Universidade Federal de Santa Catarina

A Dualidade de Gelfand para Grupos Topológicos Compactos

Miria~~m~~n Buss Gonçalves

Junho - 1980

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

"Mestre em Ciências"

especialidade em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. William Glenn Whitley
Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. William Glenn Whitley, Ph.D.

Prof. Donald Morison Silberger, Ph.D.

Prof. Teófilo Abuabara Saad, Doutor

A meu filho André

AGRADECIMENTOS

Ao Professor William Glenn Whitley, pela sua orientação segura, sua dedicação e incentivo durante a elaboração deste trabalho.

A meus pais, meu marido, meus filhos, meus professores e colegas, que direta ou indiretamente participaram desta luta vitoriosa.

À Universidade Federal de Santa Catarina, que proporcionou os meios para a realização deste trabalho.

RESUMO

No presente trabalho apresentamos alguns aspectos da Teoria de Álgebras de Funções. Estudamos a dualidade de Gelfand entre espaços topológicos compactos e álgebras C_c^*. Usando os resultados desse estudo, desenvolvemos a dualidade de Gelfand entre grupos topológicos compactos e álgebras C_c^* de Hopf, simples com co-identidade.

ABSTRACT

In this monograph,we present some aspects of the theory of algebras of functions. We study the Gelfand duality between compact topological spaces and C_c^* algebras. Using these results, we develop a Gelfand duality between compact topological groups and simple C_c^* Hopf algebras wich co-identities.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O propósito deste trabalho é apresentar, em detalhe, alguns aspectos da Teoria de Álgebras de Funções e, em especial, desenvolver a dualidade de Gelfand entre grupos topológicos compactos e álgebras C_c^* de Hopf, simples com co-identidade.

Em primeiro lugar, apresentamos alguns conceitos e resultados fundamentais sobre espaços de Banach, produto tensorial de espaços vetoriais e teoria de categorias, que julgamos serem requisitos fundamentais para o entendimento do presente trabalho. Em seguida, apresentamos a teoria de álgebras de Banach, que serviu de suporte ao desenvolvimento posterior, e estudamos a dualidade de Gelfand tradicional entre espaços topológicos compactos e álgebras C_c^*. Finalmente, usando os resultados obtidos na etapa anterior, desenvolvemos a dualidade de Gelfand para grupos topológicos compactos.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos e resultados fundamentais sobre espaços de Banach, produto tensorial de espaços vetoriais e teoria de categorias que necessitaremos no transcorrer de nosso trabalho. Quase sempre omitimos as demonstrações, indicando apenas onde o leitor poderá encontrá-las. Observamos que, sempre que houver omissão, os espaços vetoriais considerados são definidos sobre o corpo dos complexos.

1.1. Espaços de Banach

1.1.1. Definição

Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que E é um espaço de Banach, se E é completo como espaço métrico.

1.1.2. Proposição

Sejam E e F espaços vetoriais normados e $f: E \to F$ uma função linear. Se f é contínua na origem, então f é contínua e também uniformemente contínua. [1, pg 36]

1.1.3. Proposição

Sejam E e F espaços vetoriais normados e $f: E \to F$ uma função linear. Então f é contínua se e somente se existe um número positivo M tal que $\|f(x)\| \leq M \|x\|$ para todo $x \in X$. [1, pg 36]

1.1.4. Teorema

Se E e F são espaços lineares normados, então o conjunto de todas as transformações lineares contínuas de E em F é um espaço linear normado com respeito às definições:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

$$\|f\| = \inf \{M > 0;\ \|f(x)\| \leq M \|x\| \text{ para todo } x \in E\}.$$

Se além disso F é um espaço de Banach, também o é o espaço das transformações lineares contínuas de E em F. [4, pg 61]

Observamos que nas condições do teorema acima, $\|f\| = \inf \{M > 0;\ \|f(x)\| \leq M \|x\| \text{ para todo } x \in E\} = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \sup\limits_{\|x\| = 1} \|f(x)\|$. [3, pg 239]

1.1.5. Teorema (Hahn - Banach)

Sejam E um espaço vetorial normado, M um subespaço de E e g uma forma linear contínua definida sobre M. Então existe uma forma linear contínua f sobre E que coincide com g sobre M e tal que $\|f\| = \|g\|$. [1, pg 45]

1.1.6. Corolário

Seja E um espaço vetorial normado e x um elemento não nulo de E. Então existe uma forma linear contínua $f: E \to \mathbb{C}$ tal que $f(x) = 1$ e $\|f\| = \dfrac{1}{\|x\|}$.

Demonstração: Seja $\langle x \rangle$ o subespaço de E gerado por x. Definimos

$$g: \langle x \rangle \to \mathbb{C}$$

$$g(\lambda x) = \lambda.$$

Então temos, $g(x) = 1$ e $\|g\| = \sup\limits_{\|\lambda x\| = 1} |\lambda| = \dfrac{1}{\|x\|}$.

Pelo teorema anterior, existe uma forma linear contínua $f: E \to \mathbb{C}$, que coincide com g sobre $\langle x \rangle$, e tal que

$$\|f\| = \|g\| = \frac{1}{\|x\|} .$$

1.1.7. Corolário

Sejam E um espaço vetorial normado e E' o espaço vetorial normado de todas as transformações lineares contínuas a valores complexos definidas sobre E. Se fixamos $x \in E$, então a função

$$F: E' \to \mathbb{C}$$

$$F(f) = f(x)$$

é uma forma linear contínua e $\|F\| = \|x\|$.

Demonstração: Mostremos apenas que F é contínua e $\|F\| = \|x\|$.
Seja $f \in E'$. Então temos,

$$|F(f)| = |f(x)| \leqslant \|f\| \, \|x\| .$$

Assim, F é contínua e $\|F\| \leqslant \|x\|$.

Pelo corolário anterior, existe $g \in E'$ tal que $g(x) = 1$ e $\|g\| = \dfrac{1}{\|x\|}$.

Como $\| \, \|x\| \, . \, g \, \| = 1$, temos

$$\|F\| = \sup_{\|f\|=1} |F(f)| \geqslant |F(\|x\| \, . \, g)| = \|x\| \, . \, |F(g)| =$$
$$= \|x\| \, . \, |g(x)| = \|x\| .$$

Logo, $\|F\| = \|x\|$.

1.1.8. Teorema (Banach - Steinhaus)

Sejam E um espaço de Banach e $(f_i: E \to \mathbb{C})_{i \in I}$ uma família de formas lineares contínuas. Suponhamos que para cada $x \in E$, a família de escalares $(f_i(x))_{i \in I}$ é limitada. Então existe uma constante $M > 0$ tal que $|f_i(x)| \leqslant M \|x\|$ para todo $x \in E$ e $i \in I$. [1, pg 62]

1.1.9. Teorema (do Isomorfismo de Banach)

Sejam E e F espaços de Banach. Se $f: E \to F$ é uma função linear contínua e bijetiva, então f é um isomorfismo. [1, pg 68]

1.1.10. Proposição

Sejam E um espaço vetorial normado, V um subespaço fechado de E e W um subespaço de E de dimensão finita. Então $V + W$ é fechado em E. Em particular, cada subespaço de dimensão finita é fechado em E. [2, pg 114]

1.2. Produto Tensorial de Espaços Vetoriais

Observação: Neste item, os espaços vetoriais são definidos sobre um corpo K de escalares, arbitrário.

1.2.1. Definição

Sejam E, F e G espaços vetoriais. Uma função $\psi: E \times F \to G$ é dita bilinear, se satisfaz as condições:

$$\psi(\alpha x_1 + \beta x_2, y_1) = \alpha\psi(x_1, y_1) + \beta\psi(x_2, y_1)$$

$$\psi(x_1, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\psi(x_1, y_1) + \beta\psi(x_1, y_2)$$

para todos os elementos $x_1, x_2 \in E$, $y_1, y_2 \in F$ e α, β escalares.

1.2.2. <u>Definição</u>

Sejam E e F espaços vetoriais. Um produto tensorial de E e F é um par (T, τ) onde T é um espaço vetorial e $\tau: E \times F \to T$ é uma função bilinear, satisfazendo a seguinte condição: Para toda escolha de um espaço vetorial G e de uma função bilinear ϕ : $E \times F \to G$, existe uma <u>única</u> função linear $h : T \to G$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\phi"'] & T \arrow[d, "h"] \\ & G \end{tikzcd}$$

O produto tensorial de E por F será indicado por $E \otimes F$ e a imagem através de τ do par (x,y) por $x \otimes y$.

1.2.3. <u>Proposição</u>

Suponhamos que $E \otimes F$ e $E \tilde{\otimes} F$ são produtos tensoriais de E e F. Então existe um isomorfismo

$$f: E \otimes F \to E \tilde{\otimes} F$$

tal que $f(x \otimes y) = x \tilde{\otimes} y$. [5, pg 9]

1.2.4. Proposição

Sejam E e F espaços vetoriais. Então existe o produto tensorial $E \otimes F$ de E e F. [5, pg 9]

1.2.5. Proposição

Sejam E, F e G espaços vetoriais. Então,

1) Existe um único isomorfismo $f: E \otimes F \to F \otimes E$ tal que $f(x \otimes y) = y \otimes x$ para todo $x \in E$ e $y \in F$. [5, pg 8]

2) Existe um isomorfismo $f: E \otimes F \otimes G \to (E \otimes F) \otimes G$ tal que $f(x \otimes y \otimes z) = f((x \otimes y) \otimes z)$ para todo $x \in E$, $y \in F$ e $z \in G$. [5, pg 28]

3) Existe um isomorfismo $f: K \otimes E \to E$. [5, pg 6]

1.2.6. Proposição

Sejam E e F espaços vetoriais,

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes em E e

$\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ um conjunto de vetores arbitrários em F.

Se $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i = 0$, então $b_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demonstração: Desde que os vetores a_i, $i = 1, 2, \ldots n$, são linearmente independentes, nós podemos escolher n funções lineares $f^i: E \to K$ tais que

$$f^i(a_j) = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Consideremos a função bilinear $\phi: E \times F \to K$

$$\phi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f^i(x).g^i(y)$$

onde as g^i, $i = 1,2,\dots,n$, são funções lineares arbitrárias de F em K.

Então existe uma única função linear $h: E \otimes F \to K$ tal que $h(x \otimes y) = \sum_{i=1}^{n} f^i(x).g^i(y)$.

Assim, temos

$$0 = h(\sum_{j=1}^{n} a_j \otimes b_j) = \sum_{j=1}^{n} h(a_j \otimes b_j) =$$

$$= \sum_{i,j} f^i(a_j).g^i(b_j) = \sum_{i=1}^{n} g^i(b_i).$$

Como as funções g^i são arbitrárias, podemos concluir que $b_i = 0$ para $i = 1,2,\dots,n$.

1.2.7. Corolário

Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ então $a \otimes b \neq 0$.

1.2.8. Lema

Sejam E, F e G espaços vetoriais e $\psi: E \times F \to G$ uma função bilinear que satisfaz:

1) Se $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes em E e $\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ é um conjunto de vetores arbitrários em F tais que $\sum_{i=1}^{n} \psi(a_i,b_i) = 0$, então $b_i = 0$ para $i = 1,2,\dots,n$.

2) Se $\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes em F e $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ é um con-

junto de vetores arbitrários em E tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \psi(a_i, b_i) = 0, \text{ então } a_i = 0 \text{ para } i = 1,2,\ldots,n.$$

3) $Im(\psi)$ gera G.

Então, se $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ é uma base de E, todo vetor $z \in G$ pode ser escrito na forma

$$z = \sum_\alpha \psi(e_\alpha, b_\alpha) ,$$

onde apenas um número finito de b_α são diferentes de zero. Além disso, os b_α são unicamente determinados por z.

Demonstração: Seja $z \in G$. Então podemos escrever z na forma

$$z = \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i, y_i) .$$

Como $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ é uma base de E, para cada $i = 1,2,\ldots,n$ podemos escrever $x_i = \sum_\alpha \lambda_i^\alpha e_\alpha$, onde $\lambda_i^\alpha \in K$ e somente um número finito dos λ_i^α são diferentes de zero.

Assim, temos

$$z = \sum_{i=1}^{n} \psi(\sum_\alpha \lambda_i^\alpha e_\alpha, y_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_\alpha \lambda_i^\alpha \psi(e_\alpha, y_i)$$

$$= \sum_{i,\alpha} \lambda_i^\alpha \psi(e_\alpha, y_i) = \sum_\alpha \psi(e_\alpha, \sum_i \lambda_i^\alpha y_i)$$

$$= \sum_\alpha \psi(e_\alpha, b_\alpha) , \quad \text{onde} \quad b_\alpha = \sum_i \lambda_i^\alpha y_i .$$

Para provar a unicidade dos b_α, suponhamos que

$$z = \sum_\alpha \psi(e_\alpha, b_\alpha) = \sum_\alpha \psi(e_\alpha, b'_\alpha) .$$

Então, temos

$$0 = \sum_\alpha \psi(e_\alpha, b_\alpha) - \sum_\alpha \psi(e_\alpha, b'_\alpha)$$

$$= \sum_\alpha (\psi(e_\alpha, b_\alpha) - \psi(e_\alpha, b'_\alpha))$$

$$= \sum_\alpha (\psi(e_\alpha, b_\alpha - b'_\alpha)).$$

Pela condição 1), concluimos que $b_\alpha = b'_\alpha$.

Observamos que $\otimes$ satisfaz as condições 1), 2) e 3) do lema anterior.

1.2.9. Teorema

Sejam E, F, G e H espaços vetoriais. Se ψ: E x F $\to$ G é uma função bilinear que satisfaz as condições 1) e 2) do lema anterior, então para cada função bilinear f: E x F $\to$ H existe uma função linear f': G $\to$ H tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "f"'] & G \arrow[d, "f'"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Demonstração: Suponhamos, sem perda de generalidade, que Im(ψ) gera G. Sejam $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma base de E e z um vetor de G. Pelo lema anterior, podemos escrever

$$z = \sum_\alpha \psi(e_\alpha, b_\alpha) ,$$

sendo que esta representação é única.

Definimos:

$f': G \rightarrow H$

$f'(z) = f'(\sum_{\alpha} \psi(e_{\alpha}, b_{\alpha})) = \sum_{\alpha} f(e_{\alpha}, b_{\alpha})$.

Desde que os b_{α} são unicamente determinados por z, f' é bem definida.

Não é difícil verificar que f' é linear e que $f' \circ \psi = f$.

1.2.10. Proposição

Sejam E, F e G espaços vetoriais. Se $f: E \times F \rightarrow G$ é uma função bilinear que satisfaz 1) e 2) do lema 1.2.8, então a função $\Psi: E \otimes F \rightarrow G$, induzida por $\otimes$, é injetiva.

Demonstração: Pelo teorema anterior, existe uma função linear $h: G \rightarrow E \otimes F$, tal que $\otimes = h \circ f$.

Em diagrama, temos:

$$
\begin{tikzcd}
E \times F \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, "\otimes"'] & E \otimes F \arrow[d, "\Psi"] \\
 & G \arrow[d, "h"] \\
 & E \otimes F
\end{tikzcd}
$$

Assim, se (a,b) é um elemento de $E \times F$, temos

$$a \otimes b = (h \circ f)(a,b) = h(f(a,b)) =$$

$$= h(\Psi(a \otimes b)) = (h \circ \Psi)(a \otimes b).$$

Portanto, $h \circ \Psi$ é a identidade de $E \otimes F$ e desta forma, podemos concluir que ψ é injetiva.

1.3. Teoria de Categorias

1.3.1. Definição

Uma categoria $\mathcal{a}$, consiste de:

i) uma coleção de objetos, $Ob(\mathcal{a})$.

ii) para dois objetos $A,B \in Ob(\mathcal{a})$, um conjunto $Mor_{\mathcal{a}}(A,B)$, chamado conjunto dos morfismos de A em B.

iii) para três objetos $A,B,C \in Ob(\mathcal{a})$, uma lei de composição $Mor_{\mathcal{a}}(B,C) \times Mor_{\mathcal{a}}(A,B) \to Mor_{\mathcal{a}}(A,C)$

satisfazendo os seguintes axiomas:

1) Dois conjuntos $Mor_{\mathcal{a}}(A,B)$ e $Mor_{\mathcal{a}}(A',B')$ ou são disjuntos ou são iguais, e neste caso $A = A'$ e $B = B'$.

2) Para cada objeto $A \in Ob(\mathcal{a})$, existe um morfismo $id_A \in Mor_{\mathcal{a}}(A,A)$ que atua como identidade à esquerda e à direita para os elementos de $Mor_{\mathcal{a}}(A,B)$ e $Mor_{\mathcal{a}}(B,A)$, respectivamente, onde B é um objeto qualquer de $\mathcal{a}$.

3) A lei de composição é associativa, isto é, dado $f \in Mor_{\mathcal{a}}(A,B)$, $g \in Mor_{\mathcal{a}}(B,C)$ e $h \in Mor_{\mathcal{a}}(C,D)$ então

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

para todos os objetos $A,B,C,D \in Ob(\mathcal{a})$. [7, pg 25]

Um morfismo $f \in Mor_{\mathcal{a}}(A,B)$ é denotado por $f: A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$.

1.3.2. Exemplos

1) Categoria de conjuntos que denotamos por S.

Os objetos de S são os conjuntos, os morfismos são as funções de conjunto e a lei de composição é a composição usual de funções.

2) Categoria dos espaços topológicos compactos e Hausdorff, que denotamos por K.

Nesta categoria, os objetos são os espaços topológicos compactos e Hausdorff, os morfismos são as funções contínuas e a lei de composição é a composição usual de funções.

3) Categoria de grupos.

Os objetos são os grupos, os morfismos são os homomorfismos de grupo e a lei de composição é a composição usual de funções.

1.3.3. Definição

Sejam $\mathcal{a}$ uma categoria e f um morfismo em $\mathcal{a}$.

1) Dizemos que f é monic se para quaisquer morfismos ψ e Ψ tais que $f \circ \psi$ e $f \circ \Psi$ são definidos, temos $f \circ \psi = f \circ \Psi$ se e somente se $\psi = \Psi$.

2) Dizemos que f é epic se para quaisquer morfismos ψ e Ψ tais que $\psi \circ f$ e $\Psi \circ f$ são definidos, temos $\psi \circ f = \Psi \circ f$ se e somente se $\psi = \Psi$.

3) Se $f \in Mor(A,B)$, dizemos que f é um isomorfismo se existe um morfismo $g \in Mor(B,A)$ tal que $f \circ g = id_B$ e $g \circ f = id_A$.

1.3.4. Definição

Sejam a, b categorias. Um funtor covariante F, de a em b, é uma lei que a cada objeto A em a, associa um objeto F(A) em b, e a cada morfismo f: A $\to$ B associa um morfismo F(f): F(A) $\to$ $\to$ F(B) tal que:

i) Para todo A $\in$ Ob(a), temos

$$F(id_A) = id_{F(A)}.$$

ii) Se f: A $\to$ B e g: B $\to$ C são morfismos em a, então

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Se a cada morfismo f: A $\to$ B, F associa um morfismo F(f): F(B) $\to$ F(A) e a condição ii) é substituida por

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g),$$

dizemos que F é um funtor contravariante. [7, pg.28]

Observação: Um funtor transforma isomorfismos em isomorfismos.

1.3.5. Exemplos

1) Se a cada grupo G nós associamos seu conjunto (G despojado da estrutura de grupo) e a cada homomorfismo de grupos associamos ele mesmo, visto como função de conjuntos, então nós obtemos um funtor covariante da categoria de grupos na categoria de conjuntos.

2) Sejam a uma categoria, B um objeto fixo em a e S a

categoria de conjuntos. Obtemos um funtor contravariante

$$F: a \to S$$

da seguinte maneira:

Para cada objeto $A \in Ob(a)$, $F(A) = Mor(A,B)$.

Para cada morfismo $\Psi : A' \to A$,

$$F(\Psi): Mor(A,B) \to Mor(A',B')$$

$$F(\Psi)(f) = f \circ \Psi.$$

1.3.6. <u>Definição</u>

Sejam a uma categoria e $(A_i)_{i \in I}$ uma família de objetos de a. Um produto para esta família consiste de $(P,(f_i)_{i \in I})$ onde P é um objeto de a e $(f_i: P \to A_i)_{i \in I}$ é uma família de morfismos em a, satisfazendo a seguinte condição: Dada uma família de morfismos $(g_i: C \to A_i)_{i \in I}$ existe um único morfismo $h: C \to P$ tal que

$$g_i = f_i \circ h \quad \text{para todo } i \in I.$$

Tomando $I = \{1,2\}$, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
A_1 & P \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] & A_2 \\
& C \arrow[ul, "g_1"] \arrow[u, "h"'] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

1.3.7. Exemplo

Seja K a categoria dos espaços topológicos compactos e Hausdorff. O produto nesta categoria coincide com o produto cartesiano usual, munido com a topologia do produto.

De fato, sejam $(X_i)_{i \in I}$ uma família de objetos de K e $P = \prod_{i \in I} X_i$ o seu produto cartesiano, munido com a topologia do produto.

Para cada $i \in I$, seja π_i a projeção sobre a i-ésima coordenada. Então para cada $i \in I$, π_i é um morfismo em K e pelo teorêma de Tychonov [6, pg 224], podemos concluir que $P \in Ob(K)$.

Além disso, podemos verificar que $(P, (\pi_i)_{i \in I})$ satisfaz a condição imposta na definição de produto.

1.3.8. Definição

Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de objetos de uma categoria $\mathcal{a}$. Um coproduto para esta família é um par $(S, (f_i)_{i \in I})$ consistindo de um objeto S de $\mathcal{a}$ e uma família de morfismos $(f_i : A_i \to S)_{i \in I}$ satisfazendo a seguinte condição: Dada uma família de morfismos $(g_i : A_i \to C)_{i \in I}$, existe um único morfismo $h: S \to C$ tal que $g_i = h \circ f_i$ para todo $i \in I$.

Tomando $I = \{1,2\}$, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & S \arrow[d, "h"] & A_2 \arrow[l, "f_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

1.3.9. Exemplo

Sejam K a categoria dos espaços topológicos compactos e Hausdorff e $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de objetos de K. Construiremos um coproduto para esta família.

Para isto, necessitamos da compactificação de Stone-Čech, que poderá ser encontrada em [6, pg 242 à 246] e em especial de sua caracterização, dada pelo teorema 8.2 da pg 243, e que citamos a seguir:

> 8.2 - Teorema (M. Stone; E. Čech). (1). Para cada espaço compacto Y e cada função contínua $f: X \to Y$, existe uma única função contínua $F: \beta(X) \to Y$ tal que $f = F \circ \rho$.
> (2). (Unicidade). Toda compactificação $(\hat{X}, h)$ de X tendo a propriedade (1) é homeomórfica a $\beta(X)$; de fato existe um homeomorfismo $\hat{X} \cong \beta(X)$ que é a função identidade sobre X.
> (3) $\beta(X)$ é a "maior" compactificação de X: se $\hat{X}$ é uma compactificação de X, então $\hat{X}$ é um espaço quociente de $\beta(X)$,

onde $(\beta(X), \rho)$ é a compactificação de Stone - Čech de X.

Seja $\bigcup_\alpha X_\alpha$ a união disjunta dos espaços X_α, $\alpha \in A$. Munimos $\cup_\alpha X_\alpha$ com a topologia fraca, ou seja, U é aberto em $\cup_\alpha X_\alpha$ se e somente se $U \cap X_\alpha$ é aberto em X_α, para cada $\alpha \in A$. Então $\cup_\alpha X_\alpha$ é um espaço completamente regular.

Seja $(\beta(\cup_\alpha X_\alpha), \rho)$ a compactificação de Stone-Čech de $\cup_\alpha X_\alpha$ e para cada $\alpha \in A$, seja

$$g_\alpha: X_\alpha \to \beta(\bigcup_\alpha X_\alpha)$$

$$g_\alpha: \rho \circ f_\alpha$$

onde $f_\alpha : X_\alpha \to \bigcup_\alpha X_\alpha$ é a função inclusão.

Então, $(\beta(\bigcup_\alpha X_\alpha), (g_\alpha)_{\alpha \in A})$ constitui um coproduto para a família $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$.

De fato, seja Y um espaço topológico compacto e Hausdorff e $(h_\alpha : X_\alpha \to Y)_{\alpha \in A}$ uma família de morfismos.

Devemos mostrar que existe uma única função contínua

$$F: \beta(\bigcup_\alpha X_\alpha) \to Y$$

tal que $h_\alpha = F \circ g_\alpha$ para todo $\alpha \in A$.

Seja

$$\psi : \bigcup_\alpha X_\alpha \to Y$$

$$\psi(x) = h_\alpha(x).$$

Provemos que ψ é contínua.

Sejam $x \in \bigcup_\alpha X_\alpha$ e U um aberto em Y tal que $\psi(x) \in U$. Então existe $\alpha \in A$, tal que $x \in X_\alpha$ e $\psi(x) = h_\alpha(x)$. Como h_α é contínua, existe um aberto $V_x \subset X_\alpha$ tal que $x \in V_x$ e $h_\alpha(V_x) \subseteq U$. Desde que V_x é aberto em $\bigcup_\alpha X_\alpha$ e $\psi(y) = h_\alpha(y)$ para todo $y \in V_x$, temos que $\psi(V_x) \subseteq U$ e desta forma ψ é contínua em x.

Além disso, não é difícil verificar que ψ é a <u>única</u> função contínua tal que

$$h_\alpha = \psi \circ f_\alpha \quad \text{para todo} \quad \alpha \in A.$$

Seja $F: \beta(\bigcup_\alpha X_\alpha) \to Y$ a única função contínua tal que

$$F \circ \rho = \psi \quad [6, \text{pg } 243].$$

Em diagrama, temos:

$$
\begin{tikzcd}
X_\alpha \arrow[rr, "g_\alpha"] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, "h_\alpha"'] & & \beta(\underset{\alpha}{\cup} X_\alpha) \arrow[ddl, "F"] \\
& \underset{\alpha}{\cup} X_\alpha \arrow[ur, "\rho"] \arrow[d, "\psi"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}
$$

e desta forma, podemos ver que

$$h_\alpha = \psi \circ f_\alpha = (F \circ \rho) \circ f_\alpha = F \circ (\rho \circ f_\alpha) = F \circ g_\alpha .$$

Além disso, F é a única função contínua tal que $h_\alpha = F \circ g_\alpha$ para todo α.

CAPÍTULO II

ÁLGEBRAS DE BANACH

2.1. Definição

Seja A um espaço vetorial sobre o corpo K. Dizemos que A é uma álgebra sobre o corpo K, ou que A é uma K-álgebra, se existe uma operação multiplicação ., sobre A, tal que:

i) $(A, +, .)$ é um anel, onde + denota a adição vetorial sobre A.

ii) Para todo $a,b \in A$ e $\alpha \in K$, $a.(\alpha b) = (\alpha a).b = \alpha(a.b)$.

Se $a.b = b.a$ para todo a e b em A, nós dizemos que A é uma K-álgebra comutativa.

Se existe um elemento e em A tal que $e.a = a.e = a$ para todo a em A, dizemos que e é a identidade de A. Observamos que se tal elemento existe ele é necessariamente único.

2.2. Definição

Seja A uma álgebra sobre o corpo dos complexos, com identidade e. A é dita uma álgebra normada, se existe uma norma sobre A satisfazendo:

i) $\|a.b\| < \|a\| \, \|b\|$ para todo a e b em A.

ii) $\|e\| = 1$.

Se A é completa com respeito à sua norma, isto é, se A visto como espaço vetorial é um espaço de Banach, então A é chamada a uma álgebra de Banach.

Observamos que na definição 2.2, a condição i) força a continuidade da multiplicação na topologia da norma.

2.3. Exemplo

Sejam X um espaço topológico compacto e $C(X) = \{f: X \to \mathbb{C};$ f é contínua$\}$. Então C(X) com a adição e multiplicação usuais de funções é uma álgebra comutativa sobre o corpo dos complexos. A identidade de C(X) é a função $f: X \to \mathbb{C}$

$$x \to 1 .$$

A função $\|.\| : C(X) \to \mathbb{R}$

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

é uma norma sobre C(X). Esta norma satisfaz i) e ii) da definição 2.2. e C(X) munido com esta norma é uma álgebra de Banach.

Com as estruturas definidas, nós podemos obter as usuais construções algébricas. Por exemplo, um subconjunto I de uma álgebra normada A é chamado um ideal de A, se:

i) $a, b \in I \Longrightarrow a + b \in I$

ii) $a \in I$ e $\lambda \in C \Longrightarrow \lambda a \in I$

iii) $a \in A$ e $b \in I \Longrightarrow a.b \in I$ e $b.a \in I$

Como em nosso desenvolvimento posterior, usaremos a álgebra quociente A/I, onde I é um ideal de A, faremos agora a construção desta álgebra.

Seja A uma álgebra normada. Definimos a seguinte relação em A. Dados a e b em A, $a \equiv b \pmod{I} \iff a - b \in I$. Observamos que esta relação é uma relação de equivalência em A. Denotamos por $\bar{a}$ o conjunto, $\bar{a} = \{b \in A;\ b \equiv a \pmod{I}\}$, que é chamado classe de equivalência do elemento $a \in A$ com respeito à relação $\equiv \pmod{I}$. Como $b \in \bar{a} \iff b - a \in I$, também denotaremos a classe $\bar{a}$ por $\bar{a} = a + I = \{a + b;\ b \in I\}$. O conjunto $A/I = \{\bar{a} = a + I;\ a \in A\}$ é dito conjunto quociente de A pelo ideal I.

