

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS
DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM ESCOAMENTOS
CONFLUENTES EM GEOMETRIAS ARBITRÁRIAS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

ARLINDO TRIBESS

FLORIANÓPOLIS, ABRIL - 1986

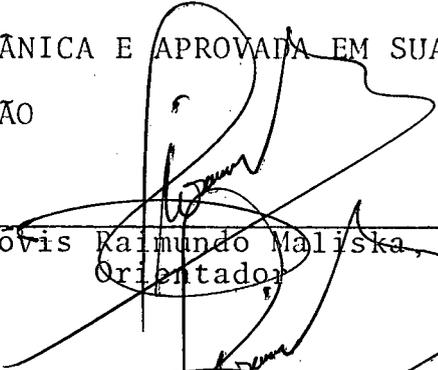
SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS
DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM ESCOAMENTOS
CONFLUENTES EM GEOMETRIAS ARBITRÁRIAS



ARLINDO TRIBESS

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL
PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

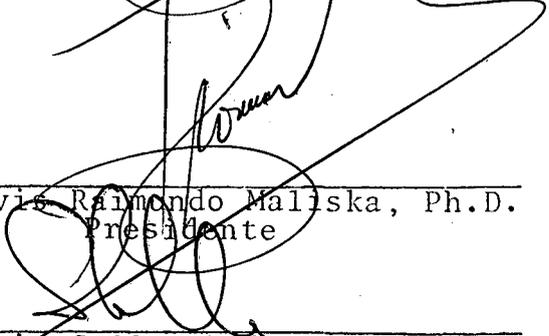


Prof. Clóvis Raimundo Maliska, Ph.D.
Orientador

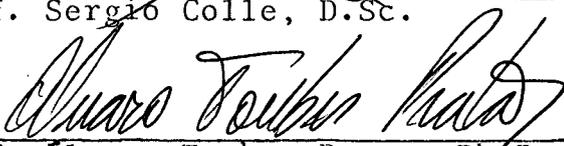


Prof. Clóvis Raimundo Maliska, Ph.D.
Coordenador

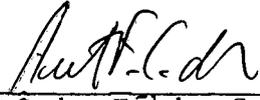
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Clóvis Raimundo Maliska, Ph.D.
Presidente

Prof. Sergio Colle, D.Sc.


Prof. Alvaro Toubes Prata, Ph.D.



Prof. Antônio Fábio Carvalho da Silva, M.Sc.

À meus pais, pela formação

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Clóvis Raimundo Maliska, pela valiosa orientação e pela dedicação e amizade demonstrada durante este período.

À Comissão Nacional de Energia Nuclear - CNEN, pelo apoio financeiro.

E a todos aqueles que, das mais variadas maneiras, colaboraram para o desenvolvimento e execução deste trabalho.

	Página
LISTA DE TABELAS	viii
LISTA DE FIGURAS	ix
SIMBOLOGIA	xvi
RESUMO	xxi
ABSTRACT	xxii
 CAPÍTULOS	
1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Preliminares	1
1.2 - Revisão Bibliográfica	5
1.3 - Organização da Dissertação	7
2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	10
2.1 - Introdução	10
2.2 - Descrição do Problema	10
2.3 - Equações Governantes no Sistema de Coordena- das Cartesiano	11
2.4 - A Formulação "Incompressível"	14
3 - EQUAÇÕES GOVERNANTES NO PLANO TRANSFORMADO	16
3.1 - Introdução	16
3.2 - Transformação do Sistema de Coordenadas	16
3.3 - Geração do Sistema de Coordenadas (ξ, η)	18
3.4 - Variáveis Dependentes nas Equações Transfor- madas	22
3.5 - Equações Transformadas	24
4 - EQUAÇÕES PARA OS VOLUMES FINITOS NO DOMÍNIO TRANS- FORMADO	28

4.1 - Introdução	28
4.2 - Arranjo de Grade	28
4.3 - Equações para Volumes Finitos no Plano Trans- formado	30
5 - GENERALIDADES DO ESQUEMA NUMÉRICO	39
5.1 - Introdução	39
5.2 - As Equações de Movimento e a Restrição da Con- servação da Massa	39
5.3 - Formulação (U-V)	43
5.4 - Procedimento para o Tratamento do Acoplamen- to Pressão-Velocidade	45
5.5 - Procedimento para a Solução do Sistema de Equações	46
5.6 - Obtenção da Equação de Poisson para a Pres- são	47
5.7 - Avaliação do Gradiente de Pressão para Volu- mes de Controle de Velocidade Localizados nas Fronteiras	51
5.8 - Detalhes Numéricos	53
6 - CONDIÇÕES DE CONTORNO	58
6.1 - Introdução	58
6.2 - Condições de Contorno no Domínio Transforma- do	58
6.2.1 - Condições de Contorno para a Temperatura ...	61
6.2.2 - Condições de Contorno para a Pressão	65
6.2.3 - Condições de Contorno para a Velocidade	68
6.3 - Condições de Contorno na Seção de Saída do Escoamento	69
7 - RESULTADOS NUMÉRICOS	76

	Página
7.1 - Introdução	76
7.2 - Teste do Código Computacional	77
7.3 - Resultados para o Problema de Escoamento Con- fluente com Transferência de Calor	93
8 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	120
8.1 - Introdução	120
8.2 - Contribuições desta Dissertação	120
8.3 - Recomendações para Futuros Trabalhos	121
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	122
APÊNDICES	
A - COEFICIENTES PARA A EQUAÇÃO DE PRESSÃO PARA VOLU- MES DE CONTROLE DA CONTINUIDADE NA FRONTEIRA	126
A.1 - Introdução	126
A.2 - Listagem dos Coeficientes e Termos Fonte	127
B - EQUAÇÕES PARA A TEMPERATURA PARA OS VOLUMES DE CON- TROLE NAS FRONTEIRAS	132
B.1 - Introdução	132
B.2 - Equações Adicionais	132
B.3 - Avaliação dos Gradientes de Temperatura Jun- to as Fronteiras	137

LISTA DE TABELAS

Página

Tabela 1	- Perfis de velocidade nas seções AA, BB, CC e DD da Figura 34 para $Re = 100$	80
Tabela 2	- Perfis de velocidade nas seções AA, BB, CC e DD da Figura 34 para $Re = 400$	80
Tabela 3	- Pontos (x^*, y^*) da malha não ortogonal 5×5 .	82
Tabela 4	- Velocidades adimensionais u/\bar{u} em função do comprimento do canal	85
Tabela 5	- Velocidades adimensionais em função da malha utilizada	88
Tabela 6	- Perfis de velocidade nas seções AA, BB, CC e DD da Figura 34 para $Ra = 10^3$	92
Tabela 7	- Perfis de velocidade nas seções AA, BB, CC e DD da Figura 34 para $Ra = 10^5$	92
Tabela 8	- Velocidades adimensionais \bar{u}^* nas posições das malhas das Figuras 44 e 45 para $Pe = 690$.	117
Tabela 9	- Temperaturas adimensionais T^* nas posições das malhas das Figuras 44 e 45 para $Pe = 690$..	117

LISTA DE FIGURAS

	Página
Figura 1 - Problemas de descarga de jatos em rios e lagos	1
Figura 2 - Problema de descarga de poluentes na atmosfera	2
Figura 3 - Problema da perda de carga em dutos confluente	3
Figura 4 - Discretização cartesiana para um domínio arbitrário	4
Figura 5 - Geometria e condições de contorno do problema de convecção forçada bidimensional	11
Figura 6 - Domínio de fronteiras arbitrárias no plano físico	17
Figura 7 - Domínio de fronteiras arbitrárias no plano transformado	18
Figura 8 - Sistema de Coordenadas Naturais	19
Figura 9 - Plano transformado (ξ, η)	21
Figura 10 - Componentes cartesianas, covariantes e contravariantes do vetor velocidade \vec{V}	23
Figura 11 - Velocidades contravariantes sem normalização métrica	24
Figura 12 - Configuração de grade adotada neste trabalho	29

Figura 13 - Volume de controle elementar no plano trans- formado (ξ, η)	31
Figura 14 - Volume de controle da continuidade e as com- ponentes contravariantes do vetor veloci- dade	40
Figura 15 - Componente contravariante U obtida a partir das componentes cartesianas u, v e u^*, v^*	41
Figura 16 - Volumes de controle da continuidade conside- rando pontos extra de pressão	42
Figura 17 - Determinação das componentes contravarian- tes não necessárias para satisfazer conser- vação da massa exatamente	47
Figura 18 - Volume de controle da continuidade mostran- do as velocidades que tomam parte no balan- ço de massa	48
Figura 19 - Volume de controle da velocidade U na fron- teira. Avaliação do gradiente $\frac{\partial P}{\partial \eta}$) ₃	52
Figura 20 - Perfil de pressão assumido para o cálculo do gradiente de pressão nas fronteiras	53
Figura 21 - Seção de uma grade cartesiana mostrando o volume de controle da pressão juntamente com as velocidades cartesianas	56
Figura 22 - Pontos fictícios para fronteira referencia- da ao sistema de coordenadas ortogonal(x,y).	60
Figura 23 - Pontos fictícios para fronteira referencia- da ao sistema de coordenadas generaliza- do (ξ, η)	62

Figura 24 - Volume de controle da temperatura para uma malha interna	63
Figura 25 - Volume de controle da temperatura para a fronteira	65
Figura 26 - Volume de controle da continuidade junto a fronteira, mostrando as componentes contra-variantes envolvidas no balanço de massa ...	67
Figura 27 - Escolha de localização da seção de saída do escoamento	70
Figura 28 - Grade cartesiana utilizada para relacionar U e Q	71
Figura 29 - Seção de saída de um canal reto e grade cartesiana	73
Figura 30 - Seção de saída de um canal arbitrário e grade cartesiana	73
Figura 31 - Seção de saída de um canal arbitrário e grade alinhada com as linhas de fluxo	74
Figura 32 - Seção de saída de um canal reto com grade não-ortogonal	75
Figura 33 - Características geométricas e condições de contorno para o problema de fluxo hidrodinâmico em cavidade quadrada com parede inferior móvel	79
Figura 34 - Malha não-ortogonal 5 x 5	81
Figura 35 - Perfis de velocidade para o escoamento em um canal	83

Figura 36 - Posição de cálculo e perfis de velocidade para os casos A, B e C 85

Figura 37 - Malhas ortogonal e não-ortogonal para teste da condição de contorno na seção de saída .. 87

Figura 38 - Características geométricas e condições de contorno para o problema da convecção natural laminar em cavidade quadrada 90

Figura 39 - Geometria e condições de contorno do problema do escoamento confluyente com transferência de calor 93

Figura 40 - Grade não-ortogonal 10 x 34 94

Figura 41 - Grade ortogonal cartesiana 10 x 34 95

Figura 42 - Grade não-ortogonal 15 x 40 96

Figura 43 - Grade ortogonal cartesiana 15 x 40 97

Figura 44 - Grade não-ortogonal 15 x 50 98

Figura 45 - Grade ortogonal cartesiana 15 x 50 99

Figura 46 - Localização de entrada dos fluxos de massa e calor no plano transformado para as grades não-ortogonais 100

Figura 47 - Localização de entrada dos fluxos de massa e calor no plano transformado para as grades ortogonais 101

Figura 48 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas 10 x 34 e $Pe = 20$ 105

Figura 49 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas 10 x 34 e $Pe = 20$	105
Figura 50 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas 10 x 34 e $Pe = 100$	106
Figura 51 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas 10 x 34 e $Pe = 100$	106
Figura 52 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas 15 x 50 e $Pe = 100$	107
Figura 53 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas 15 x 50 e $Pe = 100$	107
Figura 54 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas 10 x 34 e $Pe = 690$	108
Figura 55 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas 15 x 50 e $Pe = 690$	108
Figura 56 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas não-ortogonais e $Pe = 690$	109
Figura 57 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas ortogonais cartesianas e $Pe = 690$	109
Figura 58 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas 10 x 34 e $Pe = 690$	110
Figura 59 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas 15 x 50 e $Pe = 690$	110
Figura 60 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas não-ortogonais e $Pe = 690$	111
Figura 61 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas ortogonais cartesianas e $Pe = 690$	111

Figura 62 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas 10 x 34 e $Pe = 2760$	112
Figura 63 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas 15 x 50 e $Pe = 2760$	112
Figura 64 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas não-ortogonais e $Pe = 2760$	113
Figura 65 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas ortogonais cartesianas e $Pe = 2760$	113
Figura 66 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas 10 x 34 e $Pe = 2760$	114
Figura 67 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas 15 x 50 e $Pe = 2760$	114
Figura 68 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas não-ortogonais e $Pe = 2760$	115
Figura 69 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas ortogonais cartesianas e $Pe = 2760$	115
Figura 70 - Vetores velocidade para $Re_{esc} = 500$	118
Figura 71 - Temperaturas nas posições da grade da Figura 40 para $N = 7,5$	119
Figura A.1 - Tipos de volume de controle para a continuidade e condições de contorno para a velocidade no plano transformado	127
Figura B.1 - Tipos de volume de controle e condições de contorno para a temperatura no plano transformado	133

Figura B.2 - Cálculos de $\frac{\partial T}{\partial \eta}$ na fronteira superior e $\frac{\partial T}{\partial \xi}$ na fronteira esquerda 136

x, y - Sistema cartesiano de coordenadas.

q, E, F, R, S - Grandezas definidas na Equação (2.5).

$\hat{E}, \hat{F}, \hat{R}, \hat{S}$ - Grandezas definidas na Equação (3.18).

S^ϕ - Termo fonte na equação de conservação para ϕ .

\hat{S}^ϕ - Termo fonte transformado na equação de transformação para ϕ .

$L| |$ - Aproximação em volumes finitos da quantidade entre colchetes.

J - Jacobiano da transformação definida pelas Equações (3.1) e (3.2).

P, Q - Termos fonte das Equações (3.9) e (3.10) de geração de malha.

\vec{V} - Vetor velocidade.

u, v - Componentes de velocidade no sistema cartesiano.

U, V - Componentes contravariantes do vetor velocidade sem normalização métrica.

V^i - Componentes contravariantes do vetor velocidade.

V_i - Componentes covariantes do vetor velocidade.

U, \hat{V} - Velocidades definidas pelas Equações (5.5) e (5.6).

P - Pressão.

T - Temperatura.

\bar{T} - Temperatura média aritmética.

T^* - Temperatura adimensional.

T_1, T_2 - Temperaturas uniformes nas fronteiras com entrada de massa.

u_∞, v_∞ - Velocidades cartesianas uniformes nas fronteiras com entrada de massa.

\bar{u} - Velocidade cartesiana média nos escoamentos confluentes.

u^*, v^*, \bar{u}^* - Velocidades cartesianas adimensionais.

x^*, y^* - Coordenadas cartesianas adimensionais.

X, Y - Coordenadas cartesianas adimensionais da Figura 35.

t - Tempo na Equação (4.3).

Δt - Intervalo de tempo na Equação (4.3).

E - Avanço de tempo, Equação (4.33).

e, w, n, s - Indicadores das faces leste, oeste, norte e sul para volumes de controle.

P - Indicador de volume de controle.

E, W, N, S, NE

NW, SE, SW - Indicador de volumes de controle vizinhos ao elemento P .

$A_e^\phi, A_w^\phi, etc.$ - Coeficientes na equação em volumes finitos para ϕ .

M_e, D_e - Parcelas convectivas e difusivas presentes nos coeficientes acima.

ΔV - Volume de um elemento de controle.

- B - Termo fonte na equação para pressão.
- ΔP_f - Gradiente de pressão nas fronteiras.
- k - Coeficiente de condutividade térmica.
- c_p - Calor específico à pressão constante.
- q - Fluxo de calor por condução.
- q'' - Fluxo de calor prescrito na condição de contorno.
- D_h - Diâmetro hidráulico. Figura 33.
- H, L, D, C - Variáveis geométricas nos escoamentos confluentes. Figuras 40 a 45.
- N - Relação de vazão nos escoamentos confluentes.
- Q_R - Vazão do escoamento principal.
- Q_J - Vazão do jato.
- Q_T - Vazão total nos escoamentos confluentes.
- Pe - Número de Peclet nos escoamentos confluentes.
- Pr - Número de Prandtl.
- Ra - Número de Rayleigh. Figura 38.
- r_e - Número de Peclet de malha. Equação (4.14).
- Re - Número de Reynolds. Figura 33.
- Re_{esc} - Número de Reynolds nos escoamentos confluentes.

α, β, γ - Componentes do tensor métrico. Equações (3.15) a (3.17).

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ - Coeficientes para os perfis convectivos e difusivos. Equações (4.12) e (4.13).

α_T - Coeficiente de difusividade térmica.

$\bar{\beta}$ - Coeficiente de expansão térmica.

ϵ - Tolerância para critérios de convergência.

ξ, η - Sistema generalizado de coordenadas. Domínio transformado.

ϕ - Campo escalar genérico.

Γ^ϕ - Coeficiente de transporte difusivo, multiplicado pela massa específica para uma escalar ϕ .

μ - Viscosidade absoluta.

ν - Viscosidade cinemática.

ρ - massa específica.

σ - Fronteiras no domínio físico. Figura 8.

σ^* - Fronteiras no domínio transformado. Figura 9.

SUBSCRITOS

x, y, ξ, η - Referem-se a derivadas parciais de primeira ordem.

$xx, yy, \xi\xi, \eta\eta$ - Referem-se a derivadas parciais de segunda ordem.

P,E,N,S,W
NE,SE,NW,SW - Referem-se aos pontos onde as variáveis são aplicadas.

SUPERSCRITOS

- * - Refere-se a valores adimensionais.
- ~ - Refere-se a quantidades transformadas, exceto para velocidades.
- n - Refere-se ao nível de iteração nas equações em volumes finitos.
- n+ θ - Refere-se a quantidades avaliadas no tempo $t+\theta\Delta t$.

Este trabalho visa a obtenção de um modelo numérico genérico, bidimensional, para a solução de problemas de convecção forçada laminar, com transferência de calor, em geometrias arbitrárias. Neste contexto é realizado o desenvolvimento de modelo numérico bidimensional para a previsão da transferência de calor em escoamentos confluentes.

O sistema de equações formado pela equação da Continuidade, equações de Navier-Stokes em duas direções e pela equação da energia é transformado do sistema coordenado cartesiano para o sistema coordenado não-ortogonal. A computação da solução é realizada inteiramente no plano transformado independentemente da geometria física do problema.

Uma questão importante relacionada aos métodos que usam coordenadas não-ortogonais é a aplicação das condições de contorno nas fronteiras com fluxo de massa. A generalização da aplicação deste tipo de condição de contorno é apresentada neste trabalho.

O modelo é completamente testado resolvendo-se problemas bidimensionais cuja solução é conhecida. Para demonstrar a generalidade do método a descarga térmica bidimensional penetrando em fluxo cruzado é simulada variando parâmetros como temperatura de descarga e número de Peclet.

ABSTRACT

The present research work deals with the solution of two dimensional laminar heat transfer problems in arbitrary geometries, with inflow-outflow boundary conditions. The strategy of using boundary fitted coordinate systems to handle the irregular boundary is adopted. The system of equation formed by the mass conservation equation, momentum and energy are transformed from the cartesian coordinate system to a general nonorthogonal coordinate system. All the computations are performed in the transformed domain.

Special attention is focused on the application for the inflow-outflow boundary conditions associated with nonorthogonal grids. A generalized form of applying this type of boundary condition is recommended.

The computational code is tested by solving two-dimensional problems whose numerical solutions are known. To demonstrate the generality of the model, a heat transfer problem associated with a hot jet entering a cross flow is presented.

INTRODUÇÃO

1.1 - PRELIMINARES

Escoamentos confluentes são encontrados em situações diversas na engenharia. Descargas de jatos quentes em rios e lagos, esquematicamente mostrados na Figura 1, por exemplo, acarretam alterações no ecossistema, podendo causar danos ecológicos irreparáveis.

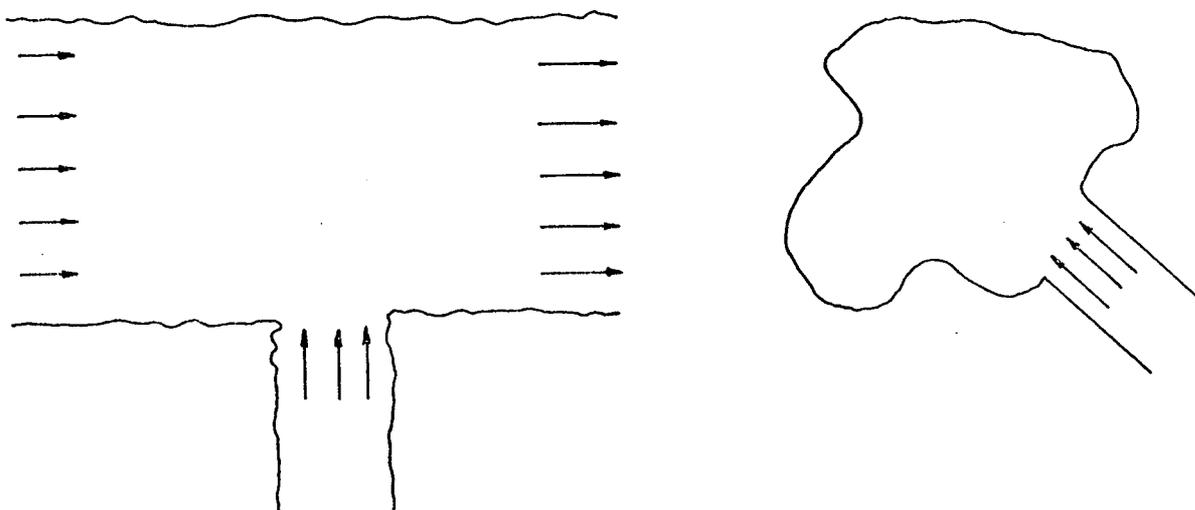


Figura 1 - Problemas de descarga de jatos em rios e lagos.

A previsão do alcance e magnitude destas alterações, em função das temperaturas e velocidades envolvidas é fundamental quando do projeto do sistema de condensadores de usinas termoeletricas e nucleares. Um projeto adequado, prevendo-se temperaturas máximas dos jatos, localização de captação da água de refrigeração e da descarga dos jatos quentes, pode então ser elaborado. Aliado a isto, a previsão do novo campo de temperatura e velocidade, permitirá previsões acerca dos microorganismos e plantas que poderão desaparecer ou surgir em função da nova temperatura do ambiente.

Outras soluções de interesse associadas a escoamentos con

fluentes, podem ser citadas. Por exemplo, a determinação da concentração de poluentes em rios, lagos e atmosfera (Figura 2) e a determinação da perda de carga em dutos confluentes de sistemas de ar condicionado (Figura 3) são problemas bastante relevantes.

Como os problemas são quase sempre definidos em geometrias arbitrárias e devido ainda à complexidade matemática na solução simultânea de um conjunto de equações diferenciais parciais não lineares acopladas, a utilização de técnicas numéricas é necessária. O modelo numérico a ser desenvolvido deve ser o mais genérico possível para abranger as mais variadas e irre-

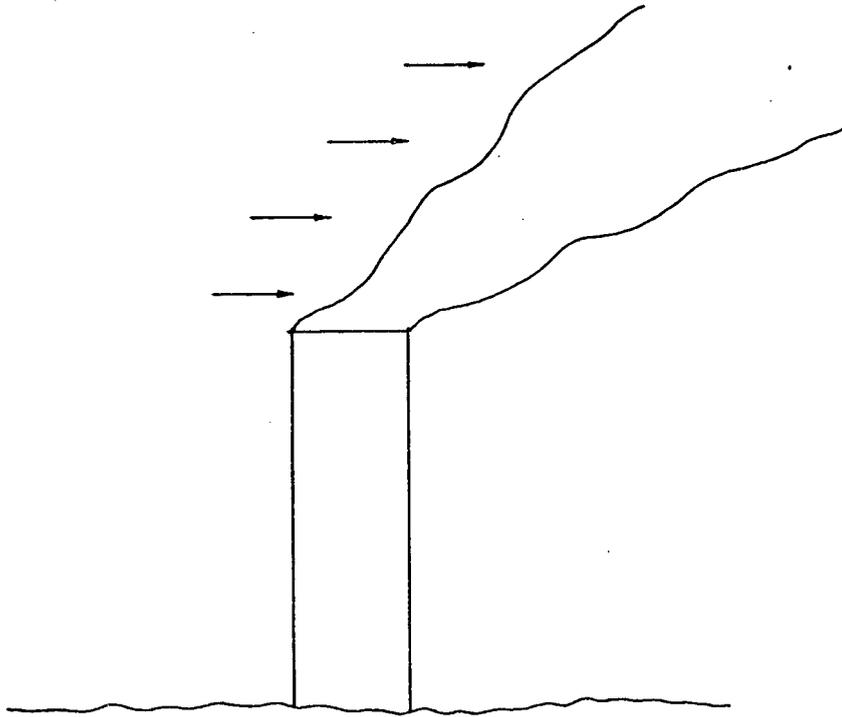


Figura 2 - Problema de descarga de poluentes na atmosfera.

gulares geometrias. É nesta linha de trabalho que se posiciona a presente dissertação.

Os métodos de solução utilizando técnicas numéricas, por exemplo, volumes finitos ou elementos finitos, requerem que o domínio de interesse seja discretizado. O tipo de discretização empregado tem consequências importantes relacionadas com a complexidade, precisão e generalidade do programa computacional que será escrito para resolver as equações governantes do problema.

Para o domínio arbitrário mostrado na Figura 4 uma grade

muito simples poderia ser gerada pela superposição de uma malha cartesiana. Contudo, o preço a ser pago no desenvolvimento do programa para esta simplificação é muito elevado. Grande parte da grade está fora da região de interesse o que resulta em desperdício de armazenamento e tempo de computação, tornando o código complexo e específico para um determinado problema. Também a aplicação das condições de contorno torna-se problemática devido a necessidade de interpolações. Imprecisões decorrentes dessas aproximações podem comprometer em muito a qualidade dos resultados obtidos.

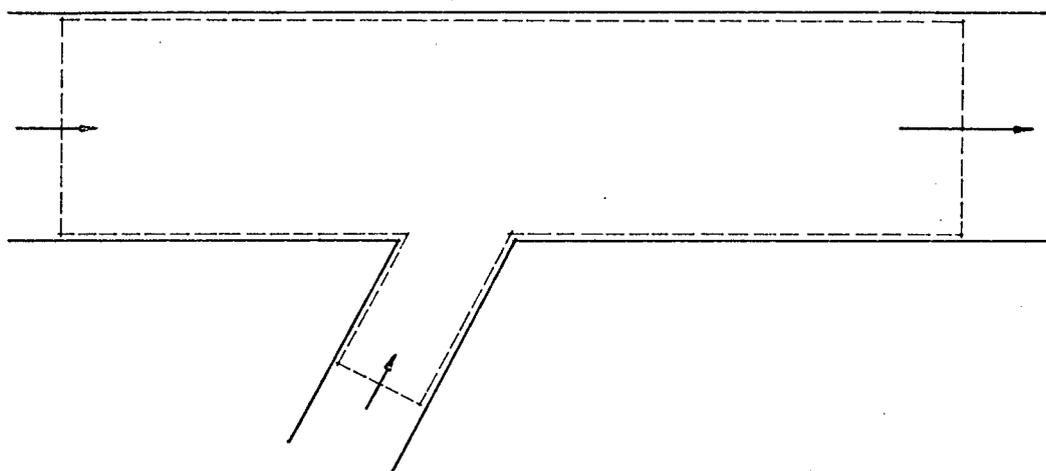


Figura 3 - Problema da perda de carga em dutos confluente.

Para evitar estes inconvenientes é utilizado um sistema de coordenadas naturais, que se adapta perfeitamente às fronteiras do domínio. Este sistema de coordenadas traz a grande vantagem em escrever-se um único programa de computador, aplicável a qualquer geometria arbitrária, já que o código é escrito para o plano transformado que é independente da geometria do problema. As informações da geometria são transferidas através do tensor métrico da transformação.

O sistema de coordenadas naturais utilizado é do tipo não-ortogonal, que pode ser gerado a partir da solução de um sistema de equações de Poisson. Sistemas ortogonais seriam o ideal, pois a ausência de termos não-ortogonais simplificaria o esquema numérico, facilitando o trabalho computacional. Contudo, sistemas ortogonais requerem a solução de um sistema de e-

quações de Poisson com condições de contorno mistas no domínio arbitrário para geração da malha, e a necessidade de satisfazer as condições de ortogonalidade de Cauchy-Riemann, exige um procedimento numérico mais complexo, envolvendo um maior custo computacional. Acrescente-se ainda que a generalidade ficaria comprometida pois existem geometrias em que é bastante difícil gerar malhas ortogonais, principalmente porque em todos os problemas de escoamentos de fluidos é necessário a concentração de linhas coordenadas em determinadas regiões. Além disso, a utilização de sistemas não-ortogonais é bastante atrativa pois existem métodos rápidos para geração de sistemas de coordenadas curvilíneas generalizadas não ortogonais [1] e métodos eficientes para a modelagem das equações nestes sistemas. Ressalte-se que o advento do computador com a interação gráfica, que possibilita a visualização automática da grade gerada, torna esta metodologia ainda mais atrativa.

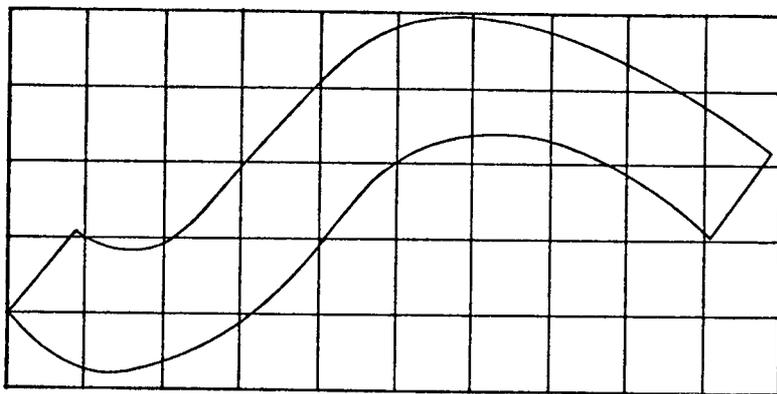


Figura 4 - Discretização cartesiana para um domínio arbitrário.

O método aqui utilizado, para a modelagem das equações, foi testado na solução de problemas hidrodinâmicos tridimensionais parabólicos e é devido a Maliska [2]. A equação da energia é introduzida neste modelo feito bidimensional e um modelo numérico para solução de problemas de escoamentos confluentes com transferência de calor é desenvolvido.

Neste trabalho, interesse particular é dedicado a extensão do modelo básico apresentado em [2] para tratar da aplica-

ção das condições de contorno nas fronteiras com entrada e saída de massa. Este tipo de condição de contorno apresenta dificuldades no estabelecimento da equação de pressão no contorno, conforme discutido em [3], e no próprio estabelecimento destas condições para uma grade não-ortogonal. Convém salientar que a condição de fluxo de massa na fronteira para escoamento no plano transversal (elíptico), utilizando grade não-ortogonal, não foi testada nem por Maliska [2], nem por Milioli [4], que, a partir do modelo apresentado em [2], desenvolveu modelo numérico para a solução de problemas bidimensionais de convecção natural em cavidades arbitrárias fechadas e, portanto, também com condições de velocidade nula no plano transversal, sem fluxo de massa.

É importante verificar que, conseqüentemente, o método PRIME, utilizado para resolver o acoplamento pressão-velocidade, também não havia sido testado para condição de fluxo de massa na fronteira utilizando sistemas de coordenadas curvilíneas.

Destaque-se ainda que o desenvolvimento do modelo numérico permitirá obter-se uma primeira aproximação quanto a previsão dos efeitos causados pela descarga de jatos quentes em rios e estuários, uma vez que, para um tratamento adequado, o efeito tridimensional, ou as equações médias na profundidade devem ser incluídos. Portanto, é importante observar que não é objetivo deste trabalho desenvolver um código computacional pronto para utilização de usuários.

O objetivo maior é o estabelecimento das condições de contorno nas fronteiras com entrada e saída de massa, a sua aplicação em problemas bidimensionais, utilizando grade não-ortogonal, e a generalização na aplicação deste tipo de condição de contorno.

1.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A base deste trabalho, como já foi assinalado é devido a Maliska [2], que desenvolveu um modelo numérico para a solução de problema de escoamento hidrodinâmico tridimensional parabólico em dutos de seção transversal arbitrária. As características

principais deste modelo são:

- a) Utilização de um sistema de coordenadas naturais não-ortogonais;
- b) Realização de todo trabalho computacional no plano transformado;
- c) Equações de conservação para volumes finitos envolvendo tanto velocidades cartesianas como contravariantes;
- d) Localização das variáveis dependentes na malha em arranjo consistente com a física do problema;
- e) Utilização do método PRIME [19] para resolver o problema do acoplamento pressão-velocidade.

Quanto a solução de problemas de convecção forçada em geometrias arbitrárias, a literatura apresenta alguns modelos bastante complexos. A previsão de descargas térmicas, em particular, tem merecido atenção considerável. Para o desenvolvimento de trabalhos nesta área foram muito importantes os artigos publicados por Dunn et al [25] e Jirka et al [26], em que os autores apresentam uma revisão dos trabalhos realizados até 1975. McGuirk & Rodi [27], [28] e Raithby & Schneider [29] deram uma contribuição considerável ao desenvolver modelos numéricos para volumes finitos. Estes modelos numéricos, embora tridimensionais, ainda tratam o problema da descarga de jatos quentes em rios e lagos de uma maneira simplificada. Mais recentemente Raithby & Elliott [30], [31] desenvolveram modelos numéricos tridimensionais mais completos, utilizando sistema generalizado de coordenadas e levando em consideração os efeitos do leito irregular de rios e lagos, bem como os efeitos da convecção na superfície.

Outros modelos complexos para a solução de problemas de convecção forçada em geometrias arbitrárias também são disponíveis. Mesmo assim, não foram encontrados na literatura modelos numéricos que resolvam o problema da convecção forçada em escoamentos confluentes bidimensionais. Contudo, a inexistência de uma "referência", para fins de comparação, é suprida pela realização de inúmeros testes que nos fornecem informações com relação aos resultados obtidos, conforme pode ser verificado no capítulo 7.

Ha de se destacar tambem o trabalho de Souza & Hatton [5] que desenvolveram algoritmo numérico para o cálculo de escoamentos convectivos bidimensionais. Embora este trabalho possua alguns pontos em comum com a metodologia aqui adotada, o mesmo está restrito a utilização de geometrias regulares e sistema cartesiano de coordenadas. O trabalho apresenta soluções para convecção forçada em canais sem, contudo, incluir escoamentos confluentes. Nos resultados apresentados encontra-se a solução do problema do desenvolvimento do perfil na região de entrada, que é aqui utilizada para fins de comparação.

Ainda com relação a solução de problemas em geometrias irregulares Shyy et al [32], desenvolveram modelo numérico hidrodinâmico bidimensional utilizando sistema generalizado de coordenadas e metodologia bastante semelhante àquela desenvolvida por [2] e utilizada nesta dissertação. Neste trabalho, entretanto, não existe qualquer comparação da solução apresentada com uma solução conhecida para testar o modelo não-ortogonal. Os resultados, obtidos com o modelo utilizando-se três diferentes maneiras de aproximar os termos convectivos, são apenas comparados entre si.

Uma comparação importante para este trabalho seria a solução do problema proposto em [33], onde uma solução padrão (Bench-Mark Solution) é obtida para o escoamento laminar em um canal com geometria arbitrária. Infelizmente, o trabalho só nos chegou as mãos quando a presente dissertação já estava redigida. Em futuros trabalhos a realização deste teste deve ser prioritária.

1.3 - ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA. Nesse capítulo é efetuada a formulação do problema de interesse deste trabalho. Apresenta-se as hipóteses simplificativas consideradas. Introduce-se o sistema de equações diferenciais parciais em coordenadas cartesianas e discute-se a formulação "incompressível".

CAPÍTULO 3 - EQUAÇÕES GOVERNANTES NO PLANO TRANSFORMADO. Nesse capítulo o sistema de equações diferenciais parciais é transfor-

mado do sistema Cartesiano para o sistema generalizado de coordenadas. Apresenta-se, inicialmente, o método utilizado na transformação do sistema de coordenadas e para geração do sistema generalizado de coordenadas. Justifica-se também a manutenção das componentes cartesianas do vetor velocidade como variáveis dependentes.

CAPÍTULO 4 - EQUAÇÕES PARA OS VOLUMES FINITOS NO DOMÍNIO TRANSFORMADO. Nesse capítulo as equações diferenciais transformadas são aproximadas para volumes finitos. Define-se, primeiramente, a localização de armazenamento das variáveis dependentes nos volumes elementares para, em seguida, realizar-se as aproximações numéricas. Apresenta-se ainda o sistema de equações discriminado para cada variável dependente.

CAPÍTULO 5 - GENERALIDADES DO ESQUEMA NUMÉRICO. Nesse capítulo descreve-se o procedimento de solução para resolver as equações discretizadas. Primeiro, apresenta-se a formulação (U-V), na qual as equações de movimento utilizam as mesmas variáveis que satisfazem a conservação de massa e o método PRIME, adotado para resolver o acoplamento pressão-velocidade. Depois, apresenta-se o algoritmo para resolver as equações governantes e introduzem-se as equações especializadas para corrigir a velocidade e atualizar a pressão. Apresenta-se ainda alguns detalhes numéricos.

CAPÍTULO 6 - CONDIÇÕES DE CONTORNO. Esse capítulo é dedicado à apresentação do procedimento adotado para tratar das condições de contorno no plano transformado e sua respectiva incorporação ao sistema de equações governantes. Discute-se também a especificação da condição de contorno na seção de saída e suas implicações com relação a solução do sistema de equações e utilização em grades não-ortogonais.

CAPÍTULO 7 - RESULTADOS NUMÉRICOS. Nesse capítulo a metodologia e o esquema numérico, para a solução de problemas de convecção forçada com transferência de calor, são testados. Nesses testes resolve-se problemas bidimensionais cuja solução

é conhecida. São resolvidos o problema do fluxo isotérmico em uma cavidade quadrada com a parede inferior em movimento, a região de entrada em um canal, e o problema da convecção natural em cavidade quadrada. Finalmente, resolve-se o problema da descarga de um jato em uma corrente à temperatura mais baixa, variando parâmetros como temperatura de descarga e número de Peclet do escoamento.

CAPÍTULO 8 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES. Esse capítulo traz um resumo de todas as conclusões importantes obtidas deste trabalho, destacando ainda as contribuições desta dissertação e algumas sugestões e recomendações para futuros trabalhos nesta área.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo é efetuada a formulação do problema de convecção forçada com transferência de calor descrevendo-se o problema e as hipóteses simplificativas adotadas no estabelecimento das equações governantes.

Introduz-se o sistema de equações diferenciais escrito em uma forma conservativa e em coordenadas cartesianas. Faz-se observações com relação ao sistema de equações, composto pela equação da continuidade, duas equações de movimento e equação da energia e reescreve-se o sistema para um campo escalar genérico ϕ , onde ϕ representa qualquer uma das propriedades transportadas. Discute-se ainda a formulação "incompressível" e suas implicações na solução das equações governantes.

2.2 - DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O problema de interesse desta dissertação é o da convecção forçada bidimensional, envolvendo a descarga de um jato quente em um escoamento, dito principal, mostrado na Figura 5. As fronteiras com entrada e saída de massa são indicados na figura através dos seus respectivos fluxos genéricos de calor e massa. Neste tipo de problema pode-se ter os mais variados perfis de temperatura e velocidade para as seções de entrada. Já para as seções de saída, a priori, não é possível especificar condições de contorno, sobretudo porque a geometria é arbitrária e o domínio de solução ainda não foi discretizado. Em função disto, as condições de contorno utilizadas neste trabalho, para as fronteiras com fluxo de massa, são apresentadas somente no Capítulo 7. As demais condições de contorno são aquelas mostradas na Figura 5, quais sejam, paredes sólidas com fluxo de calor igual a zero.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo é efetuada a formulação do problema de convecção forçada com transferência de calor descrevendo-se o problema e as hipóteses simplificativas adotadas no estabelecimento das equações governantes.

Introduz-se o sistema de equações diferenciais escrito em uma forma conservativa e em coordenadas cartesianas. Faz-se observações com relação ao sistema de equações, composto pela equação da continuidade, duas equações de movimento e equação da energia e reescreve-se o sistema para um campo escalar genérico ϕ , onde ϕ representa qualquer uma das propriedades transportadas. Discute-se ainda a formulação "incompressível" e suas implicações na solução das equações governantes.

2.2 - DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O problema de interesse desta dissertação é o da convecção forçada bidimensional, envolvendo a descarga de um jato quente em um escoamento, dito principal, mostrado na Figura 5. As fronteiras com entrada e saída de massa são indicados na figura através dos seus respectivos fluxos genéricos de calor e massa. Neste tipo de problema pode-se ter os mais variados perfis de temperatura e velocidade para as seções de entrada. Já para as seções de saída, a priori, não é possível especificar condições de contorno, sobretudo porque a geometria é arbitrária e o domínio de solução ainda não foi discretizado. Em função disto, as condições de contorno utilizadas neste trabalho, para as fronteiras com fluxo de massa, são apresentadas somente no Capítulo 7. As demais condições de contorno são aquelas mostradas na Figura 5, quais sejam, paredes sólidas com fluxo de calor igual a zero.

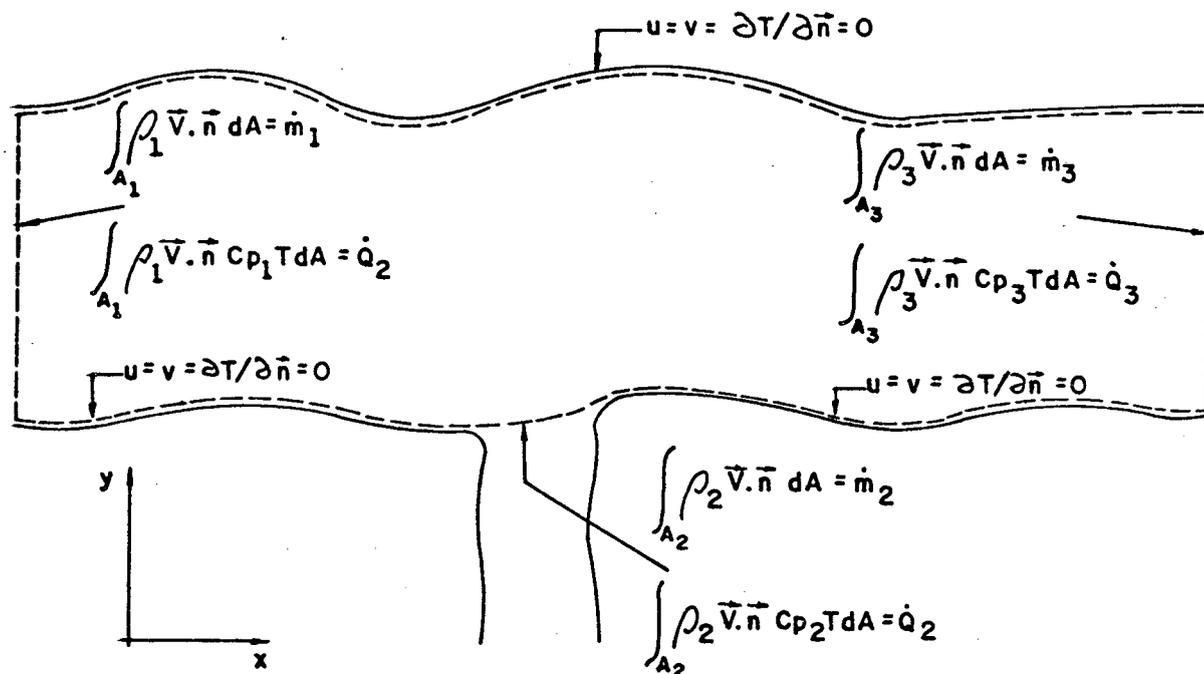


Figura 5 - Geometria e condições de contorno do problema de convecção forçada bidimensional.

Ainda com relação ao problema pode-se dizer que, as alterações que a descarga do jato quente provoca no escoamento principal, tem consequências importantes que devem ser consideradas. Uma delas é o aparecimento de regiões de recirculação e a outra é com relação a escolha do domínio de solução a montante da entrada do jato, que deve ser suficiente para que os efeitos da condução não alterem as condições de contorno utilizadas. Estes fatos também serão vistos com maiores detalhes no Capítulo 7.

2.3 - EQUAÇÕES GOVERNANTES NO SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANO

No estabelecimento das equações governantes as hipóteses adotadas foram: regime permanente, escoamento incompressível, laminar, envolvendo fluidos Newtonianos, homogêneos, com massa específica, viscosidade absoluta, calor específico, condutividade térmica e demais propriedades constantes.

O sistema de equações governantes assim obtido, escrito

em uma forma conservativa e em coordenadas cartesianas [8], é o seguinte:

Continuidade

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (2.1)$$

Movimento para u

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial u}{\partial y}) + S^u \quad (2.2)$$

Movimento para v

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial v}{\partial y}) + S^v \quad (2.3)$$

Energia

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u T) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v T) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial y}) + S^T \quad (2.4)$$

Na obtenção do sistema de equação acima considerou-se $\rho_2 = \rho_1 = \rho$ porém, a formulação do problema considerando $\rho_2 \neq \rho_1$ não introduz dificuldade, sendo apenas necessário introduzir a equação da difusão de massa do componente 2 no componente 1. Isto simularia a difusão de poluentes em rios, lagos e atmosfera e acarretaria tão somente a solução de mais uma equação no procedimento iterativo de solução. É importante salientar ainda que assumir propriedades físicas variáveis com a temperatura não apresenta maiores inconvenientes, (Ver Seção 5.5), para a metodologia numérica.

