UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

VIBRAÇÃO EM SISTEMAS ESTRUTURAIS POR MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

ANTONIO EDUARDO TURRA

FLORIANÓPOLIS, AGOSTO, 1985

VIBRAÇÃO EM SISTEMAS ESTRUTURAIS POR MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA

ANTONIO EDUARDO TURRA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA - ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO.

Prof. José João de Espíndola, Ph.D.
Orientador

Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D.
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

APRESENTADA PERANTE A BANCA EXAMINADORA COMPOSTA DOS PROFESSORES:

Prof. José João de Espíndola, Ph.D.

Prof. Nelson Diógenes do Valle, Dr. Ing.

Prof. Arcanjo Lenzi, M.Sc.

A meus pais.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" e ao PICD-CAPES pelo apoio financeiro e à Universidade Federal de Santa Catarina pelo apoio técnico.

Ao Professor José João de Espíndola pela orientação.

Ao amigo Antonio Carlos Ribeiro Nogueira pela ajuda e incentivo.

Ao Clube do Cafezinho.

À Ivani pelo excelente trabalho de datilografia e ao Eiji pelos desenhos.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

ÍNDICE

S I M B O L O G I A

[ ]	Matriz quadrada
{ }	Matriz coluna
$[\ ]^{-1}$	Matriz inversa
ω	Frequência circular
E	Módulo de elasticidade
G	Módulo de rigidez cisalhante
ν	Coeficiente de Poisson
ρ	Densidade de massa
[A]	Matriz de estado
[T]	Matriz de transferência
[T(s,0)]	Matriz de transferência campo
[P]	Matriz de transferência ponto
{Z(s)}	Vetor de estado
x,s,z	Variáveis espaciais
[V],[U]	Matriz modal de [A]
$[\ulcorner\lambda_j\lrcorner]$	Matriz diagonal, onde λ_j são os autovalores de [A]
u,v,w	Deslocamentos nas direções x, s e z, respectivamente
n	Número de meias onda ao longo dos suportes
b	Distância entre montantes
ℓ	Distância entre "reforços"
q	Constante
h	Espessura de casca
J_A	Momento polar de inércia
C_{w_A}	Constante de empenamento

C	–	Constante de St. Venant
a		Raio de curvatura da casca
A		Área da seção transversal do "reforço"
A_s, A_z, C_s, C_z		Ver Figura 3
$I_\eta, I_\xi, I_{\eta\xi}$		Momentos de inércia do "reforço"
$[\overline{TP}]$		Matriz reduzida
$\{\overline{Z}\}$		Vetor de estado reduzido

R E S U M O

O método de matriz de transferência é utilizado na obtenção de frequências naturais de sistemas de vigas e de cascas cilíndricas com reforços longitudinais.

Apresenta-se, inicialmente, uma revisão de alguns elementos de matrizes de transferência e introduz-se os conceitos de campo e segmento para o estudo de sistema de vigas para mostrar a eficiência do método.

Resultados numéricos são apresentados e comparados com conhecidos.

Estuda-se a resposta de um sistema de cascas cilíndricas reforçadas por "stringers",utilizando-se a técnica de redução de graus terminais de liberdade,para contornar as dificuldades computacionais inerentes ao método.

As matrizes de transferência dos elementos de casca são determinadas a partir dos autovetores e autovalores obtidos pelo método de Leverrier com modificação de Faddeev.

Os resultados de um exemplo são comparados com os de Henderson e McDaniel que se utilizam da técnica de super-matriz.

A B S T R A C T

The transfer matrix method is used in the calculation of natural frequencies of beam-type systems and cylindrical shells stiffened by stringers in the axial direction.

A review of some aspects of the theory of transfer matrices is presented and the concepts of field and segment for study the beam-type system are introduced and discussed as an efficient concept in the preparation of general programs.

Numerical results are presented and compared.

The response of cylindrical shells, stiffened by stringers, is studied through the use of a reduction technique of terminal degree of freedoms.

The transfer matrices of the shell elements are calculated from the eigenvectors and eigenvalues obtained by the Faddeev Leverrier method.

The numerical results are compared with published literature on others methods.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O estudo de vibrações por matrizes de transferência já é feito a algum tempo, já que estas se mostram uma poderosa ferramenta na análise de estruturas periódicas, como mostram os trabalhos de Lin e Donaldson |3|, McDaniel |4|, Mercer e Seavey |6| e, mais recentemente, Irie, Yamada e Muramoto |17|. Este tipo de estrutura é de muita utilização na atualidade como mostram os seguintes exemplos: grandes oleodutos com anéis de rigidez igualmente espaçados, altos edifícios tendo uma estrutura uniforme e andares idênticos, fuselagem de aeronaves consistindo de cascas cilíndricas uniformes reforçadas com "stringers" igualmente espaçados, etc...

Este trabalho se insere numa linha de estudos sobre aplicações de matrizes de transferência, em curso no Laboratório de Vibrações e Acústica, tendo já produzido alguns resultados |2|, |14|, |15|.

O que aqui se propõe a fazer é estudar inicialmente o comportamento de um sistema de vigas com a introdução dos conceitos de campo e segmento para mostrar a eficiência do método de matriz de transferência.

Posteriormente far-se-á o estudo de um sistema de cascas com reforços longitudinais onde o fato relevante é a utilização da técnica de redução de graus de liberdade terminais e o uso de autovalores e autovetores no cálculo da matriz de transferência.

São descritos agora os conteúdos dos capítulos e apêndices que aparecem na sequência.

No Capítulo 2 são apresentados o vetor de estado e as matrizes de transferência que funcionarão como ferramentas básicas no desenvolvimento de todo o estudo. Especificamente, far-se-á referências a um sistema de vigas onde apresentam-se alguns exemplos por este método e faz-se comparação com resultados conhecidos.

No Capítulo 3 é apresentada a teoria básica do estudo de cascas com reforços longitudinais por matriz de transferência.

No Capítulo 4 são apresentados estudos de um sistema aberto de cascas reforçadas, bem como é introduzida a técnica da redução de graus de liberdade terminais. Define-se também as características estruturais de um exemplo onde compara-se os resultados obtidos com a utilização da técnica de redução e autovalores e autovetores com os obtidos por Henderson e McDaniel |1|.

O Capítulo 5 reune conclusões e sugestões de continuidade deste estudo.

No Apêndice I é apresentada a técnica de redução automática de graus de liberdade terminais.

No Apêndice II é apresentado o método de Leverrier com modificação de Faddeev para cálculo de autovetores e autovalores de uma matriz quadrada.

Finalmente no Apêndice III apresenta-se a teoria de um sistema fechado de cascas com reforços longitudinais, discute-se as dificuldades numéricas para cálculo de sua resposta, bem como apresenta-se uma sugestão para possível solução.

CAPÍTULO 2

VIBRAÇÕES DE FLEXÃO DE VIGAS

2.1. Vetor de Estado e Matriz de Transferência

2.1.1. Generalidades

O vetor de estado de um certo ponto de um sistema elástico é uma coluna cujas componentes são o deslocamento neste ponto e as forças internas correspondentes. Este vetor permite identificar os estados de deformação e de tensão do sistema no ponto a que se refere; daí a sua denominação.

No caso em estudo, da vibração transversal de um sistema com massa distribuída, tem-se dois deslocamentos independentes, que são o linear transversal w e o angular ψ. As forças internas são o esforço cortante V e o momento fletor M. Dessa forma, pode-se montar o vetor de estado para um determinado ponto i:

$$\{Z_i\} = \{Z\}_i = [w_i, \ \psi_i, \ M_i, \ V_i]^T \qquad (2.1.1)$$

A ordem dos componentes foi escolhida de forma que, como se poderá constatar posteriormente, as matrizes de transferência resultem simétricas em relação à diagonal secundária. A convenção de orientação dessas componentes pode ser observada na Figura 2.1.

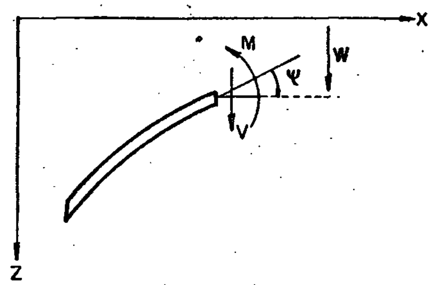


Figura 2.1 - Convenção de Orientação

Sejam agora dois vetores de estado do sistema considerado. Se um vetor de estado, quando multiplicado por uma matriz, fornecer o outro vetor, diz-se que esta é a "matriz de transferência" que os relaciona.

Se os dois vetores representam pontos distintos de um sistema contínuo, por exemplo, os pontos i e i-1, diz-se que a matriz de transferência é uma matriz de campo. Esta situação pode ser descrita matematicamente da seguinte forma:

$$\{Z\}_i = [Tc_i]\{Z\}_{i-1} \qquad (2.1.2)$$

onde $[Tc_i]$ é a matriz de transferência campo que relaciona os vetores de estado nos pontos i e i-1.

Se, em outra situação, tiver-se, por exemplo, uma massa concentrada aplicada em ponto i do sistema, os vetores de estado imediatamente antes e imediatamente após este ponto são diferentes, em função da força de inércia da massa. De um modo geral, ca da ponto em que haja uma descontinuidade no sistema, necessita ser descrito por dois vetores de estado, que serão identificados da seguinte forma:

$$\{Z\}_i^E \text{ (à esquerda) e } \{Z\}_i^D \text{ (à direita)}$$

Estes vetores estão relacionados por uma matriz de transferência; e esta recebe a denominação de matriz de transferência ponto, ou puntual, ou de estação. O relacionamento acima pode ser descrito matematicamente pela seguinte equação:

$$\{Z\}_i^D = [P_i]\{Z\}_i^E \qquad (2.1.3)$$

onde $[P_i]$ é a matriz de transferência ponto que relaciona os vetores de estado no ponto i.

Se, por outro lado, tiver-se uma situação onde no sistema elástico existe uma descontinuidade no final do campo definido pelos pontos i e i-1, a matriz de transferência que relaciona os vetores de estado nestes pontos é representada matematicamente por:

$$\{Z\}_i^E = [Tc_i]\{Z\}_{i-1}$$

$$\{Z\}_i^D = [P_i]\{Z\}_i^E$$

logo

$$\{Z\}_i^D = [P_i][Tc_i]\{Z\}_{i-1}$$

ou

$$\{Z\}_i^D = [T]\{Z\}_{i-1} \qquad (2.1.4)$$

onde se o sistena for periódico, a matriz [T] denomina-se matriz de transferência período.

Quando se tem esforços externos agindo sobre o sistema, a sua presença se faz notar matematicamente pela adição de vetores coluna que os representam. Assim sendo, no caso em que se tenham esforços concentrados (por exemplo em i), a equação (2.1.4) deve ser modificada da seguinte forma:

$$\{Z\}_i^{D} = [T]\{Z\}_{i-1} + \{F\}_i \tag{2.1.5}$$

onde $\{F\}_i$ representa o esforço externo concentrado em i.

2.1.2. Equação de Estado

Os princípios básicos de matriz de transferência foram referenciados na seção anterior e podem ser encontrados em muitos textos que tratam de engenharia estrutural e controle automático (por exemplo |8| e |9|). Contudo, algumas considerações devem aqui ser feitas.

Estas considerações foram feitas por Espíndola |2| e, a partir de um modelo matemático M de um sistema físico S, tem-se o conceito de estado do sistema.

O papel do modelo matemático é descrever alguns aspectos do comportamento real do sistema. Neste trabalho, o modelo matemático é constituído de equações diferenciais.

Em teoria de controle, o conceito de estado de um sistema físico é normalmente associado a um instante particular de tempo. Por exemplo, aplicando-se uma certa entrada ao sistema físico e observando-se a saída, esta dependerá do estado inicial do sistema e da entrada aplicada. Portanto, o modelo matemático do sistema consiste de duas classes de equações: aquelas que descrevem o estado do sistema e aquelas que descrevem a saída do sistema, das quais só as primeiras são relevantes neste trabalho. Para um sistema físico a equação de estado pode ser escrita como:

$$\{Z(t)\}^{\cdot} = g(\{Z(t)\}, \{f(t)\}, t) \qquad (2.1.6)$$

onde $\{Z(t)\}$ é um vetor coluna, representando o estado do sistema no instante t, $\{f(t)\}$ é um vetor entrada e $\{Z(t)\}^{\cdot}$ é a derivada de $\{Z(t)\}$ no tempo.

Se o sistema é linear a equação (2.1.6) pode ser escrita como

$$\{Z(t)\}^{\cdot} = [A(t)]\{Z(t)\} + [B(t)]\{f(t)\} \qquad (2.1.7)$$

onde $[A(t)]$ e $[B(t)]$ são matrizes nxn e nxp, respectivamente, e $\{f(t)\}$ é um vetor coluna px1.

Agora, para a finalidade deste trabalho, o conceito de estado deve ser adaptado. Em vez de referir-se ao estado do sistema no instante t, falar-se-á sobre o estado do sistema em uma estação particular. O estado inicial passará a ser uma estação de referência. Portanto, a dimensão tempo será substituída por uma dimensão espacial s. Feita esta adaptação na equação (2.1.7), ter-se-á:

$$\{Z(s)\}' = [A(s)]\{Z(s)\} + [B(s)]\{f(s)\} \qquad (2.1.8)$$

onde $\{Z(s)\}'$ é a derivada espacial de $\{Z(s)\}$.

Na maioria das estruturas de engenharia, as matrizes $[A(s)]$ e $[B(s)]$ independem de s. Neste caso, a equação de estado (2.1.8), pode ser escrita como

$$\{Z(s)\}' = [A]\{Z(s)\} + [B]\{f(s)\} \qquad (2.1.9)$$

Se nenhuma entrada for aplicada à equação acima, ela simplificar-se-á para:

$$\{Z(s)\}' = [A]\{Z(s)\} \qquad (2.1.10)$$

onde $[A]$ é a matriz de estado.

2.2. Matriz de Transferência para um Elemento de Viga

Considera-se o caso de um segmento de viga contínua de seção transversal constante entre duas estações i-1 e i (Figura 2.2).

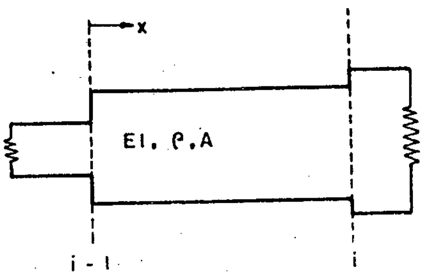


Figura 2.2 - Elemento de Viga

A equação do movimento deste segmento pode ser derivada da equação básica de flexão de uma viga |3|. Isto é, para movimento vibratório,

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\rho A\ddot{w} \qquad (2.2.1)$$

onde ρ é a densidade de massa, A a área da seção transversal, e cada um dos pontos acima em w indica uma diferenciação parcial em relação ao tempo.

Supõe-se que $w(x,t) = X\ e^{i\omega t}$ e a equação do movimento reduz-se para

$$EI\ \frac{d^4 X}{dx^4} = \rho A\omega^2 X \qquad (2.2.2)$$

ou

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - \lambda X = 0 \qquad (2.2.3)$$

onde

$$\lambda = \frac{\rho A\omega^2}{EI} \qquad (2.2.4)$$

Das relações de deslocamento e esforços internos tem-se

$$\frac{dw}{dx} = \psi ; \ \frac{d\psi}{dx} = - \frac{M}{EI} \ ; \ \frac{dM}{dx} = V \quad e \quad \frac{dV}{dx} = - \rho A\omega^2 w$$

que podem ser reescritas na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \psi \\ M \\ V \end{Bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\rho A\omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \psi \\ M \\ V \end{Bmatrix} \qquad (2.2.5)$$

onde o índice "linha" representa derivação em relação a x.

