

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UMA APROXIMAÇÃO LINEAR PARA AS EQUAÇÕES INTEGRAIS DA
RADIÇÃO TÉRMICA COM CONDUÇÃO COMBINADA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

MAURICE BOULOS HALAL

FLORIANÓPOLIS, AGOSTO DE 1981

UMA APROXIMAÇÃO LINEAR PARA AS EQUAÇÕES INTEGRAIS DA
RADIAÇÃO TÉRMICA COM CONDUÇÃO COMBINADA

MAURICE BOULOS HALAL

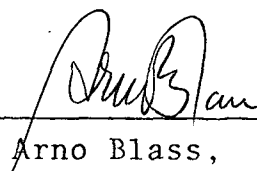
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE

"MESTRE EM ENGENHARIA"

ESPECIALIDADE: ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO TERMO-
TÉCNICA E, APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRA-
DUAÇÃO.

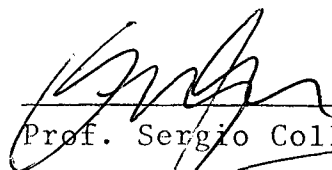


Prof. Sergio Colle, D.Sc.
Orientador

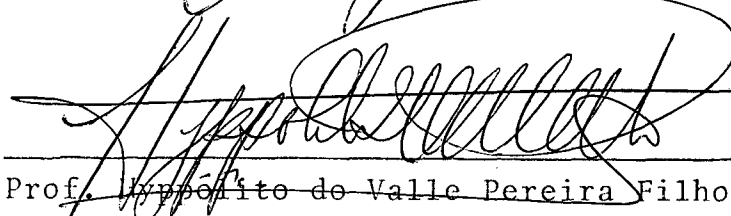


Prof. Arno Blass, Ph.D.
Coordenador

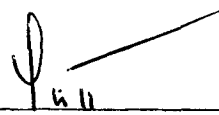
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Sergio Colle, D.Sc.



Prof. Hippólito de Valle Pereira Filho, Ph.D.



Prof. Paulo César Philippi, Dr. Ing.

Com muito amor e carinho,
à Niedja,
pelo apoio e incentivo,
e aos meus filhos
Christine e Fernando.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Departamento de Física, na pessoa do engenheiro Odilon Gomes, e à FURG, pela oportunidade; ao engenheiro Ricardo Cherem de Abreu pela ajuda inestimável prestada no início deste trabalho; aos funcionários do CPD da UFSC pela prestação no atendimento; à Maria de Lourdes Born pelo excelente trabalho de datilografia; a Roberto José Dias de Andrade pela qualidade dos desenhos; aos amigos Antônio Fábio, Álvaro Prata e José Antonio Bellini pelo interesse, e a todos os demais colegas e professores do Centro Tecnológico que de uma forma ou de outra colaboraram durante o curso de pós-graduação.

Sou muito grato ao professor Sergio Colle, com quem tive a honra de trabalhar. Seu nível intelectual e sua capacidade de trabalho elevados muito influíram no meu processo de aprendizagem durante a orientação e durante todo o curso de pós-graduação.

Um agradecimento muito especial à Sra. Niedja Yates Halal, que sempre me ajudou nos momentos mais difíceis, perdendo horas do seu sono.

Finalmente, agradeço a Deus por ter-me dado força e saúde para a realização deste trabalho.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA A VALORES DE CONTORNO	7
2.1 - Simplificações e formulação diferencial do problema a valores de contorno	7
2.2 - A fórmula de Green de fronteira	10
2.3 - A troca de calor por radiação entre um corpo de geome- tria multiplamente conexa e uma placa plana isotérmi- ca	12
2.4 - Eficiência da troca térmica por radiação	16
3. O ESQUEMA NUMÉRICO LINEAR	21
4. SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS	28
4.1 - A divisão do contorno	28
4.2 - Discretização das equações integrais	29
4.2.1 - Aproximação das integrais	29
4.2.2 - Parametrização do contorno	31
4.2.3 - Discretização das equações integrais	32
5. APLICAÇÃO DO MÉTODO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	39
5.1 - Aplicação do método	39
5.2 - Discussão dos resultados	43
6. CONCLUSÕES	55
BIBLIOGRAFIA	58
APÊNDICE A - PROBLEMAS A VALORES DE CONTORNO E O MÉTODO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS	61
A.1 - Problemas a valores de contorno	61
A.2 - A função de Green	62

A.2.1 - Função de Green associada ao operador Laplaceano	62
A.2.2 - Propriedades da função de Green	63
A.3 - O método das equações integrais	65
A.4 - Tratamento das singularidades	70
APÊNDICE B - SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O CILINDRO DE PAREDE ESPESSE E EXPANSÃO EM SÉRIE DE TAYLOR.....	72
B.1 - Solução analítica	72
B.2 - Expansão em série de Taylor	73
APÊNDICE C - APLICAÇÃO DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO CILINDRO DE PAREDE ESPESSE	75

SIMBOLOGIA

a	- raio adimensional r_i^*/r_e^*
B^*	- semi-largura da placa plana
b	- semi-largura adimensional da placa plana
D	- região de Lyapunov do R^2
[DG]	- matriz da derivada normal da função de Green fundamental
D_p	- derivada parcial de ordem p
[G]	- matriz da função de Green fundamental para o R^2
H^*	- distância da placa ao centro do cilindro
h	- distância adimensional da placa ao centro do cilindro
i	- ponto nodal do contorno ∂D_{ij}
k	- condutibilidade térmica do material que compõe a região D
K	- núcleo do fator de forma
L_r^*	- comprimento de referência
\underline{n}	- vetor normal unitário exterior a ∂D
N_{ij}	- número de pontos nodais do contorno ∂D_{ij}
N_r	- $\sigma T_r^{*3} L_r^*/k$, número de radiação para D
q	- fluxo de calor adimensional por unidade de área
\bar{q}^*	- fluxo médio de calor por unidade de área
\bar{q}	- fluxo médio adimensional
r_e^*	- raio externo
r_e	- raio externo adimensional
r_i^*	- raio interno
r_i	- raio interno adimensional
s	- comprimento de arco; superfície da placa
\dot{s}	- velocidade da curva ∂D_{ij} , $ds/d\tau$
T_r^*	- temperatura de referência
T_{ij}^*	- temperatura de um ponto do contorno ∂_{ij}
T_{ij}	= T_{ij}^*/T_r^* , temperatura adimensional do contorno ∂D_{ij}
{T}	- matriz-coluna da temperatura
x,y	- coordenadas cartesianas adimensionais
z	- par ordenado (x,y)
Δq^*	- fluxo líquido de calor trocado por radiação

- Δq - variação do fluxo médio adimensional
 ∂D_{11} - contorno externo da região D
 ∂D_{12} - contorno interno da região D
 ∂T = $\partial T / \partial n = \text{grad } T \cdot \underline{n}$, derivada normal da T
 η - eficiência da troca de calor líquido por radiação entre ∂D_{11} e a placa
 ∇ - operador nabla
 ξ - eficiência da transferência de calor por radiação referente a ∂D_{11}
 σ - constante de Stefan-Boltzmann
 Ψ - fluxo médio de calor através de ∂D_{11} dividido por N_r
 ϕ - troca líquida de calor por radiação entre ∂D_{11} e a placa dividida por N_r .

Índices Inferiores

- i, j - referem-se ao contorno ∂D_{ij}
 i - refere-se às colunas das matrizes [G] e [DG]
 j - refere-se às colunas das matrizes [G] e [DG] e às matrizes-coluna {T} e { ∂T }
 0 - refere-se ao número de radiação nulo

Índices Superiores

- p, q - referem-se às matrizes [G] e [DG] e às derivadas parciais $\frac{\partial^p}{\partial N_r^p}$

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é aplicar o método de equações integrais ao problema da transferência de calor por condução e radiação combinados, mediante a apresentação de um esquema numérico linear.

Uma formulação é feita para um corpo negro de superfície côncava e geometria multiplamente conexa, trocando calor por radiação com uma placa plana isotérmica, envolvidos por um meio não-participante.

Através da utilização da segunda fórmula de Green transforma-se a equação diferencial do problema em uma equação integral para cada superfície. Pela eliminação do fluxo de calor interno entre as equações, obtém-se uma equação integral não-linear cuja incógnita é a distribuição de temperatura da superfície externa como função do número de radiação N_r .

Procede-se a linearização pela diferenciação parcial direta da equação integral em relação ao número de radiação. Como resultado, surgem fórmulas recursivas cujas incógnitas são as derivadas de ordem superior da distribuição de temperatura. Essas derivadas são utilizadas para a determinação das derivadas parciais do fluxo líquido de calor e, finalmente, para avaliar a aproximação de Taylor para o fluxo de calor na vizinhança de $N_r=0$.

O método é testado para uma parede cilíndrica espessa trocando calor com uma placa plana isotérmica. Os resultados obtidos pelo esquema numérico linear são comparados com a solução obtida pelo método de equações integrais não-lineares e com a obtida pelo método de diferenças finitas.

ABSTRACT

The main objective of this work is to apply an integral equation method to the combined conductive and radiative heat transfer problem, by means of a linear numerical scheme.

The heat transfer by combined conduction and radiation between a concave black body surface and multiply-connected geometry surrounded by a non-participating medium, is formulated.

By using the second Green's formula one gets an integral equation for each surface of the multiply-connected domain. By replacing the internal heat flux in these equations, one integral equation results in which the unknown is the external surface temperature as a function of the radiation number, namely N_r .

The linearization is then performed by direct differentiation of this equation relative to the radiation number, which is regarded as an independent variable. Therefore, only linear terms appear in the resulting equations, which are recursive ones, and the unknowns are the partial derivatives of the external surface temperature distribution. These derivatives are used to compute the partial derivatives of the net heat flux on the boundary of the region and therefore, to compute also the Taylor's approximation for the heat flux in the neighborhood of $N_r = 0$.

The method is then applied to a cylindrical wall exchanging heat with an isothermal flat plate. The results obtained by the numerical linear scheme are compared with both the non-linear integral equation solution and the finite difference one.

1. INTRODUÇÃO

A função de Green data do início do século passado. Desde 1828, quando foi formulada por George Green (1793-1841) no seu "Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism", permaneceu praticamente esquecida até o início deste século, no que diz respeito à sua aplicação a problemas de transferência de calor. Mesmo assim, durante meio século, seu uso ficou restrito à formulação de problemas diretos, ou seja, de problemas onde é requerida a variável no interior da região quando se conhece as propriedades (fluxo de calor e temperatura) no seu contorno. Só foi possível a formulação de problemas inversos, há aproximadamente 20 anos, com o advento dos computadores rápidos e de boa capacidade de memória. Esses problemas consistem na determinação das variáveis desconhecidas no contorno quando se conhece algumas das variáveis ou uma relação funcional entre elas no contorno, ou são conhecidos valores das variáveis no interior da região.

Dentre esses problemas destacam-se os de condições de contorno não-lineares. Na transferência de calor, um problema não-linear típico é o que envolve condução e radiação combinadas. O problema da condução e radiação combinadas desempenha um papel importante em situações onde a temperatura é elevada. Em consequência, a radiação contribui de maneira substancial à transferência de calor em fornos e câmaras de combustão. Uma das aplicações mais recentes diz respeito à energia solar. Em coletores solares, por exemplo, a radiação e condução combinadas são utilizadas no aquecimento da água que escoar no interior de tubos. Alguns equipamentos em aplicações espaciais são projetados para operarem a temperaturas elevadas no sentido de se alcançar uma alta efetividade de troca térmica. Portanto, a radiação deve ser considerada quando são calculados os efeitos térmicos em dispositivos tais como bocais de foguetes ou estações de energia nuclear.

Ao ser formulado o problema da transferência de calor por condução e radiação combinadas, surgem nas equações termos na forma diferencial devidos à condução e termos na forma integral

devidos à radiação, que é uma condição de contorno do problema. Como os problemas são geralmente acoplados, a equação resultante é uma equação íntegro-diferencial, o que dificulta e geralmente impossibilita a sua solução analítica.

Os métodos aproximados de solução, pelo motivo exposto acima, são os mais adequados para a determinação de tais tipos de problemas. Os métodos numéricos mais difundidos são os de elementos finitos, diferenças finitas, variacionais e de equações integrais.

Dos métodos citados, o mais adequado para resolver problemas não-lineares de transferência de calor parece ser o de equações integrais. Isto é evidenciado principalmente quando são procuradas apenas as propriedades da superfície do corpo, já que no método de equações integrais a dimensão do espaço em questão é a dimensão do contorno, enquanto que nos outros, faz-se necessário determinar as propriedades na região para que se tenha as da superfície.

A aplicação do método de equações integrais com a utilização da função de Green fundamental, ao que parece, foi introduzida por Jaswon [1] e Symm [2], em 1963. Em [1], Jaswon desenvolveu um estudo das equações integrais de Fredholm relacionadas à teoria do potencial e à elastostática, com especial atenção às vantagens da primeira equação de Fredholm e da função de Green de fronteira. Symm aplicou as equações desenvolvidas por Jaswon à solução numérica de problemas bidimensionais de regiões simples e multiplamente conexas, obtendo ótimos resultados.

Em 1964, Sparrow et al [3], utilizando a transformada de Laplace para a determinação das equações integrais, resolveram o problema inverso da transferência de calor por condução transiente com temperatura interna em função do tempo prescrita, em sólidos de diversas geometrias. Dois anos mais tarde, Tolubinskiy [4] deu um tratamento matemático rigoroso ao problema da difusão de calor e massa e à equação da onda através da aplicação do método em questão, porém não apresentou resultados numéricos.

Em 1967, Crosbie e Viskanta [5] aplicaram este método na solução do problema da condução de calor transiente unidimensional em uma placa sujeita a aquecimento e resfriamento por condução

e convecção combinadas. A equação integral não-linear resultante foi resolvida pelo método de aproximações sucessivas e bons resultados foram alcançados. Em 1973, Chang et al [6] aplicaram a função de Green fundamental na solução de problemas de condução transiente e estacionária em meios isotrópicos e anisotrópicos. Exceto para intervalos de tempo muito pequenos, os resultados foram bons. Um ano depois, Shaw [7] propôs um método de solução para problemas da difusão em meios isotrópicos e homogêneos com fontes internas de calor e condições de contorno arbitrárias, inclusive não-lineares. Nesse trabalho, ressaltou as principais vantagens e desvantagens do método de equações integrais sobre o método de diferença finitas. Em 1977, através do uso das funções de Green, Chang [8] apresentou uma solução analítica para a condução do calor em meios anisotrópicos. Nesse mesmo ano, Chang e Tsou [9], [10] resolveram analiticamente o problema da condução em cilindros cheios e cilindros com furos excêntricos de material anisotrópico, em estado estacionário e transiente, respectivamente, com o uso das funções de Green. As condições de contorno foram do tipo Dirichlet, Neumann e Caráter Misto. Foi discutida também a influência da anisotropia do material sobre o campo de temperatura.

González, [11] em 1978, mediante a utilização do método de equações integrais, resolveu o problema da transferência de calor por condução, convecção e radiação combinadas no resfriamento de peças cilíndricas e prismáticas. Embora a eficiência do método tenha sido boa quanto aos resultados, o tempo de processamento foi relativamente grande.

Em 1979, Abreu [12] aplicou o método de equações integrais a problemas de transferência de calor estacionário com a finalidade de verificar a influência da condutibilidade térmica sobre a transferência de calor por radiação. Utilizou nesse trabalho funções de Green fundamentais e incompletas. Analisou também algumas efetividades da troca térmica. Nesse mesmo ano, Colle [13] aplicou o presente método na análise da perda de carga no escoamento laminar estacionário de fluidos newtonianos em dutos de seção transversal de geometria múltiplamente conexa. Os resultados obtidos foram bastante satisfatórios quando comparados com os de outros métodos.

Em 1980, Prata [14] utilizou o mesmo método na análise da transferência de calor em regime laminar com condução e convecção combinadas com vistas à aplicação na engenharia. O método foi testado numericamente na determinação da temperatura e da velocidade em dutos de seção transversal elíptica. Ainda em 1980, Colle [15] apresentou um esquema numérico alternativo de equações integrais para a solução do problema de Neumann. Com a fórmula de Green de fronteira modificada, adaptou o método à torção de barras prismáticas. Comparou os resultados com soluções analíticas e integrais existentes.

Em 1981, Colle et al [16] reportaram a solução do problema proposto pelo método de equações integrais obtida em [12], e aplicaram o método de diferenças finitas àquele problema. Nesse trabalho verificou-se que o tempo de processamento para a solução do problema por diferenças finitas foi consideravelmente maior do que na solução pelo método de equações integrais.

Um estudo mais detalhado do método de equações integrais e sua aplicação à teoria do potencial, elastostática, mecânica dos meios contínuos e transmissão de calor pode ser encontrado em Symm e Jaswon [17].

O objetivo principal deste trabalho é apresentar um esquema numérico linear para a solução de problemas a valores de contorno da transferência de calor por condução e radiação combinadas. As equações integrais não-lineares surgem devido à condição de contorno da radiação, onde a temperatura é elevada à quarta potência. Este fato impõe severas limitações na utilização de métodos numéricos tais como o método de diferenças finitas, elementos finitos e variacional.

Geralmente, o uso da solução fundamental do operador diferencial parcial relacionado ao problema leva a um conjunto de equações integrais que devem ser resolvidas numericamente, para cada valor de um parâmetro adimensional convenientemente escolhido, que é o número de radiação N_r . Com o fim de se obter uma faixa representativa do fluxo líquido de calor entre os corpos considerados em função do número de radiação, o sistema de equações não-lineares deve ser resolvido numericamente diversas vezes, o que requer um tempo de processamento considerável.

A meta principal do presente trabalho é substituir o sistema de equações integrais não-lineares por um em que todos os termos são lineares. O procedimento básico para tal consiste em linearizar as equações integrais do problema através de uma diferenciação parcial direta das equações integrais em relação ao número de radiação, que é considerado uma variável independente. Em consequência, surgem fórmulas recursivas, aparecendo apenas termos lineares nas equações resultantes. Estas equações tem como funções incógnitas as derivadas parciais da temperatura da superfície do corpo em função dos parâmetros do contorno e do número de radiação. Cada derivada parcial pode ser determinada pelo conhecimento das derivadas de ordem inferior. Posteriormente, essas derivadas são utilizadas para determinar a derivada parcial do fluxo líquido de calor no contorno do corpo e, finalmente, a aproximação de Taylor para este fluxo de calor na vizinhança do número de radiação nulo.

Para a comparação do tempo de processamento e dos resultados do método linear, o método de equações integrais não-lineares foi testado na troca de calor entre um cilindro e uma placa plana isotérmica infinitamente longos, como em [12]. Enquanto que nesse trabalho, foi resolvido um sistema de duas equações integrais, em que as funções incógnitas eram o fluxo de calor no contorno interno e a distribuição de temperatura no contorno externo do cilindro, no presente trabalho aplicou-se apenas uma equação, resultante da eliminação do fluxo de calor interno entre as duas equações integrais. Em consequência, o tempo de processamento resultou menor, como se esperava. Tanto em [12] como neste trabalho, as equações foram resolvidas utilizando-se o método iterativo de Newton-Raphson. Além disso, aplicou-se o método de diferenças finitas à mesma geometria (Veja Apêndice C). Em termos de resultados numéricos, o erro máximo entre o método de diferenças finitas e o método não-linear de equações integrais não ultrapassou 0.02 por cento. Entretanto, o tempo de processamento na solução do problema pelo primeiro método foi consideravelmente maior do que na determinação pelo último. Convém observar, porém, que não houve tentativa de otimização do método de diferenças finitas, visto que não era o objetivo do trabalho.