Para o sistema de equações apresentado algumas observações fazem-se necessárias. Os termos transientes nas equações de movimento e energia foram mantidos somente para fins de avanços iterativos. Os termos S^u e S^v das equações de movimento restringem-se, respectivamente, às forças de campo F_x e F_y já que as propriedades do fluido estão sendo consideradas constantes. Para os problemas aqui analisados F_x e F_y foram feitos i-

guais a zero, ou seja, convecção forçada em que o escoamento ocorre em um plano perpendicular à aceleração da gravidade ou em que a aceleração da gravidade é perpendicular à direção do escoamento principal, podendo-se desprezar a força de campo existente na outra direção, por esta ser muito menor que as forças de superfície atuantes no escoamento. Contudo, o modelo numérico ora desenvolvido permite resolver problemas de convecção forçada bidimensionais em que as forças de campo sejam significativas. Para tal basta incluir as forças de campo F_x e F_y adequadas nas equações de movimento para x e y , respectivamente. Já o termo fonte S^T da equação da energia é feito igual a zero pois a dissipação viscosa pode ser desconsiderada para escoamentos com pequenos gradientes de velocidade.

Analisando um pouco mais detalhadamente as Equações (2.1) a (2.4) observa-se que as mesmas podem ser escritas de uma maneira genérica para um campo escalar ϕ , como segue |8|, |9|, |2|.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + P\phi = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + S\phi \quad (2.5)$$

onde

$$q = \rho\phi \quad (2.6)$$

$$E = \rho u\phi; \quad F = \rho v\phi \quad (2.7)$$

$$R = \Gamma^{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad S = \Gamma^{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.8)$$

Assim, a Equação (2.5) representa a conservação da massa quando P^{ϕ} e S^{ϕ} são nulos e ϕ igual a 1. As duas equações de movimento nas direções x e y são obtidas fazendo ϕ igual a u e v respectivamente, com os termos fonte e de pressão adequados. A equação da energia é obtida fazendo ϕ igual a T , com P^{ϕ} e S^{ϕ} nulos. A grandeza Γ^{ϕ} representa o coeficiente de transporte difusivo, multiplicado pela massa específica, para as equações de movimento e energia. Para fluxos laminares, Γ^{ϕ} é igual a viscosidade absoluta, para as equações de movimento, e igual a relação entre a condutividade térmica do fluido e seu calor espe-

cífico a pressão constante, para a equação da energia.

Como o sistema de equações será resolvido iterativamente a hipótese de escoamento incompressível introduz uma dificuldade do ponto de vista numérico. Os detalhes serão agora descritos.

2.4 - A FORMULAÇÃO "INCOMPRESSÍVEL"

A solução do problema de convecção forçada com transferência de calor requer a solução de 4 equações (Equações (3.1) a (3.4)) com 5 incógnitas, quais são: massa específica, pressão, duas componentes de velocidade e temperatura.

Se a massa específica tem variação considerável dentro do domínio, então, a equação de estado $P = P(\rho, T)$ é a equação adicional necessária para o fechamento do problema, sendo a equação de estado entendida como a equação evolutiva para a pressão. As outras equações são as equações evolutivas para as outras variáveis. Esta seria a formulação compressível.

Contudo, se a massa específica varia pouco com a pressão, mas ainda varia no domínio com a temperatura, a equação da continuidade não pode ser utilizada como uma equação para a massa específica uma vez que, como varia pouco com a pressão, pequenos erros no seu cálculo produzirão grandes erros no cálculo da pressão através da equação de estado $P = P(\rho, T)$. Se este campo de pressão é então introduzido nas equações de movimento e as velocidades resultantes substituídas novamente na continuidade, para computar a massa específica no próximo ciclo, instabilidades aparecerão na solução numérica do conjunto de equações [18], [2].

Por outro lado, se $\rho = \rho(T)$, não há equação para a pressão e a equação da continuidade não pode ser mais interpretada como uma equação para ρ , mas apenas como uma restrição a ser satisfeita pelo campo de velocidades, através da escolha do campo de pressão nas equações de movimento. Assim, é necessário achar o campo de pressões que ocasiona campos de velocidade conformes com a equação da continuidade. Logo, a formulação "incompressível" introduz um forte acoplamento entre pressão e velocidade

de que precisa ser resolvido quando da solução do sistema de equações estabelecido anteriormente.

É necessário, portanto, criar uma equação para a pressão. Diversas são as maneiras de obter-se esta equação, assunto que será discutido no Capítulo 5. Nesse capítulo também é apresentado o algoritmo para a solução iterativa do sistema de equações composto pela equação da continuidade, duas equações de movimento, equação da energia e a nova equação para a pressão.

EQUAÇÕES GOVERNANTES NO PLANO TRANSFORMADO

3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo o sistema de equações diferenciais parciais é transformado do sistema cartesiano para o sistema generalizado de coordenadas (ξ, η) . Inicialmente, apresenta-se o método utilizado na transformação do sistema de coordenadas cartesiano para o sistema generalizado (ξ, η) e para a geração deste novo sistema de coordenadas [1]. A seguir, discute-se a escolha das variáveis dependentes para as equações de conservação transformadas, justificando-se a manutenção das componentes cartesianas do vetor velocidade como variáveis dependentes. Finalmente, obtêm-se as equações governantes para o sistema generalizado de coordenadas (ξ, η) .

3.2 - TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

A utilização do sistema de coordenadas cartesiano na solução de problemas definidos em domínios arbitrários resultaria em uma adaptação do código computacional para cada problema. Para se evitar esta situação e desenvolver esquemas numéricos aplicáveis a quaisquer geometrias é necessário que o sistema de coordenadas utilizado na discretização do domínio físico se adapte perfeitamente às fronteiras deste domínio. Este sistema de coordenadas além de conferir generalidade aos esquemas numéricos torna a aplicação das condições de contorno bem mais fácil e precisa, pois evita-se interpolações entre pontos de grade não coincidentes com as fronteiras. A transformação do sistema de coordenadas cartesiano para este sistema de coordenadas, o sistema generalizado de coordenadas, é agora descrito.

Considere-se um domínio arbitrário bidimensional definido no sistema cartesiano, como o da Figura 6.

Deseja-se mapear este domínio para um domínio retangular

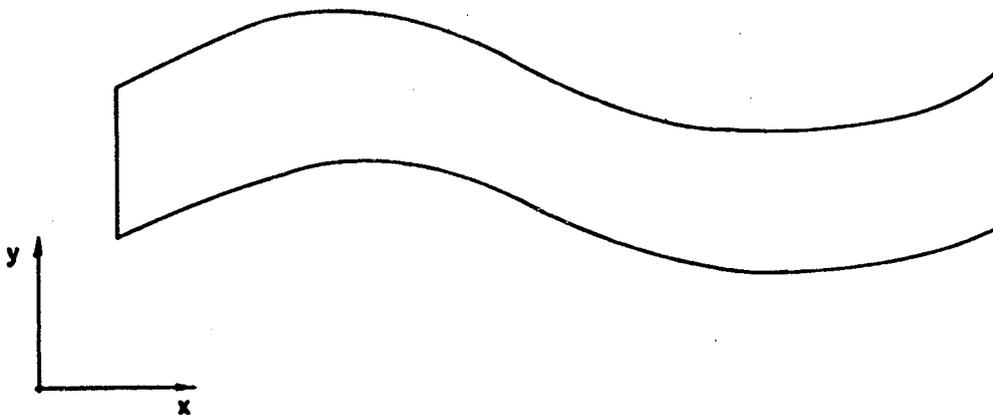


Figura 6 - Domínio de fronteiras arbitrárias no plano físico.

no sistema (ξ, η) como o da Figura 7. Para realizar este objetivo a seguinte transformação é utilizada

$$\xi = \xi(x, y) \quad (3.1)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (3.2)$$

A matriz Jacobiano desta transformação é

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

onde os subscritos indicam derivadas parciais. O Jacobiano da transformação é

$$J = \det|J| = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \quad (3.4)$$

Do teorema fundamental da função inversa [10], resulta

$$\xi_x = y_\eta J; \quad \xi_y = -x_\eta J \quad (3.5)$$

$$\eta_x = -y_\xi J; \quad \eta_y = x_\xi J \quad (3.6)$$

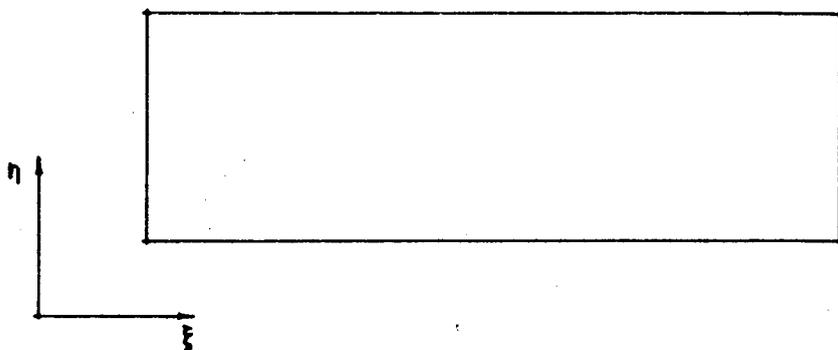


Figura 7 - Domínio de fronteiras arbitrárias no plano transformado.

As derivadas parciais são transformadas pelo uso da regra da cadeia como segue

$$f_x = f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x \quad (3.7)$$

$$f_y = f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y \quad (3.8)$$

As derivadas de ordem maior são obtidas através de sucessivas aplicações das equações acima. Maiores detalhes da transformação podem ser encontrados em [2] e [4].

3.3 - GERAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS (ξ,η)

A tarefa agora é determinar as funções (ξ,η) dadas pelas Equações (3.1) e (3.2). Uma maneira de gerar-se um sistema de coordenadas naturais é fazer com que o sistema natural de coordenadas (ξ,η) seja a solução de um sistema de equações diferenciais parciais elípticas no domínio físico com condições de contorno de Dirichlet em todos os contornos [20], [12]. O sistema elíptico linear, de acordo com a transformação já definida é

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi,\eta) \quad (3.9)$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi,\eta) \quad (3.10)$$

Este sistema elíptico é adequado, pois muitos problemas cujas

soluções podem ser tomadas como linhas coordenadas, são governados por estes tipos de equações (condução de calor, campo elétrico, campo magnético, etc.).

Considere-se o caso da geração de um sistema de coordenadas naturais que coincida com as fronteiras do domínio simplesmente conexo mostrado na Figura 8. O sistema gerado no plano físico é representado pelas Equações (3.9) e (3.10) com as seguintes condições de contorno de Dirichlet

$$\begin{aligned}
 \eta &= \eta_1 = \text{constante em } \sigma_1 \\
 \eta &= \eta_2 = \text{constante em } \sigma_2 \\
 \xi &= \xi_1 = \text{constante em } \sigma_3 \\
 \xi &= \xi_2 = \text{constante em } \sigma_4
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

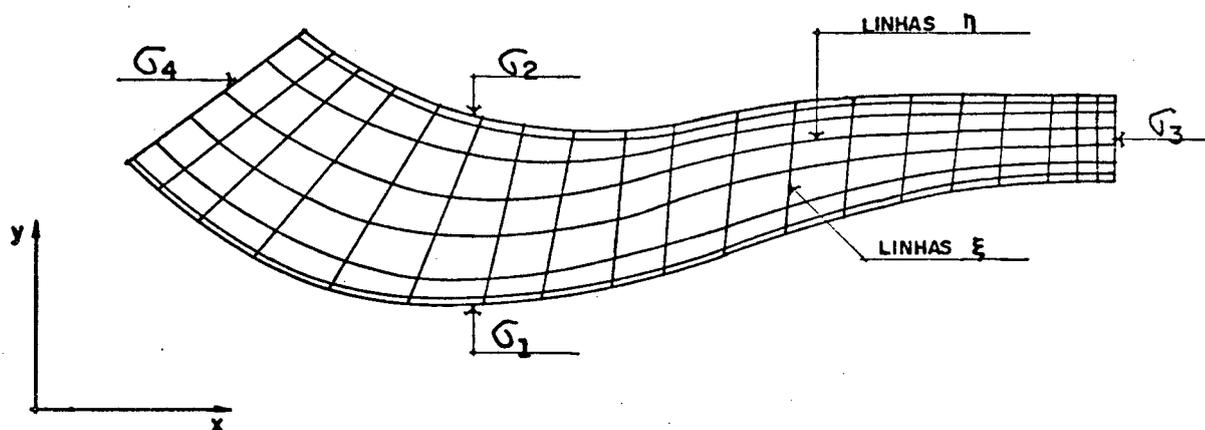


Figura 8 - Sistema de Coordenadas Naturais.

O sistema é transformado e resolvido numericamente no domínio (ξ, η) . A grade é escolhida quadrada com os lados do volume de controle elementar convenientemente escolhidos iguais a unidade (isto é, $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$). A Figura 9 mostra o domínio transformado correspondente ao domínio físico mostrado na Figura 8. Como pode ser observado σ_1 é mapeado sobre σ_1^* , σ_2 sobre σ_2^* , σ_3 sobre σ_3^* e σ_4 sobre σ_4^* . σ_1 e σ_2 são linhas η constantes e σ_3 e σ_4 são linhas ξ constantes, no plano físico; logo aparecem como constantes no plano transformado.

As Equações (3.9) e (3.10), uma vez transformadas, assu -

mem a seguinte forma

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + \frac{1}{J^2} (Px_{\xi} + Qx_{\eta}) = 0 \quad (3.12)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + \frac{1}{J^2} (Py_{\xi} + Qy_{\eta}) = 0 \quad (3.13)$$

com as seguintes condições de contorno de Dirichlet

$$\begin{aligned} x &= f_1(\xi, \eta_1) \text{ sobre } \sigma_1^* \\ y &= f_2(\xi, \eta_1) \text{ sobre } \sigma_1^* \\ x &= g_1(\xi, \eta_2) \text{ sobre } \sigma_2^* \\ y &= g_2(\xi, \eta_2) \text{ sobre } \sigma_2^* \\ x &= f_3(\xi_1, \eta) \text{ sobre } \sigma_3^* \\ y &= f_4(\xi_1, \eta) \text{ sobre } \sigma_3^* \\ x &= f_4(\xi_2, \eta) \text{ sobre } \sigma_4^* \\ y &= g_4(\xi_2, \eta) \text{ sobre } \sigma_4^* \end{aligned} \quad (3.14)$$

Os coeficientes de acoplamento nas equações acima são:

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \quad (3.15)$$

$$\beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \quad (3.16)$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \quad (3.17)$$

As funções f_1 , f_2 , g_1 , g_2 e f_3 , f_4 , g_3 , g_4 são determinadas pela forma do domínio físico e pelas distribuições ξ e η , respectivamente, desejadas nas fronteiras.

O sistema de coordenadas naturais assim gerado será não-ortogonal, pois as condições de ortogonalidade de Cauchy-Riemann não estão sendo impostas. Os passos da transformação do sistema de equações geradoras, do plano físico para o plano transformado, a aproximação destas equações para volumes fi-

nitos e o procedimento adotado para domínios duplamente conexos, podem ser encontrados em [2] e [4].

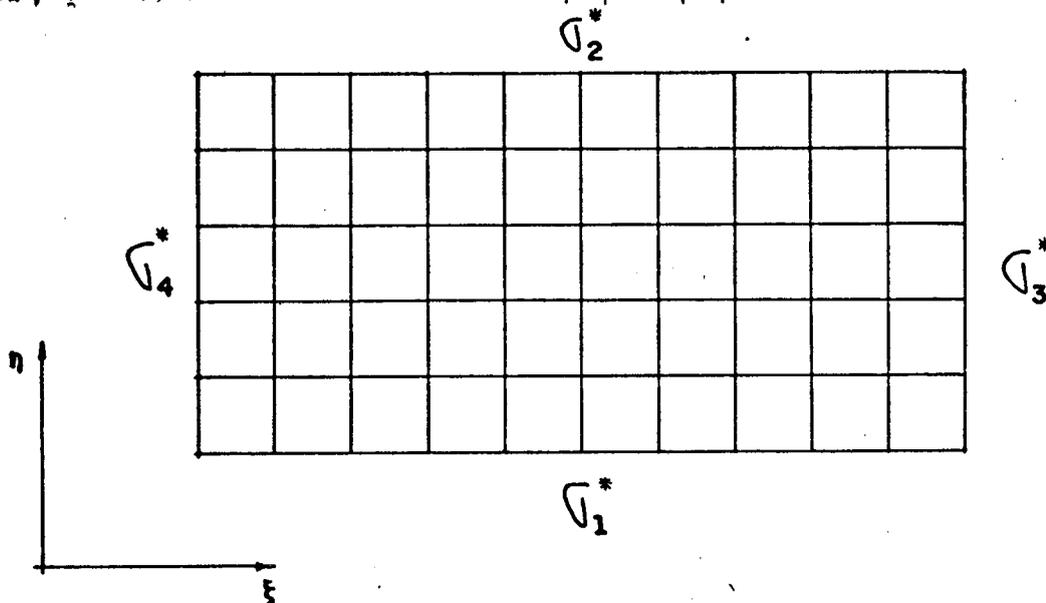


Figura 9 - Plano transformado (ξ, η) .

O sistema quase linear formado pelas Equações (3.12) e (3.13), acoplado através de seus coeficientes, é mais complexo do que o sistema linear no domínio físico, mas agora as condições de contorno são especificadas sobre linhas retas evitando, portanto, interpolações imprecisas e complexidade adicional.

Utilizando as equações transformadas, todo o trabalho computacional para gerar o sistema de coordenadas e subseqüentemente resolver o problema de convecção forçada é efetuado em uma malha quadrada fixa, independente da forma da região física e independente do espaçamento escolhido entre as linhas coordenadas. Desse procedimento advém a grande vantagem que é um único programa computacional, independente da geometria considerada. Quanto à grade a ser utilizada para a região física do problema a mesma pode ser gerada de uma maneira rápida e automática, conforme descrito, através do método devido a Thompson et al [1], baseado no trabalho de Winslow [11] e Chu [12]. Considerando ainda que o esquema numérico a ser desenvolvido abrangerá sistema de coordenadas não-ortogonais, a grade do domínio físico pode inclusive ser gerada manualmente ou por computação gráfica, se assim for desejado.

3.4 - VARIÁVEIS DEPENDENTES NAS EQUAÇÕES TRANSFORMADAS

A transformação do sistema de coordenadas cartesianas para o sistema de coordenadas curvilíneas já foi apresentada. Contudo, antes de transformar as equações do plano físico para o plano transformado é necessário tomar uma decisão com relação as variáveis dependentes para as equações de movimento. Sendo a velocidade uma grandeza vetorial esta apresenta consequentemente, além do valor em módulo, uma direção e um sentido de atuação, os quais estão relacionados ao sistema de coordenadas utilizado. O vetor é então representado através dos componentes relacionadas à direção e sentido de cada eixo coordenado. Em um sistema de coordenadas qualquer esse vetor é representado através de suas componentes covariantes e contravariantes. Para o sistema cartesiano em particular, devido o seu caráter ortogonal, as componentes covariantes e contravariantes são coincidentes. As componentes de um vetor no sistema cartesiano são então simplesmente denominadas de componentes cartesianas. No sistema de coordenadas generalizadas, entretanto, devido o seu caráter não-ortogonal, as componentes covariantes e contravariantes não são coincidentes.

A Figura 10 mostra as componentes cartesianas do vetor velocidade (u, v) bem como suas componentes covariantes (V_1, V_2) e contravariantes (V^1, V^2) relacionadas ao sistema de coordenadas generalizadas (ξ, η) .

A questão que se apresenta então é quanto a escolha das componentes mais adequadas do vetor velocidade para utilização nas equações de movimento transformadas. A escolha aqui realizada utiliza componentes tais que a equação da continuidade exiba estrutura semelhante àquela para sistemas de coordenadas cartesianas. Para satisfazer este critério é necessário que somente uma das componentes do vetor velocidade seja a responsável pelo fluxo de massa através das linhas coordenadas.

Analisando a Figura 10 verifica-se que as componentes contravariantes satisfazem o critério, pois a componente V^2 não transporta massa através das linhas coordenadas ξ . Contudo, a grandeza da componente contravariante V^1 não representa a grandeza da componente que transporta fisicamente a massa, uma

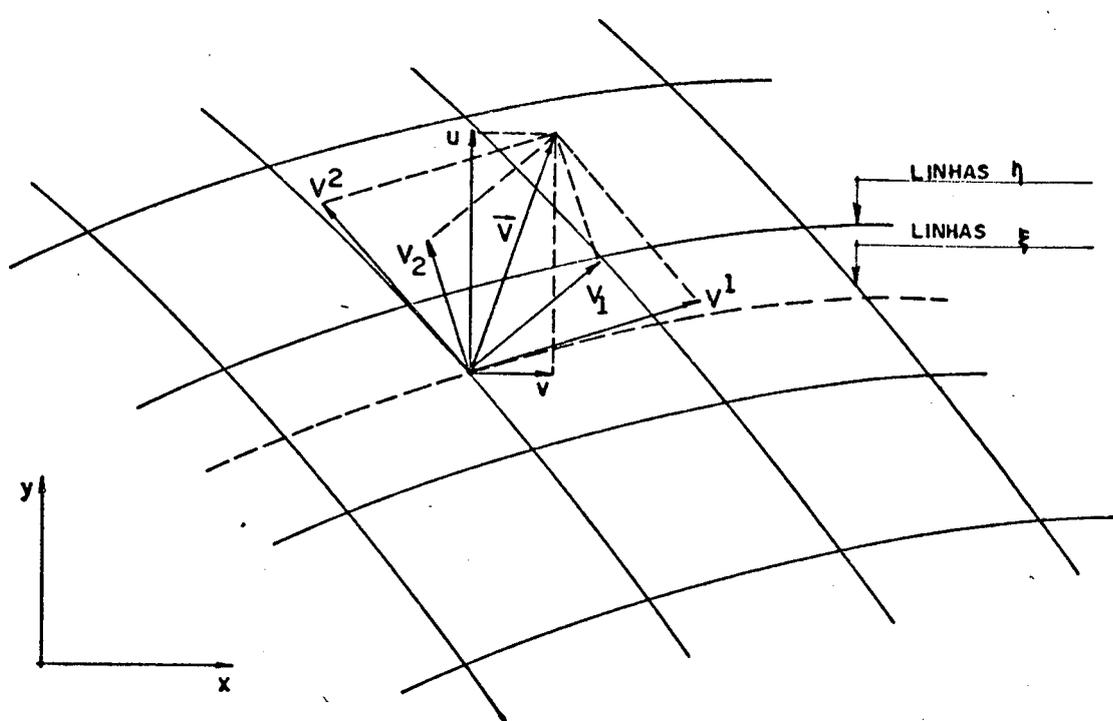


Figura 10 - Componentes cartesianas, covariantes e contravariantes do vetor velocidade \vec{V}

vez que a mesma está referenciada a um sistema de coordenadas, cujos vetores de base não são unitários. A Figura 11 apresenta então as componentes U e V responsáveis pelo transporte de massa, sendo U normal às linhas ξ constantes e V normal às linhas η constantes. Pode-se verificar que estas componentes são as próprias componentes contravariantes só que sem normalização métrica, o que é descrito com maiores detalhes em [2].

Evidencia-se, portanto, que as componentes contravariantes são as mais indicadas para serem utilizadas como variáveis dependentes nas equações de movimento transformadas. Contudo, a transformação das equações cartesianas em termos das velocidades U e V é bastante complexa e a interpretação física das equações transformadas muito difícil [2]. Assim, o procedimento aqui seguido é o de transformar-se as equações de movimento utilizando as componentes cartesianas do vetor velocidade como variáveis dependentes mas, após ter sido feita a aproximação para volumes finitos, altera-se estas equações para obtê-las em termos de velocidades contravariantes sem normalização métrica (U ,

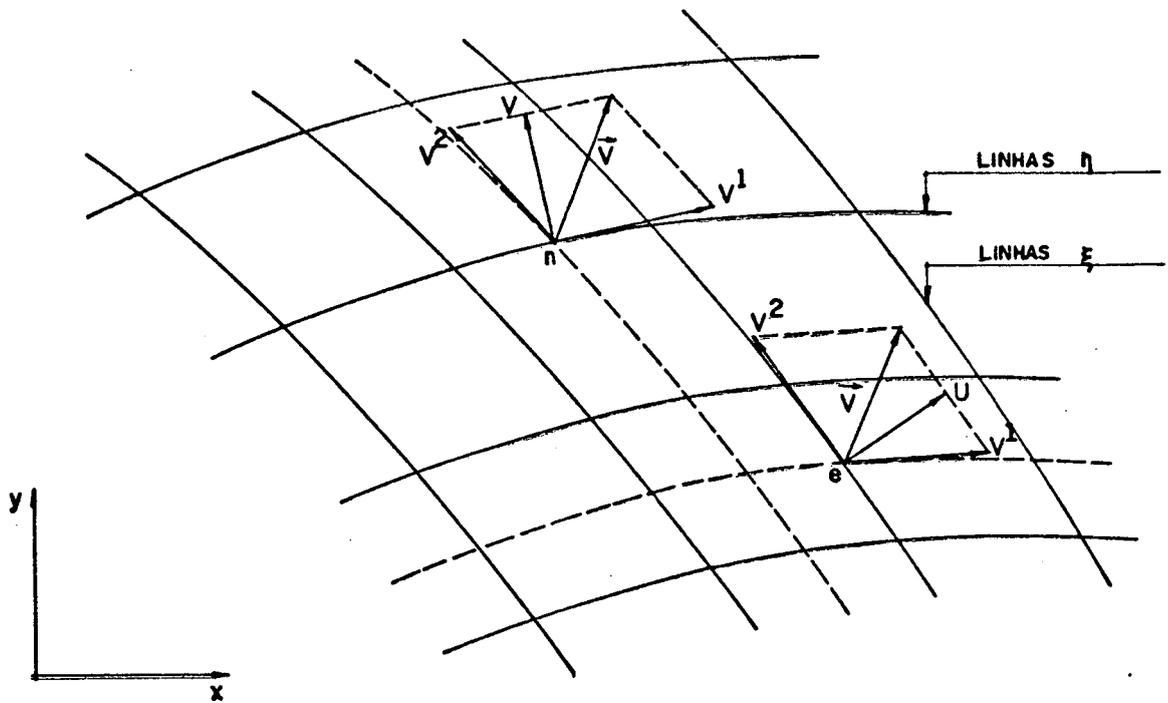


Figura 11 - Velocidades contravariantes sem normalização métrica.

V) [2]. Maiores detalhes com relação a este procedimento serão vistos no Capítulo 5.

3.5 - EQUAÇÕES TRANSFORMADAS

Aplicando as transformações gerais definidas pelas Equações (3.1) e (3.2) na equação cartesiana genérica, Equação (2.5), a mesma pode ser escrita para o domínio transformado, mantendo sua forma conservativa [8], [9], [2], como

$$\frac{1}{J} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \hat{p}\phi = \frac{\partial \hat{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} + \hat{S}\phi \quad (3.18)$$

onde

$$\hat{E} = \frac{1}{J} [\xi_x E + \xi_y F] \quad (3.19)$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J} [\eta_x E + \eta_y F] \quad (3.20)$$

$$\hat{R} = \frac{1}{J}[\xi_x R + \xi_y S] \quad (3.21)$$

$$\hat{S} = \frac{1}{J}[\eta_x R + \eta_y S] \quad (3.22)$$

\hat{p}^ϕ e \hat{S}^ϕ são, respectivamente, os termos de pressão e fonte transformados, onde

$$\hat{p}^u = \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial P}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (3.23)$$

$$\hat{p}^v = \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (3.24)$$

e os termos fonte, quando não envolvem derivadas são

$$\hat{S}^\phi = \frac{S^\phi}{J} \quad (3.25)$$

que neste trabalho foram feitos iguais a zero.

Inserindo as Equações (3.19) a (3.22) na Equação (3.18) e com algumas manipulações algébricas obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V \phi) + \hat{p}^\phi = \\ \frac{\partial}{\partial \xi}(C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + \hat{S}^\phi \end{aligned} \quad (3.26)$$

Como pode ser visto as equações transformadas exibem uma forma semelhante àquela quando escritas em coordenadas cartesianas. Este fato é importante porque implica que os procedimentos numéricos são semelhantes àqueles efetuados para coordenadas cartesianas.

As componentes contravariantes do vetor velocidade associado com o sistema curvilíneo (ξ, η) escritas sem normalização métrica são:

$$U = y_\eta u - x_\eta v \quad (3.27)$$

$$V = x_\xi v - y_\xi u \quad (3.28)$$

Os coeficientes da Equação (3.18) são dados por

$$C_1 = \Gamma \phi J_\alpha \quad (3.29)$$

$$C_2 = C_5 = -\Gamma \phi J_\beta \quad (3.30)$$

$$C_4 = \Gamma \phi J_\gamma \quad (3.31)$$

onde α , β , γ são definidos pelas equações (3.15) a (3.17).

O conjunto de equações diferenciais parciais no plano transformado para o problema de convecção forçada bidimensional com escoamento incompressível, é expresso por

Continuidade

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad (3.32)$$

Movimento para u

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V u) = - \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial P}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial u}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 \frac{\partial u}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial u}{\partial \xi}) + \hat{S}^u \end{aligned} \quad (3.33)$$

Movimento para v

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U v) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V v) = - \frac{\partial P}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial v}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 \frac{\partial v}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial v}{\partial \xi}) + \hat{S}^v \end{aligned} \quad (3.34)$$

Energia

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho T) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U T) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V T) = \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta}) + \\ \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi}) + \hat{S}^T \end{aligned} \quad (3.35)$$

Neste sistema de equações todas as informações a respeito da geometria são transportadas pelas componentes contravariantes do vetor velocidade e pelos coeficientes transformados nos termos de difusão.

Em |2| e |4| o termo $\frac{\partial q}{\partial t}$ não foi transformado para o domínio $\xi - \eta$. Isto não é relevante se apenas se tem interesse na solução de regime permanente, como foi o caso dos problemas resolvidos em |2| e |4|. Neste trabalho, mesmo sendo também de interesse apenas soluções de regime permanente a transformação do termo em questão é realizada para efeitos de generalidade.

EQUAÇÕES PARA OS VOLUMES FINITOS NO DOMÍNIO TRANSFORMADO

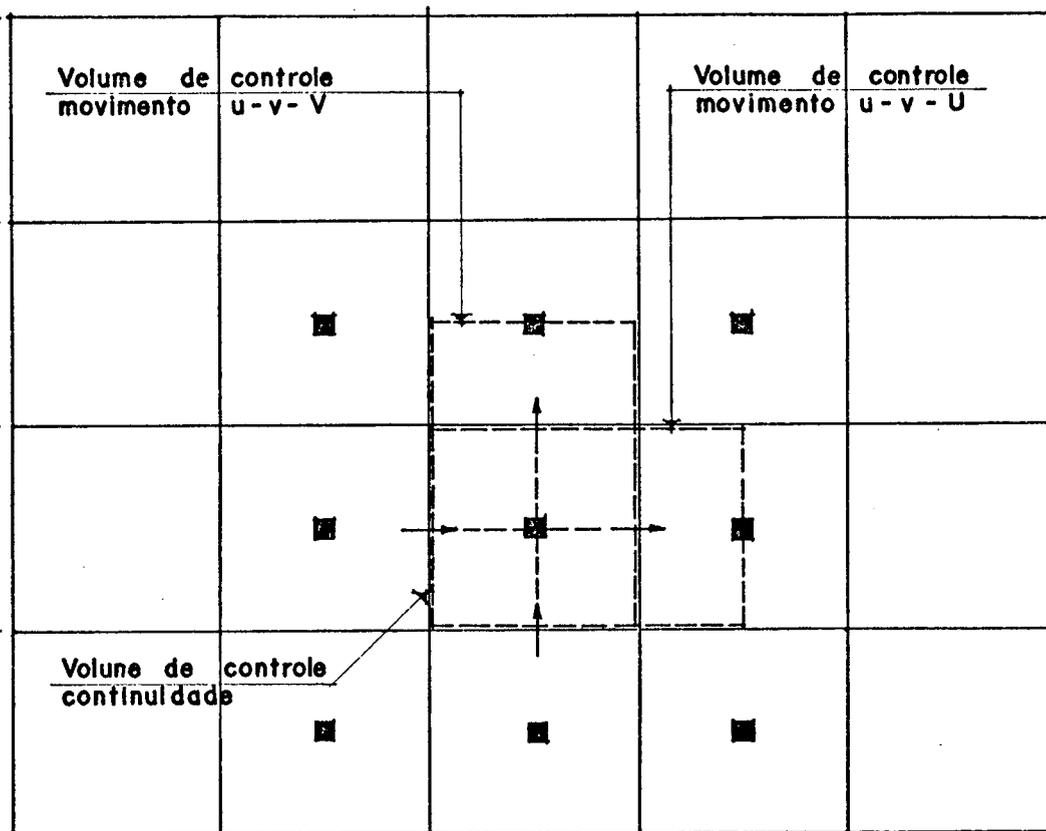
4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo efetua-se a aproximação para volumes finitos do sistema de equações diferenciais transformadas. Para que esta aproximação possa ser processada define-se primeiramente a localização de armazenamento das variáveis dependentes nas células elementares. Em seguida, as aproximações numéricas são feitas, obtendo-se as equações para volumes finitos para um campo escalar ϕ . Finalmente, introduz-se as equações para volumes finitos para avançar-se as variáveis explícita e implicitamente e, apresenta-se o sistema de equações discriminado para cada variável dependente.

4.2 - ARRANJO DE GRADE

A escolha da localização das variáveis dependentes na malha, no plano transformado, é uma questão importante quando se está tratando com sistemas de coordenadas curvilíneas. O tipo de configuração de grade ditará o número de pontos de pressão envolvidos na equação de Poisson para a correção da velocidade ou atualização da pressão e, conseqüentemente, será um fator importante para a convergência desta equação. O arranjo de grade aqui utilizado é o resultado de análise detalhada realizada a esse respeito por Maliska [2]. Segundo os argumentos desse autor o arranjo mais adequado é o desencontrado, no qual as velocidades cartesianas u e v estão localizadas coincidentemente (um requisito para o cálculo de fluxo de massa) no meio das quatro faces da célula elementar para a continuidade, enquanto, pressão, temperatura e propriedades físicas estão localizadas no centro desses volumes de controle (ver Figura 12), procurando introduzir a mesma consistência física existente para a malha desencontrada proposta por Harlow & Welch [21].

Pode ser notado que o arranjo para a pressão é o mesmo da que utilizado para grades ortogonais. Isto requer que o gradiente de pressão seja calculado diferentemente para cada direção coordenada. A vantagem, entretanto, é que isto permite reduzir a equação para a pressão de 9 pontos para uma de 5 pontos quando a grade é ortogonal. Neste arranjo as velocidades estão localizadas onde elas são necessárias para o balanço de massa. Esta configuração dá origem a uma equação de pressão na qual os pontos de pressão estão fortemente ligados com os quatro pontos vizinhos paralelos e fracamente ligados com os diagonais, permitindo resolver-se a equação de pressão utilizando solução ponto por ponto ou linha por linha.



- Pressão, Temperatura, ρ, μ, C_p, k, etc
- Velocidade u, v, U
- ↑ Velocidade u, v, V

Figura 12 - Configuração de grade adotada neste trabalho.

Para este arranjo de grade foi desenvolvido uma nova formulação, onde ambas as velocidades: a cartesiana e contravarianções

te tomam parte no procedimento de solução |2|. Esta formulação, denominada formulação U-V (ver Capítulo 5) também requer localização na grade para as componentes contravariantes; a componente contravariante U localizada nas faces este e oeste e a componente contravariante V nas faces norte e sul. A Figura 12, portanto, mostra o arranjo de grade em que tanto as componentes cartesianas com as contravariantes do vetor velocidade estão localizadas; mostrando ainda os volumes de controle elementares para as equações da continuidade, movimento e energia.

Ressalte-se aqui que existem outras possibilidades de arranjo de grade e que as razões pelas quais estes arranjos são preteridos, quando da utilização de sistemas curvilíneos generalizados, podem ser encontrados em |2|.

4.3 - EQUAÇÕES PARA VOLUMES FINITOS NO PLANO TRANSFORMADO

Nesta seção obtém-se as equações para volumes finitos para uma variável escalar genérica ϕ . Posteriormente fazendo $\phi = 1, u, v$ ou T juntamente com os termos de pressão e fonte apropriados obtém-se as equações de energia, movimento e massa, respectivamente, ou seja, o sistema de equações discriminado para cada variável dependente. A variável remanescente a resolver é a pressão. A obtenção de sua equação para volumes finitos é deixada para o Capítulo 5, onde o procedimento de solução é discutido.

Reescrevendo a equação para uma variável ϕ , Equação (3.26), tem-se

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V \phi) + \hat{p} \phi = \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \hat{S} T \phi$$

onde o termo fonte é agora expresso por

$$\hat{S} T \phi = S \phi + \frac{\partial}{\partial \xi} (C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) \quad (4.2)$$

O termo fonte passa a conter os termos das derivadas cruzadas evitando-se um esquema numérico de 9 pontos. O volume de controle elementar ξ - η para ϕ é mostrado na Figura 13, onde $\Delta\xi$ e $\Delta\eta$, por conveniência, são iguais a unidade.

Existem caminhos diversos para aproximar a Equação (4.1) para volumes finitos. O procedimento adotado é o método conhecido como aproximação pelo volume de controle [13]. Neste método realiza-se a aproximação para volumes finitos a partir da inte-

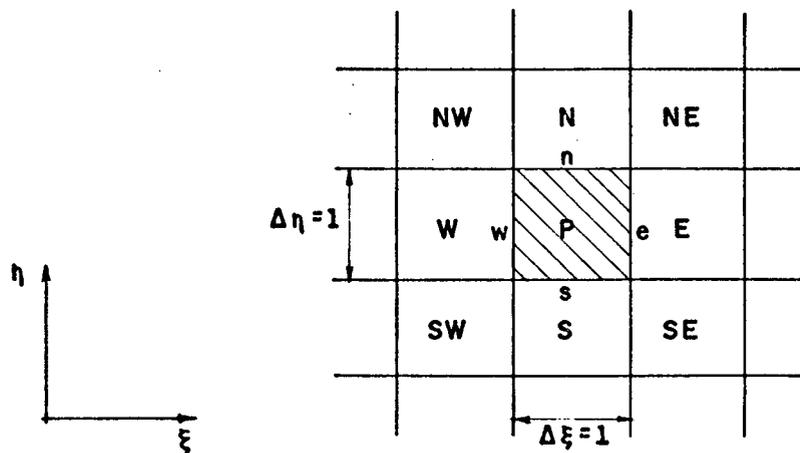


Figura 13 - Volume de controle elementar no plano transformado (ξ - η).

gração da Equação (4.1) sob o volume de controle elementar. É importante destacar a interpretação física associada com essa aproximação, pois do mesmo modo que a equação em termos infinitesimais representa a conservação das propriedades transportadas sobre volumes de controle infinitesimais, a equação integrada representa a conservação destas propriedades sobre volumes de controle finitos.

Integrando a Equação (4.1) no tempo e no espaço para o volume de controle mostrado na Figura 13, obtém-se

$$\int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \frac{1}{J} \{ |\rho\phi|^{t+\Delta t} - |\rho\phi|^t \} d\eta d\xi +$$

$$\begin{aligned}
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \{ |\rho U \phi|_e - |\rho U \phi|_w \} d\eta dt + \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \{ |\rho V \phi|_n - |\rho V \phi|_s \} d\xi dt + \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \hat{p}^\phi d\eta d\xi dt = \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \{ |C_{1\frac{\partial\phi}{\partial\xi}}|_e - |C_{1\frac{\partial\phi}{\partial\xi}}|_w \} d\eta dt + \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \{ |C_{4\frac{\partial\phi}{\partial\eta}}|_n - |C_{4\frac{\partial\phi}{\partial\eta}}|_s \} d\xi dt + \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_s} \int_{\eta_s}^{\eta_n} ST^\phi d\eta d\xi dt
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde t é o tempo, Δt é o intervalo de tempo e os subscritos e, w, n, s são o indicado na Figura 13.

As aproximações a serem introduzidas na Equação (4.3) descrevem a variação de ϕ entre os pontos de grade e a avaliação da integral de ϕ no intervalo Δt . A variação de ϕ no tempo, é avaliada no tempo $t+\theta\Delta t$ e este valor representa o valor de ϕ em Δt . Para simplicidade denota-se o tempo $t+\Delta t$ por $n+1$, t por n e $t+\theta\Delta t$ por $n+\theta$, onde θ varia entre 0 e 1 e caracteriza a variação da formulação explícita até a formulação totalmente implícita. Para a aproximação dos termos convectivos e difusivos o "Esquema de Diferenças Ponderadas a Montante" (Weighted Upstream Differencing Scheme - WUDS) de Raithby & Torrance [14] é adotado. As aproximações nas faces são:

Para os perfis de ϕ

$$\phi_e = \left| \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_e \right| \phi_P + \left| \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e \right| \phi_E \tag{4.4}$$

$$\phi_w = \left| \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_w \right| \phi_P + \left| \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w \right| \phi_W \tag{4.5}$$

$$\phi_n = \left| \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_n \right| \phi_P + \left| \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right| \phi_N \quad (4.6)$$

$$\phi_s = \left| \frac{1}{2} - \bar{\alpha}_s \right| \phi_P + \left| \frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s \right| \phi_S \quad (4.7)$$

Para os termos de difusão

$$C_{1e} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_e = C_{1e} \bar{\beta}_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta \xi} \quad (4.8)$$

$$C_{1w} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_w = C_{1w} \bar{\beta}_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta \xi} \quad (4.9)$$

$$C_{4n} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_n = C_{4n} \bar{\beta}_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta \eta} \quad (4.10)$$

$$C_{4s} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_s = C_{4s} \bar{\beta}_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta \eta} \quad (4.11)$$

onde $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são "pesos" escolhidos de acordo com a importância relativa dos processos de convecção e difusão no problema. Os subscritos significam que as quantidades são avaliadas na fronteira especificada do volume de controle. Expressões adequadas para $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ foram propostas por G. Allen & Southwell e adaptadas por Raithby & Torrance [14]. Estas expressões podem ser utilizadas independentemente da grade ser ortogonal ou não porque são baseados em uma solução unidimensional entre pontos adjacentes da grade para o problema da convecção-difusão. São eles

$$\bar{\alpha}_e = \frac{1}{2} - \frac{e^{r_e/2} - 1}{e^{r_e} - 1} \quad (4.12)$$

$$\bar{\beta}_e = r_e \frac{e^{r_e/2}}{e^{r_e} - 1} \quad (4.13)$$

onde

$$r_e = \left| \frac{\rho U}{C_1 \Delta \xi} \right|_e \quad (4.14)$$

é um número de Peclet da grade baseado nas componentes contravariantes do vetor velocidade.

As expressões utilizadas neste trabalho são as aproximações das Equações (4.12) e (4.13) dadas por Raithby [15].

$$|\bar{\alpha}| = \frac{r^2}{10 + 2r^2} \quad (4.15)$$

$$\bar{\beta} = \frac{(1 + 0,005r^2)}{(1+0,05r^2)} \quad (4.16)$$

Convém destacar a capacidade de adaptação à física específica de cada problema, conferida ao esquema, com a escolha dos "pesos" $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ de acordo com a importância relativa dos processos de convecção e difusão no problema. Como pode ser facilmente observado $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são função da velocidade nas faces do volume de controle e, portanto, funções de interpolação variáveis para cada ponto do escoamento. Assim, se as velocidades são baixas, o esquema WUDS tende para o de "Diferenças Centrais" (Central Differencing Scheme - CDS) próprio para problemas em que a difusão é dominante. Quando as velocidades crescem, o esquema WUDS tende para o de "Diferenças a Montante" (Upstream Differencing Scheme - UDS), próprio para problemas em que a convecção é dominante.

Esta breve exposição mostra bem que a natureza física do problema, quanto aos processos convectivos e difusivos, tem correspondência com a natureza das funções de interpolação para cada ponto da região do escoamento. Um estudo mais detalhado e comparativo dos esquemas acima referidos pode ser encontrado no trabalho realizado por Spalding [16].

Fazendo a integração da Equação (4.3) sujeita às condições anteriormente assumidas e utilizando a equação de conservação da massa para volumes finitos,

$$[(\rho U)_e - (\rho U)_w] \Delta \eta + [(\rho V)_n - (\rho V)_s] \Delta \xi = 0 \quad (4.17)$$

resulta

$$\frac{1}{J} \rho_P \phi_P^{n+1} \frac{\Delta V}{\Delta t} + A_P^* \phi_P^{n+\theta} = A_e \phi_E^{n+\theta} + A_w \phi_W^{n+\theta} + A_n \phi_N^{n+\theta} \quad (4.18)$$

$$+ A_s \phi_S^{n+\theta} + \frac{1}{J} \rho_P \phi_P^n \frac{\Delta V}{\Delta t} - L |\hat{P}^\phi| \Delta V + L |\hat{S}T^\phi| \Delta V$$

onde ΔV é o resultado do produto $\Delta \xi$ e $\Delta \eta$. Os termos de pressão e fonte, $L |\hat{P}^\phi|$ e $L |\hat{S}T^\phi|$, são aproximados em diferenças centrais.

