UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

MEDIDAS POSITIVAS FINITAS COMO DERIVADAS NO SENTIDO DE SCHWARTZ DE κ-FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO

Angela Teresa Zorzo

- Abril/1982 -

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

especialidade em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo curso de pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Inder Jeet Taneja, Ph.D
Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. Tarcísio Praciano Pereira, Ph.D
Orientador

Prof. Almir Joaquim de Sousa, Ph.D

Prof. William Gleen Whitley, Ph.D

Para

Florentino e Sulmira

(meus pais)

AGRADECIMENTOS

Ao professor Tarcísio Praciano Pereira pela orientação.

Ao Vladimir e ao Méricles pela leitura cuidadosa.

À Universidade Federal de Santa Catarina pela oportunidade de realizar este estudo.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Um agradecimento especial ao "Quinteto Bagunçado" do 206 e ao Nei, que sempre valorizaram os meus esforços. Com carinho e muita gratidão.

RESUMO

Neste trabalho, nos Capítulos 0 e 1, caracterizamos respectivamente, medidas como funções aditivas de conjuntos e medidas como funcionais lineares.

O Capítulo 2 contém o principal resultado obtido, ou seja, medidas positivas finitas são derivadas no sentido de Schwartz de κ-funções de distribuição.

E, no Capítulo 3, caracterizamos a medida de Lebesgue, como limite de medidas positivas e finitas.

ABSTRACT

In this work, in Chapters 0 and 1, we caracterize measures of sets of additive functions and linear functions respectively.

The 2nd Chapter contains the principal result obtained, i.e, positive finite measures are derived in the sense of Schwartz of κ-functions of distributions.

And in the 3rd Chapter we caracterize Lebesgue measure as limit of positive finite measures.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Como pré-requisito para a leitura e compreensão deste trabalho é indispensável que o leitor tenha conhecimentos de Teoria da Medida e de Análise Funcional.

O objetivo principal deste, é a divulgação de conceitos pouco conhecidos, como por exemplo, a derivação no sentido de Schwartz. Ela estende o conceito de derivação no sentido usual.

Segue, então, que temos funções que não são deriváveis no sentido do cálculo e o são no sentido de Schwartz. Em particular, "todas as funções contínuas são deriváveis", no sentido de Schwartz.

O trabalho é desenvolvido usando-se vários exemplos e gráficos para melhor compreensão.

O Capítulo 0 condensa uma teoria que caracteriza as medidas como funções aditivas de conjuntos, ou seja, é um breve resumo dos conceitos de Teoria da Medida e alguns tópicos de Análise Funcional. Contém os pré-requisitos para a leitura dos outros capítulos, constituindo-se basicamente de definições.

No Capítulo 1 consideramos um espaço de funções teste, $C_c(R)$ e caracterizamos as medidas como funcionais lineares que atuam sobre elementos de $C_c(R)$.

Primeiramente, mostramos que $C_c(R)$ é um espaço vetorial e, portan to, é válida toda a estrutura já conhecida. Então, simplesmente, caracterizamos funcionais lineares como elementos que atuam sobre o espaço $C_c(R)$. Ressaltamos ainda a continuidade dos funcionais lineares, relacionando-os com medidas.

O Capítulo 2 apresenta o principal resultado deste trabalho, representado pelo Teorema 2.3.13, ou seja, as medidas positivas finitas são derivadas no sentido de Schwartz de κ-funções de distribuição.

O Capítulo 2 é extenso e subdividiremos em três parágrafos para maior clareza:

2.1 - <u>Funções de Distribuição e κ-funções de Distribuição</u>

2.2 - <u>Derivação no Sentido de Schwartz</u>

2.3 - <u>Medidas e a Derivação no Sentido de Schwartz</u>

Em 2.1 introduzimos uma definição, κ-função de distribuição, que é muito importante na construção da teoria dos Capítulos 2 e 3.

Ao conjunto de todas essas funções denominamos K e mostramos que K gera um espaço vetorial (E), e encerremos o capítulo com a definição 2.3.15, isto é, uma medida finita (com sinal) é a derivada no sentido de Schwartz de um elemento arbitrário de E.

Finalmente, no Capítulo 3, apresentamos a medida de Lebesgue como "limite" de medidas positivas e finitas obtidas a partir de κ-funções de distribuição. Para compreensão deste capítulo, é essencial a leitura do Capítulo 2, já que todo o desenvolvimento baseia-se em conceitos introduzidos no mesmo.

CAPÍTULO 0

MEDIDAS COMO FUNÇÕES ADITIVAS DE CONJUNTOS

Este Capítulo contém material para fácil referência, visto que compacta todos os conceitos necessários para a leitura dos próximos capítulos.

§ 0.1 MEDIDA E ESPAÇO MEDIDO

Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{A} \subseteq P(X)$, onde P(X) denota a classe de todos os subconjuntos de X.

0.1.1 *Definição*

Uma coleção de subconjuntos $\mathcal{A}$ de X é dita uma σ-álgebra em X se,

i) $X \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ onde A^c representa o complemento de A em relação a X.

iii) $\forall\, \alpha\ (A_\alpha \in \mathcal{A}) \Rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{A}$.

