UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MECÂNICA

UMA FORMULAÇÃO DE ELEMENTO FINITO PARA CASCAS DELGADAS MULTILAMINADAS

TESE SUBMETIDA A UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRADO EM MECÂNICA

PAULO DE TARSO ROCHA DE MENDONCA

FLORIANOPOLIS, 17 DE NOVEMBRO - 1983

UMA FORMULAÇÃO DE ELEMENTO FINITO PARA
CASCAS DELGADAS MULTILAMINADAS

PAULO DE TARSO ROCHA DE MENDONÇA

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO
DO TITULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA
FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Clovis Sperb de Barcellos

PROF. CLÓVIS SPERB DE BARCELLOS, Ph.D
ORIENTADOR

PROF. ARNO BLASS, Ph.D
COORDENADOR DO CURSO

BANCA EXAMINADORA

Clovis Sperb de Barcellos

PROF. CLÓVIS SPERB DE BARCELLOS, Ph.D

PROF. DOMINGOS BOECHAT ALVES, Ph.D

PROF. ALTAMIR DIAS, M.Sc.

À MEUS PAIS

AGRADECIMENTOS,

Ao Prof. Clóvis Sperb de Barcellos, pela segurança,pela presteza e pelo clima de confiança que manteve como orientador, agradeço.

Aos professôres e funcionários da U.F.S.C., que, ao longo de sua história, até hoje, trabalharam para criar as condições de trabalho e produção que ora se dispõem, agradeço.

Ao Conselho Nacional de Pesquisas, pelo substancial suporte Financeiro pessoal que me foi proporcionado, agrdeço.

Í N D I C E

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE VARIAVEIS

A	–	área do elemento
$\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{\bar{B}}, \underset{\sim}{C}$	–	matrízes de rigidez extencional de acoplamento e flexão
a	–	vetor de incógnitas do elemento e
$\underset{\approx}{B}$	–	matriz de correlacionamento entre $\underset{\sim}{e}$ e $\underset{\sim}{U}^e$
$\underset{\sim}{\bar{b}}$	–	forças de corpo
b_x, b_y	–	inclinação da superfície média de uma placa
C_{ij}	–	termo da matriz elástica de rigidez.
c, s	–	cosseno e seno
$\underset{\approx}{E}$	–	matriz de polinômios interpoladores.
E	–	módulo de Young
$\underset{\sim}{e}$	–	deformação específica
G	–	módulo de elasticidade transversal
$\underset{\sim}{H}$	–	vetores de funções de interpolação
H	–	espessura do laminado
$\underset{\sim}{\bar{k}}$	–	vetor de curvaturas
$\underset{\approx}{K}$	–	matriz de rigidez
L	–	coordenada natural
e_{ij}	–	comprimento do lado ij
$\underset{\sim}{M}$	–	momentos resultantes
$\underset{\approx}{M}$	–	matriz de correlacionamento entre $\underset{\sim}{u}$ e $\underset{\sim}{U}^e$
$\underset{\sim}{N}$	–	tensões normais resultantes
N	–	número de lâminas do laminado
$\underset{\sim}{P}$	–	vetor de forças equivalentes
$\underset{\approx}{Q}, (\underset{\approx}{\bar{Q}})$	–	matriz de rigidez elástica (transformada)
$\underset{\sim}{r}$	–	vetor unitário
S_{ij}	–	termo da matriz elástica de flexibilidade

$\tilde{Tr},\tilde{T}$	-	matrizes de transformação
T	-	temperatura
t	-	espessura da lâmina
U	-	energia de deformação
$\tilde{U}$	-	vetor de deslocamentos nodais
u,v,w	-	deslocamentos
x,y,z	-	coordenadas locais
X,Y,Z	-	coordenadas globais
$\bar{z}$	-	cota do centroide da lâmina.

LETRAS GREGAS

α	-	coeficientes de expansão térmicas
γ,γ^o	-	deformação cisalhante
σ	-	tensão normal
τ	-	tensão cisalhante
ν	-	módulo de Poisson
θ	-	ângulo de inclinação das fibras na lâmina, ou grau de liberdade de rotação
$\tilde{\phi}$	-	matriz de correlacionamento entre $\tilde{u}_m$ e $\tilde{U}_m$
$\tilde{\phi}$	-	vetor de funções de interpolação do elemento CST
Π	-	energia total

SUB-ÍNDICES E SUPER-ÍNDICES

o	-	superfície média onde é tomada a unidade
k	-	númaro de ordem da lâmina

*	-	transposição de matriz
x,y,z	-	sistema local de coordenadas
X,Y,Z	-	sistema global de ooordenadas
1,2	-	sistema principal de coordenadas
i,j,k, ou		
1,2,3	-	números dos nós de elemento
m	-	membrana
f	-	flexão
n	-	direção normal ao lado do elemento
s	-	" tangencial ao lado do elemento
ij	-	diferença das grandezas entre o nó i e o j.
e	-	elemento

R E S U M O

É desenvolvida e testada uma formulação de elemento finito de casca delgada de material composto por lâminas ortotrópicas. Utiliza-se a técnica de elementos finitos pelo método dos deslocamentos, com elemento triangular plano de três nós. Através da utilização da Teoria de Kirchhoff discretizada obteve-se um elemento com os deslocamentos de membrana u, v, interpolados linearmente, w cubicamente, e as flexões quadraticamente.

Em cada elemento são admitidas variações graduais ou bruscas na quantidade de lâminas, na espessura da lâmina, nas propriedades elásticas, nas orientações, bem como nos carregamentos e na espessura total do laminado. Estes parâmetros podem ser identificados particularmente a cada elemento da malha.

A resolução é obtida: a) utilizando-se matriz única de correlacionamento entre deformações médias e deslocamentos nodais, englobando deformações de membrana e flexão; b) utilizando-se matriz de ridez única englobando comportamentos de membrana, flexão e o acoplamento destas.

Diversos exemplos são resolvidos e os resultados são comparados com as soluções obtidas na literatura.

A B S T R A C T

A finite element for thin shells made of multi-layered composite materials is implemented. Such element is triangular shaped with in plane displacements linearly interpolated, normal rotations quadraticaly and transversal displacements cubically interpolated and the Kirchhoff hipothesis satisfied at discrete points.

The formulations admits changes in the number, thickness, elastic properties and orientation of the laminae within each element, as well as in the loading. This parameters are to be specified at each element when a particular problem is defined.

Some exaples are presented and they show a good agreement with results given in the literature.

CAPÍTULO 1 - APRESENTAÇÃO

1.1. - INTRODUÇÃO

Os materiais compostos são ideais para aplicações estruturais onde altas razões resistência/peso e rigidez/peso são requeridas. As peças assim produzidas são particularmente convenientes para aplicações aeroespaciais e militares, bem como, mais modernamente, em grande número de componentes estruturais de uso comercial e industrial tais como: tubos motores de foguetes, ogivas, vasos de alta pressão, tubos de lançamento para torpedos e mísseis, tubulações para alta pressão, tanques de armazenamento, oleodutos, tanques de combustíveis para aviões, estruturas de satélites, e mais recentemente fuselagem e superestrutura de aviões.

A medida que as técnicas de fabricação e controle de qualidade se aprimoram permitindo a produção de peças com geometrias otimizadas, e consequentemente mais irregulares e complexas, maior é a necessidade do uso de métodos genéricos para o cálculo estrutural, tais como os métodos de elementos finitos.

Exemplos de aplicações de elementos finitos em laminados são:

a) com uma modelagem inicial sobre toda a peça se determinam os campos de deslocamentos e tensões; subsequentemente, com a ajuda de um programa gerador de malha modela-se, então, o entorno de uma trinca, por exemplo, e utiliza-se os valores de deslocamentos e tensões predeterminadas como condições de contorno na determinação do campo intensificado de tensões na região.

b) na análise prévia à recuperação de danos em laminados. Em torno de um furo, ou um rasgo, por exemplo, superficial ou não, é necessário que se disponha de um elemento finito em que seja permitida a eliminação controlqda de lâminas ou sua edição de uma forma aproximada à que se assumirá o processo de recuperação usado no laminado.

Em vários centros de pesquisas no mundo segue contínuo o processo de pesquisa em torno dos problemas de materiais compostos, e particularmente sua análise por elementos finitos. Como exemplo, o problema b descrito acima é parte de uma linha de pesquisa na Universidade de Austin, Texas, E.U.A., no estudo analítico dos efeitos de reparos em lâminas de rotores e carcaças de turbinas. As investigações estão no quarto ano. Ainda na mesma Universidade a dois anos são realizados testes e análises de todos os aspectos pertinentes do primeiro avião totalmente feito de materiais compostos, que, note-se, já está construido desde 1977.

1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nos últimos anos, apesar de se tornar mais e mais generalizado em certas áreas, como a aeroespacial e a militar, o uso de materiais compostos, são escassas as publicações em certas áreas afins, notadamente em processos de fabricação e métodos de projeto e análise de tensões. As publicações de métodos analíticos de cálculo de tensões em placas e cascas são mais numerosas e algumas são enumeradas a seguir. Krakeinavic |6| apresentou uma teória para análise de vigas sanduiche considerando efeito de cisalhamento transversal. Gulati e Essemberg |7| apresentaram um estudo bastante completo da solução do problema de casca cilíndrica circular axisimétrica anisotrópica através da teoria de cascas de Naghdi; foram incluídos os deslocamentos circunferenciais e os giros resultantes dos acoplamentos. Misovec e Kemper mostraram uma solução aproximada às equações de Navier da teoria de elasticidade tridimencional para um cilindro circular ortotrópico axisimétrico submetido à pressão interna e externa, cargas axiais e cargas radiais espaçadas separadamente em forma de bandas. Payano |9| apresentou um trabalho de cunho mais teórico com a solução de um campo de tensões elasticas em um corpo cilindricamente anisotrópico, vasado, sob tração superficial constante ao longo da altura. Whitney e Leissa |10| apresentaram um estudo mais completo do problema de placas retangulares heterogêneas anisotrópicas. Foram consideradas as espessuras, propriedades elásticas, número e orientações arbitrárias de lâminas; foram considerados os acoplamentos da tensão normal e cisalhante; foram usadas com os termos não lineares e solucionadas com o uso de séries duplas.

Tanto na literatura em geral, como no Brasil, são ainda escassas as formulações de elementos finitos especiais ao uso em materiais compostos. Para cascas suaves semi-espessas Noor e Mathers, |1|, apresentaram os elementos triangulares e quadriangulares, ST6 e SQ8 de 6 nós e 8 nós respectivamente, com tensão cisalhante transversal e formulação de deslocamento. Em 1976 Noor e Anderson apresentaram |4| os elementos isoparamétricos de formulação mixta, com cisalamento, para análise de tensões e vibrações de laminados compostos em forma de cascas suaves semi-espessas. Também foram considerados elementos triangulares e quadrangulares. As matrizes de rigidez, massa e carga foram obtidas por uma forma modificada do princípio variacional mixto de Hellinger-Reissner. Em 1966 Dong, |18|, apresentou um elemento de casa de revolução para laminados ortotrópicos sob carregamentos arbitrários. O elemento é tronco-crônico reto. Foi um dos primeiros trabalhos a levar em consideração variações na espessura do laminado.

1.3 - OBJETIVO

Devido às poucas pesquisas mostradas na revisão bibliográfica resolveu-se implementar e testar um elemento finito adequado a cascas compostas. Especificou-se o uso de um elemento de tipo triangular plano, e a implementação de um programa computacional que permita variações graduais é bruscas na quantidade das lâminas, propriedades elásticas e orientação, bem como nos carregamentos e na espessura total do laminado. O programa permite ainda a leitura independente destes valores em cada elemento da malha.

CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTOS DE MATERIAIS COMPOSTOS

2.1. Definição e Classificação dos Materiais Compostos

2.1.1 - DEFINIÇÃO DE MATERIAL COMPOSTO

Os materiais compostos são a combinação de dois ou mais materiais numa escala macroscópia formando um material útil na construção de componentes mecânicos.

Usualmente os materiais compostos exibem as melhores qualidades que seus componentes e frequentemente apresentam alguma qualidade que nenhum de seus constituintes possuem.

As características que podem ser melhoradas ou manipuladas pela formação de um material composto são, entre outras, as seguintes:

- resistência mecânica;
- rigidez do material;
- resistência à corrosão;
- resistência ao desgaste;
- peso;
- vida sob fadiga;
- comportamento dependente da temperatura;
- isolamento térmico;
- condutividade térmica;

Existem três tipos gerais de materiais compostos, os quais são:

- Compostos fibrados;
- Compostos laminados;

- Compostos particulados.

2.1.2 - COMPOSTOS FIBRADOS

Os compostos fibrados são constituídos de fibras dispersas numa matriz, onde a matriz é o material que enfeixa as fibras ou filamentos, permitindo que tomem a forma de um elemento estrutural. A matriz geralmente representa o componente menos nobre do composto, apresentando valores de densidade, rigidez e resistência menores que as fibras ou filamentos. Além de suporte geométrico a matriz serve para distribuir o carregamento entre e ao longo das fibras, bem como transmitir tensões entre as fibras.

A componente considerada nobre do composto pode ser de forma fibrilar propriamente dita ou filamentar.

As fibras se caracterizam pelo seguinte:

- a relação comprimento/diâmetro é muito alta - as fibras são longas e contínuas;
- o seu diâmetro é perto do tamanho do cristal;
- são mais rígidas e fortes que o mesmo material em bloco;
- apresentam menos defeito internos que o material em bloco.

Os filamentos de um material apresentam as seguintes propriedades e características:

- possuem diâmetro perto do tamanho do cristal como uma fibra porém são mais curtos;
- mesmo assim a relação comprimento/diâmetro é da ordem de centenas;
- são mais perfeitos que uma fibra e apresentam melhores características, que as fibras, devido em parte ao menor comprimento;

- são obtidos por cristalização, numa escala muita pequena, resultando um alinhamento quase perfeito dos cristais.

2.1.3 - COMPOSTOS LAMINADOS

Consiste de camadas de vários materiais, no mínimo dois, coladas juntas. Os melhores exemplos são:

- Bimetais - laminados de dois metais diferentes com diferença sigficativa entre seus coeficientes de dilatação térmica. Sob uma mudança de temperatura em relação àquela em que foram montadas, o bimetal torce ou deflete de maneira previsível, servindo para equipamentos de medição.

- Materiais revestidos - materiais revestidos por outros para eliminar uma deficiência sem perder ou atenuar suas próprias qualidades. Por exemplo, uma liga de alumínio de alta resistência tem baixa resistência à corrosão, enquanto que o alumínio puro é bastanta resistente à corrosão; logo a liga recoberta apresentará ambas as qualidades.

- Vidros laminados - usados em para-brisas de automóveis e divisórias. Duas camadas de vidro são separadas por uma de plástico polivinil butrial. O vidro é frágil e rígido, o plástico é deformável e flexível, resultando na conhecida característica dos para-brisas manterem juntos os estilhaços quando quebrados.

- Composto laminado reforçado com fibras - é um tipo de composto híbrido, pois envolve um composto fibrado e a técnica de laminação.

Composto laminado ou laminado - é o material que consiste da junção de pelo menos dois materiais diferentes em forma de camadas ou lâminas - que são colados.

No tipo de composto laminado reforçado com fibras, as camadas de material reforçado por fibras são construídas com as direções das fibras de cada camada orientadas em diferentes direções para fornecer diferentes rigidez e resistências nas várias direções. Exemplos são cascos de barcos, carcaças de mísseis, bocais, raquetes de tênis.

2.1.4 - COMPOSTOS PARTICULADOS

Os compostos particulados são constituídos por partículas de um ou mais materiais suspensos numa matriz de outro material. Tanto as partículas quanto a matriz podem ser metálicas ou não metálicas em suas várias combinacões.

a) - Composto de não metálico em não metálico - o mais comum é o concreto, em sua mistura de pedras e areia em cimento, reagida em presença de água.

b) - Composto de metálico em não metálico - tinta a base de alumínio onde as partículas de alumínio ficam em suspensão na tinta e melhoram o recobrimento; propelentes sólidos de foguetes, que consistem de partículas inorgânicas como o alumínio e perclorato oxidante numa resina orgânica flexível como o poliuretano.

c) - Composto não metálico em metálico - um material como o cerâmico, suspenso numa matriz metálica. O resultante é chamado "Cermet". São usados em ferramentas e em aplicações em que seja requerida alta resistência à erosão.|11|

2.2 - COMPORTAMENTO MACRO-MECÂNICO DE UMA LÂMINA

Inicialmente é necessário descrever os sistemas de coordenadas utilizados em todo o trabalho.

O primeiro sistema é o sistema glogal de coordenadas, X-Y-Z, que opcionalmente pode ter um de seus eixos orientados segundo uma direção preferencial da georetria da peça a ser modelada. Neste sistema são lidos os valores de coordenadas dos nós, e são aplicadas cargas devidas as forças distribuídas e peso.

O segundo sistema é o sistema local de coordenadas, x-y-z. É definido para cada elemento da forma seguinte: os eixos x-y são paralelos á superfície do elemento; o sentido positivo de x coincide com o sentido i-j dos nós; o sentido +y para o lado do elemento; e z normal a superfície do elemento formando um sistema anti-horário.

O terceiro sistema é o de coordenadas naturais para elemento triangular L_1, L_2, L_3, que é utilizado nas funções de interpolação. Na integração da matriz de rigidez é necessário então utilizar o Jacobiano, que neste caso é apenas 2A, sendo A a área do elemento.

O quarto sistema de coordenadas é o sistema principal, 1,2,3, que é definido em cada elemento, cada nó, e cada lâmina se for optado pelo usuário a obtenção de tensões nas lâminas nas direções principais. Obtém-se a transformação para este sistema a partir do sistema local e do ângulo θ entre a direção da fibra e o lado i-j do elemento.

A determinação da matriz de transformação do sistema local para o global é mostrada a seguir. (Ver figura 2.1).

Dado as coordenadas dos nós i,j,k no sistema global:

e:

$$\underset{\sim}{r}_y = \frac{\underset{\sim}{r}_z \times \underset{\sim}{r}_x}{|\underset{\sim}{r}_z \times \underset{\sim}{r}_x|} \qquad (2.5)$$

logo:

$$\underset{\approx}{T} = (\underset{\sim}{r}_x, \underset{\sim}{r}_y, \underset{\sim}{r}_z)^* \qquad (2.6)$$

tal que:

$$\underset{\sim}{P}_g = \underset{\approx}{T}\underset{\sim}{P}_l + \underset{\sim}{P}_i \qquad (2.7)$$

onde:

$\underset{\sim}{P}_g$ = ponto em coordenadas globais.

$\underset{\sim}{P}_l$ = ponto em coordenadas locais.

$\underset{\sim}{P}_i$ = coordenada global do nó i.

As descrições dos sistemas de coordenadas aqui mostradas serão melhor delineadas quando de seu uso no restante do trabalho..

2.2.1 - RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO EM MATERIAIS ELÁSTICO LINEAR

A relação tensão-deformação de um material elático-linear é: |19|

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{Sim.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

onde: σ_i, τ_{ij}, $i,j = 1, 2, 3$ são tensões normais e cisalhantes respectivamente; e, γ são deformações normais e cisalhantes respectivamente; os $C_{l,m}$ com $l,m = 1, 6$ são os elementos da matriz de rigidez do material $\underset{\sim}{C}$.

Se existem dois planos ortogonais de simetria de propriedades no material, simetria existirá necessariamente relativa ao terceiro plano mutuamente ortogonal. A relação tensão-deformação em coordenadas alinhadas com as direções principais do material é:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ \text{Sim.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.9)$$

O material com esta característica de tríplice simetria é dito ortotrópico. As direções principais de propriedade do material são paralelas às interseções dos três planos ortogonais de simetria do material. Um material ortotrópico possui pelo menos um sistema de coordenadas em cada ponto em que as tensões normais provocam apenas, deformações normais, e tensões cisalhantes provocam apenas cisalhamento, (neste caso apenas na direção de aplicação). Esta característica pode ser verificada na equação acima. A matriz C possui apenas 9 constantes independentes.

A relação deformação - tensão é:

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ \text{Sim.} & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.10}$$

onde S_{ij}, $i,j = 1, 6$ são termos da matriz de flexibilidade do material.

Para materiais ortotrópicos, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ \text{Sim.} & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

2.2.2 - CONSTANTES DE ENGENHARIA PARA MATERIAIS ORTOTRÓPICOS.

As constantes de engenharia ou constantes técnicas são constantes que representam as propriedades elásticas do material, possuem interpretação física óbvia e podem ser mais facilmente obtidas experimentalmente que as relativamente abstratas constantes das matrizes de rigidez ou flexibilidade do material. Estas constantes de engenharia são módulos de Young generalizados, coeficientes de Poisson e módulos de elasticidade transversal.

Para um material ortotrópico a matriz de flexibilidade do material em termos das constantes de engenharia é:

$$\underset{\approx}{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \qquad (2.12)$$

onde: E_1, E_2, E_3 são os módulos de Young nas direções 1, 2, e 3;
$\nu_{ij} = e_j/e_i$ para $\sigma_i = \sigma$ e tensões zero nas outras direções;

G_{23}, G_{31}, G_{12} = módulos de elasticidade transversal nos planos 2-3, 3-1, 1-2 respectivamente.

Deve-se lembrar que $S_{ji} = S_{ji}$, e que existem apenas 9 constantes independentes.

A matriz de rigidez C_{ij} para um material ortotrópico em termos das constantes de engenharia é obtida pela inversão da matriz de flexibilidade S_{ij}. Os termos não nulos de C_{ij} são:

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} \\
C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta} \\
C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} \\
C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} \\
C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} \\
C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta} \\
C_{44} &= G_{23} \\
C_{55} &= G_{31} \\
C_{66} &= G_{12}
\end{aligned}
\qquad (2.13)
$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \qquad (2.14)$$

notando-se que:
$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \qquad (2.15)$$

$i,j = 1, 2, 3$, devido a simetria da matriz de flexibilidade $\underset{\sim}{\underset{\sim}{S}}$.

2.2.3 - RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA ESTADO PLANO DE TENSÃO/DEFORMAÇÃO EM MATERIAL ORTOTRÓPICO.

Para uma lâmina no plano 1-2 Figura 2.2, um estado plano de tensões é definido considerando na equação (2.11), a relação deformação-tensão para materiais ortotrópicos;

$\sigma_3 = 0;$ $\qquad \tau_{23} = 0;$ $\qquad \tau_{31} = 0$

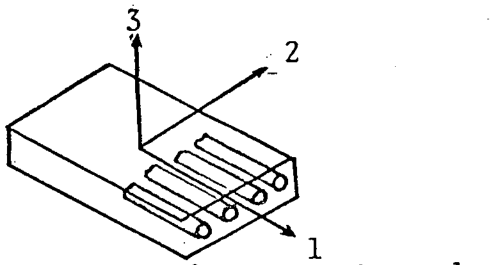


Fig. 2.2. Lâmina reforçada unidimensionalmente por fibras

Isto implica em

$$e_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2$$

$$\gamma_{31} = 0$$

$$\gamma_{23} = 0$$

logo, (2.11) reduz-se a:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

Utilizando as relações (2.13),(2.14),(2.15) e invertendo-se a (2.16) obtém se a relação deformação-tensão:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

onde Q_{ij} são os termos da matriz reduzida de rigidez. Em termos das constantes de engenharia, os valores de Q_{ij} são:

$$Q_{11} = \frac{E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \qquad Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}$$

$$(2.18)$$

$$Q_{22} = \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \qquad Q_{33} = G_{12}$$

A partir de agora utilizar-se-á os subscritos 1, 2, 3 no lugar de 1, 2, 6 para definir o estado plano de tensão.

2.2.4 - RELAÇÃO TENSÃO DEFORMAÇÃO COM ROTAÇÃO DE SISTEMA DE COORDENADAS.

Na secção anterior as relações tensão deformação foram definidas nas direções principais de propriedades do material para um material ortotrópico. Em geral, porém, as direções principais de propriedades de material não coincidem com as direções principais da geometria da peça mais naturais na solução de um problema. Frequentemente então se terá necessidade de obter as relações tensão-deformação em direções quaisquer. |11|

Exprimindo-se a matriz $\underset{\sim}{\underset{\sim}{Tr}}$ de transformação da rotação do sistema x-y-z para o sistema principal de propriedade do material 1-2-3, determinado pelo angulo θ, conforme a Figura 2.3, obtém-se:

$$\underset{\sim}{\underset{\sim}{Tr}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \qquad (2.19)$$

Note-se que não há alteração na direção normal.

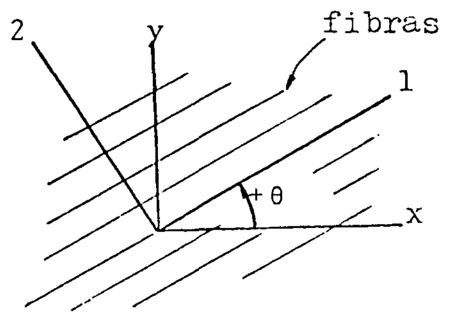


Fig. 2.3 Rotação positiva do sistema x-y para sistema principal 1-2.

Tem-se então:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (2.20)$$

ou:

$$\underset{\approx}{\sigma}^x = \underset{\approx}{Tr}^* \underset{\approx}{\sigma}^1 \underset{\approx}{Tr}$$

Efetuando as operações indicadas na segunda parte da equação (2.20), e exprimindo os termos $\underset{\approx}{\sigma}^x$ e $\underset{\approx}{\sigma}^1$ em colunas temos:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \operatorname{sen}^2\theta & -2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}^2\theta & \cos^2\theta & 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\cos\theta & (\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \qquad (2.21)$$

ou:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \underset{\approx}{T}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.22)$$

Da mesma forma,

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix} = \underset{\approx}{T}^{-1} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix} \qquad (2.23)$$

A equação (2.23) pode ser modificada com o uso da matriz

$$\underset{\approx}{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{resultando:} \qquad (2.24)$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{R} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{R} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

Substituindo as equações (2.22), (2.23), (2.25), (2.26) na equação (2.17) resulta:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{T}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{T}^{-1} \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{R}^{-1} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

Se for feito:

$$\underset{\sim}{\bar{Q}} = \underset{\sim}{T}^{-1} \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{R}^{-1}$$

temos:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \bar{\underset{\approx}{Q}} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.28}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{33})\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\mathrm{sen}^4\theta \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{33})\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\mathrm{sen}^4\theta + \cos^4\theta) \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}\mathrm{sen}^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{33})\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta \\
\bar{Q}_{13} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33})\mathrm{sen}\ \cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33})\mathrm{sen}^3\theta\cos\theta \\
\bar{Q}_{23} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33})\mathrm{sen}^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33})\mathrm{sen}\theta\cos^3\theta \\
\bar{Q}_{33} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{33})\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta + Q_{33}(\mathrm{sen}^4\theta + \cos^4\theta)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Nota-se que a matriz de rigidez transformada é cheia como se fora de um material anisotrópico. Claro que existem apenas as quatro constantes independentes além de θ.

2.3 - COMPORTAMENTO MACROMECÂNICO DE UM LAMINADO.

As várias combinações de orientações, espessuras, materiais. etc, de cada lâmina fazem com que o comportamento do laminado possua características diferentes da lâmina simples. A dedução das equações que descrevem o comportamento do laminado, a partir das conhecidas paras as lâminas simples, são descritas a seguir para estruturas de placas delgadas, também incluida a resposta térmica do laminado.

2.3.1 - TEORIA CLÁSSICA DE LAMINAÇÃO (CLT) PARA PLACAS DE PAREDES DELGADAS.

Inicialmente é adotada uma coleção de pressupostos para o laminado, que formam as hipóteses de Kirchhoff para placas e Kirchhoff - Love para cascas. Estas hipóteses gerais a placas e cascas, juntas a outras próprias a materiais compostos laminados são os seguintes:

- o laminado é suposto consistir de lâminas perfeitamente coladas, isto é, sem deslisamento ou descolamento;
- a cola é suposta ser infinitesimalmente fina e não deformável também por cisalhamento; isto significa que os deslocamentos são contínuos através das lâminas;
- o laminado é delgado (placa ou casca de paredes delgadas), e considera se que uma linha originalmente reta e perpendicular à superfície que define a geometria da estrutura permaneça reta e perpendicular a esta superfície quando o laminado for estendido e flexionado. Como consequência $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ onde os eixos x-y-z estão como na Figura 2.4;

- as normais são presumidas ter comprimentos constantes,

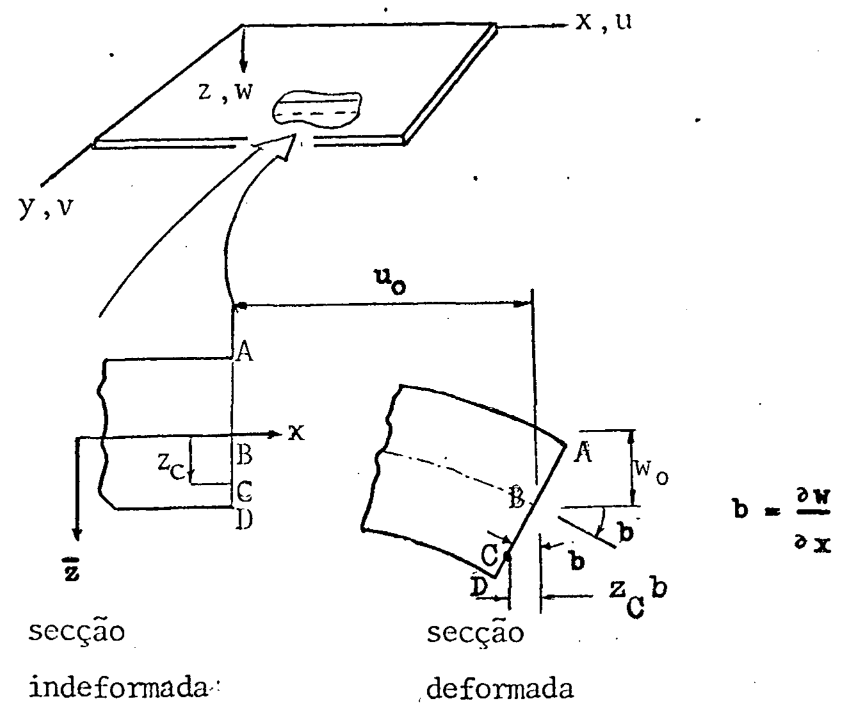


Fig.2.4 Geometria da deformação no plano xz.