A equação (2.2.5), quando em notação simplificada, se apresenta da seguinte forma:

$$\{Z\}' = [A]\{Z\} \qquad (2.2.6)$$

A equação diferencial matricial (2.2.6) possui, à semelhança das equações diferenciais comuns, a solução apresentada na equação (2.2.7) abaixo |10|.

$$\{Z(x)\} = e^{[A]x}\{Z(0)\} \qquad (2.2.7)$$

Comparando-se as equações (2.1.2) e (2.2.7) chega-se à conclusão de que:

$$[Tc_i] = e^{[A]x}, \qquad (2.2.8)$$

desde que se considere que os pontos i e i-1 estão distanciados de uma distância x entre si, de forma que $\{Z\}_{i-1} = \{Z(0)\}$ e $\{Z\}_i = \{Z(x)\}$.

De acordo com o teorema de Cayley-Hamilton pode-se escrever que

$$e^{[A]x} = C_1[I] + C_2[A] + C_3[A]^2 + C_4[A]^3 = f[A] \qquad (2.2.9)$$

As constantes C_i, $i = 1,2,3,4$ podem ser obtidas da solução das equações abaixo

$$f(\lambda_i) = e^{\lambda_i x} = C_1 + C_2\lambda_i + C_3\lambda_i^2 + C_4\lambda_i^3 \qquad (2.2.10)$$

onde os λ_i's são os distintos autovalores de $[A]$.

Obtem-se então

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 x} &= C_1 + C_2\lambda_1 + C_3\lambda_1^2 + C_4\lambda_1^3 \\ e^{-\lambda_1 x} &= C_1 - C_2\lambda_1 + C_3\lambda_1^2 - C_4\lambda_1^3 \\ e^{\lambda_2 x} &= C_1 + C_2\lambda_2 + C_3\lambda_2^2 + C_4\lambda_2^3 \\ e^{-\lambda_2 x} &= C_1 - C_2\lambda_2 + C_3\lambda_2^2 - C_4\lambda_2^3 \end{aligned} \qquad (2.2.11)$$

De onde tem-se

$$C_1 = \frac{\lambda_1^2 \cosh(\lambda_2 x) - \lambda_2^2 \cosh(\lambda_1 x)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}$$

$$C_2 = \frac{\lambda_1^3 \ \mathrm{senh}(\lambda_2 x) - \lambda_2^3 \ \mathrm{senh}(\lambda_1 x)}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}$$

$$C_3 = \frac{\cosh(\lambda_1 x) - \cosh(\lambda_2 x)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \qquad (2.2.12)$$

$$C_4 = \frac{\lambda_2 \ \mathrm{senh}(\lambda_1 x) - \lambda_1 \ \mathrm{senh}(\lambda_2 x)}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}$$

onde $\lambda_1 = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}$ e $\lambda_2 = i\,\lambda_1$

Utilizando-se as seguintes relações:

$$\cosh(i\alpha) = \cos\alpha \qquad (2.2.13.a)$$

$$\mathrm{senh}(i\alpha) = i\,\mathrm{sen}\alpha \qquad (2.2.13.b)$$

obtem-se:

$$C_1 = \frac{1}{2}\,[\cosh(\lambda_1 x) + \cos(\lambda_1 x)]$$

$$C_2 = \frac{1}{2\lambda_1}\,[\mathrm{senh}(\lambda_1 x) + \mathrm{sen}(\lambda_1 x)]$$

$$C_3 = \frac{1}{2\lambda_1^2}\,[\cosh(\lambda_1 x) - \cos(\lambda_1 x)] \qquad (2.2.14)$$

$$C_4 = \frac{1}{2\lambda_1^3}\,[\mathrm{senh}(\lambda_1 x) - \mathrm{sen}(\lambda_1 x)]$$

Aplicando-se os resultados de (2.2.14) na equação (2.2.9), tem-se a matriz de transferência para um elemento de viga uniforme de comprimento x:

$$[Tc] = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & -\dfrac{C_3}{EI} & -\dfrac{C_4}{EI} \\ \dfrac{\rho A\omega^2}{EI} C_4 & C_1 & -\dfrac{C_2}{EI} & -\dfrac{C_3}{EI} \\ -\rho A\omega^2 C_3 & -\rho A\omega^2 C_4 & C_1 & C_2 \\ -\rho A\omega^2 C_2 & -\rho A\omega^2 C_3 & \dfrac{\rho A\omega^2}{EI} C_4 & C_1 \end{bmatrix} \qquad (2.2.15)$$

2.3. Preparação para Tratamento Numérico

Na obtenção das constantes (2.2.14) as raízes $\lambda_1 x$ podem assumir valores elevados e, em consequência disto, $\cosh(\lambda_1 x)$ e $\operatorname{senh}(\lambda_1 x)$ tornam-se muito grandes, difíceis de serem tratados numericamente. Isto ocorre quando se pesquisam modos elevados, como ocorre em linhas de transmissão de energia elétrica.

Em função destas dificuldades, aplicam-se alguns artifícios para adequá-los a um melhor tratamento numérico, que passam a ser aqui descritos.

Multiplicando-se estas constantes por $\cosh(\lambda_1 x)$ e dividindo-se tem-se

$$C_1 = \frac{\cosh(\lambda_1 x)}{2} \left[1 + \frac{\cos(\lambda_1 x)}{\cosh(\lambda_1 x)}\right]$$

e usando-se as seguintes relações

$$\cosh\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \tag{2.3.1.a}$$

$$\operatorname{senh}\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \tag{2.3.1.b}$$

$$C_1 = \frac{\cosh(\lambda_1 x)}{2}\left[1 + \frac{2\cos(\lambda_1 x)}{e^{\lambda_1 x} + e^{-\lambda_1 x}}\right]$$

ou

$$C_1 = \frac{\cosh(\lambda_1 x)}{2}\left[1 + \frac{2e^{-\lambda_1 x}\cos(\lambda_1 x)}{1 + e^{-2\lambda_1 x}}\right] \tag{2.3.2.a}$$

De maneira análoga tem-se

$$C_2 = \frac{\cosh(\lambda_1 x)}{2\lambda_1}\left[\frac{1-e^{-2\lambda_1 x}}{1+e^{-2\lambda_1 x}} + 2e^{-\lambda_1 x}\frac{\operatorname{sen}(\lambda_1 x)}{1+e^{-2\lambda_1 x}}\right] \tag{2.3.2.b}$$

$$C_3 = \frac{\cosh(\lambda_1 x)}{2\lambda_1^2}\left[1 - 2e^{-\lambda_1 x}\frac{\cos(\lambda_1 x)}{1+e^{-2\lambda_1 x}}\right] \tag{2.3.2.c}$$

$$C_4 = \frac{\cosh(\lambda_1 x)}{2\lambda_1^3}\left[\frac{1-e^{-2\lambda_1 x}}{1+e^{-2\lambda_1 x}} - 2e^{-\lambda_1 x}\frac{\operatorname{sen}(\lambda_1 x)}{1+e^{-2\lambda_1 x}}\right] \tag{2.3.2.d}$$

Adotando-se a seguinte notação:

$$\alpha = 2e^{-\lambda_1 x}\frac{\cos(\lambda_1 x)}{1+e^{-2\lambda_1 x}} \tag{2.3.3}$$

$$\beta = 2e^{-\lambda_1 x} \frac{\operatorname{sen}(\lambda_1 x)}{1+e^{-2\lambda_1 x}} \tag{2.3.4}$$

$$\gamma = \frac{1 - e^{-2\lambda_1 x}}{1 + e^{-2\lambda_1 x}} \tag{2.3.5}$$

tem-se então

$$\left.\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\cosh(\lambda_1 x)}{2}(1+\alpha) \\
C_2 &= \frac{\cosh(\lambda_1 x)}{2\lambda_1}(\gamma+\beta) \\
C_3 &= \frac{\cosh(\lambda_1 x)}{2\lambda_1^2}(1-\alpha) \\
C_4 &= \frac{\cosh(\lambda_1 x)}{2\lambda_1^3}(\gamma-\beta)
\end{aligned}\right\} \tag{2.3.6}$$

As constantes acima agora podem ser tratadas numericamente, a menos do termo em $\cosh(\lambda_1 x)$, sem dificuldades. Este, entretanto, poderá ser eliminado nas computações numéricas, como se verá adiante.

2.4. Sistema de Vigas

Tratar-se-á aqui de vigas sobre apoios rígidos. Para a abordagem numérica geral desses sistemas introduzir-se-á alguns conceitos.

Campo - O campo de um sistema de vigas é delimitado por dois apoios rígidos, ou por um balanço delimitado por um apoio simples.

Segmento - O segmento é delimitado dentro de um campo por descontinuidades, ou seja, cada descontinuidade representa o fim de um segmento e o início de outro.

São consideradas descontinuidades, por exemplo, mudança de área da seção transversal, massa concentrada, rótulas, apoios simples (extremo dos campos).

A seguir apresenta-se alguns exemplos simples de sistema de vigas onde determina-se a matriz de transferência, levando-se em consideração campos e segmentos.

Exemplo 1. Massa Puntual

Seja a Figura 2.4.1 onde tem-se uma viga simplesmente apoiada com uma massa concentrada, os apoios indicam que tem-se um campo e a massa concentrada indica que se tem dois segmentos que são representados por A e B de comprimentos ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente.

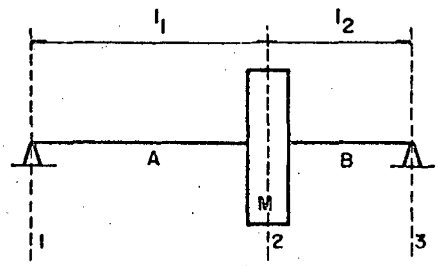


Figura 2.4.1 - Viga com Massa Concentrada

Seja a matriz [Tm] do ponto 2:

$$[Tm] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -M\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.4.1)$$

onde

$$\{Z\}_2^D = [Tm]\{Z\}_2^E \qquad (2.4.2)$$

Chamando-se de matriz de transferência [A] a matriz que relaciona o vetor de estado $\{Z\}_1$ na estação 1 com o vetor de esta_ do $\{Z\}_2^E$, a que representa o segmento A de comprimento ℓ_1 e de [B] a matriz de transferência que representa o segmento B de compri_ mento ℓ_2, pode-se escrever.

$$\{Z\}_2^E = [A]\{Z\}_1 \qquad (2.4.3)$$

$$\{Z\}_3 = [B]\{Z\}_2^D \qquad (2.4.4)$$

com (2.4.2), (2.4.3) e (2.4.4) tem-se

$$\{Z\}_3 = [B][Tm][A]\{Z\}_1 \qquad (2.4.5)$$

ou

$$\{Z\}_3 = [T]\{Z\}_1 \qquad (2.4.6)$$

onde [T] é a matriz de transferência que relaciona os vetores de estado dos apoios.

Exemplo 2. Rótula Perfeita

Seja a Figura 2.4.2 onde tem-se uma viga simplesmente apoiada caracterizando um campo, e uma rótula que delimita os dois segmentos A e B de comprimentos ℓ_1 e ℓ_2 respectivamente.

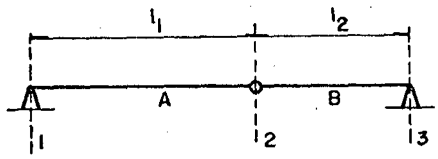


Figura 2.4.2 - Viga com Rótula Perfeita

tem-se

$$\{Z\}_2^E = [A]\{Z\}_1 \qquad (2.4.7)$$

onde $\{Z\}_2^E$ = vetor de estado à esquerda da rótula

[A] = matriz de transferência do segmento A de comprimento ℓ_1

$\{Z\}_1$ = vetor de estado no apoio 1

Levando-se em consideração que no apoio 1 $w_1=0$ e a rótula não tem momento, ou seja, $M_2=0$, pode-se escrever

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \psi_2 \\ M_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}^E = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \psi_1 \\ M_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} \qquad (2.4.8)$$

ou

$$w_2 = a_{12}\psi_1 + a_{13}M_1 + a_{14}V_1 \qquad (2.4.9.a)$$

$$\psi_2 = a_{22}\psi_1 + a_{23}M_1 + a_{24}V_1 \qquad (2.4.9.b)$$

$$0 = a_{32}\psi_1 + a_{33}M_1 + a_{34}V_1 \qquad (2.4.9.c)$$

$$V_2 = a_{42}\psi_1 + a_{43}M_1 + a_{44}V_1 \qquad (2.4.9.d)$$

De (2.4.9.c)

$$V_1 = -\frac{1}{a_{34}}(a_{32}\psi_1 + a_{33}M_1) \qquad (2.4.10)$$

Substituindo-se (2.4.10) em (2.4.9.a) e (2.4.9.b)

$$w_2 = (a_{12} - \frac{a_{32}\cdot a_{14}}{a_{34}})\psi_1 + (a_{13} - \frac{a_{33}\cdot a_{14}}{a_{34}})M_1 \qquad (2.4.11)$$

$$\psi_2 = (a_{22} - \frac{a_{32}\cdot a_{24}}{a_{34}})\psi_1 + (a_{23} - \frac{a_{33}\cdot a_{24}}{a_{34}})M_1 \qquad (2.4.12)$$

ou na forma matricial

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \qquad (2.4.13)$$

Escrevendo-se agora a matriz de transferência do segmento B de comprimento ℓ_2

$$\{Z\}_3 = [B]\{Z\}_2^D \tag{2.4.14}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} w_3 \\ \psi_3 \\ M_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \psi_2 \\ M_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} \tag{2.4.15}$$

Levando-se em consideração que na estação 3 tem-se um apoio simples, ou seja, $w_3=0$ e na rótula $M_2=0$, pode-se escrever (2.4.15) como

$$0 = b_{11}w_2 + b_{12}\psi_2 + b_{14}V_2 \tag{2.4.16.a}$$

$$\psi_3 = b_{21}w_2 + b_{22}\psi_2 + b_{24}V_2 \tag{2.4.16.b}$$

$$M_3 = b_{31}w_2 + b_{32}\psi_2 + b_{34}V_2 \tag{2.4.16.c}$$

$$V_3 = b_{41}w_2 + b_{42}\psi_2 + b_{44}V_2 \tag{2.4.16.d}$$

De (2.4.16.a) tem-se

$$V_2 = -\frac{1}{b_{14}}(b_{11}w_2 + b_{12}\psi_2) \tag{2.4.17}$$

Substituindo-se (2.4.17) em (2.4.16.b) e (2.4.16.c)

$$\psi_3 = (b_{21} - \frac{b_{11} \cdot b_{24}}{b_{14}})w_2 + (b_{22} - \frac{b_{12} \cdot b_{24}}{b_{14}})\psi_2 \tag{2.4.18}$$

$$M_3 = (b_{31} - \frac{b_{11} \cdot b_{34}}{b_{14}}) w_2 + (b_{32} - \frac{b_{12} \cdot b_{34}}{b_{14}}) \psi_2 \qquad (2.4.19)$$

ou na forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \psi_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \qquad (2.4.20)$$

Substituindo-se agora (2.4.13) em (2.4.20)

$$\begin{Bmatrix} \psi_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \qquad (2.4.21)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \psi_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \qquad (2.4.22)$$

onde $[\bar{T}]$ é a matriz de transferência reduzida que relaciona o vetor de estado na estação 1, com o vetor de estado na seção 3.

Considerando-se agora o caso da Figura 2.4.3 onde tem-se uma viga com vários apoios e dois campos em balanço nos extremos.

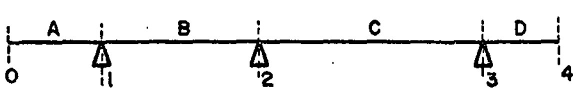


Figura 2.4.3 - Sistema de Viga

Tem-se então quatro campos que são delimitados pelos apoios e balanços e suas matrizes de transferência serão represen tadas por [A], [B], [C] e [D].