Por outro lado, a convergência do esquema linear propos

to mostrou-se boa para números de radiação menores do que a unidade, quando comparado com os métodos citados. Visto que, em problemas de engenharia que envolvem a transferência de calor por condução e radiação combinados, o número de radiação geralmente não ultrapassa o valor 0.5 para os metais, o presente método parece adequado para a previsão teórica da eficiência da troca térmica por radiação para esse tipo de materiais.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA A VALORES DE CONTORNO

A análise de problemas de transferência de calor torna-se mais complexa quando é incluída a radiação, devido ao fenômeno físico inerente. Sabe-se que a radiação térmica é traduzida pela energia radiante emitida por um corpo devido exclusivamente à sua temperatura. Para uma análise mais acurada desse tipo de problemas nem sempre certas hipóteses podem ser feitas no que diz respeito às superfícies dos corpos envolvidos. Em alguns cálculos de engenharia onde é requerida certa precisão, por exemplo, considera-se a hipótese de que as superfícies participantes são cinzentas, isto é, a emissividade e a absorvidade são iguais e, às vezes, dependentes da temperatura. Outra simplificação normalmente feita é a de considerar a radiação difusa, onde a intensidade de radiação em cada ponto da superfície independe da direção angular.

O estudo mais simples dos problemas de radiação e condução combinadas, entretanto, é o que considera as superfícies como sendo negras. Como o objetivo do presente trabalho é linearizar o problema da radiação, a hipótese de considerar os corpos negros não tira a generalidade da aplicação do método proposto.

2.1 - Simplificações e Formulação Diferencial do Problema a Valores de Contorno .

Pelo que foi dito acima, para facilitar a obtenção da solução do problema proposto, as seguintes hipóteses simplificativas serão feitas:

- (a) considera-se os sólidos suficientemente longos para que os efeitos das extremidades possam ser desprezados. Com isso, a condução axial não é levada em conta, e o problema torna-se bidimensional;
- (b) os corpos em estudo serão considerados negros, sendo portanto a emissividade unitária;

- (c) o contorno da região é constituído de arcos seccionalmente diferenciáveis, com normal definida em todos os pontos;
- (d) o meio que envolve os corpos é não participante quanto à radiação, não havendo, portanto, emissão, absorção ou espalhamento de radiação;
- (e) as propriedades físicas dos materiais que constituem os corpos são constantes e independem de orientação;
- (f) não há fontes ou sumidouros de calor no interior da região considerada. A transferência de calor ocorre, então, em estado estacionário.

Para manter a generalidade na formulação do problema, será analisado um corpo de geometria arbitrária de região múltiplamente conexa, conforme figura 1, abaixo.

A região D será considerada uma região de Lyapunov, ou mais restritamente uma região regular segundo Kellogg [18], e representa a secção transversal de um corpo de comprimento infinito, sendo ∂D o contorno de D , que coincide com as superfícies do corpo em questão.

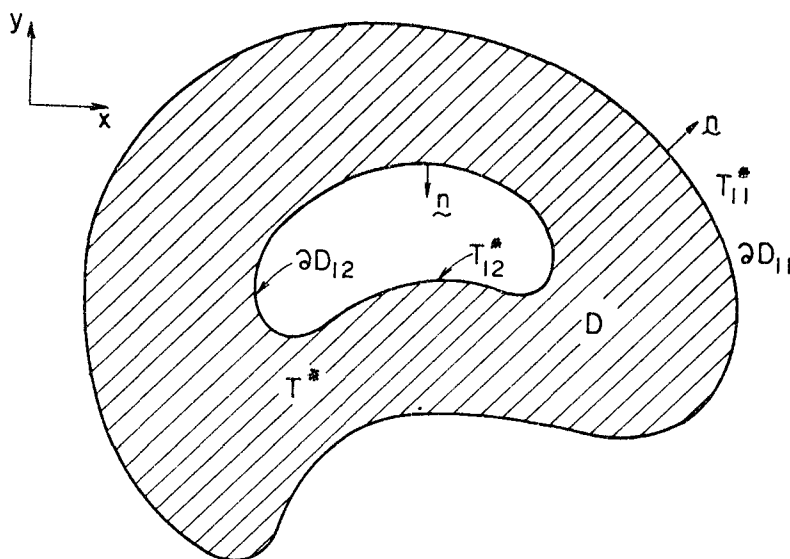


Fig. 1 - Secção transversal de um corpo de geometria múltiplamente conexa.

Considerando as simplificações feitas no início desta seção, para a região da figura acima, a condução de calor bidimensional é traduzida pela seguinte equação diferencial, a chamada equação de Laplace:

$$\nabla^2 T(z) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

Para a solução da equação (2.1), as condições de contorno são:

$$T \Big|_{\partial D_{12}} = T_{12}(z), \text{ para todo } z \text{ em } \partial D_{12} \quad (2.2)$$

para o contorno interno, onde $T_{12}(z)$ é uma temperatura prescrita; e para o contorno externo tem-se

$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\partial D_{11}} = -q(z), \text{ para todo } z \text{ em } \partial D_{11} \quad (2.3)$$

onde $q(z)$ representa o fluxo de calor adimensional por unidade de área que chega ou sai da superfície externa ∂D_{11} .

Deve-se salientar que, no problema a valores de contorno (2.1) - (2.3), todos os parâmetros foram adimensionalizados, no sentido de facilitar a solução do problema e de manter a generalidade na apresentação dos resultados. Os adimensionais introduzidos são os seguintes:

$$T = \frac{T^*}{T_r^*}, \quad x = \frac{x^*}{L_r^*}, \quad y = \frac{y^*}{L_r^*}$$

onde L_r^* é um comprimento de referência e T_r^* é uma temperatura de referência. O parâmetro adimensional z representa o par (x,y) contido no plano real bidimensional R^2 . Conforme será visto mais adiante, o fluxo de calor $q(z)$, para o caso da troca de calor por

radiação, será representado por uma equação íntegro-diferencial.

2.2 - A Fórmula de Green de Fronteira.

Na seção anterior, foi feita a formulação diferencial do problema estudado, sendo obtida a equação diferencial de Laplace. Com o uso do Teorema da Divergência e do Segundo Teorema de Green, transforma-se a equação diferencial parcial do problema proposto em uma equação integral. Substituindo-se a solução fundamental do operador Laplaceano e sua derivada normal, o problema reduz-se ao seguinte sistema de equações integrais (Veja Apêndice A):

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial D_{11}} \left(\frac{1}{2} + \ln |z-z'| \right) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\partial D_{11}} (z') \, ds(z') + \\
 & - \int_{\partial D_{11}} \frac{(z'-z) \cdot n'}{|z-z'|^2} \, ds(z') + \pi T_{11}(z) + \\
 & - \int_{\partial D_{12}} \left(\frac{1}{2} + \ln |z-z'| \right) q_{n12}(z') \, ds(z') + \\
 & - \int_{\partial D_{12}} \frac{(z'-z) \cdot n'}{|z-z'|^2} T_{12}(z') \, ds(z') = 0 \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

com z em ∂D_{11}

para o contorno externo, e

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial D_{11}} \left(\frac{1}{2} + \ln |z-z'| \right) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\partial D_{11}} (z') ds(z') + \\
& - \int_{\partial D_{11}} \frac{(z'-z) \cdot n'}{|z-z'|^2} T_{11}(z') ds(z') + \pi T_{12}(z) + \\
& - \int_{\partial D_{12}} \left(\frac{1}{2} + \ln |z-z'| \right) q_{n12} (z') ds(z') + \\
& - \int_{\partial D_{12}} \frac{(z'-z) \cdot n'}{|z-z'|^2} T_{12}(z') ds(z') = 0 \tag{2.5}
\end{aligned}$$

com z em ∂D_{12}

para o contorno interno. Nas equações (2.4) - (2.5) acima, $T_{11}(z)$ representa a distribuição de temperatura na superfície externa da região D , e q_{n12} representa o fluxo de calor na sua superfície interna. Às equações acima foi adicionada a condição de consistência de Neumann [16],

$$\int_{\partial D_{11}} \frac{\partial T_{11}}{\partial n} (z) ds(z) - \int_{\partial D_{12}} q_{n12} (z) ds(z) = 0,$$

para assegurar a existência de solução correspondente ao caso em que o contorno ∂D_{11} é o círculo unitário. Deve-se ressaltar que este procedimento é diferente do adotado em [12], quando na ocasião foi feita uma mudança de escala na distribuição de temperatura e no fluxo de calor. Os núcleos das integrais que aparecem no sistema (2.4) - (2.5) são a função de Green fundamental e sua derivada normal, escritas respectivamente como segue [19]:

$$G(z, z') = -\frac{1}{2\pi} \ln |z - z'|$$

e

$$\frac{\partial G}{\partial n}(z, z') = \frac{1}{2\pi} \frac{(z' - z) \cdot n'}{|z - z'|^2}$$

Observando-se as equações (2.4) - (2.5) nota-se facilmente que, para $z = z'$, ocorre uma descontinuidade na função de Green e sua derivada normal. Essas singularidades podem ser contornadas procedendo-se como no Apêndice A deste trabalho.

As incógnitas das equações (2.4) - (2.5) são o fluxo de calor da superfície interna $q_{n12}(z')$, e a distribuição de temperatura da superfície externa $T_{11}(z')$. Se for eliminado o fluxo interno entre as duas equações integrais, ter-se-á apenas uma equação a uma função incógnita, $T_{11}(z')$. Este procedimento será visto no capítulo 4.

2.3 - A Troca de Calor por Radiação entre um Corpo de Geometria Multiplamente Conexa e uma Placa Plana Isotérmica.

Nesta seção será analisada a transferência de calor por radiação entre a superfície externa de uma região D , duplamente conexa, e uma placa plana isotérmica, conforme figura 2.

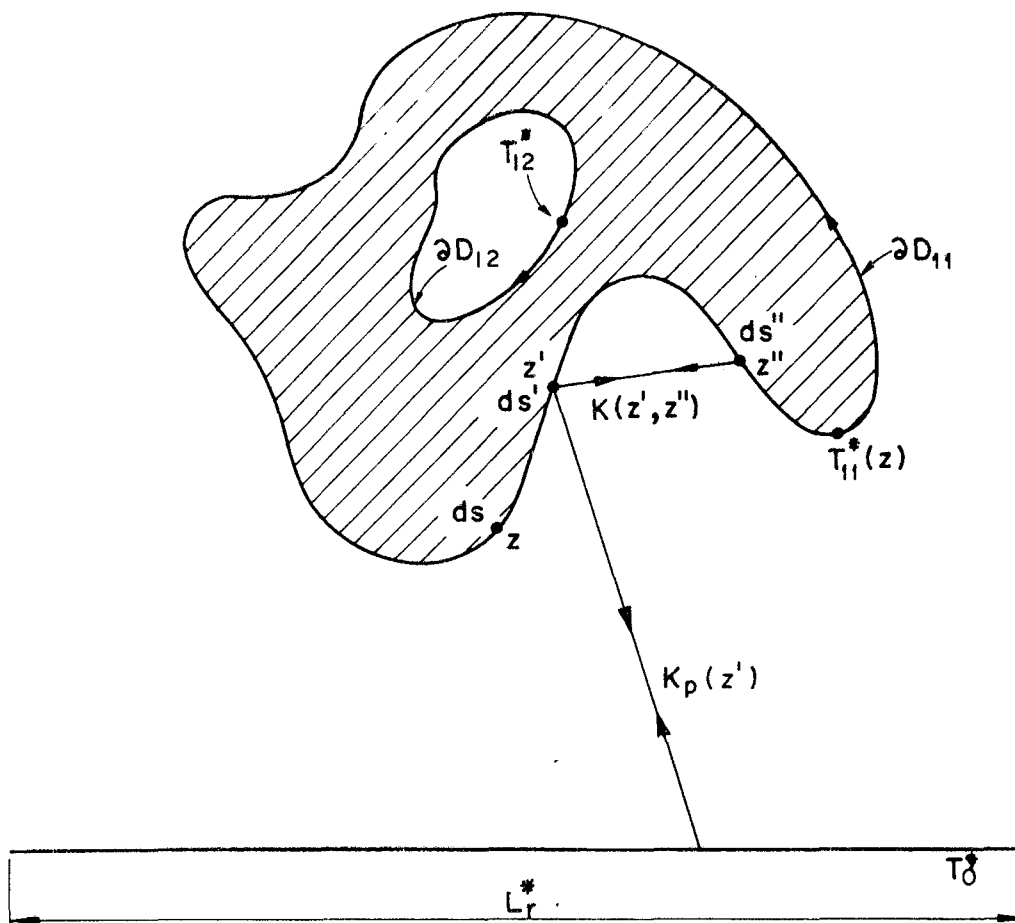


Fig. 2 - Secção transversal de um corpo trocando calor por radiação com uma placa plana isotérmica.

As equações integrais para a geometria da figura 2 são as equações (2.4) - (2.5) obtidas na seção 2.2. Fazendo-se um balanço térmico na superfície externa ∂D_{11} da região considerada, o fluxo de calor adimensional dado pela condição de contorno (2.3) passa a ser o seguinte:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\partial D_{11}}(z) = -N_r [T_{11}(z)]^4 + \int_{\partial D_{11}} K(z, z') T_{11}(z')^4 ds(z') - K_p(z) \quad (2.6)$$

ondê o parâmetro adimensional N_r é o número de radiação, definido

por:

$$N_r = \frac{\sigma T_0^{*3} L_r^*}{k}$$

sendo σ a constante de Stefan - Boltzmann, T_0^* a temperatura da placa, L_r^* um comprimento de referência, e k a condutibilidade térmica do corpo. O número de radiação é um parâmetro comparativo entre a troca de calor por radiação e condução da região D , conforme pode ser observado na equação que o define.

Na equação (2.6), o primeiro termo à direita representa o calor por radiação que abandona a superfície do corpo por unidade de área, a integral traduz o calor trocado na unidade de área por radiação entre elementos da mesma superfície, devido à sua concavidade. O termo $K(z, z') ds'$, definido como em [20], [21] ou [22], sendo K o núcleo da integral, representa o fator de forma entre duas superfícies elementares ds e ds' . Em outros termos, indica a fração de energia radiante que abandona a superfície elementar ds e atinge ds' . Analogamente, o termo $K_p(z)$ é o fator de forma entre um elemento de superfície ds do corpo e a superfície da placa, e representa a fração de energia radiante que deixa a superfície ds da região D , e atinge a superfície da placa. Convém observar que, se a superfície da região considerada for convexa, a integral da equação (2.6) tornar-se-á nula.

Substituindo-se a condição de contorno (2.6) no sistema de equações integrais (2.4) - (2.5) obtêm-se as seguintes equações:

$$\int_{\partial D_{11}} \left(\frac{1}{2} + \ln |z-z'| \right) N_r [T_{11}(z')]^4 +$$

$$- \int_{\partial D_{11}} K(z', z'') T_{11}(z'') ds(z'') - K_p(z') | ds(z') +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\partial D_{11}} \frac{(z'-z) \cdot n'}{|z-z'|^2} T_{11}(z') ds(z') - \pi T_{11}(z) + \\
& + \int_{\partial D_{12}} \frac{(z'-z) \cdot n'}{|z-z'|^2} T_{12}(z') ds(z') + \\
& + \int_{\partial D_{12}} \left(\frac{1}{2} + \ln |z-z'| \right) q_{n12}(z') ds(z') = 0 \quad (2.7)
\end{aligned}$$

com z em ∂D_{11} ,

válida para o contorno externo ∂D_{11} e

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial D_{11}} \left(\frac{1}{2} + \ln |z-z'| \right) N_r [T_{11}(z')]^4 + \\
& - \int_{\partial D_{11}} K(z', z'') T_{11}(z'')^4 ds(z'') - K_p(z') | ds(z') + \\
& + \int_{\partial D_{11}} \frac{(z'-z) \cdot n'}{|z-z'|^2} T_{11}(z') ds(z') - \pi T_{12}(z) + \\
& + \int_{\partial D_{12}} \frac{(z'-z) \cdot n'}{|z-z'|^2} T_{12}(z') ds(z') +
\end{aligned}$$

$$+ \int_{\partial D_{11}} \left(\frac{1}{2} + \ln |z-z'| \right) q_{n12}(z') ds(z') = 0 \quad (2.8)$$

com z em ∂D_{12} ,

para o contorno interno ∂D_{12} . Observe-se que, se for especificada a distribuição de temperatura do contorno interno $T_{12}(z)$, no sistema de equações (2.7) - (2.8), as funções incógnitas serão o fluxo de calor $q_{n12}(z')$ e a distribuição de temperatura do contorno externo $T_{11}(z)$, para um determinado número de radiação. Também pode-se notar que o sistema de equações acima é não-linear, devido à inclusão da condição de contorno (2.6), onde o fluxo de calor $\frac{\partial T_{11}}{\partial n}(z')$ é proporcional à temperatura elevada à quarta potência.

2.4 - Eficiência da Troca Térmica por Radiação.

Nesta seção estão definidas algumas relações de significado físico relevante na troca de calor por condução e radiação combinadas. Conforme está mostrado em [12], a influência da condutibilidade térmica na troca de calor por radiação é limitada pelos valores extremos do número de radiação, definido na seção anterior. Quando o número de radiação assume o valor nulo, a temperatura da superfície externa T_{11} do corpo é igualada à temperatura da superfície interna T_{12} , pois a condutibilidade térmica assume o valor infinito. Por outro lado, se o número de radiação tomar um valor infinito (o que equivale a dizer que a condutibilidade assume um valor nulo), não haverá transferência de calor por condução da superfície externa do corpo para a interna e vice-versa. Nesse caso, a temperatura da superfície externa do corpo dependerá apenas da temperatura da placa. Esses casos extremos podem ser obtidos pela análise das equações (2.7) - (2.8) e pela equação que define o número de radiação. Pelo que foi dito, a distribuição de temperatura na superfície externa do corpo certamente estará compreendida entre T_{12} e a temperatura da placa, para qualquer N_r .

A seguinte função torna possível a análise da influência da condutibilidade térmica do material na troca de calor por radiação:

$$\Psi(N_r) = \frac{\bar{q}(N_r)}{N_r} ; \quad (2.9)$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{q}(N_r) = & - \int_{\partial D_{11}} \partial T_{11} \, ds = \frac{N_r}{L(\partial D_{11})} \int_{\partial D_{11}} [T_{11}(z)^4 - \\ & - \int_{\partial D_{11}} K(z, z') T_{11}(z') \, ds(z') - K(z') \mid \, ds(z) \\ & \dots(2.10) \end{aligned}$$

é o fluxo de calor médio adimensional através da superfície externa do corpo e

$$L(\partial D_{11}) = \int_{\partial D_{11}} ds$$

é o comprimento de ∂D_{11} . De acordo com as definições dos adimensionais do problema (1) - (3), pode-se mostrar que

$$\Psi(N_r) = \frac{\bar{q}^*}{\sigma T_r^{*4}} ,$$

onde \bar{q}^* é o fluxo de calor médio através da superfície ∂D_{11} .

Combinando-se as equações (2.9) e (2.10), a função Ψ pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\Psi(N_r) = \frac{1}{L(\partial D_{11})} \int_{\partial D_{11}} [T_{11}(z)^4 - K_p(z) +$$

$$- \int_{\partial D_{11}} K(z, z') T_{11}(z')^4 ds(z')] ds(z) \quad (2.11)$$

A influência da condutibilidade térmica do sólido na transferência de calor por radiação entre o corpo e a placa poderá ser compreendida mais facilmente, se a seguinte relação for definida:

$$\xi(N_r) = \frac{\Psi(N_r)}{\Psi(0)} \quad (2.12)$$

Nessa relação, $\Psi(0)$ pode ser interpretado como um fluxo médio de calor na superfície ∂D_{11} , para o caso em que a condutibilidade térmica assume um valor infinito, conforme se observa na equação (2.9). Em termos de engenharia, esse caso particular corresponde a um metal ideal. O parâmetro $\xi(N_r)$, portanto, pode ser definido como uma eficiência da transferência de calor.

