UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CONSTRUÇÃO DE ÁLGEBRAS REAIS DE CLIFFORD

Martinho da Costa Araújo
Orientador: Andrzej Solecki
Julho/88

Construção de Álgebras Reais de Clifford

por

Martinho da Costa Araujo

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

"Mestre em Ciências"

Especialidade em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

Andrzej Solecki

Prof. Andrzej Solecki, Ph.D.
Coordenador em exercício

BANCA EXAMINADORA:

Andrzej Solecki

Prof. Andrzej Solecki, Ph.D.
Orientador

Prof. Antonio Paques, Dr.

P. J. Otterson

Prof. Paul James Otterson, Ph.D.

A Fernanda

e

a minha avó Capitulina

(in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Ao professor Andrzej Solecki pela orientação e dedicação demonstradas na realização deste trabalho.

A meu pai e a Maria Inês da Costa, pela vida e formação.

RESUMO

O objetivo anunciado no título desta tese é realizado do seguinte modo:

No Capítulo I selecionamos definições de estruturas algébricas e de álgebra linear que usaremos nos capítulos posteriores.

No Capítulo II introduzimos a noção de álgebra de Clifford. Estabelecemos a sua unicidade (a menos de isomorfismo) e determinamos a sua dimensão.

No Capítulo III tratamos da existência das álgebras de Clifford por meio de uma construção matricial explícita e formulamos uma série de critérios e teoremas que reduzem esta construção aos casos em que o espaço ortogonal é de dimensão menor que 5.

Finalmente, no Capítulo IV aplicamos os resultados obtidos na construção do recobrimento do grupo Spin(n) pelo grupo SO(n) e na construção da seqüência de Radon-Hurwitz-Eckmann.

ABSTRACT

The objective announced in the title of the thesis is realized in the following way:

In chapter I we recall the notions and results of linear algebra as well algebraic structures that will be used in subsequent chapteres.

In chapter II we introduce the concept of the Clifford algebra, establish its unicity (up to isomorphism) and determine its dimension.

In chapter III we deal with the existence of Clifford algebra by means of on explicit matrix construction. Then we formulate a series of criterions and theorems which reduce the constructions to cases with orthogonal spaces of dimensions smaller than 5.

Finally, in chapter IV we apply the obtained results to construct (i) the cover Spin(n) of the group SO(n) and (ii) the sequence Hurwitz-Radon-Eckmann.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, construiremos as Álgebras Reais Universais de Clifford $\mathbb{R}_{p,q}$ para espaços ortogonais reais não-degenerados $\mathbb{R}^{p,q}$. Representaremo-as como álgebras (reais) matriciais com coeficientes nos corpos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ ou nos anéis $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{H}^2$. Usaremos como ferramenta principal o produto tensorial de álgebras.

Construiremos também a seqüência de Radon-Hurwitz e o recobrimento do grupo Spin(n) pelo grupo SO(n, $\mathbb{R}$).

CAPÍTULO I - PRELIMINARES

Álgebras e Automorfismos

Uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um anel associativo A, que é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ tal que $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$, para todos $a,b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Uma álgebra A sobre $\mathbb{K}$ é comutativa se o anel A é comutativo. Dizemos que A é uma álgebra com unidade se existe $1_{(A)} \in A$ tal que $1_{(A)}\, a = a\, 1_{(A)} = a$, para todo $a \in A$. Se um tal elemento existe ele é único e é chamado unidade de A.

Um subconjunto B de uma álgebra A sobre $\mathbb{K}$ é uma subálgebra de A se B é um subespaço linear de A e ao mesmo tempo um subanel de A.

Um elemento a de uma álgebra A com unidade é invertível se existe $a' \in A$ tal que $aa' = a'a = 1_{(A)}$. Neste caso $a' \in A$ é único e será denotado por a^{-1}. Claramente, $G(A) = \{g \in A : g^{-1}$ existe$\}$ é um grupo, pois o anel A é associativo.

A dimensão de uma álgebra A sobre $\mathbb{K}$ é a sua dimensão como espaço linear sobre $\mathbb{K}$, anotada por $\dim_{\mathbb{K}} A$ (ou dim A quando não houver dúvida sobre o corpo $\mathbb{K}$). Para cada inteiro positivo $p \geq 1$ ($p \in \mathbb{N}^*$), definimos a álgebra A^p indutivamente: $A^1 = A$, $A^{p+1} = A^p \times A$, com a estrutura óbvia de anel.

Centro:

Seja A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. O centro de A, denotado por Z(A), é o conjunto $Z(A) = \{a \in A : ax = xa,\ \forall x \in A\}$. Obviamente, Z(A) é uma subálgebra de A.

Verifica-se facilmente, que o centro da álgebra $\mathbb{K}(n)$ das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$ consiste das matrizes λI_n onde $\lambda \in \mathbb{K}$

e I_n é a matriz unidade $n \times n$ definida por:

$$I_n = (\delta_{ij}) \text{ tal que } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases} .$$

Seja A um anel, denotamos por A(n) o conjunto das matrizes $n \times n$ com coeficientes em A. Para que A(n) seja um anel, basta definirmos em A(n) as operações usuais de adição e multiplicação de $\mathbb{K}(n)$. Note que, em geral não podemos definir a função det: $A(n) \longrightarrow A$ (quando A é não-comutativo).

Consideremos as álgebras A e B sobre $\mathbb{K}$ e uma aplicação $t: A \longrightarrow B$. Dizemos que: (i)t é um homomorfismo se t preserva as estruturas de A e B, isto é, $t(a+b) = t(a)+t(b)$, $t(\lambda a) = \lambda t(a)$ e $t(ab) = t(a)\,t(b)$ para todo $a,b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{K}$; (ii)t é um anti-homomorfismo se t preserva as estruturas dos espaços lineares A e B e $t(ab) = t(b)\,t(a)$ para todo $a,b \in A$; (iii)t é um isomorfismo ou um anti-isomorfismo se, respectivamente, em ambos os casos anteriores t é bijetiva.

Um isomorfismo ou anti-isomorfismo t de uma álgebra A em si mesma é chamado, respectivamente, de um automorfismo ou anti-automorfismo de A. Se A é uma álgebra com unidade e t um automorfismo (ou anti-automorfismo) para o qual $t^2 = 1_{(A)}$, dizemos que t é uma involução (ou anti-involução) de A.

Lembremos agora do isomorfismo entre End $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}(n)$: seja V um espaço linear n-dimensional sobre um corpo $\mathbb{K}$. O conjunto das aplicações lineares de V em V sobre $\mathbb{K}$, isto é, endomorfismos de V, denotado por $\mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ (ou por End V quando não houver dúvida em relação ao corpo $\mathbb{K}$) é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ com unidade. Cada $t \in$ End V é completamente determinada pelo seu efeito sobre uma base fixa $\beta = \{v_1,\ldots.,v_n\}$ de V, ou seja,

$$t(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} v_j \; ; \; 1 \leq i \leq n \quad e \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{K} \; ,$$

assim t é unicamente determinada pelos n^2 escalares α_{ij}, ou ainda, pela matriz $M_t = (\alpha_{ij})$ chamada matriz de t em relação a base β. Reciprocamente, dada $N = (\alpha_{rs}) \in \mathbb{K}(n)$ podemos exibir $t \in \mathrm{End}\, V$ de tal forma que $N = M_t$, para isto basta definir para qualquer $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ com $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $t(v) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_{i1}) v_1 + \ldots + (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_{in}) v_n$. Deste modo, a aplicação $t \longrightarrow M_t$ obtida graças a escolha de uma base de V é uma bijeção entre End V e $\mathbb{K}(n)$ que induz as operações usuais de matrizes, isto é, para todo $t, w \in \mathrm{End}\, V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos $M_{t+w} = M_t + M_w$, $M_{\alpha t} = \alpha M_t$ e $M_{tw} = M_t M_w$. Portanto, End V é isomorfa a $\mathbb{K}(n)$ e anotamos $\mathrm{End}\, V \cong \mathbb{K}(n)$.

Dizemos que um subconjunto S de uma álgebra A sobre $\mathbb{K}$ gera A se qualquer $a \in A$ pode ser obtido de elementos de S usando-se soma, produto por escalar e produto de A. Indicamos este fato por $\langle\langle S \rangle\rangle = A$.

<u>Exemplo</u>: Se $r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $S = \{r,s\} \subset \mathbb{R}(2)$,

$\langle\langle S \rangle\rangle = \mathbb{R}(2)$ pois $s^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $sr = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,

$\frac{1}{2}(s+s^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{2}(r+sr) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\frac{1}{2}(r-sr) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{2}(s^2-s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Assim, cada matriz $X \in \mathbb{R}(2)$ é uma combinação linear das quatro matrizes obtidas acima.

<u>Espaços ortogonais reais</u>

Consideremos X um espaço linear sobre $\mathbb{R}$. Um produto escalar sobre X é uma aplicação bilinear

$<,> : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$; $(a,b) \longmapsto <a,b>$ e tal que $<a,b> = <b,a>$ para todo $a,b \in X$. A aplicação $X \longrightarrow \mathbb{R}$; $a \longmapsto <a,a>$ para todo $a \in X$ é chamada forma quadrática determinada pelo produto escalar $<,>$.

Note que, para todo $a,b \in X$, $<a,a> + <b,b> - <a-b,a-b> = 2<a,b>$, assim o produto escalar é unicamente determinado pela sua forma quadrática.

Definição 1: Um espaço linear real com produto escalar é chamado espaço ortogonal.

Tendo em vista nosso objetivo, daremos a seguir algumas definições e propriedades relacionadas com espaços ortogonais.

Seja X um espaço ortogonal. Dizemos que $a,b \in X$ são mutuamente ortogonais se $<a,b> = 0$. Os subconjuntos A e B de X são mutuamente ortogonais se $<a,b> = 0$ para todo $a \in A$ e $b \in B$.

Um espaço ortogonal X é positivo-definido se o produto escalar for positivo-definido, ou seja, para todo $a \in X$, $<a,a>$ é maior que zero se $a \neq 0$. Assim podemos definir a norma de a pela fórmula $|a| = \sqrt{<a,a>}$.

Dizemos que um espaço ortogonal X é não-degenerado se o produto escalar for não-degenerado, ou seja, $a \in X$ e $<a,b> = 0$ para todo $b \in X$, então $a = 0$.

O espaço linear $\mathbb{R}^{p+q}$ com produto escalar

$$\mathbb{R}^{p+q} \times \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a \quad , \quad b) \longmapsto <a,b> = - \sum_{i=1}^{p} a_i b_i + \sum_{j=1}^{q} a_{p+j} \, b_{p+j}$$

será denotado por $\mathbb{R}^{p,q}$. Identificamos naturalmente $\mathbb{R}^{p,q}$ com o espaço linear $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Observamos também que $\mathbb{R}^{p,q}$ é não-degenerado e $\mathbb{R}^{o,q}$ é positivo-definido.

Um elemento a de um espaço ortogonal X é invertível se $<a,a> \neq 0$. Neste caso,

$$<a, \frac{a}{<a,a>}> = \frac{1}{<a,a>} <a,a> = 1,$$

ou seja, o inverso de a denotado por

$$[a^{-1}] = \frac{a}{<a,a>} = (<a,a>)^{-1} a .$$

Consideremos X e Y espaços ortogonais. Uma aplicação linear $t:X \longrightarrow Y$ tal que $<t(a), t(b)> = <a,b>$ para todo $a,b \in X$ é chamada aplicação ortogonal. Quando t é invertível, dizemos que t é um isomorfismo. Uma aplicação $w:X \longrightarrow X$ invertível é um automorfismo.

Das considerações anteriores, temos que: (i) se X é não-degenerado, dado $a \in X$, $t(a) = 0$ implica $<t(a),t(a)> = <a,a> = 0$ e segue $a = 0$, ou seja, o núcleo de t indicado por $Ker(t) = \{0\}$, isto é, t é injetiva; (ii) obviamente, se X é não-degenerado de dimensão finita e $w:X \longrightarrow X$ ortogonal, então w é um automorfismo.