Os coeficientes A_i são dados por

$$A_e = -M_e \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e \right) + \bar{\beta}_e D_e \quad (4.19)$$

$$A_w = M_w \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w \right) + \bar{\beta}_w D_w \quad (4.20)$$

$$A_n = -M_n \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right) + \bar{\beta}_n D_n \quad (4.21)$$

$$A_s = M_s \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s \right) + \bar{\beta}_s D_s \quad (4.22)$$

$$A_p^* = A_e + A_w + A_n + A_s \quad (4.23)$$

onde a parte convectiva em cada coeficiente é dada por:

$$M_e = (\rho U)_e^{n+\theta} \Delta \eta \quad (4.24)$$

$$M_w = (\rho U)_w^{n+\theta} \Delta \eta \quad (4.25)$$

$$M_n = (\rho V)_n^{n+\theta} \Delta \xi \quad (4.26)$$

$$M_s = (\rho V)_s^{n+\theta} \Delta \xi \quad (4.27)$$

e a parte difusiva por

$$D_e = C_{1e} \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} \quad (4.28)$$

$$D_w = C_{1w} \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} \quad (4.29)$$

$$D_n = C_{4n} \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \quad (4.30)$$

$$D_s = C_{4s} \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \quad (4.31)$$

No conjunto de equações acima, embora os termos $\Delta \xi$ e $\Delta \eta$ sejam iguais a unidade, os mesmos são mantidos para facilitar o reconhecimento do significado físico de cada termo. Fazendo $\theta=0$ na Equação (4.18) a equação resultante avança a variável ϕ em um modo explícito. Uma solução de transiente real é obtida se o mesmo intervalo de tempo Δt é usado para todas as equações e para todos os volumes de controle. Relaxando estas condições a convergência para regime permanente pode ser acelerada, entre - tanto, a restrição é que |17|

$$\Delta t \leq \frac{\rho \Delta V}{A_p^* J} = \Delta t_{\max} \quad (4.32)$$

onde Δt_{\max} é o máximo intervalo de tempo permissível em uma for-
mulação explícita. Se o transiente distorcido é adotado, os va-
lores de Δt podem ser convenientemente escolhidos como

$$\Delta t = E \Delta t_{\max} \quad (4.33)$$

onde E é uma constante que não pode exceder a unidade para uma
formulação explícita. O intervalo de tempo requerido para asse-
gurar estabilidade quando os valores de ϕ são avançados explici-
tamente é muitas vezes restritivo demais. Assim, uma formula-
ção completamente implícita é preferível, onde valores para E
maiores do que a unidade são permitidos para os casos em que so-
mente o regime permanente é de interesse, como neste trabalho.

Equação (4.18) com $\theta=1$ resulta:

$$A_p \phi_P^{n+1} = A_e \phi_E^{n+1} + A_w \phi_W^{n+1} + A_n \phi_N^{n+1} + A_s \phi_S^{n+1} + \quad (4.34)$$

$$\frac{A_p}{(1+E)} \phi_P^n - L |\hat{P}^\phi| \Delta V + L |\hat{S}T^\phi| \Delta V$$

onde $A_p = A_p^* + \frac{\rho \Delta V}{J \Delta t}$ (4.35)

Utilizando as Equações (4.32) e (4.33) obtêm-se as relações

$$\frac{\rho \Delta V}{J \Delta t} = \frac{A_p^*}{E} \quad (4.36)$$

e

$$A_p = A_p^* \frac{(1+E)}{E} \quad (4.37)$$

Assim, o sistema de equações governantes para volumes finitos com as equações de movimento e energia em uma forma completamente implícita é:

Continuidade

$$[(\rho U)_e - (\rho U)_w] \Delta \eta + [(\rho V)_n - (\rho V)_s] \Delta \xi = 0 \quad (4.38)$$

Movimento para u

$$A_p u_P^{n+1} = A_e u_E^{n+1} + A_w u_W^{n+1} + A_n u_N^{n+1} + A_s u_S^{n+1} + \quad (4.39)$$

$$\frac{A_p}{(1+E)} u_P^n - L |\hat{P}^u| \Delta V + L |\hat{S}T^u| \Delta V$$

Movimento para v

$$A_p v_P^{n+1} = A_e v_E^{n+1} + A_w v_W^{n+1} + A_n v_N^{n+1} + A_s v_S^{n+1} + \quad (4.40)$$

$$\frac{A_p}{(1+E)} v_P^n - L |\hat{P}^v| \Delta V + L |\hat{S}T^v| \Delta V$$

Energia

$$A_p T_P^{n+1} = A_e T_E^{n+1} + A_w T_W^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + \frac{A_p}{(1+E)} T_P^n + L |S_T^T| \Delta V \quad (4.41)$$

Uma vez realizadas as aproximações para volumes finitos pode-se agora resolver este sistema de equações de uma maneira iterativa. O procedimento de solução adotado é discutido no próximo capítulo.

GENERALIDADES DO ESQUEMA NUMÉRICO

5.1 - INTRODUÇÃO

No capítulo anterior obteve-se as equações diferenciais parciais para volumes finitos em que se manteve as velocidades cartesianas como variáveis dependentes para as equações de movimento. Neste capítulo descreve-se o procedimento de solução em que ambas as componentes do vetor velocidade, as cartesianas e as contravariantes, são envolvidas para resolver as equações discretizadas.

Primeiro, explica-se as dificuldades de utilizar a formulação em que somente as componentes cartesianas tomam parte na solução. Mostra-se que é preferível ter-se as equações de movimento em uma forma que utiliza as mesmas variáveis que satisfazem a conservação de massa. Feito isso, apresenta-se o método PRIME [19] adotado nesse trabalho para tratar do acoplamento pressão-velocidade, resultante da formulação "incompressível".

A seguir, apresenta-se o algoritmo para a solução do problema de convecção forçada bidimensional com transferência de calor e introduz-se as equações especializadas para corrigir a velocidade e atualizar a pressão. Finaliza-se o capítulo tecendo-se considerações relacionadas ao procedimento numérico adotado na solução das equações governantes.

5.2 - AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO E A RESTRIÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

Analisando a equação de conservação da massa, Equação (4.38), aplicada a um volume de controle centrado em P, Figura 14, constata-se que somente uma componente contravariante do vetor velocidade é requerida para calcular o fluxo de massa através de cada face. Isto é, somente a componente U transporta mas

sa através das faces este e oeste e, somente a velocidade V transporta massa através das faces norte e sul enquanto que as outras componentes (U nas faces norte e sul e V nas faces este e oeste) não são utilizadas para satisfazer o balanço de massa porque não há equação da continuidade para elas, uma consequência do arranjo de grade adotado para pressão.

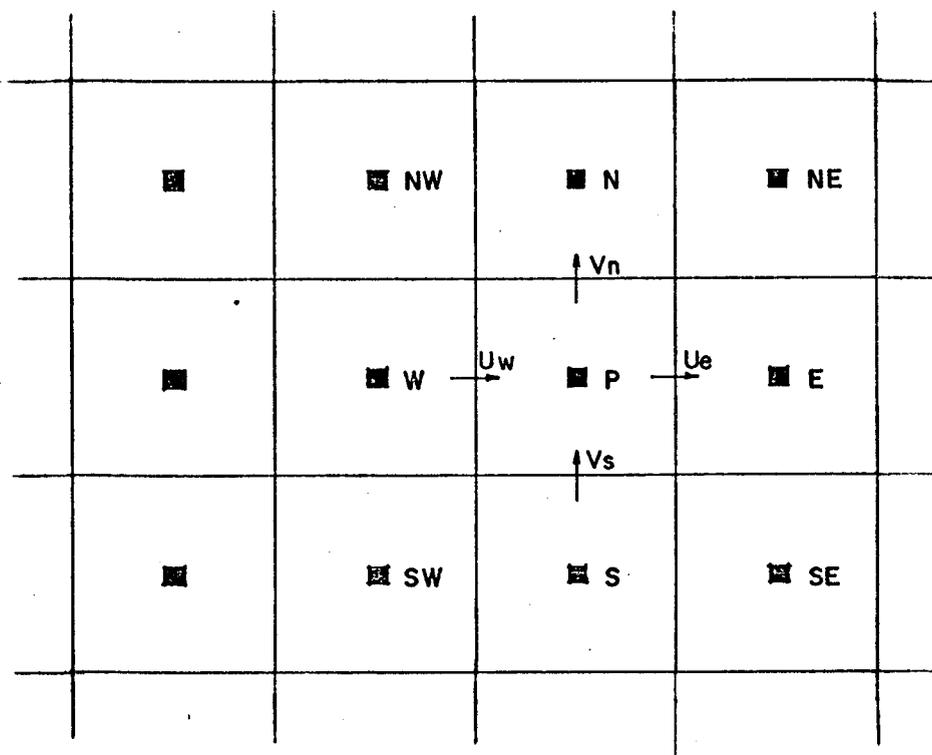


Figura 14 - Volume de controle da Continuidade e as componentes contravariantes do vetor velocidade.

Como U e V não são variáveis dependentes, sua determinação pode ser obtida a partir da solução das equações de movimento escritas para as componentes cartesianas u e v . Contudo, em função da não necessidade de uma das componentes contravariantes para satisfazer a conservação da massa, u e v podem desviar-se consideravelmente de seus valores reais durante o processo iterativo, mas ainda produzir uma componente contravariante que satisfaz o balanço de massa. A outra componente contravariante no mesmo ponto, entretanto, é livre para assumir valores irrisuais permitindo que as componentes u e v também assumam valores irrisuais.

O acima descrito é ilustrado na Figura 15 em que duas composições diferentes de componentes cartesianas do vetor velocidade resultam em uma mesma componente contravariante U. De igual modo poderia se representar várias outras composições pois,

$$U = f_1(u,v) \quad (5.1)$$

$$V = f_2(u,v) \quad (5.2)$$

Se a componente contravariante V é livre para assumir quaisquer valores, então existem infinitas composições de u e v que satisfazem a Equação (5.1).

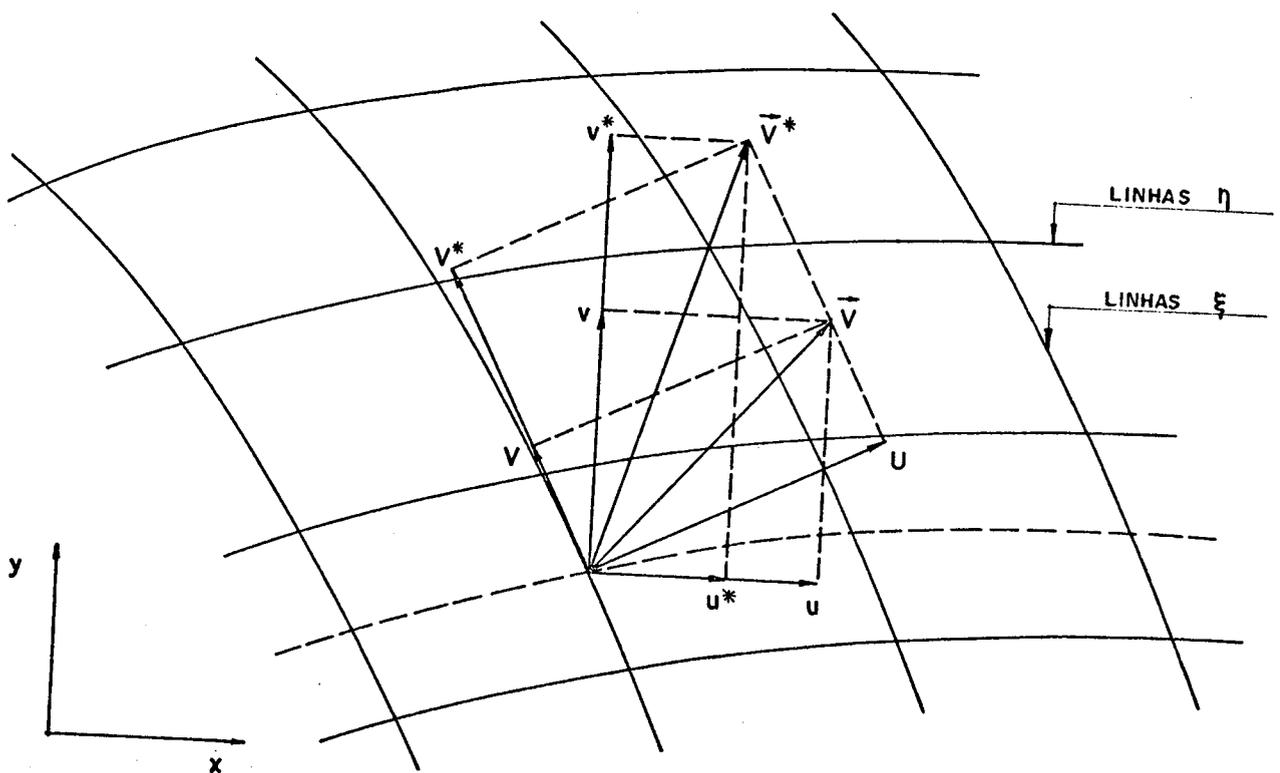


Figura 15 - Componente contravariante U obtida a partir das componentes cartesianas u, v e u*, v*.

Esta formulação foi testada em [2] na solução do problema de fluxo forçado em uma cavidade quadrada para número de Reynolds igual a 400 utilizando uma grade altamente não-ortogonal, e a solução divergiu. Portanto, é necessário que a restrição da conservação da massa também seja aplicada a outra compo-

nente contravariante do vetor velocidade.

A maneira que imediatamente é lembrada para resolver este problema é localizar pontos extra de pressão conforme mostrado na Figura 16. Isto, entretanto, implica em uma varredura dupla do domínio de solução em cada iteração, calculando-se u e v duas vezes para um mesmo ponto a fim de atender a equação da Continuidade para os dois volumes de controle. Este fato acarreta, portanto, um consumo desnecessário de tempo de computação e torna a alternativa pouco atrativa. Além disso, esta opção implica na obtenção de duas soluções para a pressão fracamente acopladas entre si, para o caso não-ortogonal, e completamente desacopladas quando a malha utilizada for ortogonal.

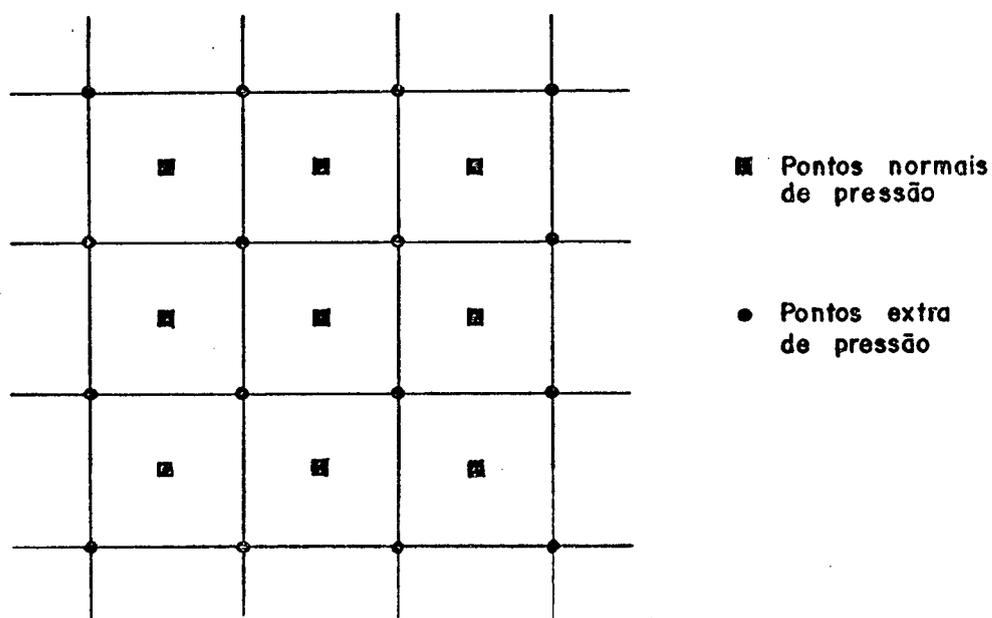


Figura 16 - Volumes de controle da Continuidade considerando pontos extra de pressão.

Assim, optou-se pela utilização, após cada iteração, dos valores de U e V que satisfaçam a conservação da massa para calcular os valores de U e V que não estejam sujeitos a restrição da conservação da massa utilizando um esquema de médias [2]. Com estes valores conhecidos, u e v podem ser recalculados usando

as inversas das Equações (3.27) e (3.28). Estes novos valores de u e v , que quando resolvidos normais às faces do volume de controle da pressão produzem velocidades que satisfazem conservação da massa exatamente e são fisicamente reais, são utilizados para a próxima iteração. Assim, a conservação da massa é verificada, embora não exatamente, também para a outra componente contravariante do vetor velocidade. O esquema de médias utilizado é apresentado na Seção 5.5. Ressalte-se que outros esquemas de médias podem ser utilizados, optando-se pelo apresentado nas Equações (5.13) e (5.14).

A estratégia de utilizar as componentes contravariantes, as que satisfazem conservação de massa exatamente e aquelas calculadas utilizando um esquema de médias, para determinar as novas velocidades cartesianas u e v é a base para a formulação (U-V) a ser descrita na próxima seção.

5.3 - FORMULAÇÃO (U-V)

A formulação (U-V) consiste em escrever-se as equações de movimento para as mesmas variáveis dependentes que estão envolvidas na conservação da massa e assim resolver o problema anteriormente mencionado. Isto requer que as equações de movimento sejam escritas para as velocidades normais às faces do volume de controle da pressão, as velocidades contravariantes.

As equações apropriadas para a formulação (U-V) são a equação da continuidade, Equação (4.38), e as equações de movimento para U e V obtidas a partir das equações de movimento para u e v aproximadas para volumes finitos, Equações (4.39) e (4.40), e das Equações (3.27) e (3.28). As equações de movimento para U e V resultantes são, respectivamente,

$$U_P = \hat{U}_P - \left| \frac{\Delta P}{\Delta \xi_{AP}} \alpha \right|_P + \left| \frac{\Delta P}{\Delta \eta_{AP}} \beta \right|_P \quad (5.3)$$

$$V_P = \hat{V}_P - \left| \frac{\Delta P}{\Delta \eta_{AP}} \gamma \right|_P + \left| \frac{\Delta P}{\Delta \xi_{AP}} \beta \right|_P \quad (5.4)$$

onde U_p e V_p são dados por

$$\hat{U}_P = \frac{A_e^U}{A_P^U} |u_E y_{\eta P} - v_E x_{\eta P}| + \frac{A_w^U}{A_P^U} |u_W y_{\eta P} - v_W x_{\eta P}| + \frac{A_n^U}{A_P^U} |u_N y_{\eta P} - v_N x_{\eta P}| + \frac{A_s^U}{A_P^U} |u_S y_{\eta P} - v_S x_{\eta P}| + \frac{B_P^U}{A_P^U} \quad (5.5)$$

$$\hat{V}_P = \frac{A_e^V}{A_P^V} |v_E x_{\xi P} - u_E y_{\xi P}| + \frac{A_w^V}{A_P^V} |v_W x_{\xi P} - u_W y_{\xi P}| + \frac{A_n^V}{A_P^V} |v_N x_{\xi P} - u_N y_{\xi P}| + \frac{A_s^V}{A_P^V} |v_S x_{\xi P} - u_S y_{\xi P}| + \frac{B_P^V}{A_P^V} \quad (5.6)$$

e os termos fonte são expressos por

$$B_P^U = \{A_p^u \frac{u_p}{1+E} + L|\hat{S}T^u|\Delta V\}y_{\eta P} - \{A_p^v \frac{v_p}{1+E} + L|\hat{S}T^v|\Delta V\}x_{\eta P} \quad (5.7)$$

$$B_P^V = \{A_p^u \frac{v_p}{1+E} + L|\hat{S}T^v|\Delta V\}x_{\xi P} - \{A_p^v \frac{u_p}{1+E} + L|\hat{S}T^u|\Delta V\}y_{\xi P} \quad (5.8)$$

onde o subscrito P nas métricas indica que as mesmas são avaliadas no ponto P.

Eliminando-se as velocidades cartesianas nas Equações (5.5) e (5.6) através das relações

$$u = J(Ux_\xi + Vx_\eta) \quad (5.9)$$

$$v = J(Uy_\xi + Vy_\eta) \quad (5.10)$$

obtêm-se uma formulação puramente contravariante. Entretanto, como as equações resultantes são complicadas com termos fonte grandes e complexos, é preferido deixar as equações envolvendo também u e v.

Assim, em se mantendo as velocidades cartesianas, ambas

as componentes do vetor velocidade, as cartesianas e as contravariantes, são empregadas para resolver as equações de movimento. O pequeno preço a ser pago neste procedimento de solução é o armazenamento adicional das componentes cartesianas que, com o surgimento de grandes computadores, não constitui maior inconveniente. O mais importante é a estabilidade do esquema numérico que é conseguida com esta prática.

5.4 - PROCEDIMENTO PARA O TRATAMENTO DO ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE.

Os métodos atualmente disponíveis para o tratamento do acoplamento pressão-velocidade são vários e uma análise detalhada dos mesmos pode ser encontrada em [18]. Neste trabalho é utilizada a técnica desenvolvida por Doormaal & Raithby [19] - o método PRIME (update PResure Implicitly and Momentum Explicitly) -, descrito abaixo.

As equações de movimento, considerando aproximações de segunda ordem para os gradientes de pressão nas Equações (5.3) e (5.4), são

$$U_P = \hat{U}_P - \left| \frac{\Delta V}{A_U} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right|_P (P_E - P_P) + \frac{1}{4} \left| \frac{\Delta V}{A_U} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right|_P (P_{NE} + P_N - P_{SE} - P_S) \quad (5.11)$$

$$V_P = \hat{V}_P - \left| \frac{\Delta V}{A_V} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right|_P (P_N - P_S) + \frac{1}{4} \left| \frac{\Delta V}{A_V} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right|_P (P_{NE} + P_E - P_{NW} - P_W) \quad (5.12)$$

onde as velocidades da iteração anterior são utilizadas para avaliar \hat{U}_P e \hat{V}_P através das Equações (5.5) e (5.6). Inserindo-se as equações acima na equação da continuidade, Equação (4.38), obtém-se uma equação de Poisson para a pressão (ver Seção 5.6). A solução desta equação é utilizada nas Equações (5.11) e (5.12) para corrigir a velocidade e é reconhecida como o campo de pressões atualizado.

Neste procedimento somente uma equação de Poisson precisa ser resolvida em cada iteração, a equação de Poisson para a pressão, enquanto que as equações de movimento são resolvidas explicitamente em uma iteração tipo Jacobi. Esta técnica tem provado ser eficiente para uma série de problemas hidrodinâmicos [2], de convecção natural [4] e será aqui testada para resolver problemas com entrada e saída de massa. Maiores detalhes a respeito do método PRIME podem ser encontrados em [2].

5.5 - PROCEDIMENTO PARA A SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Em função da metodologia utilizada neste trabalho, os passos seguintes são necessários para formar um ciclo iterativo para resolver problemas bidimensionais de escoamento forçado com transferência de calor em geometrias arbitrárias.

- (1) - Arbitrar os campos de pressão $P(\xi, \eta)$, temperatura $T(\xi, \eta)$ e os de velocidade $u(\xi, \eta)$ e $v(\xi, \eta)$ no domínio;
- (2) - Calcular os coeficientes para as equações de movimento, Equações (5.5) e (5.6);
- (3) - Achar \hat{U} e \hat{V} com as velocidades cartesianas da iteração anterior, utilizando Equações (5.5) e (5.6);
- (4) - Resolver a equação de Poisson para a pressão, Equação (5.19);
- (5) - Corrigir as velocidades U e V devido o novo campo de pressões, utilizando as Equações (5.3) e (5.4);
- (6) - Calcular as velocidades U e V onde não são exigidas para satisfazer a continuidade, utilizando as Equações (5.13) e (5.14). Ver Figura 17;

$$U = (U_A + U_B + U_C + U_D) * 0,25 \quad (5.13)$$

$$V = (V_A + V_B + V_C + V_D) * 0,25 \quad (5.14)$$

- (7) - Calcular as velocidades u e v utilizando as Equações (5.9) e (5.10).

Iteração, voltando ao passo (2), é necessária em função das não-linearidades e o acoplamento entre as equações. Para determinar o campo de temperaturas o procedimento é simples uma vez que a equação de energia é desacoplada das demais (convecção forçada). Assim, uma vez determinados os campos de velocidade $U(\xi, \eta)$ e $V(\xi, \eta)$ deve-se:

- (8) - Calcular os coeficientes para a equação da energia;
- (9) - Resolver a equação da energia, Equação (4.41).

Se ρ , μ , c_p ou k forem função da temperatura a modificação no procedimento iterativo de solução é também simples. Basta que se utilize o campo de temperaturas obtido para renovar os valores das propriedades físicas variáveis. Feito isso, volta-se ao passo (2), repetindo o procedimento de (2) a (9), renovando-se novamente os valores das propriedades e assim sucessivamente até que uma tolerância de convergência seja atingida.

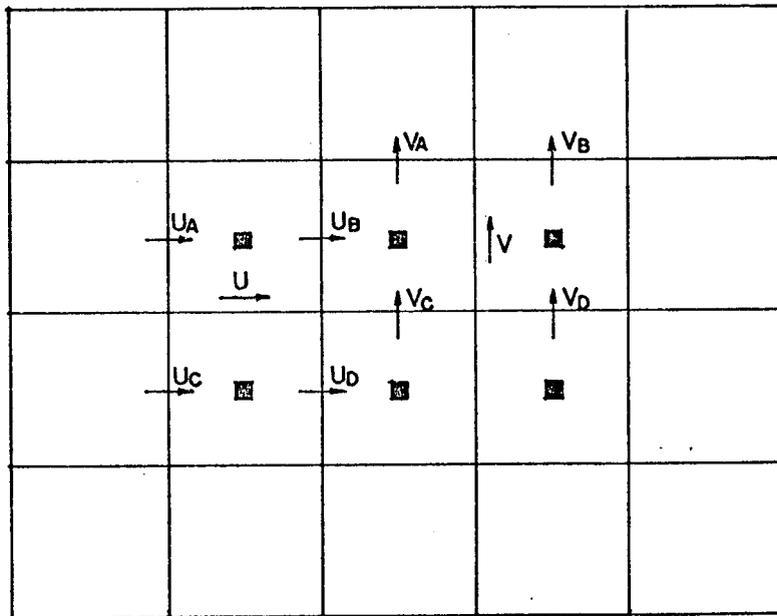


Figura 17 - Determinação das componentes contravariantes não necessárias para satisfazer conservação da massa exatamente.

5.6 - OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE POISSON PARA A PRESSÃO.

A equação de Poisson que precisa ser resolvida no procedimento descrito anteriormente é obtida inserindo as Equações (5.11) e (5.12) na relação da Continuidade, Equação (4.38). Este procedimento tem sido classificado como ativo por Raithby & Schneider [18] uma vez que ajuda a trazer as velocidades corrigidas para perto dos valores que satisfazem as equações de movimento.

Para a obtenção da equação considere a Figura 18 onde a equação de conservação da massa é aplicada a um volume de controle interno centrado em P.

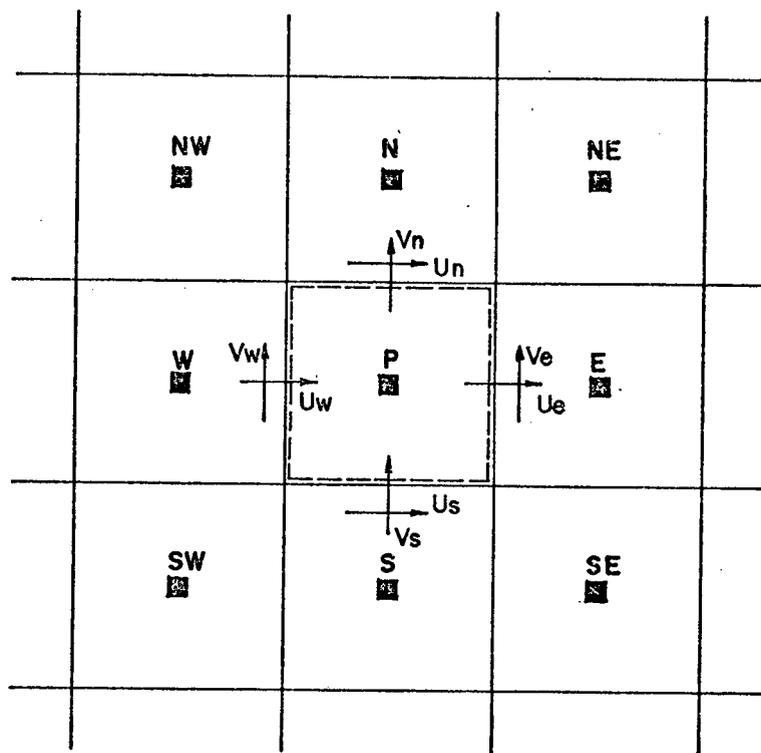


Figura 18 - Volume de controle da continuidade mostrando as velocidades que tomam parte no balanço de massa.

As quatro velocidades envolvidas no balanço de massa para aquele volume de controle são:

$$U_e = U_e - \left| \frac{\Delta V}{A_p} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right|_e (P_E - P_P) + \frac{1}{4} \left| -\frac{\Delta V}{A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right|_e (P_{NE} + P_N - P_{SE} - P_S) \quad (5.15)$$

$$U_w = \hat{U}_w - \left| \frac{\Delta V}{A_p} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right|_w (P_p - P_w) + \left| \frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right|_w (P_{NW} + P_N - P_{SW} - P_S) \quad (5.16)$$

$$V_n = \hat{V}_n - \left| \frac{\Delta V}{A_p} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right|_n (P_N - P_p) + \left| \frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right|_n (P_{NE} + P_E - P_{NW} - P_w) \quad (5.17)$$

$$V_s = \hat{V}_s - \left| \frac{\Delta V}{A_p} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right|_s (P_p - P_S) + \left| \frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right|_s (P_{SE} + P_E - P_{SW} - P_w) \quad (5.18)$$

Inserindo as Equações (5.15) a (5.18) na equação da Continuidade, Equação (4.38), obtêm-se:

$$A_p P_p = A_e P_e + A_w P_w + A_n P_n + A_s P_s + A_{ne} P_{NE} + A_{nw} P_{NW} + A_{se} P_{SE} + A_{sw} P_{SW} + B \quad (5.19)$$

onde

$$A_p = \left(\frac{\Delta V}{A_p} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right)_w + \left(\frac{\Delta V}{A_p} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right)_e + \left(\frac{\Delta V}{A_p} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right)_n + \left(\frac{\Delta V}{A_p} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right)_s \quad (5.20)$$

$$A_e = \left(\frac{V}{A_p} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right)_e + \left(\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_s - \left(\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_n \quad (5.21)$$

$$A_w = \left(\frac{\Delta V}{A_p} \frac{\alpha}{\Delta \xi} \right)_w - \left(\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_s + \left(\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_n \quad (5.22)$$

$$A_n = \left(\frac{\Delta V}{A_p} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right)_n + \left(\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_w - \left(\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_e \quad (5.23)$$

$$A_s = \left(\frac{\Delta V}{A_p} \frac{\gamma}{\Delta \eta} \right)_s - \left(\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_w + \left(\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_e \quad (5.24)$$

$$A_{ne} = - \left(\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_e - \left(\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_n \quad (5.25)$$

$$A_{se} = \left(\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_e + \left(\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_s \quad (5.26)$$

$$A_{nw} = \left(\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_w + \left(\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_n \quad (5.27)$$

$$A_{sw} = - \left(\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \eta} \right)_w - \left(\frac{\Delta V}{4A_p} \frac{\beta}{\Delta \xi} \right)_s \quad (5.28)$$

$$B = \nabla \cdot \hat{V} = \hat{U}_w - \hat{U}_e + \hat{V}_s - \hat{V}_n \quad (5.29)$$

Inspecionando os coeficientes acima observa-se que

$$A_p = A_e + A_n + A_w + A_s \quad (5.30)$$

e

$$A_{ne} + A_{nw} + A_{se} + A_{sw} = 0 \quad (5.31)$$

Neste caso a pressão no ponto P está fortemente ligada aos quatro pontos vizinhos paralelos (W,E,S,N) e fracamente ligada aos diagonais (SW, SE, NW, NE). Este tipo de estrutura é também exibido pela equação de Poisson da pressão para um sistema de coordenadas ortogonal, razão pela qual esta equação de Poisson de 9 pontos apresenta taxa de convergência semelhante àquela de 5 pontos das grades ortogonais [2]. É importante observar ainda que quando a grade é ortogonal ($\beta=0$) os coeficientes reduzem-se àqueles encontrados para qualquer sistema de coordenadas ortogonais.

Outrossim, os coeficientes dados pelas Equações (5.20) a (5.28) são para volumes de controle internos. Os coeficientes dos elementos nas fronteiras são obtidos da mesma maneira, isto é, aplicando conservação da massa nos mesmos mas obedecendo as condições de contorno existentes na respectiva fronteira. Detalhes referentes a aplicação das condi-

ções de contorno, para posterior obtenção destes coeficientes (Apêndice A), são apresentados no próximo capítulo.

5.7 - AVALIAÇÃO DO GRADIENTE DE PRESSÃO PARA VOLUMES DE CONTROLE DE VELOCIDADE LOCALIZADOS NAS FRONTEIRAS

Analisando-se as equações discretizadas de movimento para U e V, Equação (5.3) e (5.4), verifica-se que, em função da existência das derivadas cruzadas para a pressão, há necessidade de um tratamento especial para volumes de controle de velocidade localizados nas fronteiras.

Considere-se o volume de controle de velocidade U na fronteira mostrado na Figura 19. Para avaliar $\partial P / \partial \eta$ no ponto 3 é desejável, como uma maneira de obter-se precisão e consistência com a aproximação usada para os pontos interiores, avaliar-se este gradiente com uma aproximação de segunda ordem. A equação para este perfil é

$$P(\eta) = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 \quad (5.32)$$

Eliminando-se as constantes pelo uso das pressões nos pontos 2 e 3, e do gradiente de pressão na parede, obtém-se

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_3 = \frac{P_3 - P_2}{2} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_f \quad (5.33)$$

onde $\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_3$ é o gradiente de pressão a ser inserido na equação de movimento (Equação (5.3)).

Se uma avaliação do gradiente de pressão de primeira ordem para $\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_3$ fosse admitida, o último termo da Equação (5.33) desapareceria. Mas, como a utilização de uma aproximação de segunda ordem é desejável, o termo $\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_f$ precisa ser avaliado. Para tal, é considerado uma nova aproximação parabólica.

Considere-se a Figura 20 onde uma parábola é assumida pas

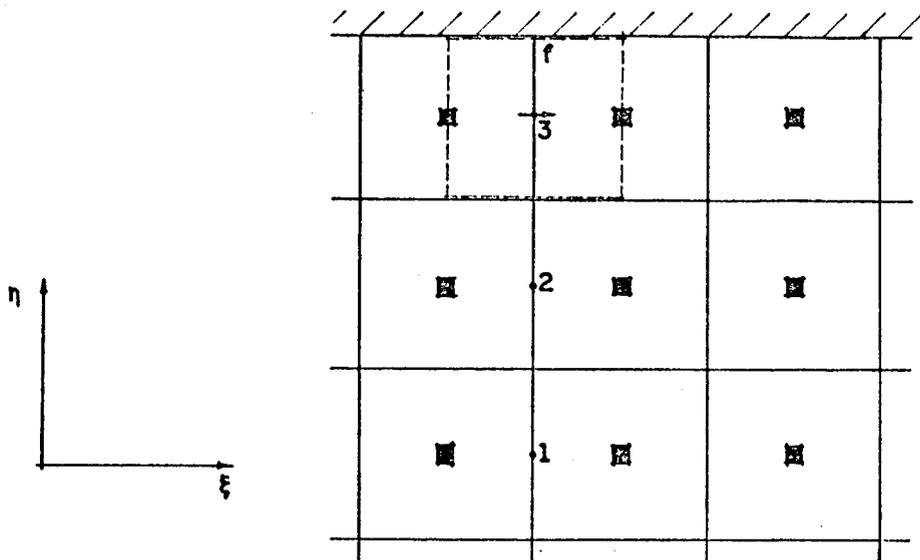


Figura 19 - Volume de controle da velocidade U na fronteira. Avaliação do gradiente $\left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)_3$.

sando através dos pontos 3, 2 e 1. As constantes a_0 , a_1 e a_2 são determinadas utilizando-se os valores do campo de pressões, nos pontos especificados, do nível de iteração anterior. O gradiente de pressão na fronteira é então dado por

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)_f = a_1 \quad (5.34)$$

onde

$$a_1 = 2P_3 + P_1 - 3P_2 \quad (5.35)$$

A utilização do campo de pressões do nível de iteração anterior não causa maiores problemas uma vez que a inclusão do termo $\left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)_f$ somente faz uma pequena correção que dá a $\left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)_3$ uma precisão maior, em função da aproximação de segunda ordem. Uma vez encontrada a convergência, a parábola passando através dos pontos 1, 2 e 3 é exatamente a mesma àquela assumida na obtenção da Equação (5.33).

Uma equação similar à Equação (5.33) é válida para o gradiente de pressão nas outras fronteiras do domínio transfor-

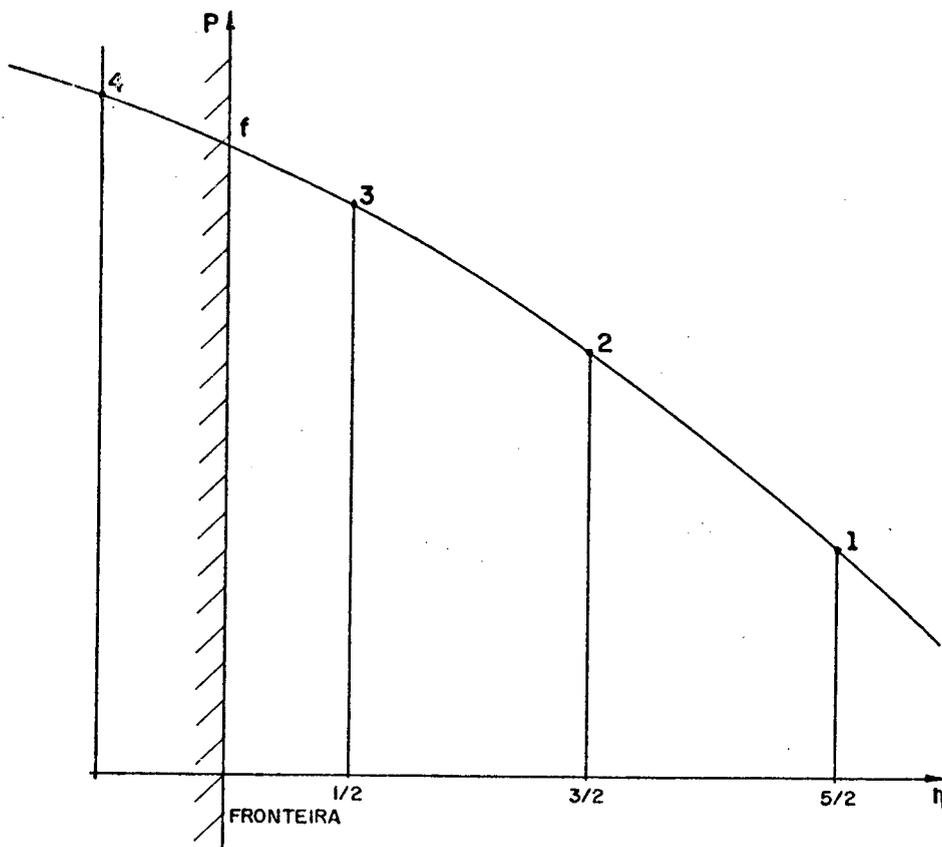


Figura 20 - Perfil de pressão assumido para o cálculo do gradiente de pressão nas fronteiras.

mado. O gradiente dado pela Equação (5.34) aparece também nos termos fonte da equação de Poisson para a pressão quando aplicada aos volumes de controle de fronteira (ver Apêndice A).

5.8 - DETALHES NUMÉRICOS

A - EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações de movimento são resolvidas explicitamente, mas a cada varredura no campo de velocidade é feito o avanço do campo de pressões, que é obtido de uma maneira implícita. O campo de pressões obtido é então utilizado para corrigir velocidades tal que a massa seja conservada e é tomado como o campo de pressões atualizado para utilização no próximo ciclo iterativo.

B - EQUAÇÃO DE PRESSÃO

A equação da pressão, por ser uma equação do tipo Poisson, é resolvida implicitamente no ciclo iterativo. Utiliza-se na sua solução a técnica S.O.R. com parâmetro de relaxação variável. Por ser de convergência lenta, a equação de Poisson é dominante na solução de problemas fluído-térmicos. Assim, é uma grande vantagem o fato de necessitar-se resolver uma única equação deste tipo a cada ciclo iterativo, decorrente da utilização do método PRIME.

No processo iterativo, a tolerância de convergência para a pressão foi fixada em $1.0E-04$, segundo o seguinte critério

$$\epsilon < \frac{|p^{n+1} - p^n|}{|R|} \quad (5.36)$$

onde $R = P_{\max} - P_{\min}$, sendo P_{\max} e P_{\min} os valores máximo e mínimo da pressão no domínio, e ϵ é a tolerância.

Um outro detalhe, que merece atenção especial, é a fixação de um nível de referência para a pressão. Considere-se, inicialmente, a solução de problemas bidimensionais de escoamento "incompressível" em que todas as velocidades nas fronteiras são prescritas. Naturalmente que essas velocidades devem ser especificadas de tal maneira que a massa seja conservada no domínio. Se a conservação da massa é forçada em todos os volumes de controle internos, exceto para um, então a conservação global de massa garante a satisfação da continuidade também para este volume. Mas se a conservação da massa local também for forçada para este volume, a consequência será o surgimento de uma redundância na equação de pressão, a qual, por sua vez, implicará na formação de uma matriz singular a ser resolvida quando um método direto de solução é empregado. Esse problema surge porque a equação de pressão e suas condições de contorno estabelecem uma solução dependente de uma constante genérica aditiva, isto é, o nível de pressão não está fixo. A especificação do valor da pressão em um dado ponto do interior do domínio, com a

aplicação da equação da continuidade para todos os pontos, exceto este, estabelece o nível e elimina o problema [3].

Considere-se, ainda, o problema bidimensional do escoamento "incompressível", em que o gradiente de velocidade é especificado. Suponha, na grade cartesiana apresentada na Figura 21, que $u_e = u_w$ é especificada na seção de saída do escoamento, enquanto $v = 0$ é prescrita em duas fronteiras de y constante. Para o volume de controle da parte inferior da seção de saída do escoamento, as condições de contorno, junto com a restrição da Continuidade, impõem que v na superfície superior deste volume de controle seja zero. O mesmo se verifica para os demais volumes de controle, mas como o volume de controle da parte superior da seção de saída do escoamento requer que todos os v 's sejam zero, tem-se que a aplicação da restrição da continuidade, para este volume de controle, se torna uma redundância. Do mesmo modo que no caso anterior, no qual as equações estabeleceram uma solução dependente de uma constante genérica aditiva, agora a pressão ao longo de toda uma linha também só pode ser determinada pela especificação de uma constante aditiva. A utilização de um método direto de solução também falharia, mas agora a utilização de um método de solução linha por linha constitui-se em método direto de solução. Logo, para aplicar o método TDMA é necessário substituir a aplicação da restrição da continuidade pela fixação do valor da pressão em toda a linha que define a seção de saída do escoamento. É importante observar, contudo, que uma solução ponto a ponto, elimina o problema [3].

Assim, considerando que neste trabalho todas as soluções são obtidas através da aplicação da técnica S.O.R., elimina-se este problema, não havendo necessidade de fixação de um nível para as pressões, tanto para a situação em que as velocidades são prescritas ou em que o gradiente de velocidades é especificado. Entretanto, a taxa de convergência é afetada pela fixação ou não deste nível, podendo aumentar ou diminuir [17 | pg. 130. Fixou-se, então, a pressão para o volume de controle da continuidade no canto superior direito do plano transformado, Esta pressão foi feita igual a zero, que passa a ser o valor de referência para todas as pressões relativas do domínio.

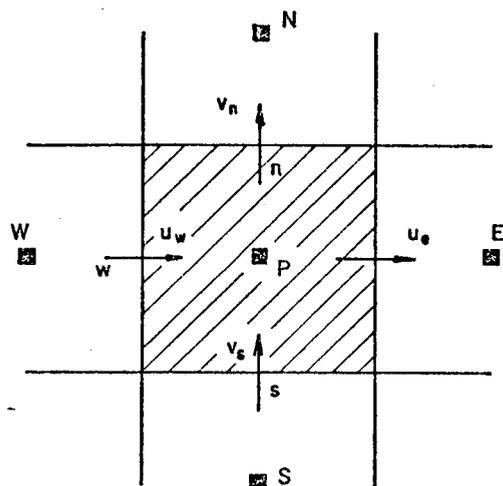


Figura 21 - Seção de uma grade cartesiana mostrando o volume de controle da pressão juntamente com as velocidades cartesianas.

C - EQUAÇÃO DA ENERGIA

A equação da energia também é resolvida implicitamente uma única vez a cada ciclo iterativo. Sua solução é obtida através da técnica S.O.R. O critério de convergência utilizado é aquele mesmo utilizado para a equação da pressão. A tolerância de convergência, contudo, foi fixada em 5.0E-05.

D - DETALHES GERAIS

O teste de convergência para a obtenção dos resultados finais é feito utilizando as velocidades cartesianas calculadas no domínio. O critério utilizado é o mesmo daquele para a pressão com tolerância fixada em 5.0E-05. A escolha das velocidades foi feita porque estas conferem um caráter mais restritivo ao critério de convergência, em relação a pressão e a temperatura.

O valor do avanço iterativo foi fixado em $E = 2,5$. Este va
lor foi obtido após a realização de alguns testes sem, contudo,
tratar-se de um valor otimizado.

CONDIÇÕES DE CONTORNO

6.1 - INTRODUÇÃO

Um fator importante na solução das equações governantes é a aplicação das condições de contorno. Para sistemas não ortogonais, este fato se reveste de mais significado ainda na aplicação de condições de contorno do tipo Neumann e Robin. É, exatamente, para aplicar as condições de contorno corretamente que se optou pelo uso de sistemas de coordenadas que coincidem com a geometria.

Por outro lado, como todos os cálculos numéricos são realizados no domínio transformado é lógico que as condições de contorno também sejam incorporadas às equações neste domínio. O procedimento adotado para tratar das condições de contorno no plano transformado e sua respectiva incorporação ao sistema de equações governantes é apresentado neste capítulo.