Das relações de matrizes de transferência pode-se escrever

$$\{Z\}_2^E = [B]\{Z\}_1^D \tag{2.4.23}$$

$$\{Z\}_3^E = [C]\{Z\}_2^D \tag{2.4.24}$$

Considerando-se que nos apoios não se tem deslocamento transversal, ou seja, w=0, pode-se escrever a equação (2.4.23) como:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \psi_2 \\ M_2 \\ V_2^E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \psi_1 \\ M_1 \\ V_1^D \end{Bmatrix} \tag{2.4.25}$$

onde apenas os esforços cortantes são influenciados pela presença do apoio que fará aparecer uma força adicional, porisso que se representa na equação (2.4.25) acima V_2^E e V_1^D, apenas.

Pode-se escrever a equação acima de forma expandida:

$$0 = b_{12}\psi_1 + b_{13}M_1 + b_{14}V_1^D \tag{2.4.26.a}$$

$$\psi_2 = b_{22}\psi_1 + b_{23}M_1 + b_{24}V_1^D \tag{2.4.26.b}$$

$$M_2 = b_{32}\psi_1 + b_{33}M_1 + b_{34}V_1^D \tag{2.4.26.c}$$

$$V_2^E = b_{42}\psi_1 + b_{43}M_1 + b_{44}V_1^D \tag{2.4.26.d}$$

De (2.4.26.a)

$$V_1^D = -\frac{1}{b_{14}}\,(b_{12}\psi_1 + b_{13}M_1) \qquad (2.4.27)$$

Substituindo-se (2.4.27) em (2.4.26.b) e (2.4.26.c), tem-se

$$\psi_2 = (b_{22} - \frac{b_{12}\cdot b_{24}}{b_{14}})\,\psi_1 + (b_{23} - \frac{b_{13}\cdot b_{24}}{b_{14}})M_1$$

$$M_2 = (b_{32} - \frac{b_{12}\cdot b_{34}}{b_{14}})\,\psi_1 + (b_{33} - \frac{b_{13}\cdot b_{34}}{b_{14}})M_1$$

ou na forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} \psi_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \left[\,\overline{B}\,\right]\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \qquad (2.4.28)$$

onde

$$[\overline{B}] = \begin{bmatrix} (b_{22} - \dfrac{b_{12}\cdot b_{24}}{b_{14}}) & (b_{23} - \dfrac{b_{13}\cdot b_{24}}{b_{14}}) \\ & \\ (b_{32} - \dfrac{b_{12}\cdot b_{34}}{b_{14}}) & (b_{33} - \dfrac{b_{13}\cdot b_{34}}{b_{14}}) \end{bmatrix}$$

Substituindo-se (2.4.27) em (2.4.26.d), tem-se

$$V_2^E = (b_{42} - \frac{b_{12}\cdot b_{44}}{b_{14}})\,\psi_1 + (b_{43} - \frac{b_{13}\cdot b_{44}}{b_{14}})M_1 \qquad (2.4.29)$$

Fórmulas análogas podem ser escritas para $\begin{Bmatrix} \psi_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$, V_2^D e V_3^E.

Atenção especial merecem os dois campos em balanço A e D. Considerando-se o campo em balanço A, tem-se que na estação zero $M_0=V_0=0$ e representando-se a relação matricial entre a estação zero e a estação 1 por:

$$\{Z\}_1^E = [A]\{Z\}_0 \qquad (2.4.30)$$

e que no apoio 1 $w_1=0$, pode-se escrever que:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \psi_1 \\ M_1 \\ V_1^E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_0 \\ \psi_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou ainda

$$0 = a_{11}w_0 + a_{12}\psi_0 \qquad (2.4.31.a)$$

$$\psi_1 = a_{21}w_0 + a_{22}\psi_0 \qquad (2.4.31.b)$$

$$M_1 = a_{31}w_0 + a_{32}\psi_0 \qquad (2.4.31.c)$$

$$V_1^E = a_{41}w_0 + a_{42}\psi_0 \qquad (2.4.31.d)$$

De (2.4.31.a) $\quad w_0 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\psi_0 \qquad (2.4.32)$

Substituindo-se (2.4.32) em (2.4.31.b) e (2.4.31.c), tem-se

$$\psi_1 = (a_{22} - \frac{a_{12}\cdot a_{21}}{a_{11}})\psi_0$$

$$M_1 = (a_{32} - \frac{a_{12}\cdot a_{31}}{a_{11}})\psi_0$$

ou na forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{A} \end{Bmatrix} \psi_0 \qquad (2.4.33)$$

onde

$$\{\bar{A}\} = \begin{Bmatrix} (a_{22} - \dfrac{a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11}}) \\ \\ (a_{32} - \dfrac{a_{12} \cdot a_{31}}{a_{11}}) \end{Bmatrix}$$

e em (2.4.31.d)

$$V_1^E = (a_{42} - \frac{a_{12} \cdot a_{41}}{a_{11}}) \psi_0 \qquad (2.4.34)$$

Considerando-se o efeito do esforço do apoio conforme Figura 2.4.4

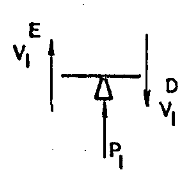


Figura 2.4.4 - Esforços no Apoio Rígido

escreve-se $V_1^D = V_1^E + P_1$ (2.4.35)

Tendo-se então ψ_0, pode-se construir o vetor na estação zero e determinar-se os vetores intermediários entre as estações zero e 1 e também V_1^E, $\dot{\psi}_1$ e M_1.

Deve-se notar que esta representação com um campo em balanço é bastante genérica e engloba o caso em que tendo-se um campo de comprimento nulo, ou seja, a viga não tem balanço, o equacionamento permanece válido, sem perda de sua generalidade e favorecendo a programação para computador digital.

Se o campo tem comprimento nulo, $[A]=[I]$ e $a_{11}=1$, $a_{12}=0$, levando-se a concluir que $M_1=0$, $w_0=w_1=0$ e $\psi_0=\psi_1=1$.

Formulação análoga deve ser feita para o campo em balanço D.

2.5. Programação do Método

O programa é geral, considerando n_c campos, cada campo com n_s segmentos, n_s podendo ser diferente de campo para campo.

Os extremos do sistema são dois campos em balanço, podendo, entretanto, esses campos, ter comprimentos nulos (Ver Figura 2.5.1).

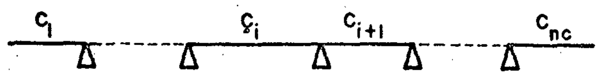


Figura 2.5.1 - Viga com nc Campos

A idéia básica do programa pode ser desenvolvida a partir do esquema da Figura 2.5.2.

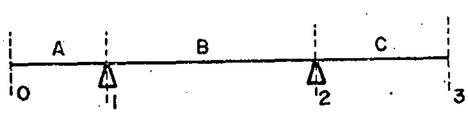


Figura 2.5.2 - Viga Básica

Na programação geral, entretanto, a matriz representando o campo B equivalerá ao produto das matrizes C_{nc-1}, C_{nc-2} ... C_2, da Figura 2.5.2. Tomando-se, pois, como referência a Figura 2.5.2, o algoritmo pode ser desenvolvido como segue:

Baseando-se na formulação feita anteriormente para os campos A e B, formulá-se o desenvolvimento para o campo em balanço C.

Na estação 3 em balanço tem-se $M_3=V_3=0$ e na estação 2 que é um apoio rígido tem-se $w_2=0$, então pode-se escrever que

$$\{Z\}_3 = [C]\{Z\}_2^D \tag{2.5.1}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} w_3 \\ \psi_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \psi_2 \\ M_2 \\ V_2^D \end{Bmatrix}$$

ou ainda

$$w_3 = c_{12}\psi_2 + c_{13}M_2 + c_{14}V_2^D \tag{2.5.2.a}$$

$$\psi_3 = c_{22}\psi_2 + c_{23}M_2 + c_{24}V_2^D \tag{2.5.2.b}$$

$$0 = c_{32}\psi_2 + c_{33}M_2 + c_{34}V_2^D \tag{2.5.2.c}$$

$$0 = c_{42}\psi_2 + c_{43}M_2 + c_{44}V_2^D \tag{2.5.2.d}$$

De (2.5.2.d) vem que

$$V_2^D = -\frac{1}{c_{44}}(c_{42}\psi_2 + c_{43}M_2) \tag{2.5.3}$$

Substituindo-se (2.5.3) em (2.5.2.b) e (2.5.2.c) tem-se

$$\psi_3 = (c_{22} - \frac{c_{42}\cdot c_{24}}{c_{44}})\,\psi_2 + (c_{23} - \frac{c_{43}\cdot c_{24}}{c_{44}})M_2$$

$$0 = (c_{32} - \frac{c_{42} \cdot c_{34}}{c_{44}})\psi_2 + (c_{33} - \frac{c_{43} \cdot c_{34}}{c_{44}})M_2$$

ou na forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} \psi_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \left[\bar{C} \right] \begin{Bmatrix} \psi_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \qquad (2.5.4)$$

onde

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} (c_{22} - \frac{c_{42} \cdot c_{24}}{c_{44}}) & (c_{23} - \frac{c_{43} \cdot c_{24}}{c_{44}}) \\ (c_{32} - \frac{c_{42} \cdot c_{34}}{c_{44}}) & (c_{33} - \frac{c_{43} \cdot c_{34}}{c_{44}}) \end{bmatrix}$$

Substituindo-se agora em (2.5.4) as expressões (2.4.28) e (2.4.33) tem-se

$$\begin{Bmatrix} \psi_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \left[\bar{C} \right] \left[\bar{B} \right] \left\{ \bar{A} \right\} \psi_0 \qquad (2.5.5)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \psi_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \left\{ FCT \right\} \psi_0 \qquad (2.5.6)$$

onde {FCT} é uma função que define o sistema de viga a ser programado.

Fazendo-se os produtos de expressão (2.5.5) tem-se que

$$\{FCT\} = \begin{Bmatrix} (\bar{c}_{11}\bar{b}_{11} + \bar{c}_{12}\bar{b}_{21})a_1 + (\bar{c}_{11}\bar{b}_{12} + \bar{c}_{12}\bar{b}_{22})a_2 \\ (\bar{c}_{21}\bar{b}_{11} + \bar{c}_{22}\bar{b}_{21})a_1 + (\bar{c}_{21}\bar{b}_{12} + \bar{c}_{22}\bar{b}_{22})a_2 \end{Bmatrix} \qquad (2.5.7)$$

onde

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\
a_2 &= a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} \\
\bar{b}_{11} &= b_{14}b_{22} - b_{12}b_{24} \\
\bar{b}_{12} &= b_{23}b_{14} - b_{13}b_{24} \\
\bar{b}_{21} &= b_{32}b_{14} - b_{12}b_{34} \\
\bar{b}_{22} &= b_{33}b_{14} - b_{13}b_{34} \\
\bar{c}_{11} &= c_{22}c_{44} - c_{42}c_{24} \\
\bar{c}_{12} &= c_{23}c_{44} - c_{43}c_{24} \\
\bar{c}_{21} &= c_{32}c_{44} - c_{34}c_{42} \\
\bar{c}_{22} &= c_{33}c_{44} - c_{34}c_{43}
\end{aligned}$$

Na expressão (2.5.6), sabe-se que $M_3=0$ e substituindo-se (2.5.7) em (2.5.6)

$$\begin{Bmatrix} \psi_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\bar{c}_{11}\bar{b}_{11} + \bar{c}_{12}\bar{b}_{21})a_1 + (\bar{c}_{11}\bar{b}_{12} + \bar{c}_{12}\bar{b}_{22})a_2 \\ (\bar{c}_{21}\bar{b}_{11} + \bar{c}_{22}\bar{b}_{21})a_1 + (\bar{c}_{21}\bar{b}_{12} + \bar{c}_{22}\bar{b}_{22})a_2 \end{Bmatrix} \psi_0$$

Conclui-se portanto que

$$[(\bar{c}_{21}\bar{b}_{11} + \bar{c}_{22}\bar{b}_{21})a_1 + (\bar{c}_{21}\bar{b}_{12} + \bar{c}_{22}\bar{b}_{22})a_2]\,\psi_0 = 0 \qquad (2.5.8)$$

que é a equação transcedental que fornece as frequências do sistema. Esta equação é resolvida pelo Método de Muller |11|.

A seguir apresenta-se o diagrama de fluxo (Figura 2.5.3) para a solução do problema da Figura 2.5.1.

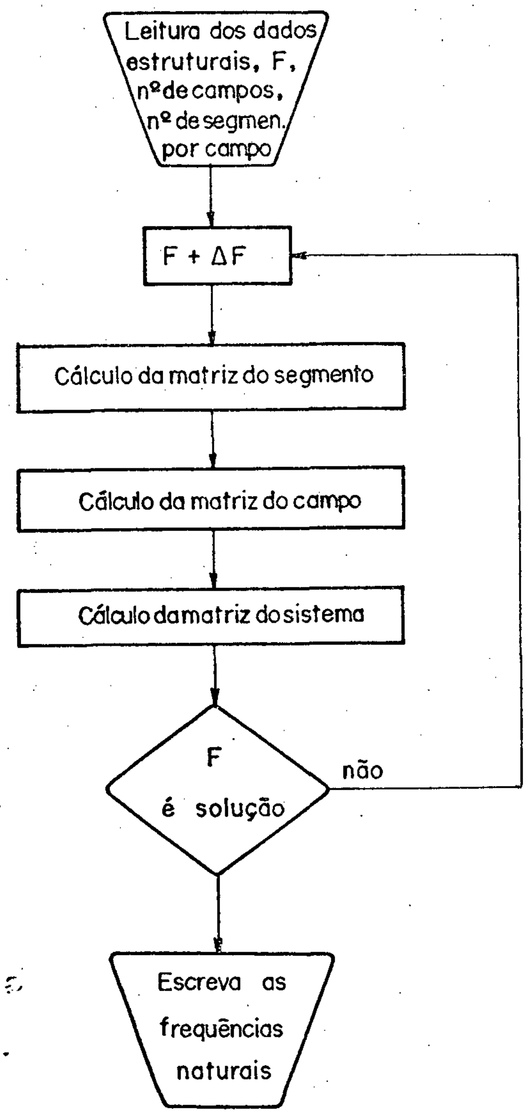


Figura 2.5.3 - Diagrama de Fluxo

2.6. Exemplos Numéricos

Com o objetivo de testar o método e o programa, alguns exemplos foram ensaiados.

Exemplo nº 1.

Eixo cilíndrico simplesmente apoiado com 3m de comprimento, cujo esquema é apresentado na Figura 2.6.1.

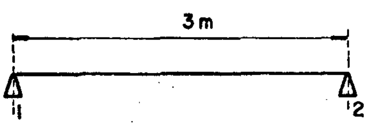


Figura 2.6.1 - Eixo Cilíndrico Bi-apoiado

Dados estruturais

Diâmetro	=	0,19 m
Módulo de Young	=	2×10^{11} N/m²
Densidade do Material	=	7833,53 kg/m³

Dividiu-se o campo entre os mancais em quatro segmentos fictícios de comprimentos a partir da estação 1 de 0,5 m, 0,7 m, 1,0 m e 0,8 m respectivamente.

O programa sempre testa a existência de massa concentrada ao final de cada segmento. Não a havendo, esta é tomada como sendo zero. Assim, ao final de cada segmento fictício, considerou-se uma massa concentrada nula.

O presente exemplo tem três campos, sendo que os dois extremos são balanços de comprimento zero.

O que se deseja com este exemplo é cotejar os resultados numéricos do método com aqueles conhecidos de uma viga uniforme simplesmente apoiada; cujas frequências naturais são dadas por

$$f_i = \frac{i^2}{2\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \qquad (2.6.1)$$

onde ℓ é o comprimento do vão, EI a rigidez à flexão, ρ a densidade de massa e A a área da seção reta.

