

UM MODELO DE SÓLIDO ESFÉRICO PARA O MÉTODO
DE ELEMENTOS FINITOS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UM MODELO DE SÓLIDO ESFÉRICO PARA O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

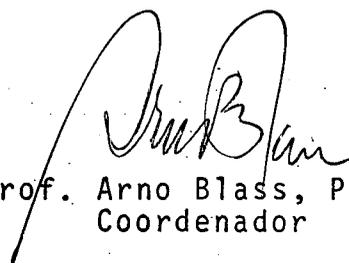
JOÃO PEDRO QUIRINO

MARÇO - 1984

UM MODELO DE SÓLIDO ESFÉRICO PARA O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

JOÃO PEDRO QUIRINO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE
EM ENGENHARIA, ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCEN
TRAÇÃO PROJETO MECÂNICO, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL
PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO

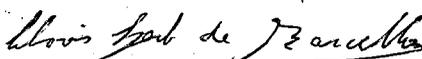


Prof. Arno Blass, Ph.D.
Coordenador

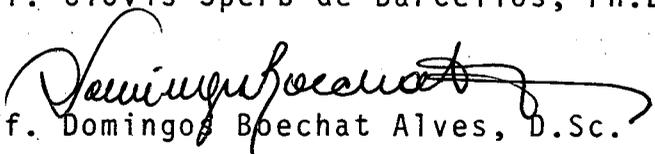


Prof. Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.
Orientador

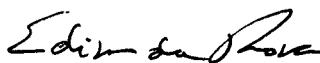
APRESENTADA PERANTE A BANCA EXAMINADORA COMPOSTA DOS PROFESSORES:



Prof. Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.



Prof. Domingos Boechat Alves, D.Sc.



Prof. Edison da Rosa, M.Sc.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Professor Clovis Sperb de Barcellos, pela orien
tação.

Ao Professor Arno Blass, na figura de Coordenador
do Curso, pelo apoio.

Aos colegas Antonio Nogueira, Antonio Bento, Anto
nio Turra e Marcos Nabuco pelo incentivo, apoio e companheiris
mo.

A todos os ex-professores e em especial ao Profes
sor Domingos Boechat Alves pelos ensinamentos.

À CNEN e UNESP/FEIS pelo apoio financeiro.

À UFSC, por tornar possível a realização deste tra
balho.

E principalmente a DEUS, o criador e sustentador
de todas as coisas.

I N D I C E

Página

SIMBOLOGIA	ix
RESUMO	xii
ABSTRACT	xiii
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	
1.1. Introdução	01
1.2. Revisão Bibliográfica	02
1.3. Definição do Problema	05
CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO DO MODELO	
2.1. Introdução	06
2.2. Definição do Modelo	06
2.3. Definição das Funções de Interpolação	07
2.4. Obtenção das Coordenadas Esféricas e Deslocamentos de um Ponto Genérico do Elemento	09
2.5. Relações Deformações-Deslocamentos e a Matriz B de transformação	10
2.6. Formulação Variacional do Modelo	15
CAPÍTULO 3 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	
3.1. Introdução	18
3.2. Detalhamento de cada passo indicado no fluxograma da Figura 3.1.	20
3.3. Vetor equivalente de carga nos pontos nodais (eq. 2.18)	29

3.3.1. Carregamento mecânico distribuído e concentrado	29
3.3.2. Carregamento térmico	30
3.4. Estimativa do número de somas e multiplicações para o cálculo da matriz de rigidez do elemento proposto	31
CAPÍTULO 4 - EXEMPLOS NUMÉRICOS	
4.1. Introdução	34
4.2. Primeiro exemplo: solução do problema de uma esfera oca submetida a um carregamento mecânico distribuído devido à pressão uniforme	34
4.2.1. Utilizando a modelagem padrão de teste	34
4.2.2. Utilizando uma fatia da esfera no 1º quadrante	42
4.3. Segundo exemplo: solução do problema de uma esfera oca submetida a um carregamento térmico devido ao fluxo estacionário de calor	52
4.3.1. Solução do 2º exemplo para o caso de carregamento térmico constante	54
4.3.2. Solução do 2º exemplo para o caso de carregamento térmico com $T_i = 40^{\circ}\text{C}$ e $T_e = 30^{\circ}\text{C}$	55
4.3.3. Solução do 2º exemplo para o caso de carregamento térmico com $T_i = 100^{\circ}\text{C}$ e $T_e = 0^{\circ}\text{C}$	58
4.4. Terceiro exemplo: solução do problema de uma calota hemisférica engastada na base, com pressão interna, com relação b/a igual a 1,1; 1,2; 1,3 .	61
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	67

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	69
APÊNDICES	
A. VETOR PESO - {WP}	73
B. ALGUNS RESULTADOS PARA TENSÕES E MODELAGENS ALTERNATIVAS	80
C. PROGRAMA-TESTE, SUBROTINAS E CARTÕES DADOS	90
D. PROCESSAMENTO DA CARGA DISTRIBUÍDA	100

S I M B O L O G I A

X_1, X_2, X_3	- Coordenadas cartesianas
R, ψ, θ	- Coordenadas esféricas nas direções radial, meridional e circunferencial, respectivamente.
r, s, t	- Coordenadas intrínsecas
$R(i), \psi(i), \theta(i)$	- Coordenadas esféricas do ponto nodal i
RM, FHI, TET	- Coordenadas esféricas do ponto médio do elemento
RPI, FPI, TPI	- Coordenadas esféricas de um ponto de integração do elemento
$U(i), V(i), W(i)$	- Deslocamentos do ponto nodal i
u, v, w	- Deslocamentos em um ponto qualquer do elemento
a	- Raio interno
b	- Raio externo
P	- Pressão uniforme, interna (P_i), ou externa (P_e)
T	- temperatura em um ponto de raio R
T_e	- temperatura na superfície externa da estrutura
T_i	- temperatura na superfície interna da estrutura
TP	- Temperatura local instantânea
$T_{ref.I}$	- Temperatura de referência para o cálculo das propriedades elásticas do material
$T_{ref.II}$	- Temperatura de referência para o cálculo da deformação térmica
E	- Módulo de elasticidade do material
E_s, E_θ, E_z	- Módulo de elasticidade do material (para casca semi-espessa, TCSE)
α	- Coeficiente de expansão térmica

$\alpha_{ts}, \alpha_{t\theta}$	- Coeficientes de expansão térmica (TCSE)
ψ'	= $(90 - \psi)^0$ ângulo medido na direção meridional (TCSE)
ν	- Coeficiente de Poisson
FI	- Função de Interpolação
$H(1), H(2), H(3)$	- Derivadas das funções de interpolação nas direções, R, ψ, θ calculadas num ponto nodal
$\epsilon_R, \epsilon_\psi, \epsilon_\theta$	- Deformações nas direções R, ψ, θ
$\gamma_{R\psi}, \gamma_{\psi\theta}, \gamma_{\theta R}$	- Deformações angulares em coordenadas esféricas
A_i, B_j, C_k	- Pesos de integração de Gauss-Legendre
W	- Produto dos pesos de integração de Gauss-Legendre num ponto de integração
XP	- Produto de W, raio do ponto de integração (RPI), determinante Jacobiano (DET) e seno do ângulo ψ num ponto de integração
X_i, Y_j, Z_k	- Abcissas dos pesos de integração de Gauss-Legendre
π	- Energia potencial total
$\delta\pi$	- Primeira variação de π
$\sigma_R, \sigma_\psi, \sigma_\theta$	- Componentes normais de tensão em coordenadas esféricas
{WP}	- Vetor Peso
{U}	- Vetor dos deslocamentos nodais
{F}	- Vetor equivalente de carga nos pontos nodais
{P}	- Vetor forças de superfície
{ F_t }	- Vetor forças térmicas
{ $C\epsilon_t$ }	- Vetor tensão térmica
{ σ }	- Vetor tensão em um ponto qualquer do elemento

- [B] - Matriz de transformação deformação-deslocamento
- [C] - Matriz tensão-deformação para material isotrópico elástico linear
- [D] - Matriz intermediária, produto de [C] por {WP} num ponto de integração
- [BTD] - Matriz intermediária, produto de [B]^T por [D]
- [J] - Matriz Jacobiana
- |J| - Determinante Jacobiano, DET
- [K] - Matriz de rigidez do elemento, global
- iRjFkT - significa i elementos na direção radial, j elementos na direção meridional e k elementos na direção circunferencial
- IIJJKK - significa o número codificado de pontos de integração (NPI) em cada direção, sendo:
II - número de pontos na direção R;
JJ - número de pontos na direção ψ ;
KK - número de pontos na direção θ .

R E S U M O

Neste trabalho é desenvolvida uma formulação analítica de um elemento finito tri-dimensional, de geometria esférica de 20 nós. Seu desenvolvimento se baseia no princípio da energia potencial mínima.

Nesta formulação é realizada uma exploração conveniente das propriedades especiais de simetria existentes em peças ou partes de componentes estruturais de formato esférico e/ou cilíndrico a fim de que a matriz de rigidez e o vetor equivalente de forças nodais sejam calculados de maneira prática e econômica.

Um programa digital codificado em FORTRAN IV é inserido no SIMELF - Sistema Modular de Elementos Finitos e vários exemplos típicos são resolvidos e comparados com soluções existentes na literatura para carregamentos mecânico distribuído, concentrado ou térmico.

A B S T R A C T

This work presents an analytical formulation to a spherical three-dimensional finite element with 20 nodal points. The formulation is based on the minimum potential energy principle.

Some special symmetrical characteristics of spherical and cylindrical components are considered for the sake of improving computation of the stiffness matrix and equivalent nodal forces.

The model is implemented through some routines written in FORTRAN IV language and introduced in SIMELF System (Sistema Modular de Elementos Finitos). Several examples are solved and the results are compared with the existing solutions for concentrated, distributed and thermal loads.

C A P Í T U L O 1

INTRODUÇÃO

1.1. Introdução

Na aplicação do Método de Elementos Finitos, os elementos sólidos tri-dimensionais são utilizados na análise estrutural dos componentes de estrutura de grande espessura. Desse elementos, os mais simples são o tétרהedro que é definido por 4 pontos arbitrários, no espaço e o elemento do tipo paralelepípedo com 8 nós. Um domínio de forma qualquer pode ser representado, com um certo grau de aproximação, por uma montagem desses elementos. A desvantagem está na grande quantidade requerida dos mesmos para representar um domínio complexo.

Os elementos isoparamétricos de lados ou faces curvas reproduzem, com maior grau de aproximação, a geometria de estruturas de forma arbitrária utilizando um menor número de elementos, sendo, portanto, mais adequados.

Uma das maneiras de reduzir o custo de uma análise estrutural é a utilização de uma biblioteca de elementos que possa suprir, para diversas geometrias, elementos específicos visando os casos predominantes. É com este objetivo que está sendo implantado o SIMELF - Sistema Modular de Elementos Finitos.

Muitos componentes estruturais tem peças ou par

tes de formato esférico e/ou cilíndrico. Como essas superfícies apresentam propriedades especiais de simetria pode-se tirar proveito dessas para reduzir os custos de integração aumentando a eficiência numérica do elemento. A realização de estudos neste sentido é portanto recomendada.

1.2. Revisão Bibliográfica

Os maiores esforços no sentido de aumentar a biblioteca de elementos tri-dimensionais tem sido feitos por vários pesquisadores. Entre esses pode-se citar os trabalhos de Argyres, Fried e Scharpt [11], [12], os quais desenvolveram os elementos LUMINA, TET 20 e TEA 8 com suas variantes. Todos esses elementos foram desenvolvidos num esforço de investigar a aplicação das funções de interpolação tanto na geometria quanto na especificação da deformação. O elemento hexaedro tri-dimensional de superfícies curvas chamado LUMINA é baseado numa aplicação sistemática das funções de interpolação de Lagrange, não completas. Já os elementos TET 20 e o TEA 8 utilizam polinômiais completos de 3ª ordem. Uma advertência é feita no sentido de que para calcular a matriz de rigidez de um elemento mais sofisticado o tempo aumenta significativamente com o número de pontos nodais. Entretanto, um menor número de elementos são necessários para se obter o mesmo grau de precisão.

As duas maiores restrições quanto ao uso de elementos tri-dimensionais de geometria não linear são: (1) a necessidade de uma grande capacidade de memória para manipulação e armazenagem das matrizes no computador; (2) maior tempo de computação de cada elemento.

Com o advento dos computadores de porte a restrição (1) ficou resolvida. Para resolver a restrição (2) alguns pesquisadores vem sugerindo novas técnicas para atacar o problema. Tendo em vista que no cálculo da matriz de rigidez a parte que consome maior tempo é justamente a manipulação das funções de interpolação e a parte que se refere ao processo de integração numérica, é natural que as atenções estejam voltadas para estes fatos, notadamente este último citado.

Um trabalho que aparece com sugestões significativas é o de Gupta e Mohraz [1]. Nesse trabalho é apresentada a formulação da matriz de rigidez utilizando notação indexada. Uma "matriz intermediária" de 4ª dimensão é calculada em função das derivadas das funções de interpolação a qual é posteriormente multiplicada pelo tensor de propriedades do material para obter a matriz de rigidez. Uma comparação entre esse procedimento e o convencional é feita dando boa margem de economia. Tal trabalho, no entanto, oferece dificuldades para ser aplicado em análises que utilizem sistemas de coordenadas diverso do retangular.

Irons[14] mostra alguns detalhes sobre integração de elementos triangulares e também a montagem da matriz de rigidez para um elemento sólido hexaédrico linear, sem entrar em muitos detalhes. Algumas técnicas sobre integração de elementos planos em malhas contendo elementos variados são sugeridas. Grande ênfase é dada na escolha dos elementos para a análise da estrutura visando, principalmente, a obtenção de uma matriz de rigidez cuja largura da banda seja a menor possível.

Hellen [15] mostra um rigoroso estudo sobre a forma do determinante da Matriz Jacobiana para diferentes elementos. A avaliação de regras de integração reduzida é feita em comparação com regras completas por intermédio de exemplos. Regras com pontos econômicos equivalentes a $3 \times 3 \times 3$ e $4 \times 4 \times 4$ mas com muito menos pontos de Gauss por elemento são discutidos num exemplo de plasticidade tri-dimensional. A ênfase nesse trabalho é sobre as regras mais convenientes para uma dada malha.

Pawsey e Clough [16] mostram um interessante estudo sobre o elemento quadrático de casca espessa introduzido por Ahmad em 1968. Este elemento falhava na representação de deformações devido ao cisalhamento em cascas ou placas finas. Um esquema de integração apropriado é então apresentado. Neste, cada componente da energia de deformação é calculada separadamente usando uma grade de integração Gaussiana diferente para cada contribuição. Por este procedimento se evita a rigidez excessiva do elemento devido ao cisalhamento. Vários exemplos comprovam a eficiência do método. Tal procedimento, no entanto, se restringe àquele tipo de elemento.

Gray e Genuchten [17] confirmam o fato de que a integração de polinômios é mais precisa quando se utiliza a Quadratura Gaussiana (QG), no entanto apresentam outras fórmulas de integração que são altamente competitivas com a QG quando aplicadas na análise de elementos finitos. As fórmulas de integração não-Gaussiana são apresentadas em uma tabela para elementos bi-dimensionais. Elas usam mais pontos de integração do que a QG, entretanto, devido ao fato de que muitos pontos de integração coincidem com a localização nodal, o trabalho computacional é reduzido em muitos casos. O fato negativo é o de que

tais fórmulas usam somente funções de interpolação de Lagrange de base quadrática. As vantagens acima citadas não serão conseguidas se outro tipo de função é usado. O uso de tais fórmulas fica dependendo do tipo de elemento, das funções e da habilidade do usuário.

Pittr e Hartl [13] mostram um procedimento para a obtenção das tensões térmicas em que se utiliza os deslocamentos ao invés das deformações iniciais. Este método apresenta vantagens na obtenção dos resultados para tensões embora implique num maior tempo de processamento para obtenção do vetor dos deslocamentos iniciais.

1.3. Definição do Problema

Como visto no item 1.1 muitos componentes estruturais tem formas esféricas e/ou cilíndricas que podem ser exploradas de maneira conveniente a fim de se obter uma redução nos custos de integração da matriz de rigidez e do vetor equivalente de forças nodais.

No item 1.2 foi vista a literatura referente a estudos de elementos tri-dimensionais. Esta literatura, contudo, é bastante escassa. Além disto, uma deficiência é notada na determinação dos termos de rigidez do elemento devido ao cisalhamento.

Neste trabalho é desenvolvida uma formulação de um elemento de sólido esférico, que se assemelha ao elemento iso paramétrico de 20 nós, visando explorar a geometria da peça e reduzir, com isto, os custos de cálculo da matriz de rigidez e do vetor equivalente de forças nodais, devido a um carregamento mecânico distribuído, concentrado ou térmico.

C A P Í T U L O 2

FORMULAÇÃO DO MODELO

2.1. Introdução

Uma das principais dificuldades do uso do Método de Elementos Finitos consiste em como deve ser efetuado o particionamento do domínio e qual tipo de elemento seja o mais apropriado. Além disto, o número de elementos usado é muito importante por dois motivos principais que são a precisão dos resultados e o custo da análise que, por sua vez, está ligado ao tempo de processamento. Neste sentido, é vantajoso saber, para cada geometria e carregamento, qual o modelo que se aplica a fim de obter os melhores resultados com a máxima economia.

O modelo de sólido esférico, proposto neste trabalho, visa explorar a geometria da peça podendo ser acoplado a outros modelos conformáveis para analisar estruturas mais complexas.

2.2. Definição do Modelo

A configuração geométrica do modelo é obtida pela intersecção de planos meridionais definidos por θ , $\theta + \Delta\theta$ e cones concêntricos de coordenadas ψ , $\psi + \Delta\psi$ e superfícies esféricas de raios R , $R + \Delta R$ (Fig. 2.1). É um elemento quadrático

que utiliza funções de interpolação do tipo "serendipity" de 2º grau na interpolação de deslocamentos. Elas satisfazem a continuidade entre elementos, são conformes e satisfazem também o critério de completividade, requisitos estes necessários para a convergência do modelo. Isto se dá pelo fato de que o método dos deslocamentos assume campos de deslocamentos contínuos sobre o domínio. As incógnitas do problema discreto equivalente são os deslocamentos nodais.

2.3. Definição das Funções de Interpolação

As funções de interpolação são definidas em termos das coordenadas intrínsecas (r,s,t) do elemento e das coordenadas dos pontos de integração considerados [4]. Nos pontos nodais sobre os vértices, as funções de interpolação são definidas como [6]:

$$FI(k) = (1/8)(1+rr_k)(1+ss_k)(1+tt_k)(rr_k + ss_k + tt_k - 2) \quad (2.1)$$

onde r_k , s_k , t_k são as coordenadas do ponto nodal considerado. As funções de interpolação para os pontos intermediários das arestas são definidas por:

$$FI(k) = (1/4)(1-r^2)(1+ss_k)(1+tt_k) \quad (2.2a)$$

para $r_k = 0$, $s_k = \pm 1$, $t_k = \pm 1$.

$$FI(k) = (1/4)(1-s^2)(1+rr_k)(1+tt_k) \quad (2.2b)$$

para $s_k = 0$, $r_k = \pm 1$, $t_k = \pm 1$.

$$FI(k) = (1/4)(1-t^2)(1+rr_k)(1+ss_k) \quad (2.2c)$$

para $t_k = 0$, $r_k = \pm 1$, $s_k = \pm 1$.

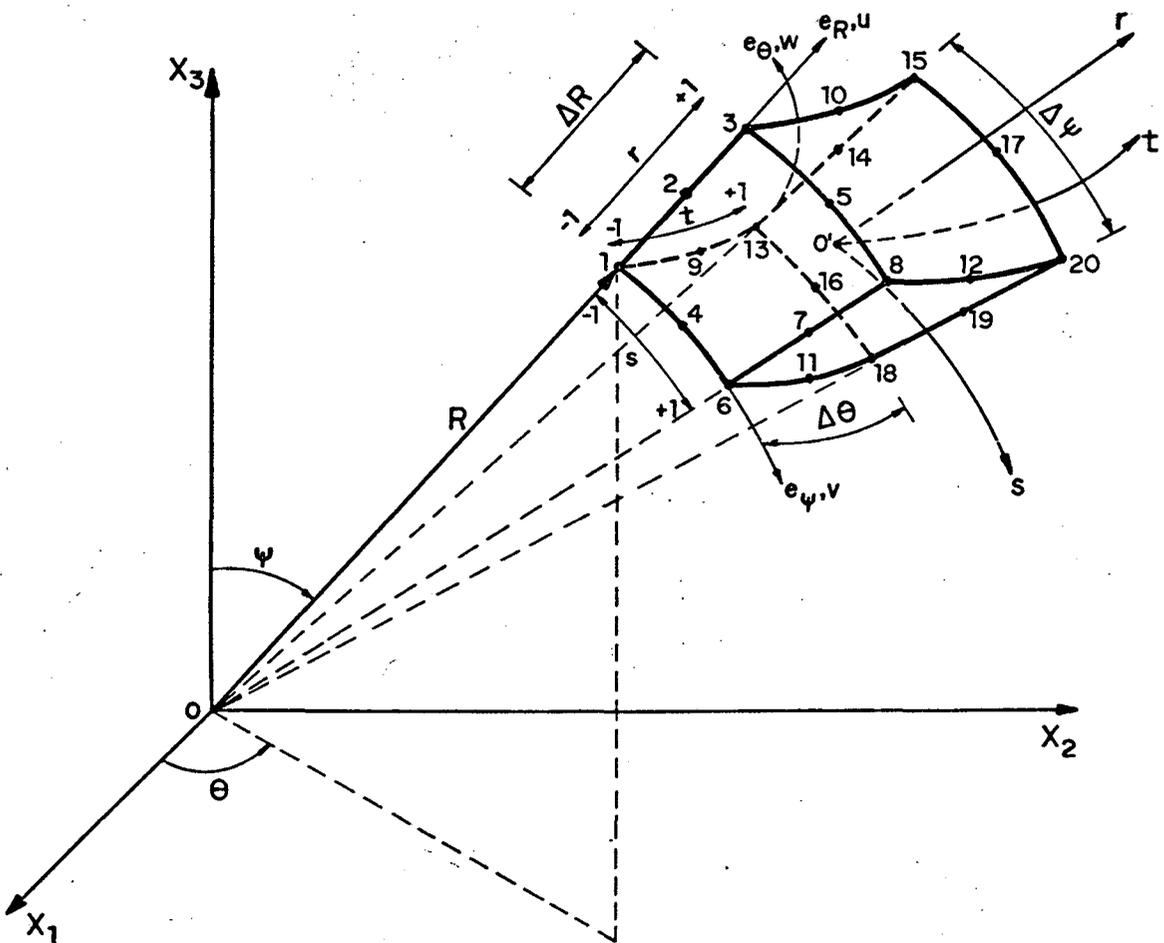


Figura 2.1. O modelo de sólido esférico com a numeração intrínseca dos nós, coordenadas naturais (r, s, t), coordenadas esféricas (R, ψ, θ), coordenadas cartesianas (X_1, X_2, X_3).

2.4. Obtenção das Coordenadas Esféricas e Deslocamentos de um Ponto Genérico do Elemento

Sendo (RM, FHI, TET) as coordenadas esféricas do ponto médio do elemento e (r_i, s_i, t_i) as coordenadas intrínsecas de um ponto i do elemento tem-se para as coordenadas esféricas do ponto i :

$$R(i) = RM + \frac{\Delta R}{2} \cdot r_i$$

$$\psi(i) = FHI + \frac{\Delta \psi}{2} \cdot s_i \quad (2.3a, b, c)$$

$$\theta(i) = TET + \frac{\Delta \theta}{2} \cdot t_i$$

onde ΔR , $\Delta \psi$, $\Delta \theta$ estão definidos na Fig. 2.1.

Da mesma forma, sendo $\{U(i), V(i), W(i)\}$ os deslocamentos nodais, para um ponto qualquer tem-se:

$$u = \sum_{i=1}^n FI(i) U(i)$$

$$v = \sum_{i=1}^n FI(i) V(i)$$

$$w = \sum_{i=1}^n FI(i) W(i)$$

(2.4a, b, c)

sendo $FI(i)$ as funções de interpolação definidas na Secção 2.3 e (u, v, w) os deslocamentos nas direções (R, ψ, θ) respectivamente.

