

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTROLE E ESTIMAÇÃO DE ESTADO COM SENSIBILIDADE
REDUZIDA EM SISTEMAS LINEARES SUJEITOS
A VARIAÇÕES EM SEUS PARÂMETROS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

JORGE DANTAS DE MELO

FLORIANÓPOLIS, AGOSTO - 1983

CONTROLE E ESTIMAÇÃO DE ESTADO COM SENSIBILIDADE
REDUZIDA EM SISTEMAS LINEARES SUJEITOS
A VARIAÇÕES EM SEUS PARÂMETROS

JORGE DANTAS DE MELO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA - ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO.



Prof. Sahjendra Narain Singh, Ph.D.
Orientador



Prof. Augusto Humberto Bruciapaglia, Dr. Ing.
Coordenador do Curso de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica

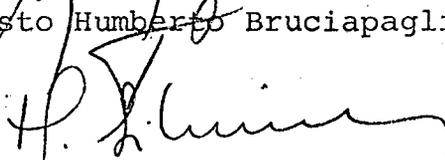
BANCA EXAMINADORA



Prof. Sahjendra Narain Singh, Ph.D.
Orientador



Prof. Augusto Humberto Bruciapaglia, Dr. Ing.



Prof. Hamilton Medeiros Silveira, D. Et.



Prof. Luiz Gonzaga de Souza Fonseca, D. Sc.

À minha esposa Fátima.

À minha filha Ana Sílvia.

Aos meus pais José e Helena.

Aos meus irmãos Catarina, Lúcio e Paulo.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Sahjendra Narain Singh pela orientação, e principalmente pela dedicação e amizade demonstradas no decorrer do desenvolvimento deste trabalho.

A todos os professores, colegas e funcionários do Programa de Pós-Graduação e do Departamento de Engenharia Elétrica da UFSC que, de uma forma ou de outra, contribuíram para realização deste trabalho. Especialmente aos colegas Aldayr Dantas de Araújo e Janette Cardoso pelas férteis discussões e aos professores Augusto Humberto Bruçiapaglia e Jean Marie Farines pelo apoio e incentivo.

A Iara Torquato pelo paciente trabalho de datilografia e a José Carlos Luiz pelos desenhos.

A UFSC e CNEN pelo apoio financeiro sem o qual não seria possível a realização deste trabalho.

E, acima de tudo, a minha esposa Maria de Fátima sempre presente nos momentos difíceis com seu inestimável apoio.

S U M Á R I O

RESUMO	viii
ABSTRACT	ix
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2 - REDUÇÃO DA SENSIBILIDADE E RASTREAMENTO ROBUSTO EM SISTEMAS LINEARES SUJEITOS A VARIAÇÕES NOS PARÂMETROS E ENTRADA DE PERTURBAÇÕES	7
2.1 - Introdução	7
2.2 - O Sistema e algumas definições úteis	8
2.3 - Projeto do Servocompensador	11
2.4 - Redução da Sensibilidade das Trajetórias	17
2.5 - <u>Implementação</u> do algoritmo de controle	31
2.5.1 - Servocompensador	31
2.5.2 - Trajetória nominal	32
2.5.3 - Estabilização do sistema	32
2.6 - Conclusões.....	35
CAPÍTULO 3 - APLICAÇÃO DO CONTROLE COM REDUÇÃO DE SENSIBILI DADE	36
3.1 - Introdução	36
3.2 - Modelo matemático do helicóptero	37
3.3 - Estrutura do controlador	42
3.4 - Resultados das Simulações	46
3.4.1 - Controle da velocidade horizontal com $w(t) \equiv 0$..	47
3.4.2 - Controle da velocidade vertical com $w(t) \equiv 0$...	48
3.4.3 - Controle da velocidade vertical com $w(t)$ cons- tante	52

3.4.4 - Controle da velocidade horizontal com $w(t)$ constante	55
3.5 - Conclusões	55
 CAPÍTULO 4 - OBSERVADORES COM SENSIBILIDADE REDUZIDA QUANTO ÀS VARIAÇÕES NOS PARÂMETROS	 61
4.1 - Introdução	61
4.2 - Colocação do Problema	62
4.3 - Projeto do observador	63
4.4 - Considerações sobre o método	68
4.5 - Conclusões	73
 CAPÍTULO 5 - APLICAÇÃO DO OBSERVADOR AO SISTEMA DE POTÊNCIA MÁQUINA-BARRA INFINITA	 74
5.1 - Introdução	74
5.2 - Modelo do sistema	75
5.3 - Projeto do observador	79
5.4 - Regulação do sistema	82
5.5 - Conclusões	92
 CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	 93
 APÊNDICE A - MODELO LINEARIZADO DO SISTEMA DE POTÊNCIA MÁQUINA- BARRA INFINITA	 97
 APÊNDICE B - RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE RICCATI USANDO O CONCEI TO DE FUNÇÃO SINAL DE UMA MATRIZ	 102
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 107

R E S U M O

É apresentada uma abordagem para o controle e a estimativa de estado de sistemas lineares multivariáveis sujeitos a variações nos parâmetros.

No controle, a redução da sensibilidade das trajetórias e o rastreamento das saídas são alcançados mesmo na presença de perturbações. O controlador consiste de um servocompensador que contém os modos dos sinais de referência e das perturbações, uma matriz ganho de realimentação e um elemento "feed-forward". Uma aplicação do método no projeto de um sistema de controle do movimento de um helicóptero no plano vertical é apresentada. O uso do servocompensador permite uma boa capacidade de manobra no sentido de que o helicóptero segue trajetórias especificadas, e o elemento "feed-forward" atua na redução da sensibilidade das trajetórias às variações dos parâmetros devido a mudanças na velocidade do ar e a presença de rajadas de vento.

Na estimação de estado, um método para a redução da sensibilidade de observadores é apresentado. Partindo-se de um projeto inicial de observador de Luenberger, uma equação de Riccati é construída. A solução desta equação permite a obtenção de um novo observador, para o qual um índice de desempenho do tipo integral de uma forma quadrática do erro de observação é diminuído. Variações na matriz de saída do processo são consideradas, sendo transformadas em variações equivalentes na matriz de estado e na matriz de entrada. Uma aplicação do método na regulação e reconstrução dos estados de um sistema de potência máquina-barras infinita é apresentada.

A B S T R A C T

An approach for control and state estimation of linear multivariable systems under parameter variations is presented.

For the control approach, sensitivity trajectory reduction and robust asymptotic tracking are achieved even when there are disturbance inputs. The controller consists of a servocompensator containing the modes of the reference signals and disturbance inputs, a stabilizing feedback loop, and a feed-forward element. Application of the method to the design of a helicopter control system in vertical plane is presented. The use of servocompensator allows to perform maneuvers so that the helicopter tracks desired trajectories, and the feed-forward element acts in reducing the trajectory sensitivity to variations of parameters due to change in airspeed, and to wind gust.

For state estimation, a method for reducing the sensitivity of observers is presented. Starting with an initial design for a Luenberger observer, a Riccati equation is established. Its solution permits the design of a new observer for which a performance index of an integral of a quadratic form of the observer error is decreased. Variations in the output matrix are considered and transformed in equivalent variations in the state matrix and input matrix. An application of the method for regulation and state estimation of a power system consisting of a generator connected to an infinite bus is presented.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O comportamento dos sistemas dinâmicos quanto a variações nos seus parâmetros, constitui-se em um dos aspectos básicos no tratamento de tais sistemas. A questão da sensibilidade paramétrica aparece principalmente quando modelos matemáticos são usados nos propósitos de análise e síntese. Normalmente, existe uma discrepância entre o sistema real e seu modelo matemático devido a uma série de fatores, tais como:

- (1) Um sistema real não pode ser identificado exatamente, por causa dos erros inerentes aos instrumentos e técnicas de medidas.
- (2) A idealização do comportamento dos elementos do sistema, para possibilitar a aplicação das leis físicas.
- (3) O comportamento de qualquer sistema real varia com o tempo de maneira não previsível, influenciado pelas condições ambientais, pelas propriedades dos materiais e condições de operação do sistema.
- (4) Os modelos matemáticos são muitas vezes simplificados intencionalmente, a fim de simplificar o problema matemático e torná-lo solucionável.

Se a diferença entre os parâmetros do sistema real e do modelo matemático são consideráveis, a solução obtida através deste último pode ser impraticável. Portanto, é parte

da solução de um problema prático, o conhecimento da sensibilidade paramétrica e sua influência na resposta do sistema.

Por sensibilidade paramétrica pode-se entender o efeito que as variações nos parâmetros produzem na dinâmica de um sistema, ou seja, sobre sua resposta no tempo, seus estados, sua função de transferência ou qualquer outra representação matemática que caracterize sua dinâmica.

Historicamente, considerações sobre a sensibilidade paramétrica foram inicialmente feitas em termos da influência dos coeficientes de uma equação diferencial sobre sua solução, sob um ponto de vista puramente matemático [1]. Bode foi o primeiro a estabelecer a importância da sensibilidade, na síntese de sistemas de controle com realimentação [1-2].

Com o desenvolvimento de métodos mais sofisticados na teoria de controle, o problema dos sistemas com variações nos parâmetros foi tratado de muitas formas durante os últimos trinta ou quarenta anos.

Mais recentemente, foi proposto um método em [3-4], modificando a lei de controle por realimentação de um sistema linear invariante no tempo, de modo a reduzir a sensibilidade das trajetórias dos estados, mantendo as características de estabilidade e otimização. Posteriormente este método foi estendido em [5], para sistemas variantes no tempo e sistemas não lineares. Contudo nestes trabalhos, a questão da presença de perturbações e do rastreamento das saídas em relação a referências especificadas não foi tratado. Um outro método, também aplicado para sistemas lineares invariantes no tempo, foi proposto em [6], no qual é minimizada a sensibilidade dos autovalores quanto a variações nos

parâmetros, mas, variações na matriz de entrada não foram consideradas.

Além dos métodos acima citados, vários são os autores que procuram solucionar o problema da síntese de controladores para sistemas lineares sujeitos a variações nos parâmetros (vide [7-11]). Devido as considerações matemáticas utilizadas, as soluções propostas não são atrativas do ponto de vista prático. Embora em [8] a implementação não seja tão complicada, de acordo com este trabalho, para um processo de dimensão n , é necessário um controlador de dimensão $2n$ e, além do mais, o problema da rejeição das perturbações não é tratado.

A teoria do servomecanismo robusto apresentada em [12], resolve parcialmente o problema da síntese do controlador no sentido de que, embora as saídas tendam assintoticamente para sinais de referências e as perturbações sejam rejeitadas, o controlador pode não manter características de resposta desejadas quando os valores dos parâmetros do sistema mudam. Esta desvantagem da teoria do servomecanismo robusto, é notadamente percebida no comportamento de alguns sistemas, tais como sistemas de aviação, controle de satélites e quaisquer outros sistemas nos quais as características das respostas não podem estar sujeitas a grandes variações.

Porter [15] mostrou que embora o problema da sensibilidade e o problema da observação dos estados tenham se desenvolvido em campos distintos, eles são de natureza dual. Posteriormente em [16], um resultado dual ao obtido por Sundararajan em [3] é apresentado, e um procedimento para melhorar o projeto do observador sob o ponto de vista de sua sensibilidade às varia

ções nos parâmetros, é sugerido.

No trabalho aqui desenvolvido, um método que leva em conta a teoria do rastreamento robusto proposta em [12] e o método da redução da sensibilidade das trajetórias [3] é apresentado, alcançando-se simultaneamente o rastreamento das saídas e a redução da sensibilidade. Da mesma maneira que em [12], o rastreamento das saídas do sistema malha fechada é obtido para uma classe de sinais de referência e de perturbações.

O controlador é formado por um servocompensador dirigido pelo erro entre as referências e as saídas, por um ganho de realimentação e uma entrada "feed-forward". O servocompensador contém todos os modos dos sinais de referência e das perturbações. O ganho de realimentação é obtido usando os valores nominais dos parâmetros. A entrada "feed-forward" é utilizada para permitir que a resposta do sistema não sofra grandes alterações quando os valores dos parâmetros não são os nominais e, perturbações estão presentes. O controlador aqui apresentado, tem sua aplicação restrita aos sistemas lineares invariantes no tempo.

Para verificar a eficiência deste controlador, foi o mesmo aplicado no controle de um helicóptero, e seu desempenho pode ser avaliado em função dos resultados apresentados nas referências [4], [6] e [13-14], onde o mesmo sistema é utilizado. Foi observado que a inclusão do servocompensador permite uma boa capacidade de manobra do helicóptero e ao contrário de [4], o erro em regime das variáveis controladas é nulo, mesmo quando perturbações tais como rajadas de vento estão presentes. Além disso variações na matriz de entrada são consideradas aqui, o que não ocorre em [6]. No caso dos controladores adaptativos desenvol

vidos em [13-14] para sua implementação é necessário um computador a bordo do helicóptero. Um segundo aspecto abordado neste trabalho é relativo ao projeto do observador. A partir dos resultados obtidos na síntese do controlador, um resultado dual é estabelecido para a síntese do observador, no qual um índice de desempenho do tipo integral de uma forma quadrática do erro de observação é minimizado ou, no máximo permanece constante. Condições suficientes para que esta minimização ocorra são apresentadas, ao contrário de [16].

Uma aplicação do observador é feita na reconstrução dos estados de um sistema máquina-barras infinita. Para representar o sistema é usado o modelo linearizado de Hefrom-Phillips [17], no qual alguns dos parâmetros são funções do ponto de operação do sistema. O procedimento normalmente adotado para este sistema, é projetar um observador de Luenberger, tomando-se como fixos os valores dos parâmetros em um determinado ponto de operação. Uma vez que a demanda de carga do sistema é variável, o ponto de operação do sistema também o é, e o erro de observação não tende assintoticamente para zero, devido às variações nos parâmetros. O fato do erro não ser nulo pode causar problemas no desempenho do sistema como um todo, caso este possua sinais estabilizantes derivados da potência acelerante.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. O capítulo 2 apresenta o método de projeto que permite rastreamento das saídas, rejeição das perturbações e redução da sensibilidade das trajetórias às variações nos parâmetros. A aplicação deste método no projeto do sistema de controle de aeronaves dotadas de decolagem e aterrissagem vertical, no caso um helicóptero, é apre

sentada no capítulo 3 e os resultados são estabelecidos através de simulação digital. No capítulo 4 encontra-se o método para a redução da sensibilidade de observadores para sistemas lineares invariantes no tempo, partindo-se do projeto inicial de um observador de Luenberger. No capítulo 5 emprega-se o método na observação dos estados de um sistema de potência máquina-barras infinita e os resultados também são estabelecidos através de simulação digital. O capítulo 6 apresenta as conclusões gerais e perspectivas para futuros trabalhos.

C A P Í T U L O 2

REDUÇÃO DA SENSIBILIDADE E RASTREAMENTO ROBUSTO EM SISTEMAS LINEARES SUJEITOS A VARIAÇÕES NOS PARÂMETROS E ENTRADA DE PERTURBAÇÕES

2.1 - Introdução

Neste capítulo apresenta-se um método que permite a redução da sensibilidade das trajetórias e o rastreamento das saídas em sistemas lineares multivariáveis e invariantes no tempo, sujeitos a variações nos parâmetros e entrada de perturbações.

O sistema apresenta-se na forma de variáveis de estados e admite-se variações nos elementos das matrizes de estado, de entrada e de saída, devido a variações no vetor de parâmetros do processo. O controlador é composto por três elementos: um servocompensador, cujo método de projeto é apresentado na seção 2.3; uma matriz ganho de realimentação e um elemento "feed-forward", utilizados para estabilização e redução da sensibilidade, apresentados na seção 2.4. Na seção 2.2 introduz-se as equações que descrevem o sistema e algumas definições que serão utilizadas em todo o capítulo. Finalmente na seção 2.5, os principais passos para implementação do controlador são apresentados. Conclusões são apresentadas na seção 2.6.

2.2 - O Sistema e algumas definições úteis

Considera-se uma classe de sistemas lineares da forma:

$$\dot{x}(t, \mu, w) = A(\mu)x(t, \mu, w) + B(\mu)u(t, \mu, w) + Ew(t) \quad (2.1a)$$

$$y(t, \mu, w) = C(\mu)x(t, \mu, w) + Fw(t) \quad (2.1b)$$

onde x é o vetor de estado de dimensão n , u é o vetor de controle de dimensão m , w é o vetor das perturbações de dimensão n_p , μ é o vetor de parâmetros de dimensão p , y é o vetor de saídas de dimensão n_s , $A(\mu)$, $B(\mu)$ e $C(\mu)$ são matrizes invariantes no tempo cujos elementos são continuamente diferenciáveis com respeito ao vetor de parâmetros μ e o ponto (\cdot) indica diferenciação com respeito ao tempo. Todas as matrizes são de dimensões apropriadas.

Deseja-se que a saída $y(t)$ siga um sinal de referência $r(t)$, e que a sensibilidade das trajetórias seja reduzida frente a variações nos parâmetros de (2.1).

A seguir algumas definições serão apresentadas.

Definição 2.1 - Vetor de parâmetros nominal μ^* - é o valor assumido pelo vetor de parâmetros μ quando o sistema encontra-se no ponto de operação considerado nominal.

Definição 2.2 - Trajetoira nominal $x(t, \mu^*, 0)$ - é a trajetória do sistema quando $\mu = \mu^*$ e $w = 0$. Denota-se a trajetória nominal $x(t, \mu^*, 0)$ por $x^*(t)$.

Definição 2.3 - Sensibilidade da trajetória - Quando os parâmetros variam de uma quantidade $\Delta\mu = \mu - \mu^*$ de seu valor nominal μ^* , as trajetórias sofrem a variação

$$\Delta x(t, \mu, w) = x(t, \mu, w) - x(t, \mu^*, 0) \quad (2.2)$$

Se $\Delta\mu$ é pequeno, então $\Delta x(t, \mu, w)$ pode ser aproximado por

$$\Delta x(t, \mu, w) \approx \delta x(t) = \left[\frac{\partial}{\partial \mu} x(t, \mu, w) \right]_{\mu^*, 0} \Delta\mu + \left[\frac{\partial}{\partial w} x(t, \mu, w) \right]_{\mu^*, 0} \Delta w \quad (2.3)$$

As derivadas parciais $\partial x(t, \mu, w) / \partial \mu$ e $\partial x(t, \mu, w) / \partial w$ calculadas em $\mu = \mu^*$ e $w = 0$ são chamadas funções de sensibilidade, ou simplesmente sensibilidade da trajetória $x(t, \mu, w)$.

Definição 2.4 - Sistemas nominalmente equivalentes - A figura 2.1 mostra dois controles para um mesmo processo. Os controles u_1 e u_2 são denominados nominalmente equivalentes se $u_1(t, \mu^*, 0) = u_2(t, \mu^*, 0)$, ou seja, são iguais quando $\mu = \mu^*$ e $w = 0$. Observe que, quando os controles são nominalmente equivalentes, os sistemas possuem as mesmas respostas

$$x_1(t, \mu^*, 0) = x_2(t, \mu^*, 0) = x^*(t) \quad (2.4)$$

Dois sistemas, por exemplo o Sistema 1 e o Sistema 2 da figura 2.1, são ditos nominalmente equivalentes se suas entradas de con

trole também o são.

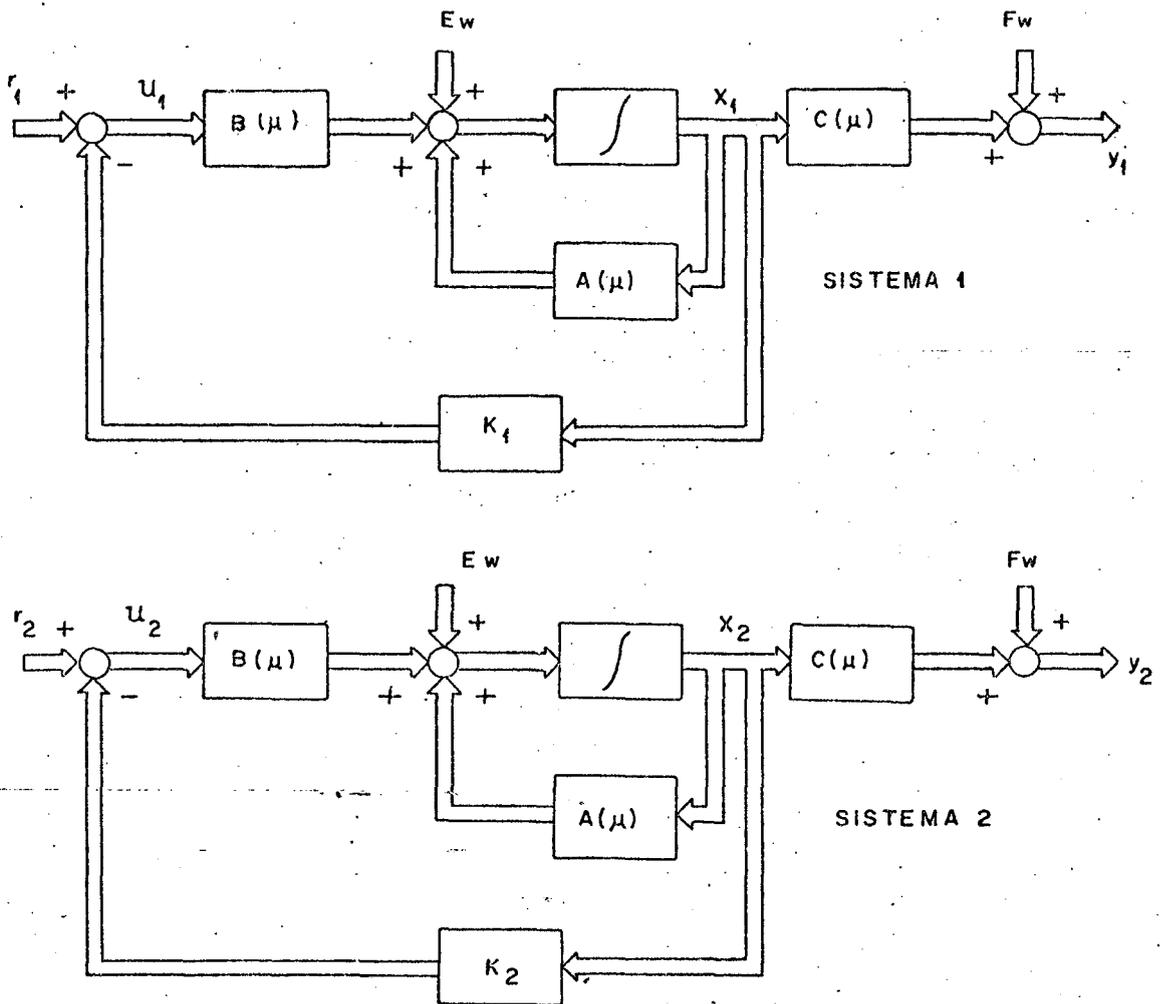


Figura 2.1 - Dois controles para um mesmo sistema.

Neste caso, tem-se

$$r_2(t) = r_1(t) - (K_1 - K_2)x^*(t)$$

Definição 2.5 - Polinômio mônico [20] - é o polinômio cujo termo de mais alto grau tem para coeficiente a unidade, sendo denotado por $\Psi(\lambda)$.

Definição 2.6 - Polinômio mínimo - O polinômio mínimo de uma matriz A é o polinômio mônico $\Psi(\lambda)$ de menor grau tal que $\Psi(A) = 0$.

Definição 2.7 - Espaço nulo - O espaço nulo de uma matriz A é o conjunto $N(A)$ definido por

$$N(A) = \{x \in (F^n, F) \mid Ax = 0\}$$

onde (F^n, F) é o espaço vetorial de dimensão n , definido sobre o corpo F . A dimensão de $N(A)$ é chamada nulidade de A e denotada por $\nu(A)$.

2.3 - Projeto do Servocompensador

Para o projeto do servocompensador é utilizada a teoria do rastreamento robusto apresentada em [12] e [19].

Seja o sistema linear (2.1) descrito com uma notação mais simplificada

$$\dot{x} = A(\mu)x + B(\mu)u + Ew ; \quad x(0) = x_0$$

$$y = C(\mu)x + Fw$$

Deseja-se que a saída $y(t)$ siga o sinal de referência $r(t)$, mesmo na presença das perturbações $w(t)$. Seja o vetor erro, $e(t)$, dado por

$$e(t) = r(t) - y(t) \tag{2.5}$$

Os sinais $w(t)$ e $r(t)$ pertencem a classe de sinais que podem ser gerados por um sistema linear autônomo, como mostrado na figura 2.2

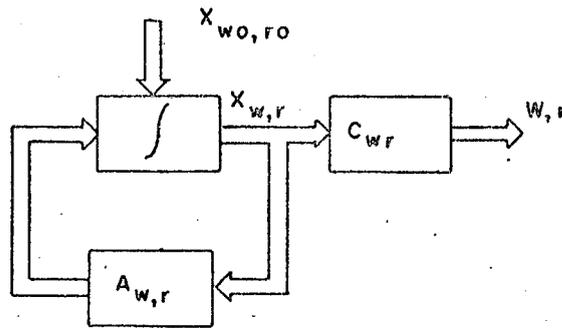


Figura 2.2 - Sistema linear autônomo.

Tais sistemas podem ser modelados pelas equações,

$$\dot{x}_w(t) = A_w x_w(t) \quad ; \quad x_w(0) = x_{w_0} \quad (2.6a)$$

$$w(t) = C_w x_w(t) \quad (2.6b)$$

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) \quad ; \quad x_r(0) = x_{r_0} \quad (2.7a)$$

$$r(t) = C_r x_r(t) \quad (2.7b)$$

onde $x_w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $x_r \in \mathbb{R}^{n_r}$ e \mathbb{R}^k denota o espaço Euclidiano de dimensão k . Assume-se que os pares (C_w, A_w) e (C_r, A_r) são completamente observáveis. Esta condição será sempre satisfeita tomando-se os sistemas descritos em (2.6) e (2.7) como realizações mínimas. No trabalho aqui desenvolvido assume-se que

$$\sigma(A_w) \cup \sigma(A_r) \subset \mathbb{C}_+ \quad (2.8)$$

onde $\sigma(M)$ representa o espectro da matriz M , definido por

$$\sigma(M) = \{\lambda \mid \det(\lambda I - M) = 0\} \quad (2.9)$$

e C_+ representa o semi-plano complexo não negativo. Se a condição (2.8) não é satisfeita, o problema passa a ser somente de regulação, uma vez que $r(t) \rightarrow 0$ e $w(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Contudo, modos estáveis em A_w e A_r também podem ser considerados.

