

**ESTUDO SOBRE A INTEGRABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS  
BI E TRIDIMENSIONAIS**

**MARCUS WERNER BEIMS**

**DISSERTAÇÃO**

Submetida ao Curso de Pós Graduação em Físico Química  
da Universidade Federal de Santa Catarina  
para obtenção do grau de

**MESTRE EM CIÊNCIAS**

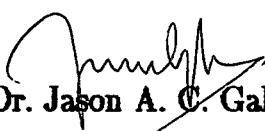
**UFSC**

Florianópolis, outubro de 1989

**ESTUDO SOBRE A INTEGRABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS  
BI E TRIDIMENSIONAIS**

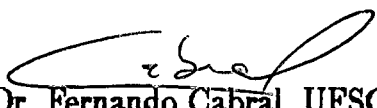
**Marcus Werner Beims**


Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do grau de  
**MESTRE EM CIÊNCIAS**  
Especialização Físico-Química e aprovada em sua forma final pelo  
Curso de Pós Graduação em Físico-Química da UFSC

  
Prof. Dr. Jason A. C. Gallas  
Orientador


Prof. Dr. Ademir Neves  
Coordenador

Banca examinadora:

  
Prof. Dr. Fernando Căbral, UFSC

  
Prof. Dr. Carlos Alberto Kuhnen, UFSC

  
Prof. Dr. Alexandre Lago, UFSC

  
Prof. Dr. Jason A. C. Gallas, UFSC

## Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a integrabilidade de sistemas dinâmicos não-lineares, em particular, o átomo de hidrogênio perturbado por um campo magnético. Para isto, fazemos uma revisão de dois métodos de análise de pontos singulares (análise de Painlevé e expoente de Kowalevskaya), bem como do método direto ( $dI/dt = 0$ ) para encontrar invariantes. Além disso fazemos uma análise qualitativa baseada nas seções de Poincaré obtidas numericamente a partir das equações de movimento. Através destes métodos obtivemos resultados referentes a integrabilidade dos sistemas: modelo de Lorenz, retroespalhamento de Brillouin, potencial de Henon e Heiles, efeito Zeeman quadrático. Encontramos também, uma relação genérica para as ressonâncias de Painlevé para o caso do átomo de hidrogênio perturbado pelo potencial de Van de Waals, que é uma generalização do potencial correspondente ao efeito Zeeman quadrático.

## Abstract

The purpose of this work is to study the integrability of nonlinear dynamical systems, with particular emphasis on the problem of an hydrogen atom perturbed by a magnetic field. We review two methods (Painlevé analysis and Kowalevskaya exponents) of obtaining invariants for the systems as well as the “direct method” ( $dI/dt = 0$ ). In addition, based on numerically obtained Poincaré sections we perform a qualitative analysis of the integrability. We use these methods to study the integrability of the Lorenz model, Raman Brillouin backscattering, the Henon-Heiles potential and the quadratic Zeeman effect. We derive a generic relation for the Painlevé resonances for an hydrogen atom perturbed by a van der Waals potential (which is a kind of “generalized” quadratic Zeeman effect).

# Índice

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO TEÓRICA</b>	<b>6</b>
2.1	Conceitos gerais. . . . .	6
2.2	Superfície de seção e mapas. . . . .	9
2.3	Sistemas Hamiltonianos. . . . .	11
2.4	Sistemas integráveis e ergódicos. . . . .	15
2.5	Um grau de liberdade ( $n = 1, N = 2$ ). . . . .	18
2.6	Dois graus de liberdade ( $n = 2, N = 4$ ). . . . .	18
2.7	Três graus de liberdade ( $n = 3, N = 6$ ). . . . .	28
<b>3</b>	<b>MÉTODOS PARA PROCURAR INVARIANTES</b>	<b>30</b>
3.1	Introdução . . . . .	30
3.2	Análise de Painlevé . . . . .	31
3.3	Expoente de Kowalevskaya. . . . .	41
3.4	Método direto: $dI/dt = 0$ . . . . .	50
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES</b>	<b>63</b>
4.1	Introdução . . . . .	63
4.2	Sistemas não-Hamiltonianos . . . . .	63
4.3	Sistemas Hamiltonianos: . . . . .	66

<i>ÍNDICE</i>	2
<b>5 CONCLUSÃO</b>	<b>110</b>
<b>6 Programas</b>	<b>112</b>
6.1 Programa REDUCE bidimensional . . . . .	112
6.2 Programa REDUCE tridimensional . . . . .	114
6.3 Programas Turbo Pascal. . . . .	116

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

De uma forma geral na mecânica clássica, movimentos não-relativísticos podem ser descritos adequadamente pelas equações de Newton, que em alguns poucos casos podem ser resolvidas analiticamente. Nos restantes dos casos, para conhecermos a evolução temporal dos sistemas, as equações devem ser integradas numericamente.

Já no século 19, o problema central existente na mecânica celeste era o problema de  $n$  corpos <sup>1</sup>, e o problema associado a este, ou seja a estabilidade do sistema solar. Para  $n \geq 3$ , o problema de 3 corpos não pode ser resolvido de uma forma geral. No entanto, existem alguns métodos quantitativos como soluções em séries, ou técnicas de perturbação que foram desenvolvidas na tentativa de resolver este problema. Em paralelo à estes estudos quantitativos, surgiram aproximações qualitativas iniciadas por Poincaré. O trabalho de Poincaré tem um importante aspecto, que é a figura geométrica que ele dá do sistema dinâmico. Um sistema dinâmico pode ser representado por seu "espaço de fase", uma família de curvas que são soluções das equações de movimento.

Durante o século 20, vários progressos tem sido feitos em ambos os caminhos, quantitativo e qualitativo, culminando no que chamamos de teorema de KAM, que é um especial resultado relacionado com sistemas dinâmicos hamiltonianos quase-integráveis. Quando um sistema integrável, onde portanto, as curvas no espaço de fase são regulares

---

<sup>1</sup>O movimento de  $n$  massas interagindo de acordo com as Leis de Gravitação de Newton

é perturbado, pode ocorrer que a natureza destas soluções é totalmente modificada. As trajetórias eram originalmente regulares no espaço de fase, e após uma pequena perturbação existem regiões que continuam regulares, no entanto, separadas nitidamente de outras que apresentam movimento altamente irregular.

Embora as equações de movimento na mecânica clássica sejam rigorosamente determinísticas, o sistema clássico evolui com sensibilidade extrema em relação as condições iniciais, de modo tal que a sua evolução se torna imprevisível. Sistemas deste tipo, cujas trajetórias são totalmente irregulares e cuja evolução é imprevisível nós denominamos de *sistemas caóticos*. Hoje em dia sabemos que sistemas simples, com poucos graus de liberdade mostram geralmente comportamento irregular. Também avanços feitos na tecnologias de computadores, possibilitou um estudo mais detalhado dos movimentos irregulares em sistemas simples. Isto tem feito do caos, um dos campos em maior desenvolvimento na Física em anos recentes.

Para sistemas com somente um grau de liberdade, o movimento clássico é sempre periódico se for governado por um hamiltoniano independente do tempo, isto é, se a energia se conserva. Portanto, um sistema hamiltoniano unidimensional não pode ser caótico (veja seção 2.1). Também não são caóticos sistemas conservativos com  $n$  graus de liberdade,  $n > 1$ , se eles são "integráveis", isto é, se seu hamiltoniano puder ser escrito em função de  $n$  "invariantes". O papel dos invariantes no estudo da integrabilidade dos sistemas é de suma importância.

Sistemas com dois graus de liberdade  $n = 2$  que não admitem outro invariante além da energia total são os exemplos mais simples de sistemas conservativos que podem apresentar caos. Como exemplos podemos citar o potencial de Henon e Heiles, vários tipos de osciladores anarmônicos, ou ainda o problema tridimensional do átomo de hidrogênio num campo magnético uniforme.

Em contraste com os outros sistemas simples mencionados acima, o átomo de hidrogênio num campo magnético não é um modelo abstrato, mas sim um sistema físico real que é estudado em laboratórios [Holle et al. 1986], [Main et al. 1986]. Neste exem-



plo, se estudarmos a natureza regular ou caótica da dinâmica clássica, e procurarmos por manifestações do caos clássico no espectro quântico, estamos estudando física real, passível de ser testada em experimentos de laboratório.

Nosso objetivo com este trabalho, é analisar a integrabilidade de sistemas dinâmicos não-lineares. Para atingir este objetivo iremos estudar métodos de análise de pontos singulares (análise de Painlevé, expoente de Kowalevskaya), método direto ( $dI/dt = 0$ ), bem como estudos qualitativos através das seções de Poincaré. Nossa motivação principal é estudar a integrabilidade do átomo de hidrogênio perturbado por um campo magnético estático, ou seja, estudar o efeito Zeeman quadrático para o átomo de hidrogênio. O efeito Zeeman quadrático tem sido usado como instrumento para analisar as manifestações do caos clássico sobre o sistema quântico correspondente.

No cap. 2, faremos uma revisão teórica de conceitos importantes usados no decorrer do trabalho. Discutiremos explicitamente como são obtidas numericamente as conhecidas seções de Poincaré para o sistema de Henon e Heiles [Henon e Heiles 1964]. O Cap. 3 descreve sucintamente os métodos de análise de pontos singulares e o método direto para encontrar invariantes, incluindo um pequeno número de exemplos típicos no estudo de sistemas com poucos graus de liberdade que apresentam movimento caótico. No capítulo que segue (cap. 4), faremos uso dos métodos acima mencionados para estudar a integrabilidade de alguns sistemas físicos de interesse, como por exemplo, modelo de Lorenz, Henon e Heiles, átomo de hidrogênio perturbado, e outros... . Por estudar a "integrabilidade" entendemos reduzir a solução das equações de movimento a um simples problema de integração (quadratura) em termos de funções elementares.

## Capítulo 2

# REVISÃO TEÓRICA

Neste capítulo faremos uma revisão rápida de alguns importantes conceitos utilizados neste trabalho. Para isto, usamos como base a introdução do artigo de [Henon 1983] que dá um pequeno enfoque sobre o método numérico (seção de Poincaré) para estudar sistemas hamiltonianos.

### 2.1 Conceitos gerais.

Um *sistema dinâmico* é definido como qualquer sistema físico, cujo estado em um dado instante de tempo pode ser completamente definido através de  $N$  variáveis  $x_1, \dots, x_N$  obedecendo um sistema de  $N$  equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= f_1(x_1, \dots, x_N), \\ &\vdots \\ dx_n/dt &= f_n(x_1, \dots, x_N). \end{aligned} \tag{2.1}$$

O fato de que todas equações são de primeira ordem, não é uma restrição, pois equações diferenciais de ordem mais elevada podem sempre ser escritas desta forma pela introdução de variáveis adicionais. O sistema 2.1 é dito autônomo, porque a variável independente  $t$  (tempo) não aparece explicitamente no lado direito da equação. Nova-

mente isto não representaria uma restrição: um sistema não-autônomo pode ser transformado num sistema autônomo pela introdução de uma variável adicional. As  $N$  variáveis dependentes podem representar quantidades físicas arbitrárias, tais como posição, velocidade, ângulos, temperaturas, pressão, concentração, etc. Muitos problemas reais podem ser representados da forma (2.1), não somente na física mas em outras ciências, como a biologia e química.

Podemos definir um vetor  $\vec{X}$  com componentes  $x_1, \dots, x_N$  e um vetor  $\vec{F}$  com componentes  $f_1, \dots, f_N$ , que nos permite escrever o sistema de equações diferenciais 2.1 de uma forma mais simples

$$d\vec{X}/dt = \vec{F}(\vec{X}). \quad (2.2)$$

Uma representação muito útil do sistema dinâmico 2.1 é o chamado *espaço de fase*, que é um espaço com  $N$  dimensões. O estado do sistema num certo instante de tempo é representado por um ponto no espaço de fase. Este ponto se move com o tempo, e com a velocidade  $\vec{F}$ . Esta velocidade pode ser facilmente obtida das equações 2.1; de fato, dado um sistema 2.1 podemos imediatamente desenhar todo o campo de velocidade no espaço de fase (fig 2.1). O ponto representativo descreve uma curva, chamada *trajetória* ou *órbita*, que é tangencial ao vetor de campo em cada ponto. Deste modo, plotando o campo de velocidade no espaço de fase, sem qualquer integração, podemos obter informações sobre a forma das soluções. Note que isto somente é possível pelo fato de as equações diferenciais 2.1 serem de primeira ordem e o sistema ser autônomo. No entanto, isto não representa um problema essencial já que com funções transcendentais podemos sempre reduzir nosso sistema a ser de primeira ordem, através da adição de graus de liberdade (veja a seguir).

Através de um dado ponto no espaço de fase, passa somente uma trajetória. Fisicamente: se o estado do sistema é conhecido num dado instante de tempo, então a evolução futura é determinada. Em consequência, duas trajetórias que partem de dois pontos diferentes num dado tempo, nunca podem coincidir num mesmo ponto em um tempo posterior.

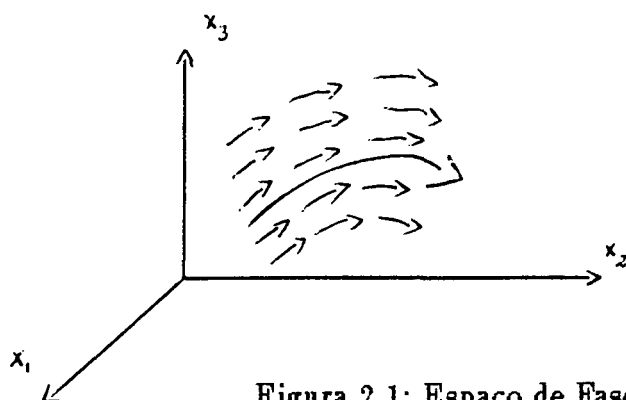


Figura 2.1: Espaço de Fase

Chamamos de *integral* de um sistema dinâmico, uma função  $I(x_1, \dots, x_N)$  cujo valor é constante para qualquer trajetória dada. Se existir uma integral  $I(\vec{X}) = \text{constante}$  em adição à um hamiltoniano  $H_0$ , podemos obter uma única curva  $x_1 = x_1(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)$  dada por  $x_i = \text{constante}$ ; portanto, neste caso as trajetórias permanecem numa órbita particular. Segue que se conhecermos uma integral ou um invariante  $I$ , podemos efetivamente reduzir em um a ordem do sistema. Para tanto, isolamos um  $x_n$  do invariante  $I$  (em princípio isto é sempre possível), e substituímos na primeira das equações de 2.1, e retiramos a última equação. Desta forma reduzimos para  $N - 1$  a ordem do sistema de equações 2.1.

De uma forma geral, se  $p$  integrais  $I(x_1, \dots, x_p)$  forem conhecidas, então cada trajetória é obrigada a ficar num espaço de dimensão  $N - p$ , definidas por:

$$I_1(\vec{X}) = C_1, \dots, I_p(\vec{X}) = C_p, \quad (2.3)$$

e a ordem do sistema pode ser diminuída de  $N - p$ .

Integrais são frequentemente derivadas de considerações físicas (leis de conservação), fora isto, infelizmente não se conhece um procedimento sistemático para achar integrais de um dado sistema que permitam simplificar seu estudo.

## 2.2 Superfície de seção e mapas.

Estaremos interessados no comportamento assintótico de uma trajetória quando  $t \rightarrow \infty$ , e para isso não é realmente necessário seguir esta trajetória em grandes detalhes; é suficiente ter um “amostra” de tempos em tempos. Esta é a idéia básica do método da superfície de seção. Para exposição do método, é conveniente considerarmos o caso  $N = 3$ , de modo que o espaço de fase é tridimensional. Escolhemos neste espaço de fase uma determinada superfície de seção  $\Sigma$ , cuja dimensão vamos definir como sendo  $M = N - 1 = 2$ , ou seja uma superfície bidimensional: e consideramos as interseções sucessivas  $Y_0, Y_1, Y_2, \dots$  de uma trajetórias com  $\Sigma$  (veja fig 2.2). Se assumirmos que a trajetória é *repetida* (significa que as trajetórias sempre voltam novamente à uma região do espaço visitadas por elas anteriormente), teremos uma sequência infinita desses pontos.

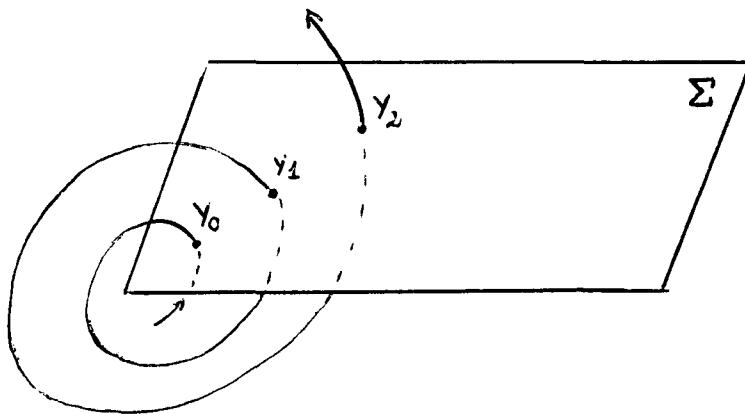


Figura 2.2: Seção do Espaço

Esta sequência tem a propriedade fundamental que se um ponto  $Y_i$  é dado, então o próximo ponto  $Y_{i+1}$  pode ser deduzido. Isto pode ser visto facilmente: tudo que se tem a fazer é seguir a trajetória de  $Y_i$  por integração da equação diferencial, até cruzar  $\Sigma$  novamente; esta nova interseção é  $Y_{i+1}$ . Temos portanto um *mapa*  $G$ :

$$Y_{i+1} = G(Y_i), \quad (2.4)$$

que é chamado de *mapa de Poincaré*.

Um *ponto fixo* do mapa 2.4 é um ponto  $Y^*$  que satisfaz:

$$Y^* = G(Y^*). \quad (2.5)$$

Todos os pontos fixos representados pelas equações 2.5 estão na superfície de seção de dimensão  $M$ , portanto, as equações 2.5 são um sistema com  $M$  equações diferenciais ordinárias e  $M$  incógnitas. Pontos fixos são muito importantes no estudo de mapas, pois eles determinam definitivamente a estrutura das trajetórias nas suas proximidades. Para estudar isto, escrevemos,

$$Y_i = Y^* + U_i, \quad (2.6)$$

onde  $U_i$  representa um pequeno deslocamento na posição do ponto fixo; substituindo 2.6 em 2.4 e desenvolvendo em série de potências, obtemos,

$$U_{i+1} = (\partial G / \partial Y)_{Y=Y^*} U_i + O(U^2). \quad (2.7)$$

$\partial G / \partial Y$  é a matriz de dimensão  $M \times M$ , chamada de *Jacobiano* do mapa. Se desprezarmos o último termo da equação 2.7, teremos um mapa linear em  $U$ . A natureza dos autovalores da matriz  $M \times M$ , denominados de  $\lambda$ , informará sobre o possível comportamento das trajetórias próximas ao ponto fixo  $Y^*$ . Consideramos um autovalor  $\lambda$  real, e o associado autovetor  $V$  real; se escolhermos um pequeno deslocamento do ponto fixo  $U_0 = V$ , então os sucessivos valores de  $U$  são:

$$U_1 = \lambda V, \dots, U_j = \lambda^j V, \dots, \quad (2.8)$$

e como o mapa  $U$  é linear, temos que a sequência de pontos  $Y_j$  cai numa linha reta que passa através do ponto fixo. Se qualquer um dos  $|\lambda| > 1$ , podemos ver das equações 2.8 que as trajetórias se afastam do ponto fixo  $Y^*$ , no entanto, elas convergirão para ele quando todos  $|\lambda| < 1$ .

## 2.3 Sistemas Hamiltonianos.

### 2.3.1 Definição e propriedades:

Sistemas hamiltonianos são um caso particular de sistemas dinâmicos, no entanto, são muito importantes: primeiro, porque o valor do hamiltoniano  $H$  é uma constante, reduzindo desta forma o número de graus de liberdade e portanto simplificando estudos mais detalhados; segundo, porque muitos sistemas reais de grande aplicação na Física podem ser escritos na forma hamiltoniana.

Um sistema hamiltoniano é caracterizado primeiro, por um número par de dimensões:

$$N = 2n. \quad (2.9)$$

O número  $n$  é chamado de *número de graus de liberdade*; e não deve ser confundido com  $N$ , a dimensão do espaço de fase. As  $2n$  variáveis chamadas de graus de liberdade, são usualmente representadas por

$$q_1, \dots, q_n, \quad p_1, \dots, p_n. \quad (2.10)$$

O sistema físico é completamente definido por uma função das  $2n$  variáveis, chamada de *hamiltoniano*:

$$H(q_1, \dots, p_n), \quad (2.11)$$

e as equações de movimento advindas do formalismo de Hamilton são,

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2.12)$$

$q_i$  e  $p_i$  são as chamadas *variáveis conjugadas*.

Uma integral pode ser imediatamente verificada: o hamiltoniano. Isto pode ser observado se calcularmos

$$dH/dt = (\partial H/\partial q_i) dq_i/dt + (\partial H/\partial p_i) dp_i/dt, \quad (2.13)$$

e, usando as equações 2.12:

$$dH/dt = (\partial H/\partial q_i)(\partial H/\partial p_i) + (\partial H/\partial p_i)(-\partial H/\partial q_i) = 0. \quad (2.14)$$

Agora portanto, usando a integral  $H$  o sistema pode ser reduzido para  $2n - 1$  graus de liberdade (veja seção 2.1).

Se introduzirmos agora a seção do espaço de fase, o problema é reduzido ao estudo do mapa num espaço com  $2n - 2$  dimensões. Uma boa maneira de se obter esta redução é usar primeiramente a integral  $H$  para eliminar uma variável, por exemplo  $p_i$ , e então definir a seção do espaço pela equação  $q_i = 0$ , onde  $q_i$  é a variável conjugada a  $p_i$ . Desta forma um par de variáveis conjugadas pode ser eliminado, e os  $n - 1$  pares restantes servem como coordenadas na seção do espaço. O mapa  $G$  obtido desta forma tem a seguinte propriedade característica de sistemas hamiltonianos:

$$|\partial G/\partial Y| = 1, \quad (2.15)$$

onde  $\partial G/\partial Y$  é o *Jacobiano* e representa a variação que o mapa  $G$  sofre a cada ponto  $Y$  novo. A propriedade da equação 2.15 indica que o mapa  $G$  preserva o volume na seção do espaço ou seção de Poincaré (em contraste com sistemas dissipativos onde existe contração das áreas).

### 2.3.2 Órbitas periódicas e sua estabilidade:

Uma órbita periódica do sistema hamiltoniano corresponde a um ponto fixo ou um ciclo na seção do espaço; o ponto fixo é caracterizado por  $M = 2n - 2$  autovalores (veja seção 2.2). Um consequência da propriedade *simplética*<sup>1</sup> do sistema, é que estes autovalores

<sup>1</sup>Por propriedade simplética entendemos que o Jacobiano  $\partial G/\partial Y$  satisfaz a relação :

$$\left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial Y}\right) J \left(\frac{\partial G}{\partial Y}\right) = J, \quad (2.16)$$

onde o til representa a matrix transposta, e  $J$  é definido por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$



não podem ser arbitrários, mas eles vem aos pares, e o produto deles deve ser igual a 1. Portanto, se  $\lambda$  é um autovalor, então  $\lambda^{-1}$  também é autovalor.

Podemos explorar as consequências desta propriedade para o importante caso com dois graus de liberdade. Para  $n = 2$ , temos  $N = 2n = 4$ , e  $M = 2n - 2 = 2$ . A seção do espaço é uma seção de superfície bidimensional. O ponto fixo tem um simples par de autovalores, um inverso do outro. Portanto, a equação dos autovalores é dada por

$$\left| \frac{\partial G}{\partial Y} - \lambda I \right| = 0, \quad (2.18)$$

onde  $I$  é a matriz unitária de ordem  $(n - 1) \times (n - 1)$ . Agora calculamos o determinante (2.18), e usando a propriedade simplética de  $\frac{\partial G}{\partial Y}$  definida anteriormente, obtemos a equação característica para  $\lambda$ :

$$\lambda^2 - 2a\lambda + 1 = 0, \quad (2.19)$$

onde  $a$  é a constante real dada por  $a = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial G_{11}}{\partial Y} + \frac{\partial G_{22}}{\partial Y} \right)$ , chamada de *índice de estabilidade* que definirá a evolução do mapa  $G$ . Os autovalores de (2.19) são dados por:

$$\lambda = a \pm \sqrt{a^2 - 1}. \quad (2.20)$$

O valor deste número simples caracteriza completamente as propriedades das trajetórias próximo ao ponto fixo. As características do mapa  $G$  são dadas em função do índice de estabilidade  $a$ , portanto podemos distinguir os seguintes casos:

(1)  $-1 < a < 1$ : os dois autovalores são complexos conjugados, e caem sobre o círculo unitário (fig 2.3,esq.). Na aproximação linear (já que a série de potências da equação 2.7 foi truncada), a sequência de pontos para as trajetórias perto do ponto fixo caem todas sobre uma elipse (fig 2.3,dire). O ponto fixo é então chamado *elíptico*. Portanto, dizemos que o ponto fixo é *linearmente estável*; isto significa que na aproximação linear, as trajetórias que partem próximo ao ponto fixo, permanecem próximas à ele.

---

onde  $I$  é a matriz unitária  $(n - 1) \times (n - 1)$ .

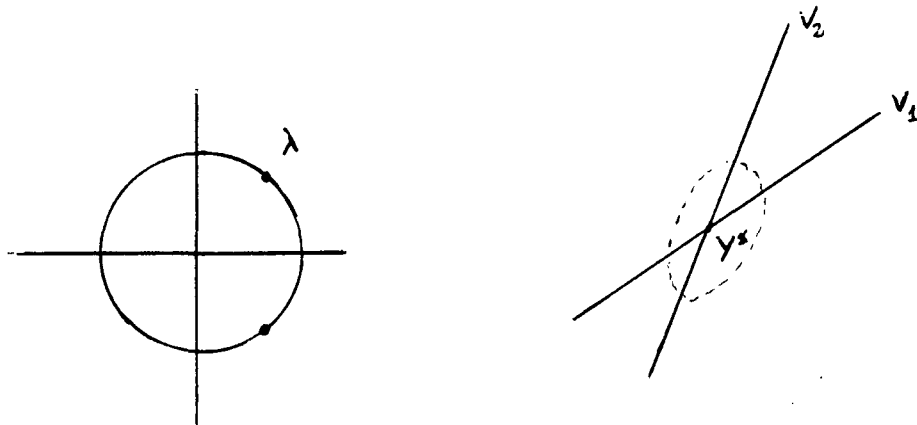


Figura 2.3:

(2)  $a > 1$ : os dois autovalores são reais e positivos, um menor do que 1 e outro maior que 1. Os pontos da trajetória caem num ramo da hipérbole (fig 2.4). O ponto fixo é chamado de *hiperbólico*, ou *linearmente instável*, já que as trajetórias não permanecem perto do ponto fixo. Isto pode ser visto se observarmos a equação 2.7; se  $a > 1$ , então  $\partial G/\partial Y > 1$  no ponto  $Y = Y^*$ , o que implica que o ponto  $U_{i+1}$  se distancia cada vez mais do ponto fixo  $Y^*$ .

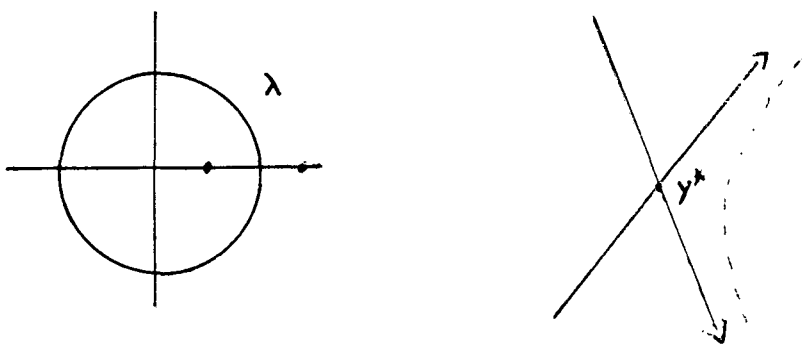


Figura 2.4:

(3)  $a < -1$ : este caso é similar ao anterior. Os dois autovalores são reais e

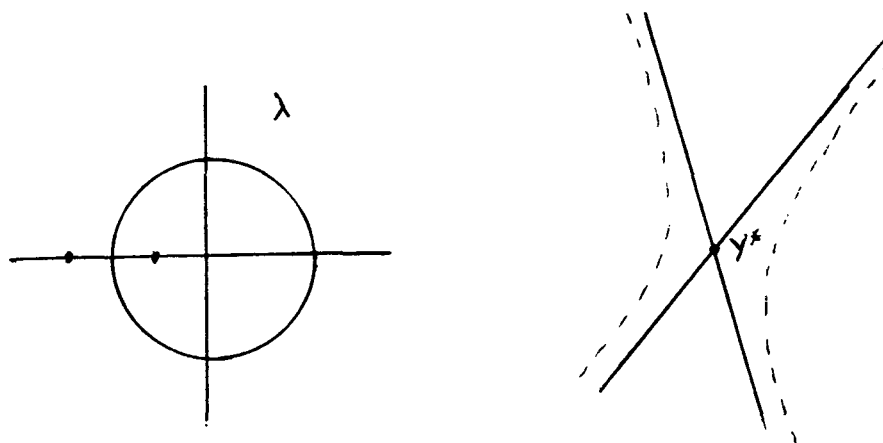


Figura 2.5:

negativos. Os pontos das trajetórias caem em ambos os ramos da hipérbole (fig 2.5). O ponto fixo é novamente de hiperbólico, ou linearmente instável.

## 2.4 Sistemas integráveis e ergódicos.

### 2.4.1 Sistemas integráveis:

Podemos tentar simplificar sistemas hamiltonianos através de uma mudança de variáveis apropriada. Se as novas variáveis  $Q_1, \dots, Q_n$ , e  $P_1, \dots, P_n$  forem tais que as equações de movimento possam ser derivadas novamente da função de uma hamiltoniana  $H(Q_1, \dots, P_n)$ , então a mudança de variáveis é chamada de *transformação canônica*. Esta nova forma será mais simples, em particular, se uma ou mais das novas variáveis não aparecerem na expressão para  $H$ . Suponha por exemplo que  $H$  não dependa de  $Q_n$ . Então,

$$dP_n/dt = -\partial H/\partial Q_n = 0, \quad (2.21)$$

e portanto, integrando-se esta equação, obtemos

$$P_n(t) = P_n(0) = \text{constante}. \quad (2.22)$$

Este valor constante pode ser considerado um parâmetro. Para um dado valor deste parâmetro, o hamiltoniano depende agora somente de  $2n - 2$  variáveis, formando  $n - 1$  pares de variáveis conjugadas. O número de graus de liberdade foi diminuído de uma unidade, e a ordem do sistema de duas unidades. O ideal seria podermos achar uma transformação canônica, de modo que o novo hamiltoniano não dependa de nenhum dos  $Q_i$ , isto é, tenha a forma  $H(P_1, \dots, P_n)$ . Quando isto é possível chamamos o hamiltoniano de *forma normal* do sistema. As novas variáveis são então chamadas de *variáveis ação-ângulo*, onde  $P_i$  é a "ação" e  $Q_i$  "ângulo". Temos então que:

$$P_i(t) = \text{constante} = C_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.23)$$

e:

$$dQ_i/dt = \partial H/\partial P_i. \quad (2.24)$$

O membro do lado direito desta equação é função dos  $P_i$ , portanto dos  $C_i$ ; escreveremos esta dependência como sendo  $\omega_i(C_1, \dots, C_n)$ . Os  $\omega_i$  são chamadas de *frequências*. Se escrevermos os valores iniciais como  $Q_i(0) = D_i$ , então a equação 2.24 pode ser imediatamente integrada resultando em

$$Q_i(t) = \omega_i t + D_i. \quad (2.25)$$

Obtemos desta forma de modo explícito a solução geral de 2.24 dada pelas equações 2.23 e 2.25; os  $C_i$  e os  $D_i$  são as  $2n$  constantes de integração. Por esta razão, um sistema hamiltoniano que pode ser reduzido à forma normal é chamado de *sistema integrável*.

