UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER-FFT, MÉTODOS DE ACELERAÇÃO: - ESTUDO DE SINAIS IONOSFÉRICOS ATRAVÉS DA ANÁLISE DE FOURIER E APLICAÇÃO NO GRUPO DE RADIOCIÊNCIAS DE GASPAR.

ANTÔNIO DE SOUZA RAUEN

FLORIANÓPOLIS

1983

TÍTULO: - "TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER-FFT, MÉTODOS DE ACELERAÇÃO: - ESTUDO DE SINAIS IONOSFÉRICOS ATRAVÉS DA ANÁLISE DE FOURIER E APLICAÇÕES NO GRUPO DE RADIOCIÊNCIAS DE GASPAR."

POR ANTÔNIO DE SOUZA RAUEN

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

Especialidade em "MATEMÁTICA" e aprovada na sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação.

Prof. Plínio Stange(Dr.)-Coordenador.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. José João Espíndola(PHD)-Membro.

Prof. Paul James Otterson(PHD)-Membro.

Prof. Plínio Stange(Dr.)-Orientador.

À esposa Almerinda

e filhas Cleunisse, Clehani, Cleci e Cleni.

A G R A D E C I M E N T O S

- Ao professor Phenix Manusa Ramirez Pardo, pela sugestão do assunto e por seu indispensável acompanhamento na condução da pesquisa.

- Ao professor Plínio Stange (Dr.), pela orientação e pelo inestimável apoio à realização deste trabalho.

- A professora Osiris Turnes, pela inestimável ajuda no desenvolvimento das partes do trabalho que exigiam conhecimentos de programação de computadores.

- Ao professor José João Espíndola (PHD), pelo incentivo e sugestões apresentadas.

- Ao professor Paul Otterson (PHD), pelas sujestões apresentadas.

- À direção do Instituto Estadual de Educação e Secretaria Estadual de Educação que permitiram a realização deste trabalho.

- A todos os amigos e colegas que de qualquer maneira contribuiram para a realização deste trabalho.

"HOMEN SÉCULO XX"

(Antônio de Souza Rauen)

Homen audaz que tentas dominar a natureza
Sem antes em ti mesmo impores o domínio.
Do que te adianta ser dono d'outros mundos
Se neste pregas os meios do extermínio...
Por que semear no orgulho a tua nobreza?
Não sabes que ela desaparece em segundos!

Da tua inteligência, nas leis e teoremas
Brotaram máquinas que até te superaram,
E te tornaram escravo dos seus resultados.
Das surpresas que os mistérios te guardaram
Não te afrontas e ao rumo das leis supremas
Tentas, na procura ao menos, dum significado.

Se de um grupo de fúteis e ignotas ideologias
Não consegues fugir; pregando-as aos semelhantes.
Porque falar em paz, se conquistá-la não sabes!
E, da imposição não a terás num único instante...
Pensas talvez encontrá-la nas guerras frias!
Mas nunca tê-la-ás, ainda que tudo acabes!

Herdaste dos antepassados a "guerra de conquista"
E a tua glória está na conquista d'outros povos...
Mesmo fugindo, levá-la-ás contigo no inconsciente!...
Por que não deixar tudo e seguir ideiais novos?!
Tuas poderosas armas, há quem as resista.
Pois tirou todos e tudo do nada, unicamente.

Não te comoves ao ver a miséria e a fome?
Se o teu semelhante fracassa: -"É recalcado!"
Se reagir, o teu braço emudecerá as suas vozes.
A tua paz estará onde fores glorificado.
Mesmo o tempo que a tudo e a todos consome
Guardar-te-á nos seus ergástulos atrozes.

-Para erguer-se, aproveita todos os momentos...
Sê escravo do amor, foje da perdição!
Ao invés de armas inventa mais remédios.
Contudo, ainda serás útil ao teu irmão.
Messas co'alma o que podes nos ensinamentos.
Amanhã seremos outros... Alheios aos tédios!

R E S U M O

O presente trabalho tem como objetivo o estudo e a aplicação da Análise de Fourier, mais precisamente da transformada rápida de Fourier-FFT, para obter os coeficientes da transformada discreta de Fourier com números de amostragens decomponíveis em fatores primos quaisquer.

O algoritmo usado no desenvolvimento do referido trabalho / foi aquele na versão de Sande (Sande-Gentlemann, 1966) com as subrotinas apresentadas por Singleton (Singleton, Richard C., 1969), ambos devidamente / adaptados ao problema do estudo da emissão e recuperação de sinais ionosféricos desenvolvido pelo Grupo de Radiociências de Gaspar-FURB.

O método apresentado, bem como o programa para computador desenvolvidos e apresentados deram uma economia do tempo de CPU da ordem de 5.291% com relação ao método atualmente em uso pelo grupo acima citado.

A B S T R A C T

In this monograph, we will present a study of Fourier Análise and its aplications, especially that of the fast Fourier transform in the / calculation of the discrete Fourier transform when the number of data points is an arbitrary product of primes.

The algorithm used here is the Sande version(Sande-Gentlemann, 1966) whit subroutine presented by Singleton(Singleton, Richard C., 1969) / both have been adequatly adapted to the study(of the emissions and reception of ionospheric signals) being conducted by the Grupo de Radiociências in Gaspar-FURB.

The technique we present, togethm with the computer program / used, gives an economy of computer time of 5.291% in relation with the methods used previously by the Grupo de Radiociências in Gaspar-FURB

ÍNDICE

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

I N T R O D U Ç Ã O

O campo magnético terrestre afeta o movimento das partículas carregadas da inosfera.

Uma anisotropia é criada na condutividade elétrica atmosféri ca, resultante das forças advindas das cargas em movimento e do campo magnético, desviando-as numa direção perpendicular ao plano formado pela velocidade da partícula e a direção da intensidade do referido campo[01].

O efeito do campo magnético não tem grande importância nas / proximidades da superfície da terra, enquanto que nos pontos mais altos do espaço que rodeia o globo terrestre esse campo é dominante, recebendo aí a denominação de "MAGNETOSFERA". Nas superfícies exteriores da magnetosfera,/ correntemente denominadas de "MAGNETOPAUSA", as correntes elétricas originá rias do vento solar têm o efeito de anular o campo geomagnético.

O campo magnético terrestre equivale em aproximação ao campo magnético gerado por um dipolo colocado no centro da terra, e com momento / magnético de $8{,}05 \pm 0{,}02 \times 10^{25}$Gauss/$cm^2$. Esse dipolo estaria inclinado de $\cong$ 11º em relação ao eixo da terra (Turnes, Osiris 1981 [02]).

Este momento tem o eixo apontado para um ponto da superfície terrestre localizado a 78,5ºS e 111ºE, também conhecido como polo sul magné tico, embora as suas características sejam as do polo norte geográfico. A / referida aproximação pode ser melhorada, deslocando-se o centro do dipolo / 342km na direção 6,5ºN e 161,8ºE geográfica(Ramirez, Phenix M. 1980 [01]).

Algumas regiões da superfície da terra apresentam desvios / de importância considerável no modelo dipolar especificado, sendo esses / desvios denominados de "ANOMALIAS". A figura 01 mostra a distribuição / mundial dos valores da intensidade total do campo magnético da terra, inclusive a maior dessas anomalias, também denominada de "Anomalia Geomagné tica do Atlântico Sul", ou simplesmente "Anomalia Geomagnética Brasileira" com os respectivos valores de campo, anormalmente baixos.

As anomalias podem deformar a superfície fazendo com que os pontos limites subam e desçam de altura (como na anomalia geomagnética brasileira), mas a partícula continua a movimentar-se sobre a superfície, salvo se, por colisões com outras partículas, perder as condições para manter se presa, apeofundando-se mais ainda na atmosfera e entregando a sua energia às partículas da ionosfera. [01]

O fenômeno acima descrito, tem importância considerável na região da Anomalia do Atlântico Sul, no centro do qual está o estado de / Santa Catarina.

Considerando a ionosfera dividida em três camadas (regiões): D, E e F de baixo para cima, onde a concentração da ionização é maior nas camadas superiores , temos:

a) as camadas D e E da ionosfera são responsáveis pela propagação a grandes distâncias e com alto grau de segurança das ondas de muito baixa frequência, VLF (3kHz a 30KHz), baixa frequência, LF (30KHz a 300KHz) e pelo fenômeno de absorção das ondas de alta frequência, HF (3MHz a 30MHz)

b) devido ao fato especificado, o estudo da região anômala/ é de grande importância, tendo em vista o desenho de radioenlaces de alta frequência, bem como para a geração das "Normas Brasileiras de Radiodifu - são" (Turnes, Osiris 1981 [02]).

O alto grau de segurança das comunicações VLF advém da combinação dos fatores:

a) baixas perdas na propagação das ondas;

b) poucas probabilidades de serem elas afetadas pelas perturbações solares, que ocorrem frequentemente, segundo o ciclo solar. Por isso as telecomunicações VLF são de grande importância na radionavegação e nas/ distribuições de tempo e de frequência . [01]

Em função da importância das alterações inosféricas da região provocadas pela anomalia geomagnética brasileira, a seção de pesquisas / do Instituto para Assuntos Espaciais do Centro Tecnológico da Aeronáutica-IAE-CTA firmou um convênio com a Air-Force Cambridge Research Laboratories-AFCRL dos EUA, para desenvolverem um projeto de pesquisa da anomalia, em - pregando uma sonda oblíqua com pulsos eletromagnéticos de muito baixa fre - quência, VLF.

O sondador ionosférico consiste de um transmissor construído pelo próprio CTA-SP e instalado no município de Paula Freitas (PR), o qual envia os sinais pulsados de essencialmente um ciclo de radiofrequên - cia, com ~37KHz, por meio de uma antena vertical para um equipamento receptor instalado em terreno de propriedade da FURB (Fundação Educacional da / Região de Blumenau), localizado no município de Gaspar (SC), a uma distância de 221,5 km da emissão (Fig. 02). Os pulsos são separados por uma função perfeitamente estável.

A antena emissora funciona como uma fonte de ondas esféri - cas situadas sobre a superfície da terra. A emissão se processa por um sistema oscilante formado por uma bobina e a capacidade do mastro da antena,o qual se encontra completamente isolado do chão.

O pulso emitido é cossenoidal, em função de a antena assemelhar-se a um capacitor. [01] e [02]

O circuito gerador de pulso utiliza uma frequência base de / 1MHz, fornecido pelo padrão atômico, o qual por meio de divisões adequadas, admite regulagens de separação dos pulsos de até 1 micro-segundo.

A operação do sistema mantém o período dos pulsos de engatilhamento em 1263 micro-segundos.

A onda refletida pela ionosfera, se divide em outras duas,/ sendo estas denominadas de onda inosférica normal e onda ionosférica extraordinária, onde estas juntamente com a onda de terra, poderão dar pistas / para o estudo da referida anomalia, pistas essas contidas nas deformações/ das mesmas.

As antenas receptoras instaladas em Gaspar (SC) estão ligadas a um aparelho resgatador de ondas de ruído, o qual não deforma o sinal recebido.[02]. Neste tipo de sonda interessa estudar as deformações sofridas pelo pulso, nas camadas baixas da ionosfera, bem como o estudo da altura de reflexão dos pulsos.

O método de análise usado pelo Grupo de Rádiociências de Gaspar necessita da análise de Fourier dos pulsos recebidos, a fim de po - der comparar o espectro de amplitudes do sinal que se propaga pela terra / com o sinal que vem refletido pela ionosfera [02].

A recuperação dos sinais, onda de terra e onda ionosférica/ é feito através de amostras no tempo, pelo aparelho recuperador de informação.

Portanto, o estudo do espectro é feito com base no teorema da amostragem, transformada discreta de Fourier(DFT) e transformada rápida de Fourier(FFT), sendo esta última um método de grande rapidez e eficiência para computar os coeficientes da transformada discreta de Fourier.

O número de amostras recolhido pelo aparelho recuperador de informação é de tamanho considerável, e além disso não é fatorável em fatores iguais a 2, unicamente, mas sim em fatores primos arbitrários.

O estudo da forma da onda recuperada pelo aparelho resgatador é feito através da transformada de Fourier, onde os coeficientes representam as variações sofridas pela mesma.

A transformada de Fourier é obtida através da amostragem de 630 pontos, número esse composto por fatores primos arbitrários. Essa transformada é feita com base em algoritmos já existentes mas não de grande aplicação, visto não se encontrarem desenvolvidos na relação bibliográfica em que nos fundamentamos para elaborar o presente trabalho.

No capítulo I apresentamos o nosso problema básico, enfocando-o nas suas características mais importantes.

No capítulo II apresentamos um relato dos estudos e algoritmos já existentes, no que se refere as aplicações do nosso problema.

No capítulo III fazemos o estudo teórico do problema, abordando-o nos seus aspectos matemáticos, bem como formulação dos resultados.

No capítulo IV usamos as subrotinas apresentads por Singleton (Singleton, Richard C. 1968 [08]), adaptando-as de modo a se tornarem aplicáveis ao nosso problema, ou seja das 630 amostras que compõem o mesmo, apenas 21 delas são diferentes de zero. Apresentamos os resultados obtidos através do computador, e, introduzimos um "PRUNNING" de zeros, nas referidas subrotinas, para diminuir o tempo necessário para a computação dos resultados. Esse pruning é desenvolvido com base naquele apresentado por Markel (Markel, 1971 [31]).

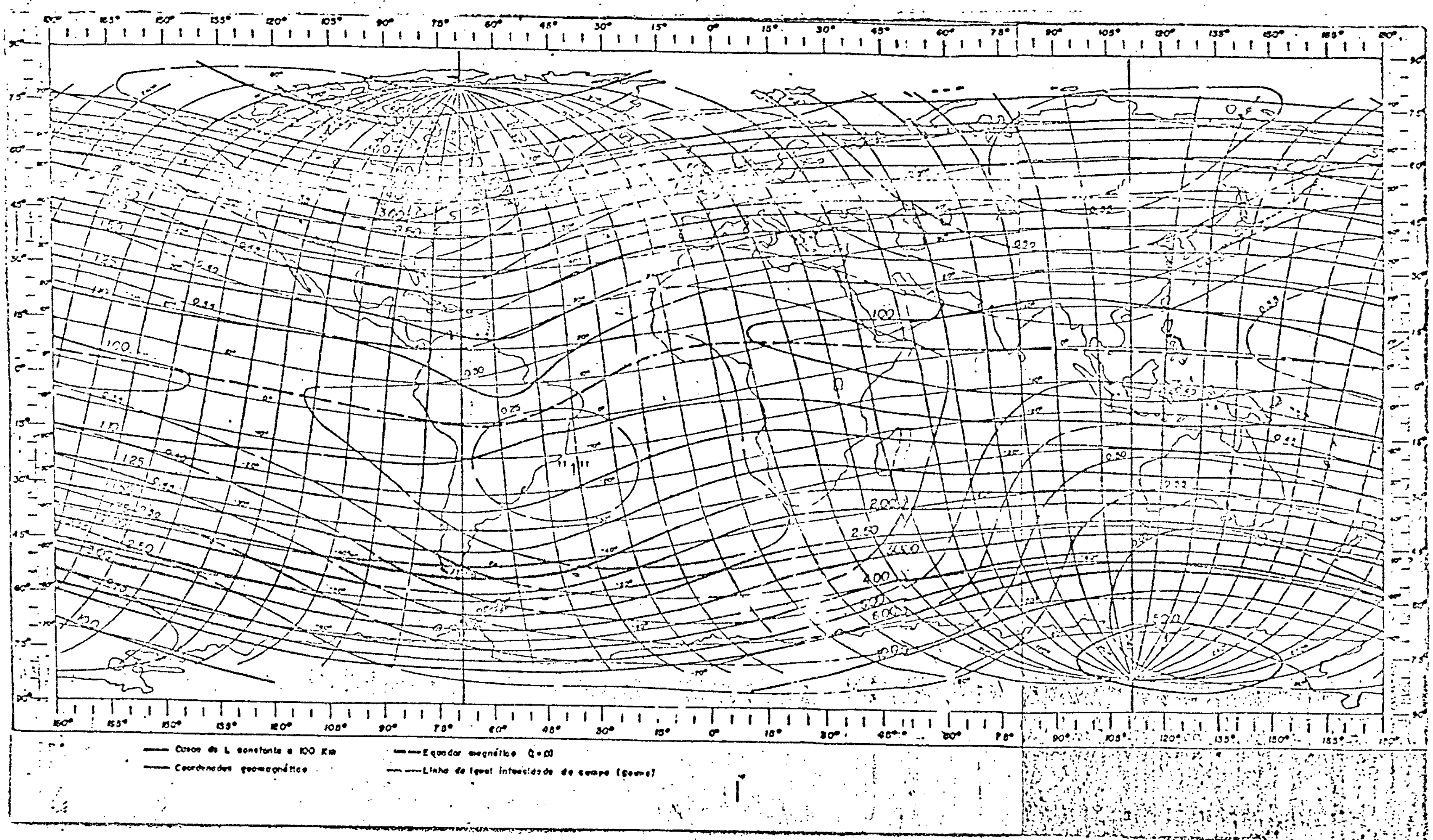


Fig. 1 - Mapa mostrando os valores do campo geomagnético terrestre, destacando as anomalis existentes. 1 representa a "ANOMALIA GEOMAGNÉTICA BRASILEIRA".

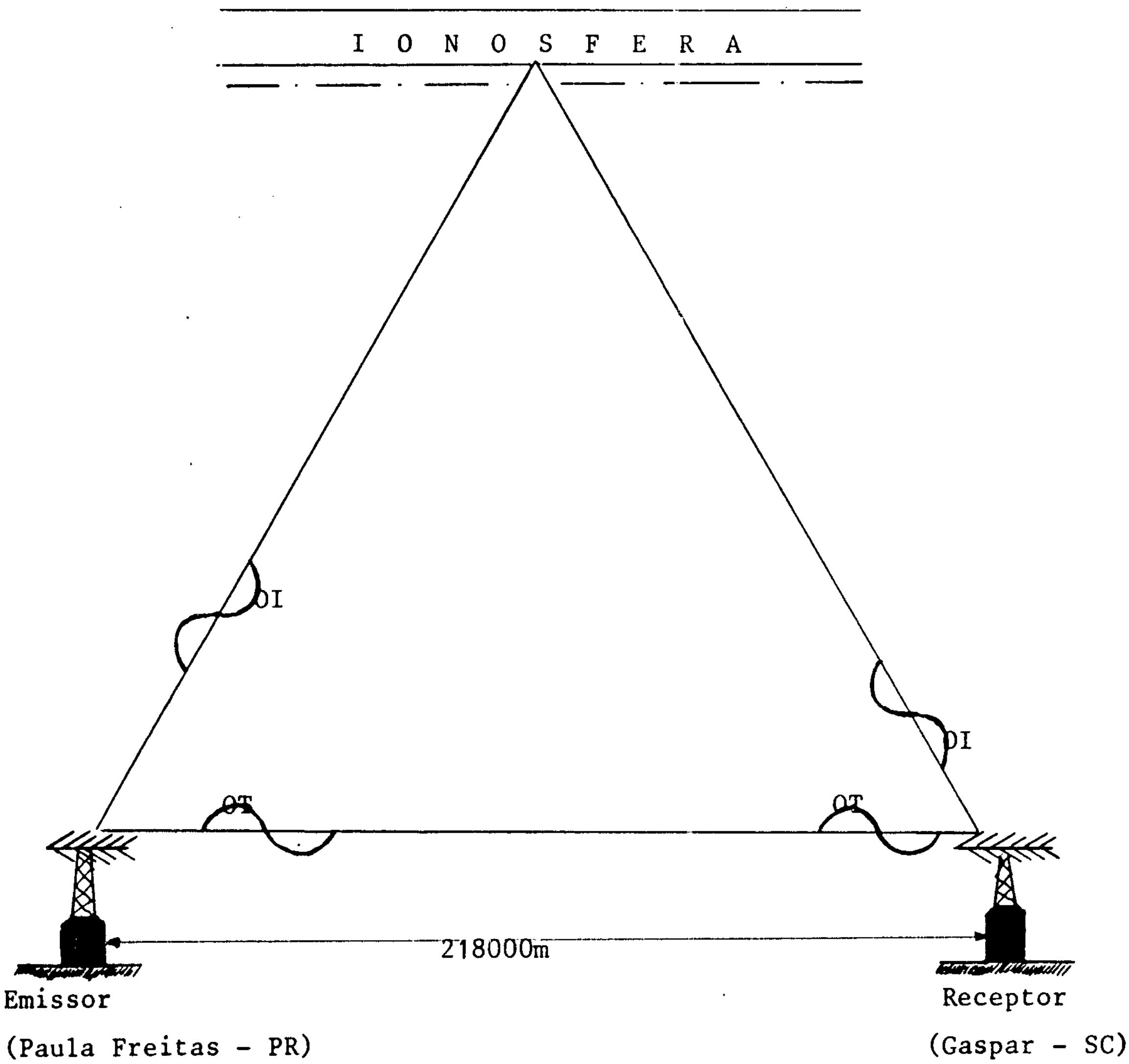


Fig. (2) - Técnica VLF envolvendo pequenas distâncias.

(OT - onda de terra, OI - onda ionosférica).

OBJETIVOS DO TRABALHO

Os objetivos do presente trabalho resumen-se a:

1 - Determinar, aplicando a análise de Fourier, mais precisamente a transformada rápida de Fourier, o espectro de amplitudes do pulso/ recebido para posteriores comparações com os resultados práticos e com aqueles obtidos em [02].

2 - Estudar, desenvolvendo uma adaptação para aplicar um algoritmo da transformada rápida de Fourier, considerando que a quantidade de amostras é um número composto por fatores primos arbitrários.

3 - Desenvolver um programa, com base nas subrotinas existentes, para computar os coeficientes da DFT (Discrete Fourier Transform), bem/ como desenvolver também a parte teórica.

4 - Prever um pruning de zeros com o objetivo de diminuir o tempo de máquina.

Não pretendemos efetuar um estudo completo e exaustivo sobre/ o desenvolvimento do algoritmo, mas somente a parte que interessa ao Grupo / de Radiociências de Gaspar.

Os algoritmos usados são objeto de estudos detalhados desenvolvidos pelos pesquisadores citados no capítulo II deste trabalho, com base nos dados bibliográficos mencionados.

CAPÍTULO I

1.1 - Descreveremos o problema principal, objeto do nosso estudo e desenvolvimento do nosso trabalho, bem como apresentaremos o resumo do estudo feito por Osíris (Turnes, Osiris 1981 [02]).

1.1.1 - Descrição do Problema.

O nosso problema consiste de um pulso cossenoidal de ~40Khz na portadora, repetido 792 vezes por segundo.

A repetição do pulso é determinada por dois motivos técnicos:

a) a cada pulso emitido, deve ter sido possível registrar no receptor o pulso repetido pela inosfera;

b) o capacitor, representado pela antena emissora deve ter o / tempo suficiente para recarregar-se entre a ocorrência de dois pulsos consecutivos.

Uma representação matemática adequada para os pulsos repetidos periodicamente é dado pelo desenvolvimento em série de Fourier da função f definida por

$$f(t) = \begin{cases} \cos\omega t, & \text{para } 0 < t < d \\ 0, & \text{para } d < t < T \\ f(t + T) & \end{cases} \qquad (2.1)$$

$d = 1/f = 2,5 \times 10^{-5}$seg

$T = PRP = 1/RP = 1\ 263$ micro-segundos

A função f(t) satisfaz as condições de Dirichlet, logo é representável em série de Fourier[02]. Figura(I.1)

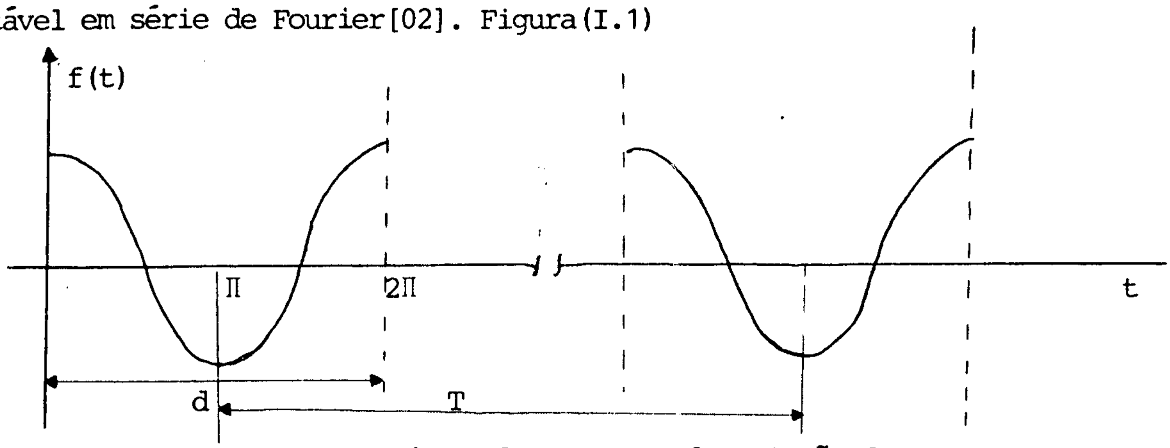


Figura 1.I - Esboço do processo de emissão do pulso.

Temos então

$$f_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\omega t}, \quad i = 1,2,3,\ldots. \tag{2.2}$$

onde j representa $\sqrt{-1}$ (unidade imaginária dos complexos),

$$C_n = (d/T)^2 . \frac{n\Pi \ \mathrm{sen}(n\ \Pi d/T)}{\Pi^2 - (n\ \Pi d/T)^2} \tag{2.3}$$

C_n sendo o coeficiente de Fourier do pulso emitido, f(t).

1.2 - Estudo da Curva do Espectro de Amplitude do pulso e - mitido.

Um estudo detalhado da curva do espectro de amplitude desse pulso foi feito em [02], no qual foram considerados:

a) estudo do gráfico $|C_n|$ x RP;

b) pontos críticos calculados através das derivadas primeira e segunda de C_n;

c) simetria;

d) domínio e imagem, chegando a

$$|C_n| = \underbrace{\left| (d/T)^2 . \frac{x\Pi}{\Pi^2 - (x\Pi d/T)^2} \right|}_{\text{limitante}} \ \underbrace{|\mathrm{sen}(x\Pi d/T)|}_{\text{oscilante}} \tag{2.4}$$

onde: - domínio de $|C_x| = R^+$

domínio de $|C_n| = N$,

imagem de $|C_x| = [0, |C_x|_{máx}] = [0; 0{,}1022 \times 10^{-1}]$

imagem de $|C_n| = [0, |C_x| máx]$;

e) determinação do espectro de amplitudes da função periódica $f(t) = \cos\omega t$, [02]

1.3 - Processo de Amostragem

1.3.1 - O processo de amostragem de um valor observável é feito a cada 2×10^{-6} segundos, de maneira que obtemos rigorosamente 631,5 amostras. Mas pelo teorema da amostragem, o número de amostras deve ser inteiro, o que nos leva a não utilizar o valor acima mencionado. As amostras obtidas, compreendem um único período da f(t).

1.3.2 - O número de amostras 631, embora inteiro é também / primo. No entanto, podemos desenvolver a DFT (Discrete Fourier Transform) / através da FFT (Fast Fourier Transform), mesmo o número sendo primo, con - forme [09]. Como esse método apresenta dificuldades consideráveis na implementação do algoritmo e, no nosso caso, um número de amostras como 630 que é de fatoração boa e não altera significativamente a frequência de um har - mônico, tomamos 630 amostras no lugar de 631, ou seja:

a) para N=631,5 amostras: 55º harm. = 43,5435KHz

56º harm. = 44,3352KHz

o que resulta numa difernça de 0,7917KHz;

b) para N=630 amostras: 55º harm. = 43,648KHz

56º harm. = 44,441KHz

o que resulta numa diferença da ordem de 0,79KHz.

A diferença entre o modelo, valor real do 55º harmônico e o 55º harmônico / que pretendemos usar é de 0,104KHz, a qual é bem menor do que 0,79KHz e não/ influi no cálculo dos harmônicos de interesse no estudo. Portanto, usaremos o valor N = 630 amostras.

1.3.3 - Aplicação do algoritmo para calcular os coeficientes da DFT através da FFT. Nosso número de amostras N é decomponível em fatores primos arbitrários.

Aplicando os algoritmos desenvolvidos por Cooley-Tukey (Cooley-Tukey, 1965,[03]) e Sande (Sande-Gentlemann, 1968, [08]), e, com base / nas subrotinas desenvolvidas por Singleton (Singleton, Richard C., 1969,[16]) computamos os coeficientes da DFT através da FFT.

1.3.4 - Desenvolvimento do programa para computador. Como a / nossa amostragem consiste de 630 pontos (valores amostrados), dos quais apenas 21 são diferentes de zero e, o que é mais importante, trabalhamos com/ amostras de Nyquist. Por isto, tentamos a introdução de um pruning de zeros/ para com isso diminuir o tempo de máquina na execussão do referido programa.

CAPÍTULO II

2.0 - Introdução e Justificativa.

Devido a sua alta eficiência, a transformada de Fourier é um instrumento universalmente aceito nos campos mais variados do conhecimento humano e dentro da análise de sinais das teorias modernas.

A determinação dos coeficientes de Fourier, através da transformada contínua, usando os modernos métodos computacionais, é feita através da transformada discreta de Fourier, a qual se caracteriza pela função/ amostrada, de acordo com o teorema da amostragem [13]. No entanto, mesmo / com o estágio alcançado no tocante à velocidade dos computadores atuais, a determinação dos coeficientes da DFT consome um tempo considerável. Para / sanar esse problema Cooley-Tukey (Cooley-Tukey, 1965, [03]), desenvolveram um algoritmo de extrema rapidez e considerável eficiência para computá-los, o qual denominaram de transformada rápida de Fourier (The Fast Fourier / Transform - FFT).

Desde o aparecimento do algoritmo de Cooley-Tukey até o presente momento, muitos estudiosos desenvolveram e publicaram os mais variados algoritmos relativos à FFT.

De posse de alguns desses algoritmos citados, e mencionados na relação bibliográfica, procuramos salientar aqueles que mais diretamente se adaptam ao estudo do nosso problema, de características particulares, / descrito no capítulo I.

2.1 - Da Transformada de Fourier Contínua a Discreta.

2.1.1 - Definição. - Seja a função $h:[a, b] \longrightarrow R$ tal que:

i) h é limitada, então ela é integrável se o supremo das / somas inferiores for igual ao ínfimo das somas superiores;

ii) h não é limitada, então ela é integrável se, e somente/ se, o intervalo $[a, b]$ puder ser decomposto em um número finito de intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_k$, com $I_k = [a_k, b_k]$, tais que para todo $\delta > 0$ e $\delta' > 0$ a função h é limitada e integrável em $[a_{k+\delta}, b_{k+\delta'}]$ e os limites

$$\int_{a_k}^{b_k} h(t)dt = \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta' \to 0}} \int_{a_{k+\delta}}^{b_{k+\delta'}} h(t)dt \text{ existem.}$$

2.1.2 - Definição. - Uma função é $\mathcal{L}^1$ quando h e $|h|$ forem / integráveis no sentido da definição 2.1.1 em cada intervalo $[-M, N]$ e os / limites

$$\lim_{-M,N \to \infty} \int_{-M}^{N} h(t)dt \quad \text{e} \quad \lim_{-M,N \to \infty} \int_{-M}^{N} |h(t)|dt \text{ existem [18].}$$

2.1.3 - Definição. - Se $h:R \longrightarrow C$ for uma função $\mathcal{L}^1$ a sua transformada de Fourier $H:R \longrightarrow C$ será definida por

$$\mathcal{F}[h(t)] = H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{j\omega t}dt, \text{ com } \omega = 2\Pi f \qquad (01)$$

2.1.4 - Observação.- Usando a integral de Lebesgue podemos / trabalhar com L^1 no lugar de $\mathcal{L}^1$, onde L^1 é um espaço vetorial normado com norma $||h||_1 = \int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt$, além de ser um espaço de funções integráveis a Lebesgue em R, o espaço vetorial é completo nessa norma (usando a integral de Lebesgue).

Dada uma função h em $\mathcal{L}^1$ nem sempre $\mathcal{F}[h(t)]$ está em $\mathcal{L}^1$. Um outro espaço usado também para definir a transformada de Fourier é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis de suporte compacto C_0^∞. No entanto, nesse espaço pode ocorrer que $\mathcal{F}[h(t)]$ não tenha suporte compacto.

Um bom espaço para o estudo da transformada de Fourier, no / qual se introduz algumas coisas mais gerais do que as funções, chamadas distribuições, é o espaço $\mathcal{S}$, o qual é um subconjunto de $\mathcal{L}^1$ [18].

2.1.5 - Definição.- Uma função $h:R \longrightarrow C$ é de decrescimento rápido se ela for infinitamente diferenciável e se

$$\lim_{|x| \to \infty} x^m D^n f(x) = 0, \text{ para todo } m,n \text{ inteiros e } \geq 0.$$

O conjunto das funções de decrescimento rápido é designado / por $\mathcal{S}$.

A demonstração e o estudo da transformada de Fourier no espaço $\mathcal{S}$ estão feitos em [18], pags. 196-206.

2.1.6 - Teorema.- Sejam $h:R \longrightarrow C$ uma função de $\mathcal{S}$ e $H(f)$ a sua transformada de Fourier. Então

$$\mathcal{F}'[H(\omega)] = h(t) = (1/2\ )\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t}d \qquad (02)$$

onde a expressão (02) representa a transformada inversa de Fourier.

2.1.7 - Observação. - A transformada de Fourier é um instrumento de alta eficiência, universalmente aceito na análise moderna. No entanto, não há unanimidade na literatura relativa a definição da integral de Fourier, bem como da sua inversa. Das definições acima, tiramos que,

$$H(\omega) = c_1\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt, \text{ com } \omega = 2\Pi f \qquad (03)$$

$$h(t) = c_2\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t}d \qquad (04)$$

onde os coeficientes c_1 e c_2 assumen valores diferentes, que dependem do / uso. Quando $c_1 = 1$; $c_2 = (1/2\Pi)$, ou $c_1 = (1/2\Pi)$; $c_2 = 1$, $c_1 = c_2 = (1/2\Pi)$. Em suma, as equações (03) e (04) são válidas somente quando $c_1c_2 = (1/2\Pi)$.

Esta questão poderá ser resolvida através da relação existente entre a transformada de Fourier, a transformada de Laplace e o teorema / de Parseval. Para escapar da contradição existente entre essas relações, um caminho lógico é definir o par de transformadas de Fourier por [07]:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\Pi ft}dt \qquad (05)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\Pi ft}df, \qquad (06)$$

onde t representará a função no domínio do tempo e f representará a mesma / no domínio da frequência.

um i

2.1.8 - Propriedades da Transformada de Fourier.

Dentre as várias propriedades colocadas e demonstradas em / [07], [13] e [18] podemos destacar duas delas em função da aplicabilidade / das mesmas no nosso trabalho.

2.1.8.1 - Linearidade - O sistem é aditivo e homogêneo.

$$\mathcal{F}\left[h(t) + g(t)\right] = \mathcal{F}\left[h(t)\right] + \mathcal{F}\left[g(t)\right]$$

$$\mathcal{F}\left[\alpha h(t)\right] = \alpha \mathcal{F}\left[h(t)\right]$$

2.1.8.2 - Produto de Convolução.- Sejam h(t) e g(t) duas funções quaisquer dadas. O produto de convolução, simbolicamente representado / por $f(t) = h(t)*g(t) = (h*g)(t)$ é definido pela função

$$(h*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - y)g(y)dy \qquad (09)$$

2.1.9 - Relação entre a Transformada de Fourier Contínua e / a Transformada de Fourier Discreta.

Sejam h(t) e H(f), como definidas em (06) e (07), respectivamente. Quando amostramos h(t) em intervalos de T segundos, a expansão de / (06) pode ser feita em relação aos pontos amostrados $h_k = kT$, com / $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Sendo $F = 1/T$, temos que

$$h(kT) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\Pi fk/F}df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nF}^{(n+1)F} H(f)e^{j2\Pi fk/F}df, \qquad (10)$$

onde T representa o espaço compreendido entre duas amostras consecutivas e F representa duas vezes a frequência de Nyquist (1/2T).

Pela periodicidade de $e^{j2\Pi fk/F}$ de período F e fazendo as respectivas trocas de variáveis, podemos escrever a expressão (10), como:

$$h(kT) = \int_0^F H_p(f)e^{j2\Pi fk/F}df, \qquad (11)$$

onde, $$H_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(f + nF) \qquad (12)$$

e p denotará a função periódica formada pela sobreposição da função periódica substituída por todos os múltiplos do período fundamental. A expressão/ (12) está representada graficamente em [21].

$H_p(f)$ representa uma versão de $H(f)$ distorcida em consequência do "ALIASING" [21], onde este ocorre na frequência de Nyquist $F/2$.

Como $H_p(f)$ é função periódica de $H(f)$, pelo teorema de Fourier ela tem uma expansão em série de potências $e^{-j2\Pi f/F}$, cujos coeficientes / são dados por $(1/F)h(kT)$. Então

$$H_p(f) = (1/F)\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)e^{-j2\Pi fk/F}, \qquad (13)$$

onde a equação (13) representa a transformada de Fourier não finita.

Considerando a amostragem no domínio da frequência, nos pontos $f_n = m\Delta f$, onde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ e $\Delta f = 1/T_o$, reescrevemos (13), como

$$h_p(m\Delta f) = T\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)e^{-j2\Pi mk/T_oF} \qquad (14)$$

Fazendo $T_oF = N$, onde N é inteiro, usando o fato de que / $e^{-j2\Pi mk/N}$ é função periódica de período N, a expressão (14) pode ser representada por

$$h_p(m\Delta f) = T\sum_{k=0}^{N-1} h_p(kT)e^{-j2\Pi mk/N}, \qquad (14a)$$

onde

$$h_p(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h((t + nT_o)T), \qquad (14b)$$

e, o somatório em (14b) é dado pelos valores amostrados de

$$h_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t + nT_o) \qquad (14c)$$

a qual é função periódica de t, com período T_o, e forma $h(t)$ do mesmo modo que $H_p(f)$ forma $H(f)$ [15] e [21].

Substituindo $T = T_o/N$ por $1/F$ a expressão (14a) pode ser / reescrita como

$$H_p(m\Delta f) = 1/N\sum_{k=0}^{N-1} T_oh_p(kT)e^{-j2\Pi mk/N} \qquad (14d)$$

2.1.9 - Relação entre a Transformada de Fourier Discreta e a Transformada Contínua, numa Sequência de Amostras de Nyquist.

Uma propriedade importante que torna a DFT eminentemente útil advém da relação existente entre a DFT de uma sequência de amostras de Nyquist e a transformada de Fourier de uma forma de onda contínua representada pelas amostras de Nyquist. Consideremos a função h(t) com banda de frequência limitada, cujas amostras de Nyquist h(k) estão definidas no intervalo $0 \leq t \leq NT$.

$$h(t) \doteq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\operatorname{sen}(\Pi(t - kT)/T)}{(\Pi(t - kT)/T)} \qquad (17)$$

onde T repreresenta o espaço entre duas amostras consecutivas [05]. Uma repetição periódica de h(t) pode ser construída, com as mesmas amostras de / Nyquist, no intervalo $0 \leq t \leq NT$, i.e.,

$$h_p(t) = \sum_{l} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \frac{\operatorname{sen}(\Pi(t - kT - lNT)/T)}{(\Pi(t - kY - lNT)/T)} \qquad (18)$$

e h(t) tem a transformada de Fourier H(f) especificada nas frequências discretas pelos coeficientes da série de Fourier complexa, $h_p(t)$. Então

$$\frac{H(m/NT)}{NT} = D_m = (1/NT) \int_0^{NT} h_p(t) e^{-j2\Pi nt/NT} dt$$

$$= (1/NT) \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\Pi nkT/NT}, \qquad (19)$$

onde $|n| \leq N/2$, devido ao espectro de limitação da largura da faixa implicitamente pressuposta e o teorema da amostragem [13] que ressalta a validade das amostras de Nyquist [05].

$$\frac{H(m/NT)}{NT} = D_m = N(X(n)), \text{ onde } \begin{array}{ll} m = n, & \text{para } n = 0,1,\ldots, q < N/2 \\ m = N-n, & n = 0,-1,\ldots,-q > -N/2. \end{array} \qquad (20)$$

$$\frac{H(m/NT)}{NT} = N[X(n)/2] \text{ para } m = N/2 \qquad (21)$$

As equações (20) e (21) dão diretamente a relação entre os / coeficientes da DFT e a transformada de Fourier dada pela função definida / em (17), [05].

2.2.1 - Transformada de Fourier Discreta e Finita.

Quando uma função está amostrada [07], [13], [14] e [20], ou o sistema prescisa ser analisado em um computador digital, necessitamos da transformada de Fourier discreta e finita. Ainda que muitas das proprieda - des da transformada contínua sofram modificações resultantes das restrições impostas pela DFT, esta precisa operar precisamente sobre as funções amos - tradas e definidas em um intervalo finito.

A DFT finita aplicada a funções amostradas é definida por, /

$$H(n/NT) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)e^{-j2\Pi nk/N}, \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \qquad (23)$$

onde $H(n/NT) = H\left[(rN + n)/NT\right]$, e $h(kT) = h\left[(rN + k)T\right]$, para $r=0,\pm1,\pm2, \ldots$

Ambas são periódicas no domínio do tempo e da frequência, / respectivamente.

$H(n/NT)$ representa o n-ésimo coeficiente da DFT e $h(kT)$ representa a k-ésima amostra da série de tempo, a qual consiste de N amostras e $j = \sqrt{-1}$.

Enquanto $h(kT)$ pode ser um número real ou complexo, $H(n/NT)$ sempre será complexo [07] e [20].

A transformada de Fourier discreta, finita e inversa existe, como definida em [07].

$$h(kT) = (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} H(n/NT)\, e^{+j2\Pi nk/N}, \text{ com } k=0,1,\ldots,N-1 \qquad (24)$$

a qual é periódica com período de N amostras de $h(kT)$, propriedade essa, / resultante da natureza periódica de $e^{j2\Pi nk/N}$.

2.2.1.1 - Observação. - Para simplificar a notação podemos / fazer: $H(n/NT) = X(n)$, $h(kT) = x(k)$ e $W_N = e^{-j2\Pi/N}$. Então o par de / transformadas de Fourier torna-se:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)W_N^{nk}, \quad \text{para } n = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (25)$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n)W_N^{-nk}, \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (26)$$

onde a equação (26) representa a função no domínio do tempo e (25) representa a mesma no domínio da frequência. [07] e [14].

2.2.2 - Propriedades da DFT.

Uma das propriedades mais importantes que torna a transformada de Fourier discreta, eminentemente útil é a relação de convolução discreta.

2.2.2.1 - Teorema.- Se $x(iT)$ e $h(k-i)T$ são duas sequências tendo respectivamente, a transformada de Fourier $X(n/NT)$ e $H(n/NT)$, então

$$y(kT) = \sum_{i=0}^{N-1} h(iT)x\left[(k - i)T\right],$$ tem a trnaformada de Fourier

$$(1/N) \sum_{n=0}^{N-1} X(n/NT)H(n/NT)e^{j2\Pi nk/N} \qquad (27)$$

O teorema está demonstrado em [07] e [14], demonstração essa que nos leva a concluir que a convolução de duas funções periódicas de / período N é igual ao produto das respectivas transformadas discretas de Fourier dessas funções. Ou seja, a convolução no domínio do tempo corresponde a multiplicação no domínio da frequência e vice-versa.

A convolução discreta requer que ambas as funções sejam amostradas e também periódicas com período de N amostras cada. A convolução/ discreta é um caso especial da convolução contínua.