O servocompensador a ser projetado tem como objetivo assegurar o rastreamento assintótico e a rejeição das perturbações, isto é, para qualquer estado inicial x_0 , x_{r0} e x_{w0} , $e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, independente de variações nos parâmetros do processo. As condições precisas para que este objetivo seja alcançado são apresentadas em [12] e [19].

No projeto do servocompensador, considera-se o sistema no seu ponto de operação nominal, isto é, $\mu = \mu^*$ e as matrizes $A(\mu)$, $B(\mu)$ e $C(\mu)$ assumem seus valores nominais denotados por

$$\begin{aligned} A(\mu^*) &= A^* \\ B(\mu^*) &= B^* \\ C(\mu^*) &= C^* \end{aligned} \quad (2.10)$$

Todas as matrizes obtidas utilizando-se $\mu = \mu^*$ serão identificadas por um asterisco (*).

O teorema apresentado a seguir estabelece de forma clara a estrutura do servocompensador.

Teorema 2.1 - Considere o sistema representado por (2.1), (2.5), (2.6), (2.7) e (2.8). Suponha que (A, B, C) é uma realização mínima. Seja o servocompensador

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c e(t) \quad (2.11)$$

onde $x_c \in R^{n_c} e,$

$$A_c = \text{diag} [A_{c_1}, \dots, A_{c_{n_s}}] \in R^{n_c \times n_c} \quad (2.12a)$$

$$B_c = \text{diag} [B_{c_1}, \dots, B_{c_{n_s}}] \in R^{n_c \times n_s} \quad (2.12b)$$

com

$$A_{c_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -\alpha_q & -\alpha_{q-1} & -\alpha_{q-2} & & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad (2.12c)$$

$$B_{c_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.12d)$$

onde $A_{c_1} = A_{c_2} = \dots = A_{c_{n_s}}, B_{c_1} = B_{c_2} = \dots = B_{c_{n_s}}$; diag denota uma matriz diagonal; $R^{k \times k}$ denota a classe de matrizes $k \times k$ e,

$$\Phi_{wr} = s^q + \alpha_1 s^{q-1} + \dots + \alpha_{q-1} s + \alpha_q \quad (2.13)$$

é o mínimo múltiplo comum de Ψ_w e Ψ_r , polinômios mínimos de A_w e A_r .

Sob estas condições se,

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \lambda I - A^* & B^* \\ -C^* & 0 \end{bmatrix} = n + n_s \quad \forall \lambda \in \sigma(A_w) \cup \sigma(A_r) \quad (2.14)$$

então o controlador apresentado em (2.11) é tal que:

(i) O sistema composto, descrito pelas equações

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ -B_c^* C^* & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^* \\ 0 \end{bmatrix} u^* \quad (2.15)$$

é completamente controlável

(ii) Para qualquer lei de controle do tipo $u(t) = -Kx(t)$, rastreamento robusto e rejeição das perturbações são alcançadas.

(iii) O sistema é robusto a variações nos parâmetros desde que:

(iii.1) B_c permanece diagonal por blocos

(iii.2) O sistema malha fechada permanece estável.

Prova (Teorema 2.1) - A prova deste teorema encontra-se na referência [19] e teoremas semelhantes são apresentados em [12].

O sistema completo, composto do processo descrito em (2.1) e do controlador descrito em (2.11) pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\mu) & 0 \\ -B_c C(\mu) & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(\mu) \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} Ew(t) \\ -B_c Fw(t) + B_c r(t) \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \underline{\underline{}}$$

$$\underline{\underline{\Delta}} \tilde{A}(\mu) \tilde{x}(t) + \tilde{B}(\mu) u(t) + v(w, r); \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \quad (2.16)$$

onde $\underline{\underline{\Delta}}$ denota igualdade por definição e,

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}, \quad \tilde{n} = n + n_c \quad (2.17a)$$

$$\tilde{A}(\mu) = \begin{bmatrix} A(\mu) & 0 \\ -B_c C(\mu) & A_c \end{bmatrix}; \quad \tilde{B}(\mu) = \begin{bmatrix} B(\mu) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v(w, r) = \begin{bmatrix} Ew(t) \\ -B_c Fw(t) + B_c r(t) \end{bmatrix} \quad (2.17b)$$

Da condição (i), teorema 2.1, pode-se afirmar que existe uma lei de controle da forma

$$u(t) = -Kx(t) - K_c x_c(t) = -\tilde{K} \tilde{x}(t) \quad (2.18)$$

onde $\tilde{K} = \begin{bmatrix} K & K_c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times \tilde{n}}$ tal que o sistema malha fechada é exponencialmente estável.

Este sistema malha fechada é obtido de (2.16) e (2.18) sendo representado por

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \left[\tilde{A}(\mu) - \tilde{B}(\mu) \tilde{K} \right] \tilde{x}(t) + v(w, r) \quad (2.19)$$

Embora em (2.19) as saídas sigam assintoticamente uma dada classe de sinais de referência e as perturbações sejam rejeitadas, uma questão não solucionada em [12] e [19] é relativa ao fato de que, uma vez tenha sido estabelecida a trajetória nominal, sendo o sistema sujeito a variação nos parâmetros, nada se pode prever com relação a trajetória atual (após a variação nos parâmetros) durante o transitório.

É importante então encontrar uma lei de controle $u(t)$ tal que as variações na característica da resposta transitória sejam mínimas quando o sistema está sujeito as condições mencionadas acima.

Uma das principais contribuições deste trabalho é no estabelecimento de tal lei de controle, utilizando-se da comparação das sensibilidades das trajetórias. O procedimento para obtenção da lei de controle é apresentado a seguir.

2.4 - Redução da Sensibilidade das Trajetórias

É fácil observar, que dois sistemas quaisquer possuem diferentes funções de sensibilidade. Em se tratando de sistemas nominalmente equivalentes, a afirmativa também é válida, bastando para isso que $\mu \neq \mu^*$.

Pode-se então estabelecer critérios para comparação das variações das trajetórias, representadas por $\delta x(t)$ na equação (2.3). Os primeiros autores a comparar estas variações foram Cruz e Perkins [21] e Kreindler [22], usando como critério a forma integral quadrática de $\delta x(t)$. Segundo este critério, um determinado

sistema, denotado como sistema 2, é menos sensível que outro, de notado sistema 1, se

$$\int_0^{t'} \delta x_2^T(t) Z \delta x_2(t) dt < \int_0^{t'} \delta x_1^T(t) Z \delta x_1(t) dt \quad (2.20)$$

para todo $t' > 0$, para uma matriz de ponderação semi-definida positiva Z e para todos os intervalos nos quais a integral dada em (2.20) é definida. O símbolo T denota a transposta de uma matriz.

No procedimento aqui adotado, serão considerados dois sistemas a saber:

Sistema 1

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}(\mu) \tilde{x}_1 + \tilde{B}(\mu) u_1 + v(w, r) \quad (2.21a)$$

$$u_1 = -\tilde{K}_1 \tilde{x}_1 \quad (2.21b)$$

Sistema 2

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}(\mu) \tilde{x}_2 + \tilde{B}(\mu) u_2 + v(w, r) \quad (2.22a)$$

$$u_2 = -(\tilde{K}_1 + \tilde{K}_3) \tilde{x}_2 + \tilde{K}_3 \tilde{x}^* \quad (2.22b)$$

onde \tilde{x}^* denota a trajetória nominal, descrita por

$$\dot{\tilde{x}}^* = \tilde{A}^* \tilde{x}^* + \tilde{B}^* u^* + v(0, r) \quad (2.23a)$$

$$u^* = -\tilde{K}_1 \tilde{x}^* \quad (2.23b)$$

Observe que os sistemas 1 e 2 são nominalmente equivalentes, isto é, $u_1 = u_2 = u^*$ quando $\mu = \mu^*$ e $w = 0$. A matriz de ganhos \tilde{K}_3 tem a função de reduzir a sensibilidade do sistema 2 quando comparada com o sistema 1 no sentido de (2.20).

Observação 1 - Neste trabalho os termos variação da trajetória e sensibilidade da trajetória são usados indistintamente, devido a relação existente entre estas grandezas conforme (2.3). Muitas vezes, o termo utilizado é simplesmente sensibilidade.

O teorema seguinte estabelece a relação entre as trajetórias dos sistemas 1 e 2.

Teorema 2.2 - As variações nas trajetórias de dois sistemas nominalmente equivalentes, denotados como sistemas 1 e 2, são relacionados por

$$\delta \tilde{X}_2(s) = S(s) \delta \tilde{X}_1(s) \quad (2.24)$$

onde

$$S(s) = \left[I + \Phi(s) \tilde{B}^* \tilde{K}_3 \right]^{-1} \quad (2.25)$$

e

$$\Phi(s) = \left[sI - (\tilde{A}^* - \tilde{B}^* \tilde{K}_1) \right]^{-1} \quad (2.26)$$

Prova (Teorema 2.2) - Considere para um dado r , $\mu \neq \mu^*$ e $w \neq 0$. A resposta do sistema 1, $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1^* + \delta \tilde{x}_1 = \tilde{x}^* + \delta \tilde{x}_1$, é dada por

$$\dot{\tilde{x}}^* + \delta \dot{\tilde{x}}_1 = (\tilde{A}^* + \delta \tilde{A}) (\tilde{x}^* + \delta \tilde{x}_1) + (\tilde{B}^* + \delta \tilde{B}) (u^* + \delta u_1) + v(w, r) \quad (2.27a)$$

$$u^* + \delta u_1 = -\tilde{K}_1 (\tilde{x}^* + \delta \tilde{x}_1) \quad (2.27b)$$

Desprezando-se os termos de segunda ordem, (2.27) torna-se

$$\dot{\tilde{x}}^* + \delta \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}^* \tilde{x}^* + \tilde{B}^* u^* + \delta \tilde{A} \tilde{x}^* + \delta \tilde{B} u^* + \tilde{A}^* \delta \tilde{x}_1 + \tilde{B}^* \delta u_1 + v(w, r) \quad (2.28)$$

Usando (2.23) e (2.17b)

$$\delta \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}^* \delta \tilde{x}_1 + \tilde{B}^* \delta u_1 + \delta \tilde{A} \tilde{x}^* + \delta \tilde{B} u^* + g(w) \quad (2.29a)$$

$$\delta u_1 = -\tilde{K}_1 \delta \tilde{x}_1 \quad (2.29b)$$

$$g(w) = \begin{bmatrix} E \\ -B_c F \end{bmatrix} w \quad (2.29c)$$

Da mesma forma, para o sistema 2

$$\delta \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}^* \delta \tilde{x}_2 + \tilde{B}^* \delta u_2 + \delta \tilde{A} \tilde{x}^* + \delta \tilde{B} u^* + g(w) \quad (2.30a)$$

$$\delta u_2 = -(\tilde{K}_1 + \tilde{K}_3) \delta \tilde{x}_2 \quad (2.30b)$$

Usando (2.29) e (2.30) tem-se

$$\delta \dot{\tilde{x}}_1 - \delta \dot{\tilde{x}}_2 = (\tilde{A}^* - \tilde{B}^* \tilde{K}_1) (\delta \tilde{x}_1 - \delta \tilde{x}_2) + \tilde{B}^* \tilde{K}_3 \delta \tilde{x}_2 \quad (2.31)$$

Aplicando a transformada de Laplace em (2.31) então

$$s [\delta \tilde{X}_1(s) - \delta \tilde{X}_2(s)] = (\tilde{A}^* - \tilde{B}^* \tilde{K}_1) [\delta \tilde{X}_1(s) - \delta \tilde{X}_2(s)] + \tilde{B}^* \tilde{K}_3 \delta \tilde{X}_2(s)$$

$$[sI - (\tilde{A}^* - \tilde{B}^* \tilde{K}_1)] \delta \tilde{X}_1(s) = [sI - (\tilde{A}^* - \tilde{B}^* \tilde{K}_1)] \delta \tilde{X}_2(s) + \tilde{B}^* \tilde{K}_3 \delta \tilde{X}_2(s)$$

$$\delta \tilde{X}_2(s) = [I + \Phi(s) \tilde{B}^* \tilde{K}_3]^{-1} \delta \tilde{X}_1(s)$$

$$\Phi(s) = [sI - (\tilde{A}^* - \tilde{B}^* \tilde{K}_1)]^{-1}$$

onde $\delta \tilde{X}_i(s)$ é a transformada de Laplace de $\delta \tilde{x}_i(t)$

Observação 2 - Desde que os sistemas 1 e 2 são originados do mesmo processo, então

$$\tilde{x}_1(0, \mu, w) = \tilde{x}_2(0, \mu, w)$$

Lema 2.1 - A matriz de sensibilidade $S(s)$ definida em (2.25) é causal.

Prova (Lema 2.1) - Definindo

$$z = \delta \tilde{x}_1 - \delta \tilde{x}_2 ; z \in R^{\tilde{n}} \quad (2.32)$$

então a equação (2.31) pode ser escrita na forma

$$\dot{z} = [\tilde{A}^* - \tilde{B}^* (\tilde{K}_1 + \tilde{K}_3)] z + \tilde{B}^* \tilde{K}_3 \delta \tilde{x}_1 ; z(0) = 0 \quad (2.33a)$$

$$\delta \tilde{x}_2 = -z + \delta \tilde{x}_1 \quad (2.33b)$$

A matriz função de transferência de (2.33) é

$$G(s) = -[sI - \tilde{A}^* + \tilde{B}^* (\tilde{K}_1 + \tilde{K}_3)]^{-1} \tilde{B}^* \tilde{K}_3 + I \quad (2.34)$$

Efetuada algumas operações elementares com $G(s)$,
tem-se

$$G(s) = [sI - \tilde{A}^* + \tilde{B}^* (\tilde{K}_1 + \tilde{K}_3)]^{-1} [-\tilde{B}^* \tilde{K}_3 + sI - \tilde{A}^* + \tilde{B}^* (\tilde{K}_1 + \tilde{K}_3)]$$

$$G(s) = \left[(sI - \tilde{A}^* + \tilde{B}^* \tilde{K}_1)^{-1} (sI - \tilde{A}^* + \tilde{B}^* \tilde{K}_1) + (sI - \tilde{A}^* + \tilde{B}^* \tilde{K}_1)^{-1} \tilde{B}^* \tilde{K}_3 \right]^{-1}$$

$$G(s) = \left[I + (sI - \tilde{A}^* + \tilde{B}^* \tilde{K}_1)^{-1} \tilde{B}^* \tilde{K}_3 \right]^{-1}$$

$$G(s) = S(s) \quad (2.35)$$

Como (2.33) é um sistema realizável, então está caracterizado como um sistema físico. Sua matriz função de transferência é representada por $S(s)$. Como a causalidade é uma propriedade intrínseca dos sistemas físicos, então $S(s)$ é causal. Na figura 2.3 é mostrada uma realização de $S(s)$

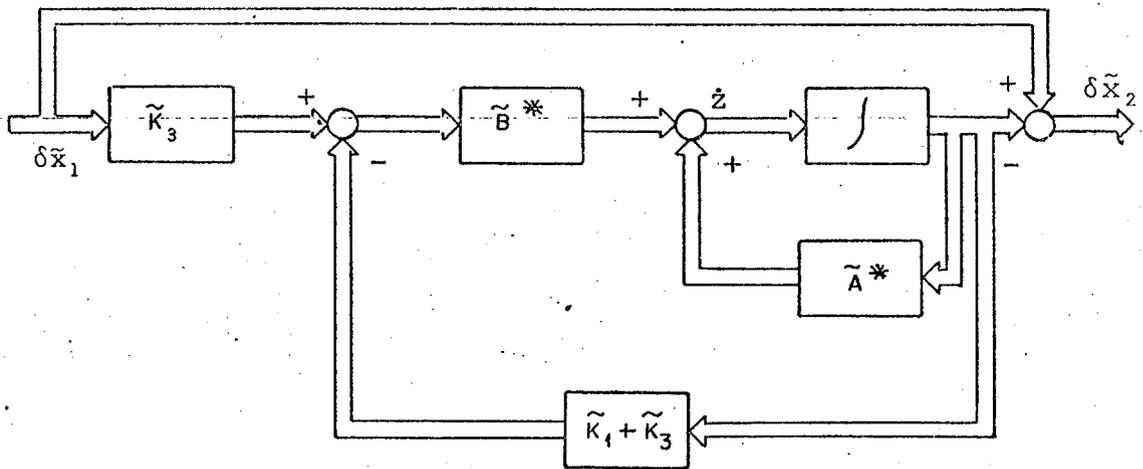


Figura 2.3 - Uma realização de $S(s)$.

O teorema 2.3 estabelece a condição suficiente para que (2.20) seja satisfeita.

Teorema 2.3 - Se $S(s)$ dado em (2.25) é causal, então uma condição suficiente para (2.20) é que para todo $\omega \in (-\infty, \infty)$

$$S^T(-j\omega) Z S(j\omega) \leq Z \quad (2.36a)$$

ou equivalentemente,

$$[S^T(-j\omega)]^{-1} Z S^{-1}(j\omega) \geq Z \quad (2.36b)$$

onde o sinal de igualdade se aplica para alguns valores de ω mas não para todos os valores.

Prova (Teorema 2.3) - Para prova deste teorema veja as referências [21] e [22].

A partir da desigualdade (2.36) uma matriz \tilde{K}_3 pode ser escolhida tal que (2.20) é satisfeita. A matriz \tilde{K}_3 deve pertencer a classe de matrizes que estabilizam o sistema descrito em (2.22). A determinação numérica de uma matriz \tilde{K}_3 somente com base em (2.36) é bastante difícil. A seguir será apresentado um procedimento para o cálculo de \tilde{K}_3 baseado na solução da equação matricial algébrica de Riccati.

Suponha que a matriz $(\tilde{A}^* - \tilde{B}^* \tilde{K}_1)$ é estável, isto é, todos os seus autovalores possuem parte real negativa. Seja a matriz P , a solução definida positiva da equação de Riccati

$$P(\tilde{A}^* - \tilde{B}^* \tilde{K}_1) + (\tilde{A}^* - \tilde{B}^* \tilde{K}_1)^T P - P \tilde{B}^* R^{-1} (\tilde{B}^*)^T P + D^T D = 0 \quad (2.37)$$

onde $P \in R^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$, $D \in R^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$ com posto $D = \tilde{n}$ e $R \in R^{m \times m}$ é uma matriz simétrica e positiva definida.

Dado um controle nominal $u_1(t) = u^*$ definido por

$$u_1(t) = -\tilde{K}_1 \tilde{x}_1(t, \mu, w)$$

deseja-se estabelecer um outro controle $u_2(t)$ da forma

$$u_2(t) = -(\tilde{K}_1 + \tilde{K}_3)\tilde{x}_2(t, \mu, w) + \tilde{K}_3\tilde{x}^*(t)$$

onde

$$\tilde{K}_3 = R^{-1} (\tilde{B}^*)^T P \quad (2.38)$$

que é nominalmente equivalente a $u_1(t)$.

O sistema malha fechada é dado por

$$\dot{\tilde{x}}_2 = [\tilde{A}(\mu) - \tilde{B}(\mu)(\tilde{K}_1 + \tilde{K}_3)]\tilde{x}_2 + \tilde{B}(\mu)\tilde{K}_3\tilde{x}^* + v(w, r); \tilde{x}_2(0) = \tilde{x}_{20} \quad (2.39)$$

O seguinte teorema, relacionando rastreamento robusto e redução da sensibilidade, é apresentado.

Teorema 2.4 - Considere o sistema malha fechada (2.39), composto de (2.1), (2.11), (2.22b) e (2.38). Considere as seguintes hipóteses:

- 1 - O par $(\tilde{A}^*, \tilde{B}^*)$ é controlável.
- 2 - A matriz D tem posto \tilde{n} .
- 3 - A matriz \tilde{B}^* tem posto m .
- 4 - A matriz $(\tilde{A}^* - \tilde{B}^* \tilde{K}_1)$ é estável.
- 5 - $\delta\tilde{x}_2(t) \neq \delta\tilde{x}_1(t)$.

Então no sistema (2.39), mesmo sob variações nos parâmetros e entrada de perturbações, o critério de redução da sensibilidade dado em (2.20) é satisfeito com

$$Z = \tilde{K}_3^T R \tilde{K}_3 \quad (2.40)$$

Além do mais, no sistema malha fechada, rastreamento assintótico e rejeição das perturbações para uma classe de sinais definidos em (2.6) e (2.7), são obtidos para valores de μ tais que $[(\tilde{A}(\mu) - \tilde{B}(\mu)(\tilde{K}_1 + \tilde{K}_3)]$ permaneça estável, satisfazendo (2.14).

Prova (Teorema 2.4) - Inicialmente provar-se-á que o critério de redução da sensibilidade é satisfeito. Sob as hipóteses do teorema, partindo de (2.37), adicionando $P(j\omega) + (-j\omega)P$ e usando (2.26)

$$P(j\omega I - \tilde{A}^* + \tilde{B}^* \tilde{K}_1) + (-j\omega I - \tilde{A}^* + \tilde{B}^* \tilde{K}_1)^T P + P \tilde{B}^* R^{-1} (\tilde{B}^*)^T P = D^T D$$

$$P \Phi^{-1}(j\omega) + [\Phi^{-1}(-j\omega)]^T P + P \tilde{B}^* R^{-1} (\tilde{B}^*)^T P = D^T D$$

Pré-multiplicando por $\tilde{K}_3^T (\tilde{B}^*)^T \Phi^T(-j\omega)$, pós-multiplicando por $\Phi(j\omega) \tilde{B}^* \tilde{K}_3$ e adicionando $\tilde{K}_3^T R \tilde{K}_3$ em ambos os lados,

$$\begin{aligned} & \tilde{K}_3^T (\tilde{B}^*)^T \Phi^T(-j\omega) P \tilde{B}^* \tilde{K}_3 + \tilde{K}_3^T (\tilde{B}^*)^T P \Phi(j\omega) \tilde{B}^* \tilde{K}_3 + \\ & + \tilde{K}_3^T (\tilde{B}^*)^T \Phi^T(-j\omega) P \tilde{B}^* R^{-1} (\tilde{B}^*)^T P \Phi(j\omega) \tilde{B}^* \tilde{K}_3 + \tilde{K}_3^T R \tilde{K}_3 = \tilde{K}_3^T R \tilde{K}_3 + \\ & + \tilde{K}_3^T (\tilde{B}^*)^T \Phi^T(-j\omega) D^T D \Phi(j\omega) \tilde{B}^* \tilde{K}_3 \end{aligned}$$

Usando a equação (2.38) para eliminar P , uma vez que

$$R \tilde{K}_3 = (\tilde{B}^*)^T P$$

tem-se

$$\begin{aligned} & \tilde{K}_3^T (\tilde{B}^*)^T \Phi^T(-j\omega) \tilde{K}_3^T R \tilde{K}_3 + \tilde{K}_3^T R \tilde{K}_3 \Phi(j\omega) \tilde{B}^* \tilde{K}_3 + \\ & + \tilde{K}_3^T (\tilde{B}^*)^T \Phi^T(-j\omega) \tilde{K}_3^T R R^{-1} R \tilde{K}_3 \Phi(j\omega) \tilde{B}^* \tilde{K}_3 + \tilde{K}_3^T R \tilde{K}_3 = \tilde{K}_3^T R \tilde{K}_3 + \\ & + \tilde{K}_3^T (\tilde{B}^*)^T \Phi^T(-j\omega) D^T D \Phi(j\omega) \tilde{B}^* \tilde{K}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [I + \Phi(-j\omega)\tilde{B}^*\tilde{K}_3]^T \tilde{K}_3^T R \tilde{K}_3 [I + \Phi(j\omega)\tilde{B}^*\tilde{K}_3] = \\
& = \tilde{K}_3^T R \tilde{K}_3 + \tilde{K}_3^T (\tilde{B}^*)^T \Phi^T(-j\omega) D^T D \Phi(j\omega) \tilde{B}^* \tilde{K}_3
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Definindo

$$H(j\omega) = D \Phi(j\omega) \tilde{B}^* \tilde{K}_3 \tag{2.42}$$

e usando (2.25), a equação (2.41) torna-se

$$\left[S^T(-j\omega) \right]^{-1} \tilde{K}_3^T R \tilde{K}_3 S^{-1}(j\omega) = \tilde{K}_3^T R \tilde{K}_3 + H^T(-j\omega) H(j\omega)$$

Usando o teorema 2.3, tomando $Z = \tilde{K}_3^T R \tilde{K}_3$, então para que (2.20) seja satisfeita deve-se ter

$$H^T(-j\omega) H(j\omega) \geq 0$$

onde a igualdade se aplica para alguns, mas não todos os valores de ω .

Pré-multiplicando por $\delta\tilde{X}_2^T(-j\omega)$ e pós-multiplicando por $\delta\tilde{X}_2(j\omega)$,

$$\delta\tilde{X}_2^T(-j\omega) H^T(-j\omega) H(j\omega) \delta\tilde{X}_2(j\omega) \geq 0 \tag{2.43}$$

Usando a definição de norma Euclidiana de um vetor, dada por

$$\|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right]^{1/2} \tag{2.44}$$

a equação (2.43) pode ser escrita como

$$\| H(j\omega) \delta \tilde{X}_2(j\omega) \| \geq 0 \quad (2.45)$$

Usando (2.42), (2.45) torna-se

$$\| D\Phi(j\omega) \tilde{B}^* \tilde{K}_3 \delta \tilde{X}_2(j\omega) \| \geq 0$$

Como D é não singular, $\Phi(j\omega)$ é não singular, então (2.45) é satisfeita se

$$\tilde{B}^* \tilde{K}_3 \delta \tilde{X}_2(j\omega) \neq 0$$

ou, tomando a transformada inversa de Laplace

$$\tilde{B}^* \tilde{K}_3 \delta \tilde{X}_2(t) \neq 0 \text{ para algum } t \in [0, \infty) \quad (2.46)$$

Uma vez que posto $\tilde{B}^* = m$, então $v(B) = 0$. Usando a equação (2.31), o fato de $\tilde{B}^* \tilde{K}_3 \delta \tilde{X}_2(t) \equiv 0$ implica em $\delta \tilde{X}_1(t) \equiv \delta \tilde{X}_2(t)$, o que contraria a hipótese 5 do teorema. Logo o critério de redução de sensibilidade de (2.20) é satisfeito.