As ações  $P_1, \dots, P_n$  são integrais do sistema, já que seu valor é constante ao longo de qualquer trajetória. Analogamente, se  $n$  integrais são conhecidas num sistema hamiltoniano, em princípio é possível determinar-se uma transformação canônica de modo tal que os novos  $P_i$  sejam iguais a estas integrais. Então o novo hamiltoniano será dependente de  $P_1, \dots, P_n$  somente, isto é, está na forma normal, e as soluções gerais podem ser obtidas. Portanto, um sistema hamiltoniano pode ser completamente resolvido em termo de quadraturas elementares, se somente  $n = N/2$  integrais são conhecidas; isto

é um contraste com o caso geral de sistemas dinâmicos como a eq. 2.1, nos quais é necessário conhecer  $N$  integrais para resolver o sistema completamente.

### 2.4.2 Relevância de sistemas integráveis:

A discussão acima conduz naturalmente a seguinte questão: dado um sistema hamiltoniano, é possível em geral reduzi-lo à forma normal? A resposta é não. Em outras palavras, sistemas hamiltonianos são geralmente não-integráveis. Exatamente por isto o estudo dos sistemas integráveis é de grande interesse. Primeiro, porque interessa muito sistemas físicos reais serem integráveis; e segundo, porque o estudo detalhado de casos integráveis, ajuda a entender os casos não-integráveis mais gerais.

### 2.4.3 Sistemas ergódicos:

Num sistema hamiltoniano, uma dada trajetória no espaço de fase estará sempre restrita a um subespaço  $H = \text{constante}$  já que  $H$  é uma integral. Este subespaço é normalmente chamado de *superfície de energia*, já que em muito casos  $H$  pode ser interpretado fisicamente como sendo a energia total do sistema. Se a medida que o tempo passa, uma trajetória arbitrariamente escolhida visitar *todos* os pontos da superfície de energia, dizemos que o sistema é *ergódico*.

Sistemas ergódicos tem sido usados no estudo de sistemas mais gerais ou quase-integráveis. Sistemas completamente integráveis são mais simples que sistemas quase-integráveis, enquanto que sistemas completamente ergódicos com trajetórias não regulares, são mais simples do que os sistemas quase-integráveis em alguns aspectos; por exemplo, normalmente não podemos obter as trajetórias de sistemas ergódicos, no entanto, é possível deduzir algumas propriedades estatísticas do sistema.

## 2.5 Um grau de liberdade ( $n = 1$ , $N = 2$ ).

Um sistema hamiltoniano com um grau de liberdade tem sempre uma integral,  $H$ ; portanto ele é *sempre integrável*. O espaço de fase tem somente duas dimensões ( $q_1, p_1$ ) e pode ser facilmente representado. A seção do espaço tem dimensão  $2n - 2 = 0$ , portanto reduzida a um ponto, ou uma sequência finita de pontos formando um ciclo. Isto mostra que o caso com um grau de liberdade é trivial, e é este o caso de sistemas comumente tratados nos cursos de Mecânica Clássica.

## 2.6 Dois graus de liberdade ( $n = 2$ , $N = 4$ ).

Este é um caso realmente interessante e não-trivial. Em geral, para um sistema hamiltoniano com dois graus de liberdade, conhecemos somente uma integral: o hamiltoniano  $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ . Portanto, no caso mais geral o sistema é não-integrável; as equações de movimento não podem ser resolvidas analiticamente, ou seja, não podemos escrever as soluções gerais explicitamente. Entretanto, o sistema pode ser estudado por computação numérica.

Consideremos o movimento de um ponto num plano bidimensional sujeito à um potencial  $V(x, y)$ :

$$\ddot{x} = -\partial V/\partial x, \quad \ddot{y} = -\partial V/\partial y. \quad (2.26)$$

O hamiltoniano para este problema é:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2), \quad (2.27)$$

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad p_1 = \dot{x}, \quad p_2 = \dot{y}. \quad (2.28)$$

Vamos considerar agora potenciais polinomiais. Esta escolha é motivada pelo fato que inúmeros sistemas físicos de real interesse (veja cap.1) são representados por potenciais polinomiais. Como estamos interessados em estudar sistemas não-lineares, não podemos escolher  $V$  de grau 2 pois as equações 2.26 se tornariam lineares. Portanto desejamos

usar polinômios de grau no mínimo 3. O grau 3, de fato, produz um problema não-trivial, com aparentemente todas as características de casos mais gerais. Escolhemos como exemplo o mesmo potencial escolhido originalmente por Henon e Heiles [1964]:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3), \quad (2.29)$$

que foi introduzido como modelo para estudar o movimento de estrelas em potenciais gravitacionais. Na figura 2.6 apresentamos as linhas equipotenciais de  $V = \text{constante}$  no plano  $(x, y)$ . Nesta figura vemos que próximo da origem, termos de segunda ordem dominam a equação 2.29, e o equipotencial é aproximadamente circular. Mais longe da origem as curvas são distorcidas, e a simetria ternária pode ser observada. Finalmente quando  $V = 1/6$ , que é a separatrix, observamos um triângulo equilátero.

O sistema tem uma integral: o hamiltoniano. Seu valor constante para uma dada trajetória é representado por  $E$ , que é a energia total do sistema por unidade de massa da partícula. Da equação 2.27 temos:

$$V(x, y) \leq E; \quad (2.30)$$

portanto as trajetórias relacionadas à  $E \leq 1/6$  são obrigadas a permanecerem na parte do plano  $(x, y)$  onde esta desigualdade é satisfeita. Deste modo, se uma trajetória qualquer partir de dentro da linha equipotencial  $V(x, y) = \text{cte.}$  na fig 2.6, ela deve permanecer dentro desta linha.

A velocidade é portanto restrita pela equação 2.27,

$$\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) \leq E, \quad (2.31)$$

já que  $V$  é positivo dentro da região representada pela fig 2.6. Portanto as trajetórias devem permanecer num volume no espaço de fase finito, e por isto podemos restringir nosso estudo à valores de energia  $0 \leq E \leq 1/6$ .

Para  $V > 1/6$ , as linhas equipotenciais são abertas, e portanto, não existe garantia de que as trajetórias retornem à mesma região no espaço de fase ocupada por elas anteriormente; de fato, muitas trajetórias "escapam" para infinito no plano  $(x, y)$ .

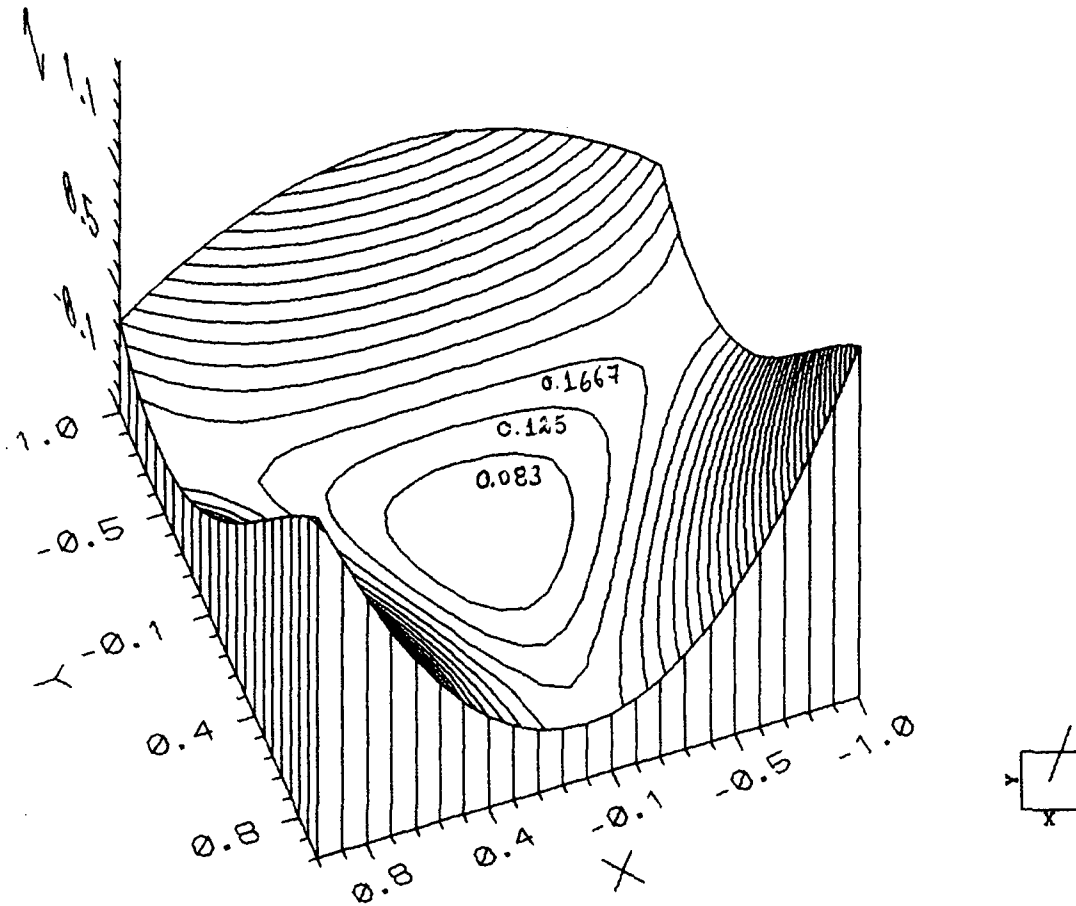


Figura 2.6: Linhas Equipotenciais com os valores de energia associados: 0.083,0.125,0.1667; Quando  $V = 1/6 = 0.1667$  teremos um triângulo equilátero.



Não se conhece outra integral além de  $H$ , portanto, para obtermos informações sobre o comportamento futuro do sistema devemos recorrer a integrações numéricas. Vamos agora discutir uma maneira de obter tais informações. Primeiramente usamos  $E$  para eliminar  $p_1$  nas equações 2.27 e, portanto, diminuir a ordem do sistema de equações diferenciais a ser estudado. Este fato obviamente também reduz a dimensão do espaço de fase. Num próximo passo, definimos uma superfície de seção. No presente caso escolhemos

$$q_1 = 0. \quad (2.32)$$

Note que a escolha desta superfície 2.32 é arbitrária, no entanto, uma escolha adequada pode simplificar o cálculo dos pontos que cruzam esta superfície. As coordenadas na seção de superfície serão  $q_2$  e  $p_2$ . Com esta escolha temos da eq.2.27:

$$p_1 = \pm \sqrt{2E - p_2^2 - q_2^2 + \frac{2}{3}q_2^3}. \quad (2.33)$$

Na equação 2.33 podemos observar que cada ponto na superfície de seção corresponde a duas possíveis trajetórias, portanto o sinal  $\pm$  é inoportuno. Podemos eliminar esta ambiguidade simplesmente redefinindo a superfície de seção como sendo:

$$q_1 = 0, \quad \text{e} \quad p_1 \geq 0. \quad (2.34)$$

Em outras palavras, consideramos somente interseções com  $q_1 = 0$  na direção positiva ( $q_1$  crescente).

Chegamos agora aos resultados numéricos obtidos da integração das equações de movimento 2.28. Estes resultados representam o comportamento do sistema de Henon e Heiles para valores particulares de Energia. Escolhemos primeiramente um pequeno valor de energia:  $E = 1/12$ . Figura 2.7 mostra a típica sequência de pontos. Esta figura foi obtida num Micro Computador PC-XT através de um programa Turbo Pascal (ver seção 6.1); este programa integra as equações de movimento 2.28 referentes ao potencial de Henon e Heiles usando o método de Runge-Kutta (quarta ordem), e em seguida plota

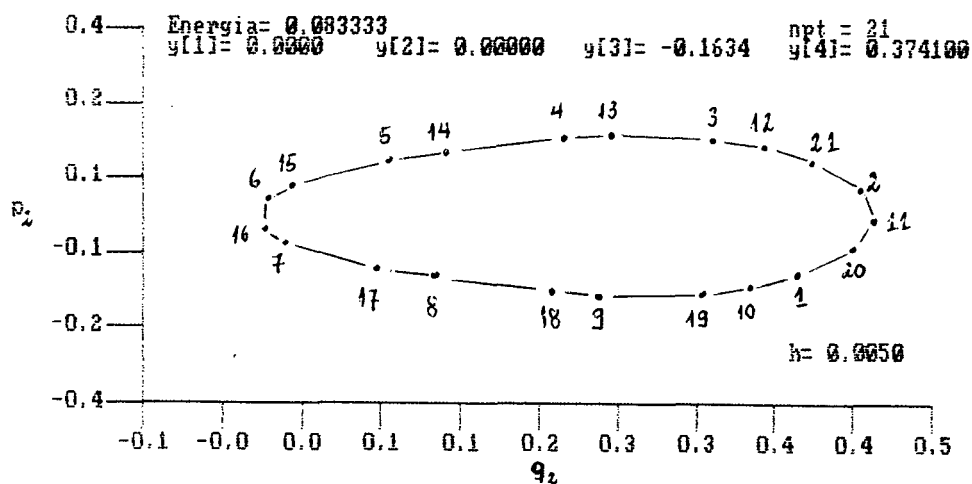


Figura 2.7: Para o valor de energia=0.0833 esta figura mostra uma órbita para o potencial de Henon-Heiles (HH) com as condições iniciais dadas por  $y[1] = y[2] = 0, y[3] \equiv p_1$   $y[4](\equiv p_2) = 0.3741$ ; npt representa o número de pontos plotados e  $h$  é o passo de integração do programa.

todos os pontos  $q_2, p_2$  para os quais  $q_1 = 0$ . Espera-se que pontos plotados caiam sobre uma curva, e para verificar isto desenhamos a fig 2.7. Em outras palavras, o resultado sugere que existe uma *curva invariante*, isto é, uma curva invariante no mapa  $G$ . Além disso, as sucessivas interseções parecem ocorrer de forma regular; podemos observar isto entre o ponto 1 e o ponto 11 após uma volta completa, ou o ponto 11 e o ponto 21 depois de duas voltas. Isto é exatamente que esperamos de um sistema integrável. As condições iniciais são dadas na fig 2.7, onde  $y[1] = q_1$ ,  $y[2] = q_2$  e as velocidades associadas,  $y[3] = p_1$ ,  $y[4] = p_2$ .

Para o mesmo valor de energia  $E = 1/12$ , a figura 2.8 mostra uma vista geral de toda superfície de seção. Nesta figura mantemos sempre  $y[1] = y[2] = 0$ , com  $y[3]$  dado pela equação 2.33 e  $y[4]$  é a condição inicial arbitrária. A condição inicial  $y[4]$  correspondente a cada trajetória é dada por:

Órbita	$p_2 (\equiv y[4])$
Trajétória externa	0.408
Semi-lua à esquerda	-0.3674
Trajétória oval à direita	0.0816
Círculo inferior	-0.2449
Círculo superior	0.127
Trajétória c/ pontos hiperbólicos	-0.27525

Em cada caso, a sequência de pontos parece se restringir à uma curva invariante bem definida. As curvas exteriores da fig 2.8 marcam o contorno da região acessível na superfície de seção  $(q_2, p_2)$ ; isto é definido pela condição de que  $p_1$  da equação 2.33 deve ser real,

$$p_2^2 + q_2^2 - \frac{2}{3}q_2^3 < 2E. \quad (2.35)$$

A região acessível aparece sendo preenchida por uma família de curvas, cuja forma é invariante com relação aos números de pontos envolvidos, ou seja, em qualquer instante de tempo o sistema permanecerá restrito à estas trajetórias particulares. Portanto, fig

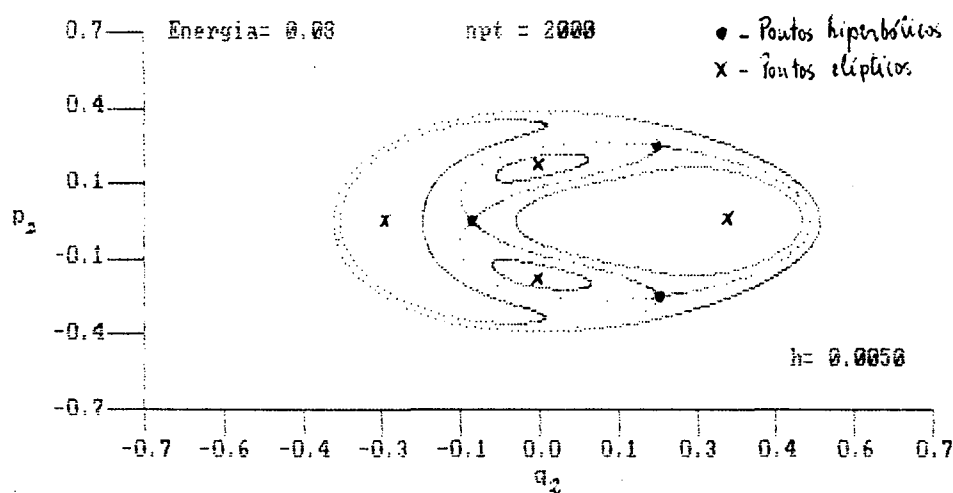


Figura 2.8:  $E=0.0833=1/12$ . Para o mesmo valor de energia esta figura mostra 6 órbitas regulares para HH com as respectivas condições iniciais  $y[4] = 0.408, 0.127, 0.0816, -0.2449, -0.3674, -0.27525$

2.8 sugere fortemente que o sistema seja integrável para  $E = 1/12$ .

A propósito, a fig 2.8 indica a existência de quatro pontos fixos elípticos dentro das quatro curvas ovais, e portanto, três pontos hiperbólicos; como foi visto no capítulo anterior, os pontos hiperbólicos são instáveis e os responsáveis pelo aparecimento de trajetórias irregulares. É interessante observar a sensibilidade da trajetória com pontos hiperbólicos em relação as condições iniciais; são necessárias no mínimo cinco casas decimais para obter esta órbita. Basta uma pequena mudança na condição inicial dentro destas cinco casas decimais, e obteremos o círculo superior ou então o inferior. Esta sensibilidade é uma característica típica de trajetórias instáveis.

Se repetirmos agora o mesmo procedimento para um valor de energia mais alto  $E = 1/8$ , temos uma surpresa (fig 2.9). Para algumas condições iniciais, achamos uma sequência de pontos que caem numa curva fechada; mas em outros casos, os pontos preenchem uma região bidimensional. Todos os pontos isolados na fig 2.9 correspondem

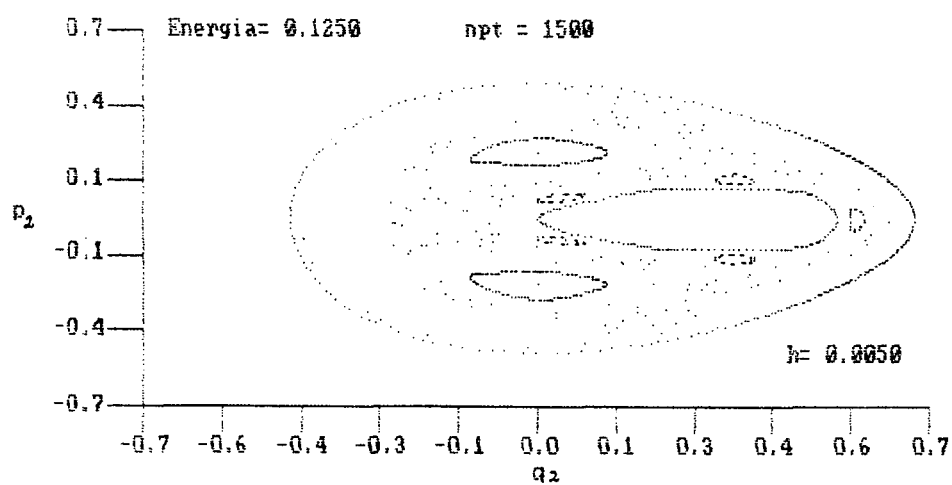


Figura 2.9:  $E=0.1250$ . Esta figura mostra 6 órbitas do potencial de HH para o valor de energia  $E = 1/8$ . Notamos que aparecimento de algumas ilhas e órbitas irregulares. As condições iniciais são  $y[4] = -0.499, -0.750, 0.000, 0.350, 0.300, 0.200$ .

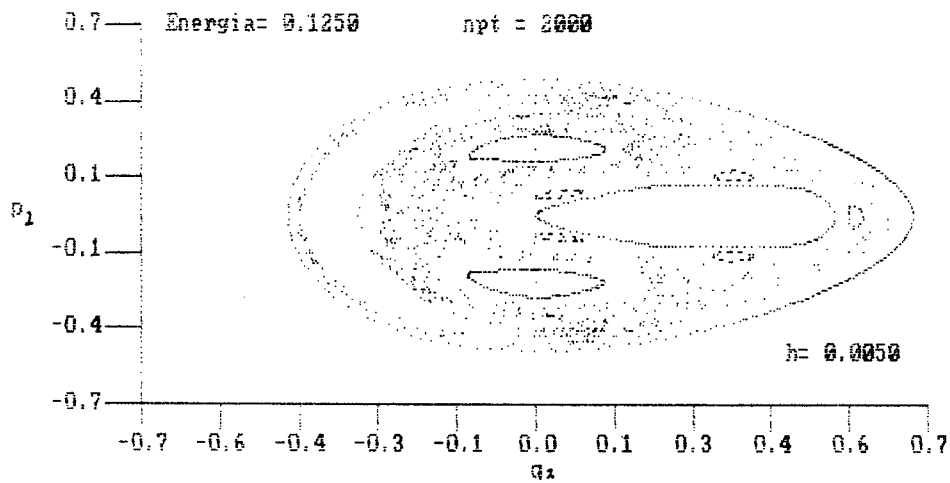


Figura 2.10:  $E=0.1250$ . Para o mesmo valor de energia esta figura mostra as mesmas 6 órbitas da figura anterior só que com um número maior de pontos (npt) plotados, demonstrando que não é possível achar uma curva bem definida entre os pontos dispersos.

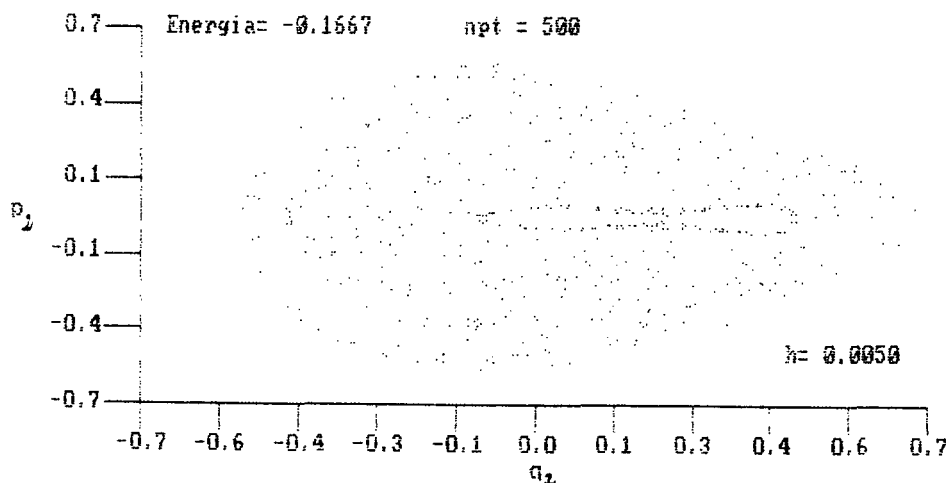


Figura 2.11:  $E=0.1666$ . Para o valor da energia perto do limite  $E = 1/6$ , esta figura tem 6 órbitas  $y[4] = 0.000, 0.519, 0.461, 0.404, 0.346, 0.338$  demonstrando a impossibilidade de se achar trajetórias regulares.

à uma mesma trajetória com as condições iniciais  $y = 0.075$  e  $x = -0.494$ ; podemos claramente ver que não é possível desenhar uma curva entre os vários pontos. Isto se confirma mais e mais quando plotamos mais pontos (2.10). Além disso, se observarmos a ordem com que os pontos aparecem quando plotamos a figura, notamos que eles saltam de um lado da figura ao outro de modo mais ou menos randômico; isto entra em conflito com o movimento regular dos pontos em uma curva. As trajetórias irregulares mostradas na fig.2.10 são chamadas de *trajetórias caóticas*, e a região ocupada é chamada de *região caótica* (outros adjetivos podem ser usados: irregular, turbulento, errático, estocástico, aperiódico, estranho,...). A presença deste tipo de trajetória destrói completamente a possibilidade de que o sistema seja integrável, como sugerido anteriormente, e mostra que seu comportamento é bem mais complexo. Isto pode ser confirmado quando aumentamos a energia:  $E = 1/6$  (fig 2.11). Neste caso os pontos preenchem completamente a região acessível, demonstrando assim que o espaço de fase

muda completamente para variações moderadas de energia.

## 2.7 Três graus de liberdade ( $n = 3$ , $N = 6$ ).

O caso tridimensional tem sido muito menos estudado que o caso de duas dimensões, devido a dificuldade de tratar sistemas com mais graus de liberdade. Qualquer cálculo em sistemas tridimensionais é bem mais complexo, pois o número de equações envolvidas é bem maior (veja seção 3.4), além disso o espaço de fase tem agora 6 dimensões. Fixando  $H = \text{constante}$  e tomando uma seção, obtemos uma superfície de seção com 4 dimensões, que é muito mais difícil de visualizar que a superfície em duas dimensões como no caso bidimensional.

Se o sistema for integrável, então além do hamiltoniano existem mais outras duas integrais. Portanto, a sequência de pontos fica confinada à uma superfície de duas dimensões. Para sistemas ergódicos, os pontos preenchem o seção do espaço em quatro dimensões. Portanto, a dimensão do espaço ocupado pela sequência de pontos pode variar entre 2 e 4.

A primeira técnica de estudo dos sistemas tridimensionais consiste em ignorar uma coordenada na seção do espaço em quatro dimensões  $(q_1, q_2, p_1, p_2)$ , considerando somente o espaço tridimensional  $(q_1, q_2, p_1)$ , por exemplo. Pode-se então, fazer uma projeção estereoscópica, de modo a ver o rearranjo dos pontos no espaço tridimensional. Esta técnica foi usada primeiramente por Froeschle [1972], e mais recentemente por Martinet e Magnemat [1981], em conexão com o problema do movimento de uma estrela numa galáxia sem simetria.

Uma outra técnica de estudo dos sistemas tridimensionais bastante diferente, consiste em determinar numericamente o expoente de Lyapunov das trajetórias tanto para sistemas hamiltonianos como para sistemas dissipativos. Este expoente, além de permitir distinguir entre órbitas quase-periódicas e caóticas, tem sido de grande importância no estudo da transição de sistemas regulares para sistemas caóticos. Entretanto, esta



técnica não dá qualquer informação sobre a forma da órbita no espaço de fase ou os tipos de pontos na seção do espaço.

Para sistema com dois graus de liberdade, a superfície de seção bidimensional prevê de forma exata, através das seções de Poincaré, a evolução futura do sistema, e dá uma ilustração notável das propriedades das órbitas. Infelizmente, a representação equivalente falha no caso com três graus de liberdade, pois neste caso a seção de superfície tem 4 dimensões, e se tentarmos observar as órbitas na superfície de dimensão bidimensional, perceberemos que as trajetórias se cruzam de modo que a evolução futura do sistema não pode ser determinada precisamente.

## Capítulo 3

# MÉTODOS PARA PROCURAR INVARIANTES

### 3.1 Introdução

Como vimos no capítulo anterior, nos sistemas hamiltonianos em geral, a procura de constantes de movimento outras que a energia total, que reduzem os graus de liberdade do sistema, é um problema importante, pois tais constantes dão informações sobre a regularidade ou não do movimento. No estudo da integrabilidade de sistemas dinâmicos, passos iniciais importantes foram dados por Kowalevskaya [1889], ao observar que as soluções das equações de movimento de sistemas integráveis quando considerados no plano complexo, são *analíticas* i.e., possuem derivada exceto em *pólos isolados*<sup>1</sup>.

No ano de 1900, Painlevé [1900] enumerou todas as equações diferenciais de segunda ordem cujas *singularidades móveis* são somente *pólos*. Neste caso, dizemos que a equação diferencial ordinária é do “tipo Painlevé”.

O desenvolvimento da Transformação de Espalhamento Inversa (TEI), tem demonstrado que algumas equações de evolução não-lineares tem algumas propriedades inte-

---

<sup>1</sup> Ou seja, quando a parte principal da série de Laurent, que representa a solução perto da singularidade, tiver um número finito de termos.

ressantes: existência de sólitons e de um número infinito de leis de conservação. Recentemente Ablowitz, Ramani e Segur [1980] mostraram que uma equação diferencial ordinária obtida por redução exata de uma equação diferencial parcial (EDP) através da chamada Transformação de Espalhamento Inversa (Ablowitz, Ramani e Segur [1980]), é do tipo Painlevé. No entanto, não se sabe exatamente qual a relação entre essa propriedade algébrica e a integrabilidade do sistema, ou se todos os sistemas integráveis possuem a propriedade de Painlevé. Essa relação é de grande interesse, pois não existe uma maneira direta de afirmar se um sistema é integrável ou não. Seria interessante podermos garantir a integrabilidade de sistemas que satisfizessem a propriedade de Painlevé ou vice-versa. Isto porém, não é possível, tanto que uma vez obtida a propriedade de Painlevé é sempre necessário obter a constante de movimento relacionada à este suposto caso integrável.

Neste capítulo vamos revisar os métodos mais conhecidos no estudo da integrabilidade de sistemas dinâmicos: análise de Painlevé, cálculo do expoente de Kowalevskaya e procura de invariantes usando o método direto, ou seja usando a condição  $dI/dt = 0$ . Estudaremos também o conceito de “fraca propriedade de Painlevé” introduzido por Ramani, Dorizzi e Grammaticos [1982] ao observarem que alguns sistemas integráveis não possuíam a “propriedade de Painlevé”.

## 3.2 Análise de Painlevé

### 3.2.1 Definição da Propriedade de Painlevé

Em homenagem a Painlevé, o comportamento das soluções de equações diferenciais que passaremos agora a descrever é chamado de “propriedade de Painlevé”. A análise desta seção baseia-se no livro de [Kunick e Steeb 1986].

Seja *uma* equação diferencial de ordem  $n$

$$\frac{d^n w}{dz^n} = F(z, w, \dots, d^{n-1}w/dz^{n-1}), \quad (3.1)$$

onde  $F$  é uma função analítica na variável complexa  $z$  e racional em  $w, \dots, d^{n-1}w/dz^{n-1}$ , ou, equivalentemente, seja um sistema de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dw_i}{dz} = F_i(w_1, \dots, w_n), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.2)$$

onde as  $F_i$  são funções racionais em  $w_1, \dots, w_n$ .

É importante observar que o sistema 3.2 é extremamente geral. Por exemplo, note que a mecânica Newtoniana, cuja equação básica que determina o movimento é

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}, \quad (3.3)$$

pode ser escrita na forma 3.2 como,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1, \\ \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{m} \frac{dV}{dx}. \end{aligned}$$

O sistema 3.2 obviamente contém também a mecânica hamiltoniana já que, como sabemos,

$$dp_k/dt = -dH/dq_k, \quad dq_k = dH/dp_k, \quad (3.4)$$

são as equações de movimento de um sistema com  $k$  graus de liberdade.

