

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM SISTEMAS MECÂNICOS PERIÓDICOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE DE ENGENHARIA

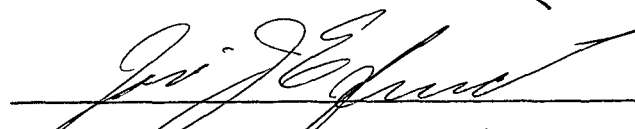
JOÃO BOSCO DA SILVA

FLORIANÓPOLIS, OUTUBRO, 1981

## PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM SISTEMAS MECÂNICOS PERIÓDICOS

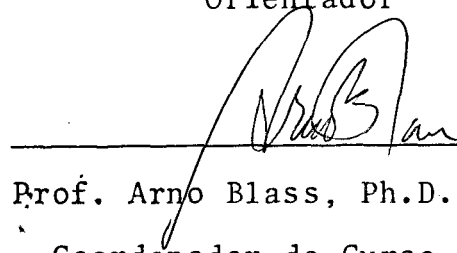
JOÃO BOSCO DA SILVA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
MESTRE EM ENGENHARIA - ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA  
E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO.



Prof. José João de Espíndola, Ph.D.

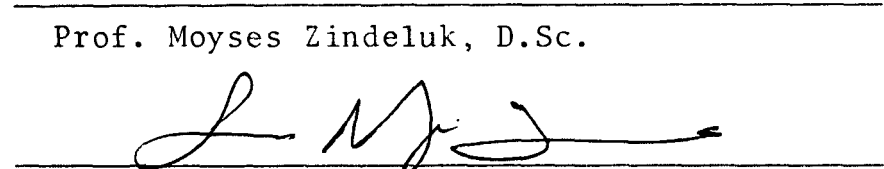

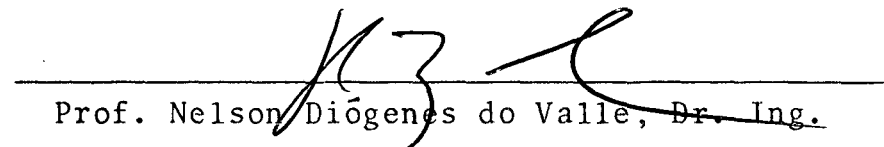
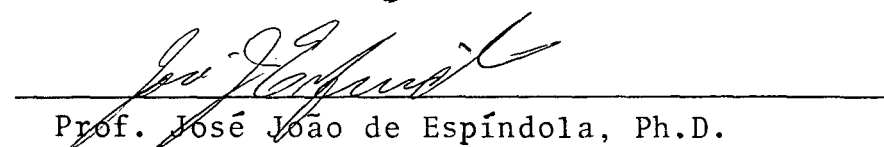
Orientador



Prof. Arno Blass, Ph.D.

Coordenador do Curso de Pós-Graduação em En-  
genharia Mecânica.

APRESENTADA PERANTE A BANCA EXAMINADORA COMPOSTA DOS PRO-  
FESSORES:

  
Prof. Moyses Zindeluk, D.Sc.  
Prof. Samir Nagi Yousri Gerges, Ph.D.  
Prof. Nelson Diógenes do Valle, Dr. Ing.  
Prof. José João de Espíndola, Ph.D.

À minha esposa

Maria dos Remédios Fontes Silva

Ao meu filho

Yankel Bruno Fontes Silva

Aos meus pais

José Lucas da Silva

Maria Valderez da Silva

Aos irmãos

Fátima, Cidinha, Mazê, Docarmo, Lúcia,

Cecília, Zilmar, Lucas, Anchieta, Alberto,

Vanderlei e Carlinhos.

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor José João de Espíndola que, com sua eficiente orientação, tornou possível a execução deste trabalho.

Ao Professor Samir Nagi Yousri Gerges pelo apoio e colaboração no desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores e colegas Jordan, Brazalli, Humberto, Marcos, pelas contribuições e incentivo.

A todos que, de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

A Universidade Federal de Santa Catarina pelo apoio técnico e a Universidade Federal do Rio Grande do Norte pelo apoio financeiro.

## R E S U M O

Este trabalho descreve duas aplicações da teoria de propagação de ondas em estruturas periódicas: uma estrutura discreta e outra contínua.

Apresenta-se inicialmente uma descrição simples da propagação de ondas em meios contínuos, com o propósito de rever conceitos e definições e dar ao trabalho um corpo contínuo.

Também, com este propósito, revisam-se alguns elementos de matrizes de transferência, que serão úteis ao estudo da estrutura contínua.

Formula-se matricialmente o problema de propagação de ondas através de um exemplo de estruturas discretas.

As constantes de propagação são derivadas e discutidas.

Uma teoria da resposta de estruturas discretas, por via de propagação de ondas, é apresentada.

Resultados numéricos são apresentados e discutidos.

Um modelo experimental da estrutura discreta é construído e ensaiado.

Os sistemas de medição, excitação, calibração e análise da resposta da estrutura são descritos e discutidos.

Os resultados numéricos (obtidos via computador digital) são comparados com os experimentais.

O problema de propagação livre de ondas em um tubo transportando um fluido e periodicamente suportado é formulado. ns^

As constantes de propagação são computadas e comparadas com os resultados anteriores encontrados na literatura.

## A B S T R A C T

This work describes two applications of the theory of free wave propagation in periodic structures: one discrete and a nother continuous atructures.

A simple description of wave propagation in continuos me dia is presented, with the sole objetive of reviewing definitions and concepts and for the sake of completness.

Also, for the same reasons, some elements of the theory of transfer matrices are presented.

The free wave propagation problem is formulated through an example of discrete mechanical structure..

The propagation constants are derived and discussed.

A theory for the response of discrete periodic structu res, based on the wave propagation phenomenon, is presented.

Numerical results are presented and discussed.

An experimental model of a discriete periodic structure is built and tested.

Computed and measured results are compared and discussed.

## NOTAÇÃO

GERAL

$[ ]$	Matriz Quadrada
$\{ \}$	Matriz Coluna
$[ ]^T$	Matriz Transposta
$[ ]^{-1}$	Matriz Inversa
$\Omega$	Frequência Circular
$\Omega^*$	Frequência Adimensional
$\mu$	Constante de Propagação Complexa
$\mu_r$	Parte Real da Constante de Propagação
$\mu_i$	Parte Imaginária da Constante de Propagação
$\rho$	Densidade de Massa
$[A]$	Matriz Estação
$[T(y_2, y_1)]$	Matriz de Transferência, Matriz de Transferência do Período



$[T_F(y,0)]$	Matriz de Transferência Campo
$[P]$	Matriz de Transferência Ponto
$\{z(y)\}$	Vetor Estação
$x,y,z$	Variáveis Espaciais
$[U], [V]$	Matrizes Modais de $[A]$
$[\lambda_j]$	Matriz Diagonal onde $\lambda_j$ são os autovalores de $[A]$
$q$	Rigidez da Mola Circular
$q'$	Rigidez da Mola Tipo Viga

## CAPÍTULO I

$\psi$	Quantidade Associada Com Uma Onda Harmônica livre
$\mu$	Constante de Propagação Complexa

## CAPÍTULO II

$c$	Velocidade Constante
-----	----------------------

---

$t$	Variável de Tempo
$y_+$	Deslocamento na Direção Positiva
$y_-$	Deslocamento na Direção Negativa
$a, b$	Constantes
$\tau$	Período
$K$	Número de Onda
$i$	Quantidade Imaginária. igual a $(-1)^{1/2}$
$\Re( )$	Parte Real de Um Número Complexo
$\Im( )$	Parte Imaginária de Um Número Complexo
$\mu$	Massa por Unidade de Comprimento do Fio
$T$	Tensão no Fio
$\delta m$	Elemento de Massa
$a_y$	Aceleração Transversal
$A$	Área da Secção Transversal de Um Tubo
$\rho$	Densidade do Fluido

---

$P_0$	Pressão Inicial
$P$	Pressão Final
$p$	Pressão Acústica
$E$	Módulo de Young
$c_g$	Velocidade de Grupo

### CAPÍTULO III

$\{f(t)\}$	Vetor Coluna
$[ I ]$	Matriz Identidade
$y$	Período Estrutural

### CAPÍTULO IV

$N_i^R$	Força Aplicada à Direita do Suporte
$N_i^L$	Força Aplicada à Esquerda do Suporte
$[F]$	Matriz de Transferência Campo
$\bar{a}$	Quantidade Adimensional

M	Massa
c	Velocidade de Fase
c*	Velocidade de Fase Adimensional
L	Comprimento da Viga Tipo Mola
$c_g$	Velocidade de Grupo
$c_g^*$	Velocidade de Grupo Adimensional

## CAPÍTULO V

$z(nL, t)$	Deslocamento na Enésima Estação
$z(nL)$	Amplitude na Enésima Estação
$\bar{z}(nL)$	Amplitude Complexa à Direita na Enésima Estação
$\delta_{dK}$	Delta de Kronecker
N	Número de Períodos
C	Constante
F	Força Aplicada

CAPÍTULO VI

D	Diâmetro Interno da Mola Circular
L	Comprimento da Viga
M	Massa de Alumínio
m	Massa da Viga
z	Comprimento do Período
$b_v$	Largura da Viga
$h_v$	Altura da Viga
$b_m$	Largura da Mola Circular
$h_m$	Altura da Mola Circular
$\delta$	Deformação
$\xi$	Fator de Amortecimento

CAPÍTULO VII

I	Número de Inércia do Tubo
---	---------------------------

---

A	Área Transversal de Fluxo Interna do Tubo
U	Velocidade de Fluxo
T	Tensão Externa
x	Coordenada Axial
y	Deslocamento Transversal
t	Tempo
p	Pressão do Fluido
m	Massa por Unidade de Comprimento do Tubo
M	Massa por Unidade de Comprimento do Fluido
$\mathcal{M}$	Momento de Flexão
$\psi$	Inclinação
Y	Deflexão
v	Força Cisalhante
$C_t$	Constante com Dimensão de Tempo
$\lambda$	Autovalores de $ A $

$\beta$ 

Massa Adimensional

 $u$ 

Velocidade Adimensional

# S U M Á R I O

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO .....	1
1. - Introdução .....	1
CAPÍTULO II - MOVIMENTO ONDULATÓRIO UNIDIMENSIONAL .....	4
2. - Introdução .....	4
2.1 - Descrição Matemática das Ondas .....	5
2.1.1 - Ondas em Meio Não Dispersivo .....	5
2.1.2 - Ondas Harmônicas .....	9
2.1.3 - Forma Exponencial das Ondas Harmônicas .....	14
2.2 - Exemplos de Ondas em Meios Físicos .....	15
2.2.1 - Fio Flexível .....	16
2.2.2 - Fluidos .....	20
2.2.3 - Barra Longitudinal .....	23
2.3 - Ondas Estacionárias .....	24
2.4 - Dispersão e Velocidade de Grupo .....	28
CAPÍTULO III - BREVES INFORMAÇÕES SOBRE MATRIZES DE TRANSFERÊN CIA .....	38
3. - Introdução .....	38
3.1 - A Equação de Estado .....	38
3.2 - Matriz de Transferência .....	41
CAPÍTULO IV - PROPAGAÇÃO LIVRE DE ONDAS EM ESTRUTURAS PERIÓDI- CAS DISCRETAS .....	44
4. - Introdução .....	44
4.1 - Determinação da Matriz de Transferência do Período .....	45
4.1.1 - Matriz de Transferência Campo .....	45



4.1.2 - Matriz de Transferência Ponto .....	46
4.1.3 - Matriz de Transferência do Período .....	48
4.2 - Equação das Constantes de Propagação .....	49
4.3 - Variação da Constantes de Propagação com a Frequência .	53
4.3.1 - Discussão da Equação (4.18) .....	53
4.3.2 - Gráfico de Variação de $\mu_p$ e $\mu_z$ com a Frequência	58
4.4 - Existência de Grupos de Ondas .....	61
4.4.1 - Velocidade de Fase .....	61
CAPÍTULO V - RESPOSTAS DE SISTEMAS PERIÓDICOS .....	65
5. - Introdução .....	65
5.1 - Formulação da Resposta .....	65
5.2 - Exemplo Ilustrativo .....	69
CAPÍTULO VI - RESULTADOS EXPERIMENTAIS DA RESPOSTA DE SISTE- MAS DISCRETOS .....	77
6. - Introdução .....	77
6.1 - O Modelo Experimental .....	77
6.2 - Medição das Rigidezes das Molas .....	78
6.3 - Sistema de Medições da Resposta em Frequência .....	79
6.4 - Calibração .....	81
6.5 - Discussão dos Resultados .....	82
CAPÍTULO VII - PROPAGAÇÃO LIVRE DE ONDAS EM TUBOS CONTÍNUOS COM FLUIDO EM MOVIMENTO .....	91
7. - Introdução .....	91
7.1 - Obtenção da Matriz de Transferência Periódica .....	92
7.1.1 - Determinação da Matriz de Estado $ A $ .....	94
7.2 - Constantes de Propagação para o Tubo Conduzindo Fluido	98

CAPÍTULO VIII - CONCLUSÕES GERAIS E SUGESTÕES PARA ESTUDOS E  
 POSTERIORES ..... 103

REFERÊNCIAS ..... 105

APÊNDICES A - FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARA AS VI-  
 BRAÇÕES DE TUBOS RETOS COM FLUIDO EM MOVIMEN-  
 TO ..... Ai

B - FLUXOGRAMA PARA O CÁLCULO DAS CONSTANTES DE  
 PROPAGAÇÃO ..... Bi

C - ANÁLISE DIGITAL ..... Ci

ABEXO I - FOTOGRAFIAS REFERENTES AO MODELO EXPERIMENTAL Ii

## CAPÍTULO I

1. INTRODUÇÃO

Uma estrutura periódica consiste de elementos idênticos unidos de maneira idêntica, para formar o sistema completo.

A engenharia é abundante em exemplos de sistemas periódicos: uma viga contínua sobre apoios igualmente espaçados; uma tubulação forçada montada em anéis de rigidez igualmente espaçados; a parte de uma fuselagem entre dois montantes e enrijecida por vigas ("stringers").

Nos últimos anos alguns autores, reconhecendo as limitações do método modal [1] para a análise dinâmica destes sistemas desenvolveram esforços no sentido de colocar em bases firmes o método de propagação de ondas.

Por este método a resposta da estrutura à excitação pode ser determinada sem cálculo prévio dos modos e frequências naturais. O amortecimento, independente de sua quantidade ou natureza (desde que seja linear), não traz qualquer complicação adicional. Não são necessárias longas somas de contribuição modal.

O método de propagação de ondas em estruturas periódicas baseia-se no seguinte princípio: se  $\psi$  representa uma quantidade associada a uma onda harmônica propagando-se livremente num sistema periódico e se tem valores  $\psi_0$  e  $\psi_1$  nos extremos de um período estrutural, então

$$\psi_1 = \psi_0 e^{-i\mu} \quad (1.1)$$

onde  $\mu$  é a constante de propagação e representa a variação de fase entre  $\psi_1$  e  $\psi_0$ .

Este princípio foi extensivamente usado por Brillouin [2] em estruturas cristalinas e linhas elétricas.

Os primeiros trabalhos em estruturas de engenharia foram feitos por Ungar [3] e Bobrovnitskii e Maslov [4] em estruturas simples de vigas.

Mead e Wilby [5] introduziram o uso de funções receptância, que, salvo para estruturas simples, é algebricamente penoso.

Espíndola [6] foi o primeiro a usar matrizes de transferência em estruturas periódicas.

Uma teoria matricial geral foi por ele desenvolvida que permite determinar a resposta de qualquer estrutura periódica.

Uma teoria é orientada para computador digital.

Neste trabalho uma compilação de conceitos sobre propagação de ondas é apresentado no capítulo II visando a clareza e continuidade do assunto.

No capítulo III procura-se citar alguns aspectos gerais da teoria de matrizes de transferência. O conceito de estação é analisado através de um modelo matemático.

No capítulo IV o problema de propagação livre de ondas é estudado, através de um sistema discreto. As matrizes de transferência são formuladas seguindo a orientação de Pestel [7].

No capítulo VI um modelo experimental representativo do sistema discreto estudado nos capítulos IV e V é analisado. Os resultados são comparados com os resultados obtidos no capítulo V.

No capítulo VII é formulado o problema de propagação livre de ondas em tubo suportado periodicamente com um fluido em movimento. Os resultados são comparados com outros empregando o método da equação dos três momentos.

Conclusões finais e sugestões para novos estudos são apresentadas.

A teoria da resposta de estruturas periódicas a forças é revista é apresentada sob novo enfoque, que se presume mais elegante e mais adequado às computações numéricas.

## C A P Í T U L O   I I

## MOVIMENTO ONDULATÓRIO UNIDIMENSIONAL

2. INTRODUÇÃO

A finalidade deste capítulo é apresentar o conceito de onda, considerando apenas o essencial para a melhor compreensão dos capítulos posteriores.

A teoria ondulatória foi fonte de preocupação dos físicos contemporâneos, mas já por volta do século dezenove os cientistas Hamilton, Kelvin, Stokes, Reynolds e Rayleigh desenvolveram um princípio para a teoria ondulatória linear, empregando os modos normais de vibrações, e descreveram com exatidão, o conceito de velocidade de grupo, dispersão e soluções exatas para a equação da onda. J. P. G. Richards e R. P. Williams [8] assim definem onda: uma onda é uma forma de transmitir energia de um ponto a outro sem qualquer transferência de matéria. Portanto, é uma forma de transmitir informação de um ponto a outro.

Existem inúmeros exemplos de ondas: ondas em fios, em barras, em membranas, ondas sonoras, em linhas de transmissão e outras. A seguir será dada uma descrição dos tipos de ondas que serão utilizadas nos capítulos posteriores.

## 2.1. DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DAS ONDAS

A descrição aqui apresentada segue de perto aquela encontrada em J. P. G. Richards e R. P. Williams [8].

### 2.1.1. ONDAS EM MEIO NÃO DISPERSIVO

Considere-se um fio de comprimento infinito inicialmente em repouso. Em seguida escolhe-se como eixo  $x$  do sistema de coordenadas, aquele ao longo da posição de equilíbrio do fio, e o eixo  $y$  representando o deslocamento transversal de uma partícula do fio de sua posição de equilíbrio. Esta situação está representada na figura 2.1.

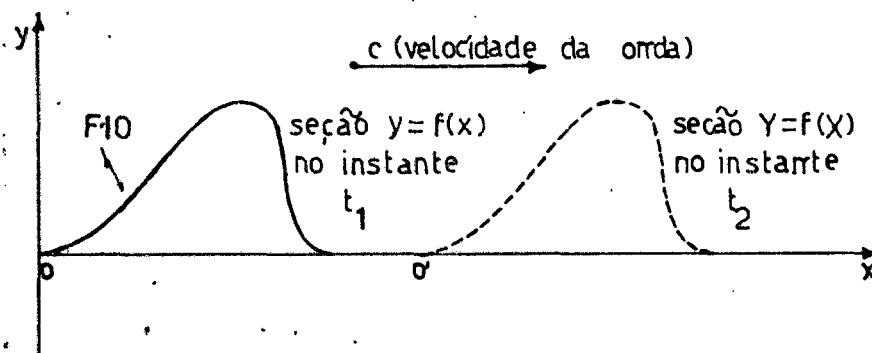


Figura 2.1 - Fio de comprimento infinito.

Se for aplicada uma rápida perturbação no fio à esquerda da origem, as partículas nele contidas irão movimentar-se da sua posição de origem. Deve-se admitir que esta perturbação ocorra paralela ao eixo  $y$  e de forma que se possa tomar o valor de  $y$  em qualquer ponto no fio como uma medida do distúrbio,

de qualquer ponto em um certo instante  $t$ . Se for tomada uma fotografia em alta velocidade durante a passagem da perturbação, o fio será visto em forma de curvas movimentando-se com velocidade constante e sem variação de forma (ver figura 2.1). Se forem tomadas duas fotografias nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ , ambas mostrarão a mesma forma, sendo que a segunda estará deslocada ao longo do fio na direção da propagação. No instante  $t_1$ , a forma da curva será descrita pela função;

$$y = f(x)$$

no instante  $t_2$  a forma da seção será descrita pela função

$$y = f(X)$$

Supõe-se que a curva se move com velocidade constante  $c$ , a distância  $OO'$  é igual a  $c(t_2 - t_1)$ . Assim, tem-se:

$$X = x - c(t_2 - t_1)$$

Deste modo, no instante  $t_2$  a curva será descrita por:



$$y = f[x - c(t_2 - t_1)]$$

Finalmente, se o relógio do tempo for acionado no instante em que a curva passar pelo ponto 0, isto é,  $t_1 = 0$ , qualquer curva em um instante de tempo  $t$  será obtida pela substituição da quantidade  $t_2 - t_1$ , pela quantidade  $t$ . Assim, tem-se:

$$y_+ = f(x - ct) \quad (2.1)$$

Esta expressão define completamente uma onda transversal unidimensional de forma constante, movendo-se com velocidade constante  $c$ , ao longo da direção positiva de  $x$ . É fácil mostrar que, nas mesmas condições, uma onda que se move na direção oposta será dada por:

$$y_- = f(x + ct) \quad (2.2)$$

As expressões (2.1) e (2.2) são funções de duas variáveis independentes; isto significa que para encontrar-se o valor de  $y$  tem-se que conhecer as variáveis  $x$  e  $t$ .

As expressões (2.1) e (2.2) ainda não representam uma expressão geral, pelo fato de ambas descreverem o movimento ondulatório em direções opostas de propagação, e também por

que ambas são especificadas em função de  $f$ . Para se obter uma equação geral será necessário a desvinculação dos fatos acima, o que será obtido pela diferenciação das equações (2.1) e (2.2). Para facilitar este estudo far-se-á uma mudança de variável na equação (2.1) da seguinte forma:

$$z = x - ct \quad (2.3)$$

Diferenciando  $y_+ = f(x - ct) = f(z)$  em relação a  $t$ , tem-se:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -c \frac{df}{dz} \quad (2.4)$$

Similarmente

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dz} \quad (2.5)$$

Eliminando  $df/dz$  entre (2.4) e (2.5), tem-se:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -c \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2.6)$$

Repetindo tudo o que foi feito acima para a função  $y_- = f(x + ct)$  com a seguinte mudança de variável  $w = x + ct$ , obtêm-se:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = c \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2.7)$$

Verificando as equações (2.6) e (2.7) conclui-se que elas são bem semelhantes, mas são obtidos resultados diferentes, para direções de propagações diferentes. Para eliminar esta restrição, já que procura-se uma equação bastante geral, toma-se a diferenciação segunda em relação a  $t$  na equação (2.4). Então,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.8)$$

Analogamente, derivando (2.5) em relação a  $x$ ,  
tem-se:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dz^2} \quad (2.09)$$

Finalmente, comparando (2.08) e (2.09), tem-se:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

Se todo esse processo fosse repetido para  $y = f(x + ct)$  o resultado final seria o mesmo. Isto significa que obtém-se uma equação inteiramente independente da direção de propagação. Assim sendo, a equação diferencial parcial de segunda ordem (2.10) descreve o movimento ondulatório em ambas as direções de propagação sobre um fio, com velocidade de propagação constante e forma de perturbação invariável no tempo.

### 2.1.2. ONDAS HARMÔNICAS

As funções representadas pelas expressões (2.1) e (2.2) são completamente arbitrárias. Portanto, a forma de uma onda poderá ser a de qualquer curva contínua. A forma de onda mais simples para ser tratada analiticamente é a senoidal pura.

Tais ondas poderão ser assim expressas:

$$y = f(x - ct) = a \cdot \text{sen } b(x - ct) \quad (2.11)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes.

Estudar-seã agora o comportamento de um ponto quando uma onda descrita pela equação (2.11) propaga-se ao longo de um fio elástico flexível igual ao descrito anteriormente. Suponha-se o ponto a  $x_1$  metros da origem. Consequentemente,

$$y = a \text{ sen } b(x_1 - ct) \quad (2.12)$$

ou

$$y = - a \text{ sen } b(ct - x_1) \quad (2.13)$$

As expressões (2.12) ou (2.13) são funções apenas da variável  $t$ , já que se está considerando o movimento do ponto em  $x = x_1$ .

Um ponto ao realizar um movimento harmônico terá a seguinte equação do movimento:

$$y = a \text{ sen } (2\pi ft + \epsilon) \quad (2.13.1)$$

Comparando (2.13.1) com (2.13) vê-se que estas expressões são idênticas; assim, um ponto sobre o fio oscilará com movimento harmônico simples. Por esta razão, ondas senoidais são também chamadas de ondas harmônicas. Agora pode-se identificar a quantidade "a" como a amplitude do movimento causado pela onda.

Ainda pode-se afirmar que,

$$2\pi f = bc$$

ou

$$b = \frac{2\pi f}{c} \quad (2.14)$$

Assim, pode-se dar um significado físico para "b" em função da frequência de oscilação "f" e velocidade "c" da onda. Já que " $\tau$ " é o período do movimento harmônico simples, pode-se identificar o período da onda como  $2\pi/bc$ .

A representação gráfica da equação (2.11) é apresentada na figura 2.2 para um dado valor de t. A função seno é periódica, a forma da onda repete-se para intervalos fixados de x. A distância repetida é conhecida como comprimento de onda e é designado por  $\lambda$ .

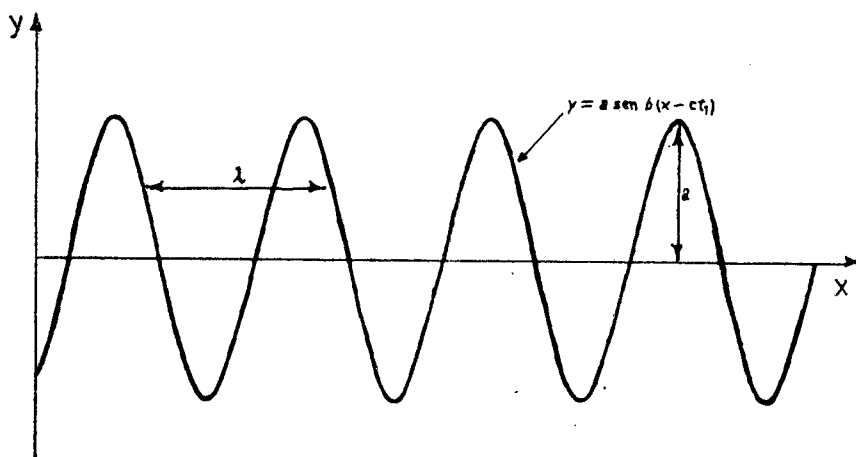


Figura 2.2 - Representação gráfica da equação 2.11 .