A segunda parte da prova deste teorema é relacionada com o rastreamento robusto e a rejeição das perturbações. Observe que o elemento "feed-forward" introduz um vetor de excitações $\tilde{K}_3 \tilde{x}^*$. Será mostrado que este vetor não modifica os objetivos do controlador. No domínio da frequência, usando a equação (2.33), a trajetória nominal é dada por

$$\tilde{X}^*(s) = [sI - \tilde{A}^* + \tilde{B}^* \tilde{K}_1]^{-1} \tilde{x}(0) + [sI - \tilde{A}^* + \tilde{B}^* \tilde{K}_1]^{-1} V(s)$$

onde $\tilde{X}^*(s)$ e $V(s)$ são as transformadas de Laplace de $\tilde{x}^*(t)$ e $v(0,r)$

respectivamente. Usando (2.26), tem-se

$$\tilde{x}^*(s) = \Phi(s)\tilde{x}(0) + \Phi(s)V(s) \quad (2.47)$$

O elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna de $\Phi(s)$ é dado por

$$\phi_{ij}(s) = p_{ij}(s)/q_{ij}(s) \quad (2.48)$$

onde as raízes do polinômio $q_{ij}(s) = 0$ têm parte real negativa. Como o sistema é estável, a contribuição do termo $\tilde{x}(0)$ tende a zero, quando $t \rightarrow \infty$ e os únicos modos no C_+ presentes em $\tilde{x}^*(t)$, são provenientes do sinal $r(t)$, resultantes do produto $\Phi(s)V(s)$. Assim, no sistema malha fechada (2.39), os modos presentes no termo $\tilde{B}(\mu)\tilde{K}_3\tilde{x}^*(t) + v(r,w)$, tendem assintoticamente para os modos presentes no servocompensador. Usando o teorema 2.1, então o rastreamento robusto e a rejeição das perturbações são alcançados. Com isso fica completa a prova do teorema.

Observação 4 - Uma das hipóteses apresentadas é que posto $\tilde{B}^* = m$. Embora na sua maior parte, os sistemas físicos possuam suas entradas de controle linearmente independentes, a hipótese de que posto $\tilde{B}^* = m$ pode ser substituída por

$$\tilde{K}_3 \delta \tilde{x}_2(t) \notin N(\tilde{B}^*) \quad (2.49)$$

Mesmo caso desta hipótese não ser satisfeita, tem-se então

$\delta \tilde{x}_1(t) \equiv \delta \tilde{x}_2(t)$ e o sistema 2 é tão sensível quanto o sistema 1, no

sentido de (2.20).

Lema 2.2 - O sistema malha fechada (2.39), com \tilde{K}_3 dado em (2.38), é estável, para $\mu = \mu^*$.

Prova (Lema 2.2) - O sistema malha fechada é dado por

$$\dot{\tilde{x}} = [\tilde{A}(\mu) - \tilde{B}(\mu)(\tilde{K}_1 + \tilde{K}_3)]\tilde{x}_2 + \tilde{B}(\mu)\tilde{K}_3\tilde{x}^*(t) + v(r,w)$$

Seja a matriz $\hat{A}(\mu) = \tilde{A}(\mu) - \tilde{B}(\mu)\tilde{K}_1$. A matriz \tilde{K}_3 é obtida a partir da equação de Riccati

$$P\hat{A}^* + (\hat{A}^*)^T P - P\tilde{B}^*R^{-1}(\tilde{B}^*)^T P + D^T D = 0$$

$$\tilde{K}_3 = R^{-1}(\tilde{B}^*)^T P$$

O problema aqui tratado é semelhante ao problema do regulador linear quadrático, ou seja, dado o sistema

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}^*\tilde{x}_2 + \tilde{B}^*u(t) \quad (2.50)$$

deseja-se encontrar uma lei de controle $u(t)$ que minimize o índice de desempenho

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\tilde{x}_2^T(t) Q \tilde{x}_2(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (2.51)$$

onde $R > 0$ e $Q > 0$ são matrizes dadas. Sem perda de generalidade pode-se assumir $Q = D^T D$. A lei de controle que minimiza (2.51) tem a forma

$$u(t) = -\tilde{K}_3 \tilde{x}_2(t)$$

onde \tilde{K}_3 é da forma citada em (2.38), sob as hipóteses:

(i) O par (\hat{A}^*, \tilde{B}^*) é controlável

(ii) O par (D, \tilde{A}^*) é observável.

A teoria de controle ótimo estabelece que o mínimo índice é dado por

$$J_{\min} [\tilde{x}_2(t)] = \frac{1}{2} [\tilde{x}_2^T(t) P \tilde{x}_2(t)]$$

e a matriz

$$\hat{A}^* - \tilde{B}^* \tilde{K}_3$$

é estável, onde P é a única solução definida positiva de (2.37).

Logo para prova do Lema 2.2, deve-se verificar as condições (i) e (ii). Uma vez que o par $(\tilde{A}^*, \tilde{B}^*)$ é suposto controlável (hipótese 1 do teorema 2.4) e a controlabilidade é invariante sob realimentação, pode-se afirmar que o par (\hat{A}^*, \tilde{B}^*) é controlável. Da mesma forma, da hipótese 2 do teorema 2.4, o par (D, \hat{A}^*) é observável. Logo o sistema (2.39) é estável.

2.5 - Implementação do algoritmo de controle

Considere o sistema malha fechada (2.39)

$$\dot{\tilde{x}}_2 = [\tilde{A}(\mu) - \tilde{B}(\mu)(\tilde{K}_1 + \tilde{K}_3)]\tilde{x}_2 + \tilde{B}(\mu)\tilde{K}_3\tilde{x}^* + v(r,w)$$

representado na figura 2.4.

Para implementação do algoritmo de controle, três são as etapas a serem cumpridas. Tais etapas serão apresentadas a seguir.

2.5.1 - Servocompensador

O servocompensador é projetado a partir das condições estabelecidas no teorema 2.1, a saber:

(i) Inicialmente modelam-se os sinais de referência e as perturbações de acordo com (2.6) e (2.7).

(ii) Determinam-se os polinômios mínimos $\psi(A_w)$ e $\psi(A_r)$. Calculam-se então os coeficientes α_i , $i=1, \dots, q$, usando (2.13).

(iii) Determinam-se as matrizes A_c e B_c do servocompensador usando (2.12).

Após esses passos, verificada a condição (2.14), então o servocompensador está projetado e a etapa seguinte é a de terminação da trajetória nominal.

2.5.2 - Trajetoária nominal

Da figura 2.4, observa-se claramente que o sistema malha fechada é pré-alimentado pelo termo $\tilde{K}_3 \tilde{x}^*$. Existe portanto a necessidade de se dispor da trajetória nominal \tilde{x}^* . Esta trajetória é aquela desejada para o sistema malha fechada quando $\mu = \mu^*$ e $w = 0$. O ganho \tilde{K}_1 é estabelecido de forma a que esta trajetória possua uma boa característica, tanto transitória como permanente e no seu cálculo as matrizes $A(\mu)$, $B(\mu)$ e $C(\mu)$ são tomadas em $\mu = \mu^*$. A matriz \tilde{K}_1 pode ser obtida usando posicionamento de polos ou através da minimização de um determinado índice de desempenho, a partir da solução da equação de Riccati.

Se um computador digital é disponível na implementação do algoritmo, a trajetória \tilde{x}^* pode ser armazenada no mesmo, e alimentada no sistema nos instantes de tempo apropriados. Uma outra implementação é mostrada na figura 2.4 onde o bloco identificado como trajetória nominal é gerado a partir de um circuito analógico.

2.5.3 - Estabilização do sistema.

O sistema é estabilizado através do ganho de realimentação

$$\tilde{K}_2 = \tilde{K}_1 + \tilde{K}_3$$

onde o termo \tilde{K}_1 é obtido para produzir uma boa trajetória nominal. Obviamente \tilde{K}_1 estabiliza o par $(\tilde{A}^*, \tilde{B}^*)$. O ganho \tilde{K}_3 é obtido de (2.37) e (2.38) e de acordo com o Lema 2.2, é tal que o siste

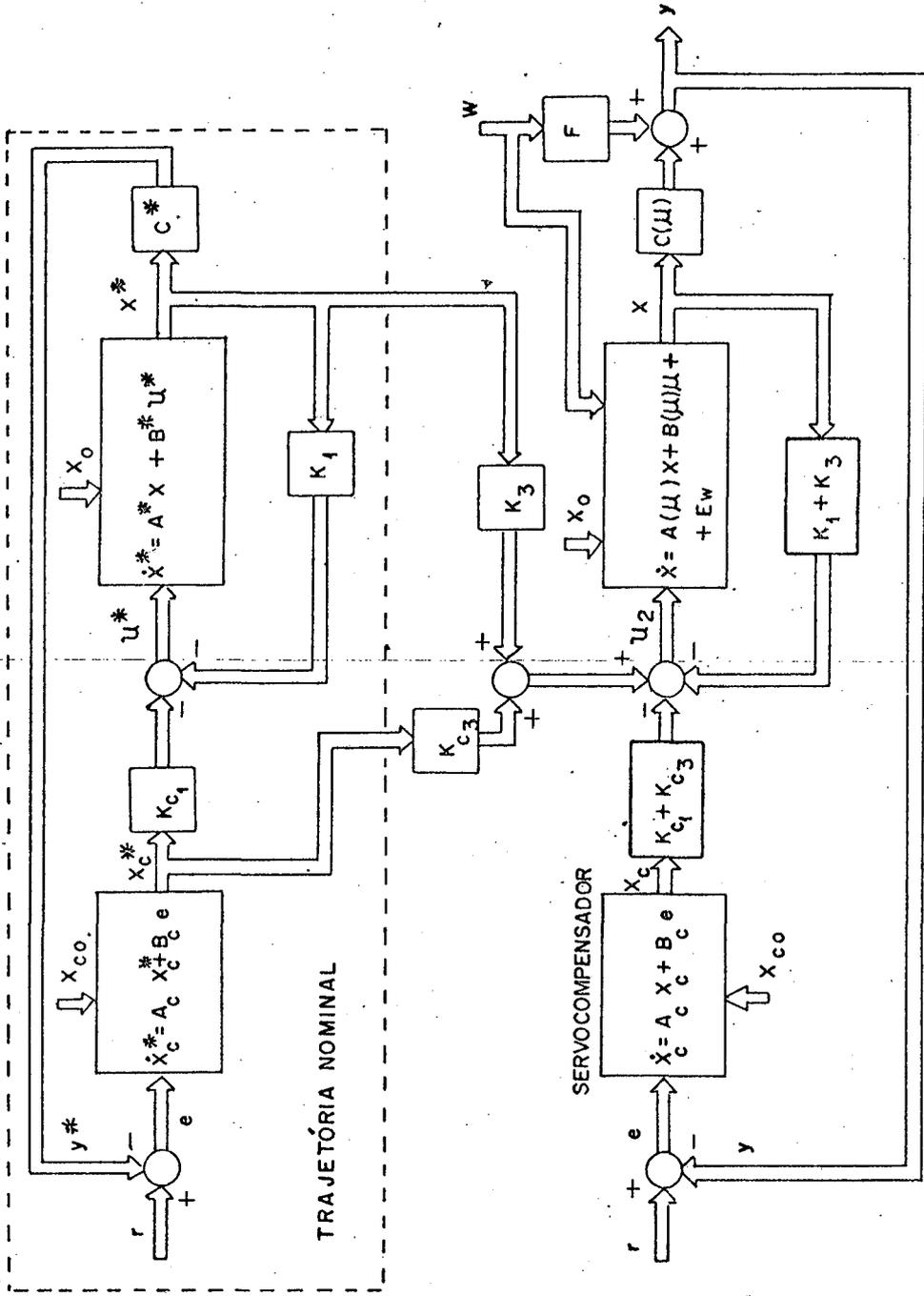


Figura 2.4 - Sistema malha fechada mostrando o servocompensador, o laço de realimentação e o elemento "feed-forward".

ma malha fechada (2.39) é estável.

Contudo deve ser observado que, embora a matriz de ponderação Z definida em (2.20) seja arbitrária, ela possui uma forma particular definida em (2.40), a qual depende de \tilde{K}_3 e R . Isto faz com que a matriz Z não possa ser especificada a priori. Mas, mesmo sendo Z de uma forma particular dada em (2.40), o projetista pode escolher matrizes R e D (consequentemente \tilde{K}_3) apropriadas de forma a obter uma matriz Z conveniente.

Uma questão interessante surge quanto a forma de Z . Será que não existe, para sistemas de controle ótimo, uma outra matriz Z que satisfaz o critério de redução de sensibilidade (2.20)? Este aspecto foi abordado em [4] e [23] e a conclusão apresentada indica (2.40) como a melhor forma.

Portanto, a escolha de \tilde{K}_3 está ligada a matriz de ponderação Z , devendo o projetista pesar este aspecto quando da implementação do algoritmo de controle.

Observação 5 - Deve ser notado de (2.20) que uma forma quadrática das variações das trajetórias, usando o controle aqui apresentado, é menos sensível que aquela usando o controle (2.21b). Em [24] é mostrado que somente em casos especiais, todas as componentes das trajetórias do vetor de estado podem ter sua sensibilidade reduzida. Isto não é uma limitação séria do método, uma vez que em um processo qualquer, as principais variáveis podem ter sua sensibilidade reduzida, escolhendo-se convenientemente as matrizes de ponderação D e R .

2.6 - Conclusões

Neste capítulo foi apresentado um método para o controle de sistemas lineares multivariáveis invariantes no tempo. Este controle tem como objetivos, o rastreamento robusto das saídas em relação a uma classe de sinais de referência, a rejeição de perturbações desta mesma classe e a redução da sensibilidade das trajetórias.

Dado um controle nominal $u_1(t)$, foi mostrado o procedimento para encontrar um outro controle $u_2(t)$, que é nominalmente equivalente a $u_1(t)$, mas menos sensível às variações nos parâmetros do processo com respeito a um determinado critério de redução de sensibilidade. A matriz de ponderação presente neste critério depende do procedimento de construção do controle $u_2(t)$.

Esses resultados foram inicialmente apresentados em [25]. No capítulo seguinte, os resultados obtidos neste capítulo são aplicados no controle de um helicóptero.

C A P Í T U L O 3

APLICAÇÃO DO CONTROLE COM REDUÇÃO DE SENSIBILIDADE

3.1 - Introdução

Neste capítulo é feita uma aplicação do algoritmo de controle desenvolvido no capítulo 2, a um sistema aéreo. Este sistema faz parte da classe de aeronaves que possuem decolagem e aterrissagem vertical. O modelo aqui utilizado, representa a dinâmica de um helicóptero Sikorsky SH-3D Sea King no plano vertical.

Normalmente, no projeto de um controlador para um helicóptero, sua dinâmica é linearizada em torno de uma velocidade do ar nominal. Isto resulta em um sistema de equações lineares invariantes no tempo, a partir do qual o projetista geralmente calcula a matriz de ganhos de realimentação usando um índice de desempenho ou posicionando os polos do sistema em determinada região do plano complexo.

Contudo, durante a operação normal do helicóptero, a velocidade do ar, a localização do centro de gravidade e a altitude do mesmo variam com o tempo [13], o que resulta em mudanças substanciais na dinâmica do sistema. Um controlador com ganho fixo tem-se mostrado inadequado para a obtenção de um bom desempenho, quando o sistema está sujeito a diferentes condições de voo.

Um outro aspecto importante no comportamento do he

licóptero é a sua capacidade de pairar no ar. Muitas das tarefas executadas pelo helicóptero, enquanto está pairando no ar, exigem que o mesmo permaneça fixo com respeito a terra mesmo na presença de perturbações, tais como rajadas de vento.

Face aos importantes aspectos citados acima, muitos foram os autores [4], [6], [8], [13], [14], [30] que propuseram estratégias para o controle do helicóptero. Em todos eles, as questões das variações nas condições de vôo e da presença das perturbações são tratadas de maneira distinta. Quando tratadas conjuntamente, o são de forma incompleta.

A motivação inicial que levou ao desenvolvimento do algoritmo de controle introduzido no capítulo anterior foi a tentativa de solucionar este problema, embora o algoritmo possa ser aplicado a sistemas mais gerais.

Aqui, a aplicação foi feita partindo-se inicialmente do modelo matemático do sistema, apresentado na seção 3.2. A seguir, o procedimento para obtenção do controlador é mostrado na seção 3.3, bem como o resultados dos cálculos. Na seção 3.4 vários resultados do desempenho do controlador, comparado com outro de ganho fixo, são apresentados a partir de simulações digitais. As conclusões encontram-se na seção 3.5.

3.2 - Modelo Matemático do Helicóptero

O modelo linearizado que representa a dinâmica do helicóptero SD-3H é de nona ordem. Ele representa o movimento do helicóptero no espaço. No controle, este movimento é separado em dois modos desacoplados, o modo longitudinal e o modo lateral [30].

As equações do modo longitudinal, que descreve o movimento no plano vertical, relacionam o ângulo de inclinação ou subida, a taxa de inclinação, a velocidade horizontal e a velocidade vertical, sujeitas a ação de dois controles, o controle coletivo e o controle longitudinal. As equações do modo lateral (movimento no plano horizontal) relacionam o ângulo de giro ("roll"), a taxa de giro, o ângulo de abertura no plano horizontal ("yaw"), a taxa de abertura e a velocidade lateral sujeitas a ação dos pedais e do controle lateral.

Neste capítulo apenas o controle do helicóptero no plano vertical será estudado. O modelo utilizado é o mesmo considerado em [13]. A dinâmica linearizada do helicóptero é descrita por

$$\dot{x}(t, \mu) = A(\mu)x(t, \mu) + B(\mu)u(t) \quad (3.1)$$

onde $A(\mu)$ é uma matriz 4×4 , $B(\mu)$ uma matriz 4×2 , $x \in R^4$ com componentes

- x_1 velocidade horizontal (nós)
- x_2 velocidade vertical (nós)
- x_3 taxa de inclinação (graus/s)
- x_4 ângulo de inclinação (graus)

e o vetor de entradas de controle $u \in R^2$ com componentes

- u_1 controle coletivo
- u_2 controle longitudinal cíclico.

O controle é alcançado variando a inclinação das pás da hélice, ou seja, o seu ângulo de ataque com respeito ao ar. O

controle coletivo altera o ângulo de ataque de todas as pás si simultaneamente na mesma quantidade, produzindo assim um movimento vertical. Este controle está localizado ao lado do piloto. O con trole longitudinal altera progressivamente o ângulo de cada pá du rante o movimento. Devido a esta inclinação, a elevação do heli cóptero deixa de ser um movimento puramente vertical e passa a ser um movimento combinado nas direções vertical e horizontal. Este controle situa-se à frente do piloto.

Observação 1 - As velocidades são tomadas em nós somente para efeito de comparação com os resultados de outros autores. A relação entre a velocidade em nós e a velocidade em km/h é dada por

$$\dot{v}[\text{nós}] = 1,8532 \dot{v}[\text{km/h}]$$

Embora outras variações de parâmetros passam ser considerados, aqui se considera somente variações na velocidade do ar durante o vôo do helicóptero. A velocidade do ar nominal é assumida em 135 nós. Os valores nominais das matrizes do processo são

$$A^* = \begin{bmatrix} -0,0366 & 0,0271 & 0,0188 & -0,4555 \\ 0,0482 & -1,01 & 0,0024 & -4,0208 \\ 0,1002 & 0,3681 & -0,707 & 1,42 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2a)$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 0,4422 & 0,1761 \\ 3,5446 & -7,5922 \\ -5,52 & 4,49 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2b)$$

Observação 2 - A velocidade do ar pode ser entendida como sendo a velocidade relativa tomada entre o ar e o aparelho. Observe que, com o movimento de rotação da Terra, a camada de ar que compõe a atmosfera também se movimenta. Seu movimento é influenciado pelas condições de temperatura, pressão, altitude e vários outros fatores, que não são relevantes no estudo aqui realizado.

Para os propositos do controle foi suposta uma variação da velocidade do ar como mostrada na figura 3.1, da mesma forma que em [13]

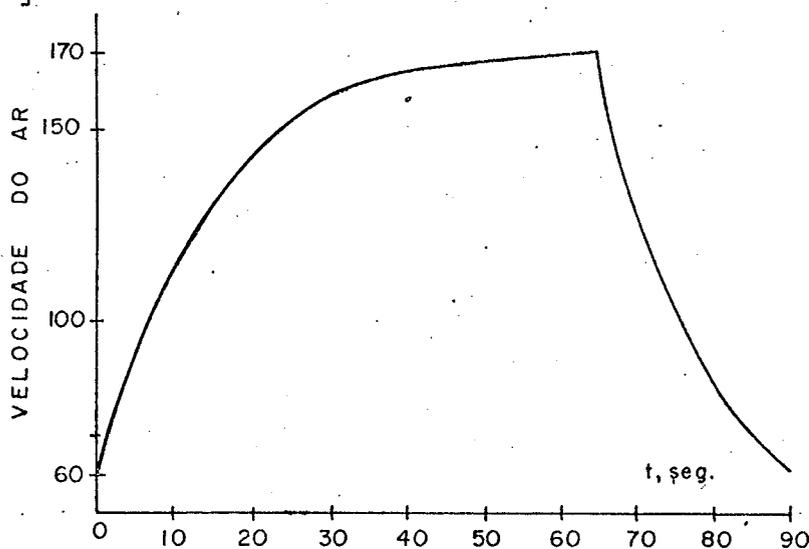


Figura 3.1 - Variação da velocidade do ar.

Foi verificado que, quando a velocidade do ar muda, variações significativas ocorrem apenas nos elementos a_{32} , a_{34} e b_{21} das matrizes $A(\mu)$ e $B(\mu)$. A figura 3.2 (a e b) mostra como es

ses elementos variam em função da velocidade do ar. Em (a) é observada a variação durante a aceleração e em (b) durante a desaceleração.

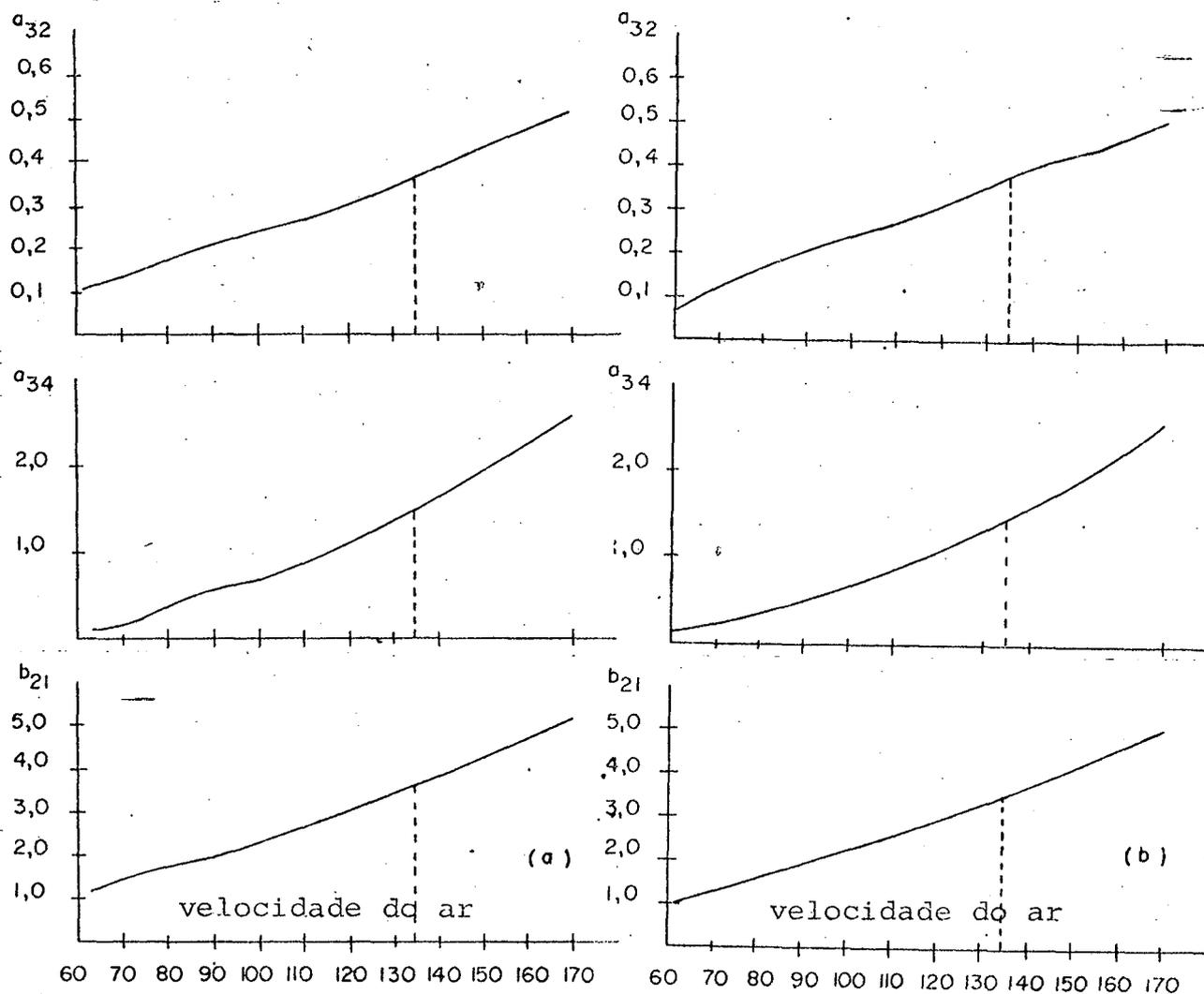


Figura 3.2 - Variação nos parâmetros do processo:

(a) - aceleração; (b) - Desaceleração.