Para se avaliar o calor líquido trocado por radiação no problema definido na seção 2.2, considera-se um arco infinitesimal ds na superfície externa do corpo e a superfície s da placa. Na forma diferencial, esse fluxo de calor é dado pela equação

$$d^2q = N_r [T_{11}(z)^4 - T_0^4] K_p(z) ds(z) \quad (2.13)$$

Integrando-se a equação (2.13), obtém-se o fluxo médio de calor líquido trocado por radiação entre o corpo e a placa,

$$\Delta \bar{q} = \frac{1}{L(\partial D_{11})} \int_{\partial D_{11}} N_r [T_{11}(z)^4 - T_0^4] K_p(z) ds(z) \quad \dots (2.14)$$

Analogamente ao procedimento feito para a obtenção da equação (2.12), seja a seguinte relação:

$$\phi(N_r) = \frac{\Delta \bar{q}(N_r)}{N_r} \quad (2.15)$$

que possibilita a análise da influência da condutibilidade térmica na quantidade de calor líquido trocado por radiação entre o corpo e a placa.

Combinando-se as equações (2.12) e (2.13), tem-se a seguinte:

$$\phi(N_r) = \frac{1}{L(\partial D_{11})} \int_{\partial D_{11}} [T_{11}(z)^4 - T_0^4] K_p(z) ds(z) \quad \dots (2.16)$$

A razão

$$\eta(N_r) = \frac{\phi(N_r)}{\phi(0)} \quad (2.17)$$

representa uma eficiência da troca de calor líquido por radiação entre o corpo e a placa. A função $\phi(0)$ é obtida do caso limite em que $N_r = 0$, isto é, para $T_{11}(z) = T_{12}(z)$, e pode ser escrita como segue:

$$\phi(0) = \frac{1}{L(\partial D_{11})} \int_{\partial D_{11}} [T_{12}(z)^4 - T_0^4] K_p(z) ds(z) \quad \dots (2.18)$$

Para se determinar as funções $\xi(N_r)$ e $\eta(N_r)$, o sistema

de equações integrais não-lineares (2.7) - (2.8) deve ser resolvido quantas vezes forem necessárias para cobrir uma determinada faixa de números de radiação.

3. O ESQUEMA NUMÉRICO LINEAR

O desempenho relativo da transferência de calor entre o corpo D e a placa S definido pelas equações (2.12) e (2.16) da seção 2.4, só poderá ser avaliado em função do número de radiação se o conjunto de equações integrais não-lineares (2.7) - (2.8) for resolvido para a distribuição de temperatura $T_{11}(z)$ e o fluxo de calor $q_{n12}(z)$. Uma das maneiras de resolver o problema é através de um processo iterativo, para cada número de radiação especificado, até cobrir uma faixa significativa de valores de N_r . Em [12], foi apresentada uma solução utilizando o método de Newton-Raphson. Quando o número de valores de N_r for considerável, a solução desse sistema de equações pelo processo iterativo consome um tempo de processamento relativamente grande, embora bem menor do que o método de diferenças finitas, por exemplo. Pelo que foi dito, o objetivo desta dissertação é apresentar um esquema numérico alternativo linear para a solução das equações não-lineares do tipo (2.7) - (2.8). Com este procedimento, evita-se o processo de iterações.

O fato de as equações (2.7) - (2.8) serem não-lineares basicamente em função dos valores do número de radiação, que aparece como coeficiente dos termos não-lineares, sugere que os termos $\Psi(N_r)$ e $\phi(N_r)$ definidos na seção 2.4 possam ser avaliados em função de equações integrais lineares na vizinhança do número de radiação nulo.

Com efeito, se as derivadas parciais de $\Psi(N_r)$ e $\phi(N_r)$ forem obtidas no polo $N_r = 0$, pode-se substituir as equações que definem as eficiências $\xi(N_r)$ e $\eta(N_r)$ pelas seguintes séries de McLaurin (caso particular da série de Taylor no polo da variável independente):

$$\xi(N_r) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \xi(0)}{\partial N_r^k} N_r^k \quad (3.1)$$

e

$$\eta(N_r) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \eta(0)}{\partial N_r^k} N_r^k \quad (3.2)$$

onde

$$\frac{\partial^k \xi(0)}{\partial N_r^k} = \frac{1}{\psi(0)} \frac{\partial^k \psi(N_r)}{\partial N_r^k} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^k \eta(0)}{\partial N_r^k} = \frac{1}{\phi(0)} \frac{\partial^k \phi(N_r)}{\partial N_r^k}$$

e $k = 1, 2, \dots, N$ é a ordem do polinômio.

Olhando-se para as equações (2.11) - (2.12) e (2.16) - (2.17), verifica-se que, para a determinação das séries (3.1) - (3.2), deve-se avaliar as derivadas parciais da distribuição de temperatura $T_{11}(z)$. Mas essas derivadas parciais (e simultaneamente as do fluxo de calor $q_{n12}(z)$) são obtidas pela diferenciação parcial das equações (2.7) - (2.8) com relação ao número de radiação. De acordo com a análise dimensional do problema, pode-se afirmar que a temperatura T_{11} e o fluxo de calor q_{n12} são funções de uma variável apenas, que é o número de radiação, para cada ponto da superfície do corpo. Os demais parâmetros são constantes, ou seja,

$$T_{11} = T_{11}(z^*/L_r^*, N_r, T_{12}^*/T_0^*, s) \quad \text{e}$$

$$q_{n12} = q_{n12}(z^*/L_r^*, N_r, T_{12}^*/T_0^*, s)$$

onde s é uma dimensão da placa.

De modo geral, a derivada parcial de ordem p da equação (2.7) é da forma seguinte:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^p T_{11}(z)}{\partial N_r^p} \right)_0 - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{11}} \frac{(z'-z) \cdot n'}{|z-z'|^2} \left(\frac{\partial^p T_{11}(z')}{\partial N_r^p} \right)_0 ds(z') + \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{12}} \left(\frac{1}{2} + \ln |z-z'| \right) \left(\frac{\partial^p q_{n12}(z')}{\partial N_r^p} \right)_0 ds(z') = H_p(z) \\ & \dots (3.3) \end{aligned}$$

para todo z em ∂D_{11} e, a derivada parcial de ordem p da equação (2.8) pode ser escrita assim:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^p T_{12}(z)}{\partial N_r^p} \right)_0 - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{11}} \frac{(z'-z) \cdot n'}{|z-z'|^2} \left(\frac{\partial^p T_{11}(z')}{\partial N_r^p} \right)_0 ds(z') + \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{12}} \left(\frac{1}{2} + \ln |z-z'| \right) \left(\frac{\partial^p q_{n12}(z')}{\partial N_r^p} \right)_0 ds(z') = H_p(z) \end{aligned} \quad \dots (3.4)$$

para todo z em ∂D_{12} . Nessas equações,

$$\begin{aligned} H_p(z) = & \frac{p}{2\pi} \int_{\partial D_{11}} \left(\frac{1}{2} + \ln |z-z'| \right) \left[\left(\frac{\partial^{p-1} T_{11}(z')}{\partial N_r^{p-1}} \right)_0 + \right. \\ & \left. - \int_{\partial D_{11}} K(z', z'') \left(\frac{\partial^{p-1} T_{11}(z'')}{\partial N_r^{p-1}} \right)_0 ds(z'') \right] ds(z') \end{aligned} \quad \dots (3.5)$$

sendo $p = 1, 2, \dots, N$. Os termos do tipo $\left(\frac{\partial^p}{\partial N_r^p} \right)_0$, nessas equações, representam a derivada parcial de ordem p da função considerada em relação ao número de radiação nulo.

Nas equações (3.3) - (3.5), os termos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial N_r} N_r T_{11}^4 \right)_0 &= (T_{11}^4)_0 ; \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial N_r^2} N_r T_{11}^4 \right)_0 &= 8 (T_{11}^3)_0 \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial N_r} \right)_0 ; \\ \left(\frac{\partial^3}{\partial N_r^3} N_r T_{11}^4 \right)_0 &= 36 (T_{11}^2)_0 \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial N_r} \right)_0^2 + 12 (T_{11}^3)_0 \left(\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial N_r^2} \right)_0 \end{aligned} \quad \dots (3.6)$$

e assim sucessivamente. Essas derivadas podem ser obtidas pela regra da derivação de Leibnitz para um produto, que se apresenta da seguinte forma:

$$\frac{\partial^p N_r T_{11}^4}{\partial N_r^p} = \sum_{m=0}^p \binom{p}{m} D_m (N_r) D_{p-m} (T_{11}^4) \quad (3.7)$$

onde D_q representa a derivada de ordem q da função, e

$$\binom{p}{m} = \frac{p!}{m!(p-m)!}. \quad \text{Para o número de radiação nulo, a equação (3.7)} \quad (3.7)$$

transforma-se na seguinte:

$$\left(\frac{\partial^p N_r T_{11}^4}{\partial N_r^p} \right)_0 = p D_{p-1} (T_{11}^4)_0 \quad (3.8)$$

Os termos $\left(\frac{\partial^p T_{11}^4}{\partial N_r^p} \right)_0$ são representados pela seguinte equação de recorrência binomial:

$$\left(\frac{\partial^p T_{11}^4}{\partial N_r^p} \right)_0 = \sum_{m=0}^p \binom{p}{m} D_m (T_{11}^2)_0 D_{p-m} (T_{11}^2)_0 \quad (3.9)$$

onde

$$D_m (T_{11}^2)_0 = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} D_n (T_{11})_0 D_{m-n} (T_{11})_0 \quad (3.10)$$

sendo $D_k (T_{11})_0 = \left(\frac{\partial^k T_{11}}{\partial N_r^k} \right)_0$

Portanto, com o auxílio das equações de recorrência binomial mostradas, determina-se as derivadas sucessivas de T_{11} e simultaneamente de q_{n12} no conjunto de equações lineares (3.3) -

(3.4). O processo de cálculo dessas derivadas inicia-se a partir das equações integrais (2.7) - (2.8), fazendo-se $N_r = 0$, quando são determinados os valores de $(T_{11})_0$ e $(q_{n12})_0$. Daí, os valores

de $(\frac{\partial^p T_{11}}{\partial N_r^p})_0$ e $(\frac{\partial^p q_{n12}}{\partial N_r^p})_0$ podem ser obtidos através do sistema de

equações integrais lineares (3.3) - (3.4), por recursão, como pode ser observado na equação (3.5). Note-se que, no processo de cálculo, a natureza das equações integrais não varia. A tarefa de obter as aproximações polinomiais (3.1) - (3.2) reduz-se, com esse procedimento, à resolução das equações integrais lineares (3.3) - (3.4). Uma vez determinadas as derivadas sucessivas

$(\frac{\partial^p T_{11}}{\partial N_r^p})_0$ pelas equações de recorrência, as derivadas parciais

$(\frac{\partial^p \psi}{\partial N_r^p})_0$ e $(\frac{\partial^p \phi}{\partial N_r^p})_0$ podem ser facilmente calculadas. Com efeito, diferenciando-se as equações (2.11) e (2.16), resultam as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^p \psi}{\partial N_r^p}\right)_0 &= \frac{1}{L(\partial D_{11})} \int_{\partial D_{11}} \left[\left(\frac{\partial^p T_{11}(z)}{\partial N_r^p}\right)_0 + \right. \\ &\quad \left. - \int_{\partial D_{11}} K(z, z') \left(\frac{\partial^p T_{11}(z')}{\partial N_r^p}\right)_0 ds(z') \mid ds(z) \right] \end{aligned}$$

... (3.11)

e

$$\left(\frac{\partial^p \phi}{\partial N_r^p}\right)_0 = \frac{1}{L(\partial D_{11})} \int_{\partial D_{11}} \left[\left(\frac{\partial^p T_{11}(z)}{\partial N_r^p}\right)_0 - \left(\frac{\partial^p T_0}{\partial N_r^p}\right)_0\right]$$

$$K_p(z) ds(z) \quad (3.12)$$

Desta forma, Ψ e ϕ podem ser aproximadas pelos polinômios (3.1) e (3.2), respectivamente, na vizinhança de $N_r = 0$. Esses polinômios, expandidos até uma ordem p , são escritos do seguinte modo:

$$\Psi_p(N_r) = \Psi(0) + \frac{\partial \Psi(0)}{\partial N_r} N_r + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \Psi(0)}{\partial N_r^2} N_r^2 + \dots + \frac{1}{p!} \frac{\partial^p \Psi(0)}{\partial N_r^p} N_r^p \quad (3.13)$$

e

$$\phi_p(N_r) = \phi(0) + \frac{\partial \phi(0)}{\partial N_r} N_r + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \phi(0)}{\partial N_r^2} N_r^2 + \dots + \frac{1}{p!} \frac{\partial^p \phi(0)}{\partial N_r^p} N_r^p \quad (3.14)$$

Daí, as eficiências ξ e η podem ser facilmente determinados pelas equações (3.1) - (3.2) escritas assim:

$$\xi_p(N_r) = \frac{\Psi_p(N_r)}{\Psi(0)} \quad (3.1)$$

e

$$\eta_p(N_r) = \frac{\phi_p(N_r)}{\phi(0)} \quad (3.2)$$

onde p indica o número de termos da série.

Analogamente, para a distribuição de temperatura do contorno externo do sólido considerado, tem-se a seguinte aproximação de Taylor:

$$\begin{aligned}
T_{11}(z, N_r) = T_{11}(z, 0) + \frac{\partial T_{11}(z, 0)}{\partial N_r} N_r + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 T_{11}(z, 0)}{\partial N_r^2} N_r^2 \\
+ \dots + \frac{1}{p!} \frac{\partial^p T_{11}(z, 0)}{\partial N_r^p} N_r^p
\end{aligned} \tag{3.15}$$

com z em ∂D_{11} .

Como se pode verificar, as equações (3.13) - (3.15), de modo geral, apresentam-se da seguinte forma:

$$f(N_r) = \sum_{n=0}^p a_n N_r^n \tag{3.16}$$

onde os valores de a_n são conhecidos. Pode-se, desta forma, obter todas as informações aproximadas da função $f(N_r)$ estimando-se valores de N_r .

4. SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS

Como é fácil de se ver, não é possível a solução analítica das equações integrais não-lineares (2.7) - (2.8) obtidas no capítulo 2, e das equações integrais lineares (3.3) - (3.4) formuladas no capítulo 3 deste trabalho. Por essa razão, tais equações devem ser resolvidas numericamente.

Ao se utilizar a Segunda Fórmula de Green para transformar a equação de Laplace em um sistema de equações integrais, no capítulo 1, todas as integrais que apareceram são integrais de linha. Em consequência, para a obtenção dos valores numéricos das funções incógnitas envolvidas, trabalha-se apenas nos contornos da região considerada, sendo desnecessária alguma informação adicional das distribuições do seu interior. O mesmo não acontece nos métodos de diferenças finitas e elementos finitos, onde são necessárias interpolações no interior da região para se ter os valores da função no contorno. Pelo que foi dito, para o cálculo dos valores das funções, deve-se dividir toda a região em pontos quando se aplica os métodos de diferenças finitas e elementos finitos, e apenas o contorno para o caso do método de equações integrais. Esta é a vantagem mais importante do último método citado sobre os dois primeiros, quando se requer as distribuições apenas no contorno dos sólidos.

4.1 - A Divisão do Contorno

Para a solução numérica das equações integrais citadas acima, deve-se dividir os contornos da região D em N_j pequenos intervalos (segmentos de arco) Δs_j , de tal modo que, no centro de cada intervalo encontra-se um ponto nodal j , conforme pode ser visto na fig. 3. Além disso, para se fazer uso da simetria, é recomendável que os intervalos do contorno ∂D_{ij} sejam distribuídos simetricamente em relação ao sistema de eixos adotado, de tal modo que cada eixo intercepte um intervalo e não um ponto nodal. Para o contorno externo ∂D_{11} da região em estudo tem-se N_{11} pontos nodais, e para o interno ∂D_{12} , N_{12} . Para que sejam realizadas as in

tegrais numéricas da função de Green e sua derivada normal em torno de cada ponto nodal, é feita uma subdivisão dos contornos, resultando pontos subnodais (veja figura 3).

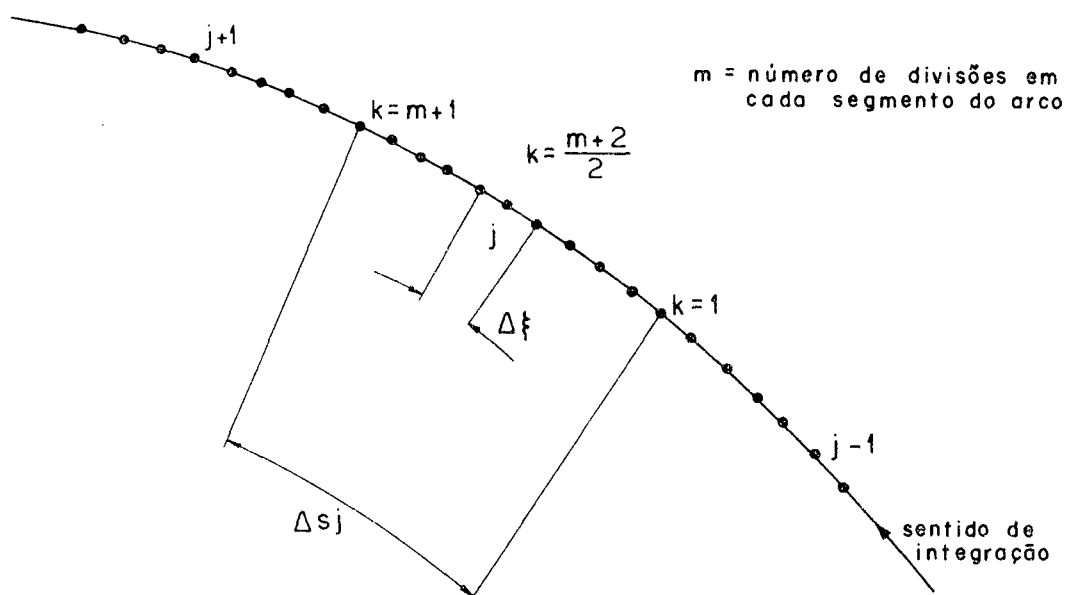


Fig. 3 - Divisão de Contorno

Nessa figura, j representa o ponto nodal, k o ponto subnodal, m o número de subdivisões em cada segmento de arco e Δs_j o segmento de arco. O sentido positivo de integração é tal que, ao se caminhar ao longo do contorno, o interior da região D estará sempre do lado esquerdo.

4.2 - Discretização das equações integrais

4.2.1 - Aproximação das Integrais.

Como se pode observar nos sistemas de equações integrais (2.7) - (2.8) e (3.3) - (3.4), as equações são todas do tipo

$$\int_{\partial D} K(z, z') f(z') ds(z') \quad (4.1)$$

onde z e z' são variáveis vetoriais que especificam pontos nos contornos ∂D , enquanto que $ds(z')$ denota diferencial de arco em z' ; a função $K(z, z')$ é um núcleo e $f(z')$ é uma função normalmente desconhecida. O núcleo $K(z, z')$ poderá ser a solução fundamental do operador Laplaceano, a derivada da função de Green ou o fator de forma geométrico. A função $f(z')$ será a temperatura ou sua derivada normal (fluxo de calor), nos contornos interno ou externo da região em estudo.

