

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

MIGRAÇÃO DE UMIDADE CAUSADA POR GRADIENTES TÉRMICOS ENTRE DUAS
FRONTEIRAS IMPERMEÁVEIS CONTENDO UM MEIO POROSO NÃO SATURADO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

LIGIA SILVA DAMASCENO FERREIRA

FLORIANÓPOLIS, NOVEMBRO - 1987

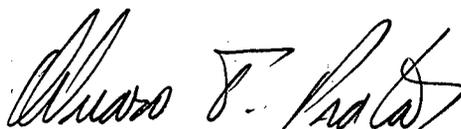
MIGRAÇÃO DE UMIDADE CAUSADA POR GRADIENTES TÉRMICOS ENTRE DUAS
FRONTEIRAS IMPERMEÁVEIS CONTENDO UM MEIO POROSO NÃO SATURADO

LIGIA SILVA DAMASCENO FERREIRA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

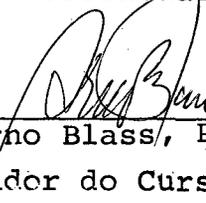
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO CIÊNCIAS
TÉRMICAS, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA



Prof. Alvaro Toubes Prata, Ph.D.

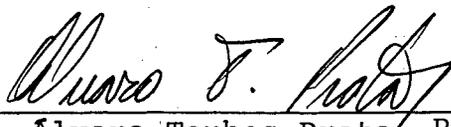
Orientador



Prof. Arno Blass, Ph.D.

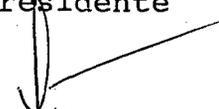
Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA:

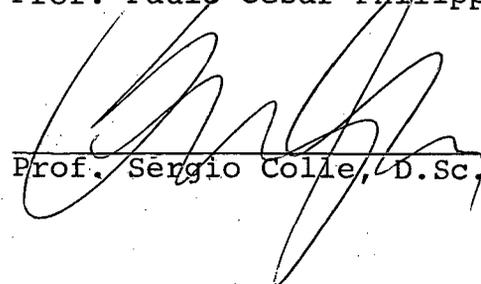


Prof. Alvaro Toubes Prata, Ph.D.

Presidente



Prof. Paulo César Philippi, Dr. Ing.



Prof. Sergio Colie, D.Sc.

Ao meu pai e à minha mãe,
pelo apoio e amor.

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Álvaro Toubes Prata pela competência, seriedade e dedicação na orientação deste trabalho e, também, pelo apoio, estímulo e amizade, tornando este período de convívio extremamente agradável e profícuo.

- Ao colega César, com quem compartilhei os momentos difíceis, por sua maravilhosa e imprescindível amizade.

- Ao Jun, pela presença, apoio e colaboração nos momentos finais, e cuja amizade é inestimável.

- Aos Professores Arno Blass e Paulo César Philippi, pelo respeito e consideração com que sempre me distingüiram.

- À Pirelli S. A. - Divisão de Cabos, pelo apoio financeiro. Em especial à pessoa do Engenheiro Geraldo de Almeida, Gerente do Laboratório de Pesquisas, por valorizar e efetivamente estimular trabalhos de pesquisa.

- À Verinha, pelo carinho e dedicação.

- À CAPES, pelo apoio financeiro.

- A todos os amigos, próximos ou não, pelo apoio moral.

- À minha família, pela torcida.

ÍNDICE

RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	xiii
SIMBOLOGIA	xv
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2 - EQUAÇÕES BÁSICAS PARA MEIOS POROSOS NÃO SATURA-	
DOS	11
2.1 - Introdução	11
2.2 - Mecanismo Físico do Transporte de Umidade	11
2.3 - Equação do Transporte de Massa	17
2.4 - Equação do Transporte de Calor	21
2.5 - Formulação Paramétrica	23
CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO PARAMÉTRICA	27
3.1 - Introdução	27
3.2 - Geometria Plana	27
3.2.1 - Modelo a Propriedades Variáveis	28
3.2.2 - Modelo Paramétrico	30
3.3 - Geometria Cilíndrica	32
3.3.1 - Modelo a Propriedades Variáveis	33

3.3.2 - Modelo Paramétrico	34
CAPÍTULO 4 - METODOLOGIA DE SOLUÇÃO	36
4.1 - Introdução	36
4.2 - Fase Umida	37
4.3 - Fase Seca	39
4.3.1 - Discretização da Equação Governante	47
4.4 - Geometria Cilíndrica	55
4.5 - Modelo a Propriedades Variáveis	61
CAPÍTULO 5 - RESULTADOS PARA A FORMULAÇÃO PARAMÉTRICA	62
5.1 - Geometria Plana	62
5.2 - Geometria Cilíndrica	75
CAPÍTULO 6 - RESULTADOS DA COMPARAÇÃO ENTRE OS DOIS MODELOS .	89
6.1 - Geometria Plana	92
6.2 - Geometria Cilíndrica	102
CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES	115
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	119
APÊNDICE A - EQUAÇÕES PARA AS PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS E DI- FUSIVAS	123
APÊNDICE B - EQUIVALÊNCIA ENTRE OS MODELOS DE ECKERT-FAGHRI E DE HARTLEY E COUVILLION	133
APÊNDICE C - DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES	143

RESUMO

O presente trabalho investiga o fenômeno da migração de umidade devido a gradientes térmicos entre duas fronteiras impermeáveis contendo um meio poroso não saturado. Sua motivação advém da necessidade de se conhecer o processo de secagem que ocorre em solos que envolvem cabos de potência aterrados. Dois modelos são analisados. O primeiro é uma análise paramétrica onde as propriedades difusivas e termofísicas do meio são constantes, enquanto que o segundo considera a variação das propriedades com a temperatura e o conteúdo de umidade. Ambos os modelos são aplicados a duas geometrias, plana e cilíndrica, e resolvidos numericamente. O objetivo principal deste trabalho é verificar o erro associado à utilização de propriedades constantes. Os resultados para os dois modelos foram comparados para quatro valores de umidade inicial, 0,026, 0,103, 0,155 e 0,206 e três diferenças de temperatura entre as fronteiras, 1, 5 e 10°C. Os desvios associados à análise paramétrica aumentam com o aumento do gradiente de temperatura. Além disto, a discrepância entre os dois modelos é maior para conteúdos de umidade próximos àquele onde começa a existir continuidade da fase líquida. Para o meio analisado no presente trabalho esta umidade é em torno de 0,13. Recomenda-se, assim, o uso do modelo paramétrico para gradientes de temperatura baixos e/ou para solos muito secos ou muito úmidos. Para os demais casos, o modelo paramétrico serve como uma primeira aproximação do problema.

ABSTRACT

An analysis of the moisture transport phenomena due to thermal gradients between two impermeable boundaries containing an unsaturated porous medium has been performed. The main motivation of the present work comes from the necessity of understanding the drying process that occurs around buried power cables. Two models were employed in the formulation of the problem. In the first model a parametric analysis was performed where the transport properties of the medium were assumed to be constant. For the other model considered properties variation with temperature and moisture content were taken in account. Both models were applied to cartesian and cylindrical geometries. The main focus of the work is to verify the deviation associated with the constant properties model. The results of the two models were compared for four values of the initial moisture contents, 0,026, 0,103, 0,155 and 0,206, and three temperature differences between the boundaries, 1, 5 and 10°C. The error associated with the parametric analysis becomes larger as the temperature gradients increases. Besides this, the discrepancy between the two models is larger for moisture contents near those where the continuity of the liquid phase start existing. For the porous medium analysed in this work this moisture content is around 0,13. From the results it is allowed to recommend the parametric model for low temperature gradients and/or for very dry or very wet soils. For the others situations, the parametric model can be used as a first approximation of the problem.

LISTA DE FIGURAS

	Pag.
Fig. 2.1 - Ascensão do líquido em um tubo devido ao efeito da capilaridade	12
Fig. 2.2 - Curva típica do potencial de sucção ψ em função do conteúdo de umidade	14
Fig. 2.3 - Pontes de líquido entre os grãos em um meio poroso relativamente seco	15
Fig. 2.4 - Dois meniscos da ponte de líquido formada entre dois grãos	16
Fig. 3.1 - Geometria de paredes planas	28
Fig. 3.2 - Geometria cilíndrica	32
Fig. 4.1 - Localização da frente de secagem para dois instantes de tempo; geometria plana	40
Fig. 4.2 - Perfis de umidade para dois instantes de tempo	41
Fig. 4.3 - Domínio da solução para um dado tempo ζ	44
Fig. 4.4 - Volume de controle característico utilizado na discretização do domínio da solução	48
Fig. 4.5 - Primeiro volume de controle da discretização do domínio da solução	53
Fig. 4.6 - Localização da frente de secagem para dois instantes de tempo; geometria cilíndrica	55
Fig. 5.1 - Desenvolvimento da temperatura em função do tempo para três posições distintas, tendo Lu como parâmetro	66

Fig. 5.2 - Umidade adimensional junto à parede quente em função do tempo adimensional ζ , tendo Lu como parâmetro 68

Fig. 5.3 - Localização da frente de secagem ξ/L em função do tempo, tendo Pn como parâmetro 70

Fig. 5.4 - Desenvolvimento dos perfis de temperatura (a) e de umidade (b) para baixos valores de ζ 72

Fig. 5.5 - Desenvolvimento da temperatura em função do tempo para três posições distintas, tendo Lu como parâmetro 79

Fig. 5.6 - Umidade adimensional junto à superfície do cabo em função do tempo adimensional, tendo Lu como parâmetro 82

Fig. 5.7 - Umidade adimensional θ/θ_i ao longo de r/r_e tendo o tempo como parâmetro de curva 83

Fig. 5.8 - Umidade adimensional θ/θ_i em função da posição da frente de secagem tendo o tempo como parâmetro; $Pn = 1,5$ 85

Fig. 5.9 - Umidade adimensional θ/θ_i em função da posição da frente de secagem tendo o tempo como parâmetro; $Pn = 2,0$ 86

Fig. 5.10 - Umidade adimensional θ/θ_i em função da posição da frente de secagem tendo o tempo como parâmetro; $Pn = 2,5$ 86

Fig. 5.11 - Umidade adimensional θ/θ_i em função da posição da frente de secagem tendo o tempo como parâmetro; $Pn = 3,0$ 87

Fig. 5.12 - Localização da frente de secagem ξ/r_e em função do tempo tendo Pn como parâmetro 88

Fig. 6.1 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,026$ e $\Delta T=1^\circ C$	93
Fig. 6.2 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,026$ e $\Delta T=5^\circ C$	93
Fig. 6.3 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,026$ e $\Delta T=10^\circ C$	94
Fig. 6.4 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,103$ e $\Delta T=1^\circ C$	94
Fig. 6.5 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,103$ e $\Delta T=5^\circ C$	95
Fig. 6.6 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,103$ e $\Delta T=10^\circ C$	95
Fig. 6.7 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,155$ e $\Delta T=1^\circ C$	96
Fig. 6.8 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,155$ e $\Delta T=5^\circ C$	96
Fig. 6.9 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,155$ e $\Delta T=10^\circ C$	97
Fig. 6.10- Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,206$ e $\Delta T=1^\circ C$	97
Fig. 6.11- Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,206$ e $\Delta T=5^\circ C$	98
Fig. 6.12- Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,206$ e $\Delta T=10^\circ C$	98
Fig. 6.13- Umidade adimensional θ/θ_i junto à superfície aquecida em função do tempo, tendo ΔT como parâmetro; $\theta_i=0,026$	103

- Fig. 6.14- Umidade adimensional θ/θ_i junto à superfície aquecida em função do tempo, tendo ΔT como parâmetro; $\theta_i=0,103$ 103
- Fig. 6.15- Umidade adimensional θ/θ_i junto à superfície aquecida em função do tempo, tendo ΔT como parâmetro; $\theta_i=0,155$ 104
- Fig. 6.16- Umidade adimensional θ/θ_i junto à superfície aquecida em função do tempo, tendo ΔT como parâmetro; $\theta_i=0,206$ 104
- Fig. 6.17- Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,026$ e $\Delta T=1^\circ\text{C}$ 106
- Fig. 6.18- Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,026$ e $\Delta T=5^\circ\text{C}$ 106
- Fig. 6.19- Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,026$ e $\Delta T=10^\circ\text{C}$ 107
- Fig. 6.20- Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,103$ e $\Delta T=1^\circ\text{C}$ 107
- Fig. 6.21- Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,103$ e $\Delta T=5^\circ\text{C}$ 108
- Fig. 6.22- Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,103$ e $\Delta T=10^\circ\text{C}$ 108
- Fig. 6.23- Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,155$ e $\Delta T=1^\circ\text{C}$ 109
- Fig. 6.24- Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,155$ e $\Delta T=5^\circ\text{C}$ 109
- Fig. 6.25- Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,155$ e $\Delta T=10^\circ\text{C}$ 110
- Fig. 6.26- Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,206$ e $\Delta T=1^\circ\text{C}$ 110

Fig. 6.27-	Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,206$ e $\Delta T=5^\circ C$	111
Fig. 6.28-	Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i=0,206$ e $\Delta T=10^\circ C$	111
Fig. 6.29-	Umidade adimensional θ/θ_i junto ao cabo em função do tempo, tendo ΔT como parâmetro; $\theta_i=0,026$	113
Fig. 6.30-	Umidade adimensional θ/θ_i junto ao cabo em função do tempo, tendo ΔT como parâmetro; $\theta_i=0,103$	113
Fig. 6.31-	Umidade adimensional θ/θ_i junto ao cabo em função do tempo, tendo ΔT como parâmetro; $\theta_i=0,155$	114
Fig. 6.32-	Umidade adimensional θ/θ_i junto ao cabo em função do tempo, tendo ΔT como parâmetro; $\theta_i=0,206$	114
Fig. C.1 -	Volume de controle característico.....	144

LISTA DE TABELAS

	Pag.
Tabela 5.1 - Valores de $\theta(X=0)$ para malhas com 40, 80 e 120 pontos; $Lu=0,004$	63
Tabela 5.2 - Valores da frente de secagem ξ/L para malhas com 40, 80 e 120 pontos; $Pn=2,5$	64
Tabela 5.3 - Duração da fase úmida para malhas com 40, 80 e 120 pontos e para $\Delta\zeta=0,00005$ e $0,00001$; $Lu=0,004$ e $Pn=2,5$	64
Tabela 5.4 - Desvio percentual máximo entre a distribuição de temperatura no início da fase seca e aquela correspondente ao regime permanente	67
Tabela 5.5 - Duração da fase úmida para diferentes valores de Lu e Pn ; geometria plana	69
Tabela 5.6 - Valores de $\theta (R=r_c/r_e)$ para malhas com 40, 80 e 120 pontos; $Lu=0,004$	76
Tabela 5.7 - Valores da frente de secagem ξ/r_e para malhas com 40, 80 e 120 pontos; $Pn=2,0$	77
Tabela 5.8 - Duração da fase úmida para malhas com 40, 80 e 120 pontos, para $\zeta=0,00005$ e $0,000001$; $Lu=0,004$ e $Pn=2,0$	78
Tabela 5.9 - Duração da fase úmida para malhas com 40, 80 e 120 pontos e para $\Delta\zeta=0,00005$ e $0,000001$; $Lu=0,02$ e $Pn=2,5$	78
Tabela 5.10 - Desvio percentual máximo entre a distribuição de temperatura no início da fase seca e aquela correspondente ao regime permanente	81

Tabela 5.11 - Duração da fase úmida para diferentes valores de Lu e Pn; geometria cilíndrica	84
Tabela 6.1 - Números de Posnov para cada par $\theta_i, \Delta T$	90
Tabela 6.2 - Números de Luikov para cada θ_i	91
Tabela 6.3 - Números de Luikov e Posnov avaliados na temperatura média em função de θ_i ; $\Delta T=10^\circ\text{C}$	91
Tabela A.1 - Valores das propriedades difusivas e dos números adimensionais em função do conteúdo de umidade; $\Delta T=40^\circ\text{C}$	131
Tabela A.2 - Valores das propriedades difusivas e dos números adimensionais em função da temperatura; $\theta_i=0,103$ e $\Delta T=40^\circ\text{C}$	132

SIMBOLOGIA

a, a^*	Coeficientes da equação discretizada
C	Capacidade calorífica
c	Calor específico
D_{13}	Difusividade molecular modificada do vapor no ar, eq. (A.2)
D_{TL}	Difusividade do líquido devido ao gradiente de temperatura, eq. (2.9)
D_{TV}	Difusividade do vapor devido ao gradiente de temperatura, eqs. (A.3) e (2.14)
$D_{\theta L}$	Difusividade do líquido devido ao gradiente de umidade, eqs. (A.5) e (2.8)
$D_{\theta V}$	Difusividade do vapor devido ao gradiente de umidade, eqs. (A.4) e (2.13)
D_{θ}	Difusividade da umidade devido ao gradiente de umidade, $(D_{\theta L} + D_{\theta V})$
h	Entalpia; umidade relativa, eq. (A.18)
J	Fluxo total, eq. (4.28)
j	Fluxo total de umidade
K_s	Permeabilidade de saturação
K_{rl}	Permeabilidade relativa do líquido
k_*	Condutibilidade térmica
L	Comprimento característico do problema
Lu	Número de Luikov, eq. (2.29)
\dot{M}	Velocidade da frente de secagem, eq. (4.27)
P	Pressão
Pn	Número de Posnov, eq. (2.25)

R	Coordenada Cilíndrica adimensional, eq. (3.13); constante dos gases perfeitos
r	Coordenda Cilíndrica
T	Temperatura
ΔT	Diferença de temperatura característica do problema
t	Tempo
Δt	Intervalo de tempo
X	Coordenada retangular adimensional, eq. (3.6)
x	Coordenada retangular
X_T	Localização da frente de calor, Fig. 5.4
X_θ	Localização da frente de umidade, Fig. 5.4

SÍMBOLOS GREGOS

α	Difusividade térmica, eq. (2.23)
ζ	Tempo adimensional, eq. (2.24)
$\Delta \zeta$	Intervalo de tempo adimensional
η	Coordenada transformada, eqs. (4.18) e (4.53)
$\Delta \eta$	Comprimento do volume de controle, Fig. 4.4
θ	Conteúdo de umidade adimensional, eqs. (2.26) e (4.10)
$\bar{\theta}$	Conteúdo de umidade adimensional acumulado na região entre ξ_t^* e $\xi_{t+\Delta t}^*$
θ	Conteúdo de umidade
$\bar{\theta}$	Conteúdo de umidade acumulado na região entre ξ_t^* e $\xi_{t+\Delta t}^*$
λ	Condutibilidade térmica
μ	Viscosidade dinâmica
ν	Fator de fluxo de massa
ξ	Localização adimensional da frente de secagem, eqs. (4.10) e (4.53)

ξ^*	Localização da frente de secagem
ρ	Massa específica
T	Temperatura adimensional, eq. (2.24)
ψ	Potencial de sucção
∇	Operador nabla
∇_*	Operador nabla adimensionalizado em relação a L

SUB-ÍNDICES

1	Vapor
2	Líquido
3	Ar
21	Vaporização
c	Cabo
E	Avaliado em E, de acordo com a Fig. 4.4
e	Avaliado em e, de acordo com a Fig. 4.4; externo
g	Mistura gasosa
i	Inicial
o	Referência
P	Avaliado em P, de acordo com a Fig. 4.4
s	Vapor saturado
sol	Solo seco
t	Avaliado no tempo t
t+ Δt	Avaliado no tempo t+ Δt
W	Avaliado em W, de acordo com a Fig. 4.4
w	Avaliado em w de acordo com a Fig. 4.4
ζ	Avaliado no tempo ζ
$\zeta+\Delta\zeta$	Avaliado no tempo $\zeta+\Delta\zeta$
ξ, ξ^*	Avaliado na frente de secagem ξ, ξ^*

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Materiais porosos estão presentes praticamente em todas as situações, no cotidiano, na tecnologia e na natureza. A exceção de metais, algumas rochas densas e alguns plásticos, virtualmente todos os materiais sólidos e semi-sólidos são porosos com maior ou menor intensidade.

Um material poroso deve conter espaços livres de sólidos, chamados poros, distribuídos no interior da matriz sólida. Estes poros usualmente são preenchidos com algum tipo de fluido, tal como ar, água, óleo, etc., ou com uma combinação deles. Além disto, deve ser um meio permeável, isto é, deve permitir a migração de fluidos em seu interior. Esta restrição exclui desta classificação alguns polímeros, que apesar de possuírem poros, estes não são interligados.

A definição acima sugere muitos exemplos. Na natureza, a respiração dos seres humanos dá-se, em parte, através dos poros de sua pele; ossos e pulmões são formadas por raras e elaboradas estruturas porosas. Materiais de construção tais como tijolos, concreto, arenito; materiais isolantes; madeiras; solos, etc.

Exemplos da importância do estudo de meios porosos estão presentes em diferentes áreas: em processos químicos tais como secagem e umidificação de materiais, na engenharia petroquímica, na produção e exploração de petróleo e gás natural, em edificações, no estudo do conforto térmico, na agricultura e agronomia, no es-

tudo da alteração do solo em função do conteúdo de umidade, na hidrologia, para a estimação de recursos de água, na utilização do solo como dissipador ou isolante de energia em cabos elétricos ou em linhas de vapor aterrados e em vários outros processos.

No presente trabalho, o meio poroso encontra-se não saturado e contém água, vapor d'água e ar nos interstícios da matriz sólida. Este é o caso, por exemplo, dos solos e dos materiais de construção civil.

A análise dos fenômenos de transporte que ocorrem em materiais porosos não saturados é extremamente difícil em decorrência de diversos fatores: a própria estrutura do meio e a complexa distribuição dos vazios; a coexistência de diversas fases em mudança de estado físico; a grande dependência das propriedades difusivas e termofísicas do meio com a temperatura e com as concentrações relativas. Transporte de massa e transporte de energia são, portanto, processos, que interagem e influenciam-se mutuamente.

O estudo do movimento de fluidos em meios porosos iniciou-se com modelos bastante simples. O trabalho pioneiro de Henry Darcy [01] em 1856 utilizou um meio poroso saturado e deu origem à equação básica da migração de umidade:

$$\underline{v} = K \nabla (P / \rho_2 g + z) \quad (1)$$

onde, \underline{v} : fluxo volumétrico de líquido (m/s)

K : condutividade hidráulica (m/s)

$P / \rho_2 g$: pressão hidrostática (m H₂O)

z : pressão gravitacional (m)

Em 1907 Buckingham |02| verificou que para um meio poroso não saturado a pressão da água é mais baixa que a pressão atmosférica e introduziu o conceito de potencial de sucção (comumente denotado por ψ). Richards |03| tomando a condutividade hidráulica K como função do potencial de sucção ψ estendeu a Lei de Darcy para um meio poroso não saturado.

Posteriormente, Childs e Collis-George |04|, assumindo que o potencial de sucção era dependente somente do conteúdo de umidade, definiram a difusividade do líquido como função única desta variável. Nestas condições, a partir do princípio da conservação da massa, obtiveram a equação básica para o movimento da água em um meio poroso em regime transiente na ausência de gradientes térmicos.

Haines |05|, no entanto, verificou que o potencial de sucção é função também da temperatura e do histórico de secagem ou umidificação do meio, fenômeno este denominado de histerese. A falta de um estudo teórico capaz de explicar satisfatoriamente este comportamento e a grande dificuldade em se obter estas características experimentalmente têm levado muitos autores a ignorar o efeito de histerese em seus estudos experimentais ou trabalhar unicamente com processos de secagem ou umidificação.

Moore |06| apresentou um estudo completo de permeabilidade, definida como a razão entre a velocidade da água através do solo e a força motriz total, para solos saturados e não-saturados. Dados experimentais da permeabilidade em função do potencial de sucção e deste em função do conteúdo de umidade foram apresentados para seis tipos de solos diferentes.

Luikov |07| e Philip e De Vries |08| foram os primeiros a modelar, sob um ponto de vista macroscópico, o fenômeno da mi-

gração de umidade em meios porosos não saturados. Utilizaram as leis fenomenológicas da difusão de massa (Lei de Darcy para a fase líquida e Lei de Fick para a fase vapor) e calor (Lei de Fourier) nas equações de balanço de massa e energia, propondo um modelo teórico onde resulta explicitamente a influência da temperatura nos processos de transferência de massa. As equações macroscópicas obtidas são especialmente adaptadas à complexa geometria dos poros e incluem a possibilidade de interação entre as fases líquido e vapor do meio.

Posteriormente, De Vries [09] generalizou o modelo de [08] dando distinção especial às mudanças de conteúdo de umidade nas fases líquido e vapor. Considerou os transportes de energia e massa devido à influência combinada da gravidade e de gradientes de temperatura e de conteúdo de umidade. Analisou também a interação entre o transporte de massa e calor em regime permanente. Em [10] este autor apresentou um trabalho detalhado sobre a transferência de calor em solos.

Cary e Taylor [11] formularam o fenômeno utilizando a termodinâmica dos processos irreversíveis com intuito de distinguir os diversos fenômenos elementares irreversíveis e por em evidência as relações fenomenológicas que os regem, a partir do exame da fonte de entropia. Obtiveram, assim, equações macroscópicas de massa e energia com coeficientes fenomenológicos que devem ser medidos para cada sistema.

Jury [12] comparou os modelos de Philip e De Vries e de Cary e Taylor e apresentou resultados experimentais para algumas das propriedades do primeiro modelo.

Eckert e Faghri em [13] e [14], utilizando o modelo de Philip e De Vries, analisaram o fenômeno através de uma formulação

paramétrica.

Hartley e Couvillion em [15], [16] e [17] investigaram o fenômeno considerando a variação das propriedades difusivas do meio com a temperatura e o conteúdo de umidade. Analisaram também o problema da frente de secagem que ocorre em solos envolvendo cabos de potência aterrados.

Crausse [18] verificou a aptidão do modelo de Luikov e Philip e De Vries para toda a faixa de teores de umidade através de comparação dos resultados experimentais e a simulação numérica.

O presente trabalho tem sua motivação na vital importância que o estudo do transporte de calor e umidade em solos tem para as empresas fabricantes de cabos de potência subterrâneos. A passagem de corrente elétrica gera calor que precisa ser dissipado pelo meio que envolve o cabo, sob pena de danificá-lo por superaquecimento.

As características térmicas do solo são parâmetros importantes no projeto destes cabos; dentre elas destaca-se a resistividade térmica, cujo valor aumenta rapidamente com a diminuição do conteúdo de umidade.

A corrente elétrica induz temperaturas altas na superfície do cabo; cria-se um gradiente térmico entre esta e o meio ambiente, causando uma migração de umidade, na forma de vapor. Ocorre assim uma diminuição considerável no conteúdo de umidade do solo próximo ao cabo que, em casos extremos, pode chegar à secagem total. Este solo, então, com uma resistividade alta, não dissipa o calor gerado, aumentando significativamente a temperatura superficial do cabo. Caso a temperatura limite do cabo seja ultrapassada, o isolamento rompe-se.

Dos modos possíveis de solucionar o problema, alterações

nas especificações do cabo, tais como a troca do material do isolamento ou aumento de sua espessura, são economicamente inviáveis.

A escolha de um meio poroso, natural ou artificial, que, embora com baixo conteúdo de umidade, seja capaz de dissipar uma quantidade razoável de calor é a solução prática para o problema. No entanto, o perfeito entendimento do fenômeno da migração de umidade, da variação das propriedades do solo e do fluxo de calor gerado no cabo é a forma cientificamente correta.

No que concerne às pesquisas relacionadas à migração de umidade em solos envolvendo cabos de potência o modelo desenvolvido por Philip e De Vries [08] para o estudo da transferência de calor e massa em meios porosos não saturados tem servido como trabalho base. A partir de um modelo geral assumiu-se algumas hipóteses simplificativas e analisou-se o fenômeno em questão para um sistema em regime transiente. Posteriormente, De Vries [09] apresentou este modelo para um sistema em regime estacionário.

Inicialmente serão discutidos os trabalhos que basearam-se no modelo em regime transiente de Philip e De Vries.

Preece e Hitchcock [19] pesquisaram o fenômeno em solos que envolvem cabos aterrados e, desta forma, não assumiram algumas das simplificações de Philip e De Vries, cuja área de interesse era a agricultura. Desenvolveram um modelo em coordenadas cilíndricas que considerava a variação das propriedades físicas do meio com a umidade e a temperatura mas desconsiderava os efeitos gravitacionais no movimento da água. Apresentaram também resultados experimentais de um cabo simulado em laboratório.

Mitchell et al [20] adotaram as mesmas simplificações feitas por Philip e De Vries sem, no entanto, desconsiderar a influência da gravidade, obtendo um modelo numérico bidimensional

para os fluxos de calor e massa acoplados. Em |21| apresentaram três seções de teste de campo construídas para coletar dados quantitativos da distribuição de temperatura e umidade em solos junto a cabos aterrados.

A seguir serão apresentados os trabalhos que basearam-se no modelo em regime estacionário de De Vries |09|. Para que ocorra regime estacionário pelo menos uma das três possibilidades deve acontecer |24|:

- sistema fechado, sem troca de massa nas fronteiras
- sistema com ausência de umidade
- sistema aberto no qual o fluxo de massa total é igual a zero.

Donazzi et al |22| basearam seu modelo na primeira hipótese, desprezaram a parcela referente ao efeito gravitacional e validaram o modelo apenas para a fase de capilaridade, quando existe continuidade na fase líquida. Assim, a difusividade do vapor devido ao gradiente de umidade e a difusividade do líquido devido ao gradiente de temperatura foram desconsideradas. Assumiram ainda que a condutividade térmica dependia apenas da concentração de umidade e da porosidade do solo, sendo independente da temperatura.

Brakelmann |23| desenvolveu seu modelo assumindo as simplificações de Donazzi, considerando, entretanto, a influência da temperatura na condutividade térmica do solo. Atentou, para as temperaturas normalmente encontradas em cabos de potência, e considerou a existência de duas regiões distintas: uma próxima à superfície do cabo que secaria completamente e cuja condutividade térmica seria constante e conhecida, e outra, mais externa, onde a condutividade térmica seria variável com o conteúdo de umidade e a

temperatura. A hipótese de regime estacionário se verificaria com base na segunda possibilidade para a região interna e na terceira para a região externa.

Groeneveld, et al |25| basearam seu modelo satisfazendo a terceira possibilidade de ocorrência de estado estacionário e ainda fluxo exclusivamente em uma direção. Consideraram, entretanto, os efeitos das diferenças entre as curvas do potencial de sucção em função da umidade para os processos de umidificação e secagem do solo (histerese). Isto é feito através da correção da difusividade de líquido associada a gradientes de umidade por intermédio de um fator obtido experimentalmente para um determinado tipo de solo.

Com respeito a pesquisas na área experimental dois trabalhos importantes devem ser citados.

Radhkrishna em |21| apresenta um instrumento desenvolvido para medição de propriedades térmicas do solo onde, através de um método transiente, é possível medir a resistividade, a difusividade e a estabilidade térmica.

Hartley e Black |26| e |21| realizaram estudos experimentais relacionados à estabilidade térmica de solos. Um solo torna-se termicamente instável quando ocorre um movimento significativo de umidade decorrente de um gradiente térmico. Os autores desenvolveram uma sonda térmica capaz de determinar quantitativamente o comportamento térmico de um solo aquecido.

O atual desenvolvimento das pesquisas na área de comportamento de solos junto a cabos aterrados encontra-se resumido em |21|.

O presente trabalho analisa o fenômeno da migração de umidade à luz de duas abordagens. A primeira assume as proprieda-

des difusivas do meio poroso constantes e utiliza uma formulação paramétrica. A segunda abordagem resolve as equações considerando as propriedades difusivas e termofísicas do meio variáveis com a temperatura e com o conteúdo de umidade.

A formulação paramétrica reescreve as equações e condições de contorno em termos de parâmetros adimensionais. Este procedimento tem a principal vantagem de conduzir a uma solução bastante geral.

Esta situação é análoga àquela que ocorreu no início do século no campo da transferência de calor, quando Nusselt idealizou e introduziu o modelo para um fluido ideal com propriedades constantes. Neste modelo, ele obteve, através de análises adimensionais, expressando o número de Nusselt em função do número de Reynolds e do número de Prandtl, relações que descreviam o processo de transferência de calor de uma maneira bastante geral. Estas relações são até hoje amplamente empregadas, ainda que soluções mais específicas que incluem a variação das propriedades já tenham sido obtidas.

Relações semelhantes descrevendo a transferência de calor e massa em meios porosos não saturados podem ser obtidas de forma similar. A formulação paramétrica desenvolvida neste trabalho utiliza esta aproximação e, assim, analisa o fenômeno de uma forma mais simples, menos precisa, embora mais geral, sendo portanto, válida como uma primeira aproximação.

A segunda abordagem deste trabalho leva em consideração a variação das propriedades difusivas do meio com a temperatura e com o conteúdo de umidade. A maior dificuldade deste tipo de análise reside, indubitavelmente, na enorme dificuldade em se encontrar, através de métodos experimentais, as funções que relacionam

as difusividades com a temperatura e o conteúdo de umidade.

A solução obtida através de uma formulação desta natureza é extremamente específica uma vez que a variação das propriedades é característica para cada solo. Entretanto, se comparada àquela com propriedades constantes é mais exata.

Um dos principais objetivos deste trabalho é mostrar a comparação dos resultados obtidos através da formulação paramétrica com aqueles do modelo a propriedades variáveis.

Inicialmente é discutida a física do mecanismo de migração de umidade em meios porosos não saturados e são apresentadas as equações gerais do fenômeno.

Estas equações são então particularizadas para os modelos paramétrico e a propriedades variáveis, para duas geometrias distintas: plana e cilíndrica.

A metodologia de solução é discutida para duas situações diferentes: quando todo o meio encontra-se úmido (fase úmida) e quando passa a existir uma frente de secagem cuja posição varia com o tempo (fase seca). Neste caso, inclui-se na equação de transporte de umidade um termo convectivo referente à movimentação desta frente.

Posteriormente são apresentados resultados da formulação paramétrica para as duas fases e a comparação entre os dois modelos para as duas geometrias.

CAPÍTULO 02

EQUAÇÕES BÁSICAS PARA MEIOS POROSOS NÃO SATURADOS

2.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentadas as equações fundamentais da transferência simultânea de calor e massa em meios porosos não saturados.

Inicialmente será feita uma descrição do mecanismo físico do transporte de vapor e líquido no meio poroso. A seguir, a partir das equações de transporte de massa e de calor, as equações básicas que governam o fenômeno físico serão desenvolvidas. Finalmente, assumindo constantes as propriedades difusivas do meio, será apresentada uma formulação paramétrica do fenômeno.

2.2 Mecanismo Físico do Transporte de Umidade

O meio poroso não saturado constitui-se de um complexo sistema de três fases: a matriz sólida, a água como constituinte fundamental da fase líquida, ar e vapor d'água compondo a fase gasosa.

Umidade (água líquida e vapor d'água) e calor são transportados num meio poroso devido à influência combinada de gradientes de temperatura e de conteúdo de umidade. Esta composição de influências, somada à complexa estrutura da matriz sólida e à geo-

metria dos poros, é responsável pela dificuldade em descrever e formular precisamente o fenômeno.

Em um meio poroso sujeito a gradientes térmicos, vapor e líquido fluem devido à diferença de temperatura e conteúdo de umidade. O transporte de vapor d'água ocorre através da difusão molecular no ar existente nos poros. Líquido, por sua vez, migra, predominantemente, devido aos gradientes de umidade.

O transporte de líquido num meio poroso está associado ao potencial de sucção do solo. O conceito de potencial de sucção foi introduzido por Buckingham [02], que relacionou a magnitude da força capilar ao gradiente deste potencial.

A definição do potencial de sucção (ou capilar) é facilitada pela situação indicada na Fig. 2.1. Quando se insere um pequeno tubo em um líquido, forma-se um menisco como resultado do ângulo de contato da água com as paredes do tubo.

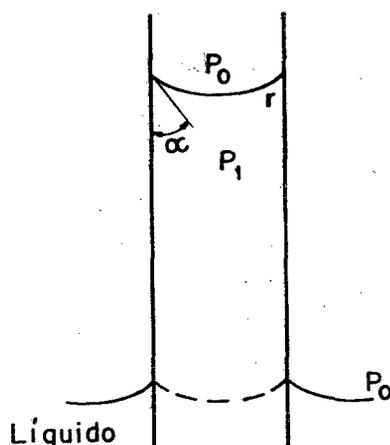


Fig. 2.1 - Ascensão do líquido em um tubo devido ao efeito da capilaridade.

A ocorrência da curvatura causa uma diferença de pressão entre a interface líquido-gás de tal forma que a pressão abaixo do menisco P_1 é menor que a pressão atmosférica P_0 . Assim, a água

dentro do tubo, inicialmente localizada na posição correspondente às linhas tracejadas, é deslocada para cima até que a diferença de pressão inicial seja totalmente contrabalanceada pela pressão hidrostática da coluna d'água no tubo capilar.

A diferença de pressão $\Delta P = P_0 - P_1$ entre a água abaixo do menisco e a atmosfera pode ser escrita como [27]:

$$\Delta P = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r} \quad (2.1)$$

onde: σ - a tensão superficial entre a água e o ar

α - é o ângulo de contato

r - raio capilar

A pressão hidrostática é proporcional à altura h (isto é, $P = \rho gh$). Então, é possível escrever:

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{g(\rho_{\text{ar}} - \rho_{\text{água}})r} \quad (2.2)$$

Finalmente, o potencial de sucção ψ é definido como $-h$, ou seja,

$$\psi = \frac{2\sigma \cos \alpha}{g(\rho_{\text{ar}} - \rho_{\text{água}})r} \quad (2.3)$$

O potencial de sucção atinge elevados valores negativos para solos praticamente secos e é igual a zero para solos saturados de umidade. A Fig. 2.4 mostra, para uma dada temperatura, uma curva típica deste potencial em função do conteúdo de umidade.