Na faixa de variação da velocidade, de 60 a 170 nós, os limites nas variações dos elementos são [4]:

$$0,06635 \leq a_{32} \leq 0,5047$$

$$0,1198 \leq a_{34} \leq 2,526$$

$$0,9775 \leq b_{21} \leq 5,112$$

Quanto ao controle deste processo, os objetivos principais são:

(i) Capacitar o helicóptero a seguir trajetórias de referências especificadas.

(ii) Excluir os efeitos das perturbações nas trajetórias do helicóptero quando este estiver em regime.

(iii) Manter a característica de resposta do sistema inalterada sob diferentes condições de voo.

As variáveis a serem controladas são a velocidade horizontal e a velocidade vertical. Assim a equação de saída é,

$$y(t, \mu) = C x(t, \mu) \quad (3.4)$$

onde

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

3.3 - Estrutura do Controlador

De acordo com o procedimento estabelecido na seção 2.5, inicialmente vai-se determinar o servocompensador. Embora um servocompensador de ordem elevada possa ser projetado para rastrear e rejeitar sinais polinomiais, exponenciais e de outros tipos, assume-se aqui que os comandos das velocidades e as perturbações são funções constantes no tempo.

Deseja-se controlar as variáveis x_1 e x_2 logo, o ve

tor de sinais de referência é dado por

$$r(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

onde r_1 é a referência de x_1 , r_2 é a referência de x_2 e $r \in \mathbb{R}^2$. Assume-se neste trabalho que o vetor de perturbações tem a forma

$$w(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

onde w_1 e w_2 representam rajadas de vento atuando sobre x_1 e x_2 respectivamente.

Usando o teorema 2.1 verifica-se que o servocompensador tem a forma

$$\dot{\hat{x}}_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \hat{x}_c(t) + \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} [r(t) - Cx(t, \mu)]$$

$$\stackrel{\Delta}{=} A_c \hat{x}_c(t) + B_c e(t) \quad (3.8)$$

desde que $\Phi_{wr} = s$.

As propriedades da controlabilidade e observabilidade são verificadas usando o princípio dos modos fixos conforme proposto em [26]. A condição (2.14) é satisfeita desde que não há cancelamento entre os zeros de transmissão de (3.1) e os polos de A_w e A_r [27].

Tem-se então o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\mu) & 0 \\ -B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(\mu) \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix} r$$

$$\underline{\Delta} \tilde{A}(\mu) \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{B}(\mu) u + \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix} r \quad (3.9)$$

onde $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{x}_c^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$, com $\tilde{n}=6$.

Para a velocidade nominal de 135 nós o ganho \tilde{K}_1 é obtido pela minimização do índice

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\tilde{\mathbf{x}}^T(t) Q_n \tilde{\mathbf{x}}(t) + u(t) R_n u(t) \right] dt \quad (3.10)$$

para o sistema nominal na forma (3.9) com $r(t) \equiv 0$. A matriz de realimentação é dada por

$$\tilde{K}_1 = R_n^{-1} (\tilde{B}^*)^T P_n \quad (3.11)$$

onde P_n é a solução positiva definida da equação de Riccati

$$P_n \tilde{A}^* + (\tilde{A}^*)^T P_n - P_n \tilde{B}^* R_n^{-1} (\tilde{B}^*)^T P_n + Q_n = 0 \quad (3.12)$$

Para resolução de (3.12) foi utilizado um programa computacional baseado em [28]. Este programa encontra-se a disposição dos usuários no Departamento de Engenharia Elétrica da UFSC.

As matrizes de ponderação utilizadas na determinação da trajetória nominal, isto é, na determinação do ganho \tilde{K}_1 são:

$$Q_n = \begin{bmatrix} 0,04 & 0,01 & 0 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0,01 & 0,25 & 0,01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0,01 & 0 & 0 & 0 \\ 0,01 & 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,5 \end{bmatrix} \quad (2.13a)$$

$$R_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13b)$$

e o ganho \tilde{K}_1 resultante é

$$\tilde{K}_1 = \begin{bmatrix} 2,5377 & 0,1067 & -0,3282 & -1,0847 & -1,7014 & -0,2963 \\ 0,5334 & -0,7155 & -0,0840 & 0,2697 & -0,3245 & 1,5531 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Este ganho foi determinado para produzir no sistema (3.9) uma boa característica de resposta quando a velocidade for de 135 nós.

Para complementação da estrutura do controlador, deve-se determinar o ganho \tilde{K}_3 de acordo com o teorema 2.4. Contudo, a matriz de ponderação Z no critério de redução da sensibilidade (2.20) depende de R e \tilde{K}_3 . O teorema 2.4 não fornece nenhuma regra para selecionar as matrizes D e R a fim de se obter uma redução da sensibilidade desejada. Em geral muitas tentativas são feitas para se obter matrizes D e R apropriadas.

Aqui, as matrizes D e R escolhidas para uma boa redução da sensibilidade são:

$$D^T D = \begin{bmatrix} 3,2195 & 0,2343 & 0,1505 & -1,2670 & -1,5938 & 0,1097 \\ 0,2343 & 0,0877 & 0,1252 & 0,1050 & -0,1845 & -0,0620 \\ 0,1505 & 0,1252 & 0,1951 & 0,2680 & -0,1785 & -0,1047 \\ -1,2670 & 0,1050 & 0,2680 & 1,1097 & 0,4511 & -0,2291 \\ -1,5938 & -0,1845 & -0,1785 & 0,4511 & 0,9206 & 0,0381 \\ 0,1097 & -0,0620 & -0,1047 & -0,2291 & 0,0381 & 0,0887 \end{bmatrix} \quad (3.15a)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15b)$$

Com essas matrizes, a partir de (2.37) e (2.38) ob-
têm-se a matriz \tilde{K}_3 dada por

$$\tilde{K}_3 = \begin{bmatrix} 1,1577 & -0,0663 & -0,1513 & -0,7889 & -0,2786 & 0,2965 \\ -0,4498 & -0,0831 & -0,0944 & 0,0421 & 0,3411 & 0,0558 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Todas as hipóteses do teorema 2.4 são satisfeitas.
A matriz $D^T D$ é positiva definida, logo D é não singular [18]. Tam-
bém $\delta\tilde{x}_1(t) \neq \delta\tilde{x}_2(t)$ pois o posto $\tilde{B}^* = m$ e $\delta\tilde{x}_2(t) \neq 0$.

3.4 - Resultados das Simulações

Nesta seção apresentam-se os resultados das simula-
ções digitais. O programa utilizado foi o SSLA, programa para re-
solução de um sistema de equações lineares, utilizando o método
de integração de Adams-Moulton da biblioteca de programas do Labo-
tório de Controle da UFSC. Várias foram as situações simuladas

que aqui são apresentadas em diversas sub-seções.

3.4.1 - Controle da Velocidade Horizontal com $w(t) \equiv 0$

Os resultados aqui apresentados encontram-se também em [29]. A figura 3.3 mostra as respostas do helicóptero quando um comando de referência

$$r(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é aplicado. A condição inicial é $\tilde{x}_0 = 0$, o sistema não está sujeito a perturbações e a velocidade do ar é de 170 nós.

A resposta do sistema (3.9) quando $\mu = \mu^*$ e $u^* = -\tilde{K}_1 x^*$ é identificada na figura como "nominal". A resposta devido a ação de um controlador de ganho fixo onde

$$u(t) = -\tilde{K}_1 \tilde{x}(t, \mu, w)$$

que é usado em outras velocidades diferentes da nominal é denotado como "perturbado" nas curvas. As trajetórias identificadas como "sensibilidade" correspondem a resposta do sistema malha fechada (3.9) quando é utilizado o algoritmo de controle apresentado no capítulo 2.

Foi verificado que o controlador de ganho fixo produz respostas sub-amortecidas na velocidade de 170 nós. Também pode ser visto das curvas que os erros em regime das variáveis controladas é zero, o que não ocorre em [4].

As respostas do sistema devido a ação do comando

$$r(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

com $w(t) \equiv 0$, na velocidade de 170 nós também foram obtidos. Como esperado o sistema possui um bom comportamento, com a velocidade vertical seguindo o comando especificado. Estes resultados não serão apresentados aqui.

Pode-se observar ainda, notadamente em x_2, x_3 e x_4 , que a curva "sensibilidade" está mais próxima da "nominal" que aquela denotada por "perturbado". Contudo, para a curva x_1 , em alguns sub-intervalos de tempo isto não acontece. A razão para isto é a forma particular da matriz de ponderação Z . Este problema conforme observado na seção 2.5.3 pode ser solucionado pela manipulação das matrizes D e R .

As entradas de controle também são apresentadas, onde observa-se que as suas magnitudes, bem como suas características no tempo são plenamente aceitáveis. Nas outras simulações, não serão mostradas as características das entradas de controle, mas somente seus valores máximo e mínimo, conforme Tabela 3.1 apresentada mais adiante.

3.4.2 - Controle da Velocidade Vertical com $w(t) \equiv 0$

Outra análise da capacidade de rastreamento do controlador frente às variações nos parâmetros foi feita simulando-se o comportamento do sistema para um sinal de referência

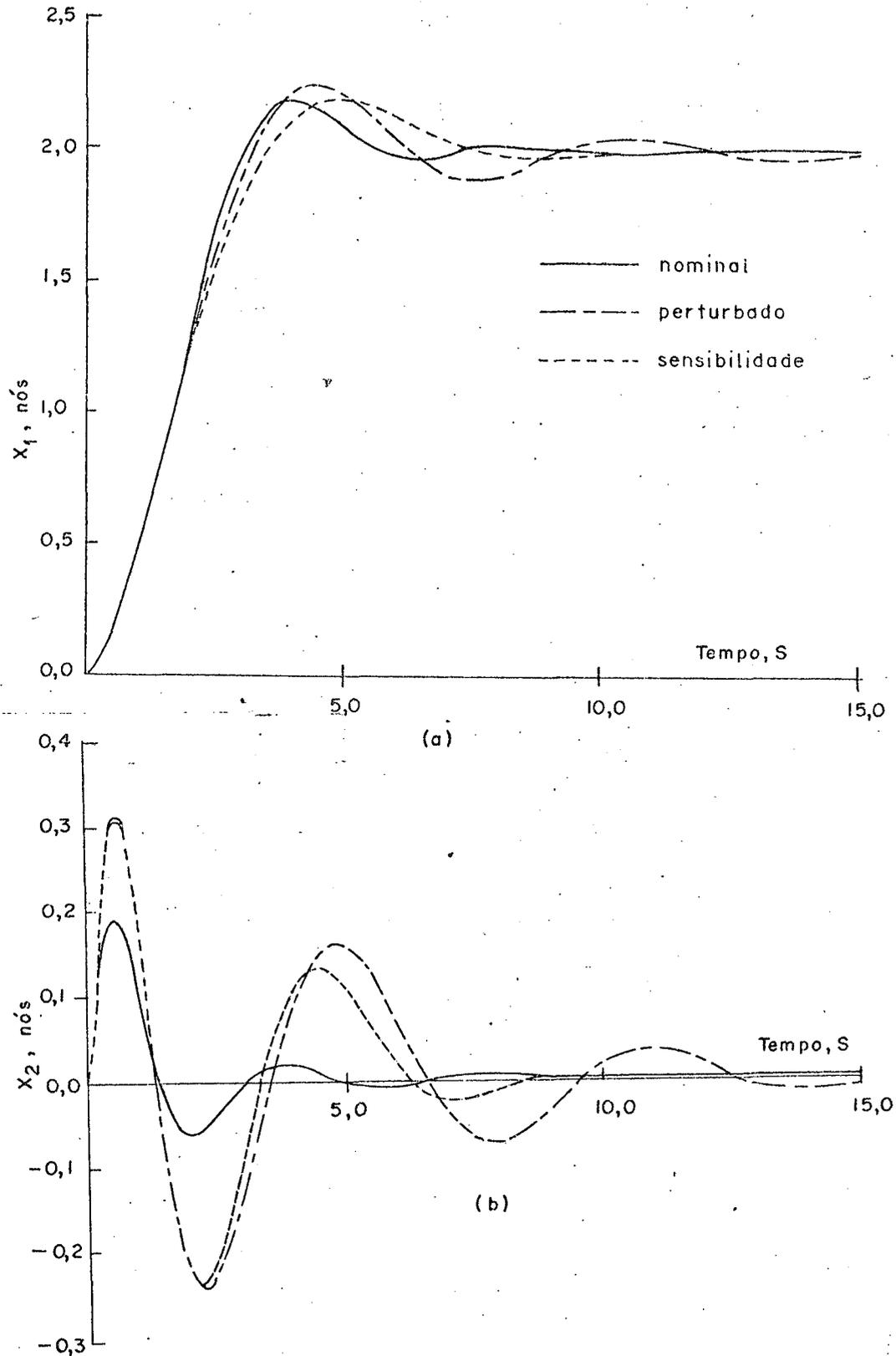


Figura 3.3 - Controle da velocidade horizontal
 com $w(t) \equiv 0$ em 170 nós.
 (a) velocidade horizontal;
 (b) velocidade vertical.

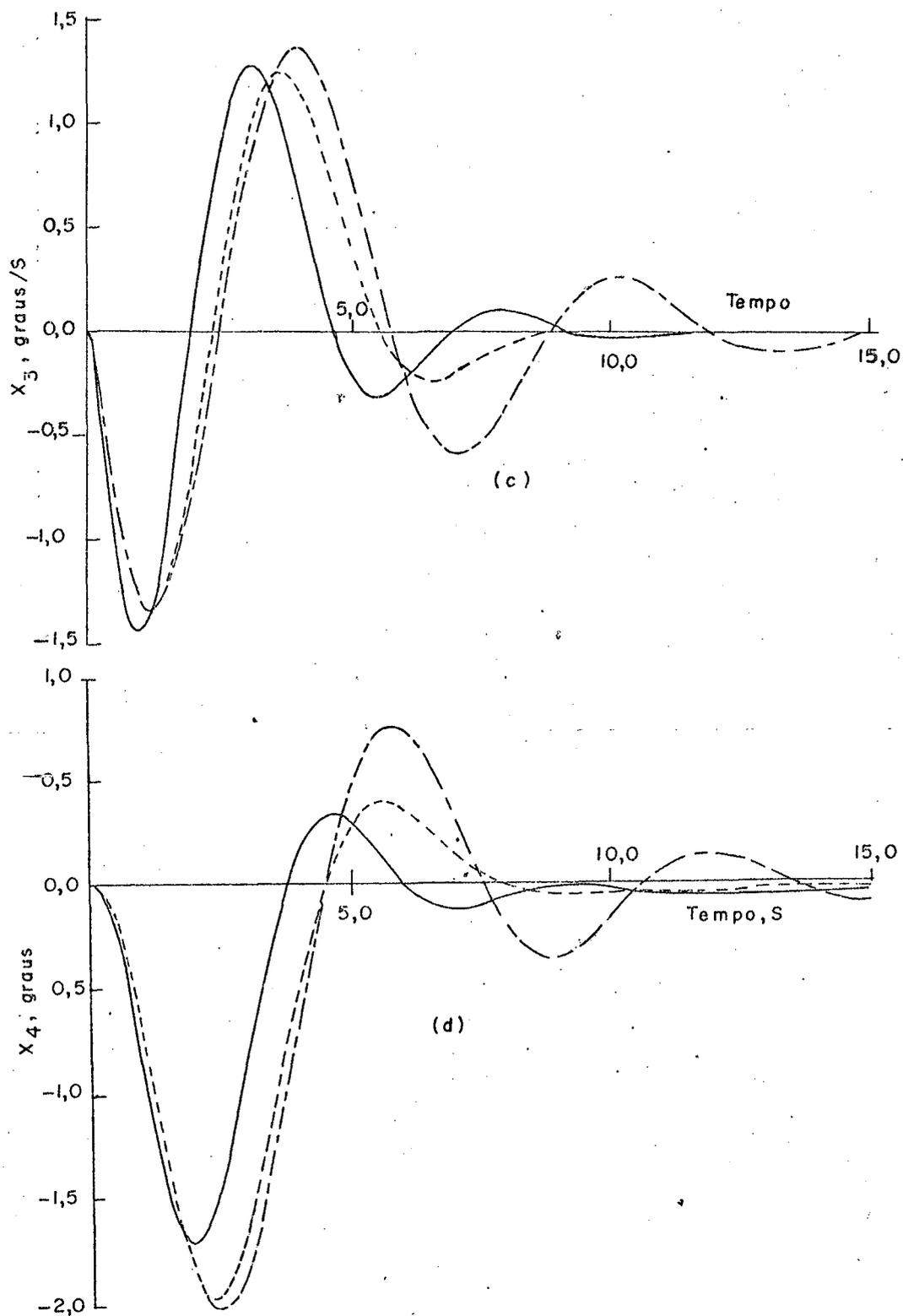


Figura 3.3 - (c) taxa de inclinação;
(d) ângulo de inclinação.

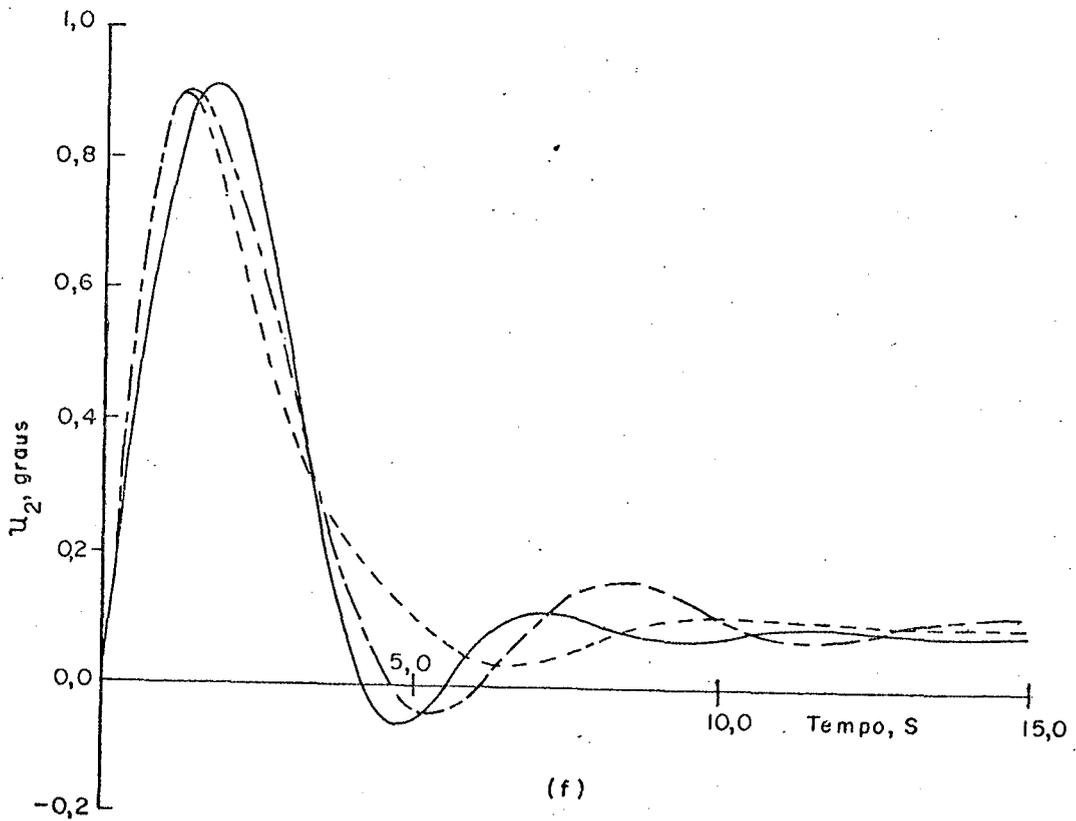
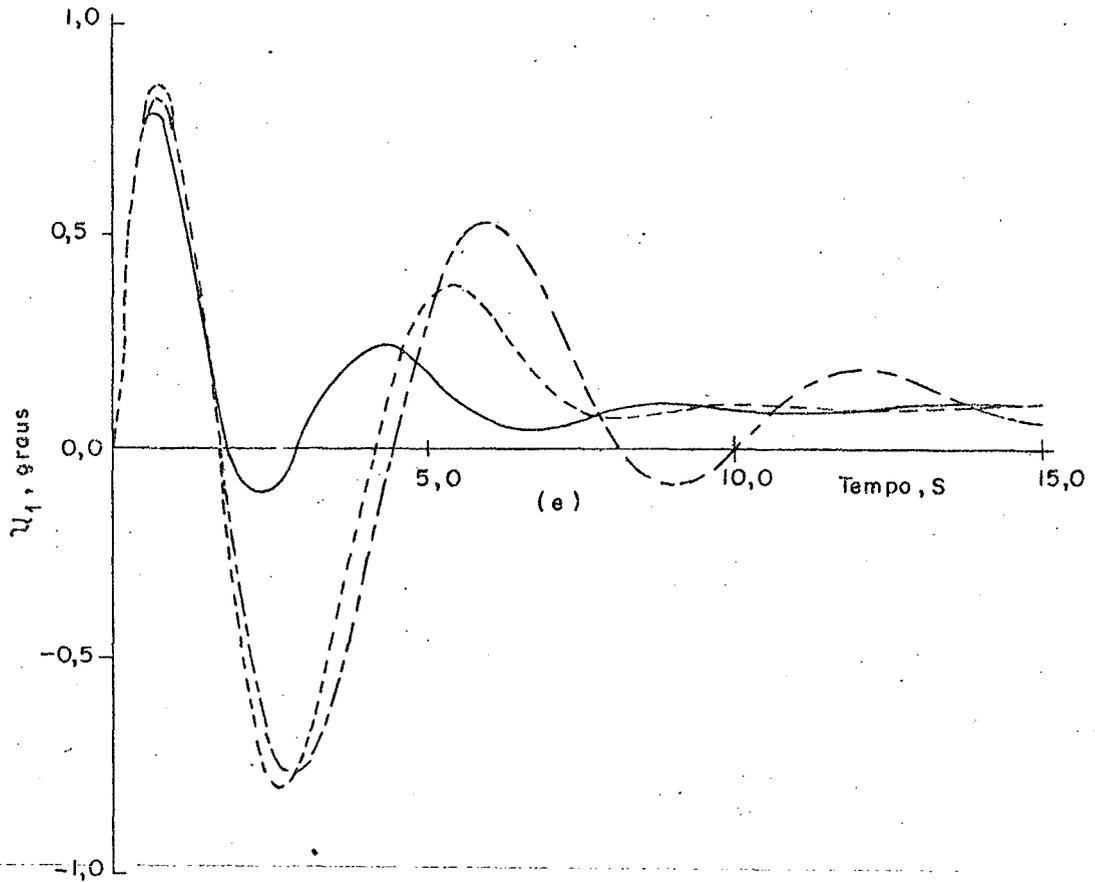


Figura 3.3 - (e) controle coletivo;
(f) controle longitudinal.

$$r(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

com $\tilde{x}_0 = 0$ e $w(t) \equiv 0$, na velocidade de 60 nós.

Os resultados dessa simulação são apresentados na figura 3.4. Na velocidade de 60 nós o controlador de ganho fixo produz respostas superamortecidas.

Da mesma forma que na sub-seção 3.4.1, pode-se verificar um bom comportamento nas variáveis x_2, x_3 e x_4 , onde a trajetória "sensibilidade" aproxima-se mais da "nominal" que a trajetória "perturbado". Quanto a curva x_1 , em alguns sub-intervalos isto não ocorre. As razões para tal fato são as mesmas expostas em 3.4.1.

3.4.3 - Controle da Velocidade Vertical com $w(t)$ constante

Para mostrar a capacidade de rastreamento do controlador sujeito a variações nos parâmetros e a entrada de perturbações, foi simulado o comportamento do helicóptero quando

$$r(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

com $\tilde{x}_0 = 0$ e $w(t)$ constante, na velocidade de 170 nós.