Com as hipóteses acima em vista, podem ser reduzidas as relações mostradas a seguir entre u, v, w, u_o, v_o, com a ajuda da Figura 2.4 O subscrito "o" indica deslocamento segundo os três eixos de um ponto na superfície de referência; u, v, w são deslocamentos em pontos quaisquer do laminado. O deslocamento do ponto C do laminado na direção x, será dado por:

$$u_c = u_o - z_o b \tag{2.30}$$

onde b é a inclinação da superfície média na direção x. Assim

$$b = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.31}$$

e $$u = u_o - z \frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.32}$$

Da mesma forma,

$$v = v_o - z \frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.33}$$

e $$w = w(x,y) \tag{2.34}$$

Só a partir daqui se faz restrições para tratar apenas de casos de pequenas deformações e rotações (elasticidade linear) e de laminado em forma de placa. As hipóteses de Kirchhoff já haviam restringido o laminado como sendo de paredes finas.

As relações deformação-deslocamento para pequenas deformações são:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (3.35)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Substituindo-se as equações (2.32) a (2.34) em (2.35) obtém-se:

$$e_x = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$e_y = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (2.36)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z\,\frac{\partial^2 u_o}{\partial x \partial y}$$

Fazendo:

$$\begin{Bmatrix} e_x^o \\ \\ e_y^o \\ \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_o}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial v_o}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial u_o}{\partial y} + \dfrac{\partial v_o}{\partial x} \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{e}^o \tag{2.37}$$

como deformações na superfície média, e:

$$\begin{Bmatrix} \bar{k}_x \\ \\ \bar{k}_y \\ \\ \bar{k}_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \\ 2\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{\bar{k}} \tag{2.38}$$

como curvaturas da superfície média, a equação (2.36) torna-se:

$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_x^o \\ e_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \bar{k}_x \\ \bar{k}_y \\ \bar{k}_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.39}$$

Pode-se a seguir estabelecer as equações de forças e momentos resultantes no laminado. Substituindo a equação da variação da deformação através da espessura em um laminado, equação (2.39) na relação tensão-deformação equação (2.29), as tensões na k-ésima lâmina podem ser expressas como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^k \\ \sigma_y^k \\ \tau_{xy}^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} e_x^o \\ e_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \bar{k}_x \\ \bar{k}_y \\ \bar{k}_{xy} \end{Bmatrix} \right\} \tag{2.40}$$

Note-se que os valores de $\underset{\sim}{e}^{o}$ e $\underset{\sim}{\bar{k}}$ são constantes, independentes das lâminas, porém cada lâmina possuindo suas propriedades elásticas próprias $\bar{Q}_{ij}^{k}$, de acordo com a cota $\bar{z}$ de sua superfície de referência do laminado, desenvolverá tensões próprias σ^{k} diferentes das demais lâminas.

As forças e momentos resultantes no laminado como de resto em placas em geral, são obtidas pela integração das tensões em cada lâmina, e as lâminas entre si através da espessura do laminado. Por exemplo tem-se:

$$N_x = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x dz$$

$$N_y = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_y dz \qquad (2.41)$$

$$M_x = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_x z dz$$

Nx, Ny, Mx são forças e momento por unidade de comprimento ao longo da aresta do elemento infinitesinal de placa paralelo aos eixos x e y. As orientações positivas das forças e momentos são representados na Figura 2.5, e H é a espessura total do laminado. Considera-se a geometria do laminado a mostrada na Figura 2.6, onde z_k é a cota da face superior da lâmina k, e N é o número de lâminas. A contribuição de uma lâmina k para as tensões resultantes e momentos na placa é dado por:

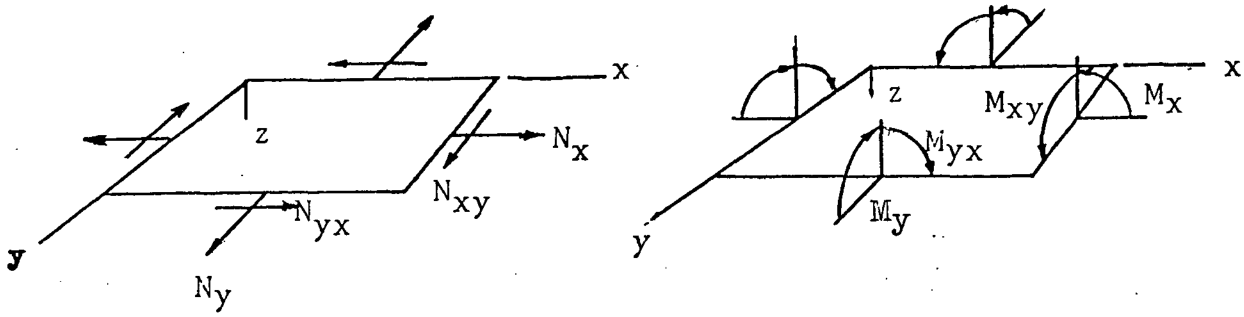


Fig. 2.5 . Forças e momentos num laminado plano.

$$N_x^k = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_x^k dz$$

$$N_y^k = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_y^k dz \qquad (2.42)$$

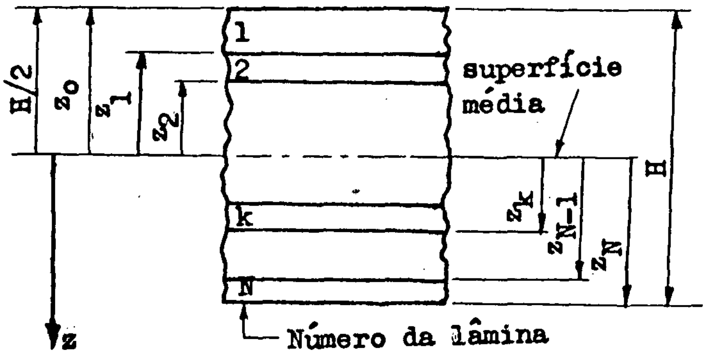


Figura 2.6 - Geometria de um laminado.

etc..., e

$$M_x^k = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_x^k z\,dz \tag{2.43}$$

As equações tornam-se então:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k dz \tag{2.44}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k zdz = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k zda \qquad (2.45)$$

Substituindo os vetores σ^K da equação (2.40) nas equações (2.44) e (2.45) resultam:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} \bar{Q}^k_{11} & \bar{Q}^k_{12} & \bar{Q}^k_{13} \\ \bar{Q}^k_{12} & \bar{Q}^k_{22} & \bar{Q}^k_{23} \\ \bar{Q}^k_{13} & \bar{Q}^k_{23} & \bar{Q}^k_{33} \end{bmatrix} \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \left\{ \begin{Bmatrix} e^o_x \\ e^o_y \\ \gamma^o_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{k}_x \\ \bar{k}_y \\ \bar{k}_{xy} \end{Bmatrix} \right\} zdz \right] \qquad (2.46)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} \bar{Q}^k_{11} & \bar{Q}^k_{12} & \bar{Q}^k_{13} \\ \bar{Q}^k_{12} & \bar{Q}^k_{22} & \bar{Q}^k_{23} \\ \bar{Q}^k_{13} & \bar{Q}^k_{23} & \bar{Q}^k_{33} \end{bmatrix} \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[\begin{Bmatrix} e^o_x \\ e^o_y \\ \gamma^o_{xy} \end{Bmatrix} z + \begin{Bmatrix} \bar{k}_x \\ \bar{k}_y \\ \bar{k}_{xy} \end{Bmatrix} z^2 \right] dz \right\} \qquad (2.47)$$

Nota-se que $\underset{\sim}{e}^o_x$ e $\underset{\sim}{\bar{k}}$ não são função de z, logo, realizando-se as integrações e os somatórios tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{22} & \bar{B}_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \bar{B}_{13} & \bar{B}_{23} & \bar{B}_{33} \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ \bar{B}_{12} & \bar{B}_{22} & \bar{B}_{23} & D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ \bar{B}_{13} & \bar{B}_{23} & \bar{B}_{33} & D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^o \\ e_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \bar{k}_x \\ \bar{k}_y \\ \bar{k}_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.48}$$

onde:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\ \bar{B}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \tag{2.49}$$

ou:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k t_k \\ \bar{B}_{ij} &= \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k t_k \bar{z}_k \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k \left(t_k \bar{z}_k^2 + \frac{t_k^3}{12}\right) \end{aligned} \tag{2.50}$$

onde t_k representa a espessura da lâmina k e $\bar{z}_k$ a distância do centroide da k-ésima camada em relação à superfície média.

As equações (2.41) podem ser reduzidas a:

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{N} \\ \\ \underset{\sim}{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\approx}{A} & \underset{\approx}{B} \\ \\ \underset{\approx}{B} & \underset{\approx}{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{e}^{o} \\ \\ \underset{\sim}{k} \end{Bmatrix} = \underset{\approx}{C} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{e}^{o} \\ \\ \underset{\sim}{k} \end{Bmatrix} \qquad (2.51)$$

A matriz $\underset{\approx}{A}$ é chamada matriz de rigidez extensional, $\underset{\approx}{B}$ é matriz de rigidez de acompanhamento entre flexão e extensão e $\underset{\approx}{D}$ a matriz de rigidea de flexão. As matrizes $\underset{\approx}{A}$, $\underset{\approx}{B}$ e $\underset{\approx}{C}$ são simétricas. Caso o laminado seja simétrico em relação à superfície média não existe acoplamento entre a extensão e a flexão e $\underset{\approx}{B} = \underset{\approx}{0}$.

2. 3. 2. TENSÕES TÉRMICAS.

As relações tensão-deformações termoelásticas de um elemento infiniterimal em forma indicial são:

$$e_i = S_{ij}\,\sigma_j + \alpha_i T \qquad , \qquad i,j = 1,6 \qquad (2.52)$$

Invertendo-se tem-se:

$$\sigma_i = C_{ij}\,(e_j - \alpha_i T) \qquad i,j = 1,6 \qquad (2.53)$$

onde e_i é a deformação total, soma da deformação mecânica $S_{ij}\,\sigma_j$ com a deformação térmica $\alpha_i T$; α é o coeficiente de expansão térmica, T a diferença de temperatura. Note-se que $C_{ij}\,\alpha_i T$ na equação (2.53) só é tensão térmica caso a deformação total do corpo no ponto, e_i seja nula, isto é, restrição total.

Para o caso particular da lâmina ortotrópica, no sistema principal de coordenadas , as tensões mecânicas são, de acordo com a relação (2.10)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 - \alpha_1 T \\ e_2 - \alpha_2 T \\ \gamma_{12} - 0 \end{Bmatrix} \tag{2.54}$$

Tomando a k-ésima Lâmina de um laminado e transformando as coordenadas da equação (2.54) para um sistema x-y-z orientado segundo um ângula θ conforme a secção 2.2.4 tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k = \bar{\underset{\sim}{Q}}^k \begin{Bmatrix} e_x - \alpha_x T \\ e_y - \alpha_y T \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} T \end{Bmatrix}^k \tag{2.55}$$

Nota-se na equação (2.54) que a diferença de temperatura afeta apenas a expansão térmica extensional, O valor T refere-se geralmente, em laminados, à diferença entre a temperatura de trabalho no ponto e a temperatura de cura da cola no momento da construção do laminado.

A obtenção de α_x , α_y , α_{xy} , a partir de valores de α_1 , e α_2 é feita como segue:

$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix}^T = \underset{\approx}{T}^{-1} \underset{\approx}{R}^{-1} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^T \qquad (2.56)$$

onde o superescrito T indica térmico, $\underset{\approx}{T}$ e $\underset{\approx}{R}$ são matrizes de transformação já definidas nas equações (2.21) e (2.24).

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} T \qquad (2.57)$$

$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} T = \underset{\approx}{R}\underset{\approx}{T}^{-1} \underset{\approx}{R}^{-1} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} T \qquad (2.58)$$

da segunda parte da equação (2.58) tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} = \underset{\approx}{R}\underset{\approx}{T}^{-1} \underset{\approx}{R}^{-1} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (2.59)$$

o produto $\underset{\sim}{R}$ $\underset{\sim}{T}^{-1}$ $\underset{\sim}{R}^{-1}$ é:

$$\underset{\sim}{R} \quad \underset{\sim}{T}^{-1} \; \underset{\sim}{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \mathrm{sen}^2\theta & -2\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}^2\theta & \cos^2\theta & 2\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta \\ 2\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta & -2\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta & \cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta \end{bmatrix} \qquad (2.60)$$

Então, de (2.60) e (2.59)

$$\underset{\sim}{\alpha}^{x} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\cos^2\theta + \alpha_2\mathrm{sen}^2\theta \\ \alpha_1\mathrm{sen}^2\theta + \alpha_2\cos^2\theta \\ 2\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta\,(\alpha_1 - \alpha_2) \end{bmatrix} \qquad (2.61)$$

A Eq. (2.61) é a relação entre os coeficientes de dilatação térmica nas direções principais 1-2-3 e direção x-y-z.

Uma vez obtido $\underset{\sim}{\alpha}^{x}$ a partir de $\alpha_1 - \alpha_2$, pode-se integrar a equação (2.48) ao longo da espessura do laminado como na secção 2.3.1.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{A} \begin{bmatrix} e_x^o \\ e_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + \underset{\sim}{\bar{B}} \begin{bmatrix} \bar{k}_x \\ \bar{k}_y \\ \bar{k}_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}^T \qquad (2.62)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \underset{\approx}{\bar{B}} \begin{Bmatrix} e_x^o \\ e_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \underset{\approx}{D} \begin{Bmatrix} \bar{k}_x \\ \bar{k}_y \\ \bar{k}_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}^T \tag{2.63}$$

Onde A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} são definidas na equação (2.49) e as forças e momentos térmicos são :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}^T = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \underset{\approx}{\bar{Q}}^k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}^k T^k dz \tag{2.64}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}^T = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \underset{\approx}{\bar{Q}}^k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}^k T^k z^k dz \tag{2.65}$$

Como $\underset{\approx}{Q}^k$, $\underset{\sim}{\alpha}^k$ são constantes, e tomando T^k e z^k como os valores no ponto médio da lâmina, para diferença de temperatura e cota respectivamente, tem-se:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}^T = \sum_{k=1}^{N} \bar{\underset{\approx}{Q}}^k \underset{\sim}{\alpha}_x^k T^k t^k \tag{2.66}$$

e

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}^T = \sum_{k=1}^{N} \bar{\underset{\approx}{Q}}^k \underset{\sim}{\alpha}_x^k T^k z^k t^k \tag{2.67}$$

onde t^k é a espessura da lâmina k.

As equações (2.60) e (2.57) podem ser respectivamente para:

$$\begin{bmatrix} \bar{N}_x \\ \bar{N}_y \\ \bar{N}_{xy} \\ \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \\ \bar{M}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x + N_x^T \\ N_y + N_y^T \\ N_{xy} + N_{xy}^T \\ M_x + M_x^T \\ M_y + M_y^T \\ M_{xy} + M_{xy}^T \end{bmatrix} = \underset{\approx}{C} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{e}^o \\ \underset{\sim}{\bar{k}} \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

onde $\bar{N}$ e $\bar{M}$ são forças e momentos fictícios.

Sendo ΔT a variação de temperatura ao longo da espessura H do laminado Tm a temperatura média; a temperatuta T^k na superfície média da K-ésima lâmina localizada pela cota $\bar{z}_k$ é dada por:

$$T^k = \frac{\Delta T \; \bar{z}^k}{H} + Tm \tag{2.69}$$

CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS PARA MATERIAL ISOTRÓPICO.

3.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são mostrados os requisitos desejáveis de um elemento que guiaram a consequente escolha do elemento entre os já disponíveis na literatura. É subsequentemente detalhada a formulação dele conforme foi publicada e testada, isto é, aplicada a cascas delgadas isotrópicas. Este capítulo fornece então, junto com o Capítulo 2, subsídios a que no Capítulo 4 se desenvolva uma formulação adequada ao tratamento de cascas delgadas de material laminado reforçado por fibras.

3.2 - ASPECTOS DOS FUNDAMENTOS DE ELEMENTOS FINITOS.

Na forma mais geral e teórica são quatro as formulações disponíveis da solução de problemas por elementos finitos:

1. Formulação direta ou física - faz uso do conjunto de equações físicas (termo-mecânicas, elásticas, etc) do sistema considerado. Usada apenas no início dos estudos de elementos finitos, não mais tem valor prático;

2. Formulação variacional |13| - baseado no cálculo variacional, é utilizada minimizando ou tornando estacionário um dado funcional ou sistema de funcionais. Na exigência de um funcional para o fenômeno reside a principal limitação da formulação variacional;

3. Métodos dos resíduos ponderados ou de Galerkin - é a formulação mais versátil entre as disponíveis pois permite que

fenômenos que não sejam governados por um princí pio variacional possam ser analizados por esse método através das equações diferenciais que re gem o problema;

4. Formulação do balanço energético - também não requer prin cípios variacionais já estabelecidos. Baseia-se no sistema de equações obtido do balanço energético e/ou mecânico do sistema.

Os problemas de mecânica de sólidos admitem enfoque variacio nal, pois existem funcionais já estabelecidos. Nessa formulação quatro mo delos podem ser empregados dependendo do princípio variacional usado:

a) método do deslocamento, que será o método utilizado, é de rivado do princípio da energia potencial total mínima;

b) modelo de equilíbrio, baseado no princípio da energia com plementar total mínima;

c) modelos híbridos, são ramificações dos princípios de ener gia potencial e complementar mínimas;é ainda de pouca utilização;

d) modelos mixtos, derivados de princípios variacionais ge neralizados tais como o de Reissner. Como os dois primeiros, os modelos mixtos são bastantes utilizados.

O método do deslocamento tende a convergir melhor para os des locamentos que para deformações e tensões uma vez que as funções interpola doras se aplicam diretamente aos deslocamentos. O modelo do equilíbrio pos sui melhor desempenho para cálculo de tensões, por motivo semelhante. Os modelos híbridos ainda não estão implementados de modo suficientemente viá vel; os modelos mixtos são acurados para ambos os cálculos, deslocamentos e tensão. Entre estes modelos o que possui formulação e implementação compu tacional mais simples é o dos deslocamentos. Uma das razões é a grande qua tidade de estudos e elementos disponíveis, sendo ele dos primeiros modelos desenvolvidos na origem dos elementos finitos.

3.2.1 EXPRESSÕES BÁSICAS DO MÉTODO DE DESLOCAMENTOS

Esta formulação é baseada no princípio da energia potencial total mínima|13|. Dada a energia potencial total Π_p, o princípio da energia potencial total mínima requer que:

$$\delta\Pi_p = 0$$

e, para materiais elástico-lineares, em forma matricial,

$$\delta\Pi_p = \int_{V_o} \delta \underset{\sim}{e}^* \underset{\approx}{C} \underset{\sim}{e}^* dV - \int_{V_o} (\delta \underset{\sim}{e}^* \underset{\approx}{C} \bar{\underset{\sim}{e}} + \delta \underset{\sim}{u}^* \bar{\underset{\sim}{b}})\, dV - \int_{S_o} \delta \underset{\sim}{u}^* \underset{\sim}{P} dS \tag{3.2}$$

onde:

V_o - domínio.

S - contorno.

$\underset{\sim}{e}$, $\bar{\underset{\sim}{e}}$ - vetor de deformações específicas, e deformações residuais.

$\underset{\approx}{C}$ - matriz de rigidez do material.

V, S - volume e superfície.

$\underset{\sim}{P}$ - vetor de forças no contorno S em direções compatíveis a $\underset{\sim}{u}$.

$\underset{\sim}{u}$ - vetor de deslocamentos.

$\underset{\sim}{b}$ - forças de corpo.

Na equação (3.2) o segundo termo é a variação da energia de deformação; o terceiro é a soma das variações da energia de deformação residual e da energia potencial devida a ação das forças de corpo; o último termo representa a variação da energia potencial devida às forças de contorno.

Considera-se então o corpo elástico subdividido num conjunto de elementos de dimensões finitesimais.

A hipótese básica desta formulação é a de que os deslocamentos de quaisquer pontos de um elemento podem ser aproximadamente representados por funções em termos de incógnitas, as funções de interpolação. Estas funções podem variar de elemento a elemento. O e-ésimo elemento requer:

$$\underset{\sim}{u} = f_e(a_j) \tag{3.3}$$

onde f_e é um conjunto de funções de interpolação dos parâmetros a determinar a_j. Na forma matricial

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\approx}{E}\underset{\sim}{a} \tag{3.4}$$

onde $\underset{\approx}{E}$ é uma matriz função das coordenadas locais, e

$$\underset{\sim}{a}^* = (a_1\ a_2\ a_3\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ a_i)$$

é um vetor contendo os parâmetros a determinar do elemento e.

Pode-se escrever a equação (3.4) para cada nó do elemento e:

$$\begin{array}{l} u_1 = \underset{\approx}{E}_1\underset{\sim}{a} \\ u_2 = \underset{\approx}{E}_2\underset{\sim}{a} \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \underset{\sim}{u}_n = \underset{\approx}{E}_n\underset{\sim}{a} \end{array} \tag{3.5}$$

As equações (3.5) podem ser reunidas na expressão matricial:

$$\underset{\sim}{U}^e = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{u}_1 \\ \underset{\sim}{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \underset{\sim}{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{E}_1 \\ \underset{\sim}{E}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \underset{\sim}{E}_n \end{bmatrix} \underset{\sim}{a} = \underset{\approx}{G}\underset{\sim}{a} \tag{3.6}$$

onde $\underset{\sim}{U}^e$ é o vetor deslocamento nodal contendo todos os componentes de deslocamento de cada ponto nodal do elemento e.

Se as funções f_i são escolhidas de tal forma que evite a singularidade de $\underset{\approx}{G}$ no domínio do elemento, tem-se:

$$\underset{\sim}{a} = \underset{\approx}{G}^{-1}\underset{\sim}{U}^e \ , \tag{3.7}$$

que levada à equação (3.4) resulta:

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\approx}{E}\underset{\sim}{a} = \underset{\approx}{E}\underset{\approx}{G}^{-1}\underset{\sim}{U}^e \tag{3.8}$$

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\approx}{M}\underset{\sim}{U}^e \tag{3.9}$$

$$\text{onde } \underset{\approx}{M} = \underset{\approx}{E}\underset{\approx}{G}^{-1} \tag{3.10}$$

Note-se que nas formulações usuais parte-se diretamente da equação (3.9) em vez da (3.4), onde $\underset{\approx}{M}$ é a matriz de funções de interpolação e é usado o vetor $\underset{\sim}{U}^e$ de deslocamentos nodais como incógnitas a serem determinadas em vez dos parâmetros $\underset{\sim}{a}$.

Utilizando as relações deformação-deslocamentos obtidas a partir da teoria da elasticidade linear |19| e a equação (3.9), obtém-se as expressões para as deformações:

$$\underset{\sim}{e} = \underset{\approx}{B}\underset{\sim}{U}^e \tag{3.11}$$

Substituindo as equações (3.9) e (3.10) em (3.2) obtém-se para o elemento e:

$$\delta \Pi_p^e = \int_{V_o^e} (\delta U^e)^* (\underset{\approx}{B}^* \underset{\approx}{C} \underset{\approx}{B}) \underset{\sim}{U}^e dV - \int_{S_o^e} (\delta \underset{\sim}{U}^e)^* \underset{\approx}{M} P dS$$
$$- \int_{V_o^e} \left\{ (\delta \underset{\sim}{U}^e)^* \underset{\approx}{B} \underset{\approx}{C} \bar{e} + (\delta \underset{\sim}{U}^e)^{**} \underset{\approx}{M} \bar{b} \right\} dV = 0 \tag{3.12}$$

onde: V_o^e, S_o^e - domínio e contorno do elemento.

$\underset{\approx}{N}$ - matriz de funções de interpolação.

$\underset{\approx}{B}$ - matriz de correlacionamento entre deformação e deslocamentos nodais $\underset{\sim}{U}^e$.

Uma vez que os deslocamentos $\underset{\sim}{U}^e$ e $\delta \underset{\sim}{U}^e$ são independentes da posição,

$$\delta \Pi_p^e = (\delta \underset{\sim}{U}^e)^* \left\{ \left(\int_{V_o^e} \underset{\approx}{B}^* \underset{\approx}{C} \underset{\approx}{B} dV \right) \underset{\sim}{U}^e - \int_{V_o^e} (\underset{\approx}{B}^* \underset{\approx}{C} \bar{e} + \underset{\approx}{M}^* \bar{b}) dV - \int_{S_o^e} \underset{\approx}{M}^* P dS \right\} = 0 \tag{3.13}$$

Se for definido:

$$\underset{\approx}{K}^e = \int_{V^e} \underset{\approx}{B}^* \underset{\approx}{C} \underset{\approx}{B} dV \text{ , e} \tag{3.14}$$

$$\underset{\sim}{P}^e = \int_{V_o^e} (\underset{\approx}{B}^* \underset{\approx}{C} \bar{e} + \underset{\approx}{M} b) dV + \int_{S_o^e} \underset{\approx}{M}^* P dS \tag{3.15}$$

obtém-se:

$$\delta \Pi_p^e = (\delta \underset{\sim}{U}^e)^* (\underset{\approx}{K}^e \underset{\sim}{U}^e - \underset{\sim}{P}) = 0 \tag{3.16}$$

onde $\underset{\sim}{K}^e$ e $\underset{\sim}{P}^e$ são respectivamente a matriz de rigidez do elemento e o vetor de forças nodais equivalentes. Como os $\delta \underset{\sim}{U}^e$ são arbitrarios, de (3.16) obtém-se:

$$\underset{\sim}{K}^e \underset{\sim}{U}^e = \underset{\sim}{P}^e \tag{3.17}$$

Estas são as equações de equilíbrio locais do elemento e.

Efetuando-se a superposição |13| das equações de equilíbrio locais são obtidas as equações globais do modelo:

$$\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{P} \tag{3.21}$$

onde $\underset{\sim}{K}$ é a matriz de rigidez global, $\underset{\sim}{U}$ é o vetor contendo os componentes de deslocamento para todos os nós e todos os graus de liberdade considerados, e $\underset{\sim}{P}$ é o vetor força nodal global.

3.3 REQUISITOS DESEJÁVEIS A UM ELEMENTO E SELEÇÃO DOS ELEMENTOS USADOS.

De forma geral é requerido |3| que os elementos finitos para cascas delgadas:

1) Possuam baixo custo (tempo de computação), maior simplicidade na implementação do programa e no uso, e seja de utilização geral na análise de cascas delgadas;

2) Forneçam soluções acuradas na modelagem de geometria qualquer, (de casca delgada), e sob todos os tipos de condições de contorno e carregamento;

3) Não contenham nenhum modo de deformação com energia zero espúria, de tal forma que resultados confiáveis possam sempre ser esperados;

4) Não contenham "fatores numéricos artificiais" em sua formulação.

Evidentemente várias das qualidades requeridas são conflitantes. Na escolha da formulação mais adequada entre as existentes disponiveis na literatura, e passíveis de serem modificadas para o uso em materiais compostos, deve-se considerar os seguintes aspectos que permitem delinear melhor o perfil do elemento desejado:

a) Atualmente é disponível pouca publicação relativa a cascas laminadas, assim como a seu tratamento através do método do elemento finito, uma vez que o desenvolvimento teórico desse tipo de material estrutural é relativamente recente.

b) Considerando a casca composta por sucessivas lâminas sobrepostas, é desejável que o programa admita construções em que se varie de região a região da casca o número de lâminas, suas espessuras, e admitindo desde cascas de espessura suavemente variáveis, até espessuras que variem bruscamente (onde a distribuição de tensões locais sofreria perturbações detectáveis apenas em média pela presente análise);

c) Se implementará apenas um tipo de elemento, de forma que o tipo escolhido deve ser capaz de delinear bem os contornos geométricos do modelo.

Estes três tipos de considerações levam a que se procure elementos que sejam: planos; de funções de baixo grau; triangulares.

\- O ser plano refere-se a atender a considerações de simplicidade, não só na formulação, como também na implementação do programa.

- O ser de baixo grau deve-se às considerações b) acima, pois as variações geométricas de contorno e de espessuras das lâminas ao longo da superfície devem ser acompanhadas pelo aumento do número de elementos, tornando então desnecessário (e até mesmo indesejável) o aumento do grau dos polinômios para a obtenção da mesma exatidão das soluções desejadas;

- O elemento triangular cumpre com vantagem o requerimento c) acima, de definição de contornos.

Observadas as formulações publicadas nos últimos 3 anos escolheu-se para comportamento de flexão o elemento denominado DKT - DISCRETE-KIRCHHOFF-THEORY TRIANGULAR ELEMENT |2| - deduzido a partir de polinômios de 2º grau utilizando 6 nós, e modificado para 3 nós através da inclusão da teoria de Kirchhoff discretizada. Para a rigidez de membrana é usado o elemento CST - CONSTANT STRAIN TRIANGLE|13| em sua formulação convencional.

A escolha do elemento DKT deve-se, além das razões já espostas, a seu bom desempenho na análise não linear para materiais isotrópicos.

3.4 FORMULAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DKT.

O desenvolvimento mostrado a seguir é baseado no trabalho realizado por Batoz, Bathe e Ho|2|.