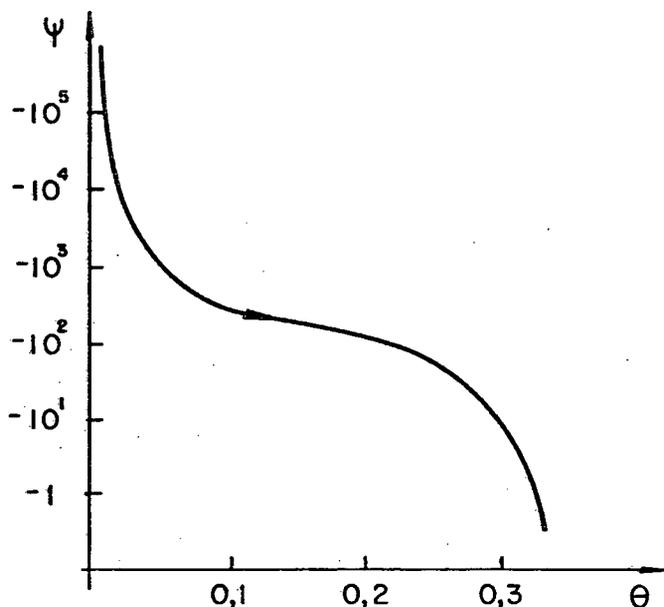


Fig. 2.2 - Curva típica do potencial de sucção ψ em função do conteúdo de umidade θ .

O potencial de sucção está associado a duas forças atrativas: àquelas entre a água e a superfície do solo (adesão) e àquelas entre moléculas de água (coesão). A importância relativa de cada uma destas parcelas depende, fundamentalmente, do conteúdo de umidade do meio poroso.

Os mecanismos responsáveis pelo transporte de líquido e vapor num meio poroso dependem, essencialmente, da quantidade de água presente no meio. Desta forma, para um perfeito entendimento dos mecanismos de transporte em um meio poroso é necessário uma análise do fenômeno para diversos níveis de umidade. Nos parágrafos que se seguem serão analisados qualitativamente situações que variam de solos praticamente secos a solos totalmente saturados de umidade.

Para um solo relativamente seco, onde não existe continuidade na fase líquida, a água presente está quase que totalmente adsorvida nas paredes dos grãos. Como não há continuidade da fase líquida, a transferência de umidade se dá por migração de vapor.

Vapor migra por difusão no ar, de regiões onde a sua pressão parcial é mais alta para regiões onde a sua pressão parcial é mais baixa.

À medida que se aumenta o conteúdo de umidade, a água contida no solo passa a formar pequenas pontes ou ilhas de líquido entre os grãos, conforme ilustrado na Fig. 2.3.

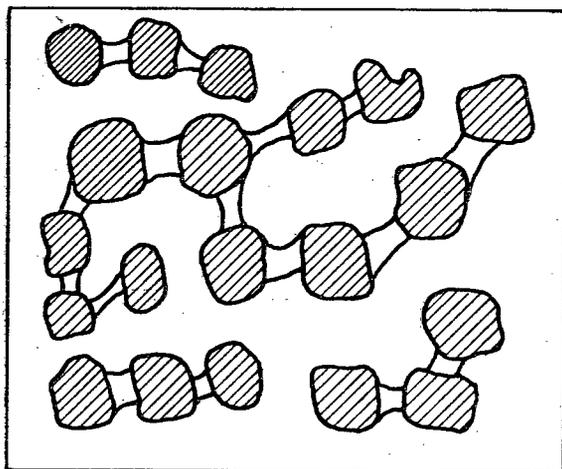


Fig. 2.3 - Pontes de líquido entre os grãos em um meio poroso relativamente seco.

Vapor se difunde no ar contido nos poros e também através das pontes de líquido. O mecanismo de difusão de vapor através destas pontes será explicado a seguir.

A Fig. 2.4 representa dois meniscos da ponte de líquido formada entre dois grãos, na condição de equilíbrio termodinâmico. Inicialmente as curvaturas são iguais e estão representadas pelas linhas cheias.

Vapor flui na direção indicada pela seta, devido a um gradiente de pressão parcial decorrente de uma diferença de temperatura. O vapor ao atingir o menisco A se condensa resultando em uma diminuição de sua curvatura. Simultaneamente, no menisco B uma evaporação resulta em um aumento do menisco (linhas

tracejadas). A diferença de curvatura irá produzir um fluxo capilar de líquido igual à taxa de evaporação e condensação nas interfaces.

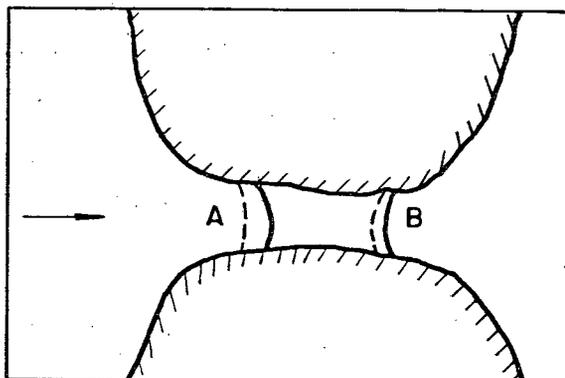


Fig. 2.4 - Dois meniscos da ponte de líquido formada entre dois grãos.

Desta forma, tem-se um fluxo de umidade contínuo nas regiões de líquido e vapor. O fluxo de vapor é determinado por um gradiente na pressão de vapor através dos poros preenchidos com ar e o movimento das pontes de líquido se ajusta com a finalidade de equilibrar o fluxo de vapor.

Quando se aumenta a quantidade de água, o fluxo de vapor induzido através das pontes de líquido diminui. Esta diminuição ocorre devido à redução no número de pontes e conseqüentemente a oportunidade para o vapor ser transportado, bem como pelo aumento do tamanho das pontes remanescentes, a um nível em que o movimento do líquido não mais consegue equilibrar o fluxo de vapor.

Para um subseqüente aumento no conteúdo de umidade, as pontes de líquido tornam-se maiores, unem-se umas às outras, e passa a existir continuidade na fase líquida, ainda que exista presença de vapor.

Havendo continuidade na fase líquida, líquido é trans-

portado devido ao gradiente do potencial capilar. Este fenômeno é denominado capilaridade.

Com um aumento adicional do conteúdo de umidade, todos os poros são preenchidos com água levando à condição de meio poroso saturado. Não existe mais vapor, e líquido só pode ser transportado devido à diferença de pressão hidrostática, ou efeitos de convecção natural.

O fenômeno do transporte simultâneo de calor e massa em meios porosos não saturados é influenciado por diversos fatores. Uma formulação que leve em conta todas as particularidades do fenômeno seria bastante complexa. Desta forma, no desenvolvimento das equações básicas a serem utilizadas no presente trabalho, algumas hipóteses simplificativas foram adotadas:

1. A massa de vapor d'água presente nos interstícios entre os grãos é negligenciável comparada à massa de líquido.
2. O vapor e o ar contidos nos poros se comportam como gás ideal
3. A ação da gravidade é negligenciada.
4. Não há influência do efeito de histerese |05| uma vez que somente o processo de secagem do solo é considerado.
5. O efeito da presença de solutos na água é desprezado.
6. O meio poroso é isotrópico.
7. A fase sólida é uma matriz rígida e fixa.

2.3 Equação do Transporte de Massa

A equação para o transporte de massa é obtida partindo-se da expressão da conservação de umidade. A conservação de umidade requer que,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot \left| \frac{j_1 + j_2}{\rho_2} \right| \quad (2.4)$$

onde j_1 é o fluxo de vapor, j_2 é o fluxo de líquido, ρ_2 é a massa específica do líquido e θ é a razão entre o volume de líquido e o volume total, que inclui o volume de vazios e o volume de grãos do meio poroso; doravante, θ será denominado de conteúdo de umidade.

No presente trabalho, o meio poroso será tomado como um meio contínuo, ou seja, os balanços de calor e massa são feitos sobre um elemento infinitesimal que é pequeno comparado à dimensão do corpo em estudo, mas grande o bastante para conter uma amostra representativa do meio, contendo as três fases.

O lado esquerdo da equação (2.4) representa, então, a variação de umidade com o tempo em um volume infinitesimal do meio poroso. A parcela referente ao acúmulo de vapor foi desconsiderada neste termo por ser muito menor que o acúmulo de líquido (hipótese 1).

O fluxo de líquido j_2 pode ser obtido utilizando-se a lei de Darcy modificada para ser aplicável a fluxos viscosos em sistemas porosos não saturados [04],

$$\frac{j_2}{\rho_2} = \frac{K_S}{\mu_2} K_{r1} \nabla(\psi) \quad (2.5)$$

onde K_S é a permeabilidade de saturação, K_{r1} é a permeabilidade relativa do líquido [15], e μ_2 é sua viscosidade dinâmica.

O potencial de sucção do solo ψ depende do conteúdo de umidade θ e da temperatura T . Desta forma, o gradiente de ψ pode ser expresso por:

$$\nabla(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \nabla \theta + \frac{\partial \psi}{\partial T} \nabla T \quad (2.6)$$

Substituindo a equação (2.6) na equação (2.5) e introduzindo a nomenclatura utilizada por Philip e De Vries [08], obtem-se,

$$\frac{j_2}{\rho_2} = - (D_{\theta L} \nabla \theta + D_{TL} \nabla T) \quad (2.7)$$

onde $D_{\theta L}$ é a difusividade do líquido devido ao gradiente de umidade, dada por,

$$D_{\theta L} = \frac{K_S}{\mu_2} K_{r1} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (2.8)$$

e D_{TL} é a difusividade do líquido devido ao gradiente de temperatura, expressa por,

$$D_{TL} = \frac{K_S}{\mu_2} K_{r1} \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (2.9)$$

Tendo obtido uma expressão para j_2 , resta agora determinar o fluxo de vapor j_1 .

A difusão molecular de um componente A no componente B é obtida através da Lei de Fick:

$$j_A = - D_{AB} \nabla(\rho_A) \quad (2-10)$$

onde j_A é o fluxo difusivo do componente A, D_{AB} é a difusividade molecular do componente A no componente B e ρ_A é a massa específica do componente A.

Aplicando a equação (2.10) para a difusão do vapor d'água no ar, incluindo o efeito da tortuosidade do meio poroso [08] e considerando que a massa específica do vapor depende tanto da temperatura como do conteúdo de umidade, pode-se escrever [15]:

$$\frac{j_1}{\rho_2} = -D_{13} \frac{\rho_g}{\rho_2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho_1}{\rho_g} \right) \nabla \theta + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\rho_1}{\rho_g} \right) \nabla T \right] \quad (2.11)$$

onde D_{13} é a difusividade molecular modificada do vapor d'água no ar [15], ρ_g é a massa específica da fase gasosa e ρ_1 é a massa específica do vapor.

A equação anterior colocada em termos da nomenclatura de Philip e De Vries [08], torna-se,

$$\frac{j_1}{\rho_2} = - (D_{\theta V} \nabla \theta + D_{TV} \nabla T) \quad (2.12)$$

onde $D_{\theta V}$ é a difusividade do vapor devido ao gradiente de umidade, dada por,

$$D_{\theta V} = D_{13} \frac{\rho_g}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho_1}{\rho_g} \right) \quad (2.13)$$

e D_{TV} é a difusividade do vapor devido ao gradiente de temperatura, expressa por,

$$D_{TV} = D_{i3} \frac{\rho_g}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\rho_1}{\rho_g} \right) \quad (2.14)$$

Substituindo as expressões (2.7) e (2.12) na equação (2.4) obtém-se,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot \left[(D_{\theta L} + D_{\theta V}) \nabla \theta + (D_{TL} + D_{TV}) \nabla T \right] \quad (2.15)$$

A expressão acima é a equação geral do transporte de massa em meios porosos não saturados.

2.4 Equação do Transporte de Calor

O transporte de calor em meios porosos ocorre, essencialmente, por difusão térmica através do meio poroso e pelo movimento do líquido e vapor através dos poros. Convecção e radiação são consideradas somente em casos muito específicos que fogem ao escopo deste trabalho.

Reunindo os termos que contribuem para o transporte de calor, a equação da conservação de energia pode ser expressa por,

$$\frac{\partial}{\partial t} (CT) = - \nabla \cdot \left[k_* \nabla T + (h_2 + h_{21}) j_1 + h_2 j_2 \right] \quad (2.16)$$

onde C é a capacidade calorífica do solo, que contém uma contribuição ponderada da capacidade calorífica das várias fases [10]; k_* é uma condutibilidade térmica para o caso hipotético de não existir fluxo de líquido e vapor; h_2 é a entalpia do líquido e h_{21}

é a entalpia de vaporização.

O lado esquerdo da equação (2.16) representa o acúmulo de energia em um volume infinitesimal do meio poroso. No lado direito, o primeiro termo expressa o fluxo de calor transportado por condução. O segundo termo representa a energia, na forma de entalpia de líquido h_2 e entalpia de vaporização h_{21} , transportada com o vapor. O terceiro termo expressa a energia transportada com o líquido.

A energia de vaporização h_{21} é muito grande comparada à entalpia do líquido h_2 . Ainda, os fluxos de vapor j_1 e líquido j_2 têm sentidos opostos. Portanto, é correto afirmar que $h_{21} j_1 \gg h_2 (j_1 + j_2)$. Desta forma, a equação (2.16) torna-se,

$$\frac{\partial}{\partial t} (CT) = - \nabla \cdot (k_* \nabla T + h_{21} j_1) \quad (2.17)$$

Finalmente, substituindo na equação anterior a expressão para o fluxo de vapor d'água dada pela equação (2.12), tem-se,

$$\frac{\partial}{\partial t} (CT) = \nabla \cdot \left[(k_* + \rho_2 h_{21} D_{TV}) \nabla T + \rho_2 h_{21} D_{\theta V} \nabla \theta \right] \quad (2.18)$$

onde $(k_* + \rho_2 h_{21} D_{TV})$ é a condutividade térmica do meio poroso. Nesta condutividade estão incluídas as contribuições da difusão térmica e do transporte de energia pela migração de vapor.

Concluindo, as equações (2.15) e (2.18), com as expressões para as difusividades dadas pelas equações (2.8), (2.9), (2.13) e (2.14) constituem as equações básicas para o fenômeno do transporte simultâneo de calor e massa em meios porosos não satu-

rados.

2.5 Formulação Paramétrica

A formulação paramétrica será desenvolvida assumindo as propriedades difusivas constantes.

Partindo-se das equações básicas obtidas nas seções anteriores, e assumindo as difusividades constantes, tem-se,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = (D_{\theta L} + D_{\theta V}) \nabla^2 \theta + (D_{TL} + D_{TV}) \nabla^2 T \quad (2.19)$$

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = (k_* + \rho_2 h_{21} D_{TV}) \nabla^2 T + \rho_2 h_{21} D_{\theta V} \nabla^2 \theta \quad (2.20)$$

A dependência do potencial de sucção do solo com a temperatura é comumente considerada muito pequena [27] para justificar a inclusão da difusividade do líquido associada ao gradiente térmico, D_{TL} . Assim, a difusividade D_{TL} na equação (2.19) será desprezada.

Além disto, de acordo com [16], o 2º termo do lado direito da eq. (2.20) pode ser negligenciado.

Desta forma, representando a soma das difusividades de líquido e de vapor por D_θ , as equações (2.19) e (2.20) são reescritas como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_\theta \nabla^2 \theta + D_{TV} \nabla^2 T \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (2.22)$$

com,

$$\alpha = \frac{K_* + \rho_2 h_{21} D_{TV}}{C} \quad (2.23)$$

As equações (2.21) e (2.22) podem ser adimensionalizadas utilizando-se as seguintes variáveis:

$$T = \frac{(T - T_i)}{\Delta T} \quad ; \quad \zeta = \frac{D_{\theta} t}{L^2} \quad (2.24)$$

$$\theta = \frac{D_{\theta} (\theta - \theta_i)}{D_{TV}}$$

onde: L - é o comprimento característico do problema

T_i - é a temperatura inicial do meio

θ_i - é o conteúdo de umidade inicial do meio

ΔT - é a diferença de temperatura característica do problema

No transporte de umidade, a importância relativa entre a parcela associada ao gradiente de temperatura e aquela associada ao gradiente de umidade é dada pelo número de Posnov, definido como :

$$Pn = \frac{D_{TV} \Delta T}{D_{\theta} \theta_i} \quad (2.25)$$

Para altos valores do número de Posnov, a migração de

umidade ocorre devido predominantemente a gradientes térmicos; para Pn baixos os gradientes de umidade são os responsáveis por este transporte.

A umidade, então, pode ser escrita como:

$$\theta = \frac{1}{Pn} \left(\frac{\theta}{\theta_i} - 1 \right) \quad (2.26)$$

Substituindo as expressões adimensionais apresentadas em (2.24) nas equações (2.21) e (2.22), chega-se a,

$$Lu \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \nabla_{*}^2 T \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \nabla_{*}^2 \theta + \nabla_{*}^2 T \quad (2.28)$$

onde ∇_{*} é o operador nabla adimensionalizado com relação ao comprimento característico L , e Lu é o número de Luikov que expressa a relação entre a difusividade de umidade associada ao gradiente de umidade, D_{θ} , e a difusividade térmica α ,

$$Lu = \left(\frac{D_{\theta}}{\alpha} \right) \quad (2.29)$$

Para baixos números de Luikov, o perfil de temperatura se desenvolve muito antes do perfil de umidade, e a equação do transporte de umidade assume a mesma forma que a equação da condução do calor em regime transiente.

As equações (2.27) e (2.28), em termos dos números de Luikov e Posnov, constituem as equações da formulação paramétrica.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

3.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentadas as expressões utilizadas no cálculo da distribuição de temperatura e umidade em meios porosos não saturados, para situações específicas.

O problema a ser investigado é o da migração de umidade causada por gradientes térmicos em um meio poroso não saturado situado entre duas superfícies impermeáveis. Duas geometrias serão consideradas, parede plana e parede cilíndrica. Cada geometria será analisada sob a luz de dois modelos: modelo a propriedades variáveis, que considera as propriedades difusivas do meio variáveis com a temperatura e umidade, e modelo paramétrico. No que se segue serão consideradas situações unidimensionais.

3.2 Geometria Plana

A Fig. 3.1 mostra a geometria do problema para parede plana.

Duas placas planas infinitas e paralelas, separadas por uma distância L , são fronteiras de um meio poroso não saturado. Inicialmente todo o meio encontra-se a uma temperatura inicial T_i e conteúdo de umidade inicial θ_i , onde θ , recordando, é a razão entre o volume de líquido e o volume total do meio.

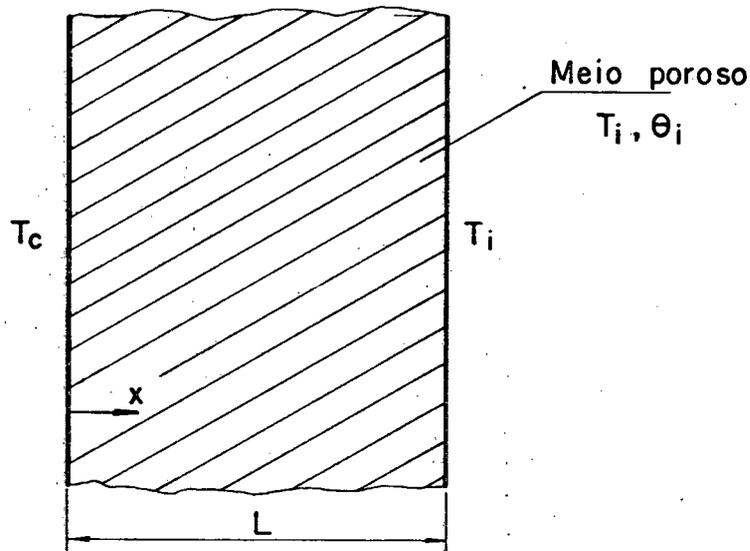


Fig. 3.1 - Geometria de paredes planas

As temperaturas das fronteiras são prescritas e mantidas constantes. Na fronteira $x = 0$ a temperatura é fixada em T_c enquanto que em $x = L$ a temperatura é igual a T_i ($T_c > T_i$).

Ambas as fronteiras são impermeáveis ao fluxo de massa, isto é, não é permitido líquido ou vapor fluírem através das fronteiras do sistema.

A seguir serão apresentadas, separadamente, as formulações correspondentes aos modelos a propriedades variáveis e paramétrico.

3.2.1. Modelo a propriedades variáveis

Neste modelo as propriedades difusivas do meio poroso variam com a temperatura e conteúdo de umidade.

Inicialmente considere a equação geral do transporte de umidade obtida na seção 2.3,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot \left[D_{\theta} \nabla \theta + (D_{TL} + D_{TV}) \nabla T \right] \quad (2.15)$$

Novamente, como discutido na seção 2.4, a difusividade do líquido associada ao gradiente de temperatura D_{TL} será negligenciada.

Assim, a equação (2.15) para a geometria unidimensional da Fig. 3.1 é reescrita como,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[D_{TV} \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (3.1)$$

onde, relebrando, $D_{\theta} \equiv D_{\theta L} + D_{\theta V}$

A equação geral para o transporte de calor foi obtida na seção 2.4,

$$\frac{\partial}{\partial t} (CT) = \nabla \cdot \left[(k_* + \rho_2 h_{21} D_{TV}) \nabla T + \rho_2 h_{21} D_{\theta V} \nabla \theta \right] \quad (2.18)$$

Para solos com valores de θ não muito baixos, o segundo termo do lado direito da equação (2.18) é pequeno comparado aos demais termos. De forma análoga àquela da seção (2.5) o 2º termo do lado direito da eq. (2.18) será desprezado.

Então, particularizando a equação (2.18) para a geometria da Fig. 3.1, tem-se,

$$\frac{\partial}{\partial t} (CT) = \frac{\partial}{\partial x} (k_* + \rho_2 h_{21} D_{TV}) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.2)$$

As condições iniciais são de temperatura igual a T_i e conteúdo de umidade igual a θ_i . As condições de contorno para temperatura são condições de temperatura prescritas em $x=0$ e $x=L$; referente à umidade, as condições de impermeabilidade das fronteiras são obtidas impondo-se a igualdade entre o fluxo de líquido e o fluxo de vapor. Resumindo, as condições iniciais e de contorno, como descritas acima, são:

$$t = 0 ; \quad T = T_i \quad e \quad \theta = \theta_i$$

$$t > 0 ; \quad x = 0 ; \quad T = T_c \quad e \quad -D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - D_{TV} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (3.3)$$

$$t > 0 ; \quad x = L ; \quad T = T_i \quad e \quad -D_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - D_{TV} \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

As equações (3.1) e (3.2) sujeitas às condições da equação (3.3) completam a formulação do modelo a propriedades variáveis.

Para a resolução destas equações é necessário que se conheçam as expressões para as propriedades termofísicas e difusividades do meio poroso como função da temperatura e do conteúdo de umidade. O Apêndice A apresenta as equações e curvas utilizadas no cálculo das propriedades termofísicas e difusividades.

3.2.2 - Modelo Paramétrico

As equações para o modelo paramétrico, desenvolvidas considerando as propriedades termofísicas e difusividades do meio

poroso constantes, foram obtidas na seção 2.5,

$$\text{Lu} \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \nabla_*^2 T \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \nabla_*^2 \theta + \nabla_*^2 T \quad (2.28)$$

Para a geometria cartesiana unidimensional da Fig.3.1 as equações acima são escritas como:

$$\text{Lu} \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \frac{\partial T}{\partial X^2} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \quad (3.5)$$

onde as variáveis adimensionais são,

$$T = \frac{T - T_i}{\Delta T} \quad ; \quad \theta = \frac{1}{\text{Pn}} \left(\frac{\theta}{\theta_i} - 1 \right) \quad (3.6)$$

$$\zeta = \frac{D_\theta t}{L^2} \quad ; \quad X = \frac{x}{L}$$

As condições iniciais e de contorno para as variáveis adimensionais listadas anteriormente são,

$$\zeta = 0 ; \quad T = 0 \quad e \quad \theta = 0$$

$$\zeta > 0 ; \quad X = 0 ; \quad T = 1 \quad e \quad - \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial T}{\partial X} = 0 \quad (3.7)$$

$$\zeta > 0 ; \quad X = 1 ; \quad T = 0 \quad e \quad - \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial T}{\partial X} = 0$$

As condições iniciais e de contorno representadas na equação (3.7), juntamente com as equações (3.4) e (3.5) perfazem a formulação do modelo paramétrico para a geometria plana.

Vale notar que no modelo paramétrico a equação para a temperatura é obtida independentemente do conteúdo de umidade.

3.3 - Geometria Cilíndrica

A geometria cilíndrica do problema em estudo consiste de dois cilindros infinitos e concêntricos, conforme a Fig. 3.2.

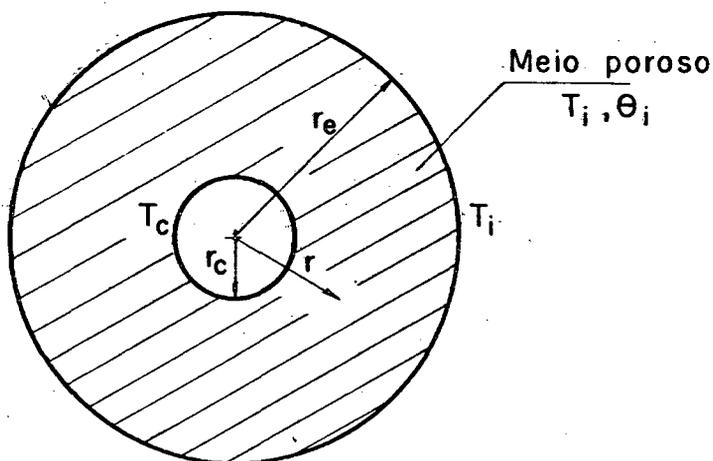


Fig. 3.2 - Geometria Cilíndrica

Inicialmente o meio poroso encontra-se à temperatura T_i e conteúdo de umidade θ_i . A temperatura na fronteira interna, doravante denominada de cabo (em alusão ao problema que motivou o presente estudo), encontra-se a T_c e a temperatura externa a T_i ; o cabo e a fronteira externas são impermeáveis ao fluxo de líquido e de vapor.

Similarmente à formulação da geometria plana, para esta geometria serão utilizados os modelos a propriedades variáveis e paramétrico.

3.3.1 - Modelo a propriedades variáveis

Partindo-se das equações gerais para o transporte de massa, expressão (2.15), e transporte de calor, expressão (2.18), e utilizando as mesmas simplificações da seção 3.2.1, obtem-se,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r D_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r D_{TV} \frac{\partial T}{\partial r} \right] \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (CT) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r (k_* + \rho_2 h_{21} D_{TV}) \frac{\partial T}{\partial r} \right] \quad (3.9)$$

As condições iniciais e de contorno são,

$$t = 0 ; \quad T = T_i \quad \text{e} \quad \theta = \theta_i$$

$$t > 0 ; \quad r = r_c ; \quad T = T_c \quad \text{e} \quad D_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} - D_{TV} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (3.10)$$

$$t > 0 ; \quad r = r_e ; \quad T = T_i \quad \text{e} \quad D_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} - D_{TV} \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

As equações (3.8) e (3.9) com as condições iniciais e de contorno da equação (3.10) constituem-se nas equações da formulação do modelo a propriedades variáveis para a geometria cilíndrica.

A variação das propriedades difusivas do meio com a temperatura e o conteúdo de umidade é obtida através das correlações apresentadas no Apêndice A.

3.3.2 - Modelo Paramétrico

As equações (2.26) e (2.27) quando aplicadas à geometria cilíndrica, tornam-se,

$$Lu \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial T}{\partial R} \right) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial T}{\partial R} \right) \quad (3.12)$$

com as variáveis adimensionais expressas por,

$$R = \frac{r}{r_e} \quad ; \quad T = \frac{(T - T_i)}{\Delta T} \quad ; \quad \zeta = \frac{D_{\theta} t}{r_e^2} \quad (3.13)$$

$$\theta = \frac{1}{Pn} \left(\frac{\theta}{\theta_i} - 1 \right)$$

Desta forma, as condições iniciais e de contorno são,

$$\zeta = 0 ; T = 0 \text{ e } \theta = 0$$

$$\zeta > 0 ; R = \frac{r_c}{r_e} ; T = 0 \text{ e } -\frac{\partial \theta}{\partial R} - \frac{\partial T}{R} = 0 \quad (3.14)$$

$$\zeta > 0 ; R = 1 ; T = 0 \text{ e } -\frac{\partial \theta}{\partial R} - \frac{\partial T}{R} = 0$$

A distribuição de temperatura é, do mesmo modo que para a geometria plana, independente do conteúdo de umidade.

As equações (3.11) e (3.12) sujeita às condições iniciais e de contorno, representadas nas equações (3.14), completam a formulação do modelo paramétrico para a geometria cilíndrica.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

4.1 - Introdução

Neste capítulo será apresentada a metodologia de solução utilizada no presente trabalho para a solução das equações diferenciais que governam a distribuição de temperatura e umidade em meios porosos não saturados. O desenvolvimento que se segue será feito para o modelo paramétrico com geometria de paredes planas. Todavia, este desenvolvimento se aplica igualmente para a geometria cilíndrica, bem como para o modelo a propriedades variáveis.

Duas situações serão analisadas separadamente, aquela correspondente ao início do processo de secagem, onde todo o meio encontra-se úmido, e aquela situação a partir do qual começa a existir uma frente de secagem cuja posição varia com o tempo. Doravante, estas duas situações serão denominadas, respectivamente, fase úmida e fase seca.

A necessidade de fazer-se esta separação advém do fato de que as equações, condições de contorno e formas de discretização são distintas para as duas fases.

Na fase seca será utilizada, por conveniência, uma transformação de coordenadas e será incluída na equação governante a velocidade de propagação da frente de secagem.

Na parte final do capítulo, a metodologia de solução será estendida para os casos de parede cilíndrica e modelo a pro-

priedades variáveis.

4.2 - Fase Úmida

A fase úmida compreende o período no qual todo o meio encontra-se úmido e estende-se desde o instante inicial em que as condições de contorno são aplicadas, até o instante em que começa a existir na fronteira quente ($X = 0$) a condição de meio poroso seco (conteúdo de umidade igual a zero). Na fase úmida, o domínio de solução abrange todo o meio entre as duas fronteiras ($0 < X < 1$); o mesmo não acontece para a fase seca como será discutido posteriormente.

Na seção 3.2.2 foram obtidas as equações, condições iniciais e de contorno para o modelo paramétrico e geometria de paredes planas. Tais informações são reproduzidas a seguir. Equações diferenciais:

$$Lu \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \quad (3.5)$$

onde:

$$\zeta = \frac{D\theta t}{L^2} \quad ; \quad X = \frac{x}{L}$$

$$T = \frac{T - T_i}{\Delta T} \quad e \quad \theta = \frac{1}{Pn} \left(\frac{\theta}{\theta_i} - 1 \right) \quad (3.6)$$

Condições Iniciais e de Contorno:

$$\zeta = 0 ; \quad T = 0 ; \quad \theta = 0$$

$$\zeta > 0 ; \quad X = 0 ; \quad T = 0 ; \quad - \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial T}{\partial X} = 0 \quad (3.7)$$

$$\zeta > 0 ; \quad X = 1 ; \quad T = 0 ; \quad - \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial T}{\partial X} = 0$$

Pela análise das equações diferenciais e condições de contorno verifica-se que a distribuição de temperatura pode ser obtida independentemente do conteúdo de umidade. Uma vez resolvida a equação para a temperatura, equação (3.4), a distribuição do conteúdo de umidade é calculada através da equação (3.5).

No presente trabalho, as equações diferenciais são resolvidas através do método dos volumes finitos. Convém mencionar que para a fase úmida as equações diferenciais podem ser resolvidas analiticamente, [31].

Este método consiste em dividir o domínio de cálculo em pequenos volumes de controle que não se sobrepõem. As equações diferenciais são então integradas em relação ao tempo e ao espaço em cada volume. Desta integração resulta uma equação algébrica para cada volume de controle. Aplicando, então, o algoritmo TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) [28] ao conjunto de todas as equações algébricas juntamente com as condições de contorno, obtêm-se as distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade. Os detalhes da discretização das equações (3.4) e (3.5) estão apresentados no apêndice B, uma vez que esta discretização pode ser obtida sem nenhuma dificuldade adicional.

4.3 - Fase Seca

A fase seca inicia-se no momento em que o conteúdo de umidade na fronteira $X = 0$ atinge o valor zero. A partir deste instante passa a existir uma frente de secagem, móvel com o tempo.

No início da fase seca, caso o número de Luikov seja suficientemente baixo (condição que será discutida no Capítulo 5), a temperatura estará plenamente desenvolvida. Na presente análise, esta condição é assumida e, portanto,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = 0 \quad (4.1)$$

Fazendo uso da eq. (4.1), a equação da conservação da massa torna-se ,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (4.2)$$

Uma condição inicial e duas condições de contorno são necessárias para a resolução da equação (4.2).

A condição inicial para a fase seca é obtida da distribuição do conteúdo de umidade final da fase úmida.

Na fronteira $x = L$ a condição de contorno assumida é de impermeabilidade, ou seja, o fluxo total j , dada por,

$$j = - D_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} - D_{TV} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.3)$$

é igual a zero.

Para obter a condição de contorno na outra face, é necessário que se leve em conta o movimento de uma frente de secagem em direção à fronteira fria ($x = L$). A Fig. 4.1 mostra a localização da frente de secagem ξ para dois instantes - de tempo.

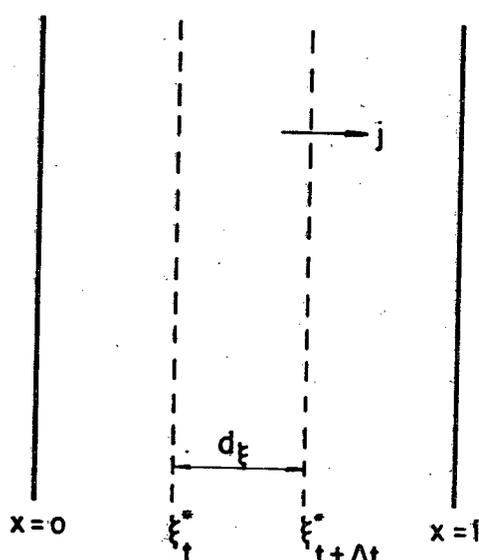


Fig. 4.1 - Localização da frente de secagem para dois instantes de tempo; geometria plana.

O conteúdo de umidade $\bar{\theta}$ acumulado na região entre as fronteiras ξ_t^* e $\xi_{t+\Delta t}^*$ é igual ao conteúdo de umidade que atravessa a linha $\xi_{t+\Delta t}^*$ durante o intervalo de tempo Δt . Assim o fluxo total j pode ser escrito como,

$$j = \bar{\theta} \frac{d\xi^*}{dt} \quad (4.4)$$

A equação (4.4) também pode ser obtida com o auxílio da Fig. 4.2.

Nesta figura são mostrados dois perfis de umidade, um correspondente ao tempo t e o outro ao tempo $t + \Delta t$. No ins-

tante t , a frente de secagem está localizada em $x = \xi_t^*$, ao passo que, para o instante $t + \Delta t$, a frente de secagem se localiza em $x = \xi_{t+\Delta t}^*$. A área sombreada da Fig. 4.2 corresponde à unidade a ser deslocada de $x = \xi_t^*$ a $x = \xi_{t+\Delta t}^*$ durante o intervalo de tempo Δt . Esta unidade é dada por,

$$\int_{\xi_t^*}^{\xi_{t+\Delta t}^*} \theta(x,t) dx = \bar{\theta} (\xi_{t+\Delta t}^* - \xi_t^*) \quad (4.5)$$

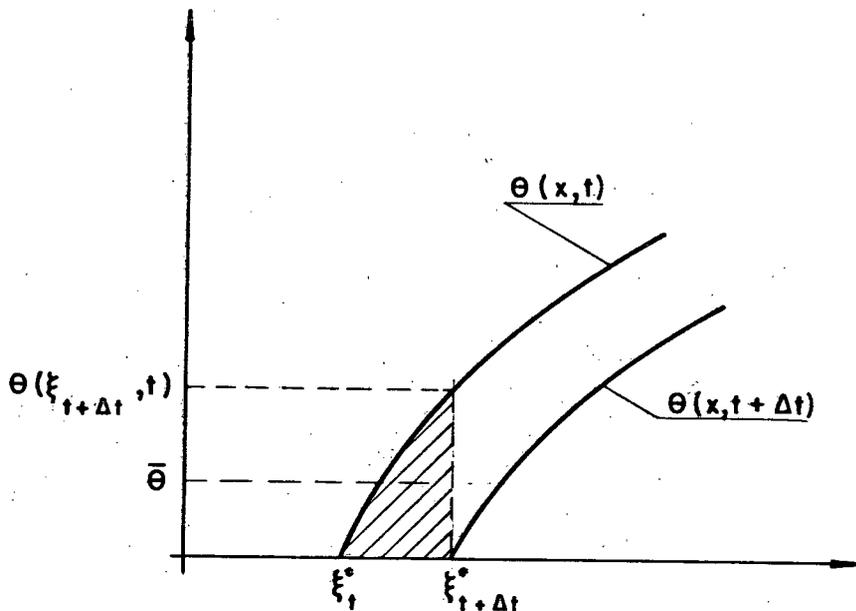


Fig. 4.2 - Perfis de umidade para dois tempos diferentes

onde $\bar{\theta}$ é a umidade média conforme mostrado na Fig. 4.2. Uma vez que a umidade dada pela equação (4.4) migrará através da linha vertical tracejada, correspondente a $x = \xi_{t+\Delta t}^*$, tem-se,

$$\int_t^{t+\Delta t} j \Big|_{\xi_{t+\Delta t}^*} dt = \int_{\xi_t^*}^{\xi_{t+\Delta t}^*} \theta(x,t) dx \quad (4.6)$$

onde o termo $j|_{\xi_{t+\Delta t}^*}$ representa o fluxo de umidade através da linha $x = \xi_{t+\Delta t}^*$. Note-se que, a rigor, este fluxo varia com o tempo.

