

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

CRITÉRIOS PARA ANÁLISE E OTIMIZAÇÃO DE ALETAS  
LONGITUDINAIS COM TOPO CONVECTIVO

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA  
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
ENGENHARIA MECÂNICA

EDSON SAVELLI GOMES

FLORIANÓPOLIS, SETEMBRO - 1983  
BRASIL

CRITÉRIOS PARA ANÁLISE E OTIMIZAÇÃO DE ALETAS  
LONGITUDINAIS COM TOPO CONVECTIVO

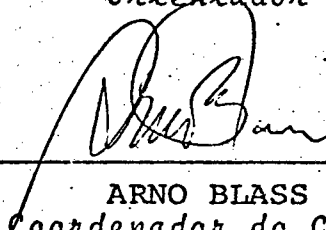
EDSON SAVELLI GOMES

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de *Mestre em Engenharia - Especialidade Mecânica* e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação.



---

SÉRGIO COLLE  
*Orientador*



---

ARNO BLASS  
*Coordenador do Curso*

Apresentada perante a Banca Examinadora composta dos professores:



---

SÉRGIO COLLE  
*Presidente*



---

CLÓVIS RAIMUNDO MALISKA



---

CARLOS ALFREDO CLEZAR



---

ANTONIO FÁBIO CARVALHO DA SILVA

A minha esposa,  
Geny  
Ao nosso filho,  
Rodrigo.

*A memória de meu sogro,*  
*Francisco Cantos.*

## AGRADECIMENTOS

A DEUS, pela vida, razão e intelecto;

Aos nossos PAIS, pela educação que vem de casa;

A minha esposa, GENY, pela compreensão, estímulo e paciência;

Ao nosso filho, RODRIGO, pela esperança de um mundo melhor;

A C.N.E.N. e C.N.P.q., pelo apoio financeiro;

A UFSC, por lutar por melhores condições de ensino e Pesquisa;

Ao professor SÉRGIO COLLE, pela orientação;

Aos professores ANTONIO FÁBIO CARVALHO DA SILVA, CLOVIS RAIMUNDO MALISKA, JOSÉ ANTONIO BELINI DA CUNHA e EDSON BASSO, pela colaboração;

A ELETROMOTORES WEG S.A., pela colaboração na área;

Ao professor LUÍS ALCEU GERÔNIMO, pela amizade;

A Senhorita MARIA CRISTINA NOGUEIRA GRAVA e Senhora ROSELI BECKER SARAIVA, pelo trabalho de datilografia.

## RESUMO

No presente trabalho é analisado o problema de transferência de calor em aletas longitudinais com as principais geometrias utilizadas em equipamentos de troca térmica por convecção.

A equação da energia é resolvida analiticamente para aletas de geometria arbitrária, formulação unidimensional, através do uso do coeficiente de transferência de calor por convecção.

O problema de otimização de aletas é abordado analiticamente, fornecendo os parâmetros que permitem a máxima transferência de calor para determinado gasto de material na aleta.

A utilização do modelo-topo isolado recomenda a utilização de aletas e sua otimização para qualquer número de Biot da aleta.

A utilização do modelo-topo convectivo permite determinar quando é recomendado o uso de aletas, quando é desvantagem utilizar aletas e quando é possível a otimização da aleta, conforme o valor do número de Biot da aleta e de um parâmetro de convecção no topo da aleta.

## ABSTRACT

In the present work the problem of heat transfer in longitudinal fins with the main geometries used in equipments of heat transfer by convection is analyzed.

The equation of energy is solved analytically of several geometries fins, with unidimensional formulation, through the use of the convective heat transfer coefficient.

The problem of fin optimization is approached analytically yielding the parameters which allow the maximum heat transfer for each particular material waste in the fin.

The use of the insulated tip model suggests the use of fins and its optimization for any Biot number of the fin.

The use of the convective tip model allows us to determine when is vantageous or disadvantageous to use fins and when fin optimization is possible according to the value of the Biot number and to a convection parameter on the fin tip.

## SIMBOLOGIA LATINA

$A$  = Definido por (3.60).

$A(X_b)$  = Área de troca térmica por condução na base da aleta, definido por (2.20).

$A_p$  = Área do perfil da aleta.

$b$  = Espessura da base da aleta.

$Bi$  = Número de Biot, definido por (2.15).

$B$  = Definido por (3.61).

$d$  = Domínio de uma aleta, conforme FIGURA 11.

$dc_i, dc_e$  = Domínio circunferencial interno e externo, definidos por (2.106) e (2.107), respectivamente.

$e$  = Espessura da parede onde está montada a aleta.

$f(x)$  = Equação do semi-perfil da aleta, em termos de variáveis dimensionais.

$f(X)$  = Equação do semi-perfil da aleta, em termos de variáveis adimensionais.

$g(x)$  = Função que caracteriza a geometria da aleta.

$h, h_p, h_i, h_t$  = Coeficiente médio de transferência de calor por convecção na face da aleta, na parede primária entre as aletas, na face não aletada do trocador de calor, no topo da aleta.

$I_\gamma$  = Definido por (2.52).

$I_0, I_1$  = Função de Bessel modificada de primeiro tipo, ordem zero e um, respectivamente.



- $k$  = Condutividade térmica do sólido da aleta.
- $k_p$  = Condutividade térmica da parede onde está montada a aleta.
- $K$  = Razão de Aspecto da aleta, definido por (2.16).
- $K_t$  = Razão de Aspecto do topo da aleta, definido por (2.46).
- $K_Y$  = Definido por (2.51).
- $K_0, K_1$  = Função de Bessel modificada de segundo tipo, ordem zero e um, respectivamente.
- $L$  = Altura da aleta.
- $\ell$  = Comprimento da aleta.
- $L_c$  = Altura da aleta corrigida, definido por (2.41).
- $L'_c$  = Altura da aleta corrigida, definido por (2.65).
- $L^*$  = Definido por (5.113).
- $m, m^*(X)$  = Parâmetro dimensional de desempenho térmico, definido por (2.12) e (2.11), respectivamente.
- $N$  = Número de aletas longitudinais montadas na superfície cilíndrica externa.
- $q_d$  = Calor trocado pelo domínio da aleta.
- $q$  = Calor trocado pela aleta.
- $q_A$  = Calor atual trocado pela aleta não isotérmica, definido por (2.19).
- $q_i$  = Calor ideal trocado pela aleta isotérmica, definido por (5.16).
- $Q$  = Calor adimensional trocado pela aleta definido por (2.35).
- $\tilde{q}$  = Definido por (2.104).
- $Q_{mx}$  = Máximo calor adimensional, definido por (3.10).
- $Q_{mn}$  = Mínimo calor adimensional, definido por (3.14).
- $R_h$  = Relação entre os coeficientes de convecção no topo e na face da aleta, definido por (2.33).
- $r_i, r_e$  = Raio interno e externo de superfície cilíndrica.
- $S$  = Espaçamento entre as aletas, medido na base das aletas.

- $T$  = Altura de truncamento da aleta, conforme FIGURA 5.
- $T(x)$ ,  $T(X)$  = Distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta.
- $T_b$ ,  $T(X_b)$  = Temperatura na base da aleta.
- $T_t$ ,  $T(X_t)$  = Temperatura no topo da aleta.
- $T_\infty$  = Temperatura característica do fluido.
- $\bar{T}$  = Temperatura média ao longo da altura da aleta, definida por (2.22).
- $T_0$  = Temperatura característica na face não aletada do trocador de calor.
- $x$  = Coordenada ao longo da altura da aleta.
- $X$  = Coordenada adimensional, definida por (2.2).
- $x_b$  = Coordenada da base da aleta.
- $x_t$  = Coordenada do topo da aleta.
- $X_b$  = Coordenada adimensional da base, definida por (2.3).
- $X_t$  = Coordenada adimensional do topo, definida por (2.4).
- $X_{Y_1}$ ,  $X_{Y_2}$  = Definido por (2.94) e (2.95), respectivamente.
- $y$  = Coordenada ao longo da espessura da aleta, direção transversal.
- $z$  = Direção longitudinal, ao longo do escoamento do fluido.

### SIMBOLOGIA GREGA

$\theta$  = Diferença de temperatura, definido por (2.6).

$\theta$  = Temperatura adimensional, definido por (2.5).

$\theta_b = \theta(X_b)$  = Diferença de temperatura na base da aleta, definido por (2.7).

$\theta(X_b)$  = Temperatura adimensional na base da aleta.

$\theta(X_t)$  = Temperatura adimensional no topo da aleta.

$\theta_{0t}(X_t)$  = Temperatura adimensional no topo em condições otimizadas.

$\beta, \beta^*(X)$  = Parâmetro adimensional de desempenho térmico, definido por (2.14) e (2.8), respectivamente.

$\beta_T$  = Parâmetro adimensional de desempenho térmico, definido por (2.49).

$\beta_t$  = Parâmetro adimensional de desempenho térmico, definido por (2.54).

$\beta_X$  = Definido por (2.53).

$\beta_b$  = Definido por (2.55).

$\beta_{Tc}$  = Definido por (2.67).

$\beta_p$  = Definido por (2.82).

$\beta_1, \beta_2$  = Soluções da equação de otimização.

$\beta_{0t}$  = Parâmetro adimensional de desempenho térmico associado com máxima transferência de calor na aleta.

$\beta_{lim}$  = Parâmetro adimensional de desempenho térmico para o qual atinge-se o limite de otimização.

- $\beta_{mn}$  = Parâmetro adimensional de desempenho térmico associado com mínima transferência de calor na aleta.
- $\epsilon$  = Ângulo de abertura da aleta, definido por (5.75).
- $\eta$  = Rendimento térmico ou eficiência ou índice de performance da aleta, definido por (2.21).
- $\gamma, \gamma_t$  = Parâmetro adimensional de convecção no topo, definido por (2.32) e (2.56), respectivamente.
- $\gamma_2, \gamma_1$  = Definido por (2.86) e (2.87), respectivamente.
- $\gamma_{12}$  = Definido por (3.59).
- $\gamma_{lim}$  = Parâmetro adimensional de convecção no topo para o qual atinge-se o limite de otimização.
- $\delta_1, \delta_2, \delta_{12}$  = Definido por (2.88), (2.89) e (2.90), respectivamente.
- $\phi$  = Definido por (3.56).

## SUMÁRIO

### CAPÍTULO I

#### FUNDAMENTOS

1.1. INTRODUÇÃO.....	001
1.2. REVISÃO DE LITERATURA.....	006
1.3. OBJETIVOS DO TRABALHO.....	022

### CAPÍTULO II

#### DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA, CALOR TROCADO E RENDIMENTO TÉRMICO DE ALETAS

2.1. EQUAÇÃO GERAL DE DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA, CALOR TROCADO E RENDIMENTO TÉRMICO PARA ALETAS LONGITUDINAL DE PERFIL GENÉRICO.....	024
2.2. ALETA RETANGULAR COM TOPO CONVECTIVO.....	029
2.3. ALETA TRAPEZOIDAL COM TOPO CONVECTIVO.....	035
2.4. ALETA PARABÓLICA COM TOPO CONVECTIVO.....	042
2.5. CALOR TROCADO PELO DOMÍNIO DE UMA ALETA.....	046

### CAPÍTULO III

#### CRITÉRIOS PARA OTIMIZAÇÃO DE ALETAS LONGITUDINAIS

3.1. INTRODUÇÃO À TEORIA DE OTIMIZAÇÃO DE ALETAS.....	049
---	-----

3.2. OTIMIZAÇÃO ANALÍTICA DE ALETA RETANGULAR COM TOPO ISOLADO.....	051
3.2.1. Otimização para número de Biot constante.....	051
3.2.2. Otimização para altura constante.....	052
3.2.3. Otimização para área do perfil constante.....	053
3.3. OTIMIZAÇÃO ANALÍTICA DE ALETA RETANGULAR COM TOPO CONVECTIVO.....	060
3.3.1. Otimização para número de Biot constante.....	061
3.3.2. Otimização para área do perfil constante.....	064
3.4. OTIMIZAÇÃO NUMÉRICA DE ALETA RETANGULAR COM TOPO CONVECTIVO.....	082
3.5. OTIMIZAÇÃO ANALÍTICA DE ALETA COM PERFIL TRIANGULAR.....	084

#### CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES.....	088
BIBLIOGRAFIA.....	090
APÊNDICE A	
EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARA ALETA DE PERFIL GENÉRICO.....	097
APÊNDICE B	
ALETA RETANGULAR COM CONVECÇÃO NO TOPO.....	100
APÊNDICE C	
ALETA TRAPEZOIDAL.....	108
APÊNDICE D	
ALETA PARABÓLICA CONCAVO.....	119

## CAPÍTULO I

### FUNDAMENTOS

#### 1.1. INTRODUÇÃO.

Trocadores de calor são equipamentos utilizados quando deseja-se transferir energia térmica de um fluido a outro ou entre um sólido e um fluido.

Os motivos que nos levam a retirar ou fornecer energia térmica a um fluido dependem de considerações funcionais, físicas e econômicas, que por sua vez dependem do objetivo do processo global.

Utiliza-se trocadores de calor quando se deseja transferir calor de um sólido ou fluido a outro fluido, sem permitir o contacto físico entre os dois fluidos. A transferência de calor entre o sólido e o fluido depende das propriedades físicas do fluido, do tipo de escoamento de fluido: se laminar ou turbulento, da área de troca térmica e da diferença de temperatura entre o sólido e o fluido.

No projeto de trocadores de calor deseja-se a máxima capacidade de troca térmica com o mínimo custo de material, operação e manutenção.

Um dos modos de atender os requisitos acima citados é promover aumento na área de troca térmica. Mas o aumento indiscriminado da área de troca térmica implica aumento de dimensões físicas do trocador de calor que por sua vez implica em maior quantidade de material e que implica em maior custo do equipamento. O aumento de área de troca térmica, de modo racional e econômico po

de ser conseguido com o uso de aletas, que são dispositivos utilizados para promover o aumento da área de troca térmica pela extensão da superfície de contacto entre o sólido e o fluido, que pode ser conseguido estendendo-se as superfícies das paredes do trocador de calor para o interior do fluido, com pequeno custo adicional de material e praticamente mantidas as dimensões originais do trocador de calor.

Para trocadores de calor compactos, onde peso e volume do equipamento são parâmetros de igual importância à capacidade de troca térmica e custo do equipamento ou sua manutenção, torna-se praticamente indispensável utilizar a técnica de extensão de superfície, ou seja, utilizar aletas. Pode-se utilizar recursos extras para incrementar a capacidade de troca de calor, pela utilização de escoamento turbulento, aumento de rugosidade da superfície de troca térmica, introdução de geradores de turbulência, aditivos fluidos, vibradores de fluido, etc., porém, o modo mais prático ainda é o uso adequado de aletas.

#### CLASSIFICAÇÃO GEOMÉTRICA DAS ALETAS.

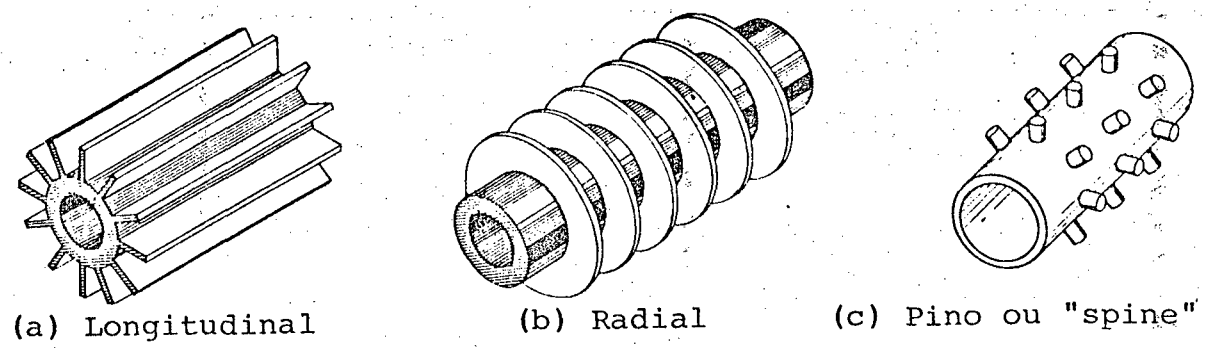
1. *Aletas longitudinais*: são montadas no sentido longitudinal ao escoamento de fluido sobre a superfície primária do trocador de calor.

2. *Aletas radiais ou anulares*: são montadas em superfície primária de forma cilíndrica, no sentido que a transferência de calor na aleta seja na direção radial.

3. *Aletas pinos ou "spines"*: são montadas na superfície primária sob a forma de pinos cilíndricos, tronco-cônicos ou paraboloidais.

Na FIGURA 1 tem-se aletas longitudinais, radiais e pino montadas em superfície cilíndrica.



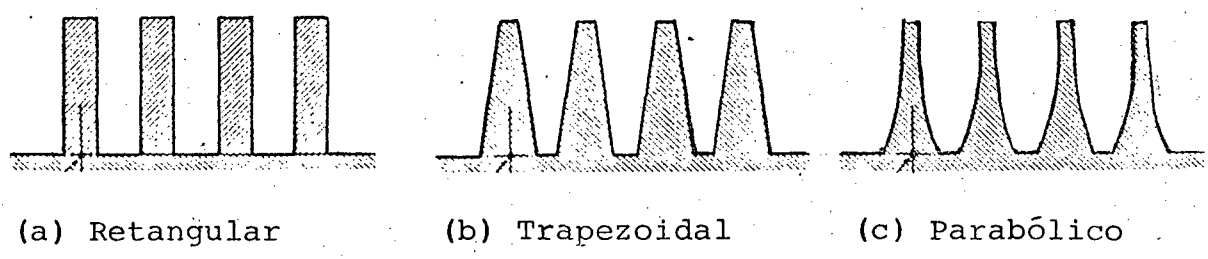


(a) Longitudinal                      (b) Radial                      (c) Pino ou "spine"

FIGURA 1 - Classificação Geral das aletas.

Na FIGURA 2, tem-se os principais tipos de perfis de aletas longitudinais, utilizados em trocadores de calor convencionais.

O presente trabalho será restringido à análise de aletas com perfis retangular, trapezoidal e parabólico.



(a) Retangular                      (b) Trapezoidal                      (c) Parabólico

FIGURA 2 - Principais perfis de aletas.

Um exemplo de aleta longitudinal com perfil triangular é mostrado na FIGURA 3.

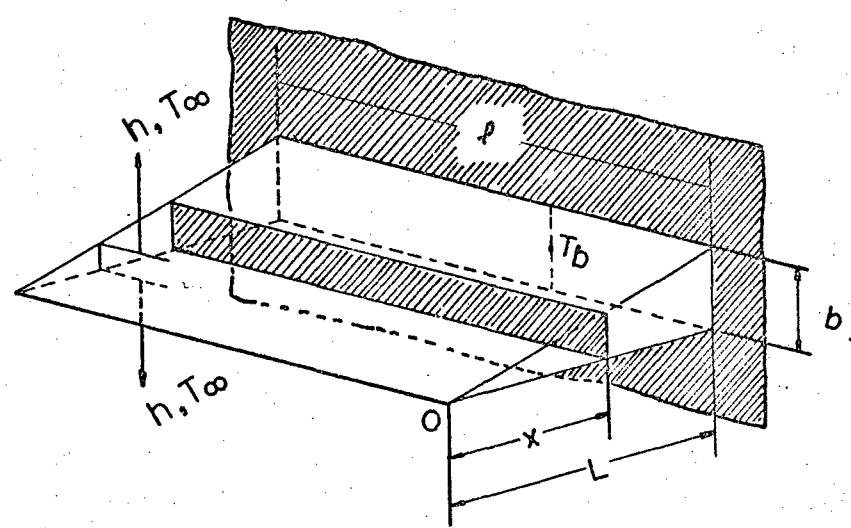


FIGURA 3 - Aleta longitudinal com perfil triangular.

A FIGURA 4 mostra os principais símbolos e nomenclaturas utilizadas no estudo de aletas.

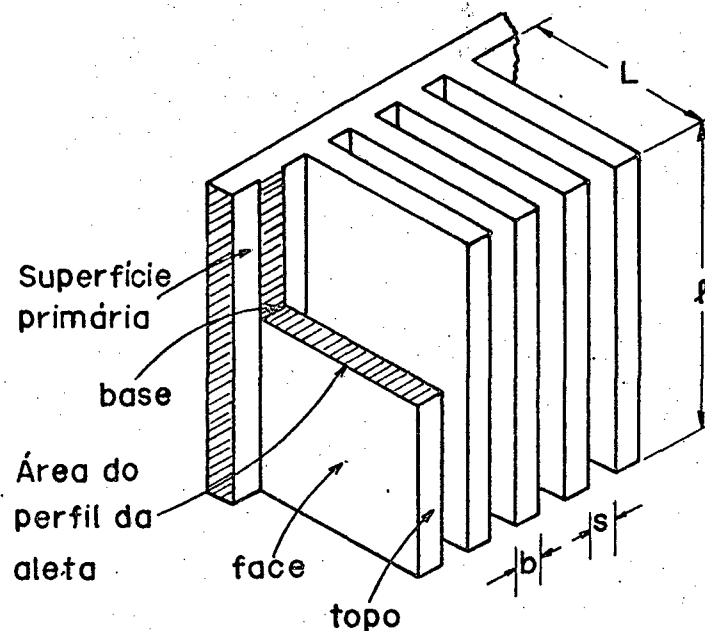


FIGURA 4 - Bancada de aletas retangulares longitudinais.

O uso de aletas implica em maior área de troca térmica entre sólido e fluido, para mesmo volume do trocador de calor. Devido à extensão da superfície, tem-se maior área de contacto entre sólido e fluido e isto implica em maior perda de carga no escoamento do fluido, que por sua vez implica em maior potência de bombeamento de fluido.

No dimensionamento de trocadores de calor os parâmetros térmicos, funcionais e econômicos aparecem interligados de tal modo que um mesmo problema admite inúmeras soluções, dificultando a obtenção da solução que satisfaça as condições de processo a que se destina o trocador de calor.

Para uma particular utilização de aletas, o problema global é escolher a aleta que fornece o máximo efeito de transferência de calor, mínimo custo de material, adequada relação de peso e considerações de espaço disponível no trocador de calor, mínima resistência ao escoamento do fluido refrigerante, adequada resistência estrutural e facilidade de fabricação da aleta.

As aletas que trocam energia por radiação são chamadas *aletas radiantes*. No presente trabalho não serão analisadas trocas de calor por radiação. As aletas que trocam energia térmica por convecção são chamadas *aletas convectivas*. A transferência de calor por condução é fundamental no estudo de aletas, pois, é por condução que o calor é transportado na região sólida, a aleta, sendo posteriormente transportado por convecção no fluido que envolve a aleta.

A resolução do problema de transferência de calor em aletas convectivas corresponde a um problema acoplado de transferência de calor em sólido, a aleta propriamente dita, e transferência de calor em fluido, o meio refrigerante da aleta. Devido a este acoplamento, o estudo de aleta convectiva deve ser feito com o uso da equação de energia na região sólida e o uso das equações da continuidade, da quantidade de movimento e da energia na região de escoamento de fluido, com os fenômenos de interface sólido-fluido sendo especificados como condições de contorno. A solução do problema acoplado é dificultado pelas não-linearidades existente nas equações diferenciais, de tal modo que as soluções possíveis são apenas para algumas geometrias simples, que podem ser obtidas pela resolução numérica simultânea das equações de continuidade, movimento e energia.

Para contornar tal dificuldade, faz-se o desacoplamento da equação de quantidade de movimento da equação da energia através do uso do coeficiente de transferência de calor por convecção, que foi introduzido por NEWTON pela lei de resfriamento. Assim, tem-se o problema de transferência de calor na aleta, que pode ser resolvido especificando condições de contorno adequadas à equação da energia no sólido, que fica relacionada à equação da energia e movimento na região fluida somente pelo coeficiente de transferência de calor por convecção, que entra apenas como condição de contorno, desacoplando os problemas. Esta é uma técnica universal, aceita pela maioria dos pesquisadores em transferência de calor por convecção e que tem sido utilizada para resolver a maioria dos problemas de projetos de trocadores de calor.

Devido ao desacoplamento, tem-se duas classes de problemas em aletas: a) aqueles que procuram a solução do problema da condução de calor no sólido, a aleta, e usam a geometria da aleta

como condição de contorno e recorrem às relações experimentais para o coeficiente de transferência de calor. b) aqueles que procuram a solução do problema de quantidade e movimento e da energia na região de escoamento de fluido e também usam a geometria da aleta como condição de contorno, e cujos resultados são comparados às relações experimentais.

## 1.2. REVISÃO DA LITERATURA.

Devido a grande abrangência do problema de transferência de calor em aletas, impõe-se a restrição de análise de publicações que tratem o problema de condução de calor em aletas.

O início da teoria de aletas deu-se em 1789 quando INGENHOUSS demonstrou a diferença de condutividade térmica de sólidos, construindo cilindros de diferentes metais, todos com iguais dimensões, acoplados a um tanque contendo água ou óleo aquecido e os cilindros resfriados pelo ar ambiente. Em 1816, BIOT sugeriu um modelo teórico para explicar a experiência de INGENHOUSS. DESPRETZ, em 1822-28 desenvolveu uma teoria matemática baseada no modelo de BIOT para explicar a experiência de INGENHOUSS, que permitiu transformá-lo em um método quantitativo para comparação de condutividade térmica.

Num trabalho pioneiro, de 1893, STEWART [01] realizou determinação experimental da distribuição de temperatura em cilindros metálicos longos (aleta pino) para obter a condutividade térmica de ferro e cobre.

HARPER e BROWN [02] desenvolveram as equações essenciais para aletas longitudinais de perfis retangulares, triangular e trapezoidal. A solução matemática correspondente ao perfil trapezoidal é relativamente complicada. HARPER e BROWN [02] também introduziram um novo conceito muito prático, chamado eficiência da aleta definido como a relação entre a quantidade de calor trocado pela aleta em relação ao calor que a aleta trocaria se fosse mantida à temperatura da base, mas sem alterar o coeficiente de transferência de calor. Introduziram o artifício, para análise de aleta com convecção no topo, que consiste em fictício iso

lamento do topo e aumentar a altura da aleta para compensar o isolamento do topo, e calcularam o erro que é introduzido quando é feita tal modificação.

PARSON e HARPER [03], no mesmo ano que HARPER e BROWN [02], obtiveram uma equação para eficiência de aleta longitudinal de espessura constante em análise de radiadores para uso na aviação.

SCHMIDT [04], em 1926, estudou os mesmos três tipos de aletas que HARPER e BROWN [02], sob o ponto de vista de economia de material. Por analogia com escoamento potencial em canais de secção transversal uniforme, postulou que o mínimo material é exigido na aleta quando a distribuição de temperatura na aleta é linear, que corresponde à densidade de fluxo de calor uniforme ao longo da aleta. O resultado da otimização era impraticável.

MURRAY [05] apresentou equações para a distribuição de temperatura e eficiência de aleta anular de espessura constante com distribuição simétrica de temperatura na base de aleta.

HAUSEN [06] mostrou um procedimento passo a passo para obter a distribuição de temperatura e eficiência para aletas cuja espessura varia de modo arbitrário.

FOCKE [07] determinou a distribuição de temperatura em aletas cônicas e pinos cilíndricos. Mostrou como a espessura da aleta pino deve variar para se obter o mínimo material; e também achou que o resultado era impraticável e tentou mostrar como obter as dimensões ótimas de aletas cônica e cilíndrica.

AVRAMI e LITTLE [08] obtiveram equações para distribuição de temperatura para aletas finas de formato de barras e mostraram sob quais condições a aleta pode agir como isolamento térmico da superfície primária. Equações aproximadas também foram incluídas, como casos especiais, assim como HARPER e BROWN [02].

CARRIER e ANDERSON [09] discutiram aletas longitudinais de espessura constante, aleta anular de espessura constante e aleta anular de área de secção transversal constante, apresentando equação de eficiência para cada um dos tipos.

GARDNER [10] fez uma aplicação não usual das equações de HARPER e BROWN ao considerar que as ligações entre os furos

nos suportes de tubos (chicanas) de trocadores de calor são considerados como aletas e assim estimar a distribuição de temperatura nestes suportes.

GARDNER [11] seguindo uma sugestão de R. D. DOUGLASS, apresentou equações gerais para a distribuição de temperatura e eficiência de aletas para qualquer forma de superfície estendida para as quais as hipóteses apresentadas são aplicáveis. A solução destas equações em termos de funções de BESSEL é suficiente para abranger qualquer forma de superfície estendida, cuja espessura varie com alguma forma de potência da distância medida ao longo do eixo normal à base da superfície primária. Curvas são mostradas para eficiência de diversos tipos de aletas como aletas longitudinais, angulares e aletas pinos. É apresentada uma revisão da literatura e discussão de alguns tópicos relevantes no dimensionamento de aletas, através de comentário de trabalhos de outros pesquisadores. O trabalho de GARDNER é fundamental no desenvolvimento do estudo de aletas.

Para realizar análise matemática sobre o comportamento térmico de aletas, é necessário impor algumas hipóteses a respeito da geometria, propriedades físicas e escoamento do fluido, que foram introduzidas inicialmente por MURRAY [05], utilizadas por GARDNER [11], e que são usuais até hoje. Uma destas hipóteses diz que o coeficiente de transferência de calor é o mesmo sobre toda a superfície da aleta. Esta hipótese tem sido continuamente questionada e novas contribuições são apresentadas continuamente, e acredita-se que tal questão só será encerrada com a solução analítica do problema acoplado de sólido-fluido no estudo de aletas.

Em alguns tipos de aletas, o coeficiente de transferência de calor indubitavelmente varia de ponto a ponto sobre a aleta, mas Mc ADAMS e TURNER, em discussão de uma publicação de SAGE [12], mostraram que o uso do coeficiente médio de transferência de calor por convecção na equação teórica para a distribuição de temperatura, dá resultados que concordam com os experimentos de STEWART [01]; citado no trabalho de GARDNER [11].

Poucos trabalhos experimentais são dedicados à análise da variação do coeficiente de transferência de calor ( $h$ ) em superfícies aletadas. GHAI e JAKOB [13], acharam que  $h$  aumenta mono

tonicamente da base ao topo da aleta, mas o experimento utilizado por eles não permitiu resultados representativos para escoamento plenamente desenvolvido.

STACHIEWICZ e Mc KAY [14] tentaram medir os coeficientes locais de transferência de calor em aletas longitudinais isotérmicas. O resultado sugeriu que  $h$  não cresce monotonicamente da base da aleta, como sugerido por GHAI e JAKOB [13], mas a instrumentação utilizada não era suficientemente precisa para permitir que uma conclusão qualitativa fosse obtida.

Os trabalhos de HARRIS e WILSON [15] relacionados com aletas radiais, também indicaram que os coeficientes  $h$  não crescem monotonicamente a partir da base, devido ao efeito da existência de vorticidade no escoamento que passa entre as aletas.