0.1.2 *Definição*

O par $(X, \mathcal{A})$, onde $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra definida no conjunto X, é chamado um espaço mensurável.

0.1.3 *Definição*

Uma função $\mu : \mathcal{A} = (-\infty, \infty]$ onde $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra, é chamada uma função de conjunto.

0.1.4 Definição

Seja μ uma função de conjunto. μ é finitamente aditiva se, e somente se,

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ n \in N,\ A_i \in \mathcal{A},\ A \in \mathcal{A} \text{ então } \mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

μ é dita σ-aditiva se, e somente se,

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \qquad A_i \in \mathcal{A}$$

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \text{ quando } \forall i \neq j$$

$A_i \cap A_j = \emptyset$.

0.1.5 Definição

Uma medida positiva é uma função de conjunto, cuja imagem é $[0, \infty]$, satisfazendo ainda a condição da aditividade.

Exemplos de Medidas

0.1.5.1 A medida de Lebesgue restrita a σ-álgebra dos subconjuntos Borelianos de um conjunto mensurável $X \subset R^n$.

0.1.5.2 A medida de contagem sobre um conjunto X: dado um conjunto X tomamos $\mathcal{A} = P(X)$ e para $A \subset X$ definimos

$$V(A) = \begin{cases} |A| \text{ (número de elementos de A)} \\ \quad \text{se A for finito.} \\ \infty \text{ se A for infinito.} \end{cases}$$

0.1.5.3 Probabilidade é uma medida positiva completa, tal que $\mu(X) = 1$, onde X representa o espaço todo.

0.1.6 Definição

Uma terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$, onde $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra definida no conjunto X, e μ uma medida definida em $\mathcal{A}$ é chamado em espaço de medida.

0.1.6.1 Um caso particular de um espaço de medida, é o espaço de probabilidade; (R, β', P) onde R representa a reta, β' os borelianos da reta e P uma probabilidade definida em β'.

§ 0.2 FUNÇÕES MENSURÁVEIS

Daremos atenção especial ao estudo dessa classe de funções para construção de uma integral mais geral que a integral de Riemann, a integral de Lebesgue.

0.2.1 Definição

Sejam $(X, \mathcal{A})$ e $(X', \mathcal{A}')$ espaços mensuráveis. Então $f : X \to X'$ é dita função mensurável se para todo $A \in \mathcal{A}'$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

0.2.2 Definição

Seja s uma função real definida em X. Se o conjunto de valores de s é finito, dizemos que s é uma função simples.

Exemplo

0.2.2.1 Seja $A \subset X$ e

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

χ_A é chamada função característica de A.

Suponhamos o conjunto de valores de s constituido de números distintos $c_1 \dots\dots\dots c_n$. Seja

$A_i = \{x/s(x) = c_i\}$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

então,

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \chi_{A_i}$$

Isto é, toda função simples é uma combinação linear finita de funções características.

0.2.3 Teorema

O conjunto das funções mensuráveis constitui um espaço vetorial de funções sobre R, com as operações soma e multiplicação por escalar.

Demonstração:

Basta demonstrar que se f e g são funções mensuráveis, e α um número real, então $\alpha f + g$ também é uma função mensurável. Ver [6, Cap. 1, Pág. 31].

§ 0.3 INTEGRAÇÃO

0.3.1 Definição

Seja s uma função mensurável simples, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra e μ uma medida positiva definida em $\mathcal{A}$. Então para $A \in \mathcal{A}$, definimos

$$\int_A s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu\, (A_i \cap A)$$

0.3.2 Definição

Seja $f : X \to [0, \infty]$ uma função mensurável, $A \in \mathcal{A}$, e μ uma medida positiva definida em $\mathcal{A}$, então

$$\int_A f\, d\mu = \sup \int_A s\, d\mu$$

O supremo é tomado em relação a toda função simples mensurável $s / 0 \leq s \leq f$.

§ 0.4 CONTINUIDADE DOS FUNCIONAIS LINEARES EM ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS

0.4.1 Definição

Um espaço vetorial X, munido de uma topologia τ, tal que

a) cada ponto de X é um conjunto fechado e,

b) as operações

$(x,y) \to x + y$ de $X \times X$ em X e

$(\alpha,x) \to \alpha x$ de $R \times X$ em X

são contínuas com respeito a τ .

Então dizemos que τ é uma topologia vetorial em X,e X é um espaço vetorial topológico.

0.4.2 Proposição

Seja X um espaço vetorial topológico, e Φ um funcional linear definido em X. Se Φ é contínuo na origem, então Φ é contínuo. Ver [8, Cap. 1, Pág. 14].

0.4.3 Definição

Seja X um espaço vetorial topológico e $(f_n)_n$ uma sucessão em X. Dizemos que um funcional Φ definido em X é sequencialmente contínuo se, e somente se,

$f_n \to f$ então

$<\Phi, f_n> \to <\Phi, f>$

onde $<\Phi, \;>$ significa, o funcional Φ aplicado em um elemento do espaço.

