperado do volume de vendas para os produtos "A" e "B" do exemplo 13 .....	121
QUADRO 15	Valor esperado do volume de vendas para os produtos "A" e "B" do exemplo 13 .....	125
QUADRO 16	Valor esperado do volume de vendas para os produtos "A" e "B" quando a distribuição de probabilidade é diferente .....	126

# CAPÍTULO I

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1. O QUE É ANÁLISE DE CUSTO - VOLUME - LUCRO

Para que se possa tecer maiores comentários a respeito do tema que se pretende desenvolver, será necessário uma descrição do que vem a ser esta análise. Como ponto de partida cita-se o exemplo das questões que poderiam ser levantadas pelo administrador financeiro numa empresa produtora de bens e/ou serviços. Sabe-se que o planejamento implica na seleção de objetivos e na determinação dos meios para alcançá-los. No exemplo, dentre estes meios é possível que um dos de maior importância seja o planejamento de vendas a fim de proporcionar uma corrente contínua de ingressos vindos do mercado para a empresa. Algumas das questões levantadas pelos gerentes financeiros seriam: O que acontecerá se o planejamento das vendas não se concretizar? Qual será o impacto dos diversos volumes de vendas sobre o lucro da empresa? A resposta a estas e muitas outras perguntas deste gênero, se encontram no estudo das interrelações entre as variáveis: vendas, custos, volume e lucros proporcionados, que freqüentemente se denomina ANÁLISE DE CUSTO - VOLUME - LUCRO.

### 1.2. A INCLUSÃO DO RISCO NA ANÁLISE

A análise de Custo - Volume - Lucro é reconhecida universalmente como um dos conhecimentos básicos que devem ter os executivos em geral e indispensável para que os que se integrarem na área contábil-financeira. Todavia, esta análise, tal como se conhece e

estuda atualmente, possui uma série de limitações as quais restringem o campo de decisão dos gerentes financeiros. Uma das limitações desta análise tradicional que entende-se como sendo a mais importante, seria que o tomador de decisões pressupõe a existência de certeza absoluta quanto ao comportamento das variáveis envolvidas na análise. Isto é: quando se faz uma projeção dessas variáveis supõe-se, mesmo a curto prazo, que esses dados são determinísticos. O que se constata na realidade é que essas variáveis poderão não se comportar como foi planejado. Daí a necessidade da inclusão do risco como sendo mais uma variável relevante para o bom resultado da análise.

### 1.3. INTERRELACIONAMENTO DAS VARIÁVEIS

Para melhor entendimento da descrição do tópico a ser desenvolvido são necessárias algumas considerações à respeito do interrelacionamento das Variáveis da Análise de Custo - Volume - Lucro.

Existe uma igualdade que é válida em qualquer empresa, razão pela qual se transforma numa verdadeira identidade da análise de custo - volume - lucro e que será bastante útil na dedução e demonstração das expressões algébricas utilizadas nas análises. Pode-se com certeza dizer que as receitas de uma empresa são iguais aos custos mais os lucros. Em relação aos custos, pode-se dizer que eles se dividem em custos fixos e custos variáveis. Com base nestas informações chega-se à seguinte expressão algébrica:

$$R = C_V + C_F + L \quad (1)$$

onde:

$R$  = Receita

$C_F$  = Custo Fixo

$C_V$  = Custo Variável

$L$  = Lucro

De acordo com estes dados, sob os quais se baseia a análise de custo - volume - lucro, é possível representar no sistema de coordenadas os custos incorridos pela empresa, assim como as receitas obtidas pela venda de seus produtos. No eixo das abcissas estarão quantificados os diversos níveis de volume de atividades e no eixo das ordenadas os custos e as receitas.

Vale acrescentar dois conceitos de vital importância para a análise, que são: Ponto de Equilíbrio que corresponde ao nível de atividade onde os custos são iguais as receitas; e o conceito de Margem de Contribuição que corresponde ao excedente das vendas sobre os custos variáveis. Estes conceitos ficarão mais claros ao observar o gráfico (FIG. 1)<sup>1</sup>, que dá idéia do comportamento das variáveis envolvidas na análise de custo - volume - lucro, através do sistema de eixos coordenados.

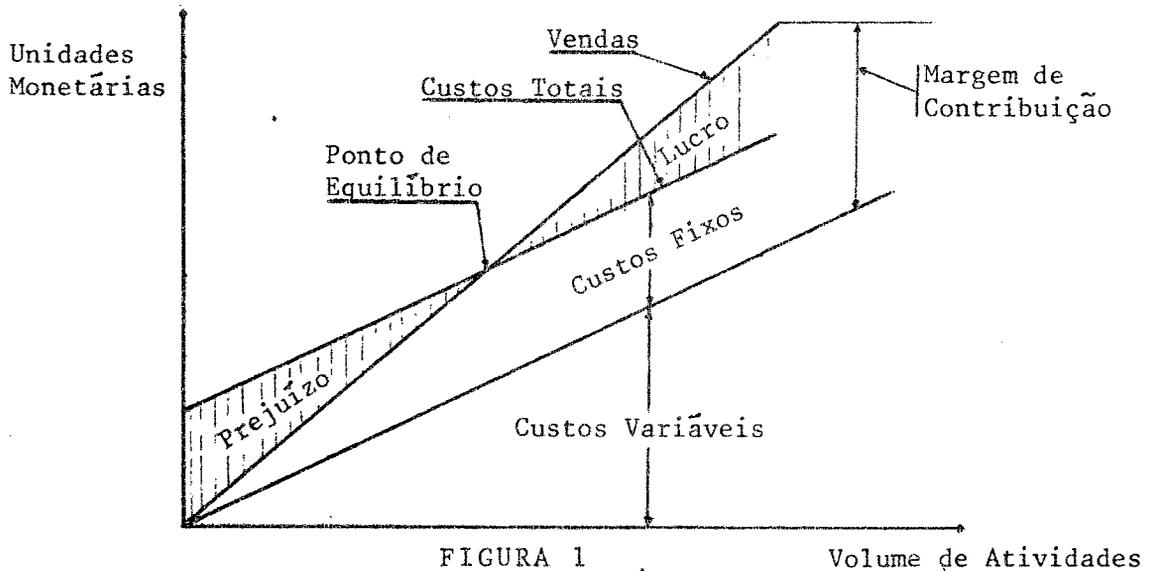


FIGURA 1  
GRÁFICO DE CUSTO - VOLUME - LUCRO TRADICIONAL

<sup>1</sup> HORNGREN, T. Charles. Cost Accounting a managerial emphasis. p. - 41

Como já foi visto, a principal limitação que se observa na análise de custo - volume - lucro tradicional é o fato das variáveis fundamentais envolvidas, serem consideradas como sendo determinísticas. Isto pode distorcer seriamente as projeções das atividades da empresa e da magnitude que alcançarão estas variáveis e em consequência conduzir a erros na tomada de decisões.

Uma vez reconhecida esta limitação, o modelo a ser desenvolvido introduzirá algumas modificações na análise tradicional a fim de considerar a associação de um grau de risco a cada uma das variáveis submetidas a estudo, desta maneira espera-se sanar esta restrição imposta pela certeza implícita na análise de custo - volume - lucro tradicional.

Para se considerar o "risco" e a "incerteza" como variáveis fundamentais na análise de custo - volume - lucro, deve-se recorrer, necessariamente, a certos conceitos e instrumentos pertencentes ao campo de estudo da Estatística e especificamente a um dos seus ramos denominado Estatística Inferencial.

#### 1.4. UM EXEMPLO

Um exemplo ilustrativo vai servir para mostrar como a análise de custo - volume - lucro, sem considerar o risco e a incerteza associados a diferentes alternativas, poderá acarretar erros na tomada de decisões.

Suponha-se que uma empresa se encontra ante a alternativa de produzir e vender o PRODUTO "A" ou o PRODUTO "B"; os quais podem ser produzidos aproveitando as atuais facilidades de fábrica e implicando no aumento de custos fixos anuais em igualdade, qualquer

que seja o produto que a empresa decida produzir. Suponha-se também que a capacidade produtiva utilizada pelos dois produtos seja a mesma. Os dados antecedentes que se tem da empresa são os seguintes:

	PRODUTO "A"	PRODUTO "B"
.Aumento dos Custos Fixos	Cr\$ 50.000,00	Cr\$ 50.000,00
.Preço de Venda	Cr\$ 12,00	Cr\$ 12,00
.Custo Variável Unitário	Cr\$ 7,00	Cr\$ 7,00

A análise de custo - volume - lucro permite determinar o nível de equilíbrio para ambos os produtos.

$$Q_{PE} \text{ "A"} = \frac{\text{Cr\$ } 50.000,00}{\text{Cr\$ } 12,00 - \text{Cr\$ } 7,00} = 10.000 \text{ u} \quad R_{PE} \text{ "A"} = \text{Cr\$ } 120.000,00$$

$$Q_{PE} \text{ "B"} = \frac{\text{Cr\$ } 50.000,00}{\text{Cr\$ } 12,00 - \text{Cr\$ } 7,00} = 10.000 \text{ u} \quad R_{PE} \text{ "B"} = \text{Cr\$ } 120.000,00$$

onde:

$Q_{PE} \text{ "A"}$  = Ponto de Equilíbrio da Empresa "A"

$Q_{PE} \text{ "B"}$  = Ponto de Equilíbrio da Empresa "B"

O resultado obtido não conduzirá a uma desejabilidade relativa entre um ou outro produto, isto se deve ao fato de não ter sido levada em consideração uma variável fundamental do problema, como é o volume de vendas que se espera obter para cada um dos produtos. Suponha-se no exemplo, que o volume esperado de vendas seja de 15.000 unidades para o PRODUTO "A" e de 12.000 unidades para o PRODUTO "B", é evidente que a empresa produzirá o PRODUTO "A" porque as expectativas de venda são claramente superiores, permitindo a obtenção de um lucro adicional de Cr\$ 25.000,00, por outro lado se o empresário se decidir a produzir o PRODUTO "B" o lucro adicional que ele obteria, seria de apenas Cr\$ 10.000,00. Para demonstrar esta situação foram utilizados os cálculos a seguir.

	PRODUTO "A"	PRODUTO "B"
RECEITA	Cr\$ 180.000,00	Cr\$ 144.000,00
(-) CUSTO VARIÁVEL	<u>Cr\$ 105.000,00</u>	<u>Cr\$ 84.000,00</u>
MARGEM DE CONTRIBUIÇÃO	Cr\$ 75.000,00	Cr\$ 60.000,00
(-) CUSTO FIXO	<u>Cr\$ 50.000,00</u>	<u>Cr\$ 50.000,00</u>
LUCRO	Cr\$ 25.000,00	Cr\$ 10.000,00

Finalmente aumenta-se a dificuldade deste problema supondo que o volume das vendas anuais esperados para ambos os produtos é o mesmo. Poder-se-ia neste caso, afirmar que a empresa é indiferente frente a escolha de produção de um ou de outro produto? Aparentemente a resposta seria afirmativa, visto que a igual volume esperado das vendas, ambos os produtos gerariam igual lucro. Sem dúvida, uma resposta afirmativa só seria válida no caso da existência de certeza absoluta de alcançar estes volumes de vendas. Assim sendo, como na maioria dos casos não existe tal certeza, nota-se que em casos como este a decisão dependerá do "risco" relativo associado com cada alternativa o qual deve ser introduzido na análise a fim de melhorar o processo decisório.

## 1.5. TRATAMENTO ALEATÓRIO

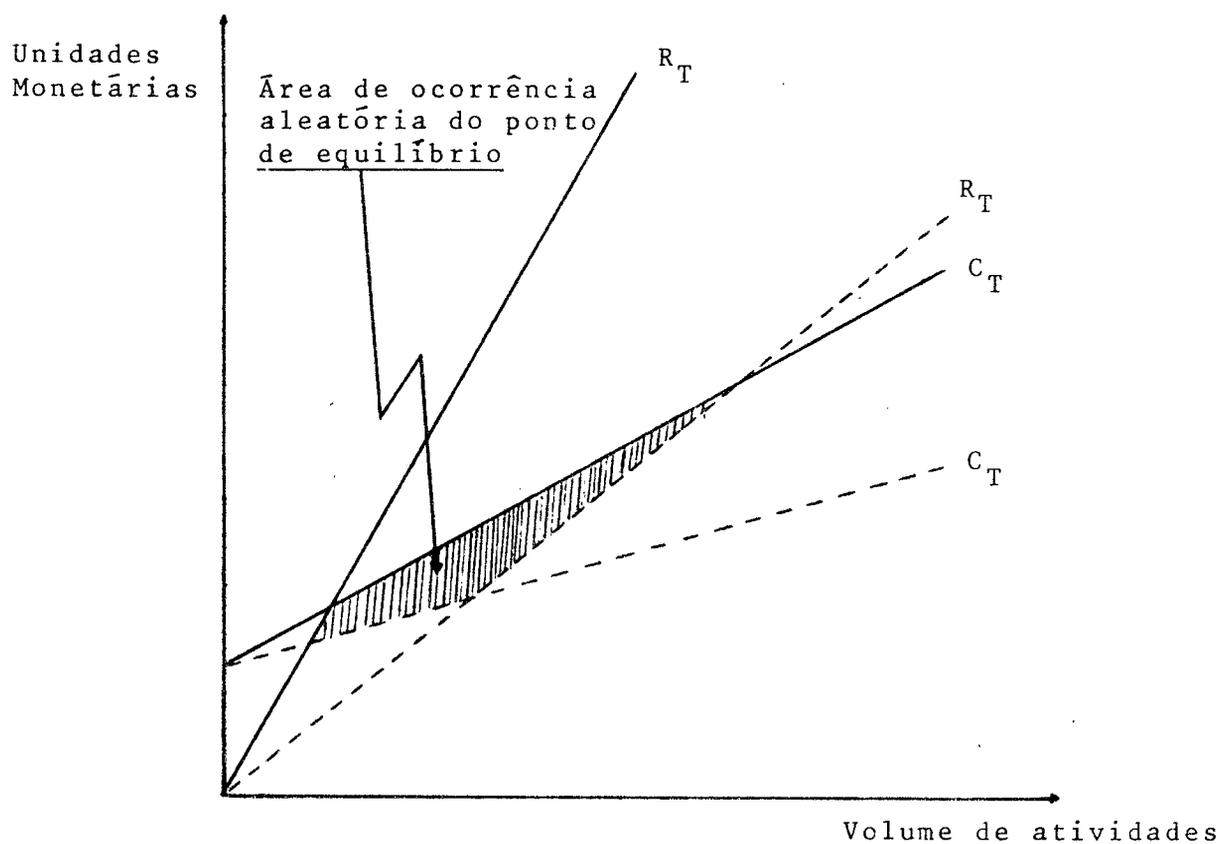
As relações envolvidas em um problema de tomada de decisão, podem ser incertas. Vale dizer que é possível que se ignore a magnitude específica que adotarão determinadas variáveis em um momento determinístico, num dado período de tempo. Todavia, não impede que se possa estabelecer um conjunto de valores que poderão ser as

sumidos pelas diferentes variáveis fundamentais consideradas no problema. De acordo com isto, define-se como "variável aleatória", para o fim que se quer atingir, "aquela que pode assumir diferentes valores sem que se saiba, com certeza, qual deles assumirá", portanto, a decisão que se adote dependerá dos valores tomados por cada uma das variáveis. Com base nisto, todas as variáveis relevantes podem ser consideradas (na análise de custo - volume - lucro) como variáveis aleatórias. Isto é: sabe-se a existência de um conjunto de valores que podem ser assumidos pelas diversas variáveis sem que se saiba com certeza qual destes valores assumirá especificamente.

No gráfico a seguir (FIGURA 2) dá-se uma idéia ilustrativa do tratamento aleatório atribuído às variáveis. Vale ressaltar que com base no TEOREMA DO LIMITE CENTRAL<sup>2</sup> utiliza-se a curva distribuição normal para que através dela possa se conhecer a probabilidade de ocorrência de um dado evento na análise de custo - volume - lucro.

---

<sup>2</sup> MEYER, Paul L., Probabilidade Aplicações à Estatística. pp - 269 - 274



Onde:

$R_T$  = Receita Total Possível

$C_T$  = Custo Total Possível

FIGURA 2

GRÁFICO DE CUSTO - VOLUME - LUCRO SOB CONDIÇÕES DE RISCO.

## 1.6. RELEVÂNCIA DO TRABALHO

Como foi tida a oportunidade de demonstrar através de um exemplo, a análise de custo - volume - lucro tradicional possui sérias limitações, dentre as quais a de maior importância (por se considerar como a de maior influência na tomada de decisão) é o tratamento determinístico dado às variáveis fundamentais envolvidas na análise.

A relevância do trabalho será constatada pelo tratamento probabilístico que se pretende atribuir a estas variáveis e com isto contribuir de maneira bastante eficiente para o fornecimento de melhores subsídios ao tomador de decisão, no caso o gerente financeiro, no sentido de que se evite as distorções provocadas pelo suposto de certeza implícita na análise de custo - volume - lucro.

Pretende-se com o trabalho a ser desenvolvido, atingir vários objetivos, dentre os quais o de contribuir efetivamente para o aperfeiçoamento da análise custo - volume - lucro incluindo nesta, como variável relevante, o risco. Por outro lado, pretende-se mostrar como diferentes ramos de conhecimentos podem se complementar com a finalidade de melhorar este tipo de análise possibilitando uma sensível transição para uma situação mais aprimorada da tomada de decisão com base na análise de custo - volume - lucro.

## 1.7. METODOLOGIA DO TRABALHO

A metodologia de aprimoramento da análise de custo - volume - lucro deverá incluir um estudo ~~aprofundado~~ da bibliografia tradicional, assim como o seu interrelacionamento com a estatística ~~in-~~

ferência, visando dar um novo enfoque à análise, tentando eliminar uma das grandes ou a maior limitação que apresenta esta análise, através da introdução do risco como sendo mais uma variável relevante.

O trabalho de dissertação será desenvolvido abrangendo os seguintes aspectos:

- I) Uma recopilação, investigação e ampliação da análise, tomando por base a bibliografia tradicional existente;
- II) Estudo de alguns aspectos probabilísticos relacionados com a análise de custo - volume - lucro;
- III) Consideração do risco na análise do custo - volume - lucro;
- IV) O teste da hipótese através de sua aplicação num exemplo ilustrativo;
- V) Conclusões a respeito das vantagens da análise de custo - volume - lucro sob condições de risco.

## CAPÍTULO II

### 2. ANÁLISE DE CUSTO - VOLUME - LUCRO TRADICIONAL

#### 2.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo procura-se dar ênfase à análise de custo - volume - lucro sob o ponto de vista tradicional que será uma das bases sobre as quais se estrutura a contribuição fundamental para o trabalho.

Sabe-se que planejar implica a seleção de objetivos e a determinação dos meios necessários para alcançá-los. Dentre estes meios, os de maior importância são aqueles relacionados com o planejamento de vendas, a fim de haver uma corrente contínua de entradas de caixa, devido a estas vendas planejadas.

Há algumas perguntas, entretanto, que necessitam de respostas: O que acontece para a empresa, se as vendas planejadas não se concretizam?; qual será o impacto dos diversos volumes de vendas sobre o lucro líquido? A resposta a estas e outras indagações se encontram no estudo das relações entre as vendas, os custos e o lucro líquido, comumente chamadas de análise de custo - volume - lucro.

Além disto, a análise de custo - volume - lucro possibilita à empresa determinar o nível de operações que a mesma precisa manter para cobrir seus custos operacionais, e avaliar a lucratividade ou prejuízo dos vários níveis de vendas.

Com a utilização da análise em questão, torna-se possível o uso de processos de previsão de lucros, por parte da empresa, pre

visão que requer da administração, a fixação das principais metas de rendimento e despesa a serem atingidas. Fixados estes objetivos, será mais provável que as decisões dos níveis inferiores se coadunem mais com os interesses da empresa, do que se fossem tomadas sem um devido planejamento.

## 2.2. PRESSUPOSTOS SOB OS QUAIS SE BASEIA A ANÁLISE DE CUSTO - VOLUME - LUCRO

A análise de custo - volume - lucro (abreviadamente C-V-L) se baseia numa série de pressupostos que mantêm os dados estáticos. Dentre estes supostos cabe mencionar os seguintes:

a) Os preços de venda permanecerão constantes a todos os volumes num intervalo relevante, se isto não é válido não se poderá representar em um gráfico o ingresso por vendas de forma linear.

b) Todos os custos e despesas podem ser divididos em fixos e variáveis e caracterizados pela economia de escala constante.

c) O valor total dos custos fixos é constante a todos os volumes em um intervalo relevante, os custos variáveis flutuam no dito intervalo em proporção ao volume, se isto não acontecer, estes custos não podem ser representados como linhas retas.

d) Os preços pagos pelos fatores de insumo permanecerão constantes no intervalo assinalado.

e) Não existem modificações nas políticas administrativas, nos métodos tecnológicos e na eficiência de homens e máquinas; e o controle de custo não será aumentado nem negligenciado.

f) Se se vende mais de um produto, as vendas dos diversos produtos serão na mesma proporção pré-determinada, se isto não ocorrer, modificará a contribuição marginal.

Se o lucro se determina segundo o custeio por absorção deve-se apregar ao anterior o seguinte pressuposto:

g) A produção e as vendas estarão sincronizadas, isto é, não haverá mudanças significativas nos níveis de estoque.

É evidente que a validade de alguns pressupostos é maior que de outros, essa validade em geral se debilitará paulatinamente a medida que se considerem períodos de tempo mais amplos e, em consequência, é de grande necessidade que a pessoa que faz a análise de C-V-L tenha presente os pressupostos sob os quais se baseia a análise e, por conseguinte, compreenda suas limitações.

### 2.3. IGUALDADE FUNDAMENTAL

Existe uma igualdade que é válida em qualquer empresa, razão pela qual se transforma numa verdadeira identidade dentro da análise de C-V-L. Tal identidade será de muita utilidade na dedução e demonstração das expressões algébricas utilizadas na análise.

A referida igualdade se produz, entre as receitas totais e os custos totais mais o lucro.

Os custos totais podem ser decompostos em:

a) Custos variáveis, que estão integrados pelos custos variáveis de fabricação e pelos custos variáveis de administração e vendas.

b) Custos fixos, compostos pelos custos fixos de produção e pelos custos fixos de administração e vendas.

Esta igualdade pode ser expressa algebricamente da seguinte maneira:

$$R = C_V + C_F + L \quad (2)$$

onde:

R = Receita de vendas

$C_V$  = Custo variável

$C_F$  = Custo fixo

L = Lucro

#### 2.4. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS RELAÇÕES DE CUSTO - VOLUME - LUCRO

De acordo com os pressupostos que foram destacados anteriormente, sob os quais se baseia a análise de C-V-L, é possível representar por meio de linhas retas cada um dos custos incorridos na empresa, assim como as receitas obtidas pela venda de seus produtos. Com este objetivo, representar-se-ã esta situação em um sistema de coordenadas, onde no eixo das abcissas figuram os diversos níveis de atividades (volume), medidos segundo certa base dada, e no eixo das ordenadas representa-se tanto os custos como as receitas.

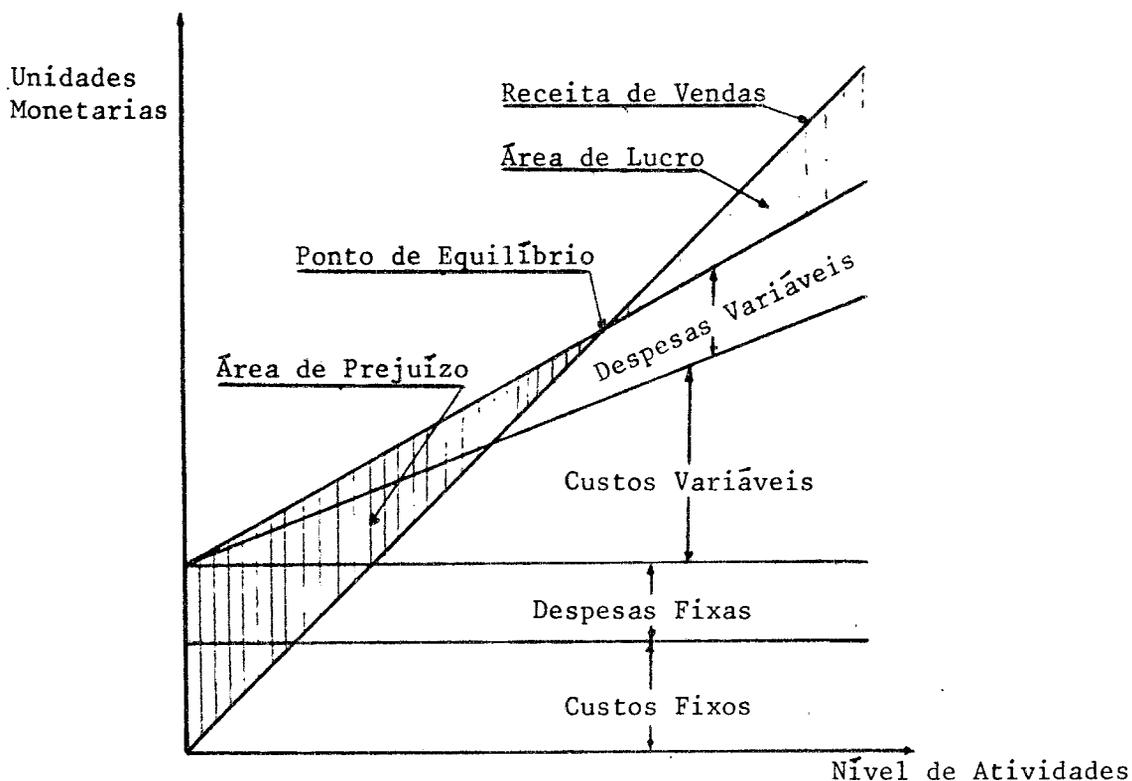


FIGURA 3.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS RELAÇÕES ENTRE CUSTO - VOLUME - LUCRO

Nota: Para maior facilidade expositiva e a fim de abreviar a notação, usa-se daqui em diante a expressão "custo" em lugar de "custos e despesas".

## 2.5. ANÁLISE DE CUSTO - VOLUME - LUCRO EM EMPRESAS MONO-PRODUTORAS

### 2.5.1. PONTO DE EQUILÍBRIO

Uma vez conhecida a estrutura de C-V-L, para uma determinada empresa, é possível chegar a determinar um nível de vendas onde a receita que a empresa obtém pela venda de seus produtos se iguala aos custos totais incorridos na produção e venda desses produtos, nessa situação a empresa não está ganhando nem perdendo. A este nível de vendas dá-se o nome de "ponto de equilíbrio" ou "nível de equilíbrio".

De acordo com o exposto anteriormente, pode-se definir o ponto ou nível de equilíbrio como "aquele nível de atividades, expressado em unidades físicas ou monetárias, no qual os custos totais se igualam às receitas totais".<sup>3</sup>

Graficamente pode-se observar através da figura 4 que este nível de equilíbrio corresponde àquele nível de atividade onde se dá a interseção da reta de receitas totais com a reta de custos totais.

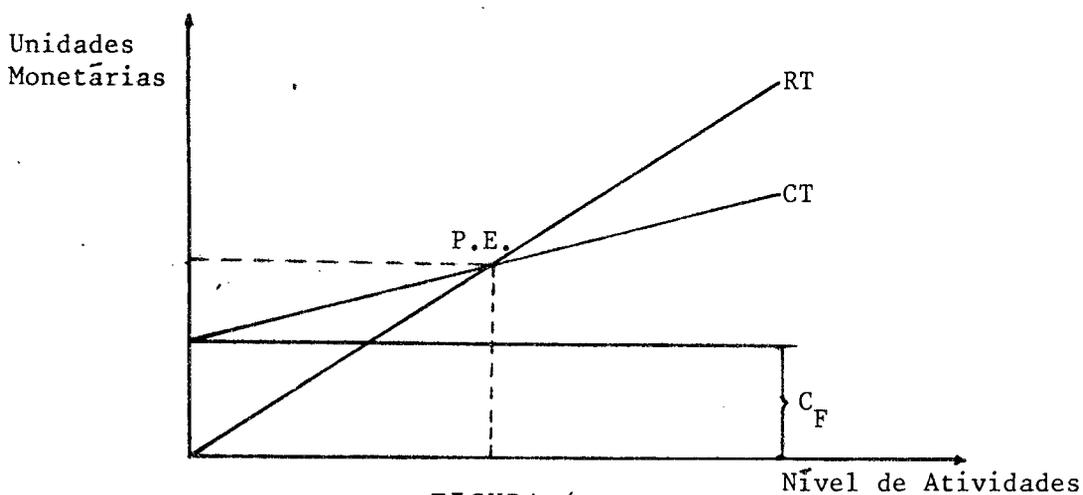


FIGURA 4.

### REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO PONTO DE EQUILÍBRIO

<sup>3</sup> ROJAS LEZANA, Ricardo G. Analisis de Custo - Volumen - Utilidad Bajo Condiciones de incertidumbre. p - 11

Através de uma simples observação do gráfico da figura 4, pode-se afirmar que o ponto de equilíbrio corresponde a um nível de atividade específico, isto é: representa um valor monetário específico ou uma quantidade de unidades num intervalo de atividades dentro do qual pode variar o nível de produção e vendas de uma empresa, portanto é válido afirmar que o ponto de equilíbrio corresponde a uma situação particular dentro da análise de custo - volume - lucro que se caracteriza, como expressa a definição, pela igualdade entre os custos totais e as receitas totais e, em consequência, é um erro conceber o ponto de equilíbrio e a análise de C-V-L como denominações equivalentes referidas a uma mesma situação.

Uma forma alternativa de representar graficamente o ponto de equilíbrio, é mediante a utilização de um gráfico lucro - volume, mostrando na figura 5, no qual sobre o eixo das abcissas representa-se o volume de atividades (medido em unidades físicas ou monetárias) e sobre o eixo das ordenadas representa-se o resultado que a empresa obtém a distintos níveis de atividades.

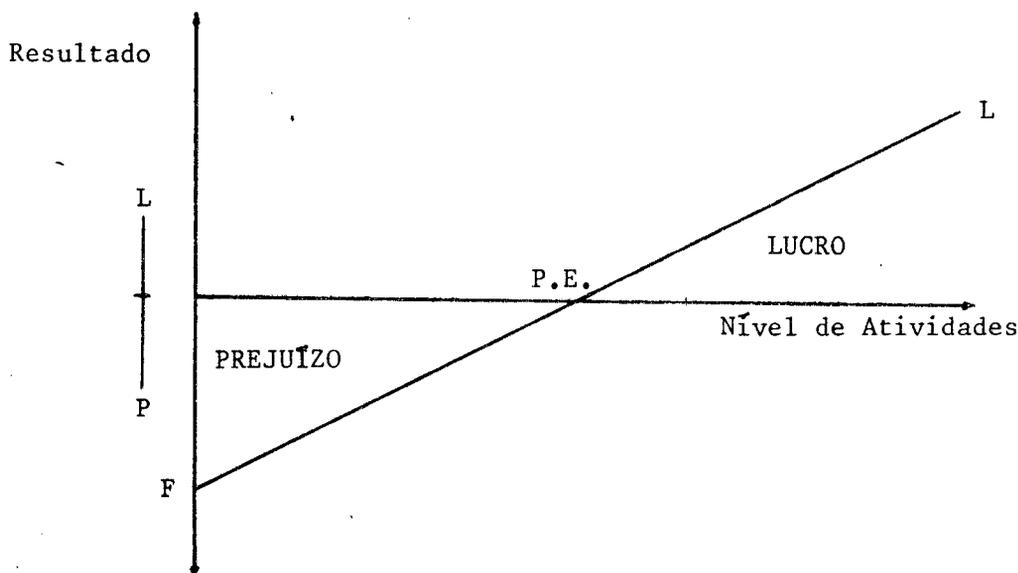


FIGURA 5

FORMA ALTERNATIVA PARA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO PONTO DE EQUILÍBRIO

Neste tipo de gráfico, o ponto de equilíbrio corresponderá à interseção da linha de recuperação de custos fixos (L) no eixo das abcissas. É neste ponto onde o lucro será zero, ou seja, os custos totais serão iguais as receitas totais.

No ponto (F) onde a reta (L) intercepta o eixo das ordenadas, estará determinado o total de custos fixos da empresa.

