

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

"ANÁLISE NUMÉRICA DO ESCOAMENTO LAMINAR JUNTO A RESSAL
TOS EM CANALIZAÇÕES"

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA
OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

ANTONIO CARLOS RIBEIRO NOGUEIRA

FLORIANÓPOLIS, OUTUBRO DE 1981.

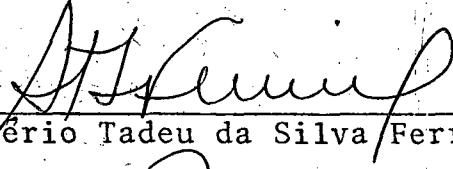
ANÁLISE NUMÉRICA DO ESCOAMENTO LAMINAR JUNTO A RESSALTOS EM
CANALIZAÇÕES

ANTÔNIO CARLOS RIBEIRO NOGUEIRA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

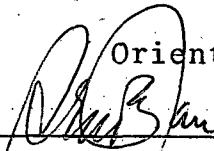
" MESTRE EM ENGENHARIA "

ESPECIALIDADE: ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO TERMOTÉCNICA E, APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Rogério Tadeu da Silva Ferreira, Ph.D.

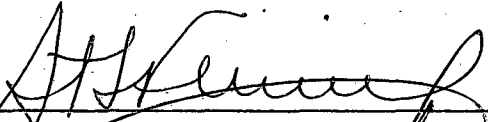
Orientador



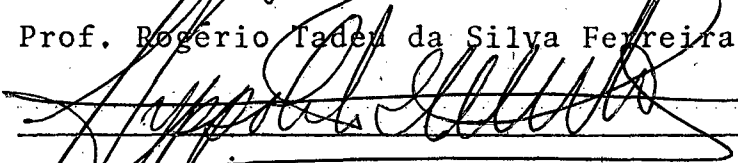
Prof. Arno Blass, Ph.D.

Coordenador

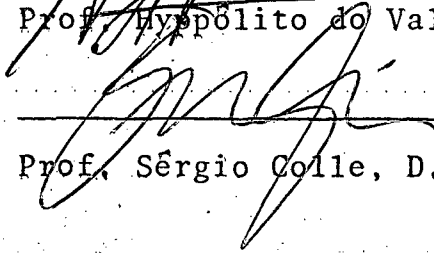
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Rogério Tadeu da Silva Ferreira, Ph.D.



Prof. Hypólito do Valle Pereira Filho, Ph.D.



Prof. Sérgio Colle, D.Sc.

HOMENAGEM ESPECIAL

Minha homenagem ao Professor Jaroslav Kozel, meu primeiro orientador, cujo prematuro falecimento representou, para mim e para tantos, a perda de um grande amigo e de um mestre incomparável.

À meus pais
com amor e
gratidão

AGRADECIMENTOS

- À Comissão Nacional de Energia Nuclear pelo suporte financeiro;
- Ao Professor Arno Blass na figura de coordenador do curso de pós-graduação em Engenharia Mecânica da UFSC;
- Aos funcionários do NPD da UFSC, e em especial aos amigos Arcilene Maria Schaeffer, Edson Luiz da Silva, Luiz Carlos Pereira e irmãos Wilson e Wilton Wronski Ricardo, pela presteza no atendimento;
- À Maike Buttendorf pelo excelente trabalho de datilografia;
- À Roberto José Dias de Andrade pela qualidade dos desenhos;
- Aos amigos Maurice Boulos Halal, Altamir Dias e João Pedro Quirino pelo interesse;
- A todos os demais colegas e professores do Centro Tecnológico que, de uma forma ou de outra, colaboraram durante o curso de pós-graduação;
- Muito especialmente ao professor Rogério Tadeu da Silva Ferreira, pela orientação técnica e pessoal, e pela confiança em mim depositada;
- Ao professor Gregório Bussyguin e ao Dr. Nicolas Joven Diestre, por me terem incentivado a fazer este curso de pós-graduação;
- Finalmente a Deus por ter me dado força e saúde para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

RESUMO	viii
ABSTRACT	ix
LISTA DE SÍMBOLOS	1
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	3
1.1 - Consideração preliminares	3
1.2 - Objetivos	4
1.3 - Revisão da literatura	5
1.4 - Caracterização do escoamento	9
CAPÍTULO II - MÉTODOS UTILIZADOS	12
2.1 - Fundamentação matemática	12
2.1.1 - Equações governantes	12
2.1.2 - Condições de contorno	20
2.2 - Critério de convergência	25
2.3 - Critérios de estabilidade	26
2.4 - Cálculo da pressão e da taxa de cisalhamento ...	28
2.5 - Procedimentos iterativos	34
2.5.1 - Método I - Abordagem estacionária	34
2.5.2 - Método II - Abordagem transitória	35
2.5.2.a - Método explícito para a função de corrente	35
2.5.2.b - Método implícito para a função de corrente	36
2.6 - Textura da malha utilizada	37
CAPÍTULO III - ANÁLISE E AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS	39
3.1 - Seções de análise e posições de referência no interior do condutô	39
3.2 - Análise dos resultados	40

3.2.1 - Função de corrente, função vorticidade e tempos de processamento	40
3.2.2 - Perfis de velocidade	63
3.2.3 - Distribuição de pressões	63
3.2.4 - Tensões de cisalhamento	68
3.2.5 - Análise dos comprimentos de separação e posicionamento da região de recirculação	69
3.3 - Validação dos resultados	77
3.3.1 - Comparação das velocidades axiais	77
3.3.2 - Posicionamento da região de recirculação e análise dos comprimentos de separação	80
CAPÍTULO IV - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	86
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89
APÊNDICES	92
I - Dedução das equações do transporte de vorticidade a partir das equações da continuidade e do movimento em sua forma dimensional menos conservativa	92
II - Discretização da equação (7) do texto, na forma de diferenças finitas	98
III - Desenvolvimento das equações para as condições de contorno junto às paredes rígidas	109
IV - Formulação matemática para o método das variáveis primitivas em coordenadas cartesianas - Método MAC	113

R E S U M O

Este trabalho tem por objetivo a análise de um escoamento laminar, incompressível, axissimétrico e estacionário, através de um obstáculo quadrado com arestas em cantos vivos, utilizando-se esquemas numéricos.

A solução é obtida aplicando-se as equações de continuidade e as de Navier-Stokes, a um volume de controle axissimétrico. Devido à simetria apresentada, o campo volumétrico do escoamento é transformado num campo plano, e este por sua vez é convertido em seu análogo computacional. A este campo, são aplicadas as equações do Transporte da Vorticidade, juntamente com as condições de contorno apropriadas, na forma de diferenças finitas.

Este conjunto de equações é resolvido por um computador digital de alta velocidade, e obtêm-se os campos da função de corrente e função vorticidade para escoamentos com números de Reynolds até 50.

Os resultados de perfis de velocidade, comprimento de separação e forma da linha de corrente são comparados com os resultados experimentais disponíveis, obtendo-se uma boa concordância.

ABSTRACT

The main purpose of this work is the numerical calculation of the main variables of the laminar, incompressible, axisymmetric, steady flow around a circumferential square obstacle placed at the wall of a circular pipe.

The continuity and Navier-Stokes equations with appropriate boundary conditions are numerically solved through the finite-differences method.

The vorticity field and the streamfunction field are obtained for Reynolds numbers of the flow up to 50 using a high velocity computer - IBM 4341.

The velocity profiles, the separation length and the shape of the separating streamline are compared with experimental available data and a good agreement is achieved.

LISTA DE SÍMBOLOS

- B = $P + Re \cdot (U^2 + V^2)/2$ = soma de Bernoulli adimensional
- D_o = Diâmetro do tubo
- h = Largura real da malha de diferenças finitas
- H = Largura adimensional da malha
- L_z = Comprimento de separação adimensional
- p = Pressão estática real do fluido
- P_o = Pressão de referência adimensional na seção de entrada
- P = Pressão estática adimensional
- r_o = Raio do obstáculo anular
- r = Coordenada cilíndrica radial
- r^2 = Quadrado do índice de correlação
- R = Coordenada cilíndrica radial adimensional
- R_o = Raio interno do conduto
- $Re = \frac{U_o R_o}{\nu}$ = Número de Reynolds baseado no raio do tubo e velocidade máxima do fluxo não perturbado
- $Re_D = \frac{U_m D_o}{\nu}$ = Número de Reynolds baseado no diâmetro do tubo e na velocidade média do escoamento não perturbado
- t = Variável temporal
- T = Variável temporal adimensional
- u = Velocidade axial real

U = Velocidade axial adimensional

U_0 = Velocidade axial máxima para o fluxo de Poiseuille

U_m = Velocidade axial média para o fluxo de Poiseuille

v = Velocidade radial real

V = Velocidade radial adimensional

α = $\frac{1}{Re}$

μ = Coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido

ν = Coeficiente de viscosidade cinemática do fluido

Ω = Função vorticidade

Ψ = Função de corrente de Stokes

ρ = Densidade do fluido

τ_{rz} = Tensão de cisalhamento real no sentido axial

τ = Tensão de cisalhamento adimensional no sentido axial

SUBÍNDICES

i = Índice de posição para Z

j = Índice de posição para R

ϕ = Valores referentes à linha de centro

SUPERÍNDICES

k = Número de iteração

n = Índice de tempo presente

$+$ = Valores obtidos experimentalmente

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1. Considerações Preliminares

Na Mecânica dos Fluídos, devido à não-linearidade associada ao forte acoplamento de variáveis, inerente às equações de Navier-Stokes, a resolução de determinados problemas através de abordagem analítica se torna, às vezes, tão complexa que o grau de idealização imposto à modelagem matemática, impede qualquer tentativa de utilização mais prática da solução. Por sua vez, uma abordagem experimental para o mesmo problema, no caso de se desejar obter um número de informações razoavelmente bom para o volume de controle sob análise, teria três inconvenientes principais: o primeiro seria o longo tempo envolvido na obtenção da solução, tendo em vista a necessidade de construção de uma bancada de testes, bem como o tempo consumido na aquisição de dados. O segundo seria de natureza econômica, uma vez que a construção da referida bancada exige uma mão-de-obra bastante qualificada, adicionada ao fato de que a confiabilidade dos dados coletados reivindica a presença do pesquisador para supervisão e orientação dos testes, quando não é o próprio pesquisador que o realiza. Deve-se salientar, ainda, que o tempo consumido na construção da bancada de testes envolve o tempo necessário ao desenvolvimento de dispositivos de medição especiais nem sempre disponíveis no mercado.

O terceiro inconveniente refere-se à limitação na obtenção de dados, quer pelas incertezas envolvidas nas medições propriamente ditas, quer pela dificuldade em cobrir todo o campo de análise, ou ainda pela inexistência de equipamentos apropriados às medições. Para contornar tais dificuldades, grande número de pesquisadores, em Mecânica dos Fluídos, está utilizando métodos numéricos em conjunto com computadores digitais de alta velocidade e grande capacidade de armazenamento, obtendo, desta maneira, soluções para problemas bem mais realistas do que os estudados pela linha analítica e, com um número de informações, para os diversos parâmetros envolvidos, muitas vezes maior do que o obtido pelo procedimento experimental.

Por outro lado, a análise de problemas físicos unicamente sob o ponto de vista numérico, envolve riscos bastante sérios, tais como a obtenção de soluções errôneas, estabilidade do processo de

solução, determinação dos limites de convergência, etc.

Tendo-se em vista que o procedimento experimental lida diretamente com a realidade física sob análise, uma opção bastante racional é a utilização da abordagem numérica, para a obtenção da solução mapeada para os diversos parâmetros em estudo, comprovada por alguns dados experimentais disponíveis para comparação.

Assim sendo, os objetivos propostos deverão ser atingidos dentro do espírito norteado pela opção mais racional, tendo-se em mente os recursos disponíveis para tal.

1.2. Objetivos

O presente estudo tem por escopo a análise numérica de um escoamento laminar incompressível, de um fluido Newtoniano, junto a ressaltos na parede no interior de canalizações. É também realizada a comparação dos resultados numéricos com os resultados experimentais obtidos por Linsingen [21], uma vez que o tipo de escoamento, comportamento do fluido e geometria do ressalto se equivalem.

Uma vez que instabilidades inerentes aos métodos numéricos limitam as soluções a valores máximos do número de Reynolds do escoamento que se podem alcançar, e o fato de tal parâmetro disponível para comparação experimental, se situar numa gama de valores bem mais elevada do que os existentes na literatura, também obtidos numericamente, este estudo testa dois métodos de solução numérica para valores do número de Reynolds compatíveis com a banda inferior da faixa de valores analisada por Linsingen [21]. Em consequência, este trabalho, além de mapear numericamente o escoamento para os parâmetros de pressão, tensão de cisalhamento, velocidade, função de corrente e função vorticidade, bem como analisar e posicionar a região de recirculação junto ao ressalto, também estabelece uma comparação entre os resultados obtidos com a utilização dos dois métodos numéricos para quatro diferentes condições de contorno, quando se fixa uma solução como referência.

Uma vez validados os resultados numéricos obtidos numa certa faixa do número de Reynolds, fica patente a possibilidade de se extrapolar os resultados obtidos experimentalmente, para valores do número de Reynolds abaixo do limite inferior da banda utilizada.

A realização deste trabalho se justifica, na medida em que o escoamento deste tipo apresenta as características dos escoamentos encontrados em dispositivos cardiovasculares protéticos, coração artificial e dispositivos medidores de vazão tipo placa de orifício.

No que tange à análise do escoamento para os dispositivos cardiovasculares protéticos e coração artificial, esta se torna relevante quando Fry et al (1965) sugerem que os problemas advindos com a formação de trombos e colapso sangüíneo estão associados com a separação do escoamento, bem como às tensões cizalhantes que agem sobre as células sangüíneas, como citado em Cheng et al |7|.

Para os medidores de vazão tipo placa de orifício, a análise do escoamento se torna importante, quando os resultados obtidos experimentalmente para os coeficientes de descarga, se tornam contraditórios para regimes de fluxo viscosos para baixos números de Reynolds.

1.3. Revisão da Literatura

Vários pesquisadores, que serão citados a seguir, já estudaram o problema do escoamento incompressível de um fluido viscoso em condutos constando de expansões abruptas ou restrições do fluxo. Foi utilizada uma gama relativamente grande de soluções numéricas, tendo em vista a dificuldade em se conseguir soluções analíticas do problema, devido à forma altamente não linear das equações de Navier-Stokes.

No conjunto dessas soluções numéricas, a maioria delas é voltada ao caso do escoamento bidimensional, plano ou axissimétrico com incidência maior no escoamento plano, o qual implica em um menor número de singularidades em seu tratamento. Segundo a maioria dos autores, o método de solução adotado é baseado na adimensionalização e discretização das equações de Navier-Stokes e da conservação da massa na forma de diferenças finitas. Macagno e Hung |1|; Fromm |2|; Roache |3|; Hirt e Romero |4|; Harlow e Welch |5|; Liou |6| utilizaram as equações discretizadas na forma classificada como "conservativa", enquanto que Cheng et al |7|; Lee e Fung |8|; Mills |9| utilizaram equações "não-conservativas". No que concerne às variáveis independentes, com exceção de Hirt et al |4|; Harlow e Welch |5|; Liou |6| que usaram o método das "variáveis primiti-

vas", todos os demais utilizaram as equações da vorticidade e função de corrente.

Quanto ao regime do escoamento dos trabalhos em apreço, os mesmos são enquadrados em três maneiras diferentes, a saber:

I - Regime permanente:

I.a) Abordagem estacionária, na qual o termo da variação temporal é sumariamente eliminado da equação fundamental.

I.b) Abordagem transitória, onde a solução estacionária é aproximada em convergência assintótica, pela integração numérica das equações, conservando-se as parcelas das variações temporais.

II - Regime transitório:

Abordagem para solução de problemas que envolvem variações temporais, onde as soluções acíclicas ou cíclicas são obtidas por integração numérica como no caso anterior, porém com tempo especificado a partir de um referencial temporal, ou num determinado período cíclico.

Abordagem do tipo (I.a) foi utilizada por Lee |8|; Mills |9| e Roache |20|, enquanto Macagno e Hung |1|; Cheng et al |7| e Liou |6| utilizaram o método (I.b). Finalmente Fromm |2|; Hirt et al |4| e Harlow e Welch |5|, desenvolveram algoritmos para resolver problemas do tipo (II).

No que tange às condições de contorno utilizadas, encontram-se:

a - Para contornos rígidos

Utiliza-se velocidade nula junto da parede (condição de não deslissamento), implicando em função de corrente nula e formulação especial para a função vorticidade, nos trabalhos que utilizam o método da vorticidade-função de corrente. Quanto a este tipo de condição, houve bastante divergência com relação aos autores consultados. Macagno e Hung |1| e Roache |3| com coordenadas cartesianas, Lee e Fung |8| e Mills |9| coordenadas cilíndricas, utilizaram as equações fundamentais para fornecer as expressões da vorticidade em termos dos valores da função de corrente nos pontos junto à parede. Para a obtenção das derivadas de maior ordem, expandiram a fun

ção vorticidade e a função de corrente em série de Taylor em torno de seus valores junto da parede, com erro de truncamento da ordem de h^3 (dimensão característica da célula de discretização). Cheng et al [7] expandiram a vorticidade em série de Taylor até segunda ordem, em coordenadas cartesianas, com erro de truncamento da ordem de h^2 . Já Roache [3] fez um estudo utilizando os dois desenvolvimentos já citados, acrescentando a estes, uma expansão em série de Taylor até primeira ordem, que segundo o autor, é o método mais comumente usado. Neste estudo de Roache [3], todos os três métodos foram desenvolvidos em coordenadas cartesianas. Para o método das variáveis primárias, as condições a serem impostas são a da zeragem pura e simples das velocidades normais e a utilização de velocidades tangenciais virtuais negativas, o que torna nula a velocidade na parede, segundo Fromm [2], Hirt et al [4], Harlow e Welch [5] e Liou [6].

b - Para a seção de entrada

Utiliza-se um perfil de velocidades parabólico plenamente desenvolvido. Quanto a esta condição, houve total unanimidade, com exceção de Roache [3] que sugere além de fluxo de Poiseuille, outras condições com base nos perfis de camada limite. Macagno e Hung [1] foram os únicos que fixaram com exatidão a localização desta seção, situando-se distante do obstáculo, de um comprimento equivalente a $3/4$ da largura do conduto a montante. Os demais autores localizaram-na a uma distância suficiente, de forma que os vórtices na região de interesse não sofressem influência em suas características.

c - Para a seção de saída

Utiliza-se um perfil de velocidades parabólico. Novamente houve total unanimidade quanto ao tipo de perfil e localização da mesma (idêntica ao caso mais genérico adotado para a seção de entrada), só havendo alguma variação na maneira de se fixarem os valores para a distribuição parabólica. Enquanto Lee [8] e Mills [9] simplesmente impõem perfil parabólico plenamente desenvolvido, os demais optam por um perfil parabólico obtido por expansão em série de Taylor, até segunda ordem, em torno da antepenúltima seção próxima à saída.

d - Pontos de quina

Com relação aos pontos côncavos, ocorreu unanimidade na escolha de valores nulos para a função de corrente, bem como para a vorticidade, no método que faz uso destes parâmetros. Já para os pontos de quina convexos, ocorreram novas divergências. Roache [3] e Mills [9] sugerem o uso de dois pares de valores da função vorticidade nestes nós, correspondentes às porções a montante e a jusante da seção em estudo. Já Macagno e Hung [1], justificando que a separação na expansão torna o fluxo quase paralelo ao eixo de simetria, usam somente o valor obtido para o contorno paralelo a este eixo. Por último, Cheng et al [8]; [14] sugerem que os valores para estes pontos sejam obtidos pela combinação aditiva das condições de contornos paralelos e perpendiculares ao eixo de simetria.

e - Contornos simétricos

Para esta condição, mais uma vez houve um consenso comum a todas as publicações consultadas, que consiste em se impor valor constante da função de corrente (imposição advinda da própria definição deste parâmetro) e valor nulo para a função vorticidade.

No que se refere ao critério de convergência para a fiscalização do processo iterativo, praticamente não houve concordância dos critérios adotados, ou seja, Macagno e Hung [1] adotaram o seguinte critério: "O erro relativo da função de corrente na linha de centro; entre os valores correspondentes a esta função para 10 iterações sucessivas, não deve exceder 15×10^{-6} . O erro relativo da função vorticidade junto da parede, entre os valores correspondentes a esta função, para 10 iterações consecutivas, não deve exceder a 1×10^{-4} (para o caso da abordagem transitória, o critério de convergência foi relaxado, com o propósito de se diminuir o tempo de computação)". Enquanto que Cheng et al [7]; [14] adotaram o seguinte critério: "O módulo da diferença entre os valores da função de corrente entre uma iteração e a anterior, deve ser menor do que o maior dos valores ($|\psi_\phi| / 1000$) e 5×10^{-4} ". De outra parte, Lee e Fung [8] recomendam que "a diferença em módulo entre os valores de duas iterações sucessivas deve ser menor do que 1×10^{-5} para a função de corrente e 5×10^{-4} para a função vorticidade". Por último, Mills [9] sugere que o "erro relativo do maior valor da grandeza em verificação, não deve exceder a 3×10^{-5} , para a função de corrente, e 1×10^{-4} para a função vorticidade, entre duas iterações con

secutivas". Para os trabalhos consultados, nos quais a abordagem é transitória, houve novo consenso em torno dos critérios de estabilidade de von Neumann, segundo Roache [3] e Fromm [2]. Por outro lado, Hirt et al [4] faz uso de seu próprio critério. Para os casos de abordagem estacionária, Roache [3] sugere os critérios de von Neumann e Hirt [4], enquanto que Mills [9] acata o critério sugerido por Thom e Apelt [13], que relaciona o tamanho máximo da malha com o número de Reynolds.

No que diz respeito ao tamanho da malha utilizada, Macagno e Hung [1] testaram três tamanhos adimensionais de malhas, a saber: 1/8, 1/16 e 1/32. De sua parte, Mills [9] utilizou-se de dois tamanhos: 1/8 e 1/16. Por outro lado, Liou [6], Lee e Fung [8] e Cheng et al [14], utilizaram-se de um único tamanho de malha, sendo: 1/10, 1/8 e 1/20, respectivamente.

Encerrando esta revisão sintetizada da literatura consultada, tabularam-se os números de Reynolds máximos obtidos para os respectivos trabalhos dos diversos autores em ordem crescente:

Referência	Tipo da Seção de Estudo	Malha Mínima Adimensional	Número de Reynolds máximo
Lee e Fung	Obstáculo sinusoidal	1/8	25
Mills	Placa de orifício	1/16	25
Liou	Obstáculo assimétrico	1/10	25
Cheng	Obstáculo quadrado	1/20	41,7
Macagno e Hung	Expansão abrupta	1/32	166,5

onde o número de Reynolds máximo apresentado, baseia-se na velocidade de média e no diâmetro (ou largura) máximo do conduto.

1.4. Caracterização do escoamento

Para o presente trabalho, o escoamento a ser estudado é caracterizado pelas seguintes propriedades:

- 1) O escoamento é axissimétrico - a condição de axissimetria por si só já estabelece uma importante simplificação na formulação matemática, que é a da consideração do escoamento bidimensional.
- 2) O escoamento é incompressível - esta premissa pressupõe a inexistência de variação local ou temporal da massa específica.

- 3) O escoamento é estacionário - estabelece que todos os parâmetros e demais propriedades são invariantes com o tempo.
- 4) O número de Reynolds é pequeno - com isto restringe-se a escoamentos laminares, caracterizados pela ausência de flutuações dos parâmetros a serem analisados.
- 5) O fluido é Newtoniano - este estudo será aplicado apenas aos fluidos que obedecem à Lei de Newton da viscosidade, no caso de escoamentos paralelos, ou à Lei de Stokes da viscosidade, no caso de escoamentos laminares mais gerais.
- 6) O fluido é homogêneo - a hipótese do contínuo é válida.
- 7) O escoamento é geometricamente caracterizado por um fluxo através de um obstáculo quadrado de cantos vivos, disposto axissimetricamente em um duto circular de paredes rígidas e impermeáveis, de acordo com a Figura 1, sujeito a um gradiente de pressão constante, longe do obstáculo. Para este trabalho, o obstáculo tem raio interno e comprimento medindo metade do raio interno do duto.

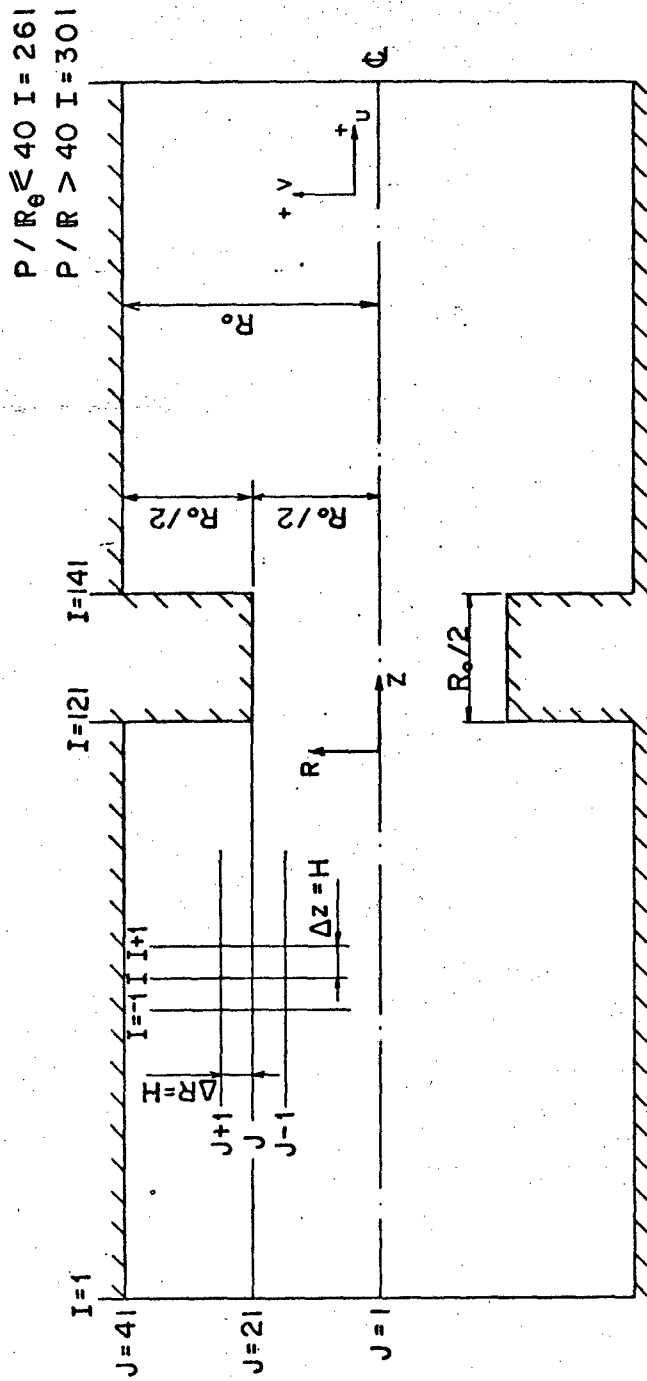


Fig. 01 = GEOMETRIA DO DUTO CIRCULAR COM NOTAÇÃO INDICIAL.

CAPÍTULO II

MÉTODOS UTILIZADOS

O método utilizado neste trabalho fundamenta-se na solução das equações do transporte da vorticidade, e é usualmente conhecido como "método da função de corrente e vorticidade".

Na utilização deste método, dois critérios foram abordados; um normalmente conhecido como método estacionário, no qual não se leva em conta a variação temporal das variáveis que o caracterizam, e o outro, designado como método transiente, que, utilizando a variação temporal, se aproxima da solução estacionária assintoticamente, pela iteração numérica das equações completas.

Para efeito de denominação, os dois métodos serão identificados por:

- I - Método da função de corrente e da vorticidade - solução estacionária.
- II - Método da função de corrente e da vorticidade - aproximação transiente.

2.1. Fundamentação Matemática

2.1.1. Equações Governantes

O escoamento obedece às equações de Navier-Stokes, que, em função da bidimensionalidade axissimétrica, será utilizada em coordenadas cilíndricas. Seja (r, z) um par de coordenadas cilíndricas, com eixo z coincidente com o eixo de simetria do duto. Na região $0 \leq r \leq R$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$; $-\infty < z < \infty$, são válidas:

Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

Equações do Movimento na sua forma menos "conservativa" segundo Cheng et al |7| e Mills |9|:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2b)$$

onde v é velocidade radial, u é a velocidade axial, p é a pressão, ρ é a densidade, ν é a viscosidade cinemática do fluido e t é a variável de tempo real.

Identificando R_0 como o comprimento característico, e U_0 a velocidade máxima na linha de centro do fluxo não perturbado pelo obstáculo, como a velocidade característica do problema, são obtidas as seguintes variáveis adimensionais:

$$R = \frac{r}{R_0}, \quad Z = \frac{z}{R_0}, \quad H = \frac{h}{R_0}, \quad U = \frac{u}{U_0}, \quad V = \frac{v}{U_0}, \quad P = \frac{p R_0}{\rho \nu U_0}, \quad T = \frac{t}{(R_0/U_0)}$$

onde h é a largura real da malha.

Em sua forma adimensional, as equações governantes resultam (ver Apêndice I):

Equação da Continuidade:
$$\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{V}{R} + \frac{\partial V}{\partial R} = 0 \quad (3)$$

Equação do Movimento:

$$\frac{\partial V}{\partial T} + V \frac{\partial V}{\partial R} + U \frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{1}{Re} \left(- \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right) \quad (4a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} + V \frac{\partial U}{\partial R} + U \frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{1}{Re} \left(- \frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right) \quad (4b)$$

onde o parâmetro adimensional Re é o número de Reynolds definido por:

$$Re = \frac{U_0 R_0}{\nu} \quad (4c)$$

Introduzindo-se a função de corrente de Stokes Ψ

$$V = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \quad (4d)$$

$$U = - \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad (4e)$$

e a função vorticidade Ω

$$\Omega = \frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \quad (4f)$$

onde, utilizando-se a função de corrente de Stokes, pode ser reescrita como:

$$\Omega = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} \right) - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad (5)$$

Eliminando-se a pressão nas equações (4), tendo em vista a equação (3), bem como os conceitos da função de corrente e vorticidade (ver Apêndice I), obtêm-se:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T} + V \frac{\partial \Omega}{\partial R} + U \frac{\partial \Omega}{\partial Z} - \frac{\Omega V}{R} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial R} - \frac{\Omega}{R^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z^2} \right] \quad (6)$$

ou em sua forma "conservativa", segundo Roache [3], fornece:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T} + \frac{\partial(\Omega V)}{\partial R} + \frac{\partial(\Omega U)}{\partial Z} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial R} - \frac{\Omega}{R^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z^2} \right] \quad (7)$$

que juntamente com a equação (5) são conhecidas como as equações de transporte de vorticidade.

A diferença básica entre os métodos I e II consiste justamente na variação temporal da vorticidade, ou seja, da parcela $\frac{\partial \Omega}{\partial T}$ das equações (6) e (7). No método I, esta parcela é sumariamente eliminada da equação, caracterizando o estado estacionário da solução, enquanto que no método II, a mesma é conservada, e a solução estacionária é obtida através da convergência assintótica da integração numérica com relação ao tempo.

Uma vez que dificuldades matemáticas impedem uma solução analítica, o método das diferenças finitas com o auxílio de um computador de alta velocidade é utilizado para obter uma solução numérica. Assim, obtêm-se os seguintes pares de equações:

Método II - Forma não-conservativa

$$\Omega = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} \right) - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T} + V \frac{\partial \Omega}{\partial R} + U \frac{\partial \Omega}{\partial Z} - \frac{\Omega V}{R} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial R} - \frac{\Omega}{R^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z^2} \right]$$

Método II - Forma conservativa

$$\Omega = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} \right) - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T} + \frac{\partial (V\Omega)}{\partial R} + \frac{\partial (U\Omega)}{\partial Z} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial R} - \frac{\Omega}{R^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z^2} \right]$$

Método I - Forma não-conservativa

$$\Omega = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} \right) - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial R}$$

(10)

$$V \frac{\partial \Omega}{\partial R} + U \frac{\partial \Omega}{\partial Z} - \frac{\Omega V}{R} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial R} - \frac{\Omega}{R^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z^2} \right]$$

Método I - Forma conservativa

$$\Omega = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} \right) - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial R}$$

(11)

$$\frac{\partial (V\Omega)}{\partial R} + \frac{\partial (U\Omega)}{\partial Z} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial R} - \frac{\Omega}{R^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z^2} \right]$$

E mais as condições de contorno apropriadas, são convertidas em equações análogas na forma de diferenças finitas, quando o campo computacional é dividido em células quadradas de largura H , como mostrado na Figura 1.

Os diversos pares de equações podem ser discretizados na forma de diferenças finitas, utilizando-se a derivação numérica ascendente para a parcela temporal, e derivada central para os termos espaciais (Método "FTCS" - Forward Time and Centered Space Method), que segundo Roache [3], é menos sujeito à instabilidades numéricas do que as formas de diferenças centrais temporais, que são incondicionalmente instáveis.