Aumentando-se  $x$  da quantidade  $\lambda$  na equação (2.11), o valor de  $y$  não será alterado, por definição, isto é,

$$y = a \operatorname{sen} b(x - ct) = a \operatorname{sen} b(x + \lambda - ct)$$

Mas, a menor quantidade que se pode adicionar à fase da função seno deixando-lhe inalterada para todos os valores de  $x$  é  $2\pi$ . Conseqüentemente,

$$b\lambda = 2\pi$$

ou

$$b = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.15)$$

De (2.14) e (2.15) tira-se

$$b = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c}$$

o que leva a um resultado extremamente importante

$$c = f\lambda \quad (2.16)$$

Assim, a equação (2.13) poderá ser reescrita de várias formas diferentes;

$$y = a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct),$$

$$y = a \operatorname{sen} 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - ft \right),$$

$$y = a \operatorname{sen} 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right)$$

onde  $\tau$  é o período.

Será definido agora o número de onda  $K$  como sendo o número de comprimentos de ondas por metro. Assim,  $K = 1/\lambda$ , e

$$y = a \operatorname{sen} 2\pi(Kx - ft)$$

Dependendo da escolha da origem poder-se-ã chegar à seguinte expressão:

$$y = a \operatorname{sen} 2\pi(ft - Kx) \quad (2.17)$$

### 2.1.3. FORMA EXPONENCIAL DAS ONDAS HARMÔNICAS

Da teoria elementar dos números complexos po-  
de-se escrever:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \quad (2.18)$$

ou

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta \quad (2.19)$$

onde  $i$  é a quantidade imaginária  $\sqrt{-1}$ . A expressão  $e^{i\theta}$  é uma quantidade complexa, que é expressa como a soma da parte real  $\cos \theta$ , e da parte imaginária  $\operatorname{sen} \theta$ . Nesta notação pode-se identificar  $\cos \theta$  como a parte real de  $e^{i\theta}$  na forma abreviada  $\Re(e^{i\theta})$ , e  $\operatorname{sen} \theta$  como a parte imaginária na forma abreviada  $\Im(e^{i\theta})$ .



Nesta notação a equação (2.17) pode ser escrita como:

$$y = a \operatorname{sen} 2\pi(ft - Kx) = \not\left[ae^{2\pi i(ft - Kx)}\right]$$

Finalmente, escreve-se a expressão acima omitindo o símbolo  $\not$ , tendo em vista a parte imaginária da expressão ter significado físico. Consequentemente,

$$y = ae^{2\pi i(ft - Kx)} \quad (2.20)$$

A vantagem de se trabalhar com funções exponenciais é que matematicamente são melhores de integrar, diferenciar e somar como séries.

## 2.2. EXEMPLOS DE ONDAS EM MEIOS FÍSICOS

A título de ilustração e em favor da clareza, alguns exemplos de meios elásticos não dispersivos serão abordados. Esse assunto é abundantemente apresentado em livros textos [9], [10] e [11], mas sua inclusão aqui serve para completar o trabalho.

### 2.2.1. FIO FLEXÍVEL

Na seção (2.1) supõe-se que um pulso no fio esticado movimenta-se com velocidade constante "c" e sem variar a forma. Agora confirmar-se-ã esses resultados utilizando as leis mecânicas e as propriedades do fio.

Então, medir-se-ã o distúrbio transversal de vido ã passagem da onda por y. A massa por unidade de comprimento do fio é  $\mu$ , e a tensão do fio é  $T$ .

As seguintes hipóteses serão introduzidas:

- a) o valor de y é muito pequeno comparado a qualquer comprimento de onda de interesse;
- b) só existe movimento na direção y;
- c) a tensão no fio é inalterada pela passagem da onda;
- d) os efeitos da gravidade são desprezados.

Aplicando-se a segunda lei de Newton a um pequeno elemento do fio, obtém-se a equação diferencial parcial de ondas transversais ao longo do fio.

A figura 2.3 mostra um pequeno elemento do fio cujo comprimento, na posição de equilíbrio, é " $\delta x$ ". Durante

a passagem da onda, o elemento é deslocado para a posição instantânea A'B'. Os ângulos formados pelo fio com relação ao eixo Ox nos pontos A' e B' são  $\theta$  e  $\theta + \delta\theta$ .

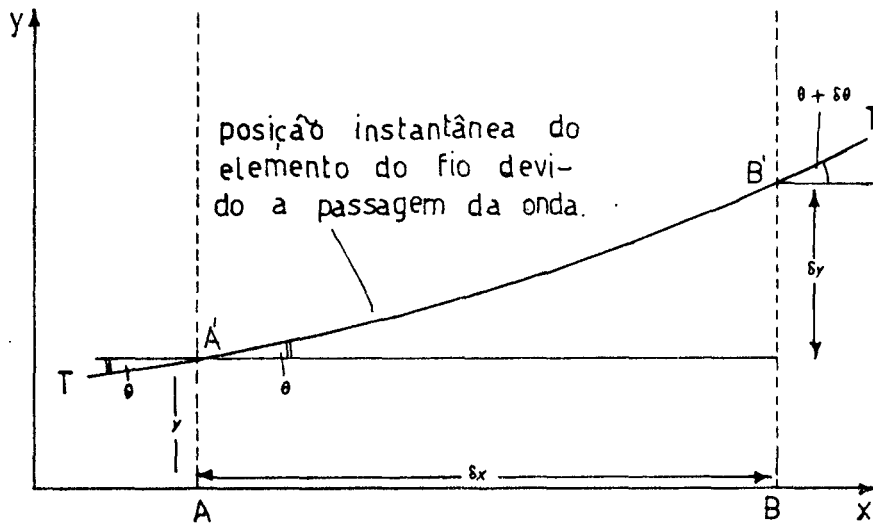


Figura 2.3 - Elemento do fio.

Considere-se as forças agindo no elemento de comprimento  $\delta x$ . Como o ângulo  $\theta + \delta\theta$  é bem pequeno, a componente  $T_x + \delta T_x$  na extremidade direita do elemento  $\delta x$ , é aproximadamente igual a  $T$ , e a resultante da força na direção  $x$  é muito próxima a zero. A magnitude da força transversal na extremidade esquerda é igual a  $T_y$  e na extremidade direita é  $T_y + \delta T_y$ . A força transversal líquida, considerando a direção para cima como positiva, é então,  $\delta T_y$ . Se o comprimento  $\delta x$  é pequeno, a variação  $\delta T_y$  pode ser calculada como

$$\delta T_y = \frac{\delta T}{\delta x} y \delta x \quad (2.21)$$

A tensão em cada extremidade do elemento pode ser decomposta nas componentes longitudinais e transversais. Assim, tem-se na extremidade esquerda do elemento:

$$T_y = T \operatorname{sen} \theta, \quad T_x = T \operatorname{cos} \theta$$

Como o ângulo  $\theta$  é muito pequeno, o  $\operatorname{cos} \theta$  torna-se aproximadamente igual a unidade e a componente  $T_x$  torna-se aproximadamente igual a  $T$ ; também o seno de um ângulo muito pequeno é aproximadamente igual a sua tangente; como o deslocamento  $y$  é uma função de  $x$ , pode-se escrever:

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{tag} \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

A magnitude da força transversal em qualquer ponto é, portanto:

$$T_y = T \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2.22)$$

Derivando, tem-se:

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.23)$$

Substituindo (2.23) em (2.22), tem-se:

$$\delta T_y = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta x$$

A massa " $\delta m$ " do elemento " $\delta x$ " é o produto da massa por unidade de comprimento por " $\delta x$ ":

$$\delta m = \mu \delta x$$

A aceleração transversal do elemento é:

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Assim, da segunda lei de Newton

$$\delta T_y = (\delta m) a_y,$$

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta x = \mu \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$e \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.24)$$

Esta equação está na mesma forma da equação (2.10). Velocidade de propagação  $\sqrt{T/\mu}$ .

### 2.2.2. FLUIDOS

Suponha-se um tubo rígido oco, infinitamente longo (ver figura 2.4) de secção transversal circular de área "A", contendo um fluido (líquido ou gás). Na sua posição de repouso a densidade é  $\rho_0$  e a pressão  $P_0$ . Considere-se um pequeno elemento do fluido de comprimento  $\delta x$  entre R e S. A figura 2.4 mostra um elemento do fluido que, na ausência de um distúrbio, encontra-se entre os planos "x" e "x +  $\delta x$ ". Quando uma onda movimenta-se ao longo do tubo, a face esquerda do elemento é deslocada de uma quantidade z e a face direita de uma quantidade z +  $\delta z$ . A variável "z" mede o deslocamento longitudinal de ponto devido à passagem da onda. Seja a pressão do lado esquerdo P e do lado direito P +  $\delta P$ .

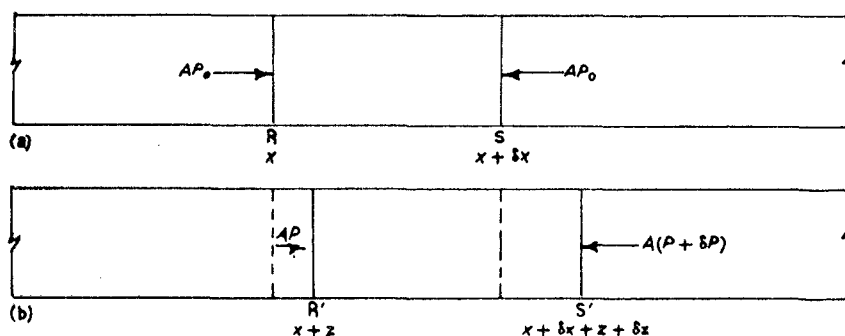


Figura 2.4 - Ondas em fluidos. Em (a) o fluido encontra-se em equilíbrio, enquanto em (b) a passagem da onda provoca um deslocamento no cilindro de RS para R'S'.

A relação entre a variação de pressão  $P - P_0$  (que será chamada de pressão acústica  $p$ ) e a variação fracionária no volume do cilindro é:

$$p = - K \frac{A\delta z}{A\delta x}$$

onde  $K$  é o módulo volumétrico, uma vez que o volume original era  $A\delta x$  e o volume aumentado  $A\delta z$ . Aqui despreza-se  $\delta P$  em comparação com  $P - P_0$ ; o sinal menos significa que um aumento na pressão a companhia uma diminuição no volume. No limite quando  $\delta x \rightarrow 0$ , tem-se:

$$p = - K \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta z}{\delta x} = - K \frac{\partial z}{\partial x} \quad (2.25)$$

Aplicando-se ao elemento R'S' a 2.<sup>a</sup> Lei de Newton, tem-se:

$$PA - A(P + \delta P) = A\rho_0 \delta x \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (2.26)$$

Não se pode desprezar  $\delta P$  aqui, já que esta diferença na pressão está causando o movimento. Agora

$$p = P - P_0$$

assim,

$$\delta p = \delta P ,$$

Como  $P_0$  é constante, (2.26) torna-se:

$$- A \delta p = A \rho_0 \delta x \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Pode-se escrever

$$\delta p = \frac{\partial P}{\partial x} \delta x, \text{ já que } \delta x \text{ é pequeno. Assim,}$$

$$- \frac{\partial P}{\partial x} \delta x = \rho_0 \delta x \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (2.27)$$

Diferenciando (2.25) com relação a  $x$  vê-se  
que:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - K \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Substituindo esta equação em (2.27), tem-se:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{K/\rho_0} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (2.28)$$



Assim, ondas longitudinais propagando-se em um fluido têm velocidade igual a  $\sqrt{K/\rho_0}$ .

### 2.2.3. BARRA LONGITUDINAL

O raciocínio da seção (2.2) pode ser aplicado com pouca modificação ao caso de ondas longitudinais em barras finas. Considere-se a pequena seção PQ da barra de seção transversal de área A, densidade  $\rho$  e módulo de Young E; a seção é deslocada para P'Q' e é diminuída no comprimento devido à passagem de uma onda longitudinal (ver figura 2.5).

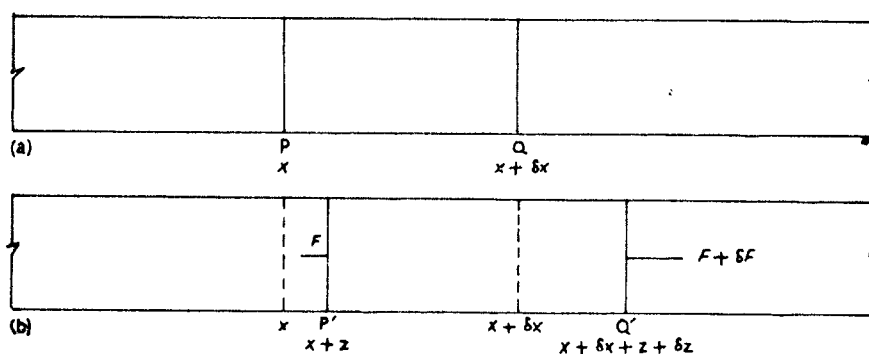


Figura 2.5 - Ondas longitudinais em barras. Em (a) a barra encontra-se na sua posição de equilíbrio, enquanto em (b) a seção PQ é deslocada para P'Q' devido à passagem da onda.

Por definição do módulo de Young, tem-se:

$$\frac{F}{A} = E \frac{\delta z}{\delta x} \quad (2.29)$$

Aplicando-se a segunda lei de Newton, tem-se:

$$\delta F = A\rho\delta x \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

mas,

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x = AE \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \delta x \quad (2.30)$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{E/\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (2.31)$$

que é novamente a equação da onda. A velocidade para ondas longitudinais em barras é:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

### 2.3. ONDAS ESTACIONÁRIAS

Suponha-se que a forma inicial do fio seja, em todo seu comprimento, cosenoidal (isto é, a forma de uma curva coseno),

com comprimento  $\lambda$ . Isto quer dizer que:

$$\phi(x) = a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad (2.32)$$

Fazendo as velocidades iniciais de todas as partículas que contêm o fio serem zero, tem-se a expressão:

$$y = \frac{1}{2} \phi(x - ct) + \frac{1}{2} \phi(x + ct) \quad (2.33)$$

Introduzindo a forma de  $\phi$  dada pela expressão (2.32), a expressão (2.33) torna-se:

$$y = \frac{1}{2} a \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \frac{1}{2} a \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x + ct) \quad (2.34)$$

Esta equação descreve o movimento subsequente do fio. Agora pode-se escrever (2.34) na forma:

$$y = a \cos \frac{1}{2} \left( \frac{4\pi x}{\lambda} \right) \cos \frac{1}{2} \left( - \frac{4\pi ct}{\lambda} \right)$$

## A identidade trigonométrica

$$\cos A + \cos B = 2 \cos [1/2(A + B)] \cos [1/2(A - B)]$$

foi usada, e pode-se desprezar o sinal menos no argumento do segundo termo, visto que  $\cos \theta = \cos (-\theta)$ . Pode-se substituir  $\lambda/c$  neste termo por  $\tau$  o período. Assim, a expressão anterior tornar-se-á:

$$y = a \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \frac{2\pi t}{\tau} \quad (2.35)$$

Em (2.35)  $(a \cos 2\pi x/\lambda)$  representa a distribuição espacial ao longo de  $x$ , dos deslocamentos  $y$ . Estes deslocamentos variam harmonicamente, no tempo, conforme o fator  $\cos 2\pi t/\tau$ . A figura 2.6 representa a expressão (2.35) em vários instantes. Vê-se que não existem, aparentemente, ondas movimentando-se ao longo do eixo  $x$  em qualquer direção. De fato, as duas ondas movimentando-se, somam-se, neste caso, para dar um efeito estacionário. Tal superposição é chamada onda estacionária, e é de grande importância. Verifica-se, pela figura, que existem pontos que nunca se movem. Estes pontos, chamados nós, são obtidos fazendo-se:  $a \cos (2\pi x/\lambda) = 0$  em (2.35), o que dá:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$$

Em outras palavras, tem-se nós nos pontos

$$x = (2n + 1)\lambda/4, \quad n = 0,$$

$$\pm 1, \pm 2, \dots$$

A  $\frac{1}{4}\lambda$  de cada nó tem-se um ventre, ou antinó, onde o deslocamento  $y$  é máximo.

Deve-se salientar um aspecto matemático importante de ondas estacionárias. As ondas estacionárias são descritas pela equação (2.35), isto é,

$$y = a \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \frac{2\pi t}{\tau}$$

que em geral pode ser descrita como:

$$y = X(x) T(t)$$

onde  $X(x)$  e  $T(t)$  são, respectivamente, funções apenas de posição e tempo:

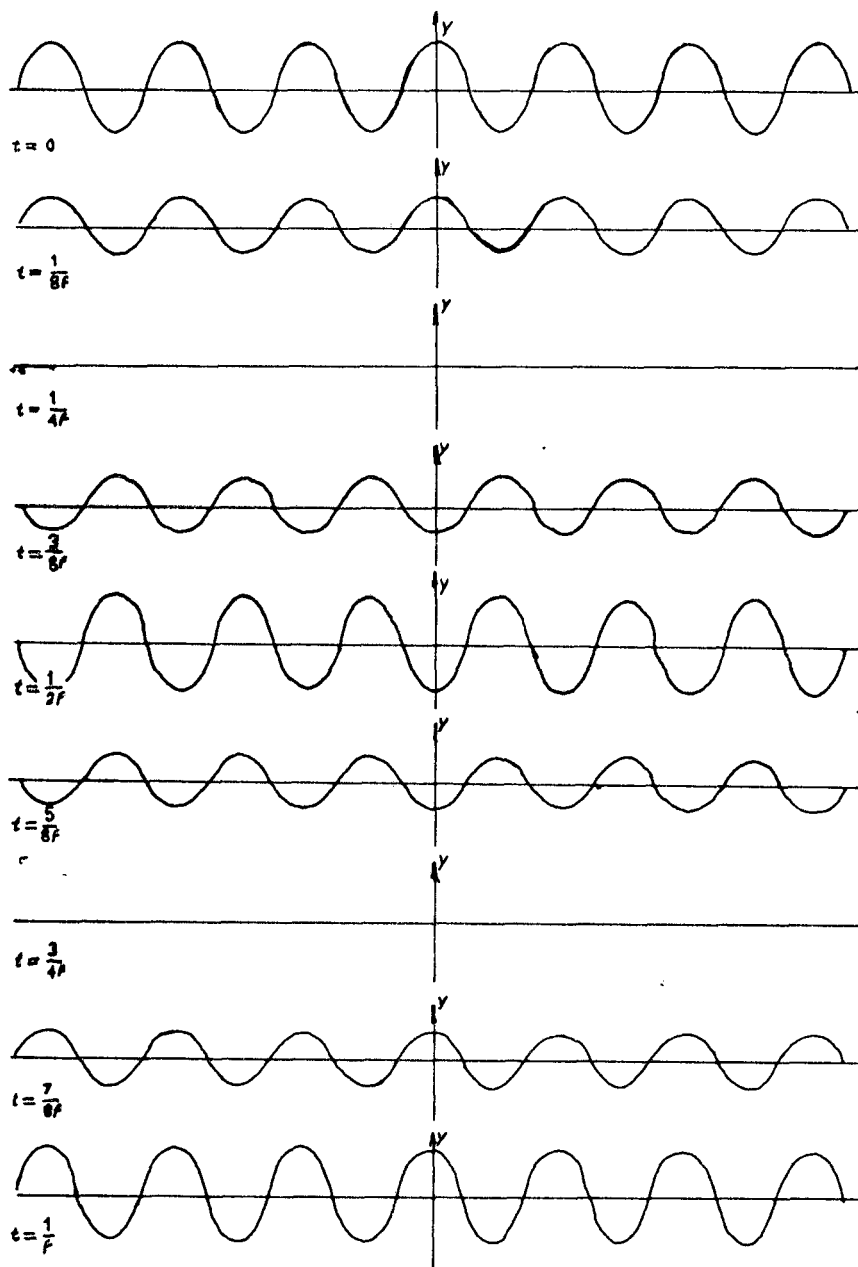


Figura 2.6 - Ondas estacionárias em tempos diferentes.

#### 2.4. DISPERSÃO E VELOCIDADE DE GRUPO

Os sistemas físicos tratados nas seções (2.1), (2.2) e (2.3) forneciam uma única velocidade da onda, determinada pelas constantes físicas do meio. Encontrou-se

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{para o fio}$$

e

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad \text{para o fluido}$$

Nestes meios a velocidade de propagação da onda, vale dizer da energia, depende apenas de parâmetros físicos do mesmo. Não depende, por exemplo, do comprimento de onda.

Existem, entretanto, meios em que a velocidade de propagação de ondas mostra-se dependente do comprimento de onda. Estes, são consideravelmente mais difíceis de se tratar, do que os das seções (2.1), (2.2) e (2.3): um exemplo seria ondas superficiais sobre um líquido de profundidade  $h$ , densidade  $\rho$  e tensão superficial  $\gamma$ , cuja velocidade é |8|:

$$c^2 = \left[ \frac{g}{2\pi K} + \frac{2\pi\gamma K}{\rho} \right] \operatorname{tag} h(2\pi Kh),$$

onde  $g$  é a aceleração devido à gravidade e  $K$  o número de ondas. Um outro exemplo, seria as ondas de luz em um meio transparente, onde a relação entre  $c$  e  $\lambda$  é mais complicada, mas pode ser expressa aproximadamente por |8|:

$$\frac{1}{c} = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

onde A e B são constantes do meio. Esta propriedade pela qual a velocidade depende do comprimento de onda é chamada dispersão; e o meio que possui esta propriedade é chamado meio dispersivo. Os meios de que se ocupará este trabalho (estruturas periódicas) são fortemente dispersivos.

Examine-se agora o comportamento coletivo de um número de ondas de comprimentos diferentes, propagando-se simultaneamente através de um meio, utilizando o princípio da superposição. Ver-se-á o que acontece quando se superpõe duas ondas de frequências e números de ondas levemente diferentes, mas de mesma amplitude. Sejam as duas ondas

$$y_1 = a \text{ sen } 2\pi(f_1 t - K_1 x)$$

e

$$y_2 = a \text{ sen } 2\pi(f_2 t - K_2 x)$$

Então, de acordo como princípio da superposição, o efeito combinado destas duas ondas é dado por:

$$y = y_1 + y_2$$



$$= 2a \operatorname{sen} 2\pi \left[ \frac{1}{2}(f_1 + f_2)t - \frac{1}{2}(K_1 + K_2)x \right] \cos 2\pi \left[ \frac{1}{2}(f_1 - f_2)t - \frac{1}{2}(K_1 - K_2)x \right]$$

(2.36)

O termo seno representa uma onda cuja frequência e número de ondas são as médias das ondas originais, com velocidade

$$\frac{f_1 + f_2}{K_1 + K_2}$$

Como foi admitido acima que  $f_1$  era levemente diferente de  $f_2$  e  $K_1$  de  $K_2$ ,  $1/2(f_1 + f_2)$  diferirá também levemente de  $f_1$  ou  $f_2$  e  $1/2(K_1 + K_2)$  de  $K_1$  ou  $K_2$ .

Assim, o termo seno representa uma onda cujo período é muito semelhante as duas ondas originais. O termo coseno representa uma onda cuja frequência e número de ondas são respectivamente,  $1/2(f_1 - f_2)$  e  $1/2(K_1 - K_2)$  e cuja velocidade é

$$\frac{f_1 - f_2}{K_1 - K_2}$$

Estes termos variam muito mais lentamente com a distância e o tempo do que o termo seno. A figura 2.7 mostra um esquema da função (2.36) obtido para  $t$  constante.

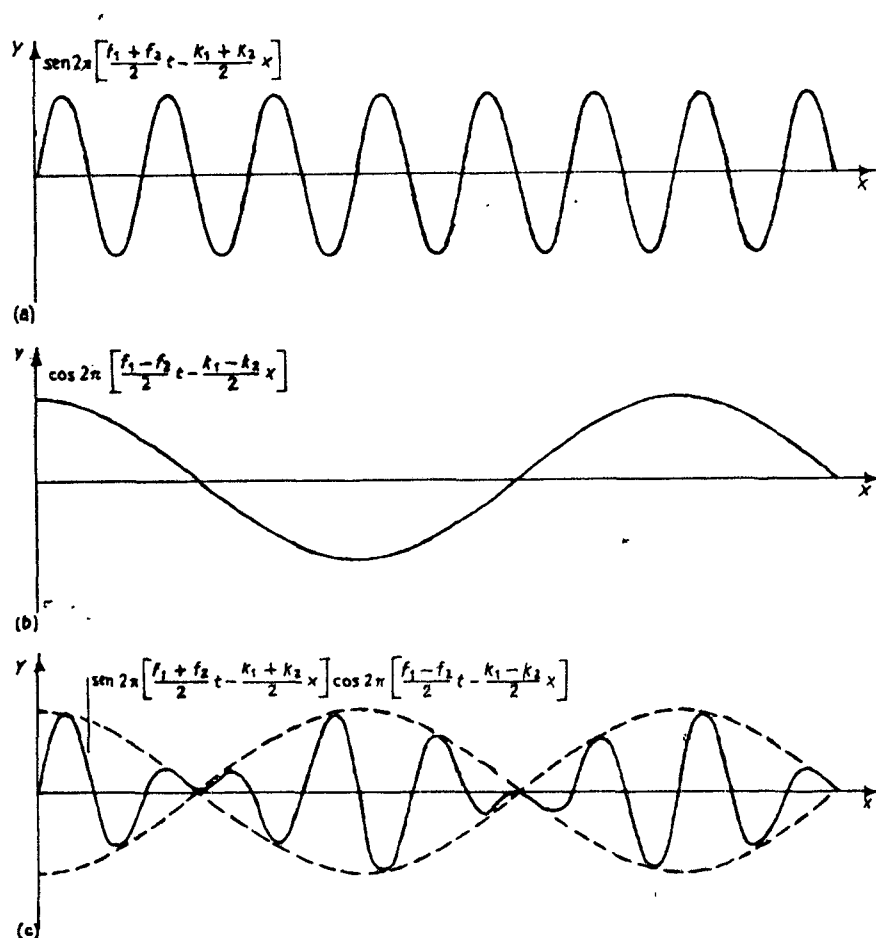


Figura 2.7 - Superposição com  $t$  constante de duas ondas levemente diferentes,  $f$  e  $K$ : (a) mostra o termo seno da expressão (2.38), (b) o termo coseno e (c) o produto dos 2 termos.

As ordenadas do termo seno (ver curva "a"), e do termo coseno (ver curva "b") são multiplicadas ponto a ponto, para produzir a forte curva (c) que está coberta por uma curva coseno. Por simetria, pode-se concluir que, uma curva de (2.36) entre  $x$  e  $t$  teria a mesma forma da curva (c).