2.5. Relações Deformações - Deslocamentos e a Matriz B de Transformação

As relações deformações-deslocamentos em coordenadas esféricas para um corpo elástico linear são [18], [20]:

$$\epsilon_R = \frac{\partial u}{\partial R}$$

$$\epsilon_\psi = A \frac{\partial v}{\partial \psi} + \frac{u}{R} + \frac{w}{R} \cot \theta$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{u}{R}$$

$$\gamma_{R\psi} = A \frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial v}{\partial R} - \frac{v}{R}$$

$$\gamma_{\psi\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{R} \cot \theta + A \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{\theta R} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{w}{R} + \frac{\partial w}{\partial R}$$

onde:

$$A = \frac{1}{R \sin \theta} ; \gamma_{R\psi} = 2\epsilon_{R\psi} ; \gamma_{\psi\theta} = 2\epsilon_{\psi\theta} ;$$

$$\gamma_{\theta R} = 2\epsilon_{\theta R}$$

As equações acima podem ser colocadas sob a forma:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_\psi \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{R\psi} \\ \gamma_{\psi\theta} \\ \gamma_{\theta R} \end{Bmatrix} = [\bar{B}] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

onde $[\bar{B}]$ é o operador diferencial dado por:

$$[\bar{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial R} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} & \frac{\cot \theta}{R} \\ \frac{1}{R} & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} & \frac{\partial}{\partial R} - \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cot \theta}{R} & \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & \frac{\partial}{\partial R} - \frac{1}{R} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

As equações (2.4a,b,c) podem ser colocadas sob a forma:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} FI(i) U(i) \\ FI(i) V(i) \\ FI(i) W(i) \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

e a equação (2.5) sob a forma:

$$\{\epsilon\} = [\bar{B}] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [B] \{U\} \quad (2.8)$$

sendo $\{U\}^T = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \dots \ u_{20} \ v_{20} \ w_{20}\}$ (2.9)

os deslocamentos dos pontos nodais, e $[B]$, a matriz de transformação deformação-deslocamento. A fim de facilitar a montagem de $[B]$, ela é dividida em 20 blocos tendo cada um dimensão (6×3) .

Denominando RPI e TPI, respectivamente, as coordenadas radial e circunferencial do ponto de integração em questão e colocando

$$\left. \begin{aligned} H(1) &= \frac{\partial FI(i)}{\partial R} \\ H(2) &= \frac{\partial FI(i)}{\partial \psi} \\ H(3) &= \frac{\partial FI(i)}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 20 \quad (2.10a, b, c)$$

onde $H(1)$, $H(2)$, $H(3)$ são obtidos explicitamente através de ΔR , $\Delta \psi$, $\Delta \theta$ e as derivadas das funções de interpolação; o primeiro

bloco de [B] será:

$$\begin{array}{ccc}
 H(1) & 0 & 0 \\
 FI(1)/RPI & \frac{H(2)}{RPI \cdot \text{sen}(TPI)} & \frac{FI(1) \cdot \text{cot}(TPI)}{RPI} \\
 FI(1)/RPI & 0 & H(3)/RPI \\
 \frac{H(2)}{RPI \cdot \text{sen}(TPI)} & H(1) - FI(1)/RPI & 0 \\
 0 & [H(3) - FI(1) \cdot \text{cot}(TPI)]/RPI & \frac{H(3)}{RPI \cdot \text{sen}(TPI)} \\
 H(3)/RPI & 0 & H(1) - FI(1)/RPI
 \end{array} \quad (2.11)$$

para $i=1$ na equação (2.10).

Com isto, a equação (2.8) pode ser escrita em forma matricial como segue:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_\psi \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{R\psi} \\ \gamma_{\psi\theta} \\ \gamma_{\theta R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ FI(1)/RPI & H(2)/[RPI*\text{sen}(TPI)] & \frac{FI(1)}{RPI} * \text{cot}(TPI) & \dots & \dots & \dots \\ FI(1)/RPI & 0 & H(3)/RPI & \dots & \dots & \dots \\ H(2)/[RPI*\text{sen}(TPI)] & H(1) - \frac{FI(1)}{RPI} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{RPI} [H(3) - FI(1)*\text{cot}(TPI)] & \frac{H(3)}{RPI*\text{sen}(TPI)} & \dots & \dots & \dots \\ H(3)/RPI & 0 & H(1) - FI(1)/RPI & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \dots \\ u_{20} \\ v_{20} \\ w_{20} \end{bmatrix}$$

19 BLOCO

29 BLOCO

209 BLOCO

MATRIZ B

(2.12)

onde: E - módulo de elasticidade do material

ν - coeficiente de Poisson.

Realizando a 1.^a variação em (2.13) e igualando a zero temos:

$$\delta\pi = \int_V \delta \{\epsilon\}^T [C] (\{\epsilon\} - \{\epsilon_t\}) dv - \int_{S_p} \delta\{u\}^T \{P\} ds = 0 \quad (2.15)$$

Substituindo a equação (2.8) em (2.15) e tendo em vista que os deslocamentos $\{U\}$ e as variações $\delta\{U\}$ são arbitrárias e não dependem da posição, pode-se escrever:

$$\delta\pi = \delta\{U\}^T \left[\left(\int_V [B]^T [C] [B] dv \right) \{U\} - \int_V [B]^T [C] \{\epsilon_t\} dv - \int_{S_p} \{FI\}^T \{P\} ds \right] = 0$$

ou

$$\left(\int_V [B]^T [C] [B] dv \right) \{U\} - \int_V [B]^T [C] \{\epsilon_t\} dv - \int_{S_p} \{FI\}^T \{P\} ds = 0$$

donde tem-se

$$[K] \{U\} = \{F\} \quad (2.16)$$

para um dado elemento sendo

$$[K] = \int_V [B]^T [C] [B] dv \quad (2.17)$$

a matriz de rigidez do elemento e

$$\{F\} = \int_V [B]^T [C] \{\epsilon_t\} dv + \int_{S_p} \{FI\}^T \{P\} ds \quad (2.18)$$

o vetor equivalente de carga nos pontos nodais.

Passando as equações (2.17) e (2.18) para o sistema de coordenadas global e por meio de uma adequada sobreposição das mesmas, para os diversos elementos consistentes da estrutura, chega-se ao sistema global de equações

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2.19)$$

Antes de resolver o sistema de equações (2.19), o mesmo deve ser modificado com a introdução das condições de contorno do problema.

A integração das equações (2.17) e (2.18) é feita numericamente. O procedimento adotado está descrito no Capítulo 3.

Depois de solucionado o sistema de equações (2.19), os deslocamentos de todos os pontos nodais são conhecidos. Para se determinar as tensões em um ponto qualquer do elemento são usadas as equações

$$\{\sigma\} = [C][B]\{U\} - [C]\{\epsilon_t\} \quad (2.20)$$

Uma vez que a matriz tensão $[BTC] = [B]^T * [C]$ e o vetor de tensão térmica $\{C\epsilon_t\} = [C] * \{\epsilon_t\}$ para cada ponto de interesse são armazenados pelo programa, se torna fácil a obtenção das tensões em (2.20).

CAPÍTULO 3

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

3.1. Introdução

Neste capítulo é apresentado um procedimento para a integração numérica da matriz de rigidez e do vetor força do elemento de maneira prática e econômica tendo em vista as peculiaridades da presente formulação. O processo aqui apresentado tira proveito da simetria existente no modelo em relação às direções meridional e circunferencial.

Para melhor situar o problema de cálculo da matriz de rigidez, é mostrado a seguir um fluxograma simplificado dando assim o posicionamento dos cálculos que devem ser efetuados inicialmente (Fig. 3.1). A sequência representada neste fluxograma visa exclusivamente ao cálculo da matriz de rigidez do elemento (equação 2.17). O procedimento para o cálculo do vetor força (equação 2.18) é dado na Secção 3.3.

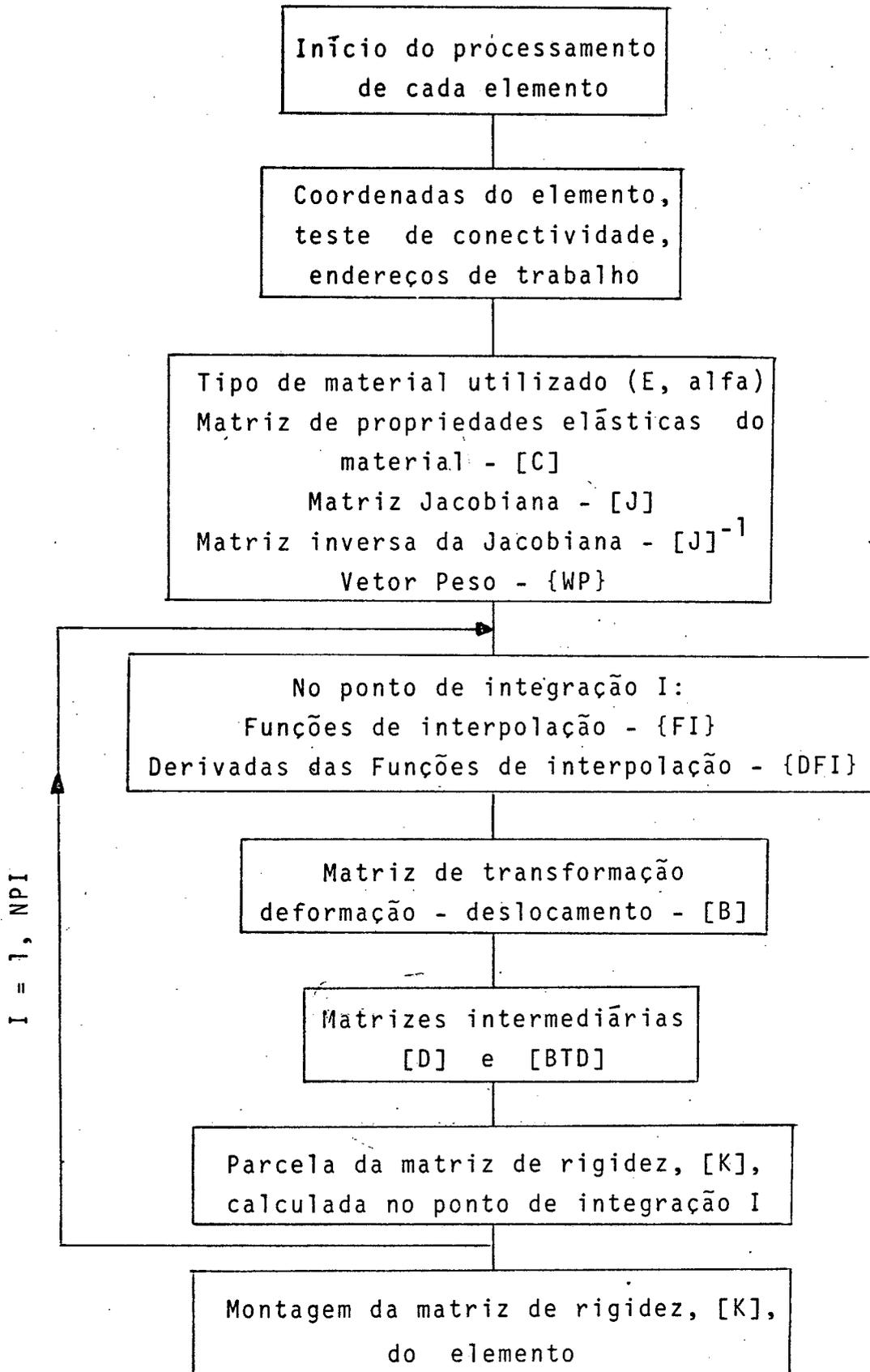


Figura 3.1. Fluxograma indicando os passos de cálculo para obtenção da matriz de rigidez de um elemento, conforme esquema simplificado do programa-teste (Apêndice C, Figura C.1); NPI=número de pontos de integração.

3.2. Detalhamento de cada passo indicado no fluxograma da Figura 3.1.

- Matriz de propriedades elásticas do material -
[C]:

O cálculo de [C] leva em conta a isotropia do material fazendo com que sejam calculadas um número mínimo de valores, ou seja, entre os 12 valores diferentes de zero (equação 2.14) apenas 3 são calculados e repetidos convenientemente.

- Matriz Jacobiana - [J]:

É calculada explicitamente através de ΔR , $\Delta \psi$, $\Delta \theta$,
ou seja:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta R}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta \psi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta \theta}{2} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

O determinante jacobiano é dado por:

$$|J| = \det[J] = \frac{1}{8} (\Delta R * \Delta \psi * \Delta \theta) \quad (3.2)$$

- Vetor Peso - {WP}:

Para calcular o Vetor Peso, {WP}, é levado em conta a simetria existente no modelo em relação às direções meridional e circunferencial e também aquela advinda do emprego dos pesos e abscissas fornecidas pelo processo de integração Gauss-Legendre [21]. Todos esses fatores são reunidos em uma forma final obtendo economia satisfatória em multiplicações e somas, uma vez que os cálculos repetitivos são eliminados tanto quanto possível.

O número de pontos de integração em cada direção é dado de uma forma codificada como IIJJKK onde II é o número de pontos de integração na direção radial, r , (Fig. 3.2), JJ é o número de pontos de integração na direção meridional, s , e KK é o número de pontos de integração na direção circunferencial, t .

Para facilitar a visualização do processo adotado na montagem do Vetor Peso, {WP}, o mesmo é demonstrado aqui para o caso particular em que se tem 3 pontos de integração em cada direção, ou seja, IIJJKK = 030303.

A suposição básica inicial é que o elemento esférico (Fig. 3.2a) seja mapeado em um cubo de lado dois por meio de uma transformação de coordenadas do sistema esférico para o sistema de coordenadas intrínseco. Para este exemplo o cubo é seccionado por três planos paralelos entre si e perpendiculares à direção r , conforme a Fig. 3.2b. Estes planos são o lugar geométrico dos pontos de integração que guardam uma relação de simetria entre si.

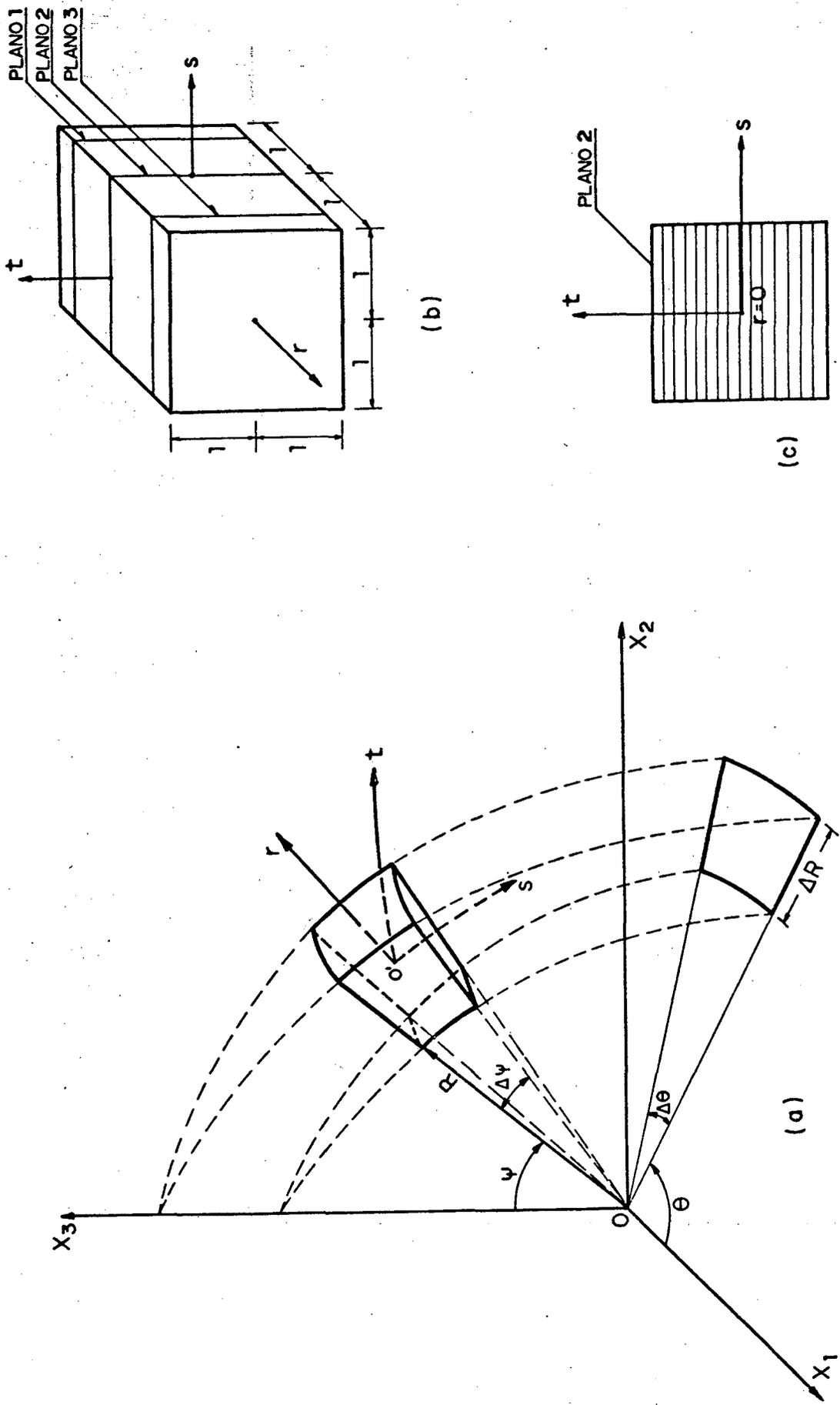


Figura 3.2. (a) Elemento de sólido esférico; (b) mapeado no cubo de lado dois para efeito de integração numérica; (c) representação esquemática do plano 2; $(r, s, t) = \text{coord. intrínseca}$.

A colocação dos números sequenciais dos pontos de integração nos planos está na Fig. 3.3.

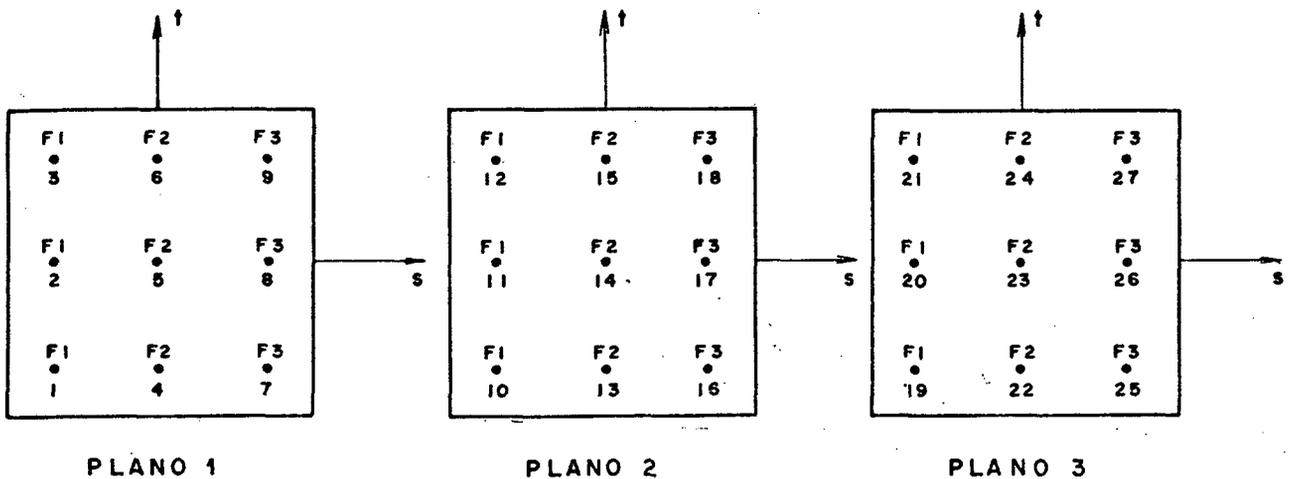


Figura 3.3. Planos lugar geométrico dos pontos de integração para $IIJJKK = 030303$

A sequência de integração adotada vai de 010101 a 030303 onde os pontos representados nos planos (Fig. 3.3) tem a seguinte correspondência:

- Ponto 1 (do plano 1) corresponde a $IIJJKK = 010101$
- Ponto 2 (do plano 1) corresponde a $IIJJKK = 010102$
-
-
-
- Ponto 27 (do plano 3) corresponde a $IIJJKK = 030303$

Os pesos de integração de Gauss-Legendre nas direções r, s, t são, respectivamente, A_i, B_j, C_k e as abcissas X_i, Y_j, Z_k [21].

Com relação aos pesos nota-se que $A_i = B_j = C_k$,

ou seja:

$$A_1 = B_1 = C_1$$

$$A_2 = B_2 = C_2$$

$$A_3 = B_3 = C_3$$

E além disto, para este exemplo explicativo, tem-se: $A_1 = A_3$; $B_1 = B_3$; $C_1 = C_3$.

O mesmo procedimento é feito para as abcissas X_i , Y_i , Z_i . A economia em operações de multiplicação já se faz notar a partir dos produtos dos pesos A_i , B_j , C_k em que quatro valores são suficientes para cobrir os 27 pontos de integração deste exemplo:

$$W_1 = A_1 * A_1 * A_1$$

$$W_2 = A_1 * A_1 * A_2$$

$$W_3 = A_1 * A_2 * A_2$$

$$W_4 = A_2 * A_2 * A_2$$

O fato de todos os pontos de um mesmo plano (Fig. 3.3) terem um mesmo raio é levado em conta. Nota-se também que existem apenas 3 valores de ângulos na direção meridional (ψ) os quais cobrem todos os pontos de integração e que estão representados por F_1 , F_2 , F_3 na Fig. 3.3.

O Vetor Peso, {WP}, é montado com a contribuição das seguintes parcelas:

- pesos de integração de Gauss-Legendre.
- abcissas dos pontos de integração de Gauss-Legendre.
- raio do ponto de integração em relação ao sistema de coordenadas esférico.

- ângulo ψ da direção meridional em relação ao sistema de coordenadas esférico.
- determinante Jacobiano que fornece a relação de volumes entre o domínio de integração e o real.

Para o ponto de integração 1 (onde IIJJKK=010101)

tem-se:

$$WP(1) = (A_1 * B_1 * C_1) * (R_1 * R_1) * DET * SIN(\psi_1).$$

Colocando

$$W_1 = A_1 * B_1 * C_1, \text{ produto dos pesos de integração}$$

$$R_{11} = R_1 * R_1 * DET, \text{ raio do ponto de integração e o DET}$$

$$S_1 = SIN(\psi_1), \text{ seno do ângulo } \psi \text{ no ponto 1}$$

tem-se, finalmente,

$$WP(1) = W_1 * R_{11} * S_1$$

Obtêm-se economia em multiplicações também neste procedimento calculando separadamente as parcelas:

vetor W_j (quatro neste exemplo).

vetor XP_i = produto de W_j , raio, seno de ψ e DET (dezoito neste exemplo).

e repetindo convenientemente seus valores aproveitando a simetria geométrica e dos pontos de integração. Todo este procedimento está reunido na Tabela 3.1.

Tabela 3.1. Montagem do Vetor Peso, {WP}, para IIJJKK = 030303 pontos de integração.

Pontos de integração PI_j	Pesos de Integração de Gauss-Legendre			Vetor W_j	Vetor XP_i	Vetor Peso $WP(j)$
	R,r	ψ,s	θ,t			
010101	A ₁	B ₁	C ₁	W ₁	XP ₁	WP(1)
010102	A ₁	B ₁	C ₂	W ₂	XP ₂	WP(2)
010103	A ₁	B ₁	C ₃	W ₁	XP ₁	WP(3)
010201	A ₁	B ₂	C ₁	W ₂	XP ₃	WP(4)
010202	A ₁	B ₂	C ₂	W ₃	XP ₄	WP(5)
010203	A ₁	B ₂	C ₃	W ₂	XP ₃	WP(6)
010301	A ₁	B ₃	C ₁	W ₁	XP ₅	WP(7)
010302	A ₁	B ₃	C ₂	W ₂	XP ₆	WP(8)
010303	A ₁	B ₃	C ₃	W ₁	XP ₅	WP(9)
020101	A ₂	B ₁	C ₁	W ₂	XP ₇	WP(10)
020102	A ₂	B ₁	C ₂	W ₃	XP ₈	WP(11)
020103	A ₂	B ₁	C ₃	W ₂	XP ₇	WP(12)
020201	A ₂	B ₂	C ₁	W ₃	XP ₉	WP(13)
020202	A ₂	B ₂	C ₂	W ₄	XP ₁₀	WP(14)
020203	A ₂	B ₂	C ₃	W ₃	XP ₉	WP(15)
020301	A ₂	B ₃	C ₁	W ₂	XP ₁₁	WP(16)
020302	A ₂	B ₃	C ₂	W ₃	XP ₁₂	WP(17)
020303	A ₂	B ₃	C ₃	W ₂	XP ₁₁	WP(18)
030101	A ₃	B ₁	C ₁	W ₁	XP ₁₃	WP(19)
030102	A ₃	B ₁	C ₂	W ₂	XP ₁₄	WP(20)
030103	A ₃	B ₁	C ₃	W ₁	XP ₁₃	WP(21)
030201	A ₃	B ₂	C ₁	W ₂	XP ₁₅	WP(22)
030202	A ₃	B ₂	C ₂	W ₃	XP ₁₆	WP(23)
030203	A ₃	B ₂	C ₃	W ₂	XP ₁₅	WP(24)
030301	A ₃	B ₃	C ₁	W ₁	XP ₁₇	WP(25)
030302	A ₃	B ₃	C ₂	W ₂	XP ₁₈	WP(26)
030303	A ₃	B ₃	C ₃	W ₁	XP ₁₇	WP(27)

Os valores para a montagem da Tabela 3.1 são os seguintes:

$$A_1 = B_1 = C_1 = 0,555\ 555\ 555\ 555\ 556$$

$$A_2 = B_2 = C_2 = 0,888\ 888\ 888\ 888889$$

$$A_3 = B_3 = C_3 = A_1$$

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = -0,774596669241483$$

$$X_2 = Y_2 = Z_2 = 0,0$$

$$X_3 = Y_3 = Z_3 = -X_1$$

e os cálculos são:

$$W_1 = A_1 * B_1 * C_1$$

$$W_2 = A_1 * B_1 * C_2$$

$$W_3 = A_1 * B_2 * C_2$$

$$W_4 = A_2 * B_2 * C_2$$

$$R_1 = RM + DR_2 * X_1$$

$$R_2 = RM$$

$$R_3 = RM + DR_2 * X_3$$

$$F_1 = FHI + DFHI * X_1 / 2$$

$$F_2 = FHI$$

$$F_3 = FHI + DHFI * X_3 / 2$$

$$S_1 = \sin(F_1)$$

$$S_2 = \sin(F_2)$$

$$S_3 = \sin(F_3)$$

$$R_{11} = R_1 * R_1 * \text{DET}$$

$$R_{22} = R_2 * R_2 * \text{DET}$$

$$R_{33} = R_3 * R_3 * \text{DET}$$

$$XP_1 = R_{11} * W_1 * S_1$$

$$XP_2 = R_{11} * W_2 * S_1$$

$$XP_3 = R_{11} * W_2 * S_2$$

$$XP_4 = R_{11} * W_3 * S_2$$

$$XP_5 = R_{11} * W_1 * S_3$$

$$XP_6 = R_{11} * W_2 * S_3$$

$$XP_7 = R_{22} * W_2 * S_1$$

$$XP_8 = R_{22} * W_3 * S_1$$

$$XP_9 = R_{22} * W_3 * S_2$$

$$XP_{10} = R_{22} * W_4 * S_2$$

$$XP_{11} = R_{22} * W_2 * S_3$$

$$XP_{12} = R_{22} * W_3 * S_3$$

$$XP_{13} = R_{33} * W_1 * S_1$$

$$XP_{14} = R_{33} * W_2 * S_1$$

$$XP_{15} = R_{33} * W_2 * S_2$$

$$XP_{16} = R_{33} * W_3 * S_2$$

$$XP_{17} = R_{33} * W_1 * S_3$$

$$XP_{18} = R_{33} * W_2 * S_3$$

$$WP(1) = XP_1$$

$$\vdots$$

$$WP(26) = XP_{18}$$

$$WP(27) = XP_{17}$$

Nas expressões acima, tem-se

RM = raio médio do elemento de sólido esférico

DR₂ = ΔR/2

FHI = ângulo ψ do centro do elemento de sólido esférico

DFHI = Δψ

Todos os cálculos acima são realizados em dupla precisão.