2.2.2.1 - Observação - Todas as demais propriedades da transformada discreta de Fourier são idênticas àquelas da transformada contínua/ de Fourier e estão demonstradas em [07], [14], [25] e [26].

2.3 - Transformada Rápida de Fourier.

A transformada rápida de Fourier (The Fast Fourier Transform-FFT, [04]), é um algorítmo descrito por Cooley-Tukey(Cooley-Tukey, 1965 [03]) para computar os coeficientes da DFT das séries de tempo com dados amostrados.

A vasta aplicação deste algoritmo nas técnicas computacionais/ usadas na análise espectral digital, simulação de filtros e campos correlacionados, levou um grande número de pessoas a estudarem o referido algoritmo / nos últimos tempos.

Em razão de ser uma tácnica de alta eficiência ela tem uma longa e interessante história descrita por Cooley (Cooley-Lewis and Welch, 1967, [04]).

A eficiência da FFT está nos procedimentos usados para computar os coeficientes da DFT através de iterações, que resultam em consideráveis economias de tempo de computação. A iteração não é intuitivamente óbvia, talvez por esse motivo, durante algum tempo, esse método não despertou grande / interesse.

Além da economia de tempo, a FFT apresenta uma considerável redução do erro de aproximação dos coeficientes da DFT, quando calculados pelo/ método direto [05].

Especificamente, quando a série de tempo consiste em N dados / amostrados, onde $N = 2^m$ amostras, o número de operações é reduzido para / $(2N)\log_2 N$ operações aritméticas (multiplicações, adições e subtrações), sendo que o cálculo direto (métodos convencionais) requer N^2 operações aritméticas.

As aplicações do método da redução do tempo de computação / são testados com sucesso nos mais variados campos do conhecimento humano, destacando-se entre eles:

a) - computação do espectro de potências e autocorrelação de funções com dados amostrados;

b) - simulação de filtros;

c) - reconhecimento de parâmetros pelo uso da DFT-bidimensional;

d) - computação do espectro duplo e funções de covariança cruzada;

e) - decomposição de funções convolvidas.

Podemos verificar as vantagens do algoritmo descrito, através da tabela mostrada em [05], na qual estão calculados os números de operações que envolvem o cálculo direto e aquele feito através da FFT.

O algoritmo da FFT para $N = 2^m$ simplesmente representa um procedimento simples para fatorar uma matriz N x N em m matrizes, também N x N onda cada matriz fatorada tem a propriedade de minimizar o número de multiplicações e adições complexas.

Supondo que o número de multiplicações seja proporcional ao tempo de computação, a razão de aproximação do cálculo direto para o da FFT, no tempo de computação, é dado por: (veja [07] e [20])

$$N^2/(Nm/2) = 2N/m, \qquad (28)$$

onde N representa o número de amostras e m, uma potência de 2.

2.3.2 - Formas Convencionais da FFT.

As fórmulas convencionais da DFT, bem como da sua inversa, definidas por (23) e (24), são de forma semelhante para que o procedimento da máquina, ou subrotina, seja capaz de computar uma, usando a outra através da simples troca de X(n) por x(k) com os respectivos fator de escala e troca de sinal.

As duas formas básicas da FFT, cada uma com as suas modificações, são no entanto, equivalentes. De qualquer maneira, é bom fazer uma distinção entre as referidas, a fim de estudá-las separadamente [05].

Quando desenvolvemos a fórmula segundo os valores de k, denominamos a transformada de "DECIMAÇÃO NO TEMPO". Este desenvolvimento foi apresentado por Cooley (Cooely-Tukey, 1965 [03]). Por outro lado, quando desenvolvemos a fórmula segundo os valores de n temos a "DECIMAÇÃO EM FREQUÊNCIA". Esse desenvolvimento foi apresentado por Sande (Sande-Tukey, [07]).

2.3.3 - Decimação no Tempo.

Uma série de tempo x(k) tendo N amostras, pode ser dividida / em outras duas séries y(k) e z(k), onde cada uma delas representa somente a metade dos N pontos amostrados, ou seja, possui N/2 pontos amostrados.

Seja $y(k)$ formada somente pelos pontos de índice par / $x_0(k)$, $x_2(k)$, ..., $x_N(k)$, e seja $z(k)$ formada somente pelos pontos de índice ímpar $x_1(k)$, $x_3(k)$, ..., $x_{N-1}(k)$.

Representamos essas funções, por

$$\begin{aligned} y(k) &= x(2k) \\ z(k) &= x(2k+1) \end{aligned} \qquad \text{com } k = 0, 1, \ldots, N/2 - 1 \qquad (29)$$

A DFT dada por (29) é

$$\begin{aligned} B(n) &= \sum_{k=0}^{(N/2)-1} y(k) e^{-j4\Pi nk/N} \\ C(n) &= \sum_{k=0}^{(N/2)-1} z(k) e^{-j4\Pi nk/N} \end{aligned} \qquad \text{com } n = 0, 1, \ldots, (N/2)-1 \qquad (30)$$

Desenvolvendo essas expressões, chegamos atransformada procurada, $X(n)$. [05]

$$X(n) = B(n) + e^{-j2\Pi n/N}.C(n) \qquad 0 \leq n \leq N/2 \qquad (31)$$

Para os valores de $n > N/2$ a DFT de $B(n)$ e de $C(n)$ se repetem periódicamente assumindo os mesmos valores que para $n < N/2$.

Substituindo $n + N/2$ na equação (31), temos:

$$X(n + N/2) = B(n) + e^{-j2\Pi\left[(n+N/2)/N\right]} C(n)$$

$$= B(n) - e^{-j2\Pi n/N} C(n), \qquad 0 \leq n \leq N/2 \qquad (32)$$

Aplicando as simplificações de 2.2.1.1, temos:

$$\begin{aligned} X(n) &= B(n) + W^n C(n) \\ X(n+N/2) &= B(n) - W^n C(n) \end{aligned} \qquad 0 \leq n \leq N/2 \qquad (33)$$

Por (33) os primeiros N/2 e os últimos N/2 pontos da DFT de $x(k)$, sequência composta por N pontos amostrados, podem simplesmente ser obtidos pela DFT de $y(k)$ e de $z(k)$, ambas com N/2 pontos amostrados [05].

Esta redução pode ser efetuada em cada função que tenha o número de amostras N divisível por 2.

Assim, se $N = 2^m$ podemos fazer m dessas reduções aplicando as fórmulas (29) e (33), fazendo primeiro para N, depois para N/2, e assim sucessivamente, a- até obtermos a função "ponto dois", que é a última das divisões possíveis. A função "ponto um", é naturalmente, a própria função.

A fig. (2.I) ilustra a transformada discreta de Fourier, e é denominada de"gráfico de fluxo de sinal", com as operações complexas, multiplicações e adições, completamente reduzidas [07].

Em geral, $N\log_2 N$ adições complexas e $(N/2)\log_2 N$ multiplicações complexas são requeridas para computar a DFT de uma sequência de N pontos amostrados.

De acordo com a figura (2.I), a computação da DFT pode ser feita "in loco" isto é, podemos escrever todos os resultados intermediários sobre a sequência de dados originais, e escrevendo a resposta final sobre os resultados intermediários. Portanto, nenhum armazenamento se faz necessário,/ além daqueles requeridos pelos N números complexos originais [05] e [08].

Podemos fazer diversas manipulações obtendo várias formas diferentes para o algoritmo da decimação no tempo, todas elas com novas ordena - ões, ou seja;

a) - amostras no tempo naturalmente ordenadas com os coeficientes na ordem do "bit-inverso";

b) - amostras e coeficientes da DFT normalmente ordenados no tempo, sendo / que nesta ordem a computação não pode ser feita "in loco";

c) - amostras no tempo na ordem do "bit inverso" e os coeficientes normalmente ordenados.

Essas manipulações são efetuadas em função da aplicação do "bit inverso", onde as amostras são armazenadas na ordem inversa, i.e., / $x_4 = x_{(100)_2}$ é armazenado na posição $(011)_2 = 3$. (veja [05], [07] e [20]).

2.3.4 - Decimação em Frequência.

A série de tempo $x(k)$ tem a DFT $X(n)$, ambas contendo N amostras.

Dividimos $x(k)$ em duas sequências tendo N/2 pontos amostrados cada uma delas. A primeira sequência é formada pelos primeiros N/2 pontos, / ou seja $y(k)$, enquanto que a outra é formada pelos últimos N/2 pontos, $z(k)$, [05] e [07], i.e.,

$$\begin{aligned} y(k) &= x(k) \\ z(k) &= x(k + N/2) \end{aligned} \qquad k = 0, 1, \ldots, (N/2) - 1 \tag{34}$$

Os pontos N, da sequência $x(k)$ são dados por

$$X(n) = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} y(k)e^{-j2\Pi nk/N} + z(k)e^{-j2\Pi n(k+N/2)/N} \tag{35}$$

Considerando os pontos pares e ímpares da transformada, separadamente, temos

$$\begin{aligned} R(n) &= X(2n) \\ S(n) &= X(2n + 1) \end{aligned} \qquad 0 \leq n \leq n/2 \tag{36}$$

Para computar o espectro par de (36) usamos

$$R(n) = X(2n) = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} \left[y(k) + z(k)\right]e^{-j2\Pi nk/(N/2)}, \tag{37}$$

enquanto que, para computar o espectro ímpar, usamos a relação

$$S(n) = X(2n+1) = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} \left[y(k) - z(k)\right]e^{-j2\Pi k/N}.e^{-j2\Pi nk/(N/2)} \tag{38}$$

Pelas relações (37) e (38) podemos concluir que a DFT de uma sequência $x(k)$ com N amostras, pode ser determinada como segue: - Para a / transformada dos pontos pares enumerados, podemos computar como N/2 pontos/ da DFT de uma sequência de combinações simples dos primeiros N/2 com os últimos N/2 pontos de $x(k)$.

E,para a transformada dos ponto ímpares enumerados podemos / computar como os demais N/2 pontos da DFT de uma sequência de combinações / simples e diferentes dos primeiros coms os últimos N/2 pontos amostrados de x(k) (Veja, [05], [07] e [20]).

Na figura (2.II) está ilustrado o gráfico de fluxo de sinal / da DFT, onde a quantidade de operações complexas, multiplicações e adições / está reduzida ao mínimo, com os coeficientes naturalmente ordenados.

De maneira semelhante àquela da decimeção no tempo, podemos / fazer as reduções partindo da função que tenha o número de amostras divisí - vel por 2, até chegarmos a função "ponto dois".

A decimação em frequência também requer $(N/2)\log_2 N$ operações/ complexas (multiplicações, subtrações e adições [05]). Estas podem ser compu tadas "in loco" e as manipulações são também idênticas àquelas da decimação/ o tempo (Veja [05], [07] e[20]).

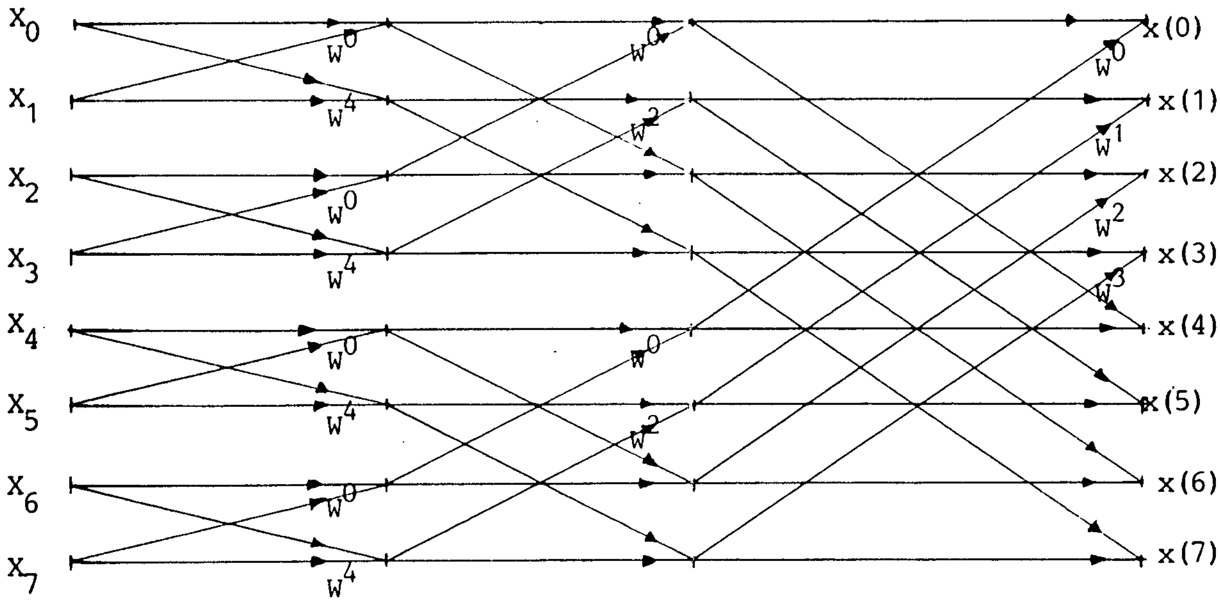


Fig. (2.I) - Gráfico de fluxo de sinal ilustrando a computação da DFT através da FFT, quando o número de operações complexas / está completamente reduzido. Decimação no tempo.

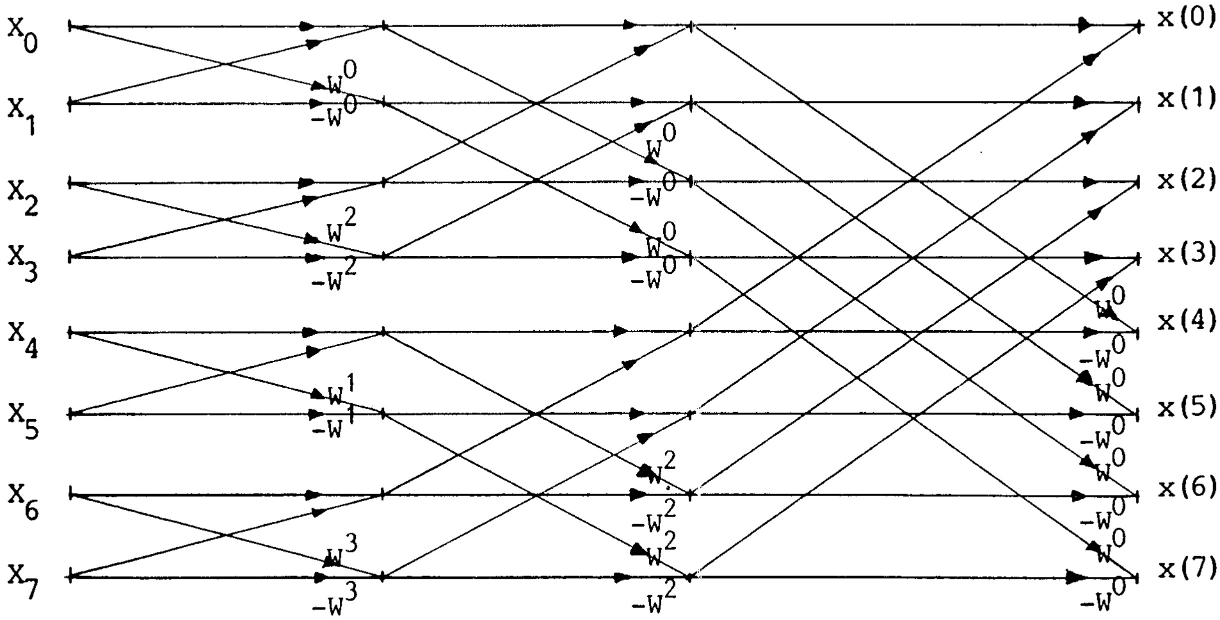


Fig. (2.II) - Gráfico de fluxo de sinal ilustrando a computação da / DFT através da FFT, onde as operações envolvidas estão reduzidas. Decimação em frequência.

2.3.5 - FFT de Funções Reais no Domínio do Tempo, Composta por 2N Amostras.

Podemos usar a parte imaginária de uma função complexa no / tempo para aumentar a eficiência da computação da transformada discreta de / Fourier de uma função real de tempo [07] e [14].

Consideremos a função x(k) representada por 2N amostras. Para computar a DFT usamos

$$H(n) = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} \left[h_r(k) + jh_i(k)\right].e^{-j2\Pi nk/N} \tag{39}$$

Para aplicar a fórmula (39) dividimos x(k) em duas funções, / onde cada uma delas é composta por N amostras,

$$\begin{aligned} h(k) &= x(2k) \\ g(k) &= x(2k+1) \end{aligned} \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1 \tag{40}$$

onde h(k) representa as amostras pares enumeradas e g(k) representa as amos - tras ímpares enumeradas.

Substituindo esses valores na equação (39), temos

$$X(n) = \sum_{k=0}^{2N-1} x(k)e^{-j2\Pi nk/N} = H(n) + e^{-j\Pi n/N}G(n). \tag{41}$$

Para computar H(n) e G(n) com maior eficiência, usamos a propriedade da linearidade da DFT e a decomposição de uma forma de onda nas suas componentes par e ímpar, respectivamente, ou seja, [07], [14] e [15]:

$$\begin{aligned} H(n) &= R_e(n) + jI_o(n) \\ G(n) &= I_e(n) - jR_o(n) \end{aligned} \tag{42}$$

Substituindo (42) no lado direito da igualdade (41), temos

$$\begin{aligned} X(n) &= R_e(n) + jI_o(n) + e^{-j\Pi n/N}\left[I_e(n) - jR_o(n)\right] \\ &= X_r(n) + jX_i(n) \end{aligned} \tag{43}$$

A parte real da função x(k) com 2N amostras é dada por

$$X_r(n) = \left[\frac{R(n)}{2} + \frac{R(N-n)}{2}\right] + \cos\frac{\Pi n}{N}\left[\frac{I(n)}{2} + \frac{I(N-n)}{2}\right] - \text{sen}\,\frac{\Pi n}{N}\left[\frac{R(n)}{2} - \frac{R(N-n)}{2}\right] \qquad (44)$$

Igualmente, a parte imaginária da função x(k) com 2N amostras é dada por, [07], [14] e [15]

$$X_i(n) = \left[\frac{I(n)}{2} - \frac{I(N-n)}{2}\right] - \text{sen}\,\frac{\Pi n}{N}\left[\frac{I(n)}{2} + \frac{I(N-n)}{2}\right] - \cos\frac{\Pi n}{N}\left[\frac{R(n)}{2} - \frac{R(N-n)}{2}\right] \qquad (45)$$

Em suma, a parte imaginária de uma função complexa de tempo pode ser usada com vantagem para computar a transformada da função definida por/ 2N amostras, usando a transformada discreta com a soma dos N valores somente.

2.3.6 - Algoritmo de Cooley-Tukey para $N = 2^p$.

O desenvolvimento do algoritmo para $N = 2^p$, com p inteiro, bem/ como as equações recursivas foram desenvolvidos por Cooley (Cooley-Tukey, / 1965 [07]), conforme mostrados por Bigham (Bigham, E. Oran, 1975 [07]). O referido desenvolvimento é feito com base na representação binária dos expoentes n e k da exponencial, i. e.,

$$n = 2^{p-1}n_{p-1} + 2^{p-2}n_{p-2} + \dots + n_0$$

e $\qquad\qquad\qquad\qquad (46)$

$$k = 2^{p-1}k_{p-1} + 2^{p-2}k_{p-2} + \dots + k_0$$

Usando a equação (25) para esses valores, temos:

$$X(n_{p-1}, \dots, n_0) = \sum_{k_0=0}^{1}\sum_{k_1=0}^{1}\cdots\sum_{k_{p-1}=0}^{1} x(k_{p-1}, \dots, k_0)W_N^B, \qquad (47)$$

onde $\quad B = (2^{p-1}n_{p-1} + \dots + n_0)(2^{p-1}k_{p-1} + \dots + k_0) \qquad (48)$

Através da propriedade das operações de potências e sendo /

$$e^{-j2\Pi k} = \cos(2\Pi k) - j\text{sen}(2\Pi k) = 1, \qquad (49)$$

temos que

$$W^{2p} = W^N = \left[e^{-j2\Pi/N}\right]^N = 1 \qquad (50)$$

A fórmula (47) pode ser reescrita como

$$X(n_{p-1},\ldots,n_0) = \sum_{k_o=0}^{1} \sum_{k_1=0}^{1} \cdots \sum_{k_{p-1}=0}^{1} x(k_{p-1},\ldots,k_0) W^{2^{p-1}(n_o k_{p-1})} \cdot$$
$$\cdot W^{(2n_1 n_o) 2^{p-2} k_{p-2}} \cdots W^{(2^{p-1} n_{p-1} + \ldots + n_o) k_o} \qquad (51)$$

Escrevendo cada um dos somatórios separadamente, a equação / (51) pode ser escrita em forma recursiva, i.e.,

$$x_1(n_0,k_{p-1},\ldots,k_o) = \sum_{k_{p-1}=0}^{1} x_o(k_{p-1},\ldots,k_0) W^{2^{p-1}(n_o k_{p-1})}$$
$$x_2(n_o,n_1,k_{p-2},\ldots,k_o) = \sum_{k_{p-2}=0}^{1} x_1(n_o,k_{p-2},\ldots k_o) W^{(2n_1+n_o) 2^{p-2} k_{p-2}}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x_p(n_o,n_1,\ldots,n_{p-1}) = \sum_{k_o=0}^{1} x_{p-1}(n_o,n_1,\ldots,k_o) W^{(2^{p-1} n_{p-1} + \ldots + n_o) k_0}$$
$$X(n_{p-1},n_{p-2},\ldots,n_o) = x_p(n_o,n_1,\ldots,n_{p-1}) \qquad (52)$$

Na aplicação do algoritmo para $N = 2^p$, temos Np/2 multiplica - ções complexas e Np adições complexas [07].

Para chegar ao algoritmo da decimação em frequência, o desen — volvimento é idêntico aquele apresentado nas equações (46) e (52).

2.3.7 - FFT com um Número de Amostras Arbitrário.

Quando o número de amostras não é um número fatorável em potên cias de base 2, unicamente, temos duas hipóteses a considerar, ou seja:
i) o número de amostras N é primo;
ii) o número de amostras N é um número composto, fatorável em fatores primos/ quaisquer.

2.3.7.1 - O Número de Amostras N é Primo.

Podemos computar os coeficientes da DFT através do algoritmo / desenvolvido por Rader (Rader, 1968 [09]).

A DFT de uma sequência $\{A_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, cujos coeficientes podem ser dados por

$$A_k = \sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{-j2\Pi ik/N}, \tag{54}$$

onde A_k representa as amostras da "Transformada-Z" [21] de uma sequência $\{a_i\}$ de duração finita com N pontos amostrados igualmente espaçados no círculo / unitário [09].

Na expressão (54) A_k vale para todo k, no entanto, para o valor A_o ela é particularmente simples, i.e.,

$$A_o = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \tag{55}$$

A expressão (55) pode ser computada diretamente.

Para outros valores de A_k observamos que o a_o não precisa ser multiplicado e o colocamos somando, fora do somatório, sendo que a expressão abaixo, é indicada para computá-los.

$$A_k - a_o = \sum_{i=1}^{N-1} a_i e^{-j2\Pi ik/N}, \quad K = 0,1, \ldots, N-1. \tag{56}$$

Os termos do somatório podem ser permutados, trocando a ordem das equações, através da representação em módulo, onde (( )) representa o módulo, temos

$$J = ((g^i)), \tag{57}$$

com $J = 0, 1, \ldots, N-1$ e $i = 0, 1, \ldots, N-1$

Fazendo as transformações:

$$i \longrightarrow ((g^i)), \quad k \longrightarrow ((g^k)), \tag{58}$$

e notando que $((g^{N-1})) = ((g^0))$, obtemos a equação

$$A_{((g^k))} - a_o = \sum_{i=1}^{N-1} a_{((g^i))} e^{-j2\Pi g(i+k)/N} \tag{59}$$

Podemos reconhecer que a sequência $\{A_{((g^k))} - a_o\}$ é obtida pela correlação circular [11] entre as sequências

$$\{ a_{((g^i))} \} \quad \text{e} \quad \{ e^{-j2\Pi g^i/N} \}.$$

Foi demonstrado em [12] que a correlação de funções circulares ordinárias poder ser computada com a redução de um grande número de operações, usando o algoritmo da FFT.

Para computar a equação (59) temos que, se N é primo, N-1 / poderá ser composto por muitos ou por poucos fatores.

Quando N-1 for composto por muitos fatores a correlação cir - cular (59) pode ser reconhecida como a inversa da DFT do produto das DFT's / das sequências $\{a_{((g^i))}\}$ e $\{e^{(-j2\Pi/N)g^i}\}$. Todas as operações indicadas / são desenvolvidas pelo algoritmo

$$\{A_{((g^k))} - a_o\} = DFT^{-1}\ \{(DFT\ \{a_{((g^i))}\}\ )(DFT\ \{e^{-j(2\Pi/N)g^i)}\})\}_k \qquad (60)$$

No caso de N-1 ser composto por poucos fatores podemos desenvolver a computação baseados no fato de que a convolução circular ou a correlação circular podem ser computadas acrescentando-se zeros, aumentando assim, o número de amostras até ter um número composto por muitos fatores, ou mesmo uma potência de base 2 unicamente.

2.3.7.2 - Quando o Número de Amostras não é Primo, mas Alta - mente Fatorável.

Podemos considerar dois casos, ou seja:

i) - quando o número de amostras N apresenta um fator comun q, o desenvolvimento das equações é semelhante àqueles das equações (29) e (33) onde é possível formar q sequências diferentes: $y_k^{(i)} = X_{qk+1}$, tendo cada uma delas N/q amostras. Cada uma dessas sequências tem a DFT $B_r^{(i)}$, e a DFT da sequência $\{X_k\}$ pode ser computada através de q DFT's simples com qN multiplicações e adições complexas [05].

$$A_{r+m(N/q)} = \sum_{i=0}^{q-1} B_r^{(i)}\ W^{(i)(r+m(N/q))}, \qquad (61)$$

onde m = 0, 1, ..., q-1 e r = 0, 1, ..., (N/q) -1

ii) no segundo caso o número de amostras N é dado por / $N = r_1 r_2 \ldots r_m$, onde $r_1, r_2, \ldots, r_m$ são inteiros.

O algoritmo de Cooley Tukey, dado em [07] para a decimação no **cima** tempo, primeiro expressa os índices n e k, como

$$n = n_{m-1}(r_1 r_2 \dots r_{m-1}) + \dots + n_1 r_1 + n_o$$

e (62)

$$k = k_{m-1}(r_2 r_3 \dots r_m) + \dots + k_1 r_1 + k_o$$

onde $n_{i-1} = 0, 1, \dots, r_1-1$ para $1 \leq i \leq m$, e

$k_i = 0, 1, \dots, r_{m-i}-1$ para $0 \leq i \leq m-1$.

A equação (25) pode ser reescrita como

$$X(n_{m-1},\dots,n_1,n_o) = \sum_{k_o=0} \sum_{k_1=0} \cdots \sum_{k_{m-1}=0} x_o(k_{m-1},\dots,k_o)W^{nk} \tag{63}$$

Desenvolvendo a equação (63) sob a forma de equações recursi - vas, como em (52), temos

$$x_i(n_o,n_1,\dots,n_{i-1},k_{m-i-1},\dots,k_o) = \sum_{k_{m-i}=0} x_{i-1}(n_o,\dots n_{i-2},k_{m-i},\dots k_o).$$

$$.W^{(n_{i-1}(r_1 r_2 \dots r_{i-1}) + \dots + n_o)k_{m-i}(r_{i+1}\dots r_m)}$$

$$X(n_{m-1},n_{m-2},\dots, n_o) = x_m(n_o,n_1,\dots, n_{m-1}) \tag{64}$$

com $i = 1, 2, \dots, m$.

A expressão (64) é válida somente se definirmos $(r_{i+1}\dots r_m)=1$, para $i > m-1$ e $k_{-1} = 0$. Essa expressão foi desenvolvida por Bergland (Bergland, 1967 [06]), baseada no algoritmo dado por Cooley-Tukey [03], [07].

A computação da x_m requer $N(r_1+r_2+\dots+r_m)$ operações complexas.

O algoritmo da decimação em frequência desenvolvido por Sande (sande-Tukey, 1966 [07]) é idêntico aquele dado por (64), somente que o de - senvolvimento é expandido em potências de n, no lugar de k.

2.3.8 - Fator de Giro.

O algoritmo da FFT pode ser aperfeiçoada através da exploração do fator de giro (Twiddle Factor [07] e [08]), no qual são exploradas simetri as da funções seno e cosseno.

A formulação do algoritmo na versão de Cooley (Cooley-Tukey, / 1965 [07]), para a equação (64) é dada como

$$\mathfrak{X}_i(n_o,\ldots,n_{i-1},k_{m-i-1},\ldots,k_o) = \Big[\sum_{k_{m-i}=0} \hat{x}_{i-1}(n_o,\ldots,n_{i-2}k_{m-i},\ldots,k_o).$$

$$.W^{n_{i-1}k_{m-i}(N/r_i)}\Big]\, W^{(n_{i-1}(r_1\ldots r_{i-1}) + \ldots + n_o)k_{m-i-1}(r_{i+1}\ldots r_m))}. \qquad (65)$$

A notação $\mathfrak{X}$ indica a aplicação do fator de giro. A equação (65) é válida / para $i = 1, 1, \ldots, m$, no caso devidamente definido, ou seja, / $(r_{i+2}\ldots r_m) = 1$ para $i > m-i$ e $k_{-1} = 0$.

Da mesma maneira, resolvendo-se (65) em função do índice n no lugar do índice k, temos a equação de Sande-Tukey [07] para o algoritmo da FFT, também denominado de "Decimação em frequência".

2.3.9 - Álgebra Básica para a FFT.

Dada a importância do algoritmo da FFT, o qual torna a com - putação dos coeficientes de Fourier mais rápida do que os outros algoritmos existentes, e redefinindo (23) como

$$\mathfrak{X}(\mathfrak{f}) = \sum_{t=0}^{N-1} x(t)e^{j2\Pi t\mathfrak{f}/N}, \qquad (66)$$

onde $\mathfrak{f} = (n/NT_A)$, $t = (kT_A)$, e ainda, como $e(X) = e^{j2\Pi x}$, pelas propriedades da exponencial, temos

$e(X + Y) = e(X).e(Y)$

$e(X) = 1$, se X for qualquer inteiro.

Supondo N = ABCDE, onde A, B, C, D, E são os fatores primos/ de N, podemos escrever, [08]

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{f} = \hat{e} + \hat{d}E + \hat{c}DE + \hat{b}CDE + \hat{a}BCDE, & \text{com: } a,\hat{a} = 0,1,\ldots,A-1 \\ t = a + bA + cBA + dCBA + eDCBA & \qquad b,\hat{b} = 0,1,\ldots,B-1 \\ & \qquad c,\hat{c} = 0,1,\ldots,C-1 \\ t \text{ - domínio do tempo} & \qquad d,\hat{d} = 0,1,\ldots,D-1 \\ \mathfrak{f} \text{ - domínio da frequência} & \qquad e,\hat{e} = 0,1,\ldots,E-1 \end{array} \qquad (67)$$

Substituindo esses valores na equação (66), vem

$$X(\hat{e}+\hat{d}E+\hat{c}DE+\hat{b}CDE+\hat{a}BCDE) = \sum_{a=0}^{A-1}\sum_{b=0}^{B-1}\sum_{c=0}^{C-1}\sum_{d=0}^{D-1}\sum_{e=0}^{E-1} x(a+bA+cAB+dABC+eABCD) .$$

$$.e^{\left[\frac{(\hat{e}+\hat{d}E+\hat{c}DE+\hat{b}CDE+\hat{a}BCDE)\,(a+bA+cAB+dABC+eABCD)}{ABCDE}\right]} \qquad (68)$$

Desenvolvendo (68) em função das variáveis com circunflexo, temos

$$X(\hat{e}+\hat{d}E+\hat{c}DE+\hat{b}CDE+\hat{a}BCDE) = \sum_{a=0}^{A-1} e^{\left[\frac{a\hat{a}}{A}\right]} \sum_{b=0}^{B-1} e^{\left[\frac{\hat{b}(a+bA)}{AB}\right]} \sum_{c=0}^{C-1} e^{\left[\frac{\hat{c}(a+bA+cAB)}{ABC}\right]} .$$

$$\sum_{d=0}^{D-1} e^{\left[\frac{\hat{d}(a+bA+cAB+dABC)}{ABCD}\right]} \sum_{e=0}^{E-1} e^{\left[\frac{\hat{e}(a+bA+cAB+dABC+eABCD)}{ABCDE}\right]} x(a+bA+cAB+dABC+eABCD) \qquad (70)$$

Colocando os "fatores de giro" para o lado de fora dos respectivos somatórios, temos [08]

$$X(\hat{e}+\hat{d}E+\hat{c}DE+\hat{b}CDE+\hat{a}BCDE) = \sum_{a=0}^{A-1} e^{\left[\frac{a\hat{a}}{A}\right]} e^{\left[\frac{\hat{b}a}{AB}\right]} \sum_{b=0}^{B-1} e^{\left[\frac{\hat{b}b}{B}\right]} .e^{\left[\frac{\hat{c}(a+bA)}{ABC}\right]} \sum_{c=0}^{C-1}$$

$$.e^{\left[\frac{\hat{c}c}{C}\right]} e^{\left[\frac{\hat{d}(a+bA+cAB)}{ABCD}\right]} \sum_{d=0}^{D-1} e^{\left[\frac{\hat{d}d}{D}\right]} e^{\left[\frac{\hat{e}(a+bA+cAB+dABC)}{ABCDE}\right]} \sum_{e=0}^{E-1} e^{\left[\frac{\hat{e}e}{E}\right]} .$$

$$.x(a+bA+cAB+dABC+eABCD). \qquad (70)$$

A equação (70) representa o algoritmo da FFT na versão de Sande (Sande-Gentlemann, 1966, [08]).

2.4 - Eliminação de Operações com Zeros.

Calculando os coeficientes da DFT através da FFT com dados / de entrada reais e de duração consideravelmente menor do que os da transformada, podemos eliminar as operações envolvendo os cálculos com zeros (pruning, [32]), obtendo assim, uma economia de tempo de computação significativa, sem contudo alterar a complexidade do algorítmo.

Seja 2^M pontos amostrados, dos quais apenas 2^L são diferentes de zero, com $M > L$. Para calcular a FFT aplicando a técnica do "pruning" eliminando ou reduzindo consideravelmente as operações com zeros, colocamos primeiro os pontos diferentes de zero (2^L) e, em seguida, todos aqueles que são iguais a zero. (Fig. (2.III) e (2.IV)).

A economia do tempo de computação para o algoritmo da FFT de base dois é dada, aproximadamente por $M|L + 2(1 - 2^{-K})|^{-1} - 1$, onde $K = M - L$ Se os dados amostrados da entrada, que são diferentes de zero, não forem um inteiro igual a uma das potências de 2, então L deverá ser escolhido como o próximo inteiro maior do que $\log_2 N$.

Na figura (2.III) apresentamos o gráfico de fluxo de sinal da FFT com 16 pontos amostrados, tendo as operações complexas completamente re-- duzidas. Cada conjunto de operações realizadas "in loco" é mostrado na figura (2.III.1) e correntemente denominada de "borboleta", e cada uma delas envolve adição, subtração e multiplicação complexas. Na figura(2.III) apresentamos o gráfico de fluxo de sinal, destacando 4 etapas distintas, 8 borboletas por etapa com 3 operações por borboleta.

Para o caso geral, são M etapas, N/2 borboletas por etapa com 3 operações por borboleta, dando assim, um total de $1.5NM=1.5N\log_2 N$ operaçõs.

Na figura (2.IV), mostramos a FFT com pruning desenvolvida para 16 dados amostrados na entrada. Todas as operações com zeros são eliminadas. Pela figura observamos que o pruning é aplicado em três etapas, enquanto que na última etapa a sua aplicação não é possível.

· Com 2^L dados da entrada diferentes de zero e 2^{M-L} iguais a zero, temos L = 1, número de etapas nas quais o pruning não é aplicável e M - L = 3 aquelas nas quais o pruning é aplicável.

A economia de tempo relativa ao desenvolvimento da FFT com o pruning é dada pela fórmula

$$t_r = |L + 2(1 - 2^{-K})|/M \qquad (71)$$

onde t_r é o tempo relativo, $K = M - L$ e a equação (71) é válida somente para os computadores, cujo tempo de multiplicação é maior do que o respectivo tempo de adição [32].

Em [32] estão detalhados todos os cálculos relativos à aplicação do pruning, bem como são apresentadas subrotinas para o desenvolvimento do mesmo, envolvendo a FFT para números fatoráveis unicamente em potências de base dois.

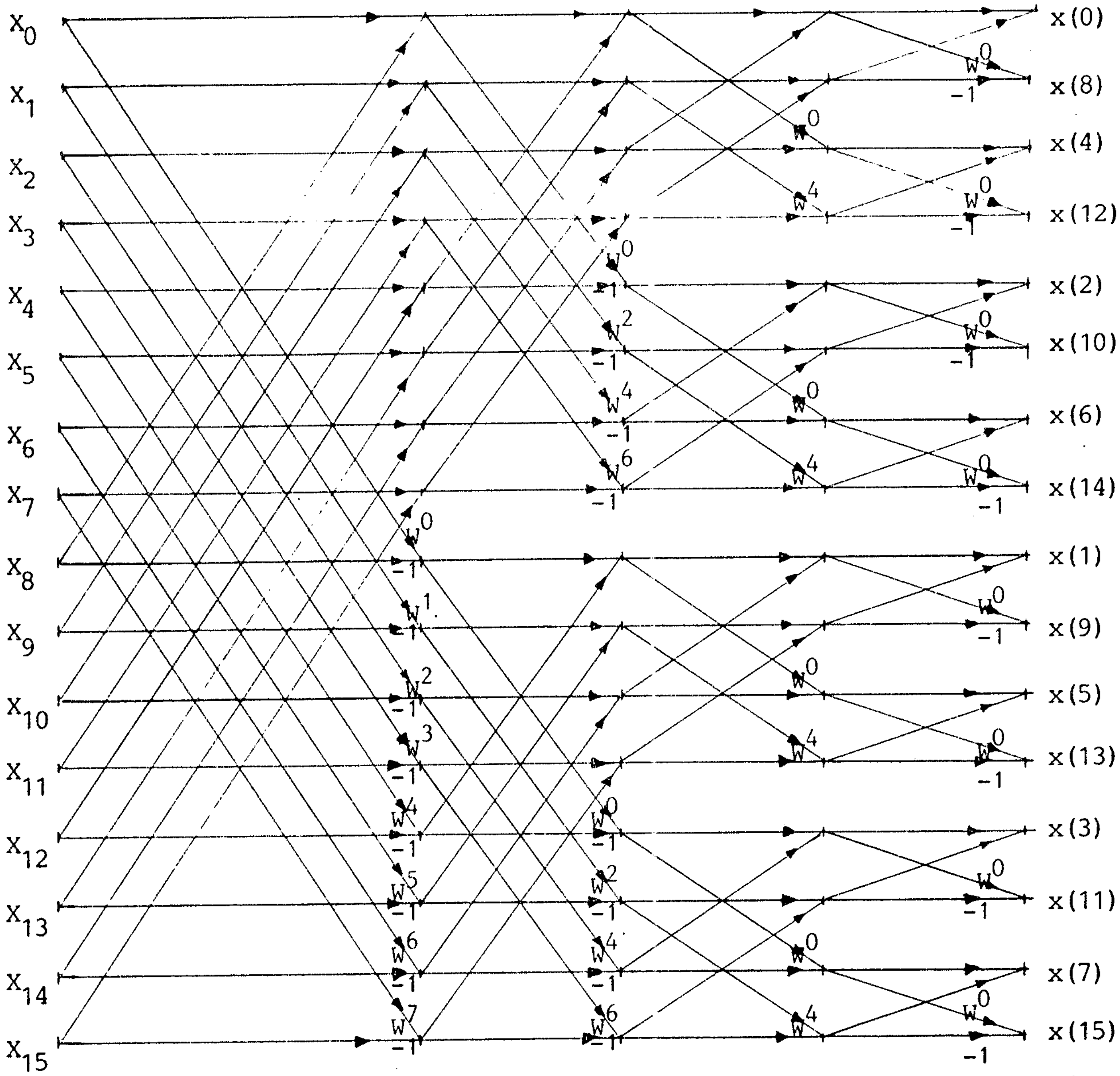


Fig.(2.III) - Gráfico de fluxo de sinal da FFT de 16 dados amostrados decimação em frequência. Os fatores de giro são definidos por $W^k = e(k/16) = \exp(-j2\Pi k/16)$.

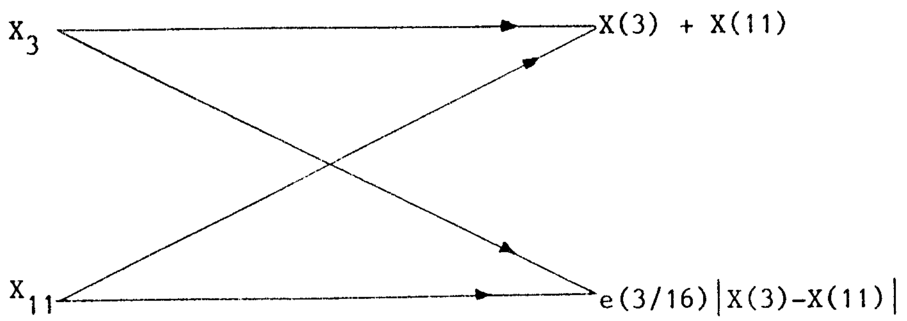


Fig. (2.III.1) - Borboleta representando a computação da FFT de 2^M pontos amostrados (corresponde a uma das borbolrtas da fig.(2.III)).

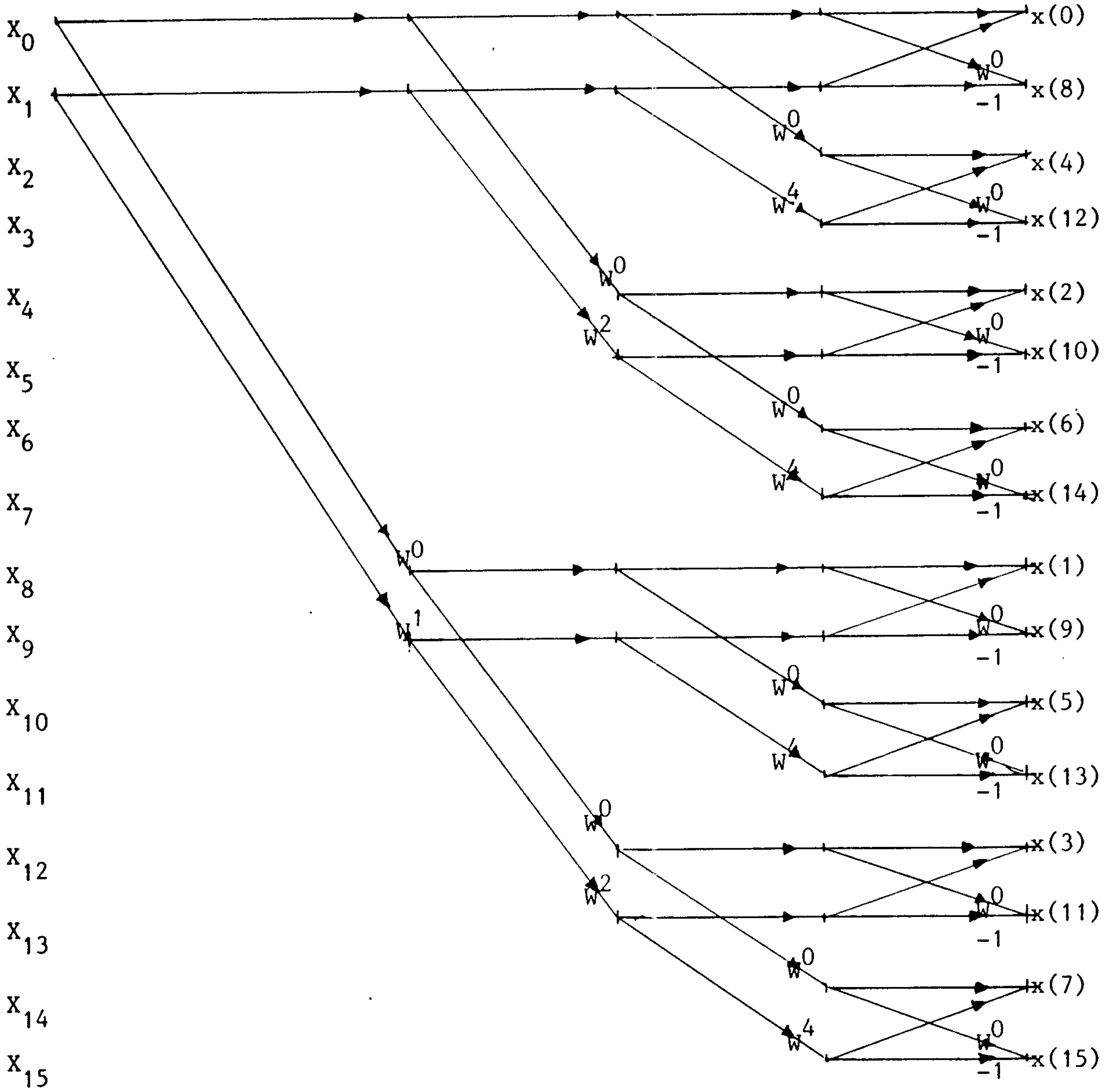


Fig. (2.IV) - Gráfico de fluxo de sinal da FFT de 16 dados onde somente os dois primeiros são diferentes de zero, na entrada(pruning).