**DEFINIÇÃO:** a equação (3.1) [ou o sistema (3.2)] tem a propriedade de Painlevé [ou é do tipo Painlevé] quando todas as soluções tiverem somente *pólos móveis*.

Isto significa que a existência de *singularidades essenciais* móveis bem como *pontos de bifurcação*<sup>2</sup> não é permitida. *Singularidades fixas* são aquelas cujas localizações não dependem de valores iniciais que determinam as soluções. Seus tipos e posições são dadas pela forma da equação diferencial ou, pelos menos, é possível determinar-se

---

<sup>2</sup>Pontos de bifurcação são pontos singulares comuns à todas as equações 3.2.

sua posição sem que se conheça a solução da equação. Em contraste, a localização de singularidades móveis depende de valores iniciais.

*Exemplo 1:* Seja  $dw/dz = -w^2$ . A solução geral desta equação é  $w(z) = 1/(z - c)$ , onde  $c$  é arbitrário. Deste modo, atribuindo-se valores para  $c$ , qualquer ponto do plano complexo pode ser um pólo (pólo móvel).

*Exemplo 2:* Seja  $dw/dz = -w/z$ , cuja solução geral é  $w(z) = -c/z$ . Obviamente  $z = 0$  é um pólo fixo.

*Exemplo 3:* Seja  $dw/dz = -w \ln^2 w$ . A solução geral  $w(z) = \exp(1/(z - c))$  tem uma singularidade essencial móvel em  $z = c$ .

Os métodos para investigar a eq. (3.1) [ou o sistema (3.2)] quanto à existência da propriedade de Painlevé são descritos detalhadamente na literatura (Ince 1956, Davis 1962, Ablowitz et al 1980). Uma condição necessária para que a eq.3.2 possua a propriedade de Painlevé e nos conduza a análise de pontos singulares será descrita no próximo parágrafo.

### 3.2.2 Uma condição necessária

Neste parágrafo veremos uma condição necessária para que uma dada equação diferencial (quando considerada no plano complexo) possua a propriedade de Painlevé.

**TEOREMA 1:** Uma condição necessária para que uma equação diferencial de ordem  $n$  da forma

$$\frac{d^n w}{dz^n} = F(z, w, \dots, d^{n-1} w / dz^{n-1}), \quad (3.5)$$

onde  $F$  é analítica em  $z$  e racional em  $w, \dots, d^{n-1} w / dz^{n-1}$ , possua a propriedade de Painlevé é que exista uma série de Laurent

$$w(z) = (z - z_1)^k \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_1)^j \quad (3.6)$$

que represente a solução geral da equação (3.5) na vizinhança do pólo  $z = z_1$ . Isto significa que  $n - 1$  coeficientes da eq. (3.6) devem poder ser escolhidos arbitrariamente.

*Observação 1:* Pode aparecer mais do que um ramo de solução. Neste caso, é necessário que cada ramo possa ser representado por uma série de Laurent.

*Observação 2:* O *Ansatz* (3.6) não exclui eventuais singularidades essenciais móveis.

*Observação 3:* Para determinadas equações diferenciais a série de Laurent pode degenerar numa série de Taylor. Um exemplo de sistema de equações diferenciais (veja Teorema 2, abaixo) no qual a série de Laurent degenera numa série de Taylor (i.e. no qual existem somente pontos regulares no plano complexo) é dado por,

$$\frac{dw_1}{dz} = w_1(w_1^2 - w_2^2), \quad \frac{dw_2}{dz} = w_2(w_1^2 - w_2^2). \quad (3.7)$$

*Observação 4:* Classes de equações diferenciais onde  $F$  [ou  $F_i$ ] são funções transcendentais em  $w_i$  podem ser transformadas na forma (3.5). Consideremos a equação do pêndulo simples (no plano complexo)  $d^2w/dz^2 + a \sin w = 0$ . Através da transformação  $v = \exp(iw)$  obtemos a equação  $vd^2v/dz^2 - (dv/dz)^2 + a(v^3 - v)/2 = 0$ . Esta equação pode agora ser estudada com auxílio do teorema acima.

**TEOREMA 2:** Uma condição necessária para que um sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dw_i}{dz} = F_i(w_1, \dots, w_n), \quad (3.8)$$

( $F$  racional nos  $w_1, \dots, w_n$ ) tenha a propriedade de Painlevé é que existam séries de Laurent

$$w_i(z) = (z - z_1)^{k_i} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}(z - z_1)^j, \quad (3.9)$$

que representem a solução geral na vizinhança do pólo  $z = z_1$ . Como antes,  $n - 1$  coeficientes deverão poder ser escolhidos arbitrariamente.

### 3.2.3 Análise de pontos singulares

A investigação da possibilidade de representação da solução geral através de uma série de Laurent conduz a análise dos pontos singulares. Esta análise consiste em considerar-se a série de Laurent 3.6 [ou 3.9] como um *Ansatz* e substituí-lo na equação 3.5 [ou 3.8], e pode ser efetuada basicamente em três passos: a) Achar o comportamento dominante, b) Achar as ressonâncias e c) Determinar as constantes de integração. Na sequência discutiremos primeiramente a eq. 3.5. Exemplos serão apresentados mais adiante na seção 3.2.6.

#### Achar o comportamento dominante:

O primeiro passo da investigação consiste em determinar o comportamento dominante. Ou seja, substituímos

$$w(z) = a_0(z - z_1)^k \quad (3.10)$$

na eq. 3.5 e escolhemos  $k$  de modo a simplificar os termos mais negativos em  $(z - z_1)^k$ . Através desta escolha determinamos  $a_0$  (quando existirem soluções). Se  $k$  não for um número inteiro a equação não possui a propriedade de Painlevé. Se  $k$  for inteiro e  $a_0 \neq 0$  podemos passar para o próximo passo. (Note que poderão aparecer várias soluções  $k$  que, entretanto, deverão ser todas inteiras.)

#### Achar as Ressonâncias:

Desejamos agora determinar na expansão 3.6 os números  $j$  para os quais se tem coeficientes  $a_j$  que podem ser escolhidos arbitrariamente. Para tanto substituímos o *Ansatz*

$$w(z) = a_0(z - z_1)^k + b(z - z_1)^{k+r} \quad (3.11)$$

na eq.3.5, na qual desprezamos então todos termos que não contribuem para o comportamento dominante. Desprezando-se agora os termos de ordem  $O(b^2)$ , nos conduz a uma equação do tipo  $Q(r)b = 0$ , onde  $Q(r)$  é um polinômio na variável  $r$  e de grau

$\leq n$ . As raízes deste polinômio são chamadas de *ressonâncias* (ou também de *expoentes de Kowalewskaya*; ver seção 3.3). Uma raiz é sempre  $-1$ : ela indica a posição do pólo. Para a existência da propriedade de Painlevé é necessário que todas as ressonâncias sejam números inteiros. Isto exclui a possibilidade de se ter ressonâncias racionais ou complexas. A ocorrência de ressonâncias duplas (triplas, etc.) indica a necessidade de incluir-se termos logarítmicos na expansão, o que significa não satisfazer a propriedade de Painlevé.

#### Determinar as constantes de Integração :

Neste terceiro passo substituindo-se a série 3.6 na equação 3.5 determinamos se a equação

$$(z - z_0)^{q-r+n} [Q(r) \cdot a_r - R_{r_1}(z_0, a_1, \dots, a_{j-1})] = 0 \quad (3.12)$$

é verdadeira, ou seja, se os coeficientes  $a_r$  da expansão podem ser escolhidos arbitrariamente, onde  $q$  é o grau do polinômio  $Q(r)$  e  $n$  é a ordem da equação 3.5. Na ressonância  $j = r$  temos  $Q(r) = 0$  e podem existir dois casos:

$$R_{r_1}(z_0, a_1, \dots, a_{j-1}) = 0 \quad (3.13)$$

$$R_{r_1}(z_0, a_1, \dots, a_{j-1}) \neq 0$$

Se  $R_{r_1}(z_0, a_1, \dots, a_{j-1}) \neq 0$  recaímos no caso que necessita expansão com termos logarítmicos. No entanto se  $R_{r_1}(z_0, a_1, \dots, a_{j-1}) = 0$  podemos entretanto escolher todos  $a_r$  de modo arbitrário e teremos satisfeito a condição necessária para a existência da propriedade de Painlevé se for possível mostrar a convergência da série na vizinhança do pólo.

Para sistemas de equações do tipo 3.8 começamos com

$$w_i(z) = a_{i0}(z - z_1)^{k_i}, \quad (3.14)$$

para determinar o comportamento dominante (veja [Hille 1976]).

A determinação das ressonâncias é feito com o *Ansatz*



$$w_i = a_{i0}(z - z_1)^{k_i} + b_i(z - z_1)^{k_i+r}, \quad (3.15)$$

que é introduzido na eq. 3.8, desprezando-se então termos não dominantes. Em contraste com o caso da equação de ordem  $n$ , o aparecimento de ressonâncias duplas não conduz obrigatoriamente à necessidade de inclusão de termos logarítmicos na expansão.

### 3.2.4 Propriedade de Painlevé e Integrabilidade

Desejamos estudar de uma forma geral sistemas dinâmicos não lineares, para tanto vamos continuar tratando de sistemas vistos no cap. 2:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.16)$$

onde os  $F_i$  são polinômios em  $x_1, \dots, x_n$ . Para investigar a propriedade de Painlevé fazemos a continuação desta equação no plano complexo, ou seja

$$\frac{dw_i}{dz} = F_i(w_1, \dots, w_n), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.17)$$

onde  $z = t + i\tau$ . O estudo de vários exemplos motivou inicialmente as seguintes conjecturas:

*Conjectura 0:* Seja a equação 3.14 completamente integrável. Neste caso a equação 3.15 irá ter a propriedade de Painlevé.

*Conjectura 1:* Se a eq. 3.15 tiver a propriedade de Painlevé então a eq. 3.14 é completamente integrável.

Sabe-se hoje em dia que a Conjectura 0 não está correta, como se pode ver através do exemplo que segue. O modelo de Lotka-Volterra

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2 - x_1x_2, \quad (3.18)$$

tem a primeira integral

$$h(x) = x_1x_2e^{-(x_1+x_2)}. \quad (3.19)$$

A eq. 3.16 não possui entretanto a propriedade de Painlevé. Isto tem a ver com o fato da integral 3.17 não ser uma integral *algébrica*, ou seja, *polinomial* no presente caso. A Conjectura 0 deve portanto ser restringida um pouco mais:

*Conjectura 0.1:* Seja a eq. 3.14 algebricamente completamente integrável. Neste caso a eq. 3.15 irá ter a propriedade de Painlevé.

Entretanto esta conjectura também não está correta como mostra o exemplo a seguir. Seja

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_1^5. \quad (3.20)$$

Neste caso temos  $k_1 = -1/2$  e  $k_2 = -3/2$ . A primeira integral é  $h(x) = x_2^2/2 + x_1^2/2 - x_1^6/6$ . Para a Conjectura que segue não se conhecem contra-exemplos:

*Conjectura 0.2:* Seja a eq. 3.14 algebricamente completamente integrável com  $F_i$  polinômios de grau 2. Neste caso a eq. 3.15 irá ter a propriedade de Painlevé.

Também para a Conjectura 1 não se conhecem presentemente contra-exemplos. Adler e Moerbecke [1982] conseguiram demonstrar esta conjectura em parte.

### 3.2.5 Definição da Propriedade Fraca de Painlevé

Vamos estudar agora o que significa uma equação diferencial ordinária ter a “propriedade fraca de Painlevé”. Esta propriedade foi proposta por Ramani, Dorizzi e Grammaticos [1982] ao observarem que o potencial:

$$V = y^5 + y^3 x^2 + \frac{3}{16} y x^4, \quad (3.21)$$

com as respectivas equações de movimento escritas sob a forma da equação 3.15, usando  $x = x_1$  e  $y = x_2$ ,

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = 2x_2^3 x_1 + \frac{3}{4} x_2 x_1^3, \quad \dot{x}_4 = 5x_2^4 + 3x_2^2 x_1^2 + \frac{3}{16} x_1^4, \quad (3.22)$$

não satisfaz a propriedade de Painlevé, no entanto admite a primeira integral de movimento,

$$C = -y\dot{x}^2 + x\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{3}{8}y^2x^4 + \frac{1}{32}x^6, \quad (3.23)$$

e portanto, é integrável. Propuseram então a seguinte definição :

**DEFINIÇÃO 1:** Dizemos que um sistema bidimensional possui a Fraca Propriedade de Painlevé, quando sua solução perto da singularidade  $z_1$  pode ser expressa em expansões com potências  $(z - z_1)^{1/r}$ . Onde  $r$  é um inteiro "natural", que é determinado quando achamos o comportamento dominante das equações de movimento.

Baseado num estudo mais geral para potenciais bidimensionais de grau  $p + 2$ , Grammaticos, Dorizzi e Ramani [1983] observaram que o potencial:

$$V_1 = y^4 + \frac{3}{4}y^2x^2 + 3x^4/1088 \quad (3.24)$$

apesar de satisfazer a Definição 1 com  $r = p = 2$ , é não integrável, ou seja, apesar das soluções poderem ser expandidas em termos das potências  $(z - z_1)^{1/2}$ , o potencial é não integrável. Notaram também, que para todos potenciais integráveis nos quais  $p$  fosse um número par, as soluções podiam ser expandidas em termos das potências  $(z - z_1)^{1/(p/2)}$ . Portanto foi necessário redefinir a Propriedade Fraca de Painlevé:

**DEFINIÇÃO 2:** Dizemos que um potencial bidimensional de grau  $p + 2$  possui a Fraca Propriedade de Painlevé, quando sua solução perto da singularidade  $z_1$  pode ser expressa em expansões com potências  $(z - z_1)^{1/p}$  se  $p$  for ímpar, ou com potências  $(z - z_1)^{1/(p/2)}$  se  $p$  for par.

Com a introdução da propriedade fraca de Painlevé, podemos admitir a existência de pontos de ramificação nas soluções de sistemas integráveis. No entanto, singularidades associadas a soluções logarítmicas, são conjecturadas a serem incompatíveis com a integrabilidade.

### 3.2.6 Exemplo.

Como primeiro exemplo desejamos considerar o modelo de Lorenz (para  $\sigma = 1$ )

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 - x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1x_3 + rx_1 - x_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = -bx_3 + x_1x_2. \quad (3.25)$$

A correspondente extensão  $[z = t + i\tau, w_j(z) = x_j(t, \tau) + iv_j(t, \tau)]$  desta equação para o plano complexo é portanto:

$$\frac{dw_1}{dz} = w_2 - w_1, \quad \frac{dw_2}{dz} = -w_1w_3 + rw_1 - w_2, \quad \frac{dw_3}{dz} = -bw_3 + w_1w_2. \quad (3.26)$$

Fazendo a análise de Painlevé, substituímos as soluções

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{10}(z - z_1)^{k_1}, \\ w_2 &= a_{20}(z - z_1)^{k_2}, \\ w_3 &= a_{30}(z - z_1)^{k_3}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

na equação 3.26 obtendo,

$$\begin{aligned} a_1k_1(z - z_1)^{k_1-1} &= a_2(z - z_1)^{k_2} - a_1(z - z_1)^{k_1} \\ a_2k_2(z - z_1)^{k_2-1} &= -a_1a_3(z - z_1)^{k_1+k_3} + ra_1(z - z_1)^{k_1} \\ &\quad - a_2(z - z_1)^{k_2} \\ a_3k_3(z - z_1)^{k_3-1} &= -ba_3(z - z_1)^{k_3} + a_1a_2(z - z_1)^{k_1+k_2}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Determinamos o comportamento dominante como sendo dado por  $k_1 = -1, k_2 = k_3 = -2$  com  $a_{10} = \pm 2i, a_{20} = \mp 2i, a_{30} = -2$ , de forma que as equações dos termos dominantes serão:

$$\begin{aligned} a_1k_1(z - z_1)^{k_1-1} &= a_2(z - z_1)^{k_2}, \\ a_2k_2(z - z_1)^{k_2-1} &= -a_1a_3(z - z_1)^{k_1+k_3}, \\ a_3k_3(z - z_1)^{k_3-1} &= a_1a_2(z - z_1)^{k_1+k_2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para encontrar as ressonâncias substituímos as soluções:

$$\begin{aligned} w_1 &= 2i(z - z_1)^{-1} + d_1(z - z_1)^{r-1}, \\ w_2 &= -2i(z - z_1)^{-2} + d_2(z - z_1)^{r-2}, \\ w_3 &= -2(z - z_1)^{-2} + d_3(z - z_1)^{r-2}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

nas equações 3.29 de modo que,

$$\begin{aligned} 2i(z - z_1)^{-2} + d_1(z - z_1)^{r-2} &= -2i(z - z_1)^{-2} + d_2(z - z_1)^{r-2} \\ 4i(z - z_1)^{-3} + d_2(z - z_1)^{r-3} &= -(2i(z - z_1)^{-1} + d_1(z - z_1)^{r-1}) \times \\ &\quad (-2(z - z_1)^{-2} + d_3(z - z_1)^{r-2}), \\ 4(z - z_1)^{-3} + d_3(z - z_1)^{r-3} &= (2i(z - z_1)^{-1} + d_1(z - z_1)^{r-1}) \times \\ &\quad (-2i(z - z_1)^{-2} + d_2(z - z_1)^{r-2}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Combinando as equações 3.31 obtemos o coeficiente de  $(z - z_1)^{r-3}$

$$(z - z_1)^{r-3}(r + 1)(r - 2)(r - 4) = 0, \quad (3.32)$$

segue que além de  $r_1 = -1$  temos as ressonâncias  $r_2 = 2$  e  $r_3 = 4$ . As equações dos termos dominantes 3.29, tem a propriedade de Painlevé, no entanto, a equação 3.26 não tem a propriedade de Painlevé (mais detalhes serão apresentados no cap. 4).

### 3.3 Expoente de Kowalevskaya.

Estudaremos nesta seção a singularidade de soluções de um certo tipo particular de sistemas (sistemas que admitem invariância similar). Essa singularidade é caracterizada por um tipo de expoente chamado expoente de Kowalevskaya. Este expoente já comentado na seção 3.2.3, é o mesmo que as ressonâncias de Painlevé. Primeiramente daremos uma rápida idéia de como Kowalevskaya valeu-se da análise da singularidade para estudar integrabilidade de sistemas. Depois discutiremos realmente o Expoente de Kowalevskaya, ou seja, quando se pode usá-lo, como obtê-lo e qual a sua relação com a integrabilidade e com a análise de Painlevé.

### 3.3.1 Idéia de Sophie Kowalevskaya.

O estudo das singularidades das soluções começou com Kowalevskaya [1889,1891], ao considerar o problema do movimento de um corpo em torno de um ponto fixo. O sistema de equações diferenciais ordinárias para este problema é dado por:

$$\begin{aligned}
 A\dot{\omega}_1 &= (B - C)\omega_2\omega_3 + z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3, \\
 B\dot{\omega}_2 &= (C - A)\omega_3\omega_1 + x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1, \\
 C\dot{\omega}_3 &= (A - B)\omega_1\omega_2 + y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2, \\
 \dot{\gamma}_1 &= \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \\
 \dot{\gamma}_2 &= \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \\
 \dot{\gamma}_3 &= \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ , e  $z_0$  são seis parâmetros constantes. Pode ser mostrado, que a existência de quatro primeiras Integrais para estas equações, é suficiente para se obter a solução geral por quadratura. Para valores arbitrários dos seis parâmetros existem três primeiras integrais:

$$(1/2)(A\omega_1^2 + A\omega_2^2 + C\omega_3^2) + x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3 = C_1, \tag{3.34}$$

$$A\omega_1\gamma_1 + B\omega_2\gamma_2 + C\omega_3\gamma_3 = C_2 \tag{3.35}$$

e

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = C_3. \tag{3.36}$$

Isto significa que a existência de uma quarta primeira integral é a chave para a integrabilidade. Antes de 1888 existiam dois casos especiais para os quais se sabia que o sistema admitia uma quarta integral:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad x_0 = y_0 = z_0 & \quad \text{caso de Euler} \\
 \text{(ii)} \quad A = B, \text{ e } x_0 = y_0 & \quad \text{caso de Lagrange.}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

As primeiras integrais para estes casos são, respectivamente

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = C_4 \\ \text{(ii)} \quad & C\omega_3 = C_4. \end{aligned} \tag{3.38}$$

A idéia de Kowalevskaya, que levou a um novo caso especial que é integrável, foi a seguinte:

Considerando o sistema autônomo 3.33 no plano complexo (variáveis dependentes e independentes), encontramos que para alguns valores particulares de  $z$  ( $z = t + i\sigma$ ) aparecem pontos singulares que são somente pólos. Kowalevskaya perguntou-se se esta propriedade é válida para o sistema geral 3.33. Ela expandiu as variáveis dependentes (consideradas complexas) numa série de Laurent. Isto conduziu a mais um caso integrável, ou seja,

$$\text{(iii)} \quad A = B = 2C, \quad z_0 = 0 \quad (\text{caso de Kowalevskaya}). \tag{3.39}$$

A primeira integral correspondente é dada por:

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2 - x_0\gamma_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 - x_0\gamma_2)^2 = C_4. \tag{3.40}$$

No caso de os parâmetros  $A, \dots, z_0$  serem arbitrários não existe uma quarta integral.

### 3.3.2 Invariância Similar e Expoentes de Kowalevskaya.

Vamos continuar tratando com sistemas de equações diferenciais autônomos do tipo definidas na equação 3.1:

$$dx_i/dt = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.41}$$

com  $F_1, \dots, F_n$  funções racionais de  $x_1, \dots, x_n$ . O sistema de equações do tipo (3.41) é dito admitir *invariância similar*, se for invariante sob a transformação :

$$t \rightarrow \alpha^{-1}t, \quad x_1 \rightarrow \alpha^{f_1}x_1, \dots, \quad x_n \rightarrow \alpha^{f_n}x_n, \tag{3.42}$$

com  $g_1, \dots, g_n$  números racionais e  $\alpha$  uma constante. Em outras palavras, o sistema é invariante similar quando satisfizer a equação :

$$F_i(\alpha^{j_1} x_1, \dots, \alpha^{j_n} x_n) = \alpha^{j_i+1} F_i(x_1, \dots, x_n). \quad (3.43)$$

Esta propriedade de invariância similar implica em afirmar que a função  $F_i$  é uma função homogênea.

Se  $F_1, \dots, F_n$  forem lineares, não existe transformação similar, ou seja, quando o potencial do sistema físico considerado for quadrático, não é possível aplicar a teoria do expoente de Kowalevskaya. Portanto, invariância similar, é uma característica de sistemas não-lineares. Para sistemas invariantes similares em geral, existem soluções particulares do tipo:

$$x_1 = c_1 t^{-j_1}, \dots, x_n = c_n t^{-j_n}, \quad (3.44)$$

onde  $c_1, \dots, c_n$  são constantes a serem determinadas. Essas constantes podem ser obtidas substituindo as soluções 3.44, na equação 3.41 para o sistema físico que admite invariância similar. Em geral, as constantes  $c_1, \dots, c_n$  são números complexos, e portanto é preciso considerar as equações (3.44) no plano complexo.

Uma vez encontradas as soluções particulares (3.44) para a equação geral (3.41), podemos considerar o "variacional" desta equação geral em torno das soluções . Isto é feito com o objetivo de encontrar novas soluções que se reduzem as particulares quando  $t \rightarrow 0$  ou  $t \rightarrow \infty$ , envolvendo constantes arbitrárias.

Sabendo-se de como uma primeira integral influencia na singularidade de certas soluções analisadas sob uma pequena variação no tempo, Yoshida [1983] propôs condições necessárias (nos expoentes de Kowalevskaya) para que um sistema seja "integrável algebricamente", ou seja, admita um número suficiente de primeiras integrais.

Para efetuarmos o variacional da equação geral 3.41 supomos soluções do tipo:

$$x_1 = c_1 t^{-j_1} + \varepsilon_1, \dots, x_n = c_n t^{-j_n} + \varepsilon_n, \quad (3.45)$$



onde  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  representa uma pequena variação nas soluções. Substituímos estas soluções na equação (3.41), e obtemos a equação que determina a forma como  $\varepsilon$  varia no tempo:

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{dF_i(c_1 t^{-s_1}, \dots, c_n t^{-s_n})}{dx_j} \varepsilon_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.46)$$

Como só queremos estudar sistemas que admitem invariância similar, devemos usar a identidade (3.43) na equação (3.46), obtendo então:

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{dF_i(c_1, \dots, c_n)}{dx_j} t^{s_1 - s_i - 1} \varepsilon_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.47)$$

este sistema de equações admite soluções do tipo:

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_{1,0} t^{\rho - s_1}, \dots, \bar{\varepsilon}_n = \bar{\varepsilon}_{n,0} t^{\rho - s_n}, \quad (3.48)$$

somente quando a constante  $\rho$  e o vetor coluna constante  $\varepsilon = {}^t(\varepsilon_{1,0}, \dots, \varepsilon_{n,0})$  são autovalores e autovetores da matriz,

$$K_{ij} = \frac{dF_i(c_1, \dots, c_n)}{dx_j} + \delta_{ij} g_i. \quad (3.49)$$

Podemos ver isto claramente se considerarmos  $n = 2$ : temos as equações (3.47) correspondentes,

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{dt} &= \frac{dF_1(c_1, c_2)}{dx_1} t^{-1} \varepsilon_1 + \frac{dF_1(c_1, c_2)}{dx_2} t^{s_2 - s_1 - 1} \varepsilon_2, \\ \frac{d\varepsilon_2}{dt} &= \frac{dF_2(c_1, c_2)}{dx_1} t^{s_1 - s_2 - 1} \varepsilon_1 + \frac{dF_2(c_1, c_2)}{dx_2} t^{-1} \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (3.50)$$

supondo as soluções,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1,0} t^{\rho - s_1}$  e  $\varepsilon_2 = \varepsilon_{2,0} t^{\rho - s_2}$ , obtemos as equações:

$$\begin{aligned} \left[ \rho - g_1 - \frac{dF_1}{dx_1}(c_1, c_2) \right] \varepsilon_{1,0} + \left[ \frac{dF_1}{dx_2}(c_1, c_2) \right] \varepsilon_{2,0} &= 0, \\ \left[ \frac{dF_2}{dx_1}(c_1, c_2) \right] \varepsilon_{1,0} + \left[ \rho - g_2 - \frac{dF_2}{dx_2}(c_1, c_2) \right] \varepsilon_{2,0} &= 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

É fácil ver que  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são soluções somente quando  $\rho$  forem autovalores, e  $\varepsilon_{1,0}$  e  $\varepsilon_{2,0}$  forem autovetores da matriz  $K_{ij}$  que representa o sistema acima.

Se essa matriz  $K$  for diagonalizável então os  $n$  autovalores  $\rho_1, \dots, \rho_n$  constituem as  $n$  independentes soluções da equação variacional (3.46). Temos agora que:

$$K(\rho) = \det_{1 \leq i, j \leq n} (\rho \delta_{ij} - K_{ij}). \quad (3.52)$$

chamado de *determinante de Kowalevskaya*, e os autovalores  $\rho$ , que são as raízes da equação característica  $K(\rho) = 0$ , são os “expoentes de Kowalevskaya”.

### 3.3.3 Expoente de Kowalevskaya e Integrabilidade.

Uma vez calculados os expoentes de Kowalevskaya podemos obter uma poderosa informação sobre a integrabilidade ou não do sistema usando o enunciado proposto por Yoshida [1983], que diz:

Para que um sistema invariante similar (3.41) com funções racionais  $F_i(x)$  seja algebricamente integrável, é necessário que todo expoente de Kowalevskaya seja um número racional.”

ou seja, podemos afirmar que:

Se aparecer um único expoente de Kowalevskaya irracional ou imaginário, o sistema é não integrável algebricamente, ou seja, não possui invariantes algébricos.”

Yoshida também mostrou como esses expoentes estão relacionados diretamente com a primeira integral, ou seja os expoentes de Kowalevskaya vem em pares da forma  $(\varrho, g_H - 1 - \varrho)$ , onde:

$\varrho \rightarrow$  corresponde ao grau homogêneo da primeira integral ( $\Phi$ ).

$g_H \rightarrow$  grau homogêneo do hamiltoniano que admite invariância similar.

### 3.3.4 Exemplo.

Discutiremos o potencial de Henon e Heiles [1964] considerado como exemplo pelo próprio Yoshida [1983] ao propor o enunciado descrito acima. O hamiltoniano de Henon e Heiles sem os termos do oscilador harmônico é:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + x^2y + \frac{\epsilon}{3}y^3, \quad \text{onde } \epsilon = \text{cte}, \quad (3.53)$$

com as respectivas equações de movimento,

$$\begin{aligned} dx/dt &= p_x, & dy/dt &= p_y, \\ dp_x/dt &= -2xy, & dp_y/dt &= -x^2 - \epsilon y^2. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Este sistema é invariante sob a transformação similar:

$$t \rightarrow \alpha^{-1}t, \quad x \rightarrow \alpha^2x, \quad y \rightarrow \alpha^2y, \quad p_x \rightarrow \alpha^3p_x, \quad p_y \rightarrow \alpha^3p_y, \quad (3.55)$$

por isso podemos supor soluções particulares do tipo:

$$x = c_1t^{-2}, \quad y = c_2t^{-2}, \quad p_x = c_3t^{-3}, \quad p_y = c_4t^{-3}. \quad (3.56)$$

Substituindo essas soluções nas equações de movimento, obtemos respectivamente,

$$-2c_1 = c_3, \quad -3c_3 = -2c_1c_2, \quad (3.57)$$

$$-2c_2 = c_4, \quad -3c_4 = -c_1^2 - \epsilon c_2^2, \quad (3.58)$$

pode-se ver facilmente as duas soluções para as amplitudes  $c$  são:

$$\begin{aligned} \text{caso 1)} \quad c_1 &= \pm[9(2 - \epsilon)]^{\frac{1}{2}} & c_2 &= -3 \\ \text{caso 2)} \quad c_1 &= 0, & c_2 &= -\frac{6}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Os elementos  $K_{ij}$  da matriz  $K$  são dados por:

$$K_{11} = 2, \quad K_{12} = 0, \quad K_{13} = 1, \quad K_{14} = 0, \quad (3.60)$$

$$K_{21} = 0, \quad K_{22} = 2, \quad K_{23} = 0, \quad K_{24} = 1, \quad (3.61)$$

$$K_{31} = -2c_2, \quad K_{32} = -2c_1, \quad K_{33} = 3, \quad K_{34} = 0, \quad (3.62)$$

$$K_{41} = -2c_1, \quad K_{42} = -2\epsilon c_2, \quad K_{43} = 0, \quad K_{44} = 0. \quad (3.63)$$

A matriz  $K$  simplificada, que de acordo com a equação 3.52 determina os expoentes de Kowalevskaya, é dada por,

$$K(\rho) = \begin{bmatrix} [(\rho-2)(\rho-3) + 2c_2 & 2c_1 \\ 2c_1 & (\rho-2)(\rho-3) + 2\epsilon c_2] \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

sendo que seu determinante é:

$$K(\rho) = \rho^4 - 10\rho^3 + \rho(2\epsilon c_2 + 2c_2 + 37) + 10\rho(-\epsilon c_2 - c_2 - 6) + 4(\epsilon c_2^2 + 3\epsilon c_2 + 3c_2 - c_1^2 + 9), \quad (3.65)$$

e, separadamente para cada caso temos,

$$\begin{aligned} \text{i) } K(\rho) &= (\rho+1)(\rho-6)[\rho^2 - 5\rho + 6(2-\epsilon)], \quad (\text{caso 1}) \\ \text{ii) } K(\rho) &= (\rho+1)(\rho-6)[\rho^2 - 5\rho + 6(1-\frac{2}{\epsilon})]. \quad (\text{caso 2}) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Como vimos acima, usando a condição imposta por Yoshida é possível determinar para que valores de  $\epsilon$  o sistema é não integrável algebricamente, ou seja, nos determinantes i) e ii), basta ver para que valores de  $\epsilon$  serão introduzidas raízes imaginárias. Da equação quadrática em i) pode-se concluir facilmente que para  $\epsilon < 23/24$ , o sistema é não integrável algebricamente. O hamiltoniano 3.53 é integrável para três casos particulares de  $\epsilon$ , dados por:

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1, \quad \Phi_6 = p_x p_y + \frac{1}{3}x^3 + xy^2 \\ \epsilon &= 6, \quad \Phi_8 = -4p_x(p_x y - p_y x) + 4x^2 y^2 + x^4 \\ \epsilon &= 16, \quad \Phi_{12} = \frac{1}{4}p_x^4 + p_x^2 x^2 y - \frac{1}{3}x^3 p_x p_y - \frac{1}{18}x^6 - \frac{1}{3}x^4 y^2, \end{aligned} \quad (3.67)$$

Os subíndices de  $\Phi$  dão o grau de homogeneidade dos invariantes. Podemos observar a relação deste grau com o expoente de Kowalevskaya. Conforme Yoshida, eles estão relacionados pelas equações  $\rho = g_H - 1 - \varrho$  e  $\rho = \varrho$ , isto implica que:

$$\begin{aligned} \text{a) } \epsilon &= 1, \quad \rho = 6 \quad \text{e} \quad \rho = -1 \\ \text{b) } \epsilon &= 6, \quad \rho = 8 \quad \text{e} \quad \rho = -3 \\ \text{c) } \epsilon &= 12, \quad \rho = 12 \quad \text{e} \quad \rho = -7, \end{aligned} \quad (3.68)$$

que confere exatamente se relacionarmos a) com ii), b) com i) e c) com i).

