UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SOBRE A REPRESENTAÇÃO DE RAMOS PELAS PALAVRAS DE COMPLEXIDADE DOIS

OSVALDO MOMM

AGOSTO-1980

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

" **MESTRE EM CIÊNCIAS** "

especialmente em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

William G. Whitley

Prof. William Glenn Whitley, Ph.D.

Coordenador.

Banca Examinadora:

Donald Morison Silberger

Prof. Donald Morison Silberger, Ph.D.

Orientador

William G. Whitley

Prof. William Glenn Whitley, Ph.D.

I J Taneja

Prof. Dr. Inder Jeet Taneja

ABSTRACT

This dissertation presents new conditions under which the word $B^n A^m$ is point universal.

It also exhibits the first knowon exemple, B^6A^6, of such a word which does not represent every finite branch.

RESUMO

A presente dissertação apresenta novas condições para as quais a palavra $B^n A^m$ é universal ponto por ponto.

Também exibe o primeiro exemplo conhecido, B^6A^6, de palavra que não representa todo ramo finito.

INTRODUÇÃO

No estudo de equações nos semigrupos, é claramente útil identificar as "formas" expressas por "palavras" W ($L_1, L_2, \ldots, L_n$) no semigrupo livre Σ^* gerado pelas letras $L_1, L_2, \ldots, L_n$ para as quais a equação $y = W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tem solução $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in S^n$ para $y \in S$ qualquer. Tais W são ditas universais para S. Além disso, é interessante caracterizar para uma classe C arbitrária de semigrupos, as W que são universais para cada S de C, fato que indicaremos dizendo que são C-universais.

Este estudo teve sua origem por volta de 1964 com a pergunta de Jan Mycielski: quais palavras são universais para todo semigrupo simétrico X_X? A primeira resposta parcial foi publicada em 1966, por R. Isbell, em um artigo que deixa a impressão de que o problema de Mycielski pode ser difícil.

Trabalhos subsequentes sugerem que é conveniente caracterizar as W que "representam" funções em uma certa classe Y, no sentido que se $f \in Y$, então $f = W(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ tem solução $\langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle$ para funções g_i em um semigrupo convenientemente escolhido.

Certos tipos de elementos em Y, que são da forma

$$x_0 \mapsto x_1 \mapsto \ldots \mapsto x_k$$

são chamados "ramos". Em particular, r_k denota

$$0 \mapsto 1 \mapsto \ldots \mapsto k - 1,$$

e Prt (k) denota

$$\{ f: f \text{ é função e } \mathrm{Dom}\,(f) \cup \mathrm{Rng}\,(f) \subsetneqq \mathrm{Dom}(r_k) \cup \mathrm{Rng}(r_k) \}.$$

No capítulo III introduzimos o conceito de função "bem brotada" e mostramos que uma palavra "representa" todas estas funções se, e somente se, " representa " todos os " ramos ".

Como o conjunto das funções "bem brotadas" é grande e contém funções importantes, o estudo da "representação" dos "ramos" torna-se interessante.

No capítulo IV estudamos condições a serem impostas ao terno de inteiros positivos $\langle m,n,k \rangle$ para que a equação $r_k = g^n f^m$ tenha ou não solução g e f no monoide Prt(k).

Respondemos afirmativamente à pergunta aberta desde 1973: existe $\langle m,n,k \rangle$ tal que $r_k = g^n f^m$ não tem solução? Nosso exemplo é $\langle 6,6,3 \rangle$.

Também apresentamos uma demonstração de que $\langle m,n,k \rangle$ dá solução para $r_k = g^n f^m$ sempre que $\{m,n\} \cap \{1,2,3,4,5\} \neq \emptyset$.

Podemos esperar aplicações quase imediatas destes estudos na ciência da computação. De fato, esta ciência tem interesse em operações lógicas e aritméticas com dados, e essas operações são normalmente analizadas em uma sequência finita de operações básicas. O estudo que fizemos, procura estipular as formas de tais sequências para as quais é sempre possível expressar qualquer função. O estudo brevemente exposto acima, procura estipular as formas daquelas em que é sempre possível expressar qualquer função. Além disso é sabido que, quando tais decomposições são possíveis, então os termos f_i de uma tal sequência obtida, podem ser de um tipo bem simples, em que $f_i^2 [x] = f_i [x]$ para $x \in$ Dom (f_i).

Í N D I C E

CAPÍTULO I. GENERALIDADES

Colocamos neste capítulo notações, definições e algumas proposições demonstradas, que usaremos no presente trabalho.

1.1. NOTAÇÕES. Usaremos ω para denotar o conjunto $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Para cada $k \varepsilon \omega$, denominamos conjunto k ao conjunto $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Desta forma, para cada $k \varepsilon \omega$, temos que $\omega \smallsetminus k = \{k, k+1, \ldots\}$ e, para cada $\{m, n\} \subseteq \omega$, com $m<n$, a expressão $m \smallsetminus n$ denota o conjunto $\{m, m+1, \ldots, n-1\}$. Para qualquer conjunto C, a expressão $|C|$ indica o número de elementos de C. É claro que, para cada $k \varepsilon \omega$, temos $|k| = k$. Também $|\omega| = \aleph_0$. O símbolo $\mathbb{Z}$ denota $\omega \cup \{-n : n \varepsilon \omega\}$.

Sejam $x \varepsilon \mathbb{Z} \smallsetminus 1$ e $y \varepsilon \mathbb{Z}$. Usaremos $x|y$ para dizer que $y=kx$ para algum $k \varepsilon \mathbb{Z}$. Para negar a proposição $x|y$, usaremos $x \nmid y$. Em geral negamos expressões da forma xRy por $x \not R y$, onde R é uma relação.

Sejam $k \varepsilon \omega \smallsetminus 1$ e $x \varepsilon \mathbb{Z}$. Usaremos $[x]_k$ para indicar o único elemento $y \varepsilon k$ tal que $y \equiv x \bmod(k)$. Também usaremos $(x]_{k-1}$ para indicar o único elemento $y \varepsilon k \smallsetminus 1$ tal que $y \equiv x \bmod(k-1)$. Assim, por exemplo, $[13]_5 = 3 = (13]_5$. Já $[10]_5 = 0 \neq 5 = (10]_5$.

Seja X um conjunto arbitrário e seja $f \subseteq X x X$. Denominamos mundo de f, e anotamos por $\$f$, ao conjunto, $\$f = Dom(f) \cup Rng(f)$, onde $Dom(f) = \{x : <x, y> \varepsilon f$ para algum $y \varepsilon X\}$ e $Rng(f) = \{y: <x, y> \varepsilon f$ para algum $x \varepsilon X\}$.

Sendo $M \subseteq X$, a expressão $f|M$ indica o conjunto $(MxRng(f)) \cap f$. A expressão $f[M]$ denota o conjunto $Rng(f\restriction M)$.

Uma relação binária f é chamada função se e somente se $|f[\{x\}]| \leq 1$ para todo x. Quando f é função e $x \in Dom(f)$, então o único elemento do conjunto $f[\{x\}]$ é chamado imagem sob f de x, e é escrito nas formas $f(x)$, f_x, ou x^f. Usaremos $f(x) = \infty$ para indicar que $x \notin Dom(f)$. Para estipular uma função f, podemos escrever:

"Seja $f:X \longrightarrow Y$ tal que $f:x \longmapsto y$"

Isto deve significar: "Seja f uma função tal que $Dom(f) = X$, tal que $Rng(f) \subseteq Y$, e tal que $f(x) = Y_x$ para todo $x \in X$".

Com X um conjunto, a expressão $id\restriction X$ denota $\{<x,x>.x \in X\}$. Isto é, $id\restriction X:X \longrightarrow X$ e definida por $id\restriction X:x \longmapsto x$.

Usaremos $Prt(X)$ para denotar o conjunto $\{f:f$ é função e $\$f \subseteq X\}$. Chamamos aos elementos de $Prt(X)$ de transformações parciais de X. Se $f \in Prt(X)$ e $Dom(f)=X$, então dizemos que $f \in {}^XX$. Chamamos aos elementos de ${}^XX$ de transformações de X. Também chamamos as transformações bijetivas de X de permutações de X, e usaremos $Sym(X)$ para indicar o conjunto de todas as permutações de X.

Dadas duas relações binárias f e g, e não havendo confusão, usaremos gf para indicar $g \circ f$, onde $\circ$ é a operação composição: $g \circ f = \{<x, y>:<x, t> \in f$ e $<t, y> \in g$ para algum $t\}$.

Seja f uma relação binária e seja $\langle x, y\rangle \in f$. Diremos que a figura

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, mapsto] \\ y \end{tikzcd}$$

é o dígrafo de $\langle x, y\rangle$. Natulalmente que o dígrafo de f é a reunião de todos os dígrafos dos elementos de f. Assim, por exemplo, a figura a seguir é o dígrafo da relação binária $f = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 3, 0\rangle\}$:

$$3 \longleftrightarrow 0 \longmapsto 1 \longleftarrow\!\shortmid\ 2$$

O dígrafo de $\langle x, x\rangle$ é $\begin{tikzcd} x \arrow[loop above] \end{tikzcd}$.

Seja $k \in \omega \setminus 2$. Denominamos ramo de comprimento k-1, e representamos por r_k, à função $r_k = \{\langle i, i+1\rangle : i \in k-1\}$. Assim o dígrafo de r_k é

$$0 \longmapsto 1 \longmapsto 2 \ \ldots \ k-2 \longmapsto k-1$$

Seja $k \in \omega \setminus 1$. Denominamos ciclo de comprimento k, a toda função cujo dígrafo é da forma

$$\begin{tikzcd} & x_0 \arrow[dl, mapsto] & & x_{k-1} \arrow[ll, mapsto] \\ x_1 \arrow[dr, mapsto] & & & & x_3 \arrow[ul, dotted] \\ & & x_2 \arrow[urr, mapsto] & & \end{tikzcd}$$

É claro que, se $X = \{x_i : i \in k\}$ contém exatamente k elementos distintos, e se f é o ciclo acima, então $f^k = id \restriction X$. Evidentemente que, neste caso $f^q = id \restriction X$ sempre que $k | q$. Nós escrevemos f também na forma $(x_0\ x_1\ \ldots\ x_{k-1})$, mas cuidamos para evitar uma ambigüidade comum: a expressão $(x_0\ x_1\ \ldots\ x_{k-1})$ também pode denotar qualquer permutação

$g \in Sym(X)$ com $Y = \{X_i : i \in k\} \subseteq X$, tal que $g \restriction Y = f$ e tal que $g \restriction (X \setminus Y) = id \restriction (X \setminus Y)$. Os detalhes de um tratamento que evita esta ambigüidade encontra-se em [8, capítulo I].

Chamamos f de uma permutação cíclica de Y quando $f = (X_0\ X_1\ \ldots\ X_{k-1})$ com $Dom(f) = Y = \{X_i : i \in k\}$. Reservamos a expressão c_k para designar a permutação cíclica $(0\ 1\ \ldots\ k-1)$ em $Sym(k)$.

<u>1.2. LEMA</u>. Seja f uma transformação ou injetiva ou sobrejetiva de um conjunto X finito. Então $f \in Sym(X)$.

<u>Demonstração</u>. Seja f uma transformação injetiva de X finito. Basta mostrar que $Rng(f) = X$. É claro que $Rng(f) \subseteq X$. Por outro lado, como f é uma injeção, temos que $|Dom(f)| = |Rng(f)|$. Mas, como $Dom(f) = X$, temos que $|Rng(f)| = |X|$. Lembrando que X é finito, segue que $Rng(f) = X$.