0.4.4 Proposição

Seja X um espaço vetorial topológico e Φ um funcional linear definido em X. Se Φ é contínuo então Φ é sequencialmente contínuo. Ver [2, Pág. 370].

CAPÍTULO 1

§ 1.1 O ESPAÇO $C_c(R)$

Consideremos o conjunto das funções contínuas a suporte compacto, representado por $C_c(R)$.

Com o auxílio de funções do 2º grau, podemos construir funções em $C_c(R)$.

Exemplos

1.1.1 Seja f uma função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & -2 < x < -1 \\ -x^2 + 2 & -1 \leq x < 1 \\ (x-2)^2 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & x \leq -2 \quad x \geq 2 \end{cases}$$

f tem o seguinte gráfico:

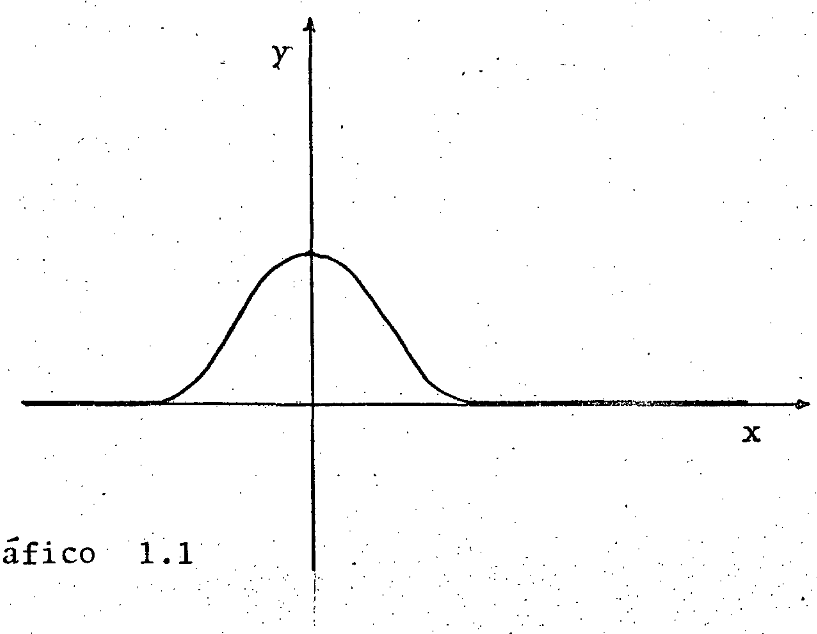


Gráfico 1.1

O seguinte exemplo é mais simples:

1.1.2 Seja f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 < x \leq 0 \\ -x + 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x \leq -1 \quad x \geq 1 \end{cases}$$

e representada como abaixo:

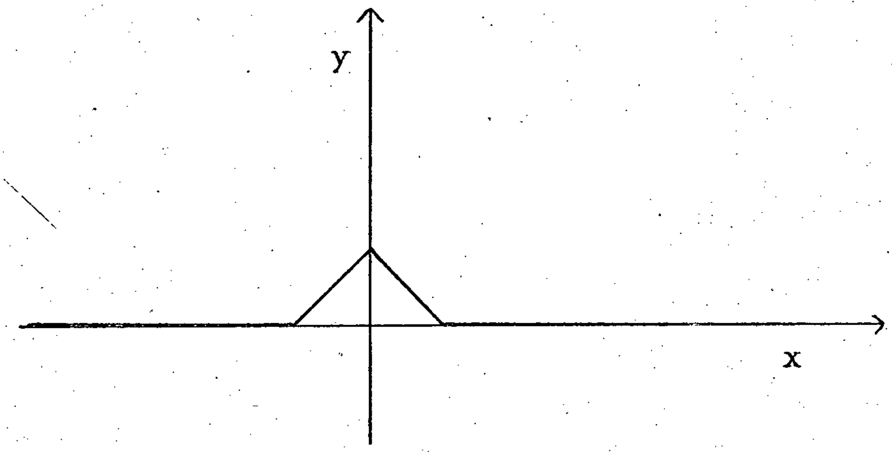


Gráfico 1.2

Os dois exemplos acima mostram que $C_c(R) \neq 0$. Facilmente se demonstra que $C_c(R)$ é um espaço vetorial sobre o corpo R.

§ 1.2 FUNCIONAIS LINEARES

1.2.1 Definição

Dado um espaço vetorial sobre um corpo, uma transformação linear do espaço vetorial sobre o corpo é chamada um funcional linear.

1.2.2 Proposição

Seja Φ um funcional linear definido em um espaço vetorial topológico. Então Φ é contínuo, se for seqüencialmente contínuo na origem.

Demonstração:

Seja uma sucessão f_n, tal que $f_n \to 0$ então

$$\langle \Phi, f_n \rangle \to \langle \Phi, 0 \rangle = 0 .$$

1.2.3 Teorema

Seja f uma função contínua, então f é mensurável.