Cabe ressaltar que os gráficos utilizados para representar o ponto de equilíbrio, tem sido simplificados ao máximo, a fim de não dificultar a observação da interseção das diferentes retas que dão origem ao ponto de equilíbrio, e que é o que se deseja mostrar.

O ponto de equilíbrio, numa empresa mono-produtora, pode ser expresso indistintamente em unidades físicas ou monetárias, visto que, neste caso, não se apresenta o problema de heterogeneidade de unidades de medida para distintos produtos, como ocorre no caso de empresas multi-produtoras que será analisado mais adiante.

A preocupação seguinte será deduzir as fórmulas correspondentes ao ponto de equilíbrio, para o caso em que este se expressa em unidades físicas e, posteriormente, para o caso em que se expressa em unidades monetárias.

#### PONTO DE EQUILÍBRIO EXPRESSADO EM UNIDADES FÍSICAS

$$\text{Sabe-se que, } R = C_V + C_F + L \quad (3)$$

mas, por definição, o lucro no nível de equilíbrio será zero, e portanto, a igualdade fundamental apresenta, neste caso, a seguinte forma:

$$R = C_V + C_F \quad (4)$$

A receita pode apresentar-se como o produto do preço de venda unitário pelo número de unidades que a empresa deve produzir e vender para alcançar o nível de equilíbrio. Este número de unidades será a incógnita e designar-se-á por  $Q_0$ .

De forma semelhante, os custos e despesas variáveis ( $C_V$ ), podem ser expressos como o produto dos custos e despesas variáveis, por unidade ( $c_v$ ), por  $Q_0$ , com o qual a igualdade fundamental adotará a seguinte forma:

$$p \times Q_0 = c_v \times Q_0 + C_F$$

$$p \times Q_0 - c_v \times Q_0 = C_F$$

$$(p - c_v) Q_0 = C_F$$

Finalmente, isolando  $Q_0$  obtém-se a seguinte fórmula que nos permitirá calcular o ponto de equilíbrio expresso em unidades físicas

$$Q_{PE} = \frac{C_F}{p - c_v} \quad (5)$$

Exemplo 1: Para tornar mais clara a teoria, analisar-se-á o seguinte exemplo: Suponha-se que os seguintes dados correspondem a empresa "X":

Custos fixos	Cr\$ 200.000,00/ano
Despesas fixas de administração e vendas	Cr\$ 100.000,00/ano
Preço de venda unitário	Cr\$ 10,00
Custo variável unitário de fabricação	Cr\$ 4,00
Despesas variáveis de administração de vendas por unidade	Cr\$ 2,00

Com base nos dados apresentados, o ponto de equilíbrio da empresa "X" será:

$$Q_{PE} = \frac{\text{Cr\$ } 200.000,00 + \text{Cr\$ } 100.000,00}{\text{Cr\$ } 10,00 - (\text{Cr\$ } 4,00 + \text{Cr\$ } 2,00)} = \frac{\text{Cr\$ } 300.000,00}{\text{Cr\$ } 4,00} = 75.000 \text{ unidades}$$

O resultado obtido indica que a empresa "X" deve produzir e vender 75.000 unidades para atingir o equilíbrio, posto que a este nível de atividade os custos totais em que deverá incorrer a empresa, para produzir e vender este número de unidades, será de igual montante que as receitas que se obtêm pela venda dos referidos produtos.

A representação gráfica do exemplo seria a seguinte:

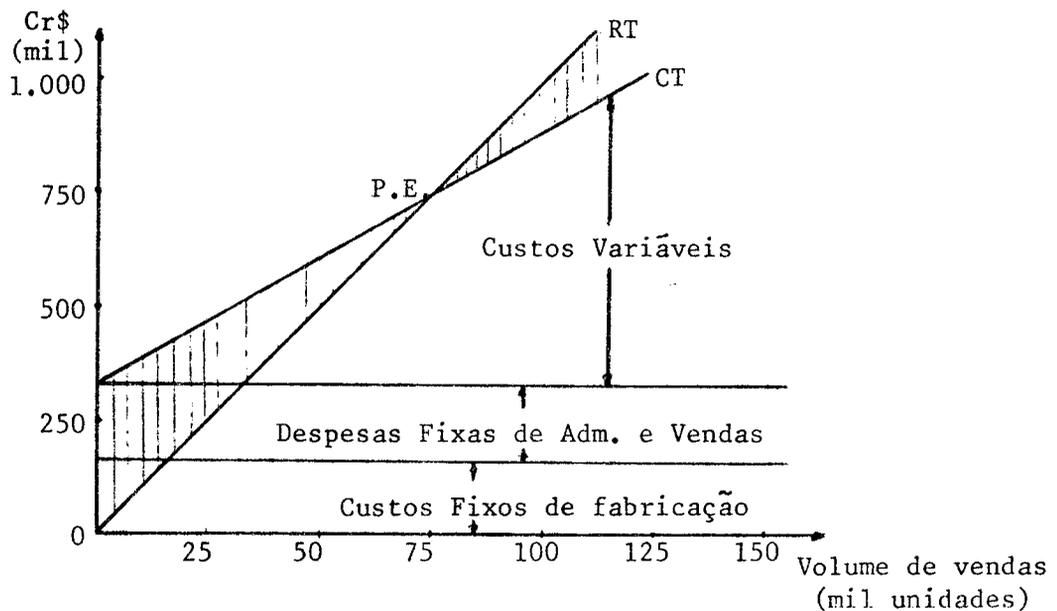


FIGURA 6

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO EXEMPLO 1

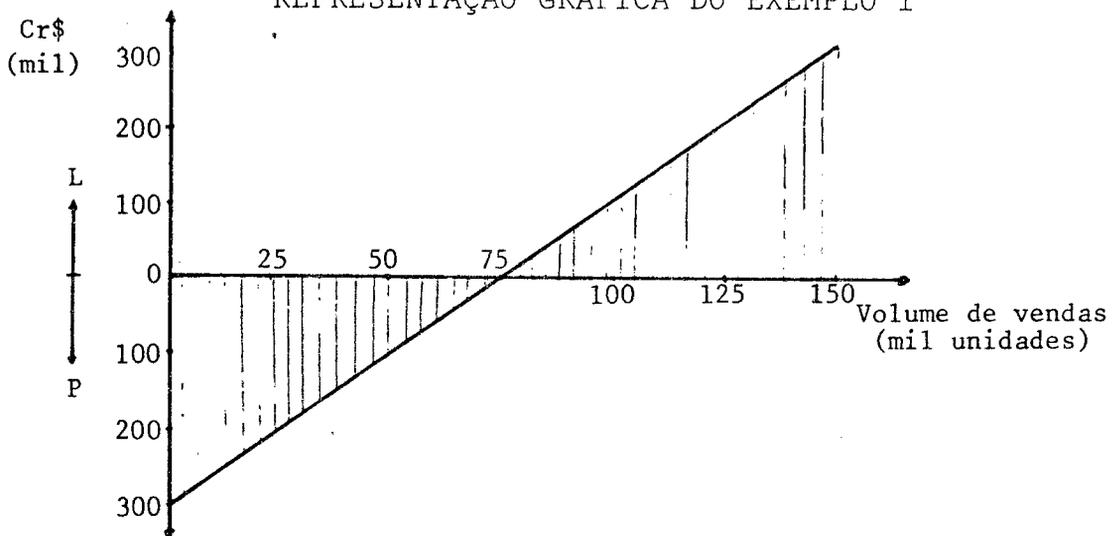


FIGURA 7

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO EXEMPLO 1 NO GRÁFICO VOLUME - LUCRO

### 2.5.2. MARGEM DE CONTRIBUIÇÃO

A margem de contribuição ( $M_c$ )<sup>4</sup> pode ser definida como "aquela parte da receita de vendas que é destinada a cobrir os custos fixos e gerar lucros, uma vez que tenham sido cobertos os custos variáveis", isto é:

$$M_c = R - C_V \quad (6)$$

sabendo-se que  $R = p \times Q$  e  $C_V = c_v \times Q$ , onde  $Q$  é o número de unidades vendidas, tem-se :

$$M_c = p \times Q - c_v \times Q$$

$$M_c = (p - c_v) \times Q \quad (7)$$

Note-se que a expressão  $(p - c_v)$ , é a mesma que aparece na fórmula do ponto de equilíbrio expressado em unidades físicas. A diferença entre o preço de venda unitário e os custos variáveis por unidade denomina-se "margem de contribuição unitária" ( $m_c$ ), e corresponde à contribuição que cada unidade vendida faz para cobrir os custos fixos e gerar lucros, prevendo-se a cobertura de seus próprios custos variáveis. O Ponto de Equilíbrio pode ser expresso em unidades físicas ou monetárias.

### 2.5.3. RAZÃO DE CONTRIBUIÇÃO

Antes da determinação do ponto de equilíbrio expressado em unidades monetárias, é necessário conhecer a contribuição que cada unidade monetária de vendas faz para a cobertura dos custos fixos e a geração de lucro.

Em itens precedentes tem-se definido o conceito da margem de

<sup>4</sup> Op.Cit. ROJAS LEZANA, Ricardo G. p-16

contribuição unitária, o qual não é outra coisa senão a contribuição feita por "p" unidades monetárias de venda para a cobertura dos custos fixos e para a geração de lucro, portanto, pode-se obter a contribuição de cada unidade monetária de venda dividindo a margem de contribuição unitária ( $m_c$ ) pelo preço de venda unitário "p". Este quociente se denomina "razão de contribuição" ( $R_C$ ). A expressão algébrica da razão de contribuição será:

$$R_C = \frac{m_c}{p} = \frac{p - c_v}{p} = 1 - \frac{c_v}{p} \quad (9)$$

A razão de contribuição é capaz de proporcionar informação de muita utilidade à direção da empresa, por quanto ela indicará, por exemplo, de quanto aumentará ou diminuirá seu lucro frente a variações no volume de vendas.

Uma alta razão de contribuição, em comparação com uma baixa razão de contribuição, implicará que a empresa aumentará rapidamente suas perdas se seu volume de vendas cai abaixo do nível de equilíbrio. Pelo contrário, se a empresa aumenta seu volume de vendas acima do nível de equilíbrio, a empresa incrementará rapidamente, seu lucro, maior quanto seja a razão de contribuição.

#### 2.5.4. RAZÃO DOS CUSTOS VARIÁVEIS

O quociente entre os custos variáveis por unidade ( $c_v$ ), e o preço de venda unitário (p), se denomina "razão dos custos variáveis" ( $R_v$ )<sup>5</sup>, e pode ser definido como "aquela parte de cada unidade monetária de vendas, destinada a cobrir os custos variáveis"

<sup>5</sup> Op. Cit. ROJAS LEZANA, Ricardo G. p-17

Esta razão pode ser obtida, também, dividindo-se os custos variáveis totais pelas receitas totais, obtendo-se idêntico resultado, como é demonstrado a seguir:

$$R_V = \frac{C_V}{R} = \frac{c_v \times Q}{p \times Q} = \frac{c_v}{p} \quad (10)$$

Consequentemente, pode-se expressar  $R_C$  como:

$$R_C = 1 - R_V \quad (11)$$

Esta última expressão, dá origem a uma verdadeira identidade dentro da análise de custo - volume - lucro, que pode ser expressa da seguinte maneira:

$$R_C + R_V = 1 \quad (12)$$

Uma vez determinada a contribuição que cada unidade monetária de vendas faz para cobrir os custos fixos e gerar lucros, pode-se deduzir uma fórmula que permita calcular o ponto de equilíbrio, para o qual bastará dividir o montante dos custos fixos pela razão de contribuição, considerando que não se obterá nenhum lucro, visto que se trata do nível de equilíbrio. Daí chega-se à expressão algébrica seguinte:

$$R_{PE} = \frac{C_F}{R_C} = \frac{C_F}{1-R_V} = \frac{C_F}{1-\frac{c_v}{p}} \quad (13)$$

onde:  $R_{PE}$  = Receita no ponto de equilíbrio (Ponto de equilíbrio

expresso em unidades monetárias).

Exemplo 2: Usando os dados do exemplo 1, o ponto de equilíbrio, expressado em unidades monetárias, será:

$$\begin{aligned}
 R_{PE} &= \frac{\text{Cr\$ } 200.000,00 + \text{Cr\$ } 100.000,00}{1 - \frac{(4 + 2)}{10}} = \frac{\text{Cr\$ } 300.000,00}{1 - \frac{6}{10}} = \\
 &= \frac{\text{Cr\$ } 300.000,00}{0.4} \\
 &= \text{Cr\$ } 750.000,00
 \end{aligned}$$

Este resultado indica que a empresa para alcançar seu ponto de equilíbrio, deve vender Cr\$ 750.000,00, o que equivale a produzir e vender 75.000 unidades a um preço unitários de Cr\$10,00.

Pode-se representar esta situação através do gráfico a seguir:

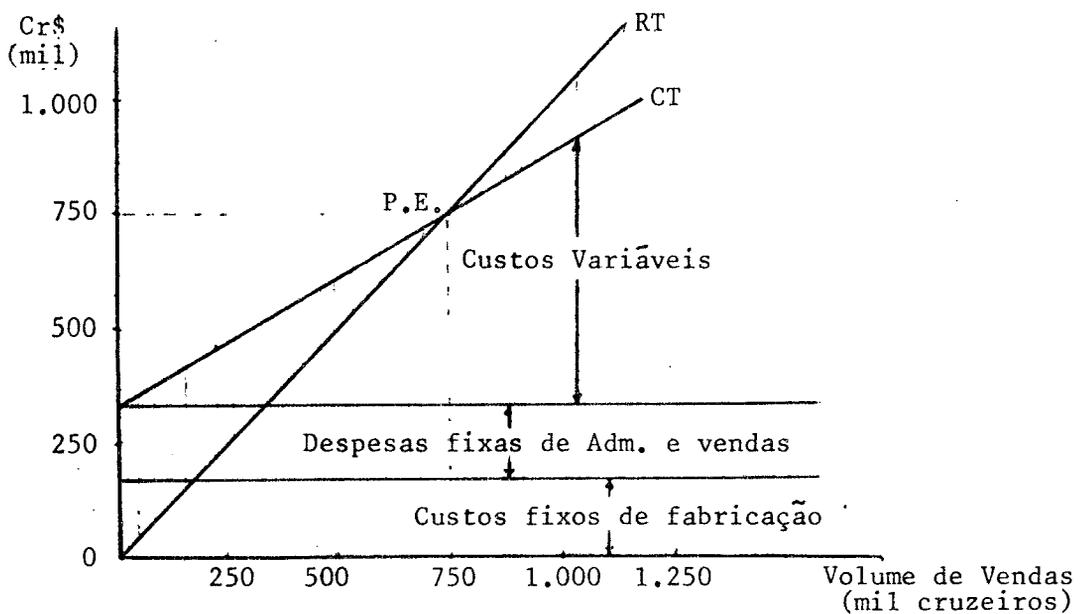


FIGURA 8. .

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO EXEMPLO 2

Pode-se, também, utilizar um gráfico volume - lucro, como é mostrado a seguir:

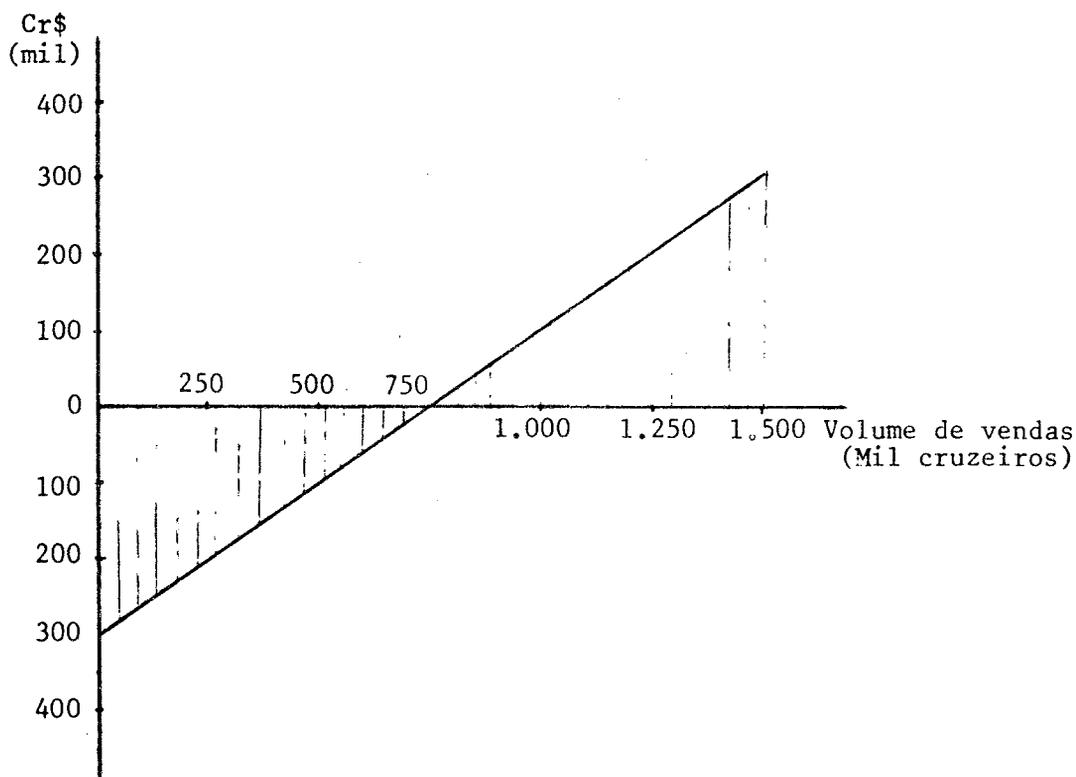


FIGURA 9

DEMONSTRAÇÃO GRÁFICA DE EXEMPLO 2  
NUM GRÁFICO VOLUME - LUCRO

#### 2.5.5 DESLOCAMENTOS DO PONTO DE EQUILÍBRIO.

A partir das fórmulas que se tem desenvolvido com o objetivo de calcular o nível de equilíbrio, expresso em unidades físicas ou monetárias, é possível deduzir quais podem ser as causas de um eventual deslocamento do ponto de equilíbrio, com respeito a uma situação inicial dada.

Estas causas são as seguintes:

- a) variação do montante de custos fixos
- b) variação do preço de venda unitário, e
- c) variação dos custos variáveis por unidade.

Portanto, dado que estas variações nas variáveis se podem produzir, para cada uma, em dois sentidos: aumento ou diminuição, sem que isto implique em mudanças nas variáveis restantes

(CETERIS PARIBUS), o efeito que isto produzirá no ponto de equilíbrio será, conseqüentemente, um aumento ou uma diminuição, ou seja, um deslocamento para a direita ou para a esquerda do gráfico, respectivamente.

As variações que produzem um aumento no nível de equilíbrio são:

1. Aumento no montante dos custos fixos - Ante um aumento de qualquer um dos itens que compõem o montante total de custos fixos, o ponto de equilíbrio aumentará, visto que, se as variáveis restantes permanecem constantes, um maior montante de custos fixos deverá ser coberto pela mesma margem de contribuição ou por idêntica razão de contribuição, quando se calcula o ponto de equilíbrio em unidades físicas ou monetárias, respectivamente.

2. Diminuição do preço de venda unitário - Isto significa que a margem de contribuição diminuirá, a razão do custo variável unitário sobre preço de venda unitário ( $\frac{C_v}{P}$ ) aumentará e, em consequência, diminuirá também a razão de contribuição, portanto, o nível de equilíbrio aumentará, o que equivale a dizer que ocorrerá um deslocamento para a direita do gráfico.

3. Aumento dos custos variáveis por unidade - As conseqüências serão idênticas às que se produzem ao diminuir o preço, ou seja, dará lugar a uma diminuição da margem de contribuição, um aumento da razão do custo variável unitário sobre preço de venda unitário, uma diminuição da razão de contribuição e, em consequência, ocorrerá um aumento no nível de equilíbrio, deslocando-se este para a direita do gráfico.

Por outro lado, as variações que produzirão uma diminuição do nível de equilíbrio, nas condições assinaladas anteriormente serão:

1. Diminuição no montante dos custos fixos - Isto implica que

uma menor parte dos custos fixos será coberta pela mesma margem de contribuição, e por idêntica razão de contribuição, o que, evidentemente, significará uma diminuição do nível de equilíbrio.

2. Aumento do preço de venda unitário- Se o preço de venda unitário aumentar, aumentará também a margem de contribuição, diminuirá a razão dos custos variáveis, aumentará a razão de contribuição e, em consequência, o nível de equilíbrio diminuirá.

3. Diminuição dos custos variáveis por unidades- Se isto ocorrer, aumentará a margem de contribuição, diminuirá a razão dos custos variáveis, aumentará a razão de contribuição e portanto, diminuirá o nível de equilíbrio.

#### 2.5.6. EXPRESSÃO GRÁFICA E MATEMÁTICA DOS DESLOCAMENTOS DO PONTO DE EQUILÍBRIO.

As expressões matemática e gráfica de todas as variações descritas anteriormente são as seguintes:

##### 1. Variação do montante de custos fixos.

O novo nível de equilíbrio, depois de uma variação no montante de custos fixos, pode expressar-se algebricamente como segue:

$$Q'_{PE} = \frac{C_F \pm \Delta C_F}{m_c} \quad (14)$$

$$Q'_{PE} = Q_{PE} \frac{C'_F}{C_F} \quad (15)$$

onde:

$Q_{PE}$  = Ponto de equilíbrio inicial expresso em unidades físicas

$Q'_{PE}$  = Novo ponto de equilíbrio expresso em unidades físicas

$C_F$  = Montante inicial de custos fixos

$C'_F$  = Novo montante de custos fixos

$\Delta C_F$  = Variação do montante de custos fixos

$m_{cu}$  = Margem de contribuição unitária.

Esta situação fica demonstrada graficamente pela figura abaixo:

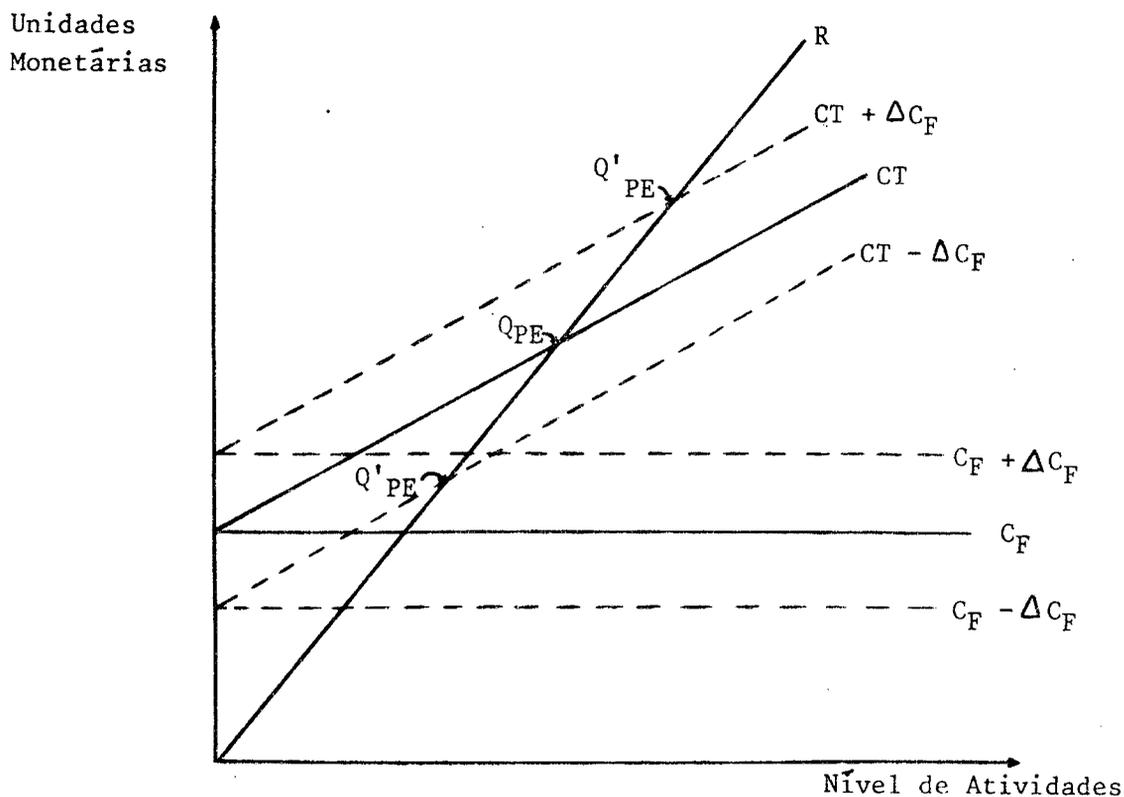


FIGURA 10

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO DESLOCAMENTO DO PONTO DE EQUILÍBRIO QUANDO HÁ VARIAÇÕES DO MONTANTE DE CUSTOS FIXOS.

## 2. Variação do preço de venda unitário.

A expressão matemática de novo nível de equilíbrio, que se obtém como consequência de uma variação no preço de venda unitário é a seguinte:

$$Q'_{PE} = \frac{C_F}{(p \pm \Delta p) - c_v} \quad (16)$$

ou

$$Q'_{PE} = Q_{PE} \frac{p - c_v}{p' - c_v} \quad (16)$$

onde:

$Q_{PE}$  = Ponto de equilíbrio inicial expresso em unidades físicas.

$Q'_{PE}$  = Novo ponto de equilíbrio expresso em unidades físicas

$p$  = Preço de venda unitário inicial

$p'$  = Novo preço de venda unitário

$c_v$  = Custo variável unitário

$\Delta p$  = Variação do preço de venda unitário

$C_F$  = Montante de custos fixos

Esta situação fica demonstrada graficamente pela figura abaixo:

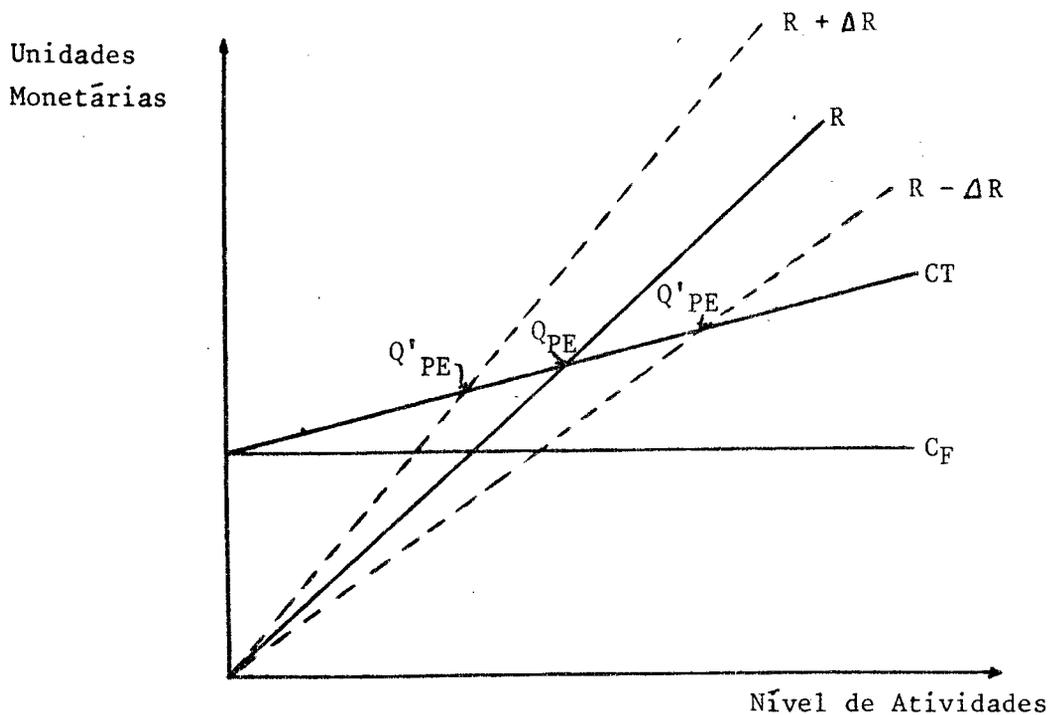


FIGURA 11

DEMONSTRAÇÃO GRÁFICA DO DESLOCAMENTO DO PONTO DE EQUILÍBRIO QUANDO HÁ VARIAÇÃO DO PREÇO DE VENDA UNITÁRIO.

### 3. Variação dos custos variáveis por unidade.

O novo nível de equilíbrio, em consequência de uma variação do custo variável por unidade, pode expressar-se algebricamente como segue:

$$Q'_{PE} = \frac{C_F}{p - (c_v + \Delta c_v)} \quad (18)$$

ou

$$Q'_{PE} = Q_{PE} \frac{p - c_v}{p - c'_v} \quad (19)$$

onde:

$Q_{PE}$  = Ponto de equilíbrio inicial expresso em unidade monetária

$Q'_{PE}$  = Novo ponto de equilíbrio expresso em unidades monetárias

$C_F$  = Montante de custos fixos

$p$  = Preço de venda unitário

$c_v$  = Custo variável inicial por unidade

$c'_v$  = Novo custo variável por unidade

$\Delta c_v$  = Variação de custo variável por unidade

Esta situação se ilustra graficamente na figura a seguir:

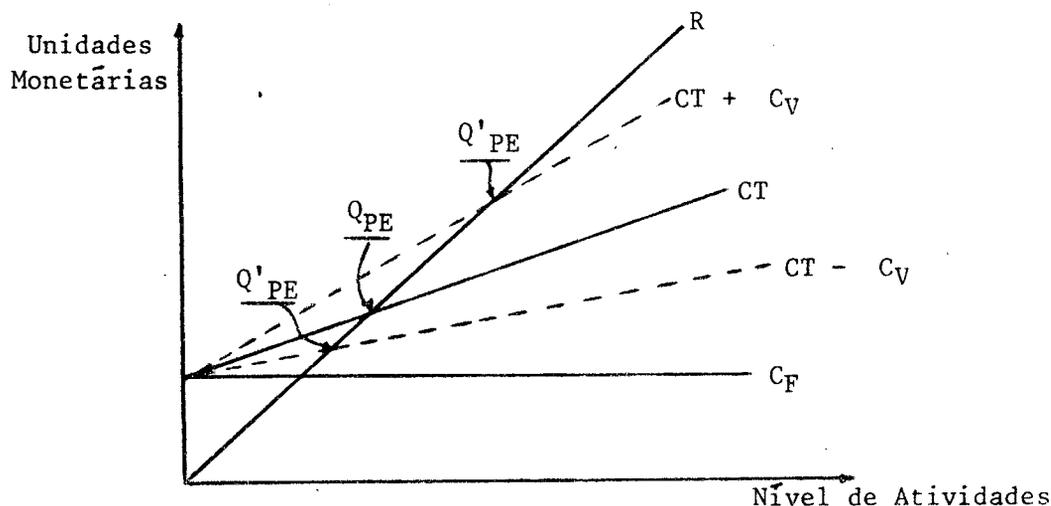


FIGURA 12

DEMONSTRAÇÃO GRÁFICA DO DESLOCAMENTO DO PONTO DE EQUILÍBRIO QUANDO HÁ VARIAÇÃO NOS CUSTOS VARIÁVEIS POR UNIDADE

Em todas as situações mencionadas os deslocamentos que se produzem no nível de equilíbrio se verificam tanto para o caso em que este se expresse em unidades físicas, como para o caso em que se expresse em unidades monetárias, e este deslocamento é, naturalmente, no mesmo sentido. Contudo existe uma situação que merece ser destacada, pois nela acontece algo diferente:

Exemplo 3: Suponha-se que na empresa "X", dos exemplos anteriores, se produzem as seguintes variações:

a) O preço de venda unitário aumenta em Cr\$ 10,00, passando para Cr\$ 20,00, e

b) Aumentam os custos e despesas variáveis por unidade para Cr\$ 16,00.

Considerando estes novos valores, pode-se calcular o nível de equilíbrio, obtendo-se os seguintes resultados:

$$Q_{PE} = \frac{\text{Cr\$ } 300.000,00}{\text{Cr\$ } 20,00 - \text{CR\$ } 16,00} = \frac{\text{Cr\$ } 300.000,00}{\text{Cr\$ } 4,00} = 75.000 \text{ unidades}$$

$$R_{PE} = \frac{\text{CR\$ } 300.000,00}{1 - \frac{\text{Cr\$ } 16,00}{\text{Cr\$ } 20,00}} = \frac{\text{Cr\$ } 300.000,00}{1 - 0,8} = \frac{\text{Cr\$ } 300.000,00}{0,2} = \text{Cr\$ } 1.500.000,00$$

Em consequência, o ponto de equilíbrio expresso em unidades físicas tem se mantido em 75.000 unidades, posto que a margem de contribuição unitária é a mesma que na situação inicial, apesar de ter variado o preço de venda unitário e os custos variáveis por unidade. Por sua vez, o nível de equilíbrio expresso em unidades monetárias tem aumentado como consequência de uma diminuição na razão de contribuição.