Sobre o conjunto quociente A/I, definimos as seguintes operações:

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

$$(a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I$$

Não é difícil verificar que estas operações estão bem definidas e que $(A/I, +, \cdot)$ é um anel.
Finalmente, se definimos

$$\lambda(a + I) = (\lambda a) + I,\ \lambda \in \mathbb{C}$$

nós obtemos uma estrutura algébrica sobre o conjunto das classes de equivalência de A módulo I. Esta álgebra é denotada por A/I e é chamada álgebra quociente de A pelo ideal I.

2.4. Teorema

Sejam A uma álgebra normada e I um ideal fechado de A. Então existe uma norma sobre A/I definida por

$$\|a + I\| = \inf_{i \in I} \|a + i\| .$$

Munida com esta norma, A/I é uma álgebra normada. Se A for uma álgebra de Banach, o mesmo ocorre com A/I.

Demonstração:

a) Mostraremos primeiro que a norma é bem definida e que satisfaz as propriedades de norma.

a.i) Sejam $\bar{a}$ e $\bar{b} \in A/I$, $\bar{a} = \bar{b}$. Então $a - b \in I$ e $\{a + i;\ i \in I\} = \{b + i;\ i \in I\}$.

Assim, $\|\bar{a}\| = \inf\limits_{i \in I} \|a + i\| = \inf\limits_{i \in I} \|b + i\| =$

$= \|\bar{b}\| \leqslant \|b\| < \infty$, pois $0 \in I$.

Portanto, a norma está bem definida.

a.ii) $\|\bar{a}\| \geqslant 0$ e $\|\bar{a}\| = 0 \iff \bar{a} = \bar{0}$.

Claramente $\|\bar{a}\| \geqslant 0$ e se $\bar{a} = \bar{0}$ então $\|\bar{a}\| = \inf\limits_{i \in I} \|0 + i\| = 0$. Suponhamos que $\|\bar{a}\| = \inf\limits_{i \in I} \|a + i\| = 0$. Então existe uma seqüência $(i_n)_n \subset I$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} \|a + i_n\| = 0$ e portanto a seqüência $(i_n)_n$ converge para $-a$ em A. Como $(i_n)_n \subset I$ e I é fechado, $-a \in I$ e assim $a \in I$. Logo, $\bar{a} = \bar{0}$.

a.iii) $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\bar{a} \in A/I \Rightarrow \|\lambda\bar{a}\| = |\lambda|\ \|\bar{a}\|$.

Se $\lambda = 0$, a igualdade é trivial.

Suponhamos que $\lambda \neq 0$. $\|\lambda . \bar{a}\| = \|\lambda(a + I)\| =$ $\|\lambda a + I\| = \inf\limits_{i \in I} \|\lambda a + i\| = \inf\limits_{i \in I} |\lambda|\|a + \frac{1}{\lambda} i\| =$

$|\lambda| \inf\limits_{i \in I} \|a + \frac{1}{\lambda} i\| = |\lambda|\ \|\bar{a}\|$.

a.iv) $\bar{a}$ e $\bar{b} \in A/I \Longrightarrow \|\bar{a} + \bar{b}\| \leqslant \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\|$.

Seja $\varepsilon > 0$. Como $\|\bar{a}\| = \inf_{i \in I} \|a + i\|$ e $\|\bar{b}\| = \inf_{i \in I} \|b + i\|$ existem $i, j \in I$ tais que

$\|a + i\| < \|\bar{a}\| + \varepsilon/2$ e $\|b + j\| < \|\bar{b}\| + \varepsilon/2$.

Então, temos que

$$\|\bar{a} + \bar{b}\| = \|(a + b) + I\| = \inf_{i \in I} \|a + b + 1\| \leqslant$$

$$\leqslant \|a + b + i + j\| \leqslant \|a + i\| + \|b + j\| < \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\| + \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, concluimos que

$\|\bar{a} + \bar{b}\| \leqslant \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\|$.

b) A norma acima definida satisfaz as condições i) e ii) da definição 2.2.

b.i) $\|\bar{a} \,.\, \bar{b}\| \leqslant \|\bar{a}\| \,.\, \|\bar{b}\|$

$$\|\bar{a} \,.\, \bar{b}\| = \|(a + I) \,.\, (b + I)\| = \|a \,.\, b + I\| = \inf_{i \in I} \|a \,.\, b + i\| \leqslant \inf_{i,j \in I} \|(a + i).(b + j)\|$$

$$\leqslant \inf_{i,j \in I} \|a + i\| \, \|b + j\| = \inf_{i \in I} \|a + i\| \,.\, \inf_{j \in I} \|b + j\| = \|\bar{a}\| \,.\, \|\bar{b}\|.$$

b.ii) $\|\bar{e}\| = 1$ onde e é a identidade de A.

Seja $a \in A$ qualquer. Então por b.i), $\|\bar{a}\| = \|a + I\| = \|a \,.\, e + I\| = \|(a + I).(e + I)\| \leqslant \|\bar{a}\| \,.\, \|\bar{e}\|$

Assim, $\|\bar{e}\| \geqslant 1$. Por outro lado, $\|\bar{e}\| = \|e + I\| = \inf_{i \in I} \|e + i\| \leqslant \|e\| = 1$. Portanto, $\|\bar{e}\| = 1$.

Por a) e b) concluimos que A/I é uma álgebra normada.

c) Suponhamos que A é de Banach e mostremos que A/I é de Banach.

Seja $(\bar{a}_n)_n$ uma seqüência de Cauchy em A/I. Mostremos que existe uma subseqüência $(\bar{a}_{n_k})_k$ de $(\bar{a}_n)_n$ tal que

(1) $$\|\bar{a}_{n_{k+1}} - \bar{a}_{n_k}\| < 1/2^k \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Como $(\bar{a}_n)_n$ é de Cauchy, então para $\varepsilon = 1/2$, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $m,n > m_1$, temos

$$\|\bar{a}_m - \bar{a}_n\| < 1/2 .$$

Para $\varepsilon = 1/2^2$, existe $m_2 > m_1$ tal que para $m,n > m_2$ temos

$$\|\bar{a}_m - \bar{a}_n\| < 1/2^2 .$$

Escolhemos $n_1 > m_1$ e $n_2 > m_2$. Então $\|\bar{a}_{n_2} - \bar{a}_{n_1}\| < 1/2$.

Para $\varepsilon = 1/2^3$, existe $m_3 > m_2$ tal que para $m,n > m_3$ temos

$$\|\bar{a}_m - \bar{a}_n\| < 1/2^3 .$$

Escolhemos $n_3 > m_3$. Então, $\|\bar{a}_{n_3} - \bar{a}_{n_2}\| < 1/2^2$.

Continuando o raciocínio, obtemos a subseqüência $(a_{n_k})_k$ desejada.

Mostremos agora que para cada k, existe $b_{n_k} \in \bar{a}_{n_k}$ tal que

(2) $$\|b_{n_{k+1}} - b_{n_k}\| < 1/2^k .$$

Como $\|\bar{a}_{n_{k+1}} - \bar{a}_{n_k}\| < 1/2^k$ para todo k, existe

$c_k \in \overline{a_{n_{k+1}} - a_{n_k}}$ tal que $\|c_k\| < 1/2^k$.

Seja $b_{n_1} \in \bar{a}_{n_1} = a_{n_1} + I$. Então $b_{n_1} = a_{n_1} + i$, para algum $i \in I$.

Como $c_1 \in \overline{a_{n_2} - a_{n_1}}$, então $c_1 = (a_{n_2} - a_{n_1}) + j$, $j \in I$.

Escolhemos $b_{n_2} = a_{n_2} + (i + j) \in \bar{a}_{n_2}$. Então

$b_{n_2} - b_{n_1} = a_{n_2} + (i + j) - (a_{n_1} + i) = a_{n_2} - a_{n_1} + j = c_1$ e

portanto $\|b_{n_2} - b_{n_1}\| = \|c_1\| < 1/2$

Como $c_2 \in \overline{a_{n_3} - a_{n_2}}$ então $c_2 = (a_{n_3} - a_{n_2}) + \ell$, $\ell \in I$.

Escolhemos $b_{n_3} = a_{n_3} + i + \ell + j \in \bar{a}_{n_3}$. Então

$\|b_{n_3} - b_{n_2}\| = \|a_{n_3} + i + j + \ell - (a_{n_2} + i + j)\| =$

$\|a_{n_3} - a_{n_2} + \ell\| = \|c_2\| < 1/2^2$.

Continuando o raciocínio, obtemos (2) e além disso,

$b_{n_k} = a_{n_k} + m_k$, $m_k \in I$.

Por (2), a seqüência $(b_{n_k})_k \subset A$ é de Cauchy. Como A é de Banach,

existe $b \in A$ tal que $(b_{n_k})_k$ converge para b.

Mas $\|\bar{a}_{n_k} - \bar{b}\| = \inf_{i \in I} \|(a_{n_k} - b) + i\| \leq \|b_{n_k} - b\| \to 0$. Portanto

a subseqüência $(\bar{a}_{n_k})_k$ de $(\bar{a}_n)_n$ converge para $\bar{b}$ e assim a seqüência $(\bar{a}_n)_n$ também converge para $\bar{b}$.

2.5. Definição

Sejam A e B álgebras normadas. Uma função $\Psi : A \to B$ é dita um homomorfismo algébrico se satisfaz:

i) $\Psi(a + b) = \Psi(a) + \Psi(b)$, $a,b \in A$

ii) $\Psi(a \cdot b) = \Psi(a) \cdot \Psi(b)$, $a,b \in A$

iii) $\Psi(\alpha a) = \alpha \Psi(a)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ e $a \in A$.

Se Ψ é bijetiva, Ψ é dita um isomorfismo algébrico.

Dizemos que um homomorfismo algébrico $\Psi : A \to B$ é decrescente em norma se

$$\|\Psi(a)\|_B \leqslant \|a\|_A \quad \text{para todo } a \in A.$$

Observamos que se A é uma álgebra normada e I é um ideal fechado de A, então a função $\eta : A \to A/I$ definida por $\eta(a) = a + I$ é um homomorfismo algébrico decrescente em norma. Este particular homomorfismo será chamado a função natural de A em A/I.

2.6. Teorema

Sejam A e B álgebras normadas e $\Psi : A \to B$ um homomorfismo algébrico subrejetivo. Então o núcleo de Ψ,

$$\text{Ker}\ (\Psi) = \{a \in A;\ \Psi(a) = 0\}$$

é um ideal de A e existe um isomorfismo algébrico $\Phi : A/\text{Ker}\ (\Psi) \to B$ tal que o diagrama abaixo é comutativo, onde η é a função natural.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\eta"'] & B \\ A/Ker(\Psi) \arrow[ur, "\Theta"'] & \end{tikzcd}$$

Se Ψ é contínua, também o é Θ . Se Ψ é aberta, o mesmo ocorre com Θ .

Demonstração:

a) $Ker\ (\Psi) = \{a \in A;\ \Psi(a) = 0\}$ é um ideal de A.

Na demonstração usa-se apenas o fato de Ψ ser um homomorfismo algébrico, portanto não a faremos com detalhes.

b) Existe um isomorfismo algébrico $\Theta : A/Ker\ (\Psi) \to B$ tal que o diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\eta"'] & B \\ A/Ker(\Psi) \arrow[ur, "\Theta"'] & \end{tikzcd}$$

Sejam $a \in A$ e $\bar{a} = a + Ker(\Psi)$. Definimos

$$\Theta : A/Ker\ (\Psi) \to B$$

$$\Theta\ (\bar{a}) = \Psi(a)$$

Se $\bar{a} = \bar{b}$ então $a - b \in Ker(\Psi)$ e assim $\Psi(a) - \Psi(b) = \Psi(a - b) = 0$. Portanto, $\Theta\ (\bar{a}) = \Psi(a) = \Psi(b) = \Theta\ (\bar{b})$ o que mostra que Θ está bem definida.

Não é difícil verificar que Θ é um homomorfismo algébrico. Se $\bar{a} \neq \bar{b}$, $a - b \notin Ker(\Psi)$. Então $\Psi(a - b) = \Psi(a) - \Psi(b) \neq 0$ e $\Theta(\bar{a}) = \Psi(a) \neq \Psi(b) = \Theta(\bar{b})$ mostrando que Θ é injetiva.
Como Ψ é sobrejetiva, o mesmo ocorre com Θ. Logo, concluimos que Θ é um isomorfismo algébrico.

c) Se Ψ é contínua, também o é Θ.

Se Ψ é contínua, então $Ker(\Psi)$ é um ideal fechado de A e pelo teorema 2.4.,

$$\|\bar{a}\| = \inf_{i \in Ker(\Psi)} \|a + i\| .$$

Seja $V \subset B$ aberto. $\Theta^{-1}(V) = \eta(\Psi^{-1}(V))$. Como Ψ é contínua e η é aberta (ver observação abaixo), então $\Theta^{-1}(V)$ é aberto e portanto Θ é contínua.

d) Se Ψ é aberta o mesmo ocorre com Θ.

Seja $V \subset A/Ker(\Psi)$ aberto. Como η é contínua, $\eta^{-1}(V) \subset A$ é aberto e como Ψ é aberta, $\Theta(V) = \Psi(\eta^{-1}(V)$ é aberto em B. Assim Θ é aberta.

Observamos que no item c) usamos o fato de η ser uma função aberta, o que demonstraremos a seguir.
Sejam A uma álgebra normada, I um ideal fechado de A e $\eta: A \to A/I$ a função natural. Seja V uma vizinhança de zero em A. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(0) = \{a \in A; \|a\| < \varepsilon\} \subset V$.
Provemos que $B_\varepsilon(\bar{0}) = \{\bar{a} \in A/I; \|\bar{a}\| < \varepsilon\} \subset \eta\ (V)$.
Seja $\bar{a} \in B_\varepsilon(\bar{0})$. Como $\|\bar{a}\| = \inf_{c \in a+I} \|c\| = \inf_{i \in I} \|a + i\|$, então existe $b \in \bar{a}$ tal que $\|b\| < \varepsilon$, isto é, existe $b \in \bar{a}$ tal que $b \in B_\varepsilon(0) \subset V$. Então $\eta(b) \in \eta(V)$.

Como $b \in \bar{a}$, temos $\bar{a} = \eta(a) = \eta(b) = \bar{b}$ e portanto $\bar{a} \in \eta(V)$, o que mostra que $B_\varepsilon(\bar{0}) \subset \eta(V)$ e que $\eta(V)$ é uma vizinhança de zero em A/I.

Logo, η é aberta.

2.7. <u>Teorema</u>

Sejam A uma álgebra de Banach com identidade e e $a \in A$ tal que $\|e - a\| < 1$. Então a tem um inverso multiplicativo em A que é dado por

$$e + \sum_{n=1}^{\infty} (e - a)^n .$$

<u>Demonstração</u>:

Seja $b = (b_n)_n$ a seqüência em A definida por

$$b_n = e + \sum_{i=1}^{n} (e - a)^i .$$

Mostremos que b é uma seqüência de Cauchy.

Seja $\varepsilon > 0$. Então para $m,n,N \in \mathbb{N}$, $m > n > N$, temos

$$\|b_m - b_n\| = \|e + \sum_{i=1}^{m} (e - a)^i - (e + \sum_{i=1}^{n} (e - a)^i)\| =$$

$$= \|\sum_{i=n}^{m} (e - a)^i\| = \|(e - a)^n + (e - a)^{n+1} + \dots + (e - a)^m\| =$$

$$= \|(e - a)^N ((e - a)^{n-N} + (e - a)^{n+1-N} + \dots + (e - a)^{m-N}\| =$$

$$= \|(e - a)^N \sum_{i=n-N}^{m-N} (e - a)^i\| \leq \|e - a\|^N . \sum_{i=n-N}^{m-N} \|e - a\|^i \leq$$

$$\leq \|e - a\|^N . (1 - \|e - a\|)^{-1}$$

Desde que $\|e - a\| < 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m,n \geq N$, $\|b_m - b_n\| < \varepsilon$. Então $b = (b_n)_n$ é uma seqüência de Cauchy em A. Como A é uma álgebra de Banach, b tem um limite em A, que denotamos por a^*, e

$$a^* = e + \sum_{i=1}^{\infty} (e - a)^i .$$

Provemos agora que a^* é o inverso multiplicativo de a.

Seja $n \in \mathbb{N}$. $a.b_n = (e - (e - a)).b_n = b_n - (e - a).b_n =$

$$= b_n - (e - a).(e + \sum_{i=1}^{n} (e - a)^i) = b_n - ((e - a)\, e \; +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (e - a)^{i+1}) = b_n - ((e - a) + \sum_{i=1}^{n} (e - a)^{i+1})$$

$$= (b_n - e) + a - \sum_{i=1}^{n} (e - a)^{i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (e - a)^i + a - \sum_{i=1}^{n} (e - a)^{i+1}$$

$$= (e - a) + a - (e - a)^{n+1} = e - (e - a)^{n+1}$$

Levando ao limite, temos $a.a^* = e$.

Analogamente, prova-se que $a^*.a = e$.

2.8. <u>Definição</u>

Sejam A uma álgebra normada com identidade e, λ um nº complexo e $a \in A$. Dizemos que λ é um ponto regular de a se $\lambda e - a$ tem inverso multiplicativo. O conjunto dos elementos de $\mathbb{C}$ que não são pontos regulares de a é chamado o <u>espectro de a</u>. O espectro de a será denotado por sp(a). Um elemento $a \in A$ que possui inverso multiplicativo é dito uma unidade de A.

2.9. Corolário (do teorema 2.7)

Sejam A uma álgebra de Banach com identidade e e $a \in A$. Então todo número complexo λ tal que $|\lambda| > \|a\|$ é um ponto regular de a. Além disso,

$$(\lambda e - a)^{-1} = \lambda^{-1}.e + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-(n+1)}.a^n \quad .$$

Demonstração:

Se $e - \lambda^{-1}.a$ tem inverso, o mesmo ocorre com $\lambda e - a$. Desde que $\|e - (e - \lambda^{-1}.a)\| = |\lambda^{-1}|.\ \|a\| < 1$, segue do teorema 2.7, que $(e - \lambda^{-1}.a)$ tem um inverso multiplicativo e que

$$(e - \lambda^{-1}.a)^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} (e - (e - \lambda^{-1}.a))^n = e + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n}.a^n \ .$$

Então,

$$(\lambda e - a)^{-1} = (\lambda(e - \lambda^{-1}.a))^{-1} = \lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}.a)^{-1} =$$

$$= \lambda^{-1}.e + \lambda^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n}.a^n = \lambda^{-1}.e + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-(n+1)}.a^n \ .$$

2.10. Teorema

Seja A uma álgebra de Banach com identidade e. Então o grupo de unidades de A é aberto e o espectro de cada elemento de A é compacto.

Demonstração:

Provemos que U é aberto.

Seja $N = \{a \in A; \|e - a\| < 1\}$. Pelo teorema 2.7, $N \subset U$. Seja $b \in U$. Então $b.b^{-1} \in N$. Como N é aberto e a multiplicação é contínua, existe uma bola aberta $B(b)$ tal que $b \in B(b)$ e $B(b).b^{-1} \subset N$. Vamos mostrar que $B(b) \subset U$.

Seja $c \in B(b)$. Então $c.b^{-1} \in N \subset U$. Isto implica que existe $d \in A$ tal que $d.(c.b^{-1}) = (c.b^{-1}).d = e$. Então

(1) $$c.(b^{-1}.d) = e$$

Por outro lado, $(d.c).b^{-1} = d.(c.b^{-1}) = e$ implica que $d.c = b$ e assim $b^{-1}.(d.c) = e$.

(2) Mas $b^{-1}.(d.c) = (b^{-1}.d).c = e$

Por (1) e (2) concluimos que $c^{-1} = b^{-1}.d$ e portanto $c \in U$ e $B(b) \subset U$.

Podemos escrevèr $U = \bigcup_{b \in U} B(b)$ o que mostra que U é aberto.

Seja $a \in A$. Vamos mostrar que o conjunto dos pontos regulares de a é aberto.

Seja λ_o um ponto regular de a. Consideremos a função

$$f: \mathbb{C} \to A$$

$$f(\lambda) = \lambda e - a$$

Desde que $\|(\lambda e - a) - (\lambda_o e - a)\| = |\lambda - \lambda_o| \, \|e\| = |\lambda - \lambda_o|$, f é contínua em λ_o.

Como $f(\lambda_o) = \lambda_o e - a \in U$ e U é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(\lambda_o)) \subset U$. Então todo ponto de $B_\delta(\lambda_o)$ é um ponto regular de a. Segue que o conjunto dos pontos regulares de a é aberto.

Então, o espectro de a, como complementar de um aberto, é um conjunto fechado. Pelo corolário 2.9., o espectro de a está contido na bola fechada $B_{\|a\|}(0)$.

Assim, sp(a) é um conjunto fechado e limitado em $\mathbb{C}$ e portanto compacto.

2.11. <u>Definição</u>

Sejam A uma álgebra normada e $a \in A$. O raio espectral de a, denotado por $\rho(a)$, é o número

$$\rho(a) = \sup \{|\lambda| \ ; \ \lambda \in sp(a)\} .$$

Observamos que para todo $a \in A$, $\rho(a) < \|a\|$.

2.12. <u>Teorema</u>

Seja A uma álgebra de Banach com identidade e. Então o grupo de unidades de A é um grupo topológico.

<u>Observação</u>: A definição de grupo topológico pode ser encontrada em [9, pg 2].

<u>Demonstração</u>:

Sendo A uma álgebra de Banach, temos a continuidade da multiplicação, imposta pela condição ii) da definição 2.2..

Seja U o grupo de unidades de A. Devemos mostrar que a função

$$f: U \to U$$
$$a \to a^{-1}$$

é contínua.

Sejam $a \in U$, $0 < \varepsilon < 1$ e $(a_n)_n$ uma seqüência em U com limite a. Provemos que $(f(a_n))_n$ converge para f(a).

Como a seqüência $(a_n)_n$ converge para a, a seqüência $(a^{-1}.a_n)_n$ tem limite $a^{-1}.a = e$. Então, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant N_1$ temos

$$\|a^{-1}.a_n - e\| < 1 \qquad \text{e}$$

$$\|a_n - a\| < \varepsilon/2\,\|a^{-1}\|$$

Pelo teorema 2.7., para cada $n \geqslant N_1$, $a^{-1}.a_n$ tem um inverso e

$$a_n^{-1}.a = (a^{-1}.a_n)^{-1} = e + \sum_{k=1}^{\infty} (e - a^{-1}.a_n)^k .$$

Então, para $n \geqslant N_1$, temos

$$\|e - a_n^{-1}.a\| = \|e - e - \sum_{k=1}^{\infty} (e - a^{-1}.a_n)^k\| =$$

$$= \|\sum_{k=1}^{\infty} (e - a^{-1}.a_n)^k\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|(e - a^{-1}.a_n)^k\| =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \|(a^{-1}(a - a_n))^k\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|a^{-1}\|^k \|a - a_n\|^k <$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty} \|a^{-1}\|^k . (\varepsilon/(2\,\|a^{-1}\|))^k = \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon/2)^k =$$

$$= \varepsilon/2\ /(1 - \varepsilon/2) < \varepsilon$$

Portanto, a seqüência $(a_n^{-1}.a)_n$ tem limite $a^{-1}.a = e$ e a seqüência $(a_n^{-1})_n$ tem limite a^{-1}, o que mostra que f é contínua em a.

2.13. Definição

Sejam A uma álgebra normada com identidade e e $a \in A$. A função

$$r_a: \mathbb{C} - sp(a) \to A$$
$$\lambda \to (\lambda e - a)^{-1}$$

é chamada resolvente de a.

Observamos que $Im(r_a) \subseteq U$.

2.14. Teorema

Sejam A uma álgebra de Banach com identidade e, $a \in A$ e r_a a resolvente de a. Então para cada função linear contínua $f: A \to \mathbb{C}$, a função $f \circ r_a$ é analítica.

Demonstração:

Desde que sp(a) é compacto, o domínio de r_a é claramente um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. Vamos mostrar que $f \circ r_a$ é derivável em cada ponto de seu domínio.

Suponhamos que λ_1 e λ_2 são elementos de $\mathbb{C}$ - sp(a). Então

$(r_a(\lambda_1))^{-1} \cdot r_a(\lambda_2) = (\lambda_1 e - a)\, r_a(\lambda_2)$

$= ((\lambda_2 e - a) + (\lambda_1 - \lambda_2)e)\, r_a(\lambda_2)$

$= (\lambda_2 e - a)\ r_a(\lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)\ r_a(\lambda_2)$

$= (\lambda_2 e - a)\ (\lambda_2 e - a)^{-1} + (\lambda_1 - \lambda_2)\ r_a(\lambda_2)$

$= e + (\lambda_1 - \lambda_2)\ r_a(\lambda_2)$

e,

$r_a(\lambda_2) = r_a(\lambda_1) + (\lambda_1 - \lambda_2)\ r_a(\lambda_2)\ r_a(\lambda_1)$.

Assim, para cada $f: A \to \mathbb{C}$ linear e contínua, temos

$f(r_a(\lambda_2)) = f(r_a(\lambda_1)) - (\lambda_2 - \lambda_1)\ f(r_a(\lambda_2)\ .\ r_a(\lambda_1))$ e portanto

(1) $((for_a)\ (\lambda_2) - (for_a)(\lambda_1))/(\lambda_2 - \lambda_1) = -f(r_a(\lambda_2).r_a(\lambda_1))$.

Como f é contínua, usando a igualdade (1), para $\lambda_1 \neq \lambda_2$, temos

(2) $$\left| \frac{(f \circ r_a)(\lambda_2) - f \circ r_a(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} - (-f(r_a(\lambda_1))^2 \right| =$$

$$= \left| -f(r_a(\lambda_2)\ .\ r_a(\lambda_1)) + f(r_a(\lambda_1))^2 \right|$$

$$\leqslant M\ \|-(r_a(\lambda_2)\ .\ r_a(\lambda_1)) + (r_a(\lambda_1))^2\|$$

$$\leqslant M\ \|r_a(\lambda_1)\|\ .\ \|r_a(\lambda_2) - r_a(\lambda_1)\|.$$

Desde que r_a é a composta das funções contínuas

$$g: \mathbb{C} - sp(a) \to U$$
$$\lambda \to \lambda e - a$$

e

e $$h: U \to A$$
$$u \to u^{-1}$$

então r_a é contínua. Assim, tomando o limite quando $\lambda_2 \to \lambda_1$ o 2º membro da expressão (2) converge para zero.

Logo, $$\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \frac{(f \circ r_a)(\lambda_2) - (f \circ r_a)(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} = -f(r_a(\lambda_1))^2$$

e $f \circ r_a$ é derivável em λ_1.

Segue que $f \circ r_a$ é analítica.

2.15. <u>Corolário</u>

Se A é uma álgebra de Banach com identidade e, então para cada $a \in A$, sp(a) é não vazio.

<u>Demonstração</u>:

Suponhamos que $a \in A$ e $sp(a) = \phi$. Então o domínio de r_a é todo plano complexo e pelo teorema 2.14, para cada transformação linear contínua $f: A \to \mathbb{C}$, $f \circ r_a$ é uma função inteira.
Mostremos que $f \circ r_a$ é limitada.
Desde que $e - \lambda^{-1}.a \to e$ quando $\lambda \to \infty$, e a função

$$h: U \to U$$
$$u \to u^{-1}$$

é contínua, existe $M > 0$ tal que se $|\lambda| \geqslant M$, então

$$\|(e - (\lambda^{-1}.a)^{-1} - e^{-1}\| \leqslant 1 .$$

Assim, para todo λ tal que $|\lambda| \geqslant M$,

$\|(\lambda e - a)^{-1}\| = \|\lambda^{-1}.(e - \lambda^{-1}.a)^{-1}\|$

$\leqslant |\lambda^{-1}|. (\|(e - \lambda^{-1}a)^{-1} - e^{-1}\| + \|e\|)$

$\leqslant |\lambda^{-1}|. (1 + \|e\|) = 2|\lambda^{-1}| \leqslant 2/M$

Desde que $\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leqslant M\}$ é compacto e r_a é contínua, existe $B > 0$ tal que

$$\|(\lambda e - a)^{-1}\| \leqslant B + 2/M \text{ para qualquer } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Como f é contínua,

$\|(f \circ r_a)(\lambda)\| = \|f(\lambda e - a)^{-1}\| \leqslant \|f\| \|(\lambda e - a)^{-1}\|$

$\leqslant L(B + 2/M)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Logo, $f \circ r_a$ é limitada.

Pelo teorema de Liouville [3, pg 309], $f \circ r_a$ é constante.

Mas,

$|(f \circ r_a)(\lambda)| = |f(r_a(\lambda))| = |f(\lambda e - a)^{-1}|$

$\leqslant \|f\| \|(\lambda e - a)^{-1}\| = \|f\| |\lambda^{-1}| \|(e - \lambda^{-1}a)^{-1}\| \to 0$

quando $\lambda \to \infty$.