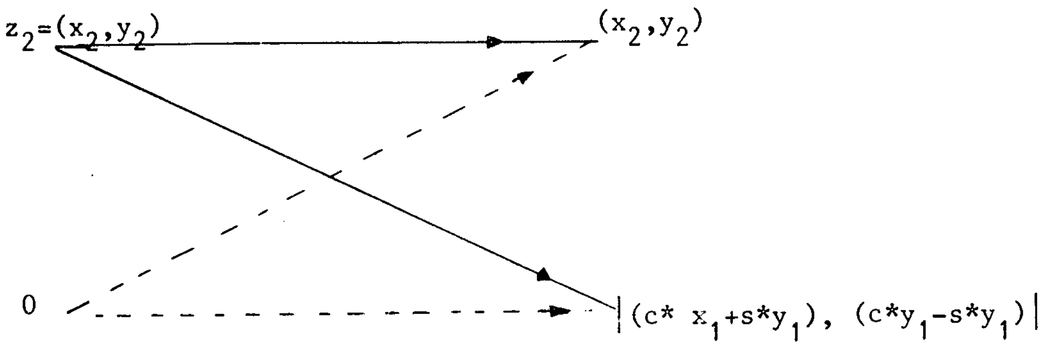


Fig.(2.IV.1) - Computação de uma das borboletas da figura (2.IV) com pruning.

CAPÍTULO III

3.0 - Introduçao e Justificativa.

Faremos uma análise matemática, usando a transformada de Fourier, contínua e discreta, aplicadas ao estudo dos espectros das ondas, pulso emitido (cossenóide) e ondas de terra e ionosférica recuperadas pelo aparelho recuperador de informação citado na introdução deste trabalho.

Desenvolveremos as equações relativas ao algoritmo na versão de Sande (Sande-Gentlemann, 1966 [08]), no qual está fundamentado o cálculo dos coeficientes de Fourier usando a DFT.

O pulso emitido pela estação emissora é cossenoidal de duração finita. A obtenção do espectro do mesmo é feita usando a DFT, a qual é obtida, conforme já mencionado, pela amostragem no domínio do tempo, truncamento e amostragem no domínio da frequência, respectivamente.

O estudo detalhado da análise, ou seja, aquele comparativo / entre os espectros dos pulsos emitido e recuperado não será feita nesta trabalho, em razão de escapar dos objetivos do mesmo.

3.1 - Espectro do Pulso Emitido pela Emissora.

Obtemos o espectro do pulso emitido pela estação emissora através da transformada de Fourier do mesmo. Pela relação existente entre as transformadas discreta e contínua, de conformidade com os ítens 2.1.9 e / 2.1.10 do capítulo II, podemos determiná-lo através da DFT, tendo em vista / que calcularemos seus coeficientes com o auxílio de computador, por termos// que desenvolver os cálculos duma função amostrada com um número grande de/ amostras (pontos amostrados).

3.1.1 - Transformada de Fourier Contínua.

Os coeficientes complexos C_n do desenvolvimento em série de Fourier da função $f(t)$ com período de repetição T são iguais aos valores da tranformada de Fourier de $F_o(\omega)$ em $\omega = n\omega_o = n2\Pi/T$, multiplicados por $1/T$, /

onde $f_o(t)$ é definida por:

$$f_o(t) = \begin{cases} f(t), & |t| < T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases} \qquad (72)$$

A função periódica $f(t)$ com período T é representada por, [02]

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jn\omega_o t}, \qquad (73)$$

com $\omega_o = 2\Pi/T$, e os coeficientes C_n determinados pela fórmula:

$$C_n = (1/T)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jn\omega_o t}dt. \qquad (74)$$

Sabemos que

$$F_o(\omega) = \mathcal{F}\left[f_o(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f_o(t)e^{-j\omega t}dt, \qquad (75)$$

enquanto que no intervalo $-T/2 < t < T/2$, $f_o(t) = f(t)$, o que nos leva a escrever a expressão (75) como

$$F_o(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (76)$$

Visto que

$$F_o(n\omega_o) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_o t}dt, \qquad (77)$$

podemos concluir que por (73) e (77), temos

$$C_n = (1/T)F_o(n\omega_o). \qquad (78)$$

Como $f_o(t) = \cos\omega t$, podemos calcular a transformada de Fourier de $f_o(t)$ mostrada na figura (3.I)

$$F_o(\omega) = \mathcal{F}\left[f_o(t)\right] = \mathcal{F}\left[\cos\omega t\right]$$
$$= \mathcal{F}\left[(1/2)e^{j\omega t} + (1/2)e^{-j\omega t}\right]. \qquad (78a)$$

A transformada de Fourier de $e^{j\omega_o t}$ é dada por

$$\mathcal{F}\left[e^{j\omega_o t}\right] = 2\Pi\delta(\omega - \omega_o) \qquad (79)$$

Portanto, a expressão (78a) pode ser reescrita como

$$\mathcal{F}\left[\cos\omega t\right] = \Pi\delta(\omega - \omega_o) + \Pi\delta(\omega - \omega_o) \qquad (80)$$

Calculando a transformada de Fourier da expressão (73), temos:

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = F(\omega) = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jn\omega_o t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathcal{F}\left[e^{jn\omega_o t}\right], \qquad (81)$$

i.e., $$F(\omega) = 2\Pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_o) \qquad (82)$$

Substituindo os valores de C_n, calculados no apêndice A deste trabalho, dados por

$$C_n = (d/T)^2 . \frac{n\Pi sen(n\Pi d/T)}{\Pi^2 - (n\Pi d/T)^2} .e^{-j(n\Pi d/T)}, \qquad (83)$$

O que nos leva, finalmente, a expressar a transformada de/ Fourier da equação (81) como

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = F(\omega) = 2n(\Pi d/T)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{sen(n\Pi d/T)}{\Pi^2 - (n\Pi d/T)^2} .e^{-j(n\Pi d/T)} \left[\delta(\omega - n\omega_o) \right] \qquad (84)$$

A expressão (84) mostra a fase $e^{-j(n\Pi d/T)}$, a qual resulta do deslocamento da função f(t) em relação à origem, salien - tando também a parte imaginária da transformada, conforme mostrada na figura (3.VII).

<u>3.1.1.1 - Transformada de Fourier Contínua-Finita.</u>

A transformada de Fourier finita está relacionada com àquela / que tem o intervalo de integração finito [20].

$$F(f) = \int_0^T f(t)e^{-j2\Pi f_o t}dt, \qquad (84a)$$

onde f = (n/NT), frequência.

A transformada finita de uma função f(t) que existe entre os limites $-\infty$ e ∞ pode ser definida pelo produto f(t)x(t), onde

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < d/2 \\ 0, & |t| > d/2 \end{cases}$$

o qual limita a função ao intervalo $-d/2 < t < d/2$. Se a função for devidamen te truncada, pela reversibilidade da transformada podemos escrever

$$f(t)x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)e^{j2\Pi ft}df \qquad (84b)$$

Na equação (84a), substituindo f(t) pelo seu valor, dado para um valor particular de f, temos

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)e^{j2\Pi ft}df \qquad (84c)$$

$$F(f) = \int_0^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(f)e^{j2\Pi ft}df \right] e^{-j2\Pi f_o t}dt \qquad (84d)$$

Desenvolvendo a expressão (84d), e empregando a expressão / $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - x)f(u)du = f(x)$, chegamos ao valor

$$F(f) = \text{sen}2\Pi T(f - f_o) + \text{sen}2\Pi T(f + f_o) + j\left[\frac{\text{sen}^2\Pi T(f - f_o)}{\Pi T(f - f_o)} + \frac{\text{sen}^2\Pi T(f + f_o)}{\Pi T(f + f_o)} \right]$$

Na figura (3.VII) mostramos o esboço da expressão (84e), acima citada. O deslocamento no intervalo de integração faz surgir a parte imaginária da transformada.

3.1.2 - Transformada de Fourier Discreta do Pulso Emitido.

A transformada discreta de Fourier do pulso emitido e contínuo é obtida através da amostragem no domínio do tempo, truncamento e amostragem/ no domínio da frequência.

A amostragem do pulso emitido no domínio do tempo, consiste em multiplicá-lo pela função amostrante $\Delta_o(t)$, também denominado de"trem de pulsos"; enquanto que no domínio da frequência ela é feita através da relação de convolução.

Seja o trem de pulsos da figura (3.II), definido por

$$\Delta_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_A), \qquad (85)$$

onde T_A representa o espaço entre duas amostras consecutivas que, de acordo / com o teorema da amostragem, deve ser maior do que o inverso do dobro da componente de maior frequência da transformada de Fourier da função contínua / ($T_A > 1/2f_c$, onde f_c indica a fequência de corte).

Quando $1/T_A = f_c$, a frequência é conhecida como"Classe de Amostras de NYquist".

Multiplicando o pulso emitido por (85), multiplicação essa, / que tem sentido somente no espaço $\mathscr{S}$ definido em 2.1.4 do capítulo II deste trabalho, ou seja, dentro da teoria das distribuições, figura (3.III), temos:

$$f(t) = \cos(2\pi f t) \tag{86}$$

$$f(t)\Delta_0(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_A)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(kT_A)\,\delta(t - kT_A) \tag{87}$$

O truncamento é feito pela multiplicação da função amostrada/ amos pela função retangular da Fig.(3.IV)

$$x(t) = \begin{cases} 1 \text{ para } -T/2 < t < T/2 + T_o \\ 0 \text{ para outros valores} \end{cases} \tag{88}$$

$$f(t)\Delta_0(t)x(t) = \Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(kT_A)\,\delta(t - kT_A)\Big] x(t) \tag{89}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_A)\,\delta(t - kT_A) \tag{90}$$

Para eliminar o "rippling" definido por [07], introduzido pelo truncamento da função no domínio do tempo, precisamos amostrar a função / truncada (90), convolvendo-a com o trem de pulsos definido por:(Fig.(3.V))

$$\Delta_1(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t - rT_0) \tag{91}$$

onde T_0 representa a duração da função truncada.

$$\Big[f(t)\Delta_0(t)x(t)\Big] * \Delta_1(t) = \Big[\sum_{k=0}^{N-1} f(kT_A)\,\delta(t - kT_A)\Big] * \Big[T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t - rT_0)\Big] \tag{92}$$

Desenvolvendo a convolução, do lado direito da igualdade,[07] temos

$$\tilde{f}(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{k=0}^{N-1} f(kT_A)\,\delta(t - kT_A - rT_0)\Big] \tag{93}$$

onde $\tilde{f}$ representa uma aproximação de f(t). (Fig. (3.VI))

A transformada de Fourier de uma função periódica é dada pe - la sequência de impulsos equidistantes [07], [13]

$$F(n/T_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(f - nf_0), \text{ com } f_0 = 1/T_0, \tag{95}$$

onde C_n representam os coeficientes de Fourier, complexos, isto é,

$$C_n = (1/T_0)\int_{-T/2}^{T_0-T/2} f(t)\,e^{-j2\pi nt/T_0}\,dt, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{95}$$

Substituindo-se $\tilde{f}(t) = f(t)$ pelo valor dado na expressão / (93), chemagos a

$$C_n = (1/T_o) \int_{-T/2}^{T_o - T/2} T_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} fkT_A) \delta(t - kT_A - rT_o) e^{-j2\Pi nt/T_o} dt. \tag{96}$$

Desenvolvendo a integração de (96) sobre um único período, / [07] temos que:

$$C_n = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_A) \int_{-T/2}^{T_o - T/2} e^{-j2\Pi nt/T_0} \delta(t - kT_A) dt$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_A) e^{-j2\Pi nkT_A/T_o} \tag{97}$$

Como $T_o = NT_A$, podemos reescrever (97) como

$$C_n = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_A) e^{-j2\Pi nk/N}, \text{ com } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{98}$$

Finalmente, a transformada de Fourier da equação (93) é dada por

$$\tilde{F}(n/NT_A) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_A) e^{-j2\Pi nk/N} \tag{99}$$

Sabemos, ainda que,

$$e^{-j2\Pi k} = \cos 2\Pi k - j\operatorname{sen} 2\Pi k = 1, \text{ para qualquer inteiro.}$$

Isso nos leva a situação de podermos avaliar somente N valores distintos para a equação (93).

A função $\tilde{F}(n/NT_A)$ é periódica de período N amostras, o que equivale a expressar a transformada de Fourier da equação (99) por:

$$\tilde{F}(n/NT_A) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_A) e^{-j2\Pi nk/N}, \text{ com } n = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{100}$$

A equação (100) representa uma aproximação da transformada / de Fourier contínua e podemos representá-la por:

$$F(n/NT_A) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_A) e^{-j2\Pi nk/N}, \text{ com } n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{101}$$

onde a transformada de Fourier da função $f(kT_A)$ periódica e amostrada é $N(n/NT_A)$.

A transformada de Fourier discreta e inversa é dada pela relação (conforme [07], [06] e [14]),

$$f(kT_A) = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} F(n/NT_A)e^{j2\Pi nk/N}, \text{ com } k = 0, 1, \ldots, N-1 \quad (102)$$

O espectro resultante da expressão (101), representa uma aproximação daquele obtido da expressão (84).

Quando o intervalo de truncamento é escolhido igual a um múltiplo do período da f(t), a função amostrada no domínio da frequência com impulsos equidistantes e separados por $1/T_0$ tem os seus zeros coincidentes com aqueles da função sen(f)/f, exceto no primeiro impulso, o qual corresponde / ao impulso no domínio da frequência da função original f(t) = cosωt. Essa escolha, tem a vantagem de não alterar a transformada discreta de Fourier.

Um exame das figuras (3.V) e (3.VI), mostra que nos tomamos a nossa função original no domínio do tempo, amostramo-la e multiplicamos cada amostra pelo valor T_o.

A transformada de Fourier dessa função no domínio da frequência tem as respectivas amplitudes multiplicadas pelo fator $T_o/2T_A$. O fator / T_o é comun e pode ser eliminado.

Finalmente, se desejarmos computar a transformada de Fourier, através da transformada discreta de Fourier precisamos multiplicar a função discreta no tempo pelo valor T_A. Podemos então, reescrever a expressão / (101), como

$$F(n/NT_A) = T_A \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_A)e^{-j2\Pi nk/N}, \text{ com } n = 0, 1, \ldots, N-1 \quad (103)$$

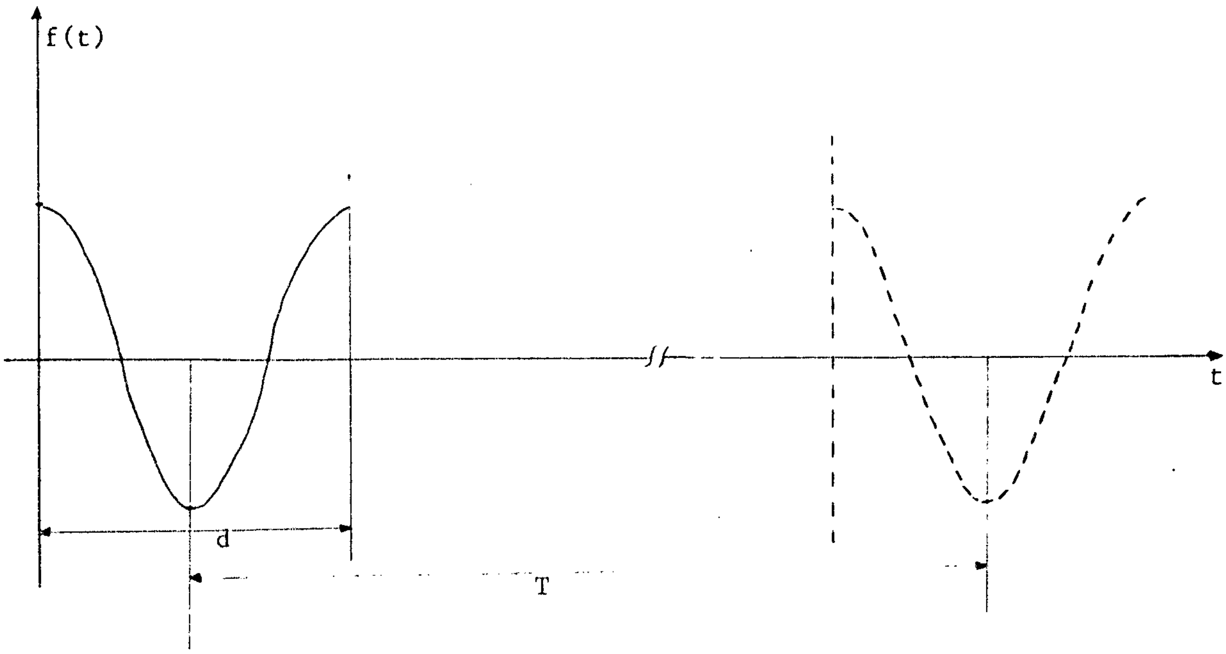


Fig.(3.I) - Pulso emitido $f_o(t) = \cos\omega t$

$d = 1/f = 25$ micro-segundos

$T = 1263$ micro-segundos = PRP = 1/792 vezes/seg.

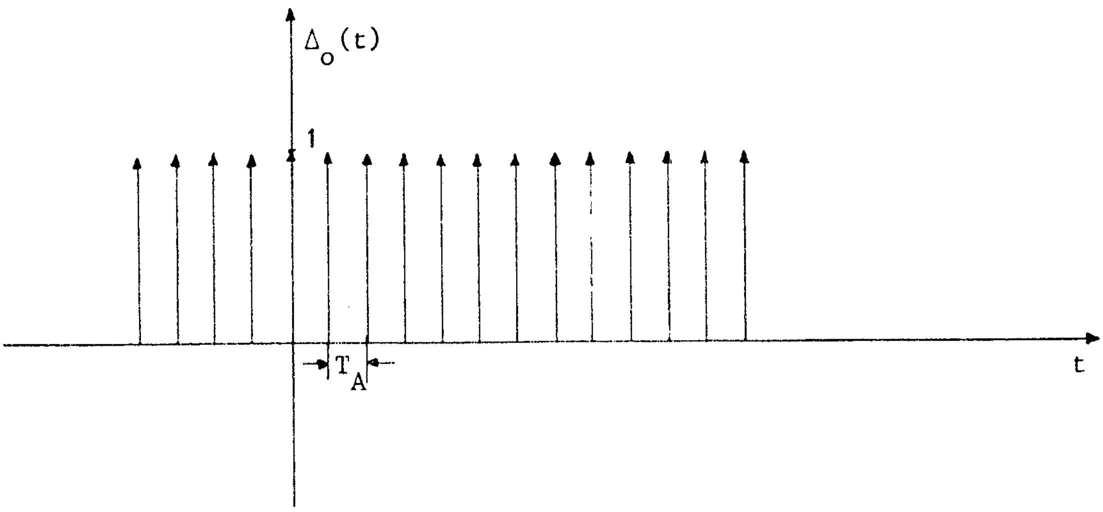


Fig.(3.II) - Trem de pulsos (85)

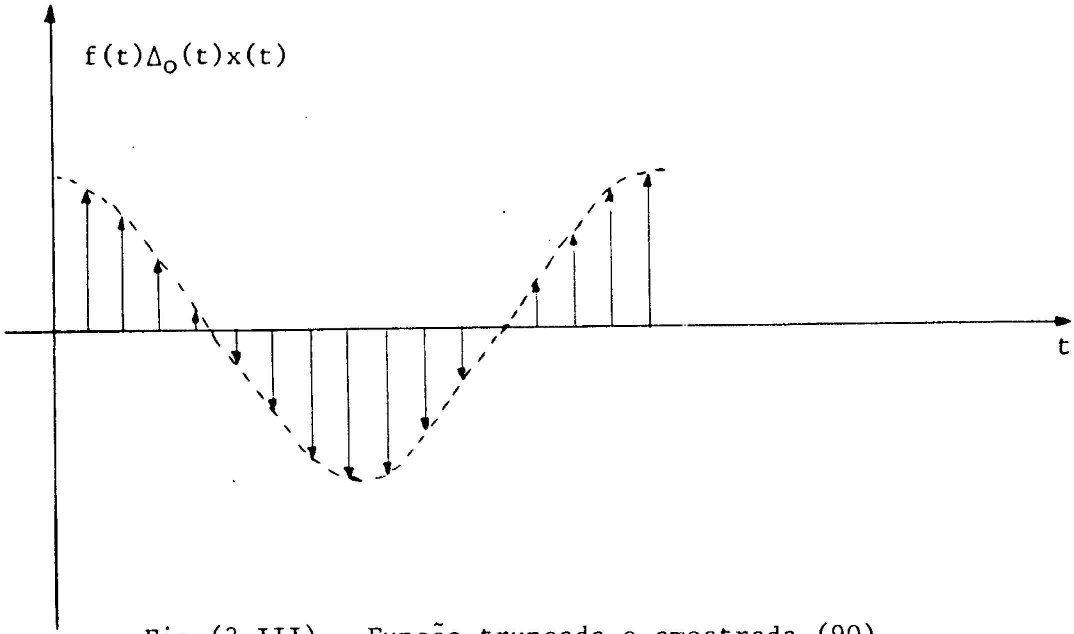


Fig.(3.III) - Função truncada e amostrada (90)

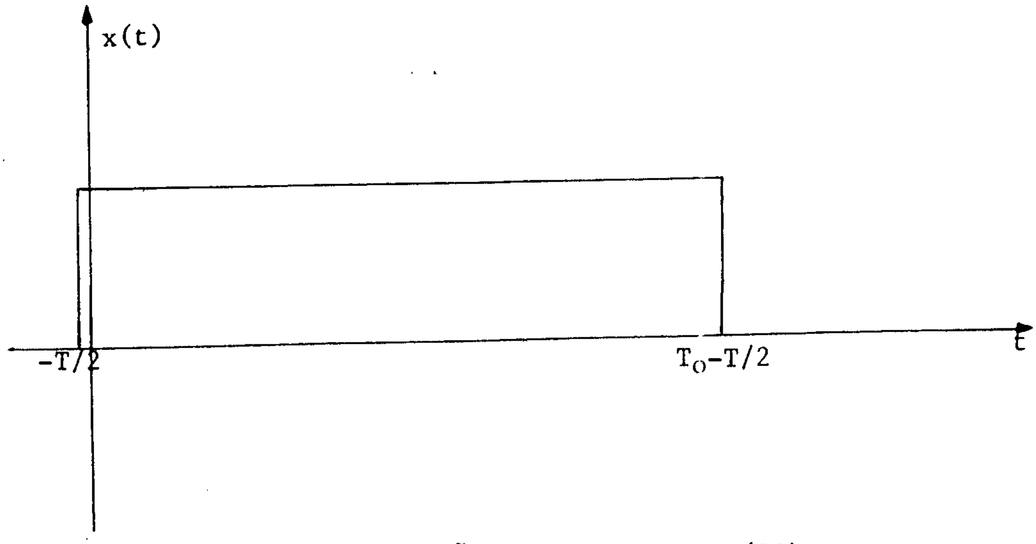


Fig. (3.IV) - Função de truncamento (88)

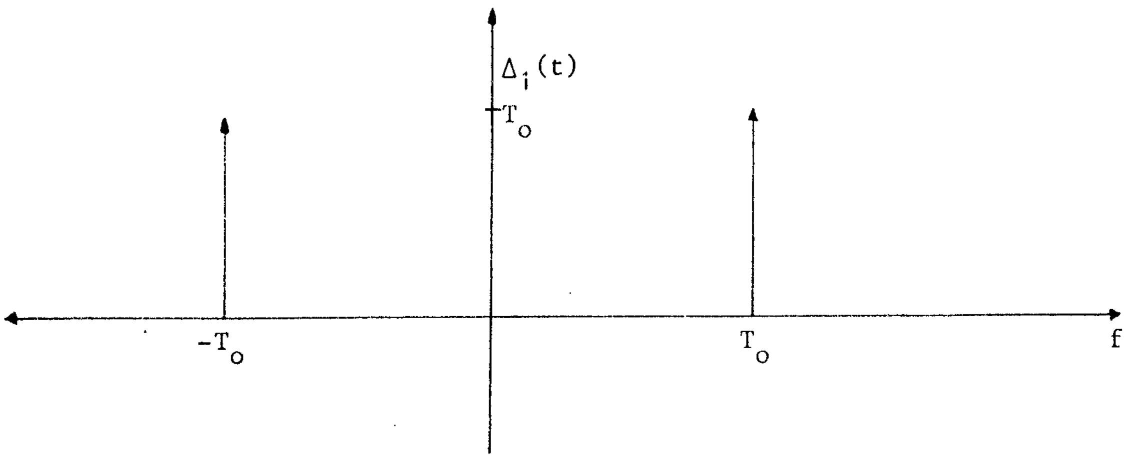


Fig. (3,V) - Trem de pulsos (91)

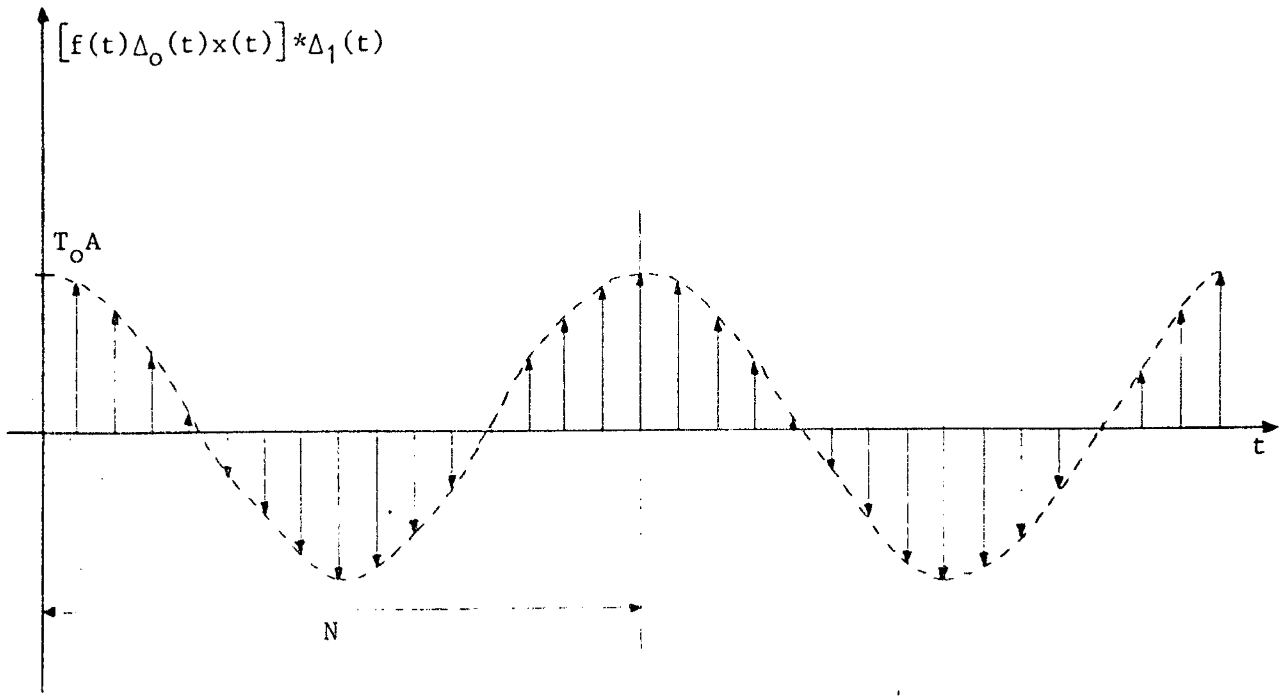


Fig. (3.VI) - Função $\tilde{f}(t)$ aproximadamente igual a f(t) dentro do intervalo de truncamento

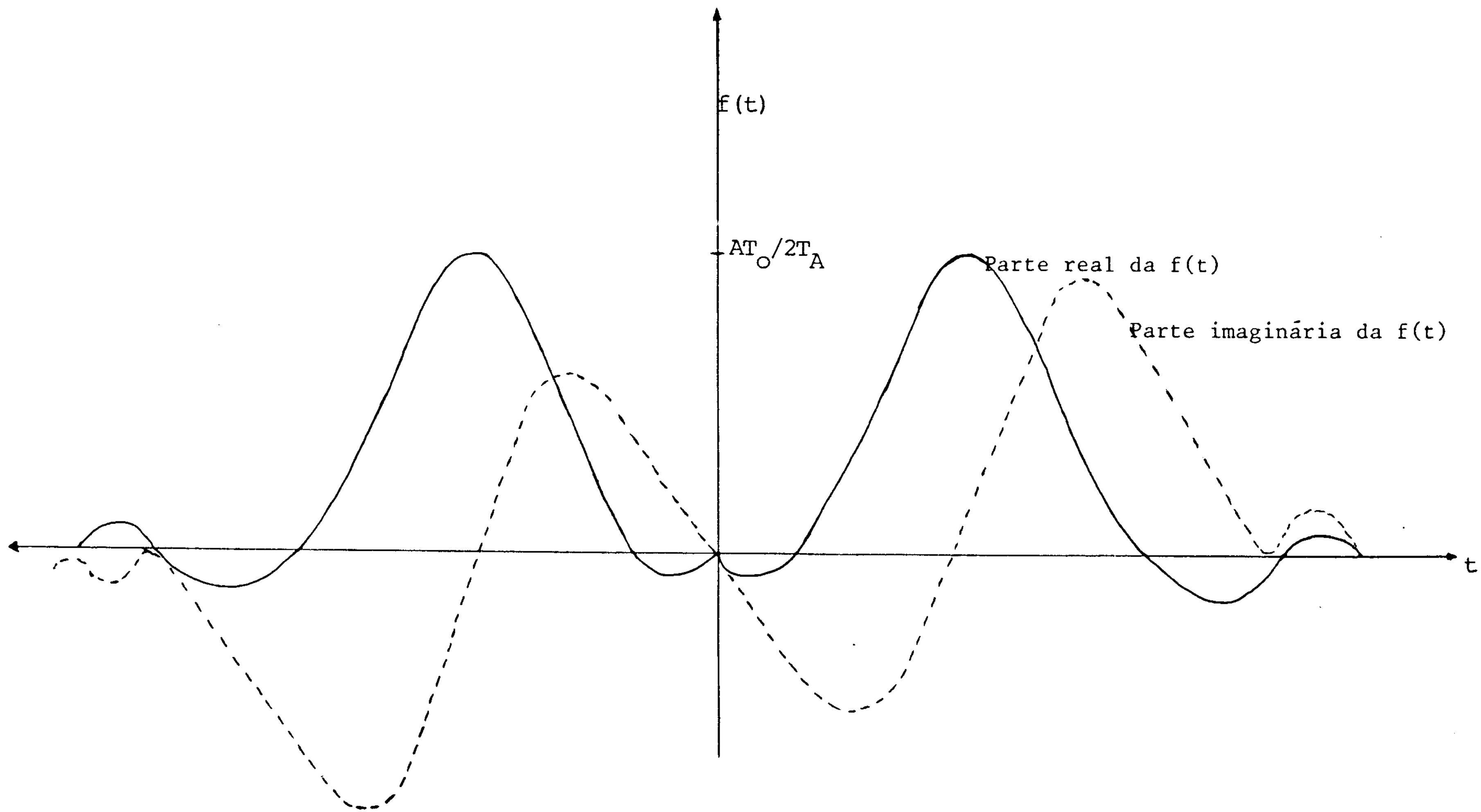


Fig. (3.VII) - A função $\tilde{F}(n/NT_A)$, transformada de Fourier de $\tilde{f}(t)$, destacando as partes real e imaginária, sendo que esta última aparece em função do deslocamento da f em relação a origem (truncamento).

3.2 - Espectros dos pulsos recuperados:

Os pulsos recuperados pelo aparelho recuperador de informação onda de terra e onda ionosférica, respectivamente, são amostrados pelo referido aparelho, com um período de amostragem T_A = 2 micro segundos.

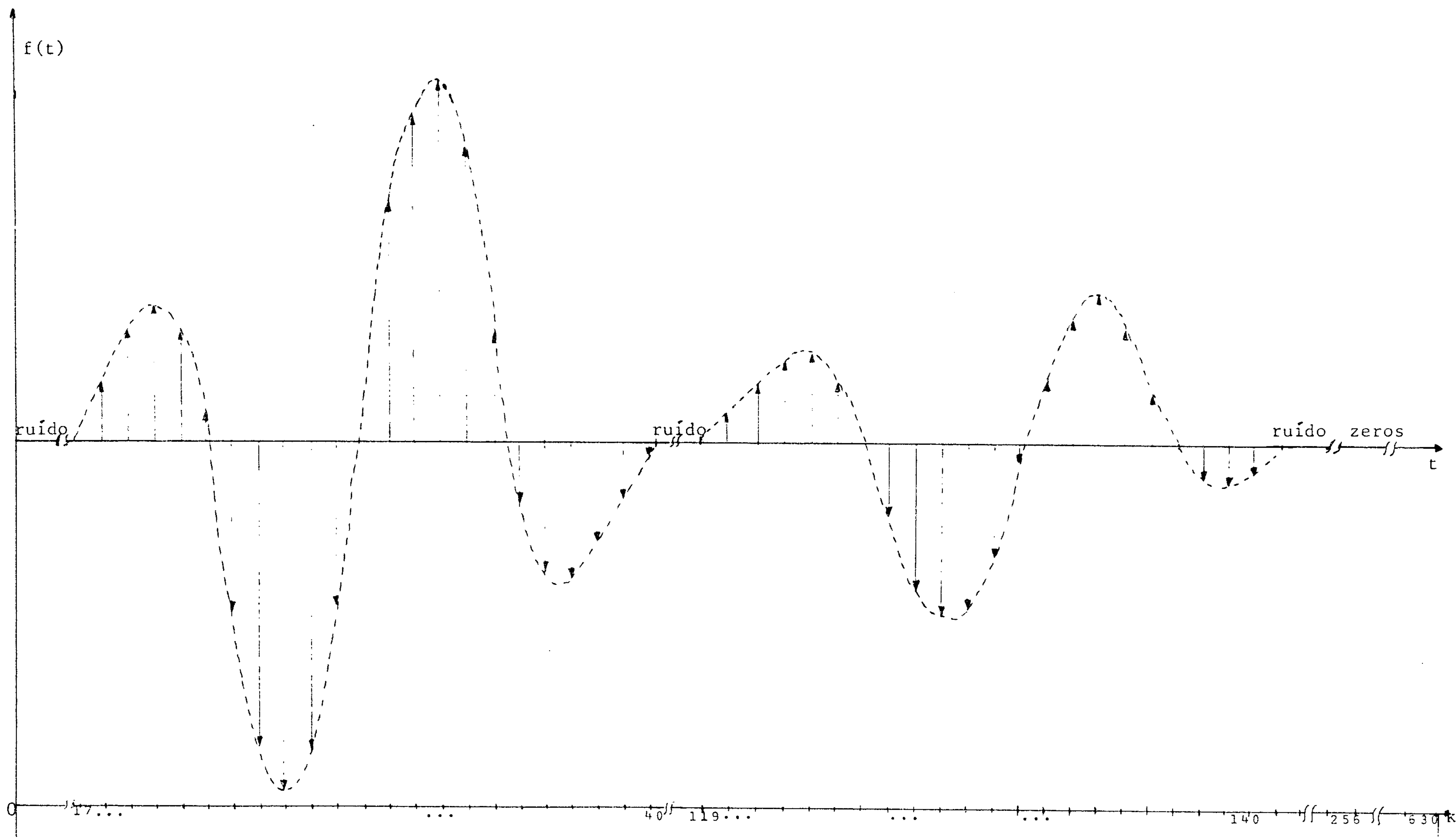
A amostragem efetuada pelo aparelho está de acordo com o teorema da amostragem, ou seja $T_A > 1/2f_C$, onde f_C é a componente de maior frequência da transformada de Fourier contínua f(t).

O período de repetição do pulso, T é da ordem de 1263 micro-segundos, enquanto que o tempo de varredura é de 512 micro-segundos e o tempo de espera para o engatilhamento do próximo pulso é de 751 micro-segundos. O número de amostras N é obtido pelo quociente entre o período de repetição do pulso e o período de amostragem do aparelho. ($N = T/T_A$).

Durante o tempo de varredura o aparelho recupera os pulsos / correspondentes a onda de terra e onda ionosférica, respectivamente.Ambas / vêm acompanhadas de ruídos aleatórios.

No apêndice C deste trabalho, acrescentamos uma tabela contendo as amplitudes, bem como altura e reflexão dos sinais recuperados. Esses / valores são aqueles tomados por base para os gráficos apresentados no capítulo IV, no correspondente desenvolvimento dos valores obtidos através do computador.

Na figura (3.VIII) mostramos os pulsos recuperados, sem esboçar o ruído, enquanto que na figura referida, os valores estão de acordo / com aqueles registrados pelo aparelho recuperador de informação e colocados/ no apêndice "C" deste trabalho. Procuramos salientar na figura (3.VIII) os espaços relativos aos valores correspondentes ao ruído captado.



f(t)
ruído
ruído
ruído
zeros
t
0
17...
...
40
119...
...
...
140
256
630
k

3.2.1 - Obtenção do Espectro dos Pulsos Recuperados Usando Usando a Transformada Rápida de Fourier.

Podemos obter os coeficientes da transformada discreta de Fourier através da transformada rápida de Fourier, para o que foram desenvolvidos os algorítmos por Sande-Tukey [07], Cooley-Tukey [05], [07] e Sande-Gentlemann [08], dentre outros.

Para o desenvolvimento deste trabalho, usaremos o algoritmo na versão de Sande (Sande-Gentlemann, 1966 [08]), baseado na equação (70) citada no capítulo II.

Fazendo $N = p_1p_2p_3p_4p_5$

$$
\begin{aligned}
n &= n_4 + n_3p_5 + n_2p_4p_5 + n_1p_3p_4p_5 + n_0p_2p_3p_4p_5 \\
k &= k_0 + k_1p_1 + k_2p_1p_2 + k_3p_1p_2p_3 + k_4p_1p_2p_3p_4
\end{aligned}
\qquad (104)
$$

com:

$$
\begin{aligned}
n_0,k_0 &= 0,\ 1,\ \ldots,\ p_1-1 \\
n_1,k_1 &= 0,\ 1,\ \ldots,\ p_2-1 \\
n_2,k_2 &= 0,\ 1,\ \ldots,\ p_3-1 \\
n_3,k_3 &= 0,\ 1,\ \ldots,\ p_4-1 \\
n_4,k_4 &= 0,\ 1,\ \ldots,\ p_5-1
\end{aligned}
$$

Usando os valores dados acima, reescrevemos a equação (70), como.

$$
X(n_4+n_3p_5+n_2p_4p_5+n_1p_3p_4p_5+n_0p_2p_3p_4p_5) = \sum_{k_0=0}^{p_1-1}\ \sum_{k_1=0}^{p_2-1}\ \sum_{k_2=0}^{p_3-1}\ \sum_{k_3=0}^{p_4-1}\ \sum_{k_4=0}^{p_5-1} \cdot
$$

$$
\cdot x(k_0+k_1p_1+k_2p_1p_2+k_3p_1p_2p_3+k_4p_1p_2p_3p_4) \cdot e^{\left[\frac{(n_4+n_3p_5+n_2p_4p_5+n_1p_3p_4p_5+n_0p_2p_3p_4p_5)\cdot(k_0+k_1p_1+k_2p_1p_2+k_3p_1p_2p_3+k_4p_1p_2p_3p_4)}{p_1p_2p_3p_4p_5}\right]} \qquad (105)
$$

Através da propriedade da exponencial, e(X) =1 para qualquer / inteiro, podemos simplificar a expressão (105), obtendo.

$$X(n_4+n_3p_5+n_2p_4p_5+n_1p_3p_4p_5+n_0p_2p_3p_4p_5) = \sum_{k_0=0}^{p_1-1} e\left[\frac{n_0k_0}{p_1}\right] . \sum_{k_1=0}^{p_2-1} e\left[\frac{n_1(k_0+k_1p_1)}{p_1p_2}\right] .$$

$$\sum_{k_2=0}^{p_3-1} e\left[\frac{n_2(k_0+k_1p_1+k_2p_1p_2)}{p_1p_2p_3}\right] \sum_{k_3=0}^{p_4-1} e\left[\frac{n_3(k_0+k_1p_1+k_2p_1p_2+k_3p_1p_2p_3)}{p_1p_2p_3p_4}\right] \sum_{k_4=0}^{p_5-1}$$

$$.e\left[\frac{n_4(k_0+k_1p_1+k_2p_1p_2+k_3p_1p_2p_3+k_4p_1p_2p_3p_4)}{p_1p_2p_3p_4p_5}\right] x(k_0+k_1p_1+k_2p_1p_2+k_3p_1p_2p_3+k_4p_1p_2p_3p_4) \qquad (106)$$

Fatorando a expressão (106), podemos colocar os fatores de / giro, denominados de "Twiddle Factors" por Sande (Sande-Gentlemannn, 1966/ [08]), para o lado de fora dos somatŕoios:

$$X(n_4+n_3p_5+n_2p_4p_5+n_1p_3p_4p_5+n_0p_2p_3p_4p_5) = \sum_{k_0=0}^{p_1-1} e\left[\frac{n_0k_0}{p_1}\right] . e\left[\frac{n_1k_0}{p_1p_2}\right] \sum_{k_1=0}^{p_2-1} e\left[\frac{n_1k_1}{}\right] .$$

$$e\left[\frac{n_2(k_0+k_1p_1)}{p_1p_2p_3}\right] \sum_{k_2=0}^{p_3-1} e\left[\frac{n_2k_2}{p_3}\right] e\left[\frac{n_3(k_0+k_1p_1+k_2p_1p_2)}{p_1p_2p_3p_4}\right] \sum_{k_3=0}^{p_4-1} e\left[\frac{n_3k_3}{p_4}\right] .$$

$$.e\left[\frac{n_4(k_0+k_1p_1+k_2p_1p_2+k_3p_1p_2p_3)}{p_1p_2p_3p_4p_5}\right] \sum_{k_4=0}^{p_5-1} e\left[\frac{n_4k_4}{p_5}\right] x(k_0+k_1p_1+k_2p_1p_2+k_3p_1p_2p_3+$$

$$+ k_4p_1p_2p_3p_4) \qquad (107)$$

Substituindo os valores numéricos nos respectivos coeficientes, temos para equação (107):

$N = 630$; $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 3$, $p_4 = 5$, $p_5 = 7$ (fatores primos de N)

$$X(n_4+7n_3+35n_2+105n_1+315n_0) = \sum_{k_0=0}^{1} e\left[\frac{n_0k_0}{2}\right] e\left[\frac{n_1k_0}{6}\right] \sum_{k_1=0}^{2} e\left[\frac{n_1k_1}{3}\right] e\left[\frac{n_2(k_0+2k_1)}{18}\right]$$

$$\sum_{k_2=0}^{2} e\left[\frac{n_2k_2}{3}\right] e\left[\frac{n_3(k_0+2k_1+6k_2)}{90}\right] \sum_{k_3=0}^{4} e\left[\frac{n_3k_3}{5}\right] e\left[\frac{n_4(k_0+2k_1+6k_2+18k_3)}{630}\right] \sum_{k_4=0}^{6}$$

$$.e\left[\frac{n_4k_4}{7}\right] .x(k_0+2k_1+6k_2+18k_3+90k_4) \qquad (108)$$

Podemos representar a transformada de Fourier complexa, através duma multiplicação de matriz, $X = Tx$, onde T representa a matriz N x N / de exponenciais complexas, definida por

$$t_{nk} = \exp(j2\Pi nk/N), \text{ com } k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{109}$$

Usando o algorítmo da transformada rápida de Fourier, nós fatoramos a matriz T em

$$T = PF_m \cdot \ldots \cdot F_1 \tag{110}$$

onde F_i representa o passo da transformada correspondendo ao fator p_i de N e P representa a matriz de permutações.