Se em lugar de aumentar o preço de venda e os custos variáveis

veis por unidade, eles tivessem diminuído mantendo sempre a mesma margem de contribuição unitária, o ponto de equilíbrio expresso em unidades físicas se manteria invariável, porém, o nível de equilíbrio expresso em unidades monetárias teria diminuído.

#### 2.5.7. VENDAS ESPERADAS

Já foi dito que a análise de custo - volume - lucro vai muito mais além do cálculo do ponto de equilíbrio, e que, o não conhecimento deste fato, significa menosprezar as potencialidades da análise no que diz respeito à informação que esta pode proporcionar com o objetivo de subsidiar o processo de tomada de decisões. Assim, por exemplo, é possível deduzir fórmulas que nos permitam conhecer que quantidade de unidades devem ser vendidas, a um determinado preço, para obter um montante esperado de lucro, uma vez conhecida a estrutura de custos da empresa.

A partir da igualdade fundamental (fórmula 2), o volume de vendas esperado (Q) necessário para obter um lucro (L) dado, se determina como segue:

$$R = C_F + C_V + L$$

$$p \times Q = C_F + C_V + L$$

$$p \times Q = C_F + c_v \times Q + L$$

$$p \times Q - c_v \times Q = C_F + L$$

$$(p - c_v) \times Q = C_F + L$$

$$Q = \frac{C_F + L}{p - c_v} \quad (20)$$

Exemplo 4: Suponha-se que a empresa "X" dos exemplos anteriores, espera obter um lucro de Cr\$ 100.000,00. Quantas unidades deverá produzir e vender para alcançar este lucro?

Aplicando a fórmula 20 tem-se

$$Q = \frac{\text{Cr\$ } 300.000,00 + \text{Cr\$ } 100.000,00}{\text{Cr\$ } 10,00 - \text{Cr\$ } 6,00} = \frac{\text{Cr\$ } 400.000,00}{\text{Cr\$ } 4,00} = 100.000 \text{ unidades}$$

Isto significa que, para o volume de produção e venda de 100.000 unidades, a margem de contribuição total da empresa é capaz de cobrir a totalidade dos custos fixos e, além disso, gerar um lucro de Cr\$ 100.000,00.

Este resultado pode ser comprovado através de "DEMONSTRATIVO DE LUCROS E PERDAS", baseado no custeio direto ou variável, como vê-se a seguir:

#### DEMONSTRATIVO DE LUCROS E PERDAS

Receita de vendas (100.000u à Cr\$ 10,00)		Cr\$ 1.000.000,00
(-) Custos variáveis de fabricação (100.000u à Cr\$ 4,00)		<u>Cr\$ 400.000,00</u>
Margem de Contribuição Bruta		Cr\$ 600.000,00
(-) Despesas Variáveis de administração e vendas (100.000u à Cr\$ 2,00)		<u>Cr\$ 200.000,00</u>
Margem de Contribuição Líquida		Cr\$ 400.000,00
(-) Custos Fixos	Cr\$ 200.000,00	
(-) Despesas Fixas de Administração e vendas	<u>Cr\$ 100.000,00</u>	<u>Cr\$ 300.000,00</u>
Lucro líquido antes do I.R.		Cr\$ 100.000,00

É frequente expressar o lucro esperado como um percentual da receita de vendas e, neste caso, a fórmula que permite calcular o volume de vendas (Q) necessário para obter este lucro, é deduzida da seguinte maneira:

$$R = C_V + C_F + \% R$$

$$p \times Q = c_v \times Q + C_F + \% \times p \times Q$$

$$p \times Q - c_v \times Q - \% \times p \times Q = C_F$$

$$(p - c_v - \% \times p) \times Q = C_F$$

$$(1 - \%)\times p - c_v \times Q = C_F$$

$$Q = \frac{C_F}{(1 - \%)\times p - c_v} \quad (21)$$

Exemplo 5: Recorrendo sempre à nossa empresa "X", suponha-se que se deseja obter um lucro equivalente a 20% da receita de vendas.

Aplicando a fórmula 21 tem-se:

$$Q = \frac{\text{Cr\$ } 300.000,00}{(1 - 0,2) \times \text{Cr\$ } 10,00 - \text{Cr\$ } 6,00} = \frac{\text{Cr\$ } 300.000,00}{\text{Cr\$ } 8,00 - \text{Cr\$ } 6,00} = 150.000 \text{ unidades}$$

Igualmente ao caso anterior, a validade deste resultado pode ser comprovada através de um DEMONSTRATIVO DE LUCROS E PERDAS, baseada no custeio direto.

#### DEMONSTRATIVO DE LUCROS E PERDAS

Receita de vendas (150.000u a Cr\$10,00)		Cr\$ 1.500.000,00
(-) Custos variáveis de fabricação (150.000u a Cr\$4,00)		<u>Cr\$ 600.000,00</u>
	Margem de Contribuição Bruta	Cr\$ 900.000,00
(-) Despesas Variáveis de Administração e Vendas (150.000u a Cr\$2,00)		<u>Cr\$ 300.000,00</u>
	Margem de Contribuição Líquida	Cr\$ 600.000,00
(-) Custos fixos	Cr\$ 200.000,00	
(-) Despesas Fixas de Administração e Vendas.	<u>Cr\$ 100.000,00</u>	<u>Cr\$ 300.000,00</u>
	Lucro líquido antes do I.R.	Cr\$ 300.000,00

De igual maneira, pode-se expressar o volume de receitas de vendas (R) utilizando a seguinte fórmula:

$$R = \frac{C_F + L}{R_C} = \frac{C_F + L}{1 - R_V} = \frac{C_F + L}{1 - \frac{C_V}{P}} \quad (22)$$

Exemplo 6: Suponha-se que a empresa "X" deseja obter um lucro de Cr\$ 100.000,00. Qual será o volume de produção e vendas (R) necessário para alcançar este lucro?

Aplicando a fórmula 22 temos:

$$R = \frac{\text{Cr\$ } 300.000,00 + \text{Cr\$ } 100.000,00}{1 - \frac{\text{Cr\$ } 6,00}{\text{Cr\$ } 10,00}} = \frac{\text{Cr\$ } 400.000,00}{1 - 0,6} = \frac{\text{Cr\$ } 400.000,00}{0,4}$$

$$R = \text{Cr\$ } 1.000.000,00$$

A validade deste resultado fica comprovada pelo fato de que o volume de produção e vendas (Q) necessário para obter o lucro de Cr\$ 1.000.000,00 era de 100.000 unidades, considerando o seu preço de venda unitário, elas proporcionam uma receita de vendas (R) no valor de Cr\$ 1.000.000,00.

#### 2.5.8. MARGEM DE SEGURANÇA

A margem de segurança ( $M_S$ )<sup>6</sup> pode ser definida como a "diferença entre o volume de vendas, real ou pressuposto, e o nível de equilíbrio", ou seja, indica o quanto pode diminuir o volume de vendas sem que a empresa incorra em prejuízo.

Esta margem de segurança pode ser expressa da seguinte for

<sup>6</sup> Op. Cit. ROJAS LEZANA, Ricardo G. p-27

$$M_S = \frac{R - R_{PE}}{R} \times 100 \quad (23)$$

Este conceito pode visualizar-se mais facilmente através de um exemplo numérico.

Exemplo 7: Os dados seguintes correspondem às empresas A e B, respectivamente:

	EMPRESA "A"	EMPRESA "B"
Venda	Cr\$ 100.000,00	Cr\$ 100.000,00
Custos Fixos	Cr\$ 70.000,00	Cr\$ 30.000,00
Custos Variáveis	Cr\$ 20.000,00	Cr\$ 60.000,00
Lucro	Cr\$ 10.000,00	Cr\$ 10.000,00

O ponto de equilíbrio será Cr\$ 87.500,00 e Cr\$ 75.000,00 para a empresa A e B respectivamente, porém apesar dos lucros serem iguais a margem de segurança será diferente para cada empresa. Assim tem-se:

$$M_S (\text{Empresa "A"}) = \frac{\text{Cr\$ } 100.000,00 - \text{Cr\$ } 87.500,00}{\text{Cr\$ } 100.000,00} \times 100 = 12,5\%$$

$$M_S (\text{Empresa "B"}) = \frac{\text{Cr\$ } 100.000,00 - \text{Cr\$ } 75.000,00}{\text{Cr\$ } 100.000,00} \times 100 = 25,0\%$$

Este resultado indica que a empresa "A" terá prejuízo se seu atual volume de vendas diminuísse, além de 12.5%. Por outro lado, a empresa "B", diante de uma diminuição do volume de vendas idêntica a da empresa "A", continuará obtendo lucro, e só incorrerá em prejuízo se seu atual volume de vendas diminuir além de 25,0%.

É importante ressaltar que se uma determinada empresa apresenta um alto montante de custos fixos, uma elevada razão de contribuição e uma baixa margem de segurança, a direção desta empresa deverá procurar reduzir o montante de custos e despesas fixas; aumen

tar o volume de vendas e melhorar sua margem de segurança.

Pelo contrário, se existe uma baixa razão de contribuição e uma baixa margem de segurança, os esforços deverão orientar-se a aumentar o preço de venda ou a reduzir os custos variáveis.

## 2.6. ANÁLISE DE CUSTO-VOLUME-LUCRO EM EMPRESAS MULTIPRODUTORAS

Até agora, tem-se desenvolvido toda a análise tendo em vista uma empresa que se dedica à fabricação de um só produto, ou seja, uma empresa monoprodutora. Sem dúvida a análise de custo - volume - lucro é aplicada, também, àquelas empresas que fabricam mais de um produto, como pode-se observar a seguir.

### 2.6.1. PONTO DE EQUILÍBRIO

Quando se trata de uma empresa monoprodutora, nota-se que é possível determinar o ponto de equilíbrio, tanto em unidades físicas como monetárias, sem que necessariamente estes cálculos apresentem uma certa seqüência, ou seja, sem que seja necessário determinar primeiro o ponto de equilíbrio em unidades físicas e posteriormente expressá-lo em unidades monetárias ou vice-versa.

Agora, no caso de empresas multiprodutoras, será necessário observar esta seqüência e deve-se calcular primeiro um ponto de equilíbrio expresso em unidades monetárias, e uma vez de terminado este ponto de equilíbrio, pode-se determinar um ponto de equilíbrio expresso em unidades físicas, o qual será uma combinação dos diferentes produtos elaborados pela empresa, levando em consideração os pressupostos assinalados anteriormente e que terão validade na devida oportunidade.

A necessidade de observar esta seqüência se origina ante a impossibilidade de expressar o volume total de vendas em unidades físicas, porque os distintos produtos elaborados pela empresa não necessariamente apresentam a mesma unidade de medida e assim, por exemplo, é possível que se fabrique produtos cujas unidades em espécie sejam kilos, metros, litros, etc., ou seja: unidades heterogêneas.

Por esta razão, em primeiro lugar, deve-se expressar o volume de vendas em unidades monetárias a fim de reduzir distintas unidades de medida a um denominador comum e, em consequência, o ponto de equilíbrio deverá ser expresso, primeiro, em unidades monetárias para, posteriormente, deduzir um ponto de equilíbrio expressado em unidades físicas.

A primeira dificuldade no caso de produção múltipla, é que cada um dos produtos fabricados pela empresa terá seu próprio preço de venda, seu próprio custo variável por unidade e, em consequência, sua própria razão de contribuição. Portanto, pode-se ter tantas razões de contribuição diferentes como produtos fabricados na empresa, e estas contribuirão em distintas proporções a cobrir os custos fixos de acordo com os volumes de venda de cada um dos produtos. Por esta razão, deve-se determinar uma "razão de contribuição ponderada", para o qual, é preciso conhecer, além da razão de contribuição de cada produto, que parte da receita total de vendas da empresa é originada pela venda de cada um dos produtos que se fabricam, ou seja, é preciso conhecer a composição das vendas.

Uma vez conhecida esta informação, a razão de contribuição ponderada ( $\bar{R}_C$ ) se calculará da seguinte maneira:

PRODUTO	R <sub>C</sub>	COMPOSIÇÃO DE VENDAS	PONDERAÇÃO
1	R <sub>C1</sub>	% 1	R <sub>C1</sub> x % 1
2	R <sub>C2</sub>	% 2	R <sub>C2</sub> x % 2
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	R <sub>Cn</sub>	% n	R <sub>Cn</sub> x % n

A razão de contribuição ponderada para a empresa, será:

$$\bar{R}_C = \sum_{i=1}^n R_{Ci} \times \% i \quad (24)$$

onde:

R<sub>Ci</sub> = Razão de contribuição do i-ésimo produto

%i = Participação percentual do i-ésimo produto na composição das vendas da empresa.

Portanto, como é fácil deduzir, esta razão de contribuição ponderada, não é outra coisa senão uma "razão de contribuição equivalente", a qual representa o conjunto de razões de contribuição dos produtos fabricados pela empresa, ponderada pela respectiva participação dos mesmos na composição das vendas totais da empresa.

Uma vez definido este conceito, pode-se deduzir uma fórmula que permita calcular o ponto de equilíbrio para uma empresa multiprodutora, partindo sempre da mesma igualdade fundamental.

$$R = C_V + C_F + L \quad (25)$$

mas, já se sabe que o nível de equilíbrio se caracteriza porque o lucro é zero (L = 0), portanto, a igualdade será:

$$R = C_V + C_F \quad (26)$$

que, para o caso de empresas multiprodutoras, adotará a seguinte forma:

$$R_i + R_2 + \dots + R_n = R_{V1} \times R_1 + R_{V2} \times R_2 + \dots + R_{Vn} \times R_n + C_F \quad (27)$$

onde:

$R_i$  = Receita de vendas do  $i$ -ésimo produto

$R_{Vi}$  = Razão de custos e gastos variáveis do  $i$ -ésimo produto.

A fórmula 27 pode adotar as seguintes formas:

$$R_1 - R_{V1} \times R_1 + R_2 - R_{V2} \times R_2 + \dots + R_n - R_{Vn} \times R_n = C_F \quad (28)$$

$$(1 - R_{V1}) \times R_1 + (1 - R_{V2}) \times R_2 + \dots + (1 - R_{Vn}) \times R_n = C_F \quad (29)$$

Agora, dividindo ambos os membros desta última igualdade pela receita total de vendas ( $R_T$ ), obtêm-se

$$\frac{(1 - R_{V1}) \times R_1}{R_T} + \frac{(1 - R_{V2}) \times R_2}{R_T} + \dots + \frac{(1 - R_{Vn}) \times R_n}{R_T} = \frac{C_F}{R_T}$$

$$(1 - R_{V1}) \times \%_1 + ((1 - R_{V2}) \times \%_2 + \dots + (1 - R_{Vn}) \times \%_n = \frac{C_F}{R_T}$$

efetuando os produtos, obtêm-se:

$$\%_1 - R_{V1} \times \%_1 + \%_2 - R_{V2} \times \%_2 + \dots + \%_n - R_{Vn} \times \%_n = \frac{C_F}{R_T}$$

o qual pode ser expresso como segue:

---

Nota: Um estudo sobre alocação de custos foi desenvolvido em:

KLIEMANN NETO, F.J. Um Modelo Matricial para Alocação de Custos.  
Dissertação de Mestrado - UFSC - 1980.

$$1 - \sum_{i=1}^n R_{Vi} \times \% i = \frac{C_F}{R_T}$$

e finalmente, como  $\left(1 - \sum_{i=1}^n R_{Vi}\right)$  é igual a  $\left(\sum_{i=1}^n R_{Ci}\right)$ , se tem:

$$\sum_{i=1}^n R_{Ci} \times \% i = \frac{C_F}{R_T} \quad (30)$$

Isolando o valor de  $R_T$ , obtém-se:

$$R_T = \frac{C_F}{\sum_{i=1}^n R_{Ci} \times \% i} \quad (31)$$

ou seja:

$$R_{PE} = \frac{C_F}{\bar{R}_C} \quad (32)$$

EXEMPLO 8: Suponha-se que a empresa "Y" fabrica três produtos distintos com diferentes razões de contribuição. Estes produtos participam na composição das vendas totais da empresa nas proporções descritas a seguir:

PRODUTO	$R_C$	PARTICIPAÇÃO NA COMPOSIÇÃO DAS VENDAS
A	0,30	50 %
B	0,20	30 %
C	0,10	20 %

O montante de custo fixos anuais é de Cr\$ 460.000,00.

A razão de contribuição ponderada será:

$$\bar{R}_C = 0,30 \times 50\% \times 0,20 \times 30\% \times 0,10 \times 20\%$$

$$\bar{R}_C = 0,15 \times 0,06 \times 0,02$$

$$\bar{R}_C = 0,23$$

e, em consequência, aplicando a fórmula 32, o ponto de equilíbrio será:

$$R_{PE} = \frac{\text{Cr\$ } 460.000,00}{0,23} = \text{Cr\$ } 2.000.000,00$$

Utilizando os dados do exemplo anterior, pode-se apresentar esta situação em um gráfico de volume-lucro.

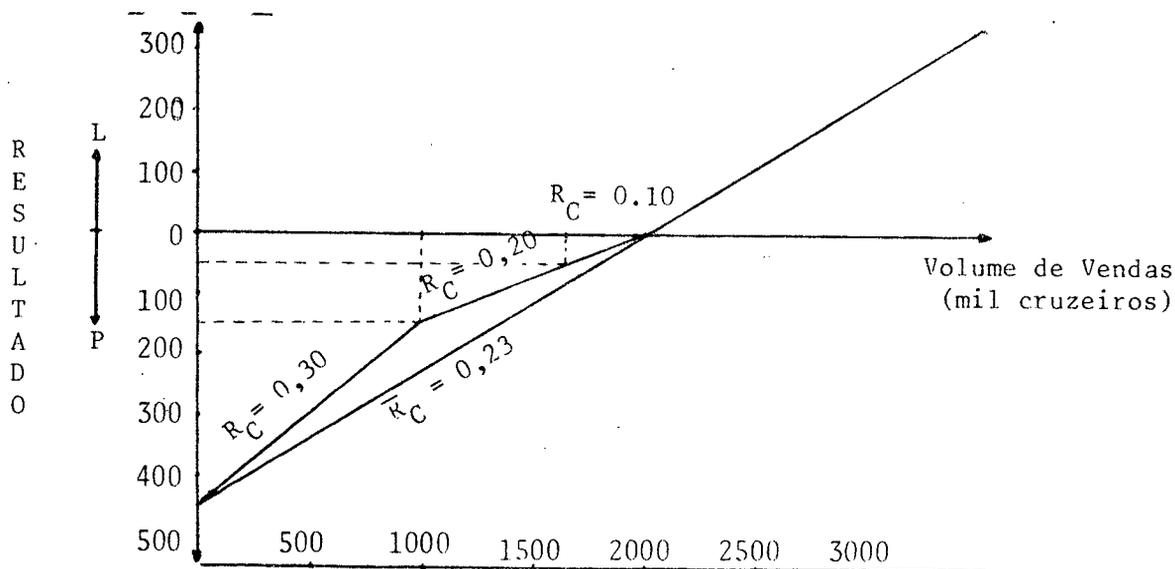


FIGURA 13  
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO EXEMPLO 8

Como se pode observar no gráfico, a inclinação das retas de recuperação de custo fixos de cada produto é diferente e isto se deve a que a inclinação destas retas está determinada pela razão de contribuição de cada um dos produtos as quais têm valor de 0,30; 0,20 e 0,10 respectivamente.

Por outro lado, pode-se observar que, para um nível de vendas de Cr\$ 2.000.000,00 o produto A contribue com Cr\$300.000,00 para cobrir os custos fixos ( $\text{Cr}\$1.000.000,00 \times 0,30$ ), o produto B com Cr\$120.000,00 ( $\text{Cr}\$600.000,00 \times 0,20$ ) e o produto C com Cr\$40.000,00 ( $\text{Cr}\$400.000,00 \times 0,10$ ).

## I - DESLOCAMENTOS DO PONTO DE EQUILÍBRIO

Das fórmulas que se tem deduzido para determinar o ponto de equilíbrio observa-se que este pode variar, aumentar ou diminuir, como consequência de:

- a) Variações do montante de custos e despesas fixas;
- b) Variações da razão de contribuição ponderada;
- e
- c) Variações de ambos a uma só vez.

Se aumentar o montante de custos e despesas fixas, o ponto de equilíbrio aumentará, ou seja, se deslocará para a direita do gráfico. Pelo contrário, se o montante diminuir, diminuirá também o ponto de equilíbrio e ele se deslocará para a esquerda do gráfico.

Com respeito a estas variações da razão de contribuição ponderada, pode-se concluir que se esta aumenta, diminuirá o ponto de equilíbrio. Por sua vez, se a razão de contribuição ponderada diminuir, o ponto de equilíbrio aumentará e, consequentemente, se deslocará para a direita do gráfico.

É importante deter-se para analisar quais são as causas que podem originar uma variação da razão de contribuição ponderada, posto que esta dependerá, por uma parte, das razões de contribuição de cada um dos produtos e, em consequência, as variações destas necessariamente terão uma influência sobre a razão

de contribuição ponderada e, como já foi dito, cada razão de contribuição variará como consequência de variações no preço de venda e nos custos e despesas variáveis por unidade de cada um dos produtos. Mas, além disto, dependerá da participação de cada produto na composição das vendas totais da empresa e, portanto, esta será uma nova fonte geradora de variações da razão de contribuição ponderada.

A partir da expressão matemática da razão de contribuição ponderada pode-se concluir que esta aumentará a medida que aqueles produtos com maior razão de contribuição participem numa proporção maior na composição das vendas totais (considerando, por suposto, as limitações impostas pela capacidade produtiva da empresa e as limitações próprias do mercado dos distintos produtos) e, em consequência, se isto acontece, diminuirá o ponto de equilíbrio. Por outro lado, se a razão de contribuição ponderada diminuir como consequência de uma participação maior daqueles produtos com uma razão de contribuição mais baixa na composição das vendas totais, o ponto de equilíbrio aumentará e se deslocará para a direita do gráfico.

As expressões matemáticas dos deslocamentos que podem ocorrer no ponto de equilíbrio são as indicadas a seguir:

#### 1. Variação no montante de custos fixos

O novo nível de equilíbrio, depois de uma variação no montante de custos fixos, pode expressar-se algebricamente como segue:

$$R'_{PE} = \frac{C_F + \Delta C_F}{R_C} \quad (33)$$

ou

$$R'_{PE} = R_{PE} \frac{C'_F}{C_F} \quad (34)$$

onde:

$R'_{PE}$  = Novo ponto de equilíbrio expresso em unidades monetárias

$R_{PE}$  = Ponto de equilíbrio inicial expresso em unidades monetárias

$C_F$  = Montante inicial de custos fixos

$C'_F$  = Novo montante de custos fixos

$\Delta C_F$  = Variação do montante de custos fixos

$\overline{R}_C$  = Razão de contribuição ponderada

A representação gráfica para esta situação é apresentada na fig. a seguir:

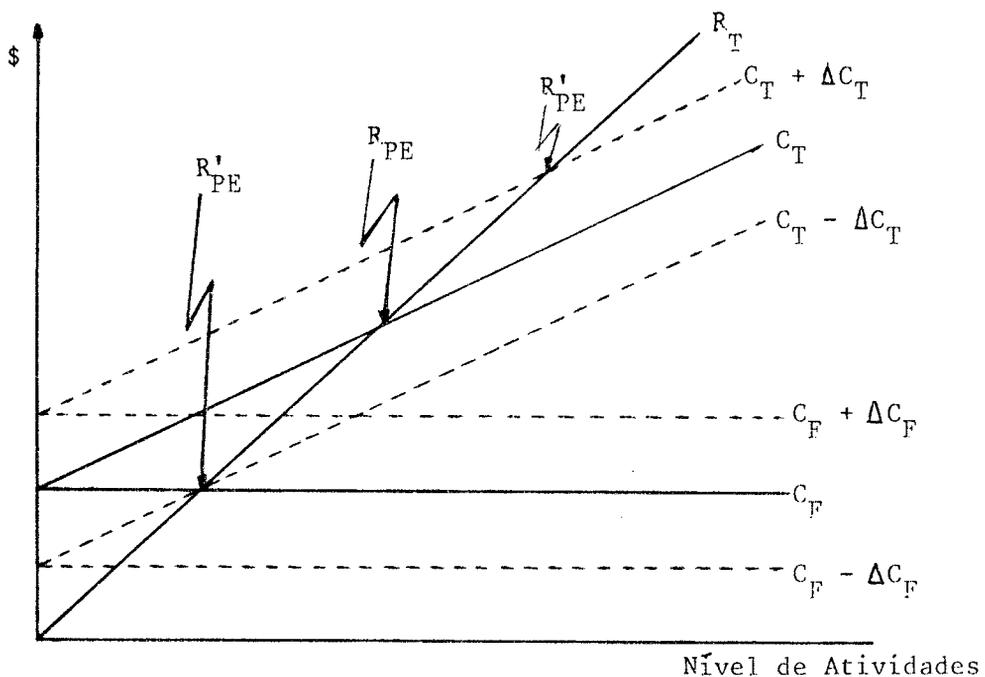


FIGURA 14

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS DESLOCAMENTOS DO PONTO DE EQUILÍBRIO EM EMPRESAS MULTIPRODUTORAS, QUANDO HÁ VARIAÇÃO NO MONTANTE DE CUSTOS FIXOS.

## 2. Variação da razão de contribuição ponderada

A expressão matemática do novo nível de equilíbrio, que se origina como consequência de uma variação na razão de contribuição ponderada, é apresentada a seguir:

$$R'_{PE} = \frac{C_F}{\overline{R_C} \pm \Delta R_C} \quad (35)$$

ou

$$R'_{PE} = R_{PE} \frac{\overline{R_C}}{R'_C} \quad (36)$$

onde:

$R'_{PE}$  = Novo ponto de equilíbrio expresso em unidades monetárias

$R_{PE}$  = Ponto de equilíbrio inicial expresso em unidades monetárias

$C_F$  = Montante de custos fixos

$\overline{R'_C}$  = Nova razão de contribuição ponderada

$\overline{R_C}$  = Razão de contribuição ponderada inicial

$\Delta \overline{R_C}$  = Variação da razão de contribuição ponderada

A representação gráfica para esta situação é a seguinte:

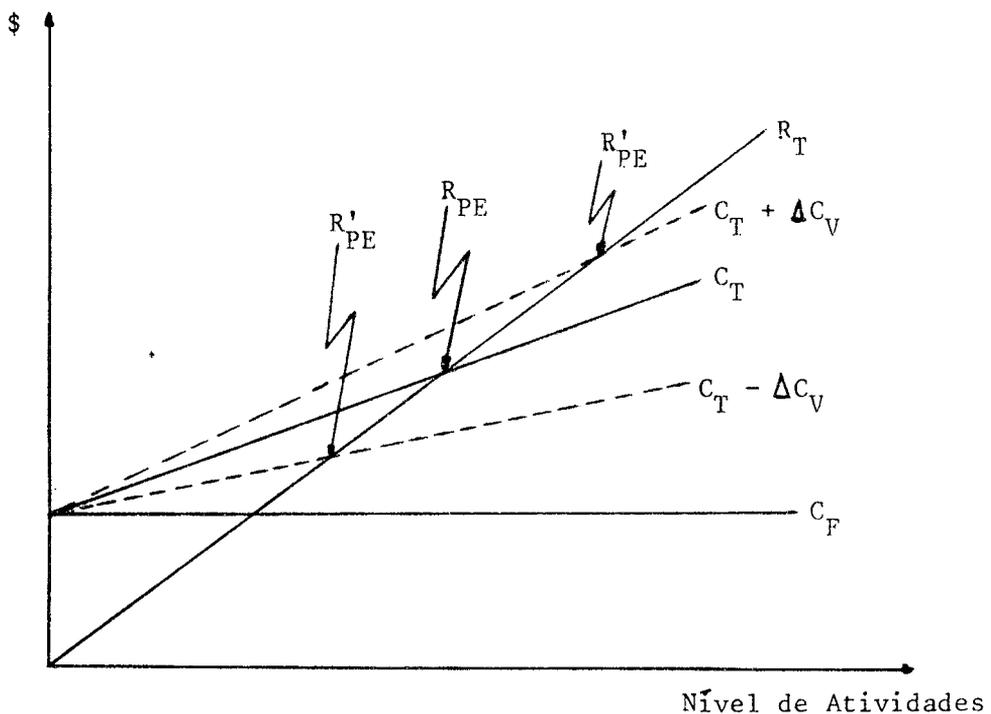


FIGURA 15

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS DESLOCAMENTOS DO PONTO DE EQUILÍBRIO EM EMPRESAS MULTIPRODUTORAS, QUANDO HÁ VARIACÃO NA RAZÃO DE CONTRIBUIÇÃO PONDERADA.

Os limites das variações que pode sofrer a razão de contribuição ponderada, em consequência de uma mudança na composição das vendas, são as seguintes:

a) Razão de contribuição ponderada máxima: quando os 100% das vendas da empresa correspondem ao produto com uma maior razão de contribuição;

b) Razão de contribuição ponderada mínima: quando os 100% das vendas da empresa correspondem a aquele produto com a menor razão de contribuição.

Em ambos os casos, a empresa deixa de ser multiprodutora para transformar-se em monoprodutora. Além disto, é necessário ressaltar que qualquer mudança que ocorra na composição das vendas de uma determinada empresa, deve levar em consideração tanto as restrições impostas pela capacidade produtiva da mesma, quanto as que se derivam da demanda de cada um dos produtos.

## II - PONTO DE EQUILÍBRIO EXPRESSO EM UNIDADES FÍSICAS.

Uma vez determinado o ponto de equilíbrio expresso em unidades monetárias, estar-se-á em condições de procurar uma expressão do ponto de equilíbrio em unidades físicas, para isto, procede-se da seguinte maneira:

a) Deve-se determinar que parte das vendas totais, no nível de equilíbrio, corresponde a cada um dos produtos que a empresa fabrica. Isto se consegue multiplicando o volume total de vendas pelas respectivas razões de participação de cada um dos produtos na composição das vendas;

b) Deve-se dividir o montante das vendas correspondente a cada produto por seu respectivo preço de venda determinando desta maneira o número de unidades de cada um dos produtos que, dada a composição de vendas da empresa em questão, deverá produzir e vender para alcançar o nível de equilíbrio.

EXEMPLO 9: No exemplo anterior o ponto de equilíbrio era de Cr\$ 2.000.000,00. Suponha-se que os preços de venda unitários são: Cr\$ 10,00 para o produto "A", Cr\$ 12,00 para o produto "B" e Cr\$ 8,00 para o produto "C".

a) PRODUTO	PARTICIPAÇÃO NAS VENDAS	VENDAS NO PONTO DE EQUILÍBRIO
A	0.50	Cr\$ 1.000.000,00
B	0.30	Cr\$ 600.000,00
C	0.20	Cr\$ 400.000,00

b) PRODUTO	VENDAS	PREÇO	UNIDADES
A	Cr\$ 1.000.000,00	Cr\$ 10,00	100.000
B	Cr\$ 600.000,00	Cr\$ 12,00	50.000
C	Cr\$ 400.000,00	Cr\$ 8,00	50.000

Portanto, o ponto de equilíbrio em unidades físicas, se alcançará ao produzir e vender 100.000 unidades do produto "A", 50.000 unidades do produto "B" e 50.000 unidades do produto "C".

Este resultado, como em casos anteriores, pode ser comprovado através de um Demonstrativo Simplificado de Lucros e Perdas, baseado no custeio direto.