Dessa forma (ver Apêndice II), obtêm-se:

$$\Psi_{j,i} = \frac{1}{4} \left[(\Psi_{j+1,i} + \Psi_{j-1,i} + \Psi_{j,i+1} + \Psi_{j,i-1}) - \right. \quad (8a)$$

$$\left. - \frac{H}{2R_j} (\Psi_{j+1,i} - \Psi_{j-1,i}) - H^2 R_j \Omega_{j,i} \right]$$

$$\Omega_{j,i}^{n+1} = \Omega_{j,i} + \frac{\Delta T}{4H^2 R_j} \left\{ (\Psi_{j+1,i} - \Psi_{j-1,i}) (\Omega_{j,i+1} - \Omega_{j,i-1}) - \right.$$

$$\left. - (\Psi_{j,i+1} - \Psi_{j,i-1}) (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) + \right.$$

$$\left. + \alpha \left[4R_j (\Omega_{j+1,i} + \Omega_{j-1,i} + \Omega_{j,i+1} + \Omega_{j,i-1}) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{2HRe}{R_j} (\Psi_{j,i+1} - \Psi_{j,i-1}) - \frac{4H^2}{R_j} - 16 R_j \right] \Omega_{j,i} + \right.$$

$$\left. + 2H (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) \right\}$$

$$\Psi_{j,i} = \frac{1}{4} \left[(\Psi_{j+1,i} + \Psi_{j-1,i} + \Psi_{j,i+1} + \Psi_{j,i-1}) - \quad (9a)$$

$$\left. - \frac{H}{2R_j} (\Psi_{j+1,i} - \Psi_{j-1,i}) - H^2 R_j \Omega_{j,i} \right]$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{j,i}^{n+1} = & \Omega_{j,i} + \frac{\Delta T}{4H^2} \left\{ \frac{\Omega_{j-1,i}}{R_{j-1}} (\Psi_{j-1,i+1} - \Psi_{j-1,i-1}) - \right. \\
& - \frac{\Omega_{j+1,i}}{R_{j+1}} (\Psi_{j+1,i+1} - \Psi_{j+1,i-1}) + \frac{\Omega_{j,i+1}}{R_j} (\Psi_{j+1,i+1} - \Psi_{j-1,i+1}) - \\
& - \frac{\Omega_{j,i-1}}{R_j} (\Psi_{j+1,i-1} - \Psi_{j-1,i-1}) + \alpha \left[4(\Omega_{j+1,i} + \Omega_{j-1,i} + \Omega_{j,i+1} + \right. \\
& \left. \left. + \Omega_{j,i-1}) - 4 \left(\frac{4R_j^2 + H^2}{R_j^2} \right) \Omega_{j,i} + \frac{2H}{R_j} (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) \right] \right\}
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \frac{1}{Re}$

$$\begin{aligned}
\Psi_{j,i} = & \frac{1}{4} \left[(\Psi_{j+1,i} + \Psi_{j-1,i} + \Psi_{j,i+1} + \Psi_{j,i-1}) - \right. \\
& \left. - \frac{H}{2R_j} (\Psi_{j+1,i} - \Psi_{j-1,i}) - H^2 R_j \Omega_{j,i} \right] \tag{10a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{j,i} = & \left[1 + \frac{H^2}{4R_j^2} - \frac{H\text{Re}}{8R_j^2} (\Psi_{j,i+1} - \Psi_{j,i-1}) \right]^{-1} \left\{ \frac{1}{4} (\Omega_{j+1,i} + \right. \\
& + \Omega_{j-1,i} + \Omega_{j,i+1} + \Omega_{j,i-1}) + \frac{H}{8R_j} (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) - \\
& - \frac{\text{Re}}{16R_j} \left[(\Psi_{j,i+1} - \Psi_{j,i-1}) (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) - \right. \\
& \left. \left. - (\Psi_{j+1,i} - \Psi_{j-1,i}) (\Omega_{j,i+1} - \Omega_{j,i-1}) \right] \right\} \\
\Psi_{j,i} = & \frac{1}{4} \left[(\Psi_{j+1,i} + \Psi_{j-1,i} + \Psi_{j,i+1} + \Psi_{j,i-1}) - \right. \\
& \left. - \frac{H}{2R_j} (\Psi_{j+1,i} - \Psi_{j-1,i}) - H^2 R_j \Omega_{j,i} \right] \tag{11a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{j,i} = & \frac{1}{4} \left\{ \text{Re} \left[\frac{\Omega_{j-1,i}}{R_{j-1}} (\Psi_{j-1,i+1} - \Psi_{j-1,i-1}) - \frac{\Omega_{j+i,1}}{R_{j+1}} (\Psi_{j+1,i+1} - \right. \right. \\
& - \Psi_{j+1,i-1}) + \frac{\Omega_{j,i+1}}{R_j} (\Psi_{j+1,i+1} - \Psi_{j-1,i+1}) - \frac{\Omega_{j,i-1}}{R_j} (\Psi_{j+1,i-1} - \\
& \left. \left. - \Psi_{j-1,i-1}) \right] + 4 (\Omega_{j+1,i} + \Omega_{j-1,i} + \Omega_{j,i+1} + \Omega_{j,i-1}) + \right. \\
& \left. + \frac{2H}{R_j} (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) \right\} \times \left[\frac{4R_j^2 + H^2}{R_j^2} \right]^{-1}
\end{aligned}$$

Observação: Nas equações apresentadas não se caracterizou com índice alto o número de iteração, uma vez que na aproximação transiente, o índice alto $n+1$ cumpre este papel, e para as soluções estacionárias, o mesmo fica implícito no próprio processo iterativo, pois em cada iteração o último valor conhecido é o utilizado. Este procedimento foi adotado com a finalidade de se poupar memória para armazenamento.

2.1.2 Condições de contorno

Em concordância com Roache [3], os mais variados tipos de escoamento, são soluções de uma mesma equação diferencial parcial, ou seja, das equações de Navier-Stokes, e se distinguem entre si, somente pelas condições inicial e de contorno, bem como por parâmetros de fluxo como o número de Reynolds. O mesmo autor alerta quanto à dificuldade de obtenção de condições de contorno que resultem em métodos realistas, precisos e estáveis. Com o escopo de se fazer sentir esta dificuldade, para Reynolds igual a cinco e trinta foram utilizadas as condições de contorno mais comumente usadas na literatura consultada, para confrontação de resultados.

a) Para os contornos rígidos:

A condição de contorno da função de corrente e da vorticidade junto a contornos rígidos é obtida através da expansão em série de Taylor, a partir da parede, utilizando-se os valores do campo já calculados. Dependendo da ordem desta expansão, obter-se-ão condições de contorno para a vorticidade dada por equações de primeira ordem e equações de segunda ordem, segundo Roache [3], (como deduzidas no Apêndice III).

Como condição de contorno de primeira ordem fez-se uso das equações (12 a,b,c).

Para contornos horizontais:

$$\Omega_{j,i} = 2 \left[\frac{\psi_{j-1,i} - \psi_{j,i}}{R_j H^2} \right] + O(H^2) \quad (12a)$$

Para contornos verticais com face à esquerda:

$$\Omega_{j,i} = 2 \left(\frac{\psi_{j,i-1} - \psi_{j,i}}{R_j H^2} \right) + 0 \quad (H^2) \quad (12b)$$

Para contornos verticais com face à direita:

$$\Omega_{j,i} = 2 \left(\frac{\psi_{j,i+1} - \psi_{j,i}}{R_j H^2} \right) + 0 \quad (H^2) \quad (12c)$$

Para condição de contorno de segunda ordem, optou-se pela equação desenvolvida por Jensen (1959) e utilizada também por Cheng et al |7| em coordenadas cartesianas. Para escoamento axissimétrico resultam as equações (13a,b,c).

Para paredes horizontais:

$$\Omega_{j,i} = \frac{1}{H^2} \left[\frac{0,5}{R_{j-1}} (\psi_{j,i} - \psi_{j-2,i}) - \frac{4}{R_{j-1/2}} (\psi_{j,i} - \psi_{j-1,i}) \right] + 0 \quad (H^2) \quad (13a)$$

Para contornos verticais com face à esquerda:

$$\Omega_{j,i} = \frac{0,5}{R_j H^2} (-7\psi_{j,i} + 8\psi_{j,i-1} - \psi_{j,i-2}) + 0 \quad (H^2) \quad (13b)$$

Para contornos verticais com face à direita:

$$\Omega_{j,i} = \frac{0,5}{R_j H^2} (-7\psi_{j,i} + 8\psi_{j,i+1} - \psi_{j,i+2}) + 0 \quad (H^2) \quad (13c)$$

Uma terceira condição de contorno de segunda ordem, desenvolvida por Thom e Lester [11], é baseada na expansão em série de Taylor, tanto da função de corrente como da vorticidade, em torno dos valores da parede. Utilizam-se as equações governantes para fornecer as expressões para as derivações de maior ordem. Na forma utilizada por Mills [9], resulta, para contornos horizontais:

$$\Omega_{j,i} = \frac{\frac{6}{H^2} (\psi_{j-1,i} - \psi_{j,i}) - R_{j-1}\Omega_{j-1,i}}{2 - \frac{H}{R_j} - \frac{H^2}{4R_j^2}} + 0 \quad (H^3) \quad (14a)$$

Para contornos com face à esquerda

$$\Omega_{j,i} = \frac{3}{R_j H^2} (\psi_{j,i-1} - \psi_{j,i}) - \frac{1}{2}\Omega_{j,i-1} + 0 \quad (H^3) \quad (14b)$$

Para contornos verticais com face à direita:

$$\Omega_{j,i} = \frac{3}{R_j H^2} (\psi_{j,i+1} - \psi_{j,i}) - \frac{1}{2}\Omega_{j,i+1} + 0 \quad (H^3) \quad (14c)$$

b) Para a seção de entrada:

A escolha da posição da seção de entrada é feita de maneira a tornar desprezíveis os efeitos devido à presença do obstáculo naquela seção. Com este propósito estabeleceu-se que a seção de entrada seria posicionada a montante da obstrução, de um comprimento

mento igual a $3R_0$. Nesta seção ficou estabelecido que o escoamento é plenamente desenvolvido e de perfil de velocidades parabólico (perfil de Poiseuille). Portanto, nesta seção:

$$U = 1 - R^2 \quad (15a)$$

$$V = 0 \quad (15b)$$

A função de corrente é dada pela integral da velocidade, através do fluxo

$$\psi = - \int_0^R RUdR + c \quad (16a)$$

Como foi colocado no parágrafo referente à condição de contorno, para as fronteiras rígidas, ψ é tomada como zero junto à parede, porém R é nulo na linha de centro e não na parede. Portanto, para $R = 0$, a integral é nula, de maneira a tornar a função de corrente no eixo de simetria igual à constante de integração. No contorno, ou seja, em $R = 1$

$$\psi|_{R=1} = 0 = - \int_0^1 RUdR + \psi_\phi \quad (16b)$$

$$\psi_\phi = \int_0^1 R(1-R^2) dR \therefore \psi_\phi = 0,25 \quad (16c)$$

Este valor da função de corrente na linha de centro não só se aplica para a seção de entrada, como para todas as demais seções, uma vez que na linha de centro a função de corrente é uma constante e igual à constante de integração. Para qualquer outro ponto fora da linha de centro na seção de entrada, a função de corrente será dada por:

$$\Psi = - \int_0^R R(1-R^2) dR + \Psi_\phi \quad \therefore \Psi = \frac{1}{4} (R^4 - 2R^2) + \Psi_\phi \quad (17)$$

Para a vorticidade, uma vez que nesta seção de entrada $\frac{\partial V}{\partial Z} = 0$, resulta:

$$\Omega = \frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R}$$

$$\Omega = - \frac{\partial}{\partial R} (1-R^2) \quad \therefore \Omega = 2R \quad (18)$$

c) Para a seção de saída

O mesmo critério utilizado para o posicionamento da seção de entrada, foi seguido também para a seção de saída. Assim, até números de Reynolds iguais a 40, esta última foi fixada também a uma distância igual a $3R_0$; enquanto que para números de Reynolds maiores do que 40, este comprimento foi aumentado para $4R_0$. Estes comprimentos foram baseados em experimentos computacionais realizados pelos autores das referências consultadas, e também em comprimentos que resultassem em um número de nós que não resultasse num tempo de processamento muito longo. Além disso, nesta região, ao invés de simplesmente se impor um fluxo de perfil parabólico, utilizaram-se as condições de Macagno e Hung [1], que consistem numa expansão em série de Taylor até segunda ordem em torno de (I-2) para I, usando um incremento de (2H), segundo Roache [3]. Este procedimento resulta numa condição de contorno menos restritiva, a qual permite absorver pequenas deformações do perfil parabólico, caso o fluxo não tenha sido completamente restabelecido. Portanto, para a seção de saída vale:

$$\Psi_{j,i} = \Psi_{j,i-4} - 2\Psi_{j,i-3} + 2\Psi_{j,i-1} \quad (19)$$

$$\Omega_{j,i} = \Omega_{j,i-4} - 2\Omega_{j,i-3} + 2\Omega_{j,i-1} \quad (20)$$

d) Para o eixo de simetria

Devido à axissimetria da configuração do escoamento com relação ao eixo Z, basta considerar apenas sua metade superior.

Como foi constatado, quando se discutiu a seção de entrada, a função de corrente é constante em toda linha de centro. Portanto $\Psi_\phi = 0,25$.

No caso da vorticidade, $\Omega = \frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} = 0$, também devido à simetria axial.

e) Para os pontos de quina

Para os pontos de quina côncavos, a vorticidade é nula, uma vez que $\frac{\partial U}{\partial R}$ e $\frac{\partial V}{\partial Z}$ são iguais a zero. O mesmo não se pode dizer com respeito aos pontos de quina convexos.

Cheng et al [7] recomenda que a equação de contorno para os pontos de quina convexos, seja uma combinação dada pela adição das equações correspondentes ao contorno horizontal e o contorno vertical que contém o ponto em análise. Roache [3] e Mills [9], entretanto, sugerem que os valores ao invés de serem contínuos como recomendado acima, sejam tomados descontinuamente. Assim, supõe-se existir dois valores para a função vorticidade, em cada nó correspondente às quinas; um valor correspondente a uma equação de contorno vertical e outra correspondente a contorno horizontal, dependendo de que região esteja sendo varrida pelo processo iterativo.

2.2. Critério de Convergência

Devido à inexistência de um critério único como finalizador do processo iterativo, optou-se por aquele utilizado por Cheng et al [7] e Lee e Fung [8]. A razão de se escolher este em particular, fundamenta-se em sua característica menos restritiva, possibilitando a utilização de malhas razoavelmente finas, com tempos de processamentos não excessivamente longos. Assim, para a abordagem independente do tempo, os parâmetros de convergência a serem verificados são:

$$\text{Para a função de corrente: } |\psi_{j,i}^{k+1} - \psi_{j,i}^k| < 1 \times 10^{-5} \quad (21)$$

$$\text{Para a função vorticidade: } |\omega_{j,i}^{k+1} - \omega_{j,i}^k| < 5 \times 10^{-4} \quad (22)$$

Similarmente a um procedimento adotado por Macagno e Hung [1] com o intuito de se poupar tempo de computação, para a aproximação dependente do tempo, fez-se uso de um critério de convergência menos rígido do que aquele utilizado para se obter a solução estacionária acima. Portanto, o critério adotado para se interromper o processo iterativo na abordagem transitória foi:

$$\text{Para a função de corrente: } |\psi_{j,i}^{k+1} - \psi_{j,i}^k| < 5 \times 10^{-4} \quad (23)$$

$$\text{Para a função vorticidade: } |\omega_{j,i}^{k+1} - \omega_{j,i}^k| < 1 \times 10^{-3} \quad (24)$$

Deve-se salientar, ainda, que os critérios seguidos por Cheng et al [7] e Mills [9], apesar de diferirem na formulação, concordam bastante bem em termos numéricos. Por outro lado, o critério adotado por Macagno e Hung [1], embora semelhante ao adotado por Mills [9] em sua formulação, é muito mais restritivo.

2.3. Critérios de Estabilidade

Ao se resolver numericamente as equações diferenciais parciais de Navier-Stokes, instabilidades ocorrerão, tanto devido a erros de arredondamento de máquina, bem como por distúrbios transversais em um problema bidimensional real. Para o caso das equações que incluem o termo de variação temporal, uma parte destas instabilidades é dependente do tempo e é denominada instabilidade dinâmica. Esta pode ser removida pela redução do incremento de tempo. Por outro lado, a outra parte que não é dependente do tempo, é fun-

ção do tipo de equação utilizada, e de sua forma análoga em diferenças finitas. Assim, as equações contendo só sua parcela advectiva podem tornar-se estáveis ou instáveis, dependendo da direção de crescimento dos erros espaciais com relação à velocidade. Nestes casos não ocorre redução da instabilidade ao se diminuir o incremento de tempo, mas sim mudando-se o tipo da equação na forma de diferenças finitas, como por exemplo, utilizando-se "diferenciação a montante" (Upstream differencing). Já as equações contendo somente os termos de difusão, são normalmente estáveis. Agora, quando ambos os termos, advecção e difusão estão presentes, eles se interagem, e a partir daí alguns critérios de estabilidade se fazem necessários, para se evitar que ocorram instabilidades tanto estáticas como dinâmicas. Os critérios utilizados nas abordagens dependentes do tempo foram:

1 - Análise de estabilidade de Hirt [12]

$$\text{Estabilidade dinâmica: } \Delta T < \frac{H^2}{2\alpha} \quad (25)$$

$$\text{Estabilidade estática: } \Delta T < \frac{2\alpha}{U^2} ; \Delta T < \frac{2\alpha}{V^2} \quad (26)$$

2 - Para derivada a montante: ("Upstream Differencing")

$$\text{Estabilidade dinâmica: } \Delta T < \frac{1}{\frac{4\alpha}{H^2} + \frac{|U|}{H} + \frac{|V|}{H}} \quad (27)$$

3 - Análise de estabilidade de von Neumann [7]:

$$\text{Estabilidade dinâmica: } \Delta T < \frac{H}{(|U| + |V|_{\text{máx}})} \quad (28)$$

onde $\alpha = \frac{1}{Re}$.

Para a seleção do incremento de tempo a ser utilizado na solução da abordagem transiente, seguindo-se Roache [7], os três critérios são aplicados a todos os pontos da malha, retendo-se o valor do incremento temporal para aquele último mais restritivo. Para as equações em sua forma estacionária, seguiu-se um critério desenvolvido por Thom e Apelt [13], que se baseia na análise do efeito causado pela introdução de um pequeno distúrbio num campo de vorticidade bidimensional. Este critério especifica que:

$$Rs^2 < 20 \quad (29)$$

onde Rs , o número de Reynolds da célula local, é definido por $Rs = \frac{uh}{2\nu}$, onde u é a velocidade local.

Para as equações na forma estacionária unidimensionais, Roache [3] sugere $\bar{R}c < 2$, sendo $\bar{R}c = \frac{UH}{\alpha} \dots (30)$. Este mesmo autor cita Fromm [2] recomendando para escoamentos bidimensionais $\bar{R}c < 4 \dots (31)$, com $\bar{R}c = \frac{(|U| + |V|)H}{\alpha}$, onde se percebe que este último é menos restritivo que o anterior. Ainda segundo Roache [3], nenhum destes critérios ou análises são realmente adequados para a computação prática, e por isto sugere utilizar-se de uma fração, usualmente 0,8, dos valores analíticos obtidos para a estabilidade dinâmica. No início, frações menores ainda, são recomendadas. Quanto aos critérios recomendados para as equações provenientes da formulação estacionária, estes podem fornecer alguma indicação de instabilidade, em áreas julgadas a priori, aparentemente instáveis.

2.4. Cálculo da Pressão e da Taxa de Cisalhamento

Colocando-se as equações (3); (4a) e (4b) na forma:

$$\frac{\partial P}{\partial R} + ReV \frac{\partial V}{\partial R} + ReU \frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{V}{R} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \quad (32a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial Z} + ReV \frac{\partial U}{\partial R} + ReU \frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \quad (32b)$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} + \frac{V}{R} = - \frac{\partial U}{\partial Z} \quad (33)$$

A partir da equação (32a) e (33), obtêm-se:

$$\frac{\partial P}{\partial R} + \text{Re} V \frac{\partial V}{\partial R} = \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial R \partial Z} - \text{Re} U \frac{\partial V}{\partial Z}$$

Adicionando-se em ambos os membros da equação $\text{Re} U \frac{\partial U}{\partial R}$, obtêm-se:

$$\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\text{Re}}{2} 2V \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\text{Re}}{2} 2U \frac{\partial U}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) - \text{Re} U \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \right)$$

Introduzindo-se o conceito de vorticidade e função de corrente de Stokes:

$$\frac{\partial P}{\partial R} + \text{Re} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{U^2}{2} \right) = \frac{\partial \Omega}{\partial Z} + \text{Re} \frac{\Omega}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R}$$

ou ainda:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(P + \text{Re} \frac{V^2}{2} + \text{Re} \frac{U^2}{2} \right) = \frac{\partial \Omega}{\partial Z} + \text{Re} \frac{\Omega}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad (34)$$

Tendo-se em conta que $B = P + \text{Re} \frac{V^2}{2} + \text{Re} \frac{U^2}{2}$, é a pressão total dada pela soma de Bernoulli, obtêm-se finalmente:

$$\frac{\partial B}{\partial R} = \frac{\partial \Omega}{\partial Z} + \text{Re} \frac{\Omega}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad (35)$$

Procedendo-se analogamente com a equação (32b), obtém-se

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = - \frac{\partial \Omega}{\partial R} - \frac{\Omega}{R} + \text{Re} \frac{\Omega}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \quad (36)$$

Integrando-se a equação (35) ao longo de linhas perpendiculares ao eixo de simetria, e passando-se para a forma de diferenças finitas, com derivadas descendentes para o termo $\frac{\partial \Psi}{\partial Z} \Big|_{j,i+1}$ e tendo-se em conta que $\Omega_{j-1,i+1} = 2\Omega_{j,i+1} - \Omega_{j+1,i+1}$ e $\Omega_{j-1,i} = \Omega_{j,i} - \Omega_{j+1,i}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} B_{j,i+1} = & B_{j,i} - \frac{1}{4} (3\Omega_{j+1,i+1} - 4\Omega_{j,i+1} + 3\Omega_{j+1,i} - 4\Omega_{j,i}) - \\ & - \frac{H}{2R_j} \times (\Omega_{j,i+1} - \Omega_{j,i}) + \frac{\text{Re}}{4R_j} \left[\Omega_{j,i+1} (\Psi_{j,i-1} - 4\Psi_{j,i} + 3\Psi_{j,i+1}) + \right. \\ & \left. + \Omega_{j,i} (\Psi_{j,i+1} - \Psi_{j,i-1}) \right] \quad (37) \end{aligned}$$

Na linha de centro, a vorticidade e o raio são nulos. Seguindo-se Cheng et al [7], demonstra-se que para a linha de centro vale a relação:

$$\lim_{R_j \rightarrow 0} \frac{H (\Omega_{j,i+1} - \Omega_{j,i})}{2R_j} = 0$$

$$\lim_{R_j \rightarrow 0} \frac{Re}{4R_j} \left[\Omega_{j,i+1} (\Psi_{j,i-1} - 4\Psi_{j,i} + 3\Psi_{j,i+1}) + \right. \\ \left. + \Omega_{j,i} (\Psi_{j,i+1} - \Psi_{j,i-1}) \right] = 0$$

Logo: $B_{j,i+1} = B_{j,i} - \frac{3}{4} (\Omega_{j+1,i+1} + \Omega_{j+1,i})$ (38)

Integrando-se a equação (36) ao longo de linhas paralelas ao eixo de simetria, e passando-se para a forma de diferenças finitas, quando se toma a derivada descendente para a parcela $\left. \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right|_{j+1,i}$, obtêm-se:

$$B_{j+1,i} = B_{j,i} + \frac{1}{4} (\Omega_{j+1,i+1} - \Omega_{j+1,i-1} + \Omega_{j,i+1} - \Omega_{j,i-1}) + \\ + \frac{Re}{4} \left[\frac{\Omega_{j+1,i}}{R_{j+1}} (\Psi_{j-1,i} - 4\Psi_{j,i} + 3\Psi_{j+1,i}) + \frac{\Omega_{j,i}}{R_j} (\Psi_{j+1,i} - \Psi_{j-1,i}) \right] \quad (39)$$

Para os contornos verticais da seção de entrada e da face esquerda do obstáculo, bem como junto à face direita deste último e na seção de saída, a equação (39) deverá ser modificada para:

$$B_{j+1,i} = B_{j,i} + \frac{1}{4} (\Omega_{j+1,i+2} - 4\Omega_{j+1,i+1} + 3\Omega_{j+1,i} + \Omega_{j,i+2} - \\ - 4\Omega_{j,i+1} + 3\Omega_{j,i}) + \frac{Re}{4} \left[\frac{\Omega_{j+1,i}}{R_{j+1}} (\Psi_{j-1,i} - 4\Psi_{j,i} + 3\Psi_{j+1,i}) + \right. \\ \left. + \frac{\Omega_{j,i}}{R_j} (\Psi_{j+1,i} - \Psi_{j-1,i}) \right] \quad (40)$$

Quando se toma derivada ascendente para a parcela $\frac{\partial \Omega}{\partial z}$,

$$\begin{aligned}
 B_{j+1,i} = & B_{j,i} + \frac{1}{4} (\Omega_{j+1,i-2} - 4\Omega_{j+1,i-1} + 3\Omega_{j+1,i} + \Omega_{j,i-2} - \\
 & - 4\Omega_{j,i-1} + 3\Omega_{j,i}) + \frac{Re}{4} \left[\frac{\Omega_{j+1,i}}{R_{j+1}} (\Psi_{j-1,i} - 4\Psi_{j,i} + 3\Psi_{j+1,i}) + \right. \\
 & \left. + \frac{\Omega_{j,i}}{R_j} (\Psi_{j+1,i} - \Psi_{j-1,i}) \right] \quad (41)
 \end{aligned}$$

De acordo com Cheng et al [7], para $j = 1$, tem-se:

$$R_j \lim_{\rightarrow 0} \left[\frac{\Omega_{j,i}}{R_j} (\Psi_{j+1,i} - \Psi_{j-1,i}) \right] = 4(\Psi_{j+1,i} - \Psi_{j,i}) \quad (42)$$

Com as equações (33), (40), (41) e (42) o procedimento para o cálculo da distribuição de pressões é o seguinte: com o campo de pressão nulo tomado à esquerda da seção de entrada ($I=1$), a variação em B ao longo do eixo do duto é determinada a partir da equação (39), enquanto que as variações transversais nas outras seções são obtidas a partir das equações (40), (41) e (42).

Para o caso bidimensional, a tensão de cisalhamento é definida como:

$$\tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad \text{onde,} \quad \tau = \frac{\tau_{rz}}{\rho U_0^2}$$

Adimensionalizando-se, obtêm-se:

$$\tau \rho U^2 = \mu \left[\frac{\partial (U_0 V)}{\partial (R_0 Z)} + \frac{\partial (U_0 U)}{\partial (R_0 R)} \right]$$

$$\tau = \frac{\mu U_0}{\rho U_0^2 R_0} \left[\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial Z} \right] \therefore \tau = \frac{\nu}{U_0 R_0} \left(\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial Z} \right)$$

$$\tau = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial Z} \right) \quad (43)$$

Mas $\frac{\partial V}{\partial Z} = \Omega + \frac{\partial U}{\partial R} \therefore \tau = \frac{1}{Re} \left(2 \frac{\partial U}{\partial R} + \Omega \right)$ (44)

Além disso

$$\frac{\partial U}{\partial R} = -\Omega + \frac{\partial V}{\partial Z} \therefore \tau = \frac{1}{Re} \left(2 \frac{\partial V}{\partial Z} - \Omega \right) \quad (45)$$

Para o escoamento plenamente desenvolvido, na seção de entrada $\left(\frac{\partial V}{\partial Z} = 0 \right)$, e para os contornos horizontais, resulta

$$\tau = -\frac{\Omega}{Re}$$

Para os contornos verticais $\left(\frac{\partial U}{\partial R} = 0 \right)$, obtêm-se

$$\tau = \frac{\Omega}{Re}$$

Passando-se a equação (44) para a forma análoga em diferenças finitas, utilizando-se antes o conceito de função de corrente de Stokes, obtêm-se

$$\tau_{j,i} = \frac{1}{\text{Re}} \left[2 \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{-1}{R_j} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right)_{j,i} + \Omega_{j,i} \right]$$

$$\tau_{j,i} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{2}{R_j^2} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right]_{j,i} - \frac{2}{R_j} \frac{\partial^2 \Psi}{R^2} \Big|_{j,i} + \Omega_{j,i} \right]$$

Donde

$$\tau_{j,i} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{R_j^2 H} (\Psi_{j+1,i} - \Psi_{j-1,i}) - \frac{2}{R_j H^2} (\Psi_{j+1,i} - 2\Psi_{j,i} + \Psi_{j-1,i}) + \Omega_{j,i} \right] \quad (46)$$

Ao longo do eixo do duto, a tensão de cisalhamento é nula, devido à simetria.

2.5. Procedimento Iterativos

2.5.1. Método I - Abordagem estacionária

A rotina utilizada para resolver o sistema de equações (10a) ou (11a) e as respectivas condições de contorno, foi baseada na técnica utilizada por Mills [9], e que se resume no seguinte:

- a) Zeragem de todo o campo de função de corrente e função vorticidade.
- b) Imposição das condições de contorno permanentes para os respectivos parâmetros.
- c) Para as malhas mais finas e números de Reynolds mais elevados, leitura em fita dos valores associados a estas variáveis, correspondentes ao último número de Reynolds em que tenha ocorrido convergência.

- d) Iteração dos valores da função de corrente para o campo interno.
- e) Extrapolação das condições de saída para a função de corrente, utilizando-se a equação (19).
- f) Fixação das condições de contorno rígido para a função vorticidade, em função dos valores da função de corrente para o campo interno.
- g) Extrapolação das condições de saída para a função vorticidade, utilizando-se a equação (20).
- h) Determinação da maior diferença absoluta entre os valores de uma iteração presente e uma iteração anterior, a cada 20 iterações consecutivas.
- i) Verificação desta diferença quanto ao critério de convergência adotado.
- j) Uma vez satisfeito o parâmetro de convergência, determinação dos diversos parâmetros, tais como distribuição do campo de velocidades, pressão e tensão de cisalhamento.
- k) Gravação em fita dos valores da função de corrente e função vorticidade, para todo o campo.

2.5.2. Método II - Abordagem transitória

2.5.2.a. Método explícito para a função de corrente

Neste caso, os pares de equações (8a) e (9a), mais a condição de contorno, são resolvidas explicitando-se no tempo a função vorticidade e iterando-se a função de corrente. Sucintamente, o procedimento é o seguinte:

- a) Zeragem de todo o campo de função de corrente e função vorticidade.
- b) Imposição das condições de contorno permanentes para os respectivos parâmetros.
- c) Para malhas mais refinadas e números de Reynolds mais elevados, leitura em fita dos valores associados a estas variáveis, correspondentes ao último número de Reynolds para o qual tenha ocorrido convergência.

- d) Aplicação dos critérios de estabilidade para seleção do intervalo de tempo.
- e) Explicitação da função vorticidade para um tempo futuro, correspondente ao intervalo selecionado, e extrapolação dos valores para a seção de saída com o auxílio da equação (20).
- f) Iteração dos valores da função de corrente para o campo interno até que a convergência seja obtida.
- g) Extrapolação dos valores deste último parâmetro para a seção de saída, por meio da equação (19).
- h) Fixação das condições de contorno rígido para a função vorticidade, em função dos valores da função de corrente para o campo interno.
- i) Determinação da maior diferença absoluta entre os valores da função vorticidade correspondentes a um tempo futuro e a um tempo presente, a cada três intervalos de tempo consecutivos.
- j) Verificação desta diferença quanto ao critério de convergência adotado.
- k) Uma vez satisfeito o critério de convergência, determinação da distribuição do campo de velocidades, pressão e tensão de cisalhamento.
- l) Gravação em fita dos valores para todo o campo, da função de corrente e da função vorticidade.

2.5.2.b. Método implícito para a função de corrente

Com alternativa para o método II, utilizou-se com o propósito de comparação de resultados, a obtenção dos valores da função de corrente pelo método implícito, ao invés de se utilizar o procedimento iterativo anteriormente descrito. Para tanto, resolveu-se o seguinte sistema de equações:

$$R_j \psi_{j,i-1} + \left(R_j + \frac{H}{2}\right) \psi_{j-1,i} - 4R_j \psi_{j,i} + \left(R_j - \frac{H}{2}\right) \psi_{j+1,i} +$$

$$+ R_j \psi_{j,i+1} = H^2 R^2 \omega_{j,i}$$

Devido ao número excessivamente grande de equações envolvidas, mesmo utilizando-se da malha mais grosseira selecionada ($H = \frac{1}{10}$), o processo de solução implica na resolução da matriz pentadiagonal (555 x 555), com banda de 73 elementos, utilizando-se as subrotinas especialmente desenvolvidas por Wronski (19). O procedimento a ser seguido, para este método alternativo é idêntico ao anteriormente proposto, até o item "e". Dando sequência, tem-se

- f) Montagem das submatrizes resultantes do sistema de equações em uma matriz banda assimétrica de coeficientes.
- g) Montagem dos vetores dos termos independentes do referido sistema de equações, em um vetor único, formando o sistema de matriz banda assimétrica a ser resolvido.
- h) Obtenção dos valores da função de corrente pela resolução desse sistema de equações.

A partir deste ponto, o procedimento volta a ser idêntico ao anteriormente sugerido, retomando-se a partir do item "h" do método explícito.

2.6. Textura da Malha Utilizada

O campo computacional, seguindo-se Macagno e Hung |1|; Fromm |2|; Liou |6|; Cheng et al |7|; Lee e Fung |8|; Mills |9| é dividido em células quadradas, utilizando-se três tamanhos diferentes a saber: $H = \frac{1}{10}$; $H = \frac{1}{20}$ e $H = \frac{1}{40}$. Segundo Mills |9|, uma malha com $H/16$, é suficientemente fina para resolver os detalhes do fluxo nas quinas da obstrução. Considerando ainda que em sua análise, a relação entre o menor comprimento característico (espessura do obstáculo) e a largura da célula é igual a 1, e no presente estudo esta relação é 10 vezes maior, é viável supor-se que uma condição de suficiência de resolução de malha possa estar garantida para as malhas com $H = \frac{1}{20}$ e $H = \frac{1}{40}$. Atentando para o fato de que nos estudos dos autores cima citados |1|, |2|, |6|, |7|, |8| e |9|, a malha mais fina utilizada tem por dimensão $H = 1/32$, resulta que o uso de um reticulado com $H = 1/40$ só se justifica na medida em que se propõe obter números de Reynolds mais elevados. Com relação à exatidão dos resultados, Cheng |14| propõe que a utilização de malhas com 8-10 pontos dentro do comprimento característico do problema é suficiente, quando o parâmetro $Re.H < 2$ e utilizando-se esque

mas de diferenças conservativas, com erros de truncamento da ordem de H^2 , para um erro limite de $0,03 \text{ Re}H^2$. Assim sendo, a textura $H = 1/20$ é suficiente quanto à precisão dos resultados.