As matrizes F_i têm somente p_i elementos diferentes de zero em cada linha e cada coluna, e podem ser particionadas em N/p_i submatrizes quadradas de dimensão p_i. As partições são resultantes das reduções das multiplicações, as quais formam a base da transformada rápida de Fourier.

Cada matriz F_i pode ser particionada em $F_i = R_i T_i$ (111), onde R_i são as matrizes diagonais formadas pelos fatores de giro, mostrados na equação (107), e T_i pode também ser particionada em N/p_i submatrizes quadradas e idênticas a cada uma das matrizes da transformada de Fourier complexa/ de dimensão p_i.

A matriz de permutação P é usada porque a transformada resulta inicialmente, na ordem do "bit-inverso", conforme definido em [05], [07] e [08]; i.e., os coeficientes de Fourier C_n, com

$$n = n_{m-1}p_{m-1} \cdots p_1 + \cdots + n_2 p_1 + n_o$$

são encontrados na ordem (112)

$$n' = n_0 p_2 \cdots p_m + n_1 p_3 \cdots p_m + \cdots + n_{m-1}$$

Apresentamos no apêndice E, os gráficos simplificados, correntemente denominados de"borboletas", relativos as computações básicas efetua - das em cada um dos nós do gráfico de fluxo de sinal que representa a FFT com as operações complexas reduzidas. Os gráficos apresentados no referido apêndice não foram desenvolvidos de acordo com o algortimo na versão de Sande, mas/ sim, estão fundamentados na subdivisão da sequência de dados amostrados N em n subsequências, cada uma delas correspondendo ao respectivo fator primo de N (número de amostras). [11].

CAPÍTULO IV

4.0 - Introdução e Justificativa.

Desenvolvemos neste capítulo um programa para computar os coeficientes da DFT, através da FFT, aplicada à equação (25).

O nosso número de amostras N, determinado pelo aparelho recuperador de informação, citado na introdução deste trabalho, é fatorável em fatores primos arbitrários.

Este trabalho consiste em adaptar as subrotinas apresentadas / por Singleton (Singleton, Richard C., 1968 [16]), tornando-as aplicáveis ao nosso problema de características particulares, bem como introduzir um pruning de zeros[32] para diminuir o tempo de computação (tempo de CPU).

As modificações e a introdução do "pruning" não alteram os resultados finais esperados. Todas as computações são realizadas "in loco"[05], [07].

4.1 - Desenvolvimento do Programa.

O algoritmo da transformada rápida de Fourier, conforme explanações e cálculos desenvolvidos, respectivamente, nos capítulos II e III deste trabalho, se adapta a computação de expressões como,

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j2\Pi nk/N}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1, \qquad (118)$$

onde as sequências $\{X(n)\}$ e $\{x(k)\}$ são sequências de números complexos.

A subrotina FFT foi desenvolvida em [16], para computar os coeficientes da DFT, através da FFT, especialmente quando o número de amostras N é composto por fatores primos arbitrários. Essa subrotina também pode ser usada para computar a transformada inversa.

O desenvolvimento da referida subrotina foi feito com base na fatoração de Sande (Sande-Gentlemann, 1966, [08]), apresentado na equação /

(70) e desenvolvida no ítem 3.2 deste trabalho.

A sequência dos cálculos seguida pela subrotina da FFT não / coincide com aquela apresentada na equação (108), razão pela qual introduzimos algumas modificações na mesma.

A fatoração da matriz P de permutação, pode ser feita "in loco", desde que N seja fatorado[2] em

$$p_i = p_{m-i}, \text{ para } i < p-i$$

Neste caso, n será encontrado na ordem natural e n' na ordem do"bit-inverso", procedendo-se então à respectiva troca de C_n com $C_{n'}$, se $n < n'$.

Esse método consiste numa generalização do método reordenar / os resultados da transformada rápida de Fourier de fatores todos iguais a 2(base dois).

Antes de computar os coeficientes da transformada de Fourier , é necessário calcular os fatores primos de N, colocando os repetidos(fatores-elevados ao quadrado) em posição de simetria com relação aos demais fatores.

A matriz de permutação P é decomposta em outras duas matrizes correspondentes a dois passos, ou seja $P = P_1P_2$. A permutação P_1 está associada com os fatores quadrados de N, cuja troca é feita do seguinte modo: $N = p_1p_2p_3p_4p_5$, com $p_1=p_5$ e p_2,p_3,p_4 relativamente primos, são trocados / de forma que

$$n = n_4p_5p_4\cdots p_1 + n_3p_4\cdots p_1 + \ldots + n_1p_1 + n_o$$

e (119)

$$n' = n_op_5p_4\cdots p_1 + n_1p_4\cdots p_1 + \ldots + n_3p_1 + n_4$$

A permutação P_1 neste caso conduz cada elemento resultante da divisão dos elementos da subsequência N/p_1, agrupando-os em subsequências de p_1 elementos consecutivos.

A permutação P_2 completa então o reordenamento, permutando as $p_2p_3p_4$ subsequências dentro de cada divisão N/p_1. Na subrotina FFT a permutação P_2 é concluida fazendo primeiro a determinação dos ciclos de permutação para o "bit-inverso" dos dígitos correspondentes aos fatores livres de quadrados, permutando a seguir todos os dados, seguindo esse ciclo[16].

A expressão (108) pode ser reescrita, colocando os fatores primos quadrados na posição de simetra.

$$N = 630 = p_1p_2p_3p_4p_5 = 3 \times 2 \times 5 \times 7 \times 3$$

com $p_1= 3$; $p_2 = 2$; $p_3 = 5$; $p_4 = 7$ e $p_5 = 3$:
temos então,

[2] SINGLETON, R.C.,"ON COMPUTING THE FAST FOURIER TRANSFORM". Commun,ACM. vol. 10 pág. 647-654. october 1967.

$$X(n_4+3n_3+21n_2+105n_1+210n_o) = \sum_{k_o=0}^{2} e\left[\frac{n_o k_o}{3}\right] e\left[\frac{n_1 k_o}{6}\right] \sum_{k_1=0}^{1} e\left[\frac{n_1 k_1}{2}\right] e\left[\frac{n_2(k_o+3k_1)}{30}\right]$$

$$\sum_{k_2=0}^{4} e\left[\frac{n_2 k_2}{5}\right] e\left[\frac{n_3(k_0+3k_1+6k_2)}{210}\right] \sum_{k_3=0}^{6} e\left[\frac{n_3 k_3}{7}\right] e\left[\frac{n_4(k_o+3k_1+6k_2+30k_3)}{630}\right] \sum_{k_4=0}^{2}$$

$$e\left[\frac{n_4 k_4}{3}\right] . \; x(k_o+3k_1+6k_2+30k_3+210k_4) \qquad (120)$$

Efetua-se assim, a fatoração da matriz F_i com a aplicação do fator de giro, o qual explora a simetria das funções seno e cosseno, conforme (111). Em outras palavras, fatorando-se a transformada de Fourier de F_i / correspondente ao fator p_i de N, do que resulta no pruduto $R_i T_i$, de T_i uma/ matriz idêntica ã transformada N/p_i de dimensão p_i com a matriz R_i dos fatores de giro (Twidlle Factor). Usam-se os elementos R_i, na versão de Sande[08] , da FFT, conforme as equações (108) e (120), as quais formam a matriz diagonal definida por

$$r_n = \exp(j2\Pi/kk(\text{mod } k)[n \text{ mod } kk)/k], \; n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1, \qquad (121)$$

onde $k = N/p_1 \ldots p_i$; $kk = p_i k$ e os colchetes denotam o maior inteiro contido nos referidos.

O fator de giro multiplicando cada transformada de dimensão p_i dentro da matriz T_i, tem ângulos 0, Θ, 2Θ, ..., $(p_i-1)\Theta$, onde Θ pode diferir de uma transformada para outra, conforme o passo correspondente a cada um dos fatores primos de N.

Na transformada, correspondendo ao passo T_i existem $N(p_i-1)/p_i$ multiplicações complexas. O número de multiplicações complexas envolvendo a aplicação do fator de giro R_i é dado pela fórmula, [16]

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{N(p_i-1)}{p_i} - (N-1) \qquad (122)$$

onde m representa o número de fatores de N, e na expressão (122) considera - mos a existência de multiplicação para os ângulos nulos ($\Theta=0$). O número de multiplicações complexas obtido através da equação (122) precisa ser somado/ ao das multiplicações correspondentes ao passo T_i.

A computação dos valores das funções trigonométricas seno e cosseno é feita através da equação de diferenças

$$\beta_{k+1} = \beta_k + \eta\beta_k \qquad (123)$$

onde β_k representa a sequência dos valores computados de $\exp(j\theta)$, enquanto /

que o fator η é dado por

$$\eta = \exp(j\Theta) - 1 = -2\mathrm{sen}(\Theta/2) + j\mathrm{sen}(\Theta). \qquad (124)$$

Usando as equações (123) e (124), dispensamos os respectivos valores dessas funções armazenados na biblioteca do computador.

Pelas características do computador usado neste trabalho, optamos pelo cálculo com "arrendondamento aritmético de ponto flutuante", ao invés do"truncamento aritmético".

Um estudo detalhado da vantagem do uso do arrendondamento aritmético de ponto flutuante, foi feita por Sande (Sande-Gentlemann, 1966,/ [08]), enquanto que Singleton (Singleton, R.C., 1969, [16]) apresentou tabelas comparativas do uso dos dois métodos mencionados.

Em cada um dos passos T_i a transformada complexa de Fourier/ é fatorada por:

$$a_k+jb_k = \sum_{n=0}^{p_i-1}(x_n+jy_n)\,[\cos(2\pi nk/p_i) + j\mathrm{sen}(2\pi nk/p_i)] \qquad (125)$$

$$= x_o + \sum_{n=1}^{(p_i-1)/2} (x_n+x_{p_{i-n}})\cos(2\pi nk/p_i) - \sum_{n=1}^{(p_i-1)/2} (y_n+y_{p_i-n})\mathrm{sen}(2\pi nk/p_i) +$$

$$j[y_o + \sum_{n=1}^{(p_i-1)/2} (y_n+y_{p_i-n})\cos(2\pi nk/p_i) + \sum_{n=1}^{(p_i-1)/2} (x_n-x_{p_i-n})\mathrm{sen}(2\pi nk/p_i)] \qquad (126)$$

Na fatoração apresentada na equação (126) e naquela devida / ao fator de giro apresentada em (122), estão fundamentadas as reduções das/ operações complexas da computação da FFT. Em [16] encontramos uma análise / detalhada das reduções supra citadas, bem como o estudo relativo às respectivas eficiências.

Para acessar a subrotina na computação da transformada de- Fourier de uma variável simples com N pontos amostrados, de acordo com as normas do FORTRAN, fazemos "CALL FFT(A, B, N, N, N, 1)", enquanto que para computar a transformada inversa a chamada é "CALL FFT(A,B, N, N, N, -1)", / onde o primeiro N representa o número total (NTOT) de dados complexos da / entrada, o segundo N representa a quantidade de dados amostrados, o terceiro N representa o espaço entre dois dados consecutivos (NSPAN), usado especificamente quando computamos a transformada de Fourier de várias variáveis. No caso da transformada simples, NTOT=N=NSPAN=NUMERO DE DADOS COMPLEXOS DA-ENTRADA.

Os arranjos (matrizes) A e B contém, respectivamente, as / partes real e imaginária dos dados da entrada, indexados de 1 a n, os quais são trocados pelos coeficientes da transformada de Fourier complexa. Assim, a parte real de C_n é encontrada em A(k+1) e a parte imaginária em B(k+1), / com k = 0, 1, 2, ..., N-1.

Os arranjos AT(MAXF), CK(MAXF), BT(MAXF), SK(MAXF) e NP(MAXP) são usados para armazenar temporariamente os valores calculados. MAXF precisa ser maior ou igual ao maior fator primo de N. NFAC tem capacidade máxima para 11 elementos (fatores primos). Quando N possui mais do que um par de fatores livres de quadrados (fatores repetidos), o produto dos fatores repetidos precisa ser menor ou igual a 210.

A subrotina REALTR completa a transformada de Fourier de 2N valores reais (número de amostras), conforme ítem 2.3.5 do capítulo II deste trabalho.

Os dados da entrada são armazenados alternativamente nos arranjos (matrizes) A e B, e são primeiro transformados pera uma transformada/ de Fourier complexa de dimensão N. Os coeficientes relativos aos cossenos :/] encontrados nas posições A(1), A(2), ..., A(N+1) e aqueles relativos aos senos são encontrados nas posições B(1), B(2), ..., B(N+1).

A chamada das subrotinas, de conformidade com o FORTRAN, é feita na sequência:

```
CALL FFT(A, B, N, N, N, 1)
CALL REALTR(A, B, N, 1).
```

Os resultados precisam ser multiplicados por 0,5/N para dar o fator de escala usual, ou seja, para amnter a aproximação dos valores dos / coeficientes da transformada de Fourier contínua.

Para computar a transformada inversa, a chamada é feita na / ordem:

```
CALL REALTR(A,B, N, -1)
CALL FFT(A, B, N, N, N, -1).
```

Neste caso, os resultados precisam ser multiplicados por 0,5 para dar o fator de escala usual, conforme equação (103).

Os resultados correspondentes ao domínio do tempo são armazenados alternativamente nos arranjos A e B, i.e., A(1), B(1),...,A(N), B(N).

4.2 - Programa para Computar os Coeficientes de Fourier.

O nosso programa para computar os coeficientes de Fourier, através da FFT, consiste na adapatação das subrotinas apresentadas por Singleton (Singleton, R.C. 1968, [16]).

Essa adapatação fundamenta-se na eliminação das partes que / não são usadas na solução do problema.

Os dados da entrada estão armazenados em um arquivo separado e são aqueles recuperados pelo aparelho recuparedor de informação citado na introdução deste trabalho.

No apêndice C, apresentamos os dados referentes a uma das coletas, sendo que esses foram os que usamos para obter os resultados apresentados no final deste capítulo.

No apêndice A apresentamos o fluxograma esclarecido, deta- / lhando todas as partes que compõem o programa principal e as subrotinas.

O programa funciona segundo as explanações colocadas no ítem 4.1 deste capítulo. Para um estudo mais detalhado do programa, bem como do seu funcionamento, indicamos [16], já que nos limitamos apenas a estudar as partes que se adapatam ao nosso problema de características particulares e citado no capítulo I deste trabalho.

FILE: FFTMIV OSVS1 A1 NUCLEO DE PROCESSAMENTO DE DADOS

```
1
//ASRFFTMR JOB MTM03PSU,'MTM03.ANTONIO',MSGCLASS=V,CLASS=A,
//  MSGLEVEL=(1,1),PRTY=10
//STEP01 EXEC FTG1CG,CLASS=V,SIZE=832K
//FORT.SYSIN DD *
C  PROGRAMA PRINCIPAL PARA COMPUTAR OS COEFICIENTES DE FOURIER.
C  COM VALORES COMPOSTOS.
      DIMENSION A(631),B(631)
      DATA A,B/ 630*0.0,630*0.0/
      READ(5,101) N
  101 FORMAT(I3)
      READ(5,100)(A(I),I=1,N)
  100 FORMAT(10F7.2)
      ITAM=630
      CALL FFT(A,B,ITAM,ITAM,ITAM, 1)
      CALL REALTR(A,B,ITAM, 1)
      WRITE(6, 300)
      WRITE(6,200) (A(L),L=1,ITAM)
      WRITE(6,301)
      WRITE(6, 200) (B(L),L=1,ITAM)
 200  FORMAT(1P8E15.6)
 300  FORMAT(//, 10X, 'VALORES DE A', //)
 301  FORMAT(//, 10X, 'VALORES DE B', //)
      DO 3 I=1,ITAM
      A(I)=0.5/ITAM*(SQRT(A(I)*A(I)+B(I)*B(I)))
      B(I)=FLOAT(I)
    3 CONTINUE
      WRITE(6,310)
      WRITE(6,305)(A(I),I=1,630)
  305 FORMAT(1P8E15.6)
  310 FORMAT(//,10X,'VALORES MOD(A(I))',//)
      CALL GRAFIC (B,A,ITAM)
      END
C  AS DUAS CONSTANTES SEGUINTES PRECISAM COINCIDIR COM AS DIMENSOES
   DAS MATRIZES.
      SUBROUTINE FFT(A, B, NTOT, N, NSPAN,ISN)
      DIMENSION AT(23), CK(23), BT(23), SK(23), NP(209)
      DIMENSION A(1), B(1), NFAC(11)
      EQUIVALENCE (I,II)
      MAXF=23
      MAXP=209
      IF(N .LT. 2) RETURN
      INC=ISN
      RAD=8.0*ATAN(1.0)
      S72=RAD/5.0
      C72=COS(S72)
      S72=SIN(S72)
      S120=SQRT(0.75)
      IF(ISN .GE. 0) GO TO 10
      S72=-S72
      S120=-S120
      RAD=-RAD
```

FILEO FFTMIV OSVS1 A1 NUCLEO DE PROCESSAMENTO DE DADOS

```
      INC=-INC
   10 NT=INC*NTOT
      KS=INC*NSPAN
      KSPAN=KS
      NN=NT-INC
      JC=KS/N
      RADF=RAD*FLOAT(JC)*0.5
      I=0
      JF=0
C DETERMINA OS FATORES DE N
      M=0
      K=N
      GO TO 20
   15 M=M+1
      NFAC(M)=4
      K=K/16
   20 IF (K-(K/16)*16 .EQ. 0) GO TO 15
      J=3
      JJ=9
      GO TO 30
   25 M = M+1
      NFAC(M)=J
      K=K/JJ
   30 IF (MOD(K,JJ) .EQ. 0) GO TO 25
      J=J+2
      JJ=J**2
      IF (JJ. LE. K) GO TO 30
      IF (K .GT. 4) GO TO 40
      KT=M
      NFAC(M+1)=K
      IF (K .NE. 1) M=M+1
      GO TO 80
   40 IF (K-(K/4)*4 .NE. 0) GO TO 50
      M=M+1
      NFAC(M)=2
      K=K/4
   50 KT=M
      J=2
   60 IF (MOD(K,J) .NE. 0) GO TO 70
      M =M+1
      NFAC(M)=J
      K=K/J
   70 J=((J+1)/2)*2+1
      IF (J .LE. K) GO TO 60
   80 IF (KT .EQ. 0) GO TO 100
      J=KT
   90 M=M+1
      NFAC(M)=NFAC(J)
      J=J-1
      IF (J .NE. 0) GO TO 90
C  CALCULA A TRANSFORMADA DE FOURIER
```

FILE: FFTMIV OSVS1 A1 NUCLEO DE PROCESSAMENTO DE DADOS

```
  100 SD=RADF/FLOAT(KSPAN)
      CD=2.0*SIN(SD)**2
      SD=SIN(SD+SD)
      KK=1
      I=I+1
      IF(NFAC(I) .NE. 2) GO TO 600
C  TRANSFORMADA DO FATOR  2 (INCLUINDO O FATOR DE GIRO)
      KSPAN=KSPAN/2
      K1=KSPAN+2
  210 K2=KK+KSPAN
      AK=A(K2)
      BK=B(K2)
      A(K2)=A(KK)-AK
      B(K2)=B(KK)-BK
      A(KK)=A(KK)+AK
      B(KK)=B(KK)+BK
      KK=K2+KSPAN
      IF(KK .LE. NN) GO TO 210
      KK=KK-NN
      IF(KK .LE. JC) GO TO 210
      IF(KK .GT. KSPAN) GO TO 800
  220 C1=1.0-CD
      S1=SD
  230 K2=KK+KSPAN
      AK=A(KK)-A(K2)
      BK=B(KK)-B(K2)
      A(KK)=A(KK)+A(K2)
      B(KK)=B(KK)+B(K2)
      A(K2)=C1*AK-S1*BK
      B(K2)=S1*AK+C1*BK
      KK=K2+KSPAN
      IF(KK .LT. NT) GO TO 230
      K2=KK-NT
      C1=-C1
      KK=K1-K2
      IF(KK .GT. K2) GO TO 230
      AK=C1-(CD*C1+SD*S1)
      S1=(SD*C1-CD*S1)+S1
C  AS TRES DECLARACOES, QUE SEGUEM COMPENSAM O ERRO DE TRUNCAMNETO.
C  SE USAR ARREDONDAMENTO ARITMETICA, SUBSTITUA
C     C1=AK
      C1=0.5/(AK**2+S1**2)+0.5
      S1=C1*S1
      C1=C1*AK
      KK=KK+JC
      IF(KK .LT. K2) GO TO 230
      K1=K1+INC+INC
      KK=(K1-KSPAN)/2+JC
      IF(KK .LE. JC+JC) GO TO 220
      GO TO 100
```

FILEO FFTMIV OSVS1 A1 NUCLEO DE PROCESSAMENTO DE DADOS

```
C  TRANSFORMADA DO FATOR 3 (CODIGO OPCIONAL)

  320 K1=KK+KSPAN
      K2=K1+KSPAN
      IF(NFAC(M).EQ.NFAC(5)) GO TO 330
      IF(KK.GT.21) GO TO 350
  330 AK=A(KK)
      BK=B(KK)
      AJ=A(K1)+A(K2)
      BJ=B(K1)+B(K2)
      A(KK)=AK+AJ
      B(KK)=BK+BJ
      AK=-0.5*AJ+AK
      BK=-0.5*BJ+BK
      AJ=(A(K1)-A(K2))*S120
      BJ=(B(K1)-B(K2))*S120
      A(K1)=AK-BJ
      B(K1)=BK+AJ
      A(K2)=AK+BJ
      B(K2)=BK-AJ
      KK=K2+KSPAN
      IF(KK .LT. NN) GO TO 320
      KK=KK-NN
      IF(KK .LE. KSPAN) GO TO 320
  350 KK=213
      GO TO 700

C  TRANSFORMADA DO FATOR  5 (CODIGO OPCIONAL)

  510 C2=C72**2-S72**2
      S2=2.0*C72*S72
  520 K1=KK+KSPAN
      K2=K1+KSPAN
      K3=K2+KSPAN
      K4=K3+KSPAN
      AKP=A(K1)+A(K4)
      AKM=A(K1)-A(K4)
      BKP=B(K1)+B(K4)
      BKM=B(K1)-B(K4)
      AJP=A(K2)+A(K3)
      AJM=A(K2)-A(K3)
      BJP=B(K2)+B(K3)
      BJM=B(K2)-B(K3)
      AA=A(KK)
      BB=B(KK)
      A(KK)=AA+AKP+AJP
      B(KK)=BB+BKP+BJP
      AK=AKP*C72+AJP*C2+AA
      BK=BKP*C72+BJP*C2+BB
      AJ=AKM*S72+AJM*S2
      BJ=BKM*S72+BJM*S2
      A(K1)=AK-BJ
      A(K4)=AK+BJ
      B(K1)=BK+AJ
      B(K4)=BK-AJ
```

FILEO FFTMIV USVS1 A1 NUCLEO DE PROCESSAMENTO DE DADOS

```
      AK=AKP*C2+AJP*C72+AA
      BK=BKP*C2+BJP*C72+BB
      AJ=AKM*S2-AJM*S72
      BJ=BKM*S2-BJM*S72
      A(K2)=AK-BJ
      A(K3)=AK+BJ
      B(K2)=BK+AJ
      B(K3)=BK-AJ
      KK=K4+KSPAN
      IF(KK .LT. NN) GO TO 520
      KK=KK-NN
      IF(KK .LE. KSPAN) GO TO 520
      GO TO 700
C  TRANSFORMADA DOS FATORES IMPARES
  600 K=NFAC(I)
      KSPNN=KSPAN
      KSPAN=KSPAN/K
      IF(K .EQ. 3) GO TO 320
      IF(K .EQ. 5) GO TO 510
      IF(K .EQ. JF) GO TO 640
      JF=K
      S1=RAD/FLOAT(K)
      C1=COS(S1)
      S1=SIN(S1)
      IF(JF .GT. MAXF) GO TO 998
      CK(JF)=1.0
      SK(JF)=0.0
      J=1
  630 CK(J)=CK(K)*C1+SK(K)*S1
      SK(J)=CK(K)*S1-SK(K)*C1
      K=K-1
      CK(K)=CK(J)
      SK(K)=-SK(J)
      J=J+1
      IF(J .LT. K) GO TO 630
  640 K1=KK
      K2=KK+KSPNN
      AA=A(KK)
      BB=B(KK)
      AK=AA
      BK=BB
      J=1
      K1=K1+KSPAN
  650 K2=K2-KSPAN
      J=J+1
      AT(J)=A(K1)+A(K2)
      AK=AT(J)+AK
      BT(J)=B(K1)+B(K2)
      BK=BT(J)+BK
      J=J+1
      AT(J)=A(K1)-A(K2)
      BT(J)=B(K1)-B(K2)
      K1=K1+KSPAN
```

FILEO FFTMIV OSVS1 A1 NUCLEO DE PROCESSAMENTO DE DADOS

```
      IF(K1 .LT. K2) GO TO 650
      A(KK)=AK
      B(KK)=BK
      K1=KK
      K2=KK+KSPNN
      J=1
  660 K1=K1+KSPAN
      K2=K2-KSPAN
      JJ=J
      AK=AA
      BK=BB
      AJ=0.0
      BJ=0.0
      K=1
  670 K=K+1
      AK=AT(K)*CK(JJ)+AK
      BK=BT(K)*CK(JJ)+BK
      K=K+1
      AJ=AT(K)*SK(JJ)+AJ
      BJ=BT(K)*SK(JJ)+BJ
      JJ=JJ+J
      IF(JJ .GT. JF) JJ=JJ-JF
      IF(K .LT. JF) GO TO 670
      K=JF-J
      A(K1)=AK-BJ
      B(K1)=BK+AJ
      A(K2)=AK+BJ
      B(K2)=BK-AJ
      J=J+1
      IF(J .LT. K) GO TO 660
      KK=KK+KSPNN
      IF(KK .LE. NN) GO TO 640
      KK=KK-NN
      IF(KK .LE. KSPAN) GO TO 640
C  MULTIPLICA PELO FATOR DE GIRO(EXCETO, O FATOR 2)
  700 IF(I .EQ. M) GO TO 800
      KK=JC+1
  710 C2=1.0-CD
      S1=SD
  720 C1=C2
      S2=S1
      KK=KK+KSPAN
  730 AK=A(KK)
      A(KK)=C2*AK-S2*B(KK)
      B(KK)=S2*AK+C2*B(KK)
      KK=KK+KSPNN
      IF(KK .LE. NT) GO TO 730
      AK=S1*S2
      S2=S1*C2+C1*S2
      C2=C1*C2-AK
      KK=KK-NT+KSPAN
      IF(KK .LE. KSPNN) GO TO 730
      C2=C1-(CD*C1+SD*S1)
```

FILEO FFTMIV OSVS1   A1 NUCLEO DE PROCESSAMENTO DE DADOS

```
      S1=S1+(S0*C1-C0*S1)                                              FFT03150
C  AS TRES DECLARACOES SEGUINTES COMPENSAM O ERRO DE TRUNCAMENTO.      FFT03160
C  SE USAR ARREDONDAMENTO ARITMETICO PODE DELETAR.                      FFT03170
      C1=0.5/(C2**2+S1**2)+0.5                                         FFT03180
      S1=C1*S1                                                         FFT03190
      C2=C1*C2                                                         FFT03200
      KK=KK-KSPNN+JC                                                   FFT03210
      IF(KK .LE. KSPAN) GO TO 720                                      FFT03220
      KK=KK-KSPAN+JC+INC                                               FFT03230
      IF(KK.LE. JC+JC) GO TO 710                                       FFT03240
      GO TO 100                                                        FFT03250
C  PERMUTA OS RESULTADOS PARA ORDEM NORMAL... FEITO EM DOIS ESTAGIOS.  FFT03260
C  PERMUTACAO PARA OS FATORES QUADRADOS DE N.                          FFT03270
  800 NP(1)=KS                                                         FFT03280
      IF(KT .EQ. 0) GO TO 890                                          FFT03290
      K=KT+KT+1                                                        FFT03300
      IF(M .LT. K) K=K-1                                               FFT03310
      J=1                                                              FFT03320
      NP(K+1)=JC                                                       FFT03330
  810 NP(J+1)=NP(J)/NFAC(J)                                            FFT03340
      NP(K)=NP(K+1)*NFAC(J)                                            FFT03350
      J=J+1                                                            FFT03360
      K=K-1                                                            FFT03370
      IF(J .LT. K) GO TO 810                                           FFT03380
      K3=NP(K+1)                                                       FFT03390
      KSPAN=NP(2)                                                      FFT03400
      KK=JC+1                                                          FFT03410
      K2=KSPAN+1                                                       FFT03420
      J=1                                                              FFT03430
C  PERMUTACAO PARA A TRANSFORMADA ENVOLVENDO VARIAVEIS SIMPLES.        FFT03440
  820 AK=A(KK)                                                         FFT03450
      A(KK)=A(K2)                                                      FFT03460
      A(K2)=AK                                                         FFT03470
      BK=B(KK)                                                         FFT03480
      B(KK)=B(K2)                                                      FFT03490
      B(K2)=BK                                                         FFT03500
      KK=KK+INC                                                        FFT03510
      K2=KSPAN+K2                                                      FFT03520
      IF(K2 .LT. KS) GO TO 820                                         FFT03530
  830 K2=K2-NP(J)                                                      FFT03540
      J=J+1                                                            FFT03550
      K2=NP(J+1)+K2                                                    FFT03560
      IF(K2 .GT. NP(J)) GO TO 830                                      FFT03570
      J=1                                                              FFT03580
  840 IF(KK .LT. K2) GO TO 820                                         FFT03590
      KK=KK+INC                                                        FFT03600
      K2=KSPAN+K2                                                      FFT03610
      IF(K2 .LT. KS) GO TO 840                                         FFT03620
      IF(KK .LT. KS) GO TO 830                                         FFT03630
```

```
      JC=K3
  890 IF(2*KT+1 .GE. M) RETURN
      KSPNN=NP(KT+1)
C  PERMUTACAO PARA OS FATORES DE N, LIVRES DE QUADRADO.
      J=M-KT
      NFAC(J+1)=1
  900 NFAC(J)=NFAC(J)*NFAC(J+1)
      J=J-1
      IF(J. NE. KT) GO TO 900
      KT=KT+1
      NN=NFAC(KT)-1
      IF(NN .GT. MAXP) GO TO 998
      JJ=0
      J=0
      GO TO 906
  902 JJ=JJ-K2
      K2=KK
      K=K+1
      KK=NFAC(K)
  904 JJ=KK+JJ
      IF(JJ .GE. K2) GO TO 902
      NP(J)=JJ
  906 K2=NFAC(KT)
      K=KT+1
      KK=NFAC(K)
      J=J+1
      IF(J .LE. NN) GO TO 904
C  DETERMINA OS OS CICLOS DE PERMUTACAO DE COMPRIMENTO MAIOR QUE 1.
      J=0
      GO TO 914
  910 K =KK
      KK=NP(K)
      NP(K)=-KK
      IF(KK .NE. J) GO TO 910
      K3=KK
  914 J=J+1
      KK=NP(J)
      IF(KK .LT. 0) GO TO 914
      IF(KK .NE. J) GO TO 910
      NP(J)=-J
      IF(J .NE. NN) GO TO 914
      MAXF=INC*MAXF
C  REORDENA A E B, SEGUINDO OS CICLOS DE PERMUTACAO
      GO TO 950
  924 J=J-1
      IF(NP(J) .LT. 0) GO TO 924
      JJ=JC
  926 KSPAN=JJ
      IF(JJ .GT. MAXF) KSPAN=MAXF
```

FILEO FFTMIV GSVS1 A1 NUCLEO DE PROCESSAMENTO DE DADOS

```
      JJ=JJ-KSPAN                                                       FFT04130
      K=NP(J)                                                           FFT04140
      KK=JC*K+II+JJ                                                     FFT04150
      K1=KK+KSPAN                                                       FFT04160
      K2=0                                                              FFT04170
  928 K2=K2+1                                                           FFT04180
      AT(K2)=A(K1)                                                      FFT04190
      BT(K2)=B(K1)                                                      FFT04200
      K1=K1-INC                                                         FFT04210
      IF(K1 .NE. KK) GO TO 928                                          FFT04220
  932 K1=KK+KSPAN                                                       FFT04230
      K2=K1-JC*(K+NP(K))                                                FFT04240
      K=-NP(K)                                                          FFT04250
  936 A(K1)=A(K2)                                                       FFT04260
      B(K1)=B(K2)                                                       FFT04270
      K1=K1-INC                                                         FFT04280
      K2=K2-INC                                                         FFT04290
      IF(K1 .NE. KK) GO TO 936                                          FFT04300
      KK=K2                                                             FFT04310
      IF(K .NE. J) GO TO 932                                            FFT04320
      K1=KK+KSPAN                                                       FFT04330
      K2=0                                                              FFT04340
  940 K2=K2+1                                                           FFT04350
      A(K1)=AT(K2)                                                      FFT04360
      B(K1)=BT(K2)                                                      FFT04370
      K1=K1-INC                                                         FFT04380
      IF(K1 .NE.KK) GO TO 940                                           FFT04390
      IF(JJ .NE. 0) GO TO 926                                           FFT04400
      IF(J .NE. 1) GO TO 924                                            FFT04410
  950 J=K3+1                                                            FFT04420
      NT=NT-KSPNN                                                       FFT04430
      II=NT-INC+1                                                       FFT04440
      IF(NT .GE. 0) GO TO 924                                           FFT04450
      RETURN                                                            FFT04460
C  ENCONTRANDO ERRO POR INSUFICIENCIA DE ARMAZENAMENTO NA MEMORIA       FFT04470
  998 ISN=0                                                             FFT04480
      PRINT 999                                                         FFT04490
      STOP                                                              FFT04500
  999 FORMAT(2X,'EXCEDEU A CAPACIDADE DO ARRANJO CENTRO DA SUB FFT')    FFT04510
      END                                                               FFT04520
C SUBROTINA REALTR COMPLETA A TRF PARA VALORES REAIS.                   FFT04530
      SUBROUTINE REALTR(A, B, N, ISN)                                   FFT04540
      DIMENSION A(1), B(1)                                              FFT04550
      REAL IM                                                           FFT04560
      INC=IABS(ISN)                                                     FFT04570
      NK=N*INC+2                                                        FFT04580
      NH=NK/2                                                           FFT04590
      SD=2.0*ATAN(1.0)/FLOAT(N)                                         FFT04600
      CD=2.0*SIN(SD)**2                                                 FFT04610
      SD=SIN(SD+SD)                                                     FFT04620
      SN=0.0                                                            FFT04630
```

```
FILEO FFTMIV    OSVS1     A1  NUCLEO DE PROCESSAMENTO DE DADOS

      IF(ISN .LT. 0) GO TO 30                                           FFT04640
      CN=1.0                                                            FFT04650
      A(NK-1)=A(1)                                                      FFT04660
      B(NK-1)=B(1)                                                      FFT04670
   10 DO 20 J=1,NH,INC                                                  FFT04680
      K=NK-J                                                            FFT04690
      AA=A(J)+A(K)                                                      FFT04700
      AB=A(J)-A(K)                                                      FFT04710
      BA=B(J)+B(K)                                                      FFT04720
      BB=B(J)-B(K)                                                      FFT04730
      RE=CN*BA+SN*AB                                                    FFT04740
      IM=SN*BA-CN*AB                                                    FFT04750
      B(K)=IM-BB                                                        FFT04760
      B(J)=IM+BB                                                        FFT04770
      A(K)=AA-RE                                                        FFT04780
      A(J)=AA+RE                                                        FFT04790
      AA=CN-(CD*CN+SD*SN)                                               FFT04800
      SN=(SD*CN-CD*SN)+SN                                               FFT04810
C AS TRES DECLARACOES SEGUINTES COMPENSAM O ERRO DE TRUNCAMENTO.        FFT04820
C SE USAR ARREDONDAMENTO ARITMETICO, SUBSTITUAO                          FFT04830
C     CN=AA                                                             FFT04840
      CN=0.5/(AA**2+SN**2)+0.5                                          FFT04850
      SN=CN*SN                                                          FFT04860
   20 CN=CN*AA                                                          FFT04870
      RETURN                                                            FFT04880
   30 CN=-1.0                                                           FFT04890
      SD=-SD                                                            FFT04900
      GO TO 10                                                          FFT04910
      END                                                               FFT04920
```

4.3 - Desenvolvimento do Pruning.

A eliminação de operações com zeros (pruning) desenvolvida / por Markel (Markel, John D., 1971 [32]) para a FFT de base dois (números fatoráveis em potências de base dois, unicamente), com base no algoritmo de / Sande (Sande-Gentlemann, 1966 [08]), foi por nós testada no computador da UFSC, modelo IBM-4341 do Núcleo de Processamento de Dados (NPD).

Usamos o programa apresentado no ítem 4.2 deste capítulo, no qual introduzimos pequenas modificações, ou seja, acrescentamos um ruptura/ de sequência incondicional, mais precisamente um " GO TO" controlado (computed GO TO) na parte correspondente à transformada do fator 2 da subrotina / FFT e obtivemos uma economia de 0,02 segundos. Mais precisamente, computamos a FFT do exemplo citado no ítem 4.2 do capítulo II deste trabalho e obtivemos um tempo de 0,09 segundos na computação direta, enquanto que com o uso do pruning supra citado obtivemos um tempo de 0,07 segundos, o que corresponde a uma economia de tempo da ordem de 30%. Em ambos os casos usamos / o compilador WATFIV.

Nos propusemos, também, a introduzir esse pruning na solução do nosso problema, que tem características particulares, ou seja, das 630 amostras apenas 21 delas são diferentes de zero, visando assim obter uma diminuição do tempo de CPU.

Como a transformada é calculada para cada um dos fatores primos da entrada, precisamos analisar a ordem de entrada dos referidos fatores. A ordem de entrada é aquela da equação (120).

Para o primeiro fator, 3, a sequência dos pontos amostrados / $\{x_n\}$ é dividida em outras três subsequências com 210 pontos cada uma, onde/ essas, tem apenas 21 pontos diferentes de zero. Para o segundo fator, 2, cada uma das três subsequências é agora dividida em outras duas com 105 pontos cada, tendo 63 pontos diferentes de zero. Em suma, para o primeiro fator temos um total de 63 pontos diferentes de zero, enquanto que para o segundo fator são 126 pontos diferentes de zero.

A introdução do pruning foi feita diretamente na subrotina / com a introdução das rupturas de sequências condicionais ou incondicionais. No primeiro caso, usamos um "IF" lógico, e no segundo caso usamos um "GO TO" controlado (computed GO TO).

No entanto, em ambos os casos, observamos um aumento do / tempo de execussão (tempo de CPU) da máquina.

Esse aumento é da ordem de 50 centésimos de segundo para o compilador WATFIV, e 01 segundo para o compilador FORTRAN OSVS1, ambos do computador IBM-4341 do NPD da UFSC. Ou seja, obtemos um tempo de 2,56 se - gundos e 7,36 segundos para os compiladores acima especificados, na computação dos resultados sem o pruning, respectivamente.

Julgamos, através de um estudo mais detalhado, que o aumento de tempo referido , deve-se a dois fatores:

i) - Complexidade das borboletas em cada um dos nós relativos ao gráfico / de fluxo de sinal, i.e., para a base dois as borboletas, além de serem bastante simples, se repetem em cada um dos passos da fatoração, enquanto que, para o nosso caso, as referidas borboletas são mais complexas (envolvem maior número de operações complexas) e, em cada passo, são diferentes umas / das outras (Veja apêndice E deste trabalho).

ii) - A estrutura interna do computador, i.e., ele gasta menos tempo de CPU para fazer as operações complexas exigidas na solução do nosso problema, do que para executar as rupturas condicionais, ou incondicionais das sequências usadas. No entanto, esta última conclusão é fruto de uma estudo superficial, já que não dispomos das ferramentas necessárias e suficientes para desenvolver um estudo mais profundo da estrutura interna do computador usado no de - senvolvimento deste trabalho.

4.4 - Resultados.

Nas tabelas a seguir, apresentamos os valores obtidos na computação das equações (103) e (120), onde a primeira representa a FFT, e a / segunda o algoritmo da referida transformada na versão de Sande [08].

Em virtude da decomposição usada por Singleton [16] e apresentada na equação (126), os valores da saída, representam os coeficientes/ de Fourier das formas de ondas de terra e ionosférica, respectivamente, e estão divididos em partes real e imaginária da transformada correspondente.

Os gráficos apresentados foram obtidos diretamente dos resultados da computação e precisam ser arranjados para representar o gráfico real da transformada de Fourier. Isto porque, a transformada discreta é simétrica em relação a $n = N/2$. Os resultados para $n > N/2$ são aqueles relativos à frequência negativa e por esse motivo representam a transformada relativa àquela da forma contínua, convencional.

A subrotina para o traçado de gráficos também não apresenta/ o escalonamento desejado e por esse motivo precisa ser rearranjada adequadamente.

Os pontos intermediários não foram reproduzidos por estarem/ muito próximos do zero, razão pela qual não há interesse nos mesmos em nosso estudo.