A equação (4.6) pode ser aproximada por,

$$j|_{\xi_{t+\Delta t}^*} \Delta t = \bar{\theta} (\xi_{t+\Delta t}^* - \xi_t^*) \quad (4.7)$$

No limite $\Delta t \rightarrow 0$, tem-se,

$$j|_{\xi_t^*} = \bar{\theta} \frac{d\xi^*}{dt} \quad (4.8)$$

que é a própria equação (4.4).

Combinando-se a equação (4.3) para o fluxo total j com a equação (4.4) tem-se |13|,

$$\bar{\theta} \frac{d\xi^*}{dt} = - D_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{\xi^*} - D_{TV} \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_{\xi^*} \quad (4.9)$$

Na fase úmida adotou-se para o conteúdo de umidade a adimensionalização dada pela equação (3.6). Desta adimensionalização vê-se que o conteúdo de umidade zero corresponde à umidade adimensional igual a $-1/P_n$, tornando P_n um parâmetro necessário para caracterizar a fase seca. Assim sendo, é conveniente que se introduza uma nova adimensionalização para o conteúdo de umidade a fim de que o número de Posnov apareça explicitamente nas equações que governam o problema. Desta forma, far-se-á uso das seguintes variáveis adimensionais durante a fase seca,

$$\theta = \frac{\theta}{\theta_i} ; \quad \zeta = \frac{D \hat{\theta} t}{L^2} ; \quad \xi = \frac{\xi^*}{L} \quad (4.10)$$

$$X = \frac{X}{L} ; \quad T = \frac{T - T_i}{\Delta T}$$

fornecendo,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \quad (4.11)$$

$$\bar{\theta} \frac{\partial \xi}{\partial t} = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{\xi} - Pn \left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_{\xi} \quad (4.12)$$

As condições de contorno adimensionais a serem satisfeitas pelo campo de umidade θ (solução da equação (4.11)) são,

$$X = \xi ; \quad \theta = 0 \quad (4.13)$$

$$X = 1 ; \quad - \frac{\partial \theta}{\partial X} - Pn \frac{\partial T}{\partial X} = 0 \quad (4.14)$$

É possível calcular $\partial T / \partial X$ analiticamente uma vez que a distribuição de temperatura na fase seca está plenamente desenvolvida. Integrando a equação (4.1) e utilizando as condições de contorno para a temperatura, chega-se a,

$$\frac{\partial T}{\partial X} = - 1 \quad (4.15)$$

que substituída nas equações (4.12) e (4.14) produz, respectivamente,

$$\bar{\theta} \frac{d\xi}{d\zeta} = Pn - \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad \text{em} \quad X = \xi \quad (4.16)$$

e

$$-\frac{\partial \theta}{\partial X} + Pn = 0 \quad \text{em} \quad X = 1 \quad (4.17)$$

As equações (4.11) com as condições de contorno (4.13), (4.16) e (4.17) quando resolvida fornece o campo do conteúdo de umidade θ . A equação (4.16) é utilizada para determinar a localização da frente de secagem ξ , e, conseqüentemente, definir o domínio de solução para cada tempo ζ .

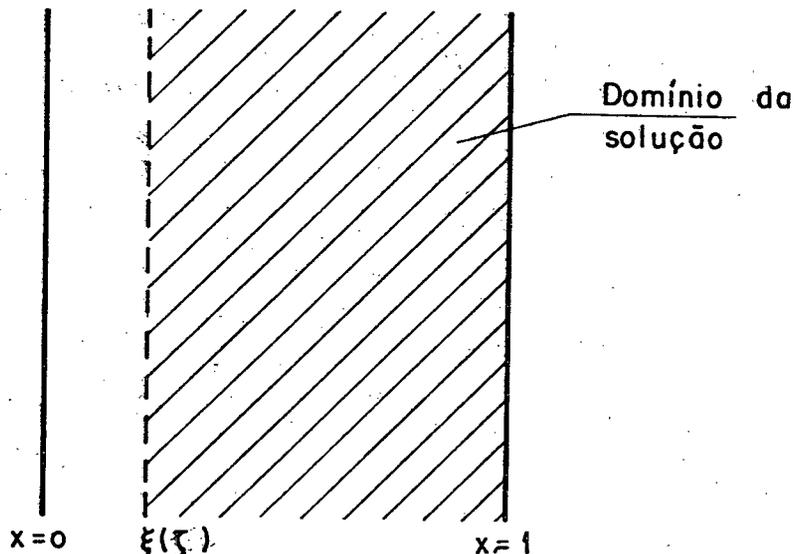


Fig. 4.3 - Domínio de solução para um dado tempo ζ .

O domínio de solução, para um dado tempo ζ , está esquematicamente representado na Fig. 4.3. É importante observar que

o mesmo se altera à medida que a frente de secagem ξ se movimenta.

Para evitar que se trabalhe com um domínio variável no tempo, uma nova coordenada é introduzida,

$$\eta = \frac{X - \xi(\zeta)}{1 - \xi(\zeta)} \quad (4.18)$$

Trabalhando com a coordenada η , compreendida entre 0 e 1, o domínio de solução torna-se fixo com comprimento igual a 1.

É necessário, agora, que se escreva as equações (4.11), (4.13), (4.16) e (4.17) para a nova coordenada. Para tal, lembrando que X é uma função de η e ζ , é possível escrever:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_X &= \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta} + \left. \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right|_{\zeta} \left. \frac{\partial \eta}{\partial X} \right|_X \\ &= \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta} + \left. \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right|_{\zeta} \left. \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right|_{\eta} \left. \frac{\partial \xi}{\partial X} \right|_X \end{aligned} \quad (4.19)$$

e,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{1}{(1-\xi)^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (4.20)$$

Substituindo as equações (4.19) e (4.20) na equação

(4.11), obtem-se,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{(1-\xi)^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} - \frac{(\eta-1)}{(1-\xi)} \frac{d\xi}{d\zeta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad (4.21)$$

O segundo termo do lado direito da equação anterior surge em decorrência do movimento da frente de secagem ξ e representa uma pseudo convecção associada a este movimento.

As condições de contorno escritas no novo sistema de coordenadas tornam-se,

$$\eta = 0 ; \quad \theta = 0 \quad (4.22)$$

$$\eta = 1 ; \quad P_n - \frac{1}{(1-\xi)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0$$

A velocidade da frente de secagem ξ em termos da coordenada η , é obtida a partir de

$$\theta \frac{d\xi}{d\zeta} = \frac{1}{(1-\xi)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} + P_n \quad (4.23)$$

A equação (4.21), sujeita às condições de contorno das equações (4.22) e com a velocidade $d\xi/dt$ obtida a partir da equação (4.23), quando resolvida fornece a distribuição com o tempo do conteúdo de umidade.

4.3.1 - Discretização da equação governante

A seguir será discutido o método utilizado para a discretização da equação governante da fase seca.

As seguintes relações serão utilizadas a fim de colocar a equação (4.21) em uma forma mais apropriada:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[\left(\frac{n-1}{1-\xi} \right) \frac{d\xi}{d\zeta} \theta \right] = \left(\frac{n-1}{1-\xi} \right) \frac{d\xi}{d\zeta} \frac{\partial \theta}{\partial n} + \frac{1}{1-\xi} \frac{d\xi}{d\zeta} \theta \quad (4.24)$$

e,

$$\frac{1}{(1-\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi) \theta \right] = - \frac{1}{(1-\xi)} \frac{d\xi}{d\zeta} \theta + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (4.25)$$

Combinando as equações (4.24) e (4.25) com a equação (4.21), obtem-se a seguinte expressão para a conservação de umidade no meio poroso,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(1-\xi) \theta \right] + \frac{\partial}{\partial n} \left[(n-1) \frac{d\xi}{d\zeta} \theta - \frac{1}{(1-\xi)} \frac{\partial \theta}{\partial n} \right] = 0 \quad (4.26)$$

Introduzindo as seguintes relações,

$$\dot{M} = (n-1) \frac{d\xi}{d\zeta} \quad (4.27)$$

$$J = \dot{M} \theta - \frac{1}{(1-\xi)} \frac{\partial \theta}{\partial n} \quad (4.28)$$

a equação (4.26) é reescrita como,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(1-\xi) \theta \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} (J) = 0 \quad (4.29)$$

J , como definido acima, corresponde ao fluxo total da umidade θ , constituído por duas parcelas: uma referente à difusão, $[-1/(1-\xi)(\partial\theta/\partial\eta)]$ e outra referente à pseudo convecção associada ao movimento da frente de secagem, $\dot{M}\theta$.

Neste ponto, a equação diferencial está pronta para ser integrada. Esta integração será realizada através do método dos volumes finitos [28], a ser brevemente descrito fazendo-se uso da Fig. 4.4.

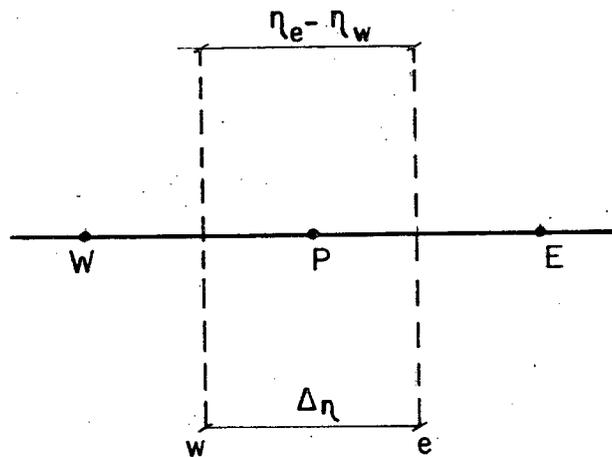


Fig. 4.4 - Volume de controle característico utilizado na discretização do domínio de solução

A Fig. 4.4 mostra um volume de controle característico do problema. O ponto P situa-se no centro do volume de controle, de comprimento $\Delta\eta$, cujas fronteiras são as faces representadas pelas linhas tracejadas w e e. Os vizinhos do ponto P são os pontos W e E.

A discretização da equação (4.29) é realizada a partir da integração espacial e temporal no volume de controle mostrado na Fig. 4.4. Assim, integrando-se a equação (4.29) tem-se,

$$\int_{\zeta}^{\zeta+\Delta\zeta} \int_w^e \frac{\partial}{\partial \zeta} [(1-\xi)\theta] d\eta d\zeta + \int_{\zeta}^{\zeta+\Delta\zeta} \int_w^e \frac{\partial}{\partial \eta} (J) d\eta d\zeta = 0 \quad (4.30)$$

Adotando o esquema implícito [28] para a integração no tempo, a integral acima resulta:

$$\{ [(1-\xi)\theta_p]_{\zeta+\Delta\zeta} - [(1-\xi)\theta_p]_{\zeta} \} \Delta\eta + [(J_e - J_w)]_{\zeta+\Delta\zeta} \Delta\zeta = 0 \quad (4.31)$$

onde os índices ζ e $\zeta+\Delta\zeta$ referenciam o tempo a que cada termo corresponde.

É necessário, agora, que se determine os valores de J_e e J_w . Para estimar J_e será assumido que J é constante entre os pontos P e E da Fig. 4.4 [29], isto é,

$$J_e = \dot{M}\theta_e - \frac{1}{(1-\xi)} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_e = \text{constante} \quad (4.32)$$

Resolvendo a equação diferencial acima com as seguintes condições de contorno,

$$\eta = \eta_P ; \quad \theta = \theta_P \quad (4.33)$$

$$\eta = \eta_E ; \quad \theta = \theta_E$$

obtem-se,

$$\frac{\theta - \theta_P}{\theta_E - \theta_P} = \frac{\exp[\dot{M}(\eta - \eta_P)(1 - \xi)] - 1}{\exp[\dot{M}(\eta_E - \eta_P)(1 - \xi)] - 1} \quad (4.34)$$

A equação anterior pode agora ser usada para determinar θ_e e $(\partial\theta/\partial\eta)_e$,

$$\theta_e = \left\{ \frac{\exp[\dot{M}_e(\eta_e - \eta_P)(1 - \xi)] - 1}{\exp[\dot{M}_e(\eta_E - \eta_P)(1 - \xi)] - 1} \right\} (\theta_E - \theta_P) + \theta_P \quad (4.35)$$

$$\left. \frac{\partial\theta}{\partial\eta} \right|_e = \left\{ \frac{\exp[\dot{M}_e(\eta_e - \eta_P)(1 - \xi)] - 1}{\exp[\dot{M}_e(\eta_E - \eta_P)(1 - \xi)] - 1} \right\} \dot{M}_e (1 - \xi) (\theta_E - \theta_P) \quad (4.36)$$

Substituindo as equações acima na equação (4.32), chega-se a ,

$$J_e = \left\{ \frac{\exp[\dot{M}_e(\eta_e - \eta_P)(1 - \xi)] - 1}{\exp[\dot{M}_e(\eta_E - \eta_P)(1 - \xi)] - 1} \right\} (\theta_E - \theta_P) \dot{M}_e + \theta_P \dot{M}_e +$$

$$- \left\{ \frac{\exp[\dot{M}_e(\eta_e - \eta_P)(1 - \xi)]}{\exp[\dot{M}_e(\eta_E - \eta_P)(1 - \xi)] - 1} \right\} (\theta_E - \theta_P) \dot{M}_e \quad (4.37)$$

ou, ainda,

$$J_e = (\dot{M}_e + a_E) \theta_P - a_E \theta_E \quad (4.38)$$

onde,

$$a_E = \frac{\dot{M}_e}{\exp[\dot{M}_e (\eta_E - \eta_P) (1-\xi)] - 1} \quad (4.39)$$

De maneira análoga obtem-se o fluxo J_w :

$$J_w = a_W \theta_W + (\dot{M}_w - a_W) \theta_P \quad (4.40)$$

com,

$$a_W = \frac{\exp[\dot{M}_w (\eta_P - \eta_W) (1-\xi)]}{\exp[\dot{M}_w (\eta_P - \eta_W) (1-\xi)] - 1} \dot{M}_w \quad (4.41)$$

Desta forma,

$$(J_e - J_w) = [(a_E + a_W) \theta_P - a_E \theta_E - a_W \theta_W] + (\dot{M}_e - \dot{M}_w) \theta_P \quad (4.42)$$

Substituindo a equação anterior na equação (4.31), obtem-se,

$$\left\{ \left[(1-\xi) \theta_P \right]_{\zeta+\Delta\zeta} - \left[(1-\xi) \theta_P \right]_{\zeta} \right\} \Delta\eta + \left\{ \left[(a_E + a_W) \theta_P - a_E \theta_E - a_W \theta_W \right]_{\zeta+\Delta\zeta} + \left[(\dot{M}_e - \dot{M}_w) \theta_P \right]_{\zeta+\Delta\zeta} \right\} \Delta\zeta = 0 \quad (4.43)$$

Rearranjando os termos, a equação (4.43) pode ser rees-

crita como:

$$\begin{aligned} & \left[(a_E + a_W) \Delta \zeta + (1-\xi) \Delta \eta + (\dot{M}_e - \dot{M}_w) \Delta \zeta \right] \theta_P = \\ & = (a_E \theta_E - a_W \theta_W) \Delta \zeta + [(1-\xi) \Delta \eta \theta_P]_{\zeta} \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde a exceção do último termo do lado direito, todos os demais são determinados no tempo $\zeta + \Delta \zeta$. Notando ainda que,

$$\left[(1-\xi) \Delta \eta \right]_{\zeta + \Delta \zeta} + (\dot{M}_e - \dot{M}_w) \Delta \zeta = \left[(1-\xi) \Delta \eta \right]_{\zeta} \quad (4.45)$$

a equação (4.44), dividida por $\Delta \zeta$, torna-se, finalmente,

$$a_P \theta_P = a_E \theta_E + a_W \theta_W + a_{PZ} [\theta_P]_{\zeta} \quad (4.46)$$

onde:

$$a_E = \frac{\dot{M}_e}{\exp[\dot{M}_e (\eta_E - \eta_P) (1-\xi)] - 1} \quad (4.39)$$

$$a_W = \frac{\exp[\dot{M}_w (\eta_P - \eta_W) (1-\xi)]}{\exp[\dot{M}_w (\eta_P - \eta_W) (1-\xi)] - 1} \quad (4.41)$$

$$a_{PZ} = \frac{(1-\xi) (\eta_e - \eta_w)}{\Delta \zeta} \quad (4.47)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_{PZ} \quad (4.48)$$

A equação (4.46) é a forma discretizada da equação

(4.21). Para fins computacionais, as exponenciais que aparecem nas equações anteriores foram calculadas aproximadas pela lei da potência. Esta lei, introduzida por Patankar [29], vem sendo largamente empregada na solução de problemas envolvendo convecção e difusão em escoamentos. Os coeficientes que aparecem na equação (4.46) dependem dos parâmetros geométricos e dos valores de \dot{M} . A fim de se determinar \dot{M} , necessita-se conhecer a velocidade da frente de secagem ξ obtida a partir da equação (4.23),

$$\bar{\theta} \frac{d\xi}{d\zeta} = \frac{1}{(1-\zeta)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + Pn \quad \text{em } \eta = 0 \quad (4.23)$$

É importante lembrar que a equação anterior é válida somente para $\eta = 0$, isto é, para o primeiro volume de controle do domínio de solução, Fig. 4.5,

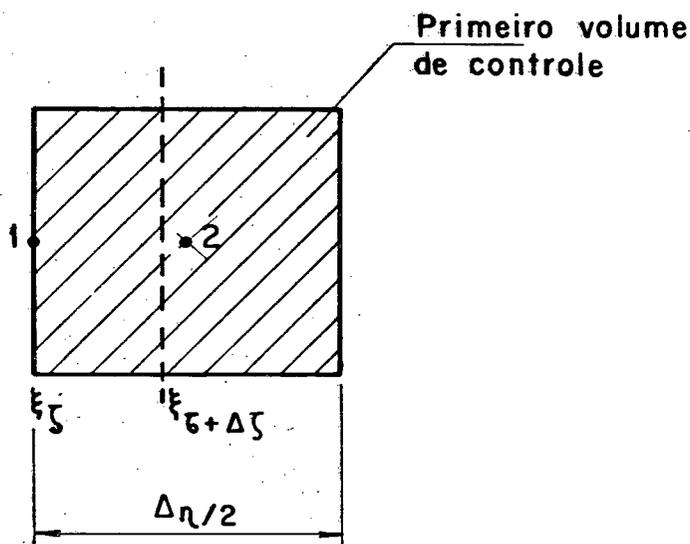


Fig. 4.5 - Primeiro volume de controle da discretização do domínio de solução.

O conteúdo de líquido $\bar{\theta}$ acumulado no volume de controle

é igual a θ_2 . Vale salientar que isto é correto somente se o intervalo de tempo for suficientemente pequeno para que $\xi_{t+\Delta t}$ não esteja situado além da fronteira e.

A derivada $(\partial\theta/\partial\eta)_{\eta=0}$ pode ser aproximada por:

$$\left. \frac{\partial\theta}{\partial\eta} \right|_{\eta=0} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta\eta/2} \quad (4.49)$$

mas, θ_1 é condição de contorno para $\eta = 0$, ($\theta_1 = 0$) e, portanto, a equação para $d\xi/dt$ é:

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = \frac{1}{\theta_2} \left[Pn - \frac{\theta_2}{(1-\xi)\Delta\eta/2} \right] \quad (4.50)$$

Os coeficientes a_E , a_W , a_{PZ} e a_P da equação (4.46) podem agora ser determinados e, desta forma pode-se calcular o campo de umidade θ a cada tempo ζ .

A equação discretizada (4.46) produz, para cada volume de controle, um grupo de equações algébricas que, juntamente com as condições de contorno, equações (4.22), são resolvidas usando o Algoritmo TDMA.

A solução da fase seca é obtida partindo-se da distribuição conhecida de θ para $\zeta = 0$ (tempo inicial da fase seca), e com $\xi = 0$. O tempo é, então, incrementado de $\Delta\zeta$ e é obtida a distribuição de θ para $\zeta + \Delta\zeta$. A velocidade da frente de secagem $d\xi/d\zeta$ é obtida a partir da equação (4.50). Conhecendo-se $d\xi/d\zeta$, a localização da frente de secagem em $\zeta + \Delta\zeta$ pode ser determinada por,

$$\xi_{z+\Delta z} = \xi_z + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right) \Delta z \quad (4.51)$$

Com os novos valores de ξ , o tempo é novamente incrementado, obtém-se a distribuição de θ , $d\zeta/dz$ e o novo valor de ξ . Este procedimento repete-se até que seja atingido o regime permanente.

4.4 - Geometria Cilíndrica

Tendo concluído a apresentação da metodologia de solução das equações diferenciais do modelo paramétrico e geometria plana, será discutida agora a geometria cilíndrica. A obtenção das equações discretizadas nesta geometria segue os mesmos passos descritos nas seções anteriores. Para a fase úmida, o método de discretização das equações é muito semelhante àquele utilizado para a geometria plana. As equações discretizadas da fase úmida em geometria cilíndrica se encontram no apêndice B.

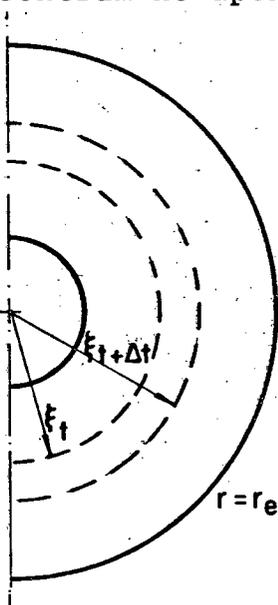


Fig. 4.6 - Localização da frente de secagem para dois tempos diferentes; geometria cilíndrica.

Inicia-se a discretização das equações para a fase seca apresentando-se a Fig.4.6. Esta figura apresenta a localização da frente de secagem ξ para dois instantes de tempo.

A equação da umidade na fase seca em termos da coordenada η para a geometria cilíndrica é escrita da seguinte forma :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{\eta}{R(1-\xi)^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (R \frac{\partial \theta}{\partial \eta}) - \frac{(\eta-1)}{(1-\xi)} \frac{d\xi}{d\zeta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad (4.52)$$

onde,

$$\theta = \frac{\theta}{\theta_i} ; \quad \zeta = \frac{D\theta t}{r_e^2} ; \quad \xi = \frac{\xi^*}{r_e} \quad (4.53)$$

$$R = \frac{r}{r_e} ; \quad \eta = \frac{R - \xi(\zeta)}{1 - \xi(\zeta)}$$

Através das igualdades dadas pelas equações (4.24) e (4.25) e notando que,

$$R \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\eta-1) \frac{d\xi}{d\zeta} \theta \right] = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[R(\eta-1) \frac{d\xi}{d\zeta} \theta \right] + (\eta-1) \frac{d\xi}{d\zeta} \theta (1-\xi) \quad (4.54)$$

é possível escrever a equação (4.52) como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[R(1-\xi) \theta \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[R(\eta-1) \frac{d\xi}{d\zeta} \theta - \frac{1}{(1-\xi)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] &= \\ &= (\eta-1)(1-\xi) \frac{d\xi}{d\zeta} \theta \end{aligned} \quad (4.55)$$

A equação anterior representa a equação da conservação da unidade para a fase seca, escrita em coordenadas cilíndricas. Tal equação é equivalente à equação (4.26) para coordenadas planas. Pode-se reescrever a equação (4.55) como:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[R(1-\xi) \theta \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} (RJ) = (1-\xi) \dot{M} \theta \quad (4.56)$$

onde J e \dot{M} estão definidos nas equações (4.27) e (4.28) respectivamente.

Integrando a equação (4.56) no tempo e no espaço, ao longo do volume de controle mostrado na Fig. 4.4, e adotando um esquema implícito para a integração temporal obtém-se ,

$$\begin{aligned} \left\{ \left[R_P (1-\xi) \theta_P \right]_{\zeta+\Delta\zeta} - \left[R_P (1-\xi) \theta_P \right]_{\zeta} \right\} \Delta\eta + \left[R_e J_e - R_w J_w \right]_{\zeta+\Delta\zeta} \Delta\zeta &= \\ = (1-\xi) \dot{M}_P \theta_P \Delta\eta \Delta\zeta & \end{aligned} \quad (4.57)$$

Com os valores de J_e e J_w dados pelas equações (4.38) e (4.40), respectivamente, é correto escrever,

$$\begin{aligned}
 (R_e J_e - R_w J_w) &= [(a_E^* + a_W^*) \theta_P - a_E^* \theta_E - a_W^* \theta_W] + \\
 + (\dot{M}_e R_e - \dot{M}_w R_w) \theta_P & \quad (4.58)
 \end{aligned}$$

onde,

$$a_E^* = a_E R_e \quad e \quad a_W^* = a_W R_w$$

Substituindo a eq. (4.58) na equação (4.57) e reorganizando os termos, chega-se a,

$$\begin{aligned}
 [(a_E^* + a_W^*) \Delta \zeta + (1-\xi) R_P \Delta \zeta - (1-\xi) \dot{M}_P \Delta \eta \Delta \zeta + \\
 + \dot{M}_e R_e - \dot{M}_w R_w] \theta_P &= (a_E^* \theta_E + a_W^* \theta_W) \Delta \zeta + R_P (1-\xi) \Delta \eta \theta_P \quad (4.59)
 \end{aligned}$$

onde a exceção do último termo do lado direito, todos os demais são determinados no instante $\zeta + \Delta \zeta$. Entretanto, fazendo uso da igualdade

$$\begin{aligned}
 [(1-\xi) R_P \Delta \eta - (1-\xi) \dot{M}_P \Delta \eta \Delta \zeta]_{\zeta + \Delta \zeta} + (\dot{M}_e R_e - \dot{M}_w R_w) = \\
 = [R_P (1-\xi) \Delta \eta]_{\zeta} \quad (4.60)
 \end{aligned}$$

a eq. (4.58) torna-se, finalmente,

$$a_P^* \theta_P = a_E^* \theta_E + a_W^* \theta_W + a_{PZ}^* [\theta_P]_{\zeta} \quad (4.61)$$

onde:

$$a_E^* = \frac{Re\dot{M}_e}{\exp[\dot{M}_e(\eta_E - \eta_P)(1-\xi)] - 1} \quad (4.62)$$

$$a_W^* = \frac{R_w \exp[\dot{M}_w(\eta_P - \eta_W)(1-\xi)]}{\exp[\dot{M}_w(\eta_P - \eta_W)(1-\xi)] - 1} \quad (4.63)$$

$$a_{PZ}^* = \frac{R_P(1-\xi)(\eta_E - \eta_W)}{\Delta\zeta} \quad (4.64)$$

$$a_P^* = a_E^* + a_W^* + a_{PZ}^* \quad (4.65)$$

Novamente, as exponenciais foram aproximadas numericamente pela lei da potência |29|.

Resta ainda que se mostre a forma discretizada da equação correspondente à condição de contorno em $R = \xi$ ou $\eta = 0$.

Tomando a eq. (4.12) e reescrevendo-a para a geometria cilíndrica em termos da coordenada η , tem-se,

$$\bar{\theta} \frac{d\xi}{d\zeta} = - \frac{1}{(1-\xi)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{Pn}{(1-\xi)} \frac{\partial T}{\partial \eta} \quad \text{em } \eta = 0 \quad (4.66)$$

Para a condição de regime permanente, a derivada $\partial T / \partial \eta$ é determinada analiticamente da solução da equação de Laplace para coordenadas cilíndricas. A integração da equação de Laplace e a imposição das condições de contorno,

$$\eta = \frac{r_c/r_e - \xi}{(1-\xi)} \quad ; \quad T = 1 \quad (4.67)$$

$$\eta = 1 \quad ; \quad T = 0$$

fornece,

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{(1-\xi)}{\ln(r_c/r_e)} \cdot \frac{1}{(1-\xi) + \xi} \quad (4.68)$$

Substituindo na equação (4.66) o valor de $\partial T/\partial \eta$ para $\eta = 0$ obtido anteriormente, tem-se,

$$\bar{\theta} \frac{d\xi}{d\zeta} = - \frac{1}{(1-\xi)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{Pn}{\xi \ln(r_c/r_e)} \quad (4.69)$$

Aproximando a derivada $\partial \theta/\partial \eta$ de forma análoga àquela para coordenadas planas com auxílio da Fig. 4.5, chega-se a,

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = - \frac{1}{\theta_2} \left(\frac{\theta_2}{(1-\xi)\Delta\eta/2} + \frac{Pn}{\xi \ln(r_c/r_e)} \right) \quad (4.70)$$

A equação anterior é a forma discretizada da eq. (4.66) e é empregada para calcular a velocidade da frente de secagem $d\zeta/d\tau$.

Tendo discretizado tanto a equação diferencial como a expressão que fornece a velocidade da frente de secagem, a solução é obtida a partir de uma distribuição conhecida para θ em $\zeta = 0$. A obtenção de θ para um dado ζ bem como o avanço da solução com o tempo é feito de maneira idêntica àquela apresentada para a geome-

tria plana, conforme discutido na parte final da seção 4.3.1.

4.5 Modelo a Propriedades Variáveis

A divisão do problema da migração de umidade aqui analisado em fase seca e fase úmida é bastante conveniente quando se trata do modelo a propriedades constantes. No modelo a propriedades variáveis as difusividades de umidade associadas aos gradientes de umidade e temperatura tendem a zero à medida que o meio seca. Desta forma, não existe uma descontinuidade na derivada de θ com a posição η e, por esta razão, pode-se utilizar a mesma metodologia de solução desde o instante inicial ($\zeta = 0$) até o regime permanente ($\zeta \rightarrow \infty$).

As equações discretizadas para o modelo a propriedades variáveis são obtidas de forma análoga ao apresentado anteriormente para a fase úmida do modelo paramétrico. Por conveniência, estas equações são mostradas no Apêndice C.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS PARA A FORMULAÇÃO PARAMÉTRICA

5.1. Geometria Plana

A análise paramétrica desenvolvida nesta dissertação tem como ponto de partida o trabalho de Eckert e Faghri |13|. A reprodução dos resultados de |13| valida o método de solução aqui utilizado e torna necessária apenas a discussão de alguns resultados considerados relevantes e que não constam naquele trabalho.

Dependendo da fase do processo de secagem em consideração, fase úmida ou fase seca, tem-se um parâmetro físico adimensional que governa o problema. Na fase úmida este parâmetro é o número de Luikov, Lu (equação (2.29)), e para a fase seca o parâmetro é o número de Posnov, Pn (equação (2.25)).

No início do processo de secagem do meio poroso, durante a fase úmida, a temperatura e o conteúdo de umidade são funções de Lu . Nesta fase o número de Posnov serve apenas para determinar o instante da transição para a fase seca. Deste momento em diante, na fase seca portanto, a temperatura é assumida estar plenamente desenvolvida e a solução para o conteúdo de umidade torna-se independente do número de Luikov, passando a ter como único parâmetro o número de Posnov.

O primeiro passo na obtenção da solução das equações diferenciais é determinar a malha a ser utilizada na discretização do domínio de solução. A seguir será apresentado um estudo compa-

rativo de três malhas utilizadas no modelo numérico.

A Tabela 5.1 mostra, para as malhas com 40, 80 e 120 pontos nodais, valores da umidade adimensional, θ , junto à parede quente, em função do tempo adimensional ζ , para o caso de $Lu=0,004$.

Tabela 5.1 - Valores de θ ($x = 0$) para malhas com 40, 80 e 120 pontos; $Lu = 0,004$.

TEMPO	40	80	120
0,0005	-0,05986	-0,05953	-0,05952
0,0010	-0,06045	-0,06029	-0,06026
0,0100	-0,11734	-0,11699	-0,11693
0,0500	-0,25262	-0,25246	-0,25244
0,0800	-0,31608	-0,31598	-0,31597
0,1000	-0,34896	-0,34890	-0,34888
0,1200	-0,37597	-0,37593	-0,37952
0,1400	-0,39816	-0,39813	-0,39813

A comparação dos resultados obtidos na Tabela 1 mostra uma melhora média de 0,15 % quando se refina a malha de 40 para 80 pontos e 0,017 % para o refino de 80 para 120 pontos. Comportamento semelhante foi observado para diferentes valores de Lu .

A Tabela 5.2 apresenta, para malhas com 40, 80 e 120 pontos nodais, valores da localização da frente de secagem, ξ/L , em função de ζ , para $Pn=2,5$. Neste caso, os refinamentos da malha de 40 para 80 e de 80 para 120 pontos nodais conduzem à melhoria de 1,01% e 0,44 %, respectivamente. Diferentes valores de Pn forne-

cem uma comparação semelhante.

Tabela 5.2 - Valores da frente de secagem ξ/L para malhas com 40, 80 e 120 pontos; $Pn = 2,5$.

TEMPO	40	80	120
0,1600288	0,0172842	0,0174998	0,0176670
0,1700128	0,0261479	0,0264892	0,0266898
0,2103328	0,0547018	0,0555109	0,0557597
0,2610208	0,0772339	0,0779902	0,0782259
0,3001888	0,0875573	0,0882344	0,0884470
0,3205408	0,0912442	0,0919433	0,0921437
0,3401248	0,0941502	0,0947500	0,0949395

Tabela 5.3 - Duração da fase úmida para malhas de 40, 80 e 120 pontos e para $\Delta\zeta = 0,00005$ e $0,00001$; $Lu = 0,004$ e $Pn = 2,5$.

$\Delta\zeta$ M	0,00005	0,00001
40	0,1418500	0,1418200
80	0,1419000	0,1418500
120	0,1419000	0,1418500

A Tabela 5.3 apresenta a duração da fase úmida para as três malhas utilizadas e para dois incrementos de tempo diferentes, $\Delta\zeta = 0,00005$ e $\Delta\zeta = 0,00001$. O caso apresentado é para $Pn = 2,5$

e $Lu = 0,004$. Para ambos os incrementos de tempo, os resultados para as malhas de 80 e 120 pontos são virtualmente os mesmos.

Analisando-se as três tabelas apresentadas anteriormente, verifica-se que há uma melhora de aproximadamente 1 % nos resultados quando se passa da malha de 40 para a malha de 80 pontos. O refino subsequente, de 80 para 120 pontos, produz uma melhora menor que 0,5 %. Desta forma, buscando um compromisso adequado entre o tempo de computação e a precisão da solução numérica, optou-se por utilizar na discretização do domínio de solução uma malha de 80 pontos.

A Tabela 5.3 indica que a diferença nos tempos iniciais de secagem associada à utilização do incremento de tempo menor é inferior a 0,1 %. Ainda, a solução obtida com $\Delta\zeta = 0,00001$ requer um tempo de processamento quatro vezes maior do que aquela obtida com $\Delta\zeta = 0,00005$. Desta forma, optou-se pelo uso do incremento de 0,00005.

Conforme discutido anteriormente, a solução para a fase seca é obtida assumindo que o perfil de temperatura está plenamente desenvolvida quando ocorre a transição entre as duas fases. Nestas condições, o termo da derivada segunda da temperatura na equação do transporte de umidade se anula e esta equação assume a mesma forma que a equação da condução do calor em regime transiente. A Fig. 5.1 e a Tabela 5.4 foram preparadas a fim de verificar a validade desta hipótese, e serão analisadas a seguir.

A Fig. 5.1 mostra, adimensionalmente, o desenvolvimento da temperatura em função do tempo para três posições distintas: $X = 0,2415$, $0,4958$ e $0,8747$. Apenas os dois números de Luikov extremos foram representados, 0,1 (linha cheia) e 0,004 (linha tracejada).

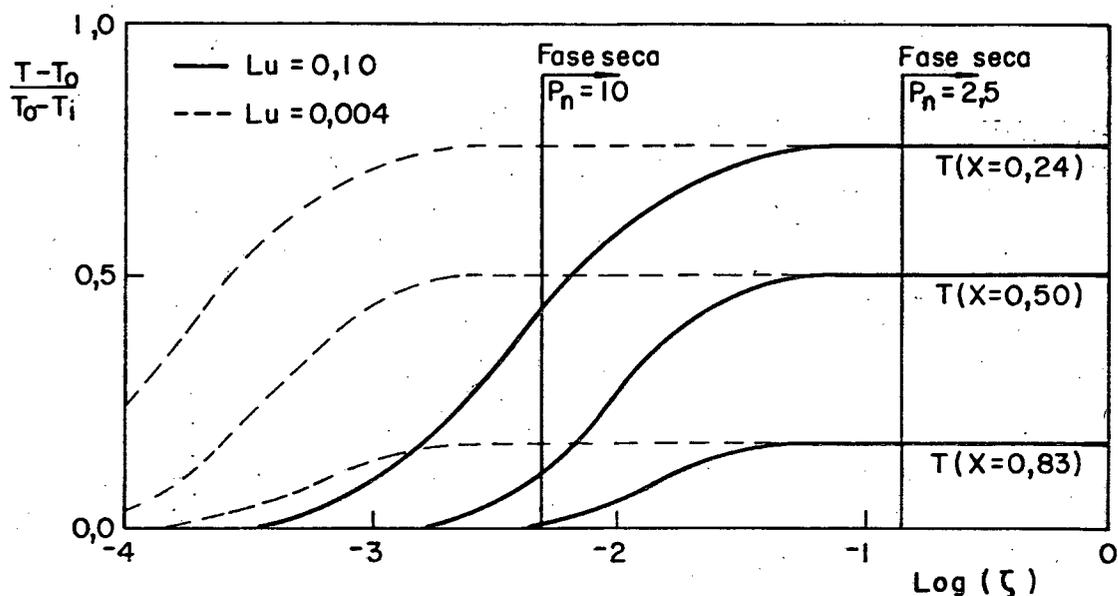


Fig. 5.1 - Desenvolvimento da temperatura em função do tempo para três posições distintas, tendo Lu como parâmetro.