Para uma placa fina as deformações cisalhantes transversais e, consequentemente, a energia de deformação cisalhante, é desprezível se comparada à energia de flexão. A matriz de rigidez do elemento DKT para placas delgadas é baseada então na expressão:

$$U \simeq U_f = \frac{1}{2} \int_A \underset{\sim}{\bar{k}}^{*} \underset{\approx}{D} \underset{\sim}{\bar{k}} da \qquad (3.22)$$

onde A é a superfície média do elemento, $\underset{\sim}{D}$ é a matriz elástica de rigidez à flexão do material, dada pelas equações (2.49) ou (2.50); U e U_f são as energias de deformação e energia de deformação de flexão respectivamente; $\underset{\sim}{k}$ é o vetor de curvatura dado pela equação (2.31) para a teoria de Kirchhoff de placas. A teoria de placas com a inclusão da deformação cisalhante transversal é obtida usando as seguintes generalizações das hipóteses de Kirchhoff devido a Reissner e Mindlin;"seguimentos de reta da placa originalmente na normal à superfície média indeformada permanecem retas mas não necessariamente normais à superfície média deformada". Com esta consideração, as componentes de deslocamento de um ponto de coordenadas (x,y,z) na teoria linear de flexão torna-se, em lugar das equações (2.32) a (2.34), o seguinte:

$$
\begin{aligned}
u &= zb_x(x,y) \\
v &= zb_y(x,y) \\
w &= w(x,y)
\end{aligned}
\qquad (3.23)
$$

onde os b's são rotações da normal à superfície média indeformada, conforme a Figura 3.1.

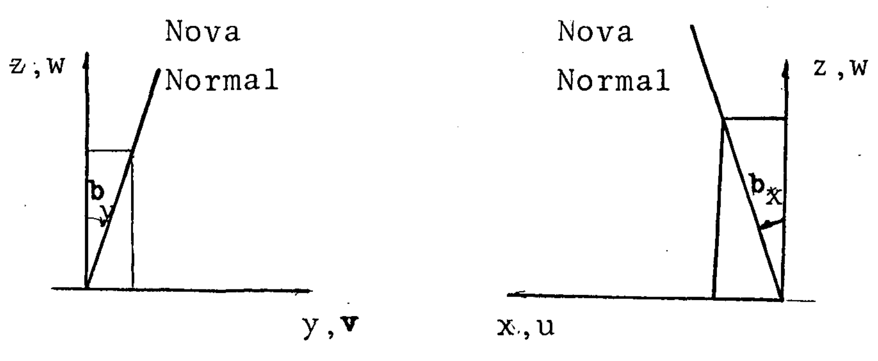


Fig. 3.1. Direções positivas $\mathbf{b}_x$ e $\mathbf{b}_y$

1. Das relações deformação-deslocamento (2.35) aplicadas a (3.23) obtém-se:

$$\underset{\sim}{e}_f = z\underset{\sim}{k} \qquad (3.24)$$

onde $\underset{\sim}{e}_f$ são os componentes de flexão na deformação, e:

$$\underset{\sim}{k} = \begin{bmatrix} b_{x,x} \\ b_{y,y} \\ b_{x,y} + b_{y,x} \end{bmatrix} \qquad (3.25)$$

São então definidas as funções de interpolação quadráticas b_x e b_y sobre o elemento, tal que:

$$b_x = \sum_{i=1}^{6} N_i b_{xi} \quad ; \quad b_y = \sum_{i=1}^{6} N_i b_{yi} \qquad (3.26)$$

onde: b_{xi} e b_{yi} são os valores nodais nos vértices e nos meios dos lados, (figura 3.2), e $N_i(L_2,L_3)$ são funções de interpolação dadas em termos de coordenadas naturais |13|:

$$\begin{aligned} N_1 &= 2(1-L_2 - L_3)(\tfrac{1}{2} - L_2 - L_3) & N_4 &= 4(L_2L_3) \\ N_2 &= L_2(2L_2 - 1) & N_5 &= 4L_3(1 - L_2 - L_3) \\ N_3 &= L_3(2L_3 - 1) & N_6 &= 4L_2(1 - L_2 - L_3) \end{aligned} \qquad (3.27)$$

e L_1, L_2, e L_3 são as coordenadas naturais. Os pontos de 1 a 6 e suas coordenadas naturais são mostrados na Figura 3.2.

2. As hipóteses de Kirchhoff são então impostas:

a) Nos nós 1,2, e 3 da Figura 3.3:

$$b_x = w_{,x}$$
$$b_y = w_{,y} \tag{3.28}$$

b) Nos nós intermediários 4, 5, e 6:

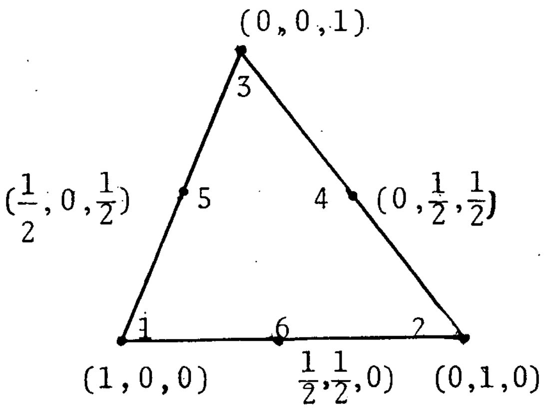
$$b_{s,k} + w_{,sk} = 0 \qquad p/\ k = 4,\ 5,\ 6 \tag{3.29}$$

onde 's' indica direção tangencial ao contorno, (anti-horário).

3. A variação de w ao longo do contorno é cúbica:

$$w_{,sk} = - \frac{3}{2l_{ij}} w_i - \frac{1}{4} w_{,si} + \frac{3}{2l_{ij}} w_j - \frac{1}{4} w_{,sj} \tag{3.30}$$

onde k representa o nó central do lado ij, l_{ij} é o comprimento do lado;



onde $\underset{\sim}{P}_i = (L_{1i}, L_{2i}, L_{3i})$
para os pontos i = 1,6

Fig. 3.2- **Coordenadas naturais dos 6 pontos.**

4. A variação de b_n ao longo do contorno é linear:

$$b_{nk} = \frac{1}{2} (b_{ni} + b_{nj}) \tag{3.31}$$

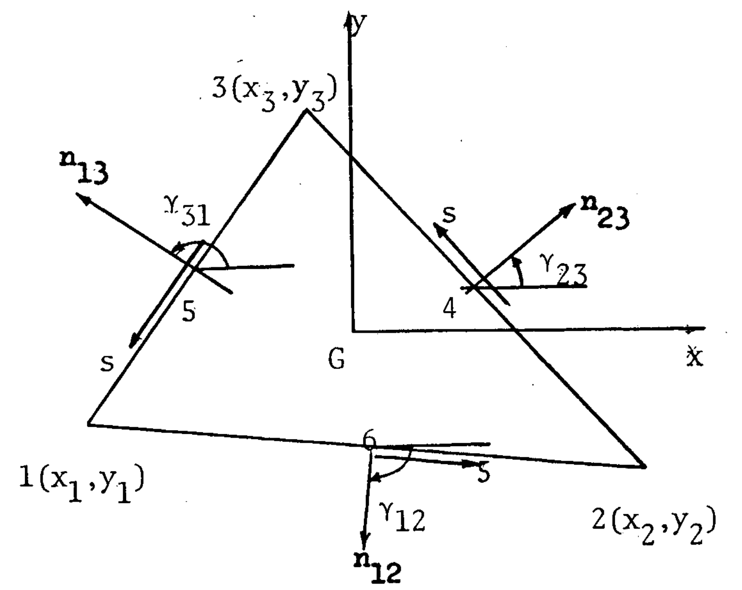
onde aos nós k = 4, 5, 6 correspondem os lados 2-3, 3-1, 1-2.

Note-se que as considerações acima e o desenvolvimento das equações (3.28) a (3.31) permitirão que se interpole e trabalhe não com b_x e b_y nos 6 nós, mas com w, θ_x, e θ_y nos 3 nós dos cantos.

Pode-se obter b_x e b_y em termos dos graus de liberdade nodais $\underset{\sim}{U}_f^*$ de flexão:

$$\underset{\sim}{U}_f^* = (w_1 , \theta_{x1} , \theta_{y1} , w_2 , \theta_{x2} , \theta_{y2} , w_3 , \theta_{x3} , \theta_{y3}), \qquad (3.32)$$

com o auxilio das seguintes relações para cada lado:



$$l_{ij} = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{1/2}$$

$$x_{ij} = x_i - x_j$$

$$y_{ij} = y_i - y_j$$

$$\gamma_{ij} = (\vec{x}, \vec{n}_{ij})$$

$$c_\kappa = \cos \gamma_{ij} = -y_{ij}/l_{ij}$$

$$s_\kappa = \operatorname{sen} \gamma_{ij} = x_{ij}/l_{ij}$$

$$x_\kappa = \frac{1}{2}(x_i + x_j)$$

$$y_\kappa = \frac{1}{2}(y_i + y_j)$$

Aos lados ij= 23,31,12 correspondem os nos κ= 4,5,6 respectivamente.

Fig. 3.3. Geometria do elemento D.K.T.

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ b_s \end{bmatrix}, \text{ e} \tag{3.33}$$

$$\begin{bmatrix} w_{,s} \\ w_{,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

onde c e s designam seno e coseno conforme Figura (3.3).

Usando as equações (3.27) até (3.31) obtém-se para b_x e b_y:

$$\begin{aligned} b_x &= \underset{\sim}{H}_x^*(L_2,L_3)\ \underset{\sim}{U}_f \\ b_y &= \underset{\sim}{H}_y^*(L_2,L_3)\ \underset{\sim}{U}_f \end{aligned} \tag{3.35}$$

onde $\underset{\sim}{H}_x$ e $\underset{\sim}{H}_y$ são vetores com 9 componentes de novas funções de interpola ção. As componentes são:

$$H_{x1} = 1,5(a_6N_6 - a_5N_5)$$

$$H_{x2} = b_5N_5 + b_6N_6$$

$$H_{x3} = N_1 - (c_5N_5 + c_6N_6)$$

$$H_{x4} = 1,5(a_4N_4 - a_6N_6) \tag{3.36a}$$

Cont.

$$H_{x5} = b_6N_6 + b_4N_4$$

$$H_{x6} = N_2 - c_6N_6 - c_4N_4$$

$$H_{x7} = 1{,}5(a_5N_5 - a_4N_4)$$

$$H_{x8} = b_4N_4 + c_5N_5$$

$$H_{x9} = N_3 - c_4N_4 - c_5N_5 \qquad (3.36a)$$

$$H_{y1} = 1{,}5(d_6N_6 - d_5N_5)$$

$$H_{y2} = -N_1 + e_5N_5 + e_6N_6$$

$$H_{y3} = -H_{x2}$$

$$H_{y4} = 1{,}5(d_4N_4 - d_6N_6)$$

$$H_{y5} = -N_2 + e_6N_6 + e_4N_4$$

$$H_{y6} = -H_{x5}$$

$$H_{y7} = 1{,}5(d_5N_5 - d_4N_4)$$

$$H_{y8} = -N_3 + e_4N_4 + e_5N_5$$

$$H_{y9} = -H_{x8} \qquad (3.36b)$$

e também:

$$a_k = -x_{ij}/l_{ij}^2$$

$$b_k = \frac{3}{4}x_{ij}y_{ij}/l_{ij}^2$$

$$c_k = (\frac{1}{4}x_{ij}^2 - \frac{1}{2}y_{ij}^2)/l_{ij}^2 \qquad (3.37)$$

Cont.

$$d_k = - y_{ij}/l_{ij}^2$$

$$e_k = (\frac{1}{4}y_{ij}^2 - \frac{1}{2}x_{ij}^2)/l_{ij}^2 \qquad (3.37)$$

onde k = 4,5,6 para os lados ij = 23, 31, 12 respectivamente.

Substituindo (3.35) em (3.25), isto é, derivando (3.36 a e b) conforme (3.25) obtém-se:

$$\underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{B}_f \underset{\sim}{U}_f \qquad (3.38)$$

onde $\underset{\sim}{B}_f$ é dado por:

$$\underset{\sim}{B}_f(L_2,L_3) = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31}\underset{\sim}{H}^*_{x,L_2} + y_{12}\underset{\sim}{H}^*_{x,L_3} \\ - x_{31}\underset{\sim}{H}^*_{y,L_2} - x_{12}\underset{\sim}{H}^*_{y,L_3} \\ - x_{31}\underset{\sim}{H}^*_{x,L_2} - x_{12}\underset{\sim}{H}^*_{x,L_3} + y_{31}\underset{\sim}{H}^*_{y,L_2} + y_{12}\underset{\sim}{H}^*_{y,L_3} \end{bmatrix} \qquad (3.39)$$

onde A é a área da superfície média do elemento.

As derivadas de $\underset{\sim}{H}_x$ e $\underset{\sim}{H}_y$ constantes na equação (3.39) são explicitadas no Apêndice A.

A matriz de rigidez do elemento DKT para flexão torna-se: |13|

$$\underset{\sim}{K}_{DKT} = 2A \int_A \underset{\sim}{B}_f^* \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B}_f dA \qquad (3.40)$$

3.5. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO C.S.T. PARA RIGIDEZ DE MEMBRANA

Foi seguida a formulação do elemento C.S.T. conforme é encontrado na literatura |14|. Especificamente usou-se a sequência mostrada por Ferrante |13|.

Pode-se partir da equação:

$$\underset{\sim}{u}_m = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underset{\approx}{\Phi}_m \underset{\sim}{U}_m = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \qquad (3.41)$$

onde $\underset{\sim}{B}_m$ é a matriz das funções interpoladoras referentes a membrana, u e v são os componentes nas direções x e y locais do vetor deslocamento $\underset{\sim}{u}_m$ da superfície média; u_1, v_1, etc. são os deslocamentos em x e y nos nós 1, 2, e 3; L_1, L_2 e L_3 são as coordenadas de área do ponto sobre o elemento. Note-se que é feita uma interpolação linear dos deslocamentos de membrana.

Pode-se fazer:

$$\underset{\approx}{\Phi}_m = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \qquad (3.42)$$

com:

$$\Phi = (L_1 \quad 0 \quad L_2 \quad 0 \quad L_3) \qquad (3.43)$$

e a eq. (3.41) torna-se:

$$\underset{\sim}{u}_m = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\phi} & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{\phi} \end{bmatrix} \underset{\sim}{U}_m = \underset{\sim}{\Phi}_m \underset{\sim}{U}_m \tag{3.44}$$

Usando as relações deformação-tensão:

$$\begin{Bmatrix} e_x^o \\ e_y^o \\ {}^o_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \underset{\sim}{\phi}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial \underset{\sim}{\phi}}{\partial y} \\ (\dfrac{\partial \underset{\sim}{\phi}}{\partial y}, 0) & + \quad (0, \dfrac{\partial \underset{\sim}{\phi}}{\partial x}) \end{bmatrix} \underset{\sim}{U}_m \tag{3.45}$$

Porém:

$$\frac{\partial \underset{\sim}{\phi}}{\partial x} = (\frac{\partial L_1}{\partial x} \quad 0 \quad \frac{\partial L_2}{\partial x} \quad 0 \quad \frac{\partial L_3}{\partial x}) = \frac{1}{2A}(y_{23} \quad 0 \quad y_{31} \quad 0 \quad y_{12})$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{\phi}}{\partial y} = (\frac{\partial L_1}{\partial y} \quad 0 \quad \frac{\partial L_2}{\partial y} \quad 0 \quad \frac{\partial L_3}{\partial y}) = \frac{1}{2A}(-x_{23} \quad 0 \quad -x_{31} \quad 0 \quad -x_{12}) \tag{3.46}$$

onde a segunda igualdade nas equações (3.46) deve-se à regra da cadeia a̲ plicada à derivação e A significa a área do elemento. Os x_{ij} e y_{ij} são os definidos na Fig. 3.3.

A eq. (3.45) torna-se:

$$\underset{\sim}{e}_m = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & -x_{23} & 0 & -x_{31} & 0 & -x_{12} \\ -x_{23} & y_{23} & -x_{31} & y_{31} & -x_{12} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

(3.47)

de onde:

$$\underset{\approx}{B}_m = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & -x_{23} & 0 & -x_{31} & 0 & -x_{12} \\ -x_{23} & y_{23} & -x_{31} & y_{31} & -x_{12} & y_{12} \end{bmatrix} \qquad (3.47a)$$

A matriz de rigidez de membrana do elemento 'e' é então:

$$\underset{\approx}{K}_m^e = 2A \int_A \underset{\approx}{B}^* \underset{\approx}{A} \underset{\approx}{B}_m \, dA \qquad (3.48)$$

onde $\underset{\approx}{B}_m$ é dado por (3.47) e $\underset{\approx}{A}$ é a matriz de rigidez elástica de extensão do material dado por (2.47).

A equação 3.48 é facilmente integravel analiticamente porém no presente trabalho não se utilizará de sua forma integrada por motivo a ser explioado no Capítulo 4.

3.6 MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ MEMBRANA-FLEXÃO.

A superposição dos efeitos de membrana e flexão na matriz de rigidez para materiais ortotrópicos é feita como segue.

O elemento triangular possui tres nós e seis graus de liberdade por nó como mostrado na fig. 3.4.

O comportamento de membrana descrito como $\underset{\sim}{K}_m$ é obtido pelo elemento CST na equação 3.48; o comportamento de flexão, descrito pelo elemento DKT, é obtido pela eq. 3.40.

Com vistas à mudança de coordenadas torna-se necessário introduzir a rigidez rotacional normal $\underset{\sim}{K}_{\theta_z}$ no sistema cartesiano local (Fig. 3.4), onde

$$\underset{\sim}{K}_{\theta_z} = \begin{bmatrix} K_{\theta_{z1}} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\theta_{z2}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\theta_{z3}} \end{bmatrix} \qquad (3.49)$$

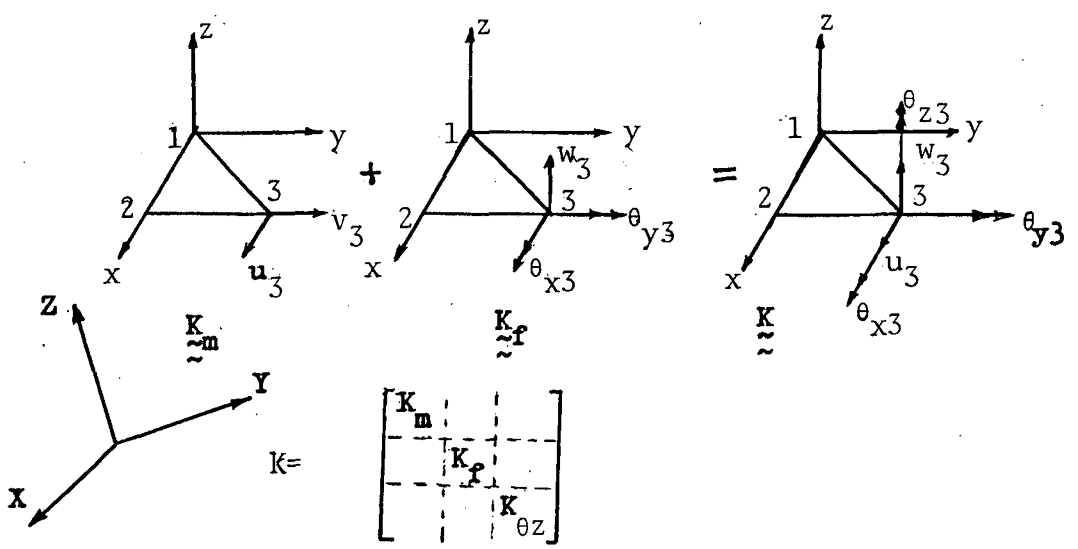


Fig. 3.4 Componentes da matriz de rigidez - O grau de liberdade θ_z é introduzido "artificiosamente", com vistas à transformação de coordenadas.

o que corresponde aos graus de liberdade:

$$\underset{\sim}{U}_{\theta_z} = \begin{bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

O vetor de graus de liberdade que corresponde à matriz $\underset{\sim}{K}$ completa, conforme a Figura 3.4 é:

$$\underset{\sim}{U}^* = (u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}, \theta_{z1}, \theta_{z2}, \theta_{z3}) \tag{3.51}$$

Com vistas a reduzir a largura de banda da matriz, e facilitar o processo de sobreposição pode-se rearranjar a matriz $\underset{\sim}{K}$ de forma a corresponder a:

$$\underset{\sim}{U}^* = (u_1, v_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1} u_2, v_2, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \theta_{z2}, u_3, v_3, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}, \theta_{z3}) \tag{3.52}$$

Os três termos de rigidez rotacional $\underset{\sim}{K}_{\theta_z}$ na equação (3.49) é arbitrariamente estabelecido como (1/10000) da menor componente da diagonal da matriz de rigidez à flexão.

CAPÍTULO 4. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DKT-ML

4.1. INTRODUÇÃO

É verificado que para laminados não simétricos o acoplamento membrana-flexão torna inviável a superposição simples das matrizes de rigidez de membrana e flexão para o elemento como é feito em cascas isotrópicas. A solução apresentada é sobrepor as matrizes $\underset{\sim}{B}_m$ e $\underset{\sim}{B}_f$ de funções de interpolação de deslocamentos dos elementos de membrana e flexão respectivamentes obtendo uma única matriz $\underset{\sim}{B}$ que é usada para a geração da matriz de rigidez.

Após a solução do sistema linear são obtidos dos deslocamentos nodais as deformações e tensões resultantes nos elementos escolhidos. Opcionalmente o programa permite que se obtenha as tensões e deformações em cada lâmina em cada nó da malha, nos sistemas global, local e principal de coordenados.

4.2. FORMULAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DKT-ML.

4.2.1. ESTABELECIMENTO DO PROBLEMA DO ACOPLAMENTO.

A energia de deformação é soma das energias de deformação de todos os elementos de volume, dadas pelos produtos da deformação específica pela tensão correspondente, levando-se em conta cada componente dos tensores tensão e deformação, isto é:

$$U = \frac{1}{2}\int_{V_0} (DEF)^*(TENS)dv \tag{4.1}$$

onde U é a energia de deformação, (DEF) é o tensor deformação específica com os componentes em forma de vetor, (TENS) é o vetor cujos componentes são as do tensor tensão.

Integrando a equação (4.1) sobre a espessura do laminado tem-se:

$$U_m = \frac{1}{2}\int_A \underset{\sim}{e}^{o,*}\underset{\sim}{N}dA \qquad (4.2)$$

$$U_f = \frac{1}{2}\int_A \underset{\sim}{\bar{k}}^{*}\underset{\sim}{M}dA \qquad (4.3)$$

onde U_m e U_f são energia de deformação de membrana e flexão respectivamente, e $\underset{\sim}{e}^{o}$, $\underset{\sim}{\bar{k}}$, $\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{M}$ são deformações e tensões resultantes de membrana e flexão. Se a relação dada pela equação (2.68):

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{N} \\ \\ \underset{\sim}{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\approx}{A} & \underset{\approx}{\bar{B}} \\ \\ \underset{\approx}{\bar{B}} & \underset{\approx}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{e}^{o} \\ \\ \underset{\sim}{\bar{k}} \end{bmatrix}$$

for levada a (4.2) e (4.3) obtém-se:

$$U_m = \frac{1}{2}\int_A \underset{\sim}{e}^{o,*}\underset{\approx}{A}\underset{\sim}{e}^{o}dA + \frac{1}{2}\int_A \underset{\sim}{e}^{o,*}\underset{\approx}{\bar{B}}\underset{\sim}{\bar{k}}dA \qquad (4.4)$$

$$U_f = \frac{1}{2}\int_A \underset{\sim}{\bar{k}}^{*}\underset{\approx}{B}\underset{\sim}{e}^{o}dA + \frac{1}{2}\int_A \underset{\sim}{\bar{k}}^{*}\underset{\approx}{D}\underset{\sim}{\bar{k}}dA \qquad (4.5)$$

Note-se que para cascas simétricas em relação à superfície média, (classe onde se situam os materiais isotrópicos), $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{0}$ o que anula o 2º termo da equação (4.4) e o 1º termo da equação (4.5). Caso sejam usadas as formulações de elementos finitos para deformações de membrana e flexão, como o CST e o DKT, numa casca não simétrica, onde $\underset{\sim}{B} \neq \underset{\sim}{0}$, se estará desprezando as energias representadas pelos referidos termos das equações (4.4) e (4.5).

Usando-se formulações distintas para membrana e flexão, os elementos CST e DKT, respectivamente, na próxima seção obter-se-á a solução do problema.

4.2.2 OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ.

A solução adotada para obter um programa que abordasse também os efeitos do acoplamento é a mostrada a seguir.

Considera-se as deformações médias de flexão e membrana $\underset{\sim}{\bar{k}}$ e $\underset{\sim}{e}^{o}$:

$$\underset{\sim}{\bar{k}} = \underset{\sim}{B}_f \underset{\sim}{U}_f = \begin{bmatrix} B_{f11} & B_{f12} & \cdot & \cdot & \cdot & B_{f19} \\ B_{f21} & B_{f22} & \cdot & \cdot & \cdot & B_{f29} \\ B_{f31} & B_{f32} & \cdot & \cdot & \cdot & B_{f39} \end{bmatrix}_{3x9} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix} \qquad (4.6)$$

$$\underset{\sim}{e}^{o} = \underset{\sim}{B}_m \underset{\sim}{U}_m = \begin{bmatrix} B_{m11} & B_{m12} & \cdot & \cdot & B_{m16} \\ B_{m21} & B_{m22} & \cdot & \cdot & B_{m26} \\ B_{m31} & B_{m32} & \cdot & \cdot & B_{m36} \end{bmatrix}_{3x6} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \qquad (4.7)$$

onde $\underset{\sim}{B}_f$ e $\underset{\sim}{B}_m$ são obtidas das equações 3.39 e 3.47.

Pode-se rearranjar $\underset{\sim}{B}_f$ e $\underset{\sim}{B}_m$ numa única matriz $\underset{\sim}{B}$ como na forma a seguir:

$$\begin{Bmatrix} e_x^o \\ e_y^o \\ \gamma_{xy} \\ \bar{\kappa}_x \\ \bar{\kappa}_y \\ \bar{\kappa}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{m11} & B_{m12} & 0 & 0 & 0 & B_{m13} & B_{m14} & 0 & 0 & 0 & B_{m15} & B_{m16} & 0 & 0 & 0 \\ B_{m21} & B_{m22} & 0 & 0 & 0 & B_{m23} & B_{m24} & 0 & 0 & 0 & B_{m25} & B_{m26} & 0 & 0 & 0 \\ B_{m31} & M_{m32} & 0 & 0 & 0 & B_{m33} & B_{m34} & 0 & 0 & 0 & B_{m35} & B_{m36} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{f11} & B_{f12} & B_{f13} & 0 & 0 & B_{f14} & B_{f15} & B_{f16} & 0 & 0 & B_{f17} & B_{f18} & B_{f19} \\ 0 & 0 & B_{f21} & B_{f22} & B_{f23} & 0 & 0 & B_{f24} & B_{f25} & B_{f26} & 0 & 0 & B_{f27} & B_{f28} & B_{f29} \\ 0 & 0 & B_{f31} & B_{f32} & B_{f33} & 0 & 0 & B_{f34} & B_{f35} & B_{f36} & 0 & 0 & B_{f37} & B_{f38} & B_{f39} \end{bmatrix} \underset{\sim}{U} \tag{4.8}$$

onde, os termos $\underset{\sim}{B}$ são obtidos das equações (4.6) e (4.7), e

$$\underset{\sim}{U}^* = (u_1, v_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}, u_2, v_2, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \theta_{z2},$$

$$u_3, v_3, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}, \theta_{z3}) \tag{4.8a}$$

A energia de deformação é então:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \begin{bmatrix} \underset{\sim}{e}^o \\ \\ \underset{\sim}{\bar{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{N} \\ \\ \underset{\sim}{M} \end{bmatrix} dA \tag{4.9}$$

usando a relação (4.3),

$$U = \frac{1}{2} \int_A \begin{bmatrix} \underset{\sim}{e}^o \\ \\ \underset{\sim}{\bar{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\approx}{A} & \underset{\approx}{\bar{B}} \\ \\ \underset{\approx}{\bar{B}} & \underset{\approx}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{e}^o \\ \\ \underset{\sim}{\bar{k}} \end{bmatrix} dA \tag{4.10}$$

e substituindo $\underset{\sim}{e}^o$ e $\underset{\sim}{\bar{k}}$ de (4.10) pela relação (4.8) tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \underset{\sim}{U}^* \left\{ \underset{\approx}{B}^* \begin{bmatrix} \underset{\approx}{A} & \underset{\approx}{\bar{B}} \\ \\ \underset{\approx}{\bar{B}} & \underset{\approx}{D} \end{bmatrix} \underset{\approx}{B} \right\} \underset{\sim}{U} dA \tag{4.11}$$

Efetuando a variação de U em relação a $\underset{\sim}{U}$ obtem-se então a matriz de rigidez $\underset{\approx}{K}$ do elemento DKT-ML, DISCRETE KIRCHHOFF TRIANGLE ELEMENT- PARA MATERIAIS LAMINADOS:

$$\underset{\approx}{K} = \frac{1}{2} \int_A \underset{\approx}{B}^* \underset{\approx}{C} \underset{\approx}{B} dA \tag{4.12}$$

Para a integração da equação (4.12) usa-se a integração gaussiana por quatro pontos internos como mostrada no Apêndice B |14|.

4. 3. VETORES DE FORÇAS NODAIS ADMITIDOS.

Foram escolhidos os carregamentos de forma a permitir o tratamento de uma quantidade de casos relativamente grande, sem no entanto chegar a um detalhamento mais completo dos carregamentos possíveis. Assim é admitido um carregamento normal linear, e deixam-se os casos de carregamento não normais, tangenciais, e não-lineares a serem pré-processados e transformados em cargas nodais pelo usuário; das forças de corpo admite-se apenas o peso; além dessas admitem-se carregamentos térmicos e devidos a cargas concentradas.

4. 3. 1. CARGA DISTRIBUÍDA NORMAL LINEAR.

Para cada elementos são lidos os valores nos 3 nós, que definem o carregamento linear, em unidades de força por área de superfície média. Desta forma são previstos os casos de carregamentos que sofram descontinuidades ao longo da superfície.

As coordenadas de um ponto $\underset{\sim}{P}$ são designadas (L_1, L_2, L_3) como na figura (3.2).