Isto implica que $(f \circ r_a)(\lambda) = 0$ para toda $f: A \to \mathbb{C}$ linear, contínua e todo $\lambda \in \mathbb{C}$, o que por sua vez implica que

$$r_a(\lambda) = (\lambda e - a)^{-1} = 0 ,$$

o que é uma contradição, pois $Im(r_a) \subseteq U$.

Segue que $sp(a) \neq \phi$.

2.16. Proposição

Sejam A uma álgebra de Banach com identidade e, e $a \in A$. Então

$$\rho(a) \geqslant \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}, \text{ onde}$$

$\rho(a)$ é o raio espectral de a.

Demonstração:

Seja $f: A \to \mathbb{C}$ uma transformação linear contínua. Definimos $g: \{\lambda; |\lambda| \geqslant \rho(a)\} \to \mathbb{C}$

$$g(\lambda) = f((e - \lambda^{-1}a)^{-1}).$$

Pelo teorema 2.14, g é analítica e pelo corolário 2.9, para $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > \|a\|$, $e - \lambda^{-1}a$ tem um inverso que é dado por

$$(1) \qquad (e - \lambda^{-1}a)^{-1} = e + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k}a^k .$$

Substituindo (1) na definição de g, temos

$$g(\lambda) = f(e + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} a^k) = f(e) + \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda^{-k} a^k)$$

e portanto existe $M_{\lambda,f} > 0$ tal que

$$(2) \qquad |f(\lambda^{-k} a^k)| \leqslant M_{\lambda,f} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Seja A' o conjunto das transformações lineares contínuas de A em $\mathbb{C}$. Fixamos $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \rho(a)$ e definimos

$$F_n : A' \to \mathbb{C}$$

$$F_n(f) = f(\lambda^{-n}\, a^n) .$$

Então por (2), $(F_n)_n$ é pontualmente limitada e pelo corolário 1.1.7, para cada n, F_n é contínua e

$$\| F_n \| = \| \lambda^{-n}\, a^n \| .$$

Usando o Teorema de Banach - Steinhaus (1.1.8), concluimos que existe $M_\lambda > 0$ tal que

$$\| F_n \| = \| \lambda^{-n}\, a^n \| \leq M_\lambda \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, $\|a^n\| \leq M_\lambda\, |\lambda^n|$ e $\sqrt[n]{\|a^n\|} \leq |\lambda|\, \sqrt[n]{M_\lambda}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|} \leq |\lambda| \quad \text{para todo } \lambda \text{ tal que } |\lambda| > \rho(a).$$

Segue que $\rho(a) \geqslant \limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$.

2.17. <u>Proposição</u>

Seja A uma álgebra de Banach com identidade e, e $a \in A$. Então

$$\rho(a) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|} .$$

Demonstração:

Sejam $a \in A$, n um número inteiro positivo e λ um número complexo. Suponhamos que $\lambda^n \notin sp(a^n)$. Mostraremos que $\lambda \notin sp(a)$. Desde que

$$(a^n - \lambda^n e) = (a - \lambda e)(a^{n-1} + \lambda a^{n-2} + \ldots + \lambda^{n-1} e) ,$$

multiplicando por $(a^n - \lambda^n e)^{-1}$, obtemos:

$e = (a - \lambda e)(a^{n-1} + \lambda a^{n-2} + \ldots + \lambda^{n-1} e)(a^n - \lambda^n e)^{-1}$, o que mostra que $(a - \lambda e)$ é inversível, isto é, $\lambda \notin sp(a)$.

Seja $\lambda \in sp(a)$. Então $\lambda^n \in sp(a^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo corolário 2.9, $|\lambda^n| \leq \|a^n\|$. Isto implica que $|\lambda| \leq \sqrt[n]{\|a^n\|}$ para todo $\lambda \in sp(a)$. Tomando o limite inferior, temos

$$|\lambda| \leq \liminf_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|} \quad \text{para todo } \lambda \in sp(a).$$

Logo, $\rho(a) \leq \liminf\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$.

Pela proposição 2.16, $\rho(a) \geq \limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$.

Segue que $\rho(a) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$.

2.18. Teorema

Seja A uma álgebra de Banach com identidade e. Então A possui um ideal máximo. Além disso, se I é ideal máximo de A, então I é fechado.

<u>Demonstração</u>:

a) A possui ideal máximo.

Seja $F = \{I;\ I$ é ideal próprio de $A\}$.

a.1) $F \neq \phi$ pois $\{0\} \in F$.

a.2) Definimos a seguinte relação de ordem em F:

Se $I, J \in F$, $\quad I \leqslant J \Longleftrightarrow I \subset J$.

a.3) $(F, \leqslant)$ é um conjunto indutivo, isto é, toda cadeia em F possui uma cota superior em F.

Sejam $\{I_\alpha\}_{\alpha \in L}$ uma cadeia em F e

$$M = \bigcup_{\alpha \in L} I_\alpha .$$

a.3.i) $M \neq A$.

Como para cada α, I_α é um ideal próprio de A, então $e \notin I_\alpha$ para qualquer α. Logo, $e \notin M$.

a.3.ii) M é um ideal de A.

Sejam $a, b \in M$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então existem $\alpha, \beta \in L$ tais que $a \in I_\alpha$ e $b \in I_\beta$. Como $\{I\}_{\alpha \in L}$ é uma cadeia, então $I_\alpha \subset I_\beta$ ou $I_\beta \subset I_\alpha$. Assim, $a, b \in I_\alpha$ ou $a, b \in I_\beta$ e portanto, $\lambda a + b \in I_\alpha \subset M$ ou $\lambda a + b \in I_\beta \subset M$.

Sejam $a \in A$ e $b \in M$. Então existe $\alpha \in L$ tal que $b \in I_\alpha$. Como I_α é ideal de A, $a.b \subset I_\alpha \subset M$ e $b.a \in I_\alpha \subset M$.

Por a.3.i) e a.3.ii) concluimos que $M \in F$.

Como $I_\alpha \leqslant M$ para qualquer $\alpha \in L$, então M é uma cota superior de $\{I_\alpha\}_{\alpha \in L}$.

Pelo lema de Zorn [6, pg 32], existe um elemento máximo $I \in F$.

b) Se I é ideal máximo de A, então I é fechado.

b.i) Se I é ideal de A, então $\overline{I}$ também o é, como facilmente se verifica.

b.ii) Se I é um ideal próprio de A, então o mesmo ocorre com $\overline{I}$.

Seja $U = \{a \in A;\ a$ é inversível$\}$.

Pelo teorema 2.10, U é aberto. Como I é um ideal próprio de A, $I \cap U = \phi$. Logo, $\overline{I} \neq A$.

Como I é um ideal máximo, e $I \subset \overline{I}$, então $I = \overline{I}$, ou seja, I é fechado.

2.19. Definição

Seja A uma álgebra normada com identidade e. Se todo elemento não nulo de A é inversível, então A é dita uma álgebra divisão.

2.20. Teorema (Gelfand)

Seja A uma álgebra de Banach divisão. Então a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\to A \\ \lambda &\to \lambda e \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico, isto é, A é isometricamente isomorfo ao corpo dos complexos.

Demonstração:

Facilmente se verifica que f é linear e injetiva.

Provemos que f é sobrejetiva.

Seja $a \in A$. Como A é uma álgebra divisão, se λ_1 e λ_2 são números complexos tais que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então pelo menos um dos elementos $\lambda_1 e - a$ ou $\lambda_2 e - a$ é inversível. Assim, como $sp(a)$ é um conjunto compacto, não vazio, $sp(a) = \{\lambda(a)\}$, isto é, $sp(a)$ consiste de um único ponto $\lambda(a)$, para o qual $\lambda(a)e - a$ não é inversível.
Logo, $\lambda(a)e - a = 0$ e $a = \lambda(a).e = f(\lambda(a))$, o que mostra que f é sobrejetiva.

Seja $\lambda \in \mathbb{C}$. Temos $\|f(\lambda)\| = \|\lambda\ e\| = |\lambda|\|e\| = |\lambda|$
Portanto, f é uma isometria e $\|f\| = 1$.
Segue que f é um isomorfismo isométrico.

2.21. <u>Definição</u>

Seja A uma álgebra de Banach com identidade e. Um homomorfismo algébrico $f: A \to \mathbb{C}$ é dito um caráter de A se $f(e) = 1$, ou equivalentemente, se $f \not\equiv 0$.

2.22. <u>Teorema</u>

Sejam A uma álgebra de Banach comutativa com identidade e, $f: A \to \mathbb{C}$ um caráter de A e $M = Ker(f)$. Então M é um ideal máximo de A e para qualquer $a \in A$, $a + M = f(a)e + M$.
Reciprocamente, se M é um ideal máximo de A e A é comutativa, existe um caráter $f: A \to \mathbb{C}$ tal que $M = Ker(f)$ e $a + M = f(a)e + M$ para todo $a \in A$.

Demonstração:

a) Não é difícil verificar que $M = Ker(f)$ é um ideal de A.

b) M é máximo.

Seja $b \in A$ tal que $b \notin M$. Então $f(b) \neq 0$. Seja I um ideal de A tal que $M \subset I \subset A$.

b.i) Suponhamos que $b \in I$ e provaremos que $I = A$.

Seja a um elemento qualquer de A. Então,

$$a = a - \frac{f(a)}{f(b)} \cdot b + \frac{f(a)}{f(b)} \cdot b \qquad \text{e}$$

$$f(a - \frac{f(a)}{f(b)} \cdot b) = f(a) - \frac{f(a)}{f(b)} \cdot f(b) = 0.$$

Assim, $a - \frac{f(a)}{f(b)} \cdot b \in M \subset I$.

Como $\frac{f(a)}{f(b)} \cdot b \in I$, então $a \in I$.

Logo, $I = A$.

b.ii) Suponhamos que $b \notin I$ e mostraremos que $I = M$.

Suponhamos que $M \underset{\neq}{\subset} I$. Então existe $c \in I$ tal que $c \notin M$. Assim $f(c) \neq 0$ e podemos escrever

$$c = c - \frac{f(c)}{f(b)} \cdot b + \frac{f(c)}{f(b)} \cdot b .$$

Como $c \in I$ e $c - \frac{f(c)}{f(b)} \cdot b \in I$ então $\frac{f(c)}{f(b)} \cdot b \in I$, o que é uma contradição pois desta forma $b \in I$.

Logo, $I = M$.

Segue que M é máximo.

c) Para qualquer $a \in A$, $a + M = f(a)e + M$.

Seja $a \in A$. Temos $f(a - f(a)e) = f(a) - f(a).f(e) = f(a) - f(a.e) = 0$. Portanto, $a - f(a)e \in M$ e então $a + M = f(a)e + M$.

Reciprocamente. Seja M um ideal máximo de A. Provaremos primeiro que todo elemento não nulo de A/M é inversível.

Sejam η a função natural e $a \in A$ tal que $\bar{a} = \eta(a) \neq \bar{0}$ ou seja $a \notin M$.

Seja $I = \{b.a + c;\ b \in A \text{ e } c \in M\}$. Então I é um ideal de A que contém M propriamente, pois $a \notin M$ e $a \in I$. Como M é máximo $I = A$. Assim, existem $b \in A$ e $c \in M$ tais que

$$e = b.a + c \quad \text{e desta forma}$$

$$\eta(e) = \eta(b.a + c) = \eta(b).\ \eta(a) + \eta(c) = \eta(b).\ \eta(a).$$

Logo, $\bar{a} = \eta(a)$ é inversível.

Como M é um ideal fechado de A, pelo teorema 2.4 temos que A/M é uma álgebra de Banach. Então, pelo Teorema 2.20, existe um isomorfismo

$$\Psi : A/M \to \mathbb{C}.$$

Seja $f = \Psi \circ \eta$. Então f é um caráter de A e $Ker(f) = Ker(\eta) = M$.

2.23. <u>Corolário</u>

Seja A uma álgebra de Banach com identidade e. Se $f: A \to \mathbb{C}$ é um caráter de A, então f é uma função aberta e decresce em norma.

Demonstração:

Seja $f\colon A \to \mathbb{C}$ um caráter de A. Então pelo teorema 2.6 existe um isomorfismo algébrico $\Psi\colon A/Ker(f) \to \mathbb{C}$ tal que o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"'] & \mathbb{C} \\
A/Ker(f) \arrow[ur, "\Psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Provemos que f decresce em norma.

Como $f\colon A \to \mathbb{C}$ é um caráter de A, então pelo teorema anterior Ker(f) é um ideal máximo de A e A/Ker(f) é uma álgebra de Banach divisão. Pelo teorema 2.20, podemos concluir que Ψ é uma isometria.

Assim, se $a \in A$,

$$|f(a)| = |\Psi(\eta(a))| \leqslant \|\Psi\| \, \|\eta(a)\| \leqslant \|\Psi\| \, \|a\| = \|a\| .$$

Segue que f decresce em norma.

Além disso, como Ψ é uma isometria e a função natural η é aberta, temos que $f = \Psi \circ \eta$ é uma função aberta.

CAPÍTULO III

DUALIDADE DE GELFAND

3.1. Construção do espaço H(A)

Seja A uma álgebra de Banach comutativa com identidade e. Denotamos por H(A) o conjunto de todos os caracteres de A. Para cada $a \in A$, definimos

$$\begin{aligned} \hat{a}: H(A) &\to \mathbb{C} \\ f &\to \hat{a}(f) = f(a). \end{aligned}$$

Denotamos por S, o conjunto $S = \{\hat{a}: H(A) \to \mathbb{C};\ a \in A\}$.
Introduzimos em H(A) a tapologia fraca induzida pelo conjunto de funções S, isto é, munimos H(A) com a menor topologia que torna contínua cada função $\hat{a}$, $a \in A$. Então τ é a topologia gerada por

$$\{\, \hat{a}^{-1}(U);\ \hat{a} \in S \text{ e } U \text{ é aberto em } \mathbb{C} \,\}$$

e uma base para τ é dada pelos conjuntos da forma

$$V_f(a_1, a_2, \ldots a_n, \varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} h \in H(A);\ |\hat{a}_i(h) - \hat{a}_i(f)| < \varepsilon, \text{ para} \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right\}$$

$$= \{\, h \in H(A);\ |h(a_i) - f(a_i)| < \varepsilon, \text{ para } i = 1,2, \ldots,n \,\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} \{\, h \in H(A);\ |h(a_i) - f(a_i)| < \varepsilon \,\} \quad \text{com } f \in H(A) \text{ e}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Observação: $H(A)$ munido com a topologia τ é um espaço de Hausdorff.

De fato, se f_1, $f_2 \in H(A)$ são tais que $f_1 \neq f_2$, então existe $a \in A$ tal que $f_1(a) \neq f_2(a)$. Como $\mathbb{C}$ é de Hausdorff, existem abertos $U, V \subset \mathbb{C}$ tais que

$$f_1(a) \in U, \ f_2(a) \in V \quad e \quad U \cap V = \phi.$$

Então $\hat{a}^{-1}(U) \cap \hat{a}^{-1}(V) = \phi$, $f_1 \in \hat{a}^{-1}(U)$ e $f_2 \in \hat{a}^{-1}(V)$.

3.2. Lema

Seja A uma álgebra de Banach comutativa com identidade e. Então, para cada $a \in A$,

$$\rho(a) = \sup_{f \in H(A)} |f(a)|,$$

onde $\rho(a)$ é o raio espectral de a.

Demonstração:

a) Para cada $a \in A$, $\rho(a) \leq \sup_{f \in H(A)} |f(a)|$.

Seja $\lambda \in sp(a)$. Então $a - \lambda e$ não é inversível.

Seja $I = \{(a - \lambda e)b;\ b \in A\}$. Então I é um ideal próprio de A, pois $e \notin I$ e portanto existe um ideal máximo M tal que $I \subset M$.

Pelo teorema 2.22, existe $f \in H(A)$ tal que $Ker(f) = M$.

Mas, $(a - \lambda e)b \in M$ para qualquer $b \in A$. Tomando $b = e$, temos que $a - \lambda e \in M$. Isto implica que $f(a - \lambda e) = f(a) - \lambda f(e) = 0$ e assim $f(a) = \lambda$.

Portanto, $\sup\limits_{f \in H(A)} |f(a)| \geqslant |\lambda|$ para qualquer $\lambda \in sp(a)$ e então

$\rho(a) \leqslant \sup\limits_{f \in H(A)} |f(a)|$.

b) Para cada $a \in A$, $\rho(a) \geqslant \sup\limits_{f \in H(A)} |f(a)|$.

Seja $a \in A$. Suponhamos que $\lambda \notin sp(a)$. Então existe $b \in A$ tal que $(a - \lambda e)b = e$. Portanto, se $f \in H(A)$, $f(a - \lambda e).f(b) =$ $= f(a - \lambda e).b) = f(e) = 1$ e desta forma $f(a - \lambda e) \neq 0$.
Isto implica que $f(a) \neq \lambda$ para todo $f \in H(A)$. Assim, se $\lambda = f(a)$ para algum $f \in H(A)$, então $\lambda \in sp(a)$.
Portanto $\{f(a);\ f \in H(A)\} \subset sp(a)$ e desta forma

$$\rho(a) \geqslant \sup_{f \in H(A)} |f(a)| \ .$$

3.3. <u>Teorema</u>

Seja A uma álgebra de Banach comutativa com identidade e. Então $H(A)$, munido da topologia fraca induzida pelo conjunto de funções $S = \{\hat{a}: H(A) \to \mathbb{C};\ \hat{a}(f) = f(a),\ a \in A\}$, é compacto.

<u>Demonstração</u>:

Para cada $a \in A$, sejam $S_a = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leqslant \|a\|\}$ e $E = \prod\limits_{a \in A} S_a$, isto é, E é o produto cartesiano dos espaços S_a munido com a topologia do produto. Como para cada $a \in A$, S_a é um espaço compacto e de Hausdorff, então pelo teorema de Tychonov [6,pg 224], o mesmo ocorre com E.

Escrevemos E na forma,

$$E = \{(z_a)_{a \in A};\ z_a \in S_a\} = \{f: A \to \bigcup_{a \in A} S_a;\ f(a) \in S_a\}.$$

Seja $f \in H(A)$. Então para todo $a \in A$, $|f(a)| \leqslant \rho(a) \leqslant \|a\|$ e portanto $f(a) \in S_a$.

Assim, podemos concluir que $H(A) \subset E = \prod_{a \in A} S_a$.

Queremos mostrar que $H(A)$ é compacto. Como E é compacto, basta mostrar que $H(A)$ é um subespaço fechado de E.

a) $H(A)$ é um subespaço de E.

Seja τ a topologia de E. Então τ é a topologia mais fraca sobre E que torna contínuas as projeções

$$P_a: E \to S_a$$

$$P_a(f) = f(a)$$

e portanto uma base para τ é dada pelos conjuntos da forma

$$V_f(a_1, a_2, \ldots, a_n, \varepsilon) = \{g \in E;\ |P_{a_i}(g) - P_{a_i}(f)| < \varepsilon,\ i = 1,2,\ldots,n\}$$

$$= \{g \in E;\ |g(a_i) - f(a_i)| < \varepsilon,\ i = 1,2,\ldots, n\},$$ com $f \in E$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ e $\varepsilon > 0$.

Como $H(A) \subset E$, τ induz sobre $H(A)$ a topologia relativa e uma base para esta topologia é dada pelos conjuntos

$$V_f(a_1, a_2, \ldots, a_n, \varepsilon) \cap H(A) = \left\{ \begin{array}{l} g \in H(A);\ |g(a_i) - f(a_i)| < \varepsilon \text{ para} \\ i = 1,2,\ldots, n \end{array} \right\}.$$

Portanto, a topologia fraca sobre $H(A)$, induzida pelo conjunto S de funções, coincide com a topologia relativa induzida por τ, e desta forma $H(A)$ é um subespaço de E.

b) $H(A)$ é fechado.

Seja $g \in \overline{H(A)}$. Mostraremos que $g \in H(A)$, ou seja, que g é um caráter de A.

b.i) Sejam a_1, $a_2 \in A$. Então

$V_g(a_1, a_2, a_1 + a_2, \varepsilon) \cap H(A) \neq \phi$. Isto implica que existe $f \in H(A)$ tal que $|f(a_1) - g(a_1)| < \varepsilon$, $|f(a_2) - g(a_2)| < \varepsilon$ e $|f(a_1 + a_2) - g(a_1 + a_2)| < \varepsilon$.

Temos, então

$|g(a_1 + a_2) - (g(a_1) + g(a_2))| \leqslant |g(a_1 + a_2) - f(a_1 + a_2)| +$

$+ |f(a_1) - g(a_1)| + |f(a_2) - g(a_2)| < 3\varepsilon$.

Como ε é arbitrário,

$$g(a_1 + a_2) = g(a_1) + g(a_2).$$

b.ii) Sejam $\lambda \in C$ e $a \in A$. Então

$V_g(a, \lambda a, \varepsilon) \cap H(A) \neq \phi$ e portanto existe $f \in H(A)$ tal que $|f(a) - g(a)| < \varepsilon$ e $|f(\lambda a) - g(\lambda a)| < \varepsilon$.

Assim, $|g(\lambda a) - \lambda g(a)| \leqslant |g(\lambda a) - f(\lambda a)| +$

$+ |\lambda f(a) - \lambda g(a)| < \varepsilon + |\lambda|\varepsilon = (1 + |\lambda|)\varepsilon$.

Desde que ε é arbitrário, temos

$$g(\lambda a) = \lambda g(a).$$

b.iii) Sejam a_1, $a_2 \in A$. Então

$V_g(a_1, a_2, a_1.a_2, \varepsilon) \cap H(A) \neq \phi$ e portanto existe $f \in H(A)$ tal que $|f(a_1) - g(a_1)| < \varepsilon$, $|f(a_2) - g(a_2)| < \varepsilon$ e

$|f(a_1.a_2) - g(a_1.a_2)| < \varepsilon.$

Temos, então

$|g(a_1.a_2) - g(a_1).g(a_2)| \leqslant |g(a_1.a_2) - f(a_1.a_2)| +$

$+ |f(a_1.a_2) - g(a_1).g(a_2)| \leqslant |g(a_1.a_2) - f(a_1.a_2)| +$

$+ |f(a_2)| \; |f(a_1) - g(a_1)| + |g(a_1)| \; |f(a_2) - g(a_2)| <$

$< \varepsilon \; (1 + |f(a_2)| + |g(a_1)|).$

Sendo ε arbitrário, temos

$$g(a_1.a_2) = g(a_1).g(a_2).$$

b.iv) g é contínua.

Como $g \in E$, então se $a \in A$, temos $g(a) \in S_a$ e assim

$|g(a)| \leqslant \|a\|$.

b.v) g não é identicamente nula.

Segue do fato de que $V_g(e,\varepsilon) \cap H(A) \neq \phi$ e então existe $f \in H(A)$ tal que $|f(e) - g(e)| < \varepsilon$.

Portanto, $g \in H(A)$ e então $H(A)$ é fechado.

Observações:

1) Como no decorrer de nosso trabalho os espaços topológicos compactos sempre serão espaços de Hausdorff, quando escreveremos espaço compacto estaremos subentendendo que este espaço é de Hausdorff.

2) Se A é uma álgebra de Banach comutativa com identidade e, associamos a A o espaço $H(A)$, que é um espaço topológico compacto.

3.4. Definição

Sejam A e B álgebras de Banach comutativas, com identidades e_A e e_B, respectivamente. Se $f: A \to B$ é um homomorfismo de álgebras de Banach tal que $f(e_A) = e_B$, nós definimos

$$H(f) : H(B) \to H(A)$$

$$H(f)(\Psi) = \Psi \circ f .$$

Como $\Psi \circ f$ é um homomorfismo algébrico de A em $\mathbb{C}$, e $(\Psi \circ f)(e) = 1$ então $\Psi \circ f \in H(A)$ e portanto H(f) é bem definida.

3.5. Teorema

Se $f: A \to B$ é um homomorfismo de álgebras de Banach tal que $f(e_A) = e_B$, então H(f) é contínua.

Demonstração:

Seja $\Psi \in H(B)$. Então $\Psi \circ f \in H(A)$.
Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Então $V = V_{\Psi \circ f}(a_1, a_2, \ldots, a_n, \varepsilon)$ é um aberto básico de H(A) que contém $\Psi \circ f$. Mostremos que $H(f)^{-1}(V)$ é um aberto de H(B) que contém Ψ.
Temos,

$H(f)^{-1}(V) = \{\psi \in H(B);\ \psi \circ f \in V\} =$

$= \{\psi \in H(B);\ |(\psi \circ f)(a_i) - (\Psi \circ f)(a_i)| < \varepsilon,\ i = 1,2,\ldots, n\}$

$= \{\psi \in H(B);\ |\psi(f(a_i)) - \Psi(f(a_i))| < \varepsilon,\ i = 1,2,\ldots, n\}$

$= V_\Psi(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n), \varepsilon)$ que é um aberto básico de H(B) que contém Ψ.

Portanto, $H(f)$ é contínua.

3.6. Definição

Seja A uma álgebra. Uma involução sobre A é uma função

$$* : A \to A$$
$$a \to a^*$$

que satisfaz as seguintes condições:

i) $a^{**} = (a^*)^* = a$

ii) $(a + b)^* = a^* + b^*$

iii) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda}\, a^*$

iv) $(a.b)^* = b^* . a^*$

para todos os elementos $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Se A é uma álgebra e existe uma involução definida sobre A, então A é dita uma álgebra com involução.

Se A é uma álgebra normada, exigimos para $*$ a condição

v) $\|a^*\| = \|a\|$ para todo $a \in A$.

Se A é uma álgebra de Banach e existe uma involução sobre A que satisfaz

$\|a^* . a\| = \|a\|^2$ para todo $a \in A$, então A é dita uma álgebra C^*.

Observamos que se e é a identidade de A, então $e^* = e$.

3.7. Construção da álgebra C(X)

Seja X um espaço topológico compacto. Então conforme vi mos no exemplo 2.3, $C(X) = \{f: X \to \mathbb{C};\ f$ é contínua$\}$, com a adição e multiplicação usuais de funções e a norma $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ é uma álgebra de Banach comutativa.

Definimos uma involução em $C(X)$,

$$* : C(X) \to C(X)$$

$$f \to f^* \text{ onde } f^*(x) = \overline{f(x)} \text{ para todo } x \in X.$$

i) $*$ é bem definida.

Se $f \in C(X)$. o mesmo ocorre com f^*, pois f^* é a composta das funções contínuas f e h, onde h é a função de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, que leva z em seu conjugado.

ii) $*$ é uma involução em $C(X)$.

As propriedades de i) a v) da definição 3.6 são facilmente verificadas.

iii) Para toda função $f \in C(X)$, $\|f^* . f\| = \|f\|^2$.

Seja $f \in C(X)$. Então,

$$\|f^* . f\| = \sup_{x \in X} |(f^* . f)(x)| = \sup_{x \in X} |f^*(x).f(x)| =$$

$$= \sup_{x \in X} |\overline{f(x)}.f(x)| = \sup_{x \in X} |f(x)|^2 = (\sup_{x \in X} |f(x)|)^2 = \|f\|^2.$$

Segue que $C(X)$ é uma álgebra C^*, comutativa.

<u>Observações</u>:

1) Se A é uma álgebra C^*, comutativa, dizemos que A é uma álgebra C^*_c.

2) Se X é um espaço topológico compacto, associamos a X

a álgebra $C(X)$ que é uma álgebra C_c^*.

3) Quando dizemos que uma função f é um homomorfismo de álgebras C^*, nós entendemos que f é um homomorfismo algébrico que preserva a involução e a identidade.

3.8. Definição

Sejam X e Y espaços topológicos compactos e $f: X \to Y$ uma função contínua. Definimos

$$C(f): C(Y) \to C(X)$$

$$C(f)\ (\Psi) = \Psi \circ f.$$

3.9. Teorema

Sejam X e Y espaços topológicos compactos e $f: X \to Y$ uma função contínua. Então $C(f)$ é um homomorfismo, contínuo, de álgebras C_c^*.

Demonstração:

i) $C(f)$ é um homomorfismo algébrico.

Sejam Ψ, $\psi \in C(Y)$ e $x \in X$. Então,

$$C(f)\ (\Psi + \psi)(x) = ((\Psi + \psi) \circ f)(x) = (\Psi + \psi)(f(x)) =$$

$$= \Psi(f(x)) + \psi(f(x)) = (\Psi \circ f + \psi \circ f)(x) =$$

$$= (C(f)(\Psi) + C(f)(\psi))(x).$$

Portanto, $C(f)(\Psi + \psi) = C(f)(\Psi) + C(f)(\psi)$.

De maneira análoga, prova-se que $C(f)(\lambda\Psi) = \lambda.C(f)(\Psi)$ e

$C(f)(\Psi.\psi) = C(f)(\Psi) \, . \, C(f)(\psi)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e Ψ, $\psi \in C(Y)$.

ii) $C(f)$ preserva a identidade.

Sejam e_1 e e_2 as identidades de $C(X)$ e $C(Y)$, respectivamente.