VALORES COMPUTADOS COM DADOS EM ONDA DE TERRA

VALORES DE A (PARTE REAL DE CINT)

-3.599977E 00	-3.588141E 00	-3.559289E 00	-3.533187E 00	-3.541490E 00	-3.625396E 00	-3.833675E 00	-4.218870E 00
-4.833893E 00	-5.762235E 00	-6.543933E 00	-8.511657E 00	-1.094745E 01	-1.274532E 01	-1.537479E 01	-1.833936E 01
-2.151550E 01	-2.483275E 01	-2.617673E 01	-3.142134E 01	-3.441154E 01	-3.696755E 01	-3.897922E 01	-4.021361E 01
-4.052087E 01	-3.973976E 01	-3.772485E 01	-3.435150E 01	-2.957244E 01	-2.317212E 01	-1.527199E 01	-5.832944E 00
5.092384E 00	1.743617E 01	3.096912E 01	4.555543E 01	6.107646E 01	7.716519E 01	9.352007E 01	1.096913E 02
1.759404E 02	1.413292E 02	1.557275E 02	1.658117E 02	1.602761E 02	1.695404E 02	1.972572E 02	2.023205E 02
2.048698E 02	2.047957E 02	2.028439E 02	1.960166E 02	1.865736E 02	1.766304E 02	1.651567E 02	1.501721E 02
1.333413E 02	1.149608E 02	9.538206E 01	7.494514E 01	5.462505E 01	3.255820E 01	1.223651E 01	-7.901134E 00
-2.707600E 01	-4.495065E 01	-6.134061E 01	-7.592311E 01	-8.854256E 01	-9.966154E 01	-1.073735E 02	-1.135530E 02
-1.174074E 02	-1.191678E 02	-1.188934E 02	-1.167325E 02	-1.126080E 02	-1.075116E 02	-1.003968E 02	-9.327158E 01
-8.489182E 01	-7.501402E 01	-6.088353E 01	-5.775342E 01	-4.882667E 01	-4.031164E 01	-3.237355E 01	-2.515509E 01
-1.876616E 01	-1.328418E 01	-8.756064E 00	-5.190051E 00	-2.576576E 00	-8.714754E-01	-9.403870E-03	9.445910E-02
-4.592857E-01	-1.559412E 00	-3.067771E 00	-4.723932E 00	-6.949112E 00	-9.049977E 00	-1.112165E 01	-1.367142E 01
-1.481899E 01	-1.629994E 01	-1.746575E 01	-1.628394E 01	-1.673828E 01	-1.682744E 01	-1.855416E 01	-1.797522E 01
-1.708551E 01	-1.555559E 01	-1.462112E 01	-1.513676E 01	-1.155591E 01	-9.930367E 00	-8.307131E 00	-6.736530E 00
-5.251218E 00	-3.554949E 00	-2.662086E 00	-1.559378E 00	-7.060550E-01	1.584575E-02	5.707944E-01	9.068513E-01
1.224740E 00	1.356633E 00	1.384723E 00	1.331142E 00	1.216887E 00	1.062573E 00	8.863755E-01	7.357979E-01
5.324264E-01	3.752586E-01	2.435317E-01	1.371237E-01	5.671673E-02	-5.115150E-04	-3.992250E-02	-6.576233E-02
-8.938086E-02	-1.147335E-01	-1.495829E-01	-1.995754E-01	-2.687131E-01	-3.590032E-01	-4.702579E-01	-6.000437E-01
-7.435418E-01	-8.938070E-01	-1.042336E 00	-1.179244E 00	-1.293749E 00	-1.375029E 00	-1.412562E 00	-1.376775E 00
-1.319915E 00	-1.176194E 00	-9.622346E-01	-6.776057E-01	-3.251650E-01	8.965545E-02	5.580617E-01	1.068603E 00
1.607506E 00	2.159055E 00	2.706227E 00	3.231341E 00	3.716703E 00	4.145599E 00	4.502361E 00	4.775634E 00
4.946870E 00	5.020209E 00	4.983663E 00	4.638655E 00	4.589132E 00	4.241508E 00	3.806451E 00	3.297599E 00
2.731074E 00	2.125099E 00	1.499168E 00	8.733976E-01	2.677550E-01	-2.986810E-01	-8.084398E-01	-1.246593E 00
-1.600003E 00	-1.860163E 00	-2.021187E 00	-2.061232E 00	-2.042042E 00	-1.969098E 00	-1.691174E 00	-1.400075E 00
-1.045897E 00	-6.567443E-01	-2.179487E-01	1.666925E-01	6.056625E-01	9.560459E-01	1.344812E 00	1.635677E 00
1.867128E 00	2.022423E 00	2.059989E 00	2.090537E 00	2.019982E 00	1.869221E 00	1.654020E 00	1.384558E 00
1.072756E 00	7.320709E-01	3.765925E-01	2.064563E-02	-3.219516E-01	-6.382940E-01	-9.171056E-01	-1.149097E 00
-1.327152E 00	-1.446816E 00	-1.506262E 00	-1.506271E 00	-1.450321E 00	-1.344075E 00	-1.195292E 00	-1.013318E 00
-8.085879E-01	-5.922603E-01	-3.755613E-01	-1.692773E-01	1.671296E-02	1.738028E-01	2.952543E-01	3.762090E-01
4.141896E-01	4.068533E-01	3.621975E-01	2.786449E-01	1.642357E-01	2.682264E-02	-1.244856E-01	-2.797385E-01
-4.287806E-01	-5.612342E-01	-6.677833E-01	-7.399807E-01	-7.707828E-01	-7.551969E-01	-6.901214E-01	-5.748156E-01
-4.109609E-01	-2.023249E-01	4.512781E-02	3.233663E-01	6.230571E-01	9.354582E-01	1.243194E 00	1.540594E 00
1.814138E 00	2.053342E 00	2.245623E 00	2.392176E 00	2.477966E 00	2.502670E 00	2.464828E 00	2.365676E 00
2.208980E 00	2.000636E 00	1.743758E 00	1.463103E 00	1.154722E 00	8.357034E-01	5.183774E-01	2.150619E-01
-6.257224E-02	-3.042625E-01	-5.006955E-01	-6.451541E-01	-7.327617E-01	-7.610623E-01	-7.305670E-01	-6.451049E-01
-5.045133E-01	-3.213091E-01	-1.040132E-01	1.361992E-01	3.932825E-01	6.490335E-01	8.932670E-01	1.114204E 00
1.301320E 00	1.455166E 00	1.538287E 00	1.575715E 00	1.554256E 00	1.473743E 00	1.335225E 00	1.146389E 00
9.111037E-01	6.352478E-01	3.412592E-01	2.568390E-02	-2.856370E-01	-5.697791E-01	-8.713605E-01	-1.119076E 00
-1.322968E 00	-1.474777E 00	-1.568380E 00	-1.600019E 00	-1.568415E 00	-1.474605E 00	-1.322967E 00	-1.119076E 00
-8.713419E-01	-5.897729E-01	-2.855528E-01	2.830716E-02	3.412846E-01	6.352457E-01	9.111190E-01	1.146401E 00
1.336220E 00	1.473704E 00	1.554286E 00	1.575719E 00	1.538369E 00	1.449168E 00	1.301308E 00	1.114271E 00
8.932451E-01	6.490094E-01	3.932515E-01	1.381504E-01	-1.040623E-01	-3.216345E-01	-5.045432E-01	-6.431243E-01
-7.302784E-01	-7.610435E-01	-7.326871E-01	-6.451025E-01	-5.006663E-01	-3.041230E-01	-6.255057E-02	2.151318E-01
5.184422E-01	8.357045E-01	1.154750E 00	1.463118E 00	1.748845E 00	2.000738E 00	2.209155E 00	2.365808E 00
2.464555E 00	2.502841E 00	2.478205E 00	2.392251E 00	2.245766E 00	2.053455E 00	1.814324E 00	1.540641E 00
1.243277E 00	9.357533E-01	6.231597E-01	3.234982E-01	4.513925E-02	-2.022952E-01	-4.110371E-01	-5.748819E-01
-6.901556E-01	-7.552397E-01	-7.708579E-01	-7.399646E-01	-6.678224E-01	-5.612646E-01	-4.287861E-01	-2.797955E-01
-1.245244E-01	2.673380E-02	1.641430E-01	2.785544E-01	3.621645E-01	4.067641E-01	4.140188E-01	3.761599E-01
2.951665E-01	1.737782E-01	1.666743E-02	-1.692629E-01	-3.755784E-01	-5.922827E-01	-8.085038E-01	-1.013315E 00
-1.195315E 00	-1.344084E 00	-1.450362E 00	-1.506286E 00	-1.506257E 00	-1.446825E 00	-1.327109E 00	-1.149095E 00
-9.171617E-01	-6.383482E-01	-3.219651E-01	2.064635E-02	3.765705E-01	7.320423E-01	1.072745E 00	1.384545E 00
1.654031E 00	1.869214E 00	2.019951E 00	2.093529E 00	2.059956E 00	2.022428E 00	1.867156E 00	1.636734E 00
1.344785E 00	9.960646E-01	6.056995E-01	1.666933E-01	-2.179545E-01	-6.567305E-01	-1.047860E 00	-1.400047E 00
-1.691173E 00	-1.909114E 00	-2.042050E 00	-2.081252E 00	-2.021152E 00	-1.860168E 00	-1.600010E 00	-1.246381E 00
-8.084715E-01	-2.989338E-01	2.677594E-01	8.733947E-01	1.499173E 00	2.125125E 00	2.731110E 00	3.297630E 00
3.806525E 00	4.241586E 00	4.589217E 00	4.838952E 00	4.983770E 00	5.020319E 00	4.943908E 00	4.773770E 00
4.502463E 00	4.145665E 00	3.716341E 00	3.231396E 00	2.706222E 00	2.155086E 00	1.607503E 00	1.068600E 00
5.530857E-01	8.964407E-02	-3.251263E-01	-6.775922E-01	-9.621999E-01	-1.176205E 00	-1.320064E 00	-1.376600E 00
-1.412602E 00	-1.375121E 00	-1.293881E 00	-1.179321E 00	-1.042455E 00	-8.938082E-01	-7.435258E-01	-6.002007E-01
-4.704580E-01	-3.591228E-01	-2.688175E-01	-1.996871E-01	-1.495766E-01	-1.148641E-01	-8.959310E-02	-6.651710E-02
-3.963259E-02	-5.947321E-04	5.657563E-02	1.370333E-01	2.435167E-01	3.762469E-01	5.323877E-01	7.058337E-01
8.868218E-01	1.062582E 00	1.216381E 00	1.331149E 00	1.384918E 00	1.356654E 00	1.224775E 00	9.069016E-01
5.708287E-01	1.591205E-02	-7.600176E-01	-1.599329E 00	-2.662011E 00	-3.664875E 00	-5.251158E 00	-6.756535E 00
-8.309082E 00	-9.933377E 00	-1.155591E 01	-1.313677E 01	-1.462113E 01	-1.595601E 01	-1.703955E 01	-1.797327E 01
-1.856421E 01	-1.862748E 01	-1.873330E 01	-1.823401E 01	-1.746577E 01	-1.629991E 01	-1.481905E 01	-1.307148E 01
-1.112187E 01	-9.049997E 00	-6.949124E 00	-4.923931E 00	-3.067770E 00	-1.559407E 00	-4.592765E-01	9.452605E-02
-9.395063E-03	-8.714416E-01	-2.576465E 00	-5.159981E 00	-8.754049E 00	-1.328405E 01	-1.876011E 01	-2.515509E 01
-3.237360E 01	-4.031166E 01	-4.882884E 01	-5.775359E 01	-6.088867E 01	-7.601422E 01	-8.487201E 01	-9.327160E 01
-1.008971E 02	-1.075121E 02	-1.126684E 02	-1.167329E 02	-1.188939E 02	-1.191683E 02	-1.174076E 02	-1.135347E 02
-1.073941E 02	-9.906207E 01	-8.854305E 01	-7.592374E 01	-6.134105E 01	-4.476149E 01	-2.707726E 01	-7.901141E 00
1.223593E 01	3.249770E 01	5.462504E 01	7.494547E 01	9.538289E 01	1.149675E 02	1.333413E 02	1.501725E 02
1.651572E 02	1.760310E 02	1.885742E 02	1.966174E 02	2.026446E 02	2.047964E 02	2.043764E 02	2.023213E 02
1.972580E 02	1.590410E 02	1.602767E 02	1.668124E 02	1.557280E 02	1.413297E 02	1.259410E 02	1.096938E 02
9.352051E 01	7.714554E 01	6.107363E 01	4.559367E 01	3.096938E 01	1.760493E 01	5.092472E 00	-5.832450E 00
-1.527194E 01	-2.317239E 01	-2.952263E 01	-3.435176E 01	-3.772506E 01	-3.974064E 01	-4.052161E 01	-4.021384E 01
-3.897939E 01	-3.698769E 01	-3.441171E 01	-3.142149E 01	-2.617886E 01	-2.483260E 01	-2.151561E 01	-1.833946E 01
-1.539486E 01	-1.274940E 01	-1.644753E 01	-3.511740E 00	-6.943947E 00	-5.726261E 00	-4.033896E 00	-4.218875E 00
-3.833728E 00	-3.625406E 00	-3.541418E 00	-3.533184E 00	-3.559300E 00	-3.568133E 00		

VALORES DE B (PARTE IMAGINARIA DE C(N))

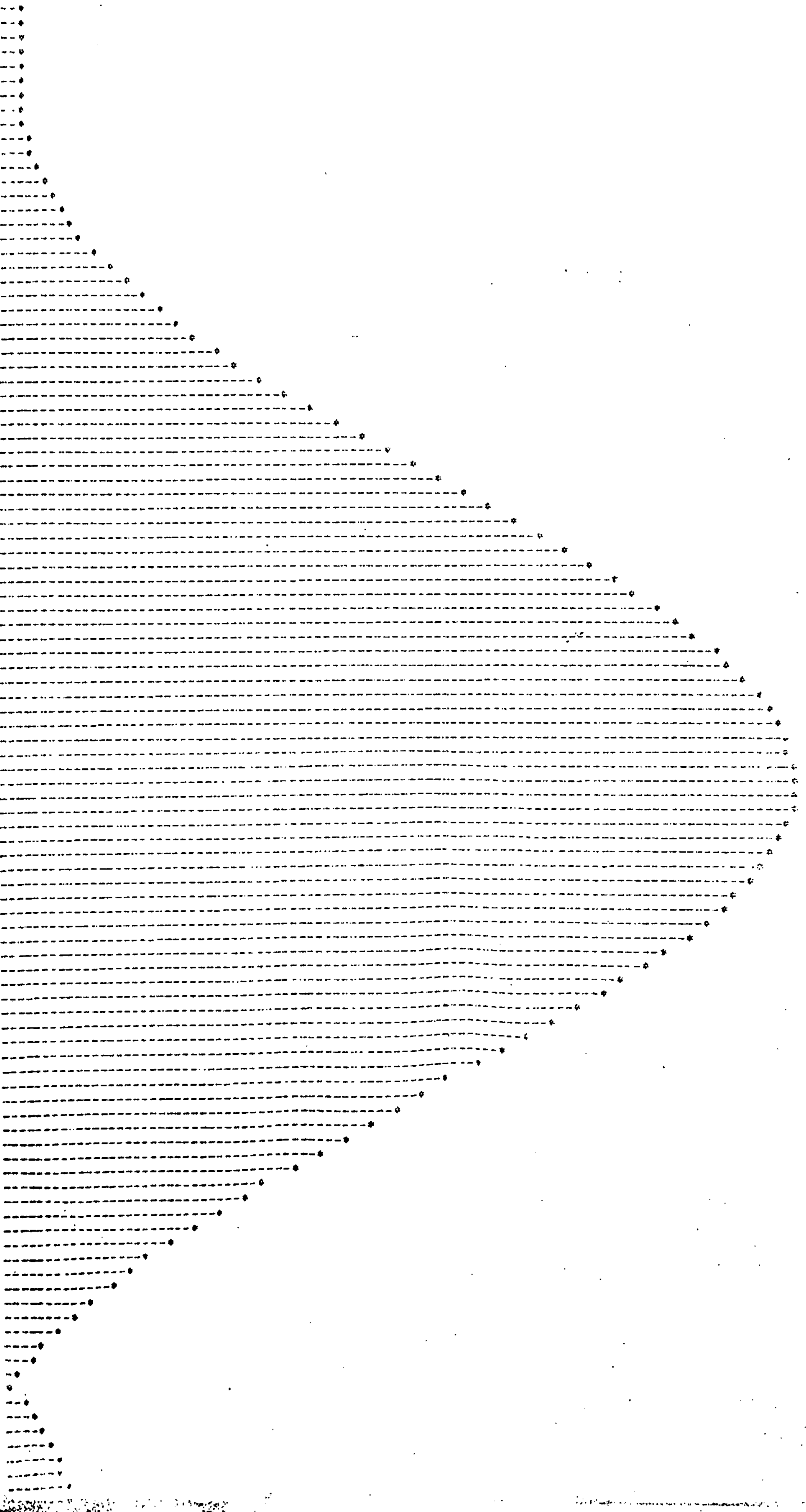
0.000000E-01	-1.834942E-01	-3.317063E-01	-4.129264E-01	-4.024142E-01	-2.854443E-01	-5.933970E-02	2.020719E-01
6.522272E-01	1.766566E 00	1.845594E 00	1.715205E 00	1.770019E 00	1.574592E 00	9.700825E-01	-1.230000E-01
-1.810666E 00	-4.173503E 00	-7.904085E 00	-1.121962E 01	-1.555716E 01	-2.163220E 01	-2.810333E 01	-3.530549E 01
-4.332870E 01	-5.197900E 01	-6.086732E 01	-7.011564E 01	-7.942007E 01	-8.865373E 01	-9.727393E 01	-1.053207E 02
-1.124556E 02	-1.184908E 02	-1.229382E 02	-1.258256E 02	-1.265723E 02	-1.259110E 02	-1.223165E 02	-1.175097E 02
-1.059534E 02	-1.101570E 02	-5.819797E 01	-7.419330E 01	-5.821462E 01	-4.078099E 01	-2.189933E 01	-1.037532E 00
1.893947E 01	4.012001E 01	6.133293E 01	8.220067E 01	1.023462E 02	1.214122E 02	1.393573E 02	1.549406E 02
1.688304E 02	1.804619E 02	1.896572E 02	1.962846E 02	2.002075E 02	2.015640E 02	2.003719E 02	1.964223E 02
1.501776E 02	1.517283E 02	1.713064E 02	1.591767E 02	1.456400E 02	1.310043E 02	1.159994E 02	9.975559E 01
6.379166E 01	6.802576E 01	5.274792E 01	3.322394E 01	2.466797E 01	1.253766E 01	1.531214E 00	-6.214294E 00
-1.622485E 01	-2.755817E 01	-2.755223E 01	-3.092360E 01	-3.262287E 01	-3.366079E 01	-3.291379E 01	-3.131763E 01
-2.886308E 01	-2.572844E 01	-2.205550E 01	-1.814307E 01	-1.404275E 01	-9.955594E 00	-6.020247E 00	-2.360255E 00
9.043430E-01	3.711320E 00	5.990617E 00	7.720343E 00	8.888473E 00	9.452642E 00	9.505643E 00	9.150773E 00
8.307064E 00	7.101386E 00	5.608068E 00	3.905559E 00	2.072189E 00	1.652780E-01	-1.683599E 00	-3.405320E 00
-5.115644E 00	-6.576327E 00	-7.615932E 00	-8.610159E 00	-9.545863E 00	-1.012048E 01	-1.024106E 01	-1.022319E 01
-9.989737E 00	-9.558940E 00	-8.993077E 00	-8.296076E 00	-7.514911E 00	-6.662134E 00	-5.830479E 00	-4.988958E 00
-4.182406E 00	-3.433902E 00	-2.749309E 00	-2.148159E 00	-1.631742E 00	-1.200688E 00	-8.512274E-01	-5.764359E-01
-3.667853E-01	-2.111276E-01	-9.753776E-02	-1.409096E-02	5.032087E-02	1.053665E-01	1.537923E-01	2.159699E-01
2.798620E-01	3.538022E-01	4.270242E-01	5.042261E-01	5.767783E-01	6.376511E-01	6.793408E-01	6.941790E-01
6.751734E-01	6.164909E-01	5.138134E-01	3.651168E-01	1.707209E-01	-6.666291E-02	-3.416359E-01	-6.401178E-01
-9.599438E-01	-1.300974E 00	-1.625760E 00	-1.929770E 00	-2.198405E 00	-2.417385E 00	-2.575532E 00	-2.655331E 00
-2.653644E 00	-2.561897E 00	-2.376917E 00	-2.096635E 00	-1.730615E 00	-1.279577E 00	-7.567005E-01	-1.745111E-01
4.512330E-01	1.102633E 00	1.760592E 00	2.405720E 00	3.018255E 00	3.579155E 00	4.073139E 00	4.483646E 00
4.799283E 00	5.011341E 00	5.114799E 00	5.108267E 00	4.994394E 00	4.779390E 00	4.473023E 00	4.088184E 00
3.640234E 00	3.146705E 00	2.620225E 00	2.098217E 00	1.561736E 00	1.095169E 00	6.552491E-01	2.764831E-01
-2.919136E-02	-2.530446E-01	-3.695357E-01	-4.368495E-01	-3.905866E-01	-2.758056E-01	-7.042484E-02	1.846436E-01
4.964292E-01	8.442293E-01	1.212412E 00	1.584897E 00	1.945914E 00	2.260583E 00	2.575573E 00	2.819577E 00
3.003613E 00	3.121449E 00	3.169792E 00	3.148265E 00	3.059362E 00	2.908331E 00	2.702840E 00	2.452398E 00
2.168264E 00	1.862868E 00	1.547987E 00	1.237013E 00	9.415268E-01	6.722654E-01	4.383000E-01	2.467708E-01
1.025980E-01	8.256741E-03	-3.623465E-02	-3.322906E-02	1.269594E-02	9.469346E-02	2.032420E-01	3.342894E-01
4.718593E-01	6.076854E-01	7.315450E-01	8.341114E-01	9.072151E-01	9.443197E-01	9.406334E-01	8.937576E-01
8.032271E-01	6.711174E-01	5.015539E-01	3.007584E-01	7.665966E-02	-1.613934E-01	-4.031917E-01	-6.379018E-01
-8.547058E-01	-1.043284E 00	-1.194251E 00	-1.299591E 00	-1.353104E 00	-1.350465E 00	-1.289971E 00	-1.171906E 00
-9.792281E-01	-7.769335E-01	-5.125255E-01	-2.149706E-01	1.050873E-01	4.361271E-01	7.659439E-01	1.082508E 00
1.373654E 00	1.629340E 00	1.839564E 00	1.996919E 00	2.095974E 00	2.133489E 00	2.108796E 00	2.024264E 00
1.883668E 00	1.593669E 00	1.403911E 00	1.201695E 00	9.211460E-01	6.335526E-01	3.511913E-01	6.662720E-02
-1.506543E-01	-3.493506E-01	-5.600240E-01	-5.595925E-01	-6.473091E-01	-6.267447E-01	-5.543033E-01	-4.286731E-01
-2.557456E-01	-4.357325E-02	1.980469E-01	4.579626E-01	7.243198E-01	9.847055E-01	1.226961E 00	1.439632E 00
1.612375E 00	1.736521E 00	1.805268E 00	1.814226E 00	1.761327E 00	1.647129E 00	1.474722E 00	1.249540E 00
9.792466E-01	6.735970E-01	3.429717E-01	-1.335163E-05	-3.475736E-01	-6.733799E-01	-9.792632E-01	-1.255541E 00
-1.474708E 00	-1.647141E 00	-1.761332E 00	-1.814212E 00	-1.805290E 00	-1.736524E 00	-1.512391E 00	-1.439652E 00
-1.226968E 00	-9.846967E-01	-7.242142E-01	-4.579946E-01	-1.900255E-01	4.356778E-02	2.557271E-01	4.286190E-01
5.542953E-01	6.267133E-01	6.422729E-01	5.998335E-01	5.007767E-01	3.469995E-01	1.506351E-01	-8.606604E-02
-3.512657E-01	-5.336430E-01	-9.212520E-01	-1.201808E 00	-1.463071E 00	-1.653635E 00	-1.683787E 00	-2.024410E 00
-2.109035E 00	-2.133607E 00	-2.056036E 00	-1.556946E 00	-1.625590E 00	-1.625353E 00	-1.373822E 00	-1.062442E 00
-7.659774E-01	-4.361379E-01	-1.050152E-01	2.151603E-01	5.126539E-01	7.770561E-01	9.992321E-01	1.171572E 00
1.290051E 00	1.350634E 00	1.353215E 00	1.299745E 00	1.194443E 00	1.043463E 00	8.548777E-01	6.383434E-01
4.033942E-01	1.615261E-01	-7.657820E-02	-3.007217E-01	-5.015312E-01	-6.710229E-01	-6.031256E-01	-6.936847E-01
-9.405825E-01	-9.442262E-01	-9.072120E-01	-8.340274E-01	-7.315389E-01	-6.078620E-01	-4.713800E-01	-3.342997E-01
-2.052118E-01	-9.494680E-02	-1.270040E-02	3.417907E-02	3.620454E-02	-6.283690E-03	-1.026174E-01	-2.467919E-01
-4.382193E-01	-6.722799E-01	-9.415374E-01	-1.237010E 00	-1.547992E 00	-1.862584E 00	-2.160258E 00	-2.452403E 00
-2.702840E 00	-2.908349E 00	-3.059362E 00	-3.148212E 00	-3.169793E 00	-3.121471E 00	-3.003674E 00	-2.819572E 00
-2.575597E 00	-2.280565E 00	-1.945894E 00	-1.584906E 00	-1.212412E 00	-8.442481E-01	-4.964309E-01	-1.846208E-01
7.646074E-02	2.758086E-01	3.960302E-01	4.363800E-01	3.895435E-01	2.530206E-01	2.921560E-02	-2.764823E-01
-6.552439E-01	-1.095224E 00	-1.581788E 00	-2.098239E 00	-2.626205E 00	-3.146738E 00	-3.640296E 00	-4.086213E 00
-4.473066E 00	-4.779407E 00	-4.994401E 00	-5.108295E 00	-5.114806E 00	-5.011374E 00	-4.799257E 00	-4.483675E 00
-4.073174E 00	-3.579305E 00	-3.018279E 00	-2.405708E 00	-1.760616E 00	-1.102644E 00	-4.512578E-01	1.744906E-01
7.567927E-01	1.279927E 00	1.730680E 00	2.098680E 00	2.376975E 00	2.561994E 00	2.653715E 00	2.655422E 00
2.573503E 00	2.417459E 00	2.198509E 00	1.929643E 00	1.625906E 00	1.301183E 00	9.700829E-01	6.402094E-01
3.417924E-01	6.679910E-02	-1.705711E-01	-3.551057E-01	-5.138024E-01	-6.164638E-01	-6.751574E-01	-6.942293E-01
-6.793322E-01	-6.376522E-01	-5.767327E-01	-5.042554E-01	-4.270275E-01	-3.568580E-01	-2.799474E-01	-2.160439E-01
-1.588488E-01	-1.054884E-01	-5.041765E-02	1.399667E-02	9.745544E-02	2.110623E-01	3.067314E-01	5.763284E-01
8.511302E-01	1.200573E 00	1.631660E 00	2.148658E 00	2.749424E 00	3.433831E 00	4.182310E 00	4.986894E 00
5.830428E 00	6.682066E 00	7.514877E 00	8.296684E 00	8.993090E 00	9.556935E 00	9.989749E 00	1.022326E 01
1.024109E 01	1.052055E 01	9.545935E 00	8.610230E 00	7.615952E 00	6.576355E 00	5.115672E 00	3.405540E 00
1.683626E 00	-1.352002E-01	-2.072185E 00	-3.905375E 00	-5.608063E 00	-7.101387E 00	-8.307107E 00	-9.150747E 00
-9.564844E 00	-9.492096E 00	-8.888512E 00	-7.720365E 00	-5.990695E 00	-3.711367E 00	-9.045605E-01	2.886195E 00
6.020176E 00	9.953920E 00	1.404276E 01	1.814305E 01	2.205554E 01	2.572664E 01	2.885351E 01	3.131602E 01
3.291405E 01	3.348105E 01	3.286397E 01	3.092366E 01	2.755255E 01	2.260635E 01	1.622511E 01	3.214593E 00
-1.331110E 00	-1.233747E 01	-2.463774E 01	-3.822353E 01	-5.274779E 01	-6.822553E 01	-8.379161E 01	-9.975429E 01
-1.155995E 02	-1.310046E 02	-1.456401E 02	-1.591730E 02	-1.715066E 02	-1.817267E 02	-1.901779E 02	-1.964226E 02
-2.002724E 02	-2.015646E 02	-2.002078E 02	-1.962854E 02	-1.896586E 02	-1.804624E 02	-1.688310E 02	-1.549493E 02
-1.390537E 02	-1.214125E 02	-1.023485E 02	-8.220050E 01	-6.135322E 01	-4.012024E 01	-1.893961E 01	1.037410E 00
2.185500E 01	4.078098E 01	5.831470E 01	7.419337E 01	8.619804E 01	1.061573E 02	1.097506E 02	1.175079E 02
1.228189E 02	1.259122E 02	1.266725E 02	1.258265E 02	1.229386E 02	1.164073E 02	1.124560E 02	1.053273E 02
9.727496E 01	8.865305E 01	7.942027E 01	7.011592E 01	6.086742E 01	5.157907E 01	4.332875E 01	3.536548E 01
2.810535E 01	2.163219E 01	1.599715E 01	1.121980E 01	7.290526E 00	4.173475E 00	1.810062E 00	1.256845E-01
-9.700995E-01	-1.575026E 00	-1.790012E 00	-1.715312E 00	-1.445546E 00	-1.066577E 00	-6.522079E-01	-2.520622E-01
5.964909E-02	2.854313E-01	4.024906E-01	4.129302E-01	3.317150E-01	1.554546E-01		

VALEURS MODIFIEES

[illegible].857124E-03	2.851452E-03	2.837073E-03	2.823201E-03	[illegible]	2.866262E-03	[illegible]	3.354702E-03
3.871136E-03	4.623435E-03	5.629294E-03	5.591113E-03	5.512460E-03	1.019995E-02	1.224231E-02	1.455537E-02
1.713614E-02	1.998492E-02	2.316944E-02	2.647969E-02	3.011750E-02	[illegible]	3.315893E-02	4.250184E-02
4.708251E-02	5.186542E-02	5.683333E-02	6.156707E-02	[illegible]	7.266695E-02	7.315711E-02	8.372062E-02
3.934142E-02	9.495355E-02	1.006181E-01	1.062171E-01	1.117924E-01	1.171950E-01	1.225106E-01	1.276891E-01
1.326847E-01	1.374766E-01	1.420389E-01	1.463463E-01	1.503754E-01	1.541041E-01	1.575112E-01	1.655784E-01
1.632564E-01	1.656257E-01	1.675777E-01	1.691339E-01	1.702611E-01	1.713233E-01	1.713471E-01	1.712534E-01
1.737430E-01	1.576197E-01	1.684955E-01	1.667506E-01	1.646247E-01	1.621165E-01	1.592423E-01	1.560167E-01
1.524556E-01	1.465011E-01	1.444107E-01	1.399667E-01	1.352721E-01	1.303506E-01	1.252273E-01	1.159275E-01
1.144771E-01	1.089122E-01	1.032296E-01	9.748510E-02	9.169559E-02	9.586665E-02	8.003373E-02	7.431155E-02
6.555372E-02	6.295385E-02	5.741337E-02	5.195353E-02	4.671231E-02	4.158917E-02	3.664022E-02	3.100518E-02
2.732333E-02	2.290567E-02	1.686220E-02	1.497633E-02	1.133112E-02	7.930182E-03	4.777175E-03	1.874768E-03
8.051349E-04	3.194940E-03	5.353127E-03	7.271310E-03	[illegible]	1.040066E-02	1.164212E-02	1.266359E-02
1.348254E-02	1.411085E-02	1.455871E-02	1.463837E-02	1.496229E-02	1.494312E-02	1.473391E-02	1.452776E-02
1.415773E-02	1.359768E-02	1.315795E-02	1.255357E-02	1.169585E-02	1.119645E-02	1.046609E-02	9.716775E-03
8.957010E-03	8.196432E-03	7.443495E-03	6.705895E-03	5.590479E-03	5.302293E-03	4.649453E-03	4.033457E-03
3.498761E-03	2.920061E-03	2.443357E-03	2.005607E-03	1.615505E-03	1.272495E-03	9.756193E-04	7.232369E-04
5.131238E-04	3.424170E-04	2.082043E-04	1.554314E-04	6.017617E-05	3.364290E-05	1.293704E-04	1.794076E-04
2.331654E-04	2.729265E-04	3.590991E-04	4.303855E-04	5.050013E-04	5.007669E-04	6.557333E-04	7.262309E-04
7.971006E-04	5.617414E-04	9.222770E-04	9.797404E-04	1.035609E-03	1.092573E-03	1.153418E-03	1.221409E-03
1.299931E-03	1.371936E-03	1.499345E-03	1.623235E-03	1.763747E-03	1.919681E-03	2.093001E-03	2.271656E-03
2.462351E-03	2.659006E-03	2.850519E-03	3.057546E-03	3.253905E-03	3.443365E-03	3.623410E-03	3.791125E-03
3.943909E-03	4.079260E-03	4.194867E-03	4.238790E-03	4.599301E-03	4.404540E-03	4.424512E-03	4.417233E-03
4.382495E-03	4.320061E-03	4.230133E-03	4.113026E-03	3.969494E-03	3.830564E-03	3.607539E-03	3.392030E-03
3.155326E-03	2.931111E-03	2.620117E-03	2.345563E-03	2.059659E-03	1.747709E-03	1.439424E-03	1.132630E-03
8.335126E-04	5.555770E-04	3.022712E-04	3.776057E-04	5.745657E-04	8.158358E-04	1.069033E-03	1.398766E-03
1.533329E-03	1.739329E-03	1.924484E-03	2.087129E-03	2.226032E-03	2.346266E-03	2.429317E-03	2.493000E-03
2.531297E-03	2.544559E-03	2.533400E-03	2.456676E-03	2.441473E-03	2.353135E-03	2.265248E-03	2.149414E-03
2.017696E-03	1.871811E-03	1.714191E-03	1.546917E-03	1.372325E-03	1.152716E-03	1.013411E-03	8.277232E-04
6.468815E-04	4.705597E-04	2.994484E-04	1.369110E-04	1.665739E-05	1.571592E-04	2.853266E-04	5.394219E-04
4.983228E-04	5.812873E-04	6.478505E-04	6.979540E-04	7.317150E-04	7.497022E-04	7.533455E-04	7.432487E-04
7.226250E-04	6.545343E-04	6.628293E-04	6.339410E-04	6.147502E-04	6.126965E-04	6.343403E-04	6.314920E-04
7.526772E-04	8.434285E-04	9.404961E-04	1.062870E-03	1.162270E-03	1.302917E-03	1.421643E-03	1.536240E-03
1.643779E-03	1.742391E-03	1.830391E-03	1.900203E-03	1.968423E-03	2.016179E-03	2.048487E-03	2.066749E-03
2.064555E-03	2.047156E-03	2.014395E-03	1.964723E-03	1.699213E-03	1.816511E-03	1.723629E-03	1.615031E-03
1.495779E-03	1.365697E-03	1.227235E-03	1.082479E-03	9.341610E-04	7.859366E-04	6.431802E-04	5.149465E-04
4.175872E-04	3.757938E-04	4.059099E-04	4.335755E-04	5.977366E-04	7.160704E-04	8.343444E-04	9.475256E-04
1.052549E-03	1.147477E-03	1.231017E-03	1.302321E-03	1.300936E-03	1.406702E-03	1.439745E-03	1.460565E-03
1.469832E-03	1.466605E-03	1.458130E-03	1.440039E-03	1.416140E-03	1.388519E-03	1.359455E-03	1.331272E-03
1.306313E-03	1.286115E-03	1.274160E-03	1.269850E-03	1.274185E-03	1.286715E-03	1.305319E-03	1.331272E-03
1.359438E-03	1.383527E-03	1.416146E-03	1.440032E-03	1.458147E-03	1.408612E-03	1.469849E-03	1.460583E-03
1.435765E-03	1.406672E-03	1.300928E-03	1.302313E-03	1.231001E-03	1.147483E-03	1.052537E-03	9.474738E-04
8.343763E-04	7.160394E-04	5.970991E-04	4.885722E-04	4.059337E-04	3.767717E-04	4.178965E-04	5.149667E-04
6.431548E-04	7.859508E-04	9.341957E-04	1.052540E-03	1.227275E-03	1.365613E-03	1.495572E-03	1.615721E-03
1.723713E-03	1.818599E-03	1.699260E-03	1.964747E-03	2.014456E-03	2.047825E-03	2.064661E-03	2.064823E-03
2.048571E-03	2.016314E-03	1.968593E-03	1.906275E-03	1.830524E-03	1.742507E-03	1.643502E-03	1.536302E-03
1.421934E-03	1.303078E-03	1.162383E-03	1.063914E-03	9.456461E-04	8.435633E-04	7.523258E-04	6.316198E-04
6.344449E-04	6.129515E-04	6.148031E-04	6.339415E-04	6.626380E-04	6.542921E-04	7.225506E-04	7.432222E-04
7.530113E-04	7.495860E-04	7.315796E-04	6.978690E-04	6.478478E-04	5.812456E-04	4.983599E-04	5.793958E-04
2.653246E-04	1.571623E-04	1.663079E-05	1.369077E-04	2.994596E-04	4.701114E-04	6.469060E-04	8.277241E-04
1.010431E-03	1.152728E-03	1.372360E-03	1.546925E-03	1.714192E-03	1.871625E-03	2.017606E-03	2.149416E-03
2.265247E-03	2.353158E-03	2.441475E-03	2.456654E-03	2.533399E-03	2.544572E-03	2.531339E-03	2.492992E-03
2.429359E-03	2.340251E-03	2.226093E-03	2.087127E-03	1.924484E-03	1.739538E-03	1.533351E-03	1.398780E-03
1.064013E-03	8.192509E-04	5.745497E-04	3.776890E-04	3.022791E-04	5.565009E-04	8.335437E-04	1.132697E-03
1.415422E-03	1.745794E-03	2.059020E-03	2.345551E-03	2.630147E-03	2.961136E-03	3.155875E-03	3.392050E-03
3.607572E-03	3.830577E-03	3.507498E-03	4.113033E-03	4.230145E-03	4.320111E-03	4.382517E-03	4.417270E-03
4.424533E-03	4.405614E-03	4.599363E-03	4.288848E-03	4.194930E-03	4.079349E-03	3.943995E-03	3.791235E-03
3.623508E-03	3.443455E-03	3.253982E-03	3.055015E-03	2.858646E-03	2.659081E-03	2.462398E-03	2.271723E-03
2.005952E-03	1.915936E-03	1.763825E-03	1.622313E-03	1.499443E-03	1.3720[illegible]E-03	1.303102E-03	1.221501E-03
1.153455E-03	1.092652E-03	1.035773E-03	9.797965E-04	9.223754E-04	8.617523E-04	7.971413E-04	7.263429E-04
6.558160E-04	5.005142E-04	5.050178E-04	4.304398E-04	3.591495E-04	2.937011E-04	2.332691E-04	1.794705E-04
1.299351E-04	3.372215E-05	6.015541E-05	1.553214E-04	2.081675E-04	3.423835E-04	5.137493E-04	7.231854E-04
9.755359E-04	1.272431E-03	1.615447E-03	2.005610E-03	2.443275E-03	2.928128E-03	3.458694E-03	4.033417E-03
4.645445E-03	5.303241E-03	5.590449E-03	6.705891E-03	7.443491E-03	8.156406E-03	8.957013E-03	9.716820E-03
1.046653E-02	1.119646E-02	1.169587E-02	1.255362E-02	1.315800E-02	1.369691E-02	1.415777E-02	1.452779E-02
1.479395E-02	1.494315E-02	1.496239E-02	1.463843E-02	1.455875E-02	1.411090E-02	1.348300E-02	1.266363E-02
1.164214E-02	1.040876E-02	6.954402E-03	7.271490E-03	5.353149E-03	3.154571E-03	8.051579E-04	1.879432E-03
4.777920E-03	7.930148E-03	1.133107E-02	1.497679E-02	1.866224E-02	2.298065E-02	2.732346E-02	3.100802E-02
3.664039E-02	4.158930E-02	4.671259E-02	5.199325E-02	5.741356E-02	6.295407E-02	6.859410E-02	7.431175E-02
8.006397E-02	9.558690E-02	9.169589E-02	9.748542E-02	1.032297E-01	1.089025E-01	1.144774E-01	1.159279E-01
1.252277E-01	1.303511E-01	1.352724E-01	1.399670E-01	1.444110E-01	1.485816E-01	1.524570E-01	1.560170E-01
1.592427E-01	1.621170E-01	1.646244E-01	1.667512E-01	1.684899E-01	1.698192E-01	1.707456E-01	1.712540E-01
1.713476E-01	1.713240E-01	1.702847E-01	1.691340E-01	1.675783E-01	1.562635E-01	1.632808E-01	1.655790E-01
1.575118E-01	1.541045E-01	1.503759E-01	1.463465E-01	1.420393E-01	1.374771E-01	1.325351E-01	1.276895E-01
1.225170E-01	1.171954E-01	1.117527E-01	1.062170E-01	1.006185E-01	9.498394E-02	8.932224E-02	8.372104E-02
7.814723E-02	7.264715E-02	6.729590E-02	6.190772E-02	5.683350E-02	5.186557E-02	4.703201E-02	4.250197E-02
3.313934E-02	3.400716E-02	3.011770E-02	2.647980E-02	2.310054E-02	1.556507E-02	1.713626E-02	1.455545E-02
1.224238E-02	1.319547E-02	9.412510E-03	5.891154E-03	5.629214E-03	4.624570E-03	3.671106E-03	3.354705E-03
3.043011E-03	2.866209E-03	2.628735E-03	2.823200E-03	2.837052E-03	2.851445E-03		

VALOR MAXIMO= 1.71347600E-01 VALOR MINIMO= [illegible]

X	F(X)
.000E 00	2.6571E-03
.000E 00	2.8515E-03
.000E 00	2.8371E-03
.000E 00	2.8232E-03
.000E 00	2.8267E-03
.000E 00	2.8362E-03
.000E 00	3.0430E-03
.000E 00	3.3548E-03
.000E 00	3.8712E-03
.000E 01	4.6244E-03
.100E 01	5.6272E-03
.200E 01	6.8911E-03
.300E 01	8.4125E-03
.400E 01	1.0195E-02
.500E 01	1.2242E-02
.600E 01	1.4555E-02
.700E 01	1.7136E-02
.800E 01	1.9955E-02
.900E 01	2.3100E-02
.000E 01	2.6480E-02
.100E 01	3.0118E-02
.200E 01	3.4007E-02
.300E 01	3.8137E-02
.400E 01	4.2502E-02
.500E 01	4.7083E-02
.600E 01	5.1865E-02
.700E 01	5.6833E-02
.800E 01	6.1967E-02
.900E 01	6.7246E-02
.000E 01	7.2647E-02
.100E 01	7.8147E-02
.200E 01	8.3721E-02
.300E 01	8.9342E-02
.400E 01	9.4984E-02
.500E 01	1.0062E-01
.600E 01	1.0622E-01
.700E 01	1.1175E-01
.800E 01	1.1719E-01
.900E 01	1.2252E-01
.000E 01	1.2769E-01
.100E 01	1.3266E-01
.200E 01	1.3740E-01
.300E 01	1.4204E-01
.400E 01	1.4635E-01
.500E 01	1.5038E-01
.600E 01	1.5410E-01
.700E 01	1.5751E-01
.800E 01	1.6059E-01
.900E 01	1.6329E-01
.000E 01	1.6563E-01
.100E 01	1.6758E-01
.200E 01	1.6913E-01
.300E 01	1.7028E-01
.400E 01	1.7102E-01
.500E 01	1.7135E-01
.600E 01	1.7129E-01
.700E 01	1.7074E-01
.800E 01	1.6982E-01
.900E 01	1.6849E-01
.000E 01	1.6675E-01
.100E 01	1.6462E-01
.200E 01	1.6212E-01
.300E 01	1.5924E-01
.400E 01	1.5602E-01
.500E 01	1.5246E-01
.600E 01	1.4858E-01
.700E 01	1.4441E-01
.800E 01	1.3997E-01
.900E 01	1.3527E-01
.000E 01	1.3035E-01
.100E 01	1.2523E-01
.200E 01	1.1993E-01
.300E 01	1.1448E-01
.400E 01	1.0891E-01
.500E 01	1.0323E-01
.600E 01	9.7485E-02
.700E 01	9.1696E-02
.800E 01	8.5887E-02
.900E 01	8.0084E-02
.000E 01	7.4312E-02
.100E 01	6.8594E-02
.200E 01	6.2954E-02
.300E 01	5.7413E-02
.400E 01	5.1993E-02
.500E 01	4.6712E-02
.600E 01	4.1589E-02
.700E 01	3.6640E-02
8.800E 01	3.1681E-02
8.900E 01	2.7323E-02
9.000E 01	2.2981E-02
9.100E 01	1.8662E-02
9.200E 01	1.4977E-02
9.300E 01	1.1331E-02
9.400E 01	7.9302E-03
9.500E 01	4.7785E-03
9.600E 01	1.8755E-03
9.700E 01	8.0515E-04
9.800E 01	3.1949E-03
9.900E 01	5.3531E-03
1.000E 02	7.2714E-03
1.010E 02	3.9544E-03
1.020E 02	1.0405E-02
1.030E 02	1.1642E-02
1.040E 02	[illegible]
1.050E 02	[illegible]