Uma combinação de duas ou mais ondas desta maneira, é conhecida como um grupo de ondas. Examine-se como grupos de ondas comportam-se em meios dispersivos e não dispersivos. Em um meio não dispersivo a velocidade da onda é constante, de forma que

$$c = \frac{f_1}{K_1} = \frac{f_2}{K_2} = \frac{f_1 + f_2}{K_1 + K_2} = \frac{f_1 - f_2}{K_1 - K_2}$$

Isto significa que as partes seno e cosseno da equação (2.36) propagam-se com a mesma velocidade, de modo que a curva contínua e tracejada da figura 2.7c, movem-se para a direita com o tempo, com a posição relativa de uma, com relação à outra permanecendo constante. Isto significa que um sinal propagando-se em um meio não dispersivo não sofrerá variação na forma. No caso do meio ser dispersivo, viu-se que a velocidade da onda varia com o comprimento de onda, de maneira que

$$\frac{f_1}{K_1} \neq \frac{f_2}{K_2}$$

e portanto,

$$\frac{f_1 + f_2}{K_1 + K_2} \neq \frac{f_1 - f_2}{K_1 - K_2}$$

Isto significa que a curva contínua e tracejada na figura 2.7c movem-se com velocidades diferentes. A situação é apresentada na figura 2.8, onde as curvas da figura 2.7c são mostradas em dois tempos sucessivos.

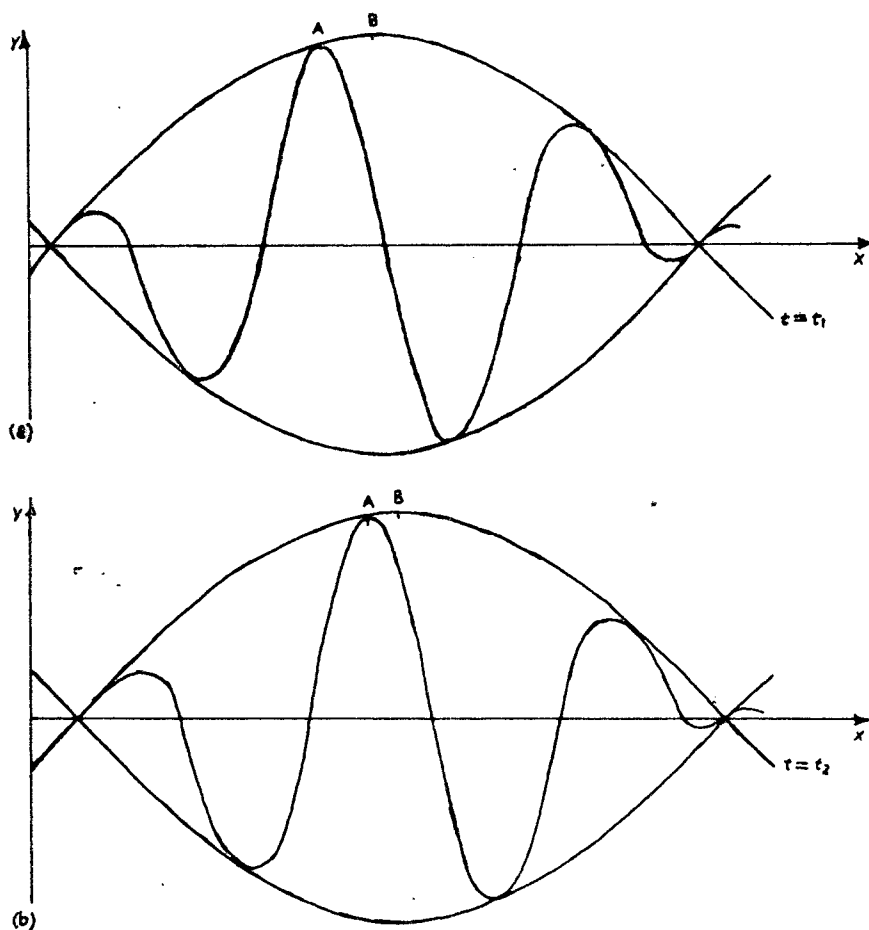


Figura 2.8 - Grupos de ondas em meio dispersivo. (a) e (b) representam as curvas da figura 2.7 em dois instantes sucessivos de tempo.

Na figura 2.8 pode-se ver que a curva interna move-se mais rapidamente do que a curva externa, isto significa que

$$\frac{f_1 - f_2}{K_1 - K_2} < \frac{f_1 + f_2}{K_1 + K_2} \quad (2.37)$$

A expressão 2.37, é conhecida como dispersão normal. Por outro lado, se a curva externa move-se mais rapidamente do que a curva interna, tem-se:

$$\frac{f_1 - f_2}{K_1 - K_2} > \frac{f_1 + f_2}{K_1 + K_2}$$

que é conhecida como dispersão anômala.

Uma quantidade extremamente importante, que deve-se examinar agora é a velocidade com que a energia é transportada quando duas ou mais ondas são sobrepostas para formar um grupo. Quando tem-se uma só onda a energia é transportada com a velocidade com que a máxima amplitude se move. No caso de um grupo de ondas, (ver figura 2.8) a velocidade com que a máxima amplitude se move é a da curva externa. Isto significa que a energia é transportada com a velocidade da curva externa. Esta velocidade é conhecida como velocidade de grupo  $c_g$ . Viu-se que a curva externa move-se com velocidade

$$\frac{f_1 - f_2}{K_1 - K_2}$$

de maneira que

$$c_g = \frac{f_1 - f_2}{K_1 - K_2} \quad (2.38)$$

Admite-se que  $f_1$  é diferente de  $f_2$ , e  $k_1$  de  $k_2$  de pequenas quantidades; pode-se reescrever (2.38) como

$$c_g = \frac{\Delta f}{\Delta K}$$

onde

$$\Delta f = f_1 - f_2 \quad \text{e} \quad \Delta K = k_1 - k_2$$

No limite quando  $\Delta K \rightarrow 0$ , tem-se:

$$c_g = \frac{df}{dK} \quad (2.39)$$

já que  $K = 1/\lambda$ , isto pode ser reescrito como

$$c_g = \frac{df}{d(1/\lambda)} = -\lambda^2 \frac{df}{d\lambda} \quad (2.40)$$

Substituindo  $K$  por  $1/\lambda$  no lado direito de (2.42),  
obtém-se:

$$c_g = c + \frac{1}{\lambda} \frac{dc}{d(1/\lambda)} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}$$

Os resultados acima foram deduzidos pela superposição apenas de duas ondas, mas será válido para um grupo compreendendo um grande número de ondas, a um número infinito de ondas. Para tratar um grupo compreendendo um número infinito de ondas é necessário o uso dos teoremas da teoria das transformadas de Fourier.

## C A P Í T U L O   I I I

## BREVES INFORMAÇÕES SOBRE MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA

3. INTRODUÇÃO

Este capítulo cita alguns aspectos gerais da teoria de matrizes de transferência, que serão úteis em desenvolvimentos posteriores. As matrizes de transferência são importantes no tratamento dinâmico de alguns tipos de estruturas, principalmente quando acopladas ao método de propagação de ondas em estruturas periódicas.

3.1. A EQUAÇÃO DE ESTADO

ESPÍNDOLA [6] considera um modelo matemático  $M$  (isto é, um conjunto de equações matemáticas) de um sistema físico  $S$ . O papel do modelo matemático é descrever alguns aspectos do comportamento real do sistema. As equações que constituem o modelo matemático podem possuir várias formas, tais como: algébricas, diferenciais, etc. Para a finalidade deste trabalho somente as equações diferenciais serão consideradas.

Na teoria de controles, o conceito de estado de um sistema físico é normalmente associado a um instante particular de tempo. Por exemplo, aplicando-se uma certa entrada ao sistema fi-



sico e observando-se a saída, esta dependerá do estado inicial do sistema e da entrada aplicada. Portanto, o modelo matemático do sistema consiste de duas classes de equações: aquelas que descrevem o estado do sistema e aquelas que descrevem a saída do sistema. Neste trabalho não se estará preocupado com as equações de saída, mas apenas com as de estado. Para um sistema físico, a equação estado pode ser escrita como:

$$\{z(t)\}' = g(\{z(t)\}, \{f(t)\}, t) \quad (3.1)$$

onde  $\{z(t)\}$  é um vetor coluna, representando o estado do sistema no instante  $t$ ,  $\{f(t)\}$  é um vetor entrada e  $\{z(t)\}'$  é a derivada de  $\{z(t)\}$  no tempo.

Se o sistema é linear a equação (3.1) pode ser escrita como

$$\{z(t)\}' = [A(t)]\{z(t)\} + [B(t)]\{f(t)\} \quad (3.2)$$

onde  $[A(t)]$  e  $[B(t)]$  são matrizes  $n \times n$  e  $n \times p$ , respectivamente, e  $\{f(t)\}$  é um vetor coluna  $p \times 1$ .

Entretanto, para o presente trabalho, o conceito de estado precisa ser alterado. Em vez de referências ao estado do sistema no instante  $t$ , falar-se-á sobre o estado do sistema em u-

ma estação particular. O estado inicial passará a ser uma estação de referência. Portanto, a dimensão tempo será substituída por uma dimensão espacial  $y$ . Feita esta adaptação na equação (3.2), ter-se-á:

$$\{z(y)\}' = [A(y)]\{z(y)\} + [B(y)]\{f(y)\} \quad (3.3)$$

onde  $\{z(y)\}'$  é a derivada espacial de  $\{z(y)\}$ .

Na maioria das estruturas de engenharia, as matrizes  $[A(y)]$  e  $[B(y)]$  não dependem de  $y$ . Neste caso, a equação estado (3.3) pode ser escrita assim:

$$\{z(y)\}' = [A]\{z(y)\} + [B]\{f(y)\} \quad (3.4)$$

Se nenhuma entrada for aplicada à equação (3.4), ela será mais simplificada:

$$\{z(y)\}' = [A]\{z(y)\} \quad (3.5)$$

onde, para o presente caso, o vetor  $\{z(y)\}$ , representa o vetor estação, que é uma matriz coluna dos deslocamentos e das forças internas. A matriz quadrada é a matriz de estado, que encerra as pro

priedades dinâmicas do sistema.

### 3.2. MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

Entende-se por matriz de transferência  $[T(y_2, y_1)]$  um operador linear que transforma o vetor estado  $\{z(y_1)\}$  no vetor estado  $\{z(y_2)\}$ . Em notação matemática ter-se-á:

$$\{z(y_2)\} = [T(y_2, y_1)] \{z(y_1)\} \quad (3.6)$$

Para o caso particular onde  $y_1 = 0$  e  $y_2 = y$ , a expressão (3.6) torna-se:

$$\{z(y)\} = [T(y, 0)] \{z(0)\} \quad (3.7)$$

Admitindo uma solução para (3.5) da forma  $\{z(y)\} = e^{[A]y}$  pode-se demonstrar que [12]:

$$[T(y, 0)] = e^{[A]y} \quad (3.8)$$

Pode-se ainda mostrar que [12]:

$$[T(y,0)] = e^{[A]y} = \sum_{j=0}^{\infty} [A]^j \frac{y^j}{j!} \quad (3.9)$$

isto é,

$$[T(y,0)] = \sum_{j=0}^{\infty} [A]^j \frac{y^j}{j!} \quad (3.10)$$

Da expressão (3.8) pode-se obter algumas propriedades para matrizes de transferência |6|:

$$[T(0,0)] = [I] \quad (3.11)$$

$$[T(y_1 + y_2, 0)] = [T(y_1, 0)] [T(y_2, 0)] \quad (3.12)$$

$$[T(y, 0)]^{-1} = [T(-y, 0)] \quad (3.13)$$

Uma outra expressão muito importante para matriz de transferência, ver |6|, é:

$$[T(y, 0)] = [U] [e^{-\lambda_j y}] [U]^{-1} \quad (3.14)$$

onde  $[U]$  é a matriz modal de  $[A]$  e  $[\lambda_j]$  uma matriz diagonal dos autovalores de  $[A]$ .

Nos capítulos subsequentes ter-se-ã exemplos práticos de matriz de transferência em sistemas discretos e contínuos. No capítulo IV, devido à natureza simples dos sistemas abordados, as matrizes de transferência serão derivadas diretamente, usando leis da mecânica. No capítulo VII, uma estrutura bem mais complexa será abordada. Far-se-ã então uso de métodos numéricos baseados na expressão (3.14).

## C A P Í T U L O   I V

## PROPAGAÇÃO LIVRE DE ONDAS EM ESTRUTURAS PERIÓDICAS DISCRETAS

4. INTRODUÇÃO

A figura 4.1 representa um sistema mecânico discreto infinito e periódico. O problema de propagação livre de ondas será estudado aqui com referência a este sistema, mas as idéias desenvolvidas serão bem mais gerais.

A determinação das matrizes de transferência é fácil para sistemas desse tipo, e segue a orientação de Pestel [7].

Problemas mais complexos, como o que será abordado no capítulo VII exigem a computação numérica das matrizes e o método desenvolvido por Espíndola [6] será usado.

No capítulo V será estudado a resposta de sistemas discretos e no capítulo VI um modelo experimental será apresentado e discutido.

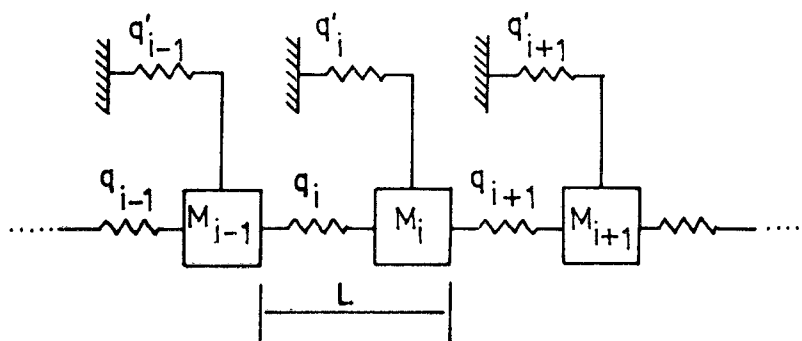


Figura 4.1 = Sistema mecânico discreto, infinito e periódico.

#### 4.1. DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA DO PERÍODO

##### 4.1.1. MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA CAMPO

Suponha-se que o sistema da figura 4.1 esteja vibrando harmonicamente com uma frequência angular  $\Omega$ . Isolando-se a mola  $q_i$  obtém-se a figura 4.2 abaixo:

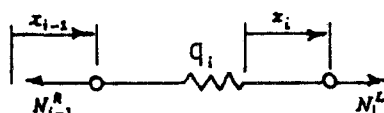


Figura 4.2

onde  $N_i^L$  e  $N_{i-1}^R$  são duas forças aplicadas pelos corpos  $M_{i-1}$  e  $M_i$  na mola  $q_i$ . A figura 4.2 mostra a direção positiva dessas forças. As letras L e R referem-se à esquerda e direita, respectivamente.

Para o equilíbrio da mola tem-se:

$$N_{i-1}^R = N_i^L \quad (4.1)$$

Pelas propriedades de rigidez da mola, tem-se:

$$N_i^L = N_{i-1}^R = q_i(x_i - x_{i-1}), \text{ logo}$$

$$x_i = x_{i-1} + \frac{N_{i-1}^R}{q_i} \quad (4.2)$$

Em notação matricial as equações (4.1) e (4.2) ficam:

$$\begin{Bmatrix} x \\ N \end{Bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & 1/q_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ N \end{Bmatrix}_{i-1}^R \quad (4.3)$$

ou em forma sintética:

$$\{z\}_i^L = [F]_i \{z\}_{i-1}^R \quad (4.3.1)$$

onde a matriz  $[F]$  é a matriz de transferência campo ou simplesmente matriz campo (ver equação 3.6).

#### 4.1.2. MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA PONTO

Isolando-se agora a massa  $M_i$  tem-se a figura 4.3.



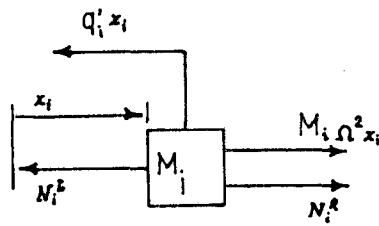


Figura 4.3

onde  $M_i \Omega^2 x_i$  é a força de inércia.

Da figura 4.3 tem-se que as deflexões à esquerda e à direita da massa  $M_i$  são as mesmas de modo que

$$x_i^R = x_i^L = x_i \quad (4.4)$$

Para o equilíbrio de forças tem-se:

$$\begin{aligned} N_i^R &= N_i^L + q_i' x_i - M_i \Omega^2 x_i = \\ &= N_i^L + (q_i' - M_i \Omega^2) x_i \end{aligned} \quad (4.5)$$

Em notação matricial as equações (4.4) e

(4.5) ficam:

$$\left\{ \begin{array}{c} x \\ N \end{array} \right\}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_i^2 - M_i \Omega^2 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} x \\ N \end{array} \right\}_i^L \quad (4.6)$$

ou em forma sintética

$$\{z\}_i^R = [P]_i \{z\}_i^L \quad (4.6.1)$$

onde a matriz  $[P]_i$  é conhecida como matriz de transferência ponto ou matriz ponto.

#### 4.1.3. MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA DO PERÍODO

Verificando a figura 4.1 vê-se que o período L foi dividido em duas partes, onde resultaram as equações (4.3.1) e (4.6.1).

A matriz de transferência do período é o operador linear que transforma o vetor estação  $\{z\}_{i-1}^R$  no vetor estação  $\{z\}_i^R$  (ver seção 1.2).

Assim, substituindo (4.3) em (4.6), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} x \\ N \end{Bmatrix}_i^R \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_i' - M_i \Omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/q_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ N \end{Bmatrix}_{i-1}^R$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ N \end{Bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 1/q_i \\ q_i' - M_i \Omega^2 & \frac{q_i' - M_i \Omega^2}{q_i} + 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ N \end{Bmatrix}_{i-1}^R \quad (4.7)$$

A expressão (4.7) pode ser escrita assim:

$$\{z\}_i^R = [T] \{z\}_{i-1}^R \quad (4.8)$$

onde  $[T]$  é a matriz de transferência do período, ou seja:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1/q_i \\ q_i' - M_i \Omega^2 & 1 + \frac{q_i'}{q_i} - M_i \Omega^2 / q_i \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

#### 4.2. EQUAÇÃO DAS CONSTANTES DE PROPAGAÇÃO

Brillouin [2] apresenta o problema da seguinte forma: imagine-se que uma onda harmônica de frequência circular  $\Omega$  se propague livremente pela estrutura 4.1, suposta infinita. Suponha

se que o problema admita uma solução do tipo:

$$\psi_n = Ae^{2\pi i(ft - KnL)} = Ae^{i(\Omega t - \mu n)} \quad (4.10)$$

com  $K = 1/\lambda$ ,  $\mu = 2\pi KL$ ,  $\Omega = 2\pi f$

onde  $\Omega$  é a frequência angular do movimento,  $t$  o tempo,  $K$  o número de onda,  $\lambda$  o comprimento de onda,  $L$  o período estrutural,  $A$  a amplitude e  $\psi$  uma quantidade que representa um deslocamento, um momento, uma força, etc. Assim

$$\psi_{n+1} = \psi_n e^{-i\mu} \quad (4.11)$$

Portanto,  $\mu$  é essencialmente definido como um ângulo de fase. A mesma solução do problema poderá ser obtida para  $\mu$  ou  $\mu' = \mu + 2m\pi$  com  $m$  sendo um inteiro positivo ou negativo.

De acordo com (4.11), tem-se:

$$\{z\}_i^R = e^{-i\mu} \{z\}_{i-1}^R \quad (4.12)$$

De (4.8) e (4.12) tira-se

$$[T]\{z\}_{i-1}^R = e^{-i\mu}\{z\}_{i-1}^R \quad (4.13)$$

A expressão (4.13) representa um problema de autovalores em que os autovalores são  $\lambda = e^{-i\mu}$  e os autovetores são  $\{z\}_{i-1}^R$ .

A expressão (4.13) pôde ser escrita na forma (4.14) que representa um sistema de equações lineares homogêneas que, para possuir soluções não triviais, o seu determinante deve ser nulo.

$$\left[ [T] - [I]e^{-i\mu} \right] \{z\}_{i-1}^R = \{0\} \quad (4.14)$$

Assim, de (4.9) e (4.14) tira-se

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1/q \\ q' - M\Omega^2 & \left(\frac{q'}{q} - \Omega^2\right) + 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.14.1)$$

De (4.14.1) conclui-se que:

$$\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0 \quad (4.15)$$

com  $a \equiv (q'/q) + 2 - \Omega^2$

$$e \quad \Omega^{*2} := M\Omega^2/q \text{ (frequência adimensional)} \quad (4.15.1)$$

ou ainda, como  $\lambda = e^{-i\mu}$ ,

$$e^{-i2\mu} - ae^{i\mu} + 1 = 0 \quad (4.16)$$

Devido a simetria (ver figura 4.1) de (4.16), tem-se:

$$e^{i2\mu} - ae^{i\mu} + 1 = 0 \quad (4.17)$$

Utilizando as relações:

$$e^{i\mu} = \cos \mu + i \operatorname{sen} \mu, \quad e^{-i\mu} = \cos \mu - i \operatorname{sen} \mu$$

e substituindo nas expressões (4.16) e (4.17) e em seguida tomando a diferença entre ambas, ter-se-á:

$$\cos \mu = a/2$$

$$\text{ou ainda} \quad \cos \mu = 1 + q'/2q - \Omega^{*2} / 2 \quad (4.18)$$

A expressão acima é a equação das constantes de propagação. A expressão (4.18) mostra que se  $\mu$  é uma constante de propagação,  $-\mu$  também o é. Isto significa que o sistema, devido à simetria, permite propagações livres em duas direções, com a mesma velocidade de fase.

### 4.3. VARIAÇÃO DA CONSTANTE DE PROPAGAÇÃO COM A FREQUÊNCIA

#### 4.3.1. DISCUSSÃO DA EQUAÇÃO (4.18)

O lado direito da equação (4.18) é necessariamente um número real, para qualquer valor da frequência. Mas, para que  $\mu$  seja real, e conseqüentemente para que haja propagação, o segundo membro de (4.18) deverá estar compreendido no intervalo aberto  $(-1,+1)$ , isto é:

$$-1 < 1 + \frac{q'}{2q} - \Omega^{*2}/2 < 1 \quad (4.19)$$

assim, para que haja propagação tem-se de (4.19):

$$\Omega_1^* = \sqrt{q'/q} < \Omega^* < \sqrt{4 + q'/q} = \Omega_2^* \quad (4.20)$$

qualquer que seja o valor de  $\Omega^*$  no intervalo (4.20), corresponderá a valores de  $\mu$  reais. Este intervalo (4.20) define pois, uma

banda de frequências propagantes. Para  $\Omega^* \notin [\Omega_1^*, \Omega_2^*]$  o segundo membro de (4.18) terá valor absoluto maior do que 1, conseqüentemente  $\mu$  será complexo. Assim, tem-se

$$\mu = \mu_r + i\mu_i \quad (4.21)$$

onde  $\mu_r$  é a parte real de  $\mu$  e  $\mu_i$  a parte imaginária. Assim,

$$\cos \mu = \cos (\mu_r + i\mu_i) = \cos \mu_r \cos i\mu_i - \operatorname{sen} \mu_r \operatorname{sen} i\mu_i$$

ou seja

$$\cos \mu = \cos \mu_r \cosh \mu_i - i \operatorname{sen} \mu_r \operatorname{senh} \mu_i \quad (4.22)$$

Como foi dito anteriormente o segundo membro de (4.18) é sempre real, conseqüentemente a parte imaginária de (4.22) deverá ser nula.

$$\operatorname{sen} \mu_r \operatorname{senh} \mu_i = 0 \quad (4.23)$$



Para que (4.23) seja satisfeita, deve-se ter uma das seguintes situações:

$$a) \mu_z = 0 \text{ e } \mu_r \text{ é qualquer real} \quad (4.24)$$

b)  $\mu_r = \pm n\pi$ ,  $n$  inteiro positivo e  $\mu_z$  qualquer real.

Examine-se agora a situação b em (4.24), ou seja, os valores de  $\mu_r$  fora do intervalo (4.20).

De (4.22) tira-se:

$$\cos \mu = \cos \mu_r \cosh \mu_z = 1 + \frac{q'}{2q} - \frac{\Omega^{*2}}{2} \quad (4.25)$$

Considere-se primeiro o intervalo fechado à esquerda e aberto à direita.

$$\Omega^* \in \left[0, \sqrt{\frac{q'}{q}}\right) \quad (4.26)$$

Para  $\Omega^*$  neste intervalo, o terceiro membro de (4.25) torna-se positivo, o que elimina a possibilidade de  $\mu_r$  ser  $\pm n\pi$ , com  $n$  ímpar. Assim, de acordo com (4.26)  $\mu_r$  deverá necessariamente ser igual a  $n\pi$ , com  $n$  par, isto é;  $\mu_r = 0$ ,  $\mu_r = \pm 2\pi$ ,  $\mu_r = \pm 4\pi$ , etc...

Assim, a equação (4.25), para  $\Omega^*$  no intervalo (4.26) terá a seguinte forma:

$$\cosh \mu_i = 1 + \frac{q'}{2q} - \frac{\Omega^{*2}}{2}, \quad \mu_i = \pm n\pi, \quad n \text{ par} \quad (4.27)$$

Portanto, qualquer que seja o valor de  $\Omega^*$  no intervalo (4.26), ter-se-ã dois valores para  $\mu_i$ , diferentes de zero.

Assim sendo, de (4.11) tira-se

$$\psi_{N+1} = \psi_N e^{-i(\pm n\pi + i\mu_i)} = \psi_N e^{i\pm n\pi} e^{\mu_i} = \psi_N e^{\mu_i},$$

jã que  $n$  é par. Deve-se lembrar que existem dois valores de  $\mu_i$ , um positivo e um negativo, correspondendo, respectivamente, a ondas propagando-se para a esquerda e para a direita.

Na realidade, não existe propagação. O que ocorre, é uma atenuação do movimento na direção respectiva, sem mudança de fase.