STACHIEWICZ [16] realizou experimento com aletas longitudinais de espessura constante, com escoamento turbulento, perfil hidrodinâmico plenamente desenvolvido, em uma câmara montada na sucção de um ventilador. As aletas foram montadas sobre tubulações de vapor, e de modo tal que o espaçamento entre as aletas pudesse variar, mantida constante a altura e espessura das aletas. As três aletas centrais foram construídas em lâminas de cobre de 0,019 polegadas (0,483 mm) de espessura e altura de 1,5 polegadas (38,1 mm). Em ambas as faces da aleta foram coladas lâminas de nylon de 0,051 polegada (1,295 mm) de espessura. O topo da aleta também foi revestido. A aleta central do conjunto foi instrumentada para medir os coeficientes locais de transferência de calor, através da colocação de termopares de superfície (discos planos) de 0,010 polegadas (0,254 mm) de diâmetro e 0,002 polegadas (0,0508 mm) de espessura, e foram fixados dentro do nylon, nas duas faces da placa de nylon. Os termopares foram conectados diferencialmente de modo que a queda de temperatura na placa de nylon pudesse ser medida diretamente. A placa de nylon foi colocada à placa de cobre, sem existência de resistência térmica de contacto na interface. A aleta instrumentada foi calibrada para fornecer leitura direta do fluxo de calor. Detalhes de construção e calibração da instrumentação são dadas na referência [17]. Os resultados mostram que efetivamente o coeficiente local de transferência de calor varia da base até o topo. O coeficiente local aumenta a

partir da base da aleta, cujo valor é igual a aproximadamente metade de  $h$ -médio, até um máximo de  $1,2 h$ -médio aproximadamente na metade da altura da aleta e depois decresce novamente até o valor de  $h$ -médio para 75% da altura da aleta, finalmente aumenta para  $1,35 h$ -médio no topo da aleta. Esta distribuição é notadamente similar para todos os espaçamentos e todos os números de Reynolds abrangidos no experimento, com escoamento turbulento. É apresentada a justificativa qualitativa para o comportamento do coeficiente local ao longo da aleta, baseada na análise de escoamento de fluidos. Os dados experimentais são comparados com correlações para placas planas e a correlação de Colburn para dutos circulares. A melhor correlação para todos os experimentos é obtida quando se usa o diâmetro equivalente baseado na área de passagem e perímetro de troca térmica para definir o número de Reynolds e quando o coeficiente de transferência de calor global é definido em função da temperatura média de mistura do fluido na seção transversal de escoamento.

A equação que correlaciona o coeficiente global de transferência de calor na aleta é comparada com a correlação de Colburn para dutos circulares com resultado 9% acima da correlação Colburn. Também é apresentada equação de correlação para o coeficiente de transferência de calor na superfície primária ou base do canal da aleta. As correlações de transferência de calor por convecção baseadas em modelo de placa plana são investigadas, chegando-se a conclusão de que as correlações para valor local em placa plana estão ligeiramente abaixo do valor local medido experimentalmente; e que a correlação de placa plana fornece valores monotonicamente crescente a partir de um valor inicial do coeficiente  $h$  na base da aleta, que não confere com os resultados experimentais.

SPARROW e BECKEY [18] através de um trabalho experimental determinaram a perda de carga em uma bancada de aletas longitudinais, perfil retangular, com espaçamento no topo ("tip clearance") variável, com ar escoando em regime turbulento. A principal conclusão é que a correlação ( $f \cdot Re$ ) é independente do espaçamento no topo da aleta e que concorda muito bem com a equação de PRANDTL para dutos circulares. O uso do diâmetro hidráulico no número de Reynolds baseado na área de passagem do fluido elimina a



introdução de um parâmetro associado com o espaçamento no topo.

STARNER e McMANUS [19] realizaram experimento com aletas longitudinais de espessura constante para convecção natural em uma bancada de aletas. Obtiveram correlações para o coeficiente médio de transferência de calor por convecção natural para a bancada na posição horizontal, vertical e inclinada a  $45^{\circ}$ , dissipando calor para o ambiente. Mostraram também que a adição de aletas pode diminuir a capacidade de dissipar calor de uma placa plana.

SPARROW, BALIGA e PATANKAR [20] fazem a análise das características de transferência de calor em regime laminar de um conjunto de aletas longitudinais para o caso de uma parede adiabática situada próximo ao topo das aletas, de modo a formar um espaçamento entre o topo e a parede. A análise envolve a solução do campo de velocidade no espaço entre as aletas e no espaço entre o topo das aletas e a parede, a equação da energia na aleta e no fluido que envolve a aleta é resolvida simultaneamente. Para a aleta, os resultados mostram que a transferência de calor é mínima próxima da base da aleta e aumenta em direção ao topo. A máxima transferência de calor ocorre ou no topo ou imediatamente abaixo do topo, dependendo do espaçamento no topo. O coeficiente de transferência de calor foi calculado e constatou-se que varia ao longo da altura da aleta, podendo assumir valores negativos. Os resultados demonstram que o uso do coeficiente médio convencional é inaplicável a uma bancada de aletas, pois segundo este modelo a máxima transferência de calor ocorre próxima da base da aleta.

SPARROW e HSU [21] determinaram analiticamente o coeficiente de transferência de calor no topo de aletas para escoamento do fluido em regime laminar. Foi utilizado o modelo de uma bancada de aleta com uma parede adiabática situada próximo ao topo das aletas. A análise foi realizada para perfil hidrodinâmico e perfil térmico plenamente desenvolvidos e escoamento laminar. Os resultados foram obtidos por solução numérica das equações de conservação de quantidade de movimento e da energia para o fluido e da energia para a aleta, admitindo condução bi-dimensional na aleta. Da solução, o coeficiente médio de convecção no topo da aleta foi calculado e comparado com o coeficiente médio na face principal próximo ao topo da aleta. Estes coeficientes foram en-

contrados aproximadamente iguais, com o máximo desvio da ordem de 25%, e os coeficientes no topo são maiores do que aqueles da face principal. Os maiores valores locais de coeficientes de transferência de calor ocorrem no canto onde o topo e a face principal se interceptam, enquanto que os menores coeficientes ocorrem na base da aleta. A variação entre a base e o topo inclui um rápido crescimento próximo a base, um platô que se estende sobre a maior parte da altura da aleta e um extremamente rápido crescimento próximo ao topo.

SPARROW e CHYU [22] resolvem simultaneamente o problema de condução na aleta e convecção no fluido, para regime laminar, através de um modelo simplificado de aleta, com topo isolado, onde o fluido escoia na direção (do topo para a base) paralela ao gradiente de temperatura, semelhante ao modelo de placa plana. A resolução é feita por métodos numéricos e comparada com a solução tradicional baseada em coeficiente de filme constante sobre a aleta. Os valores globais para o calor transferido e rendimento da aleta estão em excelente concordância pelo método de acoplamento fluido-sólido e pelo método de  $h$  constante. Os valores locais de coeficientes de transferência de calor, obtidos por solução numérica, tem o seguinte comportamento monotônico: no topo da aleta o valor é extremamente elevado, diminuindo rapidamente até metade da aleta e depois diminuindo mais lentamente até a base da aleta, com valor não nulo na base da aleta. O coeficiente de transferência de calor no topo é aproximadamente 2,7 vezes maior que o valor médio. O comportamento do coeficiente  $h$  ser monotônico é justificado que neste modelo teórico não estão incluídas as forças de flutuação, além da semelhança da aleta com a placa plana. Os cálculos utilizando valor médio e valores locais no coeficiente  $h$  levam a resultados no calor trocado global com diferença insignificante, ainda que no topo da aleta haja maior troca de calor. As diferenças positivas e negativas de  $h$  entre um modelo e outro tendem a cancelar-se mutuamente, resultando um valor virtualmente exato no calor trocado por toda a aleta.

SPARROW e ACHARYA (23) resolveram o problema de uma aleta tipo placa plana com camada limite por convecção natural. O coeficiente de convecção natural foi computado e mostrado não variar monotonicamente do topo à base da aleta, onde o coeficiente

decrece inicialmente, atinge um mínimo e novamente aumenta. A existência do mínimo e subsequente aumento pode ser atribuído ao aumento de forças de flutuação encontrada pelo fluido quando passa do topo à base da aleta.

KARVINEN [24] resolve o problema de condução de calor na aleta por acoplamento parcial com a equação de convecção. Utiliza equações propostas por ROHSENOW e HARTNET [25] para os fluxos de calor por convecção natural ou forçada, regime laminar ou turbulento, obtidas pelo método integral e técnica de superposição. A equação do fluxo de calor é substituída na equação de balanço de energia na aleta, e em seguida é realizada a solução numérica por diferenças finitas, para obter a distribuição de temperatura na aleta. Quando o fluxo de calor e a distribuição de temperatura são conhecidos, o coeficiente de transferência de calor pode ser obtido. São fornecidos gráficos com variáveis adimensionais que permitem calcular facilmente o calor local ou global trocado por aletas, qualquer que seja o tipo de escoamento de fluido. Nesta análise as aletas são longitudinais com perfil retangular (espessura constante).

KARVINEN [26] estende o método apresentado na referência [24] para aletas longitudinais de perfis do tipo genérico, representável por uma equação paramétrica. Usando os resultados sob a forma de gráficos, o calor global trocado pela aleta pode ser facilmente calculado. Comparando o resultado do modelo convencional baseado em  $h$  constante e o modelo acoplado de condução-convecção, verifica-se que para escoamento laminar existe uma notável diferença, mas para escoamento turbulento a diferença é pequena. Em qualquer caso, a teoria convencional de aletas superestima o calor trocado total.

HARPER e BROWN [02] investigaram, analiticamente, a hipótese de formulação unidimensional, e notaram que desprezando os gradientes de temperatura nas direções longitudinal e transversal para aletas retangulares, suficientemente finas, o erro cometido no calor trocado é apenas da ordem de um por cento, conforme citação por SCHNEIDER [27], capítulo 4.

IREY [28] faz uma revisão da literatura, porém desconhece o trabalho de HARPER e BROWN [02], e assim conclui que a

aproximação unidimensional tem sido discutida em textos correntes e aplicada na prática industrial, mas os limites de validade deste modelo não são claramente especificados e não se conhecem limites numéricos. Assim, IREY resolve o problema bidimensional de aleta radial com propriedades constantes. A solução analítica é obtida por série infinita. Compara o erro cometido no calor trocado pela aleta unidimensional e bidimensional, e conclui que para o número de Biot menor que 0,1 o erro é menor que um por cento, mostrando que para aplicações usuais a solução unidimensional é uma aproximação satisfatória.

LEVITSKI [29] também faz uma revisão da literatura e mostra que é idéia corrente que a aproximação unidimensional é válida sempre que a dimensão transversal é pequena comparada com a altura da aleta. Mas, CRANK e PARKER [30] mostraram que para placas com convecção na superfície, o gradiente de temperatura na direção da espessura torna-se desprezível quando o número de Biot baseado na espessura é muito menor que a unidade. Assim, LEVITSKI estudou o comportamento térmico de uma aleta retangular convectiva da altura infinita por solução analítica tridimensional, e de uma aleta radial de comprimento finito, por solução analítica bidimensional. Para aleta retangular de comprimento infinito, com coeficiente  $h$  constante, chegou às conclusões que o fato da altura da aleta ser maior que a espessura é um parâmetro irrelevante, e que para a maioria das aplicações práticas o número de Biot é suficientemente pequeno para garantir a validade da aproximação unidimensional. Alerta, entretanto, que para problemas onde o coeficiente de transferência de calor é grande, como em condensação, e a condutividade térmica do material da aleta é pequeno, como em materiais não metálicos, a aproximação unidimensional poderá ser incorreta, ainda que a relação da espessura para altura seja pequena. Concluiu finalmente que a validade da aproximação unidimensional está garantida sempre que o número de Biot baseado na espessura da aleta for muito menor que um. Mas é importante destacar que tais conclusões foram obtidas para aleta de altura infinita.

LAU e TAN [31] investigaram o comportamento térmico de aletas retangular finita e radial finita, com propriedades cons

tantes, através de formulação bidimensional e solução analítica em série, com o objetivo de estabelecer limites quantitativos para aplicação da solução aproximada unidimensional a um grande grupo de problemas em aletas. No caso da aleta retangular, foi admitido que o topo da aleta não é isolado, com igual coeficiente de convecção que na face da aleta. Como resultado, ficou evidenciado que para  $K < 100$  (onde  $K$  = razão de aspecto da aleta, definido como a altura da aleta dividido pela metade da espessura da aleta) o calor total trocado pela aleta é fortemente dependente do número de Biot e da razão de aspecto. Para  $K > 100$ , o calor total trocado torna-se praticamente independente de  $K$  e depende apenas de Biot, aumentando apenas com o aumento de Biot. Estas conclusões são válidas para o número de Biot menor que 0,1. Seguindo o critério introduzido por IREY [28], é apresentado o erro que se comete ao calcular o calor trocado pela formulação unidimensional. Para número de Biot = 10, o erro no calor trocado varia de 1% até 60%; para número de Biot = 1, o erro varia de 1% até 10%, crescendo com o aumento de  $K$ . É oportuno recordar que a formulação unidimensional não é adequada para números de Biot maiores que 1,0. Para números de Biot menores que 0,1 o erro cometido no calor trocado é menor que 1%. Verifica-se que para as aplicações industriais convencionais, o número de Biot geralmente é muito menor que 0,1.

Deve-se atentar ao fato que para razão de aspecto menor que 2, implica que a espessura é maior que a altura da aleta, perdendo o sentido de extensão da superfície para o interior do fluido, que é a principal finalidade do uso de aletas; mas ainda assim a formulação unidimensional dá pequenos erros se o número de Biot for menor que 0,1, pois o calor trocado dá-se praticamente apenas pelo topo da aleta, cujo comportamento é unidimensional, assim o erro percentual torna-se negligenciável.

SURYANARAYANA [32] estudou os efeitos bidimensionais na transferência de calor em conjuntos de aletas longitudinais retangulares, topo isolado, utilizando três modelos unidimensionais para determinar a temperatura na base da aleta, e assim calcular o calor trocado por aleta unidimensional. Simultaneamente resolveu a equação da energia para aleta bidimensional usando técnica numérica por diferenças finitas, para calcular o calor trocado pe

la aleta. Fixou o valor do número de Biot = 0,1 em todos os casos. Estudou relações entre altura, espessura e espaçamento para as aletas, abrangendo razões de aspecto  $1 \leq K \leq 5$ , que são valores muito pequenos, pois não correspondem aos valores usuais para aletas; não permitindo o uso das conclusões em aplicações industriais.

HEGGS e STONES [33] investigaram o comportamento térmico de aletas longitudinais retangulares, topo convectivo, utilizando formulação unidimensional e bidimensional, estudando os efeitos de geometria de espessura da parede, espaçamento, altura, espessura da aleta e além da razão entre os coeficientes de convecção na parte interna não aletada e na parte externa aletada. É um trabalho completo. A solução bidimensional é realizada por diferenças finitas. Fixou o valor do número de Biot (parâmetro cruzado, baseado na espessura da aleta, condutividade térmica da parede e no coeficiente de convecção na parte interna não aletada)  $B_{11} = 2$  em todos os casos. Os gráficos mostram qualitativamente que o erro no calor trocado varia com a razão de aspecto, relação de espaçamento e relação entre espessura da parede e espessura da aleta. HEGGS e STONES obtiveram que o erro inicialmente aumenta com  $K$  e depois atinge um máximo e depois diminui até que torna-se constante com  $K$ , concordando plenamente com o trabalho de LAU e TAN [31]. As principais diferenças entre os dois trabalhos são: um é analítico e o outro é numérico, e que LAU e TAN [31] não consideraram o espaçamento entre as aletas e tão pouco consideraram o efeito da espessura da parede onde estão montadas as aletas.

HEGGS, INGHAM e MANZOOR [34] investigaram o comportamento térmico de aleta retangular, longitudinal, bidimensional, topo convectivo, considerando a influência do espaçamento, altura e espessura da aleta. A solução é analítica, por separação de variáveis e expansão em série truncada, através de um tratamento matemático rigoroso. Os resultados obtidos indicam que este método é mais acurado e computacionalmente mais econômico que técnica de diferenças finitas ou método de elementos finitos. Além do mais, este método dá solução acurada também para problemas onde os métodos de diferenças finitas ou elementos finitos são falhos para fornecer resultados aceitáveis.

Um parâmetro muito importante no projeto de trocado -

res de calor aletados, além dos parâmetros térmicos, é o peso das aletas, pois geralmente as aletas são feitas de material de alta condutividade térmica, alta resistência à corrosão e alta resistência mecânica. Assim, é natural desejar a mínima quantidade de material para as aletas, para que troque a quantidade de calor especificada. Define-se aleta otimizada aquela que troca máxima quantidade de calor para dado peso da aleta, mantidos constantes  $h$  e temperaturas da base e do fluido.

O problema de otimização de aletas foi investigado inicialmente, em 1926, por SCHMIDT [04], que postulou que o mínimo material é exigido quando a distribuição de temperatura na aleta é linear. Mostrou como a espessura de cada tipo de aleta longitudinal, radial e pino deve variar para obter tal condição. Mostrou que tais aletas são de fabricação impraticável. Mostrou as dimensões otimizadas para aletas longitudinais e anulares de espessura constante e aleta longitudinal triangular, para dadas condições de operações. DUFFIN [35] utilizando cálculo variacional mostrou que a hipótese postulada por SCHMIDT [04] está correta. APPL e HUNG [36] tentaram otimizar superfícies aletadas usando aletas individualmente otimizadas (aletas de mínimo material) de altura restrita. Com mínima distância prescrita entre as aletas, formularam equações para o número de aletas que garantiam o mínimo peso de material para dada dissipação de calor na superfície.

MARSH e COSTELO [37] pesquisaram a otimização de aletas convectivas de seção retangular, topo isolado, através de método estocástico, incluindo os custos do material, custo de fabricação, montagem e probabilidade de erro no projeto, como parâmetros relevantes. São apresentados quatro métodos de solução do problema.

MADAY [38] obteve a expressão geral para aleta convectiva de mínimo peso, aplicando o princípio de mínimo desenvolvido por PONTRYAGIN no STEKLOV MATHEMATICAL INSTITUTE, Moscou, 1962. O princípio de mínimo tem base no cálculo variacional clássico. Como exemplo, é resolvida a otimização de aleta longitudinal com propriedades físicas constantes, obtendo a solução do perfil parabólico obtida por SCHMIDT [04].

BAR-COHEN [39] investigou a otimização de aleta retan

gular, topo isolado, com convecção natural, aleta na vertical. É feita uma revisão da literatura mostrando que a teoria já desenvolvida para placas planas verticais, paralelas, não é aplicável à teoria de otimização de aleta, pois são válidas para condições isotérmicas ou de fluxo constante de calor. Um estudo experimental realizado por ELENBAAS [40], estabeleceu uma correlação entre a separação entre as placas adjacentes isotérmicas e o coeficiente de convecção natural na superfície das placas, e recomendou que o espaçamento entre as placas para resultar máxima transferência de calor pode ser obtido fazendo o número de RAYLEIGH (baseado na Razão de Aspecto e espaçamento entre as placas) aproximadamente 50. Assim, o número de NUSSELT ótimo associado é aproximadamente 1,05. Um estudo teórico posterior realizado por BODOIA e OSTERLE mostrou que o número de RAYLEIGH ótimo é igual a 70 para fluxo bidimensional idealizado entre as placas. Deste modo, BAR-COHEN utilizou a teoria de otimização desenvolvida por SCHMIDT [04] para aletas com topo isolado e os resultados experimentais de ELENBAAS [40] para otimizar aletas com convecção natural, obtendo os parâmetros otimizados: espessura, altura, espaçamento e fluxo de calor. Um gráfico para aleta de alumínio e parâmetros típicos mostra claramente os pontos de máximo no calor trocado, que corresponde aos pontos ótimos, um ponto para cada parâmetro de convecção.

KOVARIK [41] define um simples critério de otimização de dutos aletados externamente. Mostra que a teoria de otimização tradicional introduzida por SCHMIDT [04] necessita de uma condição adicional, que deve ser dada em termos de relação entre custos, número de aletas e área da seção transversal de aletas.

POULIKAKOS e BEJAN [42] estabelecem as bases teóricas para a minimização da geração de entropia em superfícies extendidas (aletas). Obtêm inicialmente a fórmula onde dá a taxa de geração de entropia para uma aleta geral. Baseado neste resultado geral, métodos analíticos e resultados gráficos são utilizados para selecionar as dimensões ótimas de aletas pino, aleta tipo placa retangular, aleta tipo placa com seção trapezoidal, e aleta tipo placa com seção triangular.

GUCERI e MADAY [43] utilizam o Princípio de Mínimo



para analisar aletas radiais de mínimo peso. A distribuição de temperatura, espessura e fluxo de calor são admitidos apenas função do raio. As soluções são obtidas para a solução unidimensional e para o caso aproximado quando a curvatura do perfil da aleta é desprezado nos cálculos de convecção, de modo semelhante ao tratamento matemático utilizado por MADAY [38].

MIKK [44] analisa o problema de reduzir ao mínimo a massa de uma aleta anular ou radial convectiva com fluxo de calor prescrito. A massa da aleta ideal examinada difere muito pouco da massa da aleta radial de perfil triangular.

A análise do desempenho térmico de aletas tem sido abordada em muitos livros de transferência de calor, pois o assunto já constitui um tópico consagrado na maioria das ementas das disciplinas de Transferência de Calor que são ministradas aos cursos de Engenharia Mecânica e Engenharia Química.

ARPACI [45], no CAPÍTULO III, analisa o problema de distribuição de temperatura em aletas longitudinais por formulação unidimensional, com solução analítica exata e soluções aproximadas. No CAPÍTULO IV, analisa o problema em formulação bidimensional, com solução analítica por separação de variáveis e desenvolvimento em série, para alguns casos particulares fundamentais.

CHAPMAN [46], no CAPÍTULO III, analisa o problema Geral de aletas por formulação unidimensional, abordando aletas longitudinais, radiais e aletas pinos, para perfis retangular e triangular.

HOLMAN [47], no CAPÍTULO II, analisa o mesmo tipo de problema que CHAPMAN [46], cita o problema de otimização, e mostra alguns exemplos numéricos básicos.

KREITH [48], no CAPÍTULO II, analisa a transmissão de calor em superfícies extendidas, discutindo seleção e projeto de aletas, citando que aletas finas e pouco espaçadas são superiores a aletas espessas e em menor quantidade, do ponto de vista de transmissão de calor e que a adição de aletas só é justificada no lado em que o coeficiente de transmissão de calor por convecção for pequeno.

Muitos outros autores consagrados também analisam a

transferência de calor em aletas, tal que enumerá-los seria praticamente impossível e pouco proveitoso, pois, como visto acima, todos abordam praticamente o mesmo assunto em um único nível de detalhamento. Os seguintes autores são destacados por realizarem uma análise mais detalhada sobre o desempenho térmico de aletas :

JAKOB [49], dedica o CAPÍTULO XI à análise das equações gerais para diversos perfis e aletas longitudinais, radiais e pinos. Faz importante revisão da literatura. Detalha a questão de otimização de aleta longitudinal de perfil retangular com topo isolado. Mostra que bastam apenas duas medições de temperatura para diagnosticar se dada aleta está operando em condições otimizadas. Também é analisada otimização de aletas com perfis triangular e parabólico. Na parte de revisão de literatura mostra que o estudo de aletas iniciou-se com os experimentos de INGENHOUSSE e posteriores trabalhos de BIOT e DESPRETZ. Infelizmente, nas equações (11.50), (11.57), (11.59), sobre otimização de aletas, o autor do presente trabalho constatou existir um pequeno erro de matemática básica no livro do Prof. JAKOB, tal que os coeficientes numéricos estão incorretos.

SCHNEIDER [27], dedica o CAPÍTULO IV à análise de superfícies extendidas, analogamente a JAKOB [49]. Justifica a validade do modelo unidimensional baseado apenas na relação altura-espessura da aleta, não utiliza o número de Biot. Obtém a distribuição de temperatura e calor trocado por aleta longitudinal com topo convectivo, deriva a expressão do calor trocado em relação a altura da aleta, iguala a zero e obtém um parâmetro denominado "ótimo número de Nusselt". É discutido quando é vantagem utilizar aletas e quando a aleta pode funcionar como isolamento térmico. Deve-se notar que o nome "ótimo número de Nusselt" é inapropriado, pois o parâmetro em questão é o número de Biot e não o número de Nusselt. Faz análise da eficácia e eficiência da aleta, mas prefere utilizar o termo "índice de performance" ao invés de rendimento ou eficiência da aleta. Destaca que a eficiência também é uma definição de temperatura média da aleta. Analisa a otimização de aleta longitudinal retangular topo isolado, triangular e parabólica. São fornecidos parâmetros para projetos de aletas, inclusive qual o espaçamento que deve ser mantido entre as aletas para máxima transferência de calor. Recomenda que as aletas devem ser pro-

jetadas com as menores dimensões possíveis, pois para dobrar a capacidade de troca térmica de uma aleta deve-se utilizar uma aleta oito vezes mais alta ou duas aletas de mesma dimensões. Faz uma breve revisão de literatura no final do capítulo.

KERN [50], dedica o CAPÍTULO XVI à análise de extensão de superfícies. Deduz a equação de eficiência de aletas longitudinais com perfil retangular, introduz o conceito de eficiência ponderada. Fornece um gráfico contendo uma curva isotérmica obtida a partir de numerosas experiências de aquecimento e resfriamento com diferentes arranjos de tubos e aletas longitudinais para correlacionar transferência de calor e perda de carga com o número de Reynolds. Analisa o problema de incrustação em superfícies extendidas. São fornecidos diversos exemplos numéricos de cálculos de duplo tubo aletado, através de uma técnica de cálculo característica do autor.

KRAUS [51], em um livro exclusivo sobre transferência de calor em superfícies extendidas, analisa os casos mais gerais de aletas, tal que em cada capítulo é analisado um grupo de aletas, com o máximo rigor matemático. Como exemplo, um capítulo é dedicado à análise de um componente eletrônico - um transistor, como fonte de calor e o problema da dissipação do calor.

KERN e KRAUS [52], em um livro indispensável ao estudo de transferência de calor em superfícies extendidas, apresenta uma revisão de transferência de calor e revisão de matemática usual aos problemas de transferência de calor, análise global de aletas com convecção e radiação, soluções aproximadas obtidas por técnica analógica, experimental e diferenças finitas (programas prontos para cálculos de aletas), análise de passagens aletadas, trocadores de calor aletados longitudinalmente e radialmente, e trocadores de calor compactos. É importante destacar que nesta obra são fornecidas equações, gráficos e correlações para cálculos do coeficiente de transferência de calor em superfícies aletadas. É uma obra praticamente completa sobre o assunto.

KNUDSEN e KATZ [53] em um livro sobre mecânica de fluidos e transferência de calor fornece inúmeras informações sobre perda de carga e coeficiente de transferência de calor para aletas longitudinais, radiais e pinos.

Um assunto novo e palpitante em transferência de calor em aletas tem sido a análise de quando ocorre condensação em superfícies extendidas, pois todos autores tradicionais recomendam aletas para quando o coeficiente de transferência de calor sobre a superfície é pequeno, citando que o uso de aletas é vantajoso com gases, moderadamente vantajoso com líquidos e desvantajoso com condensação ou evaporação devido aos elevados coeficientes de transferência de calor.

Vapor saturado condensando em filme sobre uma aleta retangular disposta na vertical é analisado por NADER [54], em um estudo onde a base e do topo da aleta são mantidos a temperatura constante.

PATANKAR e SPARROW [55], analisam o problema de condensação em superfície extendida com acoplamento de problema de análise de condensação e simultânea transferência de calor, através de formulação bidimensional.

BURMEISTER [56], analisa o problema da eficiência de aleta vertical onde ocorre condensação admitindo que a temperatura varia somente ao longo da altura e que a troca de calor no filme de condensado é dada por condução, tal que o termo de convecção é negligenciado.

### 1.3. OBJETIVOS DO TRABALHO.

O presente trabalho tem por objetivo investigar os parâmetros relevantes para o dimensionamento de aletas para trocadores de calor com convecção, bem como fornecer as relações matemáticas para análise, diagnóstico, projeto e otimização de aletas para trocadores de calor que utilizam aletas longitudinais.

Para atingir o objetivo é dado enfoque ao problema de transferência de calor na aleta, com o desacoplamento do problema de quantidade de movimento e da transferência de calor na região de escoamento de fluido, através do uso do coeficiente de transferência de calor por convecção.

As aletas analisadas são do tipo longitudinal, cujo perfil de aleta possa ser executado industrialmente para aplicação em trocadores de calor convencionais.

A formulação usual do problema de transferência de calor em aletas é do tipo unidimensional, justificável pelos trabalhos de IREY [28], LEVITSKI [29], CRANK e PALMER [30], LAU e TAN [31], SURYANARAYNA [32] e HEGGS e STONES [33]. Esta é uma técnica universal que tem resolvido a maior parte dos problemas de transferência de calor em aletas convectivas, por solução analítica. A formulação bidimensional do problema de transferência de calor em aletas não será analisada neste trabalho, pois será utilizada como critério para avaliação da validade da formulação unidimensional. A formulação bidimensional é analisada por IREY [24], LEVITSKY [25], LAU e TAN [27], HEGGS e STONES [29] e outros pesquisadores.

A técnica utilizada no presente trabalho consiste em analisar a equação da energia para considerações geométricas consistentes com o conceito de extensão da superfície de troca térmica, a aleta, a fim de obter a equação de distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta para dadas condições de contorno, e assim obter o calor trocado e o rendimento térmico da aleta. São introduzidas adimensionalizações convenientes a fim de obter expressões, as mais gerais possíveis, dentro da classe de problema analisado.

Conhecidos a distribuição de temperatura, o rendimento térmico e o calor trocado pela aleta, surge o problema de determinar qual a inter-relação entre os parâmetros geométricos e térmicos que levam à máxima troca de calor pela aleta. A derivação da expressão do calor trocado pela aleta em relação a uma variável ou em relação a um grupo de variáveis relevantes, e igualando a zero tal expressão, tem-se condição de determinar máximos e mínimos do calor trocado. A solução da função otimizadora fornece a inter-relação entre os parâmetros térmicos e geométricos que levam a otimizar a aleta. Assim, é possível diagnosticar se uma aleta está operando em condições ótimas, ou projetar aletas a fim de que operem em condições otimizadas.

## CAPÍTULO II

### DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA, CALOR TROCADO E RENDIMENTO TÉRMICO DE ALETAS.

#### 2.1. Equação geral de distribuição de temperatura, calor trocado e rendimento térmico para aleta longitudinal de perfil genérico.

A análise do desempenho térmico de aletas está baseada nas hipóteses introduzidas por MURRAY [05] e GARDNER [11], que são apresentadas por KERN e KRAUS [52], e estão abaixo relacionadas:

1. Regime permanente.
2. Material da aleta é homogêneo e isotrópico.
3. O coeficiente de transferência de calor por convecção é constante e uniforme sobre toda a superfície de troca térmica da aleta.
4. A temperatura do meio envolvente da aleta é uniforme.
5. A espessura da aleta é tão pequena comparada com a altura da aleta, tal que o gradiente de temperatura transversal à aleta pode ser desprezado.
6. A temperatura na base da aleta é uniforme.
7. Não existe resistência térmica de contacto entre a aleta e a superfície primária da parede.
8. Não existem fontes ou sumidouros de calor na aleta.