Suponhamos agora que $Rng(f) = X$. Então, $|Dom(f)| = |X| = |Rng(f)|$. Mas, se existe $\{x, y\} \subseteq X$ tal que $x \neq y$ e tal que $f(x) = f(y)$, então $X = Rng(f \restriction (X \setminus \{y\}))$, enquanto $|Rng(f(X \setminus \{y\}))| \leq |X \setminus \{y\}| < |X|$, pois X é finito. Concluímos que f é injetiva. $\boxtimes$

<u>1.3. LEMA</u>. Sejam f e g relações binárias. Então

1. $Dom(gf) \subseteq Dom(f)$
2. $Rng(gf) \subseteq Rng(g)$

<u>Demonstração</u>. Seja $X \in Dom(gf)$. Então, existe um elemen-

to z tal que $<x, z> \varepsilon gf$. Logo existe um elemento y tal que $<x, y> \varepsilon f$ enquanto $<y, z> \varepsilon g$. Como $<x, y> \varepsilon f$, segue que $x \varepsilon \mathrm{Dom}(f)$. Portanto $\mathrm{Dom}(gf) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$.

Seja agora $t \varepsilon \mathrm{Rng}(gf)$. Então existe r tal que $<r, t> \varepsilon gf$. Logo $<r, s> \varepsilon f$ enquanto $<s, t> \varepsilon g$. Como $<s, t> \varepsilon g$, segue que $t \varepsilon \mathrm{Rng}(g)$. Portanto $\mathrm{Rng}(gf) \subseteq \mathrm{Rng}(g)$.

Seja f uma relação binária. Dizemos que f é conexa se, e somente se, para todo $\{x, y\} \subseteq \$ f$, existe uma seqüência finita $x = t_o, t_1, \ldots, t_k = y$ tal que $\{<t_i, t_{i+1}>, <t_{i+1}, t_i>\} \cap f \neq \phi$ para todo $i \varepsilon k$.

<u>1.4. LEMA</u>. Seja f uma função. Então, f é conexa se, e somente se, para cada $\{x, y\} \subseteq \$ f$, existe $\{i, j\} \subseteq \omega$ tal que $f^i(x) = f^j(y)$.

<u>Demonstração</u>. Seja f conexa, e seja $\{y, y\} \subseteq \$ f$. Existem $k \varepsilon \omega$ e $\{t_i : i \varepsilon k\}$ tais que $x = t_o$, $y = t_k$ e tais que $\{<t_i, t_{i+1}>, <t_{i+1}, t_i>\} \cap f \neq \phi$ para todo $i \varepsilon k$. Sejam $X = \{f^i(x) : i \varepsilon \omega\}$ e $Y = \{f^i(y) : i \varepsilon \omega\}$. Sem perder a generalidade podemos supor que $X \not\subseteq Y$. Então $t_o = x \varepsilon X \setminus Y$. Mas, $t_k = y \varepsilon Y$. Portanto existe $m \varepsilon k$ tal que $t_m \varepsilon X \setminus Y$ enquanto $t_{m+1} \varepsilon Y$. Seja $\{p, q\} \subseteq \omega$ tal que $t_m = f^p(x)$ e tal que $t_{m+1} = f^q(x)$. Segue que ou $<t_m, t_{m+1}> \varepsilon f$ e então $f^{p+1}(x) = f(t_m) = t_{m+1} = f^q(y)$, ou $<t_{m+1}, t_m> \varepsilon f$ e então $f^p(x) = t_m = f(t_{m+1}) = f^{q+1}(y)$. Assim, mostraremos que, se f é conexa, então para elementos arbitrários x e y de $\$f$ existem $i \varepsilon \omega$ e $j \varepsilon \omega$ tais que $f^i(x) =$

$f^j(y)$. A recíproca é óbvia. ∎

1.5. DEFINIÇÃO. Sejam f e g relações binárias. Dizemos que f e g são isomorfas bigraficamente, e indicamos por $f \approx g$ se, e somente se, existe bijeção $h: \$g \longrightarrow \$f$ tal que $f = hgh^{-1}$.

1.6. DEFINIÇÃO. Seja g uma função qualquer. Dizemos que um elemento b é broto de g se, e somente se, $b \in \mathrm{Dom}(g) \setminus \mathrm{Rng}(g)$.

Exemplo 1. Seja $g \in \mathrm{Prt}(\omega)$ definida por $g(x) = 2x$.

Escrevendo g na forma de um dígrafo, obtemos que

$$g = \begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left] & 1 \arrow[d] & 3 \arrow[d] & 5 \arrow[d] & \cdots \\ & 2 \arrow[d] & 6 \arrow[d] & 10 \arrow[d] & \\ & 4 \arrow[d] & 12 \arrow[d] & 20 \arrow[d] & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{tikzcd}$$

Como $\mathrm{Dom}(g) = \omega$ e $\mathrm{Rng}(g) = \{2k : k \in \omega\}$, temos que b é broto de g se, e somente se, $b \in \{2k+1 : k \in \omega\}$.

Exemplo 2. Seja $k \in \omega$ e seja $g \in \mathrm{Sym}(k)$. Como $\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Rng}(g) = k$, temos que $\{b : b$ é broto de $g\} = \phi$.

Exemplo 3. Seja $g \in \mathrm{Prt}(\omega \setminus 2)$ tal que $g(x) = \min \{y : y$ é divisor de $x\}$.

É fácil verificar que o conjunto de todos os brotos de g é $(\omega\setminus 2)\setminus\{x:x$ é primo$\}$.

1.7. DEFINIÇÃO. Representaremos por $\mathcal{H}$ o conjunto de todas as funções conexas e finitas que têm exatamente um broto.

1.8. LEMA. Seja $f\in\mathcal{H}$. Então existem $m\in\omega\setminus 2$ e $i\in m\setminus 1$ tais que ou $f\simeq r_m$ ou $f\simeq r_m\cup\{\langle m-1,\ i\rangle\}$.

Demonstração. Admitamos que $f\not\simeq r_m$ para todo $m\in\omega\setminus 2$. Como f tem um broto, segue que $f\neq\phi$. Portanto, como f é finita, temos que $|\$f|=m$ para algum $m\in\omega\setminus 1$. De fato $m>1$, pois se $m=1$, então $f\simeq\{\langle 0,\ 0\rangle\}$ e não tem broto algum. Seja $D=(\$f)\setminus\{f^{m-1}(b)\}$ onde b é o broto de f.

AFIRMAÇÃO 1. $f\restriction D$ é injetiva.

Se admitirmos o contrário, temos que $|f[D]|<m-1$. Mas, então $m=|\$f|=|\{b\}\cup f[D]|=|\{b\}|+|f[D]|=1+|f[D]|<1+m-1=m$, é contraditória. Portanto $f\restriction D$ é injetiva.

AFIRMAÇÃO 2. Existe $i\in m-1$ tal que $f(f^{m-1}(b))=f^i(b)$.

É claro que $f^m(b)\neq\infty$, pois se $f^m(b)=\infty$, então $f\simeq r_m$. Por outro lado, se $f(f^{m-1}(b))\neq f^i(b)$ para todo $i\in m$, então $m=|\$f|\geq m+1$. Portanto, $f^m(b)=f^i(b)$ para algum $i\in m$. Mas $i\neq 0$, pois b é broto de f. Logo a afirmação 2 segue.

É óbvio que a função $g:m \longrightarrow \$f$ definida por $g:j \longmapsto f^j(b)$ induz um isomorfismo digráfico $<p, q> \longmapsto <f^p(b), f^q(b)>$ de $r_m \cup \{<m-1, i>\}$ sobre f. ∎

1.9. ESTUDO DAS PALAVRAS. Seja um alfabeto finito $\Sigma = \{A, B, \ldots\}$. Seja Σ^* o monóide livre gerado pelo alfabeto Σ. Os elementos de Σ^* são exatamente as "palavras" finitas que podem ser soletradas com as "letras" em Σ, inclusive a palavra vazia ϕ. Letras gregas minúsculas denotam elementos de Σ^*. A operação binária em Σ^* é simplesmente a justaposição; por exemplo, se α = AAB e se β = ABBA, então $\alpha\beta$ denota a palavra AABABBA. Duas palavras são iguais se, e somente se, têm a mesma soletração. Como $\alpha\beta$ = AABABBA $\neq$ ABBABAA = $\beta\alpha$, vemos que a justaposição não é comutativa, embora obviamente associativa. A palavra vazia ϕ é claramente a unidade do monóide Σ^*.

Seja $\alpha\varepsilon\Sigma^*$, com $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(d)$ onde $\alpha(i)$ indica o elemento de Σ que ocupa a posição i em α, contado da esquerda para a direita, não importando se $\alpha(1) = \alpha(j)$ para algum $i \neq j$. Indicamos por $|\alpha|$ o comprimento da palavra α. É claro que se $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(d)$, então $|\alpha| = d$. Naturalmente, $|\alpha| = 0$ se, e somente se, $\alpha = \phi$.

1.10. COMPLEXIDADE DAS PALAVRAS. Seja $\alpha = L_o^{n(o)} \; L_1^{n(1)} \ldots L_{k-1}^{n(k-1)}$, onde $\{n(i) : i \in k\} \subset \omega \setminus 1$ e $L_i \neq Lj$ sempre que $i \in \{j-1, j+1\} \subseteq k$. Então dizemos que α é de comple xidade k.

<u>Exemplo</u>. A palavra $\alpha = BABA^2B^3$ é de complexidade cinco. Em α temos: $L_o = L_2 = L_4 = B$, $L_1 = L_3 = A$, $n(o) = n(1) = n(2) = 1$, $n(3) = 2$ e $n(4) = 3$.

<u>1.11. DEFINIÇÃO</u>. Seja Σ um alfabeto finito e seja S um monóide. Dizemos que uma palavra $\alpha \in \Sigma^*$ representa em S um elemento x, e indicamos por $(\alpha \downarrow x)S$ se, e somente se, existe homomorfismo $\mathcal{H}: \Sigma^* \longrightarrow S$ tal que $\mathcal{H}(\alpha) = x$.

<u>1.12. PROPOSIÇÃO</u>. Sejam Σ e Ω alfabetos tais que $\Sigma \subseteq \Omega$. Seja S um monóide com elemento identidade e. Sejam $x \in S$, $\alpha \in \Sigma^*$ e $\mathcal{H}: \Sigma^* \longrightarrow S$ um homomorfismo, tais que $\mathcal{H}(\alpha) = x$. Então $\alpha \in \Omega^*$ existe homomorfismo $\mathcal{K}: \Omega^* \longrightarrow S$ tal que $\mathcal{K}(\alpha) = x$.

<u>Demonstração</u>. Seja $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\dots\alpha(d)$. Como, por hipótese, $\alpha \in \Sigma^*$, temos que $\alpha(i) \in \Sigma$, para todo $i \in (d+1) \setminus 1$. Como $\Sigma \subseteq \Omega$, segue que $\alpha(i) \in \Omega$ para todo $i \in (d+1) \setminus 1$. Portanto $\alpha \in \Omega^*$.

Vamos definir $\mathcal{K}: \Omega^* \longrightarrow S$ da seguinte forma: $\mathcal{K}(L) = \mathcal{H}(L)$ sempre que $L \in \Sigma$ e $\mathcal{K}(L) = e$ para todo $L \in \Omega \setminus \Sigma$. Claramente $\mathcal{K}$ é um homomorfismo. Por outro lado, $\mathcal{K}(\alpha) = \alpha(1)^{\mathcal{K}} \alpha(2)^{\mathcal{K}} \dots \alpha(d)^{\mathcal{K}} = \alpha(1)^{\mathcal{H}} \alpha(2)^{\mathcal{H}} \dots \alpha(d)^{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(\alpha) = x$. □

<u>Observação</u>. Em vista da proposição 1.12, temos que é suficiente considerarmos homomorfismos $\mathcal{H}: \alpha^* \longrightarrow S$ onde α^* é o monóide gerado por $\{\alpha(i) : i \in (d+1) \setminus 1\}$, sendo $\alpha =$

$\alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(d)$.