Os resultados do programa, bem como os cálculos pela fórmula acima, são comparados na Tabela (2.1) abaixo.

Tabela 2.1.- Frequências Naturais do Eixo - vão 3m

Freq.Naturais[Hz]	Fórmula(2.6.1)	Programa
1	41,89	41,89
2	167,56	167,57
3	377,0	377,0

Vê-se que o programa fornece resultados praticamente iguais aquele da fórmula (2.6.1).

Exemplo nº 2.

Neste exemplo considerou-se os mesmos dados estruturais do exemplo anterior e um eixo cilíndrico com um vão de 20m de comprimento. Foram feitas as mesmas considerações anteriores e rodou-se o mesmo exemplo para dois casos:

Caso 1. Considerou-se um único segmento no campo entre os mancais.

Caso 2. Considerou-se uma divisão em quatro segmentos fictícios de comprimentos 4m, 10m, 3m e 3m a partir do mancal da esquerda.

Os resultados do programa para os casos 1 e 2, bem como os cálculos pela fórmula (2.6.1), são comparados na Tabela (2.2) abaixo.

Tabela 2.2.- Frequências Naturais do Eixo - vão 20m

Freq.Naturais[Hz]	Fórmula(2.6.1)	Prog. Caso 1	Prog. Caso 2
1	0,94	0,94	0,94
2	3,77	3,77	3,77
3	8,48	8,48	8,48
4	15,08	*	15,08
5	23,56	*	23,56

* Não foram executados

Vê-se que o programa fornece os mesmos resultados.

Exemplo nº 3.

O método foi aplicado ao caso prático do cômputo da rotação crítica de um rotor de ventilador de exaustão de fabricação nacional, cujos dados foram fornecidos pelos fabricantes.

O esquema do rotor e os demais dados estão colocados abaixo:

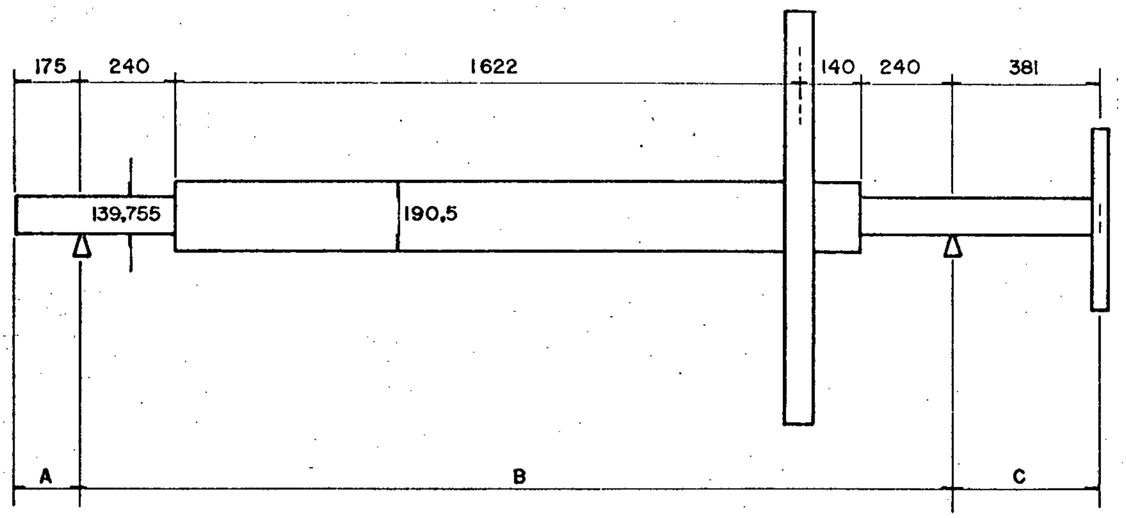


Figura 2.6.2 - Rotor de Ventilador

Dados Estruturais:

Módulo de Young = 2×10^{11} N/m² (aço)

Densidade do Material = 7833,53 kg/m³ (aço)

Campo A - diâmetro D = 0,139755 m

comprimento ℓ_1 = 0,175 m

Campo B - Segmento 1 diâmetro = 0,139755 m

comprimento = 0,24 m

Segmento 2 diâmetro = 0,1905 m

comprimento = 1,622 m

massa concentrada = 2000 Kg

Segmento 3 diâmetro = 0,1905 m

comprimento = 0,14 m

Segmento 4 diâmetro = 0,139755 m

comprimento = 0,24 m

Campo C - diâmetro = 0,139755 m

comprimento = 0,381 m

massa concentrada = 212 Kg

São consideradas massas concentradas no final dos segmentos, 2 do Campo B e no segmento do Campo C; as demais massas nos finais dos segmentos restantes são consideradas nulas.

Os resultados são apresentados na Tabela 2.3 abaixo.

Tabela 2.3 .- Rotações Críticas do Rotor do Ventilador

Rotação	Nº	1	2
Crítica	RPM	3587,9	6809

Os conceitos de campo e segmento permitiram, pois, a elaboração de uma técnica computacional geral das frequências naturais de sistemas unidimensionais. Por ser geral, a técnica, quando implementada em computador digital, produz um programa de uso extremamente simples.

Outros exemplos de vigas sobre múltiplos apoios foram rodados, mostrando-se o programa altamente eficiente em tempo de computação, requerendo um mínimo de memória e fornecendo resultados extremamente precisos.

Efeitos, tais como inércia rotatória, cisalhamento e giroscópicos podem ser facilmente introduzidos por rotinas já implementadas.

CAPÍTULO 3

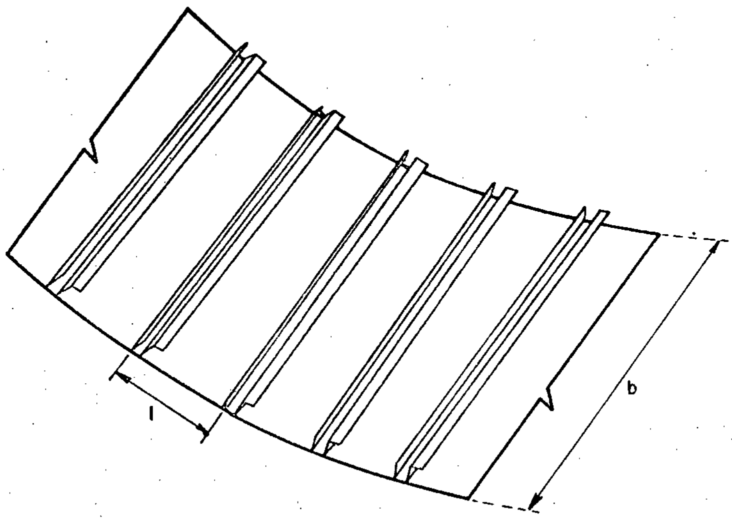
VIBRAÇÕES DE FLEXÃO DE CASCAS CILÍNDRICAS COM REFORÇOS LONGITUDINAIS

3.1. Generalidades

Baseando-se nos conceitos de vetor de estado e matriz de transferência, desenvolve-se aqui o estudo da vibração de uma casca cilíndrica com reforços longitudinais, onde tem-se quatro deslocamentos independentes, que são o longitudinal u, o radial v, o transversal w e o angular ψ. As forças internas são o esforço cisalhante no plano N_{sx}, a tração no plano N_s, o esforço cortante V_s e o momento fletor M_s. Dessa forma, pode-se montar o vetor de estado para um determinado ponto i:

$$\{Z_i\} = \{Z\}_i = [u_i,\ v_i,\ w_i,\ \psi_i,\ M_{si},\ V_{si},\ -N_{si},\ N_{sxi}]^T \quad (3.1.1)$$

O sinal e a ordem dos componentes foram escolhidos de forma que, como se poderá constatar posteriormente, as matrizes de transferência resultem simétricas em relação à diagonal secundária. A convenção de orientação destas componentes pode ser observada na Figura 3.1.



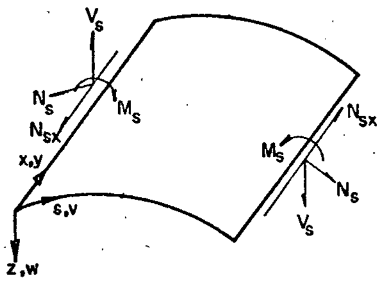


Figura 3.1 - Convenção de Orientação

3.2. Matriz de Transferência

3.2.1. Matriz de Estado

A matriz de estado [A] é o elemento básico para o cálculo da matriz de transferência campo. Aparece na equação de estado (2.1.10), onde é real para sistemas não amortecidos e complexa para sistemas com amortecimento.

O tipo de estrutura considerado neste trabalho consiste de uma casca cilíndrica fina suposta simplesmente apoiada nos extremos. Esta hipótese se justifica em estruturas aeronáuticas porque as vibrações entre segmentos de fuselagem adjacentes a um montante, não são correlacionadas |7|. Os montantes funcionam, pois, como apoios simples.

Assume-se que o material e as dimensões da estrutura sejam tais que as suposições usuais para cascas finas sejam válidas, isto é, que a espessura (h) seja muito menor que o raio de curvatura (a), que os deslocamentos e deformações sejam lineares, o material seja elástico, as normais à superfície média indeformada permaneçam retas e normais à superfície deformada, e as tensões normais e deformações atuando em planos paralelos à superfície sejam negligenciadas.

No que segue, mostrar-se-á a derivação da matriz de estado [A]. Os passos dados seguem de perto aqueles de Henderson e McDaniel |1|.

Utilizando-se as equações de Donnell para casca |10| e considerando-se a convenção de sinal estabelecida na Figura 3.1, pode-se escrever:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{(1+\nu)}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} - \frac{\nu}{a}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\rho h}{k}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{(1+\nu)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + \frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\rho h}{k}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \qquad (3.2.1)$$

$$\frac{\nu \partial u}{a \partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{1}{a^2} w - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial s^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial s^4}\right) - \frac{\rho h \partial^2 w}{k \partial t^2} = 0$$

onde $k = \frac{E\ h}{(1-\nu)^2}$

Assumindo-se soluções na seguinte forma

$$u(x,s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s)\ \cos(qx)\ e^{i\omega t}$$

$$v(x,s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(s)\ \mathrm{sen}(qx)\ e^{i\omega t} \qquad (3.2.2)$$

$$w(x,s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(s)\ \mathrm{sen}(qx)\ e^{i\omega t}$$

onde $q = \frac{n\pi}{b}$

Tem-se

$$u_n''(s) = \frac{2}{(1-\nu)}\left(q^2 - \frac{\rho h\omega^2}{k}\right) u_n(s) - \frac{1+\nu}{1-\nu} q v_n'(s) + \frac{2\nu q}{(1-\nu)a} w_n(s)$$

$$v_n''(s) = \left[\frac{(1-\nu)}{2}q^2 - \frac{\rho h\omega^2}{k}\right] v_n(s) + \frac{(1+\nu)}{2} q u_n'(s) + \frac{1}{a} w_n'(s) \qquad (3.2.3)$$

$$w_n^{iv}(s) = -\frac{12\nu q}{h^2 a} u_n(s) - \frac{12}{h^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{\rho h\omega^2}{k} + \frac{h^2 q^4}{12}\right) w_n(s) + $$

$$+ \frac{12}{h^2 a} v_n'(s) + 2q^2 w_n''(s)$$

onde ' significa derivada espacial em relação a s.

Tem-se ainda as seguintes relações:

$$\beta = \frac{\partial w}{\partial s}$$

$$M_s = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$V_s = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial s}\right] \qquad (3.2.4)$$

$$N_s = k\left(\frac{\partial v}{\partial s} + \nu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{a} w\right)$$

$$N_{sx} = k\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

onde $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

Aplicando-se as expressões (3.2.2) nas relações (3.2.4) e considerando-se que as expressões a seguir sejam da forma

$$\beta(x,s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(s)\ \text{sen}(qx)\ e^{i\omega t}$$

$$M_s(x,s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{sn}(s)\ \text{sen}(qx)\ e^{i\omega t}$$

$$V_s(x,s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_{sn}(s)\ \text{sen}(qx)\ e^{i\omega t} \qquad (3.2.5)$$

$$N_s(x,s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} N_{sn}(s)\ \text{sen}(qx)\ e^{i\omega t}$$

$$N_{sx}(x,s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} N_{sxn}(s)\ \cos(qx)\ e^{i\omega t}$$

Tem-se

$$\beta_n(s) = w_n'(s)$$

$$M_{sn}(s) = D\nu q^2 w_n(s) - Dw_n''(s)$$

$$V_{sn}(s) = D(2-\nu)q^2 w_n'(s) - Dw_n'''(s) \qquad (3.2.6)$$

$$N_{sn}(s) = -k\nu q u_n(s) - \frac{k}{a}\ w_n(s) + kv_n'(s)$$

$$N_{sxn}(s) = \frac{(1-\nu)}{2}\ kqv_n(s) + k\frac{(1-\nu)}{2}\ u_n'(s)$$

Derivando-se as equações (3.2.6) em relação a s e utilizando-se as equações (3.2.3) e (3.2.6), tem-se as seguintes equações

$$u_n'(s) = -qv_n(s) + \frac{2}{k(1-\nu)} N_{sxn}(s)$$

$$v_n'(s) = \nu q u_n(s) + \frac{1}{a} w_n(s) + \frac{1}{k} N_{sn}(s)$$

$$w_n'(s) = \beta_n(s)$$

$$\beta_n'(s) = \nu q^2 w_n(s) - \frac{1}{D} M_{sn}(s) \qquad (3.2.7)$$

$$M_{sn}'(s) = r_1 \beta_n(s) + V_{sn}(s)$$

$$V_{sn}'(s) = r_2 w_n(s) + \nu q^2 M_{sn}(s) - \frac{1}{a} N_{sn}(s)$$

$$N_{sn}'(s) = -\rho h \omega^2 v_n(s) + qN_{sxn}(s)$$

$$N_{sxn}'(s) = r_3 u_n(s) - \nu q N_{sn}(s)$$

onde $r_1 = 2(\nu-1)Dq^2$

$r_2 = (1-\nu^2)Dq^4 - \rho h\omega^2$

$r_3 = (1-\nu^2)kq^2 - \rho h\omega^2$

Pode-se escrever as equações (3.2.7) na forma matricial que será igual à expressão (2.1.10)

$$\{Z_n(s)\}' = [A] \{Z_n(s)\} \qquad (3.2.8)$$

onde

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/k(1-\nu) \\ \nu q & 0 & 1/a & 0 & 0 & 0 & -1/k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu q^2 & 0 & -1/D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & 0 & \nu q^2 & 0 & 1/a & 0 \\ 0 & \rho h\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q \\ r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu q & 0 \end{bmatrix}$$

que é a matriz de estado.

3.2.2. Matriz de Transferência Ponto

Para encontrar-se a matriz de transferência ponto que transfere o vetor de estado através do reforço, deve-se analisar seu comportamento. O reforço não interfere na continuidade das deflexões e rotações da casca em qualquer dos lados da linha de união entre eles.

Então, de uma maneira simples, tem-se

$$\begin{aligned} u_n^D(s) &= u_n^E(s) \\ v_n^D(s) &= v_n^E(s) \\ w_n^D(s) &= w_n^E(s) \\ \beta_n^D(s) &= \beta_n^E(s) \end{aligned} \qquad (3.2.9)$$

Contudo, o reforço, devido as suas propriedades elásti cas e inerciais, produz uma mudança brusca nos esforços normais e cisalhantes e no momento fletor da casca na linha de união. Para determinar-se a forma da mudança nas componentes do vetor de estado, deve-se fazer uso das teorias existentes (Timoshenko (1908) ; Goodier (1941) e outros) que distribuem o momento e torção em uma seção transversal.