Então, $e_1 : X \to \mathbb{C}$ e $e_2 : Y \to \mathbb{C}$

$e_1(x) = 1$ $\qquad$ $e_2(y) = 1$

Seja $x \in X$. Então,

$C(f)(e_2)(x) = (e_2 \circ f)(x) = e_2(f(x)) = 1$ e portanto $C(f)(e_2) = e_1$.

iii) $C(f)$ preserva a involução.

Sejam $\Psi \in C(Y)$ e $x \in X$. Então,

$C(f)(\Psi^*)(x) = (\Psi^* \circ f)(x) = \Psi^*(f(x)) = \overline{\Psi(f(x))} =$

$= \overline{(\Psi \circ f)(x)} = (\Psi \circ f)^* (x) = (C(f)(\Psi))^* (x)$.

Logo, $C(f) (\Psi^*) = (C(f)(\Psi))^*$.

iv) $C(f)$ é contínua.

Como $C(f)$ é linear, basta mostrar que $C(f)$ é contínua na origem. Como $f: X \to Y$ é contínua e X é compacto, existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{x \in X} |f(x)| \leq M \, .$$

Seja $\varepsilon > 0$. Tomamos $\delta = M^{-1} . \varepsilon$. Então se $\|\Psi\| < \delta$ temos,

$$\|C(f)(\Psi)\| = \sup_{x \in X} |(\Psi \circ f)(x)| = \sup_{x \in X} |\Psi(f(x))|$$

$$\leq \sup_{x \in X} \|\Psi\| \, |f(x)| = \|\Psi\| \sup_{x \in X} |f(x)| \leq M \, \|\Psi\| < \varepsilon \, .$$

Portanto, $C(f)$ é contínua na origem.

3.10. Lema

Sejam A uma álgebra C_c^* e a um elemento de A tal que $a^* = a$, ou seja, a é auto-adjunto. Então para cada $f \in H(A)$, $f(a)$ é um número real.

Demonstração:

Definimos

$$F: A \to C(H(A)) \quad \text{onde} \quad F(a): H(A) \to \mathbb{C}$$
$$a \to F(a) \qquad\qquad F(a)(f) = f(a)$$

F está bem definida, pois se $a \in A$, então pelo corolário 1.1.7, a função

$$F(a): H(A) \to \mathbb{C}$$
$$F(a)(f) = f(a)$$

é contínua e além disso, $\|F(a)\| = \|a\|$.

Suponhamos que existem $f \in H(A)$ e $a \in A$ tais que $a^* = a$ e $f(a) = u + iv$, onde u e v são números reais e $v \neq 0$.

Seja $b = v^{-1}(a - ue)$. Então,

$$b^* = v^{-1}(a^* - ue^*) = v^{-1}(a - ue) = b \quad \text{e,}$$
$$F(b)(f) = f(b) = f(v^{-1}(a - ue)) = v^{-1}(f(a) - uf(e)) =$$
$$= v^{-1}(u + iv - u) = i.$$

Assim, para cada $k > 0$, temos

$f(b + ike) = f(b) + ikf(e) = i + ik = i(1 + k)$ e então,

$$|i(1 + k)| = |f(b + ike)| = |F(b + ike)(f)|$$

$$\leqslant \|F(b + ike)\| \, \|f\| < \|F(b + ike)\| = \|b + ike\| .$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da expressão anterior, temos

$$(1 + k)^2 \leqslant \|b + ike\|^2 = \|(b + ike)(b + ike)^*\|$$

$$= \|(b + ike)(b^* - ike^*)\| = \|(b + ike)(b - ike)\|$$

$= \|b^2 + k^2 e\| < \|b^2\| + k^2$, e portanto,

$1 + 2k < \|b^2\|$ para todo $k > 0$, o que é uma contradição, pois assim deveríamos ter $\|b^2\| = \infty$.

Segue o lema.

3.11. Teorema

Sejam X um espaço topológico compacto e A uma sub-álgebra fechada de $C(X)$, que satisfaz:

i) A separa os pontos de X, isto é, se $x,y \in X$ são tais que $x \neq y$, então existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

ii) A identidade de $C(X)$, $1: X \to \mathbb{C}$, é um elemento de A.
$$x \to 1$$

iii) Se $f \in A$ então $f^* \in A$.

Então, $A = C(X)$.

Demonstração:

Seja $Re(A) = \{f_1 \; ; \; f = f_1 + if_2 \in A\}$

$= \{f_1 : X \to \mathbb{R}; \; f_1 = Re(f)$ para algum $f \in A\}$.

a) $Re(A)$ é uma álgebra sobre o corpo dos reais.

Sejam f_1, $g_1 \in Re(A)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Então, $f_1 = Re(f)$ e $g_1 = Re(g)$ para algum $f \in A$ e $g \in A$. Assim,

a.i) $f_1 + g_1 = Re(f) + Re(g) = Re(f + g)$ e portanto $f_1 + g_1 \in Re(A)$.

a.ii) $\lambda f_1 = \lambda Re(f) = Re(\lambda f)$ e portanto $\lambda f_1 \in Re(A)$.

a.iii) Se f e g são elementos de A então f^* e g^* são elementos de A e portanto,

$$4^{-1}(f.g + f^*.g + f.g^* + f^*.g^*) \in A.$$

Mas,

$$4^{-1}(f.g + f^*.g + f.g^* + f^*.g^*) = 4^{-1}((f + f^*)g + (f + f^*)g^*)$$

$$= 4^{-1}(f + f^*)(g + g^*) = 4^{-1}(2Re(f) \ . \ 2Re(g)) = f_1 \cdot g_1 \ .$$

Logo, $f_1 \cdot g_1 \in A$ e como ambas são funções reais, $f_1.g_1 \in Re(A)$.

b) Re(A) separa os pontos de X.

Seja $f = f_1 + if_2 \in A$. Então, $-if = f_2 - if_1 \in A$ e portanto, $f_2 = Re(-if) \in Re(A)$.

Sejam $x,y \in X$ tais que $x \neq y$. Então existe $f = f_1 + if_2 \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Isto implica que $f_1(x) \neq f_1(y)$ ou $f_2(x) \neq f_2(y)$.

Desde que f_1 e f_2 são elementos de Re(A), segue que Re(A) separa os pontos de X.

c) Para todo $x \in X$, Re(A) não se anula em x.

Segue do fato de que a identidade de C(X) é um elemento de Re(A).

d) $Re(A)$ é fechado em $C_R(X) \subset C(X)$, onde $C_R(X)$ é a álgebra das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$.

d.i) $Re(A) \subset A$.

Seja $f_1 \in Re(A)$. Então $f_1 = Re(f)$ para algum $f \in A$. Desde que $f_1 = 2^{-1}(f + f^*)$ e $f^* \in A$, então $f_1 \in A$.

d.ii) Seja g_1 um elemento do fecho de $Re(A)$ em $C_R(X)$. Então g_1 é um elemento do fecho de A em $C(X)$. Como A é fechado em $C(X)$, $g_1 \in A$. Desde que g_1 é uma função real, $g_1 = Re(g_1) \in Re(A)$.

Logo, $Re(A)$ é fechado em $C_R(X)$.

Pelo Teorema de Stone - Weirstrass generalizado [11, pg 150], concluimos que $\overline{Re(A)} = Re(A) = C_R(X)$.

Seja $f \in C(X)$. Então $f = f_1 + if_2$, com f_1, $f_2 \in C_R(X)$.

Desde que $Re(A) = C_R(X) \subset A$, $f_1 \in A$ e $f_2 \in A$.

Assim, $f = f_1 + if_2$ é um elemento de A e portanto $\dot{A} = C(X)$.

3.12. <u>Definição</u>

Seja A uma álgebra de Banach. Definimos

$$\begin{aligned} F_A: A &\to C(H(A)) &\quad \text{onde} \quad F_A(a): H(A) &\to \mathbb{C} \\ a &\to F_A(a) & F_A(a)(f) &= f(a) . \end{aligned}$$

Esta função é chamada transformação de Gelfand.

Conforme vimos na demonstração do lema 3.10, F_A é bem definida.

Observamos que quando não houver necessidade de explicitar a álgebra A, denotaremos F_A apenas por F.

Seja X um espaço topológico compacto. Definimos

$$\begin{aligned} G_X: X &\to H(C(X)) & \text{onde} \quad G_X(x): C(X) &\to \mathbb{C} \\ x &\to G_X(x) & G_X(x)(f) &= f(x). \end{aligned}$$

Pode-se verificar facilmente que para todo $x \in X$, $g_X(x)$ é um caráter de $C(X)$, ou seja, $g_X(x) \in H(C(X))$.

Observamos que no decorrer de nosso trabalho, normalmente denotaremos G_X apenas por G.

3.13. <u>Teorema</u>

Seja A uma álgebra C_c^*. Então a função $F = F_A$, definida em 3.12, é um isomorfismo isométrico de álgebras C_c^*.

<u>Demonstração</u>:

a) F é um homomorfismo algébrico.

Sejam $a, b \in A$. Então, para todo $f \in H(A)$, temos $F(a + b)(f) = f(a + b) = f(a) + f(b) = F(a)(f) + F(b)(f) = (F(a) + F(b))(f)$ e portanto

$$F(a + b) = F(a) + F(b).$$

Similarmente prova-se que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e $a, b \in A$, temos $F(\lambda a) = \lambda F(a)$ e $F(a.b) = F(a).F(b)$.

b) F preserva a identidade.

Seja e a identidade de A. Então para toda $f \in H(A)$, $F(e)(f) = f(e) = 1$.

Assim, $$\begin{aligned} F(e): H(A) &\to \mathbb{C} \\ f &\to 1, \end{aligned}$$

ou seja, $F(e)$ é a identidade de $C(H(A))$.

c) F preserva a involução.

Seja $a \in A$. Então, $a_1 = 2^{-1}(a + a^*)$ e $a_2 = \frac{1}{2i}(a - a^*)$ são elementos de A, e além disso,

$$a_1^* = (2^{-1}(a + a^*))^* = 2^{-1}(a^* + a^{**}) = 2^{-1}(a^* + a) = a_1,$$

$$a_2^* = (\frac{1}{2i}(a - a^*))^* = -\frac{1}{2i}(a^* - a) = \frac{1}{2i}(a - a^*) = a_2$$

e $a = a_1 + ia_2$.

Seja $f \in H(A)$. Desde que a_1 e a_2 são auto-adjuntos, pelo lema 3.10, $f(a_1)$ e $f(a_2)$ são números reais. Assim,

$$F(a^*)(f) = F((a_1 + ia_2)^*(f) = f((a_1 + ia_2)^*) = f(a_1 - ia_2) =$$

$$= f(a_1) - if(a_2) = \overline{f(a_1) + if(a_2)} = \overline{f(a)} = \overline{F(a)(f)} = (F(a))^*(f).$$

Portanto, $F(a^*) = (F(a))^*$.

d) F é uma isometria.

Seja $a \in A$. Então pelo lema 3.2,

$$\rho(a) = \sup_{f \in H(A)} |f(a)|$$

Assim, $\|F(a)\| = \sup_{f \in H(A)} |f(a)| = \rho(a) \leqslant \|a\|$.

Portanto, F é contínua e para todo $a \in A$, $\|F(a)\| = \rho(a)$.

Mostraremos agora que para todo $a \in A$, $\|F(a)\| = \|a\|$.

Seja a um elemento de A, tal que $a = a^*$.

Então, $\|a^* a\| = \|a^2\| = \|a\|^2$.

Por indução, obtemos

$$\|a\|^{2n} = \|a^{2n}\| \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

e então $\|a\| = \|a^{2n}\|^{1/2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fazendo $n \to \infty$, temos

$$\|a\| = \lim_{n\to\infty} \|a^{2n}\|^{1/2n} = \rho(a) .$$

Seja $a \in A$, qualquer. Então $a^*.a$ é auto adjunto e $\|a\|^2 = \|a^*.a\| =$
$= \rho(a^*.a) = \|F(a^*.a)\| = \|F(a^*) . F(a)\| = \|(F(a))^* . F(a)\| =$
$= \|F(a)\|^2$.

Portanto, para cada $a \in A$, $\|a\| = \|F(a)\|$ e desta forma F é uma isometria.

e) F é injetiva.

Segue do fato de F ser uma isometria.

f) F é sobrejetiva.

f.i) Desde que F é um homomorfismo algébrico, então $F(A) \subset C(H(A))$ é uma sub-álgebra de $C(H(A))$.

f.ii) A identidade de $C(H(A))$ pertence a $F(A)$, pois F preserva a identidade.

f.iii) Se $f \in F(A)$ então $f^* \in F(A)$.

Segue do fato que F preserva a involução.

f.iv) $F(A)$ é fechado em $C(H(A))$.

Desde que A é uma álgebra de Banach, e F é uma isometria, então $F(A)$ é uma álgebra de Banach e portanto fechada em $C(H(A))$.

f.v) $F(A)$ separa os pontos de $H(A)$.

Sejam $f,g \in H(A)$ tais que $f \neq g$. Então existe $a \in A$ tal que $f(a) \neq g(a)$. Assim, para este a, $F(a)(f) \neq F(a)(g)$.

Pelo Teorema 3.11, concluimos que $F(A) = C(H(A))$.

Segue que F é um isomorfismo isométrico de álgebras C_c^*.

3.14. Teorema

Seja X um espaço topológico compacto. Então $G = G_X$ definida em 3.12, é um homeomorfismo.

Demonstração:

a) G é injetiva.

Sejam $x,y \in X$ tais que $x \neq y$. Pelo Lema de Urysohn [10, pg 233], existe $f \in C(X)$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Então, $G(x)(f) = f(x) \neq f(y) = G(y)(f)$ e portanto $G(x) \neq G(y)$.

b) G é sobrejetiva.

Sejam $\psi \in H(C(X))$ e $M = Ker(\psi) = \{f \in C(X);\ \psi(f) = 0\}$. Então, pelo teorema 2.22, M é um ideal máximo de $C(X)$.
Provemos que existe $x_o \in X$ tal que para todo $f \in M$, $f(x_o) = 0$.
Suponhamos que isto não ocorre. Então para cada $x \in X$, existe $f_x \in M$ tal que $f_x(x) \neq 0$. Como f_x é contínua, existe um aberto $U_x \subset X$ tal que $x \in U_x$ e $0 \notin F_x(U_x)$. Desde que X é compacto, existem $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, tais que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$.

Para cada i, $f_{x_i} \in M$. Então, para cada i, a função $f_{x_i} \cdot f_{x_i}^* \in M$ e além disso $f = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} \cdot f_{x_i}^*$ é um elemento de M tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in X$.
Portanto, existe o inverso multiplicativo de f que é dado por $\frac{1}{f}$, e $f \cdot \frac{1}{f} = 1 \in M$, o que é uma contradição pois desta forma M não é

ideal máximo.

Escolhemos $x_o \in X$ tal que $f(x_o) = 0$ para todo $f \in M$.

Se $f \in C(X)$, então $f - \psi(f).1 \in M$, e portanto,

$G(x_o)(f) - \psi(f) = f(x_o) - \psi(f) = f(x_o) - \psi(f) \cdot 1(x_o) =$

$= (f - \psi(f).1)(x_o) = 0.$

Logo, $G(x_o) = \psi$, e portanto, G é sobrejetiva.

c) G é contínua.

Sejam $x_o \in X$ e $U \in H(C(x))$ um aberto tal que $G(x_o) \in U$. Então existe um aberto básico $V = V_{G(x_o)}(f_1, f_2, \ldots, f_n, \varepsilon) =$

$= \{\Psi \in H(C(X));\ |\Psi(f_i) - G(x_o)(f_i)| < \varepsilon$ para $i = 1,2,\ldots,n\} =$

$= \{\Psi \in H(C(X));\ |\Psi(f_i) - f_i(x_o)| < \varepsilon$ para $i = 1,2,\ldots,n\}$ tal que $V \subset U$.

Seja $W = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(B_\varepsilon(f_i(x_o)))$, onde $B_\varepsilon(f_i(x_o))$ é a bola aberta de raio ε e centro em $f_i(x_o)$. Então W é aberto em X e $x_o \in W$.

Mostremos que $G(W) \subset U$.

Seja $y \in W$. Então, para todo i, $f_i(y) \in B_\varepsilon(f_i(x_o))$ e assim,

$|f_i(y) - f_i(x_o)| < \varepsilon$ para $i = 1,2,\ldots,n$.

Desde que $f_i(y) = G(y)(f_i)$, temos

$|G(y)(f_i) - G(x_o)(f_i)| < \varepsilon$ para $i = 1,2,\ldots,n$ e portanto

$G(y) \in V \subset U$.

Segue que $G(W) \subset U$ e desta forma G é contínua em x_o.

d) G é fechada.

Seja F um subconjunto fechado de X. Então F é compacto e portanto $G(F)$ é um subconjunto compacto de $H(C(X))$. Como a topologia de $H(C(X))$ é de Hausdorff, então $G(F)$ é fechado em $H(C(X))$. Segue que G é um homeomorfismo.

3.15. Teorema

a) Sejam A e B álgebras C_c^* e $f: A \to B$ um homomorfismo de álgebras C_c^*. Então o diagrama abaixo é comutativo.

(a)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_A"'] & B \arrow[d, "F_B"] \\ C(H(A)) \arrow[r, "C(H(f))"] & C(H(B)) \end{tikzcd}$$

b) Sejam X e Y espaços topológicos compactos e $f: X \to Y$ contínua. Então o diagrama é comutativo.

(b)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "G_x"'] & Y \arrow[d, "G_y"] \\ H(C(X)) \arrow[r, "H(C(f))"] & H(C(Y)) \end{tikzcd}$$

Demonstração:

a) Sejam $a \in A$ e h um elemento de $H(B)$. Então,

(1) $\qquad F_B(f(a))(h) = h(f(a)) = (h \circ f)(a)$.

(2) $\qquad (C(H(f))(F_A(a)))(h) = (F_A(a) \circ H(f))(h) =$

$$= F_A(a)((H(f))(h)) = F_A(a)(h \circ f) = (h \circ f)(a).$$

Por (1) e (2) concluimos que o diagrama (a) comuta.

b) A demonstração é similar a anterior. Portanto, a omitimos.

Observação:

Passaremos a usar agora, a linguagem e os conceitos básicos da teoria de categorias, introduzidos no capítulo I. Observamos que na categoria K (dos espaços topológicos compactos) os morfismos são as funções contínuas, e na categoria C_c^* (das álgebras C_c^*) os morfismos são os homomorfismos de álgebras C_c^*.

3.16. Teorema

Na categoria C^* ou na categoria C_c^*, cada morfismo é decrescente em norma e portanto contínuo.

Demonstração:

Sejam $A, B \in Ob(C^*)$ e $f \in Mor(A,B)$. Se $f \equiv 0$, então f é contínua e decresce em norma.
Suponhamos que $f \not\equiv 0$.
Seja $a \in A$ tal que $a^* = a$. Então, conforme vimos no item d) da demonstração do teorema 3.13,

$$\|a\| = \rho(a).$$

Desde que a é auto-adjunto e f preserva a involução, temos $f(a) = f(a^*) = (f(a))^*$ e portanto, $\|f(a)\| = \rho(f(a))$.
Mostremos que $\rho(f(a)) \leqslant \rho(a)$.

Seja $\lambda \notin sp(a)$. Então $\lambda e_A - a$ tem um inverso, ou seja, existe $b \in A$ tal que $(\lambda e_A - a).b = e_A$. Assim,

$(\lambda e_B - f(a)).f(b) = f((\lambda e_A - a).b) = f(e_A) = e_B$ e desta forma, $\lambda e_B - f(a)$ tem um inverso, o que implica que $\lambda \notin sp(f(a))$. Portanto,

$sp(f(a)) \subset sp(a)$ e isto mostra que $\rho(f(a)) \leqslant \rho(a)$.

Podemos então, concluir que, se $a^* = a$, $\|a\| \geqslant \|f(a)\|$.

Seja $a \in A$ qualquer. Então $a.a^*$ é auto adjunto e assim

$$\|f(a.a^*)\| \leqslant \|a.a^*\|$$

Mas,

$\|f(a)\|^2 = \|f(a).(f(a))^*\| = \|f(a).f(a^*)\| = \|f(a.a^*)\| \leqslant \|a.a^*\| = \|a\|^2$.

Portanto, para qualquer $a \in A$, $\|f(a)\| \leqslant \|a\|$.

Segue que f é contínua e decresce em norma.

3.17. <u>Proposição</u>

Sejam K a categoria dos espaços topológicos compactos, $X, Y \in Ob(K)$ e $f: X \to Y$ um morfismo em K. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) f é epic e monic.

b) f é bijetiva.

c) f é um isomorfismo.

<u>Demonstração</u>:

a) $\Longrightarrow$ b)

i) Se f é epic então f é sobrejetiva.

Suponhamos que f não é sobrejetiva. Então existe $y_o \in Y - f(X)$. Como X e Y são espaços compactos e f é contínua, $\{y_o\} \subset Y$ e $f(X) \subset Y$ são fechados em Y e além disso,

$$\{y_o\} \cap f(X) = \phi.$$

Sejam $Z = [0,1] \in Ob(K)$ e $\Psi: Y \to Z$ a função identicamente nula. Usando o lema de Urysohn [10, pg 233], escolhemos $\psi \in Mor(Y,Z)$ tal que $\psi(y) = 0$ se $y \in f(X)$ e $\psi(y_o) = 1$.

Seja $x \in X$. Então,

$(\Psi \circ f)(x) = \Psi(f(x)) = 0 = \psi(f(x)) = (\psi \circ f)(x)$.

Portanto, $\Psi \circ f = \psi \circ f$ e então, desde que f é epic, temos $\Psi = \psi$, o que é uma contradição.

Logo, f é sobrejetiva.

ii) Se f é monic então f é injetiva.

Suponhamos que f não é injetiva. Então existem $x_1, x_2 \in X$, tais $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$.

Seja $Z \in Ob(K)$. Definimos

$$\Psi : Z \to X \qquad \text{e} \qquad \psi : Z \to X$$

$$\Psi(z) = x_1 \qquad\qquad \psi(z) = x_2 .$$

Seja $z \in Z$. Então,

$(f \circ \Psi)(z) = f(\Psi(z)) = f(x_1) = f(x_2) = f(\psi(z)) = (f \circ \psi)(z)$, e assim $f \circ \Psi = f \circ \psi$.

Desde que f é monic, temos $\Psi = \psi$, o que é uma contradição. Segue que f é injetiva.

b) $\Longrightarrow$ a)

i) Se f é injetiva então f é monic.

Sejam $Z \in Ob(K)$ e Ψ, $\zeta \in Mor(Z,X)$ tais que $f \circ \Psi = f \circ \zeta$. Seja $z \in Z$. Então,

$f(\Psi(z)) = (f \circ \Psi)(z) = (f \circ \zeta)(z) = f(\zeta(z))$.

Como f é injetiva, $\Psi(z) = \zeta(z)$ e portanto f é monic.

ii) Se f é sobrejetiva então f é epic.

Sejam $Z \in Ob(K)$ e Ψ, $\zeta \in Mor(Y,Z)$ tais que $\Psi \circ f = \zeta \circ f$. Então, para qualquer $x \in X$, temos $\Psi(f(x)) = \zeta(f(x))$. Como f é sobrejetiva, podemos concluir que $\Psi = \zeta$.
Logo, f é epic.

b) $\Longleftrightarrow$ c) Como f é contínua e os espaços são compactos, então f é fechada. Assim, f é um isomorfismo, se e somente se, f é bijetiva.

3.18. Proposição

Sejam X e Y espaços topológicos compactos e $f: X \to Y$ uma função contínua. Se definimos

$$C(f): C(Y) \to C(X)$$

$$C(f)(\Psi) = \Psi \circ f$$

então C é um funtor contravariante da Categoria K na categoria C_c^*.

Demonstração:

A todo $X \in Ob(K)$, C associa o objeto $C(X)$ pertencente a $Ob(C_c^*)$ e a cada morfismo $f: X \to Y$ em K, C associa um morfismo $C(f): C(Y) \to C(X)$, que satisfaz:

i) Se $X \in Ob(K)$ então $C(id_X) = id_{C(X)}$.

De fato, se $\Psi \in C(X)$, então

$$C(id_X)(\Psi) = \Psi \circ id_X = \Psi = id_{C(X)}(\Psi).$$

ii) Se $X, Y, Z \in Ob(K)$ e $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ são morfismos em K, então $C(g \circ f) = C(f) \circ C(g)$.

Seja $\zeta \in C(Z)$. Então,

$$(1) \qquad C(g \circ f)(\zeta) = \zeta \circ (g \circ f)$$

$$(2) \qquad (C(f) \circ C(g))(\zeta) = C(f)(C(g)(\zeta)) = C(f)(\zeta \circ g) = (\zeta \circ g) \circ f$$

Por (1) e (2) concluimos que $C(g \circ f) = C(f) \circ C(g)$.

Segue que C é um funtor contravariante de K em C_c^*.

<u>Observação</u>:

Sejam A e B álgebras C_c^* e $f: A \to B$ um morfismo C_c^*. Se definimos $H(f): H(B) \to H(A)$ por $H(f)(\Psi) = \Psi \circ f$, então H é um funtor contravariante da categoria C_c^* na categoria K.

3.19. <u>Lema</u>

Sejam A e B álgebras C_c^*, $f: A \to B$ um morfismo C_c^*, e $H(f) : H(B) \to H(A)$.

$H(f)(\Psi) = \Psi \circ f$.

Então, a) Se f é monic, $H(f)$ é epic.

b) Se f é epic, $H(f)$ é monic.

<u>Demonstração</u>:

a) Sejam $C \in Ob(C_c^*)$ e $g_1, g_2 \in Mor(C,A)$ tais que $f \circ g_1 =$ $= f \circ g_2$. Como f é monic, então $g_1 = g_2$.

Sejam $X \in Ob(K)$ e Ψ_1, $\Psi_2 \in Mor(H(A),X))$ tais que

$$\Psi_1 \circ H(f) = \Psi_2 \circ H(f).$$

Devemos mostrar que $\Psi_1 = \Psi_2$.

Como $\Psi_1 \circ H(f) = \Psi_2 \circ H(f)$, então pela proposição anterior,

$C(H(f)) \circ C(\Psi_1) = C(\Psi_1 \circ H(f)) = C(\Psi_2 \circ H(f)) = C(H(f)) \circ C(\Psi_2)$.

Assim, se F_A e F_B são as transformações de Gelfand de A e B respectivamente, temos:

$(F_B^{-1} \circ C(H(f))) \circ C(\Psi_1) = F_B^{-1} \circ (C(H(f)) \circ C(\Psi_1))$

$= F_B^{-1} \circ (C(H(f)) \circ C(\Psi_2)) = (F_B^{-1} \circ C(H(f))) \circ C(\Psi_2)$.

Desde que F_A e F_B são isomorfismos e o diagrama abaixo é comutativo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_A"'] & B \arrow[d, "F_B"] \\ C(H(A)) \arrow[r, "C(H(f))"] & C(H(B)) \end{tikzcd} ,$$

temos $(f \circ F_A^{-1}) \circ C(\Psi_1) = (f \circ F_A^{-1}) \circ C(\Psi_2)$.

Isto implica que

$$f \circ (F_A^{-1} \circ C(\Psi_1)) = f \circ (F_A^{-1} \circ C(\Psi_2)).$$

Como f é monic, $F_A^{-1} \circ C(\Psi_1) = F_A^{-1} \circ C(\Psi_2)$, e então, como F_A é um isomorfismo, temos $C(\Psi_1) = C(\Psi_2)$.

Portanto, $H(C(\Psi_1)) = H(C(\Psi_2))$.

Pelo teorema 3.15, os diagramas abaixo são comutativos.

$$\begin{tikzcd} H(A) \arrow[r, "\Psi_1"] \arrow[d, "G_{H(A)}"'] & X \arrow[d, "G_X"] \\ H(C(H(A))) \arrow[r, "H(C(\Psi_1))"] & H(C(X)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H(A) \arrow[r, "\Psi_2"] \arrow[d, "G_{H(A)}"'] & X \arrow[d, "G_X"] \\ H(C(H(A))) \arrow[r, "H(C(\Psi_2))"] & H(C(X)) \end{tikzcd}$$

Portanto,

$G_X \circ \Psi_1 = H(C(\Psi_1)) \circ G_{H(A)} = H(C(\Psi_2)) \circ G_{H(A)} = G_X \circ \Psi_2$.

Como G_X é um homeomorfismo, então $\Psi_1 = \Psi_2$.

Logo, $H(f)$ é epic.

b) Sejam $C \in Ob(C_c^*)$ e $g_1, g_2 \in Mor(B,C)$ tais que $g_1 \circ f =$
$= g_2 \circ f$.

Como f é epic, $g_1 = g_2$.

Sejam $X \in Ob(K)$ e Ψ_1, $\Psi_2 \in Mor(X,H(B))$ tais que

$H(f) \circ \Psi_1 = H(f) \circ \Psi_2$.

Devemos mostrar que $\Psi_1 = \Psi_2$.

Como $H(f) \circ \Psi_1 = H(f) \circ \Psi_2$, então

$C(\Psi_1) \circ C(H(f)) = C(H(f) \circ \Psi_1) = C(H(f) \circ \Psi_2) = C(\Psi_2) \circ C(H(f))$.