Com a divisão do contorno em N_j suaves segmentos de arco, a função $f(z')$, z' em ∂D_{ij} , pode ser aproximada por uma função degrau (constante em cada segmento de arco) da forma escrita a seguir

$$\bar{f}(z') = f_j, \quad z' \text{ em } \Delta s_j, \quad j = 1, 2, \dots, N_j \quad (4.2)$$

Desta forma, a integral (4.1) poderá ser aproximada pela seguinte expressão:

$$\bar{\phi}(z) = \int_{\partial D} K(z, z') \bar{f}(z') ds(z') \quad (4.3)$$

que, com o uso do teorema da média, é transformada em soma, conforme especificado abaixo:

$$\bar{\phi}(z) = \sum_{j=1}^{N_j} f_j \int_{\Delta s_j} K(z, z') ds(z'), \quad (4.4)$$

onde a integral representa integração ao longo do segmento de arco Δs_j . Este método de discretização uniforme do contorno e apro-

ximação das integrais das funções $f(z')$ por somas f_j aplicadas a cada ponto nodal chama-se método da colocação [17].

4.2.2 - Parametrização do Contorno.

Normalmente, existe uma certa dificuldade para a divisão de um contorno em pequenos arcos iguais, pois a velocidade da curva pode variar em cada ponto. Para evitar essa dificuldade, faz-se uma parametrização do contorno, como em [13] e [15].

Seja τ uma variável real no intervalo $[a_{ij}, b_{ij}]$ da linha real R e seja $x=x(\tau)$, $y=y(\tau)$ uma parametrização do contorno ∂D_{ij} nesse intervalo tal que $x(a_{ij})=x(b_{ij})$ e $y(a_{ij})=y(b_{ij})$. Como a região é de Liyapunov, sabe-se que $\dot{s}(\tau) = (\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2)^{1/2}$ é positiva ao longo de cada curva do contorno. Logo, substituindo-se as variáveis que aparecem nas integrais do sistema (2.7) - (2.8), tem-se o seguinte:

$$\int_{\partial D_{ij}} \frac{(z'-z) \cdot n'}{|z-z'|^2} T_{ij}(z') ds(z') = \int_{a_{ij}}^{b_{ij}} \frac{(z(\tau')-z(\tau)) \cdot (\dot{s}(\tau')n(z(\tau')))}{|z(\tau')-z(\tau)|^2} T_{ij}(z(\tau')) d\tau' \quad (4.5)$$

onde $\dot{s}(\tau) n(z(\tau)) = \left(\frac{dy}{d\tau}, -\frac{dx}{d\tau}\right)$, e

$$\int_{\partial D_{ij}} \left(\frac{1}{2} + \ln |z-z'|\right) \partial T(z') ds(z') = \int_{a_{ij}}^{b_{ij}} \left(\frac{1}{2} + \ln |z(\tau) - z(\tau')|\right) \dot{s}(\tau') \partial T(z(\tau')) d\tau' \quad (4.6)$$

A mesma parametrização é válida para o conjunto de equações integrais lineares (3.3) - (3.4).

4.2.3 - Discretização das Equações Integrais.

Com base no que foi exposto nas seções anteriores deste capítulo, discretizando-se o sistema de equações não-lineares (2.7) - (2.8) e utilizando-se o método da colocação, resulta o seguinte sistema de equações algébricas não-lineares, aplicado a cada ponto nodal $z(\tau_k)$ do contorno ∂D_{ij} , $k = 1, 2, \dots, N_{ij}$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N11} G_{11,ij}^{11} \partial T_{11,j} + \sum_{j=1}^{N11} DG_{11,ij}^{11} T_{11,j} + \sum_{j=1}^{N12} G_{11,ij}^{12} \partial T_{12,j} + \\ + \sum_{j=1}^{N12} DG_{11,ij}^{12} T_{12,j} - \pi T_{11,i} = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N11} G_{12,ij}^{11} \partial T_{11,j} + \sum_{j=1}^{N11} DG_{12,ij}^{11} T_{11,j} + \sum_{j=1}^{N12} G_{12,ij}^{12} \partial T_{12,j} + \\ + \sum_{j=1}^{N12} DG_{12,ij}^{12} T_{12,j} - \pi T_{12,i} = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Em forma matricial, o conjunto de equações acima pode ser escrito assim:

$$\begin{aligned} [G_{11}^{11}] \{\partial T_{11}\} + [DG_{11}^{11}] \{T_{11}\} + [DG_{11}^{12}] \{T_{12}\} + [G_{11}^{12}] \{\partial T_{12}\} = \{0\} \\ \dots (4.9) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [G_{12}^{11}] \{\partial T_{11}\} + [DG_{12}^{11}] \{T_{11}\} + [DG_{12}^{12}] \{T_{12}\} + [G_{12}^{12}] \{\partial T_{12}\} = \{0\} \\ \dots (4.10) \end{aligned}$$

onde [1] é a matriz identidade. Os termos que representam a função de Green G_{1p}^{1q} e sua derivada normal DG_{1p}^{1q} constituem matrizes bidimensionais enquanto que os termos T_j e ∂T_j representam matrizes-coluna.

As funções de Green são calculadas por:

$$G_{1p,ij}^{1q} = \int_{\tau_j^-}^{\tau_j^+} \left(\frac{1}{2} + \ln |z(\tau_i) - z(\tau')| \right) d\tau' \quad (4.11)$$

sendo $\tau_j^\pm = \tau_j \pm \frac{\Delta\tau}{2}$, com z em ∂D_{1p} e z' em ∂D_{1q} ; $p, q = 1, 2$, e $i = 1, 2, \dots, N_{1q}$, $j = 1, 2, \dots, N_{1p}$; $\Delta\tau = (b_{1q} - a_{1q})/N_{1q}$, e os valores das derivadas da função de Green são assim calculados:

$$DG_{1p,ij}^{1q} = \int_{\tau_j^-}^{\tau_j^+} \frac{(z(\tau') - z(\tau_i))}{|z(\tau') - z(\tau_i)|^2} \dot{s}(\tau') n(z(\tau')) d\tau' - \pi \delta_{ij} \quad (4.12)$$

onde z em ∂D_{1q} e z' em ∂D_{1p} ; $p, q = 1, 2$; $i = 1, 2, \dots, N_{1q}$; $j = 1, 2, \dots, N_{1p}$, válidas para $p \neq q$. Quando $z(\tau_j)$ tende a $z(\tau')$, para $p=q$, surgirão singularidades, como pode ser observado nas equações (4.11) - (4.12). Essas singularidades podem ser contornadas, definindo-se um arco finito, tal que $|z(\tau_i) - z(\tau')| = \Delta s$. Então,

$$\int_{\tau^-}^{\tau^+} \ln |z(\tau_i) - z(\tau')| d\tau' = \int_{\tau^-}^{\tau^+} \ln \Delta s d\tau = \tau^+ (\ln \tau^+ - 1) - \tau^- (\ln \tau^- - 1) \quad \dots \quad (4.13)$$

onde $(\tau^+ - \tau^-) = \Delta\xi$ (Veja figura 3)

Para a derivada normal da função de Green, quando $z(\tau')$ tende a $z(\tau_i)$ mostra-se que (Veja Apêndice A):

$$\lim_{z(\tau_i) \rightarrow z(\tau')} \frac{(z(\tau_i) - z(\tau')) \cdot (\dot{s}_n(z(\tau'))) }{|z(\tau_i) - z(\tau')|^2} = \frac{1}{2\pi} K(z(\tau')) \quad (4.14)$$

onde $K(z(\tau'))$ é a curvatura do contorno no ponto $z(\tau')$.

As matrizes-coluna das equações não-lineares são dadas pelas equações:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial n} = \partial T_{11} = \dot{s}_n N_r [T_{11}(z)]^4 - \int_{\partial D_{11}} K(z, z') T_{11}(z')^4 ds(z') +$$

$$- K_p(z) \quad (4.15)$$

e

$$\partial T_{12} = \dot{s}_n q_{n12} \quad (4.16)$$

Das equações (4.7) - (4.8), verifica-se que estão definidas $N_{11} + N_{12}$ equações não-lineares a N_{11} incógnitas T_{11} e N_{12} incógnitas ∂T_{12} , pois $\{\partial T_{11}\}$ é dada pela equação (4.15) e $\{T_{12}\}$ é suposta conhecida. Essas equações são resolvidas pelo método de Newton-Raphson.

Entretanto, o conjunto (4.7) - 4.8) pode ser reduzido a uma única equação integral para cada ponto nodal. Sabendo-se que a matriz $[G_{12}^{12}]$ é inversível (conforme pode ser provado de um corolário do artigo publicado por Jaswon [1]), pode-se eliminar o fluxo de calor $\{\partial T_{12}\}$ entre as duas equações consideradas.

O resultado desse procedimento é apresentado pela seguinte equação matricial:

$$[A] \{T_{11}\} + [B] \{\partial T_{11}\} + \{C\} = \{0\} \quad (4.17)$$

onde

$$[A] = [DG_{11}^{11}] - [G_{12}^{12}] [G_{12}^{12}]^{-1} [DG_{12}^{11}]$$

sendo $[G_{12}^{12}]^{-1}$ a matriz inversa da $[G_{12}^{12}]$,

$$[B] = [G_{11}^{11}] - [G_{11}^{12}] [G_{12}^{12}]^{-1} [G_{12}^{11}] \text{ e}$$

$$[C] = ([DG_{11}^{12}] - [G_{11}^{12}] - [G_{11}^{12}] [G_{12}^{12}]^{-1} [DG_{12}^{12}]) \{T_{12}\}$$

Agora, o problema consiste na resolução de N_{11} equações do tipo (4.17) para N_{11} incógnitas T_{11} , pois o fluxo de calor ∂T_{11} é função apenas da distribuição de temperatura T_{11} , de acordo com a equação (4.15).

Analogamente ao desenvolvimento realizado para a obtenção das equações integrais não-lineares (4.7) - (4.8), as equações integrais lineares (3.3) - (3.4), quando discretizadas, tomam a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N11} G_{11,ij}^{11} (D_p \partial T_{11,j}) + \sum_{j=1}^{N11} DG_{12,ij}^{11} (D_p T_{11,j}) + \\ & + \sum_{j=1}^{N12} G_{11,ij}^{12} (D_p \partial T_{12,j}) - \pi (D_p T_{11,i}) = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

e

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N11} G_{12,ij}^{11} (D_p \partial T_{11,j}) + \sum_{j=1}^{N11} DG_{12,ij}^{11} (D_p T_{11,j}) + \\ & + \sum_{j=1}^{N12} G_{12,ij}^{12} (D_p \partial T_{12,j}) = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde D_p denota a derivada de ordem p da função, $p = 1, 2, \dots$.

Em notação matricial, essas equações podem ser escritas como:

$$[G_{11}^{11}]\{D_p \partial T_{11}\} + [DG_{12}^{11}]\{T_{11}\} + [G_{12}^{11}]\{D_p \partial T_{12}\} = \{0\} \quad (4.20)$$

e

$$[G_{12}^{11}]\{D_p \partial T_{11}\} + [DG_{12}^{11}]\{D_p T_{11}\} + [G_{12}^{12}]\{D_p \partial T_{12}\} = \{0\} \quad (4.21)$$

onde $\{D_p \partial T_{11}\}$ e $\{D_p \partial T_{12}\}$ são as matrizes-coluna das derivadas parciais dos fluxos de calor da superfície externa e da interna, respectivamente. Invertendo-se a matriz $[G_{12}^{12}]$ e eliminando-se o fluxo de calor $\{\partial T_{12}\}$ entre as equações (4.20) e (4.21), resulta a seguinte equação algébrica linear:

$$[D]\{D_p T_{11}\} + [E]\{D_p \partial T_{11}\} = \{0\} \quad (4.22)$$

sendo

$$[D] = [DG_{12}^{11}] - [DG_{12}^{11}][G_{12}^{12}]^{-1}[G_{12}^{11}]$$

$$[E] = [G_{11}^{11}] - [G_{12}^{11}][G_{12}^{12}]^{-1}[G_{11}^{12}]$$

Para uma melhor compreensão do processo de cálculo das derivadas sucessivas da distribuição de temperatura $\{D_p T_{11}\}$, um resumo dos sistemas de equações formuladas é dado a seguir:

$$[A]\{T_{11}\} + [B]\{\partial T_{11}\} + \{C\} = \{0\} \quad (4.17)$$

$$\partial T_{11} = \dot{s} N_r [T_{11}(z)]^4 - \int_{\partial D_{11}} K(z, z') T_{11}(z')^4 ds(z') -$$

$$K_p(z) | \quad (4.15)$$

$$[D]\{D_p T_{11}\} + [E]\{D_p \partial T_{11}\} = \{0\} \quad (4.22)$$

$$\left(\frac{\partial^p N_r T_{11}^4}{\partial N_r^p}\right)_0 = p D_{p-1}(T_{11}^4)_0 \quad (3.8)$$

Além disso, combinando-se as equações (3.9) e (3.10) do capítulo 3, tem-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^p T_{11}^4}{\partial N_r^p}\right)_0 &= \sum_{m=0}^p \binom{p}{m} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} D_n(T_{11})_0 D_{m-n}(T_{11})_0 \\ &\quad \sum_{l=0}^{p-m} \binom{p-m}{l} D_l(T_{11})_0 D_{p-m-l}(T_{11})_0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

As equações (4.17) e (4.22) serão dadas em forma explícita para $\{T_{11}\}$ e $\{D_p T_{11}\}$, respectivamente

$$\{T_{11}\} = [F]\{\partial T_{11}\} + \{G\}, \quad (4.24)$$

$$\text{onde } [F] = -[B][A]^{-1} \text{ e } \{G\} = -[A]^{-1}\{C\}$$

$$\{D_p T_{11}\} = [H]\{D_p \partial T_{11}\} \quad (4.25)$$

$$\text{onde } [H] = -[E][D]^{-1},$$

supondo-se que as matrizes $[A]$ e $[D]$ sejam inversíveis. As equações (3.8), (4.15), (4.23), (4.24) e (4.25) são suficientes para a determinação das derivadas sucessivas da distribuição de temperatura $\{D_p T_{11}\}$ e de $\left(\frac{\partial^p T_{11}^4}{\partial N_r^p}\right)_0$. O processo de cálculo inicia-se pe

la equação (4.24), de onde se obtém $\{T_{11}\}_0$, uma vez que $\{\partial T_{11}\}_0$ é nula para $N_r = 0$.

Uma vez calculada $\{T_{11}\}_0$, a matriz das derivadas par-

ciais sucessivas da temperatura $\{D_p T_{11}\}$, e simultaneamente a matriz das derivadas parciais do fluxo de calor $\{D_p \partial T_{11}\}_0$ são determinadas recursivamente na equação (4.25), com o auxílio das equações (3.8) e (3.24). Essa última equação, durante o processo de cálculo, determina as derivadas parciais $\left(\frac{\partial^p T_{11}}{\partial N_r^r}\right)_0$, para a posterior avaliação das derivadas parciais dos fluxos líquidos de calor pelas equações (3.11) e (3.12). Daí, utilizando-se as equações (3.1) e (3.2) determina-se as eficiências ξ e η , respectivamente. Finalmente, com os valores $\{D_p T_{11}\}_0$, a distribuição de temperatura T_{11} pode ser aproximada pela série de Taylor (3.15).

5. APLICAÇÃO DO MÉTODO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

5.1 - Aplicação do Método

Nos capítulos anteriores, procedeu-se uma formulação para um corpo de geometria arbitrária, no sentido de salientar a generalidade na aplicação do método de equações integrais. Neste capítulo será utilizado o esquema numérico linear para a solução de um problema específico, tendo-se como principal objetivo a verificação da eficiência do esquema numérico formulado anteriormente. Os resultados serão comparados com os obtidos pelo método de diferenças finitas e pelo esquema numérico linear.

Para ilustrar uma aplicação do presente método, será considerado o problema do aquecimento por radiação de um cilindro de parede espessa por uma placa isotérmica, conforme esquema mostrado na figura 4.

Para a solução das equações integrais não-lineares (2.7) - (2.8) e das equações integrais lineares (3.3) - (3.4), foram adotados os seguintes adimensionais:

$$a = \frac{r_i^*}{r_e^*}, \quad b = \frac{B^*}{r_e^*}, \quad h = \frac{H^*}{r_e^*} \quad \text{e} \quad N_r = \frac{\sigma T_0^{*3} r_e^*}{k} \quad (5.1)$$

onde r_e^* , raio externo do cilindro, é o comprimento de referência, k é a condutibilidade térmica do cilindro. Os demais parâmetros estão mostrados na figura 4. Além disso, adotando-se a temperatura da superfície da placa T_0^* como temperatura de referência, a temperatura adimensional definida no capítulo 2 passa a ser

$$T_{1j} = \frac{T_{1j}^*}{T_0^*}, \quad j = 1, 2$$

onde T_{12} é uma temperatura uniforme. Neste problema, fez-se os parâmetros $a = 0.5$, $b = 2.0$ e $h = 2.0$.

Como o corpo é considerado convexo, não existe a radia

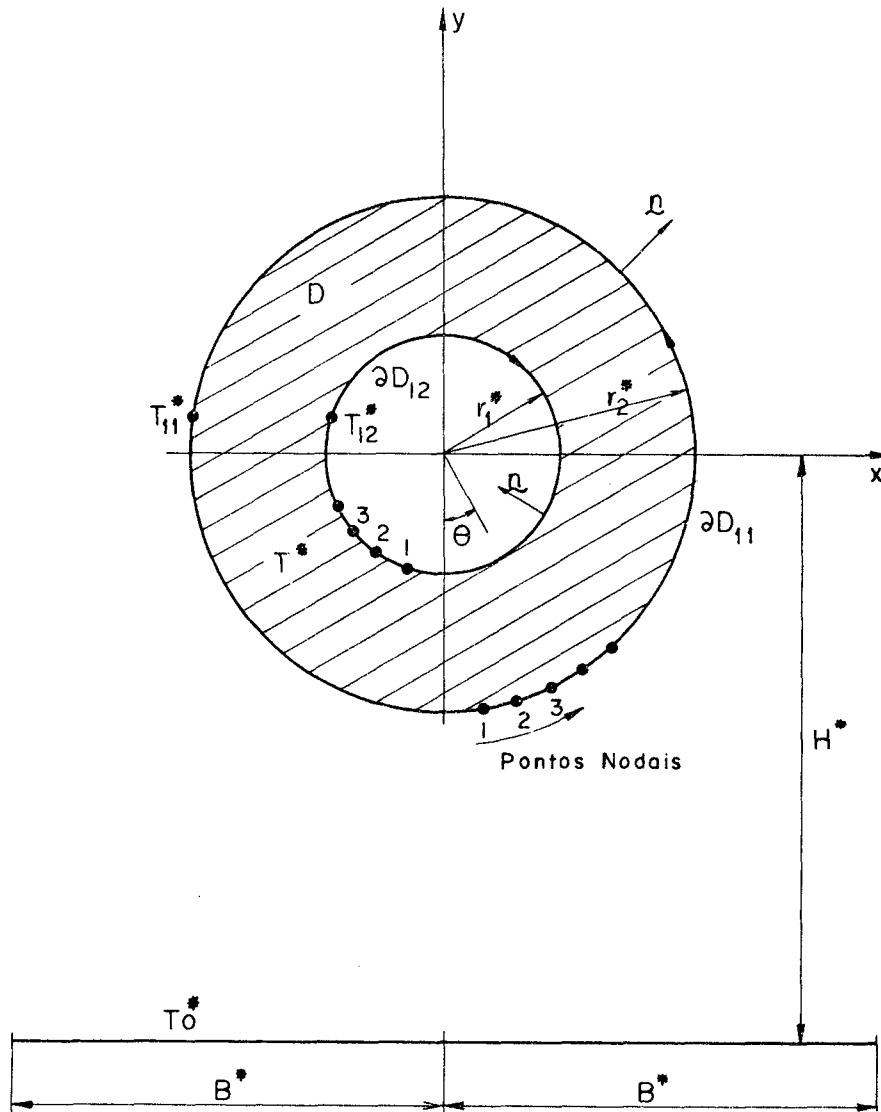


Fig. 4 - Geometria do problema.