19. A taxa de transferência de calor entre a aleta e o fluido é proporcional a diferença de temperatura entre a aleta e o meio fluido envolvente da aleta.

GARDNER [11] propôs que o estudo do desempenho térmico seja realizado para uma aleta genérica, representada matematicamente pela equação do perfil da aleta, conforme FIGURA 5.

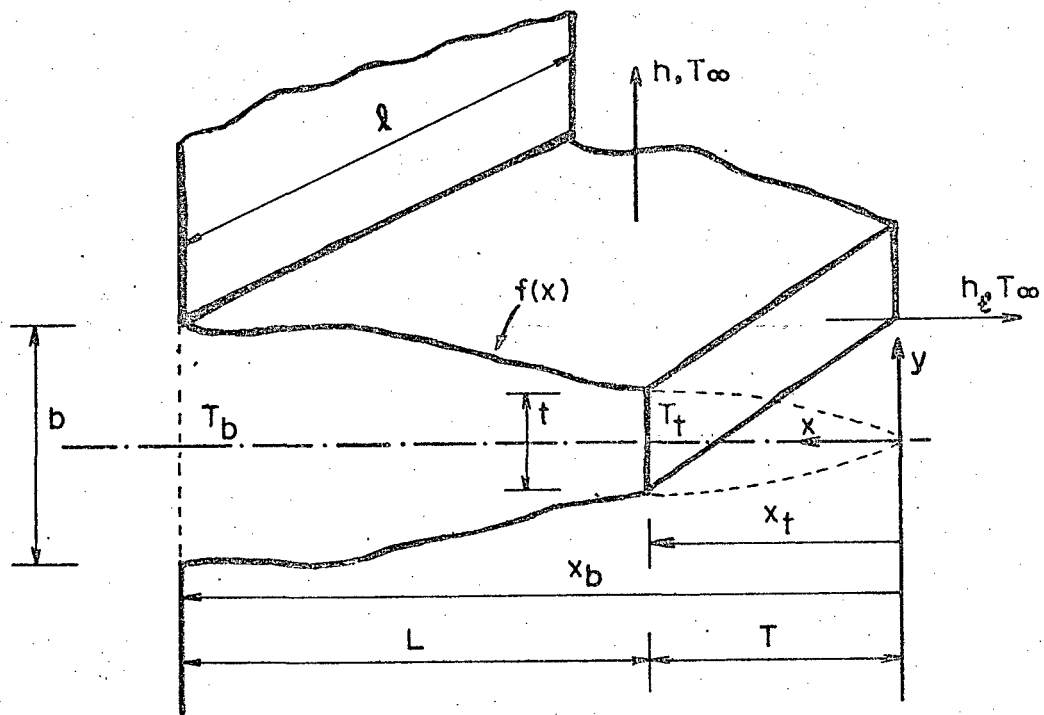


FIGURA 5 - Aleta longitudinal com perfil genérico.

Utilizando a equação da energia na região correspondente à extensão da superfície, pode-se obter a distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta. A equação diferencial para distribuição de temperatura ao longo da aleta, por formulação unidimensional, conforme mostrado no APÊNDICE A, é uma equação diferencial ordinária, de segunda ordem, primeiro grau, não linear e homogênea, definida por

$$\frac{d^2 \theta(X)}{dX^2} + \frac{1}{f(X)} \frac{df(X)}{dX} \frac{d\theta(X)}{dX} - \beta^{*2}(X) \theta(X) = 0 \quad (2.1)$$

$$x_t \leq X \leq x_b, \quad 0 \leq \theta(X) \leq 1$$

onde

- $f(X)$  é a equação do semi-perfil da aleta
- $X$  é a variável adimensional, definida por (2.2)
- $X_b$  é a coordenada da base da aleta
- $X_t$  é a coordenada do topo da aleta
- $L$  é a altura da aleta
- $T$  é a altura de truncamento da aleta, conforme FIG.5
- $x$  é a variável ao longo da altura da aleta

$$X = \frac{x}{L} \quad (2.2)$$

$$X_b = \frac{x_b}{L} = \frac{L+T}{L} = 1 + \frac{T}{L} \quad (2.3)$$

$$X_t = \frac{x_t}{L} = \frac{T}{L} \quad (2.4)$$

$\theta(X)$  é a temperatura adimensional, definida por:

$$\theta(X) = \frac{\theta(X)}{\theta(X_b)} = \frac{\theta(X)}{\theta_b} = \frac{T(X) - T_\infty}{T(X_b) - T_\infty} \quad (2.5)$$

$\theta(X)$  é a diferença de temperatura, definido por

$$\theta(X) = T(X) - T_\infty \quad (2.6)$$

Na base da aleta, tem-se

$$\theta_b = \theta(X_b) = T(X_b) - T_\infty = T_b - T_\infty \quad (2.7)$$

$T_\infty$  é a temperatura característica do fluido que envolve a aleta. Usualmente  $T_\infty$  é uma temperatura longe da superfície ou a temperatura de mistura do fluido.

$T(X)$  é a distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta, correspondente ao valor médio da temperatura ao longo da espessura e comprimento da aleta.



$\beta^*(X)$  é um parâmetro adimensional de desempenho térmico da aleta genérica, definido por

$$\beta^*(X) = m^*(X)L \quad (2.8)$$

$m^*(X)$  é um parâmetro dimensional de desempenho térmico da aleta genérica, conforme APÊNDICE A, definido por

$$m^{*2}(X) = \frac{h}{k} \frac{1}{f(X)} \quad (2.9)$$

A dimensão de  $m^*(X)$  é  $L^{-1/2}$

$h$  é o coeficiente médio de transferência de calor por convecção sobre a aleta.

$k$  é a condutividade térmica do sólido da aleta.

$f(X)$  é usualmente definido por uma função onde aparece a espessura da aleta na base, e uma função  $g(X)$  que caracteriza a geometria da aleta, dada por

$$f(X) = \frac{b}{2} g(X) \quad (2.10)$$

$b$  é a espessura da aleta na base, conforme FIG.5.

Substituindo a expressão (2.10) na expressão (2.9), tem-se

$$m^{*2}(X) = m^2 \frac{1}{g(X)} \quad (2.11)$$

onde  $m$  é o parâmetro dimensional de desempenho térmico de aleta com perfil retangular, definido por:

$$m^2 = \frac{2h}{bk} \quad (2.12)$$

Substituindo a expressão (2.11) na expressão (2.8), tem-se

$$\beta^*(X) = \beta \frac{1}{g(X)} \quad (2.13)$$

onde  $\beta$  é o parâmetro adimensional de desempenho térmico de aleta com perfil retangular, definido por

$$\beta = Bi^{1/2} \quad K = mL \quad (2.14)$$

$$Bi = \frac{hb}{2k} \quad (2.15)$$

$$K = \frac{L}{(b/2)} \quad (2.16)$$

$Bi$  é o número de Biot, que corresponde à relação entre a resistência ao fluxo de calor no sólido e a resistência ao fluxo de calor no fluido.

$K$  é definido como a Razão de Aspecto da aleta, e está relacionado com a geometria da aleta.

A equação (2.1) de distribuição de temperatura ao longo da aleta, requer duas condições de contorno. É usual definir uma condição de contorno na base da aleta, conforme hipótese nº 6; a outra condição de contorno depende das condições térmicas no topo da aleta.

*1ª Condição de contorno:* especifica-se a temperatura na base da aleta

$$X = X_b; \quad \theta(X_b) = 1 \quad (2.17)$$

*2ª Condição de contorno:* especifica-se o fluxo de calor no topo da aleta. O caso mais geral corresponde à aleta com topo convectivo, dado por

$$X = X_t; \quad \left. \frac{d\theta(X)}{dX} \right|_{X_t} = \frac{h_t}{k} \cdot L \theta(X_t) \quad (2.18)$$

$h_t$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção no topo da aleta.

Conhecida a distribuição de temperatura na aleta, pode-se calcular a quantidade de calor que a aleta troca. O calor trocado por condução na base da aleta é calculado por

$$q = \frac{k}{L} A(X_b) \theta_b \left. \frac{d\theta(X)}{dX} \right|_{X_b} \quad (2.19)$$

$A(X_b)$  = área da base da aleta onde ocorre troca de calor por condução, definida por

$$A(X_b) = 2f(X_b) \cdot \ell \quad (2.20)$$

$\ell$  = comprimento da aleta, segundo direção longitudinal, conforme FIGURA 5.

O rendimento térmico ou eficiência ou índice de performance da aleta é definido, conforme GARDNER [11], por

$$\eta = \frac{q_A}{q_i} \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (2.21)$$

$q_A$  = calor atual ou real trocado pela aleta não isotérmica, calculado por (2.19).

$q_i$  = calor ideal que a aleta isotérmica à temperatura da base é capaz de trocar, mantidos constantes os outros parâmetros, calculado por (5.16).

O rendimento térmico da aleta também é uma definição de temperatura média, pois

$$\eta = \bar{\theta}(X) = \frac{\bar{\theta}(X)}{\theta(X_b)} = \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_b - T_\infty} \quad (2.22)$$

Considerando-se algumas geometrias que são usualmente utilizadas em aletas para trocadores de calor industriais, serão analisados os seguintes casos:

## 2.2. Aleta retangular com topo convectivo.

No caso de aleta com perfil retangular, tem-se espes

sura constante ao longo da altura da aleta.

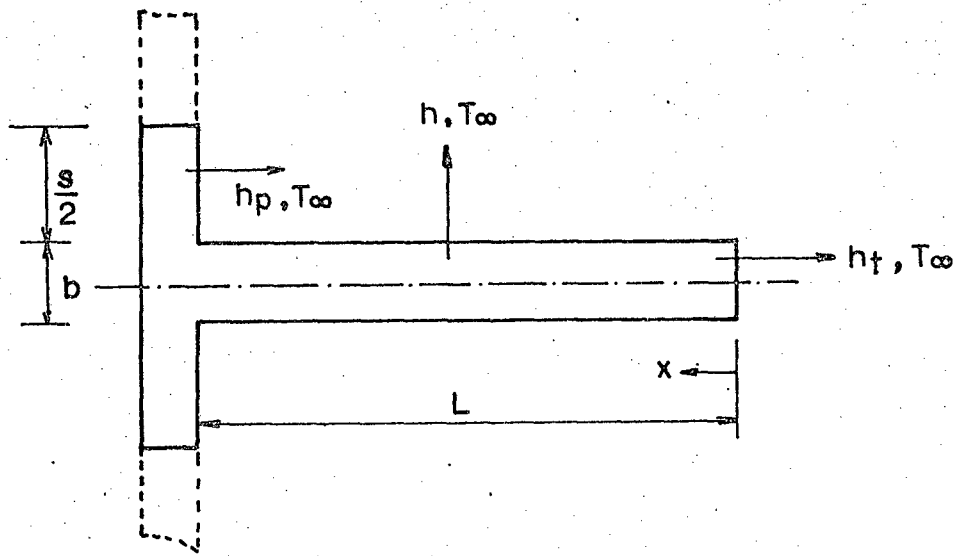


FIGURA 6 - Geometria da aleta com perfil retangular.

A equação do perfil da aleta pode ser representada, baseada na FIGURA.6 e utilizando a equação (2.10), por

$$f(X) = \frac{b}{2} g(X) = \text{const.} \quad (2.23)$$

Fazendo

$$g(X) \equiv 1 \quad (2.24)$$

Assim, a expressão (2.13) reduz-se ao que segue

$$\beta^*(X) \equiv \beta = \text{const.} \quad (2.25)$$

onde  $\beta$  é dado pela expressão (2.14).

Como  $f(X)$  é constante, então

$$\frac{d f(X)}{d X} = 0 \quad (2.26)$$

Assim a equação diferencial (2.1) reduz-se ao que segue

$$\frac{d^2 \theta(X)}{dX^2} - \beta^2 \theta(X) = 0, \quad (2.27)$$

$$0 \leq X \leq 1 \quad 0 \leq \theta(X) \leq 1$$

Para uniformização dos problemas apresentados, define-se a origem do sistema de coordenadas no topo da aleta, conforme FIGURA 6, assim a altura de truncamento torna-se

$$T = 0 \quad (2.28)$$

Conseqüentemente tem-se

$$X_t = 0 \quad (2.29)$$

$$X_b = 1 \quad (2.30)$$

A equação (2.27) é uma equação diferencial de segunda ordem, linear, homogênea e coeficientes constantes, cuja solução com as condições de contorno (2.17) e (2.18), conforme APÊNDICE B, resulta a distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta

$$\theta(X) = \frac{\cosh \beta X + \gamma \sinh \beta X}{\cosh \beta + \gamma \sinh \beta} \quad (2.31)$$

onde  $\gamma$  é o parâmetro de convecção no topo da aleta retangular, definido por

$$\gamma = R_h Bi^{1/2} \quad (2.32)$$

$R_h$  é a relação entre os coeficientes de transferência de calor por convecção no topo e na face da aleta, definido por

$$R_h = \frac{h_t}{h} \quad (2.33)$$

Conhecida a distribuição de temperatura na aleta, pode-se calcular o calor trocado pela aleta. De (2.10) e de (2.31),

conforme APENDICE B, resulta

$$Q = Bi^{1/2} \frac{\gamma + \tanh \beta}{1 + \gamma \tanh \beta} \quad (2.34)$$

Q é o calor adimensional trocado pela aleta, definido por

$$Q = \frac{q}{2 \theta_b \ell k} \quad (2.35)$$

Segundo LAU e TAN [31], a equação (2.34) fornece resultados satisfatórios se o número de Biot definido em (2.15) for menor que a unidade. Conforme pode ser constatado na FIGURA 7, transcrita de LAU e TAN [31], para número de Biot igual a 0,1 o erro máximo no calor trocado em relação à formulação bidimensional é 2%; para número de Biot igual a 0,01 o erro máximo é 0,2%.

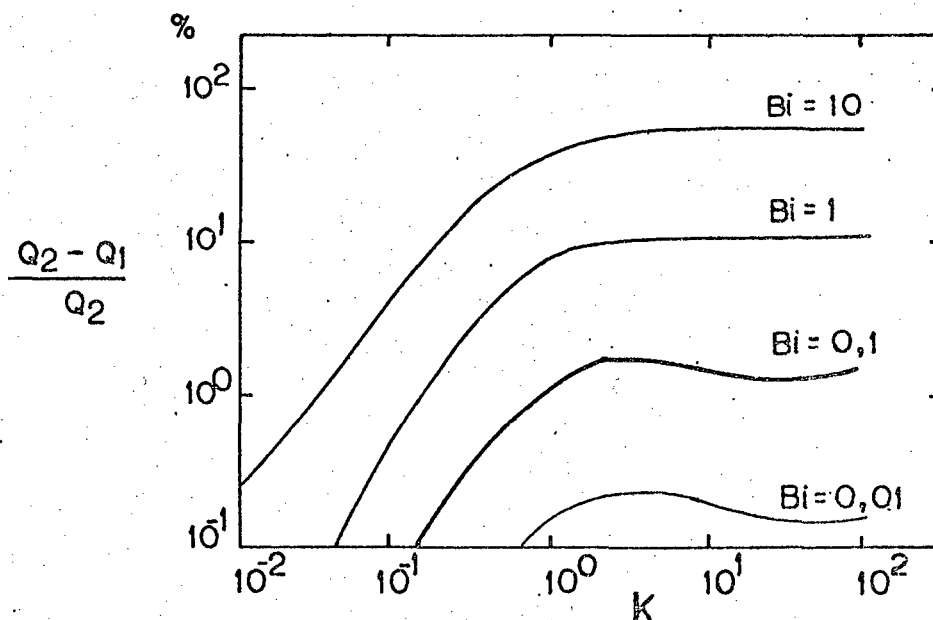


FIGURA 7 - Erro no calor trocado na formulação unidimensional por comparação com formulação bidimensional,  $h = cte$ , segundo LAU e TAN [31], para alguns valores do número de Biot.

Para as principais aplicações de aletas em trocadores de calor convencionais, o número de Biot é geralmente menor que 0,1.

O rendimento térmico da aleta de perfil retangular, conforme APÊNDICE B, resulta

$$\eta = \frac{1}{\beta(1 + R_h/K)} \cdot \frac{\gamma + \tanh \beta}{1 + \gamma \tanh \beta} \quad (2.36)$$

*Casos particulares de aleta retangular:*

1º Caso) Aleta retangular com topo isolado.

Na condição de contorno (2.18) admite-se

$$h_t = 0 \quad \gamma = 0 \quad R_h = 0 \quad (2.37)$$

assim, as expressões (2.31), (2.34) e (2.36) reduzem-se a

$$\theta(X) = \frac{\cosh \beta X}{\cosh \beta} \quad (2.38)$$

$$Q = Bi^{1/2} \tanh \beta \quad (2.39)$$

$$\eta = \frac{\tanh \beta}{\beta} \quad (2.40)$$

2º Caso) Aleta retangular com convecção no topo modificada para aleta com topo isolado.

Devido a simplicidade das equações para aleta com topo isolado, HARPER e BROWN [02] introduziram o seguinte artifício para aplicar às aletas com topo convectivo: Uma altura fictícia é adicionada à altura real da aleta, que permita que o aumento de superfície na face da aleta compense o fictício isolamento do topo, conforme FIGURA 8.

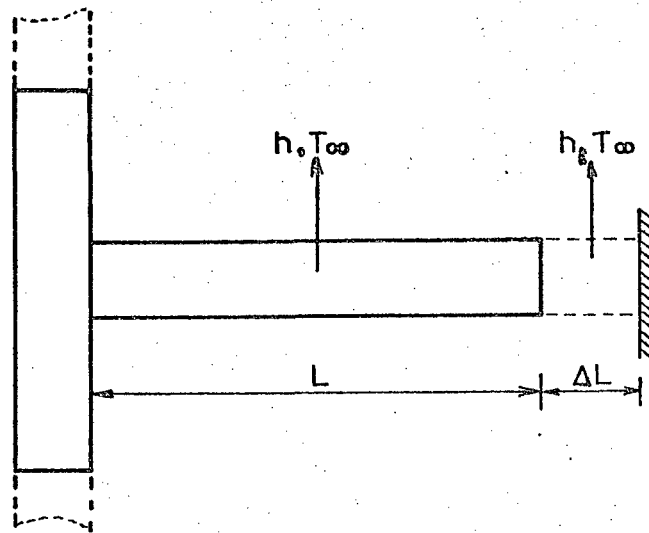


FIGURA 8 - Modificação de HARPER e BROWN [02] para fictício isolamento do topo da aleta.

Assim, a altura da aleta corrigida, baseado na hipótese de HARPER e BROWN [02], conforme APÊNDICE B, torna-se

$$L_c = L + \frac{b}{2} \cdot R_h \quad (2.41)$$

que é utilizado nas expressões (2.14) e (2.16). Por exemplo, a expressão (2.39), conforme APÊNDICE B, modifica-se para:

$$Q = Bi^{3/2} \cdot \tanh(\beta + \gamma) \quad (2.42)$$

A aproximação de HARPER e BROWN [02], fornece resultados satisfatórios sempre que o número de Biot for muito menor que a unidade. Conforme SCHNEIDER [23], os erros máximos no calor trocado devido à modificação de HARPER e BROWN [02], em relação ao modelo topo convectivo, são sumarizados abaixo:

$Bi = 0$	erro nulo
$Bi = 0,06$	erro desprezível
$Bi = 0,25$	erro máximo $\leq 8\%$
$Bi = 1,00$	erro máximo $\leq 25\%$



### 2.3. Aleta trapezoidal com topo convectivo.

A aleta trapezoidal caracteriza-se por ter espessura linearmente proporcional à posição ao longo da altura da aleta.

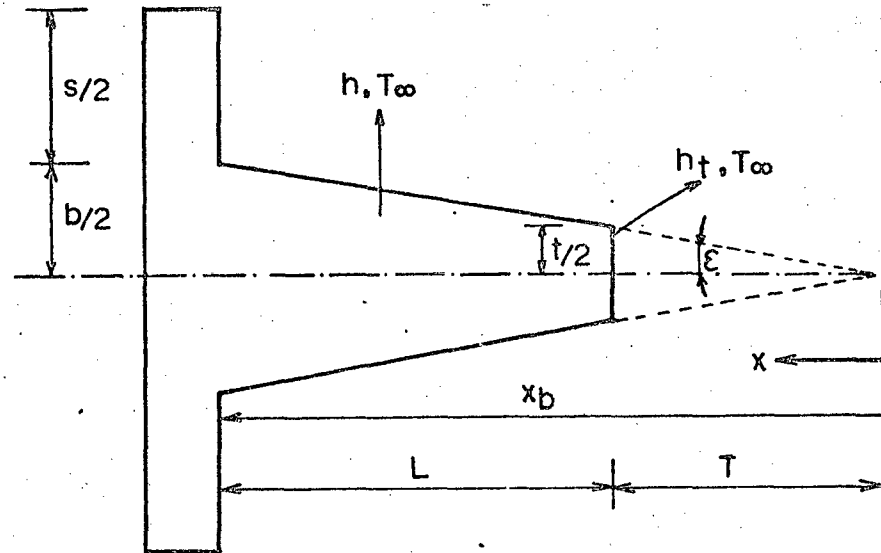


FIGURA 9 - Geometria da aleta com perfil trapezoidal.

A equação do semi-perfil da aleta trapezoidal, conforme FIGURA 9, pode ser escrita na forma da equação (2.11), resultando:

$$f(x) = \frac{b}{2} \frac{x}{x_b} = \frac{t}{2} \frac{x}{x_t} = x \tan \epsilon \quad (2.43)$$

$$x_t \leq x \leq x_b$$

$b$  = espessura na base da aleta

$t$  = espessura no topo da aleta

$x_b$  = coordenada da base da aleta

$x_t$  = coordenada do topo da aleta

$L$  = altura da aleta

$T$  = altura de truncamento da aleta

$\epsilon$  = ângulo de semi-abertura da aleta

Da FIGURA 9, verifica-se que

$$X_t = \frac{t}{b - t} \quad (2.44)$$

$$\tan \epsilon = \frac{1}{K} - \frac{1}{K_t} \quad (2.45)$$

onde  $K_t$  é a razão de aspecto do topo da aleta, definido por

$$K_t = \frac{L}{(t/2)} \quad (2.46)$$

A equação do semi-perfil da aleta, em termos de variáveis adimensionais, é dada por

$$f(X) = \frac{b}{2} \frac{X}{X_b} \quad X_t \leq X \leq X_b \quad (2.47)$$

Para aleta trapezoidal, a equação de distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta, conforme APÊNDICE C, a equação (2.1) reduz-se à equação que segue

$$X \frac{d^2 \theta(X)}{dX^2} + \frac{d \theta(X)}{dX} - \beta_T^2 \theta(X) = 0 \quad (2.48)$$

$$X_t \leq X \leq X_b$$

onde  $\beta_T$  é o parâmetro adimensional de desempenho térmico de aleta com perfil trapezoidal, definido por

$$\beta_T = \beta X_b^{1/2} \quad (2.49)$$

onde  $\beta$  é o parâmetro adimensional de desempenho térmico de aleta com perfil retangular

$$\beta = Bi^{1/2} K \quad (2.14)$$

$$Bi = \frac{hb}{2K} \quad (2.15)$$

$$K = \frac{L}{(b/2)} \quad (2.16)$$

A equação (2.48) é uma equação diferencial de segunda ordem, primeiro grau, homogênea, com coeficientes variáveis, denominada equação de BESSEL, cuja solução pode ser expressa em termos de funções de Bessel modificadas de primeira e segunda espécie, com argumento real.

A solução de (2.48) com as condições de contorno (2.17) e (2.18), conforme APÊNDICE C, resulta a distribuição de temperatura ao longo da aleta

$$\theta(X) = \frac{K_\gamma(\beta_t) \cdot I_0(\beta_X) + I_\gamma(\beta_t) \cdot K_0(\beta_X)}{K_\gamma(\beta_t) \cdot I_0(\beta_b) + I_\gamma(\beta_t) \cdot K_0(\beta_b)} \quad (2.50)$$

onde  $K_\gamma(\beta_t)$  e  $I_\gamma(\beta_t)$  são funções auxiliares, definidas por:

$$K_\gamma(\beta_t) = K_1(\beta_t) + \gamma_t \cdot K_0(\beta_t) \quad (2.51)$$

$$I_\gamma(\beta_t) = I_1(\beta_t) - \gamma_t \cdot I_0(\beta_t) \quad (2.52)$$

$I_0$ ,  $I_1$ , são funções de Bessel modificadas, de primeira espécie, ordem zero e um, respectivamente.

$K_0$ ,  $K_1$ , são funções de Bessel modificadas, de segunda espécie, ordem zero e um, respectivamente.

Os argumentos das funções de Bessel são

$$\beta_T = \beta X_b^{1/2} \quad (2.49)$$

$$\beta_X = 2\beta_T X^{1/2} \quad X_t \leq X \leq X_b \quad (2.53)$$

$$\beta_t = 2\beta_T X_t^{1/2} \quad (2.54)$$

$$\beta_b = 2\beta_T X_b^{1/2} \quad (2.55)$$

$\gamma_t$  é o parâmetro de convecção no topo da aleta trapezoidal, definido por

$$\gamma_t = 2\gamma X_t X_b^{-1/2} \quad (2.56)$$

onde  $\gamma$  é o parâmetro de convecção no topo da aleta retangular, definido por

$$\gamma = R_h Bi^{1/2} \quad (2.32)$$

$$R_h = \frac{h_t}{h} \quad (2.33)$$

O calor trocado por aleta trapezoidal, de (2.50), (2.19) e (2.35), conforme APÊNDICE C, resulta

$$Q = Bi^{1/2} \frac{K_Y(\beta_t) \cdot I_1(\beta_b) - I_Y(\beta_t) K_1(\beta_b)}{K_Y(\beta_t) \cdot I_0(\beta_b) + I_Y(\beta_t) K_0(\beta_b)} \quad (2.57)$$

O rendimento térmico da aleta trapezoidal, de (2.21) e (2.57), conforme APÊNDICE C, resulta

$$\eta = \frac{1}{\beta[(1+\tan^2 \epsilon)^{1/2} + R_h/K_t]} \cdot \frac{K_Y(\beta_t) \cdot I_1(\beta_b) - I_Y(\beta_t) K_1(\beta_b)}{K_Y(\beta_t) \cdot I_0(\beta_b) + I_Y(\beta_t) K_0(\beta_b)} \quad (2.58)$$

*Casos particulares de aleta trapezoidal.*

1º Caso) Aleta trapezoidal com topo isolado.

Para considerar topo isolado, basta admitir que o coeficiente de transferência de calor no topo da aleta é nulo. Logo, (2.56) reduz-se ao que segue

$$\gamma_t = 0 \quad (2.59)$$

Assim, as expressões (2.51) e (2.52) tornam-se a

$$K_Y(\beta_t) \Big|_{\gamma_t = 0} \equiv K_1(\beta_t) \quad (2.60)$$

$$I_Y(\beta_t) \Big|_{\gamma_t = 0} \equiv I_1(\beta_t) \quad (2.61)$$

Conseqüentemente a distribuição de temperatura ao longo da aleta, reduz-se ao que segue

$$\theta(X) = \frac{K_1(\beta_t) I_0(\beta_X) + I_1(\beta_t) K_0(\beta_X)}{K_1(\beta_t) I_0(\beta_b) + I_1(\beta_t) K_0(\beta_b)} \quad (2.62)$$

Onde os parâmetros  $\beta_X$ ,  $\beta_t$  e  $\beta_b$  são dados por (2.53), (2.54) e (2.55), respectivamente.

O calor trocado torna-se

$$Q = Bi^{1/2} \cdot \frac{K_1(\beta_t) I_1(\beta_b) - I_1(\beta_t) K_1(\beta_b)}{K_1(\beta_t) I_0(\beta_b) + I_1(\beta_t) K_0(\beta_b)} \quad (2.63)$$

O rendimento térmico da aleta trapezoidal, topo isolado, reduz-se de (2.58) ao que segue

$$\eta = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{(1+\tan^2 \epsilon)^{1/2}} \cdot \frac{K_1(\beta_t) I_1(\beta_b) - I_1(\beta_t) K_1(\beta_b)}{K_1(\beta_t) I_0(\beta_b) + I_1(\beta_t) K_0(\beta_b)} \quad (2.64)$$

2º Caso) Aleta com convecção no topo modificada para aleta com topo isolado.

A modificação consiste em aplicar o artifício, introduzido por HARPER e BROWN [02], de adicionar um aumento fictício de comprimento na aleta de modo que o aumento na superfície da

face da aleta compense o fictício isolamento do topo. A altura da aleta corrigida, conforme HARPER e BROWN [02], para aleta trapezoidal, torna-se

$$L'_c = L + \frac{t}{2} R_h \quad (2.65)$$

assim, (2.65) é utilizada diretamente na expressão (2.14), resultando

$$\beta_c = m \cdot L'_c \quad (2.66)$$

Conseqüentemente (2.49) transforma-se

$$\beta_{Tc} = \beta_c X_b^{1/2} \quad (2.67)$$

A expressão (2.67) é utilizada nas expressões (2.53), (2.54) e (2.55), juntamente com a condição (2.59) e assim calculam-se as expressões (2.62) - (2.64).

Os autores, KRAUS [51] e KERN e KRAUS [52], apresentam o estudo do comportamento térmico de aleta trapezoidal unicamente para aleta trapezoidal com topo convectivo modificada para topo isolado.

### 3º Caso) Aleta com perfil triangular.

Este é um caso particular de aleta trapezoidal quando a espessura no topo da aleta é nula. Para aleta triangular, define-se a origem do sistema de coordenadas no topo da aleta, assim a altura de truncamento da aleta torna-se nula, conseqüentemente, utilizam-se as expressões (2.28) - (2.30), resultando

$$K_t = \infty \quad (2.68)$$

Logo, a expressão (2.45) reduz-se ao que segue

$$\tan \epsilon = \frac{1}{K} \quad (2.69)$$

A equação do semi-perfil da aleta torna-se

$$f(X) = \frac{b}{2} X \quad (2.70)$$

Conseqüentemente, para aleta triangular, as expressões (2.49), (2.53), (2.54) e (2.55) reduzem-se, respectivamente, a

$$\beta_T = \beta = \text{const.}, \quad \text{pois } X_b = 1 \quad (2.71)$$

$$\beta_X = 2\beta X^{1/2} \quad 0 \leq X \leq 1 \quad (2.72)$$

$$\beta_b = 2\beta \quad (2.73)$$

$$\beta_t = 0 \quad (2.74)$$

Como a espessura do topo da aleta  $\bar{a}$  é nula, admite-se

$$\gamma_t = 0 \quad (2.59)$$

Conseqüentemente a distribuição de temperatura ao longo da aleta triangular, reduz-se a

$$\theta(X) = \frac{I_0(\beta_X)}{I_0(\beta_b)} \quad (2.75)$$

O calor trocado pela aleta triangular torna-se

$$Q = Bi^{1/2} \cdot \frac{I_1(\beta_b)}{I_0(\beta_b)} \quad (2.76)$$

O rendimento térmico da aleta triangular, reduz-se a

$$\eta = \frac{1}{\beta} \frac{1}{(1 + \tan^2 \epsilon)^{1/2}} \cdot \frac{I_1(\beta_b)}{I_0(\beta_b)} \quad (2.77)$$

A expressão anterior não concorda com KRAUS [51], equação (3.4.8) e não concorda com KERN e KRAUS [52], equação (2.18), pois estes pesquisadores não consideraram o aumento da superfície de troca térmica devido ao ângulo de abertura da aleta, pois eles admitiram que

$$\tan \epsilon \cong 0 \quad (2.78)$$

Substituindo a expressão (2.78) em (2.77) e considerando (2.73), então obtêm-se

$$\eta = \frac{1}{\beta} \frac{I_1(2\beta)}{I_0(2\beta)} \quad (2.79)$$

Que concorda plenamente com KRAUS [51] e KERN e KRAUS [52].