As equações básicas das deflexões para o reforço são (Ver Figura 3.2)

$$
\begin{aligned}
&EI_{\eta}\, w_0^{iv} + EI_{\eta\xi}\, v_0^{iv} = p(x) \\
&EI_{\xi}\, v_0^{iv} + EI_{\eta\xi}\, w_0^{iv} = q(x) \qquad (3.2.10) \\
&EC_w\, \beta^{iv} - GC\beta'' = r(x)
\end{aligned}
$$

onde I_{ξ} , I_{η} e $I_{\eta\xi}$ são os momentos de inércia e o produto de inércia do centróide; G é o módulo elástico de cisalhamento; C_w é a constante de empenamento da seção transversal do reforço com respeito ao centro de rotação; C é a constante de Saint-Venant para torção uniforme; o subscrito 0 refere-se às deflexões de w e v do centro de rotação; p e q são cargas distribuídas no centro de rotação ao longo do reforço nas direções z e s, respectivamente; r é o torque distribuído sobre o eixo de rotação; e o "índice" ' indica diferenciação em relação a x. A derivação das equações (3.2.10) podem ser encontradas em Flügge |12|.

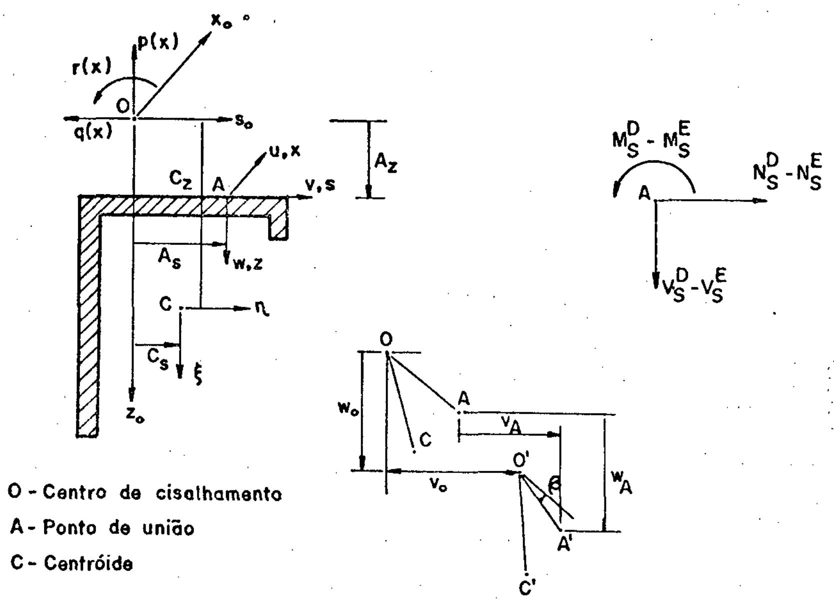


Figura 3.2 - Seção Transversal do Reforço

As equações de equilíbrio no reforço são:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= V_s^D - V_s^E - \rho A\ddot{w}_c \\
q(x) &= N_s^D - N_s^E - \rho A\ddot{v}_c \\
r(x) &= M_s^E - M_s^D + (N_s^E - N_s^D)A_z + (V_s^D - V_s^E)A_s - \\
&\quad - \rho A C_s \ddot{w}_c + \rho A C_z \ddot{v}_c - \rho J_c \ddot{\beta}
\end{aligned}
\qquad (3.2.11)
$$

onde ρ, A, A_z, A_s, C_z, C_s e J_c são características físicas do reforço e o sinal $\cdot$ significa diferencial no tempo.

As relações de deslocamento são:

$$
\begin{aligned}
w_A &= w_0 + A_s\beta \\
w_c &= w_0 + C_s\beta \\
v_A &= v_0 - A_z\beta \\
v_c &= v_0 - C_z\beta
\end{aligned}
\qquad (3.2.12)
$$

Das equações (3.2.10), (3.2.11) e (3.2.12) tem-se

$$
\begin{aligned}
M_s^D - M_s^E &= E(I_{\eta\xi}A_s - I_\xi A_z)v_A^{iv} + E(I_\eta A_s - I_{\eta\xi}A_z)w_A^{iv} - EC_{w_A}\beta^{iv} + GC\beta'' + \\
&\quad + \rho A(C_z - A_z)\ddot{v}_A - \rho A(C_s - A_s)\ddot{w}_A - \rho J_A\ddot{\beta} \\
V_s^D - V_s^E &= EI_{\eta\xi}v_A^{iv} + EI\ w_A^{iv} + E(I_\eta\ A_z - I_\eta A_s)\beta^{iv} + \rho A\ddot{w}_A + \rho A(C_s - A_s)\ddot{\beta} \qquad (3.2.13) \\
N_s^D - N_s^E &= EI_\xi v_A^{iv} + EI_{\eta\xi}w_A^{iv} + E(I_\xi A_z - I_{\eta\xi}A_s)\beta^{iv} + \rho A\ddot{v}_A - \rho A(C_z - A_z)\ddot{\beta}
\end{aligned}
$$

onde

$$
C_{w_A} = C_w + I_\xi A_z^2 + I_\eta A_s^2 - 2I_{\eta\xi}A_zA_s
$$

$$
J_A = J_c + A(C_z - A_z)^2 + A(C_s - A_s)^2
$$

Das equações (3.2.2) e (3.2.5) em (3.2.13) tem-se

$$
\begin{aligned}
M_{sn}^D(s) &= p_1v_n(s) + p_2w_n(s) + p_3\beta_n(s) + M_{sn}^E(s) \\
V_{sn}^D(s) &= p_4v_n(s) + p_5w_n(s) - p_2\beta_n(s) + V_{sn}^E(s) \\
N_{sn}^D(s) &= -p_6v_n(s) + p_4w_n(s) - p_1\beta_n(s) + N_{sn}^E(s)
\end{aligned}
\qquad (3.2.14)
$$

onde
$$p_1 = Eq^4(I_{\eta\xi}A_s - I_\eta A_z) - \rho A\omega^2(C_z - A_z)$$
$$p_2 = Eq^4(I_\eta A_s - I_{\eta\xi}A_z) + \rho A\omega^2(C_s - A_s)$$
$$p_3 = -EC_{w_A}q^4 - GCq^2 + \rho J_A\omega^2$$
$$p_4 = Eq^4 I_{\eta\xi}$$
$$p_5 = Eq^4 I_\eta - \rho A\omega^2$$
$$p_6 = -Eq^4 I_\xi + \rho A\omega^2$$

Colocando-se agora as equações (3.2.9) e (3.2.14) na forma matricial tem-se

$$\{Z_n(s)\}^D = [P]\ \{Z_n(s)\}^E \qquad (3.2.15)$$

onde

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & p_2 & p_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_4 & p_5 & -p_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_6 & -p_4 & p_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que é a matriz de transferência ponto de Henderson e McDaniel |1|.

Deve-se notar que a matriz de transferência ponto para o reforço não considera qualquer mudança no esforço cisalhante N_{sx}

através do reforço. Isto resulta da suposição de que o efeito da variação de u ao longo do reforço seja desprezível.

3.2.3. Matriz de Transferência Campo

Pode-se também dizer que uma matriz de transferência $[T(s_2,s_1)]$ seja um operador linear que transforma o vetor de estado $\{Z(s_1)\}$ no vetor $\{Z(s_2)\}$. Em notação matemática:

$$\{Z(s_2)\} = [T(s_2,s_1)]\ \{Z(s_1)\} \tag{3.2.16}$$

Para o caso em particular onde $s_1 = 0$ e $s_2 = s$, tem-se

$$\{Z(s)\} = [T(s,0)]\ \{Z(0)\}\ , \tag{3.2.17}$$

que é também um caso particular da equação (2.1.2) onde i=1 e o ponto 1 está a uma distância s de zero, de onde se conclui que [T(s,0) é uma matriz de transferência campo.

Assumindo-se uma solução para (2.1.10) na forma

$$\{Z(s)\} = e^{[A]s} \tag{3.2.18}$$

pode-se ver facilmente que

$$[T(s,0)] = e^{[A]s} \tag{3.2.19}$$

Henderson e McDaniel |1| propõem um método baseado em uma consequência do teorema de Cayley-Hamilton e nos constituintes idempotentes de [A], cuja teoria é bem apresentada por Frame |13|.

De acordo com este método, a matriz de transferência campo de um segmento de comprimento ℓ é dada por

$$[T(\ell,0)] = \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j \ell} [P_j] \qquad (3.2.20)$$

onde $[P_j]$ são os constituintes idempotentes de [A], λ_j's os distintos autovalores de [A] e n a ordem da matriz quadrada [A]; e onde os $[P]_j$ são calculados de acordo com a fórmula

$$[P_j] = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{[A] - \lambda_i [I]}{\lambda_j - \lambda_i} \qquad (3.2.21)$$

Neste trabalho usa-se o método dos autovetores e autovalores de [A] para o cálculo da matriz de transferência campo.

A matriz de transferência campo pode ser expressa por |2|

$$[T(\ell,0)] = [U][\ulcorner e^{\lambda_j \ell} \lrcorner][V]^T \qquad (3.2.22)$$

onde [U] e [V] são as matrizes dos autovetores à direita e à esquerda de [A], respectivamente, e os λ_j são os distintos autovalores de [A].

A expressão (3.2.22) é válida na condição em que os autovalores sejam normalizados de acordo com a expressão

$$\{V_j\}^T \cdot \{U_m\} = \delta_{jm} \qquad (3.2.33)$$

onde δ_{jm} é igual a um ($\delta_{jm}=1$) quando $j=m$ e zero ($\delta_{jm}=0$) quando j diferente de m ($j \neq m$). Assume-se também que $\lambda_i \neq \lambda_m$ se $j \neq m$.

Como uma consequência de (3.2.33) pode-se escrever

$$[V]^T \cdot [U] = [I] \qquad (3.2.24)$$

que significa

$$[V]^T = [U]^{-1} \qquad (3.2.25)$$

Os autovetores e autovalores da matriz de estado podem, naturalmente, ser calculados pelo uso de subrotinas padrão.

Neste trabalho utiliza-se uma subrotina desenvolvida por Espíndola |2| a partir do método de Leverrier com modificação de Faddeev. Este é um método direto que fornece a equação característica de [A] e pode ser aplicado também ao cálculo dos autovetores à direita e à esquerda e autovalores.

CAPÍTULO 4

ESTRUTURAS DE CASCAS ABERTAS

4.1. Generalidades

Reviu-se, no capítulo anterior, o desenvolvimento de matrizes de transferência para casca cilíndrica fina, bem como para reforços longitudinais; neste considerar-se-á a vibração de estruturas constituídas de tais cascas com reforços longitudinais. As cascas consideradas aqui serão abertas com reforços igualmente espaçados (períodos).

Inicialmente desenvolver-se-á o caso geral em que não haverá preocupação com as condições de contorno nem com o número de períodos.

Posteriormente adotar-se-á a técnica de redução em virtude das dificuldades computacionais inerentes ao método e que são contornadas pela eliminação de graus de liberdade terminais.

4.2. Vetor de Estado com Carregamento Externo

Seja a Figura 4.1 a representação do campo carregado externamente, simbolizado pelo j-ésimo período.

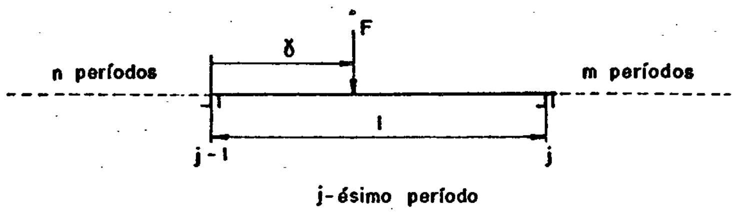


Figura 4.1 - Vão com Carregamento Externo

Seja $\{Z\}_F^E$ o vetor de estado imediatamente à esquerda do carregamento externo $\{F\}$, o qual se relaciona com o vetor de estado $\{Z\}_{j-1}^D$ à direita do (j-1)-ésimo reforço através da matriz de transferência campo como se segue

$$\{Z\}_F^E = [T(\gamma,0)]\{Z\}_{j-1}^D \tag{4.2.1}$$

onde γ é a distância do reforço ao carregamento.

Como foi dito anteriormente, o vetor de estado $\{Z\}_F^D$, imediatamente à direita do carregamento $\{F\}$, relaciona-se com $\{Z\}_F^E$ da seguinte maneira

$$\{Z\}_F^D = \{Z\}_F^E - \{F\} \tag{4.2.2}$$

Então pode-se escrever

$$\{Z\}_F^D = [T(\gamma,0)]\{Z\}_{j-1}^D - \{F\} \tag{4.2.3}$$

Também pode-se dizer que o vetor $\{Z\}_j^E$, à esquerda do j-ésimo reforço, relaciona-se com $\{Z\}_F^D$ através da matriz de transferência campo como segue:

$$\{Z\}_j^E = [T(\ell,\ell-\gamma)]\{Z\}_F^D \tag{4.2.4}$$

onde ℓ é a distância entre os dois reforços.

Logo pode-se escrever:

$$\{Z\}_j^E = [T(\ell,\ell-\gamma)][T(\gamma,0)]\{Z\}_{j-1}^D - [T(\ell,\ell-\gamma)]\{F\},$$

ou

$$\{Z\}_j^E = [T(\ell,0)]\{Z\}_{j-1}^D - [T(\ell,\ell-\gamma)]\{F\}, \tag{4.2.5}$$

ou ainda

$$\{Z\}_j^E = [T]\{Z\}_{j-1}^D - [TCL]\{F\}, \tag{4.2.6}$$

onde

$[T]$ = matriz de transferência campo de comprimento ℓ

$[TCL]$ = matriz de transferência campo de comprimento $(\ell-\gamma)$

A expressão (4.2.6) é fundamental para o desenvolvimento que segue.

4.3. Vetor de Estado Reduzido

Considerando-se que o vetor de estado e o carregamento externo sejam da forma

$$\{Z\}_j = [u,\ v,\ w,\ \beta,\ M,\ V,\ -N_s,\ N_{sx}]_j^T$$

e

$$\{F\} = [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ F,\ 0,\ 0]^T$$

e, para simplificar a derivação, considera-se $j=1$ e a equação (4.2.6) pode ser escrita assim:

$$u_1 = T_{11}u_0 + T_{12}v_0 + T_{13}w_0 + T_{14}\beta_0 + T_{15}M_0 + T_{16}V_0 - T_{17}N_{s0} + $$
$$+ T_{18}N_{sx0} - TCL_{16}F \qquad (4.3.1.a)$$

$$v_1 = T_{21}u_0 + T_{22}v_0 + T_{23}w_0 + T_{24}\beta_0 + T_{25}M_0 + T_{26}V_0 - T_{27}N_{s0} + $$
$$+ T_{28}N_{sx0} - TCL_{26}F \qquad (4.3.1.b)$$

$$w_1 = T_{31}u_0 + T_{32}v_0 + T_{33}w_0 + T_{34}\beta_0 + T_{35}M_0 + T_{36}V_0 - T_{37}N_{s0} + $$
$$+ T_{38}N_{sx0} - TCL_{36}F \qquad (4.3.1.c)$$

$$\beta_1 = T_{41}u_0 + T_{42}v_0 + T_{43}w_0 + T_{44}\beta_0 + T_{45}M_0 + T_{46}V_0 - T_{47}N_{s0} + $$
$$+ T_{48}N_{sx0} - TCL_{46}F \qquad (4.3.1.d)$$

$$M_1 = T_{51}u_0 + T_{52}v_0 + T_{53}w_0 + T_{54}\beta_0 + T_{55}M_0 + T_{56}V_0 - T_{57}N_{s0} + $$
$$+ T_{58}N_{sx0} - TCL_{56}F \qquad (4.3.1.e)$$

$$V_1 = T_{61}u_0 + T_{62}v_0 + T_{63}w_0 + T_{64}\beta_0 + T_{65}M_0 + T_{66}V_0 - T_{67}N_{s0} + $$
$$+ T_{68}N_{sx0} - TCL_{66}F \qquad (4.3.1.f)$$

$$-N_{s1} = T_{71}u_0 + T_{72}v_0 + T_{73}w_0 + T_{74}\beta_0 + T_{75}M_0 + T_{76}V_0 - T_{77}N_{s0} + $$
$$+ T_{78}N_{sx0} - TCL_{76}F \qquad (4.3.1.g)$$

$$N_{sx1} = T_{81}u_0 + T_{82}v_0 + T_{83}w_0 + T_{84}\beta_0 + T_{85}M_0 + T_{86}V_0 - T_{87}N_{s0} + $$
$$+ T_{88}N_{sx0} - TCL_{86}F \qquad (4.3.1.h)$$

Considere-se agora que nos reforços existe uma rigidez infinita na direção z, ou seja $w_j=0$. Esta consideração é bastante boa e pode ser verificada através da comparação feita por Espíndo la |2|, entre a estrutura original e a com rigidez infinita.