CAPÍTULO III

ANÁLISE E VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS

3.1. Seções de análise e posições de referência no interior do conduto

Para a localização das diversas seções nas figuras onde são plotados os resultados, a seção de entrada, ou seja, a seção correspondente a $I = 1$, na figura 1, foi tomada como seção de referência. Assim, todas as demais seções serão referenciadas com relação a esta última em função do número de vezes o raio do condutor R_0 . Desta forma tem-se:

Seção 1: 1,8 R_0	Seção 7: 4,1 R_0
Seção 2: 2,4 R_0	Seção 8: 4,8 R_0
Seção 3: 2,8 R_0	Seção 9: 5,5 R_0
Seção 4: 3,0 R_0	Seção 10: 6,2 R_0
Seção 5: 3,5 R_0	Seção 11: 6,5 R_0
Seção 6: 3,7 R_0	

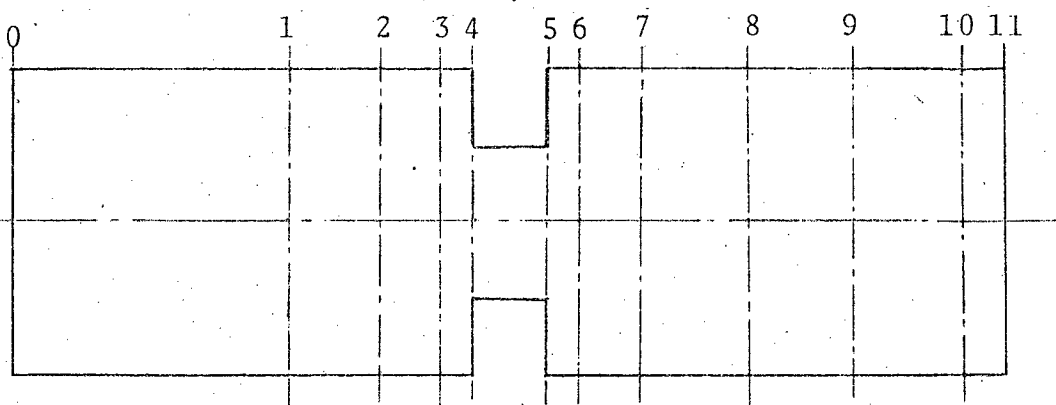


Figura 01-a - Seções de análise dos resultados.

As seções 4 e 5 são as seções de entrada e saída do obstáculo, respectivamente.

As posições para identificação das velocidades radiais dentro do conduto serão relativas ao raio R_0^* , onde $R_0^* = R_0 / 2$.

Posição 1: 0,234	R_0^*
Posição 2: 0,370	R_0^*
Posição 3: 0,550	R_0^*
Posição 4: 0,700	R_0^*
Posição 5: 1,000	R_0^*

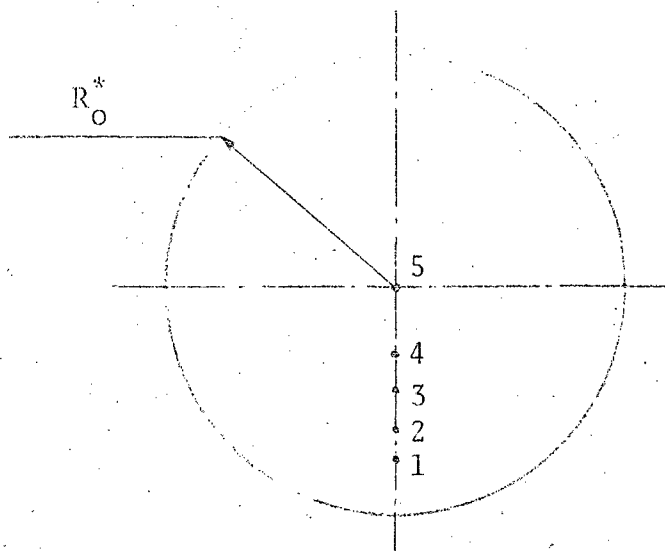


Figura 01-b - Posições para identificação das velocidades dentro do conduto.

Estes valores foram selecionados para referenciar pontos no interior da malha, em posições relativas equivalentes às utilizadas por Linsingen [21].

3.2. Análise dos resultados

3.2.1. Função de corrente, função vorticidade e tempos de processamento.

Utilizando-se o método da vorticidade e função de corrente em sua forma conservativa, com abordagem estacionária, condições de contorno rígido para a vorticidade dada pelas equações correspondentes às de Cheng et al [15], em coordenadas cilíndricas, e além disso, partindo-se com os valores de campo nulo para um número de Reynolds inicial de 0,1 e em seguida fazendo-se uso desta última solução para se atingir um número de Reynolds mais elevado, foi possível obter-se convergência para os seguintes valores do número de Reynolds: 0,1; 1; 5; 8; 10; 13; 15; 18; 20; 23; 25; 28; 30; 33; 35; 38; 40; 43; 45; 48 e 50. O procedimento numérico deixou de convergir para $Re > 50$. Uma vez que as condições de contorno utilizadas na obtenção destes resultados foram as equações que permitiram atingir-se valores de Reynolds relativamente altos, tanto para soluções estacionárias, como para fluxos pulsáveis obtidos por Cheng et al [15], e as equações em sua forma conservativa serem recomendadas por Fromm [2] em detrimento àquelas na forma não conservativa, estas soluções obtidas foram designadas como sendo as de referência. As curvas de valores constantes para a função de corrente e a função vorticidade estão traçadas nas figuras 2 a 9, para números de

Reynolds iguais a 0,1; 5; 10; 20; 30; 40 e 50.

A figura 2 permite observar que, mesmo para Reynolds bastante baixo, como $Re = 0,1$, existe duas regiões de recirculação nos cantos à montante e à jusante do obstáculo. A mesma figura ressalta, também, a simetria apresentada pelas equações de transporte de vorticidade em torno do plano diametral médio do obstáculo, à medida que o número de Reynolds tende para zero. Além disso, a região de recirculação à jusante do obstáculo cresce em direção à extremidade superior do obstáculo, ao mesmo tempo em que se alonga no sentido do fluxo, evidenciando o deslocamento do ponto de reencontro das linhas de corrente junto à parede, à medida que o número de Reynolds cresce. Por outro lado, a região de recirculação à montante apresenta um comportamento completamente oposto. Percebe-se também o alongamento característico das linhas de igual vorticidade na direção do escoamento, à medida que o número de Reynolds é incrementado. Deve-se salientar que o comportamento apresentado pela solução obtida concorda com as observações feitas por Mills [9].

Com o intuito de se sentir o comportamento da solução quando se utilizam as equações governantes em sua forma não conservativa, obtiveram-se valores para $Re = 5$ e 30 . A Tabela I contém os erros relativos percentuais entre esta solução e a solução de referência para a função de corrente e a vorticidade, para o campo computacional do escoamento, nos pontos correspondentes à malha de dimensão $H = 1/10$. Pela tabela, nota-se que os maiores erros ocorrem dentro da região de recirculação onde, devido aos valores extremamente pequenos que os parâmetros aí assumem, tornam-se bastante sensíveis tanto aos erros de arredondamento, como às oscilações espaciais descritas por Roache [3]. A concentração de erros mais sensíveis na região de recirculação, próximo ao ponto de reencontro das linhas de corrente, concorda com a observação feita por Hung e Macagno [1], quando caracterizam esta vizinhança como computacionalmente crítica. Nas posições indicadas por ***, os erros resultaram exageradamente elevados, sem significado na análise dos desvios apresentados pelo campo no seu todo. Tais desvios são consequência do efeito agravante que o reduzido tamanho de malha exerce sobre as oscilações espaciais, nas proximidades da região onde ocorre inversão do sinal da função de corrente e vorticidade. No problema estudado, não há diferença significativa quando se utilizam equações na forma conservativa e não conservativa, para os escoamentos analisados, uma vez que, para todos os pontos fora da região de recircula

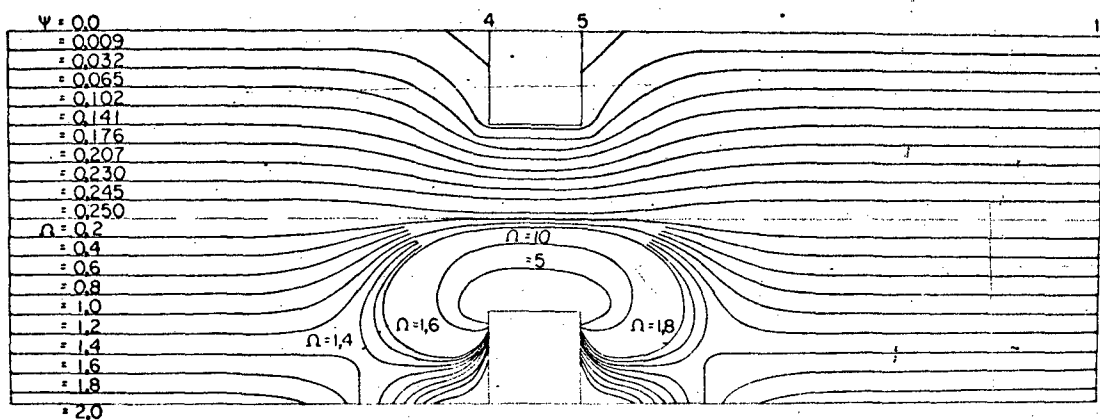


Fig 02 = CONTORNOS DAS LINHAS DE CORRENTE E VORTICIDADE
 $Re = 0.1$

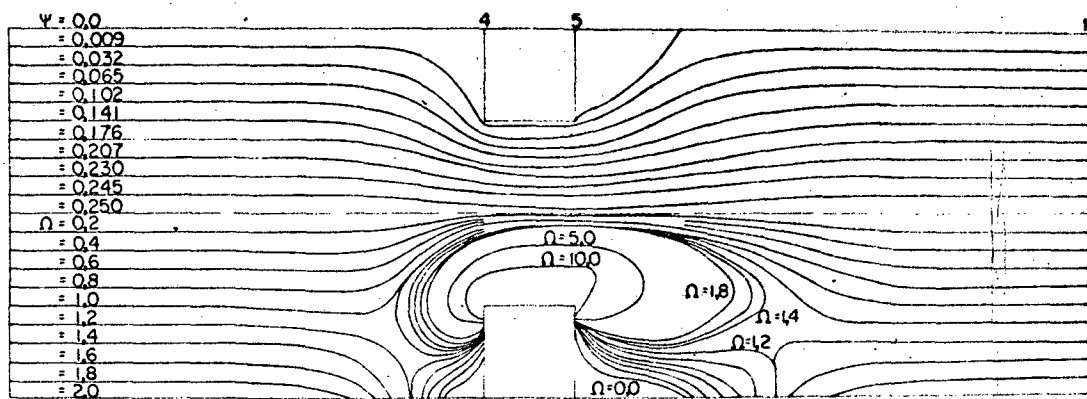


Fig 03 = CONTORNOS DAS LINHAS DE CORRENTE E VORTICIDADE
 $Re = 5.0$

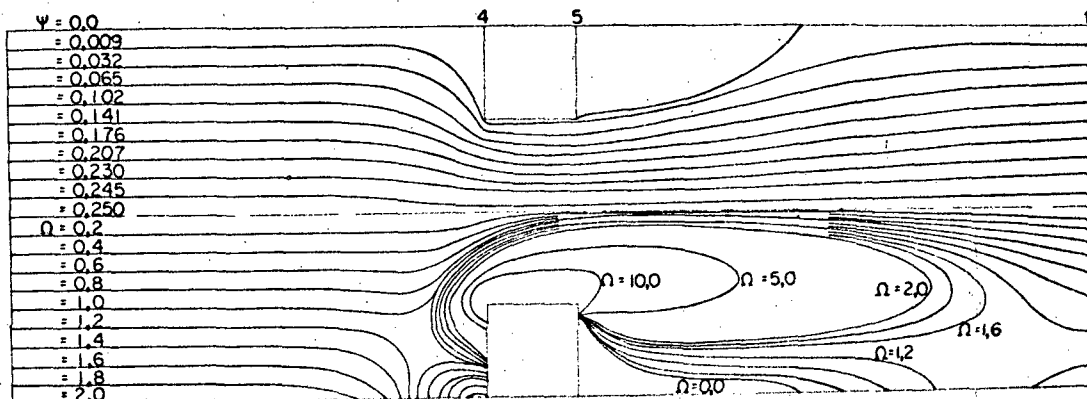


Fig 05 = CONTORNOS DAS LINHAS DE CORRENTE E VORTICIDADE
 $Re = 15.0$

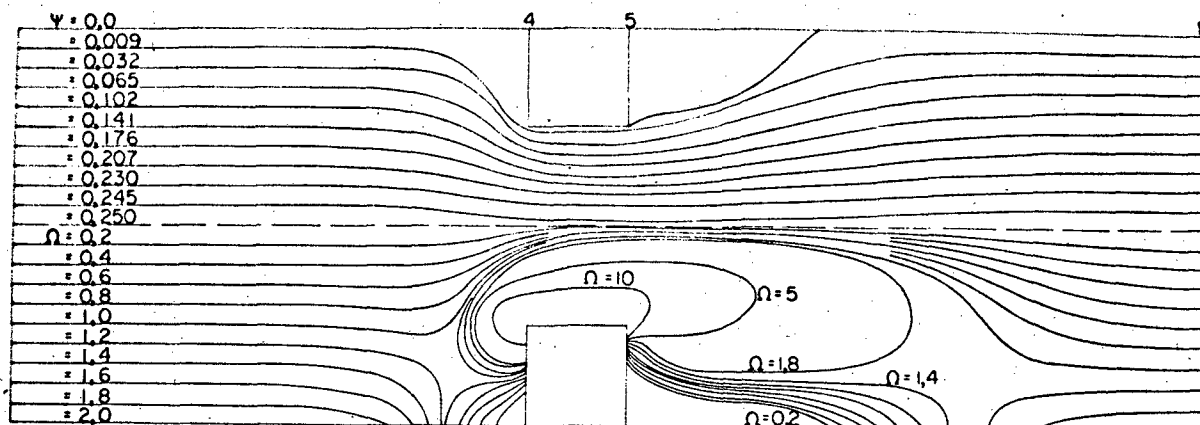


Fig.04 = CONTORNOS DAS LINHAS DE CORRENTE E VORTICIDADE

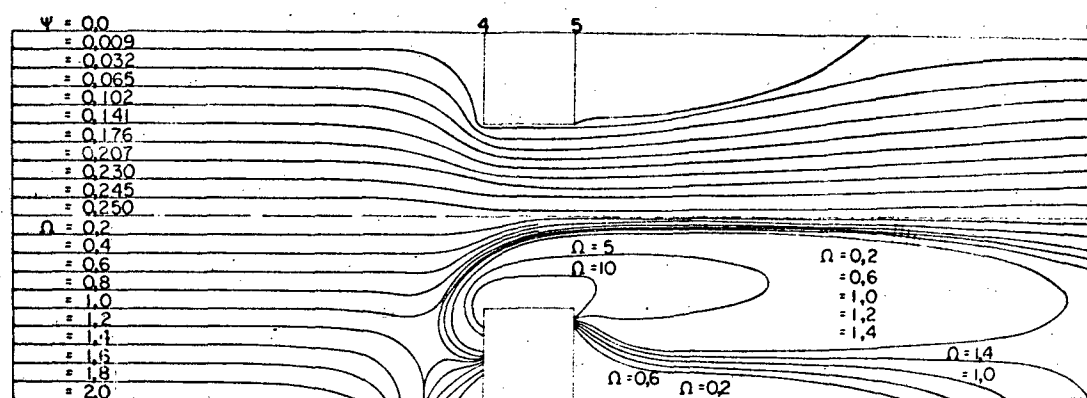
 $Re = 100$ 

Fig 06 = CONTORNOS DAS LINHAS DE CORRENTE E VORTICIDADE

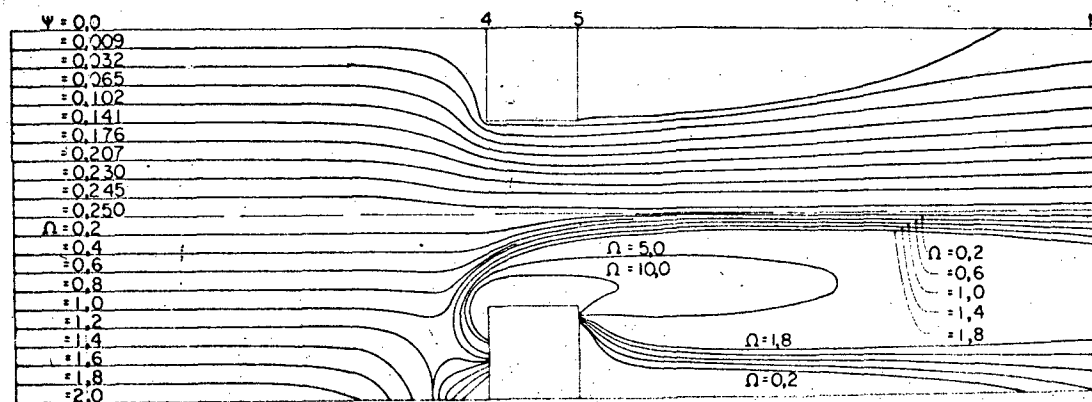
 $Re = 200$ 

Fig 07 = CONTORNOS DAS LINHAS DE CORRENTE E VORTICIDADE

 $Re = 30$

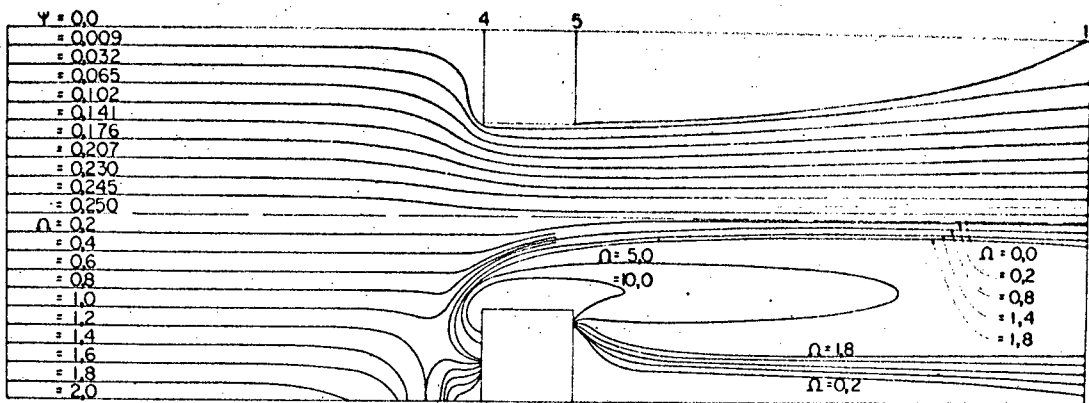


Fig 08 = CONTORNOS DAS LINHAS DE CORRENTE E VORTICIDADE
 $Re = 40$

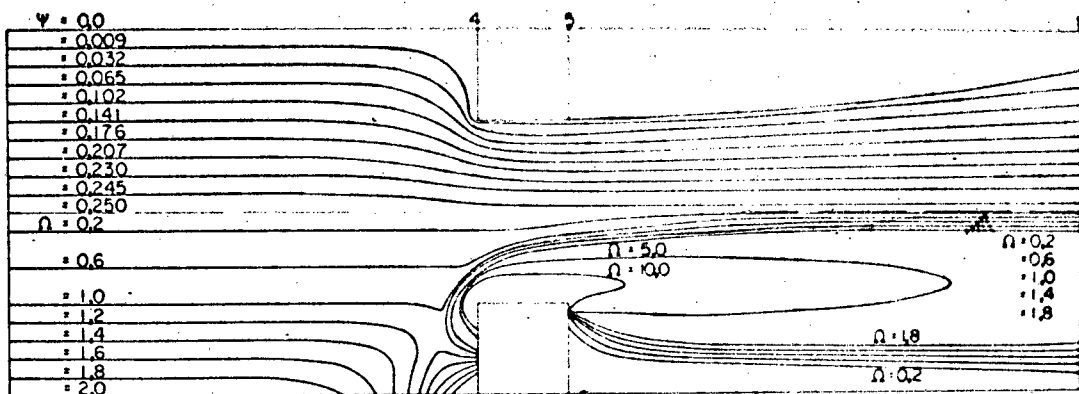


Fig 09 = CONTORNOS DAS LINHAS DE CORRENTE E VORTICIDADE
 $Re = 50$

Continuação da Tabela I

FUNÇÃO VORTICIDADE - RN = 30										
0.0	0.C	C.0	0.0	C.0	0.0	0.0	C.0	0.C	C.0	0.C
0.C	0.C0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.C0	0.C01	0.C1
0.C	0.C0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.C01	0.C02	0.C2
0.C	0.C0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.C02	0.C02	0.C2
0.C	0.C0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.C02	0.C03	0.C3
0.C	0.C0	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.C02	0.C03	0.C3
0.C	0.C0	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.03	0.C03	0.C03	0.C3
0.C	0.C0	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.03	0.C03	0.C03	0.C3
0.C	0.C0	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.03	0.C03	0.C03	0.C3
0.C	0.C01	0.01	0.00	0.00	0.01	0.02	0.03	0.C03	0.C03	0.C3
0.C	0.C01	0.01	0.00	0.00	0.01	0.02	0.03	0.C03	0.C04	0.C3
0.C	0.C01	0.01	0.01	0.00	0.01	0.02	0.03	0.C03	0.C04	0.C3
0.C	0.C02	0.02	0.01	0.00	0.01	0.02	0.03	0.C03	0.C04	0.C3
0.C	0.C02	0.02	0.01	0.00	0.01	0.02	0.03	0.C03	0.C04	0.C3
0.C	0.C03	0.02	0.02	0.01	0.01	0.02	0.04	0.C04	0.C04	0.C2
0.C	0.C03	0.02	0.02	0.00	0.01	0.03	0.04	0.C04	0.C04	0.C2
0.C	0.C03	0.03	0.02	0.00	0.01	0.03	0.04	0.C04	0.C05	0.C4
0.C	0.C03	0.03	0.02	0.00	0.01	0.03	0.04	0.C04	0.C05	0.C4
0.C	0.C03	0.03	0.02	0.00	0.01	0.03	0.04	0.C04	0.C05	0.C4
0.C	0.C03	0.03	0.02	0.00	0.01	0.03	0.04	0.C04	0.C05	0.C4
0.C	0.C04	0.03	0.02	0.01	0.01	0.03	0.04	0.C04	0.C04	0.C2
0.C	0.C04	0.04	0.03	0.01	0.00	0.02	0.03	0.C03	0.C04	0.C4
0.C	0.C05	0.04	0.03	0.02	0.00	0.01	0.01	0.C03	0.C04	0.C4
0.C	0.C05	0.05	0.04	0.03	0.01	0.01	0.02	0.C02	0.C03	0.C3
0.C	0.C06	0.06	0.05	0.04	0.02	0.00	0.02	0.C03	0.C03	0.C3
0.C	0.C07	0.07	0.06	0.04	0.02	0.00	0.01	0.C02	0.C02	0.C2
0.C	0.C08	0.07	0.06	0.04	0.01	0.01	0.02	0.C02	0.C01	0.C1
0.C	0.C09	0.08	0.06	0.00	0.12	0.18	0.10	0.C00	0.C06	0.C7
0.C	0.10	0.09	0.09	0.15	1.17	1.05	0.30	0.C07	0.C15	0.C9
0.C	0.12	0.23	0.72	0.39	5.01	0.83	0.32	0.42	0.C31	12.38
0.C	0.19	0.38	0.33	1.04	1.22	0.71	0.27	0.C310	0.64	0.C
0.C	0.08	0.01	1.03	0.92	0.98					
0.C	0.19	0.35	1.25	0.13	0.54					
0.C	0.18	0.71	0.92	0.00	0.37					
0.C	0.03	0.81	0.64	0.03	0.29					
0.C	0.24	0.78	0.47	0.07	0.93	-1.07	-0.89	-0.85	-0.92	0.0
0.C	0.38	0.71	0.37	0.07	0.22	2.09	-0.22	-0.58	-0.67	-0.80
0.C	0.45	0.64	0.33	0.24	0.09	0.95	1.17	1.72	-0.62	-0.69
0.C	0.48	0.57	0.32	0.30	0.09	0.56	0.90	1.23	-0.49	-0.63
0.C	0.48	0.52	0.33	0.31	0.11	0.35	0.68	1.05	-0.38	-0.57
0.C	0.46	0.47	0.34	0.32	0.13	0.22	0.51	0.85	-0.29	-0.49
0.C	0.43	0.44	0.35	0.32	0.16	0.12	0.37	0.66	-0.24	-0.41
0.C	0.41	0.42	0.36	0.32	0.17	0.05	0.27	0.49	-0.22	-0.35
0.C	0.39	0.41	0.36	0.31	0.19	0.00	0.19	0.35	-0.24	-0.31
0.C	0.38	0.39	0.36	0.31	0.20	0.02	0.14	0.25	-0.30	-0.30
0.C	0.37	0.38	0.35	0.30	0.19	0.03	0.12	0.21	-0.42	-0.33
0.C	0.37	0.37	0.35	0.29	0.18	0.02	0.13	0.21	-0.60	-0.41
0.C	0.37	0.36	0.33	0.27	0.15	0.01	0.18	0.25	-0.87	-0.52
0.C	0.37	0.35	0.32	0.25	0.11	0.07	0.25	0.32	-1.27	-0.68
0.C	0.37	0.34	0.30	0.21	0.06	0.14	0.34	0.43	-1.97	-0.89
0.C	0.36	0.33	0.27	0.17	0.01	0.23	0.45	0.55	-3.71	-1.15
0.C	0.35	0.31	0.24	0.11	0.08	0.33	0.58	0.69	***	-1.45
0.C	0.34	0.28	0.20	0.05	0.17	0.44	0.71	0.84	3.92	-1.82
0.C	0.32	0.25	0.15	0.02	0.27	0.56	0.84	0.98	1.41	-2.27
0.C	0.30	0.21	0.09	0.10	0.36	0.67	0.98	1.12	0.55	-2.85
0.C	0.27	0.16	0.02	0.19	0.47	0.79	1.11	1.25	0.08	-3.65
0.C	0.23	0.11	0.04	0.27	0.57	0.91	1.23	1.37	0.24	-4.87
0.C	0.18	0.05	0.12	0.36	0.67	1.02	1.34	1.49	0.49	-7.13
0.C	0.12	0.01	0.19	0.45	0.76	1.12	1.45	1.59	0.70	***
0.C	0.06	0.08	0.27	0.53	0.85	1.21	1.54	1.68	0.87	***
0.C	0.00	0.15	0.34	0.61	0.93	1.30	1.63	1.76	1.01	***
0.C	0.06	0.21	0.41	0.68	1.00	1.37	1.70	1.83	1.13	5.75
0.C	0.12	0.27	0.47	0.73	1.06	1.43	1.76	1.88	1.23	3.36
0.C	0.17	0.32	0.51	0.78	1.11	1.47	1.80	1.91	1.30	2.16
0.C	0.20	0.35	0.55	0.81	1.13	1.49	1.82	1.93	1.34	1.45
0.C	0.23	0.38	0.57	0.82	1.14	1.50	1.82	1.92	1.36	0.99

ção, os erros foram sempre inferiores a 1%.

A Tabela II apresenta os erros relativos percentuais para a função de corrente e a vorticidade, entre as soluções obtidas, utilizando-se como condições de contorno rígido, a equação (12) e a equação (13), sendo que esta última compõe a solução de referência. A Tabela III mostra a distribuição dos erros relativos percentuais entre a solução que utiliza como condição de contorno a equação (14) e a solução de referência, dada pela equação (13). Vê-se, a partir das tabelas II e III que, variando-se a expressão da condição de contorno, os erros relativos já se tornam mais sensíveis, principalmente próximos à parede. Esta observação concorda com Roache [3] para a condição de não deslizamento, pois a vorticidade é produzida na parede, e sua difusão e advecção é que realmente governam o problema. Ainda que a utilização da equação (12) acarrete o aparecimento de erros mais sensíveis junto aos contornos rígidos, excetuando-se os pontos da região de recirculação onde ocorre inversão de sinal dos valores da fusão de corrente, a magnitude de tais erros ainda pode ser considerada aceitável, uma vez que os mesmos são em número reduzido e localizados. O mesmo já não acontece com o uso da equação (14), que apresentou uma distribuição de erros para a vorticidade da ordem de 4% em praticamente todo o campo quando $Re = 30$, e erros realmente altos (indicados por *****) em toda a região de recirculação e principalmente na vizinhança do obstáculo quando $Re = 5$.

Testou-se, também, a técnica adotada por Roache [3] e Mills [9] de se utilizarem dois valores distintos para cada ponto de quina convexo do obstáculo, em função de cada região que esteja sendo varrida pelo processo iterativo. Os erros relativos percentuais resultantes quando se utiliza esta técnica e a da solução de referência estão apresentados na Tabela IV. De sua análise, pode-se perceber que os erros maiores ocorrem justamente nas vizinhanças dos pontos de quina, e se disseminam no seio do fluido, à medida que se incrementa o número de Reynolds, o que concorda plenamente com as observações feitas por Mills [9], quando defende a técnica utilizada, alegando uma maior analogia com o processo físico. Vê-se portanto que, apesar de os erros para os números de Reynolds menores serem de magnitude pequena para os pontos localizados fora da região de recirculação, estes desvios tornam significativos para os pontos vizinhos às quinas do obstáculo. À medida que se aumentam o número de Reynolds do escoamento, os erros referentes à vorticidade se pro

TABELA II

Erro relativo percentual entre os valores obtidos utilizando-se condição de contorno rígido dada pela equação (12) e a solução de referência, abordagem estacionária.

FUNÇÃO DE CORRENTE - RN = 5										
C.C	C.C	0.0	0.0	C.C	0.0	0.C	C.C	0.0	C.C	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.CC	C.CC	C.CC	0.C1	C.C3	0.C9	C.C9	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.CC	C.CC	0.01	0.C2	C.C5	0.13	C.44	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.CC	C.CC	0.01	0.C2	C.C6	0.15	C.46	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.CC	C.CC	0.01	0.C3	C.C7	0.16	C.47	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.CC	C.CC	0.01	0.C3	C.C7	0.16	C.47	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.CC	C.CC	0.01	0.C3	C.C7	0.17	C.48	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.CC	C.CC	0.01	0.C3	C.C7	0.17	C.48	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.CC	C.CC	0.01	0.C3	C.C7	0.17	C.48	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.CC	C.CC	0.01	0.C3	C.C7	0.17	C.48	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.CC	C.CC	0.01	0.C3	C.C7	0.17	C.48	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.CC	C.CC	0.01	0.C3	C.C7	0.16	C.48	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.CC	C.CC	0.01	0.C3	C.C7	0.16	C.48	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.CC	C.CC	0.01	0.C2	C.C6	0.16	C.47	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.CC	C.CC	0.0C	0.C2	C.C6	0.15	C.47	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.C1	C.C1	0.CC	0.C1	C.C5	0.15	C.47	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.C1	C.C1	0.C1	0.C1	C.C5	0.15	C.47	0.C
C.C	C.CC	0.01	0.C1	C.C1	0.01	0.C0	C.C4	0.15	C.47	0.C
C.C	C.CC	0.01	0.C1	C.C2	0.C1	0.C0	C.C4	0.15	C.48	0.C
C.C	C.CC	0.01	0.C1	C.C2	0.C1	0.C0	C.C5	0.16	C.49	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.C1	C.C1	0.C1	0.C1	C.C6	0.17	C.51	0.C
C.C	C.CC	0.0C	0.C0	C.C0	0.01	0.C4	C.C8	0.19	C.52	0.C
C.C	C.CC	0.01	0.C2	C.C3	C.C6	0.C8	C.13	0.22	C.51	0.C
C.C	C.C1	0.02	0.C5	C.10	C.14	0.17	C.2C	0.26	C.44	0.C
C.C	C.C1	0.05	0.12	0.23	0.32	0.35	C.32	0.26	C.11	0.C
C.C	C.C2	0.09	0.24	0.50	0.76	0.71	C.42	C.CC	1.49	0.C
C.C	C.C3	0.13	0.40	1.08	2.32	1.30	C.21	2.41	***	0.C
C.C	C.C3	0.16	0.52	1.81	0.0	0.C	C.C	0.C	C.C	0.C
C.C	C.C4	0.16	0.48	1.37	0.0					
C.C	C.C3	0.15	0.40	1.C6	0.0					
C.C	C.C3	0.13	0.36	1.C0	C.0					
C.C	C.C3	0.13	0.38	1.12	C.0					
C.C	C.C3	0.14	0.41	1.40	C.0					
C.C	C.C3	0.14	0.40	1.08	2.63	0.C	C.C	0.C	C.C	0.C
C.C	C.C3	0.13	0.33	0.70	1.11	0.52	-4.48	-4.C4	-5.0C	0.C
C.C	C.C3	0.11	0.27	0.49	0.68	0.34	***	-5.12	-5.67	0.C
C.C	C.C3	0.11	0.24	0.41	0.55	0.46	C.89	***	-9.15	0.C
C.C	C.C3	0.11	0.24	0.41	0.57	0.62	C.25	1.88	***	0.C
C.C	C.C3	0.13	0.28	0.47	0.67	0.82	C.77	0.17	2.22	0.C
C.C	C.C4	0.15	0.33	0.56	0.81	1.04	1.15	0.97	0.19	0.C
C.C	C.C5	0.18	0.38	0.66	0.96	1.25	1.45	1.46	1.19	0.C
C.C	C.C5	0.20	0.44	0.75	1.09	1.42	1.68	1.79	1.76	0.C
C.C	C.C6	0.22	0.48	0.81	1.19	1.55	1.84	2.C1	2.12	0.C
C.C	C.C6	0.23	0.51	0.85	1.24	1.62	1.93	2.14	2.33	0.C
C.C	C.C6	0.24	0.51	0.86	1.25	1.62	1.94	2.18	2.43	0.C
C.C	C.C6	0.23	0.50	0.84	1.22	1.58	1.9C	2.14	2.43	0.C
C.C	C.C6	0.22	0.48	0.80	1.15	1.49	1.8C	2.C5	2.37	0.C
C.C	C.C5	0.21	0.44	0.74	1.06	1.38	1.66	1.91	2.24	0.C
C.C	C.C5	0.18	0.40	0.66	0.95	1.24	1.5C	1.74	2.09	0.C
C.C	C.C4	0.16	0.35	0.58	0.83	1.C9	1.32	1.55	1.91	0.C
C.C	C.C4	0.14	0.30	0.50	0.71	0.94	1.15	1.36	1.72	0.C
C.C	C.C3	0.12	0.25	0.42	0.60	0.79	C.98	1.18	1.54	0.C
C.C	C.C2	0.1C	0.21	0.34	C.5C	0.66	C.82	1.C1	1.36	0.C
C.C	C.C2	0.08	0.17	0.28	0.41	0.54	C.68	0.85	1.21	0.C
C.C	C.C2	0.06	0.13	0.22	0.33	0.44	C.56	0.72	1.07	0.C
C.C	C.C1	0.05	0.10	0.17	0.26	0.35	0.46	0.6C	0.95	0.C
C.C	C.C1	0.04	0.C8	0.14	0.2C	0.28	C.37	0.51	0.85	0.C
C.C	C.C1	0.03	0.C6	0.10	0.16	0.22	C.3C	0.43	C.77	0.C
C.C	C.C1	0.02	0.C5	0.08	0.12	0.17	C.25	0.37	0.7C	0.C
C.C	C.CC	0.02	0.C4	0.06	0.1C	0.14	C.21	0.32	C.65	0.C
C.C	C.CC	0.01	0.C3	C.C5	C.C8	0.12	C.18	0.29	C.62	0.C
C.C	C.CC	0.01	0.C2	0.04	0.06	0.10	C.16	0.27	C.59	0.C
C.C	C.CC	0.01	0.C2	C.C4	0.06	0.C9	C.15	0.26	0.58	0.C