#### 2.4. Aleta parabólica com topo convectivo.

A aleta com perfil parabólico tem como característica que a espessura da aleta varia segundo a equação de uma parábola, ao longo da altura da aleta. A equação da parábola pode ser genérica. É usual analisar perfis parabólicos côncavos e convexos, cujas parábolas são de segundo grau, conforme KRAUS [51], e KERN e KRAUS [52]. Considere a aleta parabólica côncava truncada, para incluir a convecção no topo, conforme FIGURA 10.

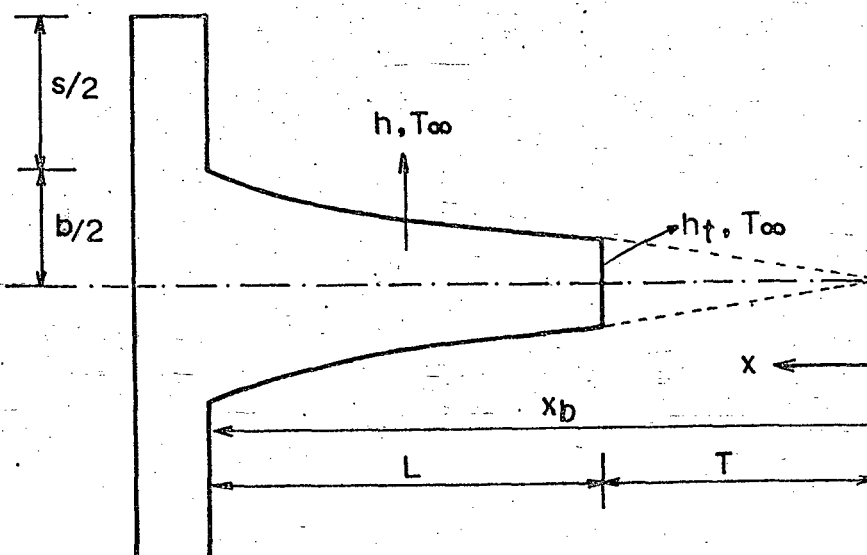


FIGURA 10 - Geometria da aleta com perfil parabólico.



A equação do semi-perfil da aleta, é dada por

$$f(X) = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{X}{X_b}\right)^2 \quad (2.80)$$

$$X_t \leq X \leq X_b$$

Para aleta parabólica, a equação de distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta, reduz-se (conforme APEN DICE D) a

$$X^2 \frac{d^2 \theta(X)}{dX^2} + 2X \frac{d\theta(X)}{dX} - \beta_p^2 \theta(X) = 0 \quad (2.81)$$

onde  $\beta_p$  é o parâmetro adimensional de desempenho térmico da aleta com perfil parabólico, definido por

$$\beta_p = \beta X_b \quad (2.82)$$

onde  $\beta$  é o parâmetro adimensional de desempenho térmico de aleta com perfil retangular

$$\beta = Bi^{1/2} K \quad (2.14)$$

$$Bi = \frac{hb}{2K} \quad (2.15)$$

$$K = \frac{L}{b/2} \quad (2.16)$$

A equação (2.81) é uma equação diferencial, homogênea, segunda ordem, coeficientes variáveis, classificada como equação de EULER.

A solução de (2.81) com as condições de contorno (2.17) e (2.18), conforme APÊNDICE D, resulta

$$\theta(X) = \frac{X_{\gamma_2} X^{\delta_1} + \delta_{12} X_{\gamma_1} X^{\delta_2}}{X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1} + \delta_{12} X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2}} \quad (2.83)$$

onde

$$X_{\gamma_2} = - X_t^{\delta_2^{-1}} + \gamma_2 X_t^{\delta_2} \quad (2.84)$$

$$X_{\gamma_1} = X_t^{\delta_1^{-1}} - \gamma_1 X_t^{\delta_1} \quad (2.85)$$

$$\gamma_2 = \frac{h_t \cdot L}{k \cdot \delta_2} \quad (2.86)$$

$$\gamma_1 = \frac{h_t \cdot L}{k \cdot \delta_1} \quad (2.87)$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1+4\beta_p^2}) \quad (2.88)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2} (-1 - \sqrt{1+4\beta_p^2}) = -\frac{1}{2} (1 + \sqrt{1+4\beta_p^2}) \quad (2.89)$$

$$\delta_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (2.90)$$

Conhecida a distribuição de temperatura ao longo da aleta, pode-se calcular o calor trocado pela aleta, de (2.19) e (2.83), conforme APÊNDICE D, resulta

$$Q = \frac{\delta_1}{K} \frac{X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1^{-1}} + X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2^{-1}}}{X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1} + \delta_{12} X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2}} \quad (2.91)$$

Conhecido o calor trocado pela aleta, pode-se calcular a eficiência da aleta. De (2.21) e (2.91), conforme APÊNDICE D, resulta

$$\eta = \frac{\delta_1}{\beta^2} \frac{L}{L^*} \frac{1}{\left[1 + \frac{R_h}{K_t}\right]} \left[ \frac{X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1^{-1}} + X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2^{-1}}}{X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1} + \delta_{12} X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2}} \right] \quad (2.92)$$

$L^*$  é o comprimento do arco de parábola, medido ao longo do perfil da aleta, definido por (5.116).

*Casos particulares de aleta parabólica côncava.*

1º Caso) Aleta parabólica com topo isolado.

Para considerar topo isolado, basta admitir que o coeficiente de transferência de calor por convecção no topo da aleta é nulo.

Assim (2.86) e (2.87), reduzem-se ao que segue

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0 \quad (2.93)$$

Conseqüentemente (2.84) e (2.85), tornam-se

$$X_{\gamma_1} \equiv - X_t^{\delta_1 - 1} \quad (2.94)$$

$$X_{\gamma_2} \equiv X_t^{\delta_2 - 1} \quad (2.95)$$

Assim a distribuição de temperatura na aleta fica

$$\theta(X) = \frac{X_t^{\delta_2 - 1} \cdot X^{\delta_1} - \delta_{12} X_t^{\delta_1 - 1} X^{\delta_2}}{X_t^{\delta_2 - 1} X_b^{\delta_1} - \delta_{12} X_t^{\delta_1 - 1} X_b^{\delta_2}} \quad (2.96)$$

O calor trocado pela aleta é dado por

$$Q = \frac{\delta_1}{K} \frac{X_t^{\delta_2 - 1} X_b^{\delta_1 - 1} - X_t^{\delta_1 - 1} X_b^{\delta_2 - 1}}{X_t^{\delta_2 - 1} X_b^{\delta_1} - X_t^{\delta_1 - 1} X_b^{\delta_2}} \quad (2.97)$$

O rendimento térmico da aleta torna-se

$$\eta = \frac{K}{\beta^2} \frac{1}{L^*} Q \quad (2.98)$$

onde  $L^*$  é definido por (5.116).

2º Caso: Aleta parabólica completa.

Neste caso, a espessura no topo é nula, conseqüentemente, utilizam-se as expressões (2.28) - (2.30). Assim (2.82) reduz-se ao que segue

$$\beta_p = \beta \quad (2.99)$$

A distribuição de temperatura, na aleta é dada por

$$\theta(x) = x^{\delta_1} \quad (2.100)$$

O calor trocado pela aleta torna-se

$$Q = \frac{\delta_1}{K} \quad (2.101)$$

O rendimento térmico da aleta reduz-se ao que segue

$$\eta = \frac{K}{\beta^2} \cdot \frac{L}{L^*} Q = \frac{L}{L^*} \cdot \frac{\delta_1}{\beta^2} \quad (2.102)$$

2.5. Calor trocado pelo domínio de uma aleta.

O domínio de uma aleta constitui a aleta propriamente dita mais a superfície da parede primária onde a aleta está montada, conforme a FIGURA 11.

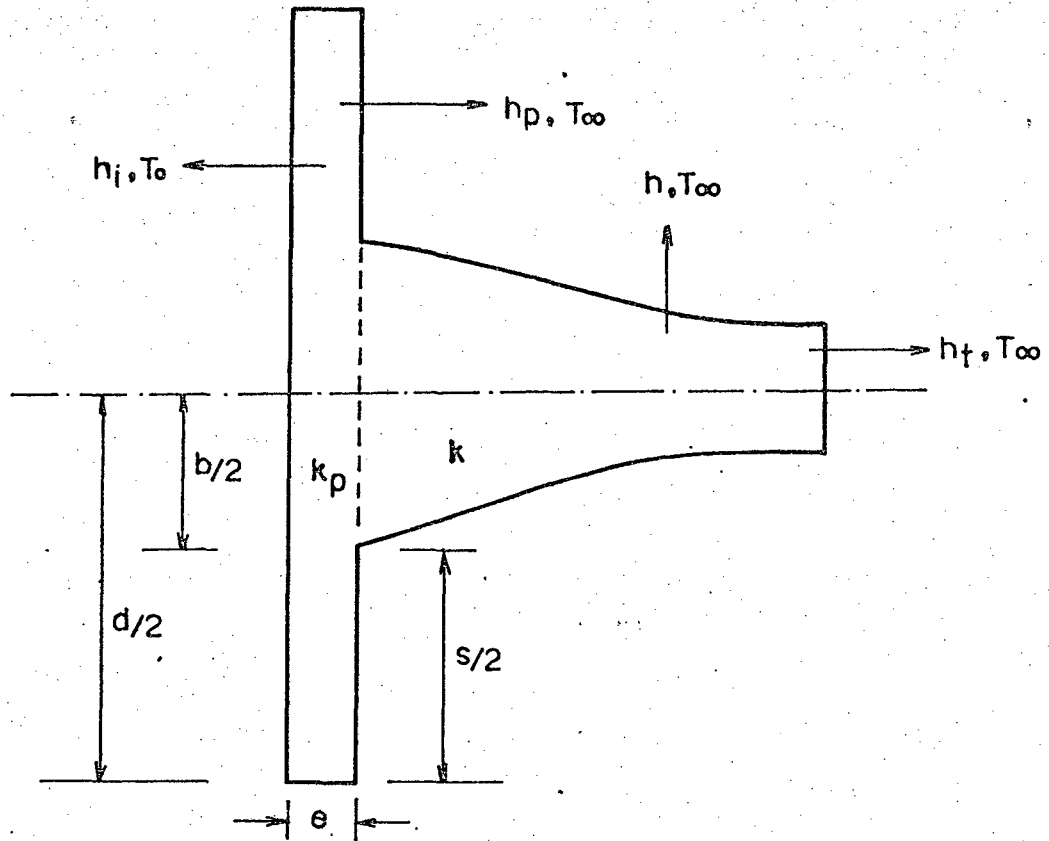


FIGURA 11 - Domínio de uma aleta genérica.

Como usualmente somente  $T_0$  e  $T_\infty$  são conhecidos ou facilmente mensuráveis, aplica-se o conceito de resistência térmica, conforme KREITH [48] e HEGGS e STONES [33], ao domínio de uma aleta, para obter a expressão do calor trocado.

No caso de paredes planas com aletas longitudinais, o calor trocado por domínio de aleta é dado por

$$q = (T_0 - T_\infty) \cdot \ell \left[ \frac{1}{h_i d} + \frac{e}{k_p d} + \frac{1}{h_p s + \tilde{q}} \right]^{-1} \quad (2.103)$$

onde  $h_i$  e  $h_p$  são coeficientes de transferência de calor por convecção na face não aletada e na parede primária entre as aletas, respectivamente.  $k_p$  é a condutividade térmica do material da parede onde estão montadas as aletas.

$d$  e  $S$  são o domínio de uma aleta e o espaçamento entre as aletas, respectivamente, conforme a FIGURA 10.

$\tilde{q}$  é uma expressão para o calor trocado pela aleta, que depende da geometria da aleta, definido por

$$\tilde{q} = \frac{q}{\theta_b \cdot \ell} = 2 k Q \quad (2.104)$$

No caso de parede cilíndrica com aletas longitudinais, o calor trocado por domínio de aleta é dado por

$$q = (T_0 - T_\infty) \cdot \left[ \frac{1}{h_i d_{c_i}} + \frac{r_i}{N k_p d_{c_e}} \ln \left( \frac{r_e}{r_i} \right) + \frac{1}{h_p S + \tilde{q}} \right]^{-1} \quad (2.105)$$

onde  $d_{c_i}$  e  $d_{c_e}$  são os domínios circunferenciais interno e externo, definidos, respectivamente, por

$$d_{c_i} = \frac{2\pi r_i}{N} \quad (2.106)$$

$$d_{c_e} = \frac{2\pi r_e}{N} \quad (2.107)$$

$N$  é o número de aletas longitudinais montadas na superfície cilíndrica externa, e  $r_i$  e  $r_e$  são os raios interno e externo da superfície cilíndrica.

## CAPÍTULO III

### CRITÉRIOS PARA OTIMIZAÇÃO DE ALETAS LONGITUDINAIS

#### 3.1. Introdução à teoria de otimização de aletas.

O objetivo é determinar a geometria da aleta que permite a máxima transferência de calor, condicionada a determinadas restrições geométricas, fluidodinâmicas ou construtivas.

Os parâmetros básicos que determinam o comportamento térmico de aletas são:

- a) condutividade térmica do material da aleta.
- b) coeficiente de transferência de calor por convecção no fluido que troca calor com a aleta.
- c) temperatura na base da aleta.
- d) geometria da aleta.
- e) dimensões geométricas da aleta.

Os três primeiros parâmetros não permitem impor restrições de máximos e mínimos, pois um incremento em qualquer destes parâmetros implicará em aumento na quantidade global de calor trocado.

Os parâmetros de perfil e dimensões geométricas permitem otimizar a troca de calor na aleta em relação à área do perfil, ou seja, em relação ao peso, massa ou quantidade de material que deve-se utilizar para construir a aleta.

Considerando o alto custo dos materiais utilizados em trocadores de calor, é conveniente construir o equipamento de mo-

do a exigir a mínima quantidade de material, ou seja, o mínimo peso.

A otimização da aleta em relação peso, ou área do perfil, é um método consagrado, que foi introduzido por SCHMIDT [04], e atualmente ainda é o único método usual de otimizar aletas, conforme revisão de literatura.

O método consiste em escrever adequadamente a expressão do calor trocado pela aleta e determinar pontos de máximos ou mínimos através de derivadas.

A procura de máximos no fluxo de calor, condicionado às restrições nos parâmetros térmicos e geométricos geralmente implica que são admitidos constantes:

i) peso ou área de perfil da aleta

$$A_p = \text{const.} \quad (3.1)$$

ii) coeficiente de transferência de calor por convecção

$$h = \text{const.} \quad (3.2)$$

iii) condutividade térmica do material

$$k = \text{const.} \quad (3.3)$$

iv) diferença de temperatura na base da aleta

$$\theta_b = \text{const.} \quad (3.4)$$

Para uma aleta genérica a área do perfil da aleta é calculada por

$$A_p = 2 \int_{x_b}^{x_t} f(x) dx \quad (3.5)$$

onde  $f(x)$  é a equação do semi-perfil da aleta.



### 3.2. Otimização analítica de aleta retangular com topo isolado.

O calor trocado pela aleta retangular com topo isolado é dado por

$$Q = Bi^{1/2} \tanh \beta \quad (2.39)$$

#### 3.2.1. Otimização para número de Biot constante.

A procura de máximo, quanto a variável  $\beta$  para número de Biot constante, sem considerar a restrição (3.1). Derivando (2.39) em relação a  $\beta$  e igualando a zero, tem-se

$$\left. \frac{dQ}{d\beta} \right|_{Bi} = \frac{d}{d\beta} (Bi^{1/2} \tanh \beta) \Big|_{Bi} = 0 \quad (3.6)$$

Efetuando a derivação indicada na expressão acima

$$\frac{1}{\cosh^2 \beta} = 0 \quad (3.7)$$

cuja solução em  $\beta$  é

$$\beta = \infty \quad (3.8)$$

Considerando as expressões (2.14), (2.15) e (2.16), tem-se

$$\beta \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad K \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad L \rightarrow \infty \quad (3.9)$$

Substituindo a expressão (3.9) na expressão (2.39) tem-se que o ponto de máximo corresponde a

$$Q_{mx} = Bi^{1/2} \quad (3.10)$$

Da expressão (3.9) conclui-se que, para número de Biot constante, o máximo calor trocado corresponde à aleta de altura infinita ou Razão de Aspecto infinita, ou parâmetro adimensional de desempenho térmico infinito, e cujo valor é dado pela expressão (3.10).

### 3.2.2. Otimização para altura constante.

Procura de máximo quanto à espessura da aleta, sem considerar a restrição (3.1). Derivando a expressão (2.39) em relação a variável  $b$ , e utilizando-se as expressões (2.12), (2.14), (2.15) e (2.16) em (2.39), mantida constante a altura da aleta, tem-se:

$$\left. \frac{dQ}{db} \right|_{L = \text{const.}} = \frac{d}{db} \left[ \frac{\sqrt{hb}}{2k} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{2h}{bk}} L\right) \right] \Big|_L = 0 \quad (3.11)$$

Efetuada a derivação acima e agrupando convenientemente, resulta

$$2\beta - \sinh 2\beta = 0$$

Cuja solução real é

$$\beta = 0 \quad (3.12)$$

Considerando as expressões (2.14), (2.15) e (2.16), tem-se

$$\beta \rightarrow 0 \quad \rightarrow \quad K \rightarrow 0 \quad \rightarrow \quad b \rightarrow 0 \quad (3.13)$$

Substituindo a expressão (3.13) na expressão (2.39), tem-se que o ponto não é um máximo, mas sim um mínimo no calor trocado, pois

$$Q_{mn} = Bi^{1/2} \tanh 0 = 0 \quad (3.14)$$

Da expressão (3.13) conclui-se que para altura da aleta constante, o mínimo calor trocado pela aleta corresponde à aleta de espessura nula ou Razão de Aspecto nula ou Parâmetro Adimensional de Desempenho Térmico nulo, e cujo valor é dado pela expressão (3.14).

### 3.2.3. Otimização para área do perfil constante.

Procura de máximo quanto à altura da aleta, considerando a restrição de que a área do perfil da aleta é constante.

A área do perfil de uma aleta retangular é calculada utilizando-se a expressão (3.5) e a equação (2.23) e resulta

$$A_p = b \cdot L \quad (3.15)$$

Substituindo a expressão (3.15) nas expressões (2.15) e (2.12), tem-se

$$Bi = \frac{hA_p}{2kL} = \frac{hA_p}{2k} L^{-1} \quad (3.16)$$

$$m^2 = \frac{2h}{k} \cdot \frac{L}{A_p} \quad (3.17)$$

$$\beta = \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} L^{3/2} \quad (3.18)$$

Substituindo as expressões (3.16) e (3.18) em (2.39), tem-se

$$Q = \left( \frac{hA_p}{2k} \right)^{1/2} L^{-1/2} \cdot \tanh \left[ \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} \cdot L^{3/2} \right] \quad (3.19)$$

Derivando a expressão (3.19) em relação à altura da aleta, mantendo constante a área do perfil da aleta, tem-se

$$\left. \frac{dQ}{dL} \right|_{A_p = \text{const.}} = -\frac{1}{2} \left( \frac{hA_p}{2k} \right)^{1/2} \tanh \beta + \left( \frac{hA_p}{2k} \right)^{1/2} L^{-1/2}$$

$$\frac{\left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} \cdot \frac{3}{2} L^{3/2} - 1}{\cosh^2 \beta} = 0 \quad (3.20)$$

Efetuada as simplificações na expressão acima, resulta

$$\sinh \beta \cosh \beta - 3 \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} L^2 - 1/2 = 0$$

Utilizando as expressões (2.12) e (2.14) e multiplicando por 2,

$$2 \sinh \beta \cosh \beta - 6 \beta = 0$$

Assim, resulta a equação de otimização

$$\sinh 2\beta - 6\beta = 0 \quad (3.21)$$

A equação de otimização (3.21) admite duas soluções, obtidas por método numérico, que são:

$$\beta_1 = 1,419223 \quad (3.22)$$

$$\beta_2 = 0 \quad (3.23)$$

Análise das soluções:

Das expressões (3.13) e (3.14) conclui-se que a solução (3.23) está associada com um ponto de mínimo no calor trocado, logo não é uma solução satisfatória, e assim não leva a um ótimo no calor trocado.

A solução (3.22) foi obtida inicialmente por SCHMIDT [04], em 1926, e também é citada por autores como KERN e KRAUS [52], JACOB [49] e outros, conforme revisão da literatura, e corresponde a um ótimo, isto é, haverá máxima transferência de calor para aleta com topo isolado sempre que  $\beta = \beta_{ot} = 1,419223$ .

Substituindo a solução (3.22) em (3.18), tem-se

$$\beta_{ot} = 1,419223 = m L_{ot} = \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} L_{ot}^{3/2} \quad (3.24)$$

Explicitando a altura, tem-se a altura da aleta otimizada, dada por

$$L_{ot} = 1,26289 \left( \frac{A_p}{2} \cdot \frac{k}{h} \right)^{1/3} \quad (3.25)$$

Substituindo a expressão (3.25) na expressão (3.15) e explicitando a espessura, tem-se a espessura da aleta otimizada, dada por

$$b_{ot} = 0,79183 \left( A_p^2 \frac{2h}{k} \right)^{1/3} \quad (3.26)$$

Substituindo a solução (3.22) na expressão (2.39), tem-se que o calor trocado por aleta otimizada é dado por

$$Q_{ot} = 0,88944 Bi^{1/2} \quad (3.27)$$

Substituindo a solução (3.22) na expressão (2.38), tem-se que a temperatura adimensional no topo da aleta otimizada é dada por

$$\theta_{0t}(X_t) = 0,45706 \quad (3.28)$$

Das expressões (3.28), (2.35) e (2.38) conclui-se que bastam apenas duas medições de temperatura na aleta (uma no topo e outra na base da aleta) e conhecer a temperatura de referência no fluido- $T_\infty$ , para verificar-se de uma aleta está operando em condições otimizadas.

Substituindo a solução (3.22) na expressão (2.40), tem-se que o rendimento térmico da aleta otimizada é dada por

$$\eta_{ot} = 0,62671 \quad (3.29)$$

Das expressões (3.29) e (2.40) conclui-se que uma aleta operando em condições otimizadas tem rendimento térmico muito menor que a unidade, demonstrando que é falsa a idéia corrente que a aleta isotérmica troca máxima quantidade de calor pois tem rendimento térmico unitário. Isto pode ser verificado comparando as expressões (2.21) e (2.40). Se o rendimento térmico da aleta for unitário, então:

$$\eta = \frac{q_A}{q_i} = \frac{\tanh \beta}{\beta} = 1 \quad \rightarrow \quad \tanh \beta = \beta$$

cuja única solução real é  $\beta = 0$ .

Mas, segundo as expressões (3.12), (3.13) e (3.14) isto implica em um mínimo no calor trocado, logo a aleta que tem rendimento térmico unitário, e conseqüentemente é isotérmica, não troca calor com o fluido refrigerante da aleta.

Conclusão: para aleta operar em condições otimizadas, ela não pode ser isotérmica, mas sim deve ter um gradiente ótimo de temperatura ao longo da altura da aleta.

Substituindo as expressões (3.16), (3.22), (3.25) e (2.35) na expressão (2.39) e explicitando  $A_p$ , tem-se

$$A_p \Big|_{0t} = \frac{0,50425}{h^2 k} \left( \frac{q_{0t}}{\lambda \theta_b} \right)^3 \quad (3.30)$$

Esta expressão é muito importante, pois especificada a quantidade de calor que se deseja que uma aleta troque, pode-se determinar a área do perfil que deverá ter a aleta e conseqüentemente, dimensionar a aleta para operar em condições otimizadas.

A seguir são apresentadas análises de gráficos:

A FIGURA 12 mostra o gráfico do calor adimensional trocado por uma aleta retangular de topo isolado, para diversos números de Biot, em função da razão de aspecto da aleta. Para razão de aspecto muito pequena o calor trocado pela aleta é nulo, conforme previsto na expressão (3.14). Para razão de aspecto muito elevada o calor trocado pela aleta é constante e só depende do número de Biot, conforme previsto pela expressão (3.10). A solução da equação de otimização é mostrada na curva tracejada, conforme expressão (3.27). Observa-se que não existe máximo relativo no calor trocado pois neste caso tem-se que o número de Biot é constante, mas a área do perfil da aleta é variável.

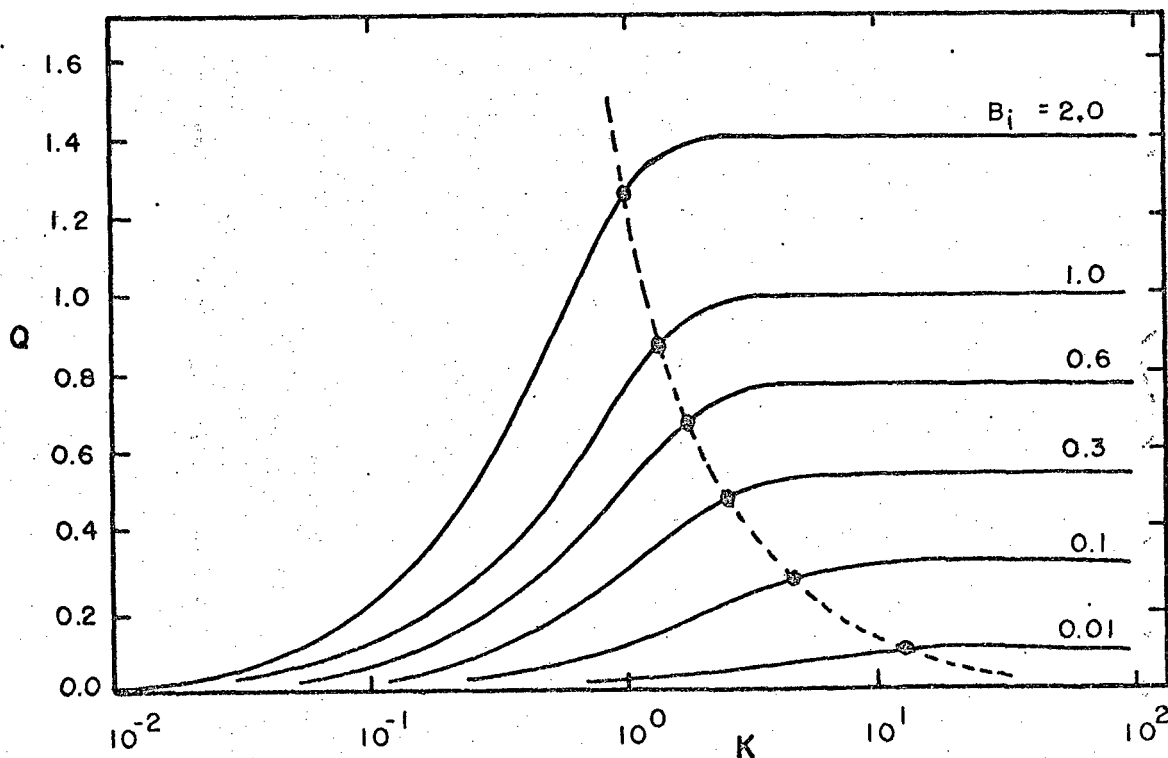


FIGURA 12 - Calor trocado por uma aleta retangular com topo isolado.

Conforme mostrado no presente capítulo, é possível otimizar aleta se for utilizado o critério de manter constante a área do perfil da aleta. A FIGURA 13 mostra algumas aletas retangulares com o respectivo valor da razão de aspecto, mantido constante a área do perfil da aleta, com o objetivo de fornecer uma visualização prática da faixa abrangida pela razão de aspecto das aletas usuais.

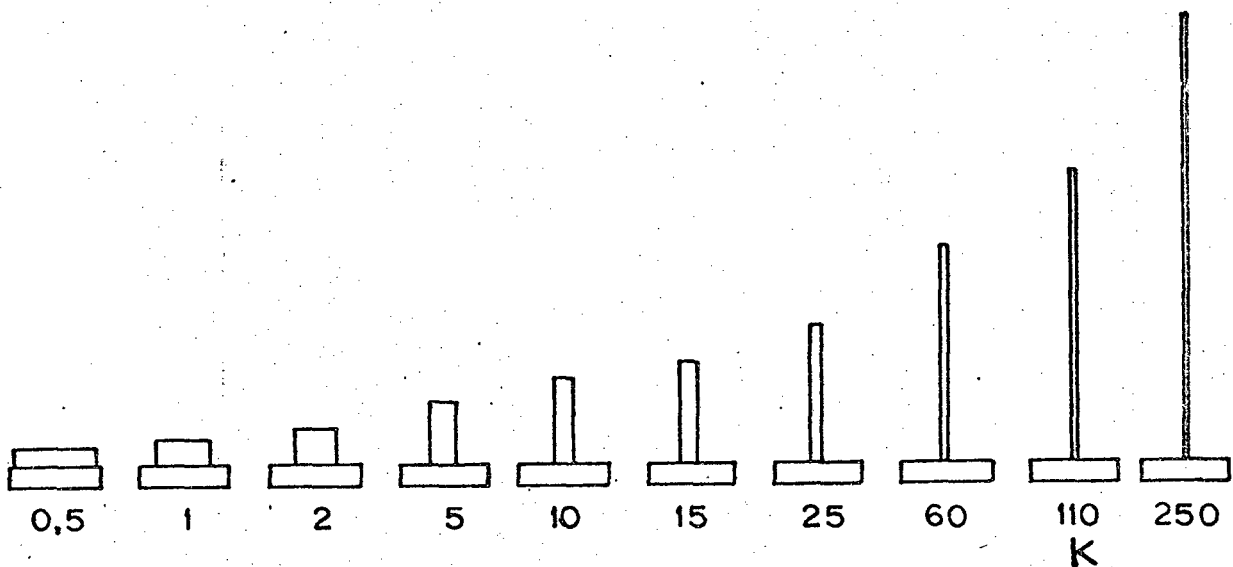


FIGURA 13 - Variação da razão de aspecto, mantida a área do perfil constante.