[illegible]	[illegible]
5.210E 02	[illegible]
5.220E 02	1.4593E-02
5.230E 02	1.4562E-02
5.240E 02	1.4333E-02
5.250E 02	1.4559E-02
5.260E 02	1.4111E-02
5.270E 02	1.3403E-02
5.280E 02	1.2605E-02
5.290E 02	1.1642E-02
5.300E 02	1.0463E-02
5.310E 02	8.7544E-03
5.320E 02	7.2714E-03
5.330E 02	5.3331E-03
5.340E 02	3.1550E-03
5.350E 02	8.0514E-04
5.360E 02	1.8756E-03
5.370E 02	4.7770E-03
5.380E 02	7.9301E-03
5.390E 02	1.1331E-02
5.400E 02	1.4977E-02
5.410E 02	1.8502E-02
5.420E 02	2.2601E-02
5.430E 02	2.7323E-02
5.440E 02	3.1601E-02
5.450E 02	3.6640E-02
5.460E 02	4.1569E-02
5.470E 02	4.6713E-02
5.480E 02	5.1973E-02
5.490E 02	5.7414E-02
5.500E 02	6.2954E-02
5.510E 02	6.8594E-02
5.520E 02	7.4312E-02
5.530E 02	8.0084E-02
5.540E 02	8.5897E-02
5.550E 02	9.1695E-02
5.560E 02	9.7485E-02
5.570E 02	1.0323E-01
5.580E 02	1.0885E-01
5.590E 02	1.1446E-01
5.600E 02	1.1993E-01
5.610E 02	1.2523E-01
5.620E 02	1.3035E-01
5.630E 02	1.3527E-01
5.640E 02	1.3997E-01
5.650E 02	1.4441E-01
5.660E 02	1.4853E-01
5.670E 02	1.5245E-01
5.680E 02	1.5602E-01
5.690E 02	1.5924E-01
5.700E 02	1.6212E-01
5.710E 02	1.6462E-01
5.720E 02	1.6675E-01
5.730E 02	1.6847E-01
5.740E 02	1.6982E-01
5.750E 02	1.7074E-01
5.760E 02	1.7125E-01
5.770E 02	1.7135E-01
5.780E 02	1.7102E-01
5.790E 02	1.7025E-01
5.800E 02	1.6913E-01
5.810E 02	1.6759E-01
5.820E 02	1.6563E-01
5.830E 02	1.6327E-01
5.840E 02	1.6058E-01
5.850E 02	1.5751E-01
5.860E 02	1.5413E-01
5.870E 02	1.5033E-01
5.880E 02	1.4635E-01
5.890E 02	1.4204E-01
5.900E 02	1.3748E-01
5.910E 02	1.3269E-01
5.920E 02	1.2769E-01
5.930E 02	1.2252E-01
5.940E 02	1.1720E-01
5.950E 02	1.1175E-01
5.960E 02	1.0622E-01
5.970E 02	1.0062E-01
5.980E 02	9.4984E-02
5.990E 02	8.9342E-02
6.000E 02	8.3721E-02
6.010E 02	7.8147E-02
6.020E 02	7.2647E-02
6.030E 02	6.7245E-02
6.040E 02	6.1967E-02
6.050E 02	5.6833E-02
6.060E 02	5.1856E-02
6.070E 02	4.7083E-02
6.080E 02	4.2502E-02
6.090E 02	3.8139E-02
6.100E 02	3.4007E-02
6.110E 02	3.0113E-02
6.120E 02	2.6460E-02
6.130E 02	2.3101E-02
6.140E 02	1.9985E-02
6.150E 02	1.7136E-02
6.160E 02	1.4555E-02
6.170E 02	1.2242E-02
6.180E 02	1.0195E-02
6.190E 02	8.4125E-03
6.200E 02	6.8912E-03
6.210E 02	5.6292E-03
6.220E 02	4.6244E-03
6.230E 02	3.8712E-03
6.240E 02	3.3543E-03
6.250E 02	3.0430E-03
6.260E 02	2.8802E-03
6.270E 02	2.8267E-03
6.280E 02	2.8232E-03
[illegible]	[illegible]

VALORES COMPUTADOS COM DADOS DA ONDA DE IONOSFERA

VALORES DE A(PARTE REAL DE C(N))

0.000000E-01	-7.443298E-02	-2.955761E-01	-6.561018E-01	-1.144213E 00	-1.743394E 00	-2.432627E 00	-3.186512E 00
-3.975573E 00	-4.766475E 00	-5.522514E 00	-6.204031E 00	-6.769098E 00	-7.174121E 00	-7.374855E 00	-7.327130E 00
-6.988032E 00	-6.317040E 00	-5.277118E 00	-3.835987E 00	-1.967475E 00	3.474246E-01	3.119391E 00	6.349595E 00
1.002902E 01	1.413763E 01	1.864369E 01	2.350463E 01	2.860553E 01	3.405481E 01	3.761200E 01	4.523595E 01
5.083830E 01	5.631804E 01	6.157138E 01	6.649121E 01	7.097084E 01	7.450595E 01	7.819746E 01	8.075424E 01
8.245489E 01	8.335081E 01	8.326794E 01	8.220840E 01	8.015273E 01	7.711005E 01	7.305937E 01	6.809937E 01
6.224847E 01	5.557329E 01	4.822832E 01	4.026337E 01	3.152161E 01	2.303712E 01	1.403165E 01	5.012564E 00
-3.932556E 00	-1.253706E 01	-2.095961E 01	-2.876743E 01	-3.593912E 01	-4.236694E 01	-4.795043E 01	-5.264716E 01
-5.637451E 01	-5.911104E 01	-6.064651E 01	-6.159153E 01	-6.137365E 01	-6.029655E 01	-5.827550E 01	-5.557675E 01
-5.220404E 01	-4.827814E 01	-4.391617E 01	-3.923730E 01	-3.436183E 01	-2.946628E 01	-2.449031E 01	-1.971410E 01
-1.517597E 01	-1.095017E 01	-7.137463E 00	-3.763727E 00	-8.732434E-01	1.491381E 00	3.339419E 00	4.671029E 00
5.506351E 00	5.878201E 00	5.630311E 00	5.415091E 00	4.692056E 00	3.725305E 00	2.581098E 00	1.326001E 00
2.439010E-02	-1.262432E 00	-2.479926E 00	-3.579706E 00	-4.521706E 00	-5.274715E 00	-5.816909E 00	-6.135338E 00
-6.228333E 00	-6.099966E 00	-5.764202E 00	-5.241473E 00	-4.558007E 00	-3.744266E 00	-2.833975E 00	-1.862252E 00
-8.644931E-01	1.250750E-01	1.074568E 00	1.955469E 00	2.743575E 00	3.419528E 00	3.969334E 00	4.384521E 00
4.662170E 00	4.804974E 00	4.819786E 00	4.716866E 00	4.513223E 00	4.225618E 00	3.874257E 00	3.479068E 00
3.060656E 00	2.639408E 00	2.232971E 00	1.857947E 00	1.526406E 00	1.249681E 00	1.034128E 00	8.836956E-01
7.964274E-01	7.710014E-01	8.007268E-01	8.771660E-01	9.901335E-01	1.126030E 00	1.276699E 00	1.425542E 00
1.570117E 00	1.688046E 00	1.776367E 00	1.826794E 00	1.834529E 00	1.797295E 00	1.715092E 00	1.595199E 00
1.427171E 00	1.232423E 00	1.013976E 00	7.809938E-01	5.433313E-01	3.110715E-01	9.401965E-02	-9.800648E-02
-2.590719E-01	-3.826374E-01	-4.587677E-01	-4.905470E-01	-4.753609E-01	-4.145545E-01	-3.115120E-01	-1.713551E-01
-9.418610E-04	1.918955E-01	3.982823E-01	6.089906E-01	8.147094E-01	1.006545E 00	1.176445E 00	1.317476E 00
1.424175E 00	1.492827E 00	1.521531E 00	1.510348E 00	1.461265E 00	1.378104E 00	1.266332E 00	1.132813E 00
9.854755E-01	8.329908E-01	6.843284E-01	5.483901E-01	4.335602E-01	3.473698E-01	2.961574E-01	2.846711E-01
3.155449E-01	3.911380E-01	5.093874E-01	6.679110E-01	8.620307E-01	1.085401E 00	1.333226E 00	1.587551E 00
1.847632E 00	2.100538E 00	2.336075E 00	2.544035E 00	2.717592E 00	2.847216E 00	2.927550E 00	2.954238E 00
2.925114E 00	2.839743E 00	2.700001E 00	2.509676E 00	2.274466E 00	2.001656E 00	1.700065E 00	1.379293E 00
1.049749E 00	7.220517E-01	4.060539E-01	1.134259E-01	-1.480694E-01	-3.720202E-01	-5.505077E-01	-6.795078E-01
-7.575731E-01	-7.834284E-01	-7.569727E-01	-6.877213E-01	-5.749136E-01	-4.272344E-01	-2.525169E-01	-5.964575E-02
1.418439E-01	3.451011E-01	5.348184E-01	7.026154E-01	8.570469E-01	9.745032E-01	1.054801E 00	1.096735E 00
1.098530E 00	1.060955E 00	9.865521E-01	8.794926E-01	7.453604E-01	5.910396E-01	4.242891E-01	2.534541E-01
8.709753E-02	-6.635505E-02	-1.987316E-01	-3.035557E-01	-3.742495E-01	-4.063649E-01	-3.965704E-01	-3.439253E-01
-2.484128E-01	-1.121525E-01	6.118937E-02	2.564896E-01	4.573549E-01	7.464190E-01	1.065620E 00	1.266552E 00
1.520724E 00	1.760031E 00	1.976971E 00	2.164946E 00	2.318555E 00	2.433507E 00	2.505309E 00	2.541096E 00
2.532763E 00	2.485553E 00	2.403475E 00	2.291123E 00	2.154589E 00	2.001526E 00	1.835161E 00	1.666610E 00
1.505588E 00	1.353244E 00	1.217560E 00	1.103844E 00	1.015536E 00	9.551617E-01	9.233198E-01	9.210498E-01
9.450802E-01	9.928229E-01	1.060038E 00	1.141577E 00	1.231606E 00	1.325657E 00	1.411946E 00	1.485670E 00
1.551308E 00	1.591793E 00	1.607042E 00	1.594122E 00	1.551375E 00	1.474499E 00	1.375602E 00	1.245596E 00
1.096705E 00	9.271947E-01	7.452629E-01	5.572572E-01	3.706300E-01	1.903501E-01	2.493655E-02	-1.196822E-01
-2.388763E-01	-3.272228E-01	-3.815223E-01	-3.999100E-01	-3.816242E-01	-3.272155E-01	-2.385763E-01	-1.195761E-01
2.492505E-02	1.903374E-01	3.700277E-01	5.572941E-01	7.452620E-01	9.271651E-01	1.096693E 00	1.246157E 00
1.376605E 00	1.476508E 00	1.551372E 00	1.594111E 00	1.607027E 00	1.591779E 00	1.551300E 00	1.485607E 00
1.411930E 00	1.323820E 00	1.231580E 00	1.141555E 00	1.060014E 00	9.926089E-01	9.430602E-01	9.214355E-01
9.238147E-01	9.551641E-01	1.015311E 00	1.103833E 00	1.217663E 00	1.353220E 00	1.505567E 00	1.666752E 00
1.836156E 00	2.000506E 00	2.154360E 00	2.291130E 00	2.403491E 00	2.485709E 00	2.532804E 00	2.541134E 00
2.508422E 00	2.433967E 00	2.316660E 00	2.165016E 00	1.977036E 00	1.761113E 00	1.523794E 00	1.266020E 00
1.005709E 00	7.464849E-01	4.574199E-01	2.665356E-01	6.125323E-02	-1.121235E-01	-2.485560E-01	-3.435795E-01
-3.966140E-01	-4.062581E-01	-3.742155E-01	-3.035963E-01	-1.989251E-01	-6.635499E-02	8.705388E-02	2.534432E-01
4.242794E-01	5.910246E-01	7.453324E-01	8.794892E-01	9.865256E-01	1.060957E 00	1.098499E 00	1.096704E 00
1.054838E 00	9.737800E-01	8.570254E-01	7.026386E-01	5.347960E-01	3.450647E-01	1.418250E-01	-5.960732E-02
-2.526339E-01	-4.272516E-01	-5.749264E-01	-6.877491E-01	-7.569982E-01	-7.834460E-01	-7.575926E-01	-6.796292E-01
-5.505262E-01	-3.720359E-01	-1.487035E-01	1.134096E-01	4.060377E-01	7.220573E-01	1.049737E 00	1.379235E 00
1.700058E 00	2.001689E 00	2.274460E 00	2.509677E 00	2.700001E 00	2.839749E 00	2.925115E 00	2.954284E 00
2.927547E 00	2.847225E 00	2.717583E 00	2.544659E 00	2.336087E 00	2.100549E 00	1.847069E 00	1.587505E 00
1.330228E 00	1.085417E 00	8.620469E-01	6.679125E-01	5.093941E-01	3.911483E-01	3.155598E-01	2.846646E-01
2.961774E-01	3.474057E-01	4.335840E-01	5.484063E-01	6.843466E-01	8.330186E-01	9.855030E-01	1.132836E 00
1.266363E 00	1.378124E 00	1.461288E 00	1.510373E 00	1.521551E 00	1.492663E 00	1.424212E 00	1.317473E 00
1.176463E 00	1.006569E 00	8.147188E-01	6.090634E-01	3.982969E-01	1.918630E-01	-9.550962E-04	-1.714163E-01
-3.115395E-01	-4.145862E-01	-4.754027E-01	-4.906018E-01	-4.588104E-01	-3.827427E-01	-2.591381E-01	-9.875506E-02
9.394974E-02	3.109845E-01	5.432537E-01	7.809213E-01	1.013501E 00	1.232351E 00	1.427054E 00	1.590127E 00
1.715037E 00	1.797265E 00	1.834483E 00	1.826764E 00	1.776519E 00	1.688607E 00	1.570863E 00	1.429916E 00
1.278667E 00	1.127996E 00	9.901124E-01	8.771851E-01	8.007162E-01	7.711045E-01	7.964422E-01	8.830771E-01
1.034148E 00	1.249694E 00	1.526417E 00	1.857557E 00	2.232967E 00	2.639413E 00	3.060603E 00	3.479071E 00
3.874260E 00	4.225634E 00	4.513233E 00	4.716875E 00	4.819011E 00	4.804595E 00	4.662175E 00	4.384535E 00
3.969342E 00	3.419546E 00	2.743593E 00	1.955506E 00	1.074588E 00	1.250856E-01	-8.644812E-01	-1.862244E 00
-2.833982E 00	-3.744283E 00	-4.558002E 00	-5.241504E 00	-5.764215E 00	-6.099973E 00	-6.228352E 00	-6.135892E 00
-5.816927E 00	-5.274726E 00	-4.521711E 00	-3.579713E 00	-2.479935E 00	-1.262443E 00	2.453278E-02	1.326010E 00
2.581097E 00	3.725302E 00	4.692097E 00	5.415092E 00	5.830319E 00	5.876304E 00	5.506447E 00	4.671099E 00
3.335506E 00	1.491466E 00	-8.792127E-01	-3.763671E 00	-7.137463E 00	-1.095014E 01	-1.517594E 01	-1.971408E 01
-2.449033E 01	-2.940833E 01	-3.436188E 01	-3.923733E 01	-4.391624E 01	-4.827821E 01	-5.220415E 01	-5.557912E 01
-5.829567E 01	-6.025571E 01	-6.137825E 01	-6.159151E 01	-6.064668E 01	-5.911127E 01	-5.637460E 01	-5.264745E 01
-4.796078E 01	-4.236732E 01	-3.593919E 01	-2.876747E 01	-2.095966E 01	-1.263766E 01	-3.932561E 00	5.012530E 00
1.405193E 01	2.303723E 01	3.152167E 01	4.026347E 01	4.822845E 01	5.559240E 01	6.224861E 01	6.809962E 01
7.306956E 01	7.711031E 01	8.015295E 01	8.220863E 01	8.326814E 01	8.335107E 01	8.245515E 01	8.075417E 01
7.819777E 01	7.450617E 01	7.097107E 01	6.649144E 01	6.157164E 01	5.631827E 01	5.083826E 01	4.523621E 01
3.961208E 01	3.405780E 01	2.860527E 01	2.350467E 01	1.864384E 01	1.413762E 01	1.002960E 01	6.349530E 00
3.119341E 00	3.473865E-01	-1.967537E 00	-3.836058E 00	-5.277155E 00	-6.317091E 00	-6.988094E 00	-7.327175E 00
-7.374913E 00	-7.174185E 00	-6.769135E 00	-6.204076E 00	-5.522562E 00	-4.766525E 00	-3.975614E 00	-3.186538E 00
-2.432664E 00	-1.743422E 00	-1.144221E 00	-6.561193E-01	-2.955831E-01	-7.437597E-02		

VALORES DE B (PARTE IMAGINARIA DE C(N))

.000000E-01	2.699472E-02	2.460709E-02	-4.280312E-02	-2.049545E-01	-4.506710E-01	-5.207979E-01	-1.537444E 00
.343335E 00	-3.351753E 00	-4.603381E 00	-6.376749E 00	-7.782466E 00	-9.715069E 00	-1.130449E 01	-1.421034E 01
.672609E 01	-1.937960E 01	-2.212701E 01	-2.452442E 01	-2.771425E 01	-3.045075E 01	-3.302037E 01	-3.541502E 01
.752725E 01	-3.729370E 01	-4.064111E 01	-4.147066E 01	-4.160458E 01	-4.145645E 01	-4.052461E 01	-3.808450E 01
.643754E 01	-3.327834E 01	-2.936761E 01	-2.471569E 01	-1.936427E 01	-1.334732E 01	-6.730787E 00	4.030279E-01
.977481E 01	1.087297E 01	2.357870E 01	3.217530E 01	4.031060E 01	4.828315E 01	5.593457E 01	6.313710E 01
.976408E 01	7.509559E 01	8.082399E 01	8.505455E 01	8.630951E 01	9.053072E 01	9.107755E 01	9.173146E 01
.065579E 01	8.859509E 01	8.547504E 01	8.140160E 01	7.645967E 01	7.074551E 01	6.438098E 01	5.749598E 01
.021925E 01	4.268925E 01	3.505032E 01	2.744289E 01	2.000256E 01	1.285636E 01	6.121556E 00	-5.059335E-02
.716142E 00	-1.500004E 01	-1.457760E 01	-1.533574E 01	-2.101927E 01	-2.293262E 01	-2.409750E 01	-2.455500E 01
.435336E 01	-2.356342E 01	-2.226035E 01	-2.052876E 01	-1.845844E 01	-1.614165E 01	-1.366790E 01	-1.115346E 01
.614849E 00	-6.192443E 00	-3.933504E 00	-1.675690E 00	-1.252071E-01	1.344636E 00	2.492228E 00	3.308423E 00
.795856E 00	3.957921E 00	3.847641E 00	3.407101E 00	2.863847E 00	2.081273E 00	1.165724E 00	1.046655E-01
.738976E-01	-1.905243E 00	-2.887214E 00	-3.782622E 00	-4.560003E 00	-5.154380E 00	-5.607752E 00	-5.969334E 00
.095416E 00	-6.149130E 00	-5.839863E 00	-5.482473E 00	-4.996475E 00	-4.454891E 00	-3.733265E 00	-3.090512E 00
.257648E 00	-1.550960E 00	-7.669060E-01	-1.012703E-01	5.134507E-01	1.046605E 00	1.493732E 00	1.343144E 00
.094524E 00	2.259400E 00	2.316774E 00	2.362937E 00	2.220810E 00	2.064270E 00	1.703369E 00	1.706754E 00
.500797E 00	1.298894E 00	1.116005E 00	9.631357E-01	8.487951E-01	7.766765E-01	7.564700E-01	7.810395E-01
.526404E-01	9.657838E-01	1.108635E 00	1.273895E 00	1.403935E 00	1.653676E 00	1.837414E 00	2.004924E 00
.146771E 00	2.254916E 00	2.522718E 00	2.546572E 00	2.322860E 00	2.252354E 00	2.135849E 00	1.966447E 00
.789091E 00	1.570279E 00	1.332642E 00	1.085566E 00	6.308554E-01	6.025370E-01	3.642130E-01	1.934272E-01
.653046E-02	-8.140683E-02	-1.570157E-01	-1.389459E-01	-1.776081E-01	-1.261557E-01	-3.340648E-02	7.935962E-02
.201250E-01	3.754650E-01	5.365937E-01	6.945447E-01	8.405864E-01	9.660143E-01	1.065574E 00	1.131750E 00
.160980E 00	1.159987E 00	1.101378E 00	1.013646E 00	8.912307E-01	7.352651E-01	5.644375E-01	3.746515E-01
.787260E-01	-1.402153E-02	-1.941576E-01	-3.525203E-01	-4.806896E-01	-5.712707E-01	-6.162760E-01	-6.174151E-01
.662462E-01	-4.643101E-01	-3.132074E-01	-1.165286E-01	1.202757E-01	3.900442E-01	6.642440E-01	9.432665E-01
.306838E 00	1.614317E 00	1.905257E 00	2.169649E 00	2.398471E 00	2.563561E 00	2.719900E 00	2.801661E 00
.827497E 00	2.756347E 00	2.716116E 00	2.572471E 00	2.336683E 00	2.166425E 00	1.913502E 00	1.639465E 00
354074E 00	1.057613E 00	7.699206E-01	5.302976E-01	2.970745E-01	9.725504E-02	-6.550762E-02	-1.815836E-01
550151E-01	-2.337891E-01	-2.698404E-01	-2.167836E-01	-1.299105E-01	-1.562149E-02	1.176116E-01	2.620250E-01
.098263E-01	5.507146E-01	6.765174E-01	7.606350E-01	8.559075E-01	6.966965E-01	9.000942E-01	8.635245E-01
.869797E-01	6.717307E-01	5.212572E-01	3.401968E-01	1.347174E-01	-8.600417E-02	-3.193617E-01	-5.526751E-01
.775892E-01	-9.853656E-01	-1.171242E 00	-1.325344E 00	-1.442960E 00	-1.519793E 00	-1.553049E 00	-1.541225E 00
.486060E 00	-1.368613E 00	-1.252969E 00	-1.064365E 00	-8.809963E-01	-6.740424E-01	-4.472953E-01	-2.167259E-01
.668417E-03	2.243155E-01	4.203464E-01	5.417614E-01	7.338774E-01	8.432106E-01	9.178364E-01	9.572432E-01
526835E-01	9.364717E-01	8.624294E-01	8.054336E-01	7.112222E-01	6.060930E-01	4.965914E-01	3.890130E-01
.912303E-01	2.072135E-01	1.424925E-01	1.065060E-01	8.510670E-02	5.637054E-02	1.345263E-01	1.933720E-01
846852E-01	3.901567E-01	5.092589E-01	6.364222E-01	7.653990E-01	8.896516E-01	1.002656E 00	1.096772E 00
.171214E 00	1.216445E 00	1.230485E 00	1.210933E 00	1.156728E 00	1.068235E 00	9.472007E-01	7.960950E-01
.210145E-01	4.254875E-01	2.162474E-01	-1.563920E-06	-2.162349E-01	-4.254763E-01	-6.219163E-01	-7.960692E-01
.472008E-01	-1.065232E 00	-1.156717E 00	-1.219424E 00	-1.230494E 00	-1.210444E 00	-1.171217E 00	-1.092403E 00
.002703E 00	-8.896419E-01	-7.653713E-01	-6.364273E-01	-5.092589E-01	-3.901569E-01	-2.046819E-01	-1.983751E-01
.346311E-01	-9.638613E-02	-8.511502E-02	-1.009194E-01	-1.424994E-01	-2.072095E-01	-2.912262E-01	-3.890433E-01
.967179E-01	-6.061225E-01	-7.112407E-01	-8.054626E-01	-8.824035E-01	-9.365154E-01	-9.627193E-01	-9.575572E-01
.178799E-01	-8.432679E-01	-7.339146E-01	-5.916271E-01	-4.203921E-01	-2.243656E-01	-9.731460E-03	2.160754E-01
.472402E-01	6.739808E-01	8.865537E-01	1.084327E 00	1.252967E 00	1.360585E 00	1.485001E 00	1.541555E 00
.553050E 00	1.519614E 00	1.443302E 00	1.325355E 00	1.171273E 00	9.862160E-01	7.762553E-01	5.527530E-01
.230269E-01	8.306503E-02	-1.346538E-01	-3.401515E-01	-5.211800E-01	-6.716698E-01	-7.808310E-01	-8.634977E-01
.000574E-01	-8.968459E-01	-8.558577E-01	-7.607931E-01	-6.768755E-01	-5.506750E-01	-4.097945E-01	-2.625630E-01
.177978E-01	1.554717E-02	1.279349E-01	2.168166E-01	2.698539E-01	2.858127E-01	2.550243E-01	1.815546E-01
.350672E-02	-9.729952E-02	-2.970681E-01	-5.302934E-01	-7.699205E-01	-1.057604E 00	-1.354073E 00	-1.639461E 00
.913503E 00	-2.166447E 00	-2.368393E 00	-2.572463E 00	-2.710119E 00	-2.756350E 00	-2.802790E 00	-2.801263E 00
.719904E 00	-2.583960E 00	-2.398474E 00	-2.169646E 00	-1.905257E 00	-1.614337E 00	-1.306350E 00	-9.932644E-01
.842554E-01	-3.900451E-01	-1.202768E-01	1.165045E-01	3.131975E-01	4.643015E-01	5.662350E-01	6.174253E-01
.182781E-01	5.712560E-01	4.806839E-01	3.525143E-01	1.941449E-01	1.402639E-02	-1.787356E-01	-3.746532E-01
.644395E-01	-7.392773E-01	-8.912331E-01	-1.013045E 00	-1.101372E 00	-1.151995E 00	-1.160972E 00	-1.131720E 00
.065557E 00	-9.655958E-01	-8.405509E-01	-6.945168E-01	-5.305558E-01	-3.754159E-01	-2.203793E-01	-7.935977E-02
.850672E-02	1.262462E-01	1.776035E-01	1.387970E-01	1.570719E-01	8.144528E-02	-3.649860E-02	-1.924140E-01
.841675E-01	-6.015870E-01	-8.387940E-01	-1.085512E 00	-1.332583E 00	-1.570223E 00	-1.737054E 00	-1.936427E 00
.136827E 00	-2.252347E 00	-2.322564E 00	-2.346067E 00	-2.322923E 00	-2.254925E 00	-2.146790E 00	-2.004941E 00
.837451E 00	-1.653702E 00	-1.463974E 00	-1.278702E 00	-1.108976E 00	-9.640304E-01	-6.925794E-01	-7.819129E-01
.565221E-01	-7.789188E-01	-8.488341E-01	-9.631663E-01	-1.116042E 00	-1.256512E 00	-1.500813E 00	-1.705757E 00
.908411E 00	-2.084286E 00	-2.220834E 00	-2.302354E 00	-2.316765E 00	-2.256410E 00	-2.094554E 00	-1.843158E 00
.493941E 00	-1.048674E 00	-5.134696E-01	1.012519E-01	7.008793E-01	1.566935E 00	2.257650E 00	3.006522E 00
.733300E 00	4.404909E 00	4.596484E 00	5.482466E 00	5.839875E 00	6.045152E 00	6.095431E 00	5.969345E 00
.667767E 00	5.194399E 00	4.560016E 00	3.782638E 00	2.887228E 00	1.905252E 00	8.739187E-01	-1.046630E-01
.165704E 00	-2.081280E 00	-2.863852E 00	-3.467085E 00	-3.847846E 00	-3.957913E 00	-3.795653E 00	-3.308447E 00
.492246E 00	-1.344656E 00	1.251764E-01	1.895854E 00	3.933005E 00	6.152463E 00	8.614880E 00	1.115334E 01
.366996E 01	1.614151E 01	1.845851E 01	2.052590E 01	2.226045E 01	2.356352E 01	2.435350E 01	2.455374E 01
.409801E 01	2.293279E 01	2.101945E 01	1.833591E 01	1.487799E 01	1.066002E 01	5.716244E 00	9.871522E-02
.121428E 00	-1.285625E 01	-2.000227E 01	-2.744275E 01	-3.505025E 01	-4.268521E 01	-5.021924E 01	-5.749557E 01
.438670E 01	-7.074950E 01	-7.645975E 01	-8.140204E 01	-8.547535E 01	-8.859541E 01	-9.063614E 01	-9.173150E 01
.167781E 01	-9.053104E 01	-8.831013E 01	-8.505464E 01	-8.082380E 01	-7.509579E 01	-6.976428E 01	-6.313741E 01
.593457E 01	-4.828333E 01	-4.031060E 01	-3.217053E 01	-2.397890E 01	-1.567303E 01	-7.977596E 00	-4.081353E-01
.730733E 00	1.334727E 01	1.936420E 01	2.471970E 01	2.936760E 01	3.327633E 01	3.643802E 01	3.808456E 01
.052463E 01	4.147660E 01	4.180478E 01	4.150002E 01	4.064128E 01	3.929364E 01	3.752734E 01	3.541373E 01
.302647E 01	3.043683E 01	2.771432E 01	2.492450E 01	2.212785E 01	1.937901E 01	1.672612E 01	1.421006E 01
.184452E 01	9.715714E 00	7.782517E 00	6.376713E 00	4.603373E 00	3.301259E 00	2.343330E 00	1.537443E 00
.267991E-01	4.906626E-01	2.049400E-01	4.279274E-02	-2.482625E-02	-2.852130E-02		

VALORES MOD(A(I))

.000000E-31	6.329161E-05	2.259387E-04	5.215224E-04	9.225576E-04	1.437603E-03	2.066028E-03	2.53795[illegible]
.6625+0E-03	4.628915E-03	5.703971E-03	6.572262E-03	8.166060E-03	9.565262E-03	1.106712E-02	1.265879E-0[illegible]
.438664E-02	1.617665E-02	1.605424E-02	2.001417E-02	2.205076E-02	2.415771E-02	2.632605E-02	2.855440E-02
.062876E-02	3.314256E-02	3.543657E-02	3.785231E-02	4.022876E-02	4.260671E-02	4.497594E-02	4.73259[illegible]
.964109E-02	5.191693E-02	5.414006E-02	5.629906E-02	5.838503E-02	6.038694E-02	6.229394E-02	6.409194E-0[illegible]
577748E-02	6.734020E-02	6.877111E-02	7.006256E-02	7.120729E-02	7.219569E-02	7.303321E-02	7.37019[illegible]
420430E-02	7.453734E-02	7.405773E-02	7.466065E-02	7.449065E-02	7.413564E-02	7.360959E-02	7.291132E-0[illegible]
204837E-02	7.102519E-02	6.989705E-02	6.852097E-02	6.705147E-02	6.545620E-02	6.371921E-02	6.187325E-0[illegible]
991961E-02	5.735842E-02	5.572999E-02	5.351465E-02	5.123419E-02	4.869950E-02	4.652068E-02	4.411033E-0[illegible]
167940E-02	3.923065E-02	3.675907E-02	3.437570E-02	3.156690E-02	2.855743E-02	2.726635E-02	2.45508[illegible]
277370E-02	2.062513E-02	1.552873E-02	1.656421E-02	1.466615E-02	1.280522E-02	1.115616E-02	9.561886E-0[illegible]
114491E-03	6.775288E-03	5.581093E-03	4.553476E-03	3.725204E-03	3.145294E-03	2.847505E-03	2.826778E-0[illegible]
.012646E-03	3.324667E-03	3.633144E-03	3.955141E-03	4.267861E-03	4.500376E-03	4.708303E-03	4.871405E-0[illegible]
991519E-03	5.071606E-03	5.116552E-03	5.130045E-03	5.116986E-03	5.081915E-03	5.027190E-03	4.962754E-0[illegible]
886039E-03	4.831925E-03	4.712619E-03	4.519654E-03	4.523940E-03	4.425712E-03	4.324764E-03	4.226186E-0[illegible]
111137E-03	3.956316E-03	3.879475E-03	3.744037E-03	3.609520E-03	3.499554E-03	3.293466E-03	3.124716E-0[illegible]
943563E-03	2.752609E-03	2.555731E-03	2.348188E-03	2.138723E-03	1.928731E-03	1.722673E-03	1.526563E-0[illegible]
348432E-03	1.198796E-03	1.090115E-03	1.033906E-03	1.035042E-03	1.067939E-03	1.177133E-03	1.293444E-0[illegible]
418098E-03	1.543154E-03	1.602111E-03	1.705795E-03	1.862730E-03	1.935346E-03	1.994832E-03	2.053935E-0[illegible]
045932E-03	2.039468E-03	2.011571E-03	1.962640E-03	1.895319E-03	1.804594E-03	1.697552E-03	1.57273[illegible]
434723E-03	1.282353E-03	1.118569E-03	9.454414E-04	7.652233E-04	5.801275E-04	3.925550E-04	2.051334E-0[illegible]
990205E-05	1.654357E-04	3.597735E-04	5.060546E-04	6.618135E-04	8.050579E-04	9.341643E-04	1.047513E-0[illegible]
143719E-03	1.221681E-03	1.280459E-03	1.319354E-03	1.337920E-03	1.335955E-03	1.313549E-03	1.270851E-0[illegible]
208601E-03	1.127610E-03	1.029098E-03	9.146632E-04	7.865820E-04	6.402685E-04	5.058696E-04	3.734389E-0[illegible]
860897E-04	3.156266E-04	4.226471E-04	5.995376E-04	7.833296E-04	9.754569E-04	1.104198E-03	1.551692E-0[illegible]
533731E-03	1.707235E-03	1.870617E-03	2.021695E-03	2.158922E-03	2.261797E-03	2.386070E-03	2.473650E-0[illegible]
542670E-03	2.592476E-03	2.622653E-03	2.632941E-03	2.623356E-03	2.594114E-03	2.545637E-03	2.478552E-0[illegible]
393711E-03	2.272114E-03	2.174765E-03	2.043626E-03	1.879610E-03	1.744559E-03	1.582251E-03	1.426594E-0[illegible]
231420E-03	1.059967E-03	8.694050E-04	6.892325E-04	5.135960E-04	3.477563E-04	2.067297E-04	1.517392E-0[illegible]
315942E-04	3.533792E-04	4.754255E-04	5.681225E-04	6.879657E-04	7.731179E-04	8.423955E-04	8.75035[illegible]
305445E-04	9.487090E-04	9.495653E-04	9.334115E-04	9.007633E-04	8.524617E-04	7.897485E-04	7.142324E-0[illegible]
283214E-04	5.357142E-04	4.428050E-04	3.518780E-04	3.156811E-04	3.259412E-04	4.044083E-04	5.166203E-0[illegible]
478610E-04	7.873738E-04	9.300235E-04	1.072512E-03	1.211326E-03	1.340605E-03	1.460411E-03	1.553479E-0[illegible]
637596E-03	1.779256E-03	1.857616E-03	1.921692E-03	1.970782E-03	2.004377E-03	2.022173E-03	2.024306E-0[illegible]
010143E-03	1.980760E-03	1.936474E-03	1.878078E-03	1.806462E-03	1.722591E-03	1.629150E-03	1.526695E-0[illegible]
418294E-03	1.306091E-03	1.193481E-03	1.084430E-03	9.835814E-04	8.970145E-04	8.324417E-04	7.957022E-0[illegible]
848066E-04	8.049325E-04	8.483054E-04	9.075445E-04	9.777994E-04	1.053459E-03	1.125675E-03	1.192719E-0[illegible]
251784E-03	1.305722E-03	1.337733E-03	1.362274E-03	1.372945E-03	1.365406E-03	1.351659E-03	1.315519E-0[illegible]
273433E-03	1.213503E-03	1.141725E-03	1.057945E-03	9.638655E-04	8.611602E-04	7.523069E-04	6.374286E-0[illegible]
280734E-04	4.263021E-04	3.481209E-04	3.174537E-04	3.481174E-04	4.255514E-04	5.263746E-04	6.374245E-0[illegible]
520069E-04	8.611549E-04	9.636972E-04	1.057946E-03	1.141726E-03	1.213696E-03	1.273427E-03	1.319526E-0[illegible]
351643E-03	1.365466E-03	1.372941E-03	1.362260E-03	1.337920E-03	1.307711E-03	1.251775E-03	1.192711E-0[illegible]
125661E-03	1.053532E-03	9.797753E-04	9.035243E-04	8.468479E-04	8.049214E-04	7.640574E-04	7.957306E-0[illegible]
324485E-04	8.978152E-04	9.839744E-04	1.086449E-03	1.193499E-03	1.300091E-03	1.413309E-03	1.526052E-0[illegible]
529202E-03	1.722954E-03	1.806460E-03	1.878642E-03	1.936491E-03	1.980660E-03	2.010171E-03	2.024091E-0[illegible]
022290E-03	2.004412E-03	1.970829E-03	1.921726E-03	1.857640E-03	1.779294E-03	1.687340E-03	1.585500E-0[illegible]
468449E-03	1.343844E-03	1.211571E-03	1.072951E-03	9.308516E-04	7.876773E-04	6.478749E-04	5.166456E-0[illegible]
044624E-04	3.299157E-04	3.156303E-04	3.610575E-04	4.427460E-04	5.356660E-04	6.262823E-04	7.141955E-0[illegible]
597137E-04	9.524416E-04	9.607293E-04	9.333520E-04	9.405295E-04	9.466759E-04	9.305128E-04	8.850305E-0[illegible]
423756E-04	7.731020E-04	6.879517E-04	5.681053E-04	4.754157E-04	3.533087E-04	2.315755E-04	1.517493E-0[illegible]
067446E-04	3.477703E-04	5.136027E-04	6.892554E-04	8.654192E-04	1.056570E-03	1.231427E-03	1.4[illegible]
580256E-03	1.744962E-03	1.879616E-03	2.043626E-03	2.174959E-03	2.292113E-03	2.393712E-03	2.476550E-0[illegible]
545637E-03	2.594109E-03	2.623353E-03	2.632944E-03	2.622655E-03	2.594468E-03	2.542670E-03	2.472546E-0[illegible]
386070E-03	2.286609E-03	2.158922E-03	2.021709E-03	1.870025E-03	1.707341E-03	1.533754E-03	1.351590E-0[illegible]
164159E-03	9.734630E-04	7.833382E-04	5.995376E-04	4.320450E-04	3.160345E-04	2.331050E-04	[illegible]
058942E-04	5.432827E-04	7.665920E-04	9.140712E-04	1.029101E-03	1.127629E-03	1.201510E-03	1.270560E-0[illegible]
313536E-03	1.335960E-03	1.337732E-03	1.319357E-03	1.280464E-03	1.221705E-03	1.143742E-03	1.047524E-0[illegible]
341994E-04	8.051221E-04	6.616513E-04	5.060756E-04	3.598026E-04	1.654364E-04	2.050735E-05	2.0517[illegible]
925474E-04	5.801097E-04	7.651772E-04	9.454106E-04	1.116530E-03	1.282320E-03	1.434761E-03	1.572719E-0[illegible]
597533E-03	1.804553E-03	1.895265E-03	1.962625E-03	2.011556E-03	2.039447E-03	2.045911E-03	2.030925E-0[illegible]
994825E-03	1.938343E-03	1.862724E-03	1.769793E-03	1.662096E-03	1.545166E-03	1.413060E-03	1.293442E-0[illegible]
179130E-03	1.087935E-03	1.035049E-03	1.035922E-03	1.090134E-03	1.196611E-03	1.349944E-03	1.526578E-0[illegible]
722696E-03	1.926747E-03	2.138745E-03	2.346257E-03	2.553734E-03	2.752816E-03	2.943551E-03	3.124726E-0[illegible]
295490E-03	3.455561E-03	3.606035E-03	3.744411E-03	3.874477E-03	3.996329E-03	4.111145E-03	4.220159E-0[illegible]
324719E-03	4.425731E-03	4.523955E-03	4.619677E-03	4.712630E-03	4.801536E-03	4.886050E-03	4.962761E-0[illegible]
029202E-03	5.061929E-03	5.116552E-03	5.130056E-03	5.116567E-03	5.071693E-03	4.991557E-03	4.87147[illegible]
708391E-03	4.500385E-03	4.247385E-03	3.955133E-03	3.633151E-03	3.304984E-03	3.012644E-03	2.826779E-0[illegible]
347574E-03	3.143294E-03	3.725205E-03	4.553471E-03	5.531900E-03	6.770255E-03	8.114558E-03	9.561333E-0[illegible]
116822E-02	1.286528E-02	1.466021E-02	1.656431E-02	1.855273E-02	2.062529E-02	2.277379E-02	2.499793E-0[illegible]
726845E-02	2.959754E-02	3.196701E-02	3.437313E-02	3.679986E-02	3.923059E-02	4.167949E-02	4.411247E-0[illegible]
652077E-02	4.837915E-02	5.123431E-02	5.351476E-02	5.573006E-02	5.786655E-02	5.991770E-02	6.187338E-0[illegible]
371933E-02	6.544840E-02	6.705153E-02	6.852057E-02	6.984729E-02	7.102543E-02	7.204866E-02	7.291156E-0[illegible]
360533E-02	7.413977E-02	7.449677E-02	7.468510E-02	7.469797E-02	7.453758E-02	7.420498E-02	7.370228E-0[illegible]
303218E-02	7.219923E-02	7.120746E-02	7.006276E-02	6.877130E-02	6.734045E-02	6.577772E-02	6.409162E-0[illegible]
229117E-02	6.038572E-02	5.838520E-02	5.629983E-02	5.414020E-02	5.191711E-02	4.964120E-02	4.732375E-0[illegible]
497529E-02	4.253082E-02	4.022905E-02	3.785239E-02	3.548697E-02	3.314266E-02	3.082630E-02	2.855447E-0[illegible]
632813E-02	2.415777E-02	2.205085E-02	2.001425E-02	1.805476E-02	1.617669E-02	1.438667E-02	1.268862E-0[illegible]
.087166E-02	9.565250E-03	8.166102E-03	6.892247E-03	5.705994E-03	4.626949E-03	3.662569E-03	2.807992E-0[illegible]
066056E-03	1.437421E-03	9.225623E-04	5.218334E-04	2.354156E-04	6.331739E-05		