1.13. LEMA. Seja $\alpha = \alpha(o)^{m(o)}\alpha(1)^{m(1)}\ldots\alpha(d-1)^{m(d-1)}$ $\varepsilon\{\alpha(i): i \ \varepsilon \ d\}^*$, com $m(i)\ \varepsilon\ \omega\setminus 1$ para todo $i\varepsilon d$. Seja $p(i)$ $\varepsilon\ \omega\setminus 1$ para todo $i\varepsilon d$ tal que $p(j) = p(i)$ sempre que $\alpha(j) = \alpha(i)$. Seja $\beta = \alpha(o)^{p(o)m(o)}\alpha(1)^{p(1)m(1)}\ldots\alpha(d-1)^{p(d-1)m(d-1)}$. Seja S um semigrupo. Seja $x\varepsilon S$ tal que $(\beta\downarrow x)S$. Então $(\alpha\downarrow x)S$.

Demonstração. Existe homomorfismo $\mathcal{H}: \alpha^*\longrightarrow S$ tal que $\mathcal{H}(\beta) = x$. Para cada $i\ \varepsilon\, d$ seja $\alpha(i)^{\mathcal{K}}$ o elemento $(\alpha(i)^{\mathcal{H}})^{p(i)}$ de S, e seja $\mathcal{K}: \alpha^*\longrightarrow S$ o homomorfismo gerado pela família $\{\alpha(i)^{\mathcal{K}}: i\varepsilon d\}$. Segue que $\mathcal{K}(\alpha) = \mathcal{K}(\alpha(o)^{m(o)}\ldots\alpha(d-1)^{m(d-1)}) = (\alpha(o)^{\mathcal{K}})^{m(o)}\ldots(\alpha(d-1)^{\mathcal{K}})^{m(d-1)} = (\alpha(o)^{\mathcal{H}})^{p(o)m(o)}\ldots(\alpha(d-1)^{\mathcal{H}})^{p(d-1)m(d-1)} = \mathcal{H}(\alpha(o)^{p(o)m(o)}\ldots\alpha(d-1)^{p(d-1)m(d-1)}) = \mathcal{H}(\beta) = x$. ▨

Indicaremos por $Rep(\alpha, f, \$f)$ o conjunto de todos os homomorfismos $\mathcal{H}$ de α^* em $Prt(\$f)$ tais que $\mathcal{H}(\alpha) = f$.

1.14. LEMA. Sejam f e g funções tais que $f \simeq g$ e $Rep(\alpha, f, \$f) \neq \phi$. Então $Rep(\alpha, g, \$g) \neq \phi$.

Demonstração. Seja $\mathcal{H}\varepsilon\ Rep(\alpha, f, \$f)$. Como $f \simeq g$, existe bijeção $h: \$g \longrightarrow \$f$ tal que $f = hgh^{-1}$. Assim, temos que $\mathcal{H}(\alpha) = f = hgh^{-1}$. Para cada $L\,\varepsilon\Sigma$ vamos definir $\mathcal{K}(L) = h^{-1}\mathcal{H}(L)h$. Seja $\mathcal{K}: \Sigma\longrightarrow Prt(\$g)$ determinada por $\{\mathcal{K}(L): L\varepsilon\Sigma\}$. É claro que $\mathcal{K}$ é um homorfismo. Por outro lado, $\mathcal{K}(\alpha) = \mathcal{K}(\alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(d)) = \alpha(1)^{\mathcal{K}}\alpha(2)^{\mathcal{K}}\ldots\alpha(d)^{\mathcal{K}} = h^{-1}\alpha(1)^{\mathcal{H}}h\ h^{-1}$

$\alpha(2)^{\mathcal{K}} h \ldots h^{-1} \alpha(d)^{\mathcal{K}} h = h^{-1} \alpha(1)^{\mathcal{K}} \alpha(2)^{\mathcal{K}} \ldots \alpha(d)^{\mathcal{K}} h = h^{-1} \alpha^{\mathcal{K}} h =$ $h^{-1} f h = h^{-1} h g h^{-1} h = g$. Portanto $\mathcal{K} \in \mathrm{Rep}(\alpha, g, \$g) \neq \phi$. ☒

<u>1.15. UNIVERSALIDADE DE UMA PALAVRA</u>. Seja Σ um alfabeto finito e seja $\alpha \in \Sigma^*$. Seja S um semigrupo. Seja ainda x $\in$ S. Dizemos que α é universal para S, e escrevemos $\alpha\downarrow\downarrow S$, se e somente se, $(\alpha\downarrow x)S$ para todo $x \in S$.

Seja $\mathcal{Y}$ uma família de semigrupos. Dizemos que uma palavra α é F$\mathcal{Y}$-universal se, e somente se, $\alpha\downarrow\downarrow S$ para todo $S \in \mathcal{Y}$, tal que S é finito. Dizemos que α é I$\mathcal{Y}$-universal se, e somente se, $\alpha\downarrow\downarrow S$ para todo $S \in \mathcal{Y}$, tal que S é infinito. Finalmente, dizemos que α é $\mathcal{Y}$-universal se, e somente se, α é simultaneamente F$\mathcal{Y}$-universal e I$\mathcal{Y}$-universal.

Neste trabalho as famílias $\mathcal{Y}$ de semigrupos que principalmente nos interessarão são Prf, Myc e Sym, onde definimos

$$\mathrm{Prt} = \{\mathrm{Prt}(X) : X \text{ é conjunto}\}$$

$$\mathrm{Myc} = \{{}^{X}X : X \text{ é conjunto}\}$$

$$\mathrm{Sym} = \{\mathrm{Sym}(X) : X \text{ é conjunto}\}$$

Também interessa a família $\mathrm{Brl} = \{\mathrm{Brl}(X) : X \text{ é conjunto}\}$ onde $\mathrm{Brl}(X)$ é $\{f : f \subseteq X \times X\}$.

CAPÍTULO II - REVISÃO HISTÓRICA

O Boletim da Academia Polonesa de Ciências , em 1966, publicou o artigo de J. R. Isbell [3], que foi o primeiro versando sobre Termos Universais. Neste trabalho, Isbell demonstrou os teoremas 2.1 e 2.2, formulou algumas perguntas, tendo respondido a uma delas. Desta forma, o mundo matemático tomou conhecimento desta nova área de estudos que teve seus conceitos básicos introduzidos por volta de 1964 por Jan Mycielski.

Dada uma palavra $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(d)$, se existir $s \in d \setminus 1$ tal que $\beta = \alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(s) = \alpha(d-s+1)\alpha(d-s+2)\ldots\alpha(d)$, então β é um bordo de α.

Se $|\beta| \leq \frac{1}{2}|\alpha|$, dizemos que o bordo β é um bordo curto de α. É claro que β é bordo curto de α se, e somente se, existe γ tal que $\alpha = \beta\gamma\beta$.

Os resultados seguintes são os principais de Isbell.

2.1. TEOREMA. Toda palavra que não tem bordos curtos, é IMyc-universal.

Entende-se por involução em Sym(X), um elemento $f \in \mathrm{Sym}(X)$ que tenha a propriedade: $f^2 = \mathrm{id}\upharpoonright X$.

2.2. TEOREMA. Seja $f \in {}^X X$, onde X é finito. Seja $\{i, n, p\} \subseteq \omega \setminus 1$, onde p é primo e $n = p^i$. Então existe $g \in {}^X X$ e existe involução $h \in \mathrm{Sym}(X)$ tais que $f = g^n h$.

Usando $\alpha = A^2B^2$ e $\beta = A^2B^2A$, Isbell também mostrou.

2.3. PROPOSIÇÃO. Existem α e β tais que:

1. α é IMyc-universal, mas não é FMyc-universal.

2. β é FMyc-universal, mas não é IMyc-universal.

Em 1972 e 1973, foram feitas as seguintes generalizações do teorema 2.1 por G. F. McNulty [4] e D. M. Silberger [5], respectivamente, em suas dissertações de doutoramento.

2.4. TEOREMA. Seja X infinito. Seja $\phi \neq P \subseteq \Sigma^* \setminus \{\phi\}$ tal que cada elemento de P não admite bordos, e tal que para $\{\alpha,\beta\} \subseteq P$ com $\alpha \neq \beta$ acontece que, nem α é segmento de β, nem existe $\gamma \neq \phi$ tal que γ é, ao mesmo tempo, segmento à direita de α e segmento à esquerda de β. Seja $f:P \longrightarrow {}^X X$ uma função arbitrária. Então existe um homomorfismo $\mathcal{H}_f$: $\Sigma^* \longrightarrow {}^X X$ tal que $\mathcal{H}_f \restriction P = f$.

2.5. TEOREMA. Toda palavra α que não admite bordos é IPrt-universal.

Em [6], D. M. Silberger demonstrou um teorema de interesse central para este nosso trabalho, uma vez que dá importância ao estudo de ramos, e cuja técnica nos serve para demonstrar o nosso teorema [3.14].

Este teorema de Silberger é

<u>2.6. TEOREMA</u>. Seja $\alpha \in \Sigma^*$. Então α é Prt-universal se, e somente se, Rep(α, f, \$ f) $\neq \phi$ para toda função f injetiva e conexa.

Dentre os corolários deste teorema, e constantes do trabalho [6] , destacamos

1. B^3A^2 e B^2A^3 são Prt-universais.

2. B^mA^n é Prt-universal sempre que m e n são inteiros ímpares positivos.

Em 1977, A. Ehrenfeucht e D. M. Silberger [1] fizeram uma melhora no teorema 2.2, ao demonstrarem

<u>2.7. TEOREMA</u>. Seja n um inteiro positivo contendo um menor fator primo ímpar p. Seja k o maior inteiro tal que 2^k é divisor de n. Então, são equivalentes:

1. $2^{k+1} < p$;

2. para toda $f \in {}^XX$, com X finito, existe $g \in {}^XX$ e existe involução h tal que $f = g^nh$.

Grande parte deste nosso trabalho é dedicada ao estudo de palavras de complexidade dois, particularmente quanto à sua capacidade de representar ramos. Por isso, destacamos ainda o teorema seguinte, de autoria de A. Ehrenfeucht e D. M. Silberger [2].

Para cada $k \in \omega - 2$, a expressão S(k) representa o menor fator primo do número k e M(k) indica o menor múltiplo comum dos elementos do conjunto $\{2, \ldots, k\}$.

2.8. TEOREMA. Seja $\{m, n\} \subseteq \omega - 2$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $M(S(m)) \nmid n$ e $M(S(n)) \nmid m$;
2. B^nA^m é Myc-universal;
3. B^nA^m é FSym-universal.

Este resultado foi melhorado pelo que apresentamos a seguir de D. M. Silberger [7]:

2.9. TEOREMA. Seja $\{m, n\} \subseteq \omega - 3$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $M(S(m)) \nmid n$ e $M(S(n)) \nmid m$;
2. B^nA^m é Prt-universal ;
3. B^nA^m é Myc-universal ;
4. B^nA^m é Sym-universal.

Finalmente, citamos um resultado de Margaret Weems Harriss [9] do qual vamos precisar em nosso capítulo IV.

2.10. TEOREMA. Seja $\{m, n\} \subseteq \omega - 1$. Seja A^mB^n Prt-universal. Então B^nA^m é também Prt-universal.

CAPÍTULO III - FUNÇÕES BEM BROTADAS

3.1. PRELIMINARES. Faremos no capítulo IV um estudo de palavras que representam ramos e também de palavras que não representam alguns ramos. Neste capítulo, em especial no teorema 3.14, destacamos a importância do fato de uma palavra α representar um ramo, já que tal fato garante que tal palavra representa muitas funções, pelo menos aquelas que decidimos denominar funções bem brotadas.