ção mútua, e a equação (4.15) do capítulo 4 passa a ser esta:

$$\partial T_{11}(z) = \dot{s} N_r [T_{11}(z)^4 - K_p(z)] \quad (5.2)$$

onde $K(z,s)$ é o fator de forma entre um elemento de arco ds do cilindro e a superfície da placa. Devido à simetria existente na figura 4, considera-se metade do cilindro e metade da placa. Para a superfície interna do cilindro foram utilizados 32 pontos nodais, e para a externa, 64. Para a integração numérica da função de Green fundamental e sua derivada normal foram feitas 10 divisões em cada intervalo (Ver figura 3).

Para a solução do problema da figura 4, foram escritos três programas em linguagem FORTRAN IV. Um para o esquema não-linear representado pelas equações (4.17) e (5.2),

$$[\Lambda]\{T_{11}\} + [B]\{\partial T_{11}\} + \{C\} = \{0\} \quad (4.17)$$

$$\partial T_{11}(z) = \dot{s} N_r [T_{11}(z)^4 - K_p(z)] \quad (5.2)$$

que avaliam a distribuição de temperatura $T_{11}(z)$, e pelas equações

$$\Psi(N_r) = \frac{1}{L(\partial D_{11})} \int_{\partial D_{11}} [T_{11}(z)^4 - K_p(z)] ds(z) \quad (5.3)$$

$$\xi(N_r) = \frac{\Psi(N_r)}{\Psi(0)} \quad (2.12)$$

$$\phi(N_r) = \frac{1}{L(\partial D_{11})} \int_{\partial D_{11}} [T_{11}(z)^4 - T_0^4] K_p(z) ds(z) \quad (5.4)$$

$$\eta(N_r) = \frac{\phi(N_r)}{\phi(0)} \quad (2.17)$$

que avaliam as eficiências ξ e η . Para o cálculo da distribuição de temperatura $T_{11}(z)$, substitui-se a função $\partial T_{11}(z)$ da equação (5.2) na (4.17) e resolve-se a equação resultante pelo método de Newton - Raphson, para cada N_r . Com isso, determina-se os valores

de $\Psi(N_r)$ e $\phi(N_r)$ nas equações (5.3) e (5.4), respectivamente. Os valores de $\Psi(0)$ e $\phi(0)$ são determinados para $N_r = 0$, nessas equações, onde $T_{11}(z)$ passa a ser $T_{12}(z)$.

O segundo programa foi utilizado para a avaliação das eficiências através da aproximação de Taylor. Combinando-se as equações (4.17) e (5.2), determina-se $(T_{11})_0$ fazendo-se $N_r = 0$. Com esse valor e com o auxílio das fórmulas de recorrência binomial

$$\left(\frac{\partial^p T_{11}^4(z)}{\partial N_r^p}\right)_0 = \sum_{m=0}^p \binom{p}{m} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} D_n(T_n)_0 D_{m-n}(T_{11})_0 \\ \sum_{l=0}^{p-m} \binom{p-m}{l} D_l(T_{11})_0 D_{p-m-l}(T_{11})_0 \quad (4.23)$$

$$\left(\frac{\partial^p N_r T_{11}^4}{\partial N_r^p}\right)_0 = p D_{p-1}(T_{11}^4)_0 \quad (3.8)$$

calcula-se as derivadas sucessivas da distribuição de temperatura $T_{11}(z)$ na equação (4.25)

$$\{D_p T_{11}\} = [H] \{D_p \partial T_{11}\} \quad (4.25)$$

e as derivadas parciais $\left(\frac{\partial^p T_{11}^4}{\partial N_r^p}\right)_0$ na equação (4.23), recursivamente.

Para a avaliação das derivadas parciais dos fluxos líquidos de calor do problema dado pela figura 4, as equações (3.11) - (3.12) tomam a seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial^p \Psi}{\partial N_r^p}\right)_0 = \frac{1}{L(\partial D_{11})} \int_{\partial D_{11}} \left(\frac{\partial^p T_{11}(z)}{\partial N_r^p}\right)_0^4 ds(z) \quad (5.5)$$

$$\left(\frac{\partial^p \phi}{\partial N_r^p}\right)_0 = \frac{1}{L(\partial D_{11})} \int_{\partial D_{11}} \left(\frac{\partial^p T_{11}(z)}{\partial N_r^p}\right)_0^4 K_p(z) ds(z) \quad (5.6)$$

As eficiências da troca térmica são determinadas pelas séries de potências (3.1) - (3.2) escritas desta forma:

$$\xi(N_r) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k! \psi(0)} \left(\frac{\partial^k \psi}{\partial N_r^k} \right)_0 N_r^k + 1 \quad (3.1)$$

$$\eta(N_r) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k! \phi(0)} \left(\frac{\partial^k \phi}{\partial N_r^k} \right)_0 N_r^k + 1 \quad (3.2)$$

Por outro lado, a distribuição de temperatura, de posse dos valores de $\left(\frac{\partial^p T_{11}}{\partial N_r^p} \right)_0$, é determinada pela série de potências (3.15):

$$T_{11}(z, N_r) = T_{11}(z, 0) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \frac{\partial^k T_{11}(z, 0)}{\partial N_r^k} N_r^k$$

Finalmente, um terceiro programa utilizando o método de diferenças finitas foi escrito (Ver Apêndice C), no sentido de comparar os resultados com os do método de equações integrais e confrontar os tempos de processamento. Todos os programas foram processados no computador IBM 4341.

5.2 - Discussão dos Resultados

Convém aplicar-se um método a problemas que tenham sido resolvidos através de outros métodos, ou que exista para eles uma solução analítica, de modo que haja possibilidade de comparação dos resultados. Desta maneira, pode-se avaliar a eficiência do método e do esquema numérico de solução.

O problema dado pela geometria da figura 4 foi escolhido pelos motivos acima, e por representar casos práticos da transferência de calor por condução e radiação em engenharia.

No Apêndice B são formuladas a solução analítica desse problema, dada pela equação (B.7), e sua correspondente aproxima-

NÚM. DE RADIAÇÃO	SOL. ANALÍTICA NÃO-LINEAR	SÉRIE DE TAYLOR
1.0	0.38480235	0.38485276
2.0	0.37312863	0.37442970
3.0	0.36363944	0.37192888
4.0	0.35564434	0.38575332
5.0	0.34873382	0.42951109

Tabela 2 - Comparação entre o resultado analítico não-linear e o obtido por série de Taylor para a temperatura T_{11} , em função de N_r , com $T_{12} = 0.4$.

Nos gráficos das figuras 5 a 12 são comparados os resultados obtidos pelo esquema numérico linear com os do esquema não-linear para a eficiência da troca de calor por radiação ξ e a eficiência da troca líquida de calor por radiação η entre o cilindro e a placa. Nas figuras 5 a 8 a placa é finita (comprimento $2b$) enquanto que nas restantes a placa tem comprimento infinito. Nesses gráficos, a curva tracejada NL representa a eficiência calculada pela equação (2.12) ou (2.17), ξ ou η , respectivamente. As curvas contínuas representam a eficiência ξ ou η , determinada pela equação (3.1) ou (3.2).

O tamanho do intervalo de valores da variável independente (no caso, N_r) para o qual a série converge para um determinado número de termos denomina-se raio de convergência [23]. Esse conceito será utilizado na discussão dos gráficos das figuras 5 a 12.

Olhando-se para as figuras 5 e 6, verifica-se que, quando a temperatura da superfície interna do cilindro aumenta de 0.2 para 0.4, o raio de convergência de N_r diminui de 0.7 para 0.5, para a eficiência $\xi(N_r)$. O mesmo acontece quando se compara as figuras 7 e 8, para a eficiência $\eta(N_r)$. O mesmo raciocínio é válido para as figuras 9 a 12, onde é considerada uma placa de comprimento infinito.

ção por série de Taylor, dada pela equação (B.11). A tabela 1 mostra os resultados obtidos pelas duas soluções, para os valores do número de radiação especificados. Considera-se o raio adimensional do cilindro $a = 0.5$ e a temperatura da superfície interna $T_{12} = 0.2$.

NÚM. DE RADIAÇÃO	SOL. ANALÍTICA NÃO-LINEAR	SÉRIE DE TAYLOR
1.0	0.18914840	0.18914841
2.0	0.19787472	0.19787475
3.0	0.19687595	0.19687617
4.0	0.19591531	0.19591621
5.0	0.19498993	0.19499257
10.0	0.19081152	0.19445482

Tabela 1 - Comparação entre o resultado analítico não-linear e o obtido por série de Taylor para a temperatura T_{11} , em função de N_r , com $T_{12} = 0.2$.

Na tabela 1 observa-se que ocorre uma pequena diferença entre os valores da temperatura T_{11} obtidos pelo método analítico não-linear (solução da equação (B.11) por Newton-Taphson) e os calculados por expansão em série, à medida que aumenta o número de radiação, para $T_{12} = 0.2$.

Essa divergência cresce quando se resolve o mesmo problema para $T_{12} = 0.4$, como pode ser visto na Tabela 2.

A Tabela 3 mostra os resultados comparativos entre o método de diferenças finitas (conforme Apêndice C) e o método de equações integrais utilizando o esquema numérico linear, para $a=0.5$, $b=2.0$, $h=2.0$, $T_{12}=0.2$ e $N_r=0.5$. Analizando-se essa tabela, verifica-se que o erro máximo resultante da comparação dos valores da temperatura T_{11} obtida pelos dois métodos não ultrapassa 0.001 por cento.

N ^o	MÉTODO DE DIF. FINITAS	EQUAÇÕES INT. LINEARES
01	0.44655	0.44604
02	0.44332	0.44283
03	0.43695	0.43649
04	0.42763	0.42722
05	0.41565	0.41531
06	0.40152	0.40124
07	0.38572	0.38550
08	0.36876	0.36860
09	0.35114	0.35104
10	0.33339	0.33333
11	0.31598	0.31594
12	0.29933	0.29933
13	0.28381	0.28382
14	0.26965	0.26968
15	0.25703	0.25707
16	0.24604	0.24608
17	0.23668	0.23672
18	0.22891	0.22895
19	0.22263	0.22266
20	0.21770	0.21772
21	0.21392	0.21393
22	0.21100	0.21100
23	0.20870	0.20869
24	0.20690	0.20689
25	0.20548	0.20547
26	0.20436	0.20436
27	0.20349	0.20348
28	0.20283	0.20281
29	0.20233	0.20231
30	0.20198	0.20196
31	0.20175	0.20174
32	0.20164	0.20163

Tabela 3 - Comparação entre os resultados obtidos pelo esquema numérico linear e pelo método de diferenças finitas, para a temperatura superficial do cilindro trocando calor por radiação com uma placa de comprimento finito.

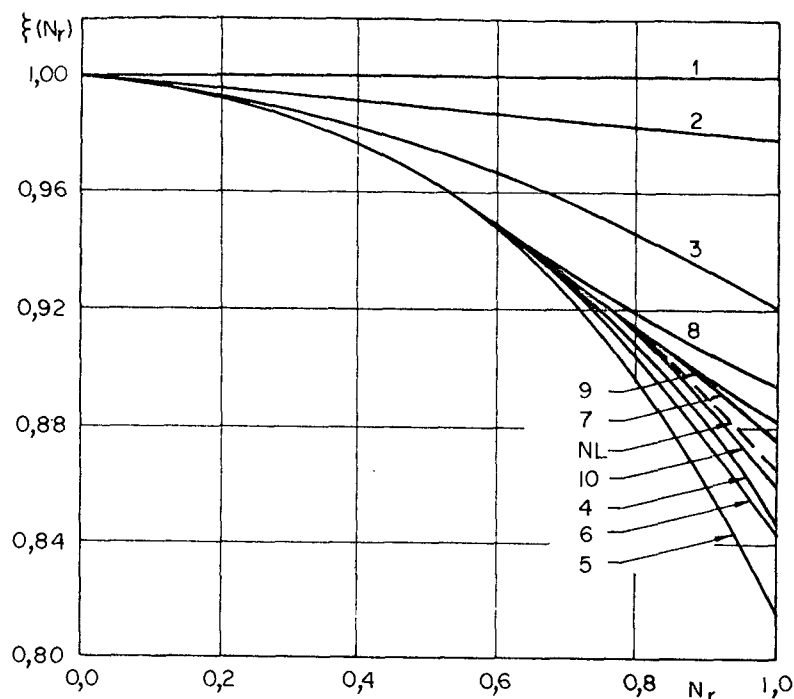


Fig. 5 - Eficiência da troca de calor por radiação para um cilindro em presença de uma placa de comprimento $2b$, em função de N_r , com $T_{12}=0.2$.

Os resultados apresentados nas tabelas 1 e 2 para o esquema linear, foram obtidos através da solução de uma série de Taylor com 5 termos. Os valores da temperatura da tabela 3 foram determinados com a utilização de 6 termos da série considerada.

Os gráficos das figuras 5 a 8 foram plotados para os seguintes parâmetros: $a=0.5$, $b=2.0$ e $h=2.0$; para as figuras 9 a 12, $a=0.5$.

Pela observação das tabelas 1 e 2, e das figuras 5 a 12, verificou-se que o raio de convergência decresce, à medida que aumenta a temperatura da superfície interna T_{12} . Ocorre, assim, uma divergência do esquema numérico linear quando comparado com o esquema de equações integrais não-lineares. Esse fato pode ser explicado pela análise das derivadas parciais da temperatura, dadas no Apêndice B. Essas derivadas, quando expressas em função da temperatura T_{12} e do raio interno adimensional a , apresentam-

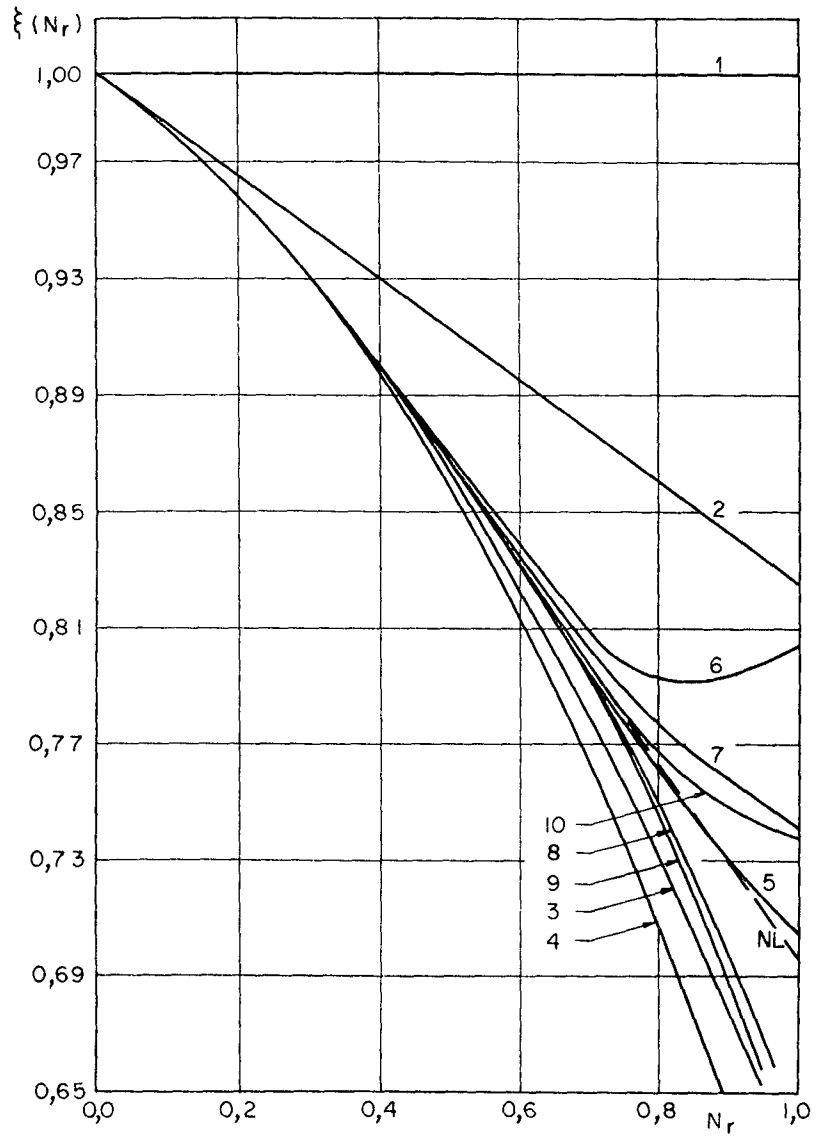


Fig. 6 - Eficiência da troca de calor por radiação para um cilindro em presença de uma placa de comprimento $2b$, em função de N_r , com $T_{12}=0.4$.

se na forma seguinte:

$$\left(\frac{\partial T_{11}}{\partial N_r}\right)_0 = (T_{12})^4 \ln a \quad (5.7)$$

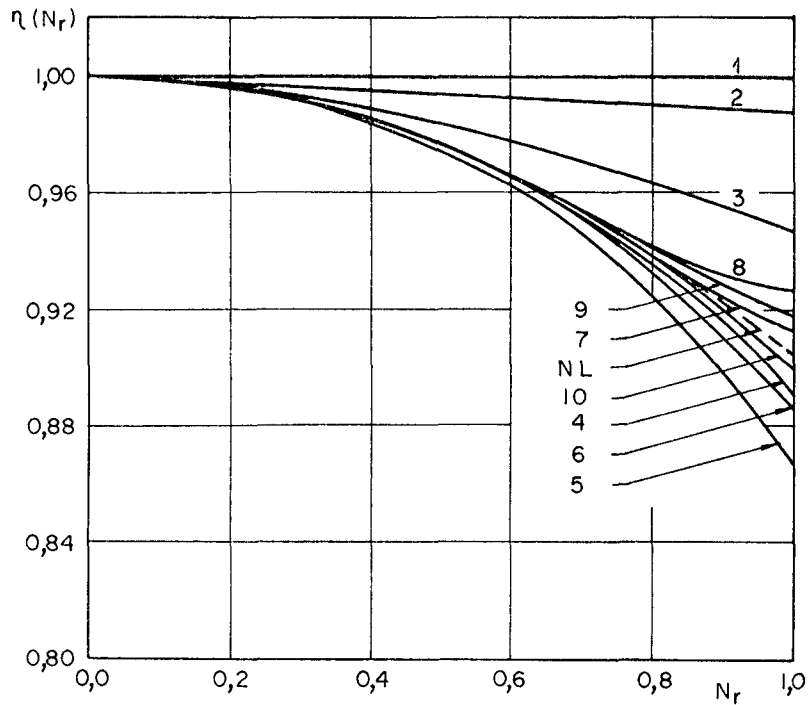


Fig. 7 - Eficiência da troca líquida de calor por radiação entre um cilindro e uma placa de comprimento $2b$, em função de N_r , para $T_{12}=0.2$.

$$\left(\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial N_r^2}\right)_0 = 8(T_{12})^7 (\ln a)^2 \quad (5.8)$$

$$\left(\frac{\partial^3 T_{11}}{\partial N_r^3}\right)_0 = 132 (T_{12})^{10} (\ln a)^3 \quad (5.9)$$

$$\left(\frac{\partial^4 T_{11}}{\partial N_r^4}\right)_0 = 1248 (T_{12})^{13} (\ln a)^4 \quad (5.10)$$