Seja agora o intervalo aberto:

$$\Omega^* \in \left( \sqrt{4 + \frac{q'}{q}}, \infty \right) \quad (4.28)$$

Para  $\Omega^*$  neste intervalo, o terceiro membro de (4.25) torna-se negativo. Assim, de acordo com (4.24)  $\mu_r$  deverá necessariamente ser igual a  $\pm n\pi$ , ou seja,  $\mu_r = \pm n\pi$ , com  $n$  ímpar. A equação (4.25) para  $\Omega^*$  no intervalo (4.28), terá pois a seguinte forma:

$$\cosh \mu_i = \frac{\Omega^{*2}}{2} - 1 - \frac{q'}{2q}, \quad \mu_r = \pm n\pi, \quad n \text{ ímpar} \quad (4.29)$$

então, qualquer que seja o valor de  $\Omega^*$  no intervalo (4.28), ter-se-ã dois valores para  $\mu_i$ .

Aqui, como no caso anterior, não se tem "propagação", mas atenuação. A única diferença é que, nos extremos de cada período estrutural tem-se uma diferença de fase de  $180^\circ$ . Nos extremos do intervalo (4.20), tem-se:

a) para  $\Omega^* = \sqrt{q'/q}$ ,  $\cos \mu = 1$ , ou seja,  $\mu_r = 2n\pi$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

b) para  $\Omega^* = \sqrt{4 + (q'/q)}$ ,  $\cos \mu = -1$ , ou seja,  $\mu_r = n\pi$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Em ambos os casos  $\mu_i = 0$

Nos casos a e b acima não existe propagação de onda, mas também não existe atenuação ( $\mu_i = 0$ )

De fato para estas duas frequências tem-se ondas estacionárias na estrutura infinita.

4.3.2. GRÁFICO DE VARIAÇÃO DE  $\mu_r$  E  $\mu_i$  COM A FREQUÊN  
CIA

A discussão acima pode ser sintetizada na figura 4.4. Para frequências  $\Omega^*$  entre  $\Omega_1^*$  e  $\Omega_2^*$  a estrutura propaga e energia. Fora do intervalo  $\Omega_1^* < \Omega^* < \Omega_2^*$  a estrutura atenua o movimento, mesmo que não haja amortecimento. Essa estrutura tem, portanto, uma banda propagante e duas não propagantes.

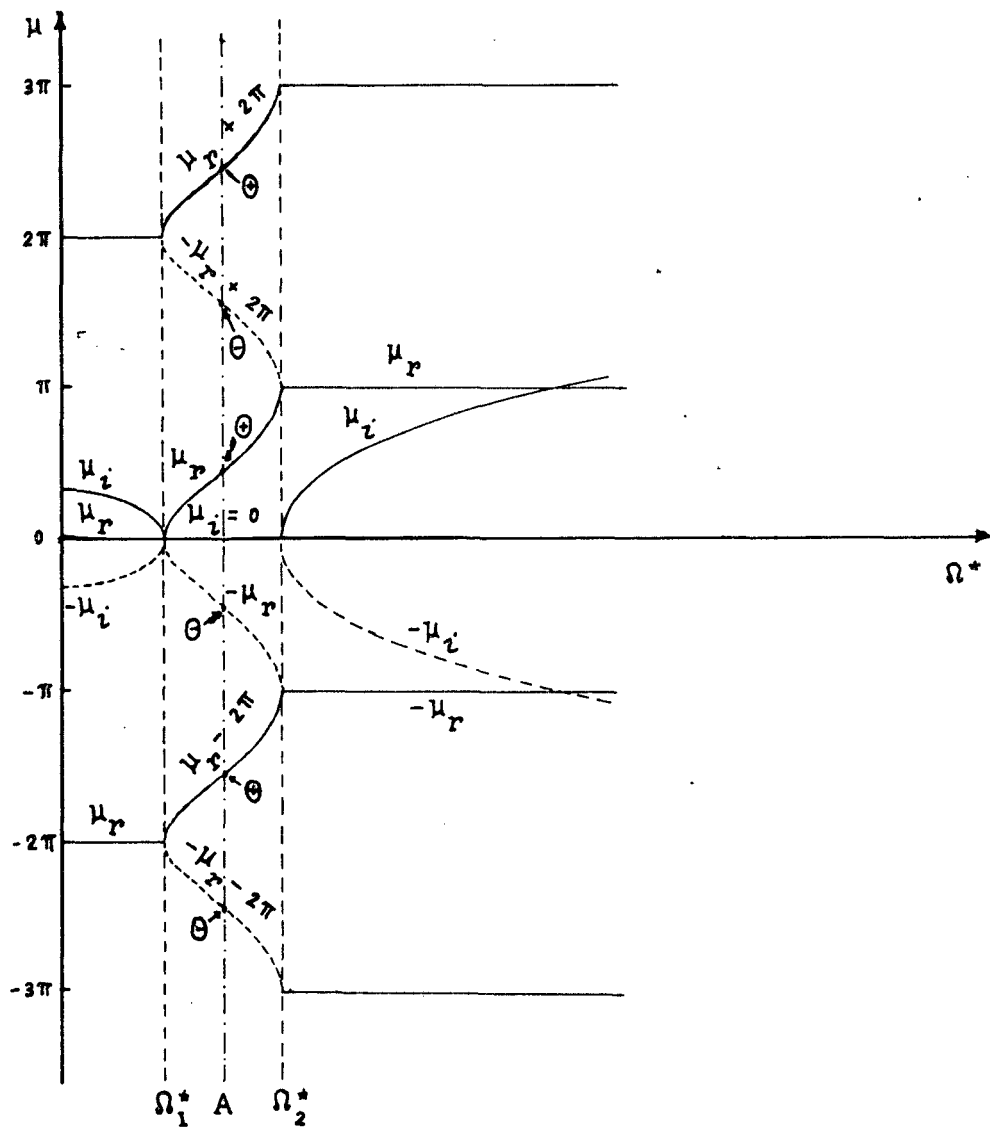


Figura 4.4 - Variação das constantes de propagação  $\mu_r$  e  $\mu_i$  com a frequência.

Se o período estrutural tivesse mais de um grau de liberdade, ter-se-ia, correspondentemente, mais de uma banda propagante, [6].

Mais adiante (capítulo VII) será estudada uma estrutura em que os períodos têm infinitos graus de liberdade. Neste caso, tem-se teoricamente infinitas bandas de propagação.

Da figura 4.4 pode-se ver que  $\mu$  é, em geral, um número complexo. A parte real de  $\mu$  representa a diferença de fase entre os extremos de cada período estrutural. A parte imaginária de  $\mu$  representa a taxa de decaimento exponencial da onda propagando-se de uma massa a outra.

$\mu$  depende dos parâmetros  $q'$ ,  $q$  e  $\Omega^*$ ; portanto, pode-se escrever:

$$\mu = \mu(q', q, \Omega^*) \quad (4.30)$$

Com base na discussão do item 4.3.1, sintetizada na figura 4.4, vê-se que para cada frequência existe um número infinito de constantes de propagação.

Isto se deve, como já foi visto, ao fato de que o cosseno (4.18) é uma função periódica de período  $2\pi$ . Por outro lado, se  $\mu$  é uma constante de propagação, então  $-\mu$  também o será:

Assim, se  $\mu_r + i\mu_i$  for o valor principal de  $\mu$ , então  $-\mu_r - i\mu_i$  será o valor principal de  $-\mu$ . Tem-se portanto, dois tipos de constantes de propagação, descritos abaixo:

$$\mu_r + i\mu_i + 2n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.31)$$

$$-\mu_r - i\mu_i + 2n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.32)$$

As expressões acima são absolutamente gerais e se aplicam a qualquer banda, propagante ou não.

No caso particular de uma banda propagante ( $\Omega_1^* < \Omega^* < \Omega_2^*$ ),  $\mu_i = 0$  e as expressões acima ficam:

$$\mu_r + 2n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$-\mu_r + 2n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Na figura 4.4 uma reta paralela ao eixo dos  $\mu$ , passando pelo ponto A  $\in (\Omega_1^*, \Omega_2^*)$  corta as curvas em pontos de derivadas iguais positivas (+) e outros pontos de derivadas iguais negativas (-) (considerando-se  $\Omega^*$  como eixo das ordenadas e  $\mu$  como eixo das abcissas).

As derivadas positivas  $d\Omega^*/d\mu$ , representam a velocidade adimensional de um grupo de ondas dirigindo-se para a direção positiva do sistema. As derivadas negativas representam a velocidade de outro grupo propagando-se na direção negativa.

#### 4.4. EXISTÊNCIA DE GRUPOS DE ONDAS

##### 4.4.1. VELOCIDADE DE FASE

No capítulo II viu-se as seguintes relações:

$$K = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad c = \lambda f \quad (2.18)$$

onde  $K$  é o número de ondas,  $f$  a frequência em Hz,  $c$  a velocidade de fase e  $\mu$  é relacionado com  $\mu$  por

$$\mu = 2\pi KL \quad (4.33)$$

Levando (4.33) em (2.16) tem-se:

$$c = \frac{2\pi L f}{\mu} \quad (4.34)$$

De (4.14), tem-se:

$$\Omega = \Omega^* \sqrt{q/M}$$

mas  $\Omega = 2\pi f$ . Assim,

$$f = \Omega^*/2\pi \sqrt{q/M} \quad (4.35)$$

Substituindo (4.35) em (4.34), tem-se:

$$c = \frac{\Omega^* L}{\mu} \sqrt{\frac{q}{M}} = \frac{\Omega^* \lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{q}{M}} \quad (4.36)$$

onde  $c$  representa a velocidade de fase, ou seja, a velocidade com que ondas livres se propagam. Vê-se claramente da (4.36) que  $c$  depende da frequência, ou seja, o sistema é dispersivo. Ainda pode-se definir uma velocidade de fase dimensional

$$c^* = \frac{c}{L} \sqrt{\frac{M}{q}} = \frac{\Omega^*}{\mu} \quad (4.37)$$

onde  $c^*$  é a velocidade de fase adimensional.

As respectivas velocidades de fase de cada grupo são:

$$c_+^* = \frac{\Omega^*}{\mu_r + n2\pi}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (4.38)$$

$$c_-^* = \frac{\Omega^*}{-\mu_r + n2\pi}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (4.39)$$

Para se ver mais claramente que  $d\Omega^*/d\mu$  representa uma velocidade adimensional de grupo, pode-se fazer referência à expressão (2.4.1), onde a velocidade de grupo é definida como:

$$c_g = df/dK, \quad \text{onde } K \text{ é o número de ondas.}$$

Como  $f = (\Omega^*/2\pi) \sqrt{q/M}$  e  $\mu = 2\pi KL$ , tem-se:

$$c_g = df/dK = d\Omega^*/d\mu \cdot L \sqrt{q/M}$$

definindo

$$c_g^* = \frac{c_g L}{L} \sqrt{\frac{M}{q}} \quad (4.40)$$



e usando a expressão anterior chega-se a

$$c_g^* = d\Omega^*/d\omega \quad (4.41)$$

As velocidades de fase (4.38) e (4.39) podem ser graficamente representadas conforme a figura 4.5. A figura 4.6 ajudará na interpretação da figura 4.5. As curvas tracejadas representam as velocidades de fase dos grupos negativos e as curvas contínuas as velocidades de fase dos grupos positivos. As velocidades de fase variam de zero a infinito. (ver figura 4.5).

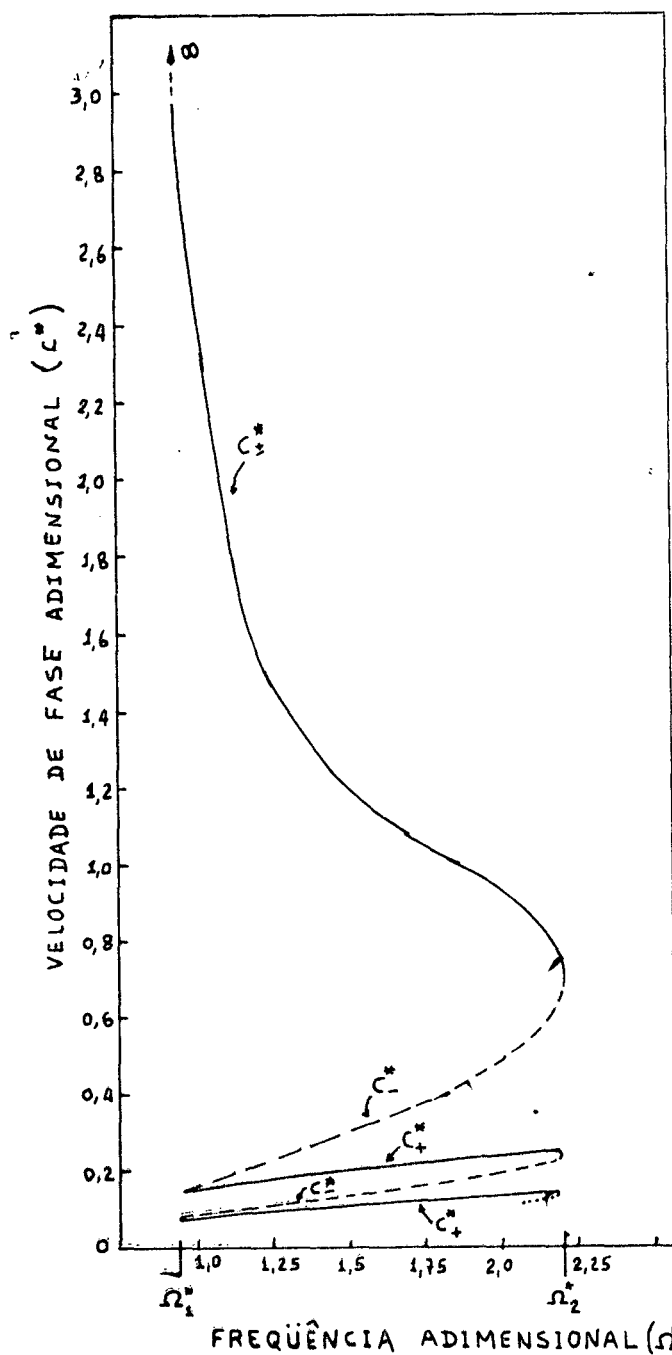


Figura 4.5 - Velocidade de fase de cada grupo.

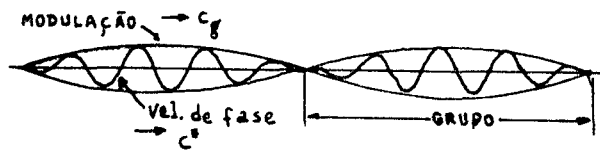


Figura 4,6 - Representação da velocidade de fase e velocidade de grupo.

O vetor de estação na  $N$ -ésima massa devido ao grupo positivo será:

$$\{z\}_{N^+}^R = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \epsilon \{A\}_N e^{i2\pi(ft - \frac{\mu_r + 2n\pi}{2\pi} N)} \quad (4.42)$$

e devido ao grupo negativo será:

$$\{z\}_{N^-}^R = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \epsilon \{B\}_N e^{i2\pi(ft + \frac{\mu_r + 2n\pi}{2\pi} N)} \quad (4.43)$$

Evidentemente o vetor da estação global na  $N$ -ésima massa será a soma de (4.42) e (4.43).

## C A P Í T U L O V

## RESPOSTA DE SISTEMAS PERIÓDICOS

5. INTRODUÇÃO

Neste capítulo será abordado a resposta de sistemas periódicos sob ação de forças.

As derivações aqui apresentadas são bastantes gerais, e representam uma variante daquela apresentada por ESPÍNDOLA [13]. Embora ilustrada com exemplos discretos simples, as derivações aplicam-se igualmente a sistemas contínuos periódicos.

5.1. FORMULAÇÃO DA RESPOSTA

Suponha-se que uma onda propaga-se ao longo de uma estrutura periódica.

Uma quantidade (por exemplo, um deslocamento) na  $n$ -ésima estação será representada por

$$z(nL, t) = z(nL) e^{i2\pi(ft - KnL)} = \bar{z}(nL) e^{i2\pi ft} \quad (5.1)$$

onde  $z(nL)$  é a amplitude na enésima estação e  $\bar{z}(nL) = z(nL)e^{-in\mu}$ , onde  $\mu = 2\pi KL$ .

Na expressão (5.1)  $\bar{z}(nL)$  representa uma amplitude complexa à direita (por exemplo) da enésima estação. Se se considerar todas as grandezas envolvidas em cada estação, ter-se-á:

$$\{z(nL, t)\} = \{z(nL)\}e^{i2\pi f(t - KnL)} = \{\bar{z}(nL)\}e^{i2\pi ft} \quad (5.2)$$

e

$$\{\bar{z}(nL)\} = \{z(nL)\}e^{-in\mu} \quad (5.3)$$

O problema de propagação livre é formulado de tal sorte que

$$\{\bar{z}(nL)\} = \{\bar{z}(0)\}e^{-in\mu} \quad (5.4)$$

onde  $\{\bar{z}(0)\}$  é um vetor considerado numa estação de referência.

Como fase é uma grandeza relativa, pode-se, sem perda de generalidade, e observando (5.3) e (5.4), fazer

$$\{\bar{z}(0)\} = \{z(nL)\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.5)$$

A expressão (5.5) quer dizer que, havendo propagação ao longo de uma parte não excitada da estrutura, as amplitudes nas estações não variam em módulo, apenas em fase.

Suponha-se que  $[T]$  seja a matriz de transferência de período. Então, como se viu no capítulo IV, (5.5) é de fato autovetores do problema de autovalores:

$$[T] \{\bar{z}(0)\} = e^{-i\mu} \{\bar{z}(0)\} \quad (5.6)$$

Suponha-se agora que o sistema em tela tenha  $M$  graus terminais de liberdade |14|.

Isto implica em que a matriz  $[T]$  será de ordem  $2M$ , bem como os autovetores.

A ortogonalidade dos autovetores |15| permite garantir que qualquer vetor  $\{\bar{z}(nL)\}$  de ordem  $2M$  pode ser escrito como uma combinação linear dos mesmos:

$$\{\bar{z}(nL)\} = \sum_{j=1}^{2M} c_j \{\bar{z}(0)\}_j e^{-in\mu_j} \quad (5.7)$$

Note-se que  $\{\bar{z}(0)\}_j$ ,  $j = 1, 2M$  são os autovetores à direita de  $[T]$ .

Sejam  $\{z(0)\}_j^L$  os autovetores à esquerda de  $[T]$  e suponha-se que  $\{\bar{z}(0)\}_j$  e  $\{z(0)\}_j^L$  sejam normalizados de tal sorte que

$$\{\bar{z}(0)\}_j^T \{z(0)\}_k^L = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, \dots, 2M \quad (5.8)$$

onde  $\delta_{jk}$  é o delta de Kronecker.

Pré-multiplicando (5.7) por  $\{\bar{z}(0)\}_k^L$  e levando em conta (5.8), obtém-se:

$$\{\bar{z}(0)\}_k^L \{z(nL)\} = C_k \{z(0)\}_k e^{-in\mu_k}, \quad k = 1, 2, \dots, 2M \quad (5.9)$$

As expressões (5.9) permitem determinar  $C_k$  e justificam a expressão (5.7).

Suponha-se agora que a estação  $n = 0$  seja carregada por forças conhecidas e suponha-se também que  $\{z(nL)\}$  seja considerado à direita de cada estação.

Então,  $\{\bar{z}(0L)\}$  conterá todos os deslocamentos da estação zero (desconhecidos), todas as forças (e momentos) à direita da estação zero, bem como todas as forças aplicadas.

O exemplo que se verá abaixo ilustrará essas idéias.

Fazendo pois  $n = 0$  em (5.7), ter-se-á um sistema de  $2M$  equações lineares com  $2M$  incógnitas  $C_j$  mais  $M$  deslocamentos e  $M$  forças elásticas. Um total de  $2 \times (2M)$  incógnitas.

As condições de contorno (duas) introduzem (cada uma)  $M$  incógnitas e  $2M$  equações.

Ter-se-á um total de  $6M$  equações com  $6M$  incógnitas.

## 5.2. EXEMPLO ILUSTRATIVO

A seguir a teoria acima será ilustrada para o sistema da figura 5.1, que contém  $N$  períodos.

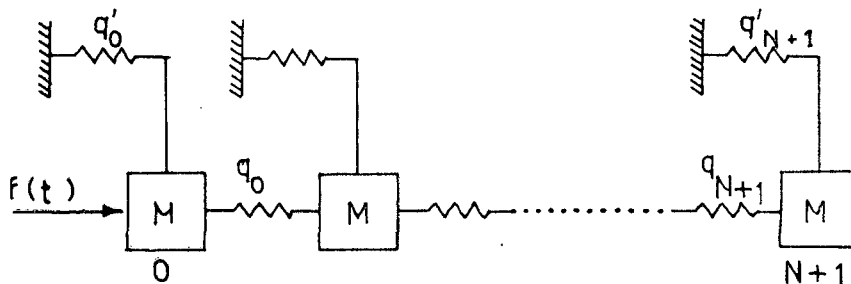


Figura 5.1 - Sistema mecânico discreto com  $N$  períodos.

Admite-se que a excitação ocorre na massa da extrema esquerda e que varia harmonicamente com o tempo, isto é,  $f(t) = Fe^{i\Omega t}$ . O vetor de estação à direita de "0" será:

$$\{\bar{z}(0L)\} = \begin{Bmatrix} x \\ N \end{Bmatrix}_0^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q' - M\Omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ F \end{Bmatrix}_0^L = \begin{Bmatrix} x_0 \\ (q' - M\Omega^2)x_0 + F \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

Para o presente exemplo  $M = 1$ , isto é, o sistema tem apenas um grau terminal de liberdade, de sorte que (5.7) pode ser escrita:

$$\{\bar{z}(nL)\} = C_1 \{\bar{z}(0)\}_1 e^{-in\mu_1} + C_2 \{\bar{z}(0)\}_2 e^{-in\mu_2} \quad (5.11)$$

De (5.11) e (5.10), tem-se:

$$x_0 = C_1 z_{11} + C_2 z_{12} \quad (5.12)$$

$$(q' - M\Omega^2) x_0 + F = C_1 z_{21} + C_2 z_{22} \quad (5.13)$$

onde



$$\{\bar{z}(0)\}_1 = \begin{Bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \end{Bmatrix} \quad e \quad \{\bar{z}(0)\}_2 = \begin{Bmatrix} z_{12} \\ z_{22} \end{Bmatrix}$$

Por outro lado, aplicando (5.7) à direita da massa  $N + 1$ , tem-se:

$$x_{N+1} = C_1 z_{11} e^{-iN\mu_1} + C_2 z_{12} e^{-iN\mu_2} \quad (5.14)$$

$$0 = C_1 z_{21} e^{-iN\mu_1} + C_2 z_{22} e^{-iN\mu_2} \quad (5.15)$$

As equações de (5.12) a (5.15) contêm 4 incógnitas, isto é,  $2 \times (2 \times 1) = 4$  incógnitas.

Eliminando  $x_0$  e  $x_{N+1}$ , obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} z_{21} - (q' - M\Omega^2)z_{11} & z_{22} - (q' - M\Omega^2)z_{12} \\ z_{21}e^{-iN\mu_1} & z_{22}e^{-iN\mu_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(5.16)

com  $C_1$  e  $C_2$  determinados desta maneira a (5.7) pode ser aplicada.

Em geral, os  $\{\bar{z}(0)\}$  devem ser determinados usando-se uma subrotina para o problema (5.6).

No caso presente, entretanto, os autovetores podem ser determinados a mão, e valem:

$$\{\bar{z}(0)\} = \left\{ \begin{array}{l} 1 - e^{-i\mu} + \frac{q'}{q} - \Omega^{*2} \\ - q \left( \frac{q'}{q} - \Omega^{*2} \right) \end{array} \right\} \quad (5.17)$$

Note-se que quando  $\Omega^{*2} = \Omega_1^{*2} = \frac{q'}{q}$ ,  $\mu = \pm 2n\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  neste caso  $\{\bar{z}(0)\}$  dado por (5.17) é nulo. Como  $F \neq 0$ , a (5.16) indica  $C_1$  e  $C_2$  infinitos, o que denota uma ressonância.

De fato, quando  $\Omega^* = \Omega_1^*$  todas as massas movimentam-se em fase ( $\mu = \pm 2n\pi$ ) com frequência

$$\Omega_1^{*2} = \frac{q'}{q} = M\Omega^2/q,$$

ou seja, com frequência

$$\Omega^2 = \frac{q'}{M} \quad (5.18)$$

Isto significa que, no início da primeira banda propagante os modos que interligam as massas não sofrem variação em seu comprimento; a estrutura se movimenta como um todo com a frequência

$$\Omega^2 = \frac{Nq'}{NM} = \frac{q'}{M}$$

Nesta frequência, como se viu, tem-se ondas estacionárias.

Quando  $\Omega^{*2} = \Omega_{\frac{1}{2}}^2 = 4 + \frac{q'}{q}$  a matriz do sistema (5.16) torna-se singular e, como  $F \neq 0$  deduz-se que  $C_1$  e  $C_2$  são infinitos. Como neste caso  $\mu = \pm n\pi$ ,  $n = 1, 3, 5, \dots$ , deduz-se que as massas movimentam-se com oposição de fase. De fato, um simples cálculo mostra que a frequência neste caso é:

$$\Omega^2 = \frac{4q + q'}{M} \quad (5.19)$$

Aqui também tem-se ondas estacionárias.

As frequências (5.18) e (5.19) são respectivamente, a mais baixa e a mais alta do sistema.

O que se viu anteriormente pode ser generalizado: as frequências naturais são tais que fazem a matriz do sistema (5.16)

singular, isto é, ter determinante nulo.

Este fato permite estabelecer uma equação de frequências.

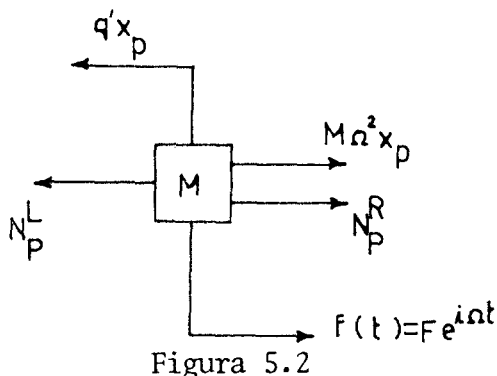
Outra maneira de determinar-se as frequências naturais é fazendo-se  $\Omega$  variar de pequenos incrementos e determinar os picos de (5.7).

Neste caso, para excitar amplitudes infinitas, deve-se supor um pequeno amortecimento no sistema. Este método é comumente usado para sistemas complexos.

Resultados numéricos foram obtidos para um sistema que pode ser modelado de acordo com a figura 5.1. Um modelo experimental foi também construído para testar a teoria.

Estes resultados numéricos e experimentais serão discutidos no capítulo VI.