Várias combinações entre pontos de integração de seáveis para estudar a influência destes no cálculo da matriz de rigidez estão no Apêndice A, juntamente com outras tabelas para montagem de {WP}.

- Matriz inversa da Jacobiana - [J]⁻¹:

Calculada de forma explícita através de ΔR, Δψ, Δθ, ou seja:

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} 2/\Delta R & 0 & 0 \\ 0 & 2/\Delta \psi & 0 \\ 0 & 0 & 2/\Delta \theta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

- Cálculo de [D]:

Faz-se o produto de [C] pelo valor correspondente do Vetor Peso no ponto i, ou seja:

$$[D] = [C] * WP(i) \quad (3.4)$$

O valor de [BTD] é dado pelo produto de $[B]^T$ e [D], ou seja:

$$[BTD] = [B]^T * [D] \quad (3.5)$$

A matriz de rigidez é dada pela sobreposição conveniente dos produtos de [BTD] e [B] em cada ponto de integração, ou seja:

$$[K] = \Sigma ([BTD] * [B]) \quad (3.6)$$

3.3. Vetor equivalente de carga nos pontos nodais (eq. 2.18)

O vetor de cargas nodais pode ser proveniente de três tipos de carregamento: mecânico distribuído, concentrado ou térmico.

3.3.1. *Carregamento mecânico distribuído e concentrado*

O carregamento mecânico distribuído obedece a um procedimento especial que está delineado na Referência 4 e reproduzido no Apêndice D. No entanto, deve ser chamada a atenção para o fato de que o carregamento é fornecido no sistema esférico (global) não necessitando, portanto, das transformações de coordenadas ali previstas. Modificações apropriadas foram efetuadas na subrotina que trata desta parte. Além disto, a intro

dução do cálculo do Jacobiano de forma explícita, bem como das coordenadas esféricas do ponto de integração, trazem economia adicional no tempo de processamento.

A carga nodal concentrada, quando houver, deve ser somada diretamente no vetor resultante de cargas nodais.

3.3.2. Carregamento térmico

É processado por ponto de integração, paralelamente à determinação da matriz de rigidez, por ser decorrente da integração sobre o volume do elemento. Calcula-se, via funções de interpolação, a temperatura local instantânea (TP) no ponto de integração. Para uma dada temperatura de referência, $T_{ref.II}$, calcula-se o vetor deformação térmica, $\{\epsilon_t\}$:

$$\{\epsilon_t\}^T = \{\alpha TD, \alpha TD, \alpha TD, 0, 0, 0\} \quad (3.7)$$

onde: $TD = TP - T_{ref.II}$ e α é o coeficiente de expansão térmica do material.

O vetor tensão térmica local é então determinado pelo produto da matriz de propriedades elásticas do material, $[C]$, e o vetor deformação térmica:

$$\{C\epsilon_t\} = [C] * \{\epsilon_t\} \quad (3.8)$$

Por último, o vetor força térmica é calculado pelo produto da "matriz tensão" e o vetor deformação térmica:

$$\{F_t\} = [BTD] * \{\epsilon_t\} \quad (3.9)$$

Uma sobreposição conveniente é feita até completar todos os pontos de integração em questão.

No procedimento computacional todos os resultados descritos acima são calculados e armazenados em disco para uso posterior.

3.4. Estimativa do número de somas e multiplicações para o cálculo da matriz de rigidez do elemento proposto

São dadas a seguir duas tabelas que mostram uma estimativa do número de operações requeridas para avaliação da matriz de rigidez de um elemento tri-dimensional utilizando o procedimento convencional e o aqui proposto. Na Referência 1 se encontra um estudo detalhado a esse respeito.

Tabela 3.2. Operações requeridas para avaliação da matriz de rigidez, elemento tri-dimensional (procedimento convencional), conforme Referência 1.

Passos na Computação	Nº Adições	Nº Multiplicações
1. Para cada ponto de integração		
a) Produto de coef. de peso e matriz C de propriedade do material		6x6
b) Obtenção do produto CB	6x6x3N	6x6x3N
c) Obtenção $B^T CB$ (porção triangular superior, somente)	$\frac{1}{2}[6x3N(3N+1)]$	$\frac{1}{2}[6x3N(3N+1)]$
Total para o passo 1	$27N^2 + 117N$	$27N^2 + 117N + 36$
2. Repetindo as operações no passo 1 para NPI pontos de integração	$(27N^2 + 117N)NPI$	$(27N^2 + 117N + 36)NPI$
3. Soma superior dos elementos individuais da matriz de rigidez avaliada em NPI pontos de integração	$\frac{1}{2}[3N(3N+1)]NPI$	
4. Nº total de operações para obter a matriz de rigidez do elemento (passos 2 e 3)	$\frac{1}{2}(63N^2 + 237N)NPI$	$(27N^2 + 117N + 36)NPI$

N = número de nós do elemento

NPI = nº de pontos de integração no elemento

Tabela 3.3. Operações requeridas para avaliação da matriz de rigidez do elemento proposto.

PROCEDIMENTO	Nº ADIÇÕES	Nº MULTIPLICAÇÕES
1. Para cada ponto de integração		
a) Obtenção de $[D] = [C] * WP(i)$		3
b) Obtenção de $[BTD] = [B]^T * [D]$	18N	36N
c) Obtenção de $[K] = [BTD] * [B]$ (parte triangular inferior)	$2,5(9N^2 + 3N)$	$3(9N^2 + 3N)$
2. Total para o passo 1	$22,5N^2 + 25,5N$	$27N^2 + 45N + 3$
3. Total para NPI pontos de integração	$(22,5N^2 + 25,5N)NPI$	$(27N^2 + 45N + 3)NPI$
4. Soma dos elementos da matriz de rigidez (parte triangular inferior)	$91,5N(NPI-1)$	
5. Número total de operações para obtenção da matriz de rigidez (passos 3 e 4)	$(22,5N^2 + 117N)NPI - 91,5N$	$(27N^2 + 45N + 3)NPI$
6. Economia em operações em relação ao procedimento convencional (Tab. 3.2)	25%	11%

N = número de nós do elemento

NPI = nº de pontos de integração no elemento

C A P Í T U L O 4

EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1. Introdução

A formulação apresentada nos Capítulos 2 e 3 é testada através da solução de problemas com geometria típica para aplicação do elemento de sólido esférico. Os resultados então são comparados com soluções analíticas e/ou numéricas encontradas na literatura a fim de comprovar a precisão da formulação proposta. Alguns exemplos são apresentados a seguir.

4.2. Primeiro exemplo: solução do problema de uma esfera oca submetida a um carregamento mecânico distribuído devido à pressão uniforme

4.2.1. *Utilizando a modelagem padrão de teste*

A modelagem padrão de teste encontra-se representada na Fig. 4.1 e tem como característica principal o fato de utilizar apenas um elemento. Esta modelagem aproveita a dupla simetria existente na estrutura, tanto geométrica quanto de carregamento.

O material adotado para este e os demais exemplos é o aço baixo carbono com módulo de elasticidade $E=192190\text{MPa}$,

coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, na temperatura de 30°C a qual se convencionou chamar de temperatura de referência I ($T_{\text{ref.I}}$).

A solução analítica deste problema se encontra na literatura, e.g., [19] onde é fornecida a tensão radial, tensão tangencial e o deslocamento radial. As distribuições destas são as seguintes:

$$\sigma_R = \frac{P_e b^3 (R^3 - a^3)}{R^3 (a^3 - b^3)} + \frac{P_i a^3 (b^3 - R^3)}{R^3 (a^3 - b^3)} \quad (4.1)$$

$$\sigma_\psi = \sigma_\theta = \frac{P_e b^3 (2R^3 + a^3)}{2R^3 (a^3 - b^3)} - \frac{P_i a^3 (2R^3 + b^3)}{2R^3 (a^3 - b^3)} \quad (4.2)$$

$$\epsilon_\psi = \frac{1}{E} [(1-\nu) \sigma_\psi - \nu \sigma_R] = \frac{u}{R} \quad \text{donde}$$

$$u = \frac{R}{E} [(1-\nu) \sigma_\psi - \nu \sigma_R] \quad (4.3)$$

onde P_e e P_i são as pressões externa e interna respectivamente.

Para a solução numérica deste problema o mesmo é dividido em duas etapas: na primeira é considerado apenas a pressão interna uniforme e na outra somente a pressão externa uniforme. Os dados comuns são os seguintes:

$$\text{Pressão} = 1,0 \text{ MPa}$$

$$a = 1,0 \text{ m}$$

$$b = 2,0 \text{ m}$$

$$\Delta\psi = \Delta\theta = \pi/12 \text{ rad}$$

As condições de contorno são:

$$u = u(R) \quad v = 0,0 \quad w = 0,0$$

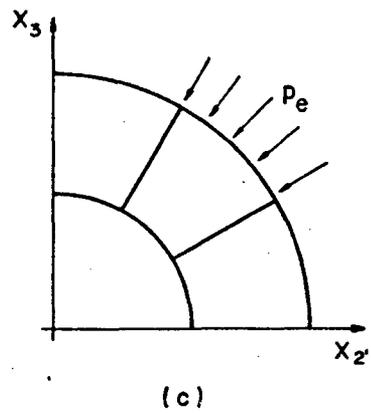
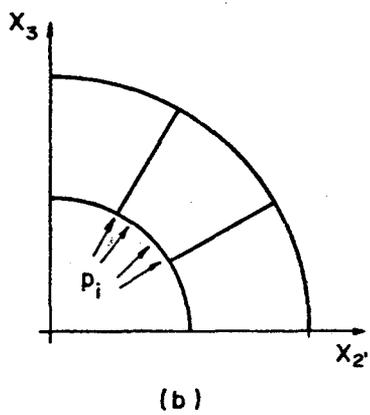
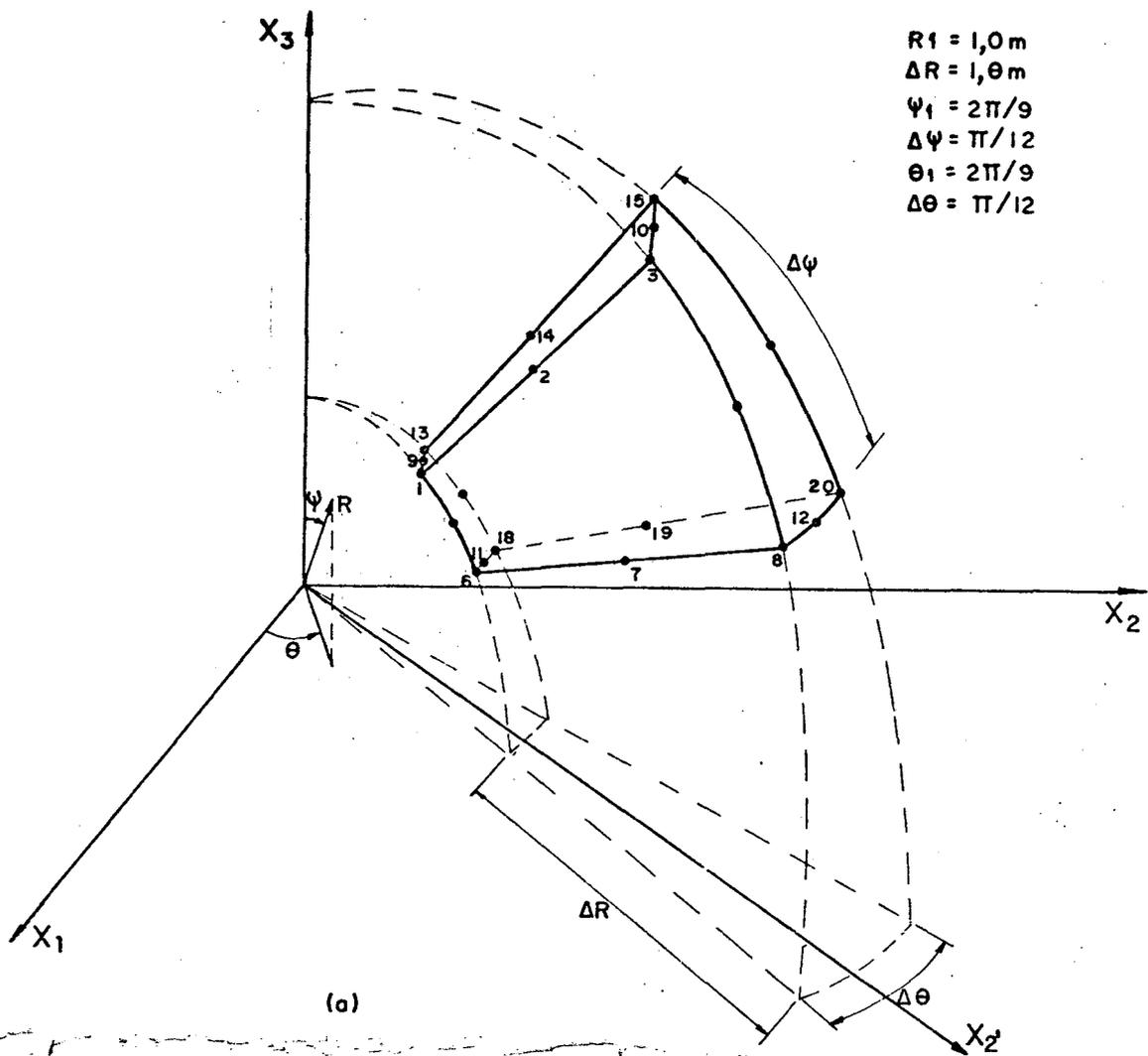


Figura 4.1. (a) Modelagem padrão de teste. Tipos de carregamento: (b) Pressão interna; (c) Pressão externa.

Os resultados mostrados nas Tabelas 4.1 a 4.4 e nas Figuras 4.2 a 4.5 servem para verificar a convergência da solução à medida que se altera o número de pontos de integração para o cálculo da matriz de rigidez. Deve-se salientar que a quantidade de pontos de integração nas direções radial, meridional e circunferencial, respectivamente, para o cálculo da matriz de rigidez está identificada na 1ª linha das Tabelas. Para efetuar a integração do vetor de força superficial acrescenta-se a estes uma unidade em cada direção. Todos os cálculos para este exemplo, bem como para os demais, foram realizados em precisão dupla. Tanto os deslocamentos como as tensões para este e os demais exemplos foram calculados nos pontos nodais da modelagem (os quais coincidem com os raios indicados nas tabelas e gráficos).

Tabela 4.1. Deslocamento radial ($u \times 10^5$ m). Pressão interna. Modelagem padrão de teste.

RAIO (m)	NÚMERO DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO (NPI)					SOLUÇÃO ANALÍTICA
	020202	030303	040202	040402	040404	
1,000	0,221278	0,399646	0,399632	0,399646	0,399646	0,416255
1,500	0,133785	0,213548	0,213544	0,213548	0,213548	0,216386
2,000	0,099687	0,151942	0,151950	0,151942	0,151942	0,156095

Tabela 4.2. Tensões resultantes (MPa). Pressão interna. Modelagem padrão de teste.

TENSÃO (MPa)	RAIO (m)	NÚMERO DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO					SOLUÇÃO ANALÍTICA
		020202	030303	040202	040402	040404	
σ_R	1,000	-0,100	-0,399	-0,399	-0,399	-0,399	-1,000
	1,500	-0,117	-0,325	-0,325	-0,325	-0,325	-0,196
	2,000	0,072	0,172	0,172	0,172	0,172	0,000
$\sigma_\psi = \sigma_\theta$	1,000	0,565	0,926	0,926	0,926	0,926	0,714
	1,500	0,195	0,252	0,252	0,252	0,252	0,312
	2,000	0,168	0,282	0,282	0,282	0,282	0,214

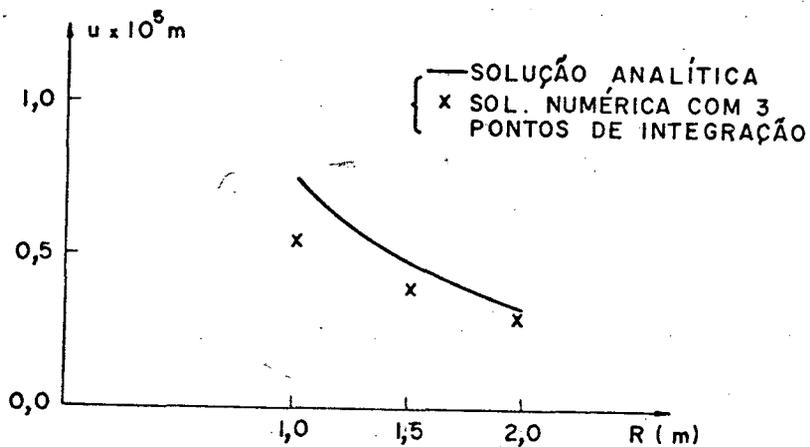
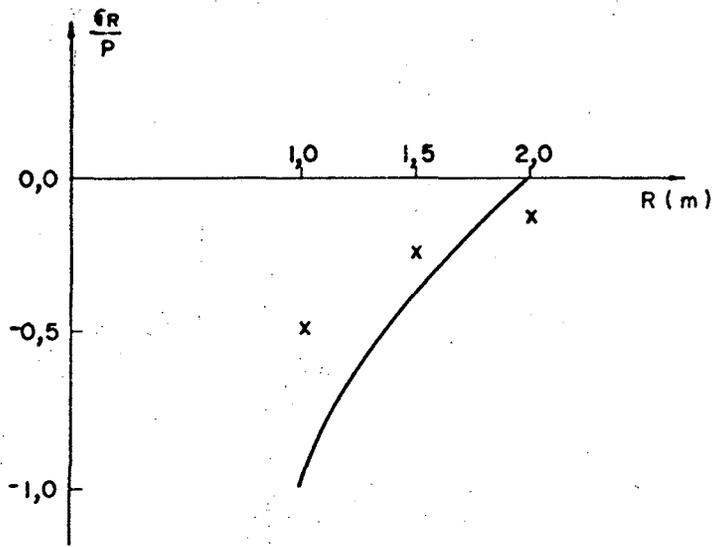
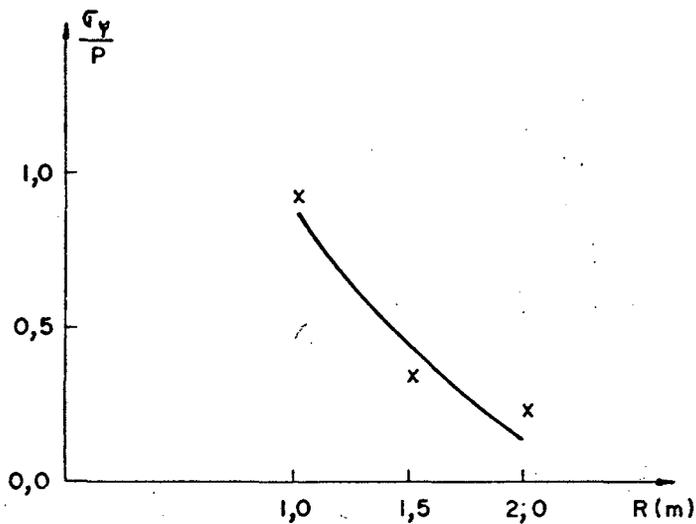


Figura 4.2. Deslocamento radial (u). Pressão interna. Modelagem padrão de teste.



(a)

— SOLUÇÃO ANALÍTICA
 x 3 PONTOS DE INTEGRAÇÃO



(b)

Figura 4.3. Tensões resultantes: (a) radiais; (b) tangenciais.
 Pressão interna. Modelagem padrão de teste.

Tabela 4.3. Deslocamento radial ($u \times 10^5$ m). Pressão externa. Modelagem padrão de teste.

RAIO (m)	NÚMERO DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO (NPI)					SOLUÇÃO ANALÍTICA
	020202	030303	040202	040303	040404	
1,000	-0,398640	-0,607767	-0,607801	-0,613442	-0,607766	-0,624381
1,500	-0,377778	-0,525731	-0,525715	-0,531614	-0,525731	-0,528577
2,000	-0,647894	-0,568186	-0,568128	-0,575999	-0,568186	-0,572350

Tabela 4.4. Tensões resultantes (MPa). Pressão externa. Modelagem padrão de teste.

TENSÃO (MPa)	RAIO (m)	NÚMERO DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO					SOLUÇÃO ANALÍTICA
		020202	030303	040202	040303	040404	
σ_R	1,000	-0,023	-0,601	-0,601	-0,610	-0,601	0,000
	1,500	-1,203	-0,675	-0,675	-0,689	-0,675	-0,804
	2,000	-2,869	-1,172	-1,172	-1,195	-1,172	-1,000
$\sigma_\psi = \sigma_\theta$	1,000	-1,104	-1,926	-1,926	-1,946	-1,926	-1,710
	1,500	-1,207	-1,252	-1,251	-1,268	-1,252	-1,310
	2,000	-2,119	-1,282	-1,282	-1,303	-1,282	-1,210

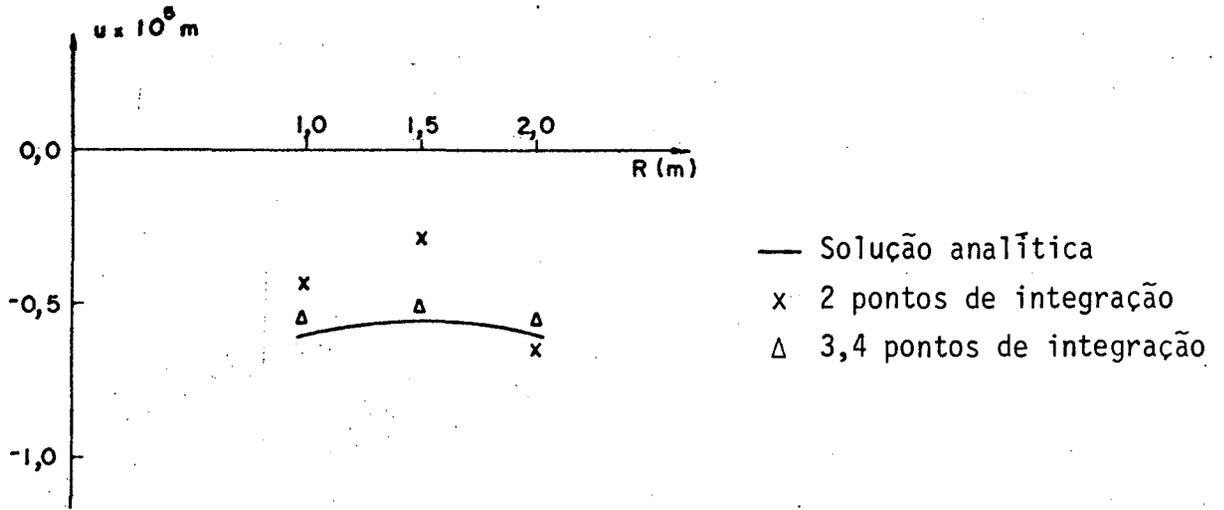


Figura 4.4. Deslocamento radial ($u \times 10^5 \text{ m}$). Pressão externa. Modelagem padrão de teste.