#### Demonstrativo Simplificado de Lucros e Perdas

	PRODUTO "A"	PRODUTO "B"	PRODUTO "C"	TOTAL
Receita de Vendas	Cr\$1.000.000,00	Cr\$600.000,00	Cr\$400.000,00	Cr\$2.000.000,00
(-)Custo Variável	<u>Cr\$ 700.000,00</u>	<u>Cr\$480.000,00</u>	<u>Cr\$360.000,00</u>	<u>Cr\$1.540.000,00</u>
Margem de Contribuição	Cr\$ 300.000,00	Cr\$120.000,00	Cr\$ 40.000,00	Cr\$ 460.000,00
(-) Custos fixos				<u>Cr\$ 460.000,00</u>
			Lucro	-0-

#### 2.6.2. VENDAS ESPERADAS

Da mesma maneira que obteve-se uma relação algébrica que permitiu calcular o nível de equilíbrio numa empresa multiprodutora, pode-se deduzir uma fórmula que permita determinar o volume de vendas necessário para obter um determinado lucro dada a atual estrutura de custos da empresa, e supondo constante a composição das vendas. Para isto, a razão de contribuição ponderada de

verá dividir não só o montante de custo fixos, mas também, o lucro que a empresa deseja obter, razão pela qual a fórmula é a seguinte:

$$R = \frac{C_F + L}{\sum_{i=1}^n R_{Ci} \times \% i} \quad (37)$$

$$R = \frac{C_F + L}{\bar{R}_C} \quad (38)$$

Depois de ter obtido o volume de vendas necessário para gerar um determinado lucro esperado, é possível expressar o resultado como uma combinação de unidades físicas de cada um dos produtos que deverão ser produzidos e vendidos a fim de alcançar o volume de vendas esperada. Para isso, procede-se de forma idêntica à que foi utilizada para expressar o ponto de equilíbrio em unidades físicas.

EXEMPLO 10: Suponha-se que a empresa "Y", do exemplo anterior, espera obter um lucro de Cr\$ 460.000,00. Qual deverá ser seu volume de vendas a fim de obter este lucro ?

$$R = \frac{\text{Cr\$ } 460.000,00 + \text{Cr\$ } 460.000,00}{0,23} = \text{Cr\$ } 4.000.000,00$$

Este volume de vendas de Cr\$ 4.000.000,00 implicará em produzir e vender as seguintes quantidades de cada um dos produtos:

PRODUTO	VENDAS	PREÇO UNITÁRIO	UNIDADES
A	Cr\$ 2.000.000,00	Cr\$ 10,00	200.000
B	Cr\$ 1.200.000,00	Cr\$ 12,00	100.000
C	<u>Cr\$ 800.000,00</u>	Cr\$ 8,00	100.000
	Cr\$ 4.000.000,00		

Portanto, dada a composição das vendas, a empresa deverá produzir e vender 200.000 unidades do produto "A", 100.000 unidades do produto "B" e 100.000 unidades do produto "C", com o qual, seu volume de vendas será de Cr\$ 4.000.000,00 e obterá um lucro de Cr\$ 460.000,00 como é ilustrado pelo Demonstrativo de Lucros e Perdas a seguir:

Demonstrativo de Lucros e Perdas

	PRODUTO "A"	PRODUTO "B"	PRODUTO "C"	TOTAL
Receita de Vendas	Cr\$2.000.000,00	Cr\$1.200.000,00	Cr\$800.000,00	Cr\$4.000.000,00
(-) Custos Variáveis	<u>Cr\$1.400.000,00</u>	<u>Cr\$ 960.000,00</u>	<u>Cr\$720.000,00</u>	<u>Cr\$3.080.000,00</u>
Margem de Contribuição	Cr\$ 600.000,00	Cr\$ 240.000,00	Cr\$ 80.000,00	Cr\$ 920.000,00
(-) Custos Fixos				<u>Cr\$ 460.000,00</u>
			Lucro	Cr\$ 460.000,00

2.6.3. MARGEM DE SEGURANÇA

Já foi definido este conceito ao estudar a análise de custo volume lucro para empresas monoprodutoras. Por esta razão, esta parte do presente capítulo, limita-se a ilustrar a aplicação deste conceito no caso de uma empresa multiprodutora.

EXEMPLO 11: Suponha-se que a empresa "Z" fabrica os produtos "R" e "S"; e seus custos e receitas correspondentes ao período encerrado, são dados pelo Demonstrativo abaixo:

Demonstrativo de Lucros e Perdas

	PRODUTO "R"	PRODUTO "S"	
Receita de Vendas	Cr\$ 100.000,00	Cr\$ 100.000,00	Cr\$ 200.000,00
(-) Custos Variáveis	<u>Cr\$ 60.000,00</u>	<u>Cr\$ 40.000,00</u>	<u>Cr\$ 100.000,00</u>
Margem de Contribuição	Cr\$ 40.000,00	Cr\$ 60.000,00	Cr\$ 100.000,00
(-) Custos fixos			<u>Cr\$ 40.000,00</u>
		Lucro	Cr\$ 60.000,00

A partir destes dados antecedentes pode-se determinar o ponto de equilíbrio e a margem de segurança, na atual situação da empresa, com um aumento de 30% das vendas do produto "R" e um aumento de 30% das vendas do produto "S". suponha-se que a empresa está indecisa frente a estas duas últimas situações. Para resolver este caso lança-se mão das fórmulas (12) e (23).

a) Situação Atual:

$$R_{PE} = \frac{\text{Cr\$ } 40.000,00}{0,5} = \text{Cr\$ } 80.000,00$$

$$M_S = \frac{\text{Cr\$ } 120.000,00}{\text{Cr\$ } 200.000,00} \times 100 = 60\%$$

b) Aumento de 30% nas vendas do Produto "R":

	PRODUTO "R"	PRODUTO "S"	TOTAL
Receita de Vendas	Cr\$130.000,00	Cr\$100.000,00	Cr\$230.000,00
(-) Custo Variável	<u>Cr\$ 78.000,00</u>	<u>Cr\$ 40.000,00</u>	<u>Cr\$118.000,00</u>
Margem de Contribuição	Cr\$ 52.000,00	Cr\$ 60.000,00	Cr\$112.000,00
(-) Custos fixos			<u>Cr\$ 40.000,00</u>
		Lucro	Cr\$ 72.000,00

$$R_{PE} = \frac{\text{Cr\$ } 40.000,00}{0,49} = \text{Cr\$ } 81.633,00$$

$$M_S = \frac{\text{Cr\$ } 148.367,00}{\text{Cr\$ } 230.000,00} \times 100 = 64,5\%$$

c) Aumento de 30% nas vendas do Produto "S"

	PRODUTO "R"	PRODUTO "S"	TOTAL
Receita de Vendas	Cr\$100.000,00	Cr\$ 130.000,00	Cr\$ 230.000,00
(-) Custos Variáveis	<u>Cr\$ 60.000,00</u>	<u>Cr\$ 52.000,00</u>	<u>Cr\$ 112.000,00</u>
Margem de Contribuição	Cr\$ 40.000,00	Cr\$ 78.000,00	Cr\$ 118.000,00
(-) Custos Fixos			<u>Cr\$ 40.000,00</u>
			Cr\$ 78.000,00

$$R_{PE} = \frac{\text{Cr\$ } 40.000,00}{0,51} = \text{Cr\$ } 78.431,00$$

$$M_S = \frac{\text{Cr\$ } 151.569,00}{\text{Cr\$ } 230.000,00} \times 100 = 66\%$$

Pode-se resumir as informações anteriores no quadro comparativo a seguir:

	$\bar{R}_c$	$R_{PE}$	R	$M_S$
Situação Atual	0,5	Cr\$ 80.000,00	Cr\$ 200.000,00	60%
Aumento 30% em "R"	0,49	Cr\$ 81.633,00	Cr\$ 230.000,00	64,5%
Aumento 30% em "S"	0,51	Cr\$ 78.431,00	Cr\$ 230.000,00	66%

QUADRO 1

QUADRO COMPARATIVO DE DIVERSAS ALTERNATIVAS

Deste quadro comparativo tira-se as seguintes conclusões:

1. Um aumento de 30% nas vendas do produto "R" implicaria numa alteração desfavorável da composição das vendas e, por conseguinte, num aumento do nível de equilíbrio com respeito a situação atual. Sem dúvida, o aumento das vendas totais é maior que o aumento do nível de equilíbrio e, em consequência, acontece uma majoração na margem de segurança.

2. Um aumento de 30% nas vendas do produto "S" traz como consequência uma majoração da composição das vendas e, por conseguinte, um aumento da razão de contribuição ponderada e uma diminuição no nível de equilíbrio. Além do mais, isto provocaria uma majoração da margem de segurança devido, por uma parte, à diminuição do nível de equilíbrio e, por outra parte, ao aumento no volume de vendas.

3. Finalmente, e à luz do que foi visto anteriormente, pode-se afirmar que a empresa é levada a decidir-se pela segunda alternativa, com a qual seu nível de equilíbrio diminuirá em Cr\$1.569,00, e além disto, sua margem de segurança aumentará em aproximadamente 6%.

2.6.4. CUSTOS FIXOS CONSIGNÁVEIS A CADA PRODUTO

Até agora têm-se considerado que, para o caso de empresas multiprodutoras, não existe uma identificação de um montante de custos fixos associado a cada produto em particular. Na continuação ver-se-á a representação gráfica das relações de custo-volume-lucro quando é possível consignar um montante de custos fixos específico para cada um dos produtos fabricados pela empresa.

EXEMPLO 12: Suponha-se que a empresa "X" produz e vende os produtos A, B e C cuja participação na composição das vendas totais da empresa é de 40%, 30% e 30% respectivamente. O montante de custos fixos e a razão de contribuição para cada produto são os indicados a seguir:

	$C_F$	$R_C$
PRODUTO A	Cr\$ 400.000,00	0,30
PRODUTO B	Cr\$ 300.000,00	0,50
PRODUTO C	<u>Cr\$ 200.000,00</u>	<u>0,40</u>
	Cr\$ 900.000,00	

A receita total de vendas da empresa "X" é Cr\$3.000.000,00.

A relação de custo-volume-lucro para a empresa "X" é representada graficamente pelas figuras 14 e 15.

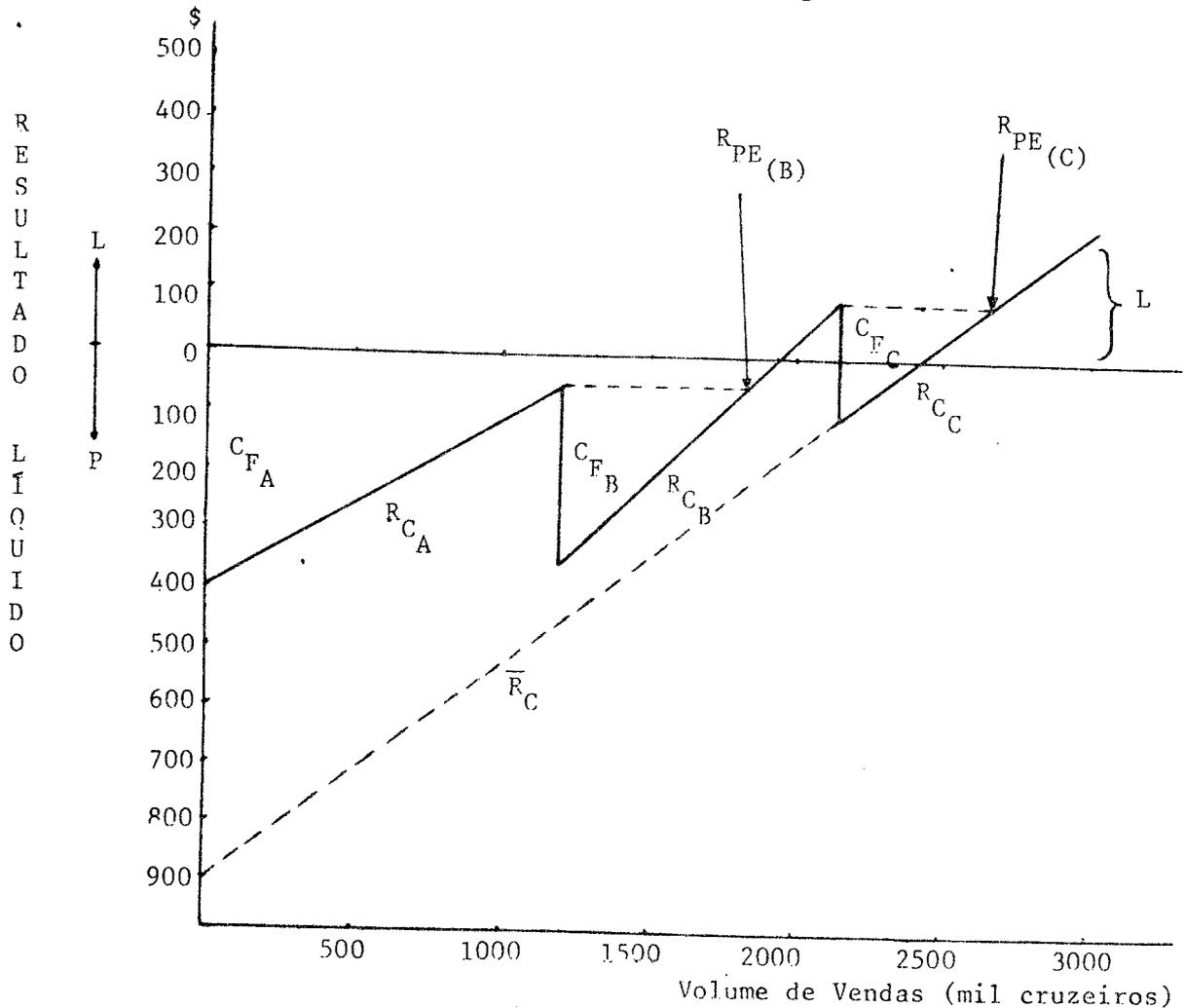


FIGURA 16

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS RELAÇÕES CUSTO-VOLUME-LUCRO NO EXEMPLO 12

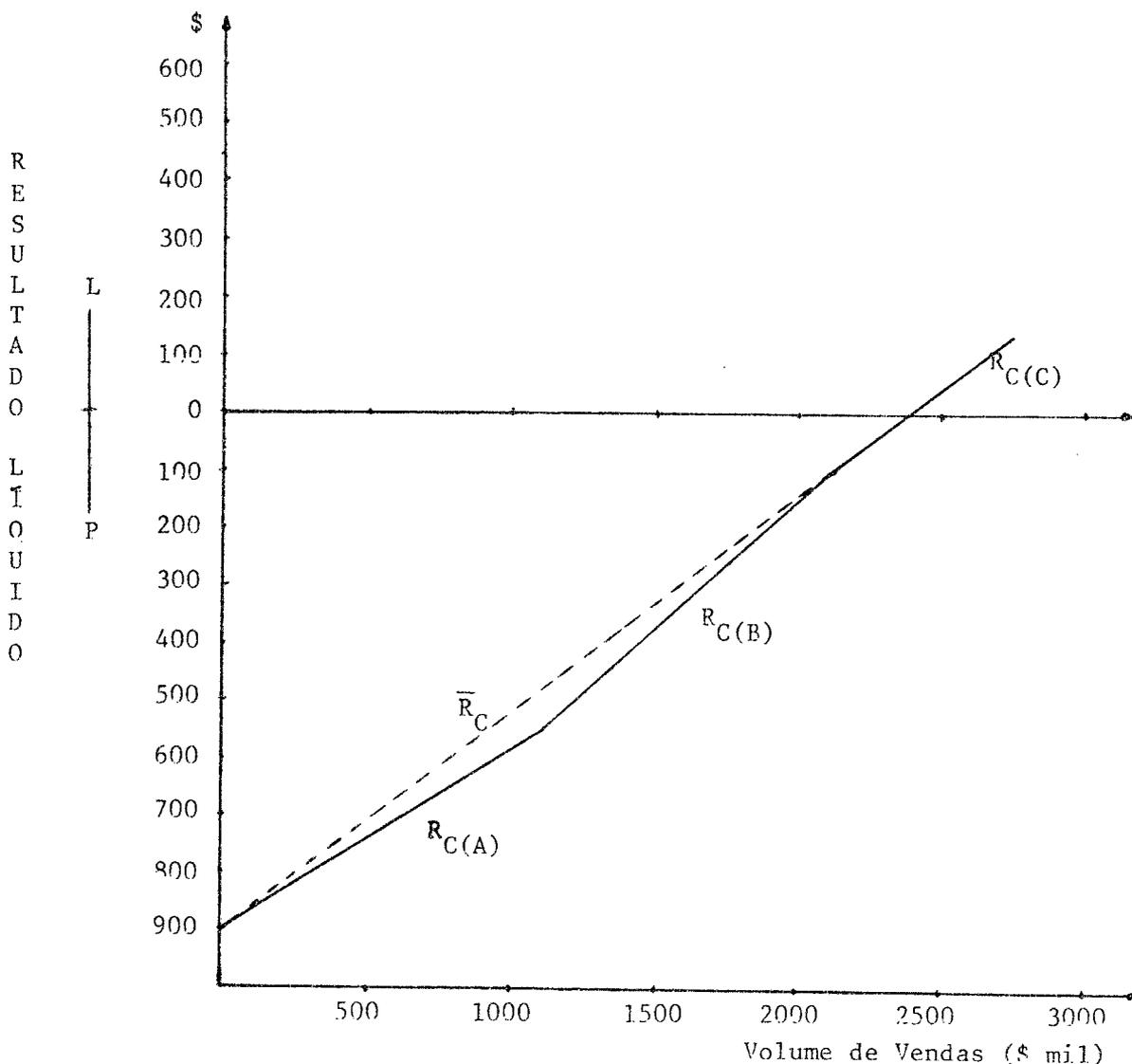


FIGURA 17

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS RELAÇÕES DE CUSTO-VOLUME-LUCRO PARA O EXEMPLO 12.

## 2.7. IMPORTÂNCIA DA ANÁLISE DE CUSTO-VOLUME-LUCRO

Esta importante ferramenta de análise pode ser de uma utilidade significativa se é utilizada de forma criteriosa por quem deva adotar decisões de diversos tipos na empresa, com respeito aos aspectos relacionados com o planejamento e controle.

Entre as decisões que podem ser abordadas satisfatoriamente por esta técnica se conotam, por exemplo, decisões de fabricar ou comprar, substituição de maquinaria, decisões de fechar a fábrica, introdução de novas linhas de produção e/ou eliminação de outras, determinação do preço de venda dos produtos fabricados pela empresa, etc..

Por outro lado, a estrutura de custo-volume-lucro é a base sobre a qual deve sustentar-se todo orçamento já que ela indica, para cada empresa em particular, como mudará o montante total dos custos diante de flutuações do nível de atividade, a quantia das receitas e, em consequência, o lucro esperado.

Finalmente, é importante assinalar que este tipo de análise não só é aplicada na empresa privada, mas também nas empresas e instituições do setor público, nos quais pode ser de grande utilidade na alocação de recursos, determinação de subsídios, e como de verdadeira fonte de informação com respeito a estrutura de custos das empresas do Estado.

## 2.8. LIMITAÇÕES DA ANÁLISE DE CUSTO-VOLUME-LUCRO

As limitações da análise de Custo-volume-lucro se originam, fundamentalmente, a partir dos pressupostos nos quais se baseia. A análise supõe uma situação estática, a qual não pode manter-se por muito tempo, posto que são muitas as variáveis, que em definitivo, determinam o comportamento dos custos e, em consequência, qualquer mudança que elas experimentam significará uma mudança na estrutura de custo-volume-lucro.

Além disto, a relação existente entre custo-volume e lucro, está estritamente vinculada com o nível de atividade que a empresa apresenta num determinado momento e não se pode esperar que ela se mantenha constante ante as flutuações consideráveis do nível de atividades, visto que o comportamento dos custos se distorpe por causa de, por exemplo, descontos, aumentos de desperdício, tempo ocioso, etc..

Outra das limitações que merece ser ressaltada na análise de custo-volume-lucro é representada graficamente a seguir.

Por regra geral, as retas de receitas e custos totais se traçam desde a origem. Contudo, a um certo nível de atividade, inferior ao "ponto de fechamento", a empresa não deve continuar operando posto que, neste caso, os prejuízos que sofreria, seriam maiores aos que ocorreriam se optasse pelo fechamento da empresa.

Por outro lado, a direita do gráfico, o traçado de retas de receitas e custos deixam a impressão de que se poderia prolongá-las para qualquer limite, porém este prolongamento está limitado, logicamente, pela capacidade instalada da empresa.

Além disto, dentro dos limites máximo e mínimo, ou seja: "capacidade instalada" e "ponto de fechamento", respectivamente, haverá um "intervalo relevante"<sup>7</sup> para o qual será válida a relação custo-volume-lucro dado que fora deste intervalo se produzirão distorções significativas no comportamento dos custos o que necessariamente implicará numa alteração da dita relação. Essas limitações são ilustradas nos gráficos a seguir:

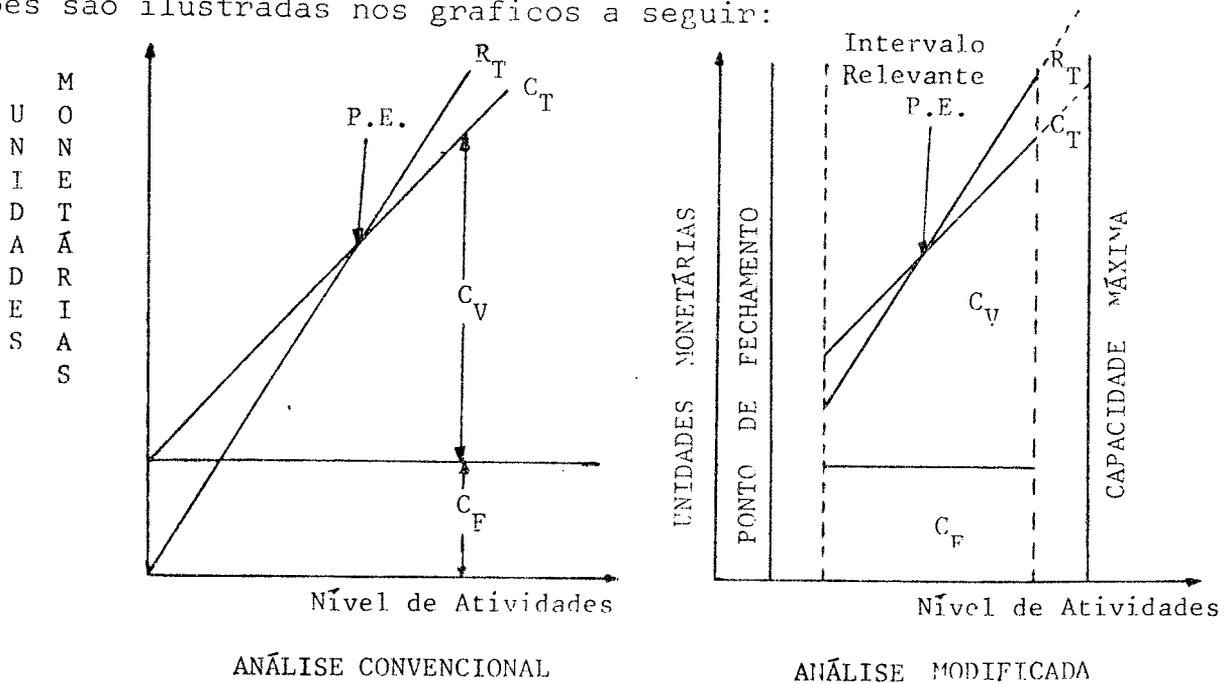


FIGURA 18

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS LIMITAÇÕES DA ANÁLISE DE CUSTO-VOLUME-LUCRO.

<sup>7</sup> Op. Cit. HORNGREN, T. Charles. Cost Accounting a Managerial Enphasis. p - 45

Finalmente, e como consequência das limitações já mencionadas, quando se utiliza a análise de custo-volume - lucro a fim de projetar as receitas e custos da empresa, com respeito a períodos futuros, se supõe implicitamente que existe certeza absoluta em relação a magnitude que alcançarão as distintas variáveis envolvidas na análise o que, evidentemente, significa uma simplificação excessiva e, em consequência, uma limitação.

Por último, pode-se concluir afirmando que a análise de custo-volume-lucro não é um instrumento capaz de solucionar qualquer problema que se apresente na empresa, nem é somente uma apresentação teórica e simplificada de dados complexos que não podem nem devem ser simplificados. Pelo contrário, e no que pese suas limitações, pode ser de uma utilidade bastante significativa na tomada de decisões e no planejamento e controle empresarial.

## CAPÍTULO III

### 3. ANÁLISE DE CUSTO-VOLUME-LUCRO SOB CONDIÇÕES DE RISCO

#### 3.1. INTRODUÇÃO

O objetivo fundamental deste capítulo, que constitui a parte mais importante do trabalho ora apresentado, é introduzir algumas modificações de importância na análise de custo-volume-lucro tradicional utilizando alguns conceitos estatísticos a fim de conseguir um aperfeiçoamento deste valioso instrumento de análise e a extensão de sua aplicabilidade tornando possível sua utilização efetiva em algumas situações caracterizadas pelo risco no que diz respeito aos valores que assumirão determinadas variáveis. Como foi visto, as variáveis relevantes incluídas na análise de custo-volume-lucro são: volume de vendas, preço de venda, montante de custos fixos e custo variável unitário. Quando se faz uma projeção destas variáveis para o futuro e também quando essa projeção só se realiza para um período de tempo relativamente breve, aparece imediatamente o risco e a incerteza como uma característica inerente, em geral, a qualquer tipo de projeção, e em particular a projeção das variáveis interessantes a este estudo, já que os valores que estas variáveis assumirão num determinado momento será o resultante de uma série de fatores, os quais, por sua vez, raramente apresentam um comportamento perfeitamente determinístico. Considerando o volume de vendas, os fatores que o determinarão podem ser mencionados como sendo: preço de venda, tipo de produto, receita dos consumidores, capacidade produtiva da empresa, grau de competência, etc.. O preço de venda poderá ser o resultado do comportamento do mercado ou poderá ser fixado entre limites pela empresa devendo cobrir seus custos de produção e de vendas e objetivando a obtenção de uma margem de lucro. Em certas circunstâncias, o preço de venda poderá ser determinado sem que a empresa participe na sua elaboração. Vale lembrar que quando se refere a custos, neles estão contidos também as despesas. Quanto aos custos, tanto fixos como variáveis, em geral é válido afirmar que estes serão determinados em grande escala pelas características de cada empresa, características tais como sua capacidade produtiva, processos de produção, grau de automação, etc.. Existem também outros fatores externos à empresa que por sua própria natureza não podem ser controlados por ela. Tais fatores estarão influenciando na determinação dos custos como é o caso do preço dos in

sumos e das matérias primas, desenvolvimento tecnológico, etc.. Disto se deduz que qualquer estimação que se faça, com respeito ao valor que assumirão essas variáveis num dado momento, não poderá ser absolutamente correta e, em consequência, a consideração do risco e a incerteza como variáveis fundamentais da análise de custo-volume-lucro, se transforma numa necessidade cuja satisfação é imperiosa, pois, do contrário, se estaria ignorando esta característica fundamental própria de qualquer evento futuro e conseqüentemente limitando seriamente a aplicação da análise.

Em primeiro plano supor-se-á existência de risco só com respeito a uma das variáveis ou seja, o volume de vendas afim de simplificar ao máximo as modificações introduzidas na análise para, posteriormente, considerar a associação do risco com relação às outras variáveis envolvidas na análise.

No presente capítulo adotar-se-á a mesma divisão dada na análise tradicional ou seja, em primeiro lugar vai se estudar a aplicação da análise de custo-volume-lucro sob condições de risco em empresas monoprodutoras para posteriormente estender sua aplicação a empresas multiprodutoras com o propósito de facilitar qualquer comparação com a análise de custo-volume-lucro tradicional.

### 3.2. PRESSUPOSTOS DA ANÁLISE DE CUSTO-VOLUME-LUCRO SOB CONDIÇÕES DE RISCO

É claro que ao incluir o risco como uma variável que deve ser considerada na análise de custo-volume-lucro, é possível eliminar alguns dos pressupostos nos quais se baseia a análise de custo-volume-lucro tradicional entre os quais o mais importante é o pressuposto implícito com respeito a existência de "certeza" em relação com o valor que assumirão as diferentes variáveis. Além deste, existem outros pressupostos que deverão ser mantidos:

1. Os custos podem ser classificados como custos variáveis e como custos fixos. A este respeito as empresas contam atualmente com uma série de métodos e procedimentos que lhes permite determinar com bastante precisão e comportamento de seus custos e, por

consequente, sua classificação dentro das categorias expostas acima. Pode-se mencionar como métodos utilizados pelas empresas, o método gráfico, o método contábil, o método dos pontos máximos e mínimos, o método dos mínimos quadrados, etc..

2. Existe sincronização entre produção e vendas, portanto o efeito das mudanças nos estoques é insignificante. Com relação a este pressuposto, aparentemente bastante irreal, se pode afirmar que, se se analisa na perspectiva de médio e longo prazo, se aproxima bastante da realidade porque as diferenças entre produção e vendas tendem a anular-se.

3. A composição das vendas, no caso de empresas multiprodutoras, permanecerá constante durante o período de tempo para o qual se efetua a análise.

Além destes pressupostos que se mantêm vigentes, agrega-se dois novos pressupostos que são:

4. É possível efetuar uma estimação dos valores que assumirão, num determinado período de tempo, o volume de vendas, o preço de venda, os custos fixos e os custos variáveis.

5. Com relação à estimação a que se refere o pressuposto anterior, é possível determinar uma distribuição de probabilidade para cada uma das variáveis que tenha como base essas estimações. Supor-se-á que estas distribuições de probabilidade tal como descritas no anexo 1, são distribuições normais, apenas com o fim de simplificar o estudo, salientando ao mesmo tempo que a distribuição de probabilidade mais adequada, em cada caso, dependerá das características próprias de cada situação em particular.

### 3.3. O VOLUME DE VENDAS COMO VARIÁVEL ALEATÓRIA EM EMPRESAS MONOPRODUTORAS

Para tornar claro o caráter aleatório atribuído à variável "volume de vendas" em empresas monoprodutoras parte-se da suposição de que uma empresa produz e vende um único artigo cujo preço de venda é  $p$ , seu custo variável unitário é  $c_v$  e o montante dos custos e despesas fixas da empresa estão representados por  $C_F$

num dado período. Com base nestas informações o ponto de equilíbrio expresso em unidades físicas é dado por  $Q_{PE}$  e será igual a "x" unidades. Suponha também que o Departamento de Vendas da empresa tem estimado que o volume de vendas esperado para o próximo período é representado por " $\mu$ " unidades e que é igualmente provável que as vendas reais sejam maiores ou menores que " $\mu$ ". O chefe de vendas crê que existe uma probabilidade aproximada de 2/3 de que as vendas reais estão compreendidas no intervalo determinado pelo volume de vendas esperado de  $\pm \sigma$  unidades. Estas estimativas subjetivas podem ser expressas mediante uma distribuição normal de probabilidade cuja média será o volume de vendas esperado ou seja " $\mu$ " unidades e seu desvio padrão  $\sigma$  unidades. Isto equivale dizer que o volume de vendas considerado como variável aleatória se distribue normalmente  $N(\mu, \sigma^2)$  e a razão de que o desvio padrão seja de  $\sigma$  unidades é que ao redor dos 2/3 da área abaixo da curva de uma distribuição normal de probabilidade está dentro de  $\pm 1,0$  desvio padrão da média. Graficamente representa-se no eixo das abcissas o volume de vendas, e a probabilidade de que as vendas reais estejam compreendidas em um intervalo determinado por dois volumes de venda estará dada pela área abaixo da curva entre esses volumes de venda. A área hachuriada na figura 19 corresponde à probabilidade de que a empresa obtenha lucro, ou seja, a probabilidade de que as vendas reais ultrapassem as unidades do ponto de equilíbrio.