3.2. DEFINIÇÃO. Seja g uma função. Dizemos que g é bem brotada se, e somente se, para todo $x \in \$g$, existe $b \in (\$g) \setminus \mathrm{Rng}(g)$, tal que $x \in \{g^i(b) : i \in \omega\}$ e tal que $\{g^i(b) : i \in \omega\}$ é finito.

Exemplo 1. Seja $g \in \mathrm{Prt}(\omega)$ tal que $g(x) = \max\{y : y < x$ e y é primo$\}$.

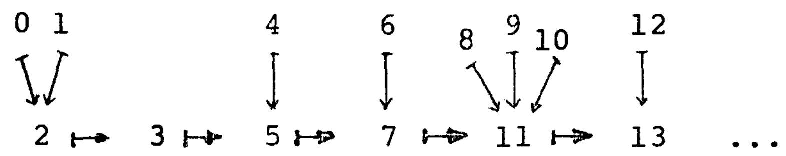
O dígrafo de g é o seguinte:

$$\begin{tikzcd} 0 & 1 & 2 & 3 \arrow[l] & 5 \arrow[l] & & 7 \arrow[ll] & & 11 \arrow[ll] & \ldots \\ & & & 4 \arrow[u] & 6 \arrow[u] & 8 \arrow[ur] & 9 \arrow[u] & 10 \arrow[ul] & 12 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Então, $\mathrm{Dom}(g) = \omega \setminus 3$ e $\mathrm{Rng}(g) = \{x : x$ é primo$\}$. Portanto o conjunto de todos os brotos de g é $(\omega \setminus 3) \setminus \{x : x$ é primo$\}$. Para todo $x \in \omega \setminus 3$, temos que $2x$ é um broto de g. É claro que a primeira condição para g ser bem brotada é satisfeita. Como $\{g^i(t): i \in \omega\}$ tem menos elementos que t para qualquer $t \in Dom(g)$, temos que g é bem brotada.

<u>Exemplo 2</u>. Seja $g \in Prt(\omega)$ tal que $g(x) = \min\{y : y > x$ e y é primo$\}$.

O dígrafo de g é



O conjunto de todos os brotos de g é $\omega \setminus \{x : x$ é primo$\}$, e $Rng(g) = \{x : x$ é primo$\}$. A primeira condição para g ser bem brotada obviamente é satisfeita: para todo $x \in \omega$ existem broto $b \in \omega$ e $i \in \omega$ tal que $g^i(b) = x$. Mas, a segunda condição para g ser bem brotada não fica satisfeita, pois se $n = |\{p : p \leq x$ e p é primo$\}|$, então $g^n(1)$ é o n-esimo primo, e portanto $|\{g^i(i) : i \in \omega\}| = |\{q : q$ é primo$\}| = \aleph_0$. Assim, vimos que g não é bem brotada. Também, vale observar que $g \in {}^{\omega}\omega$.

<u>Exemplo 3</u>. Embora cada elemento f Sym(k) para $k \in \omega$, satisfaz a segunda condição para ser bem brotada - que o conjunto $\{f^i(x) : i \in \omega\}$ é finito para todo $x \in k$ -, a primeira condição não é satisfeita pois f não tem broto algum.

<u>Exemplo 4</u>. Seja $g \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, tal que $g(x) = 1-|x|$.

A função g tem para dígrafo três classes de equivalência, sob isomorfismo, de componentes conexas.

$$g_o : \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, leftrightarrow] & 2 \arrow[d, mapsto] & 3 \arrow[d, mapsto] & 4 \arrow[d, mapsto] & 5 \arrow[d, mapsto] & \\ 0 & (-1) \arrow[l, mapsto] & (-2) \arrow[l, mapsto] & (-3) \arrow[l, mapsto] & (-4) \arrow[l, mapsto] & \ldots \end{tikzcd}$$

$$g_r \text{ com } 0<r<\frac{1}{2} : \begin{tikzcd} & (3-r) \arrow[d, mapsto] & (2-r) \arrow[d, mapsto] & (1-r) \arrow[d, leftrightarrow] & (-r) \arrow[l, mapsto] & (-r-1) \arrow[l, mapsto] \ldots \\ \ldots & (r-2) \arrow[r, mapsto] & (r-1) \arrow[r, mapsto] & r & (r+1) \arrow[u, mapsto] & (r+2) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

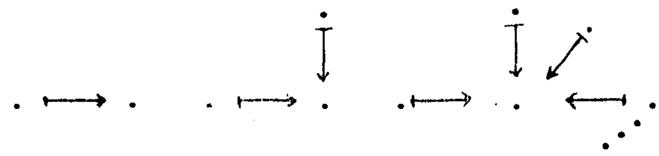
$$g_{\frac{1}{2}} : \begin{tikzcd} & \frac{3}{2} \arrow[d, mapsto] & \frac{5}{2} \arrow[d, mapsto] & \frac{7}{2} \arrow[d, mapsto] & \\ \frac{1}{2} \arrow[loop above] & (-\frac{1}{2}) \arrow[l, mapsto] & (-\frac{3}{2}) \arrow[l, mapsto] & (-\frac{5}{2}) \arrow[l, mapsto] & \ldots \end{tikzcd}$$

É claro que o conjunto de todos os brotos de g é o intervalo $(1,\infty)$.

Temos, então que g é uma transformação obviamente bem brotada, de $\mathbb{R}$, com um conjunto $\{g_r : 0\leq r \leq \frac{1}{2}\}$ não enumerável de componentes conexas.

<u>3.3. PROPOSIÇÃO</u>. Sejam $L_o, \ldots, L_{k-1}$, k letras distintas, com $k\,\varepsilon\,\omega\setminus 2$, e seja $\alpha = L_o^{n(o)} \ldots L_{k-1}^{n(k-1)}$ com $n(i)\,\varepsilon\,\omega\setminus 1$ para todo $i\,\varepsilon\,k$. Seja g qualquer função tal que $\mathrm{Dom}(g) \cap \mathrm{Rng}(g) = \phi$. Então $\mathrm{Rep}(\alpha, g, \$g) \neq \phi$.

Demonstração. É claro que o dígrafo de g é da forma



Seja $f_o = \mathcal{H}(L_o) = g\cup(id\restriction Rng(g))$, e seja $f_j = \mathcal{H}(L_j) = id\restriction Dom(g)$ para cada $j\in k\setminus 1$. Então, com $\mathcal{H}: \alpha^* \longrightarrow Prt(\$g)$, o homomorfismo determinado por $\{\mathcal{H}(L_i): i \in k\}$, temos que $\mathcal{H}(\alpha) = f_o^{n(o)} \dots f_{k-1}^{n(k-1)} = (g\cup(id\restriction Rng(g)))^{n(o)}(id\restriction Dom(g))^{n(1)+\dots+n(k-1)} = (g\cup(id\restriction Rng(g)))(id\restriction Dom(g)) = g$. ▨

Desta forma muitas funções podem ser representadas por $\alpha = L_o^{n(o)} \dots L_{k-1}^{n(k-1)}$, notadamente, em $\mathbb{R}$, todas aquelas cujo gráfico cartesiano encontra-se totalmente no segundo ou totalmente no quarto quadrantes. Assim, por exemplo, $f: [1, \infty) \longrightarrow (-\infty, o]$ dada por $f: x \longmapsto \log_a x$, onde $0<a<1$.

Naturalmente, será de maior interesse para os analistas, determinar se existe representação por α de uma função $f\in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ que é contínua (diferenciável) [integrável] com funções que também são contínuas (diferenciáveis) [integráveis].

3.4. LEMA. Sejam E e F famílias de relações binárias. Então $(\cup E)\circ(\cup F) = \cup\{a\circ b: a\in E \text{ e } b\in F\}$.

Demonstração. Seja $\langle x, y\rangle \in (\cup E)\circ(\cup F)$. Então, existe z tal que $\langle x, z\rangle\in \cup F$ e $\langle z, y\rangle\in \cup E$. Segue-se que existe $a'\in E$

e $b' \varepsilon F$ tais que $<x, z> \varepsilon b'$ e $<z, y> \varepsilon a'$, e assim $<x, y> \varepsilon a' o b' \subseteq \cup \{a o b : a \varepsilon E \text{ e } b \varepsilon F\}$.

Por outro lado, seja $<x, y> \varepsilon \cup \{a \circ b : a \varepsilon E \text{ e } b \varepsilon F\}$. Existem, então, $a'' \varepsilon E$ e $b'' \varepsilon F$ tais que $<x, y> \varepsilon a'' o b''$. Segue-se que existe t tal que $<x, t> \varepsilon b'' \subseteq \cup F$ e $<t, y> \varepsilon a'' \subseteq \cup E$. Portanto, $<x, y> \varepsilon (\cup E) \circ (\cup F)$. ▨

Chamamos a atenção para o fato que na demonstração do lema que segue é usado um argumento que depende do Axioma da Escolha.

<u>3.5. LEMA</u>. Seja g uma função e seja $\{g_i : i \varepsilon I\}$ a família de todas as componentes conexas de g. Então se $Rep(\alpha, g_i, \$g_i) \neq \phi$ para todo $i \varepsilon I$, então $Rep(\alpha, g, \$g) \neq \phi$.

<u>Demonstração</u>: Seja $\{g_i . i \varepsilon I\}$ a família de todas as componentes conexas de g. Naturalmente $g = \cup \{g_i : i \varepsilon I\}$. Como, por hipótese, $Rep(\alpha, g_i, \$g_i) \neq \phi$ para cada $i \varepsilon I$, existe uma função de escolha $H : I \longrightarrow \cup \{Rep(\alpha, g_i, \$g_i) : i \varepsilon I\}$, tal que $H : i \longmapsto H_i \varepsilon Rep(\alpha, g_i, \$g_i)$.

Definamos a função K de Σ^* em $Prt(\$g)$, por $K : \beta \longmapsto \cup \{H_i(\beta) : i \varepsilon I\}$. Então $K(\alpha) = \cup \{H_i(\alpha) : i \varepsilon I\} = \cup \{g_i : i \varepsilon I\} = g$.

Por outro lado $K : \Sigma^* \longrightarrow Prt(\$g)$ é um homomorfismo, pois dado $\{\varphi, \rho\} \subseteq \Sigma^*$, $K(\varphi\rho) = \cup \{H_i(\varphi\rho) : i \varepsilon I\} = \cup \{H_i(\varphi) o H_i(\rho) : i \varepsilon I\}$. Portanto pelo lema 3.4, temos que $K(\varphi\rho) = (\cup \{H_i(\varphi) : i \varepsilon I\}) o (\cup \{H_i(\rho) : i \varepsilon I\}) = K(\varphi) o K(\rho)$. Assim, temos que $K \varepsilon Rep(\alpha, g, \$g) \neq \phi$. ▨

3.6. DEFINIÇÃO. Na família de todos os homomorfismos de Σ^* em PrfX, vamos definir a ordem parcial $\underline{\alpha}$ da seguinte forma: $\mathcal{H}(\beta)\,\underline{\alpha}\,\mathcal{K}(\beta)$ se, e somente se, $\mathcal{H}(\beta) \subseteq \mathcal{K}(\beta)$ para todo $\beta\in\Sigma^*$.

Obviamente, no lema 3.5, $H_i \underline{\alpha} K$ para todo $i\in I$.

A demonstração que apresentamos para o lema que segue é de D. M. Silberger [6].

3.7. LEMA. Seja g uma função e seja C e D conjuntos tais que $C\cap (D\cup g[D]) = \phi$, e tal que existe exatamente um $x\in C$ para o qual $g(x)\in D\cup g[D]$. Seja agora $z\in D$ tal que $g(z) = g(x)$. Seja $\mathcal{H}\in \mathrm{Rep}(\alpha,\ g\restriction(C\setminus\{x\}),\ C)$, e seja $\mathcal{K}\in \mathrm{Rep}(\alpha,\ g\restriction D,\ D\cup g[D])$. Então existe $\vartheta\in \mathrm{Rep}(\alpha,\ g\restriction(D\cup C),\ C\cup D\cup g[D])$ tal que $\mathcal{H}\,\underline{\alpha}\,\vartheta$ e também $\mathcal{K}\,\underline{\alpha}\,\vartheta$.