Indicamos o conjunto das aplicações ortogonais $t:X \longrightarrow Y$ por $O(X,Y)$ e o grupo dos automorfismos ortogonais $t:X \longrightarrow X$ por $O(X)$. O subgrupo $SO(X)$ de $O(X)$ quando X é n-dimensional é chamado grupo dos automorfismos ortogonais especiais, neste caso anotamos $O(X) = O(n,X)$ e $SO(X) = SO(n,X)$.

Definição 2: Um subconjunto ortonormal de um espaço ortogonal X é um subconjunto S de X linearmente independente tal que $<s,r> = 0$ para todos $s,r \in S$ distintos e $<s,s> = 0$, 1 ou -1. Além disso, se $<<S>> = X$ dizemos que S é uma base ortonormal de X.

Lembramos que todo espaço ortogonal X de dimensão finita possui uma base ortonormal. E se X é não-degenerado, então

$X \cong \mathbb{R}^{p,q}$ para algum $p,q \in \mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$ (Veja [2]).

Das afirmações anteriores, segue que, se $\{e_1,\ldots,e_n\}$ é uma base ortonormal para o espaço ortogonal não-degenerado X, então $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ para todo $x \in X$ com $x_i \in \mathbb{R}$, assim a forma quadrática

$$<x,x> = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \; <e_i,e_i>, \quad \text{ou seja,}$$

$$<x,x> = -x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots x_{p+q}^2$$

onde o número p de $<e_i,e_i> = -1$ e o número q de $<e_i,e_i> = 1$ independem da escolha da base. Definimos o par $[p,q]$ como sendo a assinatura da forma quadrática e do espaço ortogonal.

<u>Inclusão de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{R}(2)$</u>.

Faremos agora, um breve comentário sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

Note que $\mathbb{C}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{R}$ com unidade. E que os únicos automorfismos de $\mathbb{C}$ são a identidade e a conjugação $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$; $z = x+yi \longmapsto \bar{z} = x-yi$, para todo $x,y \in \mathbb{R}$.

Para cada $a \in \mathbb{C}$ a aplicação

$$L_a\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C};\; z \longmapsto L_a(z) = az,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ é um endomorfismo. Deste modo obtemos uma aplicação

$$L\colon \mathbb{C} \longrightarrow \text{End}\; \mathbb{C} \cong \mathbb{R}(2);\; a \longmapsto L_a$$

que é um homomorfismo, pois $L_{a+b} = L_a + L_b$ e $L_{ab} = L_a L_b$ para todo $a,b \in \mathbb{C}$. Consideremos L_1 e L_i em relação a base canônica de $\mathbb{C}$:

$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $L_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, para todo $a = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$L_{\alpha+\beta i} = \alpha L_1 + \beta L_i = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

Como $L_a = 0$ significa $\alpha = \beta = 0$, vemos que L é injetiva. Conseqüentemente, $\mathbb{C}$ é isomorfa a subálgebra de $\mathbb{R}(2)$ representada pelas matrizes da forma $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Note que, $|a|^2 = \bar{a}a = \alpha^2 + \beta^2 = \det \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ e $|az| = |a||z|$ para todo $a, z \in \mathbb{C}$. Assim, L_a é uma rotação de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{0,2}$ se, e somente se, $|a| = 1$, ou seja, $S^1 \cong SO(2; \mathbb{R})$.

A álgebra real $\mathbb{H}$.

Sejam $1, i, j$ e k os elementos da base canônica do espaço linear $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$. Definimos o produto $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$; $(a,b) \longmapsto ab$, para todo $a, b \in \mathbb{R}^4$ sujeito as condições;

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$ e $ki = j = -ik$,

com unidade 1. O produto é associativo, bilinear e não-comutativo. O espaço linear $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$ com este produto é uma álgebra sobre $\mathbb{R}$, chamada álgebra dos quatérnios reais e anotada por $\mathbb{H}$.

É usual em $\mathbb{H}$ identificar $\mathbb{R} = \{a1 : a \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{R}^3 = \{bi + cj + dk : b, c, d \in \mathbb{R}\}$, estes subespaços lineares são chamados, respectivamente, de quatérnios reais e puros. Então todo $q \in \mathbb{H}$, $q = re(q) + pu(q)$, onde $re(q) \in \mathbb{R}$ (parte real) e $pu(q) \in \mathbb{R}^3$ (parte pura). Definimos o conjugado de $q \in \mathbb{H}$ por $\bar{q} = re(q) - pu(q)$. É imediato que a conjugação $\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$; $q \longmapsto \bar{q}$ é uma anti-involução.

Consideremos $\mathbb{H}$ com o produto escalar de $\mathbb{R}^4$, isto é,

$$\langle a,b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 \quad , \quad \forall a,b \in \mathbb{R}^4.$$

É fácil verificar que:

(1) Para todo $a,b \in \mathbb{H}$,

$<a,b> = re(\bar{a}b) = \frac{1}{2}(\bar{a}b + \bar{b}a)$,

$<a,a> = \bar{a}a \geq 0$. Em particular, para todo $a,b \in \mathbb{R}^3$

$<a,b> = -re(ab) = -\frac{1}{2}(ab+ba)$, $<a,a> = -a^2$

e $<a,b> = 0 \Longleftrightarrow ab = -ba$. (a e b anti-comutam)

(2) Para todo $q \in \mathbb{H}$ definimos $|q| = \sqrt{\bar{q}q}$.

Se $q \neq 0$, o inverso $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$ e $|q^{-1}| = |q|^{-1}$.

(3) Para todo $a,b \in \mathbb{H}$, $|ab| = |a||b|$.

Produto tensorial de álgebras.

Definição 3: Sejam E e F subálgebras de uma álgebra A sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita com unidade. Dizemos que A é o produto tensorial de E e F sobre $\mathbb{K}$ e anotamos $A = E \otimes_{\mathbb{K}} F$, se as seguintes condições são satisfeitas:

(1ª) $A = \langle\langle E,F \rangle\rangle$ como uma álgebra,

(2ª) $\dim A = (\dim E)(\dim F)$ e

(3ª) para todo $x \in E$ e $y \in F$, $xy = yx$.

Teorema 1: Seja A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita com unidade, E e F subálgebras de A tal que $A = E \otimes_{\mathbb{K}} F$. Suponha $\{e_i : 1 \leq i \leq m\}$ e $\{f_j : 1 \leq j \leq n\}$ bases dos subespaços lineares E e F, respectivamente. Então o conjunto

$$B = \{e_i f_j : 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$$

é uma base para o espaço linear A.

Demonstração: Note que, $\dim A = mn$ e B é formado por mn elementos do espaço linear A. Para que os elementos de B formem uma base de A, é suficiente que eles sejam linearmente independentes. Se os elementos de B fossem linearmente dependentes, $\dim A < mn$.

Consideremos A, E e F como no teorema anterior. Observamos que, se A' for uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita com unidade, E' e F' subálgebras de A' tal que $A' = E' \otimes_{\mathbb{K}} F'$ com $E \cong E'$ e $F \cong F'$, então $\dim A = \dim A'$, isto é, $A \cong A'$. Por isso, escrevemos $A \cong E' \otimes_{\mathbb{K}} F'$. Temos ainda, que o produto tensorial é comutativo e associativo.

Teorema 2: Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $p,q \in \mathbb{N}$. Então $\mathbb{K}(p) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(q) \cong \mathbb{K}(pq)$.

Demonstração: Identificamos o espaço linear $\mathbb{K}^n$, onde $n = pq$, com $\mathbb{K}^{p\times q}$ espaço linear das matrizes $p \times q$ sobre $\mathbb{K}$. Consideremos as aplicações

$$L: \mathbb{K}(p) \longrightarrow \mathbb{K}(pq) \ ; \ M \longmapsto L_M \quad \text{e}$$

$$R: \mathbb{K}(q) \longrightarrow \mathbb{K}(pq) \ ; \ N \longmapsto R_N \quad ,$$

definidas por: $L_M(B) = MB$, $R_N(B) = BN^T$ para qualquer $B \in \mathbb{K}^{p\times q}$ e N^T a transposta de N. Obviamente, L e R são homomorfismos. Além disso, se $L_M(B) = L_{M'}(B)$ para $M, M' \in \mathbb{K}(p)$ e qualquer $B \in \mathbb{K}^{p\times q}$, segue que $(M - M')B = 0$ em $\mathbb{K}^{pq}$, em particular $(M - M')d_{ij} = 0$, onde d_{ij} são os elementos da base canônica (matrizes elementares) de $\mathbb{K}^{p\times q}$ com $1 \leq i \leq p$ e $1 \leq j \leq q$, isto é, $(M - M')d_{ij} = 0$ implica que as colunas de $M - M'$ são iguais a zero para cada $1 \leq i \leq p$ e $1 \leq j \leq q$, ou seja, $M = M'$, logo L é injetiva. Com um argumento semelhante, mostra-se que R também é injetiva.

Sejam $e_{ij} (1 \leq i, j \leq p)$ e $f_{k\ell} (1 \leq k, \ell \leq q)$ matrizes elementares (isto é, $e_{ij} = (a_{uv})$ com $a_{uv} = \delta_{iv} \cdot \delta_{jv}$) de $\mathbb{K}(p)$ e $\mathbb{K}(q)$, respectivamente. Cada $r(1 \leq r \leq pq)$ e $s(1 \leq s \leq pq)$, são escritos de modo único na forma $r = (j-1)q + \ell$ e $s = (i-1)q + k$. Estes $(pq)^2$ elementos g_{rs} obtidos dos pares de elementos básicos de $\mathbb{K}(p)$ e $\mathbb{K}(q)$, formam uma base para $\mathbb{K}(pq)$. Além disso, como $\dim \mathbb{K}(pq) = \dim \mathbb{K}(p).\dim \mathbb{K}(q)$ e $L_M R_N = R_N L_M$, temos que $\mathbb{K}(p) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(q) \cong \mathbb{K}(pq)$.

Teorema 3: Consideremos as álgebras reais $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{R}^2$ e $\otimes = \otimes_{\mathbb{R}}$. Então,

$$\text{(i)}\ \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}\ ,\ \mathbb{C} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{C}\ ,\ \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{H}\ ;$$

$$\text{(ii)}\ \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H}^2\ ,\ \mathbb{H} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}(2)\ ,\ \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4).$$

Demonstração: As afirmações (i) são óbvias. Seguiremos com a demonstração de (ii).