Suponha-se agora que a força atue numa estação intermediária, P períodos à direita da última à esquerda e Q períodos à esquerda da última à direita (figura 5.2).



O vetor à direita dessa estação será:

$$\begin{Bmatrix} x \\ N \end{Bmatrix}_P^R = \begin{Bmatrix} x_P \\ (q' - M\Omega^2)x_P + N_P^L - F \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

Aplicando-se (5.7) à direita da primeira estação,

tem-se

$$x_{-p} = C_1 z_{11} e^{iP\mu_1} + C_2 z_{12} e^{iP\mu_2} \quad (5.21)$$

$$(q' - M\Omega^2)x_{-p} = C_1 z_{21} e^{iP\mu_1} + C_2 z_{22} e^{iP\mu_2} \quad (5.22)$$

Aplicando-se (5.7) à direita do p-ésimo período:

$$x_p = C_1 z_{11} + C_2 z_{12} \quad (5.23)$$

$$(q' - M\Omega^2)x_p + N_p^L - F = C_1 z_{21} + C_2 z_{22} \quad (5.24)$$

Aplicando (5.7) à direita da última estação:

$$x_{P+Q} = C_1 z_{11} e^{-i(P+Q)\mu_1} + C_2 z_{12} e^{-i(P+Q)\mu_2} \quad (5.25)$$

$$0 = C_1 z_{21} e^{-i(P+Q)\mu_1} + C_2 z_{22} e^{-i(P+Q)\mu_2} \quad (5.26)$$

As equações (5.21) a (5.26) contêm 6 incógnitas:  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $x_{-P}$ ,  $x_P$ ,  $N_P^L$ ,  $x_{P+Q}$ , que podem ser determinadas.

A expressão (5.7) pode agora ser usada para determinar os vetores nas demais estações.

## C A P Í T U L O VI

## RESULTADOS EXPERIMENTAIS DA RESPOSTA DE SISTEMAS DISCRETOS

6. INTRODUÇÃO

Este capítulo descreve um experimento visando comparar seus resultados com aqueles obtidos numericamente, usando-se a teoria do capítulo V.

6.1. O MODELO EXPERIMENTAL

A figura 6.1 representa o modelo experimental discreto e periódico, representativo daquele esquematizado na figura 4.1. Fixaram-se massas nas extremidades livres de vigas em balanço com comprimento  $L$  e rigidez  $q'$ , ligadas entre si por molas circulares com diâmetro  $D$  e rigidez  $q$ . Para garantir a periodicidade do sistema, ajustou-se as vigas em balanço de modo a terem a mesma frequência natural. Construiu-se o modelo com molas de aço e massas de alumínio com as seguintes características:

Diâmetro interno da mola circular (D) .....	90 mm
Comprimento da viga em balanço (L) .....	180 mm
Massa de Alumínio (M) .....	0,211 Kg
Massa da viga em balanço (m) .....	0,0986 Kg
Comprimento do período ( $T$ ) .....	133 mm

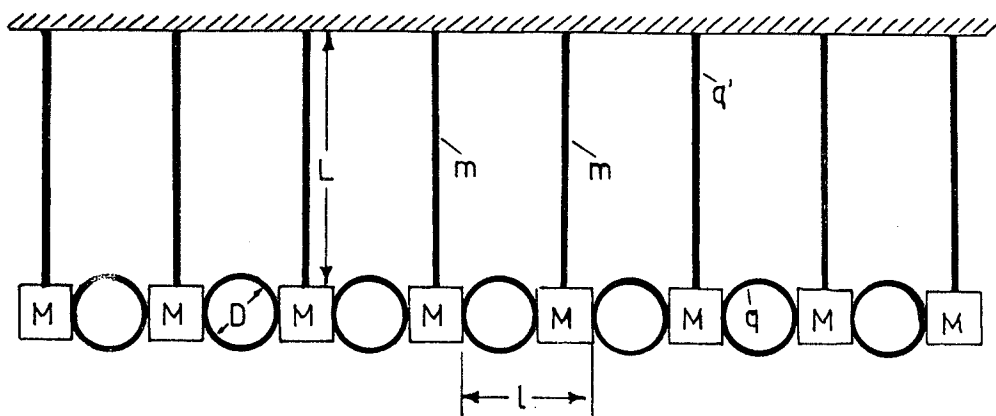


Figura 6.1 - Modelo experimental discreto e periódico.  
(Ver anexo I).

## 6.2. MEDIÇÃO DAS RIGIDEZES DAS MOLAS

As rigidezes,  $q$  e  $q'$ , foram medidas experimentalmente, conforme método esquematizado pela figura 6.2.

Aplicou-se uma força de intensidade conhecida na extremidade livre da viga em balanço (ver figura 6.2a) ligada a um transdutor de deslocamento o qual registrou o deslocamento num medidor de deformações. Repetiu-se o processo para várias forças. Utiliza-se o mesmo método para a mola circular (ver figura 6.2b).

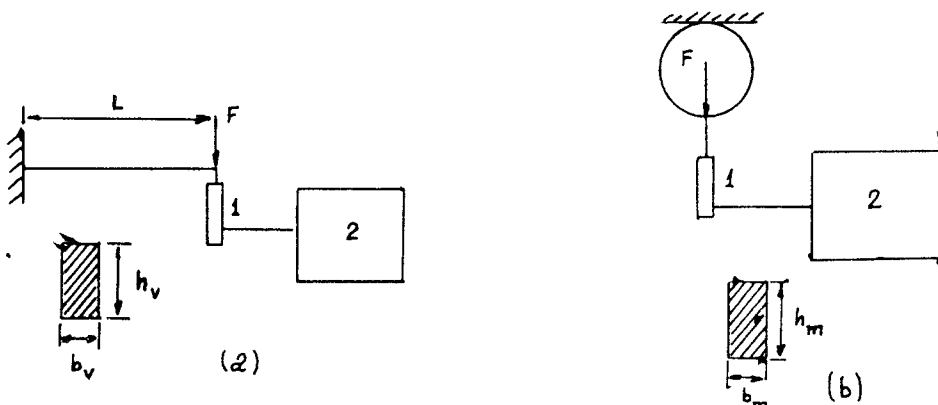


Figura 6.2 - (F) Força conhecida. (1) Transdutor de deslocamento IWT 301 VEB. (2) Medidor de deformações D3 VEB. Comprimento da viga,  $L = 180$  mm. Altura da viga,  $h_v = 3,2$  mm. Largura da viga,  $b_v = 22$  mm. Diâmetro do anel,  $D = 45$  mm. Altura da chapa da mola circular,  $h_m = 0,4$  mm. Largura da chapa da mola circular  $b_m = 30$  mm.



Os valores medidos foram plotados na figura 6.3. As curvas foram ajustadas utilizando o método estatístico da regressão linear.

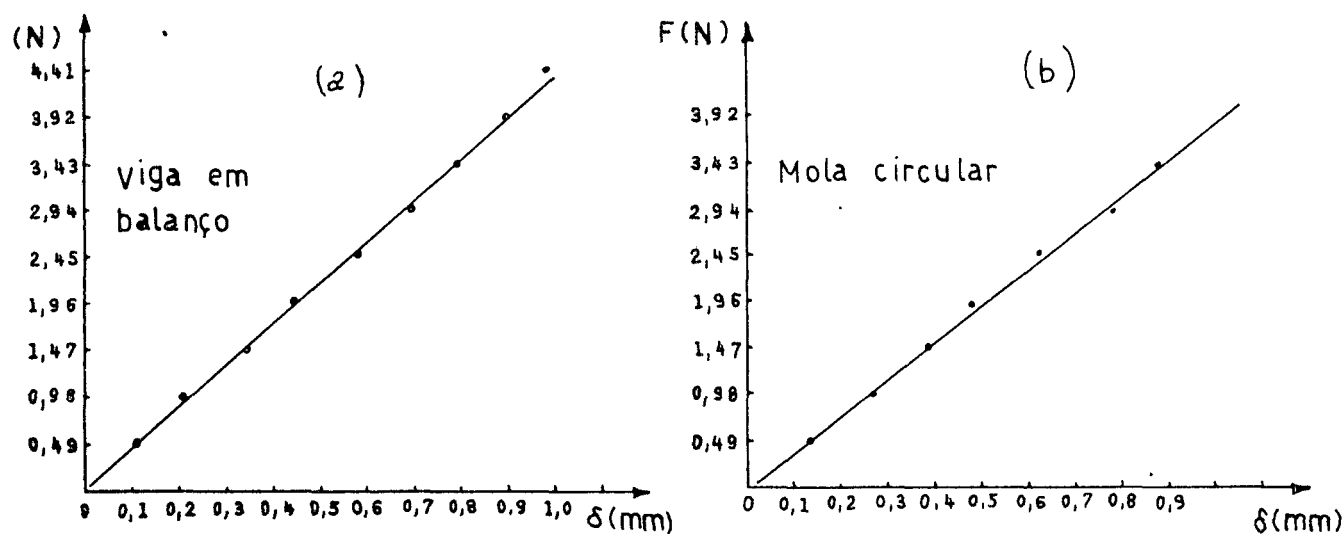


Figura 6.3 - A curva (a) representa a deformação da viga em balanço. A curva (b) representa a deformação da mola circular.

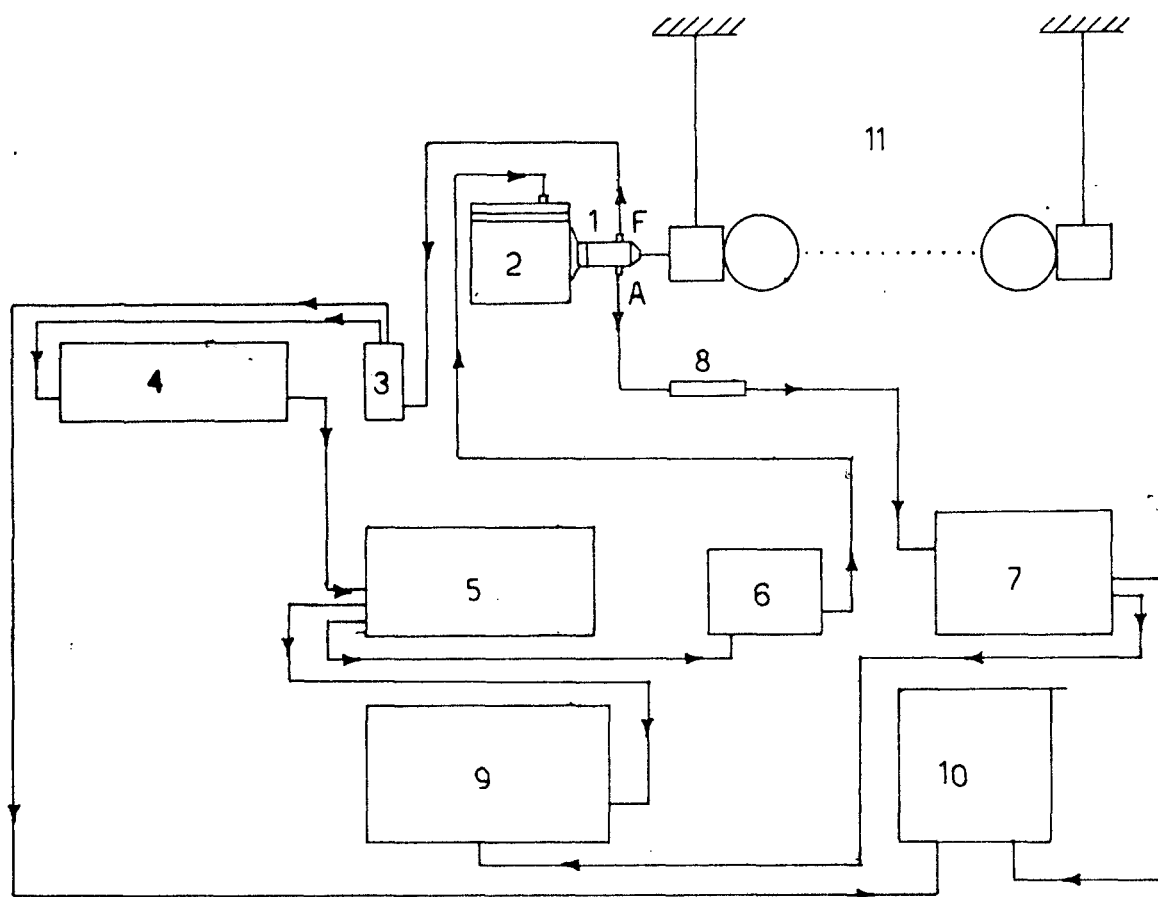
Da figura 6.3 pode-se concluir:

$$q = 4361 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \text{e} \quad q' = 3837 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

### 6.3. SISTEMA DE MEDIÇÕES DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

A figura 6.4 representa o sistema de medições do modelo experimental, que pode ser descrito da seguinte forma: do gerador o sinal (senóide pura) foi amplificado e enviado ao excitador de vibrações. O sinal de excitação foi captado na cabeça de impedância colocada entre o excitador e o sistema (ver figura 6.4).

A cabeça de impedância fornece dois sinais: força e aceleração. O sinal da força é amplificado e em seguida comprimido no gerador tornando-se constante com a frequência. A variação do sinal com a frequência é feita pela sincronização mecânica do registrador de nível com o gerador. O sinal da aceleração foi gravado no registrador de nível via pré-amplificador e analisador de frequência.



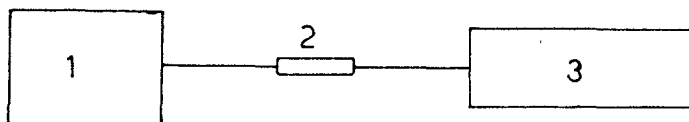
1 - Cabeça de Impedância	TIPO	8001	B & K
2 - Excitador de Vibrações	TIPO	4809	B & K
3 - Amplificador de Carga	TIPO	2626	B & K
4 - Amplificador de Medições	TIPO	2807	B & K
5 - Gerador	TIPO	1027	B & K

6 - Amplificador de Potência	TIPO	2706	B & K
7 - Analisador de Frequência	TIPO	2120	B & K
8 - Prê-Amplificador de Micro fones	TIPO	2619	B & K
9 - Registrador de Nível	TIPO	2305	B & K
10 - Osciloscópio	TIPO	H2V13A	H B M
11 - Modelo Experimental			

Figura 6.4 - Sistema de medição do modelo experimental (ver anexo D).

#### 6.4. CALIBRAÇÃO

A calibração correspondente à aceleração foi feita pelo método comparativo. Excita-se o modelo experimental e faz-se a leitura da amplitude no analisador de frequência; o valor lido (em mV) é tomado como referência no registrador de nível. Para converter o sinal de referência de mV para  $m/s^2$  usa-se o calibrador de acelerômetros 4291 (ver figura 6.5).



1 - Calibrador de Acelerômetros	4291	B & K
2 - Prê-Amplificador de Microfones	2619	B & K
3 - Amplificador de Medições	2807	B & K

Figura 6.5

Ajustando-se o calibrador à massa do acelerômetro , este vibra com uma aceleração senoidal de amplitude igual a  $10 \text{ m/s}^2$ . Esta aceleração corresponde a uma amplitude (em mV) lida no amplificador de medições. A seguir tem-se os acelerômetros usados e suas calibrações.

a) Acelerômetro tipo 4366 nº 811717 que seria fixado na primeira massa. Para este acelerômetro usou-se o pré-amplificador de microfones nº840568.  
CALIBRAÇÃO:  $41,8 \text{ mV} = 10 \text{ m/s}^2$

b) Acelerômetro tipo 4366 nº 811720 que seria fixado na segunda massa. Para este acelerômetro usou-se o amplificador de microfones nº840567  
CALIBRAÇÃO:  $38,8 \text{ mV} = 10 \text{ m/s}^2$

A calibração correspondente ao fluxo da força, foi feita pelo método direto. Usou-se a cabeça de impedância tipo 8001 nº 831307 com sensibilidade de carga igual a  $325 \text{ pC/N}$ . Após o sistema ter sido ajustado a esta sensibilidade, escolheu-se uma força de amplitude igual a  $0,1 \text{ N}$ , que deveria ser mantida constante ao longo da faixa de frequências de interesse, pelo circuito de compressão.

#### 6.5. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Excitando-se o modelo experimental obteve-se curvas de resposta em frequência como as das figuras 6.6 e 6.9.

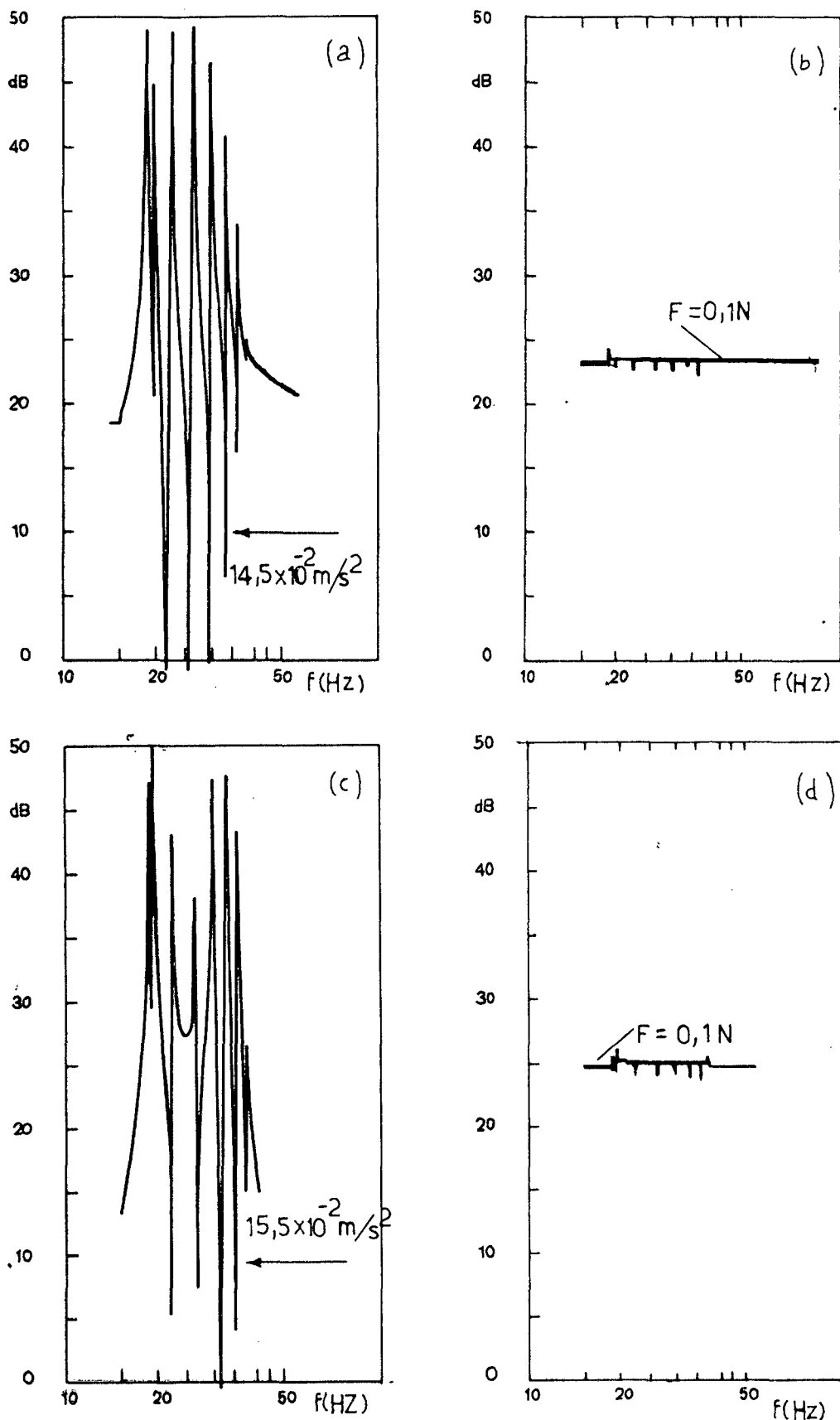
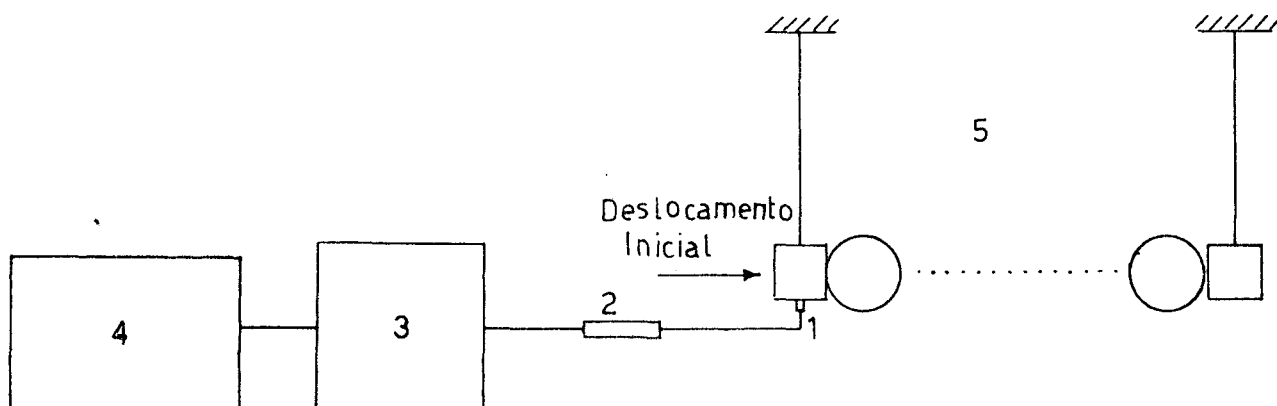


Figura 6.6 - As curvas (a) e (c) representam a resposta na primeira e segunda massa, respectivamente. As curvas (b) e (d) as forças aplicadas na primeira e segunda massa, respectivamente. Usou-se potenciômetro de 50 dB, Retificador RMS, limite inferior de frequência 2 Hz, Velocidade de escrita 4 mm/s e velocidade do papel 0,003 mm/s.

As curvas (a) e (c) da figura 6.6 representam a resposta em frequência, ou seja, o quociente da aceleração pela força. Nas estruturas com baixo fator de amortecimento este quociente tende a infinito nas ressonâncias, isto implica que a força aplicada tende a zero, tornando impossível ao circuito compressor mantê-la constante. Por esta razão, nota-se uma certa variação na força aplicada, nas frequências de ressonâncias das curvas (b) e (d) da figura 6.6.

Na verdade, o que interessa na prática são as frequências naturais, tendo em vista serem estas os pontos perigosos; mas com a finalidade de tornar mais adequada a comparação das amplitudes numéricas com as experimentais, introduz-se amortecimento no modelo experimental. Para isto colou-se fita adesiva de alumínio encruado ao longo do comprimento de cada viga.

Mediu-se o amortecimento pelo método do decaimento exponencial, representado pela figura 6.7.



1 - Acelerômetro	TIPO	4366	Nº	811714	B & K
2 - Pré-Amplificador de Micro- fones	TIPO	2619	Nº	840568	B & K
3 - Analisador de Frequência	TIPO	2120			B & K
4 - Registrador de Nível	TIPO	2305			B & K
5 - Sistema					

Figura 6.7 - Medição do amortecimento pelo método do decaimento exponencial.

Aplicando-se um certo deslocamento inicial ao sistema (figura 6.7), este vibra em seus vários modos. As vibrações são captadas por intermédio de um acelerômetro, localizado numa das massas; o sinal captado pelo acelerômetro é amplificado e analisado no analisador de frequência. Na análise escolheu-se  $f_0 = 23,3\text{Hz}$  como frequência central e o filtro com banda de 1%. O sinal é registrado no registrador de nível que fornece a curva de decaimento exponencial (ver figura 6.8).

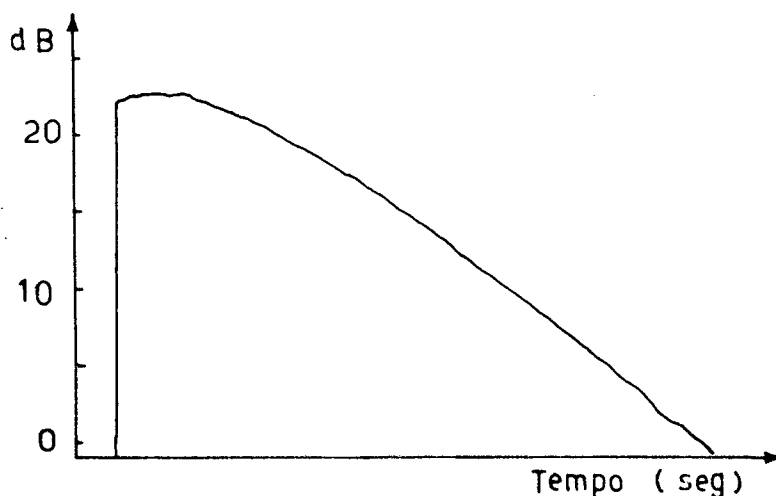


Figura 6.8 - Velocidade do papel 10 mm/s. Velocidade de escrita 100 mm/s. Retificador RMS. Potenciômetro 50 dB. Limite inferior de frequência 10 Hz.

Pode-se medir o fator de amortecimento da figura 6.8, pela expressão abaixo |16|.

$$\xi = \frac{1,1}{f_0 T_{60}} \quad (6.1)$$

onde  $f_0$  é a frequência central e  $T_{60}$  é o tempo necessário para a curva cair de 60 dB.

Aplicando-se os resultados da figura 6.8 na expressão (6.1), tem-se:

$$\xi = 0,0035$$

As curvas das figuras 6.9 e 6.10 representam a resposta experimental e numérica, respectivamente, referentes ao fator de amortecimento introduzido.



