

CONTRIBUIÇÃO A RESOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA  
DE DISTRIBUIÇÃO DE VIAGENS

Amir Mattar Valente

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS  
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO  
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovado por:

---

Profa. Lourdes Zmetek Granja  
(Orientadora)

---

Prof. Félix Mora-Camino

---

Prof. Wando Pereira Borges

---

Prof.ª Maria Cristina Fogliatti de  
Sinay

RIO DE JANEIRO-RJ-BRASIL

JUNHO DE 1983

## AGRADECIMENTOS

À Professora Lourdes Zmetek Granja, por sua dedicação na orientação deste trabalho.

Aos Professores Félix Mora-Camino e José Coimbra pelo apoio e estímulo.

Aos Professores Antônio Carlos Werner e Ismael Ulyssea Neto pela compreensão e incentivo ao longo da minha permanência no NDTT/UFSC.

Ao Economista Wando Borges (GEIPOT) e a Professora Maria Cristina Fogliatti de Sinay (IME) pela participação na banca examinadora.

À todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização de minha tese.

## RESUMO

O presente estudo tem como objetivo principal contribuir à resolução numérica do problema de distribuição de viagens.

A resolução é feita aqui, através da utilização dos modelos entrópicos restrito e irrestrito. Para isto foram elaborados programas computacionais em linguagem FORTRAN e criados dados referentes a redes com diferentes números de zonas.

Os resultados obtidos dão condições de analisar a viabilidade computacional dos modelos que até agora ainda não tinham sido testados numericamente e a eficiência dos métodos de resolução, bem como a validade da utilização da teoria da dualidade da programação geométrica.

O estudo aborda:

- . Conceitos de entropia, suas aplicações aos transportes e suas propriedades.
- . Alguns modelos da distribuição de viagens usualmente utilizados, sendo o método de Furness estudado mais detalhadamente.
- . Alguns métodos de resolução do modelo entrópico.

Além disto, é apresentada uma seqüência dos principais passos que são dados num estudo de planejamento, de forma a enquadrar a aplicação do modelo entrópico restrito, dentro deste contexto.

## ABSTRACT

The main objective of this study is to contribute to the numerical resolution of the problem of distribution of trips. A data related to different sizes of nets was generated and applied to the restricted and unrestricted entropy models presented in (GRANJA<sup>12</sup>).

The results here obtained allowed the author to analyse the computing feasibility of the models as well as the precision of the methods of resolution inasmuch as the validity of the utilization of the Duality Theory of Geometric Programming.

This study also covers:

- . Concepts and properties of entropy as well as its applications to transportation.
- . Some models of distribution of trips usually utilized, with a detailed study of Furness' method.
- . Some methods of resolution of the entropy model.

A sequence of the main steps needed in the planning stage is included in order to incorporate the application of the restricted entropy model within this context.

## ÍNDICE

	Pág.
INTRODUÇÃO GERAL .....	1
CAPÍTULO I – PREVISÃO DA DISTRIBUIÇÃO ESPACIAL DAS VIAGENS	
I.1 – INTRODUÇÃO .....	3
I.2 – MATRIZ ATUAL DE DISTRIBUIÇÃO .....	4
I.3 – CLASSIFICAÇÃO DAS VIAGENS .....	5
I.4 – MODELOS DE DISTRIBUIÇÃO DE VIAGENS .....	7
I.4.1 – Método de Fatores de Crescimento .....	9
I.4.1.1 – Método de Fator de Crescimento Uniforme .....	10
I.4.1.2 – Método do Fator Médio .....	10
I.4.1.3 – Método de Detroit .....	10
I.4.1.4 – Método de Fratar .....	11
I.4.1.5 – Método de Furness .....	11
I.4.2 – Modelos de Simulação .....	15
I.4.2.1 – Modelo Gravitacional .....	15
I.4.2.2 – Modelo de Oportunidades Intervenientes .....	19
I.4.2.3 – Modelo de Oportunidades Competidoras .....	21
I.4.3 – Modelos de Otimização .....	22
I.4.3.1 – Modelo de Hitchcock .....	22
I.4.3.2 – Modelos Entrópicos .....	24
I.5 – Conclusão .....	25
CAPÍTULO II – MODELOS ENTRÓPICOS DE DISTRIBUIÇÃO DE VIAGENS	
II.1 – INTRODUÇÃO .....	26
II.2 – ENTROPIA .....	27
II.3 – MODELO ENTRÓPICO RESTRITO .....	32
II.3.1 – Formulação do Problema .....	32
II.3.2 – Reformulação e Solução do Problema pela Programação Geométrica .....	41
II.3.3 – Sensibilidade da População ao Custo de Deslocamento .....	44
II.4 – MODELO ENTRÓPICO IRRESTRITO .....	48
II.5 – O MODELO ENTRÓPICO RESTRITO E O PLANEJAMENTO DE TRANSPORTES .....	48
II.6 – CASOS ESPECIAIS .....	53

II.7 – CONCLUSÃO .....	56
<b>CAPÍTULO III – ALGORITMOS DE RESOLUÇÃO DO MODELO ENTRÓPICO</b>	
<b>RESTRITO</b>	
III.1 – INTRODUÇÃO .....	57
III.2 – MÉTODO DO GRADIENTE .....	57
III.2.1 – Apresentação .....	57
III.2.2 – Utilização do Método do gradiente para a Resolução do Modelo Entrópico	
Irrestrito .....	60
III.2.2.1 – Formulação .....	60
III.2.3 – Utilização do Método do Gradiente para a Resolução do Modelo Entrópico	
Restrito .....	63
III.2.3.1 – Formulação .....	63
III.3 – MÉTODO DO GRADIENTE PROJETADO .....	64
III.4 – MÉTODO DO SIMPLEX-CONVEXO .....	66
III.4.1 – Apresentação .....	66
III.4.2 – Utilização do Método do Simplex-Convexo para a Resolução do Modelo	
Entrópico Restrito .....	70
III.4.2.1 – Formulação .....	70
III.4.2.2 – Convergência .....	76
III.5 – CONCLUSÃO .....	76
<b>CAPÍTULO IV – APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS COMPUTACIONAIS E</b>	
<b>ANÁLISE DO MÉTODO DE FURNESS COM O MÉTODO DO GRADIENTE</b>	
<b>APLICADO AO MODELO ENTRÓPICO SEM RESTRIÇÃO DE CUSTO</b>	
IV.1 – INTRODUÇÃO .....	78
IV.2 – MÉTODO DE FURNESS .....	79
IV.2.1 – Aplicação Numérica .....	79
IV.2.1.1 – Apresentação .....	79
IV.2.1.2 – Programação Computacional .....	79
IV.2.1.3 – Entrada .....	80
IV.2.1.3.1 – Para o número de zonas (N) = 5 .....	80
IV.2.1.3.2 – Para o número de zonas (N) = 15 .....	81
IV.2.1.3.3 – Para o número de zonas (N) = 30 .....	82
IV.2.1.4 – Saída .....	84

IV.3 – MODELO ENTRÓPICO SEM RESTRIÇÃO DE CUSTO .....	85
IV.3.1 – Aplicação Numérica .....	85
IV.3.1.1 – Apresentação .....	85
IV.3.1.2 – Programação Computacional .....	85
IV.3.1.3 – Entrada .....	86
IV.3.1.3.1 – Para o número de zonas (N) = 5 .....	86
IV.3.1.3.2 – Para o número de zonas (N) = 15 .....	88
IV.3.1.3.3 – Para o número de zonas (N) = 30 .....	89
IV.3.1.4 – Saída .....	91
IV.3.1.5 – Convergência .....	91
IV.4 – RESULTADOS COMPARATIVOS DA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE DISTRIBUIÇÃO DE VIAGENS .....	92
IV.5 – CONCLUSÃO .....	95
CAPÍTULO V – APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS COMPUTACIONAIS OBTIDOS NA RESOLUÇÃO DO MODELO ENTRÓPICO RESTRITO	
V.1 – INTRODUÇÃO .....	97
V.2 – MODELO ENTRÓPICO RESTRITO – RESOLUÇÃO NUMÉRICA UTILIZANDO O MÉTODO DO GRADIENTE .....	97
V.2.1 – Justificativa .....	97
V.2.2 – Apresentação .....	98
V.2.3 – Programação Computacional .....	98
V.2.4 – Entrada .....	99
V.2.5 – Saída .....	103
V.2.6 – Convergência .....	103
V.3 – ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS COM A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA ATRAVÉS DO USO DO MÉTODO DO GRADIENTE .....	105
V.4 – CONCLUSÃO .....	108
CONCLUSÃO GERAL .....	110
ANEXO 1 – MÉTODO DE FURNESS	
1.1 – PROGRAMA COMPUTACIONAL .....	111
1.2 – RELATÓRIO DE SAÍDA: NÚMERO DE ZONAS = 5 .....	115
1.3 – RELATÓRIO DE SAÍDA: NÚMERO DE ZONAS = 15 .....	116
1.4 – RELATÓRIO DE SAÍDA: NÚMERO DE ZONAS = 30 .....	118

ANEXO 2 – MODELO ENTRÓPICO IRRESTRITO: MÉTODO DO GRADIENTE	
2.1 – PROGRAMA COMPUTACIONAL .....	121
2.2 – RELATÓRIO DE SAÍDA: NÚMERO DE ZONAS = 5 .....	129
2.3 – RELATÓRIO DE SAÍDA: NÚMERO DE ZONAS = 15 .....	130
2.4 – RELATÓRIO DE SAÍDA: NÚMERO DE ZONAS = 30 .....	131
ANEXO 3 – MODELO ENTRÓPICO RESTRITO: MÉTODO DO GRADIENTE	
3.1 – PROGRAMA COMPUTACIONAL .....	133
3.2 – RELATÓRIO DE SAÍDA: NÚMERO DE ZONAS = 5 .....	146
3.3 – RELATÓRIO DE SAÍDA: NÚMERO DE ZONAS = 15 .....	148
3.4 – RELATÓRIO DE SAÍDA: NÚMERO DE ZONAS = 30 .....	150
BIBLIOGRAFIA .....	153

## INTRODUÇÃO GERAL

No presente trabalho, são apresentados resultados de um estudo cujo objetivo principal foi desenvolver com base em (GRANJA<sup>12</sup>), métodos computacionais eficientes incluindo programas em linguagem FORTRAN e dados de demanda por transportes que permitam resolver o problema da distribuição de viagens através de Modelos Entrópicos Restrito e Irrestrito

Compara-se a eficiência computacional do modelo entrópico irrestrito com o Método de *Furness*.

- Para o caso restrito considera-se a sensibilidade da população ao custo de transporte e as restrições que possam vir a serem impostas pelo planejador.

Também é analisada a validade da utilização da teoria da dualidade da programação geométrica para a resolução dos problemas em estudo.

Para uma melhor compreensão e apresentação deste trabalho, o mesmo foi dividido conforme abaixo descrito:

No primeiro capítulo, são descritos alguns dos principais modelos de distribuição de viagens, que podem ser utilizados no planejamento obedecendo-se uma classificação que os divide em métodos de fatores de crescimento, modelos de simulação e modelos de otimização.

No segundo capítulo são apresentados os modelos entrópicos, precedidos por uma revisão dos conceitos de entropia aplicados aos estudos de transportes. Em seguida aborda-se o tema da sensibilidade da população ao custo de deslocamento. É feita também uma colocação do problema num contexto geral de técnicas que vão sequencialmente sendo aplicadas num estudo de planejamento.

No terceiro capítulo são vistos alguns métodos, que podem ser utilizados para a resolução do problema, destacando-se os do gradiente e do simplex-convexo.

No quarto capítulo são apresentados resultados computacionais de problemas resolvidos pelo Método *Furness* e pelo Modelo Entrópico Irrestrito. Através do método do gradiente, fazendo-se uma comparação a respeito da eficiência dos mesmos.

No quinto capítulo são apresentados resultados computacionais de problemas resolvidos pelo Modelo Entrópico Restrito, utilizando-se o método de gradiente aplicado a teoria da dualidade da programação geométrica. São estudados vários casos de dimensões de redes, de forma a fornecer ao interessado uma visão mais abrangente sobre o método. Quanto à utilização do método do simplex-convexo para a resolução do problema, são feitos comentários a este respeito.

Finalmente são apresentados os anexos onde constam os programas computacionais e os relatórios de saída dos mesmos.

## CAPÍTULO I – PREVISÃO DA DISTRIBUIÇÃO ESPACIAL DAS VIAGENS

### I.1 - INTRODUÇÃO

O problema da previsão de distribuição espacial de viagens ocupa um espaço bastante importante no processo de elaboração de planos de transporte.

Quanto mais exata for esta etapa, maior precisão teremos na repartição modal, alocação de viagens na rede e nas alternativas e soluções referentes aos planos.

Em função disto, pesquisas tem sido feitas e diversos modelos de distribuição foram surgindo e sofrendo aperfeiçoamentos e derivações. Este trabalho é mais uma contribuição dentro deste tema.

Através da delimitação da área de estudo, zoneamento desta área e levantamento de dados nestas zonas (MELLO<sup>18</sup>), entre outras coisas, pode-se chegar a determinação de uma matriz de viagens atual, entre diversos pares de zonas desta área.

Para efeito de planejamento, dados de geração e atração de viagens são projetados e aí então temos o recurso dos modelos de distribuição, que depois de calibrados, recebem os dados projetados e nos fornecem a matriz futura de distribuição de viagens.

Têm-se então condições de executar as etapas seguintes de um planejamento, que fogem da abordagem do presente trabalho.

### II.2 – MATRIZ ATUAL DE DISTRIBUIÇÃO

Após se fazer o zoneamento e todos os levantamentos necessários, pode-se montar a matriz atual de distribuição de viagens que se apresenta da seguinte forma:

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1j} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2j} \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ t_{i1} & t_{i2} & \dots & t_{ij} \end{bmatrix} \quad (\text{I.1})$$

Sendo que:

$$\sum_{j=1}^N t_{ij} = O_i \quad (\text{I.2})$$

$$\sum_{i=1}^N t_{ij} = D_j \quad (\text{I.3})$$

$$\sum_{i=1}^N O_i = \sum_{j=1}^N D_j = T \quad (\text{I.4})$$

Onde:

$t_{ij}$  = Número de viagens com origem na zona  $i$  e destino na zona  $j$ , num determinado intervalo de tempo.

$O_i$  = Número de viagens que tem origem na zona  $i$ .

$D_j$  = Número de viagens que tem destino na zona  $j$ .

$N$  = Número de zonas que compõem a área em estudo.

$T$  = Número total de viagens na área em estudo, num determinado intervalo de tempo.

Algumas vezes as viagens referem-se ao total de deslocamentos por pessoas ou produtos, outras vezes, ao número de veículos que se deslocam.

O número de viagens é estimado para um determinado período de tempo e pode indicar, por exemplo, a movimentação média de um dia útil qualquer da semana, ou de uma hora de pico; temos,

portanto que trabalhar com uma unidade de medida de um fluxo.

No planejamento regional do transporte de carga, é mais interessante que se considere matrizes de distribuição desagregadas por produto, pois isto virá a facilitar a repartição modal e a alocação destas cargas dentro da rede viária em estudo; já que a demanda futura por transportes varia muito de produto para produto, de acordo com mudanças na economia, alteração de safras, novas necessidades ou anseios por parte da população consumidora, etc.

### I.3 – CLASSIFICAÇÃO DAS VIAGENS

De acordo com os movimentos entre as zonas e a Linha de Contorno, temos a seguinte classificação das viagens de interesse para o estudo:

$T_1$  = Viagem interna-interna, intra-zonal. Tem origem e destino dentro de uma mesma zona pertencente à área de estudo.

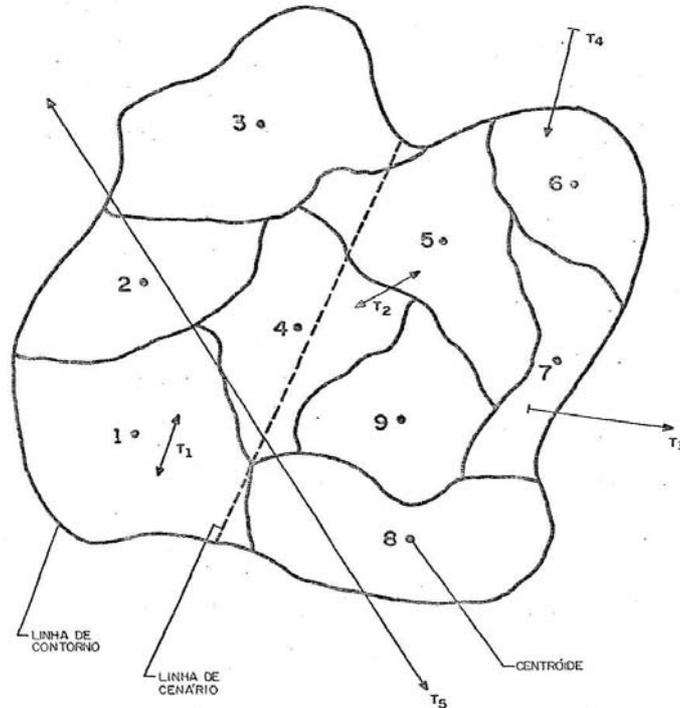


FIGURA I.1 – CLASSIFICAÇÃO DE VIAGENS

$T_2$  = Viagem interna-interna, inter-zonal. Tem origem e destino em zonas diferentes, porém pertencentes a uma mesma área de estudo.

$T_3$  = Viagem interna-externa. Tem origem numa zona pertencente a área de estudo e destino externo a esta área.

$T_4$  = Viagem externa-interna. Tem origem externa, porém destino numa determinada zona interna a área de estudo.

$T_5$  = Viagem externa-externa. Tem origem e destino fora da área de estudo, porém atravessa esta área.

As viagens internas-internas devem ser estudadas com maior atenção, pois geralmente apresentam um maior volume de tráfego e representam o tráfego local.

As viagens externas-externas são as mais longas e normalmente feitas por veículos pesados. Pelos transtornos que elas podem causar, deve-se evitar que atravessem os centros urbanos.

#### I.4 – MODELOS DE DISTRIBUIÇÃO DE VIAGENS

Antes de se abordar alguns modelos de distribuição de viagens, é importante que se diga o que vem a ser um modelo.

Um modelo de uma situação é simplesmente uma representação de nossa compreensão da situação correspondente do mundo real.

Esta situação pode ser um evento, um processo, um sistema, etc.

Para uma maior facilidade de manuseio destes modelos, seja na utilização para pesquisa ou para fins práticos, eles devem refletir a realidade procurando ser uma representação simples da mesma, utilizando os fatores mais relevantes, sempre levando em consideração os fins para os quais eles foram criados.