### 3.3.5 Expoente de Kowalevskaya e Análise de Painlevé.

É interessante observar que o cálculo do expoente de Kowalevskaya é uma arma menos poderosa no estudo das EDO, por se restringir à classe particular dos sistemas *similares*. No entanto, através dos resultados de Yoshida [1983], podemos garantir a integrabilidade algébrica ou não do sistema, dependendo dos valores característicos do expoente de Kowalevskaya, ou mesmo obter informações sobre o grau da primeira integral, conforme foi mostrado no exemplo do hamiltoniano de Henon e Heiles. Por outro lado, a Análise de Painlevé abrange todos os tipos de equações escritas da forma da equação 3.41. Mesmo que seus resultados sejam somente conjecturas, a análise de Painlevé tem sido usada para encontrar casos integráveis de inúmeros sistemas físicos de interesse.

As ressonâncias de Painlevé são exatamente os expoentes de Kowalevskaya, no entanto, só podemos utilizar o enunciado de Yoshida na análise de Painlevé, quando consideramos sistemas que admitem invariância similar. Para exemplificar a relação entre os dois métodos, reconsideramos o exemplo do modelo de Lorenz ( $\sigma = 1$ ):

$$\begin{aligned} dx_1/dz &= x_2 - x_1, \\ dx_2/dz &= -x_1x_3 + rx_1 - x_2, \\ dx_3/dz &= -bx_3 + x_1x_2. \end{aligned} \tag{3.69}$$

As equações dos termos dominantes são dadas por:

$$\begin{aligned} dx_1/dz &= x_2 - x_1, \\ dx_2/dz &= -x_1x_3, \\ dx_3/dz &= x_1x_2, \end{aligned} \tag{3.70}$$

que admite invariância similar, sob a transformação ,

$$t \rightarrow s^{-1}t, \quad x_1 \rightarrow s^1x_1, \quad x_2 \rightarrow s^2x_2, \quad x_3 \rightarrow s^2x_3. \tag{3.71}$$

As primeiras integrais para as equações 3.70 são:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= x_1^2 - 2x_3, \\ h_2(x) &= x_2^2 + x_3^2, \end{aligned} \tag{3.72}$$

e portanto, 3.70 são integráveis. As ressonâncias, ou expoentes de Kowalevskaya além de  $r_1 = -1$ , são dadas por  $r_2 = 2$ ,  $r_3 = 4$ . As equações 3.70 tem a propriedade de Painlevé. No entanto, as equações 3.69 que não admitem invariância similar, não tem a propriedade de Painlevé, e não podemos usar o enunciado de Yoshida.

Para cálculos mais detalhados sobre a relação entre análise de Painlevé e expoentes de Kowalevskaya citamos Roekaerts e Schwarz [1987], Joy e Sabir [1988]. Eles mostram as restrições que a condição de Yoshida [1983] impoe sobre as ressonâncias encontradas na análise de Painlevé. Joy e Sabir [1988] incluem ainda as condições impostas pelo teorema de Ziglin [1983] referente a instabilidade das soluções. Este teorema garante a não-integrabilidade de sistemas para intervalos específicos das constantes do hamiltoniano, para os quais as soluções são instáveis. Estes intervalos de instabilidade podem somente ser calculados para cada sistema em particular.

### 3.4 Método direto: $dI/dt = 0$ .

Obviamente é possível procurar-se invariantes usando o que chamamos de "método direto". Este método consiste em supor o invariante de uma forma particular, e então usar a condição de que a sua derivada temporal deve ser nula, ou seja, usar  $dI/dt = 0$ .

Em 1901 Darboux usou este método para estudar invariantes bidimensionais e quadráticos nos *momenta*, seus resultados foram reproduzidos mais tarde por Whittaker [1944]. Verificou-se que os resultados de Darboux não estavam completos, já que o tratamento completo para este caso foi apresentado somente recentemente por Dorizzi [1983], Ankiewicz e Pask [1983], Thompson [1984] e Sen [1985].

A pergunta essencial é: que potenciais admitem invariantes particulares outros que a energia total ?

Estudaremos agora separadamente formas particulares de invariantes  $I$  para alguns sistemas bi e tridimensionais.

### 3.4.1 Sistemas Bidimensionais:

Supomos invariantes polinomiais da forma

$$I(p_s, q_s) = \sum_{i+j \leq N} C_{ij}(q_1, q_2) p_1^i p_2^j, \quad (3.73)$$

onde  $N$  é chamado de "ordem do invariante" e  $p_s$  corresponde aos *momenta*  $p_1$  e  $p_2$  associados a  $q_1$  e  $q_2$  respectivamente. Invariantes da forma (3.73) são mais comumente encontrados em sistemas hamiltonianos do tipo energia cinética (EC) + energia potencial, que serão considerados nesta seção. Outros tipos de sistemas hamiltonianos como o de Fokker-Planck (EC + termos lineares na velocidade, sem potencial escalar), ou do tipo Eletromagnéticos (combinação entre EC, termos do potencial vetorial e velocidade), não serão considerados aqui, pois estamos interessados em estudar potenciais escalares. Para que  $I(p, q)$  dado pela equação 3.73 seja um invariante, é obviamente necessário termos  $dI/dt = 0$ . Esta condição juntamente com as equações de movimento para um potencial independente do tempo,  $dp_1/dt = -V_{q_1}$  e  $dp_2/dt = -V_{q_2}$ , onde  $V_{q_1} = dV/dq_1, \dots$ , gera todas as equações que devem ser satisfeitas pelos polinômios  $C_{ij}$  para determinar explicitamente o invariante. As coordenadas  $q_1$  e  $q_2$  correspondem às coordenadas ortogonais usuais  $x$  e  $y$  respectivamente, e  $p_1, p_2$  correspondem a  $p_x$  e  $p_y$ . Todos os sub-índices  $s$  de  $C_{ij}$ , e  $V_s$ , representam derivadas em relação a  $s = x, y$ .

Caso  $N = 2$ : O invariante (3.73) procurado tem a forma geral:

$$I(p, q) = C_{20} p_x^2 + C_{11} p_x p_y + C_{02} p_y^2 + C_{00}, \quad (3.74)$$

A condição  $dI/dt = 0$  nos fornece,

$$\begin{aligned} & p_x^3 (C_{20x}) + p_x (-2C_{20} V_x - C_{11} V_y + C_{00x}) + \\ & p_y (-2C_{02} V_y - C_{11} V_x + C_{00y}) + \\ & p_x^2 p_y (C_{20y} + C_{11x}) + p_x p_y^2 (C_{11y} + C_{02x}) + p_y^3 (C_{02y}) = 0. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Para que esta equação seja satisfeita para variações arbitrárias de  $p_x$  e  $p_y$ , devemos obviamente impor que os coeficientes das "velocidades"  $p_x$  e  $p_y$  sejam iguais a zero.

Deste modo obtemos 6 equações diferenciais parciais envolvendo as 4 incógnitas  $C_{ij}$ , sendo que 4 destas equações são independentes do potencial e 2 dependentes, a saber eq. independentes de  $V$ :

$$\begin{aligned} C_{20x} &= 0 & C_{20y} + C_{11x} &= 0, \\ C_{02y} &= 0 & C_{11y} + C_{02x} &= 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

eq. dependentes de  $V$ :

$$-2C_{20}V_x - C_{11}V_y + C_{00x} = 0, \quad (3.77)$$

$$-2C_{02}V_y - C_{11}V_x + C_{00y} = 0. \quad (3.78)$$

As equações independentes do potencial podem ser facilmente resolvidas de uma vez por todas, fornecendo,

$$\begin{aligned} C_{20} &= ay^2 + by + c, \\ C_{02} &= ax^2 + b'x + c', \\ C_{11} &= -2axy - b'y - bx + c_1. \end{aligned} \quad (3.79)$$

onde  $a, b, b', \dots$  são constantes de integração arbitrárias. Por outro lado, o coeficiente  $C_{00}$  pode ser facilmente eliminado das equações 3.77 e 3.78, se derivadas parcialmente em relação a  $y$  e  $x$  respectivamente. Esta "eliminação" produz,

$$\begin{aligned} C_{11}(V_{xx} - V_{yy}) + V_{xy}(2C_{02} - 2C_{20}) + \\ V_x(C_{11x} - 2C_{20y}) + V_y(2C_{02x} - C_{11y}) = 0. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Substituindo-se agora 3.79 em 3.80, obtemos

$$\begin{aligned} (2axy + b'y + bx + c_1)(V_{xx} - V_{yy}) - 2[(ax^2 - ay^2) + b'x - by + c' - c]V_{xy} \\ + 3(2ay + b)V_x - 3(2ax + d)V_y = 0, \end{aligned} \quad (3.81)$$

que envolve as constantes  $a, b, b', \dots$  definidas em 3.79. Esta equação foi primeiramente obtida por Darboux [1901], que considerou o caso:



1.  $a = 1$ . Através de uma translação ( $x \rightarrow x + u, y \rightarrow y + v$ ) e uma rotação:

$$x = \cos \omega X + \sin \omega Y, \quad (3.82)$$

$$y = -\sin \omega X + \cos \omega Y, \quad (3.83)$$

ele pôde eliminar  $b, b', b'$  e tornar  $c_1 = 0$ . Neste caso a equação 3.81 se reduz à:

$$xy(V_{xx} - V_{yy}) + (y^2 - x^2 + c)V_{xy} + 3yV_x - 3xV_y = 0, \quad (3.84)$$

que, quando integrada (Darboux, 1901), conduz a seguinte forma geral para o potencial  $V$  quando  $c \neq 0$ :

$$V = \frac{|f(u) - g(v)|}{|u^2 - v^2|}, \quad (3.85)$$

onde,

$$\begin{aligned} 2u^2 &= r^2 + c + \sqrt{(r^2 + c)^2 - 4cx^2}, \\ 2v^2 &= r^2 + c - \sqrt{(r^2 + c)^2 - 4cx^2}, \\ r^2 &= x^2 + y^2. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Uma vez encontrado o potencial geral, podemos determinar  $C_{\infty}$  integrando as equações (3.4.4). Com isto o invariante 3.74 fica da forma:

$$I = (xp_x - yp_y)^2 + cp_x^2 + 2[v^2f(u) - u^2g(v)]/(u^2 - v^2). \quad (3.87)$$

O problema genérico de determinar todos potenciais bidimensionais que admitem invariantes quadráticos nos momenta conforme 3.74 foi recentemente concluído na literatura por Dorizzi [1983], Ankiewicz e Pask [1983], Thompson [1984], Sen [1985]. Em resumo temos as seguintes soluções [Hietarinta 1987]:

2.  $a \neq 0$  mas  $c = 0$ , o potencial é dado por:

$$V = g(r) + f(x/y)r^{-2}, \quad (3.88)$$

e o segundo invariante é,

$$I = (xp_y - yp_x)^2 + 2f(x/y). \quad (3.89)$$

3. Se  $a \neq 1$ ,  $c \neq 0$  e  $c_1^2 + c^2 = 0$ . Neste caso a solução é novamente dada por:

$$V = \frac{|f(u) - g(v)|}{|u^2 - v^2|}, \quad (3.90)$$

no entanto,

$$\begin{aligned} 2u^2 &= r^2 + c + \sqrt{r^4 - 2c(x \pm iy)^2}, \\ 2v^2 &= r^2 + c - \sqrt{r^4 - 2c(x \pm iy)^2}, \end{aligned} \quad (3.91)$$

e o segundo invariante é,

$$I = (xp_y - yp_x)^2 + 2c_1(x \pm iy) + 2|c^2 f(x) - c^2 g(x)|/(x^2 - a^2). \quad (3.92)$$

4. Se  $a = 0$ , mas  $b$  ou  $d \neq 0$ , podemos rotar o sistema de modo que  $b = 1$ ,  $b' = 0$ . Uma translação do tipo  $(x \rightarrow x + u, y \rightarrow y + v)$  temos  $c = 0$ , e  $c_1 = 0$ . A equação para  $V$  se torna:

$$V = \frac{|f(r + y) + g(r - y)|}{r}, \quad (3.93)$$

$$I = (yp_x - xp_y)p_x + \frac{|(r + y)g(r - y) - (r - y)f(r + y)|}{r}. \quad (3.94)$$

5.  $a = 0, b = 1$ , e  $b' = -i$ . As constantes  $c, c_1$  e  $c'$  podem ser eliminadas se  $c_1 = -i(c - c')$ , veja próximo caso. Se  $c_1 = -i(c - c')$  podemos transformar o sistema de modo que  $c = i/8$ ,  $c_1 = -1/4$ ,  $c' = -i/8$ . A equação para  $V$  é agora:

$$(x - iy)(\partial_x + i\partial_y)^2 V - \frac{1}{4}(\partial_x - i\partial_y)^2 V + 3(\partial_x + i\partial_y)^2 V = 0, \quad (3.95)$$

e o potencial integrável é,

$$V = \frac{|f(z + \sqrt{w}) + g(z - \sqrt{w})|}{\sqrt{w}}, \quad (3.96)$$

$$I = (yp_x - xp_y)(p_x + ip_y) + i(p_x - ip_y)^2/8 + \\ i\left[1 - \frac{z}{\sqrt{w}}\right]f(z + \sqrt{w}) + i\left[-1 - \frac{z}{\sqrt{w}}\right]g(z - \sqrt{w}), \quad (3.97)$$

onde  $z = x + iy$ ,  $w = x - iy$ .

6. Se no caso considerado acima eliminarmos  $c, c_1$  e  $c'$  obtemos:

$$V = \frac{F(x \pm iy)}{r} + G'(x \pm iy), \quad (3.98)$$

$$I = (yp_x - xp_y)(p_x \pm ip_y) - i(x \pm iy)[F(x \pm iy)/r + \\ G'(x \pm iy)] + G(x \pm iy). \quad (3.99)$$

7. Se  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $b' = 0$ ,  $c' = 0$ ,  $c = 1$ , e  $c_1 = 0$  então,

$$V_{xy} = 0 \quad (3.100)$$

com a solução :

$$V = f(x) + g(y), \quad I = p_x^2 + 2f(x). \quad (3.101)$$

8. Se  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $b' = 0, c' = 0$ ,  $c = 1$  e  $c_1 = \mp i$ , temos:

$$V = r^2 F''(x \pm iy) + G(x \pm iy), \quad (3.102)$$

$$I = p_x(p_x \pm iy) + r^2 F'' + G(x \pm iy) + 2(x \pm iy)F'(x \pm iy) - 2F(x \pm iy). \quad (3.103)$$

O trabalho envolvido em obter as equações (3.76, 3.77 e 3.78) é ainda passível de ser feito à mão. Entretanto a medida que aumentamos o grau do invariante (3.73), o número de equações do tipo 3.76, 3.77 e 3.78 cresce e o trabalho se torna mais demorado e passível de erros. Para contornar este problema, elaboramos um programa em linguagem REDUCE que para uma dada forma funcional do invariante, gera todas as equações correspondentes necessárias que devem ser satisfeitas para que o sistema seja integrável. Este programa pode ser processado num micro computador tipo PC, que, além de gerar todas as equações sem erros de álgebra, reduz significativamente o tempo gasto para obtê-las. O programa para o caso bidimensional está descrito detalhadamente na seção 6.1.

Com este programa pode-se em princípio gerar os invariantes bidimensionais de ordem  $N$  arbitrária na forma polinomial 3.73, com as respectivas equações que dão as condições necessárias de integrabilidade. Na maioria dos casos estas equações são super-determinadas, ou seja, existe maior número de equações do que de incógnitas.

Usando o programa descrito na seção 6.1, podemos relacionar o número de equações de cada grau do invariante, com o número de incógnitas existentes:

Para os casos de grau  $N$ , temos:

$N$ -par: O número de equações e o de incógnitas é dado respectivamente por,

$$N_{eq} = \sum_{i=1}^{N+2} (2i), \quad N_{inc} = \sum_{i=1}^{N+1} (2i-1), \quad (3.104)$$

e a sua razão dada por,

$$\frac{N_{eq}}{N_{inc}} = \frac{\sum_{i=1}^{N+2} (2i)}{\sum_{i=1}^{N+1} (2i-1)} = \frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2i + \dots + 2N + 4}{1 + 3 + 5 + \dots + 2i - 1 + \dots + 2N + 1}. \quad (3.105)$$

Grau	Equacoes	Inc.	InPot/Inc	DpPot/Inc	Equa/Inc
2	6	4	4/3	2/1	1.50
3	9	6	5/4	4/2	1.50
4	12	9	6/5	6/4	1.33
5	16	12	7/6	9/6	1.33
6	20	16	8/7	12/9	1.25
7	25	20	9/8	16/12	1.25
8	30	25	10/9	20/16	1.20
9	36	30	11/10	25/20	1.20
10	42	36	12/11	30/25	1.16

Tabela 3.1: Relação entre o grau do invariante bidimensional com o número de equações, e o número de incógnitas. Na última coluna temos a razão entre o número de equações e o de incógnitas. A quarta e a quinta coluna apresentam respectivamente, o número de equações independentes do potencial e o número de equações dependentes do potencial em relação às suas incógnitas ( $InPot/Inc$ ,  $DpPot/Inc$ ).

A razão do número de equações dependentes do Potencial pelo número de equações independentes do potencial também pode ser obtida:

$$NPot/NPi = \frac{\sum_{i=1}^N (2i)}{\sum_{i=1}^{N-1} (2i-1)}, \quad (3.106)$$

***N*-ímpar:** Também neste caso podemos obter,

$$N_{eq} = \sum_{i=1}^{N+2} (2i-1), \quad N_{inc} = \sum_{i=1}^{N+1} (2i), \quad (3.107)$$

$$\frac{N_{eq}}{N_{inc}} = \frac{\sum_{i=1}^{N+2} (2i-1)}{\sum_{i=1}^{N+1} (2i)} = \frac{1+3+5+\dots+2i-1+\dots+2N+3}{2+4+6+\dots+2i+\dots+2N+2}. \quad (3.108)$$

$$NPot/NPi = \frac{\sum_{i=1}^N (2i-1)}{\sum_{i=1}^{N-1} (2i)}, \quad (3.109)$$

Analisando a Tabela 3.1 podemos observar como cresce rapidamente o número de equações em função de  $N$  (grau do invariante), e que a razão entre o número de equações e o número de incógnitas ( $N_{eq}/N_{inc}$ ) tende a diminuir. Note que se  $N_{eq}/N_{inc} < 1$ , o invariante não pode ser determinado, pois o número de incógnitas é maior que o número de equações. Para encontrar invariantes de maior ordem, o trabalho se torna tedioso devido ao número de equações envolvidas. Quando o grau do invariante aumenta, o número das equações dependentes do potencial cresce em relação ao número das independentes do potencial, tornando o sistema de equações cada vez mais "dependente" do potencial.

Como já mencionado, quando  $N = 2$  existem resultados gerais para o potencial  $V$ . No caso  $N = 3$  vários resultados parciais são dados por Holt [1982], e quando  $N =$

4 existem alguns estudos para potenciais particulares. Como exemplo de invariantes quárticos, citamos Grammaticos et al.. [1984] que estudou todos potenciais do tipo  $V = y^2 G_1''(x) + y G_2'(x) + G_3(x) + F(y)$  que admitem invariantes quárticos, e Wojciechowska e Wojciechowski [1984] que analisaram o caso  $G_1 = 0$ . Todos estes resultados são comentados em detalhes no artigo de revisão de Hietarinta [1987].

### 3.4.2 Sistemas Tridimensionais:

Neste caso eventuais invariantes polinomiais serão da forma:

$$I(p_s, q_s) = \sum_{i+j+k \leq N} C_{ijk}(q_1, q_2, q_3) p_1^i p_2^j p_3^k, \quad (3.110)$$

onde  $p_3$  é o *momenta* conjugado canonicamente à coordenada adicional  $q_3$ . Estudos de potenciais gerais que admitem invariantes do tipo (3.110) são bastante esparsos, e pouco se conhece sobre a integrabilidade em sistemas tridimensionais em geral.

O sistema de equações que restringe os  $C_{ijk}$  e definem o potencial (caso exista algum!), pode ser obtido generalizando-se o programa REDUCE descrito anteriormente para três dimensões (Veja seção 6.2 ).

Apresentamos a seguir resultados para o caso  $N = 2$ . O caso seguinte,  $N = 3$  não será discutido, pois o número de equações envolvidas são 22 (veja tabela 3.2), e o trabalho torna-se muito complexo quando tratamos com potenciais arbitrários.

**Caso  $N = 2$  :** Neste caso temos 13 equações envolvendo 7 incógnitas. Destas equações, 10 são independentes do potencial e 3 são dependentes.

$$\begin{aligned} \text{dependentes:} \quad & -C_{101}V_x - C_{011}V_y - 2C_{002}V_z + C_{000z} = 0, \\ & -C_{110}V_x - 2C_{020}V_y - C_{011}V_z + C_{000y} = 0, \\ & -2C_{200}V_x - C_{101}V_y - C_{110}V_z + C_{000x} = 0. \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\text{independentes:} \quad C_{200z} = 0, \quad C_{020y} = 0, \quad C_{002z} = 0,$$

$$\begin{aligned}
C_{110y} + C_{020x} &= 0, & C_{110x} + C_{200y} &= 0, \\
C_{011y} + C_{020z} &= 0, & C_{002y} + C_{011z} &= 0, \\
C_{101x} + C_{200z} &= 0, & C_{002x} + C_{101z} &= 0, \\
C_{011x} + C_{110z} + C_{101y} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.112}$$

As equações independentes do potencial podem ser resolvidas, obtendo

$$\begin{aligned}
C_{200} &= ay^2 + by + c + a_1z^2 + b_1z + d_1zy, \\
C_{020} &= ax^2 + b'x + c' + a'_1z^2 + b'_1z + d'_1xz, \\
C_{002} &= a_1x^2 + b_2x + c_2 + a''_1y^2 + a''_2y + d''_2xy, \\
C_{110} &= -2axy - bx - b'y - d_1xz - d'_1yz + d''_2z^2c_1, \\
C_{101} &= -2a_1xz - b_1x - b_2z - d_1xy - d'_2yz + d_1y^2 + c_2, \\
C_{011} &= -2a'_1yz - b'_1y - a''_2z - d'_1xy - d'_2xz + d_1x^2 + c_3.
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Chandrasekhar [1960] e mais recentemente Kaplan [1986], obtiveram as equações (3.111), (3.112) e os coeficientes (3.113). Na tentativa de resolver as equações (3.111), eliminamos  $C_{000}$  derivando a primeira equação por  $x$  e  $y$ , a segunda por  $x$  e  $z$ , e a terceira por  $y$  e  $z$ . Igualando as três equações resultantes da derivação, obtemos a equação para integrabilidade em  $C_{000}$ :

$$\begin{aligned}
&V_x(C_{101yz} + C_{011xz} - 4C_{002xy}) + V_y(C_{110yz} + 2C_{002xz} - 2C_{011xy}) \\
&+ V_z(2C_{200yz} + C_{110xz} - 2C_{101xy}) + V_{xz}(2C_{200y} + C_{110x} + C_{011z} - 4C_{002y}) \\
&+ V_{yz}(C_{110y} + 2C_{002x} + C_{101z} - 4C_{002x} - 2C_{011y}) \\
&+ V_{xy}(2C_{200z} + 2C_{002z} - 2C_{101x}) + V_{xyz}(2C_{200} + 2C_{002} - 4C_{002}) \\
&+ V_{yy}(C_{110z} - 2C_{011x}) + V_{xx}(C_{110z} - 2C_{101y}) + V_{zz}(C_{101y} + C_{011x}) \\
&+ V_{yyz}(C_{110} - 2C_{011}) + V_{yzz}C_{101} + V_{xzz}C_{110} \\
&+ V_{xzz}C_{002} - 2V_{xzy}C_{101} = 0.
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Esta equação diferencial parcial de terceira ordem não possui uma solução geral em  $V$  análoga ao caso bidimensional discutido anteriormente. Tanto quanto sabemos não



Grau	Equacoes	Incogn.	Indep.Pot./Incogn	Dep.Pot./Incogn	Eqs./Incogn
2	13	7	10/6	3/1	1.85
3	22	13	15/10	7/3	1.69
4	34	22	21/15	13/7	1.54
5	50	34	28/21	22/13	1.47
6	70	50	36/28	34/22	1.40
7	95	70	45/36	50/34	1.35
8	125	95	55/45	70/50	1.31
9	161	125	66/55	95/70	1.28
10	203	161	78/66	125/95	1.26

Tabela 3.2: Relação entre o grau do invariante tridimensional com o número de equações, e o número de incógnitas. Na última coluna temos a razão entre o número de equações e o de incógnitas. A quarta e a quinta coluna apresentam respectivamente, o número de equações independentes do potencial e o número de equações dependentes do potencial em relação às suas incógnitas.

existem trabalhos relacionados a resolução desta equação, ou seja, não existem resultados gerais para invariantes tridimensionais quadráticos. Note que este caso é de grande interesse, pois experimentos com átomos de Rydberg e “traps” envolvem sistemas tridimensionais [Wineland, Itano, Bergquist e Bollinger 1988].

Usando o programa em REDUCE, contruímos a seguinte Tabela 3.2 que relaciona o grau do invariante com o número de equações e o número de incógnitas.

A Tabela 3.2 mostra que o número de equações cresce consideravelmente em função de  $N$ , e que a razão do número de equações dependentes do potencial em relação ao número de equações independentes aumenta cada vez mais. Ou seja, é como se o potencial “tomasse conta” do sistema de equações quando o grau do invariante aumenta, tornando desta forma cada vez mais difícil obter resultados gerais para potenciais arbitrários.

No entanto, é interessante observar que o número de equações dependentes do potencial torna-se maior que o número de equações independentes do potencial somente a partir de  $N = 7$ . No caso bidimensional isto já ocorria no grau  $N = 5$ . Note ainda que a razão entre o número de equações e o número de incógnitas para invariantes tridimensionais de um grau  $N$ , é maior que a razão correspondente para sistemas bidimensionais do mesmo grau.

## Capítulo 4

# APLICAÇÕES

### 4.1 Introdução

Neste capítulo mostraremos os resultados da aplicação dos métodos estudados no capítulo 3, para estudar a integrabilidade de alguns sistemas bi e tridimensionais. Entre eles, potencial de Henon e Heiles, modelo de Lorenz, o átomo de hidrogênio perturbado que inclui nosso objetivo principal, que é estudar o efeito Zeeman quadrático. Mostraremos também as seções de Poincaré para este último caso.

### 4.2 Sistemas não-Hamiltonianos

Nesta seção faremos a análise de Painlevé de dois exemplos de sistemas dissipativos: modelo de Lorenz e o retroespalhamento de Brillouin.

#### 4.2.1 Modelo de Lorenz.

Como já foi visto no capítulo 3, as equações para o modelo de Lorenz são dadas por:

$$\frac{dx_1}{dt} = \sigma(x_2 - x_1),$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dt} &= -x_1x_3 + rx_1 - x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -bx_3 + x_1x_2,\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde  $\sigma$ ,  $r$  e  $b$  são constantes positivas. A correspondente extensão complexa de 4.1  $z = t + ir$ ,  $w_j(z) = x_j(t, r) + iv(t, r)$ , é dada por,

$$\begin{aligned}\frac{dw_1}{dz} &= \sigma(w_2 - w_1), \\ \frac{dw_2}{dz} &= -w_1w_3 + rw_1 - w_2, \\ \frac{dw_3}{dz} &= -bw_3 + w_1w_2.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Supomos agora soluções do tipo:

$$w_i = a_{i0}(z - z_0)^{k_i}, \quad \text{com } i = 1, 2, 3.\tag{4.3}$$

Substituindo estas soluções nas equações 4.2 obtemos  $k_1 = -1$ ,  $k_2 = k_3 = -2$ ,  $a_{10} = \pm 2i$ ,  $a_{20} = \mp 2i/\sigma$  e  $a_{30} = -2/\sigma$ . As ressonâncias encontradas são  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = 2$  e  $r_3 = 4$ . Para encontrarmos as constantes de integração, nós obtivemos que a ressonância  $r_2 = 2$  restringe os valores de  $b$  a serem 1)  $b = 2\sigma$  ou então 2)  $b = -3\sigma + 1$ . Se escolhermos,

1.  $b = 2\sigma$  : Neste caso a ressonância  $r_3 = 4$  impõe que,  $\sigma = 1$ ,  $r = 1/9$  ou então  $\sigma = 1/2$ ,  $r = 0$ . Os invariantes conhecidos [Kunick e Steeb 1986] que incluem estes casos são:

$$\begin{aligned}h_1(x, z, t) &= (x^2 - 2\sigma z)e^{2\sigma t}, \quad b = 2\sigma, \quad r \text{ arbitrário.} \\ h_2(y, z, t) &= (y^2 + z^2)e^{2t}, \quad b = 1, \quad r = 0, \quad \sigma \text{ arbitrário.}\end{aligned}\tag{4.4}$$

2.  $b = -3\sigma + 1$  : Neste caso a ressonância  $r_3 = 4$  impõe que  $\sigma = 2/3$ ,  $r = 13/2$  e  $b = -1$ , ou então  $\sigma = 1/3$ ,  $r$  arbitrário e  $b = 0$ . A primeira ( $\sigma = 2/3$ ) destas possibilidades não é de interesse já que as constantes do sistema de Lorenz devem ser positivas para terem um significado físico. A segunda possibilidade ( $\sigma = 1/3$ ) tem um invariante conhecido dado por:

$$h_3(x, y, z, t) = \left(-rx^2 + \frac{y^2}{3} + \frac{2xy}{3} + x^2z - \frac{3x^4}{4}\right)e^{4t/3} \quad (4.5)$$

Todos os outros invariantes conhecidos para o modelo de Lorenz, não podem ser encontrados através da análise de Painlevé. Isto está relacionado com o fato de os invariantes não serem algébricos. É interessante observar que estes três invariantes encontrados através da análise de Painlevé, também são não-algébricos. Reforçando desta forma a dúvida existente entre a propriedade de Painlevé e a integrabilidade do sistema.