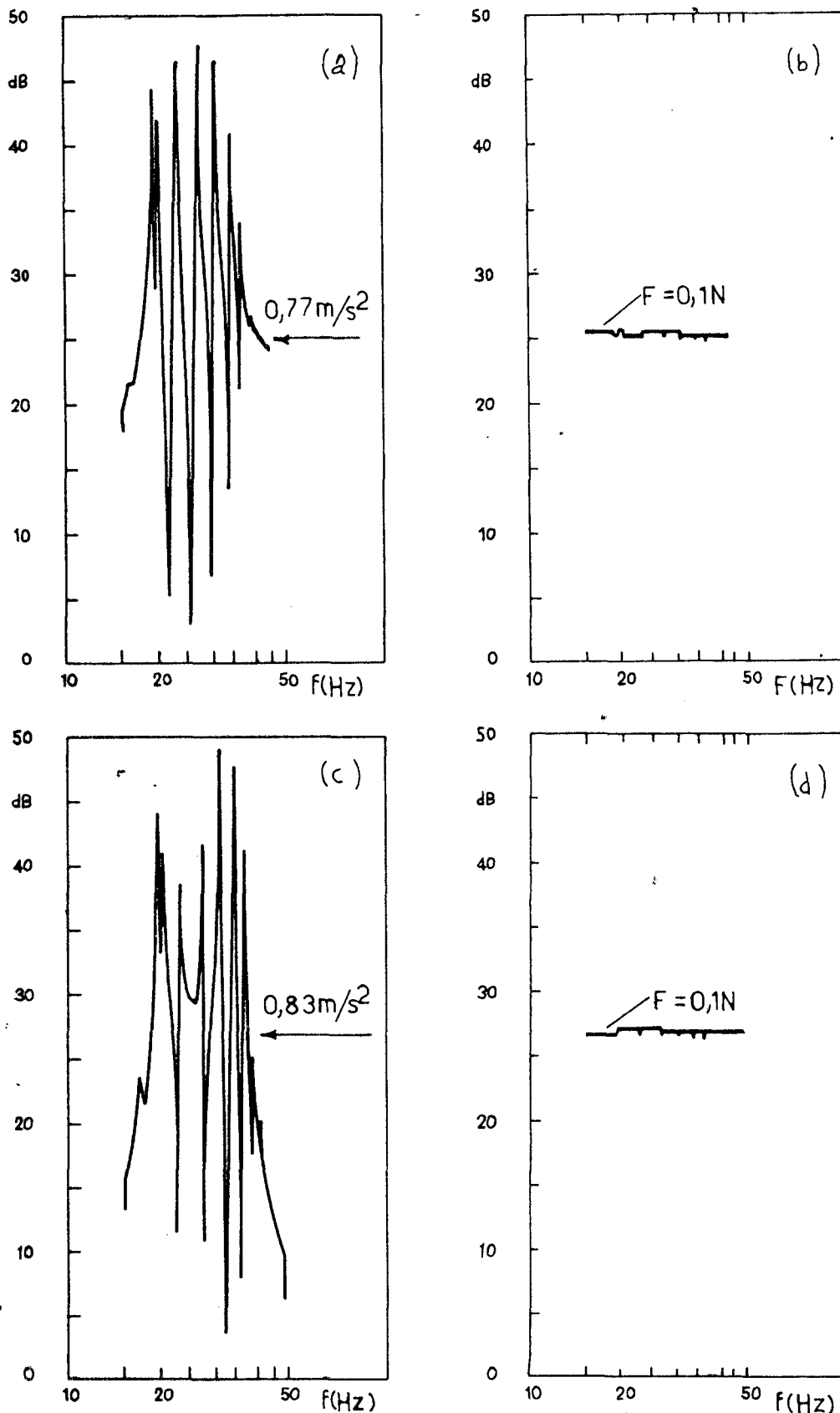


Figura 6.9 - As curvas (a) e (c) representam a resposta em frequência na primeira e segunda massa, respectivamente. As curvas (b) e (d) as forças aplicadas na primeira e segunda massa, respectivamente. Usa-se potenciômetro de 50 dB, Retificador RMS, limite inferior de frequência 2 Hz, velocidade de escrita 4 mm/s e velocidade do papel 0,003 mm/s.

Pode-se ver claramente a importância do fator de amortecimento, comparando-se as figuras 6.6 e 6.9. Nota-se uma atenuação bastante acentuada nos picos, e a força aplicada (figura 6.9 b e d) tende a um valor mais constante.

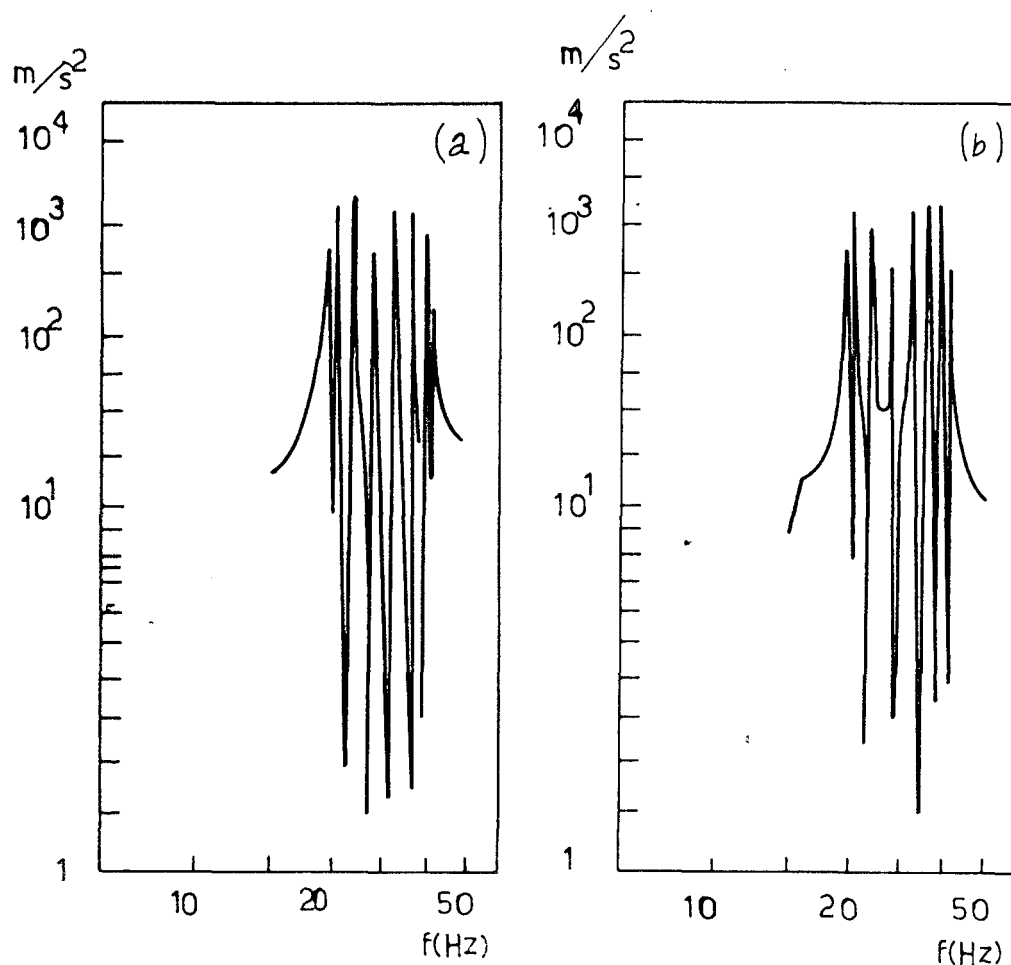


Figura 6.10 - As curvas (a) e (b) representam a resposta em freqüência na primeira e segunda massa, respectivamente, computadas com base na teoria do capítulo V.

Para comparar os resultados experimentais (figura 6.9) com os resultados numéricos (figura 6.10) registrou-se estes resultados nas tabelas 6.1 e 6.2.

Nota-se, portanto, que as freqüências naturais são aproximadamente iguais, garantindo assim o êxito dos resultados.

No entanto, as amplitudes (correspondentes às ressonâncias) divergem para a maioria dos picos. Pode-se, no entanto, melhorar estes resultados, desde que se aumente o fator de amortecimento.

Resultados Experimentais (figura 6.9)		
Amplitude (m/s <sup>2</sup> )		
Frequência (Hz)	1.a Massa	2.a Massa
19,50	72,69	58,40
21,40	54,51	43,80
24,40	91,52	32,84
28,40	102,68	46,39
33,80	91,52	103,86
36,80	49,71	92,57
39,30	22,21	43,80
41,10	9,69	6,94

Tabela 6.1

Resultados Numéricos (figura 6.10)		
Amplitude (m/s <sup>2</sup> )		
Frequência (Hz)	1.a Massa	2.a Massa
19,65	78,68	77,62
21,01	201,37	171,16
24,37	229,16	93,84
28,62	72,51	56,82
33,10	190,97	186,00
36,93	152,05	274,34
39,91	90,64	224,84
41,83	21,42	56,21

Tabela 6.2

Outra razão desta discrepância provém do sistema de medições.

Para que o circuito compressor do gerador tipo 1027 B&K funcione dentro da faixa de compressão, é necessário diminuir o máximo possível a velocidade do papel do Registrador de Nível tipo 2305 B&K. Esta velocidade está diretamente relacionada com a velocidade de escrita, isto é, quanto mais baixa a velocidade do papel, mais baixa será a velocidade de escrita da pena do registrador 2305 B&K. Desta forma, para velocidades de escrita muito baixa, aumenta-se o amortecimento na pena. Como neste caso o amortecimento da pena é bem maior do que o amortecimento do sistema, os valores dos picos (ressonâncias) medidos serão bastante defasados dos calculados. Estes problemas não afetam, entretanto, os valores das frequências naturais, que são realmente os parâmetros importantes.

## C A P Í T U L O VII

PROPAGAÇÃO LIVRE DE ONDAS EM TUBOS CONTÍNUOS COM  
FLUIDO EM MOVIMENTO7. INTRODUÇÃO

As vibrações transversais de tubos contínuos com fluido em movimento foi amplamente pesquisada dada a sua importância no projeto de oleodutos, gasodutos, linhas de alimentação de combustível, tubulações forçadas de alimentação de turbinas hidráulicas, linhas de descargas de bombas centrífugas, tubos de trocadores de calor, barras de combustível nuclear e outros sistemas de tubulações. Segundo Paidoussis [17] o estudo das características dinâmicas de tubos flexíveis com fluido em movimento começou com uma experiência feita por Ashley e Haviland quando tentaram descrever as vibrações observadas nos oleodutos da TRANSARABIAN. No entanto, a formulação do problema foi considerada incorreta por Feodos'yev [18], quando derivou a equação correta para o movimento e analisou o caso de um tubo com ambas as extremidades simplesmente apoiadas. Feodos'yev e Housner mostraram que o tubo podia flambar nas altas velocidades de fluxo, semelhante ao que acontece a uma coluna sujeita a uma carga axial. Stein [19], interessado com tubos infinitamente longos com fluido em movimento, trouxe a primeira correção para a equação do movimento. Esta correção introduziu o efeito da pressão interna, que

torna-se significativa nas pressões suficientemente altas.

S. S. Chen [20] utilizou a equação dos três momentos para investigar teoricamente as vibrações de tubos contínuos com fluido em movimento. Tendo em vista as limitações que a equação dos três momentos oferece, o método de propagação de ondas, através de matrizes de transferência apresenta-se promissor, dado a sua flexibilidade e poder. Assim, o objetivo deste capítulo será a obtenção das constantes de propagações e compará-las com os resultados encontrados na literatura.

### 7.1. OBTENÇÃO DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA PERIÓDICA

Considere-se dois vãos vizinhos de um tubo contínuo (ver figura 7.1).

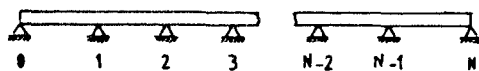


Figura 7.1 - Tubo contínuo.

O passo básico na solução de problemas de propagação livre de ondas em estruturas periódicas é, a obtenção da matriz de transferência e a partir desta, a equação para as constantes de propagação. A matriz de transferência é geralmente composta de dois fatores (ver capítulo III): matriz de transferência campo e matriz de transferência ponto. Em forma de equação, tem-se:

$$[T] = [P] [T_F(L,0)] \quad (7.1)$$

onde [P]                   Matriz de transferência ponto  
 [T<sub>F</sub>(L,0)]           Matriz de transferência campo  
 [T]                        Matriz de transferência do período

Existem vários métodos para determinar a matriz de transferência campo. Será utilizado aqui um dos métodos descrito por Espindola [6], que é baseado nos autovetores e autovalores da matriz de estado [A]. Em forma de equação tem-se:

$$[T_F(L,0)] = [U] [e^{\lambda_i L}] [V]^T \quad (7.2)$$

onde [U] é a matriz modal de [A],  $\lambda_i$  são os autovalores de [A] e [V] é a matriz dos autovetores à esquerda de [A].

A expressão (7.2) é válida quando os autovetores são normalizados de acordo com a expressão (7.3):

$$\{V_i\}^T \{U_m\} = \delta_{im} \quad (7.3)$$

onde  $\delta_{im}$  é igual a um quando  $i = m$  e a zero quando diferente. Como uma consequência de (7.3) pode-se escrever:

$$[V]^T [U] = [I] \quad (7.4)$$

o que significa

$$[V]^T = [U]^{-1} \quad (7.5)$$

### 7.1.1. DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE ESTADO [A]

A matriz de estado  $[A]$  é o elemento básico para o cálculo da matriz de transferência campo. Ela aparece na equação estado do sistema: (ver capítulo III)

$$\{z(y)\}' = [A] \{z(y)\} \quad (3.5)$$

Admitindo-se que a solução da equação (A.10) seja

$$y(x,t) = Y(x)e^{i\Omega t} \quad (7.6)$$

tem-se:



$$EI [d^4 Y(x)/dx^4] + (MU^2 + pA + T) [d^2 Y(x)/dx^2] +$$

$$i2M\Omega U [dY(x)/dx] - (M + m)\Omega^2 Y(x) = 0 \quad (7.7)$$

(ver simbologia no apêndice A)

Pode-se ainda escrever:

$$Y'(x) = \psi \quad (7.8)$$

$$\mathcal{A} = -EI [d^2 Y(x)/dx^2] = -EI\psi', \text{ logo}$$

$$\psi'(x) = -\mathcal{A}/EI \quad (7.9)$$

$$V = -EI [d^3 Y(x)/dx^3] = d/dx \{-EI [d^2 Y(x)/dx^2]\} = \mathcal{A}'(x)$$

logo

$$\mathcal{A}'(x) = V \quad (7.10)$$

agora:

$$V'(x) = -EI [d^4 Y(x)/dx^4]$$

Da expressão (7.7) tira-se

$$V'(x) = (MU^2 + pA + T)d^2Y(x)/dx^2 + i2MU\Omega [dY(x)/dx] -$$

$$(M + m)\Omega^2Y(x) \quad \text{ou}$$

$$V'(x) = - [(MU^2 + pA + T)/EI] + i2MU\Omega\psi - (M + m)\Omega^2Y \quad (7.11)$$

Escrevendo em forma matricial as equações

(7.8), (7.9), (7.10) e (7.11), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} Y \\ \psi \\ \mathcal{K} \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(M+m)\Omega^2 & i2MU\Omega & -(MU^2+pA+T)/EI & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ \psi \\ \mathcal{K} \\ V \end{Bmatrix}$$

(7.12)

Chamando  $\beta^4 = (M + m)\Omega^2/EI$ , ou ainda:

$$(\beta L)^4 = (M + m)\Omega^2 L^4 / EI \quad (7.13)$$

$\beta L$  é adimensional.

Fazendo  $\Omega^* = (\beta L)^2$  a expressão (7.13) torna-se:

$$\Omega^* = \Omega [(M + m)/EI]^{1/2} L^2 \quad (7.14)$$

ou seja, 
$$\Omega^* = c_f \Omega \quad (7.15)$$

onde 
$$c_f = [(M + m)/EI]^{1/2} L^2 \quad (7.16)$$

$c_f$  tem dimensão de tempo,  $\Omega^*$  é uma frequência adimensional e é definida por (7.14).

Conforme expressão (3.5), de (7.12) tira-se:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(M+m)(\Omega^*/c_f)^2 & i2MU(\Omega^*/c_f) & -(MU^2+pA+T)/EI & 0 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

A expressão (7.17) representa a matriz de estado  $[A]$ .

## 7.2. CONSTANTES DE PROPAGAÇÃO PARA O TUBO CONDUZINDO FLUIDO

As constantes de propagação foram obtidas por computação numérica.

Utilizou-se um dos métodos formulado por Espíndola |6| baseado nos autovetores de  $[A]$ :

Este método, utiliza a expressão (7.2) na computação numérica da matriz de transferência do período, e a equação das constantes de propagação apresentada pela equação (4.14).

As constantes de propagação são fornecidas pela expressão dos autovalores.

$$\lambda = e^{-i\mu}$$

Para facilitar os cálculos numéricos dos autovalores ~~utiliza-se~~ a técnica de redução de ordem desenvolvida por Espíndola |6| para redução da matriz de transferência do período.

Apresenta-se no Apêndice B um fluxograma para a computação numérica, das constantes de propagação, usando a técnica descrita acima.

Os resultados computados são plotados nas figuras

7.2 e 7.3.

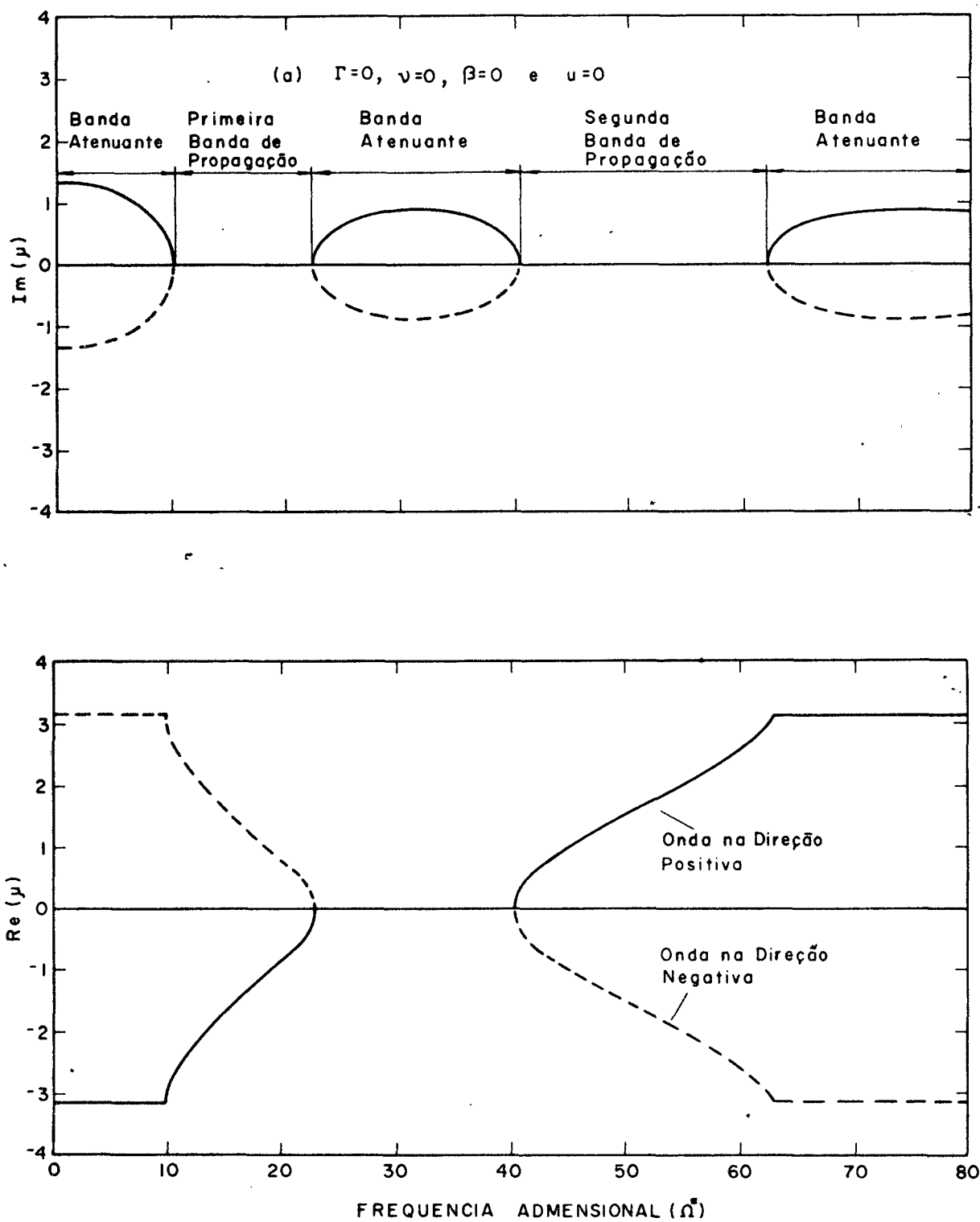


Figura 7.2 - Propagação de ondas em um tubo infinito, apoiado periodicamente com um fluido em movimento.

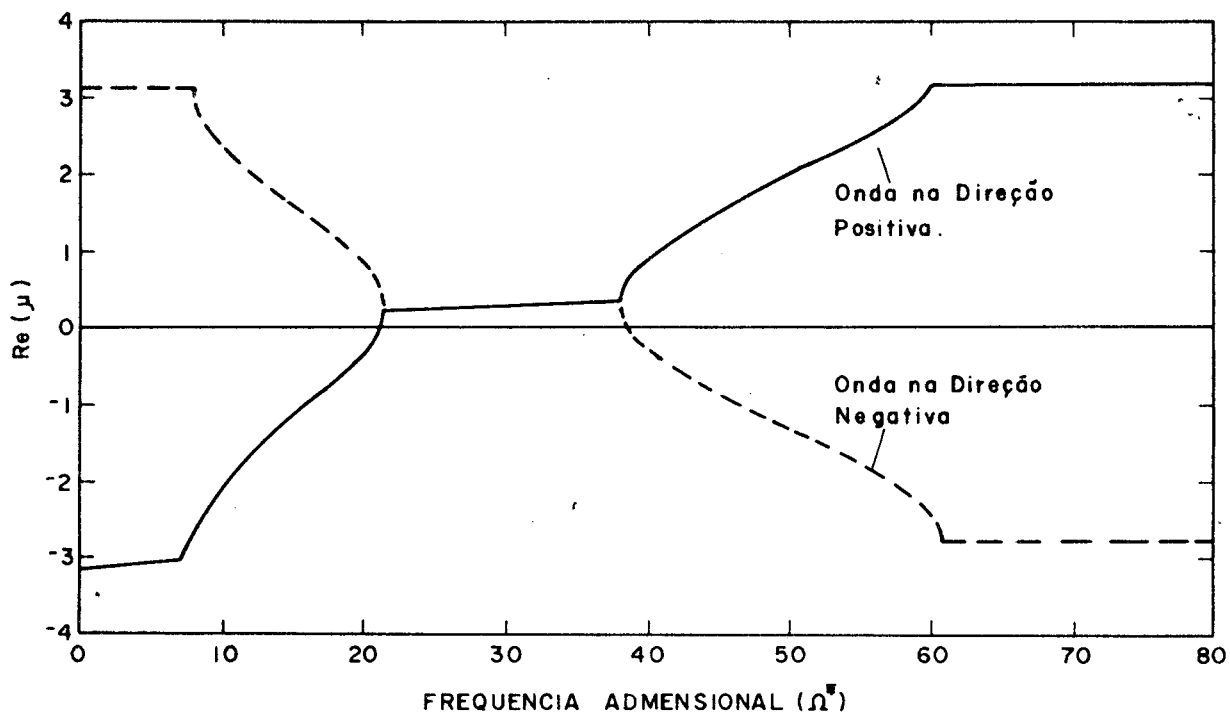
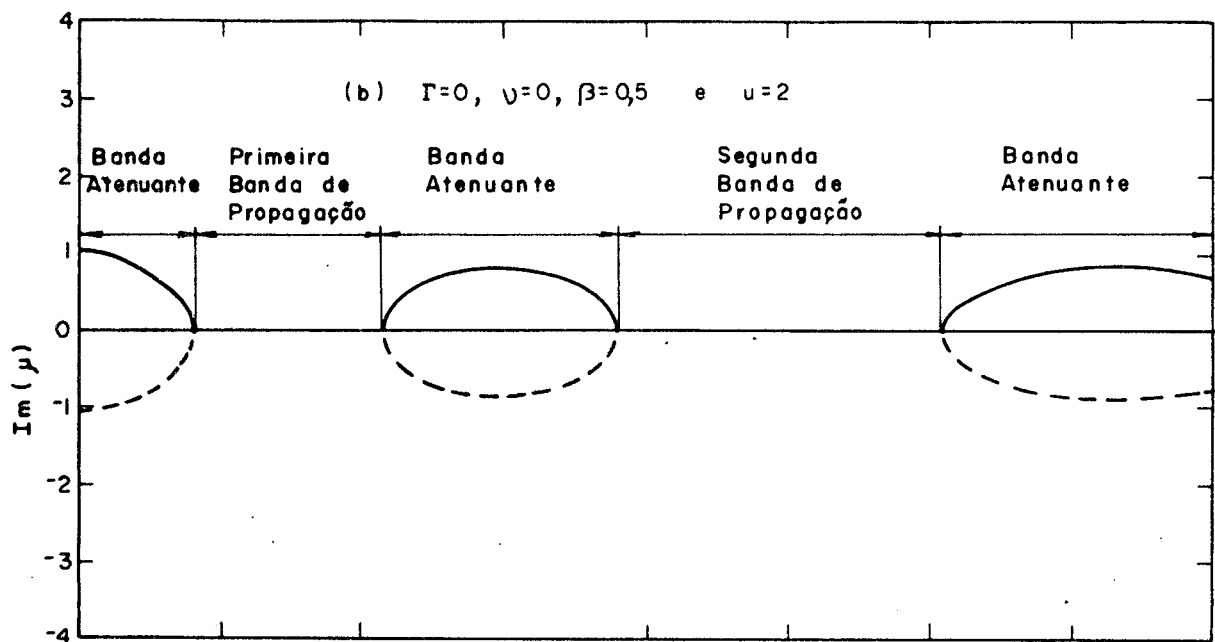


Figura 7.3 - Propagação de ondas em um tubo infinito, apoiado periodicamente com um fluido em movimento.

A figura 7.4 representa a curva para as constantes de propagação com velocidade adimensional igual a  $\Pi$ . Verifica-se, portanto, que esta velocidade as ondas livres com frequência zero são propagantes. Comprovado mais uma vez os resultados obtidos por Chen.