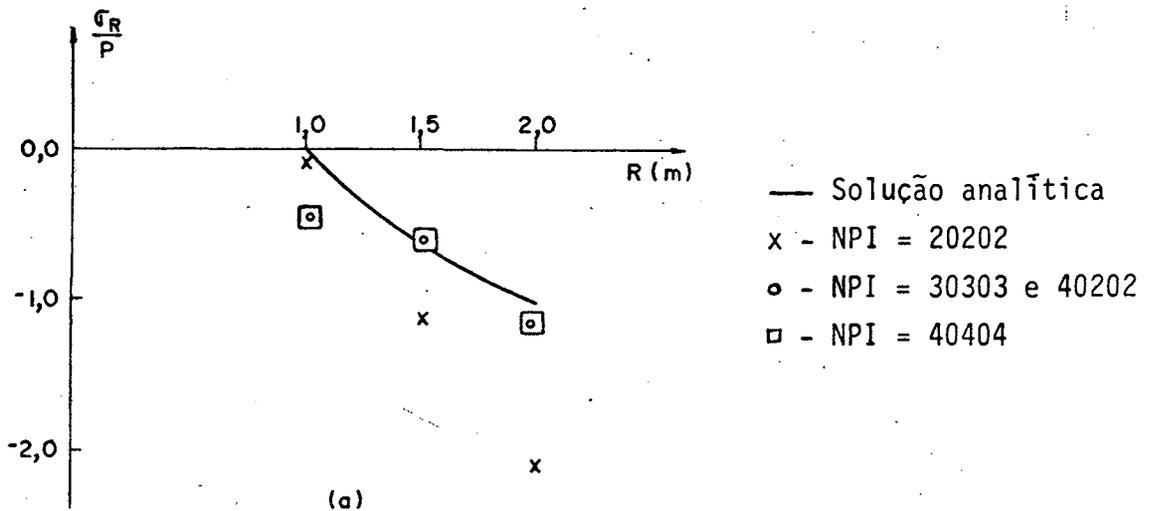


Figura 4.5a. Tensões radiais na modelagem padrão de teste devido à pressão externa.

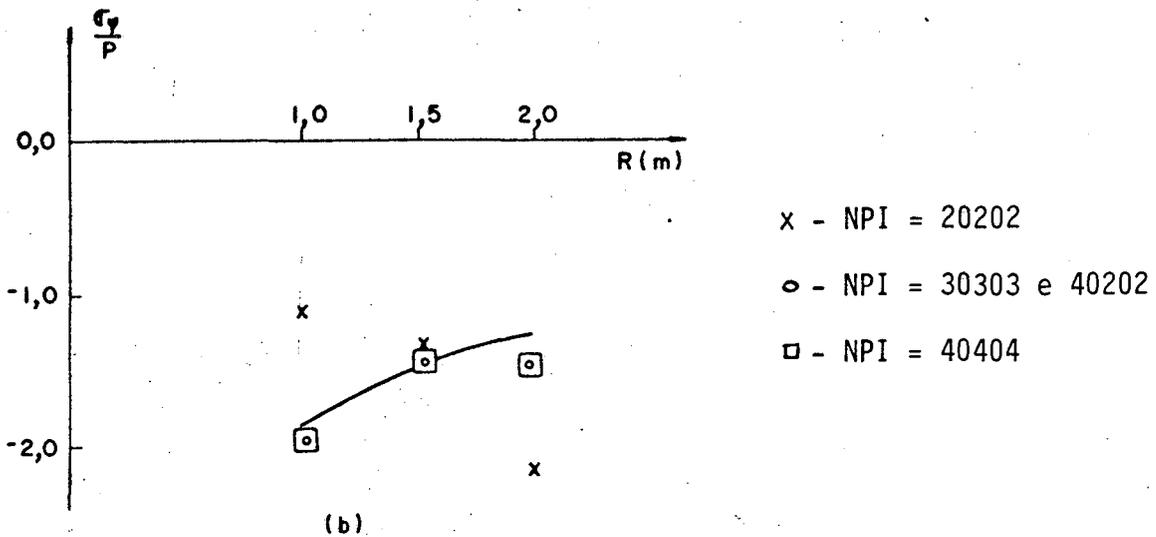


Figura 4.5b. Tensões tangenciais na modelagem padrão de teste devido à pressão externa.

Analisando os resultados obtidos, constata-se que a solução utilizando 2 pontos de integração causa um elevado erro para os dois casos de pressão interna ou externa. As soluções utilizando 040402, 040404, 040303 dão a mesma precisão de solução que com 030303 pontos, porém aquelas consomem mais tempo de máquina do que esta. A solução alternativa é a de 040202 pontos de integração a qual utilizando apenas 16 pontos reproduz valores de mesmo grau de precisão que a de 030303 pontos (ou seja 27 pontos de integração no total), porém consumindo menos tempo de processamento dos dados.

4.2.2. Utilizando uma fatia da esfera no 1º quadrante

A Fig. 4.6a.b. mostra a fatia de esfera com 1 e 6

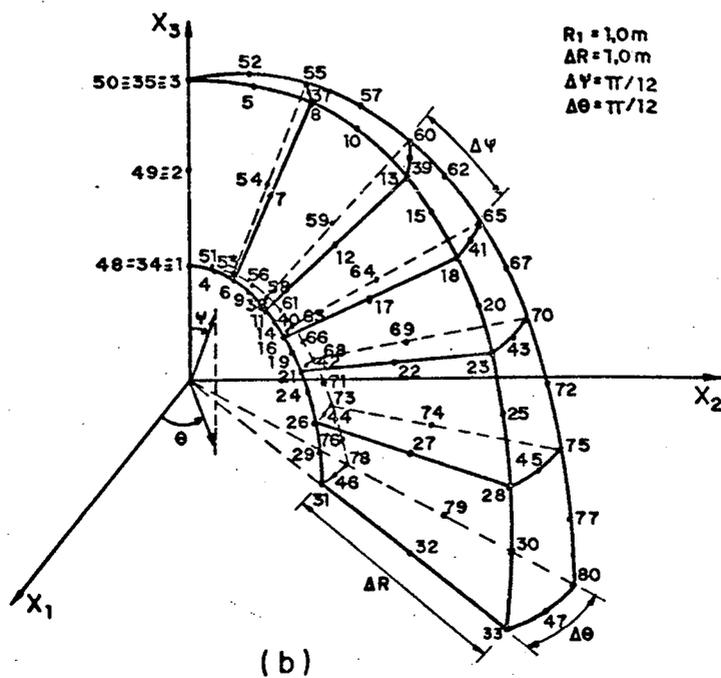
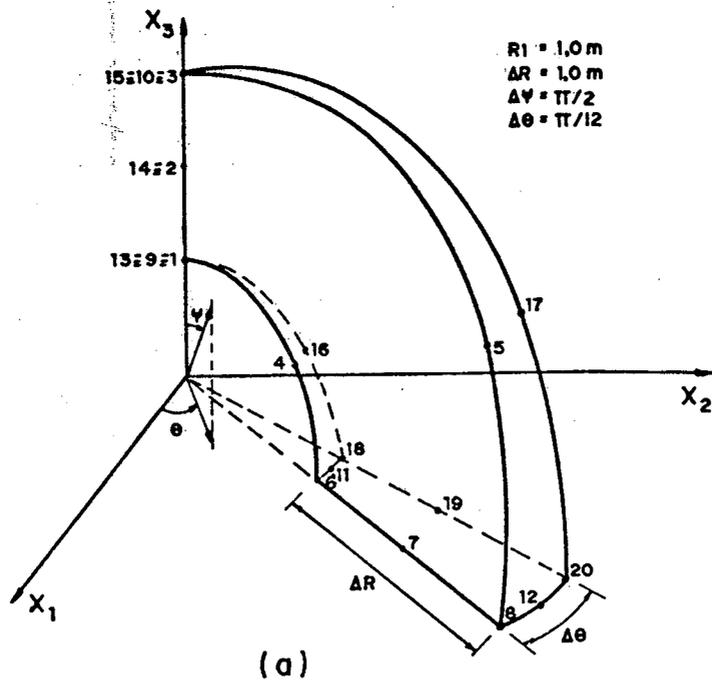


Figura 4.6. (a) Fatia de esfera com 1 elemento em cada direção (1R1F1T); (b) Fatia de esfera com 1 elemento na direção radial, 6 elementos na direção meridional e 1 elemento na direção circunferencial (1R6F1T).

elementos. Além desta são calculados os valores para 2 e 4 elementos. Os carregamentos são os mesmos aplicados no caso anterior e a solução analítica é dada pelas equações 4.1 a 4.3. O material utilizado é o mesmo. As condições de contorno são também idênticas, ou seja:

$$u = u(R)$$

$$v = 0,0$$

$$w = 0,0$$

Devido à simetria de carregamento, sabe-se que bons resultados podem ser obtidos usando poucos elementos na modelagem da esfera. A solução do problema proposto tem por objetivo verificar a influência do número de elementos na modelagem. Quanto menor o número de elementos, menor será o volume de dados de entrada e de processamento obtendo assim economia de espaço e de tempo de máquina.

Nas Tabelas 4.5 a 4.7 estão os resultados para o carregamento mecânico distribuído devido à pressão interna uniforme ou externa.

Uma análise dos resultados mostra que a utilização de mais de um elemento na direção meridional é totalmente desnecessária para o tipo de carregamento proposto.

Com a finalidade de melhorar a convergência dos resultados obtidos acima, foi resolvido novamente o problema considerando um refino da malha na direção radial também. Foram testadas 4 malhas, todas com 2 elementos na direção radial e 1, 2, 4 e 6 elementos na direção meridional. Como pode ser

Tabela 4.5. Deslocamento radial ($u \times 10^5$ m). Três pontos de integração em cada direção. Modelagem da Fig. 4.6.

CARREGAMENTO	RAIO (m)	M A L H A S				SOLUÇÃO ANALÍTICA
		1x1x1	1x2x1	1x4x1	1x6x1	
PRESSÃO INTERNA (1,0 MPa)	1,000	0,400008	0,399653	0,399646	0,399646	0,416255
	1,500	0,213737	0,213551	0,213548	0,213548	0,216386
	2,000	0,151932	0,151939	0,151942	0,151942	0,156095
PRESSÃO EXTERNA (1,0 MPa)	1,000	-0,607719	-0,607766	-0,607766	-0,722939	-0,624381
	1,500	-0,526263	-0,525731	-0,525731	-0,619593	-0,528577
	2,000	-0,569261	-0,568186	-0,568186	-0,643984	-0,572350

Tabela 4.6. Tensões resultantes devido à pressão interna aplicada na modelagem da Fig. 4.6. utilizando 3 pontos de integração.

TENSÃO	RAIO	M A L H A S				SOLUÇÃO ANALÍTICA
		1x1x1	1x2x1	1x4x1	1x6x1	
σ_R	1,000	-0,399	-0,399	-0,399	-0,399	-1,000
	1,500	-0,325	-0,325	-0,325	-0,325	-0,196
	2,000	0,171	0,172	0,172	0,172	0,000
$\sigma_\psi = \sigma_\theta$	1,000	0,927	0,926	0,926	0,926	0,714
	1,500	0,252	0,252	0,252	0,252	0,312
	2,000	0,282	0,282	0,282	0,282	0,214

Tabela 4.7. Tensões resultantes. Pressão externa. Três pontos de integração em cada direção. Fig. 4.6.

TENSÃO (MPa)	RAIO (m)	M A L H A S				SOLUÇÃO ANALÍTICA
		1x1x1	1x2x1	1x4x1	1x6x1	
σ_R	1,000	-0,604	-0,601	-0,601	-0,738	0,000
	1,500	-0,679	-0,674	-0,675	-0,712	-0,804
	2,000	-1,176	-1,172	-1,172	-1,170	-1,000
$\sigma_\psi = \sigma_\theta$	1,000	-1,928	-1,926	-1,926	-2,300	-1,710
	1,500	-1,254	-1,252	-1,252	-1,440	-1,310
	2,000	-1,285	-1,282	-1,282	-1,390	-1,210

visto através das Tabelas 4.8 a 4.10 houve uma melhora na convergência dos resultados, sendo que a malha com o menor número de elementos (2R1F1T) está com resultados tão bons quanto os demais.

Tabela 4.8. Deslocamento radial ($u \times 10^5$ m). Três pontos de integração em cada direção. Modelagens 2R1F1T a 2R6F1T.

CARREGAMENTO	RAIO (m)	M A L H A S				SOLUÇÃO ANALÍTICA
		2x1x1	2x2x1	2x4x1	2x6x1	
PRESSÃO INTERNA (1,0 MPa)	1,000	0,414309	0,414318	0,414307	0,414307	0,416255
	1,250	0,284237	0,284241	0,284236	0,284236	0,284540
	1,500	0,215652	0,215650	0,215651	0,215651	0,216386
	1,750	0,177777	0,177776	0,177776	0,177776	0,178243
	2,000	0,155607	0,155606	0,155607	0,155607	0,156095
PRESSÃO EXTERNA (1,0 MPa)	1,000	-0,622428	-0,622428	-0,622428	-0,622428	-0,624381
	1,250	-0,544388	-0,544387	-0,544387	-0,544387	-0,544698
	1,500	-0,527834	-0,527834	-0,527834	-0,527834	-0,528577
	1,750	-0,541990	-0,541990	-0,541990	-0,541990	-0,542466
	2,000	-0,571851	-0,571851	-0,571851	-0,571851	-0,572350

Tabela 4.9. Tensões resultantes. Três pontos de integração em cada direção. Pressão interna (1,0 MPa). Modelagens 2R1F1T a 2R6F1T.

TENSÃO	RAIO (m)	M A L H A S				SOLUÇÃO ANALÍTICA
		2x1x1	2x2x1	2x4x1	2x6x1	
σ_R (MPa)	1,000	-0,746	-0,746	-0,746	-0,746	-1,000
	1,250	-0,524	-0,524	-0,524	-0,524	-0,442
	1,500	-0,073	-0,073	-0,154	-0,154	-0,196
	1,750	0,005	0,005	-0,085	-0,085	-0,070
	2,000	0,082	0,082	0,024	0,024	0,000
$\sigma_\psi = \sigma_\theta$ (MPa)	1,000	0,818	0,818	0,818	0,818	0,714
	1,250	0,400	0,400	0,400	0,400	0,435
	1,500	0,363	0,363	0,329	0,329	0,312
	1,750	0,392	0,392	0,242	0,242	0,249
	2,000	0,320	0,320	0,224	0,224	0,214

Tabela 4.10. Tensões resultantes. Três pontos de integração. Pressão externa (1,0 MPa). Modelagens 2R1F1T a 2R6F1T.

TENSÃO	RAIO (m)	M A L H A S				SOLUÇÃO ANALÍTICA
		2x1x1	2x2x1	2x4x1	2x6x1	
σ_R (MPa)	1,000	-0,254	-0,254	-0,254	-0,254	0,000
	1,250	-0,476	-0,475	-0,476	-0,476	-0,558
	1,500	-0,927	-0,928	-0,927	-0,927	-0,804
	1,750	-1,190	-1,189	-0,915	-0,915	-0,930
	2,000	-1,240	-1,236	-1,020	-1,020	-1,000
$\sigma_\psi = \sigma_\theta$ (MPa)	1,000	-1,820	-1,818	-1,820	-1,820	-1,710
	1,250	-1,400	-1,400	-1,400	-1,400	-1,440
	1,500	-1,360	-1,364	-1,360	-1,360	-1,310
	1,750	-1,700	-1,700	-1,240	-1,240	-1,250
	2,000	-1,580	-1,576	-1,220	-1,220	-1,210

Se ao invés de 2 elementos na direção radial fo rem colocados 4 elementos tal como a modelagem 4R3F1T, Figura 4.7, os resultados são sensivelmente melhores para o problema proposto.

As tabelas 4.11 a 4.13 dão os resultados para o carregamento mecânico distribuído devido à pressão interna ou externa.

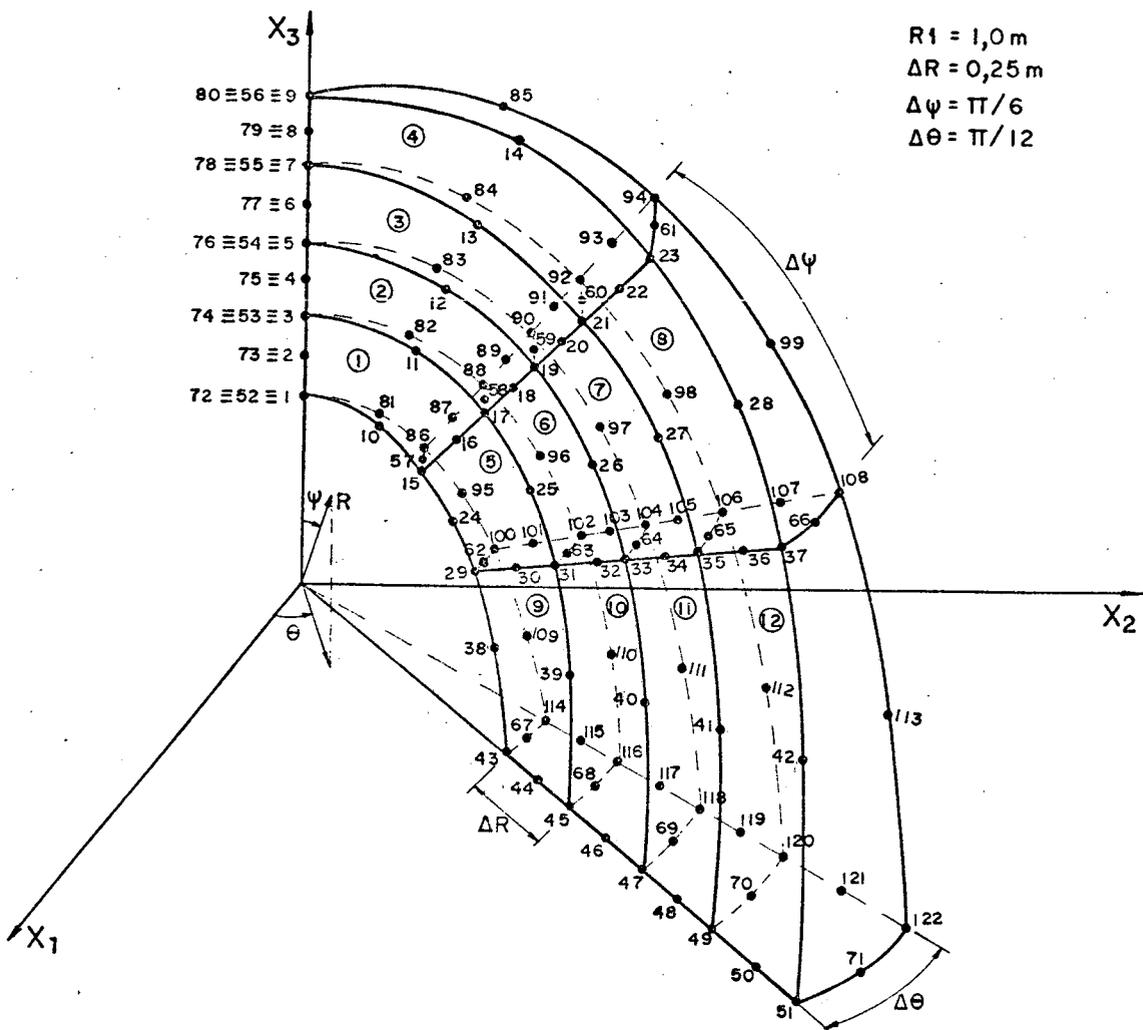


Figura 4.7. Fatia de esfera no 1º quadrante. Modelagem 4R3F1T.

Tabela 4.11. Deslocamento radial ($u \times 10^5$ m). Modelagem 4R3FIT.
Pressão interna e externa.

CARREGAMENTO	RAIO (m)	NÚMERO DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO				SOLUÇÃO ANALÍTICA
		20202	30303	40202	40403	
PRESSÃO INTERNA (1,0 MPa)	1,000	0,263972	0,416092	0,415330	0,416090	0,416255
	1,125	0,243912	0,338830	0,338412	0,338830	0,338849
	1,250	0,226038	0,284449	0,284477	0,284449	0,284540
	1,375	0,198157	0,245279	0,245306	0,245279	0,245323
	1,500	0,173630	0,216323	0,216337	0,216323	0,216386
	1,625	0,158817	0,194646	0,194658	0,194646	0,194690
	1,750	0,146076	0,178193	0,178204	0,178193	0,178243
	1,875	0,136394	0,165651	0,165661	0,165651	0,165692
	2,000	0,128342	0,156053	0,156062	0,156053	0,156095
PRESSÃO EXTERNA (1,0 MPa)	1,000	-0,512811	-0,624211	-0,624261	-0,624211	-0,624381
	1,125	-0,472236	-0,572966	-0,573013	-0,572965	-0,572992
	1,250	-0,454058	-0,544600	-0,544648	-0,544600	-0,544698
	1,375	-0,435282	-0,531446	-0,531488	-0,531446	-0,531499
	1,500	-0,430260	-0,528506	-0,528546	-0,528505	-0,528577
	1,625	-0,441238	-0,532844	-0,532960	-0,532844	-0,532897
	1,750	-0,463044	-0,542407	-0,542577	-0,542406	-0,542466
	1,875	-0,354039	-0,555882	-0,554780	-0,555880	-0,555931
	2,000	-0,246056	-0,572301	-0,570079	-0,572297	-0,572350

Tabela 4.12. Tensões resultantes. Pressão interna. Modelagem 4R3F1T.

TENSÃO	RAIO (m)	NÚMERO DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO			SOLUÇÃO ANALÍTICA
		030303	040202	040403	
σ_R	1,000	-0,913	-0,909	-0,913	-1,000
	1,125	-0,694	-0,687	-0,694	-0,660
	1,250	-0,384	-0,374	-0,384	-0,442
	1,375	-0,221	-0,222	-0,221	-0,297
	1,500	-0,110	-0,110	-0,110	-0,196
	1,625	-0,011	-0,011	-0,011	-0,123
	1,750	-0,064	-0,064	-0,064	-0,070
	1,875	-0,033	-0,033	-0,033	-0,031
	2,000	0,005	0,005	0,005	0,000
$\sigma_\psi = \sigma_\theta$	1,000	0,751	0,751	0,751	0,714
	1,125	0,529	0,531	0,529	0,544
	1,250	0,460	0,465	0,460	0,435
	1,375	0,504	0,504	0,504	0,363
	1,500	0,428	0,428	0,428	0,312
	1,625	0,470	0,470	0,470	0,276
	1,750	0,252	0,252	0,252	0,249
	1,875	0,228	0,228	0,228	0,230
	2,000	0,216	0,216	0,216	0,214

Tabela 4.13. Tensões resultantes. Pressão externa. Modelagem 4R3F1T.

TENSÃO	RAIO (m)	NÚMERO DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO			SOLUÇÃO ANALÍTICA
		030303	040202	040403	
σ_R	1,000	-0,087	-0,087	-0,087	0,000
	1,125	-0,306	-0,306	-0,306	-0,340
	1,250	-0,616	-0,616	-0,616	-0,558
	1,375	-0,881	-0,881	-0,881	-0,703
	1,500	-0,983	-0,983	-0,983	-0,804
	1,625	-1,194	-1,196	-1,190	-0,877
	1,750	-1,214	-1,215	-1,210	-0,930
	1,875	-0,967	-0,941	-0,967	-0,969
	2,000	-1,005	-0,981	-1,010	-1,000
$\sigma_\psi = \sigma_\theta$	1,000	-1,751	-1,751	-1,750	-1,710
	1,125	-1,529	-1,529	-1,530	-1,540
	1,250	-1,460	-1,460	-1,460	-1,440
	1,375	-1,675	-1,675	-1,680	-1,360
	1,500	-1,582	-1,582	-1,580	-1,310
	1,625	-1,812	-1,813	-1,810	-1,128
	1,750	-1,712	-1,713	-1,710	-1,250
	1,875	-1,228	-1,216	-1,230	-1,230
	2,000	-1,216	-1,203	-1,220	-1,210

4.3. Segundo exemplo: solução do problema de uma esfera oca submetida a um carregamento térmico devido ao fluxo estacionário de calor

O fluxo estacionário de calor é aplicado a partir da face interna da superfície esférica (Fig. 4.8).

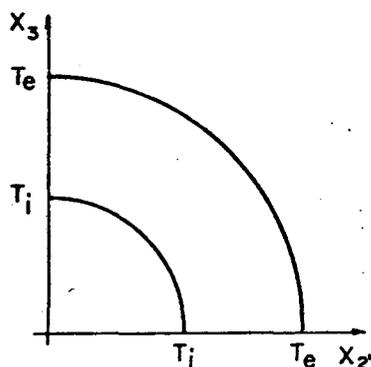


Figura 4.8. Representação esquemática da carga térmica na face interna (T_i) e externa (T_e) da esfera.