Sejam F_A e F_B as transformações de Gelfand de A e B, respectiva - mente. Então,

$C(\Psi_1) \circ (C(H(f)) \circ F_A) = (C(\Psi_1) \circ C(H(f))) \circ F_A =$

$= (C(\Psi_2) \circ C(H(f))) \circ F_A = C(\Psi_2) \circ (C(H(f)) \circ F_A).$

Desde que o diagrama abaixo é comutativo, temos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_A"'] & B \arrow[d, "F_B"] \\ C(H(A)) \arrow[r, "C(H(f))"] & C(H(B)) \end{tikzcd}$$

$(C(\Psi_1) \circ F_B) \circ f = C(\Psi_1) \circ (F_B \circ f) = C(\Psi_2) \circ (F_B \circ f) =$

$= (C(\Psi_2) \circ F_B) \circ f.$

Como f é epic, $C(\Psi_1) \circ F_B = C(\Psi_2) \circ F_B$.

Sendo F_B um isomorfismo, temos $C(\Psi_1) = C(\Psi_2)$.

Portanto, $H(C(\Psi_1)) = H(C(\Psi_2))$.

De acordo com o teorema 3.15, temos os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Psi_1"] \arrow[d, "G_X"'] & H(B) \arrow[d, "G_{H(B)}"] \\ H(C(X)) \arrow[r, "H(C(\Psi_1))"] & H(C(H(B))) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Psi_2"] \arrow[d, "G_X"'] & H(B) \arrow[d, "G_{H(B)}"] \\ H(C(X)) \arrow[r, "H(C(\Psi_2))"] & H(C(H(B))) \end{tikzcd}$$

Portanto,

$G_{H(B)} \circ \Psi_1 = H(C(\Psi_1)) \circ G_X = H(C(\Psi_2)) \circ G_X = G_{H(B)} \circ \Psi_2.$

Desde que $G_{H(B)}$ é um homeomorfismo, segue que $\Psi_1 = \Psi_2$ e desta forma $H(f)$ é monic.

3.20. Proposição

Sejam A, B álgebras C_c^* e $f: A \to B$ um morfismo C_c^*. Então:

a) f é monic $\iff$ f é injetiva.

b) f é epic $\iff$ f é sobrejetiva.

Demonstração:

a) f é monic $\iff$ f é injetiva.

a.i) Se f é monic então f é injetiva.

Sejam $f \in Mor(A,B)$ monic e $H = Ker(f) + \mathbb{C}e_A$. Então,

1) H é fechado.

Pelo teorema 3.16 f é contínua. Portanto, Ker(f) é um subespaço fechado de A. Como $\mathbb{C}e_A$ tem dimensão finita, pela proposição 1.1.10, $H = Ker(f) + \mathbb{C}e_A$ é fechado em A.

2) H é completo, pois é um subespaço fechado de um espaço de Banach.

3) H é fechado pela involução.

Seja $b \in H$. Então $b = a + \lambda e_A$ com $a \in Ker(f)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Assim, $b^* = a^* + \bar{\lambda}\, e_A{}^* = a^* + \bar{\lambda}\, e_A$.

Desde que f preserva a involução, temos que $a^* \in Ker(f)$ e desta forma, $b^* = a^* + \bar{\lambda}\, e_A \in H$.

Por 1), 2) e 3) concluimos que H é uma sub-álgebra C_c^* de A.

Consideremos os seguintes morfismos de álgebras C_c^*:

$$h: H \to A \qquad \text{e} \qquad g: H \to A$$

$$h(a + \lambda e_A) = a + \lambda e_A \qquad g(a + \lambda e_A) = \lambda e_A \ .$$

Então, se $a + \lambda e_A \in H$, temos:

$(f \circ g)(a + \lambda e_A) = f(g(a + \lambda e_A) = f(\lambda e_A) = \lambda f(e_A) = \lambda e_B$.

$(f \circ h)(a + \lambda e_A) = f(h(a + \lambda e_A)) = f(a + \lambda e_A) =$

$= f(a) + \lambda f(e_A) = \lambda e_B$.

Portanto, $f \circ g = f \circ h$. Como f é monic, temos $g = h$.
Assim, para todo $a \in Ker(f)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

$a + \lambda e_A = h(a + \lambda e_A) = g(a + \lambda e_A) = \lambda e_A$ e desta forma, $a = 0$.

Segue que $Ker(f) = \{0\}$, o que implica que f é injetiva.

a.ii) Se f é injetiva então f é monic.

Sejam C uma álgebra C_c^* e Ψ, $\zeta \in Mor(C,A)$ tais que $f \circ \Psi = f \circ \zeta$. Então, para todo $c \in C$, temos $f(\Psi(c)) = f(\zeta(c))$. Como f é injetiva, $\Psi(c) = \zeta(c)$.
Logo, $\Psi = \zeta$ e portanto f é monic.

b) f é epic $\Longleftrightarrow$ f é sobrejetiva.

b.i) Se f é epic então f é sobrejetiva.

Seja $i: f(A) \hookrightarrow B$ a função inclusão. Então, por a), i é um morfismo C_c^* monic. Mostremos que i é epic.
Sejam C uma álgebra C_c^* e $h,g \in Mor(B,C)$ tais que $h \circ i = g \circ i$.
Então se $a \in A$, $(g \circ i)(f(a)) = (h \circ i)(f(a))$. Isto implica que $(g \circ f)(a) = (h \circ f)(a)$. Como f é epic, $g = h$.

Assim, i é monic e epic.

Seja $H(i) : H(B) \to H(f(A))$

$$H(i)(\Psi) = \Psi \circ i .$$

Pelo lema 3.19, $H(i)$ é epic e monic e portanto, pela proposição 3.17, $H(i)$ é um isomorfismo.

Como C é um funtor contravariante, $C(H(i))$ também é um isomorfismo. Desde que o diagrama abaixo comuta, e F_A e F_B são isomorfismos,

$$\begin{tikzcd}
f(A) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "F_{f(A)}"'] & B \arrow[d, "F_B"] \\
C(H(f(A))) \arrow[r, "C(H(i))"] & C(H(B))
\end{tikzcd}$$

Podemos concluir que i é um isomorfismo.

Assim, $B = f(A)$ e portanto f é sobrejetiva.

b.ii) Se f é sobrejetiva então f é epic.

Sejam C uma álgebra C^*_c e Ψ, $\zeta \in Mor(B,C)$ tais que $\Psi \circ f = \zeta \circ f$.

Então para todo $a \in A$, $\Psi(f(a)) = \zeta(f(a))$.

Desde que f é sobrejetiva, segue que $\Psi = \zeta$.

Portanto, f é epic.

3.21. <u>Lema</u>

Seja X um espaço topológico compacto. Então todo ideal fechado de $C(X)$ e da forma

$$J = \{f \in C(X);\ f(x) = 0 \text{ para todo } x \in K\},$$

onde $K \subset X$ é fechado. Em particular, todo ideal fechado de $C(X)$ é a intersecção de todos os ideais máximos que o contém.

<u>Demonstração</u>:

Sejam K um subconjunto fechado de X e

$J = \{f \in C(X);\ f(x) = 0$ para todo $x \in K\}$.

a) Facilmente se verifica que J é um ideal de $C(X)$.

b) J é fechado.

Sejam $g \in \overline{J}$ e $\varepsilon > 0$. Então existe $f \in J$ tal que $\|f - g\| < \varepsilon$, ou equivalentemente, $\sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Seja $x \in K$. Então $|f(x) - g(x)| = |g(x)| < \varepsilon$.

Como ε é arbitrário, $g(x) = 0$ e desta forma $g \in J$.

Portanto, J é um ideal fechado de $C(X)$.

Mostremos que se I é um ideal fechado de $C(X)$, então existe $A \subset X$ fechado, tal que

$$I = \{f \in C(X);\ f(A) = \{0\}\}.$$

Seja I um ideal fechado de $C(X)$ tal que $I \neq C(X)$. Tomamos $A = \bigcap\limits_{g \in I} g^{-1}(0)$. Então A é um subconjunto fechado de X. Além disso, $A \neq \phi$.

De fato, suponhamos que $A = \phi$. Então dado qualquer $x \in X$, existe $g_x \in I$ tal que $g_x(x) \neq 0$. Como g_x é contínua, existe uma vizinhança aberta de x, U_x, tal que $0 \notin g_x(U_x)$. Como $X = \bigcup\limits_{x \in X} U_x$ e X é compacto, existem $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, tais que

$X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$ e $0 \notin g_{x_i}(U_{x_i})$ para todo i.

Seja $g = g_{x_1} \cdot g^*_{x_1} + \ldots + g_{x_n} \cdot g^*_{x_n}$. Como para cada i, $g_{x_i} \in I$, então $g \in I$ e além disso para qualquer $x \in X$, $g(x) > 0$.

Logo, existe $h: X \to [0, \infty)$

$$h(x) = \frac{1}{g(x)}$$

e $(h.g)(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g(x) = 1$. Isto mostra que g é inversível e então $I = C(X)$, o que é uma contradição.

Logo, $A \neq \phi$.

Mostremos que $I = \{f \in C(X);\ f(A) = \{0\}\}$.

i) Pela definição de A, se $g \in I$ então $g(x) = 0$ para todo $x \in A$.

Portanto, $I \subset \{f \in C(X);\ f(A) = \{0\}\}$.

ii) Sejam $f \in C(X)$ tal que $f(A) = \{0\}$ e $\varepsilon > 0$. Vamos encontrar $\Psi \in I$ tal que $\Psi(A) = \{0\}$, $\Psi.\ f \in V_\varepsilon(f)$ e $\Psi(X - U) = \{1\}$, onde U é uma vizinhança aberta de A a ser escolhida.

Seja $U = f^{-1}(B\ \varepsilon/_{2B}(0))$. Então U é uma vizinhança aberta de A.

Como $A = \bigcap_{g \in I} g^{-1}(0)$, para $x \in X - A$, existe $g_x \in I$ tal que $g_x(x) = 1$. Como g_x é contínua, existe uma vizinhança aberta de x, U_x, tal que

$$|g_x(y)| > 1/2 \quad \text{para todo } y \in U_x.$$

Como $X - U = \bigcup_{x \in X - U} U_x$ e $X - U$ é compacto, existem $x_1, \ldots, x_n \in X - U$ tal que $X - U \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ e $0 \notin g_{x_i}(U_{x_i})$ para todo i.

Seja $g = g_{x_1} \cdot g^*_{x_1} + g_{x_2} \cdot g^*_{x_2} + \dots + g_{x_n} \cdot g^*_{x_n}$.

Como para cada i, $g_{x_i} \in I$ então $g \in I$ e além disso, se

$x \in \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ então $g(x) > 1/4$.

Definimos $\quad h: X - U \to [0, \infty)$

$$h(x) = \frac{1}{g(x)}$$

Como X é compacto e $X - U \subset X$ é fechado, pelo teorema de Tietze, [6, pg 149], existe uma função contínua

$$H : X \to [0, \infty)$$

tal que $H(x) = h(x)$ para $x \in X - U$ e $\|h\| = \|H\|$.

Seja $\Psi = g.H$. Como $g \in I$, então $\Psi \in I$. Assim $\Psi(A) = \{0\}$. Além disso, $\Psi(X - U) = \{1\}$, pois se $x \in X - U$, então

$$\Psi(x) = g(x).H(x) = g(x).h(x) = g(x). \frac{1}{g(x)} = 1.$$

Mostremos que $\Psi.f \in I \cap V_\varepsilon(f)$.

Seja $y \in X$. Então

$$|f(y) - (\Psi.f)(y)| = |f(y)|\,|1 - \Psi(y)|.$$

i) Se $y \in X - U$, então $\Psi(y) = 1$ e assim

$|f(y)|\,|1 - \Psi(y)| = 0$.

ii) Se $y \in U$, existe $B > 0$ tal que $0 < |1 - \Psi(y)| \leq B$ e $|f(y)| < \varepsilon/2B$.

Assim, $|f(y)|\,|1 - \Psi(y)| < (\varepsilon/2B).B = \varepsilon/2$.

Portanto $\|f - \Psi.f\| = \sup_{y \in X} |(f - \Psi.f)(y)| < \varepsilon$, e desta forma

$\psi . f \in V_\varepsilon(f) \cap I$.

Concluimos que dada qualquer vizinhança $V_\varepsilon(f)$, existe uma função $\psi . f \in I$ tal que $\psi . f \in V_\varepsilon(f)$.

Portanto, $f \in \overline{I} = I$ e assim o conjunto

$$\{f \in C(X);\ f(A) = \{0\}\} \subset I.$$

Em particular, todo ideal fechado de $C(X)$ é a interseção dos ideais máximos que o contém.

De fato, se M é um ideal máximo de $C(X)$, então existe $x \in X$ tal que

$$M = M_x = \{f \in C(X);\ f(x) = 0\}.$$

Portanto, se I é um ideal fechado de $C(X)$,

$$I = \{f \in C(X);\ f(A) = \{0\}\} = \bigcap_{x \in A} M_x .$$

3.22. Lema

Sejam A uma álgebra C^*_c e I um ideal fechado de A. Se $F = \{f \in H(A);\ f(I) = \{0\}\}$ então F é um subespaço fechado de $H(A)$ e $I = \{a \in A;\ f(a) = 0$ para qualquer $f \in F\}$.

Demonstração:

Seja $X = H(A)$. É suficiente mostrar que se J é um ideal fechado de $C(X)$ e $F' = \left\{\psi \in H(C(X));\ \psi(g) = 0 \text{ para todo } g \in J\right\}$,

então F' é um subespaço fechado de $H(C(X))$ e

$$J = \{g \in C(X);\ \Psi(g) = 0 \text{ para qualquer } \Psi \in F'\}.$$

a) F' é fechado em $H(C(X))$.

Sejam $\zeta \in \overline{F'}$, $\varepsilon > 0$ e $g \in J$. Então,

$$V_\zeta(g, \varepsilon) \cap F' \neq \phi.$$

Mas, $V_\zeta(g, \varepsilon) = \{\eta \in H(C(X));\ |\hat{g}(\eta) - \hat{g}(\zeta)| < \varepsilon\}$

$= \{\eta \in H(C(X));\ |\eta(g) - \zeta(g)| < \varepsilon\}$.

Portanto, existe $\Psi \in F'$ tal que $|\Psi(g) - \zeta(g)| < \varepsilon$.

Como $\Psi(g) = 0$, temos $|\zeta(g)| < \varepsilon$.

Como ε é arbitrário, $\zeta(g) = 0$ e desta forma $\zeta \in F'$.

Segue que F' é fechado.

b) $J = \{g \in C(X);\ \Psi(g) = 0$ para qualquer $\Psi \in F'\}$.

b.i) $J \subseteq \{g \in C(X);\ \Psi(g) = 0$ para qualquer $\Psi \in F'\}$.

Seja $f \in J$. Então, pela definição de F', $\Psi(f) = 0$ para qualquer $\Psi \in F'$ e assim $f \in \{g \in C(X);\ \Psi(g) = 0$ para todo $\Psi \in F'\}$.

b.ii) $J \supseteq \{g \in C(X);\ \Psi(g) = 0$ para qualquer $\Psi \in F'\}$.

Desde que J é um ideal fechado de $C(X)$, pelo lema anterior, J é a interseção de todos os ideais máximos que o contém.

Mostremos que se $I = \{g \in C(X);\ \Psi(g) = 0$ para todo $\Psi \in F'\}$, então $I \subseteq J$.

Seja $f \in C(X) - J$. Então existe um ideal máximo M tal que $J \subset M$ e $f \notin M$. Isto implica que existe $\Psi \in H(C(X))$ tal que $M = \mathrm{Ker}(\Psi)$. Como $f \notin M$, $\Psi(f) \neq 0$. Assim, $\Psi(g) = 0$ para qualquer $g \in J$ e $\Psi(f) \neq 0$.

Isto implica que $\Psi \in F'$ e $\Psi(f) \neq 0$.
Portanto, $f \notin I$ e desta forma $I \subseteq J$.

3.23. Teorema

Sejam A uma álgebra C_c^* e I um ideal fechado de A. Se $F = F_A$ é a transformação de Gelfand de A e $X = H(A)$, então

$$A/I \cong C(X)/F(I) \cong C(h(I)), \qquad \text{onde}$$

$h(I) = \{f \in H(A);\ f(I) = \{0\}\}$ e $\cong$ significa isomorfismo isométrico de álgebras de Banach, que preserva a identidade.

Demonstração:

Desde que a transformação de Gelfand $F : A \to C(H(A))$ é um isomorfismo isométrico que preserva a identidade, então $A/I \cong C(X)/F(I)$.

Mostremos que $C(X)/F(I) \cong C(h(I))$.
Como I é um ideal fechado de A, pelo lema anterior, $h(I) = \{f \in H(A);\ f(I) = \{0\}\}$ é um subespaço fechado de $H(A)$.
Definimos $\zeta: C(X) \to C(h(I))$

$$\zeta(\Psi) = \Psi|_{h(I)} .$$

Então:

i) ζ é um morfismo C_c^*.

ii) ζ é sobrejetiva.

Seja $g \in C(h(I))$. Então podemos escrever g na forma $g = u + iv$ onde u e v são funções reais.
Como $H(A)$ é compacto e $h(I)$ é fechado em $H(A)$, então $h(I)$ é com-

pacto e portanto,

$$u,v\colon h(I) \to [a,b] \quad \text{para algum } a,b \in \mathbb{R}.$$

Assim, existem extensões contínuas $\bar{u}$ e $\bar{v}$, sobre $X = H(A)$, de u e v respectivamente.

Seja $\bar{g} = \bar{u} + i\bar{v}$. Então $\bar{g} \in C(X)$ e $(\bar{g})\big|_{h(I)} = g$, o que mostra que ζ é sobrejetiva.

iii) $\mathrm{Ker}(\zeta) = F(I)$.

Seja $\Psi \in \mathrm{Ker}(\zeta) \subset C(X)$. Então existe um único $a \in A$ tal que $\Psi = F(a)$.

Assim, como $\zeta(\Psi) = \Psi\big|_{h(I)} = 0$, se $f \in h(I)$, então

$$0 = \Psi(f) = F(a)(f) = f(a).$$

Pelo lema anterior, $a \in I$ e desta forma $\Psi \in F(I)$.

Logo, $\mathrm{Ker}(\zeta) \subseteq F(I)$.

Seja $\Psi \in F(I)$. Então $\Psi = F(a)$, para algum $a \in I$.

Seja $f \in h(I)$. Então, $\Psi(f) = F(a)(f) = f(a) = 0$ e portanto,

$\zeta(\Psi) = \Psi\big|_{h(I)} = 0$, ou seja, $\Psi \in \mathrm{Ker}(\zeta)$.

Logo, $F(I) \subseteq \mathrm{Ker}(\zeta)$.

Pelo teorema 2.6, ζ induz um isomorfismo algébrico $\tilde{\zeta}$ de $C(X)/F(I)$ em $C(h(I))$, tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
C(X) \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\eta"'] & C(h(I)) \\
C(X)/F(I) \arrow[ur, "\tilde{\zeta}"'] &
\end{tikzcd}$$

Provemos que $\tilde{\zeta}$ é uma isometria.

Como $F: A \to C(X)$ é um isomorfismo, qualquer elemento de $C(X)$ e da forma $F(a)$ para algum $a \in A$. Assim, os elementos de $C(X)/F(I)$ são da forma $\eta(F(a)) = F(a) + F(I)$ e

$\tilde{\zeta}\,(F(a) + F(I)) = \zeta(F(a)) = F(a)|_{h(I)}$.

Sejam $i \in I$ e $a \in A$. Então,

$$\sup_{f \in H(A)} |f(a+i)| \geq \sup_{f \in h(I)} |f(a+i)| = \sup_{f \in h(I)} |f(a)|$$

$$= \|F(a)|_{h(I)}\| \, .$$

Isto implica que

$$\inf_{i \in I} \left(\sup_{f \in H(A)} |f(a+i)| \right) \geq \|F(a)|_{h(I)}\| \, .$$

Mas,

$$\inf_{i \in I} \left(\sup_{f \in H(A)} |f(a+i)| \right) = \inf_{i \in I} \|F(a+i)\|$$

$$= \inf_{i \in I} \|F(a) + F(i)\| = \|F(a) + F(i)\|_{C(X)/F(I)} \, .$$

Logo, $\|\tilde{\zeta}\,(F(a) + F(I)\| = \|F(a)|_{h(I)}\| \leq \|F(a) + F(I)\|$

e desta forma, $\tilde{\zeta}$ é decrescente em norma.

Sejam $a \in A$ e $\varepsilon > 0$. Escolhemos

$$U = \{f \in H(A);\ |F(a)(f)| < \|F(a)|_{h(I)}\| + \varepsilon\}$$

aberto em $H(A)$. Então $h(I) \subset U$.

Escolhemos $b \in A$ tal que para todo $f \in H(A)$, $0 \leq F(b)(f) \leq 1$, $F(b)(f) = 1$ se $f \in h(I)$ e $F(b)(f) = 0$ se $f \in H(A) - U$.

Então, para qualquer $f \in h(I)$,

$F(a - a.b)(f) = f(a - a.b) = f(a) - f(a).f(b) = f(a) - f(a) = 0.$

Pelo lema anterior, $a - a.b \in I$ e então $a + I = a.b + I$.

Assim, $\|F(a) + F(I)\| = \|a + I\| = \|a.b + I\| \leqslant \|a.b\|$

$= \|F(a.b)\| = \sup_{f \in H(A)} |f(a.b)| = \sup_{f \in H(A)} |f(a).f(b)| \leqslant \sup_{f \in U} |f(a)|$

$\leqslant \|F(a)|_{h(I)}\| + \varepsilon.$

Como ε é arbitrário,

$$\|F(a) + F(I)\| \leqslant \|F(a)|_{h(I)}\| = \|\tilde{\zeta}\,(F(a) + F(I))\|$$

Segue que $\tilde{\zeta}$ é uma isometria.

Provemos que $\tilde{\zeta}$ preserva a identidade.

Seja 1 a identidade de $C(X)$. Então $1 + F(I)$ é a identidade de $C(X)/F(I)$ e $\tilde{\zeta}\,(1 + F(I)) = \zeta(1) = 1|_{h(I)}$ que é a identidade de $C(h(I))$.

3.24. <u>Corolário</u>

Se A é uma álgebra C_c^* e I é um ideal fechado de A tal que $I^* = I$, então A/I é uma álgebra C_c^*.

<u>Demonstração</u>:

Definimos uma involução em A/I por

$$(a + I)^* = a^* + I.$$

a) $*$ é bem definida.

Sejam $(a + I)$, $(b + I) \in A/I$ tais que $a + I = b + I$. Então $a - b \in I$. Como $I^* = I$, $(a - b)^* = a^* - b^* \in I$. Logo, $a^* + I = b^* + I$.

b) Não é difícil verificar que $*$ satisfaz as condições de i) a iv) da definição 3.6.

c) Seja F a transformação de Gelfand de A. Pelo teorema anterior, existe um isomorfismo isométrico $h: A/I \to C(h(I))$, que é dado por $h = \tilde{\zeta} \circ \Psi$ onde

$$\Psi: A/I \to C(H(A))/F(I) \qquad \text{e} \qquad \tilde{\zeta}: C(H(A))/F(I) \to C(h(I))$$

$$\Psi(a + I) = F(a) + F(I) \qquad \tilde{\zeta}(F(a) + F(I)) = F(a)\big|_{h(I)} .$$

Não é difícil verificar que h preserva a involução acima definida. Assim,

$$\|(a + I)^*\| = \|h((a + I)^*)\| = \|(h(a + I))^*\| = \|h(a + I)\|$$
$$= \|a + I\|, \qquad \text{e}$$

$$\|(a + I)(a + I)^*\| = \|h((a + I)(a + I)^*)\| = \|h(a + I).h((a + I)^*)\|$$
$$= \|h(a + I).(h(a + I))^*\| = \|h(a + I)\|^2 = \|a + I\|^2 .$$

Logo, A/I é uma álgebra C_c^*.

3.25. Teorema

Se $f: A \to B$ é um homorfismo de álgebras C_c^*, injetivo, então f é uma isometria.

Demonstração:

Seja $a \in A$. Pelo teorema 3.16, $\|f(a)\| \leqslant \|a\|$.

Assim, só necessitamos provar que $\|a\| \leqslant \|f(a)\|$.

É suficiente provar para $a \in A$ tal que $a = a^*$, pois se a é um elemento qualquer de A, $a.a^*$ é auto-adjunto, e assim

$$\|f(a)\|^2 = \|f(a).f(a)^*\| = \|f(a).f(a^*)\| = \|f(a.a^*)\|$$

$$\geqslant \|a.a^*\| = \|a\|^2.$$

Suponhamos que $a \in A$ é auto-adjunto.

Seja A_a a álgebra gerada por $\mathbb{C}a + \mathbb{C}e_A$. Então A_a e $f(A_a)$ são álgebras C_c^* e desta forma $f: A_a \to f(A_a)$ é um morfismo C_c^* injetivo.

Usando as proposições 3.17 e 3.20 e o lema 3.19, concluimos que

$$H(f): H(f(A_a)) \to H(A_a)$$

$$\Psi \to \Psi \circ f$$

é sobrejetivo.

Como $a = a^*$, $f(a)^* = f(a^*) = f(a)$ e portanto,

$$\|f(a)\| = \rho(f(a)) = \sup_{f \in H(f(A_a))} |\Psi(f(a))| = \sup_{h \in H(A_a)} |h(a)| = \|a\|.$$

Segue que $\|a\| \leqslant \|f(a)\|$ e portanto f é uma isometria.

3.26. Teorema

Seja $f: A \to B$ um homomorfismo de álgebras C_c^*.
Então $f(A)$ é fechado em B, $A/Ker(f)$ é uma álgebra C_c^* e existe um isomorfismo ζ, de álgebras C_c^*, tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"'] & B \\
A/Ker(f) \arrow[r, "\zeta"] & f(A) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Demonstração:

Seja $b \in (Ker(f))^*$. Então $b = a^*$, para algum $a \in Ker(f)$. Assim, $f(b) = f(a^*) = f(a)^* = 0$ e portanto $b \in Ker(f)$. Isto implica que $(Ker(f))^* = Ker(f)$.

Pelo corolário 3.24, $A/Ker(f)$ é uma álgebra C_c^*.

Pelo teorema 2.6, existe um isomorfismo algébrico

$$\zeta : A/Ker(f) \to f(A)$$

tal que o diagrama acima comuta.

Mostremos que ζ é um morfismo C_c^*.

Seja $a + Ker(f) \in A/Ker(f)$. Como $f(a)^* = f(a^*)$,

$$(\zeta(a + Ker(f)))^* = (f(a))^* = f(a^*) = \zeta(a^* + Ker(f)) =$$

$$= \zeta((a + Ker(f))^*).$$

Portanto, ζ preserva a involução.

Além disso, ζ preserva a identidade.

Logo, ζ é um morfismo C_c^*.

Provemos agora que $f(A)$ é fechado em B.

Seja $b \in \overline{f(A)}$. Então existe uma seqüência $(a_n)_n$ em A tal que $f(a_n) \to b$. Como $\zeta: A/I \to f(A)$ é um morfismo C_c^* injetivo, então pelo teorema anterior, ζ é uma isometria.

Portanto, $(\zeta^{-1}(f(a_n)))_n$ é uma seqüência de Cauchy em $A/Ker(f)$.

Desde que $A/Ker(f)$ é álgebra C_c^*, existe b' em $A/Ker(f)$ tal que $\zeta^{-1}(f(a_n)) \to b'$.

Como ζ é contínua, $f(a_n) \to \zeta(b')$ e portanto,

$\zeta(b') = b$.

Logo, $b \in f(A)$ e desta forma $f(A)$ é fechado em B.

3.27. Proposição

Se I é um ideal fechado de uma álgebra C_c^*, então I é involutivo, isto é, $I^* \subset I$.

Demonstração:

Sejam A uma álgebra C_c^* e I um ideal fechado de A. Então pelo lema 3.21, I é a interseção de todos os ideais máximos que o contém. Assim, é suficiente mostrar que $M^* \subset M$, onde M é ideal máximo e $I \subset M$.

Seja M um ideal máximo tal que $I \subset M$. Então existe $f \in H(A)$, tal que $M = Ker(f)$. Seja $a \in M$. Então, conforme vimos na demonstração do teorema 3.13, podemos escrever a na forma $a = a_1 + ia_2$ onde a_1 e a_2 são auto-adjuntos.

Assim,

$f(a^*) = f((a_1 + ia_2)^*) = f(a_1 - ia_2) = f(a_1) - if(a_2)$

$= (f(a_1) + if(a_2))^* = (f(a))^* = 0$ e portanto $a^* \in M$.

Segue que $I^* \subset I$.

3.28. Teorema

Sejam A uma álgebra C_c^*, B uma sub-álgebra C_c^* de A e I um ideal fechado de A. Então B + I é uma sub-álgebra C_c^* de A e $B + I/I \cong B/B \cap I$, onde $\cong$ é um isomorfismo C_c^*.