[illegible]	[illegible]
5.210E 02	[illegible]
5.220E 02	5.09[illegible]E-03
5.230E 02	5.1170E-03
5.240E 02	5.1301E-03
5.250E 02	5.1160E-03
5.260E 02	5.0717E-03
5.270E 02	4.9916E-03
5.280E 02	4.8715E-03
5.290E 02	4.7034E-03
5.300E 02	4.5006E-03
5.310E 02	4.2475E-03
5.320E 02	3.9551E-03
5.330E 02	3.6332E-03
5.340E 02	3.3047E-03
5.350E 02	3.0126E-03
5.360E 02	2.8208E-03
5.370E 02	2.8476E-03
5.380E 02	3.1433E-03
5.390E 02	3.7252E-03
5.400E 02	4.5535E-03
5.410E 02	5.5819E-03
5.420E 02	5.7764E-03
5.430E 02	8.1146E-03
5.440E 02	9.5820E-03
5.450E 02	1.1163E-02
5.460E 02	1.2806E-02
5.470E 02	1.4666E-02
5.480E 02	1.6564E-02
5.490E 02	1.8553E-02
5.500E 02	2.0625E-02
5.510E 02	2.2774E-02
5.520E 02	2.4991E-02
5.530E 02	2.7268E-02
5.540E 02	2.9598E-02
5.550E 02	3.1969E-02
5.560E 02	3.4373E-02
5.570E 02	3.6800E-02
5.580E 02	3.9239E-02
5.590E 02	4.1679E-02
5.600E 02	4.4110E-02
5.610E 02	4.6521E-02
5.620E 02	4.8899E-02
5.630E 02	5.1234E-02
5.640E 02	5.3515E-02
5.650E 02	5.5730E-02
5.660E 02	5.7869E-02
5.670E 02	5.9920E-02
5.680E 02	6.1873E-02
5.690E 02	6.3717E-02
5.700E 02	6.5448E-02
5.710E 02	6.7052E-02
5.720E 02	6.8520E-02
5.730E 02	6.9847E-02
5.740E 02	7.1025E-02
5.750E 02	7.2049E-02
5.760E 02	7.2912E-02
5.770E 02	7.3610E-02
5.780E 02	7.4140E-02
5.790E 02	7.4499E-02
5.800E 02	7.4685E-02
5.810E 02	7.4698E-02
5.820E 02	7.4538E-02
5.830E 02	7.4205E-02
5.840E 02	7.3702E-02
5.850E 02	7.3032E-02
5.860E 02	7.2199E-02
5.870E 02	7.1207E-02
5.880E 02	7.0063E-02
5.890E 02	6.8771E-02
5.900E 02	6.7340E-02
5.910E 02	6.5774E-02
5.920E 02	6.4092E-02
5.930E 02	6.2291E-02
5.940E 02	6.0390E-02
5.950E 02	5.8385E-02
5.960E 02	5.6303E-02
5.970E 02	5.4140E-02
5.980E 02	5.1917E-02
5.990E 02	4.9641E-02
6.000E 02	4.7324E-02
6.010E 02	4.4975E-02
6.020E 02	4.2607E-02
6.030E 02	4.0229E-02
6.040E 02	3.7852E-02
6.050E 02	3.5467E-02
6.060E 02	3.3143E-02
6.070E 02	3.0829E-02
6.080E 02	2.8554E-02
6.090E 02	2.6328E-02
6.100E 02	2.4153E-02
6.110E 02	2.2051E-02
6.120E 02	2.0014E-02
6.130E 02	1.8094E-02
6.140E 02	1.6177E-02
6.150E 02	1.4387E-02
6.160E 02	1.2689E-02
6.170E 02	1.1067E-02
6.180E 02	9.5653E-03
6.190E 02	8.1861E-03
6.200E 02	6.8923E-03
6.210E 02	5.7060E-03
6.220E 02	[illegible]
6.230E 02	[illegible]
6.240E 02	[illegible]
6.250E 02	[illegible]
6.260E 02	[illegible]
6.270E 02	[illegible]
6.280E 02	[illegible]
[illegible]	[illegible]

VALEUR MAXIMUM [illegible] VALEUR [illegible] [illegible]

X	F(X)
.0000E 00	0.0000E-01
[illegible] 00	[illegible]
.0000E 00	2.3541E-04
.0000E 00	5.2162E-04
.0000E 00	9.2256E-04
.0000E 00	1.4374E-03
.0000E 00	2.0660E-03
.0000E 00	2.8080E-03
.0000E 00	3.6025E-03
.0000E 01	4.6289E-03
.1000E 01	5.7060E-03
.2000E 01	6.8923E-03
.3000E 01	8.1061E-03
.4000E 01	9.5852E-03
.5000E 01	1.1287E-02
.6000E 01	1.2809E-02
.7000E 01	1.4387E-02
.8000E 01	1.6177E-02
.9000E 01	1.8054E-02
.0000E 01	2.0014E-02
.1000E 01	2.2051E-02
.2000E 01	2.4158E-02
.3000E 01	2.6328E-02
.4000E 01	2.8554E-02
.5000E 01	3.0829E-02
.6000E 01	3.3143E-02
700E 01	3.5487E-02
800E 01	3.7852E-02
900E 01	4.0229E-02
000E 01	4.2607E-02
100E 01	4.4975E-02
200E 01	4.7324E-02
300E 01	4.9641E-02
400E 01	5.1917E-02
500E 01	5.4140E-02
600E 01	5.6300E-02
700E 01	5.8385E-02
800E 01	6.0385E-02
900E 01	6.2291E-02
000E 01	6.4091E-02
100E 01	6.5777E-02
200E 01	6.7340E-02
300E 01	6.8771E-02
400E 01	7.0062E-02
500E 01	7.1207E-02
600E 01	7.2199E-02
700E 01	7.3032E-02
800E 01	7.3702E-02
900E 01	7.4205E-02
000E 01	7.4537E-02
100E 01	7.4698E-02
200E 01	7.4685E-02
300E 01	7.4499E-02
400E 01	7.4139E-02
500E 01	7.3610E-02
600E 01	7.2911E-02
700E 01	7.2048E-02
800E 01	7.1025E-02
900E 01	6.9847E-02
000E 01	6.8521E-02
100E 01	6.7051E-02
200E 01	6.5448E-02
300E 01	6.3719E-02
400E 01	6.1373E-02
500E 01	5.9920E-02
600E 01	5.7863E-02
700E 01	5.5730E-02
800E 01	5.3515E-02
900E 01	5.1234E-02
000E 01	4.8894E-02
100E 01	4.6521E-02
200E 01	4.4110E-02
300E 01	4.1679E-02
400E 01	3.9237E-02
500E 01	3.6800E-02
600E 01	3.4373E-02
700E 01	3.1969E-02
800E 01	2.9597E-02
900E 01	2.7268E-02
000E 01	2.4991E-02
100E 01	2.2774E-02
200E 01	2.0625E-02
300E 01	1.8553E-02
400E 01	1.6564E-02
500E 01	1.4666E-02
600E 01	1.2865E-02
700E 01	1.1168E-02
800E 01	9.5619E-03
900E 01	8.1145E-03
000E 01	6.7763E-03
100E 01	5.5819E-03
200E 01	4.5535E-03
300E 01	3.7252E-03
400E 01	3.1433E-03
500E 01	2.8476E-03
600E 01	2.8288E-03
700E 01	3.0126E-03
800E 01	3.3047E-03
900E 01	3.6351E-03
000E 02	3.9551E-03
010E 02	4.247[illegible]E-03
020E 02	4.5004E-03
030E 02	4.7[illegible]E-03
050E 02	4.871[illegible]E-03
090E 02	4.991[illegible]E-03
[illegible]E 02	5.0719E-03
[illegible]E 02	[illegible]

CONCLUSÃO

Ao concluirmos este trabalho, de uma realização pessoal muito gratificante, esperamos ter dado uma contribuição significativa e de suma importância ã pesquisa realisada pelo Grupo de Radiociências de Gaspar e por extenção, ao Instituto para Assuntos Espaciais(IAE) e Centro Tecnológico da Aeronáutica(CTA), no estudo da Anomalia Geomagnética Brasileira.

Este trabalho proporcionou uma economia do tempo de computação (tempo de CPU) da ordem de 5291%, com relação ao método atualmente em uso pelo Grupo acima citado. Em outras palavras, a determinação dos coeficientes de Fourier feita através do referido método consome um tempo de CPU da ordem de 2min 18seg, enquanto que o aqui apresentado reduz esse tempo para / 2,56 segundos. Em ambos os casos, usamos o compulador WATFIV.

Cabe ressaltar também, que o método atualmente ainda em uso, destina-se exclusivamente a números de amostras decomponíveis em fatores primos iguais a 2, unicamente, enquanto que este pode ser aplicado ã referida / base e, especialmente a números de amostras fatoráveis em fatores primos arbitrários. Ou seja, para o primeiro caso são usadas 512 amostras nos dados/ da entrada, enquanto que para o segundo, usamos 630 amostras._

A economia do tempo de CPU e de custos fica evidenciado, quando ressaltamos que dur ante um ano são recolhidos e analisados em torno de 8×10^7 dados, com amostras recolhidas a cada três minutos.

Como contribuição deste trabalho de pesquisa, sugerimos o estudo e desenvolvimento de um novo programa para computar os coeficientes da DFT no qual seja possível aplicar o pruning para diminuir ainda mais o tempo de CPU, e também um estudo comparativo entre os sinais emitidos e recuperados pelos aparealhos emissor e receptor, respectivamente, tendo por base / os resultados obtidos através da FFT, dos sinais correspondentes.

APÊNDICE A

A.1 - Cálculo de C_n:

Seja a forma complexa da série de Fourier,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jn.\omega_0 t}, \qquad (A.1)$$

com C_n a determinar através da fórmula

$$C_n = (1/T) \int_0^d \cos\omega t . e^{-jn.\omega_0 t} dt, \qquad (A.2)$$

onde $\omega = 2\Pi/d$, $\omega_0 = 2\Pi/T$, i.é.,

$$C_n = (1/2T) \int_0^d (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) e^{-jn.\omega_0 t} dt$$

$$= (1/2T) \int_0^d (e^{j(\omega - n.\omega_0)t} + e^{-j(\omega + n.\omega_0)t}) dt$$

$$= \frac{1}{2Tj(\omega - n.\omega_0)} [(e^{j(\omega - n\omega_0)d} - 1] - \frac{1}{2Tj(\omega + n\omega_0)} [e^{-j(\omega + n\omega_0)d} - 1].$$

Evidenciando as exponenciais e multiplicando e dividindo por / d/2, temos:

$$C_n = \frac{d.e^{j(\omega - n\omega_0)d/2}}{2T(\omega - n\omega_0)} \operatorname{sen}(\omega - n\omega_0)d/2 + \frac{d.e^{-j(\omega - n\omega_0)d/2}}{2T(\omega + n\omega_0)} \operatorname{sen}(\omega + n\omega_0)d/2 \qquad (A.3)$$

Calculando,

$$(\omega - n\omega_0)d/2 = (2\Pi/d - 2n\Pi d/T) = \Pi - n\Pi d/T \qquad (A.4)$$

$$(\omega + n\omega_0)d/2 = (2\Pi/d + 2n\Pi d/T) = \Pi + n\Pi d/T \qquad (A.5)$$

$$\operatorname{sen}(\Pi + n\Pi d/T) = -\operatorname{sen}(n\Pi d/T), \qquad (A.6)$$

$$\operatorname{sen}(\Pi - n\Pi d/T) = \operatorname{sen}(n\Pi d/T), \qquad (A.7)$$

$$\cos(\Pi + n\Pi d/T) = -\cos(n\Pi d/T), \qquad (A.8)$$

$$\cos(\Pi - n\Pi d/T) = -\cos(n\Pi d/T). \qquad (A.9)$$

Substituindo os valores de (A.4) até (A.9) em (A.3), temos:

$$C_n = \frac{d.e^{j(\omega - n\omega_0)d/2}}{2.T(\Pi - n\Pi d/T)d/2} . \operatorname{sen}(n\Pi d/T)d/2 - \frac{d.e^{-j(\omega + n\omega_0)d/2}}{2.T(\Pi + n\Pi d/T)d/2} . \operatorname{sen}(n\Pi d/T)d/2$$

$$C_n = (d/2T)\,\mathrm{sen}(n\Pi d/T)\,\left[\frac{\cos(\Pi-n\ d/T)+j\,\mathrm{sen}(\Pi-n\Pi d/T)}{\Pi + (n\Pi d/T)} - \frac{\cos(\Pi+n\Pi d/T)+j\,\mathrm{sen}(\Pi+n\Pi d/T)}{\Pi - (n\Pi d/T)}\right]$$

$$= (d/2T)\,\mathrm{sen}(n\Pi d/T)\,\left[\frac{\cos(n\Pi d/T)-j\,\mathrm{sen}(n\Pi d/T)}{\Pi - (n\Pi d/T)} - \frac{\cos(n\Pi d/T)-j\,\mathrm{sen}(n\Pi d/T)}{\Pi + (n\Pi d/T)}\right]$$

$$= (d/2T)\,\mathrm{sen}(n\Pi d/T)\,\left[\frac{e^{-j(n\Pi d/T)}}{\Pi - (n\ d/T)} - \frac{e^{-j(n\Pi d/T)}}{\Pi + (n\Pi d/T)}\right]$$

$$C_n = (d/T)^2\,\frac{n\Pi\,\mathrm{sen}(n\Pi d/T)}{\Pi^2 - (n\Pi d/T)^2}\cdot e^{-j(n\Pi d/T)} \qquad (a.10)$$

A.2 - Fluxograma.

Apresentamos aqui o fluxograma ilustrativo do programa usado na computação dos coeficientes de Fourier através da FFT.

O fluxograma evidencia o programa principal, no qual é feita a leitura dos dados, o acesso às subrotinas FFT, REALTR e, no caso de interesse, pode-se também acrescentar a subrotina GRAFIC, apresentada no apêndice D e, em consequência, a impressão dos coeficientes de Fourier complexos(parte real e imaginária, bem como os valores de C_n em módulo).

A subrotina FFT é dividida em partes, onde cada uma delas desempenha funções imprescindíveis na computação da transformada de Fourier,ou seja:

a) - determinação dos fatores de N(número de amostras);

b) - transformada do fator "2", incluindo o fator de giro;

c) - transformadas dos fatores "3", "5" e ímpares, bem como as respectivas multiplicações pelos fatores de giro feitas numa única parte para cada um // dos fatores citados;

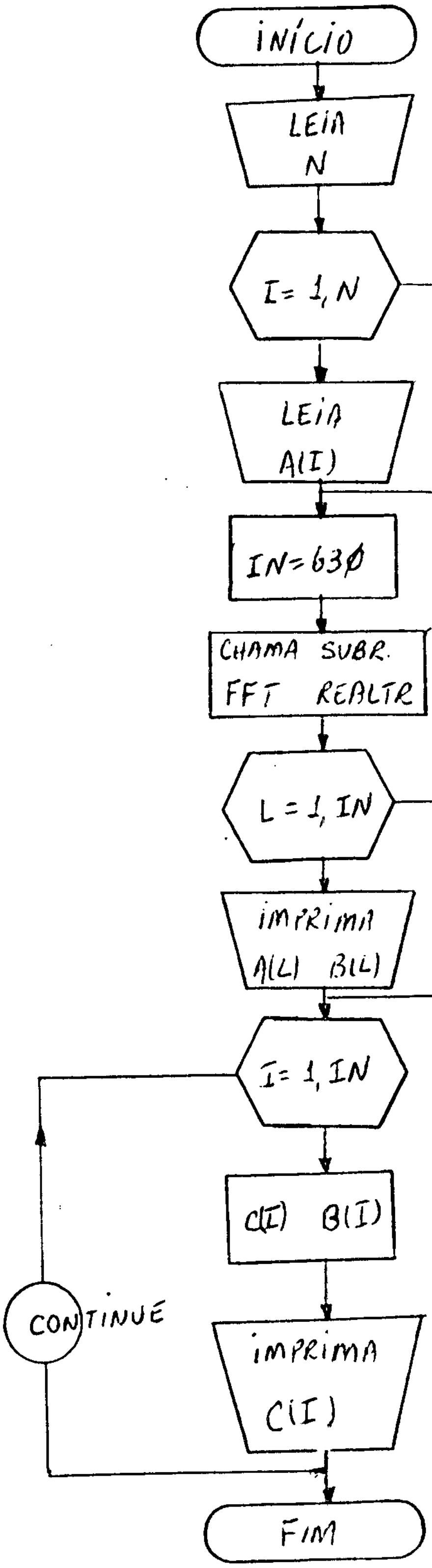
d) - possibilidade de opção pelo uso do arredondamento aritmético através do/ ponto flutuante, ou do truncamento aritmético;

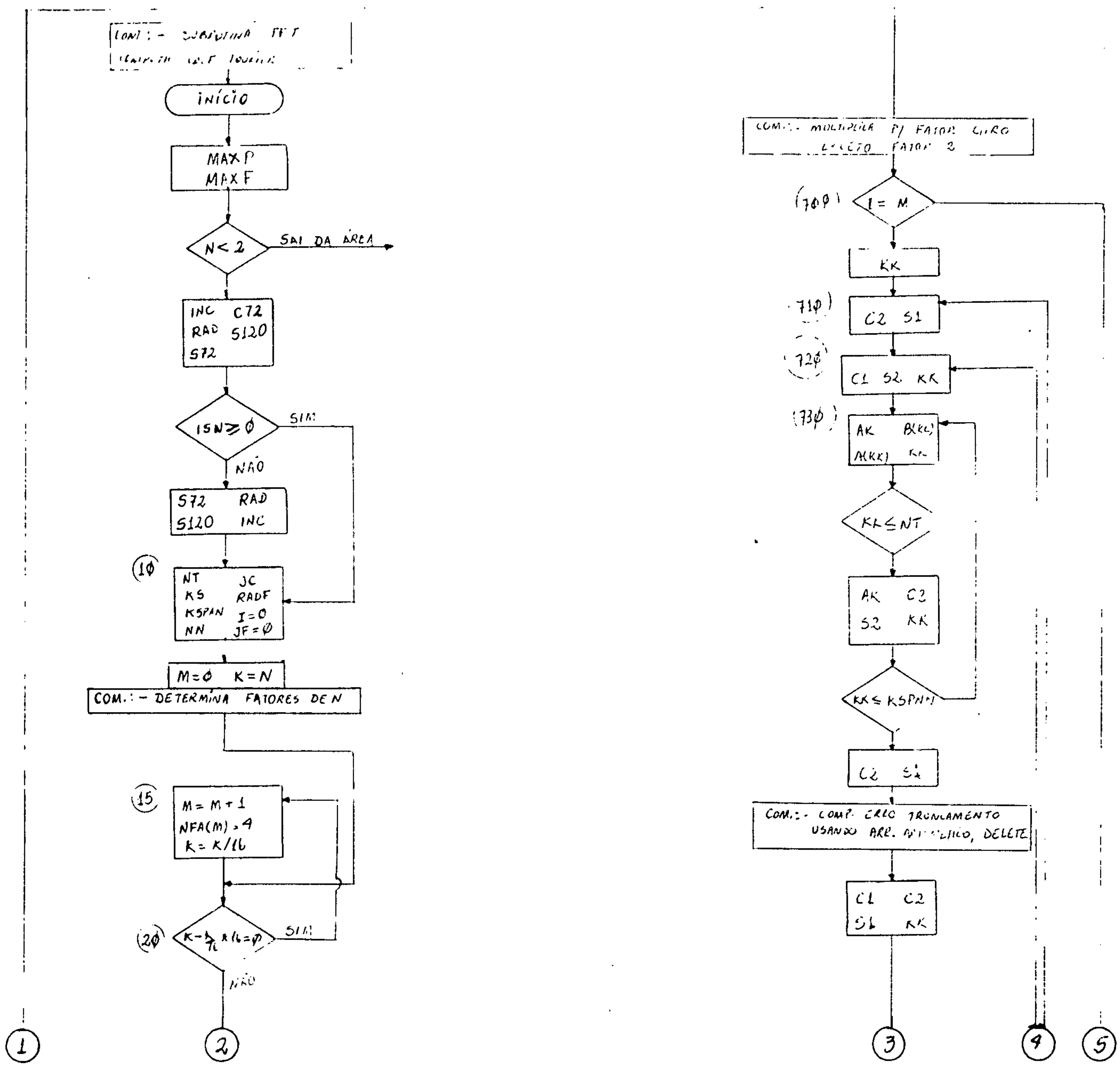
e) - permutação para a ordem normal, envolvendo os fatores quadrados(repetidos) e aqueles livres de quadrados;

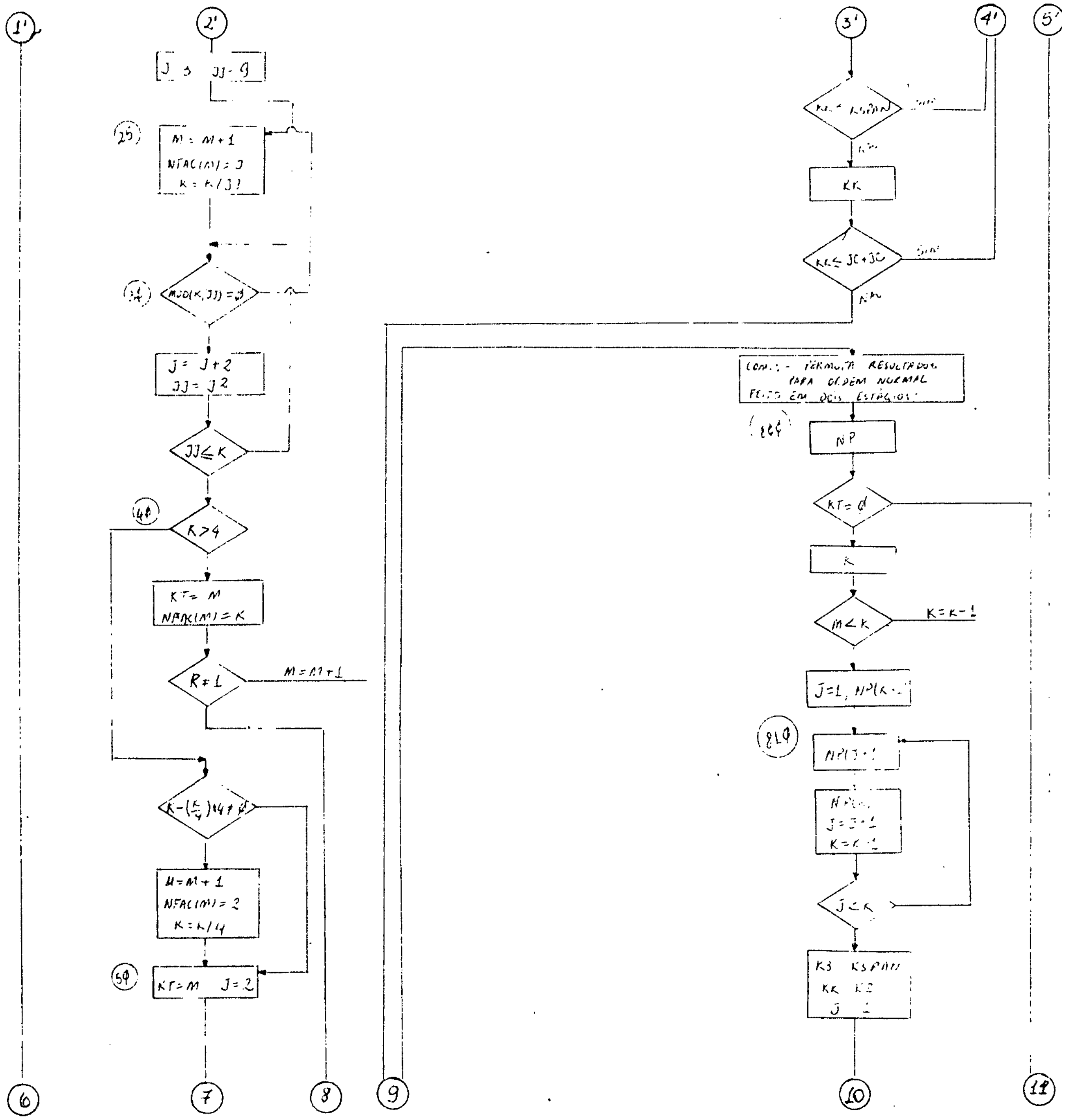
f) - determinação dos ciclos de permutação com duração maior do que um;

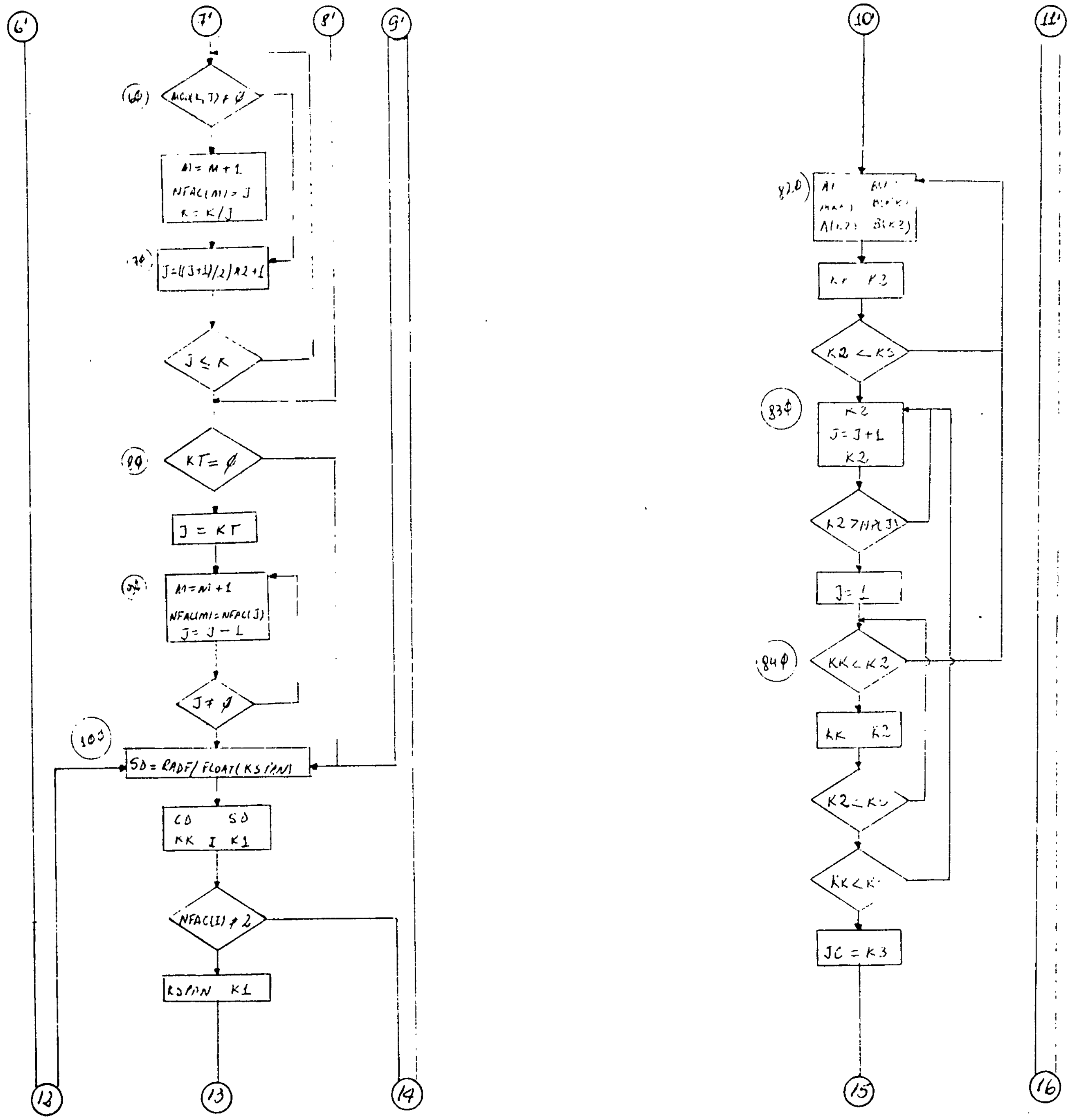
g) - reordenamento dos coeficientes A e B segundo os ciclos de permutação.

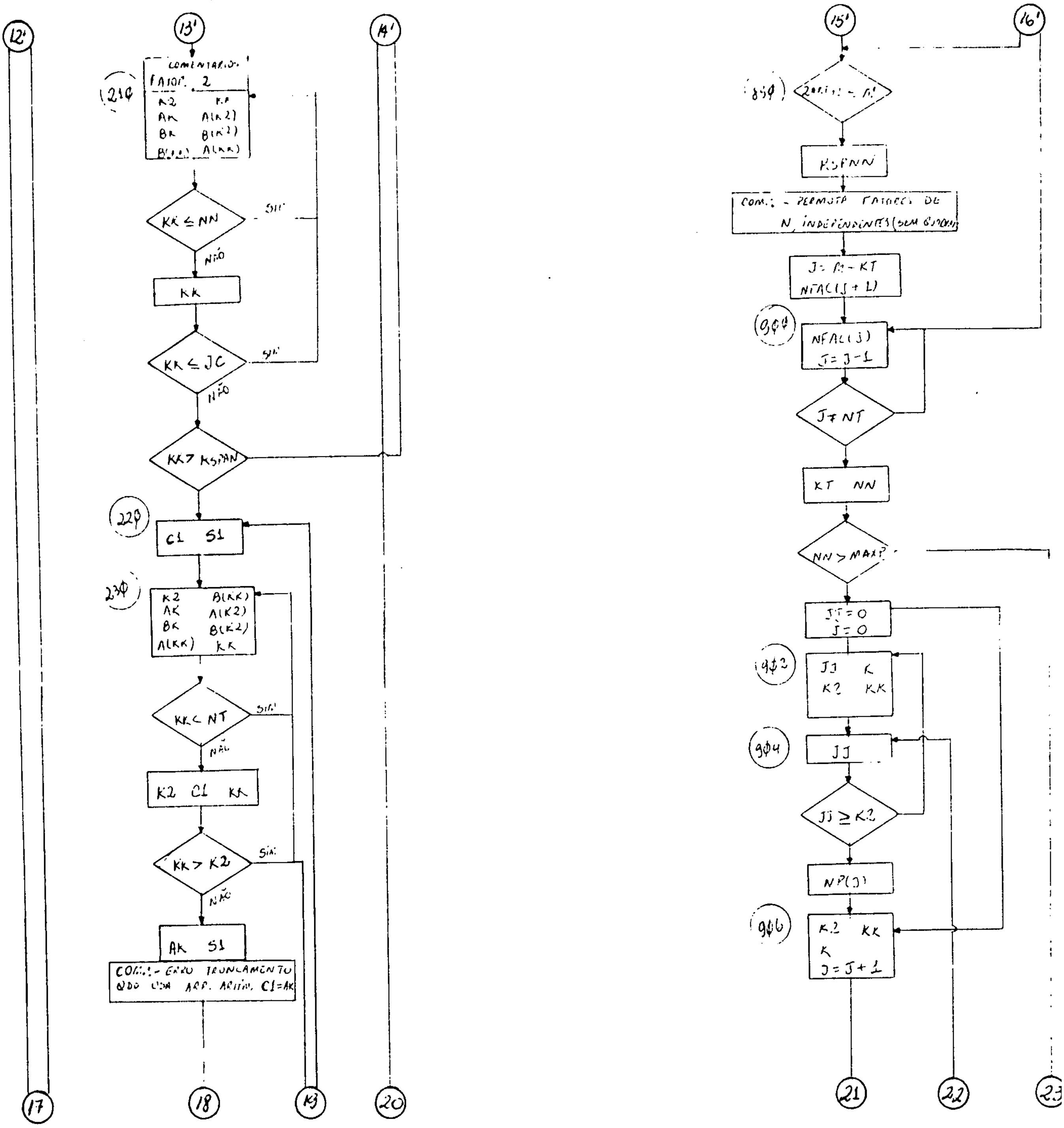
A subrotina REALTR completa a transformada de Fourier para 2N valores reais, usando as equações apresentadas no capítulo II deste trabalho/ e, incluindo também a opção pelo uso do arredondamento aritmético através do ponto flutuante, ou do truncamwnto aritmético.

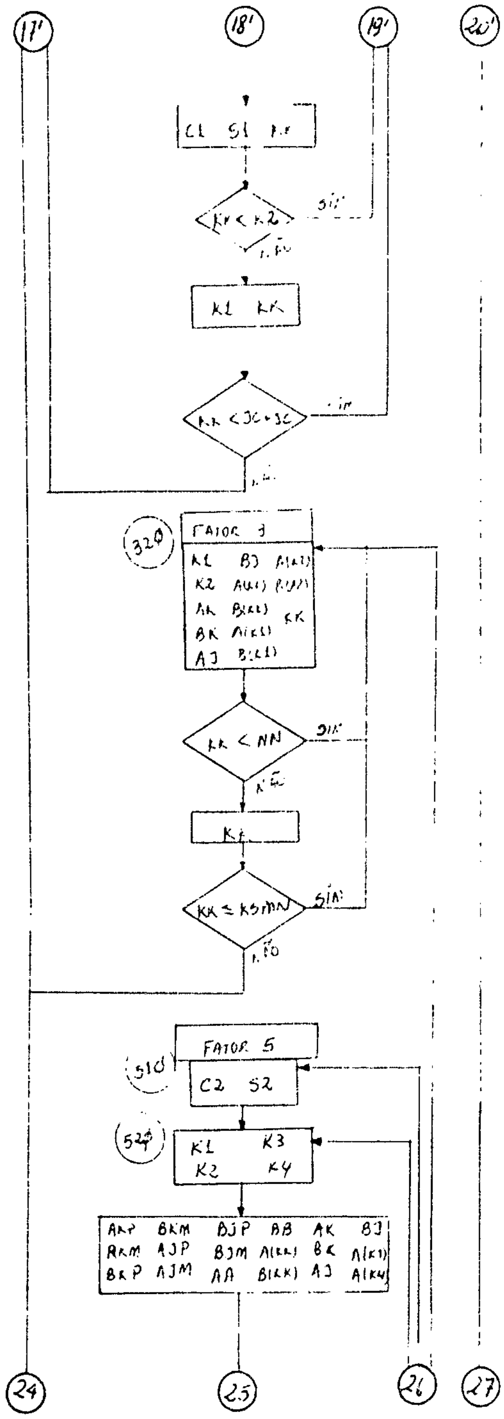

INÍCIO
LEIA
N
I = 1, N
LEIA
A(I)
IN = 63∅
CHAMA SUBR.
FFT REALTR
L = 1, IN
IMPRIMA
A(L) B(L)
I = 1, IN
C(I) B(I)
IMPRIMA
C(I)
CONTINUE
FIM

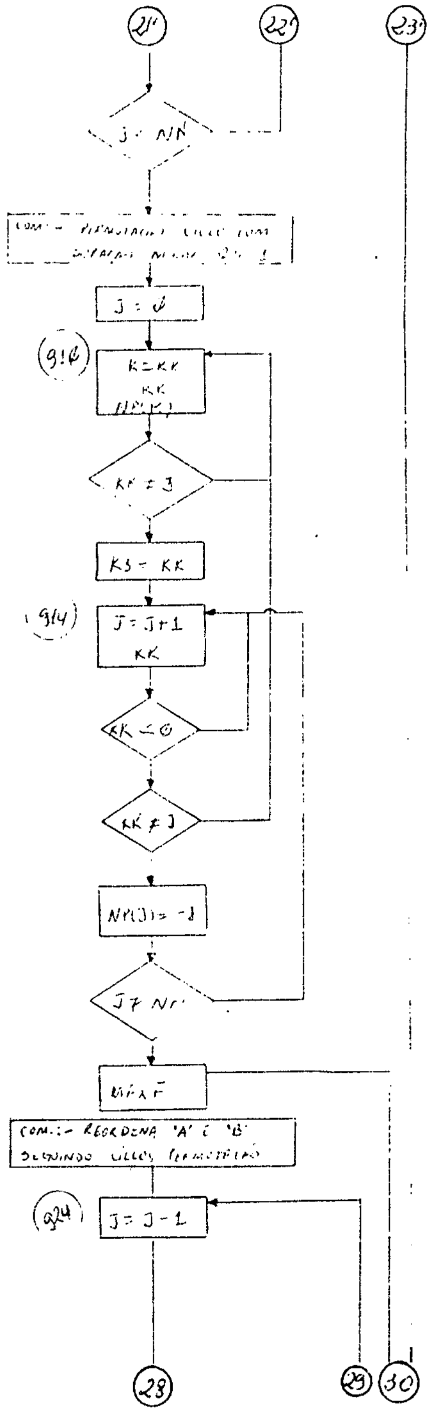

INÍCIO
MAXP
MAXF
N<2
SAI DA ÁREA
INC C72
RAD S120
S72
ISN≥Ø
SIM
NÃO
S72 RAD
S120 INC
1Ø
NT JC
KS RADF
KSPAN I=0
NN JF=Ø
M=Ø K=N
COM.: - DETERMINA FATORES DE N
15
M=M+1
NFA(M)=4
K=K/16
2Ø
SIM
NÃO
7ØØ
I=M
KK
71Ø
C2 S1
72Ø
C1 S2 KK
73Ø
AK B(KK)
A(KK)
KK≤NT
AK C2
S2 KK
KK≤KSPN
C2 S1
COM.: - COMP. ERRO TRUNCAMENTO USANDO ARR. DELETE
C1 C2
S1 KK
1
2
3
4
5

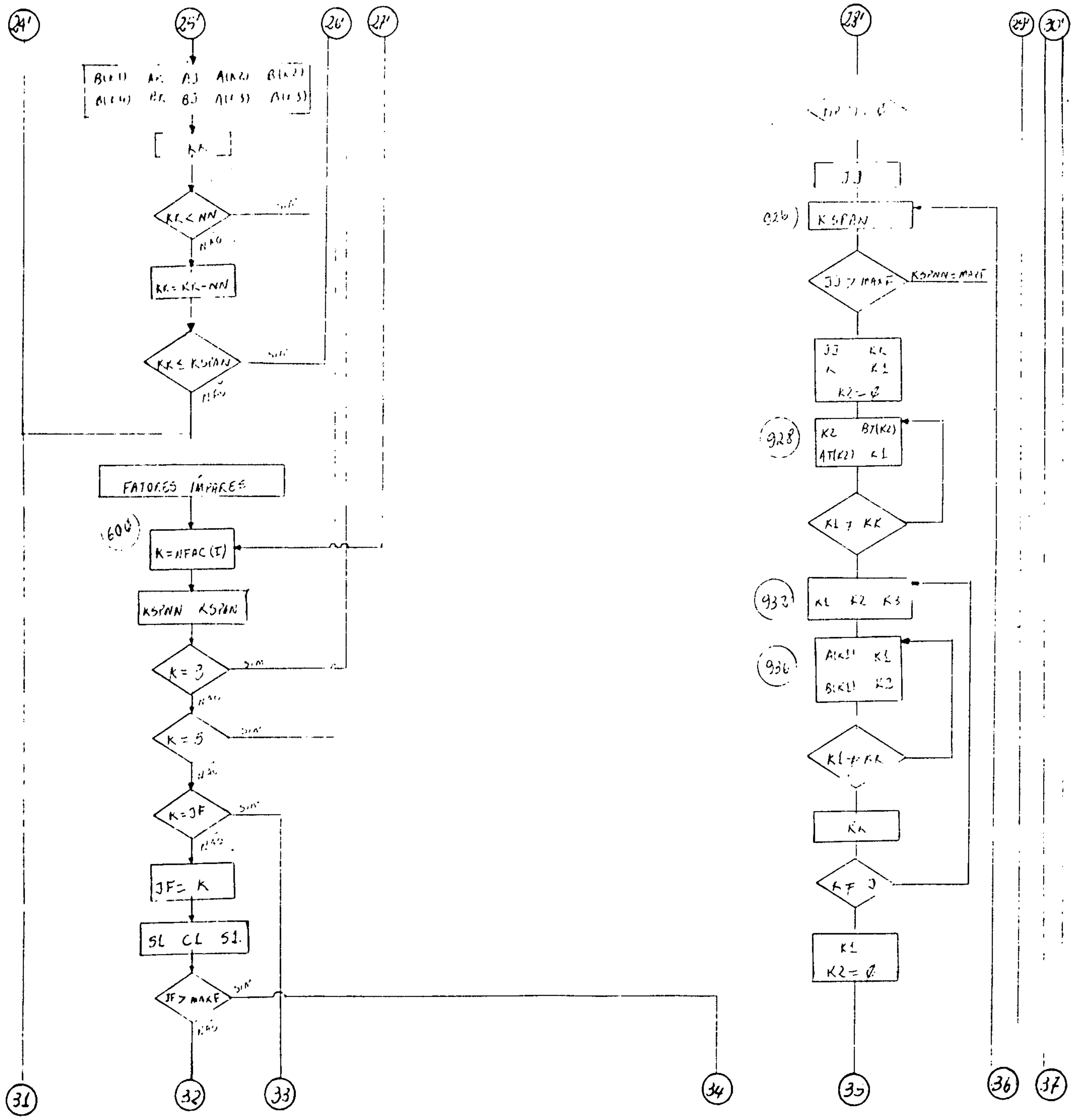

1'
2'
M = M+1
NFAC(M) = J
K = K/JJ
MOD(K,JJ) = 0
J = J+2
JJ = J2
JJ ≤ K
K > 4
KT = M
NFAC(M) = K
K ≠ 1
M = M+1
M = M+1
NFAC(M) = 2
K = K/4
KT = M   J = 2
3'
4'
5'
KK
KK ≤ JC+JC
NP
KT = 0
M < K
K = K-1
6
7
8
9
10

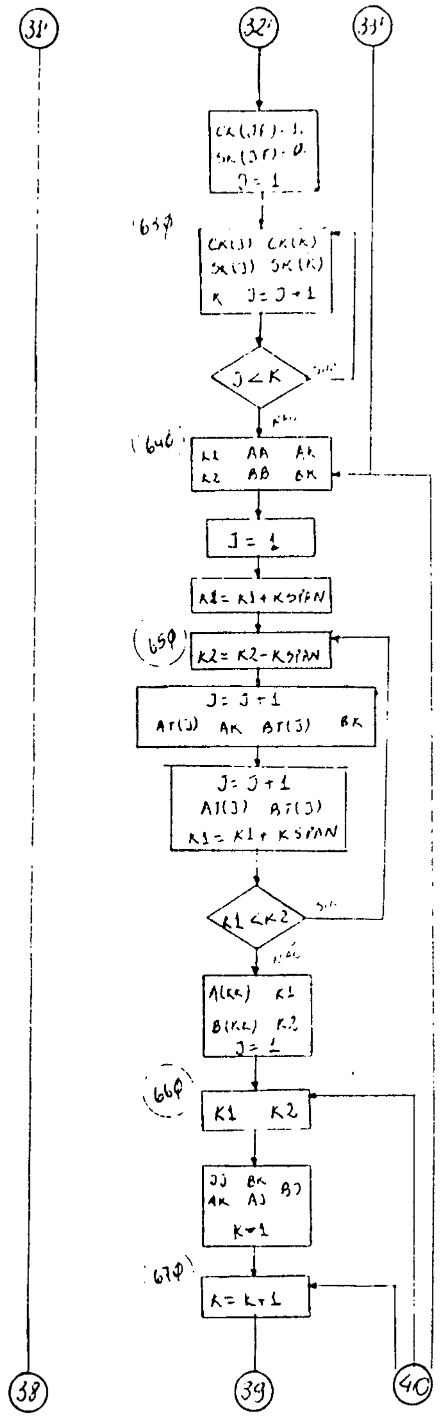

6'
7'
8'
9'
10
11'
KT = ∅
J = KT
M = M + 1
J = J - 1
J ≠ ∅
J ≤ K
CD SD
KK I K1
NFAC(I) ≠ 2
J = J + 1
J = 1
JC = K3
83∅
84∅
12
13
14
15
16