Outro ponto importante também discutido é com relação a especificação da condição de contorno na seção de saída; uma questão problemática na solução de qualquer problema elíptico com fluxo de massa nas fronteiras, uma vez que não se conhece, normalmente, as condições de saída. Aborda-se, também, as implicações na especificação desta condição de contorno com relação a solução do sistema de equações e sua utilização em grades não ortogonais.

6.2 - CONDIÇÕES DE CONTORNO NO DOMÍNIO TRANSFORMADO

Os problemas físicos tratados neste trabalho são todos de finidos para domínios simplesmente conexos. A geração de um sistema de coordenadas naturais para esses domínios é feita sub-

dividindo-se as fronteiras do domínio físico em quatro segmentos, sendo cada um deles equivalente a um dos lados do retângulo no plano transformado. Dois desses segmentos são de linhas ξ constantes e dois de linhas η constantes. Logo, as condições de contorno a serem aplicadas no domínio transformado são as próprias condições encontradas nos quatro segmentos físicos que serão mapeados sobre os quatro lados do retângulo no sistema (ξ, η) .

Existem diversas maneiras de se aplicar estas condições de contorno. Uma delas é a utilização de pontos fictícios. Este é um procedimento largamente utilizado com o objetivo de se ter uma única equação para todos os pontos do domínio. Obviamente, isto requer que se obtenha equações para os pontos fictícios que sejam função das condições de contorno em cada fronteira e, assim, incorporar as condições de contorno às equações governantes através dos valores da variável obtidos para os pontos fictícios. Quando o sistema coordenado empregado é ortogonal, tanto as condições de Dirichlet quanto as de Neumann e Robin são de fácil aplicação. Considere-se, por exemplo, a Figura 22 onde é mostrada uma fronteira referenciada ao sistema de coordenadas ortogonal (x, y) submetida às seguintes condições:

1) Dirichlet - Variável ϕ prescrita na fronteira w . Neste caso

$$\phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2} \quad (6.1)$$

e o valor da variável ϕ no ponto fictício W é

$$\phi_W = -\phi_P + 2\phi_w \quad (6.2)$$

2) Neumann - Fluxo prescrito q'' na fronteira w . Neste caso

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right|_w = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w = q'' \quad (6.3)$$

Utilizando-se diferenças centrais para aproximar a Equação (6.3), resulta

$$q'' = \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} \quad (6.4)$$

e o valor da variável ϕ no ponto fictício W é

$$\phi_W = \phi_P - q''\Delta x \quad (6.5)$$

Observa-se, portanto, que as equações para determinar os valores da variável nos pontos fictícios, Equações (6.2) e (6.5), são de fácil solução e que podem ser representadas genericamente por

$$\phi_N = A \phi_{N-1} + B \quad (6.6)$$

onde os valores de A e B dependem do tipo de condição de contorno.

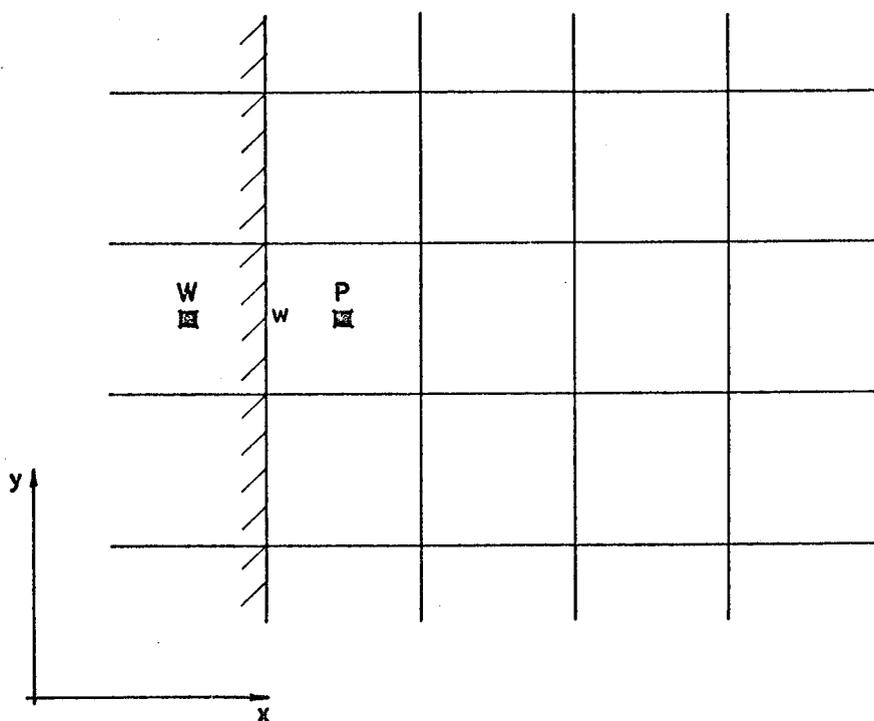


Figura 22 - Pontos fictícios para fronteira referenciada ao sistema de coordenadas ortogonal (x,y) .

Entretanto, quando está se trabalhando com sistemas de coordenadas generalizadas, as condições de Neumann e Robin por envol-

verem derivadas da função, não permitem um procedimento tão simples como o mostrado. Para exemplificar, seja a aplicação da condição de um fluxo prescrito a uma fronteira de ξ constante, fronteira w , mostrada na Figura 23. Neste caso a expressão da derivada normal é dada por

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right|_w = J\alpha^{\frac{1}{2}} \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_w - J\alpha^{\frac{1}{2}} \beta \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_w = q'' \quad (6.7)$$

Analogamente ao caso ortogonal, para o caso não ortogonal, a expressão acima aproximada, para o valor no ponto fictício W , resulta

$$\phi_W = \left(\frac{J\alpha^{\frac{1}{2}} \phi_P}{\Delta x} - J\alpha^{\frac{1}{2}} \beta \left(\frac{\phi_{NW} + \phi_N - \phi_{SW} - \phi_S}{4\Delta x} \right) - q'' \right) / \left(\frac{J\alpha^{\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) \quad (6.8)$$

Observa-se que, neste caso, na determinação da variável no ponto fictício W estão envolvidos os pontos NW e SW , que também são fictícios, além dos pontos P, N, S . Este fato complica a obtenção da solução para esta equação, tornando-a de difícil convergência.

Logo, neste trabalho os pontos fictícios são utilizados somente para a velocidade pois, normalmente, se conhece os valores desta variável na fronteira. Para as demais variáveis (pressão, temperatura) utiliza-se uma outra maneira de aplicar as condições de contorno que consiste em realizar-se balanços nas fronteiras. Este procedimento incorpora as condições de contorno diretamente ao sistema de equações satisfazendo os princípios de conservação localmente. Para determinar as equações de fronteira para a temperatura realiza-se balanços de calor enquanto que balanços de massa são utilizados para determinar as equações de fronteira para a pressão. Estes procedimentos são agora descritos.

6.2.1 - CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA A TEMPERATURA

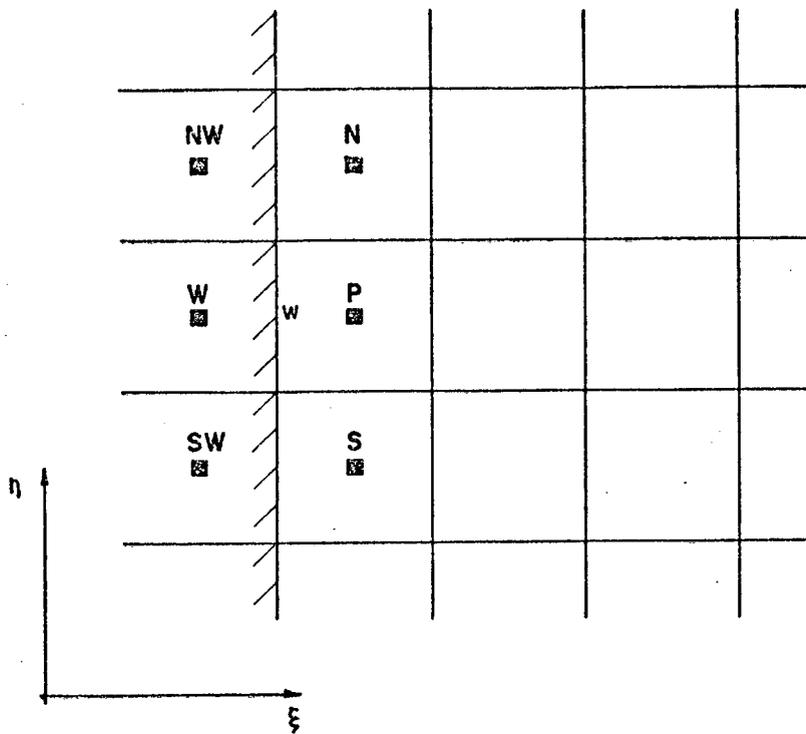


Figura 23 - Pontos fictícios para fronteira referenciada ao sistema de coordenadas generalizado (ξ, η) .

Objetivando facilitar a compreensão do procedimento adotado considere-se, inicialmente, a Figura 24 onde é mostrado o volume de controle da temperatura para uma malha interna. Realizando-se balanço de calor para este volume de controle, no plano transformado, obtém-se

$$q_{W \rightarrow P} \Delta \eta \cdot 1 + q_{S \rightarrow P} \Delta \xi \cdot 1 - q_{P \rightarrow N} \Delta \xi \cdot 1 - q_{P \rightarrow E} \Delta \eta \cdot 1 + M_w c_p T_w + M_s c_p T_s - M_n c_p T_n - M_e c_p T_e = 0 \quad (6.9)$$

onde

$$M_w = \rho U_w; M_e = \rho U_e; M_s = \rho V_s; M_n = \rho V_n \quad (6.10)$$

Substituindo-se os fluxos difusivos de calor pela equação de Fourier, para o plano transformado, com $\Delta \eta = \Delta \xi = 1$ tem-se:

$$-k \left[\alpha J \frac{\partial T}{\partial \xi} + \beta J \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_w - k \left[\gamma J \frac{\partial T}{\partial \eta} + \beta J \frac{\partial T}{\partial \xi} \right]_s +$$

$$k|\gamma J \frac{\partial T}{\partial \eta} + \beta J \frac{\partial T}{\partial \xi}|_n + k|\alpha J \frac{\partial T}{\partial \xi} + \beta J \frac{\partial T}{\partial \eta}|_e + \quad (6.11)$$

$$M_w c_p T_w + M_s c_p T_s - M_n c_p T_n - M_e c_p T_e = 0$$

Utilizando-se as aproximações para os perfis ϕ e para os termos difusivos dados pelas Equações (4.4) a (4.11) para $\phi=T$ e rearranjando-se os termos obtêm-se

$$A_p T_p^{n+1} = A_w T_w^{n+1} + A_s T_s^{n+1} + A_e T_e^{n+1} + A_n T_n^{n+1} + STT \quad (6.12)$$

onde os coeficientes são dados pelas Equações (4.19) a (4.22) e pela Equação (4.37) e o termo fonte, incluindo-se o termo "transiente" para utilizar a coordenada t como nível de iteração, é dado por

$$STT = (C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_e + (C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_n - (C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_w - (C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_s + \frac{A_p T_p^n}{1 + E} \quad (6.13)$$

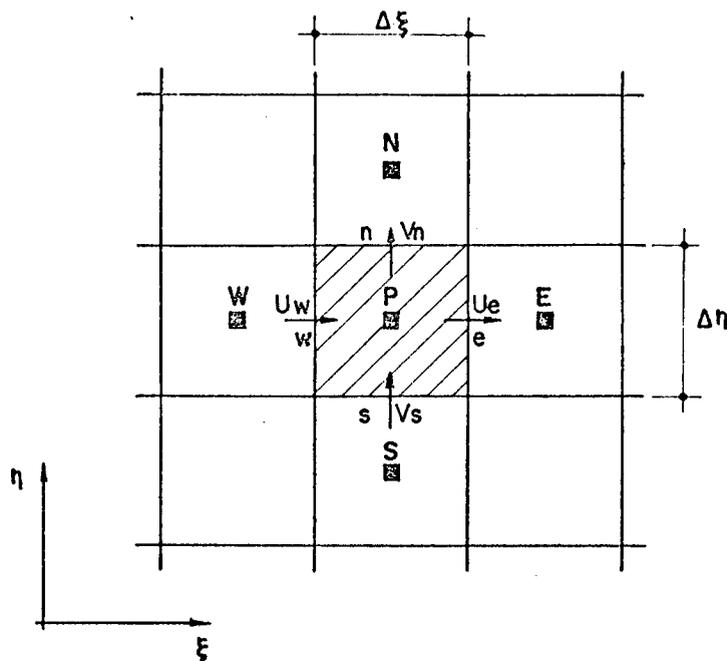


Figura 24 - Volume de controle da temperatura para uma malha interna.

Feito isto, considere-se o volume de controle da temperatura para uma fronteira qualquer, Figura 25. Realizando-se balan-

ço de calor para esta fronteira tem-se:

$$A_p T_p^{n+1} = A_e T_E^{n+1} + A_w T_W^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + STT \quad (6.14)$$

com

$$STT = (C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta})_e - (C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta})_w - (C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi})_s - \frac{q}{c_p} \Big|_n + \frac{A_p T_p^n}{1+E} \quad (6.15)$$

onde $q \Big|_n$ representa o fluxo de energia (convectivo e difusivo) que atravessa a fronteira norte;

e

$$A_p^* = A_e + A_w + A_s - M_n \quad (6.16)$$

Deve-se salientar que neste caso a alteração sofrida na determinação de A_p é decorrente da necessidade de satisfazer-se a equação da continuidade, Equação (4.38), utilizada na determinação da Equação (6.14), sendo que o termo referente ao fluxo de energia que atravessa a fronteira foi transferido para o termo fonte, já que é conhecido (condição de contorno). Este termo é, obviamente, função do tipo de condição de contorno. Assim sendo tem-se que:

a) Parede sólida com fluxo de calor prescrito

$$q \Big|_n = q_{\text{prescrito}} \quad (6.17)$$

$$M_n = 0 \quad (6.18)$$

b) Parede sólida com temperatura prescrita

$$\frac{q}{c_p} \Big|_n = - (C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi})_n \quad (6.19)$$

$$M_n = 0 \quad (6.20)$$

onde $\frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_n$ e $\frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_n$ são calculados com a distribuição de temperatura prescrita sobre a fronteira. Se para a fronteira norte e-

xemplificada, a temperatura for constante, tem-se $\frac{\partial T}{\partial \xi})_n = 0$.

c) Fronteira com temperatura e fluxo de massa prescritos.

$$\frac{q}{c_p n} = - (C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi})_n + M_n T_n \quad (6.21)$$

Ressalte-se que, opcionalmente, para estas duas últimas condições de contorno pode-se utilizar pontos fictícios, já que as mesmas são condições de Dirichlet (temperatura prescrita). Entretanto, o método apresentado acima tem a vantagem de ser um método geral, fator importante quando do desenvolvimento de métodos mais abrangentes, como se pretende desenvolver neste trabalho. Portanto, balanços de calor são realizados para todos os volumes de controle nas fronteiras e as equações para a temperatura com os seus respectivos termos fonte, para o problema resolvido nesta dissertação, são apresentados no Apêndice B.

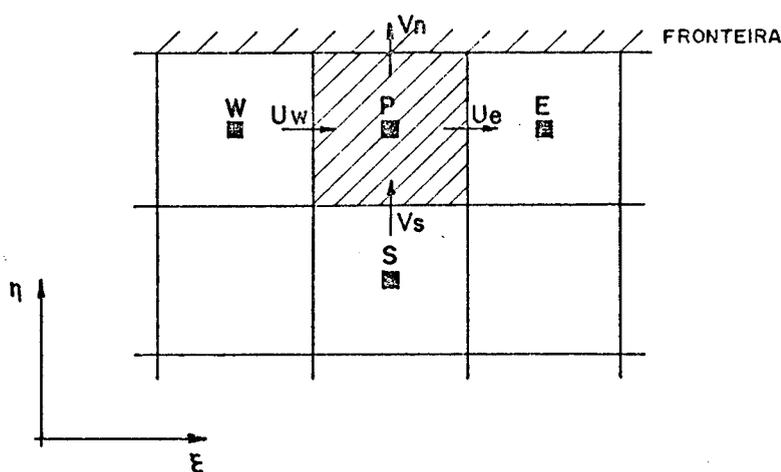


Figura 25 - Volume de controle da temperatura para a fronteira.

6.2.2 - CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA A PRESSÃO.

Em função do acoplamento pressão-velocidade foi visto que a cada iteração resolve-se uma equação de Poisson para a pressão com o objetivo de atualizar o campo de pressões e corrigir o campo de velocidades. A questão que se coloca é como aplicar as

condições de contorno para a pressão para os volumes de controle junto às fronteiras. Em [2] Maliska recomenda que se utilize métodos em que as condições de contorno da velocidade assegurem implicitamente condições corretas para a pressão [3]. Esta recomendação implica em utilizar-se procedimento semelhante ao utilizado para os volumes de controle internos, com a diferença de que as equações de movimento, Equações (5.3) e (5.4) são agora escritas observando-se as condições de contorno existentes para a velocidade na respectiva fronteira.

Considere-se, por exemplo, a Figura 26 onde é mostrado o volume de controle da pressão para uma determinada fronteira. Se a condição de contorno para esta fronteira for a de velocidade prescrita, as equações de movimento são

$$U_e = \hat{U}_e = U_e \text{ prescrita} \quad (6.22)$$

$$U_w = \hat{U}_w - \left[\frac{\alpha}{A_P} \right]_w (P_p - P_w) + \left[\frac{\beta}{4A_P} \right]_w (P_{NW} + P_N - P_{SW} - P_S) \quad (6.23)$$

$$V_s = \hat{V}_s - \left[\frac{\gamma}{A_P} \right]_s (P_p - P_s) + \left[\frac{\beta}{4A_P} \right]_s (P_s + P_p - P_{SW} - P_w + 2\Delta P_f|_s) \quad (6.24)$$

$$V_n = \hat{V}_n - \left[\frac{\gamma}{A_P} \right]_n (P_n - P_p) + \left[\frac{\beta}{4A_P} \right]_n (P_n + P_p - P_{NW} - P_w + 2\Delta P_f|_n) \quad (6.25)$$

onde ΔP_f representa o gradiente de pressão na fronteira e é dado pela Equação (5.34).

Substituindo-se as Equações (6.22) a (6.25) na equação da continuidade, Equação (4.38) obtêm-se as expressões para os coeficientes

$$A_e = A_{ne} = A_{se} = 0 \quad (6.26)$$

A_w, A_{nw}, A_{sw} → inalterados em relação aos coeficientes para pontos internos

$$A_n = \left(\frac{\gamma}{A_P V}\right)_n + \left(\frac{\beta}{4A_P V}\right)_w - \left(\frac{\beta}{4A_P V}\right)_n \quad (6.27)$$

$$A_s = \left(\frac{\gamma}{A_P V}\right)_s - \left(\frac{\beta}{4A_P U}\right)_w + \left(\frac{\beta}{4A_P V}\right)_s \quad (6.28)$$

$$B = \nabla \cdot \vec{V} + (K_V)_s - (K_V)_n \quad (6.29)$$

onde

$$K_V = \frac{\Delta P_f \beta}{2A_P V} \quad (6.30)$$

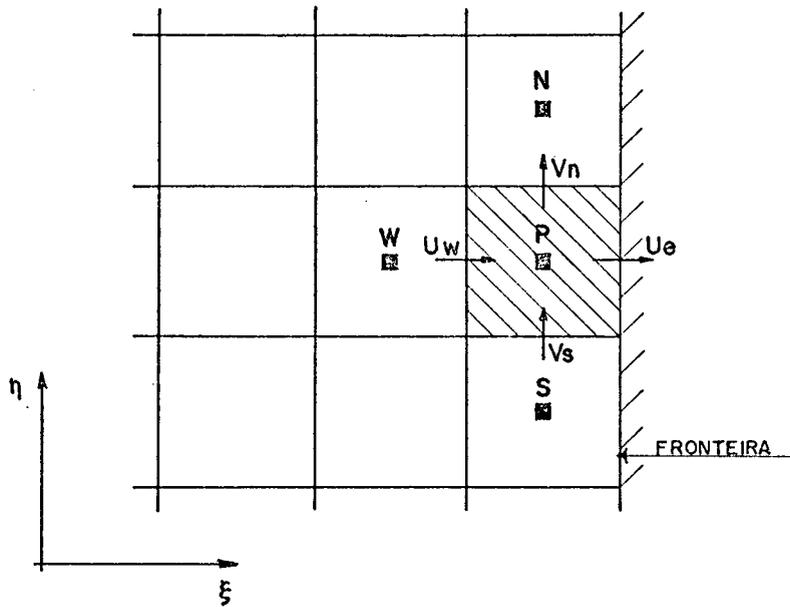


Figura 26 - Volume de controle da Continuidade junto a fronteira, mostrando as componentes contravariantes envolvidas no balanço de massa.

Se a condição de contorno para a fronteira, mostrada na Figura 26, for a de derivada nula as equações de movimento são idênticas àquelas para a condição de fronteira com velocidade prescrita, exceto para a componente contravariante na fronteira, para a qual tem-se

$$U_e = U_w \quad (6.31)$$

Substituindo-se a Equação (6.31) e as Equações (6.24) e (6.25) na equação da continuidade, Equação (4.38), obtêm-se

$$A_e = A_{ne} = A_{se} = 0 \quad (6.32)$$

$$A_w = \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_n - \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_s \quad (6.33)$$

$$A_{nw} = \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_n \quad (6.34)$$

$$A_{sw} = -\left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_s \quad (6.35)$$

$$A_s = \left(\frac{\gamma}{A_p V}\right)_s + \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_s \quad (6.36)$$

$$A_n = \left(\frac{\gamma}{A_p V}\right)_n - \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_n \quad (6.37)$$

$$B = \nabla \cdot \vec{V} + (K_V)_s - (K_V)_n \quad (6.38)$$

Procedimentos semelhantes aos descritos são utilizados para todos os volumes de controle nas fronteiras sendo que os coeficientes adequados para a pressão, nestes volumes de controle, para o problema de interesse deste trabalho são apresentados no Apêndice A.

6.2.3 - CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A VELOCIDADE

Conforme já comentado, para a velocidade são utilizados os pontos fictícios. Obviamente que os pontos fictícios são criados para aquelas velocidades que não coincidem com a fronteira. É o caso das velocidades contravariantes U nas faces sul e norte e das velocidades contravariantes V nas faces este e oeste. A Equação (6.6) é então utilizada.

Na seção anterior discutiu-se o tratamento adequado para a incorporação das condições de contorno às equações no domínio transformado. Entretanto, uma questão relevante, que é a especificação das condições de contorno na seção de saída do escoamento, ainda continua pendente.

Para o fluido que "deixa" o domínio de cálculo normalmente são desconhecidos tanto os valores da variável (temperatura, velocidade, pressão) quanto os seus respectivos fluxos. Além disto, deve-se ter em mente que esta condição de contorno deve ser aplicável às mais diferentes grades e domínios de solução para garantir a generalidade do modelo. Procurando isto, utiliza-se neste trabalho a condição de derivada nula, tanto para a velocidade quanto para a temperatura. Para a pressão não há necessidade de condição de contorno na saída devido procedimento utilizado para resolver o acoplamento pressão-velocidade, discutido anteriormente.

A condição de derivada nula para a velocidade é aplicada às componentes contravariantes, por serem estas componentes as responsáveis pelo fluxo de massa através das células elementares. As implicações na escolha desta condição de contorno bem como a sua aplicação em sistemas ortogonais e não-ortogonais são agora descritos.

É sabido que a condição de derivada nula requer a existência de pleno desenvolvimento do escoamento naquele local. Contudo, em se tratando de uma condição fraca, que não impõe valores à variável, é possível utilizar-se esta condição de contorno mesmo que o perfil não esteja completamente desenvolvido, o que é demonstrado no Capítulo 7. Obviamente que, quanto mais próximo da posição de perfil completamente desenvolvido for escolhida a seção de saída, melhores serão os resultados obtidos. Assim sendo, cuidado deve ser tomado na escolha da seção de saída. Normalmente a física do problema nos indica a posição adequada. Exemplificando, um local inadequado é aquele mostrado na Figura 27(a), enquanto que a Figura 27(b) representa uma posição aceitável.

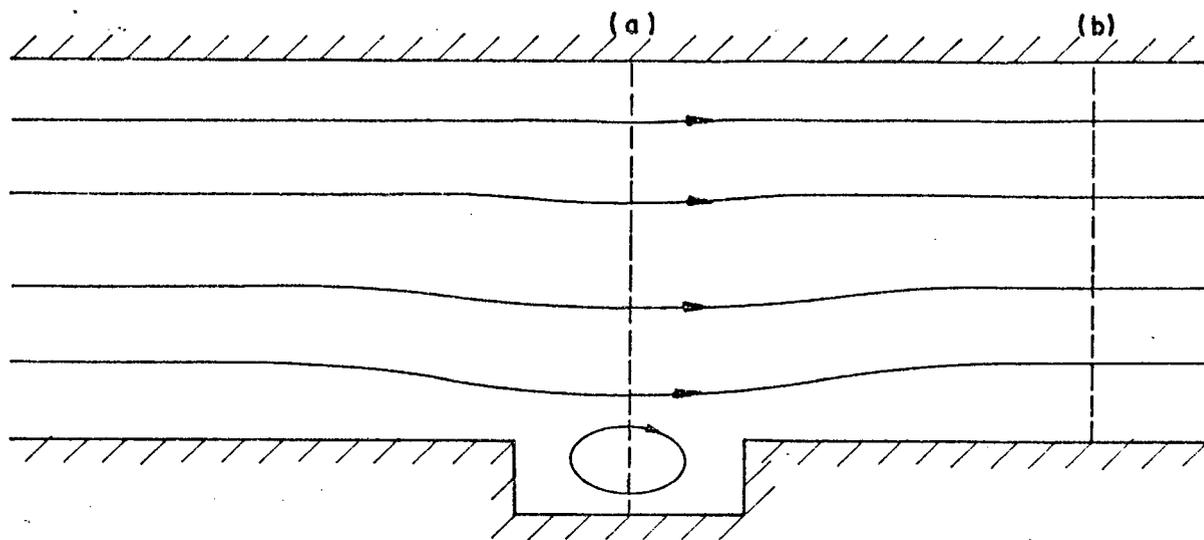


Figura 27 - Escolha de localização da seção de saída do escoamento.

Um outro cuidado que se deve ter na utilização da condição de contorno, para as velocidades, é quanto a garantia da conservação global da massa na seção de saída do escoamento. E como se pretende desenvolver modelo para resolver problemas em que os domínios de solução são os mais irregulares possíveis, é necessário também que a condição de contorno garanta esta conservação global de massa para estes diferentes problemas.

É justamente por isso que se optou pela utilização das componentes contravariantes na especificação da derivada nula, uma vez que estas componentes representam o valor numérico da vazão através das linhas coordenadas ξ e η . Seja, por exemplo, a componente contravariante U , dada por

$$U = u \frac{\partial y}{\partial \eta} - v \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (6.39)$$

Considere-se, somente para facilitar a demonstração, a grade cartesiana, mostrada na Figura 28. Para esta grade a componente contravariante U reduz-se a

$$U = u \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (6.40)$$

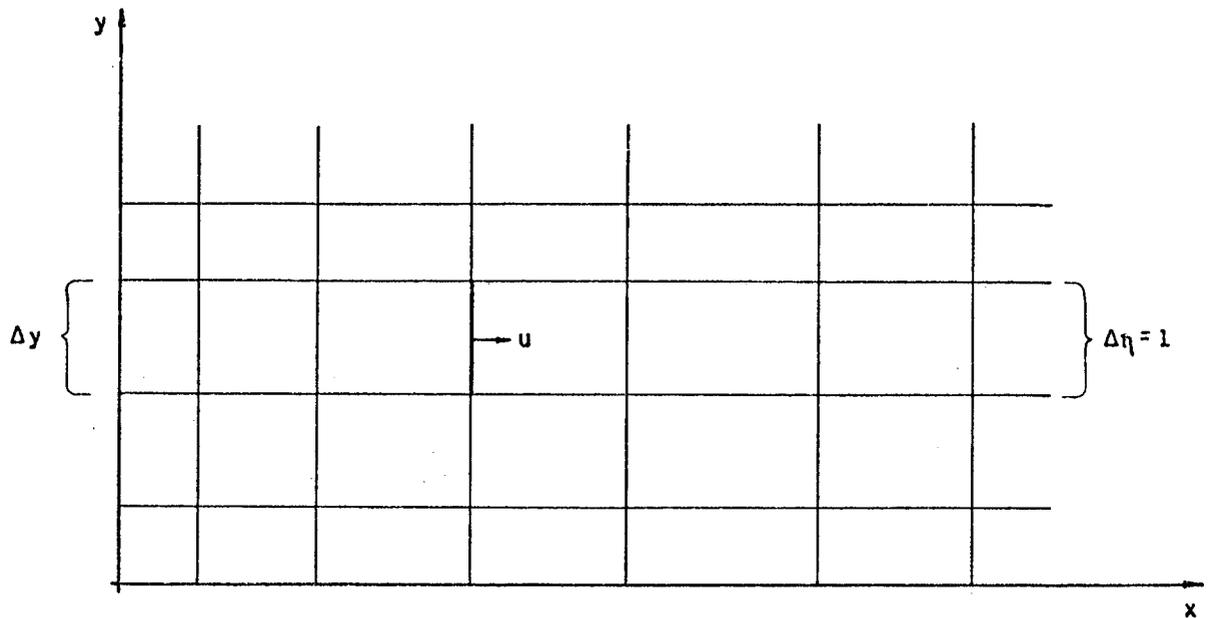


Figura 28 - Grade cartesiana utilizada para relacionar U e Q .

Aproximando-se a Equação (6.40) para volumes finitos

$$U = u \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \quad (6.41)$$

ou

$$U \Delta \eta = U \Delta y = Q \quad (6.42)$$

onde Q é a vazão através da linha coordenada ξ .

E como $\Delta \eta = 1$, tem-se

$$U = u \Delta y = Q \quad (6.43)$$

Logo, a componente contravariante U representa o valor numérico da vazão através das linhas coordenadas ξ . Procedimento semelhante pode ser utilizado para mostrar que a componente contravariante V representa o valor numérico da razão através das linhas η .

Assim, para satisfazer a conservação global de massa no

escoamento apresentado na Figura 29, é necessário que

$$\Sigma U_n = \Sigma U_b \quad (6.44)$$

isto é

$$U_{n1} + U_{n2} + U_{n3} + U_{n4} + U_{n5} = U_{b1} + U_{b2} + U_{b3} + U_{b4} + U_{b5} \quad (6.45)$$

Contudo, este somatório nada diz quanto a relação entre U_{ni} e U_{bi} para cada volume elementar.

Por outro lado, a aplicação da condição de derivada nula às componentes contravariantes do vetor velocidade na seção de saída, no plano transformado, requer que $\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} U_{n1} &= U_{b1} \\ U_{n2} &= U_{b2} \\ U_{n3} &= U_{b3} \\ U_{n4} &= U_{b4} \\ U_{n5} &= U_{b5} \end{aligned} \quad (6.46)$$

ou de uma maneira genérica

$$U_{ni} = U_{bi} \quad (6.47)$$

É fácil observar que a condição de derivada nula satisfaz a Equação (6.45), garantindo, portanto, a conservação da massa. É necessário, contudo, procurar garantir que as Equações (6.46) sejam satisfeitas.

Para tanto basta que as linhas η , na saída, sejam alinhadas com o vetor velocidade \vec{V} . Entretanto, este alinhamento só é possível se o sistema de coordenadas permitir flexibilidade na geração da malha.

Tome-se, como exemplo, o sistema de coordenadas cartesianas ou qualquer outro sistema de coordenadas convencional, para a solução de problema definido em uma geometria arbitrária,

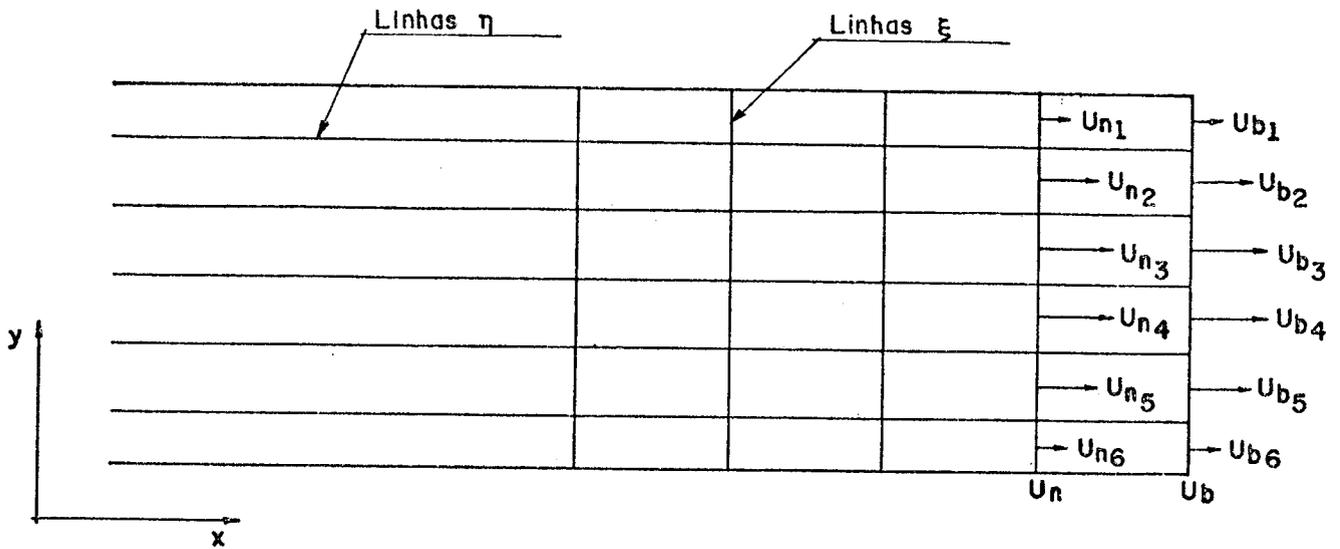


Figura 29 - Seção de saída de um canal reto e grade cartesiana.

conforme mostrado na Figura 30. Neste sistema não existe possibilidade de alinhamento do vetor velocidade com as linhas coordenadas sendo, portanto, difícil a aplicação da condição de derivada nula diretamente nas variáveis dependentes u e v .

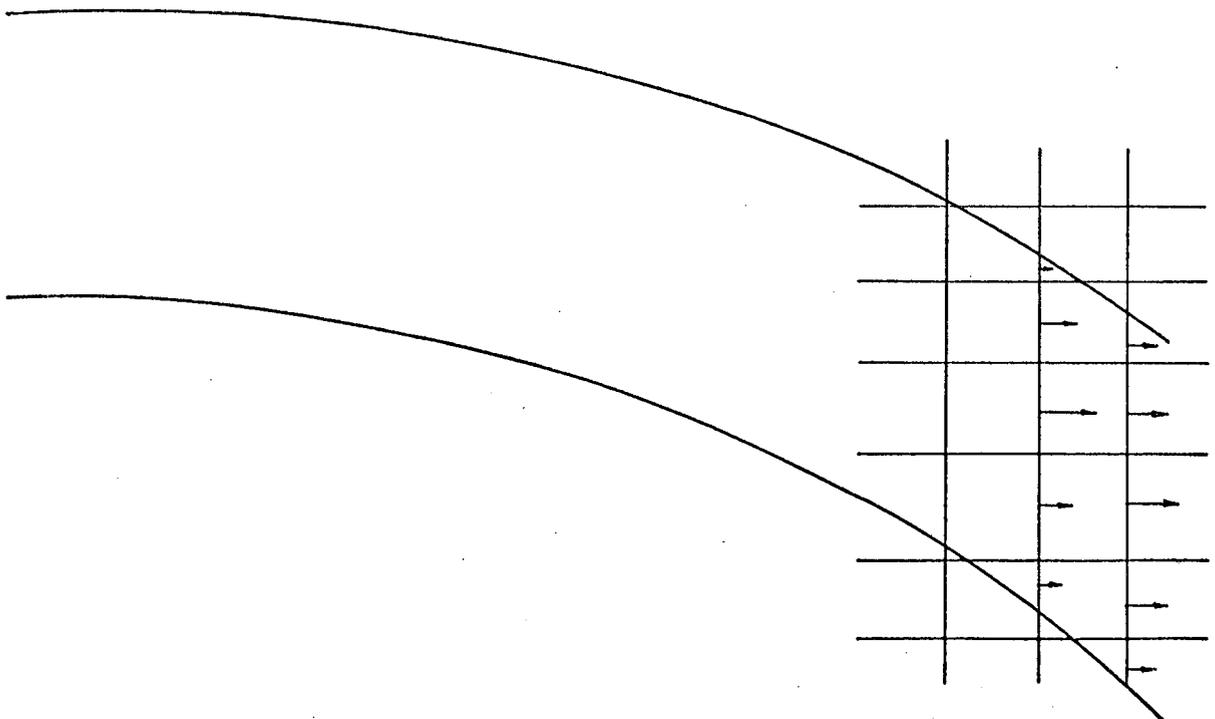


Figura 30 - Seção de saída de um canal arbitrário e grade cartesiana.

Já a utilização de sistema generalizado de coordenadas permite que se tenha controle total na geração da malha e o alinhamento da grade, apresentado na Figura 31, é facilmente obtido. Convém lembrar que este ajuste pode ser feito independente do tipo de geometria em estudo.

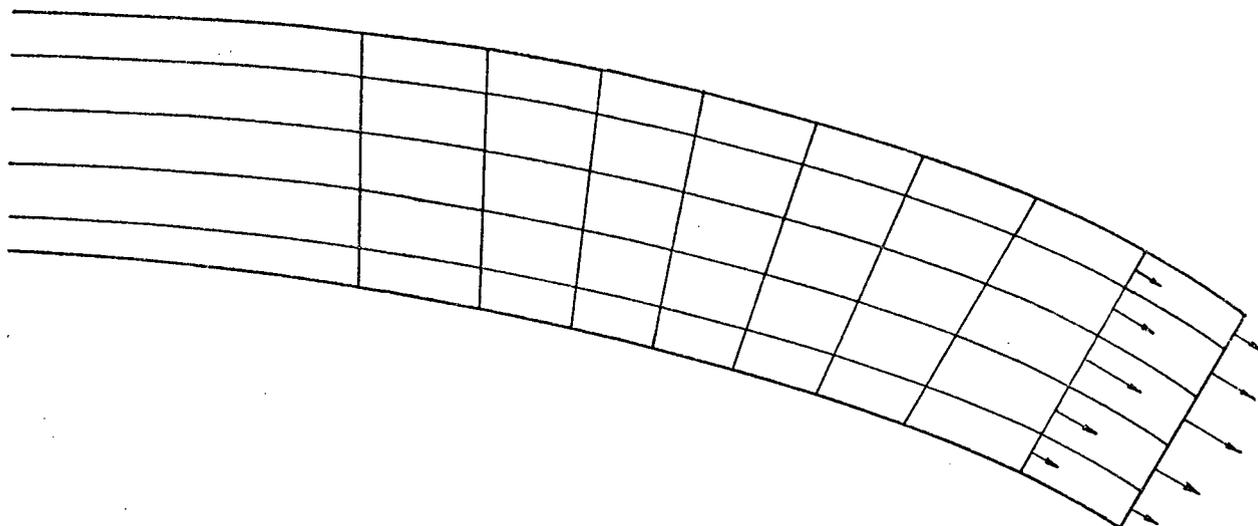


Figura 31 - Seção de saída de um canal arbitrário e grade alinhada com as linhas de fluxo.

É importante observar ainda que não há necessidade de maiores cuidados quanto as linhas coordenadas ξ . Uma vez que as linhas coordenadas η estejam alinhadas com as linhas de fluxo, garantindo que não há fluxo de massa através destas linhas coordenadas, as linhas ξ podem ser quaisquer. Esta situação é mostrada na Figura 32 e os resultados obtidos com esta grade são apresentados no Capítulo 7.

Portanto, a utilização de sistema generalizado de coordenadas permite satisfazer as Equações (6.46) e, conseqüentemente, a condição de derivada nula para a componente contravariante U ($\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0$), na seção de saída, pode ser utilizada para as mais diversas geometrias, conferindo generalidade ao modelo, que é o que se procura neste trabalho.

Resta, contudo, especificar a condição de contorno para a outra componente contravariante do vetor velocidade. Neste caso, considerando que se procurou dar uma generalidade maior à condição de contorno para a seção de saída, utilizou-se a condição de derivada nula também para a componente contravariante V

em ξ ($\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$). Esta condição de contorno, não sendo restritiva, permite o estabelecimento dos valores corretos de V na seção.

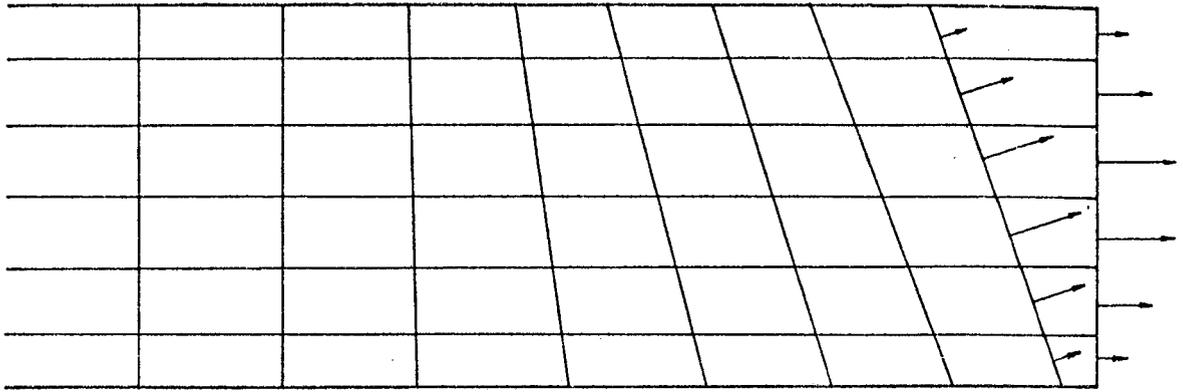


Figura 32 - Seção de saída de um canal reto com grade não-ortogonal.

No que se refere a condição de contorno para a temperatura, o problema é bem menos complexo, uma vez que a temperatura é uma variável escalar. A utilização de derivada nula para a temperatura é sempre possível desde que os efeitos difusivos, na direção do escoamento, possam ser desprezados [17]. Este procedimento é aqui repetido e a condição de $\frac{\partial T}{\partial \xi} = 0$ é utilizada.

Ainda com relação a utilização da condição de derivada nula, para a seção de saída, convém ressaltar que a incorporação deste tipo de condição de contorno ao sistema de equações é realizada de uma maneira direta e simples, facilitando a solução das equações governantes.

RESULTADOS NUMÉRICOS

7.1 - INTRODUÇÃO

Ao longo deste trabalho apresentou-se uma metodologia para resolver problemas de transferência de calor em escoamentos confluentes com geometrias arbitrárias, com o objetivo principal de resolver-se o problema da aplicação das condições de contorno nas fronteiras com entrada e saída de massa em sistemas não-ortogonais. Agora esta metodologia e o esquema numérico resultante são testados resolvendo-se problemas bidimensionais cuja solução é conhecida. Em seguida apresenta-se então os resultados obtidos na solução do problema específico formulado no Capítulo 2, demonstrando-se a generalidade do método.

A série de testes começa com a verificação da exatidão do código computacional que, inicialmente, é testado resolvendo-se um problema hidrodinâmico bidimensional sem fluxo de massa nas fronteiras. Trata-se do fluxo isotérmico em uma cavidade quadrada com a parede inferior em movimento. Compara-se os resultados obtidos com os de Milioli [4].

Em seguida o código é testado para resolver problemas hidrodinâmicos bidimensionais com entrada e saída de massa nas fronteiras. Para este caso resolve-se a região de entrada em um canal com o intuito de atingir-se dois objetivos. Primeiro, conferir o desenvolvimento do perfil e, segundo, testar condições de contorno para a seção de saída. Para o teste do desenvolvimento do perfil compara-se os resultados numéricos obtidos com os de Sousa & Hatton [5] e Abarbanel et al [6]. Já, com relação ao teste da condição de contorno para a seção de saída, o mesmo é realizado em duas etapas. Inicialmente, é verificado a influência da condição de contorno da seção de saída sobre o escoamento a montante, utilizando-se três diferentes malhas ortogonais em função da posição de localização des-

ta condição de contorno. Depois, realiza-se o teste para uma mesma posição de localização da condição de contorno de saída utilizando-se, porém, malhas não-ortogonais e ortogonal para, desta forma, verificar o comportamento da condição de contorno utilizada, frente a grades não-ortogonais, na seção de saída. Feito os testes da parte hidrodinâmica do esquema numérico ora desenvolvido, introduz-se a equação da energia e testa-se a exatidão do código, resolvendo-se problema de convecção natural em cavidade quadrada. Compara-se os resultados com os de Milioli [4].

Com a metodologia e o esquema numérico devidamente testados resolve-se o problema de descarga de um jato em uma corrente à temperatura mais baixa. Para este problema são então especificadas as condições de contorno e a grade sobre a qual o problema é resolvido. Inicialmente, resolve-se o problema utilizando um domínio de solução que permite obter o perfil completamente desenvolvido, com o objetivo de verificar a conservação da massa global na saída pela integração do perfil parabólico calculado. Em seguida, para verificar a influência da malha utilizada na solução obtida, resolve-se o problema para diferentes grades, ortogonais cartesianas e não-ortogonais. Para verificar a capacidade do método em captar as regiões de recirculação após a entrada do jato, resolve-se o problema para um número de Reynolds do escoamento, constante e igual a 500 variando as relações de vazão entre o jato e o escoamento principal. Finalmente, para observar os efeitos convectivos e condutivos, o problema é resolvido para diversos valores do número de Peclet do escoamento e temperatura do jato.