Demonstração. Como $x\notin \mathrm{Dom}\,\alpha^{\mathcal{H}}$, existe um inteiro positivo $q\le d$ tal que $\alpha(q+1)^{\mathcal{H}}\circ\dots\circ\alpha(d)^{\mathcal{H}}(x)\in C\setminus \mathrm{Dom}\,\alpha(q)^{\mathcal{H}}$, onde $\alpha(d+1)^{\mathcal{H}}$ indica $id\restriction C$. Para cada $L\in\Sigma$ vamos definir $L \in Prt(C\cup D\cup g[D])$ como segue: se $L\neq\alpha(q)$, então $L^{\vartheta} = L^{\mathcal{H}}\cup L^{\mathcal{K}}$, e $\alpha(q)^{\vartheta} = \alpha(q)^{\mathcal{H}}\cup\alpha(q)^{\mathcal{K}}\cup\{<\alpha(q+1)^{\mathcal{H}}\circ\dots\circ\alpha(d)^{\mathcal{H}}(x),\ \alpha(q)^{\mathcal{K}}\circ\dots\circ\alpha(d)^{\mathcal{K}}(z)>\}$. Então, seja $\vartheta:\Sigma^*\longrightarrow Prt(C\cup D\cup g[D])$ o homomorfismo gerado pela família $\{L^{\vartheta} : L\in\Sigma\}$.

Para cada $t\neq x$, onde $t\in(C\cup D)\cap \mathrm{Dom}\,g$, evidentemente temos que $\alpha^{\vartheta}(t) = g(t)$. Além disso, $\alpha^{\vartheta}(x) =$
$\alpha(1)^{\vartheta}\circ\dots\circ\alpha(q-1)^{\vartheta}\ \alpha(q)^{\vartheta}\ \alpha(q+1)^{\mathcal{H}}\circ\dots\circ\alpha(d)^{\mathcal{H}}(x) =$
$= \alpha(1)^{\vartheta}\circ\dots\circ\alpha(q-1)^{\vartheta}\circ\alpha(q)^{\mathcal{K}}\circ\alpha(q+1)^{\mathcal{K}}\circ\dots\circ\alpha(d)^{\mathcal{K}}(z) =$
$= \alpha^{\mathcal{K}}(z) = g(z) = g(x)$.

Portanto, como $\mathrm{Dom}\ \alpha^{\vartheta} = (C \cup D) \cap \mathrm{Dom}\ g = \mathrm{Dom}\ g \restriction (C \cup D)$, temos que $\alpha^{\vartheta} = g \restriction (C \cup D)$, e daí que $\vartheta \in \mathrm{Rep}(\alpha, g \restriction (C \cup D), C \cup D \cup g[D])$. Finalmente, pela definição de ϑ, temos que $\mathscr{C}_{\underline{\alpha}}\, \vartheta$ e $\mathscr{K}_{\underline{\alpha}}\, \vartheta$. ∎

<u>3.8. DEFINIÇÃO</u>. Seja g uma relação binária. Um conjunto C é dito satisfeito por g se, e somente se,

1) $C \setminus g[C] \subseteq (\$g) \setminus g[\$g]$

2) $C \setminus g^{-1}[C] \subseteq (\$G) \setminus g^{-1}[C]$

Denotaremos por $\Phi(g)$ a família de todos os conjuntos satisfeitos por g.

<u>Exemplo 1</u>. Seja $k \in \omega \setminus 1$. Então $\Phi(r_k) = \{\phi , k\}$.

<u>Exemplo 2</u>. Seja g a função dada pelo dígrafo a seguir

$$\begin{tikzcd} & & 3 \arrow[dl] & 4 \\ 0 & 1 \arrow[l] & 2 \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

É fácil ver que $\Phi(g) = \{\phi , \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{4\}, \{0,1,2,3\}, \{0,1,2,4\}, \{0,1,3,4,\}, \{0,1,2,3,4\}\}$.

<u>Exemplo 3</u>. Seja g como no exemplo 1 de 3.2. Seja $P = \{y : y$ é primo$\}$. Para cada $x \in (\omega \setminus 2) \setminus P$, seja $M_x = \{g^i(x) : i \in \omega\}$. Para cada $S \subseteq (\omega \setminus 2) \setminus P$, seja $N_S = \bigcup \{M_x : x \in S\}$. Seja $T = \{N_S : S \subseteq (\omega \setminus 2) \setminus P\}$. Então $\Phi(g) = \{E \cup F : E \in T$ e $F \subseteq \{0,1\}\} \cup \{E \cup F \cup P : E \in T$ e $F \subseteq \{0,1\}\} \cup \{\phi\}$.

A demonstração do lema a seguir é um detalhamento da demonstração feita por D. M. Silberger em [6].

<u>3.9. LEMA</u>. Seja g uma relação binária. Seja $F\varepsilon\Phi(g)$ e seja $\mathcal{F}\subseteq\Phi(g)$. Então:

1. $F\subseteq g[F]\cup g^{-1}[F]\subseteq \$g$.
2. $\cup\mathcal{F}\ \varepsilon\ \Phi(g)$.
3. Se g é uma função, então $g[F]\subseteq F$.

<u>Demonstração</u>. Uma das leis de De Morgan dá que $F\setminus(g[F]\cup g^{-1}[F])=(F\setminus g[F])\cap(F\setminus g^{-1}[F])$. Como $F\,\varepsilon\Phi(g)$, temos que $F\setminus g[F]\subseteq(\$g)\setminus g[\$g]$ e $F\setminus g^{-1}[F]\subseteq(\$g)\setminus g^{-1}[\$g]$. Assim,

$F\setminus(g[F]\cup g^{-1}[F])\subseteq((\$g)\setminus g[\$g])\cap((\$g)\setminus g^{-1}[\$g])=$

$=(\$g)\setminus(g[\$g]\cup g^{-1}[\$g])=(\$g)\setminus(\$g)=\phi$. Logo $F\subseteq g[F]\cup g^{-1}[F]$. Por outro lado, $g[F]\subseteq g[\$g]$ e $g^{-1}[F]\subseteq g^{-1}[\$g]$. Então, $g[F]\cup g^{-1}[F]\subseteq g[\$g]\cup g^{-1}[\$g]=\$g$. Portanto, $F\subseteq g[F]\cup g^{-1}[F]\subseteq\$g$.

Seja $\mathcal{F}\subseteq\Phi(g)$. Então, como cada elemento de $\mathcal{F}$ é também elemento de $\Phi(g)$, temos que $(\cup\mathcal{F})\setminus g[\cup\mathcal{F}]=\cup\{E:E\,\varepsilon\mathcal{F}\}\setminus g[\cup\{E:E\,\varepsilon\mathcal{F}\}]=\cup\{E:E\,\varepsilon\mathcal{F}\}\setminus\cup\{g[E]:E\,\varepsilon\mathcal{F}\}\subseteq\cup\{E\setminus g[E]:E\,\varepsilon\mathcal{F}\}\subseteq(\$g)\setminus g[\$g]$. Do mesmo modo $(\cup\mathcal{F})\setminus g^{-1}[\cup\mathcal{F}]=\cup\{E:E\,\varepsilon\mathcal{F}\}\setminus g^{-1}[\cup\{E:E\,\varepsilon\mathcal{F}\}]=\cup\{E:E\,\varepsilon\mathcal{F}\}\setminus\cup\{g^{-1}[E]:E\,\varepsilon\mathcal{F}\}\subseteq\cup\{E\setminus g^{-1}[E]:E\varepsilon\mathcal{F}\}\subseteq(\$g)\setminus g^{-1}[\$g]$. Portanto, $\cup\mathcal{F}\ \varepsilon\ \Phi(g)$.

Seja agora g uma função. Suponhamos que exista x em $g[F]\setminus F$. Então $x\varepsilon g[F]$ e $x\notin F$. Além disso, $x = g(y)$ para algum $y\varepsilon F$. É claro que $y\notin g^{-1}[F]$, pois se $y\varepsilon g^{-1}[F]$, então $x\varepsilon g[g^{-1}[F]]\subseteq F$; portanto $x\varepsilon F$, o que é absurdo. Assim, temos que $y\varepsilon F$ e $y\notin g^{-1}[F]$. Então, $y\varepsilon F\setminus g^{-1}[F]$. Como $F\varepsilon\Phi(g)$, temos que $F\setminus g^{-1}[F]\subseteq(\$g)\setminus g[\$g]$. Logo $y\varepsilon(\$g)\setminus g^{-1}[\$g]$, e então, $y\notin g^{-1}[\$g]$. Mas isto também é absurdo, pois $g^{-1}[\$g] = \mathrm{Dom}(g)$, e então, $y\notin\mathrm{Dom}(g)$ enquanto que $g(y) = x$. Portanto, $g[F]\setminus F = \phi$, e então, $g[F]\subseteq F$. ∎

<u>3.10. LEMA</u>. Seja g uma função e seja $C\varepsilon\Phi(g)$. Então $g[C] = C\cap g[\$g]$.

<u>Demonstração</u>. Como todo elemento de $g[C]$ está na imagem de g, temos que $g[C]\subseteq g[\$g]$. Também, como g é função, pelo lema 3.9, temos que $g[C]\subseteq C$. Então $g[C] = g[C]\cap g[\$g]\subseteq C\cap g[\$g]$.

Por outro lado, se $x\varepsilon C\cap g[\$g]$, é claro que $x\varepsilon g[\$g]$, e, portanto, $x\notin(\$g)\setminus g[\$g]\supseteq C\setminus g[C]$, pois $C\varepsilon\Phi(g)$. Então $x\notin C\setminus g[C]$ e $x\varepsilon C$. Logo $x\varepsilon g[C]$. Assim, $C\cap g[\$g]\subseteq g[C]$. Portanto, $g[C] = C\cap g[\$g]$. ∎

<u>3.11. LEMA</u>. Seja g uma função e seja $\{M, N\}\subseteq\Phi(g)$. Então, $M = N$ se, e somente se, $g\restriction M = g\restriction N$.

<u>Demonstração</u>. Admitamos $M = N$. Então temos as equivalências: $<x, y>\varepsilon g\restriction M \Leftrightarrow (<x, y>\varepsilon g$ e $x\varepsilon M\cap\mathrm{Dom}\ g) \Leftrightarrow (<x, y>$

εg e $x \varepsilon N \cap \mathrm{Dom}\ g) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \varepsilon g \restriction N$. Logo $g \restriction M = g \restriction N$.

Admitamos agora $g \restriction M = g \restriction N$. Segue-se que $\mathrm{Dom}(g \restriction M) = \mathrm{Dom}(g \restriction N)$ e $\mathrm{Rng}(g \restriction M) = \mathrm{Rng}(g \restriction N)$. Isto é, $M \cap g^{-1}[\$g] = N \cap g^{-1}[\$g]$ e $g[M] = g[N]$. Pelo lema 3.10 temos também que $g[M] = M \cap g[\$g]$ e $g[N] = N \cap g[\$g]$. Pelo lema 3.9, $M \subseteq \$g$ e $N \subseteq \$g$. Portanto $M = M \cap (\$g) =$
$M \cap (g[\$g] \cup g^{-1}[\$g]) = (M \cap g[\$g]) \cup (M \cap g^{-1}[\$g]) =$
$g[M] \cup (M \cap g^{-1}[\$g]) = g[N] \cup (N \cap g^{-1}[\$g]) =$
$(N \cap g[\$g]) \cup (N \cap g^{-1}[\$g]) = N \cap (g[\$g] \cup g^{-1}[\$g]) =$
$N \cap (\$g) = N$.