Demonstração: Ver [6, Cap. 1, Pág. 27].

1.2.4 Corolário

Seja $f \in C_c(R)$. Então f é mensurável.

§ 1.3 MEDIDAS COMO FUNCIONAIS LINEARES

1.3.1 Teorema

Dada uma medida positiva μ em R, e $\forall f$, $f \in C_c(R)$, então,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f \, d\mu \right| \leq c . \|f\|_\infty .$$

onde

$$\|f\| = \sup_{x \in R} f(x) \qquad c = \mu \, (\mathrm{supp}(f))$$

Demonstração:

Seja A = supp(f) então,

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f\ d\mu\right| = \left|\int_A f\ d\mu\right| \leq \int_A |f|d\mu$$

$$\leq \mu(A).\sup_{x\in A} |f(x)|$$

1.3.1.1 Observação

O teorema 1.3.1 contém o passo essencial para a demonstração de um teorema que demonstraremos no fim deste capítulo. (Teorema 1.4.1).

1.3.2 Proposição

Seja μ uma medida definida na σ-álgebra dos Borelianos da reta. Então μ define um funcional linear em $C_c(R)$ através da equação:

$$<\mu,f> = \int f\ d\mu$$

O 2º membro da equação acima significa a integral da função f com respeito à medida μ, no sentido de Lebesgue.

Demonstração:

É imediata pela linearidade da integral.

§ 1.4 CONSTRUÇÃO DE UMA TOPOLOGIA COMPACTO-ABERTA EM $C_c(R)$

Para facilitar, sem perder a generalidade, faremos a construção dos abertos da topologia, baseados em abertos da origem, pois através das operações multiplicação e adição, poderemos transferir estes abertos para o espaço.

Definamos V_o (A, ξ) como uma vizinhança que depende de A e ξ, isto é,

se f V_o (A, ξ) então

$supp(f) \subset A$ e $|f(x)| < \xi$.

Onde A é um conjunto compacto e ξ é um número maior que zero.