O número de Luikov representa a razão entre o transporte de umidade devido ao gradiente de umidade e o transporte de calor devido ao gradiente de temperatura. Assim, quanto menor Lu, mais rapidamente a temperatura irá se desenvolver em relação ao conteúdo de umidade. Conforme observado na Fig. 5.1, a linha tracejada atinge o patamar de regime permanente mais cedo que a linha cheia, pois corresponde a um menor valor de Lu.

Nesta figura, as linhas verticais correspondem aos instantes de transição entre as fases úmida e seca para os dois extremos do número de Posnov investigados nesta parte do trabalho, $P_n = 10$ e $2,5$. O número de Posnov, como definido na seção (2.5), regula a duração da fase úmida. Valores de P_n mais elevados correspondem a um menor tempo de duração da fase úmida, pois P_n cresce com a diferença de temperatura ($T_c - T_i$) e decresce com a

umidade inicial do meio poroso θ_i .

Pela análise da figura conclue-se que mesmo para altos valores de P_n , desde que se trabalhe com baixos valores de L_u , o perfil de temperatura está plenamente desenvolvido quando se inicia a fase seca. Para L_u altos é necessário que P_n seja baixo a fim de garantir que o perfil de temperatura esteja desenvolvido para o cálculo da solução correspondente à fase seca. Será mostrado posteriormente que na fase úmida não é possível combinar altos valores de P_n e altos valores de L_u . Desta forma, a linha vertical correspondente a $P_n = 10$ só se aplica a $L_u = 0,004$; não é possível haver a fase úmida com $P_n = 10$ e $L_u = 0,10$.

A Tabela 5.4 mostra o desvio percentual máximo na distribuição de temperatura obtida através da solução numérica, em relação a solução analítica para regime permanente, quando se inicia a fase seca. Este desvio é apresentado para os diversos valores de L_u e P_n .

Tabela 5.4 - Desvio percentual máximo entre a distribuição de temperatura no início da fase seca e aquela correspondente ao regime permanente.

$P_n \backslash L_u$	2,5	5	7,5	10
0,10	$4,872 \times 10^{-5}$	-	-	-
0,04	$7,112 \times 10^{-12}$	$1,070 \times 10^{-1}$	-	-
0,01	$2,874 \times 10^{-12}$	$1,321 \times 10^{-11}$	$5,009 \times 10^{-4}$	$5,756 \times 10^{-1}$
0,004	$1,676 \times 10^{-12}$	$1,676 \times 10^{-12}$	$3,649 \times 10^{-12}$	$4,792 \times 10^{-6}$

O perfil de temperatura desenvolve-se mais rapidamente à

medida que se diminui o número de Luikov. Conseqüentemente, conforme observado na Tabela 5.4, o desvio percentual máximo diminui com a diminuição de Lu. Comportamento inverso ocorre em relação ao número de Posnov, uma vez que altos valores de Pn estão associados a uma menor duração da fase úmida. À medida que Pn aumenta, o perfil de temperatura tem menos tempo para se desenvolver e a temperatura no início da fase seca se desvia mais daquela correspondente ao regime permanente. Os espaços não ocupados da Tabela 5.4 devem-se à impossibilidade de se combinar altos valores de Lu e Pn para a fase úmida. Tal fato já foi mencionado anteriormente e será discutido em parágrafos posteriores.

A Fig. 5.2 mostra a unidade adimensional θ na posição correspondente a $X = 0$, isto é, junto à parede quente, em função do tempo adimensional ζ . Quatro valores de Lu são analisados.

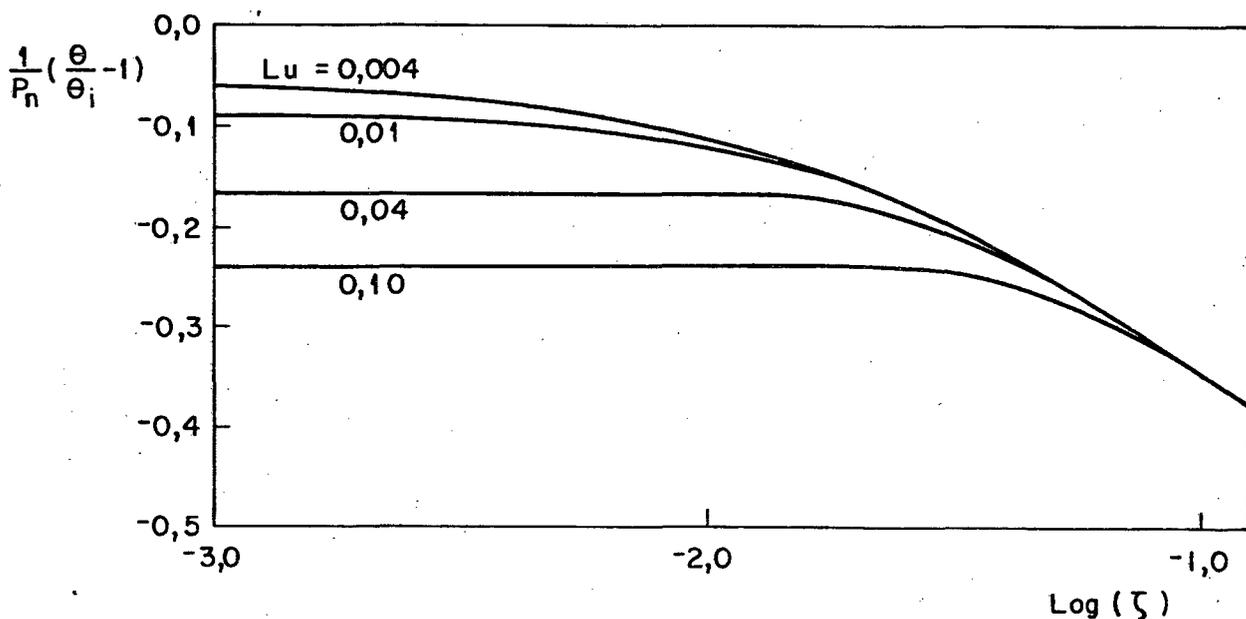


Fig. 5.2 - Umidade adimensional junto à parede quente em função do tempo adimensional ζ , tendo Lu como parâmetro.

No início do processo, durante o desenvolvimento do perfil de temperatura, a distribuição de umidade é função do número de Luikov. À medida que o processo evolui, a distribuição de temperatura aproxima-se do perfil plenamente desenvolvido e a distribuição de umidade torna-se independente da temperatura, e, conseqüentemente, independente do número de Luikov. Conforme mostrado na Fig. 5.2, os valores da umidade, para diferentes valores de Lu, a partir do tempo adimensional igual a 0,10, convergem para um mesmo valor.

A dependência da duração da fase úmida com o número de Posnov e o número de Luikov será analisada a seguir.

A transição entre a fase úmida e a fase seca ocorre quando a umidade junto à parede quente atinge o valor zero, ou seja, quando atinge o valor $-1/P_n$. A Tabela 5.5 apresenta a duração da fase úmida para os diversos casos do número de Luikov e do número de Posnov.

Tabela 5.5 - Duração da fase úmida para diferentes valores de Lu e Pn.

Lu \ Pn	2,5	5	7,5	10
0,10	0,143050	-	-	-
0,04	0,142400	0,026050	-	-
0,01	0,142000	0,030550	0,012200	0,00500
0,004	0,141900	0,031100	0,013350	0,00705

Para baixos valores do número de Posnov, a duração da fase úmida é independente do número de Luikov. Isto ocorre porque

nestes casos a fase úmida é suficientemente demorada para que os valores da umidade adimensional em $X = 0$, para cada número de Luikov, já tenham convergido para um único valor (ver Fig. 5.2 para $\zeta \gg 0,1$).

O aumento do número de Posnov, e a conseqüente diminuição da duração da fase úmida, não permitem que o perfil de temperatura se desenvolva completamente até que a fase seca seja atingida. Desta forma, a distribuição de umidade passa a depender do número de Luikov. Tal fato explica a dependência crescente da duração da fase úmida com o número de Luikov, à medida que o número de Posnov aumenta.

Os espaços não preenchidos da Tabela 5.5 correspondem àquelas combinações entre os números de Luikov e Posnov para as quais não existe a fase úmida, ou seja, o meio começa a secar tão logo a face esquerda é aquecida.

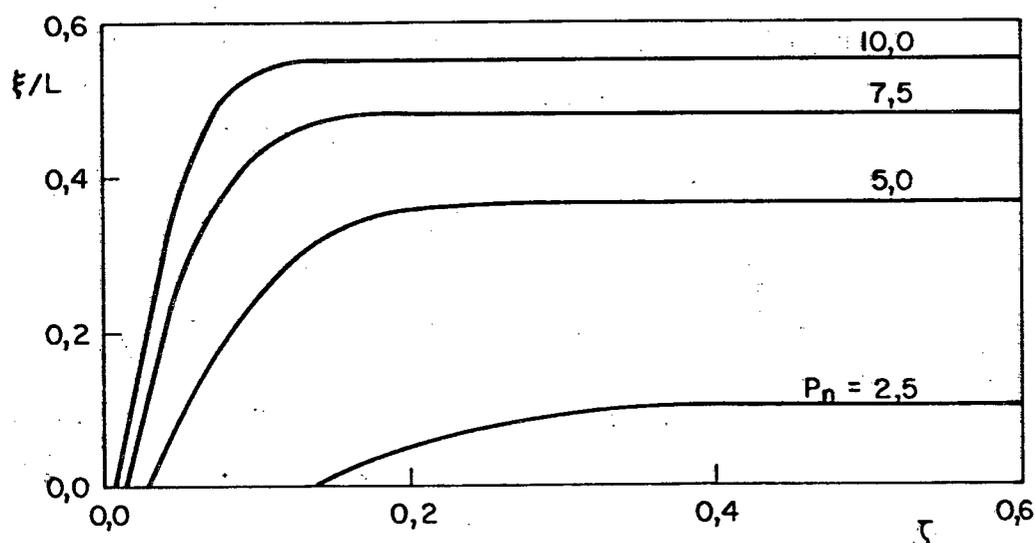


Fig. 5.3 - Localização da frente de secagem ξ/L em função do tempo, tendo P_n como parâmetro

A localização da frente de secagem ξ/L em função do tempo, é apresentada na Fig. 5.3, tendo o número de Posnov como parâ-

metro. Esta figura foi construída a partir de $Lu = 0,004$ para a fase úmida.

Dois fatos devem ser destacados em relação à Fig. 5.3. O primeiro é a dependência da profundidade de penetração da frente seca com o número de Posnov; quanto maior o valor de Pn , maior é esta penetração. O outro é o tempo necessário para que o regime permanente seja atingido; este tempo diminui com o aumento de Pn . A interpretação dos resultados apresentados na Fig. 5.3 é consequência direta do significado físico do número de Posnov, já discutido previamente.

Anteriormente afirmou-se que não é possível conciliar a existência da fase úmida com altos valores de Lu e Pn . A fim de entender melhor tal afirmação será apresentado a seguir uma análise qualitativa da ordem de grandeza dos diversos termos nas equações que governam o fenômeno. Para tal, considere as equações da conservação de umidade e energia no meio poroso escritas nas seguintes formas,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + Pn \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \quad (5.1)$$

e

$$Lu \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \quad (5.2)$$

onde,

$$\theta = \frac{\theta}{\theta_i} ; \quad T = \frac{T - T_i}{\Delta T} \quad (5.3)$$

$$\zeta = \frac{D \theta t}{L^2} ; \quad X = \frac{x}{L}$$

Na fronteira $X=0$ tem-se a seguinte condição de contorno,

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} + Pn \frac{\partial T}{\partial X} = 0 \quad (5.4)$$

Na análise que se segue a atenção será focalizada para baixos valores de ζ . As derivadas que aparecem nas equações anteriores serão avaliadas com auxílio da Fig. 5.4

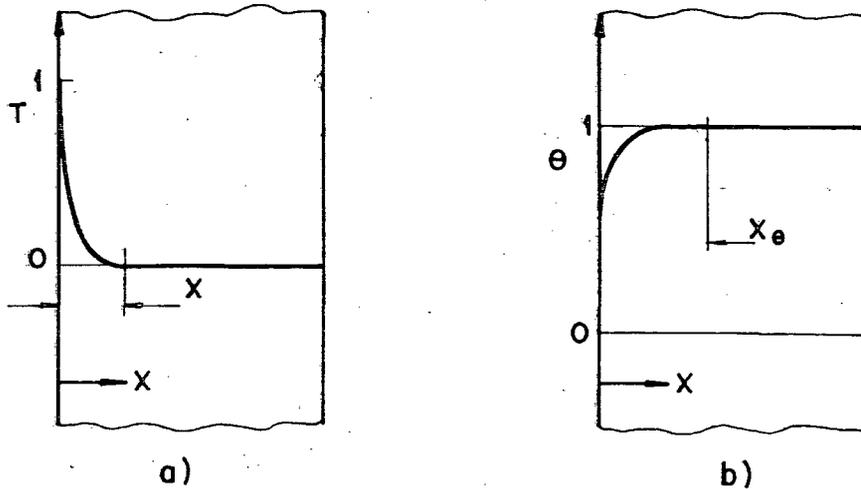


Fig. 5.4 - Desenvolvimento dos perfis de temperatura (a) e de umidade (b) para baixos valores de ζ .

Na Fig. 5.4 (a), é mostrado o desenvolvimento da distribuição de temperatura pouco tempo depois que a condição de contorno $T = 1$ é imposta na face $X = 0$. Nota-se que à medida que o tempo passa a frente de calor se propaga no interior do meio; a distância X_T representa a penetração desta frente para um dado instante de tempo ζ . Similarmente, a Fig. 5.4 (b) mostra o desenvolvimento do perfil de umidade no meio para um dado ζ . O avanço da frente de umidade com o tempo é representado pela distância X_θ . Enquanto que em $X=0$ o valor da temperatura é constante e igual a 1, o valor da umidade em $X=0$ varia com ζ ; inicialmente, $\theta|_{X=0} = 1$

e com o passar do tempo $\theta|_{x=0}$ diminui até atingir o valor zero quando então a face esquerda estará seca. Deve-se notar que os valores de X_T e X_θ são, em geral, diferentes.

Tendo em mente as Fig. 5.4 (a) e (b) pode-se agora estimar a ordem de grandeza dos diversos termos das equações (5.1) a (5.3). Tem-se para a equação (5.1),

$$\frac{(1-\theta/\theta_i)}{\zeta} \sim \frac{(1-\theta/\theta_i)}{X_\theta^2} + \frac{Pn}{X_T^2} \quad (5.5)$$

onde o símbolo \sim denota que o termo do lado esquerdo é da mesma ordem de grandeza que os termos do lado direito. Similarmente, para as equações (5.2) e (5.4), tem-se respectivamente,

$$\frac{Lu}{\zeta} \sim \frac{1}{X_T^2} \quad (5.6)$$

$$\frac{(1-\theta/\theta_i)}{X_\theta} + \frac{Pn}{X_T} \sim 0, \quad \text{em } x = 0 \quad (5.7)$$

Lembrando que $Lu = D_\theta / \alpha$, para baixos valores de Lu , o perfil de temperatura se desenvolve bem mais rapidamente que o perfil de umidade. Desta forma, para Lu baixo, $X_T \gg X_\theta$. Combinando tal fato com a condição em $x=0$ dada pela relação (5.7), tem-se,

$$\frac{1}{X_\theta} \left[\frac{(1-\theta/\theta_i)}{X_\theta} \right] \gg \frac{1}{X_T} \left(\frac{Pn}{X_T} \right) \quad (5.8)$$

A relação anterior mostra que o primeiro termo do lado direito da equação (5.5) é dominante sobre o segundo e, assim, pode-se escrever que,

$$\frac{(1-\theta/\theta_i)}{\zeta} \sim \frac{(1-\theta/\theta_i)}{X_\theta^2} \implies \zeta \sim X_\theta^2 \quad (5.9)$$

ou, combinando as relações (5.6) e (5.9),

$$X_\theta \sim Lu^{1/2} X_T \quad (5.10)$$

É possível, agora, determinar a ordem de grandeza da umidade na face esquerda do meio $\theta(X=0)$. Para tal, a relação (5.10) é substituída na condição de contorno (5.7) para se obter,

$$\frac{1}{Pn} \left(\frac{\theta}{\theta_i} - 1 \right) \sim Lu^{1/2}, \quad \text{em } X = 0 \quad (5.11)$$

A relação anterior fornece o valor da umidade adimensional θ (equação (3.6)) em $X=0$. Esta relação é tanto mais precisa quanto menor for o valor do número de Luikov. Para $Lu=0,004$, por exemplo, tem-se $(\theta/\theta_i-1)/Pn \sim -0,06$. Note que para $Lu=0,004$ a Fig. 5.2 fornece $(\theta/\theta_i-1)/Pn = -0,06$. À medida que o número de Luikov aumenta, a relação (5.11) torna-se menos precisa. Por exemplo, para $Lu=0,1$, tem-se $-0,32$ da relação (5.11) e $-0,24$ da Fig. 5.2.

Outra informação importante que pode ser extraída da relação (5.11) é que para um dado valor de Lu fixo, existe um limite superior para o número de Posnov, uma vez que $(1-\theta/\theta_i)$ é no máximo igual a um. Quanto maior o valor de Pn , mais depressa a umidade, em $X=0$, cai. O $Pn_{\text{máx}}$ corresponde àquele em que a umidade em $X=0$ atinge o valor zero quase que imediatamente após a prescrição da condição $T=1$. Desta forma,

$$Pn_{\text{máx}} \sim \frac{1}{Lu^{1/2}} \quad (5.12)$$

Para $Pn > Pn_{\text{máx}}$ as equações não conseguem satisfazer as condições de contorno e, conseqüentemente, o regime aqui denominado de fase úmida, simplesmente deixa de fazer sentido. Tais afirmações foram corroboradas através da solução numérica. Quando $Pn > Pn_{\text{máx}}$ o programa computacional atingia a fase seca instantaneamente, mesmo que o intervalo de tempo utilizado fosse muito pequeno. Tal fato explica os espaços não preenchidos nas Tabs. 5.4 e 5.5.

Para valores do número de Luikov próximos de um, as distâncias de penetração X_θ e X_T ficam da mesma ordem de grandeza, o que pode ser verificado pela relação (5.10). Assim sendo, da relação (5.7) e considerando que $X_\theta \sim X_T$, tem-se que,

$$\frac{(1-\theta/\theta_i)}{X_\theta^2} + \frac{Pn}{X_T^2} \sim 0, \quad \text{em } X = 0 \quad (5.13)$$

o que conduz a,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \sim \frac{(1-\theta/\theta_i)}{X_\theta^2} + \frac{Pn}{X_T^2} \sim 0, \quad \text{em } X = 0 \quad (5.14)$$

Note que a relação anterior é tanto mais correta quanto mais próximo de um for o número de Lu. Finalmente, a relação (5.14) explica a existência dos patamares observados na Fig. 5.2.

5.2 Geometria Cilíndrica

Nesta seção serão mostrados os resultados da formulação paramétrica para a geometria de paredes cilíndricas descrita na seção (3.3).

De forma análoga ao que ocorre na geometria plana, a so-

lução da temperatura e do conteúdo de umidade é função do número de Luikov ou do número de Posnov, dependendo da fase do processo em consideração. Na fase úmida, o número de Luikov é o parâmetro preponderante na solução, enquanto o número de Posnov é utilizado apenas para determinar o instante de transição para a fase seca. Durante a fase seca, o perfil de temperatura está plenamente desenvolvido e a solução do conteúdo de umidade é função somente do número de Posnov.

Nesta parte do trabalho serão analisados os resultados para quatro valores dos números de Luikov, 0,004, 0,01, 0,02, 0,04, e de Posnov, 1,5, 2,0, 2,5, e 3,0. A relação de raios, r_c/r_e foi mantida constante em 0,06.

Inicialmente será apresentada uma análise sucinta de alguns testes realizados objetivando verificar qual a malha mais adequada para a discretização do domínio da solução.

Tabela 5.6 - Valores de $\theta(R=r_c/r_e)$ para malhas com 40, 80 e 120 pontos; $Lu = 0,004$

TEMPO	40	80	120
0,00100	-0,15704	-0,12757	-0,12364
0,00300	-0,28098	-0,27687	-0,27614
0,00510	-0,33238	-0,32891	-0,32829
0,01045	-0,41566	-0,41293	-0,41244
0,01460	-0,45919	-0,45676	-0,45632
0,01780	-0,48624	-0,48397	-0,48356
0,01930	-0,49752	-0,49532	-0,49493

A Tabela 5.6 apresenta , para malhas com 40, 80 e 120 pontos nodais, valores da umidade adimensional θ junto à parede quente, em função do tempo adimensional ζ , com $Lu = 0,004$.

Os resultados desta tabela mostram melhoras médias de 0,27% e 0,040% quando se refinam as malhas de 40 para 80 pontos e de 80 para 120 pontos, respectivamente. Comportamento similar ocorre para os demais números de Luikov.

A Tabela 5.7 mostra, para as mesmas malhas, valores da posição da frente de secagem ξ/r_e em função do tempo para $Pn = 2,0$.

Tabela 5.7 - Valores da frente de secagem ξ/r_e para malhas com 40, 80 e 120 pontos; $Pn = 2,0$.

TEMPO	40	80	120
0,02000	0,0603202	0,0600603	0,0600000
0,02080	0,0612355	0,0609319	0,0609123
0,02220	0,0628166	0,0625810	0,0625732
0,02412	0,0650680	0,0648160	0,0648196
0,02520	0,0662866	0,0660507	0,0660594

Neste caso, o refino de 40 para 80 pontos e de 80 para 120 pontos conduzem, respectivamente, a melhoras médias de 0,02% e 0,00126%. Para diferentes valores do número de Posnov tem-se uma comparação semelhante.

As Tabelas 5.8 e 5.9 apresentam os valores da duração da seca para as três malhas e também para dois incrementos de tempo utilizados durante a fase úmida, $\Delta\zeta = 0,00001$ e $\Delta\zeta = 0,000005$. A Tabela 5.8 é para o caso de $Lu = 0,004$ e $Pn = 2,0$, enquanto a Tabe-

la 5.9 é para o caso de $Lu = 0,02$ e $Pn = 2,5$.

Tabela 5.8 - Duração da fase úmida para malhas com 40, 80 e 120 pontos e para $\Delta\zeta = 0,000005$ e $0,00001$; $Lu = 0,004$ e $Pn = 2,0$.

$\Delta\zeta$ M	0,00001	0,000005
40	0,0079600	0,0079550
80	0,0082000	0,0081900
120	0,0082400	0,0082350

Tabela 5.9 - Duração da fase úmida para malhas com 40, 80 e 120 pontos e para $\Delta\zeta = 0,0000055$ e $0,00001$; $Lu = 0,02$ e $Pn = 2,5$

$\Delta\zeta$ M	0,00001	0,000005
40	0,019650	0,019645
80	0,019960	0,019950
120	0,020010	0,020005

Na Tabela 5.8, para ambos os incrementos de tempo, o refino de 40 para 80 pontos representa uma melhora de aproximadamente 1,55%, enquanto que para o refino de 80 para 120 pontos a melhora é da ordem de apenas 0,2%.

Para o caso da Tabela 5.9, o primeiro e o segundo refinamentos conduzem a melhoras de aproximadamente 3% e 0,5%, respectivamente.

mente. Através da análise dos resultados apresentados, e considerando-se o compromisso entre a precisão da solução numérica e o tempo de computação, optou-se pela utilização de uma malha de 80 pontos.

As Tabelas 5.8 e 5.9 mostram que para uma malha de 80 pontos, a diferença de duração da fase úmida entre os dois incrementos de tempo é inferior a 0,1%. Porém, a utilização do incremento de tempo $\Delta\zeta = 0,000005$ requer um tempo de processamento duas vezes maior do que com o incremento de tempo $\Delta\zeta = 0,00001$. Assim, este último foi utilizado durante a fase úmida.

Concluída a escolha dos parâmetros numéricos da solução, passa-se à análise do efeito da consideração inicial de que a temperatura está plenamente desenvolvida no início da fase seca.

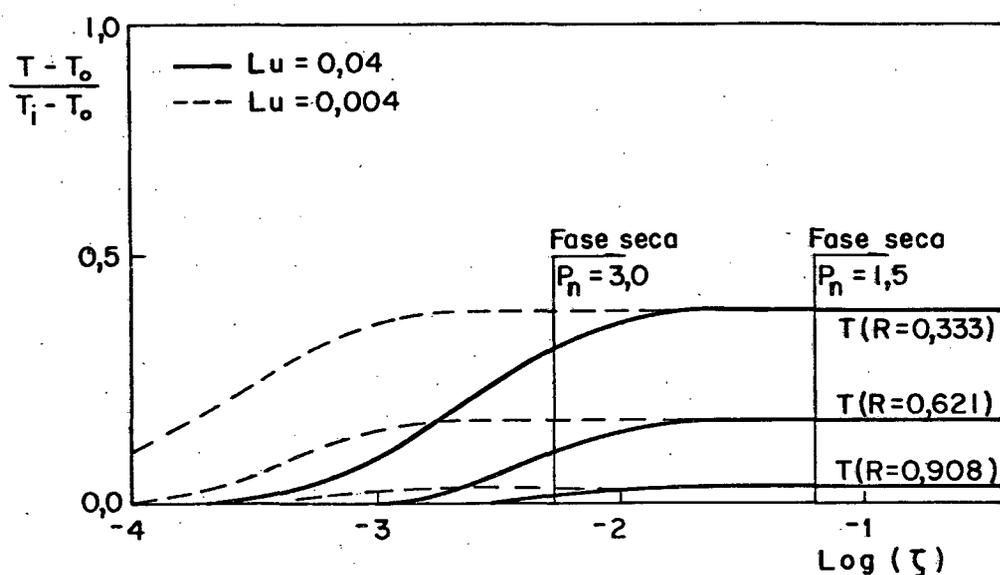


Fig. 5.5 - Desenvolvimento da temperatura em função do tempo para três posições distintas, tendo Lu como parâmetro.

A Fig. 5.5 apresenta para três posições distintas o desenvolvimento da temperatura adimensional em função do tempo.

Somente os dois números de Luikov extremos utilizados nesta parte do trabalho estão apresentados. A linha cheia corresponde a $Lu = 0,004$ e a linha tracejada a $Lu = 0,04$.

À medida que o número de Luikov diminui, aumenta a razão entre o calor transportado devido ao gradiente de temperatura e a umidade transportada devido ao gradiente de umidade. Assim, quanto menor o número de Luikov, mais rapidamente o perfil de temperatura se desenvolve em relação ao perfil de umidade. Esta característica pode ser observada na Fig. 5.5, onde a linha tracejada atinge o patamar de regime permanente muito antes que a linha cheia, que corresponde a um número de Luikov menor.

As linhas verticais mostradas na Fig. 5.5 correspondem aos tempos de duração da fase úmida para os dois extremos do número de Posnov, 3,0 e 1,5. Para valores crescentes de P_n , a duração da fase úmida é menor, pois a umidade inicial θ_i é menor para uma mesma diferença de temperatura.

Pela figura, conclui-se que para P_n altos é possível assumir o perfil de temperatura plenamente desenvolvido no início da fase seca, desde que se trabalhe com Lu baixos. Caso o número de Luikov seja alto, é necessário que se tenha P_n baixos, a fim de garantir que a distribuição de temperatura não influencie a solução para a fase seca. Ainda que fisicamente seja possível existir a situação com $P_n = 3,0$ e $Lu = 0,04$, incorrer-se-ia em imprecisão bastante grande, pois a formulação na fase seca assume a temperatura plenamente desenvolvida no instante da transição entre as duas fases.

A Tabela 5.10 contém os valores dos desvios percentuais máximos entre a distribuição de temperatura numérica e a distribuição de temperatura analítica para regime permanente, quando se

inicia a fase seca.

Tabela 5.10 - Desvio percentual máximo entre a distribuição de temperatura no início da fase seca e aquela correspondente ao regime permanente.

Pn \ Lu	3,0	2,5	2,0	1,5
0,04	24,00	9,28000	0,37668	0,1057
0,02	6,360	0,59175	0,10582	0,1057
0,01	0,3130	0,10593	0,10570	0,1057
0,004	0,1057	0,10570	0,10570	0,1057

A medida que o número de Luikov diminui, o erro entre as distribuições numérica e analítica também diminui, porque o perfil de temperatura desenvolve-se mais rapidamente.

Para Pn baixos, o tempo de duração da fase úmida é grande e, conseqüentemente, mesmo que se trabalhe com Lu elevados, a temperatura pode atingir o perfil plenamente desenvolvido. Tal fato pode ser observado na coluna de Pn = 1,5 onde o desvio percentual médio é o mesmo independente do número de Luikov. É possível notar, ainda, que para o caso de Pn = 3,0 e Lu = 0,04, corroborando o que foi comentado anteriormente, o desvio entre as duas distribuições de temperatura é extremamente alto, 24 %.

A Fig. 5.6 apresenta as curvas da umidade adimensional junto à superfície do cabo em função do tempo, para os quatro números de Luikov investigados.

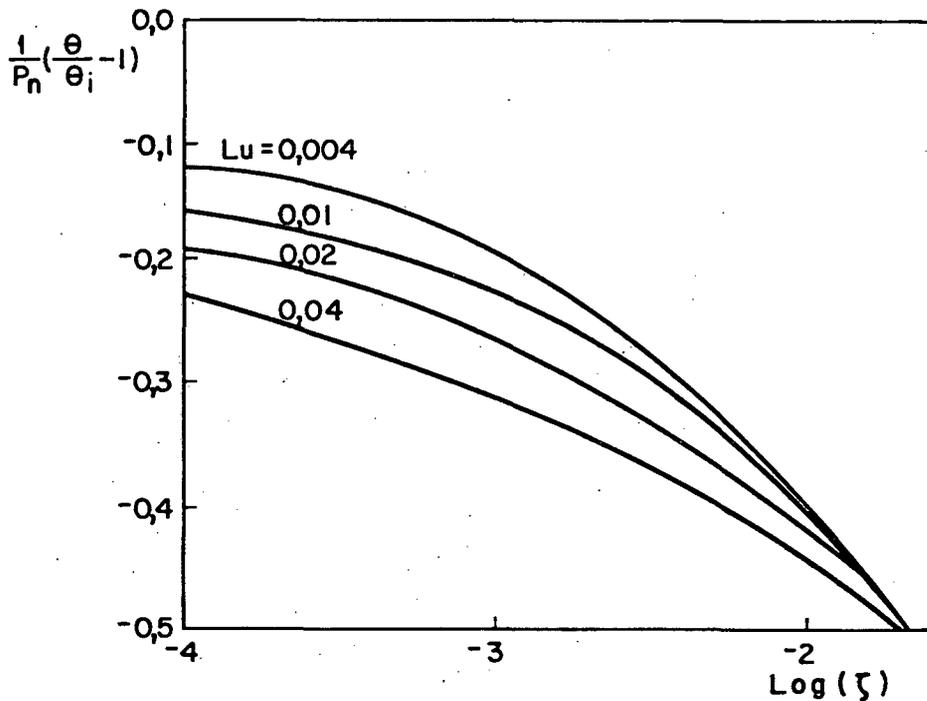


Fig. 5.6 - Umidade adimensional θ junto à superfície do cabo em função do tempo adimensional, tendo Lu como parâmetro.

Durante o desenvolvimento do perfil de temperatura a umidade é função do número de Luikov. À medida que a distribuição de temperatura atinge o perfil plenamente desenvolvido as curvas convergem para o mesmo valor pois a umidade torna-se independente deste parâmetro. A curva correspondente a $Lu = 0,04$ não chega a atingir o valor convergido das demais curvas porque na transição entre as duas fases o perfil de temperatura ainda não está plenamente desenvolvido.

A Fig. 5.7 apresenta a variação da umidade ao longo da distância adimensional r/r_e para vários tempos. As linhas cheias correspondem a $Lu = 0,04$ e as linhas tracejadas a $Lu = 0,004$.

Durante o desenvolvimento do perfil de temperatura, o número de Luikov exerce influência no perfil de umidade, o que pode ser observado nas diferenças entre as linhas tracejadas e cheias para baixos tempos. Para valores de tempo mais elevados, o perfil

de temperatura já está desenvolvido e as curvas cheias e tracejadas passam a ser coincidentes.

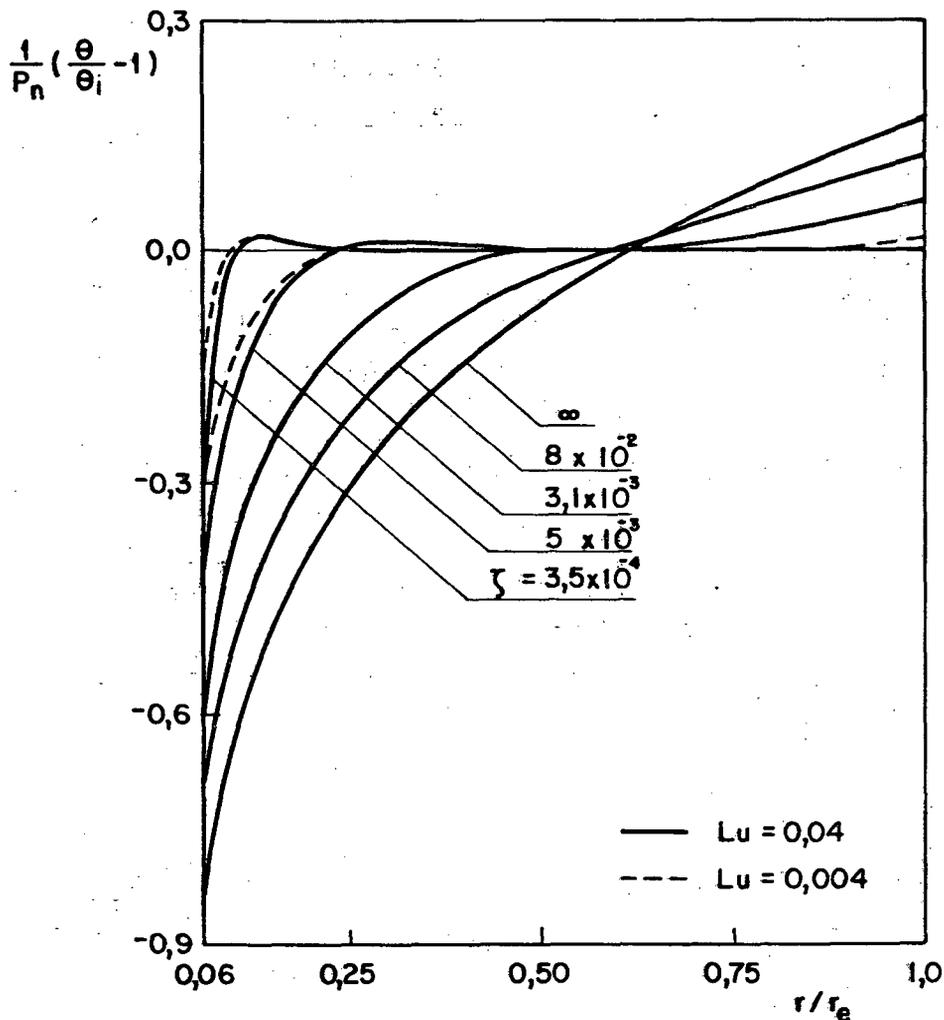


Fig. 5.7 - Umidade adimensional θ ao longo de r/r_e tendo o tempo como parâmetro de curva.

O fato de ocorrer um aumento no conteúdo de umidade na região próxima à superfície do cabo para baixos tempos será explicado a seguir.

No momento em que a condição de temperatura prescrita na superfície do cabo é abruptamente imposta, ocorre uma evaporação do líquido situado próximo a esta região e vapor passa a migrar devido à diferença de temperatura. Durante o período em que o

perfil de temperatura está se desenvolvendo, isto é, para baixos valores do tempo, à medida que vapor penetra no meio encontra regiões de temperatura mais baixa e se condensa. Isto ocasiona aumento no conteúdo de umidade ainda que a prescrição das condições de contorno exija a secagem do solo próximo à superfície do cabo.

Quando o perfil de temperatura está plenamente desenvolvido, o fluxo de vapor associado ao gradiente de temperatura passa a ser constante ao longo da distância r/r_e , ainda que o fluxo total de vapor diminua. Na superfície do cabo, em $r = r_e$, ocorre evaporação de líquido e, conseqüentemente, diminuição de umidade. Na superfície externa ocorre o inverso, um aumento no conteúdo de umidade decorrente da condensação do vapor.

Tabela 5.11 - Duração da fase úmida para diferentes valores de Lu e Pn .

Pn	3,0	2,5	2,0	1,5
Lu				
0,04	0,001460	0,004930	0,018403	0,06182
0,02	0,003240	0,008220	0,019635	0,06108
0,01	0,004815	0,009150	0,019885	0,06070
0,004	0,005350	0,009455	0,019985	0,06047

À medida que o processo evolui, a umidade junto à superfície do cabo aproxima-se do valor zero, instante em que se inicia a fase seca. A Tabela 5.11 apresenta os valores da duração da fase úmida para os diversos valores do número de Luikov e Posnov.

Para baixos valores de Pn , o tempo de duração da fase úmida é alto e independe do número de Luikov.