Definimos as aplicações lineares sobre $\mathbb{R}$;

$$t: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2\ ;\ (a,b) \longmapsto (a,b) \quad \text{e}$$

$$w: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}^2\ ;\ q \longmapsto (q,\tilde{q}),\ \text{onde } \tilde{q} = jqj^{-1}.$$

Como t e w são homomorfismo injetivos, temos que

$$\mathbb{R}^2 \cong E = \{(a,b) \in \mathbb{H}^2 : (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{e}$$

$$\mathbb{H} \cong F = \{(q,\tilde{q}) \in \mathbb{H}^2 : q \in \mathbb{H}\}$$

onde E e F são subálgebras da álgebra real $\mathbb{H}^2$. Conseqüentemente,

$$\mathbb{H}^2 = \langle\langle E,F \rangle\rangle, \quad \text{pois} \quad E = \langle\langle (1,0),(0,1) \rangle\rangle \quad \text{e}$$

$$F = \langle\langle (1,1),\ (i,-i),\ (j,\ j),\ (k,-k) \rangle\rangle\ ,$$

$\dim \mathbb{H}^2 = (\dim E)(\dim F)$ e mais $(a,b)(q,\tilde{q}) = (q,\tilde{q})(a,b)$ para todo $(a,b) \in E$ e $(q,\tilde{q}) \in F$. Portanto,

$$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H}^2 .$$

Note que, $\mathbb{H}$ é um espaço linear sobre $\mathbb{C}$. Dado $q \in \mathbb{H}$, escrevemos $q = a + bi + cj + dk$ com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, ou seja, $q = (a+bi) + j(c-di) = \alpha + j\beta$ onde $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ e $\beta = c - di \in \mathbb{C}$, assim $\{1,j\}$ é uma base de $\mathbb{H}$ sobre $\mathbb{C}$. Para todo $q \in \mathbb{H}$ e $z \in \mathbb{C}$, as aplicações

$$L_q : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \; ; \; x \longmapsto qx \qquad \text{e}$$

$$R_z : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \; ; \; x \longmapsto xz,$$

são lineares complexas. Deste modo, obtemos as aplicações

$$L : \mathbb{H} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\, \mathbb{H} \cong \mathbb{C}(2) \; ; \; q \longmapsto L_q \qquad \text{e}$$

$$R : \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\, \mathbb{H} \cong \mathbb{C}(2) \; ; \; z \longmapsto R_z \qquad ,$$

onde L é um homomorfismo injetivo entre as álgebras reais $\mathbb{H}$ e $\mathbb{C}(2)$ e R um anti-homomorfismo injetivo entre as álgebras reais $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}(2)$. Então,

$$L_1 : \begin{cases} L_1(1) = 1(1) = 1 = 1(1) + j(0) \\ L_1(j) = 1(j) = j = 1(0) + j(1) \end{cases} \; ; \; L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

$$L_i : \begin{cases} L_i(1) = i = 1(i) + j(0) \\ L_i(j) = k = 1(0) + j(-i) \end{cases} \; ; \; L_i = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} ,$$

$$L_j : \begin{cases} L_j(1) = j = 1(0) + j(1) \\ \\ L_j(j) = -1 = 1(-1) + j(0) \end{cases} \quad ; \; L_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$L_k : \begin{cases} L_k(1) = k = 1(0) + j(-i) \\ \\ L_k(j) = -i = 1(-i) + j(0) \end{cases} \quad ; \; L_k = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} .$$

Mas, $L_q = aL_1 + bL_i + cL_j + dL_k =$

$$= \begin{bmatrix} a + bi & -c-di \\ \\ c-di & a-bi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{bmatrix} ,$$

ou seja, $\mathbb{H}$ é isomorfa a subálgebra real E de $\mathbb{C}(2)$ onde

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{bmatrix} ; \; \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} .$$

Como

$$R_1 : \begin{cases} R_1(1) = 1 = 1(1) + j(0) \\ \\ R_1(j) = j = 1(0) + j(1) \end{cases} \quad ; \; R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

$$R_i : \begin{cases} R_i(1) = i = 1(i) + j(0) \\ \\ R_i(j) = -k = 1(0) + j(i) \end{cases} \quad ; \; R_i = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} .$$

Mas, para $z = g + fi$, $g,f \in \mathbb{R}$ temos

$$R_z = gR_1 + fR_i = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} ,$$

ou seja, $\mathbb{C}$ é isomorfa a subálgebra real F de $\mathbb{C}(2)$ onde

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} ; z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Portanto, temos que:

(1) $\mathbb{C}(2) = \langle\langle E,F \rangle\rangle$ pois

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , L_i = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} , L_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , L_k = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_i = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} , L_iR_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , L_jR_i = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} , L_kR_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

geram $\mathbb{C}(2)$.

(2) $\dim \mathbb{C}(2) = (\dim E)(\dim F)$ e

(3) $MN = NM$, $\forall M \in E$ e $\forall N \in F$, isto é, $\mathbb{C}(2) \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$.

Agora, note que $\mathbb{H}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. E para todo $q,r \in \mathbb{H}$ as aplicações

$$L_q : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \; ; \; x \longmapsto qx \qquad \text{e}$$

$$R_r : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \; ; \; x \longmapsto x\bar{r}$$

são lineares reais. Desta forma obtemos as aplicações

$$L: \mathbb{H} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4);\ q \longmapsto L_q \quad \text{e}$$

$$R: \mathbb{H} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4);\ r \longmapsto R_r \quad ,$$

ambas homomorfismos injetivos. Assim, $\mathbb{H}$ é isomorfa às subálgebras E e F de $\mathbb{R}(4)$. Calculando L_q e R_r em relação à base $\{1,i,j,k\}$, temos para $q = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$ e $r = r_1 + r_2 i + r_3 j + r_4 k$, com $a_i, r_i \in \mathbb{R}$,

$$E = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ -r_2 & r_1 & -r_4 & r_3 \\ -r_3 & r_4 & r_1 & -r_2 \\ -r_4 & -r_3 & r_2 & r_1 \end{bmatrix}$$

Portanto, as condições da definição 3 são satisfeitas, ou seja,

$$\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4).$$

CAPÍTULO II - DIMENSÃO E UNICIDADE DAS ÁLGEBRAS DE CLIFFORD

Definição 4: Seja X um espaço ortogonal real de dimensão finita e A uma álgebra real com unidade $1_{(A)}$, contendo cópias isomorfas de $\mathbb{R}$ e X como subespaços lineares. Dizemos que A é uma álgebra (real) de Clifford para X se, e somente se,

(i) $A = \langle\langle\{1_{(A)}\}, X\rangle\rangle$ como uma álgebra real,

(ii) $x^2 = -\langle x,x\rangle 1_{(A)}$ para todo $x \in X$.

Na condição (ii) anterior identifica-se o elemento $\langle x,x\rangle \in \mathbb{R}$ com sua cópia $\langle x,x\rangle 1_{(A)}$ em A.

Exemplo: $\mathbb{H}$ é uma álgebra de Clifford para $\mathbb{R}^{0,2}$. Com efeito, identificando $\mathbb{R}^{0,2}$ com o subespaço linear gerado por $\{i,k\}$ em $\mathbb{H}$, ou seja, $\mathbb{R}^{0,2} = \{x \in \mathbb{H} : x = ai + bk \text{ com } a,b \in \mathbb{R}\}$ e $1_{(\mathbb{H})} = 1 \in \mathbb{R}$, segue que $\mathbb{H} = \langle\langle\{1\}, \mathbb{R}^{0,2}\rangle\rangle$ e $x^2 = -\langle x,x\rangle 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^{0,2}$.

Lema 4: Seja A uma álgebra de Clifford para um espaço ortogonal real X e W um subespaço linear de X. Então a subálgebra B de A gerada por W é uma álgebra de Clifford para W.

Demonstração: Restringindo o produto escalar de X a W, temos que W é um espaço ortogonal. Como $x^2 = -\langle x,x\rangle 1_{(A)}$ para todo $x \in X$, em particular, $-\frac{x^2}{\langle x,x\rangle} = 1_{(A)}$ para todo $x \in W\setminus\{0\} \subset B = \langle\langle W\rangle\rangle$. Então B é uma álgebra sobre $\mathbb{R}$ com unidade $1_{(A)}$. Obviamente, $B = \langle\langle\{1_{(A)}\}, W\rangle\rangle$ e a aplicação $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}1_{(A)} \subset B$; $\lambda \longmapsto \lambda 1_{(A)}$ é um isomorfismo. Portanto, B é uma álgebra de Clifford para W. $\boxtimes$

Observamos que, dada uma álgebra de Clifford A para um espaço ortogonal real X, tem-se:

(1) $2 <a,b> = <a,a> + <b,b> - <a-b, a-b>$,

$$2 <a,b> 1_{(A)} = -a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - ab - ba ,$$

$$<a,b> 1_{(A)} = - \frac{1}{2} (ab + ba) \text{ para todo } a,b \in X.$$

Em particular, se a e b são ortogonais em X, então $ab = -ba$ em A, isto é, a e b anti-comutam em A. Assim, dada uma base ortogonal $\{x_1,\ldots,x_n\}$ de X,

$$x_i x_j = \begin{cases} -x_j x_i & \text{para } i \neq j \\ \\ - <x_i,x_i> 1_{(A)} & \text{para } i = j. \end{cases}$$

(2) Se a é invertível em A, existe $a^{-1} \in A$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1_{(A)}$, então $<a,a> a^{-1} = -a^2a^{-1} = -a \neq 0$ implica $<a,a> \neq 0$, ou seja, a é invertível em X e $a^{-1} = - \frac{a}{<a,a>} = - [a^{-1}] \in X$. Reciprocamente, se a é invertível em X, isto é, $<a,a> \neq 0$, então a equação $a^2 = - <a,a> 1_{(A)}$ nos diz que $- \frac{a}{<a,a>} a = 1_{(A)}$, ou seja, $- \frac{a}{<a,a>} = a^{-1} \in A$, logo a é invertível em A.

<u>Teorema 5</u>: Seja $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ uma base ortonormal para o espaço ortogonal real X de dimensão finita n e A uma álgebra real com unidade $1_{(A)}$, contendo $\mathbb{R}$ e X como subespaços lineares. Então $x^2 = - <x,x> 1_{(A)}$ para todo $x \in X$ se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas simultaneamente,

(I) $e_i^2 = - <e_i,e_i> 1_{(A)}$ para $1 \leq i \leq n$ e

(II) $e_ie_j + e_je_i = 0$ para $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq n$.

Demonstração:

$\Longrightarrow$) Decorre da afirmação (1) anterior.

$\Longleftarrow$) Para todo $x \in X$ e $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

e $\langle x,x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \langle e_i,e_i\rangle + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \alpha_i\alpha_j \langle e_i,e_j\rangle$.

Como $\langle e_i,e_j\rangle = 0$ para $i \neq j$ e por (I), temos que

$\langle x,x\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 e_i^2$. Agora, $x^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 e_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \alpha_i\alpha_j (e_ie_j + e_je_i)$,

por (II) temos que $x^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 e_i^2$. ◪

Definição 5: Um subconjunto ortonormal de uma álgebra real A com unidade $1_{(A)}$ é um subconjunto S de A linearmente independente tal que todo $s,r \in S$ distintos $sr = -rs$ e $s^2 = 0, 1_{(A)}$ ou $-1_{(A)}$.

Definição 6: Um subconjunto S de uma álgebra real A com unidade $1_{(A)}$ é chamado não-degenerado se todos elementos distintos de S anti-comutam e $s^2 = 1_{(A)}$ ou $-1_{(A)}$ para todo $s \in S$.

Teorema 6: Se S é um subconjunto não-degenerado de uma álgebra real A com unidade $1_{(A)}$, então S é ortonormal.

Demonstração: Seja $\{s_1,\ldots,s_n\} \subset S$ e $\alpha_i \in \mathbb{R}$, assim $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i = 0$ implica $(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i)^2 = 0$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 s_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \alpha_i\alpha_j (s_is_j + s_js_i) = 0.$$

Como $s_is_j + s_js_i = 0$, segue que

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 s_i^2 = \pm \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 0$, isto implica em $\alpha_i = 0$. Portanto, S é linearmente independente. ☒

Definição 7: Dizemos que um subconjunto não-degenerado S é do tipo $[p,q]$, quando p dos elementos de S ao quadrado são iguais a $1_{(A)}$ e os q elementos restantes ao quadrado são iguais a $-1_{(A)}$.

Teorema 7: Seja X o subespaço linear gerado por um subconjunto ortonormal S de uma álgebra A sobre $\mathbb{R}$. Então existe um único produto escalar sobre X tal que $\langle a,a\rangle = -a^2$ para todo $a \in S$, e se S é do tipo $[p,q]$ temos que X é isomorfo a $\mathbb{R}^{p,q}$. Além disso, se S também gera A, então A é uma álgebra de Clifford para o espaço ortogonal X.