Definamos ainda,

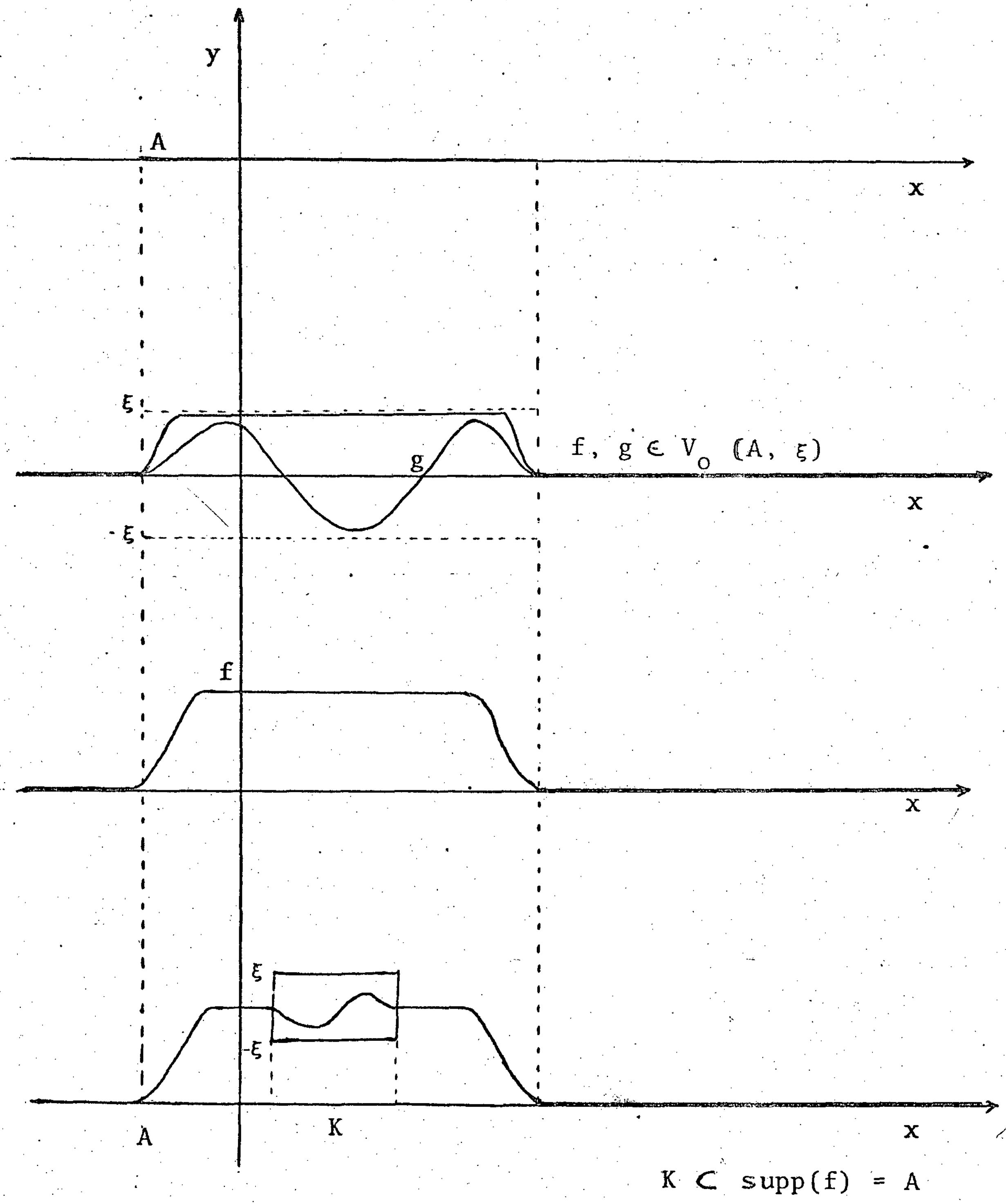
V_f (A, ξ), isto é,

V_f (A, ξ) =

$= V_o (A, \xi) + f$

O gráfico 1.3 ilustra exemplos de funções definidas em V_o (A, ξ) e V_f (A, ξ).

Gráfico 1.3



1.4.1 <u>Teorema</u>

Seja μ uma medida positiva. Então μ representa um funcional linear contínuo sobre $C_c(R)$ com a topologia definida em 1.4.

<u>Demonstração:</u>

$\Phi : C_c(R) \to R$

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \quad d\mu(x)$$

$$\Phi^{-1}((-\xi,\xi)) = \{f;\ \sup|f(x)| < \frac{\xi}{A} ;$$

$$\mu\ (\mathrm{supp}(f)) < A\} =$$

$$= \bigcup_K V_0(K,\delta) \quad , K \text{ compacto}$$

onde

$$\delta = \frac{\xi}{A}$$

Ora, $\bigcup_K V_0(K,\delta)$ é aberto, pois é uma reunião de abertos

logo,

$\Phi^{-1}(-\xi,\xi)$ é aberto e, portanto

Φ é contínua.

CAPÍTULO 2

CARACTERIZAÇÃO DAS MEDIDAS FINITAS POSITIVAS COMO DERIVADAS NO SENTIDO DE SCHWARTZ DE κ-FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO

Neste capítulo descreveremos uma extensão do processo usual de derivação representada pela derivação no sentido de Schwartz, e daremos atenção especial à sua relação com as medidas finitas.

Nosso objetivo principal é a demonstração de teorema (2.3.13) que caracteriza uma generalização de um resultado obtido por Ivam [1] em sua dissertação de mestrado.

Ivam demonstrou que: Dada uma probabilidade p e F_p sua função de distribuição, então $p = dF_p$; Ou seja, probabilidades são derivadas no sentido de Schwartz de suas funções de distribuição.

Estenderemos o resultado para o caso em que ao invès de probabilidade, tivermos medidas finitas.

Subdividiremos o capítulo em 3 partes para maior clareza:

2.1 Funções de Distribuição e κ-funções de Distribuição

2.2 Derivação no Sentido de Schwartz

2.3 As Medidas Positivas Finitas e a Derivação no Sentido de Schwartz

§ 2.1 FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO E κ-FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO

Neste parágrafo obteremos um espaço que nos permita uma definição genérica de uma medida finita positiva.

2.1.1 Definição

Uma função real f com domínio R, f, monótona crescente tal que

$f(-\infty) = 0$ e $f(\infty) = 1$

é chamada uma função de distribuição.

2.1.1.1 Notação

Resumiremos "função de distribuição" por f. de d.

Seja F o conjunto de todas as f. de d. .

Vemos que F tem uma estrutura algébrica fraca.

Somemos $\kappa \in R$, $\kappa \neq 0$ e

$f \in F$ então

$(\kappa + f) \notin F$

também para $\kappa \neq 0$ ou 1

$\kappa . f \notin F$.

2.1.2 Definição

Seja $f \in F$ e $\kappa \in R^+$ então,

nós definimos $\kappa . f$ como uma

κ-função de distribuição.

2.1.2.1 Designaremos K ao conjunto de todas as κ-f. de d..

2.1.3 Proposição

$(K, +)$ é um semi-grupo, além de ter a estrutura de cone lateral.

Relembremos: $(K, +)$ tem a estrutura de cone lateral se $h \in K$, então $c.h \in K$, $\forall\, c \in R^+$

A demonstração da proposição é imediata.

§ 2.2 DERIVAÇÃO NO SENTIDO DE SCHWARTZ

Suponha que f e g sejam funções de classe C^1, então vale a fórmula da integral por partes.

2.2.1 $$\int_{-\infty}^{\infty} f\, dg = f.g\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g\, df$$

Acrescentaremos o fato de que $f \in C_c^1(R)$

Então o termo

2.2.2 $$f.g\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Substituindo (2.2.2) em (2.2.1) a fórmula fica reduzida a:

2.2.3 $$\int_{-\infty}^{\infty} f\, dg = -\int_{-\infty}^{\infty} g\, df$$

Consideremos agora todas as funções g para as quais,

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\; f'(x)\; dx$$

(integral no sentido de Riemann-Stieltjes) exista, e para isto basta que g seja localmente inte - grável à direita em 2.2.3 (no sentido de Reimann-Stieltjes). Temos então, um forte argumento para definir dg em 2.2.3.