Para Pn altos, o tempo de duração é baixo e o perfil de temperatura não está, ainda, plenamente desenvolvido no instante da transição entre as fases úmida e seca. Assim, a umidade junto à superfície do cabo atinge o valor zero em diferentes tempos.

Tendo o solo próximo ao cabo secado, passa a existir no meio poroso uma frente de secagem que se movimenta com o tempo.

As Fig. 5.8 - 5.11 mostram, para os quatro números de Posnov investigados, os valores da umidade adimensional θ/θ_i , em função da frente de secagem ξ/r_e , tendo o tempo ζ como parâmetro de curva.

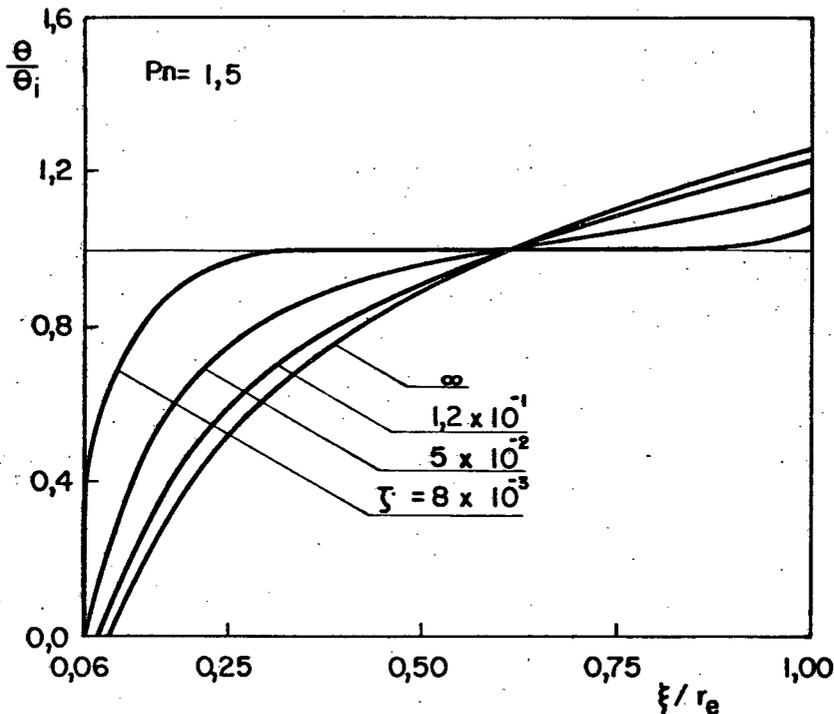


Fig. 5.8 - Umidade adimensional θ/θ_i em função da posição da frente de secagem tendo o tempo como parâmetro; $Pn = 1,5$.

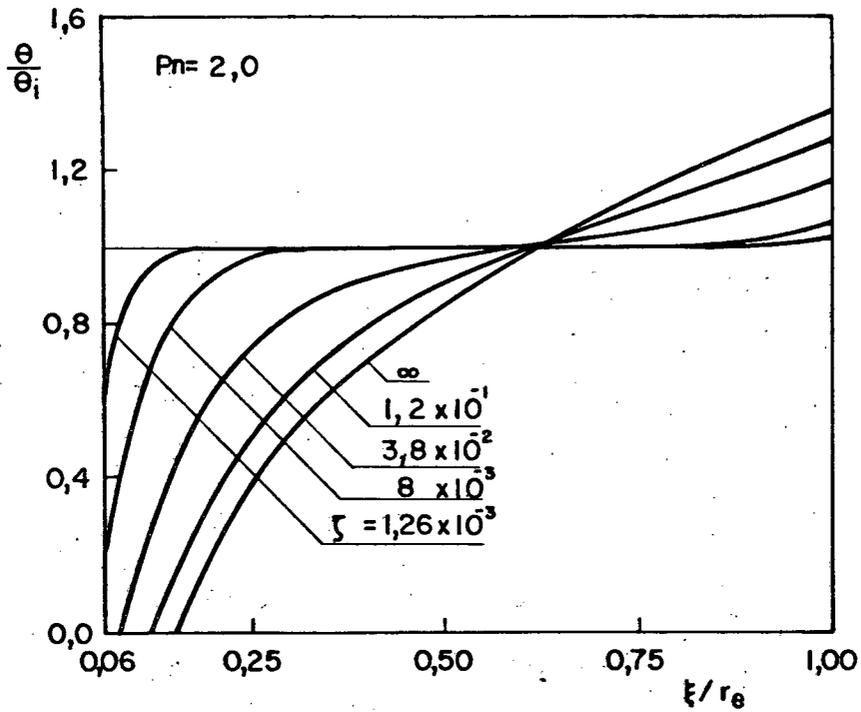


Fig. 5.9 - Umidade adimensional θ/θ_i em função da posição da frente de secagem tendo o tempo como parâmetro; $Pn = 2,0$.

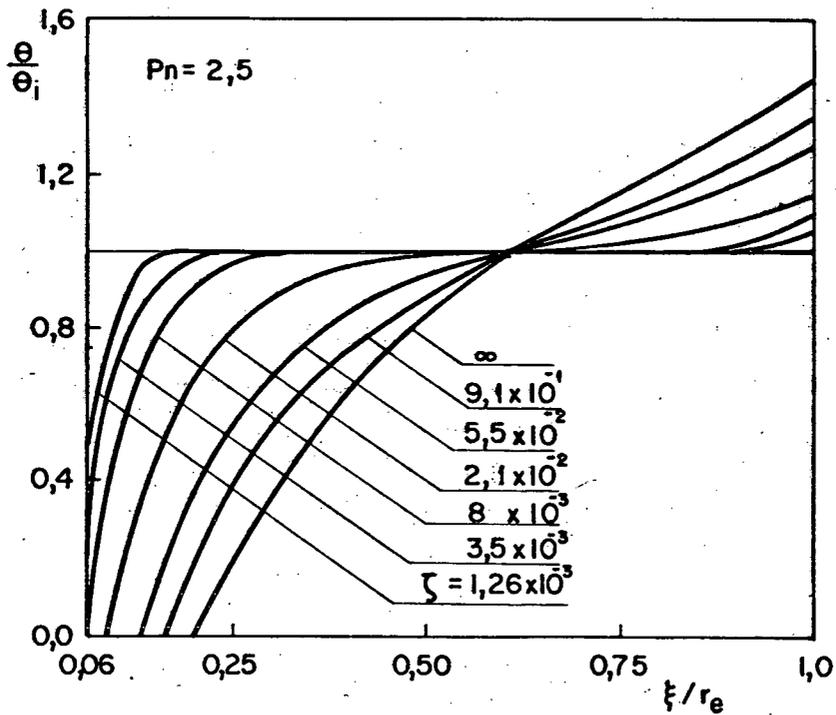


Fig. 5.10 - Umidade adimensional θ/θ_i em função da posição da frente de secagem tendo o tempo como parâmetro; $Pn = 2,5$.

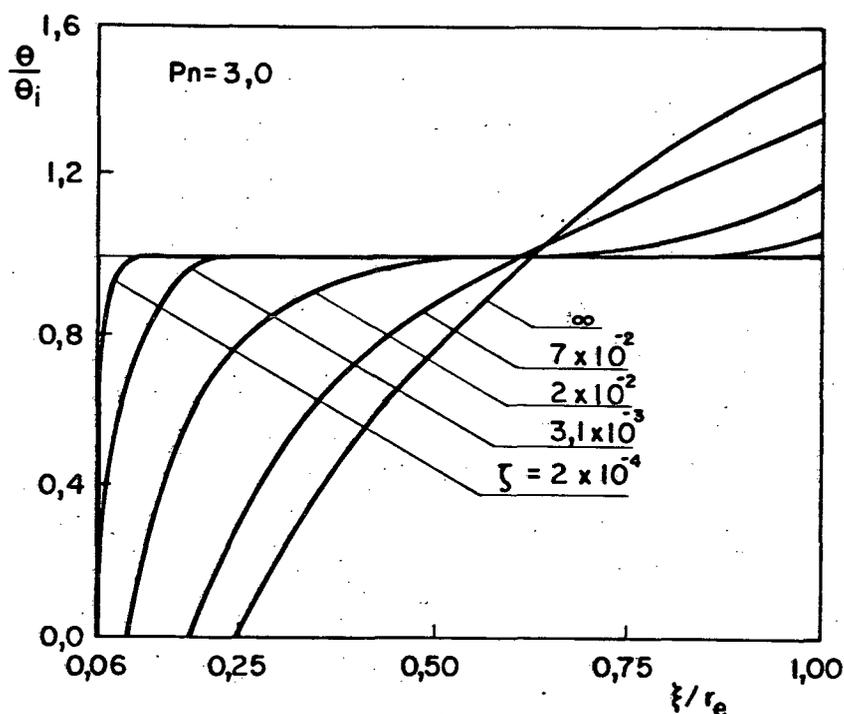


Fig. 5.11 - Umidade adimensional θ/θ_i em função da posição da frente de secagem tendo o tempo como parâmetro; $Pn = 3,0$

Novamente pode ser observado que a umidade com o passar do tempo diminui junto ao cabo e aumenta junto à superfície externa. A partir de um determinado momento, o solo próximo ao cabo seca e a frente de secagem avança no interior do meio poroso, até o instante em que o regime permanente finalmente é atingido.

A penetração da frente de secagem é maior à medida que aumenta o número de Posnov. Isto ocorre porque este parâmetro é diretamente proporcional à diferença de temperatura entre as duas superfícies e inversamente proporcional à umidade inicial do meio.

Tendo em vista que o conteúdo total de umidade deve permanecer constante no interior das duas superfícies, a umidade junto à superfície externa é maior quanto maior o número de Posnov.

A localização da frente de secagem em função do tempo tendo o número de Posnov como parâmetro de curva é apresentada na Fig. 5.12.

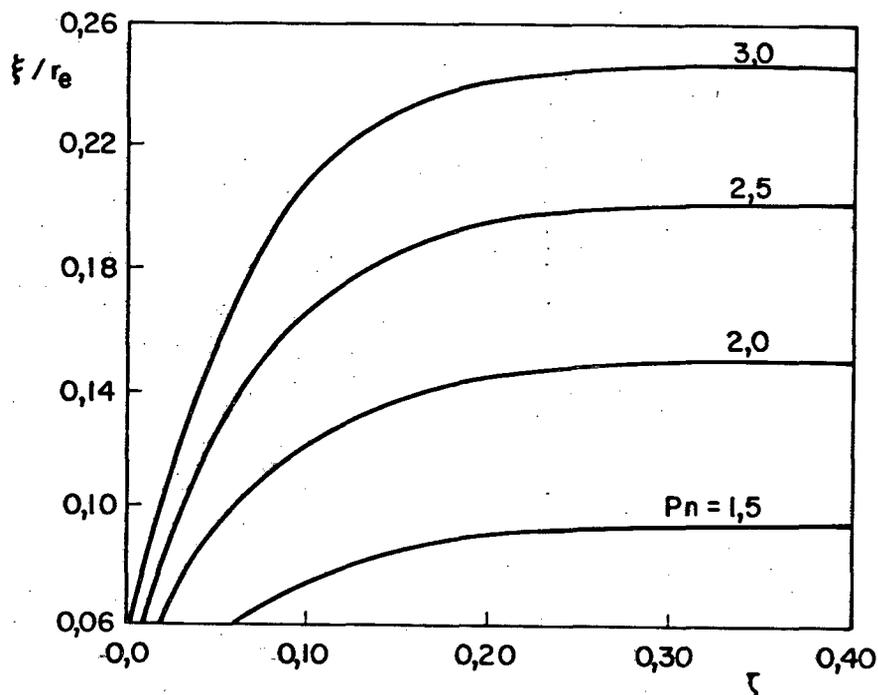


Fig. 5.12 - Localização da frente de secagem ξ/r em função do tempo tendo P_n como parâmetro

Novamente observa-se que quanto maior o número de Posnov maior a penetração da frente de secagem e menor o tempo necessário para que o regime permanente seja atingido.

CAPÍTULO 6

RESULTADOS DA COMPARAÇÃO ENTRE OS DOIS MODELOS

Dois modelos foram utilizados na análise do fenômeno de migração de umidade investigado no presente trabalho. O primeiro, paramétrico, assumiu as propriedades difusivas e termofísicas do meio constantes e o segundo considerou a variação das mesmas com a temperatura e o conteúdo de umidade. Este capítulo apresenta a comparação entre os resultados obtidos pelos dois modelos, para cada uma das geometrias analisadas, plana e cilíndrica, objetivando verificar os desvios associados à utilização do modelo paramétrico.

O desenvolvimento do modelo paramétrico seguiu a metodologia adotada por Eckert e Faghri em [13] enquanto que o modelo a propriedades variáveis foi baseada na metodologia adotada por Hartley e Couvillion [15] e [26].

No modelo a propriedades variáveis, utilizou-se como material poroso um cascalho arenoso com porosidade 0,517 e massa específica, quando seco, igual a 1280 Kg/m^3 . A razão para tal escolha deve-se ao fato de que todas as propriedades necessárias se encontram disponíveis em [26] sob a forma de expressões analíticas. No Apêndice A são apresentadas estas expressões bem como todas as equações e valores das constantes utilizadas.

Basicamente, os resultados foram obtidos variando-se os valores do conteúdo de umidade inicial e a diferença de temperatura entre as fronteiras impermeáveis. Quatro umidades iniciais fo-

ram escolhidas, 0,026, 0,103, 0,155 e 0,206, de tal forma a abrangerem uma faixa de umidade desde solos quase secos, onde as pontes de líquido nos interstícios do meio poroso estão desconectadas uma das outras, até solos onde estas pontes estão conectadas entre si permitindo continuidade da fase líquida. Três diferenças de temperatura foram utilizadas, 1, 5 e 10°C. Para o caso de $T=1^{\circ}\text{C}$ as propriedades difusivas e termofísicas do meio são virtualmente constantes e os resultados obtidos pelos dois modelos são coincidentes, o que valida o modelo a propriedades variáveis.

Os parâmetros adimensionais necessários no modelo paramétrico, número de Luikov e número de Posnov, foram calculados no modelo a propriedades variáveis utilizando-se o conteúdo de umidade e a temperatura iniciais. A Tabela 6.1 apresenta os valores do número de Posnov em função da umidade inicial e da diferença de temperatura entre as fronteiras. A Tabela 6.2 mostra os valores do número de Luikov para cada umidade inicial.

Tabela 6.1 - Números de Posnov para cada par $\theta_i, \Delta T$

$\theta_i \backslash \Delta T$	1°C	5°C	10°C
0,026	0,02174	0,108	0,2174
0,103	0,191	0,956	1,91
0,155	0,0129	0,0645	0,129
0,206	0,00026	0,0013	0,0026

Tabela 6.2 - Números de Luikov para cada θ_i

θ_i	1/Lu
0,026	81,85
0,103	426,0
0,155	60,13
0,206	2,97

Para determinados casos, utilizou-se também a temperatura média entre as fronteiras, isto é, $(T_c+T_i)/2$, para o cálculo dos dois números adimensionais. A Tabela 6.3 mostra os valores dos número de Luikov e Posnov avaliados na temperatura média em função da umidade inicial para $\Delta T=10^\circ\text{C}$.

Tabela 6.3 - Números de Luikov e Posnov avaliados na temperatura média em função de θ_i ; $T=10^\circ\text{C}$

θ_i	1/Lu	Pn
0,026	60,44	0,213
0,103	335,1	1,88
0,155	53,38	0,145
0,206	2,66	0,0029

Para a análise dos resultados, dois tipos de gráficos foram preparados. O primeiro apresenta os valores da umidade adimensional $(\theta/\theta_i-1)/Pn$ ao longo da distância adimensional tendo o tempo como parâmetro de curva. Optou-se por plotar esta forma adi-

mensional para a umidade porque assim, para uma dada umidade inicial, as curvas do modelo paramétrico são independentes do gradiente de temperatura entre as fronteiras, isto é, são independentes do número de Posnov. O segundo tipo de gráfico mostra a umidade θ/θ_i junto à parede quente em função do tempo para as três diferenças de temperatura, uma vez que é nesta posição que os desvios associados ao modelo paramétrico são mais acentuados.

A seguir serão apresentados, separadamente, os resultados comparados para as geometrias plana e cilíndrica.

6.1 - Geometria Plana

As Figs. 6.1 - 6.12 apresentam os resultados da comparação entre os dois modelos em curvas de umidade adimensional em função da distância x/L tendo o tempo como parâmetro de curva. As curvas cheias e tracejadas correspondem, respectivamente, ao modelo com propriedades variáveis e ao modelo com propriedades constantes (paramétrico). Cada figura contém as curvas para uma dada umidade inicial e um gradiente térmico. Para cada diferença de temperatura, as figuras foram colocadas em ordem crescente do conteúdo de umidade inicial. Na discussão dos resultados as referências a estas figuras serão feitas, por conveniência, sem respeitar a ordem de aparecimento das mesmas.

Inicialmente, a atenção será focalizada em aspectos relacionados à forma das curvas de distribuição de umidade.

A exceção das curvas correspondentes a θ_i igual a 0,206, todas as demais apresentam, para o modelo paramétrico, uma simetria invertida em relação à reta $x/L=0,5$. Esta simetria ocorre quando o número de Luikov é baixo, significando que o perfil de

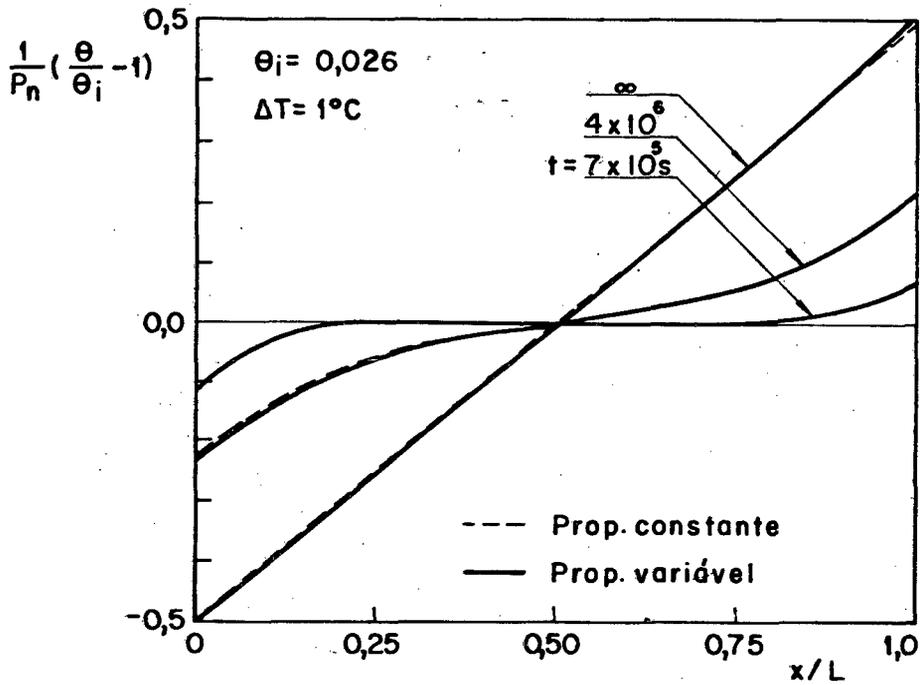


Fig. 6.1 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,026$ e $\Delta T = 1^\circ\text{C}$

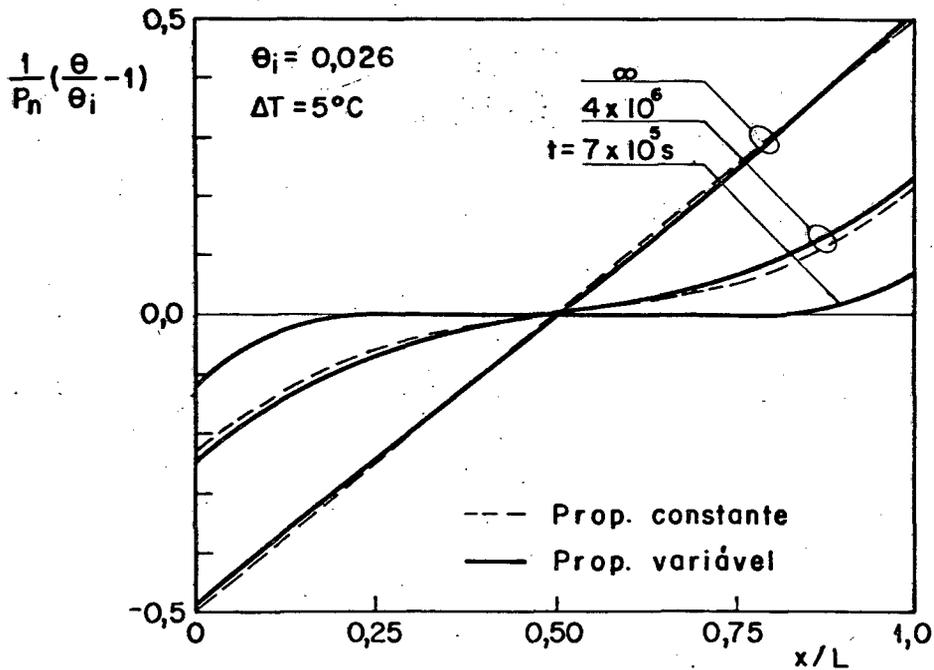


Fig. 6.2 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,026$ e $\Delta T = 5^\circ\text{C}$

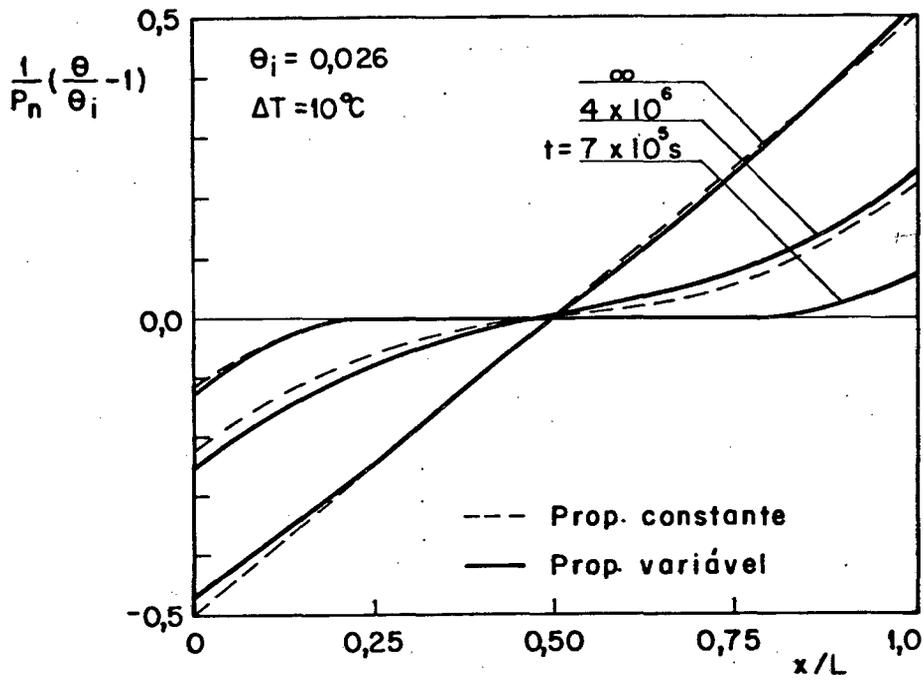


Fig. 6.3 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,026$ e $\Delta T = 10^\circ\text{C}$

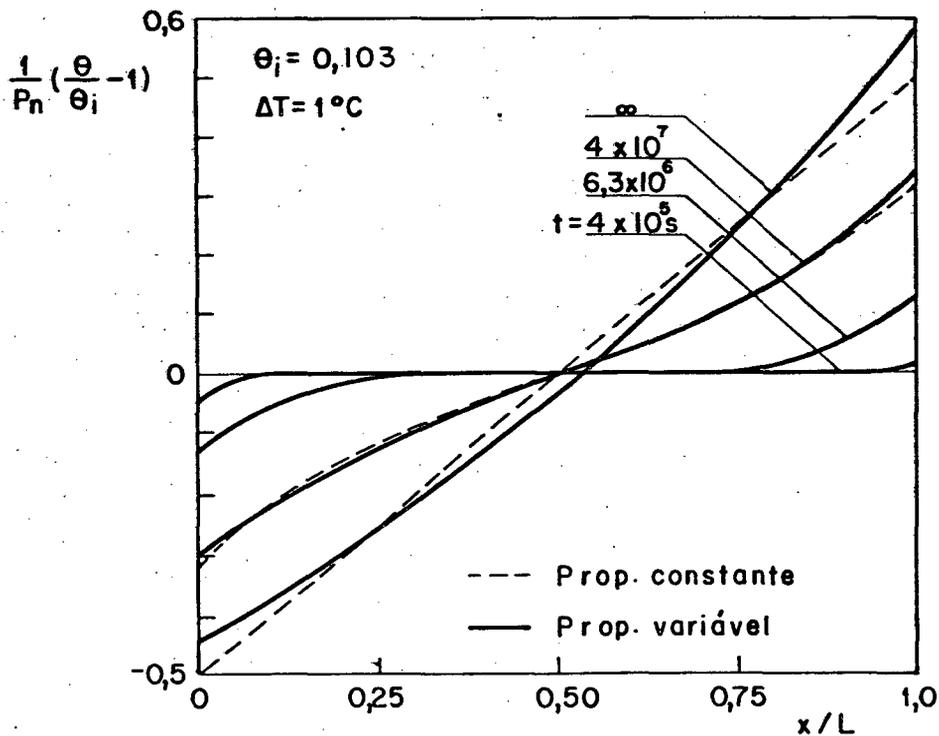


Fig. 6.4 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,103$ e $\Delta T = 1^\circ\text{C}$

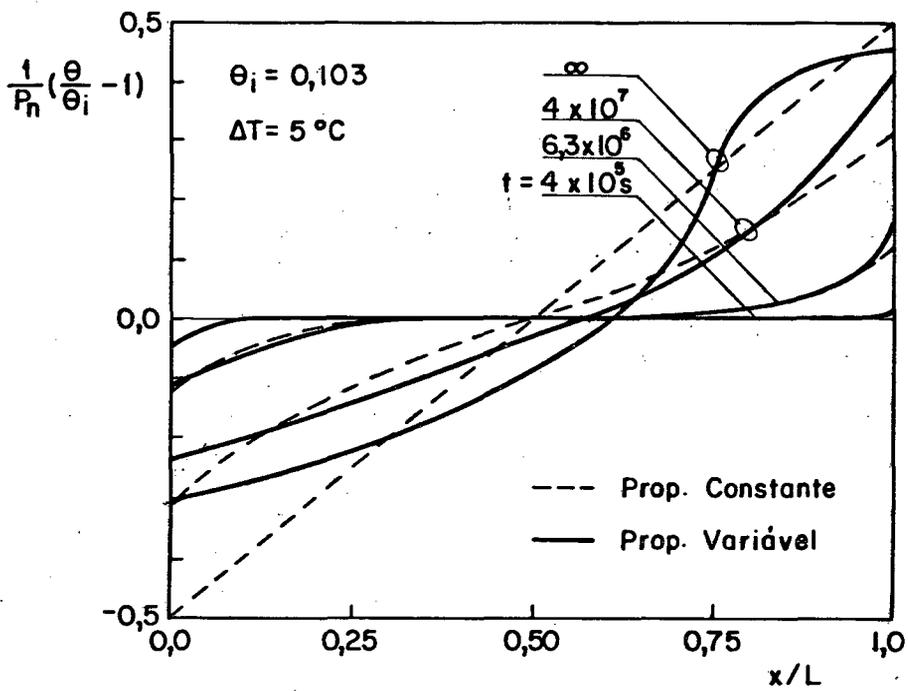


Fig. 6.5 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,103$ e $\Delta T = 5^\circ\text{C}$

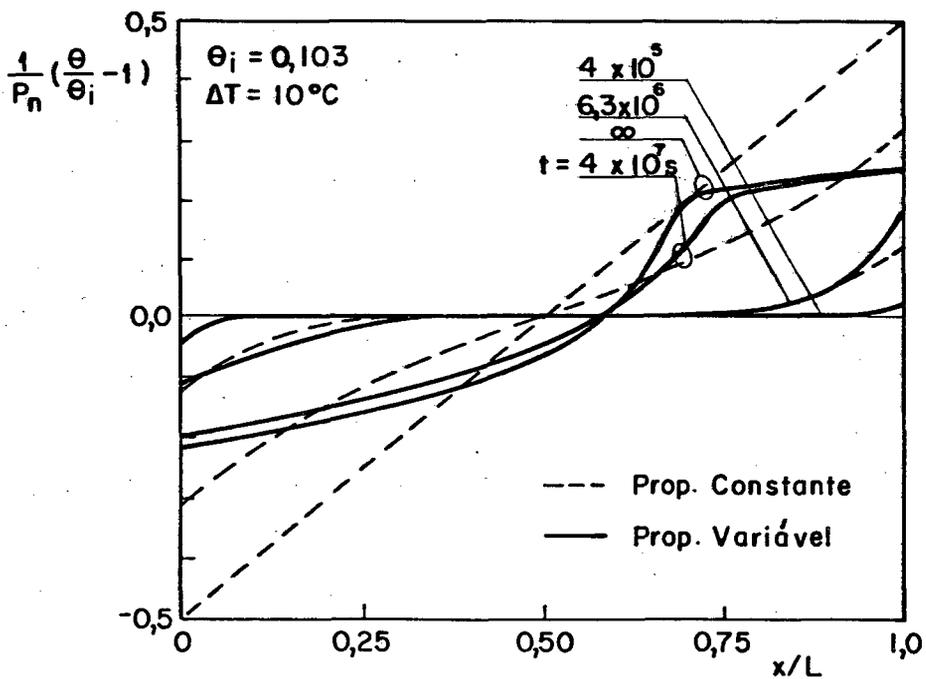


Fig. 6.6 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,103$ e $\Delta T = 10^\circ\text{C}$

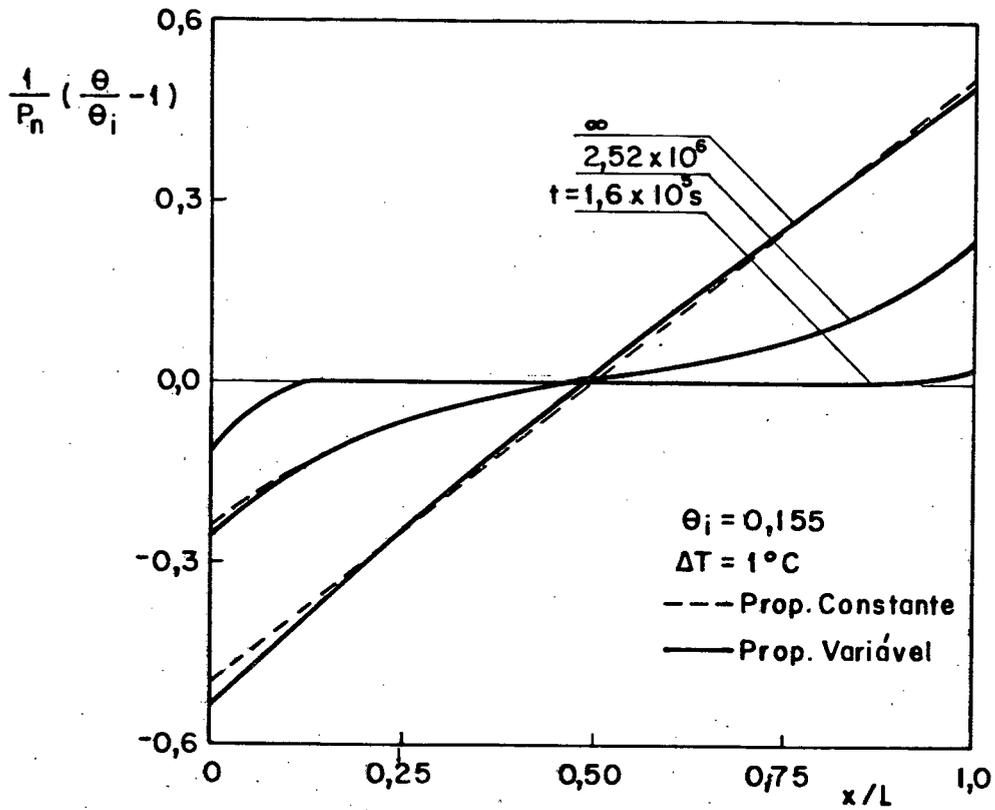


Fig. 6.7 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,155$ e $\Delta T = 1^\circ\text{C}$

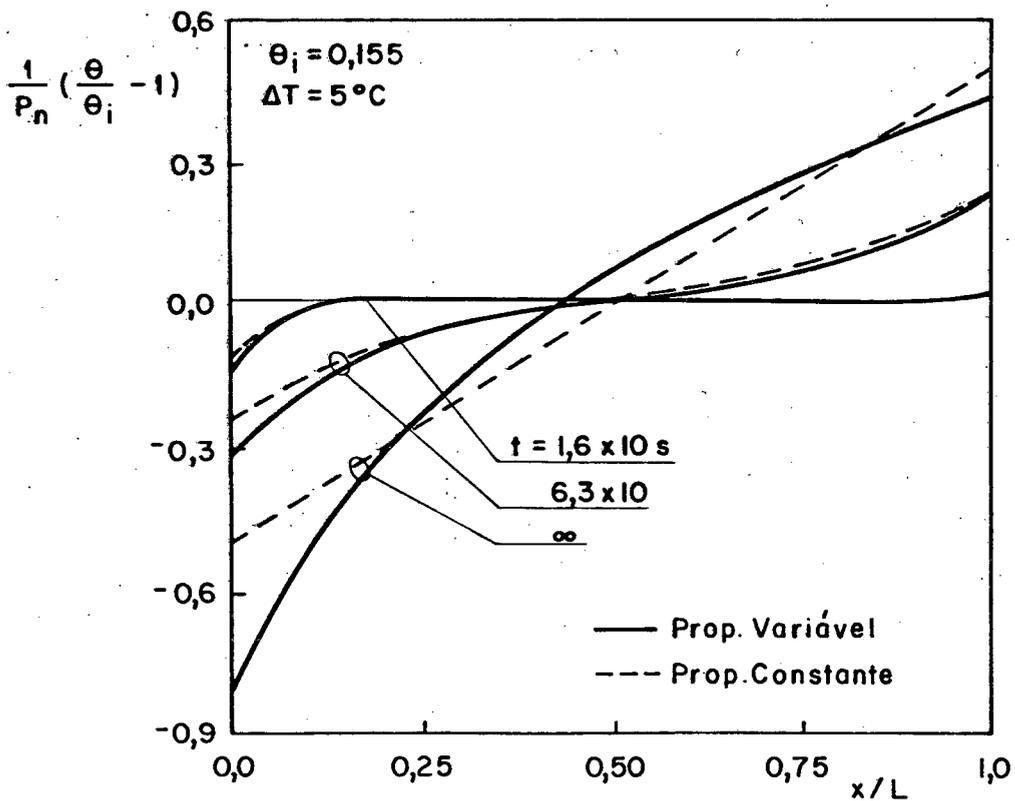


Fig. 6.8 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,155$ e $\Delta T = 5^\circ\text{C}$

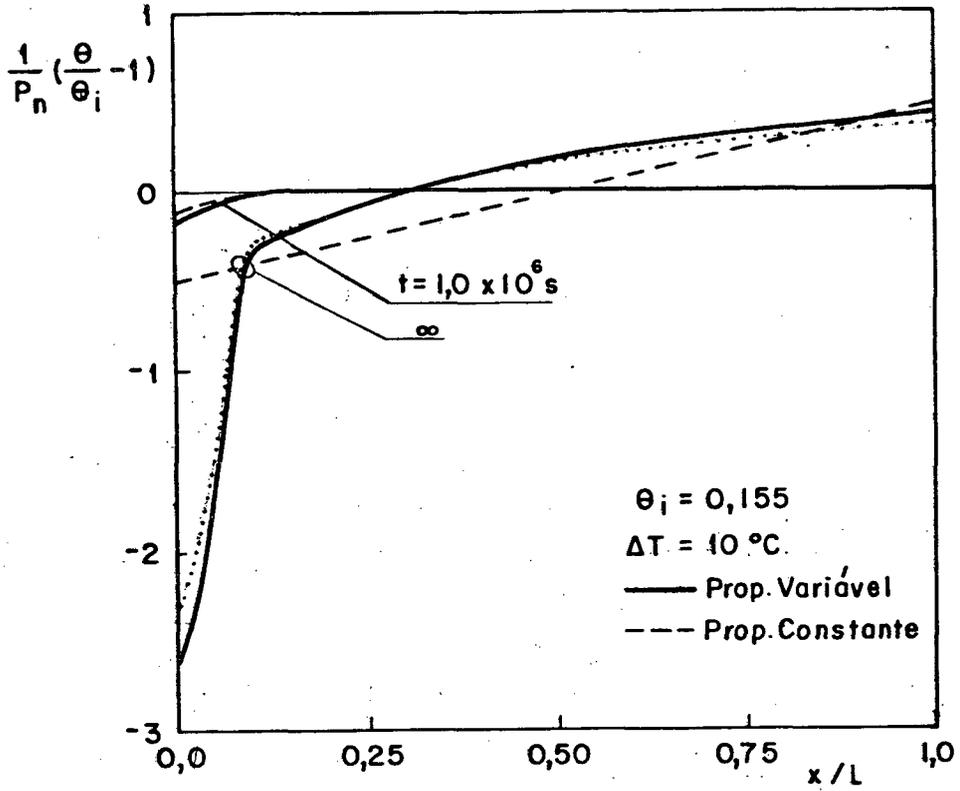


Fig. 6.9 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,155$ e $\Delta T = 10^\circ\text{C}$