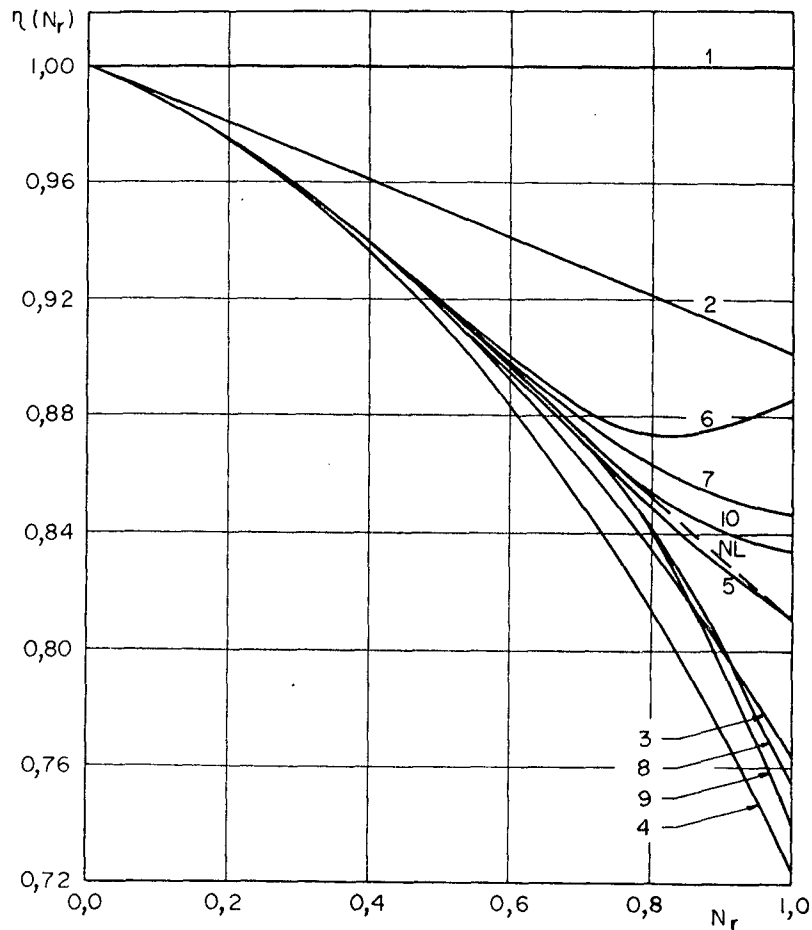


Fig. 8 - Eficiência da troca líquida de calor por radiação entre um cilindro e uma placa de comprimento $2b$, em função de N_r , para $T_{12}=0.4$.

$$\left(\frac{\partial^5 T_{11}}{\partial N_r^5}\right)_0 = 114360 (T_{12})^{16} (\ln a)^5 \quad (5.11)$$

e assim sucessivamente. Para o cálculo da temperatura da superfície externa do cilindro utilizou-se a equação (B.11) do Apêndice B. Como pode ser observado nas equações (5.7) - (5.11), à medida que aumenta a temperatura T_{12} (tendendo para o valor 1), ocorrerá uma divergência na equação (B.11). Esta divergência tornar-se-á mais acentuada se aumentar o número de radiação N_r . Por outro lado, à medida que diminui o raio interno a , a função $\ln a$ tende para um valor infinito (negativamente). Tal indeterminação, ao

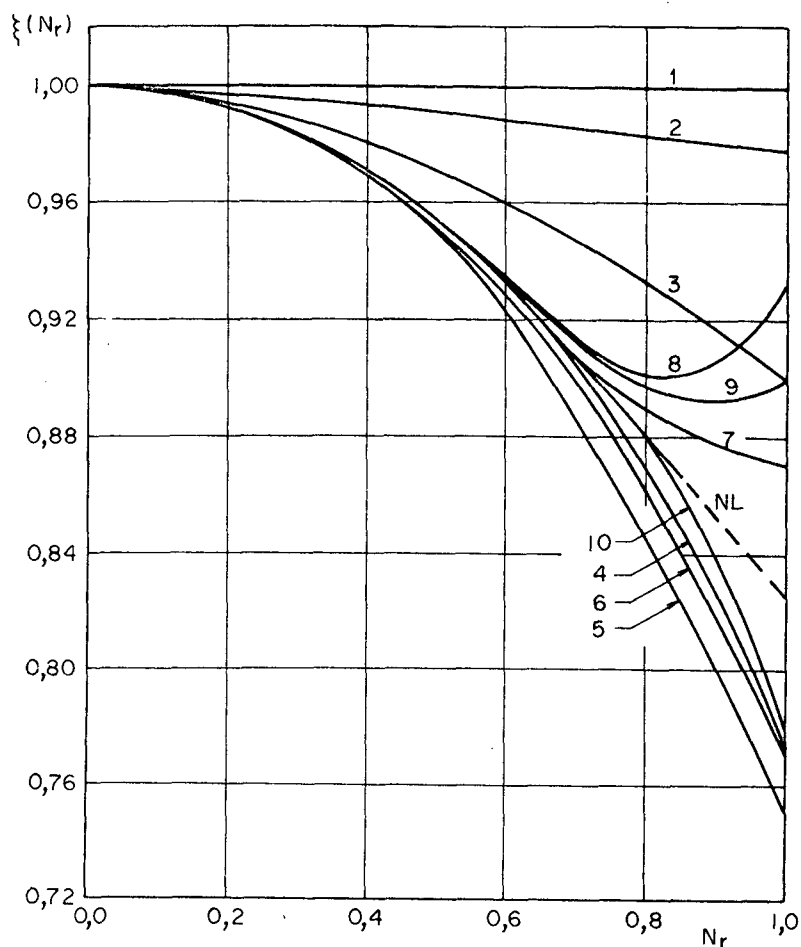


Fig. 9 - Eficiência da troca de calor por radiação para um cilindro em presença de uma placa de comprimento infinito, em função de N_r , para $T_{12}=0.2$.

que parece, provoca uma divergência no cálculo da temperatura T_{11} . Tal divergência também surgirá quando do cálculo das eficiências $\xi(N_r)$ e $\eta(N_r)$ pelas equações (3.1) e (3.2), respectivamente, visto que são funções de T_{11} . Em adição, quando T_{12} tende ao valor 1, a função $\phi(0)$, que aparece como denominador na equação (3.2), tende a zero, de acordo com a equação (3.18). Isto, em consequência, causa um erro na avaliação de $\eta(N_r)$.

Pelo que foi dito, o esquema numérico linear parece mais adequado para a solução de problemas de transferência de calor em cascas cilíndricas (grandes relações de raio a) constituí

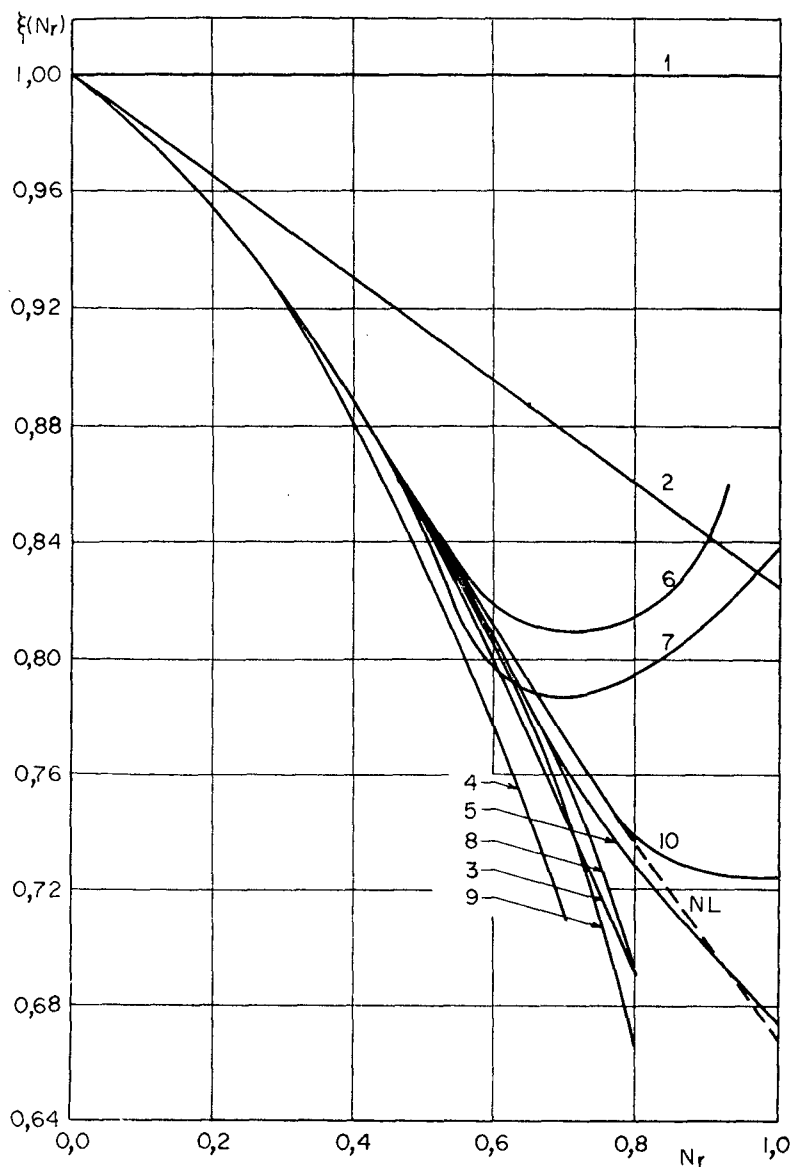


Fig. 10 - Eficiência da troca de calor por radiação para um cilindro em presença de uma placa de comprimento infinito, em função de N_r , para $T_{12}^* = 0.4$.

das de materiais cujo valor do número de radiação esteja em torno de 0.7.

Convém observar que, para a aproximação de Taylor da equação (B.7), as temperaturas T_{11}^* e T_{12}^* foram referidas à temperatura da placa T_0^* . Não é conveniente proceder-se tal adimensionalização pois está-se examinando a transferência de calor do cilindro sem a presença da placa. O mais adequado seria uma adimen

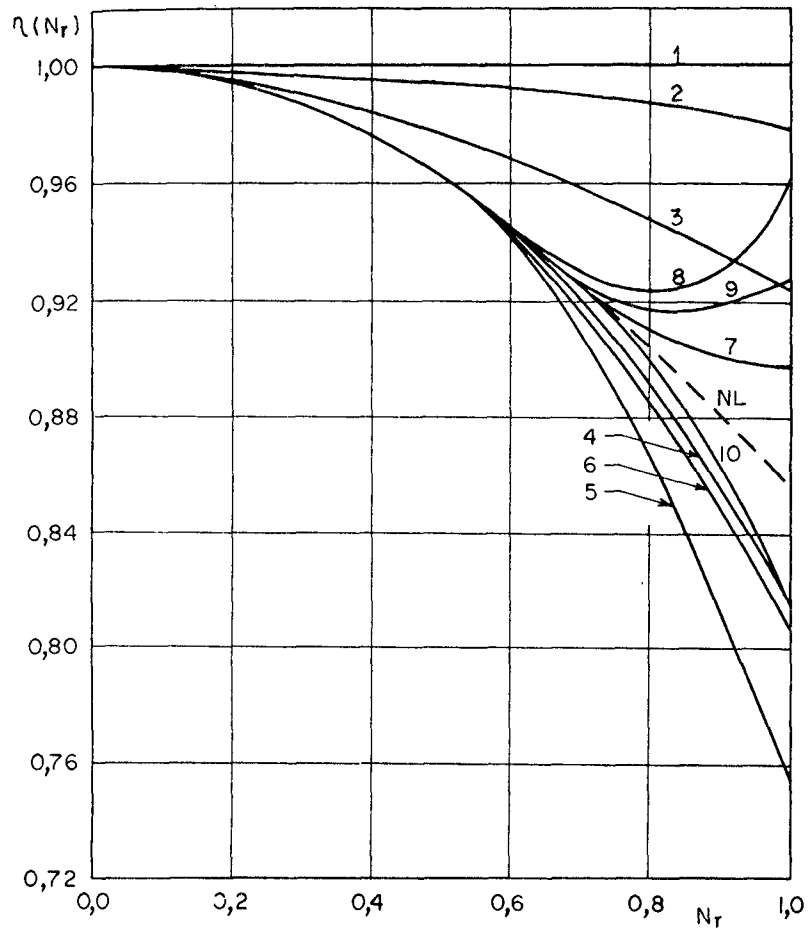


Fig. 11 - Eficiência da troca líquida de calor por radiação entre um cilindro e uma placa de comprimento infinito, em função de N_r , para $T_{12}^* = 0.2$.

sionalização dessas temperaturas em função de T_{12}^* .

Entretanto, para a justificativa da divergência dos resultados em função do aumento da temperatura da superfície interna do cilindro, analisou-se as derivadas parciais de T_{11} da equação (B.7) no caso em que a distância entre cilindro e placa

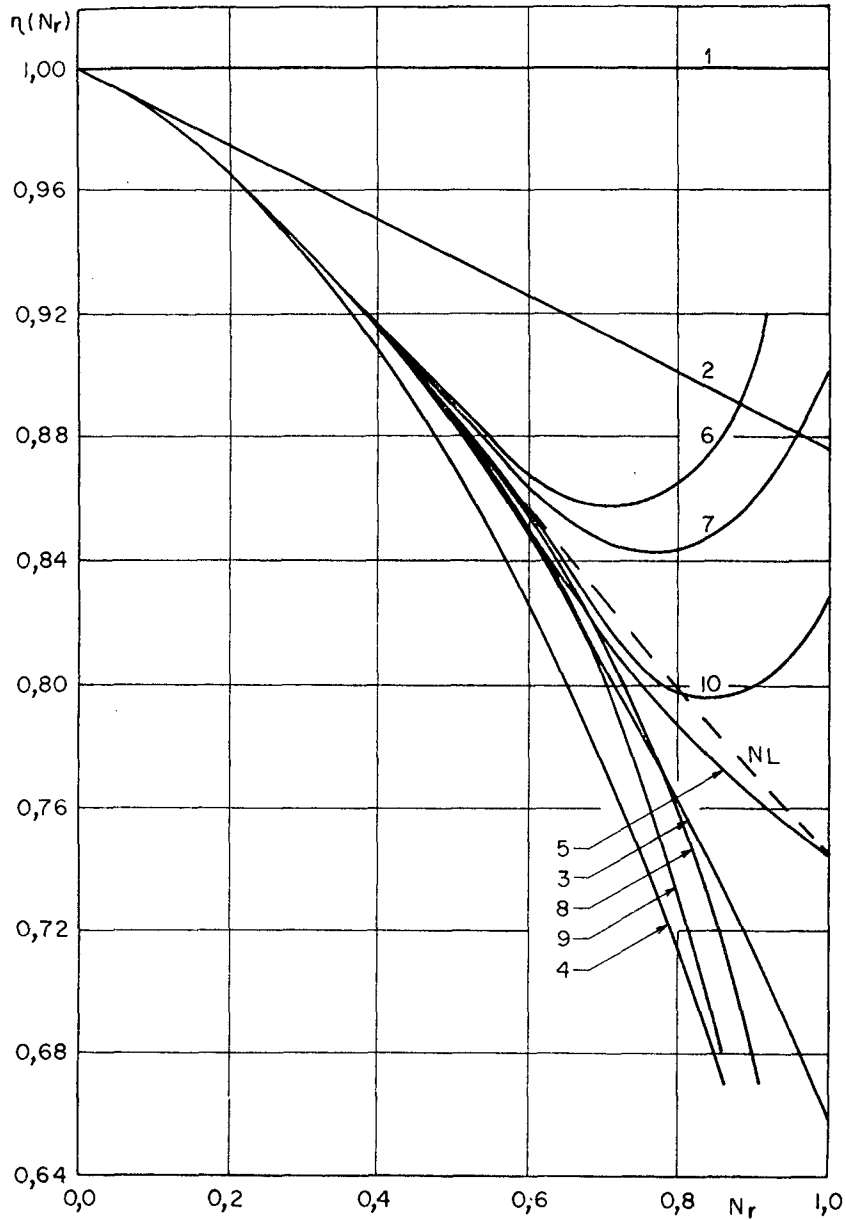


Fig. 12 - Eficiência da troca líquida de calor por radiação entre um cilindro e uma placa de comprimento infinito, em função de N_r , para $T_{12}^* = 0.4$.

tende ao infinito. Esta é a razão da escolha de T_0^* como temperatura de referência para o caso analítico.

6. CONCLUSÕES

Conforme foi observado nas figuras 5 a 12, a convergência do esquema numérico linear proposto, de modo geral, mostrou-se boa quando comparado com a solução obtida pelo uso da equação integral não-linear (4.17), para números de radiação próximos de 0.6. Pelo que foi visto nas equações (5.7) - (5.11), as derivadas parciais da temperatura da superfície externa dependem dos valores da temperatura da superfície interna e do raio interno adimensional do cilindro. Naquelas equações observou-se que, à medida que aumenta o raio interno, melhora a convergência do método. Isto significa que a espessura da parede influencia a convergência. Pelo que foi dito, o método parece ser mais eficiente para o cálculo da distribuição de temperatura de cascas. Por outro lado, quando são considerados materiais que correspondem a um número de radiação acima de 0.6, a aproximação por série de Taylor, ao que parece, não se mostrou adequada.

Todavia, na maioria das situações da transferência de calor por radiação e condução combinadas na engenharia, lida-se com materiais metálicos e refratários. Como o número de radiação para os metais e alguns refratários não ultrapassa o valor 0.6, pode-se afirmar que o método mostrou-se eficiente para a previsão teórica da eficiência da troca térmica por radiação e condução combinadas para esse tipo de materiais.

Na solução do problema proposto foram utilizadas 32 equações nodais aplicadas ao contorno externo do cilindro, tanto para o esquema numérico linear como para o esquema de equações integrais não lineares. As eficiências de troca térmica por radiação foram obtidas com 38 segundos de processamento no computador pelo presente método, e 40 segundos pelo esquema não linear, para cada número de radiação especificado. O mesmo problema foi resolvido pelo método de diferenças finitas para apenas um valor do número de radiação e consumiu, aproximadamente, 1.000 segundos. Esse tempo excessivo exigido por esse método foi devido à necessidade do cálculo da distribuição de temperatura no interior da secção transversal do cilindro para se obter a do contorno. Para isso foi ne-

cessária uma malha de 288 pontos nodais na região considerada. Entretanto, uma das maiores vantagens do esquema numérico linear sobre os demais métodos citados reside no fato de as equações integrais dependerem do número de radiação. Por esta razão, o tempo de processamento para o cálculo das eficiências pelo presente método tornou-se consideravelmente menor do que o tempo utilizado pelos outros métodos referidos, quando foi utilizada uma faixa razoável de valores de N_r . Para se ter uma idéia do que foi exposto, a obtenção das curvas das eficiências de troca térmica pelo esquema numérico linear consumiu apenas 48 segundos, enquanto que o esquema de equações integrais não-lineares obteve a solução em 120 segundos, para uma faixa de 10 valores do número de radiação. Não foi possível testar o método de diferenças finitas para essa faixa, visto que o tempo de processamento foi proibitivo. Convém observar, entretanto, que não se tentou melhorar esse tempo utilizando técnicas mais eficientes de solução para o método de diferenças finitas.

A solução do presente problema pelo método de equações integrais e pelo método de diferenças finitas serviu para ressaltar algumas vantagens do primeiro método sobre o último:

- O método de equações integrais utiliza um número de equações bem menor do que o método de diferenças finitas, como foi observado anteriormente. Isso deve-se ao fato de as equações integrais trabalharem sobre o contorno da região, sem a necessidade de informações sobre seu interior, graças às propriedades da função de Green. Por outro lado, o método de diferenças finitas, para determinação das temperaturas sobre o contorno da região em estudo, necessita da construção de uma malha de pontos nodais em todo o domínio (Veja Apêndice C).
- Como consequência, o tempo de processamento para a solução do problema pelo método de equações integrais foi sensivelmente menor do que pelo método de diferenças finitas.
- Uma vez construídas as equações integrais, as condições de contorno do problema físico podem ser alteradas e o núcleo de equações integrais permanece fixo. Além disso, não exis-

te grande diferença entre geometrias simplesmente conexas e geometrias multiplamente conexas (quando a equação integral desdobra-se em tantas equações integrais quantos forem os contornos). Portanto, o presente método parece mais adequado para a solução de problemas de geometria mais geral do que o método de diferenças finitas.