Vemos que se g não for derivável, não tem sentido o 1º membro de 2.2.3. Então representaremos como abaixo:

2.2.4 $$\langle dg.f\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} g\, df$$

A equação acima define dg como um funcional linear sobre o espaço $C_c^1(R)$.

Salientamos a importância do espaço $C_c^1(R)$ para a definição de dg.

De agora em diante, $f \in C_c^1(R)$, então f é uma função teste e denominaremos ao espaço $C_c^1(R)$ um espaço de funções teste.

Esta é uma terminologia usual em teoria das distribuições, relativamente ao espaço das funções sobre as quais atuam os funcionais lineares.

Como (2.2.3) vale para g diferenciável a após a definição de dg, a fórmula

2.2.5 $$\int_{-\infty}^{\infty} f\, dg = -\int_{-\infty}^{\infty} g\, df$$

vale para uma classe maior de funções, a classe de todas as funções g que sejam localmente integráveis, então (2.2.5) estende o conceito de derivada a uma classe maior de funções que não apenas as diferenciáveis no sentido do cálculo.

Notemos de 2.2.3 que se g for diferenciável no sentido usual, a fórmula não produz novidade.

Fica assim caracterizada uma extensão do processo de derivação, e a derivada no sentido de Schwartz fica definida em (2.2.5) e generaliza a derivada "do cálculo".

§ 2.3 AS MEDIDAS POSITIVAS FINITAS E A DERIVAÇÃO NO SENTIDO DE SCHWARTZ

Seja β' σ-álgebra dos Borelianos da reta.

2.3.1 Teorema

Cada medida positiva μ em β' determina uma única k-função de distribuição $k.f_p$ através da correspondência:

2.3.1.1 $\forall\, x \in R \quad k.p\,((-\infty,\, x]) = k.f_p(x).$

2.3.1.2 Lema

μ é uma medida positiva finita, se, e somente se, $\mu = kp$, onde p é uma probabilidade e k uma constante positiva.

Demonstração:

Decorre da definição de probabilidade e de medida positiva finita.

2.3.1.3 Lema

Cada probabilidade p em β' determinada uma única função de distribuição f_p através da correspondência:

$$\forall\, x \in R, \quad p((-\infty,\, x]) = f_p(x).$$

Demonstração:

Ver [4, Cap. 2, Pág. 24, 28 e 29].

A demonstração do teorema 2.3.1 segue dos lemas 2.3.1.2 e 2.3.1.3.

2.3.2 Observação

A álgebra Euclidiana de Borel, β' em R^1 é gerada pela coleção de intervalos da forma $(a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, isto é, a álgebra β' consiste de todas as uniões finitas de conjuntos disjuntos da forma $(a, b]$, $(-\infty, a]$ ou (b, ∞).

2.3.3 Teorema

Seja μ e ν duas medidas definidas na mesma álgebra de Borel que é gerado pela álgebra de conjuntos $\mathcal{F}_0$.
Se ambas, μ ou ν forem σ-finitas em $\mathcal{F}_0$ e $\mu(E) = \nu(E)$, para todo $E \in \mathcal{F}_0$, então isto também se verifica para todo $E \in \mathcal{F}$ e logo $\mu = \nu$.

Demonstração: Ver [4, Cap. 2, Pág. 28].

2.3.4 Corolário

Se μ e ν forem duas medidas positivas finitas definidas em β', tais que:

$\forall x$, $\mu(-\infty, x] = \nu(-\infty, x]$ então $\mu = \nu$.

2.3.5 Lema

Convergência monótona de Lebesgue.

Seja $(f_n)_n$ uma sucessão de funções mensuráveis em X e suponha que:

1) $0 < f_1 < f_2 < \ldots < \infty$ para $x \in X$.

2) $f_n(x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$, $x \in X$.

então f é mensurável e,

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu \quad \text{quando } n \to \infty$$

<u>Demonstração</u>:

Ver [7, Cap. 1, Pág. 21].

2.3.6 <u>Proposição</u>

Existe $(f_n)_n$ uma sucessão de funções pertencentes ao espaço $C_c^1(R)$ tais que:

1) $f_n \to X_{(-\infty,\, a)}$ quando $n \to \infty$

2) $f_n < f_n + 1$

Isto é, a sucessão $(f_n)_n$ satisfaz o lema da convergência monótona de Lebesgue e o limite pontual é $X_{(-\infty,\, a)}$.

<u>Demonstração</u>:

Ver [1, Página 25].

O gráfico 2.1 ilustra como obter as f_n por construção, através de funções constantes e polinômios de grau n, e o comportamento das funções f_n.