É importante observar que a construção de um modelo pressupõe o uso de uma teoria que explica as partes ou o todo do relacionamento estabelecido do mesmo. Como consequência, as previsões e as soluções que vierem a ser feitas serão deduzidas da teoria. Segundo Harris, um modelo é um projeto experimental baseado sobre uma teoria.

No nosso caso em estudo, queremos modelar o processo de distribuição de viagens, seja de pessoas ou produtos, para que possamos projetar situações futuras desta distribuição e solucionar da melhor forma possível esta etapa, para que o planejamento seja relevante e de bons resultados, que venham a justificar o estudo.

Utilizando os modelos, obteremos uma matriz de viagens interzonais futura, com a seguinte configuração:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1j} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2j} \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ T_{i1} & T_{i2} & \dots & T_{ij} \end{bmatrix} \quad (I.5)$$

Onde  $T_{ij}$  é o número estimado de viagens futuras entre  $i$  e  $j$ .

As restrições são análogas àquelas apresentadas na matriz de distribuição atual de viagens.

Esta matriz futura pode também ser obtida através de Métodos Numéricos.

Estes métodos já são bastante conhecidos e fartos em nossa literatura (MELLO<sup>18</sup>), cabendo aqui somente a citação dos mesmos e alguns comentários.

#### I.4.1 – Métodos de Fatores de Crescimento

Baseiam-se numa extrapolação da distribuição existente, através de fatores de crescimento. O objetivo geral destes métodos é então encontrar de forma iterativa, os valores destes multiplicadores, que a partir de uma matriz inicial  $[T_{ij}^{(0)}]$ , formam os elementos da matriz de previsão de viagens  $[T_{ij}]$ .

Entre estes métodos, tem-se:

##### I.4.1.1 – Método do fator de crescimento uniforme.

De acordo com este método, cada área estudada tem um crescimento uniforme de período a período. O fator de crescimento é representado por  $F_c$ , que pode ser único para todas as zonas de uma determinada área.

Na prática este método quase não é mais utilizado visto que as diferentes zonas de uma área, não se desenvolvem da mesma forma.

##### I.4.1.2 – Método do Fator Médio.

Este método leva em consideração as relações de crescimentos individuais das diversas zonas.

O fator  $F_c$  é calculado como a média aritmética dos fatores de crescimento de duas zonas interligadas.

Quando o total de viagens calculadas for diferente do valor estimado, determina-se um novo  $F_c$ , de forma que se tem um processo iterativo que continua, até que os novos valores de  $F_c$  sejam próximos de 1.

##### I.4.1.3 – Método de Detroit.

É semelhante ao método anterior, porém  $F_c$  é o produto dos fatores de crescimento de duas zonas interligadas, dividido pelo fator de crescimento  $F_A$  de toda a área.

#### I.4.1.4 – Método de Fratar.

É considerado como o mais desenvolvido entre os métodos de fatores de crescimento.

Este método necessita como dados:

- \* A matriz de viagens atual
- \* Os fatores de crescimento de cada zona de origem e cada zona de destino.

Utilizando estes fatores num primeiro cálculo, compara-se os valores reais e estimados das viagens entre os diversos pares de zonas. Havendo diferenças adota-se um processo iterativo procurando ajustar os valores calculados e reais.

Os novos fatores de crescimento a serem adotados, são obtidos pela divisão dos totais de viagens estimadas e as realmente obtidas em cada iteração.

O número de iterações é função da precisão que se deseja.

O método é bem mais apropriado para previsão da distribuição de viagens interurbanas. A sua menor utilização para viagens intra-urbanas se deve ao fato de que o método é insensível a mudanças nas propriedades da rede de transportes.

#### I.4.1.5 – Método de Furness.

Tendo em vista este método ter sido amplamente utilizado no presente estudo, cabe aqui apresentar a sua formulação:

$$T_{ij} = r_i * s_j * t_{ij} \quad (I.6)$$

Sujeito as restrições de conservação da matriz:

$$r_i \sum s_j * T_{ij} = O_i, \text{ para cada } i \quad (I.7)$$

$$s_j \sum_i r_i T_{ij} = D_j, \text{ para cada } j \quad (\text{I.8})$$

Sendo:

$T_{ij}$  = matriz final de distribuição espacial de viagens.

$t_{ij}$  = matriz inicial de distribuição espacial de viagens.

$r_i = s_j$  = fatores de crescimento.

Portanto, parte-se de uma matriz  $[t_{ij}]$  inicial, que pode ser uma matriz atual de distribuição de viagens, obtida através de levantamento de campo ou por meio de qualquer outro tipo de pesquisa.

Pode também ser representada por uma matriz de probabilidade a priori.

Resta então determinar os valores finais dos fatores de crescimento  $r_i$  e  $s_j$ , para que se possa obter a matriz futura  $[T_{ij}]$  de distribuição espacial de viagens entre as diversas zonas.

As equações (I.6), (I.7) e (I.8) não podem ser resolvidas explicitamente, porém a existência e a unicidade das soluções foram provadas por (MURCHLAND<sup>21</sup>) e (EVANS<sup>07</sup>).

Isto equivale dizer que para cada conjunto ( $r_i$  e  $s_j$ ), existe somente uma matriz  $[T_{ij}]$ .

A resolução do sistema de equações (I.6), (I.7) e (I.8) se dá através de um processo iterativo, onde a cada iteração calcula-se uma nova matriz de distribuição de viagens  $[T_{ij}^{(l)}]$ , compondo uma seqüência de matrizes  $[T_{ij}^{(1)}], [T_{ij}^{(2)}], \dots, [T_{ij}^{(m)}]$ , sendo  $[T_{ij}^{(m)}]$  a matriz solução do problema.

O critério adotado para a obtenção desta seqüência é apresentado a seguir:

- Parte-se de uma matriz inicial  $[t_{ij}]$ .

- A matriz  $[T_{ij}^{(1)}]$  é obtida da seguinte forma:

$$[T_{ij}^{(1)}] = r_i^{(1)} t_{ij}, \forall i, j \quad (\text{I.9})$$

Sendo:

$$r_i = \frac{O_i}{\sum_j t_{ij}}, \forall i \quad (\text{I.10})$$

- As matrizes com índices pares, ou seja, correspondentes as iterações pares, são obtidas da seguinte forma:

$$T_{ij}^{(2m)} = s_j^{(m)} T_{ij}^{(2m-1)}, \forall i, j e m \geq 1 \quad (\text{I.11})$$

Sendo:

$$s_j^{(m)} = \frac{D_j}{\sum_i T_{ij}^{(2m-1)}}, \forall j e m \geq 1 \quad (\text{I.12})$$

)

- As matrizes com índices ímpares maiores do que 1, ou seja, correspondentes as iterações ímpares maiores do que 1, são obtidas da seguinte forma:

$$T_{ij}^{(2m+1)} = r_i^{(m+1)} * T_{ij}^{(2m)}, \forall i, j e m \geq 1 \quad (\text{I.13})$$

Sendo:

$$r_i = \frac{O_i}{\sum_j T_{ij}^{(2m)}}, \forall i e m \geq 1 \quad (\text{I.14})$$

Observa-se portanto que as somas das linhas de  $T_{ij}^{(Z)}$  serão iguais aos valores de  $O_i$  se  $Z$  é ímpar e as somas das colunas serão iguais aos valores de  $D_j$ , se  $Z$  é par, até que, quando se chega a solução ótima, tem-se simultaneamente as restrições de conservação (I.7) e (I.8) atendidas.

A questão de convergência teórica do método pode ser pesquisada em (EVANS<sup>07</sup>), ou em (GRANJA<sup>12</sup>).

Quanto a questão da convergência prática, ou seja, levando-se em consideração os erros de arredondamento do computador, deve-se observar o grau de precisão exigido para a resolução do problema.

Em (EVANS<sup>07</sup>) e (ROBILLARD-STEWART<sup>26</sup>), encontram-se resultados de pesquisas feitas sobre o assunto.

Alguns resultados também são apresentados no presente trabalho, em tema a ser abordado no decorrer deste capítulo.

Sobre modelos utilizados na determinação da matriz futura, pode-se propor a classificação geral dada em (GRANJA<sup>12</sup>):

#### I.4.2 – Modelos de Simulação

Abrangem os métodos explicativos e os métodos paramétricos. Eles procuram imitar uma situação real através de modelos matemáticos que possuam características senão iguais, mas ao menos semelhantes àquelas do sistema original.

Entre os principais modelos de simulação, temos:

##### I.4.2.1 – Modelo Gravitacional.

Este modelo tem o nome de gravitacional, porque se adapta ao conceito gravitacional proposto por Newton.

A física Newtoniana nos diz que a atração entre as massas é diretamente proporcional as quantidades destas massas e inversamente proporcional a separação espacial entre as mesmas.

Por analogia, com o objetivo de aplicação a distribuição de viagens, temos:

A quantidade de viagens entre duas zonas  $i$  e  $j$ , é diretamente proporcional a uma grandeza que represente a massa de cada zona, podendo ser a população, número de veículos, produção ou consumo de determinado produto, etc., e inversamente proporcional a uma importância ao deslocamento das massas, podendo ser a distância entre as zonas, tempo de viagem, custo de viagem, etc.

Existem diversas formas de expressar os modelos gravitacionais.

A equação geral pode ser expressa da seguinte maneira:

$$T_{ij} = O_i * \frac{D_j * F_{ij} * K_{ij}}{\sum_{j=1}^N D_j * F_{ij} * K_{ij}} \quad (\text{I.15})$$

Onde:

$T_{ij}, O_i, D_j, N$  já foram explicadas anteriormente.

$F_{ij}$  = função de separação espacial das zonas, as vezes chamado de fator de fricção.

Normalmente refere-se a função fator tempo de viagem.

$K_{ij}$  = fator de ajustamento zona a zona. Através dele, se consegue captar outros fatores sócio-econômicos que interferem na distribuição de viagem.

O fator  $F_{ij}$  é determinado empiricamente através de um processo de calibração do modelo, procurando expressar a influência da separação espacial entre as zonas.

Os valores de  $K_{ij}$ , podem ser determinados através de um processo empírico, como por exemplo o que é proposto pelo Bureau Public Roads:

$K_{ij} = 1$ , quando temos um estudo de transporte urbano, onde a população é menor que 100.000 habitantes.

$$K_{ij} = r_{ij} \frac{(1 - x_i)}{(1 - x_i - r_{ij})} \text{ para os demais casos} \quad (\text{I.16})$$

Onde:

$$r_{ij} = \frac{t_{ij} \text{ (observado em pesquisa O/D)}}{T_{ij} \text{ (determinado pelo modelo gravitacional)}} \quad (\text{I.17})$$

$$x_i = \frac{t_{ij} \text{ (observado em pesquisa O/D)}}{O_i \text{ (número de viagens que tem origem i)}} \quad (\text{I.18})$$

Observando-se inconsistências no modelo, foi necessário segundo (WILSON<sup>31</sup>) introduzir-se o conceito de custo generalizado de uma viagem no estudo. Este custo tem vários componentes como o custo de dinheiro, tempo de espera, etc. Uma formulação de custo generalizado usado em recentes estudos é a seguinte:

$$C_{ij} = \alpha_1 t'_{ij} + \alpha_2 e_{ij} + \alpha_3 d_{ij} + p_{j*s} \quad (\text{I.19})$$

Onde:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 =$  Parâmetros medidos em valores monetários, que determinam os valores distribuídos pelos usuários às variáveis que compõem o custo generalizado.

$t_{ij}$  = tempo de viagem entre  $i$  e  $j$  em minutos.

$e_{ij}$  = tempo em minutos de acesso e espera.

$d_{ij}$  = distância entre  $i$  e  $j$  em km, utilizada na determinação dos custos operacionais que são proporcionais a esta.

$P_j$  = custos de utilização do terminal no destino  $j$ .

$s$  = fator de ajustamento.

O modelo gravitacional fica então com a seguinte forma:

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j e^{-\beta C_{ij}} \quad (\text{I.20})$$

Onde:

$$A_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^N B_j * D_j e^{-\beta C_{ij}}} \quad (\text{I.21})$$

$$B_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^N A_i * O_i e^{-\beta C_{ij}}} \quad (\text{I.22})$$

Obedecendo as restrições de conservação da matriz:

$$\sum_{i=1}^N T_{ij} = D_j \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{I.23})$$

$$\sum_{j=1}^N T_{ij} = O_i \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{I.24})$$

#### I.4.2.2 – Modelo de Oportunidades intervenientes.

Sua forma original foi proposta por Stouffer (1940). O princípio básico deste modelo é que os processos de distribuição espacial são governados pela competição entre as

oportunidades existentes para uma determinada origem, confrontadas com as oportunidades mais acessíveis (nos destinos possíveis).

O número de deslocamentos com origem em uma zona  $i$  para uma determinada zona  $j$ , será tanto maior, quanto maior for o número de oportunidades em  $j$  ( $a_j$ ) e, tanto menor, quanto maior for o número de outras oportunidades mais acessíveis para a zona  $i$  ( $v_j$ ).

É suposto também que se deseje que o deslocamento seja tão curto quanto possível.

A equação é expressa da seguinte forma:

$$T_{ij} = K \frac{a_j}{v_j} \quad (\text{I.25})$$

Onde:

$K$  = constante de proporcionalidade para garantir que todos os deslocamentos com origem em  $i$ , sejam distribuídos as oportunidades de destino.

Baseando-se no princípio de Stouffer, Schneider em 1960, desenvolveu o modelo que é comumente usado nos dias de hoje (HUTCHINSON<sup>13</sup>).

Ele supõe que a probabilidade de um deslocamento terminar num determinado número de postos de destino é a seguinte:

$$p(dv) = [1 - p(v)]^{\ell} dv \quad (\text{I.26})$$

Onde:

$p(dv)$  = probabilidade de um deslocamento terminar num certo destino, considerando-se  $dv$  oportunidades de destino.

$p(v)$  = probabilidade acumulada de um deslocamento terminar num certo destino, considerando-se  $v$  oportunidades de destino.

$v$  = número de destinos já considerados.

$\ell$  = probabilidade (constante) de um destino considerado ser aceito.

A matriz de deslocamentos inter-zonais é calculada de acordo com a seguinte expressão:

$$t_{ij} = O_i [p(v_{j+a}) - p(v_j)] \quad (\text{I.27})$$

Onde:

$p(v_j)$  = probabilidade de que o deslocamento já tenha um destino adequado, considerando-se as oportunidades até a zona  $j$ .

$p(v_{j+1})$  = probabilidade de que o deslocamento já tenha um destino adequado, considerando-se as oportunidades até e inclusive a zona  $j$ .

#### I.4.2.3 – Modelo de Oportunidades Competidoras.

Conforme pode ser visto em (GRANJA<sup>12</sup>), o modelo baseia-se na hipótese de que a probabilidade de uma viagem com origem numa zona  $i$ , termine em  $j$ , incluída dentro de um certo limite, depende da proporção de oportunidades de viagens nesta zona e de suas oportunidades competidoras dentro deste mesmo limite. A zona de chegada compete com as outras zonas de igual probabilidade.

$$P_j = \frac{a_j}{\sum_{KEs}^a k} \left(1 - \frac{\sum_{KEs}^a k}{\sum_{KEs}^a k}\right) \quad (I.28)$$

Com:

$$\frac{a_{ja}}{\sum_{KEs} k} = \text{atração da zona j em s.}$$

$$\left(1 - \frac{\sum_{KEsa}^a k}{\sum_{KEs} k}\right) = \text{probabilidade de uma viagem originada em i acabar em s.}$$

Segundo (GRANJA<sup>12</sup>), em pesquisas já realizadas, constatou-se que este modelo, além de ser de difícil calibragem apresenta resultados significativamente inferiores aos obtidos nos modelos gravitacional e de oportunidades intervenientes.

Segundo (HUTCHINSON<sup>13</sup>), em estudos comparativos já realizados concluiu-se que a técnica mais segura é relativa ao modelo gravitacional.

Entretanto para certos tipos de problemas, as outras técnicas podem ser mais úteis.

#### I.4.3 – Modelos de Otimização

Determinam a matriz de distribuição através da maximização ou minimização de determinada variável, ou seja, através de um processo de otimização.

### I.4.3.1 – Modelo de Hitchcock.

O modelo de Hitchcock corresponde ao problema clássico de transporte e constitui uma das primeiras aplicações de programação linear a uma determinada situação em planejamento e operação de sistemas de transportes.

O problema se apresenta desta forma: Uma determinada quantidade de um produto deve partir de um número de zonas produtoras  $M$  para abastecer  $N$  zonas consumidoras. Os custos unitários de deslocamento entre as zonas são conhecidos.

Deve-se minimizar o custo total de transportes ( $c$ ), otimizando os deslocamentos em função da oferta, da demanda e dos custos unitários de transportes.

A formulação do problema é a seguinte:

#### Primal

$$\min \sum_i^n \sum_j^n C_{ij} T_{ij} = C \quad (\text{I.29})$$

Onde:

$C_{ij}$  = custo por unidade deslocada da origem  $i$  ao destino  $j$ .

$T_{ij}$  = quantidade transportada da origem  $i$  ao destino  $j$  num período de tempo.

$C$  = custo total de transporte num período de tempo.

Sujeito a estas restrições:

$$\sum_j^n T_{ij} = O_i \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{I.30})$$

$$\sum_i^n T_{ij} = D_j \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{I.31})$$

$$T_{ij} \geq 0 \quad (\text{I.32})$$

Para obtenção da solução básica inicial existem alguns algoritmos já bastante

conhecidos, como a Regra do “Canto Noroeste”, o Processo do Custo Mínimo e o Método de Vogel ou das Penalidades.

A unicidade da solução do problema é analisada, considerando-se o problema dual (GRANJA<sup>12</sup>).

$$\max = \sum_i O_i u_i + \sum_j D_j v_j \quad (\text{I.33})$$

Sujeito a:

$$C_{ij} \geq u_i + v_j \quad (\text{I.34})$$

Onde:

$u_i, v_j$  = variáveis duais.

Uma solução básica viável, tem que pertencer ao conjunto (convexo) de solução compatíveis e para que isto ocorra, deve ser obedecida a seguinte condição:

$$C_{ij} = u_i + v_j \quad (\text{I.35})$$

Para todo  $i, j$  tal que  $T_{ij}$  seja uma variável básica.

Para as variáveis  $T_{ij}$  não básicas, temos as seguintes condições:

$$C_{ij} \geq u_i + v_j \text{ solução básica viável é ótima} \quad (\text{I.36})$$

$$C_{ij} > u_i + v_j \text{ solução ótima é única} \quad (\text{I.37})$$

Portanto, para  $T_{ij}$  não básica, quando  $C_{ij} = u_i + v_j$  a solução não é única.

Outro modelo de otimização é o da maximização da entropia. Os modelos entrópicos e suas maximizações são assuntos a serem abordados em etapas posteriores deste trabalho.