O método em questão pode ser estendido ao transiente do aquecimento ou resfriamento de peças por radiação. Nesse caso, deve-se construir uma função de Green causal, ficando adicionada ao problema a variável tempo. Em consequência, o tempo de processamento torna-se maior [11].

Outra aplicação do método de equações integrais lineares refere-se à solução de problemas da transferência de calor por radiação e condução combinadas em superfícies rugosas, onde se requer um grande número de pontos para a determinação das distribuições de temperatura e de fluxo de calor. Pode-se fazer, assim, uma análise mais acurada do efeito da cavidade sobre a transferência de calor por radiação nessas superfícies. O método de equações integrais lineares parece ser eficiente para esse tipo de problemas, visto que o tempo de processamento fica reduzido sensivelmente de vido à linearização.

O método de equações integrais é também adequado para a solução de problemas de transferência de calor em corpos cinzentos, embora o presente método tenha se restringido ao cálculo da troca térmica em corpos negros. A solução do problema da transferência de calor por radiação e condução combinadas em corpos cinzentos com emissividade dependente da temperatura, incluindo a radiação mútua, pelo método de equações integrais, pode ser encontrada em [24]. Nesse trabalho, testou-se o método no cálculo das eficiências de troca térmica por radiação em uma bancada de tubos em presença de uma placa isotérmica. Verificou-se que a emissividade da superfície dos tubos influencia fortemente as eficiências da troca térmica por radiação.

BIBLIOGRAFIA

- [1] JASWON, M.A., "Integral Equation Methods in Potential Theory-I", Proc. Roy. Soc., Vol. 275 A, pp. 23-32, 1963.
- [2] SYMM, G.T., "Integral Equation Methods in Potential Theory -II", Proc. Roy. Soc., Vol. 275A, pp. 33-46, 1963.
- [3] SPARROW, E.M.; HAJI-SHEIKH, A; LUNDGREN, T.S., "The inverse Problem in Transsient Heat Conduction", J. Apl. Mechanics, Vol. 31, pp. 369-75, 1964.
- [4] TOLUBINSKIY, E.V., "An Integral Method of Solution of the General Heat and Mass Transfer Problem", Int. J. Heat & Mass Transfer, Vol. 9, pp. 1571-88, 1966.
- [5] CROSBIE, A.L.; VISKANTA, R., "Transient Heating or Cooling of a Flat Plate by Combined Convection and Radiation", Int. J. Heat & Mass Transfer", Vol. 17, pp. 693-99, 1974.
- [6] CHANG, Y.P.; KANG, C.S.; CHEN, D.J., "The Use of the Fundamental Green's Functions for the Solution of Problems of Heat Transfer in Anisotropic Media", Int. J. Heat & Mass Transfer, Vol. 16, pp. 1905-18, 1973.
- [7] SHAW, R.P., "An Integral Equation Approach to Diffusion", Int. J. Heat & Mass Transfer, Vol. 17, pp. 693-99, 1974.
- [8] CHANG, Y.P., "Analitical Solution for Heat Conduction in Anisotropic Media in Infinite, Semi-infinite, and Two-Plane-Bounded Regions", Int. J. Heat & Mass Transfer, pp. 1019-28, 1977.
- [9] CHANG, Y.P.; TSOU, R.C.H., "Heat Conduction in an Anisotropic Medium Homogeneous in Cylindrical Regions-Unsteady State", J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", Vol. 99, pp. 41-46, 1977.
- [10] CHANG, Y.P.; TSOU, R.C.H., "Heat Conduction in an Anisotropic Medium Homogeneous in Cylindrical Regions-Steady State", J. Heat Transfer, Trans. ASME "C", Vol. 99, pp. 132-34, 1977.

- [11] GONZÁLEZ, M.L., "Aplicação de Equações Integrais à Condução do Calor Transiente com Radiação e Convecção Combinadas", Dissertação de Mestrado, CTC-UFSC, 1978.
- [12] ABREU, R.C., "Aplicação de Equações Integrais à Transferência de Calor por Radiação, Condução e Convecção Combinadas Entre Sólidos de Geometria Arbitrária", Dissertação de Mestrado, CTC-UFSC, 1979.
- [13] COLLE, S., "Perda de Carga no Escoamento Laminar em Dutos de Secção Transversal de Geometria Multiplamente Conexa", Anais do COBEM /79, Vol. A, pp.350-59, 1979.
- [14] PRATA, A.T., "Aplicação do Método de Equações Integrais ao Problema de Transferência de Calor em Regime Laminar com Condução e Convecção Combinadas", Dissertação de Mestrado, CTC-UFSC, 1980.
- [15] COLLE, S., "Fórmula de Green de Fronteira Modificada para a Solução Integral do Problema de Neumann e Aplicações à Engenharia", Rev. Bras. Ciências Mec., Vol. 2, Nº 2, pp. 85-93, 1980.
- [16] COLLE, S.; ABREU, R.C.; HALAL, M.B., "An Integral Equation Approach to Radiative Heat Transfer Between Heat Conducting Solids of Arbitrary Shape", 20th Joint ASME/AIChE National Heat Transfer Conference, ASME-paper nº 81-HT-73, Milwaukee, Wisconsin, 1981.
- [17] JASWON, M.A.; SYMM, G.T., "Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics", Academic Press, London, 1977.
- [18] KELLOGG, O.D., "Foundations of Potential Theory", Dover, New York, 1953.
- [19] STAKGOLD, I., "Boundary Value Problems of Mathematical Physics", Vol. 2, McMillan, New York, 1971.
- [20] SIEGEL, R.; HOWELL, J.R., "Thermal Radiation Heat Transfer", McGraw-Hill Kogakusha, Tokio, 1972.
- [21] SPARROW, E.M.; CESS, R.D., "Radiation Heat Transfer", McGraw-Hill, New York, 1979.
- [22] ÖZISIK, M.N., "Radiative Transfer and Interactions with

Conduction and Convection", John Wiley & Sons, New York, 1973.

- [23] KAPLAN, W., "Advanced Calculus", Addison Wesley, Massachusetts, 1971.
- [24] COLLE, S.; HALAL, M.B., "Radiative Heat Transfer of Heat Conducting Gray Bodies with Thermal Dependent Emissivity", (a ser publicado).
- [25] SOBOLEV, S.L., "Partial Differential Equations of Mathematical Physics", Pergamon Press, London, 1964.
- [26] STAKGOLD, I., "Boundary Value Problems of Mathematical Physics", Vol. 1, McMillan, New York, 1971.
- [27] SNEDDON, I.N., "Elements of Partial Differential Equations", McGraw-Hill Kogakusha, Tokio, 1957.
- [28] ÖZISIK, M.N., "Boundary Value Problems of Heat Conduction", International Textbook Co., Pennsylvania, 1968.
- [29] DUSINBERRE, G.M., "Heat Transfer Calculations by Finite Differences", International Textbook Co., New York, 1961.
- [30] CARNAHAM, B.; LUTHER, H.A.; WILKES, J.O., "Applied Numerical Methods", John Wiley & Sons, New York, 1969.

APÊNDICE A

PROBLEMAS A VALORES DE CONTORNO E O MÉTODO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS

A.1 - Problemas a Valores de Contorno

Seja D uma região bidimensional de Lyapunov [25], i.é., uma região do plano cujos contornos ∂D possuem um vetor normal em cada ponto, mas que não têm necessariamente curvatura em todos os pontos. Três tipos de problemas básicos ocorrem freqüentemente na Engenharia:

$$(i) \quad -\nabla^2 T = f(z); \quad z \text{ em } D; \quad z = (x, y) \quad (A.1)$$

$$T|_{\partial D} = T_s(z); \quad z \text{ em } \partial D \quad (A.2)$$

onde f é uma função seccionalmente contínua em D , T_s é uma função prescrita sobre o contorno ∂D que pode ser seccionalmente contínua. Este é o problema de Dirichlet sua solução existe e é única:

$$(ii) \quad -\nabla^2 T = f(z); \quad z \text{ em } D \quad (A.3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\partial D} = T_n(z); \quad z \text{ em } \partial D \quad (A.4)$$

onde $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada normal, n é o vetor normal exterior a D e T_n é $\frac{\partial T}{\partial n}$ seccionalmente contínua em ∂D , com a condição de consistência

$$\int_{\partial D} T_n(z) d_A = \int_D f(z) dz, \quad (A.5)$$

onde A é a área de ∂D . Este é o problema de Neumann e tem solução única a menos de uma constante arbitrária.

$$(iii) \quad -\nabla^2 T = f(z); \quad z \text{ em } D \quad (A.6)$$

$$T|_{\partial D_i} = T_{si} (z) \quad (A.7)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\partial D_j} = T_{nj} (z) \quad (A.8)$$

$$i \neq j, \quad \partial D = \sum_{i=1}^N \partial D_i$$

onde ∂D é composta por N superfícies disjuntas duas a duas, conforme figura A.1, T_{nj} seccionalmente contínua em ∂D_j e T_{si} seccionalmente contínua em ∂D_i . Este é o problema de Caráter Misto, cuja solução existe e é única.

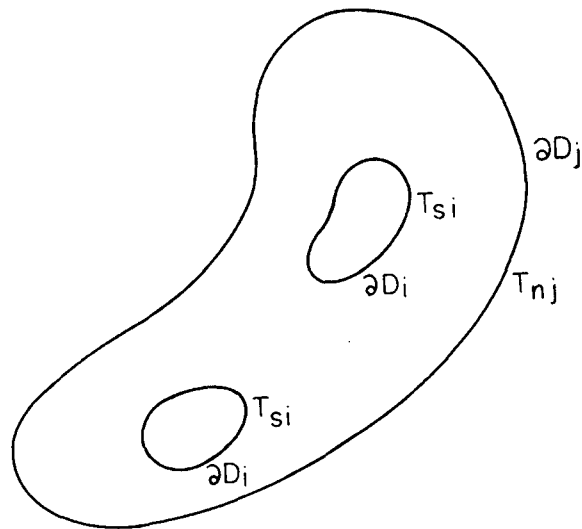


Fig. A.1

A.2 - A Função de Green

A.2.1 - Função de Green Associada ao Operador Laplaceano

Seja $G(z, z')$ a função de Green fundamental associada aos problemas a valores de contorno (i) - (iii); esta deve ser tal que

$$-\nabla^2 G(z, z') = \delta(z - z'), \quad \text{em } D; \quad (A.9)$$

onde δ é a distribuição singular de Dirac definida pelas condições [26]

$$\delta(z-z') = 0, \text{ para } z \neq z' \text{ em } D, \text{ e} \quad (\text{A.10})$$

$$\int_D \delta(z-z') f(z) dz = f(z') \quad (\text{A.11})$$

A.2.2 - Propriedades da Função de Green

Aqui são apresentadas algumas propriedades da função de Green que são utilizadas para isolar polos, ou seja, determinar as singularidades que surgem quando z' tende a z . Seja ϵ o raio de um pequeno círculo, envolvendo o ponto z na região D da figura A. 2, e seja ∂D_ϵ o contorno deste círculo, com $z' \in \partial D_\epsilon$:

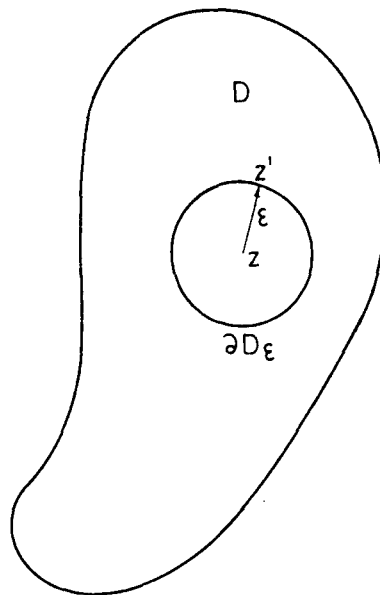


Fig. A.2

Pode-se mostrar que [19] e [25]:

$$(i) \quad G(z, z') \text{ é positiva para todo } z' \text{ em } D \quad (\text{A.12})$$

$$(ii) \quad G(z, z') = G(z', z), \text{ ou seja, } \bar{e} \text{ simétrica} \quad (A.13)$$

$$(iii) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} G(z, z') ds(z') = 0 \quad z' \text{ em } \partial D_\epsilon \quad (A.14)$$

$$(iv) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial n}(z, z') ds(z') = -1; \quad z' \text{ em } \partial D_\epsilon \quad (A.15)$$

Se o polo surge quando z está sobre a fronteira ∂D , este pode ser isolado traçando-se um pequeno semi-círculo de raio ϵ e centro em z , conforme figura A.3.

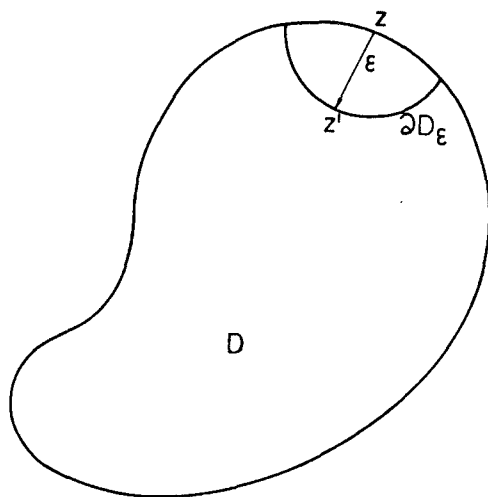


Fig. A.3

Pode-se mostrar que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\epsilon} \frac{\partial}{\partial n} G(z, z') ds(z') = -\frac{1}{2} \quad (A.16)$$

A solução fundamental do operador Laplaceano, também chamada função de Green fundamental, para o problema bidimensional é dada pela expressão:

$$G(z, z') = -\frac{1}{2\pi} \ln |z - z'| \quad (A.17)$$

onde $z = (x, y)$ e $|z - z'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}$. A derivada normal da função de Green Fundamental pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\frac{\partial}{\partial n} G(z, z') = \nabla G(z, z') \cdot n$$

onde n é a normal à superfície ∂D no ponto z' . Como

$$\nabla G = \frac{\partial G}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial G}{\partial y} \underline{j} \quad \text{e} \quad |z - z'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}$$

Pode-se tirar, de A.16

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \frac{(x - x')}{|z - z'|^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \frac{(y - y')}{|z - z'|^2}$$

logo,

$$\frac{\partial G}{\partial n}(z, z') = \frac{1}{2\pi} \frac{(z - z') \cdot n}{|z - z'|^2} \tag{A.18}$$

É fácil verificar que a função de Green dada pela expressão (A.16) satisfaz a equação (A.9) e as propriedades (A.12) - (A.15), e a sua derivada normal satisfaz a propriedade (A.16).

Para uma análise mais completa do que foi exposto neste apêndice sugere-se consultar as referências [19], [25], [27].

A.3 - O Método das Equações Integrais

O método de solução por equações integrais consiste em transformar as equações diferenciais parciais em equações integrais. Para a obtenção explícita das soluções desses problemas, é necessário o uso de certos teoremas, funções e propriedades.

Teorema da Divergência

$$\int_D \nabla \cdot \underline{F} \, dA = \int_{\partial D} \underline{F} \cdot \underline{n} \, ds \quad (\text{A.19})$$

onde D é uma região normal do R^n [18], F é um campo vetorial continuamente diferenciável, \underline{n} é o vetor unitário normal a ∂D , dA é o elemento de área e ds é o elemento de arco.

Segundo Teorema de Green

$$\int_D (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) \, dA = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, ds \quad (\text{A.20})$$

onde u e v têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas em D ; $\frac{\partial u}{\partial n}$ e $\frac{\partial v}{\partial n}$ são suas derivadas normais.

A função de Green fundamental, associada ao operador de Laplace, é a solução da seguinte equação diferencial parcial, definida na seção A.2.1:

$$-\nabla^2 G(z, z') = \delta(z, z') \quad (\text{A.9})$$

A função de Green fundamental pode ser interpretada fisicamente como sendo uma fonte única e unitária, situada no ponto z' , e gerando um potencial Newtoniano no ponto z .

O problema a valores de contorno formulado no capítulo 2, e definido pelas equações

$$\nabla^2 T(z) = 0; \quad z \text{ em } D \quad (\text{2.1})$$

$$T|_{\partial D_{12}} = T_{12}(z); \quad z \text{ em } \partial D_{12} \quad (\text{2.2})$$

$$\frac{\partial T}{\partial n}|_{\partial D_{11}} = q_{11}(z); \quad z \text{ em } \partial D_{11} \quad (\text{2.3})$$

será reduzido a um conjunto de equações integrais. Para a obtenção das equações integrais, procede-se da seguinte maneira. Multiplica-se a equação (2.1) por G , a equação (A.9) por u e soma-se, resultando

$$G(z, z') \nabla^2 u(z) - u(z) \nabla^2 G(z, z') = u(z) \delta(z - z') \quad (\text{A.21})$$

Integrando-se a equação (A.21) ao longo da região D e aplicando-se a segundo Teorema de Green (A.19),

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} [G(z, z') \frac{\partial T(z)}{\partial n} - T(z) \frac{\partial}{\partial n} G(z, z')] ds &= \\ &= \int_D T(z) \delta(z - z') dA \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Aplicando-se a propriedade (A.11) da distribuição Delta de Dirac, à equação (A.22), tem-se a seguinte:

$$T(z') = \int_{\partial D} [G(z, z') \frac{\partial T(z)}{\partial n} - T(z) \frac{\partial G(z, z')}{\partial n}] ds(z) \quad \dots (\text{A.23})$$

Utilizando-se da simetria da função $G(z, z')$ e trocando-se z por z' ,

$$T(z) = \int_{\partial D} [G(z, z') \frac{\partial T(z')}{\partial n} - T(z') \frac{\partial G(z, z')}{\partial n}] ds(z') \quad \dots (\text{A.24})$$

com z em D

Substituindo-se a solução fundamental do operador Laplaceano e sua derivada normal, e atentando para a singularidade quando $z=z'$ (propriedade A.15) tem-se

$$T(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left[\ln |z-z'| \frac{\partial T(z')}{\partial n} - \frac{(z-z') \cdot n}{|z-z'|^2} T(z') \right] ds(z') \quad \dots (A.25)$$

De acordo com a equação (A.25) observa-se que, tendo-se as propriedades T e $\frac{\partial T}{\partial n}$ no contorno, pode-se determinar a função T na região. Esse tipo de problema é chamado de problema direto.