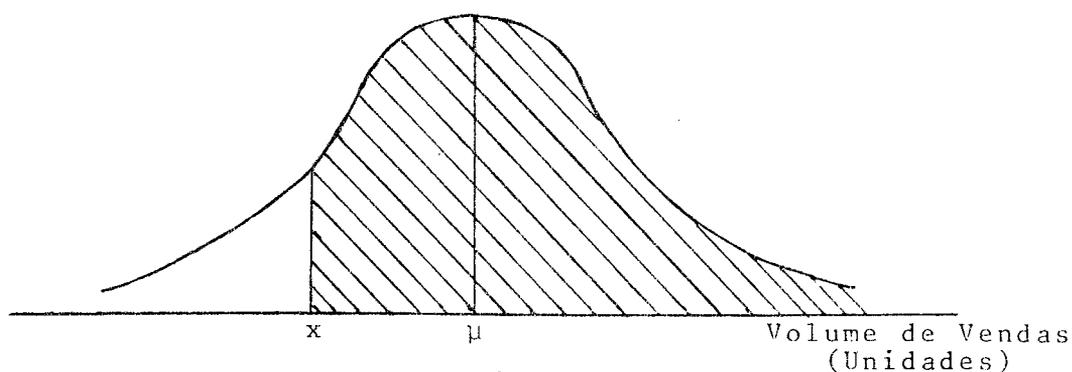


FIGURA 19

GRÁFICO DA DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE PARA O VOLUME DE VENDAS

### 3.3.1. PONTO DE EQUILÍBRIO

A análise de custo-volume-lucro tradicional permite determinar o ponto de equilíbrio de uma empresa, porém nada nos diz com respeito à probabilidade de que a empresa consiga alcançar este ponto, em circunstâncias que este tipo de informação adicional pode ser de suma importância para quem vai tomar uma decisão. Isto, evidentemente, representa uma limitação da análise. Sem dúvida, agora está-se em condições de sanar esta limitação obtendo a informação adicional da probabilidade de ocorrência de tal fato. Se considerar como "x" as unidades que são produzidas e vendidas no ponto de equilíbrio, pode-se determinar a probabilidade de que as vendas reais sejam no mínimo igual a "x". Para isso deve-se transformar a distribuição normal de probabilidade do volume de vendas com o fim de poder utilizar as tabelas de probabilidade existentes para uma distribuição normal com média zero e variância um. Tal procedimento é explicado no Anexo 1. O ponto de equilíbrio expresso em unidades monetárias não sofre nenhuma modificação no que diz respeito à sua forma de cálculo enquanto o volume de vendas for a única variável aleatória.

### 3.3.2. LUCRO ESPERADO

Para tornar mais evidente a interpretação do lucro esperado utiliza-se a distribuição de probabilidade mostrada na figura 19 e coloca-se esta distribuição sobreposta num gráfico de volume-lucro demonstrado a seguir.

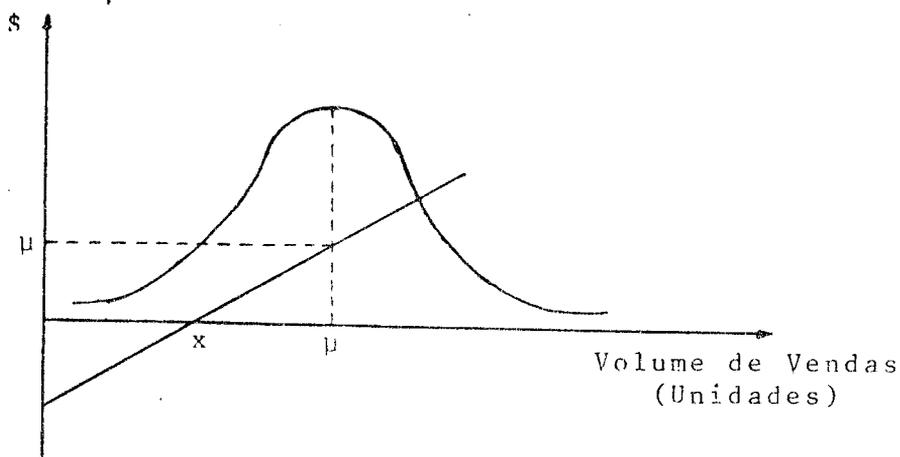


FIGURA 20

GRÁFICO DA SOBREPOSIÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DO VOLUME DE VENDAS SOBRE O GRÁFICO DE VOLUME-LUCRO

Pela figura 20 chega-se à conclusão de que o lucro esperado pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$E(L) = E(Q) \cdot m_c - C_F \quad (39)$$

onde:

$E(L)$  = Lucro esperado

$E(Q)$  =  $\mu$  = volume de vendas esperado (em unidades)

$m_c$  = margem de contribuição

$C_F$  = montante de custos fixos.

É importante frizar que, como neste caso, se o volume de vendas apresenta uma distribuição normal de probabilidade e além disto se conhece com certeza o valor do resto das variáveis, o lucro também apresentará uma distribuição normal de probabilidade cuja média estará determinada pelo lucro esperado e seu desvio padrão pelo produto do desvio padrão do volume de vendas e a margem de contribuição unitária. Isto é, se designamos por  $\mu_L$  e  $\sigma_L$  a média e o desvio padrão da distribuição de probabilidade do lucro e por  $\sigma_q$  o desvio padrão do volume de vendas, tem-se:

$$\mu_L = E(L) = E(Q) \cdot m_c - C_F \quad (40)$$

$$\sigma_L = \sigma_q \cdot m_c \quad (41)$$

### 3.3.3. VENDAS ESPERADAS

A determinação do volume de vendas que é necessário alcançar para obter um determinado lucro supondo conhecidos o preço de vendas, os custos variáveis e os custos fixos foi levada a efeito através da fórmula  $Q = \frac{C_F + L}{p - c_v}$  deduzida no capítulo 2.

Nesta parte da análise de custo-volume-lucro sob condições de risco, pode-se obter uma relação equivalente. Se é conhecido o lucro que a empresa espera obter e sua distribuição de probabilidade, estar-se-á em condições de determinar a média e o desvio padrão da distribuição de probabilidade do volume de vendas onde a média corresponde precisamente ao valor esperado do

lume de vendas. A relação entre lucro e volume de vendas — supondo conhecido o preço, os custos e despesas variáveis e os custos fixos — é a seguinte:

$$\mu_q = E(Q) = \frac{C_F + E(L)}{m_c} \quad (42)$$

$$\sigma_q = \sigma_L/m_c \quad (43)$$

Cabe ressaltar com respeito ao volume de vendas, que os parâmetros de sua distribuição de probabilidade podem ser expressos em unidades monetárias levando em consideração seu valor físico de acordo com o preço de venda do produto. Isto é,

$$\mu_q (\$) = \mu_q \times p \quad (44)$$

$$\sigma_q (\$) = \sigma_q \times p \quad (45)$$

#### 3.3.4. MARGEM DE SEGURANÇA

Já foi definido no capítulo anterior o conceito de margem de segurança, a qual não é outra coisa senão uma relação entre a receita que a empresa obtém pela venda de seus produtos e seu nível de equilíbrio. Uma das expressões algébricas que permitia quantificar esta relação era a seguinte:

$$M_S = \frac{R}{R_{PE}} \times 100 \quad (46)$$

Se observar o numerador desta expressão nota-se que na situação que se analisa atualmente, esta estará determinada pelo produto do preço de venda unitário que se supõe conhecido e o valor esperado do volume de vendas, ou seja, o numerador será o que tem-se denominado por  $\mu_q (\$)$  e se considera-se o volume de vendas como uma variável aleatória e, em consequência, sujeita a uma distribuição de probabilidade. A margem de segurança também apresentará uma distribuição de probabilidade cujos parâmetros, que serão denominados  $\mu_{MS}$  e  $\sigma_{MS}$  respectivamente estarão determinados pelas expressões seguintes:

$$\mu_{MS} = \frac{\mu_q (\$)}{R_{PE}} \times 100 = \frac{\mu_q \times P}{R_{PE}} \times 100 \quad (47)$$

$$\sigma_{MS} = \frac{\sigma_q (\$)}{R_{PE}} \times 100 = \frac{\sigma_q \times P}{R_{PE}} \times 100 \quad (48)$$

Com o propósito de determinar a margem de segurança vai-se utilizar a segunda expressão algébrica estudada no capítulo 2, ou seja:

$$M'_S = \frac{R - R_{PE}}{R} \times 100 \quad (49)$$

A Margem de segurança, calculada segundo esta fórmula a apresentaria uma distribuição normal de probabilidade cujos parâmetros estarão determinados pelas seguintes expressões:

$$\mu_{MS} = \frac{p \times \mu_q - p \times Q_{PE}}{p \times \mu_q} \times 100 \quad (50)$$

$$\sigma_{MS} = \frac{p \times \sigma_q}{p \times \mu_q} \times 100 = \frac{\sigma_q (\$)}{\mu_q (\$)} \times 100 \quad (51)$$

### 3.4. O VOLUME DE VENDAS COMO VARIÁVEL ALEATÓRIA EM EMPRESAS MULTIPRODUTORAS

Por outro lado, vai se considerar agora o volume de vendas como variável aleatória em empresas multiprodutoras, para isto devem-se considerar os produtos que são fabricados pela empresa com as razões de contribuição, preços de venda, custos variáveis e a participação nas vendas. Considera-se também o montante de custos fixos da empresa. Estes dados estão dispostos no quadro a seguir:

PRODUTO	PREÇO DE VENDA (P)	CUSTO VARIÁVEL (C <sub>V</sub> )	RAZÃO DE CONTRIBUIÇÃO (R <sub>C</sub> )	PARTICIPAÇÃO NAS VENDAS
P <sub>1</sub>	P <sub>1</sub>	C <sub>V1</sub>	R <sub>C1</sub>	% <sub>1</sub>
P <sub>2</sub>	P <sub>2</sub>	C <sub>V2</sub>	R <sub>C2</sub>	% <sub>2</sub>
P <sub>n</sub>	P <sub>n</sub>	C <sub>Vn</sub>	R <sub>Cn</sub>	% <sub>n</sub>

QUADRO 2  
DADOS REFERENTES A CADA PRODUTO DA EMPRESA MULTIPRODUTORA.

A partir deste quadro chega-se ao ponto de equilíbrio da empresa expresso em unidades monetárias pela fórmula 32 descrita no capítulo 2, ou seja:

$$R_{PE} = \frac{C_F}{\sum_{i=1}^n R_{C_i} \times \%_i} = \frac{C_F}{R_C}$$

Devem-se fazer estimações com respeito à média e o desvio padrão do volume de vendas de cada produto para o período que se quer fazer o estudo, sendo igualmente provável que as vendas reais sejam maiores ou menores que as quantidades estimadas. Estas estimações podem ser alocadas como se segue:

PRODUTO	VALOR ESPERADO	DESVIO PADRÃO
P <sub>1</sub>	E (P <sub>1</sub> )	σ <sub>P<sub>1</sub></sub>
P <sub>2</sub>	E (P <sub>2</sub> )	σ <sub>P<sub>2</sub></sub>
P <sub>n</sub>	E (P <sub>n</sub> )	σ <sub>P<sub>n</sub></sub>

QUADRO 3  
DISTRIBUIÇÃO DO VALOR ESPERADO E DESVIO PADRÃO COM  
RELAÇÃO A CADA PRODUTO.

### 3.4.1. PONTO DE EQUILÍBRIO

Para que se conheça a probabilidade de que a empresa alcance, ao menos seu nível de equilíbrio, é necessário determinar a distribuição de probabilidade do volume total de vendas da empresa. Nas empresas multiprodutoras este problema é mais complexo pois, para este caso, tem-se "n" produtos e para o volume de vendas de cada um deles tem-se uma diferente distribuição de probabilidade. Sabe-se que o volume total das vendas de uma empresa multiprodutora é a soma dos volumes de venda de cada um dos produtos fabricados por esta empresa, por isto se faz claro que é necessário expressar este volume total de vendas em unidades monetárias, pois do contrário, se incorreria no erro de somar diferentes tipos de unidades físicas. Daí, deve-se atribuir valores monetários às estimações dos volumes de venda dos diferentes produtos expressos em unidades físicas de acordo com seus respectivos preços de venda.

A atribuição de valores monetários a cada produto com relação ao valor esperado e desvio padrão expressado em unidades físicas no quadro anterior fica demonstrado no quadro a seguir:

PRODUTO	VALOR ESPERADO	DESVIO PADRÃO
$P_1$	$E (P_1) \times p_1$	$\sigma_{P_1} \times p_1$
$P_2$ ⋮	$E (P_2) \times p_2$ ⋮	$\sigma_{P_2} \times p_2$ ⋮
$P_n$	$E (P_n) \times p_n$	$\sigma_{P_n} \times p_n$

QUADRO 4

PARÂMETROS DAS DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE DOS VALORES DE VENDA DE CADA UM DOS PRODUTOS EXPRESSOS EM UNIDADES MONETÁRIAS.

A partir do estudo do quadro acima onde se sabe as distribuições de probabilidade dos volumes de venda de cada um dos produtos em unidades monetárias, pode-se determinar a distri-

buição de probabilidade do volume total de vendas da empresa multiprodutora. Se a empresa produz e vende "n" produtos e se é conhecida a distribuição de probabilidade de seus volumes de vendas e se estas distribuições são normais com média  $\mu_i$  e variância  $\sigma_i^2$  onde  $i = 1, 2, \dots, n$ ; o volume total de vendas expresso em unidades monetárias, definido como a soma das receitas de vendas dos diferentes produtos, terá uma distribuição normal de probabilidade cuja média será a soma das médias das diferentes distribuições de probabilidade e a variância será a soma das variâncias destas distribuições, ou seja:

$$R_T = \sum_{i=1}^n R_{P_i} \quad (52)$$

onde:  $R_T$  = Volume total de vendas expresso em unidades monetárias  
 $R_{P_i}$  = Volume de vendas do i-ésimo produto expresso em unidades monetárias cuja distribuição de probabilidade é  $N(\mu, \sigma_i^2)$

Se  $R_{P_i}$  se distribue normalmente com média  $\mu_i$  e variância  $\sigma_i^2$  então com base no Teorema do Limite Central<sup>8</sup> chega-se a conclusão que  $R_T$  se distribue também normalmente com média  $\sum_{i=1}^n \mu_i$  e variância  $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ . Disto se conclue que:

$$\mu_{R_T} = \mu_{R_{P_1}} + \mu_{R_{P_2}} + \dots + \mu_{R_{P_n}} \quad (53)$$

$$\sigma_{R_T} = \sqrt{\sigma_{R_{P_1}}^2 + \sigma_{R_{P_2}}^2 + \dots + \sigma_{R_{P_n}}^2} \quad (54)$$

Uma vez definidos estes parâmetros, é possível determinar a probabilidade de que o volume de vendas expresso em unidades monetárias seja no mínimo igual ao volume de vendas do nível de equilíbrio, conforme procedimento descrito no Anexo 1.

#### 3.4.2. LUCRO ESPERADO

Tendo se determinado a distribuição de probabilidade do volume total de vendas, pode-se efetuar a análise do lu-

<sup>8</sup> Op. Cit. MEYER, Paul L. pp - 269 - 274

lucro esperado nas empresas multiprodutoras de forma semelhante à que foi feita para as empresas monoprodutoras. A diferença com o que ocorre no caso de empresas monoprodutoras é que o volume de vendas se expressa em unidades monetárias com o intuito de que os volumes de venda dos distintos produtos, nas empresas multiprodutoras, possam ser expressos numa unidade de medida homogênea. Por outro lado para determinar o lucro que se obteria com os distintos volumes de vendas deve-se conhecer a razão de contribuição ponderada ( $\bar{R}_C$ ) da empresa.

O lucro esperado pode ser determinado nas empresas multiprodutoras, mediante a utilização da expressão a seguir:

$$E(L) = E(R_T) \times \bar{R}_C - C_F \quad (55)$$

onde:  $E(L)$  = Lucro esperado

$E(R_T)$  = Valor esperado do volume total de vendas, expresso em unidades monetárias.

$\bar{R}_C$  = Razão de contribuição ponderada

$C_F$  = Custos fixos

Como o volume de vendas apresenta uma distribuição normal de probabilidade com média  $\mu_{R_T}$  e variância  $\sigma_{R_T}^2$ , o lucro esperado também terá uma distribuição normal de probabilidade cujos parâmetros estarão determinados pelas expressões a seguir:

$$\mu_L = E(L) = E(R_T) \times \bar{R}_C - C_F \quad (56)$$

$$\sigma_L = \sigma_{R_T} \times \bar{R}_C \quad (57)$$

As probabilidades do lucro real ser no mínimo igual ao lucro esperado e o lucro real ser no mínimo igual a zero podem ser calculadas utilizando o procedimento descrito no Anexo 1.

### 3.4.3. VENDAS ESPERADAS

É importante para os tomadores de decisão de uma empresa, ter uma idéia do nível de lucro que poderá obter em período

dos futuros. Pode-se conhecer o montante do lucro esperado e sua distribuição de probabilidade, assim como os parâmetros que a determinam, é possível determinar a média da distribuição de probabilidade do volume total de vendas e seu desvio padrão. Estes parâmetros podem ser calculados utilizando-se as expressões a seguir:

$$\mu_{R_T} = E(R_T) = \frac{C_F + E(L)}{\bar{R}_C} \quad (58)$$

$$\sigma_{R_T} = \frac{\sigma_L}{\bar{R}_C} \quad (59)$$

Uma vez que se tenha determinado o valor esperado do volume total de vendas, pode-se determinar qual parte deste volume de vendas corresponde a cada um dos produtos fabricados pela empresa, dividindo o volume de vendas de cada produto, expresso em unidades monetárias, por seu preço de venda. Assim obtém-se o número de unidades de cada produto que a empresa deve fabricar e vender para obter o lucro esperado. Este procedimento é apresentado no Quadro a seguir:

PRODUTO	RECEITA TOTAL DE VENDAS (1)	RAZÃO DE CONTRIBUIÇÃO (2)	RECEITA DE VENDAS POR PRODUTO (3) = (1) x (2)	PREÇO DE VENDA (4)	UNIDADES (5) = (3) ÷ (4)
P <sub>1</sub>	R <sub>T</sub>	R <sub>C1</sub>	R <sub>P1</sub> = R <sub>T</sub> x R <sub>C1</sub>	p <sub>1</sub>	R <sub>P1</sub> ÷ p <sub>1</sub>
P <sub>2</sub>	R <sub>T</sub>	R <sub>C2</sub>	R <sub>P2</sub> = R <sub>T</sub> x R <sub>C2</sub>	p <sub>2</sub>	R <sub>P2</sub> ÷ p <sub>2</sub>
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
P <sub>n</sub>	R <sub>T</sub>	R <sub>Cn</sub>	R <sub>Pn</sub> = R <sub>T</sub> x R <sub>Cn</sub>	p <sub>n</sub>	R <sub>Pn</sub> ÷ p <sub>n</sub>

QUADRO 5

PROCEDIMENTO PARA DETERMINAR QUAL A PARTE DO VOLUME DE VENDAS ATRIBUIDO A CADA PRODUTO EM EMPRESAS MULTIPRODUTORAS.

#### 3.4.4. MARGEM DE SEGURANÇA

Para se ter conhecimento da margem de segurança quando se considera o volume de vendas como variável aleatória em empresas multiprodutoras, determinam-se os parâmetros da distribuição de probabilidade da margem de segurança que, muito óbvio, será também uma distribuição normal de probabilidade devido a que é uma função da receita de vendas a qual segundo tem se suposto, se distribue de forma normal.

Os parâmetros da distribuição de probabilidade da margem de segurança podem ser determinado pelas expressões que se seguem:

$$\mu_{M_S} = \frac{E(R_T) - R_{PE}}{E(R_T)} \times 100 \quad (60)$$

$$\sigma_{M_S} = \frac{\sigma_{R_T}}{E(R_T)} \times 100 \quad (61)$$

Como nos casos anteriores pode-se calcular as probabilidades de ocorrência para diversos intervalos da margem de segurança, utilizando-se dos procedimentos descritos no Anexo 1.

#### 3.5. VOLUME DE VENDAS, CUSTO VARIÁVEL, CUSTO FIXO E PREÇO DE VENDA CONSIDERADAS COMO VARIÁVEIS ALEATÓRIAS EM EMPRESAS MONOPRODUTORAS

A seguir vai-se considerar não só o volume de vendas como variável aleatória, mas também todas as variáveis relevantes envolvidas na análise de custo-volume-lucro como variáveis aleatórias, inclusive como pressuposto o lucro que não é outra coisa se não uma função do volume de vendas, dos custos e do preço de vendas.

Inicialmente parte-se para a análise da situação em empresas monoprodutoras e posteriormente estende-se a análise para as empresas multiprodutoras. Para facilitar o presente estudo toma-se por base o quadro a seguir.

VARIÁVEL	VALOR ESPERADO	DESVIO PADRÃO
Volume de Vendas (Q)	E (Q) u	$\sigma_Q$ u
Preço de Venda Unitário (p)	E (p) \$	$\sigma_P$ \$
Custos Fixos ( $C_F$ )	E ( $C_F$ )\$	$\sigma_{C_F}$ \$
Custos Variáveis Unitários ( $C_V$ )	E ( $C_V$ )\$	$\sigma_{C_V}$ \$

QUADRO 6  
PARÂMETROS DAS DISTRIBUIÇÕES DAS VARIÁVEIS ENVOLVIDAS NA ANÁLISE DE C-V-L.

Os valores da média e do desvio padrão da distribuição de probabilidade de cada uma das variáveis consideradas, podem ser determinados da mesma maneira que a estimação dos parâmetros da distribuição de probabilidade do volume de vendas para o caso das empresas monoprodutoras, mediante a utilização de métodos estatísticos ou subjetivos.

Contudo, cabe assinalar que a determinação das distribuições de probabilidade das diferentes variáveis, sai do alcance e objetivo do presente trabalho com exceção das distribuições de probabilidades daquelas variáveis definidas como funções das variáveis fundamentais incluídas na análise de custo-volume-lucro. Cada uma das variáveis fundamentais apresentará uma curva normal de probabilidade, como foi suposto como hipótese de trabalho.

### 3.5.1. PONTO DE EQUILÍBRIO

Quando todas as variáveis fundamentais da análise de custo-volume-lucro são consideradas aleatórias, o ponto de equilíbrio para empresas monoprodutoras pode ser determinado utilizando-se das seguintes expressões

$$Q_{PE} = \frac{E(C_F)}{E(P) - E(C_V)} \quad (62)$$

$$R_{PE} = \frac{E(C_F)}{1 - \frac{E(c_v)}{E(p)}} \quad (63)$$

Para a determinação da probabilidade de que as vendas reais sejam no mínimo igual ao nível de equilíbrio, procede-se da seguinte maneira:

- Determina-se a probabilidade condicional de que a empresa alcance pelo menos seu nível de equilíbrio, dado que  $p = E(p)$ ,  $c_v = E(c_v)$  e  $C_F = E(C_F)$  e, neste caso, o nível de equilíbrio terá o caráter de esperança condicional. Ao calcular esta probabilidade, chega-se a igual resultado que o obtido no caso de empresas monoproductoras considerando só uma variável incerta, o volume de vendas, com a diferença que a probabilidade obtida agora, mesmo sendo da mesma magnitude, terá uma característica distinta, a de ser probabilidade condicional, dado que atribuiu-se ao restante das variáveis envolvidas na análise, um valor específico que seria seu valor esperado;
- A probabilidade de que a empresa alcance pelo menos seu nível de equilíbrio, levando-se em consideração as distribuições de probabilidade de todas as variáveis fundamentais, é determinada uma vez que se tenha definido a distribuição de probabilidade do lucro esperado.

### 3.5.2. LUCRO ESPERADO

O lucro esperado, em condições de certeza absoluta, pode ser determinado mediante a utilização da expressão  $L = Q \times m_c - C_F$  onde se conhece o valor de  $Q$ ,  $m_c$  e  $C_F$ . Ao considerar o volume de vendas como variável aleatória, notou-se que o lucro esperado foi definido como o produto do valor esperado do volume de vendas e a margem de contribuição unitária, menos o montante de custos fixos onde a margem de contribuição unitária e o montante de custos fixos eram valores conhecidos. O lucro espera-

do determinado desta maneira será também uma variável aleatória pois é uma função de uma variável de igual natureza-volume de vendas - por conseguinte sua distribuição de probabilidade estará determinada pela distribuição de probabilidade da variável independente. Por exemplo, a probabilidade de que a empresa obtenha lucros ou em outras palavras, a probabilidade de que o lucro real seja no mínimo igual a zero, será igual a probabilidade de que as vendas reais sejam pelo menos igual ao nível de equilíbrio.

Quando todas as variáveis envolvidas na análise são consideradas aleatórias, o lucro esperado pode ser determinado com a utilização da seguinte expressão:

$$E(L) = E(Q) (E(p) - E(c_v)) - E(C_F) \quad (64)$$

onde:

$E(L)$  = Lucro esperado

$E(Q)$  = Valor esperado do volume de vendas

$E(p)$  = Valor esperado do preço de venda unitário

$E(c_v)$  = Valor esperado do custo variável unitário

$E(C_F)$  = Valor esperado do montante de custos fixos

Ressalta-se que o valor do lucro esperado acima definido corresponde a média da distribuição de probabilidade do lucro. Por sua vez a determinação do desvio padrão desta distribuição é muito mais complexa, como pode-se notar a seguir.

Ao observar a fórmula que permite determinar o lucro esperado, nota-se que é possível decompô-la em duas partes:

1.<sup>a</sup>) A margem de contribuição total ( $M_C$ ) definida neste caso como:  $M_C = E(Q) (E(p) - E(c_v))$ , e

2.<sup>a</sup>) O montante de custos fixos determinado aqui pelo valor médio de sua distribuição de probabilidade.

A margem de contribuição total pode ser decomposta em cada um dos seus multiplicandos, isto é:

- A margem de contribuição unitária ( $m_c$ ) defini-

da como a diferença entre o preço de venda unitário e o custo variável unitário e determinada, nesta ocasião, pela diferença entre as médias das distribuições de probabilidades de ambas as variáveis, ou seja, pela diferença entre os respectivos valores esperados;

- O volume de vendas neste caso, corresponde à média de sua distribuição de probabilidades.

A diferença entre variáveis aleatórias com funções de distribuição de probabilidade  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ <sup>9</sup>, terá uma distribuição normal de probabilidade cuja média será a diferença dos valores esperados de ambas variáveis, e sua variância será a soma das variâncias das variáveis aleatórias, ou seja, a diferença mencionada se distribuirá:

$$N\left(\mu_1 - \sum_{i=2}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right) \quad (65)$$

De acordo com a definição que foi dada de margem de contribuição unitária, esta apresentará uma distribuição normal de probabilidade cujos parâmetros serão:

$$\mu_{m_c} = \mu_p - \mu_{c_v} = E(P) - E(c_v) = E(m_c) \quad (66)$$

$$\sigma_{m_c} = \sqrt{\sigma_p^2 + \sigma_{c_v}^2}$$

A determinação da distribuição de probabilidade da margem de contribuição total que como se sabe, define-se como o produto entre a margem de contribuição unitária e o volume de vendas expresso em unidades físicas. O produto de duas variáveis aleatórias X e Y distribuídas  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$  será também uma variável aleatória cuja função de distribuição de probabilidade terá um valor esperado definido pelo produto dos valores esperados dos multiplicandos, e sua variância estará determinada pela soma de: a) O produto das variâncias de ambas variáveis aleatórias; b) O pro-

<sup>9</sup> Op. Cit. MEYER, Paul L. p - 198

duto do quadrado do valor esperado da variável aleatória X pela variância da variável aleatória Y e c) o produto do quadrado do valor esperado da variável aleatória Y pela variância da variável aleatória X, ou seja:

Se  $Z = XY$  onde X e Y são variáveis aleatórias com distribuição  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$  respectivamente, Z será uma variável aleatória cuja distribuição de probabilidade será:<sup>10</sup>

$$N(\mu_x \mu_y; V(X) V(Y) + \mu_x^2 V(Y) + \mu_y^2 V(X)) \quad (67)$$

De acordo com isto a margem de contribuição total terá uma distribuição de probabilidade determinada pelos seguintes parâmetros:

$$\mu_{M_C} = \mu_q \times \mu_{m_c} = E(Q) \times E(m_c) = E(M_C) \quad (68)$$

$$\sigma_{M_C} = \sqrt{V(Q) V(m_c) + (\mu_q)^2 V(m_c) + (\mu_{m_c})^2 V(Q)} \quad (69)$$

A partir de agora tem-se condições de determinar o desvio padrão da distribuição de probabilidade do lucro, visto que se conhece os parâmetros das distribuições de probabilidade da margem de contribuição total e do montante de custos fixos que são as variáveis que determinarão em definitivo o montante do lucro da empresa.

Para calcular a variância da distribuição de probabilidade do lucro deve-se proceder de forma idêntica a que foi feita para determinar este parâmetro no caso da margem de contribuição unitária pois, como se sabe, o lucro é, neste caso, uma diferença entre variáveis aleatórias, ou seja  $[E(M_C) - E(C_F)]$  e, portanto, sua variância estará determinada pela soma das variâncias da margem de contribuição total ( $\sigma_{M_C}^2$ ) e do montante de custos fixos ( $\sigma_{C_F}^2$ ). De acordo com isto, o desvio padrão do lucro estará definido pela seguinte expressão:

<sup>10</sup> JAEDICKE, Robert K and ROBICHEL A. Alexander. Cost - Volume - Profit Analises under conditions of uncertainly.

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma_{M_C}^2 + \sigma_{C_F}^2} \quad (70)$$

### 3.5.3. VENDAS ESPERADAS E MARGEM DE SEGURANÇA

O volume de vendas esperado para se chegar a um lucro pré-determinado, em empresas monoprodutoras onde todas as variáveis envolvidas na análise são aleatórias, estará determinado pela expressão seguinte:

$$E(Q) = \frac{E(C_F) + E(L)}{E(m_c)} \quad (71)$$

A margem de segurança esperada, por sua vez, estará determinada pela seguinte expressão:

$$\mu_{MS} = E(M_S) = \frac{E(p) \times E(Q) - E(p) \times E(Q_{PE})}{E(p) \times E(Q)} \times 100 \quad (72)$$

A probabilidade de que a margem de segurança seja no mínimo igual a zero deve ser calculada por meio da distribuição de probabilidade da própria margem de segurança ou determinando sua probabilidade equivalente em termos de lucro, ou seja, calculando a probabilidade de que o lucro real seja pelo menos igual a zero.

### 3.6. VOLUME DE VENDAS, CUSTO VARIÁVEL, CUSTO FIXO E PREÇO DE VENDA CONSIDERADAS COMO VARIÁVEIS ALEATÓRIAS EM EMPRESAS MULTIPRODUTORAS

Complementando o estudo da análise de custo-volume-lucro sob condições de risco, toma-se como aleatórias todas as variáveis fundamentais envolvida na análise para o caso de empresas multiprodutoras. Esta situação é a que apresenta mais complexidade, visto que não só todas as variáveis envolvidas na análise são consideradas aleatórias mas também a empresa fabrica e vende uma variedade de produtos.

### 3.6.1. PONTO DE EQUILÍBRIO

O ponto de equilíbrio, como foi visto, deverá ser expresso em unidades monetárias devido à utilização de unidades homogêneas para sua mensuração, já que as empresas multiprodutoras produzem e vendem diferentes produtos. Para o cálculo do ponto de equilíbrio utiliza-se a seguinte expressão:

$$R_{PE} = \frac{E(C_F)}{1-E(\bar{R}_V)} = \frac{E(C_F)}{E(\bar{R}_C)} \quad (73)$$

Ao multiplicar este valor pelas porcentagens de participação na composição das vendas de cada produto e, posteriormente, ao dividir os resultados obtidos pelos valores esperados dos preços de venda dos respectivos produtos, pode-se determinar a combinação de vendas que permite alcançar o ponto de equilíbrio, ou seja, quanto deverá ser produzido e vendido de cada produto para se atingir o ponto de equilíbrio.

Um aspecto que se deve analisar é a determinação da probabilidade condicional de que a empresa alcance pelo menos seu nível de equilíbrio, mas antes de poder calcular esta probabilidade, deve-se determinar primeiro os parâmetros da distribuição de probabilidade do volume de vendas expresso em unidades monetárias, ou seja, a receita de vendas. A receita total de vendas será a soma das receitas de venda de cada um dos produtos e, por sua vez, a receita de venda de cada produto estará determinada pela multiplicação do valor esperado do volume de venda deste produto, pelo seu preço de venda, como se pode comprovar pela expressão:

$$E(R_i) = E(Q_i) \times E(p_i) \quad (74)$$

onde:

$E(R_i)$  = Valor esperado da receita de vendas do  $i$ -ésimo produto.

$E(Q_i)$  = Valor esperado do volume de vendas do  $i$ -ésimo produto.

$E(p_i)$  = Valor esperado do preço de venda do  $i$ -ésimo produto.