A distribuição da carga normal F sobre o elemento é:

$$F(L_1 , L_2 , L_3) = \underset{\sim}{S}^* \underset{\sim}{F} \tag{4.13}$$

onde:

$$\underset{\sim}{S}^* = (L_1 , L_2 , L_3) \tag{4.14a}$$

$$\underset{\sim}{F}^* = (F_1 \ , F_2 \ , F_3) \tag{4.14b}$$

onde: F_i, i= 1,2,3 são os valores da carga nos nós i.

A energia potencial devido a oarga é:

$$E = -\int_A w^* F dA \tag{4.15}$$

A distribuição do ddslocamento w (L_1,L_2,L_3) é cúbica, conforme visto no capítulo 3, porém para efeitos de carregamento se assumirá uma distribuição linear para w:

$$w(L_1 \ , L_2 \ , L_3) = \underset{\sim}{S}^* \underset{\sim}{w}$$

$$\text{e,} \quad \underset{\sim}{w}^* = (w_1 \ , w_2 \ , w_3) \tag{4.16}$$

De (4.13) e (4.14), (4.15) fica:

$$E = \int_A \underset{\sim}{w}^* \underset{\sim}{S} \underset{\sim}{S}^* \underset{\sim}{F} \ dA \tag{4.17}$$

onde A é a área.

Uma vez que $\underset{\sim}{w}^*$ e $\underset{\sim}{F}$ são constantes,

$$E = \underset{\sim}{w}^* \left[\int_A \underset{\sim}{S} \underset{\sim}{S}^* \ dA \right] \underset{\sim}{F} \tag{4.18}$$

O vetor de cargas normais $\underset{\sim}{P}_{cn}$ é:

$$\underset{\sim}{P}_{on} = \int_A \underset{\sim}{SS}^* \, dA \, \underset{\sim}{F} \tag{4.19}$$

Após integrado (4.19) obtém-se:

$$\underset{\sim}{P}^*_{cn} = A\left(\left(\frac{P_1}{6} + \frac{P_2}{12} + \frac{P_3}{12}\right), \left(\frac{P_1}{12} + \frac{P_2}{6} + \frac{P_3}{12}\right), \left(\frac{P_1}{12} + \frac{P_2}{12} + \frac{P_3}{6}\right)\right) \tag{4.20}$$

Deve-se notar que os três termos da equação (4.20) devem ser adicionados ao 3º, 9º e 15º termos respectivamente dos 18 termos do vetor força do elemento no sistema local de coordenadas, correspondente ao vetor de deslocamentos nodais definido na equação (4.8.a)

4.3.2. CARGA DEVIDA A PESO PRÓPRIO.

Para o calculo das forças nodais devidas ao peso próprio é considerado um único valor de peso específico ρ, média para toda a estrutura.

O vetor carga nodal devido a peso próprio $\underset{\sim}{P}_p$ é:

$$\underset{\sim}{P}_p = \rho \begin{bmatrix} AH/3 \\ AH/3 \\ AH/3 \end{bmatrix} = \frac{\rho AH}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Cada um dos três termos da equação (4.21) são adicionadas respectivamente ao 3º, 9º e 15º termos de forças nodais equivalentes no sistema global de coordenadas. O sistema global deve estar posicionado com o eixo +Z no sentido contrário ao da força peso.

A equação (4.21) foi obtida considerando-se uma distribuição constante da carga e deslocamento.

As integrações realizadas em (4.19) e (4.21) são obtidas por: |14|

$$\int_A L_1^r\, L_2^s . L_3^t \; dA = \frac{r!\; s!\; t!}{(r+s+t+2)!}\, 2A \tag{4.22}$$

4.3.3. CARGA DEVIDO A DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA.

São lidos para cada nó valores de temperatura T, na superfície média e diferença de temperatura externa/interna ΔT ($\Delta T > 0$ se T cresce no sentido + z). Admite-se portanto uma variação linear da temperatura na direção da espessura da casca, porém uma distribuição constante ao longo da espessura de cada lâmina.

A energia potencial devido à temperatura E_T é:

$$E_T = \frac{1}{2} \int_A \underset{\sim}{U}^T \; \underset{\approx}{B}^* \begin{bmatrix} \underset{\sim}{N}^T \\ \\ \underset{\sim}{M}^T \end{bmatrix} dA \tag{4.23}$$

onde $\underset{\sim}{N}^T, \underset{\sim}{M}^T$ são os 6 componentes de tensões médias num ponto do elemento. Desta forma o vetor de forças nodais equivalentes devidas a temperatura $\underset{\sim}{P}_T$ é:

$$\underset{\sim}{P}_T = \frac{1}{2} \int_A B^* \begin{bmatrix} \underset{\sim}{N}^T \\ \\ \underset{\sim}{M}^T \end{bmatrix} dA \tag{4.24}$$

onde $\underset{\approx}{B}$ é a matriz de funções de interpolação da equação (4.8).
Os valores para ($\underset{\sim}{N}^T, \underset{\sim}{M}^T$) são obtidos através das equações (2.66) e (2.67).

A integração da equação (4.24) exige que se conheça o integrando em quatro pontos internos ao elemento. São conhecidos e lidos pelo programa propriedades, fatores e cargas apena nos nós 1,2, e 3 (ver Apêndice B) e os fatores do integrado da equação (4.24) devem ser obtidos nos pontos internos. Foram interpolados linearmente as constantes elásticas de engenharia do material ($E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$), temperatura, espessura e cotas de lâminas, ângulos de fibras e coeficientes de dilatação térmica. Com os valores destas constantes nos pontos de interpolação foram calculadas (N^T, M^T) através das equações (2.66), (2.67), (2.61), (2.29) e (2.18). A matriz $\underset{\approx}{B}$ pode ser obtida das equações (4.8) simplesmente substituindo as coordenadas dos pontos 4 a 7, (ver apêndice B).

Os 18 termos da equação (4.24) necessitam ser transformados para o sistema global de coordenadas X-Y-Z.

4.3.4. CARGAS CONCENTRADAS.

Os valores de cargas concentradas que agem nos nós dos elementos são lidos segundo as direções X-Y-Z globais e adicionados diretamente ao vetor de forças nodais equivalentes após transformados para o sistema global de coordenadas e sobreposto.

4.4 DETERMINAÇÂO DAS TENSÕES RESULTANTES

Uma vez obtida a solução $\bar{\underset{\sim}{U}}^G$ do sistema linear de equações:

$$\bar{\underset{\approx}{K}}^G \; \bar{\underset{\sim}{U}}^G = \bar{\underset{\sim}{F}}^G \qquad (4.25)$$

podem ser separados os 18 termos de $\underset{\sim}{U}^G_e$ correspondentes ao elemento "e". Após transformado $\underset{\sim}{U}^G_e$ para o sistema local x-y-z de coordenadas definido no elemento "e", e, reduzindo-se para 15 termos obtém-se $\underset{\sim}{U}$. Substituindo $\underset{\sim}{U}$ na equação (4.8) e esta na equação (4.3) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{N} \\ \\ \underset{\sim}{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\approx}{A} & \bar{\underset{\approx}{B}} \\ \\ \bar{\underset{\approx}{B}} & \underset{\approx}{D} \end{bmatrix} \underset{\approx}{B} \, \underset{\sim}{U} \qquad (4.26)$$

Que são as tensões resultantes num ponto do elemento, dado que a matriz $\underset{\approx}{C}$ de propriedades e a matriz $\underset{\approx}{B}$ correspondam a este ponto.

4.5. DETERMINAÇÃO DAS DEFORMAÇÕES MÉDIAS E TENSOÊS NAS LÂMINAS

Uma vez calculados ($\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{M}$) da equação(4.26), as deformações resultantes no laminado podem ser obtidas por:

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{e}^{o} \\ \\ \underset{\sim}{\bar{k}} \end{bmatrix} = \underset{\approx}{C}^{-1} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{N} \\ \\ \underset{\sim}{M} \end{bmatrix} = \underset{\approx}{B}\, \underset{\sim}{U} \qquad (4.27)$$

onde $\underset{\sim}{U}$ é o mesmo da equação (4.26). Obtidas $\underset{\sim}{e}^{o}$ e $\underset{\sim}{k}$, através da equação (2.39) obtém-se as deformaçẽs específicas na lâmina k do laminado no sistema x-y-z local:

$$\underset{\sim}{e}_{k}^{x} = \begin{bmatrix} e_{x_k} \\ \\ e_{y_k} \\ \\ \gamma_{xy_k} \end{bmatrix}^{x} = \underset{\sim}{e}^{o} - z_k\, \underset{\sim}{\bar{k}} \qquad (4.28)$$

As tensões $\underset{\sim}{\sigma}_{k}^{x}$ são obtidas de (2.40):

$$\underset{\sim}{\sigma}_{k}^{x} = \underset{\approx}{\bar{Q}}_{k}\, \underset{\sim}{e}_{k}^{x} \qquad (4.29)$$

Uma vez que a posição das fibras da lâmina k define um sistema de coordenadas principais pelo ângulo θ, $\underset{\sim}{e}_k^x$ pode ser transformada para este sistema como $\underset{\sim}{e}_k^1$ e $\underset{\sim}{\sigma}_k^x$ pode ser também transformada para $\underset{\sim}{\sigma}_k^1$ ou obtido pela equação (2.10)

$$\underset{\sim}{\sigma}_k^1 = \underset{\approx}{Q}_k \underset{\sim}{e}_k^1 \tag{4.30}$$

4.6. DEFINIÇÃO DA LÂMINA VIRTUAL

A formulação utilizada permite que:

a) dentro de um elemento os nós tenham diferentes quantidades de lâminas entre si, e que estas tenham diferentes espessuras;

b) mesmo elementos contíguos tenham espessuras, número de lâminas e espessuras de lâminas diferentes.

Caso num elemento existam diferentes quantidades de lâminas entre nós, significa que uma determinada lâmina, a 2ª, por exemplo, ver Figura 4.1, existe no nó i e j, mas está interrompida em algum ponto da extensão do triângulo não atingindo portanto o nó k. O fato de que a integração de Gauss utilizada é realizada sobre 4 pontos internos ao elemento e que os valores das propriedades são lidos apenas nos 3 nós externos (i,j,k) levam à necessidade de interpolar linearmente estas pro -

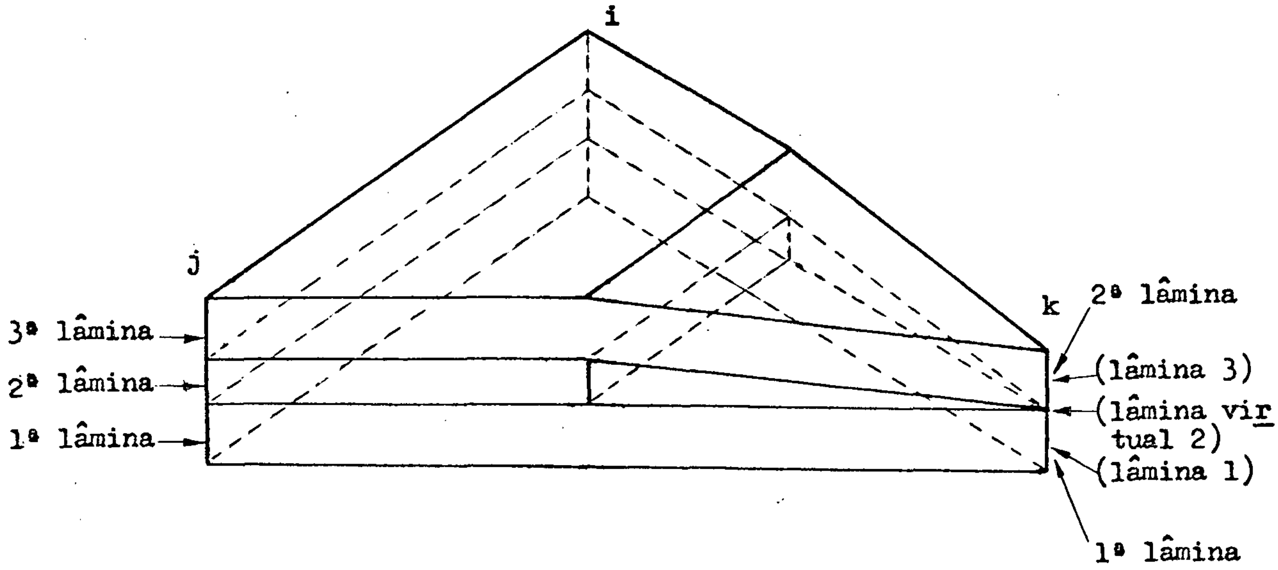


Figura 4.1 - Elemento com lâmina virtual.

priedades. No exemplo dado, a 2ª lâmina nos nós i e j seria interpolada com a 2ª lâmina do nó k, porém esta 2ª lâmina do nó k é uma outra lâmina física, com fibras em outra orientação, outras propriedades. Desta forma se for lido num elemento NE as propriedades de uma k-ésima lâmina nos nós i e j, que não atinge o nó k, deve-se ler neste nó propriedades de uma k-ésima lâmina virtual com propriedades E_1, E_2, ν_{12}, G_{12}, α_1, α_2, θ,e t nulas. Voltando ao exemplo, se interpolariam então as propriedades da 2ª lâmina dos nós i e j, com as propriedades nulas de uma 2ª lâmina virtual do nó k.

A lâmina virtual é então uma suposta lâmina com propriedades nulas, ocupando a posição k-ésima, se a k-ésima lâmina dos outros nós é interrompida.

CAPÍTULO 5 - RESULTADOS NUMÉRICOS

No presente capítulo são analisados os resultados do elemento DKT-ML aplicado a placas quadradas isotrópicas, a cilíndro isótropico, a placas quadradas laminadas e a cilindro laminado. Note-se que como o comportamento do elemento DKT-ML, quando aplicado a material isotrópico, tem comportamento idêntico ao DKT, utilizam-se os resultados, as comparações e a qualificação do elemento DKT |3| para placas isotrópicas, e utiliza-se o programa ora implementado para confirmar parte das soluções apresentadas. Uma vez que o elemento já esta qualificado para placas isotrópicas não julga-se necessário repetir-se todos os cálculos. O mesmo pode ser dito dos dados apresentados sobre o cilindro isotrópico pinçado. Os resultados mostrados nas análises de placa isotrópica sob gradiente linear de temperatura, na análise de um bimetral, na análise de uma placa anisotrópica e na análise de um cilindro ortotrópico são obtidos diretamente do programa e comparados com soluções, analíticas ou não, de outras fontes.

5.1 - COMPORTAMENTO DO ELEMENTO DKT-ML EM PLACAS ISOTRÓPICAS.

Foi analisada uma placa de lados 2a, sob as condições de contorno simplesmente apoiada e engastada, com carga concentrada no centro e distribuida uniformemente. Devido à simetria, apenas um quarto da placa foi modelada. Foram também consideradas duas orientações diferentes para a malha, conforme a Figura 5.1. São comparados os resultados com 6 outros elementos de flexão de 9 graus de liberdade obtidos na referência |2| . O trabalho de comparação de resultados que levou à elaboração das Figuras 5.2. a 5.11 foi apresentado na Referência |2|. Os resultados mostrados para o elemento DKT foram corroborados no presente trabalho para as malhas N=1, 2 e 4 e N=2 conforme Figura 5.1. As soluções teóricas foram obtidas da Referência |2|. Algumas observações sobre os resultados são dadas a seguir:

a) - Placa quadrada sujeita a carga concentrada:

Considerando primeiro o caso de carga concentrada, as Figuras 5.2 e 5.3 mostram que o DKT e o HSM (Hibrid Stress Model Element, com formulação na Referência |2|) são bastantes eficientes. Note-se que a malha B não é muito adequada ao modelar a placa engastada uma vez que se anulam os graus de liberdade dos cantos. A convergência do elemento DKT é monotônica;

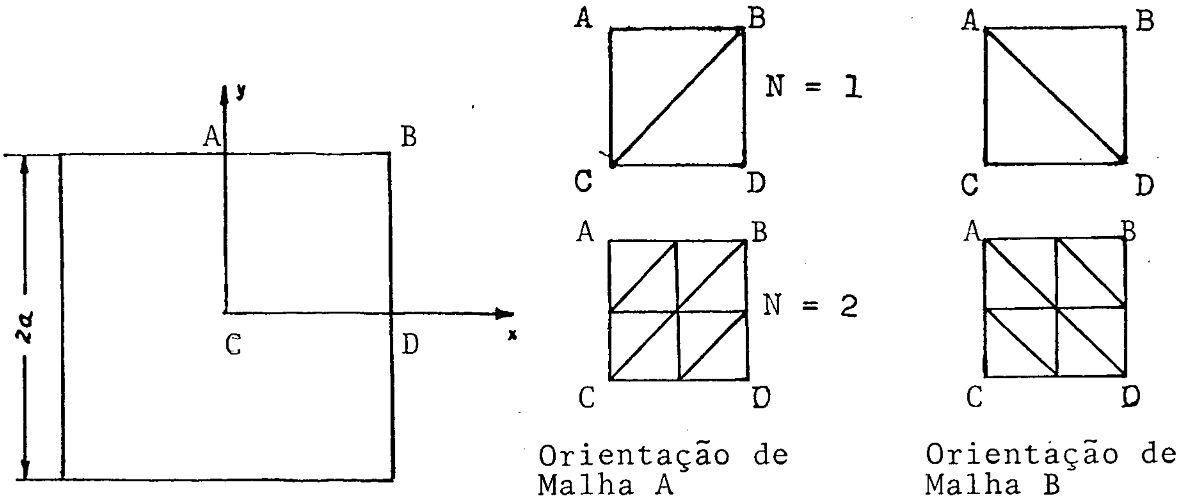
b) - Placa quadrada sujeita a carga distribuida:

No caso de carregamento distribuído uniforme, o elemento DKT mostra convergência monotônica em ambos os tipos de condições de contorno. A convergência no caso de placa engastada é menos rápida que para placa placa simplesmente apoiada. O elemento HSM não demonstra convergência monotônica.

c) - Tensões nos elementos HSM e DKT:

Em geral, as tensões obtidas com o elemento HSM são apenas ligeiramente melhores que as obtidas com o DKT.

A respeito da lenta convergência do elemento DKT para o problema de placa engastada sob carga distribuída, foi proposto na Referência |2| que uma possível forma de melhorar o comportamento seria a de empregar uma representação de carga consistente com um polinômio cú



Elemento	Simbolo	Malha	Carga Uniforme
DKT	○	A.B.	Inconsistente
HSM	□	A.B.	Inconsistente
BCIZ1	●	A	Inconsistente
BCIZ2	■	A	Inconsistente
HCT	▲	B	Inconsistente
A9	▼	A	Consistente
Strudel	*	A	Inconsistente

Fig. 5.1. Placa quadrada isotrópica e orientação de malha.

bico para w. O método foi implementado computacionalmente e os resultados comparados com a interpolação linear inicial. O polinômio utilizado é o mostrado na Referência |3|, um polinômio cúbico incompleto com 9 termos. em coordenadas naturais. Os resultados foram negativos pois revelaram um afastamento das curvas de convergência de deslocamento tanto para placa engastada quanto para simplesmente apoiada, para malhas irregulares. Para malhas regulares, a simetria em torno dos nós internos faz com que se anulem as forças de flexão quando da sobreposição, as condições de contorno anulam estas forças no nó central da placa, e nos lados engastados.

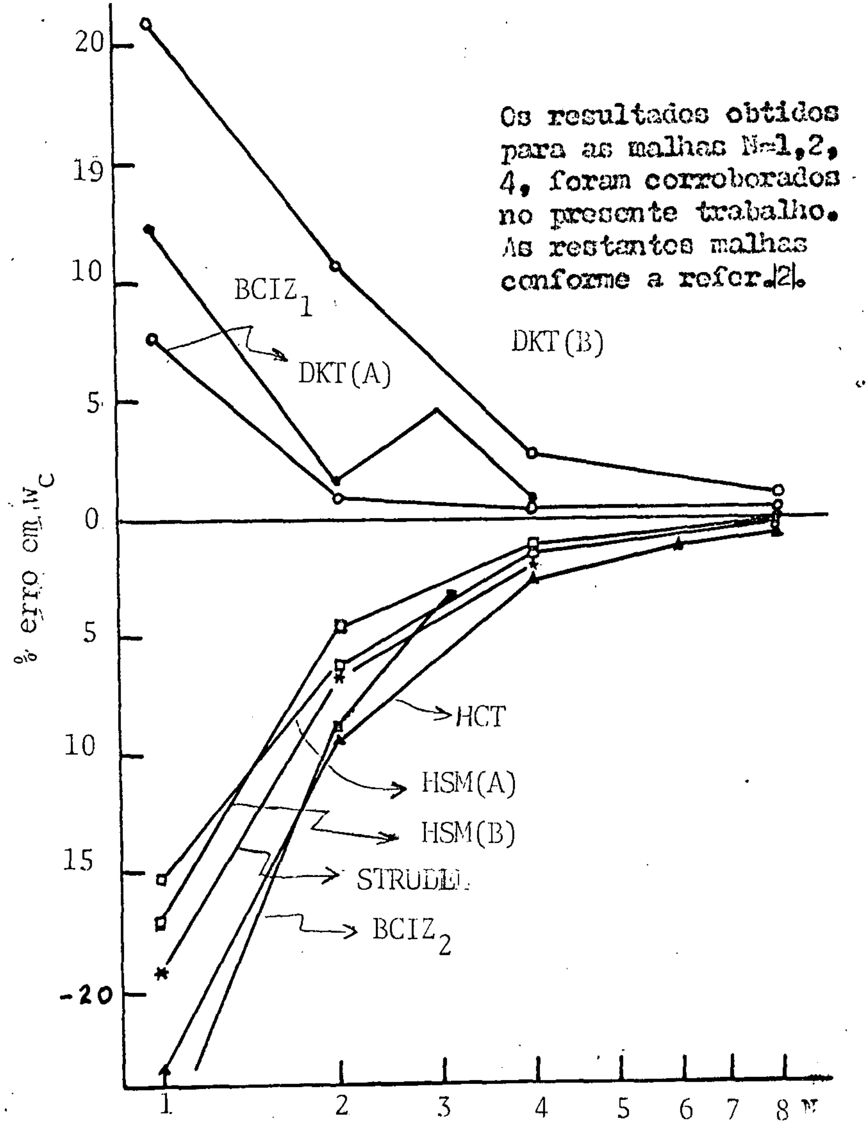


Fig. 5.2- Placa simplesmente apoiada sob carga concentrada: erro na deflexão no centro.

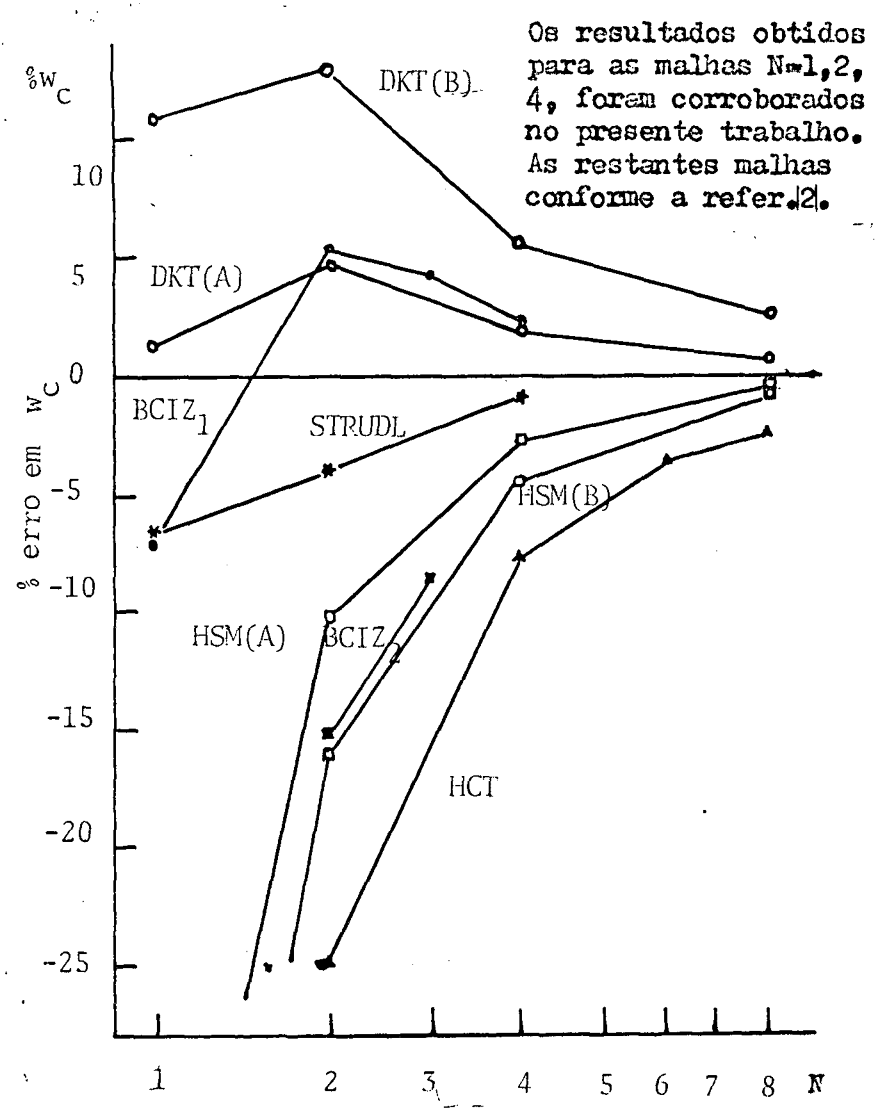


Fig. 5.3- Placa engastada sob carga concentrada: erro na deflexão no centro.

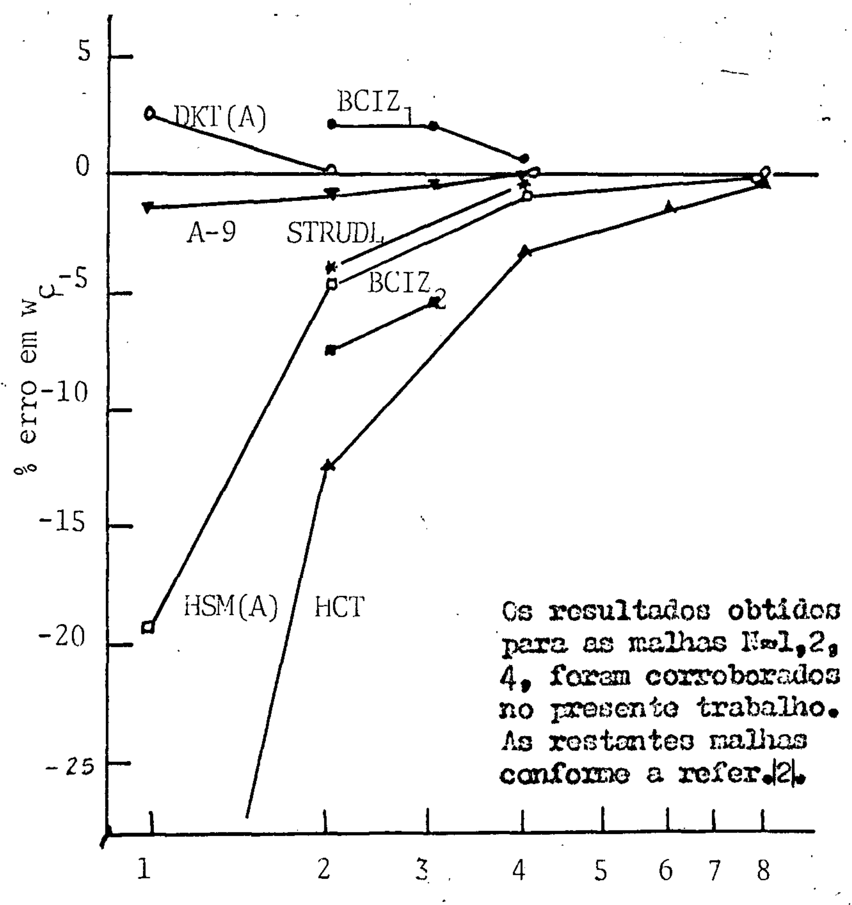


Fig.5.4.Placa simplesmente apoiada sob carga distri_ buída: erro na deflexão no centro.

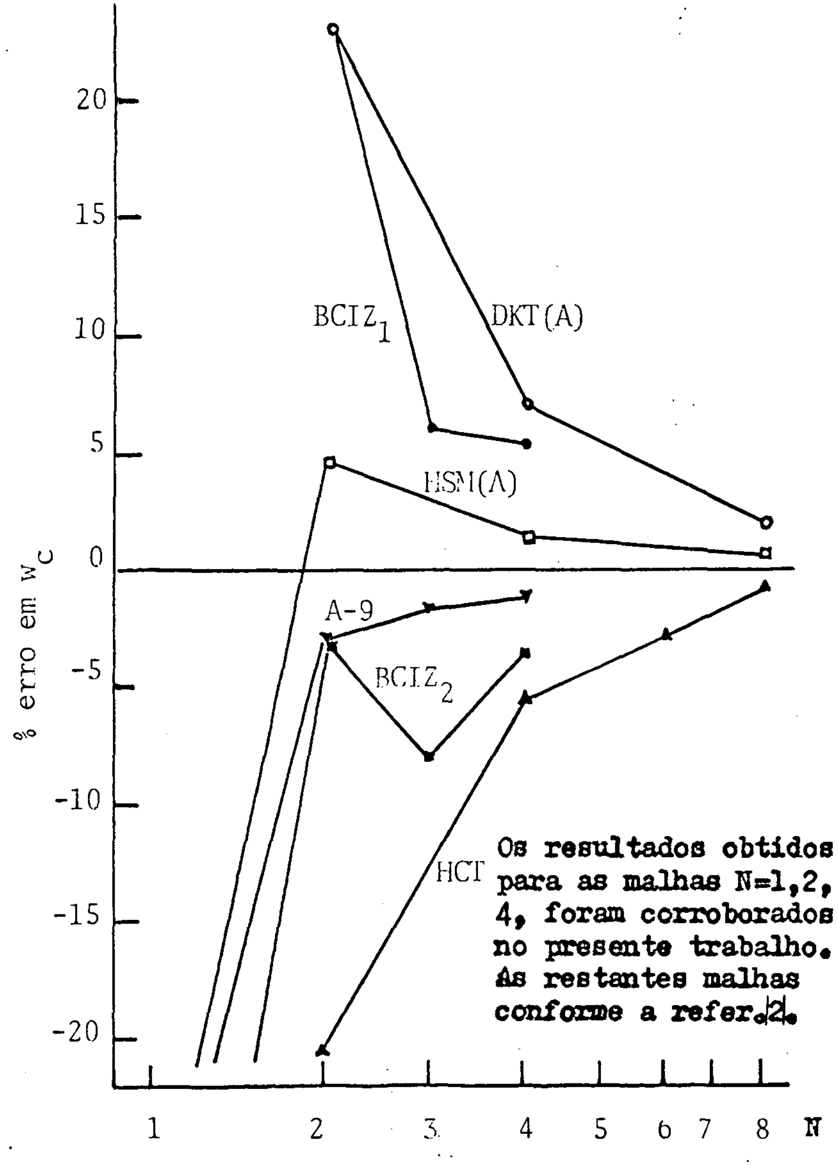


Fig. 5.5. Placa engastada sob carga distribuída: erro na deflexão no centro.