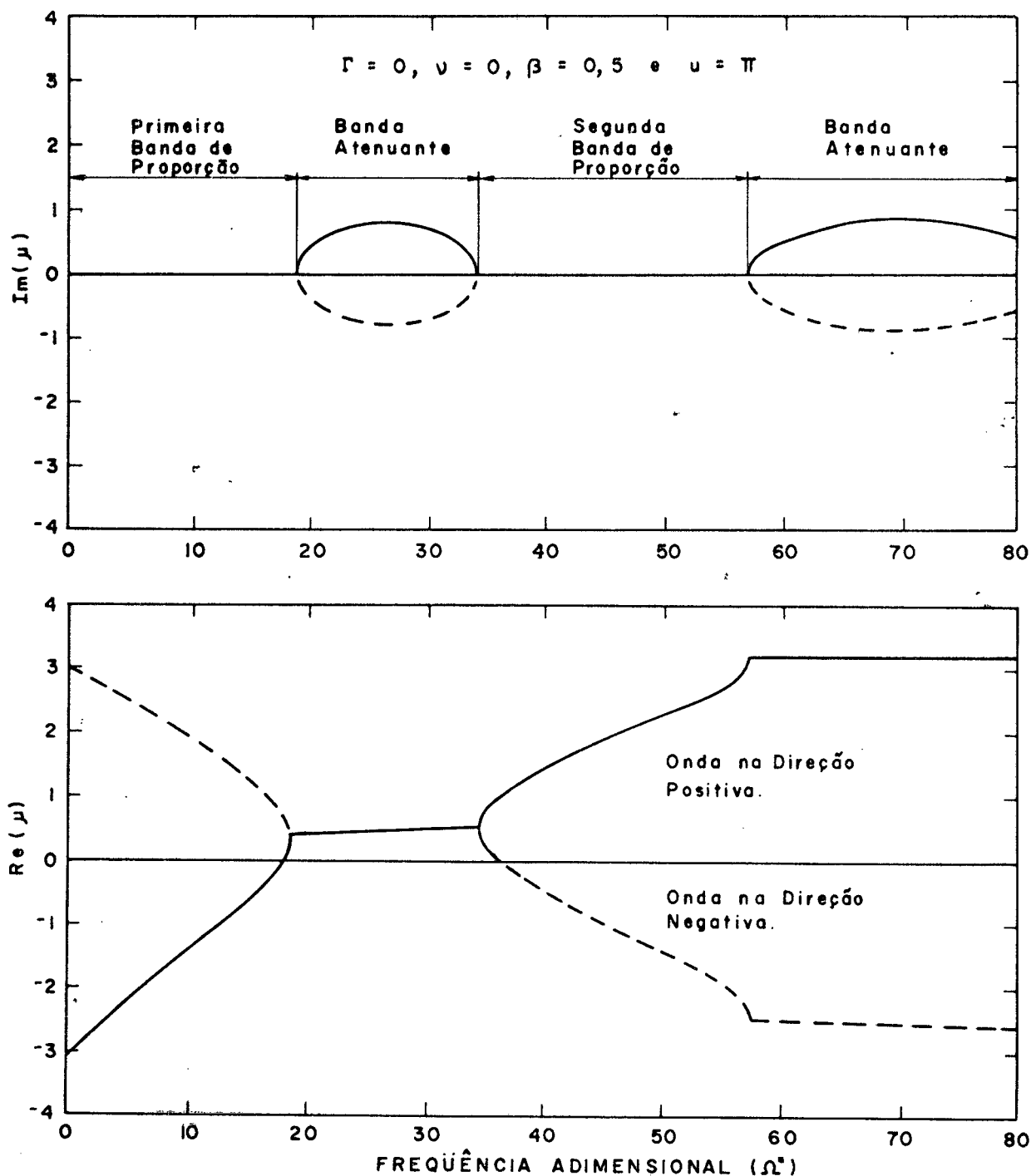


Figura 7.4 - Propagação de ondas em um tubo infinito, apoiado periodicamente com um fluido em movimento.

Utiliza-se nas figuras os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\Gamma = \frac{TL^2}{EI}, \quad \beta = \left( \frac{m}{m + M} \right)^{1/2}, \quad u = \left( \frac{M}{EI} \right)^{1/2}, UL$$

$$\Omega^* = \left( \frac{m + M}{EI} \right)^{1/2} L^2 \Omega$$

As figuras 7.2 e 7.3 representam as constantes de propagação de um tubo com os mesmos parâmetros adimensionais utilizados por Chen [20] no cálculo das constantes de propagações de tubos simplesmente apoiados.

Comparando estes resultados com os apresentados por Chen, verifica-se que são perfeitamente iguais.

A vantagem do presente método, entretanto, reside na sua generalidade e na sua formulação orientada para computadores digitais. As manipulações algébricas são reduzidas ao mínimo necessário ao estabelecimento da matriz  $|A|$ . Suportes viscoelásticos ou supressores de vibrações (tipos neutralizadores) podem ser introduzidos sem maiores complicações. Já o método utilizado por Chen carece dessa vantagem e, se se pensar em estruturas mais complexas, este seria, provavelmente, inadequado, dada as manipulações algébricas envolvidas.



## C A P Í T U L O VIII

## CONCLUSÕES GERAIS E SUGESTÕES PARA ESTUDOS POSTERIORES

As idéias básicas de propagação livre de ondas em estruturas periódicas foram revistas. A formulação foi aquela desenvolvida por [6], usando matrizes de transferência.

Foi abordada a teoria de resposta de estruturas periódicas [6]. Esta formulação é adequada para sistemas discretos, mas pode ser estendida para sistemas contínuos. Esta última parte não foi introduzida neste trabalho.

Usou-se a formulação acima para o cálculo de resposta de um modelo discreto e comparou-se os resultados numéricos com os experimentais, obtidos de uma estrutura representativa do modelo teórico.

Os resultados são excelentes no que concerne às frequências naturais, mas, como se esperava, são sofríveis quanto às amplitudes dos picos de ressonância. Atribui-se as discrepâncias aos erros computacionais das amplitudes perto das ressonâncias, bem como a não linearidade no sistema experimental.

Formula-se o problema de propagação livre de ondas para um tubo periodicamente suportado, conduzindo um fluido.

Os resultados conferem com aqueles calculados por Chen [20], através de uma formulação pela equação dos três momentos.

A vantagem do método de propagação de ondas aqui abordado, reside na sua generalidade e no fato de ser orientado para computador, evitando-se esforços algébricos.

Pode-se também usar este método para a determinação da resposta de tubos a um campo de pressões harmônicas. Isto no entanto não foi inserido neste trabalho.

Como sugestão para estudos posteriores aponta-se o estudo do efeito de suportes viscoelásticos na redução das vibrações induzidas por fluxo, bem como outros dispositivos atenuadores. A formulação de Espíndola serve bem a este propósito.

Sugere-se ainda o estudo de cilindros conduzindo fluido, com movimento geral das paredes. Este parece um campo promissor de aplicação das técnicas acima.

## R E F E R Ê N C I A S

- [1] Mead, D. J. Free wave propagation in periodically supported, infinite beams. *J. Sound Vib.* 11(2), (1970).
- [2] Brillouin, L. Wave propagation in periodic structures. Dover Publications (1953).
- [3] Ungar, E. E. Steady state response of one dimensional periodic flexural systems. *J. Acoustic. Soc. Am.* 39 (1966).
- [4] Brobovnitskii, Yu. I. Maslov, V. P. Propagation of flexural waves along a beam with periodic point loading. *Sovietic Physics - Acoustics* (1966).
- [5] Mead, D. J. and Wilby, E. W. The random vibrations of a multisupported heavily damped beam. *Shock and Vibration Bulletin*, 35, Part 3, (1966).
- [6] Espíndola, J. J. Numerical methods in wave propagation in periodic structures. PH. D. Thesis, University of Southampton. 1974.
- [7] Pestel, E. C. and Lecke, F. A. Matrix methods in elastomechanics. McGraw-Hill, New York. N. Y. (1963).
- [8] Richards, J. P. G. and Williams, R. P. Waves. Penguin Education - Penguin Library of Physical Sciences.
- [9] Meirovitch, L. Analytical methods in Vibrations. College of Engineering Sciences, Arizona State University - The Macmillan Company, New York Collier - Macmillan limited, London.

- [10] Lawrence E. Kansler and Austin R. Frey      Fundamentals of acoustics. John Wiley & Sons, inc. New York. London. Sydney.
- [11] Dudley. H. Towne      Wave phenomena - addison Wesley Publishing Campany - Reading, Massachusetts. Palo Alto - London - Don Mills, Ontario.
- [12] Frame, J. S.      Matrix functions and applications, Parts I T. V..IEEE Spectrum (1964).
- [13] Espíndola, J. J.      Response of spatially periodic structures to concetrated forces. Paper No. A-17 - Proceedings COBEM, Florianópolis, 1977.
- [14] Espíndola, J. J.      A general theory of free wave propagation in periodic structures. Paper No. A-11 - Proceedings COBEM, Rio de Janeiro, 1975.
- [15] Porter, B.      Synthesis of Dynamical Systems - William Clowes and Sons LTD., London, 1969.
- [16] P. W. Smith and R. N. Lyon      NASA - CR 100. Sound and Structure Vibration - 1964.
- [17] Paidoussis, M. P.      Dynamics of tubular cantilevers conveying fluid. Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, McGill University, Montreal, Canada, Member of the Institution.
- [18] Feodos'yev, V. P.      Vibrations an stability of a pipe when a liquid flows through it; Inzhenernyi Sbornik 1951 10, 169.

- [19] Stein, R. A. Vibrations of tubes containing flowing fluid, 1967, PH. D. Thesis, Ohio State University.
- [20] Chen, S. S. Vibrations of Continuous Pipes Conveying Fluid. Argone, 131, U.S.A.
- [21] Heinrich, G. Vibrations of tubes with flow, Z. Angew. Math. Mech. 1956. 36, 417.
- [22] Naguleswaram, S. and Williams, C.J.H. Lateral vibration of a pipe conveying a fluid. Department of Mechanical Engineering, The University, Edgbaston, Birmingham.
- [23] S. N. Yousri Gerges Digital Signal Processing and Analysis. Centro Tecnológico da UFSC. M. Sc. Course in Noise and Vibration. 1979.

## A P Ê N D I C E A

FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARA AS VIBRAÇÕES DE TUBOS  
RETOS COM FLUIDO EM MOVIMENTO

A derivação abaixo segue de perto aquela apresentada por Paidoussis [17] e Naguleswaram [22].

Para a formulação da equação diferencial do movimento será considerado o sistema da figura A.1 o qual consiste de um tubo em balanço de comprimento  $L$ , perímetro interno  $S$ , massa por unidade de comprimento  $m$ , rigidez flexional  $EI$ , massa por unidade de comprimento do fluido  $M$ , velocidade de fluxo  $U$  e descarga na extremidade livre. A área de secção transversal do fluido é " $A$ " e a pressão do fluido medida acima da atmosfera é " $p$ ". O eixo dos " $x$ " coincide com o eixo do tubo na sua posição de equilíbrio.

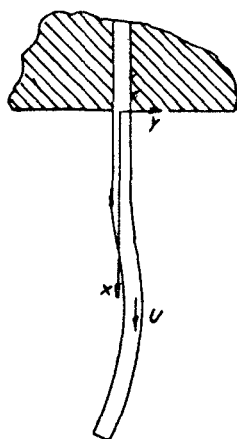


Figura A.1

Considere-se elementos  $\delta x$  do tubo e do fluido, sujeito a pequenos movimentos laterais  $y(x,t)$ , tal como mostrado na figura

A.2 abaixo,

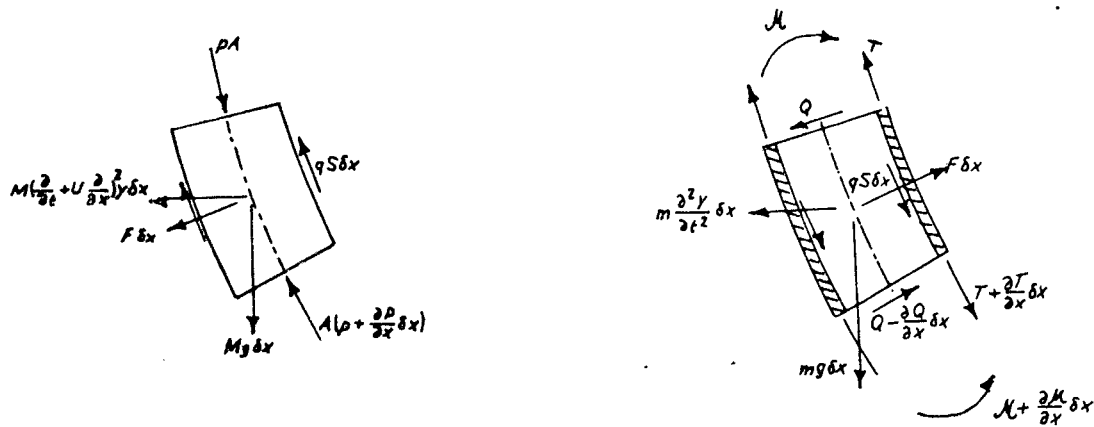


Figura A.2

e ainda restrito às seguintes limitações: o diâmetro do tubo é pequeno em relação ao comprimento de onda de qualquer distúrbio na linha de centro quando vibrando; as acelerações das partículas do fluido nas direções  $x$  e  $y$  e as derivadas de primeira ordem nos pequenos deslocamentos " $y$ " são zero. Assim, para o elemento de fluido, o balanço de forças nas direções  $x$  e  $y$  dá:

$$- A(\partial p/\partial x) - qS + Mg + F(\partial y/\partial x) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$F = M[\partial/\partial t + U(\partial/\partial x)]^2 y + A(\partial/\partial x)[p(\partial z/\partial x)] + qS(\partial y/\partial x) = 0$$

(A.2)

onde  $q$  é tensão de cisalhamento na superfície interna do tubo e  $F$  é a força transversal por unidade de comprimento entre a parede do

tubo e do fluido.

Semelhantemente, para o elemento do tubo temos:

$$(\partial T / \partial x) + qS + mg - F(\partial y / \partial x) = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$(\partial Q / \partial x) + F - m(\partial^2 y / \partial t^2) + \partial / \partial x [T(\partial y / \partial x)] + qS(\partial y / \partial x) = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$Q = -\partial \mathcal{M} / \partial x = -EI(\partial^3 y / \partial x^3) \quad (\text{A.5})$$

onde "T" é a tensão longitudinal, "Q" é a força de cisalhamento transversal no tubo e "M" é o momento de flexão; serão desprezados aqui os termos de segunda ordem de acordo com a aproximação de Euler para pequenos movimentos laterais de vigas.

Subtraindo a equação (A.4) da equação (A.2) e substituindo a equação (A.5) ao resultado, tem-se:

$$EI(\partial^4 y / \partial x^4) + \partial / \partial x [(pA - T)\partial y / \partial x] + M[\partial / \partial t + U(\partial / \partial x)]^2 y +$$

$$m(\partial^2 y / \partial t^2) = 0 \quad (\text{A.6})$$



Adicionando as equações (A.1) e (A.3), tem-se:

$$\partial/\partial x(T - pA) + (M + m)g = 0$$

que integrada de  $x$  a  $L$  pode ser escrita como

$$(T - pA)_L - (T - pA)_x + (M + m)(L - x)g = 0$$

$T$  e  $p$  são nulos em  $x = L$ , já que  $p$  é medido acima da pressão atmosférica; conseqüentemente, esta equação dá:

$$T - pA = (M + m)(L - x)g \quad (A.7)$$

Substituindo a equação (A.7) na equação (A.6), tem-se:

$$EI(\partial^4 y/\partial x^4) + M[\partial/\partial t + U(\partial/\partial x)]^2 y + (M + m)g[\partial y/\partial x -$$

$$(L - x)\partial^2 y/\partial x^2] + m(\partial^2 y/\partial t^2) = 0 \quad (A.8)$$

que é a equação diferencial para pequenos movimentos laterais. Em seqüência os termos da equação (A.8) podem ser assim identificados: força restauradora flexional, força de inércia do fluido, força da gravidade e força de inércia do tubo. Reagrupando a equação (A.8), tem-se:

$$EI(\partial^4 y / \partial x^4) + [\mu U^2 - (M + m)(L - \dot{x})g](\partial^2 y / \partial x^2) + 2\mu U(\partial^2 y / \partial x \partial t) + (M + m)g(\partial y / \partial x) + (M + m)(\partial^2 y / \partial t^2) = 0$$

(A.9)

Esta equação pode também ser formulada pelo princípio de Hamilton. Como está-se interessado com tubos simplesmente apoiados, a equação (A.9) sofrerá algumas modificações. Heinrich [21] mostrou que se o tubo é pressionado a uma pressão  $p_0$ , uma força lateral  $p_0 A (\partial^2 y / \partial x^2)$  surgirá, isto porque a pressão radial no lado tracionado do eixo neutro da viga tubular está agindo numa área maior do que no lado comprimido. A ação desse termo no sistema é equivalente a uma carga de compressão axial de magnitude  $p_0 A$ . Semelhantemente, se uma tensão externa  $T_0$  for aplicada ao tubo, a parecerá uma força lateral igual a  $-T_0 (\partial^2 y / \partial x^2)$ . Consequentemente, para tubos com ambas as extremidades apoiadas, um termo igual a  $(pA + T)(\partial^2 y / \partial x^2)$  precisa ser adicionado à equação (A.9). Desta forma, a equação diferencial para vibrações de tubos retos com fluido em movimento é:

$$EI(\partial^4 y / \partial x^4) + (MU^2 + pA + T)(\partial^2 y / \partial x^2) + 2MU(\partial^2 y / \partial x \partial t) +$$

$$(m + M)(\partial^2 y / \partial t^2) = 0 \quad (A.10)$$

onde	E	Módulo de elasticidade do tubo
	I	Momento de inércia do tubo
	x	Coordenada axial
	y	Deslocamento transversal
	t	Tempo
	p	Pressão do fluido
	T	tensão externa
	U	Velocidade de fluxo
	m	Massa por unidade de comprimento do tubo
	M	Massa por unidade de comprimento do fluido
	A	Área de fluxo interna

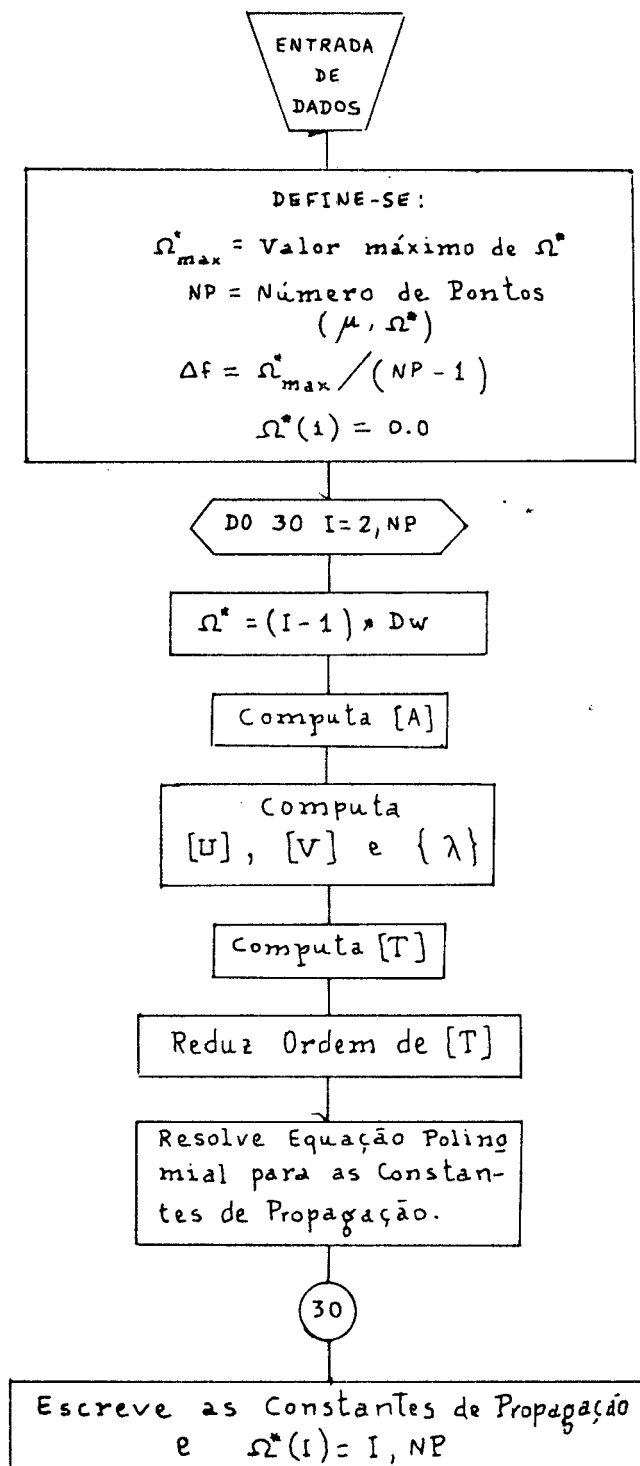
A equação (A.10) foi baseada nas seguintes hipóteses: a) As vibrações são pequenas de modo que serão importantes somente os termos lineares. b) As densidades de massa são uniformes. c) Os efeitos de inércia rotatória, cisalhamento transversal e amortecimento são desprezíveis. d) A pressão e velocidade do fluido são constantes.

A equação incorpora ainda os efeitos de força centrífuga do fluido, força de Coriolis, pressão do fluido e tensão externa.

A força centrífuga é provocada pela curvatura do vão, devido ao fluxo de fluido e é equivalente a uma carga de compressão agindo na extremidade reduzindo assim a frequência natural. A força de Coriolis é devido a uma ação combinada, fluxo e rotação dos elementos de fluido e provoca uma distorção assimétrica na forma modal clássica. A pressão interna do fluido e a tensão externa representam a tensão modal efetiva.

## A P Ê N D I C E B

## FLUXOGRAMA PARA O CÁLCULO DAS CONSTANTES DE PROPAGAÇÃO



## APÊNDICE C

## ANÁLISE DIGITAL

C.1 - INTRODUÇÃO

A análise digital consiste na transformação de um ruído ou vibração (por meio de um transdutor adequado) em uma voltagem elétrica, e analisar o sinal no Domínio do Tempo ou no Domínio da Frequência '23'.

C.2 - LISTA DE EQUIPAMENTOS

A figura C.1 representa o sistema de medições:

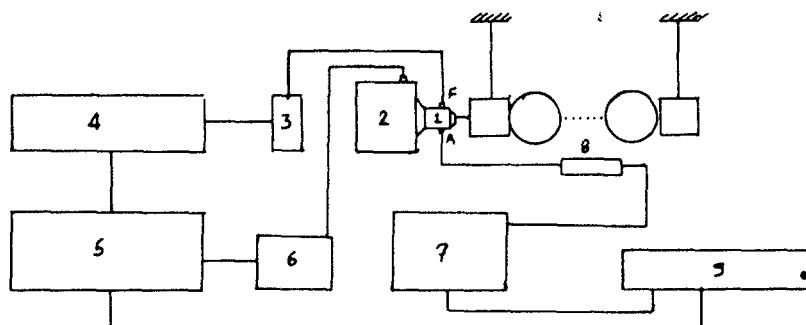


Figura C.1 - Sistema de medições para a análise digital.

1 - Cabeça de Impedância	Tipo 8001 B&K
2 - Excitador de Vibração	Tipo 4809 B&K
3 - Amplificador de Carga	Tipo 2626 B&K
4 - Amplificador de Medições	Tipo 2807 B&K
5 - Gerador	Tipo 1027 B&K
6 - Amplificador de Potência	Tipo 2706 B&K
7 - Analisador de Frequência	Tipo 2120 B&K
8 - Pré-Amplificador de Microfones	Tipo 2619 B&K
9 - Gravador	Tipo 7003 B&K

### C.3 - AS MEDIDAS

Gravando-se o sinal conforme figura C.1, faz-se a análise no FOURIER ANALYZER da Hewlett-Packard escolhendo-se os seguintes parâmetros para a análise digital:

- a) Frequência Central  $f_o = 30$  Hz
- b) Banda  $f = 31.6$  Hz
- c) Sinal Ruído Branco
- d) Frequência Máxima  $f_{max} = 100$  Hz
- e) Número de Pontos  $N = 4096$
- f) Número de Médias 25.

### C.4 - CONCLUSÃO

Cita-se a análise digital aqui como uma opção a mais. É um método bastante rápido e eficiente comparado com o método analógico usado neste trabalho. As figuras C.2, C.3, C.4 e C.5, representam as respostas em frequências utilizando a análise digital.

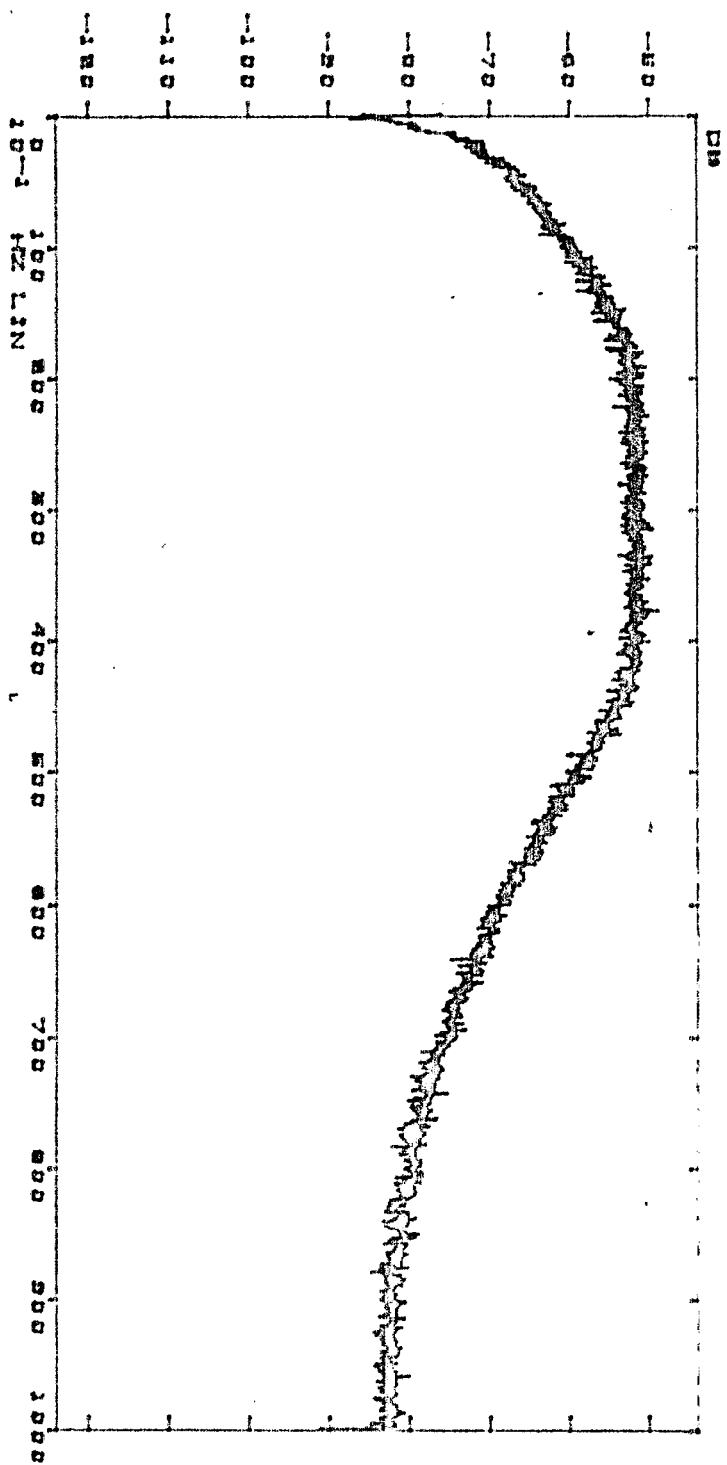


Figura C.2 - Resposta em frequência da saída do gerador Tipo 1027 B&K.