De acordo com Timoshenko e Goodier [19], a temperatura em um ponto qualquer da esfera é dada por:

$$T = (T_i - T_e) \left(\frac{a}{b-a} \right) \left(\frac{b}{R} - 1 \right) + T_e \quad (4.4)$$

e para as tensões, deformações e deslocamentos:

$$\sigma_R = \frac{\alpha E}{(1-\nu)} (T_i - T_e) \frac{ab}{(b^3 - a^3)} \left[a + b - \frac{1}{R} (a^2 + ab + b^2) + \frac{a^2 b^2}{R^3} \right] \quad (4.5)$$

$$\sigma_\psi = \sigma_\Theta = \frac{\alpha E}{(1-\nu)} (T_i - T_e) \frac{ab}{(b^3 - a^3)} \left[a + b - \frac{1}{2R} (a^2 + ab + b^2) - \frac{a^2 b^2}{2R^3} \right] \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_R = \frac{1}{E} [\sigma_R - 2\nu\sigma_\psi] + \alpha(T - T_e) = \frac{du}{dR} \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_\psi = \varepsilon_\Theta = \frac{1}{E} [(1-\nu)\sigma_\psi - \nu\sigma_R] + \alpha(T - T_e) = \frac{u}{R} \quad (4.8)$$

donde

$$u = R \left\{ \frac{1}{E} [(1-\nu)\sigma_\psi - \nu\sigma_R] + \alpha(T - T_e) \right\} \quad (4.9)$$

O material utilizado é o aço baixo carbono com módulo de elasticidade $E = 192190$ MPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 0,11051 \times 10^{-4}/^\circ\text{C}$ calculados na temperatura de 30°C ($T_{\text{ref.I}}$). A temperatura externa (T_e) é adotada como temperatura de referência ($T_{\text{ref.II}}$) no cálculo das deformações e tensões (equações 4.5 a 4.9).

As condições de contorno para a solução numérica são:

$$u = u(R)$$

$$v = 0,0$$

$$w = 0,0$$

Uma vez que na formulação proposta as tensões (eq. 2.20) são avaliadas numericamente, usando polinomiais de 2º grau (equações 2.1 e 2.2) e suas derivadas e funções lineares de temperatura e na solução analítica, as tensões são uma função cúbica do raio da esfera (eq. 4.5 e 4.6) é de se prever que resultados satisfatórios sã sejam conseguidos com algum re fino da modelagem na direção radial. O mesmo procedimento deve rã ser adotado quando se aumentar a diferença entre a temperatura interna (T_i) e a externa (T_e).

A solução do problema é apresentada em três eta pas. Na primeira, a título de teste, são mostrados os resulta dos para temperatura constante em toda a modelagem. Na segunda são apresentados resultados para o caso em que a maior diferen ça de temperatura (externa e interna) é de 10°C . E na terceira etapa são apresentados resultados para uma diferença de tempera tura de até 100°C .

4.3.1. *Solução do 2º exemplo para o caso de car regamento térmico constante*

Utilizando a modelagem padrão de teste (Fig.4.1) com os seguintes dados:

$$T_i = T_e = \text{Temp. nodal} = 30^{\circ}\text{C}$$

$$T_{\text{ref.I}} = T_{\text{ref.II}} = 30^{\circ}\text{C}$$

$$E = 192190 \text{ MPa} \quad \left. \vphantom{E} \right\} \text{ em } T = 30^{\circ}\text{C}$$

$$\alpha = 11,051 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$$

$$\nu = 0,3$$

os resultados são os dados pela Tabela 4.14.

Tabela 4.14. Resultados para a modelagem padrão de teste submetida a um carregamento térmico constante de 30°C utilizando 030303 pontos de integração.

Raio(m)	Deslocamento radial - u(m)	σ_R (MPa)	$\sigma_{\psi} = \sigma_{\theta}$ (MPa)
1,000	$-0,503933 \times 10^{-9}$	$-6,423 \times 10^{-4}$	$-4,136 \times 10^{-4}$
1,500	$-1,215340 \times 10^{-9}$	$-3,854 \times 10^{-4}$	$-3,876 \times 10^{-4}$
2,000	$-2,134790 \times 10^{-9}$	$-8,664 \times 10^{-4}$	$-7,621 \times 10^{-4}$

4.3.2. Solução do 2º exemplo para o caso de carregamento térmico com $T_i = 40^{\circ}\text{C}$ e $T_e = 30^{\circ}\text{C}$

Dados:

$$E = 192190 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\alpha = 11,051 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$$

$$T_{\text{ref.I}} = T_{\text{ref.II}} = 30^{\circ}\text{C}$$

Os resultados para deslocamentos iniciaram a convergência para a solução analítica já a partir de um refino da modelagem padrão de teste colocando 2 elementos na direção radial (Fig. 4.9). Seus valores estão na Tabela 4.15.

A coluna Erro (%) que aparece nas tabelas a seguir é definida como:

$$\text{Erro (\%)} = \frac{(\text{Solução Analítica}) - (\text{Solução Numérica})}{(\text{Solução Analítica})} \times 100$$

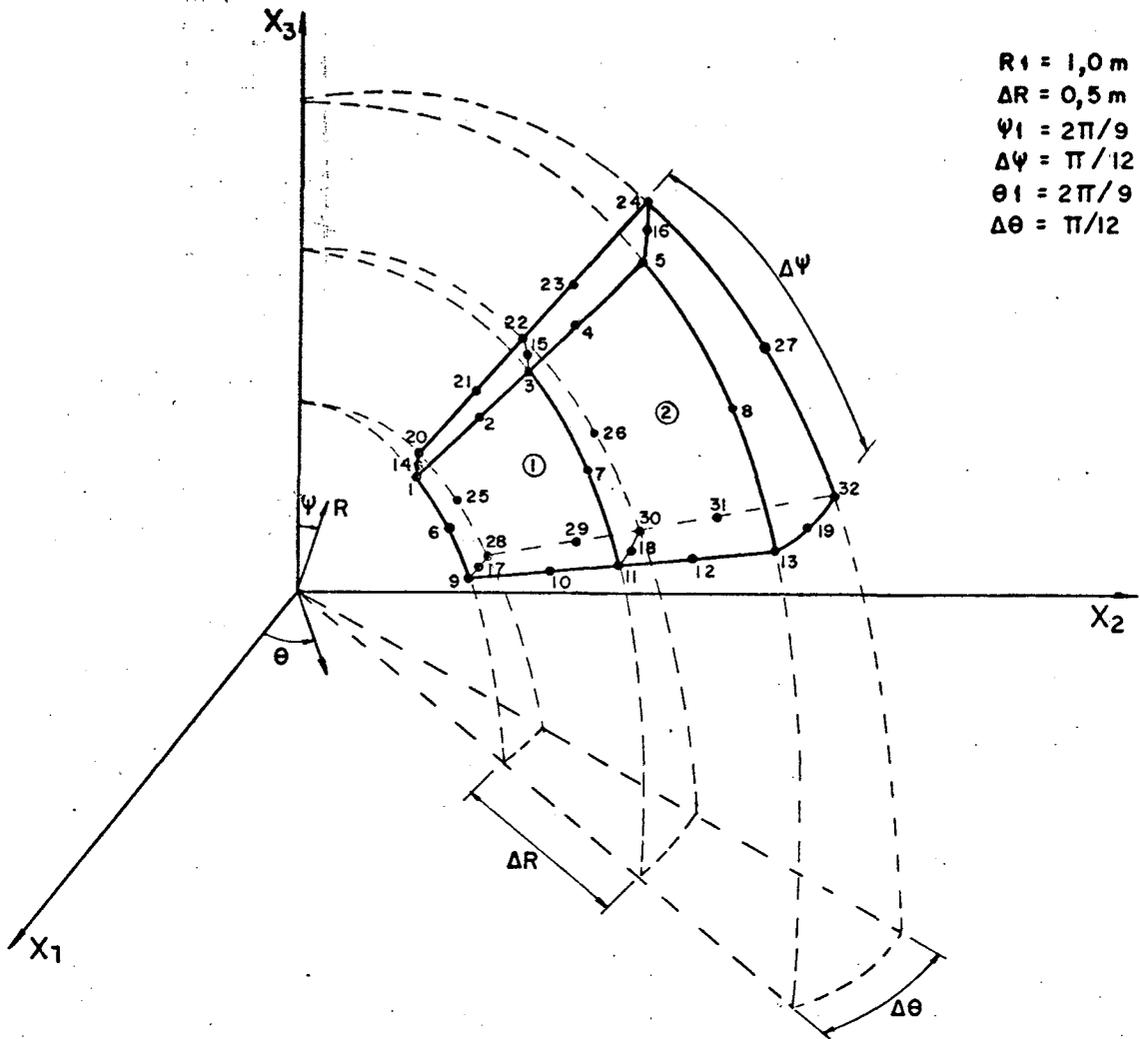


Figura 4.9. Refino do Modelo Padrão (2R1F1T)

Tabela 4.15. Deslocamento radial ($u \times 10^4$ m) no refinamento da modelagem padrão para 2R1F1T com carregamento térmico ($T_i = 40^\circ\text{C}$ e $T_e = 30^\circ\text{C}$)

Raio (m)	Número de pontos de integração		Solução Analítica	Erro (%)
	030303	040404		
1,000	0,319506	0,319506	0,315740	-1,192
1,250	0,597309	0,597308	0,596970	-0,056
1,500	0,684935	0,684935	0,685300	0,053
1,750	0,680449	0,680450	0,682690	0,328
2,000	0,628630	0,628631	0,631480	0,451

Resultados semelhantes aos anteriores foram obtidos para as modelagens 2R1F1T a 2R6F1T conforme apresentados na Tabela 4.16.

Tabela 4.16. Deslocamento radial ($u \times 10^4 \text{m}$) nas modelagens 2R1F1T a 2R6F1T com carregamento térmico ($T_i = 40^\circ\text{C}$ e $T_e = 30^\circ\text{C}$) utilizando 040202 pontos de integração.

Raio (m)	M A L H A S				Solução Analítica	Erro (%)
	2x1x1	2x2x1	2x4x1	2x6x1		
1,000	0,319508	0,319507	0,319506	0,319506	0,315740	-1,192
1,250	0,597310	0,597310	0,597309	0,597309	0,596970	-0,056
1,500	0,684935	0,684935	0,684935	0,684935	0,685300	0,053
1,750	0,680449	0,680449	0,680449	0,680450	0,682690	0,328
2,000	0,628629	0,628629	0,628630	0,628630	0,631480	0,451

Um maior refino na direção radial foi proposto com o fim de melhorar os resultados. Uma das modelagens testadas é aquela mostrada na Fig. 4.7 onde a fatia de esfera foi modelada com 4 elementos na direção radial, 3 elementos na direção meridional e 1 elemento na direção circunferencial (4R3F1T). Os resultados para as mesmas condições anteriores estão na Tabela 4.17.

Tabela 4.17. Deslocamento radial ($u \times 10^4 \text{m}$) na modelagem 4R3F1T com carregamento térmico ($T_i = 40^\circ\text{C}$, $T_e = 30^\circ\text{C}$).

Raio (m)	Número de pontos de integração			Solução Analítica	Erro (%)
	030303	040202	040403		
1,000	0,312138	0,312136	0,312137	0,315740	1,141
1,125	0,486521	0,486520	0,486520	0,491390	0,991
1,250	0,591474	0,591472	0,591473	0,596970	0,920
1,375	0,650952	0,650951	0,650951	0,656760	0,884
1,500	0,678934	0,678933	0,678933	0,685300	0,929
1,625	0,685585	0,685584	0,685584	0,691980	0,924
1,750	0,676271	0,676270	0,676270	0,682690	0,940
1,875	0,654045	0,654043	0,654054	0,661560	1,134
2,000	0,623340	0,623338	0,623340	0,631480	1,289

4.3.3. Solução do 2º exemplo para o caso de carregamento térmico com $T_i = 100^\circ\text{C}$ e $T_e = 0^\circ\text{C}$

Dados:

$$E = 192190 \text{ MPa}$$

$$\alpha = 11,051 \times 10^{-6} \quad \text{em } T_{\text{ref.I}} = 30^\circ$$

$$\nu = 0,3$$

$$T_{\text{ref.II}} = T_e = 0^\circ\text{C}$$

$$T_i = 100^\circ\text{C}$$

Neste caso aqui existe uma diferença de 100°C entre a temperatura externa e a interna. Foram obtidos os primei

ros resultados satisfatórios para o deslocamento radial na modelagem padrão de teste com 4 elementos na direção radial (Fig. 4.10). Seus valores estão na Tabela 4.18.

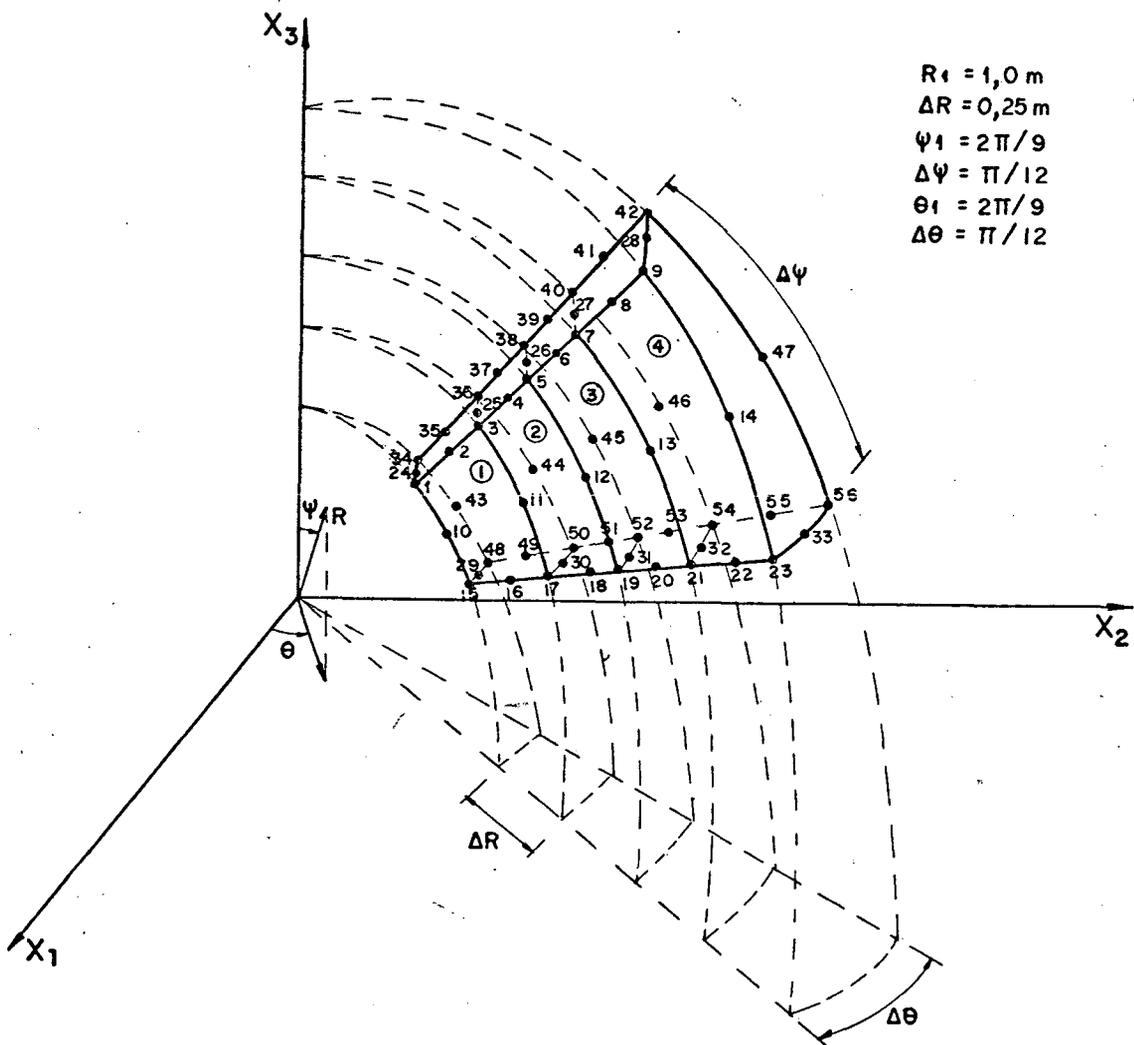


Figura 4.10. Modelagem 4R1F1T obtida através do refino do modelo padrão para o fluxo estacionário de calor.

Tabela 4.18. Deslocamento radial ($u \times 10^3 \text{ m}$) na modelagem 4R1F1T com carregamento térmico ($T_i = 100^\circ\text{C}$, $T_e = 0^\circ\text{C}$).

Raio (m)	Número de pontos de integração		Solução Analítica	Erro (%)
	030303	040404		
1,000	0,316006	0,316007	0,315744	-0,083
1,125	0,491230	0,491232	0,491400	0,034
1,250	0,596812	0,596818	0,596979	0,026
1,375	0,656594	0,656593	0,656764	0,026
1,500	0,685201	0,685194	0,685362	0,024
1,625	0,691816	0,691814	0,691987	0,025
1,750	0,682579	0,682578	0,682689	0,016
1,875	0,661353	0,661353	0,661568	0,032
2,000	0,631165	0,631165	0,631485	0,050

Na Tabela 4.19, a seguir, são mostrados os resultados para a modelagem 4R3F1T (Fig. 4.7).

Tabela 4.19. Deslocamento radial ($u \times 10^3 \text{ m}$) na modelagem 4R3F1T com carregamento térmico ($T_i = 100^\circ\text{C}$, $T_e = 0^\circ\text{C}$).

Raio (m)	Número de pontos de integração			Solução Analítica	Erro (%)
	030303	040202	040403		
1,000	0,315770	0,315770	0,315770	0,315744	-0,008
1,125	0,491013	0,491012	0,491012	0,491400	0,078
1,250	0,596609	0,596609	0,596608	0,596979	0,062
1,375	0,656273	0,656273	0,656273	0,656764	0,074
1,500	0,684799	0,684799	0,684799	0,685362	0,082
1,625	0,691472	0,691472	0,691472	0,691987	0,074
1,750	0,682144	0,682144	0,682144	0,682689	0,079
1,875	0,660848	0,660848	0,660848	0,661568	0,108
2,000	0,630708	0,630708	0,630708	0,631485	0,123

Os resultados para tensões devido ao carregamento térmico se encontram no Apêndice B.

Uma análise dos resultados apresentados nas Tabelas 4.1 a 4.19 mostra que a modelagem 4R3F1T é adequada para resolver os dois problemas de carregamento mecânico distribuído e térmico.

As tabelas apresentadas revelam a convergência para as diferentes ordens de integração. Em todos os casos a integração com 030303 pontos é a que melhor se aproxima da solução analítica. Entretanto, a solução com 040202 pontos de integração dá resultados muito próximos daquela e, portanto, é a solução recomendada pois utiliza apenas 16 pontos de integração em cada elemento.

Resultados para outros modelos de teste, para a formulação aqui apresentada, estão no Apêndice B.

4.4. Terceiro exemplo: Solução do problema de uma calota hemisférica engastada na base, com pressão interna, com relação b/a igual a 1,1; 1,2 e 1,3.

Na referência [22] se encontra a solução para o caso de uma casca semi-esférica engastada no equador e com abertura no polo, Fig. 4.11, com base na Teoria de Casca Semi-Espessa (TCSE). Os resultados são obtidos fazendo com que o ângulo ψ' varie de 0° a 80° , a fim de que sejam prescritas as condições de contorno. O carregamento aplicado é pressão interna uniformemente distribuída ao longo da coordenada circunferencial. Uti

liza-se o método de diferenças finitas com a expansão das variáveis na direção circunferencial em série de Fourier.

Dados utilizados para solução pela TCSE:

$$E_s = E_\theta = E_z = 2,1 \times 10^4 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$\alpha_{ts} = \alpha_{t\theta} = 1 \text{ } 1/^\circ\text{C}$$

$$r = 50 \text{ cm} \quad \ell = 50 \text{ cm} \quad d = 3,5 \text{ cm}$$

$$T_1 = T_2 = 0^\circ\text{C}$$

$$\sigma_0 = 2000 \text{ kgf/cm}^2 \text{ (tensão de referência)}$$

$$E_0 = 2,1 \times 10^4 \text{ kgf/cm}^2 \text{ (módulo de elasticidade longitudinal de referência)}$$

$$\ell_0 = 50 \text{ cm (comprimento de referência)}$$

$$T_0 = 1^\circ\text{C (temperatura de referência)}$$

$$\Delta = 0,005 \text{ (espaçamento pivotal adimensionalizado em relação a } \ell_0 \text{)}$$

$$N\text{º de pontos pivotaes} = 201$$

$$q_z = 1 \text{ kgf/cm}^2 = 0,1 \text{ MPa (pressão interna uniformemente distribuída).}$$

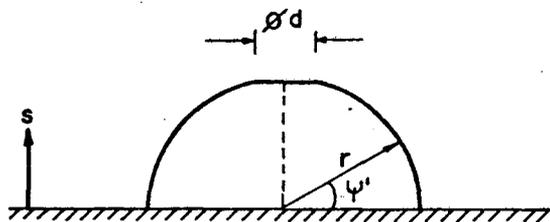


Figura 4.11. Casca semi-esférica engastada na base.

A solução deste problema, para o deslocamento radial, utilizando a formulação proposta foi realizada com a modelagem da fatia de esfera (Fig. 4.6), com a modelagem 2R4F1T e com a modelagem 4R3F1T. Os resultados para a fatia de esfera com 1R2F1T, 1R4F1T, 1R6F1T estão nas Figuras 4.12, 4.13 e 4.14.

Os dados de entrada são:

Pressão interna = 1,0 MPa

$a = 10,0 \text{ m}$

$b = 11,0; 12,0; 13,0 \text{ m}$

$u = 0,0 \text{ p/ } \psi' = 0^{\circ}$ e $u = u(R) \text{ p/ } \psi' \neq 0^{\circ}$

$v = 0,0$

$w = 0,0$

$\psi' = (90 - \psi)^{\circ}$

Tendo em vista o fato de que o deslocamento radial (u) é uma função linear da pressão interna aplicada, utilizou-se na solução proposta o valor da pressão interna aproximadamente dez vezes o valor utilizado na solução pela TCSE com o intuito de uma melhor visualização do comportamento dos deslocamentos em função do ângulo ψ' .

Devido a um refino grosseiro do domínio, os elementos se apresentam excessivamente distorcidos. Isto acarreta resultados muito inacurados como pode ser observado nos gráficos 4.12 a 4.14.

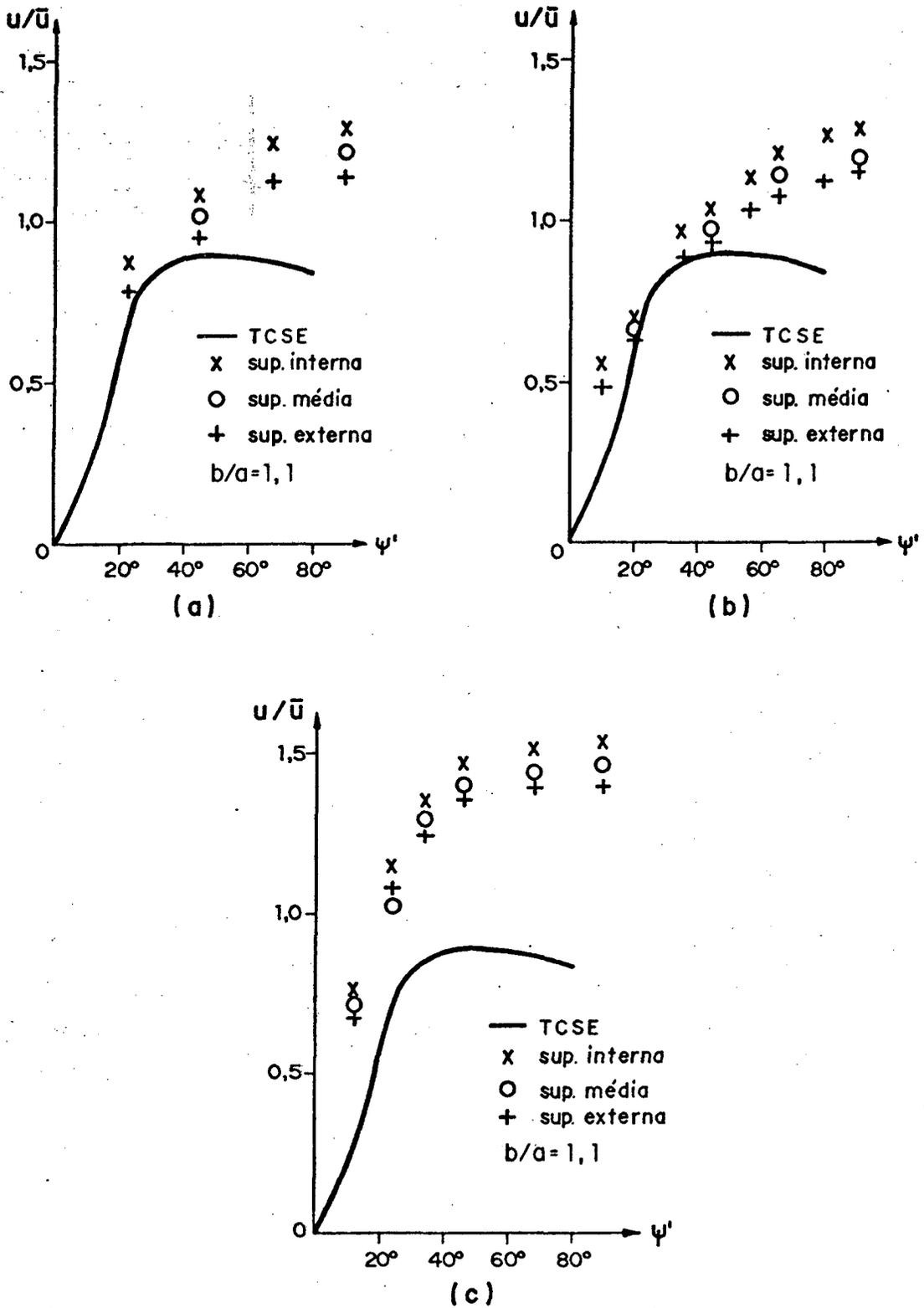


Figura 4.12. Deslocamento radial (u) da casca semi-esférica (Fig. 4.11) sujeita a uma pressão interna de 0,1 MPa para TCSE e 1,0 MPa para modelagem proposta; (a) Modelagem 1R2F1T; (b) Modelagem 1R4F1T; (c) Modelagem 1R6F1T. $\bar{u} = 1,2 \times 10^{-4}$ m.