Demonstração:

a) $B + I$ é uma sub-álgebra C_c^* de A.

a.i) Sejam $z, w \in B + I$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então,
$z = b + i$ e $w = c + j$, com $b, c \in B$ e $i, j \in I$.
Assim,

$z + w = (b + i) + (c + j) = (b + c) + (i + j) \in B + I.$

$\lambda z = \lambda(b + i) = \lambda b + \lambda i \in B + I.$

$z.w = (b + i)(c + j) = b.c + (b.j + i.c + i.j) \in B + I.$

Logo, $B + I$ é uma sub-álgebra de A.

a.ii) Seja $z \in (B + I)^*$. Então $z = (b + i)^*$ para algum $b \in B$ e $i \in I$. Desde que B é sub-álgebra C_c^* de A e I é um ideal fechado de A,

$$z = (b + i)^* = b^* + i^* \in B + I.$$

Portanto, $B + I$ é uma sub-álgebra involutiva de A.

a.iii) $B + I/I$ é fechado em A/I.

Seja $\eta: A \to A/I$ a função natural e seja $\psi = \eta|_B$. Então ψ é um morfismo C_c^* e desta forma, pelo teorema 3.26, $\psi(B)$ é fechado.

Desde que $\psi(B) = B + I/I$, segue que $B + I/I$ é fechado em A/I.

a.iv) $B + I$ é fechado em A.

Seja $x \in \overline{B + I}$. Então existe uma seqüência $(b_n)_n \subset B + I$ tal que $b_n \to x$. Como η é contínua, $\eta(b_n) = b_n + I \to x + I$ e assim $x + I \in B + I/I$. Isto implica que $x + I = b + I$ para algum $b \in B$ e portanto $x - b \in I$ para algum $b \in B$.

Segue que $x \in B + I$.

Concluimos que $B + I$ é uma sub-álgebra C_c^* de A.

b) $B + I/I \cong B/B \cap I$.

Pelo teorema 3.26, temos o seguinte diagrama comutativo,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\eta"'] & A/I \\ B/\mathrm{Ker}(\Psi) \arrow[r, "\zeta"] & \Psi(B) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd} ,$$

onde ζ é um isomorfismo C_c^*.

Desde que $\mathrm{Ker}(\Psi) = B \cap I$ e $\Psi(B) = B + I/I$, segue que $B/B \cap I \cong B + I/I$.

3.29. <u>Corolário</u>

A soma de dois ideais fechados de uma álgebra C_c^*, é um ideal fechado.

<u>Demonstração</u>:

Sejam A uma álgebra C_c^* e I, J ideais fechados de A. Então $J^* = J$ e assim J é uma sub-álgebra C_c^* de A.

Logo, pelo teorema, $J + I$ é fechado em A.

3.30. <u>Construção do espaço quociente X/F</u>

Sejam X um espaço topológico compacto, F um subconjunto fechado de X,

$$X/F = \{x \in X;\ x \notin F\} \cup \{F\} = (X - F) \cup \{\infty\}$$

e $$\eta: X \to X/F$$

$$\eta(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \notin F \\ \infty & \text{se } x \in F\ . \end{cases}$$

Topologizamos X/F da seguinte forma:

Se $y \in X/F$ e $y \neq \infty$, isto é, $y \in X - F$, então uma vizinhança de y em X/F coincide com uma vizinhança de y em X. Se $y = \infty$, então as vizinhanças de y são da forma $(U - F) \cup \{\infty\}$; onde U é uma vizinhança de F em X.

Assim, a topologia de X/F é a topologia co-induzida pela função η, isto é, a mais fina das topologias sobre X/F que torna a função η contínua, X/F é o espaço quociente de X por F e a topologia de X/F é a topologia quociente.

Observamos que como X é um espaço compacto, o mesmo ocorre com X/F.

3.31. Proposição

Sejam X um espaço topológico compacto, F um subconjunto fechado de X,

$$C_F = \{f \in C(X);\ f|_F = 0\}$$

e

$$C_o = \{g \in C(X/F);\ g(F) = g(\infty) = 0\}.$$

Então:

a) C_F é uma sub-álgebra C_c^* de $C(X)$.

b) C_o é uma sub-álgebra C_c^* de $C(X/F)$.

Além disso, a função

$$\zeta : C_o \to C_F$$

$$\zeta(g) = g \circ \eta$$

é um isomorfismo isométrico de álgebras C_c^*.

Demonstração:

1) Pelo lema 3.21, C_F é um ideal fechado de $C(X)$. Assim, pela proposição 3.27, C_F é involutivo, isto é, $C_F^* \subset C_F$. Logo, C_F é uma sub-álgebra C_c^* de $C(X)$.

2) Como X/F é compacto, $\{\infty\} \subset X/F$ é fechado e então, pelo lema 3.21, C_o é um ideal fechado de $C(X/F)$. Portanto, pela proposição 3.27, $C_o^* \subset C_o$ e desta forma C_o é uma sub-álgebra C_c^* de $C(X/F)$.

3) $\zeta : C_o \to C_F$, $\zeta(g) = g \circ \eta$ é um isomorfismo isométrico de álgebras C_c^*.

i) ζ é bem definida.

Seja $g \in C_o$. Então para todo $x \in F$,

$$\zeta(g)(x) = (g \circ \eta)(x) = g(\eta(x)) = g(\infty) = 0.$$

Logo, $\zeta(g)|_F = 0$ e portanto $\zeta(g) \in C_F$.

ii) Não é difícil verificar que ζ é um homomorfismo de álgebras C_c^*.

iii) ζ é injetiva.

Sejam $f, g \in C_o$ tais que $f \neq g$. Então existe $x \in X/F$ tal que $g(x) \neq f(x)$. Como $g(\infty) = 0$ para todo $g \in C_o$, então $x \neq \infty$, ou seja, $x \in X - F$.

Assim,

$\zeta(g)(x) = (g \circ \eta)(x) = g(x) \neq f(x) = (f \circ \eta)(x) = \zeta(f)(x)$ e desta forma $\zeta(f) \neq \zeta(g)$.

iv) ζ é sobrejetiva.

Seja $h \in C_F$. Tomamos,

$$g: X/F \to \mathbb{C}$$

$$g(x) = h(x) \text{ se } x \in X - F$$

$$g(\infty) = 0$$

Então, como $h|_F = 0$ a função $g \in C(X/F)$ e além disso, $\zeta(g) = g \circ \eta = h$, o que mostra que ζ é sobrejetiva.

v) ζ é uma isometria.

Como ζ é um homomorfismo de álgebras C_c^*, então pelo teorema 3.25, ζ é uma isometria.

Segue que ζ é um isomorfismo isométrico de álgebras C_c^*.

3.32. <u>Teorema</u>

Seja I um conjunto qualquer. Se $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de álgebras C_c^*, então $(A_i)_{i \in I}$ possui um produto na categoria C_c^*.

<u>Demonstração:</u>

Seja

$$\prod_{i \in I} A_i = \{ (a_i)_{i \in I} \in \underset{i \in I}{X} A_i \; ;$$

$$\sup_{i \in I} \|a_i\| < \infty \} \; ,$$

onde $\underset{i \in I}{X} A_i$ é o produto cartesiano da família $(A_i)_{i \in I}$.

Definimos em $\prod_{i \in I} A_i$ as seguintes operações:

$$(a_i)_{i \in I} + (b_i)_{i \in I} = (a_i + b_i)_{i \in I}$$

$$\lambda (a_i)_{i \in I} = (\lambda a_i)_{i \in I}$$

$$(a_i)_{i \in I} \cdot (b_i)_{i \in I} = (a_i . b_i)_{i \in I}$$

Com estas operações, $\prod_{i \in I} A_i$ é uma álgebra.

Definimos ainda uma norma e uma involução em $\prod_{i \in I} A_i$, como segue:

$$\|(a_i)_{i \in I}\| = \sup_{i \in I} \|a_i\|$$

e

$$(a_i)^*_{i \in I} = (a_i^*)_{i \in I} \; .$$

Com estas estruturas, $\prod_{i \in I} A_i$ é uma álgebra C^*_c.

Para cada $j \in I$, definimos

$$\pi_j : \prod_{i \; I} A_i \to A_j$$

$$\pi_j(a_i)_{i \in I} = a_j .$$

Então, para cada $j \in I$, π_j é um morfismo C_c^*.

Mostremos que $(\prod_{i \in I} A_i, (\pi_j)_{j \in I})$ é um produto para a família $(A_i)_{i \in I}$.

Sejam B uma álgebra C_c^* e $(g_i : B \to A_i)_{i \in I}$ uma família de morfismos C_c^*.

Definimos $$g : B \to \prod_{i \in I} A_i$$

$$g(b) = (g_i(b))_{i \in I} .$$

a) g está bem definida.

Como para todo $i \in I$, g_i é um morfismo C_c^*, pelo teorema 3.16, temos

$\|g_i(b)\| \leqslant \|b\|$ para todo $b \in B$. Isto implica que

$\|g(b)\| = \sup_{i \in I} \|g_i(b)\| \leqslant \|b\| < \infty$ e então $g(b) \in \prod_{i \in I} A_i$.

b) g é um morfismo C_c^*.

c) Para todo $j \in I$, $\pi_j \circ g = g_j$.

d) g é única.

Suponhamos que existe outro morfismo C_c^*, $h: B \to \prod_{i \in I} A_i$ tal que $\pi_i \circ h = g_i$ para todo $i \in I$. Então, para todo $b \in B$ e $i \in I$, $\pi_i(h(b)) = g_i(b)$.

Assim, para todo $i \in I$, a i-ésima coordenada de h(b) é igual a i-ésima coordenada de g(b) e então g(b) = h(b).

Segue o teorema.

3.33. Teorema

Sejam I um conjunto qualquer e $(A_i)_{i \in I}$ uma família de álgebras C_c^*. Então $(A_i)_{i \in I}$ possui um coproduto na categoria C_c^*.

Demonstração:

Seja K a categoria dos espaços topológicos compactos. Consideremos a família de objetos $(H(A_i))_{i \in I}$ de K. Sejam $(P, (\pi_i)_{i \in I})$ o seu produto em K, $A = C(P)$ e para todo $i \in I$, $\tau_i = C(\pi_i) \circ F_{A_i}$, onde F_{A_i} é a transformação de Gelfand de A_i.

Então, para todo $i \in I$, τ_i é um morfismo C_c^*.

Mostremos que $(A, (\tau_i)_{i \in I})$ constitui um coproduto para a família $(A_i)_{i \in I}$.

Sejam B uma álgebra C_c^* e $(g_i : A_i \to B)_{i \in I}$ uma família de morfismos C_c^*.

Definimos $g: A \to B$ como segue:

Para cada i, $H(g_i): H(B) \to H(A_i)$

$$H(g_i)\ (\Psi) = \Psi \circ g_i$$

é um morfismo em K. Assim, existe um único morfismo $h: H(B) \to P$ de K, tal que $H(g_i) = \pi_i \circ h$ para todo $i \in I$.

Seja $g = F_B^{-1} \circ C(h)$, onde F_B é a transformação de Gelfand de B.

a) $g: A \to B$ é um morfismo C_c^*.

b) Para todo $i \in I$, $g_i = g \circ \tau_i$.

Consideremos os seguintes diagramas:

(1)

$$\begin{tikzcd}
H(B) \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "H(g_i)"'] & P \arrow[d, "\pi_i"] \\
& H(A_i)
\end{tikzcd}$$

O diagrama (1) é o diagrama do produto em K, portanto é comutativo.

(2)

$$\begin{tikzcd}
A = C(P) \arrow[drr, "C(h)"] \arrow[ddrrr, "g = F_B^{-1} \circ C(h)"] & & & \\
& C(H(A_i)) \arrow[ul, "C(\pi_i)"'] \arrow[r, "C(H(g_i))"] \arrow[ur, phantom, "(3)"] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & C(H(B)) & \\
A_i \arrow[uu, "\tau_i"] \arrow[ur, "F_{A_i}"'] \arrow[rrr, "g_i"'] & & & B \arrow[ul, "F_B"']
\end{tikzcd}$$

Desde que o diagrama (1) comuta o mesmo ocorre com o diagrama (3).

Pelo teorema 3.15, o diagrama (4) é comutativo.

Portanto, temos:

$$g_i = F_B^{-1} \circ C(H(g_i)) \circ F_{A_i} = F_B^{-1} \circ (C(h) \circ C(\pi_i)) \circ F_{A_i} =$$

$= (F_B^{-1} \circ C(h)) \circ (C(\pi_i) \circ F_{A_i}) = g \circ \tau_i$, para todo $i \in I$.

c) g é única.

Suponhamos que existe outro morfismo C_c^*, $f: A \to B$ tal que $f \neq g$ e $g_i = f \circ \tau_i$ para todo $i \in I$.

Então, em diagrama, temos:

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, "\tau_i"] \arrow[drr, "g_i"'] & & A = C(P) \arrow[d, bend right, "g"'] \arrow[d, bend left, "f"] \\
& & B
\end{tikzcd}$$

Passando para a categoria K, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
H(A_i) & & H(A) \arrow[ll, "H(\tau_i)"'] \\
& & H(B) \arrow[ull, "H(g_i)"] \arrow[u, bend left, "H(g)"] \arrow[u, bend right, "H(f)"']
\end{tikzcd}$$

Como $f \neq g$ então $H(f) \neq H(g)$.

Seja $G_P: P \to H(C(P)) = H(A)$ o homeomorfismo natural (Definição 3.12). Então,

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[d, dash, "G_P^{-1}"] \\
H(A_i) & H(A) \arrow[l, "H(\tau_i)"'] \\
 & H(B) \arrow[ul, "H(g_i)"] \arrow[u, bend left, "H(g)"] \arrow[u, bend right, "H(f)"']
\end{tikzcd}$$

cada diagrama acima é comutativo e portanto, se

$$\Psi = G_P^{-1} \circ H(g) \qquad e \qquad \zeta = G_P^{-1} \circ H(f)$$

temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "\pi_i"'] \\
H(A_i) & \\
 & H(B) \arrow[ul, "H(g_i)"] \arrow[uu, bend left, "\Psi"] \arrow[uu, bend right, "\zeta"']
\end{tikzcd}$$

Como $H(f) \neq H(g)$ então $\zeta \neq \Psi$, o que é uma contradição, pois o diagrama acima é o diagrama do produto da família de espaços $(H(A_i))_{i \in I}$ em K.

Segue que $f = g$.

No Teorema 3.33, nós provamos que existe coproduto na categoria C_c^*. Demonstraremos que, no caso finito, o coproduto coincide com o produto tensorial. Para isto, precisamos construir o produto tensorial de álgebras C_c^*.

3.34. <u>Construção do produto tensorial de duas álgebras</u>

Sejam A e B álgebras. Desde que A e B possuem estrutura de espaço vetorial, podemos formar o espaço vetorial $A \otimes B$. Definimos uma multiplicação em $A \otimes B$, da seguinte forma:

$$(a_1 \otimes b_1).(a_2 \otimes b_2) = a_1.a_2 \otimes b_1.b_2$$

ou de maneira geral, por:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right).\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \otimes b_j\right) = \sum_{i,j} a_i.a_j \otimes b_i.b_j$$

Precisamos verificar que esta multiplicação é bem definida, ou seja, que a função

$$g: (A \otimes B) \times (A \otimes B) \to A \otimes B$$

$$(a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2) \to a_1.a_2 \otimes b_1.b_2$$

é uma função bilinear bem definida.

Desde que $\otimes$ e multiplicação em álgebras são funções bilineares, se fixamos a_2 e b_2, então a função

$$\Psi: A \times B \to A \otimes B$$

$$\Psi(a_1, b_1) = a_1.a_2 \otimes b_1.b_2$$

é bilinear.

Assim, como vemos no diagrama abaixo, a função

$$g_1: A \otimes B \to A \otimes B$$

$$a_1 \otimes b_1 \to a_1.a_2 \otimes b_1.b_2$$

é linear.

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\psi"'] & A \otimes B \arrow[d, "g_1"] \\ & A \otimes B \end{tikzcd}$$

Similarmente, $g_2\colon A \otimes B \to A \otimes B$

$$a_2 \otimes b_2 \to a_1.a_2 \otimes b_1.b_2$$

é linear.

Portanto, $g\colon (A \otimes B) \times (A \otimes B) \to (A \otimes B)$

$$g(a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2) = a_1.a_2 \otimes b_1.b_2$$

é uma função bilinear bem definida e desta forma, define uma multiplicação em $A \otimes B$.

Com esta multiplicação, $A \otimes B$ torna-se uma álgebra, chamada o produto tensorial das álgebras A e B.

3.35. Lema

Sejam A,B e C álgebras e $\psi\colon A \times B \to C$ uma função bilinear tal que $\psi(a_1.a_2\ ,\ b_1.b_2) = \psi(a_1,b_1)\ .\ \psi(a_2,b_2)$.

Então a função $\zeta\colon A \otimes B \to C$, induzida pelo produto tensorial é um homomorfismo algébrico.

Demonstração:

Basta mostrar que ζ respeita o produto.

Se $(a_1 \otimes b_1),(a_2 \otimes b_2) \in A \otimes B$, temos:

(1) $$\zeta((a_1 \otimes b_1).(a_2 \otimes b_2)) = \zeta(a_1.a_2 \otimes b_1.b_2) =$$
$$= \Psi(a_1.a_2\ ,\ b_1.b_2)\ .$$

(2) $$\zeta(a_1 \otimes b_1).\ \zeta(a_2 \otimes b_2) = \Psi(a_1,b_1)\ .\ \Psi(a_2,b_2) =$$
$$= \Psi(a_1.a_2\ ,\ b_1.b_2)\ .$$

Por (1) e (2) segue o lema.

3.36. Lema

Sejam A e B álgebras C_c^*. Então existe uma involução em $A \otimes B$, tal que $(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$.

Demonstração:

Sabemos que se A e B são álgebras C_c^*, então existem espaços topológicos compactos X e Y, tais que A é isomorfo a $C(X)$ e B é isomorfo a $C(Y)$. Trabalharemos então, com $C(X)$ e $C(Y)$. Definimos uma função ζ de $C(X) \otimes C(Y)$ em $C(X \times Y)$ da seguinte forma:

Seja $\Psi: C(X) \times C(Y) \to C(X \times Y)$

$\Psi(f,g) = f.g$,

onde $f.g: X \times Y \to \mathbb{C}$

$(f.g)(x,y) = f(x).g(y)$.

i) ψ é bilinear.

A verificação não é difícil.

ii) ψ satisfaz as condições 1) e 2) do Lema 1.2.8.

Verifiquemos a condição 1).

Sejam $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset C(X)$ um conjunto linearmente independente e $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subset C(Y)$ um conjunto qualquer, tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \psi(f_i, g_i) = 0$$

Seja $(x,y) \in X \times Y$ com y fixo. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} (f_i . g_i)(x,y) = 0 .$$

Isto implica que

$$f_1(x).g_1(y) + \ldots + f_n(x).g_n(y) = 0 .$$

Como as funções f_i, $i = 1,2,\ldots,n$ são linearmente independentes e x é qualquer, então

$$g_1(y) = g_2(y) = \ldots = g_n(y) = 0 .$$

Fazendo variar y, temos

$$g_1 = g_2 = \ldots = g_n = 0 .$$

Similarmente, verifica-se a condição 2).

iii) ψ respeita o produto.

A verificação é fácil.

iv) Pela definição de produto tensorial, existe uma única função linear

$$\zeta: C(X) \otimes C(Y) \to C(X \times Y)$$

que torna o diagrama abaixo comutativo.

$$\begin{tikzcd} C(X) \times C(Y) \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\Psi"'] & C(X) \otimes C(Y) \arrow[d, "\zeta"] \\ & C(X \times Y) \end{tikzcd}$$

Além disso, pela proposição 1.2.10, ζ é injetiva e pelo lema 3.35, ζ é um homomorfismo algébrico.

Definimos uma involução em $C(X) \otimes C(Y)$, através da função ζ, como segue:

Se $u \in C(X) \otimes C(Y)$, então

$$u^* = \zeta^{-1}(\zeta(u)^*) ,$$

onde a última $*$ é a involução em $C(X \times Y)$.

a) A involução é bem definida.

Desde que ζ é injetiva, é suficiente mostrar que

$$\zeta(u)^* \in \operatorname{Im}(\zeta).$$

Seja $u \in C(X) \otimes C(Y)$. Suponhamos que $u = f \otimes g$. Sejam $v = f^* \otimes g^*$ e $(x,y) \in X \times Y$. Então,

$(\zeta(v))(x,y) = \zeta(f^* \otimes g^*)(x,y) = \Psi(f^*, g^*)(x,y)$

$= (f^*.g^*)(x,y) = f^*(x).g^*(y) = \overline{f(x)}.\overline{g(y)} = \overline{f(x).g(y)}$

$= \overline{(f.g)(x,y)} = \overline{\Psi(f,g)(x,y)} = \Psi(f,g)^*(x,y)$

$= \zeta(f \otimes g)^*(x,y) = \zeta(u)^*(x,y).$

Portanto, $\zeta(u)^* = \zeta(v)$ e além disso,

$$(f \otimes g)^* = f^* \otimes g^* .$$

b) $*$ é uma involução.

Sejam $u,v \in C(X) \otimes C(Y)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

i) $u^{**} = (u^*)^* = u$.

ii) $(u + v)^* = u^* + v^*$

Como $(u + v)^* = u^* + v^* \Longleftrightarrow \zeta((u + v)^*) = \zeta(u^* + v^*)$ e

$\zeta((u + v)^*) = (\zeta(u + v))^* = (\zeta(u) + \zeta(v))^* = \zeta(u)^* + \zeta(v)^*$

$= \zeta(u^*) + \zeta(v^*) = \zeta(u^* + v^*)$,

então $(u + v)^* = u^* + v^*$.

iii) Similarmente, prova-se que $(\lambda u)^* = \bar{\lambda}u^*$ e $(u.v)^* = v^*.u^*$.

Desde que cada álgebra C_c^* é isomorfa a $C(X)$ para algum X, segue o lema.

Através da função ζ do lema anterior, também podemos tornar $C(X) \otimes C(Y)$ uma álgebra normada, definindo

$$\|u\| = \|\zeta(u)\| \text{ para todo } u \in C(X) \otimes C(Y).$$

Desde que ζ é injetiva, a norma está bem definida.

Além disso, se $(f,g) \in C(X) \times C(Y)$, então

$$\|f \otimes g\| = \|f\| \cdot \|g\| .$$

Desta forma, $C(X) \otimes C(Y)$ é uma álgebra normada com involução. Então, se tomamos o completamento de $C(X) \otimes C(Y)$, que denotamos por $C(X) \hat{\otimes} C(Y)$, temos uma álgebra C^*_c.

Mostremos agora, que $C(X) \hat{\otimes} C(Y)$ é isomorfo a $C(X \times Y)$, ou seja, que $C(X \times Y)$ é um completamento de $C(X) \otimes C(Y)$.

Consideremos a função $\zeta: C(X) \otimes C(Y) \to C(X \times Y)$, do lema anterior. Temos:

a) ζ é injetiva.

b) $\overline{Im(\zeta)} = C(X \times Y)$.

Seja $C = \overline{Im(\zeta)} = \overline{Im(\Psi)}$, onde $\Psi: C(X) \times C(Y) \to C(X \times Y)$

$$(f,g) \to f.g$$

é a função usada no lema anterior.

i) C separa os pontos de $X \times Y$.

Sejam $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$ tais que $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)$. Então $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$.

Suponhamos que $x_1 \neq x_2$. Pelo teorema de Tietze [6, pg 149], existe $f \in C(X)$ tal que $f(x_1) = 1$ e $f(x_2) = 0$.

Tomamos $g: Y \to \mathbb{C}$

$g(y) = 1$.

Então,

$$\Psi(f,g)(x_1,y_1) = f(x_1).g(y_1) = 1 \neq 0 = \Psi(f,g)(x_2,y_2).$$

ii) $1 \in C$, onde 1 é a identidade de $C(X \times Y)$.

iii) Se $h \in C$ então $h^* \in C$.

Seja $h \in C$. Então existe uma seqüência $(f_n.g_n)_n \subset Im(\Psi)$ tal que $f_n.g_n \to h$.

Como a involução é contínua,

$$(f_n.g_n)^* \to h^*$$

Mas, $(f_n.g_n)^* = f_n^*.g_n^* = \Psi(f_n^*,g_n^*)$

e portanto, $h^* \in C$.

Pelo teorema 3.11, concluimos que

$$\overline{Im(\zeta)} = C = C(X \times Y).$$

c) ζ é uma isometria.

Portanto, $C(X) \hat{\otimes} C(Y)$ é isomorfo a $C(X \times Y)$.

Observação:

Desde que toda álgebra C_c^* é isomorfa a $C(X)$ para algum X, se A e B são álgebras C_c^*, o mesmo ocorre com $A \hat{\otimes} B$.

3.37. Teorema

Sejam A e B álgebras C_c^*. Então $(A \hat{\otimes} B, \alpha, \beta)$, onde

$$\alpha : A \to A \otimes B \qquad e \qquad \beta : B \to A \otimes B$$

$$\alpha(a) = a \otimes 1 \qquad\qquad \beta(b) = 1 \otimes b$$

constitui o coproduto de A e B na categoria C_c^*.

Demonstração:

Primeiro observamos que α e β são funções de A e B em $A \otimes B$, respectivamente. Porém, como $A \otimes B \subseteq A \hat{\otimes} B$, se $i: A \otimes B \hookrightarrow A \hat{\otimes} B$ é a função inclusão, poderíamos tomar i composta com α e i composta com β, o que não fazemos apenas por comodidade de notação.

Observamos também, que levando em consideração o que dissemos acima, α e β são morfismos C_c^*.

Sejam A e B álgebras C_c^* e $(A \oplus B, i_A, i_B)$ o seu coproduto.

Então, dados os morfismos C_c^*, $f: A \to D$ e $g: B \to D$, existe um único morfismo $\Psi: A \oplus B \to D$ tal que o diagrama abaixo comuta.

(1)
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \oplus B \arrow[d, "\Psi"] & B \arrow[l, "i_B"'] \arrow[dl, "g"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

Mostremos que $(A \hat{\otimes} B, \alpha, \beta)$ satisfaz as condições da definição de coproduto. Para isto, vejamos que dado o diagrama abaixo, existe um único morfismo ζ que o torna comutativo.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "i_A"'] & A \hat{\otimes} B \arrow[d] & B \arrow[l, "\beta"'] \arrow[dl, "i_B"] \\
& A \oplus B &
\end{tikzcd}$$

Seja $\quad i_A \cdot i_B: A \times B \to A \oplus B$

$$(i_A . i_B)(a,b) = i_A(a) . i_B(b) \ .$$

Não é difícil verificar que $i_A . i_B$ é bilinear.

Seja $\quad \alpha \, . \, \beta \colon A \times B \to A \hat{\otimes} B$

$$(\alpha \, . \, \beta)(a,b) = \alpha(a) . \, \beta(b) \ .$$

Então $\quad \alpha \, . \, \beta = \otimes$

Pela definição de produto tensorial, existe uma única função linear ζ que torna o diagrama abaixo comutativo.

(3)
$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\alpha \cdot \beta"] \arrow[dr, "i_A . i_B"'] & A \hat{\otimes} B \arrow[d, "\zeta"] \\ & A \oplus B \end{tikzcd}$$

Além disso, conforme vimos na demonstração do lema 3.34, ζ é um morfismo C_c^*.

Temos,

$$(\zeta \circ \alpha)(a) = \zeta(a \otimes 1) = (i_A . i_B)(a,1) = i_A(a) . i_B(1) = i_A(a)$$

$$(\zeta \circ \beta)(b) = \zeta(1 \otimes b) = (i_A . i_B)(1,b) = i_A(1) . i_B(b) = i_B(b)$$

Logo, existe e é único o morfismo ζ que torna o diagrama (2) comutativo.

Reunindo (1) e (2) num só diagrama, temos:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[ddr, "f"'] & A \hat{\otimes} B \arrow[d, "\zeta"] & B \arrow[l, "\beta"'] \arrow[dl, "i_B"] \arrow[ddl, "g"] \\
 & A \oplus B \arrow[d, "\Psi"] & \\
 & D &
\end{tikzcd}$$

e podemos então concluir que $(A \hat{\otimes} B, \alpha, \beta)$ é o coproduto de A e B.

3.38. <u>Construção da categoria $I a$, das classes de isomorfismos de a.</u>

Seja a uma categoria. Podemos construir uma nova categoria, que denotamos por I_a, como segue:

Os objetivos de I_a são as classes de equivalência por isomorfismos dos objetos de a. Assim, B é um objeto de I_a se e somente se,

$$B = B_C = \left\{ A \in Ob(a) \ ; \ A \text{ é isomorfo a } C, \text{ onde } C \in Ob(a) \text{ e } C \text{ é fixo.} \right\}.$$

Para definir os morfismos de I_a, necessitamos explicitar o que significa dizer "os morfismos f e g de a são isomorfos".

Sejam $f: A \to B$ e $g: A' \to B'$ morfismos de a. Dizemos que f é isomorfo a g, e denotamos por $f \sim g$, se existem isomorfismos $\Psi: A \to A'$ e $\zeta: B \to B'$ tais que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Psi"'] & B \arrow[d, "\zeta"] \\
A' \arrow[r, "g"] & B'
\end{tikzcd}$$

Não é difícil ver que ~ é relação de equivalência no conjunto de morfismos de a.