Demonstração: S é linearmente independente e $\langle\langle S\rangle\rangle = X$, logo S é uma base de X. Assim, todo $x \in X$,

$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ com $a_i \in S$ e $\alpha_i \in \mathbb{R}$, então $x^2 = -\langle x,x\rangle$ e este produto escalar é determinado unicamente pelos elementos de S. Se S é do tipo $[p,q]$, temos que

$$x^2 = -\langle x,x\rangle = -\alpha_1^2 - \dots - \alpha_p^2 + \alpha_{p+1}^2 + \dots + \alpha_{p+q}^2 ,$$

então a matriz da forma quadrática sobre X é a matriz que representa o espaço ortogonal $\mathbb{R}^{p,q}$ na base canônica,

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \overbrace{-1 \cdots -1}^{p} & O \\ O & \overbrace{1 \cdots 1}^{q} \end{bmatrix}$$

Portanto $X \cong \mathbb{R}^{p,q}$. Se $\langle\langle S\rangle\rangle = A$, segue que as condições da definição 4 são satisfeitas. $\boxtimes$

A dimensão de uma álgebra de Clifford.

Seja A uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e $\tilde{N} = \{1,2,\ldots,n\} \subset \mathbb{N}$. Suponha que $(e_i: 1 \le i \le n)$ seja uma n-upla de elementos de A. Para cada subconjunto ordenado I de $\tilde{N}$, denotamos o produto $\prod_{i \in I} e_i$ por e_I com $e_\phi = 1_{(A)}$ (o símbolo ϕ significa o conjunto vazio) e $e_{\tilde{N}} = \prod_{i=1}^{n} e_i = e_n$. A cardinalidade de I será denotada pelo símbolo $\#$.

Lema 8: Seja A uma álgebra sobre $\mathbb{R}$ com unidade $1_{(A)}$ identificada com $1 \in \mathbb{R}$. Suponha $(e_i: 1 \le i \le n)$ uma n-upla de elementos de A que gera A tal que $e_ie_j + e_je_i \in \mathbb{R}$ para todo $1 \le i,j \le n$. Então o conjunto $\{e_I: I \subset \tilde{N}\}$ gera A linearmente.

Demonstração: Seja $S = (e_i: 1 \le i \le n)$. Como $\langle\langle S\rangle\rangle = A$, para cada $a \in A$ existem $t_k \in A$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}$ com $1 \le k \le p$ (p finito) tais que $a = \sum_k \alpha_k t_k$ e cada t_k é um produto finito da forma $t = \prod_{i=1}^{m} e_i$ onde $m \le n$ e os e_i's, não necessariamente distintos.
Em virtude da relação $e_je_i = \lambda_{ij} - e_ie_j$ com $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$, sem perda de generalidade, podemos considerar os produtos ordenados dos e_i's sem repetições de índices, ou seja, $a = \sum_{I \subset \tilde{N}} \lambda_I e_I$. Portanto, $\{e_I: I \subset \tilde{N}\}$ gera A linearmente. $\boxtimes$

Corolário 9: Seja A uma álgebra de Clifford para um espaço ortogonal X de dimensão finita n. Então $\dim A \le 2^n$.

Demonstração: Como A é uma álgebra de Clifford para X, então $A = \langle\langle\{1\}, X\rangle\rangle$, isto é, existe uma n-upla $S = (e_i: 1 \le i \le n)$ de elementos de $X \subset A$ tal que $\langle\langle S\rangle\rangle = A$ e

$-2 \langle e_i, e_j \rangle 1 = e_i e_j + e_j e_i = \lambda \in \mathbb{R}$. Pelo lema, $\{e_I: I \subset \tilde{N}\}$ gera A linearmente. Mas, o número de subconjuntos $I \subset \tilde{N}$ é 2^n. Então $\dim A \leq 2^n$. ◪

<u>Teorema 10</u>: Seja A uma álgebra de Clifford para um espaço ortogonal X não-degenerado de dimensão finita n e assinatura $[p,q]$. Então, temos as seguintes possibilidades:

(1ª) $\dim A = 2^n$ ou (2ª) $\dim A = 2^{n-1}$, somente se $p-q-1$ é divisível por 4.

<u>Demonstração</u>: Seja $\{e_i: 1 \leq i \leq n\}$ uma base ortonormal ordenada de X. Para cada $I \subset \tilde{N}$, e_I é invertível em A, pois $- \langle e_i, e_i \rangle 1_{(A)} = e_i^2 = \pm 1$ para todo $i \in \tilde{N}$.

Para provar que o conjunto $\{e_I: I \subset \tilde{N}\}$ é linearmente independente, é suficiente provar que $\sum_{I \subset \tilde{N}} \lambda_I e_I = 0$ implica $\lambda_\phi = 0$, pois para cada $J \subset \tilde{N}$ fixo, $\sum_{I \subset \tilde{N}} \lambda_I e_I = 0$ é equivalente a $\sum_{I \subset \tilde{N}} \lambda_I e_I (e_J)^{-1} = 0$. Como $(e_J)(e_J)^{-1} = 1_{(A)} = e_\phi$, fazemos λ_J o coeficiente de e_ϕ.

Suponha $\sum_{I \subset \tilde{N}} \lambda_I e_I = 0$. Para cada $i \in \tilde{N}$ e cada $J \subset \tilde{N}$, o elemento e_i comuta ou anti-comuta com e_I, ou seja, $e_i (e_I) e_i^{-1} = \pm e_I = \xi_{I,i} e_I$ (onde $\xi_{I,i} = 1_{(A)}$ ou $-1_{(A)}$). Daqui, segue que

$$\sum_{I \subset \tilde{N}} \lambda_I e_I = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{I \subset \tilde{N}} \xi_{I,i} \lambda_I e_I = 0.$$

Somando as duas igualdades acima, obtemos $\sum_{I \in F} \lambda_I e_I = 0$, onde agora, o somatório estende-se sobre a família F que consiste dos subconjuntos I de $\tilde{N}$ tal que e_I comuta com cada e_i. Obviamente, $I = \phi \in F$, pois $(e_\phi) e_i = e_i (e_\phi)$. Se $I \neq \phi$, temos duas possibilidades:

(a) $\#\, I = 2k+1$ (ímpar). Se $2k+1 \neq n$ ($\#\, \tilde{N} = n$), temos uma contradição, pois para $i \in \tilde{N} \setminus I$ tem-se $e_i(e_I)e_i^{-1} = (-1)^{2k+1}\, e_I = -e_I$.

b) $\#\, I = 2k$ (par). Suponha, sem perda de generalidade que $1 \in I$, logo $(e_I)e_1 = (e_1 e_{I\setminus\{1\}})e_1 = e_1(-e_1 e_{I\setminus\{1\}}) = -e_1(e_I)$ e assim temos novamente uma contradição. Portanto, a única possibilidade distinta de $I = \phi$ que não foi excluída até agora é $I = \tilde{N}$ com $\#\, \tilde{N} = n$ ímpar, isto é, a família F é $\{\phi\}$ ou $\{\phi, \tilde{N}\}$, ou seja, $\lambda_\phi = 0$ ou $\lambda_\phi + \lambda_{\tilde{N}} e_{\tilde{N}} = 0$. Conseqüentemente, $\{e_I \colon I \subset \tilde{N}\}$ é linearmente independente ou $e_{\tilde{N}} = -\dfrac{\lambda_\phi}{\lambda_{\tilde{N}}}$ é real.

Para $\#\, \tilde{N} = n = p+q = 2k+1$, escrevemos $e_{\tilde{N}} = e_n = -\dfrac{\lambda_\phi}{\lambda_n} \in \mathbb{R}$, então $(e_n)^2 = (e_{2k+1})^2 = (-1)^{(2k+1)k+q}$ é positivo, logo $(e_n)^2 = 1$, isto implica que $e_n = \pm 1$ e que 2 divi de $(2k+1)k+q$, ou seja, $e_n = \pm 1$ e 4 divide $2k+2q = p+q-1+2q-2q+2q$, ou ainda, $e_n = \pm 1$ e 4 divide $p-q-1$. Reciprocamente, se 4 divide $p-q-1$, então 4 divide $p-q-1-4p = -2p-(p+q+1)$, isto é, 2 divide $p+q+1$, isto implica que $p+q = n$ é ímpar.

Deste modo, provamos que a álgebra de Clifford A gerada pelo conjunto $\{e_I \colon I \subset \tilde{N}$ com $\#\, I$ par$\}$ linearmente independente, tem dimensão 2^n. Para $\#\, I = n$ ímpar vale a mesma conclusão ou tem-se a relação $r = \lambda_\phi + \lambda_n e_n = 0$, quer dizer, além da álgebra A temos a álgebra $A/_{(r)} \cong A$, onde (r) é o ideal principal gerado por r, neste caso $\dim A = 2^{n-1}$. ☒

<u>Corolário 11</u>: Caso ocorra a segunda possibilidade da tese do teorema 10, temos que n é ímpar e $e_n = \prod_{i=1}^{n} e_i = 1_{(A)}$ ou $-1_{(A)}$ para qualquer base ortonormal ondenada $S = \{e_i \colon 1 \leq i \leq n\}$. ☒

Álgebras Universais de Clifford

Teorema 12: Seja A uma álgebra de Clifford para um espaço ortogonal real X de dimensão finita n com $\dim A = 2^n$ e B uma álgebra de Clifford para um espaço ortogonal real Y. Suponha $t: X \longrightarrow Y$ uma aplicação ortogonal. Então existe um único homomorfismo $t_A: A \longrightarrow B$ com $t_A(1_{(A)}) = 1_{(B)}$ e tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{t} & Y \\ \Big\downarrow I_{nc} & & \Big\downarrow I_{nc} \\ A & \xrightarrow{t_A} & B \end{array}$$

comuta (I_{nc} denota a aplicação inclusão).

Demonstração: Seja $\{e_i: 1 \leq i \leq n\}$ uma base ortonormal ordenada de X. Suponhamos que t_A exista, então $t_A(I_{nc}(e_i)) = I_{nc}(t(e_i))$, ou seja, $t_A(e_i) = t(e_i)$ para cada $1 \leq i \leq n$. Conseqüentemente, $t_A(e_I) = \prod_{i \in I} t(e_i)$ para cada $\phi \neq I \subset \tilde{N}$. E por hipótese, $t_A(1_{(A)}) = 1_{(B)}$. Por outro lado, como $\dim A = 2^n$, o conjunto $S = \{e_I: I \subset \tilde{N}\}$ é uma base para A, então existe uma única aplicação linear $t_A: A \longrightarrow B$ determinada por sua ação sobre S, isto é, $t_A(e_I) = \prod_{i \in I} t(e_i)$ para cada $I \subset \tilde{N}$. E portanto, o diagrama comuta.

A seguir, provaremos que t_A preserva produto. Sejam I e J subconjuntos ordenados de $\tilde{N}$. Se $I \cap J = \phi$, podemos considerar $N = I \,\dot{\cup}\, J$ (onde o símbolo $\dot{\cup}$ indica a união disjunta). Deste modo, $e_N = (e_I)(e_J)$ e assim, $t_A((e_I)(e_J)) = t_A(e_N) =$

$$\prod_{\ell \in N} t(e_\ell) = \prod_{i \in I} t(e_i) \prod_{j \in J} t(e_j) = t_A(e_I)\, t_A(e_J).$$

Se $I \cap J = M \neq \phi$, podemos tomar $I = I' \,\dot{\cup}\, M$, então $e_I = (-1)^\gamma e_{I'}$, onde γ é o número de rearranjos necessários para por todos os elementos de M a direita dos elementos de $I \setminus M = I'$. Ponha $\hat{M}$ para ser o conjunto ordenado M com a ordem reversa. Em seguida, tomemos $J = \hat{M} \dot{\cup} J'$, onde $e_J = (-1)^{\lambda} e_{J'}$, e λ o número de rearranjos necessários para por todos os elementos de $\hat{M}$ a esquerda dos elementos de $J \setminus M = J'$. Deste modo, segue que $e_I e_J = (-1)^{\gamma+\lambda} e_{I'} e_M e_{\hat{M}} e_{J'} =$ $= (-1)^{\gamma+\lambda+\beta} e_{I'} e_{J'}$, onde β é o número de $k \in M$ tal que $e_k^2 = -1_{(A)}$ e adicionalmente, temos $I' \cap J' = \phi$. Por outro lado, aplicando o mesmo processo aos conjuntos

$$f_I = t_A(e_I) = \prod_{i \in I} t(e_i) \text{ e } f_J = t_A(e_J) = \prod_{j \in J} t(e_J),$$

vemos que $t_A((e_I)(e_J)) = t_A(e_I)\, t_A(e_J)$. ▧

Teorema 13: Sejam A e B álgebras de Clifford para um espaço ortogonal real X de dimensão finita n com $\dim A = \dim B = 2^n$. Então $A \cong B$.