#### I.4.3.2 – Modelos Entrópicos.

Serviram de elementos básicos para a elaboração deste trabalho e são estudados a parte no capítulo seguinte.

#### I.5 – CONCLUSÃO:

Procurou-se neste capítulo, mostrar quais os principais métodos e modelos que podem ser utilizados para a resolução do problema de distribuição de viagens.

Quanto à escolha do modelo, cada um tem as suas peculiaridades, devendo-se considerar que para cada caso, um tipo pode se adaptar melhor do que o outro. No grupo de métodos que utilizam fatores de crescimento, destaca-se o Método de Furness, que tem aplicação mais generalizada (Transporte Urbano e Regional) e tem convergência garantida para  $[T_{ij}] > 0$ . (Este modelo é estudado em detalhes no decorrer deste trabalho). Quanto aos modelos de simulação, é mais utilizado o Modelo Gravitacional e quanto aos modelos de otimização, os Modelos de Maximização da Entropia vem recebendo uma atenção especial, sendo objeto preponderante no presente estudo.

## CAPÍTULO II – MODELOS ENTRÓPICOS DE DISTRIBUIÇÃO DE VIAGENS

### II.1 – INTRODUÇÃO:

Os modelos entrópicos ou de maximização da entropia, se enquadram nos modelos de otimização que são utilizados para a determinação de viagens ou deslocamentos de produtos entre as zonas que compõem uma área de estudos.

Como se sabe, o modelo gravitacional é baseado na analogia Newtoniana.

O método de maximização da entropia muda a base desta analogia, trabalhando diretamente com os componentes básicos do sistema de interesse.

Por exemplo, tomando os elementos como, pessoas e viagens para o trabalho, o modelo gravitacional trata o número de residências e o número de empregos como massas, enquanto que os métodos de maximização da entropia, trabalham com os indivíduos, como componentes básicos do sistema, determinando as probabilidades destes efetuarem suas viagens para o trabalho, individualmente, obtendo a iteração existente entre a zona residencial e a zona de trabalho como uma média estatística.

Os modelos entrópicos supõem que uma distribuição equilibrada do sistema de interesse, no nosso caso sistema de transporte, maximiza a entropia da rede.

A abordagem probabilística do problema da distribuição, consiste na procura da distribuição de viagens mais provável, devendo esta distribuição atender as condições impostas pelo sistema considerado (localização das atividades e rede de transporte).

No decorrer deste capítulo, maiores explicações sobre o assunto serão oferecidas.

A formulação do modelo encontra-se em (GRANJA<sup>12</sup>), a qual serviu de base maior para a elaboração deste trabalho.

### II.2 – ENTROPIA:

A entropia, de acordo com a Mecânica Estatística, é uma medida do grau de desordem do sistema.

De acordo com (BOLTZMANN<sup>04</sup>) ela se expressa da seguinte forma:

$$S = K * \ln W \quad (\text{II.1})$$

Onde:

S = entropia

W = número de microestados possíveis de ocorrer.

K = constante determinada pela relação entre a constante dos gases e o Número de Avogadro.

O estado mais provável de um sistema é o que maximiza S em (II.1).

O valor de W pode ser calculado da seguinte forma:

$$W = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_m!} \quad (\text{II.2})$$

$$\text{Sendo: } N = \sum_i N_i \quad (\text{II.3})$$

e

$N_i$  = número de vezes possíveis que os diversos microestados podem ocorrer.

Aplicando ln em (II.2), e empregando a fórmula de Stirling:

$$\ln x! \cong x \ln x - x \quad (\text{II.4})$$

Para elevados valores de x, obtem-se:

$$\ln W = \sum_i^m N_i \ln N - \sum_i^m N_i \ln N_i \quad (\text{II.5})$$

De onde:

$$\ln W = -N \sum_i \frac{N_i}{N} \ln \left( \frac{N_i}{N} \right) \quad (\text{II.6})$$

Fazendo  $f_i = \frac{N_i}{N}$  = frequência relativa de ocorrência de  $N_i$  (II.7)

E aplicando (II.7) em (II.6) obtêm-se:

$$\ln W = -N \sum_i^m f_i \ln f_i \quad (\text{II.8})$$

Seja H, definida por:

$$\sum_i^m f_i \ln f_i = H \quad (\text{II.9})$$

Tem-se então:

$$\ln W = -NH \quad (\text{II.10})$$

De onde:

$$S = -KNH \quad (\text{II.11})$$

Ou

$$\frac{S}{N} = -KH \quad (\text{II.12})$$

Sendo K uma constante positiva, conclui-se que:

- H = medida de entropia média do sistema.

O conceito de entropia na Mecânica Estatística é próximo do que foi empregado na teoria da informação e baseando-se nisto (WILSON<sup>31</sup>) formulou modelos de transportes e uso do solo aplicados no campo de Planejamento.

Um exemplo ilustrativo apresentado em (NOVAES<sup>23</sup>), utilizando a teoria da informação, ajuda-nos também a entender o significado de entropia.

Exemplo: Qual a quantidade de informação que se fornece ao dizer que jogando-se dois dados a soma obtida foi X? E para um dado apenas?

Ou seja, informando-se a soma obtida, a que nível está se informando os resultados

de cada dado?

Para dois dados, sabe-se que:

- \* O número de combinações é igual a  $6 \times 6 = 36$ .
- \* Os valores de X podem variar de 2 a 12.

Para um dado, sabe-se que:

- \* O número de combinações é igual a 6.
- \* Os valores de x podem variar de 1 a 6.

Uma informação sobre um estado de um sistema será tanto mais valiosa quanto menor for a probabilidade de ocorrência do mesmo.

Se nos informam por exemplo, que a soma obtida no lançamento de dois dados for igual a 12, temos uma informação de valor máximo, pois a probabilidade de ocorrência do valor 12 é mínima ou seja é igual a  $1/36$  e sabemos que os valores obtidos são 6 e 6.

Porém se nos informam que a soma obtida no lançamento de dois dados é igual a 7, o valor da informação é mínimo, pois a probabilidade de ocorrência deste valor é máxima. Não saberemos se tem-se  $1 + 6$  ou  $6 + 1$  ou  $5 + 2$  ou  $2 + 5$  ou  $3 + 4$  ou  $4 + 3$ .

Então para o evento de se lançar dois dados, devemos calcular o valor médio de informação.

O mesmo ocorre para o lançamento de um dado ou qualquer outro evento.

O valor médio da informação  $\left(\bar{I}\right)$  é análogo ao valor de H que é uma medida de entropia média de um sistema.

A probabilidade de ocorrência de um determinado valor é análoga a  $f_i$  que é a frequência relativa de ocorrência de  $x_i$ .

Então observando a equação (II.9), (BOLTZMANN<sup>04</sup>) nos diz que:

$$H = \bar{I} = \sum_{i=1}^N P_i \ln P_i \quad (\text{II.13})$$

Onde  $P_i$  no caso é a probabilidade de ocorrência da soma  $x_i$ .

Efetuada-se os cálculos para os eventos de lançamento de dois dados e de um dado, obtêm-se (\*):\*

$$\bar{I}(2) = 3,71$$

$$\bar{I}(1) = 2,59$$

Nota-se que a informação média é maior, quando do lançamento de dois dados.

Isto ocorre em decorrência de uma propriedade da entropia que nos diz que a entropia cresce quando cresce o número de possíveis combinações dos eventos.

Dada a importância das propriedades, para o entendimento das aplicações do conceito de entropia em modelos de transportes, elas são apresentadas a seguir, resumidamente, baseadas em (NOVAES<sup>23</sup>):

- a) A entropia de um sistema será maior, quando a informação média sobre um conjunto é mais importante do que a informação sobre um indivíduo isolado. Esta propriedade é importante nos modelos de planejamento de transporte em que o interesse está voltado para o comportamento geral e não para um comportamento individual dos elementos que compõem o sistema.
- b) A entropia será tanto maior, quanto maior for o número possível de estados do sistema. Logo, sistemas mais aleatórios apresentam entropia mais elevada.
- c) A entropia de um sistema será máxima, quando os estados do sistema apresentam iguais probabilidades de ocorrência.
- d) Concluindo, pode-se dizer que a entropia representa o grau de aleatoriedade do sistema, ou seja, quanto maior for a dispersão da informação, maior será a entropia.

---

\* NOVAES utilizou no cálculo, o logaritmo binário.

## II.3 – MODELO ENTRÓPICO RESTRITO:

### II.3.1 – Formulação do Problema

Quando se estabelece um modelo entrópico, logicamente baseado nos conceitos de entropia, admitimos um comportamento aleatório dos indivíduos. Porém este comportamento está sujeito a certos hábitos que podem ser provenientes de uma estrutura econômica ou social.

Isto faz com que apareçam restrições ao modelo, interferindo na entropia máxima do sistema.

Para aplicação dos modelos entrópicos, primeiramente deve-se buscar a distribuição de probabilidades dos estados do sistema, de forma que a entropia seja, maximizada, sempre respeitando as restrições existentes.

Observa-se portanto que as probabilidades serão condicionadas pelas informações a priori sobre o sistema, informações estas que no nosso caso são relativas a distribuição de viagens.

Em função destas probabilidades o modelo apresentado em (GRANJA<sup>12</sup>), o qual é objeto deste estudo, conduzirá a determinação da distribuição de viagens mais provável, satisfazendo as condições impostas.

No modelo em estudo, as probabilidades a priori de viagens, são determinadas a partir de indicadores sócio-econômicos das áreas interligadas pelo sistema de transporte.

Determinando-se que a probabilidade a priori de se ter uma viagem com origem em  $i$  é:

$$p_i = \frac{P_i}{\sum_{K=1}^N P_k} \quad (\text{II.14})$$

Onde,  $p_i$  = Coeficiente de geração da zona  $i$ ,

E que a probabilidade a priori de se ter uma viagem com destino em  $j$  é:

$$p_j = \frac{Q_j}{\sum_{K=1}^N Q_K} \quad (\text{II.15})$$

Onde,  $Q_j =$  Coeficiente de atração da zona j,

Pode-se dizer que a probabilidade a priori de se ter uma viagem com origem em i e destino em j é função de  $p_i$  e  $q_j$ :

$$F_{(i,j)} = \psi(p_i, q_j) \quad (\text{II.16})$$

Onde  $\psi$  pode ser em particular:  $F_{(i,j)} = p_i * q_j$

Como a distribuição de viagens é representada pela matriz  $T_{ij}$ , devemos saber qual a probabilidade de se obter uma determinada matriz  $T_{ij}$ .

Para ilustrar este raciocínio tomemos o seguinte exemplo:

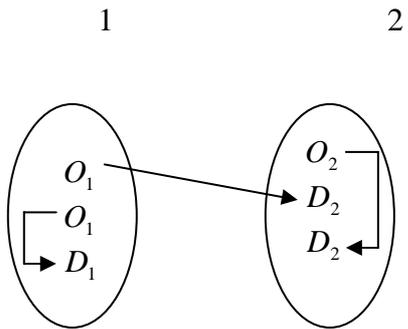
Sabe-se que a geração e a atração de viagens de duas zonas para um determinado período de tempo é a seguinte:

	1	2	$\Sigma$
O	2	1	3
D	1	2	3

Pode-se agora determinar quantas e quais são as matrizes de distribuição  $T_{ij}$ , de acordo com os diagramas abaixo, atendendo as seguintes restrições:

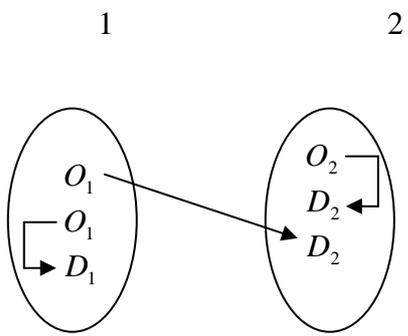
$$\sum_{j=1}^N T_{ij} = O_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{II.17})$$





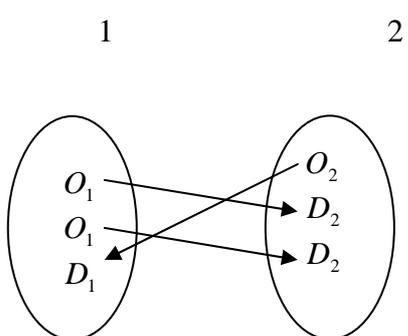
$[T_{ij}] =$

	D	1	2	$\Sigma$
O				
1		1	1	2
2		-	1	1
$\Sigma$		1	2	3



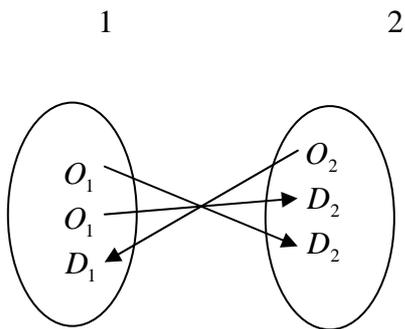
$[T_{ij}] =$

	D	1	2	$\Sigma$
O				
1		1	1	2
2		-	1	1
$\Sigma$		1	2	3



$[T_{ij}] =$

	D	1	2	$\Sigma$
O				
1		-	2	2
2		1	-	1
$\Sigma$		1	2	3



$[T_{ij}] =$

	D	1	2	$\Sigma$
O				
1		-	2	2
2		1	-	1
$\Sigma$		1	2	3

Então está claro que:  
Distribuição 1:

$P([T_{ij}] = X) = 4 / 6 = 2 / 3$

X=

	D	1	2	$\Sigma$
O				
1		1	1	2
2		-	1	1
$\Sigma$		1	2	3

Distribuição 2:

$P([T_{ij}] = X) = 2 / 6 = 1 / 3$

X=

	D	1	2	$\Sigma$
O				
1		-	2	2
2		1	-	1
$\Sigma$		1	2	3

De acordo com a equação (II.13) podemos determinar a entropia de cada distribuição:

$$H = -\sum_i \sum_j \frac{T_{ij}}{T} * \log \frac{T_{ij}}{T}$$

Para a distribuição 1:

$$H_1 = -\left(\frac{1}{3} * \log \frac{1}{3} + \frac{1}{3} * \log \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \log \frac{1}{3}\right)$$

$$H_1 = 0,477$$

Para a distribuição 2:

$$H_2 = -\left(\frac{1}{3} \log \frac{1}{3} + \frac{2}{3} * \log \frac{2}{3}\right)$$

$$H_2 = 0,276$$

Observamos que a matriz que tem maior probabilidade de ocorrência tem maior entropia, considerando-se um mesmo sistema.

Os estados do sistema na distribuição 1 apresentam probabilidades de ocorrência mais uniformes do que na distribuição 2, portanto a distribuição 1 possui entropia mais elevada.

Na distribuição 1, devido a maior homogeneidade dos estados  $T_{ij}$ , a informação sobre o conjunto de estados é mais importante ou mais representativa deste conjunto, do que a informação dada para a distribuição 2.

Este exemplo serve apenas como ilustração. No modelo só podem ser consideradas as ligações para as quais as probabilidades a priori de viagens não são nulas.

Além disso, quando da utilização da fórmula de Stirling no desenvolvimento do modelo, supõe-se que o volume de transporte em cada centro ou é nulo, ou no caso, bastante elevado.

É evidente que quando temos um número de zonas (N), muito grande, não se pode calcular as probabilidades de distribuição  $[T_{ij}]$  desta forma.

A probabilidade de se ter a distribuição  $[T_{ij}]$  é dada por (CHOUKROUN<sup>06</sup>), com a

seguinte expressão:

$$P_{(T_{ij})} = \left( \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N (F_{ij})^{T_{ij}} \right) (T! / \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N T_{ij}!) \quad (\text{II.20})$$

O problema ( $P_1$ ) do modelo consiste na determinação da distribuição ( $[T_{ij}]$ ) de maior probabilidade de ocorrência.

$$\text{Máx}_{T_{ij}} P[(T_{ij})] \quad (\text{II.21})$$

Sujeito as restrições vistas em (II.17), (II.18) e (II.19).

Aplicando o logaritmo em (II.20) e em seguida a fórmula de Stirling (II.4), chega-se ao problema ( $P_2$ ):

$$\text{Máx}_{T_{ij}} H = - \sum_i^N \sum_j^N T_{ij} \log T_{ij} / f_{ij} \quad (\text{II.22})$$

$$\text{Com } f_{ij} = T * F_{ij} \quad (\text{II.23})$$

Obedecendo-se as relações (II.17), (II.18) e (II.19) e seguindo as propriedades da entropia, apresentadas anteriormente.

Pode-se ainda partir de uma distribuição de probabilidade a priori que considera os custos de deslocamento  $C_{ij}$  entre as zonas.

Para uma situação de planejamento a curto prazo, a distribuição a priori poderá ser tomada como a distribuição atual.

Para uma situação de planejamento num prazo mais longo, considera-se esta probabilidade fundamentada exclusivamente nos fatores sócio-econômicos previstos para cada zona.

Ela poderá, por exemplo, simplesmente assumir a forma:

$$F_{ij} = \frac{O_i * D_j}{T} \quad (\text{II.24})$$

Os custos de deslocamento não aparecem na equação e são considerados de forma

explícita pelo planejador, através de restrições para cada custo.

Considerando-se um custo de viagens interzonais  $C_{ij}$ , de forma generalizada, teremos a acrescentar no modelo a seguinte restrição:

$$C = \sum_i^N \sum_j^N C_{ij} T_{ij} \quad (\text{II.25})$$

Sendo que o nível de custo total  $C$ , pode ser estabelecido pelo planejador utilizando-se de determinado critério, como por exemplo, a sensibilidade da população ao custo de transporte. Este assunto será abordado mais adiante.

Esta consideração leva a formulação do problema ( $P_3$ ) que é o Modelo Entrópico Restrito:

$$\text{Máx}_{T_{ij}} H \quad (\text{II.26})$$

Sujeito as restrições (II.17) a (II.19) e (II.25).

### II.3.2 – Reformulação e Solução do Problema pela Programação Geométrica

Definição de variáveis normalizadas:

$$\bar{T}_{ij} = \frac{T_{ij}}{T} \quad (\text{II.27})$$

$H$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$H = H - T \log T \quad (\text{II.28})$$

Com:

$$H = -T \sum_{i=a}^N \sum_{j=1}^N \bar{T}_{ij} \log \bar{T}_{ij} / f_{ij} \quad (\text{II.29})$$

E teremos o problema ( $P_4$ ) que é equivalente ao problema ( $P_3$ ).

$$\text{Máx}_{\{T_{ij}\}} H \quad (\text{II.30})$$

Sujeito a:

$$\bar{T}_{ij} \geq 0 \quad (\text{II.31})$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{T}_{ij} = 1 \quad (\text{II.32})$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\delta_{i\ell} - \bar{D}_\ell) \bar{T}_{ki} = 0 \quad \ell = 1, \dots, N \quad (\text{II.33})$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\delta_{ki} - \bar{O}_k) \bar{T}_{i\ell} = 0 \quad \ell = 1, \dots, N \quad (\text{II.34})$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\bar{C} - C_{ij}) \bar{T}_{ij} = 0 \quad (\text{II.35})$$

Onde:

$$\bar{O}_i = \frac{O_i}{T}, \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{II.36})$$

$$\bar{D}_j = \frac{D_j}{T}, \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{II.37})$$

$$\bar{C} = \frac{C}{T} \quad (\text{II.38})$$

Sendo:  $\delta_{kl}$  = Operador de Kronecker.