7.2 - TESTE DO CÓDIGO COMPUTACIONAL

Nesta seção o código computacional será testado. Como já foi mencionado anteriormente o teste se dará em etapas através da solução de problemas bidimensionais cuja solução é conhecida. Estes problemas e os testes relacionados com os mesmos serão agora descritos em detalhes.

A - FLUXO ISOTÉRMICO EM UMA CAVIDADE QUADRADA

Como primeira etapa no processo de teste de um modelo é

conveniente fazer-se depuração rigorosa do programa de computador para evitar erros de codificação, fáceis de ocorrerem, considerando-se as inúmeras operações que um código deste tipo envolve. É importante salientar ainda que o teste deve ser feito prevendo-se conferir números, pois só assim se verifica a exatidão da codificação do código computacional o que, por exemplo, não é possível com resultados apresentados em gráficos. Assim, resolve-se inicialmente problema idêntico ao resolvido em [2] e [4] por se possuir os números obtidos na solução deste problema por estes pesquisadores.

O problema resolvido é o de fluxo isotérmico em uma cavidade quadrada com a parede inferior em movimento, conforme mostrado na Figura 33. A malha utilizada é não-ortogonal 5 x 5 por ser exatamente para esta malha, apresentada na Figura 33, que se dispõe de solução obtida por Maliska [2] e Milioli [4]. O fato da malha ser grosseira não apresenta inconveniente algum. O que se deseja é apenas testar o código computacional. O modelo, para este tipo de problema, já foi testado por [2] que resolveu o problema para malhas bastante refinadas. Portanto, uma vez comprovada a exatidão do código estará comprovada a correta codificação deste código.

O teste é executado para números de Reynolds iguais a 100 e 400, ou seja, tanto para o caso em que os processos difusivos são predominantes ($Re = 100$), como para o caso em que os processos convectivos predominam ($Re = 400$). Os cálculos numéricos foram executados com $E = 2,5$, sobre-relaxação para a solução da equação de Poisson $w = 1,2$ e tolerância $\epsilon = 1.0E - 05$ no critério de convergência para a pressão.

Os resultados obtidos para as velocidades adimensionais u^* e v^* são comparados aos de Milioli [4] nas Tabelas 1 e 2, para Reynolds 100 e 400, respectivamente. As velocidades cartesianas u e v são adimensionalizadas conforme as expressões:

$$u^* = u/u_{\infty} \quad (7.1)$$

$$v^* = v/u_{\infty}$$

onde u_{∞} é a velocidade na parede inferior. As velocidades u^*

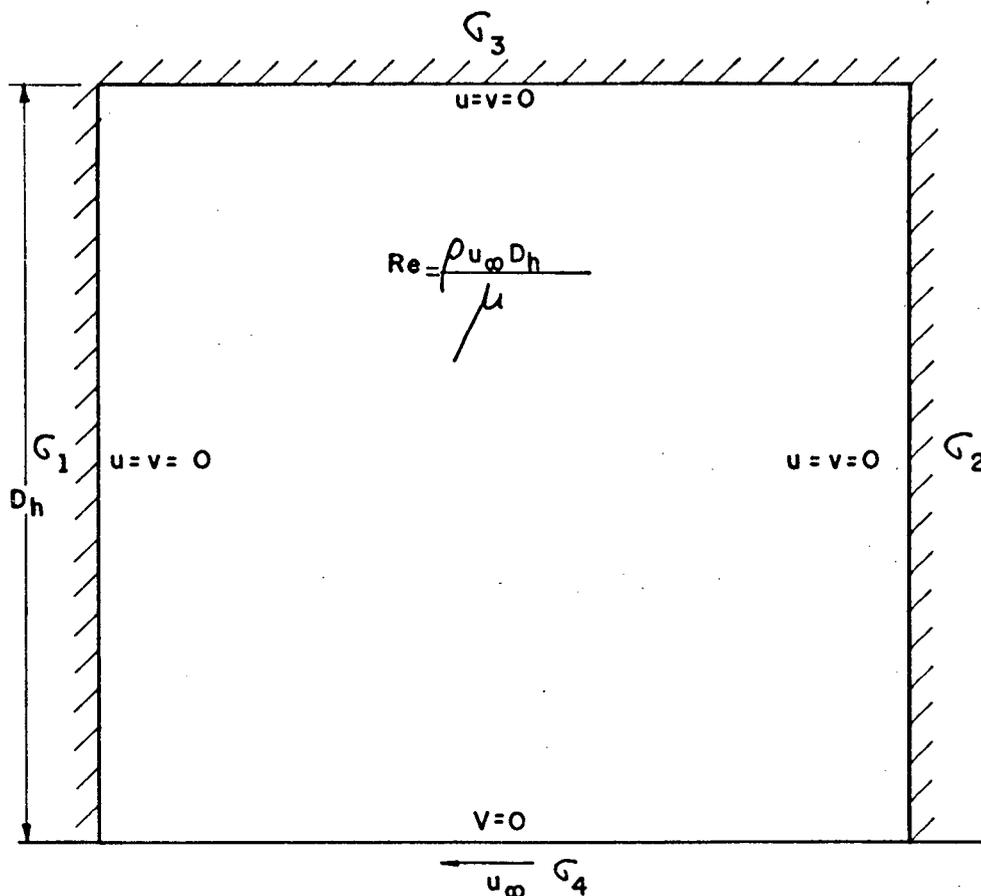


Figura 33 - Características geométricas e condições de contorno para o problema de fluxo hidrodinâmico em cavidade quadrada com parede inferior móvel.

são obtidas nas seções CC e DD de linhas ξ constantes e as velocidades v^* nas seções AA e BB de linhas η constantes, definidas na Figura 34.

Inspecionando os resultados obtidos verifica-se que são exatamente iguais aos conseguidos por Milioli, tanto para $Re = 100$ quanto para $Re = 400$. Há de se destacar que Milioli conferiu o seu código com Maliska apresentando os resultados em [4]. Portanto, a exatidão do código computacional quando a parte hidrodinâmica, sem fluxo de massa nas fronteiras, fica claramente comprovada e os resultados apresentados poderão servir para futuros usuários desta metodologia depurarem os seus programas. Contudo, para que isto seja possível é necessário

Tabela 1 - Perfis de velocidade nas seções AA, BB, CC e DD da Figura 34 para $Re = 100$.

Ponto Seção		1	2	3	4	5	
v^*	AA	0,2938	0,1228	-0,0609	-0,1339	-0,1056	
		0,2938	0,1227	-0,0609	-0,1338	-0,1055	4
	BB	0,2027	0,0664	-0,0513	-0,0848	-0,0402	
		0,2027	0,0664	-0,0514	-0,0848	-0,0401	4
u^*	CC	-0,3802	-0,0139	0,1226	0,1340	0,0803	
		-0,3801	-0,0138	0,1226	0,1340	0,0803	4
	DD	-0,3398	0,0226	0,1037	0,0994	0,0345	
		-0,3398	0,0227	0,1037	0,0993	0,0345	4

Tabela 2 - Perfis de velocidade nas seções AA, BB, CC e DD da Figura 34 para $Re = 400$.

Ponto Seção		1	2	3	4	5	
v^*	AA	0,2324	0,0658	-0,0555	-0,0929	-0,0934	
		0,2324	0,0658	-0,0555	-0,0929	-0,0933	4
	BB	0,1892	0,0410	-0,0410	-0,0751	-0,0660	
		0,1891	0,0410	-0,0411	-0,0752	-0,0660	4
u^*	CC	-0,2551	-0,0403	0,0535	0,0910	0,1047	
		-0,2550	-0,0403	0,0534	0,0910	0,1047	4
	DD	-0,2154	-0,0129	0,0359	0,0702	0,0693	
		-0,2154	-0,0128	0,0359	0,0702	0,0693	4

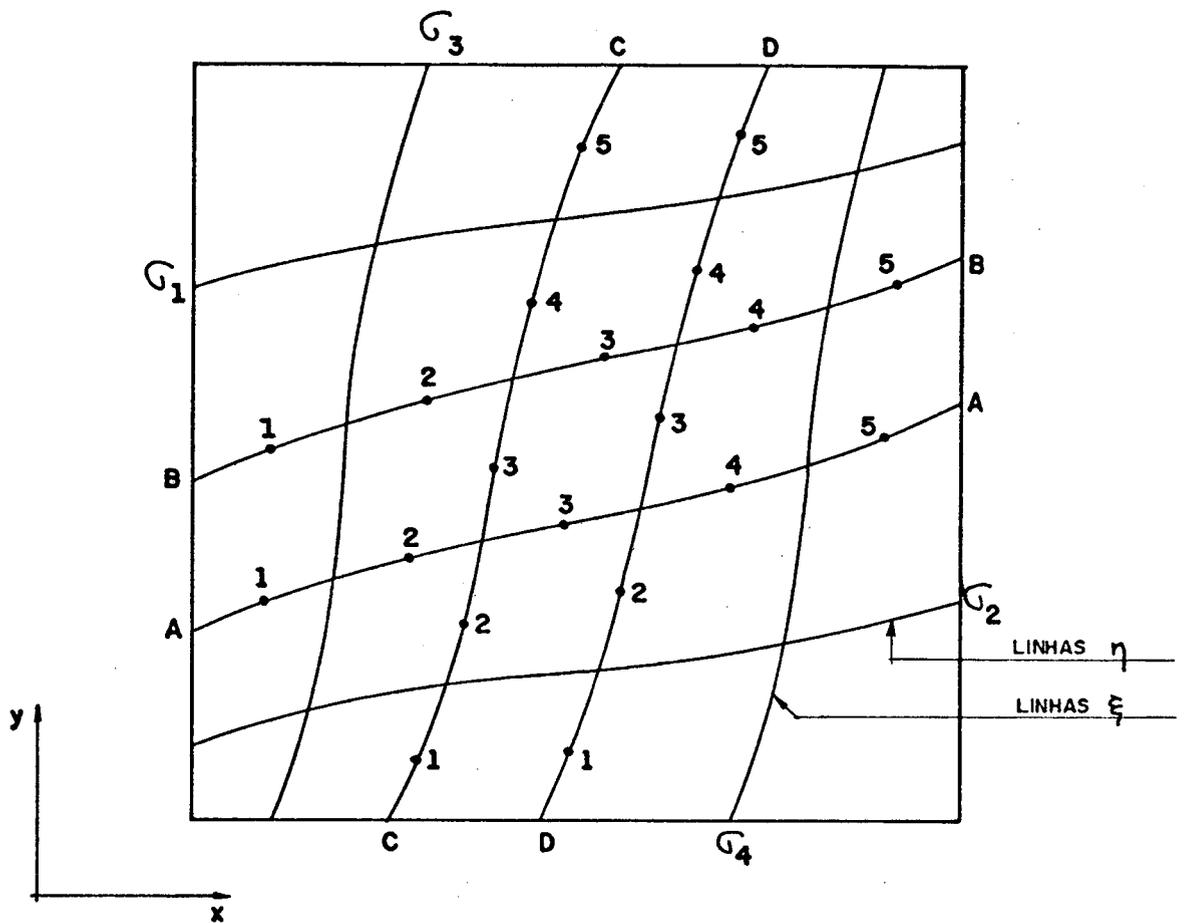


Figura 34 - Malha não-ortogonal 5 x 5.

que se conheça exatamente os pontos (x,y) da malha não-ortogonal 5 x 5 utilizada. Assim, na Tabela 3 são apresentados os pontos adimensionais (x^*,y^*) , adimensionalizados conforme as expressões:

$$x^* = \frac{x}{D_h} \quad (7.3)$$

$$y^* = \frac{y}{D_h} \quad (7.4)$$

onde D_h é a altura da cavidade quadrada.

Ainda com relação a malha é importante frisar que a mesma pode ser gerada a partir das Equações (3.12) e (3.13) com as funções $P(\xi,\eta)$ e $Q(\xi,\eta)$, utilizadas para concentrar linhas coordenadas, iguais a zero.

Tabela 3 - Pontos (x*,y*) da malha não ortogonal 5 x 5.

COORDENADAS x*					
0,0000	0,1000	0,2500	0,4500	0,7000	1,0000
0,0000	0,1416	0,3197	0,5304	0,7640	1,0000
0,0000	0,1730	0,3710	0,5844	0,7992	1,0000
0,0000	0,2008	0,4156	0,6288	0,8268	1,0000
0,0000	0,2358	0,4696	0,6804	0,8584	1,0000
0,0000	0,3000	0,5500	0,7500	0,9000	1,0000
COORDENADAS y*					
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1000	0,1416	0,1730	0,2008	0,2358	0,3000
0,2500	0,3197	0,3710	0,4156	0,4696	0,5500
0,4500	0,5304	0,5844	0,6288	0,6804	0,7500
0,7000	0,7640	0,7992	0,8268	0,8584	0,9000
1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

B - ESCOAMENTO EM UM CANAL.

Neste ítem realiza-se testes com o modelo para resolver problemas hidrodinâmicos bidimensionais com entrada e saída de massa nas fronteiras. O problema utilizado para testes é o do escoamento em um canal, no qual irá se testar condição de contorno para a seção de saída e conferir o desenvolvimento do perfil.

Este problema é de especial interesse porque permite verificar se o modelo consegue detectar perfis de velocidade não puramente convexas na região de entrada. Conforme relatado em [6], este resultado deve ser obtido sempre que os efeitos difusivos forem predominantes no escoamento e a solução for obtida a partir de modelos que utilizam as equações completas de Navier-Stokes.

A Figura 35 mostra o desenvolvimento do perfil de velocidades para o escoamento em um canal, utilizando uma malha cartesiana 9×27 , uniforme em ξ e concentrada junto às paredes. A solução foi obtida para um número de Reynolds igual a 20, podendo-se verificar claramente que o método detecta a existência de perfis não puramente convexas na região de entrada. Resultados análogos aos aqui apresentados foram encontrados por Sousa & Hatton [5] e Nogueira [22].

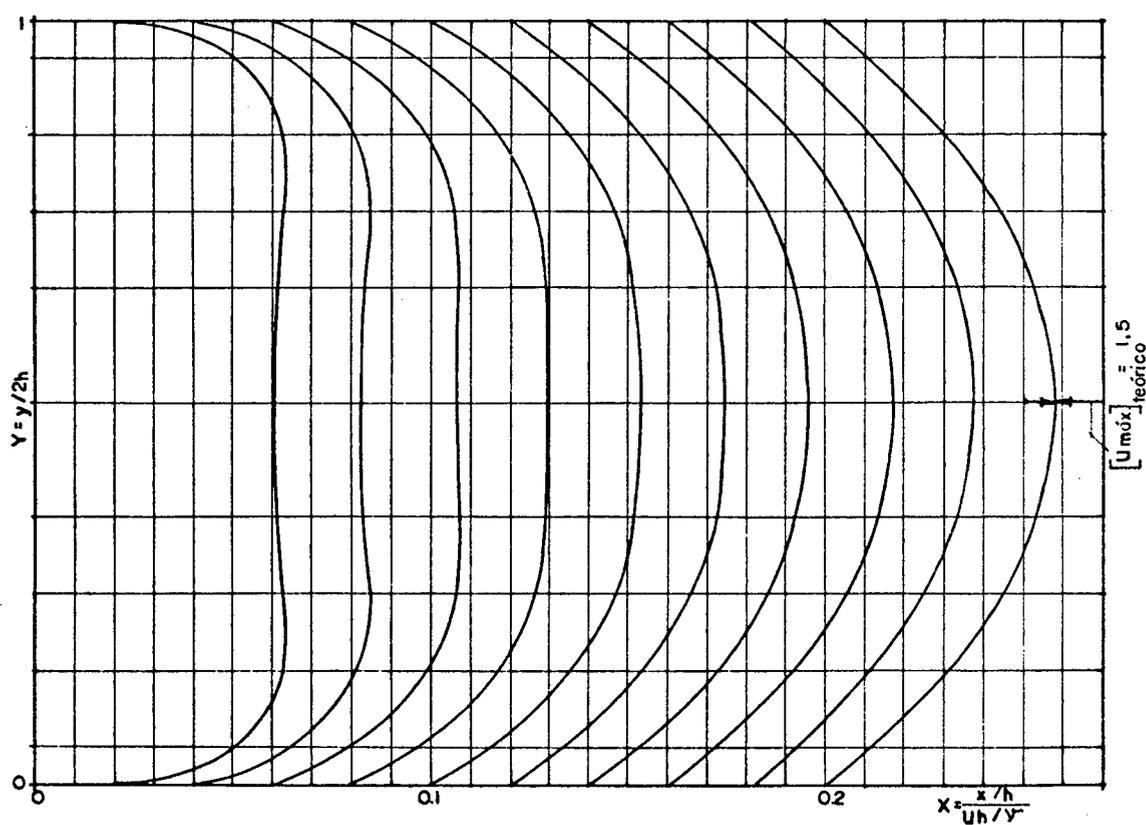


Figura 35 - Perfis de velocidade para o escoamento em um canal.

Verificada a exatidão no desenvolvimento do perfil pas-

sou-se ao teste da condição de contorno para a seção de saída. Primeiramente, resolveu-se o problema do canal com o objetivo de verificar a influência da condição de contorno da seção de saída sobre o escoamento a montante, utilizando-se três diferentes malhas ortogonais em função da posição de localização da condição de contorno de saída, para $Re = 50$.

Caso A - O canal tem comprimento $X = 0.288$, comprimento suficiente para se atingir o perfil completamente desenvolvido. Malha utilizada 9×27 .

Caso B - O canal tem comprimento $X = 0.072$. Malha 9×19 .

Caso C - O canal tem comprimento $X = 0.072$ e pequena concentração de malha na fronteira de saída. Malha 9×21 .

Estas posições de cálculo e os perfis de velocidade obtidos para os Casos A, B e C são apresentados na Figura 36. Para maior clareza apresenta-se ainda, na Tabela 4, as velocidades adimensionais u/\bar{u} , em função do comprimento do canal também para os Casos A, B, e C; onde \bar{u} é a velocidade na entrada do canal.

Analisando os resultados apresentados na Tabela 4 observa-se que o erro decorrente da aplicação da condição de derivada nula para as velocidades contravariantes, em uma posição em que o perfil não está plenamente desenvolvido, é sensivelmente menor a medida que se afasta desta posição. Isto vem demonstrar que esta condição de contorno pode ser perfeitamente utilizada, mesmo em uma posição em que o perfil não esteja plenamente desenvolvido, sem prejuízo dos resultados, sempre que a região de interesse não for aquela na qual a condição foi assumida. Este erro pode ser diminuído ainda mais caso se utilize uma grade de maior resolução na fronteira onde este tipo de condição de contorno é aplicada. Isto pode ser observado com os resultados do Caso C. É importante salientar ainda que os testes aqui realizados confirmam o que há muito se faz (utilização de derivada nula) em problemas com saída de massa

do domínio de cálculo.

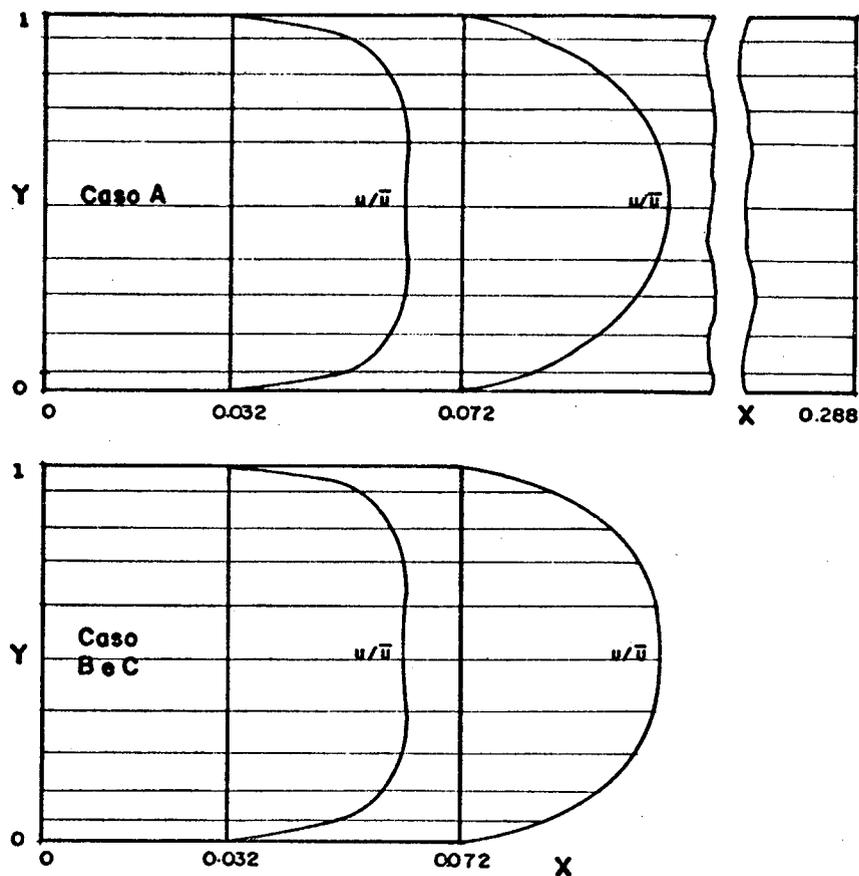


Figura 36 - Posição de cálculo e perfis de velocidade para os casos A, B e C.

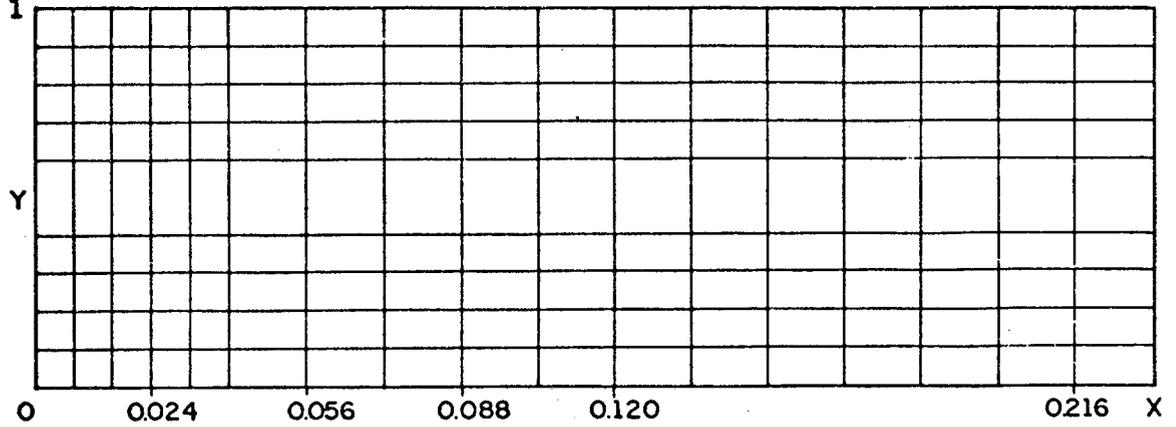
Tabela 4 - Velocidades adimensionais u/\bar{u} em função do comprimento do canal.

Y	X = 0.072			X = 0.056		
	A	B	C	A	B	C
0,05	0,348	0,370	0,368	0,380	0,389	0,388
0,15	0,874	0,902	0,899	0,923	0,935	0,934
0,25	1,170	1,179	1,178	1,180	1,183	1,183
0,35	1,288	1,270	1,272	1,256	1,248	1,249
0,50	1,322	1,279	1,282	1,262	1,245	1,245

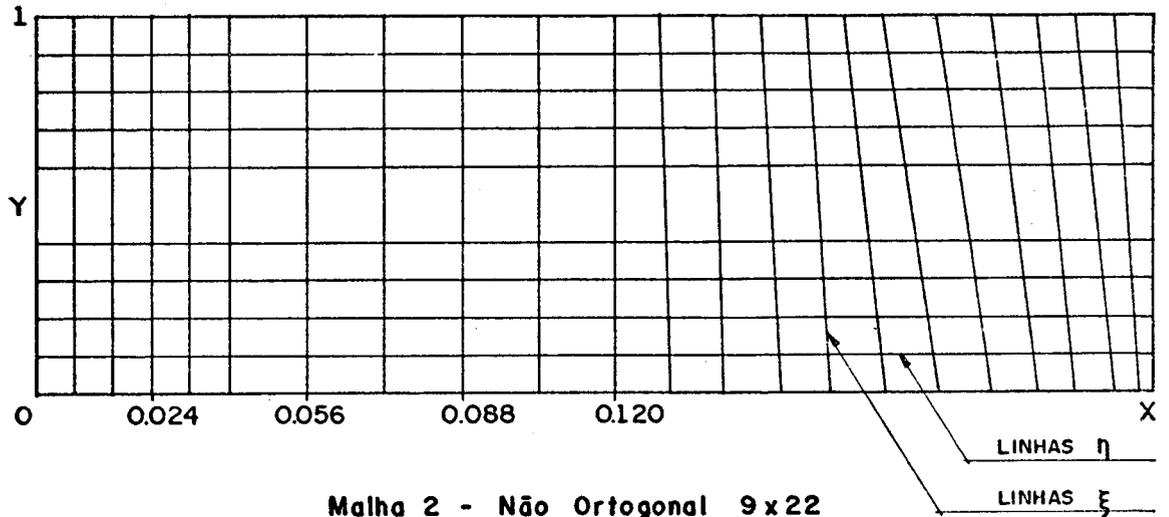
Y	X = 0.032			X = 0.016		
	A	B	C	A	B	B
0,05	0,528	0,531	0,530	0,761	0,762	0,762
0,15	1,033	1,035	1,035	1,066	1,067	1,066
0,25	1,155	1,155	1,155	1,077	1,077	1,077
0,35	1,154	1,152	1,152	1,055	1,055	1,055
0,50	1,130	1,127	1,127	1,040	1,039	1,039

O teste realizado mostrou, portanto, que a condição de contorno utilizada apresenta bons resultados para uma grade ortogonal, mesmo em uma posição em que o perfil não esteja completamente desenvolvido. É necessário, contudo, verificar o comportamento do modelo para a condição de contorno aplicada em uma seção de saída em que a grade não seja ortogonal. Para este teste utilizou-se as malhas da Figura 37, sendo uma delas ortogonal 9 x 17, e duas não-ortogonais, uma 9 x 22, e outra 9 x 21, para um mesmo domínio de solução e $Re = 50$.

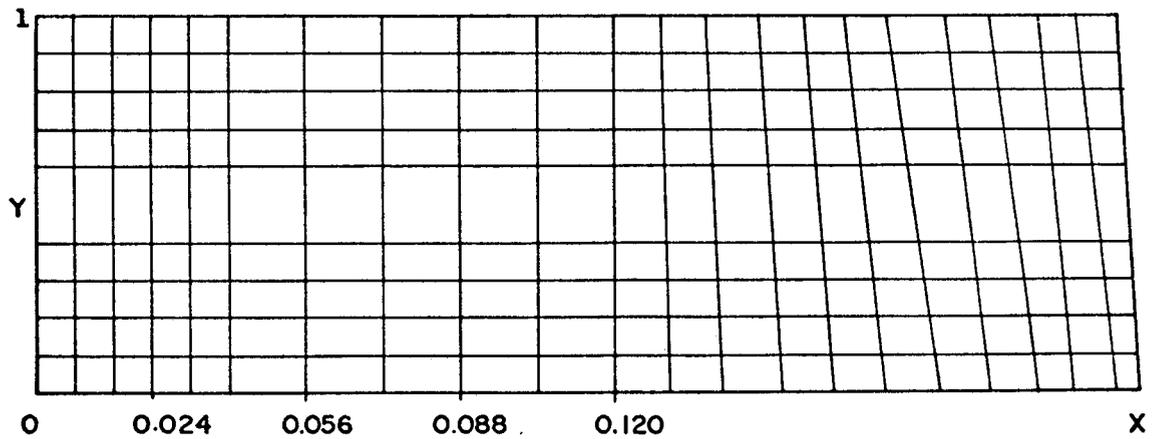
Os resultados obtidos para estas malhas são apresentados na Tabela 5. Analisando esta Tabela observa-se que as velocidades adimensionais u/\bar{u} a montante são exatamente as mesmas independentemente da malha utilizada a jusante. Este fato vem corroborar o que foi afirmado no capítulo anterior, isto é, basta que as linhas coordenadas η estejam alinhadas com as linhas de fluxo, não importando a distribuição de linhas coordenadas ξ na malha. Este resultado era de se esperar já que o escoamento é feito unidimensional e são as componentes contravariantes U que transportam massa através das linhas coordenadas ξ . Assim, verificou-se que o fato da grade não ser ortogonal na seção de saída não traz inconveniente algum, desde que se tenha um pouco de cuidado, procurando alinhar as linhas coordenadas ξ ou η com as linhas de fluxo. A física do problema nos dá informações de como construir a malha adequada.



Malha 1 - Ortogonal 9x17



Malha 2 - Não Ortogonal 9x22



Malha 3 - Não Ortogonal 9x21

Figura 37 - Malhas ortogonal e não-ortogonal para teste da condição de contorno na seção de saída.

Tabela 5 - Velocidades adimensionais em função da malha utilizada

Y	X = 0.120			X = 0.088		
	1	2	3	1	2	3
0,05	0,318	0,318	0,319	0,336	0,336	0,336
0,15	0,811	0,812	0,812	0,848	0,848	0,848
0,25	1,141	1,141	1,142	1,158	1,157	1,158
0,35	1,318	1,317	1,317	1,300	1,299	1,300
0,50	1,412	1,410	1,410	1,358	1,358	1,358

Y	X = 0.056			X = 0.024		
	1	2	3	1	2	3
0,05	0,388	0,388	0,388	0,636	0,636	0,636
0,15	0,924	0,924	0,924	1,051	1,051	1,051
0,25	1,173	1,173	1,173	1,120	1,120	1,120
0,35	1,252	1,251	1,252	1,107	1,107	1,107
0,50	1,263	1,263	1,263	1,086	1,086	1,086

Pode-se concluir, portanto, que o modelo é eficiente na solução de problemas hidrodinâmicos bidimensionais com fluxo de massa nas fronteiras e que a condição de derivada nula para as velocidades contravariantes na seção de saída apresenta bons resultados desde que a física do problema seja respeitada com escolha adequada da grade e do domínio de solução. Maiores detalhes com relação a esta escolha serão vistos quando da solução do problema de escoamento confluyente com transferência de calor.

C - CONVECÇÃO NATURAL

Uma vez realizados os testes com relação a parte hidrodinâmica do modelo basta agora, tão somente, verificar a exatidão do código computacional quanto a solução de problemas de escoamentos com transferência de calor.

O problema utilizado para teste é o da convecção natural em uma cavidade quadrada principalmente por se possuir os números obtidos por Milioli [4] na solução deste problema. Conforme já mencionado, só a confrontação direta dos números obtidos pode garantir que a codificação do código computacional esteja correta. Outro ponto a considerar é o de que o problema da convecção natural constitui-se em um problema de uma complexidade bem maior na sua solução do que o problema da convecção forçada. Na convecção natural a equação da energia está acoplada as demais equações, já que o gradiente térmico imposto ao domínio, em combinação com a ação do campo gravitacional, faz surgir forças de flutuação que aparecem nas equações do movimento. Isto não acontece na convecção forçada onde a equação da energia é completamente desacoplada das demais.

Assim, resolve-se o problema da convecção natural laminar bidimensional em uma cavidade quadrada com as paredes verticais isotérmicas à temperaturas diferentes, e as horizontais termicamente isoladas, conforme mostrado na Figura 38. A malha utilizada é não ortogonal 5 x 5, apresentada na Figura 34; a mesma que foi utilizada para o teste hidrodinâmico sem fluxo de massa nas fronteiras.

Novamente o fato da malha ser grosseira não apresenta inconvenientes pois o modelo, para este tipo de problema, já foi testado por [4] que resolveu o problema para malhas bastante refinadas e comparou os seus resultados aos de De Vahl Davis [23], observando muito boa concordância. Acrescenta-se que a solução de De Vahl Davis, em função de sua precisão, foi utilizada como "solução de referência" no trabalho comparativo que De Vahl Davis & Jones [24] realizaram entre vários modelos numéricos desenvolvidos por vários autores. Logo, esta concordância verificada por [4] demonstra que o modelo aqui utilizado é bastante eficiente na solução de problemas de convecção natural laminar em cavidades fechadas.

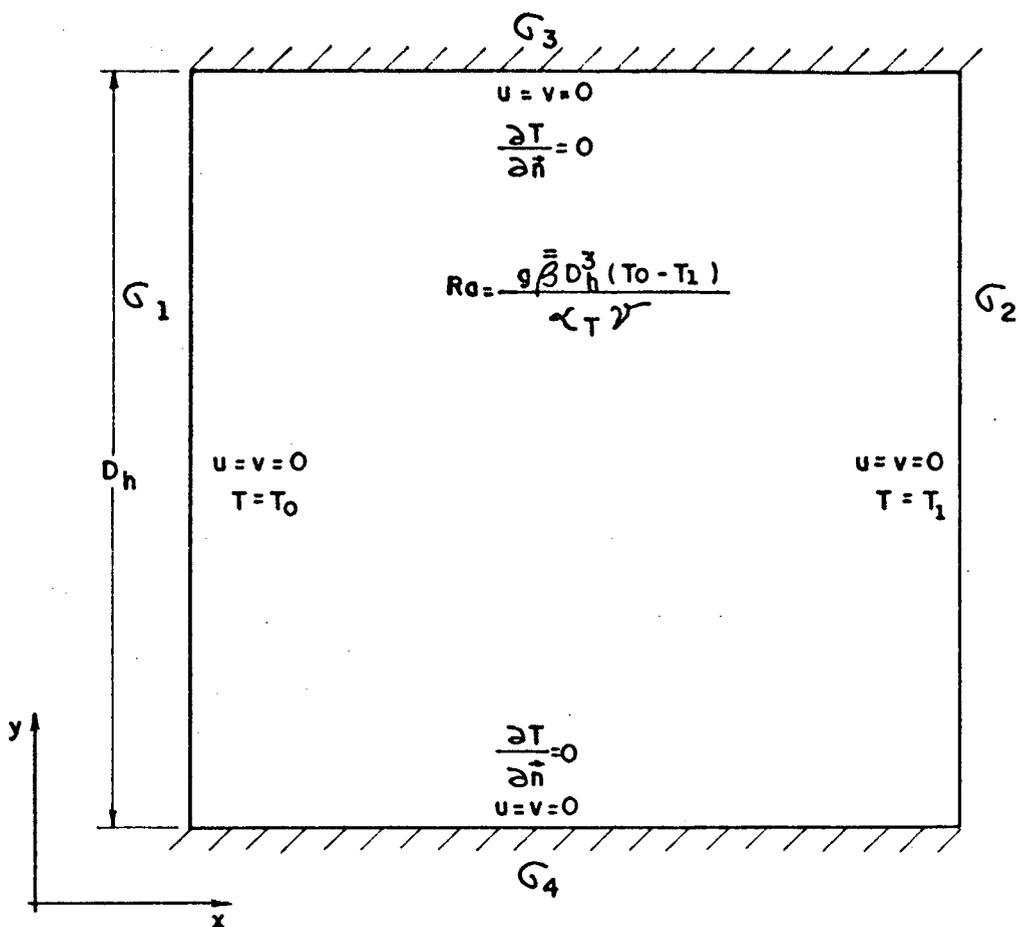


Figura 38 - Características geométricas e condições de contorno para o problema da convecção natural laminar em cavidade quadrada.

Para tornar o código computacional apto a resolver problemas de escoamentos com transferência de calor foi introduzida a equação da energia no modelo. Como neste teste é resolvido um problema de convecção natural, foi introduzido ainda nas equações de movimento, o termo força de corpo resultante das forças de flutuação atuantes no domínio. Para o problema aqui resolvido somente a equação de movimento para v , Equação (2.3), sofreu alteração, pois alinhou-se o eixo y com a direção gravitacional. O termo fonte S^V , resultante da modelagem das forças de flutuação através da aplicação da aproximação de Boussinesq, introduzido na Equação (2.3), é dado por

$$S^V = \bar{\rho} g \bar{\beta} (T - \bar{T}) \quad (7.5)$$

onde $\bar{\rho}$ é o valor médio da massa específica no domínio, $\bar{\beta}$ é o

coeficiente de expansão volumétrica determinado para temperatura \bar{T} que, por sua vez, é a média aritmética entre as temperaturas T_0 e T_1 .

Uma outra alteração é com relação ao algoritmo de solução descrito na Seção (5.5). Como agora as equações são todas elas acopladas, o que pode ser facilmente observado pela simples análise da Equação (7.5), é necessário que depois do passo (9) se volte ao passo (2), pág. 46, até que uma tolerância de convergência seja atingida.

Maiores detalhes com relação ao procedimento de solução de problemas de convecção natural em cavidades fechadas podem ser encontrados em [4].

O teste é executado para número de Prandtl igual a 0,71, característico do ar, e números de Rayleigh iguais a 10^3 e 10^5 , ou seja, tanto para o caso em que os processos difusivos são dominantes ($Ra = 10^3$) como para o caso em que os processos convectivos predominam ($Ra = 10^5$). Os cálculos numéricos foram executados com $E = 2,5$, sobre-relaxação para a equação de Poisson $w = 1,5$ e tolerância $\epsilon = 5.0E - 05$ no critério de convergência para as velocidades cartesianas u e v .

É necessário ainda uma subrelaxação no termo forças de flutuação das equações de movimento para evitar um processo de convergência lento ou mesmo divergência, sendo utilizado um fator 0,7.

Os resultados obtidos para as velocidades adimensionais u^* e v^* são comparados aos de Milioli [4] nas Tabelas 6 e 7, para Rayleigh 10^3 e 10^5 , respectivamente. As velocidades cartesianas u e v são adimensionalizadas conforme as expressões

$$u^* = \frac{u D_h}{\alpha_T} \quad (7.6)$$

$$v^* = \frac{v D_h}{\alpha_T} \quad (7.7)$$

onde D_h é a altura da cavidade e α_T a difusividade térmica. As velocidades u^* são obtidas nas seções CC e DD de linhas ξ constantes e as velocidades v^* nas seções AA e

Tabela 6 - Perfis de velocidade nas seções AA, BB, CC e DD da Figura 34 para $Ra = 10^3$.

Ponto Seção		1	2	3	4	5	
v^*	AA	3,152	3,072	0,279	-2,998	-3,998	
		3,152	3,072	0,279	-2,998	-3,998	4
	BB	3,999	2,998	-0,278	-3,070	-3,154	
		3,999	2,998	-0,278	-3,071	-3,154	4
u^*	CC	-3,194	-3,013	-0,271	2,896	4,121	
		-3,194	-3,013	-0,271	2,896	4,120	4
	DD	-4,120	-2,896	0,269	3,011	3,195	
		-4,120	-2,896	0,269	3,011	3,195	4

Tabela 7 - Perfis de velocidade nas seções AA, BB, CC e DD da Figura 34 para $Ra = 10^5$

Ponto Seção		1	2	3	4	5	
v^*	AA	61,35	7,41	2,75	-3,91	-70,15	
		61,35	7,40	2,74	-3,91	-70,15	4
	BB	70,16	3,90	-2,74	-7,38	-61,33	
		70,16	3,89	-2,74	-7,38	-61,33	4
u^*	CC	-49,72	-21,03	-4,13	16,85	53,89	
		-49,72	-21,03	-4,13	16,84	53,90	4
	DD	-53,88	-16,86	4,08	21,01	49,71	
		-53,88	-16,85	4,08	21,01	49,72	4

BB de linhas η constantes, definidas na Figura 33.

Também para este caso, os resultados aqui obtidos são iguais aos de Milioli [4], conforme pode ser verificado através de análise das Tabelas 6 e 7. Assim, a exatidão do código computacional quanto a intrusão da equação da energia e solução de problemas de convecção natural em cavidades fechadas fica também comprovada.

Uma vez que todos os testes foram realizados e, os resultados demonstraram a exatidão do código computacional pode-se agora resolver o problema do escoamento confluyente com transferência de calor, apresentando-se os resultados a seguir.

7.3 - RESULTADOS PARA O PROBLEMA DE ESCOAMENTO CONFLUYENTE COM TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos na solução do problema do escoamento confluyente com transferência de calor, utilizando-se a geometria e condições de contorno apresentadas na Figura 39.

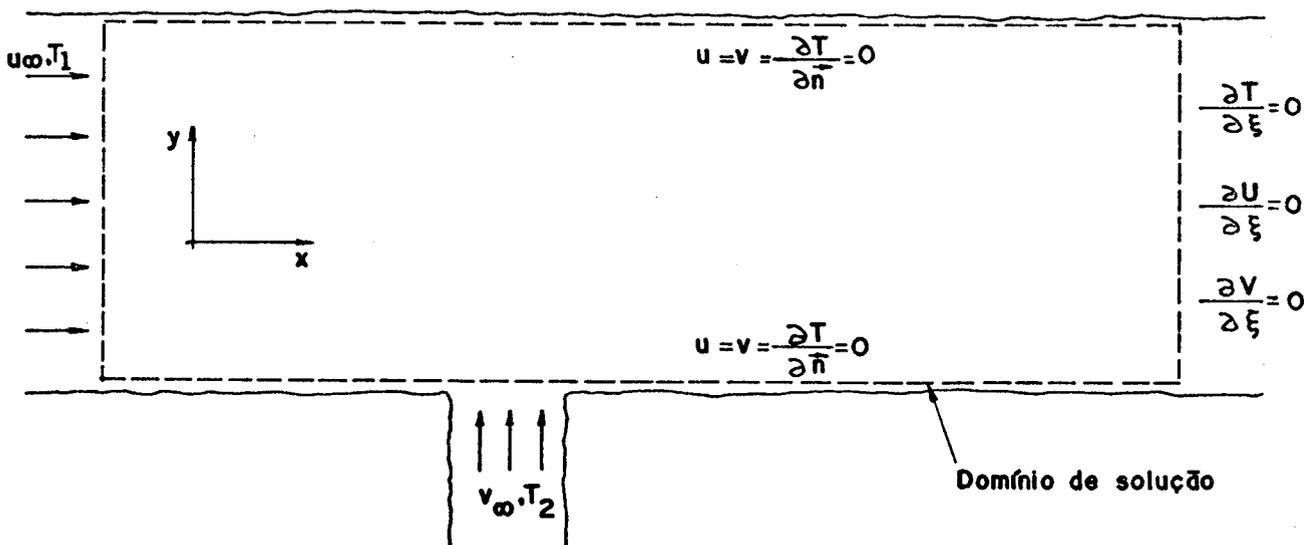


Figura 39 - Geometria e condições de contorno do problema do escoamento confluyente com transferência de calor.

Os resultados foram obtidos sobre as grades ortogonais e não ortogonais apresentadas nas Figuras 40 a 45, para $H/D = 12$,

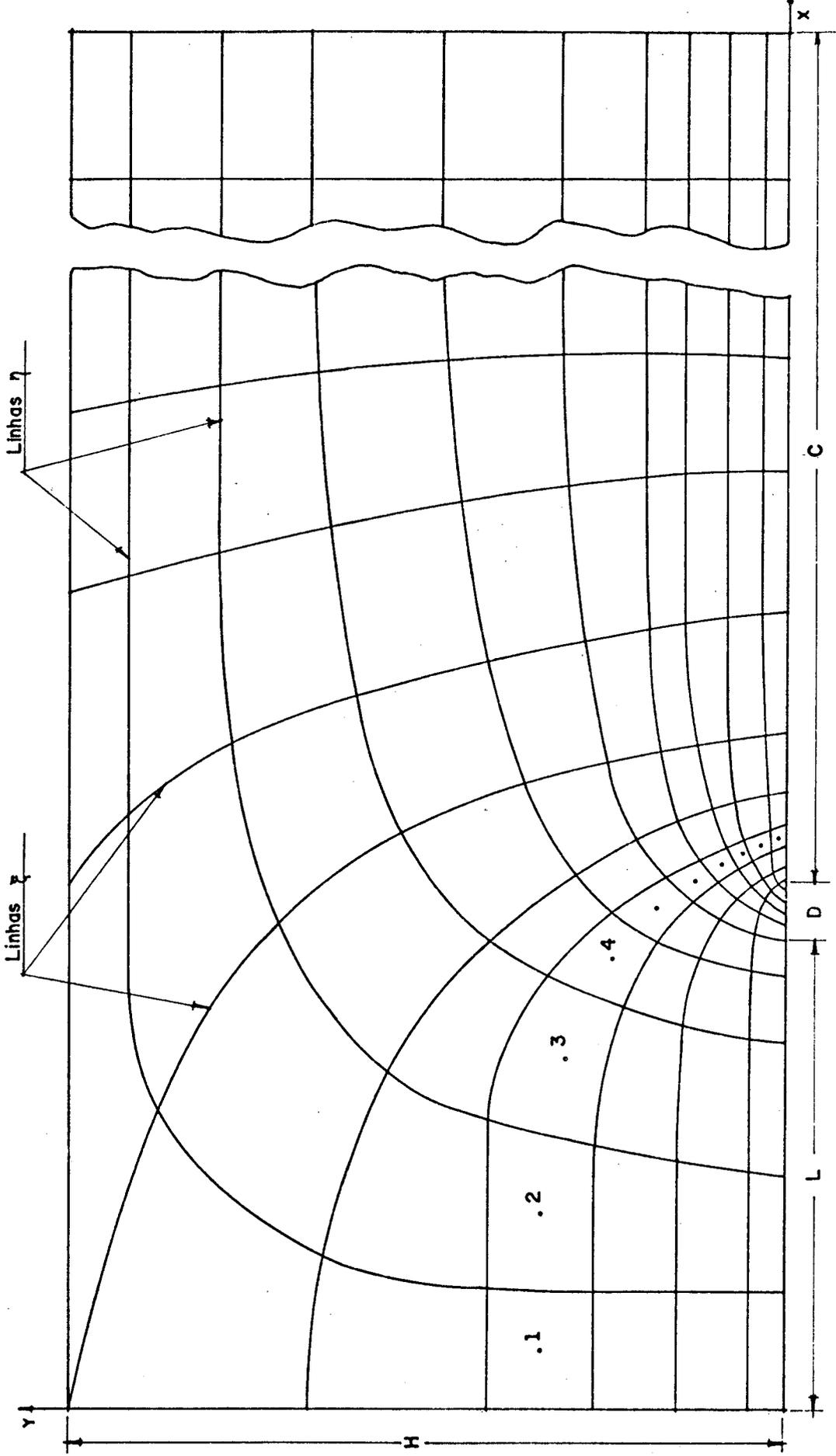


Figura 40 - Grade não-ortogonal 10 x 34.