Embora a rejeição das perturbações possa ser alcançada para qualquer matriz E em (2.1), aqui utilizou-se nas simulações a matriz

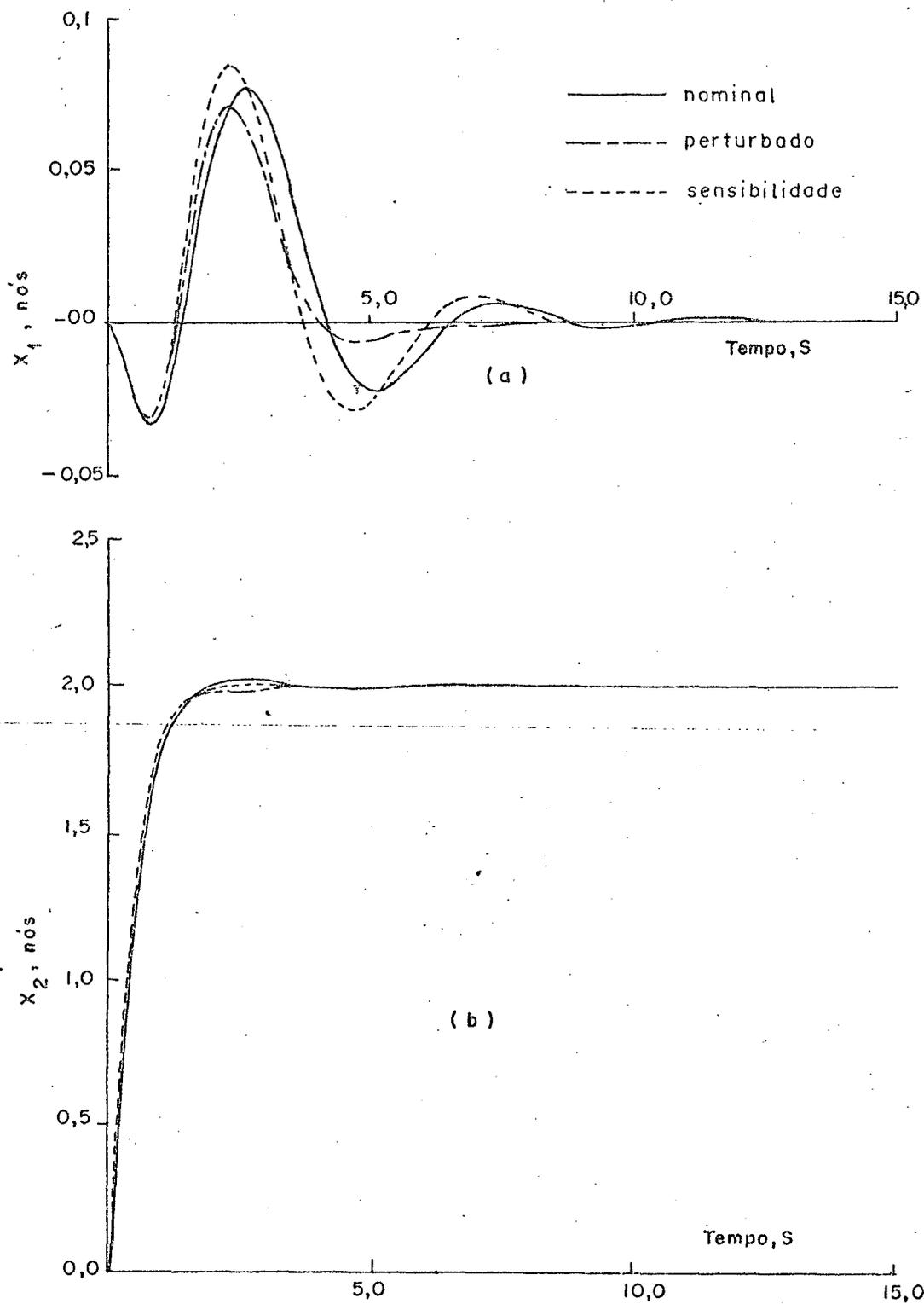


Figura 3.4 - Controle da velocidade vertical com $w(t) \equiv 0$ em 60 nós.

(a) velocidade horizontal;

(b) velocidade vertical.

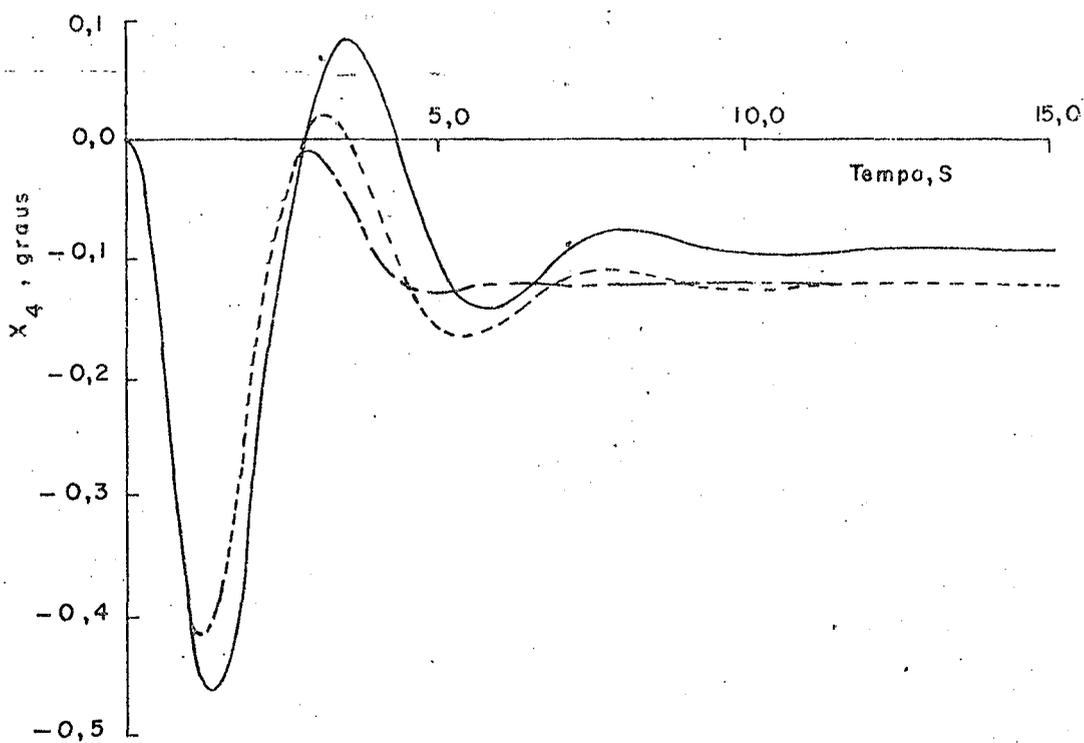
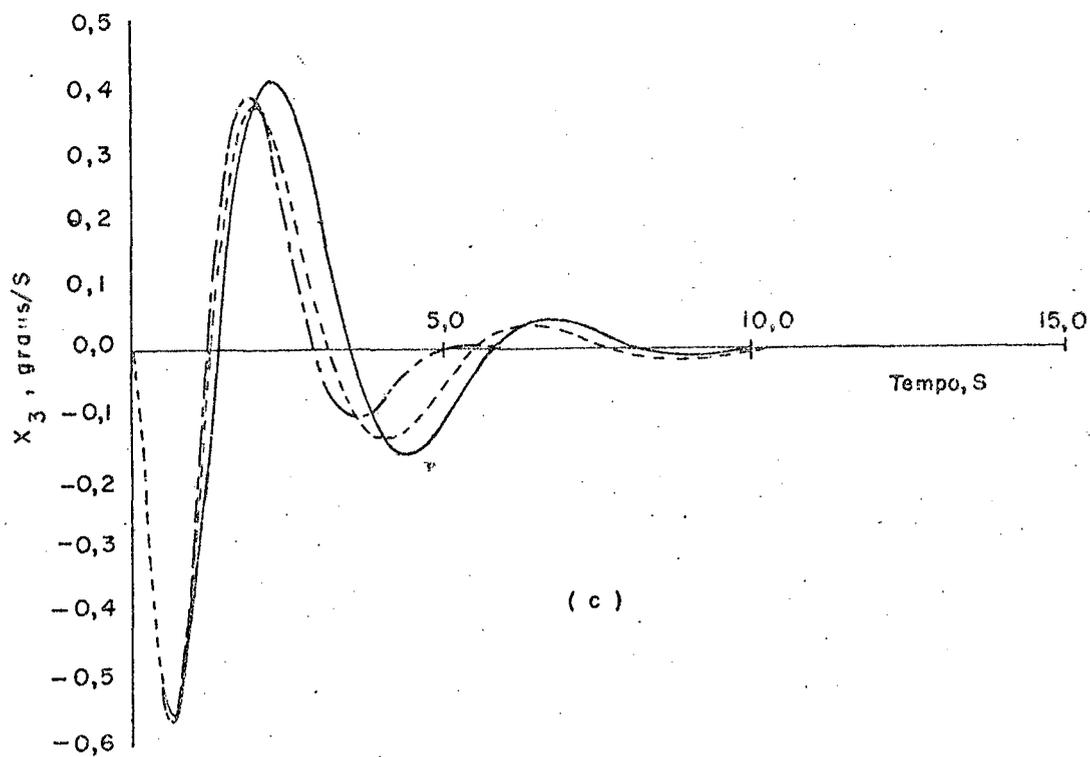


Figura 3.4 - (c) taxa de inclinação;
(d) ângulo de inclinação.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Observa-se que mesmo na presença de perturbações, a velocidade vertical desejada é alcançada, conforme figura 3.5

3.4.4 - Controle da Velocidade Horizontal com $w(t)$ constante

Em outra simulação que foi feita com o sistema, su jeito a entrada de perturbações, tomou-se

$$r = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\tilde{x}_0 = 0$, $w(t)$ constante e a velocidade do ar de 60 nós. As curvas são mostradas na figura 3.6.

A tabela 3.1 mostra os limites de variação das en tradas de controle do sistema, para as várias situações simuladas.

3.5 - Conclusões

Diversos resultados com entrada de perturbações em diferentes velocidades do ar e para diferentes sinais de referên cia foram apresentadas. Dessas simulações pode-se concluir que,

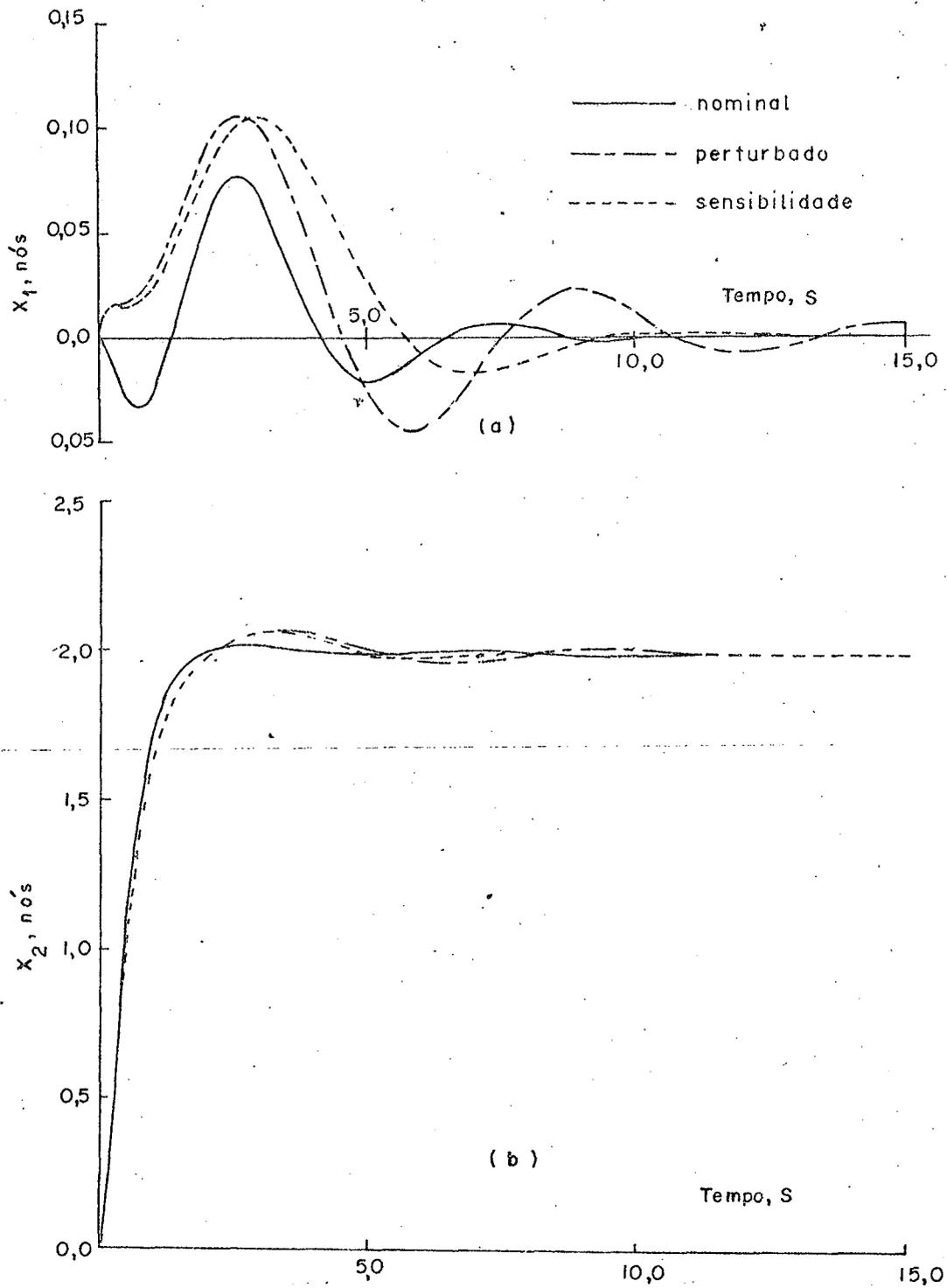


Figura 3.5 - Controle da velocidade vertical com $w(t)$ constante em 170 nós.

(a) velocidade horizontal;

(b) velocidade vertical.

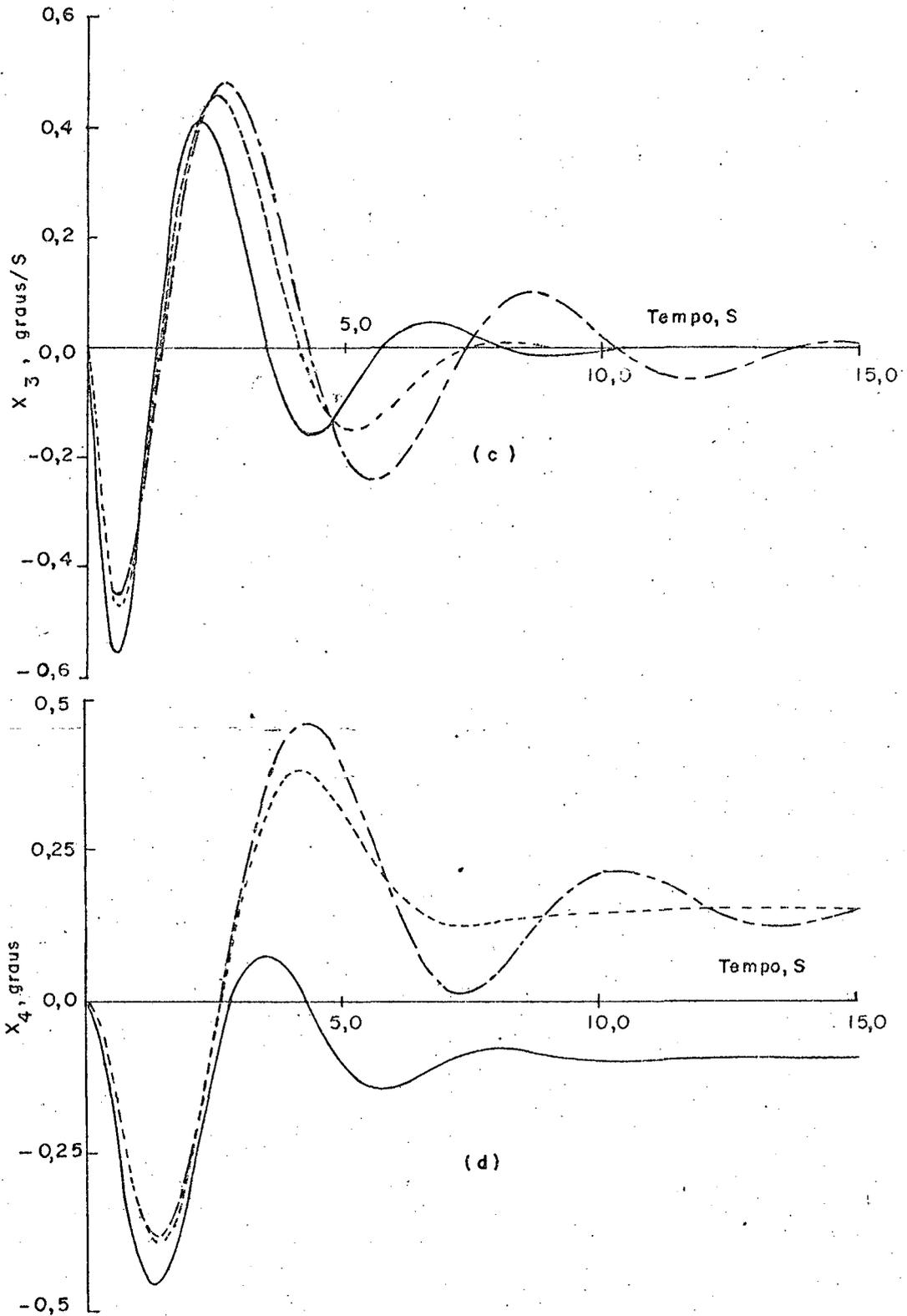
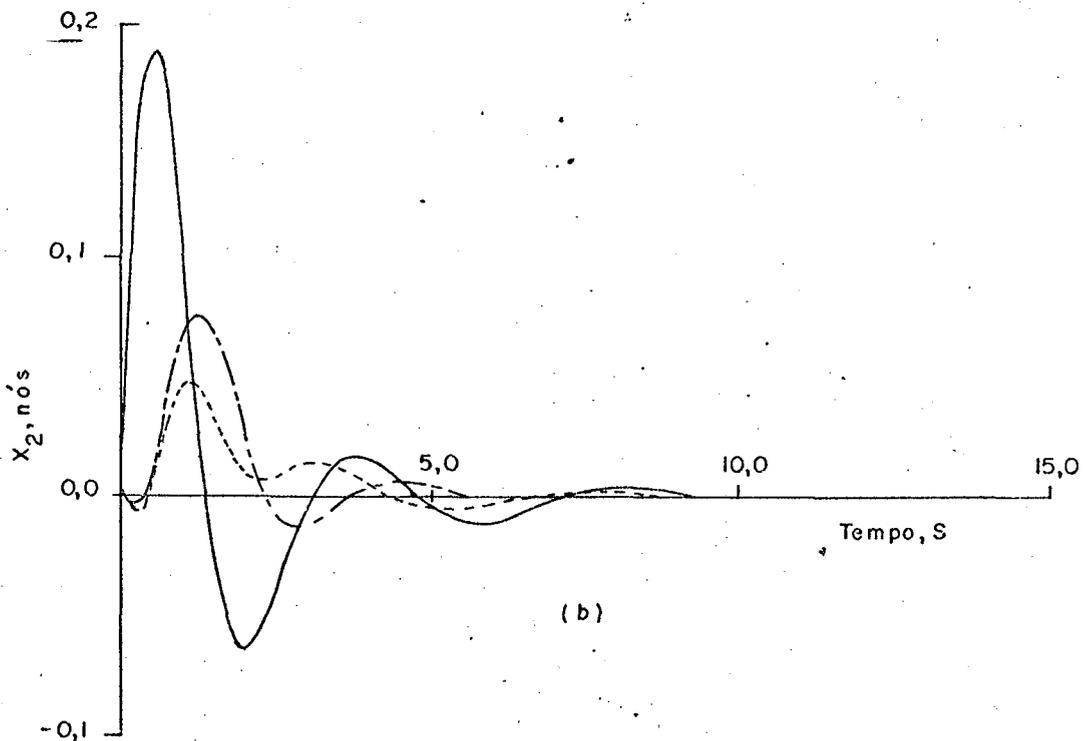
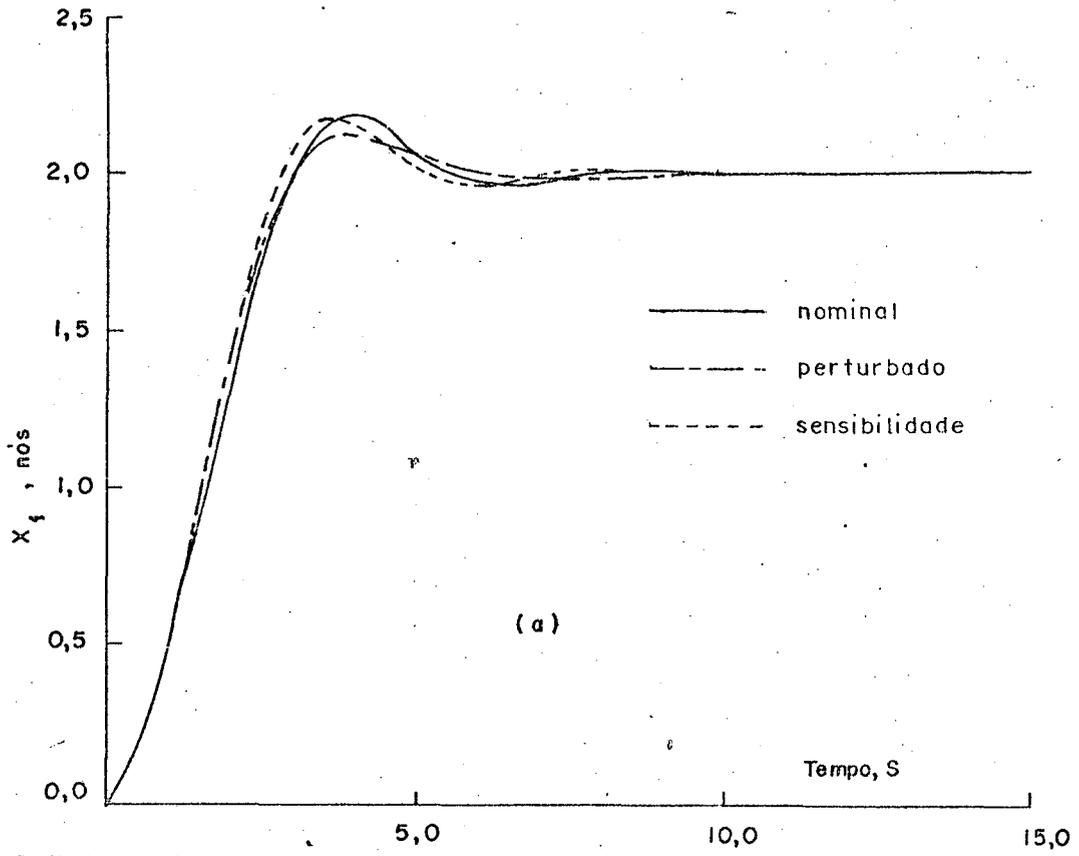


Figura 3.5 - (c) taxa de inclinação;
(d) ângulo de inclinação.



3.6 - Controle da velocidade horizontal com $w(t)$ constante em 60 nós.

(a) velocidade horizontal; (b) velocidade vertical.

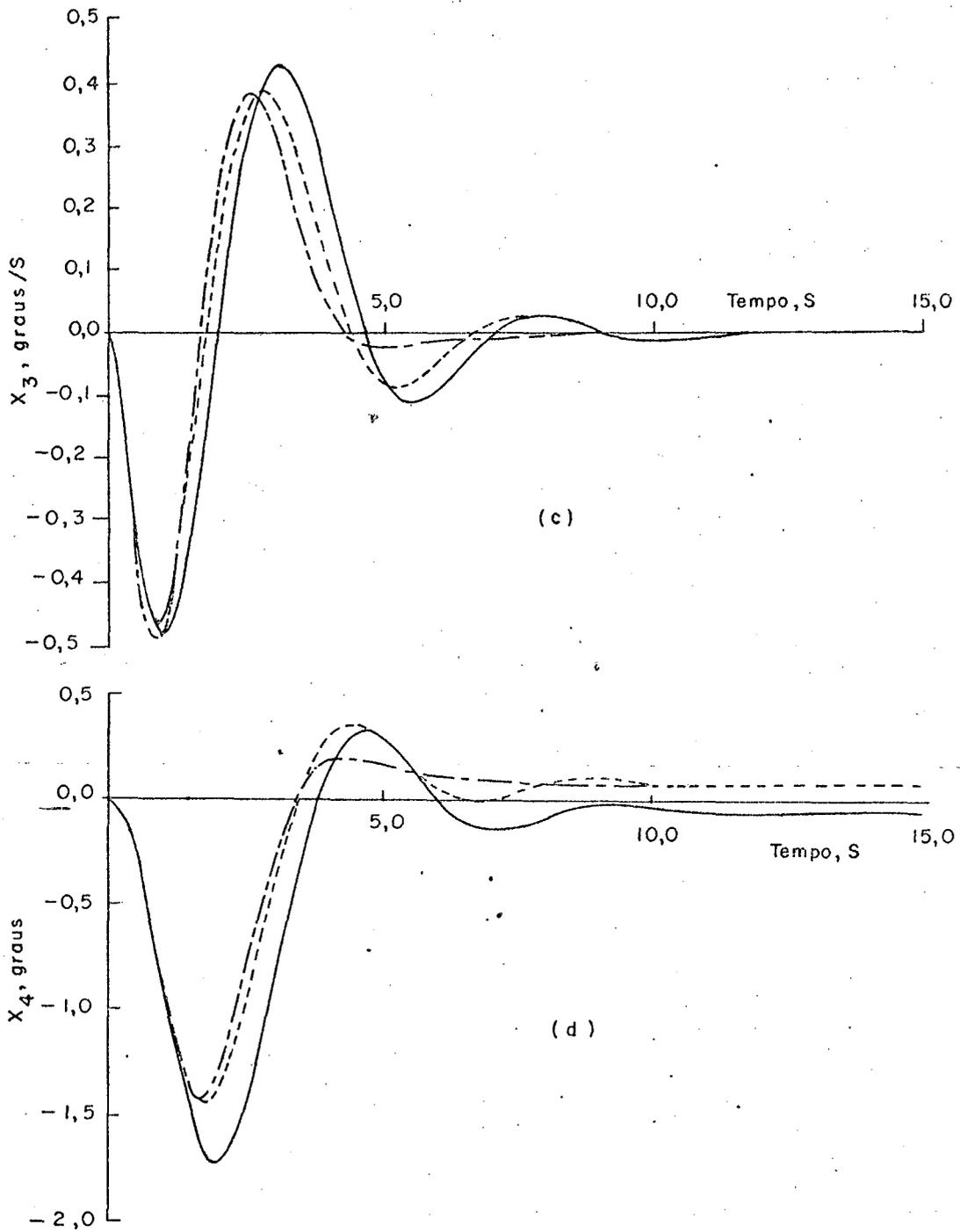


Figura 3.6 - (c) taxa de inclinação;
(d) ângulo de inclinação.