### 4.2.2 Retroespalhamento de Brillouin.

Vamos fazer a análise de Painlevé para o sistema de equações que servem de modelo de um eficiente método para prevenir reflexão do retroespalhamento estimulado de Brillouin, de um pulso de Laser quando interage com um plasma pouco denso. O sistema de equações é dado por Montes [1983]:

$$\begin{aligned} dI_1/dx &= -\gamma I_1 I_2, \\ dI_2/dx &= \gamma I_2 (I_3 - I_1), \\ dI_3/dx &= \gamma I_3 (I_2 - I_4), \\ dI_4/dx &= -\gamma I_3 I_4, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde  $\gamma = cte$ ,  $I_1$  é a intensidade do laser incidente,  $I_2$  é o retroespalhamento,  $I_3$  representa o reespalhamento forçado, e  $I_4$  representa o reespalhamento forçado para trás. Supondo soluções do tipo,

$$I_i = a_{i0}(z - z_0)^{k_i}, \quad \text{com } i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.7)$$

obtemos que  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$  e as constantes são  $a_{10} = a_{40} = 2$  e  $a_{20} = a_{30} = 1$ . As ressonâncias para este caso são  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = -2$  e  $r_4 = 2$ , também chamados de expoentes de Kowalevskaya.

Como as equações 4.6 admitem invariância similar podemos usar os resultados de Yoshida comentados no capítulo anterior. O sistema 4.6 apesar de não possuir a propriedade de Painlevé por causa de  $r_3 = -2$ , satisfaz o teorema de Yoshida referente a ausência de ressonâncias imaginárias ou irracionais. Portanto o sistema é dito não ser do tipo Painlevé. No entanto, as equações 4.6 podem ser integradas analiticamente [Montes 1983]:

$$I_1 = \frac{[(D/2)^2 - C_2^2] \exp(Dx/2) \sinh C_2(x + C_1)}{C_3 + \exp(Dx/2) [(D/2) \sinh C_2(x + C_1) - C_2 \cosh C_2(x + C_1)]}, \quad (4.8)$$

$$I_2 = I_1(x) - D/2 - C_2 \coth C_2(x + C_1),$$

$$I_3 = C_2^2 / [I_2(x) \sinh^2 C_2(x + C_1)],$$

$$I_4 = I_1 - I_2 + I_3 - D, \quad (4.9)$$

onde  $C_1, C_2, C_3$  e  $D$  são constantes, satisfazendo a relação invariante,

$$C_3 = \frac{[I_2(x) I_4(x)] \sinh C_2(x + C_1) \exp(\frac{Dx}{2})}{I_1(x)}. \quad (4.10)$$

O sistema de equações 4.6 é portanto integrável, não possuindo no entanto a propriedade de Painlevé. Isto pode acontecer, como vimos em alguns exemplos do capítulo 3, porque a relação invariante  $C_3$  não é algébrica.

### 4.3 Sistemas Hamiltonianos:

Nesta seção iremos estudar especificamente a integrabilidade de alguns sistemas hamiltonianos de interesse. Entre eles, potencial de Henon e Heiles, Henon-Heiles estendido, átomo de hidrogênio na interação de Van der Waals (que inclui como caso particular o efeito Zemann quadrático).

### 4.3.1 Henon e Heiles.

Nos últimos anos, estudos intensivos tem sido feitos para analisar o comportamento e a integrabilidade do potencial de Henon-Heiles [Henon e Heiles 1964, Chang et al 1981, Grammaticos et al 1982, Chang et al 1982, Sahadevan e Lakshmanam 1986 e Grammaticos et al 1983]. Este potencial escrito da forma generalizada

$$V = \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2) + Dx^2y - \frac{C}{3}y^3, \quad (4.11)$$

é conhecido [Chang et al 1981, Grammaticos et al 1982, Chang et al 1982 e Sahadevan e Lakshmanam 1986] como sendo integrável quando:

1.  $A = B$ , e  $C = -D$ ,
2.  $A, B$  arbitrários, e  $C = -6D$ ,
3.  $B = 16A$ , e  $C = -16D$ ,

com as respectivas integrais de movimento,

$$\begin{aligned} I_1 &= \dot{x}\dot{y} + Axy + \frac{D}{3}x^3 + Dxy^2, \\ I_2 &= -4(y\dot{x} - x\dot{y})\dot{x} + 4Ax^2y + x^4 + 4x^2y^2 + (4A - B)(\dot{x}^2 + Ax^2), \\ I_3 &= \dot{x}^4 + 2(A + 2Dy)x^2\dot{x}^2 - \frac{4}{3}Dx^3\dot{x}\dot{y} + Ax^4 \\ &\quad - \frac{4}{3}D(A + Dy)x^4y - \frac{2}{9}D^2x^6. \end{aligned} \quad (4.12)$$

As equações de movimento para o potencial (4.11) são dadas por:

$$\ddot{x} = -Ax - 2Dxy, \quad (4.13)$$

$$\ddot{y} = -By - Dx^2 + Cy^2. \quad (4.14)$$

Estas duas equações diferenciais ordinárias tem sido motivo de recentes estudos [Grammaticos et al 1982 e Sahadevan e Lakshmanam 1986] através da técnica conhecida como

análise de Painlevé [Abowitz et al 1980]. Todos os casos integráveis ( $I_1, I_2$  e  $I_3$ ) acima mencionados puderam ser obtidos através da análise de Painlevé [Grammaticos et al 1982 e Sahadevan e Lakshmanam 1986] das equações (4.13) e (4.14).

Como primeiro passo desejamos refazer a análise de Painlevé para as equações (4.13) e (4.14), só que, em vez de trabalharmos com duas equações diferenciais de segunda ordem, trabalharemos com uma equação diferencial de quarta ordem. Este procedimento difere do utilizado por outros autores [Chang et al 1981, Grammaticos et al 1982, Chang et al 1982 e Sahadevan e Lakshmanam 1986], que sempre partiram das equações (4.13) e (4.14). A razão da escolha de trabalhar com uma equação de quarta ordem, esta relacionada com a simplificação dos cálculos envolvidos na determinação das ressonâncias de Painlevé, permitindo que a maior parte dos cálculos possa ser automatizada e feita diretamente pelo computador. Inclusive nesta forma de somente uma equação, pode-se usar o programa REDUCE proposto por Hlavatý [Hlavatý 1986] para calcular as ressonâncias de Painlevé. Nós entretanto, não usamos este programa pois estamos interessados em desenvolver e aprender detalhadamente todos os passos da análise de Painlevé.

A equação de quarta ordem com a qual desejamos trabalhar pode ser facilmente obtida isolando-se  $y$  na equação (4.13) e substituindo-o na equação (4.14). Deste modo obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{2D}{x} \frac{d^4 x}{dt^4} - \frac{4D}{x^2} \frac{d^3 x}{dt^3} \frac{dx}{dt} + \frac{(C - 2D)}{x^2} \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 + \frac{4D}{x^3} \frac{d^2 x}{dt^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \\ & \frac{2CA}{x} \frac{d^2 x}{dt^2} + CA^3 - 4BD^2 x - 4D^3 x^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

De acordo com a análise de Painlevé [Abowitz et al 1980], substituímos

$$x = k(t - t_0)^u, \quad (4.16)$$

na eq. (4.15) obtendo então:

$$\begin{aligned} & 4D^3 k^2 (t - t_0)^{2u} + 4BD^2 k (t - t_0)^u - CA^2 \\ & + [-Cu^4 + 2Cu^3 - Cu^2 - 12Du^2 + 12Du] (t - t_0)^{-4} \\ & + 2CA(u - u^2)(t - t_0)^{-2} = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$



Estamos interessados em encontrar os possíveis valores de  $u$  de modo que a solução (4.16) represente o termo dominante perto da singularidade  $t \rightarrow t_0$ . De forma prática, isto significa escolher somente os termos de menor potência na equação (4.17), ou melhor, escolher os termos com potências mais negativas. Existem várias possibilidades de escolha de  $u$  para isto, por exemplo:

- $2u = u$ , ou seja, não existe solução.
- $2u = -2$ , implica que  $u = -1$ . Esta escolha entretanto não representa os termos dominantes pois os termos em  $(t - t_0)^{-4}$  são mais negativos.
- $2u = -4$ , implica que  $u = -2$  e os termos dominantes serão todos os coeficientes de  $(t - t_0)^{-4}$  e  $(t - t_0)^{2u}$ . Vamos considerar este como sendo o Caso I.
- Outra escolha é considerarmos como termos dominantes somente os coeficientes de  $(t - t_0)^{-4}$ , de forma que o coeficiente do último termo da equação (4.17) deve ser igual a zero. Esta condição leva a restrição de que  $u = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 48D/C}$ ,  $u \neq -2$ . Chamaremos esta escolha de Caso II.
- Várias outras possibilidades podem ser testadas, no entanto, nenhuma representa os termos dominantes perto da singularidade, com exceção dos Casos I e II.

Isto reduz a análise de Painlevé ao estudo dos dois casos seguintes:

### Caso I:

Neste caso a equação dos termos dominantes é dada por:

$$\begin{aligned} 4D^3k^2(t - t_0)^{2u} + [Cu^4 + 2Cu^3 - Cu^2 - 12Du^2 + \\ 12Du](t - t_0)^{-4} = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

substituindo o valor de  $u = -2$ , temos

$$[4D^3k^2 + 36C - 72D](t - t_0)^{-4} = 0, \quad (4.19)$$

de forma que o coeficiente desta equação sendo igual a zero podemos determinar o valor da amplitude como sendo  $k = \pm \sqrt{(9C + 18D)/D^3}$ . As ressonâncias de Painlevé podem então ser obtidas substituindo-se,

$$x = k(t - t_0)^{-2} + a(t - t_0)^{-2+r_I}, \quad (4.20)$$

na eq. (4.15) referente aos termos dominantes, e considerando-se somente os termos lineares em  $a$ . Procedendo desta forma obtemos a equação:

$$\begin{aligned} & [6Cr_I^2 - 30Cr_I - 36C + Dr_I^4 - 10Dr_I^3 + 31Dr_I^2 - 30Dr_I \\ & - 72D](t - t_0)_I' \sqrt{D} / [6D(t - t_0)^4 \sqrt{C + 2D} + (t - t_0)_I' \sqrt{DAD}] = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Observe que o coeficiente desta equação é um polinômio de grau quatro em  $r_I$ . Portanto, resolvendo este coeficiente em relação a  $r_I$  obtemos as soluções:

$$r_I = -1, 6, \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-24/\lambda - 23}, \quad (4.22)$$

onde de acordo com [Chang et al 1982] definimos  $\lambda \equiv D/C$ .

## Caso II:

Como vimos acima a outra possibilidade é quando

$$u = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 48\lambda}, \quad u \neq -2. \quad (4.23)$$

Como a propriedade de Painlevé impõe que as ressonâncias sejam números positivos (além de -1), resulta que o sinal (-) na frente da raiz das ressonâncias pode ser deixado de lado, e  $u$  será dado somente por:

$$u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 48\lambda}. \quad (4.24)$$

A equação dos termos dominantes para este caso será zero, pois  $u$  é solução da própria equação

$$[-Cu^4 + 2Cu^3 - Cu^2 - 12Du^2 + 12Du](t - t_0)^{-4} = 0. \quad (4.25)$$

Tabela 4.1: Ressonâncias em termos de  $n$ .

$r_{II}$	Caso II	Caso I
	$\lambda = (-r_{II}^2 + 1)/48$	$r_I = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-24/\lambda - 23}$
2	-1/16	-7,12
3	-1/6	-3,8
4	-5/16	$\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{269/5}$
5	-1/2	0,5
7	-1	2,3

Obviamente o valor da amplitude  $k$  é arbitrário. Procedendo da mesma forma que no caso I para encontrar as ressonâncias temos então que:

$$r_{II} = -1, 0, 6, +\sqrt{1 - 48\lambda} \quad (4.26)$$

### Casos integráveis

Devemos agora investigar quais das infinitas possibilidades de valores de  $\lambda$  satisfazem a propriedade de Painlevé, ou seja, quais os valores de  $\lambda$  tais que as ressonâncias sejam números reais, inteiros e positivos. Primeiramente investigamos as ressonâncias do Caso II:

$$r_{II} = \sqrt{1 - 48\lambda}. \quad (4.27)$$

Esta equação pode ser escrita também na forma

$$\lambda = (-r_{II}^2 + 1)/48. \quad (4.28)$$

Através da eq. (4.28), supomos ressonâncias reais, inteiras e positivas, e determinamos os respectivos valores de  $\lambda$ . Note que as ressonâncias do Caso I devem ser satisfeitas simultaneamente [Henon e Heiles 1964] Podemos observar que as ressonâncias

do Caso I serão imaginárias quando  $-24/23 \leq \lambda < 0$ , ou seja, substituindo-se esta desigualdade na eq. (4.28) veremos que  $r_{II}$  deve estar no intervalo  $-5\sqrt{47/23} < r_{II} < 5\sqrt{47/23} \cong 7$ . Variando então  $r_{II}$  de  $-7$  até  $7$ , excluindo as ressonâncias negativas e  $r_{II} = 0, 6$ , que são ressonâncias independentes de  $\lambda$ , podemos montar a tabela 1. A primeira coluna da tabela 4.1 mostra os valores reais, inteiros e positivos que a ressonância  $r_{II}$  pode admitir; na segunda coluna temos o valor de  $\lambda$  correspondente e por fim, na terceira coluna as respectivas ressonâncias  $r_I$  do caso I. Desta tabela 4.1 observamos que os casos  $\lambda = -1, -1/2, -1/6, -1/16$  estão relacionados com ressonâncias inteiras e portanto, satisfazem a propriedade de Painlevé. Quando  $\lambda = -5/16$ , o caso I admite ressonâncias em termos de raízes, e portanto, não tem a propriedade de Painlevé. Quando  $\lambda = 0$ ,  $r_I$  diverge, no entanto, quando  $\lambda = 0$  teremos  $D = 0$  e o potencial não é mais de Henon-Heiles, portanto este caso não é do nosso interesse.

### Propriedade Fraca de Painlevé

Podemos também estudar os casos da propriedade fraca de Painlevé [Ramani et al 1982], que é uma propriedade relacionada a expansão das soluções em termos de potências racionais, ou seja, admite valores de  $\nu$  na equação (4.15) racionais, bem como com ressonâncias racionais. Para tanto basta tomarmos  $r_{II} = n/2, r_{II} = n/3, \dots$  e montar a tabela correspondente. Na tabela 4.1 incluímos também o caso  $r_{II} = 4$ , que de forma alguma tem propriedade de Painlevé. Para simplificar as tabelas, de agora em diante só mostraremos os casos relevantes (que admitem a propriedade de Painlevé ou a fraca propriedade de Painlevé).

Se observarmos a tabela 4.2 relativa as ressonâncias  $r_{II} = n/2$ , podemos verificar que não existe nenhum caso novo em relação a tabela 4.1 e aos casos integráveis conhecidos citados no começo da seção. O que existe são somente valores de  $n$  múltiplos inteiros de dois e que repetem a tabela anterior. Os valores de  $n$  são restritos a condição vista anteriormente de que  $1 \leq r_{II} = n/2 < 5\sqrt{47/23}$ , ou seja,  $1 < n < 10\sqrt{47/23} \cong 14$ .

Tabela 4.2: Ressonâncias em termos de  $n/2$  ( $1 \leq n < 14$ ).

$r_{II} = n/2$	Caso II	Caso I	$u$ (Caso II)
	$\lambda = (-r_{II}^2 + 1)/48$	$r_I = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-24/\lambda - 23}$	
4/2	-1/16	-7,12	-1/2
6/2	-1/6	-3,8	-1
10/2	-1/2	0,5	-2
14/2	-1	2,3	-3

Tabela 4.3: Ressonâncias em termos de  $n/3$  ( $1 \leq n < 21$ ).

$r_{II} = n/3$	Caso II	Caso I	$u$ (Caso II)
	$\lambda = (-r_{II}^2 + 1)/48$	$r_I = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-24/\lambda - 23}$	
5/3	-1/27	-10,15	-1/3
6/3	-1/16	-7,12	-1/2
9/3	-1/6	-3,8	-1
15/3	-1/2	0,5	-2
21/3	-1	2,3	-3

Podemos agora investigar o caso  $r_{II} = n/3$ , visto na tabela 4.3. Neste caso temos  $1 \leq n < 15\sqrt{47/23} \cong 21$ . Além dos casos conhecidos  $\lambda = -1, -1/2, -1/6, -1/16$  a tabela 4.3 mostra uma outra possibilidade  $\lambda = -1/27$  como possuindo a fraca propriedade de Painlevé. Notamos que este caso tem bem característica de expansão em torno de  $n/3$ , pois  $\lambda = -1/27$  não apareceu quando investigamos outros números racionais (veja tabelas 1 e 2), exatamente porque ele está diretamente relacionado com o denominador 3, enquanto que as tabelas 1 e 2 tratam com ressonâncias múltiplas de dois. Para investigar outros valores de  $\lambda$  que possuem a propriedade fraca de Painlevé testamos também os casos  $r_{II} = n/4, n/5, n/6, n/7$  não tendo sido entretanto possível encontrar nenhum outro caso que satisfizesse a propriedade fraca de Painlevé. Note que expansões em torno de outras potências racionais devem ainda ser testadas, por exemplo para  $r_{II} = n/9, n/11, n/13, \dots$ , para garantir a não existência de casos adicionais que satisfaçam a propriedade de Painlevé.

Finalmente podemos agora verificar a concordância dos resultados obtidos a partir da equação diferencial de 4 ordem, eq. (4.15), com os casos integráveis conhecidos. Para isto montamos a tabela 4.4 com todas as relações entre  $\lambda$ , ressonâncias,  $u$  e os invariantes conhecidos. O caso  $\lambda = -1/2$  não será considerado, pois a desigualdade  $u \neq -2$  imposta pelo caso II não é satisfeita. O caso  $\lambda = -1/2$  não será considerado, pois sabe-se [Grammaticos et al 1981] que ele não tem a propriedade de Painlevé. Isto pode ser facilmente verificado calculando-se as constantes de integração no terceiro passo da análise de Painlevé.

Pela tabela 4.4 vemos que todos os casos integráveis  $I_1, I_2$  e  $I_3$  conhecidos puderam ser corretamente obtidos das ressonâncias das equações (4.22) e (4.26). Chamamos atenção para um possível novo caso correspondente a  $\lambda = -1/27$ , que admite soluções com  $u = 1/3$ , ou seja, admitindo a propriedade fraca de Painlevé. Este novo caso não foi observado por nenhum dos autores [Chang et al 1981, Grammaticos et al 1982, Chang et al 1982 e Sahadevan e Lakshmanam 1986]. que até hoje trabalharam com análise de pontos singulares para o potencial de Henon-Heiles.

Tabela 4.4: Casos que possuem a propriedade de Painlevé.

//////////	Caso I	Caso II				
u	-2	$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 48D/C}$				
k	$k = \sqrt{(9C + 8D)/D^3}$	arbit.				
Ressonâncias	$-1, 6, \frac{5}{3} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-24C/D - 23}$	$-1, 0, 6, \sqrt{1 - 48D/C}$				
A	A=B	A=B	arbit.	arbit.	?	
B	arbit.	arbit.	arbit.	16A	?	
$\lambda = D/C$	-1	-1	-1/6	-1/16	-1/27	
Ressonâncias	-1, 6, 2, 3	-1, 0, 6, 7	-1, 0, 6, 3	-1, 0, 6, 2	-1, 0, 18/3, 5/3	
u	-2	-3	-1	-1/2	-1/3	
Invariante	$I_1$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4(?)$	

Duas maneiras de se verificar se  $\lambda = -1/27$  [i. e.  $C = -27D$  na eq. (4.11)] é realmente um caso integrável são: 1) seções de Poincaré no espaço de fase do sistema ou 2) tentando-se determinar o invariante correspondente para o sistema. Tentamos obter as seções de Poincaré para confirmar a possível integrabilidade deste caso. No entanto, se desenharmos as superfícies equipotenciais veremos que não existe um estado ligado para o sistema. Portanto as trajetórias divergem e não é possível obter as seções de Poincaré correspondentes. A não existência de estados ligados é também verificada para os casos integráveis com  $\lambda = -1, -1/6, -1/16$ , não tendo sido entretanto mencionado em nenhum dos trabalhos anteriores [Chang et al 1981, Grammaticos et al 1982, Chang et al 1982 Sahadevan e Lakshmanam 1986].

Para estudar em detalhes a integrabilidade do potencial de Henon-Heiles quando  $\lambda = -1/27$ , é necessário calcular as constantes de integração no terceiro passo da análise de Painlevé, ou então achar o invariante associado.

O caso  $\lambda = -1/27$

O terceiro passo da análise de Painlevé consiste em substituir a solução geral

$$x = (t - t_0)^u \left[ k + \sum_{j=1}^{\infty} a_j (t - t_0)^j \right], \quad (4.29)$$

na equação (4.15), e zera todos os coeficientes de  $(t - t_0)^{u+j-n}$ . Onde  $n$  representa, neste caso, a ordem da equação (4.15) que é  $n = 4$ . Neste processo de zera todos os coeficientes de  $(t - t_0)^{u+j-4}$  é necessário encontrarmos três constantes de integração arbitrárias além  $t_0$ , ou seja,  $a_{r_1}$ ,  $a_{r_2}$  e  $a_{r_3}$ , ou mesmo  $k$ . Onde  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  são as ressonâncias encontradas no segundo passo da análise de Painlevé. Se uma dessas ressonâncias for igual a zero então  $k$  será arbitrário.

No Caso II ficou em aberto a possibilidade de a equação (4.15) ter a fraca propriedade de Painlevé quando  $\lambda = -1/27$ . Como a equação (4.15) é de quarta ordem, é necessário que a solução geral

$$x = (t - t_0)^{-1/3} \left[ k + \sum_{j=1}^{18} a_j (t - t_0)^{j/3} \right], \quad (4.30)$$

admita quatro constantes de integração arbitrárias ( $t_0$ ,  $k$ ,  $a_5$  e  $a_{18}$ ). O expoente de  $(t - t_0)$  é  $-1/3$  pois estamos tratando especificamente do Caso II quando  $\lambda = -1/27$ , o que implica que  $u = -1/3$ , as ressonâncias sendo então  $-1, 0, 5/3, 18/3$ . A ressonância  $-1$  está associada a constante de integração  $t_0$ , a ressonância  $0$  a  $k$ ,  $5/3$  a  $a_5$  e  $18/3$  a  $a_{18}$ . O que fazemos agora é substituir a suposta solução (4.30) na equação (4.15). Em seguida, conforme o terceiro passo da análise de Painlevé, devemos zera os coeficientes de  $(t - t_0)^{-1/3+j-4}$ . Os primeiros coeficientes  $a_1$  até  $a_4$ , puderam ser determinados num micro computador PC-XT como sendo iguais a zero. As constantes  $a_0$  ou  $k$  e  $a_5$  foram confirmadas como sendo arbitrárias, resta verificar se a constante  $a_{18}$  também o é. A Substituição da equação (4.30) até  $j = 18$  teve de ser feita num IBM-4381, sendo necessários 10 MBytes de memória para escrever a equação (4.15) que tinha um pouco mais de 10000 linhas.



Tabela 4.5: Coeficientes não nulos da solução 4.30

j	$a_j$
5	$a_5$ arbitrário
6	$-3Ak/2$
10	$-81D^2k^3/2600$
11	$-27(18Aa_5 + BDk^2)/1078$
12	$-3Ak^2(27Ak + 14)/112$
15	$-131D^2k^2a_5/2600$
16	$3(63423AD^2k^5 + 66300Aka_5^2 - 315900Aa_5 - 70200BDk^3a_5 - 1830400ka_5)/(2173600k^2)$
17	$-3A(1819125Ak^2a_5 + 607776Aa_5 - 35586BDk^2 + 943250ka_5)/1466080$
18	$a_{18}$ arbitrário

A tabela 4.5 mostra todos os coeficientes não nulos da equação (4.30). Obtivemos duas constantes arbitrárias além de  $t_0$  e  $k$  que são  $a_5$  relacionada a ressonância  $r = 5/3$ , e  $a_{18}$  relacionada a ressonância  $r = 18/3$ . Desta forma obtivemos no total quatro constantes de integração arbitrárias, satisfazendo o terceiro passo da análise de Painlevé,

Para determinar se a constante  $a_{18}$  é arbitrária foi necessário que a equação:

$$(-6561A^2k^2a_6 - 46656Ak^2a_{12} - 11664Aka_6^2 - 76464ka_{12}a_6 - 1620a_6^3)(t-t_0)^1 = 0, \quad (4.31)$$

fosse satisfeita sem restringir  $a_{18}$  (que neste caso nem aparece). A equação (4.31) é o coeficiente de  $(t-t_0)^1$  da equação (4.15). Os coeficientes  $a_6$ ,  $a_{10}$  e  $a_{12}$  da tabela 4.5 são soluções da equação (4.31). Ou seja, a equação (4.31) é satisfeita e o coeficiente de  $(t-t_0)^1$  desaparece. Se a equação (4.31) não fosse satisfeita seria necessário introduzirmos termos logarítmicos na solução geral (4.30), e a equação (4.15) não teria a fraca propriedade de Painlevé quando  $\lambda = -1/27$ . Mas como isto não aconteceu dizemos que o coeficiente  $a_{18}$  é arbitrário. Obtivemos desta forma quatro constantes de

integração arbitrárias  $k, t_0, a_5$  e  $a_{18}$ , satisfazendo desta forma a propriedade fraca de Painlevé com um número suficiente de constantes arbitrárias. No entanto, a propriedade fraca de Painlevé da equação (4.15) não garante que o sistema seja integrável quando  $\lambda = -1/27$ , pois até hoje não existe uma prova de uma relação direta entre propriedade fraca de Painlevé e integrabilidade. Mas sem dúvida, como o caso  $\lambda = -1/27$  admite a propriedade fraca de Painlevé ele é um forte candidato para ser um caso integrável. A demonstração conclusiva de que este caso é integrável consiste em achar um invariante. Passaremos a discutir abaixo a determinação de um tal invariante.

#### Sobre a existência de invariantes p/ $\lambda = -1/27$

Em vez de procurarmos invariantes da forma geral como os vistos na seção 3.4, que procuraremos mais tarde, investigamos primeiramente o invariante “reduzido” proposto por Grammaticos et al [1981], que segundo ele, engloba todos os possíveis invariantes para o potencial de Henon-Heiles. Este invariante reduzido é escrito na forma:

$$I = \sum_{n=1}^N [f(n)\dot{x}^{2n} + g(n)\dot{x}^{2n-1}\dot{y}] + h. \quad (4.32)$$

Usando agora a condição de invariância temporal para  $I$ , ou seja, usando  $dI/dt = 0$ , obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N & [\dot{x}^3(h_x + \dot{x}^{2n}f(n)_x) + \dot{x}^2\dot{y}(h_y + \dot{x}^{2n}f(n)_y + g(n)_x) \\ & + \dot{x}^{2n+1}\dot{y}^2g(n)_y + \dot{x}^{2n+1}(2\dot{x}n f(n) + \dot{y}g(n)) \\ & + (2n-1)\dot{x}^{2n}\dot{y}\ddot{x}g(n)] = 0, \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde os índices  $x$  e  $y$  representam derivadas parciais em relação a  $x$  e  $y$ , respectivamente. Tomando  $n = N, N-1, N-2, N-3$ , obtemos de (4.33) as seguintes equações:

$$\begin{aligned} f(N)_x &= 0, & g(N)_y &= 0, \\ f(N)_y + g(N)_x &= 0, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}
f(N-1)_x + 2\tilde{x}Nf(N) + \tilde{y}g(N) &= 0, \\
f(N-1)_y + g(N-1)_x + (2N-1)\tilde{x}g(N) &= 0, \\
g(N-1)_y &= 0,
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
f(N-2)_x + 2\tilde{x}(N-1)f(N-1) + \tilde{y}g(N-1) &= 0, \\
f_{N-2y} + g(N-2)_x + (2N-3)\tilde{x}g(N-1) &= 0, \\
g_{N-2y} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
f(N-3)_x + 2\tilde{x}(N-2)f(N-2) + \tilde{y}g(N-2) &= 0, \\
f(N-3)_y + g(N-3)_x + (2N-5)\tilde{x}g(N-2) &= 0, \\
g(N-3)_y &= 0,
\end{aligned} \tag{4.37}$$

e quando  $n = 1$  temos de (4.33):

$$\begin{aligned}
h_x + 2\tilde{f}(1) + \tilde{g}(1) &= 0, \\
h_y + \tilde{g}(1) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

As duas equações (4.38) serão sempre da mesma forma, independente do grau do invariante, no entanto,  $f(1)$  e  $g(1)$  podem mudar. A ideia para resolver todas as equações acima, consiste em resolver o sistema (4.34), em seguida o sistema (4.35), (4.36) e assim sucessivamente até obtermos todas as restrições necessárias em  $N, A, B, C$  e  $D$  de modo a acharmos todos os invariantes possíveis.

Num primeiro passo resolvemos as equações (4.34), que dão:

$$\begin{aligned}
f(N) &= m_N y + c_{1N}, \\
g(N) &= -m_N x + c_{2N},
\end{aligned} \tag{4.39}$$

onde  $m_N, c_{1N}$  e  $c_{2N}$  são constantes. Num segundo passo derivamos a primeira das equações de (4.35) em relação a  $y$  e a segunda em relação a  $x$  de modo que obtemos uma equação de segunda ordem da forma:

$$\frac{\partial^2 g(N-1)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} [2\ddot{x}Nf(N) + \ddot{g}(N)] - \frac{\partial}{\partial x} [(2n-1)\ddot{x}g(N)], \quad (4.40)$$

pela terceira das equações de (4.35) vemos que  $g(N-1)$  é independente de  $y$ , portanto, o lado direito da equação (4.40) deve ser independente de  $y$ . Para satisfazer isto tomamos (4.39) e substituímos em (4.40), usando as equações de movimento 4.13 e 4.14 obtemos:

$$2xy m_N (C + 8DN - 2D) + x(6m_N AN - 2m_N A - m_N B) + 4c_{1N} DN + 2y c_{2N} (-C - 2DN + D) + c_{2N} (-2AN + A + B) = 0, \quad (4.41)$$

onde  $A, B, C$  e  $D$  são as constantes no potencial definido na equação (4.11) Para que esta equação seja independente de  $y$  temos as seguintes possibilidades:

$$\begin{aligned} C + 8DN - 2D = 0 \text{ ou } m_N = 0 \\ -C - 2DN + D = 0 \text{ ou } c_{2N} = 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Isto nos conduz ao estudo de quatro casos separadamente:

1.  $m_N = c_{2N} = 0$ .
2.  $m_N = 0$  e  $-C - 2DN + D = 0$ .
3.  $c_{2N} = 0$  e  $C + 8DN - 2D = 0$ .
4.  $-C - 2DN + D = 0$  e  $C + 8DN - 2D = 0$

### Caso 1:

Neste caso, da eq. (4.39) temos que os coeficientes  $f(N)$  e  $g(N)$  serão dados por:

$$\begin{aligned} f(N) &= c_{1N}, \\ g(N) &= 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Agora, integrando as equações (4.35) podemos determinar os coeficientes de ordem mais baixa  $f(N-1)$  e  $g(N-2)$ . Ou seja, a primeira das equações de (4.35)

$$\begin{aligned} 2\tilde{x}Nc_{1N} + f(N-1)_x &= 0, \\ f(N-1) &= Nc_{1N}x^2(A + D\mathbf{y}) + c_{1N-1}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

determina  $f(N-1)$ , onde  $\tilde{x}$  é dado pelas equações (4.14). A segunda das equações de (4.35)

$$\begin{aligned} Nc_{1N}x^2D + g(N-1)_x &= 0, \\ g(N-1) &= -N/3c_{1N}x^3D + c_{2N-1}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

determina  $g(N-1)$ . Tomando estes dois coeficientes e substituindo-os na equação (4.40) obtida agora do caso quando  $n = N-1$ , obtemos:

$$\begin{aligned} 2x^3\mathbf{y}c_{1N}DN(C + 20DN - 24D) + x^3c_{1N}DN(26AN \\ - 30A - B) + 12x(N-1)Dc_{1N-1} + 6\mathbf{y}c_{2N-1}(-C \\ - 2DN + 3D) + 3c_{2N-1}(-2AN + 3A + B) = 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Da mesmo modo que anteriormente, tornamos esta equação independente de  $\mathbf{y}$ , para isto devemos escolher:

a)  $C + 20DN - 24D = 0$  ou  $c_{1N} = 0$ .

b)  $-C - 2DN + 3D = 0$  ou  $c_{2N-1} = 0$ .