$\blacksquare$

3.12. LEMA. Seja $g = r_m \cup \{\langle m-1, i\rangle\}$, onde $m \varepsilon \omega \smallsetminus 2$ e $i \varepsilon m \smallsetminus 1$. Seja $C = \{g^{j+i}(o) : j \varepsilon \omega\}$. Então:

1. $C \subseteq g[m] \subseteq m \subseteq \mathrm{Dom}\ g$.

2. $m \ \varepsilon\ \Phi(g)$.

3. Se $\mathcal{H} \ \varepsilon\ \mathrm{Rep}(\alpha, r_m, m)$, então existe $\mathcal{K} \ \varepsilon\ \mathrm{Rep}(\alpha, g, m)$ tal que $\mathcal{H} \underline{\alpha} \mathcal{K}$.

Demonstração. O dígrafo de g é da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & & & & & & (m-1) \arrow[lllll] \\ 0 \arrow[r, mapsto] & 1 \arrow[r, mapsto] & 2 \arrow[r, mapsto] & \dots \arrow[r, mapsto] & (i-1) \arrow[r, mapsto] & i \arrow[r, mapsto] & (i+1) \dots & (m-2) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

É claro que $C = \{i, i+1, \dots, m-1\} = m \smallsetminus i$. Como $g[m] = m \smallsetminus 1$ e $\mathrm{Dom}(g) = m$, 3.12.1 segue.

Como $\mathrm{Rng}(g) = m \smallsetminus 1 \subseteq m = \mathrm{Dom}(g)$, temos que $\$g = m$. Então $m \smallsetminus g[m] \subseteq (\$g) \smallsetminus g[\$g]$ e $m \smallsetminus g^{-1}[m] \subseteq (\$g) \smallsetminus g^{-1}[\$g]$.

Portanto $m \in \Phi(g)$.

Seja agora $\mathcal{H} \in Rep(\alpha, r_m, m)$ e seja $\alpha = \alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(d)$ tal que $|\alpha| = d$. É claro que $g(i-1) = i = g(m-1)$. Como $(m-1) \notin Dom(\alpha^{\mathcal{H}})$, temos que existe inteiro positivo $q \leq d$ tal que $(m-1) \in Dom(\alpha(q+1)^{\mathcal{H}} \ldots \alpha(d)^{\mathcal{H}})$ e $(m-1) \notin Dom(\alpha(q)^{\mathcal{H}} \ldots \alpha(d)^{\mathcal{H}})$, onde $\alpha(d+1)^{\mathcal{H}}$ denota $id \restriction m$. Vamos definir $\alpha(j)^{\mathcal{K}} \in Prt(m)$ para cada $\alpha(j) \in \{\alpha(1), \ldots, \alpha(d)\}$ como segue: se $\alpha(j) \neq \alpha(q)$, então $\alpha(j)^{\mathcal{K}} = \alpha(j)^{\mathcal{H}}$ e $\alpha(q)^{\mathcal{K}} = \alpha(q)^{\mathcal{H}} \cup \{<\alpha(q+1)^{\mathcal{H}} \circ \ldots \circ \alpha(d)^{\mathcal{H}}(m-1), \alpha(q)^{\mathcal{H}} \circ \ldots \circ \alpha(d)^{\mathcal{H}}(i-1)>\}$. Então, seja $\mathcal{K}: \alpha^* \longrightarrow Prt(m)$ o único homomorfismo gerado pela família $\{\alpha(j)^{\mathcal{K}} : 1 \leq j \leq d\}$.

É claro que $Dom(\alpha^{\mathcal{K}}) = m = Dom(g)$. Como para todo $x \in m-1$ temos que $\alpha^{\mathcal{K}}(x) = \alpha^{\mathcal{H}}(x) = r_m(x) = g(x)$ e como $\alpha^{\mathcal{K}}(m-1) = \alpha(1)^{\mathcal{K}} \circ \ldots \circ \alpha(q-1)^{\mathcal{K}} \circ \alpha(q)^{\mathcal{K}} \circ \alpha(q+1)^{\mathcal{H}} \circ \ldots \circ \alpha(d)^{\mathcal{H}}(m-1) = \alpha(1)^{\mathcal{K}} \circ \alpha(2)^{\mathcal{K}} \circ \ldots \circ \alpha(q-1)^{\mathcal{K}} \alpha(q)^{\mathcal{H}} \circ \alpha(q+1)^{\mathcal{H}} \circ \ldots \circ \alpha(d)^{\mathcal{H}}(i-1) = g(i-1) = g(m-1)$, segue que $\alpha^{\mathcal{K}} = g$ e portanto que $\mathcal{K} \in Rep(\alpha, g, m)$. Pela definição de $\mathcal{K}$, temos que $\mathcal{H} \preceq \mathcal{K}$

<u>3.13. COROLÁRIO</u>. Seja $Rep(\alpha, r_k, k) \neq \phi$ para todo $k \in \omega \setminus 2$. Então $Rep(\alpha, f, \$f) \neq \phi$, para todo $f \in \mathcal{M}$

<u>Demonstração</u>. Seja $f \in \mathcal{M}$. Do lema 1.8 temos que existe $n \in \omega \setminus 2$ tal que $f \simeq r_n$ ou que existem $m \in \omega \setminus 2$ e $i \in m \setminus 1$ tal que $f \simeq r_m \cup \{<m-1, i>\}$. Com $g = r_m \cup \{<m-1, i>\}$, temos pelo lema 3.12.3 que $Rep(\alpha, g, \$g) \neq \phi$, e conseqüentemente pelo lema 1.14 que $Rep(\alpha, f, \$f) \neq \phi$. ∎

<u>3.14. TEOREMA</u>. $\mathrm{Rep}(\alpha, g, \$g) \neq \phi$ para toda função g bem brotada se, e somente se, $\mathrm{Rep}(\alpha, r_k, k) \neq \phi$ para todo $k \in \omega \sim 2$.

<u>Demonstração</u>. Suponhamos primeiramente que $\mathrm{Rep}(\alpha, g, \$g) \neq \phi$ para toda função g bem brotada. É claro que r_k é bem brotada para qualquer $k \in \omega \sim 2$. Por outro lado para tal k temos que $\$r_k = \mathrm{Dom}(r_k) \cup \mathrm{Rng}(r_k) = (k-1) \cup (k-1) = k$. Portanto $\mathrm{Rep}(\alpha, r_k, k) \neq \phi$ para todo $k \in \omega \sim 2$.

Agora, suponhamos que $\mathrm{Rep}(\alpha, r_k, k) \neq \phi$ para todo $k \in \omega \sim 2$. Seja g qualquer função bem brotada. O corolário 3.1.3 permite afirmar que $\mathrm{Rep}(\alpha, f, \$f) \neq \phi$ para cada $f \in \mathcal{CM}$. Também pelo lema 3.5 podemos considerar g conexa.

Seja $\mathrm{Rep} = \{\mathrm{Rep}(\alpha, g \restriction M, M) : M \in \Phi(g)\}$ e seja $\underset{\sim}{E} = \cup\, \mathrm{Rep}$.

O lema 3.11 garante que os elementos da família Rep são, dois a dois, disjuntos e, portanto, que existe injeção $S : \underset{\sim}{E} \longrightarrow \Phi(g)$ com $S : \xi \longmapsto S_\xi$ tal que $\xi \in \mathrm{Rep}(\alpha, g \restriction S_\xi, S_\xi)$. Se $\xi \in \underset{\sim}{E}$ e se $\xi \in \mathrm{Rep}(\alpha, g \restriction M, M)$ com $M \in \Phi(g)$, então $M = S_\xi$.

Seja b_o um broto de g e seja $M_o = \{g^i(b_o) : i \in \omega\}$. É claro que $g \restriction M_o \in \mathcal{CM}$. Portanto, pela hipótese e pelo corolário 3.13 temos que $\mathrm{Rep}(\alpha, g \restriction M_o, M_o) \neq \phi$. É óbvio, por 3.12.2 que $M_o \in \Phi(g)$. Seja então $\xi_o \in \underset{\sim}{E}$ tal que $\xi_o \in \mathrm{Rep}(\alpha, g \restriction M_o, M_o)$.

Afirmo para $\{\mathcal{E}, \mathcal{E}'\} \subseteq \underset{\sim}{E}$ que $\mathcal{E} \preceq \mathcal{E}'$ implica $S_{\mathcal{E}} \subseteq S_{\mathcal{E}'}$, onde $\preceq$ é a ordem parcial introduzida pela definição 3.6 . De fato, se $\mathcal{E} \preceq \mathcal{E}'$, então $g \upharpoonright S_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(\alpha) \subseteq \mathcal{E}'(\alpha) = g \upharpoonright S_{\mathcal{E}'}$, e portanto que $g \upharpoonright S_{\mathcal{E}'} = g \upharpoonright S_{\mathcal{E}'} \cup g \upharpoonright S_{\mathcal{E}} = g \upharpoonright (S_{\mathcal{E}} \cup S_{\mathcal{E}'})$. Como $\{S_{\mathcal{E}}, S_{\mathcal{E}'}\} \subseteq \Phi(g)$, temos, pelo lema 3.9.2 que $S_{\mathcal{E}} \cup S_{\mathcal{E}'} \in \Phi(g)$, e portanto, pelo lema 3.11 que a igualdade $g \upharpoonright S_{\mathcal{E}'} = g \upharpoonright (S_{\mathcal{E}'} \cup S_{\mathcal{E}})$ implica a igualdade $S_{\mathcal{E}'} = S_{\mathcal{E}'} \cup S_{\mathcal{E}}$. A afirmação segue.

Seja $\underset{\sim}{E}_0 = \{\mathcal{H} : \mathcal{H} \in \underset{\sim}{E}$ e $\mathcal{E}_0 \preceq \mathcal{H}\}$. Como $\mathcal{E}_0 \in \underset{\sim}{E}_0$, é claro que $\underset{\sim}{E}_0 \neq \phi$. Seja $\underset{\sim}{C}$ uma subfamília não vazia, e totalmente ordenada, de $\underset{\sim}{E}_0$. Para cada $\beta \in \Sigma^*$, seja $\beta^{\vartheta} = \bigcup \{\beta^{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \in \underset{\sim}{C}\}$. Como $\beta^{\mathcal{H}}$ é uma função para cada tal β e para cada $\mathcal{H} \in \underset{\sim}{C}$, e como $\underset{\sim}{C}$ é totalmente ordenada sob $\preceq$, é fácil ver que a relação binária β^{ϑ} também é função. Então, seja $\vartheta : \Sigma^* \longrightarrow Prt(\$g)$ a função definida por $\vartheta : \beta \longmapsto \beta^{\vartheta}$. Além disso quando $\{\psi, \rho\} \subseteq \Sigma^*$, pelo lema 3.4 temos que $(\psi\rho)^{\vartheta} = \bigcup\{(\psi\rho)^{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \in \underset{\sim}{C}\} = \bigcup\{\psi^{\mathcal{H}}\rho^{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \in \underset{\sim}{C}\} = (\bigcup\{\psi^{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \in \underset{\sim}{C}\})(\bigcup\{\rho^{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \in \underset{\sim}{C}\}) = \psi^{\vartheta}\rho^{\vartheta}$. Portanto $\vartheta : \Sigma^* \longrightarrow Prt(\$g)$ é um homomorfismo.

<u>AFIRMAÇÃO</u>: $\vartheta \in \underset{\sim}{E}_0$.

Seja $V = \bigcup\{S_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \in \underset{\sim}{C}\}$. Então, como $\{S_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \in C\} \subseteq \Phi(g)$, pelo lema 3.9.2, temos que $V \in \Phi(g)$. Portanto, como $\mathcal{E}_0 \preceq \vartheta$, basta provar que $\vartheta \in Rep(\alpha, g \upharpoonright V, V)$.