Velocidade do ar	Comando $r(t)$	Perturbação $w(t)$	NOMINAL				PERTURBADO				SENSIBILIDADE			
			u_1		u_2		u_1		u_2		u_1		u_2	
			máx.	min.	máx.	min.	máx.	min.	máx.	min.	máx.	min.	máx.	min.
170	$[2 \ 0]^T$	0	0,7965	-0,1085	0,9098	-0,0620	0,8315	-0,7725	0,9070	-0,0437	0,8672	-0,7950	0,9100	0,0
60	$[0 \ 2]^T$	0	0,0269	-0,3258	0,0	-0,4294	0,0268	-0,3013	0,0	-0,4209	0,0264	-0,2837	0,0	-0,4209
170	$[0 \ 2]^T$	cte.	0,0269	-0,3258	0,0	-0,4294	0,1317	-0,4501	0,0	-0,4647	0,1029	-0,4517	0,0	-0,4626
60	$[2 \ 0]^T$	cte.	0,7965	-0,1085	0,9098	-0,0620	0,6910	-0,0017	0,8025	-0,0729	0,6663	0,0	0,8169	-0,1606

Tabela 3.1 - Limites das variações nas entradas de controle

comparado com um controlador de ganho fixo, o novo controlador aqui proposto tem um melhor desempenho sob os aspectos de redução da sensibilidade das trajetórias, rastreamento das saídas e rejeição das perturbações.

Além disso, um compromisso entre as características das respostas e as magnitudes dos controles pode ser obtido, pela escolha apropriada das matrizes de ponderação Q_n, R_n, D e R . Deve ser notado ainda que o projetista tem flexibilidade para reduzir a sensibilidade de uma variável de estado particular, manipulando as matrizes D e R .

Ao se comparar o desempenho deste controlador com os anteriormente apresentados na literatura (vide [4], [6], [8], [13], [14] e [30]), pode-se afirmar que o mesmo é mais eficaz frente as simulações efetuadas. Sem dúvida, um controlador adaptativo pode possuir um melhor desempenho global, mas na sua síntese torna-se necessário um computador a bordo o que nem sempre é possível, ao passo que o controlador aqui proposto é de fácil implementação.

C A P Í T U L O 4

OBSERVADORES COM SENSIBILIDADE REDUZIDA
QUANTO ÀS VARIAÇÕES NOS PARÂMETROS4.1 - Introdução

Nos capítulos anteriores foi feita a suposição de que todos os estados são disponíveis para realimentação. Entretanto essa suposição nem sempre é válida e necessita-se então fazer uma estimação daqueles estados não disponíveis, ou seja, não mensuráveis. Luenberger [32], assume para o projeto do observador, o completo conhecimento da dinâmica do sistema a ser observado.

Se a dinâmica do sistema não é perfeitamente conhecida ou está sujeita a mudanças, pode-se ter uma reconstrução incorreta dos estados como saída do observador. Em muitos trabalhos, são apresentados métodos com o objetivo de tornar o observador mais robusto. Esses métodos não serão discutidos aqui.

Neste capítulo, uma abordagem semelhante a utilizada para determinação do controlador desenvolvido no capítulo 2, será apresentada. O objetivo é melhorar o desempenho do observador frente a variações nos parâmetros do processo. Na seção 4.2, o problema é colocado e na seção 4.3 o método de projeto é apresentado. Na seção 4.4 algumas considerações sobre o método são feitas e as conclusões apresentadas em 4.5.

4.2 - Colocação do Problema

Seja o sistema linear

$$\dot{x}(t, \mu) = A(\mu)x(t, \mu) + B(\mu)u(t) \quad (4.1a)$$

$$y(t, \mu) = Cx(t, \mu) \quad (4.1b)$$

onde o vetor de estado $x \in R^n$, o vetor de controle $u \in R^m$ e o vetor de saída $y \in R^\ell$. As matrizes $A(\mu)$ e $B(\mu)$ são funções de derivada contínua do vetor de parâmetros $\mu \in R^p$, com valores nominais A^* , B^* e μ^* . O estado inicial $x(0) = x_0$ de (4.1) é desconhecido. A classe de sistemas aqui estudada trata dos sistemas lineares sem perturbação.

Seguindo a metodologia convencional apresentada em [18] e [32], define-se um observador de ordem n , chamado observador completo, para o sistema (4.1) através das equações

$$\dot{\hat{x}}(t, \mu) = A^* \hat{x}(t, \mu) + B^* u(t) + K[y(t, \mu) - \hat{y}(t, \mu)] \quad (4.2a)$$

$$\hat{y}(t, \mu) = C \hat{x}(t, \mu) \quad (4.2b)$$

onde o circunflexo sobre a variável, denota uma estimação dessa variável, o estado inicial do observador é \hat{x}_0 e a matriz $K \in R^{n \times \ell}$.

O erro entre o estado real e o estado estimado, chamado erro de observação, é dado pela equação

$$e(t, \mu) = x(t, \mu) - \hat{x}(t, \mu) \quad (4.3)$$

Substituindo (4.1) e (4.2) em (4.3) obtém-se

$$\dot{e}(t) = [A^* - KC]e(t) + v(t) \quad (4.4a)$$

$$v(t) = \delta Ax + \delta Bu \quad (4.4b)$$

$$\delta A = A - A^* \quad (4.4c)$$

$$\delta B = B - B^* \quad (4.4d)$$

Deve ficar implícito que as variáveis $e(t)$ e $v(t)$ também são funções do vetor de parâmetros μ , embora por simplicidade isto seja omitido daqui por diante.

Caso o sistema não seja influenciado por variações nos parâmetros, isto é, tenha as matrizes A e B constantes, então $v(t) \equiv 0$. Se a matriz $[A^* - KC]$ é estável, então $e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e consequentemente $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$.

Entretanto, quando $\delta A \neq 0$ e $\delta B \neq 0$, a equação do erro de observação é dirigida por $\dot{v}(t) \neq 0$. Logo, $e(t)$ não tende a zero quando $t \rightarrow \infty$ e $\hat{x}(t) \neq x(t)$.

O problema a ser resolvido passa a ser o seguinte. Dado o sistema (4.1), deseja-se projetar um observador da forma (4.2) de maneira que o erro de observação dado em (4.3) seja pouco afetado frente as variações nos parâmetros.

4.3 - Projeto do Observador

Dado um observador para o sistema (4.1), deseja-se melhorá-lo de modo a que o erro de observação seja menos sensível às variações nos parâmetros.

A abordagem utilizada é a mesma do capítulo 2. Partindo-se de um observador, projetado utilizando-se os valores nominais dos parâmetros, introduz-se uma modificação no seu ganho de modo a satisfazer um critério de redução de sensibilidade semelhante a (2.20).

Considere dois observadores para o sistema (4.1), com ganhos K_1 e K_2 , onde K_2 é obtido levando em conta as variações nos parâmetros. Uma forma de comparação das sensibilidades dos erros de observação é dada pelo critério

$$\int_0^{t'} e_1^T(t) Z e_1(t) dt > \int_0^{t'} e_2^T(t) Z e_2(t) dt \quad (4.5)$$

onde $t' > 0$, Z é uma matriz semi-definida positiva e

$$\dot{e}_1(t) = [A^* - K_1 C] e_1(t) + v(t) \quad (4.6a)$$

$$\dot{e}_2(t) = [A^* - K_2 C] e_2(t) + v(t) \quad (4.6b)$$

Definindo

$$\Delta e(t) = e_1(t) - e_2(t) \quad (4.7)$$

tem-se:

$$\Delta \dot{e}(t) = [A^* - K_1 C] \Delta e(t) - [K_2 - K_1] C e_2(t) \quad (4.8)$$

Tomando a transformada de Laplace de (4.8), tem-se

$$E_1(s) = [I + G(s) \Delta K C] E_2(s) = H^{-1}(s) E_2(s) \quad (4.9)$$

onde

$$H(s) = [I + G(s)\Delta KC]^{-1} \quad (4.10a)$$

$$G(s) = [sI - A^* + K_1 C]^{-1} \quad (4.10b)$$

$$\Delta K = K_2 - K_1 \quad (4.10c)$$

e $E_1(s)$, $E_2(s)$ são as transformadas de Laplace de $e_1(t)$ e $e_2(t)$.

O teorema seguinte, estabelece as condições para a determinação do ganho K_2 .

Teorema 4.1 - Seja o sistema (4.1). Considere as seguintes hipóteses:

- 1 - O par $[(A^*)^T, C^T]$ é controlável
- 2 - $V_2 > 0$ e simétrica, $V_1 = L^T L$
- 3 - A matriz C tem posto l
- 4 - A matriz L tem posto n
- 5 - Q é a única solução positiva definida simétrica da equação de Riccati.

$$(A^* - K_1 C)Q + Q(A^* - K_1 C)^T - QC^T V_2^{-1} CQ + V_1 = 0 \quad (4.11)$$

e ΔK é definido por

$$\Delta K = QC^T V_2^{-1} \quad (4.12)$$

- 6 - $e(t) \notin N(C)$ para algum $t \in [0, t']$

então:

1 - Todos os autovalores de $(A^* - K_2C)$ onde

$$K_2 = K_1 + \Delta K \quad (4.13)$$

têm parte real negativa.

2 - O critério (4.5) é satisfeito com

$$z = C^T V_2^{-1} C \quad (4.14)$$

Prova (Teorema 4.1) - A primeira condição deste teorema é provada diretamente pela utilização do Lema 2.2 observada a dualidade entre o problema do regulador linear quadrático e do observador ótimo (filtro de Kalman) [33], e será omitida aqui. Para prova da segunda condição o procedimento será dado a seguir.

Seja $A_1 = A^* - K_1C$. Pré-multiplicando e pós-multiplicando (4.11) por Q^{-1} e adicionando-se $(-sQ^{-1} + sQ^{-1})$, tem-se:

$$\begin{aligned} Q^{-1} [sI - A_1] + [-sI - A_1]^T Q^{-1} + C^T V_2^{-1} C - Q^{-1} V_1 Q^{-1} &= 0 \\ Q^{-1} G^{-1}(s) + [G^{-1}(-s)]^T Q^{-1} + C^T V_2^{-1} C - Q^{-1} V_1 Q^{-1} &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pré-multiplicando por $C^T \Delta K^T G^T(-s)$, pós-multiplicando por $G(s) \Delta K C$ e usando (4.12), então a equação (4.15) torna-se

$$\begin{aligned} C^T \Delta K^T G^T(-s) C^T V_2^{-1} C + C^T V_2^{-1} C G(s) \Delta K C + \\ + C^T \Delta K^T G^T(-s) C^T V_2^{-1} C G(s) \Delta K C = C^T \Delta K^T G^T(-s) Q^{-1} V_1 Q^{-1} G(s) \Delta K C \end{aligned}$$

Adicionando $(C^T V_2^{-1} C - C^T V_2^{-1} C)$ obtêm-se

$$[I + C^T \Delta K^T G^T(-s)] C^T V_2^{-1} C [I + G(s) \Delta K C] - C^T V_2^{-1} C = C^T \Delta K^T G^T(-s) Q^{-1} V_1 Q^{-1} G(s) \Delta K C$$

Pré-multiplicando por $E_2^T(-j\omega)$, pós-multiplicando por $E_2(j\omega)$, usando (4.9) e tomando $s = j\omega$

$$\begin{aligned} E_1^T(-j\omega) C^T V_2^{-1} C E_1(j\omega) - E_2^T(-j\omega) C^T V_2^{-1} C E_2(j\omega) &= \\ = E_2^T(-j\omega) C^T \Delta K^T G^T(-j\omega) Q^{-1} V_1 Q^{-1} G(j\omega) \Delta K C E_2(j\omega) &= \\ = \|L Q^{-1} G(j\omega) \Delta K C E_2(j\omega)\|_2^2 & \end{aligned} \quad (4.16)$$

Da hipótese 6 do teorema, se $e_2(t) \notin N(C)$ para algum t , então

$$\|L Q^{-1} G(j\omega) Q C V_2^{-1} C E_2(j\omega)\|_2^2 \geq 0 \quad \text{para algum } \omega \in (-\infty, \infty) \quad (4.17)$$

onde ΔK foi substituído por (4.12).

Logo, pode-se afirmar que

$$E_1^T(-j\omega) C^T V_2^{-1} C E_1(j\omega) - E_2^T(-j\omega) C^T V_2^{-1} C E_2(j\omega) \geq 0 \quad (4.18)$$

onde o sinal de igualdade se aplica para alguns valores de ω mas não para todos os valores.

Usando (4.10a) e (4.14), a equação (4.18) pode ser escrita como

$$E_2^T(j\omega) [H^T(-j\omega)]^{-1} ZH^{-1}(j\omega)E_2^T(j\omega) - E_2(-j\omega)ZE_2(j\omega) \geq 0 \quad (4.19)$$

o que implica em

$$[H^T(-j\omega)]^{-1} ZH^{-1}(j\omega) - Z \geq 0 \quad (4.20)$$

A equação (4.20) é uma condição suficiente para que o critério (4.5) seja satisfeito, conforme estabelecido no teorema 2.3.

Este resultado completa a prova do teorema e confirma a dualidade existente entre o problema do observador e o problema da sensibilidade das trajetórias. Isto vem do fato de que a equação de Riccati envolvida nesta dedução é a mesma que aparece no teorema 2.4 e também é igual a relacionada com o problema do observador ótimo (Filtro de Kalman). Em [15] e [16] foram estabelecidos resultados semelhantes, embora a hipótese 6 não tenha sido levada em conta.

Observação 1 - Se $e_2(t) \in N(C)$, então $\Delta K C e_2(t) \equiv 0$ e usando (4.8), tem-se $e_1(t) \equiv e_2(t)$, isto é, o observador com ganho K_2 é tão sensível quanto o observador projetado com ganho K_1 .

4.4 - Considerações sobre o método

No problema apresentado na seção 4.2, a matriz C é considerada fixa. Em [15] e [16] algumas considerações sobre a matriz C são feitas e fica estabelecido que variações nos elementos desta matriz, devido às variações nos parâmetros, podem ser incorpo

radas nas matrizes A e B do sistema.

Entretanto, não são apresentadas em [15] e [16] as formas pelas quais a variação em C pode ser transformada em uma variação equivalente em A e B. Isto será estabelecido no teorema a seguir.

Teorema 4.2 - Considere o sistema

$$\dot{x}(t, \mu) = A(\mu) x(t, \mu) + B(\mu) u(t) \quad (4.21a)$$

$$y(t, \mu) = C(\mu) x(t, \mu) \quad (4.21b)$$

Se as matrizes C^* e $C(\mu)$ têm posto igual a ℓ , dimensão de y , então existe uma matriz não singular, $P(\mu)$ tal que $C(\mu) = C^*P(\mu)$ e as variações em $C(\mu)$ podem ser representadas por variações equivalentes em $A(\mu)$ e $B(\mu)$.

Prova (Teorema 4.2) - Sabe-se que

$$C(\mu) = C^*P(\mu)$$

$$C^* + \delta C(\mu) = C^*P(\mu)$$

$$C^*[I - P(\mu)] = \delta C(\mu)$$

como posto $C^* = \ell$, então

$$P(\mu) = I + (C^*)^T [C^*(C^*)^T]^{-1} \delta C(\mu) \quad (4.22)$$

Definindo

$$G(\mu) = -(C^*)^T [C^* (C^*)^T]^{-1} \delta C(\mu) \quad (4.23)$$

tem-se

$$P(\mu) = I - G(\mu) \quad (4.24)$$

Já foi mostrado por outros autores ([31], Teorema 1.4.3) que se

$$\|G(\mu)\| < \gamma < 1 \quad (4.25)$$

então o operador $I - G(\mu)$ é inversível e sua inversa é limitada com

$$\|(I - G(\mu))^{-1}\| < \frac{1}{1-\gamma} \quad (4.26)$$

— Por exemplo, ao se tomar

$$\|G\| = \max_j \sum [a_{ij}] \quad (\text{soma da linha})$$

pode-se fixar o limite de variação na matriz $C(\mu)$ para satisfazer (4.25). Fica provado então que $P(\mu)$ dado em (4.24) é não singular.

Definindo

$$z(t, \mu) = P(\mu) x(t, \mu) \quad (4.27)$$

de (4.21) tem-se o sistema equivalente

$$\dot{z}(t, \mu) = P(\mu)A(\mu)P^{-1}(\mu)z(t, \mu) + P(\mu)B(\mu)u(t) \quad (4.28a)$$

$$y(t, \mu) = C^*z(t, \mu) \quad (4.29b)$$

onde a matriz C^* é constante. Observe que (4.28) é dirigido pela mesma entrada de controle e possui a mesma saída que (4.21).

Observação 2 - No teorema 4.2 foi mostrado como eliminar as variações na matriz C . Para o sistema (4.28) um observador pode ser obtido usando o teorema 4.1 e o estado $z(t, \mu)$ estimado. Entretanto, não é possível obter uma estimação de $x(t, \mu)$ uma vez que a matriz $P(\mu)$ utilizada em (4.27) é uma função do vetor de parâmetros μ .

Contudo, do ponto de vista da representação entrada-saída, os dois sistemas são equivalentes, ou seja, possuem a mesma função de transferência. Logo, sob a ação de uma mesma entrada, irão produzir a mesma saída. Então se $u(t) = -K \hat{z}(t, \mu)$ estabiliza (4.28), essa mesma entrada irá estabilizar (4.21).

Observação 3 - Outra consideração importante sobre o método proposto na seção 4.2 é referente a questão da regulação do sistema (4.1). Desde que o erro de observação dado em (4.4) não converge assintoticamente para zero, ao se usar uma lei de controle do tipo

$$u(t) = -L \hat{x}(t) \quad (4.30)$$

o que se pode garantir sobre a estabilidade do sistema (4.1). Usando (4.1), (4.2) e (4.4) obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\mu) - B(\mu)L & B(\mu)L \\ \delta A - \delta BL & A^* - KC + \delta BL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Caso não haja variação nos parâmetros de (4.1), então $\delta A = 0$, $\delta B = 0$, o sistema (4.31) é estável e seus autovalores são os mesmo de $A(\mu) - B(\mu)L$ e $A^* - KC$. Para variações em $A(\mu)$ e $B(\mu)$, os autovalores sofrerão deslocamentos no plano complexo e desde que δA e δB sejam pequenos, (4.31) permanecerá estável.

Do exposto, pode-se então propor o seguinte procedimento com o intuito de melhorar a sensibilidade do observador quanto às variações nos parâmetros:

- (1) Verificar se o sistema em estudo tem sua matriz de saída C dependente do vetor de parâmetros μ .
- (2) Em caso afirmativo, determinar a matriz de transformação $P(\mu)$ usando (4.22). Determina-se então o sistema equivalente (4.28). Caso C não varie com μ esse passo não é necessário.
- (3) Projetar um observador inicial para o sistema (4.1) ou (4.28), especificando o ganho K_1 .
- (4) Especificar as matrizes V_1 , V_2 e resolver a equação (4.11). Isto feito, determina-se o valor de acréscimo no ganho, dado por ΔK em (4.12).
- (5) Com esse valor de acréscimo determina-se o novo ganho do observador dado por K_2 em (4.13). O novo observador de ganho K_2 é menos sensível ou, na pior das hipóteses, de sensibilidade igual ao anterior.

Observação 4 - A matriz de ponderação do critério (4.5) tem a forma

$$Z = C^T V_2^{-1} C$$

Observe que para um dado C , pode-se escolher V_2 de modo a se obter uma redução de sensibilidade do erro de observação desejada. Contudo, há uma limitação em Z uma vez que C é fixo. Caso o número de saídas mensuráveis seja elevado, todas devem ser usadas no projeto do observador, pois neste caso obtém-se uma melhor redução da sensibilidade, observada a hipótese 3 do teorema 4.1.

4.5 - Conclusões

Neste capítulo foi mostrado que um observador pode ser projetado tal que um critério de redução da sensibilidade do erro de observação é satisfeito. As condições necessárias e suficientes para que isto aconteça são colocadas de forma clara no teorema 4.1.

Caso a matriz de saída do sistema sofra influência dos parâmetros então uma matriz de transformação pode ser calculada usando o teorema 4.2 de forma a torná-la invariante, transformando suas variações em variações equivalentes nas matrizes A e B do processo. Isto não havia sido estabelecido ainda de maneira explícita na literatura referente ao assunto.

O aspecto abordado neste capítulo trata somente da regulação de um sistema sujeito a variações nos parâmetros, a partir do uso de um observador. A questão mais geral da síntese de um sistema de controle que garanta o rastreamento das saídas, a rejeição das perturbações e a redução da sensibilidade das trajetórias mesmo quando os estados não são disponíveis para realimentação não foi tratada, por ser bastante complexa.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÃO DO OBSERVADOR AO SISTEMA DE
POTÊNCIA MÁQUINA-BARRA INFINITA5.1 - Introdução

Muitos são os trabalhos existentes na literatura que tratam da questão do controle dos sistemas de potência. O objetivo é fazer com que o funcionamento do sistema seja confiável e ininterrupto, devendo as cargas serem alimentadas em tensão e frequência constantes, ou no máximo variando dentro de pequenas tolerâncias tal que os equipamentos dos consumidores operem satisfatoriamente.

Devido a complexidade do sistema a ser controlado, são feitas várias simplificações no momento do projeto do sistema de controle. A mais comum dessas simplificações é tratar o sistema de potência, que apresenta um comportamento não linear, a partir do modelo linearizado em um ponto de operação. Outro aspecto importante no projeto e implementação do controlador é relativo ao conhecimento dos estados do sistema. Devido a importância econômica dos sistemas de potência, um esforço considerável tem sido feito no desenvolvimento de instrumentos para medição de seus estados.

anterior é aplicado a um sistema de potência máquina-barras infinita. Seu comportamento é verificado em diferentes pontos de operação. O objetivo é propor uma estrutura simples e eficaz para re

construção dos estados do sistema.

Na seção 5.2 é apresentado o modelo matemático a ser utilizado para representar o sistema. Na seção 5.3 o observador é projetado, e a influência das variações na matriz C são verificadas. A regulação do sistema utilizando os estados estimados é apresentada na seção 5.4 e as conclusões na seção 5.5.

5.2 - Modelo do sistema

O sistema a ser modelado é mostrado na figura 5.1.

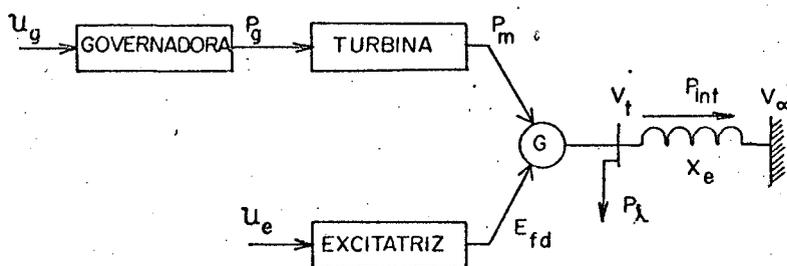


Figura 5.1 - Sistema máquina-barras infinita.

O gerador está representado por um modelo linearizado de terceira ordem baseado nas equações de Park [1]. Suas variáveis de estado são, $\Delta\delta$, desvio do ângulo do rotor de seu valor nominal expresso em rad., $\Delta\omega$, desvio da frequência angular de seu valor nominal, e $\Delta E'_q$, desvio da f.e.m do estator induzida pelo fluxo concatenado de eixo d.

O gerador é excitado por ΔP_m , desvio da potência mecânica na saída da turbina e ΔE_{fd} , desvio da f.e.m do estator produzida pela corrente do campo. A excitatriz é representada por um

sistema de 1^a ordem cuja entrada de controle é u_e , com constante de tempo T_e . É assumido ainda que a dinâmica da turbina pode ser representada por um sistema de 1^a ordem com constante de tempo T_t , excitado por ΔP_g , desvio da potência fornecida pela governadora, esta também representada por um sistema de 1^a ordem com constante de tempo T_g . Todas as grandezas, com exceção de $\Delta\delta$, são expressas em p.u.

O conjunto de equações que descrevem o sistema mostrado na figura 5.1 são:

$$\Delta\dot{\delta} = 377 \Delta\omega \quad (5.1a)$$

$$\Delta\dot{\omega} = (-K_1/M) \Delta\delta - (K_2/M) \Delta E'_q + (1/M) \Delta P_m - (1/M) \Delta P_\ell \quad (5.1b)$$

$$\Delta E'_q = (-K_4/T'_{do}) \Delta\delta - (1/K_3 T'_{do}) \Delta\dot{E}'_q + (1/T'_{do}) \Delta E_{fd} \quad (5.1c)$$

$$\Delta\dot{E}_{fd} = (-1/T_e) \Delta E_{fd} + (k_e/T_e) \Delta u_e \quad (5.1d)$$

$$\Delta\dot{P}_m = (-1/T_t) \Delta P_m + (1/T_t) \Delta P_g \quad (5.1e)$$

$$\Delta\dot{P}_g = (-1/T_g) \Delta P_g + (1/T_g) \Delta u_g \quad (5.1f)$$

onde M representa o coeficiente de inércia da máquina, T'_{do} é a constante de tempo transitória de circuito aberto do eixo d e ΔP_ℓ representa o desvio na carga. As equações que relacionam as variáveis na saída do gerador são:

$$\Delta P_{int} = K_1 \Delta\delta + K_2 \Delta E'_q \quad (5.1g)$$

$$\Delta V_t = K_5 \Delta\delta + K_6 \Delta E'_q \quad (5.1h)$$

onde ΔP_{int} é o desvio da potência injetada na linha de interligação e ΔV_t é o desvio na tensão terminal.

As constantes K_1, \dots, K_6 , obtidas a partir da linearização do sistema mostrado na figura 5.1, dependem do ponto de operação deste sistema e suas equações e juntamente com os valores dos parâmetros são dadas no apêndice A.

Na forma matricial (5.1) torna-se

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 377 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & a_{25} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{41} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{62} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ e_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta P_L \quad (5.2a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & 0 & c_{43} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \quad (5.2b)$$

onde os elementos a_{ij} , b_{ij} , e_i e c_{ij} são dados em (5.1), o vetor de estado é $x = (\Delta\delta, \Delta\omega, \Delta E_q', \Delta E_{fd}, \Delta P_m, \Delta P_g)^T$, o vetor de entrada é $u = (\Delta u_e, \Delta u_g)^T$ e o vetor de saídas é $y = (\Delta\omega, \Delta E_{fd}, \Delta VP_{int}, \Delta V_t)^T$.