Na possibilidade a) devemos sempre escolher  $c_{1N} \neq 0$ , pois esta constante representa o coeficiente do termo de maior grau do invariante. Portanto, resta-nos escolher  $C = -D(20N - 24)$  e uma das opções de b). Se  $-C - 2DN + 3D = 0$  em b) então as duas condições a) e b) são satisfeitas quando  $N = 21/18$ , e isto não tem muito sentido já que  $n$  deve ser inteiro. Por outro lado, se  $c_{2N-1} = 0$  em b), tomamos

$$\begin{aligned} f(N-1) &= Nc_{1N}x^2(A + D\mathbf{y}) + c_{1N-1}, \\ g(N-1) &= -N/3c_{1N}x^3D, \end{aligned} \quad (4.47)$$

e integramos as equações (4.36) obtendo assim os coeficientes:

$$\begin{aligned}
f(N-2) = & (x(3Cc_{1N}DNx^3y^2 + 18A^2c_{1N}N^2x^3 \\
& + 54Ac_{1N}DN^2x^3y - 54Ac_{1N}DNx^3y + 36ANxc_{1N-1} \\
& - 36Axc_{1N-1} - 3Bc_{1N}DNx^3y + 36c_{1N}D^2N^2x^3y^2 \\
& - 2c_{1N}D^2Nx^5 - 36c_{1N}D^2Nx^3y^2 + 72DNxy c_{1N-1} \\
& - 72Dxy c_{1N-1} - 18A^2c_{1N}Nx^5))/36 + c_{1N-2}, \tag{4.48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(N-2) = & -(x^2(2Cc_{1N}DNx^3y + 26Ac_{1N}DN^2x^3 \\
& - Bc_{1N}DNx^5 + 40c_{1N}D^2N^2x^3y - 48c_{1N}D^2Nx^3y \\
& + 40DNxc_{1N-1} - 40Dxc_{1N-1} + 180Dy \\
& - 30Ac_{1N}DNx^5))/60 + c_{2N-2}. \tag{4.49}
\end{aligned}$$

Usando estes dois coeficientes e a equação (4.40) para o caso em que  $n = N - 2$ , determinamos a condição ou  $N = 2$  ou  $c_{1N} = 0$  que impõe que o lado direito de (4.40) seja independente de  $y$ . Como não desejamos que  $c_{1N} = 0$ , escolhemos  $N = 2$ . A condição  $N = 2$  implica dizer que o invariante será de quarta ordem e  $C = -16D$ . Como a ordem do invariante ficou restringida à ser  $N = 2$ , os coeficientes acima  $f(0)$  e  $g(0)$  não serão considerados, resta portanto, resolver as equações (4.38). A condição de compatibilidade para as equações (4.38) é:

$$-\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2f(1)\ddot{x} + g(1)\ddot{y}) = \frac{\partial}{\partial x}(g(1)\ddot{x}). \tag{4.50}$$

Esta equação é satisfeita quando

$$C = -16D \quad \text{ou} \quad c_{1N} = 0,$$

$$B = 16A \quad \text{ou} \quad c_{1N} = 0,$$

$$c_{1N-1} = 0,$$

$$c_{2N-1} = 0.$$

Com estas condições podemos integrar as equações (4.38) de modo a determinar  $h$ :

$$h = -4/3c_{12}Dx^4(Ay + Dy^2) + c_{12}A^2x^4 - 2/9c_{12}D^2x^6. \quad (4.51)$$

O invariante fica da forma:

$$I = f(2)\dot{x}^4 + f(1)\dot{x}^2 + g(1)\dot{x}\dot{y} + h, \quad (4.52)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} I = & \dot{x}^4 + 2(A + 2Dy)x^2\dot{x}^2 - \frac{4}{3}Dx^3\dot{x}\dot{y} + Ax^4 \\ & - \frac{4}{3}D(A + Dy)x^4y - \frac{2}{9}D^2x^6, \end{aligned} \quad (4.53)$$

confirmando desta forma o caso integrável com o invariante  $I_3$  dado no começo desta seção. O invariante da eq. (4.53) foi também encontrado por Grammaticos et al usando o Ansatz (4.32) por eles proposto.

## Caso 2:

Analogamente ao caso 1, podemos verificar a existência de invariantes quando  $m_N = 0$  e  $C = -D(2N - 1)$ . Neste caso temos:

$$\begin{aligned} f(N) &= c_{1N}, \\ g(N) &= c_{2N}, \\ f(N-1) &= (Ax^2 + 2Dx^2y)Nc_{1N} + (Bxy + \frac{D}{3}x^3 - Cxy^2)c_{2N} \\ &\quad + c_{1N-1}, \\ g(N-1) &= -\frac{2}{3}Dx^2Nc_{1N} + Cx^2yc_{2N} + (\frac{A}{2}x^2 + Dx^2y) \\ &\quad c_{2N}(2N-1) - \frac{B}{2}x^2c_{2N} + c_{2N-1}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Para que quando  $n = N - 1$ , tenhamos o lado direito da equação (4.40) independente de  $y$ , é necessário que  $N = 1$  ou  $c_{1N} = 0$ . Tomando  $N = 1$ , implica dizer que temos invariante de segunda ordem e  $C = -D$ . A forma final para  $h$  é:

$$h = Dxy^2 + \frac{D}{3}x^3 + Bxy, \quad (4.55)$$

e o invariante é da forma:

$$I = \dot{x}\dot{y} + Dxy^2 + \frac{D}{3}x^3 + Bxy, \quad (4.56)$$

que concorda exatamente com o caso integrável  $I_1$  mencionado na introdução desta seção.

### Caso 3:

Agora  $c_{2N} = 0$  e  $C = -D(8N - 2)$ . Os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} f(N) &= m_N y + c_{1N}, \\ g(N) &= -m_N x, \\ f(N-1) &= (x^2(2m_N C y^2 + 4m_N A N y - 2m_N B y + 8m_N D N y^2 \\ &\quad - m_N D x^2 + 4A c_{1N} N + 8c_{1N} D N y))/4 + c_{1N-1}, \\ g(N-1) &= -(x^3(2m_N C y + 6m_N A N - 2m_N A - m_N B \\ &\quad + 16m_N D N y - 4m_N D y + 4c_{1N} D N))/6 + c_{2N-1}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

e as condições de independência em relação a  $y$  na eq. (4.40) impõe que  $N = 1$  ou  $N = 2$ . O caso  $N = 2$  força os coeficientes  $m_2 = c_{12} = 0$ , ou seja, mata o invariante. No entanto, a possibilidade  $N = 1$  (invariante de segunda ordem com  $C = -6D$ ) é possível. Integrando-se as equações (4.38) obtemos:

$$h = m_2 \left[ -Ax^2y - Dx^2y^2 - \frac{Ax^2}{4D}(4A - B) - \frac{D}{4}x^4 \right], \quad (4.58)$$

ficando o invariante na forma final

$$I = f(1)\dot{x}^2 + g(1)\dot{x}\dot{y} + h, \quad (4.59)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} I &= -4(y\dot{x} - x\dot{y})\dot{x} + \\ &\quad 4Ax^2y + x^4 + 4Dx^2y^2 + (4A - B)(x^2 + \frac{A}{D}x^2). \end{aligned} \quad (4.60)$$



Este caso confere com o caso integrável  $I_2$  comentado no início desta seção.

#### Caso 4:

Neste caso como  $c_{2N} \neq m_N \neq 0$ , então  $8N - 2 = 2N - 1$  ou  $D = 0$ . A única condição que satisfaz a igualdade é quando  $N = 1/6$ . Portanto, este caso não precisa ser considerado, já que o invariante originalmente proposto por Grammaticos et al considera valores de  $n$  inteiros.

Em suma fizemos a análise de Painlevé para a equação de quarta ordem (4.15) referente ao potencial de Henon-Heiles. Todos os casos integráveis  $I_1, I_2$  e  $I_3$  puderam ser confirmados através desta análise e ainda todos os invariantes foram obtidos através do invariante reduzido (4.32). Portanto, se todos os possíveis invariantes para o potencial de Henon-Heiles podem ser escritos da forma (4.32), concluímos que o caso  $\lambda = -1/27$ , ou mesmo qualquer outro caso além dos três conhecidos, não é integrável. No entanto, se esta afirmação não for correta, então acreditamos que existe um novo caso integrável, que é o caso  $\lambda = -1/27$ . Este caso possui a fraca propriedade de Painlevé, como foi mostrado nesta seção. Aliás, este foi o único caso dos encontrados que admite a fraca propriedade de Painlevé.

O próximo passo usando o método da seção 3.4, ou seja, usando a condição  $dI/dt = 0$ , procuramos todos os invariantes de até quarta ordem inclusive para o sistema de Henon e Heiles. Através do programa chamado REDUCE BIDIMENSIONAL (ver seção 6.1), tivemos todas equações que devem ser satisfeitas para que um sistema admita invariantes da forma 3.73 de até quarto grau. Podemos observar na seção 3.4 que para potenciais independentes do tempo e dos *momentas*, as equações de grau ímpar são totalmente independentes das equações de grau par. Portanto temos:

#### Grau 3.

Dependentes do Potencial:

$$-(C_{10}V_x + C_{01}V_y) = 0,$$

$$\begin{aligned}
-C_{12}V_x - 3C_{03}V_y + C_{01y} &= 0, \\
-3C_{30}V_x - C_{21}V_y + C_{10x} &= 0, \\
-2C_{21}V_x - 2C_{12}V_y + C_{10y} + C_{01x} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Independentes do Potencial:

$$\begin{aligned}
C_{30y} + C_{21x} &= 0, \\
C_{12y} + C_{03x} &= 0, \\
C_{21y} + C_{12x} &= 0, \\
C_{30x} = 0, \quad C_{03y} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

**Grau 4.**

Dependentes do Potencial:

$$\begin{aligned}
-C_{11}V_x - 2C_{02}V_y + C_{00y} &= 0, \\
-2C_{20}V_x - C_{11}V_y + C_{00x} &= 0, \\
-C_{13}V_x - 4C_{04}V_y + C_{02y} &= 0, \\
-4C_{40}V_x - C_{31}V_y + C_{20x} &= 0, \\
-2C_{22}V_x - 3C_{13}V_y + C_{11y} + C_{02x} &= 0, \\
-3C_{31}V_x - 2C_{22}V_y + C_{11x} + C_{20y} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Independentes do Potencial:

$$\begin{aligned}
C_{40y} + C_{31x} = 0 \quad C_{22y} + C_{13x} &= 0, \\
C_{40y} + C_{31x} = 0 \quad C_{31y} + C_{22x} &= 0, \\
C_{40x} = 0, \quad C_{04y} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Resolvendo todas as equações independentes do potencial, obtemos:

$$\begin{aligned}
C_{40} &= D(4)y^4 + D(3)y^3 + D(2)y^2 + D(1)y + D(0), \\
C_{04} &= D(4)x^4 + C(3)x^3 + C(2)x^2 + C(1)x + C(0), \\
C_{30} &= B(3)y^3 + B(2)y^2 + B(1)y + B(0), \\
C_{03} &= -B(3)x^3 + A(2)x^2 + A(1)x + A(0), \\
C_{31} &= -4D(4)xy^3 - 3D(3)xy^2 - 2D(2)xy - D(1)x - C(3)y^3 \\
&\quad + H(2,0)y^2 - G(1,0)y + N(0,0), \\
C_{13} &= -4D(4)yx^3 - 3C(3)yx^2 - 2C(2)xy - C(1)y - D(3)x^3 \\
&\quad + H(2,0)x^2 - G(0,1)x + H(0,0), \\
C_{21} &= -3B(3)xy^2 - 2B(2)xy - B(1)x + A(2)y^2 - E(1,0)y + F(0,0), \\
C_{12} &= 3B(3)yx^2 - 2A(2)xy - A(1)y + B(2)x^2 + E(1,0)x + E(0,0), \\
C_{22} &= 6D(4)x^2y^2 + 3D(3)x^2y + D(2)x^2 + 3C(3)xy^2 - 2H(2,0)xy \\
&\quad + G(1,0)x + C(2)y^2G(0,1)y + G(0,0), \tag{4.65}
\end{aligned}$$

onde os vários  $A(), B(), C(), D(), F(), N(), G()$  e  $H()$  são constantes a serem determinadas. Os coeficientes  $C_{20}, C_{02}, C_{11}, C_{00}$  restantes são determinados a partir das equações dependentes do potencial. Os coeficientes  $C_{ij}$  de 4.65 são substituídos nas equações dependentes do potencial (4.61 e 4.63), que quando resolvidas determinam os coeficientes restantes  $C_{20}, C_{02}, C_{11}, C_{00}$ , e a partir daí encontramos todos invariantes existentes até quarta ordem inclusive. Os coeficientes restantes são:

$$\begin{aligned}
C_{20} &= R_1(0,0) + (G(0,1)y^3(14D - 8C - y(6A + 9B)) + \\
&\quad 3D(1)x^2(-Ax^2 + (16A + 2B)y^2 + (8C - 2D)y) + \\
&\quad 16C(0)Ay^3 + 24D(0)(2Ay + C)x^2)/12, \\
C_{02} &= R_2(0,0) + (G(0,1)x^3(-11Ax^2 - 12Ay^2 - \\
&\quad 12Cy) + 8C(0)y(6Ax^2 - 2By^2 + 3Dy) + \\
&\quad D(1)(14A + B)x^4)/12,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{11} &= E_3(0,0) + (G(0,1)yx(4Ax^2 + (12A + 6B)y^2 + (12C - 9D)y) \\
&\quad - D(1)x^3(28A + 2B) - 10C + D - 24C(0)Axy^2 - 8D(0)Ax^3))/6, \\
C_{00} &= (24E_3(0,0)x(Ax^2 - 3By^2 + 3Dy) + 72R_1(0,0)x^2(2Ay + C) + \\
&\quad 24R_2(0,0)y^2(3D - 2By) + G(0,1)x^2y(8A^2x^4 + 36A^2x^2y^2 + \\
&\quad 6ABx^2y^2 + x^2yA(36C - 15D) - 6y^4(12A^2 + 30AB + 6B^2) + \\
&\quad 2y^3(66AC - 12AD + 63CB - 45BD) - 2y^2(24C^2 - 78CD + 27D^2)) + \\
&\quad (-4x^2y(17A + AB) + 2x^2(AD - 13AC) + 6y^3(48A^2 + 20AB + B^2) + \\
&\quad y^2(288AC - 120AD + 48CB - 9BD) + y(72C^2 - 48CD + 3D^2)) + \\
&\quad 8C(0)y^2(-9A^2x^4 + A(24A + 18B)x^2y^2 + 2A(6C - 9D)x^2y + 4By^4 - \\
&\quad 12BDy^3 + 9D^2y^2) + 8D(0)x^4(-2A^2x^2 + 3A(12A + B)y^2 + \\
&\quad 3A(12C - D)y + 9C^2) + D(1)x^4)/72, \tag{4.66}
\end{aligned}$$

A condição para que a energia total se conserve impõe que:

$$R_1(0,0) = R_2(0,0) \neq 0. \tag{4.67}$$

As constantes  $C(0)$ ,  $D(0)$ ,  $E_3(0,0)$  e  $G(0,1)$  podem ser zeradas ou não para alguns valores particulares de  $A, B, C$  e  $D$ , como veremos a seguir:

1. Nos casos em que  $A, B, C$  e  $D$  são quaisquer, as equações dependentes do potencial impõe que  $C(0) = G(0,1) = D(0) = D(1) = E_3(0,0) = 0$ . Portanto, somente a energia total do sistema é um invariante.
2. Quando  $C = D$ ,  $B = -A$  somente  $C(0) = G(0,1) = D(0) = D(1) = 0$ , e o invariante 3.73 fica da forma:

$$\begin{aligned}
I &= R_1(0,0)(3\dot{y}^2 + 3\dot{x}^2 + 3Dx^2 + 3Dy^2 + 6Ax^2y + 2Ay^3)/3 \\
&\quad + E_3(0,0)(Ax^3 + 3Axy^2 + 3Dxy + 3y\dot{x})/3, \tag{4.68}
\end{aligned}$$

onde  $R_1(0,0)$  e  $E_3(0,0)$  são constantes arbitrárias. Além da energia total ( $R_1(0,0)$ ) temos agora um invariante de ordem 2 ( $E_3(0,0)$ ).

3. No caso  $D = 16C$ ,  $B = -16A$  temos que  $C(0) = G(0,1) = D(1) = E_3(0,0) = 0$  e o invariante,

$$\begin{aligned} I = & D(0)(-2A^2x^6 - 12A^2x^4y^2 - 12ACx^4y + 9C^2x^4 - 12Ax^3\tilde{y}\dot{x} + \\ & 36Ax^2y\dot{x} + 18Cx^2\dot{x}^2 + 9\dot{x}^4)/9 + \\ & R_1(0,0)(3\tilde{y}^2 + 3\dot{x}^2 + 3Dx^2 + 3Dy^2 + 6Ax^2y + 2Ay^3 + \dots)/9, \end{aligned} \quad (4.69)$$

com  $D(0)$  sendo uma constante arbitrária. Este é mais um caso integrável, só que agora o invariante além da energia é de quarta ordem.

4. O ultimo caso integrável admitindo invariantes de até quarta ordem, é dado quando  $D, C$  quaisquer e  $B = -6A$ . Agora  $E_3(0,0) = 0$ , e o invariante fica da forma:

$$I = (-x^4 - 4x^2y^2 - 4Cx^2y + (D - 4C)(Cx^2 + \dot{x}^2) - 4x\dot{x}\tilde{y} + 4y\dot{y}). \quad (4.70)$$

Todos estes invariantes além da energia total do sistema já são conhecidos [Grammaticos, Dorizzi e Padjen 1982]. Através deste cálculo direto para achar invariantes, garantimos que não existem mais casos integráveis para o sistema de Henon e Heiles que admitem invariantes da forma 3.73 de até quarta ordem inclusive.

### 4.3.2 Henon-Heiles Extendido:

O hamiltoniano deste sistema é dado por:

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\mu}{2}(x^2 + y^2) + bx^2y - \frac{a}{3}y^3 + \sigma(x^2 + y^2)^2/2, \quad (4.71)$$

com as respectivas equações de movimento,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\mu x - 2bxy - 2\sigma x^3 - 2\sigma xy^2, \\ \ddot{y} &= -\mu y - bx^2 + ay^3 - 2\sigma y^3 - 2\sigma x^2y. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Este hamiltoniano difere de 4.11 por possuir o último termo em 4.71. O sistema 4.71 para o caso  $\mu = \sigma = a = b = 1$ , tem sido estudado por Contopoulos e Polymilis [1987] através das seções de Poincaré. Contrário ao potencial de Henon e Heiles que exhibe largas regiões estocásticas para altas energias, este potencial quártico mantém um comportamento regular para quaisquer valores de energia. Portanto, espera-se que o sistema seja integrável. Para verificar isto, procuramos invariantes da forma 3.73 de até quarta ordem para o hamiltoniano 4.71.

Usando as equações 4.61 até 4.65 obtidas para o caso Henon e Heiles, obtivemos somente a energia total do sistema 4.71 como sendo invariante. Portanto não existe invariante polinomial de até quarta ordem inclusive para o sistema Henon-Heiles estendido. Este resultado foi confirmado recentemente de modo independente por Yoshida, Ramani e Grammaticos [1988]. Eles demonstraram, através do teorema de Ziglin, que o hamiltoniano 4.71 é não integrável, exceto nos casos:

1.  $a = b = 0$
2.  $a = b, \quad \mu\sigma = a^2$
3.  $3a = 2b$
4.  $3a + b = 0, \quad \mu\sigma = 21a^2.$

No entanto, não existem provas rigorosas quanto aos casos 3 e 4. Tanto que Yoshida et al. [1988] fizeram a análise de Painlevé para as equações 4.72 e não acharam a propriedade de Painlevé para os dois últimos casos. Resta dizer que o hamiltoniano 4.71, apesar de mostrar um comportamento completamente regular nas seções de Poincaré quando  $\mu = \sigma = a = b = 1$  (ver Contopoulos e Polymilis [1987]) tem sido visto pelos autores acima citados, como sendo não-integrável.

### 4.3.3 Átomo de Hidrogênio Perturbado:

#### Potencial de van der Waals.

Vamos estudar o átomo de hidrogênio sujeito ao potencial de van der Waals. Este sistema foi tratado por Alhassid, Hinds e Meschede [1987], que estudaram suas simetrias dinâmicas e seu espectro. O hamiltoniano clássico escrito de forma adimensional para este sistema é:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2} - \frac{1}{r} + \tilde{\gamma}(x^2 + y^2 + \beta^2 z^2) = E, \quad (4.73)$$

onde  $\tilde{\gamma}$  e  $\beta$  são constantes, e  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Quando  $\beta = \sqrt{2}$  a equação 4.73 corresponde ao potencial de van der Waals. Para  $\beta = 0$  ela corresponde ao efeito Zeeman quadrático. Por conveniência, limitamos nossa discussão ao caso em que  $L_z = 0$ .

Podemos transformar o hamiltoniano 4.73 para coordenadas parabólicas  $(\xi, \eta)$ ,

$$\xi = r - z \quad \eta = r + z. \quad (4.74)$$

Neste caso temos:

$$H = \frac{2\xi}{\xi + \eta} p_\xi^2 + \frac{2\eta}{\xi + \eta} p_\eta^2 + \frac{m^2}{2\xi\eta} + \tilde{\gamma} \left[ \xi\eta + \frac{\beta^2}{4} (\eta^2 + \xi^2 - 2\xi\eta) \right] \quad (4.75)$$

Para evitar a singularidade existente na origem, regularizamos o hamiltoniano de Kepler através da transformação canônica,

$$\begin{aligned} \xi &= u^2 & p_\xi &= p_u/2u \\ \eta &= v^2 & p_\eta &= p_v/2v, \end{aligned} \quad (4.76)$$

temos então que:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(p_u^2 + p_v^2) + \tilde{\gamma}(u^2 + v^2)[u^2v^2 + \frac{\beta^2}{4}(u^4 + v^4 - 2u^2v^2)] \\ &-E(u^2 + v^2) = 2 \end{aligned} \quad (4.77)$$

que por expansão das variáveis,

$$\begin{aligned} u(-2E)^{1/4} &\rightarrow u & v(-2E)^{1/4} &\rightarrow v \\ p_u(-2E)^{1/4} &\rightarrow p_u & p_v(-2E)^{1/4} &\rightarrow p_v \end{aligned} \quad (4.78)$$

conduz finalmente ao *hamiltoniano efetivo*,

$$\begin{aligned} \tilde{H}(u, v, p_u, p_v) &= 2\epsilon = \frac{1}{2}(p_u^2 + p_v^2) + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \\ &+ A(u^6 + v^6) + B(u^4v^2 + u^2v^4), \end{aligned} \quad (4.79)$$

onde  $A = \tilde{\gamma}\beta^2/4$  e  $B = \tilde{\gamma}(1 - \beta^2/4)$ . As equações de movimento correspondentes a  $\tilde{H}$  são

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= -u - 6Au^5 - 4Bu^3v^2 - 2Buv^4, \\ \ddot{v} &= -v - 6Av^5 - 4Bv^3u^2 - 2Bvu^4. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Seguindo agora o método de Painlevé, substituímos as soluções

$$\begin{aligned} u &= a_{10}(z - z_0)^{k_1}, \\ v &= a_{20}(z - z_0)^{k_2}, \end{aligned} \quad (4.81)$$

nas equações de movimento 4.80 obtendo:

$$\begin{aligned} k_1(k_1 - 1)a_{10}(z - z_0)^{k_1 - 2} &= -a_{10}(z - z_0)^{k_1} - 6Aa_{10}^5(z - z_0)^{5k_1} \\ &\quad - 4Ba_{10}^3a_{20}^2(z - z_0)^{3k_1 + 2k_2} - 2Ba_{10}a_{20}(z - z_0)^{k_1 + 4k_2}, \\ k_2(k_2 - 1)a_{20}(z - z_0)^{k_2 - 2} &= -a_{20}(z - z_0)^{k_2} - 6Aa_{10}^5(z - z_0)^{5k_2} \\ &\quad - 4Ba_{20}^3a_{10}^2(z - z_0)^{3k_2 + 2k_1} - 2Ba_{20}a_{10}(z - z_0)^{k_2 + 4k_1}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Para obter os termos dominantes basta escolhermos  $k_1$  e  $k_2$  de forma a simplificar os expoentes  $(z - z_0)$  mais negativos. Deste modo vemos ser necessário considerar dois casos relevantes (em todos as outras possibilidades de escolha  $k_1$  e  $k_2$  as soluções não representam os termos dominantes):



Tabela 4.6: Todas as possíveis amplitudes para o caso 1 com as respectivas ressonâncias associadas.

	$a_{10} = a_{20}^{(1)}$	$a_{10} = -a_{20}^{(1)}$	$a_{10} = ia_{20}^{(2)}$	$a_{10} = -ia_{20}^{(2)}$
$a_{10}^{(1)}$	$a_{20}^{(1)}$	$a_{20}^{(1)}$	$a_{20}^{(2)}/i$	$a_{20}^{(2)}/i$
$a_{10}^{(2)}$	$-a_{20}^{(1)}$	$-a_{20}^{(1)}$	$-a_{20}^{(2)}/i$	$-a_{20}^{(2)}/i$
$a_{10}^{(3)}$	$ia_{20}^{(1)}$	$ia_{20}^{(1)}$	$a_{20}^{(2)}$	$a_{20}^{(2)}/i$
$a_{10}^{(4)}$	$-ia_{20}^{(1)}$	$-ia_{20}^{(1)}$	$-a_{20}^{(2)}$	$-a_{20}^{(2)}/i$
$r$	$-1, 3, \frac{A+B \pm 2A\sqrt{1+B/A}}{A+B}$	$-1, 3, \frac{A+B \pm 2A\sqrt{1+B/A}}{A+B}$	$-1^2, 3^2$	$-1^2, 3^2$

1 Os expoentes são  $k_1 = k_2 = -1/2$ , e as equações dos termos dominantes é dada por:

$$\begin{aligned}
 3/4a_{10}(z - z_0)^{-5/2} &= -6Aa_{10}^5(z - z_0)^{-5/2} - 4Ba_{10}^3a_{20}^2(z - z_0)^{-5/2} \\
 &\quad - 2Ba_{10}a_{20}(z - z_0)^{-5/2}, \\
 3/4a_{20}(z - z_0)^{-5/2} &= -6Aa_{10}^5(z - z_0)^{-5/2} - 4Ba_{20}^3a_{10}^2(z - z_0)^{-5/2} \\
 &\quad - 2Ba_{20}a_{10}(z - z_0)^{-5/2}.
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

A amplitudes devem satisfazer estas duas equações, ou seja devem satisfazer a relação  $a_{10}^4 = a_{20}^4$ . Todos os possíveis  $a_{10}$  e  $a_{20}$  que satisfazem esta relação são mostrados na tabela 4.6, onde  $a_{20}^{(1)} = (-1/8(A + B))^{1/4}$ ,  $a_{20}^{(2)} = (3/4(2B - 6A))^{1/4}$  e  $r$  são as ressonâncias obtidas do segundo passo da análise de Painlevé. As ressonâncias

$$r = \frac{A + B \pm 2A\sqrt{1 + B/A}}{A + B}, \tag{4.84}$$

da tabela 4.6, são ideais para estudar a propriedade de Painlevé em função dos parâmetros do hamiltoniano 4.73.

2 Os expoentes  $k_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + B/A} > -1/2$ ,  $k_2 = -1/2$ , e a equação dos termos dominantes é:

$$k_1(k_1 - 1)a_{10}(z - z_0)^{k_1-2} = -2Ba_{10}a_{20}(z - z_0)^{k_1-2}, \tag{4.85}$$

Tabela 4.7: Ressonâncias para valores particulares de  $A$  e  $B$  para o hamiltoniano dado pela equação 4.79.

//////	Caso 1	Caso 2
$B = 0$	$-1, 3, -1, 3$	$-1, 0, 3, 1$
$B = 3A$	$-1, 3, 0, 2$	$B/A = 3$
$B = 8A$	$-1, 3, 1/3, 5/3$	$B/A > 3$
$B = 15A$	$-1, 3, 1/2, 3/2$	$B/A > 3$
$B = 24A$	$-1, 3, 3/5, 7/5$	$B/A > 3$
$B = 35A$	$-1, 3, 4/3, 7/3$	$B/A > 3$
.....	.....	$B/A > 3$
$B = nA$	$-1, 3, 1 \pm 2\sqrt{n+1}/(n+1)$	$B/A > 3$

$$3/4 a_{20}(z - z_0)^{-5/2} = -6A a_{10}^5(z - z_0)^{-5/2}.$$

As amplitudes  $a_{20}^4 = (-1/(8A))$  e  $a_{10}$  é arbitrária. As duas soluções de  $k_1$  são análogas e não implicam em resultados diferentes nos valores das ressonâncias. A desigualdade em  $k_1$  impõe que  $B/A < 3$ . As ressonâncias neste caso são  $r_1 = -1, r_2 = 0, r_3 = 3$  e por fim,

$$r_4 = \sqrt{1 + B/A}. \tag{4.86}$$

Estas ressonâncias podem ser agora estudadas em função dos parâmetros  $A, B$  do hamiltoniano. Para satisfazer a propriedade de Painlevé é necessário que as ressonâncias sejam números inteiros e  $a_{20}$  seja diferente de zero.

Podemos observar na tabela 4.7 que o caso 2 somente é válido quando  $B = 0$ , pois nas outras possibilidades  $B/A > 3$ , e portanto estas ressonâncias não são possíveis. No entanto, para o caso 1 todos os valores são válidos. Para  $B = 0$ , temos o caso do oscilador de grau 6 desacoplado, que é integrável. Nas variáveis originais corresponde à  $\beta = 2$ , e  $\tilde{\gamma}$  arbitrário.

Tabela 4.8: Casos Integráveis do hamiltoniano 4.79 com suas constantes de movimento

Casos	Ressonâncias	Invariante	$\beta$	$\tilde{\gamma}$
$B = 3A$	$-1, 0, 2, 3$	$I_2 = (up_v - vp_u)^2$	1	Arb.
$B = 15A$	$-1, 1/2, 3/2, 3$	$I_2 = [p_u p_v + uv + 6A(u^4 + v^4)uv + 20Au^3v^3]$	1/2	Arb.