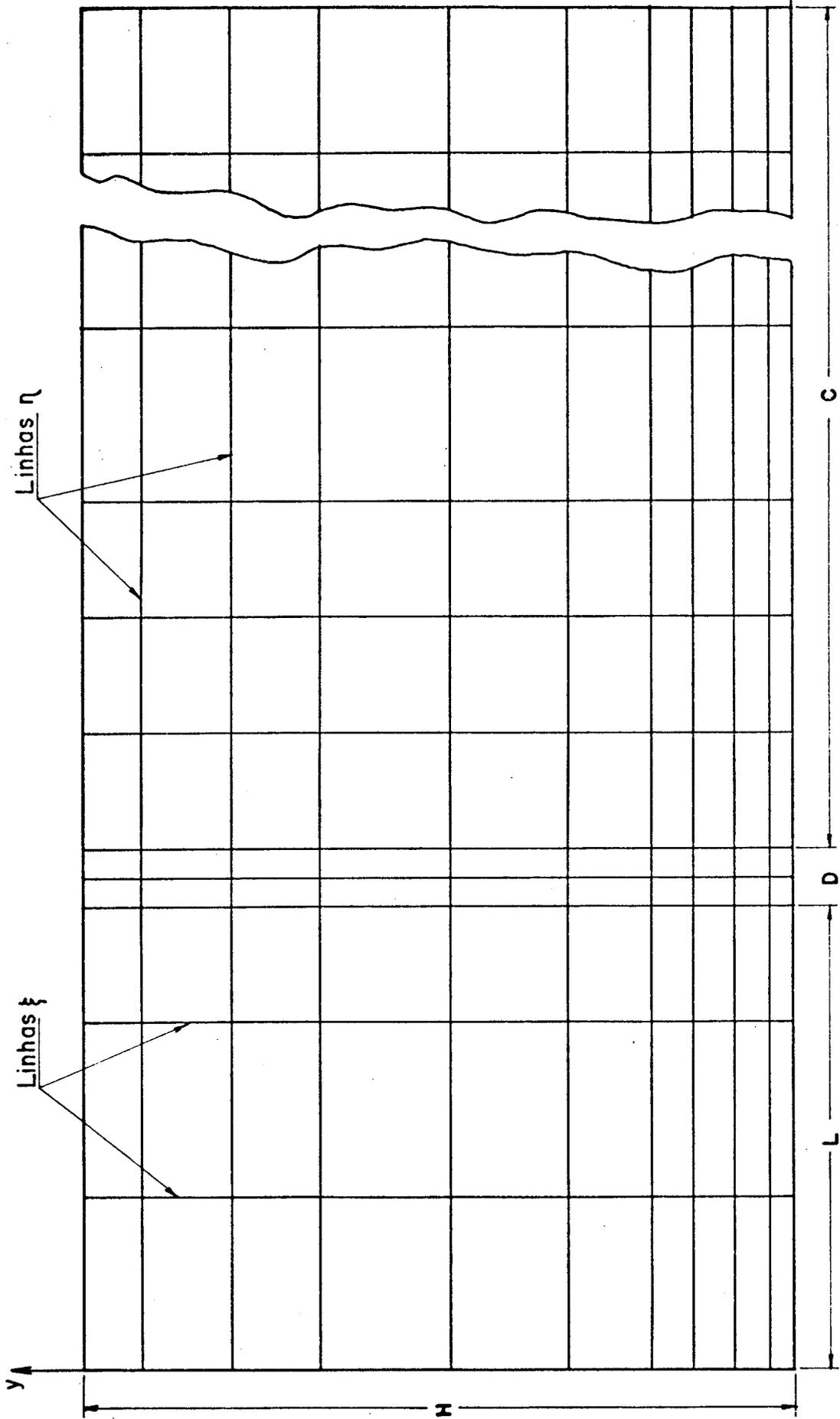


Figura 41 - Grade ortogonal cartesiana 10 x 34.

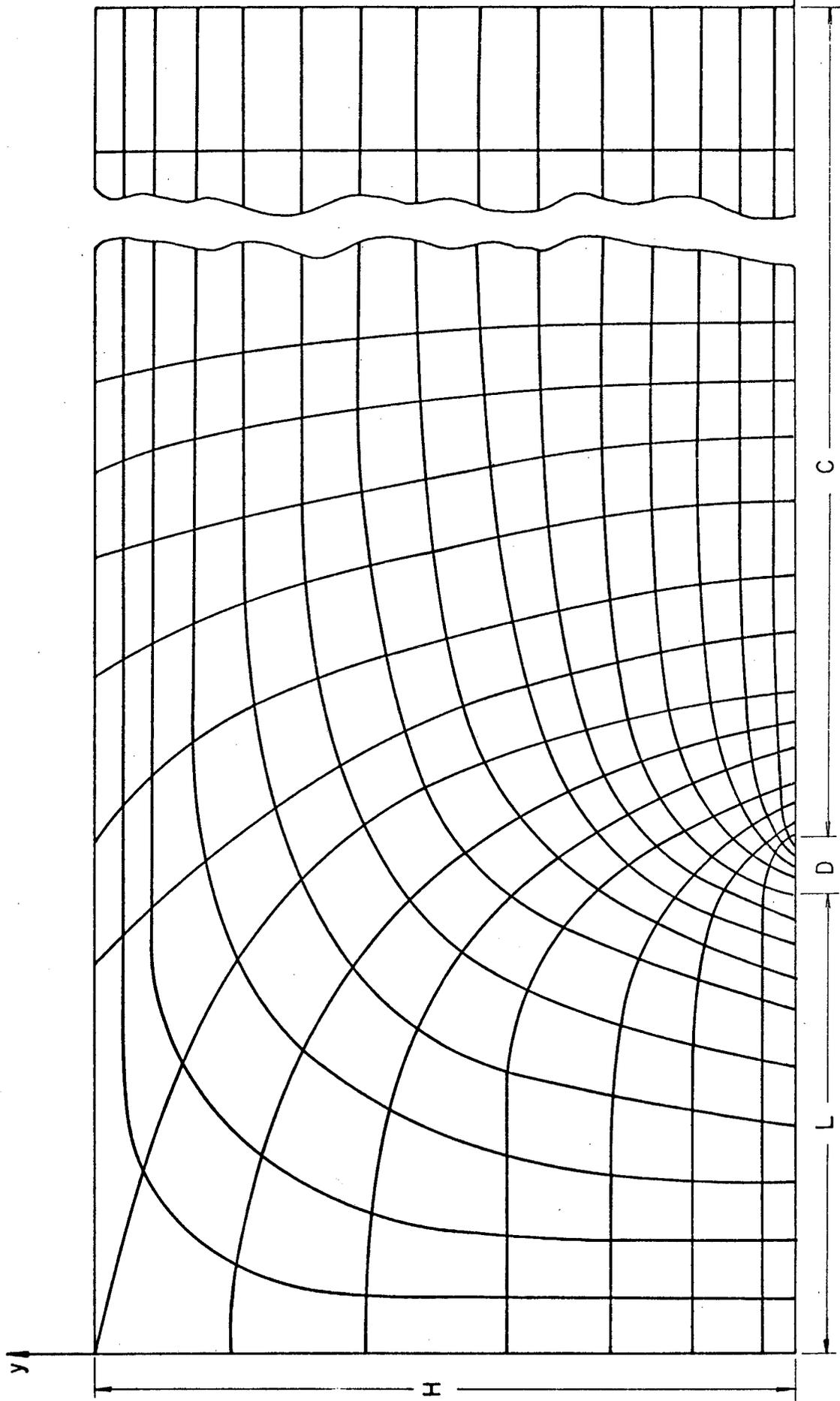


Figura 42 - Grade não-ortogonal 15 x 40.

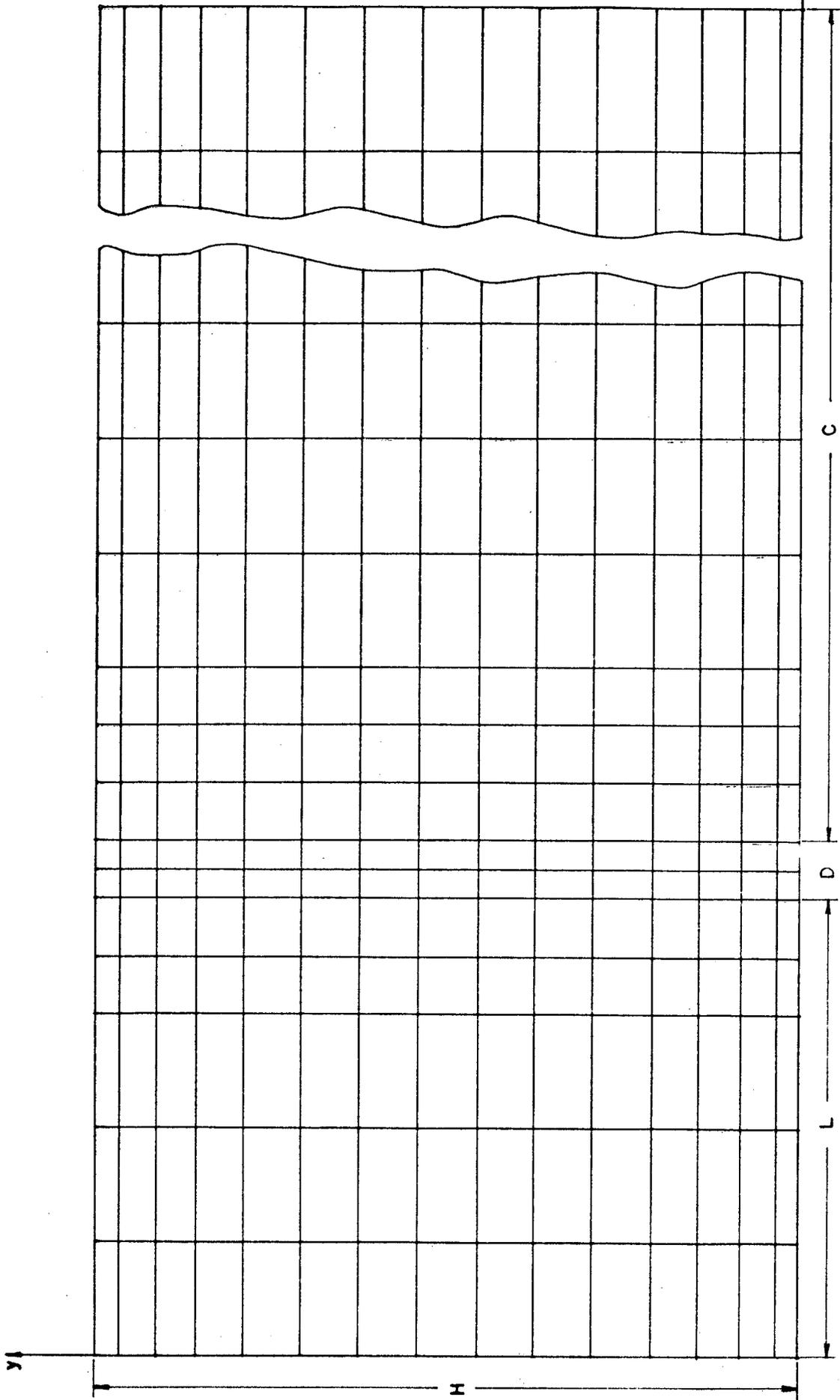


Figura 43 - Grade orthogonal cartesiana 1.5 x 40.

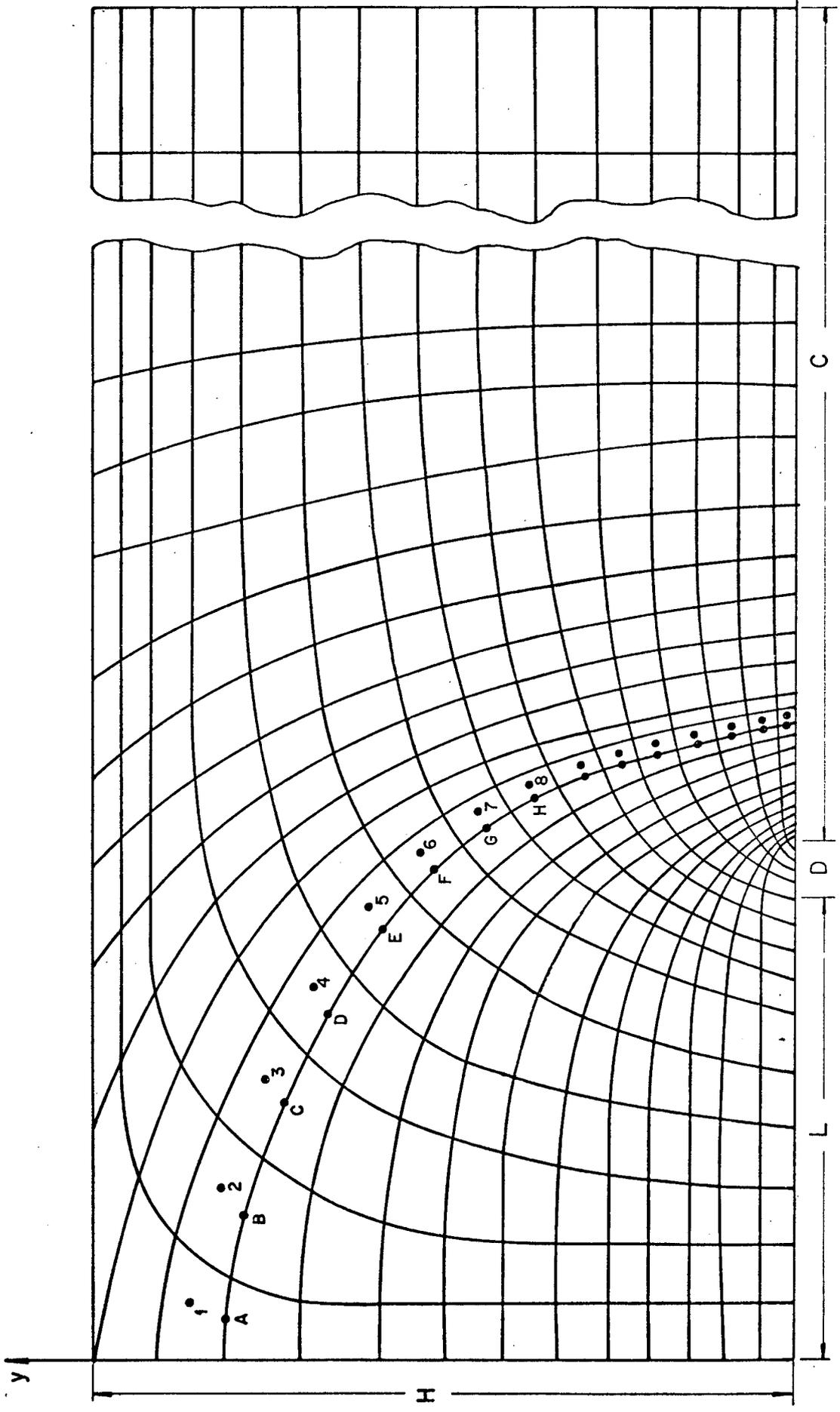


Figura 44 - Grade não-ortogonal 15 x 50.

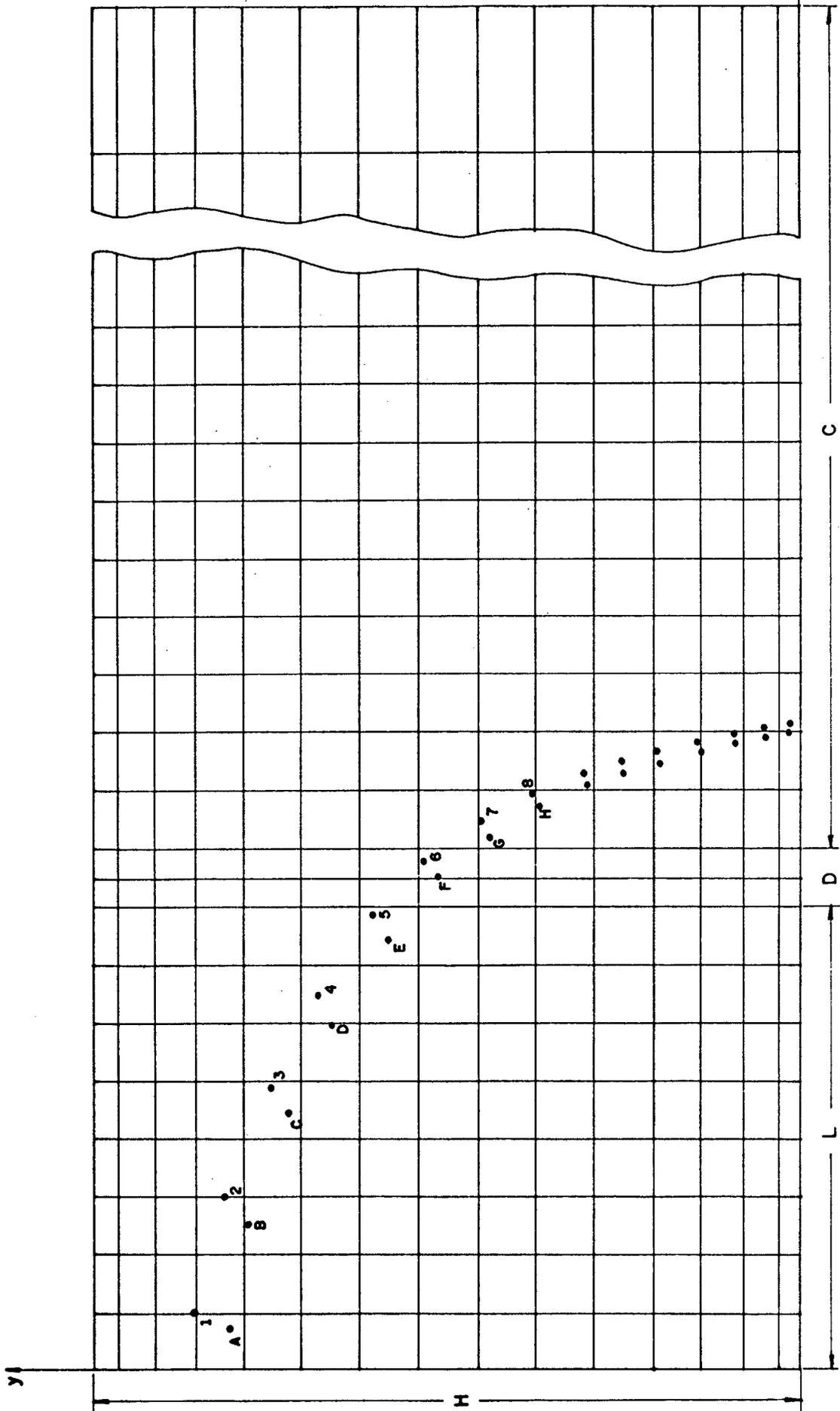


Figura 45 - Grade ortogonal cartesiana 15 x 50.

$L/D = 8$ e $C/D = 126$.

É importante observar que, para as grades não-ortogonais utilizadas, a localização de entrada dos fluxos de massa e calor assume uma configuração especial no plano transformado, conforme mostrado na Figura 46. O mesmo não ocorre para as grades ortogonais, em que a localização de entrada dos fluxos de massa e calor permanece inalterada quando da mudança de domínio de solução, conforme mostrado na Figura 47.

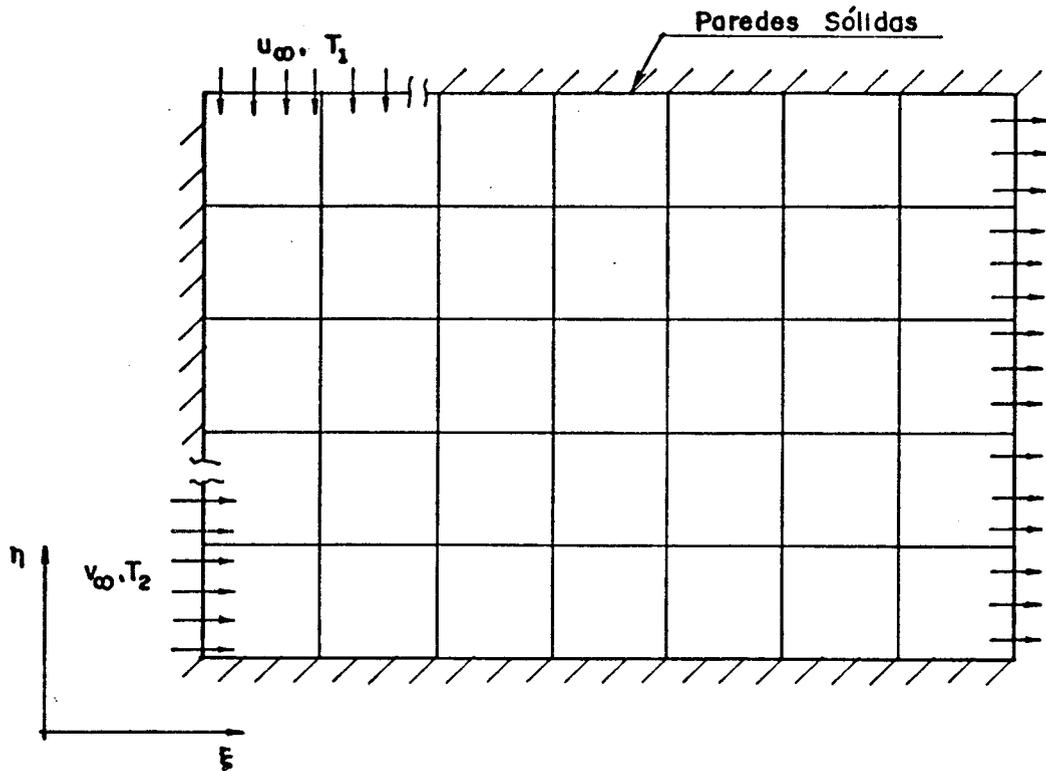


Figura 46 - Localização de entrada dos fluxos de massa e calor no plano transformado para as grades não-ortogonais.

Em função disto as equações adicionais para a temperatura, apresentadas no Apêndice B, são obtidas para a configuração apresentada na Figura 46. Observe-se, contudo, que as equações obtidas para as grades ortogonais são semelhantes àquelas obtidas para as grades não-ortogonais, só que em posições diferentes.

Para a solução do problema utilizou-se, inicialmente, um domínio de solução que permitisse o desenvolvimento completo do

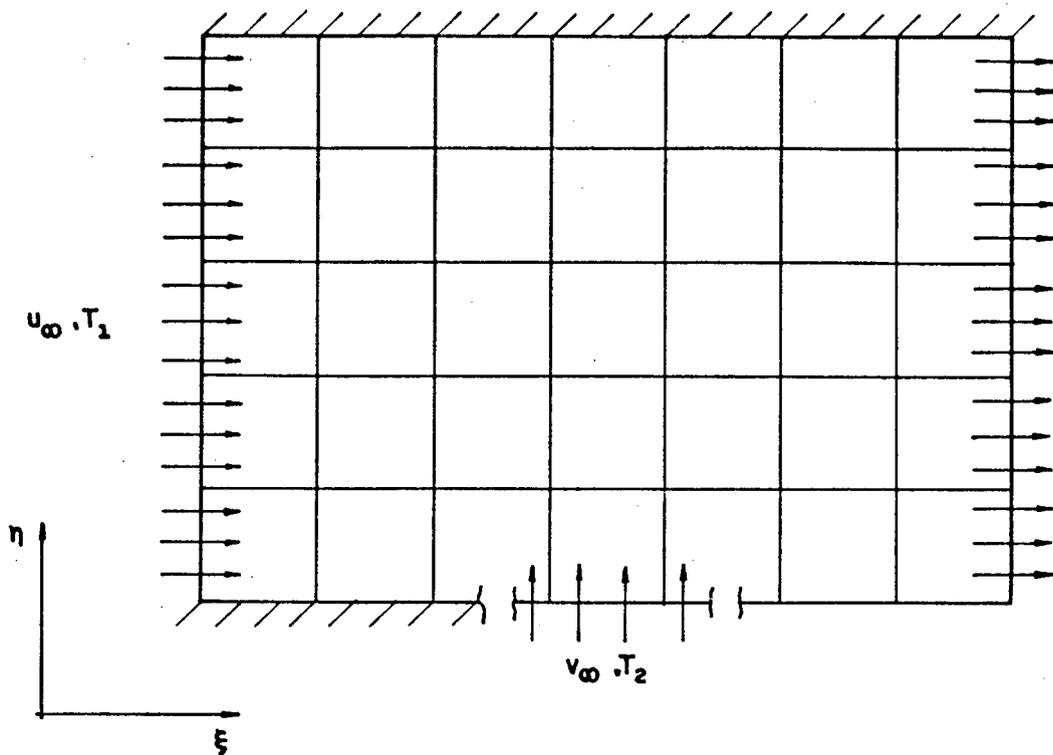


Figura 47 - Localização de entrada dos fluxos de massa e calor no plano transformado para as grades ortogonais.

perfil, com o objetivo de verificar a conservação da massa global na saída, pela integração do perfil parabólico calculado. Para este teste utilizou-se um número de Reynolds do escoamento, Re_{esc} , igual a 20 e relação de vazão, N , igual a 4, onde:

$$Re_{esc} = \frac{\bar{u}H}{\nu}; \quad \bar{u} = (u_{\infty}H + v_{\infty}D)/H \quad (7.8)$$

$$N = Q_R/Q_J; \quad Q_R = u_{\infty}H; \quad Q_J = v_{\infty}D; \quad Q_T = Q_R + Q_J$$

Em seguida, com o objetivo de verificar a influência da malha utilizada na solução obtida, resolveu-se o problema utilizando as malhas mostradas nas Figuras 40 a 45, para diferentes números de Peclet do escoamento e uma relação de vazão constante e igual a 7.5 com número de Prandtl constante e igual a 6,90. O número de Peclet é definido como

$$Pe = \frac{\rho \bar{u} H}{\Gamma \phi} \quad (7.9)$$

Quando $\Gamma^\phi = \mu$ o número de Peclet se iguala ao número de Reynolds do escoamento, enquanto que para $\Gamma^\phi = \frac{k}{c_p}$ temos o número de Peclet propriamente dito,

$$P_e = Re_{esc} Pr \quad (7.10)$$

onde

$$P_r = \frac{\mu c_p}{k} \quad (7.11)$$

que aparece nas Figuras 48 a 69 que apresentam os resultados. Esta definição é importante porque permite definir o número de Peclet da malha, tanto para a transferência de quantidade de movimento quanto para a transferência de calor.

Para verificar esta influência compara-se os resultados obtidos sobre as grades ortogonais e não-ortogonais em uma posição a partir da qual a grade não-ortogonal é feita ortogonal. Esta posição corresponde a $C/D = 13$ para a velocidade e $C/D = 14$ para a temperatura. Os pontos de velocidade e temperatura são pontos coincidentes para as duas malhas.

Os perfis adimensionais de velocidades e temperaturas obtidos são apresentados nas Figuras 48 a 69, onde

$$\bar{u}^* = \frac{u}{\bar{u}} \quad (7.12)$$

$$T^* = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \quad (7.13)$$

sendo T_1 e T_2 , respectivamente, as temperaturas de escoamento principal e do jato quente, e \bar{u} a velocidade média do escoamento.

Uma análise dos perfis apresentados permite verificar que, para escoamentos em que os efeitos difusivos são completamente dominantes, como de número de Peclet igual a 20, os perfis de velocidade (Figura 48) tanto quanto os de temperatura (Figura 49) são praticamente iguais para as duas malhas 10 x 34. Aumentando-se a velocidade do escoamento, ou seja, o "peso" dos efeitos convectivos, verifica-se que esta igualdade deixa de ocorrer. Assim, para Peclet igual a 100 verifica-se que os resulta-

dos são bastante bons, mas não coincidentes para as malhas 10x34 (Figuras 50 e 51). Refinando-se as malhas verifica-se, contudo, que ocorre uma coincidência entre os perfis de velocidade (Figura 52) e, embora não se verifique o mesmo para os perfis de temperatura (Figura 53), os resultados também são muito bons.

Já para escoamentos em que os números de Peclet são altos, nos quais os efeitos convectivos são dominantes com relação aos efeitos difusivos, não se verifica mais coincidência entre os perfis obtidos com as malhas ortogonais cartesianas com relação àqueles obtidos com malhas não-ortogonais, tanto para a velocidade quanto para a temperatura, mesmo para malhas refinadas (Figuras 54 a 69). Para estes casos verifica-se que as informações da velocidade e da temperatura, nas soluções obtidas com as malhas não-ortogonais, se propagam mais rapidamente na direção x junto a parede próxima a entrada do jato, caracterizando uma menor difusão na direção y . Verifica-se ainda que este efeito é mais pronunciado quanto maior é o número de Peclet do escoamento (Figuras 62, 63, 66 e 67) e que, no escoamento com número de Peclet igual a 690 (Figuras 54, 55, 58 e 59), o efeito é bem mais pronunciado para as temperaturas (Figuras 58 e 59).

Esta diferença, nos resultados obtidos com as malhas não-ortogonais cartesianas, pode ser creditada aos efeitos da falsa difusão [17], uma vez que, para estes casos, os números de Peclet das células são bem maiores que 2, tanto para a velocidade quanto para a temperatura. E com relação a temperatura, este número de Peclet da célula é maior ainda, já que o número de Prandtl é igual a 6,90, ou seja, o "peso" da relação convecção/difusão para a transferência de calor é 6,90 vezes maior que o "peso" da relação convecção/difusão para a transferência de quantidade de movimento. Assim, é de se esperar que a difusão numérica seja bem maior para a temperatura. Os resultados parecem demonstrar este fato. Além disto, é de se esperar que este efeito seja bem menos pronunciado nas soluções obtidas com as malhas não-ortogonais, uma vez que nestas malhas procurou-se alinhar as linhas coordenadas com as linhas de fluxo ao longo de todo o escoamento. Os resultados parecem demonstrar também este fato.

Logo, um resultado importante que se obteve é quanto a conveniência em se utilizar malhas em que as linhas coordenadas estejam alinhadas com as linhas de fluxo em todo o escoamento, como maneira de se minorar os efeitos da falsa difusão, isto é, da difusão numérica. Destaque-se que uma malha semelhante àquelas aqui utilizadas foi utilizada em [31].

Outro ponto importante a observar é a menor influência do refino de malha nos resultados obtidos para as malhas ortogonais cartesianas (Figuras 57, 61, 65 e 69) com relação àqueles obtidos para as grades não-ortogonais (Figuras 56, 60, 64 e 68), o que por sua vez, implica em uma maior diferença entre os resultados obtidos para as malhas 15 x 50 e entre aqueles obtidos para as malhas 10 x 34, principalmente para a temperatura (Figuras 58, 59, 66, 67). Esse resultado também era de se esperar, uma vez que o refino das malhas não-ortogonais confere uma configuração bastante diferente à malha (Figuras 40, 42, 44), o que não se verifica nas malhas ortogonais cartesianas (Figuras 41, 43, 45). Estes resultados parecem indicar ainda que para as malhas não-ortogonais utilizadas também ocorre falsa difusão, embora de maneira menos pronunciada que para as malhas ortogonais cartesianas e que, mesmo para as grades não-ortogonais quanto mais refinada a grade, menores serão os efeitos da difusão numérica. Este fato parece demonstrar que as linhas coordenadas não estão perfeitamente alinhadas com as linhas de fluxo. Acrescente-se que a procura deste alinhamento perfeito não foi objeto desta dissertação.

Para demonstrar mais claramente a influência da malha nas soluções obtidas, apresenta-se os resultados para as malhas ortogonal e não-ortogonal 15 x 50, para outros pontos coincidentes das duas malhas, indicados nas Figuras 44 e 45. É importante destacar, contudo, que esta análise é prejudicada pela não coincidência dos pontos quanto a sua localização nos volumes elementares das duas malhas. Assim, foi necessário utilizar-se médias ponderadas para obter os resultados para as temperaturas e velocidades adimensionais, respectivamente, T^* e \bar{u}^* , para a malha ortogonal cartesiana (Figura 45). Em função disto, apresenta-se os resultados somente para o escoamento com número de Peclet igual a 690.

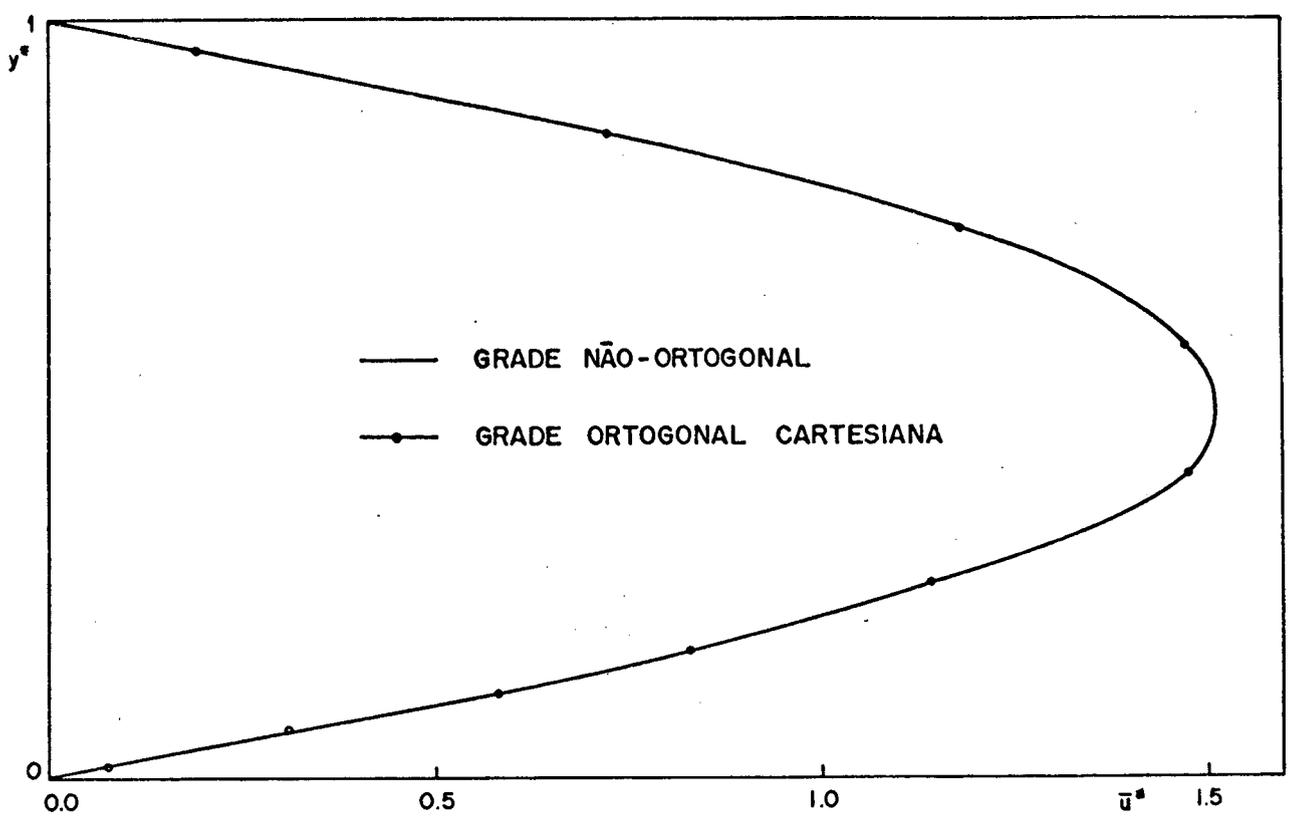


Figura 48 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas 10 x 34 e $Pe = 20$.

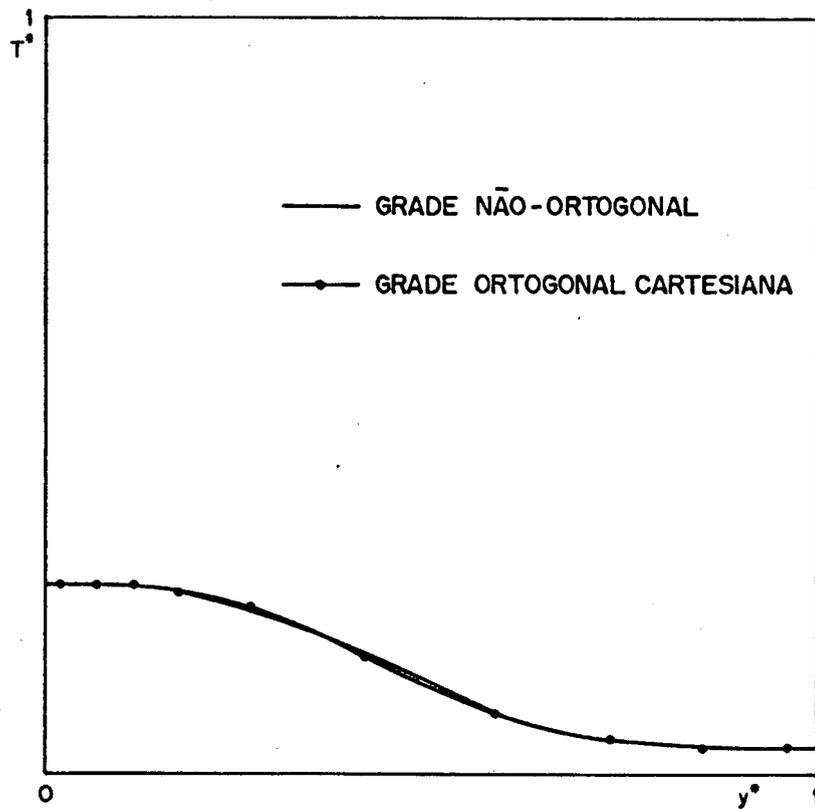


Figura 49 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas 10 x 34 e $Pe = 20$.

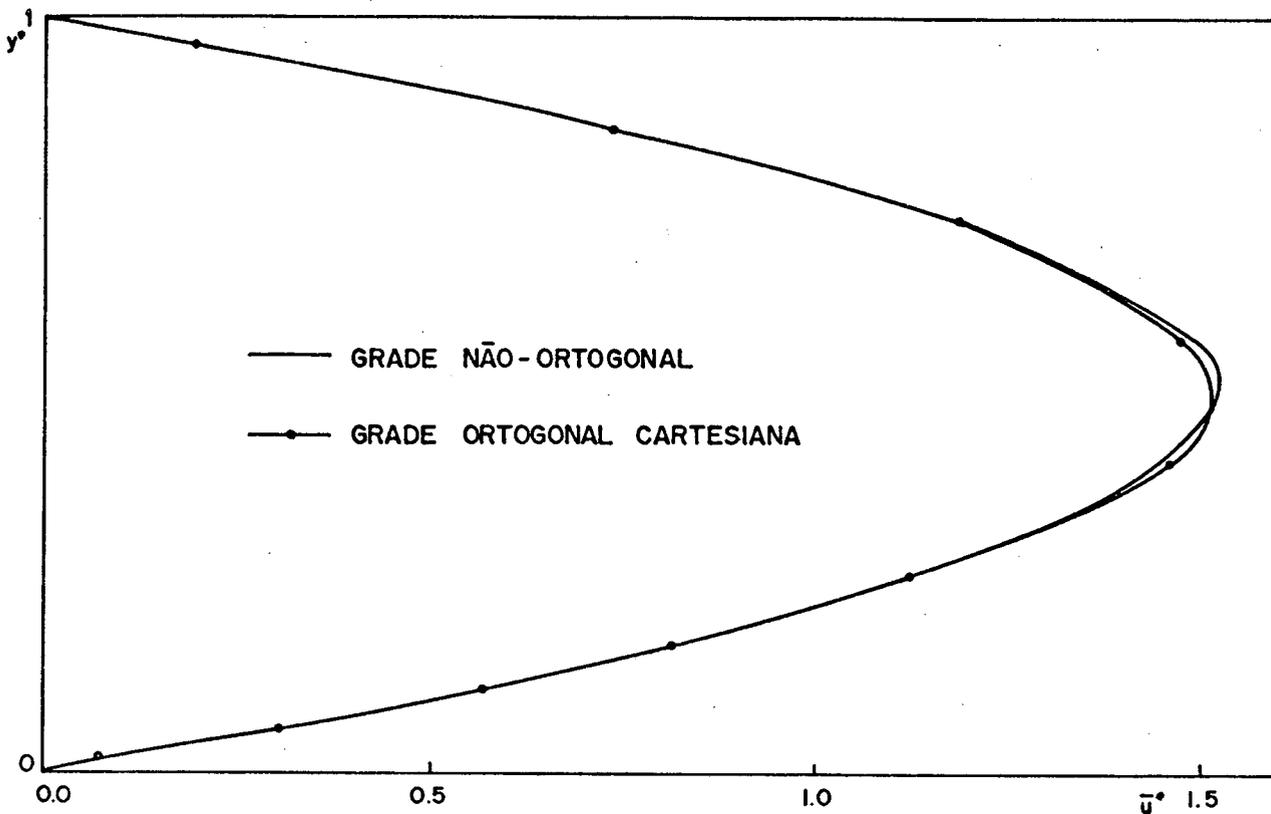


Figura 50 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas 10 x 34 e $Pe = 100$.

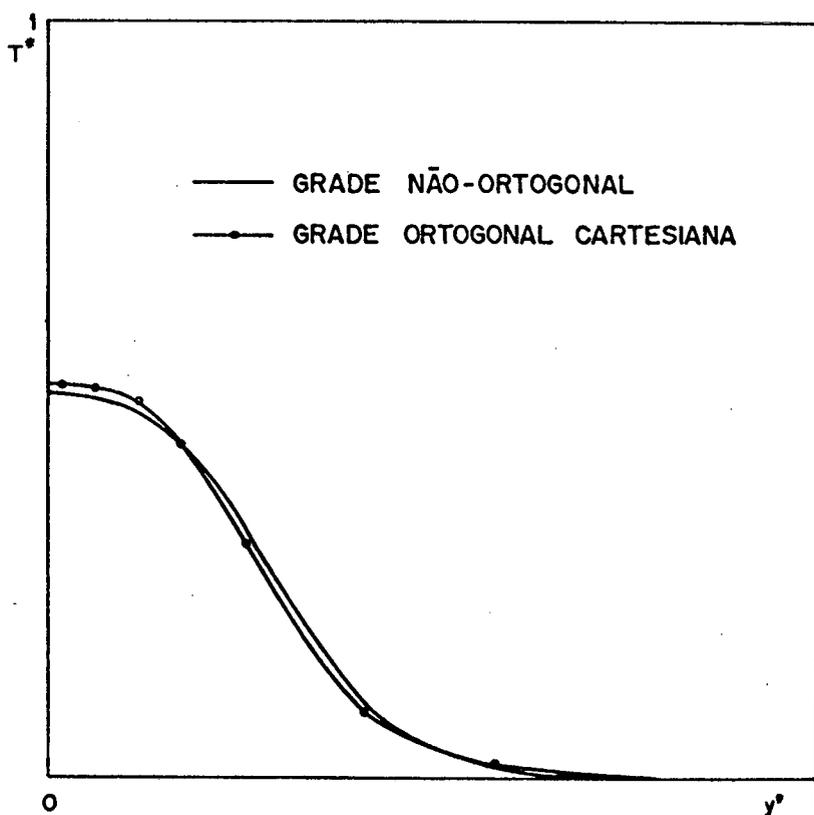


Figura 51 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas 10 x 34 e $Pe = 100$.

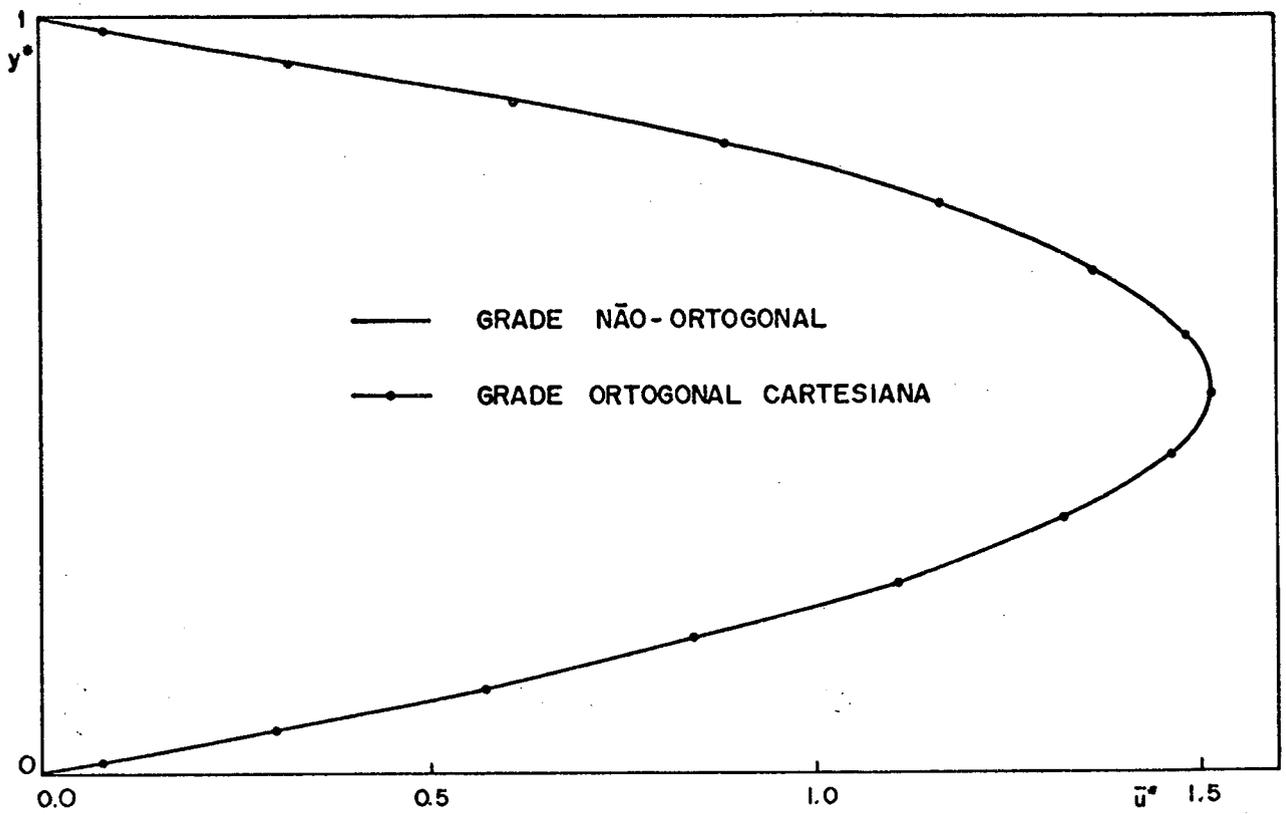


Figura 52 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas 15 x 50 e $Pe = 100$.