Quando a demanda de carga varia, o ponto de operação muda e variações nos elementos $a_{21}, a_{23}, a_{31}, c_{31}, c_{33}, c_{41}$ e c_{43} são verificadas. Foi assunto neste trabalho que no ponto de operação nominal do sistema é:

$$V_t = 0,95 \text{ pu}$$

$$P_{int} = 0,90 \text{ pu}$$

$$\text{Fator de potência} = 0,85$$

Os valores nominais das matrizes $A(\mu)$ e $C(\mu)$ são

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 377 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0970 & 0 & -0,1155 & 0 & 0,1000 & 0 \\ -0,2849 & 0 & -0,5518 & 0,1695 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3,3333 & 3,3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12,5 \end{bmatrix}$$

$$C^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,9704 & 0 & 1,1551 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0380 & 0 & 0,4814 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para verificação do desempenho do observador, foi simulado seu comportamento em dois pontos de operação diferentes do nominal, a saber:

Ponto 1 - $V_t = 1,00 \text{ pu}$

$$P_{int} = 0,40 \text{ pu}$$

$$\text{Fator de potência} = 0,80$$

Ponto 2 - $V_t = 1,00 \text{ pu}$

$$P_{int} = 1,20 \text{ pu}$$

$$\text{Fator de potência} = 0,90$$

Nestas situações, os limites nas variações nos elementos de $A(\mu)$ e $C(\mu)$ são:

$$\begin{aligned} -0,0858 &\leq a_{21} \leq -0,1098 \\ -0,0776 &\leq a_{23} \leq -0,1369 \\ -0,1914 &\leq a_{31} \leq -0,3376 \\ 0,8579 &\leq c_{31} \leq 1,0982 \\ 0,7762 &\leq c_{33} \leq 1,3688 \\ 0,0657 &\leq c_{41} \leq -0,1221 \\ 0,5677 &\leq c_{43} \leq 0,4369 \end{aligned}$$

O objetivo é projetar um observador para o sistema (5.2) que possua um bom desempenho mesmo quando o ponto de operação do sistema varia.

5.3 - Projeto do Observador

Um observador para o sistema (5.2) pode ser projetado usando-se a equação (4.2) do capítulo anterior.

$$\dot{\hat{x}} = [A^* - K_1 C^*] \hat{x} + B^* u + K_1 C^* x \quad (5.3)$$

Se o par (C^*, A^*) é observável, então um ganho K_1 pode ser determinado de modo que os autovalores do observador (5.3) possam ser localizados arbitrariamente no plano complexo [18]. A verificação da observabilidade do par (C^*, A^*) é feita usando o procedimento descrito em [26].

Os autovalores escolhidos foram

$$\lambda_{1,2} = -11,1367 \pm j 1,2350$$

$$\lambda_{3,4} = -8,8633 \pm j 1,0319$$

$$\lambda_5 = -25$$

$$\lambda_6 = -12,5$$

e a matriz ganho do observador K_1 , calculada utilizando-se o programa computacional para o posicionamento de polos PPOLOS da biblioteca de programas do Laboratório de Controle da UFSC é dada por

$$K_1 = \begin{bmatrix} -10,9982 & 0 & 168,3098 & 44,2150 \\ 5,4482 & 0 & -0,1155 & 0,1459 \\ 247,9840 & 0 & -132,1626 & 38,0551 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,3506 & 3,8690 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso, o observador (5.3) fica projetado, e os estados do sistema (5.2) podem ser estimados. Contudo, conforme estabelecido no capítulo anterior, este observador pode ser melhorado, sob o ponto de vista da sensibilidade do erro de observação quanto às variações nos parâmetros do processo. O procedimento para se obter esta melhoria no comportamento do observador é dado no teorema 4.1.

A hipótese 1 é satisfeita pois (C^*, A^*) é observável. A hipótese 3 pode ser verificada facilmente. Escolhendo-se

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 0,0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22762,0 & 5193,0 \\ 0 & 0 & 5193,0 & 22762,0 \end{bmatrix}$$

o incremento ΔK na matriz ganho K_1 do observador é calculado resolvendo-se a equação matricial de Riccati (4.11). Esta equação é semelhante a (2.37), onde $A^T \rightarrow A$, $C^T \rightarrow B$, $V_1 \rightarrow D^T D$ e $V_2 \rightarrow R$.

A nova matriz ganho K_2 , obtida de (4.13) é dada por:

$$K_2 = \begin{bmatrix} 222,8600 & -0,1618 & 168,3098 & -44,2151 \\ 100,2745 & -0,0001 & -0,1155 & 0,1459 \\ 116,4935 & 0,2504 & -132,1626 & 38,0552 \\ -0,0001 & 78,0776 & 0 & 0 \\ 9,4812 & -0,0042 & -0,3506 & 3,8690 \\ 0,0747 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para se verificar o desempenho do observador duas simulações foram feitas com $u(t) \equiv 0$ e os estados iniciais do processo e do observador dados por

$$x(0) = (0,04; 0,1; 0,1; 1,0; 0,05; 0,1)^T$$

$$\hat{x}(0) = (-0,04; -0,1; -0,1; -1,0; -0,05; -0,1)^T$$

Na primeira simulação, efetuada somente para verificação do teorema 4.1, considerou-se $C(\mu) = C^*$ fixa. Os resultados apresentados na figura 5.2 mostram a evolução do erro de observação dos estados $\Delta\delta$, $\Delta\omega$, $\Delta E'_q$ e ΔP_m com o sistema operando no Ponto 1. As curvas identificadas como "observador 1" são obtidas a partir do observador com ganho K_1 e as identificadas como "observador 2" são obtidas usando K_2 . Pode-se verificar claramente que o observador projetado com ganho K_2 tem um melhor desempenho. Os erros nos estados ΔE_{fd} e ΔP_g não são afetadas quando os parâmetros variam.

Uma segunda simulação, de uma situação mais realística, foi feita considerando-se as variações na matriz C. Como mostrado na figura 5.3, o desempenho do observador de ganho K_2 piora bastante. Nesta simulação foi considerado o sistema operando no ponto 2 e também neste caso os estados ΔE_{fd} e ΔP_g não são afetados.

Surge então a necessidade de incluir-se no projeto do observador as variações na matriz C. O procedimento aqui adotado, é o mesmo apresentado no teorema 4.2. O observador projetado é usado para regular o sistema (5.2).

5.4 - Regulação do Sistema

Desde que o par (A^*, B^*) seja controlável, então existe uma lei de controle do tipo

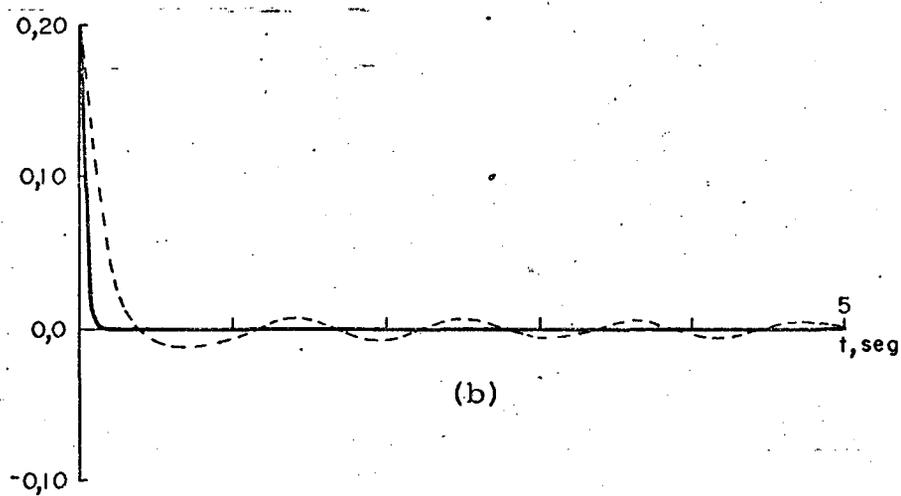
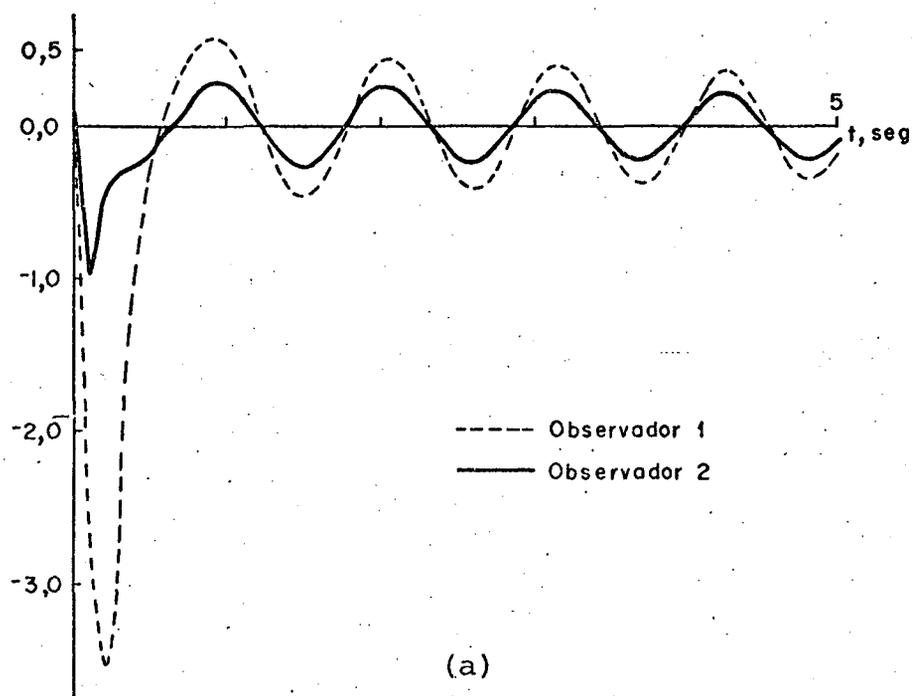


Figura 5.2 - Evolução do erro de observação com o sistema no ponto 1 e C fixa.

(a) erro na observação de $\Delta\delta$

(b) erro na observação de $\Delta\omega$

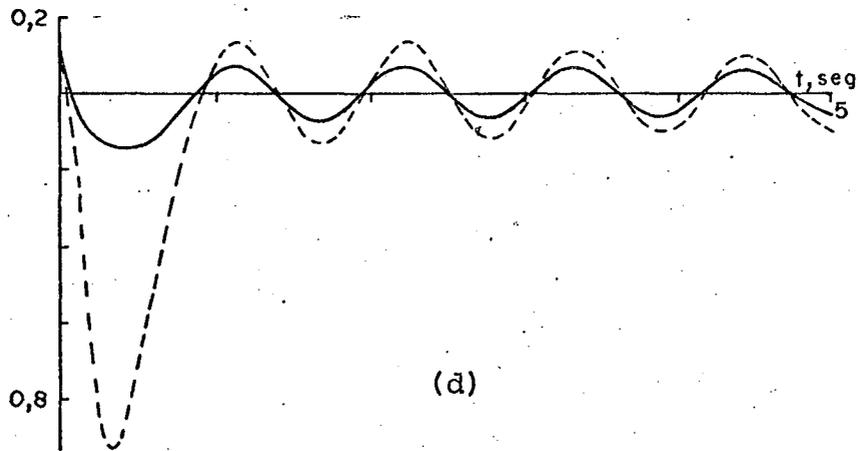
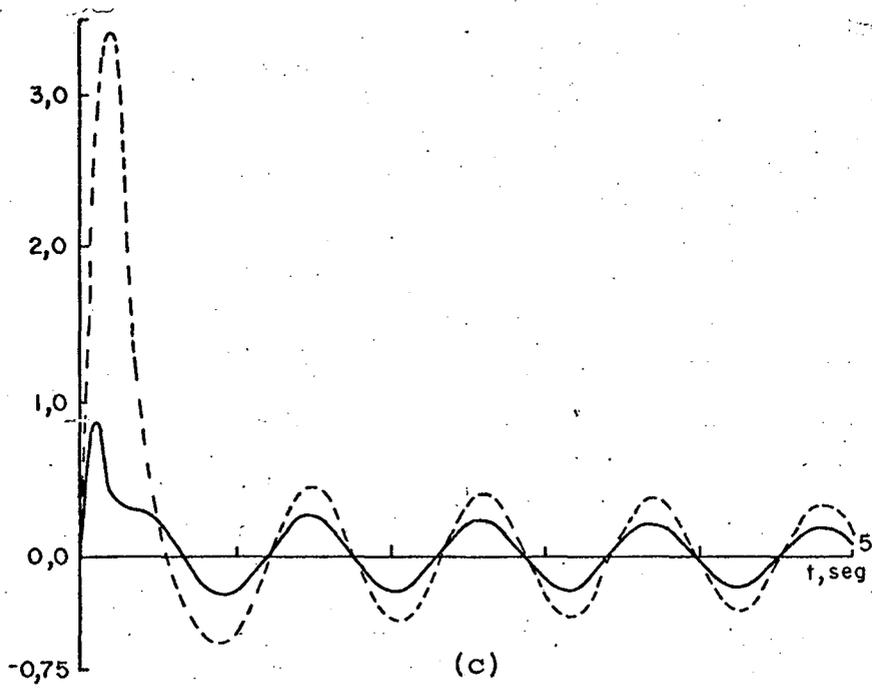


Figura 5.2 - (c) erro na observação de $\Delta E'_q$

(d) erro na observação de ΔP_m

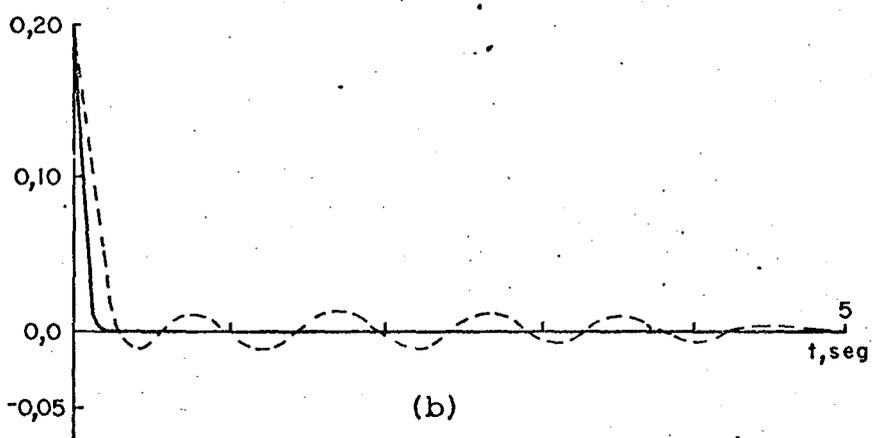
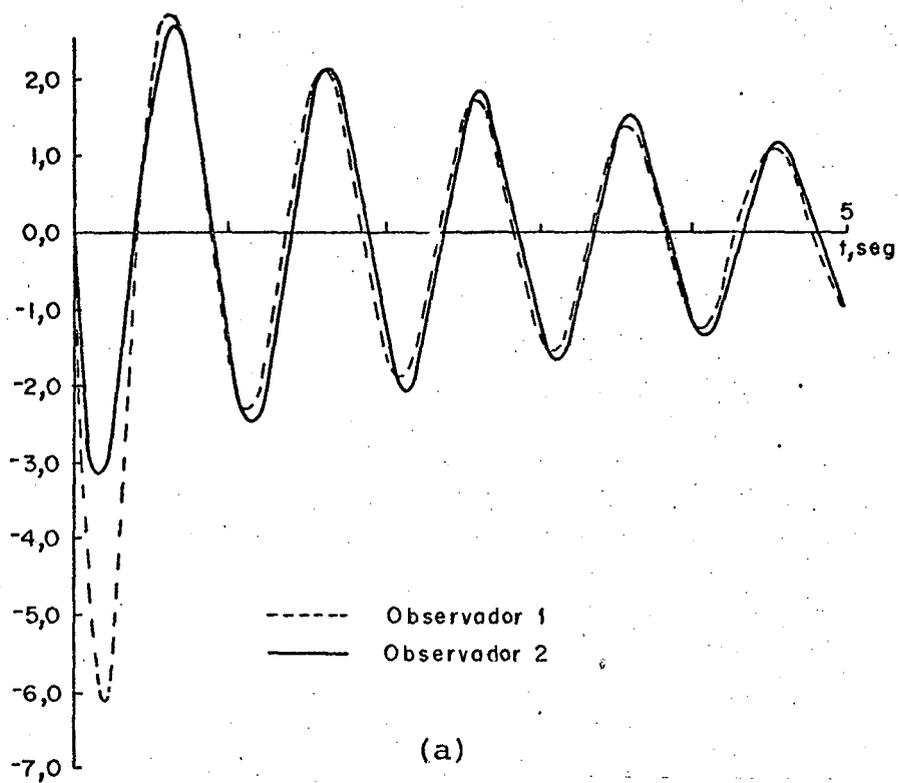


Figura 5.3 - Evolução do erro de observação com o sistema no ponto 2 e C variável.

(a) erro na observação de $\Delta\delta$

(b) erro na observação de $\Delta\omega$

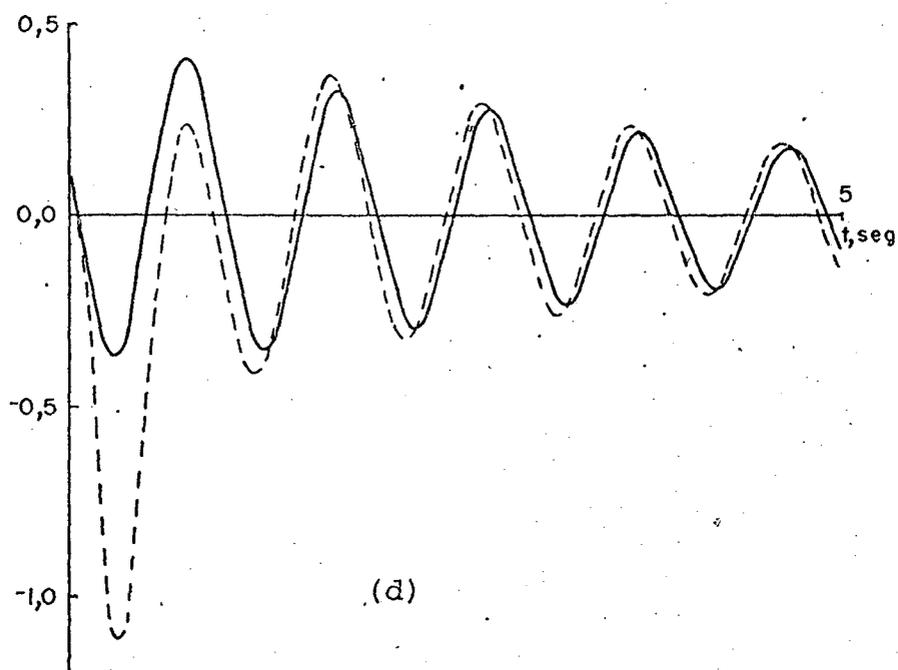
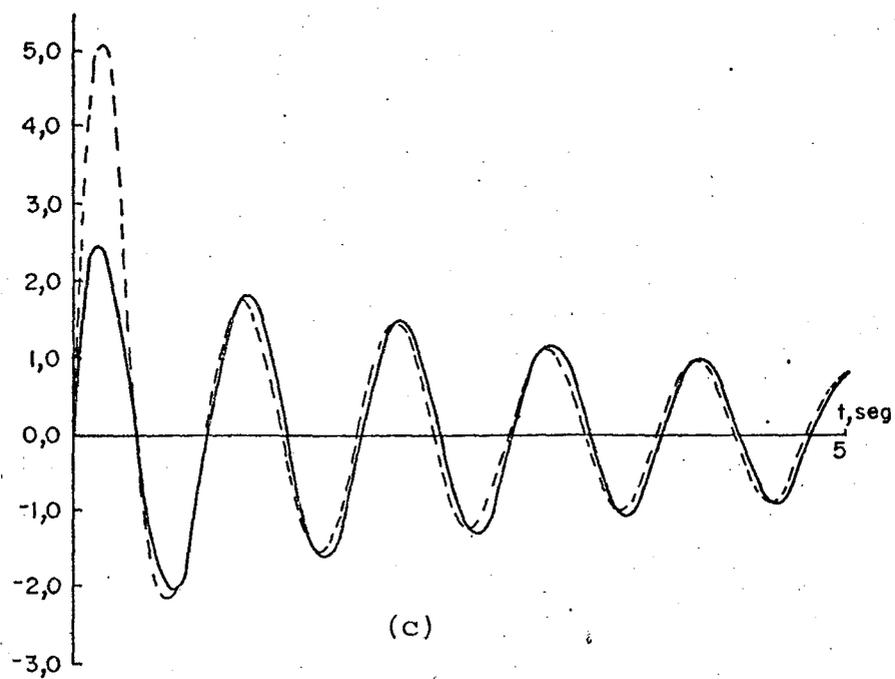


Figura 5.3 - (c) erro na observação de $\Delta E'_q$
(d) erro na observação de $\Delta P'_m$

$$u(t) = -Lx(t, \mu) \quad (5.4)$$

que irá estabilizar o sistema (5.2). Contudo, se este sistema não possui todos os estados mensuráveis, a lei de controle (5.4) não pode ser implementada.

Deve-se então estabelecer uma estimativa de $x(t, \mu)$ para que a lei de controle possa ser implementada. Como a matriz C varia, o observador apresentado na seção anterior não é um bom dispositivo para se obter $x(t, \mu)$. Entretanto, a estimação de um outro vetor de estado $z(t, \mu)$ pode ser obtida, na qual a influência das variações na matriz C é refletida nas matrizes A e B , onde é reduzida.

Observe que os sistemas (4.21) e (4.28) são equivalentes. Logo, tais sistemas possuem as mesmas respostas para estado inicial nulo e entrada nula [18]. Os estados $x(t, \mu)$ e $z(t, \mu)$ são definidos no mesmo espaço, mas suas bases são distintas. De (4.27) tem-se que

$$z(t, \mu) = P(\mu)x(t, \mu)$$

Para pequenas variações na matriz C , a matriz transformação $P(\mu)$ definida em (4.22) é tal que

$$\| P(\mu) \| < k_1 \quad (5.5a)$$

$$e \quad \| P^{-1}(\mu) \| < k_2 \quad (5.5b)$$

para todo μ , onde k_1 e k_2 são constantes finitas. Logo $P(\mu)$ é uma transformação de Lyapunov e os sistemas (4.21) e (4.28) são topo

logicamente equivalentes. Sob estas condições, se a lei de controle

$$u(t) = -L\hat{z}(t, \mu) \quad (5.6)$$

onde $\hat{z}(t, \mu)$ é a estimação de $z(t, \mu)$, estabiliza (4.28) então também irá estabilizar (4.21).

O sistema (4.28) pode ser escrito como

$$\dot{z} = \hat{A}(\mu)z + \hat{B}(\mu)u$$

$$y = C^*z$$

onde $\hat{A}(\mu) = P(\mu)A(\mu)P^{-1}(\mu)$; $\hat{B}(\mu) = P(\mu)B(\mu)$ e $\hat{A}^* = A^*$; $\hat{B}^* = B^*$ uma vez que $P^* = I$. A matriz de transformação $P(\mu)$ definida em (4.28) é dada por

$$P(\mu) = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & p_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & 0 & p_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

onde

$$p_{11} = 1 + 0,9419 \delta c_{31} - 2,26 \delta c_{41} \quad (5.8a)$$

$$p_{13} = 0,9419 \delta c_{33} - 2,26 \delta c_{43} \quad (5.8b)$$

$$p_{31} = 0,0744 \delta c_{31} + 1,8985 \delta c_{41} \quad (5.8c)$$

$$p_{33} = 1 + 0,0744 \delta c_{33} + 1,8985 \delta c_{41} \quad (5.8d)$$

e δc_{ij} representa a variação no elemento c_{ij} da matriz c .

Um observador para o sistema (4.28) é definido pela equação

$$\dot{\hat{z}} = A^* \hat{z} + B^* u + KC^* [z - \hat{z}] \quad (5.9)$$

Para determinação do ganho K , o teorema 4.1 é aplicado. Como $\hat{A}^* = A^*$ e $\hat{B}^* = B^*$, o ganho K_2 obtido na seção anterior pode ser utilizado no projeto do observador (5.9).

Nas simulações, o sistema encontra-se operando no ponto 2. Como o sistema (5.2) é estável em toda faixa de operação aqui estudada, para uma análise mais realística, comparou-se seu comportamento livre com aquele obtido a partir da regulação. A matriz ganho de realimentação escolhida é

$$L = \begin{bmatrix} -0,0011 & -0,6364 & 0,0004 & 0,0758 & -0,0046 & -0,0123 \\ -0,7884 & -128,2252 & -0,6495 & 25,1729 & -0,2129 & 0,1641 \end{bmatrix}$$

Esta matriz atenua um pouco as oscilações do sistema. Embora outra matriz L possa ser escolhida, para os objetivos aqui exigidos, considerou-se a matriz dada acima.

As curvas relativas as variáveis $\Delta\omega$, ΔV_t e ΔP_{int} são mostradas na figura 5.4. Pode-se verificar que a dinâmica do sistema é melhorada com a regulação via observador.