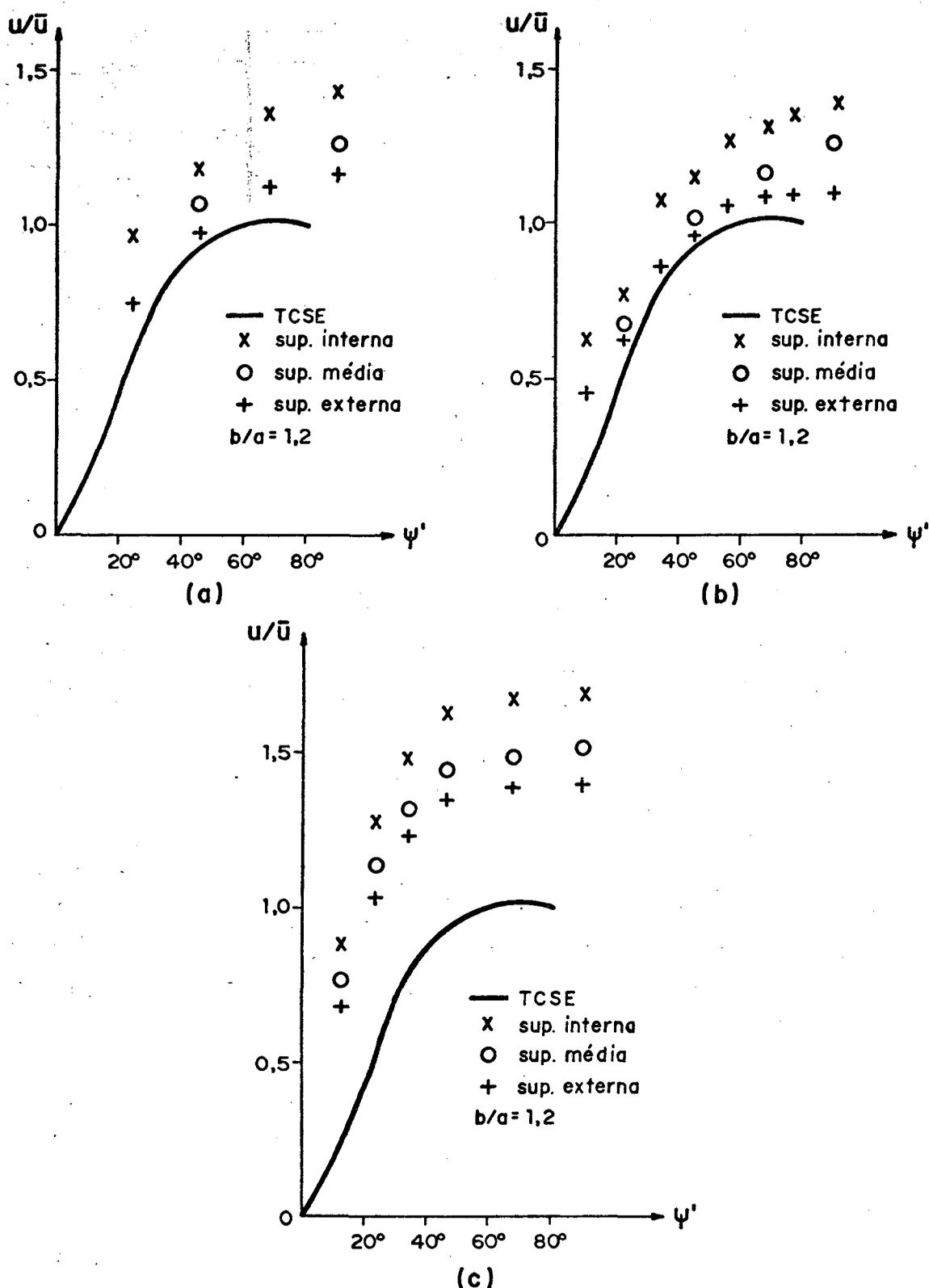


Figura 4.13. Deslocamento radial (u) da casca semi-esférica (Fig. 4.11) sujeita a uma pressão interna de 0,1 MPa para TCSE e 1,0 MPa para modelagem proposta; (a) Modelagem 1R2F1T; (b) modelagem 1R4F1T; (c) modelagem 1R6F1T. $\bar{u} = 0,6 \times 10^{-4}$ m.

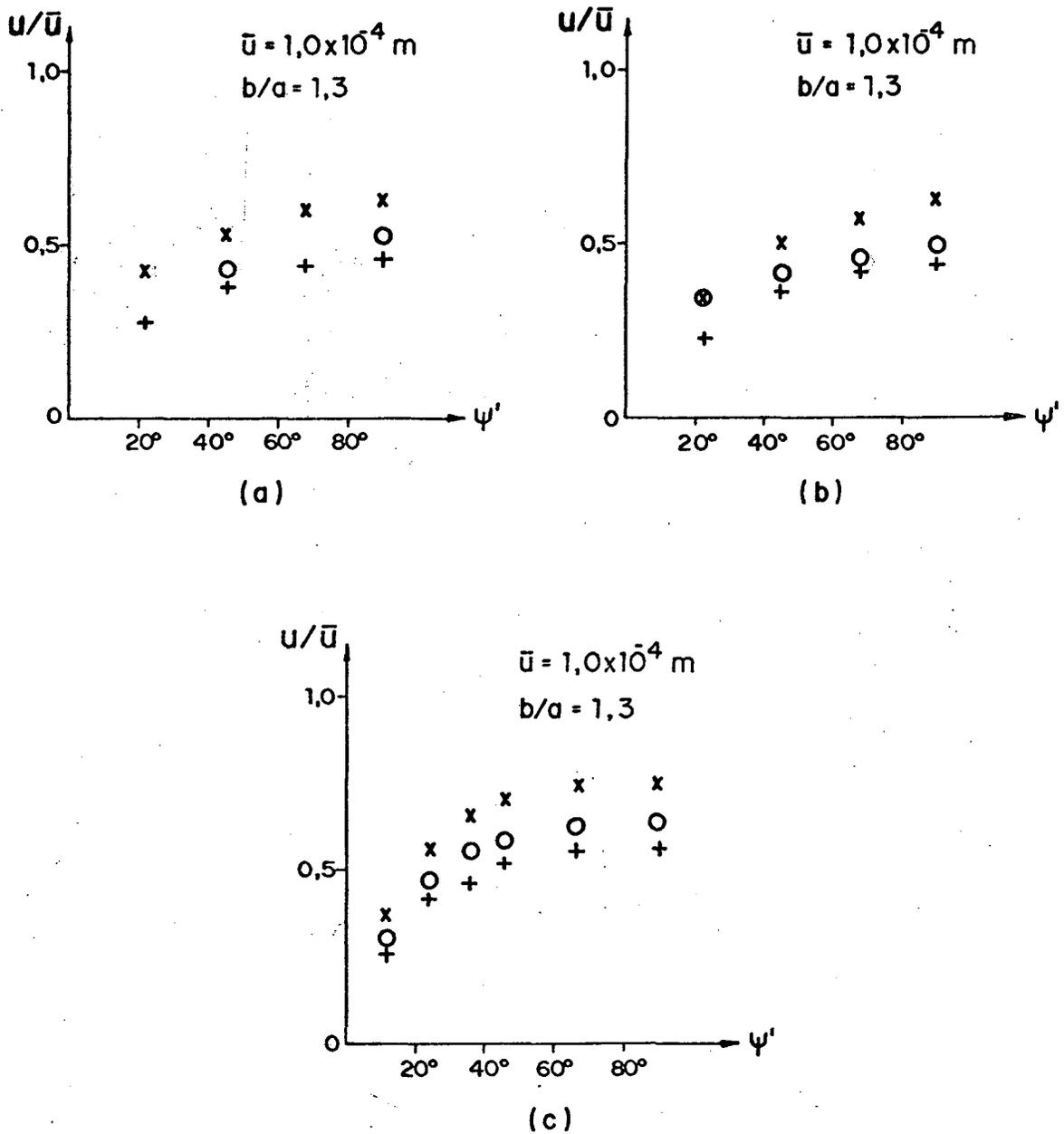


Figura 4.14. Deslocamento radial (u) da casca semi-esférica (Fig. 4.11) sujeita a uma pressão de 1,0 MPa para a modelagem proposta; (a) modelagem 1R2F1T; (b) modelagem 1R4F1T; (c) modelagem 1R6F1T;

x = superfície interna
o = superfície média
+ = superfície externa

C A P Í T U L O 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Um modelo de elemento finito sólido esférico tri dimensional foi desenvolvido. Sua formulação se assemelha à do sólido isoparamétrico quadrático de 20 nós, porém com características especiais. Estas permitem uma economia no cálculo da matriz de rigidez e forças equivalentes nodais da ordem de 25% para as somas e de 11% para as multiplicações.

A formulação foi testada através da solução de problemas ilustrativos para esta aplicação e os resultados comparados com os existentes na literatura mostraram boa precisão. Para isto foi utilizado um programa digital codificado em FORTRAN IV e inserido no programa de elementos finitos SIMELF.

Na solução dos exemplos numéricos foram testados dois tipos de carregamento: mecânico distribuído e térmico. Os resultados para o carregamento mecânico distribuído estão perfeitamente dentro da faixa de resultados considerados aceitáveis com baixo índice de erro. Os resultados para carregamento térmico constante são muito bons. Já os resultados para o carregamento térmico devido a um fluxo estacionário de calor são muito bons apenas para os deslocamentos radiais. Os resultados para tensões não são satisfatórios. Provavelmente devido ao uso de deformação inicial ao invés de deslocamento inicial para o cálculo das tensões e o fato de se estar aproximando uma curva

de 3º grau, para a obtenção das tensões (equações 4.5 e 4.6), por uma curva obtida através das funções de interpolação (que são polinomiais de 2º grau) e suas derivadas (equação 2.20).

Uma continuação deste trabalho é o estudo e aplicação de um princípio variacional generalizado tal como o de Reissner para obtenção de melhores resultados para as tensões, principalmente no caso do carregamento térmico devido ao fluxo estacionário de calor. Poderia ser testado também elementos de formulação Lagrangeana.

Seguindo a mesma linha de trabalho, o desenvolvimento de novos elementos de geometria específica, como as cilíndricas, aproveitando todas as simetrias possíveis é de interesse valioso e imediato vindo assim a preencher esta lacuna existente na literatura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. GUPTA, A.K. & MOHRAZ, B. A Method of Computing Numerically Integrated Stiffness Matrices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5: 83-89, 1972.
2. BARCELLOS, C.S. & ROSA, E. Arquitetura de um Sistema Modular de Elementos Finitos - I: Características. In: COBEM, V, Campinas, 1979. *Anais*. DT-02, pp. 78-87.
3. BARCELLOS, C.S. & ROSA, E. Arquitetura de um Sistema Modular de Elementos Finitos - II: Aplicações. In: COBEM, V, Campinas, 1979. *Anais*. DT-05, pp. 181-190.
4. BARCELLOS, C.S. & ROSA, E. *Expansão do Sistema Modular de Elementos Finitos - SIMELF*. Grante, Publicação 09/80, CT-UFSC.
5. BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J. *The Finite Element Technique*. Ed. da UFRGS, 1975.
6. ZIENKIEWICZ, O.C. *The Finite Element Method*. 3th. ed. Mc Graw-Hill Book Company Ltd., 1979.
7. BATHE, K.J. & WILSON, E.L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Inc., 1976.

8. DESAI, C.S. & ABEL, J.F. *Introduction to the Finite Element Method*. Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
9. FJELD, S.A. Three-Dimensional Theory of Elasticity, Chapter 11. In: FINITE ELEMENT METHODS IN STRESS ANALYSIS. Edited by Holand, I., Bell, K., Tapir, Third Printing, 1972.
10. ZIENKIEWICZ, O.C.; IRONS, B.M.; ERGATOUDIS, J.; AHMAD, S. and SCOTT, F.C. Isoparametric and Associated Element Families for Two - and Three - Dimensional Analysis, Chapter 13. In: FINITE ELEMENT METHODS IN STRESS ANALYSIS. Edited by Holand, I., Bell, K., Tapir, Third Printing, 1972.
11. ARGYRIS, J.H. The LUMINA Element for the Matrix Displacement Method. *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society*, 72: 514-517, june 1968.
12. ARGYRIS, J.H.; FRIED, I. and SCHARPF, D.W. The TET 20 and TEA 8 Elements for the Matrix Displacement Method. *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society*. 72: 618-623, july 1968.
13. PITTR, J. & HARTL, H. Improved Stress Evaluation under Thermal Load for Simple Finite Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15: 1507-1515, 1980.

14. IRONS, B.M. Engineering Applications of Numerical Integration in Stiffness Methods. (Technical Notes). *AIAA Journal*, 4 (11): 2035-2037, 1966.
15. HELLEN, T.K. Numerical Integration Considerations in Two and Three Dimensional Isoparametric Finite Elements. In: THE MATHEMATICS OF FINITE ELEMENTS AND APPLICATIONS II. Edited by J.R. Whiteman, Academic Press, 1976.
16. PAWSEY, S.F. & CLOUGH, R.W. Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3: 575-586, 1971.
17. GRAY, W.G. & VAN GENUCHTEN, M.T. Economical Alternatives to Gaussian Quadrature over Isoparametric Quadrilaterals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12 (9): 1478-1484, 1978.
18. ALVES, D.B. *Elasticidade*. CT-UFSC, 1979.
19. TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J.N. *Teoria da Elasticidade*. 3ª ed. Guanabara Dois, 1980.
20. BORESI, A.P. & LYN, P.P. *Elasticity in Engineering Mechanics*. Prentice-Hall, Inc., 1974.
21. CARNAHAN, B.; LUTHER, H.A. and WILKES, J.O. *Applied Numerical Methods*. John Wiley & Sons, Inc., 1969.

22. DIAS, A. *Análise de Tensões em Cascas Semi-Espessas de Revolução Através do Método de Diferenças Finitas*. UFSC, Centro Tecnológico, 1981 (Dissertação de Mestrado).

A P E N D I C E A

VETOR PESO - {WP}

As tabelas a seguir são montadas a partir das abscissas e coeficientes de peso do processo de integração Gauss-Legendre [21] e dos dados específicos do elemento de sólido esférico.

Uma lista das variáveis com o seu significado é a seguinte:

- NPI = IIIJJKK, codificação do número de pontos de integração na direção radial (II), na direção meridional (JJ) e na direção circunferencial (KK);
- PI_j = ponto de integração nº j;
- W_k = produto dos coeficientes de peso de integração de Gauss-Legendre no ponto de integração;
- XP_i = (W_k) * (raio do ponto)² * (sin(ψ_j));
- WP(j) = vetor peso calculado a partir de XP_i;
- A_i, B_i, C_i = coeficientes de peso de integração de Gauss-Legendre nas direções radial, meridional e circunferencial, respectivamente;
- X_i, Y_i, Z_i = abcissas dos pontos de integração de Gauss-Legendre;

RM, FHI = respectivamente, raio médio e ângulo ψ médio do elemento de sólido esférico;

DR_2 = (raio externo - raio interno)/2 = $\Delta R/2$;

DFHI = ângulo ψ compreendido pelo elemento;

DTET = ângulo θ compreendido pelo elemento;

DET = Jacobiano calculado explicitamente (equação 3.2), $|J|$.

O processo de montagem de $\{WP\}$ está descrito no Capítulo 3.

Tabela A.1. Vetor Peso, $WP(j)$, para NPI = 020202

PI_j	Pesos integração G-L			VETOR W_j	VETOR XP_i	VETOR $WP(j)$
	R	ψ	θ			
010101	A_1	B_1	C_1	W_1	XP_1	WP(1)
010102	A_1	B_1	C_2	W_1	XP_1	WP(2)
010201	A_1	B_2	C_1	W_1	XP_2	WP(3)
010202	A_1	B_2	C_2	W_1	XP_2	WP(4)
020101	A_2	B_1	C_1	W_1	XP_3	WP(5)
020102	A_2	B_1	C_2	W_1	XP_3	WP(6)
020201	A_2	B_2	C_1	W_1	XP_4	WP(7)
020202	A_2	B_2	C_2	W_1	XP_4	WP(8)

onde:

$$A_1 = B_1 = C_1 = 1,0$$

$$A_2 = B_2 = C_2 = A_1$$

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = - 0,577350269189626$$

$$X_2 = Y_2 = Z_2 = - X_1$$

$$W_1 = A_1 * B_1 * C_1$$

$$R_1 = RM + DR_2 * X_1$$

$$R_2 = RM + DR_2 * X_2$$

$$F_1 = FHI + DFHI * Y_1 / 2$$

$$F_2 = FHI + DFHI * Y_2 / 2$$

$$S_1 = \text{SIN}(F_1)$$

$$S_2 = \text{SIN}(F_2)$$

$$R_{11} = R_1 * R_1 * \text{DET}$$

$$R_{22} = R_2 * R_2 * \text{DET}$$

$$XP_1 = R_{11} * W_1 * S_1$$

$$XP_2 = R_{11} * W_1 * S_2$$

$$XP_3 = R_{22} * W_1 * S_1$$

$$XP_4 = R_{22} * W_1 * S_2$$

$$WP(1) = XP_1$$

$$WP(2) = XP_1$$

$$WP(3) = XP_2$$

$$\vdots$$

$$WP(8) = XP_4$$

Tabela A.2. Vetor Peso, WP(j), para NPI = 020302

PI _j	Pesos integração G-L			VETOR	VETOR	VETOR
	R	ψ	θ	W _j	XP _i	WP(j)
010101	A ₁	B ₁	C ₁	W ₁	XP ₁	WP(1)
010102	A ₁	B ₁	C ₂	W ₁	XP ₁	WP(2)
010201	A ₁	B ₂	C ₁	W ₂	XP ₂	WP(3)
010202	A ₁	B ₂	C ₂	W ₂	XP ₂	WP(4)
010301	A ₁	B ₃	C ₁	W ₁	XP ₃	WP(5)
010302	A ₁	B ₃	C ₂	W ₁	XP ₃	WP(6)
020101	A ₂	B ₁	C ₁	W ₁	XP ₄	WP(7)
020102	A ₂	B ₁	C ₂	W ₁	XP ₄	WP(8)
020201	A ₂	B ₂	C ₁	W ₂	XP ₅	WP(9)
020202	A ₂	B ₂	C ₂	W ₂	XP ₅	WP(10)
020301	A ₂	B ₃	C ₁	W ₁	XP ₆	WP(11)
020302	A ₂	B ₃	C ₂	W ₁	XP ₆	WP(12)

onde:

$$A_1 = A_2 = C_1 = C_2 = 1,0$$

$$B_1 = B_3 = 0,5555555555555556$$

$$B_2 = 0,8888888888888889$$

$$X_1 = -0,577350269189626$$

$$X_2 = -X_1$$

$$Y_1 = 0,774596669241483$$

$$Y_2 = 0,0$$

$$Y_3 = -Y_1$$

$$Z_1 = X_1$$

$$Z_2 = X_2$$

$$W_1 = A_1 * B_1 * C_1$$

$$W_2 = A_1 * B_2 * C_1$$

$$R_1 = RM + DR_2 * X_1$$

$$R_2 = RM + DR_2 * X_2$$

$$F_1 = FHI + DFHI * Y_1 / 2$$

$$F_2 = FHI$$

$$F_3 = FHI + DFHI * Y_3 / 2$$

$$S_1 = \text{SIN}(F_1)$$

$$S_2 = \text{SIN}(F_2)$$

$$S_3 = \text{SIN}(F_3)$$

$$R_{11} = R_1 * R_1 * \text{DET}$$

$$R_{22} = R_2 * R_2 * \text{DET}$$

$$XP_1 = R_{11} * W_1 * S_1$$

$$XP_2 = R_{11} * W_2 * S_2$$

$$XP_3 = R_{11} * W_1 * S_3$$

$$XP_4 = R_{22} * W_1 * S_1$$

$$XP_5 = R_{22} * W_2 * S_2$$

$$XP_6 = R_{22} * W_1 * S_3$$

$$WP(1) = XP_1$$

.

.

.

$$WP(12) = XP_6$$

Tabela A.3. Vetor Peso, WP(j) p/NPI = 020402

PI _j	Pesos integração G-L			VETOR W _j	VETOR XP _i	VETOR WP(j)
	R	ψ	θ			
010101	A ₁	B ₁	C ₁	W ₁	XP ₁	WP(1)
010102	A ₁	B ₁	C ₂	W ₁	XP ₁	WP(2)
010201	A ₁	B ₂	C ₁	W ₂	XP ₂	WP(3)
010202	A ₁	B ₂	C ₂	W ₂	XP ₂	WP(4)
010301	A ₁	B ₃	C ₁	W ₂	XP ₃	WP(5)
010302	A ₁	B ₃	C ₂	W ₂	XP ₃	WP(6)
010401	A ₁	B ₄	C ₁	W ₁	XP ₄	WP(7)
010402	A ₁	B ₄	C ₂	W ₁	XP ₄	WP(8)
020101	A ₂	B ₁	C ₁	W ₁	XP ₅	WP(9)
020102	A ₂	B ₁	C ₂	W ₁	XP ₅	WP(10)
020201	A ₂	B ₂	C ₁	W ₂	XP ₆	WP(11)
020202	A ₂	B ₂	C ₂	W ₂	XP ₆	WP(12)
020301	A ₂	B ₃	C ₁	W ₂	XP ₇	WP(13)
020302	A ₂	B ₃	C ₂	W ₂	XP ₇	WP(14)
020401	A ₂	B ₄	C ₁	W ₁	XP ₈	WP(15)
020402	A ₂	B ₄	C ₂	W ₁	XP ₈	WP(16)

onde:

$$A_1 = C_1 = A_2 = C_2 = 1,0$$

$$B_1 = B_4 = 0,347854845137454$$

$$B_2 = B_3 = 0,652145154862546$$

$$X_1 = - 0,577350269189626$$

$$X_2 = - X_1$$

$$Y_1 = - 0,861136311594053$$

$$Y_2 = - 0,339981043584856$$

$$Y_3 = - Y_2$$

$$Y_4 = - Y_1$$

$$Z_1 = X_1$$

$$Z_2 = X_2$$

$$W_1 = A_1 * B_1 * C_1$$

$$W_2 = A_1 * B_2 * C_1$$

$$R_1 = RM + DR_2 * X_1$$

$$R_2 = RM + DR_2 * X_2$$

$$F_1 = FHI + DFHI * Y1/2$$

$$F_2 = FHI + DFHI * Y2/2$$

$$F_3 = FHI + DFHI * Y3/2$$

$$F_4 = FHI + DFHI * Y4/2$$

$$S_1 = \text{SIN}(F_1)$$

$$S_2 = \text{SIN}(F_2)$$

$$S_3 = \text{SIN}(F_3)$$

$$S_4 = \text{SIN}(F_4)$$

$$R_{11} = R_1 * R_1 * \text{DET}$$

$$R_{22} = R_2 * R_2 * \text{DET}$$

$$XP_1 = R_{11} * W_1 * S_1$$

$$XP_2 = R_{11} * W_2 * S_2$$

$$XP_3 = R_{11} * W_2 * S_3$$

$$XP_4 = R_{11} * W_1 * S_4$$

$$XP_5 = R_{22} * W_1 * S_1$$

$$XP_6 = R_{22} * W_2 * S_2$$

$$XP_7 = R_{22} * W_2 * S_3$$

$$XP_8 = R_{22} * W_1 * S_4$$

$$WP(1) = XP_1$$

⋮

$$WP(16) = XP_8$$

Tabela A.4. Vetor Peso, WP(j), para NPI = 030202

PI _j	Pesos integração G-L			VETOR W _j	VETOR XP _i	VETOR WP(j)
	R	ψ	θ			
010101	A ₁	B ₁	C ₁	W ₁	XP ₁	WP(1)
010102	A ₁	B ₁	C ₂	W ₁	XP ₁	WP(2)
010201	A ₁	B ₂	C ₁	W ₁	XP ₂	WP(3)
010202	A ₁	B ₂	C ₂	W ₁	XP ₂	WP(4)
020101	A ₂	B ₁	C ₁	W ₂	XP ₃	WP(5)
020102	A ₂	B ₁	C ₂	W ₂	XP ₃	WP(6)
020201	A ₂	B ₂	C ₁	W ₂	XP ₄	WP(7)
020202	A ₂	B ₂	C ₂	W ₂	XP ₄	WP(8)
030101	A ₃	B ₁	C ₁	W ₁	XP ₅	WP(9)
030102	A ₃	B ₁	C ₂	W ₁	XP ₅	WP(10)
030201	A ₃	B ₂	C ₁	W ₁	XP ₆	WP(11)
030202	A ₃	B ₂	C ₂	W ₁	XP ₆	WP(12)

onde:

$$A_1 = A_3 = 0,555555555555556$$

$$A_2 = 0,888888888888889$$

$$B_1 = C_1 = B_2 = C_2 = 1,0$$

$$X_1 = -0,774596669241483$$

$$X_2 = 0,0$$

$$X_3 = -X_1$$

$$Y_1 = -0,577350269189626$$

$$Y_2 = -Y_1$$

$$Z_1 = Y_1$$

$$Z_2 = Y_2$$

$$W_1 = A_1 * B_1 * C_1$$

$$W_2 = A_2 * B_1 * C_1$$

$$R_1 = RM + DR_2 * X_1$$

$$R_2 = RM$$

$$R_3 = RM + DR_2 * X_3$$

$$F_1 = FHI + DFHI * Y_1 / 2$$

$$F_2 = FHI + DFHI * Y_2 / 2$$

$$S_1 = \sin(F_1)$$

$$S_2 = \sin(F_2)$$

$$R_{11} = R_1 * R_1 * \text{DET}$$

$$R_{22} = R_2 * R_2 * \text{DET}$$

$$R_{33} = R_3 * R_3 * \text{DET}$$

$$XP_1 = R_{11} * W_1 * S_1$$

$$XP_2 = R_{11} * W_1 * S_2$$

$$XP_3 = R_{22} * W_2 * S_1$$

$$XP_4 = R_{22} * W_2 * S_2$$

$$XP_5 = R_{33} * W_1 * S_1$$

$$XP_6 = R_{33} * W_1 * S_2$$

$$WP(1) = XP_1$$

⋮

⋮

$$WP(12) = XP_6$$

Tabela A.5. Combinações permitidas pelo programa para o nº de pontos de integração em cada uma das direções (IIJJKK), na avaliação da matriz de rigidez.