A FIGURA 14, mostra o gráfico do calor trocado por aleta retangular de topo isolado, quando considera-se a área do perfil constante. O mesmo foi obtido fixando-se todas as variáveis do problema, exceto a espessura da aleta, à qual foi atribuído um valor inicial e um incremento finito e cuja variação foi utilizada para construir o gráfico. Utilizada a equação (3.15) na equação (3.19) observa-se que os pontos de máximo estão claramente evidenciados. Unindo-se os pontos de máximos tem-se a solução da equação de otimização, conforme expressão (3.22). Constata-se no gráfico que aumentando o coeficiente de transferência de calor por



convecção, os pontos de máximo tendem aos menores valores da Razão de aspecto; e que o calor adimensional trocado pela aleta também aumenta proporcionalmente. A solução da equação de otimização é mostrada na curva tracejada, conforme expressão (3.22).

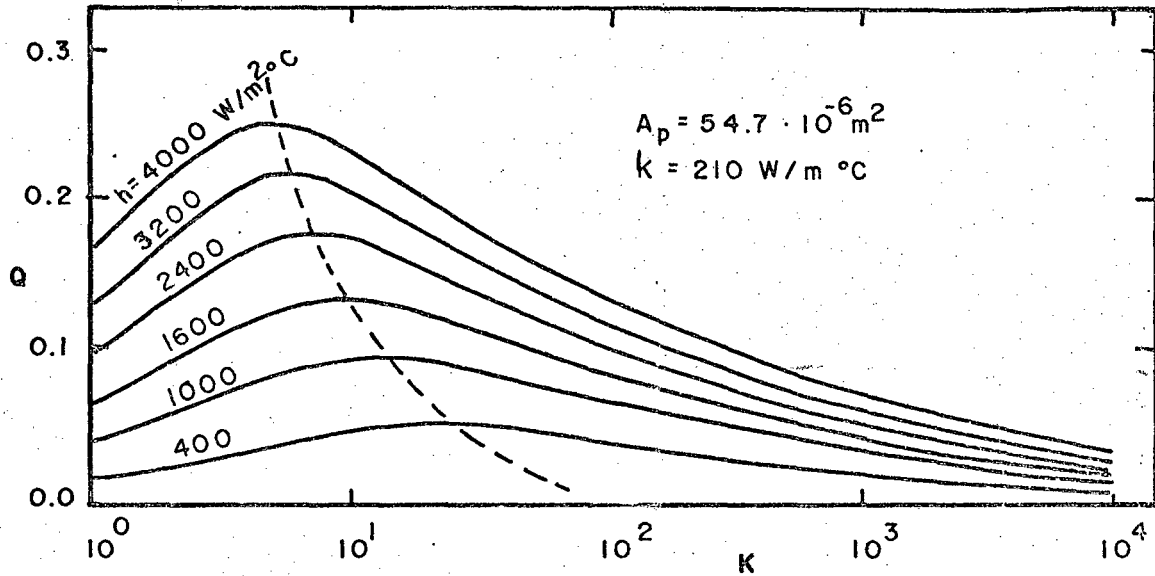


FIGURA 14 - Calor trocado por aleta retangular com topo isolado,  $A_p = \text{cte.}$

Na FIGURA 15, tem-se o gráfico da distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta retangular de topo isolado, destacando uma aleta otimizada, mostrando que para haver máxima transferência de calor é necessário haver um gradiente ótimo de temperatura ao longo da altura da aleta, e que a temperatura adimensional no topo da aleta é dada pela expressão (3.28) se a aleta opera em condições otimizadas. Se a aleta for isotérmica, então a temperatura da base é igual à temperatura do topo e então  $\beta = 0$ , logo a aleta não troca calor, apesar de ter rendimento térmico unitário; neste caso a troca de calor na aleta é limitada pelo coeficiente de convecção. Se houver uma grande diferença de temperatura entre a base e o topo da aleta, então  $\beta \gg 1$  e o rendimento térmico tende a zero; neste caso a troca de calor é limitada pela condutividade térmica da aleta.

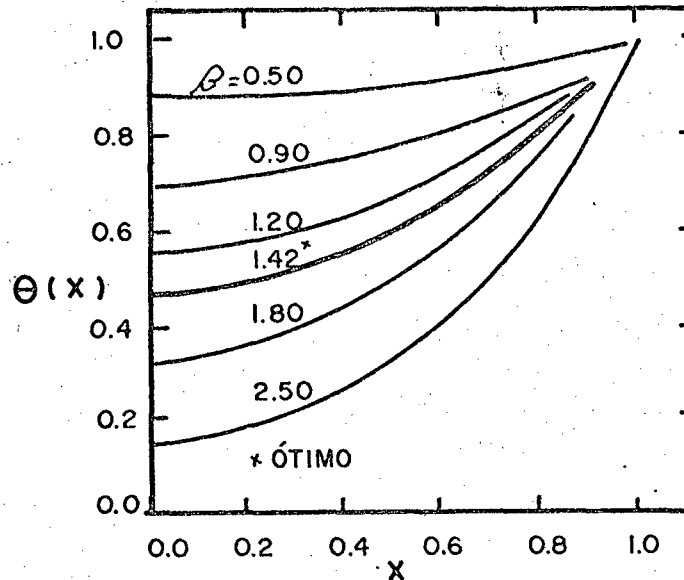


FIGURA 15 - Distribuição de temperatura ao longo da altura para aleta retangular com topo isolado.

### 3.3. Otimização analítica de aleta retangular com topo convectivo.

A otimização de aletas com topo isolado tem sido exaustivamente estudada, mas a otimização de aletas com topo convectivo não é citada nos livros que foram consultados, conforme revisão da literatura. O autor desta pesquisa acredita que a otimização de aletas com topo convectivo não tem sido questionada devido ao fato que a utilização da aproximação de HARPER e BROWN [02] de aumentar o comprimento da aleta e utilizar fictício isolamento do topo, juntamente com a teoria de otimização de aleta com topo isolado, pode resolver de modo satisfatório os problemas de dimensionamento de aletas.

No presente trabalho é dada ênfase à influência do topo sobre o comportamento térmico de aletas convectivas. Apesar da pequena área de troca térmica do topo da aleta, quando comparada à área de troca térmica da face da aleta, algumas conclusões importantes sobre o comportamento teórico das aletas são obtidas.

A aleta convectiva segundo o modelo topo isolado pode ser otimizada sem restrições quanto a limites no calor troca-

do ou na razão de aspecto, bastando que o parâmetro adimensional de desempenho térmico da aleta seja igual a 1,4192 para se ter condições de máxima transferência de calor.

O trabalho experimental de STACHIEWICZ [16] mostrou que o coeficiente de convecção na região do topo da aleta é aproximadamente 1,35 vezes o coeficiente médio de convecção na face da aleta. Este fato motivou a realização do presente trabalho sobre a influência do topo no comportamento térmico da aleta.

O calor trocado pela aleta retangular de topo convectivo, é dado por

$$Q = Bi^{1/2} \frac{\gamma + \tanh \beta}{1 + \gamma \tanh \beta} \quad (2.34)$$

### 3.3.1. Otimização para número de Biot constante.

Procura de máximo quanto à altura da aleta, para número de Biot constante, sem considerar a restrição (3.1). Derivando a expressão (2.34) em relação a L e igualando a zero, tem-se

$$\left. \frac{dQ}{dL} \right|_{Bi} = \frac{d}{dL} \left( Bi^{1/2} \frac{\gamma + \tanh \beta}{1 + \gamma \tanh \beta} \right) \Big|_{Bi} = 0 \quad (3.31)$$

Efetuada a derivação indicada resulta

$$\frac{\frac{d\gamma}{dL} + \frac{\frac{d\beta}{dL}}{\cosh^2 \beta}}{(1 + \gamma \tanh \beta)} - (\gamma + \tanh \beta) \frac{\left[ \left( \frac{d\gamma}{dL} \right) \tanh \beta + \gamma \frac{d\beta/dL}{\cosh^2 \beta} \right]}{(1 + \gamma \tanh \beta)^2} = 0 \quad (3.32)$$

Da expressão (2.32) tem-se

$$\frac{d\gamma}{dL} = \frac{d}{dL} (R_h Bi^{1/2}) = 0 \quad (3.33)$$

pois,  $R_h$  e  $Bi$  são constantes.

Da expressão (2.14) tem-se

$$\frac{d\beta}{dL} = \frac{d}{dL} (m L) = m = \text{const.} \quad (3.34)$$

Substituindo as expressões (3.33) e (3.34) em (3.32) e fazendo as simplificações, resulta

$$(1 - \gamma^2) m \cdot \frac{1}{\cosh^2 \beta} = 0 \quad (3.35)$$

Soluções possíveis:

1º) Para  $\beta \rightarrow \infty$ ,

Consultar as expressões (3.9) e (3.10).

2º) Para  $\gamma = -1$ ,

Exclui-se esta solução, pois não tem sentido físico.

3º) Para  $\gamma = 1$ , (3.36)

O numerador e o denominador da expressão (2.34) são iguais, assim a expressão torna-se independente de  $L$ , ou de  $K$ , e o calor trocado, para  $\gamma = 1$ , resulta

$$Q \Big|_{\gamma=1} = Bi^{1/2} = Q_{mx} \quad (3.10)$$

Observa-se que nos passos intermediários desta dedução desapareceu a variável independente  $L$ , assim conclui-se que a quantidade de calor trocado pela aleta não depende do comprimento da aleta, isto sugere fisicamente que a aleta comporta-se de modo supérfluo, visto que para qualquer comprimento a aleta troca sempre a mesma quantidade de calor, logo é vantagem utilizar a aleta de altura nula, ou seja não utilizar aleta quando  $\gamma = 1$ .

Considerando que é usual admitir que o coeficiente de convecção no topo é igual ao da face da aleta, assim (2.33) torna-se

$$R_h = 1 \quad (3.37)$$

Substituindo (3.37) em (2.32), tem-se

$$\gamma = 1 \rightarrow Bi = 1 \quad (3.38)$$

Substituindo (3.38) em (3.10), resulta

$$Q \Big|_{\gamma=1} = 1 \quad (3.39)$$

Para  $\gamma = 1$ , tem-se  $Q = 1$  e a aleta troca uma quantidade de calor que independe das dimensões da aleta e cujo valor é exatamente igual ao calor trocado pela parede, ou seja, pela aleta de altura nula. Assim, conclui-se

$$\gamma = 1 \rightarrow Q = 1 \rightarrow Bi = 1 \rightarrow \frac{hb}{2k} = 1 \quad (3.40)$$

A conclusão (3.40) foi obtida inicialmente por AVRAMI e LITTLE [08], em 1942, que julgaram ser esta uma condição otimizada. Tal que é chamada por autores como JAKOB [49], SCHNEIDER [27] e outros como o "ótimo número de NUSSELT" da aleta (que é inapropriado, visto que o parâmetro em questão é o número de Biot e não o número de NUSSELT), e além do mais, para  $\gamma = 1$  tem-se que a aleta troca a mesma quantidade de calor que a parede sem aletas, logo a aleta funciona de modo supérfluo, e isto implica que não é vantagem utilizar aletas nestas circunstâncias.

Considerando agora a 5ª hipótese apresentada no 2º capítulo do presente trabalho e considerando as conclusões de CRANKE e PARKER [30] conforme revisão da literatura, considere-se o caso quando o número de Biot é muito pequeno, isto é

$$Bi \ll 1 \quad (3.41)$$

Substituindo a expressão (3.41) em (2.32), tem-se

$$\gamma \ll 1 \quad (3.42)$$

Substituindo (3.41) em (2.15), tem-se

$$\frac{hb}{2k} \ll 1$$

ou agrupando convenientemente

$$h \ll \frac{2k}{b} \quad (3.43)$$

A expressão acima é recomendada por autores como JAKOB [49], SCHNEIDER [27], KRAUS [51], KERN e KRAUS [52] e outros como critério para utilização de aletas, isto é, uma aleta só estará atuando corretamente se satisfizer a relação (3.43).

Do exposto acima, permite inferir que:

Se para  $\gamma = 1$  não existe vantagem em utilizar aletas, e se para  $\gamma < 1$  é recomendado a utilização de aletas, então para  $\gamma > 1$  só pode ser desvantajoso utilizar aleta. Assim, conclui-se:

$$\gamma = 1 \rightarrow Bi = 1 \text{ é indiferente utilizar aletas} \quad (3.44)$$

$$\gamma < 1 \rightarrow Bi < 1 \text{ é vantagem utilizar aletas} \quad (3.45)$$

$$\gamma > 1 \rightarrow Bi > 1 \text{ é desvantagem utilizar aletas} \quad (3.46)$$

### 3.3.2. Otimização para área do perfil constante.

#### 1º Método de Otimização:

Procura de máximo no calor trocado, quanto à espessura da aleta, condicionada à área do perfil constante.

O calor trocado pela aleta retangular com topo convectivo é dado por

$$Q = Bi^{1/2} \frac{\gamma + \tanh \beta}{1 + \gamma \tanh \beta} \quad (2.34)$$

E a área do perfil da aleta retangular é dada por

$$A_p = b \cdot L \quad (3.15)$$

Substituindo (3.15) em (2.14), tem-se

$$\beta = \left(\frac{2h}{k}\right)^{1/2} \cdot A_p \cdot b^{-3/2} \quad (3.47)$$

Substituindo (2.15) em (2.32) e agrupando adequadamente, tem-se

$$\gamma = \frac{h_t}{h} \cdot \left(\frac{h}{2k}\right)^{1/2} \cdot b^{1/2} \quad (3.48)$$

Derivando a expressão (2.34) em relação à espessura, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{db} \Big|_{A_p} &= \frac{d}{db} (Bi)^{1/2} \cdot \frac{\gamma + \tanh \beta}{1 + \gamma \tanh \beta} + Bi^{1/2} \cdot \frac{\frac{d\gamma}{db} + \frac{1}{\cosh^2 \beta} \frac{d\beta}{db}}{1 + \gamma \tanh \beta} + \\ &+ Bi^{1/2} \cdot (\gamma + \tanh \beta) \cdot (-1) \frac{\frac{d\gamma}{db} \tanh \beta + \gamma \frac{1}{\cosh^2 \beta} \frac{d\beta}{db}}{(1 + \gamma \tanh \beta)^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Derivando (2.15) em relação a espessura

$$\frac{d(Bi^{1/2})}{db} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2k}\right)^{1/2} \cdot b^{-3/2} = \frac{1}{2b} (Bi)^{1/2} \quad (3.50)$$

Derivando (3.48) em relação a espessura

$$\frac{d\gamma}{db} = \frac{h_t}{h} \left( \frac{h}{2k} \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} b^{1/2} \cdot -1 = \frac{h_t}{h} \cdot \frac{1}{2b} Bi^{1/2} = \frac{1}{2b} \gamma \quad (3.51)$$

Derivando (3.47) em relação a espessura

$$\frac{d\beta}{db} = -\frac{3}{2} \left( \frac{2h}{k} \right)^{1/2} A_p b^{-3/2} \cdot -1 = \left( -\frac{3}{2b} \right) \beta \quad (3.52)$$

Substituindo as expressões (3.50), (3.51) e (3.52) em (3.49) e efetuando as simplificações, tem-se

$$2\gamma + \tanh \beta - \frac{3\beta}{\cosh^2 \beta} - \gamma \cdot \frac{(\gamma + \tanh \beta)}{(1 + \gamma \tanh \beta)} \left( \tanh \beta - \frac{3\beta}{\cosh^2 \beta} \right) = 0 \quad (3.53)$$

Multiplicando por  $(1 + \gamma \tanh \beta)$ , operando os parênteses, efetuando as simplificações e agrupando convenientemente, resulta

$$\gamma^2 \left( \tanh \beta - \frac{3\beta}{\cosh^2 \beta} \right) + 2\gamma + \left( \tanh \beta - \frac{3\beta}{\cosh^2 \beta} \right) = 0 \quad (3.54)$$

Multiplicando por 2 e utilizando a identidade

$$2 \sinh \beta \cosh \beta = \sinh 2\beta,$$

tem-se a equação de otimização

$$\gamma^2 (\sinh 2\beta + 6\beta) + 4\gamma \cosh^2 \beta + (\sinh \beta - 6\beta) = 0 \quad (3.55)$$

Definindo uma função auxiliar como

$$\phi = \sinh 2\beta - 6\beta \quad (3.56)$$



e utilizando a expressão (3.56) em (3.55), resulta

$$\gamma^2 \left[ \frac{2}{\phi} \sinh 2\beta - 1 \right] + \gamma \left[ \frac{4}{\phi} \cosh^2 \beta \right] + 1 = 0 \quad (3.57)$$

Os valores de  $\beta$  e  $\gamma$  que satisfazem a equação de otimização são parâmetros otimizados.

A expressão (3.57) é uma equação do segundo grau em  $\gamma$ , que pode ser resolvida por

$$A\gamma^2 + B\gamma + 1 = 0 \quad (3.58)$$

Solução:

$$\gamma_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4A}}{2A} \quad (3.59)$$

onde:  $A = \frac{2}{\phi} \sinh 2\beta - 1 \quad (3.60)$

$$B = \frac{4}{\phi} \cosh^2 \beta \quad (3.61)$$

O procedimento para obter raízes da equação de otimização é muito simples: arbitra-se um valor para  $\beta$  e substitui-se nas expressões (3.56), (3.60) e (3.61) e calculam-se as raízes a través de (3.59), obtendo  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Uma raiz tem sinal negativo, assim despreza-se  $\gamma < 0$  por não ter sentido físico no problema;  $\gamma_{1,2} > 0$  é identificado como  $\gamma$ .

Um programa para calculadoras portáteis, escrito em linguagem AOS (para calculadora Texas-59) foi elaborado para obter os valores  $(\beta, \gamma)$  que satisfazem a equação (3.57).

Os valores  $(\beta, \gamma)$  estão lançados no gráfico da FIGURA 16. Observa-se no gráfico que o aspecto da curva é o de uma parábola do 2º grau, de acordo com a equação (3.53). Para  $\gamma = 0$ , então recai-se no modelo topo isolado, e observa-se que existem duas soluções em  $\beta$ , uma resultando  $\beta_{0t} = 1,4192$  que está associada com pontos de máximo no calor trocado, e outra solução  $\beta_{min} = 0$  que está associada com pontos de mínimo no calor trocado. Disto conclui-se que o ramo superior da curva está associado com pon-

tos de máximos e que o ramo inferior da curva está associado com pontos de mínimo no calor trocado. Observa-se também no gráfico que a medida que o topo tem grande importância, então  $\gamma > 0$ , e que a equação de otimização (3.57) só admite solução em  $\beta$  se  $\gamma$  estiver compreendido na faixa

$$0 \leq \gamma \leq 0,305 \quad (3.62)$$

Isto é, existe um limite no parâmetro de convecção do topo da aleta, dado por

$$\gamma_{lim} = 0,305$$

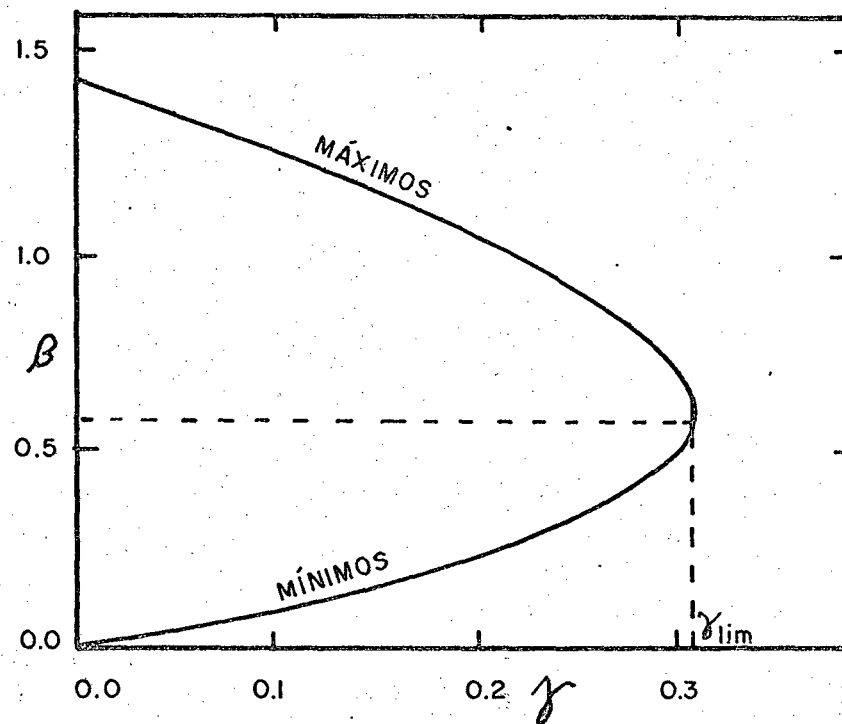


FIGURA 16 - Raízes da equação de otimização de aleta retangular com topo convectivo.

Se  $\gamma$  for superior a  $\gamma_{lim}$  então a equação de otimização (3.57) não admite nenhuma raiz real, logo, a aleta não pode ser otimizada.

Se  $\gamma$  for igual a  $\gamma_{lim}$  então

$$\gamma = \gamma_{lim} = 0,305 \rightarrow \beta = \beta_{lim} = 0,570 \quad (3.63)$$

E conclui-se que corresponde a um ponto onde ocorre simultaneamente máximo e mínimo, logo, este ponto só pode ser um ponto de inflexão na curva do calor trocado.

Se  $\gamma$  for menor que  $\gamma_{lim}$  então ocorrem dois casos distintos:

. A faixa superior do gráfico, correspondente aos pontos de máximos relativos no calor trocado e está na faixa

$$0,570 = \beta_{lim} \leq \beta_{mx} \leq \beta_{ot} = 1,4192 \quad (3.64)$$

. A faixa inferior do gráfico, correspondente aos pontos de mínimos relativos no calor trocado e está na faixa

$$0 \leq \beta_{min} \leq \beta_{lim} = 0,570 \quad (3.65)$$

Como o objetivo de otimizar aletas é determinar as condições que maximizam a troca de calor em aletas, então a faixa que realmente interessa nas aplicações práticas é a faixa superior do gráfico da FIGURA 16.

Como o número de Biot é um parâmetro muito útil na análise de aletas, é interessante conhecer a inter-relação entre o limite de otimização através de  $\gamma_{lim}$  e o limite de otimização através de  $Bi_{lim}$ .

Da expressão (3.63) e de (2.32) e utilizando (3.37), verifica-se

$$\gamma_{lim} = 1 \cdot Bi_{lim}^{1/2} = 0,305 \quad (3.66)$$

Logo,

$$Bi_{lim} = (\gamma_{lim})^2 = 0,093 \approx 0,1.$$

Como a aleta s̄o pode ser otimizada se  $\gamma < \gamma_{lim}$  então  $Bi_{ot} < \beta_{lim}$ , logo

$$Bi_{ot} < 0,1 \quad (3.67)$$

Conclusão: uma aleta s̄o poderã estar operando em condições otimizadas se o número de Biot da aleta for menor que 0,1.

Uma restrição equivalente  $\tilde{a}$  (3.67) foi introduzida por CRANK e PARKER [30] e outra por LAU e TAN [31], que afirmaram que para número de Biot menor que 0,1, as formulações unidimensional e bidimensional dão aproximadamente o mesmo resultado no calor trocado.

Conhecido os valores  $\gamma_{ot}$  e  $\beta_{ot}$  que maximizam o calor trocado pela aleta, calculam-se os outros parâmetros da aleta. Substituindo  $\beta_{ot}$  em (3.18) tem-se

$$\beta_{ot} = \left( \frac{2h}{kA_p} \right)^{1/2} L_{ot}^{3/2} = m L_{ot}$$

Explicitando a altura tem-se a altura da aleta otimizada, dada por

$$L_{ot} = \beta_{ot}^{2/3} \left( \frac{A_p}{2} \frac{k}{h} \right)^{1/3} \quad (3.68)$$

Substituindo a expressão (3.68) na expressão (3.15) e explicitando a espessura, tem-se a espessura da aleta otimizada, dada por

$$b_{ot} = \frac{1}{(\beta_{ot})^{2/3}} \left( A_p^2 \frac{2h}{k} \right)^{1/3} \quad (3.69)$$

Substituindo  $(\gamma_{ot}, \beta_{ot})$  em (2.34), tem-se

$$Q_{ot} = Bi^{1/2} \frac{\gamma_{ot} + \tanh \beta_{ot}}{1 + \gamma_{ot} \cdot \tanh \beta_{ot}} \quad (3.70)$$

Substituindo  $(\gamma_{0t}, \beta_{0t})$  em (2.31), tem-se que a temperatura adimensional no topo da aleta otimizada é dada por

$$\theta_{0t}(X_t) = \frac{\cosh \beta_{0t} X_t + \gamma_{0t} \cdot \sinh \beta_{0t} X_t}{\cosh \beta_{0t} + \gamma_{0t} \sinh \beta_{0t}} \quad (3.71)$$

Substituindo  $(\gamma_{0t}, \beta_{0t})$  em (2.36), tem-se que o rendimento térmico da aleta otimizada é dado por

$$\eta_{0t} = \frac{1}{\beta_{0t}(1+R_h/k)} \cdot \frac{\gamma_{0t} + \tanh \beta_{0t}}{1+\gamma_{0t} \cdot \tanh \beta_{0t}} \quad (3.72)$$

Quando se prescreve a troca de calor desejada, pode-se explicitar a área de perfil que deve ter a aleta. Substituindo as expressões (3.16), (3.68),  $(\gamma_{0t}, \beta_{0t})$  e utilizando (2.35) em (2.34) e explicitando  $A_p$ , tem-se

$$A_{p0t} = \frac{\beta_{0t}}{4 \left( \frac{\gamma_{0t} \tanh \beta_{0t}}{1+\gamma_{0t} \cdot \tanh \beta_{0t}} \right)^3} \cdot \frac{1}{h^2 k} \left( \frac{q_{0t}}{\theta_b \cdot \ell} \right)^3 \quad (3.73)$$

Consultar as conclusões apresentadas entre as expressões (3.28) e (3.30) para topo isolado, pois ainda continuam válidas.

As expressões (3.55) até (3.71) não são citadas na literatura consultada sobre aletas, conforme constatação do autor do presente trabalho.

A seguir são apresentadas análises de gráficos:

A FIGURA 17, mostra o gráfico do calor adimensional trocado por uma aleta retangular de topo convectivo, para diversos números de Biot, em função da razão de aspecto da aleta. Para o caso quando  $R_h = 1$ , observa-se que não existe máximo relativo no calor trocado e que existem duas regiões distintas no grã-

fico.

Para número de Biot maior que um, nota-se que aumentando a razão de aspecto (ou a altura da aleta) diminui-se a quantidade de calor trocado pela aleta e que portanto a aleta funciona como isolante térmico sobre a parede, sendo portanto desvantagem utilizar aletas, conforme conclusão (3.46).

Para número de Biot igual a um, nota-se que o calor trocado pela aleta é constante (não depende da altura da aleta ou da razão de aspecto da aleta) e é igual a unidade. Da expressão (3.39), isto implica que a aleta troca a mesma quantidade de calor que a superfície sem aletas, sendo portanto desvantagem utilizar aletas se o número de Biot for unitário, conforme conclusão (3.44).

Para número de Biot menor que um, nota-se que para pequena razão de aspecto, o calor trocado pela aleta é devido praticamente ao topo da aleta, iniciando o gráfico em um valor constante, tal que o valor limite é dado por:

$$K = 0 \rightarrow Q = R_h Bi \quad (3.74)$$

À medida que aumenta a razão de aspecto da aleta, mantido Biot constante, o calor trocado pela aleta aumenta gradativamente e depois torna-se constante novamente, tal que o valor limite é dado por:

$$K = \infty \rightarrow Q = Bi^{1/2} \quad (3.10)$$

No gráfico da FIGURA 17 consta uma linha destacada que corresponde ao valor limite do número de Biot, conforme a restrição (3.67), portanto corresponde ao limite conforme expressão (3.63). Para número de Biot maior que 0,1 não existem valores de  $\beta$  e  $\gamma$  que satisfazem a equação de otimização (3.57), logo o gráfico

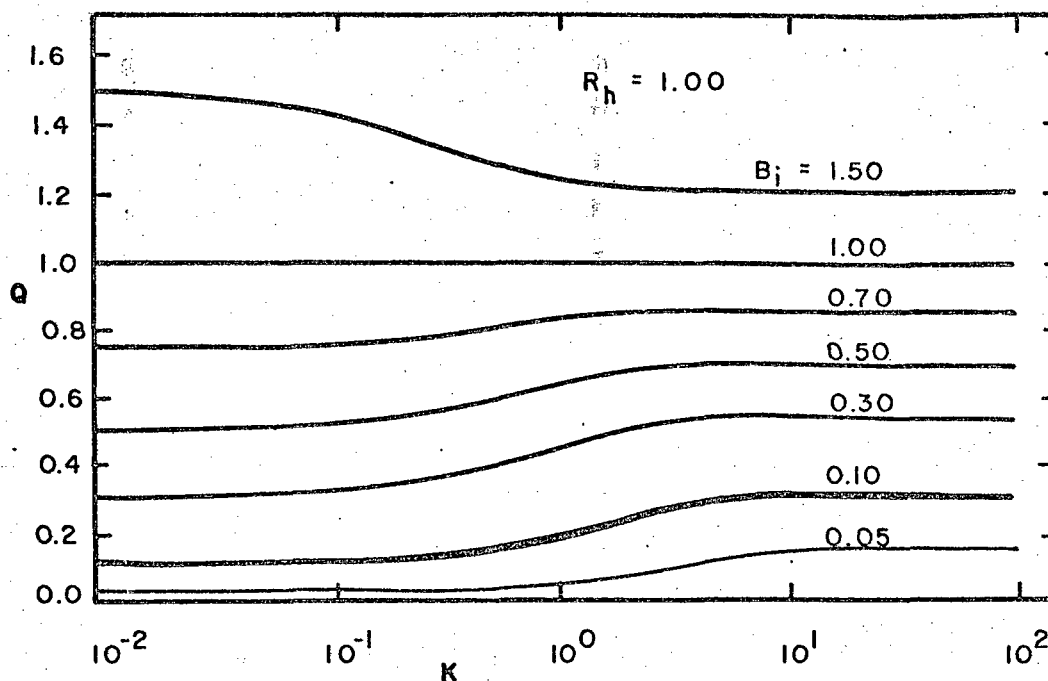


FIGURA 17 - Calor trocado por aleta retangular com topo convectivo, faixa não otimizável, número de Biot = cte.

da FIGURA 17 corresponde à faixa não otimizável, pois contém curvas de calor trocado apenas para número de Biot maior que 0,1.