Com $w_j=0$ em (4.3.1.c) tem-se

$$0 = T_{31}u_0 + T_{32}v_0 + T_{34}\beta_0 + T_{35}M_0 + T_{36}V_0 - T_{37}N_{s0} + T_{38}N_{sx0} - TCL_{36}F$$

então

$$V_0 = \frac{1}{T_{36}}(-T_{31}u_0 - T_{32}v_0 - T_{34}\beta_0 - T_{35}M_0 + T_{37}N_{s0} - T_{38}N_{sx0}) + \\ + \frac{TCL_{36}}{T_{36}}F \qquad (4.3.2)$$

Substituindo-se (4.3.2.)

- em (4.3.1.a)

$$u_1 = (T_{11} - \frac{T_{16}T_{31}}{T_{36}})u_0 + (T_{12} - \frac{T_{16}T_{32}}{T_{36}})v_0 + (T_{14} - \frac{T_{16}T_{34}}{T_{36}})\beta_0 + \\ + (T_{15} - \frac{T_{16}T_{35}}{T_{36}})M_0 - (T_{17} - \frac{T_{16}T_{37}}{T_{36}})N_{s0} + \\ + (T_{18} - \frac{T_{16}T_{38}}{T_{36}})N_{sx0} + (\frac{T_{16}TCL_{36}}{T_{36}} - TCL_{16})F$$

- em (4.3.1.b)

$$v_1 = (T_{21} - \frac{T_{26}T_{31}}{T_{36}})u_0 + (T_{22} - \frac{T_{26}T_{32}}{T_{36}})v_0 + (T_{24} - \frac{T_{26}T_{34}}{T_{36}})\beta_0 + \\ + (T_{25} - \frac{T_{26}T_{35}}{T_{36}})M_0 - (T_{27} - \frac{T_{26}T_{37}}{T_{36}})N_{s0} + \\ + (T_{28} - \frac{T_{26}T_{38}}{T_{36}})N_{sx0} + (\frac{T_{26}TCL_{36}}{T_{36}} - TCL_{26})F$$

Repetindo o processo para as demais expressões de (4.3.1.d,e,g,h), escreve-se a expressão (4.2.6) como:

$$\{\overline{Z}\}_1^E = [\overline{T}]\{\overline{Z}\}_0^D - \{\overline{TCL}\}F \qquad (4.3.3)$$

onde (—) significa vetor ou matriz reduzida, tal como:

$$\{\overline{Z}\} = [u,\ v,\ \beta,\ M,\ -N_s,\ N_{sx}]^T$$

$[\overline{T}]$ = matriz de transferência campo reduzida (6x6)

$\{\overline{TCL}\}$ = vetor reduzido (6x1)

Generalizando (4.3.3)

$$\{\overline{Z}\}_j^E = [\overline{T}]\{\overline{Z}\}_{j-1}^D - \{\overline{TCL}\}F \qquad (4.3.4)$$

Para se encontrar (4.3.4) utilizou-se a técnica de eliminação de graus de liberdade terminais. Esta técnica pode ser automatizada via computador digital. Isto será mostrado no Apêndice I.

Pode-se também apresentar a equação (2.1.3) na forma reduzida como

$$\{\overline{Z}\}_j^D = [\overline{P}]\{\overline{Z}\}_j^E \qquad (4.3.5)$$

onde $[\overline{P}]$ = matriz de transferência ponto reduzida (6x6).

Substituindo-se (4.3.4) em (4.3.5) tem-se

$$\{\overline{Z}\}_j^D = [\overline{P}][\overline{T}]\{\overline{Z}\}_{j-j}^D - [\overline{P}]\{\overline{TCL}\}F$$

ou

$$\{\overline{Z}\}_j^D = [\overline{TP}]\{\overline{Z}\}_{j-1}^D - \{\overline{TC}\}F \tag{4.3.6}$$

onde $[\overline{TP}]$ = matriz de transferência período reduzida

$[\overline{TP}] = [\overline{P}][\overline{T}]$

$\{\overline{TC}\} = [\overline{P}]\{\overline{TCL}\}$

Generalizando a expressão (4.3.6) para o (j+m)-ésimo período

$$\{\overline{Z}\}_{j+m}^D = [\overline{TP}]^{(m+1)}\{\overline{Z}\}_{j-1}^D - [\overline{TP}]^m\{\overline{TC}\}F \tag{4.3.7}$$

e para os n períodos anteriores ao j-ésimo

$$\{\overline{Z}\}_{j-1}^D = [\overline{TP}]^n\{\overline{Z}\}_{j-(n+1)}^D \tag{4.3.8}$$

Logo para a estrutura da Figura 4.1 com (n+m+1) períodos tem-se

$$\{Z\}_{j+m}^D = [\overline{TP}]^{(n+m+1)}\{\overline{Z}\}_{j-(n+1)}^D - [\overline{TP}]^m\{\overline{TC}\}F \tag{4.3.9}$$

Como, antes de começar o primeiro período, tem-se um reforço, então

$$\{\overline{Z}\}_{j-(n+1)}^D = [\overline{P}]\{\overline{Z}\}_{j-(n+1}^E \tag{4.3.10}$$

e pode-se escrever a equação (4.3.9) como:

$$\{\bar{Z}\}^D_{j+m} = [\overline{TP}]^{(n+m+1)} [\bar{P}]\{\bar{Z}\}^E_{j-(n+1)} - [\overline{TP}]^m \{\overline{TC}\}F \quad (4.3.11)$$

Aplicando-se as condições de contorno nos extremos j+m e j-(n+1) obtem-se um sistema de três equações com três incógnitas. A partir desta solução, pode-se determinar o vetor de estado em cada ponto do sistema. Isto é ilustrado na seção abaixo.

4.4. Sistema Aberto: Carregamento no Primeiro Vão

Considerando-se que o carregamento externo atue no primeiro período, então tem-se que j=1 e n=0 e a equação (4.3.11) torna-se

$$\{\bar{Z}\}^D_{m+1} = [\overline{TP}]^{(m+1)} [\bar{P}]\{\bar{Z}\}^E_0 - [\overline{TP}]^m \{\overline{TC}\}F \quad (4.4.1)$$

Considerando-se ainda que os reforços externos atuem como apoios simples, tem-se as seguintes condições de contorno

$$\{\bar{Z}\}^E_0 = [u^E_0,\ v^E_0,\ \beta^E_0,\ 0,\ 0,\ 0]^T$$

e

$$\{\bar{Z}\}^D_{m+1} = [u^D_{m+1},\ v^D_{m+1},\ \beta^D_{m+1},\ 0,\ 0,\ 0]^T$$

Pode-se escrever a equação (4.4.1) da seguinte forma

$$\{\bar{Z}\}^D_{m+1} = [\bar{Q}]\{\bar{Z}\}^E_0 - \{\bar{D}\}F \quad (4.4.2)$$

onde $[\bar{Q}] = [\overline{TP}]^{(m+1)} [\bar{P}]$

$\{\bar{D}\} = [\overline{TP}]^m \{\overline{TC}\}$

Aplicando-se as condições de contorno em (4.4.2) e desenvolvendo tem-se

$$
\begin{aligned}
u^D_{m+1} &= \bar{Q}_{11}u^E_0 + \bar{Q}_{12}v^E_0 + \bar{Q}_{13}\beta^E_0 - \bar{D}_1F\\
v^D_{m+1} &= \bar{Q}_{21}u^E_0 + \bar{Q}_{22}v^E_0 + \bar{Q}_{23}\beta^E_0 - \bar{D}_2F\\
\beta^D_{m+1} &= \bar{Q}_{31}u^E_0 + \bar{Q}_{32}v^E_0 + \bar{Q}_{33}\beta^E_0 - \bar{D}_3F\\
0 &= \bar{Q}_{41}u^E_0 + \bar{Q}_{42}v^E_0 + \bar{Q}_{43}\beta^E_0 - \bar{D}_4F\\
0 &= \bar{Q}_{51}u^E_0 + \bar{Q}_{52}v^E_0 + \bar{Q}_{53}\beta^E_0 - \bar{D}_5F\\
0 &= \bar{Q}_{61}u^E_0 + \bar{Q}_{62}v^E_0 + \bar{Q}_{63}\beta^E_0 - \bar{D}_6F
\end{aligned}
$$

e escrevendo-se as três últimas equações acima na forma matricial

$$
\begin{bmatrix} \bar{Q}_{41} & \bar{Q}_{42} & \bar{Q}_{43}\\ \bar{Q}_{51} & \bar{Q}_{52} & \bar{Q}_{53}\\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{63} \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_0\\ v_0\\ \beta_0 \end{Bmatrix}^E = \begin{Bmatrix} \bar{D}_4\\ \bar{D}_5\\ \bar{D}_6 \end{Bmatrix} F \qquad (4.4.3)
$$

Se o carregamento externo for nulo, ou seja, uma vibração livre, a equação (4.4.3) torna-se um sistema linear homogêneo cuja condição de solução não trivial fornece as frequências naturais de vibração do sistema, ou seja, o determinante da matriz deve ser nulo.

Tendo-se vibração forçada e excitação produzida através de um esforço cortante harmônico de magnitude F, a equação (4.4.3) pode ser escrita da seguinte forma

$$[\overline{Q}^*]\{\overline{Z}^*\}_0^E = \{\overline{D}^*\}F \tag{4.4.4}$$

Sendo $[\overline{Q}^*]$ não singular, pode-se escrever

$$\{\overline{Z}^*\}_0^E = [\overline{Q}^*]^{-1}\{\overline{D}^*\}F \tag{4.4.5}$$

cuja solução fornece os deslocamentos do vetor de estado $\{\overline{Z}\}_0^E$.

Conhecendo-se o vetor de estado reduzido $\{\overline{Z}\}_0^E$, à esquerda do primeiro reforço, fornecido pela expressão (4.4.5) e utilizando-o na equação (4.4.1), determina-se o vetor de estado reduzido $\{\overline{Z}\}_{m+1}^D$, à direita do último reforço.

Também a partir de $\{\overline{Z}\}_0^E$, pode-se determinar o vetor de estado sem redução $\{Z\}_0^E$ a partir da equação (4.3.2) onde

$$\{Z\}_0^E = [u_0, v_0, 0, \beta_0, V_0, 0, 0, 0]^T.$$

Com $\{Z\}_0^E$ pode-se determinar o vetor de estado em qualquer estação.

4.5. Resultados Numéricos

Os parâmetros físicos de um exemplo são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1.- Dados Físicos

para cada painel

a	$= 1,8288$	[m]	raio de curvatura
b	$= 0,5080$	[m]	distância entre montantes
E	$= 7,24\times10^{10}$	[N/m²]	módulo de Young
h	$= 1,016\times10^{-3}$	[m]	espessura da casca
ℓ	$= 0,20828$	[m]	distância entre reforços
ρ	$= 2,80\times10^{3}$	[kg/m³]	densidade de massa
ν	$= 0,3$		coeficiente de Poisson

número de vãos: 05

para cada reforço

A	$= 1,485\times10^{-4}$	[m²]	área da seção transversal
A_s	$= 0,0$	[m]	ver Figura 3
A_z	$= 2,0828\times10^{-3}$	[m]	ver Figura 3
C	$= 9,419\times10^{-11}$	[m⁴]	constante de torção de St. Venant
C_{w_A}	$= 4,428\times10^{-12}$	[m⁶]	constante de empenamento
C_s	$= 0,0$	[m]	ver Figura 3
C_z	$= 2,037\times10^{-2}$	[m]	ver Figura 3
E	$= 7,24\times10^{10}$	[N/m²]	módulo de Young
I_η	$= 5,078\times10^{-8}$	[m⁴]	momento de inércia
I_ξ	$= 3,455\times10^{-8}$	[m⁴]	momento de inércia
$I_{\eta\xi}$	$= 0,0$	[m⁴]	momento de inércia
J_A	$= 1,057\times10^{-7}$	[m⁴]	momento de inércia
ρ	$= 2,80\times10^{3}$	[kg/m³]	densidade de massa
ν	$= 0,3$		coeficiente de Poisson
$\hat{\eta}$	$= 0,05$		fator de perda

A Figura 4.5.1 apresenta a curva do deslocamento transversal w x frequência onde os picos representam as frequências naturais do sistema e a Figura 4.5.2 a curva momento fletor x frequência.

Utiliza-se um fator de perda nos reforços para melhor estabilidade da resposta nas regiões de ressonância.