Demonstração: Sabemos que, A e B são álgebras de Clifford para X, então $A = \langle\langle\{1_{(A)}\}, X\rangle\rangle$ e $B = \langle\langle\{1_{(B)}\}, X\rangle\rangle$, isto é, existem n-uplas $S' = (e_i' : 1 \leq i \leq n)$ e $S'' = (e_i'' : 1 \leq i \leq n)$ de elementos de X tais que $\langle\langle S' \rangle\rangle = A$ e $\langle\langle S'' \rangle\rangle = B$. Como $\dim A = \dim B = 2^n$, segue que $\{e_I' : I \subset \tilde{N}\}$ e $\{e_I'' : I \subset \tilde{N}\}$ são bases de A e B, respectivamente. Agora, basta definir $h: A \longrightarrow B;\ e_I' \longmapsto h(e_I') = e_I''$ para cada $I \subset \tilde{N}$. Obviamente, h é um isomorfismo entre os espaços lineares A e B. A última parte da demonstração, a de que h preserva produto, segue-se da repetição do argumento usado na demonstração do teorema 10. ▧

Definição 8: Uma álgebra real de Clifford de dimensão 2^n para um espaço ortogonal X de dimensão finita n, é chamada álgebra (real) Universal de Clifford para X.

Uma álgebra real Universal de Clifford para o espaço ortogonal $\mathbb{R}^{p,q}$, será denotada por $\mathbb{R}_{p,q}$. Portanto, nesta notação, escrevemos $\mathbb{R}_{0,2} \cong \mathbb{H}$

CAPÍTULO III - EXISTÊNCIA E CONSTRUÇÃO DAS ÁLGEBRAS UNIVERSAIS DE CLIFFORD

O caminho da construção sistemática de todas as álgebras reais Universais de Clifford é basicamente o seguinte: conhecendo $\mathbb{R}_{p,q}$, construiremos $\mathbb{R}_{p+1,q+1}$, mas não será necessário prosseguir com argumento indutivo sobre os índices, pois o teorema da periodicidade, nos diz que é necessário conhecer apenas os casos $p+q \leq 8$. Provaremos que $\mathbb{R}_{p+1,q} \cong \mathbb{R}_{q+1,p}$, com isto, estes casos serão reduzidos a $p+1 \leq q$.

Agora, passaremos a descrever a teoria que fundamenta este caminho.

Teorema 14: Seja X um espaço linear sobre A, onde $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, {}^2\mathbb{R}$ ou ${}^2\mathbb{H}$ e S um subconjunto ortonormal de End X do tipo [p,q] tal que S gera End X como uma álgebra real. Então o conjunto de matrizes

$$S' = \left\{ b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} : a \in S \right\} \cup \left\{ b_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; b_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é um subconjunto ortonormal de End X^2 do tipo [p+1, q+1] que gera End $X^2 \cong$ End $X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2)$ como uma álgebra real.

Demonstração: Consideremos $Y = \mathrm{End}_A X$. Para cada $a \in S \subset Y$, $a^2 = 1_{(Y)}$ ou $-1_{(Y)}$. Assim,

$$b^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} = a^2 I_2 = 1_{(Y)} I_2 \text{ ou } -1_{(Y)} I_2, \; b_1^2 = 1_{(Y)} I_2,$$

$b_2^2 = -1_{(Y)} I_2$ e $bb_1 = -b_1 b$, $bb_2 = -b_2 b$, $b_1 b_2 = -b_2 b_1$.

Observamos também que,

$$\frac{1}{2} b(b_1^2 + b_1 b_2) = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{2} b(b_1 - b_2) = a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$-\frac{1}{2} b(b_1 + b_2) = a \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$-\frac{1}{2} b(b_1^2 + b_2 b_1) = a \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então S' é um subconjunto ortonormal de Y(2) do tipo [p+1, q+1] e <<S'>> = Y(2) como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Por outro lado, cada

$M = (a_{ij}) \in Y(2)$, temos que $M = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}e_{ij}$ onde $a_{ij} \in Y$ e e_{ij} são as matrizes elementares de $\mathbb{R}(2)$ tal que $\langle\langle e_{ij}\rangle\rangle = \mathbb{R}(2)$, ou seja, $Y(2) = \langle\langle Y, \mathbb{R}(2)\rangle\rangle$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Por definição, $(a_{ij})N = N(a_{ij})$ para qualquer $N \in \mathbb{R}(2)$. E se $\dim_A X = n$, segue que $\dim_{\mathbb{R}} Y(2) = (\dim_{\mathbb{R}} Y)(\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2))$. Portanto, $Y(2) \cong Y \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2)$, equivalentemente, $\text{End } X^2 \cong \text{End } X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2)$. ⊠

Corolário 15: Para cada $n \in \mathbb{N}$ a álgebra dos endomorfismos $\mathbb{R}(2^n)$ é uma álgebra Universal de Clifford para o espaço ortogonal não-degenerado $\mathbb{R}^{n,n}$, isto é, $\mathbb{R}_{n,n} \cong \mathbb{R}(2^n)$.

Demonstração: Para $n = 0$, obviamente, $\mathbb{R}_{0,0} \cong \mathbb{R}$. Suponhamos que $\mathbb{R}_{n,n} \cong \mathbb{R}(2^n)$. Mas, em $\mathbb{R}(2^n)$ temos um subconjunto ortonormal S do tipo $[n,n]$ tal que $\langle\langle S\rangle\rangle = \mathbb{R}(2^n)$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Pelo teorema 14, o conjunto

$$S' = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} : a \in S \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é um subconjunto ortonormal de $\mathbb{R}(2^{n+1})$ do tipo $[n+1, n+1]$ que gera $\mathbb{R}(2^{n+1}) \cong \mathbb{R}(2^n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2)$ como uma álgebra real, ou seja, $\mathbb{R}_{n+1,n+1} \cong \mathbb{R}(2^{n+1})$. ⊠

Teorema 16: (Teorema da existência). Todo espaço ortogonal não-degenerado de dimensão finita, possui uma álgebra Universal de Clifford.

Demonstração: Tendo em vista o Corolário 15, é suficiente mostrar a existência de $\mathbb{R}_{p,q}$ para $p \neq q$ e $p,q \in \mathbb{N}$.

Consideremos $k = \max: \{p,q\}$. Deste modo, $A = \mathbb{R}(2^k)$ é uma álgebra Universal de Clifford para $X = \mathbb{R}^{k,k}$, ou seja, $\mathbb{R}_{k,k} \cong A$. Então, existe uma 2k-upla $(e_i: 1 \leq i \leq 2k = n)$ tal que $S = \{e_I: I \subset \tilde{N}\}$ é linearmente independente. Como $W = \mathbb{R}^{p,q}$ é um subespaço linear de X, então a subálgebra B de A gerada por W é uma álgebra de Clifford para W. Mas $\{e_I: I \subset \tilde{N}\} \subset S$ é linearmente independente, isto é, $\dim B = 2^{p+q}$. Portanto, $\mathbb{R}_{p,q} \cong B$. $\boxtimes$

O teorema seguinte, mostra que uma álgebra pode ser gerada, em geral, por dois conjuntos ortonormais de tipos distintos.

<u>Teorema 17</u>: Seja S um subconjunto ortonormal do tipo $[p+1,q]$ que gera uma álgebra A. Então para todo $a \in S$ tal que $a^2 = 1_{(A)}$, o conjunto $T = \{ba: b \in S\setminus\{a\}\} \cup \{a\}$ é um subconjunto ortonormal do tipo $[q+1,p]$ que gera A.

<u>Demonstração</u>: Seja $S = \{a_1,\dots,a_p, a_{p+1},\dots,a_{p+1+q}\}$,

$$a_i^2 = \begin{cases} 1_{(A)} & \text{para } 1 \leq i \leq p+1 \\ -1_{(A)} & \text{para } p+2 \leq i \leq p+1+q \end{cases} \quad \text{e} \quad a_i a_j = -a_j a_i \text{ para } i \neq j.$$

Afirmamos que:

(1ª) $T_2 = \{a\}$ é do tipo $[1,0]$, pois $a^2 = 1_{(A)}$.

(2ª) $T_1 = \{ba: b \in S\setminus\{a\}\}$ é do tipo $[q,p]$.

Com efeito; fixemos $a = a_i$ para $1 \leq i \leq p+1$. Como $b \in S\setminus\{a\}$, temos para b as seguintes possibilidades:

(i) $b = a_j$ para $p+2 \leq j \leq p+1+q$, neste caso $b^2 = -1_{(A)}$ e $(ba_i)^2 = ba_iba_i = -b^2a_i^2 = 1_{(A)}$, ou seja, q elementos de T_1 cujo quadrado é $1_{(A)}$.

(ii) $b = a_\ell$ para $1 \leq \ell \leq p+1$ com $\ell \neq i$, neste caso, $b^2 = 1_{(A)}$ e

$(ba_i)^2 = ba_iba_i = -b^2a_i^2 = -1_{(A)}$, ou seja, p elementos de T_1 cujo quadrado é $-1_{(A)}$.

(3ª) Os elementos distintos de $T = T_1 \cup T_2$ anti-comutam, pois da associatividade de A e da afirmação (2ª), $(a_ja_i)a_i = -a_i(a_ja_i) = a_j$ e $(a_\ell a_i)a_i = -a_i(a_\ell a_i) = a_\ell$.

(4ª) $T = T_1 \cup T_2$ gera A, pois da afirmação (3ª) e como $<<S>> = A$, temos que $T = \{a_j, a_\ell\} \cup \{a_\ell\} = S$. Portanto, a demonstração do teorema, segue das afirmações anteriores. ☒

Corolário 18: As álgebras Universais de Clifford $\mathbb{R}_{p+1,q}$ e $\mathbb{R}_{q+1,p}$ são isomorfas.

Demonstração: Seja $S = \{a_1,\ldots,a_p, a_{p+1},\ldots,a_{p+1+q}\}$ um subconjunto ortonormal do tipo $[p+1,q]$ tal que $<<S>> = \mathbb{R}_{p+1,q}$ e $S' = \{s_1,\ldots,s_q, s_{q+1},\ldots,s_{q+1+p}\}$ um subconjunto ortonormal do tipo $[q+1,p]$ tal que $<<S'>> = \mathbb{R}_{q+1,p}$. Pelo teorema, podemos construir a partir de S um subconjunto ortonormal $T = \{t_1,\ldots,t_q, t_{q+1},\ldots,t_{q+1+p}\}$ do tipo $[q+1,p]$ tal que $<<T>> = \mathbb{R}_{p+1,q}$. Portanto, basta definir a aplicação $S' \longrightarrow T$; $s_i \longmapsto t_i$ e assim temos $\mathbb{R}_{q+1,p} \cong \mathbb{R}_{p+1,q}$. ☒

Os teoremas seguintes, mostram como determinar $\mathbb{R}_{p,q}$ para $q > 4$, conhecendo a álgebra de menor dimensão $\mathbb{R}_{p,q-4}$, uma vez que, teremos $\mathbb{R}_{p,q} \cong \mathbb{R}_{p,q-4} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{0,4}$.

Teorema 19: Para $q \leq 4$, $\mathbb{R}_{0,q}$ é isomorfa, respectivamente, a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{H}(2)$.