A versão contínua do problema ( $P_4$ ) constitui o problema dual da programação

geométrica do problema  $(P_5)$ :

$$\text{Min } k(\underline{u}, \underline{v}, w) \quad (\text{II.39})$$

Sujeito a:

$$u_i > 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{II.40})$$

$$v_j > 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{II.41})$$

$$w > 0 \quad (\text{II.42})$$

Onde:

$$K(u, v, w) = T \log \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} u_i v_j w^{-C_{ij}} * \Phi \right) \quad (\text{II.43})$$

Com:

$$\Phi = \prod_{l_1=1}^N (u_{l_1})^{-\bar{D}_{l_1}} \prod_{l_2=1}^N (v_{l_2})^{-\bar{D}_{l_2}} w^{\bar{C}} \quad (\text{II.44})$$

Pela teoria da dualidade da programação geométrica, temos as seguintes relações entre as soluções de  $(P_4)$  e  $(P_5)$ :

$$H(\bar{T}_{ij}^*) = K(\underline{u}^*, \underline{v}^*, w^*) \quad (\text{II.45})$$

Com:

$$\bar{T}_{ij} = f_{ij} u_i^* v_j^* w^{*-C_{ij}} \Phi / H^* \quad (\text{II.46})$$

O problema admite no máximo uma solução e a questão desta unicidade bem como as condições de otimalidade de primeira ordem do problema ( $P_5$ ), podem ser vistas em (GRANJA<sup>12</sup>).

### II.3.3 – Sensibilidade da População ao Custo de Deslocamento

No problema em estudo, os custos de deslocamento são considerados de forma explícita, conforme visto na distribuição de probabilidade a priori em (II.24).

Sabe-se que não existe somente a influência das massas das zonas para explicar os deslocamentos.

Existe também a influência das distâncias que no caso são consideradas através dos custos de deslocamentos.

Existe uma tendência da população de cada região em minimizar estes custos, porém isto ocorre de maneira intuitiva e varia de região para região de acordo com os fatores sócio-econômicos e culturais, sem interferências físicas.

Então cada população tem uma determinada sensibilidade ao custo de transporte.

Como estamos tratando de população vamos considerar custos médios e analisar os seguintes casos:

Como já foi visto no Modelo de Hitchcock, os custos de deslocamentos podem ser minimizados obtendo-se:

$$\bar{C}_{\min} = \text{Custo médio mínimo de transporte.}$$

- A população despreza os custos.

Considerando-se que a distribuição dos deslocamentos ocorre somente em função da atratividade das massas, desprezando-se os custos das viagens, temos:

$\bar{C}^*$  = Custo médio de transporte corrido, sem que a população tomasse conhecimento do mesmo.

- Comportamento real da população, relativo aos custos.

A partir de uma matriz de distribuição atual  $T_{ij}$  obtida por levantamento determina-se:

$$\bar{C} = \frac{1}{T} \sum_i \sum_j C_{ij} T_{ij} \quad (\text{II.47})$$

Sendo:

$\bar{C}$  = Custo médio de transporte, observado.

Pode-se concluir que geralmente:

$$\bar{C}_{\min} \leq \bar{C} \leq \bar{C}^* \quad (\text{II.48})$$

A sensibilidade da população ao custo de transporte (SC) é dada pela seguinte expressão:

$$SC = \frac{\bar{C}^* - \bar{C}}{\bar{C}^* - \bar{C}_{\min}} \quad (\text{II.49})$$

Onde:

$$0 \leq SC \leq 1 \quad (\text{II.50})$$

Se:

$SC = 0$ : A população é insensível ao custo de transporte.

$SC = 1$ : A população tem sensibilidade máxima ao custo de transporte.

Pode-se também maximizar o custo médio de transporte e obter-se:

$\bar{C}_{\max}$  = Custo médio máximo de transporte, que corresponde a situação em que a população escolhe os seus deslocamentos de forma que os custos sejam os mais altos.

Analisando então o comportamento global de SC, tem-se:

$$\bar{C}_{\min} \leq \bar{C}^* \leq \bar{C}_{\max} \quad (\text{II.51})$$

$$SC = \frac{\bar{C}^* - \bar{C}}{\bar{C}^* - \bar{C}_{\max}}, \text{ se } \bar{C}^* \leq \bar{C} \leq \bar{C}_{\max} \quad (\text{II.52})$$

Onde:

$$-1 \leq SC \leq 0 \quad (\text{II.53})$$

$$SC = \frac{\bar{C}^* - \bar{C}}{\bar{C}^* - \bar{C}_{\min}}, \text{ se } \bar{C}_{\min} \leq \bar{C} \leq \bar{C}^* \quad (\text{II.54})$$

Onde:

$$0 \leq SC \leq 1 \quad (\text{II.55})$$

Determinação dos custos médios:

$\bar{C}_{\min}$  : Com os valores de  $T_{ij}$  observados, determina-se  $O_i$  e  $D_j$  e conhecendo-se  $C_{ij}$ , calcula-se  $\bar{C}_{\min}$ , resolvendo-se o problema de Hitchcock.

$\bar{C}^*$  = é determinado considerando-se somente a probabilidade a priori ( $P_{ij}$ )

$$\bar{C}^* = \frac{1}{T} \sum_i \sum_j P_{ij} * C_{ij} \quad (\text{II.56})$$

A probabilidade a priori pode ser, por exemplo:

$$P_{ij} = \frac{O_i * D_j}{T} \quad (\text{II.57})$$

Então:

$$\bar{C}^* = \frac{1}{T} \sum_i \sum_j \frac{O_i * D_j}{T} * C_{ij} \quad (\text{II.58}]$$

$\bar{C}$  : é calculado conforme visto na equação (II.47).

Então para efeitos da previsão, tem-se o seguinte andamento:

- Conhecidos: -  $C_{ij}$   
                   -  $SC$   
                   -  $O_i$   
                   -  $D_j$
  
- Determina-se: -  $\bar{C}_{\min}$   
                   -  $\bar{C}^*$   
                   -  $\bar{C}$

Calcula-se finalmente:  $T_{ij} = f(O_i, D_j, C_{ij}) \quad (\text{II.59})$

Sujeito as restrições:

- $\sum_j^N T_{ij} = O_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{II.60})$

- $\sum_i^N T_{ij} = D_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{II}>61)$

$$\square T_{ij} > 0 \quad (\text{II.62})$$

$$\sum_i \sum_j C_{ij} T_{ij} = T * \bar{C} \quad (\text{II.63})$$

#### II.4 – MODELO ENTRÓPICO IRRESTRITO:

O problema é resolvido de acordo com as probabilidades a priori. A restrição de custo não existe e sua formulação corresponde àquela vista em ( $P_2$ ).

#### II.5 – O MODELO ENTRÓPICO RESTRITO E O PLANEJAMENTO DE TRANSPORTES:

Por considerar necessário esclarecer a lógica do Método, serão apresentados a seguir, os principais passos a serem dados para utilização do Modelo Entrópico Restrito, dentro de um contexto de planejamento de transportes.

Observa-se que cada passo requer a utilização de uma série de métodos e técnicas que não cabem aqui serem descritas, levando-se em conta tão somente a existência dos mesmos como pré-requisitos para o uso do modelo em estudo, além de passos a serem dados posteriormente ao do estudo, que mostram onde o mesmo será aplicado.

Os principais passos são os seguintes:

- 1 – Delimitação da área a ser estudada, visando o planejamento.
- 2 – Divisão desta área em zonas de tráfego.
- 3 – Diagnóstico da economia da área.
- 4 – Estudo da urbanização e população.
- 5 – Análise dos sistemas de transportes.
- 6 – Cadastro viário.
- 7 – Pesquisas de tráfego.
- 8 – Determinação através de pesquisas, da matriz de distribuição de viagens.
- 9 – Determinação da matriz de custos unitários de deslocamentos.
- 10 – Utilização dos valores de  $O_i$ ,  $D_j$  e  $C_{ij}$ , determinando-se a matriz  $T_{ij}$  na qual tem-se o custo mínimo de deslocamentos interzonais e intrazonais, bem como os valores

deste  $C_{\min}$ , e  $\bar{C}_{\min}$ .

$$\text{Mín}_{(T_{ij})} \sum_i \sum_j C_{ij} T_{ij} \quad (\text{II.64})$$

$$C_{\min} = \sum_i \sum_j C_{ij} T_{ij} \quad (\text{II.65})$$

$$C_{\min} = \bar{C}_{\min} / T \quad (\text{II.66})$$

Isto pode ser feito utilizando-se o Modelo de Hitchcock.

No presente estudo, o valor de  $C_{\min}$  foi estudado através do programa de otimização linear MPS TEMPO, existente no computador BURROUGHS 6700 da UFRJ.

- 11 – Determinação da matriz  $T_{ij}$  que maximiza o custo de deslocamentos entre os pares de zonas e deslocamentos internos (quando  $i = j$ ), bem como os valores de  $C_{\max}$  e  $\bar{C}_{\max}$ .

$$\text{Máx}_{(T_{ij})} \sum_i \sum_j C_{ij} T_{ij} \quad (\text{II.67})$$

$$C_{\max} = \sum_i \sum_j C_{ij} T_{ij} \quad (\text{II.68})$$

$$\bar{C}_{\max} = C_{\max} / T \quad (\text{II.69})$$

- 12 – Estabelecimento do domínio viável do problema, pois se este for vazio não há solução para o mesmo.

$$D = [C_{\min}, C_{\max}] \quad (\text{II.70})$$

- 13 – Utilização da matriz de deslocamentos, obtida por levantamento e cálculo dos

custos de deslocamento entre as partes interzonais, determinando-se custo total e médio de transporte, observado.

$$C = \sum_i \sum_j C_{ij} T_{ij} \quad (\text{II.71})$$

$$\bar{C} = \frac{C}{T} \quad (\text{II.72})$$

- 14 – Verificação da condição de existência de solução para o problema.

$$C_{\min} \leq C \leq C_{\max} \quad (\text{II.73})$$

- 15 – Observar se:  $C = C_{\min}$

ou

$$C = C_{\max} \quad (\text{II.74})$$

Em caso afirmativo, ver no final do capítulo, o tratamento adequado a ser dado, para a resolução do problema (casos especiais).

- 16 – Determinação da matriz de probabilidade a priori, que pode ser uma transformação de uma informação a priori, ou baseada em dados específicos concretos, podendo ser, portanto subjetiva ou objetiva. Não é considerado neste item, a influência do fator custo. Pode ser por exemplo:

$$f_{ij} = \frac{O_i D_i}{T}$$

- 17 – Calibração do modelo para a determinação dos valores dos seus parâmetros.

Esta calibração é feita determinando-se através do modelo uma matriz  $[f_{ij}]$  que aplicada ao modelo, faça com que o resultado fornecido pelo mesmo, reproduza a matriz  $[T_{ij}]$  atual, obtida por pesquisa de campo. A lei de formação de  $[f_{ij}]$  será

mantida e aplicada ao longo do tempo para dados projetados.

- 18 – Determinação da matriz de viagens  $[T_{ij}]$  atual, através do modelo de maximização da entropia, porém sem considerar restrição de custo.
- 19 – Cálculo do custo total e médio de deslocamentos ( $C$ ) e ( $\bar{C}^*$ ) para esta matriz, ou seja, considerando-se uma insensibilidade dos usuários aos custos de viagens.
- 20 – Determinação da sensibilidade ao custo, da população da área em estudo, através da equação:

$$SC = \frac{\bar{C}^* - \bar{C}}{\bar{C}^* - \bar{C}_{\min}} \quad (\text{II.75})$$

- 21 – Projeção da economia da região.
- 22 – Estudo de tendências de urbanização da região.
- 23 – Projeção de demanda por transportes.
- 24 – Determinação do custo médio de viagens futuras  $\bar{C}$ , conhecendo-se  $C_{ij}$  e  $SC$ , projetando-se  $O_i$  e  $D_j$  e obtendo-se pelo modelo clássico de transportes o valor de  $\bar{C}_{\min}$ .

O valor de  $\bar{C}_{\min}$  será:

$$\bar{C} = (1 - SC) \bar{C}^* + SC \cdot \bar{C}_{\min} \quad (\text{II.76})$$

Onde  $C^*$  é calculado através da equação (II.74)

- 25 – Determinação do custo total de viagens futuras.

$$C = \bar{C} * T \quad (\text{II.77})$$

Onde  $T$  é o total de viagens futuras.

- 26 – Determinação da matriz  $[T_{ij}]$  futura, utilizando-se o Modelo Entrópico Restrito, conhecendo-se os valores futuros de  $O_i, D_j, T, f_{ij}, C, C_{ij}$ .
- 27 – Repartição modal dos fluxos.
- 28 – Alocação dos fluxos a rede viária da região.
- 29 – Hierarquização das vias e índices de acessibilidade.
- 30 – Adequação do sistema viário existente.
- 31 – Alternativas de investimentos.
- 32 – Reavaliação das alternativas.
- 33 – Conclusões.

## II.6 – CASOS ESPECIAIS:

São considerados casos especiais no nosso problema aqueles que ocorrem quando temos:

$$C = C_{\min} \quad (\text{II.78})$$

ou

$$C = C_{\max} \quad (\text{II.79})$$

A – Para  $C = C_{mín}$ , a análise a ser feita é a seguinte:

1 – Ver se  $T_{(ij)mín}$  é solução única.

2 – Em caso afirmativo,  $T_{(ij)mín}$  é solução do problema ( $P_3$ ).

3 – Em caso negativo, o problema ( $P_3$ ) admite a mesma solução do problema ( $P'$ ), (GRANJA<sup>12</sup>):

$$\text{Máx } H(T_{ij}(\lambda)) \quad (\text{II.80})$$

Sujeito a:

$$T_{ij}(\lambda) = \sum_{k=1}^k \lambda^k T_{ijmín}^k \quad (\text{II.81})$$

$$\sum_{k=1}^k \lambda^k = 1 \quad (\text{II.82})$$

$$\lambda^k \geq 0, \quad k = 1, \dots, k \quad (\text{II.83})$$

Onde:

$k$  = Número finito de soluções extremas do problema de Hitchcock,

$(T_{ijmín}^k)$  =  $k$ -ésima solução extrema.

Resolução do problema, com o auxílio da teoria da dualidade da programação não linear (GRANJA<sup>12</sup>):

$$L(\underline{\lambda}, \underline{u}, \underline{v}) = H(T_{ij}(\lambda)) + u(\sum_{k=1}^k \lambda^k - 1) + v^k * \lambda^k \quad (\text{II.84})$$

Para determinação da otimalidade, basta que sejam atendidas as condições de primeira ordem, já que  $H(T_{ij}(\lambda))$  é estritamente côncava para valores de  $\lambda$  que atendam a

(II.82) e (II.83).

$$\frac{dL}{d\lambda^k} = 0 \quad k = 1, \dots, k \quad (\text{II.85})$$

$$\frac{dL}{du} = 0 \quad (\text{II.86})$$

$$\lambda^k * v^k = 0 \quad k = 1, \dots, k \quad (\text{II.87})$$

Escrevendo as condições (II.85):

$$\sum_i^N \sum_j^N t_{ij}^k \log(T_{ij} / f_{ij}) = u + v^k \quad (\text{II.88})$$

Onde:  $k = 1, \dots, k$

Levando-se em conta as relações (II.81), (II.86), (II.82) e (II.87), obtêm-se:

$$\sum_i^N \sum_j^N T_{ij}(\lambda) \log(T_{ij}(\lambda) / f_{ij}) + T = u \quad (\text{II.89})$$

Ou seja, a solução deste problema não linear de  $2k + 1$  variáveis será a solução do sistema de equações (II.87), (II.88) e (II.89).

B – Para  $C = C_{máx}$  a análise a ser feita é a seguinte:

- 1 – Ver se  $T_{(i,j)máx}$ , é solução única.
- 2 – Em caso afirmativo,  $T_{(i,j)máx}$  é solução do problema ( $P_3$ ).
- 3 – Em caso negativo, resolve-se o problema ( $P'$ ) usando  $T_{(i,j)máx}^k$  no lugar de  $T_{(i,j)mín}^k$ , tendo-se assim o problema ( $P''$ ).

## II.7 – CONCLUSÃO:

Para introduzir os modelos entrópicos de distribuição de viagens, achou-se importante falar primeiro sobre o significado de entropia e dar exemplos. Isto ajuda o leitor menos familiarizado com o assunto, a entender melhor o fundamento deste estudo.

Apresentados os modelos entrópicos restrito e irrestrito, recapitulou-se o que já foi visto em (GRANJA<sup>12</sup>), ou seja, uma estratégia de resolução baseada na programação geométrica. Tem-se como vantagem teórica na utilização desta estratégia, o fato de que aplicando-se a teoria da dualidade ao problema reformulado pela programação geométrica, a nova configuração do mesmo apresenta como restrição apenas a condição de que as variáveis duais devem ser maiores do que zero. A viabilidade computacional desta estratégia foi testada e os resultados encontram-se nos capítulos IV e V.

Apresentam-se finalmente os principais tópicos que devem estar presentes num estudo de planejamento, incluindo-se entre eles a previsão da distribuição espacial de viagens através da resolução do Modelo Entrópico Restrito.

## CAPÍTULO III – ALGORITMOS DE RESOLUÇÃO DO MODELO ENTRÓPICO RESTRITO

### III.1 – INTRODUÇÃO:

Neste capítulo serão abordados dois métodos de otimização não estudados anteriormente que vão determinar os valores das variáveis do modelo que maximizam a entropia do sistema apresentado.

Pelas suas próprias características, eles são indicados para a resolução do problema ora em estudo ( $P_2$ ).

Os métodos são o do Gradiente e do Simplex-Convexo.

Além destes, existem outros, como o Algoritmo de Frank e Wolfe, Método de Aproximação Linear, etc. os quais, não serão aqui estudados.

### III.2 – MÉTODO DO GRADIENTE:

#### III.2.1 – Apresentação

O método do Gradiente de maneira geral produz uma seqüência de soluções que não converge necessariamente num ponto ótimo, isto é, a resolução do problema pode exigir um número infinito de passos.