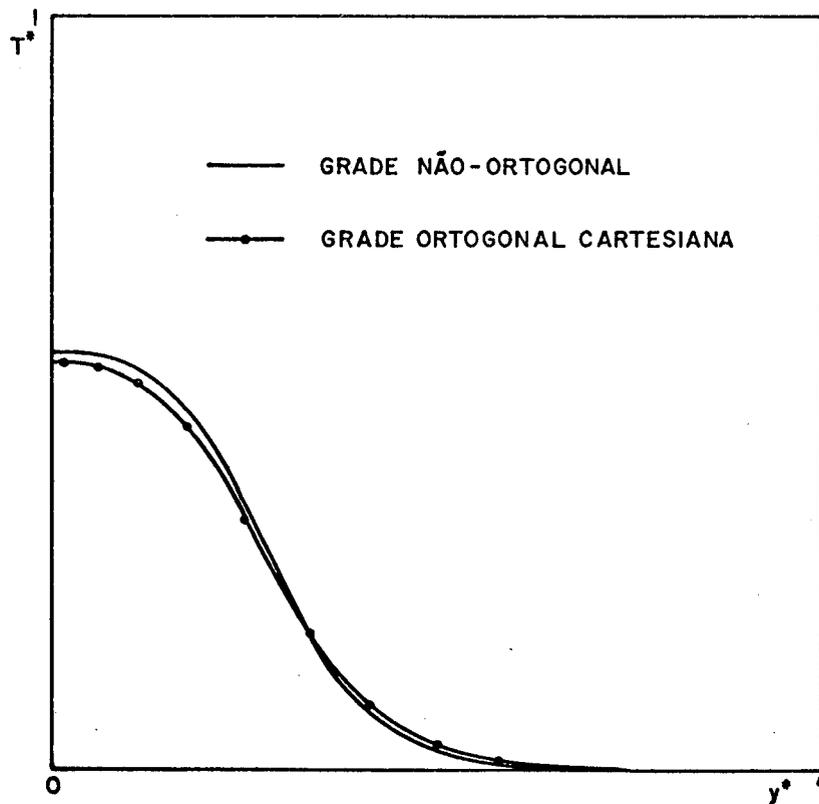


Figura 53 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas 15 x 50 e $Pe = 100$.

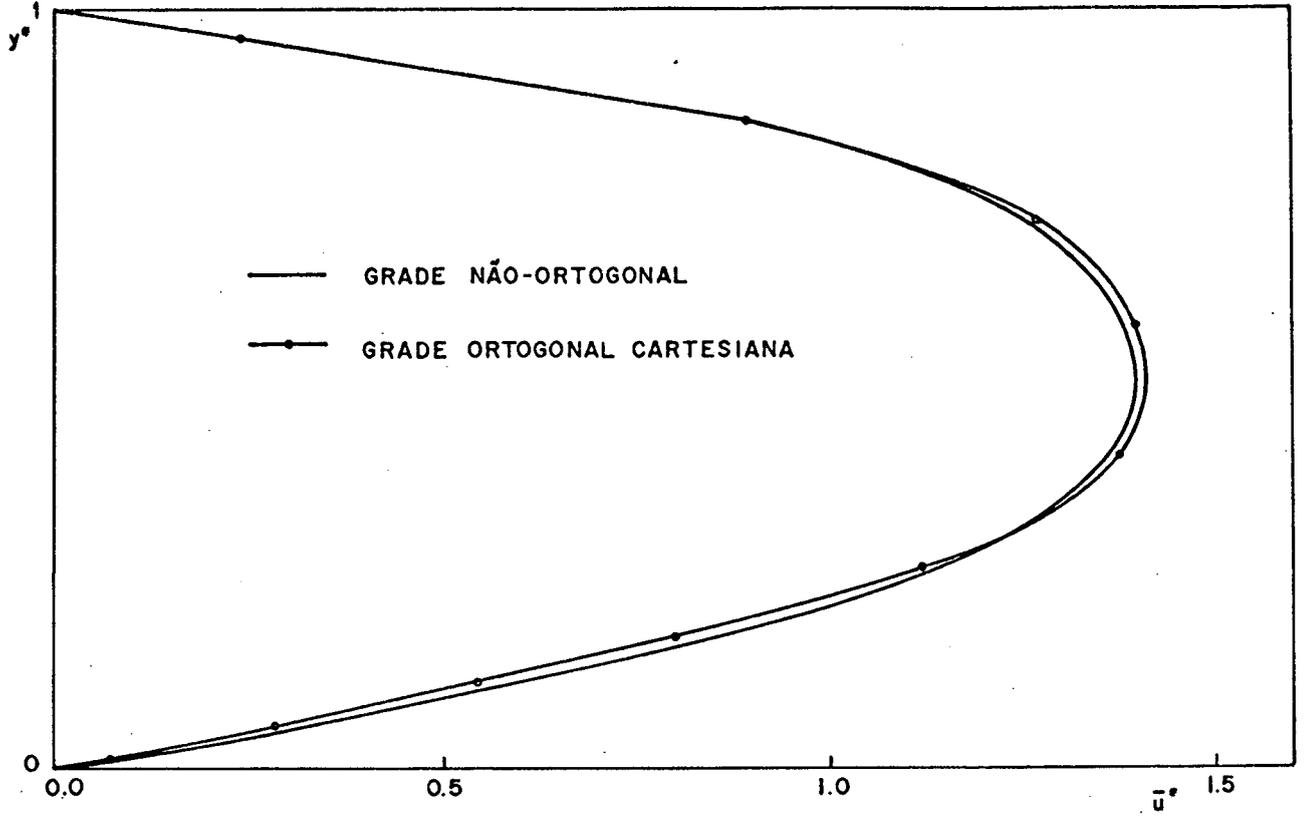


Figura 54 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas 10 x 34 e $Pe = 690$.

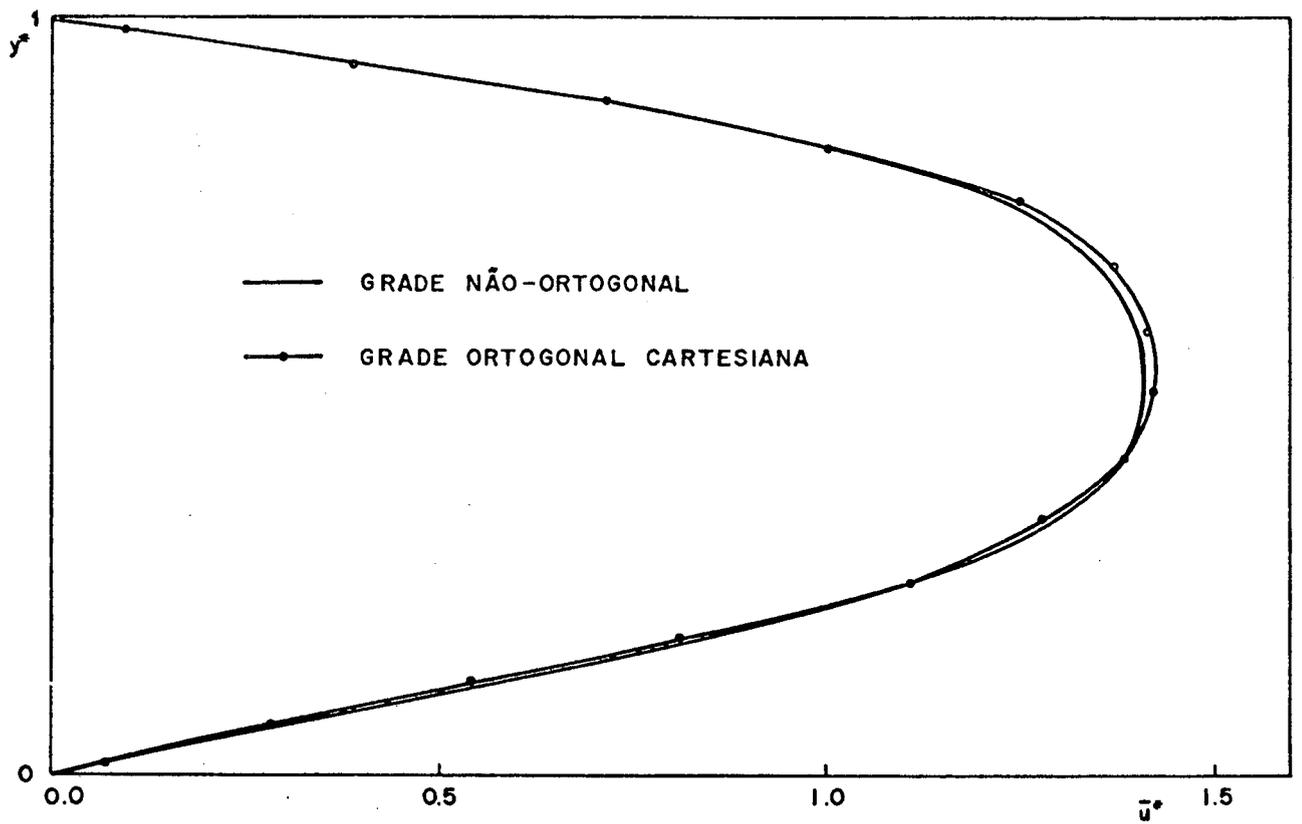


Figura 55 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas 15 x 50 e $Pe = 690$.

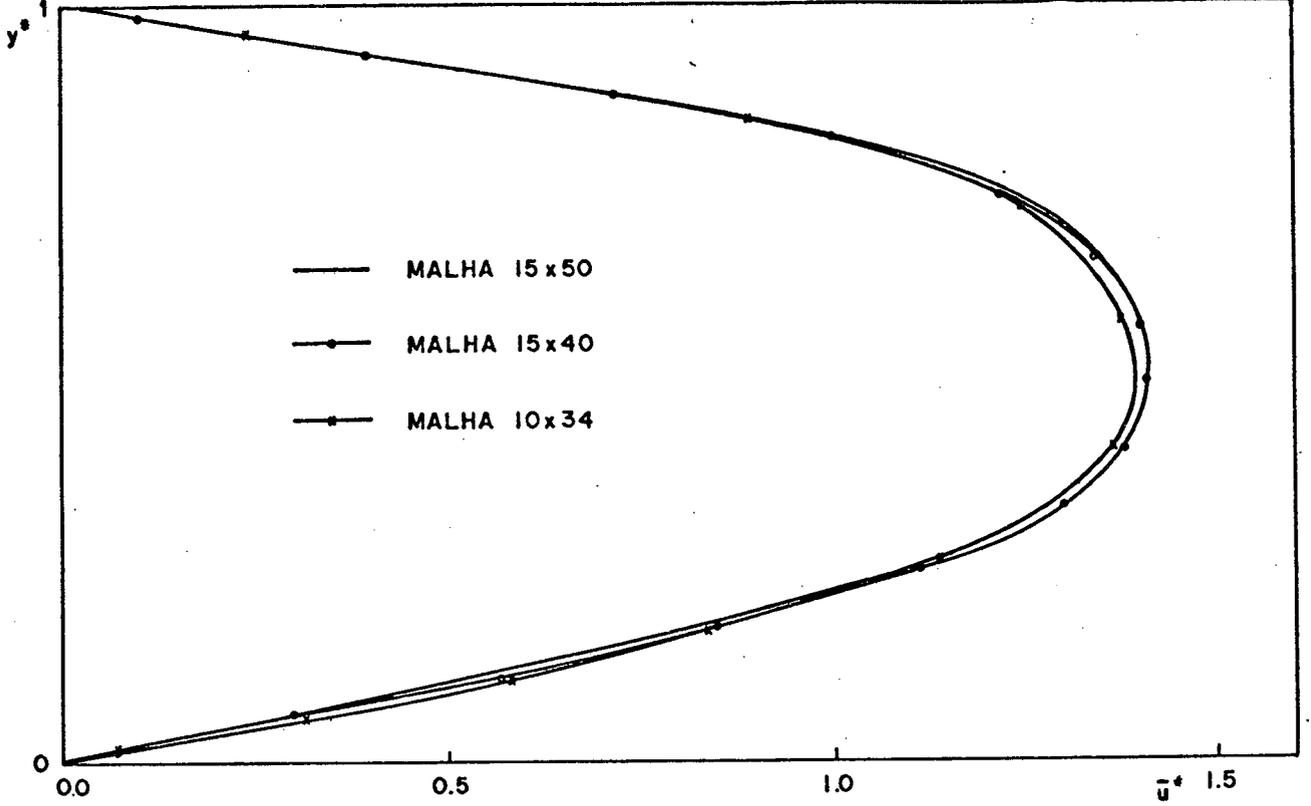


Figura 56 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas não-ortogonais e $Pe = 690$.

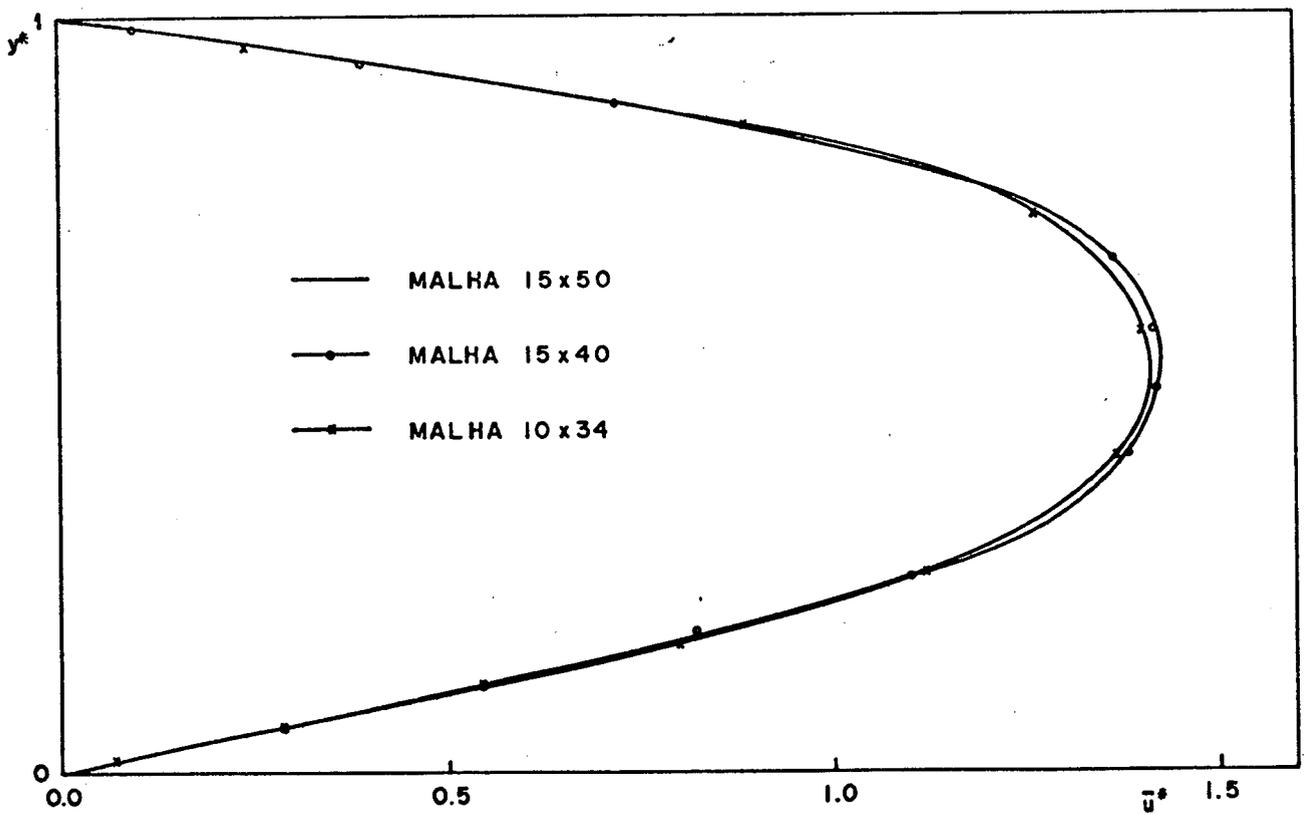


Figura 57 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas ortogonais cartesianas e $Pe = 690$.

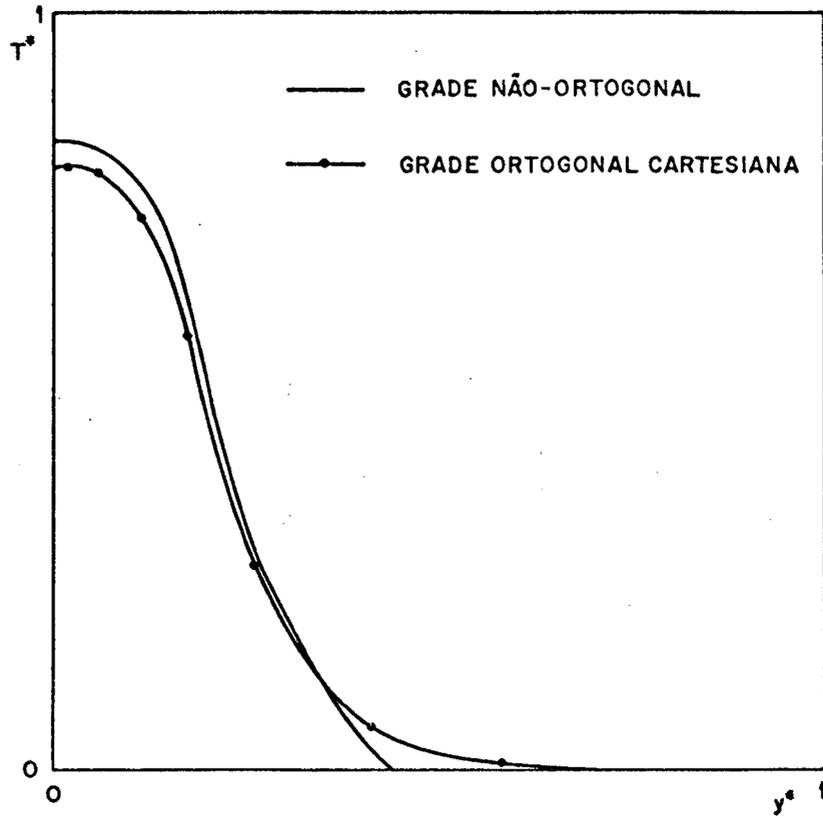


Figura 58 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas 10 x 34 e $Pe = 690$.

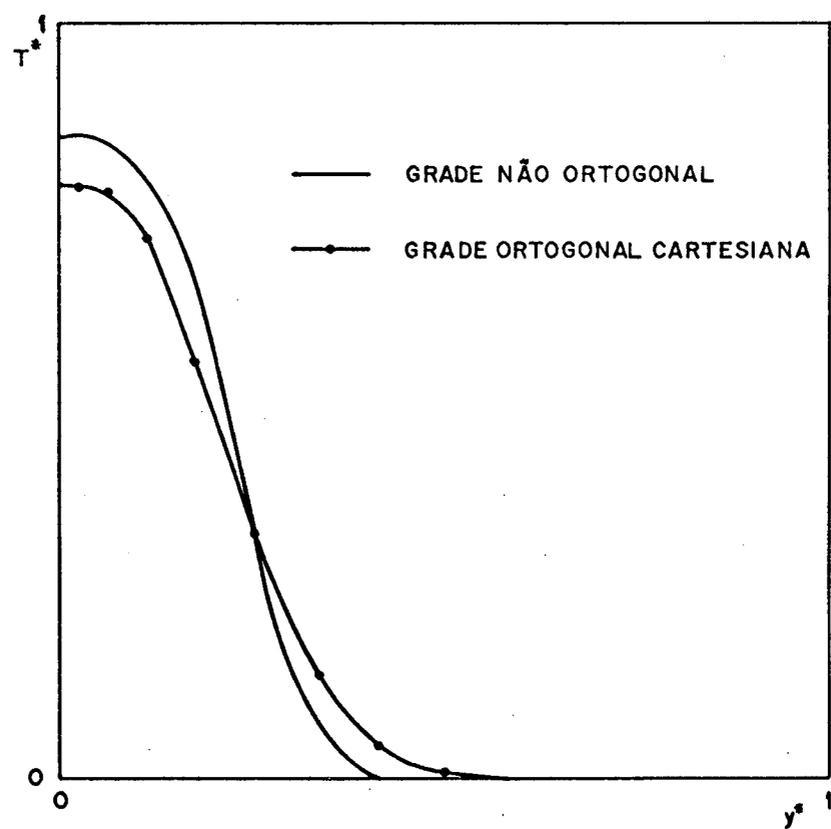


Figura 59 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas 15 x 50 e $Pe = 690$.

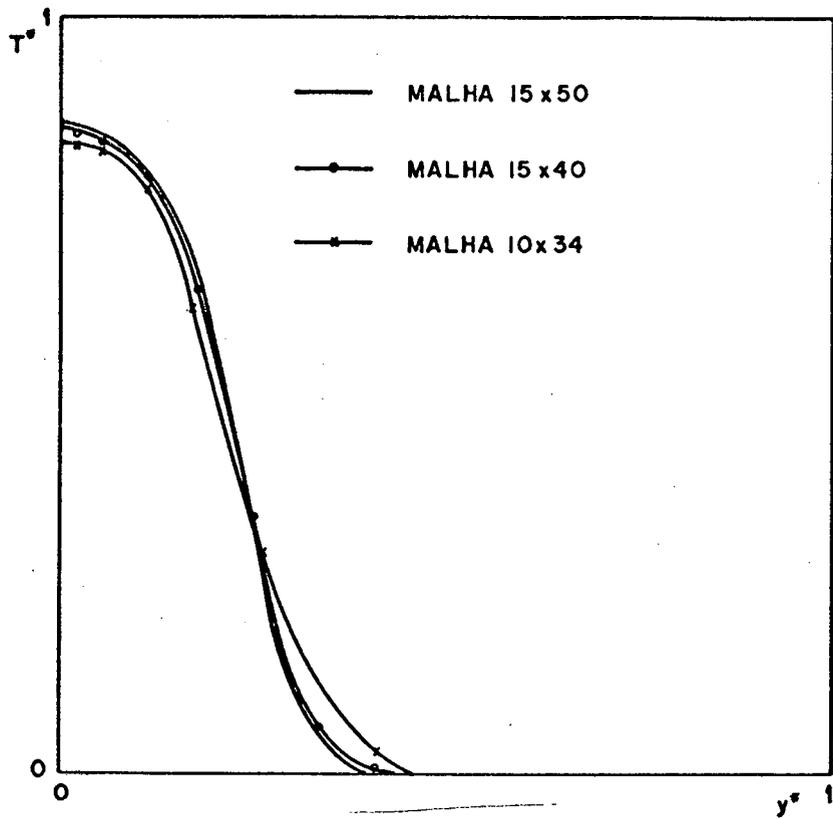


Figura 60 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas não-ortogonais e $Pe = 690$.

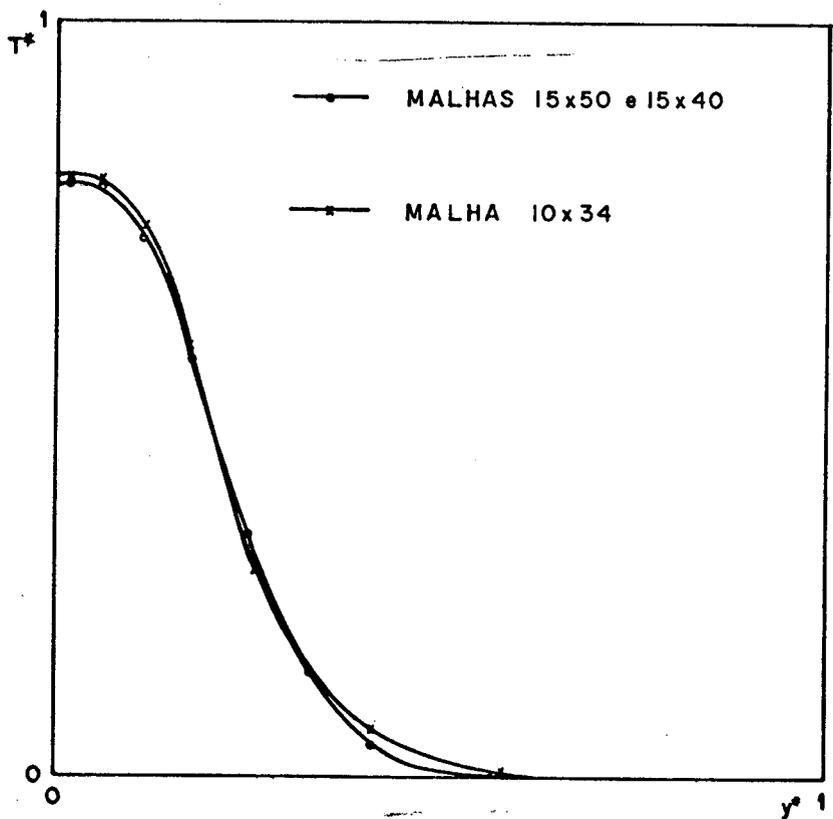


Figura 61 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas ortogonais cartesianas e $Pe = 690$.

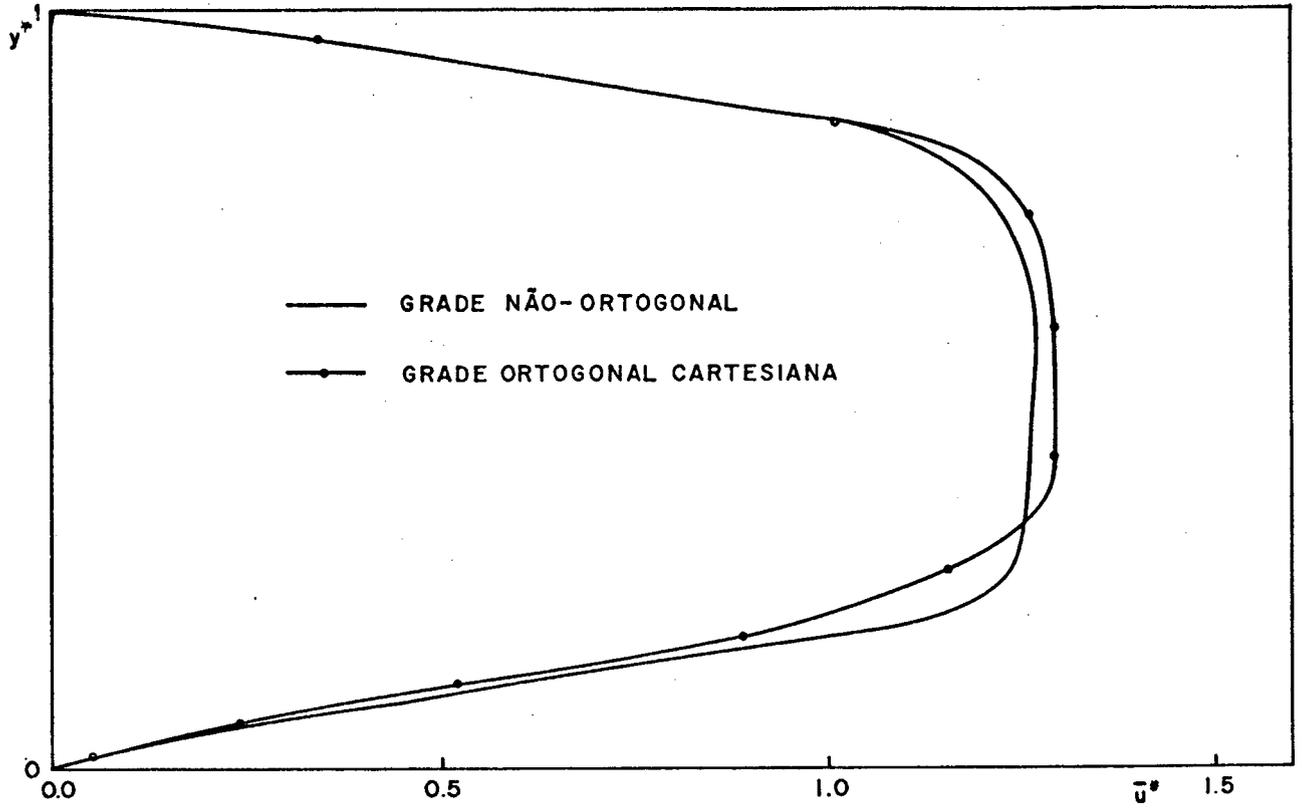


Figura 62 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas 10 x 34 e $Pe = 2760$.

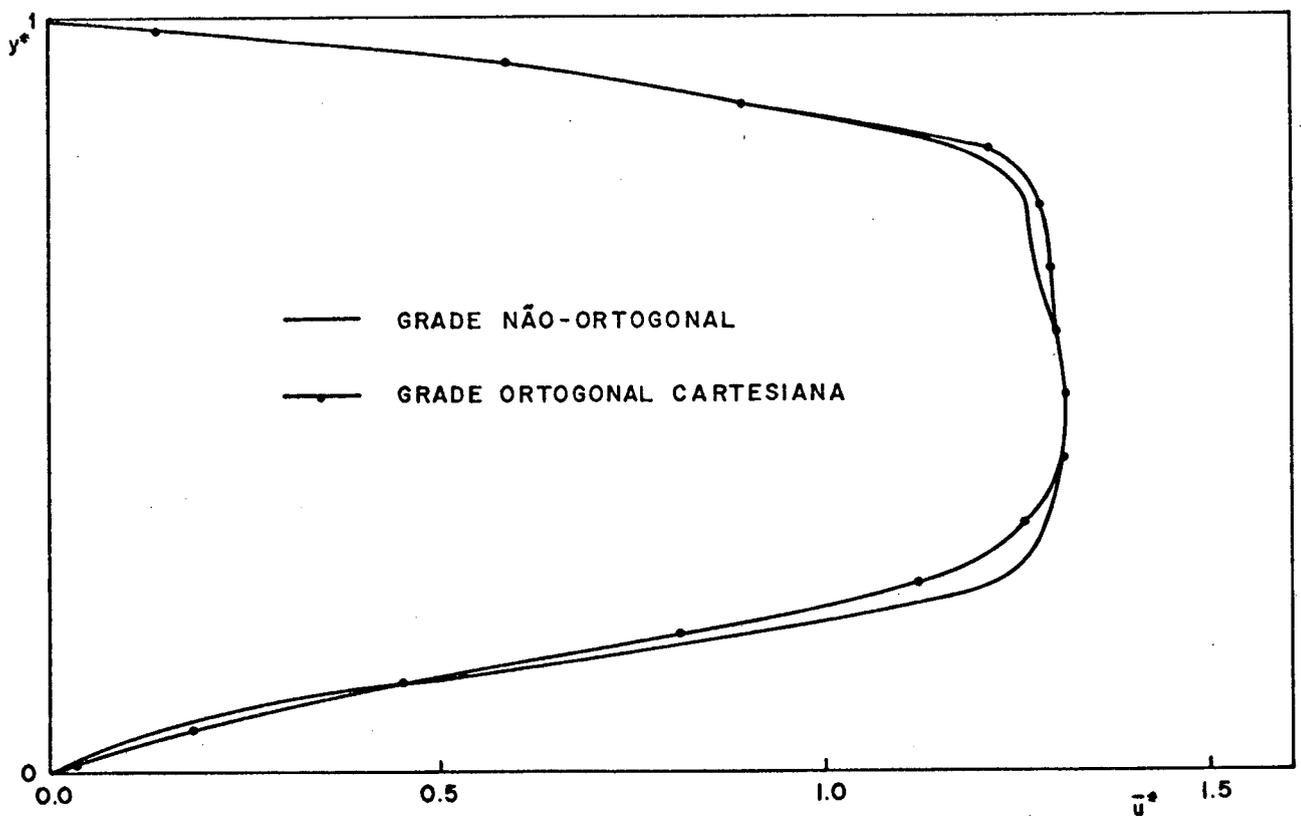


Figura 63 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas 15 x 50 e $Pe = 2760$.

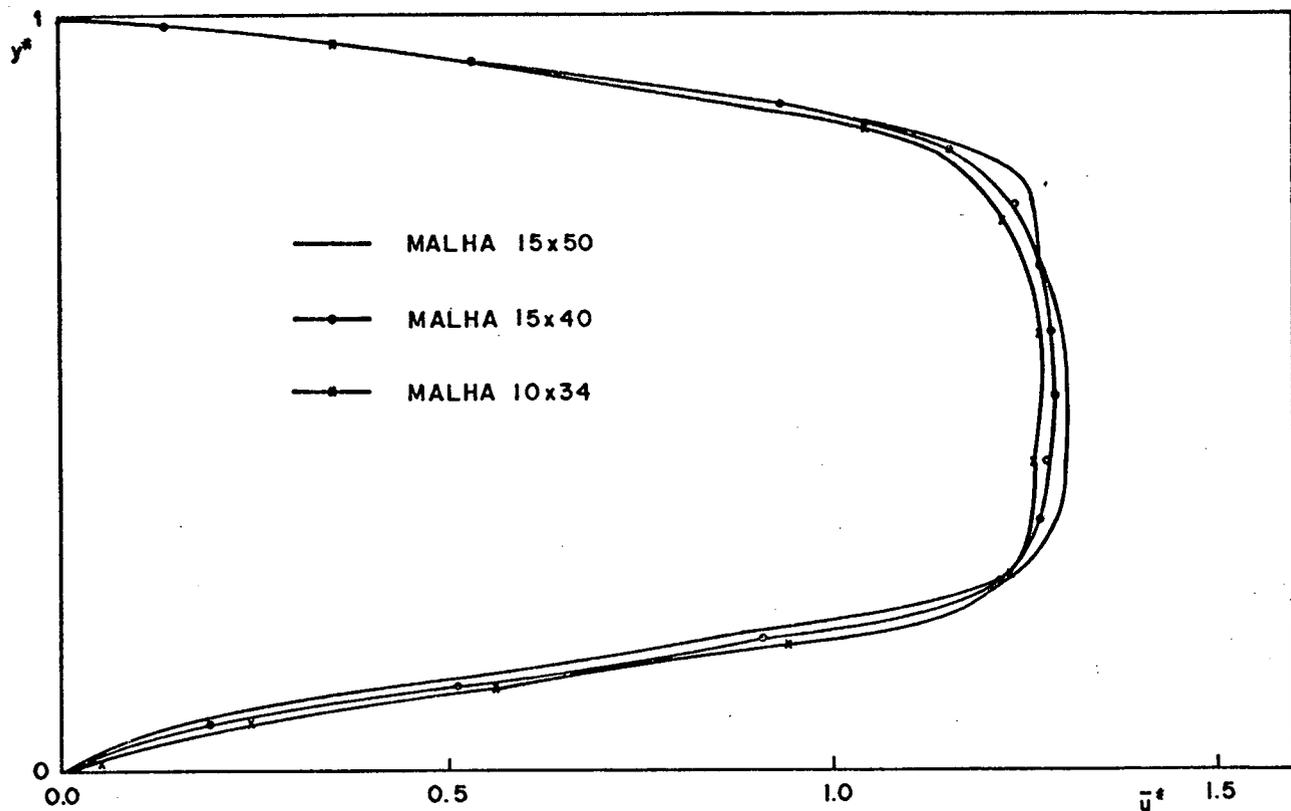


Figura 64 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas não-ortogonais e $Pe = 2760$.

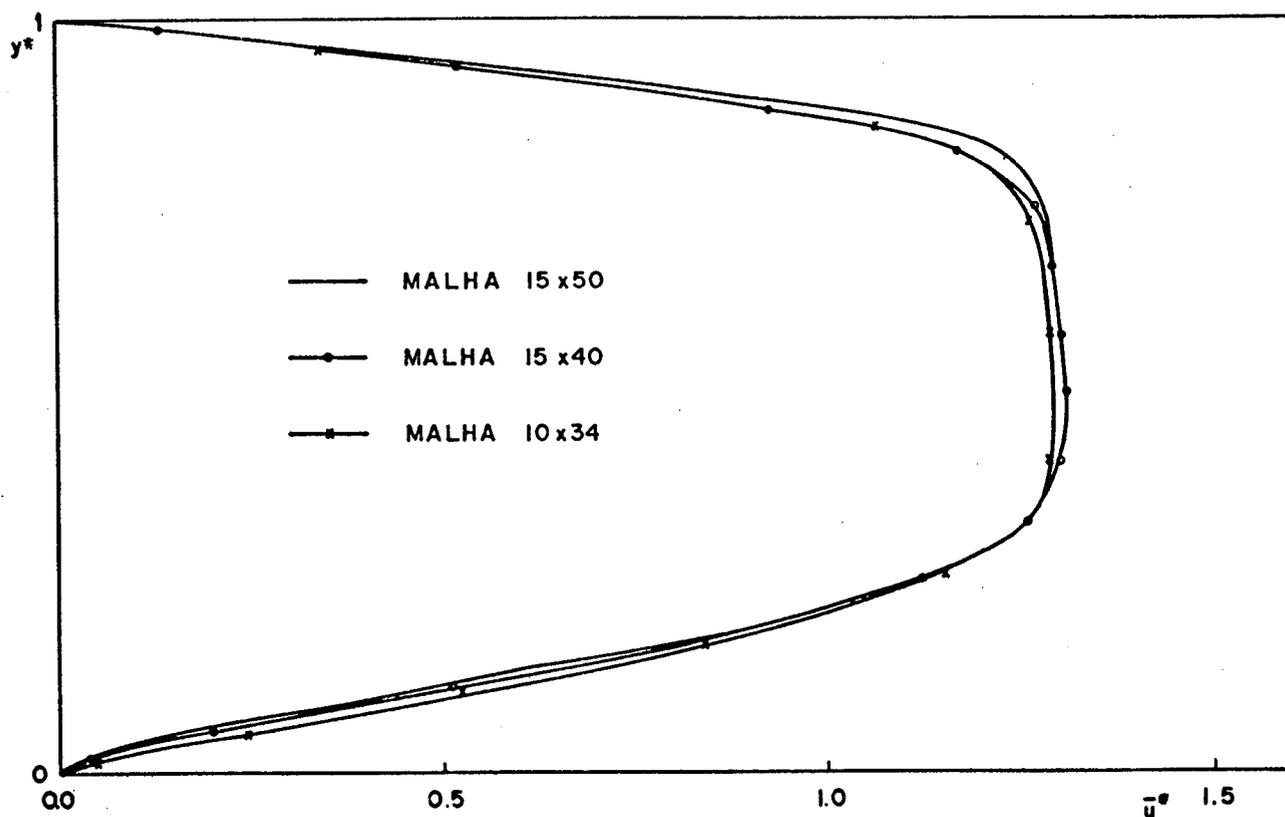


Figura 65 - Perfis de velocidades adimensionais para malhas ortogonais cartesianas e $Pe = 2760$.

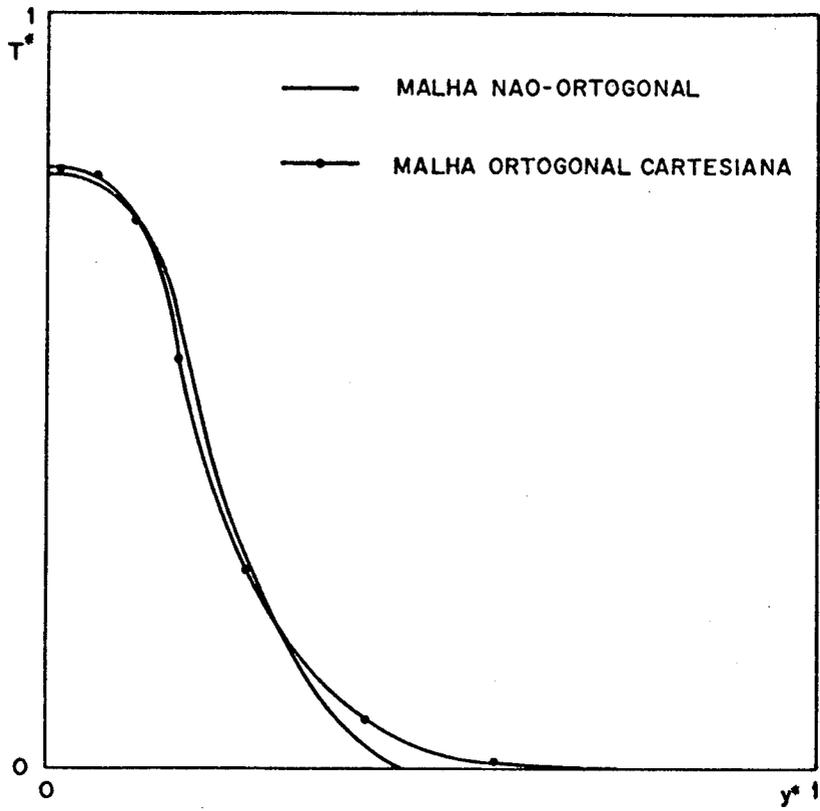


Figura 66 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas 10×34 e $Pe = 2760$.

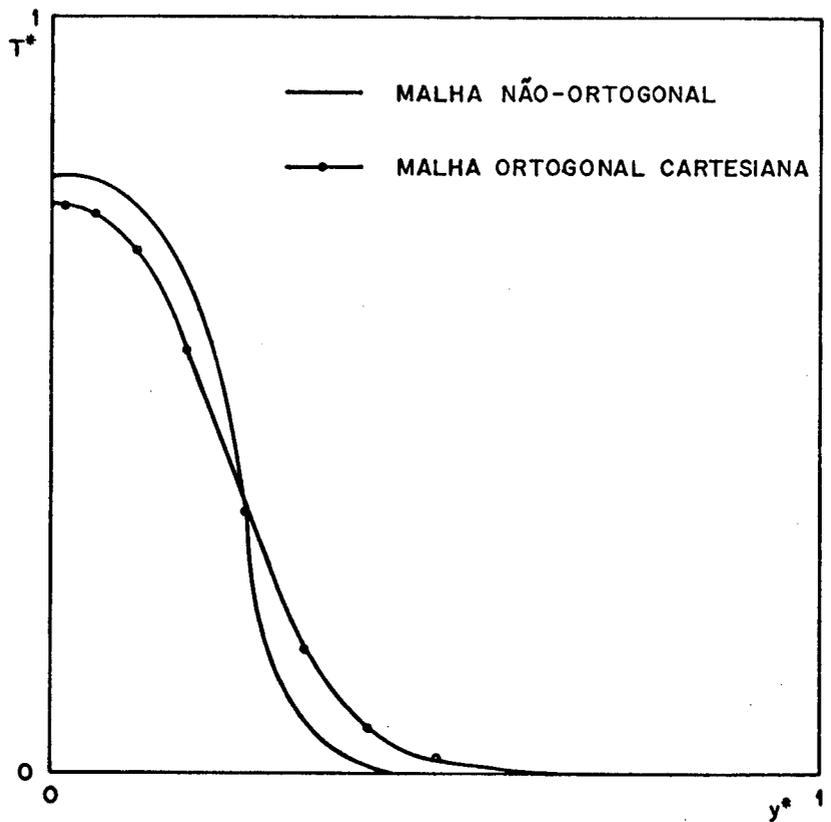


Figura 67 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas 15×50 e $Pe = 2760$.

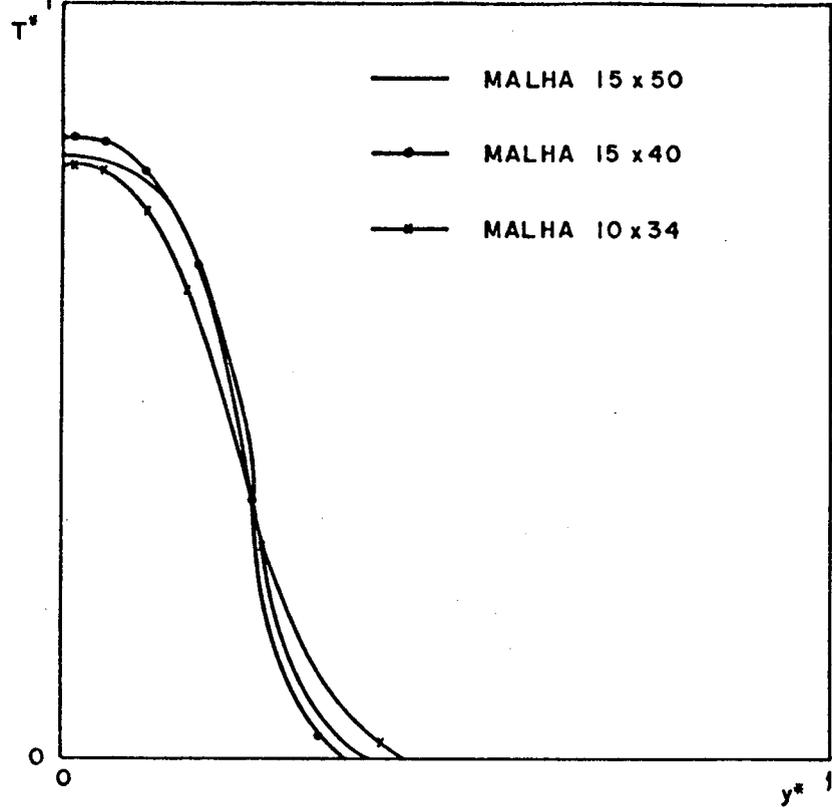


Figura 68 - Perfis de temperaturas adimensionais para malhas não-ortogonais e $Pe = 2760$.