Continuação da Tabela II

FUNÇÃO VORTICIDADE - RN = 5

C.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
C.0	C.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.05	0.09	0.17	0.37	0.42
C.0	C.01	0.01	0.02	0.04	0.06	0.09	0.14	0.19	0.23	0.20
C.0	0.01	0.02	0.03	0.05	0.08	0.12	C.16	0.19	C.21	0.20
C.0	C.02	0.03	0.04	C.06	0.09	0.13	C.17	0.19	C.20	0.19
C.0	C.02	0.03	0.05	C.07	0.10	0.14	C.17	0.19	C.19	0.18
C.C	C.03	0.04	0.05	C.08	0.11	0.14	C.17	0.19	C.19	0.18
C.0	C.03	0.04	0.05	C.08	0.11	0.14	C.17	0.19	C.19	0.18
C.0	C.03	0.04	0.06	C.08	0.11	0.15	C.17	0.19	C.19	0.18
C.C	0.03	0.04	0.06	C.08	0.11	0.15	0.18	0.19	C.19	0.18
C.0	C.03	0.04	0.06	C.08	0.11	0.15	C.18	0.19	C.19	0.18
C.0	C.03	0.04	0.06	C.08	0.12	0.15	C.18	0.19	C.19	0.18
C.0	0.04	0.05	0.06	C.09	0.12	0.15	C.18	0.20	0.19	C.18
C.0	0.04	0.05	0.06	C.09	0.12	0.15	C.18	0.20	C.20	0.18
C.C	0.04	0.05	0.07	C.09	0.13	0.16	C.19	0.20	C.20	0.18
C.0	C.05	0.06	C.07	C.10	0.13	0.17	C.20	0.21	C.20	0.18
C.0	0.05	0.06	0.08	0.11	0.14	0.18	C.21	0.22	C.21	0.18
C.0	C.06	0.08	0.10	0.12	0.16	0.19	C.22	0.23	C.22	0.19
C.0	0.08	0.09	0.11	0.14	0.18	0.21	C.24	0.24	C.23	0.19
C.0	C.10	0.12	0.14	0.17	C.20	0.23	C.26	0.26	C.23	0.19
C.0	0.13	0.15	0.17	C.20	0.23	0.26	C.28	C.27	C.24	0.19
C.0	0.17	0.18	0.21	0.24	0.27	0.29	C.30	0.29	C.25	0.19
C.0	0.21	0.23	0.25	0.28	0.30	0.32	C.32	0.30	C.25	0.18
C.C	0.28	0.29	0.31	0.33	0.34	0.35	C.34	0.30	C.25	0.17
C.0	0.37	0.38	0.39	0.39	0.39	0.37	C.34	C.29	C.23	0.15
C.0	0.52	0.53	0.53	0.51	0.45	0.38	C.31	0.24	C.17	0.09
C.0	0.75	0.77	0.77	C.70	0.56	0.37	C.23	0.13	C.02	0.10
C.0	1.04	1.09	1.11	1.02	0.72	0.30	C.01	0.13	C.29	0.72
C.0	1.32	1.42	1.53	1.52	0.99	0.01	C.48	0.60	C.89	5.86
C.0	1.49	1.63	1.87	2.18	1.59	1.32	1.49	1.40	1.89	-4.85
C.0	1.49	1.58	1.72	2.07	5.78	8.00	2.10	11.61	-3.37	0.0
C.0	1.33	1.28	1.09	C.43	1.14					
C.0	1.10	0.97	0.69	0.29	0.19					
C.C	C.90	0.76	0.55	0.34	C.32					
C.0	C.78	0.68	0.56	0.38	0.23					
C.C	C.76	0.73	C.77	1.12	4.93	-4.88	-0.79	-1.67	-5.31	0.0
C.C	C.80	0.83	0.91	1.06	0.27	3.12	4.37	6.82	-3.21	-4.36
C.0	C.85	0.86	0.86	0.72	C.16	0.82	1.54	2.00	***	-0.96
C.0	C.82	0.79	0.69	0.45	C.00	0.63	1.25	1.81	3.90	-0.89
C.0	C.69	0.61	0.44	0.14	0.29	0.84	1.42	1.94	2.63	-1.61
C.C	0.46	0.35	0.12	0.22	0.67	1.20	1.75	2.20	2.16	-5.63
C.0	0.19	0.04	0.22	C.59	1.06	1.60	2.12	2.46	2.05	2.93
C.0	C.05	0.22	0.51	0.91	1.39	1.93	2.42	2.66	2.09	0.40
C.0	0.19	0.38	0.68	1.10	1.60	2.14	2.61	2.77	2.18	C.41
C.0	0.14	0.34	0.67	1.11	1.63	2.19	2.67	2.80	2.27	0.90
C.0	0.13	0.10	0.45	C.92	1.49	2.09	2.59	2.75	2.32	1.23
C.0	C.62	0.35	0.04	0.57	1.20	1.87	2.42	2.63	2.32	1.44
C.0	1.24	0.94	0.48	0.12	0.83	1.57	2.18	2.46	2.25	1.55
C.0	1.92	1.57	1.04	C.36	0.44	1.24	1.90	2.24	2.12	1.58
C.0	2.53	2.13	1.54	0.79	0.07	0.92	1.61	1.99	1.97	1.54
C.0	3.01	2.57	1.93	1.13	0.24	0.63	1.33	1.72	1.77	1.45
C.0	3.29	2.84	2.18	1.36	C.47	0.37	1.05	1.47	1.55	1.32
C.0	3.38	2.93	2.28	1.48	0.63	0.17	C.81	1.21	1.32	1.16
C.0	3.30	2.87	2.25	1.51	0.72	C.01	C.59	C.57	1.10	1.00
C.0	3.09	2.70	2.14	1.46	0.76	0.11	C.41	0.75	0.89	0.83
C.0	2.80	2.46	1.96	1.37	0.76	0.19	C.26	0.56	C.69	0.67
C.0	2.47	2.17	1.74	1.24	0.72	0.25	C.14	0.40	C.52	0.53
C.0	2.12	1.87	1.52	1.10	0.67	0.28	C.04	0.26	C.38	0.40
C.0	1.78	1.58	1.29	0.95	C.60	0.29	C.02	0.15	0.25	0.29
C.0	1.47	1.31	1.08	0.81	0.54	0.29	C.09	0.06	C.15	0.19
C.0	1.20	1.07	0.89	0.68	0.47	0.28	C.12	0.01	C.07	0.11
C.0	0.96	0.87	0.73	C.57	0.41	0.27	C.15	0.06	C.01	0.05
C.0	0.76	0.69	0.59	0.47	0.36	0.25	C.16	0.09	C.04	0.00
C.0	0.60	0.55	0.48	0.39	0.31	0.24	C.17	0.12	C.07	0.04
C.0	0.48	0.44	0.39	0.33	0.27	0.22	C.17	0.13	C.09	0.06
C.C	C.39	0.36	0.32	0.28	C.24	0.20	C.17	0.14	C.10	0.07

Continuação da Tabela II

FUNÇÃO DE CORRENTE - RN = 30

0.0	C.0	0.0	0.0	C.0	0.0	0.0	C.0	C.0	C.0	0.0
C.C	C.C0	C.00	0.CC	C.00	C.00	0.00	C.02	0.C7	C.37	C.C
0.0	C.C0	C.00	0.CC	C.00	0.00	0.00	C.03	0.11	C.40	0.C
0.0	C.C0	C.00	0.CC	C.00	0.00	0.01	C.03	0.12	C.42	0.C
0.0	C.C0	C.00	0.CC	C.01	C.00	0.01	C.04	0.13	C.43	0.C
0.0	C.C0	C.00	0.CC	C.01	C.01	0.01	C.04	0.13	C.44	0.C
C.C	C.C0	C.00	0.C1	C.01	C.01	0.01	C.04	0.14	C.44	0.C
0.0	C.C0	C.00	0.C1	C.01	0.01	0.01	C.04	0.14	C.45	0.C
0.0	0.00	C.00	0.C1	C.01	C.01	0.01	C.05	0.14	C.45	0.C
0.0	0.00	C.00	0.C1	C.01	C.01	0.01	C.05	0.14	C.45	0.C
0.0	0.00	C.00	0.C1	C.01	C.01	0.01	C.05	0.14	C.46	0.C
0.0	0.00	C.00	0.C1	C.01	0.01	0.01	C.05	0.14	C.46	0.C
0.0	0.00	C.00	0.C1	C.01	C.00	0.01	C.05	0.15	C.46	0.C
0.0	0.00	C.00	0.C1	C.01	C.00	0.01	C.05	0.15	C.46	0.C
0.0	0.00	C.00	0.CC	C.01	C.00	0.01	C.05	0.15	C.47	0.C
0.0	0.00	C.00	0.CC	C.01	C.00	0.01	C.05	0.15	C.47	0.C
0.0	0.00	C.00	0.CC	C.00	0.00	0.01	C.05	0.15	C.47	0.C
0.0	0.00	C.00	0.CC	C.00	C.00	0.01	C.05	0.15	C.47	0.C
0.0	0.00	C.00	0.CC	C.00	C.00	0.02	C.05	0.15	C.46	0.C
0.0	0.00	C.00	0.CC	C.00	C.00	0.02	C.05	0.15	C.46	0.C
C.C	C.C0	C.00	0.CC	C.00	C.01	0.02	C.06	0.16	C.46	0.C
C.C	C.C0	C.00	0.CC	C.00	C.01	C.03	C.07	0.17	C.47	0.C
C.C	C.C0	C.00	0.C1	C.02	C.03	0.05	C.09	0.19	C.49	0.C
0.0	0.00	C.01	0.C2	C.04	0.06	0.10	C.14	0.24	C.53	0.C
0.0	0.00	C.02	C.05	C.09	0.14	0.19	C.25	C.24	C.59	0.C
0.0	C.C1	C.04	0.10	C.19	0.30	0.39	C.44	0.50	C.65	0.C
0.0	C.C1	C.07	0.19	0.42	0.71	0.37	C.86	0.77	C.52	0.C
0.0	C.C2	C.11	0.34	C.99	2.36	2.45	1.85	1.11	1.52	0.C
0.0	C.C3	C.14	0.50	2.11	C.C	0.0	C.C	C.C	C.C	0.C
0.0	C.C3	C.15	0.53	1.72	C.0					
0.0	0.C3	C.15	0.46	1.19	C.C					
0.0	0.C3	C.14	0.40	1.05	C.C					
0.0	C.C3	C.13	0.38	1.06	C.C					
0.0	C.C3	C.13	0.37	1.13	0.0	0.0	C.C	C.C	C.C	0.C
C.C	C.C3	C.12	0.35	C.98	5.56	-2.93	-2.58	-2.33	-2.44	C.C
0.0	C.C3	C.12	0.33	C.83	5.39	-0.65	-0.98	-1.19	-1.91	0.C
0.0	C.C2	C.11	0.31	C.76	5.11	-0.24	-0.28	-0.62	-1.49	0.C
0.0	C.C2	C.11	0.30	C.73	4.50	-0.86	-0.17	-0.23	-1.15	C.C
0.0	C.C2	C.10	0.28	C.72	3.87	-1.46	-0.54	-0.08	-0.86	0.C
0.0	C.02	C.10	0.27	C.70	3.23	-2.13	-0.87	-0.36	-0.61	0.C
0.0	C.02	C.09	0.26	C.67	2.88	-2.98	-1.20	-0.61	-0.38	C.C
0.0	C.02	C.09	0.25	C.64	2.50	-4.24	-1.53	-0.85	-0.18	C.C
0.0	C.02	C.08	0.24	C.61	2.18	***	-1.90	-1.09	-0.01	C.C
0.0	C.02	C.08	0.22	C.57	1.91	***	-2.34	-1.23	-0.20	C.C
0.0	C.02	C.07	0.21	C.53	1.67	***	-2.90	-1.61	-0.40	0.C
0.0	C.01	C.07	0.19	C.49	1.47	***	-3.68	-1.93	-0.61	0.C
0.0	C.01	C.06	0.17	C.45	1.29	8.03	-4.90	-2.23	-0.86	0.C
0.0	0.01	0.05	0.15	C.40	1.12	5.10	-7.13	-2.85	-1.16	0.C
0.0	C.01	C.04	0.13	C.36	0.98	3.66	***	-3.56	-1.51	0.C
0.0	C.01	C.03	0.11	C.31	0.84	2.78	***	-4.60	-1.96	0.C
0.0	0.00	C.03	0.09	C.26	0.71	2.18	***	-6.26	-2.54	0.C
0.0	0.00	0.02	0.07	C.21	0.60	1.73	8.43	-10.07	-3.34	0.C
0.0	0.00	C.01	0.05	C.16	0.48	1.38	5.09	***	-4.58	0.C
0.0	0.00	C.00	0.02	C.11	0.37	1.08	3.47	***	-6.83	0.C
0.0	0.00	C.01	0.00	C.06	0.27	0.82	2.48	***	***	0.C
0.0	C.01	0.02	0.03	C.01	0.17	0.60	1.81	6.12	***	0.C
0.0	C.01	C.03	0.05	C.04	0.07	0.40	1.30	3.88	***	0.C
0.0	C.01	C.04	0.08	C.09	0.03	0.22	C.90	2.62	7.37	0.C
0.0	C.01	C.05	0.10	C.14	0.12	0.06	C.57	1.81	4.42	0.C
0.0	C.02	C.06	0.13	C.19	0.20	0.08	C.30	1.23	2.96	0.C
0.0	C.02	C.07	0.15	C.23	0.27	0.21	C.08	0.80	2.09	0.C
0.0	C.02	C.08	0.17	C.26	0.33	0.31	C.10	0.48	1.51	0.C
0.0	0.02	0.08	0.18	C.28	0.37	0.39	C.22	0.24	1.11	0.C
0.0	C.02	C.09	0.18	C.30	0.40	0.45	C.34	0.06	C.82	0.C

Continuação da Tabela II

FUNÇÃO VORTICIDADE - RN = 30

0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.05	0.14	0.39	0.43
0.0	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.04	0.09	0.18	0.25	0.23
0.0	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.07	0.12	0.19	0.23	0.24
0.0	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.09	0.14	0.20	0.22	0.23
0.0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.06	0.11	0.16	0.20	0.22	0.22
0.0	0.01	0.01	0.02	0.05	0.08	0.13	0.17	0.21	0.22	0.21
0.0	0.01	0.02	0.03	0.06	0.10	0.14	0.19	0.21	0.22	0.21
0.0	0.02	0.02	0.04	0.07	0.11	0.15	0.19	0.22	0.22	0.20
0.0	0.02	0.03	0.05	0.08	0.12	0.16	0.20	0.22	0.22	0.20
0.0	0.02	0.03	0.06	0.09	0.13	0.17	0.21	0.22	0.22	0.20
0.0	0.03	0.04	0.06	0.10	0.14	0.18	0.21	0.23	0.22	0.19
0.0	0.03	0.04	0.07	0.10	0.14	0.19	0.22	0.23	0.22	0.19
0.0	0.03	0.05	0.07	0.11	0.15	0.19	0.22	0.23	0.22	0.19
0.0	0.03	0.05	0.08	0.11	0.16	0.20	0.23	0.23	0.22	0.18
0.0	0.03	0.05	0.08	0.12	0.16	0.20	0.23	0.24	0.22	0.18
0.0	0.03	0.05	0.08	0.12	0.16	0.20	0.23	0.24	0.22	0.18
0.0	0.04	0.06	0.08	0.12	0.17	0.21	0.23	0.24	0.22	0.18
0.0	0.04	0.06	0.09	0.12	0.17	0.21	0.23	0.24	0.22	0.17
0.0	0.04	0.05	0.08	0.12	0.17	0.21	0.23	0.24	0.22	0.17
0.0	0.03	0.05	0.08	0.12	0.16	0.20	0.23	0.23	0.21	0.17
0.0	0.03	0.05	0.08	0.12	0.16	0.20	0.22	0.23	0.21	0.17
0.0	0.02	0.04	0.07	0.11	0.15	0.19	0.22	0.22	0.20	0.16
0.0	0.02	0.04	0.07	0.10	0.14	0.18	0.21	0.21	0.18	0.14
0.0	0.01	0.03	0.06	0.10	0.14	0.17	0.19	0.19	0.15	0.09
0.0	0.00	0.02	0.05	0.09	0.13	0.15	0.17	0.15	0.10	0.02
0.0	0.00	0.02	0.05	0.08	0.11	0.13	0.11	0.07	0.01	0.12
0.0	0.01	0.02	0.05	0.10	0.14	0.12	0.03	0.09	0.24	0.44
0.0	0.01	0.03	0.15	0.54	0.91	0.48	0.04	0.40	0.77	1.80
0.0	0.02	0.19	1.18	3.82	4.77	0.92	0.38	1.09	2.01	***
0.0	0.15	1.00	3.70	5.29	7.56	1.90	1.59	3.12	***	0.0
0.0	0.56	2.08	3.09	1.32	3.73					
0.0	1.11	2.19	2.00	0.33	0.10					
0.0	1.45	1.91	1.37	0.34	0.32					
0.0	1.53	1.61	1.05	0.44	0.31					
0.0	1.48	1.38	0.92	0.73	3.54	-1.48	-0.47	-1.01	-7.05	0.0
0.0	1.37	1.21	0.88	0.70	0.64	6.91	-11.79	-1.25	-1.14	-6.53
0.0	1.25	1.09	0.85	0.53	0.33	1.49	2.43	8.27	-0.90	-0.44
0.0	1.15	1.01	0.80	0.45	0.17	0.77	1.25	3.29	-1.85	-0.40
0.0	1.07	0.95	0.76	0.42	0.06	0.46	0.80	2.45	-2.32	-0.80
0.0	1.00	0.91	0.72	0.41	0.03	0.24	0.49	1.94	-2.66	-1.12
0.0	0.95	0.87	0.70	0.42	0.14	0.05	0.23	1.49	-2.98	-1.42
0.0	0.92	0.84	0.68	0.45	0.24	0.14	0.01	1.10	-2.30	-1.69
0.0	0.88	0.81	0.68	0.49	0.36	0.31	0.22	0.76	-2.66	-1.94
0.0	0.86	0.80	0.68	0.55	0.47	0.47	0.41	0.48	-4.09	-2.18
0.0	0.84	0.79	0.70	0.61	0.59	0.62	0.58	0.23	-4.64	-2.42
0.0	0.83	0.79	0.73	0.68	0.70	0.76	0.73	0.02	-5.39	-2.68
0.0	0.83	0.80	0.76	0.76	0.82	0.90	0.88	0.17	-6.48	-2.96
0.0	0.83	0.81	0.81	0.84	0.93	1.03	1.01	0.36	-8.25	-3.28
0.0	0.84	0.84	0.86	0.93	1.04	1.15	1.15	0.52	-11.62	-3.65
0.0	0.85	0.87	0.92	1.01	1.15	1.28	1.29	0.70	-20.82	-4.10
0.0	0.88	0.91	0.98	1.10	1.26	1.40	1.42	0.88	***	-4.64
0.0	0.91	0.95	1.05	1.19	1.37	1.53	1.56	1.05	***	-5.31
0.0	0.95	1.01	1.12	1.29	1.48	1.65	1.70	1.21	9.98	-6.16
0.0	0.99	1.06	1.20	1.38	1.59	1.77	1.83	1.28	5.79	-7.32
0.0	1.04	1.13	1.27	1.47	1.70	1.89	1.97	1.53	3.71	-8.99
0.0	1.10	1.19	1.35	1.57	1.80	2.01	2.09	1.69	2.42	-11.66
0.0	1.16	1.26	1.43	1.65	1.90	2.12	2.22	1.83	1.55	-16.82
0.0	1.22	1.33	1.51	1.74	1.99	2.23	2.33	1.96	0.90	***
0.0	1.28	1.39	1.58	1.82	2.08	2.32	2.44	2.09	0.39	***
0.0	1.33	1.45	1.65	1.89	2.16	2.41	2.53	2.20	0.02	***
0.0	1.38	1.51	1.70	1.95	2.23	2.48	2.61	2.30	0.35	14.27
0.0	1.43	1.55	1.75	2.00	2.28	2.54	2.68	2.38	0.61	8.70
0.0	1.46	1.58	1.78	2.03	2.31	2.58	2.72	2.44	0.82	5.95
0.0	1.48	1.60	1.80	2.05	2.33	2.60	2.74	2.47	0.98	4.31
0.0	1.48	1.60	1.79	2.04	2.32	2.60	2.74	2.48	1.10	3.23

TABELA III

Erro relativo percentual entre os valores obtidos utilizando-se condição de contorno rígido dada pela equação (14) e a solução de referência, para algumas seções a montante e a jusante da seção de saída do obstáculo.

FUNÇÃO DE CORRENTE - RN = 5										
0.0	C.C	0.0	0.C	C.0	0.0	0.C	C.0	0.C	C.0	0.C
C.0	C.C0	0.0C	0.C0	C.C0	0.0C	0.C1	C.02	0.C7	C.25	0.C
0.C	C.C0	0.0C	0.C0	C.C0	0.01	0.C2	C.04	0.10	C.31	0.C
C.0	C.C0	0.0C	0.C0	C.01	0.01	0.C3	C.05	0.12	C.32	0.C
C.0	C.C0	0.0C	0.C0	C.01	0.01	0.C3	C.06	0.12	C.33	0.C
C.C	C.C0	0.0C	0.C0	C.01	0.02	0.C3	C.06	0.12	C.34	C.C
0.C	C.C0	0.0C	0.C0	C.01	0.02	0.C3	C.06	0.12	C.34	0.C
C.0	C.C0	0.0C	0.C0	C.01	0.02	0.C3	C.07	0.13	C.34	0.C
0.C	C.C0	0.0C	0.C0	C.01	0.02	0.C3	C.07	0.13	C.34	0.C
C.0	C.C0	0.0C	0.C0	C.01	0.02	0.C3	C.07	0.13	C.34	0.C
0.0	C.C0	0.0C	0.C0	C.01	0.02	0.C3	C.06	0.13	C.34	0.C
C.0	C.C0	0.0C	0.C0	C.01	0.02	0.C3	C.06	0.13	C.34	0.C
0.0	C.C0	0.0C	0.C0	C.01	0.02	0.C3	C.06	0.13	C.34	0.C
0.0	C.C0	0.0C	0.C0	C.01	0.01	0.C3	C.06	0.13	C.34	0.C
C.C	0.C0	0.0C	0.C0	C.C0	C.01	0.C3	C.06	0.13	C.34	0.C
C.0	C.C0	0.0C	0.C0	C.C0	0.01	0.C2	C.05	0.12	C.33	0.C
C.C	C.C0	0.0C	0.C0	C.C0	0.00	0.C2	C.05	0.11	C.32	0.C
0.C	C.C0	0.0C	0.C1	0.01	0.01	0.C0	C.03	0.10	C.30	0.C
C.C	C.C0	0.01	0.C1	C.02	0.02	0.C2	C.01	0.05	C.26	0.C
C.C	C.C0	0.01	0.C2	C.04	0.07	0.C9	C.05	C.06	C.12	0.C
C.0	C.C1	0.02	0.C5	C.10	0.16	0.23	C.25	0.21	C.15	0.C
C.0	C.01	0.04	0.11	C.21	0.35	0.53	C.72	0.85	C.77	C.C
C.0	C.02	0.08	0.20	C.41	0.72	1.13	1.55	2.00	2.11	0.C
C.0	C.03	0.14	0.37	C.77	1.40	2.28	3.32	4.35	4.94	C.C
C.0	C.05	0.24	0.63	1.35	2.57	4.28	6.71	9.21	11.08	0.C
C.0	C.07	0.35	0.96	2.20	4.45	8.14	13.41	19.70	25.38	0.C
C.C	C.09	0.44	1.31	3.27	7.35	14.98	27.40	44.47	62.25	0.C
C.0	C.09	0.47	1.53	4.35	11.59	28.14	60.12	*****	*****	0.C
0.0	C.07	0.37	1.34	4.77	17.55	57.96	*****	*****	*****	0.C
0.0	0.C2	0.12	0.54	2.94	25.53	*****	*****	*****	*****	C.C
C.0	C.03	0.16	0.52	1.94	C.0	0.C	C.0	C.0	C.0	C.C
C.0	C.06	0.30	0.93	2.71	C.0					
C.C	C.07	0.31	0.82	1.84	C.0					
C.0	C.06	0.26	0.64	1.38	C.0					
C.0	C.05	0.22	0.57	1.44	0.0					
0.0	C.04	0.19	0.53	1.70	0.0	0.C	C.0	C.C	C.0	C.C
0.C	0.C3	0.14	0.29	C.C0	16.46	*****	*****	*****	*****	0.C
C.0	0.C2	0.06	0.05	1.25	10.79	*****	*****	*****	*****	0.C
C.C	C.C1	0.01	0.25	1.45	6.90	33.C2	*****	*****	-72.44	0.C
0.0	C.C0	0.04	0.29	1.25	4.31	13.71	50.33	*****	90.12	0.C
C.C	C.C0	0.03	0.22	0.85	2.53	6.57	16.20	43.84	95.45	0.C
C.C	C.01	0.01	0.08	0.41	1.27	3.10	6.62	13.12	25.38	0.C
C.C	C.02	0.07	0.09	C.C1	0.36	1.13	2.56	4.85	8.12	C.C
C.0	C.04	0.13	0.25	0.33	0.31	0.08	C.46	1.29	2.66	0.C
C.0	C.05	0.19	0.38	0.60	0.78	0.85	C.73	0.37	0.19	0.C
C.0	0.C6	0.23	0.49	0.80	1.11	1.34	1.44	1.25	1.11	0.C
0.C	C.07	0.26	0.56	0.93	1.31	1.64	1.85	1.90	1.82	0.C
0.C	C.07	0.28	0.60	0.99	1.41	1.79	2.06	2.18	2.21	0.C
C.C	0.07	0.29	0.61	1.01	1.43	1.82	2.12	2.29	2.38	0.C
0.0	C.07	0.28	0.59	0.98	1.39	1.78	2.09	2.28	2.41	0.C
C.0	C.07	0.26	0.56	0.92	1.31	1.68	1.98	2.17	2.34	0.C
C.C	0.C6	0.24	0.51	0.84	1.20	1.54	1.82	2.02	2.21	0.C
C.0	0.C6	0.21	0.45	0.75	1.07	1.28	1.63	1.83	2.04	0.C
C.0	C.C5	0.19	0.40	0.66	0.94	1.21	1.44	1.62	1.84	0.C
C.0	C.04	0.16	0.34	0.56	0.80	1.04	1.24	1.42	1.64	0.C
C.0	0.C3	0.13	0.28	0.47	0.68	0.88	1.06	1.22	1.45	0.C
0.0	0.C3	0.11	0.23	0.39	0.56	0.73	C.85	1.04	1.27	0.C
0.0	C.02	0.09	0.19	0.32	0.46	0.60	C.74	0.87	1.11	0.C
C.0	C.02	0.07	0.15	0.25	0.37	0.49	C.60	0.73	0.96	0.C
C.0	C.C1	0.06	0.12	0.20	0.30	0.39	C.45	0.61	C.84	0.C
0.0	C.C1	0.04	0.09	0.16	0.23	0.32	C.40	C.51	C.74	0.C
C.0	C.01	0.03	0.07	0.13	0.19	0.25	C.32	C.43	C.66	0.C
C.0	C.01	0.03	0.06	0.10	0.15	0.21	C.27	0.37	C.59	0.C
C.0	C.01	0.02	0.05	C.08	0.12	0.17	C.22	0.32	C.55	0.C
C.0	C.C0	0.02	0.04	C.07	0.10	0.15	C.20	0.29	C.51	0.C
C.0	C.C0	0.02	0.04	0.06	0.10	0.14	0.19	0.28	C.50	0.C

Continuação da Tabela III

FUNÇÃO VORTICIDADE - RN = 5

C.O	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
C.O	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.04	0.06	0.12	0.27	0.25
C.O	0.02	0.02	0.03	0.04	0.05	0.07	0.09	0.13	0.14	0.11
C.O	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.09	0.10	0.12	0.12	0.11
C.O	0.05	0.05	0.06	0.07	0.08	0.10	0.11	0.11	0.11	0.10
C.O	0.06	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.11	0.11	0.10
C.O	0.07	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.11	0.11	0.10	0.10
C.O	0.07	0.08	0.09	0.09	0.10	0.11	0.11	0.11	0.10	0.09
C.O	0.08	0.08	0.09	0.10	0.11	0.11	0.11	0.11	0.10	0.09
C.O	0.08	0.09	0.09	0.10	0.11	0.11	0.11	0.11	0.10	0.09
C.O	0.09	0.09	0.10	0.11	0.11	0.12	0.12	0.12	0.11	0.09
C.C	0.09	0.10	0.11	0.11	0.12	0.13	0.12	0.12	0.11	0.09
C.O	0.10	0.11	0.11	0.12	0.13	0.13	0.13	0.12	0.11	0.10
C.O	0.11	0.11	0.12	0.13	0.14	0.14	0.14	0.13	0.12	0.10
C.O	0.12	0.13	0.13	0.14	0.15	0.16	0.16	0.15	0.13	0.11
C.O	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.18	0.17	0.16	0.12
C.C	0.14	0.15	0.16	0.17	0.19	0.20	0.22	0.22	0.21	0.17
C.O	0.12	0.13	0.14	0.16	0.19	0.23	0.28	0.33	0.34	0.29
C.O	0.03	0.03	0.04	0.07	0.14	0.25	0.40	0.55	0.63	0.57
C.O	0.24	0.26	0.27	0.22	0.07	0.20	0.58	0.99	1.26	1.20
C.O	0.88	0.95	1.00	0.94	0.68	0.10	0.80	1.81	2.55	2.55
C.O	2.10	2.29	2.49	2.53	2.16	1.10	0.79	3.18	5.14	5.49
C.O	3.96	4.41	5.01	5.51	5.40	3.91	0.39	4.96	10.22	12.10
C.O	5.97	6.82	8.20	9.93	11.30	10.65	5.49	5.70	20.04	28.51
C.O	6.85	8.00	10.22	13.95	19.15	23.57	20.61	0.90	38.18	77.09
C.O	5.40	6.28	8.45	13.47	24.07	41.27	54.94	35.04	64.63	*****
C.O	2.06	2.04	2.68	6.07	19.27	56.79	*****	*****	42.92	*****
O.O	1.36	2.27	3.55	4.49	2.91	72.26	*****	*****	*****	*****
C.O	3.42	4.40	5.87	8.39	22.48	*****	*****	*****	*****	O.C
C.O	3.87	4.21	4.12	2.22	4.75					
C.O	3.37	3.11	2.20	0.34	1.46					
C.O	2.58	2.11	1.20	0.05	0.67					
C.O	1.94	1.54	0.98	0.28	1.32					
C.O	1.63	1.49	1.56	2.78	16.03	*****	*****	*****	*****	O.C
C.O	1.58	1.63	1.91	2.52	0.44	35.42	*****	*****	80.76	*****
C.O	1.51	1.50	1.39	0.64	2.91	12.89	28.32	39.77	*****	93.27
C.O	1.19	1.00	0.49	0.79	3.56	8.24	13.15	12.07	***	-58.02
C.O	0.60	0.25	0.50	1.83	3.92	6.48	8.18	5.02	35.80	-54.74
C.C	0.16	0.60	1.41	2.63	4.20	5.71	6.16	3.06	15.37	***
C.O	0.92	1.38	2.16	3.22	4.39	5.23	5.29	2.77	6.43	52.63
C.O	1.53	1.97	2.68	3.56	4.46	5.07	4.87	2.97	2.13	13.01
C.O	1.87	2.27	2.89	3.63	4.34	4.79	4.60	3.24	0.12	4.87
C.O	1.85	2.23	2.77	3.42	4.02	4.44	4.35	3.42	1.38	1.64
C.O	1.48	1.84	2.35	2.95	3.55	4.00	4.06	3.48	2.08	0.03
C.C	0.20	1.16	1.68	2.30	2.95	3.50	3.74	3.44	2.45	0.86
C.O	0.09	0.30	0.86	1.56	2.30	2.98	3.38	3.20	2.60	1.36
C.O	1.05	0.61	0.02	0.81	1.67	2.46	3.00	3.08	2.60	1.61
C.O	1.94	1.45	0.74	0.13	1.09	1.97	2.61	2.81	2.49	1.70
C.O	2.66	2.13	1.36	0.42	0.59	1.53	2.22	2.51	2.31	1.68
C.C	3.17	2.61	1.81	0.84	0.20	1.15	1.86	2.19	2.09	1.59
C.C	3.44	2.88	2.08	1.12	0.10	0.82	1.51	1.87	1.84	1.46
C.O	3.50	2.96	2.19	1.28	0.32	0.55	1.20	1.56	1.58	1.30
O.O	3.40	2.90	2.18	1.34	0.46	0.23	0.93	1.28	1.32	1.13
C.O	3.18	2.73	2.08	1.32	0.54	0.16	0.70	1.02	1.10	0.96
C.O	2.88	2.49	1.92	1.26	0.58	0.03	0.50	0.79	0.88	0.79
C.O	2.54	2.21	1.73	1.16	0.58	0.06	0.34	0.60	0.70	0.64
C.O	2.20	1.92	1.52	1.05	0.56	0.13	0.22	0.44	0.54	0.51
C.O	1.87	1.64	1.31	0.92	0.53	0.17	0.12	0.21	0.40	0.40
C.O	1.56	1.38	1.11	0.80	0.48	0.19	0.05	0.21	0.29	0.20
C.C	1.29	1.15	0.94	0.69	0.43	0.20	0.01	0.13	0.20	0.22
C.O	1.06	0.95	0.78	0.58	0.38	0.20	0.04	0.07	0.14	0.16
C.O	0.86	0.78	0.65	0.50	0.34	0.19	0.06	0.03	0.09	0.11
C.O	0.71	0.64	0.54	0.42	0.29	0.17	0.07	0.01	0.06	0.08
C.O	0.59	0.53	0.45	0.36	0.26	0.16	0.07	0.00	0.04	0.06