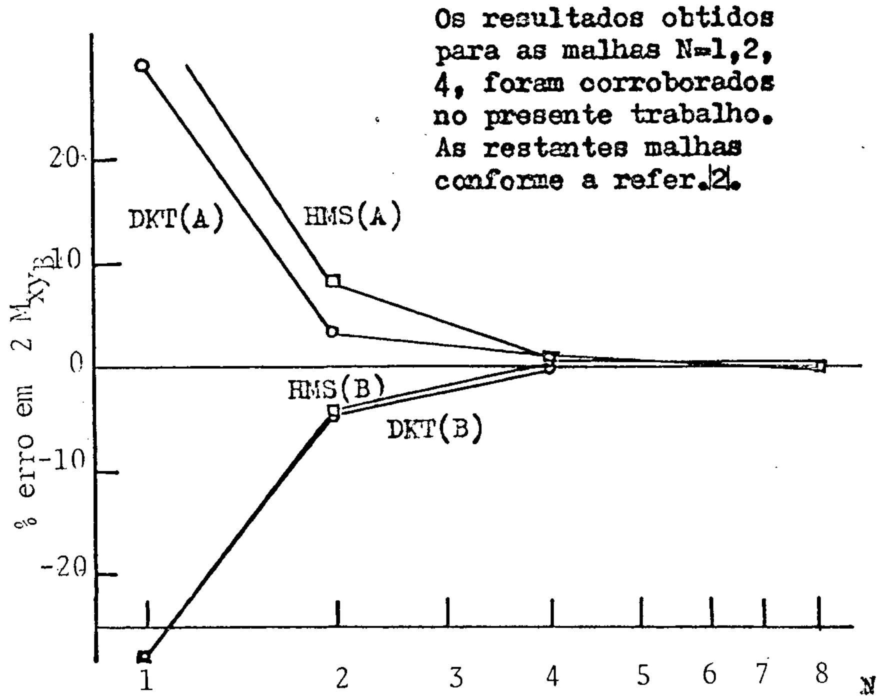


Fig. 5.6. Placa simplesmente apoiada sob carga concentrada: erro na reação do vértice.

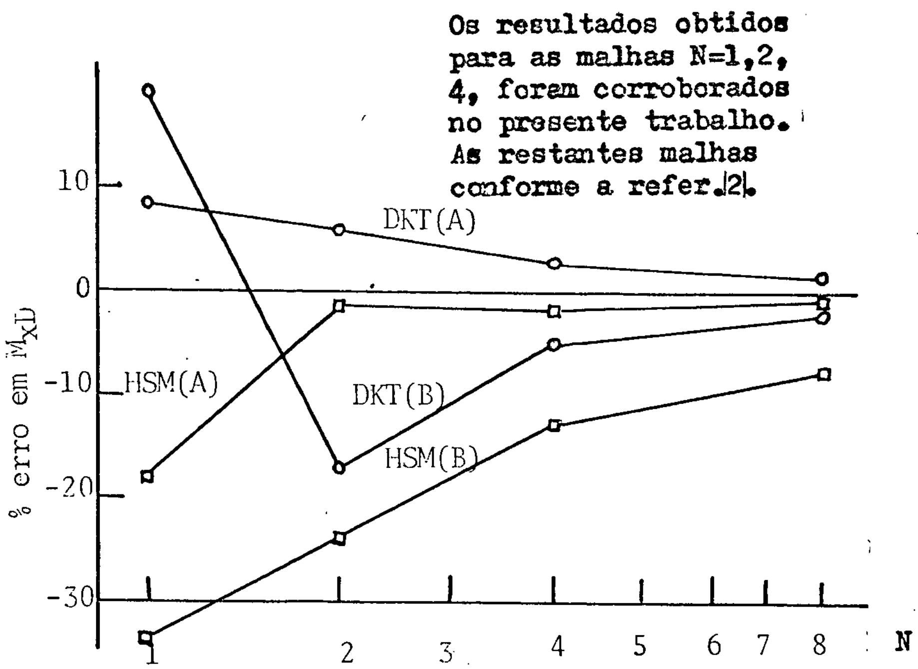


Fig. 5.7. Placa engastada sob carga concentrada: erro no momento fletor no centro do lado.

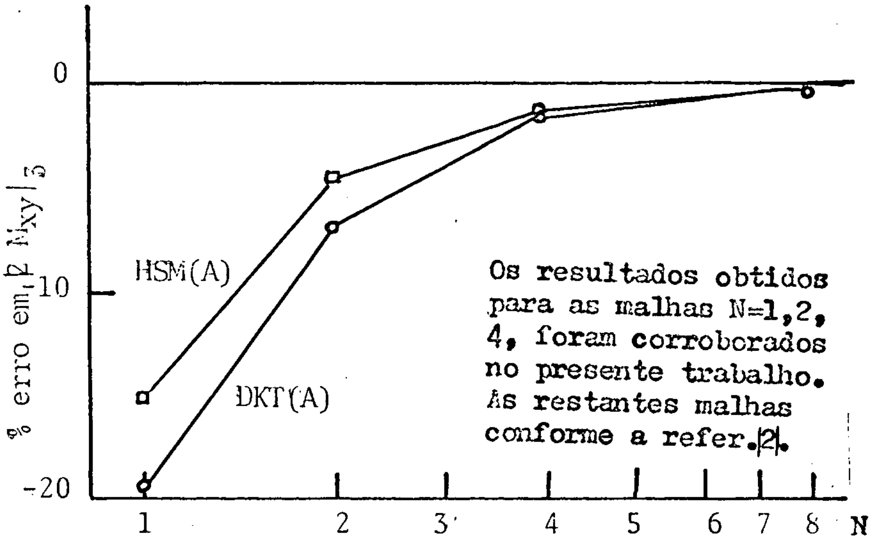


Fig. 5.8. Placa simplesmente apoiada sob carga distribuída: erro na reação do vértice.

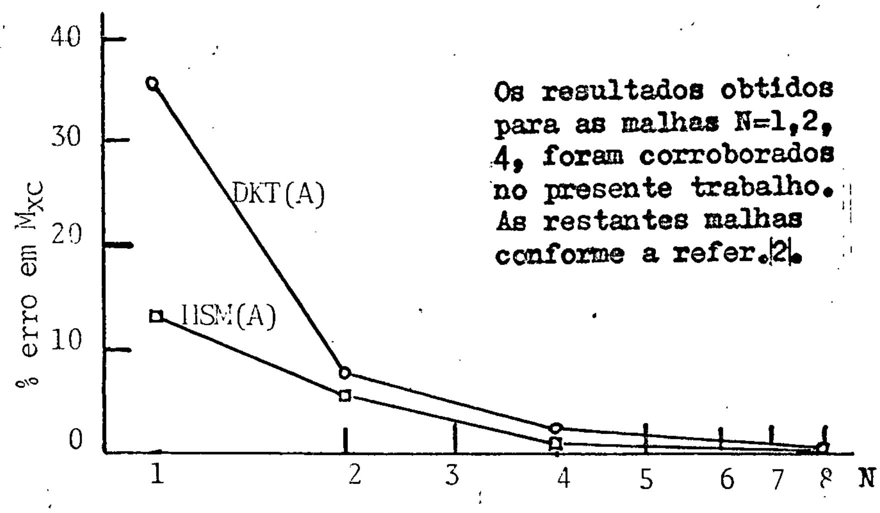


Fig. 5.9. Placa simplesmente apoiada sob carga distribuída: erro no momento fletor no centro.

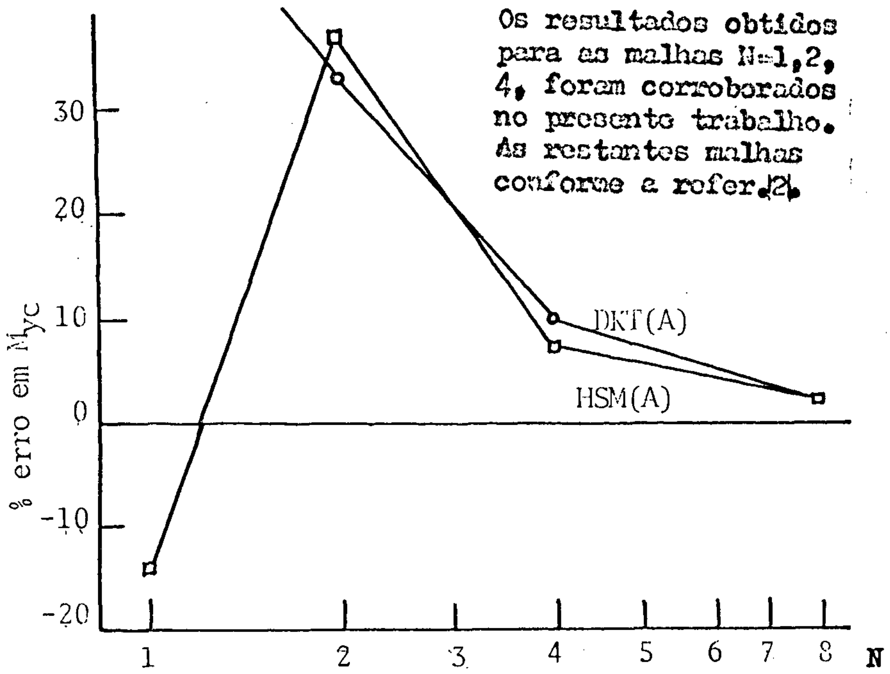


Fig. 5.10. Placa engastada sob carga distribuída. erro no momento fletor no centro.

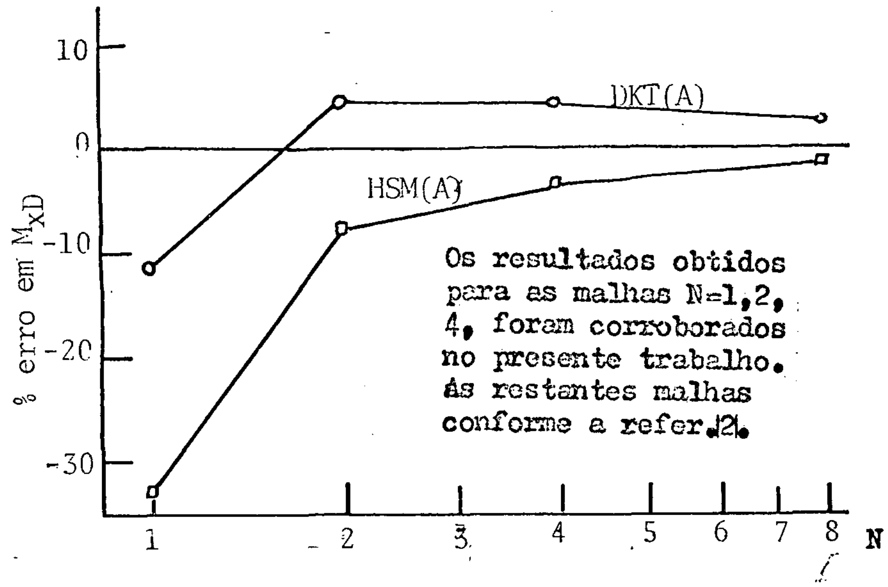


Fig. 5.11- Placas engastada sob carga distribuída: erro no momento fletor no centro do lado.

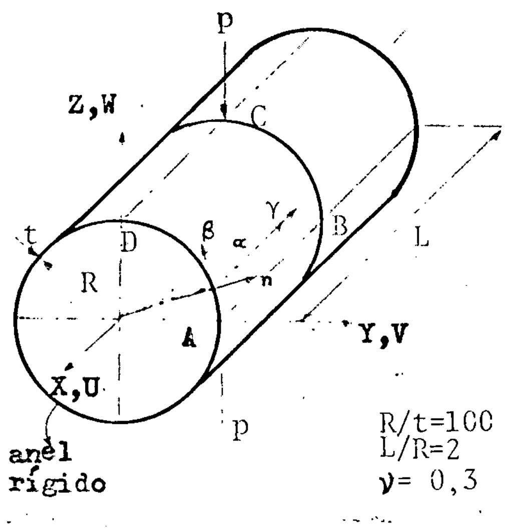
Desta forma, a utilidade do método seria apenas em malhas irregulares ou em carregamentos distríbuidos não uniformes, porem mesmo neste caso os resultados foram negativos. A causa da ineficácia no uso desta interpolação cúbica tem explicação dupla:

a) com a utilização de interpolação linear para w, o elemento apresenta uma convergência superior em deslocamentos devidos as características inerentes á formulação do elemento;

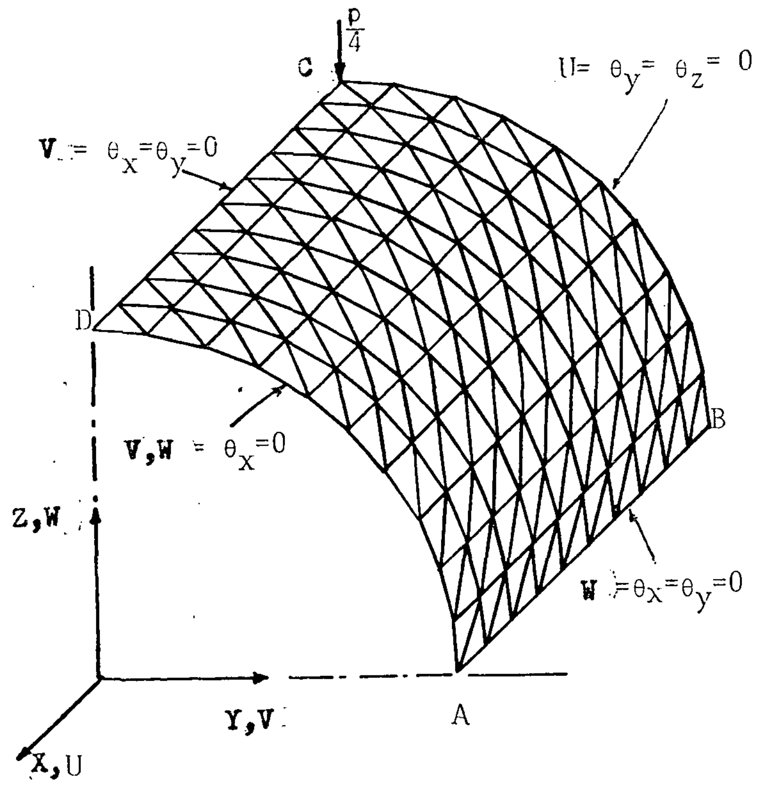
b) qualquer função que seja arbitrariamente escolhida para w não terá o mesmo comportamento que a ditribuição interna de w dada pela formulação do elemento. No caso da função testada resultou um vetor força com 3 termos de força na direção Z , que são iguais aos obtidos com a interpolação linear, e 6 termos de momentos fletores , que no caso tendem a adicionar novas parcelas de deslocamento w àquelas da interpolação linear, resultando numa solução w maior que a real.

5.2 - ANÁLISE DE UMA CASCA CILINDRICA ISOTRÓPICA PINÇADA

A estrutura analisada e a idealização de elementos finitos utilizada são mostradas na figura 5.13.Nas figuras 5.12 a 5.15 estão os deslocamentos e tensões resultantes calculados, obtidos na referência |3|, para malhas 4x4, 6x6, 8x8, 10x10 (como na figura 5.12) e 16x16. No presente trabalho foi solucionado o problema com a malha 10x10 e conferidos os resultados. Nota-se dos resultados que os valores convergem rapidamente conforme se refina a malha, e, tão importante quanto isto, mesmo uma malha 4x4 consegue dar uma idéia razoável do comportamento da peça.



a) Estrutura considerada.



b) Malha típica de elementos finitos (10x10) usada na análise.

Fig. 5.12. Analise de uma casca cilíndrica isotrópica pinçada: dados do modelo.

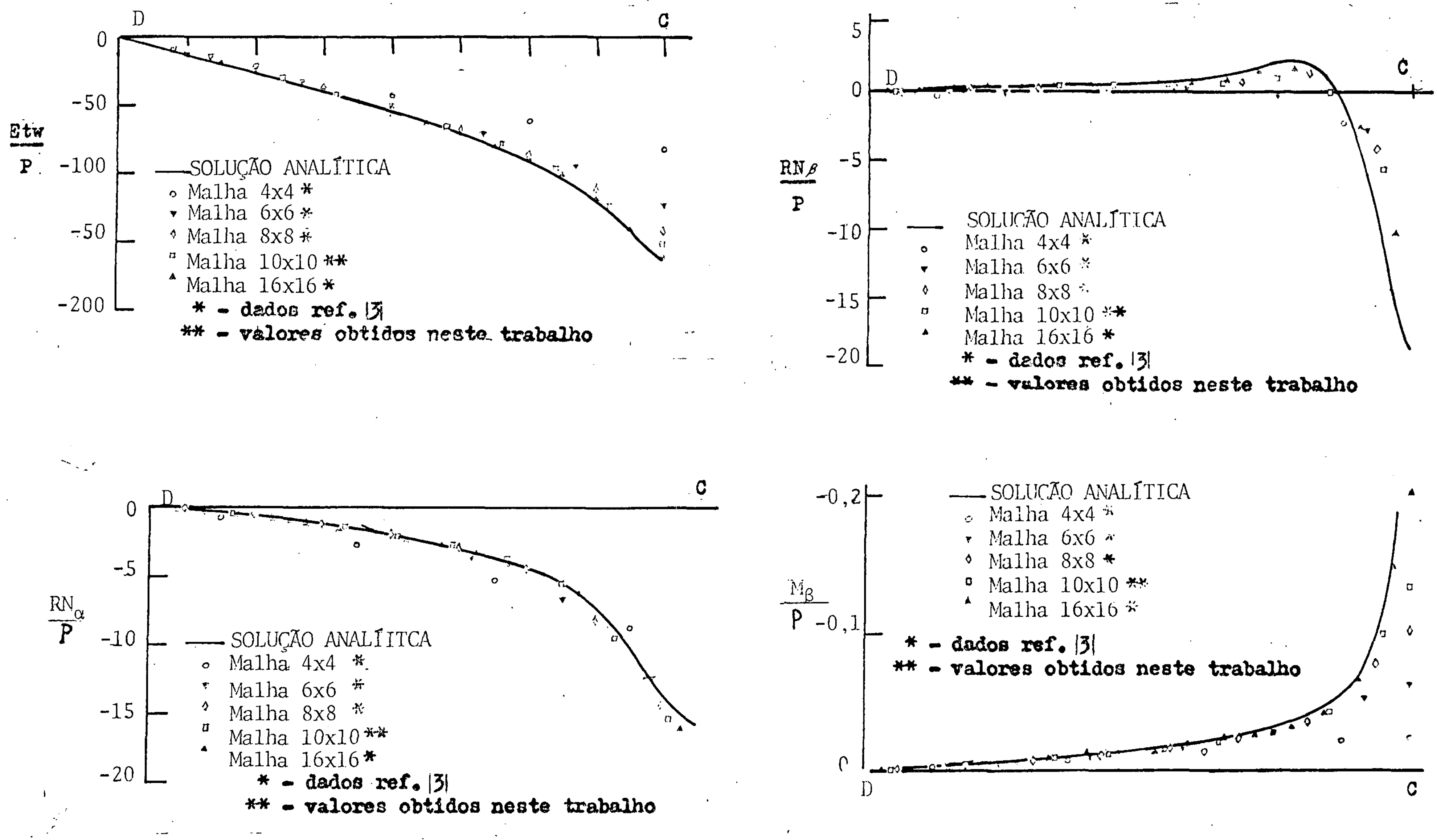


Fig. 5.13 - Deslocamentos previstos e distribuição de tensões ao longo da linha DC na Fig. 5.12.

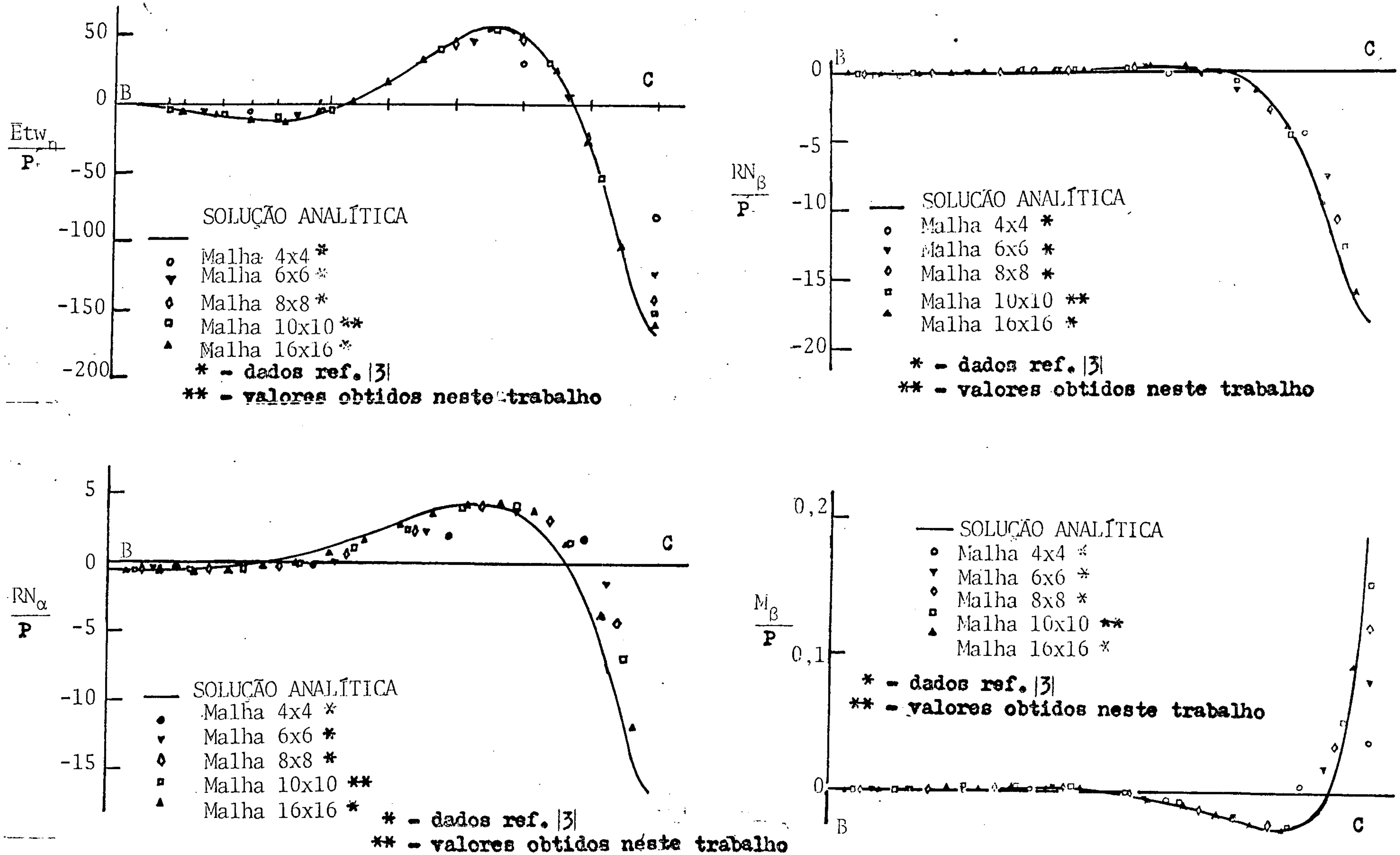
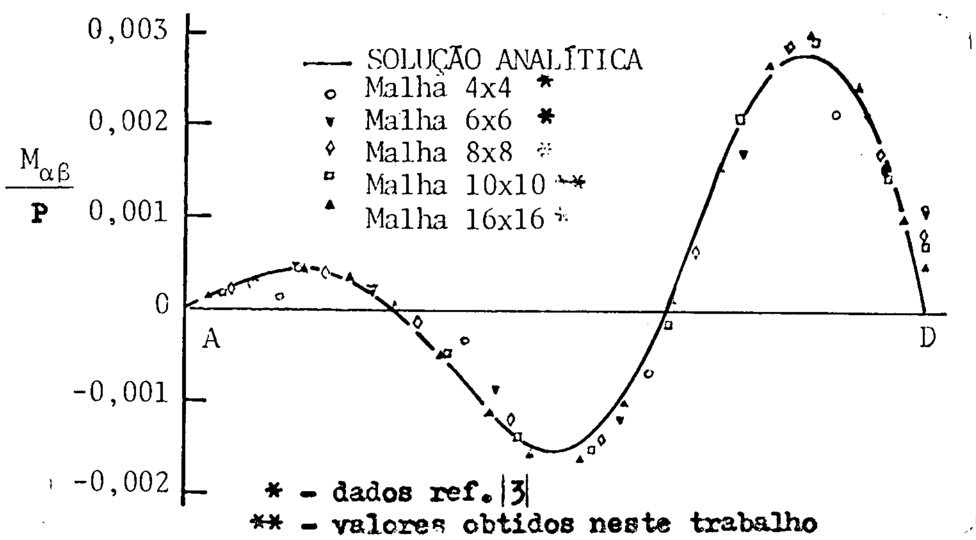


Fig. 5.14. Deslocamento previsto e distribuição de tensões ao longo da linha BC da casca da Fig. 5.12.



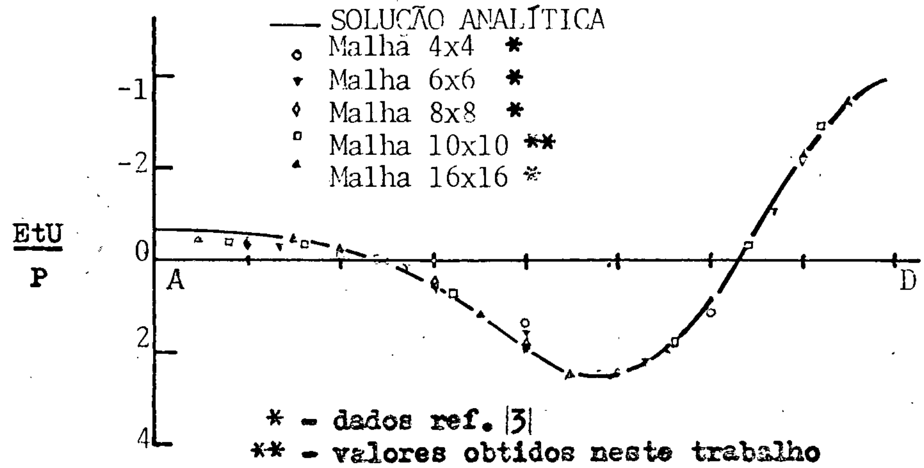


Fig. 5.15. Deslocamentos previstos e distribuição de tensões ao longo da linha AD na casca da Fig. 5.12.

5.3. ANÁLISE DE UMA PLACA ISOTRÓPICA SOB UM GRADIENTE LINEAR DE TEMPERATURA.

Foi modelada uma placa completa isotrópica com uma malha N=4, submetida a uma diferença ΔT de temperatura, ao longo de sua espessura de 20^0 C, e engastada em um de seus nós. Para ter bem representado o efeito de acoplamento extensão-flexão foi idealizada a placa com uma superposição de lâminas iguais e isotrópicas. Na Figura 5.16 tem-se as configurações finais para a placa quando se consideram 2, 4 e 8 lâminas. Comparando-se com a solução analítica em cada ponto nota-se boa convergência com o aumento do número de lâminas. Nota-se também o alto grau de simetria obtidos em todas as soluções. A solução teórica foi obtida da Referência|17|. Os dados do modelo analizados são:

$E_1 = E_2 = 0{,}106.10^{12}$ Pa

$\nu_{12} = 0{,}324$

$G_{12} = 0{,}401.10^{11}$ Pa

$\alpha_1 = 0{,}187.10^{-4}/^0$ C

$\alpha_2 = 0{,}187.10^{-4}/^0$ C

$\Delta T = 20^oC$

Placa : 32 elementos

Espessura = $1{,}2.\ 10^{-3}$ m

Lado = 32.10^{-2} m

Engaste no nó 1.

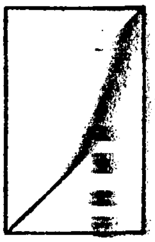
5.4. ANÁLISE DE UM BIMETAL

Foi analisado um bimetal composto por duas lâminas isotrópicas de igual espessura, uma de cobre outra de invar. O modelo idealizado de elementos finitos está representado na Figura 5.17a. Foram uti-

	3,1789 3,9734 4,1724 4,239	3,7400 3,6750 4,9087 4,987	4,6750 5,8437 6,1359 6,234	5,9839 7,4799 7,8540 7,979
	1.8700 2,3375 2,4544 1,493	2,4310 3,0387 3,1907 3,241	3,3660 4,2075 4,4179 4,489	4,6750 5,8437 6,1359 6,234
	0,9350 1,1687 1,2272 1,247	1,4960 1,8700 1,9635 1,995	2,4310 3,0387 3,1907 3,243	3,7400 4,6750 4,9087 4,987
	0,3740 0,4675 0,4909 0,499	0,9350 1,1687 1,2272 1,247	1,8700 2,3375 2,4544 1,493	3,1789 3,9737 4,1724 4,239
	0,1870 0,2337 0,2454 0,249	0,7480 0,9350 0,9817 0,997	1,6830 2,1037 2,2089 2,240	2,9919 3,7399 3,9270 3,989

[illegible]engastado.