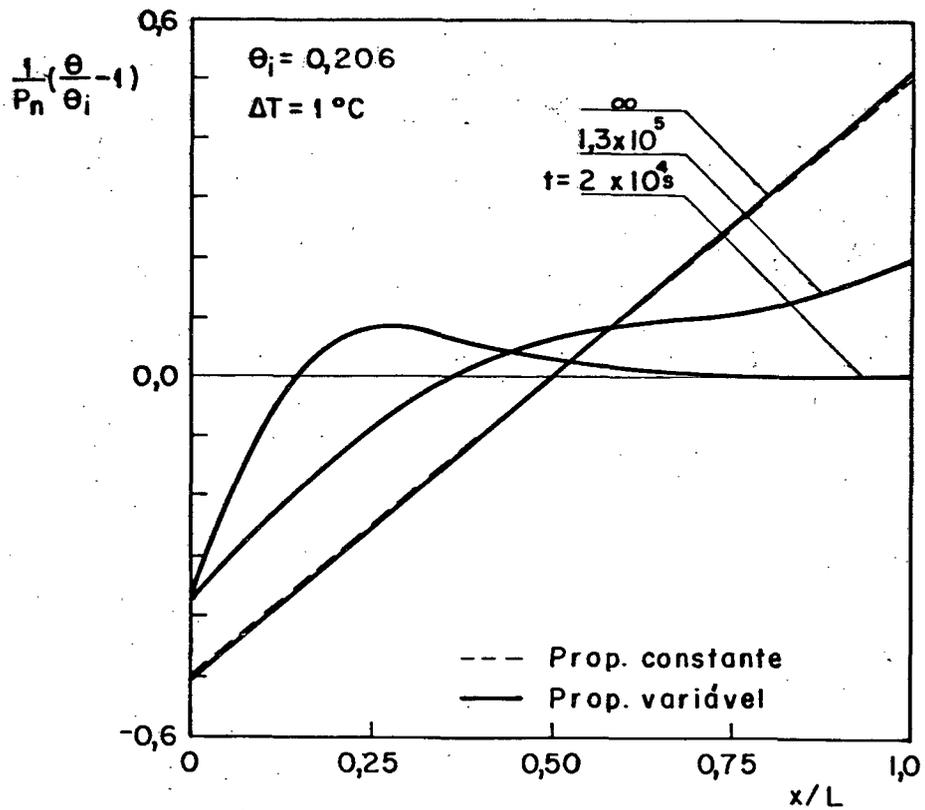


Fig. 6.10 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,206$ e $\Delta T = 1^\circ\text{C}$

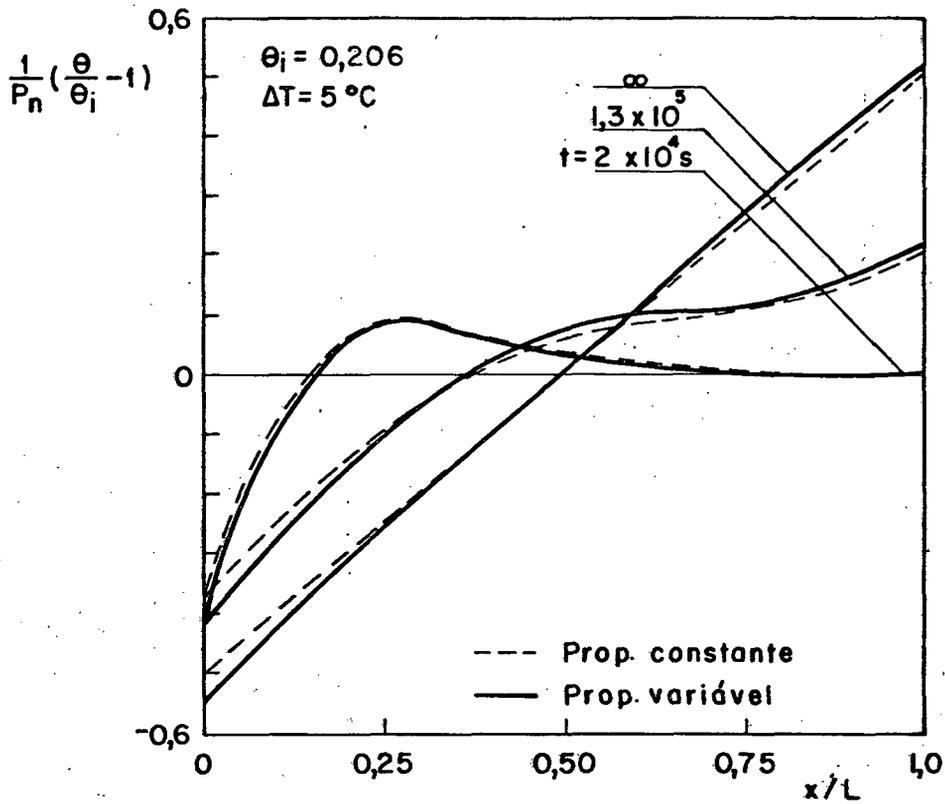


Fig. 6.11 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,206$ e $\Delta T = 5^\circ\text{C}$

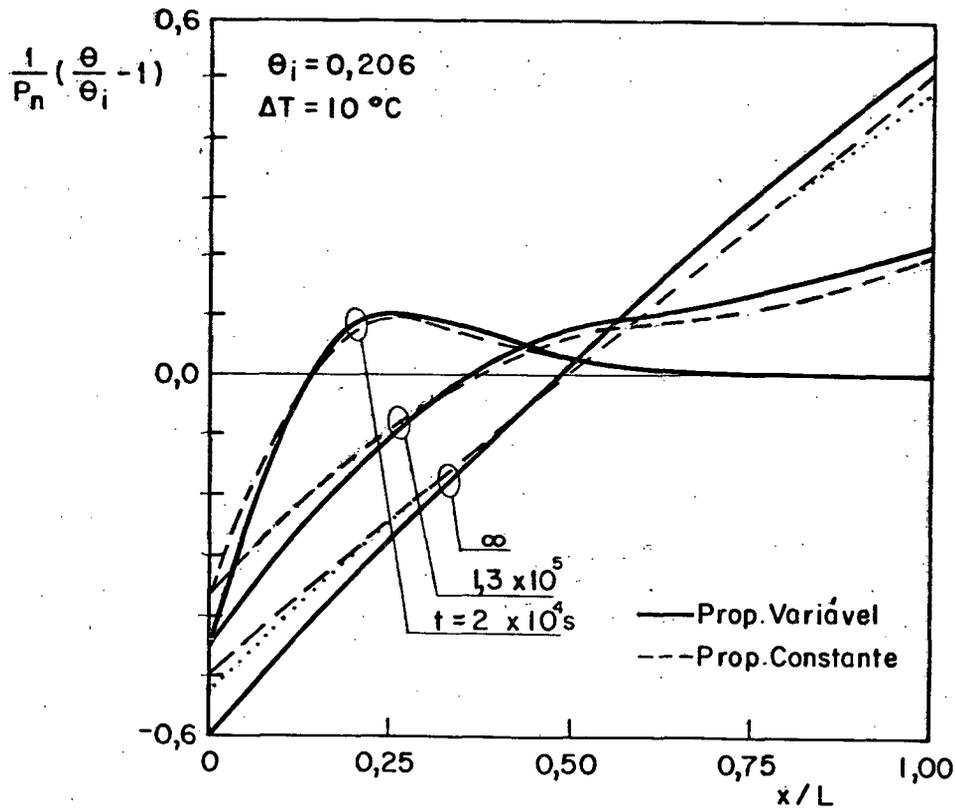


Fig. 6.12 - Umidade adimensional θ em função de x/L tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,206$ e $\Delta T = 10^\circ\text{C}$

temperatura desenvolve-se rapidamente. Nestes caso, a derivada $\partial T/\partial X$ é constante ao longo do meio e a equação da conservação da massa torna-se independente da distribuição de temperatura. Conseqüentemente, o problema da umidade passa a experimentar condições de fluxo de umidade constantes nas fronteiras, levando à condição de simetria. A distribuição de umidade, desta forma, tem comportamento monotônico, com θ crescendo ao longo de x/L .

Para $\theta_i=0,206$ o número de Luikov é relativamente alto, 0,336, indicando que para baixos valores do tempo, o perfil de temperatura ainda não se desenvolveu. O fluxo de vapor, associado à evaporação de líquido na parede quente, diminui à medida que x/L aumenta, o que indica que o mesmo está se condensando no interior do meio. Ocorre assim um aumento no conteúdo de umidade que pode ser observado nas Figs. 6.10 - 6.12, com valores de umidade θ maiores que zero próximo à posição $x/L=0,25$ nas curvas de $t=2 \times 10^4$ s. Nestas curvas, à medida que se progride além de $x/L=0,25$, a umidade diminui e tende à umidade inicial, uma vez que na presença de condensação, o aquecimento da parede quente não se faz sentir na parede fria.

A seguir, passa-se à discussão dos resultados concernentes à comparação entre os dois modelos.

Inicialmente, é interessante observar a variação das propriedades difusivas do meio com o conteúdo de umidade, apresentados na Tabela A.1 do Apêndice A. Verifica-se que para solos com conteúdos de umidade menores que 0,126, $D_{\theta V} \gg D_{\theta L}$, e o transporte de umidade é decorrente predominantemente do movimento de vapor, uma vez que não existe continuidade na fase líquida. A partir de $\theta_i = 0,142$, passa a existir movimento de líquido devido ao gradi-

ente de umidade. O surgimento da migração de líquido associado ao gradiente de umidade é responsável pela sensível alteração dos valores dos números de Luikov e Posnov. Como será discutido posteriormente, é nas proximidades deste conteúdo de umidade que os dois modelos apresentam a maior discrepância. Além disto, o maior desvio em θ associado ao modelo paramétrico ocorre junto à superfície quente para a condição de regime permanente, isto é, $t \rightarrow \infty$. Doravante, este desvio será denominado de desvio máximo. Estas observações facilitam a comparação entre os modelos.

Os gráficos correspondentes a $\theta_i=0,026$ e $0,206$ mostram uma ótima concordância entre os dois modelos, mesmo para diferenças de temperatura de 10°C . Em ambos os casos, os conteúdos de umidade variam pouco e praticamente não ocorre mudança nos processos de migração e, conseqüentemente, nos valores de Lu e Pn . Para $\theta_i=0,026$ o desvio máximo é de $0,8\%$.

Na Fig. 6.12, para a umidade inicial igual a $0,206$, o máximo desvio em θ associado ao modelo paramétrico ocorre na parede quente para a condição de regime permanente, ou seja, $t \rightarrow \infty$. Tal desvio é de 17% e esta ampliado na Fig. 6.12, devido ao número de Posnov ser bastante baixo, $0,0026$, e aparecer no denominador da expressão de θ . Se o mesmo desvio fosse computado no conteúdo de umidade θ , e não em $(\theta/\theta_i - 1)/Pn$, a divergência entre os modelos seria de apenas $0,03\%$. Esta pequena diferença pode ser explicada pelo fato de que para $\theta_i=0,206$ praticamente não há variação do conteúdo de umidade no solo ao longo do tempo. Ainda em relação à Fig. 6.12, a curva pontilhada representa o modelo a propriedades variáveis com o número de Posnov avaliado na temperatura média. Comparando-se a curva pontilhada com a curva tracejada, verifica-se que a utilização da temperatura média melhora a concordância

entre os modelos.

Para as umidades iniciais intermediárias investigadas, a discrepância entre os dois modelos aumenta consideravelmente, conforme pode ser observado nas Figs. 6.4 - 6.9. Estas figuras apresentam os resultados para $\theta_i=0,103$ e $\theta_i=0,155$. Os desvios associados ao modelo paramétrico que se observam nas figuras correspondentes a $T=1^\circ\text{C}$ estão novamente ampliados devido ao baixo valor de P_n associado a estas situações. Para o caso de $\theta_i=0,103$, por exemplo, o maior desvio para $\Delta T=1^\circ\text{C}$ ocorre na curva de regime permanente em $x/L=1,0$ e é de apenas 1,4%.

À medida que a diferença de temperatura aumenta, a divergência entre os dois modelos torna-se mais acentuada. Para o caso de $\theta_i=0,103$, Figs. 6.4 - 6.6 esta divergência aparece tanto na região de secagem quanto na região de umedecimento. Isto ocorre porque, para este conteúdo inicial de umidade, a variação de propriedades é significativa e a migração de umidade ocorre com maior intensidade. Ainda, na região de umedecimento, quando o conteúdo de umidade atinge um valor próximo a 0,142, a migração de umidade passa a ocorrer, de forma repentina, também na fase líquida. Tal fato é observável na mudança de forma das curvas de regime permanente da Fig. 6.5, próximo ao valor $\theta=0,30$ e nas curvas da Fig. 6.6, para $\theta=0,20$. A maior diferença entre os modelos ocorre, novamente, em $x/L=0$, sendo que o máximo desvio em θ é de 93%.

Para $\theta_i=0,155$, a diferença entre os dois modelos ocorre na região de secagem, a partir do instante em que a umidade tem um valor entre 0,128 e 0,142. Neste caso, o máximo desvio é de 30%.

A curva pontilhada da Fig. 6.9 representa o modelo a propriedades variáveis com P_n avaliado na temperatura média. Para esta temperatura de referência, observa-se uma melhora na concor-

dância entre os dois modelos.

As Figs. 6.13 - 6.16 mostram os valores da umidade θ/θ_i na fronteira quente ($X=0$) em função do tempo para os três gradientes de temperatura entre as fronteiras analisadas. Os desvios máximos entre os dois modelos, para cada valor de $\Delta T(1,5$ e $10^\circ\text{C})$ estão indicados nas figuras.

As curvas correspondentes a $\Delta T=1^\circ\text{C}$ corroboram a afirmação de que os resultados dos 2 modelos são virtualmente os mesmos para este gradiente térmico.

Além disto, observa-se a ótima concordância para os casos de $\theta_i=0,026$ e $\theta_i=0,206$, discutida anteriormente. Vale salientar que a escala da Fig. 6.16 está muito ampliada, a fim de verificar a exata ordem de grandeza da discrepância entre os modelos.

Para as umidades intermediárias, $\theta_i=0,103$ e $0,155$, a diferença entre os dois modelos aumenta consideravelmente com o aumento da diferença de temperatura, conforme explicado em parágrafos anteriores.

As curvas pontilhadas nestas figuras correspondem ao modelo paramétrico com os valores dos números adimensionais Lu e Pn avaliados na temperatura média. Comparando-se estas curvas com as linhas tracejadas, verifica-se uma melhor concordância entre os modelos.

6.2 Geometria Cilíndrica

Basicamente as considerações discutidas anteriormente para a geometria plana são válidas também para a geometria cilíndrica. Assim, apenas algumas características próprias desta geo-

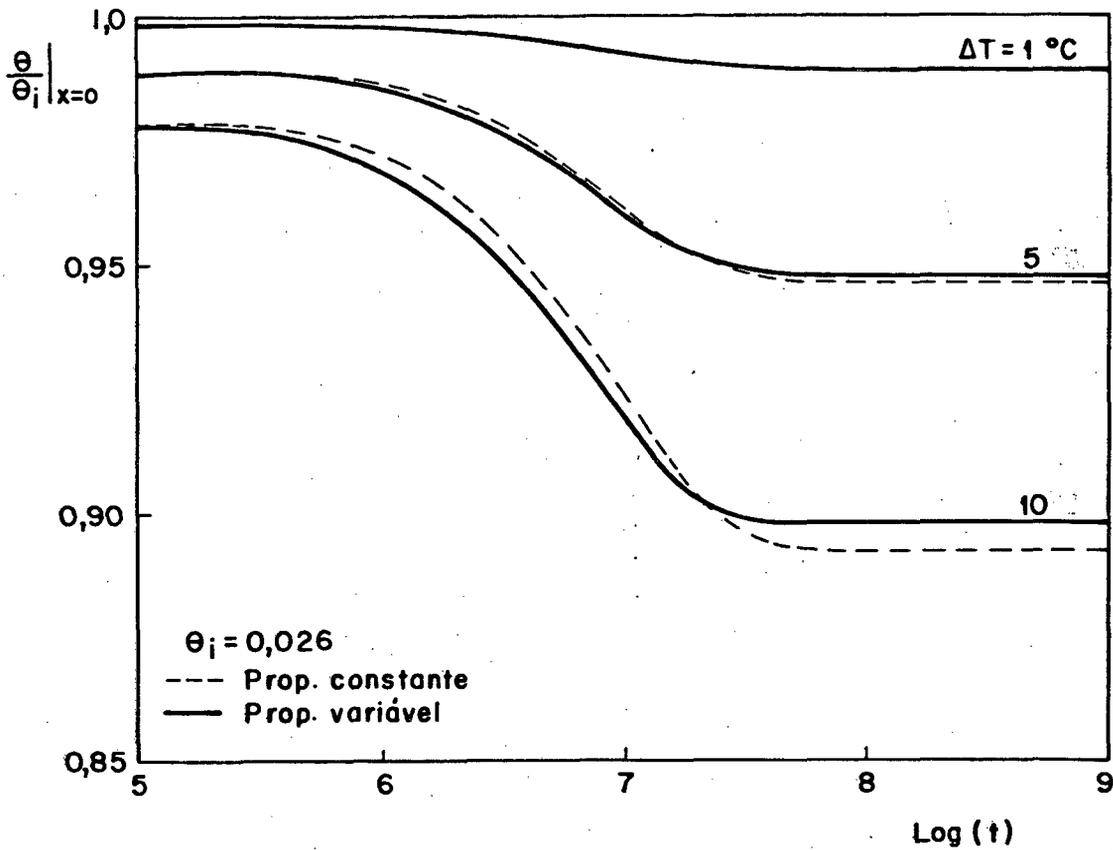


Fig. 6.13 - Umidade adimensional θ/θ_i junto à superfície aquecida em função do tempo, tendo ΔT como parâmetro; $\theta_i = 0,026$

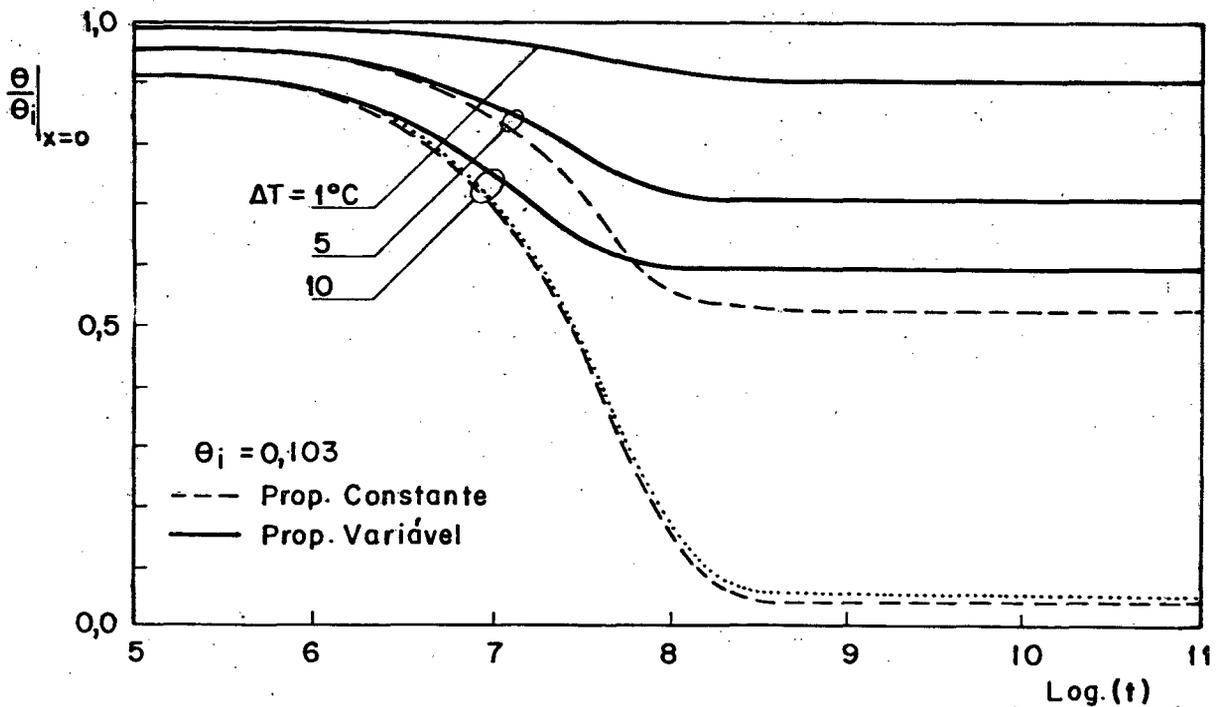


Fig. 6.14 - Umidade adimensional θ/θ_i junto à superfície aquecida em função do tempo, tendo ΔT como parâmetro; $\theta_i = 0,103$

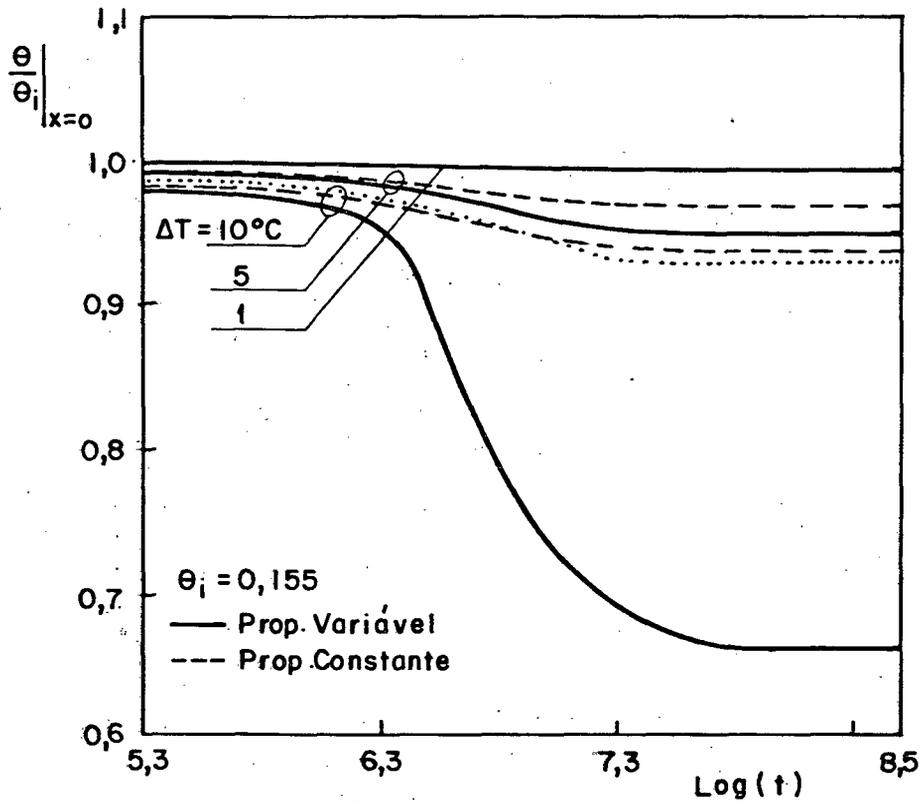


Fig. 6.15 - Umidade adimensional θ/θ_i junto à superfície aquecida em função do tempo, tendo ΔT como parâmetro; $\theta_i = 0,155$

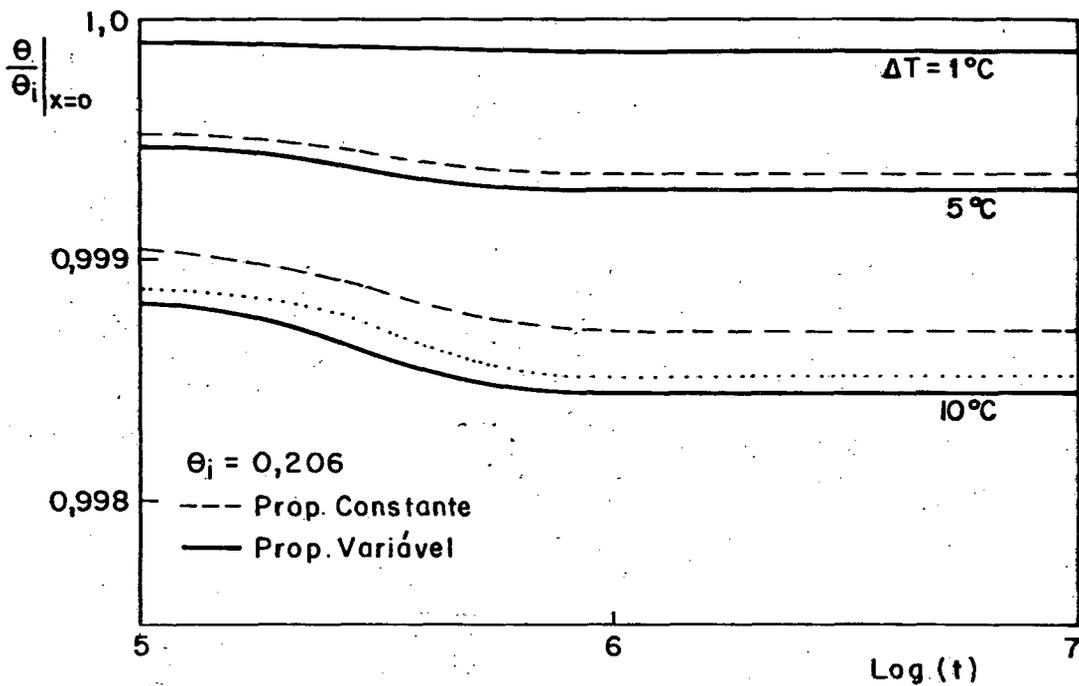


Fig. 6.16 - Umidade adimensional θ/θ_i junto à superfície aquecida em função do tempo, tendo ΔT como parâmetro; $\theta_i = 0,203$

metria serão comentadas nesta seção. Em todos os casos analisados a relação entre os raios r_c/r_e foi mantida constante e igual a 0,06.

As Fig. 6.17 - 6.28 apresentam para cada par $\theta_i, \Delta T$ as distribuições de umidade adimensional θ em função da distância r/r_e tendo o tempo como parâmetro de curva.

A simetria verificada na geometria plana para o modelo paramétrico não existe no caso da geometria cilíndrica. Além disto, a região de secagem é maior que a região de umedecimento. A relação de raios relativamente baixa faz com que os efeitos do gradiente térmico imposto entre as superfícies sejam mais intensos nas regiões próximas à superfície do cabo (superfície aquecida).

Observa-se novamente o crescimento monotônico das curvas de umidade em relação à distância r/r_e , exceção feita ao caso de $\theta_i=0,206$, onde ocorre condensação de vapor e conseqüente aumento do conteúdo de umidade no interior do meio.

Nos casos com conteúdos de umidade inicial baixo, $\theta_i=0,026$, e alto, $\theta_i=0,206$, observa-se uma ótima concordância entre os modelos, mesmo para a maior diferença de temperatura investigada, 10°C . Para $\theta_i=0,026$ e $\theta_i=0,206$ os desvios máximos são, respectivamente, iguais a 2,3 e 0,03%.

Para as umidades intermediárias, $\theta_i=0,103$ e $\theta_i=0,155$, a discrepância entre os dois modelos torna-se mais acentuada, especialmente na região próxima à superfície aquecida, onde os efeitos do gradiente térmico são maiores.

Para $\theta_i=0,103$, os desvios associados ao modelo paramétrico são significativos mesmo para $\Delta T=5^\circ\text{C}$. O desvio máximo em θ para esta diferença de temperatura é de 68,4%. Para o modelo paramétrico e $\Delta T=10^\circ\text{C}$, o solo próximo ao cabo seca e passa a existir

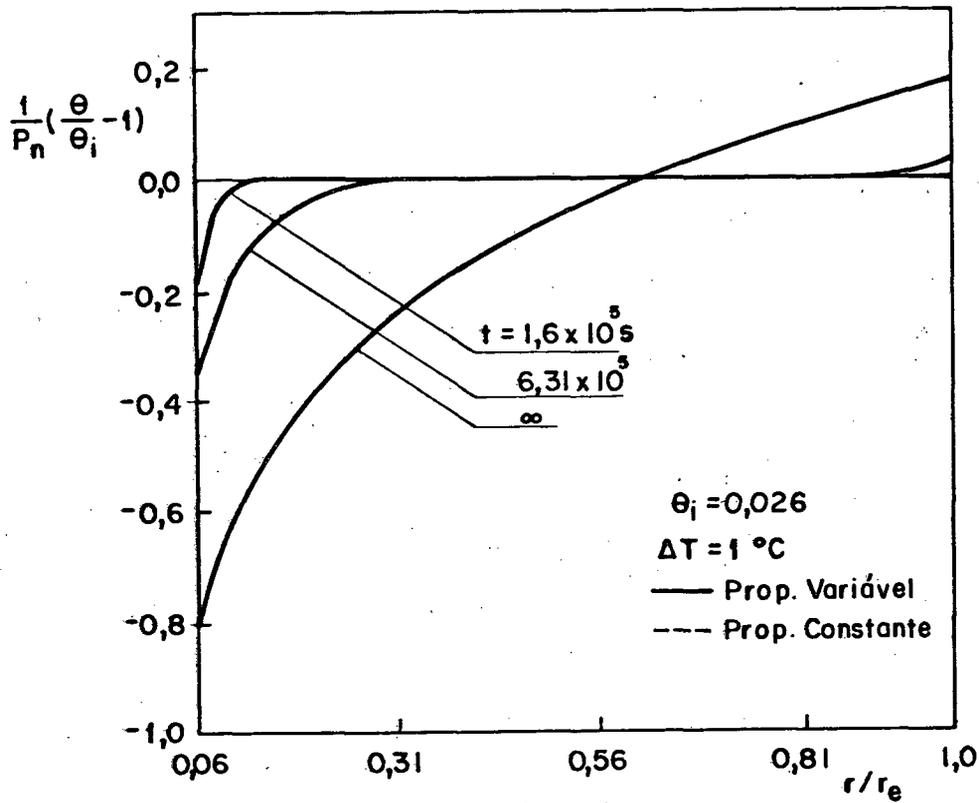


Fig. 6.17 - Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,026$ e $\Delta T = 1^\circ\text{C}$

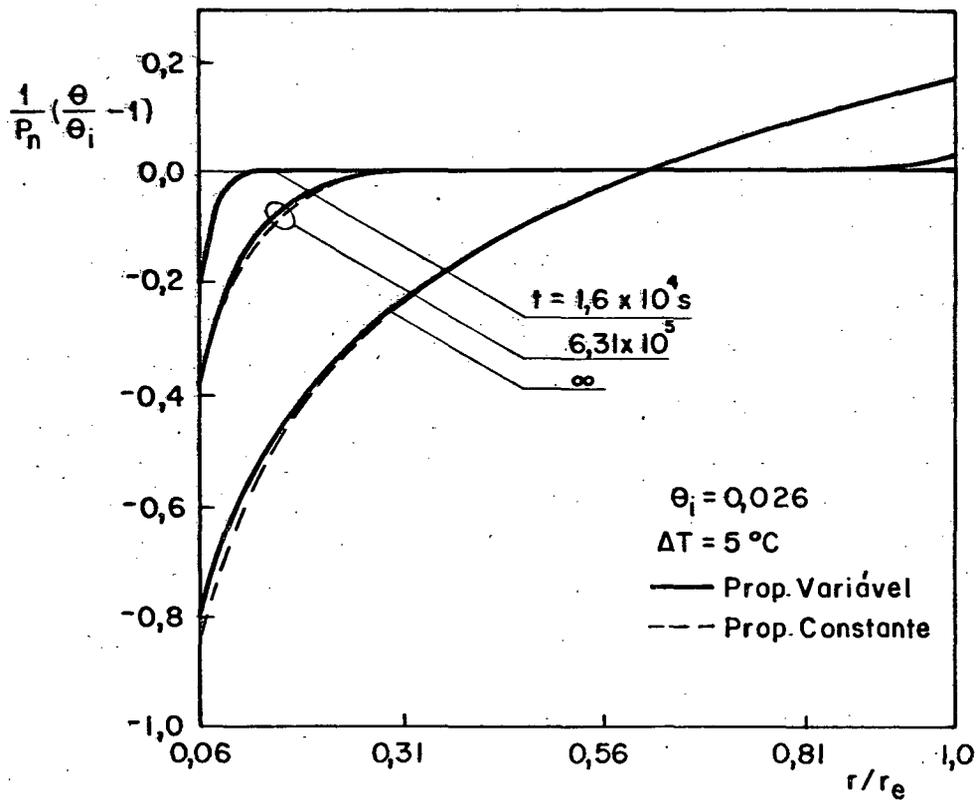


Fig. 6.18 - Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,026$ e $\Delta T = 5^\circ\text{C}$

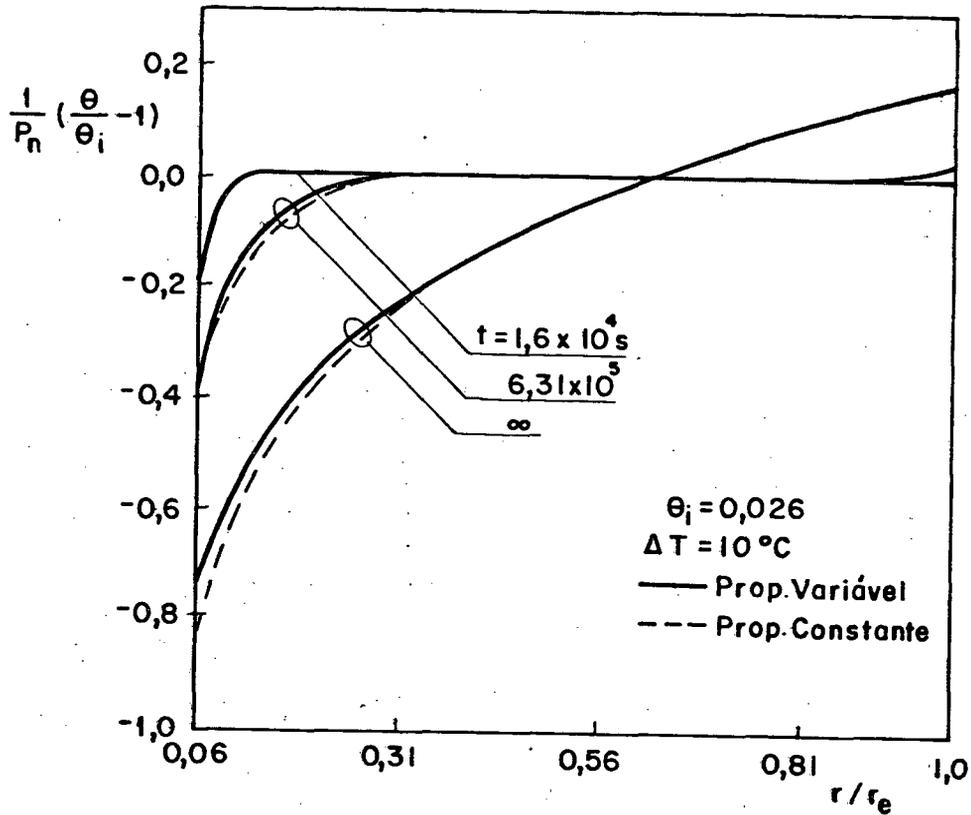


Fig. 6.19 - Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,026$ e $\Delta T = 10^\circ\text{C}$

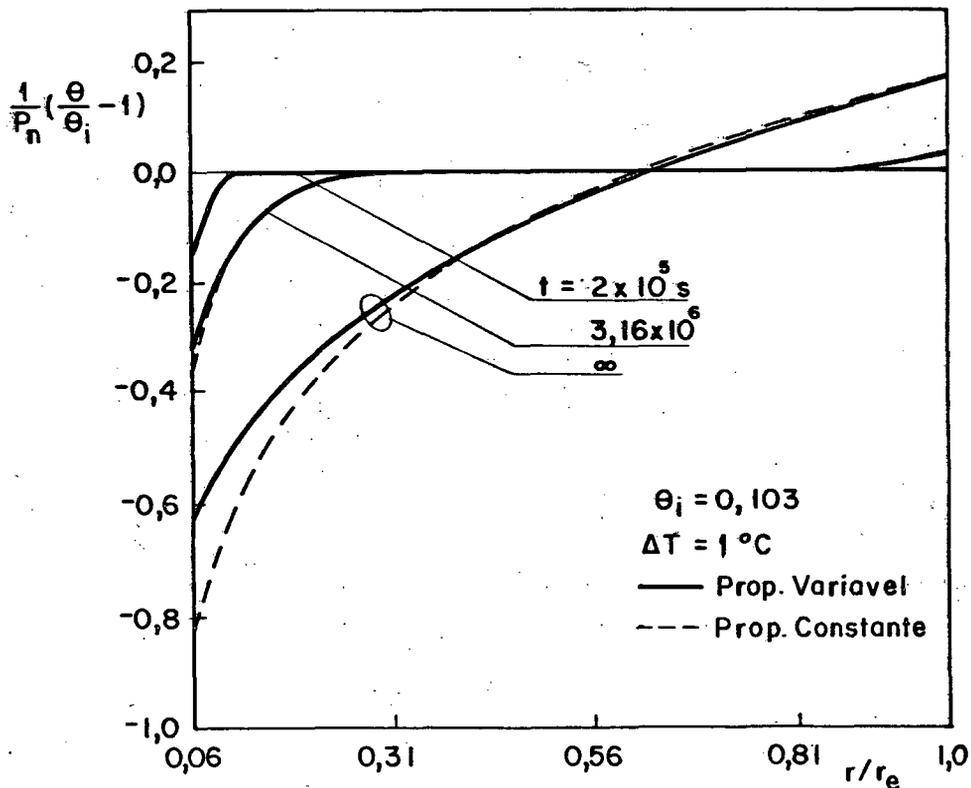


Fig. 6.20 - Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,103$ e $\Delta T = 1^\circ\text{C}$