Continuação da Tabela III

FUNÇÃO VORTICIDADE - RN = 30

0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.C	0.C0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.11	0.29	0.24
0.C	0.C0	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.07	0.13	0.18	0.15
0.0	0.C0	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.09	0.13	0.16	0.16
0.0	0.C0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.06	0.10	0.14	0.16	0.16
0.C	0.C0	0.01	0.01	0.02	0.05	0.08	0.11	0.14	0.16	0.15
0.0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	0.16	0.15
0.0	0.01	0.01	0.02	0.04	0.07	0.10	0.13	0.15	0.15	0.14
0.C	0.01	0.02	0.03	0.05	0.08	0.11	0.13	0.15	0.15	0.14
0.C	0.C1	0.02	0.03	0.05	0.08	0.11	0.14	0.15	0.15	0.14
0.0	0.01	0.02	0.04	0.06	0.09	0.12	0.14	0.15	0.15	0.13
0.C	0.C2	0.03	0.04	0.07	0.10	0.12	0.15	0.16	0.15	0.13
0.0	0.02	0.03	0.05	0.07	0.10	0.13	0.15	0.16	0.15	0.13
0.0	0.02	0.03	0.05	0.08	0.11	0.14	0.16	0.16	0.15	0.13
0.0	0.03	0.04	0.06	0.09	0.12	0.14	0.16	0.17	0.16	0.14
0.C	0.03	0.05	0.07	0.09	0.12	0.15	0.17	0.18	0.18	0.16
0.0	0.04	0.05	0.07	0.10	0.13	0.16	0.18	0.20	0.21	0.21
0.C	0.05	0.06	0.08	0.11	0.14	0.17	0.20	0.24	0.27	0.29
0.C	0.05	0.06	0.09	0.11	0.15	0.19	0.24	0.31	0.39	0.44
0.0	0.06	0.07	0.09	0.12	0.17	0.23	0.31	0.44	0.59	0.71
0.C	0.06	0.07	0.10	0.14	0.20	0.29	0.45	0.68	0.96	1.15
0.C	0.06	0.08	0.11	0.16	0.26	0.43	0.72	1.15	1.62	1.91
0.0	0.07	0.09	0.14	0.23	0.40	0.74	1.30	2.09	2.87	3.19
0.0	0.C8	0.11	0.19	0.36	0.73	1.42	2.59	4.14	5.47	5.52
0.C	0.11	0.17	0.32	0.67	1.43	2.92	5.43	8.81	11.50	10.39
0.C	0.16	0.27	0.57	1.25	2.71	5.55	10.68	18.74	26.66	23.53
0.C	0.25	0.45	0.94	1.92	3.57	6.32	12.99	31.74	64.63	70.82
0.C	0.37	0.64	1.08	0.94	2.63	14.02	28.74	5.75	*****	*****
0.0	0.50	0.67	0.20	4.69	26.93	93.24	*****	*****	31.62	*****
0.C	0.59	0.88	2.51	6.29	12.54	*****	*****	*****	*****	*****
0.C	1.18	5.15	18.09	23.05	20.64	*****	*****	*****	*****	0.0
0.0	3.79	13.05	19.14	10.66	19.12					
0.C	7.96	15.20	14.26	3.77	8.80					
0.C	10.76	13.91	10.20	1.26	5.32					
0.0	11.58	11.95	7.42	0.35	3.87					
0.C	11.25	10.13	5.62	0.32	5.97	-4.83	-81.12	*****	*****	0.0
0.0	10.44	8.62	4.55	0.40	4.38	1.63	*****	*****	*****	*****
0.0	9.47	7.43	3.89	0.33	2.47	1.31	35.03	*****	-12.05	*****
0.0	8.50	6.49	3.47	0.54	1.05	1.17	8.88	22.09	-26.97	-30.58
0.C	7.62	5.76	3.19	0.85	0.16	0.97	3.20	1.12	-17.91	-12.95
0.C	6.84	5.19	3.03	1.17	0.40	0.85	1.35	2.47	-12.46	-7.45
0.0	6.18	4.75	2.95	1.44	0.76	0.79	0.59	3.25	-10.15	-5.34
0.0	5.64	4.42	2.91	1.65	1.00	0.77	0.20	3.57	-9.53	-4.46
0.C	5.19	4.16	2.89	1.82	1.18	0.77	0.01	3.75	-9.91	-4.16
0.0	4.83	3.96	2.89	1.96	1.31	0.79	0.11	3.85	-11.08	-4.21
0.C	4.54	3.81	2.90	2.07	1.43	0.84	0.13	3.85	-12.03	-4.54
0.0	4.31	3.70	2.91	2.16	1.54	0.92	0.08	3.76	-16.01	-5.10
0.C	4.13	3.61	2.93	2.25	1.65	1.04	0.04	3.59	-20.58	-5.89
0.C	3.99	3.54	2.95	2.34	1.78	1.20	0.22	3.34	-28.10	-6.92
0.0	3.88	3.50	2.98	2.44	1.93	1.40	0.46	3.02	-42.61	-8.22
0.0	3.80	3.48	3.02	2.55	2.11	1.64	0.74	2.65	-82.43	-9.83
0.C	3.75	3.47	3.08	2.67	2.30	1.91	1.06	2.25	*****	-11.83
0.C	3.71	3.48	3.15	2.81	2.52	2.20	1.40	1.83	*****	-14.34
0.0	3.70	3.50	3.23	2.97	2.77	2.52	1.76	1.39	51.54	-17.61
0.0	3.71	3.54	3.34	3.15	3.03	2.85	2.13	0.96	33.49	-22.04
0.C	3.73	3.61	3.46	3.35	3.31	3.19	2.50	0.54	24.57	-28.46
0.0	3.77	3.69	3.60	3.57	3.60	3.53	2.86	0.13	19.17	-38.84
0.0	3.83	3.78	3.76	3.80	3.89	3.87	3.20	0.26	15.50	-58.91
0.C	3.91	3.90	3.93	4.04	4.20	4.21	3.53	0.63	12.80	*****
0.C	4.01	4.04	4.12	4.29	4.50	4.53	3.84	0.97	10.72	*****
0.0	4.13	4.19	4.33	4.55	4.80	4.84	4.13	1.29	9.05	*****
0.0	4.27	4.36	4.54	4.81	5.08	5.12	4.39	1.58	7.68	62.90
0.C	4.42	4.54	4.76	5.06	5.36	5.38	4.61	1.83	6.53	41.08
0.C	4.58	4.72	4.98	5.31	5.61	5.61	4.79	2.04	5.57	30.18
0.C	4.75	4.92	5.19	5.54	5.83	5.80	4.94	2.22	4.76	23.59
0.0	4.93	5.11	5.40	5.75	6.03	5.95	5.04	2.26	4.06	19.15

FUNÇÃO VORTICIDADE - RN = 5

C.0	0.0	0.0	0.0	C.0	0.0	0.0	C.0	0.0	C.0	0.0
C.0	0.00	0.00	0.00	C.00	0.00	0.00	C.00	0.00	C.00	0.00
C.0	0.00	0.00	0.00	C.00	0.00	0.00	C.00	0.00	C.00	0.00
C.0	0.00	0.00	0.00	C.00	0.00	0.00	C.00	0.00	C.00	0.00
C.0	0.00	0.00	0.00	C.00	0.00	0.00	C.00	0.00	C.00	0.00
C.0	0.01	0.01	0.01	C.01	0.01	0.01	C.01	0.01	C.01	0.01
C.0	0.01	0.01	0.01	C.01	0.01	0.01	C.01	0.01	C.01	0.01
C.0	0.01	0.01	0.01	C.01	0.01	0.01	C.01	0.01	C.01	0.01
C.0	0.01	0.01	0.01	C.01	0.01	0.01	C.01	0.01	C.01	0.01
C.0	0.01	0.01	0.01	C.01	0.01	0.01	C.01	0.01	C.01	0.01
C.0	0.01	0.01	0.01	C.01	0.01	0.01	C.01	0.01	C.01	0.01
C.0	0.01	0.01	0.01	C.01	0.01	0.01	C.01	0.01	C.01	0.01
C.0	0.01	0.01	0.01	C.01	0.01	0.01	C.01	0.01	C.01	0.01
C.0	0.01	0.01	0.01	C.01	0.01	0.01	C.01	0.01	C.01	0.01
C.0	0.01	0.01	0.01	C.01	0.01	0.01	C.01	0.01	C.01	0.01
C.0	0.02	0.02	0.02	C.02	0.02	0.02	C.02	0.02	C.02	0.02
C.0	0.02	0.02	0.02	C.02	0.02	0.02	C.02	0.02	C.02	0.02
C.0	0.02	0.02	0.02	C.02	0.02	0.02	C.02	0.02	C.02	0.02
C.0	0.02	0.02	0.02	C.02	0.02	0.02	C.02	0.02	C.02	0.02
C.0	0.02	0.02	0.02	C.02	0.02	0.02	C.02	0.02	C.02	0.02
C.0	0.03	0.03	0.03	C.03	0.03	0.03	C.03	0.03	C.03	0.03
C.0	0.03	0.03	0.03	C.03	0.03	0.03	C.03	0.03	C.03	0.03
C.0	0.04	0.04	0.04	C.04	0.04	0.04	C.04	0.04	C.04	0.04
C.0	0.04	0.04	0.04	C.04	0.04	0.04	C.04	0.04	C.04	0.04
C.0	0.05	0.05	0.05	C.05	0.05	0.05	C.05	0.05	C.05	0.05
C.0	0.05	0.05	0.05	C.05	0.05	0.05	C.05	0.05	C.05	0.05
C.0	0.07	0.07	0.07	C.07	0.07	0.07	C.07	0.07	C.07	0.07
C.0	0.10	0.10	0.10	C.10	0.10	0.10	C.10	0.10	C.10	0.10
C.0	0.10	0.10	0.10	C.10	0.10	0.10	C.10	0.10	C.10	0.10
C.0	0.13	0.13	0.14	C.14	0.14	0.13	C.11	0.08	C.04	0.00
C.0	0.17	0.17	0.18	C.18	0.18	0.16	C.14	0.09	C.04	0.01
C.0	0.21	0.22	0.22	C.22	0.21	0.19	C.15	0.10	C.04	0.03
C.0	0.27	0.27	0.27	C.26	0.24	0.21	C.17	0.10	C.02	0.06
C.0	0.36	0.36	0.35	C.32	0.28	0.22	C.17	0.10	C.00	0.11
C.0	0.52	0.52	0.49	C.41	0.31	0.21	C.14	0.07	C.02	0.12
C.0	0.75	0.76	0.73	C.58	0.32	0.12	C.02	0.00	C.08	0.31
C.0	1.05	1.10	1.12	C.90	0.30	0.14	C.18	0.12	C.15	0.78
C.0	1.32	1.46	1.67	1.70	0.03	0.72	C.46	0.28	C.24	-0.01
C.0	1.45	1.59	1.87	2.81	17.20	0.29	C.19	0.42	-C.07	0.0
C.0	1.32	1.29	1.09	C.20	2.11					
C.0	1.03	0.85	0.46	0.17	C.53					
C.0	0.73	0.53	0.22	C.11	0.25					
C.0	0.50	0.35	0.19	C.09	0.37					
C.0	0.33	0.24	0.20	C.60	23.78	-10.09	-4.11	-3.04	-2.35	0.0
C.0	0.15	0.05	0.15	C.81	3.09	0.11	2.81	***	-6.92	-2.48
C.0	0.09	0.24	0.55	1.13	1.76	1.59	1.22	0.82	***	-3.40
C.0	0.35	0.53	0.83	1.24	1.61	1.77	1.79	1.62	2.25	-4.21
C.0	0.59	0.75	1.02	1.34	1.65	1.88	2.04	1.97	C.50	-6.08
C.0	0.74	0.90	1.14	1.42	1.72	1.99	2.21	2.20	C.72	***
C.0	0.80	0.95	1.18	1.47	1.78	2.09	2.36	2.29	1.39	6.84
C.0	0.77	0.92	1.16	1.45	1.79	2.15	2.47	2.54	1.80	1.02
C.0	0.62	0.79	1.03	1.36	1.74	2.16	2.52	2.62	2.07	0.27
C.0	0.35	0.53	0.80	1.16	1.60	2.08	2.51	2.66	2.22	1.02
C.0	0.07	0.13	0.44	0.86	1.36	1.92	2.41	2.62	2.31	1.28
C.0	0.62	0.38	0.02	0.46	1.05	1.69	2.25	2.52	2.32	1.58
C.0	1.26	0.98	0.56	C.00	0.68	1.41	2.02	2.28	2.26	1.68
C.0	1.91	1.58	1.09	C.44	0.32	1.11	1.79	2.18	2.15	1.69
C.0	2.47	2.10	1.55	0.83	0.01	0.83	1.54	1.96	1.99	1.64
C.0	2.89	2.49	1.89	1.13	0.27	0.58	1.28	1.72	1.80	1.54
C.0	3.13	2.71	2.09	1.32	0.47	0.36	1.05	1.48	1.59	1.40
C.0	3.19	2.77	2.16	1.41	0.59	0.19	C.82	1.24	1.38	1.25
C.0	3.09	2.69	2.11	1.41	0.65	0.06	C.64	1.02	1.17	1.09
C.0	2.87	2.51	1.98	1.34	0.67	0.03	C.48	0.82	0.98	0.92
C.0	2.58	2.26	1.80	1.24	0.65	0.10	C.35	0.66	C.80	0.78
C.0	2.26	1.98	1.58	1.10	0.60	0.14	C.25	0.51	C.64	0.65
C.0	1.93	1.70	1.36	C.96	0.54	0.15	C.17	0.29	C.51	0.52
C.0	1.61	1.42	1.15	0.82	0.48	0.16	C.10	0.29	C.40	0.42
C.0	1.32	1.17	0.95	0.68	0.41	0.15	0.06	0.22	C.30	0.23
C.0	1.06	0.95	0.77	0.56	0.34	0.14	C.02	0.16	C.22	0.26
C.0	0.85	0.75	0.62	0.46	0.29	0.13	C.01	0.11	C.17	0.20
C.0	0.66	0.59	0.49	0.37	0.23	0.11	C.00	0.08	C.12	0.16
C.0	0.52	0.47	0.39	C.29	0.19	0.09	0.01	0.06	C.10	0.12
C.0	0.41	0.37	0.31	C.23	0.15	0.08	0.01	0.05	C.08	0.10
C.0	0.33	0.30	0.25	C.19	0.12	0.06	C.00	0.04	C.08	0.09

Continuação da Tabela IV

FUNÇÃO VORTICIDADE - RN = 30

0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.02	0.03
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.04	0.04
0.0	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.05	0.05	0.04
0.0	0.01	0.00	0.00	0.01	0.02	0.04	0.05	0.05	0.05	0.04
0.0	0.01	0.01	0.00	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.06	0.03
0.0	0.01	0.01	0.00	0.01	0.03	0.04	0.06	0.06	0.05	0.03
0.0	0.02	0.01	0.00	0.01	0.03	0.05	0.06	0.06	0.05	0.03
0.0	0.02	0.01	0.00	0.01	0.03	0.05	0.06	0.06	0.05	0.03
0.0	0.02	0.01	0.00	0.02	0.04	0.05	0.07	0.07	0.05	0.02
0.0	0.02	0.01	0.00	0.02	0.04	0.06	0.07	0.07	0.05	0.02
0.0	0.02	0.01	0.00	0.02	0.04	0.06	0.07	0.07	0.05	0.02
0.0	0.02	0.01	0.00	0.02	0.04	0.06	0.07	0.06	0.05	0.01
0.0	0.02	0.01	0.00	0.02	0.04	0.05	0.06	0.06	0.04	0.01
0.0	0.03	0.02	0.01	0.01	0.03	0.05	0.06	0.06	0.04	0.00
0.0	0.03	0.02	0.01	0.01	0.02	0.04	0.05	0.05	0.03	0.01
0.0	0.04	0.03	0.02	0.00	0.02	0.03	0.04	0.03	0.00	0.04
0.0	0.05	0.04	0.03	0.01	0.00	0.02	0.02	0.01	0.04	0.10
0.0	0.05	0.05	0.04	0.02	0.01	0.01	0.01	0.04	0.10	0.19
0.0	0.06	0.06	0.05	0.04	0.04	0.05	0.07	0.11	0.20	0.34
0.0	0.07	0.07	0.06	0.05	0.05	0.10	0.17	0.23	0.33	0.55
0.0	0.08	0.06	0.03	0.37	0.49	0.14	0.40	0.43	0.49	0.86
0.0	0.06	0.11	1.38	4.91	4.34	1.20	1.07	0.81	0.71	16.41
0.0	0.10	1.37	6.32	10.87	20.81	3.67	1.46	1.09	71.57	0.0
0.0	0.75	3.62	6.25	3.27	8.34					
0.0	1.84	4.15	4.15	0.53	2.66					
0.0	2.61	3.67	2.65	0.02	1.29					
0.0	2.85	3.02	1.74	0.02	0.46					
0.0	2.78	2.42	1.20	0.19	***	-8.73	-3.98	-2.85	-1.49	0.0
0.0	2.56	1.95	0.81	1.02	5.18	3.48	***	-6.84	-4.33	-1.45
0.0	2.30	1.59	0.44	1.22	2.38	1.21	0.75	***	-5.15	-2.57
0.0	2.04	1.29	0.17	1.11	1.71	1.33	0.60	2.62	-5.21	-2.94
0.0	1.80	1.04	0.01	1.01	1.44	1.35	1.01	1.07	-5.10	-3.18
0.0	1.56	0.83	0.13	0.94	1.32	1.40	1.30	0.13	-4.96	-3.38
0.0	1.34	0.64	0.21	0.90	1.29	1.48	1.55	0.63	-4.80	-3.55
0.0	1.13	0.49	0.27	0.90	1.30	1.58	1.76	1.24	-4.60	-3.66
0.0	0.94	0.35	0.33	0.91	1.32	1.66	1.92	1.69	-4.34	-3.70
0.0	0.76	0.23	0.39	0.93	1.36	1.73	2.01	1.97	-4.02	-3.66
0.0	0.59	0.12	0.44	0.95	1.39	1.75	2.02	2.10	-3.64	-3.52
0.0	0.44	0.02	0.50	0.98	1.40	1.73	1.96	2.09	-3.17	-3.28
0.0	0.31	0.08	0.55	1.00	1.38	1.66	1.83	1.57	-2.61	-2.95
0.0	0.18	0.16	0.59	1.00	1.34	1.54	1.63	1.75	-1.89	-2.53
0.0	0.07	0.24	0.63	0.99	1.26	1.38	1.38	1.47	-0.82	-2.03
0.0	0.04	0.31	0.66	0.96	1.15	1.18	1.10	1.15	-1.49	-1.44
0.0	0.14	0.38	0.67	0.91	1.02	0.95	0.79	0.80	***	-0.77
0.0	0.22	0.43	0.67	0.84	0.86	0.70	0.46	0.44	7.30	-0.03
0.0	0.30	0.47	0.65	0.75	0.68	0.43	0.12	0.09	4.09	-0.98
0.0	0.36	0.49	0.62	0.64	0.48	0.15	0.21	0.25	2.88	-2.17
0.0	0.41	0.50	0.57	0.51	0.27	0.14	0.55	0.58	2.15	-3.77
0.0	0.44	0.50	0.50	0.36	0.04	0.43	0.87	0.89	1.60	-6.18
0.0	0.46	0.47	0.42	0.20	0.19	0.71	1.18	1.18	1.14	-10.59
0.0	0.46	0.43	0.31	0.03	0.43	0.99	1.47	1.44	0.76	***
0.0	0.44	0.37	0.20	0.15	0.66	1.26	1.74	1.68	0.41	***
0.0	0.40	0.30	0.07	0.34	0.90	1.52	1.99	1.90	0.11	***
0.0	0.34	0.21	0.07	0.53	1.12	1.75	2.21	2.09	0.15	13.75
0.0	0.27	0.10	0.22	0.71	1.33	1.97	2.41	2.25	0.38	9.06
0.0	0.18	0.01	0.37	0.89	1.53	2.16	2.57	2.37	0.57	6.66
0.0	0.08	0.13	0.52	1.06	1.70	2.32	2.70	2.46	0.72	5.17
0.0	0.03	0.26	0.67	1.22	1.85	2.44	2.79	2.51	0.83	4.15

pagam a partir do obstáculo em direção à linha de centro, na região compreendida pela largura da restrição, e à jusante na faixa compreendida pela região de recirculação.

Quanto à utilização do método II, ou seja, o método dependente do tempo, observa-se o seguinte:

1. Para um mesmo número de Reynolds, utilizando-se os valores da solução estacionária, o máximo erro relativo percentual encontrado foi sempre inferior à 1%, em todo o campo de escoamento.
2. Para se atingir um número de Reynolds mais elevado, partindo-se da solução de um número de Reynolds mais baixo, o método é extremamente lento, mesmo adotando-se critérios de convergência menos restritivos que os utilizados para a solução estacionária, tanto para a função de corrente como para a vorticidade. Esta observação concorda com Roache [3], quando propõe novos métodos iterativos de abordagem estacionária para a solução das equações de Navier-Stokes. Segundo o autor, o método estacionário é muito mais rápido do que os métodos dependentes do tempo.
3. Apesar de consumir um tempo de computação bastante longo, o mesmo se mostrou bastante estável, atingindo convergência até para $Re=25$ com malha de dimensão $H=1/10$. Para esta textura de malha, no caso do método estacionário, o máximo número de Reynolds para o qual se obteve convergência, foi $Re=17$. Para se obter a convergência partindo-se da solução para $Re=5$ na obtenção dos parâmetros de fluxo, para $Re=10$, foram necessárias 435 iterações temporais com um intervalo de tempo $\Delta T=0,0129$. Levando-se em conta que para cada iteração temporal, para um critério de convergência de 5×10^{-6} , um número razoável de iterações para a função de corrente é necessário. O tempo consumido para uma malha de $H=1/40$ seria realmente elevado, tornando este método pouco recomendado quando o número de pontos do campo computacional é muito grande.

No que tange ao método da solução estacionária, o número de iterações gastas em média para se atingir a convergência, para uma diferença entre os números de Reynolds de duas soluções consecutivas não maior do que 3, sempre se situou em torno de 600 iterações, para $H=1/40$ e critérios de convergência correspondentes à solução de referência. O tempo gasto para se efetuar estas iterações é função da capacidade e velocidade de processamento do computador

digital utilizado, bem como da taxa de ocupação da unidade central de processamento (CPU), no caso de o acesso à referida unidade ser por processo iterativo de usuários. Na realização deste estudo, o computador utilizado foi um IBM 4341, no qual o acesso à CPU, opcionalmente pode ser via terminal, e para estes, prioridade de utilização do tipo iterativo. Quando a taxa de utilização da citada unidade é baixa, o tempo consumido pelo programa é de, aproximadamente, 20 minutos. À medida que a taxa de ocupação aumenta, o tempo necessário pode ser estendido para 60 minutos ou até mais. No caso de se fazer uso de malhas mais grosseiras, como $H=1/20$, este tempo é bastante reduzido, caindo para cerca de 5 minutos, se a taxa de utilização da CPU é baixa.

3.2.2. Perfis de velocidade

Os perfis de velocidades axiais estão apresentados nas figuras 10 a 15. Os perfis estão em escala, e 6,0mm corresponde a uma velocidade axial $U=1$. Observa-se que, à medida que se incrementa o número de Reynolds, ocorre um achatamento do perfil de Poiseuille, tanto na seção de entrada como na seção de saída do obstáculo, mais notadamente na seção de entrada. Este fato também é observado por Lee e Fung [8] quando faz a análise dos resultados do estudo de um obstáculo senoidal. Outro ponto que merece destaque é o alargamento da região de velocidade negativa a partir da parede em direção à linha de centro e a jusante do obstáculo com o aumento do número de Reynolds do escoamento. Observa-se ainda que, para os fluxos correspondentes aos valores de Reynolds mais elevados, o escoamento na seção de saída não é ainda plenamente desenvolvido, fato que sugere o posicionamento desta última a uma distância maior do que $3R_0$, partindo da seção de saída da restrição, ainda que a utilização das condições (19;20) minimiza um pouco os erros que, em razão disto, possam advir.

Nas figuras 16 e 17 estão traçados os perfis de velocidades radiais, onde um comprimento de 12,0mm corresponde a uma velocidade radial $V=0,628$.

3.2.3. Distribuição de pressões

A figura 18 apresenta a queda de pressão na linha de centro, referenciada a uma pressão nula da seção de entrada, para os números de Reynolds 5; 10; 20; 30; 40 e 50. A linha tracejada representa a perda linear de pressão para o fluxo de Poiseuille, na

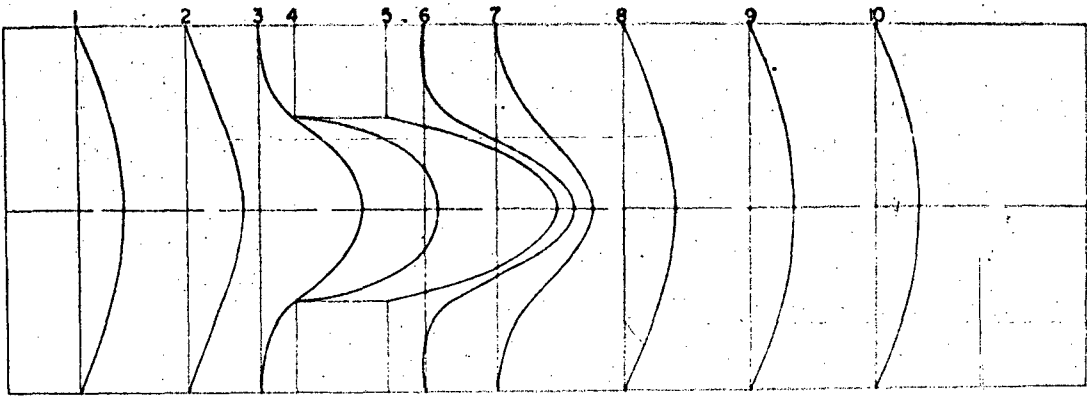


Fig 10= PERFIS DE VELOCIDADE AXIAL (u/U_0)
 $Re = 5,0$

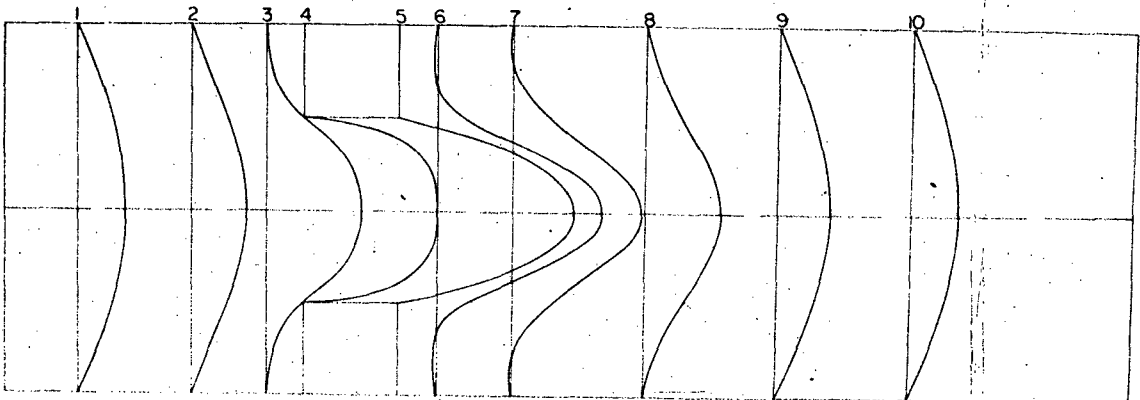


Fig 11= PERFIS DE VELOCIDADE AXIAL (u/U_0)
 $Re = 10,0$

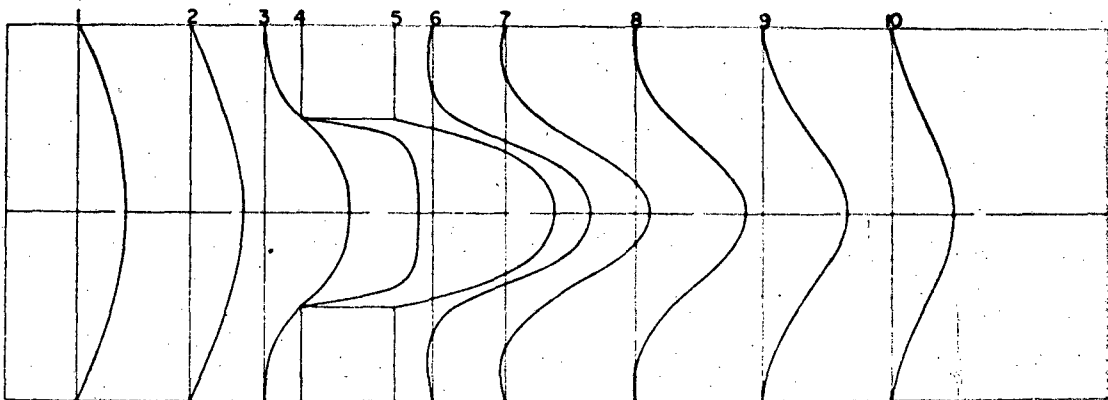


Fig 12= PERFIS DE VELOCIDADE AXIAL (u/U_0)
 $Re = 20,0$

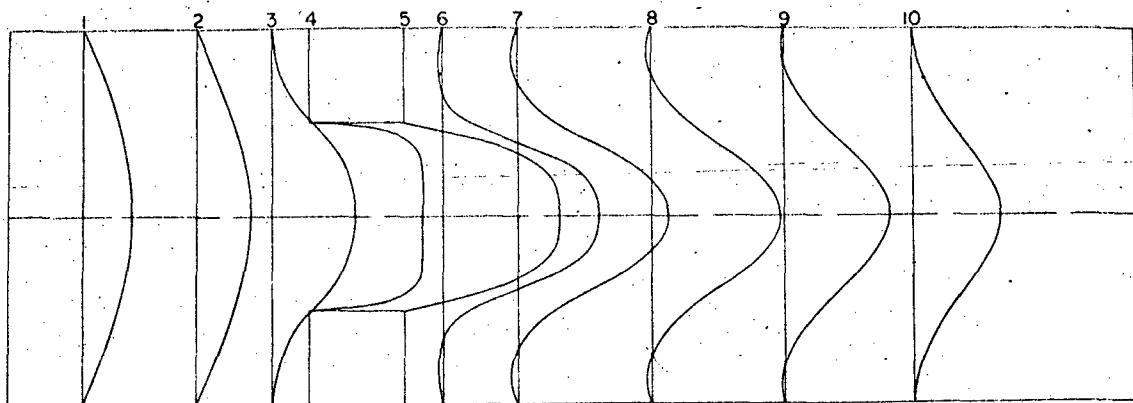


Fig 13= PERFIS DE VELOCIDADE AXIAL (u/U_0)
 $Re = 30,0$

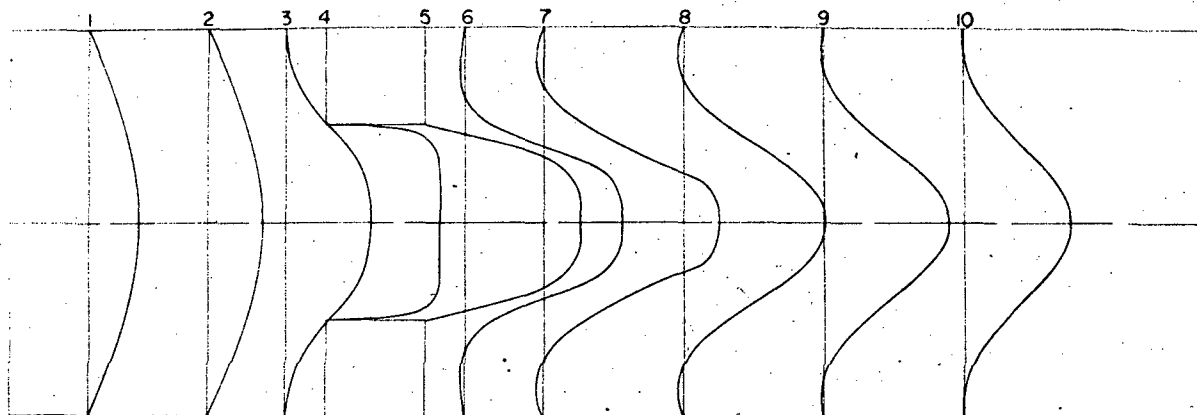


Fig 14= PERFIS DE VELOCIDADE AXIAL (u/U_0)
 $Re = 40,0$

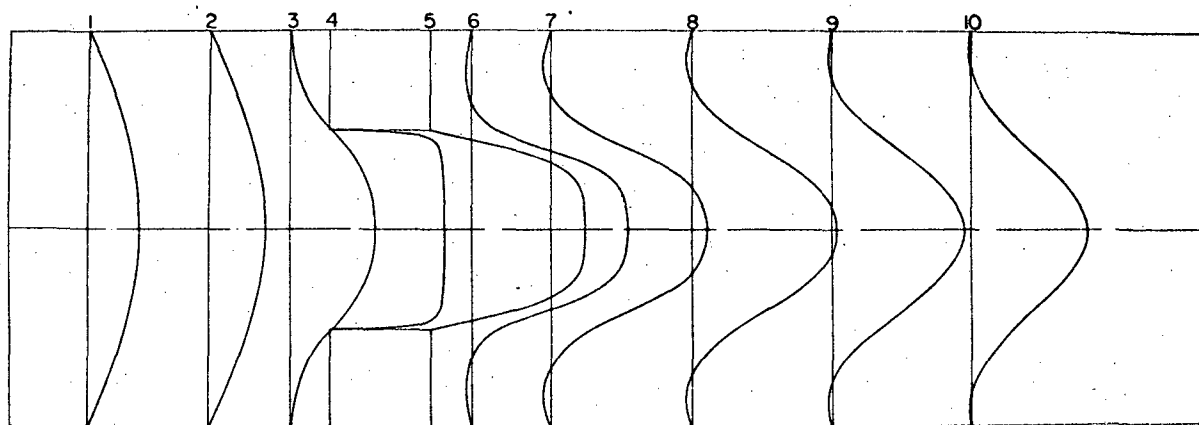


Fig 15= PERFIS DE VELOCIDADE AXIAL (u/U_0)
 $Re = 50,0$

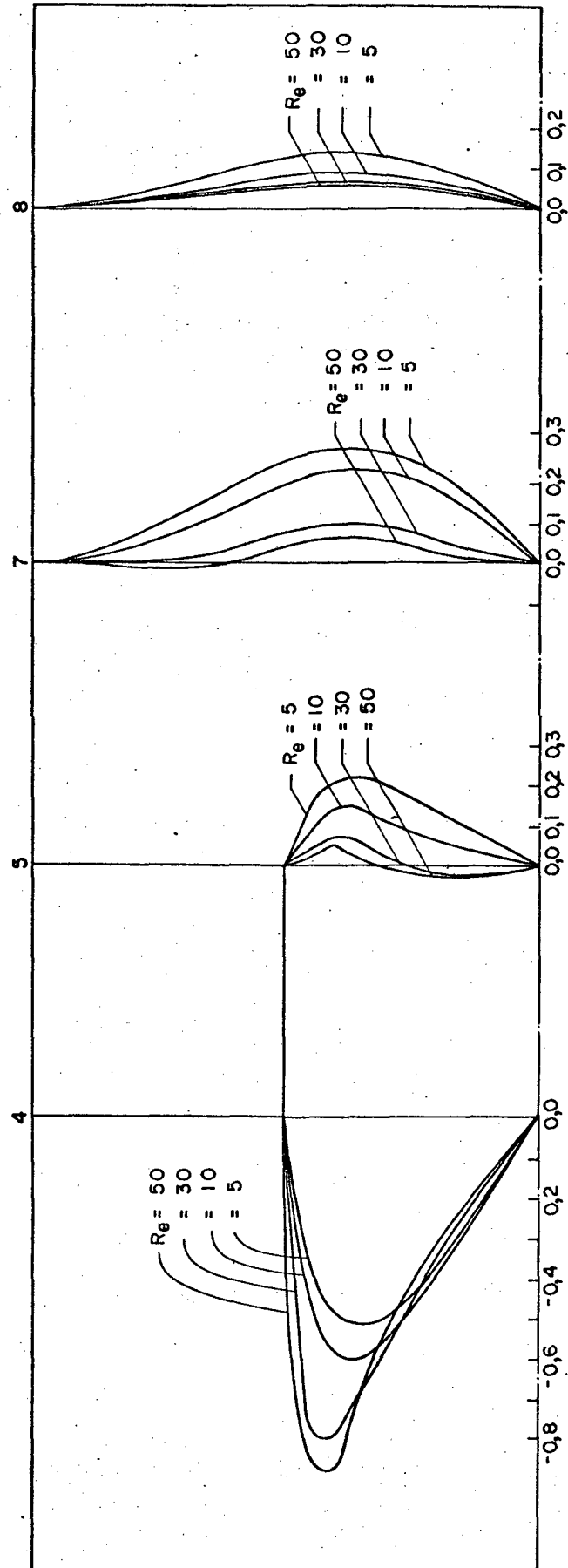


Fig. 16 = PERFIS DE VELOCIDADE RADIAL (v/V_0)