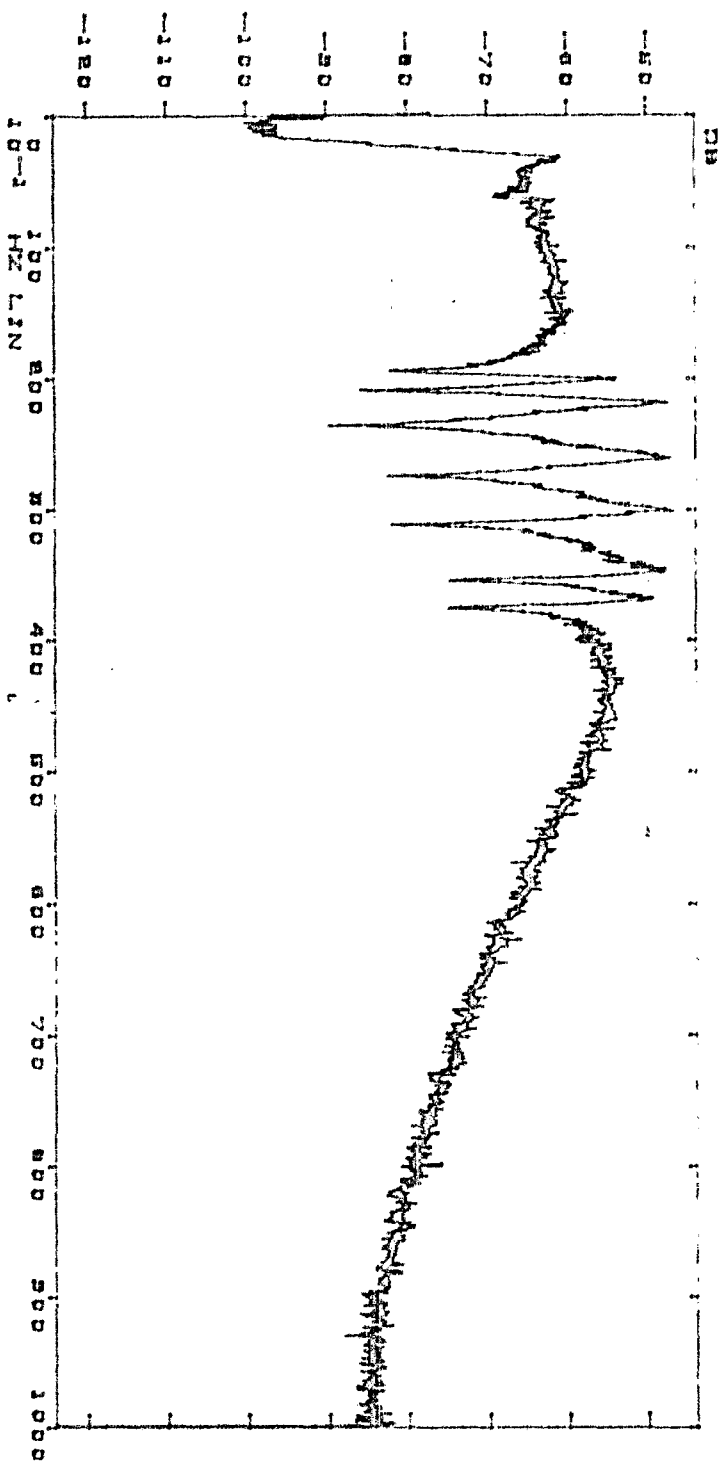


Figura C.3 - Resposta em frequência da força na Cabeça de Impedância Tipo 8001 B&K.

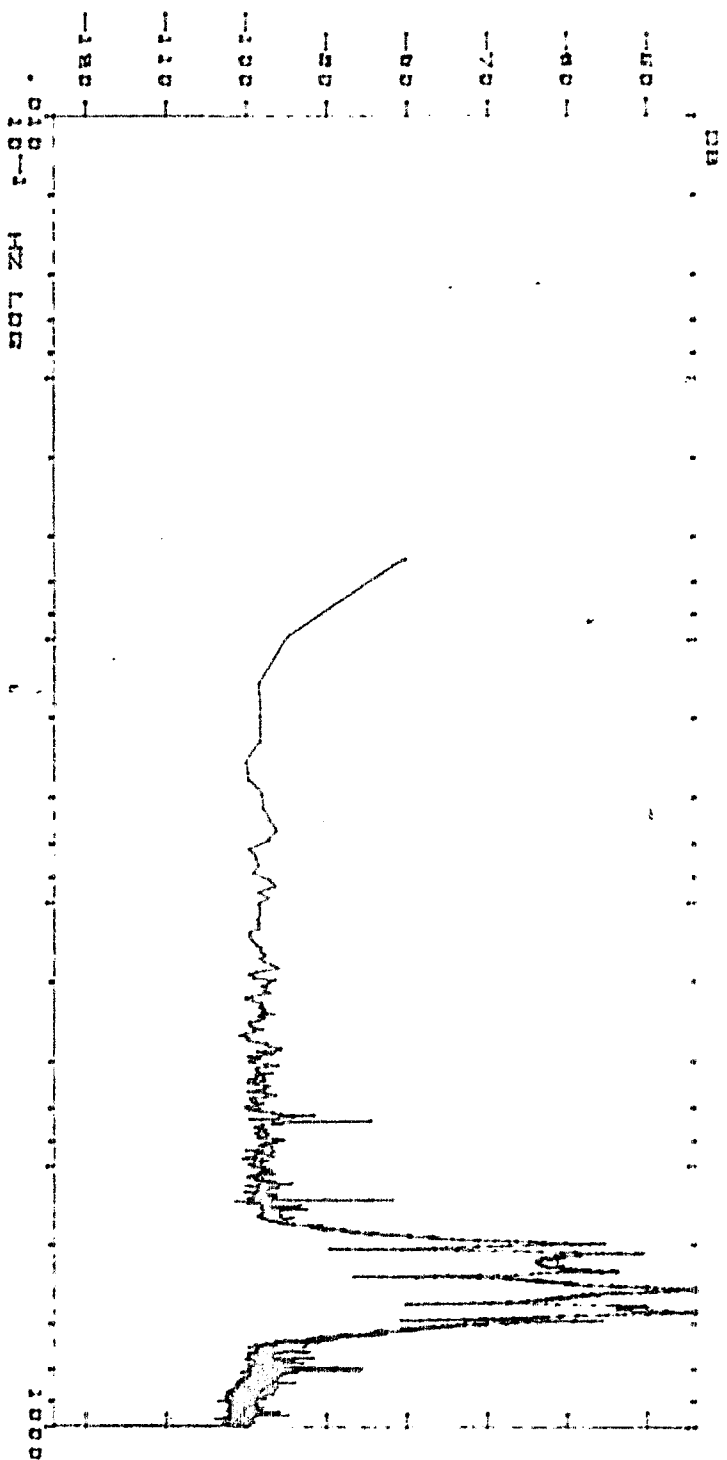


Figura C.4 - Resposta em frequência na segunda massa. Escala logarítmica.

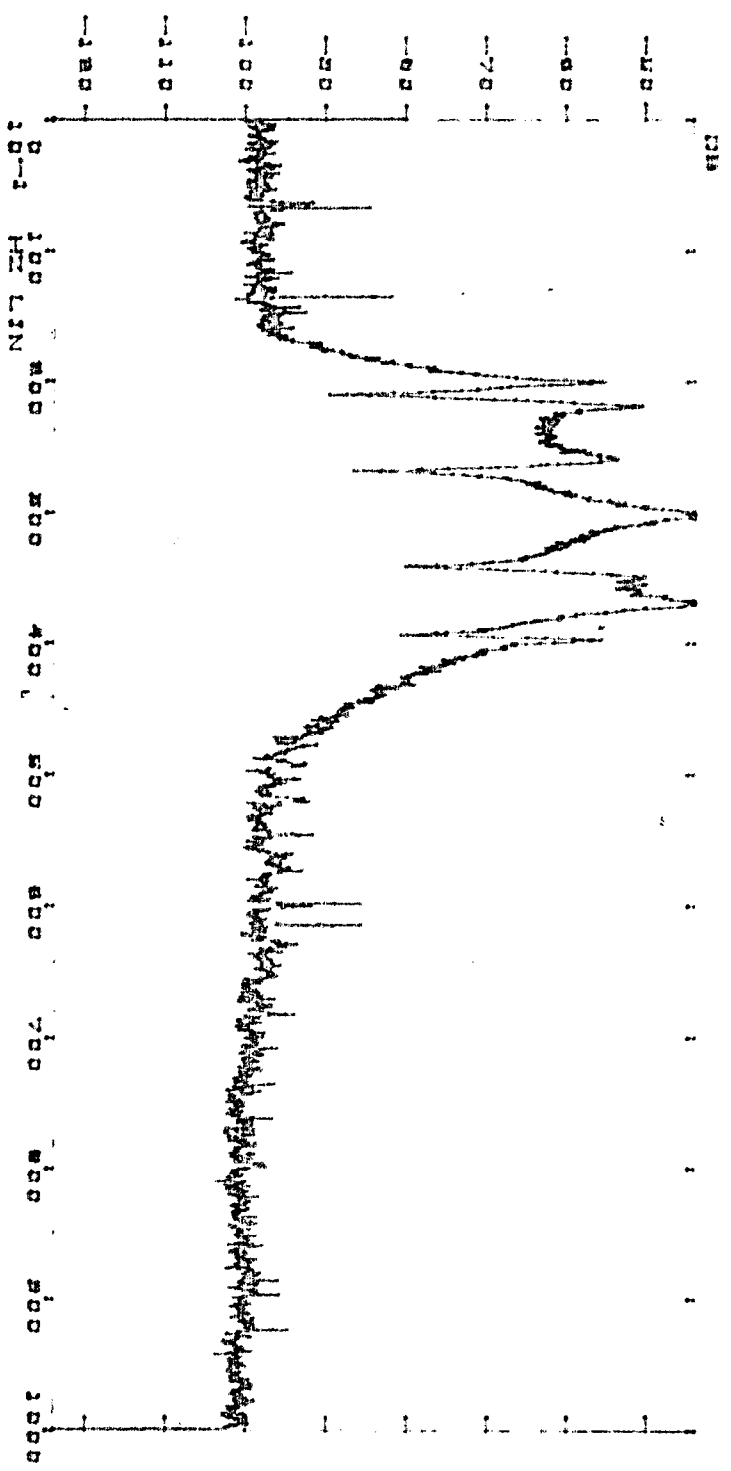


Figura C.5 - Resposta em frequência na segunda massa. Escala linear.

## ANEXO I

## FOTOGRAFIAS REFERENTES AO MODELO EXPERIMENTAL.

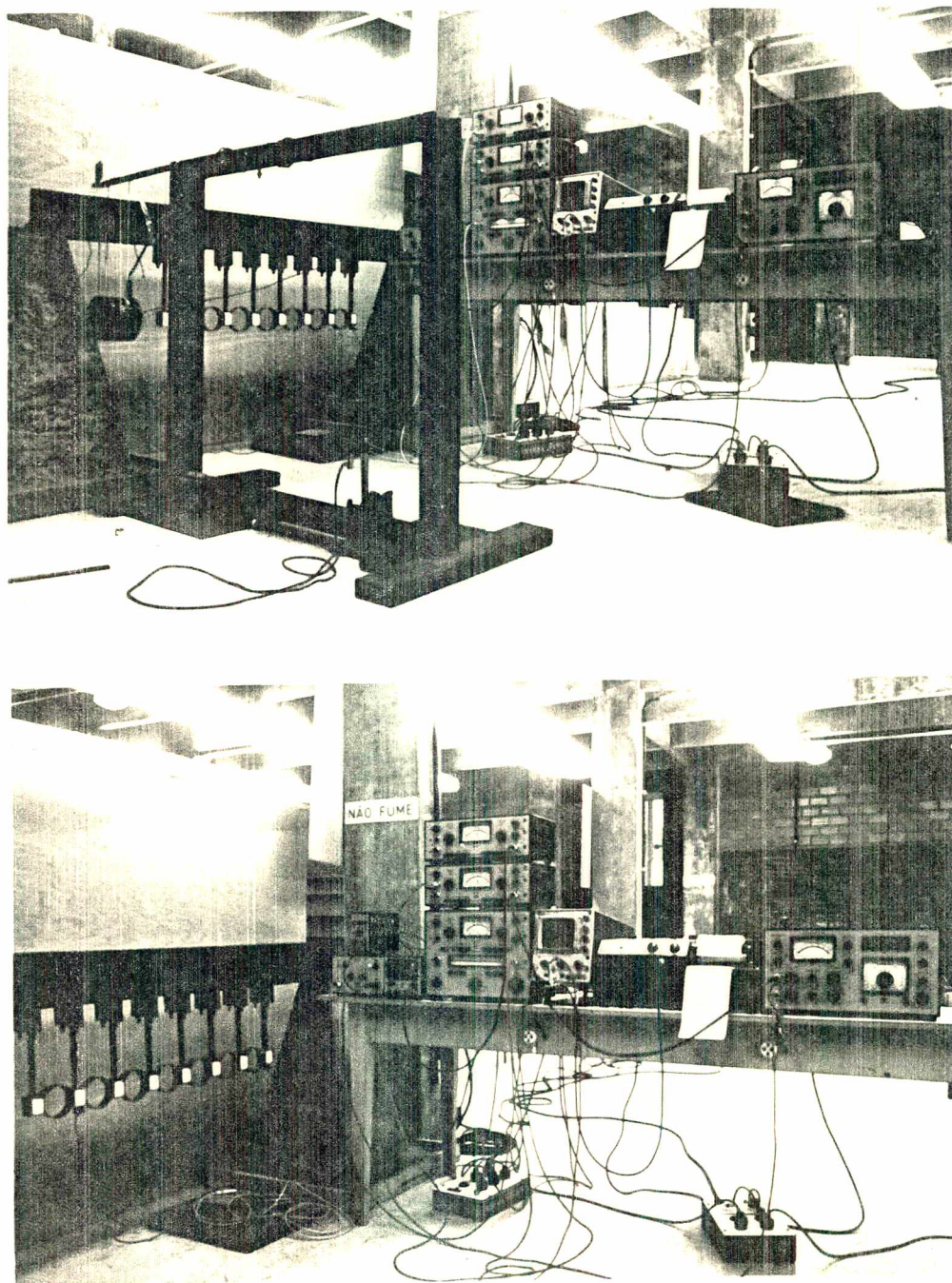


Figura I.1 - Vista total do modelo experimental e do sistema de medições.

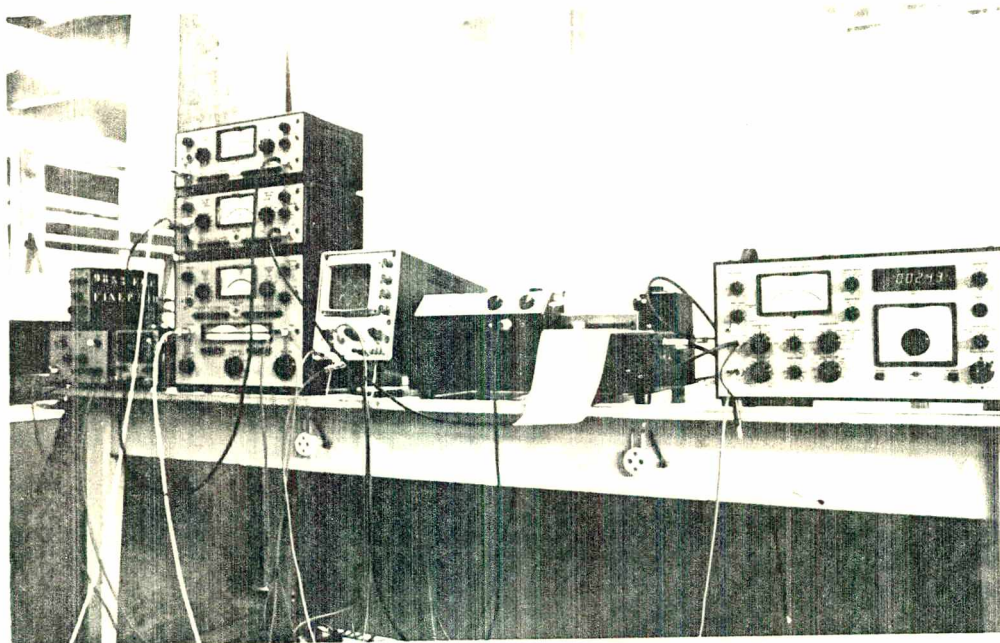
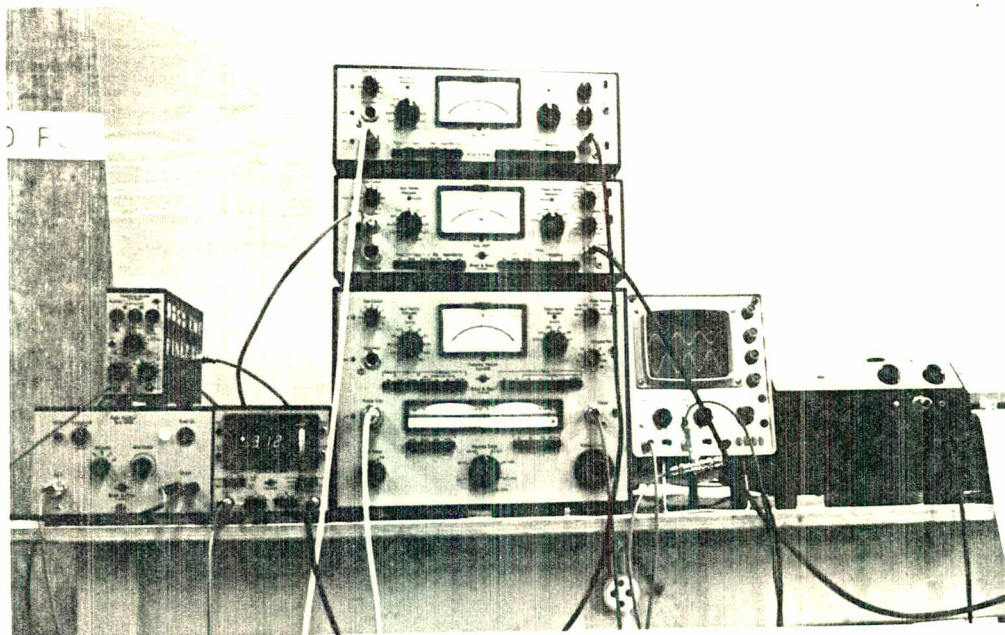


Figura I.2 - Vista total do sistema de medições.

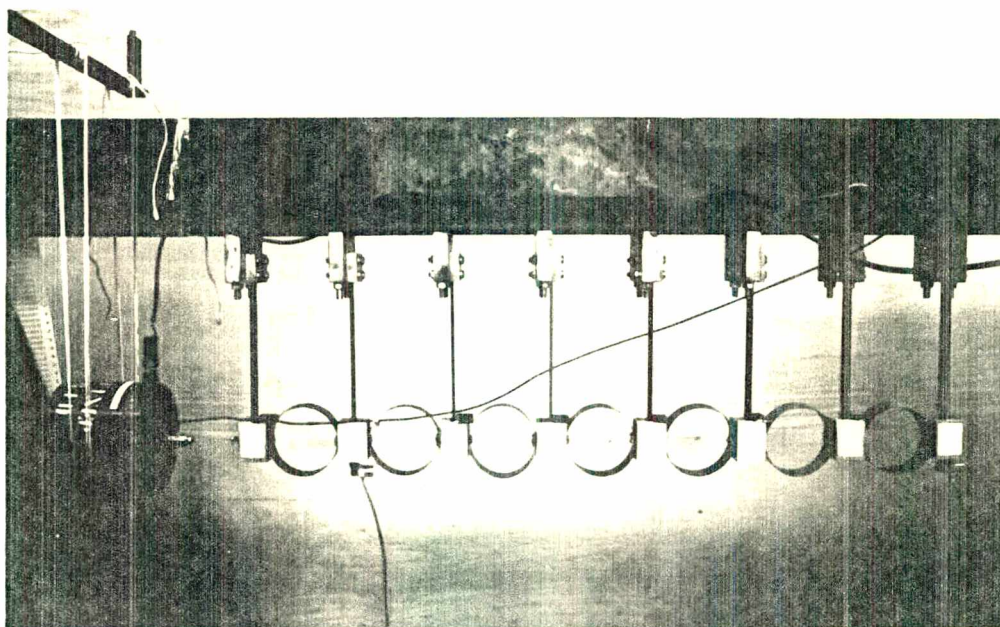


Figura 1.5 - Sistema de excitação e conexão das molas.

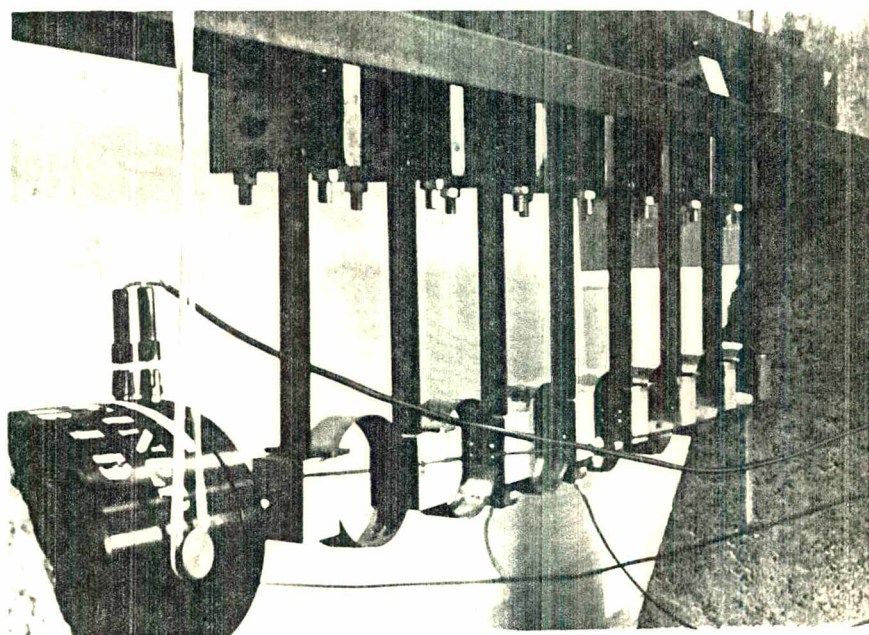


Figura 1.4 - Fixação das vigas em balanço.

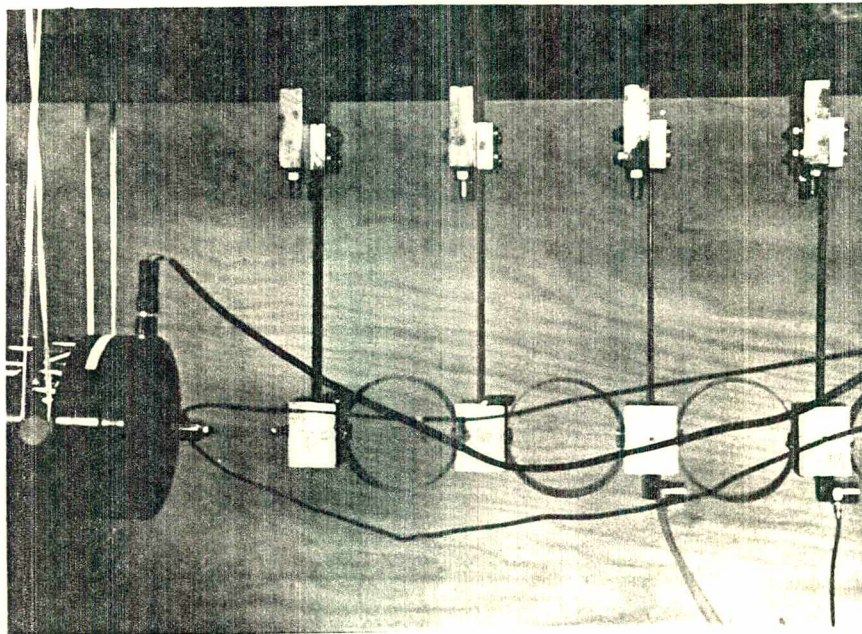
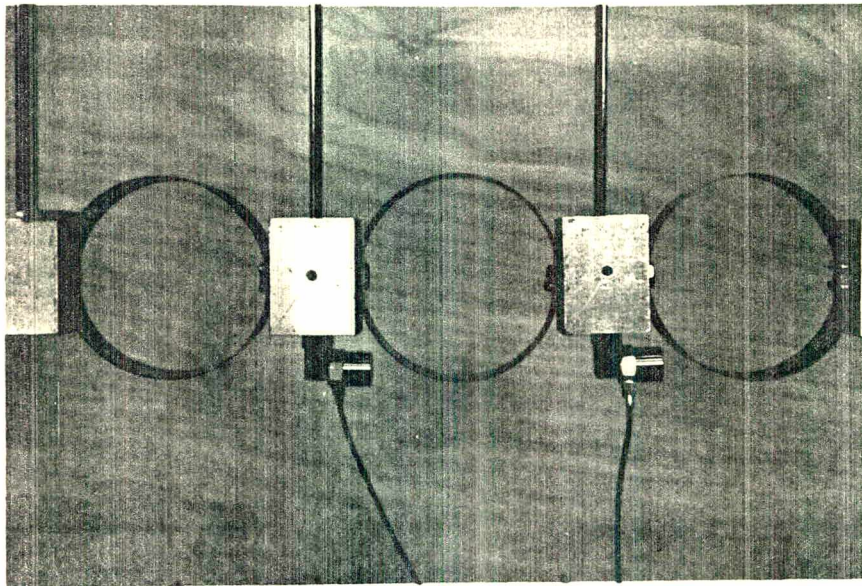


Figura I.5 - Fixação dos acelerômetros e das molas tipo anel.