Denotamos por $[f]$ a classe de equivalência de f. Então,

$$[f] = \{g;\ g \text{ é isomorfo a } f\}\ .$$

Podemos agora, definir os morfismos de I_a. Sejam B_1, B_2 objetos de I_a. Na categoria I_a, um morfismo de B_1 em B_2 é uma classe $[f]$ tal que $f \in Mor_a(A_1, A_2)$ para algum $A_1 \in B_1$ e $A_2 \in B_2$. Assim,

$$Mor_{I_a}(B_1, B_2) = \left\{ \begin{array}{l} [f];\ f \in Mor_a\ (A_1, A_2) \text{ para algum } A_1 \in B_1 \text{ e} \\ A_2 \in B_2 \end{array} \right\}.$$

Definimos a composição de morfismos na categoria I_a por

$[f] \circ [g] = [f \circ g]$ onde f e g são representantes das classes e $Im(g) = Dom(f)$.

Os axiomas de categoria são satisfeitos e esta nova categoria, obtida a partir de A, é chamada categoria das classes de isomorfismos de A.

<u>Observação</u>:

Muitas vezes confundimos uma categoria a com I_a, identificando objetos e morfismos isomorfos em a. Outras vezes, I_a com a, através de uma escolha natural de algum representante de cada classe. Vamos exemplificar isto, tomando as categorias C_c^* e K. Seja A uma álgebra C_c^*. Então A é naturalmente isomorfo a $C(H(A))$, sendo que $H(A)$ é um espaço topológico compacto. Portanto, existe $X \in Ob(K)$, tal que A é isomorfo a $C(X)$. Além disso, se A é isomorfo a $C(X)$ e A é isomorfo a $C(Y)$, então X e Y são homeomorfos.

Neste caso, nós identificamos X e Y, dizendo que A é isomorfo a um único C(X).

3.39. Dualidade

Consideremos uma categoria $\mathcal{a}$. A categoria dual de $\mathcal{a}$, é uma categoria $\mathcal{a}^*$, cujos objetos estão em correspondência biunívoca com os objetos de $\mathcal{a}$ e cujos morfismos estão em correspondência biunívoca com os de $\mathcal{a}$. Além disso, se A^* denota o objeto de $\mathcal{a}^*$ que está em correspondência com o objeto A de $\mathcal{a}$, e f^* é o morfismo de $\mathcal{a}^*$ correspondente ao morfismo f de $\mathcal{a}$, então:

i) $f \in Mor(A,B) \Longrightarrow f^* \in Mor(B^*,A^*)$.

ii) $(id_A)^* = id_{A^*}$.

iii) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Isto significa que uma categoria $\mathcal{a}^*$ é dual de $\mathcal{a}$, se existe um funtor contravariante e bijetivo de $\mathcal{a}$ em $\mathcal{a}^*$.

3.40. Exemplos de Categorias duais

1) Sejam $\mathcal{a}$ uma categoria e $A_o \in Ob(\mathcal{a})$ fixo. Definimos uma nova categoria $\mathcal{a}^*$, como segue:

i) A^* é um objeto de $\mathcal{a}^*$, se $A^* = Mor(A,A_o)$ para algum $A \in Ob(\mathcal{a})$.

ii) Se A^* e B^* são objetos de $\mathcal{a}^*$, então um morfismo f^* de A^* em B^*, é definido por:

$$f^*: A^* = Mor(A,A_o) \to B^* = Mor(B,A_o)$$

$$f^*(g) = g \circ f ,$$

onde $f \in Mor(B,A)$.

Assim,

$$Mor(A^*,B^*) = \{f^*: A^* \to B^*;\ f \in Mor(B,A)\}.$$

iii) A composição é a composição usual de funções.

$\mathcal{a}^*$ assim definida é uma categoria.

Além disso, se definimos $F: \mathcal{a} \to \mathcal{a}^*$, por:

$F(A) = A^*$ para todo $A \in Ob(\mathcal{a})$

e $F(f) = f^*$ para todo morfismo de $\mathcal{a}$,

então F é um funtor contravariante sobrejetivo de $\mathcal{a}$ em $\mathcal{a}^*$.

Se impomos para a categoria $\mathcal{a}$, a condição:

Dados $A \in Ob(\mathcal{a})$ e dois elementos $a,b \in A$, existe um morfismo $g \in Mor(A,A_0)$ tal que $g(a) \neq g(b)$, então o funtor F torna-se injetivo.

Podemos então concluir que $\mathcal{a}$ e $\mathcal{a}^*$ são categorias duais.

2) <u>A dualidade das categorias K e C_c^*.</u>

Estritamente falando, as categorias K e C_c^* não são duais, porque

$$\begin{aligned} C : K &\to C_c^* \\ X &\to C(X) \\ f &\to C(f) \end{aligned}$$

é um funtor contravariante injetivo, mas não é sobrejetivo.

Porém, se identificamos as categorias, K com I_k e C_c^* com $I_{C_c^*}$, então o funtor C torna-se sobrejetivo, e desta forma, podemos dizer que K e C_c^* são duais.

3) Suponhamos que $a = C_c^*$. Podemos construir categorias duais de a, através da técnica usada no exemplo 1). Se tomamos $A_o = \mathbb{C}$ e identificamos a categoria K com I_K, então K tem a forma de uma categoria dual construida assim.

De fato, se construimos a categoria a^* tomando $A_o = \mathbb{C}$, conforme o exemplo 1), um objeto $A^* \in Ob(a^*)$ é dado por

$$A^* = Mor_{C_c^*}(A,\mathbb{C}) = H(A)$$

e um morfismo $f^* \in Mor(B^*,A^*)$ é definido por

$$F^*: B^* \to A^*$$

$$f^*(\psi) = \psi \circ f ,$$

onde $f \in Mor(A,B)$.

Assim, $f^* = H(f)$ onde $f: A \to B$ é um morfismo C_c^*.

Como na categoria I_K, um objeto X é igual ao objeto $H(C(X))$ e um morfismo f é igual ao morfismo $H(C(f))$, se identificamos K com I_K, então podemos dizer que a categoria K coincide com a categoria a^*.

3.41. Algumas considerações

Sabemos que se duas categorias a e a^* são duais, então existe uma correspondência biunívoca entre elas, estabelecida por um funtor contravariante. Afirmações válidas em uma, de certa forma são preservadas pela dualidade, estando em correspondência com afirmações válidas na outra.

Por exemplo, se f é um morfismo monic em a, então f^* é um morfismo epic em a^*. Se f é epic, então f^* é monic. Se f é um isomorfismo então f^* também o é.

Se um conceito é definido por um diagrama na categoria a, então na categoria a^*, o diagrama dual, obtido invertendo-se o sentido das flexas no anterior, define o dual do conceito. Assim, produto e coproduto são conceitos duais, expressos por seus respectivos diagramas.

$$\begin{tikzcd} A_1 & P \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] & A_2 \\ & C \arrow[ul, "g_1"] \arrow[u, "h"'] \arrow[ur, "g_2"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & S \arrow[d, "h"] & A_2 \arrow[l, "f_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Portanto, se sabemos que a tem um produto, esperamos que a^* possua um coproduto.

Esta relação que existe entre conceitos duais, nos dá uma técnica útil para resolver certos problemas complicados em determinadas categorias. A técnica consiste em passar da categoria a para a sua dual a^*, resolver o problema nesta última usando os conceitos duais, e depois voltar para a categoria original.

Como exemplo desta técnica, temos em nosso trabalho, a prova da existência do coproduto na categoria C_c^*. Nós a fizemos, transferindo o problema para a categoria K através do funtor H, usando o produto em K e voltando para a categoria C_c^* através do funtor C. A dualidade foi usada indiretamente. Porém, talvez não fosse possível provar a existência de coproduto em C_c^* sem utilizá-la. Depois nós provamos que, no caso finito, o coproduto coincide com o produto tensorial, mas nesta demonstração nós admitimos a existência do coproduto.

Vejamos agora, um resumo dos resultados obtidos relacionando as categorias C_c^* e K.

1) O coproduto em C_c^*, que no caso finito, coincide com o produto tensorial, está em correspondência com o produto em K, que é o produto cartesiano.

2) O produto em C_c^*, que é uma parte do produto cartesiano (parte normável para a norma $\|(a_i)_{i \in I}\| = \sup_{i \in I} \|a_i\|$), está em correspondência com o coproduto em K, que obtivemos tomando a união disjunta dos espaços e usando a compactificação de Stone-Čech.

3) Um quociente A/I, onde I é um ideal fechado de uma álgebra C_c^*, está em correspondência com o sub espaço fechado

$$h(I) = \{f \in H(A);\ f(I) = \{0\}\}$$

em K (Teorema 3.23).

4) Um ideal fechado de uma álgebra C_c^*, está relacionado com um quociente na categoria K (Proposição 3.31).

CAPÍTULO IV

DUALIDADE DE GELFAND PARA GRUPOS TOPOLÓGICOS COMPACTOS

4.1. Definição

Sejam $\mathcal{a}$ uma categoria com coprodutos finitos $\oplus$ e $A \in Ob(\mathcal{a})$. Uma comultiplicação em A é um morfismo γ de A em $A \oplus A$. Se o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \oplus A \arrow[d, "\gamma \oplus id_A"] \\ A \oplus A \arrow[r, "id_A \oplus \gamma"] & A \oplus A \oplus A \end{tikzcd}$$

comuta, dizemos que γ é co-associativa e o par (A,γ) é chamado um co-semigrupo.

Observamos que se $f \in Mor(A,C)$ e $g \in Mor(B,D)$, então o morfismo $f \oplus g$ é definido pelo diagrama abaixo, isto é, $f \oplus g$ é o único morfismo que torna o diagrama abaixo comutativo.

$$\begin{tikzcd} & A \oplus B \arrow[dd, "f \oplus g"] & \\ A \arrow[ur, "i_A"] \arrow[d, "f"'] & & B \arrow[ul, "i_B"'] \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "i_C"'] & C \oplus D & D \arrow[l, "i_D"] \end{tikzcd}$$

4.2. Definição

Sejam a uma categoria com produtos finitos e $A \in Ob(a)$. Uma multiplicação em A é um morfismo μ de $A \times A$ em A.
Se o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \times A \times A \arrow[r, "\mu \times id_A"] \arrow[d, "id_A \times \mu"'] & A \times A \arrow[d, "\mu"] \\
A \times A \arrow[r, "\mu"] & A
\end{tikzcd}$$

comuta, dizemos que μ é associativa e o par (A, μ) é chamado um semigrupo.
Aqui, nós observamos que se $f \in Mor(A,C)$ e $g \in Mor(B,D)$, o morfismo $f \times g$ é definido pelo diagrama abaixo, isto é, $f \times g$ é o único morfismo que torna o diagrama abaixo comutativo.

$$\begin{tikzcd}
C & C \times D \arrow[l, "\pi_C"'] \arrow[r, "\pi_D"] & D \\
A \arrow[u, "g"] & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] \arrow[u, "f \times g"] & B \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

4.3. Exemplos

1) Categoria de semigrupos sobre a, que denotamos por

a^S. Seja a uma categoria com produtos finitos. Construimos a categoria a^S da seguinte forma:

a) $Ob(a^S) = \{(A, \mu);\ A \in Ob(a)$ e (A, μ) é semigrupo$\}$.

b) Se (A, μ) e (B, τ) são objetos de a^S, então um morfismo de (A, μ) em (B, τ) é um morfismo $f \in Mor(A,B)$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
A \times A \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "\mu"'] & B \times B \arrow[d, "\tau"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

c) A composição em a^S é a composição de a.

Precisamos verificar que a^S, assim construida, satisfaz os axiomas da definição de categoria.

i) $Mor((A, \mu),(B, \tau))$ é um conjunto, pois está contido no conjunto de morfismos de A em B.

ii) Dado $(A, \mu) \in Ob(a^S)$, existe $id_{(A, \mu)} \in Mor((A, \mu), (A, \mu))$ e $id_{(A, \mu)} = id_A$.

De fato, desde que $id_A \times id_A$ é o único morfismo que torna o diagrama abaixo comutativo,

$$\begin{tikzcd}
A & A \times A \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_A"] & A \\
A \arrow[u, "id_A"] & A \times A \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_A"'] \arrow[u, "id_A \times id_A"] & A \arrow[u, "id_A"']
\end{tikzcd}$$

então $id_A \times id_A = id_{A \times A}$ e desta forma o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "id_A \times id_A"] \arrow[d, "\mu"'] & A \times A \arrow[d, "\mu"] \\ A \arrow[r, "id_A"] & A \end{tikzcd}$$

Portanto, $id_A \in Mor((A, \mu),(A, \mu))$.

Além disso, id_A atua como identidade à esquerda e à direita para os elementos de $Mor(A, \mu),(B, \tau))$ e $Mor(B, \tau),(A, \mu))$, respectivamente.

Logo, $id_{(A, \mu)} = id_A$.

iii) A lei de composição é associativa, pois coincide com a composição na categoria a.

Portanto, a^S é uma categoria, chamada categoria dos semigrupos sobre a.

2) Categoria dos co-semigrupos sobre a, que denotamos por a_{cs}.

i) Os objetos de a_{cs} são os co-semigrupos (A, γ) tais que $A \in Ob(a)$.

ii) Se (A, γ) e (B, σ) são objetos de a_{cs}, então um morfismo de (A, γ) em (B, σ) é um morfismo $f \in Mor(A,B)$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[d, "\sigma"] \\ A \oplus A \arrow[r, "f \oplus f"] & B \oplus B \end{tikzcd}$$

iii) A composição em a_{cs} coincide com a composição em a.

3) Categoria dos semigrupos topológicos compactos, que denotamos por K^s.

Os objetos de K^s são os semigrupos (X, μ) tais que $X \in Ob(K)$. Portanto, o par (X, μ) deve satisfazer:

i) X é um espaço topológico compacto.

ii) μ: $X \times X \to X$ é uma função contínua e associativa.

4) Categoria dos co-semigrupos sobre C_c^*, que denotamos por $C_c^* H$.

Os objetos de $C_c^* H$ são os co-semigrupos (A, γ) tais que $A \in Ob(C_c^*)$. Portanto, o par (A, γ) deve satisfazer:

i) A é uma álgebra C_c^*.

ii) γ: $A \to A \oplus A$ é um homomorfismo de álgebras C_c^*, co-associativo.

A categoria $C_c^* H$ é chamada categoria das álgebras C_c^* de Hoph.

Lembramos que o produto na categoria K é o produto cartesiano e o coproduto em C_c^*, para o caso finito, é o produto tensorial, e que o produto em K está em correspondência com o coproduto em C_c^*.

Assim, se (X, μ) é um semigrupo topológico compacto, a multiplicação $\mu: X \times X \to X$ é uma função contínua e $C(\mu): C(X) \to C(X \times X) = C(X) \oplus C(X)$ é um morfismo C_c^* e portanto uma co-multiplicação na categoria C_c^*.

Logo, multiplicação na categoria K corresponde à co-multiplicação na categoria C_c^*.

Vejamos agora, que associatividade na categoria K corresponde à co-associatividade em C_c^*.

Seja $\mu: X \times X \to X$ associativa. Então o diagrama (1) comuta e portanto, o diagrama (2) também comuta.

(1)
$$\begin{tikzcd}
X \times X \times X \arrow[r, "\mu \times id_X"] \arrow[d, "id_X \times \mu"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\
X \times X \arrow[r, "\mu"] & X
\end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd}
C(X) \arrow[r, "C(\mu)"] \arrow[d, "C(\mu)"'] & C(X \times X) \arrow[d, "C(id_X \times \mu)"] \\
C(X \times X) \arrow[r, "C(\mu \times id_X)"] & C(X \times X \times X)
\end{tikzcd}$$

Se $C(\mu \times id_X) = C(\mu) \oplus id_{C(X)}$ e $C(id_X \times \mu) = id_{C(X)} \oplus C(\mu)$, então o diagrama (2) é o diagrama da co-associatividade em C_c^* e desta forma, podemos concluir que associatividade em K corresponde à co-associatividade em C_c^*.

Provemos que se $f \in Mor(X,W)$ e $g \in Mor(Y,Z)$, onde X,Y,Z e W são objetos de K, então $C(f \times g) = C(f) \oplus C(g)$.

Por definição, $f \times g$ é o único morfismo em K que torna o diagrama abaixo comutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & X \times Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] \arrow[ddd, "f \times g"] & \\
X \arrow[d, "f"'] & & Y \arrow[d, "g"] \\
W & & Z \\
 & W \times Z \arrow[ul, "\pi_W"] \arrow[ur, "\pi_Z"'] &
\end{tikzcd}$$

Aplicando o funtor C, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & C(X \times Y) = C(X) \oplus C(Y) & \\
C(X) \arrow[ur, "i_{C(X)} = C(\pi_X)"] & & C(Y) \arrow[ul, "C(\pi_Y) = i_{C(Y)}"'] \\
C(W) \arrow[u, "C(f)"] & & C(Z) \arrow[u, "C(g)"'] \\
 & C(W \times Z) = C(W) \oplus C(Z) \arrow[uuu, "C(f \times g)"] \arrow[ul, leftarrow, "i_{C(W)} = C(\pi_W)"] \arrow[ur, leftarrow, "C(\pi_Z) = i_{C(Z)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Podemos observar que este diagrama é o diagrama que define $C(f) \oplus C(g)$ e desta forma,

$$C(f) \oplus C(g) = C(f \times g)$$

<u>Observação</u>: Por um processo similar, podemos verificar

que $H(f) \times H(g) = H(f \oplus g)$.

Notação:

Seja (X, μ) um objeto de K^S. Denotamos por $C(X, \mu)$ o par $(C(X), C(\mu)) \in Ob(C_c^* H)$.

Seja (A, γ) um objeto de $C_c^* H$. Denotamos por $H(A, \gamma)$ o par $(H(A), H(\gamma)) \in Ob(K^S)$.

4.4. Lema

1) Se $f: (X, \mu) \to (Y, \tau)$ é um morfismo em K^S, então

$$C(f) : C(Y) \to C(X)$$

$$C(f)(\Psi) = \Psi \circ f$$

é um morfismo do co-semigrupo $C(Y, \tau)$ no co-semigrupo $C(X, \mu)$.

2) Se $f: (A, \gamma) \to (B, \sigma)$ é um morfismo em $C_c^* H$, então

$$H(f) : H(B) \to H(A)$$

$$H(f)(\Psi) = \Psi \circ f$$

é um morfismo do semigrupo $H(B, \sigma)$ no semigrupo $H(A, \gamma)$.

Demonstração:

1) Como $f: (X, \mu) \to (Y, \tau)$ é um morfismo em K^S, então o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{f \times f} & Y \times Y \\ \mu \downarrow & & \downarrow \tau \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Aplicando o funtor C, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} C(Y) & \xrightarrow{C(f)} & C(X) \\ C(\tau) \downarrow & & \downarrow C(\mu) \\ C(Y) \oplus C(Y) & \xrightarrow{C(f) \oplus C(f)} & C(X) \oplus C(X) \end{array}$$

Logo, C(f) é um morfismo em $C_c^* H$.

2) Como f: (A, γ) → (B, σ) é um morfismo em $C_c^* H$, então o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ A \oplus A & \xrightarrow{f \oplus f} & B \oplus B \end{array}$$

Aplicando o funtor H, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
H(B) \times H(B) \arrow[r, "H(f) \times H(f)"] \arrow[d, "H(\sigma)"'] & H(A) \times H(A) \arrow[d, "H(\gamma)"] \\
H(B) \arrow[r, "H(f)"] & H(A)
\end{tikzcd}$$

Logo, $H(f)$ é um morfismo em K^s.

4.5. Teorema

1) Se definimos

$$\begin{aligned} C : K^s &\to C_c^* H \\ (X,\mu) &\to C(X,\mu) \\ f &\to C(f) \end{aligned}$$

então C é um funtor contravariante de K^s em $C_c^* H$.

2) Se definimos

$$\begin{aligned} H : C_c^* H &\to K^s \\ (A,\gamma) &\to H(A,\gamma) \\ f &\to H(f) \end{aligned}$$

então H é um funtor contravariante de $C_c^* H$ em K^s.

Demonstração:

1) Vimos que se (X,μ) é um objeto de K^s, então

$C(X, \mu) = (C(X), C(\mu)) \in Ob(C_c^* H)$.

Pelo lema anterior, se $f: (X, \mu) \to (Y, \tau)$ é um morfismo em K^S, então $C(f) : C(Y, \tau) \to C(X, \mu)$ é um morfismo em $C_c^* H$.

Além disso:

i) Se (X, μ) é um objeto de K^S, então

$C(id_{(X,\mu)}) = C(id_X) = id_{C(X)} = id_{C(X,\mu)}$.

ii) Se f e g são morfismos em K^S, então $C(g \circ f) = C(f) \circ C(g)$, pois os morfismos na categoria K^S são morfismos em K.

Logo, C é funtor contravariante de K^S em $C_c^* H$.

2) De forma análoga, temos que $H: C_c^* H \to K^S$ é um funtor contravariante.

4.6. Teorema

As categorias K^S e $C_c^* H$ são duais.

Demonstração:

Pelo teorema anterior, o funtor $C: K^S \to C_c^* H$ é contra-variante. Necessitamos verificar que C é bijetivo.

Isto só ocorre quando identificamos as categorias K^S com I_{K^S} e $C_c^* H$ com $I_{C_c^* H}$, onde I_{K^S} e $I_{C_c^* H}$ são as categorias das classes de isomorfismos de K^S e $C_c^* H$, respectivamente.

Vejamos.

a) C é injetivo.

Desde que $C: K \to C_c^*$ é injetivo e todo morfismo em K^S é um morfismo em K, então se f e g são morfismos em K^S tais que $f \neq g$, temos $C(f) \neq C(g)$.

Além disso, se (X, μ), $(Y, \tau) \in Ob(K^S)$ são tais que $C(X, \mu) = C(Y, \tau)$, então temos X isomorfo a Y e μ isomorfo a τ. Portanto, na categoria I_{K^S}, o objeto (X, μ) coincide com o objeto (Y, τ).

Logo, C é injetivo.

b) C é sobrejetivo.

Seja $(A, \gamma) \in Ob(C_c^* H)$. Como A é isomorfo a $C(H(A))$ e γ é isomorfo a $C(H(\gamma))$, então na categoria $I_{C_c^* H}$, o objeto (A, γ) coincide com o objeto $C(H(A), H(\gamma))$.

Além disso, se f é um morfismo em $C_c^* H$, então f é isomorfo a $C(H(f))$. Portanto, na categoria $I_{C_c^* H}$, $[f] = [C(H(f))]$.

Logo, C é sobrejetivo.

Concluimos que, estritamente falando, $C_c^* H$ e K^S não são categorias duais. Porém, elas tornam-se duais quando identificamos cada uma delas com sua respectiva categoria das classes de isomorfismos.

4.7. <u>Definição</u>

Seja (A, γ) uma álgebra $C_c^* H$ e seja I um ideal fechado de A. Definimos os seguintes subconjuntos fechados de $A \hat{\otimes} A = A \oplus A$:

$$I_\ell = \overline{T}_\ell \text{ onde } T_\ell = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \ ; \ a_i \in I \},$$

$$I_r = \overline{T}_r \text{ onde } T_r = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \ ; \ b_i \in I \},$$

$$I_t = \overline{T}_t \quad \text{onde} \quad T_t = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \; ; \; a_i \in I \;\; \text{e} \;\; b_i \in I \} ,$$

$$I_d = \overline{T}_d \quad \text{onde} \quad T_d = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \; ; \; a_i \in I \;\; \text{ou} \;\; b_i \in I \} .$$

Definimos também,

$$\eta_\ell : A \oplus A \to A/I \oplus A$$

$$\eta_\ell = \eta \oplus 1 ,$$

$$\eta_r : A \oplus A \to A \oplus A/I$$

$$\eta_r : 1 \oplus \eta ,$$

e

$$\eta_d : A \oplus A \to A/I \oplus A/I$$

$$\eta_d : \eta \oplus \eta ,$$

onde 1 é a identidade de A e η: $A \to A/I$ é a projeção natural.

4.8. Teorema

Sejam (A, γ) uma álgebra C_c^* H e I um ideal fechado de A. Então I_ℓ, I_r, I_t e I_d são ideais fechados em $A \oplus A$, $I_\ell = \mathrm{Ker}(\eta_\ell)$, $I_r = \mathrm{Ker}(\eta_r)$, $I_d = \mathrm{Ker}(\eta_d)$, $I_t \subseteq I_r \cap I_\ell$ e $I_d = I_r + I_\ell$.

Além disso, se X é um espaço topológico compacto em dualidade com A e Y é o subespaço fechado de X tal que

$$I = \{ f \in C(X) ; \; f(Y) = \{0\} \} ,$$

então se $F \in C(X \times X)$, temos:

$$F \in I_\ell \iff F(Y \times X) = \{0\},$$

$$F \in I_r \iff F(X \times Y) = \{0\},$$

$$F \in I_t \iff F(X \times Y) \cup (Y \times X)) = \{0\},$$

$$F \in I_d \iff F(Y \times Y) = \{0\}.$$

Demonstração:

1) O processo para mostrar que I_ℓ, I_r, I_t e I_d são ideais fechados de $A \oplus A$ é semelhante. Portanto, faremos a demonstração apenas para I_ℓ, mostrando que T_ℓ é ideal e desta forma $I_\ell = \overline{T}_\ell$ é ideal fechado.

i) Sejam $x, y \in T_\ell$. Então podemos escrever x e y na forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \text{ com } a_i \in I \text{ para } i = 1,2,\ldots,n \quad \text{e}$$

$$y = \sum_{i=1}^{m} c_i \otimes d_i \text{ com } c_i \in I \text{ para } i = 1,2,\ldots,m.$$

Desde que podemos escrever y na forma, $y = \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i \otimes b_i$ com $a_i \in I$ para $i = n+1,\ldots, n+m$, então

$$x + y = \sum_{i=1}^{n+m} a_i \otimes b_i \quad \text{com} \quad a_i \in I \text{ para } i = 1,2,\ldots,n+m.$$

Logo, $x + y \in T_\ell$.

ii) Sejam $x \in T_\ell$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então $x = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$ com $a_i \in I$ para $i = 1,2,\ldots,n$.

Como $\lambda x = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) \otimes b_i$, então λx é um elemento de T_ℓ.

iii) Sejam $x = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in T_\ell$ e $y = \sum_{j=1}^{m} c_j \otimes d_j \in A \otimes A$.

Então,

$$x.y = (\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i).(\sum_{j=1}^{m} c_j \otimes d_j)$$

$$= \sum_{i,j} (a_i \otimes b_i).(c_j \otimes d_j)$$

$$= \sum_{i,j} (a_i.c_j) \otimes (b_i.d_j).$$

Desde que I é ideal, podemos concluir que x.y é um elemento de T_ℓ. Logo, T_ℓ é ideal de $A \oplus A$.

2) Como $T_t \subseteq T_\ell$ e $T_t \subseteq T_r$ então temos

$T_t \subseteq T_\ell \cap T_r \subseteq I_\ell \cap I_r$. Desde que $I_\ell \cap I_r$ é fechado, vem $I_t = \overline{T}_t \subseteq I_\ell \cap I_r$.

3) Mostremos que $I_d = I_r + I_\ell$.

Como $T_\ell \cup T_r \subseteq T_d$, então temos $I_\ell \subseteq I_d$ e $I_r \subseteq I_d$.

Logo, $I_\ell + I_r \subseteq I_d$, pois I_d é ideal.

Por outro lado, $T_d \subseteq T_\ell + T_r \subseteq I_\ell + I_r$.

Como I_r e I_ℓ são ideais fechados, pelo corolário 3.29, o mesmo ocorre com $I_\ell + I_r$.

Logo, $I_d = \overline{T}_d \subseteq I_\ell + I_r$.

4) Seja X o espaço topológico compacto em dualidade com A. Identificamos A com C(X), $A \oplus A$ com C(X x X) e $A \otimes A$ com sua imagem em C(X x X). Então,

$$A \otimes A = \{ \sum_{i=1}^{n} (f_i \otimes g_i);\ f_i, g_i \in C(X) \}$$

$$= \{h \in C(X \times X);\ h(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) . g_i(y)\}.$$

Seja Y o subespaço fechado de X tal que

$$I = \{f \in C(X);\ f(Y) = \{0\}\}.$$

Provemos que:

i) $F \in I_\ell \iff F(Y \times X) = \{0\}$.

Nas condições acima,

$$T_\ell = \{ \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i;\ f_i, g_i \in C(X) \text{ e } f_i \in I \text{ para } i = 1,\dots,n\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} h \in C(X \times X);\ h(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) . g_i(y)\ ,\ f_i, g_i \in C(X) \\ \\ \text{e } f_i(Y) = \{0\} \text{ para } i = 1,\dots,n \end{array} \right\}.$$

Seja $F \in I_\ell$. Então existe uma sequência $(G_n)_n \subset T_\ell$ tal que $G_n \to F$. Como para todo n, G_n é um elemento de T_ℓ, então $G_n(Y \times X) = \{0\}$. Portanto, se $y \in Y$ e $x \in X$, temos $F(y,x) = \lim_{n \to \infty} G_n(y,x) = 0$ e desta forma $F(Y \times X) = \{0\}$.