Quando  $B = 3A$  temos ressonâncias inteiras, e portanto a propriedade de Painlevé é satisfeita. Conjecturamos que este caso seja integrável, (veja tabela 4.8). Quando  $B = 8A$  poderíamos admitir a propriedade fraca de Painlevé com soluções em torno de  $1/3$ , no entanto isto não é possível pois o valor de  $k_1 = 1/2$ . Mas quando  $B = 15A$ , temos a fraca propriedade de Painlevé com expansões das soluções em torno de potências com  $1/2$ , no entanto como potencial de van de Walls não é homogêneo, nada podemos garantir. Apesar disto, este caso é confirmado como sendo integrável (tabela 4.8).

Porque os casos seguintes ( $B = 24A, B = 35A, \dots, B = nA$ ) não podem ser integráveis? Primeiro, deveria se encontrar todos os valores de  $n$  para os quais as ressonâncias sejam números inteiros, desta forma satisfazendo a propriedade de Painlevé, este estudo pode ser feito posteriormente. Segundo, nos casos de ressonâncias racionais esperamos a propriedade fraca de Painlevé, no entanto, como foi visto no cap. 3, esta propriedade somente foi definida para potenciais homogêneos, que não é o nosso caso, portanto, nada podemos garantir referente a integrabilidade destes sucessivos casos através das ressonâncias de Painlevé. O teorema de Yoshida não pode ser aplicado, pois o sistema não admite invariância similar.

É necessário portanto, como outra opção, fazer investigações numéricas baseadas nas equações de movimento. Usando o programa da seção 6.3 integramos as equações de movimento 4.80, e plotamos as seções de Poincaré ( $v = 0, p_v > 0$ ). Os valores de  $p_v$  são dados por:

$$p_v = +(2\epsilon - p_u^2 + \frac{1}{2}u^2 + Au^6)^{1/2}. \quad (4.87)$$

Desta forma, para diferentes valores de  $(p_u, u)$  podemos achar todas as órbitas desejadas. Os contornos da superfície de Poincaré, ou seja para  $p_u, u$ , são dados de forma que  $p_v$

seja sempre real. Portanto, fixando um valor qualquer para  $A$ , digamos  $1/6$  podemos, para diferentes valores de  $B$  e  $\epsilon$  confirmar os casos integráveis, ou melhor, procurar possíveis casos integráveis não previstos pela análise de Painlevé.

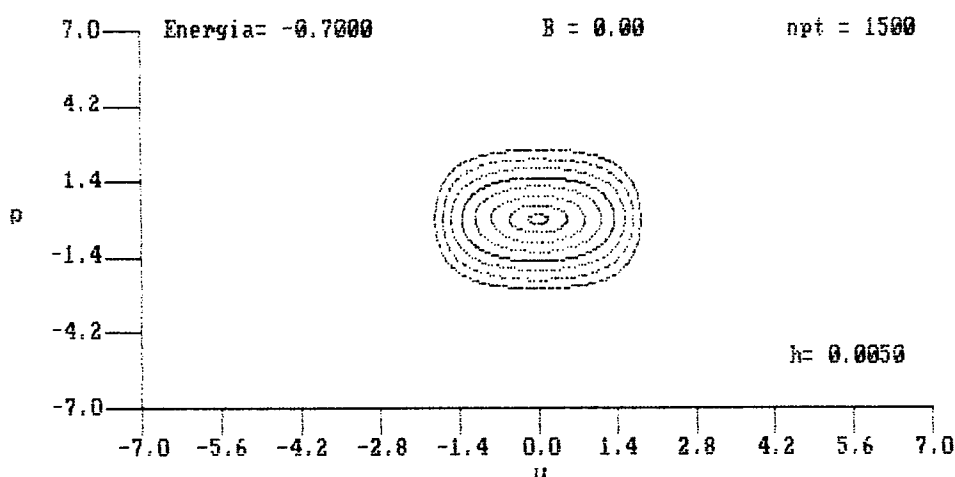


Figura 4.1: Nesta figura observamos 8 órbitas regulares do caso integrável  $B = 0.0$ ,  $npt$  é o número de pontos plotados,  $\epsilon$  o valor da energia e  $h$  é o passo de integração do programa.

Na figura 4.1 vemos o caso integrável correspondente a  $B = 0.0$  para energia pequena ( $\epsilon = -0.7$ ), apresentando órbitas totalmente regulares. As condições iniciais para esta figura são dadas por  $y[4] = p_u = -1.837, -1.593, -1.348, -1.103, -0.850, -0.612, -0.367, -0.122$  e subsequentemente  $y[3] = p_v$  dado pela equação (4.87). Se aumentarmos a energia para  $\epsilon = -0.01$ , as mesmas órbitas continuam sendo periódicas (fig.4.2). No entanto, se mudarmos um pouquinho o valor de  $B$  para  $B = 0.1$  (fig 4.3), notamos o aparecimento de pontos fixos hiperbólicos, resultando em órbitas não muito regulares. O número de órbitas e as condições iniciais de  $y[4]$  para todas as figuras são dados na tabela 4.9.

Para valores de  $B$  entre 0 e 0.5, o torus invariante é “quebrado” em pequenas ilhas, com pequena manifestação de trajetórias caóticas. Quando  $B = 0.5 (B = 3A)$ , o sistema mostra-se regular novamente (fig 4.4). Neste caso ocorre um fato interessante: as órbitas

Tabela 4.9: Órbitas e condições iniciais de  $y[4] \equiv p_u$  para as seções de Poincaré.

$B$	Órbit.	Condições iniciais para $y[4] \equiv p_u$
0.10	9	-5.315, -4.963, -4.609, -3.900, -3.190, -2.481, -1.772, -1.063, 0.709
0.50	8	-5.315, -4.609, -3.900, -3.190, -2.481, -1.772, -1.063, -0.354
0.49	4	-5.315, -4.609, -3.900, -3.190
0.51	3	-5.315, -4.609, -3.900
1.33	13	-5.315, -4.963, -4.609, -4.254, -3.900, -1.772, -1.418, -1.063, -0.709, 2.217, 2.836, 3.190, 3.545
1.50	9	-5.315, -4.609, -3.900, -3.190, -1.772, 2.481, 3.190, 3.900, 4.963
2.50	12	-5.315, -4.609, -3.900, -3.190, -1.772, -1.063, 0.354, 1.063, 1.772, 2.481, 3.190, 3.900
3.50	9	-5.315, -4.609, -3.900, -3.190, -2.481, -1.772, -0.709, -0.354, 3.545
4.00	26	-5.315, -4.963, -4.609, -4.254, -3.900, -3.545, -3.190, -2.836, -2.481, -2.127, -1.772, -1.418, -1.063, 0.709, 1.063, 1.418, 1.772, 2.127, 2.418, 2.836, 3.190, 3.545, 3.900, 4.254

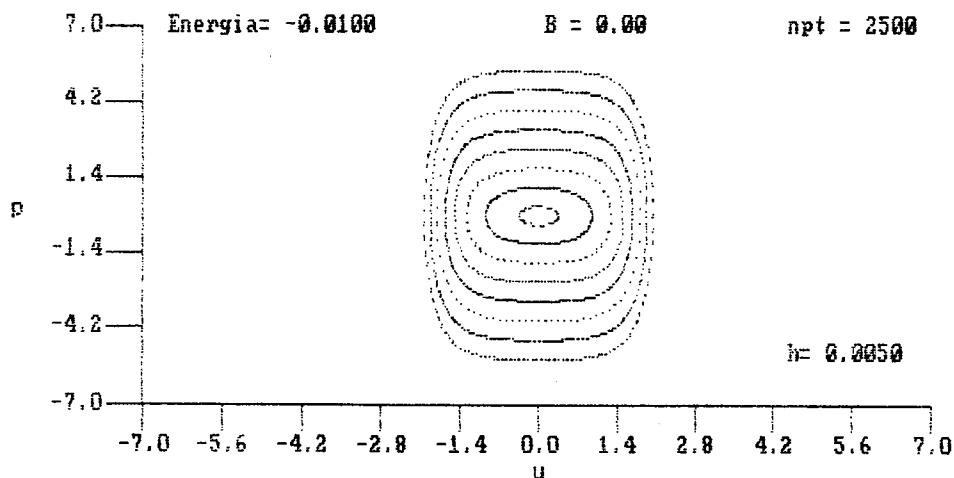


Figura 4.2: Na energia  $\epsilon = -0.01$  plotamos as mesmas 8 órbitas do caso integrável  $B = 0.0$ .

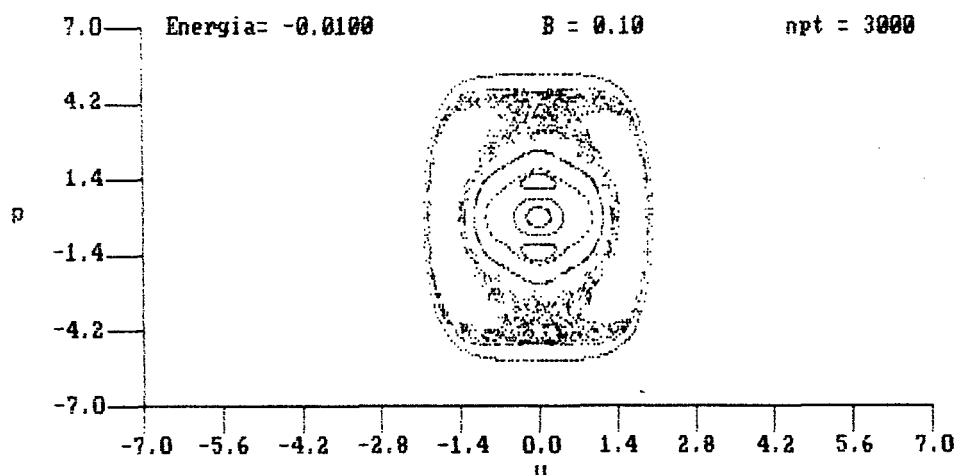


Figura 4.3: Quando  $\epsilon = -0.01$  esta figura mostra 9 órbitas do caso em que  $B = 0.1$ , podemos observar que com uma pequena perturbação em  $B$  surgem ilhas e órbitas irregulares.

são todas “comprimidas”, isto é, todos os pontos cruzam a seção de superfície quando  $u = 0$ , ou melhor, nesta escala todas as órbitas parecem pontos fixos. Como exemplo disto, observe a fig.4.5 quando  $B = 0.49$  e a fig.4.6 quando  $B = 0.51$ .

Para valores de  $B$  entre 0.5 e 2.5, temos novamente a manifestação de trajetórias caóticas em forma de ilhas (fig 4.7). Quando  $B = 1.333$  que representa o caso  $B = 8A$ , vemos na figura 4.8 trajetórias irregulares confirmando assim o fato que a propriedade de Painlevé não é satisfeita e o sistema não é integrável. Quando  $B = 2.5$  ( $B = 15A$ ), o sistema é novamente regular (fig 4.9). Se aumentarmos mais o valor de  $B$  para  $B = 3.5$  (fig. 4.10) veremos que as regiões irregulares começam a tomar conta da seção de Poincaré. No caso  $B = 4.0$  ( $B = 24A$ ), que também não tem a propriedade de Painlevé vemos a figura 4.11 que o sistema torna-se cada vez mais caótica.

Para valores cada vez maiores que 2.5, o sistema mostra-se mais e mais dominado por trajetórias caóticas (fig 4.10).

Através das seções de Poincaré, tivemos a possibilidade de confirmar todos os casos integráveis estudados anteriormente pela análise de Painlevé. Desta forma, conjec-

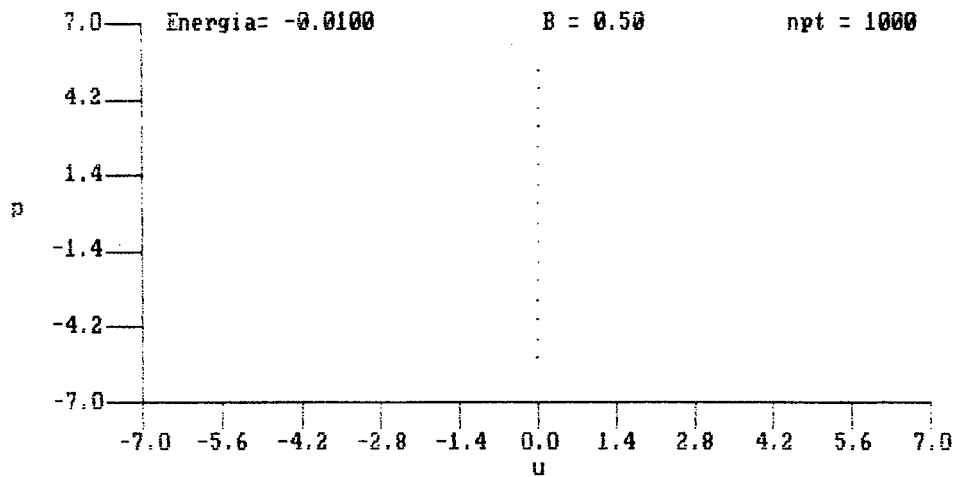


Figura 4.4: Estas são as 8 órbitas do caso integrável  $B = 0.5$  com a energia  $\epsilon = -0.01$ . Esta figura mostra algo interessante, é que todas as órbitas foram comprimidas ao centro.

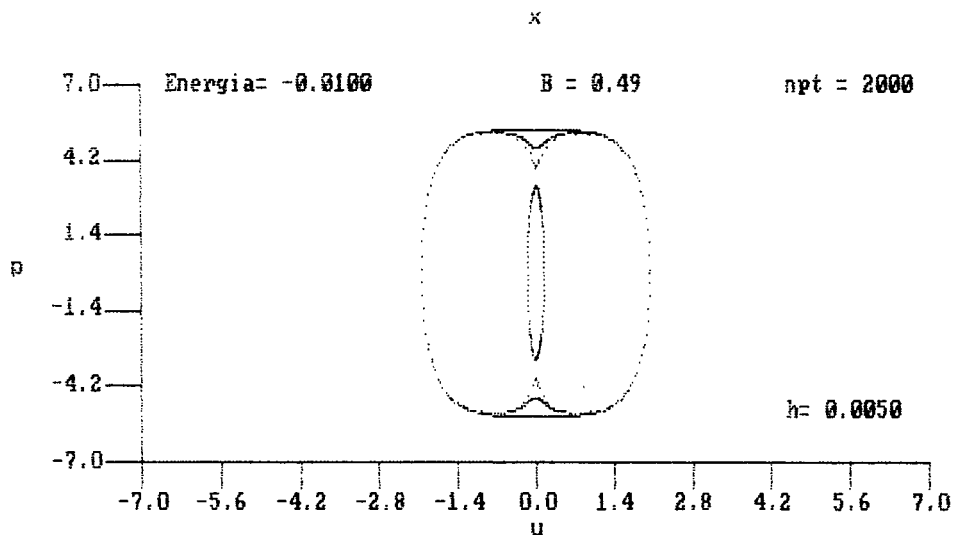


Figura 4.5: Esta figura mostra 4 órbitas do caso  $B = 0.49$  quando  $\epsilon = -0.01$ ; aqui já podemos observar que as órbitas são obrigadas a se comprimirem no centro.

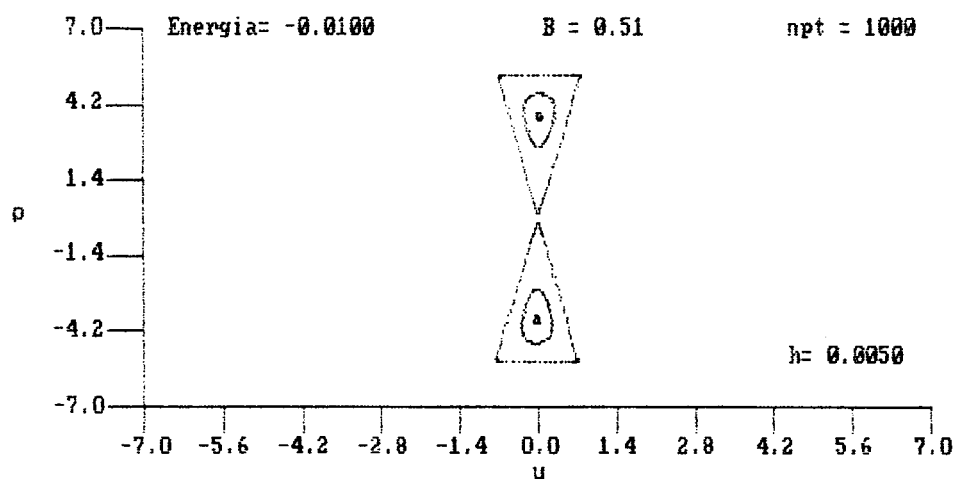


Figura 4.6: Vemos o caso em que  $B = 0.51$ , mostrando como as órbitas se comportam quando aumentamos um pouco o valor de  $B$  em relação ao caso integrável  $B = 0.5$ .

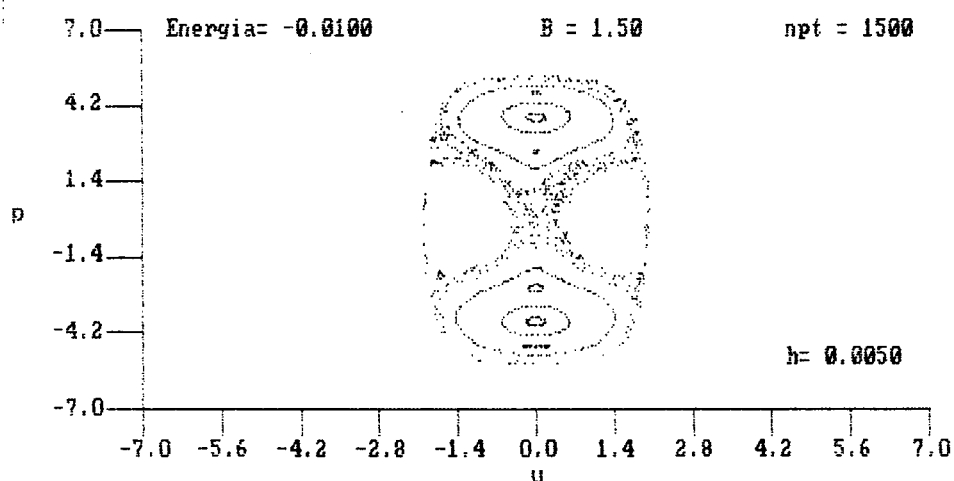


Figura 4.7: Vemos o caso em que  $B = 1.5$ , com as respectivas órbitas irregulares.



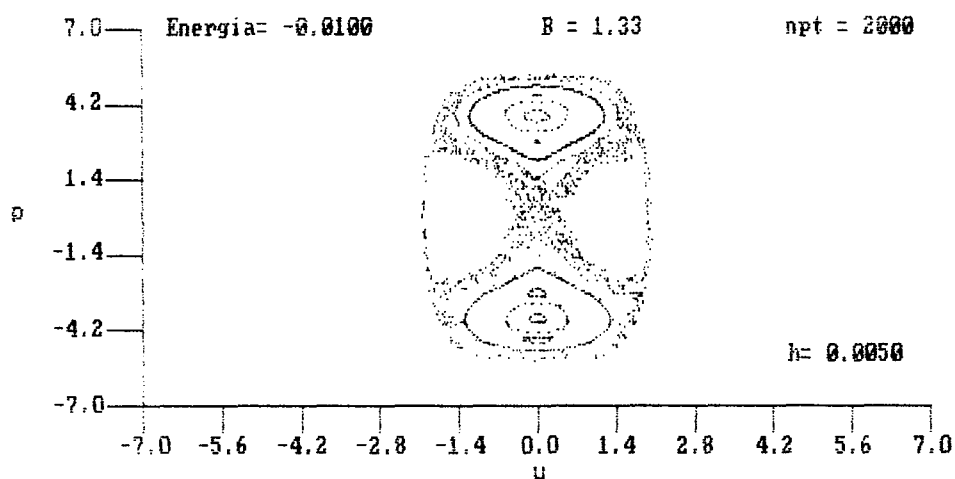


Figura 4.8: Vemos o caso em que  $B = 1.33$ , com as respectivas órbitas irregulares.

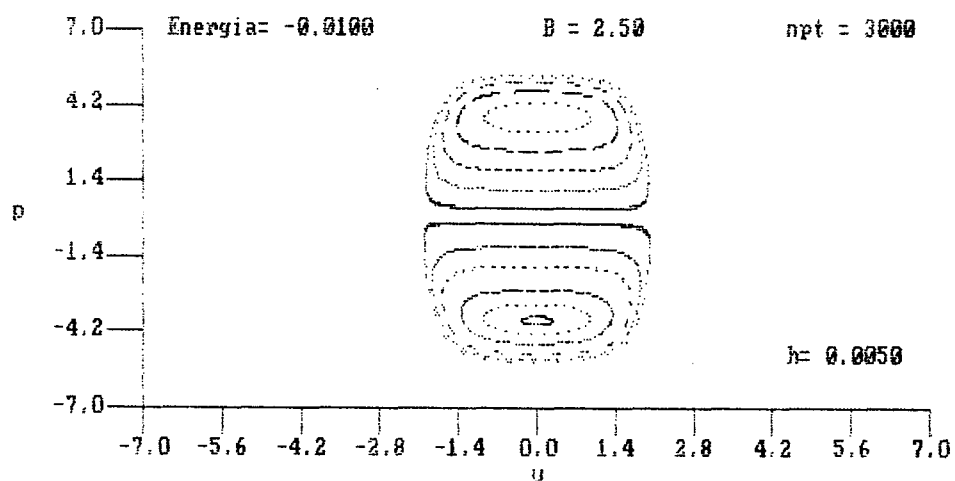


Figura 4.9: Vemos o caso integrável  $B = 2.5$  com as respectivas órbitas regulares.

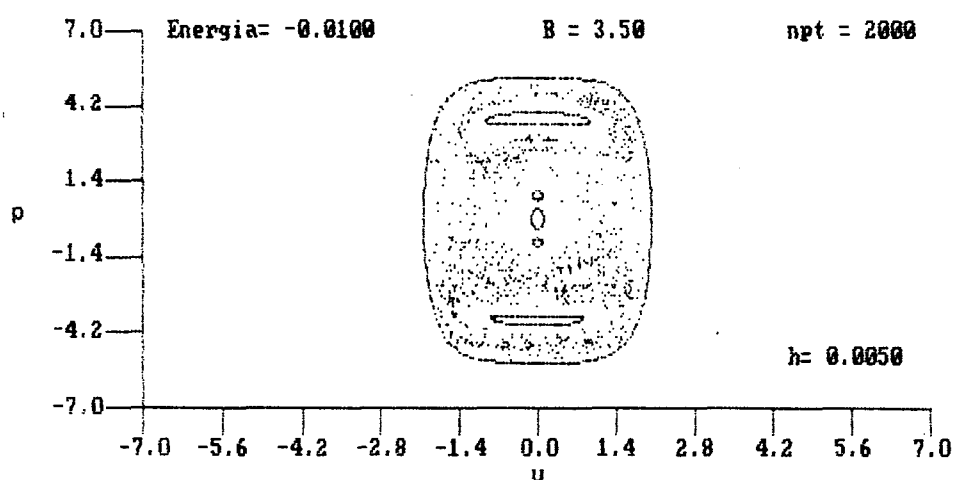


Figura 4.10: Se aumentarmos o valor de  $B$  para  $B = 3.5$ , notamos o aparecimento crescente de trajetórias irregulares.

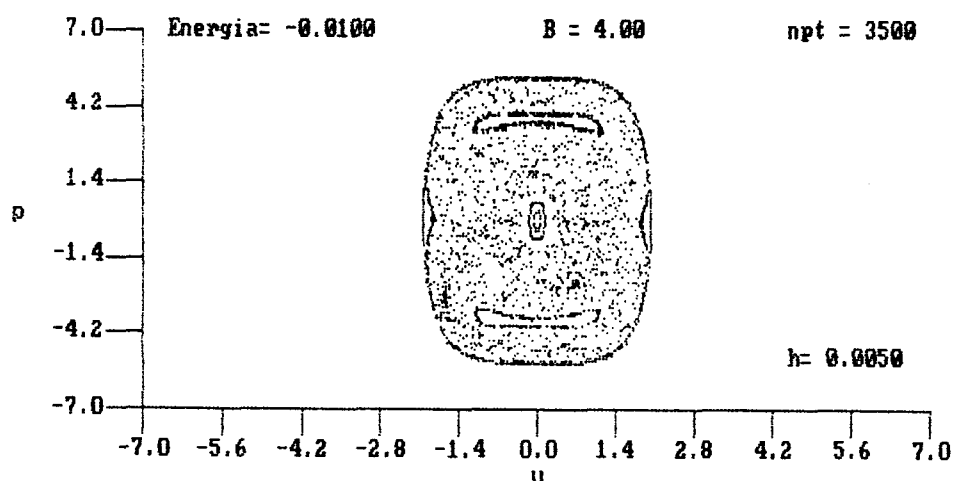


Figura 4.11: Se aumentarmos o valor de  $B$  para  $B = 4.0$ , notamos o aparecimento crescente de trajetórias irregulares.

turamos que não existem mais casos integráveis para o átomo de hidrogênio perturbado pelo potencial de van der Waals (4.73). A existência de invariantes para o hamiltoniano 4.73 foi objeto de uma recente publicação no Physical Review Letters. Nela, Ganesan e Lakshmanam [1989] usaram a análise de Painlevé para corroborar casos anteriormente discutidos por Alhassid et al. [1987]. Observamos entretanto que estes autores não comentaram as (infinitas) possibilidades para valores de  $B/A$  (conforme equação 4.84) que satisfazem a propriedade de Painlevé. Através da equação 4.84 futuras investigações mais detalhadas podem resultar em novos casos integráveis.

Com relação ao teorema de Yoshida (cap.3), se fizermos  $E = 0$  podemos provar a não integrabilidade para alguns valores de  $B$ . Neste caso, as equações de movimento admitem invariância similar e podemos usar o método de Yoshida. Sabendo que os expoentes de Kowalevskaya são as próprias ressonâncias e, como eles não podem ser nem imaginários e nem irracionais, concluímos que quando a relação  $B/A < -1$ , o sistema é não integrável algebricamente para  $E = 0$ .

### Efeito Zeeman Quadrático.

O átomo de hidrogênio num campo magnético uniforme é corretamente descrito para uma larga variação da intensidade do campo  $B$  pelo hamiltoniano não-relativístico,

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m_e} - \frac{e^2}{r} + \omega l_z + \frac{1}{2} m_e \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (4.88)$$

O campo é tomado como sendo na direção  $-z$ , e  $m_e$  é a massa reduzida do elétron e do núcleo. A frequência  $\omega$  em 4.88, é a metade da frequência ciclotron,

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_c = \frac{e\hat{B}}{2m_e c} \quad (4.89)$$

A intensidade do campo é:

$$\hat{B} = \hat{B}_0 = m_e^2 e^3 c / h^3 \approx 2.35 \times 10^9 G = 2.35 \times 10^5 T. \quad (4.90)$$

A energia  $\hbar\omega$  do oscilador é igual a energia de Rydberg  $\mathfrak{R} = m_e e^4 / (2\hbar^2) \approx 13.6 eV$ .

Se escolhermos  $\beta = 0$  e  $\tilde{\gamma} = \gamma^2/8$  no hamiltoniano 4.73, teremos efetivamente o caso do efeito Zemann quadrático 4.88 em unidades atômicas, com  $\gamma = \hat{B}/\hat{B}_0$ . Com esta escolha tornamos  $A = 0$  e  $B = \gamma^2/8$  em 4.80, ou seja:

$$\tilde{H}(u, v, p_u, p_v) = 2\epsilon = \frac{1}{2}(p_u^2 + p_v^2) + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + B(u^4 v^2 + u^2 v^4), \quad (4.91)$$

Para fazer a análise de Painlevé, basta tomarmos  $A = 0$  nas ressonâncias da equação 4.84. Desta forma obtemos  $r_1 = -1, r_2 = 3$  e  $r_3 = 1$ . Não temos o número suficiente de ressonâncias, já que as equações 4.80 para este caso, exigem  $N - 1 = 3$  ressonâncias positivas. Portanto as equações de movimento referentes ao hamiltoniano 4.91, não tem a propriedade de Painlevé.

Observe que quando fizemos  $A = 0$  na equação 4.84, perdemos a dependência das ressonâncias em função  $B = \gamma^2/8$ . Esta perda elimina a possibilidade de obter-se diferentes resultados referente a integrabilidade, em função da intensidade do campo magnético.

Podemos perguntar: a análise de Painlevé é confiável? Será este mais um caso integrável que não possui a propriedade de Painlevé? A integrabilidade do sistema é independente da intensidade de  $\hat{B}$ ?

Tentaremos confirmar os resultados obtidos pela análise de Painlevé, efetuando desta vez uma análise qualitativa através as seções de Poincaré. Para reduzir em muito o trabalho envolvido para isto, vamos fazer uso de uma propriedade do hamiltoniano 4.88, que em coordenadas cilíndricas é:

$$H = \frac{\tilde{p}^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{1}{8}\gamma^2\rho^2. \quad (4.92)$$

Onde  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , e que em termos das novas coordenadas e *momenta* será:

$$\gamma^{-2/3}H = \tilde{H} = \frac{\tilde{p}_\rho^2}{2} + \frac{\tilde{p}_z^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{1}{8}\tilde{\rho}^2. \quad (4.93)$$

A dinâmica clássica para uma certa intensidade de campo  $\gamma$  e energia  $E$  pode ser descrita pelo hamiltoniano  $\tilde{H}$ . A equação 4.93 mostra que a dinâmica clássica do sistema depende somente da energia  $\tilde{\epsilon}$ ,

$$\tilde{\epsilon} = E\gamma^{-2/3}, \quad (4.94)$$

e não de  $E$  e  $\gamma$  separadamente. Com esta informação podemos variar somente a energia  $\tilde{\epsilon}$  para construir as seções de Poincaré. Usando as transformações 4.74, e regularizando o hamiltoniano 4.93 como foi feito no caso anterior (veja equação 4.76), obtemos finalmente:

$$h = \frac{1}{2}(p_u^2 + p_v^2) - \tilde{\epsilon}(u^2 + v^2) + \frac{1}{8}(u^4 v^2 + u^2 v^4) \equiv 2, \quad (4.95)$$

com as respectivas equações de movimento

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= 2\tilde{\epsilon}u - \frac{1}{2}u^3 v^2 - \frac{1}{4}u v^4, \\ \ddot{v} &= 2\tilde{\epsilon}v - \frac{1}{2}v^3 u^2 - \frac{1}{4}v u^4. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Integrando estas equações numericamente, desejamos plotar as seções de Poincaré ( $u = 0, p_u > 0$ ) no plano definido por  $v$  e  $p_v$ . A superfície de energia é contornada pela condição (veja seção 2.6),

$$-2\tilde{\epsilon}v^2 + p_v^2 = 4. \quad (4.97)$$

As condições iniciais para  $p_u$ , são dadas por:

$$p_u = \sqrt{4 + 2\tilde{\epsilon}v^2 - p_v^2} \quad (4.98)$$

Plotamos então as superfícies de Poincaré para quatro valores diferentes de energia  $\tilde{\epsilon}$ :  $-0.8, -0.5, -0.3, -0.1$ . As condições iniciais para  $p_v \equiv y[4]$  são dadas na tabela 4.6.