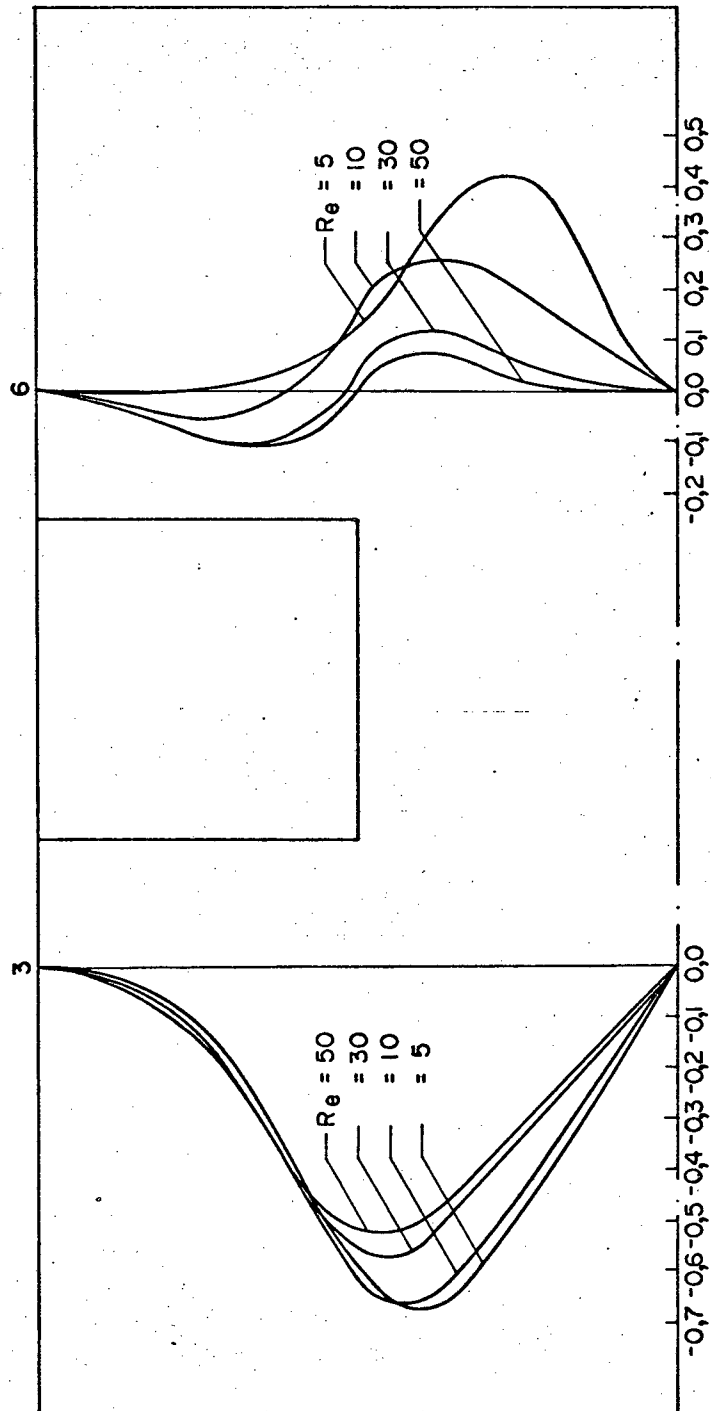


Fig.17 = PERFIS DE VELOCIDADE RADIAL (v/V_0)

hipótese de não existir o obstáculo, equacionada por:

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = -4 \quad (48)$$

Para os valores menores do número de Reynolds, percebe-se que a curva de pressão torna-se paralela a esta linha, a jusante do obstáculo, após ter ocorrido a recuperação de pressão estática, confirmando as observações feitas por Mills [3]. Para os números de Reynolds mais elevados percebe-se que na seção de saída a pressão estática ainda não foi totalmente recuperada, evidenciando a necessidade de se utilizar a seção de saída posicionada mais à jusante em relação à restrição. Por outro lado, a perda de pressão a montante do obstáculo sugere o uso de uma seção de entrada mais próxima do ressalto, o que pode ser observado também nos gráficos dos perfis de velocidades.

Observa-se ainda que, para a seção de entrada do obstáculo, os valores obtidos para os números de Reynolds até 20, tem uma magnitude aproximadamente igual à metade dos valores correspondentes aos obtidos por Mills [3]. Isto se deve ao fato de ter sido utilizado diferentes valores característicos na adimensionalização.

Pode-se constatar, ainda, que a largura do obstáculo faz com que a perda localizada seja aproximadamente o dobro da que ocorreria, caso esta largura fosse a mesma dimensão da malha.

3.2.4. Tensões de cisalhamento

As figuras 19 e 22 apresentam a distribuição da tensão de cisalhamento para diversas seções, enquanto que as correspondentes à entrada e saída do obstáculo, estão representadas pelas figuras 20 e 21. Confirmando os resultados de Cheng et al [7], para o caso estacionário, a maior magnitude da tensão de cisalhamento ocorre no ponto de quina convexo da seção transversal de entrada da restrição, onde $\tau=160,23$ na figura 20. Ainda que os perfis de tensões apresentem um comportamento linearmente crescente para um pico, nas vizinhanças dos pontos de canto convexos, devido às incertezas inerentes à limitação de resolução associada com o tamanho da malha, esta deve ser interpretada como uma estimativa de comportamento, apesar de a dimensão da malha ser bastante reduzida.

3.2.5. Análise dos comprimentos de separação e posicionamento da região de recirculação

A determinação dos comprimentos de separação do escoamento após o obstáculo, está fundamentada na distância em que a linha de corrente nula é ramificada na seção de saída da restrição, se re encontra com a original no contorno rígido à jusante. Assim, a distância compreendida entre esse ponto e a seção de saída do obstáculo é chamada de comprimento de separação e será designado por L_z . Deve-se salientar que a determinação deste parâmetro fica sujeito à ocorrência de erros provenientes da limitação da capacidade de resolução de malha. A Tabela V apresenta os valores de $(L_z/2R_0)$ correspondentes aos escoamentos analisados. Os pares de valores $(Re; L_z/2R_0)$ apresentam um índice de correlação bastante alto ($r^2 = 0,999$), podendo ser equacionados por:

$$\frac{L_z}{2R_0} = 0,064 Re^{0,854} \quad (49)$$

Na figura 23 estão plotados os comprimentos de separação em função do número de Reynolds em escalas logarítmicas, confirmando a boa ajustagem representada pela equação (49), na faixa valores de Reynolds de 5 a 50.

TABELA V - Comprimentos de separação ($L_z/2R_0$) em função do número de Reynolds Re.

Re	$L_z/2R_0$	Re	$L_z/2R_0$
05	0,264	31	1,192
08	0,372	33	1,283
10	0,460	35	1,344
13	0,558	36	1,360
15	0,648	38	1,451
18	0,753	40	1,508
20	0,828	43	1,598
23	0,931	45	1,656
25	1,001	48	1,773
28	1,098	50	1,830
30	1,181		

Tentou-se, também, achar uma relação simples, que permitisse posicionar o contorno da região de recirculação ($\Psi = 0$), em função dos parâmetros adimensionais Z/R_0 e Re . Para qualquer um dos números de Reynolds calculados, conseguiu-se obter uma correlação bastante boa entre os pares de coordenadas ($R/R_0; Z/Z_0$), correspondentes aos valores nulos da função de corrente afastados da parede, a jusante do obstáculo. Assim, verificou-se que matematicamente, um polinômio do 2º grau representa bastante bem aquela região, satisfazendo plenamente ($r^2=0,997$) a relação $R/R_0 = f(Z/R_0)$. Em contrapartida, não se conseguiu determinar uma relação representativa para os coeficientes do polinômio, em função do número de Reynolds. A Tabela VI apresenta os valores dos três coeficientes para o referido polinômio, para os números de Reynolds calculados. Para os valores de Reynolds que não constam da Tabela VI, recomenda-se o uso das seguintes equações de interpolação:

$$a = 1,04453 \cdot \ln Re + 0,29122 \times 10^{-3} \cdot Re^2 - 0,47193 \times 10^{-1} \cdot Re - 2,48945$$

$$b = 1,29079 \cdot \ln Re + 0,28811 \times 10^{-6} \cdot Re^4 - 0,54225 \times 10^{-4} \cdot Re^3 + 0,41269 \times 10^{-2} \cdot Re^2 - 0,17656 \cdot Re - 1,54656$$

$$c = -0,12843 \times 10^{-1} \cdot \ln Re - 0,18724 \times 10^{-4} \cdot Re^2 + 0,22491 \cdot Re + 0,47595$$

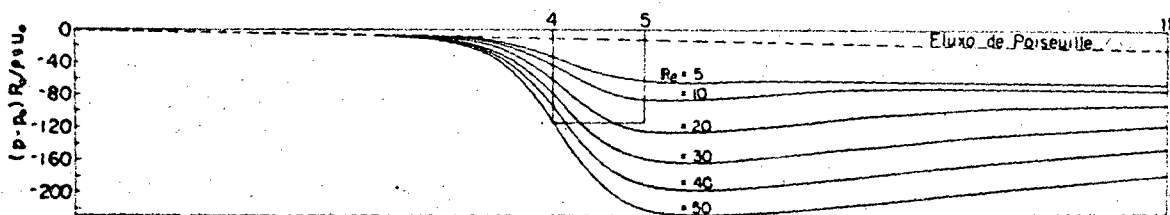


Fig. 18 • PERDA DE PRESSÃO NA LINHA DE CENTRO

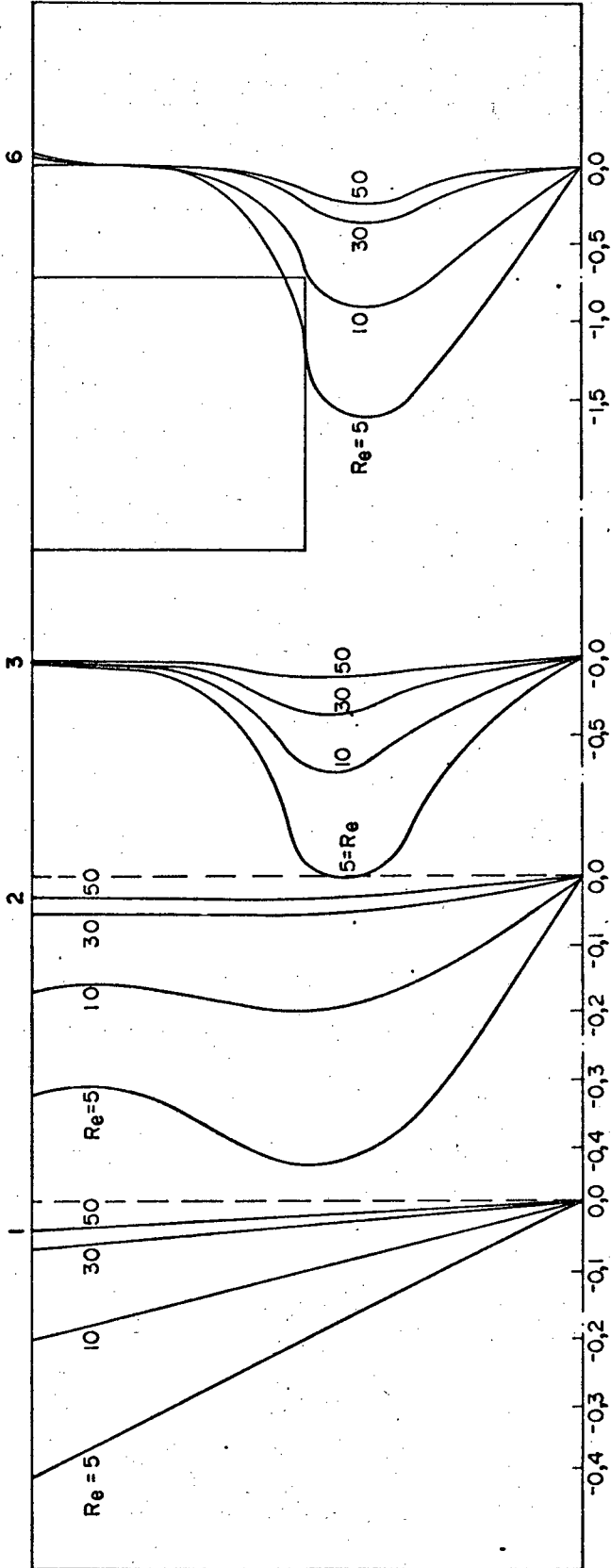


Fig. 19 = TENSÕES DE CIZALHAMENTO A MONTANTE
DO OBSTÁCULO ($\tau_{rz} / \rho U_0^2$)

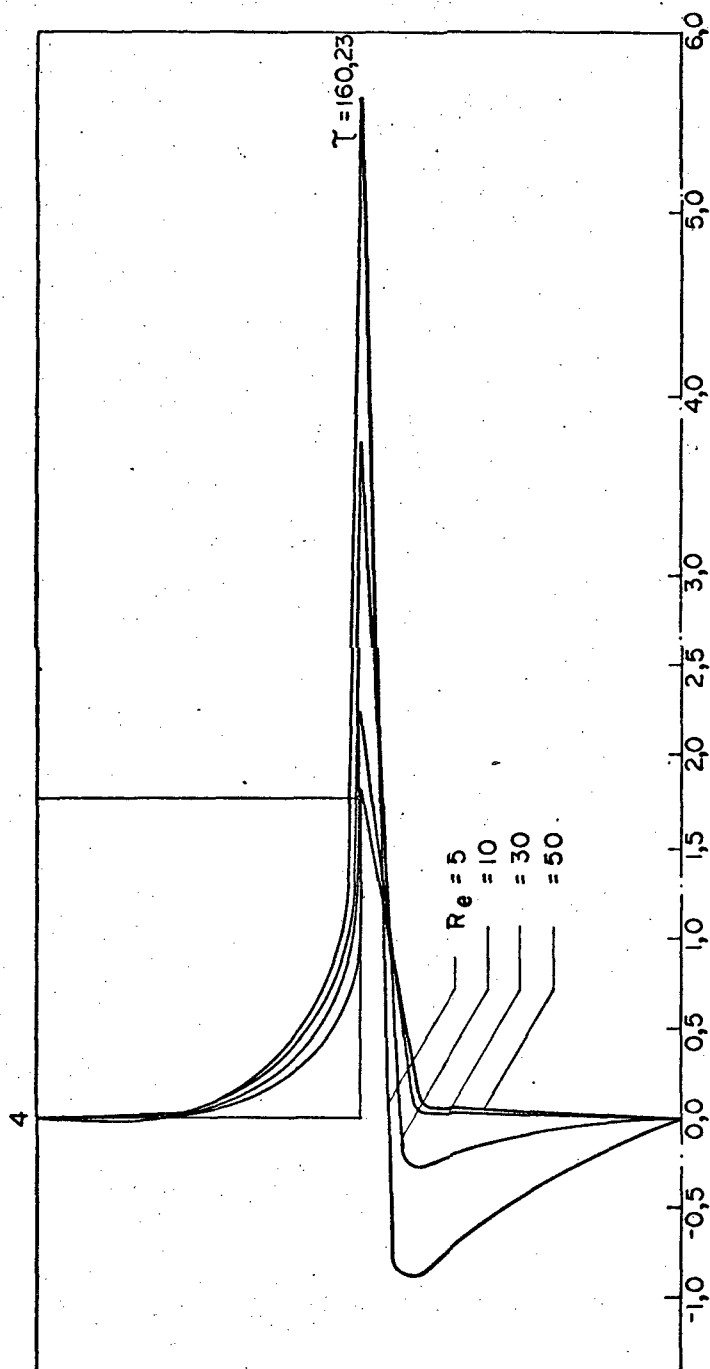


Fig. 20 = TENSÕES DE CIZALHAMENTO PARA A SECÇÃO DE ENTRADA DO OBSTÁCULO ($\tau_{rz} / \rho U_0^2$)

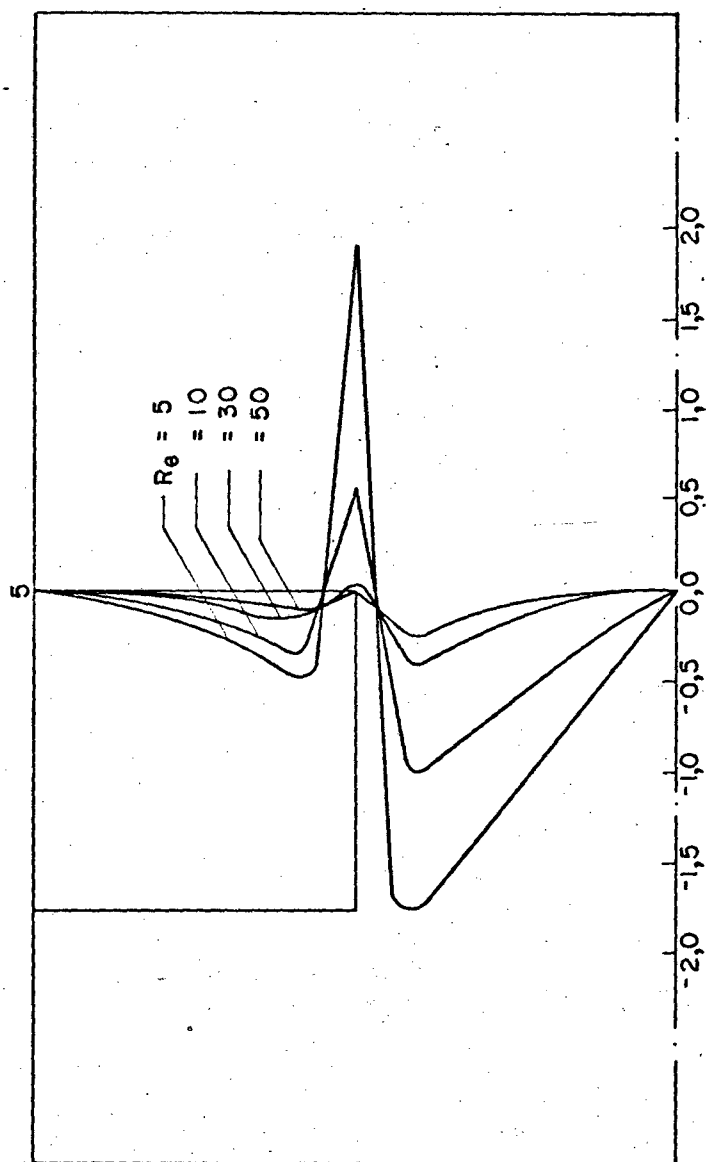


Fig: 21 = TENSÕES DE CIZALHAMENTO PARA A SEÇÃO
DE SAÍDA DO OBSTÁCULO ($\tau_{rz} / \rho U_0^2$)

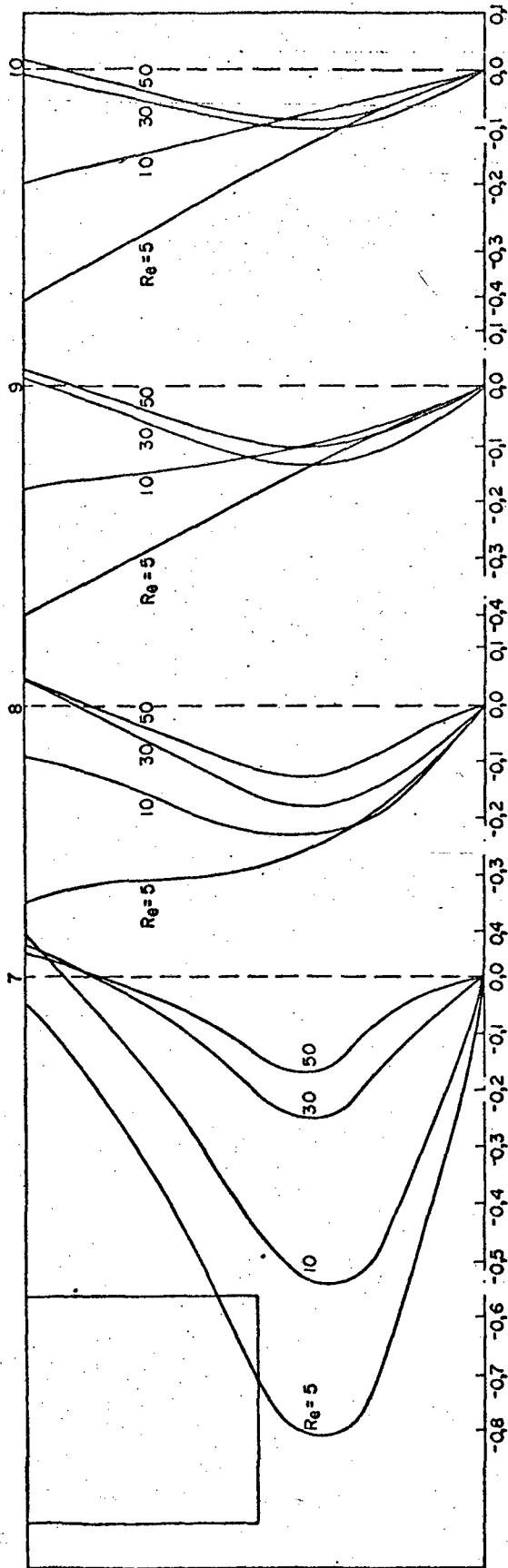


Fig. 22 = TENSÕES DE CIZALHAMENTO A JUSANTE DO OBSTÁCULO ($\tau_{rz} / \rho U_0^2$)

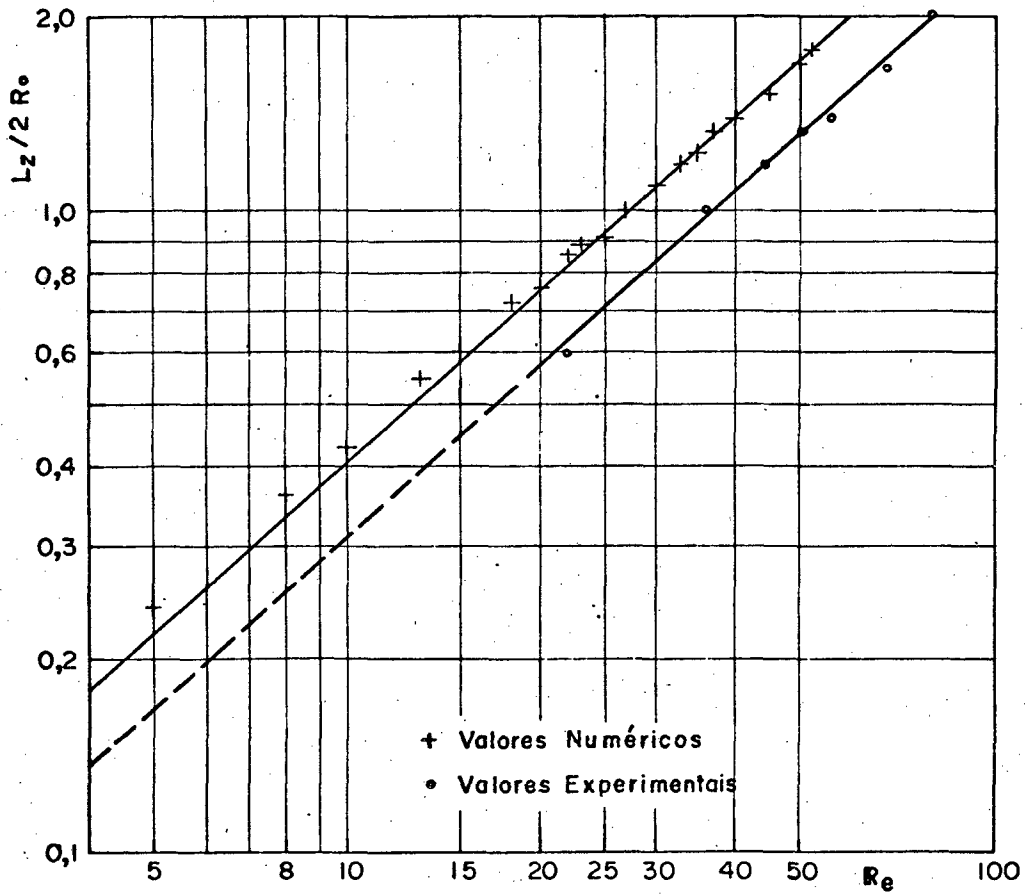


Fig. 23 = CURVA DE VARIAÇÃO DOS COMPRIMENTOS DE SEPARAÇÃO EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE REYNOLDS.

TABELA VI - Valores dos coeficientes dos polinômios do 2º grau, para posicionamento da região de recirculação, para os números de Reynolds calculados.

$$R/R_0 = a (Z/R_0)^2 + b (Z/R_0) + c$$

Re	a	b	c
5	-0,2606	-1,0299	0,4661
8	-0,0290	-0,7007	0,4663
10	0,0217	-0,5103	0,4670
13	0,0631	-0,3867	0,4678
15	0,0502	-0,2877	0,4712
18	0,0522	-0,2215	0,4733
20	0,0503	-0,1855	0,4750
23	0,0422	-0,1465	0,4782
25	0,0435	-0,1294	0,4788
28	0,0352	-0,1061	0,4820
30	0,0301	-0,0908	0,4834
31	0,0344	-0,0911	0,4830
33	0,0269	-0,0770	0,4851
35	0,0265	-0,0706	0,4859
36	0,0268	-0,0691	0,4861
38	0,0227	-0,0602	0,4874
40	0,0202	-0,0551	0,4889
43	0,0187	-0,0490	0,4897
45	0,0206	-0,0465	0,4897
48	0,0159	-0,0398	0,4914
50	0,0164	-0,0377	0,4916

3.3. Validação dos resultados

Devido à característica numérica da solução, procedeu-se a comparação dos resultados obtidos computacionalmente, com os resultados experimentais obtidos por Linsingen [21] na análise do mesmo problema.

Os números de Reynolds selecionados nesta análise experimental são baseados no diâmetro do conduto e na velocidade média do escoamento. Os valores disponíveis para as diversas seções da solução experimental são:

$Re_D = 105; 163; 210; 300; 481$ para a seção 2

$Re_D = 31; 68; 131; 178; 234$ para a seção 4

$Re_D = 30; 54; 81; 140; 161; 200; 227; 368$ para a seção 5

$Re_D = 200; 368$ para a seção 8

$Re_D = 202; 368$ para a seção 10.

A solução numérica do presente estudo tem os números de Reynolds baseados no raio do conduto e na velocidade máxima do escoamento na linha de centro, que são equivalentes aos números de Reynolds calculados com o diâmetro de canalização e a velocidade média.

Analisando-se os valores experimentais apresentados acima, observa-se que os diversos parâmetros poderão ser comparados apenas nas seções de entrada e saída do obstáculo, uma vez que são as únicas seções que apresentam valores para Reynolds menores ou iguais a 50, ou seja, o máximo valor para o qual se conseguiu convergência no processo iterativo.

3.3.1. Comparação de velocidades axiais

Para fins de referência, identificar-se-ão os valores de velocidade axial obtidos experimentalmente por U^+ e os obtidos numericamente por U . As velocidades médias serão designadas por Um^+ e Um , e velocidades máximas na linha de centro do conduto como U_0^+ e U_0 , respectivamente.

Fazendo-se uso dos valores de viscosidade cinemática em função da temperatura, contidas na Tabela nº 13 do apêndice do tra-

balho realizado por Linsingen [21] e tendo-se em conta que $U^+ = 2U_m^+$, para o escoamento Poiseuilliano montou-se a Tabela VII, onde aparecem o número da seção em consideração, o número de Reynolds do escoamento, a temperatura do fluido, a viscosidade cinemática, a velocidade média e a velocidade máxima do escoamento na linha de centro.

TABELA VII - Valores de velocidade no eixo de simetria do conduto em função de Re_D e da viscosidade cinemática.

Seção nº	Re_D	T_f (°C)	ν (cm ² /s)	U_m^+ (cm/s)	U^+ (cm/s)
4	31	17,0	0,120	0,836	1,672
5	30	18,5	0,114	0,769	1,537
5	54	18,5	0,114	1,383	2,767

Utilizando-se os valores da velocidade axial medidos experimentalmente e adimensionalizando-os com os valores da velocidade na linha de centro da Tabela VII acima, e comparando-se com as velocidades adimensionais calculadas numericamente, determinaram-se os desvios em relação aos valores obtidos experimentalmente. Estes valores estão apresentados na Tabela VIII.

TABELA VIII - Velocidades adimensionais obtidas experimentalmente, e os desvios em relação aos valores experimentais.

Seção nº	Re_D	Pos. Tubo	U^+/U^+	U	Desvio (%)
4	31	1	3,09	2,149	30,40
4	31	2	3,38	2,306	31,80
4	31	3	3,38	2,355	30,30
4	31	4	3,38	2,365	30,00
4	31	5	3,38	2,380	29,60
5	30	1	3,17	1,765	44,30
5	30	2	3,84	2,466	35,80
5	30	3	4,62	2,988	35,30
5	30	4	4,75	3,181	33,00
5	30	5	4,75	3,280	30,90
5	54	1	1,86	1,840	1,08
5	54	2	2,78	2,520	9,35
5	54	3	3,33	2,918	12,40
5	54	4	3,33	3,028	9,06
5	54	5	3,33	3,060	8,11

OBS.: Uma vez que não se conseguiu convergência para $Re > 50$, utilizaram-se os valores correspondentes a $Re = 50$, para se comparar com os valores experimentais obtidos para $Re_D = 54$.

Analisando-se os erros relativos entre os valores de velocidade axial obtidos numericamente e experimentalmente, apresentados na Tabela VIII, observa-se que para os valores de Reynolds próximos ao limite inferior da gama de medição proposta por Linsingen [21], os desvios são bastante grandes, diminuindo sensivelmente à medida que se incrementa Re . Uma vez que os valores comparados são os correspondentes a um cruzamento de faixa próximo a um limite superior para os calculados numericamente, e a um limite inferior para os obtidos experimentalmente, seria extremamente errôneo caracterizar tais desvios como decorrentes do fato de se estar trabalhando com um sensor e amplificador de sinal de pressão diferencial em limites extremos de faixa. O mesmo raciocínio vale para os valores obtidos numericamente, quanto aos desvios que poderiam decorrer do fato de se estar trabalhando com uma seção de saída posicionada a

uma distância menor do que a necessária, para se obter um perfil de velocidades plenamente desenvolvido. Além disso, não se dispõe de resultados numéricos correspondentes a valores de Reynolds mais altos, para se poder verificar a tendência de comportamento do erro, ou seja, se há um crescimento na magnitude dos erros a medida que Re aumenta, indicando, neste caso, um mau posicionamento da seção de saída da solução numérica, ou se ocorre diminuição nos erros relativos quando se incrementa Re , caracterizando, neste caso, a utilização de um sensor e amplificador de pressão diferencial inadequados à faixa de medição correspondente ao limite inferior da gama de medições proposta no estudo experimental.