Demonstração: Em cada caso, basta exibir um subconjunto ortonormal do tipo $[0,q]$ tal que o produto dos seus elementos seja diferente de $\pm 1_{(A)}$, onde $1_{(A)}$ representa a unidade da álgebra em questão, e a dimensão de cada álgebra sobre $\mathbb{R}$ igual a 2^q. Desta forma, temos:

$$\phi \text{ para } \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}_{0,0} \cong \mathbb{R} \,,$$

$$\{i\} \text{ para } \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}_{0,1} \cong \mathbb{C} \,,$$

$$\{i,k\} \text{ para } \mathbb{H} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}_{0,2} \cong \mathbb{H} \,,$$

$$\{(i,-i),(j,-j),(k,-k)\} \text{ para } \mathbb{H}^2 \text{ e } \mathbb{R}_{0,3} \cong \mathbb{H}^2 \,,$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ para } \mathbb{H}(2)$$

e $\mathbb{R}_{0,4} \cong \mathbb{H}(2)$. ⊠

Teorema 20: Sejam S e R subconjuntos ortonormais de uma álgebra A com unidade $1_{(A)}$ do tipo $[0,4]$ e $[p,q]$, respectivamente, tal que cada elemento de S anti-comuta com todo elemento de R. Então existe um subconjunto ortonormal R' do tipo $[p,q]$ tal que cada elemento de S comuta com todo elemento de R'. Reciprocamente, a existência de R' implica na existência de R.

Demonstração: Consideremos $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $e_i^2 = -1_{(A)}$, $e_ie_j = -e_je_i$ para $i \neq j$ com $1 \leq i, j \leq 4$ e

$$R = \{r_1,\dots,r_p,r_{p+1},\dots,r_{p+q}\}, \quad r_\ell^2 = \begin{cases} 1_{(A)} & \text{para } 1 \leq \ell \leq p \\ -1_{(A)} & \text{para } p+1 \leq \ell \leq p+q, \end{cases}$$

$r_\ell r_m = -r_m r_\ell$ para $\ell \neq m$ com $1 \leq \ell, m \leq p+q$, tal que $e_i r_\ell = -r_\ell e_i$

para todo $i \neq \ell$. Seja $a = e_1e_2e_3e_4$ e $R' = \{ab: b \in R\}$.

Então, temos que:

(i) $a^2 = 1_{(A)}$, pois A é associativa e os elementos de S anti-comutam,

(ii) $ar_\ell = r_\ell a$, pois $e_ir_\ell = -r_\ell e_i$ para todo $i \neq \ell$,

(iii) $ae_i = -e_ia$, pois $e_ie_j = -e_je_i$ para $i \neq j$.

Como $R' = \{ar_1, \ldots, ar_p, ar_{p+1}, \ldots, ar_{p+q}\}$, temos que para $i \neq \ell \neq m$,
$(ar_\ell)(ar_m) = (ar_\ell)(r_ma) = a(r_\ell r_m)a = -a(r_mr_\ell)a = -(ar_m)(r_\ell a) =$
$= -(ar_m)(ar_\ell)$, isto é, os elementos de R' anti-comutam

$$e\ (ar_\ell)^2 = ar_\ell ar_\ell = a^2r_\ell^2 = \begin{cases} 1_{(A)} & \text{para } 1 \leq \ell \leq p \\ -1_{(A)} & \text{para } p+1 \leq \ell \leq p+q\ . \end{cases}$$

Então R' é um subconjunto ortonormal do tipo $[p,q]$. Além disso, cada elemento de S comuta com todo elemento de R', pois

$e_i(ar_\ell) = (e_ia)r_\ell = -(ae_i)r_\ell = -a(e_ir_\ell) = a(r_\ell e_i) = (ar_\ell)e_i$ para $1 \leq i \leq 4$ e $1 \leq \ell \leq p+q$.

De modo análogo, provamos que a existência de R' implica na existência de R. $\boxtimes$

<u>Corolário 21</u>: Para todo $p,q \in \mathbb{N}$ com $q > 4$,

$$\mathbb{R}_{p,q} \cong \mathbb{R}_{p,q-4} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{0,4}\ .$$

<u>Demonstração</u>: Sejam S e R subconjuntos ortonormais de $\mathbb{R}_{p,q}$ do tipo $[0,4]$ e $[p,q-4]$, respectivamente, tal que cada elemento de S anti-comuta com todo elemento de R, então $R \cup S$ é um subconjunto

ortonormal de $\mathbb{R}_{p,q}$ do tipo [p,q]. Pelo teorema, existe um subconjunto ortonormal R' de $\mathbb{R}_{p,q}$ do tipo [p,q-4] tal que cada elemento de S comuta com todo elemento de R'. Portanto,

$$\mathbb{R}_{p,q} \cong \mathbb{R}_{p,q-4} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{0,4} \cong \mathbb{R}_{p,q-4} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2). \quad \square$$

Exemplo:

$$\mathbb{R}_{0,8} \cong \mathbb{R}_{0,4} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{0,4} \cong \mathbb{H}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}(2) \cong$$

$$\cong \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \cong$$

$$\cong \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}(4) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(4) \cong \mathbb{R}(16).$$

Corolário 22: (Teorema da periodiciade). Para todo $p,q \in N$ com $q > 4$, $\mathbb{R}_{p,q+4} \cong \mathbb{R}_{p,q-4} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16)$.

Demonstração:

$$\mathbb{R}_{p,q+4} \cong \mathbb{R}_{p,q+4-4} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{0,4} \cong$$

$$\cong \mathbb{R}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{0,4} \cong \mathbb{R}_{p,q-4} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{0,4} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{0,4} \cong$$

$$\cong \mathbb{R}_{p,q-4} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16). \quad \square$$

Finalmente, com todos os resultados introduzidos, seguiremos com a construção das álgebras Universais de Clifford $\mathbb{R}_{p,q}$ para $p+q \leq 8$.

Vamos considerar V um espaço linear sobre A e anotar $End_A V = End\, V$, $dim_A V = dim\, V$, $End_A V^2 = End\, V^2$ e $\otimes_{\mathbb{R}} = \otimes$.

Pelo teorema 19, temos:

$$\mathbb{R}_{0,0} \cong \mathbb{R}, \qquad \mathbb{R}_{0,1} \cong \mathbb{C}, \qquad \mathbb{R}_{0,2} \cong \mathbb{H},$$

$\mathbb{R}_{0,3} \cong \mathbb{H}^2$ e $\mathbb{R}_{0,4} \cong \mathbb{H}(2)$.

Pelo Corolário 15, segue que:

$\mathbb{R}_{1,1} \cong \mathbb{R}(2)$, $\mathbb{R}_{2,2} \cong \mathbb{R}(4)$, $\mathbb{R}_{3,3} \cong \mathbb{R}(8)$,

e $\mathbb{R}_{4,4} \cong \mathbb{R}(16)$.

A álgebra real $\mathbb{R}^2$ é uma álgebra Universal de Clifford para $\mathbb{R}^{1,0}$. Com efeito, identificando $\mathbb{R}^{1,0}$ com o subespaço linear gerado por $\{(-1,1)\}$ em $\mathbb{R}^2$, ou seja,

$$\mathbb{R}^{1,0} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \lambda(-1,1),\ \lambda \in \mathbb{R}\} ,$$

temos que $\mathbb{R}^2 = \langle\langle(1,1),\ \mathbb{R}^{1,0}\rangle\rangle$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$,

$$\langle x,x\rangle = \langle\lambda(-1,1),\ \lambda(-1,1)\rangle = -\lambda^2 \text{ e } x^2 = (\lambda^2,\lambda^2) ,$$

então $x^2 = -\langle x,x\rangle\,(1,1)$ para todo $x \in \mathbb{R}^{1,0}$. Obviamente, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Agora, usaremos o teorema 14:

a) $V = \mathbb{C}$ é um espaço linear sobre $A = \mathbb{C}$, $\dim V = 1$, $\mathrm{End}\, V \cong \mathbb{C}$, $S = \{i\}$ é um subconjunto ortonormal de $\mathbb{C}$ do tipo $[0,1]$ e $\langle\langle S\rangle\rangle = \mathbb{C}$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Então o conjunto

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é um subconjunto ortonormal de $\mathrm{End}\, V^2 \cong \mathbb{C}(2)$ do tipo $[1,2]$ e $\langle\langle T\rangle\rangle = \mathbb{C}(2)$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$.

Assim, $\mathbb{C}(2) \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}_{1,2}$.

b) $V = \mathbb{C}^2$ é um espaço linear sobre $A = \mathbb{C}$, $\dim V = 2$, $\mathrm{End}\, V \cong \mathbb{C}(2)$,

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é um subconjunto ortonormal de $\mathbb{C}(2)$ do tipo $[1,2]$ e $<<T>> = \mathbb{C}(2)$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Então

$$T' = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc|cc} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \\ \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \right\}$$

é um subconjunto ortonormal de $\mathrm{End}\, V^2 \cong \mathbb{C}(4)$ do tipo $[2,3]$ e $<<T'>> = \mathbb{C}(4)$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$.

Assim, $\mathbb{C}(4) \cong \mathbb{C}(2) \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}_{2,3}$.

c) $V = \mathbb{C}^4$ é um espaço linear sobre $A = \mathbb{C}$, $\dim V = 4$, $\mathrm{End}\, V \cong \mathbb{C}(4)$.

Do subconjunto T' anterior, obtemos o conjunto

$$T'' = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & -\bar{a} \end{array}\right] : a \in T' \right\} \cup \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] \right\},$$

onde 0 é a matriz nula 4×4 e $1 = I_4$. Então T" é um subconjunto ortonormal de $\mathrm{End}\, V^2 \cong \mathbb{C}(8)$ do tipo $[3,4]$ e $<<T''>> = \mathbb{C}(8)$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Assim, $\mathbb{C}(8) \cong \mathbb{C}(4) \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}_{3,4}$.

d) $V = \mathbb{R}^2$ é um espaço linear sobre $A = \mathbb{R}^2$, $\dim V = 1$, $\mathrm{End}\, V \cong \mathbb{R}^2$, $S = \{(-1,1)\}$ é um subconjunto ortonormal de $\mathbb{R}^2$ do tipo $[1,0]$ e $\langle\langle S\rangle\rangle = \mathbb{R}^2$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Então o conjunto

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} (-1,1) & (0,0) \\ (0,\ 0) & (1,-1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (0,0) & (1,1) \\ (1,1) & (0,0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (0,0) & (-1,-1) \\ (1,1) & (0,0) \end{bmatrix} \right\}$$

é um subconjunto ortonormal de $\mathrm{End}\, V^2 \cong \mathbb{R}^2(2)$ do tipo $[2,1]$ e $\langle\langle T\rangle\rangle = \mathbb{R}^2(2)$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Portanto,

$$\mathbb{R}^2(2) \cong \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}_{2,1}.$$

e) $V = \mathbb{R}^4$ é um espaço linear sobre $A = \mathbb{R}^2$, $\dim V = 2$, $\mathrm{End}\, V \cong \mathbb{R}^2(2)$. Do subconjunto T anterior, obtemos o conjunto

$$R = \left\{ \left[\begin{array}{cc|cc} (-1,1) & (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,-1) & (0,0) & (0,0) \\ \hline (0,0) & (0,0) & (1,-1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) & (-1,1) \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} (0,0) & (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (1,1) & (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ \hline (0,0) & (0,0) & (0,0) & (-1,-1) \\ (0,0) & (0,0) & (-1,-1) & (0,0) \end{array}\right], \right.$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc} (0,0) & (-1,-1) & (0,0) & (0,0) \\ (1,1) & (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ \hline (0,0) & (0,0) & (0,0) & (1,1) \\ (0,0) & (0,0) & (-1,-1) & (0,0) \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} (0,0) & (0,0) & (1,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) & (1,1) \\ \hline (1,1) & (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) & (0,0) \end{array}\right],$$
$$\left. \left[\begin{array}{cc|cc} (0,0) & (0,0) & (-1,-1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) & (-1,-1) \\ \hline (1,1) & (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) & (0,0) \end{array}\right] \right\},$$

que é um subconjunto ortonormal de End $V^2 \cong \mathbb{R}^2(4)$ do tipo [3,2] e $\langle\langle R\rangle\rangle = \mathbb{R}^2(4)$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$.