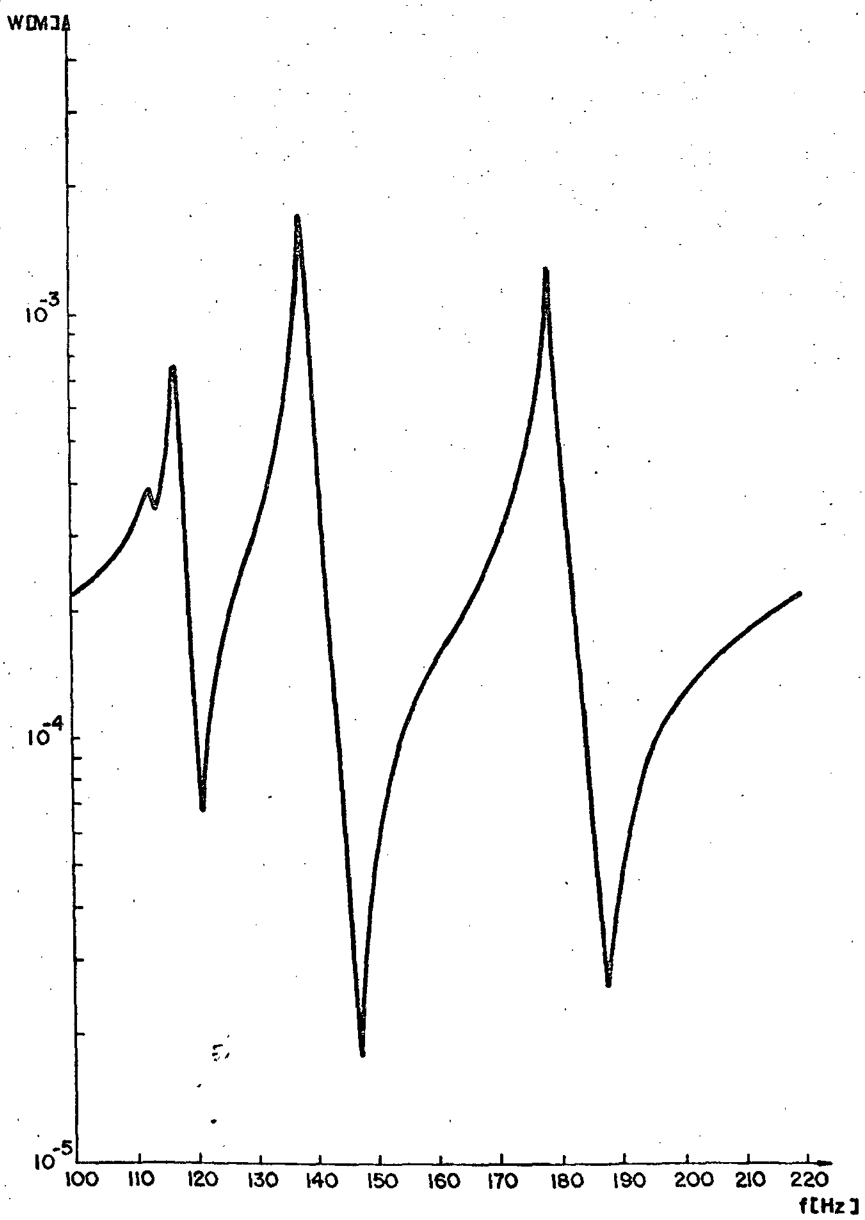


Figura 4.5.1 - Curva Deslocamento w x Frequência f

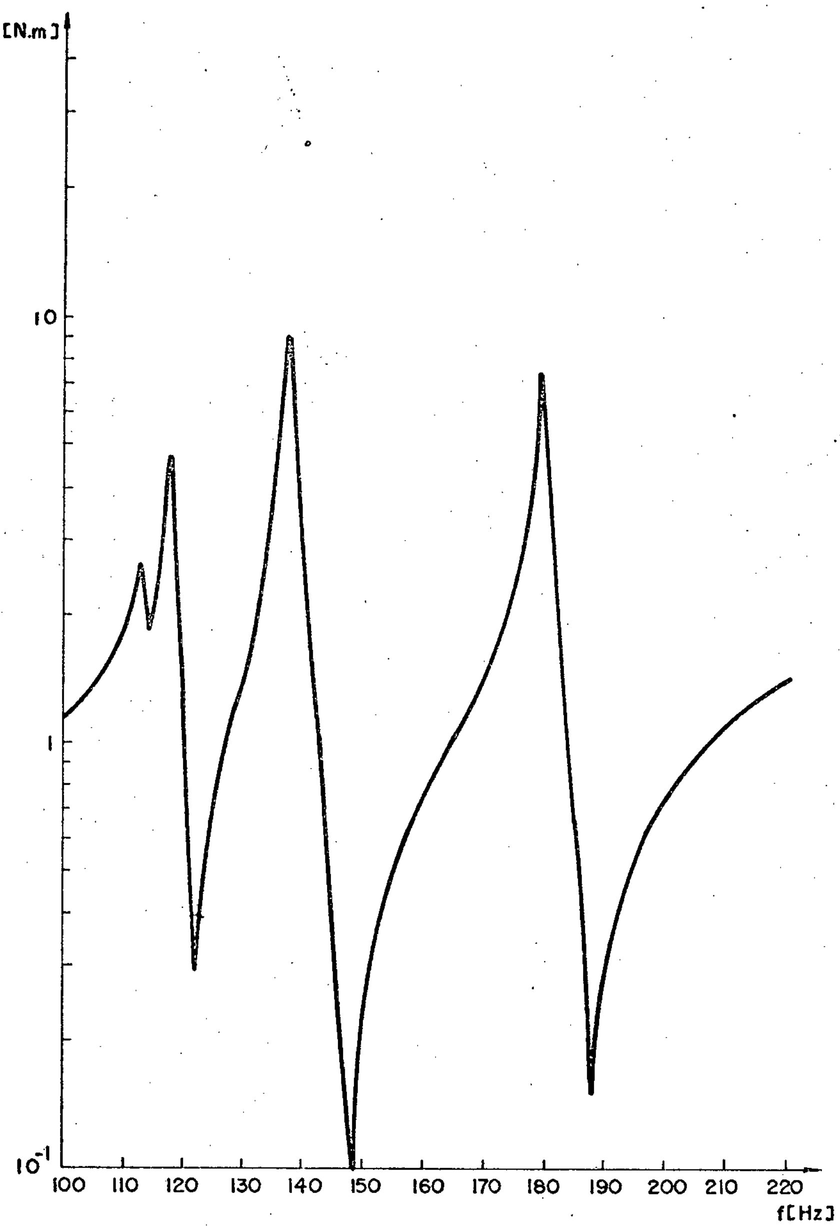


Figura 4.5.2 - Curva Momento M x Frequência f

Estas curvas são resultado do sistema apresentado na Figura 4.5.3.

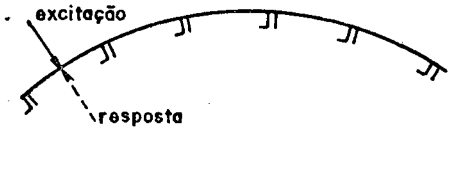


Figura 4.5.3 - Sistema Carregado no Primeiro Vão

A Tabela 4.2 mostra as quatro primeiras frequências naturais obtidas, bem como os resultados de Henderson e McDaniel, estes computados através da técnica da super matriz.

Tabela 4.2.- Frequências Naturais do Sistema Aberto

	Henderson e McDaniel	Este trabalho
1ª	113,4	112,6
2ª	121,2	117,2
3ª	143,9	137,6
4ª	187,7	178,5
freq.	[Hz]	[Hz]

Comparando-se os resultados obtidos por ambos os estudos, verifica-se que o erro máximo é menor que 5%, o que para métodos numéricos como os utilizados, é um valor aceitável. Na primeira frequência natural o erro é menor que 1%, que é um valor bastante bom, aumentando gradativamente não ultrapassando, porém, 5%. Como não foram realizados trabalhos experimentais por Henderson e McDaniel, não existe, pois, base concreta para se afirmar quais dos valores são os mais precisos.

Entretanto, aplicando-se a teoria de redução de graus terminais de liberdade a sistemas simples, pode-se avaliar a precisão da mesma, como foi feito no Capítulo 2 e também como foi feito por Espíndola |2|.

É apresentado também a curva deslocamento w x frequência

(Figura 4.5.5) de um sistema em que é aplicado um carregamento simétrico como o apresentado na Figura 4.5.4.

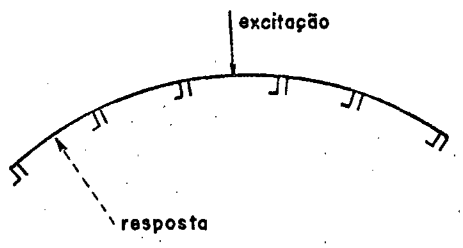


Figura 4.5.4 - Sistema com Carregamento Simétrico

Para a obtenção da resposta do sistema da Figura 4.5.4, utiliza-se a equação (4.3.9) onde faz-se j=3, n=2 e m=2; tem-se então

$$\{\overline{Z}\}_5^D = [\overline{TP}]^5 [\overline{P}] \{\overline{Z}\}_0^E - [\overline{TP}]^2 \{\overline{TC}\} F$$

onde são válidas as considerações utilizadas na obtenção dos resultados anteriores.

Através da análise da Figura 4.5.5, verifica-se que a aplicação de um carregamento externo simétrico não excita os modos pares e a estrutura só responde nos modos ímpares e seu resultado corrobora os obtidos anteriormente para a primeira e terceira frequência natural.

Nota-se, também, da análise das curvas de resposta do sistema que na primeira frequência houve uma menor resposta devido à proximidade do ponto de obtenção da mesma com o apoio simples do primeiro "stringer".

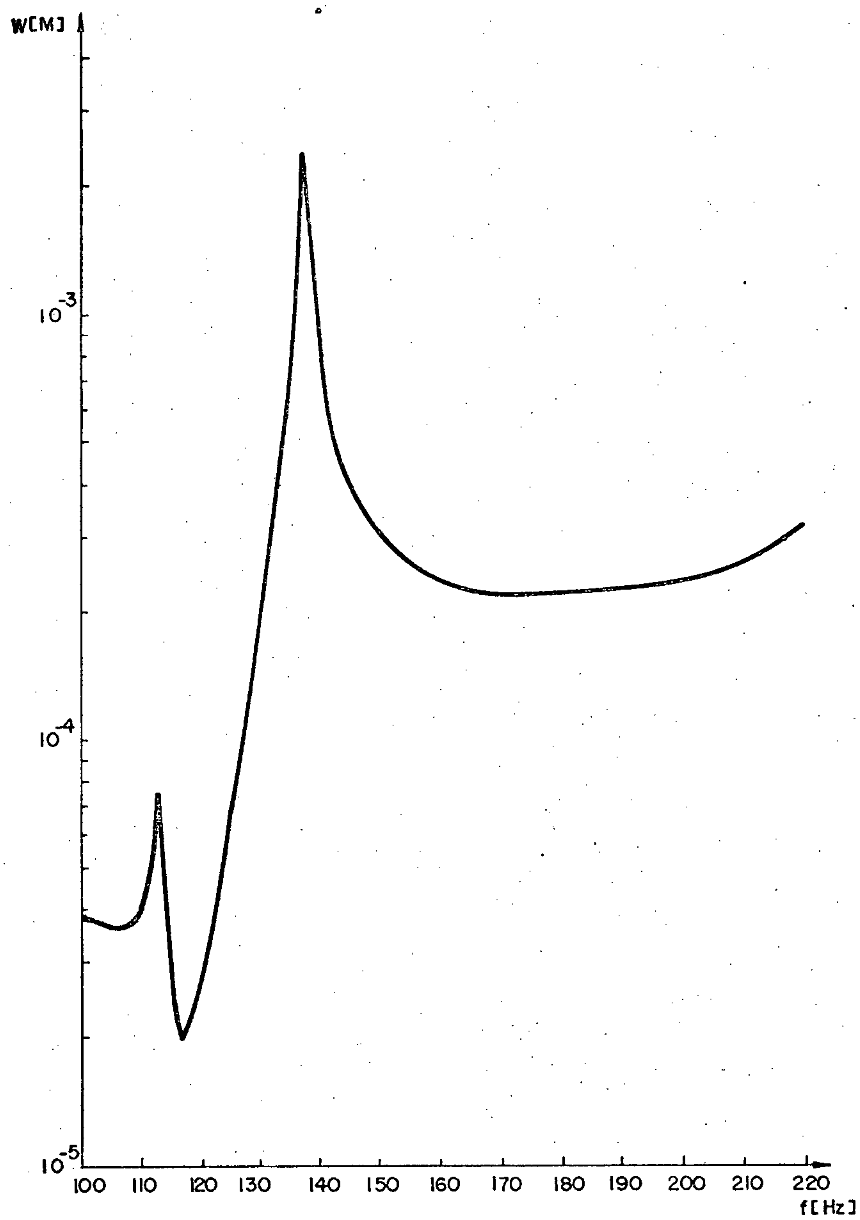


Figura 4.5.5 - Curva Deslocamento w x Frequência, carregamento simétrico

Para a obtenção dos resultados, utilizou-se um programa computacional cujo diagrama de fluxo é apresentado na Figura 4.5.6.

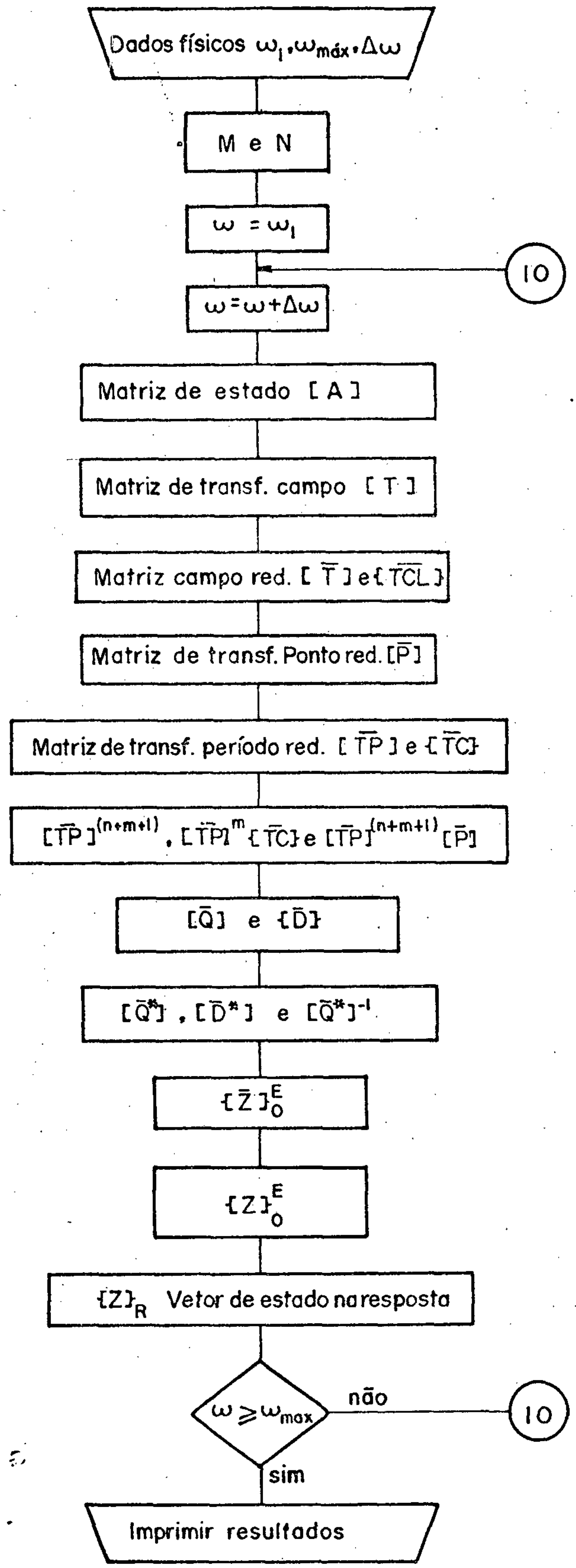


Figura 4.5.6 - Diagrama de Fluxo

Nestes casos, tem-se uma meia onda entre os montantes, isto é, n=1 nas equações (2.3.2) e (2.3.5) e assume-se também em todos os cálculos um fator de perda $\hat{\eta}=0,05$ em todos os reforços.

Baseando-se em estudos efetuados por Espíndola |2| onde a técnica de redução apresentou uma diminuição de tempo de computação, bem como de memória e a utilização do método de autovalores e autovetores apresentado no Apêndice II, em vez do método da supermatriz utilizado por Henderson e McDaniel |1|. Como as diferenças entre os resultados dos dois métodos não são significativas, estes ganhos em tempo computacional e memória são relevantes.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Embora já se tenha feito comentários nos capítulos anteriores, quando das discussões dos resultados, serão aqui apresentadas algumas considerações finais, bem como a apresentação de algumas sugestões para a continuidade deste estudo.

Primeiramente, para um sistema de vigas fez-se a introdução dos conceitos de campo e segmento, que possibilitou a elaboração de uma técnica computacional genérica para a determinação das frequências naturais do sistema. Esta técnica produz um programa de uso extremamente simples, quando implementada em computador digital.

O programa testado mostrou resultados extremamente precisos quando comparados com conhecidos. Isto revelou sua eficiência quanto à utilização dos conceitos de campo e segmento, sendo corroborado com os resultados obtidos no exemplo que determinou as frequências críticas de um rotor de ventilador de exaustão fabricado por empresa nacional.

Por ser uma formulação geral, a técnica foi aplicada a outros exemplos, de vigas de múltiplos apoios, mostrando-se um programa muito eficiente.

Para um sistema de cascas finas reforçadas por "stringers" longitudinais, lançou-se mão da técnica de redução de graus de liberdade terminais que propicia uma diminuição efetiva no tempo de computação, bem como da memória requerida. Aliado a isto, utilizou-se na determinação da matriz de transferência os autovetores e autovalores que foram determinados a partir do método apresentado no Apêndice II.