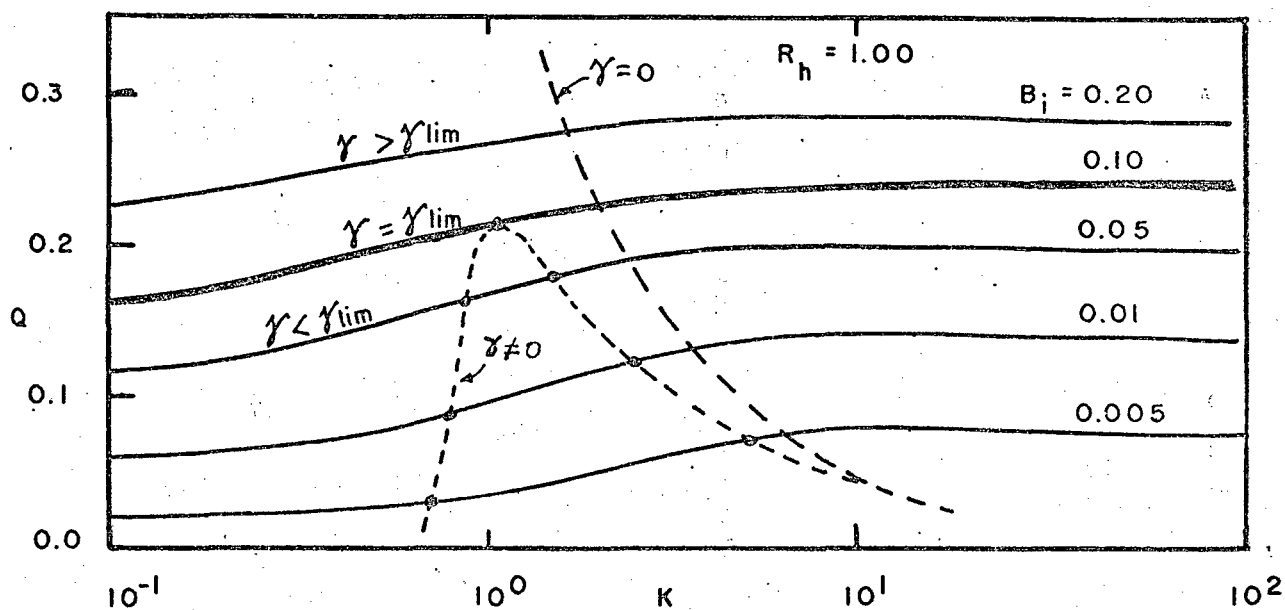


FIGURA 18 - Calor trocado por aleta retangular com topo convectivo, faixa otimizável, número de Biot = cte.

A FIGURA 18 mostra o gráfico do calor trocado para valores do número de Biot que satisfazem a restrição de otimização (3.67), e portanto corresponde à faixa otimizável do calor trocado. Observa-se da FIGURA 18 que para diversos valores do número de Biot o gráfico do calor trocado não apresenta pontos de máximos ou mínimos relativos, pois neste caso a área do perfil da aleta não é constante. A solução da equação de otimização para aleta com topo convectivo é mostrada na curva tracejada correspondente a valores  $\gamma \neq 0$ , calculados segundo a expressão (3.70). Somente para comparação, a solução da equação de otimização para aleta com topo isolado, correspondente ao valor  $\gamma = 0$ , calculados segundo a expressão (3.27), também é mostrada no gráfico; mostrando que à medida que a razão de aspecto aumenta, a solução segundo o modelo topo convectivo converge para a solução segundo o modelo topo isolado; e que à medida que a razão de aspecto diminui o modelo topo isolado torna-se inconveniente, pois o topo passa a ter importância fundamental no comportamento térmico da aleta

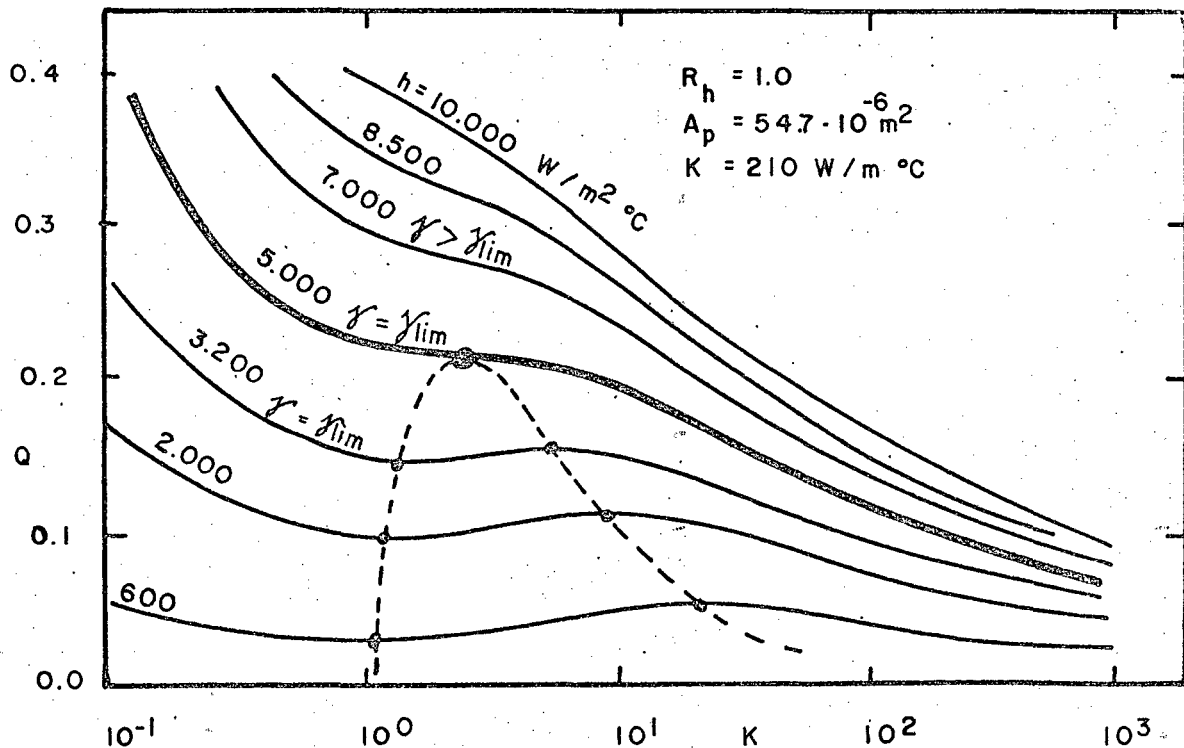


FIGURA 19 - Calor trocado por aleta retangular com topo convectivo,  $A_p = \text{cte.}$



A FIGURA 19 mostra o gráfico do calor trocado por aleta retangular com topo convectivo quando considera-se a área do perfil constante. O mesmo foi obtido fixando-se todas as variáveis do problema, exceto a espessura da aleta, à qual foi atribuído um valor inicial e um incremento finito e cuja variação foi utilizada para construir o gráfico, bastando substituir as expressões (3.15), (3.47) e (3.48) na expressão do calor trocado (2.34).

Analisando o gráfico da FIGURA 19 verifica-se que existem duas regiões distintas no gráfico:

Para  $\gamma$  maior que  $\gamma_{lim}$ , nota-se que aumentando a razão de aspecto (ou a altura da aleta) diminui-se gradativamente a quantidade de calor trocado pela aleta, sem apresentar máximo ou mínimo relativo. Assim, conclui-se que neste caso a adição de aletas sobre a superfície primária implica em diminuição do calor trocado, logo é desvantagem utilizar aletas se  $\gamma > \gamma_{lim}$ , aparecendo uma restrição mais forte que a expressão (3.46) dada por

$$\gamma > \gamma_{lim} \rightarrow \text{desvantagem utilizar aletas} \quad (3.75)$$

Para  $\gamma$  igual a  $\gamma_{lim}$ , nota-se que aumentando a razão de aspecto diminui-se o calor trocado pela aleta até que atinge um patamar onde o calor trocado fica aproximadamente constante e que aumentando ainda mais a razão de aspecto o calor trocado torna a diminuir. Assim, conclui-se que neste caso a adição de aletas sobre a superfície primária também implica em diminuição do calor trocado, sendo desvantagem utilizar aletas se  $\gamma = \gamma_{lim}$ , aparecendo uma restrição mais forte que a expressão (3.44) que é a seguinte

$$\gamma = \gamma_{lim} \rightarrow \text{desvantagem utilizar aletas} \quad (3.76)$$

Para  $\gamma$  menor que  $\gamma_{lim}$ , nota-se que aumentando a razão de aspecto da aleta diminui-se o calor trocado pela aleta até que atinge um ponto de mínimo relativo na curva, unindo todos os pontos de mínimos relativos, tem-se uma curva que está associada com a curva de mínimos do gráfico da FIGURA 16. Aumentando-se a razão de aspecto da aleta o calor trocado agora aumenta gradativamente até atingir um ponto de máximo relativo na curva, unindo todos os

pontos de máximos relativos, tem-se uma curva que está associada com a curva de máximos do gráfico da FIGURA 16. Aumentando-se novamente a razão de aspecto da aleta, o calor trocado pela aleta passa a diminuir indefinidamente, coincidindo com modelo topo isolado.

Para  $K < 1$  e qualquer valor de  $\gamma$ , observa-se que a adição de aletas é sempre desvantagem pois diminui a troca de calor, sendo preferível não utilizar aletas. Mas da FIGURA 13, para  $K \leq 2$  não tem-se aletas no sentido de uma extensão da superfície de troca térmica para o interior da região onde ocorre escoamento do fluido, mas sim tem-se uma extensão da superfície de troca térmica sobre a própria superfície primária. E além do mais, para  $K \leq 2$  o espaçamento entre as aletas seria menor que a espessura da aleta, logo não é vantagem utilizar aletas, isto é, somente identifica-se como aleta no sentido de extensão de superfície de troca térmica se

$$K \geq 2 \quad (3.77)$$

Um ponto importante do gráfico da FIGURA 19 é o ponto de máximo que é definido pelos valores  $(\beta_{lim}, \gamma_{lim})$ , e cujo calor trocado correspondente, conforme a expressão (3.70) é dado por

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \beta_{lim} = 0,570 \\ \gamma &= \gamma_{lim} = 0,305 \end{aligned} \right\} Q_{lim} = 0,216 \quad (3.78)$$

O valor limite da razão de aspecto pode ser determinado utilizando as expressões (2.14), (2.32), (3.37) e (3.63), resultando

$$K_{lim} = \frac{\beta_{lim}}{\gamma_{lim}} = \frac{0,570}{0,305} = 1,87 \quad (3.79)$$

Para ter-se um máximo no calor trocado então utiliza-se  $\gamma_{ot} < \gamma_{lim}$  e assim tem-se necessariamente que  $K_{ot} > K_{lim}$ .

A FIGURA 20, mostra o gráfico do calor trocado para aleta retangular quando considera-se constante o coeficiente de

convecção na face da aleta e varia-se somente o coeficiente de convecção no topo da aleta. Observa-se que para aleta com topo isolado, ( $\gamma = 0$ ), tem-se apenas um máximo absoluto, e a medida que admite-se convecção no topo, para  $\gamma < \gamma_{lim}$  surge um máximo absoluto para  $K \ll 1$ , um mínimo relativo e um máximo relativo no calor trocado. Para  $\gamma$  maior que  $\gamma_{lim}$ , a adição de aleta torna-se sempre desfavorável.

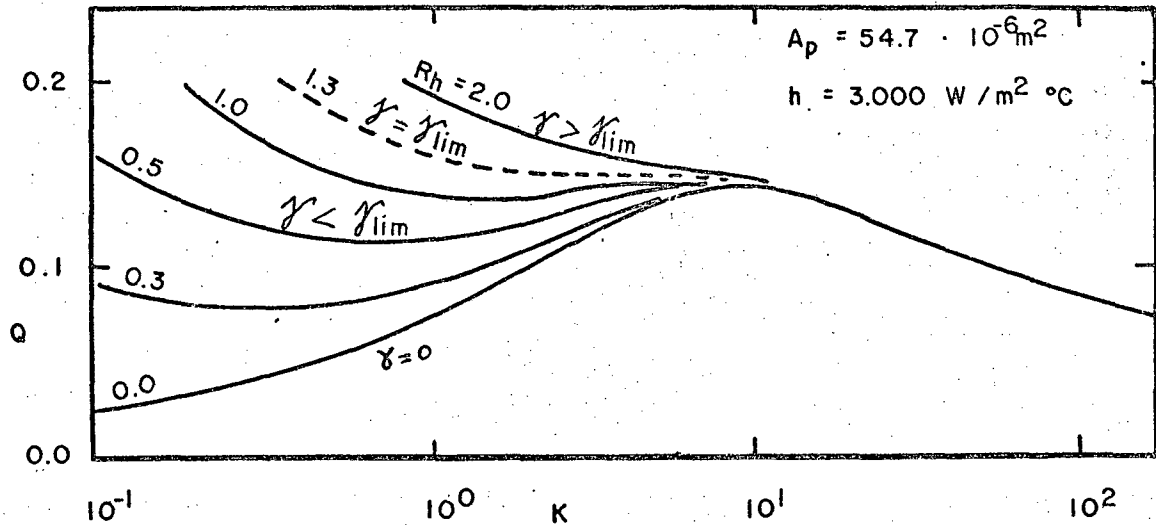


FIGURA 20 - Influência da convecção no topo da aleta sobre o calor trocado pela aleta retangular,  $A_p = \text{cte}$ .

Na FIGURA 21, tem-se o gráfico do rendimento térmico da aleta retangular com topo convectivo.

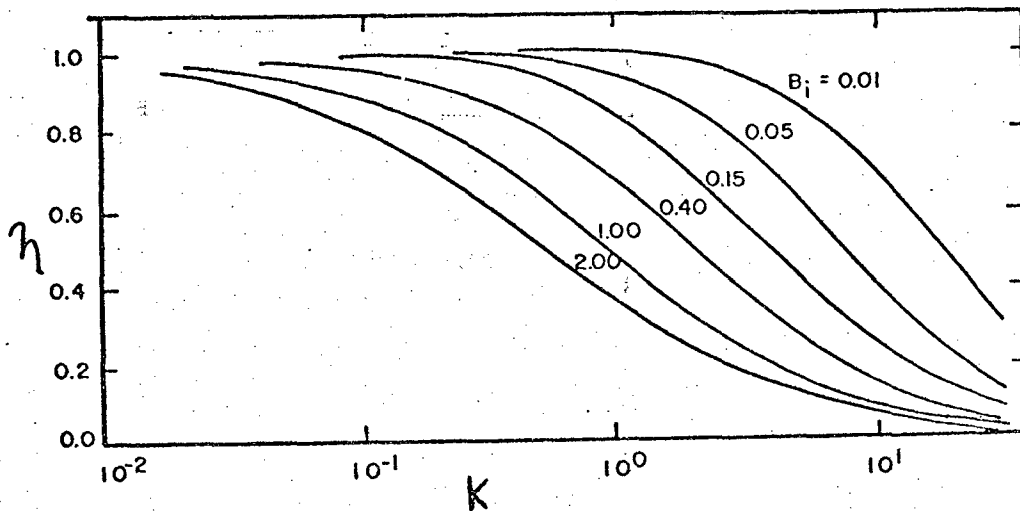


FIGURA 21 - Rendimento térmico da aleta retangular com topo convectivo.

Na FIGURA 22, tem-se o gráfico da distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta retangular topo convectivo, destacando uma aleta otimizada, mostrando que para haver máxima transferência de calor é necessário haver um gradiente ótimo de temperatura na aleta.

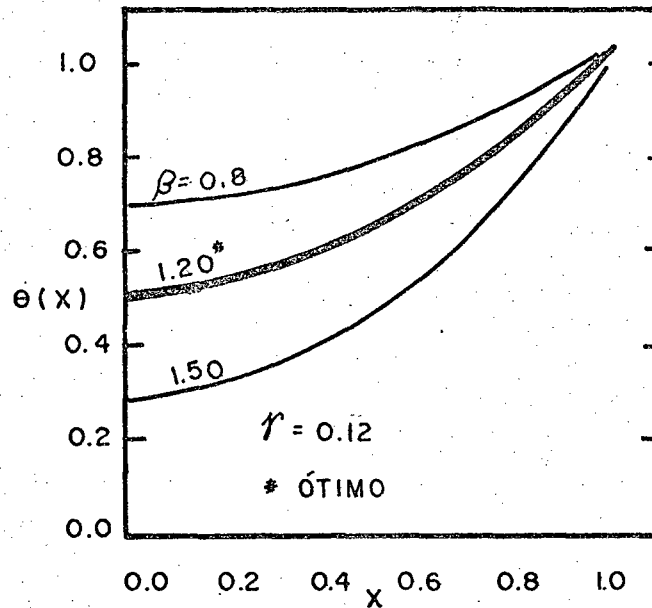


FIGURA 22 - Distribuição de temperatura ao longo da altura, aleta retangular com topo convectivo,  $\gamma = \text{cte}$ .

Na FIGURA 23, tem-se o gráfico de distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta retangular topo convectivo, mostrando a influência da convecção no topo sobre o perfil de temperatura.

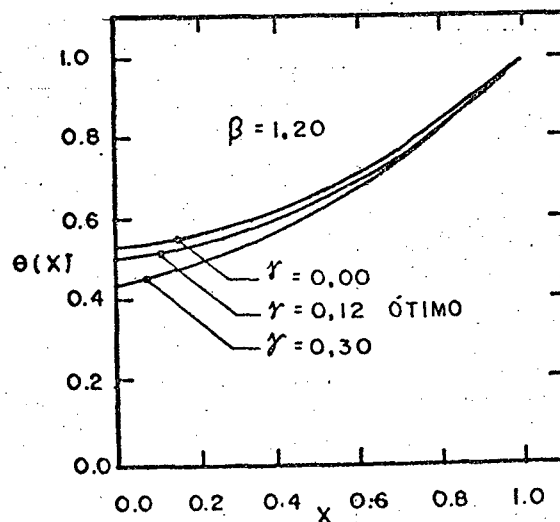


FIGURA 23 - Distribuição de temperatura ao longo da altura, aleta retangular com topo convectivo,  $\beta = \text{cte}$ .

### 2º Método de otimização:

Procura de máximo no calor trocado, quanto ao parâmetro adimensional de desempenho térmico da aleta  $\beta$ ; condicionada à área do perfil constante.

Este método é utilizado por KRAUS [51] e KERN e KRAUS [52] como recurso para obter a função otimizadora de aleta triangular e de aleta parabólica; para aleta retangular topo isolado foi utilizado o método apresentado no item 3.2.3. O objetivo desta seção é obter a função otimizadora de modo independente de variáveis geométricas básicas, por um método mais refinado e elegante.

O calor trocado pela aleta é dado por

$$Q = Bi^{1/2} \frac{\gamma + \tanh \beta}{1 + \gamma \tanh \beta} \quad (2.34)$$

$$\beta = \left(\frac{2h}{k}\right)^{1/2} \frac{A_p}{b^{3/2}} \quad (3.34)$$

Explicitando  $b$ , tem-se

$$b = \left(\frac{A_p}{\beta}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{2h}{k}\right)^{1/3} \quad (3.80)$$

Substituindo (3.80) em (2.15), tem-se

$$Bi = \left(\frac{A_p}{2}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{h}{k}\right)^{4/3} \cdot \beta^{-2/3} \quad (3.81)$$

Derivando (3.81) em relação a  $\beta$ , tem-se

$$\left. \frac{dBi}{d\beta} \right|_{A_p} = - \frac{2}{3} Bi \beta^{-1} \quad (3.82)$$

Derivando (2.32) em relação a  $\beta$ , tem-se

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{h_t}{k} L \frac{d}{d\beta} \left( \frac{1}{\beta} \right) + \frac{h_t}{k} \frac{1}{\beta} \frac{d}{d\beta} (L) \quad (3.83)$$

Por outro lado, substituindo (3.80) em (3.15) e explicitando  $L$ , tem-se

$$L = A_p \left[ \left( \frac{R_h}{k} \right)^{1/2} \cdot \frac{A_p}{\beta} \right]^{-2/3} \quad (3.84)$$

Derivando (3.84) em relação a  $\beta$ , tem-se

$$\frac{dL}{d\beta} = L \frac{2}{3} \beta^{-1} \quad (3.85)$$

Substituindo (3.85) em (3.83), tem-se

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{h_t}{k} \frac{L}{\beta} \cdot \frac{(-1)}{\beta} + \frac{2}{3} \frac{h_t}{k} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{(+1)}{\beta}$$

Substituindo (2.32) e explicitando  $\gamma$ , tem-se

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = - \frac{1}{3} \frac{\gamma}{\beta} \quad (3.86)$$

Agora derivando (2.34) em relação a  $\beta$ , tem-se

$$\frac{dQ}{d\beta} \Big|_{A_p} = \frac{d}{d\beta} \left( Bi^{1/2} \frac{\gamma + \tanh \beta}{1 + \gamma \tanh \beta} \right) = 0 \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d(Bi^{1/2})}{d\beta} \frac{\gamma + \tanh \beta}{1 + \gamma \tanh \beta} + \frac{Bi^{1/2}}{(1 + \gamma \tanh \beta)} \cdot \left( \frac{d\gamma}{d\beta} + \frac{d}{d\beta} \tanh \beta \right) + \\ & + Bi^{1/2} \cdot (\gamma + \tanh \beta) \frac{(-1) \left[ \frac{d\gamma}{d\beta} \tanh \beta + \gamma \frac{d}{d\beta} \tanh \beta \right]}{(1 + \gamma \tanh \beta)^2} = 0 \quad (3.88) \end{aligned}$$

Agupando convenientemente, simplificando os termos comuns e multiplicando por  $\beta$ , tem-se

$$-\frac{1}{3}(\gamma + \tanh \beta) + \left( -\frac{1}{3} \gamma + \frac{\beta}{\cosh^2 \beta} \right) - \frac{\gamma(\gamma + \tanh \beta)}{(1 + \gamma \tanh \beta)}$$

$$\cdot \left( \frac{\beta}{\cosh^2 \beta} - \frac{1}{3} \tanh \beta \right) = 0$$

ou também

$$-\frac{2}{3} \gamma - \frac{1}{3} \tanh \beta + \frac{\beta}{\cosh^2 \beta} - \frac{\gamma(\gamma + \tanh \beta)}{(1 + \gamma \tanh \beta)} \left( -\frac{1}{3} \tanh \beta + \frac{\beta}{\cosh^2 \beta} \right)$$

$$= 0$$

Multiplicando por  $6 \cosh^2 \beta (1 + \gamma \tanh \beta)$  e efetuando as simplificações

$$- 4\gamma \cosh^2 \beta + (6\beta - \sinh 2\beta) - 4\gamma^2 \tanh^2 \beta +$$

$$\gamma(6\beta - \sinh 2\beta) \tanh \beta - (3\gamma^2 + 3\gamma \tanh \beta) \left( 2\beta - \frac{1}{3} \sinh 2\beta \right) = 0 \quad (3.89)$$

Efetuada as operações entre parênteses e simplificando os termos comuns, e multiplicando por  $(-1)$ , resulta a função otimizadora

$$\gamma^2 (6\beta + \sinh 2\beta) + 4\gamma \cosh^2 \beta + (\sinh 2\beta - 6\beta) = 0 \quad (3.55)$$

Verifica-se que as funções otimizadoras são exatamente iguais, isto é

$$\frac{dQ}{db} \Big|_{A_p} = \frac{dQ}{d\beta} \Big|_{A_p} \quad (3.90)$$

### 3.4. Otimização numérica de aleta retangular topo convectivo.

Nesta seção é apresentado um processo de otimização por procura direta, baseado no método de FIBBONACCI.

A equação do calor trocado por aleta retangular topo convectivo é dada por (2.34) e (2.35)

$$Q = \frac{q}{2 \theta_b \ell k} = Bi^{1/2} \frac{\gamma + \tanh \beta}{1 + \gamma \tanh \beta} \quad (3.91)$$

Substituindo (2.32) e (3.81) em (3.91) e depois substituindo (3.47) e (3.48), agrupando convenientemente e introduzindo um novo parâmetro  $Q^+$ , tem-se

$$Q^+ = b^{1/2} \frac{1 + \frac{h_t}{\sqrt{2} h} \left(\frac{h}{k}\right)^{1/2} b^{1/2} + \tanh \left[ \left(\frac{2h}{k}\right)^{1/2} A_p b^{-3/2} \right]}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{h_t}{h} \left(\frac{h}{k}\right)^{1/2} b^{1/2} \tanh \left[ \left(\frac{2h}{k}\right)^{1/2} A_p b^{-3/2} \right]} \quad (3.92)$$



onde  $Q^+$  é definido por:

$$Q^+ = \frac{Q}{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{A_p}{2}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{h}{k}\right)^{4/3}} \quad (3.93)$$

O procedimento a seguir é fixar as variáveis  $h$ ,  $h_t$ ,  $k$  e  $A_p$ , e através da variação da espessura da aleta, procurar pontos de máximo e mínimos relativos na expressão (3.92). Com os valores da espessura que maximizam ou minimizam (3.92), calculam-se os parâmetros  $\beta$ , segundo a expressão (3.47) e  $\gamma$  segundo a expressão (3.48) e os resultados são confrontados com o gráfico da FIGURA 16.

Um programa para calculadoras portáteis, escrito em linguagem AOS (para calculadora Texas-59) foi elaborado para obter os valores que maximizam e minimizam a expressão (3.92), e calculam os valores  $(\beta_{ot}, \gamma_{ot})$  e  $(\beta_{min}, \gamma_{min})$ .

Os valores obtidos via otimização numérica foram comparados com as raízes da equação de otimização (3.55) e constatou-se serem exatamente iguais, em todas as faixas de valores, confirmando os resultados obtidos por otimização analítica.

O gráfico da FIGURA 24, mostra a interdependência dos parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  durante o processo de otimização por método de procura direta; superposto está a curva de otimização obtida com as raízes da equação de otimização (3.56).

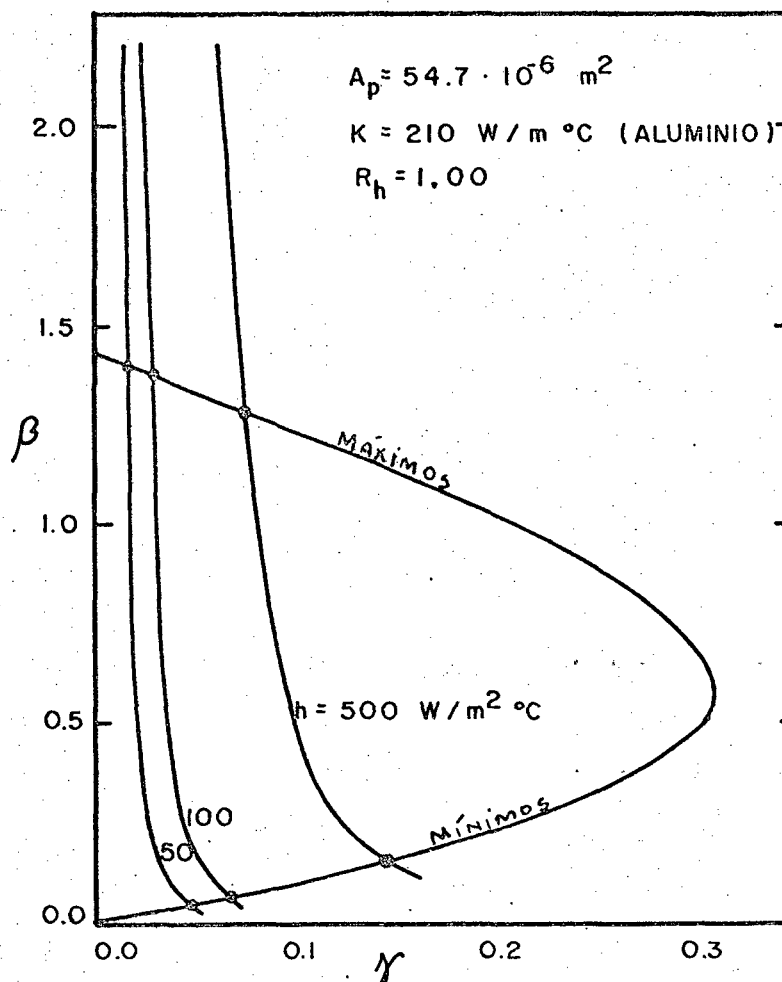


FIGURA 24 - Interdependência entre os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  durante o processo de otimização de aleta.

### 3.5. Otimização analítica de aleta com perfil triangular.

A aleta de perfil triangular é um caso particular da aleta de perfil trapezoidal quando a espessura no topo é nula.

O calor trocado pela aleta triangular é

$$Q = Bi^{1/2} \frac{I_0(\beta_b)}{I_0(\beta_b)} \quad (2.76)$$

onde:  $\beta_b = 2\beta \quad (2.73)$

Introduzindo o conceito de área do perfil da aleta triangular, conforme a expressão (3.5) e a equação (2.70), resulta

$$A_p = \frac{b \cdot L}{2} \quad (3.94)$$

Explicitando L em (3.94) e substituindo em (2.14), tem-se

$$\beta = \left(\frac{2h}{bk}\right)^{1/2} \cdot \frac{2}{b} A_p \quad (3.95)$$

Explicitando b em (3.95) e substituindo em (3.15) e utilizando (2.73), tem-se

$$Bi = \left[\frac{A_p}{2} \left(\frac{2h}{k}\right)^2\right]^{2/3} (\beta_b)^{-2/3} \quad (3.96)$$

Substituindo (3.96) em (2.76), tem-se

$$Q = \left[\frac{A_p}{2} \cdot \left(\frac{2h}{k}\right)^2\right]^{1/3} (\beta_b)^{-1/3} \cdot \frac{I_1(\beta_b)}{I_0(\beta_b)} \quad (3.97)$$

Derivando (3.97) em relação a  $\beta_b$  e igualando a zero, a fim de obter a equação de otimização, tem-se

$$\frac{dQ}{d\beta_b} = \frac{d}{d(\beta_b)} \left[ (\beta_b)^{-1/3} \frac{I_1(\beta_b)}{I_0(\beta_b)} \right] = 0 \quad (3.98)$$

Derivando e simplificando os termos comuns, tem-se

$$-\frac{1}{3} \beta_b^{-1} I_1(\beta_b) + I_2(\beta_b) + \frac{I_1(\beta_b)}{\beta_b} - \frac{I_1^2(\beta_b)}{I_0(\beta_b)} = 0 \quad (3.99)$$

Reagrupando, obtêm-se a equação de otimização

$$\frac{2}{3} \frac{I_1(\beta_b) I_0(\beta_b)}{\beta_b} + I_0(\beta_b) \cdot I_2(\beta_b) = I_1^2(\beta_b) \quad (3.100)$$

A equação (3.100) concorda exatamente com KRAUS [51] (expressão 5.43) e também concorda exatamente com KERN e KRAUS [52], (expressão (2.83)).