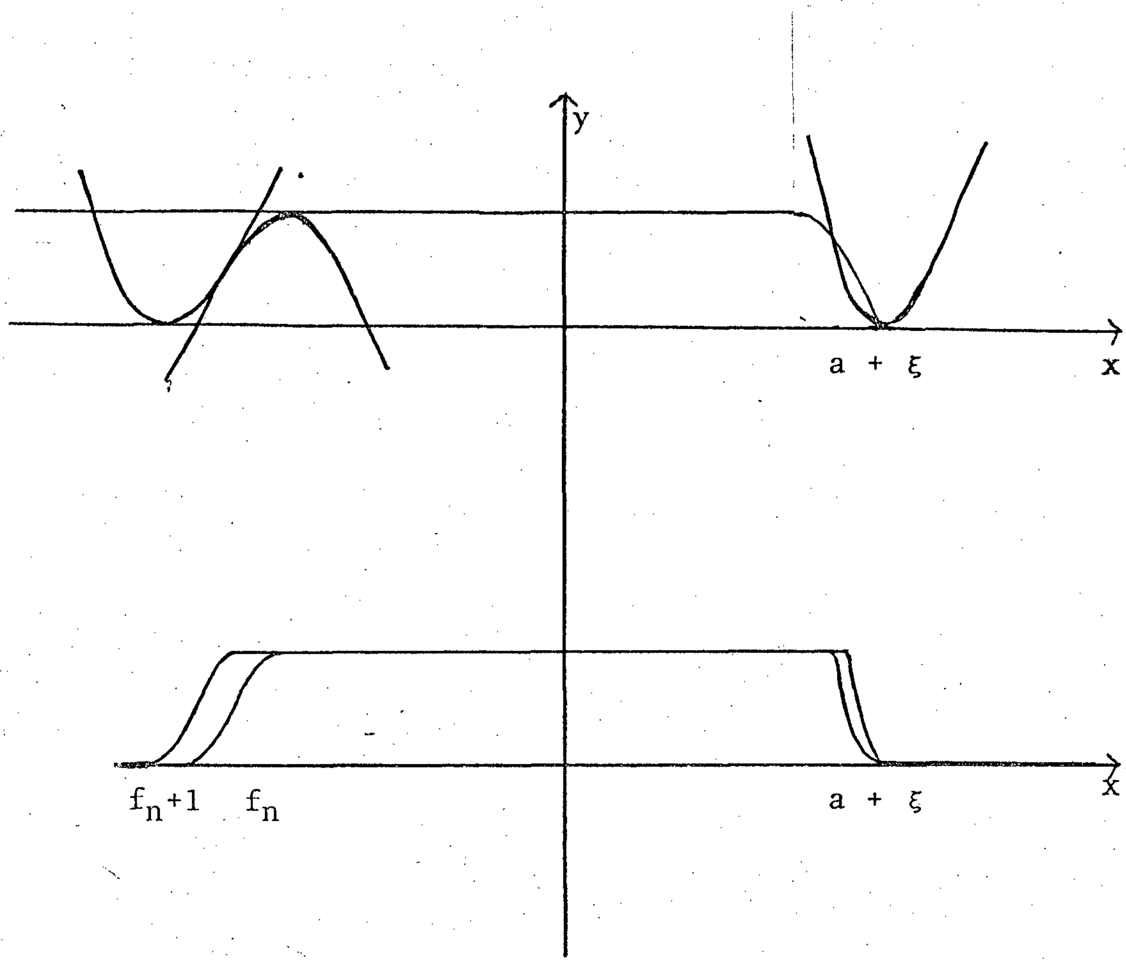


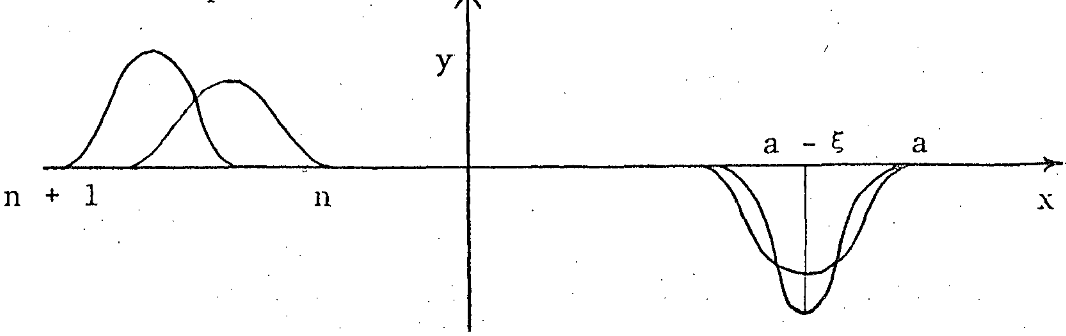
Gráfico 2.1

Agora:

Pela definição de $d(\kappa . f_p)$ temos:

2.3.7 $$<d(\kappa . f_p), f_n> \quad = \quad -\int_{-\infty}^{\infty} \kappa . f_p \quad f_n'$$

No gráfico 2.2 podemos ver alguns elementos de $(f_n')_n$ e seu comportamento.