Seja $\beta \in \Sigma^*$ e seja $\langle x, y \rangle \in \beta^{\vartheta}$. Então $\langle x, y \rangle \in \beta^{\mathcal{H}}$, para algum $\mathcal{H} \in \underset{\sim}{C}$. Portanto, como $\beta^{\mathcal{H}} \subseteq S_{\mathcal{H}} \times S_{\mathcal{H}} \subseteq V \times V$, e como $\vartheta : \Sigma^* \longrightarrow Prt(\$g)$ é um homomorfismo, segue que

$\mathcal{V}: \Sigma^* \longrightarrow Prt(V)$ é homomorfismo.

Seja $<x, y> \in \alpha^{\mathcal{V}}$. Então $<x, y> \in \alpha^{\mathcal{U}} = g \restriction S_{\mathcal{U}} \subseteq g \restriction V$, para algum $\mathcal{U} \in \underset{\sim}{C}$. Segue que $\alpha^{\mathcal{V}} \subseteq g \restriction V$. Por outro lado, se considerarmos $<x, y> \in g \restriction V$, então $x \in V$ e, portanto, $x \in S_{\mathcal{B}}$ para algum $\mathcal{B} \in \underset{\sim}{C}$, daí, então $<x, y> \in g \restriction S_{\mathcal{B}} = \alpha^{\mathcal{B}} \subseteq \alpha^{\mathcal{V}}$. Deduzimos que $g \restriction V \subseteq \alpha^{\mathcal{V}}$ e, portanto, que $\alpha^{\mathcal{V}} = g \restriction V$. Assim $\mathcal{V} \in Rep(\alpha, g \restriction V, V) \subseteq \underset{\sim}{E}$. Finalmente, como $\mathcal{E}_0 \preceq \mathcal{V}$, fica provado que $\mathcal{V} \in \underset{\sim}{E}_0$.

Como $\mathcal{H} \preceq \mathcal{V}$, para todo $\mathcal{H} \in \underset{\sim}{C}$, temos que $\mathcal{V}$ é um limite superior para C. Pelo Lema de Zorn, segue que a família $\underset{\sim}{E}_0$ contém um elemento $\mathcal{F}$ que é maximal pela ordem parcial $\preceq$. Observe que $S_{\mathcal{F}} \neq \phi$, pois $S_{\mathcal{E}_0} \subseteq S_{\mathcal{F}}$ e $S_{\mathcal{E}_0}$ contém um broto de g.

<u>AFIRMAÇÃO</u>. $S_{\mathcal{F}} = \$g$ e, portanto, $\mathcal{F} \in Rep(\alpha, g, \$g)$.

Admitamos que exista $z \in (\$g) \setminus S_{\mathcal{F}}$. Como $S_{\mathcal{F}} \in \Phi(g)$, pelo lema 3.9.3 temos que $g[S_{\mathcal{F}}] \subseteq S_{\mathcal{F}}$. Assim , supondo que $g^j[S_{\mathcal{F}}] \subseteq S_{\mathcal{F}}$ para $j \in \omega$ arbitrário, segue que $g^{j+1}[S_{\mathcal{F}}] \subseteq g[g^j[S]] \subseteq g[S_{\mathcal{F}}] \subseteq S_{\mathcal{F}}$. Portanto, por indução, temos que $g^i[S_{\mathcal{F}}] \subseteq S_{\mathcal{F}}$ para todo $i \in \omega$. Como g é conexa e como $S_{\mathcal{F}} \neq \Phi$, temos, pelo lema 1.4, que existe um inteiro positivo m, o menor possível tal que $g^m(z) \in S_{\mathcal{F}}$. Seja $x_0 = g^{m-1}(z)$. Então $x_0 \in (\$g) \setminus S_{\mathcal{F}}$. Como $g(X_0) \in S_{\mathcal{F}}$, segue que se $g(X_0) \notin g[S_{\mathcal{F}}]$, então $g(X_0) \in S_{\mathcal{F}} \setminus g[S_{\mathcal{F}}] \subseteq (\$g) \setminus g[\$g]$. Assim $g(X_0) \notin g[\$g]$ o que é uma contradição. Portanto, é claro que $g(X_0) \in g[S_{\mathcal{F}}]$.

Como g é bem brotada, existe um elemento

$X_n \varepsilon (\$g) \setminus g[\$g]$ tal que $g^n(X_n) = X_0$. Seja $T = \{g^i(X_n) : i \varepsilon n+1\}$. Observemos que $T \cap S_{\mathcal{F}} = \phi$, pois, do contrário, 3.9.3 implica que $X_0 \varepsilon S$, o que é falso. Segue que X_0 é o único elemento de T tal que $g(t) \varepsilon S_{\mathcal{F}}$. Como $g\restriction(T\setminus\{x_0\}) \varepsilon \mathcal{OL} \cup \{\phi\}$, por hipótese e pelo corolário 3.13, temos que $Rep(\alpha,\ g\restriction(T\setminus\{x_0\}),\ T) \neq \phi$. Também, como $g[S_{\mathcal{F}}] \subseteq S_{\mathcal{F}}$ temos que $T \cap (S_{\mathcal{F}} \cup g[S_{\mathcal{F}}]) = T \cap S_{\mathcal{F}} = \phi$.

Observemos que $(T \cup S_{\mathcal{F}}) \setminus g[T \cup S_{\mathcal{F}}] = (T \setminus g[T \cup S_{\mathcal{F}}]) \cup (S_{\mathcal{F}} \setminus g[T \cup S_{\mathcal{F}}]) \subseteq (T \setminus g[T]) \cup (S_{\mathcal{F}} \setminus g[S_{\mathcal{F}}]) = \{X_n\} \cup (S_{\mathcal{F}} \setminus g[S_{\mathcal{F}}])$. Assim, como X_n é broto de g e como $S_{\mathcal{F}} \varepsilon \Phi(g)$, temos que $(T \cup S_{\mathcal{F}}) \setminus g[T \cup S_{\mathcal{F}}] \subseteq (\$g) \setminus g[\$g]$. Notemos também que $(T \cup S_{\mathcal{F}}) \setminus g^{-1}[T \cup S_{\mathcal{F}}] \subseteq (T \setminus g^{-1}[T \cup S_{\mathcal{F}}]) \cup (S_{\mathcal{F}} \setminus g^{-1}[S_{\mathcal{F}}]) = \phi \cup (S_{\mathcal{F}} \setminus g^{-1}[S_{\mathcal{F}}]) \subseteq (\$g) \setminus g^{-1}[\$g]$. Portanto, $T \cup S_{\mathcal{F}} \varepsilon \Phi(g)$.

Lembremos que $\mathcal{F} \varepsilon Rep(\alpha,\ g\restriction S_{\mathcal{F}},\ S_{\mathcal{F}})$. Portanto, como $g[S_{\mathcal{F}}] \subseteq S_{\mathcal{F}}$, temos que $Rep(\alpha,\ g\restriction S_{\mathcal{F}},\ S_{\mathcal{F}} \cup g[S_{\mathcal{F}}]) \neq \phi$. Também, como $g\restriction(T\setminus\{x_0\}) \approx r_n$ e como $T = \$(g\restriction(T\setminus\{x_0\}))$, segue por 1.14 que $Rep(\alpha,\ g\restriction(T\ \{x_0\}),\ T) \neq \phi$. Além disso, como $T \cap g^{-1}[S_{\mathcal{F}}] = \{x_0\}$ e como já vimos que $g(X_0) \varepsilon g[S_{\mathcal{F}}]$, pelo lema 3.7 temos que existe $\mathcal{W} \varepsilon Rep(\alpha,\ g\restriction(T\setminus S_{\mathcal{F}}),\ T \cup S_{\mathcal{F}} \cup g[S_{\mathcal{F}}]) \subseteq \underset{\sim}{E}_0$. Então $\mathcal{W} \neq \mathcal{F} \preceq \mathcal{W}$, o que é contraditório pois $\mathcal{F}$ é elemento maximal em $\underset{\sim}{E}_0$. Assim concluímos que $(\$g) \setminus S_{\mathcal{F}} = \phi$ e, então $S_{\mathcal{F}} = \$g$. Portanto, $\mathcal{F} \varepsilon Rep(\alpha,\ g,\ \$g) \neq \phi$.

$\square$

CAPÍTULO IV - A REPRESENTAÇÃO DE RAMOS POR B^nA^m.

Estamos interessados em estabelecer condições para o terno $\langle k, m, n\rangle \in (\omega\setminus 2)^3$, de modo que Rep $(B^nA^m, r_k, k) \neq \phi$. Os casos já conhecidos são devidos a D. M. Silberger [6] e M. Weems [9], quais sejam: i) para todo $k \in \omega\setminus 2$, com $\{m, n\} \subseteq \{2,3\}$ ou com $\{m, n\} \subseteq 2\omega+1$, temos que $Rep(B^nA^m, r_k, k) \neq \phi$. ii) Sempre que $Rep(B^nA^m, r_k, k) \neq \phi$, também $Rep(A^mB^n, r_k, k) \neq \phi$.

4.1. TEOREMA. $Rep(B^6A^6, r_3, 3) = \phi$.

Demonstração. Suponhamos, ao contrário, que existe $\mathcal{H} \in Rep(B^6A^6, r_3, 3)$. Denominemos $\mathcal{H}(A) = a$ e $\mathcal{H}(B) = b$. Assim, temos que $b^6a^6 = r_3$, com $\{a, b\} \subseteq Prt(3)$. Como $2 = Dom\, r_3$, pelo lema 1.3.1, temos que $2 = Dom(r_3) \subseteq Dom(a^6) \subseteq Dom(a)$. Logo $2 \subseteq Dom(a)$.

Por outro lado, se $a(0) = a(1)$, então $a^6(0) = a^6(1)$, logo $1 = r_3(0) = b^6a^6(0) = b^6a^6(1) = r_3(1) = 2$, o que é uma contradição. Portanto $a \upharpoonright 2$ é uma injeção de 2 em 3.

Além disso $Rng(r_3) = 3\setminus 1$. Mas pelo lema 1.3.2, temos que $Rng(b^6a^6) \subseteq Rng(b^6) \subseteq Rng(b)$. Assim como $Rng(r_3) = Rng(b^6a^6)$, temos que $3\setminus 1 \subseteq Rng(b)$. Segue que $b^6 \upharpoonright a^6[2]$ é uma injeção de $a^6[2]$ em 3.

AFIRMAÇÃO. Dom $a = 2$.

Suponhamos, ao contrário, que Dom $a \neq 2$.

Então, como $a \in Prt(3)$ e como $2 \subseteq Dom\, a$, temos que $Dom\, a = 3$.

Se $a(2) = a(0)$, então $a^6(2) = a^6(0)$ e, $\infty = r_3(2) = b^6a^6(2) = b^6a^6(0) = r_3(0) = 1$, o que é contraditório. Se $a(2) = a(1)$, então $a^6(2) = a^6(1)$ e, $\infty = r_3(2) = b^6a^6(2) = b^6a^6(1) = r_3(1) = 2$, que também é uma contradição. Portanto $|\{ a(0), a(1), a(2) \}| = 3$, e como $a \in Prt(3)$, temos que $a \in Sym(3)$. Como toda componente cíclica de Sym (3) tem comprimento igual a um divisor de 6, segue por [8, Lema 1.8] que $a^6 = id \restriction 3$. Então $r_3 = b^6a^6 = b^6 id \restriction 3 = b^6$. Assim, $2 = Dom(r_3) = Dom(b^6) \subseteq Dom(b) \subseteq 3$, e $Rng(b^6) = Rng(r_3) = 3 \setminus 1$. Mas se $b(2) = 2$, então $2 = b(2) = b^6(2) = r_3(2) = \infty$, que é absurdo. E, se $b(2) \in 2$, então $\infty = r_3(2) = b^6(2) = b^5(b(2)) \in b^5[2] \subseteq 3$, também absurdo. Portanto, $b(2) = \infty$ e, conseqüentemente, $Dom\, b = 2$.