II \ JJ		KK = 02			KK = 03			KK = 04		
		02	03	04	02	03	04	02	03	04
02		x	x	x						
03		x				x	x			
04		x		x		x	x			x

A P Ê N D I C E B

ALGUNS RESULTADOS PARA TENSÕES E
MODELAGENS ALTERNATIVAS

Neste Apêndice são apresentados os valores das tensões para o carregamento térmico nas modelagens propostas.

Além disto, são apresentados outros resultados para deslocamentos e tensões em modelagens alternativas para aquelas apresentadas no Capítulo 4.

B.1. Tensões resultantes devido ao carregamento térmico com $T_i = 40^{\circ}\text{C}$, $T_e = 30^{\circ}\text{C}$, $T_{\text{ref.I}} = T_{\text{ref.II}} = 30^{\circ}\text{C}$.

A solução analítica é dada pelas equações 4.5 e 4.6. A solução numérica para as modelagens das figuras 4.7, 4.9 e para as modelagens com 2 elementos na direção radial, 1 elemento na direção circunferencial e 1,2,4 e 6 elementos na direção meridional é vista nas Tabelas B.1, B.2 e B.3.

Tabela B.1. Tensões térmicas no refino da modelagem padrão para 2R1F1T com $T_i = 40^{\circ}\text{C}$; $T_e = T_{\text{ref.I}} = T_{\text{ref.II}} = 30^{\circ}\text{C}$.

Tensão (MPa)	Raio (m)	Número de pontos de integração		Solução Analítica
		030303	040404	
σ_R	1,000	- 7,422	- 7,422	0,000
	1,250	- 2,353	- 2,353	- 4,785
	1,500	- 8,168	- 8,168	- 4,174
	1,750	-22,700	-22,700	- 2,199
	2,000	-16,040	-16,040	0,000
$\sigma_\psi = \sigma_\theta$	1,000	-24,750	-24,750	-21,672
	1,250	- 6,093	- 6,093	- 7,143
	1,500	- 0,976	- 0,976	0,642
	1,750	-12,990	-12,990	5,434
	2,000	- 5,381	- 5,381	8,669

Tabela B.2. Tensões térmicas - Modelagens 2R1F1T a 2R6F1T com $T_i = 40^{\circ}\text{C}$; $T_e = T_{\text{ref.I}} = T_{\text{ref.II}} = 30^{\circ}\text{C}$ utilizando 040202 pontos de integração.

Tensão (MPa)	Raio (m)	MALHAS				Solução Analítica
		2x1x1	2x2x1	2x4x1	2x6x1	
σ_R	1,000	- 7,422	- 7,422	- 7,422	- 7,422	0,000
	1,250	- 2,353	- 2,353	- 2,353	- 2,353	- 4,785
	1,500	- 8,168	- 8,168	- 8,168	- 8,168	- 4,174
	1,750	-22,700	-22,700	-22,700	-22,700	- 2,199
	2,000	-16,040	-16,040	-16,040	-16,040	0,000
$\sigma_\psi = \sigma_\theta$	1,000	-24,750	-24,750	-24,750	-24,750	-21,672
	1,250	- 6,093	- 6,093	- 6,093	- 6,093	- 7,143
	1,500	- 0,976	- 0,976	- 0,976	- 0,976	0,642
	1,750	-12,990	-12,990	-12,990	-12,990	5,434
	2,000	- 5,381	- 5,381	- 5,381	- 5,380	8,669

Tabela B.3. Tensões térmicas - Modelagem 4R3F1T com $T_i = 40^{\circ}\text{C}$,
 $T_e = T_{\text{ref.I}} = T_{\text{ref.II}} = 30^{\circ}\text{C}$.

Tensão (MPa)	Raio (m)	Número de pontos de integração			Solução Analítica
		030303	040202	040403	
σ_R	1,000	- 2,896	- 2,897	- 2,897	0,000
	1,125	- 2,386	- 2,386	- 2,386	- 3,579
	1,250	- 6,828	- 6,828	- 6,828	- 4,785
	1,375	-19,000	-19,000	-19,000	- 4,787
	1,500	-17,280	-17,280	-17,280	- 4,174
	1,625	-27,650	-27,650	-27,650	- 3,255
	1,750	-23,440	-23,440	-23,440	- 2,199
	1,875	- 0,927	- 0,928	- 0,928	- 1,097
	2,000	- 0,321	- 0,321	- 0,321	0,000
$\sigma_{\psi} = \sigma_{\theta}$	1,000	-23,010	-23,010	-23,010	-21,673
	1,125	-12,510	-12,510	-12,510	-13,140
	1,250	- 8,139	- 8,139	- 8,139	- 7,143
	1,375	-15,620	-15,620	-15,620	- 2,729
	1,500	-10,700	-10,700	-10,700	0,642
	1,625	-18,480	-18,480	-18,480	3,295
	1,750	-13,400	-13,400	-13,400	5,434
	1,875	7,360	7,359	7,359	7,195
	2,000	8,420	8,420	8,420	8,669

B.2. Tensões resultantes devido ao carregamento térmico com $T_i = 100^{\circ}\text{C}$, $T_e = 0^{\circ}\text{C}$.

Os resultados para um refino na modelagem padrão (Fig. 4.10) e para a modelagem da Fig. 4.7 estão nas Tabelas B.4 e B.5.

Tabela B.4. Tensões resultantes no refino da modelagem padrão para 4R1F1T (Fig. 4.10) com carregamento térmico: $T_i = 100^{\circ}\text{C}$; $T_e = 0^{\circ}\text{C}$; $T_{\text{ref.I}} = 30^{\circ}\text{C}$; $T_{\text{ref.II}} = 0^{\circ}\text{C}$.

Tensão (MPa)	Raio (m)	Número de pontos integração		Solução Analítica
		030303	040404	
σ_R	1,000	-26,100	-26,100	0,000
	1,125	-25,100	-25,100	-35,800
	1,250	-65,200	-66,200	-47,900
	1,375	-192,000	-192,000	-47,900
	1,500	-170,000	-170,000	-41,700
	1,625	-279,000	-279,000	-32,600
	1,750	-233,000	-233,000	-22,000
	1,875	-10,000	-10,000	-11,000
	2,000	- 1,770	- 1,770	0,000
$\sigma_\psi = \sigma_\theta$	1,000	-228,000	-228,000	-217,000
	1,125	-127,000	-127,000	-131,000
	1,250	-79,400	-79,300	-71,400
	1,375	-158,000	-158,000	-27,300
	1,500	-104,000	-104,000	6,420
	1,625	-186,000	-186,000	32,900
	1,750	-132,000	-132,000	54,300
	1,875	72,500	72,500	71,900
	2,000	85,900	85,900	86,700

Tabela B.5. Tensões resultantes na modelagem 4R3F1T (Fig. 4.7)
 com carregamento térmico: $T_i = 100^{\circ}\text{C}$; $T_e = 0^{\circ}\text{C}$;
 $T_{\text{ref.I}} = 30^{\circ}\text{C}$; $T_{\text{ref.II}} = 0^{\circ}\text{C}$.

Tensão (MPa)	Raio (m)	Número de pontos de integração			Solução Analítica
		030303	040202	040403	
σ_R	1,000	-26,160	-26,160	-26,200	0,000
	1,125	-25,140	-25,140	-25,100	-35,800
	1,250	-66,260	-66,260	-66,300	-47,900
	1,375	-191,900	-191,900	-192,000	-47,900
	1,500	-170,300	-170,300	-170,000	-41,700
	1,625	-279,000	-279,000	-279,000	-32,600
	1,750	-23,880	-23,880	-233,000	-22,000
	1,875	-10,110	-10,110	-10,110	-11,000
	2,000	- 1,600	- 1,600	- 1,600	0,000
$\sigma_{\psi} = \sigma_{\theta}$	1,000	-227,900	-227,900	-228,000	-217,000
	1,125	-126,700	-126,700	-127,000	-131,000
	1,250	-79,400	-79,400	-79,400	-71,400
	1,375	-157,800	-157,800	-158,000	-27,300
	1,500	-104,600	-104,600	-105,000	6,420
	1,625	-186,600	-186,600	-187,000	32,900
	1,750	53,700	53,700	-132,000	54,300
	1,875	72,410	72,410	72,400	71,900
	2,000	85,900	85,900	85,900	86,700

B.3. Modelagens alternativas

São apresentados nesta seção alguns resultados para modelagens alternativas conseguidas através de alterações na geometria do modelo. Os mesmos tipos de carregamento foram aplicados.

B.3.1. *Modelagem padrão modificada com 1R1F1T;*
 $\Delta R = 0,5 \text{ m}; \Delta \psi = \Delta \theta = \pi/18 \text{ rad.}$

Resultados para o carregamento mecânico distribuído.

Tabela B.6. Deslocamento radial ($u \times 10^5 \text{ m}$). Três pontos de integração em cada direção. Carregamento mecânico distribuído. Modelagem padrão modificada.

Raio (m)	Pressão Externa (1,0 MPa)			Pressão Interna (1,0 MPa)		
	Solução Numérica	Solução Analítica	Erro (%)	Solução Numérica	Solução Analítica	Erro (%)
1,000	-0,778534	-0,776369	-0,279	0,565413	0,568242	0,498
1,250	-0,676548	-0,677290	0,109	0,416396	0,417131	0,176
1,500	-0,655976	-0,657243	0,193	0,343793	0,345053	0,365

Tabela B.7. Tensões resultantes. Três pontos de integração em cada direção. Modelagem padrão modificada.

CARREGAMENTO	RAIO (m)	σ_R			$\sigma_\psi = \sigma_\theta$		
		SOLUÇÃO NUMÉRICA	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ERRO (%)	SOLUÇÃO NUMÉRICA	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ERRO (%)
PRESSÃO EXTERNA	1,000	-0,316	0,000	~	-2,260	-2,130	-5,98
	1,250	-0,592	-0,693	14,63	-1,740	-1,780	2,51
	1,500	-1,150	-1,000	-15,20	-1,690	-1,630	-3,89
PRESSÃO INTERNA	1,000	-0,684	-1,000	31,63	1,260	1,130	-11,26
	1,250	-0,408	-0,307	-33,10	0,740	0,785	5,75
	1,500	0,152	0,000	~	0,695	0,632	-9,98

B.3.2.. Modelagem 2R1F1T com $\Delta R = 0,2m$; $\Delta\psi = \Delta\theta = \pi/18$ rad.

Resultados para o carregamento mecânico distribuído.

Tabela B.8. Deslocamento radial ($u \times 10^5 m$). Três pontos de integração em cada direção. Modelagem 2R1F1T modificada. Carregamento mecânico distribuído.

RAIO (m)	PRESSÃO EXTERNA (1,0 MPa)			PRESSÃO INTERNA (1,0 MPa)		
	SOLUÇÃO NUMÉRICA	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ERRO (%)	SOLUÇÃO NUMÉRICA	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ERRO (%)
1,000	-0,859463	-0,859599	0,016	0,651342	0,651472	0,020
1,100	-0,799945	-0,799992	0,006	0,571012	0,571053	0,007
1,200	-0,762401	-0,762496	0,013	0,512656	0,51270	0,017
1,300	-0,740516	-0,740577	0,008	0,469959	0,470013	0,011
1,400	-0,729871	-0,729949	0,011	0,438501	0,438572	0,016

Tabela B.9. Tensões resultantes. Três pontos de integração em cada direção. Modelagem 2R1F1T modificada. Carregamento mecânico distribuído.

CARREGAMENTO	RAIO (m)	σ_R			$\sigma_\psi = \sigma_\theta$		
		SOLUÇÃO NUMÉRICA	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ERRO (%)	SOLUÇÃO NUMÉRICA	SOLUÇÃO ANALÍTICA	ERRO (%)
PRESSÃO EXTERNA	1,000	-0,082	0,000	~	-2,400	-2,360	-1,48
	1,100	-0,357	-0,391	8,74	-2,150	-2,160	0,67
	1,200	-0,722	-0,663	-8,89	-2,050	-2,030	-1,25
	1,300	-1,070	-0,857	-25,05	-2,310	-1,930	-19,49
	1,400	-1,220	-1,000	-21,90	-2,190	-1,860	-17,84
PRESSÃO INTERNA	1,000	-0,918	-1,000	8,19	1,400	1,360	-2,57
	1,100	-0,643	-0,609	-5,62	1,150	1,160	1,24
	1,200	-0,278	-0,337	17,48	1,050	1,030	-2,46
	1,300	-0,012	-0,143	91,73	1,170	0,931	-25,39
	1,400	0,142	0,000	~	1,060	0,860	-23,71

B.3.3. Modelagem 3R3F1T com $\Delta R = 2/3$ m; $\Delta\psi = \pi/6$ rad.; $\Delta\theta = \pi/12$ rad.

Resultados para o fluxo estacionário de calor com $T_i = 100^\circ\text{C}$; $T_e = 0^\circ\text{C}$; $T_{\text{ref.I}} = 30^\circ\text{C}$; $T_{\text{ref.II}} = 0^\circ\text{C}$, a seguir.

Tabela B.10. Deslocamento radial ($u \times 10^3$ m) devido ao fluxo estacionário de calor aplicado na modelagem 3R3F1T.

Raio (m)	Número de pontos integração		Solução Analítica	Erro (%)
	030303	040202		
1,000	0,316611	0,316611	0,315744	-0,275
1,167	0,532662	0,532622	0,533215	0,104
1,333	0,640684	0,640684	0,640740	0,009
1,500	0,684975	0,684975	0,685362	0,056
1,667	0,690005	0,690005	0,690403	0,058
1,833	0,669137	0,669137	0,669785	0,097
2,000	0,630771	0,630771	0,631485	0,113

Tabela B.11. Tensões resultantes. Modelagem 3R3F1T. Fluxo estacionário de calor, com $T_i = 100^\circ\text{C}$; $T_e = 0^\circ\text{C}$;
 $T_{\text{ref.I}} = 30^\circ\text{C}$; $T_{\text{ref.II}} = 0^\circ\text{C}$.

Tensão (MPa)	Raio (m)	Número pontos integração		Solução Analítica
		030303	040202	
σ_R	1,000	-41,100	-41,100	0,000
	1,167	-26,100	-26,100	-41,700
	1,333	-75,000	-75,000	-48,800
	1,500	-211,000	-211,000	-41,700
	1,667	-173,000	-173,000	-29,100
	1,833	-298,000	-298,000	-14,700
	2,000	-234,000	-234,000	0,000
$\sigma_\psi = \sigma_\theta$	1,000	-234,000	-234,000	-217,000
	1,167	-103,000	-103,000	-109,000
	1,333	-51,900	-51,900	-40,700
	1,500	-146,000	-146,000	6,420
	1,667	-83,900	-83,900	40,600
	1,833	-187,000	-187,000	66,400
	2,000	-122,000	-122,000	86,700

B.4. Influência dos incrementos de temperatura entre a superfície interna e externa da esfera.

Afirmou-se na Seção 4.3 que um refinamento da malha seria necessário quando se aumentasse a diferença entre a temperatura interna (T_i) e a externa (T_e). O gráfico mostrado a seguir foi traçado a partir da aplicação de sucessivos carregamentos térmicos na modelagem 2R2F1T onde se manteve a temperatura externa em 30°C e se incrementou a temperatura interna de 40 até 160°C .

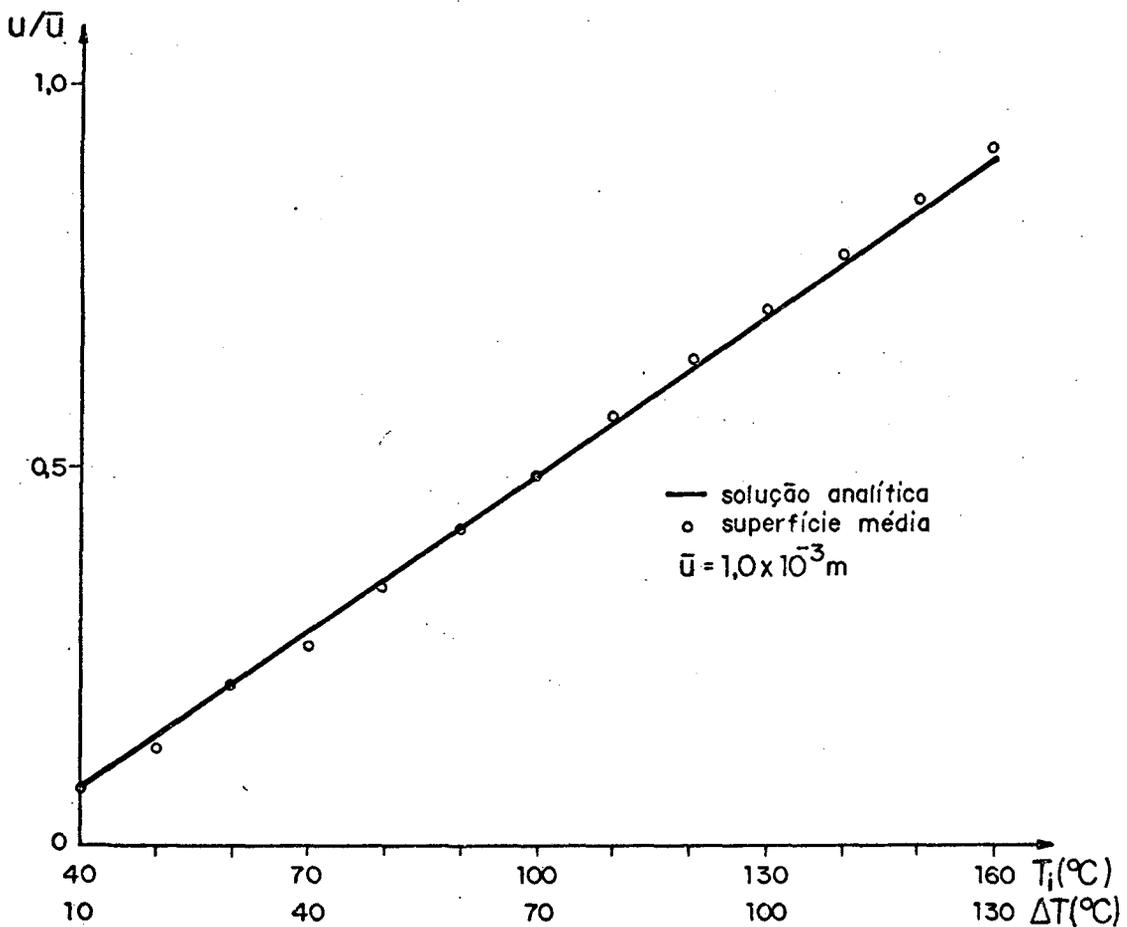


Figura B.1. Deslocamento radial (u) da superfície média da modelagem 2R2F1T com $T_e = 30^{\circ}\text{C}$ (constante) e $T_i = 40$ a 160°C . As características da modelagem 2R2F1T são: $\Delta R = 0,5 \text{ m}$; $\Delta\psi = \pi/4 \text{ rad}$; $\Delta\theta = \pi/12 \text{ rad}$.

A P E N D I C E C

PROGRAMA - TESTE, SUBROTINAS E CARTÕES DE DADOS

C.1. Introdução

Dentro da proposta de desenvolvimento de elementos finitos de geometria específica montou-se um programa teste e neste foram sendo efetuadas as modificações e adaptações sem perder a generalidade do sistema S I M E L F. No final deste Apêndice se encontra um esquema simplificado do programa.

Uma descrição minuciosa do S I M E L F pode ser encontrada em [2], [3], [4]. Neste Apêndice são apresentadas apenas as descrições quanto às subrotinas adaptadas e as elaboradas especificamente para este modelo. Deve-se ressaltar que as subrotinas adaptadas continuam válidas para os demais elementos implantados no sistema S I M E L F.

C.2. Modificações em cada FASE do Programa

Na FASE LEGER de leitura e geração de dados e propriedades do material foi acrescentada a geração das coordenadas esféricas médias de cada elemento e estas são transferidas para as demais FASES através de áreas definidas em COMMON. O COMMON/RFT/RIN, REX, FHI, TET, RM, DR₂, DFHI, DTET transfere características geométricas do elemento em processamento. O

COMMON/ESFERA/RA(16), ANF(16), ANT(16) transfere informações de raio médio, ângulo ψ médio e ângulo θ médio de todos os elementos esféricos da estrutura em análise.

As outras FASES que sofreram alterações em algumas de suas subrotinas se encontram no Quadro C.1.

Também foi criado o módulo C A L W na fase C A L M A para cálculo do Vetor Peso, {WP}, a partir das coordenadas esféricas, das abcissas e pesos de integração de Gauss-Legendre. Este módulo pode atuar em diversas combinações de pontos de integração em cada direção (Ver Apêndice A). É composto pela subrotina DETD e pelas subrotinas C A L W, C A L W 1,... C A L W 11.

C.3. Procedimento de cada subrotina acrescida

Em resumo, o procedimento de cada subrotina acrescida é:

S U B R O T I N A P I N
(I P T O, N P, X P T O)

sendo:

- I P T O - número codificado para os pontos de integração;
- N P - vetor que conterá a decodificação de I P T O em cada direção;
- X P T O - vetor de saída das coordenadas dos pontos de integração segundo Gauss-Legendre (PD); PD significa precisão dupla.

QUADRO C.1. Subrotinas adaptadas ou acrescentadas ao S I M E L F

F A S E	M Ó D U L O	S U B R O T I N A	S I T U A Ç Ã O	
P R E P E	P R C O O R	I D C O R	A D A P T A D A	
	P R T E M	T E N O	"	
C A L M A		V E M A T	"	
	I N G E	D N R E G	"	
	M A P I	I N T E A E A T	" "	
	F I D E		C B	"
			C B 6	"
			D F I G	"
			R P I N	"
			P I N	N O V A
			J A C C E	"
			J A Q I	"
R F T P I	"			
M T E L		K B S T	A D A P T A D A	
		K B R G	"	
		R I G E L	"	
		M B T D	N O V A	
C A R V		D E F O R T	A D A P T A D A	
		F C T E R I N T P	" N O V A	
C A R S		C A D I S 2 V C A R	A D A P T A D A "	
S O B R E	S B M	L E S O B E	"	
		S O R I T	"	
S O M B A	S O S I B	I M B	"	
R E L A T O	T E N S Ã O	R E L A T A	"	
		T E N S	"	
		T E G L O	"	

S U B R O T I N A C A L W

(K, WP, NTPI)

sendo:

- K - idem I P T O da subrotina P I N;
- W P - Vetor Peso calculado em função das coordenadas esféricas do ponto, do Jacobiano, dos coeficientes de peso e das abcissas de Quadratura de Gauss-Legendre (PD).
- N T P I - número de pontos de integração.

A subrotina calcula o Jacobiano de uma forma explícita e a seguir chama outras subrotinas específicas para cada número de pontos de integração codificado K. Essas subrotinas são: C A L W 1, C A L W 2, ..., C A L W 11. Nessas, o Vetor Peso propriamente dito, é calculado.

S U B R O T I N A J A Q I

(X J I N, D E T)

sendo:

- X J I N - inversa da matriz jacobiana (PD);
- D E T - determinante da matriz jacobiana (PD).

Calcula a inversa da matriz jacobiana de forma explícita através de ΔR , $\Delta \psi$, $\Delta \theta$.

S U B R O T I N A D E T D

(D, I C A, C, W P, N P)

sendo:

D - matriz obtida através do produto da ma
triz de propriedades elásticas do mate
rial, C, e o Vetor Peso WP (PD);

I C A - dimensão das matrizes C e D;

N P - número do ponto de integração.