A equação otimizadora (3.100) admite solução real, obtida por método numérico cuja raiz é:

$$\beta_b \Big|_{\theta_t} = 2,6188 \quad (3.101)$$

Substituindo (2.73) em (3.101) tem-se

$$\beta_{\theta_t} = 1,3094 \quad (3.102)$$

Para obter as dimensões otimizadas da aleta triangular, substitui-se (3.102) em (3.95) e explicita-se a espessura da aleta resulta

$$b_{\theta_t} = \left(\frac{2}{\beta_{\theta_t}}\right)^{2/3} \left(A_p^2 \frac{2h}{k}\right)^{1/3} = 1,3263 \left(A_p^2 \frac{2h}{k}\right)^{1/3} \quad (3.103)$$

Substituindo (3.101) em (2.76), tem-se

$$Q_{\theta_t} = Bi^{1/2} \cdot \frac{I_1(2\beta_{\theta_t})}{I_0(2\beta_{\theta_t})} = 0,7773 Bi^{1/2} \quad (3.105)$$

Substituindo (3.101) em (2.75), tem-se para o topo da aleta

$$\theta_{\theta_t}(X_t) = 0,27735 \quad (3.106)$$

Substituindo (3.101) em (2.79), tem-se

$$\eta_{0t} = 0,59365 \quad (3.107)$$

Quando se prescrevem as condições de uso e a troca de calor desejada, pode-se explicitar a área do perfil da aleta. Substituindo (3.103) em (2.15) e o resultado em (2.76) e depois utilizando (2.35), explicitando  $A_p$ , tem-se

$$A_{p_{0t}} = \frac{\beta_{0t}}{8 \left( \frac{I_0(2\beta_{0t})}{I_1(2\beta_{0t})} \right)^3} \cdot \frac{1}{h^2 k} \cdot \left( \frac{q_{0t}}{\theta_b \ell} \right)^3 \quad (3.108)$$

Substituindo os valores numéricos, tem-se:

$$A_{p_{0t}} = \frac{0,3486}{h^2 k} \left( \frac{q_{0t}}{\theta_b \ell} \right)^3 \quad (3.109)$$

As expressões (3.109), (3.103) e (3.104) concordam com KERN e KRAUSS [52], expressões (2.88), (2.83) e (2.84) respectivamente.

## CAPÍTULO IV

### CONCLUSÕES

Neste capítulo far-se-ã uma discussão geral sobre os principais assuntos de cada capítulo e sua conclusão.

No primeiro capítulo procurou-se fazer uma revisão da literatura a mais abrangente possível, enfocando principalmente o estudo de aletas longitudinais convectivas.

No segundo capítulo procurou-se obter as soluções mais gerais sobre o comportamento térmico de aletas longitudinais com perfil retangular, trapezoidal e parabólico truncado. É abordado o problema de aleta com topo convectivo. As principais equações são apresentadas em termos de variáveis adimensionais, e sempre que possível procurou-se adimensionalizar as equações e suas soluções. Deve-se destacar que as equações para aletas trapezoidal truncada com topo convectivo não são disponíveis na literatura, conforme constatato pelo autor desta pesquisa durante a realização da revisão da literatura. As equações apresentadas no segundo capítulo são indispensáveis ao dimensionamento e análise do comportamento térmico de aletas longitudinais.

No terceiro capítulo procedeu-se à análise dos critérios de otimização de aletas. Inicialmente apresentou-se a otimização de aleta retangular com topo isolado com o objetivo de analisar o processo de otimização de aletas. Isto consumado, partiu-se para a otimização de aleta retangular com topo convectivo, onde procurou-se seguir os mesmos passos que no caso anterior. Deri

vou-se a expressão do calor trocado em relação ao parâmetro de desempenho térmico da aleta, mantida constante a área do perfil da aleta e obteve-se a equação de otimização da aleta, equação (3.55), cuja solução está representada no gráfico da FIGURA 20. A FIGURA 23 mostra que existe um limite para otimização de aleta retangular com topo convectivo quando se utiliza o modelo baseado na hipótese que o coeficiente de convecção é constante ao longo da altura da aleta. Apesar da pequena área de troca térmica ou da pequena parcela de calor trocado no topo da aleta, a influência do topo é decisiva nas questões conceituais fundamentais sobre aletas, como por exemplo, a faixa de aplicabilidade de aletas sobre uma superfície de troca térmica. No final do terceiro capítulo discutiu-se a otimização de aleta triangular, partindo-se de equações mais gerais que as usualmente utilizadas na literatura.

Nos apêndices estão os detalhes matemáticos de como obter as equações apresentadas no segundo capítulo.

Do trabalho completo, acredita o autor que atingiu o objetivo a que se propôs: analisar os parâmetros relevantes para o dimensionamento de aletas longitudinais para trocadores de calor por convecção, e também obter as equações para análise, diagnóstico e otimização de aletas longitudinais retangulares com topo convectivo.

Deixa-se como sugestão para um trabalho futuro, que seja tentada a otimização de aletas longitudinais de perfil trapezoidal com topo convectivo, quer seja por métodos analíticos ou métodos numéricos. Um outro assunto que deixa-se como sugestão é que seja estudado o desempenho térmico de aletas longitudinais utilizando coeficientes de convecção variável ao longo da aleta, conforme os trabalhos de STACHIEWICZ [16] e SPARROW, BALIGA e PATANKAR [20] e SPARROW e HSU [21].

## BIBLIOGRAFIA

- [01]. STEWART, R. W. - *The Absolute Thermal Conductivities of Iron and Copper*. Philosophical Transactions, Royal Society of London, Eng., Vol. 184, série A, p. 569, 1893.
- [02]. HARPER, D. R.; BROWN, W. B. - *Mathematical Equations of Heat Conduction in the Fins of Air-Cooled Engines*. National Advisory Committee for Aeronautics, Report n° 158, pp. 679-708, 1922.
- [03]. PARSONS, S. R.; HARPER, D. R. - *Radiators of Aircraft Engines*. U. S. Bureau of Standards, Technical Paper n° 211, pp. 327-330, 1922.
- [04]. SCHIMIDT, E. - *Die Wärmelbertragung durch Rippen*. Zeit. V.D.I. Vol. 70, pp. 885-889 e 947-951, 1926.
- [05]. MURRAY, W. M. - *Heat Dissipation Through an Annular Disk of Fin of Uniform Thickness*. Journal of Applied Mechanics. Trans. A. S. M. E., Vol. 60, p. A-78, 1938.
- [06]. HAUSEN, H. - *Wärmelbertragung durch Rippenrohre*. Zeit. V.D.I. Beihelt 2, pp. 55-57, 1940.
- [07]. FOCKE, R. - *Die Nadel als Kühlelemente*. Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Vol. 13, pp. 32-42, 1942.



- [08]. AVRAMI, M.; LITTLE, J. B. - *Diffusion of Heat Through a Rectangular Bar and Cooling and Insulating Effect of Fins, I. The Steady State.* Journal of Applied Physics, Vol. 13, pp. 255-264, 1942.
- [09]. CARRIER, W. H.; ANDERSON, S. W. - *The Resistance to Heat Flow Through Finned Tubing.* Heating, Piping, and Air Conditioning. Vol. 10, pp. 304-320, 1944.
- [10]. GARDNER, K. A. - *Heat Exchanger Tube Sheet Temperature.* Refined and Natural Gasline Manufacturer, Vol. 21, pp. 71-77, 1942.
- [11]. GARDNER, K. A. - *Efficiency of Extended Surface.* Transaction of the A. S. M. E., Vol. 67, n° 81, pp. 621-631, 1945.
- [12]. SAGE, C. S. - *The Value of Extended Heating Surfaces.* Journal of the American Society of Heating and Ventilating Engineers. Vol. 33, pp. 707-714 e Vol. 34, pp. 385-388, 1927.
- [13]. GHAI, L. M.; JAKOB, M. - *Local Coefficients of Heat Transfer on Fins.* A. S. M. E. Paper n° 50, 1950.
- [14]. STACHIEWICZ, J. W.; McKay, A. R. - *Heat Transfer Coefficients on Finned Surfaces.* Trans. E. I. C., Vol. 1, n° B-9, July, 1963.
- [15]. HARRIS, M. J.; WILSON, J. T. - *Heat Transfer and Fluid Flow Investigation on Large Scale Transverse Fins.* Proceedings of the Symposium of the Use of Secondary Surfaces for Heat Transfer with Clean Gases. Institution of Mechanical Engineers, London, p. 115, 1961.
- [16]. STACHIEWICZ, J. W. - *Effect of Variation of Local Film Coefficients on Fin Performance.* Journal of Heat Transfer, Trans. A. S. M. E., serie C, pp. 21-26, Feb/69..

- [17]. THORLAKSON, J. E. - *Local Heat Transfer Coefficients on Longitudinal Finned Surfaces*. Mechanical Engineering Research Laboratories, Report R65 - 5, McGill University, Montreal, Canada, 1965.
- [18]. SPARROW, E. M.; BECKEY, T. J. - *Pressure Drop Characteristics for a Shrouded Longitudinal - Fin Array with Tip Clearance*. Journal of Heat Transfer, Trans. A. S. M. E., serie C. Vol. 103, pp. 393-395, May/1981.
- [19]. STARNER, K. E.; McMANUS, Jr., H. N. - *An Experimental Investigation of Free-Convection Heat Transfer from Rectangular - Fin Arrays*. Journal of Heat Transfer, Trans. A. S. M. E., serie C, pp. 273-278, 1963.
- [20]. SPARROW, E. M.; BALIGA, B. R.; PATANKAR, S. V. - *Forced Convection Heat Transfer from a Shrouded Fin Array with and Without Tip Clearance*. Journal of Heat Transfer, Trans. A. S. M. E., serie C, Vol. 100, pp. 572-579, 1978.
- [21]. SPARROW, E. M.; HSU, C. F. - *Analytically Determined Fin-Tip Heat Transfer Coefficients*. Journal of Heat Transfer, Trans. A. S. M. E., serie C, Vol. 103, pp. 18-25, 1981.
- [22]. SPARROW, E. M.; CHYU, M. K. - *Conjugate Forced Convection-Conduction Analysis of Heat Transfer in a Plate Fin*. Journal of Heat Transfer, Trans. A. S. M. E., serie C, Vol. 104, pp. 204-206, 1982.
- [23]. SPARROW, E. M.; ACHARYA, S. - *A Natural Convection Fin with a Solution - Determined Nonmonotonically Varying Heat Transfer Coefficients*. Journal of Heat Transfer, Trans. A. S. M. E., serie C, Vol. 103, pp. 218-225, 1981.
- [24]. KARVINEN, R. - *Natural and Forced Convection Heat Transfer from a Plate Fin*. Int. Journal of Heat and Mass Transfer, Pergamon Press, Vol. 24, n° 5, pp. 881-885, 1981.

- [25]. RONSEHOW, W. M.; HARTNETT, J. P. - *Handbook of Heat Transfer*. McGraw-Hill, New York, 1973.
- [26]. KARVINEN, R. - *Efficiency of Straight Fins Cooled by Natural or Forced Convection*. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, Pergamon Press, Vol. 26, n<sup>o</sup> 4, pp. 635-638, 1983.
- [27]. SCHNEIDER, P. J. - *Conduction Heat Transfer*. Addison-Wesley Publ. Comp., Inc. Reading, Mass., 1955.
- [28]. IREY, R. K. - *Errors in the One-dimensional Fin Solution*. *Journal of Heat Transfer, Transaction of A. S. M. E.* pp. 175-176, Feb/68.
- [29]. LEVITSKI, M. - *The Criterion for Validity of the Fin Approximation*. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*. Vol. 15, pp. 1963-1965. Pergamon Press, 1972.
- [30]. CRANK, J.; PARKER, I. B. - *Approximate Methods for two Dimensional Problems in Heat Transfer*. *Q. J. Mech. Appl. Math.* XIX, Pt.2, 167-181, 1966.
- [31]. LAU, W.; TAN, C. W. - *Errors in One-dimensional Heat Transfer Analysis in Straight and Annular Fins*. *Journal Heat Transfer, Transaction of A. S. M. E.*, pp. 549-551, Nov/1973.
- [32]. SURYANARAYANA, N. V. - *Two-dimensional Effects on Heat Transfer Rates from an Array of Straight Fins*. *Journal Heat Transfer, Trans. A. S. M. E.*, serie C, pp. 129-132, Feb/1977.
- [33]. HEGGS, P. J.; STONES, P. R. - *The Effects of Dimensions on Heat Flowrate Through Extended Surfaces*. *Journal of Heat Transfer, Trans. A. S. M. E.*, serie C, Vol. 102, pp. 180-182, Feb/1980.

- [34]. HEGGS, P. J.; INGHAM, D. B.; MANZOR, M. - *The Analysis of Fin Assembly Heat Transfer by Series Truncation Method*. Journal of Heat Transfer, Trans. A. S. M. E., serie C, Vol. 104, pp. 210-212, Feb/1982.
- [35]. DUFFIN, R. J. - *A Variational Problem Relating to Cooling Fins*. Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 8, n<sup>o</sup> 1, pp. 47-56, 1959.
- [36]. APPL, F. C.; HUNG, H. M. - *Symposium on Air-cooled Heat Exchangers, 7th National Heat Transfer Conference, Cleveland, Ohio, 1964*.
- [37]. MARSH, B. L.; COSTELO, F. A. - *Stochastic Optimization of Convective-fin Design*. Journal of Heat Transfer, Trans. A. S. M. E., serie C, pp. 339-343, August/1973.
- [38]. MADAY, C. J. - *The Minimum Weight One-dimensional Straight Cooling Fin*. Journal of Engineering for Industry, Trans. A. S. M. E., pp. 161-165, Feb/1974.
- [39]. BAR-COHEN, A. - *Fin Thickness for an Optimized Natural Convection Array of Rectangular Fins*. Journal of Heat Transfer, Trans. A. S. M. E., serie C, Vol. 101, pp. 564-566, Aug/1979.
- [40]. ELENBAAS, W. - *Heat Dissipation of Parallel Plates by Free Convection*. Physica, Vol. 9, n<sup>o</sup> 1, Holland, 1942.
- [41]. KOVARIK, M. - *Optimal Heat Transfer Assemblies with thin Straight Fins*. Journal of Heat Transfer, Trans. A.S.M.E., serie C, Vol. 105, pp. 203-205, 1983.
- [42]. POULIKAKOS, D.; BEJAN, A. - *Fin Geometry for Minimum Entropy Generation in Forced Convection*. Journal of Heat Transfer, Trans. A. S. M. E., serie C, Vol. 104, pp. 616-623, 1982.
- [43]. GUCERI, S.; MADAY, C. J. - *A Least Weight Circular Cooling Fin*. Journal of Engineering for Industry, Trans. A.S.M.E., serie B, pp. 1190-1193, 1975.

- [44]. MIKK, I. - *Convective Fin of Minimum Mass*. Journal of Heat and Mass Transfer, Pergamon Press, Vol. 23, pp. 707-711, 1980.
- [45]. ARPACI, V. S. - *Conduction Heat Transfer*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1966.
- [46]. CHAPMAN, A. J. - *Heat Transfer*. 2ª Ed. The MacMillan Company, New York, 1972.
- [47]. HOLMAN, J. P. - *Heat Transfer*. Mac Graw-Hill Book Company. New York, 1963 (1976).
- [48]. KREITH, F. - *Princípios da Transmissão de Calor*. Tradução da 3ª Ed. Americana. Editora Edgard Blücher Ltda, 1977.
- [49]. JAKOB, M. - *Heat Transfer*. I - II. John Wiley and Sons, New York, 1949, 1957.
- [50]. KERN, D. Q. - *Process Heat Transfer*. Mc Graw-Hill Book Comp. New York, 1950.
- [51]. KRAUS, A. D. - *Extended Surfaces*. Spartan Books, Inc.; Cleaver-Hume Press, 1964.
- [52]. KERN, D. Q. ; KRAUS, A. D. - *Extended Surface Heat Transfer*. Mc Graw-Hill Book Comp., 1972.
- [53]. KNUDSEN, J. G.; KATZ, D. L. - *Fluid Dynamics and Heat Transfer*. Mc Graw-Hill Comp., New York, 1958.
- [54]. NADER, W. K. - *Extended Surface Heat Transfer with Condensation*. Paper CS-5, Sixth International Heat Transfer Conference, Toronto, Canada, Aug/1978.
- [55]. PATANKAR, S. V.; SPARROW, E. M. - *Condensation on an Extended Surface*. Journal Heat Transfer, Trans. A. S. M. E., serie C, Vol. 101, nº , pp. 434-440, Aug/1979.

[56]. BURMEISTER, I. C. - *Vertical Fen Efficiency with Film Condensation*. Journal of Heat Transfer, Trans. A.S.M.E., serie C, Vol. 104, n<sup>o</sup> , pp. 391-393, May/1982.

## APÊNDICE A

### EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARA ALETA DE PERFIL GENÉRICO.

Conforme as hipóteses apresentadas no segundo capítulo, utilizam-se as seguintes formulações para a distribuição de temperatura:

- i. Distribuída no eixo x (altura da aleta)
- ii. Média ou "Lumped" no eixo y (espessura da aleta)
- iii. Média ou "Lumped" no eixo z (comprimento da aleta)

Com as restrições:

- a. Regime permanente
- b. Propriedades físicas constantes

Conforme o procedimento utilizado por ARPACI [45], utilizando formulação distribuída no eixo x e média (ou "Lumped") nos eixos y e z, e realizando um balanço de energia em um elemento infinitesimal da aleta obtêm-se que a equação de distribuição de temperatura para uma aleta genérica é dada por:

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} + \frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} \frac{dT(x)}{dx} - \frac{h}{k} \left( \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{\ell} \right) [T(x) - T_\infty] = 0 \quad (5.1)$$

onde

- $f(x)$  é a equação do semi-perfil da aleta
- $\ell$  é o comprimento da aleta na direção longitudinal
- $h$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção na face da aleta

$k$  é a condutividade térmica da aleta  
 $T(x)$  é a distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta  
 $T_\infty$  é a temperatura de referência no fluido.

Introduzindo o conceito de diferença de temperatura:

$$\theta(x) = T(x) - T_\infty \quad (2.6)$$

Introduzindo o parâmetro dimensional de desempenho térmico da aleta:

$$m^{*2}(x) = \frac{h}{k} \left( \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{\ell} \right) \quad (5.2)$$

Introduzindo uma hipótese adicional: para se ter aleta longitudinal, o comprimento da aleta segundo o eixo  $z$  deve ser muito maior que a espessura da aleta segundo o eixo  $y$ , assim é razoável admitir:

$$\ell \gg f(x) \quad (5.3)$$

Conseqüentemente:

$$\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{\ell} \cong \frac{1}{f(x)} \quad (5.4)$$

Substituindo (5.4) em (5.2), tem-se:

$$m^{*2}(x) = \frac{h}{k} \frac{1}{f(x)} \quad (5.5)$$

Substituindo (5.5) e (2.6) em (5.1), tem-se:

$$\frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} + \frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} \frac{d\theta(x)}{dx} - m^{*2}(x) \theta(x) = 0$$



Introduzindo as adimensionalizações:

$$X = \frac{x}{L} \quad (2.2)$$

onde:  $L$  é a altura da aleta.

$$\theta(X) = \frac{\theta(x)}{\theta_b} \quad (2.5)$$

onde:  $\theta(X)$  = temperatura adimensional  
 $\theta_b$  = diferença de temperatura na base da aleta

Introduzindo a equação do semi-perfil da aleta, em termos de variável adimensional, resulta:

$$\frac{d^2\theta(X)}{dX^2} + \frac{1}{f(X)} \frac{df(X)}{dX} \frac{d\theta(X)}{dX} - m^{*2}(X) \cdot L^2 \theta(X) = 0 \quad (5.6)$$

Introduzindo o parâmetro adimensional de desempenho térmico da aleta:

$$\beta^*(X) = m^*(X)L \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) em (5.6), tem-se:

$$\frac{d^2\theta(X)}{dX^2} + \frac{1}{f(X)} \frac{df(X)}{dX} \frac{d\theta(X)}{dX} - \beta^{*2}(X) \theta(X) = 0 \quad (2.1)$$

A solução de (2.1) fornece a distribuição de temperatura ao longo da altura da aleta quando se conhece a geometria da aleta e são prescritas duas condições de contorno (pois a equação diferencial é de segunda ordem).

## APÊNDICE B

### ALETA RETANGULAR COM CONVECCÃO NO TOPO

#### 1. Distribuição de temperatura na aleta retangular.

Resolução da equação diferencial (2.27) com as condições de contorno (2.17) e (2.18), para obter a equação de distribuição de temperatura em aleta longitudinal de perfil retangular.

$$\frac{d^2 \theta(X)}{dX^2} - \beta^2 \theta(X) = 0 \quad (2.27)$$

Condições de contorno:

$$X = X_b, \quad \theta(X_b) = 1 \quad (2.17)$$

$$X = X_t, \quad \left. \frac{d\theta(X)}{dx} \right|_{X_t} = \frac{h_t}{k} L \theta(X_t) \quad (2.18)$$

A equação (2.27) é uma equação diferencial linear, ordinária, homogênea e de segunda ordem, cuja solução geral pode ser expressa por:

$$\theta(x) = c_1 \cosh \beta X + c_2 \sinh \beta X \quad (5.7)$$

$$X_t \leq X \leq X_b$$

$c_1$  e  $c_2$  são constantes que dependem das condições de contorno.

Adotando um sistema de referências de modo que a origem do eixo  $X$  seja coincidente com o topo da aleta, tem-se:

$$T = 0 \quad (2.28)$$

$$X_b = 1 \quad (2.30)$$

$$X_t = 0 \quad (2.29)$$

Logo:  $0 \leq X \leq 1$

Impondo a condição de contorno (2.17), tem-se:

$$\theta(X_b) = \theta(1) = c_1 \cosh \beta + c_2 \sinh \beta = 1 \quad (5.8)$$

Derivando (5.7) e impondo a condição de contorno (2.18), tem-se:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\theta(X)}{dx} \right|_{X_t} &= c_1 \beta \sinh(\beta X_t) + c_2 \beta \cosh(\beta X_t) = \\ &= \frac{h_t L}{k} [c_1 (\cosh(\beta X_t) + c_2 \sinh(\beta X_t))] \end{aligned}$$

mas:  $X_t = 0 \quad \sinh 0 = 0 \quad \cosh 0 = 1$

Assim, explicitando  $c_2$ , tem-se:

$$c_2 = \frac{h_t L}{k} c_1 \quad (5.9)$$

Substituindo (5.9) em (5.8) e explicitando  $c_1$ , tem-se:

$$c_1 = \frac{1}{\cosh \beta + \frac{h_t L}{k\beta} \sinh \beta} \quad (5.10)$$

Substituindo (5.9) e (5.10) em (5.7), tem-se:

$$\theta(X) = \frac{\cosh \beta X + \gamma \sinh \beta X}{\cosh \beta + \gamma \sinh \beta} \quad (2.31)$$

onde:

$$\gamma = \frac{h_t L}{k \beta} = R_h B_i^{1/2} \quad (2.32)$$

Para sistema de referência em que a origem do eixo  $X'$  coincide com a base da aleta, basta substituir a transformação de coordenadas:

$$X' + X = 1 \quad X = 1 - X'$$

E utilizando as relações de adição e subtração de arcos de funções hiperbólicas, tem-se:

$$\theta(X') = \cosh(\beta X') \left[ 1 - \frac{\gamma + \tanh \beta}{1 + \gamma \tanh \beta} \tanh \beta X' \right] \quad (5.11)$$

## 2. Calor trocado pela aleta retangular.

Conhecida a distribuição de temperatura na aleta, calcula-se o calor que a aleta pode trocar, utilizando-se (2.19) e (2.31):

$$q = \frac{k}{L} A(X_b) \theta(X_b) \left. \frac{d\theta(X)}{dx} \right|_{X_b} \quad (2.19)$$

$$\text{Mas } X_b = 1 \quad (2.30)$$

Derivando (2.31), tem-se:

$$\left. \frac{d\theta(X)}{dx} \right|_{X_b=1} = \beta \frac{\gamma + \tanh \beta}{1 + \gamma \tanh \beta} \quad (5.12)$$

Substituindo (2.23) e (2.24) em (2.20), tem-se:

$$A(x_b) = 2 f(x_b) \cdot \ell = 2 \frac{b}{2} \ell \quad (5.13)$$

Substituindo (5.12) e (5.13) em (2.19), tem-se:

$$q = \frac{k}{L} 2 \cdot \frac{b}{2} \ell \theta_b \beta \frac{\gamma + \tanh \beta}{1 + \gamma \tanh \beta} \quad (5.14)$$

Substituindo (2.14) e (2.16) em (5.14), tem-se:

$$q = 2 \theta_b \ell k Bi^{1/2} \frac{\gamma + \tanh \beta}{1 + \gamma \tanh \beta} \quad (5.15)$$

Introduzindo a adimensionalização:

$$Q = \frac{q}{2 \theta_b \ell k} \quad (2.35)$$

Tem-se:

$$Q = Bi^{1/2} \frac{\gamma + \tanh \beta}{1 + \gamma \tanh \beta} \quad (2.34)$$

### 3. *Rendimento térmico da aleta.*

Conhecido o calor trocado pela aleta, calcula-se a eficiência ou rendimento térmico da aleta, através de (2.21) e (5.15).

$$\eta = \frac{q_a}{q_i} \quad (2.21)$$

Para aleta genérica, o calor trocado pela aleta ideal é:

$$q_i = \theta_b (h A_c + h_t A_t) \quad (5.16)$$

onde:  $A_c$  = área de troca térmica por convecção na face da aleta.

$A_t$  = área de troca térmica por convecção no topo da aleta.

Para aleta retangular tem-se:

$$A_c = 2L \cdot \ell \quad (5.17)$$

$$A_t = b \cdot \ell \quad (5.18)$$

Substituindo (5.17), (5.18) e (2.33) em (5.16), tem-se:

$$q_i = \theta_b h \ell (2L + R_h \cdot b) \quad (5.19)$$

Substituindo (2.16) em (5.19), tem-se:

$$q_i = \theta_b h \ell b k \left(1 + \frac{R_h}{K}\right) \quad (5.20)$$

Substituindo (5.20) e (5.15) em (2.21) e efetuando as simplificações e agrupando convenientemente, tem-se:

$$\eta = \frac{1}{\beta \left(1 + \frac{R_h}{K}\right)} \frac{(\gamma + \tanh \beta)}{(1 + \gamma \tanh \beta)} \quad (2.36)$$

4. *Modificação de HARPER e BROWN para aleta retangular com topo convectivo.*

O calor trocado pelo topo da aleta  $\bar{e}$ :

$$q_t = h_t A(X_t) (T_t - T_\infty) \quad (5.21)$$

O calor trocado pelo comprimento adicional, conforme FIGURA 8,  $\bar{e}$  aproximadamente:

$$q_{\Delta L} \cong hP(X_t)\Delta L (T_t - T_\infty) \quad (5.22)$$

onde:  $P(X)$   $\bar{e}$  o perímetro de troca térmica.

Igualando (5.21) e (5.22), utilizando (2.33), simplificando os termos comuns, e explicitando  $\Delta L$ , tem-se:

$$\Delta L = R_h \frac{A(X_t)}{P(X_t)} \quad (5.23)$$

Mas, para aleta retangular, tem-se:

$$A(X_t) = A(X_b) = 2 f(X_b) \ell = b \cdot \ell \quad (5.24)$$

$$P(X_t) = P(X_b) = 2[f(X_b) + \ell] = 2(b + \ell) \quad (5.25)$$

Substituindo (5.24) e (5.25) em (5.23), tem-se:

$$\Delta L = R_h \frac{b\ell}{2(b + \ell)}$$

Utilizando (5.3), resulta:

$$\Delta L = \frac{h_t}{h} \frac{b}{2} \quad (5.26)$$

Logo:

$$L_c = L + \Delta L = L + R_h \frac{b}{2} \quad (2.41)$$

Devido à modificação de HARPER e BROWN, então (2.14) torna-se:

$$\beta_c = mL_c \quad (5.27)$$

e conseqüentemente (2.39), torna-se:

$$Q = Bi^{1/2} \tanh(\beta_c) \quad (5.28)$$

Substituindo (2.41) em (5.27), tem-se:

$$\beta_c = m L + m R_h \frac{b}{2} \quad (5.29)$$

Substituindo (2.14) e (2.12) em (5.29), tem-se:

$$\beta_c = \beta + \sqrt{\frac{2h}{bk}} \cdot \frac{b}{2} R_h \quad (5.30)$$

Agrupando convenientemente e utilizando (2.15):

$$\beta_c = \beta + Bi^{1/2} \cdot R_h \quad (5.31)$$

Substituindo (2.32) em (5.31), tem-se:

$$\beta_c = \beta + \gamma \quad (5.32)$$

Substituindo (5.32) em (5.28), tem-se:



$$Q = \text{Bi}^{1/2} \tanh(\beta + \gamma) \quad (2.42)$$

APÊNDICE C

ALETA TRAPEZOIDAL

1. Obtenção da equação diferencial de distribuição de temperatura:

$$\frac{d^2 \theta(X)}{dX^2} + \frac{1}{f(X)} \frac{d f(X)}{dX} \frac{d \theta(X)}{dX} - \beta^{*2}(X) \theta(X) = 0 \quad (2.1)$$

A equação do semi-perfil da aleta trapezoidal é:

$$f(X) = \frac{b}{2} \frac{X}{X_b} \quad X_t \leq X \leq X_b \quad (2.47)$$

$$X_t = \frac{T}{L} \quad (2.4)$$

$$X_b = 1 + \frac{T}{L} \quad (2.3)$$

$$\text{Logo: } \frac{d f(X)}{dX} = \frac{b}{2} \frac{1}{X_b} = \frac{f(X)}{X} \quad (5.33)$$

$$\beta^*(X) = m^*(X) L \quad (2.8)$$

Substituindo (2.47) em (2.9), tem-se:

$$m^*(X) = \frac{h}{k} \frac{1}{\frac{b}{2} \frac{X}{X_b}} \quad (5.34)$$

Substituindo (5.34) em (2.8), tem-se:

$$\beta^{*2}(x) = \frac{2h}{bk} \frac{x_b}{x} L^2 \quad (5.35)$$

Substituindo (5.35) e (5.33) em (2.1), tem-se:

$$\frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} + \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} \frac{d\theta(x)}{dx} - \frac{2h}{bk} \frac{x_b}{x} L^2 \theta(x) = 0 \quad (5.36)$$

Simplificando os termos comuns, multiplicando tudo por  $x$  e multiplicando e dividindo o último termo por  $4b^2$  e utilizando (2.14), (2.15) e (2.16), tem-se:

$$x \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} + \frac{d\theta(x)}{dx} - \beta_T^2 \theta(x) = 0 \quad (2.48)$$

onde:  $\beta_T = \beta x_b^{1/2} \quad (2.49)$

$\beta_T$  é o parâmetro adimensional de desempenho térmico de aleta trapezoidal.

$\beta$  é o parâmetro adimensional de desempenho térmico de aleta retangular.

2. Resolução da equação diferencial (2.48) com as condições de contorno (2.17) e (2.18), para obter a equação de distribuição de temperatura em aleta longitudinal de perfil trapezoidal.

$$x \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} + \frac{d\theta(x)}{dx} - \beta_T^2 \theta(x) = 0 \quad (2.48)$$

A equação acima é equação de BESSEL, conforme ARPACI [45], TABELA 3.1, do tipo:

$$\frac{d}{dx} (x^a \frac{dy}{dx}) + c^2 x^b y = 0 \quad (5.37)$$

Cuja solução geral é:

$$y(x) = x^{\omega/\mu} z_{\omega}(|d| \mu x^{1/\mu}) \quad (5.38)$$

onde:  $\omega = \frac{1-a}{b-a+2} \quad (5.39)$

$$\mu = \frac{2}{b-a+2} \quad (5.40)$$

Identificando os termos da equação diferencial, tem-se:

$$a = 1 \quad (5.41)$$

$$b = 0 \quad (5.42)$$

$$c^2 = -\beta_T^2 \quad (5.43)$$

De (5.34), tem-se:

$$c = \pm i \beta_T \quad (5.44)$$

onde:  $i = \sqrt{-1} = \text{unidade imaginária} \quad (5.45)$

Substituindo (5.41) e (5.42) em (5.39) e (5.40), tem-se:

$$\omega = 0 \quad (5.46)$$

$$\mu = 2 \quad (5.47)$$

Segundo ARPACI [45], TABELA 3.1, para:

$c = \text{imaginário}$

$\omega = \text{zero}$

A solução da equação diferencial (5.37) é dada em termos de funções de BESSEL modificadas de ordem zero. Assim, a solução de (2.48) conforme (5.38), é dada por:

$$\theta(X) = X^{0/2} Z_0 (|i \beta_T| 2 \cdot X^{1/2}) \quad (5.48)$$

onde:  $Z_0$  = representação geral da função de BESSEL de ordem zero.