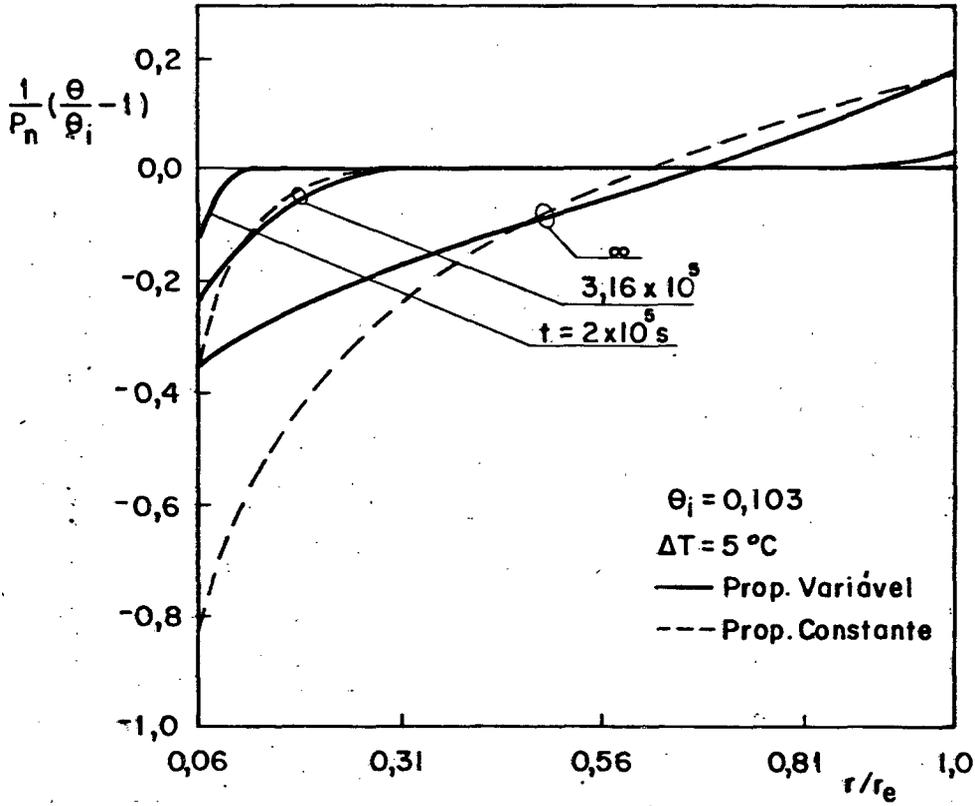


Fig. 6.21 - Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,103$ e $\Delta T = 5^\circ\text{C}$

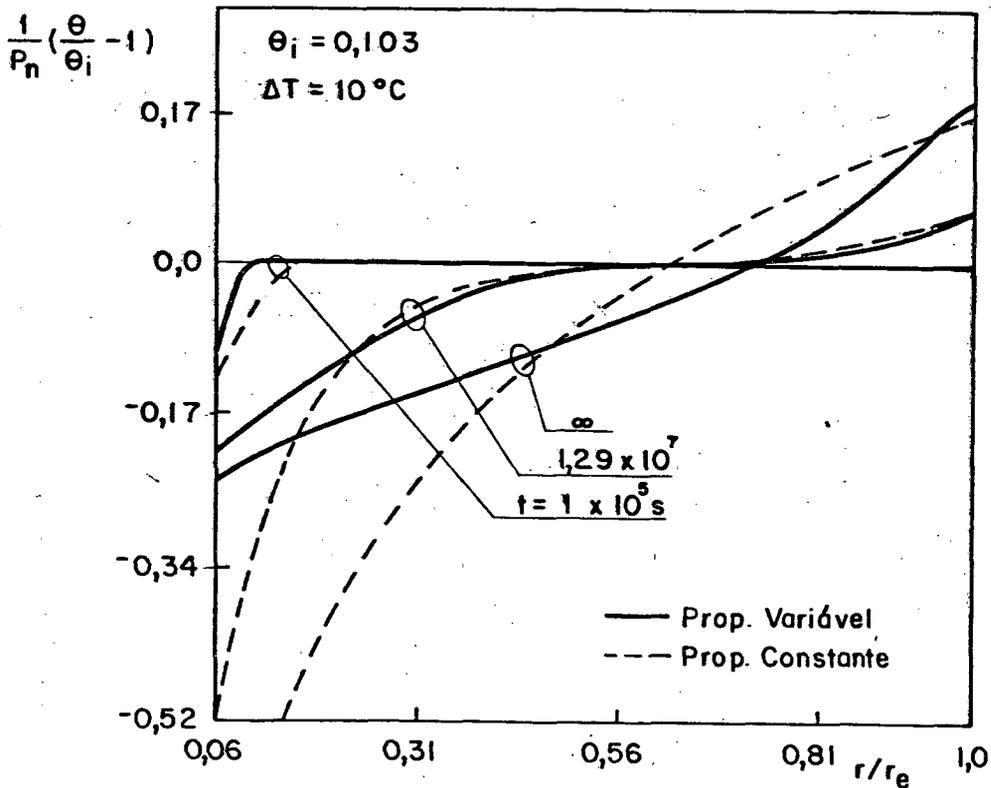


Fig. 6.22 - Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,103$ e $\Delta T = 10^\circ\text{C}$

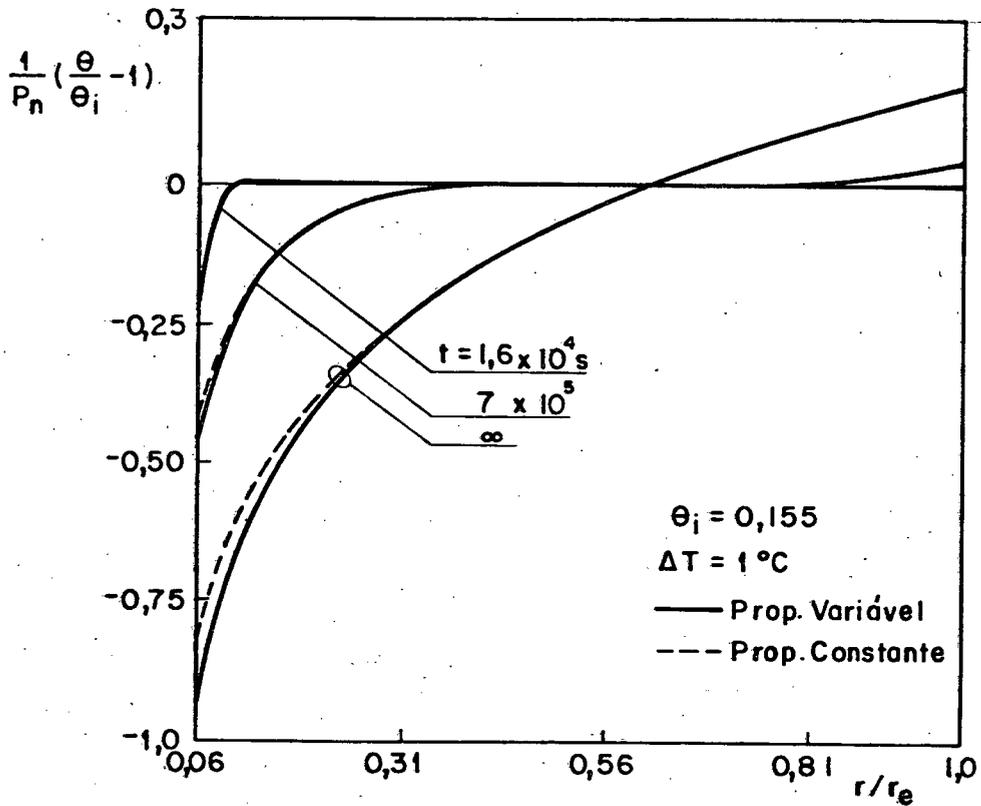


Fig. 6.23 - Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,155$ e $\Delta T = 1^\circ\text{C}$

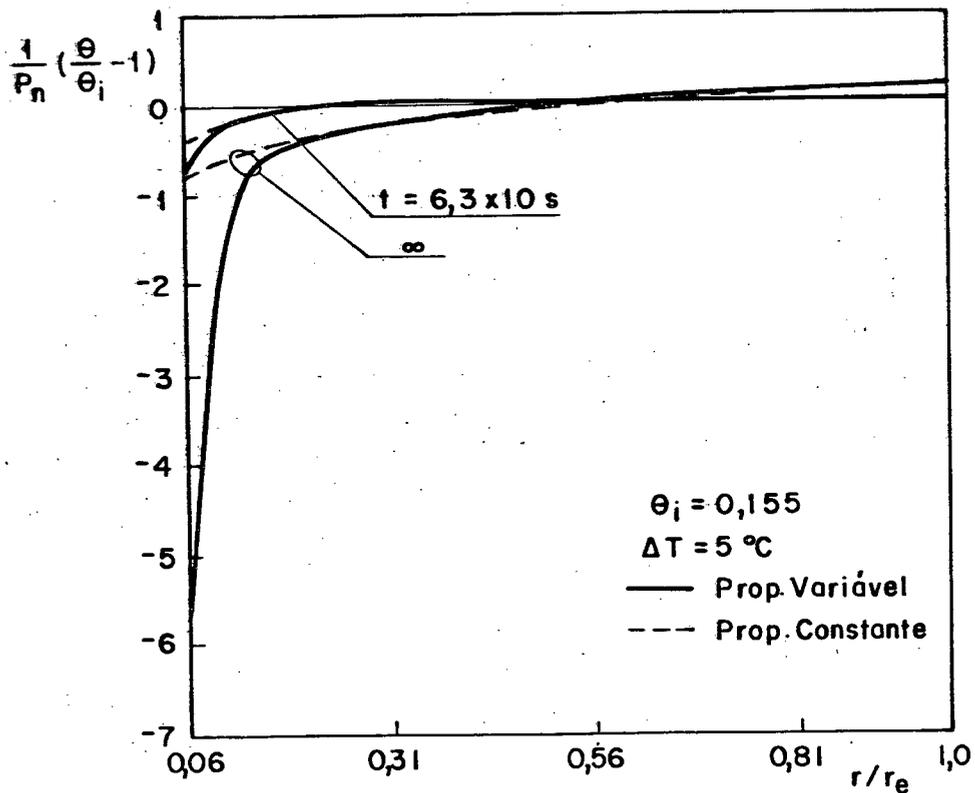


Fig. 6.24 - Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,155$ e $\Delta T = 5^\circ\text{C}$

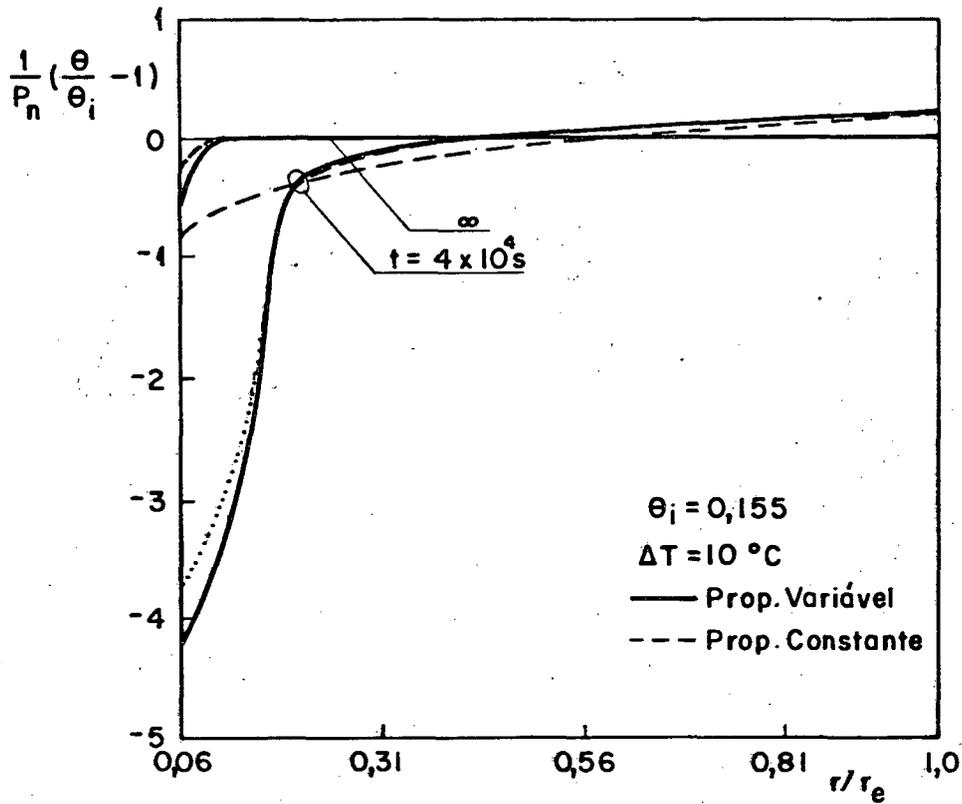


Fig. 6.25 - Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,155$ e $\Delta T = 10^\circ\text{C}$.

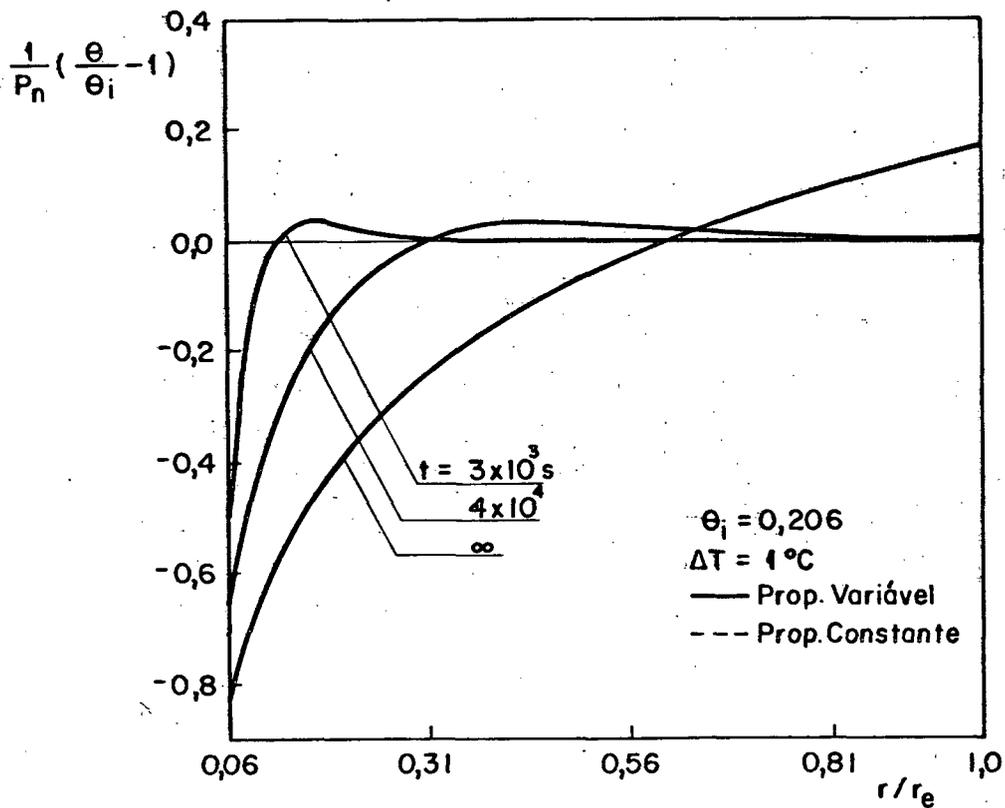


Fig. 6.26 - Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,206$ e $\Delta T = 1^\circ\text{C}$.

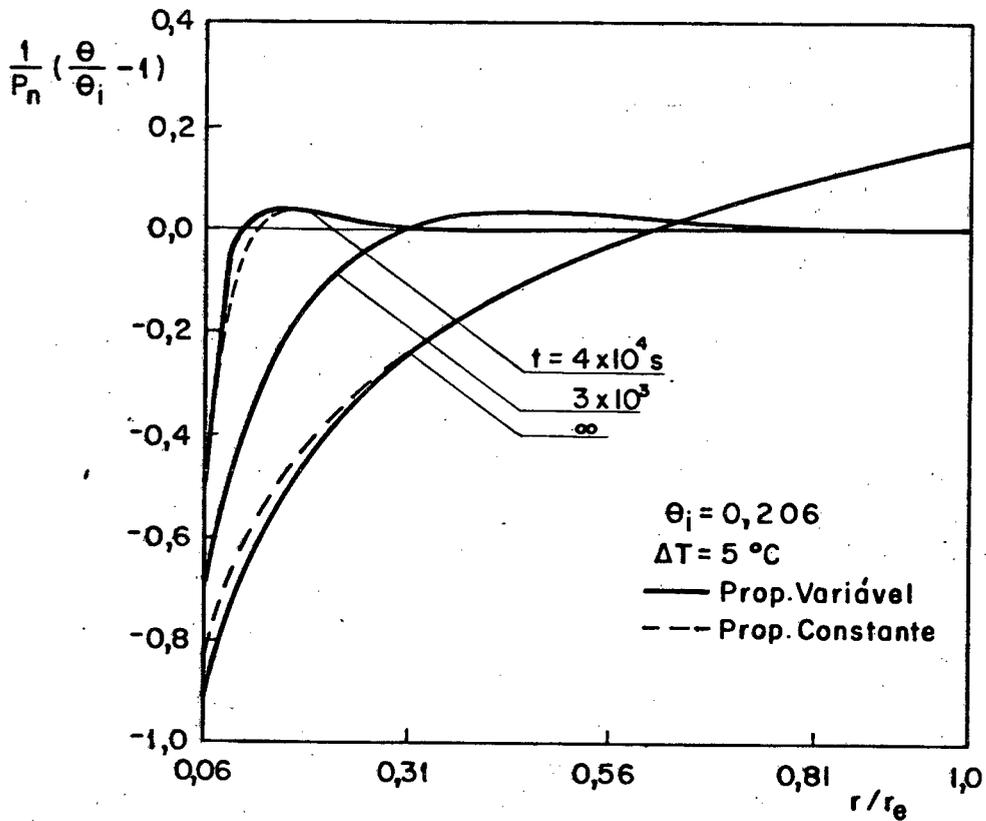


Fig. 6.27 - Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,206$ e $\Delta T = 5^\circ\text{C}$

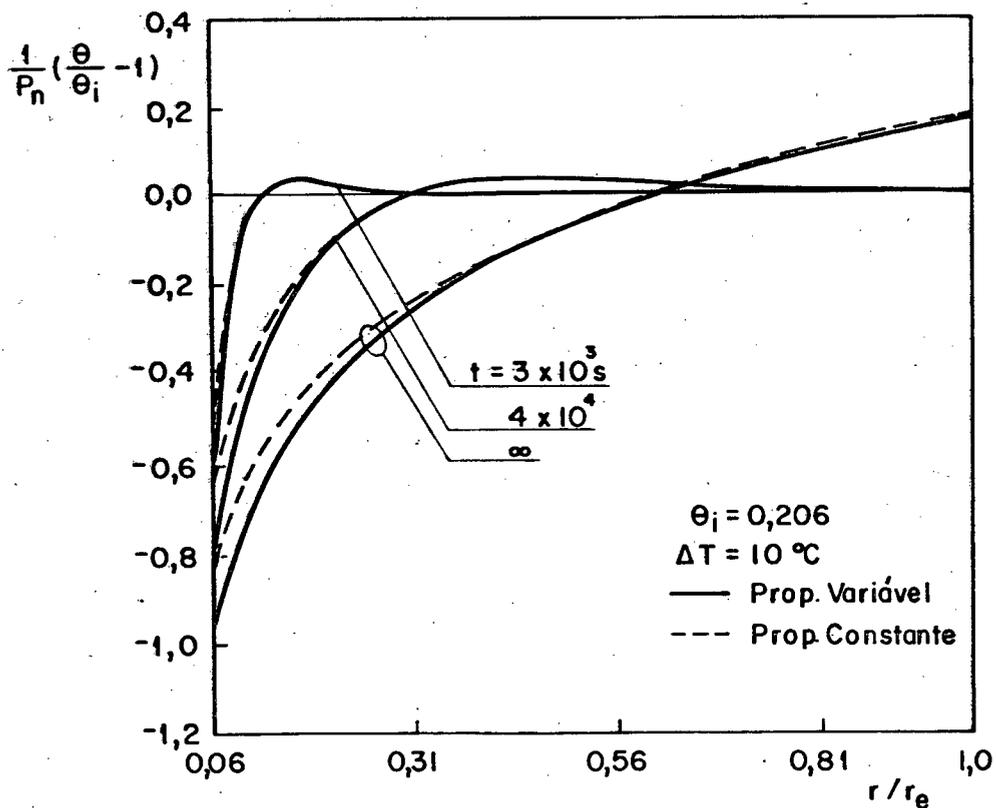


Fig. 6.28 - Umidade adimensional θ em função de r/r_e tendo o tempo como parâmetro; $\theta_i = 0,206$ e $\Delta T = 10^\circ\text{C}$

uma frente de secagem móvel com o tempo. As curvas de $t=1,29 \times 10^7$ s da Fig. 6.22 correspondem à distribuição de umidade no instante em que, para o modelo paramétrico, a fase seca se inicia. A curva cheia de regime permanente indica que a frente de secagem se estabilizou próximo à posição $r/r_e=0,14$. Outro fato a ser observado é que as mudanças nas formas das curvas na região de umedecimento, verificadas na geometria plana, não ocorreram neste caso uma vez que a condição de continuidade da fase líquida não é atingida.

Para o caso de $\theta_i=0,155$, verifica-se como no caso da geometria plana, uma grande discrepância entre os modelos, mais acentuada na região de secagem. O desvio máximo neste caso é de 50%, e é maior que aquele para a geometria plana. Como comentado anteriormente, os efeitos do gradiente de térmico são mais intensos na região próxima à superfície aquecida. A curva pontilhada da Fig. 6.25 corresponde ao modelo a propriedades variáveis cuja adimensionalização está baseada no número de Posenov avaliado na temperatura média. Observa-se, novamente, uma melhor concordância entre os modelos quando esta temperatura é usada como referência para P_n .

As Figs. 6.29 - 6.32 apresentam os valores da umidade θ/θ_i junto à superfície do cabo em função do tempo para as três diferenças de temperatura investigadas, $\Delta T=1,5$ e 10°C . Para $\theta_i=0,103$, Fig. 6.30, pode ser observado que, no modelo paramétrico a fase seca se inicia em $t=1,29 \times 10^7$ s, quando a curva tracejada correspondente a $\Delta T=10^\circ\text{C}$ atinge a umidade zero.

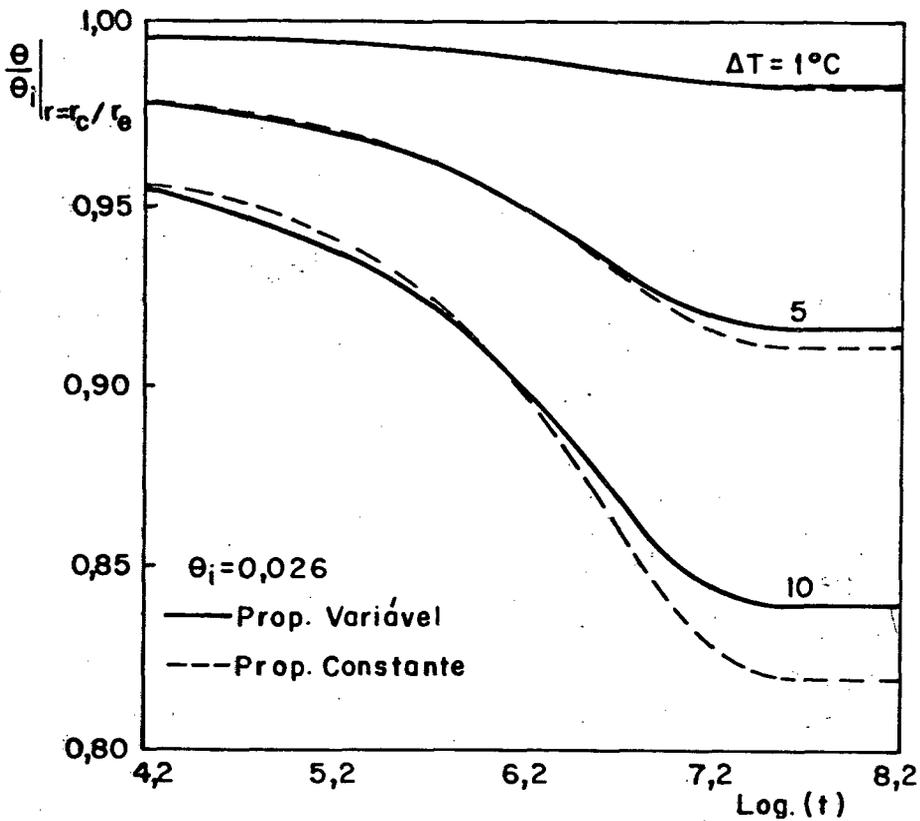


Fig. 6.29 - Umidade adimensional θ / θ_i junto à superfície do cabo em função do tempo tendo ΔT como parâmetro; $\theta_i = 0,026$

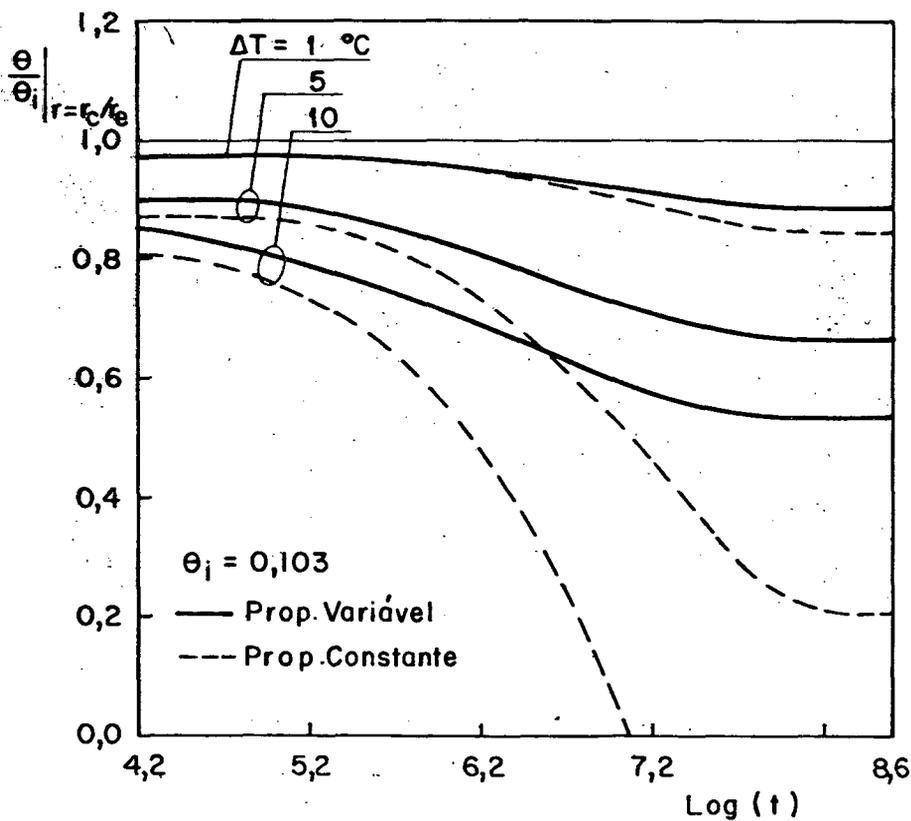


Fig. 6.30 - Umidade adimensional θ / θ_i junto à superfície do cabo em função do tempo tendo ΔT como parâmetro; $\theta_i = 0,103$

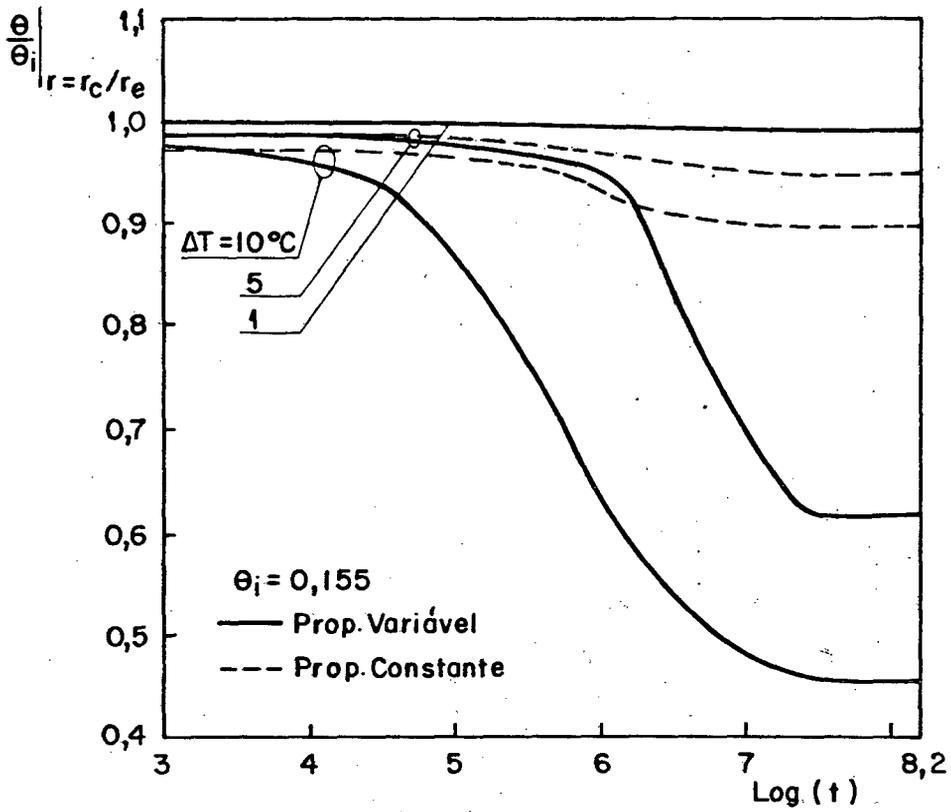


Fig. 6.31 - Umidade adimensional θ/θ_i junto à superfície do cabo em função do tempo tendo ΔT como parâmetro; $\theta_i = 0,155$

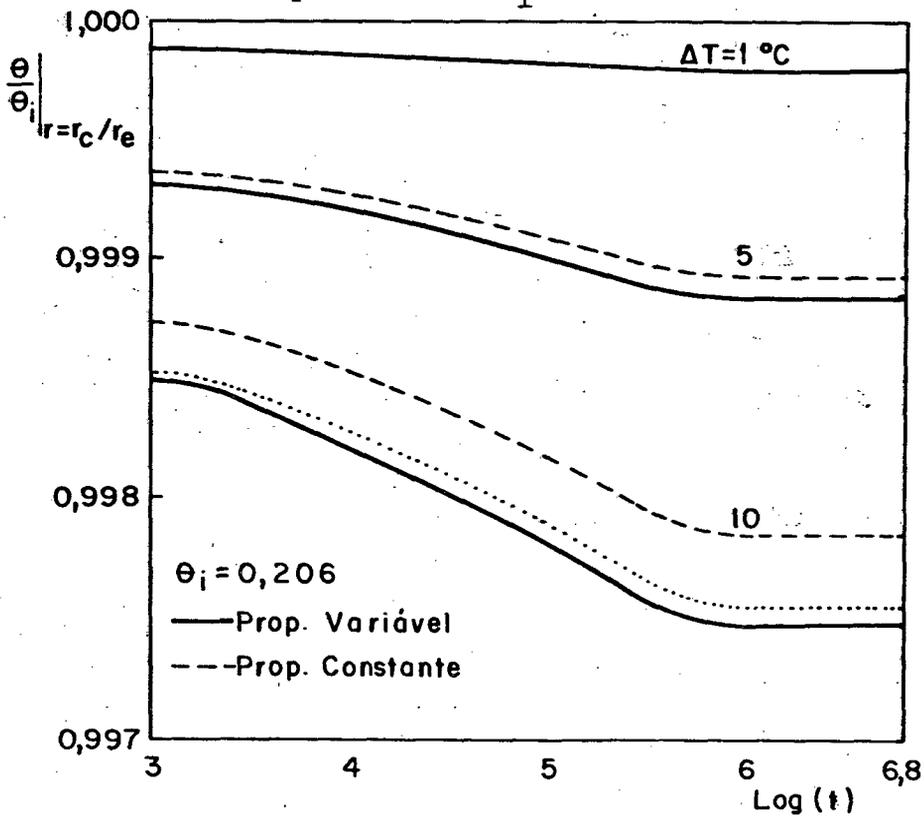


Fig. 6.32 - Umidade adimensional θ/θ_i junto à superfície do cabo em função do tempo tendo ΔT como parâmetro; $\theta_i = 0,206$

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

Apresentou-se neste trabalho uma análise do fenômeno de migração de umidade causada por gradientes térmicos entre duas superfícies impermeáveis contendo um meio poroso não saturado.

A motivação deste trabalho adveio da necessidade de se conhecer os processos de transferência de calor e umidade em solos, visando a aplicação ao problema da dissipação do calor gerado em cabos aterrados.

A análise do fenômeno procedeu-se à luz de duas abordagens distintas: a primeira assumindo as propriedades difusivas e termofísicas do meio constantes, equacionando o problema em termos de parâmetros adimensionais; e a segunda considerando estas propriedades variáveis com a temperatura e o conteúdo de umidade. Duas geometrias unidimensionais foram analisadas, plana e cilíndrica. O principal objetivo deste trabalho foi verificar o desvios associados à utilização de propriedades constantes.

No modelo paramétrico, as equações e condições de contorno foram reescritas em termos de dois números adimensionais, os números de Luikov e de Posnov. O número de Luikov é a razão entre a difusividade de umidade associada ao gradiente de umidade, e a difusividade térmica do meio poroso. O número de Posnov indica a importância relativa entre os gradientes de temperatura e umidade no transporte de massa no meio poroso.

Duas fases distintas foram consideradas: a fase úmida,

que corresponde ao início do processo de secagem, quando todo o meio está úmido; e a fase seca, que se inicia no instante em que o meio mais próximo ao cabo seca, passando a existir uma frente de secagem móvel com o tempo.

Da análise dos resultados deste modelo, as seguintes conclusões puderam ser obtidas :

- Durante a fase úmida, o número de Luikov é o parâmetro determinante. Para baixos Lu , a distribuição de temperatura atinge rapidamente o regime permanente e a distribuição de umidade torna-se independente da temperatura. Para o caso de Lu alto, durante o desenvolvimento do perfil de temperatura há um aumento no conteúdo de umidade na região próxima à superfície aquecida, significando que o vapor está se condensando durante o seu percurso.

- O número de Posnov, na fase úmida, serve apenas para determinar o instante de transição para a fase seca, sendo que quanto menor for Pn , maior é a duração da fase úmida.

- Demonstrou-se a impossibilidade de se conciliar a existência da fase úmida com altos valores de Lu e Pn , através de uma análise de escala dos diversos termos nas equações que governam o fenômeno. Tal análise explica também a ocorrência de patamares de umidade junto à superfície aquecida para baixos valores de tempo.

- Para a resolução das equações pertinentes à fase seca foi necessário que se fizesse uma transformação de coordenadas para evitar o domínio móvel com o tempo e se incluísse na equação governante um termo convectivo referente ao movimento da frente de secagem.

Para a comparação entre os dois modelos três diferenças de temperatura foram impostas entre as fronteiras do meio, 1, 5 e

10°C. Para cada diferença de temperatura, foram investigadas quatro umidades iniciais, 0,026, 0,103, 0,155 e 0,206. Tais umidades iniciais abrangem desde solos praticamente secos até solos onde existe continuidade da fase líquida. As principais conclusões obtidas da comparação foram:

- Em todos os casos analisados, para a diferença de temperatura de 1°C, os resultados para os dois modelos foram virtualmente os mesmos.

- A discrepância entre os dois modelos relaciona-se à alteração significativa nas propriedades difusivas e nos números adimensionais quando a umidade atinge valores próximos àqueles a partir do qual começa a existir continuidade da fase líquida

- A divergência entre os dois modelos é tanto maior quanto maior for a diferença de temperatura entre as fronteiras.

- As maiores diferenças entre os modelos ocorrem junto à superfície aquecida e é mais significativa para a geometria cilíndrica.

- Para as umidades iniciais iguais a 0,026 e 0,206, isto é, solos muito secos ou muito úmidos, os máximos desvios associados à utilização de propriedades constantes não ultrapassaram 2,5%.

- Para a umidade inicial igual a 0,103 ocorreram os maiores desvios entre os dois modelos. Para a geometria plana, este desvio chegou a 93%, enquanto que para a geometria cilíndrica, o modelo paramétrico atingiu a fase seca, o que não ocorreu para o modelo a propriedades variáveis.

- Para a umidade inicial de 0,155 a divergência entre os modelos também foi considerável, apresentando um desvio máximo de 50%.