Logo, $I_\ell \subset \{F \in C(X \times X);\ F(Y \times X) = \{0\}\}$.

Mostremos que $J = \{F \in C(X \times X);\ F(Y \times X) = \{0\}\} \subseteq I_\ell$.

Seja $\bar{\eta}: X \times X \to X \times X / Y \times X$ a função natural.

Se $C_o = C_o(X \times X / Y \times X) = \{g \in C(X \times X / Y \times X);\ g(Y \times X) = 0\}$, então pela proposição 3.31,

$$\psi: C_o \to J$$

$$\psi(g) = g \circ \bar{\eta}$$

é um isomorfismo isométrico de álgebras C_c^*.

Mostremos que $\psi^{-1}(I_\ell) = C_o$.

a) $\psi^{-1}(I_\ell)$ é um ideal fechado de C_o.

Decorre do fato que I_ℓ é um ideal fechado e ψ é um isomorfismo isométrico de álgebras C_c^*.

b) $\psi^{-1}(I_\ell)$ é involutivo.

Como C_o é uma sub-álgebra C_c^* de $C(X \times X / Y \times X)$ e $\psi^{-1}(I_\ell)$ é um ideal fechado de C_o, então pela proposição 3.27,

$$(\psi^{-1}(I_\ell))^* \subset \psi^{-1}(I_\ell).$$

c) $\psi^{-1}(I_\ell)$ separa os pontos de $X \times X / Y \times X$.

c.i) Sejam $\infty \in X \times X / Y \times X$ e $(x_1, x_2) \in X \times X / Y \times X$ tal que $x_1 \notin Y$. Sejam $f, g \in C(X)$ tais que $f(x_1) = 1$, $f(Y) = \{0\}$ e $g(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Tomamos $\hat{h}: X \times X \to \mathbb{C}$

$$\hat{h}(x,y) = f(x).g(y).$$

Como $f(Y) = \{0\}$, então $\hat{h} \in T_\ell$.

Seja $\quad h: X \times X / Y \times X \to \mathbb{C}$

$$h(p) = \begin{cases} \hat{h}(x,y) \text{ se } p = (x,y) \in (X \times X) - (Y \times X) \\ 0 \text{ se } p = \infty \end{cases}$$

Então,

$\psi(h)(x,y) = h(\bar{\eta}(x,y)) = h(x,y) = \hat{h}(x,y)$ se (x,y) é um elemento de $X \times X - Y \times X$.

$\psi(h)(x,y) = h(\bar{\eta}(x,y)) = h(\infty) = 0 = \hat{h}(x,y)$ se (x,y) é um elemento de $Y \times X$.

Logo, $\psi(h) = \hat{h}$ e desta forma $h \in \psi^{-1}(I_\ell)$.

Além disso,

$h(x_1,x_2) = \hat{h}(x_1,x_2) = f(x_1).g(x_2) = 1$ e $h(\infty) = 0$.

c.ii) Sejam $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in X \times X \,/\, Y \times X$ tais que $(x_1,x_2) \neq (y_1,y_2)$ e ambos são elementos de $X \times X - Y \times X$.

Suponhamos que $x_1 \neq y_1$.

Tomamos $f \in C(X)$ tal que $f(x_1) = 1$, $f(y_1) = 2$, $f(Y) = \{0\}$, $g \in C(X)$ tal que $g(x) = 1$ para todo $x \in X$, $\hat{h} \in C(X \times X)$ tal que $\hat{h}(x,y) = f(x).g(y)$, e

$$h : X \times X \,/\, Y \times X \to \mathbb{C}$$

$$h(p) = \begin{cases} \hat{h}(x,y) \text{ se } (x,y) = p \in X \times X - Y \times X \\ 0 \text{ se } p = \infty \end{cases}$$

Então $h \in \psi^{-1}(I_\ell)$ e $h(x_1,x_2) \neq h(y_1,y_2)$.

Por um corolário do Teorema de Stone-Weirstrass [8, pg 125], $\overline{\psi^{-1}(I_\ell)} = C(X \times X \,/\, Y \times X)$ ou $\overline{\psi^{-1}(I_\ell)}$ é um ideal máximo de $C(X \times X \,/\, Y \times X)$.

Desde que $\overline{\psi^{-1}(I_\ell)} = \psi^{-1}(I_\ell) \subseteq C_o$ e C_o é ideal de $C(X \times X \,/\, Y \times X)$, temos $\psi^{-1}(I_\ell) = C_o$.

Logo, como $\psi: C_o \to J$ é um isomorfismo isométrico, temos $J = I_\ell$.

ii) Por processo análogo, podemos provar que $F \in I_r \iff F(X \times Y) = \{0\}$, $F \in I_d \iff F(Y \times Y) = \{0\}$ e $F \in I_t \iff F((X \times Y) \cup (Y \times X)) = \{0\}$.

5) Usaremos a mesma identificação utilizada no item 4) para mostrar que:

i) $I_\ell = Ker(\eta_\ell)$ onde $\eta_\ell: A \oplus A \to A/I \oplus A$.

$$\eta_\ell = \eta \oplus 1$$

Assim, conforme vimos na demonstração do teorema 3.23, se $\psi: A \to A/I$ é um morfismo C_c^*, ele se identificará com o morfismo

$$\hat{\Psi} : C(X) \to C(Y)$$

$$\hat{\Psi}(f) = f/_Y .$$

Portanto, se tomamos $\eta_\ell: A \oplus A \to A/I \oplus A$ então η_ℓ se identifica com

$$\hat{\eta}_\ell: C(X \times X) \to C(Y \times X)$$

$$\hat{\eta}_\ell(F) = F/_{Y \times X} .$$

Como $Ker(\hat{\eta}_\ell) = \{F \in C(X \times X);\ \hat{\eta}_\ell(F) = F|_{Y \times X} = \{0\}\}$, usando o item 4) podemos concluir que $Ker(\eta_\ell) = I_\ell$.

ii) $I_r = Ker(\eta_r)$ e $I_d = Ker(\eta_d)$.

Verifica-se de forma análoga à anterior.

4.9. <u>Teorema</u>

Sejam (A, γ) uma álgebra C_c^* H, I um ideal fechado de A e $Y = \{f \in H(A);\ f(I) = \{0\}\}$. Então:

a) $Y^2 \subseteq Y \iff \gamma(I) \subseteq I_r + I_\ell$

b) $Y.X \subseteq Y \iff \gamma(I) \subseteq I_\ell$

c) $X.Y \subseteq Y \iff \gamma(I) \subseteq I_r$

d) $X.Y \cup Y.X \subseteq Y \iff \gamma(I) \subseteq I_r \cap I_\ell$

onde I_ℓ e I_r são os conjuntos definidos em 4.7.

Demonstração:

Se $X = H(A)$, identificamos A com $C(X)$, γ com $C(H(\gamma))$ e I com $F_A(I) = \{F \in C(X);\ F(Y) = \{0\}\}$, onde F_A é a transformação de Gelfand de A. Assim,

$$\mu = H(\gamma)\colon H(A \oplus A) \to H(A)$$

$$\mu\ (f) = H(\gamma)(f) = f \circ \gamma$$

é a multiplicação em X, e

$$C(\mu)\colon C(X) \to C(X \times X)$$

$$C(\mu)(f) = f \circ \mu$$

cojncide com a co-multiplicação γ.

Mostraremos apenas o item a) pois o processo para demonstrar os outros itens é similar.

a) $Y^2 \subseteq Y \iff \gamma(I) \subseteq I_r + I_\ell$.

a.i) $Y^2 \subseteq Y \implies \gamma(I) \subseteq I_r + I_\ell$.

Suponhamos que $Y^2 \subseteq Y$, isto é, que $\mu(Y \times Y) \subseteq Y$. Seja $F \in I$. Então $F(Y) = \{0\}$. Isto implica que $F(\mu(Y \times Y)) = (F \circ \mu)(Y \times Y) = \{0\}$.

Como $F \circ \mu = C(\mu)(F) = \gamma(F)$, então temos

$$\gamma\ (F)(Y \times Y) = \{0\}.$$

Pelo teorema anterior, $\gamma(F) \in I_d = I_r + I_\ell$.

Portanto, $\gamma(I) \subseteq I_r + I_\ell$.

a.ii) $\gamma(I) \subseteq I_r + I_\ell \Rightarrow Y^2 \subseteq Y$.

Suponhamos que existe $z \in \mu(Y \times Y)$ tal que que $z \notin Y$. Então podemos escrever $z = \mu(y,y')$ para algum $(y,y') \in Y \times Y$. Seja $F \in I$. Então $\gamma(F) \in \gamma(I) \subseteq I_r + I_\ell = I_d$.
Pelo teorema anterior, temos $\gamma(F)(Y \times Y) = \{0\}$.
Como $\gamma(F) = F \circ \mu$, então temos $F(\mu(Y \times Y)) = \{0\}$ e desta forma $F(z) = 0$, o que é uma contradição, pois como Y é fechado e $z \notin Y$, existe $G \in C(X)$ tal que $G(Y) = \{0\}$ e $G(z) \neq 0$.

4.10. Lema

Sejam $f: A \to B$ e $g: A \to C$ homomorfismos algébricos e g sobrejetivo. Então existe um homomorfismo algébrico $\hat{f}: C \to B$ tal que o diagrama abaixo comuta, se e somente se, $Ker(g) \subseteq Ker(f)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ C \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstração:

i) Suponhamos que existe um homomorfismo algébrico $\hat{f}: C \to B$ tal que $\hat{f} \circ g = f$.
Seja $a \in Ker(g)$. Então $g(a) = 0$.
Portanto, temos $f(a) = \hat{f}(g(a)) = \hat{f}(0) = 0$ e desta forma a é um elemento de $Ker(f)$.
Assim, $Ker(g) \subseteq Ker(f)$.

ii) Suponhamos que $Ker(g) \subseteq Ker(f)$.

Como $g: A \to C$ é sobrejetivo, dado $c \in C$, existe $a \in A$ tal que $c = g(a)$.

Definimos $\hat{f}: C \to B$

$$\hat{f}(c) = \hat{f}(g(a)) = f(a).$$

Sejam $a_1, a_2 \in A$ tais que $g(a_1) = g(a_2) = c$.

Desde que g é um homomorfismo algébrico, $a_1 - a_2$ é um elemento de $Ker(g) \subseteq Ker(f)$.

Portanto, $f(a_1) - f(a_2) = f(a_1 - a_2) = 0$ e assim temos,

$$f(a_1) = f(a_2)$$

Logo, $\hat{f}$ está bem definida.

Não é difícil verificar que $\hat{f}$ é um homomorfismo algébrico.

4.11. Teorema

Seja (A, γ) uma álgebra C^*_c H. Suponhamos que (A, γ) e (X, μ) estão em dualidade. Seja I um ideal fechado de A e $Y \subset X$ seu correspondente subespaço fechado. As seguintes afirmações são equivalentes:

1) Y é um sub-semigrupo de X.

2) $\gamma(I) \subseteq I_r + I_\ell = I_d$.

3) Existe $\bar{\gamma}: A/I \to A/I \oplus A/I$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\eta"'] & A \oplus A \arrow[r, "\eta \oplus \eta"] & A/I \oplus A/I \\ A/I \arrow[urr, "\overline{\gamma}"'] & & \end{tikzcd}$$

Demonstração:

1) $\Longleftrightarrow$ 2) Desde que Y é um sub-semigrupo de X se e somente se $Y^2 \subseteq Y$, é uma conseqüência imediata do teorema 4.9.

2) $\Longrightarrow$ 3) Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$I = \mathrm{Ker}(\eta) \subseteq \mathrm{Ker}((\eta \oplus \eta) \circ \gamma).$$

Seja $a \in I$. Então $\gamma(a)$ é um elemento de $I_r + I_\ell = I_d$.
Como $\mathrm{Ker}(\eta_d) = I_d$, temos

$(\eta \oplus \eta)(\gamma(a)) = \eta_d(\gamma(a)) = 0$ e desta forma a é um elemento de $\mathrm{Ker}((\eta \oplus \eta) \circ \gamma)$.

3) $\Longrightarrow$ 2) Suponhamos que existe $\overline{\gamma}$ tal que o diagrama acima comuta. Então, pelo lema anterior, temos

$$I = \mathrm{Ker}(\eta) \subseteq \mathrm{Ker}(\eta_d \circ \gamma).$$

Assim, se $a \in I$, temos $\eta_d(\gamma(a)) = (\eta_d \circ \gamma)(a) = 0$.
Portanto, $\gamma(a)$ é um elemento de $\mathrm{Ker}(\eta_d) = I_r + I_\ell$.
Segue que $\gamma(I) \subseteq I_r + I_\ell$.

4.12. Definição

1) Seja (A, γ) uma álgebra C_c^* H e seja I um ideal fe -

chado de A. I é um ideal C_c^* H de (A, γ), se e somente se, $\gamma(I) \subseteq I_r \cap I_\ell$.

Dizemos que (A, γ) é simples, se não possui ideais C_c^* H próprios.

2) Seja (X, μ) um semigrupo topológico compacto e Y um subespaço fechado de X. Y é um ideal do semigrupo (X, μ), se e somente se, $\mu(X \times Y) \cup \mu(Y \times X) \subseteq Y$.

Dizemos que (X, μ) é simples, se não possui ideais próprios.

4.13. Definição

1) Seja a uma categoria. Um objeto $B \in Ob(a)$ é dito nulo ou universalmente atraente, se para cada objeto $A \in Ob(a)$, existe um único morfismo $f: A \to B$.

2) Um objeto $C \in Ob(a)$ é dito co-nulo ou universalmente repelente, se para cada objeto $A \in Ob(a)$, existe um único morfismo $f: C \to A$.

Observações:

1) Objetos nulos de uma mesma categoria a são isomorfos. Portanto, quando identificamos a com a categoria I_a (das classes de isomorfismos de a), podemos falar do objeto nulo de a, e o denotamos por $\mathbb{O}$.

2) Objetos co-nulos de uma mesma categoria a são isomorfos. Assim, quando identificamos a com I_a, podemos falar do objeto co-nulo de a, e o denotamos por $\mathbb{1}$.

3) Na categoria K (dos espaços topológicos compactos) o objeto nulo, $\mathbb{O}$, é o espaço topológico compacto constituido de

um único elemento.

Na categoria C_c^* (das álgebras C_c^*) o objeto co-nulo é $\mathbb{C}$ (corpo dos complexos).

De fato, se A é uma álgebra C_c^* e $f\colon \mathbb{C} \to A$ é um morfismo C_c^*, então f preserva a identidade.

Assim, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$f(\lambda) = f(\lambda.1) = \lambda f(1) = \lambda.e$$

onde e é a identidade de A.

4.14. Definição

Sejam a uma categoria com coprodutos finitos e objeto co-nulo $\mathbb{1}$ e (A, γ) um co-semigrupo sobre a. Uma co-identidade para (A, γ) é um morfismo $e\colon A \to \mathbb{1}$ de a, tal que os diagramas abaixo comutam.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "i_A"'] & A \oplus A \arrow[d, "id_A \oplus e"] \\
& A \oplus \mathbb{1}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \oplus A \arrow[d, "e \oplus id_A"'] & A \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[dl, "i_A"] \\
\mathbb{1} \oplus A &
\end{tikzcd}$$

Observação:

Se (X, μ) é um semigrupo topológico compacto, uma identidade para (X, μ) é um elemento $1 \in X$ tal que

$$\mu(1,x) = \mu(x,1) = x \quad \text{para todo } x \in X.$$

Porém, esta definição pode ser formulada através do objeto nulo de K, conforme vemos na proposição que segue.

4.15. Proposição

Seja (X, μ) um semigrupo topológico compacto e $\emptyset$ o objeto nulo de K. Então (X, μ) tem uma identidade 1, se e somente se, existe um morfismo $p: \emptyset \to X$ tal que os diagramas abaixo comutam.

$$
\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[r, "\mu"] & X \\
& X \times \emptyset \arrow[u, "\pi_X"'] \arrow[ul, "id_X \times P"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X & X \times X \arrow[l, "\mu"'] \\
\emptyset \times X \arrow[u, "\pi_X"] \arrow[ur, "P \times id_X"'] &
\end{tikzcd}
$$

Demonstração:

i) Suponhamos que existe $1 \in X$ tal que $\mu(1,x) = \mu(x,1) = x$ para todo $x \in X$.

Tomamos $\emptyset = \{1\}$ e $p: \emptyset \to X$

$1 \to 1$.

Então, para todo $x \in X$, temos

$(\mu \circ (id_X \times p))(x,1) = \mu(x,1) = x = \pi_X(x,1)$

e

$(\mu \circ (p \times id_X))(1,x) = \mu(1,x) = x = \pi_X(1,x)$.

Logo, os diagramas acima comutam.

ii) Seja $\emptyset = \{1\}$. Suponhamos que existe $p: \emptyset \to X$ tal que os diagramas acima comutam.

Então, para todo $x \in X$, temos

$(\mu \circ (id_X \times p))(x,1) = \mu(x,p(1)) = x$

e

$(\mu \circ (p \times id_X))(1,x) = \mu(p(1),x) = x$.

Logo, para todo $x \in X$, temos

$$\mu(x,p(1)) = \mu(p(1),x) = x$$

e assim $p(1)$ é uma identidade para (X, μ).

4.16. Teorema

Seja (A, γ) uma álgebra C_c^* H. Suponhamos que (A, γ) e (X, μ) estão em dualidade e que (X, μ) tem uma identidade 1. Sejam

$$\pi: X \times \{1\} \to X \quad \text{e} \quad \overline{\pi}: \{1\} \times X \to X$$
$$\pi(x,1) = x \qquad\qquad \overline{\pi}(1,x) = x .$$

Então $C(\pi): A \to A \oplus \mathbb{C}$ e $C(\overline{\pi}): A \to \mathbb{C} \oplus A$ são isomorfismos. Além disso, existe uma co-identidade e de (A, γ) tal que os diagramas abaixo comutam:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "C(\pi)"'] & A \oplus A \arrow[d, "id_A \oplus e"] \\ & A \oplus \mathbb{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \oplus A \arrow[d, "e \oplus id_A"'] & A \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[dl, "C(\overline{\pi})"] \\ \mathbb{C} \oplus A & \end{tikzcd}$$

Demonstração:

Desde que (X, μ) tem uma identidade, existe $p: \{1\} \to X$ tal que os diagramas abaixo comutam:

$$\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[r, "\mu"] & X & X & X \times X \arrow[l, "\mu"'] \\
& X \times \{1\} \arrow[ul, "id_X \times P"] \arrow[u, "\pi"'] & \{1\} \times X \arrow[u, "\overline{\pi}"] \arrow[ur, "P \times id_X"'] &
\end{tikzcd}$$

Dualizando através do funtor C, temos os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "C(\pi)"'] & A \oplus A \arrow[d, "id_A \oplus C(P)"] & A \oplus A \arrow[d, "C(P) \oplus id_A"'] & A \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[dl, "C(\pi)"] \\
& A \oplus \mathbb{C} & \mathbb{C} \oplus A &
\end{tikzcd}$$

Como a função inclusão, i_A, do coproduto coincide com $C(\pi)$ e $C(\overline{\pi})$, então os diagramas acima mostram que $e = C(p)$ é uma co-identidade para (A, γ).

Além disso, como π e $\overline{\pi}$ são isomorfismos, o mesmo ocorre com $C(\pi)$ e $C(\overline{\pi})$.

4.17. Teorema

Seja (A, γ) uma álgebra C_c^* H. Suponhamos que (A, γ) e (X, μ) estão em dualidade. Então (A, γ) tem uma co-identidade se e somente se (X, μ) tem uma identidade.

Demonstração:

No teorema anterior, vimos que se (X, μ) tem uma identidade, então (A, γ) tem uma co-identidade.

Suponhamos que (A, γ) tem uma co-identidade e. Então os diagramas abaixo comutam:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "i_A"'] & A \oplus A \arrow[d, "id_A \oplus e"] \\ & A \oplus \mathbb{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \oplus A \arrow[d, "e \oplus id_A"'] & A \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[dl, "i_A"] \\ \mathbb{C} \oplus A & \end{tikzcd}$$

Dualizando através do funtor H, temos os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd} X & X \times X \arrow[l, "\mu"'] \\ & X \times \mathbb{O} \arrow[ul, "\pi_X"] \arrow[u, "id_X \times H(e)"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "\mu"] & X \\ \mathbb{O} \times X \arrow[u, "H(e) \times id_X"] \arrow[ur, "\pi_X"'] & \end{tikzcd}$$

onde $\mathbb{O}$ é o objeto nulo de K.

Portanto, pela proposição 4.15, concluimos que (X, μ) tem uma identidade.

4.18. Lema

Seja $(S, .) = S$ um semigrupo topológico compacto. Então são equivalentes:

1) S é simples à direita e à esquerda.

2) S é simples à direita com identidade.

3) S é simples com identidade.

4) S é um grupo.

Demonstração:

Preliminares.

a) Qualquer ideal à direita de S contém um ideal à direita fechado.

Seja I um ideal à direita de S. Então I.S está contido em I.

Portanto, dado $x \in I$, fixo, $Y = x.S$ está contido em I.

Como a multiplicação é contínua e $\{x\} \times S \subseteq S \times S$ é compacto, então $Y = x.S$ é compacto e portanto fechado em S.

Mostremos que $Y = x.S$ é ideal à direita de S, isto é, que $Y.S \subseteq Y$.

Seja $z \in Y.S$. Então z tem a forma $z = (x.s_1).s_2 = x.(s_1.s_2)$ para algum $s_1, s_2 \in S$.

Desde que $s_1.s_2$ é um elemento de S, então z é um elemento de Y.

Logo, $Y \subseteq I$ é um ideal à direita de S que é fechado.

b) Se I é ideal à direita, mínimo, de S, então I é fechado. É uma conseqüência imediata de a).

c) S possui um ideal à direita, mínimo, que é fechado.

Seja

$F = \{I;\ I$ é ideal à direita de $S\}$.

i) $F \neq \emptyset$ pois $S \in F$.

ii) Definimos a seguinte relação de ordem em F:

Se I e J são elementos de F, então $I \leqslant J \iff I \subseteq J$.

iii) Toda cadeia em F possui uma cota inferior em F.

Sejam $(I_\alpha)_{\alpha \in L}$ uma cadeia em F e

$$M = \bigcap_{\alpha \in L} I_\alpha .$$

Então M é um elemento de F e além disso, para todo $\alpha \in L$, $M \leq I_\alpha$.
Logo, M é uma cota inferior da cadeia $(I_\alpha)_{\alpha \in L}$.
Pelo lema de Zorn, existe um elemento mínimo em F.
Pelo item b) este elemento mínimo é fechado.

d) Se I é um ideal à direita, mínimo, de S, então para todo $s \in S$, s.I é um ideal à direita, mínimo, de S.

i) Para todo $s \in S$, s.I é um ideal à direita de S.

Sejam $s \in S$, fixo e $Y = s.I$. Seja $z \in Y.S$. Então podemos escrever z na forma

$$z = (s.i).s' = s.(i.s') \text{ para algum } i \in I \text{ e } s' \in S.$$

Desde que i.s' é um elemento de I, então z é um elemento de Y.
Logo, $Y.S \subseteq Y$ e desta forma $Y = s.I$ é um ideal à direita de S.

ii) Para todo $s \in S$, s.I é um ideal à direita, mínimo, de S. Sejam $s \in S$ fixo e $Y = s.I$.
Suponhamos que J é um ideal à direita de S e $J \subseteq Y$.
Definimos $T = \{t \in I;\ s.t \in J\}$. Então T é um ideal à direita de S e além disso,

(1) Se $t \in T$ então s.t é um elemento de J e portanto $s.T \subseteq J$.

(2) Como $J \subseteq Y = s.I$, então se $j \in J$, podemos escrever j na forma, $j = s.i$, para algum $i \in I$. Assim, pela definição de T, temos que $i \in T$ e desta forma, $J \subseteq s.T$.

Por (1) e (2) concluimos que $J = s.T$.

Desde que I é ideal à direita, mínimo, de S e $T \subseteq I$, então temos $T = I$.

Logo, $J = s.I = Y$ e portanto Y é mínimo.

Observamos que estas preliminares continuam válidas para ideais à esquerda.

<u>Demonstração do lema:</u>

3) $\Longrightarrow$ 2) Sejam I um ideal à direita mínimo de S e t um elemento de I. Então:

1) $t.S = I$.

Como $t \in I$ e I é ideal à direita de S, então $t.S \subseteq I$. Além disso, $t.S$ é um ideal à direita de S. Como I é mínimo, segue que $t.S = I$.

2) $S.t.S = S$.

Por 1) temos,

$$S.t.S = \bigcup_{s \in S} s.(t.S) = \bigcup_{s \in S} s.I \subseteq S.$$

Além disso, $S.t.S$ é um ideal de S, pois

$$(S.t.S).S = S.t.S^2 \subseteq S.t.S$$

$$\text{e} \quad S.(S.t.S) = S^2.t.S \subseteq S.t.S$$

Como por hipótese S é simples, então $S.t.S = S$.

Assim, $S = \bigcup_{s \in S} s.I$. Como S tem uma identidade 1, então $1 \in s.I$ para algum $s \in S$. Isto implica que, para este s, $s.I = S$.

Além disso, pelo item d) das preliminares, $s.I$ é ideal à direita, mínimo, de S.

Logo, S é simples à direita, com identidade.

2) $\Longrightarrow$ 3) É trivial.

3) $\Longrightarrow$ 1) Suponhamos que S é simples com identidade. Então S é simples à direita. Por um processo análogo ao que usamos no item 3) $\Longrightarrow$ 2), mostra-se que S é simples à esquerda.

4) $\Longrightarrow$ 3) É trivial.

1) $\Longrightarrow$ 4) Suponhamos que S é simples à direita e à esquerda. Então S é ideal à direita, mínimo, de S. Pelo item d) das preliminares, para todo $x \in S$, $x.S$ é um ideal à direita, mínimo de S.

Portanto, para todo $x,y \in S$, temos

$$x.S = y.S = S.$$

Fixemos $x \in S$. Como $x.S = S$, existe $1_x \in S$ tal que $x.1_x = x$.

Seja $y \in S$. Como S é simples à esquerda, $S = S.x$ e portanto, $y = a.x$ para algum $a \in S$. Assim,

$y = a.x = a.x.1_x = y.1_x$, o que mostra que 1_x é identidade à direita para S.

Além disso, se z é um elemento qualquer de S, então $S = z.S$. Portanto, existe $w \in S$ tal que

$$1_x = z.w .$$

Logo, z tem inverso à direita.

Como S é um semigrupo, S tem identidade à direita e todo elemento de S tem inverso à direita, podemos concluir que S é um grupo [7, pg. 9].

4.19. <u>Teorema</u>

Seja (A, γ) uma álgebra C_c^* H. Suponhamos que (A, γ) é

(X, μ) estão em dualidade. Então são equivalentes:

1) (A, γ) é uma álgebra C^*_c H simples com co-identidade.

2) (X, μ) é um grupo topológico compacto.

Demonstração:

1) $\Longrightarrow$ 2) Suponhamos que (A, γ) é simples com co-identidade. Então, pelo teorema 4.17 (X, μ) tem uma identidade. Como (A, γ) é simples, pelo teorema 4.9, o mesmo ocorre com (X, μ). Assim, pelo lema anterior, concluímos que (X, μ) é um grupo topológico compacto.

2) $\Longrightarrow$ 1) Suponhamos que (X, μ) é um grupo topológico compacto. Então, pelo teorema 4.17, (A, γ) tem uma co-identidade e pelo lema anterior, (X, μ) é simples.
Logo, pelo teorema 4.9, concluímos que (A, γ) é simples com co-identidade.

Com este teorema, alcançamos nosso objetivo central, ou seja, conseguimos estabelecer a dualidade entre um grupo topológico compacto e uma álgebra C^*_c de Hopf, simples com co-identidade.

BIBLIOGRAFIA

1. HORVÁTH, John. Topological Vector Spaces and Distributions, Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

2. DIEUDONNÉ, J. Fundamentos de Analisis Moderno, Editorial Reverté, 1974.

3. BACHMAN, George and NARICI, Lawrence. Functional Analysis, New York, Academic Press, 1972.

4. DUNFORD - SCHWARTZ. Linear Operators, Part I, New York, Interscience Publishers, INC., 1967.

5. GREUB, W.H. Multilinear Álgebra, Springer - Verlag New York INC., 1967.

6. DUGUNDJI, J. Topology, Boston, Allyn & Bacon, 1966.

7. LANG, Serge. Álgebra, Addison-Wesley Publishing Company, 1965.

8. RICKART, Charles E. Banach Álgebras, D. Van Nostrand Company INC., 1960.

9. WIGGERS, Maria Emília Nunes Pires. Ações não Ortogonais de grupos ortogonais em esferas, Dissertação de Mestrado, UFSC, 1978.

10. LIMA, Elon Lages. Elementos de Topologia Geral, Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S.A., 1970.

11. RUDIN, Walter. Principles of Mathematical Analysis, 2d ed., McGraw-Hill Book Company, 1964.