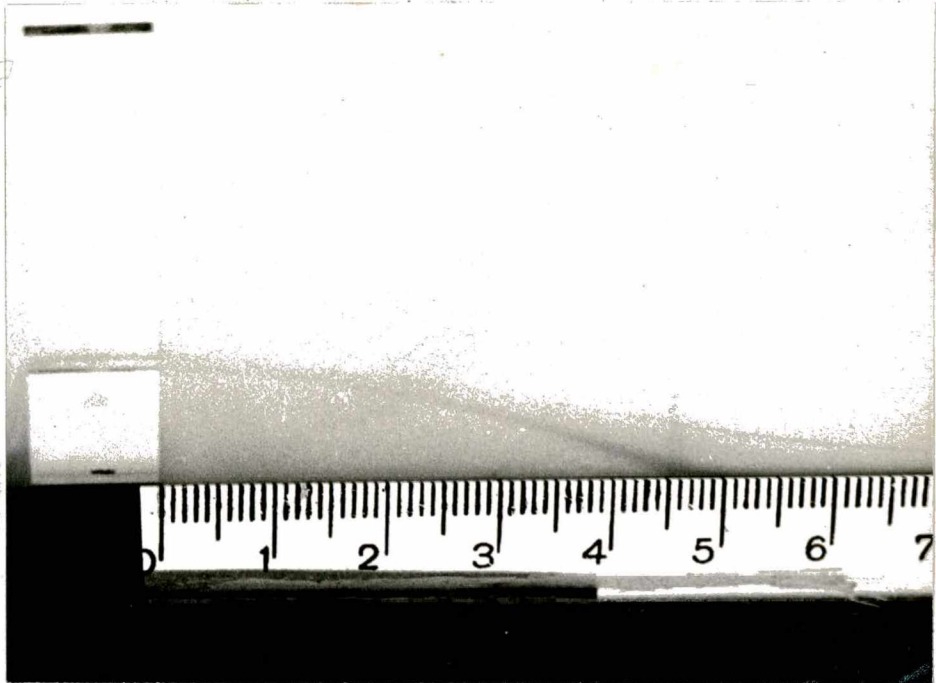
3.3.2. Posicionamento da região de recirculação e análise dos comprimentos de separação

No que concerne ao posicionamento da região de recirculação será comparada a relação adimensional ordenada/diâmetro ($R/2R_0$) para pontos correspondentes à mesma relação abcissa/diâmetro dessa região, para os escoamentos com valores de $Re = 22; 36; 44$ e 50 . A figura 24 apresenta o posicionamento da região de recirculação obtida experimentalmente para $Re_D = 36$, com escala de $1,37 : 1$. As figuras 25, 26 e 27 apresentam o posicionamento da referida região para $Re_D = 22; 44$ e 50 , com escalas de $1,52 : 1; 1,46 : 1$ e $1,35 : 1$, respectivamente.

Deve-se salientar ainda que estas comparações estarão acompanhadas de um pequeno erro, decorrente da distorção ótica na direção radial, apresentada pelo material acrílico do tubo transparente utilizado no ensaio experimental.

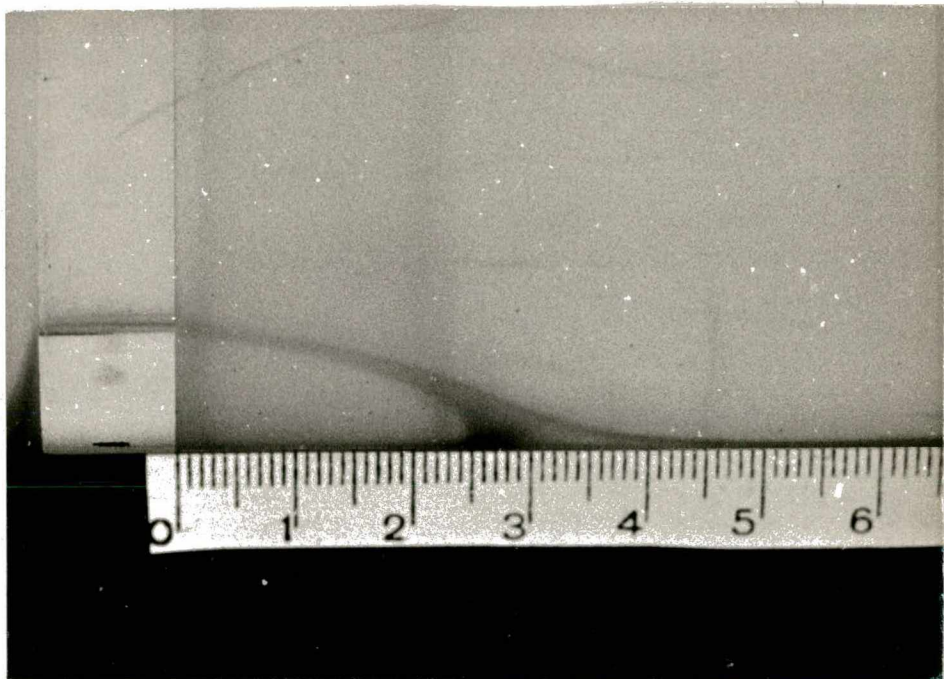
A Tabela IX apresenta a relação $R/2R_0^†$ para os pontos da região de recirculação obtida experimentalmente, e a relação $R/2R_0$ obtida numericamente, bem como os desvios relativos com respeito à solução experimental, para as mesmas posições de abcissas adimensionais $Z/2R_0$ para $R = 36$, utilizando-se:

- a) Solução de referência.
- b) Solução numérica obtida com as equações governantes na forma não conservativa com abordagem estacionária.
- c) Solução numérica obtida com as equações governantes na forma conservativa, porém com condição de contorno dada pela equação (12 e abordagem estacionária.



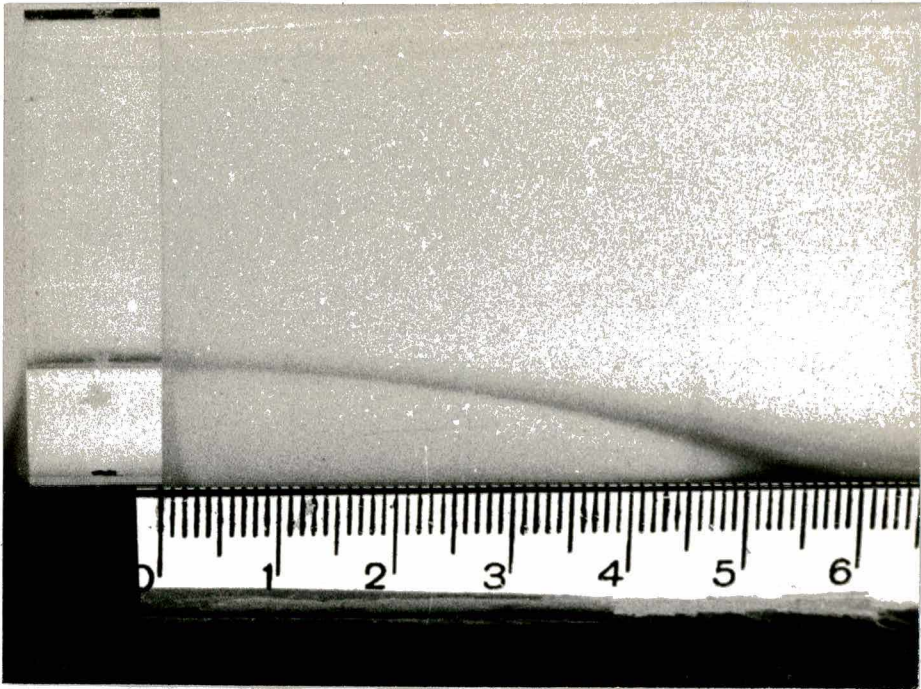
Re = 36

Figura 24 - Posicionamento da região de recirculação, segundo Linsingen [21].



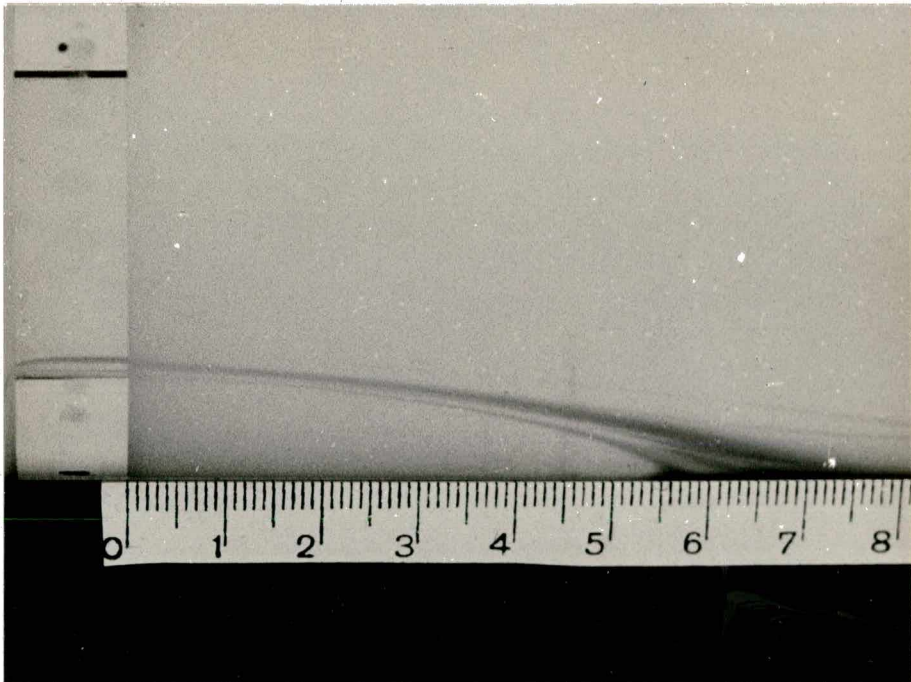
Re = 22

Figura 25 - Posicionamento da região de recirculação, segundo Linsingen [21].



Re = 44

Figura 26 - Posicionamento da região de recirculação, segundo Linsingen [21].



Re = 50

Figura 27 - Posicionamento da região de recirculação, segundo Linsingen [21].

- d) Solução numérica utilizando-se as equações governantes na forma conservativa, com condição de contorno fornecida pela equação (14) e abordagem estacionária.
- e) Solução numérica utilizando-se as mesmas equações que resultam a solução de referência, utilizando-se, porém, a técnica de se adotar valores descontínuos para os pontos de quina convexos.

TABELA IX - Erros relativos no posicionamento da região de recirculação, para as soluções numéricas testadas para $Re = 36$ comparada com a solução obtida experimentalmente.

$\frac{Z}{2R_0}$	$\frac{R}{2R_0}^+$ Expe- rimental	$\frac{R}{2R_0}$ a	ERRO %	$\frac{R}{2R_0}$ b	ERRO %	$\frac{R}{2R_0}$ c	ERRO %	$\frac{R}{2R_0}$ d	ERRO %	$\frac{R}{2R_0}$ e	ERRO %
0,113	0,2528	0,2461	2,65	0,2463	2,57	0,2460	2,69	0,2418	4,35	0,2488	1,58
0,225	0,2348	0,2417	-2,94	0,2420	-3,07	0,2415	-2,85	0,2378	-1,28	0,2437	-3,79
0,337	0,2364	0,2341	0,97	0,2345	0,80	0,2337	1,14	0,2300	-2,71	0,2362	0,08
0,450	0,2325	0,2241	3,61	0,2247	3,35	0,2236	3,83	0,2198	5,46	0,2263	2,67
0,562	0,2177	0,2116	2,80	0,2125	2,39	0,2112	2,99	0,2069	4,96	0,2142	1,61
0,675	0,1892	0,1966	-3,91	0,1978	-4,55	0,1963	-3,75	0,1914	-1,16	0,2001	-5,76
0,787	0,1764	0,1789	-1,42	0,1804	-2,27	0,1790	-1,47	0,1728	2,04	0,1831	-3,80
0,900	0,1469	0,1580	-7,56	0,1600	-8,72	0,1587	-8,03	0,1505	-2,45	0,1637	-11,44
1,012	0,1210	0,1329	-9,83	0,1357	-12,15	0,1343	-10,99	0,1231	-1,74	0,1402	-15,87
1,125	0,1087	0,1025	5,70	0,1057	2,76	0,1049	3,50	0,0893	17,85	0,1124	-3,40
1,237	0,0921	0,0646	29,86	0,0687	25,41	0,0687	25,41	0,0458	50,27	0,0771	16,29

Os valores de $\frac{R}{2R_0}^+$ constantes da Tabela IX são valores médios dos limites indicados pela concentração das linhas de corantes, limites estes que podem ser observados na figura 14 do trabalho de Linsingen [21] e que foram reproduzidos por meio de ampliação nas figuras 24 a 27. Estes limites demarcam uma região que se alarga à medida que se aumenta a distância $(\frac{Z}{2R_0})$ a jusante do obstáculo, caracterizando assim uma região de incerteza bastante grande junto a parede. Tal fenômeno supõe-se estar associado com o caráter mais difuso do escoamento à medida que se aproxima da parede, onde o corante se difunde em uma região mais larga, dificultando localizar-se precisamente a linha de corrente nula. Já para posições mais afastadas da parede, a característica mais advectiva do escoamento se sobrepõe à difusão, permitindo obter-se uma faixa mais estreita, podendo-se, assim, identificar melhor a linha de corrente nula. Tal suposição concorda bastante bem com os desvios encontra-

dos, onde para valores de $Z/2R_0$ até 1,125 resultaram em valores bastante baixos, evidenciando o perfil delgado da região de incerteza para valores de abcissa na vizinhança à esquerda desse limite.

Pode-se observar também a partir da Tabela IX que, uma vez respeitado o limite da abcissa adimensional acima citado, com exceção da formulação "e", todas as demais apresentaram erros de magnitude bastante pequena, indicando que tais formulações são equivalentes no que diz respeito ao posicionamento da região de recirculação.

A Tabela X contém os desvios relativos referentes ao posicionamento da região de recirculação entre as soluções numéricas de referência e as soluções experimentais correspondentes para $Re = 22$; 44 e 50.

TABELA X - Erro relativo referente ao posicionamento da região de recirculação, entre a solução numérica de referência e a experimental para $Re = 22$; 44 e 50.

$Z/2R_0$	Re	$R/2R_0^+$	$R/2R_0$	ERRO %	Re	$R/2R_0^+$	$R/2R_0$	ERRO %	Re	$R/2R_0^+$	$R/2R_0$	ERRO %
0,112	22	0,2432	0,2397	1,44	44	0,2500	0,2482	0,72	50	0,2400	0,2494	-3,92
0,225	"	0,2320	0,2296	1,03	"	0,2414	0,2450	-1,49	50	0,2400	0,2468	-2,83
0,337	"	0,2040	0,2143	-5,05	"	0,2349	0,2394	-1,92	"	0,2400	0,2421	-0,88
0,500	"	0,1677	0,1931	-15,18	"	0,2377	0,2317	2,52	"	0,2400	0,2358	1,75
0,562	"	0,1281	0,1658	-29,43	"	0,2217	0,2226	-0,41	"	0,2357	0,2281	3,22
0,674	"	0,0812	0,1297	-59,73	"	0,2045	0,2120	-3,67	"	0,2180	0,2191	-0,50
0,787	"				"	0,1854	0,1996	-7,66	"	0,2107	0,2092	0,71
0,900	"				"	0,1614	0,1851	-14,68	"	0,1907	0,1978	-3,72
1,011	"				"	0,1473	0,1864	-26,54	"	0,1697	0,1849	-8,96
1,123	"				"	0,1215	0,1494	-22,96	"	0,1567	0,1702	-8,62
1,236	"								"	0,1420	0,1537	-8,24
1,348	"								"	0,1137	0,1350	-18,73
1,4600	"								"	0,0850	0,1135	-33,52

A Tabela X parece confirmar a hipótese anteriormente citada, indicando que à medida que se aumenta Re , o escoamento ainda conserva as características advectivas mesmo para posições mais a jusante do obstáculo, fazendo com que a região de incerteza se mantenha estreita, e com pequenos desvios entre a solução numérica e a experimental.

Quanto aos comprimentos de separação da região de recirculação comparam-se as equações que representam estes comprimentos em função de Re .

a) Procedimento Experimental

$$L_z/2R_0 = 0,038 Re_D^{0,9} \quad (50)$$

b) Procedimento Numérico (para valor do expoente com um algarismo significativo)

$$L_z/2R_0 = 0,064 Re_D^{0,9} \quad (51)$$

Pode-se observar que a curva que representa as duas equações é a mesma, ou seja, é uma equação exponencial cuja forma genérica é $y = ax^b$.

Assim, quando se comparam as equações (50) e (51) observa-se que o expoente é o mesmo, ou seja, ambas tem a mesma inclinação num gráfico log-log, diferindo apenas no ponto onde a reta cruza o eixo das ordenadas. Esta diferença representa um desvio relativo de 16% da solução numérica com relação à obtida pelo procedimento experimental. Apesar deste erro não ser muito grande quando se compara o deslocamento entre as duas retas num gráfico log-log, como mostra a figura 23 a diferença apresentada pelas abcissas adimensionais resulta num erro relativo bastante significativo, quando se comparam os resultados apresentados pelas duas equações para um mesmo número de Reynolds. Este fato se justifica quando se analisa uma vez mais o comportamento da zona de incerteza, junto à parede ao se tentar posicionar a linha de corrente nula. Este fato é ilustrado nas figuras 24 a 27.

CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A solução numérica das equações de Navier-Stokes foi obtida para um escoamento viscoso, incompressível, axissimétrico, através de um obstáculo anular com arestas em canto vivo, com uma largura de $R_0/4$ e uma relação entre raios de $r_0/R_0 = 0,5$, para $Re = 0 - 50$.

O fenômeno do alongamento das curvas de igual vorticidade com o aumento do número de Reynolds como discutido no item 3.2.1, em concordância com Mills [9], deve ser, para este caso, originalmente relacionado com o desprendimento de vórtices a partir dasquinas em canto vivo da restrição. Em última análise, um lençol de vórtices chega até próximo da parede; onde não existe velocidade convectiva suficiente para poder transportá-lo contra o efeito de refluxo inerente à própria vorticidade junto da parede. Um fluxo de retorno é então induzido junto ao contorno rígido e este por sua vez cria uma região de recirculação onde ocorrem ambos os fenômenos de difusão e convecção de vorticidade. À medida que o número de Reynolds cresce e a convecção da vorticidade torna-se mais importante do que a difusão, este lençol de vórtices limite é transportado cada vez mais a jusante, alongando assim o comprimento das curvas de igual vorticidade, ou seja, aumentando o comprimento dos vórtices a jusante do obstáculo.

Ainda que Mills [9] se justifique não tentar soluções para $Re > 25$, alegando ser extremamente difícil distinguir os efeitos de estabilidade do procedimento numérico adotado, das instabilidades hidrodinâmicas para pequenos distúrbios das equações do movimento em si, bem como para se saber até onde estes distúrbios estão associados com a instabilidade física real, conseguiu-se convergência numérica para número de Reynolds até $Re = 50$, resultando em soluções que podem ser comparadas com resultados experimentais disponíveis, tais como os obtidos por Linsingen [21] e Johansen [22].

Com relação aos resultados numéricos obtidos, quando comparados com os resultados experimentais, observou-se a ocorrência de alguns desvios, cujos motivos só poderão ser esclarecidos após realizarem-se medições dos parâmetros experimentais para valores de Reynolds mais baixos com sensores de pressão ou velocidades mais

sensíveis, ou elevando-se os valores de Reynolds no procedimento numérico através de métodos mais estáveis que o método explícito através da abordagem estacionária.

Ainda que os desvios tenham alcançado valores significativos quando se comparam as velocidades axiais obtidas pelos dois métodos para $Re = 30$ e 31 , tais desvios já se tornaram sensivelmente menores para $Re = 54$, ainda que os resultados utilizados para o procedimento numérico tenha sido os correspondentes à $Re = 50$. Se os valores utilizados fossem os corretos, ou seja, os correspondentes à $Re = 54$, os erros teriam diminuído ainda mais, uma vez que os valores adimensionais da velocidade axial, com exceção ao correspondente à linha de centro, teriam sido todos incrementados para produzir um maior achatamento do perfil, diminuindo assim ainda mais as diferenças para os valores experimentais respectivos.

Um outro fator indicador da convergência correta da solução numérica é o posicionamento da região de recirculação. Apesar de os valores de ordenadas ($R/2R_0$) correspondentes a valores de abscissas ($Z/2R_0$) próximo do extremo a jusante da região de recirculação terem resultado em desvios bastante sensíveis em relação aos valores experimentais, tais erros se tornam desprezíveis à medida que se analisam as ordenadas ($R/2R_0^+$) correspondente a valores de abscissas fora da vizinhança do extremo final da região de separação. Para os pontos dentro da vizinhança do extremo final da região de recirculação, as fotografias também não apresentam um comportamento definido, mostrando uma zona de incerteza bastante grande. Isto se reflete também nos desvios surgidos na comparação dos comprimentos de separação, onde, de forma mais nítida, tal zona de incerteza se faz presente.

Como sugestão para se tentar atingir solução do escoamento para números de Reynolds mais elevados utilizando-se procedimento numérico, podem ser adotados dois caminhos:

1. Não levar em consideração o tempo consumido para se atingir convergência e utilizar o método por abordagem transiente, uma vez que este método é mais estável do que a abordagem estacionária.
2. Utilizar-se um outro método numérico, tal como o das variáveis primitivas.

Com respeito ao método Mac ("Marker-and-Cell Method"), este se utiliza de uma formulação em diferenças finitas com pressão e velocidade como variáveis primitivas dependentes. O apêndice IV apresenta a formulação matemática para o método Mac original, em coordenadas cartesianas. Após algumas modificações, chegou-se à formulação Mac modificada, que passou a se chamar "sola", utilizada por Harlow e Welch [5].

No método sola, as equações da quantidade de movimento são resolvidas explicitamente para as duas componentes de velocidade axial e radial, e a equação da continuidade é resolvida implicitamente pela ajustagem das componentes de velocidade até que a equação da conservação da massa seja satisfeita em cada célula. A ajustagem das componentes da velocidade é efetuada variando-se a pressão no interior de cada célula.

Um procedimento bastante razoável seria primeiro tentar se utilizar o método Mac em sua formulação original, para em seguida fazer uso da versão sola.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- |1| MACAGNO, E. O. e HUNG, T. K.
Laminar eddies in a two-dimensional conduit expansion.
La Hoville Blanche/nº 4 - 1966.
- |2| FROMM, J. E.
A method for computing nonsteady, incompressible, viscous
fluid flows.
Los Alamos Sci. Lab. Rept. LA-2910 - 1963.
- |3| ROACHE, P. E.
Computational fluid mechanics.
Sandia Labor.- Albuquerque, New Mexico - Hermosa Publishers.
- |4| HIRT, C. W.; NICHOLS, B. D. e ROMERO, N. C.
Sola - a numerical solution algorithm for transient
fluid flows.
Los Alamos Sci. Lab. Rept. LA-5852 - 1975.
- |5| HARLOW, F. H. e WELCH, J. E.
Numerical calculation of time dependent viscous
incompressible flow of fluid with free surface.
The Physics of Fluids - Vol. 8, nº 12, 1965.
- |6| LIOU, R. J.
Steady viscous flow past an asymmetric hump on a pipe wall.
Tese de mestrado em Mecânica Teórica e Aplicada no
"Graduate College" da Universidade de Illinois-1977.
- |7| CHENG, L. C.; CLARK, M. E. e ROBERTSON, J. M.
Numerical calculations of oscillating flow in the vicinity of
square wall obstacles in plane conduits.
Journal of Bio-mechanics - Vol. 5, pp. 467-484, 1972.

- [8] LEE, J. S. e FUNG, Y. C.
Flow in locally constricted tubes at low Reynolds numbers.
Journal of applied mechanics - março 1970, nº 37.
- [9] MILLS, R. D.
Numerical solutions of viscous flow through a pipe orifice
at low Reynolds numbers
J. Mech. Eng. Science - Vol. 10, nº 2, 1968.
- [10] AMES, W. F.
Numerical Methods for Partial Differential Equations.
Academic Press - NY - San Francisco.
- [11] LESTER, W. G. S.
The flow past a Pitot tube at low Reynolds number.
Repts. Memo Aeronaut. Res. Comm. 3240, 1961.
- [12] HIRT, C. W.
Heuristic stability theory for finite-difference equations.
Journal of Computational Physics 2,339-355 - 1968.
- [13] THOM, A. e APELT, C. J.
Note of the convergence of numerical solutions of the
Navier-Stokes equations.
Aeronautical Research Council Reports and Memoranda - 1958.
- [14] CHENG, S. I.
Errors in finite difference solutions of Navier-Stokes
equations
Departament of Mechanical and Aerospace Engineering -
Princeton University.
- [15] CHENG, L. C.; CLARK, M. E. e ROBERTSON, J. M.
Calculation of plane pulsatile flow past wall obstacles.
Depto. of Theoretical and Applied Mechanics - Univ. of
Illinois - 1973.
- [16] SHAMES, H.
Mecânica dos Fluidos - Princípios Básicos
Princípios Básicos - Vol. 1 - Editora Edgar Blücher Ltda.

- [17] SHAMES, I. H.
Mecânica dos Fluidos
Análise de Escoamentos - Vol. 2 - Editora Edgar Blücher Ltda.
- [18] FLEMING, W. H.
Function of several variables
Addison-Wesley Publishing Company, Ind. - 1965.
- [19] WRONSCKI, W.
Solução de sistemas lineares pelo método de Gauss na forma
de matriz banda assimétrica
GAP - NPD - UFSC.
- [20] ROACHE, P. J.
Finite difference methods for the steady - state
Navier-Stokes equations
Proc. Second INTN'L Conference on Numerical Methods in
Fluid Mechanics, M. Holt, Ed., Springer-Verlag - 1972
- [21] LINSINGEN, I.
Análise do escoamento junto a ressaltos em canalização
Dissertação de Mestrado - UFSC, 1980.
- [22] JOHANSEN, F. C.
Flow through pipe orifices at low Reynolds numbers
Proceedings of the Royal Society - Londres - série A,
Vol. 126, 1930 - pp. 231-245.
- [23] HARLOW, F. H. e WELCH, J. E.
Numerical calculation of time-dependent viscous
incompressible flow of fluid with free surface
The Physics of Fluids - Vol. 8, nº 12, 1965.

APÊNDICE I

Dedução das Equações do Transporte de Vorticidade a partir das Equações de Continuidade e do Movimento em sua Forma Dimensional Menos Conservativa (7,9)

Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

Equações do Movimento:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

Adimensionalizando-se as variáveis por meio dos parâmetros R_0 (Comprimento característico igual ao raio interno do duto) e U_0 (velocidade axial na linha de centro do fluxo não perturbado pelo obstáculo), obtém-se

$$R = \frac{r}{R_0}, \quad Z = \frac{z}{R_0}, \quad U = \frac{u}{U_0}, \quad V = \frac{v}{U_0}, \quad P = \frac{p \cdot R_0}{\rho \nu U_0}, \quad T = \frac{t U_0}{R_0}$$

Substituindo-se estes parâmetros nas equações (1) e (2) obtém-se:

Equação (1)

$$\frac{\partial (U \cdot U_0)}{\partial (Z \cdot R_0)} + \frac{V \cdot U_0}{R \cdot R_0} + \frac{\partial (V \cdot U_0)}{\partial (R \cdot R_0)} = 0$$

Como U_0 e R_0 são constantes, eles podem ser colocados para fora do operador diferencial, resultando:

$$\frac{U_0}{R_0} \cdot \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{U_0}{R_0} \cdot \frac{V}{R} + \frac{U_0}{R_0} \cdot \frac{\partial V}{\partial R} = 0$$

Dividindo-se por (U_0/R_0) , obtêm-se:

$$\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{V}{R} + \frac{\partial V}{\partial R} = 0 \quad (4)$$

Equação (2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial (V \cdot U_0)}{\partial (T \cdot R_0 / U_0)} + V \cdot U_0 \frac{\partial (V \cdot U_0)}{\partial (R \cdot R_0)} + U \cdot U \frac{\partial (V \cdot U_0)}{\partial (Z \cdot R_0)} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \left[P \cdot \frac{\rho v U_0}{R_0} \right]}{\partial (R \cdot R_0)} + \\ + v \left[\frac{\partial^2 (V \cdot U_0)}{\partial (R \cdot R_0)^2} + \frac{1}{R \cdot R_0} \frac{\partial (V \cdot U_0)}{\partial (R \cdot R_0)} - \frac{V \cdot U}{(R \cdot R_0)^2} + \frac{\partial^2 (V \cdot U_0)}{\partial (Z \cdot R_0)^2} \right] \end{aligned}$$

Como U_0 , R_0 , v e ρ são constantes, podem ser retirados do operador diferencial, assim sendo:

$$\begin{aligned} \frac{U_0^2}{R_0} \frac{\partial V}{\partial T} + \frac{U_0^2}{R_0} V \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{U_0^2}{R_0} U \frac{\partial V}{\partial Z} &= \\ = - \frac{v U_0}{R_0^2} \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{v U_0}{R_0^2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right] \end{aligned}$$

Dividindo toda a equação por (U_0^2 / R_0) , resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial T} + v \frac{\partial V}{\partial R} + U \frac{\partial V}{\partial Z} = - \frac{v}{R_0 U_0} \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{v}{R_0 U_0} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right]$$

Levando-se em conta que o parâmetro $\frac{v}{R_0 U_0}$ é o inverso do número de Reynolds ($Re = \frac{R_0 U_0}{v}$), obtêm-se:

$$\frac{\partial V}{\partial T} + v \frac{\partial V}{\partial R} + U \frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{1}{Re} \left[- \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right] \quad (5)$$

Procedendo analogamente com a equação (3), chega-se a:

$$\frac{\partial U}{\partial T} + v \frac{\partial U}{\partial R} + U \frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{1}{Re} \left[- \frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right] \quad (6)$$

Assim, obtêm-se as equações de Navier-Stokes em sua forma adimensional:

$$\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{V}{R} + \frac{\partial V}{\partial R} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} + v \frac{\partial V}{\partial R} + U \frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{1}{Re} \left[- \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right] \quad (5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} + v \frac{\partial U}{\partial R} + U \frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{1}{Re} \left[- \frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right] \quad (6)$$

Derivando a equação (5) em relação a Z e a equação (6) em relação a R , resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial T \partial Z} + \frac{\partial V}{\partial Z} \cdot \frac{\partial V}{\partial R} + V \frac{\partial^2 V}{\partial Z \partial R} + \frac{\partial U}{\partial Z} \cdot \frac{\partial V}{\partial Z} + U \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left[- \frac{\partial^2 P}{\partial R \partial Z} + \frac{\partial^3 V}{\partial R^2 \partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 V}{\partial Z \partial R} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial^3 V}{\partial Z^3} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial T \partial R} + \frac{\partial V}{\partial R} \cdot \frac{\partial U}{\partial R} + V \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{\partial U}{\partial R} \cdot \frac{\partial U}{\partial Z} + U \frac{\partial^2 U}{\partial R \partial Z} = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left[- \frac{\partial^2 P}{\partial Z \partial R} + \frac{\partial^3 U}{\partial R^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^3 U}{\partial R \partial Z^2} \right] \end{aligned}$$

As funções U , V e P são supostas como sendo de classe $C^{(3)}$, ou sejam funções contínuas com derivadas primeiras, segundas e terceiras existentes e contínuas, podendo-se então permutar as derivadas parciais de até terceira ordem, em relação a R e a Z nas equações acima, segundo Fleming [18]. Assim sendo, pode-se eliminar as parcelas $\frac{\partial^2 P}{\partial R \partial Z}$ nas duas equações, resultando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial V}{\partial Z} \cdot \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{\partial V}{\partial R} \cdot \frac{\partial U}{\partial R} + V \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial V}{\partial Z} \cdot \frac{\partial U}{\partial Z} - \\ - \frac{\partial U}{\partial R} \cdot \frac{\partial U}{\partial Z} + U \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial U}{\partial Z} \right) + V \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \\
& + U \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \right) \right] \quad (7)
\end{aligned}$$

Introduzindo-se a definição matemática da função vorticidade:

$$\Omega = \frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R} \quad (8)$$

Além disso, da equação da continuidade (4), vê-se que:

$$\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial V}{\partial R} = -\frac{V}{R} \quad (9)$$

Substituindo-se (8) e (9) na equação (7), resulta finalmente:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T} + U \frac{\partial \Omega}{\partial Z} + V \frac{\partial \Omega}{\partial R} - \frac{V\Omega}{R} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial R} - \frac{\Omega}{R^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z^2} \right] \quad (10)$$

Tendo-se em mente que:

$$\frac{\partial (\Omega V)}{\partial R} = V \frac{\partial \Omega}{\partial R} + \Omega \frac{\partial V}{\partial R}$$

$$\frac{\partial (\Omega U)}{\partial Z} = U \frac{\partial \Omega}{\partial Z} + \Omega \frac{\partial U}{\partial Z}$$

$$\frac{\partial (\Omega V)}{\partial R} + \frac{\partial (\Omega U)}{\partial Z} = V \frac{\partial \Omega}{\partial R} + \Omega \frac{\partial V}{\partial R} + U \frac{\partial \Omega}{\partial Z} + \Omega \frac{\partial U}{\partial Z} + \left(\frac{\Omega V}{R} - \frac{\Omega V}{R} \right)$$

$$\frac{\partial (\Omega V)}{\partial R} + \frac{\partial (\Omega U)}{\partial Z} = V \frac{\partial \Omega}{\partial R} + U \frac{\partial \Omega}{\partial Z} - \frac{\Omega V}{R} + \Omega \left(\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{V}{R} + \frac{\partial V}{\partial R} \right)$$

A última parcela do segundo termo é nula, uma vez que tem de satisfazer a continuidade (4). Logo:

$$V \frac{\partial \Omega}{\partial R} + U \frac{\partial \Omega}{\partial Z} - \frac{\Omega V}{R} = \frac{\partial (\Omega V)}{\partial R} + \frac{\partial (\Omega U)}{\partial Z}$$

E a equação (10) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T} + \frac{\partial (U\Omega)}{\partial Z} + \frac{\partial (V\Omega)}{\partial R} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Omega}{\partial R} - \frac{\Omega}{R^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z^2} \right] \quad (11)$$

Segundo Roache [7], esta forma da equação de transporte de vorticidade na sua forma em diferenças finitas, preserva a integral da propriedade da divergência de Gauss, apresentada pela equação contínua, e é caracterizada por possuir a propriedade conservativa.