LEGENDA - DEFLEXÃO NORMAL W.



Nó [illegible]cia

a - Solução obtida com o elemento DKT-ML, com 2 lâminas;

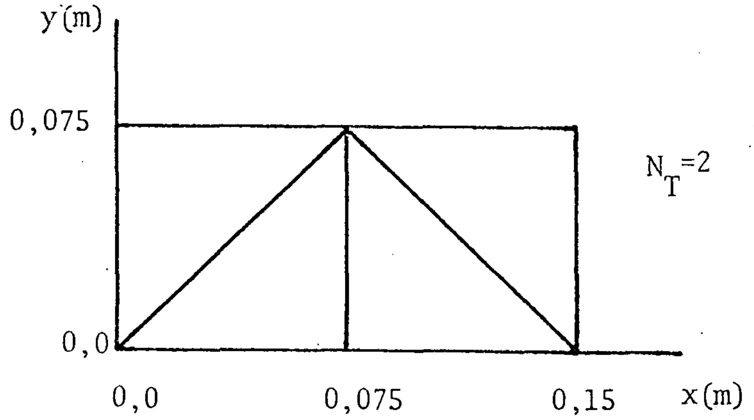
b - Ídem, 4 lâminas;

c - Ídem, 8 lâminas;

d - Solução analítica.

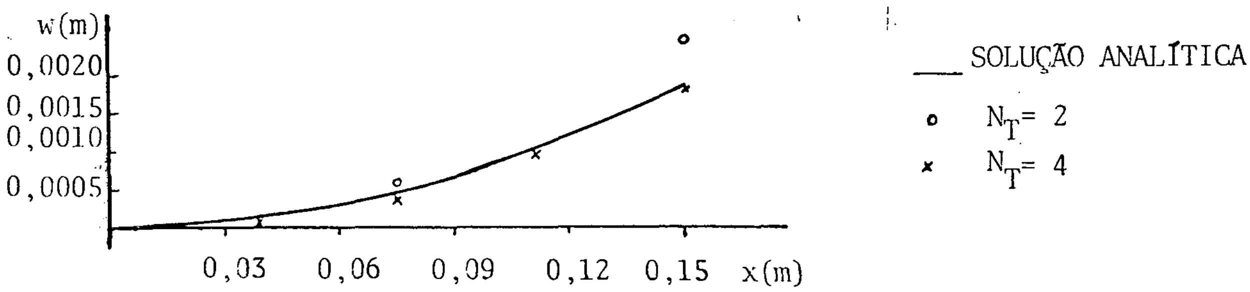
unidades de W em metro vezes 10^3.

Figu[illegible]lha utilizada e Deflexão de uma placa isotrópica sob um [illegible]radiente linear de temperatura.



a) Malha utilizada

Latão: $\alpha_1 = \alpha_2 = 18{,}7\ 10^{-6}/^oC$
$E_1 = E_2 = 106$ G Pa
$\nu_{12} = \nu_{21} = 0{,}324$
Invar= $\alpha_1 = \alpha_2 = 1{,}7.15^{-6}/^oC$
$E_1 = E_2 = 106$ G Pa
$\nu_{12} = \nu_{21} = 0{,}3$
Espessura total 2, 3mm.



b) Resultados obtidos.

Fig. 5.17- Análise de um bimetal.

lizadas as malhas $N_T = 2$ e 4. Na Figura 5.17a está mostrado a malha $N_T = 2$ e a malha $N_T = 4$ é semelhante, porém com 8 elementos, mantendo a simetria. Os resultados estão mostrados na Figura 5.17 b e mostram - se bastante bons. Como no problema do ítem 5.3, a convergência se acelelaria se fossem subdivididas cada lâmina em duas, ou quatro outras. A solução analítica foi obtida da Referência |17|.

5.5. ANÁLISE DE UMA PLACA ANISOTRÓPICA

Foi modelada uma placa regular antisimétrica com lâminas orientadas angularmente, simplesmente apoiada, com malhas N = 2 e N = 4 em placa completa. Os valores das propriedades usadas estão mostradas na Fig. 5.18 e são proporções típicas para compostos de grafite-epoxi de alto módulo de elasticidade. Os resultados estão mostrados e comparados à solução teórica (obtidas nas Referências|10| e |11|)na Fig. 5.18. Foram solucionados os problemas de placa com 2 e 6 lâminas, com as orientações (- θ / θ) e (- θ / θ / - θ / θ / - θ / θ) respectivamente.

Observando-se os resultados nota-se que:

a) a convergência do elemento não mais é monotônica tal como para materiais isotrópicos;

b) o erro varia com a malha utilizada, com o ângulo de orientação das lâminas e com o número de lâminas;

c) uma malha menos refinada como a N = 2 é mais sensível à variação no número de lâminas; numa malha mais refinada, a curva de erro versus θ é particularmente a mesma quando é variado o número de lâminas.

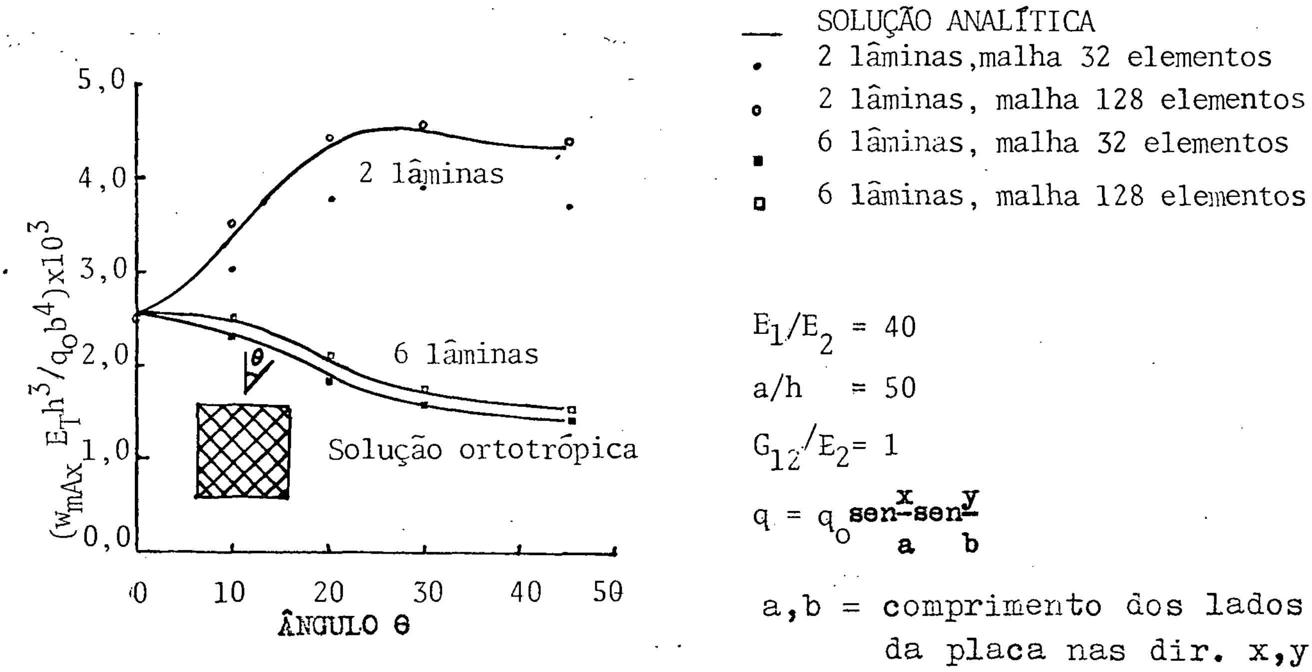


Fig. 5.18. Deflexão máxima de uma placa **anisotrópica quadrada** com lâminas obliquas sob carga normal senoidal.

d) quanto à variação do erro com θ, Figura 5.19, de forma geral, próximo de θ = 0 se situam os melhores resultados, entre 15^0 e 35^0 os piores próximo a 45^0 apresenta uma leve melhoria.

A explicação exata à observação a) seria bastante complexa porém pode-se supor que o comportamento seja devido a presença de ele - mento C.S.T. que possui uma convergência inferior. A maior parte do comportamento do elemento D.K.T. - ML neste exemplo, porém é relacionada ao tipo de apoio utilizado na placa, que restringe deslocamentos nor - mais nos bordos, mas permite deslocamentos tangênciais. Este tipo de apoio permite que o acoplamento membrana-flexão tenha liberdade de condicionar a configuração final da placa mais livremente: do ponto dos bordos correm tangencialmente, as linhas de derivada zero de w inclinam -se em relação as linhas de simetria da placa. Estes fatos explicam o pico atingido por w na Figura 18 para 2 lâminas, onde o acoplamento é máximo. Isto também impede que se modele apenas um quarto de placa em problemas deste tipo, uma vez que não se pode usar nos bordos internos

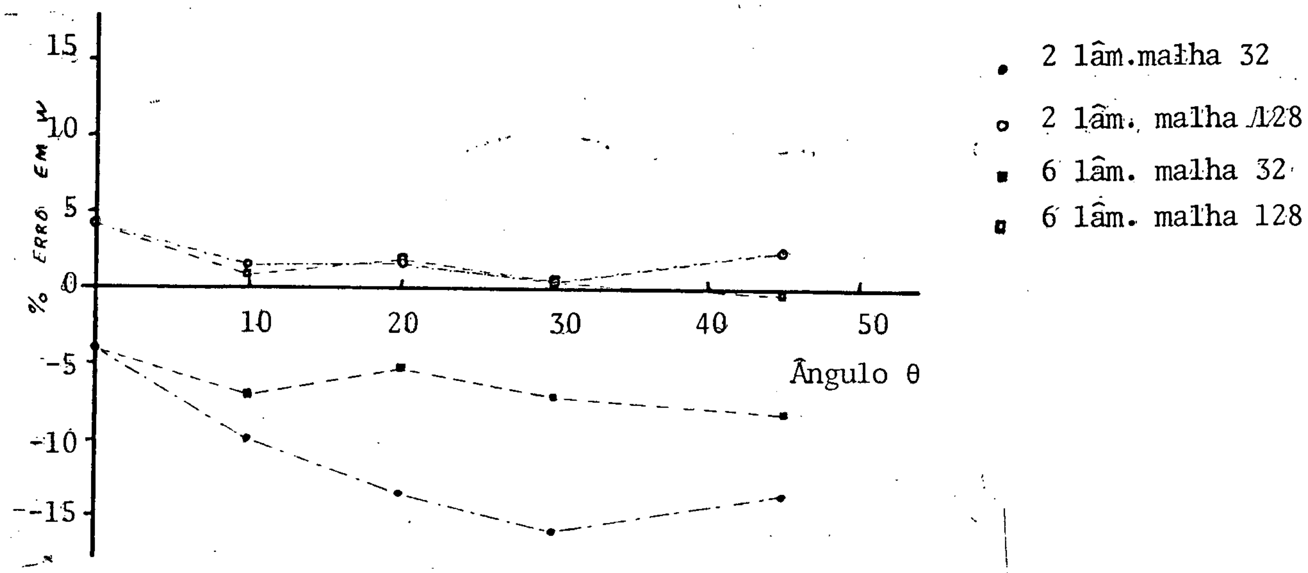
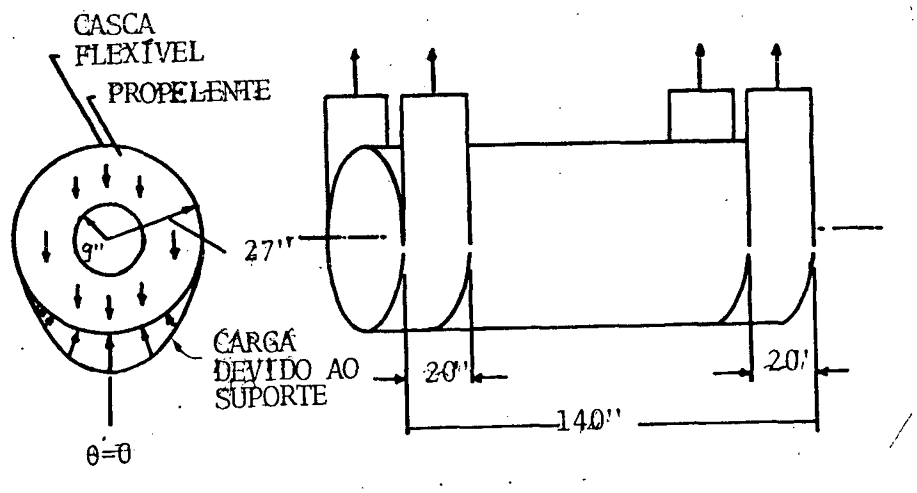


Fig. 5.19. Erro na deflexão no centro da placa da Fig. 5.18.

a condição de contorno de $w_{,n}$ nula. Para uma malha N = 2, o fato de que os resultados são sensilvelmente melhores para 6 lâminas que para 2 é compreensível uma vez para 2 lâminas o acoplamento é maior e é exigido um melhor desempenho do elemento de membrana, o C.S.T. Este elemento porém tem o campo de deformação linear e com uma malha pequena como N=2 o modelo se torna mais rígido aumentando o erro de 6 para 2 lâminas. Com o uso de uma malha mais refinada a limitação do elemento C.S.T. perde importância e o comportamento do elemento D.K.T- ML passa a se tornar mais e mais indiferente ao número de lâminas.

5.6 ANÁLISE DE UMA CASCA CILÍNDRICA ORTOTRÓPICA

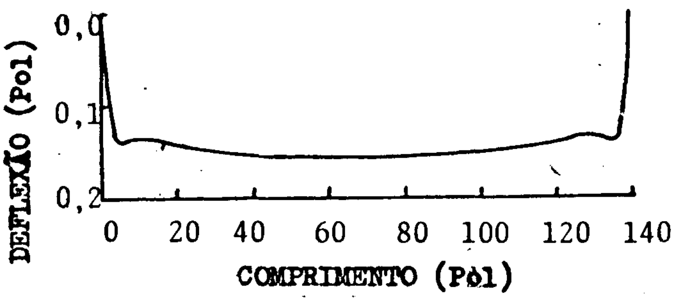
O problema resolvido foi o de uma casca cilíndrica ortotrópica de duas lâminas fibradas, ocupada com combustível sólido numa posi



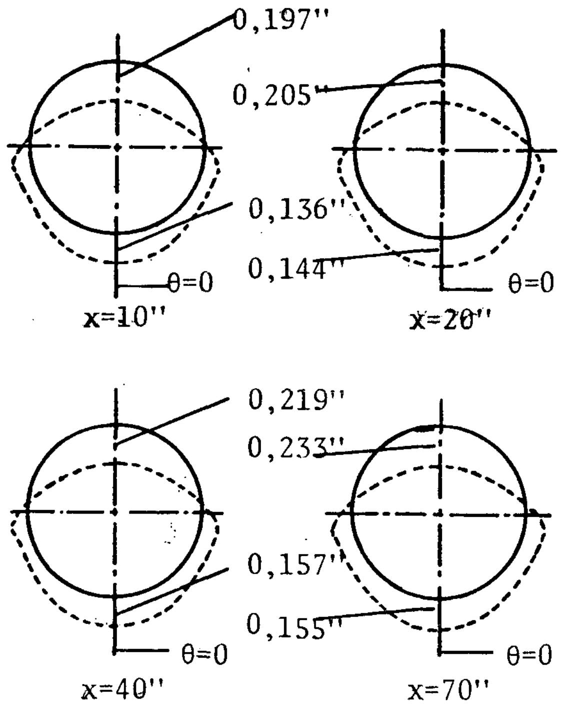
Lâmina 1: $E_1 = 5{,}26.10^6$Psi
$E_2 = 2{,}75.10^6$Psi
$\nu_{12} = 0{,}155$
$G_{12} = 1{,}81.10^6$Psi
$\theta = 0^o$
Espessura= 0,221"

Lâmina 2: $E_1 = 2{,}75.10^6$Psi
$E_2 = 2{,}75.10^6$Psi
$\nu_{12} = 0{,}100$
$G_{12} = 1{,}25.10^6$Psi
$\theta = 90^o$
Espessura= 0,118"

Fig. 5.20. Casca cilíndrica preenchida com propolente sólido e suportado por duas faixas.



a) Perfil de deslocamento da casca mostrada na na Fig. 5.20.



b) Vistas dos deslocamentos das secções circulares da carga da Fig. 5.20.

Fig. 5.21. Soluções de deslocamento na casca cilíndrica ortotrópica.

ção horizontal e suportada por duas tiras como mostrado na Figura 5.20.

A distribuição da carga sobre o suporte é tomada como sendo q_o cos θ, agindo normal à superfície do cilindro, como na Figura 5.20. O cilindro é composto por duas lâminas ortotrópicas cruzadas, com as características mostradas na Figura 5.20.

Foi modelado apenas um quarto do cilindro devido à simetria do problema e utilizado 320 elementos. Os resultados foram comparados aos obtidos na Referência |18| e estão nas Figuras 5.21 a e b. A solução referência faz uso de uma modelagem com 90 elementos tronco-cônicos retos para cascas de revolução. Os resultados são bons.

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA DESENVOLVIMENTOS FUTUROS NA ÁREA DE MATERIAIS COMPOSTOS.

A solução de problemas que envolvam placas de contornos quaisquer e cascas de geometria, carregamento e condições de contornos irregulares, além de material não-isotrópico e não-homogêneo, devido às limitações das abordagens analíticas, devem recair naturalmente nas soluções numéricas, particularmente nas técnicas de elementos finitos.

Os resultados apresentados correspondem com vantagens a tudo o que de início se pode esperar de um elemento triangular plano cúbico, em deslocamentos transversais, principalmente quando aplicado a um tipo de material composto laminado. O programa computacional, além de calcular matriz de rigidez de casca delgada de material composto, permite um grupo de facilidades, proporcionadas pela variação das propriedades e características de lâminas, bastante úteis na análise e no projeto de estruturas deste tipo. Conforme os resultados mostrados e analisados no Capítulo 5 o programa computacional utilizando o elemento DKT-ML está pronto e disponível ao uso conforme suas qualificações e restrições já apresentadas.

Um sistema conjunto de programas para cálculo estrutural de materiais compostos deverá ser composto também por métodos alternativos de vários tipos conforme suas vantagens, visando à exatidão, rapidez e custo tais como: a) programas computacionais ou simples ábacos e tabelas; b) programas que utilizem além de métodos numéricos, soluções por série,ou analítica, quando disponíveis, dada a simplicidade, exatidão e rapidez deste tipo de solução.

ANÁLISE DE TENSÕES

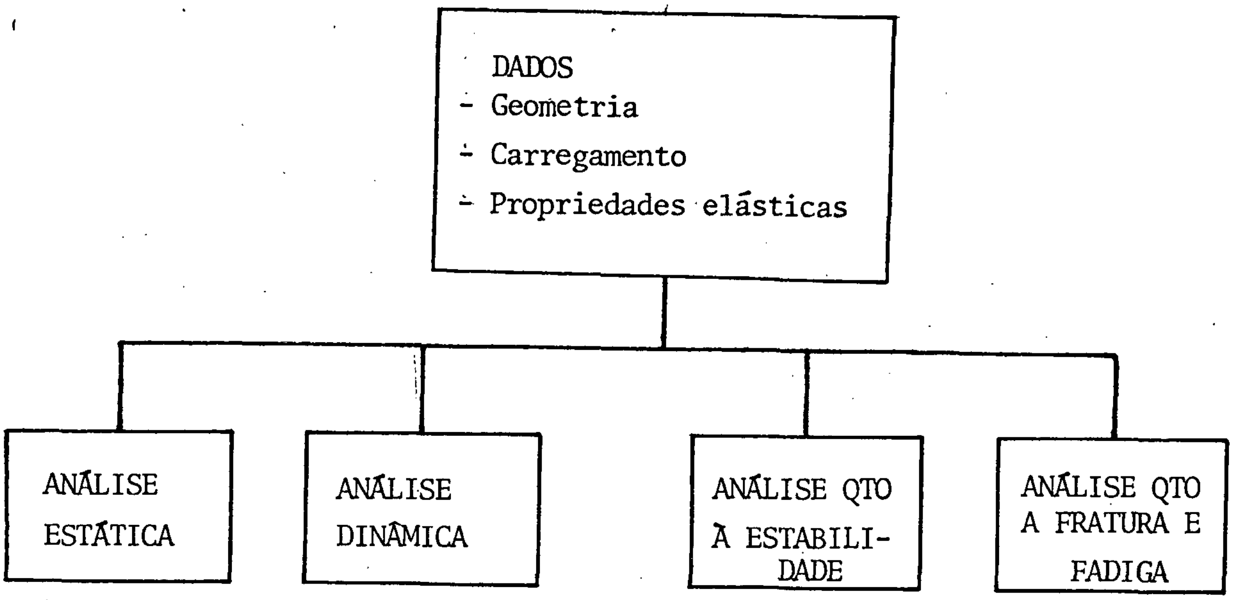


FIGURA 6.1- Esquema simplificado da análise de tensões.

As possíveis áreas de trabalho no campo de materiais compostos podem ser melhor localizadas pela análise de esquemas, simplificados das atividades de projeto, análise de tensões em estruturas e testes em materiais compostos.

Considera-se inicialmente como sendo análise a determinação das cargas máximas que pode suportar uma dada estrutura, e projeto a determinação das características necessárias ao laminado para que suporte determinado carregamento.

Inicialmente observa-se na Figura 6.1 um diagrama de blocos - dos fatores que devem ser considerados na análise de tensões de uma estrutura de responsabilidade. A análise de materiais compostos de forma analítica restringe-se atualmente a placas retangulares, cilindros de seção circular com reforços e problemas axi-simétricos.

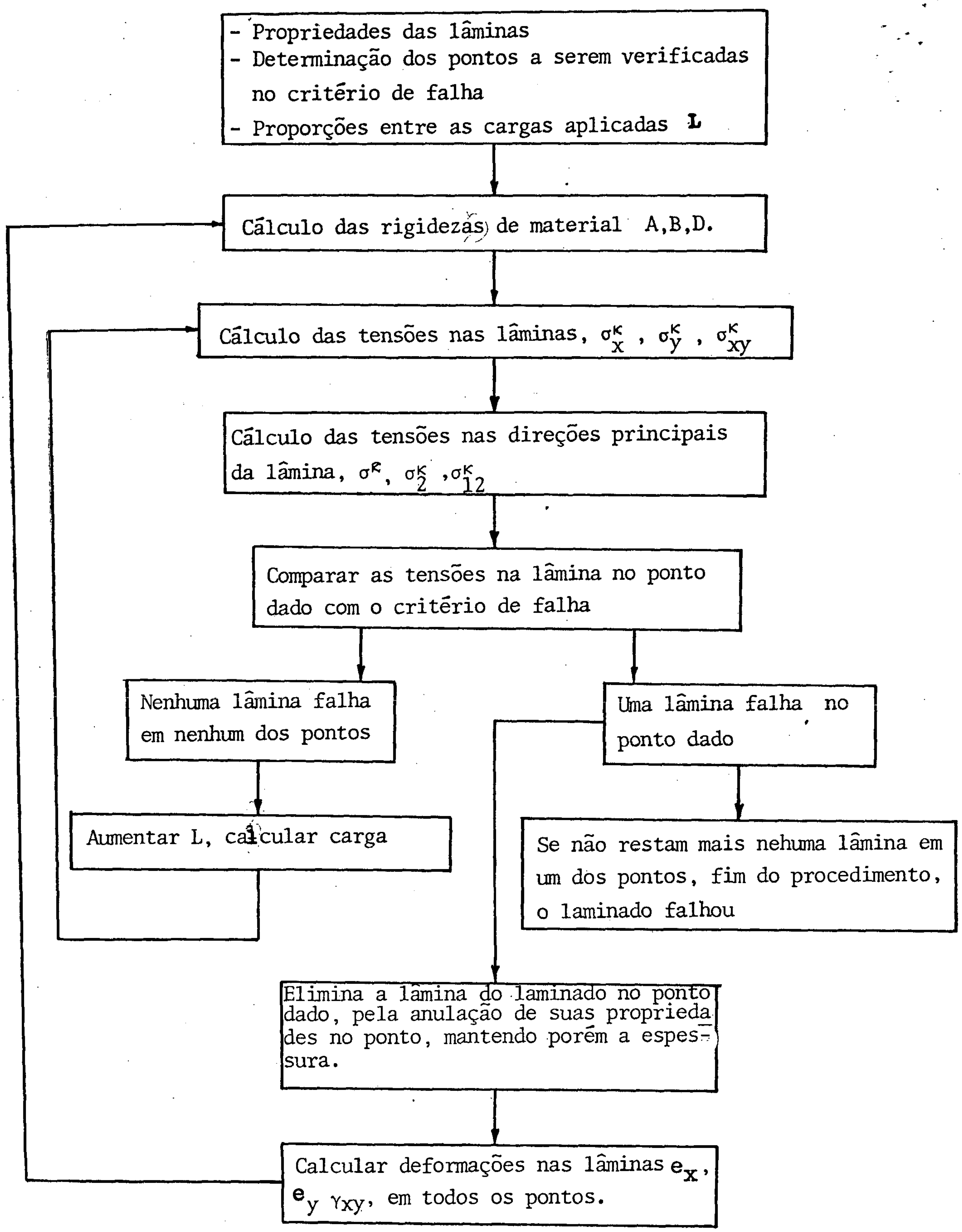


Figura 6.2- Esquema simplificado para determinação de carregamento máximo e relação carga-deformação numa estrutura.

Os sistemas de elementos finitos que normalmente já apresentam problemas naturais com o trabalho em materiais isotrópicos necessitam ser adaptados e aperfeiçoados em virtude da modificação do material. Além da análise à estabilidade macroscópica da estrutura, um outro ramo é o estudo da flambagem a nível de fibra a fibra imersa na matriz.

A Figura 6.2 apresenta um esquema simplificado de um programa computacional para a determinação do carregamento máximo e relação carga-deformação numa estrutura de material laminado. Este esquema exige um programa que solucione a estrutura dada em sua resposta de distribuição de tensões, que tenha um baixo tempo computacional uma vez que será usado iterativamente, razoável precisão, possua facilidades na eliminação de lâminas ponto a ponto na entrada de dados e durante o processamento. Esquemas como estes e outros vários que são possíveis de serem montados para a análise de tensões podem também serem utilizados iterativamente na elaboração de projetos otimizados.

PROJETO DE LÂMINAS

DADOS:
Propriedades elásticas e resistência da fibra e matriz

↓

OBTER:
Propriedades elásticas e resistência da lâmina.

TÉCNICAS:
Uso de uma "BIBLIOTECA" de preferência implementada computacionalmente de todas as aproximações teóricas disponíveis que ofereçam bons resultados para cada tipo de combinação fibra/matriz, em material, porcentagem, distribuição, forma de fibra (em comprimento e secção), alinhamento e todos os outros parâmetros.

Figura 6.3- Esquema simplificado de projeto de lâminas.

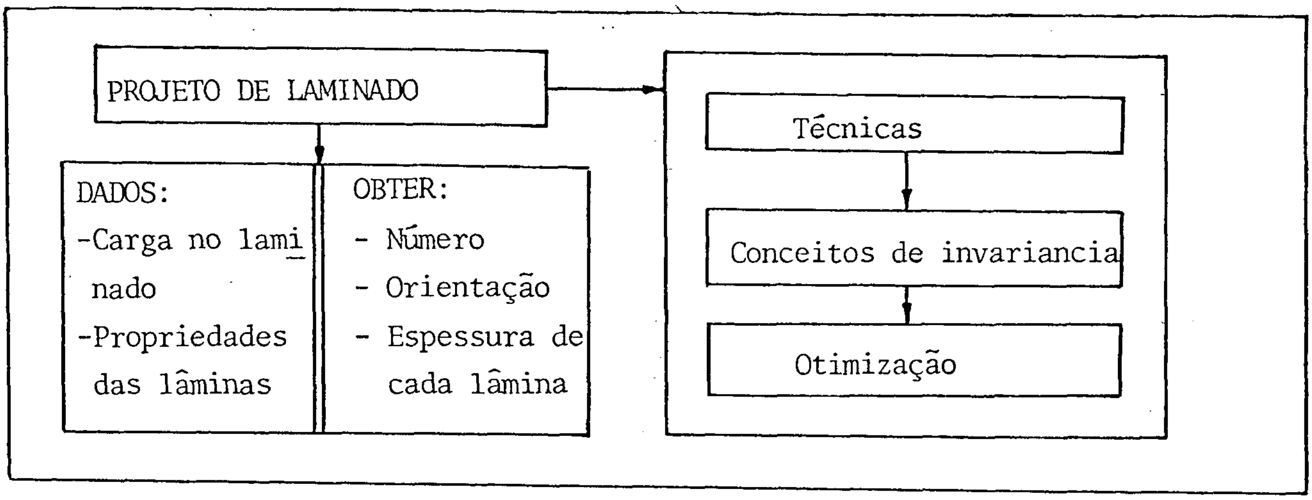


Figura 6.4- Esquema simplificado de projeto de laminados.

A cadeia de projeto envolvendo material composto inicia-se com o projeto de lâmina, como mostra a Figura 6.3. A previsão das constantes elásticas de engenharia (E, G, ν) para uma lâmina a partir das características da fibra e da matriz ainda apresentam problemas nas aproximações teóricas quanto à falta de exatidão e de generalidade.

No projeto de laminados, Figura 6.4, dadas como corretas as características das lâminas não existe o problema de exatidão de forma absoluta, mas de custo e sofisticação nas técnicas.de otimização principalmente no projeto de estruturas mais complexas. (Figura 6.5.)