Para os casos em que as restrições são lineares e/ou quando a função objetiva tem forma quadrática, a maioria dos métodos que utilizam o gradiente da função para determinar direções de busca do ótimo, tem convergência finita.

Portanto estes métodos são mais fáceis de serem aplicados quando a não linearidade ocorre somente na função objetivo sendo as restrições lineares, o que ocorre no nosso caso.

Entre outras dificuldades na aplicação do método temos a possível existência de pontos de inflexão, bem como a não convexidade da função objetivo (no caso de minimização), que poderão conduzir-nos a soluções parasitas ou retardar o processo de busca da solução ótima.

Tem-se porém indicações de estudos já feitos (GRANJA<sup>12</sup>), da conveniência da utilização dos métodos que usam o gradiente da função objetivo, para aplicação em problemas semelhantes ao que está sendo estudado.

O método aqui utilizado, doravante chamado Método do Gradiente, será explicado a seguir.

Se uma função  $f(x)$  é diferencial ela tem um gradiente  $\nabla f(x)$  para cada ponto  $x$ .

O gradiente fornece a direção ao longo da qual uma pequena variação em  $x$ , dá a maior variação em  $f(x)$ , de forma que querendo-se caminhar sobre a superfície  $f(x)$  em direção ao ponto ótimo, o caminho localmente mais eficiente a ser seguido é ao longo do gradiente até que se tenha:

$$\nabla f(x) = 0 \quad (\text{III.1})$$

Devido a impossibilidade de uma avaliação contínua do  $\nabla f(x)$ , resta saber até quando continuar em trajetória reta ao longo do gradiente, até calcular novo gradiente e mudar de direção.

A equação a ser utilizada é a seguinte:

$$X_{k+1} = X_k \pm R_k * \nabla f(x_k) \quad (\text{III.2})$$

Para a maximização usa-se o sinal positivo e para a minimização o sinal negativo.

$R_k$  é um número positivo que nos diz o quanto deve-se andar na trajetória do respectivo gradiente de forma a se obter o melhor valor possível de  $f(x)$ , para este

gradiente.

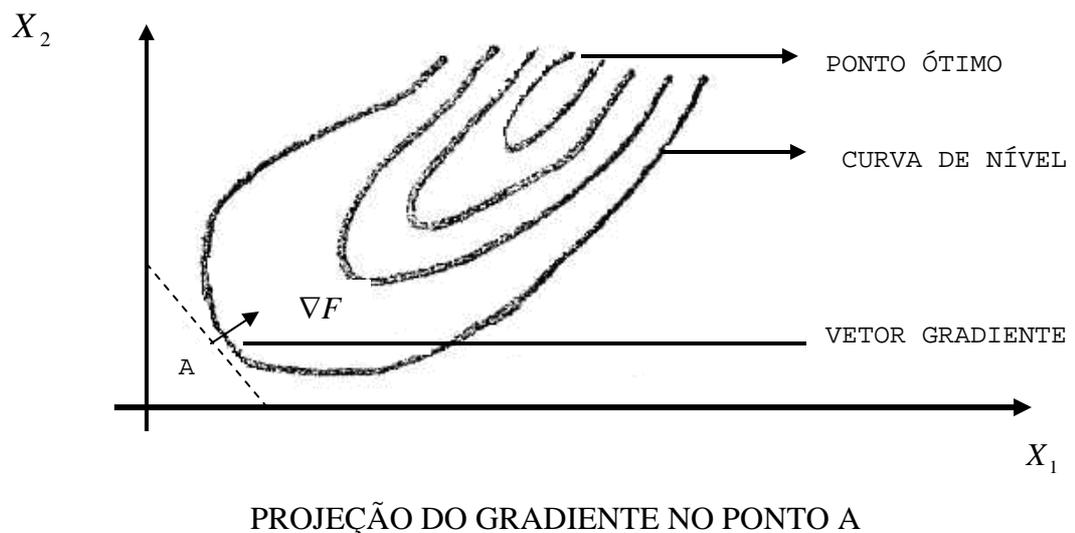
A determinação dos valores de  $R_k$  é portanto de grande importância para que se tenha uma convergência mais rápida do método, já que quando o valor do mesmo for muito pequeno a convergência será mais demorada e se o valor for muito grande, a função  $f(x)$  começa a piorar afastando-se da solução ótima.

A busca do valor ótimo da função segue até que se tenha  $\nabla f(x) = 0$ .

Observa-se então que o método reduz-se a uma seqüência de otimizações da variável  $R_k$ , ou através de escolhas sucessivas de valores de  $R_k$ .

O método do gradiente utilizado, segue em busca do ponto ótimo em forma de ziguezague, sendo que a nova direção de busca, é sempre ortogonal e anterior.

Quando a função objetivo não é unimodal, a convergência pode se dar para um ótimo local. Nestes casos, deve-se tomar diferentes pontos iniciais, tentando-se encontrar o ótimo global.



### III.2.2 – Utilização do Método do Gradiente para a Resolução do Modelo Entrópico Irrestrito

#### III.2.2.1 – Formulação.

Conforme já foi visto no capítulo II, o Problema Geral reformulado através da teoria da dualidade da programação geométrica, é apresentado no Problema ( $P_5$ ).

Para o caso em que não se considera restrição de custo, tem-se  $w = 1$  e o problema se apresenta com a seguinte formulação:

$$\min K(u, v) = T \log\left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} u_i v_j \cdot \Phi\right) \quad (\text{III.3})$$

Sendo:

$$\Phi = \prod_{\ell_1=1}^N (u_{\ell_1}^{-\bar{O}_{\ell_1}}) \prod_{\ell_2=1}^N (v_{\ell_2}^{-\bar{D}_{\ell_2}}) \quad (\text{III.4})$$

Sujeito a:

$$u_i > 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{III.5})$$

$$v_j > 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{III.6})$$

A solução final fica sendo a seguinte:

$$t_{ij}^* = f_{ij} u_i^* v_j^* \Phi^* / T \log\left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} u_i^* v_j^* \Phi^*\right) \quad (\text{III.7})$$

Para a resolução do problema, utilizou-se um método do gradiente.

A solução será ótima quando:

$$\frac{dk}{du_i} = \frac{dk}{dv_i} = 0 \quad (\text{III.8})$$

Considerando-se primeiramente  $v_j = \text{cte.}$

$$\frac{dk}{du_i} = ?$$

Tem-se a derivada de um produto de duas funções:

$$y = a * b \quad (\text{III.9})$$

$$y' = a' b + ab' \quad (\text{III.10})$$

Onde:

$$a = u_i \quad (\text{III.11})$$

$$b = (u_{\ell_1})^{-\bar{O}_{\ell_1}} \quad (\text{III.12})$$

$$a' = 1 \quad (\text{III.13})$$

$$b' = -\bar{O}_{\ell_1} \cdot (u_{\ell_1})^{(-\bar{O}_{\ell_1}-1)} \quad (\text{III.14})$$

Então:

$$\frac{dk}{du_i} = \sum_{j=1}^N f_{ij} \cdot v_j \prod_{\ell_1=1}^N (u_{\ell_1})^{-\bar{O}_{\ell_1}} \cdot \prod_{\ell_2=1}^N (v_{\ell_2})^{-\bar{D}_{\ell_2}} + \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} \cdot u_i \cdot v_j \prod_{\ell_2=1}^N (v_{\ell_2})^{-\bar{D}_{\ell_2}} \right) \frac{-\bar{O}_{\ell_1}}{u_{\ell_1}} \cdot \prod_{l=1}^N u_{\ell_1}^{-\bar{O}_{\ell_1}} \quad (\text{III.16})$$

$$\frac{dk}{du_i} = \left[ \sum_{j=1}^N f_{ij} \cdot v_j - \frac{\bar{O}_i}{u_i} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \cdot f_{ij} \cdot u_i \cdot v_j \right] \prod_{\ell_1=1}^N u_{\ell_1}^{-\bar{O}_{\ell_1}} \cdot \prod_{\ell_2=1}^N v_{\ell_2}^{-\bar{D}_{\ell_2}} \quad (\text{III.17})$$

$$\frac{dk}{du_i} = \left[ \sum_{j=1}^N f_{ij} \cdot v_j - \frac{\bar{O}_i}{u_i} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} \cdot u_i \cdot v_j \right] \Phi \quad (\text{III.18})$$

Analogamente:

$$\frac{dk}{dv_j} = \left[ \sum_{i=1}^N f_{ij} \cdot u_i - \frac{\bar{D}_j}{v_j} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} \cdot u_i \cdot v_j \right] \Phi \quad (\text{III.19})$$

### III.2.3 – Utilização do Método do Gradiente para a Resolução do Modelo Entrópico Restrito

#### III.2.3.1 – Formulação.

A resolução através de um método simples de gradiente conduzirá a procurar de forma iterativa a satisfação das equações:

$$\frac{dk}{du_i} = 0 \quad (\text{III.20})$$

$$\frac{dk}{dv_j} = 0 \quad (\text{III.21})$$

$$\frac{dk}{dw} = 0 \quad (\text{III.22})$$

Onde:

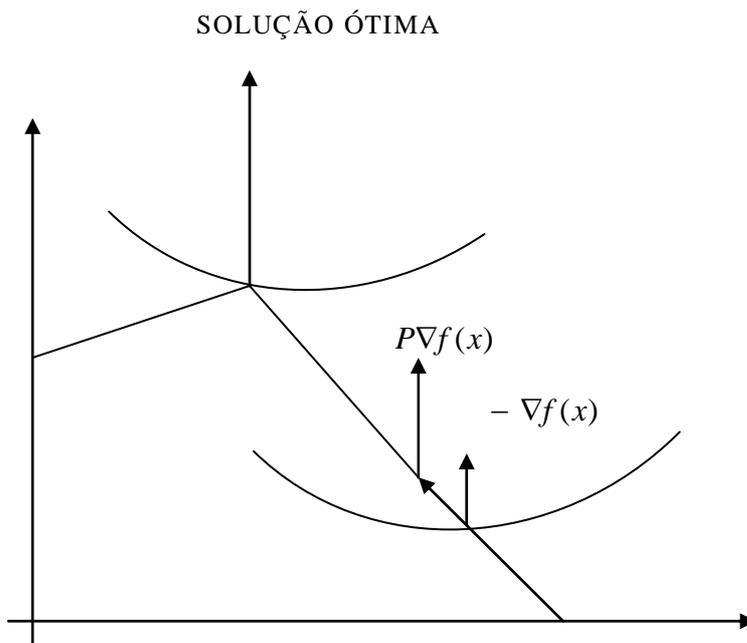
$$\frac{dk}{du_i} = \left( \sum_{j=1}^n f_{ij} \cdot v_j \cdot w^{-C_{ij}} - \frac{\bar{O}_i}{u_i} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} \cdot u_i \cdot v_j \cdot w^{-C_{ij}} \right) \Phi \quad (\text{III.23})$$

$$\frac{dk}{dv_j} = \left( \sum_{i=1}^n f_{ij} \cdot u_i \cdot w^{-C_{ij}} - \frac{\bar{D}_j}{v_j} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} \cdot u_i \cdot v_j \cdot w^{-C_{ij}} \right) \Phi \quad (\text{III.24})$$

$$\frac{dk}{dw} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} \cdot u_i \cdot v_j \cdot (\bar{C} - C_{ij}) \cdot w^{-c_{ij}} \Phi \quad (\text{III.25})$$

### III.3 – MÉTODO DO GRADIENTE PROJETADO:

Para o caso em estudo, ou seja, uma função objetivo não linear sujeita a restrições lineares, pode ocorrer que movendo-se ao longo de uma direção cujo gradiente seja negativo, conduza-se a busca em direção a pontos que se encontram fora do conjunto solução do problema. O método do Gradiente Projetado (BAZARAA<sup>01</sup>), projeta o gradiente negativo de tal forma que melhora a função objetivo e ao mesmo tempo mantém a busca dentro do conjunto viável, conforme mostra a figura abaixo:



FONTE: (BAZARAA<sup>01</sup>)

Dada uma função  $f(x)$  a ser minimizada, sujeito a  $Ax \leq b$  e  $Ex = e$ , pode-se proceder da seguinte forma para resolver o problema:

00 –  $K = 0$

01 – Escolhe-se um ponto inicial  $x_1$ , tal que  $Ax_1 \leq b$  e  $Ex_1 = e$

02 –  $K = K + 1$

03 – Decompõem-se  $A^t$  em  $(A_1^t, A_2^t)$  e  $b^t$  em  $(b_1^t, b_2^t)$  de tal forma que  $A_1^t \cdot x_k = b_1^t$  e  $A_2^t \cdot x_k = b_2^t$

04 – Faz-se  $M^t = (A_1^t, E^t)$

05 – Se  $M = \text{vazio}$ , faz-se  $P = I$

06 – Caso contrário, faz-se  $P = I - M^t (MM^t)^{-1} M$

07 – Faz-se  $d_k = -P \nabla f(x_k)$

08 – Se  $d_k \neq 0$ , passa-se para o passo 16

09 – Se  $d_k = 0$  e  $M = \text{vazio}$ , pára-se o problema

10 – Se  $d_k = 0$  e  $M \neq \text{vazio}$ , faz-se  $W = -(MM^t)^{-1} M \nabla f(x_k)$

11 – Faz-se  $W^t = (u^t, v^t)$ , sendo  $\underline{u}$  relativo as restrições de desigualdade e  $\underline{v}$  relativo as restrições de igualdade.

12 – Se  $u \geq 0$  pode-se parar o problema, pois  $x_k$  é um ponto de Kuhn-Tucker. Vide (BAZARAA<sup>01</sup>).

13 – Se  $u < 0$ , escolhe-se um componente de  $\underline{u}$  que seja negativo, digamos  $u_j$ .

14 – Localiza-se na matriz  $A_1$ , a linha referente a  $u_j$ , eliminando-a.

15 – Volta-se para o passo 4.

16 – Deve-se encontrar o valor ótimo de  $\lambda$  para:

$$\min f(x_k + \lambda d_k)$$

$$\text{Sujeito a: } 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{máx}}$$

Onde:

$$\lambda_{\text{máx}} = \begin{cases} \min(b_i / d_i : d_i > 0), & \text{se } d > 0 \\ \infty, & \text{se } d \leq 0 \end{cases}$$

Sendo:

$$\hat{b} = b_2 - A_2 x_k$$

$$\hat{b} = A_2 d_k$$

17 – Faz-se  $x_{k+1} = x_k + \lambda_k \cdot d_k$

18 – Passa-se para o passo 2.

### III.4 – MÉTODO DO SIMPLEX-CONVEXO:

#### III.4.1 – Apresentação

Este método procura seguir, tanto quanto possível, a maneira de resolução do método simplex linear, sendo que a função a ser otimizada é convexa, sujeita a restrições lineares.

No método simplex linear, tendo-se um conjunto solução do problema, parte-se de um ponto solução (vértice do conjunto), percorrendo-se em cada passo uma aresta até encontrar o vértice seguinte, cuja solução é melhor que a anterior e segue-se desta forma até encontrar a solução ótima.

No método simplex-convexo, a solução que se toma de início, para que se possa dar o passo seguinte, não precisa estar necessariamente localizada em um extremo ou vértice do conjunto solução; é suficiente apenas que ela se encontre dentro deste conjunto ou região viável.

O ponto inicial escolhido é um ponto extremo de referência.

O deslocamento a partir da solução inicial, em busca da solução ótima, se dará paralelamente a um eixo formado por este extremo.

Temos em  $(P_3)$  uma função objetivo estritamente côncava sujeita a restrições lineares. Problemas deste tipo podem ser resolvidos, utilizando-se entre outros, o Método do Simplex-Convexo (ZANGWILL<sup>33</sup>).

Devido ao fato de que a resolução do problema, através do seu dual na programação geométrica, tem aspectos mais abordáveis, diversos autores (BECK e ECKER<sup>02</sup>) adaptaram o método para sua utilização no problema dual, tendo-se porém dificuldades na anulação de variáveis pertencentes a uma mesma restrição de desigualdade do problema primal.

Com o problema ( $P_5$ ) é funcionalmente irrestrito, não temos este tipo de problema, para o uso do Método Simplex-Convexo.

A dificuldade que se tem em princípio, é a determinação do gradiente da função objetivo em pontos onde as variáveis são iguais a zero, o que ocorre com as variáveis não básicas. Observe-se que a função objetivo contém a função logaritma.

Porém, segundo (GRANJA<sup>12</sup>):

“Partindo-se de uma solução inicial viável, estritamente positiva, o Método Simplex-Convexo gerará ao longo de suas iterações, soluções viáveis estritamente positivas”.

Isto garante a convergência do Método para o nosso caso, além de solucionar a dificuldade aparente que se tenha.

De acordo com o Simplex-Convexo, o problema ( $P_3$ ) se apresenta da seguinte forma:

$$\text{Max } H(t) \quad (\text{III.26})$$

Sujeito a:

$$A \underline{t} = \underline{b} \quad (\text{III.27})$$

$$\underline{t} \geq 0 \quad (\text{III.28})$$

Onde:

$$A = \text{matriz } (n * N^2) \quad (\text{III.29})$$

$$n = 2N \quad (\text{III.30})$$

$$N = \text{n}^\circ \text{ de zonas}$$

A matriz  $A$  deve ter suas linhas linearmente independentes entre si.

Então no caso de estarmos trabalhando também com restrição de custo, coloca-se a mesma na matriz  $A$ , retirando-se uma das restrições de conservação, podendo ser a última por exemplo.

No caso de não haver restrição de custo tem-se:

$$n = 2N - 1$$

$$\text{Fazendo: } \underline{Q} \underline{t} = \underline{b}^o$$

Onde:  $\underline{t}^o =$  solução básica admissível, de um conjunto  $\underline{t}$ .

$\underline{t} =$  conjunto solução intermediário estritamente positivo.

$\underline{Q} =$  quadro análogo a  $A$ , porém referente a solução básica.

$\underline{b}^o =$  solução básica.

Considerando-se os custos relativos associados a este quadro ( $\underline{Q}$ ), tem-se:

$$\underline{C}(\underline{t}) = \nabla H(\underline{t}) - \underline{Q}^t * H^o \quad (\text{III.32})$$

Onde:

$$\nabla H^o = \left( \frac{dH}{dt_i^o}, \dots, \frac{dH}{dt_{n^o}} \right)^t \quad (\text{III.33})$$

E

$$\nabla H = \left( \frac{dH}{dt_i}, \dots, \frac{dH}{dt_{n^2}} \right)^t \quad (\text{III.34})$$

Conforme, já resolvido em (GRANJA<sup>12</sup>), para o nosso caso, tem-se:

$$C_{(ij)} = -\log t_{ij} + \sum \log t_{k1} + \gamma(ij) \quad (\text{III.35})$$

$(k,1) \in \text{base}$

Onde:

$(k,1)$  : representa a posição  $N(k - 1) + 1$  do vetor  $\underline{t}$

$(i, j)$  : representa a posição  $N(i - 1) + j$  do vetor  $\underline{t}$

$\gamma(i, j) = \text{constante}$

Quando a direção da procura da solução  $(\underline{d})$ , tem-se:

$d_j = 0$  para  $j \neq k$ , sendo  $j$  o índice de uma variável não básica.