Então, $\mathbb{R}^2(4) \cong \mathbb{R}^2(2) \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}_{3,2}$.

f) $V = \mathbb{R}^8$ é um espaço linear sobre $A = \mathbb{R}^2$, $\dim V = 4$, End $V \cong \mathbb{R}^2(4)$.

Do subconjunto R anterior, obtemos o conjunto

$$R' = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} b & 0 \\ \hline 0 & -b \end{array}\right] : b \in R \right\} \cup \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] \right\},$$

onde 0 é a matriz nula 4 x 4 cujos elementos são todos (0,0) e 1 é a matriz unidade 4 x 4 cujos elementos da diagonal é (1,1) e os demais (0,0). Então R' é um subconjunto ortonormal de End $V^2 \cong \mathbb{R}^2(8)$ do tipo [4,3] e $\langle\langle R'\rangle\rangle = \mathbb{R}^2(8)$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Assim, $\mathbb{R}^2(8) \cong \mathbb{R}^2(4) \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}_{4,3}$.

g) $V = \mathbb{H}$ é um espaço linear sobre $A = \mathbb{H}$, $\dim V = 1$, End $V \cong \mathbb{H}$, $S = \{i,k\}$ é um subconjunto ortonormal de $\mathbb{H}$ do tipo [0,2] e $\langle\langle S\rangle\rangle = \mathbb{H}$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Então

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é um subconjunto ortonormal de End $V^2 \cong \mathbb{H}(2)$ do tipo [1,3] e $\langle\langle T\rangle\rangle = \mathbb{H}(2)$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Portanto, temos $\mathbb{H}(2) \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}_{1,3}$.

h) $V = \mathbb{H}^2$ é um espaço linear sobre $A = \mathbb{H}$, $\dim V = 2$, End $V \cong \mathbb{H}(2)$.

Do subconjunto T anterior, obtemos o conjunto

$$T' = \left\{ \left[\begin{array}{cc|cc} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \right\},$$

que é um subconjunto ortonormal de End $V^2 \cong \mathbb{H}(4)$ do tipo $[2,4]$ e $\langle\langle T' \rangle\rangle = \mathbb{H}(4)$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$.

Então, $\mathbb{H}(4) \cong \mathbb{H}(2) \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}_{2,4}$.

i) $V = \mathbb{H}^4$ é um espaço linear sobre $A = \mathbb{H}$, $\dim V = 4$, End $V \cong \mathbb{H}(4)$.

Do subconjunto T' anterior, obtemos o conjunto

$$T'' = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & -a \end{array}\right] : a \in T' \right\} \cup \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] \right\},$$

onde 0 é a matriz nula 4×4 e $1 = I_4$. Então T" é um subconjunto ortonormal de End $V^2 \cong \mathbb{H}(8)$ do tipo $[3,5]$ e $\langle\langle T'' \rangle\rangle = \mathbb{H}(8)$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Assim, $\mathbb{H}(8) \cong \mathbb{H}(4) \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}_{3,5}$.

j) $V = \mathbb{H}^2$ é um espaço linear sobre $A = \mathbb{H}^2$, $\dim V = 1$, End $V \cong \mathbb{H}^2$, $S = \{(i,-i), (j,-j), (k,-k)\}$ é um subconjunto ortonormal de $\mathbb{H}^2$ do tipo $[0,3]$ e $\langle\langle S \rangle\rangle = \mathbb{H}^2$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Então

$$R' = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} (i,-i) & (0,0) \\ (0,0) & (-i,i) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (j,-j) & (0,0) \\ (0,0) & (-j,j) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (k,-k) & (0,0) \\ (0,0) & (-k,k) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (0,0) & (1,1) \\ (1,1) & (0,0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (0,0) & (-1,-1) \\ (1,1) & (0,0) \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

é um subconjunto ortonormal de End $V^2 \equiv \mathbb{H}^2(2)$ do tipo $[1,4]$ e $\langle\langle R' \rangle\rangle = \mathbb{H}^2(2)$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$.

Assim, $\mathbb{H}^2(2) \equiv \mathbb{H}^2 \otimes \mathbb{R}(2) \equiv \mathbb{R}_{1,4}$.

k) $V = \mathbb{H}^4$ é um espaço linear sobre $A = \mathbb{H}^2$, $\dim V = 2$, End $V \equiv \mathbb{H}^2(2)$.

Do subconjunto R' anterior, obtemos o conjunto

$$R'' = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} b & 0 \\ \hline 0 & -b \end{array}\right] : b \in R' \right\} \cup \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right] \right\},$$

onde 0 é a matriz nula 2 x 2 cujos elementos são todos (0,0) e 1 é a matriz unidade 2 x 2 cujos elementos da diagonal é (1,1) e os demais (0,0). Então R" é um subconjunto ortonormal de End $V^2 \equiv \mathbb{H}^2(4)$ do tipo $[2,5]$ e $\langle\langle R'' \rangle\rangle = \mathbb{H}^2(4)$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Portanto, temos $\mathbb{H}^2(4) \equiv \mathbb{H}^2(2) \otimes \mathbb{R}(2) \equiv \mathbb{R}_{2,5}$.

Agora, usaremos o corolário 21 e resultados anteriores:

a) $\mathbb{R}_{1,5} \equiv \mathbb{R}_{1,1} \otimes \mathbb{R}_{0,4} \equiv \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H}(2) \equiv \mathbb{H}(4)$.

b) $\mathbb{R}_{2,6} \equiv \mathbb{R}_{2,2} \otimes \mathbb{R}_{0,4} \equiv \mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{H}(2) \equiv \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H}(2) \equiv$

$\equiv \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H}(4) \equiv \mathbb{H}(8)$.

c) $\mathbb{R}_{0,5} \equiv \mathbb{R}_{0,1} \otimes \mathbb{R}_{0,4} \equiv \mathbb{C} \otimes \mathbb{H}(2) \equiv \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \equiv$

$\equiv \mathbb{C}(2) \otimes \mathbb{R}(2) \equiv \mathbb{C}(4)$.

d) $\mathbb{R}_{0,6} \cong \mathbb{R}_{0,2} \otimes \mathbb{R}_{0,4} \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}(2) \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \cong$

$\cong \mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}(8)$.

e) $\mathbb{R}_{0,7} \cong \mathbb{R}_{0,3} \otimes \mathbb{R}_{0,4} \cong \mathbb{H}^2 \otimes \mathbb{H}(2) \cong \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \cong$

$\cong \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(2) \cong$

$\cong \mathbb{R}^2(2) \otimes \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}^2(4) \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}^2(8)$.

f) $\mathbb{R}_{0,8} \cong \mathbb{R}_{0,4} \otimes \mathbb{R}_{0,4} \cong \mathbb{H}(2) \otimes \mathbb{H}(2) \cong \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \cong$

$\cong \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}(8) \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}(16)$.

g) $\mathbb{R}_{1,6} \cong \mathbb{R}_{1,2} \otimes \mathbb{R}_{0,4} \cong \mathbb{C}(2) \otimes \mathbb{H}(2) \cong \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \cong$

$\cong \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{C}(2) \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{C}(4) \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{C}(8)$.

h) $\mathbb{R}_{1,7} \cong \mathbb{R}_{1,3} \otimes \mathbb{R}_{0,4} \cong \mathbb{H}(2) \otimes \mathbb{H}(2) \cong \mathbb{R}(16)$.

Agora, usaremos o corolário 18:

a) $\mathbb{R}_{2,0} \cong \mathbb{R}_{1,1} \cong \mathbb{R}(2)$,

$\mathbb{R}_{3,1} \cong \mathbb{R}_{2,2} \cong \mathbb{R}(4)$,

$\mathbb{R}_{4,2} \cong \mathbb{R}_{3,3} \cong \mathbb{R}(8)$,

$\mathbb{R}_{5,3} \cong \mathbb{R}_{4,4} \cong \mathbb{R}(16)$.

b) $\mathbb{R}_{3,0} \cong \mathbb{R}_{1,2} \cong \mathbb{C}(2)$,

$\mathbb{R}_{4,1} \cong \mathbb{R}_{2,3} \cong \mathbb{C}(4)$,

$\mathbb{R}_{5,2} \cong \mathbb{R}_{3,4} \cong \mathbb{C}(8)$.

c) $\mathbb{R}_{4,0} \cong \mathbb{R}_{1,3} \cong \mathbb{H}(2)$,

$\mathbb{R}_{5,1} \cong \mathbb{R}_{2,4} \cong \mathbb{H}(4)$,

$\mathbb{R}_{6,2} \cong \mathbb{R}_{3,5} \cong \mathbb{H}(8)$.

d) $\mathbb{R}_{5,0} \cong \mathbb{R}_{1,4} \cong \mathbb{H}^2(2)$,

$\mathbb{R}_{6,1} \cong \mathbb{R}_{2,5} \cong \mathbb{H}^2(4)$.

e) $\mathbb{R}_{6,0} \cong \mathbb{R}_{1,5} \cong \mathbb{H}(4)$,

$\mathbb{R}_{7,1} \cong \mathbb{R}_{2,6} \cong \mathbb{H}(8)$.

f) $\mathbb{R}_{7,0} \cong \mathbb{R}_{1,6} \cong \mathbb{C}(8)$.

g) $\mathbb{R}_{8,0} \cong \mathbb{R}_{1,7} \cong \mathbb{R}(16)$.

Na tabela seguinte exibimos as álgebras Universais de Clifford $\mathbb{R}_{p,q}$ para $p+q \leq 8$.

TABELA

AS ÁLGEBRAS $R_{p,q}$ PARA $p+q \leq 8$

$p+q$ \ $-p+q$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0									$\mathbb{R}$								
1								$\mathbb{R}^2$		$\mathbb{C}$							
2							$\mathbb{R}(2)$		$\mathbb{R}(2)$		$\mathbb{H}$			...			
3						$\mathbb{C}(2)$		$\mathbb{R}^2(2)$		$\mathbb{C}(2)$		$\mathbb{H}^2$					
4					$\mathbb{H}(2)$		$\mathbb{R}(4)$		$\mathbb{R}(4)$		$\mathbb{H}(2)$		$\mathbb{H}(2)$				
5				$\mathbb{H}^2(2)$		$\mathbb{C}(4)$		$\mathbb{R}^2(4)$		$\mathbb{C}(4)$		$\mathbb{H}^2(2)$		$\mathbb{C}(4)$			
6			$\mathbb{H}(4)$		$\mathbb{H}(4)$		$\mathbb{R}(8)$		$\mathbb{R}(8)$		$\mathbb{H}(4)$		$\mathbb{H}(4)$		$\mathbb{R}(8)$		
7		$\mathbb{C}(8)$		$\mathbb{H}^2(4)$		$\mathbb{C}(8)$		$\mathbb{R}^2(8)$		$\mathbb{C}(8)$		$\mathbb{H}^2(4)$		$\mathbb{C}(8)$		$\mathbb{R}^2(8)$	
8	$\mathbb{R}(16)$		$\mathbb{H}(8)$		$\mathbb{H}(8)$		$\mathbb{R}(16)$		$\mathbb{R}(16)$		$\mathbb{H}(8)$		$\mathbb{H}(8)$		$\mathbb{R}(16)$		$\mathbb{R}(16)$

CAPÍTULO IV - APLICAÇÕES

Neste capítulo, faremos duas aplicações dos resultados obtidos anteriormente. A primeira mostra que as transformações ortogonais de um espaço linear X, também podem ser descritas na linguagem interna de uma álgebra A (isto é, por meio de operações em A). A segunda é determinar em $\mathbb{R}(n)$ conjuntos ortonormais do tipo $[0,s]$ com s maior possível.

Primeira aplicação: Construção do recobrimento do grupo $\mathrm{Spin}(n,\mathbb{R})$ pelo grupo $SO(n,\mathbb{R})$.