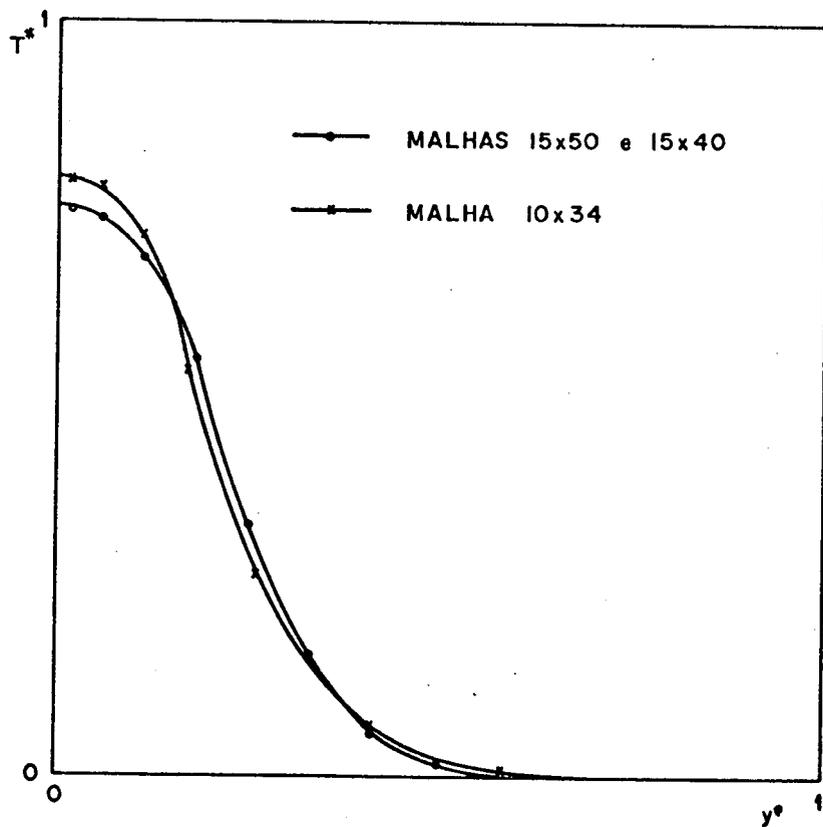


Figura 69 - Perfis de temperatura adimensionais para malhas ortogonais cartesianas e $Pe = 2760$.

Os resultados são apresentados nas Tabelas 8 e 9 verificando-se uma diferença significativa entre os resultados obtidos com as duas malhas, principalmente para a temperatura. Uma análise mais detalhada permite verificar que os resultados apresentados reforçam a tese da ocorrência da falsa difusão, com uma acentuada difusão de calor e quantidade de movimento na direção y , para a malha ortogonal cartesiana.

Convém ressaltar que o fato da malha ser ortogonal cartesiana ou não-ortogonal não interfere significativamente no tempo de computação. A diferença, para mais ou menos varia com o número de Peclet do escoamento, sendo que, para os problemas resolvidos, não foi possível estabelecer uma relação. Destaque-se ainda que o tempo de CPU, utilizando computador IBM 4341, para as malhas 15×50 , oscila em torno de 31 min para $Pe = 100$, 28 min para $Pe = 690$ e 26 min para $Pe = 2760$ e, para as malhas 10×34 , oscila em torno de 9,30 min para $Pe = 100$, 9 min para $Pe = 690$ e 8,30 para $Pe = 2760$.

Procurando verificar a capacidade do método em captar as regiões de recirculação após a entrada do jato, resolveu-se o problema para um número de Reynolds do escoamento constante e igual a 500, variando as relações de vazão N .

A Figura 70 apresenta os vetores velocidade obtidos para as relações de vazão $N = 3, 6, 9$ e 12 sobre a malha não-ortogonal 10×34 . A utilização desta malha é decorrente da dificuldade em representar-se os vetores velocidade \vec{V} para uma malha mais refinada. Destaque-se, contudo, que o objetivo proposto não foi prejudicado, observando-se que as regiões de recirculação são fisicamente consistentes, tornando-se maiores com o aumento da velocidade do jato. Os "<" representam velocidades muito baixas que não foram possíveis indicar através de setas.

Finalmente, para observar os efeitos convectivos e condutivos à montante da entrada do jato, resolveu-se o problema para diversos valores de Peclet do escoamento e temperatura do jato. A Figura 71 apresenta resultados para diferentes números de Peclet, obtidos para N constante e igual a 7,5 com temperaturas de jato quente iguais a 30 e 50°C e escoamento principal a 20°C . Neste caso o Re_{esc} foi alterado, justamente para mostrar o efeito do aumento da convecção sobre a condução. Observa-se

Tabela 8 - Velocidades adimensionais u^* nas posições das malhas das Figuras 44 e 45 para $Pe = 690$.

POSIÇÃO	GRADE NÃO-ORTOGONAL	GRADE ORTOGONAL CARTESIANA
A	0,901	0,915
B	0,933	0,980
C	0,983	1,032
D	1,037	1,065
E	1,092	1,105
F	1,142	1,152
G	1,194	1,203
H	1,220	1,240
I	1,237	1,248
J	1,253	1,232
K	1,229	1,163
L	0,937	0,924
M	0,525	0,525
N	0,115	0,181
O	-0,004	-0,010

Tabela 9 - Temperaturas adimensionais T^* nas posições das malhas das Figuras 44 e 45 para $Pe = 690$.

POSIÇÃO	GRADE NÃO-ORTOGONAL	GRADE ORTOGONAL CARTESIANA
1	0,000	0,000
2	0,000	0,000
3	0,000	0,000
4	0,000	0,000
5	0,000	0,000
6	0,000	0,000
7	0,000	0,005
8	0,000	0,038
9	0,003	0,139
10	0,084	0,252
11	0,521	0,458
12	0,877	0,707
13	0,956	0,866
14	0,977	0,950
15	0,977	0,944

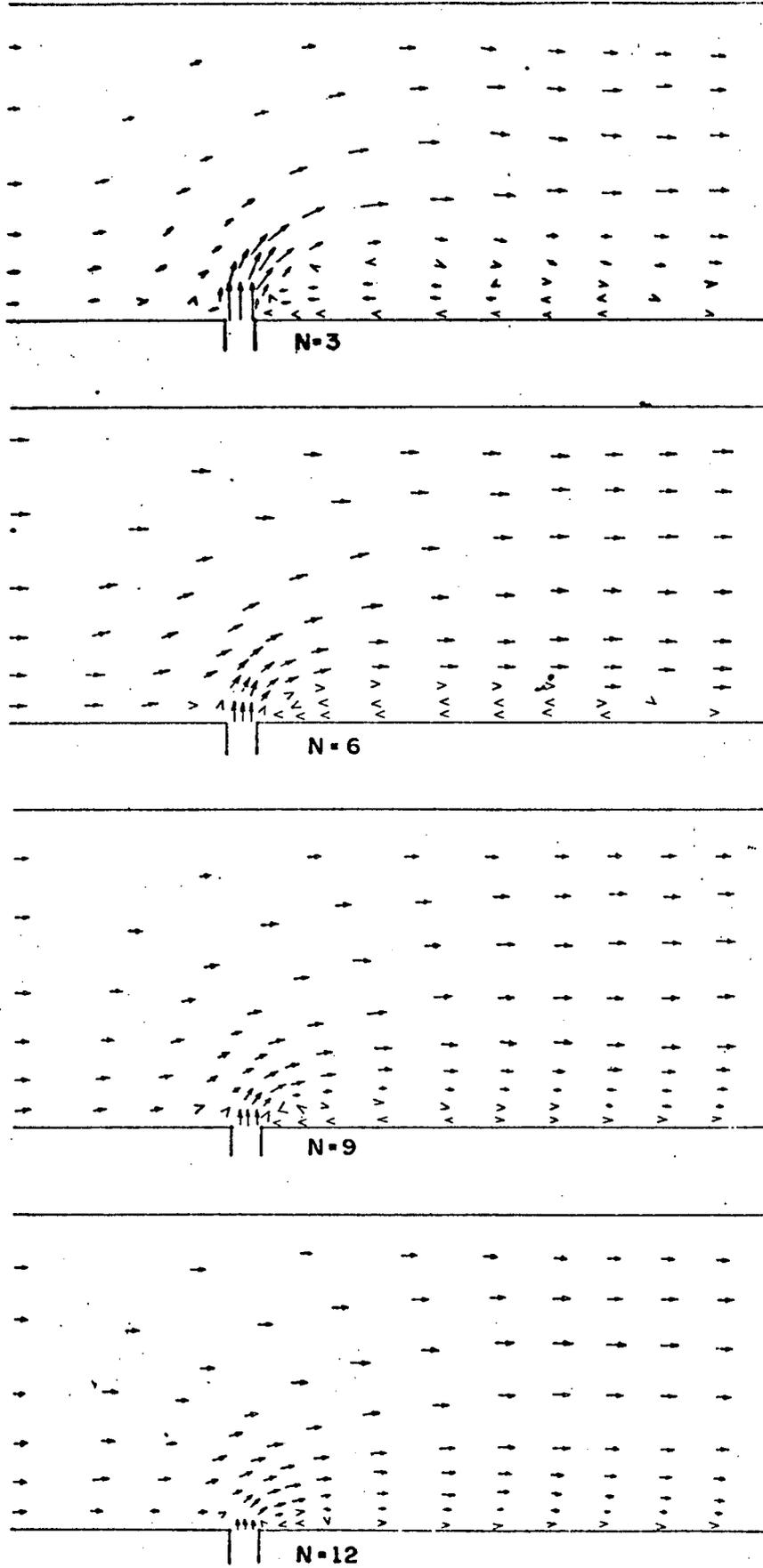


Figura 70 - Vetores velocidade para $Re_{esc} = 500$.

que o comportamento físico esperado é obtido, onde vemos um aumento da temperatura à montante e uma diminuição à jusante com a diminuição do número de Peclet.

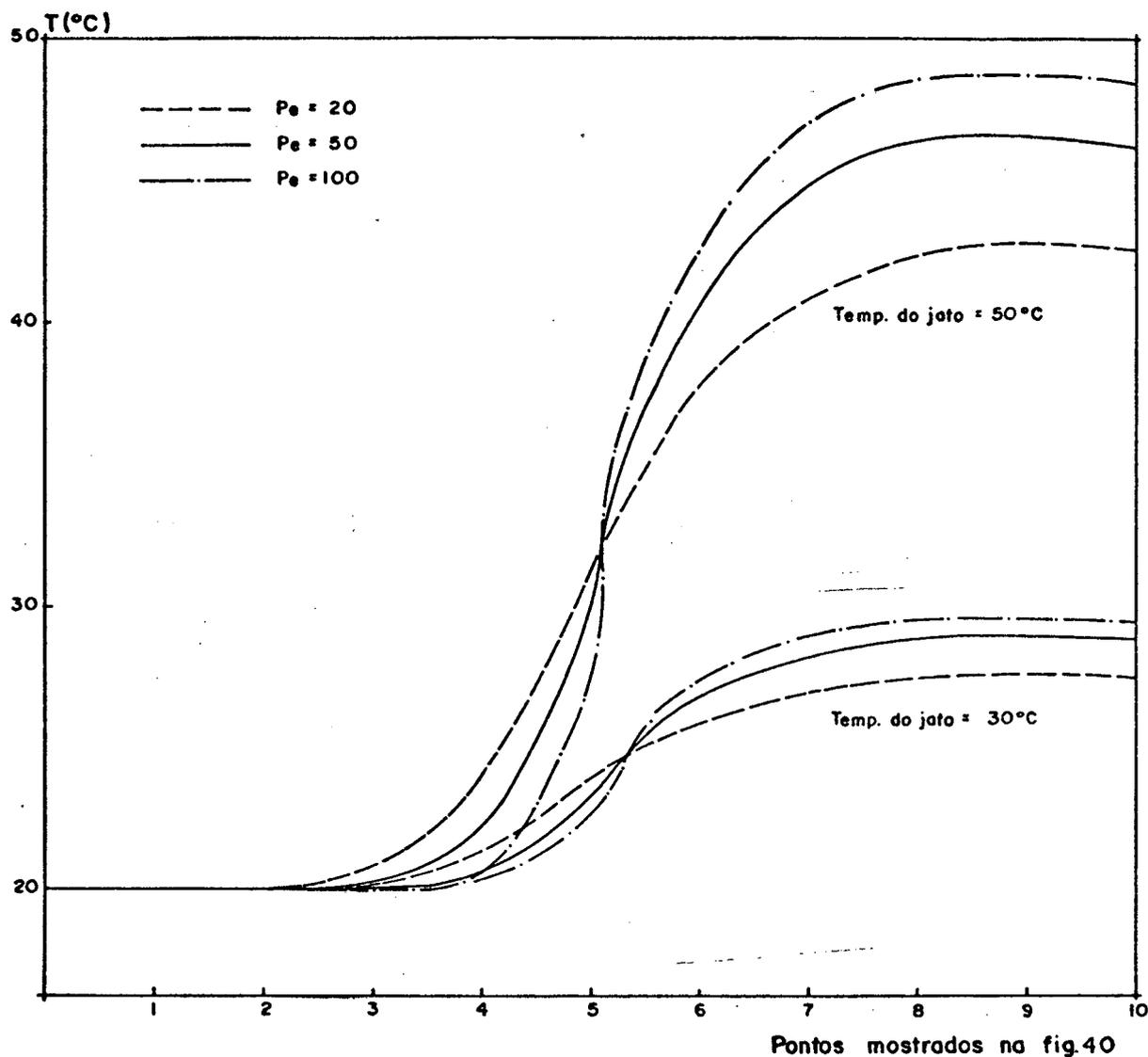


Figura 71 - Temperaturas nas posições da grade da Figura 40 para $N = 7,5$.

Uma análise dos resultados apresentados na Figura 71, permite verificar que o domínio de solução utilizado à montante da entrada do jato foi suficiente para que os efeitos da condução não alterem as condições de contorno utilizadas.

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

8.1 - INTRODUÇÃO

Como resultado da realização deste trabalho obteve-se um modelo numérico genérico, bidimensional, para a solução de problemas de convecção forçada, em geometrias arbitrárias. O desenvolvimento deste modelo, por sua vez, permitiu que se obtivesse uma previsão quanto aos efeitos causados por um jato quente que penetra em um escoamento em fluxo cruzado.

O objetivo maior, contudo, foi o de estabelecer-se condições de contorno nas fronteiras com entrada e saída de massa e generalizar-se a aplicação destas condições de contorno em problemas bidimensionais utilizando sistema generalizado de coordenadas. E neste sentido verificou-se que a utilização das velocidades contravariantes, na especificação das condições de contorno na seção de saída do escoamento, confere grande versatilidade e generalidade ao modelo desenvolvido.

8.2 - CONTRIBUIÇÕES DESTA DISSERTAÇÃO

Acredita-se que o desenvolvimento deste trabalho tenha contribuído principalmente no estabelecimento e generalização das condições de contorno na seção de saída de escoamentos bidimensionais em geometrias arbitrárias. Outras contribuições de correntes do desenvolvimento deste modelo numérico, bidimensional, para a solução de problemas de convecção forçada em geometrias arbitrárias podem ser citadas:

- a) Possibilidade de utilização de uma grade que permite minorar os efeitos da falsa difusão nos problemas de escoamentos confluentes.
- b) Teste do método PRIME, utilizado para resolver o acoplamento pressão-velocidade, para condição de fluxo de

massa nas fronteiras, utilizando sistemas curvilíneos generalizados.

8.3 - RECOMENDAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Vários são os trabalhos que poderão ser realizados nesta linha de pesquisa, apresentando-se a seguir algumas sugestões:

- a) A introdução de modelagem que permita abranger os casos em que os escoamentos são turbulentos. A expansão do modelo apresentado, para abranger estes casos, é de significativo interesse devido a grande ocorrência destes escoamentos nas situações práticas de engenharia.
- b) A introdução do efeito tridimensional, ou as equações médias na profundidade, para se levar em consideração os efeitos dos leitos irregulares de rios e estuários, e, introdução do efeito da convecção natural que possa estar ocorrendo na superfície livre destes escoamentos.
- c) A realização de trabalhos numéricos para verificar o comportamento do modelo quanto a não-ortogonalidade, através da utilização de malhas altamente distorcidas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. THOMPSON, J.F., THAMES, F.C. & MASTIN, C.W., Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. J. Comp. Phys., v.15, p.299-319, 1974.
2. MALISKA, C.R., A solution method for three-dimensional parabolic fluid flow problems in nonorthogonal coordinates. Ph.D. thesis, Waterloo Univ., Ontario, Canada, 1981.
3. VAN DOORMAAL, J.P. & RAITHBY, G.D., Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows. Numerical Heat Transfer, vol. 7, pp. 147-163, 1984.
4. MILIOLI, F.E., Solução numérica de problemas bidimensionais de convecção natural em cavidades arbitrárias. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Depto de Engenharia Mecânica, 1985.
5. SOUSA, A.C.M. & HATTON, A.P., Numerical simulation of convection flows. Anais do VII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Uberlândia, 1983.
6. ABARBANEL, S.; BENNET, S., BRANDT, A. & GILLIS, J., Velocity profiles of flow at low Reynolds numbers. Journal of Applied Mechanics, p. 2-4, 1970.
7. BIRD, R.B., STEWART, W.E. & LIGHTFOOT, E.N., Transport Phenomena. John Wiley & Sons Inc., 1960.
8. PEYRET, R. & VIVIAND, H., Computation of viscous compressible flow based on the Navier-Stokes equations. North Atlantic Treaty Organization, AGARD 212, 1975.
9. VINOKUR, M., Conservation equations of gasdynamics in curvilinear coordinate systems. J. Comp. Phys., v.14, p.105-125, 1974.

10. TAYLOR, A.E. & MANN, W.R., Advanced Calculus. John Wiley & Sons Inc., Caps. 8 e 9, 1972.
11. WINSLOW, A.M., Numerical solution of the quasi-linear Poisson equation in a nonuniform triangle mesh. J.Comp.Phys., v. 2, p. 149-172, 1967.
12. CHU, W.H., Development of a general finite difference approximation for a general domain. Part I: Machine transformation, J. Comp. Phys., v.8, p.392-408, 1971.
13. ROACHE, P.J., Computational fluid dynamics. Hermosa Publishers, 1976.
14. RAITHBY, G.D. & TORRANCE, K.E., Upstream-weighted differencing schemes and their application to elliptic problems involving fluid flow. Computer and fluids, v.2, p.191-206, 1974.
15. RAITHBY, G.D., Prediction of dispersion by surface discharge. Basin Investigation and Modelling Section, Canada Centre for Inland Waters, Burlington, Ontario, Canada, August 1976.
16. SPALDING, D.B., A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. Int. J. Numerical Methods in Engineering, v. 4, p.551-559, 1972.
17. PATANKAR, S.V., Numerical heat transfer and fluid flow. McGraw-Hill Book Company, U.S.A., 1980.
18. RAITHBY, G.D. & SCHNEIDER, G.E., Numerical solution of problems in incompressible fluid flow: treatment of the velocity-pressure coupling. Numerical Heat Transfer, v. 2, p.417-440, 1979.

19. VAN DOORMALL, J.P. & RAITHEY, G.D., The application of quasi-continuum approach to three-dimensional elliptic flows in complex geometries. Waterloo Research Institute Report to Atomic Energy of Canada Ltd., September 1981.
20. THOMPSON, J.F., THAMES, F.C. & MASTIN, C.W., Boundary-fitted curvilinear coordinate systems for solution of partial differential equations on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. NASA Langley Research Center Cr-2729, 1976.
21. HARLOW, F.H. & WELCH, J.E., Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. Physics of Fluids, v. 8, pp. 2182-2189, 1965.
22. NOGUEIRA, A.C.R. Comunicação Pessoal.
23. DE VAHL DAVIS, G., Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution. Int. J. Numerical Methods in Fluids, v. 3, p. 249-264, 1983.
24. DE VAHL DAVIS, G. & JONES, I.P., Natural convection in a square cavity: a comparison exercise. Int. J. Numerical Methods in Fluids, v. 3, p. 227-248, 1983.
25. DUNN, W.E., POLICASTRO, A.J. & PADDOCK, R.A., Surface thermal plumes: evaluation of mathematical models for the near and complete field, Argonne National Laboratory Report No. ANL/WR-75-3, 1975.
26. JIRKA, G.H., ABRAHAM, G. & HARLEMANN, D.R.F., An assessment of techniques for hydrothermal prediction, Ralph M. Parson Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, Report No. 203, Massachusetts Institute of Technology, 1975.
27. MCGUIRK, J. & RODI, W., Calculation of three-dimensional heated surface jets, Proceedings of the 1976 ICHMT Seminar

on Turbulent Buoyant Convection, Dubrovnik, Yugoslavia, pp. 275-288, 1976.

28. MCGUIRK, J. & RODI, W., Mathematical modelling of three-dimensional heated surface jets, J. Fluid Mechanics, Vol. 95, Part 4, pp. 609-633, 1979.
29. RAITHBY, G.D. & SCHNEIDER, G.E., The prediction of surface discharge jets by a three-dimensional finite-difference model. Journal of Heat Transfer, v. 102, No. 1, 1980.
30. RAITHBY, G.D. & ELLIOTT, R.V., A three-dimensional finite difference model for the prediction of thermal discharges. Third Conference on Waste Heat Management and Utilization, Miami Beach, Florida, 1981.
31. RAITHBY, G.B. & ELLIOTT, R.V., The prediction of a thermal discharge entering a crossflow, Symposium on refined modelling of flows, Paris, France, 1982.
32. SHYY, W., TONG, S.S. & CORREA, S.M., Numerical recirculating flow calculation using a body-fitted coordinate system. Numerical Heat Transfer, vol. 8, pp. 99-113, 1985.
33. NAPOLITANO, M. & ORLANDI, P. Laminar flow in a complex geometry: a comparison. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 5, 667-683(1985).

COEFICIENTES PARA A EQUAÇÃO DE PRESSÃO PARA
VOLUMES DE CONTROLE DA CONTINUIDADE NA FRONTEIRA

A.1 - INTRODUÇÃO

Neste apêndice apresenta-se os coeficientes para a equação de pressão para volumes de controle da Continuidade situados nas fronteiras. Conforme já foi visto, de acordo com a metodologia adotada as condições de contorno ficam automaticamente incorporadas às equações através de seus coeficientes, fazendo com que os mesmos sejam diferentes daqueles para os elementos internos.

Para o problema de interesse desta dissertação estes coeficientes são função de dois tipos de condições de contorno: fluxo de massa prescrito e derivada nula para a componente contravariante "U" do vetor velocidade. Os procedimentos para incorporar estas condições de contorno também já foram vistos e aqui são apresentadas somente as expressões dos coeficientes nas fronteiras que sofrem alteração com relação àqueles obtidos para as células internas. Os coeficientes que desaparecem e os que permanecem inalterados são apenas indicados. Apresenta-se ainda os termos fonte que agora envolvem o gradiente de pressão na fronteira.

A Figura A.1 mostra os 9 tipos de volume de controle envolvidos juntamente com as condições de contorno para a velocidade no plano transformado. É importante salientar que o fato de o fluxo de massa ser igual a zero nos contornos sólidos, não altera as expressões dos coeficientes destas fronteiras com relação àquelas em que o fluxo de massa é diferente de zero, pois não deixa de ser um fluxo de massa prescrito.

Para o elemento interno denotado por "I", as expressões para os coeficientes e termo fonte estão listados no Capítulo 5. Contudo, convém lembrar que a expressão para obtenção de A_p

para qualquer elemento do domínio é

$$A_p = A_e + A_n + A_s + A_w + A_{ne} + A_{nw} + A_{se} + A_{sw} \quad (A.1)$$

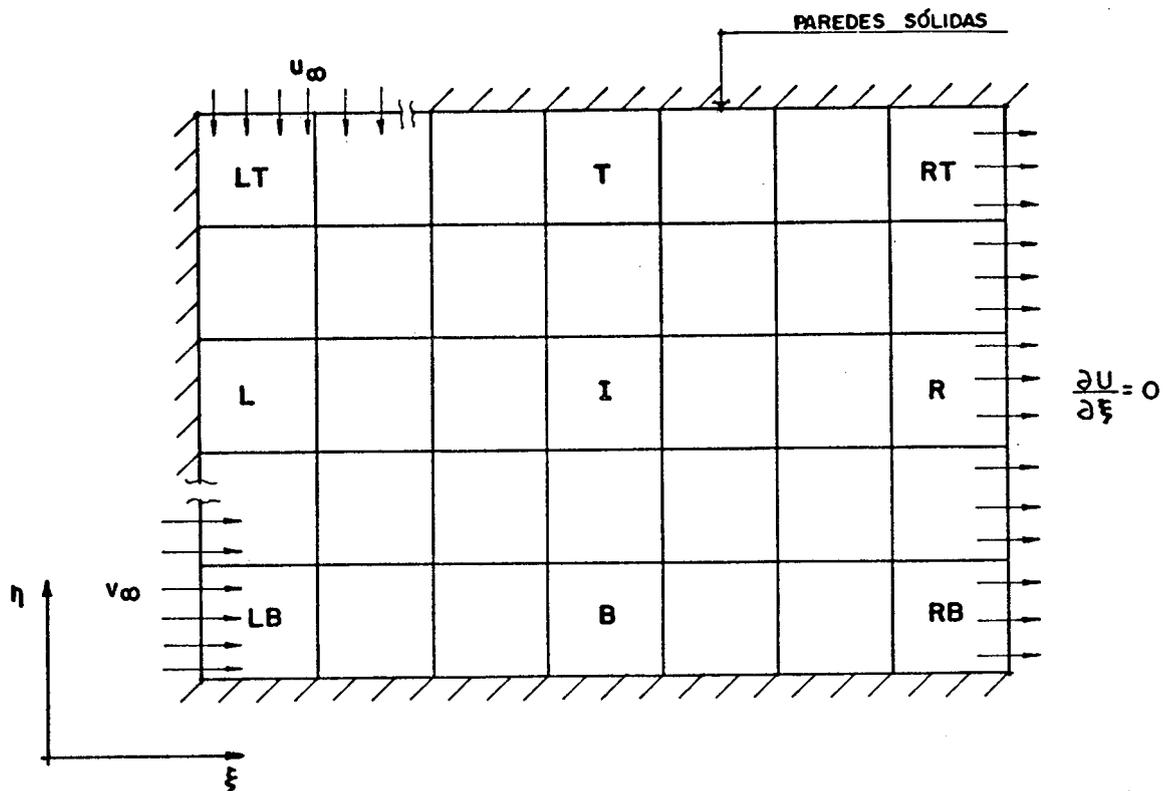


Figura A.1 - Tipos de volume de controle para a Continuidade e condições de contorno para a velocidade de no plano transformado.

A.2 - LISTAGEM DOS COEFICIENTES E TERMOS FONTE

A - ELEMENTO L

$$A_w = A_{nw} = A_{sw} = 0$$

A_e, A_{ne}, A_{se} → inalterados

$$A_n = \left(\frac{\gamma}{A_p}\right)_n + \left(\frac{\beta}{4A_p}\right)_n - \left(\frac{\beta}{4A_p}\right)_e \quad (A.2)$$

$$A_s = \left(\frac{\gamma}{A_p V}\right)_s - \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_s + \left(\frac{\beta}{4A_p U}\right)_e \quad (\text{A.3})$$

$$B = \nabla \cdot \vec{V} + (K_V)_s - (K_V)_n \quad (\text{A.4})$$

onde

$$K_V = \frac{\Delta P_f \beta}{2A_p V} \quad (\text{A.5})$$

e ΔP_f representa o gradiente de pressão na fronteira, dado pela Equação (5.34).

B - ELEMENTO B

$$A_s = A_{sw} = A_{se} = 0$$

$A_n, A_{nw}, A_{ne} \rightarrow$ inalterados

$$A_e = \left(\frac{\alpha}{A_p U}\right)_e + \left(\frac{\beta}{4A_p U}\right)_e - \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_n \quad (\text{A.6})$$

$$A_w = \left(\frac{\alpha}{A_p U}\right)_w - \left(\frac{\beta}{4A_p U}\right)_w + \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_n \quad (\text{A.7})$$

$$B = \nabla \cdot \vec{V} + (K_U)_w - (K_U)_e \quad (\text{A.8})$$

onde

$$K_U = \frac{\Delta P_f \beta}{2A_p U} \quad (\text{A.9})$$

C - ELEMENTO T

$$A_n = A_{ne} = A_{nw} = 0$$

$A_s, A_{se}, A_{sw} \rightarrow$ inalterados.

$$A_e = \left(\frac{\alpha}{A_p U}\right)_e + \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_s - \left(\frac{\beta}{4A_p U}\right)_e \quad (\text{A.10})$$

$$A_w = \left(\frac{\alpha}{A_p U}\right)_w - \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_s + \left(\frac{\beta}{4A_p U}\right)_w \quad (\text{A.11})$$

$$B = \nabla \cdot \vec{V} + (K_U)_w - (K_U)_e \quad (\text{A.12})$$

D - ELEMENTO LB

$$A_s = A_{se} = A_{sw} = A_w = A_{nw} = 0$$

A_{ne} → inalterado

$$A_e = \left(\frac{\alpha}{A_p U}\right)_e + \left(\frac{\beta}{4A_p U}\right)_e - \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_n \quad (\text{A.13})$$

$$A_n = \left(\frac{\gamma}{A_p V}\right)_n + \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_e - \left(\frac{\beta}{4A_p U}\right)_e \quad (\text{A.14})$$

$$B = \nabla \cdot \vec{V} - (K_U)_e - (K_V)_n \quad (\text{A.15})$$

E - ELEMENTO LT

$$A_n = A_{ne} = A_{nw} = A_w = A_{sw} = 0$$

A_{se} → inalterado

$$A_e = \left(\frac{\alpha}{A_p U}\right)_e + \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_s - \left(\frac{\beta}{4A_p U}\right)_e \quad (\text{A.16})$$

$$A_s = \left(\frac{\gamma}{A_p V}\right)_s - \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_s + \left(\frac{\beta}{4A_p U}\right)_e \quad (\text{A.17})$$

$$B = \nabla \cdot \vec{V} - (K_U)_e + (K_V)_s \quad (\text{A.18})$$

F - ELEMENTO RB

$$A_e = A_{ne} = A_{se} = A_s = A_{sw} = 0$$

$$A_{nw} = \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_n \quad (A.19)$$

$$A_n = \left(\frac{\gamma}{A_p V}\right)_n - \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_n \quad (A.20)$$

$$A_w = \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_n \quad (A.21)$$

$$B = \nabla \cdot \vec{\hat{V}} - (K_V)_n \quad (A.22)$$

G - ELEMENTO RT

$$A_e = A_{ne} = A_{se} = A_n = A_{nw} = 0$$

$$A_{sw} = -\left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_s \quad (A.23)$$

$$A_s = \left(\frac{\gamma}{A_p V}\right)_s + \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_s \quad (A.24)$$

$$A_w = -\left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_s \quad (A.25)$$

$$B = \nabla \cdot \vec{\hat{V}} + (K_V)_s \quad (A.26)$$

H - ELEMENTO R

$$A_e = A_{ne} = A_{se} = 0$$

$$A_w = \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_n - \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_s \quad (A.27)$$

$$A_{nw} = \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_n \quad (\text{A.28})$$

$$A_{sw} = -\left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_s \quad (\text{A.29})$$

$$A_s = \left(\frac{\gamma}{A_p V}\right)_s + \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_s \quad (\text{A.30})$$

$$A_n = \left(\frac{\gamma}{A_p V}\right)_n - \left(\frac{\beta}{4A_p V}\right)_n \quad (\text{A.31})$$

$$B = \nabla \cdot \vec{\hat{V}} + (K_V)_s - (K_V)_n \quad (\text{A.32})$$

Estes são, portanto, os coeficientes e termos fonte para a equação de pressão para volumes de controle da Continuidade nas fronteiras.

EQUAÇÕES PARA A TEMPERATURA PARA OS
VOLUMES DE CONTROLE NAS FRONTEIRAS

B.1 - INTRODUÇÃO

No Capítulo 6 apresentou-se os motivos pelos quais optou-se em aplicar as condições de contorno da temperatura através de balanços de calor realizados nos volumes de controle localizados nas fronteiras. Ainda neste capítulo mostrou-se como este balanço de calor é realizado, obtendo-se as equações resultantes para diferentes condições de contorno. Neste apêndice, portanto, irá se apresentar as equações específicas para cada volume de controle localizado nas fronteiras para o problema resolvido neste trabalho.

A Figura B.1 mostra os tipos de volumes de controle envolvidos juntamente com as condições de contorno para a temperatura no plano transformado. Há necessidade de destacar-se aqui que para este problema específico tem-se 11 tipos de volumes de controle para a temperatura em oposição aos 9 pontos tradicionais. Estes 2 tipos de volumes de controle adicionais são função do tipo de discretização utilizado para o domínio físico, que faz com que se tenha duas condições de contorno diferentes para uma mesma fronteira no plano transformado. É fácil observar-se que nas fronteiras norte e oeste tem-se parte da fronteira submetida a condição de fluxo nulo enquanto que na outra parte ocorre fluxo de calor por convecção e difusão (fronteira com fluxo de massa). Já para a seção de saída a equação para os elementos R, RB e RT é a mesma e é dada pela condição de derivada nula para a temperatura. Esta e as demais equações são agora apresentadas.

B.2 - EQUAÇÕES ADICIONAIS

A - ELEMENTO L_1

$$A_p T_p^{n+1} = A_e T_e^{n+1} + A_s T_s^{n+1} + A_n T_n^{n+1} + STT \quad (B.1)$$

onde

$$STT = C_2 \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_e + C_5 \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_n - C_5 \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_s + \quad (B.2)$$

$$- \left[C_1 \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + C_2 \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right]_w + M_w T_w + \frac{A_p T_p^n}{(1+E)}$$

e

$$A_p = (A_e + A_s + A_n + M_w) \left(\frac{1+E}{E} \right) \quad (B.3)$$

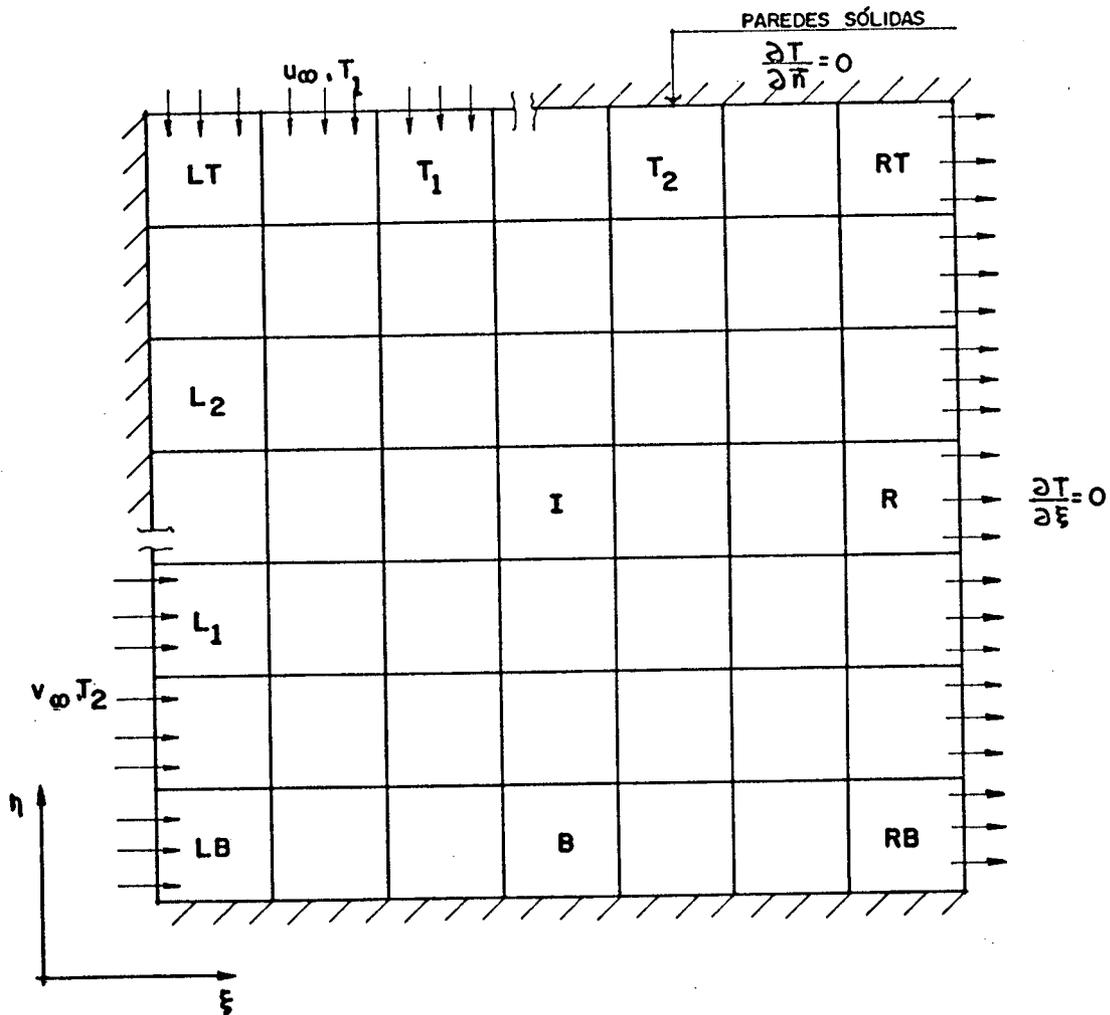


Figura B.1 - Tipos de volume de controle e condições de contorno para a temperatura no plano transformado.

B - ELEMENTO L₂

$$A_p T_P^{n+1} = A_e T_E^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + STT \quad (B.4)$$

onde

$$STT = C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_e + C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_n - C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_s + \frac{A_p T_P^n}{(1+E)} \quad (B.5)$$

e

$$A_p = (A_e + A_s + A_n) \frac{(1+E)}{E} \quad (B.6)$$

C - ELEMENTO LB

$$A_p T_P^{n+1} = A_e T_E^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + STT \quad (B.7)$$

onde

$$STT = C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_e + C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_n - [C_{1\frac{\partial T}{\partial \xi}} + C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}}]_w + M_w T_w + \frac{A_p T_P^n}{(1+E)} \quad (B.8)$$

e

$$A_p = (A_e + A_n + M_w) \frac{(1+E)}{E} \quad (B.9)$$

D - ELEMENTO LT

$$A_p T_p^{n+1} = A_e T_E^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + STT \quad (B.10)$$

onde

$$STT = C_{2\frac{\partial T}{\partial \eta}})_e - C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}})_s + [C_{4\frac{\partial T}{\partial \eta}} + C_{5\frac{\partial T}{\partial \xi}}]_n + M_n T_n + \frac{A_p T_p^n}{(1+E)} \quad (B.11)$$

e

$$A_p = (A_e + A_s - M_n) \frac{(1+E)}{E} \quad (B.12)$$

E - ELEMENTO T₁

$$A_p T_p^{n+1} = A_e T_E^{n+1} + A_w T_W^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + STT \quad (B.13)$$

onde

$$STT = C_2 \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_e - C_2 \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_w - C_5 \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_s + \\ + \left[C_4 \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + C_5 \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right]_n - M_n T_n + \frac{A_p T_p^n}{(1+E)} \quad (B.14)$$

e

$$A_p = (A_e + A_w + A_s - M_n) \frac{(1+E)}{E} \quad (B.15)$$

F - ELEMENTO T₂

$$A_p T_p^{n+1} = A_e T_E^{n+1} + A_w T_W^{n+1} + A_s T_S^{n+1} + STT \quad (B.16)$$

onde

$$STT = C_2 \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_e - C_2 \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_w - C_5 \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_s + \frac{A_p T_p^{n+1}}{(1+E)} \quad (B.17)$$

e

$$A_p = (A_e + A_w + A_s) \frac{(1+E)}{E} \quad (B.18)$$

G - ELEMENTO B

$$A_p T_p^{n+1} = A_e T_E^{n+1} + A_w T_W^{n+1} + A_n T_N^{n+1} + STT \quad (B.19)$$

onde

$$STT = C_2 \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_e - C_2 \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_w + C_5 \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_n + \frac{A_p T_p^{n+1}}{(1+E)} \quad (B.20)$$

e

$$A_p = (A_e + A_w + A_n) \left(\frac{1+E}{E} \right) \quad (B.21)$$

$$T_E = T_W$$

(B.22)

É importante observar que uma condição de fluxo de massa nulo com temperatura prescrita na parede não ocasionaria alterações nas equações para os elementos LB, LT, T₁ e L₁. É óbvio que para esta situação a troca de calor será apenas por difusão, sendo que a parte convectiva da equação desaparece em virtude de ser nula.

Uma análise das equações apresentadas permite verificar ainda que nem todas as derivadas que aparecem nas expressões dos termos fonte podem ser aproximadas em diferenças centrais; que foi o procedimento utilizado para os volumes de controle internos. É o caso, por exemplo, das derivadas $\frac{\partial T}{\partial \eta}$ ₃ e $\frac{\partial T}{\partial \eta}$ ₈ para a fronteira superior e, $\frac{\partial T}{\partial \xi}$ ₄ e $\frac{\partial T}{\partial \xi}$ ₇, para a fronteira esquerda. Os pontos para avaliação destes gradientes, que aparecem nos termos fonte das equações adicionais, são mostrados na Figura B.2.

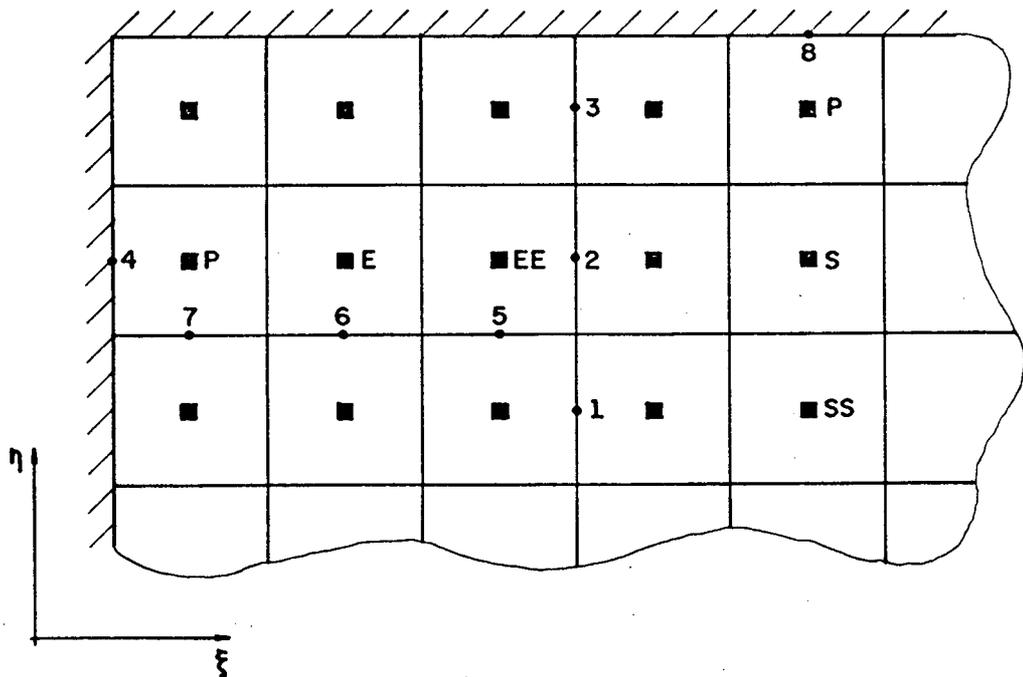


Figura B.2 - Cálculos de $\frac{\partial T}{\partial \eta}$ na fronteira superior e $\frac{\partial T}{\partial \xi}$ na fronteira esquerda.

B.3 - AVALIAÇÃO DOS GRADIENTES DE TEMPERATURA JUNTO AS FRONTEIRAS

Para avaliar os gradientes $\frac{\partial T}{\partial \eta}$ e $\frac{\partial T}{\partial \xi}$ junto as fronteiras utiliza-se novamente aproximações parabólicas, já consideradas para avaliar gradientes de pressão, no Capítulo 6. Este procedimento é aqui repetido para os gradientes de temperatura por ser consistente com as aproximações em diferenças centrais, utilizadas para avaliar gradientes de temperatura para os volumes de controle internos.

Como os pontos de pressão e temperatura são coincidentes, para o arranjo de grade utilizado, o gradiente de temperatura em 3 é determinado pela combinação das Equações (5.33) e (5.34), reescritas para a temperatura, resultando

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_3 = \frac{1}{2}(3T_3 + T_1 - 4T_2) \quad (\text{B.23})$$

Expressão similar é válida para o ponto 7 e para as demais fronteiras.

O gradiente de temperatura em 4 é obtido de maneira similar, utilizando-se as temperaturas dos pontos P e E, além da temperatura de fronteira especificada no próprio ponto 4. A expressão resultante é

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_4 = \frac{1}{3}(9T_P - 8T_4 - T_E) \quad (\text{B.24})$$

Expressão similar é válida para o ponto 8 e para as demais fronteiras.

Convém enfatizar que, em função da consistência com as aproximações em diferenças centrais, as aproximações parabólicas consideradas propiciam uma avaliação precisa dos gradientes de temperatura junto as fronteiras. Este fato é da maior importância principalmente quanto a avaliação dos gradientes $\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_4$ e $\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_8$, pois é através destes gradientes que as condições de contorno de temperatura prescrita são introduzidas no sistema de equações.