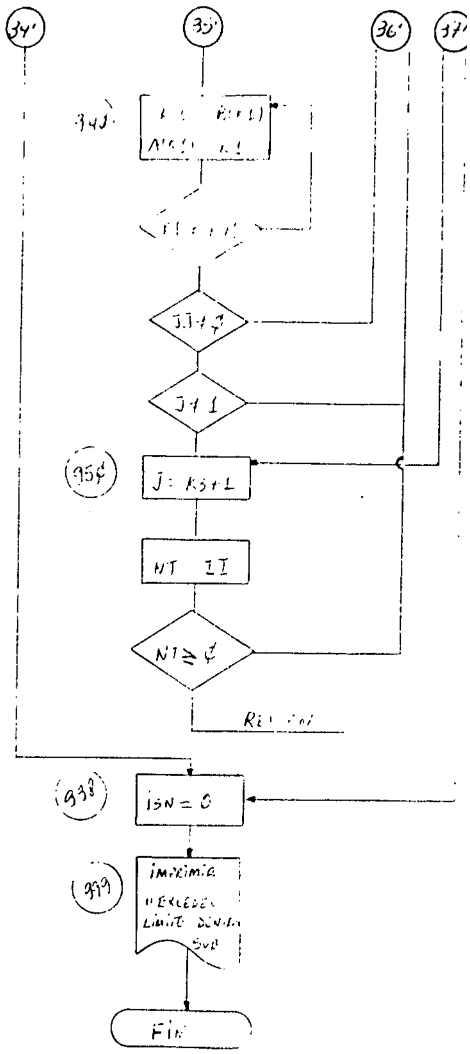

12'
13'
14'
15'
16'
21∅
COMENTARIO
FATOR 2
K2
AK A(K2)
BK B(K2)
KK ≤ NN
SIM
NÃO
KK
KK ≤ JC
KK > KSPAN
22∅
C1 S1
23∅
K2 B(KK)
AK A(K2)
BK B(K2)
A(KK) KK
KK < NT
K2 C1 KK
KK > K2
AK S1
COM.: - ERRO TRUNCAMENTO
QDO USA ARIT. C1=AK
89∅
KSPNN
COM.: - PERMUTA FATORES DE
N INDEPENDENTES
J= M - KT
NFAC(J + 1)
9∅∅
NFAC(J)
J= J-1
J ≠ NT
KT NN
NN > MAXP
JJ = 0
J = 0
9∅2
JJ K
K2 KK
9∅4
JJ
JJ ≥ K2
NP(J)
9∅6
K2 KK
K
J = J + 1
17
18
19
20
21
22
23

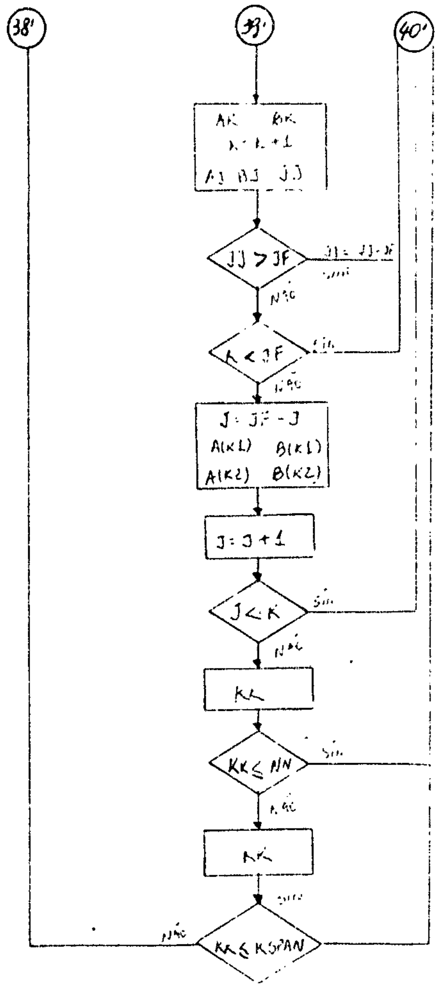

FATOR 3
KK < NN
SIM
NÃO
FATOR 5
C2 S2
K1 K3
K2 K4

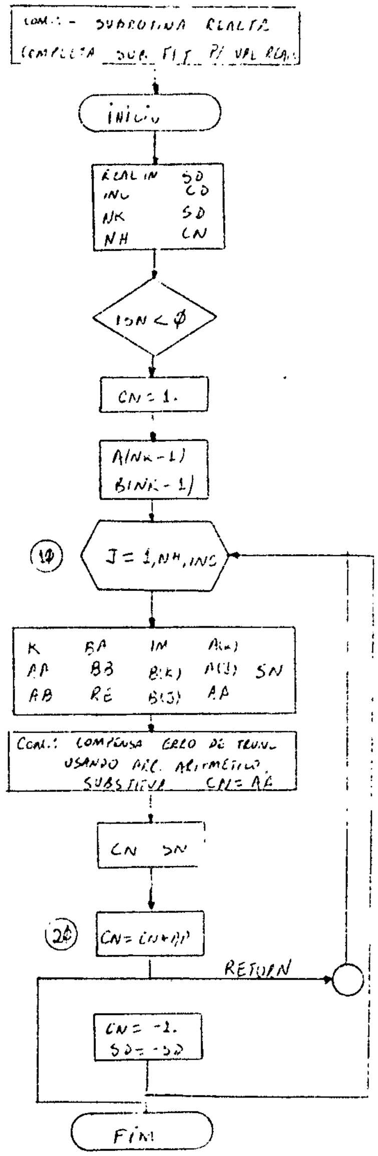

J = 0
K = KK
KK ≠ 3
KS = KK
J = J + 1
KK ≠ J
SEGUINDO


FATORES ÍMPARES
K=NFAC(I)
KSPNN KSPAN
K=3
K=5
K=JF
JF= K
SL CL S1.
JF> MAXF
KK< NN
KK= KK-NN
KK≤ KSPAN
SIM
NÃO
JJ
KSPAN
JJ > MAXF
KSPNN = MAXF
KK
K1
K2 = Ø
K2 BT(K2)
AT(K2) K1
K1 > KK
K1 K2 K3
A(K1) K1
B(K1) K2
K1 ≠ KK
KK
KF
K2 = Ø
24'
25'
26'
27'
28'
29'
30'
31
32
33
34
35
36
37


31'
32'
33'
J < K
J = 1
K1 = K1 + KSPAN
K2 = K2 - KSPAN
J = J + 1
K1 < K2
K1   K2
K = K + 1
38
39
40


34'
35'
36'
J = KS + 1
ISN = 0
imprimia
FIM


38'
39'
40'
J = JF - J
J = J + 1
J < K
KK
KK ≤ NN
KK ≤ KSPAN


INICIO
ISN < Ø
CN = 1.
J = 1, NH, INC
CN SN
CN = CN + AP
RETURN
CN = -1.
SD = -SD
FIM

APÊNDICE B

Cálculo da transformada rápida de Fourier através do algoritmo de Cooley-Tukey(Cooley-Tukey, 1965), o qual é desenvolvido com base nas equações recursivas. [07]

A aplicação deste algoritmo, para o cálculo da transformada / rápida de Fourier, exige antes a permutação para a ordem do "bit-inverso", a/ qual torna-o tão eficiente quanto aquele desenvolvido por Sande(Sande-Gentlemann, 1966 [08]) e apresentado no capítulo III, ítem 3.2.1, deste trabalho.

$$\text{Seja } N = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \tag{B.1}$$

onde, $p_1 = 2$; $p_2 = 3$; $p_3 = 3$; $p_4 = 5$ e $p_5 = 7$.

Fazendo

$$\begin{aligned} n &= n_4 p_1 p_2 p_3 p_4 + n_3 p_1 p_2 p_3 + n_2 p_1 p_2 + n_o \\ k &= k_4 p_2 p_3 p_4 p_5 + k_3 p_3 p_4 p_5 + k_2 p_4 p_5 + k_o \end{aligned} \tag{B.2}$$

e substituindo aí os valores $p_1, \ldots, p_5$ dados acima, temos:

$$\begin{aligned} n &= 90n_4 + 18n_3 + 6n_2 + 2n_1 + n_o \\ k &= 315k_4 + 105k_3 + 35k_2 + 7k_1 + k_o \end{aligned} \tag{B.3}$$

Substituindo (B.3) na equação (65) mostrada no capítulo II deste trabalho, teremos o algoritmo na versão de Cooley-Tukey, inclusive evidenciando os fatores de giro, colocados do lado de fora dos colchetes. Assim,

$$X(n_4+n_3+n_2+n_1+n_o) = \sum_{k_o=0}^{6} \sum_{k_1=0}^{4} \sum_{k_2=0}^{2} \sum_{k_3=0}^{2} \sum_{k_4=0}^{1} x(k_4,k_3,k_2,k_1,k_o) \,. \, W^{(90n_4+18n_3+6n_2+2n_1+n_o)(315k_4+105k_3+35k_2+7k_1+k_0)} \tag{B.4}$$

Desenvolvendo o produto indicado no expoente, e reescrevendo / (B.4) sob a forma de equação recursiva, temos:

$$\tilde{X}_1(n_o,k_3,k_2,k_1,k_o) = \left[\sum_{k_4=o}^{1} \tilde{x}_o(k_4,k_3,k_2,k_1,k_0) W^{(315n_o k_4)}\right] W^{(105n_o k_3)} \tag{B.5.1}$$

$$\tilde{X}_2(n_o,n_1,k_2,k_1,k_o) = \left[\sum_{k_3=o}^{2} \tilde{x}_1(n_o,k_3,k_2,k_1,k_o) W^{(210n_1 k_3}\right] W^{k_2(70n_1+35n_o)} \tag{B.5.2}$$

$$\tilde{X}_3(n_o,n_1,n_2,k_1,k_o) = \left[\sum_{k_2=o}^{2} \tilde{x}_2(n_o,n_1,k_2,k_1,k_o) W^{(210n_2k_2)}\right] W^{k_1(42n_2+14n_1+7n_o)} \tag{B.5.3}$$

$$\tilde{X}_4(n_o,n_1,n_2,n_3,k_o) = \left[\sum_{k_1=o}^{4} \tilde{x}_3(n_o,n_1,n_2,k_1,k_o)W^{126n_3k_1}\right] W^{k_o(18n_3+6n_2+2n_1+n_o)} \quad (B.5.4)$$

$$\tilde{X}_5(n_o,n_1,n_2,n_3,n_4) = \left[\sum_{k_0=o}^{6} \tilde{x}_4(n_o,n_1,n_2,n_3,k_o)W^{90n_4k_0}\right] \quad (B.5.5)$$

$$\tilde{X}(n_4,n_3,n_2,n_1,n_o) = \tilde{x}_5(n_o,n_1,n_2,n_3,n_4) \quad (B.5.6)$$

Embora o algoritmo na versão de Cooley-Tukey, supra citado, a - presente a mesma eficiência daquele da versão de Sande, este último se apresen ta com caracteríticas melhores no que diz respeito à computação, razão pela / qual optamos por ele no desenvolvimento de nosso trabalho.

Nas expressões acima, temos N elementos no arranjo x_1, reque - rendo cada um deles Np_1 operações para obter x_1, de onde concluimos que a com putação de x_m requer $N(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_m)$ operações complexas (adição, subtração e multiplicação complexa).

Considerando a simetria das exponenciais complexas, podemos re duzir mais ainda o número de operações complexas.

APÊNDICE C

Os dados de entrada apresentados na tabela abaixo, são aqueles usados na solução do nosso problema, apresentado no capítulo III, através do uso do programa também apresentado no capítulo IV. Esses dados fazem parte dos múltiplos dados recuperados pelo aparelho recuperador, citado na introdução.

REFLEXÃO	ALTURA	AMPLITUDES									
-0.36	83.8	-0.1	-0.1	-0.4	-0.2	-0.0	-0.0	-0.0	-0.0	-0.1	-0.1
-0.39	84.2	-0.0	-0.1	-0.0	-0.0	-0.1	-0.0	0.5	1.6*	3.6	5.1
-0.31	84.7	4.8	1.4	-4.9	-10.9	-13.9	-12.9	-7.9	-0.5	7.0	12.1
-0.13	85.2	13.7	11.6	5.7	-1.0	-4.8	-5.5	-4.2	-2.2	-0.8*	-0.5
0.10	85.7	-0.5	-0.2	0.1	0.5	0.6	0.5	0.2	-0.2	-0.5	-0.5
0.31	86.2	-0.6	-0.7	-0.4	-0.0	0.3	0.4	0.3	-0.0	-0.1	-0.2
0.43	86.7	-0.1	-0.1	-0.0	0.1	0.3	0.4	0.4	0.1	-0.1	-0.2
0.43	87.1	-0.2	-0.2	-0.1	-0.0	0.2	0.2	0.2	0.1	-0.0	-0.1
0.30	87.6	-0.0	-0.0	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.0	0.2	0.4	0.4
0.11	88.1	0.4	0.1	-0.1	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.1	-0.2
-0.99	88.6	-0.1	-0.1	-0.0	0.1	0.2	0.1	0.1	-0.1	-0.2	-0.3
-0.23	89.0	-0.3	-0.4	-0.4	-0.4	-0.2	-0.0	0.4	0.7	1.1**	1.6
-0.28	89.5	2.6	3.3	3.1	1.4	-1.5	-4.7	-6.5	-6.8	-5.4	-2.7
-0.24	90.0	0.7	3.6	5.3	5.2	3.4	0.8	-0.9	-1.5	-1.2	-0.6**
-0.15	90.5	-0.3	-0.2	-0.2	-0.2	-0.1	-0.1	-0.0	0.1	0.2	0.2
0.09	91.9	0.1	-0.0	-0.0	-0.1	-0.0	-0.0	0.1	-0.0	0.1	-0.0
0.09	92.3	-0.0	-0.0	0.2	0.2	0.2	-0.0	-0.0	-0.1	-0.0	-0.0
0.00	0.0	-0.0	-0.0	-0.0	-0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	-0.0
0.00	0.0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.3	-0.1	-0.1	-0.0	-0.0	0.1	0.1
0.00	0.0	0.2	0.1	0.1	-0.1	-0.1	-0.2	-0.2	-0.2	-0.1	-0.0
0.00	0.0	0.2	0.1	0.1	-0.1	-0.1	-0.2	-0.2	-0.2	-0.1	-0.0
0.00	0.0	0.1	0.0	-0.0	-0.1	-0.1	-0.1	-0.0	-0.0	0.1	0.1
0.00	0.0	0.1	-0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	-0.0	0.1	-0.1
0.00	0.0	-0.0	-0.0	-0.0	-0.1	-0.1	-0.2	-0.2	-0.2	-0.1	-0.0
0.00	0.0	0.1	0.1	0.1	-0.0	-0.1	-0.3				

Obs.: * Início e término da onda de terra. ** Início e término da onda ionosférica.

APÊNDICE D

A subrotina GRAFIC serve para traçados de gráficos. É acessada através de CALL GRAFIC(Y, X, IX) e apresenta escalonamento automático.

```
C       SUBROTINA PARA TRAÇADOS DE GRÁFICOS
C       PARÂMETROS:   -  X = CONJUNTO DOS PONTOS X (ABSCISSA)
C                        Y = CONJUNTO DOS PONTOS Y (ORDENADA)
C                       IX = NÚMERO DE PONTOS A SEREM PLOTADOS
      SUBROUTINE GRAFIC(X, Y, IX)
      DIMENSION XLIN(100), X(IX), Y(IX)
      DATA  BRANCO, PONTO, AXISX, COORD/1H, 1H*, 1H1, 1H-,/
      DO 1 N = 1, 100
    1 XLIN(N) = Y(1)
      YMIN = Y(1)
      YMAX = Y(1)
      DO 2 J = 2, IX
      IF(Y(J) .LT. YMIN) YMIN=Y(J)
      IF(Y(J) .GT. YMAX) YMAX=Y(J)
    2 CONTINUE
      WRITE(6, 8) YMAX, YMIN
    8  FORMAT(1H1, ////,5X,13HVALOR MAXIMO =, 1PE25.9,5X,13HVALOR MINIMO =,
     *E25.9,/,4X,1HX,8X,4HF(X))
      F = 94./(YMAX - YMIN)
      DO 3 M = 1, IX
      K = (Y(M) - YMIN)*F + 1.5
      DO 4 IL = 1, K
    4 XLIN(IL) = COORD
      L = (0.0 - YMIN)*F + 1.5
      IF(YMIN .GE. 0. .OR. YMAX .LE. 0.) GO TO 5
      XLIN(L) = AXISX
    5 XLIN(K) = PONTO
      WRITE(6, 9) X(M), Y(M), (XLIN(N), N = 1, 95)
    9 FORMAT(1X, 1PE10.3,1X,E11.4,1X,100A1)
      DO 6 IT = 1, 100
    6 XLIN(IT) = BRANCO
      IF(K .EQ. L) XLIN(K) = AXISX
    3 CONTINUE
      RETURN
      END
```

APÊNDICE E

As computações básicas correspondeno ao passo F_1 podem ser a- apresentadas pelo gráfico de fluxo de sinal simplificado da figura (E.1). / Neste passo $p_i = 7$, então a sequência $\{X_n\}$ é dividida em subsequências $\{X_n^1(k)\}$ compostas de 90 elementos cada uma.

As equações representativas dos cálculos necessários para a determinação dos elementos da matriz de exponenciais complexas (109) em cada um dos respectivos nós do gráfico são do tipo:

$$X_o^1(k) = G_o(k) + W^{r}G_1(k) + W^{2r}G_2(k) + W^{3r}G_3(k) + W^{4r}G_4(k) + W^{5r}G_5(k) + W^{6r}G_6(k) \qquad (E.1)$$

$$X_1^1(k) = G_o(k) + W^{(r+q_1)}G_1(k) + W^{2(r+q_1)}G_2(k) + W^{3(r+q_1)}G_3(k) + W^{4(r+q_1)}G_4(k) + W^{5(r+q_1)}G_5(k) + W^{6(r+q_1)}G_6(k) \qquad (E.2)$$

$$X_2^1(k) = G_o(k) + W^{(r+2q_1)}G_1(k) + W^{2(r+2q_1)}G_2(k) + W^{3(r+2q_1)}G_3(k) + W^{4(r+2q_1)}. .G_4(k) + W^{5(r+2q_1)}G_5(k) + W^{6(r+2q_1)}G_6(k) \qquad (E.3)$$

$$X_3^1(k) = G_o(k) + W^{(r+3q_1)}G_1(k) + W^{2(r+3q_1)}G_3(k) + W^{3(r+3q_1)}G_3(k) + W^{4(r+3q_1)}. .G_4(k) + W^{5(r+3q_1)}G_5(k) + W^{6(r+3q_1)}G_6(k) \qquad (E.4)$$

$$X_4^1(k) = G_o(k) + W^{(r+4q_1)}G_1(k) + W^{2(r+4q_1)}G_2(k) + W^{3(r+4q_1)}G_3(k) + W^{4(r+4q_1)}. .G_4(k) + W^{5(r+4q_1)}G_5(k) + W^{6(r+4q_1)}G_6(k) \qquad (E.5)$$

$$X_5^1(k) = G_o(k) + W^{(r+5q_1)}G_1(k) + W^{2(r+5q_1)}G_2(k) + W^{3(r+5q_1)}G_3(k) + W^{4(r+5q_1)}. .G_4(k) + W^{5(r+5q_1)}G_5(k) + W^{6(r+5q_1)}G_6(k) \qquad (E.6)$$

$$X_6^1(k) = G_o(k) + W^{(r+6q_1)}G_1(k) + W^{2(r+6q_1)}G_2(k) + W^{3(r+6q_1)}G_3(k) + W^{4(r+6q_1)}. .G_4(k) + W^{5(r+6q_1)}G_5(k) + W^{6(r+6q_1)}G_6(k) \qquad (E.7)$$

onde, $k = 0, 1, \ldots, q_1-1$, $r = 0, 1, \ldots, q_1-1$ e $q_1 = N/p_i$.

No segundo arranjo computacional que corresponde ao passo F_2 as computações básicas estão represendas no gráfico de fluxo de sinal simplificado da figura (E.II). Neste passo $p_{i-1} = 5$ e cada uma das subsequências / $\{X_n^1(k)\}$ é ainda dividida em subsequências $\{X_n^2(k)\}$ compostas por 18 elementos cada uma. As equações representativas dos cálculos necessários para a determinação da matriz de exponenciais complexas (109), em cada um dos nós, são:

$$X_0^2(k) = G_o^1(k) + W^s G_1^1(k) + W^{2s} G_2^1(k) + W^{3s} G_3^1(k) + W^{4s} G_4^1(k), \qquad (E.8)$$

$$X_1^2(k) = G_0^1(k) + W^{(s+q_2)} G_1^1(k) + W^{2(s+q_2)} G_3^1(k) + W^{3(s+q_2)} G_4^1(k) + W^{4(s+q_2)} G_4^1(k) \qquad (E.9)$$

$$X_2^2(k) = G_0^1(k) + W^{(s+2q_2)} G_1^1(k) + W^{2(s+2q_2)} G_2^1(k) + W^{3(s+2q_2)} G_3^1(k) + W^{4(s+2q_2)} G_4^1(K) \qquad (E.10)$$

$$X_3^2(k) = G_0^1(k) + W^{(s+3q_2)} G_1^1(k) + W^{2(s+3q_2)} G_2^1(k) + W^{3(s+3q2)} G_3^1(k) + W^{4(s+3q_2)} G_4^1(k) \qquad (E.11)$$

$$X_4^2(k) = G_0^1(k) + W^{(s+4q_2)} G_1^1(k) + W^{2(s+4q_2)} G_2^1(k) + W^{3(s+4q_2)} G_3^1(k) + W^{4(s+4q_2)} G_4^1(k) \qquad (E.12)$$

onde, $q_2 = N/p_i p_{i-1}$; $s = 0, 1, \ldots, q_2-1$ e $k = 0, 1, \ldots, q_2-1$.

Para obtermos o terceiro arranjo computacional, o qual corres - ponde ao passo F_3, as computações básicas são representadas pelo gráfico de fluxo de sinal simplificado da figura (E.III). Neste passo $p_{i-2} = 3$. cada das subsequências $\{X_n^2(k)\}$ é dividida em outras três subsequências $\{X_n^3(k)\}$ de 6 elementos cada uma. Em cada um dos nós os elementos da matriz (109) são calculados por:

$$X_0^3(k) = G_0^2(k) + W^t G_1^2(k) + W^{2t} G_2^2(k), \qquad (E.13)$$

$$X_1^3(k) = G_0^2(k) + W^{(t+q_3)} G_1^2(k) + W^{2(t+q_3)} G_2^2(k) \quad e \qquad (E.14)$$

$$X_2^3(k) = G_0^2(k) + W^{(t+2q_3)} G_1^2(k) + W^{2(t+2q_3)} G_2^2(k). \qquad (E.15)$$

Finalmente, nos passos F_4 e F_5 as computações básicas estão / representadas no gráfico de fluxo de sinal da figura (E.III) e da figura (E. IV). Nesse passo, $p_{i-3}=3$ e $p_{i-4} = 2$, e cada uma das subsequências $\{X_n^3(k)\}$ é dividida em outras três subsequências tendo cada uma delas apenas dois elementos. Os valores dc elementos da matriz de exponenciais complexas (109) são determinados por:

$$X_0^4(k) = G_0^3(k) + W^u G_1^3(k) + W^{2u} G_2^3(k), \qquad (E.16)$$

$$X_1^4(k) = G_0^3(k) + W^{(u+q_4)} G_1^3(k) + W^{2(u+q_4)} G_2^3(k), \qquad (E.17)$$

$$X_2^4(k) = G_0^3(k) + W^{(u+2q_4)} G_1^3(k) + W^{2(u+2q_4)} G_2^3(k), \qquad (E.18)$$

$$X_{m+1}^5(k) = X_m^4(k) + W^v X_m^4(q), \qquad (E.19)$$

$$X_{m+1}^5(q) = X_m^4(k) - W^v X_m^4(q) \qquad (E.20)$$

onde, $q_4 = N/p_i \ldots p_{i-3}$: $u = 0, 1, \ldots, q_4-1$; $k = 0, 1, \ldots, q_4 -1$ e $v = N/p_i \ldots p_{i-4}$; $k = 0, 1, \ldots, v-1$: m = arranjo computacional.

Acrescentamos neste apêndice, a transformada rápida de Fourier desenvolvida através da divisão da sequência de amostras N em n outras subsequências, cada uma delas correspondendo aos respectivos fatores primos de N com os respectivos gráficos de fluxo de sinal simplificados, para darmos uma / idéia geral da composição das borboletas correspondentes aos nós computacionais. Cabe ressaltar, que este não foi o métcdo usado na resolução do nosso / problema, já que para o referido utilizamos o algoritmo na versão de Sande[08].

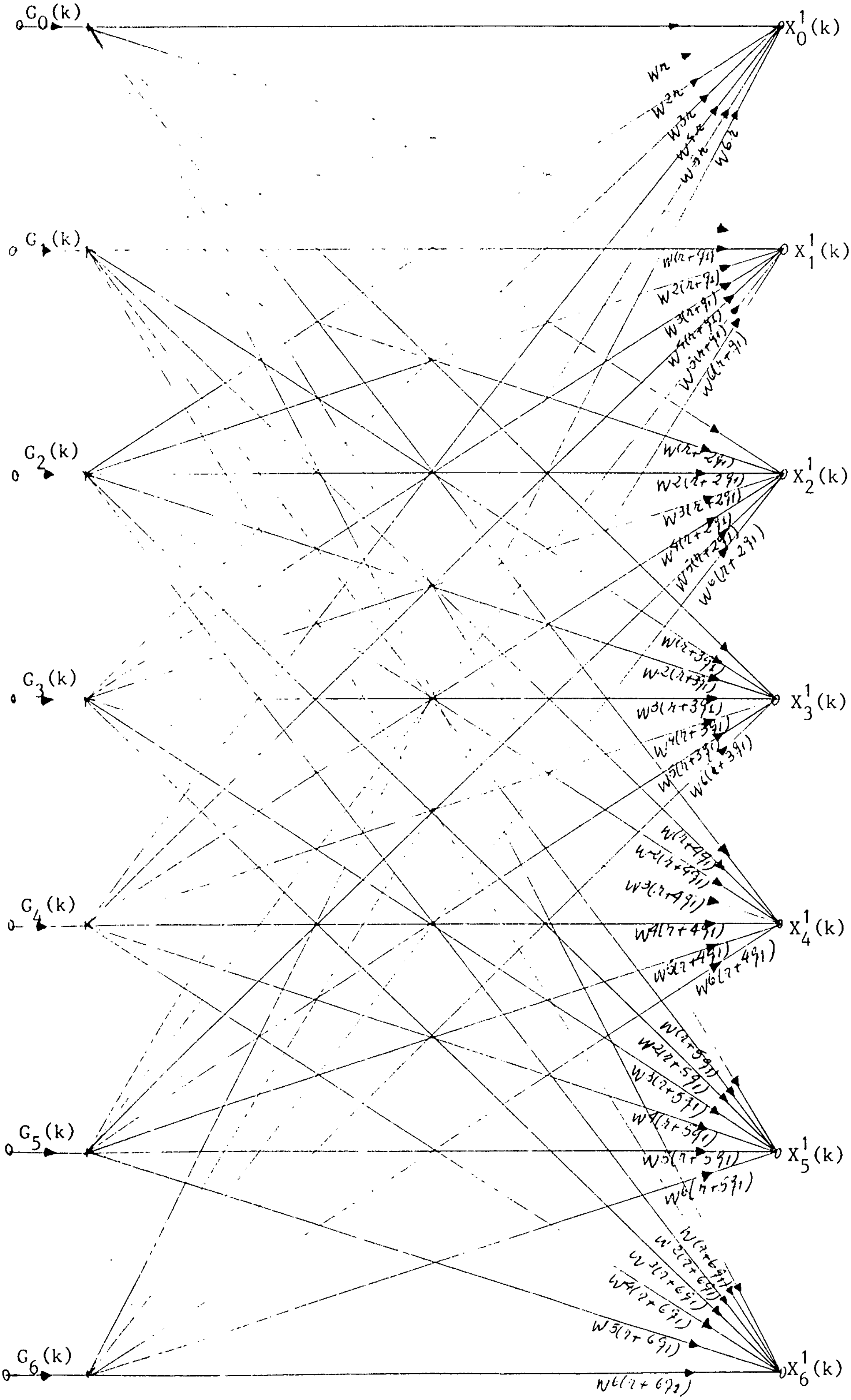


Fig. (E.I) - Gráfico de fluxo de sinal simplificado representando o passo $p_i = 7$.

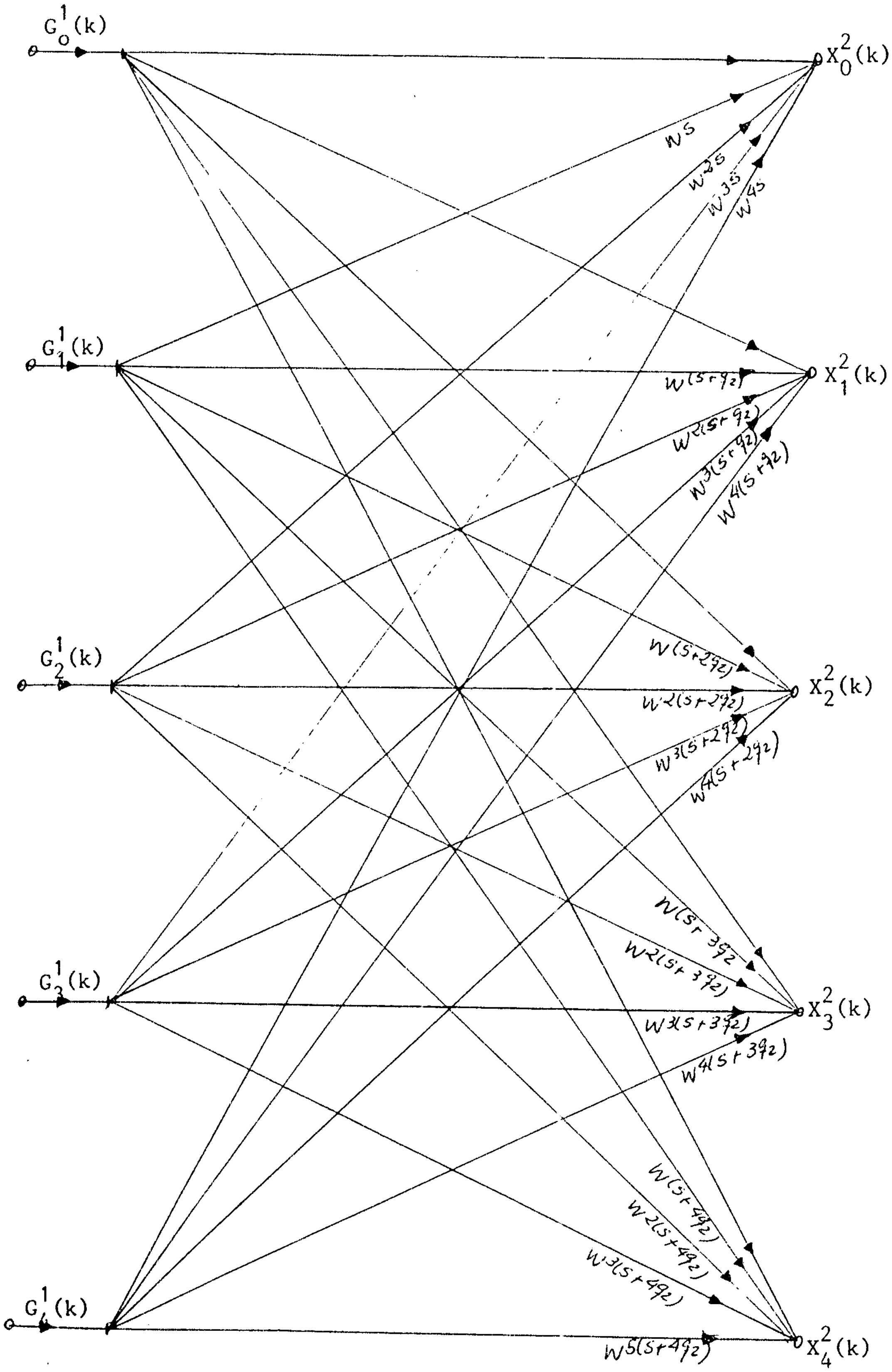


Fig. (E.II) - Gráfico de fluxo de sinal simplificado, representando o passo $p_{i-1} = 5$.

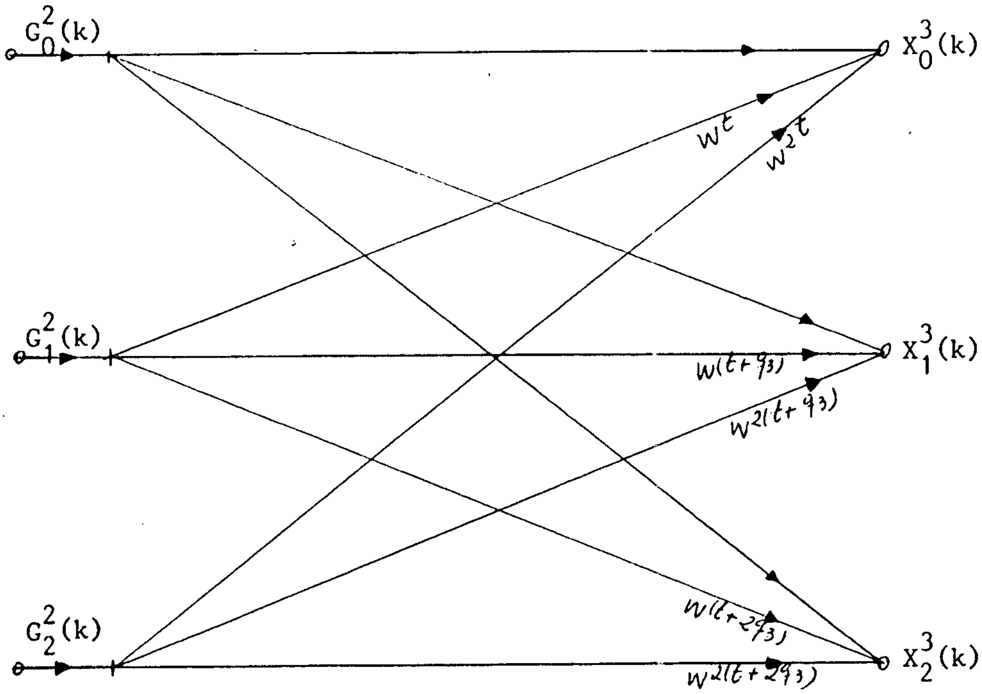


Fig. (E.III) - Gráfico de fluxo de sinal simplificado, representado os passos $p_{i-2}=p_{i-3} = 3$.

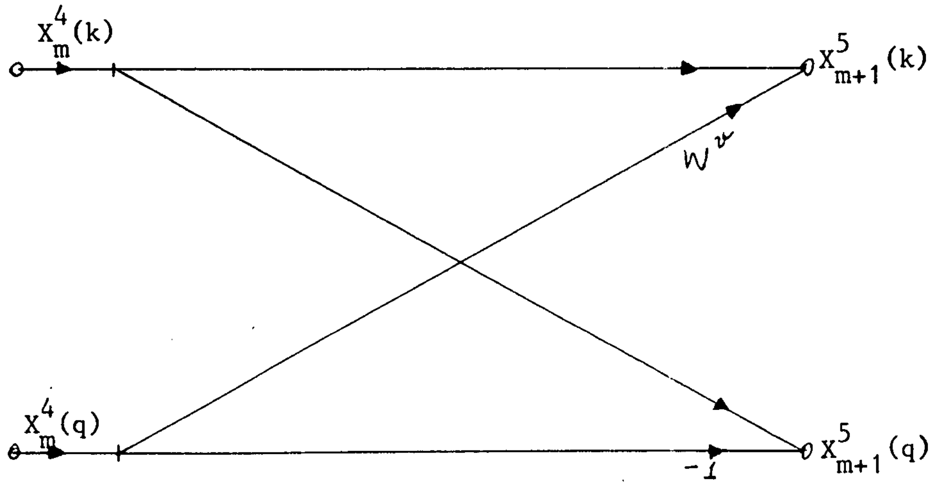


Fig. (E.IV) - Gráfico de fluxo de sinal aimplificado, representando o último passo $p_{i-4}=2$.

APÊNDICE F

Tabela dos parâmetros de operação da Sonda VLF PULSADA e valores usados na obtenção dos resultados apresentados no capítulo IV deste trabalho.

Frequência de transmissão para os cálculos	40KHz
Repetição do Pulso	792 vezes /segundo
Tempo de Varredura do Eductor.	512 micro segundos
Número de Amostras N	630
Período de Amostragem.	2 micro segundos
Total do tempo de CPU- IBM 4341:	
- Compilador WATFIV.	~2,56 segundos
- Compilador Fortran OSVS1	~9,18 segundos
Número de dados da entrada usados para as ondas de terra e ionosféricas, diferentes de zero.	21
Latitude do Transmissor	26º 12' 30" ±10" S
Longitude do Transmissor	50º 58' ±10" W
Latitude do Receptor	26º 56' 35" ±10" S
Longitude do Receptor	48º 54' 35" ±10" W
Distância: Transmissor - Receptor	221,4Km ± 0,3Km.

BIBLIOGRAFIA

01 - RAMIREZ, Phenix M.P., et all. "ESTUDO DA ANOMALIA GEOMAGNÉTICA BRASILEIRA". Revista de Divulgação Cultural - FURB. Ano 3, nº 10 e 11 (maio e dezembro de 1980).

02 - TURNES, Osiris. "ANÁLISE DO COMPORTAMENTE DO SISTEMA RECUPERADOR DE ONDAS DO GRUPO DE RADIOCIÊNCIAS DE GASPAR - SC". Tese Mestre-UFSC. 1981.

03 - COOLEY-TUKEY, James W. e John W. "AN ALGORITHM FOR THE MACHINE CALCULATION OF FOURIER SERIES". Matematics of Computation, Vol. 19-90, / pág. 297-301. 1965.

04 - COOLEY, LEWIS AND WELCH, James W. Peter A.W. and Peter D. "HISTORICAL/ NOTES ON THE FAST FOURIER TRANSFORM". IEEE-Trans. Audio Elect. / Vol. AU-15, pág. 76-79. June 1967.

05 - COOLEY, James W. et all. "WHAT IS THE FOURIER TRANSFORM?". IEEE-Trans./ Audio Elect. Vol. AU-15, pág. 45-55. June 1967.

06 - BERGLAND, G.D. "A GUIDED TOUR of THE FAST FOURIER TRANSFORM": IEEE- / Trans. Audio Elect. Vol. 6, pág 41-52. July 1969.

07 - BIGHAM, E. Oran. "THE FAST FOURIER TRANSFORM". Prentice-Hall, Inc., Englewood Clifs. NJ 1974.

08 - SANDE, GENTLEMANN, G.,W.M. "FAST FOURIER TRANSFORM-FOR FUN AND PROFIT". AFIPS Proc. Fall J. Computer Conf. Spartan Books. pág 573-578 . 1966.

09 - RADER, Charles M. "DISCRETE FOURIER TRANSFORM WHEN THE NUMBER OF DATA IS PRIME". IEEE-Proc. Vol. 56, pág. 1107-1108. June 1968.

10 - PEASE, Marshall. "AN ADAPTATION OF THE FAST FOURIER TRANSFORM FOR PARALLEL PROCESSING". J. Ass. Comp. Mach. Vol. 15, pág.252-264. April 1968.

11 - OPPENHEIM, SCHAFER, Charles M. and Ronald W. "DIGITAL SIGNAL PROCESSING" Alan V. Oppenheim and Bell Telephone Lab., Inc. 1975-USA.

12 - STOKHAM, T.G. "HIGH SPEED CONVOLUTION AND CORRELATION". Springer J. Comp Conf. AFIPS Proc. Vol. 28, pág. 229-233. W. DC Spartan. 1966.

13 - HSU, Hwei P. "ANÁLISE DE FOURIER". Livros Téc. Cient. Editora Ltda.1973.

14 - COOLEY, LEWIS AND WELCH, James W., Peter A.W. and Peter D. "THE FINITE FOURIER TRANSFORM". IEEE-Trans. Audio Elect. Vol. AU-17,pág. 78-85. June 1969.

15 - COOLEY, et All. "THE FAST FOURIER TRANSFORM ALGORITHM: PROGRAMING CONSIDERATIONS IN THE CALCULATION OF SINE, COSINE AND LAPLACE TRANSFORM". J. Sound. Vol. 12, pág. 315-337. July 1970.

16 - SINGLETON, Richard C. "AN ALGORITHM FOR COMPUTING THE MIXED RADIX FAST FOURIER TRANSFORM". IEEE-Trans. Audio Elect. Vol. AU-17, pág.93-103. June 1969.

17 - PEASE, Marshall C. "AN ADAPTATION OF THE FAST FOURIER TRANSFORM FOR PARELLEL PROCESSING". J. Ass. Comp. Mach. Vol. 15, pág. 252-264. / April 1968

18 - FIGUEIREDO, Djairo G. "ANÁLISE DE FOURIER E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS". Inst. Mat. Pura Aplicada. CNPQ-RJ. 1977.

19 - BEAUCHAMP, K. G. "SIGNAL PROCESSING". George Allen & Unwim Ltd. 1973.

20 - FRANCO, Alberto S. "ANÁLISE ESPECTRAL-CONTÍNUA E DISCRETA".Inst. Pesq . Tecnológicas do Estado S. Paulo. 1982.

21 - COOLEY, et All. "APLICATION ON FAST FOURIER TRANSFORM TO COMPUTATION OF FOURIER INTEGRALS, FOURIER SERIES AND CONVOLUTION INTEGRALS". / IEEE-Trans. Audio Elect. Vol. AU-15(2), pág. 79-84. 1967.

22 - DONOGHUE, William F. Jr. "DISTRIBUITIONS AND FOURIER TRANSFORMS". Academic Press, New York. 1969.

23 - BUTZER, NESSEL, Paul L. and Rolf J. "FOURIER ANALYSIS AND APROXIMATIONS". Academic Press. NY. 1971.

24 - THOMAS, John B.(Série Edictor). "DIGITAL FILTERS AND THE FAST FOURIER / TRANSFORM". Benchmark papers ins Eletrical Eng. and Compute Science/12. Edited by Bede Lyu Princeton University. 1975.

25 - THEILHEIMER, F. "A MATRIZ VERSION OF THE FAST FOURIER TRANSFORM". IEEE-Trans. Audio Elect. Vol. AU-17, pág 158-161. June 1969.

26 - RADER et All. "THE CHIRP Z-TRANSFORM ALGORITHM". IEEE-Trans. Audio Elec. Vol. AU-17, pág. 86-92. June 1969.

27 - SPIEGEL Murray. "ANÁLISE DE FOURIER". McGraw-Hill do Brasil Ltda. 1977.

28 - APOSTOL, Tom. M. "ANALISIS MATEMATICO". Editorial Reverté SA. 1980.

29- BRACEWELL, R. "THE FAST FOURIER TRANSFORM AND ITS APLICATIONS". McGraw - Hill. New York. 1965.

30 - PAPOULIS, A. "THE FOURIER INTEGRALS AND APLICATIONS". McGraw-Hill.1962.

31 - BLUESTEIN, Leo I. "A LINEAR FILTERING APROACH TO THE COMPUTATION OF DIS CRETE FOURIER TRANSFORM". IEEE-Trans.Audio Elect. Vol.18, pág. / 451-455. December 1970.

32 - MARKEL, John D. "FFT PRUNING". IEEE-Trans. Audio Elect. Vol. AU-19 (4) Dec. 1971.

33 - WEINSTEIN, Clifford J. "ROUNDOFF NOISE IN FLOATING POINT FAST FOURIER / TRANSFORM COMPUTATION". IEEE-Trans. Audio Elect. Vol. AU-17, pág. 209-215. Sept. 1969.