Lembrando que $2 \in 3 \setminus 1 \subseteq Rng(b)$, temos que $b(x) = 2$, para algum $x \in Dom(b) = 2$. Mas, então $x+1 = r_3(x) = b^6(x) = b^5(2) = b^4(\infty) = \infty$ é uma contradição. Deste modo $Dom\, a \neq 3$ e, portanto, $Dom\, a = 2$.

<u>AFIRMAÇÃO</u>. $a \in Sym(2)$.

Se $2 \in Rng(a)$, então $a(y) = 2$, para algum $y \in 2$. Logo $a^6(y) = a^5(2) = a^4(\infty) = \infty$. Mas, neste caso $\infty = b^6(\infty) = b^6a^6(y) = r_3(y) \in 3 \setminus 1$. Portanto, $2 \notin Rng(a)$. Como $2 = Dom(a)$ e $a \restriction 2$ é injetiva, a afirmação segue pelo lema 1.2.

O fato, de que $a \in Sym(2)$, obviamente garante que $a^6 = id\restriction 2$. Então $r_3 = b^6a^6 = b^6 id\restriction 2 = b^6\restriction 2$. Em particular $2 \subseteq Dom(b^6\restriction 2) \subseteq Dom(b)$. Mas, como $2 \subset Rng(b)$, temos que $b(X) = 2$ para algum $X \in 2$. Então $2 \in Dom(b)$, pois se $b(2) = \infty$, então $b^6(X) = b^5(2) = \infty$ que é impossível. Portanto, $Dom(b) = 3$.

Naturalmente, $b \notin Sym(3)$, pois, do contrário, $b^6 = id\restriction 3$ e $b^6a^6 = (id\restriction 3)(id\restriction 2) \neq r_3$. Além disso, $b(0) \neq b(1)$, pois se $b(0) = b(1)$, então $b^6(0) = b^6(1)$ e $1 = r_3(0) = b^6(0) = b^6(1) = r_3(1) = 2$ que é uma contradição.

Ainda $b(0) \neq 0$ e $b(1) \neq 1$, pois se $b(0) = 0$, então $0 = b(0) = b^6(0) = r_3(0) = 1$ e se $b(1) = 1$, então $1 = b(1) = b^6(1) = r_3(1) = 2$ que são contradições.

Considerando que $b^6\restriction 2 = r_3$, devemos ter $b^6(0) = r_3(0) = 1$. Assim, o quadro a seguir, mostra que todas as possibilidades restantes para b são contraditórias.

b(0)	b(1)	b(2)	$b^6(0)$
1	0	0	0
1	0	1	0
1	2	1	2
1	2	2	2
2	0	0	0
2	0	2	2

Desta forma, concluímos que não existe $\{a, b\}$ nas condições supostas inicialmente e, portanto, que $Rep(B^6A^6, r_3, 3) = \phi$.

$\square$

<u>4.2. COROLÁRIO</u>. $\forall \{t, s\} \subseteq \omega$, $Rep(B^{6t}A^{6s}, r_3, 3) = \phi$.

<u>Demonstração</u>. É imediato pelo lema 1.13. $\square$

Os três resultados seguintes extendem o conjunto dos termos $< m, n, k >$ para os quais se tem conhecimento que $Rep(B^nA^m, r_k, k) \neq \phi$.

<u>4.3. TEOREMA</u>. Seja $\{i, j, k\} \subseteq \omega \setminus 1$. Então $Rep(B^{2i}A^{2ij-1}, r_k, k) \neq \phi$.

<u>Demonstração</u>. Tomemos $k \in \omega \setminus 1$ e vamos definir a_k e b_k em $Prt(k)$, da seguinte forma:

$$a_k(k-1) = \infty, \quad a_k\restriction(k-1) = c_{k-1}^{-1}$$

$$b_k(x) = (x+j]_{k-1}, \text{ para todo } x \in k.$$

Basta provar que $b_k^{2i}a^{2ij-1} = r_k$. Observemos que $Dom(b_k^{2i}a_k^{2ij-1}) \subseteq k-1 = Dom(r_k)$ e que, para todo $x \in k-1$, temos $(b_k^{2i}a_k^{2ij-1})(x) = b_k^{2i}([x-2ij+1]_{k-1}) = (x - 2ij+1+2ij]_{k-1} = (x+1]_{k-1} = x+1$. Assim, para cada $x \in k-1$, temos que $(b_k^{2i}a_k^{2ij-1})(x) = r_k(x)$. Então $(b_k^{2i}a_k^{2ij-1})\restriction(k-1) = r_k$. Portanto $b_k^{2i}a_k^{2ij-1} = r_k$.

$\square$

A construção acima, claramente implica que $Rep(B^{2i}A^{2ij-1+q(k-1)}, r_k, k) \neq \phi$, para qualquer $\{i, j, k, q\} \subseteq \omega \setminus 1$.

<u>4.4. TEOREMA</u>. Sejam $p \in \omega$ e $\{m, n\} \subseteq \omega \setminus 2$. Então $Rep(B^nA^m, r_k, k) \neq \phi$ se, pelo menos, uma das seguintes condições é satisfeita:

i) $k = np$

ii) $k = np-1$, com $p>0$

iii) $k = np+1$

iv) $k = np+2$

v) $k = np+3$, com n ímpar.

<u>Demonstração</u>. Seja k satisfazendo as condições acima e seja $a_k = id \upharpoonright (k-1)$. Em cada uma das condições da hipótese, vamos definir $b_k \in Prt(k)$, como segue:

i) $b_k(x) = (x+f(n,k)]_{k-1}$, onde $f(n,k) = \frac{k}{n}$

ii) $b_k(x) = [x+f(n,k)]_k$, onde $f(n,k) = \frac{k+1}{n}$

iii) $b_k(x) = [x+f(n,k)]_k$, onde $f(n,k) = \frac{nk-k+1}{n}$

iv) $b_k(x) = (x+f(n,k)]_{k-1}$, onde $f(n,k) = \frac{nk-k-n+2}{n}$

v) $b_k(x) = (x+f(n,k)]_{k-1}$, onde $f(n,k) = \dfrac{nk-k-n+3}{2n}$

Notemos que em cada caso $f(n,k)\varepsilon\omega$.

i) $f(n,k) = \dfrac{k}{n} = \dfrac{np}{n} = p\,\varepsilon\omega$

ii) $f(n,k) = \dfrac{k+1}{n} = \dfrac{np-1+1}{n} = p\,\varepsilon\omega$

iii) $f(n,k) = \dfrac{nk-k+1}{n} = \dfrac{n(np+1)-(np+1)+1}{n} =$

$$= \frac{n(np+1)-np}{n} = (n-1)p+1\ \varepsilon\omega$$

iv) $f(n,k) = \dfrac{nk-k-n+2}{n} = \dfrac{n(np+2)-np-2-n+2}{n} =$

$$= (n-1)p+1\varepsilon\omega$$

v) $f(n,k) = \dfrac{nk-k-n+3}{2n} = \dfrac{n(np+3)-np-3-n+3}{2n} =$

$= \dfrac{np+3-p-1}{2} = \dfrac{n-1}{2}\,.\,p+1\varepsilon\omega$, pois $n-1$ é par.

Basta agora, provar para cada $x\varepsilon k-1$ que $b_k^n(x) = x+1$.

i) $b_k^n(x) = (x+n.f(n,k)]_{k-1} = (x+k]_{k-1} = x+1$

ii) $b_k^n(x) = [x+n.f(n,k)]_k = [x+k+1]_k = x+1$

iii) $b_k^n(x) = [x+n.f(n,k)]_k = [x+nk-k+1]_k = x+1$

iv) $b_k^n(x) = (x+n.f(n,k)]_{k-1} = (x+nk-k-n+2]_{k-1} =$

$= (x+(n-1)(k-1)+1]_{k-1} = x+1$.

v) $b_k^n(x) = (x+n.f(n,k)]_{k-1} = (x+ \frac{nk-n-k-3}{2}]_{k-1} =$

$= (x+ \frac{1}{2}(n-1)(k-1)+1]_{k-1} = x+1$.

∎

<u>4.5. COROLÁRIO</u>. Seja $\min\{m, n\} \subset 6 \setminus 1$. Então $\forall\, k \in \omega \setminus 1$, $Rep(B^n A^m, r_k, k) \neq \phi$.

<u>Demonstração</u>. Quando $n \in 6 \setminus 1$, qualquer que seja $k \in \omega \setminus 1$, teremos que existe $p \in \omega$ tal que $k = np$ ou $k = np+1$ ou $k = np+2$ ou $k = np+3$ com n ímpar ou $k = np-1$. Portanto, pelo teorema 4.4, segue-se que $Rep(B^n A^m, r_k, k) \neq \phi$.

Por outro lado, pelo teorema 2.10, teremos resultado análogo para $m \in 6 \setminus 1$.

∎

CAPÍTULO V - PERGUNTAS ABERTAS E COMENTÁRIOS GERAIS

PERGUNTA 1. Quais condições sobre $\langle m, n, k\rangle \varepsilon (\omega \setminus 2)^3$ são necessárias e suficientes para que $\mathrm{Rep}(B^n A^m, r_k, k) \neq \phi$?

No capítulo IV mostramos algumas condições suficientes, que, acreditamos, não são todas necessárias. Exibimos também o caso $\mathrm{Rep}(B^6 A^6, r_3, 3) = \phi$. Fica-nos a impressão de que $\mathrm{Rep}(B^{k!} A^{k!}, r_k, k) = \phi$, para todo $k \varepsilon \omega \setminus 1$.

O teorema 3.14 indica a ligação forte entre a representação de ramos e a representação dessas funções mais gerais que chamamos bem brotadas. Sabemos, em vista do capítulo IV que as técnicas para determinar a representação dos ramos está crescendo. Também $\mathrm{Prt}(\mathbb{R})$ é sempre central em matemática. Por isso vale a pena considerar.

PERGUNTA 2. Quais elementos de ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ são funções bem brotadas?

PERGUNTA 3. Se $\mathrm{Rep}\ (\propto, f, R) \neq \phi$ para f contínua, então $(\propto \downarrow f)\ C^1$?

PERGUNTA 4. Existe $\langle n,m \rangle$ tal que $\mathrm{Rep}\ (B^n A^m, r_k, k) = \emptyset$ para um conjunto infinito de $k \in \omega$?

BIBLIOGRAFIA

[1] EHRENFEUCHT, A. e SILBERGER, D.M. "Decomposing a transformation with an involutun", Algebra Universalis 7(1977), 179-190.

[2] EHRENFEUCHT, A. e SILBERGER, D.M. "Universal terms of the form B^nA^m", Algebra Universalis.(A ser publicado).

[3] ISBELL, J.R. "On the problems of universal terms", Bull. de L'Academie Polonaise des Sciences XIV(1966) 593-595.

[4] McNULTY, G.F. "The decision problem for equational bases of algebras", Doctoral Dissertation, University of California, Berkeley, 1972.

[5] SILBERGER, D.M. "Point universal terms in a free semigroup", Doctoral Dissertation, University of Washington, Seattle, 1973.

[6] SILBERGER, D.M. "When is a term point universal?", Algebra Universalis 10(1980).

[7] SILBERGER, D.M. "B^nA^m is universal iff point universal", Algebra Universalis (A ser publicado).

[8] VALENTE, M.L. "Sobre a universalidade de palavras para grupos simétricos", Tese de Mestrado, UFSC, 1979.

[9] WEEMS (Harris), M. "Reverse spellings represent spikes for words of complexiti two", Master's Thesis Jackson State University, Jackson, Mississippi, 1977.