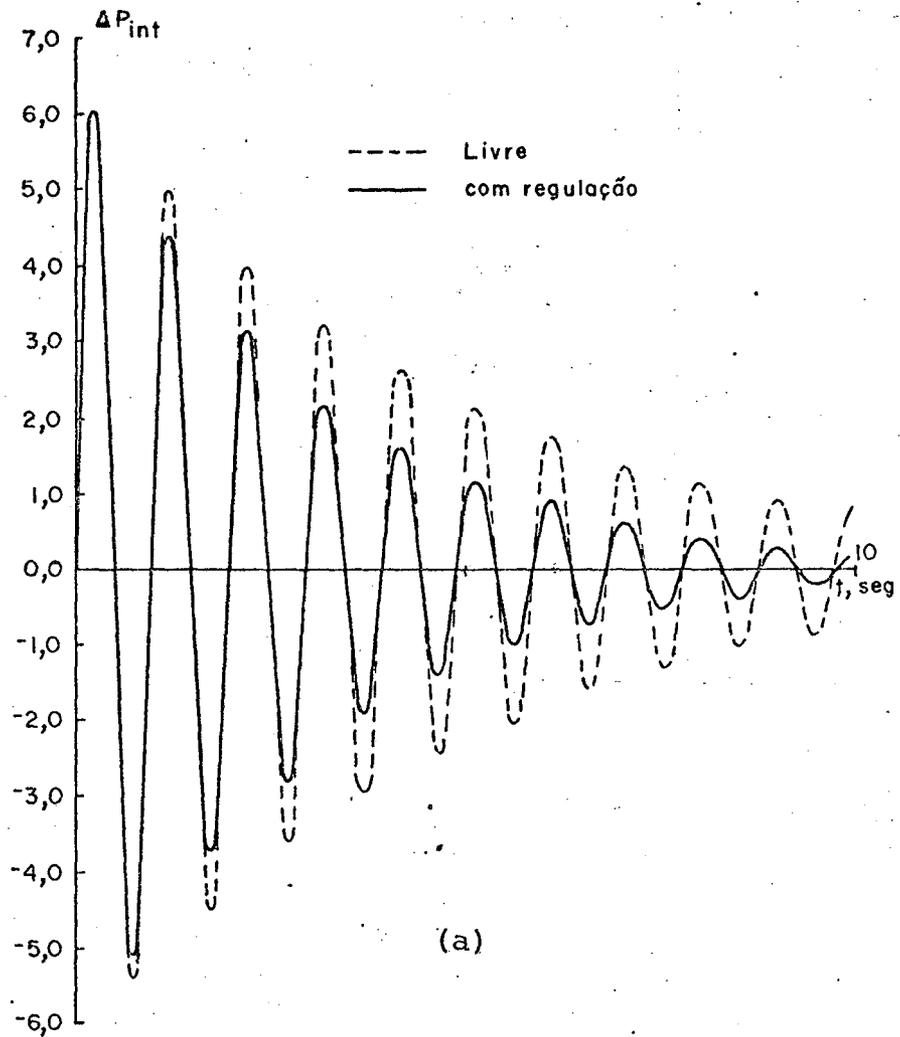
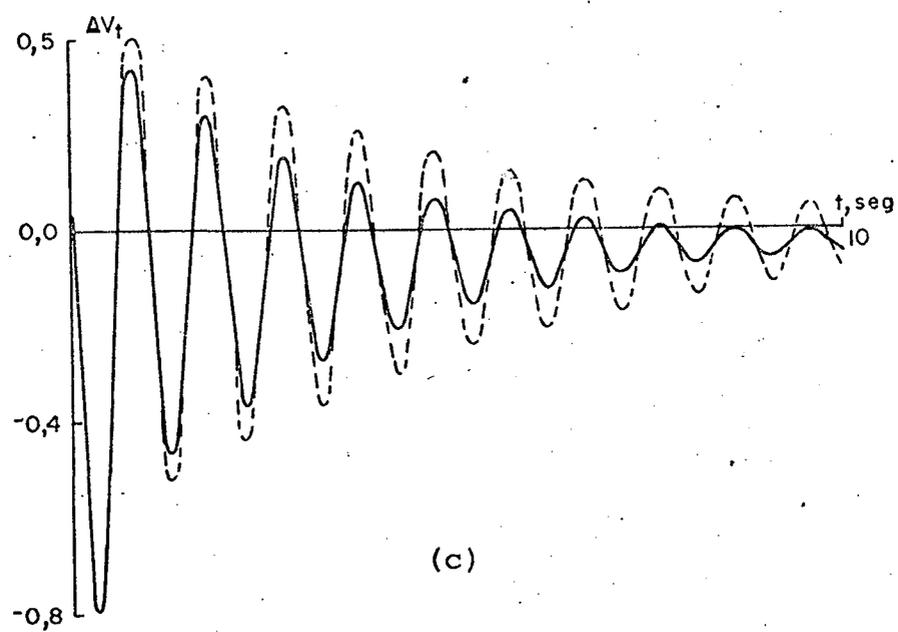
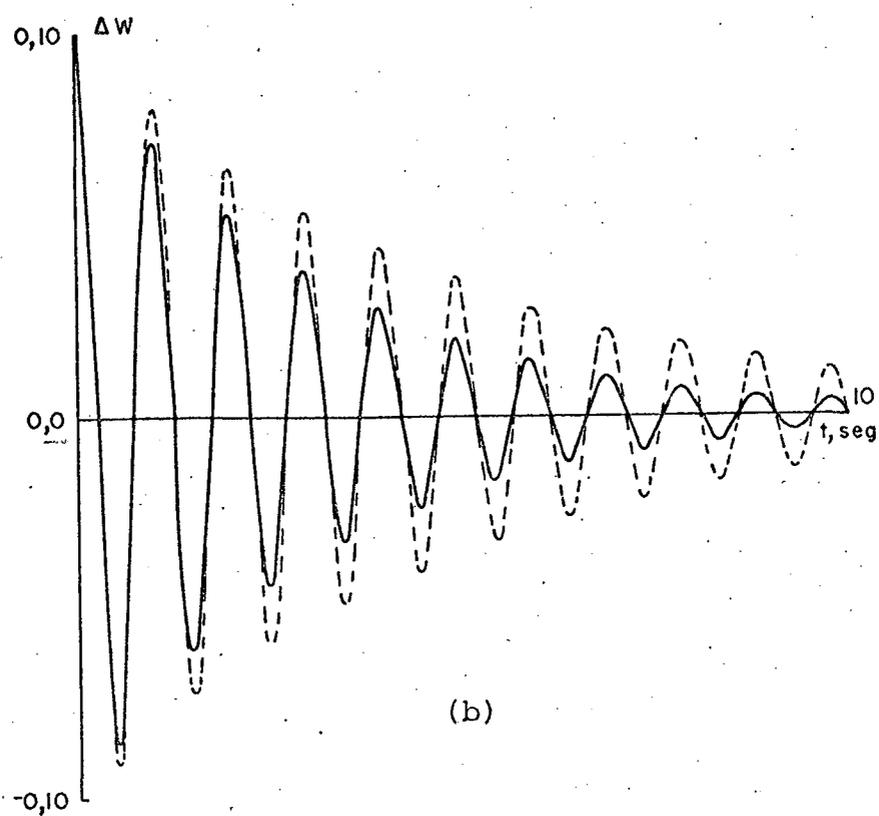


Figura 5.4 - Comportamento do sistema operando no ponto 2, com e sem regulação.

(a) Saída ΔP_{int}

Figura 5.4 - (b) Estado $\Delta\omega$ (c) Saída ΔV_t

5.5 - Conclusões

Neste capítulo foram apresentados diversos resultados relativos ao comportamento do observador em diferentes pontos de operação. Considerando a matriz C fixa, verificou-se que o observador projetado a partir do teorema 4.1, tem um melhor desempenho que um outro projetado sem levar em conta as variações nos parâmetros. Contudo, na presença de variações em C este desempenho é prejudicado.

Para regulação do sistema (5.2) empregou-se um observador no qual as variações em C são consideradas, a partir da transformação equivalente apresentada no teorema 4.2. Dos resultados obtidos conclui-se que o observador projetado pode ser usado para melhorar a dinâmica do sistema.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O trabalho aqui apresentado pode ser, em linhas gerais, dividido em duas partes.

Na primeira apresentou-se um procedimento para o projeto de um controlador que garante o rastreamento das saídas, a rejeição das perturbações e a redução da sensibilidade das trajetórias em sistemas lineares multivariáveis e invariantes no tempo sujeitos a variações em seus parâmetros.

Com isto solucionou-se uma questão não abordada na teoria do servomecanismo robusto, fazendo com que as trajetórias tenham uma boa característica mesmo quando os parâmetros variam. Dado um controle $u_1(t)$ projetado sem levar em conta as variações, obtém-se um novo controle $u_2(t)$, nominalmente equivalente a $u_1(t)$, mas menos sensível de acordo com um determinado critério de comparação das sensibilidades das trajetórias.

A teoria desenvolvida nesta primeira parte, foi aplicada para o controle dos movimentos de um helicóptero no plano vertical. Diversas simulações com entrada de perturbações em diferentes condições de operação e para diferentes sinais de referência foram apresentadas. Em todas as simulações efetuadas observou-se que o desempenho do controlador proposto é superior àquele obtido por um outro controlador onde as variações nos parâmetros não são levadas em conta. As magnitudes de controle requeridas fo

ram moderadas.

Resultados equivalentes obtidos em trabalhos anteriores exigem para implementação do controlador dispositivos sofisticados, tais como computadores, ao passo que o controlador aqui proposto é de fácil implementação.

Na segunda parte do trabalho, um resultado dual ao obtido para o controlador, foi apresentado com o objetivo de melhorar o projeto do observador em sistemas lineares multivariáveis e invariantes no tempo sujeitos a variações nos parâmetros.

Caso a matriz de saída do sistema sofra influência dos parâmetros, foi mostrado explicitamente a maneira pela qual essas variações podem ser refletidas nas matrizes A e B do sistema de modo a se ter a matriz C invariante. Isto não havia sido estabelecido claramente em trabalhos anteriores.

Uma aplicação foi feita na estimação dos estados de um sistema de potência máquina-bárra infinita. Desde que as condições estabelecidas no teorema 4.1 sejam satisfeitas, o desempenho do observador aqui proposto é nitidamente superior ao de um outro projetado sem considerar as variações nos parâmetros.

Para regulação do sistema, foi utilizado a estimação de um estado cujas equações dinâmicas são equivalentes a do sistema físico real e como sistemas são topologicamente equivalentes, as propriedades de estabilidade são mantidas e o desempenho do sistema melhorado com a regulação.

A partir das diversas simulações efetuadas, pode-se concluir que o observador aqui apresentado tem sua aplicação plenamente justificada. Sua implementação é tão simples quanto a do

observador de Luenberger.

Como sugestões para futuros trabalhos que dêem continuidade a esta linha de pesquisa, pode-se enumerar os seguintes tópicos:

- (1) A matriz de ponderação Z do critério de comparação da sensibilidade no projeto do controlador não pode ser especificada a priori. Uma boa redução da sensibilidade das trajetórias é obtida através de um processo de tentativas e erros. A matriz Z depende das matrizes de ponderação D e R da equação de Riccati. Uma forma de relacionar as matrizes D e/ou R com a sensibilidade das trajetórias é de considerável interesse prático.
- (2) Estudar a questão da síntese do controlador quando os estados não são disponíveis para realimentação. Considerar que os estados são estimados a partir do observador aqui apresentado. Verificar a questão do rastreamento das saídas e da rejeição das perturbações quando o erro de observação não tende assintoticamente para zero.
- (3) Dado o sistema

$$\dot{x}(t, \mu) = A(\mu)x(t, \mu) + B(\mu)u(t)$$

$$y(t, \mu) = C(\mu)x(t, \mu)$$

tratá-lo através das equações

$$\dot{x}(t, \mu) = A^*x(t, \mu) + B^*u(t) + v(t, \mu)$$

$$y(t, \mu) = C^*x(t, \mu) + h(t, \mu)$$

onde

$$v(t, \mu) = \delta A(\mu)x(t, \mu) + \delta B(\mu)u(t)$$

$$h(t, \mu) = \delta C(\mu)x(t, \mu)$$

e, considerando $v(t, \mu)$ e $h(t, \mu)$ entradas não conhecidas, projetar um observador para o sistema.

- (4) Realizar outras aplicações do controlador e do observador aqui propostos.

A P Ê N D I C E A

MODELO LINEARIZADO DO SISTEMA DE POTÊNCIA MÁQUINA-BARRA INFINITA

A.1 - Introdução

Este apêndice apresenta maiores detalhes a respeito do modelo utilizado no capítulo 5. O modelo matemático aqui apresentado pode também ser encontrado em [17].

A.2 - Máquina Síncrona

No estabelecimento das equações da máquina as seguintes suposições são feitas:

- (1) As tensões devido as variações dos fluxos nos eixos d e q são desprezíveis comparadas com as tensões de velocidade.
- (2) As tensões de velocidade são consideradas constantes.
- (3) Os efeitos amortecedores são desprezados, bem como os da saturação.
- (4) As resistências do estator e da linha de transmissão são desprezadas.
- (5) A máquina opera sob condições balanceadas de carga.

Estas suposições são justificadas porque as quantidades desprezadas produzem efeitos desprezíveis. Usando as equa

ções de Park, tem-se que

$$V_t^2 = V_d^2 + V_q^2$$

$$V_d = -X_q I_q$$

$$V_q = X_d' I_d + E_q'$$

$$P_e = V_d I_d + V_q I_q$$

$$T_{do}' \dot{E}_q = E_{fd} - E_q' + (X_d - X_d') I_d$$

$$M\ddot{\delta} = P_m - P_e - P_\ell$$

onde

V_d, I_d são, respectivamente, tensão e corrente de eixo direto-d

V_q, I_q são, respectivamente, tensão e corrente de eixo em quadratura-q

X_d e X_q são, respectivamente, as reatâncias de eixo d e q.

X_d' reatância transitória da máquina.

e as demais variáveis foram definidas no capítulo 5.

Tem-se ainda que

$$I_d = \frac{1}{X_d' + X_e} [V_\infty \cos \delta - E_q'']$$

$$I_q = \frac{1}{X_q + X_e} V_\infty \sin \delta$$

onde X_e é a reatância da linha de transmissão e V_∞ é a tensão na

barra infinita.

Observa-se portanto que as equações que descrevem a máquina são não lineares. As não linearidades são do tipo produto e trigonométricas. Para pequenas variações em torno de uma condição de operação, estas equações podem ser linearizadas, tornando-se

$$T'_{do} \Delta \dot{E}'_q = \Delta E_{fd} - (1/K_3) \Delta E'_q - K_4 \Delta \delta$$

$$M \Delta \ddot{\delta} = \Delta P_m - \Delta P_e - \Delta P_\ell$$

$$\Delta P_e = K_1 \Delta \delta + K_2 \Delta E'_q$$

$$\Delta V_t = K_5 \Delta \delta + K_6 \Delta E'_q$$

onde as constantes K_1 até K_6 são dadas por:

$$K_1 = \frac{1}{X_q + X_e} V_\infty E_{q0} \cos \delta_0 + \frac{X_d - X'_d}{X'_d + X_e} I_{q0} \sin \delta_0$$

$$K_2 = \frac{X_q + X_e}{X'_d + X_e} I_{q0}$$

$$K_3 = \frac{X_d + X_e}{X'_d + X_e}$$

$$K_4 = \frac{X_d - X'_d}{X'_d + X_e} V_\infty \sin \delta_0$$

$$K_5 = - \left[\frac{X'_d}{X'_d + X_e} \frac{V_{q0}}{V_{t0}} V_\infty \sin \delta_0 + \frac{X_q}{X_q + X_e} \frac{V_{d0}}{V_{t0}} V_\infty \cos \delta_0 \right]$$

$$K_6 = \frac{V_{q0}}{V_{t0}} \frac{X_e}{X'_d + X_e}$$

$$E_q = E'_q - (X_q - X'_d) I_d$$

A.3 - Excitatriz

É considerada aqui uma excitatriz a tiristor cujo modelo é dado por:

$$T_e \Delta \dot{E}_{fd} = -E_{fd} + k_e \Delta u_e$$

A.4 - Turbina e governadora

É considerada uma turbina a vapor sem reaquecimento movida por uma caldeira do tipo tambor, modelados por:

$$T_t \Delta \dot{P}_m = -\Delta P_m + \Delta P_g$$

$$T_g \Delta \dot{P}_g = -\Delta P_g + \Delta u_g$$

A.5 - Dados do sistema

Constantes da máquina

$$x_d = 1,70 \text{ pu}$$

$$x_q = 1,64 \text{ pu}$$

$$x'_d = 0,245 \text{ pu}$$

$$H = 5,0 \text{ KW.s/KVA}$$

$$T'_{do} = 5.90s$$

Linha de transmissão

$$x_e = 0,40 \text{ pu}$$

Excitatriz

$$k_e = 25$$

$$T_e = 0,04s$$

Turbina e governadora

$$T_t = 0,30s$$

$$T_g = 0,08s$$

A P Ê N D I C E B

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE RICCATI USANDO O CONCEITO
DE FUNÇÃO SINAL DE UMA MATRIZB.1 - Introdução

Neste apêndice é introduzido o conceito da função sinal de uma matriz, e uma aplicação é feita para resolução da equação de Riccati para sistemas contínuos. Os resultados aqui apresentados tem como objetivo tornar o texto mais completo. Contudo, para um estudo mais aprofundado deste assunto, é aconselhável consultar a referência [28].

B.2 - Definição da função sinal de uma matriz

Considere uma matriz A quadrada de dimensão n . Esta matriz é semelhante a sua forma de Jordan, ou seja,

$$A = MJM^{-1}$$

onde M é a matriz dos autovetores de A e a matriz J tem a seguinte estrutura

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & J_k \end{bmatrix} \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

onde o número de blocos de Jordan J_i associados com o autovalor λ_i é igual ao número de autovetores linearmente independentes relativos a λ_i .

A função sinal de um complexo z é definida por

$$f(z) \triangleq \operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } \operatorname{real}(z) > 0 \\ -1 & \text{se } \operatorname{real}(z) < 0 \end{cases}$$

onde a parte real de z é suposta não nula.

Se $f(z)$ é definida sobre o espectro de A , então

$$f(A) = Mf(J)M^{-1}$$

com

$$f(J) = \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(J_1) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \operatorname{sgn}(J_k) \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{sgn}(J_i) = \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(\lambda_i) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \operatorname{sgn}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

onde

$$\text{sgn}(J_i) = \begin{cases} I & \text{se real } (\lambda_i) > 0 \\ -I & \text{se real } (\lambda_i) < 0 \end{cases}$$

Logo, pode-se definir a matriz S de dimensão n da forma

$$s = \text{sgn}(A) = M \text{sgn}(J) M^{-1}$$

onde S é chamada função sinal da matriz A .

B.3 - Aplicação a resolução da equação de Riccati

Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

e o índice de desempenho

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

O controle por realimentação de estado que minimiza J é dado por

$$u = -R^{-1} B^T P x$$

com P satisfazendo a equação algébrica de Riccati,

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

sujeita as seguintes hipóteses:

$$1 - R^T = R, R > 0; Q^T = Q, Q > 0$$

2 - (A,B) controlável

3 - (C,A) observável

O problema consiste então na determinação de P. Seja a matriz hamiltoniana

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -V \\ P & I-PV \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & -\hat{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I-VP & V \\ -P & I \end{bmatrix}$$

onde $\hat{A} \triangleq (A - BR^{-1}B^T P)$ é a matriz de estado do sistema malha fechada e V é uma matriz simétrica, solução única da equação de Lyapunov:

$$\hat{A}V + V\hat{A}^T = -BR^{-1}B^T$$

Então é claro que

$$H = U \begin{bmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & -\hat{A} \end{bmatrix} U^{-1}$$

Das propriedades da função sinal, tem-se que:

$$\underline{\underline{S}} \text{gn}(H) = U \begin{bmatrix} \text{sgn}(\hat{A}) & 0 \\ 0 & \text{sgn}(-\hat{A}) \end{bmatrix} U^{-1}$$

Desde que \hat{A} é assintoticamente estável,

$$\text{sgn}(\hat{A}) = -I$$

então

$$S = U \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} U^{-1}$$

Introduzindo a matriz F , dada por

$$F = \frac{1}{2}(I + S)$$

e utilizando U , tem-se

$$F = \begin{bmatrix} VP & -V \\ -(I-PV)P & I-PV \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} F_1 & F_{12} \\ F_{21} & F_2 \end{bmatrix}$$

e como V é não singular, então

$$P = -F_{12}^{-1} F_1$$

A garantia que a matriz P calculada desta forma é tal que $P^T = P$; $P > 0$; P única e real $\lambda_i[\hat{A}] < 0$, é estabelecida por um teorema dado em [28], que será omitido aqui. Também nesta referência é apresentado um algoritmo para determinação da função sinal de uma matriz, a partir do qual um programa computacional foi desenvolvido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] FRANK, P.M., "Introduction to System Sensitivity Theory", Academic Press, New York, 1978.
- [02] CRUZ Jr., J.B., "Feedback Systems", McGraw-Hill, Inc., New York, 1972.
- [03] SUNDARARAJAN, N. & Cruz Jr., J.B., "Sensitivity Improvement of Semi-closed Loop Systems", Second IFAC Symposium on Multivariable Technical Control Systems, Duesseldorf, Germany, 1971.
- [04] SUNDARARAJAN, N., "Sensitivity Reduction in Aircraft Control Systems", IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, vol. AES-14, pg. 292-297, Março 1978.
- [05] CRUZ, Jr., J.B. & Sundararajan, N., "Sensitivity Reduction in Time-varying Linear and Non-linear Systems", Int.J. Control, vol. 15, nº 5, pg. 937-943, 1972.
- [06] GOURISHANKAR, V. & Zackowski, G.V., "Minimum Sensitivity Controllers with Application to VTOL Aircraft", IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, vol. AES-16, pg. 217-226, Março 1980.
- [07] SAMBANDAN, A. & Chandrasekharan, P.C., "Design of output feedback controller with Eigenvalue and Eigenvector In-

- sensitivity", Int. J.Control, vol. 33, nº 5, pg. 935-943, 1981,
- [08] OKADA, T., Kihara, M. & Motoyama, K., "Sensitivity Reduction by Double Perfect Model Following", IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, vol. AES-18, pg. 29-38, Janeiro 1982.
- [09] HOWZE, J.W. & Cavin, III, R.K., "Regulator Design with Modal Insensitivity", IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-24, pg. 466-469, Junho 1979.
- [10] GOMATHI, K., Prabhu, S.S. & Pai, M.A., "A Suboptimal Controller for Minimum Sensitivity of Closed Loop Eigenvalues to Parameter Variations", IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-25, pg. 587-588, Junho 1980.
- [11] FLEMING, P.J., "Desensitizing Constant Gain Feedback Linear Regulators", IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-23, pg. 933-936, Outubro 1978.
- [12] DAVISON, E.J., "The Robust Control of a Servomechanism Problem for Linear Time-invariant Multivariable Systems", IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-21, pg. 25-34, Fevereiro 1976.
- [13] NARENDRA, K.S. & Tripathi, S.S., "Identification and Optimization of Aircraft Dynamics", J. of Aircraft, vol. 10, pg. 193-199, Abril 1973.

- [14] Stengel, R.F., Broussard, J.R. & Berry, P.M., "Digital Controllers for VTOL Aircraft", IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, vol. AES-14, pg. 54-63, Janeiro 1978.
- [15] PORTER, W.A., "The Interrelationship Between Observers and System Sensitivity", IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-22, pg. 144-146, Fevereiro 1977.
- [16] MARTINS Neto, A.F., "Redução da Sensibilidade de Observadores para Sistemas Lineares", 4º Congresso Brasileiro de Automatica, vol. 1, pg. 53-55, Campinas, São Paulo, Setembro 1982.
- [17] ANDERSON, P.M. & Fouad A.A., "Power System Control and Stability", The Iowa State University Press, Ames-Iowa, 1977.
- [18] CHEN, C.T., "Introduction to Linear System Theory", Holt, Rinehart and Winston, INC., New York, 1970.
- [19] DESOER, C.A. & Wang, Y.T., "Linear Time-Invariant Robust Servomechanism Problem: A Self-Contained Exposition", Memorandum No. UCB/ERL M77/50, Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, Agosto 1977.

- [20] ALVES, D.B., "Algebra Linear e Matrizes", Publicação Interna, UFSC.
- [21] CRUZ, Jr., J.B. & Perkins, W.R., "A New Approach to the Sensitivity Problem in Multivariable Feedback System Design", IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-10, pg. 216-223, Julho 1964.
- [22] KREINDLER, E., "Closed-Loop Sensitivity Reduction of Linear Optimal Control Systems", IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-13, pg. 254-262, Junho 1968.
- [23] KREINDLER, E. & Jameson, A., "On Criteria for Closed Loop Sensitivity Reduction", J. Math. Anal. Appl., vol.37, pg. 457-466, Fevereiro 1972.
- [24] SUNDARARAJAN, N. & Cruz Jr., J.B., "Trajectory Insensitivity of Optimal Feedback Systems", IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-15, pg. 663-665, Dezembro 1970.
- [25] MELO, J.D. & Singh, S.N., "Reducción de Sensibilidad en Sistemas Lineales sujetos a Variaciones en los Parámetros y Entrada de Perturbaciones", VIII Simposio Nacional de Control Automatico, Buenos Aires, Argentina, Setembro 1982.
- [26] DAVISON, E.J., Gesing, W. & Wang, S.H., "An Algorithm for Obtaining the Minimal Realization of a Linear Time-Invariant System and Determining if a System is Stabilizable-

- Detectable", IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-23, pg. 1048-1054, Dezembro 1978.
- [27] WANG, S.H. & Davison, E.J., "An Algorithm for the Calculation of Transmission Zeros of the System (C,A,B,D) Using High Gain Output Feedback", IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-23, pg. 738-741, Agosto 1978.
- [28] BARRAUD, A. Y., "Investigations Autour de la Fonction Signe d'une Matrice. Application a L'Equation de Riccati", R.A.I.R.O Automatique/Systems Analysis and Control, vol. 13, pg. 335-368, 1979.
- [29] MELO, J.D. & Singh, S.N., "Sensitivity Reduction and Robust Tracking with Application to Aircraft Control", The 22nd IEEE Conference on Decision and Control, San Antonio, Texas, Dezembro 1983 (a ser publicado).
- [30] MURPHY, R.D. & Narendra, K.S., "Design of Helicopter Stabilization Systems Using Optimal Control Theory", J. Aircraft, vol. 6, pg. 129-136, Março-Abril 1969.
- [31] HOLTZMAN, J.M., "Nonlinear Systems Theory: A Functional Analysis Approach", Prentice-Hall, New Jersey, 1970.
- [32] LUENBERGER, D.G., "An Introduction to Observers", IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-16, pg. 596-602, Dezembro 1971.

- [33] KWAKERMAAK, H. & Sivan, R., "Linear Optimal Control Systems", John Wiley & Sons, New York, 1972.