Com as considerações anteriores, formulou-se um programa para computador digital, onde levou-se em consideração que o sistema fosse aberto, definiu-se as condições de contorno e, os dados estruturais tomados como exemplo foram para que se pudesse fazer uma comparação entre os resultados obtidos pelo programa e os de Henderson e McDaniel que utilizaram a técnica da supermatriz. Os resultados mostraram-se próximos, o que demonstra a eficiência da técnica empregada.

Como não foram realizados experimentos, não se pode afirmar quais dos resultados são mais exatos.

A partir desta constatação é que se sugere, para um estudo futuro, a determinação experimental das frequências naturais de um sistema aberto de cascas cilíndricas reforçadas longitudinalmente para corroborar resultados.

Outro estudo a ser feito é o de um sistema fechado de cascas cilíndricas reforçadas por "stringers" longitudinais, cujo desenvolvimento teórico e suas dificuldades numéricas, bem como a sugestão de uma possível solução são apresentados no Apêndice III.

REFERÊNCIAS

|1| Henderson, J.P. e McDaniel, T.J. The analysis of curved multi-span structures. Proceedings, Symposium on Structural Dynamics, Vol.1, Loughborough University of Technology, 1970.

|2| Espíndola, J.J. Numerical methods in wave propagation in periodic structures. Ph.D. Thesis, University of Southampton, 1974.

|3| Lin, Y.K. e Donaldson, B.K. A brief survey of transfer matrix techniques with special reference to the analysis of aircraft panels. Journal of Sound and Vibration, 10 (1), 1969.

|4| McDaniel, T.J. Response and internal noise of a fuselage to randon excitation. ASME Winter Annual Meeting, November 29-December 3, New York, N.Y., 1970.

|5| Lin, Y.K. e McDaniel, T.J. Dynamics of beam-type periodic structures. Journal of Engineering for Industry, série B, nº 4, Vol. 91, November, 1969.

|6| Mercer, C.A. e Seavey, C. Prediction of natural frequencies and normal modes of skin-stringer panels rows. Journal of Sound and Vibration, 6(1), 1967.

|7| Clarkson, B.L. e Ford, R.O. The response of a typical aircraft structures to jet noise. Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 66, 1962.

|8| Pestel, E.C. e Leckie, F.A. — Matrix methods in elastomechanics. McGraw-Hill, New York, 1963.

|9| Porter, B. — Synthesis of dynamical systems. Thomas Nelson & Son Ltd., 1969.

|10| Donnell, L.H. — Stability of thin-walled tubes under torsion. NACA, report nº 479, 1933.

|11| Muller, D.E. — A method of solving algebraic equations using an automatic computer. MTAC 10:208-215, 1956.

|12| Flügge, W. — Handbook of Engineering Mechanics. McGraw-Hill, New York, 1962.

|13| Frame, J.S. — Matrix functions and applications. Parts I to V, IEEE Spectrum, 1964.

|14| Silva, J.B. — Propagação de ondas em sistemas periódicos discretos e contínuos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1981.

|15| Jordan, R. — Vibrações em linhas de transmissão de energia elétrica. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1982.

|16| Faddeev, D.K. e Faddeeva, V.H. — Computacional methods of linear algebra. W.H. Freeman and Co.

|17| Irie, T.; Yamada, G. e Muramoto, Y. — Free vibration of a circular cylindrical shell elastically restrained by axially spaced springs. Journal of Applied Mechanics-ASME, Vol. 50, 1983.

|18| Thomson, W.T. Vibration theory and applications. Prentice-Hall, Inc., 1965.

APÊNDICE I

TÉCNICA DE REDUÇÃO AUTOMÁTICA DE GRAUS DE LIBERDADE TERMINAIS

Quando se conhece a matriz de transferência de um sistema na sua forma mais geral, a matriz de transferência de um outro sistema, derivado do anterior, por imposição de alguma restrição, pode ser de fácil obtenção numérica. Para deduzir a técnica para efetuar tal operação, o caso de um sistema com originalmente dois graus terminais de liberdade é tomado como ilustração.

Assume-se que um dos graus de liberdade é eliminado, então o sistema derivado tem somente um grau de liberdade. Mais especificamente: assume-se que a primeira coordenada do vetor de estado é anulada por uma restrição. A equação (2.4.6) pode ser expandida para este exemplo particular:

$$
\begin{aligned}
0 &= t_{12}q_2^E + t_{13}F_1^E + t_{14}F_2^E \\
q_2^D &= t_{22}q_2^E + t_{23}F_1^E + t_{24}F_2^E \\
F_1^D &= t_{32}q_2^E + t_{33}F_1^E + t_{34}F_2^E \\
F_2^D &= t_{42}q_2^E + t_{43}F_1^E + t_{44}F_2^E
\end{aligned}
$$

onde q_i = coordenadas generalizadas e F_i = as forças internas correspondentes.

Resolvendo a primeira equação do conjunto acima para F_2^E e substituindo nas segunda e terceira equações, pode-se escrever

$$q_2^D = (t_{22} - t_{12}\,\frac{t_{24}}{t_{14}})q_2^E + (t_{23} - t_{13}\,\frac{t_{24}}{t_{14}})F_1^E$$
$$F_1^D = (t_{32} - t_{12}\,\frac{t_{34}}{t_{14}})q_2^E + (t_{33} - t_{13}\,\frac{t_{34}}{t_{14}})F_1^E \tag{I.1}$$

A equação (I.1) pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{Bmatrix} q_2 \\ F_1 \end{Bmatrix}^D = \begin{bmatrix} (t_{22} - t_{12}\,\frac{t_{24}}{t_{14}}) & (t_{23} - t_{13}\,\frac{t_{24}}{t_{14}}) \\ (t_{32} - t_{12}\,\frac{t_{34}}{t_{14}}) & (t_{33} - t_{13}\,\frac{t_{34}}{t_{14}}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ F_1 \end{Bmatrix}^E \tag{I.2}$$

na forma condensada

$$\{\overline{Z}\}^D = [\overline{T}]\{\overline{Z}\}^E \tag{I.2.a}$$

que é a mesma que (2.4.28).

Vale notar que, uma vez que este caso particular foi considerado, o resultado expresso pela equação (I.2) pode ser generalizado para o caso de n graus de liberdade terminais, olhando-se cuidadosamente os elementos da matriz quadrada reduzida.

Seja I_1 a ordem da coordenada generalizada eliminada e I_2 a ordem de sua correspondente força generalizada.

Provavelmente, o melhor caminho para mostrar como os elementos da matriz de transferência reduzida são formados, seja através do diagrama de fluxo. Isto é feito na Figura (I.1).

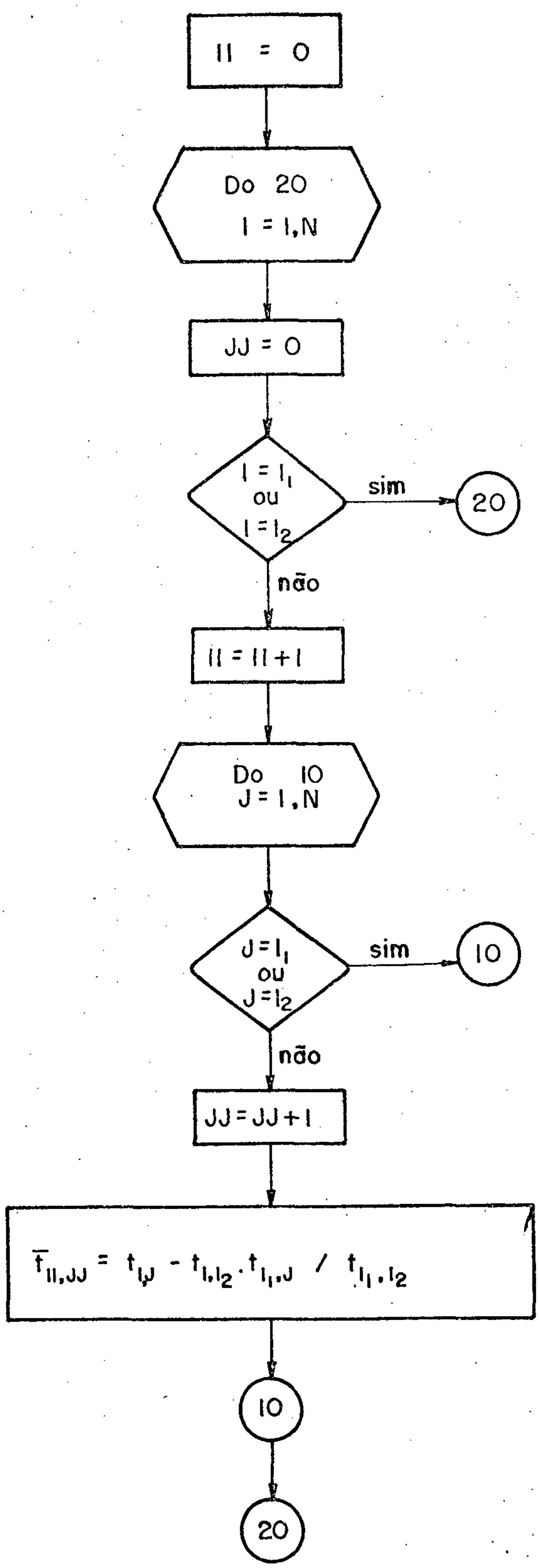


Figura I.I - Diagrama de Fluxo

Na Figura (I.1) $\overline{t}$ é um elemento da matriz reduzida, isto é, a matriz de transferência do sistema derivado.

Se se necessita de um maior grau de redução, é só aplicar esta técnica sucessivamente, quantas vezes for necessário.

APÊNDICE II

MÉTODO DE LEVERRIER COM MODIFICAÇÃO DE FADDEEV

O método de Leverrier com modificação de Faddeev |16|, é um método direto para o cálculo dos autovalores e autovetores de uma matriz quadrada qualquer.

Métodos diretos não são normalmente a melhor opção para o cômputo de autovalores e autovetores de matrizes grandes, porque são geralmente mais sensíveis ao acúmulo de erros e requerem um grande tempo de computação. O presente método, todavia, é totalmente vantajoso para as necessidades desse trabalho porque:

- As matrizes são usualmente pequenas e, em tais casos, requerem menor tempo de computação;
- Permite vantagens por ser utilizado em matriz simétrica em relação à diagonal secundária, o que economiza tempo computacional;
- É totalmente insensível às peculiaridades das matrizes;
- Fornece o mesmo nível de precisão para autovetores e autovalores.

Supõe-se que

$$P(t) = (-1)^N(\lambda^N - g_1\lambda^{N-1} - g_2\lambda^{N-2} - \ldots - g^N) \qquad |16|$$

é a equação polinomial característica da matriz quadrada [A]. Pode ser provado que o coeficiente g_j pode ser calculado pela construção da seguinte sequência:

$$
\begin{array}{llll}
[A]_1 = [A] & ; \quad tr[A]_1 = g_1 & ; \quad [B]_1 = [A]_1 - g_1[I] & \\
[A]_2 = [A][B]_1 & ; \quad \dfrac{tr[A]_2}{2} = g_2 & ; \quad [B]_2 = [A]_2 - g_2[I] & \\
\vdots & \quad \vdots & \quad \vdots & (II.1) \\
[A]_{N-1} = [A][B]_{N-2} & ; \quad \dfrac{tr[A]_{N-1}}{N-1} = g_{N-1} & ; \quad [B]_{N-1} = [A]_{N-1} - g_{N-1}[I] & \\
[A]_N = [A][B]_{N-1} & ; \quad \dfrac{tr[A]_N}{N} = g_N & ; \quad [B]_N = [A]_N - g_N[I] &
\end{array}
$$

Pela solução da equação característica, os autovalores são encontrados. N é normalmente par e pode ser visto que $g_j=0$, j impar, então a equação característica pode ser resolvida primeiro para λ^2 e ter sua ordem reduzida pela metade.

Supondo-se que os autovalores sejam distintos, pode ser mostrado que |16| o autovetor correspondente a λ_j é dado por uma das colunas da matriz quadrada

$$[U]_j = \lambda_j^{N-1}[I] + \lambda_j^{N-2}[B]_1 + \lambda_j^{N-3}[B]_2 + \ldots + [B]_{N-1} \qquad (II.2)$$

que é a matriz dos autovetores à direita de [A].

APÊNDICE III

ESTRUTURAS DE CASCAS FECHADAS

III.1. GENERALIDADES

No Capítulo 4 desenvolveu-se uma teoria geral para casca cilíndrica fina com reforços longitudinais igualmente espaçados, esta teoria permanece válida para sistemas fechados.

Neste tipo de sistema, as condições de contorno são bem definidas, pois os vetores de estado extremos são coincidentes.

Com estas considerações, é possível formular o modelo matemático.

III.2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A equação (4.3.9) é válida para estrutura fechada (Figura III.1) como foi dito anteriormente e utilizando-se a condição de contorno para estrutura fechada em que

$$\{\overline{Z}\}^D_{j+m} = \{\overline{Z}\}^D_{j-(n+1)} \qquad \text{(III.1)}$$

escreve-se a equação (4.3.9) como

$$\{\overline{Z}\}^D_{j-(n+1)} = [\overline{TP}]^{(n+m+1)}\{\overline{Z}\}^D_{j-(n+1)} - [\overline{TP}]^m\{\overline{TC}\}F \qquad \text{(III.2)}$$

ou

$$[[\overline{TP}]^{(n+m+1)} - [I]]\ \{\overline{Z}\}^{D}_{j-(n+1)} = [\overline{TP}]^{m}\ \{\overline{TC}\}F \qquad \text{(III.3)}$$

cuja solução fornece $\{\overline{Z}\}^{D}_{j-(n+1)}$.

Pode-se escrever a matriz $[\overline{TP}]$ como

$$[\overline{TP}] = [U][\ulcorner\lambda_i\lrcorner][V]^T \qquad \text{(III.4)}$$

onde [U] e [V] são as matrizes dos autovetores à direita e à esquerda, respectivamente e λ_i os distintos autovalores de $[\overline{TP}]$.

Utilizando-se as propriedades de matrizes de transferência, escreve-se que

$$[\overline{TP}]^n = [U][\ulcorner\lambda_i^n\lrcorner][V]^T \qquad \text{(III.5)}$$

que é a matriz de transferência de n períodos.

Se n for um número grande, os λ_i^n assumem valores extremamente altos provocando dificuldades numéricas.

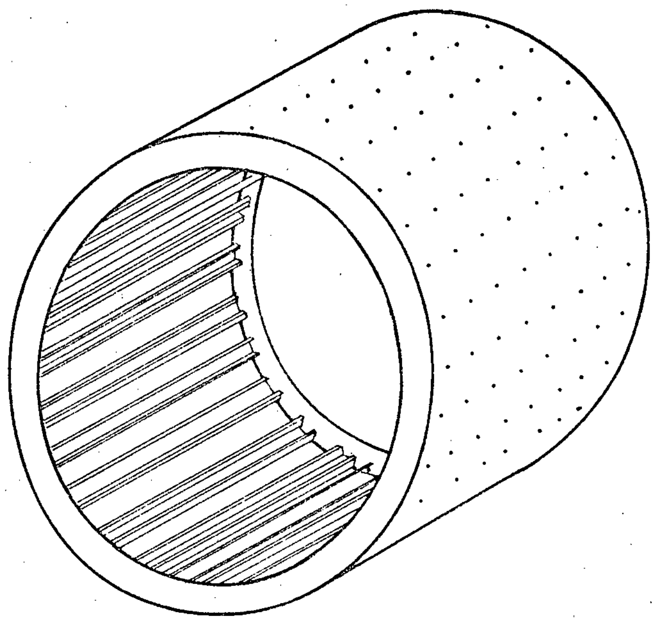


Figura III.1 - Casca Fechada