Para um ponto z sobre o contorno ∂D , aplicando o segundo Teorema de Green na região $D - B(z, \epsilon)$, onde $B(z, \epsilon)$ é um semi-círculo com normal interior n (veja figura A.4), e utilizando o mesmo procedimento que levou à solução (A.25) resulta

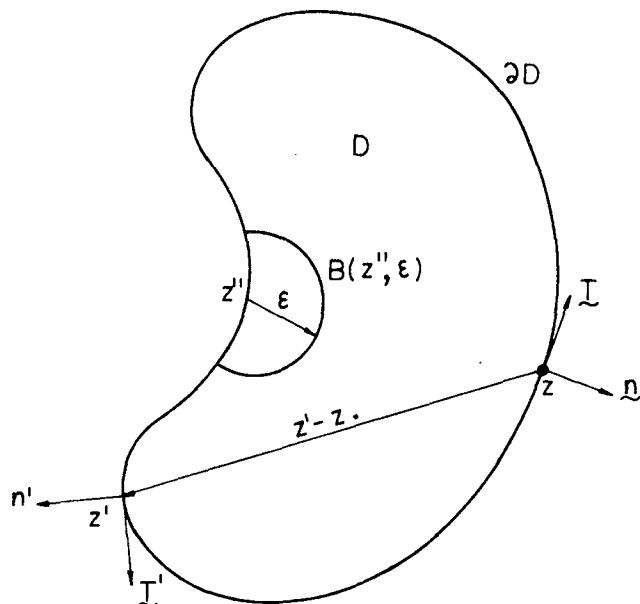


Fig. A.4

$$\int_{\partial D} \ln |z-z'| \frac{\partial T(z')}{\partial n} ds(z') + \pi T(z) - \int_{\partial D} \frac{(z'-z) \cdot n'}{|z-z'|^2} T(z') ds(z') = 0 \quad \dots (A.26)$$

z e z' em ∂D

De acordo com a definição de produto escalar, e com a figura A.6,

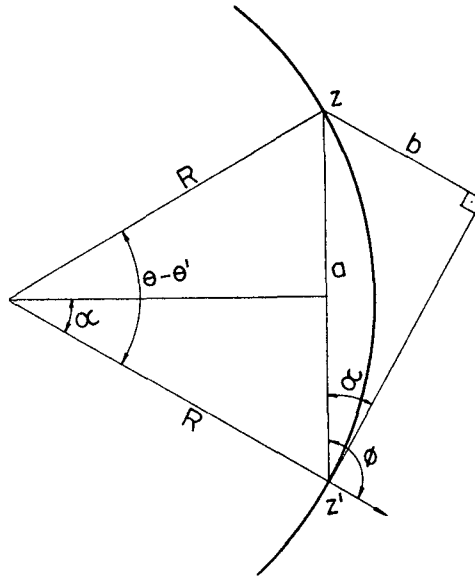


Fig. A.6

$$\begin{aligned} (z-z').n' &= |z-z'| |n'| \cos (z-z', n') \\ &= a \cos \phi, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a} = \frac{a}{2R} \quad (\text{A.29})$$

$$\text{e } \cos \phi = - \text{sen } \alpha = - \frac{b}{a} \quad (\text{A.30})$$

De (A.28), (A.29) e (A.30) tira-se a seguinte relação:

$$(z-z').n' = - \frac{a^2}{2R} \quad (\text{A.31})$$

Da derivada normal da função de Green fundamental

$$\frac{\partial G}{\partial n'} (z, z') = \frac{1}{2\pi} \frac{(z-z').n'}{|z-z'|^2}$$

pode-se concluir que

As equações (A.25) e (A.26), juntamente com as condições de contorno (2.2) e (2.3), são suficientes para determinar a solução do problema a valores de contorno (2.1) - (2.3).

A.4 - Tratamento das Singularidades

Na integração da função de Green fundamental, definida na seção A.2 pela equação (A.17), sobre um certo contorno, surgirão singularidades quando z' tender a z . Estas singularidades dedem ser contornadas para que a integral possa ser obtida.

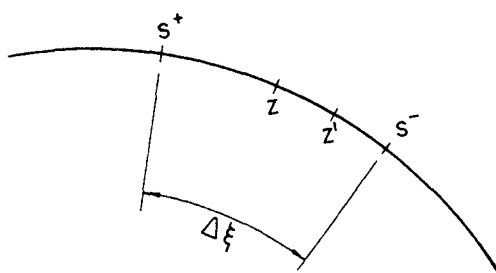


Fig. A.5

Quando z' tende a z , é definido um arco finito tal que $|z-z'| = s$ (veja figura A.5). Desta maneira, integra-se $G(z, z')$ na vizinhança do polo:

$$\int_{s^-}^{s^+} -\frac{1}{2\pi} \ln |z-z'| ds(z') = -\frac{1}{2\pi} \int_{s^-}^{s^+} \ln s ds = -\frac{\Delta\xi}{\pi} (\ln \Delta\xi - 1) \dots (A.27)$$

Também surgirão singularidades quando for feita a integração da derivada da função de Green fundamental, equação (A.18), sobre um certo contorno, para z tendendo a z' . Da figura A.6 pode-se escrever

$$\alpha = (\theta - \theta')/2$$

$$a = |z-z'|$$

$$\lim_{\partial n'} \frac{\partial G(z, z')}{\partial n'} = - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2R} = \frac{1}{4\pi} K(z') \quad (\text{A.28})$$

onde $K(z')$ é a curvatura do contorno no ponto z' .

APÊNDICE B

SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O CILINDRO DE PAREDE ESPESSA E EXPANSÃO EM SÉRIE DE TAYLOR

B.1 - Solução Analítica

A solução analítica para o cilindro de parede espessa, de comprimento infinito e secção transversal D , mostrado na figura 4 do capítulo 5, pode ser prontamente obtida se forem feitas as considerações que esse não recebe calor por radiação e que o problema é simétrico.

Na secção D , a seguinte equação de Laplace é aplicada para a condução de calor:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (\text{B.1})$$

As condições de contorno para a radiação pura são:

$$T(z) \Big|_{\partial D_{12}} = T_{12} = \text{cte} \quad (\text{B.2})$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial \tilde{n}}(z) \Big|_{\partial D_{11}} = - N_r T_{11}(z)^4 \quad (\text{B.3})$$

Nessas condições, o calor fluirá igualmente na direção radial do cilindro, e a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas pode ser escrita como segue:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Como a temperatura T depende apenas da direção radial, a expressão (B.4) passa a ser

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (\text{B.5})$$

Assim, a temperatura pode ser facilmente obtida integrando-se (A.5) duas vezes com relação a r

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2, \quad (\text{B.6})$$

onde C_1 e C_2 são constantes a serem determinadas pela combinação das condições de contorno (B.2) e (B.3) com a equação (B.6). Isto feito, obtêm-se a equação

$$N_r \ln(r_i) T_{11}^4 - T_{11} + T_{12} = 0 \quad (\text{B.7})$$

A temperatura pode ser facilmente obtida resolvendo-se iterativamente a equação não-linear (B.7).

B.2 - Expansão em Série de Taylor

A solução de T_{11} na equação (B.7) também pode ser obtida pela expressão da temperatura numa série polinomial de McLaurin (Taylor para $N_r = 0$), em torno do número de radiação nulo. Para isso, basta diferenciar-se sucessivamente T_{11} na equação (A.7) em relação a N_r . Para $N_r = 0$, a equação (B.7) passa a ser

$$(T_{11})_0 = T_{12} \quad (\text{B.8})$$

A derivada de primeira ordem de T_{11} , por exemplo, será dada pela expressão

$$\left(\frac{\partial T_{11}}{\partial N_r}\right)_0 = (T_{11})_0^4 \ln(r_i) \quad (\text{B.9})$$

A derivada de ordem dois é expressa como

$$\left(\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial N_r^2}\right)_0 = 8 (T_{11})_0^3 \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial N_r}\right)_0 \ln(r_i) \quad (\text{B.10})$$

e assim sucessivamente, de acordo com a fórmula de recorrência de Leibnitz.

As equações (B.8), (B.9) e (B.10) mostram que as derivadas parciais da temperatura podem ser obtidas por recorrência, para posteriormente serem utilizadas na série de Taylor [23]

$$T_{11}(N_r) = T_{11}(0) + \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial N_r}\right)_0 N_r + \frac{\left(\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial N_r^2}\right)_0 N_r^2}{2!} + \dots + \frac{\left(\frac{\partial^p T_{11}}{\partial N_r^p}\right)_0 N_r^p}{p!} \quad (\text{B.11})$$

para cada número de radiação especificado.

APÊNDICE C

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO CILINDRO DE PAREDE ESPESSA

Um dos métodos numéricos de solução mais difundidos em aplicações práticas para o cálculo da distribuição de temperatura e do fluxo de calor em sólidos que possuem geometrias e condições de contorno complicadas é o método de diferenças finitas.

Nesse método, a equação diferencial parcial da condução de calor é aproximada por um conjunto de equações algébricas para a temperatura, aplicada a um número de pontos nodais ao longo da região. Portanto, o primeiro passo na análise é a representação por diferenças finitas, ou seja, a transformação da equação diferencial parcial em um conjunto de equações algébricas.

Seja a equação de Laplace, em coordenadas cilíndricas, adimensionalizada [27]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{C.1})$$

Sujeita às condições de contorno

$$T_{12}(r, \theta) = \text{cte} \quad (\text{C.2})$$

e

$$\frac{\partial T_{11}(r, \theta)}{\partial n} = - N_r [T_{11}(r, \theta)^4 - K(r, \theta, s)] \quad (\text{C.3})$$

Na solução exata da equação (C.1) pelo método analítico, a equação diferencial parcial é satisfeita em toda a região D. No método em estudo, conforme foi afirmado, a região é substituída por um conjunto de pontos nodais discretos, e várias derivadas são representadas por uma aproximação de diferenças finitas entre os pontos nodais, e a equação diferencial parcial é

transformada em um conjunto de equações algébricas para cada ponto nodal; portanto, a equação (C.1) é satisfeita apenas nos pontos nodais.

A secção transversal do cilindro de parede espessa da figura 4 é discretizada, pela construção de uma malha de pontos nodais na região D. Para economia de memória e tempo de processamento no computador, será aproveitada a simetria do problema, considerando-se apenas a metade do cilindro e da placa. A contagem dos pontos nodais para a direção radial é feita no sentido do crescimento do raio, e para a direção circunferencial, no sentido anti-horário, isto é, $i=1, NR$ e $j=1, N\theta$.

Fazendo-se um balanço térmico no ponto nodal do contorno externo do cilindro mais próximo da placa (figura C.1), tem-se

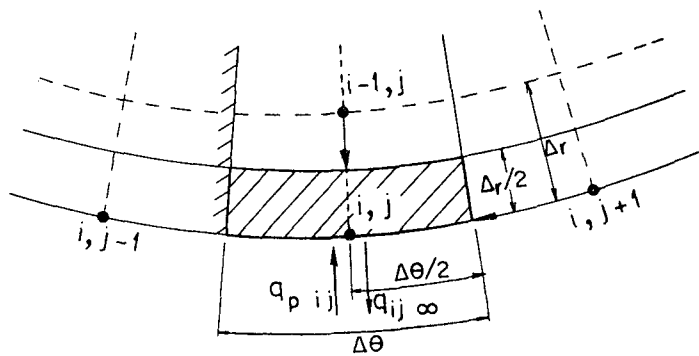


Fig. C.1

a seguinte equação:

$$q_{i,j-1 \rightarrow i,j} + q_{i,j+1 \rightarrow i,j} + q_{i-1,j \rightarrow i,j} + q_{\infty} + q_{pc} = 0 \quad (C.4)$$

onde $q_{i,j-1 \rightarrow i,j} = 0$ devido à simetria; q_{∞} é o fluxo de calor do ponto nodal (i,j) para o ambiente; q_{pc} é o fluxo de calor da placa para o ponto nodal do cilindro, e $q_{i,j \rightarrow k,l}$ é o fluxo de calor do nó i,j para o nó k,l . Substituindo-se os valores de q , adimensionalizando-se o resultado, e agrupando-se os termos semelhantes,

$$\left(\frac{\Delta\theta}{2} - \frac{\Delta r}{2\Delta\theta} - \frac{\Delta\theta}{\Delta r}\right)T_{i,j} + \frac{\Delta\theta}{\Delta r} \left(1 - \frac{\Delta r}{2}\right) T_{i-1,j} + \frac{\Delta r}{2\Delta\theta} T_{i,j+1} + N_r \Delta\theta (\alpha_{ij,p} - T_{i,j}^4) = 0 \quad (C.5)$$

para $i = N_r$, $j = 1$

onde $\Delta\theta$ é o segmento de arco entre dois pontos nodais, Δr é a distância radial entre dois pontos nodais consecutivos, e $\alpha_{ij,p}$ é o fator de forma geométrico entre um ponto nodal do cilindro e a superfície da placa. Na equação (C.5) e nas seguintes, os adimensionais são

$$r = \frac{r^*}{r_e^*}; \quad T = \frac{T^*}{T_0^*} \quad \text{e} \quad N_r = \frac{\sigma T_0^{*3} r_e^*}{k}$$

Para o nó do cilindro mais afastado da placa, figura C.2,

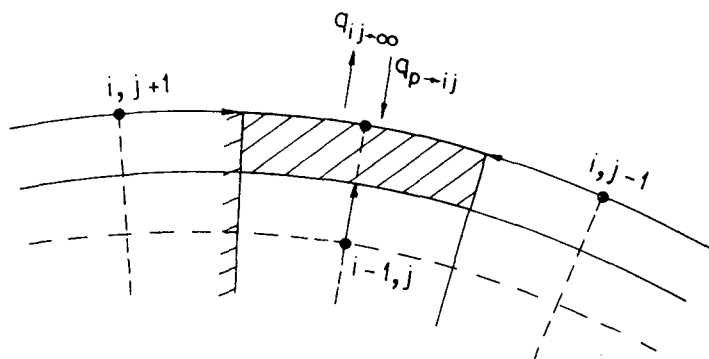


Fig. C.2

a seguinte equação é obtida:

$$\left(\frac{\Delta\theta}{2} - \frac{\Delta r}{2\Delta\theta} - \frac{\Delta\theta}{\Delta r}\right)T_{i,j} + \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta r} - \frac{\Delta\theta}{2}\right)T_{i-1,j} + \frac{\Delta r}{2\Delta\theta} T_{i,j-1} +$$

$$N_r \Delta\theta (\alpha_{ij,p} - T_{i,j}^4) = 0 \quad (\text{C.6})$$

para $i = NR, j = N\theta$

Para um não compreendido entre os pontos $(NR,1)$ e $(NR,N\theta)$, no contorno externo do cilindro, excetuando-se esses pontos, figura C.3,   válida a equao:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta\theta}{2} - \frac{\Delta\theta}{\Delta r} - \frac{\Delta r}{\Delta\theta} \right) T_{i,j} + \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta r} - \frac{\Delta\theta}{2} \right) T_{i-1,j} + \frac{\Delta r}{2\Delta\theta} T_{i,j-1} + \\ & + \frac{\Delta r}{2\Delta\theta} T_{i,j+1} + N_r \Delta\theta (\alpha_{ij,p} - T_{i,j}^4) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

com $i = NR, j = 2, N\theta-1$

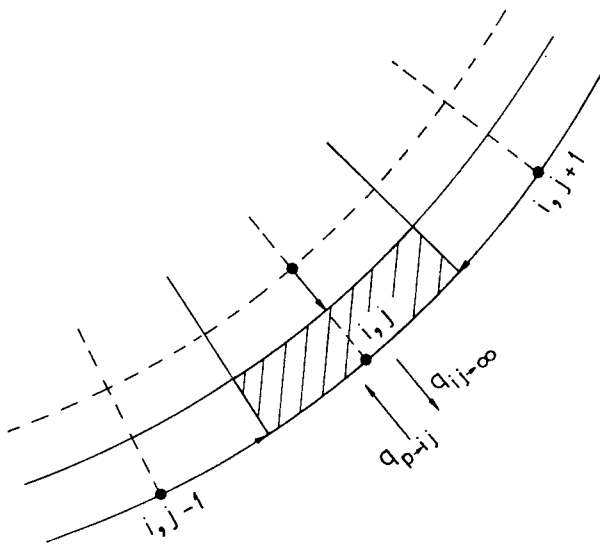


Fig. C.3

Do mesmo modo, para os pontos nodais internos representados pelas figuras C.4, C.5 e C.6, respectivamente, as seguintes equa-

ções aplicam-se:

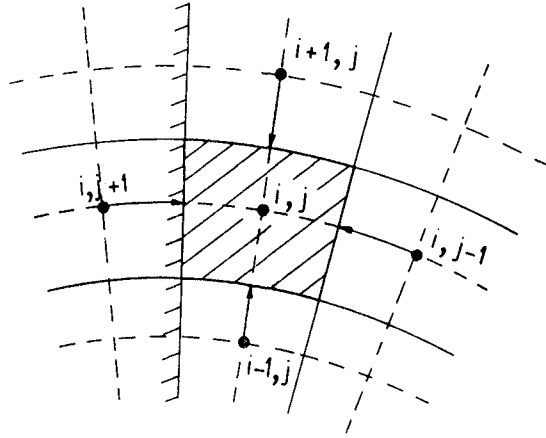


Fig. C.4

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\Delta r}{\Delta \theta (n \Delta r - 1)} + \frac{2 \Delta \theta}{n - \frac{1}{\Delta r}} \right) T_{i,j} + \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta r} - \frac{2n+1}{2} \Delta \theta \right) T_{i-1,j} + \\
 & + \frac{\Delta r}{\Delta \theta (1 - n \Delta r)} T_{i,j+1} + \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta r} - \frac{2n-1}{2} \Delta \theta \right) T_{i+1,j} + \\
 & + \frac{\Delta r}{\Delta \theta (1 - n \Delta r)} T_{i,j-1} = 0 \qquad (C.8)
 \end{aligned}$$

com $i = 2, NR-1, j = 1$ e $n = NR-i$

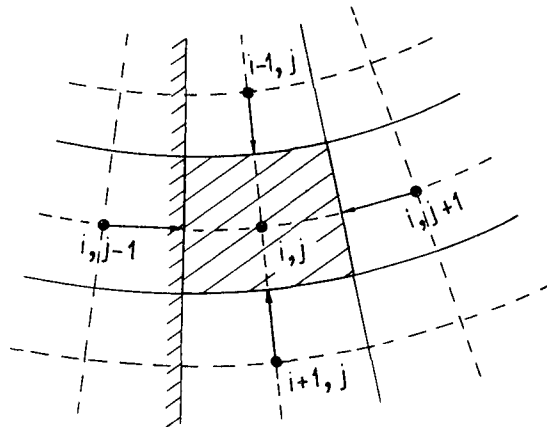


Fig. C.5

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\Delta r}{\Delta \theta (n \Delta r - 1)} + \frac{2 \Delta \theta}{n - 1} \right) T_{i,j} + \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta r} - \frac{2n+1}{2} \Delta \theta \right) T_{i-1,j} + \\
& + \frac{\Delta r}{\Delta \theta (1 - n \Delta r)} T_{i,j-1} + \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta r} - \frac{2n-1}{2} \Delta \theta \right) T_{i+1,j} = 0
\end{aligned} \tag{C.9}$$

com $i = 2, NR-1, j = N_0$ e $n = NR-i$

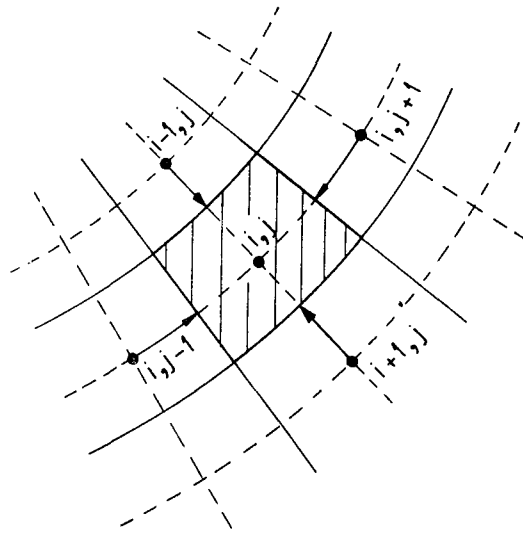


Fig. C.6

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{2 \Delta r}{\Delta \theta (n \Delta r - 1)} + \frac{2 \Delta \theta}{\Delta r} (n \Delta r - 1) \right] T_{i,j} + \frac{\Delta r}{\Delta \theta (1 - n \Delta r)} T_{i,j+1} + \\
& + \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta r} - \frac{2n-1}{2} \Delta \theta \right) T_{i+1,j} + \frac{\Delta r}{\Delta \theta (1 - n \Delta r)} T_{i,j-1} + \\
& + \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta r} - \frac{2n+1}{2} \Delta \theta \right) T_{i-1,j} = 0
\end{aligned} \tag{C.10}$$

com $i = 2, NR-1, j = 2, N_0-1$ e $n = NR-i$

Para a distribuição de temperatura na superfície externa do cilindro, as equações (C.5) - (C.10) são resolvidas pelo método de Newton-Raphson.

Um estudo mais detalhado da aplicação do método de diferenças finitas a problemas de transferência de calor pode ser encontrado em [29] e [30].