Para determinar os parâmetros da distribuição de probabilidade da receita total de vendas é necessário estabelecer previamente a distribuição de probabilidade da receita de venda de cada produto, a qual, por definição, é o produto de duas variáveis aleatórias e, em consequência, seus parâmetros estarão determinados pelas expressões:

$$\mu_R = E(Q_i) \times E(p_i) \quad (75)$$

$$\sigma_R = \sqrt{V(Q_i) V(p_i) + (\mu_q)^2 V(p_i) + (\mu_{p_i})^2 V(Q_i)} \quad (76)$$

Com a determinação dos parâmetros das distribuições de probabilidade da receita de venda de cada produto, parte-se para a determinação dos parâmetros da receita total de vendas, que estarão definidos a partir das seguintes expressões:

$$\mu_{R_T} = \sum_{i=1}^n \mu_{R_i} \quad (77)$$

$$\sigma_{R_T} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{R_i}^2} \quad (78)$$

Com base nestas informações pode-se determinar a probabilidade condicional do comportamento da receita de venda. A probabilidade não condicional de que a empresa alcance um certo lucro, pode ser obtida uma vez que se consiga estabelecer a distribuição de probabilidade do lucro e, em consequência, seus parâmetros.

### 3.6.2. LUCRO ESPERADO

O lucro esperado na análise de custo-volume-lucro sob condições de risco em empresas multiprodutora é determinado pela expressão seguinte:

$$E(L) = E(R_T) \times E(\bar{R}_C) - E(C_F) \quad (79)$$

onde:

$E(L)$  = Lucro esperado

$E(R_T)$  = Valor esperado da receita total de vendas

$E(\bar{R}_C)$  = Valor esperado da razão de contribuição ponderada

$E(C_F)$  = Valor esperado do montante de custos fixos

Para determinar os parâmetros da distribuição de probabilidade do lucro, deve-se decompor a expressão anterior em: a) A margem de contribuição total, definida como o produto do valor esperado da receita total de vendas e o valor esperado da razão de contribuição ponderada, e b) O montante de custos fixos que agora corresponde ao valor esperado desta variável.

$$\mu_{R_T} = \sum_{i=1}^n \mu_{R_i} \quad (80)$$

$$\sigma_{R_T}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{R_i}^2 \quad (81)$$

Os parâmetros da distribuição de probabilidade da receita total de vendas foram definidos anteriormente e correspondem as expressões acima.

Desta decomposição de lucro esperado se deduz que para determinar os parâmetros de sua distribuição de probabilidade é necessário calcular antes o seguinte: 1º) Os parâmetros da distribuição de probabilidade da razão de contribuição ponderada, 2º) Os parâmetros da distribuição de probabilidade da margem de contribuição total, e 3º) Os parâmetros da distribuição de probabilidade do lucro com base nas informações obtidas pelos cálculos precedentes.

Para melhor compreensão, vai-se fazer o desenvolvimento comentado dos passos antecedentes:

1º) A razão de contribuição ponderada foi definida como a soma dos produtos entre as razões de contribuição de cada ar

tigo e sua respectiva participação na composição das vendas, isto é:

$$R_C = \sum_{i=1}^n R_{C_i} \times \%_i \quad (82)$$

onde:

$R_{C_i}$  = Razão de contribuição do i-ésimo produto.

$\%_i$  = Percentual de participação do i-ésimo produto na composição das vendas.

A razão de contribuição de cada produto por sua vez se define como o quociente entre a margem de contribuição e o preço de venda unitário, ou seja:

$$R_{C_i} = \frac{P_i - c_{v_i}}{P_i} = \frac{m_{c_i}}{P_i} \quad (83)$$

onde:

$R_{C_i}$  = Razão de contribuição do i-ésimo produto

$P_i$  = Preço de venda do i-ésimo produto

$C_{v_i}$  = Custo variável unitário do i-ésimo produto

$m_{c_i}$  = Margem de contribuição unitária do i-ésimo produto.

O valor esperado da razão de contribuição será então, o quociente entre o valor esperado da margem de contribuição unitária e o valor esperado do preço de venda, e sua variância aproximada estará determinada pela expressão seguinte:

$$V(R_{C_i}) = \left( \frac{1}{\mu_{P_i}} \right) V(m_{c_i}) + \left( \frac{\mu_{m_{c_i}}^2}{\mu_{P_i}^4} \right) V(P_i) \quad (84)$$

A determinação dos parâmetros da distribuição de probabilidade do produto  $\%_i \times R_{C_i}$  que, como se sabe, corresponde ao i-ésimo elemento da soma  $i$  que determina a razão de contribuição ponderada, será feita a seguir. É importante lembrar, neste pon-

to, que os  $\%_i$  são constantes, visto que foi suposto que a composição das vendas permanece invariável por que o produto  $\%_i \times R_{c_i}$  corresponde ao produto de uma constante por uma variável aleatória e, se  $X$  é uma variável aleatória e  $C$  uma constante, os parâmetros da distribuição de probabilidade do produto  $CX$ <sup>11</sup> será:

$$E(CX) = CE(X) \quad (85)$$

$$V(CX) = C^2 V(X) \quad (86)$$

Aplicando a nomenclatura adotada neste trabalho às expressões anteriores, têm-se:

$$E(\%_i \times R_{c_i}) = \%_i \times E(R_{c_i}) \quad (87)$$

$$V(\%_i \times R_{c_i}) = (\%_i)^2 V(R_{c_i}) \quad (88)$$

Para finalizar o primeiro passo determina-se os parâmetros da distribuição de probabilidade da razão de contribuição ponderada, os quais estarão definidos pelas seguintes expressões:

$$E(\bar{R}_c) = \sum_{i=1}^n E(\%_i R_{c_i}) \quad (89)$$

$$V(\bar{R}_c) = \sum_{i=1}^n V(\%_i R_{c_i}) \quad (90)$$

2º) A margem de contribuição total se define como o produto da receita total de vendas e a razão de contribuição ponderada. Na situação que ora se analisa, ambas são variáveis aleatórias, portanto, os parâmetros de sua distribuição de probabilidade estarão determinados pelas seguintes expressões:

$$E(M_C) = \mu_{M_C} = E(R_T) \times E(\bar{R}_C) \quad (91)$$

$$V(M_C) = V(R_T) V(\bar{R}_C) + [E(R_T)]^2 V(\bar{R}_C) + [E(\bar{R}_C)]^2 V(R_T) \quad (92)$$

<sup>11</sup> Op. Cit. MEYER, Paul L. p - 138 - 145

3º) Pode-se expressar o lucro esperado como a diferença entre a margem de contribuição total e o montante de custos fixos, sendo ambas variáveis aleatórias. Em consequência, os parâmetros da distribuição de probabilidade do lucro estarão determinados pelas expressões:

$$E(L) = \mu_L = E(M_C) - E(C_F) \quad (93)$$

$$V(L) = V(M_C) + V(C_F) \quad (94)$$

$$\sigma_L = \sqrt{V(L)} = \sqrt{V(M_C) + V(C_F)} \quad (95)$$

Com as informações obtidas, pode-se definir a distribuição de probabilidade do lucro, isto é, pode-se determinar, por exemplo, a probabilidade de que o lucro real seja nulo ou a probabilidade da empresa trabalhar pelo menos no seu nível de equilíbrio.

### 3.6.3. VENDAS ESPERADAS E MARGEM DE SEGURANÇA

Se a empresa pode definir o lucro que espera obter sob o pressuposto de que se tenha estimado o valor esperado do preço de venda, dos custos variáveis e dos custos fixos, o valor esperado da receita de vendas necessária para a obtenção de um certo lucro poderá ser determinada pela expressão a seguir:

$$E(R_T) = \frac{E(C_F) + E(L)}{E(\bar{R}_C)} \quad (96)$$

Uma vez determinado este valor, poderá decompor-se de acordo com a variação de vendas da empresa, que é um dado conhecido, obtendo-se a receita de vendas de cada um dos produtos fabricados por ela, e, finalmente, dividindo estas receitas pelos respectivos preços de venda, se poderá obter o número de unidades de cada produto que a empresa deve fabricar e vender afim de atingir um lucro que se espera.

A margem de segurança estará determinada pela utilização da seguinte expressão:

$$E(M_S) = \frac{E(R_T) - E(R_{PE})}{E(R_T)} \quad (97)$$

A probabilidade de que a margem de segurança real esteja compreendida num dado intervalo, pode ser calculada mediante a distribuição de probabilidade da própria margem de segurança ou calculando a probabilidade equivalente em termos de lucro.

Finalmente, ~~ao concluir o presente capítulo~~ é necessário ressaltar que durante o desenvolvimento deste tema foi suposto a existência de independência entre as variáveis aleatórias envolvidas na análise, com o objetivo de simplificar os cálculos, o que constitui uma limitação do modelo.

No próximo capítulo se fará uma aplicação, através de exemplo ilustrativo, dos conceitos desenvolvidos neste capítulo.

## CAPÍTULO IV

### 4. EXEMPLO ILUSTRATIVO

#### 4.1. INTRODUÇÃO

O presente capítulo tem por objetivo fundamental, apresentar uma aplicação da análise de custo-volume-lucro sob condições de risco desenvolvida no capítulo anterior.

Para tal efeito, serão analisadas separadamente as relações entre custos, nível de atividade e lucro em empresas monoprodutoras e multiprodutoras.

Para cada uma das situações acima referidas será formulado um exemplo ilustrativo, com dados hipotéticos, a fim de simular uma aplicação da técnica desenvolvida em casos reais, visando, principalmente, salientar as vantagens derivadas da consideração do risco na análise de custo-volume-lucro.

Tanto no caso de empresas monoprodutoras quanto no caso de empresas multiprodutoras, dar-se-á especial importância às informações adicionais fornecidas pela análise de custo-volume-lucro sob condições de risco em relação com a probabilidade de ocorrência de diversos eventos analisados, o que, evidentemente, representa um subsídio de vital importância para os tomadores de decisões.

No final do presente capítulo, serão feitas algumas considerações finais em relação com os exemplos ilustrativos apresentados e os resultados obtidos.

## 4.2. LIMITAÇÕES DO EXEMPLO

A única limitação digna de ser mencionada em relação com o exemplo ilustrativo a ser apresentado, diz respeito ao fato de serem utilizados dados fictícios para proceder à aplicação da análise custo-volume-lucro sob condições de risco. Porém, esta é uma limitação mais aparente do que real porquanto o objetivo básico deste capítulo é mostrar como este tipo de análise pode ser aplicada em quaisquer situações, e portanto, um exemplo generalizado facilita o atingimento deste objetivo.

Por outro lado, a aplicação da análise de custo-volume-lucro sob condições de risco a uma situação real implicaria na realização de uma série de atividades adicionais prévias, que fogem totalmente ao escopo do presente trabalho, tais como: classificação de custos e despesas segundo sua variabilidade em relação a variações do nível de atividade, análise de regressão de custos e despesas, estimativas dos parâmetros das distribuições de probabilidade das diversas variáveis envolvidas na análise, etc.

## 4.3. ANÁLISE DE CUSTO - VOLUME - LUCRO SOB CONDIÇÕES DE RISCO EM EMPRESAS MONOPRODUTORAS

A seguir serão apresentados alguns dados básicos correspondentes a uma empresa monoprodutora, os quais serão utilizados neste subcapítulo para ilustrar a aplicação da análise de custo-volume-lucro sob condições de risco.

## 4.3.1. DADOS DO PROBLEMA

Suponha-se que a empresa "X", fabricante do produto "Z", a apresentou as seguintes estimativas de custos, despesas, volume de atividades e preço de venda para o exercício seguinte:

Variável	Valor esperado	Desvio padrão
Volume de vendas	2.500 unidades	600 unidades
Preço de venda	Cr\$ 20,00	Cr\$ 0,50
<u>Custos variáveis</u>		
Matéria prima	Cr\$ 5,00	Cr\$ 0,20
Mão de obra direta	Cr\$ 3,00	Cr\$ 0,10
Energia	Cr\$ 4,00	Cr\$ 0,10
Combustíveis	Cr\$ 2,00	Cr\$ 0,14
Embalagem	Cr\$ 1,00	Cr\$ 0,10
<u>Custos fixos</u>		
Seguros	Cr\$ 500,00	Cr\$ 100,00
Mão de obra indireta	Cr\$ 4.000,00	Cr\$ 300,00
Aluguel	Cr\$ 2.000,00	Cr\$ 100,00
Publicidade	Cr\$ 2.500,00	Cr\$ 200,00
Depreciação	Cr\$ 1.000,00	Cr\$ 100,00

QUADRO 7

DADOS DO EXEMPLO ILUSTRATIVO Nº 1

## 4.3.2. PONTO DE EQUILÍBRIO

Antes de proceder ao cálculo do ponto de equilíbrio da em-

presa "X", é preciso calcular os parâmetros das distribuições de probabilidade do custo variável unitário e do montante de custos fixos.

Conforme foi suposto como hipótese de trabalho, cada um dos componentes do custo variável unitário e dos custos fixos é uma variável aleatória normalmente distribuída e independentes entre si. Considerando este suposto e considerando que o custo variável unitário é a soma dos componentes variáveis e que o montante de custos fixos é a soma dos componentes fixos, pode-se afirmar o seguinte:

- a) A média da distribuição de probabilidade do custo variável unitário será determinada pela seguinte expressão:

$$\mu_{CV} = \sum_{i=1}^u \mu_{CV_i} \quad (98)$$

onde:

$\mu_{CV}$  = média da distribuição de probabilidade do custo variável unitário

$\mu_{CV_i}$  = média da distribuição de probabilidade do  $i$ -ésimo componente do custo variável unitário.

Substituindo as variáveis da expressão acima pelos dados do exemplo ilustrativo, obtem-se:

$$\mu_{CV} = \text{Cr\$ } 5,00 + \text{Cr\$ } 3,00 + \text{Cr\$ } 4,00 + \text{Cr\$ } 2,00 + \text{Cr\$ } 1,00$$

$$\mu_{CV} = \text{Cr\$ } 15,00$$

b) A variância da distribuição de probabilidade do custo variável unitário será determinada pela seguinte expressão:

$$\sigma_{CV}^2 = \sum_{i=1}^u \sigma_{CV_i}^2 \quad (99)$$

onde:

$\sigma_{CV}^2$  = variância da distribuição de probabilidade do custo variável unitário

$\sigma_{CV_i}^2$  = variância da distribuição de probabilidade do i-ésimo componente do custo variável unitário.

Substituindo as variáveis da expressão acima pelos dados do exemplo ilustrativo, obtem-se:

$$\sigma_{CV}^2 = 0,04 + 0,01 + 0,01 + 0,02 + 0,01$$

$$\sigma_{CV}^2 = 0,09$$

Portanto, o desvio padrão do custo variável unitário será:

$$\sigma_{CV} = \sqrt{0,09} = \text{Cr\$ } 0,30$$

c) A média da distribuição de probabilidade do montante de custos fixos será determinada pela seguinte expressão:

$$\mu_{CF} = \sum \mu_{CF_i} \quad (100)$$

onde:

$\mu_{CF}$  = média da distribuição de probabilidade do montante de custos fixos

$\mu_{CF_i}$  = média da distribuição de probabilidade do i-ésimo componente dos custos fixos.

Substituindo as variáveis da expressão acima pelos dados do exemplo ilustrativo, obtem-se:

$$\mu_{CF} = \text{Cr\$ } 500,00 + \text{Cr\$ } 4.000,00 + \text{Cr\$ } 2.000,00 + \text{Cr\$ } 2.500,00 + \text{Cr\$ } 1.000,00$$

$$\mu_{CF} = \text{Cr\$ } 10.000,00$$

d) A variância da distribuição de probabilidade do montante de custos fixos será determinada pela seguinte expressão:

$$\sigma_{CF}^2 = \sum_{i=1}^u \sigma_{CF_i}^2 \quad (101)$$

onde:

$\sigma_{CF}^2$  = variância da distribuição de probabilidade do montante de custos fixos

$\sigma_{CF_i}^2$  = variância da distribuição de probabilidade do i-ésimo componente dos custos fixos.

Substituindo as variáveis da expressão acima pelos dados do exemplo ilustrativo, obtém-se:

$$\sigma_{CF}^2 = 10.000 + 90.000 + 10.000 + 40.000 + 10.000$$

$$\sigma_{CF}^2 = 160.000$$

Portanto, o desvio padrão do montante de custos fixos será:

$$\sigma_{CF} = \sqrt{160.000} = \text{Cr\$ } 400,00$$

Uma vez calculados os parâmetros das distribuições de probabilidade do custo variável unitário e do montante de custos fixos, pode-se proceder ao cálculo dos parâmetros da distribuição de probabilidade do ponto de equilíbrio da empresa "X".

Aplicando a fórmula 62, desenvolvida no capítulo anterior, pode-se calcular a média da distribuição de probabilidade do ponto de equilíbrio conforme é mostrado a seguir:

$$Q_{PE} = \frac{\text{Cr\$ } 10.000,00}{\text{Cr\$ } 20,00 - \text{Cr\$ } 15,00}$$

Portanto:

$$Q_{PE} = 2.000 \text{ unidades}$$

Aplicando a fórmula 63, pode-se calcular a média da distribuição de probabilidade do ponto de equilíbrio expresso em unidades monetárias conforme é mostrado a seguir:

$$R_{PE} = \frac{\text{Cr\$ } 10.000,00}{1 - \frac{\text{Cr\$ } 15,00}{\text{Cr\$ } 20,00}}$$

Portanto:

$$R_{PE} = \text{Cr\$ } 40.000,00$$

Aplicando a fórmula 84, desenvolvida no capítulo anterior,

pode-se calcular a variância, e conseqüentemente o desvio padrão, da distribuição de probabilidade do ponto de equilíbrio, conforme é demonstrado a seguir:

a) Em primeiro lugar deve-se calcular a variância da distribuição de probabilidade da margem de contribuição unitária aplicando a fórmula 66. Isto é:

$$\begin{aligned}\sigma_{m_c}^2 &= 0,25 + 0,09 \\ \sigma_{m_c}^2 &= 0,34\end{aligned}$$

b) Uma vez calculada a variância da distribuição de probabilidade da margem de contribuição unitária, é possível aplicar diretamente a fórmula 84, obtendo-se a variância da distribuição de probabilidade do ponto de equilíbrio expresso em unidades físicas. Aplicando a referida fórmula aos dados do exemplo ilustrativo, obtem-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{Q_{PE}}^2 &= (1/25) \times 160.000 + (100.000.000/625) \times 0,34 \\ \sigma_{Q_{PE}}^2 &= 6.400 + 54.400 \\ \sigma_{Q_{PE}}^2 &= 60.800\end{aligned}$$

Portanto:

$$\sigma_{Q_{PE}} = \sqrt{60.800} = 247 \text{ unidades.}$$

Portanto, o ponto de equilíbrio, expresso em unidades físicas; apresenta uma distribuição normal com média igual a 2.000

unidades e desvio padrão igual a 247 unidades.

De igual forma, pode-se calcular a variância e o desvio padrão da distribuição de probabilidade do ponto de equilíbrio expresso em unidades monetárias. Aplicando, mais uma vez, a fórmula 84, obtem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}\sigma_{R_{PE}}^2 &= (1/0,25) \times 160.000 + (100.000.000/3,9 \times 10^{-3})(8,5 \times 10^{-4} + 3,9 \times 10^{-5}) \\ \sigma_{R_{PE}}^2 &= 640.000 + 22.758.400 \\ \sigma_{R_{PE}}^2 &= 23.398.400\end{aligned}$$

Portanto:

$$\sigma_{R_{PE}} = \text{Cr\$ } 4.837,00$$

Este resultado significa que o ponto de equilíbrio, expresso em unidades monetárias, apresenta uma distribuição normal de probabilidade com média igual a Cr\$ 40.000,00 e desvio padrão igual a Cr\$ 4.837,00.

Uma vez calculados os parâmetros da distribuição de probabilidade do ponto de equilíbrio, é possível calcular a probabilidade de que o ponto de equilíbrio esteja compreendido entre dois pontos quaisquer do intervalo relevante de atividade. Para tal efeito bastará apenas transformar a distribuição de probabilidade do ponto de equilíbrio em uma distribuição normal padrão e consultar a tabela de probabilidade correspondente a este tipo de distribuição. O procedimento para efetuar tal transformação está descrito no anexo 1.

O conhecimento dos parâmetros da distribuição de probabili

dade do ponto de equilíbrio, pode fornecer valiosas informações para o tomador de decisões. No caso do problema ilustrativo, foram calculadas, a maneira de exemplo, as probabilidades de que o ponto de equilíbrio esteja compreendido em diversos intervalos do nível de atividade. Os resultados obtidos são apresentados nos quadros 8 e 9.

Intervalo (unidades)	Probabilidade
> 2.000	0.5000
1.500 - 2.500	0.9566
< 1.500	0.0217
2.000 - 2.500	0.4783
1.800 - 2.000	0.7693

QUADRO 8

PROBABILIDADES DO PONTO DE EQUILÍBRIO, EXPRESSO EM UNIDADES FÍSICAS, ESTAR COMPREENDIDO EM DIVERSOS INTERVALOS.

Intervalo (Cr\$)	Probabilidade
> Cr\$ 40.000,00	0.5000
Cr\$ 35.000,00 - Cr\$ 45.000,00	0.6985
< Cr\$ 35.000,00	0.1515
Cr\$ 40.000,00 - Cr\$ 45.000,00	0.3492
Cr\$ 30.000,00 - Cr\$ 40.000,00	0.4808

QUADRO 9

PROBABILIDADES DO PONTO DE EQUILÍBRIO, EXPRESSO EM UNIDADES MONETÁRIAS, ESTAR COMPREENDIDO EM DIVERSOS INTERVALOS.

#### 4.3.3. LUCRO ESPERADO

A seguir serão determinados os parâmetros da distribuição de probabilidade do lucro que, conforme foi visto no capítulo anterior, é uma função dependente das seguintes variáveis: volume de vendas expresso em unidades físicas, margem de contribuição unitária e montante de custos fixos.

Aplicando a fórmula 64, desenvolvida no capítulo anterior, é possível determinar a média da distribuição de probabilidade do lucro operacional, conforme é apresentado a seguir.

$$E(L) = 2.500(\text{Cr\$ } 20,00 - \text{Cr\$ } 15,00) - \text{Cr\$ } 10.000,00$$

$$E(L) = \text{Cr\$ } 2.500,00$$

Portanto, a média da distribuição de probabilidade do lucro operacional da empresa "X" é igual a Cr\$ 2.500,00.

Por sua vez, a variância e o desvio padrão da distribuição de probabilidade do lucro operacional podem ser calculados através da aplicação das fórmulas 69 e 70, apresentadas no capítulo anterior.

Aplicando a fórmula 69, no caso do exemplo ilustrativo, obtém-se a variância da margem de contribuição total, conforme é mostrado a seguir:

$$\sigma_{MC}^2 = 360.000 \times 0,34 + 6.250.000 \times 0,34 + 25 \times 360.000$$

$$\sigma_{MC}^2 = 122.400 + 2.125.000 + 9.000.000$$

$$\sigma_{MC}^2 = 11.247.400$$

Uma vez calculada a variância da distribuição de probabilidade da margem de contribuição total, aplica-se a fórmula 70 a fim de calcular a variância e o desvio padrão da distribuição de probabilidade do lucro operacional, conforme é mostrado a seguir:

$$\sigma_L^2 = 11.247.400 + 160.000$$

$$\sigma_L^2 = 11.407.400$$

Portanto:

$$\sigma_L = \text{Cr\$ } 3.377,00$$

Isto significa que o lucro operacional da empresa "X" apresenta uma distribuição normal com média igual a Cr\$ 2.500,00 e desvio padrão igual a Cr\$ 3.377,00.

Uma vez calculados os parâmetros da distribuição de probabilidade do lucro operacional, é possível calcular a probabilidade de que o lucro esteja compreendido em diversos intervalos. Para tal efeito, a distribuição de probabilidade do lucro operacional deverá ser transformada para uma distribuição normal padrão, a fim de utilizar a tabela de probabilidades existente para dita distribuição.

A maneira de exemplo, serão apresentadas a seguir as probabilidades de que o lucro operacional da empresa "X" esteja compreendido em diversos intervalos.

Intervalo (Cr\$)	Probabilidade
> Cr\$ 2.500,00	0.5000
< Cr\$ 0,00	0.2297
Cr\$ - 1.000,00 - Cr\$ 6.000,00	0.7016
Cr\$ 2.000,00 - Cr\$ 5.000,00	0.3299
< Cr\$ 2.000,00	0.4404

QUADRO 10

PROBABILIDADE DO LUCRO OPERACIONAL ESTAR COMPREEN-  
DIDO EM DIVERSOS INTERVALOS.

#### 4.4. ANÁLISE DE CUSTO - VOLUME - LUCRO SOB CONDIÇÕES DE RISCO NUMA EMPRESA MULTIPRODUTORA

Até agora foi apresentado um exemplo ilustrativo de aplicação da análise de custo - volume - lucro sob condições de risco, para o caso de uma empresa monoprodutora, ou seja, uma empresa que fabrica só um produto. Contudo são poucas as empresas que podem ser classificadas como monoprodutoras, haja visto que a maioria delas fabrica e vende uma variedade de produtos, ou seja, são empresas multiprodutoras.

O que resta do presente capítulo será destinado a ilustrar a aplicação da análise de custo - volume - lucro sob condições de risco no caso de empresas multiprodutoras.

De igual forma como no caso de empresas monoprodutoras, serão apresentados, em primeiro lugar, alguns dados básicos sobre os quais será feita a ilustração.

## 4.4.1. DADOS DO PROBLEMA

Suponha-se que a empresa "W", fabricante dos produtos "A", "B" e "C", apresentou as seguintes estimativas de custos, despesas, volume de atividade e preços de venda para o exercício seguinte:

	<u>Produto "A"</u>	<u>Produto "B"</u>	<u>Produto "C"</u>
Volume de vendas esperado	120.000 u.	60.000 u.	60.000 u.
Desvio padrão do volume de vendas	12.000 u.	10.000 u.	15.000 u.
Preço de venda esperado	Cr\$ 10,00	Cr\$ 12,00	Cr\$ 8,00
Desvio padrão do preço de venda	Cr\$ 0,30	Cr\$ 0,36	Cr\$ 0,24
Custo variável unitário	Cr\$ 7,00	Cr\$ 9,60	Cr\$ 7,20
Desvio padrão do custo variável	Cr\$ 0,14	Cr\$ 0,19	Cr\$ 0,14
Composição das vendas	50%	30%	20%

QUADRO 11

## DADOS DO EXEMPLO ILUSTRATIVO Nº 2.

Suponha-se, também, que o valor esperado do montante de custos fixos é de Cr\$ 460.000,00, e seu desvio padrão de Cr\$ 18.400,00.

## 4.4.2. PONTO DE EQUILÍBRIO

Sabe-se que, no caso de empresas multiprodutoras, é preciso determinar, em primeiro lugar, o ponto de equilíbrio expresso em unidades monetárias, devido ao problema de heterogeneidade de unidades de medida dos diversos produtos fabricados pela empresa.

No caso da análise de custo - volume - lucro sob condições de risco, este ponto de equilíbrio será uma variável aleatória que apresenta uma distribuição normal de probabilidade, cujos parâmetros serão determinados a seguir.

A média da distribuição de probabilidade do ponto de equilíbrio, expresso em unidades monetárias, pode ser calculada através da aplicação da fórmula 73, desenvolvida no capítulo anterior. Porém, antes de aplicar a referida fórmula, deverá ser determinada a média da distribuição de probabilidade da margem de contribuição ponderada, o qual será feito a seguir:

$$E(\bar{R}_c) = E \left[ \sum_{i=1}^u R_{c_i} \times \%_i \right] = \sum_{i=1}^u E(R_{c_i}) \%_i \quad (102)$$

onde:

$E(\bar{R}_c)$  = valor esperado da razão de contribuição ponderada

$R_{c_i}$  = razão de contribuição do i-ésimo produto

$\%_i$  = participação do i-ésimo produto na composição das vendas.

No caso do exemplo ilustrativo tem-se que:

$$E(R_{c_A}) = 0,30 \quad E(R_{c_B}) = 0,20 \quad E(R_{c_C}) = 0,10$$

e sabe-se que:

$$\%_A = 50\% \quad \%_B = 30\% \quad \%_C = 20\%$$

Portanto:

$$E(\bar{R}_c) = 0,30 \times 0,50 + 0,20 \times 0,30 + 0,10 \times 0,20$$

$$E(\bar{R}_c) = 0,23$$

Uma vez calculada a média da distribuição de probabilidade da razão de contribuição ponderada, é possível aplicar diretamente a fórmula 73 para calcular a média da distribuição de probabilidade do ponto de equilíbrio expresso em unidades monetárias, tal como é mostrado a seguir:

$$R_{PE} = \frac{E(C_F)}{E(\bar{R}_c)} = \frac{\text{Cr\$ } 460.000,00}{0,23}$$

$$R_{PE} = \text{Cr\$ } 2.000.000,00$$

A seguir será calculada a variância e o desvio padrão da distribuição de probabilidade do ponto de equilíbrio expresso em unidades monetárias. Para tal efeito, deverão ser calculados, em primeiro lugar, a variância e o desvio padrão da distribuição de probabilidade das razões de contribuição dos diversos produtos, através da aplicação da fórmula 84, desenvolvida no capítulo anterior. Os resultados obtidos são os seguintes:

$$V(R_{cA}) = (1/100) \times 0,1096 + (9/10.000) \times 0,09$$

$$V(R_{cA}) = 1,096 \times 10^{-3} + 8,1 \times 10^{-5}$$

$$V(R_{cA}) = 1,177 \times 10^{-3}$$

Portanto:

$$\sigma(R_{c_A}) = \sqrt{1,177 \times 10^{-3}} = 0,034$$

$$V(R_{c_B}) = (1/144) \times 0,1657 + (5,76/20.736) \times 0,1296$$

$$V(R_{c_B}) = 1,15 \times 10^{-3} + 3,6 \times 10^{-5}$$

$$V(R_{c_B}) = 1,186 \times 10^{-3}$$

Portanto:

$$\sigma(R_{c_B}) = 0,034$$

$$V(R_{c_C}) = (1/64) \times 0,0772 + (0,64/4096) \times 0,0576$$

$$V(R_{c_C}) = 1,21 \times 10^{-3} + 9 \times 10^{-6}$$

$$V(R_{c_C}) = 1,22 \times 10^{-3}$$

Portanto:

$$\sigma(R_{c_C}) = 0,035$$

O passo seguinte será calcular a variância e o desvio padrão da distribuição de probabilidade da razão de contribuição ponderada. A variância desta distribuição será determinada pela seguinte expressão:

$$V(\bar{R}_c) = (\%_A)^2 \times V(R_{c_A}) + (\%_B)^2 \times V(R_{c_B}) + (\%_C)^2 \times V(R_{c_C}) \quad (103)$$

Portanto:

$$V(\bar{R}_c) = 0,25 \times 1,177 \times 10^{-3} + 0,09 \times 1,186 \times 10^{-3} + 0,04 \times 1,22 \times 10^{-3}$$

$$V(\bar{R}_c) = 2,9 \times 10^{-4} + 1,07 \times 10^{-4} + 4,88 \times 10^{-5}$$

$$V(\bar{R}_c) = 4,5 \times 10^{-4}$$

Portanto:

$$\sigma(\bar{R}_c) = \sqrt{4,5 \times 10^{-4}} = 0,021$$

Uma vez calculada a variância e o desvio padrão da distribuição de probabilidade da razão de contribuição ponderada, é possível calcular a variância e o desvio padrão da distribuição de probabilidade do ponto de equilíbrio expresso em unidades monetárias, através da aplicação combinada das fórmulas 73 e 84.

No caso do exemplo ilustrativo, os valores destes parâmetros são os seguintes:

$$V(R_{PE}) = (1/0,0529) \times 3,3856 \times 10^8 + (2,116 \times 10^{11}/2,8 \times 10^{-3}) \times 4,5 \times 10^{-4}$$

$$V(R_{PE}) = 6,4 \times 10^9 + 3,4 \times 10^{10}$$

$$V(R_{PE}) = 4,04 \times 10^{10}$$

Portanto:

$$\sigma(R_{PE}) = \sqrt{4,04 \times 10^{10}} = \text{Cr\$ } 201.015,00$$

Isto significa que o ponto de equilíbrio da empresa "W", expresso em unidades monetárias, apresenta uma distribuição normal com média igual a Cr\$ 2.000.000,00 e desvio padrão igual a Cr\$ 201.015,00.