O desenvolvimento e implementação de técnicas e procedimentos para medição e experimentações sobre o comportamento dos materiais compostos é uma área em aberto. Testes de tração simples, impacto, estudos de propagação de trincas estática e à fadiga, flambagem, determinação de tensões em seus vários aspectos são alguns dos procedimentos que apresentam problemas de ordem teórica e prática, como projetos de corpos

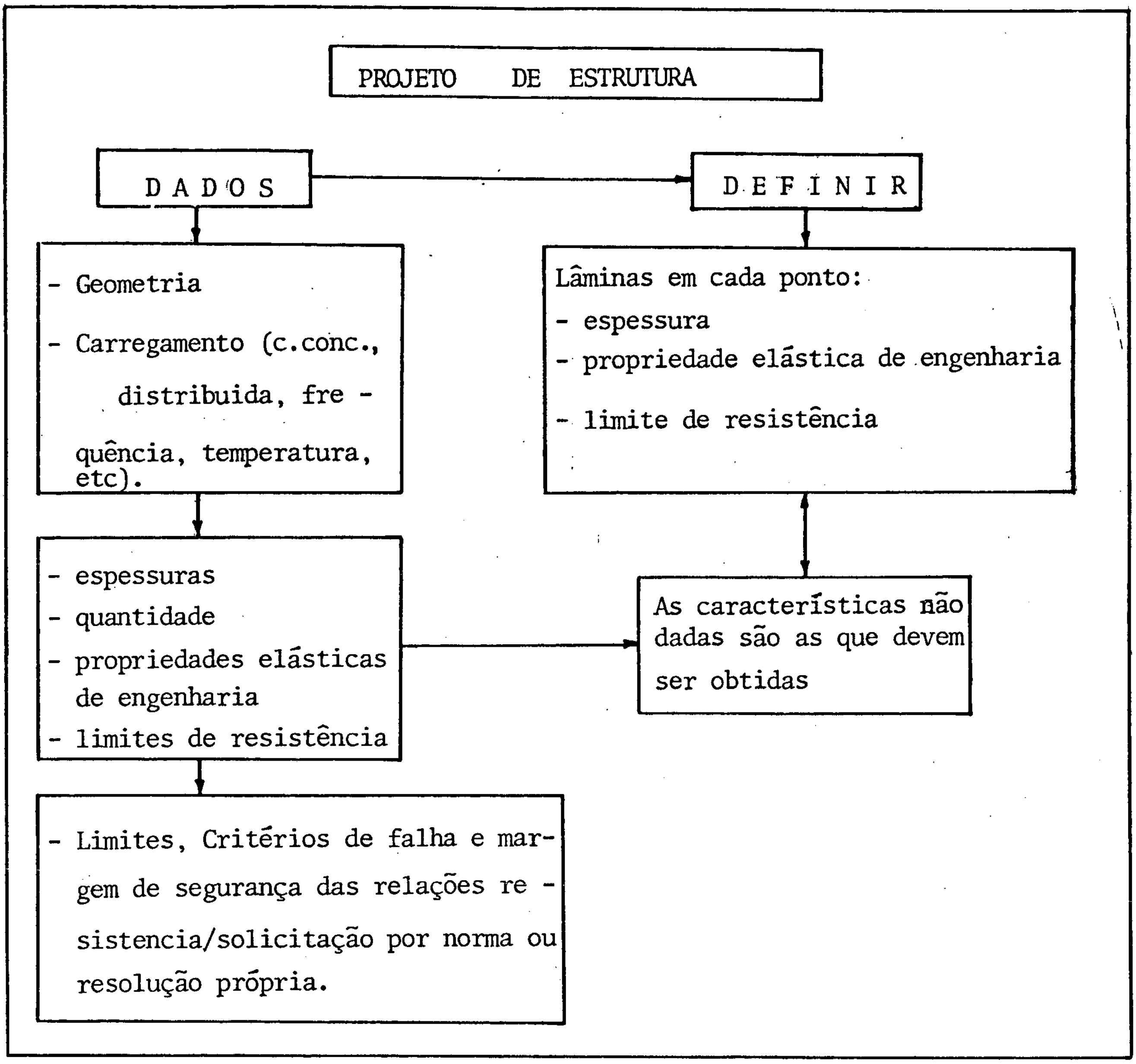


Figura 6.5- Esquema simplificado de projeto de uma estrutura.

de prova, suportes e fixação. Sómente após conhecidos e manipulados estes procedimentos poderão ser definidas normas,regras e padrões consistentes.

Particularmente na área de análise e projeto de estruturas de materiais compostos por elementos finitos, uma etapa imediatamente posterior à da implementação do presente programa para cascas delgadas de elementos triangulares planos é a implementação de um elemento isoparamétrico quadrilateral para cascas semi-espessas e espessas e posteriormente - um elemento sólido para materiais compostos.

REFERENCIAS

1. NOOR, A. K. & MATHERS, M. D. Shear-flexible finite-element models of laminated composite plates and shells. NASA. s. l. Dez. 1975. (NASA TN D-8044)

2. BATHOZ, J. L.; BATHE, K. J.; HO, L.W. A study of three-node triangular plate bending elements. Journal for Numerical Methods en Engeneering. 15:1771-1812, 1980.

3. BATHE, K. J. & HO, L. W. Non linear finite element analysis in strucral Mechanics. Berlim, Wunderlich-Stein-Bathe, 1980, p. 122-150.

4. NOOR, A. K. & ANDERSEN, C. M. Mixed isoparametric finite element models of laminated composite shells. Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engeneering. 11:255-280, 1977.

5. DONG, S. B. Analylis of laminated shells of revolution. Journal of the Engeneering Mechanics Division. New York, 92(6):135-155, Dec. 1966.

6. KRAJCIINOVIC, D. Sandwich beam analysis. Journal of Applied Mechanics. New York, 38(3):773-778, Sept. 1971.

7. GULATI, S. T. & ESSENBERG, F. Effect of anisotropy in axisymmetric cylindrical shells. Journal of Applied Mechanics. New York. 34(3): 659-666, Sept. 1967.

8. MISOVEC, A. P. & KEMPNER, J. Approximate elasticity solution for ortotropic cylinder under hidrostatic pressure and band loads. Journal of Applied Mechanics. New York, 37(1):101-8,Mar. 1970.

9. PAGANO, N. J. The stress field in a cylindrically anisotropic body under two-dimensional surface tractions. Journal of Applied Mechanics. New York, 39(3):791-796, Sept. 1972.

10. WHITNEY, J. M. & LEISSA, A.W. Analysis of heterogeneous anisotropic plates. Journal of Applied Mechanics. New York, 36(2):261-266,Jun. 1969.

11. JONES, R. M. Mechanics of composite materials. 2.ed. Washington, McGraw-Hill, 1975. 355p.

12. CHRISTENSEN, R. M. Mechanics of composite materials. New York, J. Wiley, 1979. 388p.

13. BREBBIA, C. A. & FERRANTE, S. The finite element technique. Porto Alegre, edições URGS, 1975. 410p.

14. ZIENKIEWICZ, O. C. The finite element method in engineering science. 2.ed. London, McGraw-Hill, 1971. 566p.

15. TIMOSHENKO, S. & WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells. New York, McGraw-Hill, 1959. p.180-218.

16. BOYLEY, B. A. & WEINER, J. H. Theory of thermal stresses. 4.ed.New York, J. Wiley, 1967. p.137.

17. DOEBELIN, E. O. Measurement systems; application and design. Tokio, McGraw-Hill, 1966. p 510-511.

18. DONG, S. B. Analysis of laminated shells of revolution. Journal of the Engeneering Mechanics Division. New York, 92(6):135-155, Dec. 1966.

19. BORESI, A. P. & LYNN, P. P. Elasticity in Engineering Mechanics. New JerseY, Prentice-Hall, 1974. 277p.

APÊNDICE A

As derivadas de H_x e H_y com relação a L_1 e L_2 são dadas a seguir:

$$
H_{x,L_2} = \left\{ \begin{array}{l}
P_6 a + (P_5 - P_6)\, L_3 \\
q_6 a - (q_5 + q_6)\, L_3 \\
-4 + 6\,(L_2 + L_3) + r_6 a - L_3(r_5 + r_6) \\
-P_6 a + L_3(P_4 + P_6) \\
q_6 a - L_3(q_6 - q_4) \\
-2 + 6L_2 + r_6 a + L_3(r_4 - r_6) \\
-L_3(P_5 + P_4) \\
L_3(q_4 - q_5) \\
-L_3(r_5 - r_4)
\end{array} \right\} \qquad (A.1)
$$

$$
H_{y,L_2} = \left\{ \begin{array}{l}
t_6 a + L_3(t_5 - t_6) \\
1 + r_6 a - (r_5 + r_6) \\
-q_6 a + L_3(q_5 + q_6) \\
-t_6 a + L_3(t_4 + t_6) \\
-1 + r_6 a + L_3(r_4 - r_6) \\
-q_6 a - L_3(q_4 - q_6) \\
-L_3(t_4 + t_5) \\
L_3(r_4 - r_5) \\
-L_3(q_4 - q_5)
\end{array} \right\} \qquad (A.2)
$$

$$H_{x,L_3} = \left\{\begin{array}{l} -P_5 b - L_2(P_6 - P_5) \\ q_5 b - L_2(q_5 + q_6) \\ -4 + 6(L_2 + L_3) + r_5 b - L\,(r_5 + r_6) \\ L_2(P_4 + P_6) \\ L_2(q_4 - q_6) \\ -L_2(q_6 - r_4) \\ P_5 b - L_2(P_4 + P_5) \\ q_5 b + L_2(q_4 - q_5) \\ -2 + 6L_3 + r_5 b - L_2(r_4 - r_5) \end{array}\right] \qquad (A.3)$$

$$H_{y,L_2} = \left\{\begin{array}{l} -t_5 b - L_2(t_6 - t_5) \\ 1 + r_5 b - L_2(r_5 + r_6) \\ -q_5 b + L_2(q_5 + q_6) \\ L_2(t_4 + t_6) \\ L_2(r_4 - r_6) \\ -L_2(q_4 - q_6) \\ t_5 b - L_2(t_4 + t_5) \\ -1 + r_5 b + L_2(r_4 - r_5) \\ -q_5 b - L_2(q_4 - q_5) \end{array}\right] \qquad (A.4)$$

onde:

$a = 1 - 2L_2$ $\qquad\qquad q_k = 3x_{ij}y_{ij}/l_{ij}^2$

$b = 1 - 2L_3$ $\qquad\qquad t_k = -\,6y_{ij}/l_{ij}^2$

$P_k = -\,6x_{ij}/l_{ij}^2$ $\qquad\qquad r_k = 3y_{ij}/l_{ij}^2$

$k = 4,5,6$ para $ij = 23,\ 31,\ 12$ respectivamente.

APÊNDICE B

Integração de Gauss.

Dada uma função f (L_1, L_2, L_3) a ser integrada sobre uma superfície triangular, como mostra a Fig. C.L, a integral I será:

$$I = \int_0 \int_0^{1-L_1} f(L_1,L_2,L_3)\ dL_2 dL_1 = \sum_4^7 H_i\ f(P_i) \qquad (B.1)$$

onde i = 4, 7 são os pontos de integração internos conforme Fig. B.1 ; H_i é o peso, $f(P_i)$ é o valor da função, e P_i está dado em coordenadas naturais de área.

Ponto i	Coordenadas (L_1, L_2, L_3)			Peso H_i
1	1	0	0	
2	0	1	0	
3	0	0	1	
4	1/3	1/3	1/3	-27/96
5	0,6	0,2	0,2	$\frac{25}{96}$
6	0,2	0,6	0,2	$\frac{25}{96}$
7	0,2	0,2	0,6	$\frac{25}{96}$

Deve-se notar que a integração acima é exata para funções cúbicas, e o erro $R = o(h^4)$.

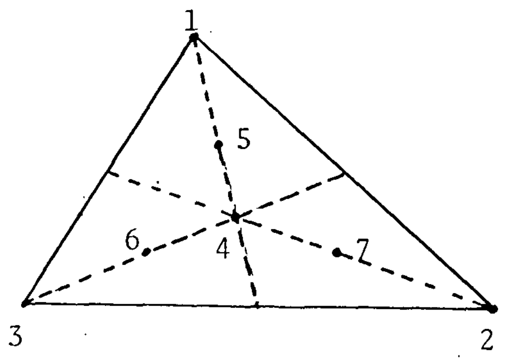
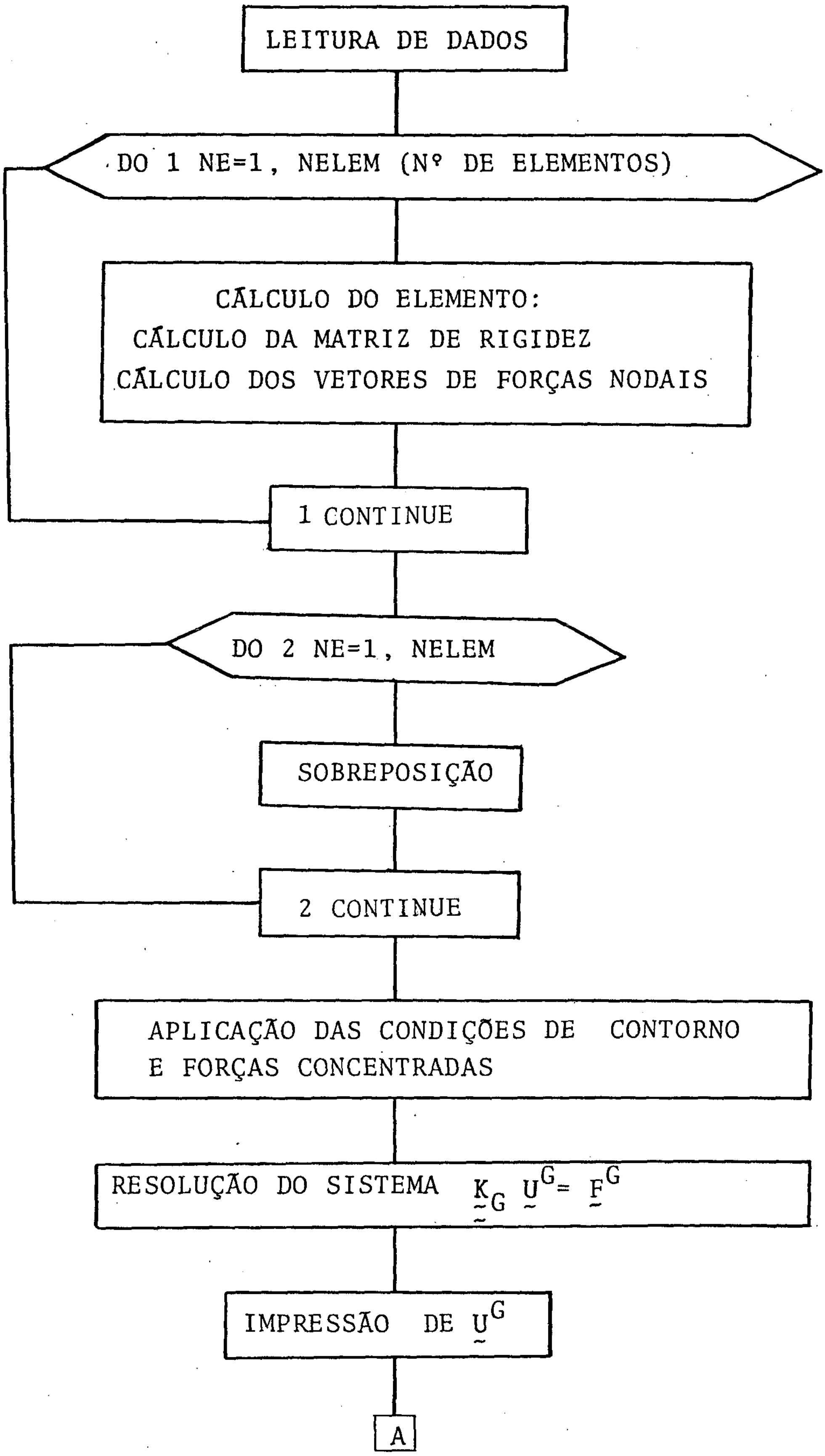
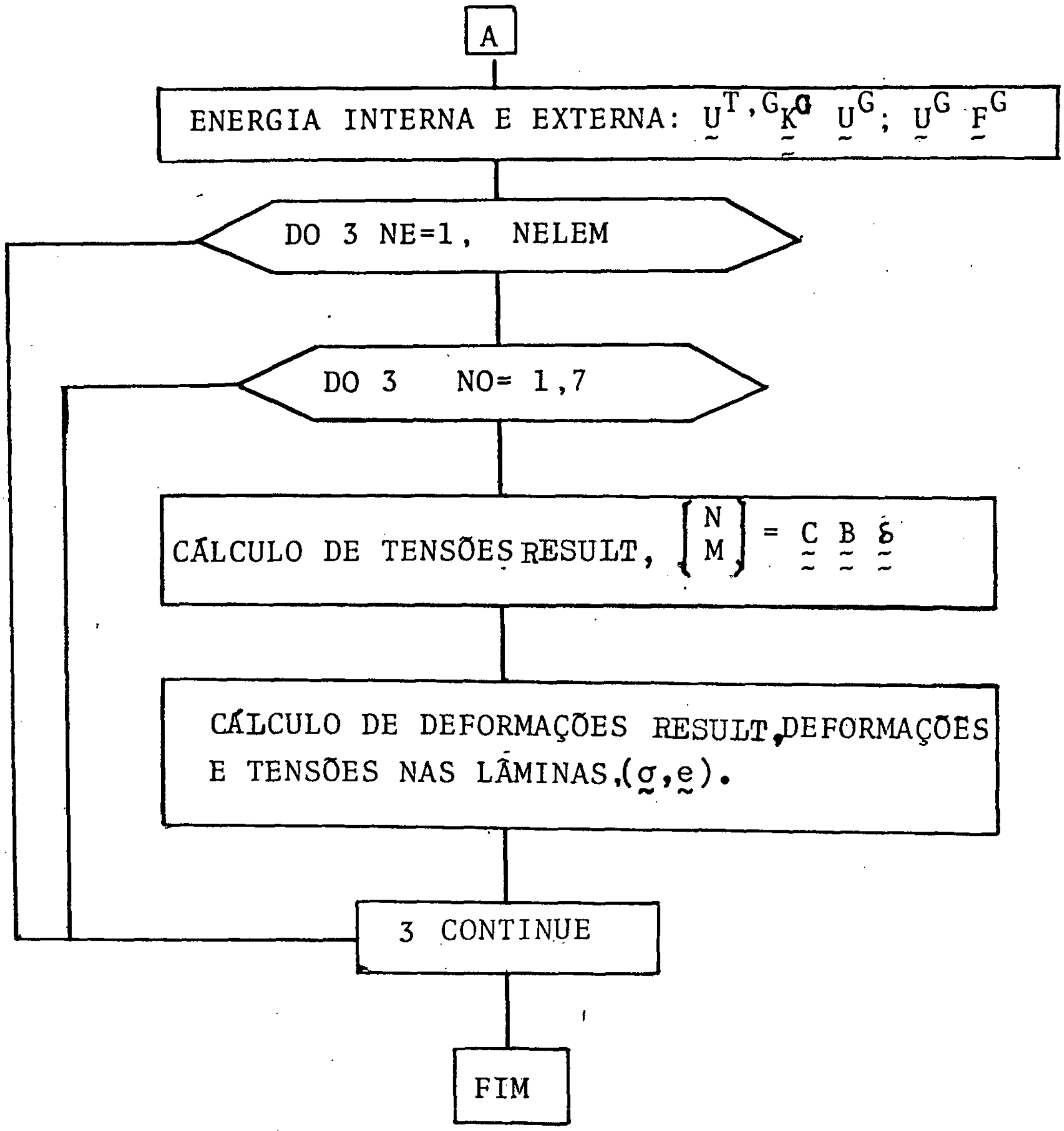


Fig. B .1- Pontos de integração cúbica sobre o elemento triangular.

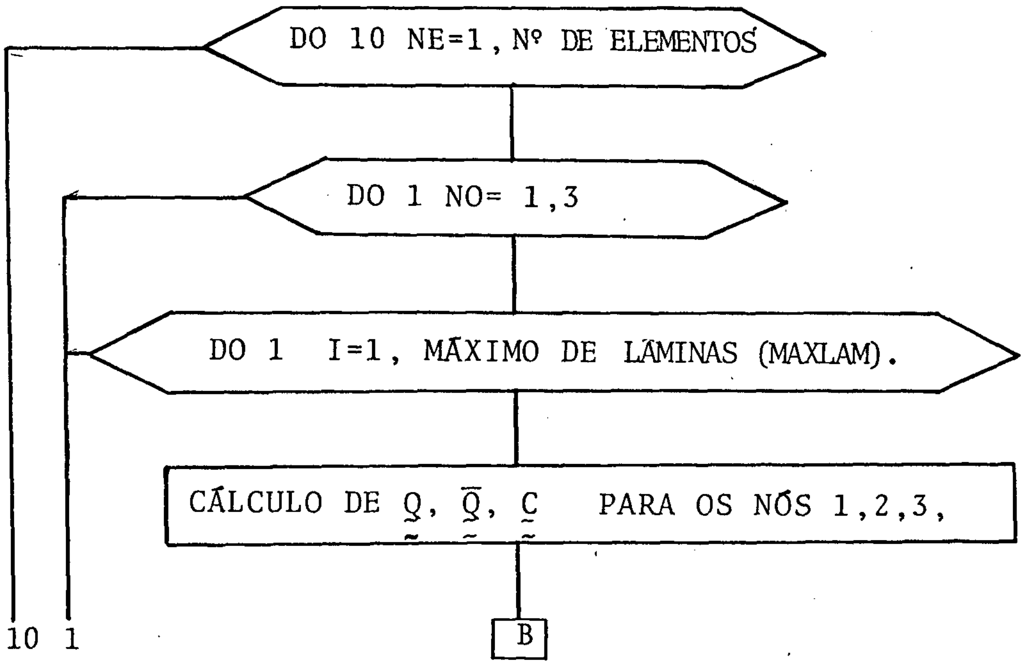
APENDICE C   FLUXOGRAMA SIMPLIFICADOS

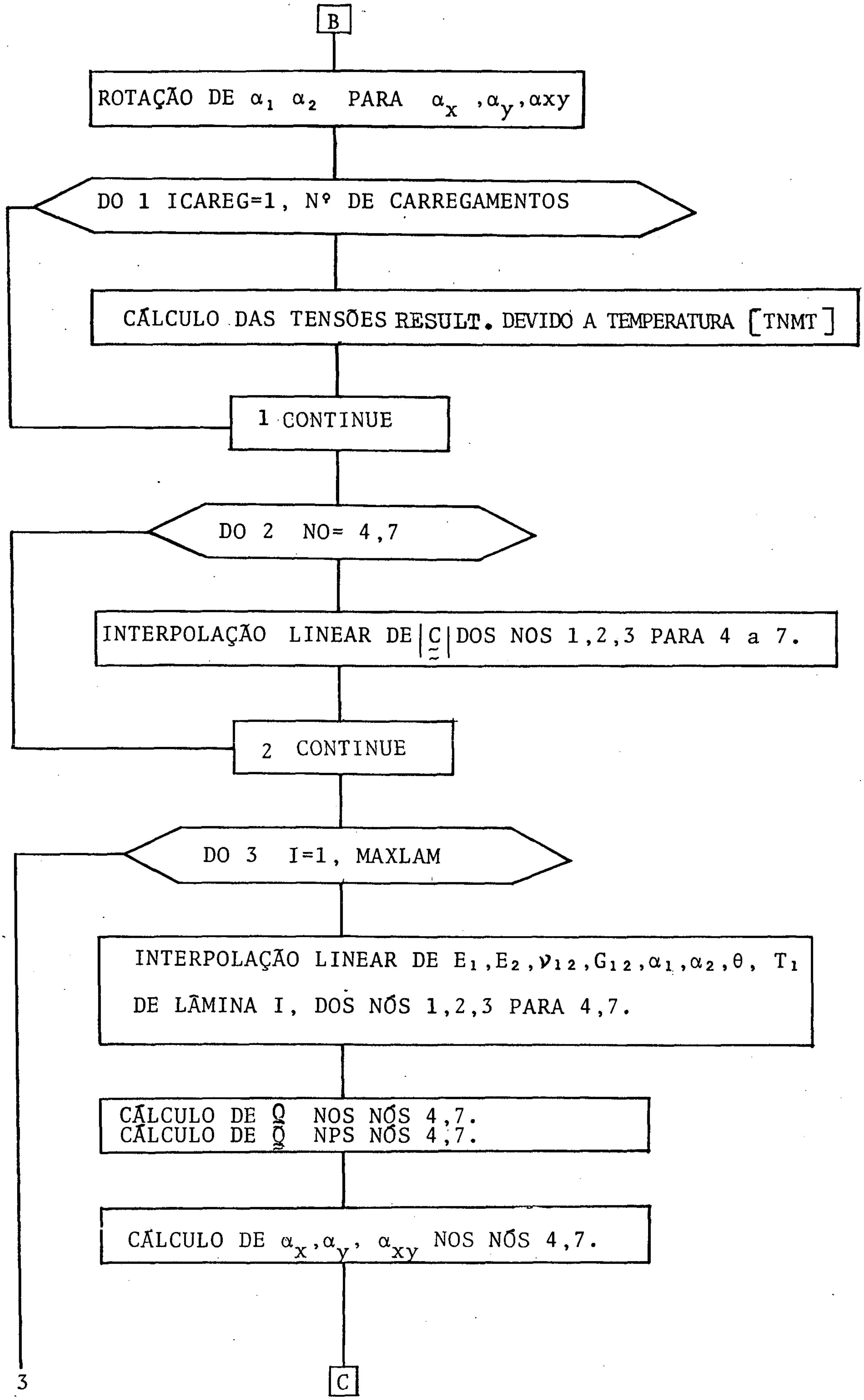
1º FLUXOGRAMA: ESQUEMA GERAL.