Por todo este capítulo, X é um espaço ortogonal real não-degenerado de dimensão finita, A álgebra Universal de Clifford para X e U(A) o subgrupo de A formado pelos elementos inversíveis de A.

Grupo de Clifford

O grupo de Clifford de X em A, anotado por $\Gamma(X)$ ou Γ, é o conjunto $\Gamma = \{g \in A,\ g \in U(A) : g x \hat{g}^{-1} \in X,\ \forall x \in X\}$, onde $g \longmapsto \hat{g}$ é o automorfismo de A induzido por $\hat{e}_I = (-1)^{\#I} e_I$.

Note que, Γ é um subgrupo de U(A). Se $g \in \Gamma$, a aplicação $\rho_{X,g} : X \longrightarrow X;\ x \longmapsto g x \hat{g}^{-1}$ para todo $x \in X$ é um automorfismo de X. Além disso,

$$\langle \rho_{X,g}(x), \rho_{X,g}(x)\rangle\, 1_{(A)} = \langle g x \hat{g}^{-1}, g x \hat{g}^{-1}\rangle\, 1_{(A)} =$$

$$= -(g x \hat{g}^{-1})^2 = \widehat{(g x g^{-1}}\, g x \hat{g}^{-1}) = -(\hat{g} x^2 \hat{g}^{-1}) = -(\hat{g}\hat{g}^{-1} x^2) =$$

$$= -x^2 = \langle x,x\rangle\, 1_{(A)}\ ,\ \text{isto é, } \rho_{X,g} \in O(X).$$

Agora, definimos a aplicação linear $- : A \longrightarrow A;\ a \longmapsto a^-$ do seguinte modo: para cada elemento básico e_I de A, $e_I^- = (-1)^{\# I}\, e_{\hat{I}}$ (lembramos que $\hat{I}$ é o conjunto $I \subset \tilde{N}$ com a ordem reversa de I). Logo, as seguintes propriedades são imediatas:

(1) $x^- = -x$ e $(x^-)^- = x$ para todo $x \in X$,

(2) $(a^-)^- = a$ para todo $a \in A$,

(3) $(ab)^- = b^- a^-$ para todo $a,b \in A$.

<u>A aplicação N</u>.

Seja $N: A \longrightarrow A$ definida pela fórmula $N(a) = a^- a$ para todo $a \in A$. Observamos que:

(i) Para todo $a \in X$ temos $N(a) = a^- a = -a^2 = \langle a,a \rangle\, 1_{(A)} \in \mathbb{R}.1_{(A)}$, ou seja, a restrição de N a X é um número real;

(ii) Para todos $a,b \in X$ temos $N(ab) = (ab)^-(ab) = (b^- a^-)(ab) = b^-(a^- a)b$, em vista de (i), $N(ab) = (a^- a)(b^- b) = N(a)\, N(b)$;

(iii) $N(1_{(A)}) = 1_{(A)}$.

<u>Teorema 23</u>: A aplicação $\rho_X: \Gamma \longrightarrow O(X);\ g \longmapsto \rho_{X,g}$ é um homomorfismo sobrejetivo.

<u>Demonstração</u>: Sejam $g,h \in \Gamma$. Então, para todo $x \in X$ temos

$$\rho_{X,gh}(x) = (gh)\, x\, (\widehat{gh})^{-1} = (gh)\, x\, (\hat{h}^{-1}\hat{g}^{-1}) = g(h\, x \hat{h}^{-1})\, \hat{g}^{-1} =$$

$$= \rho_{X,g}(h\, x \hat{h}^{-1}) = \rho_{X,g}(\rho_{X,h}(x)) = (\rho_{X,g}\, \rho_{X,h})(x) ,$$

ou seja, ρ_X é um homomorfismo.

Em virtude da forma de Jordan para matrizes ortogonais (resultado conhecido da álgebra linear), cada transformação ortogonal é obtida de um número finito de reflexões em hiperplanos de X. Para provar a sobrejetividade de ρ_X, é suficiente mostrar que para cada hiperplano de X (que é perpendicular a certo $x \in X$) a conjugação $\rho_{X,g}$ induz em X uma reflexão neste hiperplano. Para cada x invertível em X, temos que $x^2 = -<x,x>\, 1_{(A)}$ que é equivalente a $x^{-1} = -\left(\frac{1_{(A)}}{<x,x>}\right)x$. Dado qualquer $y \in X$, temos que

$$xy = -yx - 2<x,y>\, 1_{(A)} ,$$

$$xyx^{-1} = -y - 2<x,y>\, x^{-1} ,$$

$$xyx^{-1} = -y + 2\,\frac{<x,y>}{<x,x>}\, x \in X .$$

Então, $\rho_{X,x}(y) = -y$ se y é perpendicular a x, isto é, $\rho_{X,x}$ é uma reflexão no hiperplano perpendicular a x. $\boxtimes$

O Grupo Spin.

Definimos o subgrupo Γ^o de Γ, como sendo a imagem inversa de SO(X) por ρ_X ($\Gamma^o = \rho_X^{-1}\{SO(X)\}$) e o subgrupo $Spin(X) = \{g \in \Gamma^o : |N(g)| = 1\}$.

Portanto, pelo teorema segue que dado qualquer $\Phi \in SO(X)$ existe $g \in \Gamma^o$ tal que $\Phi(x) = g x \hat{g}^{-1} = \rho_{X,g}(x)$ para todo $x \in X$. Quando $X = \mathbb{R}^{o,q}$ ($0+q = n$), denotamos

$$Spin(X) = Spin(n, \mathbb{R}) = Spin(n) ,$$

$$\Gamma^o = \Gamma^o(n) \text{ e } SO(X) = SO(n, \mathbb{R}) = SO(n).$$

Seja S^{n-1} a esfera unitária em $\mathbb{R}^{o,n}$, isto é, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^{o,n} : |x| = 1\}$. Note que, $Spin(1) = S^o$, $Spin(2) = S^1$ e $Spin(3) = S^3$.

<u>Segunda Aplicação</u> - Construção da Seqüência de Radon-Hurwitz.

A seqüência de Radon-Hurwitz, anotada por $\chi(n)$, é a seqüência que pode ser definida da seguinte maneira: $\chi(n)$ é o número maximal de elementos de um conjunto ortonormal S contido em $\mathbb{R}(n)$ do tipo $[0,t]$. Isto significa que para $t = \chi(n)$ o conjunto ortonormal do tipo $[0,\chi(n)]$ está contido em $\mathbb{R}(n)$, mas para $t > \chi(n)$ nenhum conjunto ortonormal do tipo $[0,t]$ está contido em $\mathbb{R}(n)$.

A origem desta questão é topológica e trata do número de campos vetoriais lineares que são tangenciais a esfera S^{n-1}. Definimos um k-campo vetorial linear ($k \in \mathbb{N}^*$) tangencial a S^{n-1}, como sendo a escolha de k vetores fixos em cada ponto $x \in S^{n-1}$ todos perpendiculares a x, que dependem linearmente de x (isto é, os k vetores fixos são expressos por equações lineares homogêneas em coordenadas de x) e constituem um conjunto ortonormal. Este conceito na linguagem de produto escalar, significa dizer: buscamos para cada $x \in S^{n-1}$, k vetores $V_i(x)$ com $1 \leq i \leq k$ da forma $V_i(x) = M_i x$ onde $M_i \in \mathbb{R}(n)$. As condições $\langle x, V_i(x)\rangle = 0$ e $\langle V_i(x), V_j(x)\rangle = \delta_{ij}$, transformam-se nas seguintes condições impostas sobre as matrizes M_i: $M_i^2 = -I_n$, $M_i^T = -M_i$ e $M_iM_j = -M_jM_i$ para $i \neq j$ com $1 \leq i, j \leq k$. Portanto, vemos que a existência de um k-campo vetorial linear sobre S^{n-1} é equivalente a existência de um conjunto ortonormal do tipo $[0,k]$ em $\mathbb{R}(n)$.

Decompondo n na forma $n = u \cdot 2^k$ onde $u = 2\ell + 1$ é ímpar, $k = 4a + b$ com $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \{0,1,2,3\}$. Temos que

$$\mathbb{R}(n) = \mathbb{R}(u) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2^k) = \mathbb{R}(u) \otimes_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{R}(16) \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16)}_{a\text{ - cópias}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2^b).$$

Agora, vamos determinar um conjunto ortonormal do tipo $[0,t]$ em $\mathbb{R}(n)$ procurando conjuntos ortonormais do tipo $[0,s]$ em cada componente desse produto tensorial. Observamos o seguinte:

1) $\mathbb{R}(u)$ não possui conjunto ortonormal do tipo $[0,s]$ com $s > 0$, pois não existe em dimensão ímpar uma matriz E tal que $E^2 = -I_u$, já que teríamos $-1 = (-1)^u = \det(-I_u) = \det(E^2) = (\det(E))^2$.

2) O teorema 20 afirma que (considerando de maneira pouco formal, mas com sentido claro) a seguinte regra para "adição" de conjuntos ortonormais é válida:

$$[0,4] \cup [p,q] \equiv [p, 4+q] .$$

Aplicando esta "adição" para $\mathbb{R}(16) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2^b)$, temos que o conjunto ortonormal do tipo $[0,s]$ com s máximo em $\mathbb{R}(16)$ é do tipo $[0,8]$. Se o conjunto ortonormal do tipo $[0,s]$ está em $\mathbb{R}(2^b)$, então em $\mathbb{R}(16) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2^b)$ temos um conjunto do tipo

$$[0,8] \cup [0,s] \equiv ([0,4] \cup [0,4]) \cup [0,s] \equiv$$

$$\equiv [0,4] \cup ([0,4] \cup [0,s]) \equiv [0,4] \cup [0,4+s] \equiv [0,8+s].$$

Por inclusão, tem-se que

$$\underbrace{\mathbb{R}(16) \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16)}_{a\text{ - cópias}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2^b)$$

admite um conjunto ortonormal do tipo $[0, 8a+s]$.

3) Para $b = 0$, temos $s = 0$. Para $b = 1$, temos o conjunto ortonormal $\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ do tipo $[0,1]$ em $\mathbb{R}(2)$. Para $b = 2$, te-

mos em $\mathbb{R}(4)$ a expressão matricial do conjunto ortonormal $\{i,j,k\}'$ o qual é do tipo $[0,3]$. Finalmente, para $b = 3$, temos pela tabela da página 42 um conjunto ortonormal do tipo $[0,6]$ em $\mathbb{R}(8)$, mas pelas observações da demonstração do teorema 10, notamos que $\mathbb{R}(8)$ serve também como uma álgebra de Clifford (não-universal) para $\mathbb{R}^{0,7}$ com um conjunto ortonormal do tipo $[0,7]$, visto que a condição de que 4 divide $0-7-1 = -8$ é satisfeita. Juntando estes resultados, temos a seguinte tabela:

b	0	1	2	3
s(b)	0	1	3	7

.

Notemos que estes valores, podem ser convenientemente expressos na forma $s(b) = 2^b - 1$. Portanto, provamos a seguinte afirmação:

Teorema: Se $n = u \cdot 2^{4a+b}$ com u, a e b satisfazendo as condições anteriores, então vale a desigualdade $\chi(n) \geq 8a + 2^b - 1$. ◪

A desigualdade $\chi(n) \leq 8a + 2^b - 1$, também é válida (isto é, $\chi(n) = 8a + 2^b - 1$), mas a demonstração deste fato ultrapassa os objetivos deste trabalho (para a demonstração original Veja [3]).

ÍNDICE DE NOÇÕES

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

BIBLIOGRAFIA

[1] GREUB, W. Multilinear Algebra. Springer-Verlag, 2nd Ed., 1978.

[2] PORTEOUS, I.R. Topological Geometry. Cambridge University Press, 2nd Ed., 1981.

[3] HURWITZ, A. Uber die Komposition der Quadratischen Formen. Math. Ann. 88, 1923, p. 1-25.

[4] O'MEARA, O.T. Introduction to Quadratic Forms. Springer-Verlag, 3rd Ed., 1973.