Uma vez calculados os parâmetros da distribuição de probabilidade do ponto de equilíbrio, é possível calcular a probabilidade de que o nível de equilíbrio esteja compreendido em diversos intervalos. Para tal efeito, a distribuição de probabilidade do ponto de equilíbrio deverá ser transformada, conforme procedimento descrito em anexo, para uma distribuição normal padrão afim de utilizar a tabela de probabilidades existente para dita distribuição.

A maneira de exemplo, serão apresentadas a seguir as probabilidades de que o ponto de equilíbrio da empresa "W" esteja compreendido em diversos intervalos.

Intervalo (Cr\$)	Probabilidade
> Cr\$ 2.000.000,00	0.5000
Cr\$ 1.500.000,00 - Cr\$ 2.500.000,00	0.9872
Cr\$ 2.000.000,00 - Cr\$ 2.500.000,00	0.4936
Cr\$ 1.800.000,00 - Cr\$ 2.000.000,00	0.3389
< Cr\$ 1.500.000,00	0.0064

QUADRO 12

PROBABILIDADE DO PONTO DE EQUILÍBRIO ESTAR COMPREENDIDO EM DIVERSOS INTERVALOS.

#### 4.4.3. LUCRO ESPERADO

O Lucro operacional de uma empresa multiprodutora é uma variável dependente da receita total de vendas, da razão de con-

tribuição ponderada e do montante de custos fixos.

Conforme a fórmula 79, do capítulo anterior, a média da distribuição de probabilidade do lucro operacional poderá ser calculada através da seguinte expressão:

$$E(L) = E(R_T) \times E(\bar{R}_c) - E(C_F)$$

onde:

$E(L)$  = lucro esperado

$E(R_T)$  = valor esperado da receita total de vendas

$E(\bar{R}_c)$  = valor esperado da razão de contribuição ponderada

$E(C_F)$  = valor esperado do montante de custos fixos.

No caso do exemplo ilustrativo, o valor esperado da receita total de vendas é o seguinte:

$$E(R_T) = 120.000 \times \text{Cr\$ } 10,00 + 60.000 \times \text{Cr\$ } 12,00 + 60.000 \times \text{Cr\$ } 8,00$$

$$E(R_T) = \text{Cr\$ } 1.200.000,00 + \text{Cr\$ } 720.000,00 + \text{Cr\$ } 480.000,00$$

$$E(R_T) = \text{Cr\$ } 2.400.000,00$$

Portanto, a média da distribuição de probabilidade do lucro operacional será:

$$E(L) = \text{Cr\$ } 2.400.000,00 \times 0,23 - \text{Cr\$ } 460.000,00$$

$$E(L) = \text{Cr\$ } 92.000,00$$

Para calcular a variância e o desvio padrão da distribui-

ção de probabilidade do lucro operacional, é preciso calcular, em primeiro lugar, a variância da distribuição de probabilidade da receita de vendas de cada um dos produtos fabricados pela empresa. Isto pode ser feito através da aplicação da fórmula 76 conforme é mostrado a seguir:

$$V(R_A) = 1,44 \times 10^8 \times 0,09 + 1,44 \times 10^{10} \times 0,09 + 100 \times 1,44 \times 10^8$$

$$V(R_A) = 12.960.000 + 1,296 \times 10^9 + 1,44 \times 10^{10}$$

$$V(R_A) = 1,57 \times 10^{10}$$

$$V(R_B) = 10^8 \times 0,1296 + 3,6 \times 10^9 \times 0,1296 + 144 \times 10^8$$

$$V(R_B) = 12.960.000 + 4,66 \times 10^8 + 1,44 \times 10^{10}$$

$$V(R_B) = 1,49 \times 10^{10}$$

$$V(R_C) = 2,25 \times 10^8 \times 0,0576 + 3,6 \times 10^9 \times 0,0576 + 64 \times 2,25 \times 10^8$$

$$V(R_C) = 12.960.000 + 2,07 \times 10^8 + 1,44 \times 10^{10}$$

$$V(R_C) = 1,46 \times 10^{10}$$

De posse destes resultados é possível calcular a variância da distribuição de probabilidade da receita total de vendas, que nada mais é do que a soma das variâncias das distribuições de probabilidade da receita de vendas de cada um dos produtos, haja visto que se está considerando como hipótese de trabalho a independência entre as variáveis. Assim sendo, tem-se:

$$V(R_T) = 1,57 \times 10^{10} + 1,49 \times 10^{10} + 1,46 \times 10^{10}$$

$$V(R_T) = 4,52 \times 10^{10}$$

A seguir deverá ser calculada a variância da distribuição de probabilidade do produto entre a receita total de vendas e a razão de contribuição ponderada. Tal cálculo é feito a seguir:

$$V(R_T \times \bar{R}_C) = 4,52 \times 10^{10} \times 4,5 \times 10^{-4} + 5,76 \times 10^{12} \times 4,5 \times 10^{-4} + 0,0529 \times 4,52 \times 10^{10}$$

$$V(R_T \times \bar{R}_C) = 20.340.000 + 2,59 \times 10^9 + 2,39 \times 10^9$$

$$V(R_T \times \bar{R}_C) = 5 \times 10^9$$

Finalmente, é possível calcular a variância e o desvio padrão da distribuição de probabilidade do lucro operacional, conforme é mostrado a seguir:

$$V(L) = 5 \times 10^9 + 3,38 \times 10^8$$

$$V(L) = 5,34 \times 10^9$$

Portanto:

$$\sigma(L) = \sqrt{5,34 \times 10^9} = \text{Cr\$ } 73.065,00$$

Isto significa que o lucro operacional da empresa "W" apresenta uma distribuição normal de probabilidade com média igual a Cr\$ 92.000,00 e desvio padrão igual a Cr\$ 73.065,00.

Uma vez calculados os parâmetros da distribuição de probabilidade do lucro operacional, é possível calcular a probabili-

dade de que o lucro operacional esteja compreendido em diversos intervalos. Para tal efeito deverá proceder-se de forma idêntica à que foi utilizada para determinar a probabilidade de que o ponto de equilíbrio esteja compreendido em diversos intervalos.

## CAPÍTULO IV

### 4.5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

#### 4.5.1. CONCLUSÕES

A análise de custo - volume - lucro sob condições de risco oferece aos tomadores de decisões subsídios calcados em estudos que têm uma conotação probabilística, possibilitando maior flexibilidade para o planejamento das atividades empresariais.

O modelo proposto neste trabalho vem superar uma grande limitação da análise de custo - volume - lucro tradicional, decorrente do fato de se considerar todas as variáveis envolvidas na análise como sendo dados determinísticos. A metodologia consiste na associação do risco a cada uma das variáveis envolvidas na análise, atribuindo-se um caráter eminentemente probabilístico a cada uma delas, o qual fornecerá aos tomadores de decisões um quadro do comportamento que adotaram as variáveis e suas probabilidades de ocorrência, tornando o planejamento mais realístico nas áreas de produção e finanças da empresa.

No entanto, é importante destacar que o sucesso da aplicação do modelo proposto dependerá de um conhecimento histórico do comportamento destas variáveis para, com base nestes dados, se fazer uma projeção probabilística para períodos subsequentes.)

Finalizando, salienta-se que através do exemplo ilustrativo desenvolvido no presente trabalho, pode-se constatar a viabilidade da utilização do modelo proposto, bem como sua eficiência operacional e sua utilidade nas atividades vinculadas

ao planejamento das atividades produtivas e financeiras no campo empresarial.

O modelo poderia ser aperfeiçoado se fosse considerada a cor relação existente entre as diversas variáveis.

#### 4.9 5.2. SUGESTÕES

Para novos estudos relacionados com análises probabilísticas de atividades financeiras, sugere-se:

- uma aplicação da análise de custo-volume-lucro sob condições de risco a uma situação real;
- um estudo sobre a possibilidade de utilização de uma outra distribuição de probabilidade, além da normal, para o estudo probabilístico da análise de custo-volume-lucro;
- um estudo que considere o grau de dependência entre as variáveis envolvidas na análise de custo-volume-lucro;
- a utilização de técnicas de simulação na análise de custo-volume-lucro, afim de aperfeiçoar os métodos atualmente utilizados para determinar os parâmetros das distribuições de probabilidades das variáveis dependentes.
- utilização da Programação Linear em combinação com custo volume-lucro para simultaneamente otimizar a composição do produto.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

01. BACKER and JACOBSEN, "Cost Accounting". Mc Graw-Hill Book Company, 1978.
02. BATTY, J, "Management Accountancy". Mc Donald and Evans LTD, 39 Edição, 1970.
03. CARROL, Phil, "How to Control Production Cost". Mc Graw - Hill Book Company, 1953.
04. GILLESPIE, Cecil, "Cost Accounting and Control". Prentice-Hall, 4<sup>a</sup> Edição, 1965.
05. HORNGREN, T. Charles, "Contabilidade de Custos". Atlas SA. 1<sup>a</sup> Edição, 1978.
06. HORNGREN, T. Charles, "Cost Accounting a Managerial Enphasis". Prentice-Hall, 2<sup>a</sup> Edição, 1967.
07. JAEDICKE, Robert K and ROBICHEL A. Alexander, "Cost-Volume-Profit Analises under conditions of Uncertainty", PAPER.
08. KLIEMANN NETO, F.J., "Um Modelo Matricial para Alocação de Custos". Dissertação de Mestrado, UFSC, 1980.
09. LAWRENCE, William Beaty, "Contabilidade de Custos", IBRASA INL - MEC, 4<sup>a</sup> Edição, 1975.
10. LEONE, George S.G., "Custos um Enfoque Administrativo", Fundação Getúlio Vargas, 4<sup>a</sup> Edição, 1977.
11. MARTINS, Eliseu, "Contabilidade de Custos", Editora Atlas S.A., 1979.
12. MATZ, Adolpf, "Contabilidade de Custos", Editora Atlas S.A. 1978.
13. MEYER, Paul L., "Probabilidade Aplicações à Estatística" , Livros Técnicos e Científicos Editora, 1977.

14. PARK, William R., "Cost Engineering Analysis", Wiley - Interscience publication, 1973.
15. ROJAS LEZANA, Ricardo G., "Analysis de Costo-Colume-Utilidad Bajo Condiciones de Incertidumbre", Memoria de Tesis, 1977.
16. SCHLATTER , C.F. and SCHLATTER, W.J., "Cost Accounting" , Wiley Publications in Accounting, 2<sup>a</sup> Edição, 1957.
17. SPIEGEL, Murray R., "Estatística - Coleção Schaum", Mc Graw Hill Editora, 1976.
18. SPIEGEL, Murray R., "Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas", Editora Mc Graw-Hill do Brasil, 1977.
19. WILSON, Frank C., "Industrial Cost Controls", Prentice-Hall 1971.

## A N E X O 1

ALGUNS CONCEITOS DE PROBABILIDADE RELACIONADOS COM A ANÁLISE DE  
CUSTO - VOLUME - LUCRO

## INTRODUÇÃO

Já foi mencionado, que o hábito de supor que existe certeza absoluta com respeito ao comportamento das variáveis fundamentais envolvidas na análise, dá origem a uma das limitações mais importantes da análise de custo-volume-lucro tradicional. Isto pode distorcer seriamente as projeções que se façam da atividade da empresa e da magnitude que alcançarão estas variáveis e, em consequência, conduzir a erros na tomada de decisões.

Uma vez que se tenha reconhecido esta limitação, o passo seguinte será tentar introduzir algumas mudanças na análise de custo-volume-lucro, a fim de considerar frente a cada uma das alternativas submetidas a estudo um grau de risco, desta maneira, acaba-se com a limitação imposta pelo pressuposto de certeza implícita na análise de custo-volume-lucro.

Para considerar o risco como variável fundamental na análise de custo-volume lucro, deve-se recorrer, necessariamente, a certos conceitos e instrumentos pertencentes ao campo de estudo da Estatística e, especificamente, a um dos seus ramos denominado Estatística Inferencial. Por esta razão será necessário definir, explicar e analisar certos conceitos e idéias próprias desta ciência, o que constitui o propósito deste capítulo.

A seguir procura-se ilustrar através de um exemplo, como o hábito de não considerar o risco e a incerteza associados a diferentes alternativas, pode conduzir a erros na tomada de decisões quando se utiliza a análise de custo-volume-lucro tradicional.

EXEMPLO 13: Suponha que uma empresa se encontra ante a alternativa de produzir e vender ou o produto "A" ou o produto "B", os quais podem ser produzidos aproveitando as atuais facilidades de fabricar e implicando num aumento nos custos fixos anuais, de igual montante, qualquer que seja o produto que decida produzir. Além disto, suponha que a capacidade produtiva utilizada por ambos produtos é a mesma.

Os dados antecedentes que se tem são os seguintes:

	PRODUTO "A"	PRODUTO "B"
Aumento nos Custos Fixos	Cr\$ 50.000,00	Cr\$ 50.000,00
Preço de venda	Cr\$ 12,00	Cr\$ 12,00
Curso Variável Unitário	Cr\$ 7,00	Cr\$ 7,00

A análise de custo-volume-lucro permite determinar o nível de equilíbrio para ambos produtos, tal como foi visto no capítulo anterior.

$$Q_{PE} \text{ "A"} = \frac{\text{Cr\$ } 50.000,00}{\text{Cr\$ } 12,00 - \text{Cr\$ } 7,00} = 10.000 \text{ u} \quad R_{PE} \text{ "A"} = \text{Cr\$ } 120.000,00$$

$$Q_{PE} \text{ "B"} = \frac{\text{Cr\$ } 50.000,00}{\text{Cr\$ } 12,00 - \text{Cr\$ } 7,00} = 10.000 \text{ u} \quad R_{PE} \text{ "B"} = \text{Cr\$ } 120.000,00$$

Sem dúvida o resultado obtido nada nos diz respeito a desejabilidade relativa de um ou outro produto e isto se deve a não ter sido considerado uma variável fundamental no problema como é o volume de vendas que se espera obter para cada um dos produtos.

Se supor, por exemplo, que o volume de vendas esperado é de 15.000 unidades anuais para o produto "A" e de 12.000 unidades para o produto "B", é evidente que a empresa produzirá o produto "A", pois no que se refere a expectativa de vendas, é claramente superior, permitindo a obtenção de um lucro adicional de Cr\$25.000,00 em troca, se decidir-se fabricar o produto "B", o lucro adicional obtido será somente Cr\$ 10.000,00 como é demonstrado a seguir:

## Demonstrativo de Lucros e Perdas

	PRODUTO "A"	PRODUTO "B"
Receita de Vendas	Cr\$ 180.000,00	Cr\$ 144.000,00
(-) Custos Variáveis	<u>Cr\$ 144.000,00</u>	<u>Cr\$ 84.000,00</u>
Margem de Contribuição	Cr\$ 75.000,00	Cr\$ 60.000,00
(-) Custos Fixos	<u>Cr\$ 50.000,00</u>	<u>Cr\$ 50.000,00</u>
Lucro	Cr\$ 25.000,00	Cr\$ 10.000,00

Finalmente, aumenta-se a dificuldade do problema supondo que o volume de vendas anual esperado para ambos os produtos é o mesmo. Poder-se-ia neste caso, afirmar que a empresa é indiferente a decisão entre um ou outro produto? Aparentemente, a resposta seria afirmativa posto que, a igual volume de vendas esperado, ambos os produtos gerariam igual lucro. Sem dúvida, uma resposta afirmativa só seria válida no caso da existência de certeza absoluta de alcançar este volume de vendas.

Como na grande maioria dos casos não existe tal certeza, é válido afirmar que, em casos como o apresentado, a decisão dependerá do risco relativo associado com cada alternativa e, portanto, este risco deve ser introduzido na análise a fim de melhorar o processo decisório. Para isto, necessita-se de algumas ferramentas proporcionadas pela estatística, as quais serão estudadas no presente capítulo.

## VARIÁVEL ALEATÓRIA

Pode-se afirmar que todas as relações envolvidas num problema de decisão podem ser incertas, ou seja: é possível que se ignore a magnitude específica que adotarão determinadas variáveis num determinado momento ou num período de tempo dado o qual, todavia, não impede que se possa estabelecer um conjunto de valores que poderão ser assumidos pelas diferentes variáveis consideradas no problema. De acordo com isto; define-se como variável aleatória para este estudo, "aquela que pode assumir diferentes valores sem que

se saiba com certeza qual deles assumirá" e, portanto, a decisão que se adote dependerá dos valores assumidos por cada uma das variáveis.

Sob este ponto de vista, todas as variáveis relevantes consideradas na análise de custo-volume-lucro, ou seja: a) volume de vendas, b) preço de venda, c) custo variável unitário e d) montante de custos fixos, podem ser consideradas como variáveis aleatórias ou, o que é equivalente, reconhecer a existência de um conjunto de valores que podem ser assumidos por estas variáveis sem que se saiba com certeza qual deles será especificamente.

Em estatística, as variáveis aleatórias se classificam em discretas e contínuas. Serão discretas quando o número de valores possíveis que pode assumir a variável aleatória é finito ou infinito numerável, e serão contínuas, quando a variável aleatória pode assumir todos os valores pertencentes a um intervalo determinado. Disto se conclui que se designarmos por  $R_x$  o conjunto de valores que pode assumir a variável aleatória  $X$ , estamos tratando de uma variável aleatória discreta toda vez que  $R_x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ , onde a lista dos  $x_i$  terá fim, no caso em que o número de valores que pode assumir a variável aleatória seja finito e, continuará indefinidamente, quando este número seja infinito numerável. De forma semelhante, estaremos tratando de uma variável aleatória contínua cada vez que  $R_x = \{x/a \leq x \leq b\}$ , onde  $a$  e  $b \in R$ .

## DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

Sabemos, pela definição de variável aleatória discreta, que o número de valores possíveis que pode assumir a variável é, no máximo, infinito numerável. Agora, se a cada um destes valores possíveis associa-se um número,  $p(x_i)$ , tal que:

$$a) p(x_i) \geq 0 \quad \forall i \quad (104)$$

e

$$b) \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1 \quad (105)$$

A função "p", assim definida, se denomina "função de distribuição de probabilidade" e a coleção de pares  $x_i, p(x_i)$ , se denomina "distribuição de probabilidade da variável aleatória X". Por conseguinte, cada um dos números  $p(x_i)$  representa a probabilidade de que a variável aleatória X assuma o valor  $x_i$ , onde  $x_i$  pertence a  $R_x$ . Isto pode ser expresso matematicamente da seguinte maneira:

$$p(x_i) = P(X = x_i) \quad x_i \in R_x$$

Ilustraremos estes conceitos utilizando, para isto, os dados do exemplo anterior. Suponha-se para tal efeito que a única variável incerta, que será considerada como discreta, seja o volume de vendas esperado e, portanto, a decisão dependerá do valor que esta variável assumirá. De acordo com isto podemos montar um quadro com a distribuição de probabilidade para os produtos A e B (Quadro 13) onde, tal como pode ser observado, as funções de distribuição de probabilidade de ambos os produtos cumprem com as condições previamente impostas às funções deste tipo, ou seja, por um lado, todos os  $p(x_i)$  - probabilidade de que o volume de vendas esperado corresponda a algumas das quantidades listadas - são positivos e, por outro lado, a soma das probabilidades associadas a cada um dos possíveis valores que pode assumir a variável aleatória é igual a unidade (um).

QUADRO 13: DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE PARA OS PRODUTOS "A" E "B" DO EXEMPLO.13.

VENDAS (Unidades)	PROBABILIDADE (Produto A)	PROBABILIDADE (Produto B)
2.500	-	0,1
5.000	0,1	0,1
10.000	0,2	0,1
15.000	0,4	0,2
20.000	0,2	0,4
25.000	0,1	0,1
TOTAL	1,0	1,0

É importante ressaltar também que se supõem mutuamente exclusivos e exaustivos, os volumes de vendas possíveis. Isto significa o seguinte:

- a) Que a listagem se faz de tal forma que é impossível que os "eventos" (volumes de venda possível) aconteçam simultaneamente; e
- b) Que os níveis de venda não listados, não têm probabilidade de ocorrência ou, em outras palavras, sua probabilidade de ocorrência é zero.

Uma pergunta que cabe ser feita é: Como se determinam as distribuições de probabilidade? A resposta a esta pergunta é que estas podem ser determinadas com base em dados históricos referentes a demanda de um determinado produto ou de produtos similares e, no caso de não existir dados históricos disponíveis, pode se determinar com base em ponderações subjetivas. Se ocorrer este último, esse enfoque ainda teria o mérito de permitir que a pessoa que efetua a estimativa possa expressar sua incerteza a respeito da variável estimada e, como uma estimativa do volume de vendas é necessária e indispensável a fim de poder se tomar uma decisão, o problema não é saber se deve ou não fazer-se a estimativa mas, pelo contrário, buscar a melhor maneira de efetuar e expressar esta estimativa.

## VALOR ESPERADO

O problema ilustrativo ainda não está resolvido. Se conhecemos os valores possíveis que pode assumir a variável aleatória (volume de vendas de cada um dos produtos) e se conhecemos a probabilidade de ocorrência associada a cada um destes valores. Mas, qual destes valores devemos considerar para se tomar uma decisão? ; Basta considerar a média dos valores relacionados?; ou, pelo contrário; Deverá utilizar-se aquele valor cuja probabilidade de ocorrência seja a maior? A resposta a estas e outras interrogações se obterão depois de conhecer um novo conceito denominado "valor esperado".

Se  $X$  é uma variável aleatória discreta e  $p(x_i)$ , a probabilidade de ocorrência associada a cada um dos valores possíveis que pode tomar  $X$ , ou seja, associado a cada  $x_i$  pertencente a  $R_x$ , se define o valor esperado da variável aleatória  $X$ , designado por  $E(x)$ , como segue:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i) \quad (107)$$

Esta expressão corresponde ao caso em que o número de valores que pode assumir a variável aleatória é infinito numerável. No caso deste número ser finito, a expressão seria a seguinte:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) \quad (108)$$

Finalmente, no caso em que o número de valores possíveis que pode assumir a variável aleatória seja finito, e além disto, estes valores sejam igualmente prováveis, a expressão de valor esperado de  $X$  seria:

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (109)$$

Das expressões anteriores se deduz que quando o número de valores possíveis que pode assumir a variável aleatória é finito, o valor esperado representa a "média ponderada" dos  $x_i$  e quando, além de ser finitos, os valores possíveis são igualmente prováveis, o valor esperado não é outra coisa senão a "média aritmética" dos valores possíveis.

A partir de agora, têm-se condições de dar respostas as interações apresentadas. Se for associado arbitrariamente um dos valores listados a variável aleatória, para efeito de tomar uma decisão, estariam-se ignorando por completo as probabilidades de ocorrência associadas a cada um dos valores possíveis e, em consequência, seria uma estimativa deficiente que, além do mais, estaria em contradição com a definição do problema dado que estaria supondo certeza absoluta com respeito ao valor que assumirá a variável, em

circunstâncias que o volume de vendas havia sido definido previamente como uma variável aleatória e, portanto, sujeita a risco.

Se for adotado como nível de vendas a média aritmética dos valores possíveis, estaria-se supondo implicitamente que todos os valores listados têm igual probabilidade de ocorrência e, neste caso, não se estaria considerando, para nada, a distribuição de probabilidades apresentada previamente. Pode ocorrer que, para alguma situação determinada, a probabilidade associada a cada um dos valores possíveis seja igual, e neste caso, o valor esperado da variável aleatória coincidirá com a média aritmética dos valores possíveis, aliás, este seria um caso particular e, em consequência, não representativo da generalidade das situações. Não obstante, e que pese as falhas que sofre, uma estimação do valor que assumirá a variável, para este ponto, apresenta uma vantagem com relação ao método anterior em considerar, em alguma medida, a existência de incerteza a respeito do valor que assumirá, em definitivo, a variável aleatória.

Se ocorrer a associação a variável aleatória aquele valor possível cuja probabilidade de ocorrência seja maior, estaríamos ignorando a probabilidade de que a variável aleatória poderia assumir qualquer outro valor possível e, isto equivaleria a associar probabilidade de ocorrência 1.0 ao valor assumido, ou seja: novamente se estaria incorrendo num pré-suposto implícito de certeza com respeito ao valor que assumirá a variável aleatória e como já foi mencionado, tal situação vai de encontro com a definição do problema.

Pelas razões mencionadas, é fácil deduzir que o valor que consignamos a variável aleatória será o valor esperado que, como se sabe, será a média ponderada dos valores possíveis, o que permite superar as deficiências e contradições em que se incorreria ao consignar um valor distinto ao valor esperado da variável aleatória, dado que estará considerando-se por uma parte, a totalidade dos valores possíveis, e por outra parte, a probabilidade de ocorrência de cada um destes valores.

Para o caso do problema ilustrativo, o valor esperado dos volumes de vendas dos produtos A e B se determinam da maneira ilustrada no QUADRO 14.

QUADRO 14: DETERMINAÇÃO DO VALOR ESPERADO DO VOLUME DE VENDAS PARA OS PRODUTOS A e B DO EXEMPLO 13.

(1) VENDAS (Unidades)	(2) PROBABILIDADE (Produto A)	(3) PROBABILIDADE (Produto B)	$x_i \cdot P_i$	
			(1) (2)	(1) (3)
2.500	-	0,1	-	250
5.000	0,1	0,1	500	500
10.000	0,2	0,1	2.000	1.000
15.000	0,4	0,2	6.000	3.000
20.000	0,2	0,4	4.000	8.000
25.000	0,1	0,1	2.500	2.500
	1,0	1,0	E(x) 15.000	15.250

Seguindo o critério de associar a variável aleatória seu valor esperado e se for designado por X a variável aleatória - volume de vendas - o lucro que a empresa obterá pela fabricação e venda dos diferentes produtos podem ser determinados mediante a seguinte expressão:

$$L = m_c |E(x)| - C_F \quad (110)$$

Para o exemplo dado, ter-se-ia:

PRODUTO A:

$$L = \text{Cr\$ } 5,00 (15.000) - \text{Cr\$ } 50.000,00 = \text{Cr\$ } 25.000,00$$

PRODUTO B:

$$L = \text{Cr\$ } 5,00 (15.250) - \text{Cr\$ } 50.000,00 = \text{Cr\$ } 26.250,00$$

É lógico esperar, então, a luz destes resultados que a empresa fabrique e venda o produto B, visto que o lucro esperado seria, neste caso, Cr\$ 1.250,00 superior ao que se poderia esperar no ca-

so de fabricar o produto A.

Detenha-se um momento para analisar o que aconteceria se, em vez de associar o valor esperado a variável aleatória, tivesse sido associado algum dos valores discutidos previamente; a saber: arbitrário, média de valores possíveis e valor de maior probabilidade.

a) Associação de um valor arbitrário - Suponha-se que se associa ao produto "A" um volume de vendas de 20.000 unidades, e ao produto B um volume de vendas de 15.000 unidades. Neste caso, o lucro esperado seria o seguinte:

PRODUTO A:

$$L = \text{Cr\$ } 5,00 (20.000) - \text{Cr\$ } 50.000,00 = \text{Cr\$ } 50.000,00$$

PRODUTO B:

$$L = \text{Cr\$ } 5,00 (15.000) - \text{Cr\$ } 50.000,00 = \text{Cr\$ } 25.000,00$$

Neste caso, a empresa decidirá produzir o artigo "A", posto que o lucro esperado é maior; sem dúvida, como os valores associados a variável aleatória são arbitrários, o resultado obtido não é absolutamente confiável e a prova disto é que, se tivesse-se associado valores tais que o volume de vendas do produto "A" fosse menor do que o do produto "B", a decisão se inverteria. Além do mais, se os valores associados aos volumes de vendas de cada produto tivessem sido os mesmos, o lucro esperado seria em igual montante para ambos os produtos e, em consequência, não se podia tomar nenhuma decisão.

b) Associação da média dos valores possíveis - Já se sabe que uma estimação deste tipo leva implícito o pressuposto de igual probabilidade de ocorrência para todos os valores possíveis que pode assumir a variável. No exemplo dado esta média será:

$$2.500 \times 1/6 + 5.000 \times 1/6 + 10.000 \times 1/6 + 15.000 \times 1/6 + 20.000 \times 1/6 + 25.000 \times 1/6 = \\ 77.500/6 = 12.917 \text{ unidades.}$$

De acordo com isto, o lucro esperado será o seguinte:

PRODUTO A:

$$L = \text{Cr\$ } 5,00 (12.917) - \text{Cr\$ } 50.000,00 = \text{Cr\$ } 14.585,00$$

PRODUTO B:

$$L = \text{Cr\$ } 5,00 (12.917) - \text{Cr\$ } 50.000,00 = \text{Cr\$ } 14.585,00$$

É evidente que, neste caso, o resultado obtido não nos permite tomar uma decisão.

c) Associação do valor possível com maior probabilidade de ocorrência - Se for associado um valor a variável aleatória, segundo este critério, deveria-se fixar em 15.000 unidades o volume de vendas do produto "A" e em 20.000 unidades o de "B", com o qual o lucro esperado seria:

PRODUTO A:

$$L = \text{Cr\$ } 5,00 (15.000) - \text{Cr\$ } 50.000,00 = \text{Cr\$ } 25.000,00$$

PRODUTO B:

$$L = \text{Cr\$ } 5,00 (20.000) - \text{Cr\$ } 50.000,00 = \text{Cr\$ } 50.000,00$$

Portanto, se optaria por produzir e vender o produto "B", pois seu lucro esperado é superior. Isto não seria uma estimativa adequada por não ter-se considerado a possibilidade de que a variável aleatória não assuma os valores que se tem associado, o qual, ao menos neste caso, é maior que a possibilidade de que a variável assumasse efetivamente os valores considerados. A probabilidade de que a variável assumasse estes valores, no exemplo, é de 0,4 para ambos os produtos, em troca, a probabilidade de que a variável assumasse outros valores é de 0,6.

Sabe-se que as deficiências deste procedimento tem raízes fundamentalmente no hábito de não considerar a probabilidade de que a variável aleatória assuma valores distintos aos que lhe são assinalados, mais estas deficiências podem ser aumentadas ou diminuídas ao ser considerados aspectos como os seguintes:

1. Se designa-se por  $P(X)$  a probabilidade de que o volume de vendas do produto "X" adote o valor possível com maior probabilidade de ocorrência e por  $P(\bar{X})$ , a probabilidade de ocorrência do "hábito complementar" ou seja: a probabilidade de que a variável aleatória não assuma este valor, então está-se em condições de determinar uma relação que denominar-se-a de "razão de probabilidade" ( $R_p$ ), e que define-se da seguinte maneira:

$$R_p = \frac{P(X)}{P(\bar{X})} \quad 0 < R_p < \infty \quad (111)$$

e quanto maior seja  $R_p$ , maior será a probabilidade de ocorrência associada ao valor consignado a variável aleatória a respeito da probabilidade de que a variável não assuma este valor, e em consequência, menor será a importância de não considerar a probabilidade associada a cada um dos valores possíveis restantes.

É possível que chame atenção o fato de que  $R_p$  não pode ser zero ou infinito e a explicação para isto é a seguinte:

Para que  $R_p$  seja zero,  $P(X)$  deveria ser zero, mas neste caso não seria a probabilidade maior e, portanto, não seria considerado. Por outra parte, para que o valor de  $R_p$  fosse  $\infty$ ,  $P(\bar{X})$  deveria ser zero, mas se isso ocorresse implicaria que  $P(X)$  é igual a unidade e, nesse caso, estaria-se na presença de uma situação certa na qual os procedimentos analisados não se justificam.

No exemplo, as razões de probabilidade para ambos os produtos são as seguintes:

$$R_p(A) = \frac{0,4}{0,6} = 0,67 \quad \text{e} \quad R_p(B) = \frac{0,4}{0,6} = 0,67$$

O valor de  $R_p$  é igual para ambos produtos devido a que as maiores probabilidades de ocorrência serem também iguais.

2. Outro aspecto que é importante considerar é a diferença existente entre as maiores probabilidades de ocorrência para cada alternativa. Quanto maior seja esta diferença maior será a inconveniência de aplicar este procedimento para a determinação do valor que assumirá a variável aleatória, se estaria associando valores com probabilidade de ocorrência desigual o que distorce a comparação entre diferentes alternativas.

3. Frente a existência de dois ou mais valores possíveis igualmente prováveis, este procedimento não pode ser aplicado porque não poder-se-ia decidir qual deles adotar pois, sabe-se que cada um deles conduzirá, inevitavelmente a resultados diferentes.