$d_k = 1$

$d_j = -q_{ik}$  sendo  $j$  o índice de uma variável básica.

Onde:

$k =$  índice de uma variável não básica

$q_{ik} =$  elemento da linha  $j$  e coluna  $k$  da matriz  $Q$ .

### III.4.2 – Utilização do Método do Simplex-Convexo para a Resolução do Modelo Entrópico Restrito

#### III.4.2.1 – Formulação.

Uma outra maneira de determinar a matriz de distribuição de viagens  $[T_{ij}]$  que maximiza a entropia do sistema, é através da utilização do Método do Simplex-Convexo.

O referido método é aplicado ao problema  $(P_3)$  e admite também a presença de restrição de custo de forma explícita.

Primeiramente determina-se uma solução inicial viável estritamente positiva, pois

sabe-se de (GRANJA<sup>12</sup>) que a partir desta, o Método do Simplex-Convexo gera ao longo de suas iterações, soluções viáveis estritamente positivas.

Uma elucidação sobre a determinação desta solução inicial é apresentada no decorrer deste capítulo.

Sendo  $N$ , o número de zonas pertencentes a área em estudo, tem-se um problema com  $2N$  restrições e o vetor solução apresenta  $(N \times N)$  elementos.

Fazendo  $N \times N = Z$ , pode-se chamar um vetor solução qualquer de  $T_s$ , onde  $s = 1, \dots, Z$ .

A partir de  $T_s^{(0)}$ , desagrega-se o mesmo em  $T_{IB}^o(I)$  e  $T_{INB}^{(0)}(I)$ , onde:

$T_{IB}(I)$  = Vetor composto pelas variáveis básicas, com  $I = 1, \dots, (2N)$ .

$T_{INB}(I)$  = Vetor composto pelas variáveis não básicas, com  $I = 1, \dots, (Z - 2N)$ .

A definição de  $T_{IB}(I)$ , segue o seguinte critério:

Os  $(2N)$  maiores elementos componentes de  $T_s$ , formam o vetor  $T_{IB}(I)$  e os demais, compõem o vetor  $T_{INB}(I)$ .

Quanto aos coeficientes das variáveis envolvidas no sistema de equações do conjunto de restrições, são tratados da seguinte forma:

A matriz geral dos coeficientes é a matriz  $[A_{i,s}]$ , com as dimensões de  $2.N$  linhas e  $N.N$  colunas.

As linhas da matriz devem ser linearmente independentes. Quando a restrição de custo apresenta uma independência linear em relação as restrições de conservação, retira-se umas destas, incluindo-se a restrição de custo e em caso contrário o número de linhas é igual,

a  $(2N - 1)$ .

Os elementos que formam o segundo membro no conjunto de restrições compõem o vetor  $\underline{b}$ .

Então, tem-se:

$$\text{máx } H(T_s) \quad (\text{III.36})$$

Sujeito a:

$$A_{i,s} \cdot T_s = \underline{b} \quad (\text{III.37})$$

$$T_s \geq 0 \quad (\text{III.38})$$

A matriz  $A_{i,s}$ , deve ser desagregada nas matrizes  $B$  e  $N$ , onde:

$B$  = matriz dos coeficientes das variáveis básicas, referentes ao conjunto de restrições.

$N$  = matriz dos coeficientes das variáveis não básicas, referentes ao conjunto de restrições.

A seguir determina-se os custos relativos ( $CR(I)$ ).

Em (GRANJA<sup>12</sup>), comenta-se a respeito destes custos e justifica-se a necessidade da sua determinação, da seguinte forma:

Os custos relativos permitem, como no caso do simplex da programação linear, definir as mudanças a serem realizadas nas variáveis não básicas para maximizar a função objetivo:

- Procuram-se aumentar as variáveis não básicas que apresentam, inicialmente, um

custo relativo positivo (até zerar o custo relativo de alguma variável básica).

- Procuram-se diminuir as variáveis não básicas que apresentem, inicialmente, em custo relativo negativo (até, se possível, zerar este custo).

A forma de determinar os custos relativos é apresentada a seguir:

$$(CR(I))^t = \nabla H(T)^t - \nabla_B H(T)^t \cdot Q \quad (III.39)$$

Onde:

$\nabla H(T)$  = Gradiente da função de entropia, em relação as variáveis  $T_s$

$\nabla_B H(T)$  = Gradiente da função de entropia, em relação as variáveis básicas  $T_{IB}$

$$Q = B^{-1} \cdot A \quad (III.40)$$

Executando-se os cálculos necessários (GRANJA<sup>12</sup>), chega-se facilmente a:

$$CR_{--}(IJ) = -[1 + \log(T_{ij} / f_{ij}) + [1 + \log(T_{kl} / f_{kl})] \cdot q((KL)(IJ))]$$

$$(k, L) \in Base \quad (III.41)$$

Onde:

$q((kL), (IJ))$  é o elemento da linha  $(KL)$  e coluna  $(IJ)$  da matriz  $Q$ .

A partir da determinação dos custos relativos, pode-se definir outros parâmetros (BAZARAA<sup>01</sup>).

$$\alpha = \text{máximo valor de: } - CR(I) : CR(I) \leq 0 \quad (III.42)$$

$$\beta = \text{máximo valor de: } T_{(I)} \cdot CR(I) : CR(I) \geq 0 \quad (III.43)$$

$$v = \begin{cases} \text{índice tal que } \alpha = -CR(v) & (III.44) \\ \text{índice tal que } \beta = T_{(v)} \cdot CR(v) & (III.45) \end{cases}$$

A direção de busca da solução ( $\underline{D}$ ), é:

$$\underline{DN}_j = \begin{cases} 0 & \text{se } j \notin IB(I), j \neq v & (III.46) \\ 1 & \text{se } j \notin IB(I), j = v & (III.47) \end{cases}$$

$$\underline{DN}_j = \begin{cases} 0 & \text{se } j \notin IB(I), j \neq v & (III.48) \\ -1 & \text{se } j \notin IB(I), j = v & (III.49) \end{cases}$$

Onde:

$\underline{DN}_j$  = direção de busca, relativa as variáveis não básicas.

$$\underline{DB} = -B^{-1} \cdot N \cdot \underline{DN} \quad (III.50)$$

Sendo:

$\underline{DB}$  = direção de busca, relativa as variáveis básicas.

O vetor  $\underline{D}$  é composto pelos elementos de  $\underline{DN}$  e  $\underline{DB}$ .

Para dar continuidade ao algoritmo, deve-se fazer as seguintes considerações (BAZARAA<sup>01</sup>):

- Se  $\alpha = \beta = 0$ , parar
- Se  $\alpha > \beta$ , calcular  $\underline{DN}_j$ , a partir de (III.44), (III.46) e (III.47).

- Se  $\alpha < \beta$ , calcular  $\underline{\underline{DN}}_j$ , a partir de (III.45), (III.48) e (III.49).
- Se  $\alpha = \beta \neq 0$ , pode-se calcular  $\underline{\underline{DN}}_j$ , tanto de uma maneira como de outra.

Em todos os casos,  $\underline{\underline{DB}}$  é determinado através de (III.50).

O passo seguinte é determinar qual a dimensão do avanço ( $RK$ ) a ser dado em busca da solução ótima.

Para o caso de minimização, tem-se:

$$\text{Minimizar } H(\underline{\underline{T}}_s + RK \cdot \underline{\underline{D}}) \quad (\text{III.51})$$

Sujeito a:

$$0 \leq RK \leq RK_{\text{máx}} \quad (\text{III.52})$$

Onde:

$$RK_{\text{máx}} = \begin{cases} \text{mínimo } \frac{-T_i}{D_i} : D_i < 0, \text{ se } D_s < 0 & (\text{III.53}) \\ \infty & , \text{ se } D_s \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.54})$$

Onde,  $T_i$  e  $D_i$  são respectivamente os  $i$ -ésimos elementos de  $\underline{\underline{T}}_s$  e  $\underline{\underline{D}}_s$ .

Determinado o valor de  $RK$  que otimiza (III.51), pode-se calcular o novo vetor  $\underline{\underline{T}}_s$ .

$$\underline{\underline{T}}_s^{(I+1)} = \underline{\underline{T}}_s^{(I)} + RK \underline{\underline{D}}_s^{(I)} \quad (\text{III.55})$$

e repete-se o processo até a obtenção da solução final.

#### III.4.2.2 – Convergência.

O método avança em direção da solução ótima através do parâmetro  $RK$ , conforme já

foi comentado.

A convergência teórica é obtida quando  $T_s$  é um “ponto de Kuhn-Tucker” e  $T_s$  o será, quando tiver-se  $\alpha = \beta = 0$ .

Explicações detalhadas e comprovações, podem ser encontradas em (BAZARAA<sup>01</sup>).

Segundo (GRANJA<sup>12</sup>), a convergência deste método foi demonstrada em vários trabalhos (ZANGWILL<sup>33</sup>); atingindo-se teoricamente a solução do problema, com um número infinito de iterações.

### III.5 – CONCLUSÃO:

Tanto um método do gradiente como o do Simplex-Convexo de (ZANGWILL<sup>33</sup>) podem ser utilizados para a resolução do Modelo Entrópico Restrito. A aplicação destes métodos será feita no capítulo V, tendo sido dada aqui uma noção introdutória acerca dos mesmos.

A resolução do problema através do Simplex-Convexo é inicializada com a utilização no Modelo de Hitchcock, enquanto que através do gradiente, simplesmente arbitra-se os valores iniciais das variáveis duais, considerando-se ainda a matriz de probabilidade a priori.

## CAPÍTULO IV – APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS COMPUTACIONAIS E ANÁLISE COMPARATIVA DO MÉTODO DE FURNESS COM O MÉTODO DO GRADIENTE APLICADO AO MODELO ENTRÓPICO SEM RESTRIÇÃO DE CUSTO.

### IV.1 – INTRODUÇÃO:

São apresentados neste capítulo, os resultados computacionais obtidos, referentes a utilização de diferentes métodos de resolução do problema da previsão da distribuição de viagens numa rede de transportes.

Verifica-se também a viabilidade computacional de cada método e comparam-se a eficiência dos mesmos no que diz respeito a facilidade de programação, tempo ou CPU e precisão dos resultados.

Na programação foi utilizada a Linguagem FORTRAN, e os programas foram processados no computador IBM 4341, da Universidade Federal de Santa Catarina.

Foram feitos neste capítulo estudos comparativos referentes a resolução do problema de previsão da distribuição de viagens sem considerar restrição de custo, ou seja, considerando-se a sensibilidade da população em relação ao custo de transporte, como sendo igual a zero.

Neste caso o problema foi resolvido primeiramente através do Método de Furness e depois através da utilização da teoria da dualidade aplicada a programação geométrica referente ao modelo entrópico sem restrição de custo, empregando-se um método do gradiente.

### IV.2 – MÉTODO DE FURNESS:

#### IV.2.1 – Aplicação Numérica

##### IV.2.1.1 – Apresentação.

Conforme já estudado em (VALENTE<sup>29</sup>), foram considerados três tamanhos de áreas

de estudo cujos números de zonas componentes são de  $N = 5, 15$  e  $30$ , onde este último já corresponde a dimensão de problemas de planejamento reais. Foram consideradas também diversas situações de produção e atração de viagens, bem como várias distribuições a priori das viagens e vários graus de precisão global para os resultados.

#### IV.2.1.2 – Programação Computacional.

Linguagem: Fortran

Computador: IBM 4341

Objetivo: Determinação da matriz de previsão de distribuição de viagens.

Método: Furness

Capacidade: 30 zonas.

A capacidade do programa pode perfeitamente ser ampliada.

O programa encontra-se no ANEXO 1.

#### IV.2.1.3 – Entrada.

##### IV.2.1.3.1 – Para o número de zonas (N) = 5

- A produção ( $O_i$ ) e atração ( $D_j$ ) de viagens consideradas neste caso são respectivamente as seguintes:

ZONA	1	2	3	4	5
$O_i$	60	40	50	30	20
$D_j$	20	30	50	60	40

- Número total de viagens (TOT)

$$TOT = 200$$

- A matriz inicial de viagens  $[T_{ij}]^0$ , coincide com a matriz de probabilidade a priori

$[P_{ij}]$  e é a seguinte:

$$[T_{ij}]^0 = [P_{ij}] = \frac{O_i \cdot D_j}{TOT}$$

Foram acrescentadas, arbitrariamente, as seguintes ponderações:

$$T^{(0)}(1,1) = P(1,1) = 4,00$$

$$T^{(0)}(1,3) = P(1,3) = 6,00$$

$$T^{(0)}(2,4) = P(2,4) = 9,00$$

$$T^{(0)}(2,5) = P(2,5) = 6,00$$

$$T^{(0)}(3,2) = P(3,2) = 10,00$$

$$T^{(0)}(3,4) = P(3,4) = 11,00$$

$$T^{(0)}(4,1) = P(4,1) = 7,00$$

$$T^{(0)}(4,2) = P(4,2) = 1,00$$

$$T^{(0)}(5,3) = P(5,3) = 2,00$$

$$T^{(0)}(5,5) = P(5,5) = 5,00$$

- A regra de parada é feita em função do nível de precisão (EPS) ou do número de iterações (NUMIT).

$$EPS = 0,001$$

$$NUMIT = 100$$

#### IV.2.1.3.2 – Para o número de zonas (N) = 15

- Produção ( $O_i$ ) e atração ( $D_j$ )

ZONA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$O_i$	80	40	50	70	90	55	60	75	30	85	35	90	50	30	60
$D_j$	95	50	70	45	60	80	60	40	30	90	65	35	50	80	50

- Número total de viagens (TOT)

$$TOT = 900$$

- A matriz inicial de viagens  $[T_{ij}]^{(0)}$  coincide com a matriz de probabilidade a priori

$[P_{ij}]$ .

$$[T_{ij}]^{(0)} = [P_{ij}]^{(0)} = \frac{O_i \cdot D_j}{TOT}$$

Ponderações:

$$T^{(0)}(1,1) = P(1,1) = 2,00$$

$$T^{(0)}(2,15) = P(2,15) = 7,00$$

$$T^{(0)}(3,9) = P(3,9) = 5,00$$

$$T^{(0)}(4,7) = P(4,7) = 3,00$$

$$T^{(0)}(5,10) = P(5,10) = 8,00$$

$$T^{(0)}(6,2) = P(6,2) = 1,00$$

$$T^{(0)}(7,4) = P(7,4) = 4,00$$

$$T^{(0)}(8,8) = P(8,8) = 3,00$$

$$T^{(0)}(9,14) = P(9,14) = 5,00$$

$$T^{(0)}(10,6) = P(10,6) = 7,50$$

$$T^{(0)}(11,13) = P(11,13) = 3,00$$

$$T^{(0)}(12,12) = P(12,12) = 2,50$$

$$T^{(0)}(13,5) = P(13,5) = 6,00$$

$$T^{(0)}(14,11) = P(14,11) = 1,50$$

$$T^{(0)}(15,15) = P(15,15) = 4,50$$

- Regra de parada

Nível de precisão (EPS) = 0,001

Número máximo de iterações (NUMIT) = 100

IV.2.1.3.3 – Para o número de zonas (N) = 30

- Produção ( $O_i$ ) e atração de viagens ( $D_j$ )

ZONA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$O_i$	40	60	50	40	70	60	70	40	66	70	50	62	56	56	60
$D_j$	60	50	38	60	82	60	84	48	56	62	44	52	36	48	90

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
64	68	70	72	45	66	60	90	60	60	64	56	75	40	60
50	60	50	90	80	42	36	78	70	64	88	54	70	42	56

- Número total de viagens (TOT)

$$TOT = 1800$$

- A matriz inicial de viagens  $[T_{ij}]^{(0)}$  coincide com a matriz de probabilidade a priori

$[P_{ij}]$ .

$$[T_{ij}]^0 = [P_{ij}] = \frac{O_i \cdot D_j}{TOT}$$

Ponderações:

$$T^{(o)}(1,1) = P(1,1) = 1,00$$

$$T^{(o)}(1,3) = P(1,3) = 1,00$$

$$T^{(o)}(3,3) = P(3,3) = 1,00$$

$$T^{(o)}(4,2) = P(4,2) = 7,00$$

$$T^{(o)}(5,4) = P(5,4) = 7,00$$

$$T^{(o)}(5,5) = P(5,5) = 4,00$$

$$T^{(o)}(8,4) = P(8,4) = 3,20$$

$$T^{(o)}(10,15) = P(10,15) = 0,05$$

$$T^{(o)}(12,14) = P(12,14) = 1,50$$

$$T^{(o)}(13,4) = P(13,4) = 2,00$$

$$T^{(o)}(14,30) = P(14,30) = 3,50$$

$$T^{(o)}(16,1) = P(16,1) = 0,90$$

$$T^{(o)}(19,21) = P(19,21) = 2,40$$

$$T^{(o)}(21,7) = P(21,7) = 4,00$$

$$T^{(o)}(25,20) = P(25,20) = 0,50$$

$$T^{(o)}(28,2) = P(28,2) = 1,40$$

$$T^{(o)}(30,30) = P(30,30) = 3,80$$

- Regra de parada

Nível de precisão (EPS) = 0,001

Número máximo de iterações = 100

IV.2.1.4 – Saída.

N	Relatório de Saída
05	Vide Anexo 1, item 1.2
15	Vide Anexo 1, item 1.3
30	Vide Anexo 1, item 1.4

## IV.3 – MODELO ENTRÓPICO SEM RESTRIÇÃO DE CUSTO

### IV.3.1 – Aplicação Numérica

#### IV.3.1.1 – Apresentação.

Tendo em vista que um dos objetivos do trabalho é a comparação entre os dois métodos que não tratam o custo de forma explícita, escolheu-se para aplicação numérica deste método, o mesmo problema já resolvido anteriormente pelo Método de Furness. Sendo assim têm-se três estudos, considerando-se o número de zonas (N) primeiramente igual a 5, depois igual a 15 e finalmente igual a 30.

A matriz da probabilidade a priori e a precisão requerida para o problema também coincidem com as anteriores.

#### IV.3.1.2 – Programação Computacional.

Linguagem: FORTRAN

Computador: IBM 4341

Objetivo: Determinar a matriz de previsão de distribuição de viagens.

Modelo: Entrópico sem restrição de custo

Método: Gradiente

Capacidade: 30 zonas

O programa encontra-se no ANEXO 2.