Pela análise dos resultados pode-se recomendar a utilização de modelo paramétrico para baixas diferenças de temperatura e/ou para solos cujo conteúdo de umidade seja muito baixo ou muito alto, e apenas como uma primeira aproximação para os demais casos.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- |01| - DARCY,H., "Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon",
Dalmont, Paris, 1856.
- |02| - BUCKINGHAM,E., U.S. Dept. of Agr. Bur. of Soils Bull. 38,
1907.
- |03| - RICHARDS,L.A., "Capillary Conduction of Liquids Through
Porous Mediuins", Physics, vol. 1, pp. 318-333, 1954.
- |04| - CHILDS,E.C.; COLLIS-GEORGE,N., "The Permeability of Porous
Materials", Proc. Roy. Soc., vol. 201A, pp. 392-405,
1950.
- |05| - HAINES,W.B., "Studies in the Physical Properties of Soils",
J. Agric. Sci., vol. 20, pp. 97-116, 1930.
- |06| - MOORE,R.E. "Water Conduction from Shallow Water Tables",
Hilgardia, vol. 12, pp.383-466, 1939.
- |07| - LUIKOV,A.V., "Transport Phenomena in Capillary-Porous
Bodies", Gostekhizdat, Moscou, 1954.
- |08| - PHILIP,J.R.; DE VRIES,D.A., "Moisture Movement in Porous
Media Under Temperature Gradients", Trans. Am. Geophys.
Union, vol. 38, pp. 222-232, 1957.
- |09| - DE VRIES,D.A., "Simultaneous Transfer of Heat and Moisture
in Porous Media", Trans. Am. Geophys. Union, vol. 39, pp.
909-916, 1958.
- |10| - DE VRIES,D.A., "Heat Transfer in Soils", Heat and Mass
Transfer in Biosphere, pp. 5-28, Scripta, Washington,
1975.
- |11| - CARY,J.W.; TAYLOR,S.A., "The Interaction of the Simultaneous
Diffusion of Heat and Water Vapor", Soil Sci. Soc. Amer.

Proc., vol 26, pp. 413-416, 1962.

- |12| - JURY,W.A., "Simultaneous Transport of Heat and Moisture Through a Medium Sand", Ph.D. Thesis, University of Wisconsin, 1973.
- |13| - ECKERT,E.R.G.; FAGHRI,M., "A General Analysis of Moisture Migration Caused by Temperature Difference in an Unsaturated Porous Medium", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 23, pp. 1613-1623, 1980.
- |14| - ECKERT,E.R.G.; FAGHRI,M., "A Parametric Analysis of Moisture Migration in an Unsaturated Porous Slab Caused by Convective Heat and Mass Transfer", Warme-Stoffbertrag., vol. 20, pp. 77-87, 1986.
- |15| - HARTLEY,J.G.; COUVILLION,R.J., "Drying Front Movement Near Low-Intensity, Impermeable Underground Heat Sources", J. Heat Transfer, vol. 108, pp.182-189, 1986.
- |16| - HARTLEY,J.G., "An Analysis of Thermal Stability of the Soil Environment of Underground Electric Cables", Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, School of Mechanical Engineering, 1981.
- |17| - COUVILLION,R.J., "Heat and Mass Transfer in a Semi-Infinite Moist Soil with a Drying Front Present", Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, School of Mechanical Engineering, 1981.
- |18| - CRAUSSE,P., "Etude Fondamentale des Transferts Couplés de Chaleur et d'Humidité en Milieu Poreux non Saturé", These d'Etat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1982.
- |19| - PREECE,R.J.; HITCHCOCK,J.A., "Simultaneous Diffusion of Heat and Moisture Through Isotropic Porous Media with

Varying Physical Properties", 6th International Heat Transfer Conference, Toronto, pp. 2348-2353, 1978.

- |20| - MITCHELL, J.K. et al, "Backfill Materials for Underground Power Cables", Phase I, University of California, Berkeley, EPRI EL-506, Project 7841-1, 1977.
- |21| - Proceedings of the Workshop on Current Rating of Buried Cables in Relation to Thermal Properties of Soil, September 11-13, 1984, Arnhem.
- |22| - DONNAZZI, F. et al, "Soil Thermal and Hydrological Characteristics in Designing Underground Cables", Proc. IEE, vol. 126, 1979.
- |23| - BRAKELMANN, H., "Physical Principles and Calculations Methods of Moisture and Heat Transfer in Cable Trenchs", VDE-VERLAG, Berlin, ETZ-Report 7, 1984.
- |24| - "Transferência de Calor e Massa em Meios Porosos - Modelos Físicos e Matemáticos", RT-353/106(2), 1986 - Divisão de Cabos da Pirelli.
- |25| - GROENVELD, G.J.; VERMEER, J. et al, "Improved Method to Calculate the Critical Conditions for Drying-Out Sandy Soils Around Power Cables", Proc. IEE, vol. 131, 1984.
- |26| - HARTLEY, J.G.; BLACK, W.; BUSH, R.A.; MARTIN Jr, M.A., "Thermal Stability of Soils Adjacent to Underground Transmission Power Cables", Technical Report of Georgia Institute of Technology for EPRI, 1982.
- |27| - HILLEL, D., "Fundamentals of Soils Physics", Academic Press, New York, 1980.
- |28| - PATANKAR, S.V., "Numerical Heat Transfer", Hemisphere, Washington, 1980.
- |29| - SPALDING, D.B., "A Novel Finite-Difference Formulation for

Differential Expression Involving Both First and Second Derivatives", Int. J. Num. Methods Eng., vol. 4, pp. 551-559, 1972.

- [30] - KEENAN, J.H.; KEYES, F.G.; HILL, P.G.; MOORE, J.G., "Steam Tables", John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [31] - SILVEIRA NETO, A., "Soluções Exatas Para o Tratamento Simultâneo de Calor e Umidade em Elementos Posos Unidimensionais", Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1985.

APÊNDICE A

EQUAÇÕES PARA AS PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS E DIFUSIVAS

O modelo a propriedades variáveis desenvolvido no presente trabalho assume as propriedades termofísicas e difusivas do meio como funções da temperatura e do conteúdo de umidade. Neste apêndice serão apresentadas as equações necessárias ao cálculo destas propriedades.

O material poroso utilizado no presente estudo é um cascalho arenoso ("sandy silt"). A razão de tê-lo escolhido deve-se à disponibilidade das informações a seu respeito. As expressões para as propriedades, e as características do material foram extraídas de [15] e [26].

Inicialmente serão apresentadas as expressões para as difusividades. No que se segue, T e θ são temperatura em K e conteúdo de umidade, respectivamente.

Difusividade molecular do vapor d'água no ar:

$$D_a = (2,17 \times 10^{-5}) (P_0/P) (T/T_0)^{1,25} \quad (\text{m}^2/\text{s}) \quad (\text{A.1})$$

onde: P_0 : pressão de referência
 T_0 : temperatura de referência

Difusividade molecular modificada do vapor d'água no ar:

$$D_{13} = f(\varepsilon - \theta)D_a \quad (\text{m}^2/\text{s}) \quad (\text{A.2})$$

onde: f : fator de tortuosidade

ε : porosidade

Difusividade do vapor devido ao gradiente de temperatura:

$$D_{TV} = \frac{v h D \rho_s h_{21}}{\rho_2 R_1 T^2} \frac{\rho_2}{\rho_{sol}} \quad (\text{m}^2/\text{s.k}) \quad (\text{A.3})$$

onde: R_1 : constante do vapor d'água

v : fator do fluxo de massa

h : umidade relativa

ρ_2 : massa específica do líquido

ρ_s : massa específica do vapor saturado

ρ_{sol} : massa específica do solo seco

h_{21} : calor latente de vaporização.

Difusividade do vapor devido ao gradiente de umidade:

$$D_{\theta V} = \frac{v \rho_s}{\rho_2} D_{13} \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (\text{m}^2/\text{s}) \quad (\text{A.4})$$

Vale salientar que as relações (A.3) e (A.4) são equivalentes às equações (2.14) e (2.13), respectivamente, apresentadas no Capítulo 2.

Difusividade do líquido devido ao gradiente de umidade:

$$D_{\theta L} = \frac{k_s}{\mu_2} k_{r1} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (\text{m}^2/\text{s}) \quad (\text{A.5})$$

onde: K_s : permeabilidade de saturação
 μ_2 : viscosidade do líquido
 K_{r1} : permeabilidade relativa do líquido
 ψ : potencial de sucção

As propriedades referentes à água e ao ar que aparecem nas expressões anteriores foram determinadas por:

Calor latente de vaporização

$$h_{21} = 4128 \times (755,785 - 0,532883T - 7,7141 \times 10^{-4}T^2 + 3,48007 \times 10^{-6}T^3 - 4,70563 \times 10^{-9}T^4) \quad (\text{J/kg}) \quad (\text{A.6})$$

Massa específica do vapor saturado

$$\rho_s = \exp(-11,582 - 6,622457T + 5,238268 \times 10^{-2}T^2 - 7,187861 \times 10^{-5}T^3) \quad (\text{kg/m}^3) \quad (\text{A.7})$$

Viscosidade do líquido

$$\mu_2 = 1,0834 \times 10^{-8} \exp\left(\frac{2635,57}{T} + 8,30853 \times 10^{-3}T\right) \quad (\text{kg/m.s}) \quad (\text{A.8})$$

Massa específica do líquido

$$\rho_2 = (999,836 + 18,224944T - 7,922210 \times 10^{-3} T^2 + 5,544846 \times 10^{-5} T^3 + 1,497562 \times 10^{-7} T^4 - 3,932952 \times 10^{-10} T^5) / (1 + 1,9159725 \times 10^{-2} T) \quad (\text{kg/m}^3) \quad (\text{A.9})$$

Na eq. (A.9), a temperatura está em °C. A expressão (A.7) foi obtida fazendo-se a regressão dos dados constantes em [30], pelo método dos mínimos quadrados.

Os parâmetros relacionados ao meio poroso foram calculados através das expressões subsequentes:

Permeabilidade relativa do líquido:

$$K_{rl} = S_e^4 \exp [-6,06128 + 2,92738 S_e + 16,0411 S_e^2 - 29,5457 S_e^3 + 16,6385 S_e^4] \quad (\text{A.10})$$

onde: S_e : saturação efetiva

Potencial de sucção do solo adimensional:

$$\frac{\psi}{R_i T_0} \left\{ \begin{array}{ll} - 7,248 \exp(-23,8034 S) & 0 < S < 0,25 \\ - 92135 \exp(-112,8126 S + 258,4547 S^2 - 214,4969 S^3) & 0,25 < S < 0,4 \\ - 5,425 \times 10^{-4} (S^{-1,3216}) (1-S)^{0,85734} \operatorname{tgh}(1-S)^{-4,1717} & S > 0,4 \end{array} \right. \quad (\text{A.11})$$

onde: S : fração de saturação

Condutibilidade térmica adimensional:

$$\frac{\lambda}{\lambda_{\text{sol}}} \equiv \left[0,1786 + 0,8214 \exp(-1,74224 S + 9,6831 S^2 + 47,7571 S^3) \right]^{-1} \quad (\text{A.12})$$

onde: λ_{sol} : condutibilidade térmica do solo seco

Calor específico adimensional:

$$\frac{c}{c_{\text{sol}}} = 1 + 0,002(T - 298) + 2,23 S$$

onde: c_{sol} : calor específico do solo seco.

Definem-se a seguir os demais termos utilizados nas expressões anteriores, além dos termos adicionais necessários à determinação das propriedades.

Fração de saturação

$$S = \frac{\theta}{\varepsilon} \quad (\text{A.14})$$

Pressão do vapor saturado

$$P_S = \rho_S R_1 T \quad (\text{A.15})$$

Pressão do vapor

$$P_1 = h \times P_S \quad (\text{A.16})$$

Pressão do ar

$$P_{ar} = P_{atm} - P_1 \quad (A.17)$$

Umidade relativa

$$h = \exp \left[\frac{\psi}{R_1 T} \right] \quad (A.18)$$

Fator do fluxo de massa

$$v = 1 - \left(1 - \frac{R_1}{R_3} \right) \frac{\rho_1}{\rho_g} \quad (A.19)$$

onde: ρ_g : massa específica da mistura gasosa,

$$\rho_g = \rho_1 + \rho_{ar}$$

Saturação efetiva

$$S_e = \frac{S - S_k}{1 - S_k} \quad (A.20)$$

onde: S_k : fração de saturação limite para a qual passa a existir continuidade na fase líquida

As constantes que aparecem nas expressões anteriores tiveram os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= 1 \text{ atm} \\
 T_0 &= 273 \text{ K} \\
 R_1 &= 461,52 \text{ J/Kg.K} \\
 R_3 &= 287,06 \text{ J/Kg.K} \\
 K_S &= 2,69 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \\
 S_k &= 0,25 \\
 \rho_S &= 1280 \text{ Kg/m}^3 \\
 f &= 0,70 \\
 \lambda_{\text{sol}} &= 0,30 \text{ W/m.k} \\
 c_{\text{sol}} &= 9,7 \times 10^5 \text{ J/m}^3.\text{K} \\
 \epsilon &= 0,517
 \end{aligned}$$

Apresentadas as expressões que foram utilizadas para o cálculo das propriedades termofísicas e difusivas do meio poroso, úteis para o modelo a propriedades variáveis, será mostrado a seguir os valores de todas as variáveis para umidade θ igual a 0,103 e temperatura T igual a 308,16 K.

$$\begin{aligned}
 \rho_2 &= 994,03296 \text{ Kg/m}^3 \\
 \theta &= 0,10301 \\
 S &= 0,19925 \\
 \psi &= -8,6901135 \times 10^3 \text{ J/Kg} \\
 h &= 0,94073 \\
 D_a &= 2,2613529 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \\
 D_{13} &= 6,5531681 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\
 h_{21} &= 2,418342 \times 10^6 \text{ J/Kg} \\
 \rho_S &= 0,039552133 \text{ Kg/m}^3 \\
 P_S &= 5,6251836 \times 10^3 \text{ Pa} \\
 \rho_1 &= 0,037207753 \text{ Kg/m}^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_i &= 5,2917612 \times 10^3 \text{ Pa} \\
P_{ar} &= 9,6033239 \times 10^4 \text{ Pa} \\
\rho_{ar} &= 0,010856070 \text{ Kg/m}^3 \\
v &= 1,0201395 \\
k_* &= 0,39321007 \text{ W/m.K} \\
C &= 1,4207183 \times 10^6 \text{ J/m}^3 \cdot \text{K} \\
S_e &= - 0,066949067 \\
K_{rl} &= 0,0 \\
\mu_2 &= 7,262492 \times 10^{-4} \text{ Kg/m.s} \\
D_{TV} &= 1,38076 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s.K} \\
\lambda &= 0,42640232 \text{ W/m.k} \\
D_{\theta L} &= 1,466 \times 10^{-25} \text{ m}^2/\text{s} \\
D_{\theta V} &= 7,0048652 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s} \\
D_{\theta} &= 7,0048652 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s} \\
Pn &= 7,6538373 \\
l/Lu &= 428,4615
\end{aligned}$$

Para o cálculo do número de Posnov, considerou-se ΔT igual a 40° C

A dependência das propriedades difusivas e dos números adimensionais Lu e Pn com o conteúdo de umidade estão apresentados na Tabela A.1. Os valores foram calculados baseados na temperatura inicial do meio, igual a $308,16 \text{ K}$. Para avaliar o número de Posnov a diferença de temperatura foi tomada igual a 40° C .

A Tabela A.2 apresenta os valores das propriedades para uma dada umidade inicial θ_i , igual a $0,103$, em função da temperatura do meio. O número de Pn foi calculado para $\Delta T = 40^\circ \text{ C}$.

Tabela A.1 - Valores das propriedades difusivas e dos números adimensionais em função do conteúdo de umidade;

$\Delta T=40^{\circ}\text{C}$.

θ_i	λ (W/m.K)	D_{TV} ($\text{m}^2/\text{s.K}$)	$D_{\theta L}$ (m^2/s)	$D_{\theta V}$ (m^2/s)	D_{θ} (m^2/s)	1/Lu	Pn
0,013	0,3104	$3,633 \times 10^{-12}$	$9,339 \times 10^{-23}$	$1,174 \times 10^{-8}$	$1,174 \times 10^{-8}$	253,3	0,96
0,026	0,3221	$2,008 \times 10^{-11}$	$5,159 \times 10^{-23}$	$3,586 \times 10^{-8}$	$3,586 \times 10^{-8}$	81,85	0,87
0,038	0,3367	$5,120 \times 10^{-11}$	$2,850 \times 10^{-23}$	$5,049 \times 10^{-8}$	$5,049 \times 10^{-8}$	57,91	1,04
0,052	0,3524	$8,500 \times 10^{-11}$	$1,574 \times 10^{-23}$	$4,631 \times 10^{-8}$	$4,631 \times 10^{-8}$	63,14	1,42
0,064	0,3679	$1,112 \times 10^{-10}$	$8,696 \times 10^{-24}$	$3,345 \times 10^{-8}$	$3,345 \times 10^{-8}$	87,34	2,06
0,077	0,3841	$1,273 \times 10^{-10}$	$4,804 \times 10^{-24}$	$2,117 \times 10^{-8}$	$2,117 \times 10^{-8}$	138,2	3,12
0,090	0,4028	$1,353 \times 10^{-10}$	$2,654 \times 10^{-24}$	$1,243 \times 10^{-8}$	$1,243 \times 10^{-8}$	237,0	4,83
0,103	0,4264	$1,381 \times 10^{-10}$	$1,466 \times 10^{-24}$	$7,005 \times 10^{-9}$	$7,005 \times 10^{-9}$	428,5	7,64
0,116	0,4576	$1,376 \times 10^{-10}$	$8,097 \times 10^{-23}$	$3,855 \times 10^{-9}$	$3,855 \times 10^{-9}$	805,0	12,22
0,128	0,4994	$1,352 \times 10^{-10}$	$4,473 \times 10^{-25}$	$2,093 \times 10^{-9}$	$2,093 \times 10^{-9}$	1560	20,09
0,142	0,5549	$1,318 \times 10^{-10}$	$6,333 \times 10^{-9}$	$9,796 \times 10^{-10}$	$7,312 \times 10^{-9}$	479,5	5,08
0,154	0,6278	$1,278 \times 10^{-10}$	$6,331 \times 10^{-8}$	$4,969 \times 10^{-10}$	$6,380 \times 10^{-8}$	60,13	0,510
0,167	0,7217	$1,235 \times 10^{-10}$	$2,190 \times 10^{-7}$	$2,748 \times 10^{-10}$	$2,193 \times 10^{-7}$	19,47	0,134
0,180	0,8387	$1,191 \times 10^{-10}$	$5,227 \times 10^{-7}$	$1,655 \times 10^{-10}$	$5,228 \times 10^{-6}$	9,19	0,050
0,193	0,9776	$1,146 \times 10^{-10}$	$1,068 \times 10^{-6}$	$1,090 \times 10^{-10}$	$1,068 \times 10^{-6}$	5,09	0,042
0,206	1,1312	$1,101 \times 10^{-10}$	$2,056 \times 10^{-6}$	$7,892 \times 10^{-11}$	$2,056 \times 10^{-6}$	2,97	0,020
0,219	1,2860	$1,057 \times 10^{-10}$	$1,084 \times 10^{-5}$	$1,740 \times 10^{-11}$	$1,084 \times 10^{-5}$	6,22	0,038

Tabela A.2 - Valores das propriedades difusivas e dos números adimensionais em função da temperatura, $\theta_i=0,103$ e $\Delta T=40^\circ\text{C}$.

T (°C)	λ (W/m.K)	D_{TV} ($\text{m}^2/\text{s.K}$)	$D_{\theta L}$ (m^2/s)	$D_{\theta V}$ (m^2/s)	D_{θ} (m^2/s)	l/\bar{h}_m	Pn
35	0,4264	$1,072 \times 10^{-10}$	$1,466 \times 10^{-25}$	$7,004 \times 10^{-10}$	$7,004 \times 10^{-10}$	428,4	7,64
40	0,4358	$1,769 \times 10^{-11}$	$1,595 \times 10^{-25}$	$9,086 \times 10^{-10}$	$9,086 \times 10^{-10}$	335,1	7,54
45	0,4474	$2,254 \times 10^{-11}$	$1,726 \times 10^{-25}$	$1,170 \times 10^{-9}$	$1,170 \times 10^{-10}$	265,0	7,45
50	0,4617	$2,856 \times 10^{-11}$	$1,859 \times 10^{-25}$	$1,498 \times 10^{-9}$	$1,498 \times 10^{-10}$	212,1	7,36
55	0,4791	$3,598 \times 10^{-11}$	$1,992 \times 10^{-25}$	$1,905 \times 10^{-9}$	$1,905 \times 10^{-10}$	171,8	7,29
60	0,5000	$4,506 \times 10^{-11}$	$2,124 \times 10^{-25}$	$2,405 \times 10^{-9}$	$2,405 \times 10^{-10}$	141,0	7,19
65	0,5252	$5,611 \times 10^{-11}$	$2,255 \times 10^{-25}$	$3,017 \times 10^{-9}$	$3,017 \times 10^{-10}$	117,2	7,12
70	0,5553	$6,948 \times 10^{-11}$	$2,383 \times 10^{-25}$	$3,759 \times 10^{-9}$	$3,759 \times 10^{-10}$	98,77	7,06

APÊNDICE B

EQUIVALÊNCIA ENTRE OS MODELOS DE ECKERT-FAGHRI E DE HARTLEY-COUVILLION.

O presente trabalho analisou o fenômeno da migração de umidade à luz de dois enfoques distintos. O primeiro, seguindo a metodologia sugerida por Eckert e Faghri [13], deu origem ao modelo paramétrico. O segundo, considerou as propriedades termofísicas e difusivas do meio variáveis com a temperatura e com o conteúdo de umidade, seguiu a metodologia descrita por Hartley e Couvillion [15] e [26], e foi denominado de modelo a propriedades variáveis.

Cada modelo tem uma maneira própria de expressar as difusividades e de definir algumas das variáveis empregadas. Por consequência a forma final das equações básicas são distintas. Entretanto, por tratar-se do mesmo fenômeno físico, estas equações, equação da conservação da massa e a equação da conservação de energia, devem ser equivalentes. Este apêndice tem como objetivo demonstrar esta equivalência.

Inicialmente serão reapresentadas as equações do transporte de calor e transporte de massa para as propriedades variáveis obtidas na seção (3.2) e as expressões para as difusividades apresentadas no apêndice A.

A equação (3.1) representa a expressão geral do transporte de umidade para a geometria unidimensional de paredes planas,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[D_{TV} \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad (3.1)$$

A equação geral do transporte de energia para a mesma situação é dada pela equação (3.2),

$$\frac{\partial}{\partial t} (CT) = \frac{\partial}{\partial x} (k_* + \rho_2 h_{21} D_{TV}) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.2)$$

onde o conteúdo de umidade θ está definido por:

$$\theta = \frac{V_2}{V_T} \quad (B.1)$$

e as difusividades são dadas pelas seguintes expressões:

$$D_{\theta L} = \frac{K_S}{\mu_2} K_{r1} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (A.5)$$

$$D_{\theta V} = \frac{v \rho_S}{\rho_2} D_{13} \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (A.4)$$

$$D_{TV} = \frac{vh D_{13} \rho_S h_{21}}{\rho_2 R_1 T^2} \quad (A.3)$$

As grandezas que aparecem nas equações anteriores estão definidas na nomenclatura.

A seguir serão apresentadas as equações básicas e as expressões para as difusividades do modelo paramétrico de Eckert e Faghri [13]. Para fins de simplicidade, a notação adotada em [13]

foi ligeiramente alterada, em especial no que se refere aos subíndices.

A equação da conservação de umidade tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D^* \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (\text{B.2})$$

A equação da conservação de energia é expressa por:

$$\rho_{\text{sol}} \bar{c}_{\text{sol}} \frac{\partial T}{\partial t} = (k + \rho_{\text{sol}} h_{21} D^*) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{B.3})$$

onde: W : conteúdo de umidade (massa de líquido por massa de sólido seco);

$$W = \frac{m_2}{m_{\text{sol}}} \quad (\text{B.4})$$

D^* : coeficiente térmico de difusão de massa

$$D^* = \frac{D_s}{\rho_{\text{sol}} R_1 T} \frac{\partial P_1}{\partial T} \quad (\text{B.5})$$

K : coeficiente de difusão de umidade

$$K = \frac{\rho_2}{\rho_{\text{sol}}} k_{\phi} \frac{\partial \psi}{\partial W} \quad (\text{B.6})$$

Ainda,

c_{sol} : calor específico de solo

m_2 : massa do líquido

m_{sol} : massa do solo seco

D_s : coeficiente de difusão mássica do vapor no meio poroso

K_ϕ : difusividade da umidade

k : condutividade térmica

A verificação da equivalência entre os modelos será feita comparando as equações do transporte de umidade, equações (3.1) e (B.2) e as equações do transporte de energia, equações (3.2) e (B.3).

Para as equações do transporte de umidade, a equivalência será mostrada termo a termo.

* Relação entre θ e W

No modelo a propriedades variáveis o conteúdo de umidade está definido pela equação (B.1),

$$\theta = \frac{V_2}{V_T} \quad (\text{B.1})$$

enquanto que no modelo paramétrico tem-se:

$$W = \frac{m_2}{m_{\text{sol}}} \quad (\text{B.4})$$

A massa específica do solo seco e a massa específica do

líquido são expressos, respectivamente, por,

$$\rho_{sol} = \frac{m_{sol}}{V_T} \quad (B.8)$$

e

$$\rho_2 = \frac{m_2}{V_2} \quad (B.9)$$

Então é correto escrever:

$$\theta = W \times \frac{\rho_{sol}}{\rho_2} \quad (B.10)$$

A equação acima relaciona as definições do conteúdo de umidade.

* Relação entre D_{TV} e D^*

A equivalência destas difusividades será mostrada desenvolvendo a expressão que define D^* , equação (B.5), objetivando chegar à expressão de D_{TV} , equação (A.3)

$$D^* = \frac{D_s}{\rho_{sol} R_1 T} \frac{\partial P_1}{\partial T} \quad (B.5)$$

Inicialmente será obtida uma expressão para $\partial P_1 / \partial T$, a partir da umidade relativa h , definida por,

$$h = \frac{P_1}{P_s} \quad (\text{B.11})$$

Assumindo que para a faixa de temperatura utilizada neste trabalho a umidade relativa não varia substancialmente com a temperatura, tem-se:

$$\frac{dP_1}{dT} = h \frac{dP_s}{dT} \quad (\text{B.12})$$

Expressando a pressão do vapor saturado P_s em função da massa específica do vapor saturado através da seguinte igualdade:

$$P_s = \rho_s R_1 T \quad (\text{B.13})$$

e considerando que P_s só varia com a temperatura através de ρ_s , ou seja, $\partial P_s / \partial T |_{\rho_s} = 0$, é correto escrever:

$$\frac{dP_s}{dT} = R_1 T \frac{d\rho_s}{dT} \quad (\text{B.14})$$

Substituindo a expressão acima em (B.12) vem,

$$\frac{dP_1}{dT} = h R_1 T \frac{d\rho_s}{dT} \quad (\text{B.15})$$

É necessário, ainda, encontrar uma expressão para $d\rho_s/dT$.

A equação de Clayperon-Claussius relaciona as propriedades das fases líquido e vapor de uma substância pura em equilíbrio

através da equação:

$$\frac{dP_S}{dT} = \frac{h_{21}}{T(V_S - V_2)} \quad (\text{B.16})$$

onde V_S e V_2 são, respectivamente, o volume específico do vapor saturado e o volume específico do líquido.

Considerando que $V_S \gg V_2$ e que o vapor saturado comporta-se como um gás ideal, tem-se :

$$\frac{dP_S}{dT} = \frac{h_{21} P_S}{R_1 T^2} \quad (\text{B.17})$$

Substituindo a equação (B.14) na equação (B.17), e fazendo uso da relação (B.13), chega-se a uma expressão para $d\rho_S/dT$,

$$\frac{d\rho_S}{dT} = \frac{h_{21}}{R_1 T^2} \rho_S \quad (\text{B.18})$$

Finalmente, substituindo a expressão acima na equação (B.15) e, posteriormente, na equação (B.5), obtém-se :

$$D^* = \frac{D_S h \rho_S h_{21}}{\rho_{sol} R_1 T^2} \quad (\text{B.19})$$

As duas difusividades do vapor d'água no ar, D_S e D_{13} , estão relacionadas através do fator de fluxo de massa v , pela expressão :

$$D_s = \nu D_{13} \quad (\text{B.20})$$

Desta forma, comparando a equação obtida para D_{TV} com a equação para D^* , equação (A.3) conclue-se que:

$$D^* = \frac{\rho_2}{\rho_{sol}} D_{TV} \quad (\text{B.21})$$

* Relação entre $D_{\theta L}$ e K

As difusividades relacionadas ao transporte de líquido decorrente do gradiente de umidade estão definidas pelas equações, (A.5) e (B.6),

$$D_{\theta L} = \frac{K_s}{\mu_2} K_{rl} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (\text{A.5})$$

$$K = \frac{\rho_2}{\rho_{sol}} K_{\phi} \frac{\partial \psi}{\partial w} \quad (\text{B.6})$$

A difusividade de umidade K_{ϕ} utilizada por Eckert é equivalente a,

$$K_{\phi} = \frac{K_s}{\mu_2} K_{rl} \quad (\text{B.22})$$

As definições de conteúdo de umidade estão relacionadas por,

$$\theta = W \frac{\rho_{sol}}{\rho_2} \quad (B.10)$$

Desta forma pode-se escrever que,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{\rho_2}{\rho_{sol}} \frac{\partial \psi}{\partial W} \quad (B.23)$$

Substituindo as equações (B.22) e (B.23) na equação (A.5), chega-se à igualdade,

$$D_{\theta L} = K \quad (B.24)$$

Convém notar que as relações (B.20) e (B.22) foram introduzidas a fim de garantir a equivalência entre os dois modelos. Em [13] não foi detalhado como D_s e K_ϕ devem ser calculados.

As equações do transporte de massa dos dois modelos diferem portanto, apenas por uma constante.

Para a investigação concernente às equações do transporte de energia, uma simples comparação é suficiente.

As equações do transporte de energia são as equações (3.2) e (B.3):

$$\frac{\partial}{\partial t} (CT) = \frac{\partial}{\partial x} (k_* + \rho_2 h_{21} D_{TV}) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (B.2)$$

$$\rho_{sol} c_{sol} \frac{\partial T}{\partial t} = (k + \rho_{sol} h_{21} D^*) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (B.3)$$

Para as relações acima é correto afirmar que o produto $\rho_{\text{sol}} c_{\text{sol}}$ é igual à capacidade calorífica volumétrica e que k_* e k representam as condutibilidades térmicas.

De posse da relação (B.21), o termo $\rho_{\text{sol}} h_{21} D^*$ torna-se idêntico ao termo $\rho_2 h_{21} D_{TV}$.

Portanto, fica demonstrada a igualdade entre as equações do transporte de energia.

APÊNDICE C

DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Neste apêndice será apresentado o método de discretização das equações diferenciais utilizadas neste trabalho, através do método dos volumes finitos, baseado na metodologia descrita por Patankar [28].

O desenvolvimento será efetuado para a equação unidimensional da difusão transiente com termo fonte, escrita da seguinte forma ,

$$P_1 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} (P_2 r^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} (P_3 r^\alpha \frac{\partial \Gamma}{\partial r}) \quad (C.1)$$

Nesta equação as variáveis dependentes são ϕ e Γ , sendo que Γ é independente de ϕ . As quantidades P_1 , P_2 e P_3 são propriedades termofísicas ou difusivas do meio. O tempo é denotado por t e o expoente α da variável geométrica r serve para generalizar a equação; os valores de α para as geometrias cartesiana e cilíndrica são iguais a zero e a um, respectivamente.

Identificando a eq. (C.1) com a equação da conservação da massa, ϕ é o conteúdo de umidade θ e Γ é a temperatura. P_1 é igual a um, P_2 é a difusividade da umidade devido ao gradiente de umidade, D_θ , e P_3 é a difusividade do vapor associada ao gradiente térmico, D_{TV} .

Para o caso da equação da conservação da energia, ϕ é a

temperatura T , e P_3 é igual a zero; P_1 é o calor específico volumétrico do meio, C , e P_2 é a difusividade térmica, $(k + \rho_2 h_{21} D_{TV})$.

Para o modelo paramétrico, P_1 , P_2 e P_3 são iguais a um.

A eq. (C.1) pode ser reescrita como,

$$P_1 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} (P_2 r^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial r}) + \dot{S} \quad (C.2)$$

onde:

$$\dot{S} = \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} (P_3 r^\alpha \frac{\partial \Gamma}{\partial r}) \quad (C.3)$$

Por conveniência, a fim de não se trabalhar com equações muito longas, no desenvolvimento que se segue a integração do termo fonte \dot{S} será feita posteriormente.

Para a discretização da eq. (C.3), considerou-se o volume de controle mostrado na Fig. C.1.

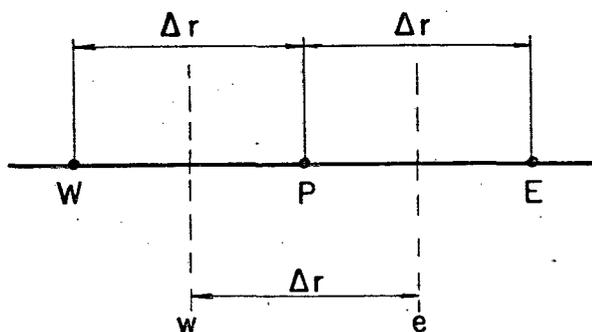


Fig. C.1 - Volume de controle característico.

Integrando a expressão (C.3) no tempo e ao longo do volume de controle da Fig. C.1, tem-se,

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_e^w P_{1e} \frac{\partial \phi}{\partial t} dr dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_e^w \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} (P_2 r^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial r}) dr dt +$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} \int_e^w \dot{S} dr dt \quad (C.4)$$

Resolvendo a integração acima, primeiramente em relação à variável geométrica r , vem ,

$$\int_t^{t+\Delta t} P_{1P} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Delta r dt = \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r_P^\alpha} \left[(P_2 r^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial r})_e - (P_2 r^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial r})_w \right] dt +$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} \int_e^w \dot{S} dr dt \quad (C.5)$$

Aproximando as derivadas, a equação (C.5) pode ser reescrita como,

$$\int_t^{t+\Delta t} P_{1P} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Delta r dt = \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r_P^\alpha} \left[\frac{P_{2e} r_e^\alpha (\phi_E - \phi_P)}{\Delta r} - \frac{P_{2w} r_w^\alpha (\phi_w - \phi_P)}{\Delta r} \right] dt +$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} \int_e^w \dot{S} dr dt \quad (C.6)$$

onde P_{1P} , P_{2e} e P_{2w} são os valores destas propriedades avaliados, respectivamente, no ponto P , e nas fronteiras e e w . Resolvendo agora a integração no tempo, tem-se ,

$$\begin{aligned}
 (\phi_P - \phi_P^*) P_{1P} \Delta r = \frac{1}{r_P^\alpha} \left[\frac{P_{2e} r_e^\alpha (\phi_E - \phi_P)}{\Delta r} - \frac{P_{2w} r_w^\alpha (\phi_W - \phi_P)}{\Delta r} \right] \Delta t + \\
 + \int_t^{t+\Delta t} \int_e^w \dot{S} dr dt \quad (C.7)
 \end{aligned}$$

A exceção do termo com superíndice *, que referencia-se ao tempo t , todos os demais termos da eq. (C.7) são avaliados no tempo $t+\Delta t$. Rearranjando os termos, chega-se a,

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_{PZ} \phi_P^* + \int_t^{t+\Delta t} \int_e^w \dot{S} dr dt \quad (C.8)$$

onde :

$$a_E = \frac{P_{2e} r_e^\alpha}{r_P^\alpha \Delta r} \quad (C.9)$$

$$a_W = \frac{P_{2w} r_w^\alpha}{r_P^\alpha \Delta r} \quad (C.10)$$

$$a_{PZ} = \frac{P_{1P} \Delta r}{\Delta t} \quad (C.11)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_{pZ} \quad (C.12)$$

A atenção agora será focalizada na integração do termo fonte \dot{S} , definido pela equação (C.3).

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_e^w \dot{s} \, dr dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_e^w \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} (P_3 r^\alpha \frac{\partial \Gamma}{\partial r}) \, dr dt$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{r_p^\alpha} \left[\frac{P_{3e} r_e^\alpha (\Gamma_E - \Gamma_P)}{\Delta r} - \frac{P_{3w} r_w^\alpha (\Gamma_P - \Gamma_W)}{\Delta r} \right] dt \quad (C.13)$$

$$= \frac{P_{3e} r_e^\alpha}{r_p^\alpha \Delta r} \Gamma_E + \frac{P_{3w} r_w^\alpha}{r_p^\alpha \Delta r} \Gamma_W - \left(\frac{P_{e2} r_e^\alpha}{r_p^\alpha \Delta r} + \frac{P_{3w} r_w^\alpha}{r_p^\alpha \Delta r} \right) \Gamma_P$$

$$= a'_E \Gamma_E + a'_W \Gamma_W - (a'_E + a'_W) \Gamma_P \quad (C.14)$$

com,

$$a'_E = \frac{P_{3e} r_e^\alpha}{r_p^\alpha \Delta r} \quad (C.15)$$

$$a'_W = \frac{P_{3w} r_w^\alpha}{r_p^\alpha \Delta r} \quad (C.16)$$

Substituindo a equação (C.14) na equação (C.8) vem,

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_{PZ} \phi_P + a'_E \phi_E + a'_W \phi_W +$$

$$- (a'_E + a'_W) \Gamma_P \quad (C.17)$$

ou

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + A_{PZ} \quad (c.18)$$

onde,

$$A_{PZ} = a_{PZ} \phi_P^* + a'_E \Gamma_E + a'_W \Gamma_W - (a'_E + a'_W) \Gamma_P \quad (C.19)$$

A expressão (C.18) é a forma discretizada da equação unidimensional da difusão transiente com termo fonte. Para particularizá-la de acordo com o modelo paramétrico ou a propriedades variáveis, com a geometria plana ou cilíndrica e com a equação da massa ou da energia, basta que se substitua as variáveis por seus valores respectivos.