A figura 4.12 referente a  $\tilde{\epsilon} = -0.8$ , está bem perto do limite integrável  $\tilde{\epsilon} \rightarrow \infty$ , que corresponde à uma perturbação infinitesimal do átomo de hidrogênio, ou seja, uma perturbação de pequena ordem; observe que todas as órbitas são regulares e confinadas a um torus. Para o caso do átomo de hidrogênio sem perturbação, a superfície de seção terá somente círculos concêntricos e cada órbita contribui com o ponto fixo. A figura 4.12 mostra três estruturas importantes. O ponto fixo *elíptico* no centro da seção de

Tabela 4.6: Órbitas e condições iniciais de  $y(4) \equiv p_v$  para as seções de Poincaré.

Energia	Órbit.	Condições iniciais para $y(4) \equiv p_v$ .
-0.8	16	1.996, 1.96, 1.88, 1.80, 1.76, 1.72, 1.64, 1.56, 1.48, 0.88, 0.28, 0.12, 0.08, 0.04, -0.84, -1.08, -1.12, -1.20
-0.5	38	1.88, 1.84, 1.80, 1.76, 1.72, 1.68, 1.64, 1.60, 1.56, 1.44, 0.64, 0.60, 0.56, 0.52, 0.48, 0.44, 0.40, 0.36, 0.32, 0.28, 0.20, 0.12, 0.04, -0.64, -0.68, -0.72, -0.76, -0.80, -0.88, -0.92, -0.96, -1.00 -1.04, -1.08, -1.16, -1.24, -1.32, -1.40
-0.3	18	1.996, 1.96, 1.88, 1.80, 1.76, 1.72, 1.64, 1.56, 1.48, 0.88, 0.28, 0.12, 0.08, 0.04, -0.84, -1.08, -1.12, -1.20, -1.32, -1.36
-0.1	5	1.96, 1.92, 1.84, 1.72, 1.64

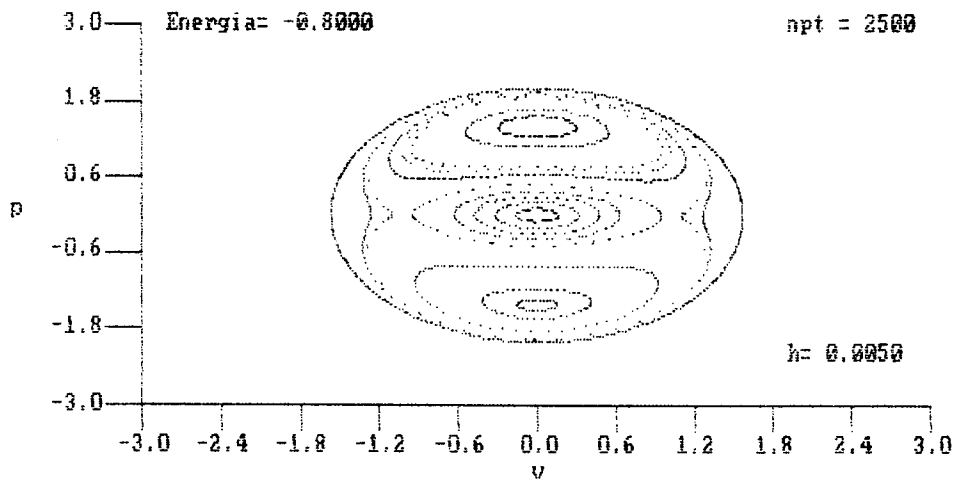


Figura 4.12: Seção de Poincaré para o efeito Zeeman quadrático no caso  $\tilde{\epsilon} = -0.8$ ; npt representa o número de pontos plotados

superfície,  $v = p_v = 0$ , que corresponde a órbita periódica paralela ao campo ( $\rho = 0$ ). As elipses ao redor deste ponto fixo pertencem ao movimento de vibração em torno do núcleo, esta vibração é quase-periódica. Estas órbitas estão separadas das elipses que estão ao redor dos pontos fixos na parte superior e inferior da seção, e representam o movimento de rotação do elétron em torno do núcleo, que também é um movimento quase-periódico. As órbitas que separam estes dois movimentos *separatrix*, se acumulam em pontos fixos *hiperbólicos*, e correspondem as órbitas circulares no caso limite  $\tilde{\epsilon} \rightarrow \infty$ .

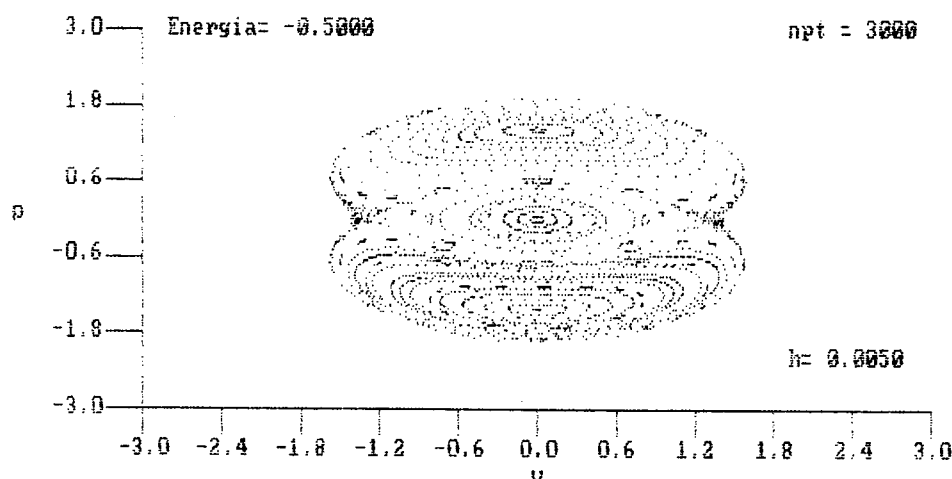


Figura 4.13: Seção de Poincaré para o efeito Zeeman quadrático quando a  $\tilde{\epsilon} = -0.5$ .

Se aumentarmos a energia de modo que  $\tilde{\epsilon} = -0.5$ , observamos que movimentos irregulares aparecem perto da separatrix (fig 4.13). A separatrix é substituída por camadas estocásticas, que preenchem o volume finito da superfície de seção. Quando aumentamos ainda mais o valor da energia (fig 4.14), estas camadas aumentam em tamanho, ao passo que as ilhas que representam o movimento regular vibracional e rotacional, vão diminuindo. Finalmente, para  $\tilde{\epsilon} = -0.1$  (fig 4.15), nenhuma estrutura regular é visível na seção de superfície, e o movimento clássico é dominado totalmente pelo caos.

Confirmamos assim os resultados da análise de Painlevé que não preveem a integrabilidade para o efeito Zeeman quadrático. Os resultados referentes as seções de

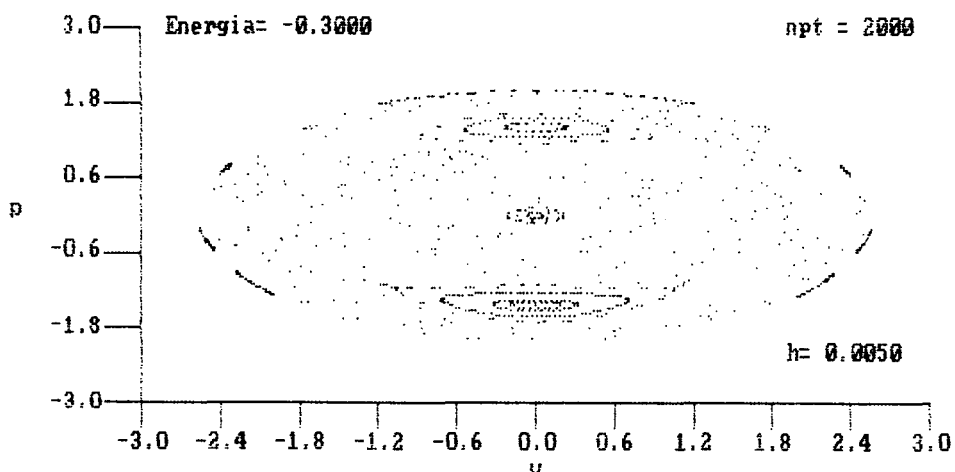


Figura 4.14: Seção de Poincaré para o efeito Zeeman quadrático quando a  $\tilde{\epsilon} = -0.3$ .

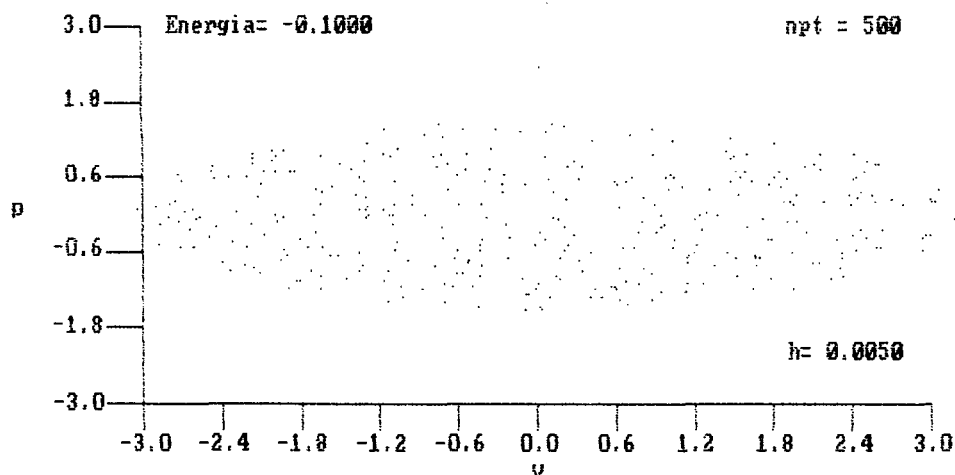


Figura 4.15: Seção de Poincaré para o efeito Zeeman quadrático quando a  $\tilde{\epsilon} = -0.1$ .



Poincaré, bem como extensivos comentários quanto à dinâmica do caso do efeito Zeeman quadrático, foram dados recentemente por Wintgen e Friedrich [1989]. Eles também resumem vários resultados obtidos nos últimos anos sobre a relação de caos nos sistemas clássico e quântico do efeito Zeeman quadrático. Além destes estudos, procuramos através do método direto (cap.3), invariantes de quarta ordem para o hamiltoniano 4.92. Usando as equações correspondentes 4.61-4.64, já vistas no caso Henon Heiles, obtivemos somente a energia total como sendo um invariante. Esta tentativa de achar um invariante exato de quarta ordem, está relacionada com o fato de que existe um invariante aproximado para o efeito Zeeman quadrático:

$$\Sigma = 4A^2 - 5A_z^2, \quad (4.99)$$

onde  $A$  é o vetor de Runge-Lenz, que é válido para valores pequenos da intensidade do campo [Soloviev 1981, Delande e Gay 1984].

## Capítulo 5

# CONCLUSÃO

Como o objetivo principal do nosso trabalho foi estudar a integrabilidade de sistemas dinâmicos não-lineares, desejamos ressaltar alguns resultados. Fizemos uma revisão detalhada da literatura sobre os métodos mais conhecidos no estudo da integrabilidade de sistemas bi e tridimensionais, ou seja, estudamos a análise de pontos singulares (análise de Painlevé e expoente de Kowalevskaya), e o método direto ( $dI/dt = 0$ ) para encontrar invariantes. Além disso revisamos um método qualitativo para analisar a dinâmica de sistemas, que é a chamada seção de Poincaré. Relacionado ao estudo do método direto desenvolvemos um programa em linguagem algébrica REDUCE, que gera todas equações relacionadas a sistemas hamiltonianos bi e tridimensionais que admitem invariantes polinomiais nos *momenta* de qualquer ordem.

Através do método direto garantimos que não existe outro caso integrável, além dos três já conhecidos, para o sistema de Henon e Heiles admitindo invariantes polinomiais de até quarta ordem inclusive. Fizemos a análise de Painlevé detalhada para o potencial Henon e Heiles, e, além de obtermos os casos integráveis conhecidos, sugerimos a existência de um novo caso integrável ( $C = -27D$ ) que possui a propriedade fraca de Painlevé. Mostramos que o potencial de Henon e Heiles estendido, motivo de recentes estudos feitos por Contopoulos e Polymilis [1987], também não admite invariantes polinomiais de até quarta ordem nos *momenta*.

Obtivemos uma relação genérica para as ressonâncias da análise de Painlevé, em função dos parâmetros do hamiltoniano do problema do átomo de hidrogênio perturbado pelo potencial de van der Waals. Confirmamos deste modo, três casos integráveis conhecidos ( $B = 0$ ,  $B = 3A$  e  $B = 15A$ ), vistos também pelas respectivas seções de Poincaré. Provamos a não integrabilidade deste potencial para certos valores de  $A, B$  ( $B/A < -1$ ), quando a energia total do sistema for zero. Isto pôde ser feito através do teorema de Yoshida, que garante a integrabilidade algébrica do sistema na ausência de expoentes de Kowalevskaya irracionais ou complexos.

Através de análise de Painlevé, confirmamos a não integrabilidade do caso do efeito Zeeman quadrático, que tem sido estudado extensivamente como exemplo de caos; também obtivemos as respectivas seções de Poincaré que demonstram a existência de trajetórias totalmente irregulares para este caso. Por último, determinamos que não existe invariante exato de quarta ordem para o efeito Zeeman quadrático.

## Capítulo 6

### Programas

#### 6.1 Programa REDUCE bidimensional

COMMENT

PROGRAMA REDUCE PARA GERAR O SISTEMA DE EQUACOES 3.64 e 3.65  
QUE DETERMINAM A EXISTENCIA DE INVARIANTES DE GRAU "GMAX"  
NOS MOMENTA EM SISTEMAS BIDIMENSIONAIS \$

LINELENGTH 70 \$

COMMENT \*\*\*\*\* A variavel "A" representa o tempo "t" \*\*\*\*\* \$

OPERATOR C \$ OPERATOR EQN \$

DEPEND X,A \$ DEPEND Y,A \$ DEPEND C,X,Y \$

DEPEND XDOT,A \$ DEPEND YDOT,A \$

GMAX:= 2 \$

FI:=0 \$

FOR I:=0:GMAX DO \$

FOR J:=0:GMAX DO IF I+J LEQ GMAX THEN \$

FI:= FI+C(I,J)\*XDOT\*\*I\*YDOT\*\*J \$

TESTE:= DF(FI,A) \$

FOR ALL FUN SUCH THAT

FUN NEQ XDOT AND FUN NEQ YDOT LET

DF(FUN,A) = DF(FUN,X)\*XDOT + DF(FUN,Y)\*YDOT \$

```

LET DF(XDOT,A) = - DVDX, DF(YDOT,A) = - DVDY $

FACTOR XDOT,YDOT $

PROCEDURE EQUACOES(TESTE) $
ARRAY XCOF(3),YCOF(3) $
BEGIN SCALAR KONT $
  NX := COEFF(TESTE,XDOT,XCOF) $
  FOR J := 0:NX DO
    BEGIN
      NY := COEFF(XCOF(J),YDOT,YCOF) $
      FOR K := 0:NY DO IF YCOF(K) NEQ 0 THEN
        BEGIN KONT := KONT + 1 $
          EQN(KONT) := YCOF(K) $
        END $
      END $
    END $
  FOR J := 1:KONT DO WRITE "EQN( ",J," )= ", EQN(J)$
  RETURN KONT $
END $

```

Uma vez escolhido o grau GMAX do invariante, o programa constrói o invariante  $FI = \sum_{i+j}^{GMAX} C_{ij}(q_1, q_2) \dot{q}_1^i \dot{q}_2^j$ , onde  $C(I,J)$  são os coeficientes das velocidades  $\dot{x} \equiv XDOT = dX/dA$  e  $\dot{y} \equiv YDOT = dY/dA$ . Após isto, o programa calcula o TESTE, que nada mais é que a derivada do invariante em relação a variável A (tempo). O passo seguinte é introduzir as equações de movimento correspondentes ao potencial  $V$  geral independente do tempo. A PROCEDURE tem dois loopings que servem para separar todos os coeficientes das velocidades na equação TESTE, escrevendo um por um os coeficientes como sendo as equações EQN(J). Estas são as equações que devem ser zeradas através da escolha conveniente dos coeficientes  $C(I,J)$  para que toda a equação TESTE se anule, fazendo deste modo com que FI seja um invariante no tempo.

## 6.2 Programa REDUCE tridimensional

COMMENT

PROGRAMA REDUCE PARA GERAR O SISTEMA DE EQUACOES QUE DETERMINAM A EXISTENCIA DE INVARIANTES DE GRAU "GMAX" NOS MOMENTA EM SISTEMAS TRIDIMENSIONAIS \$

LINELENGHT 70 \$

COMMENT \*\*\*\*\* A variavel "A" representa o tempo "t" \*\*\*\*\* \$

OPERATOR P \$ OPERATOR EQN \$

DEPEND X,A \$ DEPEND Y,A \$ DEPEND Z,A \$ DEPEND P,X,Y,Z \$

DEPEND XDOT,A \$ DEPEND YDOT,A \$ DEPEND ZDOT,A \$

GMAX:= 2 \$

FI:=0 \$

FOR I:=0:GMAX DO \$

FOR J:=0:GMAX DO \$

FOR K:=0:GMAX DO IF I+J+K LEQ GMAX THEN \$

FI:= FI+P(I,J,K)\*XDOT\*\*I\*YDOT\*\*J\*ZDOT\*\*K \$

TESTE:= DF(FI,A) \$

FOR ALL FUN SUCH THAT

FUN NEQ XDOT AND FUN NEQ YDOT AND FUN NEQ ZDOT LET

DF(FUN,A) = DF(FUN,X)\*XDOT + DF(FUN,Y)\*YDOT + DF(FUN,Z)\*ZDOT \$

LET DF(XDOT,A) = - DVDX, DF(YDOT,A) = - DVDY, DF(ZDOT,A) = - DVDZ \$

FACTOR XDOT,YDOT,ZDOT \$

PROCEDURE EQUACOES(TESTE) \$

ARRAY XCOF(3),YCOF(3),ZCOF(3) \$

BEGIN SCALAR KONT \$

NX := COEFF(TESTE,XDOT,XCOF) \$

FOR J := 0:NX DO

BEGIN

NY := COEFF( XCOF(J),YDOT,YCOF ) \$

FOR L := 0:NY DO

```

      NZ := COEFF( YCOF(L),ZDOI,ZCOF ) $
      FOR K := 0:NZ DO IF ZCOF(K) NEQ 0 THEN
        BEGIN KONT := KONT + 1 $
          EQN(KONT) := ZCOF(K) $
        END $
      END $
    END $
  FOR J := 1:KONT DO WRITE "EQN( ",J," )= ", EQN(J) $
  RETURN KONT $
END $
```

Para o caso tridimensional, este programa contém um looping adicional dentro da PROCEDURE, cujo intuito é isolar os coeficientes das "velocidades" relacionados a nova variável  $q_3$ .

### 6.3 Programas Turbo Pascal.

```

program henon;
{   Programa para gerar as secoes de Poincare atraves da
    integracao numerica das equacoes de movimento para o
    sistema de Henon e Heiles   }

{$N+} {$M 35000,0,655360}
uses crt,graph,paslibex;
type
  arrayeq = array[1..10] of extended;
var
  f                               : text;
  hen12                           : string;
  npt,neq,i,j,k,graphdriver,graphmode : integer;
  tbuf,xbuf,ybuf                  : array[1..2000] of real;
  param,dydx,y                    : arrayeq;
  d,aa,bb,omega,x,h,xi,xf,en,ener,yy : extended;
  Xtextarr,Ytextarr               : annarraytype;
  MinX,MinSn,MaxX,MaxSn,anter1,anter2 : extended;
  Xnew,Ynew                       : integer;
  step,sclX,sclY,dd,xx            : extended;
  XOrigin,YOrigin,kont,cor,int     : integer;
  ch                               : char;
{+----- 1 passo -----+}
procedure derivs(x:extended; y:arrayeq; var dydx,param:arrayeq);
BEGIN
  dydx[1] := y[3];
  dydx[2] := y[4];
  dydx[3] := - y[1] - 2.0*y[1]*y[2] ;
  dydx[4] := - y[2] - y[1]*y[1] + y[2]*y[2] ;
END;
{+----- 2 passo -----+}
procedure jrk4(x,h:extended; n:integer; var y,param:arrayeq);
var i:integer; k1,k2,k3,k4,temp:arrayeq; xh:extended;
BEGIN
  xh := x + h/2.0;   derivs(x,y,k1,param);
  for i:=1 to n do temp[i] := y[i] + h*k1[i]/2.0;
  derivs(xh,temp,k2,param);
  for i:=1 to n do temp[i] := y[i] + h*k2[i]/2.0;
  derivs(xh,temp,k3,param);
  for i:=1 to n do temp[i] := y[i] + h*k3[i];

```



```

    derivs(x+h,temp,k4,param);
    for i:=1 to n do
        y[i] := y[i] + h*(k1[i] + 2.0*(k2[i]+k3[i]) + k4[i])/6.0;
END;
{+----- 3 passo -----+}
Begin
Assign(f,'hen12.dat');
Rewrite(f);
int := 20;
neq := 4;
h := 0.005; x := 0.0;
en := 1.0/12.0;
dd := sqrt(2.0*en);
xx := 2*dd/int;
y[2] := 0.0;
y[1] := 0.0;
y[4] := -dd+xx/12.0;
Xtextarr[0] := ' y ';
Ytextarr[0] := ' p ';
MinX := -0.4; MaxX := 0.4;
MinSn := -0.4; MaxSn := 0.4;
clrscr;
setsc(XOrigin,YOrigin,MaxX,MinX,MaxSn,MinSn,sclx,scly,xtextarr,ytextarr);
xi := x; xf := x + npt*h;
gotoxy(12,3); write(' Energia= ',en:1:6);
gotoxy(12,4); write(' y[1]= ',y[1]:1:4);
gotoxy(28,4); write(' y[2]= ',y[2]:1:5);
kont := 1;
cor := 0;
REPEAT
cor := cor + 1;
h := 0.005; x := 0.0;
y[2] := 0.0;
y[1] := 0.0;
y[3] := sqrt(2.0*en-y[4]*y[4]);

gotoxy(44,4); write(' y[3]= ',y[3]:1:4);
gotoxy(60,4); write(' y[4]= ',y[4]:1:6);
writeln(f,y[3],', ',y[4]);
x := x + h;
jrk4(x,h,neq,y,param); anter1 := y[1];
REPEAT

```

```

begin
x := x + h;
jrk4(x,h,neq,y,param);
if (y[3]>0.0) and (anter1*y[1]<=0.0) then
begin
Xnew := round(XOrigin + (y[2] - MinX)*sclX) ;
Ynew := round(YOrigin - (y[4] - MinSn)*sclY);
writeln(f,Xnew, ' ',Ynew);
Putpixel(Xnew,Ynew,cor);
gotoxy(60,3); write(' npt = ',kont);
kont := kont + 1;
end;
anter1:= y[1];
end;
UNTIL KEYPRESSED;
dd := dd - xx;
y[4] := -dd;
ch :=readkey;
until ch='Q';
gotoxy(60,19); write(' h= ',h:1:4);
readln;
closegraph;
close(f);
END.
END.

```

Este programa tem basicamente tres passos essenciais: primeiro a procedure "derivs" contendo as equações de movimento e logo depois a procedure "jrk4" onde são feitas as integrações das equações de movimento; esta procedure usa o método de Runge-Kutta (quarta ordem). No terceiro passo são definidos os eixos, programa de saída de dados que guarda todos os pontos plotados (hen12.dat), intervalo entre as órbitas (xx), condições iniciais ( $y[1], y[2], \dots$ ). Logo depois o programa começa a integrar as equações de movimento e procurar quando  $y[1]$  muda de sinal; se isto acontecer e  $y[3] > 0.0$ , então os pontos "Xnew" e "Ynew" são plotados. Onde Xnew representa a posição  $y$ , e Ynew representa o momenta  $p_y$  associado a  $y$ . Após plotar este ponto o valor da condição inicial  $y[4] = p_y$  é incrementada de  $xx$  recomeçando o processo de integração. O programa só é interrompido quando pressionamos " $\wedge Q$ ".

Este programa sendo rodado num Micro Computador PC-XT, demora aproximada-

mente 5 a 7 segundos para plotar cada ponto. Por isso, guardamos os pontos plotados num arquivo de dados (hen12.dat) que serão posteriormente usados pelo programa abaixo, que em suma, lê o arquivo de dados e plota todos os pontos na tela. Desta forma não é necessário integrar todas as equações de movimento novamente.

```

program henon2;
{
  Programa para gerar as secoes de Poincare lendo os
  pontos que devem ser plotados no arquivo de dados
  (hen12.dat) gerado pelo programa henon.
}
{$N+} {$M 35000,0,655360}
uses crt,graph,paplibex;
type
  arrayeq = array[1..10] of extended;
var
  f                               : text;
  hen12                            : string;
  y                                 : arrayeq;
  npt,i,graphdriver,graphmode     : integer;
  ener                             : extended;
  Xtextarr,Ytextarr               : annarraytype;
  MinX,MaxX,MinSn,MaxSn           : extended;
  Xnew,Ynew                       : integer;
  step,sclX,sclY,Xn,Yn            : extended;
  XOrigin,YOrigin,kont,cor        : integer;
  ch                               : char;

Begin
  Assign(f,'hen12.dat');
  Reset(f);
  Readln(f,ener);

  Xtextarr[0] := ' x ';
  Ytextarr[0] := ' p ';
  MinX        := -0.7;      MaxX        := 0.7;
  MinSn       := -0.7;      MaxSn       := 0.7;
  clrscr;
  setsc(XOrigin,YOrigin,MaxX,MinX,MaxSn,MinSn,sclx,sclY,xtextarr,ytextarr);
  xi := x; xf:= x + npt*h;
  gotoxy(12,3); write(' Energia= ',ener:1:2);
  kont:= 2 ;

```

```
cor :=2;
REPEAT
for i:= 1 to 500 do
begin

h := 0.005;

Readln(f,Xn,Yn);
if (Yn<0.0) then
begin
y[3]:=Xn;
y[4]:=Yn;
cor := cor + 1;
end;
begin
Xnew:=round(Xn);Ynew:=round(Yn);
Putpixel(Xnew,Ynew,cor);
gotoxy(35,3); write(' npt = ',kont);
kont := kont + 1;
end;
end;
ch:= readkey;
until ch='Q';

gotoxy(60,19); write(' h= ',h:1:4);
readln;
closegraph;
close(f);
END.
```

## Bibliografia

- [1] Ablowitz, M. J. , A. Ramani and H. Segur, *J. Math. Phys.* **21**, 715(1980).
- [2] Adler, M. , and P. van Moerbecke, *Invent. Math.* **67**, 297(1982).
- [3] Alhassid, Y. , E. A. Hinds and D. Meschede, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1545 (1987).
- [4] Ankiewicz, A. and C. Pask, *J. Phys. A: Math. Gen.* **16**, 4204(1983).
- [5] Chandrasekhar, S. , *Principles of Stellar Dynamics*, Dover Publications, New York(1960).
- [6] Chang, Y. F. , M. Tabor, J. Weiss and C. Corliss, *Phys. Lett. A* **85**, 211(1981).
- [7] Chang, Y. F. , M. Tabor and J. Weiss, *J. Math. Phys.* **23** no. 4, 531(1982).
- [8] Contopoulos, G. and B. Polymilis, *Physica D* **24**, 328(1987).
- [9] Darboux, G., *Sur un problème de mécanique*, *Archives Neerlandaises* (ii) **6**, 371(1901).
- [10] Davis, H. T. , *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*, Dover Publications, New York(1962).
- [11] Delande, D. , and J. C. Gay, *J. Phys. B* **17**, L335(1984).
- [12] Dorizzi, B. , B. Grammaticos and A. Ramani, *J. Math. Phys.* **24** no. 9, 2282(1983).
- [13] Froeschle, C., *Astr. Astrophys.* **16**, 172(1972).
- [14] Ganesan, K. and M. Lakshmanan, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 232(1989).
- [15] Grammaticos, B. , B. Dorizzi and R. Padjem, *Phys. Lett. Vol. 89A* no. 3, 11(1982).
- [16] Grammaticos, B. , B. Dorizzi and A. Ramani, *J. Math. Phys.* **24** no. 9, 2289(1983).

- [17] Grammaticos, B., B. Dorizzi and A. Ramani, *J. Math. Phys.* **25** no. 12, 3470(1984).
- [18] Henon, M., *Chaotic Behavior of Deterministic Systems*, North-Holland Publishing Company, 54(1983).
- [19] Henon, M., and C. Heiles, *The Astr. Journal* **69** no. 1, 73(1964).
- [20] Hietarinta, J., *Phys. Report* **147** no. 2, March 1987.
- [21] Hlavatý Ladislav, *Computer Phys. Comm.* **42**, 427(1986).
- [22] Holle, A., G. Wiebusch, J. Main, B. Hager, and K. H. Welge, *Phys. Rev. Lett.* **56** 2594(1986).
- [23] Holt, C. R., *J. Math. Phys.* **23**, 1037(1982).
- [24] Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, New York(1956).
- [25] Joy, M. P. and M. Sabir, *J. Phys. A: Math. Gen.* **21**, 2291(1988).
- [26] Kaplan, H., *Am. J. Phys.* **54** no. 2, 157(1986).
- [27] Kille, E. *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*, Wiley, New York(1976).
- [28] Kowalevskaya, S., *Acta Math.* **12**, 177(1889).
- [29] Kowalevskaya, S., *Acta Math.* **14**, 81(1891).
- [30] Kunick, A., W. H. Steeb, *Chaos in Dynamischen Systemen*, Wissenschaftsverlag, 1986.
- [31] Kus, M., *J. Phys. A: Math. Gen.* **16**, L689(1983).
- [32] Main, J., G. Wiebusch, A. Holle, B. Hager, and K. H. Welge, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2789(1986).
- [33] Martinet, L. and P. Magnenat, *Astr. Astrophys.* **96**, 68(1981).
- [34] Monte, C., *Phys. Rev. Lett.* **50** no. 15, 1129(1983).
- [35] Painlevé, P., *Bull. Soc. Math. France* **28**, 227(1900).
- [36] Ramani, A., B. Dorizzi and B. Grammaticos, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1539(1982).
- [37] Roekaerts, D. and F. Schwarz, *J. Phys. A: Math. Gen.* **20**, L127(1987).

- [38] Sahadevan R. and M. Lakshmanan, *J. Phys. A: Math. Gen.* **19**, L949(1986).
- [39] Solovev, E. A. , *JETP Lett.* **34**, 265(1981).
- [40] Sen, T. , *Phys. Lett. A* **111**, 97(1985).
- [41] Thompson, G. , *J. Phys. A: Math. Gen.* **17**, 985(1984).
- [42] Whittaker, E. T. , *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, 4th ed. (Dover, New York, 1944)
- [43] Wineland, D. J. , W. M. Itano, J. C. Bergquist and J. J. Bollinger, *Trapped Ions and Laser Cooling II*, Select Publ. of the Ion Storage Group of the Time and Frequency Division, NIST, Boulder Colorado, September 1988.
- [44] Wintgen, D. and H. Friedrich, Preprint, 1989.
- [45] Wojciechowska, M. and S. Wojciechowski, *Phys. Lett. A* **105**, 379(1984).
- [46] Yoshida, H. *Celestial Math.* **31**, 363(1983a).
- [47] Yoshida, H. *Celestial Math.* **31**, 381(1983b).
- [48] Yoshida, H., A. Ramani and B. Grammaticos, *Physica D* **30**, 151(1988).
- [49] Ziglin, S. L., *Funct. Anal. Appl.* **16-17**, 181(1983).