#### IV.3.1.3 – Entrada.

##### IV.3.1.3.1 – Para o número de zonas (N) = 5

- A produção ( $O_i$ ) e atração de viagens ( $D_j$ ) consideradas neste caso são respectivamente as seguintes:

ZONA	1	2	3	4	5
$O_i$	60	40	50	30	20
$D_j$	20	30	50	60	40

- Número total de viagens (TOT)

$$TOT = 200$$

- A matriz inicial de viagens  $[T_{ij}]^0$ , foi considerada como sendo igual a matriz de probabilidade a priori  $[P_{ij}]$  e é a seguinte:

$$[T_{ij}]^0 = [P_{ij}] = \frac{O_i \cdot D_j}{TOT}$$

Ponderações:

$$T^{(0)}(1,1) = P(1,1) = 4,00$$

$$T^{(0)}(1,3) = P(1,3) = 6,00$$

$$T^{(0)}(2,4) = P(2,4) = 9,00$$

$$T^{(0)}(2,5) = P(2,5) = 6,00$$

$$T^{(0)}(3,2) = P(3,2) = 10,00$$

$$T^{(0)}(3,4) = P(3,4) = 11,00$$

$$T^{(0)}(4,1) = P(4,1) = 7,00$$

$$T^{(0)}(4,2) = P(4,2) = 1,00$$

$$T^{(0)}(5,3) = P(5,3) = 2,00$$

$$T^{(0)}(5,5) = P(5,5) = 5,00$$

- Regra de parada

Nível de precisão global (EPS) = 0,001

Número máximo de iterações (NUMIT) = 200

- Valores iniciais das variáveis duais ( $u_i$ ) e ( $v_j$ ).

Para os parâmetros estabelecidos para o problema, o critério de definição dos valores iniciais das variáveis duais que mostrou-se significativamente mais eficiente, é o seguinte:

$$u_i = \frac{TOT}{N}$$

$$v_i = \frac{TOT}{N}$$

IV.3.1.3.2 – Para o número de zonas (N) = 15

- Produção ( $O_i$ ) e atração de viagens ( $D_j$ )

ZONA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$O_i$	80	40	50	70	90	55	60	75	30	85	35	90	50	30	60
$D_j$	95	50	70	45	60	80	60	40	30	90	65	35	50	80	50

- Número total de viagens (TOT)

$$TOT = 900$$

- A matriz inicial de viagens  $[T_{ij}]^o$ , foi considerada como sendo igual a matriz de probabilidade a priori  $[P_{ij}]$  e é a seguinte:

$$[T_{ij}]^o = [P_{ij}] = \frac{O_i \cdot D_j}{TOT}$$

Ponderações:

$$T^{(0)}(1,1) = P(1,1) = 2,00$$

$$T^{(0)}(2,15) = P(2,15) = 7,00$$

$$T^{(0)}(3,9) = P(3,9) = 5,00$$

$$T^{(0)}(4,7) = P(4,7) = 3,00$$

$$T^{(0)}(5,10) = P(5,10) = 8,00$$

$$T^{(0)}(6,2) = P(6,2) = 1,00$$

$$T^{(0)}(7,4) = P(7,4) = 4,00$$

$$T^{(0)}(8,8) = P(8,8) = 3,00$$

$$T^{(0)}(9,14) = P(9,14) = 5,00$$

$$T^{(0)}(10,6) = P(10,6) = 7,50$$

$$T^{(0)}(11,13) = P(11,13) = 3,00$$

$$T^{(0)}(12,12) = P(12,12) = 2,50$$

$$T^{(0)}(13,5) = P(13,5) = 6,00$$

$$T^{(0)}(14,11) = P(14,11) = 1,50$$

$$T^{(0)}(15,15) = P(15,15) = 4,50$$

- Regra de parada

Nível de precisão (EPS) = 0,001

Número máximo de iterações (NUMIT) = 200

- Valores iniciais das variáveis duais ( $u_i$ ) e ( $v_i$ ): A maior eficiência obtida, foi arbitrando-se:

$$u_i = \frac{TOT}{N}$$

$$v_i = \frac{TOT}{N}$$

IV.3.1.3.3 – Para o número de zonas (N) = 30

- Produção ( $O_i$ ) e atração de viagens ( $D_j$ )

ZONA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$O_i$	40	60	50	40	70	60	70	40	66	70	50	62	56	56	60
$D_j$	60	50	38	60	82	60	84	48	56	62	44	52	36	48	90

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
64	68	70	72	45	66	60	90	60	60	64	56	75	40	60
50	60	50	90	80	42	36	78	70	64	88	54	70	42	56

- Número total de viagens (TOT)

$$TOT = 1800$$

- Considerando-se a matriz inicial de viagens  $[T_{ij}]^o$ , como sendo igual a matriz de probabilidade a priori,  $[P_{ij}]$ .

$$[T_{ij}]^o = [P_{ij}] = \frac{O_i \cdot D_j}{TOT}$$

Ponderações:

$$T^{(0)}(1,1) = P(1,1) = 1,00$$

$$T^{(0)}(1,3) = P(1,3) = 1,00$$

$$T^{(0)}(3,3) = P(3,3) = 1,00$$

$$T^{(0)}(4,2) = P(4,2) = 7,00$$

$$T^{(0)}(5,4) = P(5,4) = 7,00$$

$$T^{(0)}(5,5) = P(5,5) = 4,00$$

$$T^{(0)}(8,4) = P(8,4) = 3,20$$

$$T^{(0)}(10,15) = P(10,15) = 0,05$$

$$T^{(0)}(12,14) = P(12,14) = 1,50$$

$$T^{(0)}(13,4) = P(13,4) = 2,00$$

$$T^{(0)}(14,30) = P(14,30) = 3,50$$

$$T^{(0)}(16,1) = P(16,1) = 0,90$$

$$T^{(0)}(19,21) = P(19,21) = 2,40$$

$$T^{(0)}(21,7) = P(21,7) = 4,00$$

$$T^{(0)}(25,20) = P(25,20) = 0,50$$

$$T^{(0)}(28,2) = P(28,2) = 1,40$$

$$T^{(0)}(30,30) = P(30,30) = 3,80$$

- Regra de parada

Nível de precisão (EPS) = 0,001

Número máximo de iterações = 200

- Valores iniciais das variáveis ( $u_i$ ) e ( $v_i$ ).

Obteve-se maior eficiência, considerando-se:

$$u_i = \frac{TOT}{N}$$

$$v_i = \frac{TOT}{N}$$

#### IV.3.1.4 – Saída.

N	Relatório de Saída
05	Vide Anexo 2, item 2.2
15	Vide Anexo 2, item 2.3
30	Vide Anexo 2, item 2.4

#### IV.3.1.5 – Convergência.

Foi experimentada a convergência do método do gradiente aplicado ao modelo, utilizando-se o seguinte critério em busca da solução ótima:

$$u_{(x+1)} = u_{(x)} + RK \cdot \frac{dk}{du_i}(x) \quad (\text{IV.1})$$

$$v_{(x+1)} = v_{(x)} + RK \cdot \frac{dk}{dv_j}(x) \quad (\text{IV.2})$$

Quanto a determinação do parâmetro de avanço (RK), verificou-se na prática em (VALENTE<sup>29</sup>), que algumas adaptações simples nos valores assumidos pelo mesmo no decorrer das iterações, era o suficiente para se obter uma boa convergência.

Dá-se o problema como terminado, quando:

$$S < EPS \quad (\text{IV.3})$$

Onde:

EPS = parâmetro cujo valor é próximo a zero e que indica o nível de precisão da solução.

$$S = \text{Norma do gradiente} = \sqrt{\left(\frac{dk}{du_i}\right)^2 + \left(\frac{dk}{dv_i}\right)^2} \quad (\text{IV.4})$$

#### IV.4 – RESULTADOS COMPARATIVOS DA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE DISTRIBUIÇÃO DE VIAGENS:

Métodos de FURNESS X Modelo Entrópico sem Restrição de custo, reformulado pela programação geométrica, colocado em sua forma dual e resolvido através de um método do gradiente.

Conforme já foi visto, independente do método de resolução a ser utilizado, a solução do problema de distribuição é da forma:

$$T_{ij} = K \cdot r_i \cdot s_j \cdot T_{ij} \quad (\text{IV.5})$$

Então, tendo em vista que a solução é única, os dois algoritmos propostos conduziram à mesma solução, como pode ser observado nos resultados apresentados anteriormente.

Na tabela IV.1, são apresentados a seguir os resultados comparativos entre os dois algoritmos, quando se faz variar a dimensão do problema.

Nível de precisão (EPS) = 0,001

TABELA IV.1 – Resultados comparativos em função da dimensão do problema.

	N	5	15	30
FURNESS	Nº. DE ITERAÇÕES	04	03	03
	TEMPO DE COMPUTAÇÃO (segundos)	01	01	02
GRADIENTE	Nº. DE ITERAÇÕES	08	08	07
	TEMPO DE COMPUTAÇÃO (segundos)	01	02	03

Na tabela IV.2, apresenta-se para o caso  $N = 30$ , um estudo comparativo dos dois algoritmos em função do grau de precisão global (EPS).

TABELA IV.2 – Resultados comparativos em função da precisão requerida.

		0,05	0,01	0,005	0,001	0,0005	0,0001
FURNESS	Nº. DE ITERAÇÕES	02	03	03	03	03	04
	TEMPO DE COMPUTAÇÃO (segundos)	01	02	02	02	02	02
GRADIENTE	Nº. DE ITERAÇÕES	08	03	06	07	07	*
	TEMPO DE COMPUTAÇÃO (segundos)	02	03	03	03	03	*

\* O método não conseguiu atingir esta precisão.

Na figura IV.1, apresenta-se a convergência do algoritmo do gradiente aplicado ao modelo entrópico irrestrito, para o caso em que o número de zonas é igual a 30.

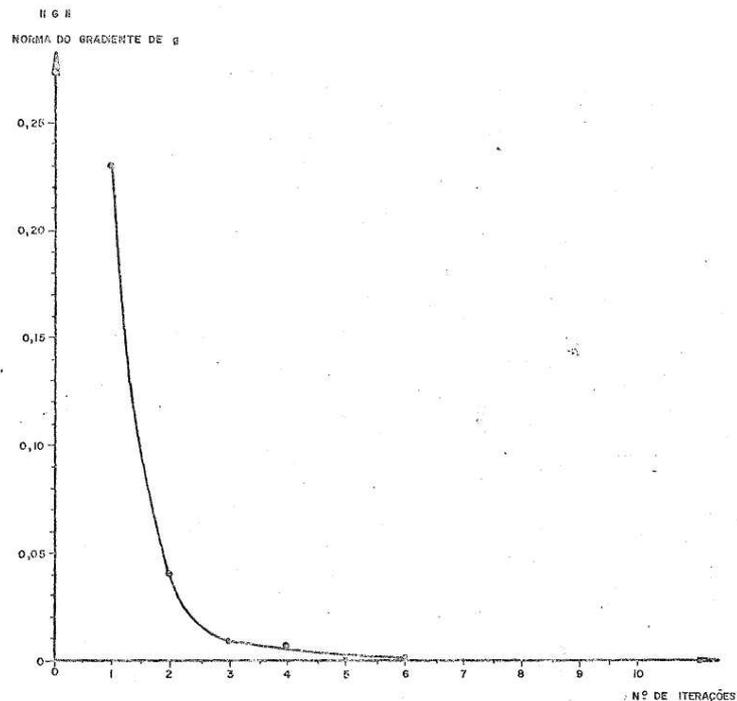


Figura IV.1  
 UM EXEMPLO DE CONVERGÊNCIA DO ALGORITMO  
 DO GRADIENTE (N=30) APLICADO AO MODELO  
 ENTROPICO SEM RESTRIÇÃO DE CUSTO

#### IV.5 –

#### CONCLUSÃO:

Analisando-se os resultados obtidos pelos dois métodos, pode-se destacar algumas observações:

- Primeiramente, deve-se fazer uma ressalva em relação a tabela 1 apresentada no item 4 desse capítulo. Quanto a esta tabela, analisando-se individualmente o comportamento de cada método quando se varia o número de zonas N, observa-se que ocorre por exemplo para N = 30, uma convergência do método do gradiente em sete iterações e para N = 5, uma convergência em oito iterações. Isto é explicado pelo fato de que as condições iniciais são diferentes e pode-se ter para N = 30 uma partida mais próxima da solução final.

Quanto ao tempo de processamento para cada método, variando-se N, os resultados

obtidos podem dar uma boa noção do seu comportamento, já que mesmo em situações diversas, como comentado anteriormente, sabe-se que cada operação matemática em  $N = 30$  é mais demorada do que  $N = 5$ . Portanto é bastante lógico ter-se por exemplo a convergência do método do gradiente em 1 segundo para  $N = 5$  e em 3 segundos para  $N = 30$ .

- O algoritmo de FURNESS pode atingir um nível de precisão mais elevado, se bem que o algoritmo do gradiente atinge níveis bastante satisfatórios de precisão.

- O algoritmo de FURNESS apresenta uma maior eficiência computacional, ainda que a diferença seja pequena.

- O método do gradiente também apresenta custos computacionais pequenos, o que permite concluir a viabilidade computacional deste método.

- Conforme já comentado em (VALENTE<sup>29</sup>), existe para o algoritmo de FURNESS, certos casos patológicos (ROBILLARD, P.; STEWART, N.F.<sup>26</sup>) onde este algoritmo não apresenta uma convergência satisfatória, enquanto os algoritmos de gradiente ignoraram esta dificuldade e se apresentaram mais confiáveis.

- A programação computacional, conforme apresentada aqui na linguagem Fortran, é mais simples para o algoritmo de Furness.

Pelo acima exposto, pode-se concluir pela maior eficiência computacional do Método de Furness, bem como pela viabilidade computacional do método do gradiente e pela conveniência da utilização da teoria da Dualidade da Programação Geoétrica.

## **CAPÍTULO V – APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS COMPUTACIONAIS OBTIDOS NA RESOLUÇÃO DO MODELO ENTRÓPICO RESTRITO ATRAVÉS DO MÉTODO DO GRADIENTE.**

### **V.1 – INTRODUÇÃO:**

Neste capítulo, apresentam-se algumas aplicações numéricas do modelo entrópico restrito utilizando-se o programa criado. Foram considerados três tamanhos de redes e para cada caso é apresentado o relatório de entrada (input).

Em cada situação, estudou-se a qualidade dos resultados, verificando-se se eles realmente atendiam as restrições impostas ao problema, bem como foram observados os níveis de precisão obtidos nas respostas, o número de iterações necessárias e o tempo de processamento (CPU). Tem-se desta forma um conhecimento maior a respeito do comportamento e da sensibilidade do modelo e do programa.

### **V.2 – MODELO ENTRÓPICO RESTRITO – RESOLUÇÃO NUMÉRICA UTILIZANDO O MÉTODO DO GRADIENTE:**

#### **V.2.1 – Justificativa**

Para uma situação de planejamento a longo prazo, espera-se mudanças importantes no sistema viário, bem como na estrutura de geração e atração de viagens.

Neste caso, fica difícil considerar os custos de deslocamentos embutidos na matriz de probabilidade a priori.

A solução aceita para resolver esta dificuldade, (GRANJA<sup>12</sup>) é a de considerar as probabilidades a priori como função exclusivamente dos fatores sócio-econômico previstos para cada zona (população, nível de emprego, etc.). Os custos de deslocamento são levados em conta, explicitamente, através da formulação de restrições para cada tipo de custo.

O modelo entrópico restrito pode também ser utilizado para estudos de planejamento de prazo mais curto. O que se quer salientar é da conveniência se tratar de forma explícita a

variável de custo, quando o estudo visa um prazo mais longo.

O método do gradiente é aplicado ao problema ( $P_5$ ) e sabe-se também da existência e da unicidade da solução do problema, conforme pode ser visto em (GRANJA<sup>12</sup>).

### **V.2.2 – Apresentação**

Da mesma forma, como foi visto anteriormente, o estudo é feito considerando-se três números de zonas diferentes:

$N = 5$ ,  $N = 15$  e  $N = 30$ , sendo que agora os problemas serão resolvidos através do método do gradiente, considerando-se uma sensibilidade da população ao custo de viagem.

A solução de partida para a resolução do problema restrito, é a solução final do problema irrestrito.

### **V.2.3 – Programação Computacional**

Linguagem: Fortran

Computador: IBM 4341

Objetivo: Determinar a matriz de previsão da distribuição de viagens.

Modelo: Entrópico Restrito

Método: GRADIENTE

Capacidade do programa: 30 zonas.

O programa encontra-se no ANEXO 3.

### **V.2.4 – Entrada**

Para os três casos considerados,  $N = 5$ ,  $N = 15$  e  $N = 30$ , foram adotados os seguintes critérios de inicialização:

V.2.4.1 – Para os parâmetros

V.2.4.1.1 – Produção ( $O_i$ ) e atração de viagens ( $D_j$ ).

V.2.4.1.2 – Número total de viagens ( $TOT$ )

V.2.4.1.3 – Matriz de probabilidade a priori [ $P_{ij}$ ].

Os valores estabelecidos são iguais aos adotados para o Modelo Entrópico sem Restrição de Custo ( $MECRC$ ).

V.2.4.2 – Para os parâmetros e variáveis abaixo definiu-se o seguinte:

V.2.4.2.1 – Nível de precisão global (EPS).

- Para  $N = 5$ ,  $EPS = 0,005$
- Para  $N = 15$ ,  $EPS = 0,007$
- Para  $N = 30$ ,  $EPS = 0,030$ .

V.2.4.2.2 – Matriz de probabilidade a priori [ $P_{ij}$ ].

- Coincide com a matriz [ $P_{ij}$ ] que é adotada no ( $MESRC$ ).

V.2.4.2.3 – Valores iniciais das variáveis duais ( $u_i$ ) e ( $v_i$ ).

- Coincidem com os valores que otimizam o ( $MESRC$ ).

V.2.4.2.4 – Valor inicial da variável dual ( $W$ ).

Conforme já foi comentado, para resolver o Modelo Entrópico Restrito ( $MER$ ) é necessário primeiramente resolvê-lo sem considerar a restrição de custo ( $MESRC$ ).

Então:

- Quando da resolução do ( $MESRC$ ), adota-se inicialmente  $W = 1$ .
- Quando da resolução do ( $MER$ ) propriamente dito, deve-se arbitrar um valor inicial

qualquer para ( $W$ ). Espera-se que o valor arbitrado esteja relativamente próximo ao seu ótimo. O próprio método se encarrega de buscá-lo, porém se dificuldades começarem a surgir, aconselha-se definir outro valor inicial para ( $W$ ).

Observou-se a conveniência de arbitrar-se para  $W^{(0)}$ , valores levemente superiores a 1.