Parou-se para analisar com bastante detalhe, vários procedimentos que poderiam ser utilizados para determinar o valor que assumirá uma determinada variável aleatória, a fim de entender claramente as deficiências apresentadas por esses procedimentos e, por outro lado, conhecer as vantagens que ele apresenta de associar a variável aleatória seu valor esperado o qual permite superar as deficiências previamente analisadas.

Agora, observe-se o que acontece quando o valor esperado de vendas para os diferentes produtos é o mesmo, também, quando a distribuição de probabilidade é diferente, tal como se ilustra nos QUADROS 15 e 16.

QUADRO 15: VALOR ESPERADO DO VOLUME DE VENDAS PARA OS PRODUTOS "A" E "B" DO EXEMPLO 13.

(1) VENDAS (Unidades)	(2) PROBABILIDADE (Produto A)	(3) PROBABILIDADE (Produto B)	$x_i \cdot P_i$			
			(1)	(2)	(1)	(3)
2.500	0,1	0,1	250		250	
5.000	0,1	0,1	500		500	
10.000	0,1	0,2	1.000		2.000	
15.000	0,4	0,2	6.000		3.000	
20.000	0,2	0,3	4.000		6.000	
25.000	0,1	0,1	2.500		2.500	
	1,0	1,0	E(x)	14.250		14.250

QUADRO 16: VALOR ESPERADO DO VOLUME DE VENDAS PARA OS PRODUTOS "A" E "B" QUANDO A DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE É DIFERENTE.

(1) VENDAS (Unidades)	(2) PROBABILIDADE (Produto A)	(3) PROBABILIDADE (Produto B)	$x_i \cdot P_i$			
			(1)	(2)	(1)	(3)
5.000	0,1	-	500		-	
10.000	0,2	-	2.000		-	
15.000	0,4	1,0	6.000		15.000	
20.000	0,2	-	4.000		-	
25.000	0,1	-	2.500		-	
			E(x)	15.000		15.000

Como pode ser visto nos quadros 15 e 16, os valores esperados são iguais para os produtos, é fácil deduzir que, também neste caso, a empresa não seria indiferente frente a uma escolha entre os produtos. Na situação ilustrada pelo quadro 3 se sabe, por exemplo, que a probabilidade de que as vendas do produto "A" ultrapassem o nível de equilíbrio (10.000 unidades) é de 0,7 e em consequência, esta será a probabilidade de obter lucros se for optado em fabricar e vender o produto "A". Para o produto "B" a probabilidade de se conseguir o mesmo é de somente 0,6.

Da situação apresentada no quadro 16, se observa que, se for decidido fabricar e vender o produto A, existe uma probabilidade de 0,1 de que as vendas sejam somente 5.000 unidades, neste caso a empresa incorreria num prejuízo de Cr\$ 25.000,00, ou seja:

$$\text{Cr\$ } 5,00 \text{ (5.000 u)} - \text{Cr\$ } 50.000,00 = -\text{Cr\$ } 25.000,00$$

Sabe-se além disto, que existe uma probabilidade, também de 0,1 de que as vendas do produto A atinjam 25.000 unidades e, neste caso, o lucro que a empresa obteria seria de Cr\$ 75.000,00 o qual representa um lucro adicional de Cr\$ 50.000,00 se for comparado com o lucro que se obteria ao fabricar e vender o produto "B", como é mostrado a seguir:

PRODUTO "A":

$$L = \text{Cr\$ } 5,00 \text{ (25.000 u)} - \text{Cr\$ } 50.000,00 = \text{Cr\$ } 75.000,00$$

PRODUTO "B":

$$L = \text{Cr}\$5,00 (15.000 \text{ u}) - \text{Cr}\$ 50.000,00 = \text{Cr}\$ 25.000,00$$

Sabe-se também que existe uma probabilidade de 0,3 de que o volume de vendas do produto "A" supere as 15.000 unidades, verificando-se esta situação, ela permitirá alcançar um lucro superior ao que se obteria como resultado de fabricar e vender o produto "B". Então, que seja de grande importância a atitude da empresa ou de quem deva adotar este tipo de decisão com respeito ao risco.

Finalmente e como conclusão desta última parte, pode-se afirmar que tão importante como o valor esperado (ou média da distribuição), é a dispersão da distribuição já que, quanto maior seja esta, maior é o risco implicado. Vai-se encontrar uma forma de medir a dispersão através do conceito de desvio padrão que será estudado mais adiante.

Todos os exemplos que foram vistos e analisados até agora, tem sido altamente simples e mesmo assim os cálculos tem sido grandes e embaraçosos. Pode-se notar, por exemplo, que o número de valores possíveis para o volume de vendas dos distintos produtos tem sido realmente pequeno e que, além disto, têm-se suposto em todos os casos que a variável aleatória - volume de vendas - é do tipo discreto, ou seja: têm-se considerado impossível a associação de um valor fracionário a variável, por exemplo 12.345,67 unidades.

Daqui por diante usar-se-á variáveis aleatórias contínuas devendo a:

a) Uma variável aleatória contínua conduzirá, geralmente, a uma descrição mais realista dos aspectos de incerteza relacionados com uma determinada situação; e

b) Normalmente os cálculos necessários serão mais simples.

Se existe uma variável aleatória contínua  $X$ , existirá também uma função "f" que deverá atender aos seguintes requisitos:

$$1) f(x) \geq 0 \quad \forall x \quad -\infty < x < \infty \quad (112)$$

2) Para qualquer sucesso "A" (num intervalo determinado), se cumpre que:

$$P(A) = P(X \text{ estar em } A) = \int_A f(x) dx \quad (113)$$

Esta função "f", assim definida, se denomina "função densidade de probabilidade" (f.d.p.), e ela permite determinar a probabilidade de que a variável aleatória assuma um valor compreendido num determinado intervalo. A figura representa uma f.d.p. qualquer.

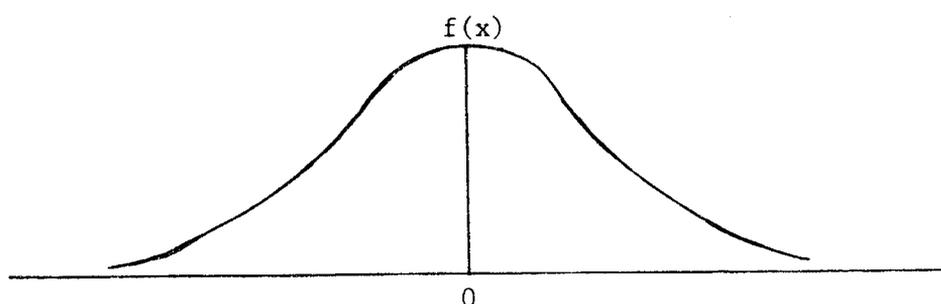


FIGURA 21

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE

A forma que a curva possa ter dependerá da função "f" e as probabilidades estariam determinadas pela área embaixo da curva entre dois pontos quaisquer e não por valores que assuma a função num determinado ponto. Desta maneira a probabilidade de que a variável aleatória assuma um valor compreendido entre "a" e "b", onde "a", "b" será:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx \quad (114)$$

e como o valor da expressão anterior (49) será o mesmo, esteja ou não incluídos os pontos a e b, se pode afirmar que:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx \quad (50)$$

sabendo-se que o valor da integral em um determinado ponto é zero e, portanto,  $P(X = a) = 0$  para qualquer "a".

Pode-se deduzir que qualquer função "f" pode servir como função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X desde que satisfaçam as seguintes condições:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (115)$$

$$b) f(x) \geq 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (116)$$

## FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

Em determinadas circunstâncias pode ser de grande utilidade conhecer a probabilidade de que uma variável aleatória contínua assumira um valor menor ou igual a um certo valor "a". Em estatística, a função que permite determinar esta probabilidade se denomina "função de distribuição acumulada", elas são representadas por "F" e são definidas da seguinte maneira:

Se X é uma variável aleatória contínua e f(x) sua função densidade de probabilidade, se define F(a) como:

$$F(a) = P(x \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx \quad -\infty < a < \infty \quad (117)$$

A função F(x), assim definida, apresenta as seguintes características:

- 1 - É uma função não decrescente
- 2 -  $F(-\infty) = 0$
- 3 -  $F(\infty) = 1$
- 4 - F é contínua

Conhecida a função acumulada, a probabilidade de que a variável aleatória assumira um valor compreendido no intervalo  $a < x < b$ , pode ser expressa fazendo uso desta função da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 P(a < X < b) &= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\
 &= F(b) - F(a) \\
 &= \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx \quad (118)
 \end{aligned}$$

Outra forma de se obter a f.d.p. da variável aleatória é derivando a função acumulada. Isto é.

$$f(x) = \frac{d F(x)}{dx} \quad (119)$$

Anteriormente, neste mesmo capítulo, havia-se definido o conceito de valor esperado para o caso de variáveis aleatórias discretas. Agora vai se definir para o caso de variáveis aleatórias contínuas.

Se  $X$  é uma variável aleatória contínua com função densidade  $f(x)$ , o valor esperado de  $X$  será dado por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (120)$$

## DISTRIBUIÇÃO NORMAL DE PROBABILIDADE

Até agora, no que diz respeito a variáveis aleatórias contínuas, foram definidos alguns aspectos gerais e, portanto, aplicáveis a qualquer variável aleatória deste tipo sem se importar com a função densidade que a caracteriza. A seguir, vai-se preocupar só com aquelas variáveis aleatórias contínuas que se distribuam normalmente e que, conseqüentemente, têm uma função densidade de probabilidade bem específica e identificada.

A distribuição normal de probabilidade é uma curva suave, simétrica, contínua e tem forma de um sino, como é mostrado na figura 18.

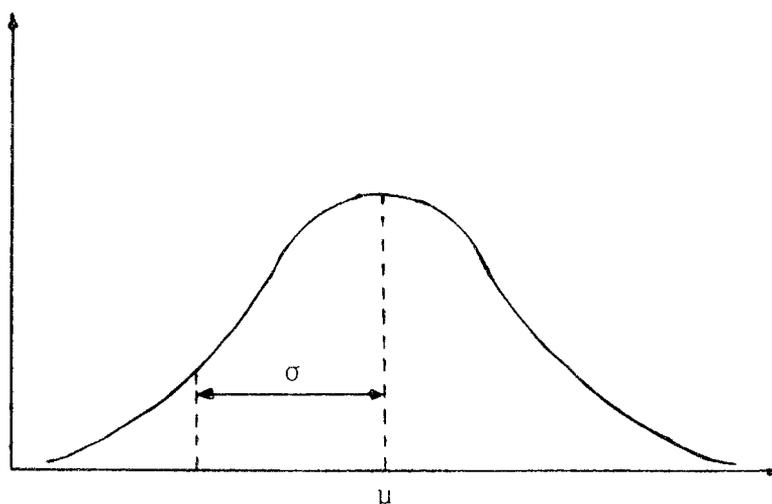


FIGURA 22

## REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA DISTRIBUIÇÃO NORMAL DE PROBABILIDADE

Formalmente sua definição é a seguinte: Se diz que uma variável aleatória  $X$  se distribue normalmente se sua função densidade está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty \quad (121)$$

Desta definição se tira que a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória que se distribue normalmente estará determinada ao se conhecer ambos os parâmetros da função, ou seja:  $\mu$  e  $\sigma^2$ . O parâmetro  $\mu$  é a média da distribuição e corresponde ao ponto onde  $f(x)$  é a máxima. Além disto, dado que a curva é simétrica, a metade da área abaixo dela equivale a cada lado da média. O desvio padrão da distribuição  $\sigma$  é uma medida de dispersão da distribuição ao redor da média. Geometricamente o desvio padrão corresponde à distância entre a média e o ponto de inflexão da curva (figura 18) ou em outras palavras, a distância entre a média e o ponto onde a curva troca sua concavidade, portanto, quanto maior o  $\sigma$  (desvio padrão), a curva será mais plana e, se  $\sigma$  tem um valor pequeno, a curva tenderá a ser muito mais aguda. É importante ressaltar que o desvio padrão corresponde a raiz quadrada da "variância" da variável aleatória, a qual se define como segue:

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 \quad (122)$$

Sabe-se que a área abaixo da curva de qualquer distribuição normal é 1, dado que  $f(x)$  é a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua e, por conseguinte, deve con-

cluír-se que  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ , onde esta integral representa exatamente a área abaixo da curva, sem dúvida uma distribuição pode expandir-se mais que outra. Como, por exemplo, a figura 19 mostra três distribuições normais que apresentam formas distintas apesar de que a média das distribuições é a mesma e suas áreas também são iguais, portanto, as variações na forma, se devem única e exclusivamente ao fato de que cada distribuição apresenta um valor distinto do seu desvio padrão.

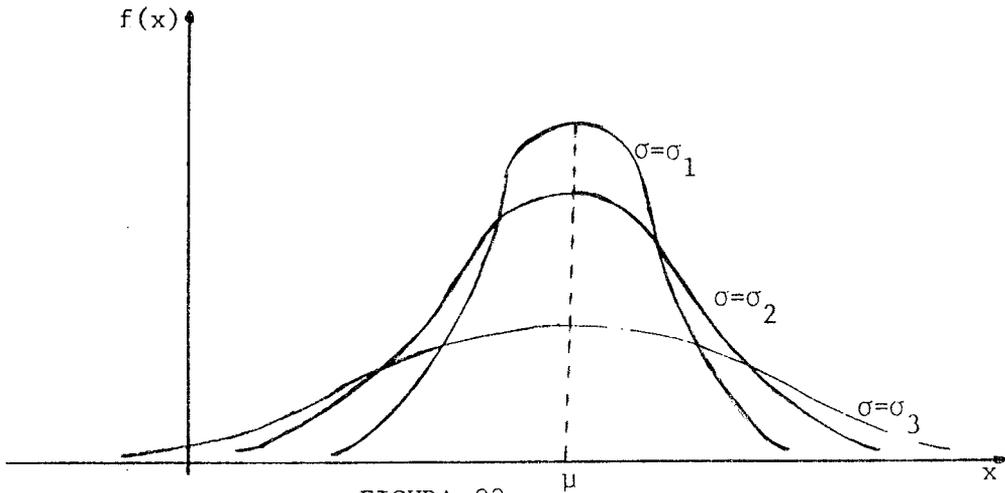


FIGURA 23

## EXEMPLOS GRÁFICOS DE DISTRIBUIÇÕES NORMAIS

Se uma distribuição normal sofre mudanças no valor de sua média ( $\mu$ ), mantendo-se constante o valor do desvio padrão ( $\sigma$ ), a curva se deslocará para a direita (se  $\mu$  aumenta) ou para a esquerda (se  $\mu$  diminui), sem modificações em sua forma, como é ilustrado na figura 20.

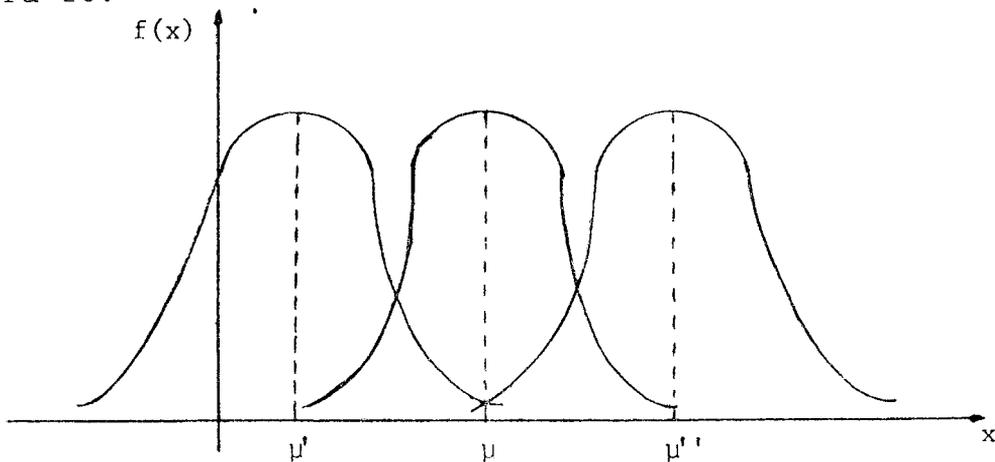


FIGURA 24

## ILUSTRAÇÃO GRÁFICA DE MUDANÇAS NA MÉDIA DE UMA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

## DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO

Até agora se discorreu sobre as distribuições normais de probabilidade em geral. A seguir se fará referência ligeiramente a uma distribuição normal particular que será de grande utilidade na determinação da probabilidade mediante a utilização de tabelas de probabilidades para a distribuição normal. Esta distribuição normal particular, denominada distribuição normal padrão, é aquela cuja média é zero e a variância é a unidade. Portanto:

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-x^2/2} dx \quad (123)$$

Existem tabelas de  $P(x \leq z)$  para esta distribuição, ou seja: a função de distribuição acumulada é geralmente representada por  $(\phi)$  e definida neste caso como:

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-x^2/2} dx \quad (124)$$

Mas já se sabe que:

$$P(a \leq x \leq b) = P(X \leq b) - P(x \leq a)$$

portanto, para determinar  $P(a \leq x \leq b)$  será necessário encontrar o valor de  $\phi(b) - \phi(a)$ .

## PADRONIZAÇÃO DE UMA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

A grande importância que tem as tabelas existentes para a distribuição normal padrão se deve a que se uma variável aleatória tem uma distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ ,  $N(\mu, \sigma^2)$ , a função  $(\phi)$  pode ser usada para avaliar probabilidades associadas com  $X$ , graças a um teorema que afirma o seguinte: Se  $X$  é uma variável aleatória que se distribue normalmente  $N(\mu, \sigma^2)$ , então  $Y = (x - \mu) / \sigma$  tem uma distribuição normal com média zero e variância 1, portanto:

$$\begin{aligned}
 P(a \leq x \leq b) &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Y \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\
 &= P\left(Y \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) - P\left(Y \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)
 \end{aligned} \tag{125}$$

EXEMPLO 14 : Suponha-se que o volume de vendas esperado (variável aleatória) de uma empresa que fabrica um só produto se distribue  $N(10.000, 4.000.000)$ . O gráfico desta distribuição de probabilidade está ilustrado na figura 21.

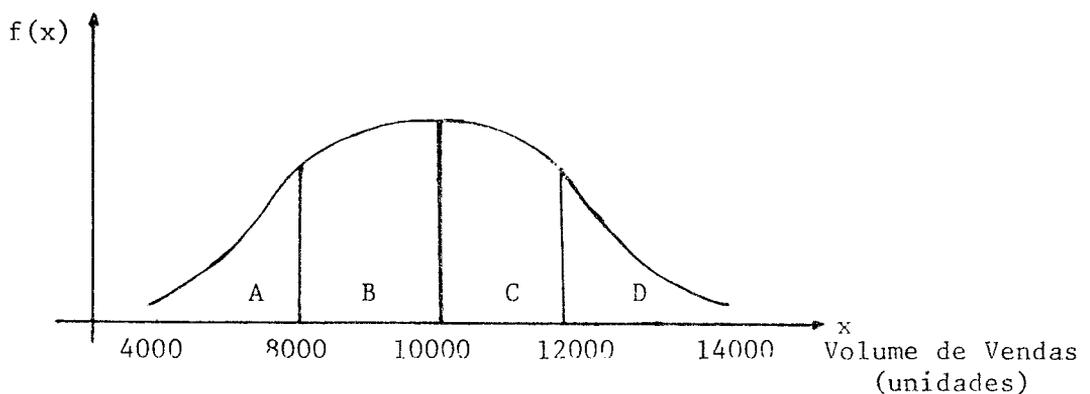


FIGURA 25

DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DO VOLUME DE VENDAS COM  
 $N(10.000, 4.000.000)$

a) A probabilidade de que as vendas reais estejam compreendidas no intervalo entre 10.000 e 12.000 unidades, representado graficamente pela área C da figura 21, será:

$$\begin{aligned}
 P(10.000 \leq x \leq 12.000) &= P\left(\frac{10.000-10.000}{2.000} \leq Y \leq \frac{12.000-10.000}{2.000}\right) \\
 &= P\left(Y \leq \frac{12.000-10.000}{2.000}\right) - P\left(Y \leq \frac{10.000-10.000}{2.000}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{12.000-10.000}{2.000}\right) - \Phi\left(\frac{10.000-10.000}{2.000}\right) \\
 &= \Phi(1) - \Phi(0) \\
 &= 0,8413 - 0,5000 \\
 &= 0,3413
 \end{aligned}$$

Devido a simetria da curva, a probabilidade de que as vendas reais estejam compreendidas entre 8.000 e 10.000 unidades, representada pela área B do gráfico (Figura 25), será também de 0,3413.

b) A probabilidade de que as vendas reais sejam maiores que 12.000 unidades está representada pela área D do gráfico (Figura-21) e pode ser calculada da seguinte maneira.

$$\begin{aligned}
 P (X > 12.000) &= P (12.000 < X < 16.000) \\
 &= P \left( \frac{12.000-10.000}{2.000} < Y < \frac{16.000-10.000}{2.000} \right) \\
 &= P \left( Y < \frac{16.000-10.000}{2.000} \right) - P \left( Y < \frac{12.000-10.000}{2.000} \right) \\
 &= \phi \left( \frac{16.000-10.000}{2.000} \right) - \phi \left( \frac{12.000-10.000}{2.000} \right) \\
 &= \phi (3) - \phi (1) \\
 &= 1,0000 - 0,8413 \\
 &= 0,1587
 \end{aligned}$$

Igualmente ao caso anterior, a probabilidade de que as vendas reais estão compreendidas entre 4.000 e 8.000 unidades, área A do gráfico (Figura 25) será também de 0,1587 devido a simetria da curva.

c) A probabilidade de que as vendas reais sejam maiores que 8.000 unidades, estará representada graficamente pela soma das áreas B, C e D da figura 25, e se determinará de forma semelhante ao caso anterior, ou seja:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 8.000) &= P(8.000 \leq x \leq 16.000) \\
&= P\left(\frac{8.000-10.000}{2.000} \leq Y \leq \frac{16.000-10.000}{2.000}\right) \\
&= P\left(Y \leq \frac{16.000-10.000}{2.000}\right) - P\left(Y \leq \frac{8.000-10.000}{2.000}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{16.000-10.000}{2.000}\right) - \Phi\left(\frac{8.000-10.000}{2.000}\right) \\
&= \Phi(3) - \Phi(-1) \\
&= 1.000 - 0,1587 \\
&= 0,8413
\end{aligned}$$

É fácil deduzir que se obteria igual resultado determinando o valor da expressão:

$$1 - P(\bar{x})$$

ou seja:

$$1 - 0,1587 = 0,8413$$

Finalmente, em relação à distribuição normal, é importante ressaltar que aproximadamente 50% da área embaixo da curva está compreendida entre  $\pm 0,67$  desvios padrões da média, em torno de 68% da área, compreendida entre  $\pm 1,0$  desvios padrões da média e 95% da área, compreendida entre  $\pm 1,56$  desvios padrões da média.

## VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BI-DIMENSIONAIS

Definiu-se até agora o conceito de variável aleatória em relação com uma variável que assumirá um determinado valor para o qual não existe certeza. Em alguns casos é interessante estudar dois ou mais características simultâneas a respeito de um mesmo fenômeno. Por exemplo, em relação com as vendas futuras de uma determinada empresa pode ser interessante estudar não só o volume físico que es-

tas alcançarão mas o preço pelo qual se venderá cada unidade do produto. Este caso trata-se de uma variável aleatória bi-dimensional,  $(X,Y)$ , a qual será: a) discreta se os possíveis valores que pode assumir a variável  $(X,Y)$  são finitos ou infinitos numeráveis. b) continua-se os possíveis valores que pode assumir a variável forma um conjunto não numerável.

Neste último caso, se define uma "função densidade de probabilidade conjunta", a qual deve satisfazer as seguintes condições:

$$a) f(x,y) \geq 0 \quad x,y \quad (126)$$

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1 \quad (127)$$

## DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE MARGINAL

A cada variável aleatória bi-dimensional tem-se associado duas variáveis aleatórias uni-dimensionais que denominam-se  $X$  e  $Y$  respectivamente. Sabe-se também que para cada variável aleatória bi-dimensional existe uma função de probabilidade conjunta  $f(x,y)$ .

Em determinados casos, dada uma variável aleatória bi-dimensional contínua  $(X,Y)$  com sua respectiva  $f(x,y)$ , interessa conhecer a distribuição de probabilidade de  $X$  ou a distribuição de probabilidade de  $Y$ , as quais se denominam "distribuição de probabilidade de  $X$ " e "distribuição marginal de probabilidade de  $Y$ " que são representados por  $g(x)$  e  $h(y)$  respectivamente, e se definem das seguintes maneiras:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \quad (128)$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx \quad (129)$$

EXEMPLO 15 : Se a variável aleatória bi-dimensional contínua  $(X, Y)$  tem uma função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{e. q. o. c.} \end{cases}$$

Para qualquer outro caso as distribuições marginais de probabilidade para  $X$  e  $Y$  serão:

$$g(x) = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dy = \left(x^2 y + \frac{xy^2}{6}\right) \Big|_0^2 = 2x^2 + \frac{2}{3}x$$

$$h(y) = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{6}\right) \Big|_0^1 = \frac{4}{6} + \frac{1}{3}$$

## DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE CONDICIONAL

Em alguns problemas que serão analisados posteriormente, será de interesse conhecer e poder determinar a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória ( $X$ ) quando outra variável aleatória ( $y$ ) tem assumido um determinado valor. Daí então, ser importante introduzir neste capítulo o conceito de "distribuição de probabilidade condicional", o qual será definido a seguir:

Se  $(X, Y)$  é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade conjunta  $f(x, y)$ ,  $g(x)$  e  $h(y)$  são as distribuições de probabilidades marginais de  $X$  e  $Y$  respectivamente, definir-se-a a função de probabilidade condicional de  $X$ , dado que  $Y=y$ , por:

$$g(x/y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} \quad h(y) > 0 \quad (130)$$

Da mesma maneira, definir-se-a a função de probabilidade condicional de Y, dado que  $X=x$ , por:

$$h(y/x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} \quad g(x) > 0 \quad (131)$$

EXEMPLO 16 : Se  $(X,Y)$  se distribue de igual forma que no exemplo anterior, sabe-se que:

$$g(x) = 2x^2 + \frac{2}{3}x \quad e \quad h(y) = \frac{y}{6} + \frac{1}{3}$$

portanto

$$g(x/y) = \frac{x^2 + xy/3}{1/3 + y/6} = \frac{6x^2 + 2xy}{2+y} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2$$

$$h(y/x) = \frac{x^2 + xy/3}{2x^2 + 2x/3} = \frac{3x^2 + xy}{6x^2 + 2x} = \frac{3x + y}{6x + 2} \quad 0 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

## INDEPENDÊNCIA DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Uma variável aleatória (X) será independente em relação a outra (Y) se os valores que pode assumir uma delas não afeta de modo algum, os valores que pode assumir a outra.

Este conceito será de grande importância nas análises posteriores porque será imprescindível determinar se existe ou não independência entre as variáveis envolvidas na análise e, por esta razão, deve-se definir formalmente o conceito de independência.

Se  $(X,Y)$  é uma variável aleatória bi-dimensional contínua,  $x$  e  $y$  são variáveis aleatórias independentes se e somente se a função densidade de probabilidade conjunta é igual ao produto das funções de probabilidade marginais de X e Y, ou seja:

$$f(x,y) = g(x) h(y) \quad (132)$$

onde

$f(x,y)$  = função densidade de probabilidade conjunta

$g(x)$  = função de probabilidade marginal de  $x$

$h(y)$  = função de probabilidade marginal de  $y$ .

EXEMPLO 17 : Seja  $(X,Y)$  uma variável aleatória bi-dimensional contínua que tem a seguinte f.d.p. conjunta:

$$f(x,y) = \frac{16y}{x^3} \quad x > 2, 0 < y < 1$$

calculando  $g(x)$  e  $h(y)$

$$g(x) = \int_0^1 \frac{16y}{x^3} dy = \frac{16y^2}{2x^3} \Big|_0^1 = 8/x^3$$

$$h(y) = \int_2^{\infty} \frac{16y}{x^3} dx = -\frac{16y}{2x^2} \Big|_2^{\infty} = 2y$$

fazendo o produto das distribuições de probabilidades marginais, ter-se-á:

$$g(x) \cdot h(y) = \frac{8}{x^3} \cdot 2y = \frac{16y}{x^3} = f(x,y)$$

daí, nota-se que  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias independentes.

Existe uma forma alternativa para definir o conceito de independência entre variáveis aleatórias, com base no conceito de probabilidade condicional. De acordo com isto,  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias independentes se e somente se a função de probabilidade condicional de  $X$  é igual a sua função de probabilidade marginal e, conseqüentemente, o mesmo deve ocorrer para  $Y$ , isto é:

$$g(x/y) = g(x) \quad \text{e} \quad h(y/x) = h(y)$$

EXEMPLO 18 : Utilizando a informação do exemplo anterior, tem-se:

$$g(x/y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{16 y/x^3}{2y} = 8/x^3 = g(x)$$

$$h(y/x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{16/x^3}{8/x^3} = 2y = h(y)$$

Daí fica comprovada, mais uma vez, a independência entre as variáveis aleatórias  $x$  e  $y$ .

### CORRELAÇÃO ENTRE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Em certas ocasiões, pode-se ter o caso de que duas variáveis aleatórias  $x$  e  $Y$ , associadas a uma variável aleatória bi-dimensional  $(x,y)$ , apresentam um determinado "grau de associação" ou seja: existe uma relação entre elas. Para estes casos é necessário dispor de algum padrão de comparação que permita medir este grau de associação entre as variáveis.

Em Estatística existe este padrão de comparação o qual se denomina "coeficiente de correlação" e se define da seguinte maneira:

Se  $(X,Y)$  é uma variável aleatória bi-dimensional, o coeficiente de correlação entre  $X$  e  $Y$ , representado por  $P_{xy}$ , será:

$$P_{xy} = \frac{E \{ [X - E(X)] [Y - E(Y)] \}}{V(X) V(Y)} \quad (133)$$

ou, o que é igual a:

$$P_{xy} = \frac{E(XY) - E(X) E(Y)}{\sqrt{V(X) V(Y)}} \quad (134)$$

O numerador de ambas expressões denomina-se "covariância" de X e Y e se representa por " $\sigma_{xy}$ ", daí o coeficiente de correlação pode ser expresso por:

$$P_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{v(X) v(Y)}} \quad (135)$$

Deduz-se das fórmulas anteriores que se X e Y são variáveis aleatórias independentes, o coeficiente de correlação será igual a zero, porque neste caso  $E(xy) = E(X) E(Y)$ .

Em geral, o coeficiente de correlação poderá assumir valores que vão de -1 a 1. Isto é  $-1 \leq P_{xy} \leq 1$ , e a medida que o valor que assume o coeficiente se aproxime de 1 ou -1, indicará a existência de um alto grau de linearidade entre as variáveis, em troca a medida que este valor se aproxima de zero, desaparece tal linearidade.

## ESPERANÇA CONDICIONAL

Por fim, inclui-se também neste capítulo o conceito de esperança condicional que igualmente aos conceitos estatísticos estudados será de grande importância para o desenvolvimento do presente estudo.

Já foi definido o valor esperado de uma variável aleatória contínua, agora prossegue-se definindo a esperança condicional da maneira que se segue: Se  $(X, Y)$  é uma variável aleatória bi-dimensional contínua, a esperança condicional de X, dada  $Y=y$  será:

$$E(x/y) = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x/y) dx \quad (136)$$

e, de forma semelhante, a esperança condicional de Y, dada  $X=x$ , será:

$$E(y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} yh(y/x) dy \quad (137)$$

A interpretação do conceito de esperança condicional é a seguinte: Suponha-se que a variável aleatória  $X$  seja o volume de vendas esperado de uma empresa qualquer e a variável aleatório  $Y$  o preço de venda de um determinado produto, então  $E(X/\text{Cr\$ } 10,00)$ , é o volume de venda esperado dado que o preço de venda será de  $\text{Cr\$}10,00$  por unidade.

Com esta última definição finaliza-se o presente anexo no qual o objetivo foi de definir, explicar analisar e exemplificar alguns conceitos e idéias pertencentes ao campo de estudo da estatística inferencial.

## A N E X O 2

ÁREAS DELIMITADAS PELA CURVA NORMAL PADRÃO (TABELA).