A subrotina opera por ponto de integração de ca
da vez.

S U B R O T I N A M B T D

(B, B T D, D, K B, I C, E P D)

sendo:

B - matriz de deformação (PD);

D - matriz de propriedades e pesos (PD);

K B - número de colunas de B;

I C - número de linhas de B;

E P D - precisão para comparar com zero (PD);

B T D - matriz obtida pelo produto da transpos-
ta de B pela matriz D (PD).

S U B R O T I N A I N T P

(A, I A, N E D R, I E L, B, I T, N R, M C A R, T P)

Determina a temperatura T P do ponto de integra
ção a partir de uma combinação, via funções de interpolação, das

temperaturas nodais para o carregamento M C A R.

S U B R O T I N A J A C C E

(I A , X J A C)

Calcula a matriz jacobiana (PD) de forma explícita usando ΔR , $\Delta \psi$, $\Delta \theta$.

S U B R O T I N A R F T P I

(X)

Calcula as coordenadas esféricas de um ponto de integração utilizando as coordenadas intrínsecas (X) do ponto, os valores de ΔR , $\Delta \psi$, $\Delta \theta$ e as coordenadas esféricas do ponto médio do elemento.

C.4. Preparação dos dados de entrada

A entrada de dados é a mesma descrita em [4].

Deve ser ressaltado que por meio das coordenadas esféricas nodais de cada elemento são gerados, internamente pelo programa, os valores médios das coordenadas deste para serem utilizados no cálculo da matriz jacobiana, bem como das coordenadas esféricas de cada ponto de integração.

Os dados de carregamento mecânico devem ser fornecidos em relação ao sistema esférico de coordenadas.

Para o carregamento térmico deve ser fornecido o valor da temperatura em cada nó. O programa assume temperatura nula para os nós em que a mesma não foi definida.

C.5. Esquema do Programa - teste

É apresentado um esquema do Programa-teste (Fig.C.1).

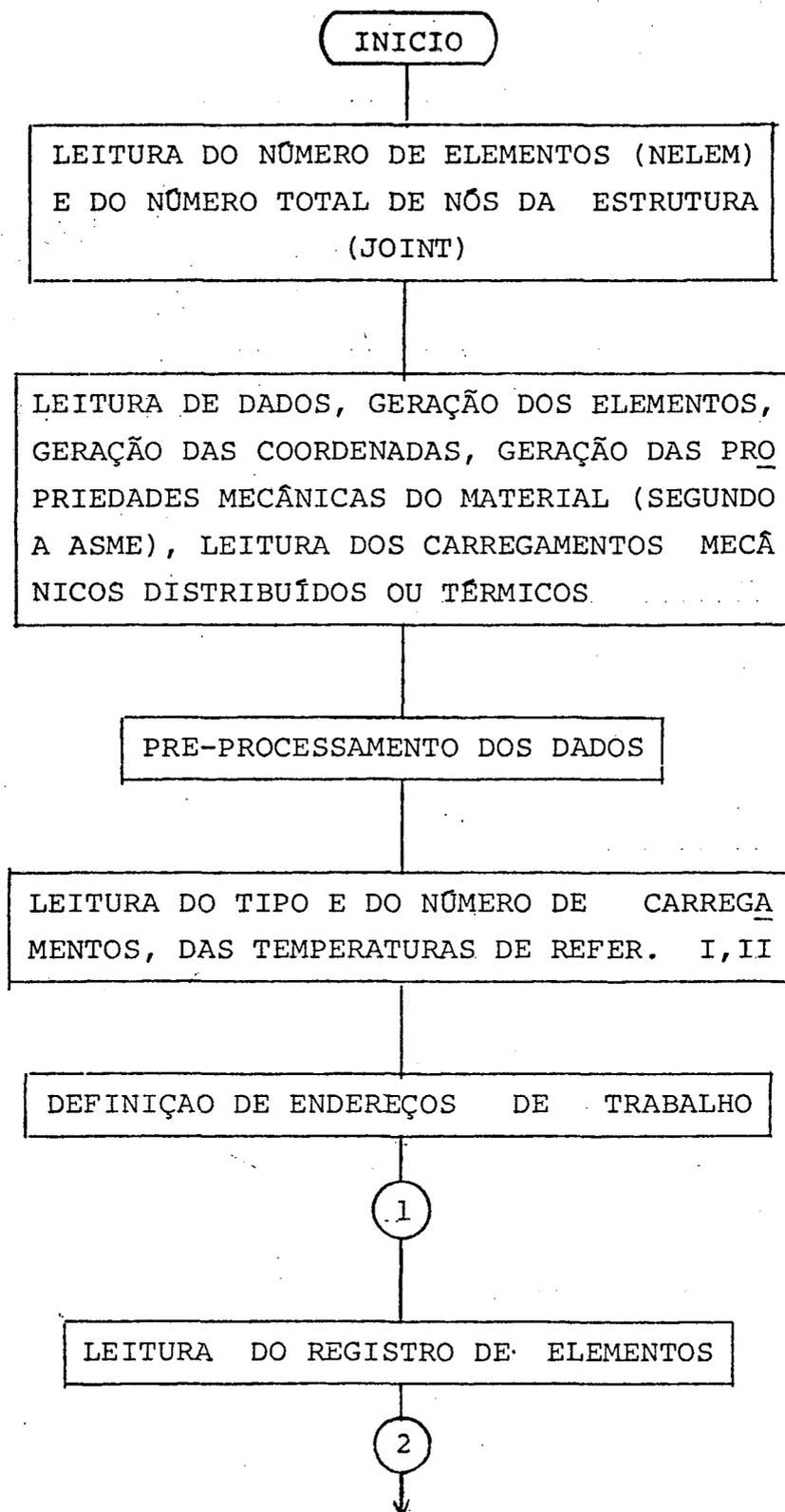


Figura C.1. Esquema simplificado do Programa-teste (continua).

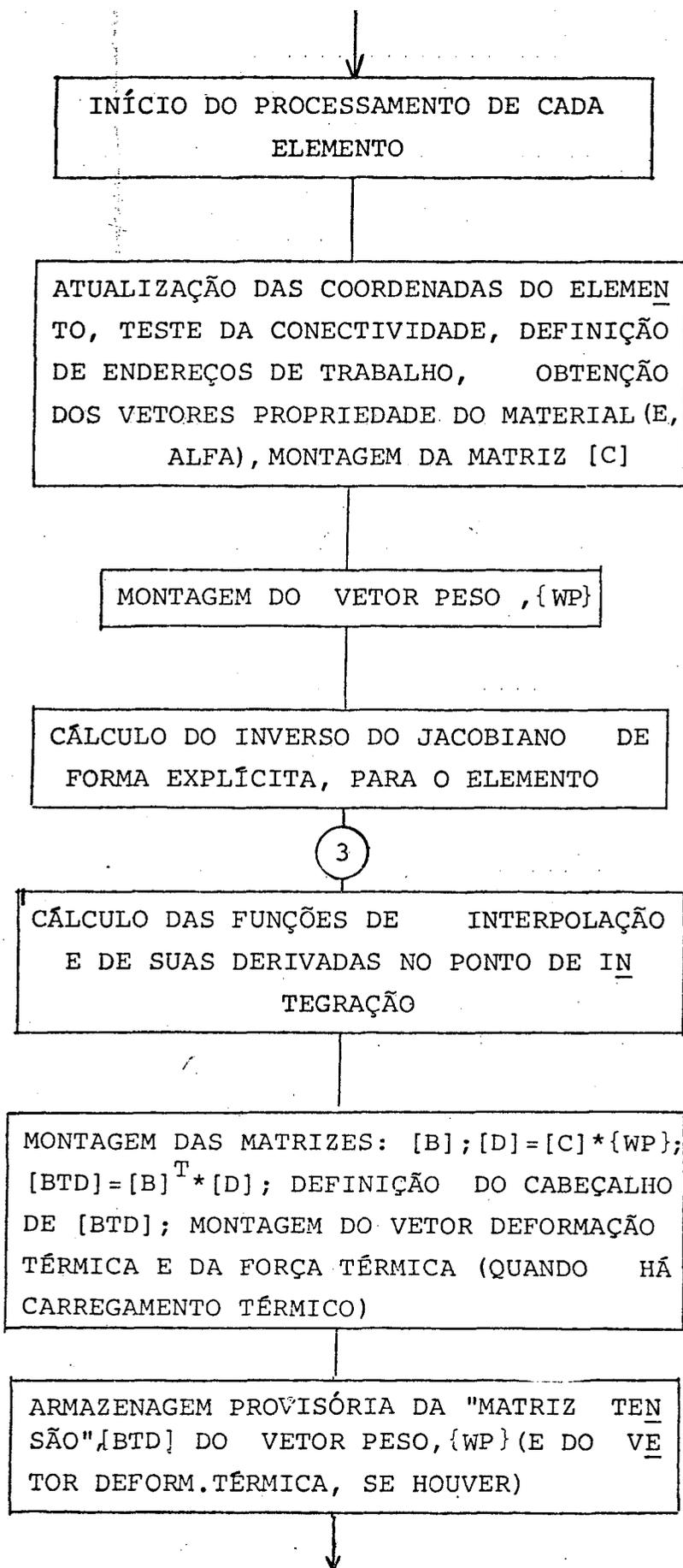


Figura C.1. (Continuação)

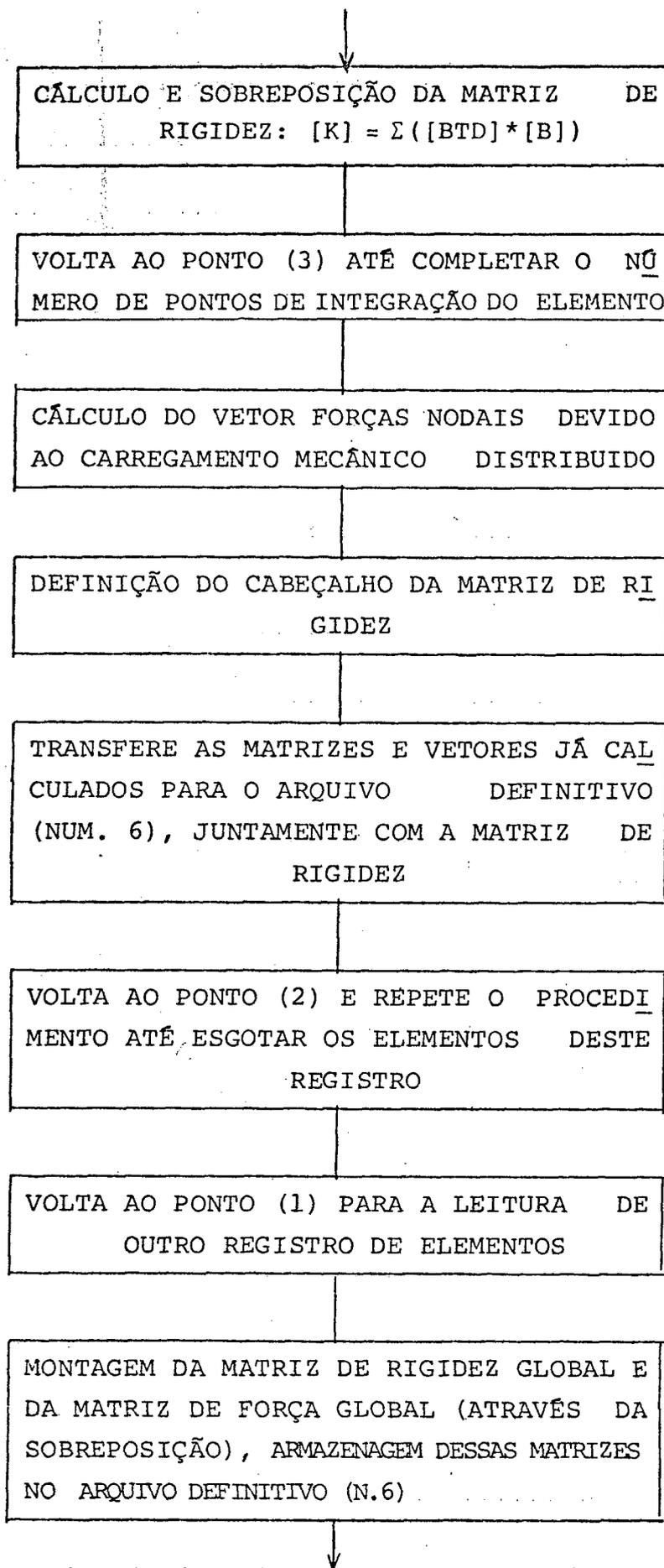


Figura C.1. (Continuação)

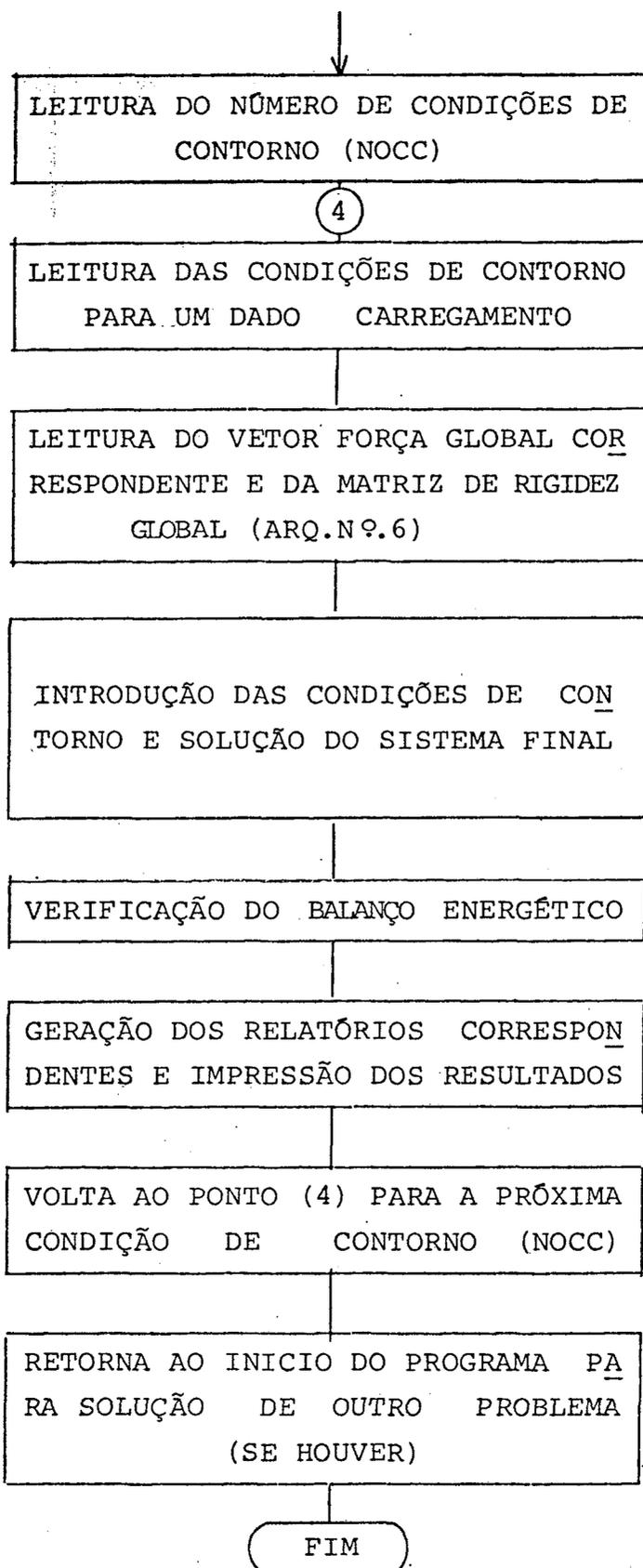


Figura C.1. Esquema simplificado do Programa - teste.

A P E N D I C E D

PROCESSAMENTO DA CARGA DISTRIBUÍDA

D.1. Introdução

Quando o carregamento que age sobre a estrutura é distribuído sobre uma superfície torna-se necessário dispor de um módulo para processar estas cargas [4]. Tal necessidade prende-se a dois fatores importantes:

- Redução dos dados de entrada, com o que se reduz também a possibilidade de erros no fornecimento dos mesmos;
- Obtenção das cargas nodais equivalentes de uma forma imediata em elementos de ordem superior.

Para este fim o SIMELF é dotado do módulo CARS o qual foi modificado para tratar também com cargas distribuídas fornecidas no sistema de coordenadas esféricas.

D.2. Entrada de dados e sistemas adotados

Os dados do carregamento são fornecidos pelas suas três componentes, ou seja, uma componente normal à superfície e duas componentes tangenciais, segundo as três direções do sistema intrínseco do elemento. No caso geral, o sistema de referência tangencial às superfícies, de base $\{e_i\}$, não é coincidente com o sistema de referência normal às superfícies, de ba

se $\{e^i\}$, pois são sistemas não necessariamente ortogonais. Quando os dados são fornecidos é interessante que a carga normal seja dada segundo o sistema normal à superfície, e que a carga tangencial seja dada segundo a direção das tangentes à superfície. Os dois sistemas de referência são mostrados na Fig. D.1.

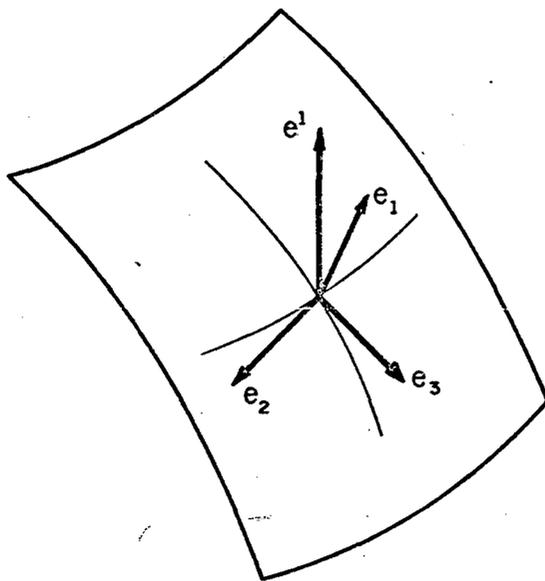


Figura D.1. Sistemas de referência: normal $\{e^i\}$ e tangencial $\{e_j\}$

O cálculo das forças nodais equivalentes é feito segundo o sistema global de coordenadas. Como este sistema não coincide, no caso geral, com os sistemas de bases $\{e^i\}$ e $\{e_j\}$ torna-se necessário, inicialmente, transformar os valores nodais de carga distribuída para o sistema global e são então rea-

lizar a integração obtendo com isto as forças nodais equivalentes. Deste modo é necessário efetuar duas mudanças de base. Inicialmente a carga normal é passada da base $\{e^i\}$ para a base $\{e_j\}$. A seguir o vetor carga distribuída proveniente da carga normal é somado com o vetor carga distribuída tangencial. Resulta daí o vetor carga total segundo $\{e_j\}$, o qual deve ser passado para o sistema global de coordenadas.

Sendo p^r a carga normal em um ponto da superfície do elemento e q_s , q_t as componentes da carga tangencial neste mesmo ponto, as mudanças de base verificadas são:

$$\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} p^r \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} p^r \\ p_j \\ p_t \end{array} \right\}}_{\text{base } \{e_j\}} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ q_s \\ q_t \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p_x \\ p_y \\ p_z \end{array} \right\} \\ \text{base } \{e^i\} \qquad \qquad \qquad \text{base } \{i,j,k\} \end{array}$$

No processamento, é inicialmente calculado p^r , q_s e q_t no ponto de integração, sendo neste ponto feitas as mudanças de base necessárias. Desta forma, o Jacobiano é calculado menos vezes, sendo usado tanto para fazer a mudança de base como para obter-se o peso correspondente ao ponto de integração.

D.3. Forças nodais equivalentes

As forças nodais equivalentes são forças concentradas que agem sobre os nós da superfície carregada. Essas forças são obtidas através do procedimento descrito a seguir. O trabalho realizado pela carga distribuída é igualado ao trabalho

realizado pela força nodal equivalente. O modo de deslocamentos dos pontos da superfície é fornecido pela função de interpolação associada ao n̄ onde está sendo definida a força nodal equivalente. Esta forma de definir os deslocamentos elimina os efeitos das outras forças nodais equivalentes, uma vez que a função de interpolação associada ao n̄ i anula-se em todos os demais n̄s, sendo unitária neste n̄. Assim as outras forças nodais equivalentes não realizam trabalho.

O trabalho realizado pelo carregamento superficial que atua sobre um elemento de área dA é

$$dW_e = p dA \cdot \delta \quad (D.1)$$

sendo p dA a força atuante e δ o deslocamento do ponto correspondente. No caso geral do carregamento distribuído conter componentes segundo as três direções o trabalho é

$$dW_e = \{Q\}^T \{F\} dA \quad (D.2)$$

onde $\{Q\}$ é o vetor deslocamento no ponto e $\{F\}$ é o vetor força distribuída no ponto. Os deslocamentos em um dado ponto são obtidos pelos deslocamentos nodais via funções de interpolação, ou seja,

$$\{Q\}^T = \{q_1, q_2, q_3\}$$

com

$$q_j = \{N_i\} \{U_{ij}\}$$

onde N_j é a função de interpolação calculada no ponto onde se deseja q_j e U_{ij} é o deslocamento do nó i na direção j . De forma semelhante tem-se para a força distribuída,

$$\{F\}^T = \{f_1, f_2, f_3\}$$

com

$$f_i = \{N_i\} \{P_{ij}\}$$

Em forma matricial

$$\{Q\} = [N] \{U\} \quad (D.3)$$

$$\{F\} = [N] \{P\} \quad (D.4)$$

onde

$[N]^T = [N_1, N_2, \dots, N_n]$ => vetor das funções de interpolação;

$\{U_i\}^T = [U_{1i}, U_{2i}, \dots, U_{ni}]$ => vetor de deslocamentos nodais na direção i ;

$\{P_i\}^T = [P_{1i}, P_{2i}, \dots, P_{ni}]$ => vetor de cargas na direção i .

Deste modo o trabalho realizado pela carga que atua sobre dA é

$$dW_e = \{U\}^T [N]^T [N] \{P\} dA \quad (D.5)$$

e o trabalho realizado pela carga que está agindo sobre toda a superfície carregada é dado por

$$W_e = \int_A \{U\}^T [N]^T [N] \{P\} dA \quad (D.6)$$

Para obter as forças equivalentes ao carregamento externo distribuído deve ser feita a primeira variação de We , ou seja,

$$\delta We = \sum_i W_{,u_i} \delta u_i \quad (D.7)$$

onde $W_{,u_i}$ é então a força nodal equivalente, que corresponde ao grau de liberdade U_i do elemento.

Derivando o trabalho externo realizado pela carga distribuída,

$$We = \int_A \{U\}^T [N]^T [N] \{P\} dA$$

em relação à i -ésima componente de U , tem-se

$$We_{,u_i} = \int_A \{0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0\} [N]^T [N] \{P\} dA$$

↑ posição de U_i (D.8)

A matriz $[N]^T$ quando pré-multiplicada pelo vetor $\{0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0\}$ fica na forma:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \{N_i\} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{posição de } U_i$$

devido à natureza de $[N]$, o vetor $\{N_i\}$ possui apenas um elemento não nulo, que depende da direção do grau de liberdade U_i , em relação ao sistema de referência intrínseco.

O produto $[N]\{P\}$ é escrito como

$$[N]\{P\} = \begin{bmatrix} N^T & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & N^T & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & N^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \{F\} \quad (\text{D.9})$$

onde $\{F\}^T = \{f_1 \ f_2 \ f_3\}$ sendo cada uma de suas componentes dada por

$$f_i = N^T P_i$$

O vetor $\{F\}$ representa o carregamento distribuído no ponto de integração, obtido pelos valores nodais e pelas funções de interpolação.

Para obter a força equivalente, que corresponde a um dado grau de liberdade é necessário realizar a integração numérica do produto do vetor $\{N_i\}$ pelo vetor $\{F\}$ do carregamento distribuído. No caso de um elemento com 3 graus de liberdade por nó onde também existem 3 forças nodais equivalentes, por nó, o integrando para um dado nó i é fornecido por

$$\begin{Bmatrix} N_i \ f_1 \\ N_i \ f_2 \\ N_i \ f_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.10})$$

Este integrando deverá ser calculado em cada pon

to de integração. Associado ao ponto de integração existe o peso que depende do processo de integração adotado. Para passar do sistema intrínseco de elemento para o sistema global é necessário usar o Jacobiano. Assim, em cada ponto de integração, é calculado o produto

$$\begin{Bmatrix} N_i f_1 \\ N_i f_2 \\ N_i f_3 \end{Bmatrix} |J| (A)(B)(C) \quad (D.11)$$

para i de 1 ao número de nós da face carregada, sendo A, B, C os pesos de integração.

Como a integração é feita sobre uma superfície, duas observações são importantes. A primeira diz respeito ao Jacobiano o qual deve fornecer a relação de áreas entre o domínio de integração e o real. Isto é feito zerando a linha e a coluna correspondente à direção intrínseca normal à face e tornando unitário o elemento da diagonal principal.

A outra observação é que o peso correspondente à direção normal à face deve ser unitário.

Cabe ainda ressaltar que como os valores das funções de interpolação dos nós que não se situam sobre a face carregada são nulos, apenas os nós da face é que terão forças nodais equivalentes. O processamento do carregamento distribuído é realizado em cada elemento da modelagem, que contribua com carga para a estrutura.