Na presente aplicação, adotou-se:

- Para  $N = 5$ ,  $W^{(0)} = 1,0125$
- Para  $N = 15$ ,  $W^{(0)} = 1,0148$
- Para  $N = 30$ ,  $W^{(0)} = 1,0090$

V.2.4.2.5 – Matriz de custos unitários de deslocamentos [ $C_{ij}$ ].

- Para  $N = 5$

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 0,70 & 10,00 & 15,00 & 20,00 & 15,00 \\ 10,00 & 0,70 & 8,00 & 10,00 & 15,00 \\ 15,00 & 8,00 & 0,70 & 12,00 & 10,00 \\ 20,00 & 10,00 & 12,00 & 0,70 & 12,00 \\ 15,00 & 15,00 & 10,00 & 12,00 & 0,70 \end{bmatrix}$$

- Para  $N = 15$  e  $N = 30$ .

Para estes casos, adotou-se por questão de facilidade experimental a seguinte matriz de custos unitários:

$$C_{(I,J)} = |I - J| + 1$$

#### V.2.4.2.6 – Valores iniciais de $(RK)$ e $(RKW)$ .

As dimensões iniciais dos avanços a serem dados em busca dos valores ótimos das variáveis duais, podem ser definidas arbitrariamente, de acordo com as características de cada problema. Constatou-se nos problemas aqui estudados, a conveniência de  $(RKW)$  assumir valores iniciais inferiores aos de  $(RK)$ .

Na presente aplicação, adotou-se:

- Para  $N = 5$ ,  $N = 15$  e  $N = 30$

- Quando da resolução do  $(MESRC)$

$$RK^{(0)} = 50,00$$

$$RKW^{(0)} = 0,00$$

- Quando da resolução do  $(MER)$

$$RK^{(0)} = 2,15$$

$$RKW^{(0)} = 0,0004.$$

#### V.2.4.2.7 – Valores dos elementos necessários ao cálculo do custo total de viagens futuras $(C)$ , que é a restrição de custo do MER:

- Para  $N = 5$

- Custo mínimo de transporte, considerando-se os valores futuros de

$$O_{(i)} \text{ e } D_{(j)}:$$

$$C_{\min.} = 891,00$$

Este valor conforme já foi dito, pode ser obtido através da utilização do modelo de Hitchcock. No caso em estudo, o valor foi determinado através do programa de otimização linear MPS TEMPO, existente no computador BURROUGHS 6700 da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

- Sensibilidade da população em relação ao custo de transporte  $(SC)$ .

$$SC = 0,069 = 6,9\%$$

Para efeitos de experiências, adotou-se um valor hipotético. Na prática, a sua determinação deve ser feita utilizando-se a equação (II.67), com valores atuais de custos.

- Para  $N = 15$  e  $N = 30$

Para evitar a repetição da rotina de cálculo já explicada acima, o que se fez para estes dois casos, foi simplesmente arbitrar:

$$C = 0,96C^*$$

### V.2.5 – Saída

N	TC	NI (S)	Relatório de Saída
05	06	21	Vide Anexo 3, item 3.2
15	35	24	Vide Anexo 3, item 3.3
30	185	10	Vide Anexo 3, item 3.4

Onde:

N = Número de zonas.

TC = Tempo de computação (CPU), em segundos.

NI (S) = Número de iterações relativas a norma do gradiente.

### V.2.6 – Convergência

Utilizando-se de um processo de avanço tal que:

$$u_{(x+1)} = u_{(x)} + RK_u \cdot \frac{dk}{du}(x) \quad (\text{V.1})$$

$$V_{(x+1)} = V_{(x)} + RK_v \cdot \frac{dk}{dv}(x) \quad (\text{V.2})$$

$$W_{(x+1)} = W_{(x)} + RK_w \cdot \frac{dk}{dw}(x) \quad (V.3)$$

A convergência do método, dependerá do critério de seleção do valor do parâmetro de avanço (RK) em cada iteração. Após várias experiências, observou-se o seguinte:

- O valor satisfatório de  $RK_u$  que estabelece o avanço da variável  $u_i$  pode ser tomado igual ao que estabelece o avanço para  $v_i$ , o que corresponde a uma observação já realizada no caso do Modelo Entrópico Irrestrito.

- Existe uma grande diferença de sensibilidade da função objetivo em relação a variável  $w$  e as variáveis  $u_i$  e  $v_i$ .

- Por questões de precisão de resultados observou-se ser incompatível estabelecer-se um mesmo parâmetro (RK) para determinar um avanço conjunto nas variáveis  $u_i$ ,  $v_j$  e  $w$ , ou seja, na pesquisa da solução a direção original do gradiente foi abandonada.

- Constatou-se que simples adaptações dos valores destes parâmetros no decorrer das limitações, foram suficientes para resolver o problema de forma satisfatória em termos de número de iterações.

Este problema de otimização não é convexo e a procura da solução com um método de gradiente poderá conduzir a soluções parasitas (pontos de inflexão e máximos locais, onde a solução correspondente em (II.46) não será viável). A solução proposta para evitar estes acontecimentos é de obter-se uma boa solução inicial. Isto é realizado, considerando a solução do problema irrestrito correspondente, como solução inicial em  $u_i$  e  $v_j$  e efetuando uma varredura dos valores possíveis para  $w$ , notando-se também que a função objetivo (II.39), é uma função convexa de  $w$ . Este procedimento se revelou na prática, amplamente suficiente.

Ainda quanto a definição dos valores dos avanços  $RK_u$ ,  $RK_v$  e  $RK_w$ , sugere-se que sejam feitos estudos detalhados, principalmente para os casos em que o número de zonas

(N), é grande. Pode-se utilizar métodos como o de Hooke e Jeeves ou o de Resembrock-Powell (NOVAES<sup>22</sup>).

O critério de parada do algoritmo foi simplesmente escolhido tal que, EPS sendo um parâmetro de precisão, tenha-se:

$$S < EPS \quad (V.4)$$

### V.3 – ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS COM A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA ATRAVÉS DO MÉTODO DO GRADIENTE:

Analizou-se a eficiência do algoritmo, considerando-se diferentes valores para a precisão do problema e diferentes tamanhos de rede, observando-se o número de iterações necessárias para a convergência e o tempo gasto para processamento (CPU).

Na tabela V.1, apresenta-se os resultados obtidos em termos de tempo de computação (TC), quando se faz variar a dimensão da rede (N) e a precisão requerida para o problema, permanece constante.

Nível de precisão (EPS) = 0,03.

Tabela V.1 – Resultados comparativos em função da dimensão do problema.

N	5	15	30
TC (segundos)	5	34	185

Na tabela V.2, apresenta-se para o caso N = 5, um estudo do modelo quanto ao tempo de computação (TC) e o número de iterações NI (S), quando se faz variar o nível de precisão (EPS).

Tabela V.2 – Resultados comparativos em função da precisão requerida:

EPS	0,08	0,03	0,008	0,003
TC (segundos)	4	5	6	6
NI (S)	15	18	21	21

Na figura V.1, apresenta-se a convergência do algoritmo do gradiente aplicado ao modelo entrópico restrito, para o caso em que o número de zonas é igual a 5.

FIG II NORMA DO GRADIENTE DE  $g$

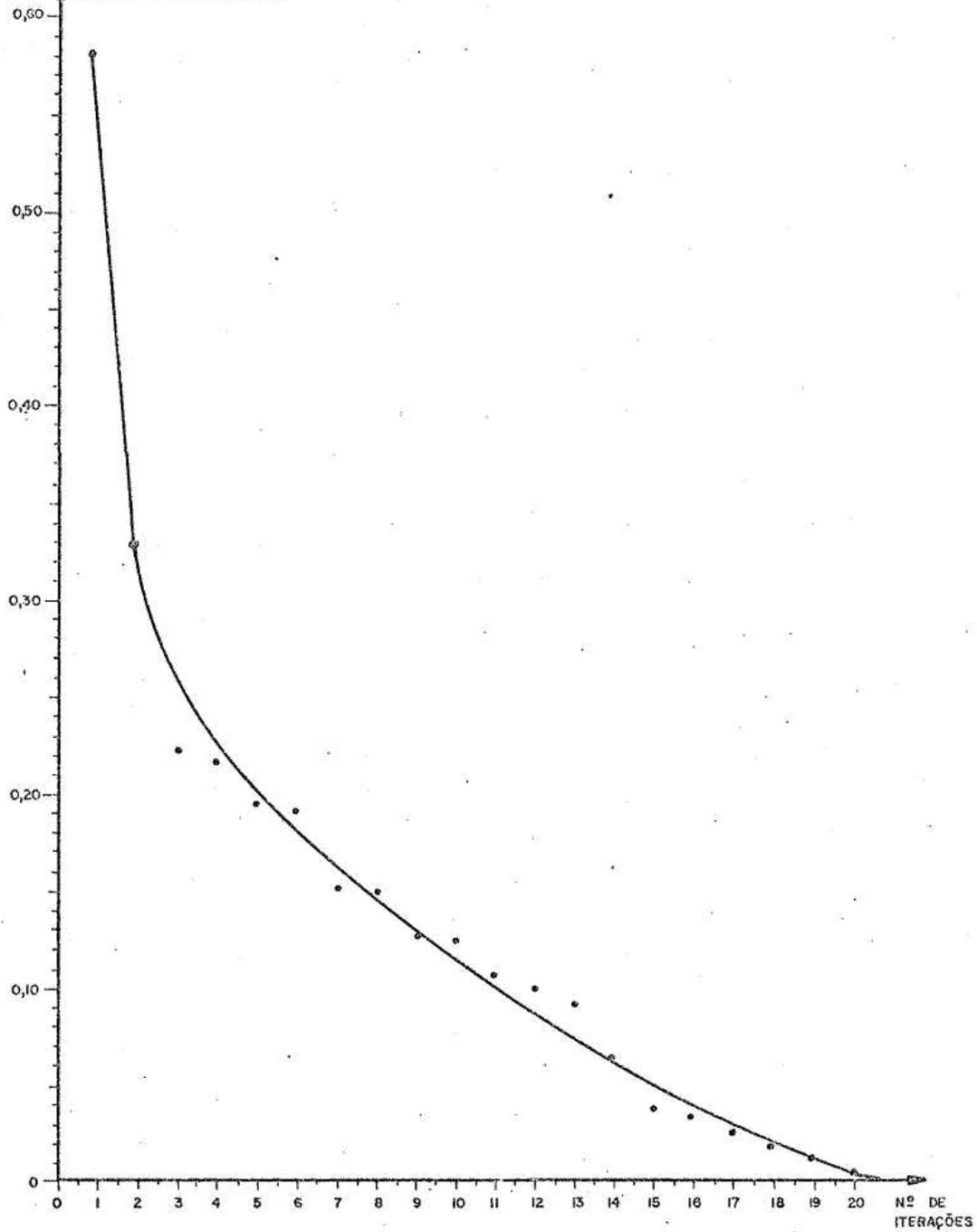


Figura V.1  
UM EXEMPLO DE CONVERGÊNCIA DO ALGORITMO DO  
GRADIENTE ( $N = 5$ ) APLICADO AO MODELO ENTROPICO RESTRITO  
(COM RESTRIÇÃO DE CUSTO)

#### **V.4 – CONCLUSÃO:**

Analisando-se os resultados obtidos para os vários casos estudados, pode-se destacar algumas observações em relação ao método do gradiente:

- O tempo de computação aumenta mais do que linearmente, quando cresce a dimensão (N) do problema.
- O nível de precisão atingido decresce quando aumenta a dimensão (N) do problema.
- Em todos os casos, atingiu-se o nível de precisão desejado.
- Para a convergência prática do problema, é necessário primeiramente obter-se uma boa solução inicial, e a partir daí minimizar a norma do gradiente(s).
- A programação do algoritmo em linguagem Fortran, é simples.

Quanto a aplicação computacional do método do simplex-convexo para a resolução do Modelo Entrópico Restrito, pode-se dizer que os resultados obtidos não foram os mais satisfatórios, tendo em vista o tempo necessário para se processar uma iteração e a observação de que os avanços admitidos pelo método para se buscar a solução ótima são muito pequenas, permitindo que se escolha o método do gradiente para resolver este tipo de problema.

É evidente que o assunto não foi esgotado, porém pelos resultados obtidos e pelo acima exposto, conclui-se em favor da viabilidade computacional do método do gradiente, bem como pela validade da utilização da teoria da dualidade da programação geométrica ao problema com restrição de custo.

## **CONCLUSÃO GERAL**

Os resultados obtidos confirmam que o referido modelo pode ser adotado para solucionar casos análogos aos aqui apresentados.

O estudo permite também a verificação da validade da utilização da teoria da dualidade da programação geométrica, para os casos abordados.

A aplicação de um método do gradiente ao modelo, revelou-se ser bastante conveniente. Para o caso irrestrito, sua eficiência mostrou-se comparável a do consagrado método de Furness. Já para o caso restrito, concluiu-se também em favor de sua viabilidade computacional, observando-se nos casos estudados uma eficiência maior do mesmo em relação ao método do simplex-convexo.

Concluindo, espera-se que esta pesquisa venha realmente contribuir para a resolução de problemas práticos de planejamento, tendo em vista a possibilidade de sua aplicação em diferentes tipos de estudos, como planejamento de transporte público urbano, regional, planejamento de transporte de cargas e outros.

Observa-se ainda que se trata de mais um passo dado em favor de técnicas desenvolvidas no Brasil, de forma a permitir o desenvolvimento de planos de transporte mais precisos e eficientes.

## BIBLIOGRAFIA

01. BAZARAA, M.S.; SHETTY, C.M. – “Nonlinear Programming, Theory and Algorithmus”. – John Wiley & Sons, 1979.
02. BECK, P.A.; ECKER, J.G. – “A Modified Concave Simplex Algorithm for Geometric Programming” – Journal of Optimization Theory and Applications – Vol. 15, nº 2, 1975.
03. BEIGHTLER, C.; PHILLIPS, D.T. – “Applied Geometric Programming” – John Wiley & Sons, Inc. – 1976.
04. BOLTZMANN, L. – “Lectures on Gas Theory” – Berkeley, 1964.
05. BURROUGHS – “Large Systems Tempo – Mathematical Programming System, User’s Manual” – Burroughs Corporation, Detroit, Michigan, 1974.
06. CHOUKRON, J.M. – “A General Framework for the Development of Gravity Type Trip Distribution Models” – Regional Science and Urban Economics, Vol. 5, 1975.
07. EVANS, A.W. – “Some Properties of Trip Distribution Methods” – Transportation Research, Vol. 4, 1970.
08. EVANS, S. – “Some Applications of Mathematical Optimization Theory in Transport Planning” – Doctoral Thesis, Research Group in Traffic Studies, University College, London, 1973.
09. FAGES, R.; GANGNET, M. – “Sur les modèles Probabilistes de prévision des localisations et des déplacements dans agglomération” – R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle/Operations Research – Vol. 11, nº 3, 1977.
10. FENVES, S.J. – “Computer Methods in Civil Engineering” – W.J. Hall, Editor, 1967.
11. FREITAS, I. e EQUIPE – “Planejamento de Transportes” – PTR – METRO de São

Paulo, 1973.

12. GRANJA, L.Z. – “Contribuição ao Estudo Teórico de Modelos de Distribuição de Viagens” – Tese de D.Sc. – COPPE/UFRJ, 1981.
13. HUTCHINSON, B.G. – “Princípios de Planejamento dos Sistemas de Transporte Urbano” – Editora Guanabara Dois S.A., RJ, 1974.
14. KRESGE, D.T.; ROBERTS, P.O. – “Techniques of Transport Planning” – Volume Two, John R. Meyer Editor, 1971.
15. LEE, C. – “Models in Planning” – Pergamon Press, 1973.
16. MANHEIM, M.L. – “Fundamentals of Transportation Systems Analysis” – The Massachusetts Institute of Technology, 1979.
17. MARTOS, B. – “Nonlinear Programming Theory and Methods” – North – Holland Publishing Company, American Elsevier Publishing CO, Inc. 1975.
18. MELLO, J.C. – “Planejamento dos Transportes” Ed. Mc Graw Hill do Brasil Ltda., 1975.
19. MORA-CAMINO, F.A.C. – “Introduction a la Programmation Géometrique” – COPPE/UFRJ - PDD/07/1978.
20. MORA-CAMINO, F.A.C.; ZMETER, L. – “O Problema de Análise de Distribuição de Transporte e o Modelo Gravitacional” – XI Simpósio da SOBRAPO, 1978.
21. MURCHLAND, J.D. – “Some Remarks on the Gravity Model of Traffic Distribution and an Equivalent Maximization Formulation” – LSE – TNT – 38, Transport Network Theory Unit, London Business School.
22. NOVAES, A.G. – “Métodos de Otimização, Aplicação aos Transportes” – Editora Edgar Blücher Ltda., 1978.

23. NOVAES, A.G. – “Modelos de Planejamento Urbano, Regional e de Transportes” – Editora Edgar Blücher Ltda., 1982.
24. POTTS, R.B.; OLIVER, R.M. “Flows in Transportation Networks” – Mathematics in Science and Engineering – Volume 90 – Academic Press, 1973.
25. RIEF, V. – “Models in Urban and Regional Planning” Inter-text Education Publishers, 1973.
26. ROBILLARD, P.; STEWART, N.F. – “Iterative Numerical Methods for Trip Distribution Problems” – Transportation Research, Volume 8, 1974.
27. TITLE, A. – “Programation Lineaire, Nonlineaire et Applications” – Institut National des Sciences Appliquees de Toulouse.
28. STEENBRINK, P.A. – “Optimization of Transport Networks” – John Wiley, 1974.
29. VALENTE, A.M.; GRANJA, L.Z.; MORA-CAMINO, F.A.C. – “Resolução Numérica do Problema de Distribuição de Viagens: Análise de Alguns Algoritmos” – XV Simpósio da SOBRAPO e I Congresso Latino-Americano de Pesquisa Operacional e Engenharia de Sistema, 1982.
30. WILSON, A.G.; SENIOR, M.L. – “Some Relationships Between Entropy Maximizing Models, Mathematical Programming Models and Their Duals” – Journal of Regional Science, Vol. 14, nº 2, 1974.
31. WILSON, A.G. – “Urban and Regional Models in Geography and Planning” – John Wiley & Sons, 1974.
32. WREN, A. – “Computers in Transport Planning and Operation” – Ian Allan Ltd., London, 1971.
33. ZANGWILL, W.I. – “Non-Linear Programming – A Unified Approach” – Prentice-Hall, 1969.

34. ZMETEK, L.; MORA-CAMINO, F.A.C. – “Considerações Teóricas sobre a solução do Problema de Distribuição de Viagens” – XIII Simpósio da SOBRAPO, 1980.