APÊNDICE II

1 - Discretização da equação (7) do texto, na forma de diferenças finitas:

$$\frac{\partial \Omega_{j,i}}{\partial T} + \frac{\partial (\Omega V)_{j,i}}{\partial R} + \frac{\partial (\Omega U)_{j,i}}{\partial Z} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \Omega_{j,i}}{\partial R^2} + \frac{1}{R_j} \frac{\partial \Omega_{j,i}}{\partial R} - \frac{\Omega_{j,i}}{R^2_j} + \frac{\partial^2 \Omega_{j,i}}{\partial Z^2} \right]$$

Tomando-se diferenças ascendentes para a derivada com relação ao tempo, e diferenças centrais para as derivadas espaciais, e designando-se por meio de índices altos os referenciais temporais (nas derivadas espaciais, o índice alto será omitido, ficando subentendido que se trata de tempo presente), para um erro de truncamento da ordem de (ΔT) e H^2 respectivamente, obtêm-se:

$$\frac{\partial \Omega_{j,i}}{\partial T} = \frac{\Omega_{j,i}^{n+1} - \Omega_{j,i}^n}{2\Delta T} + 0 \quad (\Delta T)$$

$$\frac{\partial (\Omega V)_{j,i}}{\partial R} = \frac{(\Omega V)_{j+1,i} - (\Omega V)_{j-1,i}}{2H} + 0 \quad (H)^2$$

$$\frac{\partial (\Omega U)_{j,i}}{\partial Z} = \frac{(\Omega U)_{j,i+1} - (\Omega U)_{j,i-1}}{2H} + 0 \quad (H^2)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_{j,i}}{\partial R^2} = \frac{\Omega_{j+1,i} - 2\Omega_{j,i} + \Omega_{j-1,i}}{H^2} + 0 \quad (H^2)$$

$$\frac{\partial \Omega_{j,i}}{\partial R} = \frac{\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}}{2H} + 0 \quad (H^2)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_{j,i}}{\partial Z^2} = \frac{\Omega_{j,i+1} - 2\Omega_{j,i} + \Omega_{j,i-1}}{H^2} + 0 \quad (H^2)$$

Substituindo-se na equação as diversas parcelas, e atendo-se para o fato de que quando se utiliza malhas pequenas estes erros podem ser desprezados, resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{\Omega_{j,i}^{n+1} - \Omega_{j,i}^n}{\Delta T} + \frac{(\Omega V)_{j+1,i} - (\Omega V)_{j-1,i}}{2H} + \frac{(\Omega U)_{j,i+1} - (\Omega U)_{j,i-1}}{2H} = \\ & = \frac{1}{Re} \left[\frac{\Omega_{j+1,i} - 2\Omega_{j,i} + \Omega_{j-1,i}}{H^2} + \frac{1}{R_j} \cdot \frac{\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}}{2H} - \frac{\Omega_{j,i}}{R_j^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\Omega_{j,i+1} - 2\Omega_{j,i} + \Omega_{j,i-1}}{H^2} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\Omega_{j,i}^{n+1} - \Omega_{j,i}^n}{\Delta T} + \frac{\Omega_{j+1,i} V_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i} V_{j-1,i}}{2H} + \frac{\Omega_{j,i+1} U_{j,i+1}}{2H}$$

$$- \frac{\Omega_{j,i-1} U_{j,i-1}}{2H} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\Omega_{j+1,i} + \Omega_{j-1,i} + \Omega_{j,i+1} + \Omega_{j,i-1}}{H^2} \right]$$

$$- \left[\frac{4}{H^2} - \frac{1}{R_j^2} \right] \Omega_{j,i} + \frac{1}{2R_j H} (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i})$$

Tendo-se em conta as funções de corrente de Stokes:

$$U_{j,i} = - \frac{1}{R_j} \frac{\partial \Psi_{j,i}}{\partial R}; \quad V_{j,i} = \frac{1}{R_j} \frac{\partial \Psi_{j,i}}{\partial Z}$$

$$\frac{\Omega_{j,i}^{n+1} - \Omega_{j,i}^n}{\Delta T} = - \frac{\left(\frac{\Omega_{j+1,i-1}}{R_{j+1}} \cdot \frac{\partial \Psi_{j+1,i}}{\partial Z} - \frac{\Omega_{j-1,i}}{R_{j-1}} \cdot \frac{\partial \Psi_{j-1,i}}{\partial Z} \right)}{2H}$$

$$- \frac{\Omega_{j,i+1} \left(- \frac{1}{R_j} \frac{\partial \Psi_{j,i+1}}{\partial R} \right) - \Omega_{j,i-1} \left(- \frac{1}{R_j} \frac{\partial \Psi_{j,i-1}}{\partial R} \right)}{2H} +$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\Omega_{j+1,i} + \Omega_{j-1,i} + \Omega_{j,i+1} + \Omega_{j,i-1}}{H^2} - \left(\frac{4R_j^2 + H^2}{R_j^2 H^2} \right) \Omega_{j,i} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2R_j H} (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) \right]$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Omega_{j,i}^{n+1} - \Omega_{j,i}^n}{\Delta T} = \\
& = - \frac{\Omega_{j+1,i} (\Psi_{j+1,i+1} - \Psi_{j+1,i-1})}{4R_{j+1}H^2} + \frac{\Omega_{j-1,i} (\Psi_{j-1,i+1} - \Psi_{j-1,i-1})}{4R_{j-1}H^2} + \\
& + \frac{\Omega_{j,i+1} (\Psi_{j+1,i+1} - \Psi_{j-1,i+1}) - \Omega_{j,i-1} (\Psi_{j+1,i-1} - \Psi_{j-1,i-1})}{4R_jH^2} + \\
& + \frac{1}{\text{Re}4R_j^2H^2} \left[(\Omega_{j+1,i} + \Omega_{j-1,i} + \Omega_{j,i+1} + \Omega_{j,i-1}) \cdot 4R_j^2 - \right. \\
& \left. - 4(4R_j^2 + H^2) \Omega_{j,i} + 2R_jH (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega_{j,i}^{n+1} - \Omega_{j,i}^n}{\Delta T} &= \frac{1}{4H^2} \left\{ \frac{\Omega_{j-1,i}}{R_{j-1}} (\Psi_{j-1,i+1} - \Psi_{j-1,i-1}) - \right. \\
&- \frac{\Omega_{j+1,i}}{R_{j+1}} (\Psi_{j+1,i+1} - \Psi_{j+1,i-1}) + \frac{\Omega_{j,i+1}}{R_j} (\Psi_{j+1,i+1} - \Psi_{j-1,i+1}) - \\
&- \frac{\Omega_{j,i-1}}{R_j} (\Psi_{j+1,i-1} - \Psi_{j-1,i-1}) + \frac{1}{ReR_j^2} \left[4R_j^2 (\Omega_{j+1,i} + \Omega_{j-1,i} + \right. \\
&+ \left. \Omega_{j,i+1} + \Omega_{j,i-1}) - 4(4R_j^2 + H^2) \Omega_{j,i} + 2R_j H (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

Designando-se $\frac{1}{Re} = \alpha$ e eliminando-se o índice alto de $\Omega_{j,i}$ obtêm-se finalmente:

$$\begin{aligned}
\Omega_{j,i}^{n+1} &= \Omega_{j,i} + \frac{\Delta T}{4H^2} \left\{ \frac{\Omega_{j-1,i}}{R_{j-1}} (\Psi_{j-1,i+1} - \Psi_{j-1,i-1}) - \right. \\
&- \frac{\Omega_{j+1,i}}{R_{j+1}} (\Psi_{j+1,i+1} - \Psi_{j+1,i-1}) + \frac{\Omega_{j,i+1}}{R_j} (\Psi_{j+1,i+1} - \Psi_{j-1,i+1}) - \\
&- \frac{\Omega_{j,i-1}}{R_j} (\Psi_{j+1,i-1} - \Psi_{j-1,i-1}) + \alpha \left[4 (\Omega_{j+1,i} + \Omega_{j-1,i} + \Omega_{j,i+1} + \right. \\
&+ \left. \Omega_{j,i-1}) - 4 \frac{4R_j^2 + H^2}{R_j^2} \Omega_{j,i} + \frac{2H}{R_j} (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

(7-II)

2 - Adaptação da equação anteriormente deduzida, para a solução estacionária, na forma análoga de diferenças finitas:

Quando se despreza na equação (7-II) a variação temporal resulta:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Omega_{j-1,i}}{R_{j-1}} (\Psi_{j-1,i+1} - \Psi_{j-1,i-1}) - \frac{\Omega_{j+1,i}}{R_{j+1}} (\Psi_{j+1,i+1} - \Psi_{j+1,i-1}) + \\
 & + \frac{\Omega_{j,i+1}}{R_j} (\Psi_{j+1,i+1} - \Psi_{j-1,i+1}) - \frac{\Omega_{j,i-1}}{R_j} (\Psi_{j+1,i-1} - \Psi_{j-1,i-1}) + \\
 & + \alpha \left[4 (\Omega_{j+1,i} + \Omega_{j-1,i} + \Omega_{j,i+1} + \Omega_{j,i-1}) - 4 \left(\frac{4R_j^2 + H^2}{R_j^2} \right) \Omega_{j,i} + \right. \\
 & \left. + \frac{2H}{R_j} (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) \right] = 0 \\
 & \alpha 4 \left(\frac{4R_j^2 + H^2}{R_j^2} \right) \Omega_{j,i} = \frac{\Omega_{j-1,i}}{R_{j-1}} (\Psi_{j-1,i+1} - \Psi_{j-1,i-1}) - \frac{\Omega_{j+1,i}}{R_{j+1}} \times \\
 & \times (\Psi_{j+1,i+1} - \Psi_{j+1,i-1}) - \frac{\Omega_{j,i-1}}{R_j} (\Psi_{j+1,i-1} - \Psi_{j-1,i-1}) + \\
 & + \frac{\Omega_{j,i+1}}{R_j} (\Psi_{j+1,i+1} - \Psi_{j-1,i+1}) + \alpha \left[4 (\Omega_{j+1,i} + \Omega_{j-1,i} + \right. \\
 & \left. + \Omega_{j,i+1} + \Omega_{j,i-1}) + \frac{2H}{R_j} (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) \right]
 \end{aligned}$$

Tendo-se em conta que $\alpha = \frac{1}{Re}$

$$\Omega_{j,i} = \frac{1}{4} \left\{ \text{Re} \left[\frac{\Omega_{j-1,i}}{R_{j-1}} (\Psi_{j-1,i+1} - \Psi_{j-1,i-1}) - \frac{\Omega_{j+1,i}}{R_{j+1}} (\Psi_{j+1,i+1} - \Psi_{j+1,i-1}) + \frac{\Omega_{j,i+1}}{R_j} (\Psi_{j+1,i+1} - \Psi_{j-1,i+1}) - \frac{\Omega_{j,i-1}}{R_j} (\Psi_{j+1,i-1} - \Psi_{j-1,i-1}) \right] + 4 (\Omega_{j+1,i} + \Omega_{j-1,i} + \Omega_{j,i+1} + \Omega_{j,i-1}) + \frac{2H}{R_j} (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) \right\} \cdot \left(\frac{4R_j^2 + H^2}{R_j^2} \right)^{-1} \quad (7-I)$$

3 - Discretização da equação (6) do texto, desprezando-se a variação temporal:

$$V_{j,i} \frac{\partial \Omega_{j,i}}{\partial R} + U_{j,i} \frac{\partial \Omega_{j,i}}{\partial Z} - \frac{\Omega_{j,i} V_{j,i}}{R_j} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \Omega_{j,i}}{\partial R^2} + \frac{1}{R_j} \frac{\partial \Omega_{j,i}}{\partial R} - \frac{\Omega_{j,i}}{R_j^2} \frac{\partial^2 \Omega_{j,i}}{\partial Z^2} \right)$$

Tomando-se diferenças centrais, e desprezando-se os erros de truncamento da ordem de H^2 , bem como utilizando-se das funções de corrente de Stokes, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R_j} \left(\frac{\Psi_{j,i+1} - \Psi_{j,i-1}}{2H} \right) \cdot \left(\frac{\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}}{2H} \right) - \frac{1}{R_j} \left(\frac{\Psi_{j+1,i} - \Psi_{j-1,i}}{2H} \right) \\
& \cdot \left(\frac{\Omega_{j,i+1} - \Omega_{j,i-1}}{2H} \right) - \frac{\Omega_{j,i}}{R_j^2} \left(\frac{\Psi_{j,i+1} - \Psi_{j,i-1}}{2H} \right) = \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\Omega_{j+1,i} - 2\Omega_{j,i} + \Omega_{j-1,i}}{H^2} + \frac{1}{R_j} \cdot \frac{\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}}{2H} - \frac{\Omega_{j,i}}{R_j^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\Omega_{j,i+1} - 2\Omega_{j,i} + \Omega_{j,i-1}}{H^2} \right] \\
& \frac{1}{4H^2 \text{Re}} \left\{ \frac{\text{Re}}{R_j} \left[(\Psi_{j,i+1} - \Psi_{j,i-1}) (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) - (\Psi_{j+1,i} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \Psi_{j-1,i}) \cdot (\Omega_{j,i+1} - \Omega_{j,i-1}) \right] - \frac{2H \text{Re}}{R_j^2} \Omega_{j,i} (\Psi_{j,i+1} - \Psi_{j,i-1}) \right\} = \\
& = \frac{1}{4H^2 \text{Re}} \left[4 (\Omega_{j+1,i} + \Omega_{j-1,i} + \Omega_{j,i+1} + \Omega_{j,i-1}) + \right. \\
& \left. + \frac{2H}{R_j} (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) - \left(\frac{4H^2}{R_j^2} + 16 \right) \Omega_{j,i} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[4 \left(\frac{H^2}{R_j^2} + 4 \right) - \frac{2HRe}{R_j^2} (\Psi_{j,i+1} - \Psi_{j,i-1}) \right] \Omega_{j,i} = \\
& = - \frac{Re}{R_j} \left[(\Psi_{j,i+1} - \Psi_{j,i-1}) (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) - (\Psi_{j+1,i} - \Psi_{j-1,i}) \cdot \right. \\
& \cdot (\Omega_{j,i+1} - \Omega_{j,i-1}) \left. \right] + \left[4 (\Omega_{j+1,i} + \Omega_{j-1,i} + \Omega_{j,i+1} + \Omega_{j,i-1}) + \right. \\
& \left. + \frac{2H}{R_j} (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{H^2}{R_j^2} + 4 - \frac{HRe}{2R_j^2} (\Psi_{j,i+1} - \Psi_{j,i-1}) \right] \Omega_{j,i} = - \frac{Re}{4R_j} \left[(\Psi_{j,i+1} - \right. \\
& - \Psi_{j,i-1}) (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) - (\Psi_{j+1,i} - \Psi_{j-1,i}) \cdot (\Omega_{j,i+1} - \\
& - \Omega_{j,i-1}) \left. \right] + \left[(\Omega_{j+1,i} + \Omega_{j-1,i} + \Omega_{j,i+1} + \Omega_{j,i-1}) + \right. \\
& \left. + \frac{H}{2R_j} (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{j,i} = & \left[1 + \frac{H^2}{4R_j^2} - \frac{HRe}{8R_j^2} (\Psi_{j,i+1} - \Psi_{j,i-1}) \right]^{-1} \cdot \left\{ \frac{1}{4} (\Omega_{j+1,i} + \right. \\
& + \Omega_{j-1,i} + \Omega_{j,i+1} + \Omega_{j,i-1}) + \frac{H}{8R_j} (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) - \\
& - \frac{Re}{16R_j} \left[(\Psi_{j,i+1} - \Psi_{j,i-1}) (\Omega_{j+1,i} - \Omega_{j-1,i}) - (\Psi_{j+1,i} - \right. \\
& \left. - \Psi_{j-1,i}) \times (\Omega_{j,i+1} - \Omega_{j,i-1}) \right] \left. \right\} \quad (6-I)
\end{aligned}$$

4 - Desenvolvimento da equação (5) do texto na sua análoga em diferenças finitas:

$$\Omega_{j,i} = \frac{1}{R_j} \left(\frac{\partial^2 \Psi_{j,i}}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{j,i}}{\partial Z^2} \right) - \frac{1}{R_j^2} \frac{\partial \Psi_{j,i}}{\partial R}$$

Substituindo-se os diversos operadores da equação por seu correspondente na forma de diferenças centrais para um erro de truncamento da ordem de H^2 , erros estes desprezados, tendo-se em vista o tamanho pequeno da malha, segue-se:

$$\Omega_{j,i} = \frac{1}{R_j} \left[\frac{\psi_{j+1,i} - 2\psi_{j,i} + \psi_{j-1,i}}{H^2} + \frac{\psi_{j,i+1} - 2\psi_{j,i} + \psi_{j,i-1}}{H^2} \right] -$$

$$- \frac{1}{R_j^2} \left(\frac{\psi_{j+1,i} - \psi_{j-1,i}}{2H} \right)$$

$$\Omega_{j,i} = \frac{2R_j (\psi_{j+1,i} + \psi_{j-1,i} + \psi_{j,i+1} + \psi_{j,i-1})}{2H^2 R_j^2} -$$

$$- \frac{H (\psi_{j+1,i} - \psi_{j-1,i}) + 8R_j \psi_{j,i}}{2H^2 R_j^2}$$

$$8R_j \psi_{j,i} = 2R_j (\psi_{j+1,i} + \psi_{j-1,i} + \psi_{j,i+1} + \psi_{j,i-1}) -$$

$$- H (\psi_{j+1,i} - \psi_{j-1,i}) - 2H^2 R_j^2 \Omega_{j,i}$$

$$\psi_{j,i} = \frac{1}{4} \left[(\psi_{j+1,i} + \psi_{j-1,i} + \psi_{j,i+1} + \psi_{j,i-1}) -$$

$$- \frac{H}{2R_j} (\psi_{j+1,i} - \psi_{j-1,i}) - H^2 R_j \Omega_{j,i} \right] \quad (5-III)$$

APÊNDICE III

Desenvolvimento das Equações para as Condições de Contorno junto às Paredes Rígidas

1 - Equação de Primeira Ordem

Expandindo-se a função de corrente em série de Taylor a partir de uma parede horizontal, resulta:

$$\psi_{j-1,i} = \psi_{j,i} - \left. \frac{\partial \psi}{\partial R} \right|_{j,i} \cdot \Delta R + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \right|_{j,i} \cdot \Delta R^2 + 0 (\Delta R^3)$$

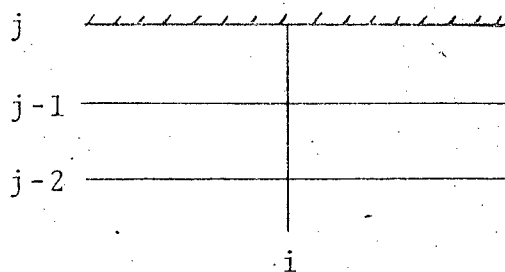


Figura 28 - Expansão da vorticidade nos contornos rígidos.

Mas, $\left. \frac{\partial \psi}{\partial R} \right|_{j,i} = -U \cdot R_j$ a condição de não deslizamento resulta em: $\left. \frac{\partial \psi}{\partial R} \right|_{j,i} = 0$. Por outro lado, $\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \right|_{j,i} = \left. \frac{\partial(-UR)}{\partial R} \right|_{j,i} = -R_j \left. \frac{\partial U}{\partial R} \right|_{j,i} - U \left. \frac{\partial}{\partial R} \right|_{j,i} = -R_j \left. \frac{\partial U}{\partial R} \right|_{j,i}$

Além disso, $\Omega = \frac{\partial V}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial R}$ e, ao longo da parede, $\left. \frac{\partial V}{\partial Z} \right|_{j,i} = 0$ porque V é constante (igual a zero) ao longo de Z .

Portanto: $-\left. \frac{\partial U}{\partial R} \right|_{j,i} = \Omega_{j,i}$ e assim, substituindo-se na expansão, obtém-se: $\psi_{j-1,i} = \psi_{j,i} + \frac{1}{2} R_j \Omega_{j,i} \cdot \Delta R^2 + 0 (\Delta R^3)$

Rearranjando-se os termos e lembrando-se que $\Delta R = H$

$$\Omega_{j,i} = \frac{2(\Psi_{j-1,i} - \Psi_{j,i})}{R_j H^2} + 0 (H^2)$$

Mas, a função de corrente na parede sólida é tomada normalmente como zero, donde obtêm-se:

$$\Omega_{j,i} = \frac{2 \Psi_{j-1,i}}{R_j H^2} + 0 (H^2) \quad (1a)$$

Seguindo-se raciocínio análogo, chega-se a:

Para paredes verticais com face para a esquerda:

$$\Omega_{j,i} = \frac{2 \Psi_{j,i-1}}{R_j H^2} + 0 (H^2) \quad (1b)$$

Para paredes verticais com face para a direita:

$$\Omega_{j,i} = \frac{2 \Psi_{j,i+1}}{R_j H^2} + 0 (H^2) \quad (1c)$$

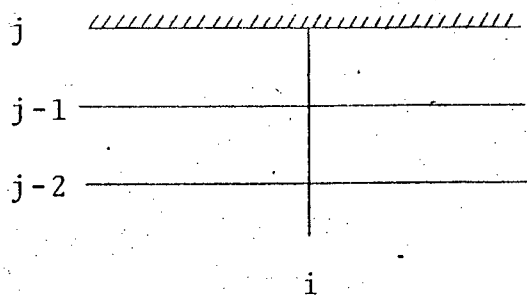


Figura 29 - Expansão da vorticidade nos contornos rígidos.

2 - Equação de Segunda Ordem

(a) Ao longo de contornos horizontais:

Como:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial Z} \right|_{j,i} = 0, \quad \Omega_{j,i} = - \left. \frac{\partial U}{\partial R} \right|_{j,i}$$

Toma-se a derivada descendente a partir da parede e obtêm-se:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial R} \right|_{j,i} = \frac{U_{j-1,i} - 4U_{j-1/2,i} + 3U_{j,i}}{H} + 0 \quad (H^2)$$

Notando-se que $U_{j,i} = 0$ na parede, em termos da função de corrente de Stokes, resulta:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial R} \right|_{j,i} = \frac{- \left(\frac{1}{R_{j-1}} \cdot \frac{\partial \Psi_{j-1,i}}{\partial R} \right) - 4 \left(\frac{-1}{R_{j-1/2}} \cdot \frac{\partial \Psi_{j-1/2,i}}{\partial R} \right)}{H} + 0 \quad (H^2)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial R} \right|_{j,i} = \frac{\frac{4}{R_{j-1/2}} \cdot \frac{\Psi_{j,i} - \Psi_{j-1,i}}{2 \cdot H/2} - \frac{1}{R_{j-1}} \cdot \frac{\Psi_{j,i} - \Psi_{j-2,i}}{2H}}{H} + 0 \quad (H^2)$$

Mas $\Omega_{j,i} = - \left. \frac{\partial U}{\partial R} \right|_{j,i}$, portanto:

$$\Omega_{j,i} = \frac{1}{H^2} \left[\frac{0,5}{R_{j-1}} (\Psi_{j,i} - \Psi_{j-2,i}) - \frac{4}{R_{j-1/2}} (\Psi_{j,i} - \Psi_{j-1,i}) \right] + 0 \quad (H^2)$$

(2a)

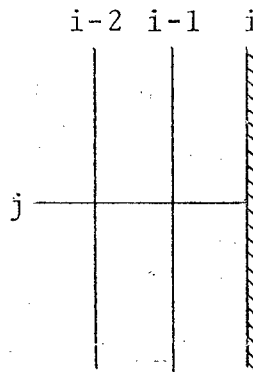
(b) Ao longo de contornos verticais de face esquerda, para esta situação,

$$\frac{\partial U}{\partial R} \Big|_{j,i} = 0 \quad \text{e} \quad \Omega_{j,i} = \frac{\partial V}{\partial Z} \Big|_{j,i}$$

Analogamente ao desenvolvimento anterior, resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial Z} \Big|_{j,i} = \frac{0,5}{R_j H^2} (-7\psi_{j,i} + 8\psi_{j,i-1} - \psi_{j,i-2}) + 0 (H^2)$$

Figura 30 - Expansão da vorticidade nos contornos rígidos.



$$\Omega_{j,i} = \frac{0,5}{R_j H^2} (-7\psi_{j,i} + 8\psi_{j,i-1} - \psi_{j,i-2}) + 0 (H^2) \quad (2b)$$

(c) Ao longo do contorno vertical de face direita:

Analogamente obtém-se:

$$\Omega_{j,i} = \frac{0,5}{R_j H^2} (-7\psi_{j,i} + 8\psi_{j,i+1} - \psi_{j,i+2}) + 0 (H^2) \quad (2c)$$

APÊNDICE IV

Formulação matemática para o método das variáveis primitivas em coordenadas cartesianas - Método MAC.

O uso das equações de Navier-Stokes e da continuidade nas variáveis primitivas u , v , p em duas dimensões foi realizada por Harlow e Welch [23]. A forma conservativa da equação adimensionalizada da quantidade de movimento pode ser escrita como:

$$\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial U^2}{\partial X} + \frac{\partial (UV)}{\partial Y} = - \frac{1}{Re} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial (UV)}{\partial X} + \frac{\partial V^2}{\partial Y} = - \frac{1}{Re} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \quad (2)$$

Onde X e Y são os eixos coordenados cartesianos adimensionais; U e V são as velocidades adimensionais nas direções X e Y respectivamente, e T é a variável temporal adimensional.

Derivando-se a equação(1) em relação a X e a equação(2) em relação a Y e adicionando-se membro a membro, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2 U^2}{\partial X^2} + \frac{2\partial^2 (UV)}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 V^2}{\partial Y^2} = - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} \right) + \\ + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \end{aligned}$$

Mas $\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = D$

$$\nabla^2 P = - \left[\frac{\partial^2 U^2}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 (UV)}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 V^2}{\partial Y^2} \right] - \frac{\partial D}{\partial T} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial Y^2} \right) = F_p$$

$$\nabla^2 P = - \left[(U^2)_{xx} + 2(U.V)_{xy} + (V^2)_{yy} \right] - D_T + \frac{1}{Re} (D_{xx} + D_{yy}) = F_p \quad (3)$$

Mas D é a própria equação da continuidade, e portanto, $D \equiv 0$. Porém, de acordo com Ames [18], devido à aproximação ou iteração incompleta da Equação de Poisson, erros se acumulam e $D_{ij} \neq 0$. O resultado da omissão de D na equação (3) não só resulta em imprecisão, como também numa instabilidade na equação da quantidade de movimento. O termo D_T é para ser desenvolvido qualquer que seja o esquema utilizado para $\frac{\partial U}{\partial T}$ e $\frac{\partial V}{\partial T}$, pela imposição de que a equação da continuidade seja satisfeita num tempo futuro, ou seja, $D_{i,j}^{n+1} = 0$.

A estrutura celular do método Mac é definida como segue:

A pressão é definida em pontos nodais no centro das células, enquanto que as componentes de velocidade são definidas ao longo dos contornos das células.

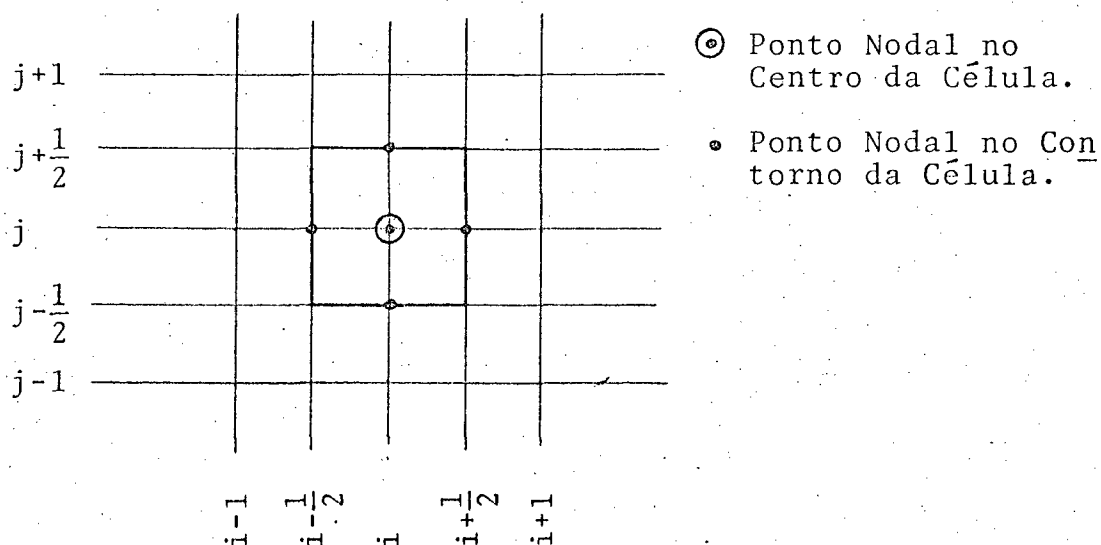


Figura 31 - Estrutura celular para o Método Mac.

As diferenças finitas são tomadas como:

$$\frac{\partial U_{i+1/2,j}}{\partial T} = \left[\frac{U_{i+1/2,j}^{n+1} - U_{i+1/2,j}^n}{\Delta T} \right]$$

$$\frac{\partial P_{i+1/2,j}^n}{\partial X} = \left[\frac{P_{i+1,j}^n - P_{i,j}^n}{\Delta X} \right]$$

$$\frac{\partial^2 U_{i+1/2,j}}{\partial X^2} = \left[\frac{U_{i+3/2,j} - 2U_{i+1/2,j} + U_{i-1/2,j}}{\Delta X^2} \right]$$

O desenvolvimento de:

$$\frac{\partial (U^2_{i+1/2,j})}{\partial X} = \left[\frac{U^2_{i+1,j} - U^2_{i,j}}{\Delta X} \right]$$

requer a definição de U nos pontos nodais, isto é $U_{i,j}$. Estas são obtidas tirando-se a média:

$$U_{i+1,j} = \frac{1}{2} (U_{i+3/2,j} + U_{i+1/2,j})$$

$$U_{i,j} = \frac{1}{2} (U_{i+1/2,j} + U_{i-1/2,j})$$

O produto dos termos $U.V$ são desenvolvidos como o produto

das médias:

$$(U \cdot V)_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{4} (U_{i+1/2, j} + U_{i+1/2, j+1}) (V_{i+1, j+1/2} + V_{i, j+1/2})$$

O algoritmo construído para a equação (1), com o superíndice n subentendido no lado direito da equação é:

$$\begin{aligned} U_{i+1/2, j}^{n+1} = & U_{i+1/2, j} + \Delta T \left\{ \frac{(U^2_{i, j} - U^2_{i+1, j})}{\Delta X} + \frac{(P_{i, j} - P_{i+1, j})}{\Delta X} + \right. \\ & + \left[\frac{(UV)_{i+1/2, j-1/2} - (UV)_{i+1/2, j+1/2}}{\Delta Y} \right] + \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{U_{i+3/2, j} - 2U_{i+1/2, j} + U_{i-1/2, j}}{\Delta X^2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{U_{i+1/2, j+1} - 2U_{i+1/2, j} + U_{i+1/2, j-1}}{\Delta Y^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Existe também uma equação correspondente em $V_{i, j+1/2}^{n+1}$ para a equação (2), e que resulta:

$$\begin{aligned}
V_{i,j+1/2}^{n+1} = & V_{i,j+1/2} + \Delta T \left\{ \frac{(V_{i,j}^2 - V_{i,j+1}^2)}{\Delta Y} + \frac{(P_{i,j} - P_{i,j+1})}{\Delta Y} + \right. \\
& + \left[\frac{(UV)_{i-1/2,j+1/2} - (UV)_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta X} \right] + \\
& + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{V_{i+1,j+1/2} - 2V_{i,j+1/2} + V_{i-1,j+1/2}}{\Delta X^2} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{V_{i,j+3/2} - 2V_{i,j+1/2} + V_{i,j-1/2}}{\Delta Y^2} \right] \right\} \quad (5)
\end{aligned}$$

A equação (3) é tratada com o mesmo tipo de diferenciação porém com $D_{i,j}^{n+1} = 0$.

Desta forma,

$$\frac{\partial D_{i,j}^n}{\partial T} = \frac{(D_{i,j}^{n+1} - D_{i,j}^n)}{\Delta T} = \frac{-D_{i,j}^n}{\Delta T}$$

O algoritmo para a equação (3), resulta:

$$\begin{aligned}
- F_{p_{i,j}} = & \frac{U^2_{i+1,j} - 2U^2_{i,j} + U^2_{i-1,j}}{\Delta X^2} + \frac{2}{\Delta X \Delta Y} \left[(UV)_{i+1/2,j+1/2} - \right. \\
& - (UV)_{i+1/2,j-1/2} - (UV)_{i-1/2,j+1/2} + (UV)_{i-1/2,j-1/2} \left. \right] + \\
& + \frac{V^2_{i,j+1} - 2V^2_{i,j} + V^2_{i,j-1}}{\Delta Y^2} - \frac{D_{i,j}}{\Delta T} - \frac{1}{Re} \times \\
& \times \left[\frac{D_{i+1,j} - 2D_{i,j} + D_{i-1,j}}{\Delta X^2} + \frac{D_{i,j+1} - 2D_{i,j} + D_{i,j-1}}{\Delta Y^2} \right] \quad (6)
\end{aligned}$$

Onde:

$$D_{i,j} = \frac{(U_{i+1/2,j} - U_{i-1/2,j})}{\Delta X} + \frac{(V_{i,j+1/2} - V_{i,j-1/2})}{\Delta Y} \quad (7)$$

As condições de contorno sobre U e V são dadas pelo estabelecimento das médias nos pontos nodais. Para uma condição de não deslissamento na parede = j (parede horizontal).

$U_w = 0$, de modo que

$$U_{i+1/2,w} = 0, \quad U_{i-1/2,w} = 0$$

Enquanto que $V_w = 0$ implica

$$V_{i,w} = \frac{1}{2} (V_{i,w+1/2} + V_{i,w-1/2}) = 0$$

Ou um valor fictício dentro da parede

$$V_{i,w+1/2} = -V_{i,w-1/2}$$

Este desenvolvimento corresponde à formulação Mac original. Após algumas modificações chegou-se à formulação modificada do método Mac, que passou a se chamar Método Sola - "A numerical solution algorithm for transient fluid flows" - desenvolvido por Harlow e Welch [5]. Neste método as equações da quantidade de movimento são resolvidas explicitamente para as duas componentes de velocidade U e V, e a equação da continuidade é resolvida implicitamente pela ajustagem das componentes da velocidade através da variação de pressão, até que a equação da conservação da massa seja satisfeita em cada célula.