Substituindo  $Z_0$  pelas funções de BESSEL modificadas de primeira espécie e ordem zero, tem-se:

$$\theta(X) = c_1 I_0 (2\beta_T X^{1/2}) + c_2 K_0 (2\beta_T X^{1/2}) \quad (5.49)$$

onde:  $c_1$  e  $c_2$  são constantes que dependem das condições de contorno.

Impondo a condição de contorno:

$$x = x_t : \quad \left. \frac{d\theta(x)}{dx} \right|_{x_t} = - \left[ - \frac{h_t}{k} L \theta(x) \right] \Big|_{x_t} \quad (2.18)$$

Em (5.49), tem-se:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\theta(x)}{dx} \right|_{x_t} &= c_1 2\beta_T x_t^{(1/2-1)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) I_1 (2\beta_T x_t^{1/2}) + \\ &+ c_2 (-2\beta_T) x_t^{1/2-1} \left(\frac{1}{2}\right) K_1 (2\beta_T x_t^{1/2}) = \\ &= \frac{h_t}{k} L [c_1 I_0 (2\beta_T x_t^{1/2}) + c_2 K_0 (2\beta_T x_t^{1/2})] \quad (5.50) \end{aligned}$$

Agrupando convenientemente e definindo:

$$\beta_t = 2\beta_T x_t^{1/2} \quad (2.54)$$

$\beta_t$  é o parâmetro de desempenho térmico no topo da aleta trapezoidal. Tem-se:

$$c_1 I_1(\beta_t) - c_2 K_1(\beta_t) = \frac{2h_t L X_t}{k \beta_T} [c_1 I_0(\beta_t) + c_2 K_0(\beta_t)] \quad (5.51)$$

Definindo:

$$\gamma_t = \frac{h_t L}{k \beta_T} 2 X_t \quad (5.52)$$

$\gamma_t$  é o parâmetro de convecção no topo de aleta triangular.

Explicitando as constantes, tem-se:

$$c_1 = c_2 \frac{K_1(\beta_t) + \gamma_t K_0(\beta_t)}{I_1(\beta_t) - \gamma_t I_0(\beta_t)} \quad (5.53)$$

Impondo a condição de contorno:

$$X = X_b \quad \theta(X_b) = 1 \quad (2.17)$$

em (5.49), tem-se:

$$1 = c_1 I_0(2\beta_T X_b^{1/2}) + c_2 K_0(2\beta_T X_b^{1/2}) \quad (5.54)$$

Definindo:

$$\beta_b = 2\beta_T X_b^{1/2} \quad (2.55)$$

$\beta_b$  é o parâmetro de desempenho térmico na base da aleta trapezoidal.

$$c_1 I_0(\beta_b) + c_2 K_0(\beta_b) = 1 \quad (5.55)$$

Substituindo (5.53) em (5.55):

$$c_2 \cdot \frac{K_1(\beta_t) + \gamma_t K_0(\beta_t)}{I_1(\beta_t) - \gamma_t I_0(\beta_t)} I_0(\beta_b) + c_2 K_0(\beta_b) = 1 \quad (5.56)$$

Explicitando  $c_2$ , tem-se:

$$c_2 = \frac{I_1(\beta_t) - \gamma_T I_0(\beta_t)}{[k_1(\beta_t) + \gamma_t k_0(\beta_t)] I_0(\beta_b) + [I_1(\beta_t) - \gamma_T I_0(\beta_t)] k_0(\beta_b)} \quad (5.57)$$

Substituindo (5.57) em (5.53), tem-se:

$$c_1 = \frac{K_1(\beta_t) + \gamma_t K_0(\beta_t)}{[k_1(\beta_t) + \gamma_T k_0(\beta_t)] I_0(\beta_b) + [I_1(\beta_t) - \gamma_t I_0(\beta_t)] k_0(\beta_b)} \quad (5.58)$$

Substituindo (5.56) e (5.57) em (5.49), tem-se:

$$\begin{aligned} \theta(X) = & \frac{[K_1(\beta_t) + \gamma_t k_0(\beta_t)] I_0(2\beta_T X^{1/2}) +}{[K_1(\beta_t) + \gamma_b K_0(\beta_t)] I_0(\beta_b) +} \\ & \frac{+ [I_1(\beta_t) - \gamma_t I_0(\beta_t)] k_0(2\beta_T X^{1/2})}{+ [I_1(\beta_t) - \gamma_t I_0(\beta_t)] K_0(\beta_b)} \quad (5.59) \end{aligned}$$

Definindo:

$$\beta_X = 2\beta_T X^{1/2} \quad (2.53)$$

$$K_\gamma(\beta_t) = K_1(\beta_t) + \gamma_t K_0(\beta_t) \quad (2.51)$$

$$I_\gamma(\beta_t) = I_1(\beta_t) - \gamma_t I_0(\beta_t) \quad (2.52)$$

Tem-se que (5.59) reduz-se a:

$$\theta(X) = \frac{K_\gamma(\beta_t) I_0(\beta_X) + I_\gamma(\beta_t) K_0(\beta_X)}{K_\gamma(\beta_t) I_0(\beta_b) + I_\gamma(\beta_t) K_0(\beta_b)} \quad (2.50)$$

O parâmetro de convecção no topo (5.52) pode ser expresso, substituindo (2.49), (2.14), (2.15), (2.32) e (2.33),

tem-se:

$$\gamma_t = 2 \gamma \frac{x_t}{x_b^{1/2}} \quad (2.56)$$

onde:  $\gamma = R_h \text{ Bi}^{1/2} \quad (2.32)$

$$R_h = \frac{h_t}{h} \quad (2.33)$$

### 3. Calor trocado pela aleta trapezoidal.

Conhecida a distribuição de temperatura na aleta, pode-se calcular a quantidade global de calor que a aleta pode trocar com o fluido, através da equação (2.19) e de (2.50).

$$q = \theta_b k \frac{A(x_b)}{L} \left. \frac{d\theta(x)}{dx} \right|_{x_b} \quad (2.19)$$

onde:  $A(x_b) = 2 f(x_b) \cdot \ell \quad (2.20)$

Substituindo (2.47) e (2.20) em (2.19), e simplificando, tem-se:

$$q = \theta_b \frac{k}{L} \cdot 2 \frac{b}{2} \frac{x}{x_b} \ell \left. \frac{d\theta(x)}{dx} \right|_{x_b} \quad (5.60)$$

Agora, derivando (2.50), tem-se:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{d\theta(x)}{d\beta_x} \cdot \frac{d\beta_x}{dx} \quad (5.61)$$

mas:  $\frac{d}{d\beta_x} I_0(\beta_x) = I_1(\beta_x) \quad (5.62)$

$$\frac{d}{d\beta_x} K_0(\beta_x) = -K_1(\beta_x) \quad (5.63)$$



Logo:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{k_\gamma(\beta_t) I_1(\beta_x) - I_1(\beta_t) k_1(\beta_x)}{K_\gamma(\beta_t) I_0(\beta_b) + I_1(\beta_t) K_0(\beta_b)} \cdot \frac{d\beta_x}{dx} \quad (5.64)$$

Mas:

$$\beta_x = 2\beta_t x^{1/2} \quad (2.53)$$

Logo:

$$\frac{d\beta_x}{dx} = \frac{1}{2} \cdot 2\beta_t x^{1/2-1} = \frac{1}{2} \beta_x \frac{1}{x} \quad (5.65)$$

Substituindo (5.65) em (5.64) e em (5.60), tem-se:

$$q = 2\theta_b \cdot \frac{k}{L} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{x}{x_b} \cdot \frac{1}{2} \beta_x \frac{1}{x} \frac{k_\gamma(\beta_t) I_1(\beta_x) - I_\gamma(\beta_t) K_1(\beta_x)}{K_\gamma(\beta_t) I_0(\beta_b) + I_\gamma(\beta_t) K_0(\beta_b)} \Big|_{x_b} \quad (5.66)$$

Simplificando, agrupando convenientemente e substituindo (2.16), tem-se:

$$q = \frac{2\theta_b \ell k}{x_b} \cdot \frac{1}{K} \frac{\beta_b}{2} \cdot \frac{K_\gamma(\beta_t) \cdot I_1(\beta_b) - I_\gamma(\beta_t) K_1(\beta_b)}{K_\gamma(\beta_t) I_0(\beta_b) + I_\gamma(\beta_t) K_0(\beta_b)} \quad (5.67)$$

Definindo:

$$I_u(\beta_t) = \frac{K_\gamma(\beta_t) \cdot I_1(\beta_b) - I_\gamma(\beta_t) K_1(\beta_b)}{K_\gamma(\beta_t) I_0(\beta_b) + I_\gamma(\beta_t) K_0(\beta_b)} \quad (5.68)$$

onde:  $I_u$  é o índice de uso da aleta trapezoidal.

Usando a adimensionalização:

$$\Omega = \frac{q}{2 \theta_b \ell k} \quad (2.35)$$

e substituindo (2.68) e (2.35) em (5.67):

$$\Omega = \frac{1}{K} \cdot \frac{2 \cdot \beta_T \cdot x_b^{1/2}}{2} \cdot \frac{b}{x_b} \cdot I_u(\beta_T) \quad (5.69)$$

Substituindo (2.49), tem-se:

$$\Omega = \frac{\beta}{K} x_b^{1/2} \cdot \frac{x_b^{1/2}}{x_b} \cdot I_u(\beta_T) \quad (5.70)$$

Substituindo (2.14), simplificando e substituindo (5.68), tem-se:

$$\Omega = Bi^{1/2} I_u(\beta_T) \quad (2.57)$$

onde:

$$I_u(\beta_T) = \frac{K_Y(\beta_t) \cdot I_1(\beta_b) - I_Y(\beta_t) \cdot K_1(\beta_b)}{K_Y(\beta_t) \cdot I_0(\beta_b) + I_Y(\beta_t) \cdot K_0(\beta)}$$

$$0 \leq I_u(\beta_T) \leq 1$$

#### 4. *Rendimento térmico da aleta trapezoidal.*

Conhecido o calor trocado pela aleta, podemos calcular a eficiência da aleta, através de (2.21) e (2.57):

$$\eta = \frac{q_A}{q_i} \quad (2.21)$$

onde:

$$q_A = 2 \theta_b \ell k \cdot Bi^{1/2} \cdot \frac{K_Y(\beta_T) I_1(\beta_B) - I_Y(\beta_T) \cdot K_1(\beta_B)}{K_Y(\beta_T) I_0(\beta_B) + I_Y(\beta_T) K_0(\beta_B)}$$

(5.71)

DO APÊNDICE B:

$$q_i = \theta_b (h A_c + h_t A_t) \quad (5.10)$$

$A_c$  = área de troca térmica por convecção na face da aleta

$$A_c = 2 L^* \cdot \ell \quad (5.72)$$

$A_t$  = área de troca térmica por convecção no topo da aleta

$$A_t = t \cdot \ell \quad (5.73)$$

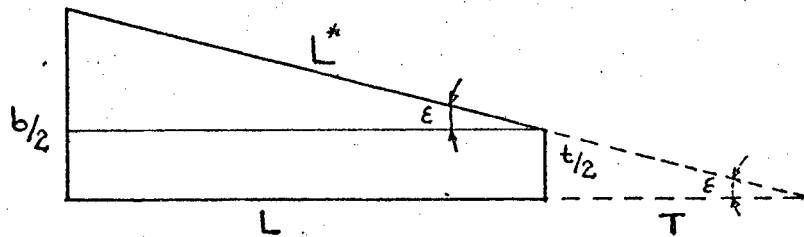


FIGURA 25 - Relação entre triângulos na aleta trapezoidal.

Da geometria da aleta tem-se:

$$(L^*)^2 = L^2 + \left(\frac{b-t}{2}\right)^2 \quad (5.74)$$

Mas:

$$\tan \epsilon = \frac{b-t}{2L} \quad (5.75)$$

Logo:

$$L^* = \left[ L^2 + L^2 \left(\frac{b-t}{2L}\right)^2 \right]^{1/2} = L \sqrt{1 + \tan^2 \epsilon} \quad (5.76)$$

Substituindo (5.72) e (5.73) em (5.16):

$$q_i = \theta_b (h 2L^* \ell + h_t t \cdot \ell) \quad (5.77)$$

Substituindo (5.75), (5.76) e (2.33) em (5.77):

$$q_i = \theta_b h \ell 2L \left[ (1 + \tan^2 \epsilon)^{1/2} + R_h \frac{t}{2L} \right] \quad (5.78)$$

Agora substituindo (5.78) e (5.71) em (2.21) e efetuando as simplificações, tem-se:

$$\eta = \frac{q_A}{q_i} = \frac{2 \theta_b \ell k Bi^{1/2} \cdot I_u(\beta_T)}{2 \theta_b \ell h L [(1+\tan^2 \epsilon)^{1/2} + R_h \frac{t}{2L}]} \quad (5.79)$$

Por outro lado,

Substituindo (2.15), multiplicando e dividindo por  $4b^2h^2$ , tem-se:

$$\frac{Bi^{1/2} \cdot k}{h L} = \left(\frac{hb}{2k}\right)^{1/2} \cdot \frac{k}{h L} = \left(\frac{hb}{2k} \cdot \frac{4b^2}{4b^2} \cdot \frac{k^2}{h^2}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{L} \quad (5.80)$$

Simplificando e agrupando convenientemente, tem-se:

$$\frac{Bi^{1/2} \cdot k}{h L} = \left(\frac{2k}{hb}\right)^{1/2} \frac{b}{2} \frac{1}{L} = \frac{1}{Bi^{1/2} \cdot K} = \frac{1}{\beta} \quad (5.81)$$

$$\eta = \frac{1}{\beta} \frac{I_u(\beta_T)}{[(1+\tan^2 \epsilon)^{1/2} + R_h \frac{t}{2L}]} \quad (5.82)$$

utilizando:  $K_t = \frac{L}{t/2} \quad (2.58)$

$K_t$  é a razão de aspecto no topo da aleta.

$$\eta = \frac{1}{\beta} \frac{I_u(\beta_T)}{[(1+\tan^2 \epsilon)^{1/2} + R_h/K_t]} \quad (2.58)$$

Onde  $I_u(\beta_T)$  é definido por (5.68).

## APÊNDICE D

### ALETA PARABÓLICA CÔNCAVA

1. *Obtenção da equação diferencial da distribuição de temperatura, para aleta parabólica côncava.*

Equação geral:

$$\frac{d^2 \theta(X)}{dX^2} + \frac{1}{f(X)} \frac{d f(X)}{dX} \frac{d \theta(X)}{dX} - \beta^2(X) \theta(X) = 0 \quad (2.1)$$

onde:

$$f(X) = \frac{b}{2} \left( \frac{X}{X_b} \right)^2 \quad (2.80)$$

$$X_t \leq X \leq X_b$$

$$X_b = 1 + \frac{T}{L} \quad (2.3)$$

$$X_t = T/L \quad (2.4)$$

Logo:

$$\frac{d f(X)}{dX} = \frac{b}{2} \frac{1}{X_b^2} 2 X = 2 \frac{f(X)}{X} \quad (5.84)$$

$$\beta^*(X) = m^*(X) L \quad (2.8)$$

$$m^{*2}(X) = \frac{h}{k} \cdot \frac{1}{f(X)} \quad (2.9)$$

Substituindo (5.84), (2.8) e (2.9) em (2.1), tem-se:

$$\frac{d^2 \theta(X)}{dX^2} + \frac{1}{f(X)} \cdot 2 \frac{f(X)}{X} \frac{d \theta(X)}{dX} - \frac{h}{k} \frac{L^2}{f(X)} \theta(X) = 0 \quad (5.85)$$

Multiplicando (5.85) por  $X^2$  e substituindo (2.80):

$$X^2 \frac{d^2 \theta(X)}{dX^2} + 2X \frac{d \theta(X)}{dX} - \frac{h}{k} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{L^2}{X_b^2} \theta(X) = 0 \quad (5.86)$$

Agrupando convenientemente tem-se:

$$X^2 \frac{d^2 \theta(X)}{dX^2} + 2X \frac{d \theta(X)}{dX} - \frac{2h L^2}{k b} X_b^2 \theta(X) = 0$$

$$X^2 \frac{d^2 \theta(X)}{dX^2} + 2X \frac{d \theta(X)}{dX} - \beta_p^2 \theta(X) = 0 \quad (2.81)$$

onde: 
$$\beta_p^2 = \frac{2 h L^2}{k b} X_b^2 \quad (5.87)$$

Multiplicando e dividindo (5.87) por  $b/2$  e agrupando convenientemente, tem-se:

$$\beta_p^2 = \frac{hb}{2k} \left(\frac{L}{b/2}\right)^2 X_b^2 \quad (5.88)$$

$$\beta_p^2 = Bi K^2 X_b^2 \quad (5.89)$$

onde: 
$$Bi = \frac{h b}{2k} \quad (2.15)$$

$$K = \frac{L}{b/2} \quad (2.16)$$

$$\beta^2 = Bi K^2 \quad (2.14)$$

Substituindo (2.14), (2.15) e (2.16) em (5.89), tem-se:

$$\beta_p = \beta x_b \quad (2.82)$$

2. Resolução da equação diferencial (2.138) com as condições de contorno (2.17) e (2.18), para obter a equação de distribuição de temperatura em aleta de perfil parabólico côncavo.

$$x^2 \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} + 2x \frac{d \theta(x)}{dx} - \beta_p^2 \theta(x) = 0 \quad (2.81)$$

onde:  $\beta_p = \beta x_b \quad (2.82)$

A expressão (2.81) é uma equação de CAUCHY ou equação de EULER, cuja expressão geral é:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0 \quad (5.90)$$

Fazendo a transformação:  $x = e^v \therefore v = \ln x$ , obtemos a equação diferencial transformada da equação de EULER:

$$\frac{d^2 y}{dv^2} + \frac{dy}{dv} - a^2 y = 0 \quad (5.91)$$

A equação acima é uma equação diferencial ordinária, segunda ordem, linear, homogênea e coeficientes constantes, cuja solução geral é:

$$y(v) = c_1 e^{\alpha_1 v} + c_2 e^{\alpha_2 v} \quad (5.92)$$

onde:  $c_1$  e  $c_2$  são constantes que dependem das condições de contorno

onde:  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são as raízes características da equação:

$$(D^2 + D - a^2)y = 0 \quad (5.93)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a^2}}{2} \quad (5.94)$$

Substituindo  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  na solução geral (5.92):

$$y(v) = c_1 e^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4a^2})v} + c_2 e^{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{1+4a^2})v} \quad (5.95)$$

Substituindo  $v = \ln x$

$$y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4a^2}) \ln x} + c_2 e^{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{1+4a^2}) \ln x} \quad (5.96)$$

Como:  $e^{\ln x} = x$

Então, a solução da equação diferencial (5.91) é:

$$y(x) = c_1 x^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4a^2})} + c_2 x^{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{1+4a^2})} \quad (5.97)$$

Assim, a solução de (2.81), por comparação com (5.90) e (5.97), é:

$$\theta(X) = c_1 X^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4\beta^2})_p} + c_2 X^{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{1+4\beta^2})_p} \quad (5.98)$$

Definindo:

$$\delta_1 = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1+4\beta^2})_p \quad (2.88)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2} (-1 - \sqrt{1+4\beta^2})_p \quad (2.89)$$

Então (5.98) pode ser expressa por:

$$\theta(X) = c_1 X^{\delta_1} + c_2 X^{\delta_2} \quad (5.99)$$

Impondo as condições de contorno:



$$\theta(X_b) = 1 \quad ; \quad X = X_b \quad (2.17)$$

$$c_1 X_b^{\delta_1} + c_2 X_b^{\delta_2} = 1 \quad (5.100)$$

$$\left. \frac{d\theta(X)}{dX} \right|_{X_t} = \frac{h_t}{k} L \theta(X_t) \quad ; \quad X = X_t \quad (2.18)$$

$$c_1 \delta_1 X_t^{\delta_1-1} + c_2 \delta_2 X_t^{\delta_2-1} = \frac{h_t L}{k} (c_1 X_t^{\delta_1} + c_2 X_t^{\delta_2}) \quad (5.101)$$

Obtém-se:

$$c_1 \left[ \delta_1 X_t^{\delta_1-1} - \frac{h_t \cdot L}{k} X_t^{\delta_1} \right] + c_2 \left[ \delta_2 X_t^{\delta_2-1} - \frac{h_t \cdot L}{k} X_t^{\delta_2} \right] = 0$$

Assim:

$$c_1 = c_2 \frac{-\delta_2 X_t^{\delta_2-1} + \frac{h_t L}{k} X_t^{\delta_2}}{\delta_1 X_t^{\delta_1-1} - \frac{h_t L}{k} X_t^{\delta_1}} \quad (5.102)$$

Substituindo (5.102) em (5.100), tem-se:

$$c_2 \left\{ \frac{(-\delta_2 X_t^{\delta_2-1} + \frac{h_t L}{k} X_t^{\delta_2})}{(\delta_1 X_t^{\delta_1-1} - \frac{h_t L}{k} X_t^{\delta_1})} \cdot X_b^{\delta_1} + X_b^{\delta_2} \right\} = 1 \quad (5.103)$$

Explicitando  $c_2$ , tem-se:

$$c_2 = \frac{\delta_1 X_t^{\delta_1-1} - \frac{h_t L}{k} X_t^{\delta_1}}{(-\delta_2 X_t^{\delta_2-1} + \frac{h_t L}{k} X_t^{\delta_2}) X_b^{\delta_1} + (\delta_1 X_t^{\delta_1-1} - \frac{h_t L}{k} X_t^{\delta_1}) X_b^{\delta_2}} \quad (5.104)$$

Substituindo (5.104) em (5.102) e simplificando, tem-se:

$$c_1 = \frac{-\delta_2 X_t^{\delta_2} + \frac{h_t \cdot L}{k} X_t^{\delta_2}}{(-\delta_2 X_t^{\delta_2-1} + \frac{h_t \cdot L}{k} X_t^{\delta_2}) X_b^{\delta_1} + (\delta_1 X_t^{\delta_1-1} - \frac{h_t \cdot L}{k} X_t^{\delta_1}) X_b^{\delta_2}} \quad (5.105)$$

Assim, a solução geral é obtida substituindo (5.104) e (5.105) em (5.99):

$$\theta(X) = \frac{(-\delta_2 X_t^{\delta_2-1} + \frac{h_t \cdot L}{k} X_t^{\delta_2}) X_b^{\delta_1} + (\delta_1 X_t^{\delta_1-1} - \frac{h_t \cdot L}{k} X_t^{\delta_1}) X_b^{\delta_2}}{(-\delta_2 X_t^{\delta_2-1} + \frac{h_t \cdot L}{k} X_t^{\delta_2}) X_b^{\delta_1} + (\delta_1 X_t^{\delta_1-1} - \frac{h_t \cdot L}{k} X_t^{\delta_1}) X_b^{\delta_2}}$$

ou:

$$\theta(X) = \frac{\delta_2 (-X_t^{\delta_2-1} + \frac{h_t \cdot L}{k \delta_2} X_t^{\delta_2}) X_b^{\delta_1} + \delta_1 (X_t^{\delta_1-1} - \frac{h_t \cdot L}{k \delta_1} X_t^{\delta_1}) X_b^{\delta_2}}{\delta_2 (-X_t^{\delta_2-1} + \frac{h_t \cdot L}{k \delta_2} X_t^{\delta_2}) X_b^{\delta_1} + \delta_1 (X_t^{\delta_1-1} - \frac{h_t \cdot L}{k \delta_1} X_t^{\delta_1}) X_b^{\delta_2}} \quad (5.106)$$

Introduzindo:

$$\gamma_1 = \frac{h_t \cdot L}{k \delta_1} \quad (2.87)$$

$$\gamma_2 = \frac{h_t \cdot L}{k \delta_2} \quad (2.86)$$

$$X_{\gamma_2} = -X_t^{\delta_2-1} + \gamma_2 X_t^{\delta_2} \quad (2.84)$$

$$X_{\gamma_1} = X_t^{\delta_1-1} - \gamma_1 X_t^{\delta_1} \quad (2.85)$$

$$\delta_{1,2} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (2.90)$$

e dividindo (5.106) por  $\delta_2$ , tem-se:

$$\theta(X) = \frac{X_{\gamma_2} X^{\delta_1} + \delta_{1,2} X_{\gamma_1} X^{\delta_2}}{X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1} + \delta_{1,2} X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2}} \quad (2.83)$$

### 3. Calor trocado pela aleta parabólica côncava.

Conhecida a distribuição de temperatura na aleta podemos ter a quantidade de calor que a aleta pode trocar com o fluido, através da equação:

$$q = \theta_b k \frac{A(X_b)}{L} \left. \frac{d\theta(X)}{dx} \right|_{X_b} \quad (2.19)$$

$$A(X_b) = 2 f(X_b) \cdot \ell \quad (2.20)$$

Substituindo (2.20) e (2.80) em (2.19):

$$q = \theta_b k \cdot \frac{2 \cdot \frac{b}{2} \frac{X_b^2}{(1+T/L)^2}}{L} \ell \left. \frac{d\theta(X)}{dx} \right|_{X_b} \quad (5.107)$$

mas:  $X_b = 1 + T/L \quad (2.3)$

Logo:  $q = 2 \theta_b \frac{\ell k}{K} \left. \frac{d\theta(X)}{dx} \right|_{X_b} \quad (5.108)$

Derivando (5.106), tem-se:

$$\left. \frac{d\theta(X)}{dx} \right|_{X_b} = \frac{\delta_1 X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1-1} + \delta_{1,2} \delta_2 X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2-1}}{X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1} + \delta_{1,2} X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2}} \quad (5.109)$$

mas:  $\delta_{1,2} \delta_2 = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad \delta_2 = \delta_1 \quad (5.110)$

Logo:

$$\left. \frac{d\theta(X)}{dX} \right|_{X_b} = \delta_1 \frac{(X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1-1} + X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2-1})}{(X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1} + \delta_{1,2} X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2})} \quad (5.111)$$

Substituindo (5.111) em (5.108), tem-se:

$$q = 2 \theta_b \ell k \frac{(X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1-1} + X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2-1})}{(X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1} + \delta_{1,2} X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2})} \quad (5.112)$$

Utilizando a adimensionalização:

$$Q = \frac{q}{2 \theta_b \ell k} \quad (2.35)$$

Tem-se:

$$Q = \frac{\delta_1}{K} \frac{X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1-1} + X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2-1}}{X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1} + \delta_{1,2} X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2}} \quad (2.91)$$

#### 4. *Rendimento térmico da aleta.*

Conhecido o calor trocado pela aleta, pode-se calcular o rendimento térmico através de (2.21) e de (5.112):

Do APÊNDICE B:

$$q_i = \theta_b (h A_c + h_t A_t) \quad (5.16)$$

$A_t$  é a área do topo, definida por:

$$A_t = t \cdot \ell \quad (5.73)$$

$A_c$  é a área da face da aleta, definida por:

$$A_c = 2 L^* \cdot \ell \quad (5.72)$$

onde:  $L^*$  é o comprimento do arco medido ao longo do perfil da aleta, definido por:

$$L^* = \int_{X_t}^{X_b} \sqrt{1+f'(X)^2} dx \quad (5.113)$$

Utilizando a equação do perfil da aleta:

$$f(X) = \frac{b}{2} \left( \frac{X}{X_b} \right)^2 \quad (2.80)$$

$$X_t \leq X \leq X_b$$

Derivando (2.80) em relação a  $X$  e substituindo em (5.113) e agrupando convenientemente, tem-se:

$$L^* = \frac{b}{X_b^2} \int_{X_t}^{X_b} \sqrt{\left(\frac{X^2}{X_b^2}\right)^2 + X^2} dx \quad (5.114)$$

Efetuada a integração, tem-se:

$$L^* = \frac{b}{2 X_b^2} \left\{ X \sqrt{X^2 + \left(\frac{X_b^2}{b}\right)^2} + \left(\frac{X_b^2}{b}\right)^2 \ln \left[ X + \sqrt{X^2 + \left(\frac{X_b^2}{b}\right)^2} \right] \right\} \Big|_{X_t}^{X_b} \quad (5.115)$$

Substituindo os limites de integração e agrupando convenientemente, tem-se:

$$L^* = X_b^2 \sqrt{1 + \left(\frac{X_b}{b}\right)^2} - X_t^2 \sqrt{1 + \left(\frac{X_b}{X_t}\right)^2 \left(\frac{X_b}{b}\right)^2} - \left(\frac{X_b^2}{b}\right)^2 \ln \left[ \frac{X_b (1 + \sqrt{1 + \left(\frac{X_b}{b}\right)^2})}{X_t (1 + \sqrt{1 + \left(\frac{X_b}{X_t}\right)^2 \left(\frac{X_b}{b}\right)^2})} \right] \quad (5.116)$$

Devido a grande complexidade de (5.116), deixar-se-á indicada sua expressão geral, sem dar continuidade ao desenvolvimento.

Substituindo (5.72) e (5.73) em (5.16), tem-se:

$$q_i = \theta_b \cdot h \left( 2L^* + \frac{h_t}{h} t \right) \quad (5.117)$$

Substituindo (5.117) e (5.112) em (2.21), tem-se:

$$\eta = \frac{q}{q_i} = \frac{2k}{hK} \frac{\delta_1}{\left( 2L^* + \frac{h_t}{h} t \right)} \left[ \frac{X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1 - 1} + X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2 - 1}}{X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1} + \delta_{12} X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2}} \right] \quad (5.118)$$

onde:  $L^*$  é definido em (5.116).

Multiplicando e dividindo adequadamente por  $b$ :

$$\eta = \frac{hb}{2k} \cdot \frac{b}{K} \frac{\delta_1}{2L^* \left( 1 + \frac{h_t}{h} \frac{t}{2L^*} \right)} \left[ \frac{X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1 - 1} + X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2 - 1}}{X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1} + \delta_{12} X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2}} \right] \quad (6.119)$$

Utilizando (2.14), (2.15), (2.16), (2.33) e (5.83), tem-se:

$$\eta = \frac{\delta_1}{\beta^2} \cdot \frac{L}{L^*} \frac{1}{\left( 1 + R_h / K_t \right)} \left[ \frac{X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1 - 1} + X_{\gamma_2} X_b^{\delta_2 - 1}}{X_{\gamma_2} X_b^{\delta_1} + \gamma_{12} X_{\gamma_1} X_b^{\delta_2}} \right] \quad (2.92)$$

Onde  $K_t$  é definido por (5.83).