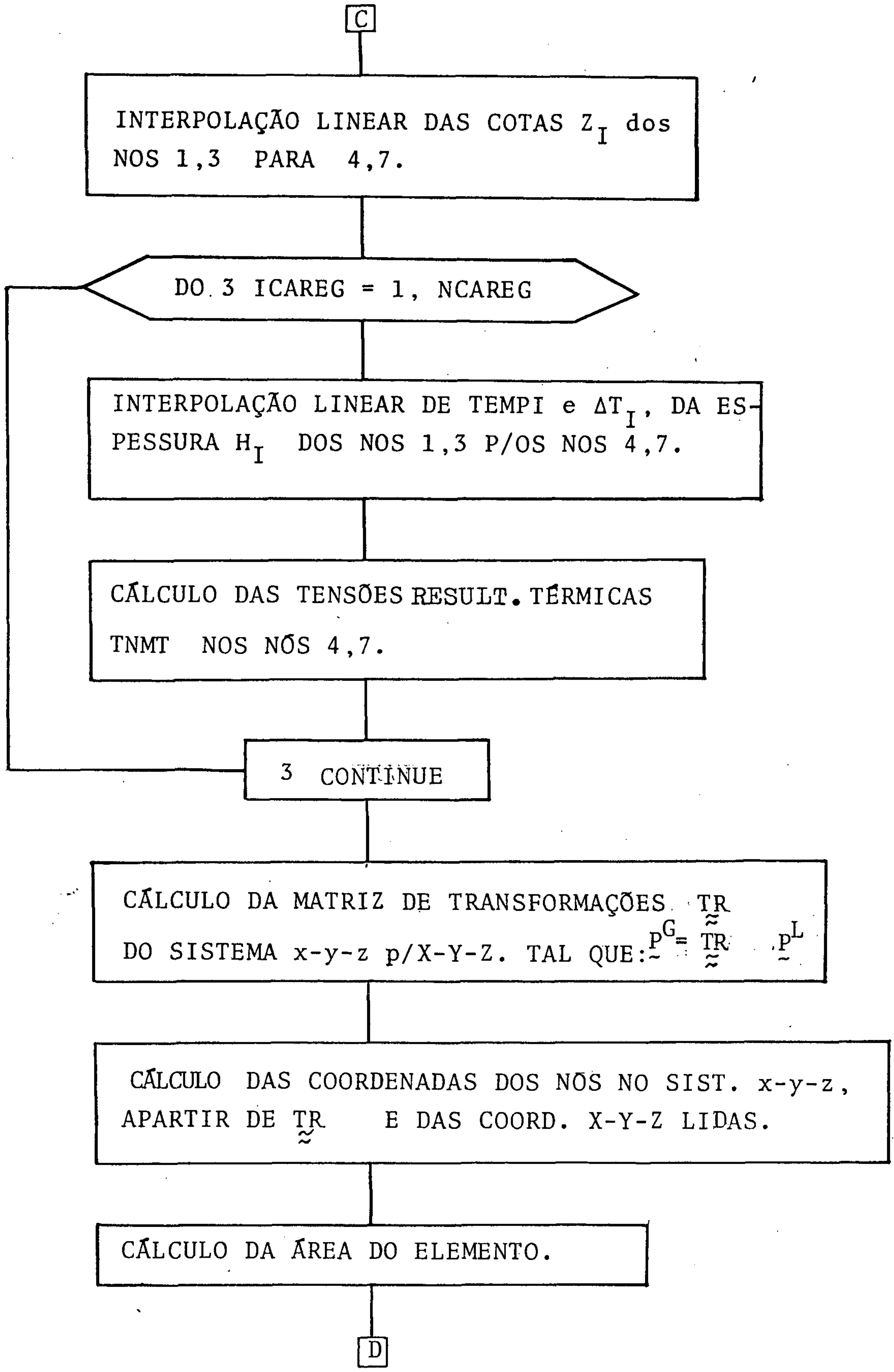


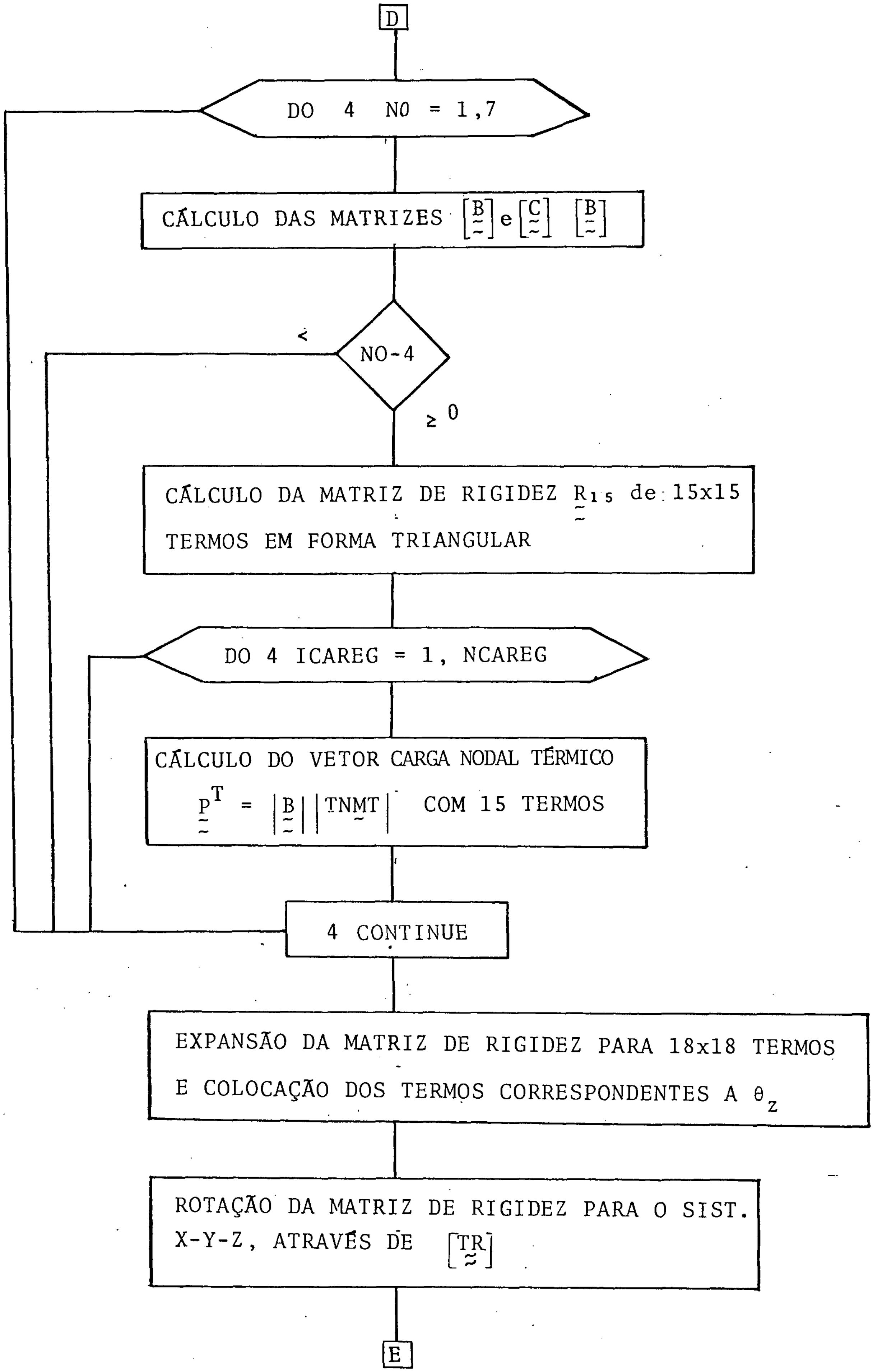


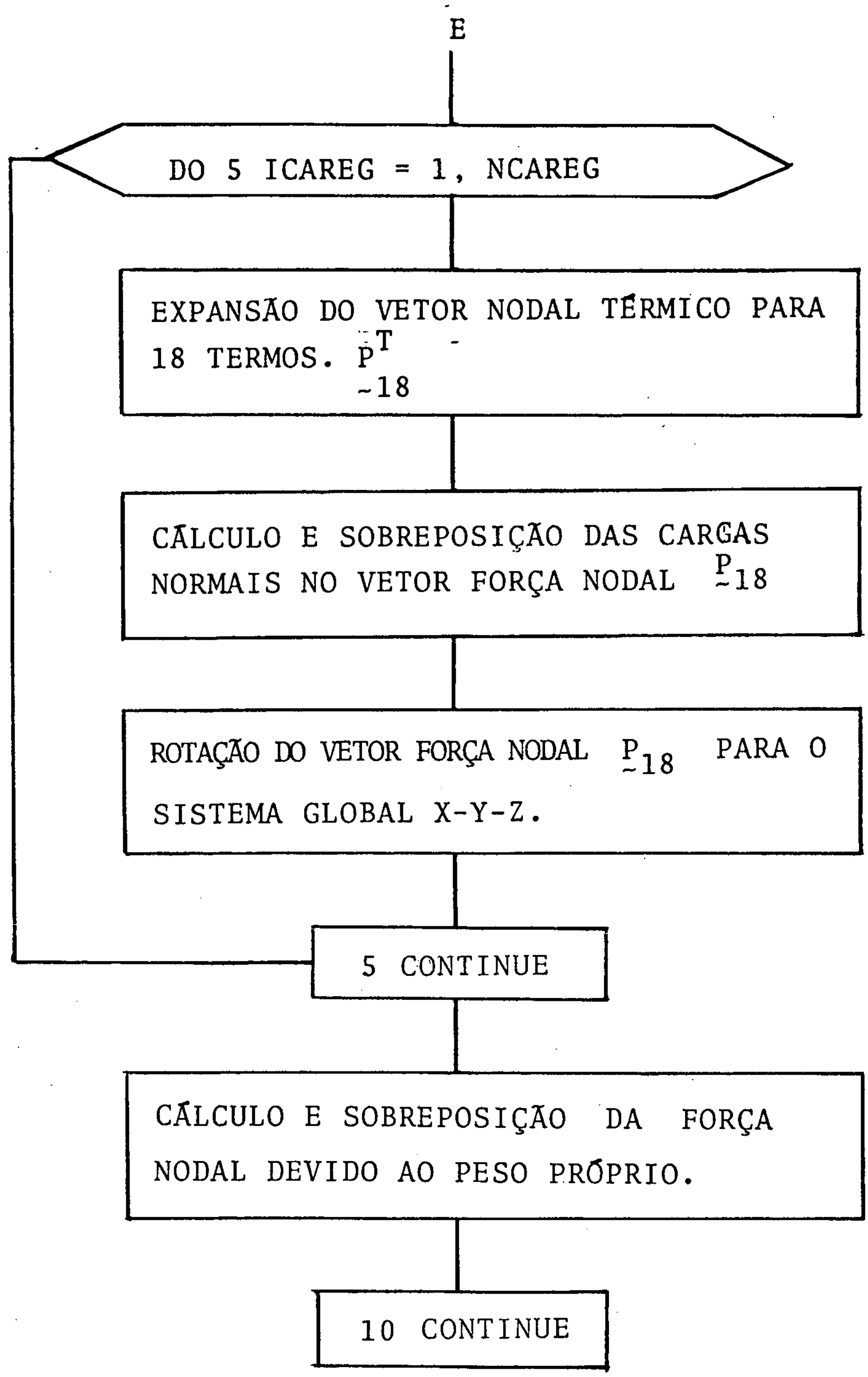
2º FLUXOGRAMA: CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ



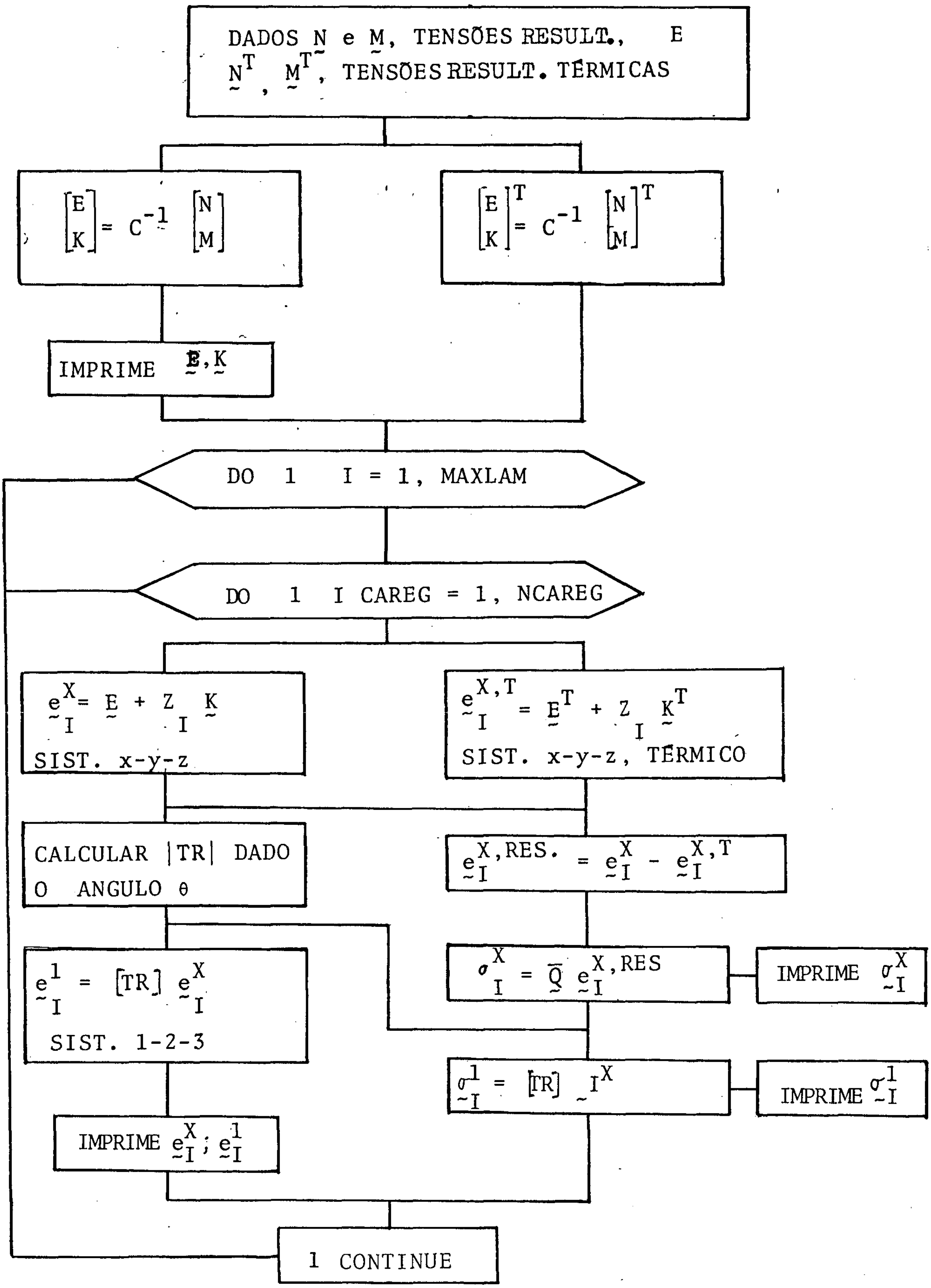

B
ROTAÇÃO DE α_1 α_2 PARA α_x , α_y , αxy
DO 1 ICAREG=1, Nº DE CARREGAMENTOS
CÁLCULO DAS TENSÕES RESULT. DEVIDO A TEMPERATURA [TNMT]
1 CONTINUE
DO 2 NO= 4,7
INTERPOLAÇÃO LINEAR DE $|\underset{\sim}{C}|$ DOS NOS 1,2,3 PARA 4 a 7.
2 CONTINUE
DO 3 I=1, MAXLAM
INTERPOLAÇÃO LINEAR DE E_1, E_2, ν_{12}, G_{12}, α_1, α_2, θ, T_1
DE LÂMINA I, DOS NÓS 1,2,3 PARA 4,7.
CÁLCULO DE $\underset{\sim}{Q}$ NOS NÓS 4,7.
CÁLCULO DE $\underset{\approx}{\bar{Q}}$ NPS NÓS 4,7.
CÁLCULO DE α_x, α_y, α_{xy} NOS NÓS 4,7.
3
C


C
INTERPOLAÇÃO LINEAR DAS COTAS Z_I dos NOS 1,3 PARA 4,7.
DO 3 ICAREG = 1, NCAREG
INTERPOLAÇÃO LINEAR DE TEMPI e ΔT_I, DA ESPESSURA H_I DOS NOS 1,3 P/OS NOS 4,7.
CÁLCULO DAS TENSÕES RESULT. TÉRMICAS TNMT NOS NÓS 4,7.
3 CONTINUE
CÁLCULO DA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÕES $\underset{\approx}{TR}$ DO SISTEMA x-y-z p/X-Y-Z. TAL QUE: $\underset{\sim}{P}^G = \underset{\approx}{TR} \cdot \underset{\sim}{P}^L$
CÁLCULO DAS COORDENADAS DOS NÓS NO SIST. x-y-z, APARTIR DE $\underset{\approx}{TR}$ E DAS COORD. X-Y-Z LIDAS.
CÁLCULO DA ÁREA DO ELEMENTO.
D


D
DO 4 NO = 1,7
CÁLCULO DAS MATRIZES $\underset{\sim}{B}$ e $\underset{\sim}{C}$ $\underset{\sim}{B}$
NO-4
<
≥ 0
CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ $\underset{\sim}{R}_{15}$ de 15x15 TERMOS EM FORMA TRIANGULAR
DO 4 ICAREG = 1, NCAREG
CÁLCULO DO VETOR CARGA NODAL TÉRMICO
$\underset{\sim}{P}^T = |\underset{\sim}{B}| |\underset{\sim}{TNMT}|$ COM 15 TERMOS
4 CONTINUE
EXPANSÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ PARA 18x18 TERMOS E COLOCAÇÃO DOS TERMOS CORRESPONDENTES A θ_z
ROTAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ PARA O SIST. X-Y-Z, ATRAVÉS DE $[\underset{\approx}{TR}]$
E


E
DO 5 ICAREG = 1, NCAREG
EXPANSÃO DO VETOR NODAL TÉRMICO PARA 18 TERMOS. P^T_{18}
CÁLCULO E SOBREPOSIÇÃO DAS CARGAS NORMAIS NO VETOR FORÇA NODAL P_{18}
ROTAÇÃO DO VETOR FORÇA NODAL P_{18} PARA O SISTEMA GLOBAL X-Y-Z.
5 CONTINUE
CÁLCULO E SOBREPOSIÇÃO DA FORÇA NODAL DEVIDO AO PESO PRÓPRIO.
10 CONTINUE

3º FLUXOGRAMA: CÁLCULO DAS TENSÕES



APENDICE D - DADOS PARA A DEFINIÇÃO DE UM MODELO

D1; DESCRIÇÃO DOS CARTÕES UTILIZADOS.

CARTÃO 1 - DADOS INICIAIS

Num primeiro cartão devem constar: o peso específico médio RRO (ou 0.0D0); o número total de nós da modelagem NNOS; o número total de lâminas tipo NTLAM; (uma lâmina tipo é um conjunto de dados de E_1, E_2, ν_{12}, G_{12}, α_1, α_2, θ, T, nesta ordem); o número de elementos NELEM na modelagem; MLAM, o número máximo de lâminas da estrutura; o número de carregamentos que se resolve simultaneamente NCAREG; a largura de banda LB da matriz de rigidez.

A largura de banda LB pode ser calculada pela equação abaixo:

$$LB \geqslant \begin{array}{l}\text{MAX. ENTRE TODOS}\\ \text{OS ELEMENTOS DE:}\end{array} (NO_{MAX.} - NO_{MIN.} + 1)NGL$$

onde NGL é o número de graus de liberdade por elemento, $(NO_{MAX.} - NO_{MIN.})$ é a maior diferença entre as numerações dos nós de um dado elemento.

CARTÃO 2 - COORDENADAS DOS NÓS

Num segundo tipo de cartão constam o número do nó e as três coordenadas X-Y-Z, de forma agrupada em dois nós por cartão.

Caso o número de nós seja ímpar, completar o último cartão com zeros de acordo com o formato. Caso o número de nós NNOS seja par torna-se necessário um cartão FLAG nulo para indicar o fim destes dados. Tem-se (NNOS/2 + 1) cartões tipo 2.

CARTÃO 1 - DADOS INICIAIS -

FORMATO (E10.3, 6I5)

RRO	1 - 10	PESO ESPECÍFICO VOLUMETRICO.
NNOS	11 - 15	NÚMERO TOTAL DE NÓS DA MODELAGEM.
NTLAM	16 - 20	NÚMERO TOTAL DE LÂMINAS TIPO.
NELEM	21 - 25	NÚMERO TOTAL DE ELEMENTOS DA MODELAGEM.
MLAM	26 - 30	NÚMERO MÁXIMO DE LÂMINAS DENTRE TODOS OS NÓS DA ESTRUTURA.
NCAREG	31 - 35	NÚMERO DE ENVOLTORIAS DE CARREGAMENTOS.
LB	36 - 40	LARGURA DE BANDA DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO SISTEMA

CARTÃO 2 - COORDENADAS DOS NÓS -

FORMATO (2(I5, 3E10.3))

NO 1	1 - 5	NÚMERO DO NÓ GLOBAL
X1	6 - 15	COORDENADAS DO NÓ NO SISTEMA X-Y-Z.
Y1	16 - 25	
Z1	26 - 35	
NO 2	36 - 40	
X2	41 - 50	IDEM
Y2	51 - 60	
Z2	61 - 70	

CARTÃO 3 - LÂMINAS TIPO

No terceiro tipo de cartão são colocados os valores das lâminas tipo que sejam necessárias para descrever quaisquer pontos da modelagem. Cada cartão contém os oito valores e possuirá um número de ordem dado no programa coincidindo com a ordem de colocação destes cartões. Caso algum valor como α_1 , α_2 , θ , deva assumir valor nulo este deve ser colocado. Os cartões de lâmina tipo compõem uma matriz onde a 1ª coluna é nula sendo a primeira linha definida de variável inteira e as oitó restantes reais. A primeira coluna com número de ordem "0", é provida já pelo programa, e serve para descrever as"lâminas virtuais" em alguns nós. O número de cartões deve se (NTLAM-1).

CARTÃO 4 - TEMPERATURA

O quarto tipo de cartão na ordem lê o número do nó, o valor de Temperatura T_E na superfície média do laminado, (a diferença de temperatura ΔT entre a superfície externa (+z) e interna do laminado. Os nós são agrupados dois a dois em cada cartão. Após os cartões com nós carregados termicamente, um cartão completamente nulo, conforme os formatos serve como FLAG para o fim dos cartões de cada carregamento.

Observações sobre o Cartão 4:

Caso não se deseje considerar o efeito de temperatura, ou considerar temperatura $\neq 0$ apenas em certos nós, colocar um último cartão naquele carregamento completamente nulo (segundo o formato), e um número qualquer de um nó na posição correspondente a NO1. Isto corresponde a um FLAG.

CARTÃO 3 - LÂMINAS TIPO -

FORMATO (6.10.4, E10.3, E10.4)

E1	1 - 10	MÓDULOS DE ELASTICIDADE DE ENGENHARIA NAS DIREÇÕES PRINCIPAIS 1-2.
E2	11 - 20	
MI12	21 - 30	COEFICIENTE DE POISSON.
G12	31 - 40	MÓDULO DE RIGIDEZ AO CIZALHAMENTO.
ALFA 1	41 - 50	COEFICIENTES DE DILATAÇÃO TÉRMICAS NAS DIREÇÕES 1-2.
ALFA 2	51 - 60	
TETA	61 - 70	ÂNGULO ENTRE OS EIXOS 1 e x.
T	71 - 80	ESPESSURA DA LÂMINA.

CARTÃO 4 - TEMPERATURAS -

FORMATO (2(I5, 2E15.3, 5X))

NO 1	1 - 5	1º NÓ LIDO NO CARTÃO.
T1	6 - 20	TEMPERATURA NO PONTO MÉDIO DO LAMINADO.
DT1	21 - 35	DIFERENÇA INTERNO-EXTERNO DO LAMINADO.
NO 2	41 - 45	
T2	46 - 60	IDEM
DT2	61 - 75	

CARTÕES 5, 6 e 7 - DADOS -

Após estes são colocados os cartões de dados para a subrotina DADO. Para cada elemento são lidos, a princípio, 7 cartões. No primeiro cartão (CARTÃO 5), são lidos 10 valores; o número de elemento NE, os números dos nós na numeração global correspondente aos nós locais i,j,k; três valores que são os números de lâminas físicas nos nós i,j e k; o 8º valor é LSINAL; o 9º KSINAL; o 10º é ISINAL.

Os valores neste 5ºcartão servirão de guia para a leitura dos próximos 6 cartões: (KELEME, DELEME P/NO1); (KELEME/DELEME NO2) ; (KELEME/DELEME N)3) que descreverão o elemento NE.

O próximo cartão (Tipo 6) formará a matriz KELEME e constará de uma sequência de números que referenciam as lâminas 1ª, 2ª, etc , por ordem, no nó i, às lâminas tipo lidas anteriormente, definindo portanto as características da lâmina I, do nó i do elemento NE; no terceiro cartão (Tipo 7) estão sequencialmente as cotas de todas as lâminas do nó i e elemento NE. Estes 2º e 3ª cartões são repetidos para o nó j e nó k, completando assim 7 cartões para cada elemento NE.

Caso os tres nós do elemento NE possuam as mesmas características descritas na lâmina tipo, (o mesmo código em KELEME), pode- se colocar o valor do LSINAL como 1 (em vez de zero). Neste caso bastam as leituras de tipo de lâminas (KELEME) e cotas para o nó i, suprimindo-se então os 4 últimos cartões; o programa provê então os valores restantes aos nós j e k.

CARTÃO 5 - CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO -

FORMATO (10I5)

NE	1 - 5	NÚMERO DO ELEMENTO
NO1 NO2 NO3	6 - 10 11 - 15 16 - 20	NÚMERO DOS NÓS GLOBAIS A QUE CORRESPONDEM OS NÓS INTRINSECOS i,j,k, RESPECTIVAMENTE.
NLAM1 NLAM2 NLAM3	21 - 25 26 - 30 31 - 35	NÚMERO DE LÂMINAS FÍSICAS NOS NÓS INTRINSECOS i,j,k, RESPECTIVAMENTE.
LSINAL	36 - 40	= 1 OS TRÊS NÓS SÃO IGUAIS. = 0 OS TRÊS NÓS SÃO DIFERENTES.
KSINAL	41 - 45	NÚMERO DO CARTÃO EVENTUALMENTE JÁ LIDO A QUE O ELEMENTO NE POSSUI OS MESMOS VALORES EM KELEME E DELEME; CASO CONTRÁRIO = 0.
ISINAL	46 - 50	0 NÃO CALCULAR TENSÕES. 1 CALCULAR TENSÕES MÉDIAS. 2 CALCULAR TENSÕES DAS LÂMINAS.

CARTÃO 6 - DADOS DE KELEME -

FORMATO (16I5)

1ª LÂMINA	1 - 5	
2ª LÂMINA	6 - 10	
.	11 - 15	
.	16 - 20	
.	21 - 25	
I-ÉSIMA	26 - 30	PROPRIEDADES DAS LÂMINAS NO NÓ i, DO ELEMENTO NE.
.	31 - 35	
.	36 - 40	
.	41 - 45	
MAXLAM	46 - 50	
	51 - 55	
	56 - 60	
	61 - 65	
	66 - 70	
	71 - 75	
	76 - 80	

CARTÃO 7 - DADOS DE DELEME

FORMATO (8E10.3)

1ª LÂMINA	1 - 10	
2ª LÂMINA	11 - 20	
	21 - 30	COTAS DAS LÂMINAS NO NÓ i, DO ELEMENTO NE.
	41 - 50	
MAXLAM	51 - 60	
	61 - 70	
	71 - 80	

Caso o elemento NE possua as mesmas características de um e lemento anteriormente já lido, basta que se coloque o número deste ele - mento na posição de KSINAL, e suprime-se os últimos 6 cartões. Do contrá rio KSINAL = 0.

Caso se deseje calcular e imprimir apenas as tensões médias nos nós do elemento, deve-se fazer ISINAL = 1; se além das tensões mé dias quer-se imprimir as tensões e deformações específicas em cada lâmina, no sistema local de coordenadas x, y, z do elemento, e no sistema principal de coordenadas de material 1- 2- 3, deve-se fazer ISINAL = 2 ; caso não se necessite de quaisquer tensões no elemento ISINAL = 0 .

O número de valores dos códigos em KELEME e das cotas em DELEME devem ser o mesmo de MAXLAM, onde MAXLAM = MAX($NLAM_1$; $NLAM_2$;$NLAM_3$) isto é o número máximo de lâminas físicas. Os códigos de KELEME indicam a coluna da lâmina tipo.

Caso ISINAL seja igual a 1, são suprimidos os 4 últimos car tões. Caso KSINAL = 0, são suprimidos os 6 últimos cartões de KELEME/DE- LEME, sendo o elemento NE descrito unicamente pelo cartão 5.

Deve haver 1 cartão tipo 5 para cada elemento.

CARTÃO 8 - CARGAS NORMAIS DISTRIBUIDAS -

As cargas distribuídas são lidas a seguir. Os cartões reu - nem dois a dois o valor do número de elemento e as cargas que atuam nos nodos i, j, k, no sistema local X-y-z de coordenadas. São lidas pela roti na CARGA.

Quanto aos carregamentos e limites de cartões valem as mes mas observações que as do CARTÃO 4 para temperatura.

CARTÃO 8 - CARGA DISTRIBUIDA NORMAL -

FORMATO (2(I5, 3E10.3, 5X))

NE1	1 - 5	NÚMERO DO 1º ELEMENTO LIDO
CA1I	6 - 15	CARGA NORMAL DISTRIBUÍDA: VALORES NO NÓ i,j,k RESPECTIVAMENTE.
CA2I	16 - 25	
CA3I	26 - 35	
ƀƀƀƀƀ	36 - 40	
NE2	41 - 45	
CA1J	46 - 55	IDEM PARA O 2º ELEMENTO LIDO.
CA2J	56 - 65	
CA3J	66 - 75	
ƀƀƀƀƀ	76 - 80	

CARTÃO 9 - CARGA CONCENTRADA -

FORMATO (3I10, F10.3)

NO	1 - 10	NÚMERO DO NÓ ONDE AGE A CARGA CONCENTRADA.
NGLNN	11 - 20	NÚMERO DO GRAU DE LIBERDADE DO NÓ QUE ESTÁ SENDO SOLICITADO.
ICAREG	21 - 30	NÚMERO DO CARREGAMENTO EFETIVO DO QUAL DEVE SER ADICIONADO ESTA CARGA CONCENTRADA.
FN	31 - 40	VALOR DA CARGA NODAL.

CARTÃO 9 - CARGAS CONCENTRADAS -

As cargas concentradas nos nós, no sistema global X - Y - Z são lidas pela subrotina CARCON. São 4 valores por cartão: o 1º representa o número NO do nó onde age a carga; o 2º o número do grau de liberdade NGLNN que está sendo solicitado (de 1 a 6); o 3º representa o número ICAREG do carregamento efetivo ao qual deve ser adicionado esta carga concentrada; e o 4º é o valor FN da carga nodal.

Apenas os nós carregados dispõem de cartões 9; após o último deles, um cartão nulo (seguindo o formato) servirá como FLAG.

CARTÃO 10 - CONDIÇÕES DE CONTORNO -

As condições de contorno são lidas de cartões onde se indicam o número do nó, o número do grau de liberdade envolvido e o valor associado à condição de contorno.

As condições de contorno tem cartão FLAG nulo para indicar o término do carregamento.

CARTÃO 10 - CONDIÇÕES DE CONTORNO.

FORMATO (4I5, 5I2, 3015.6)

NO1	1 - 5	Nº DO 1º NÓ ENVOLVIDO PELA CONDIÇÃO DE CONTORNO.
NO2	6 - 10	IDEM P/ 2º NÓ.
NO3	11 - 15	IDEM P/ 3º NÓ.
ISIS	16 - 20	NÃO EM USO. MODO=0.
IN	23 - 24	=1 O GRAU DE LIBERDADE I É TOTALMENTE RESTRINGIDO, ISTO É, J,K,ALFA,BETA,GAMA SÃO ARBITRÁRIOS. =2 O GRAU DE LIBERDADE I É ESPECIFICADO COM DESLOCAMENTO IGUAL A ALFA; J,K,BETA,GAMA SÃO ARBITRÁRIOS.
I	25 - 26	Nº DO GRAU DE LIBERDADE DO NÓ NO1, NO2, NO3, RESPECTIVAMENTE ENVOLVIDO NA CONDIÇÃO DE CONTORNO. USADO APENAS I.J=K=0. VALORES ASSOCIADOS ÀS CONDIÇÕES DE CONTORNO DE ACORDO COM O TIPO IN.
J	27 - 28	
K	29 - 30	
ALFA	31 - 45	USADO APENAS ALFA,BETA=GAMA=0.0.
BETA	46 - 60	
GAMA	61 - 75	

São gravados em arquivo temporário, para todos elementos, os seguintes valores:

- matriz $|\underset{\approx}{TR}|$ de transformação;

- matriz $|\underset{\approx}{R}|$ de rigidez do elemento;

- vetores de forças nodais;

- matrizes $|\underset{\approx}{B}|$ para os 7 pontos: 3 nós e os 4 pontos de integração;

- Tensões normais térmicas $|\underset{\sim}{TNMT}|$ para os 7 pontos e todos os carregamentos;

- $|\underset{\approx}{\bar{Q}}|$ para todas as lâminas dos 7 pontos;

- matrizes $|\underset{\approx}{C}|$ de propriedades dos 7 pontos;

Após a sobreposição são gravados ainda a matriz de rigidez total e o vetor de forças nodais total.