Observamos que as f_n' são nulas na reta inteira, a não ser em uma vizinhança de n, e em uma vizinhança de a - ξ.

Então podemos escrever 2.3.7, como:

2.3.8 $$\langle d(\kappa . f_p), f_n \rangle = - \int_{v(n)} \kappa . f_p \, f_n' \; - \int_{v(a-\xi)} \kappa . f_p \, f_n'$$

Analisando o gráfico de $(f_n')_n$ podemos observar o seguinte; as áreas das vizinhanças $v(n)$ e $v(a-\xi)$ são respectivamente κ e $-\kappa$.

<u>Observação</u>:

Se $\int h=1$; $h > 0$

então $\int h.f$ = valor médio da função f no suporte da função h.

Portanto, pela observação acima, temos:

2.3.9 $$\langle d\kappa . f_p, f_n \rangle = - \kappa \,(\text{valor médio de } f_p \text{ em } v(n)).$$
$$+ \kappa \,(\text{valor médio de } f_p \text{ em } v(a-\xi)).$$

Podemos concluir então que:

i) O valor médio de $\kappa . f_p$ em uma vizinhança de n, quando $n \to -\infty$ tende a zero.

ii) O valor médio de $\kappa . f_p$ em uma vizinhança de $(a-\xi)$, tenderá ao valor de $\kappa . f_p(a)$ na medida em que a área sob a curva f_n' se concentre em volta do ponto $(a-\xi)$.

Portanto, temos a sucessão de número reais:

$\left(<d\kappa . f_p, f_n>\right)_{n \in N}$ que converge para $\kappa p((-\infty, a))$.

2.3.10 Lema

O limite $\kappa p((-\infty, a))$ da sucessão $(<d\kappa . f_p, f_n>)_{n \in N}$ não muda se ao invés de $(f_n)_n$, usarmos outra sucessão $(g_n)_n$ satisfazendo 2.3.4.

Demonstração:

$g_n - f_n$ tem limite ponto a ponto nulo;

logo,

$<d(\kappa . f_p), g_n - f_n> \to 0$ isto é,

$\left(<d(\kappa . f_p), f_n>\right)_{n \in N}$ e $\left(<d(\kappa . f_p), g_n>\right)_{n \in N}$

tem mesmo limite.

A independência da sucessão escolhida permite-nos a seguinte definição:

2.3.11 Definição

Dada uma κ-função de distribuição $\kappa . f_p$ então sua derivada no sentido de Schwartz, em $(-\infty, a)$ é definida como:

$$d(\kappa . f_p)\ ((-\infty, a)) = \kappa p(-\infty, a).$$

2.3.12 Observação

Pelo teorema 2.3.1, $d(\kappa . f_p)$ é uma medida.

Fica assim demonstrado o teorema central deste capítulo cujo enun ciado é então:

2.3.13 Teorema

A derivada no sentido de Schwartz de uma κ-função de distribuição é uma medida positiva finita.

O que nós demonstramos foi o seguinte:

O funcional $d(\kappa . f_p)$ é uma medida que coincide com a medida κp, sobre os intervalos da forma $(-\infty, a]$, e portanto $d\kappa . f_p$ e κp são dois símbolos para a mesma medida.

2.3.13.1 Observação

Reciprocamente, em relação a 2.3.13, as medidas positivas finitas determinam de maneira única κ-f. de d. pela fórmula (2.3.1.1).

Podemos agora apresentar uma caracterização geral das medidas finitas não necessàriamente positivas.

2.3.14 Proposição

O conjunto K gera um espaço vetorial (de funções).

Demonstração: Ver [5].

2.3.15 Definição

Seja E o espaço vetorial gerado por K, então uma medida finita (com sinal) é a derivada no sentido de Schwartz de um elemento arbitrário de E.

CAPÍTULO 3

A MEDIDA DE LEBESGUE COMO LIMITE DE MEDIDAS POSITIVAS E FINITAS

Generalizaremos o processo do capítulo anterior para medidas não finitas com particular interesse na medida de Lebesgue.

No primeiro parágrafo definiremos uma classe especial de funções (κ-f. de d.μ) que nos ajudarão na construção da medida de Lebesgue.

O resultado fundamental deste capítulo é o teorema (3.3.3).

Ele diz que essencialmente a medida de Lebesgue é o "limite" de medidas positivas e finitas.

O capítulo está subdividido em:

§ 3.1 κ-FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO UNIFORMES

3.1.1 Definição

Uma κ-função de distribuição é uniforme se no intervalo $[0,\kappa]$ ela coincidir com a primeira bissetriz.

3.1.1.1 Designaremos por K_μ ao conjunto de todas as κ-funções de distribuição uniformes e as denotaremos por κ-f. de d.μ.

3.1.2 Definição

Diremos que g é uma função rampa se:

$g = c + f$

onde $f \in K_\mu$ e $c \in R$.

Isto é, uma função rampa é uma κ-f. de d.u somada a uma constante. Ver Gráfico 3.1.

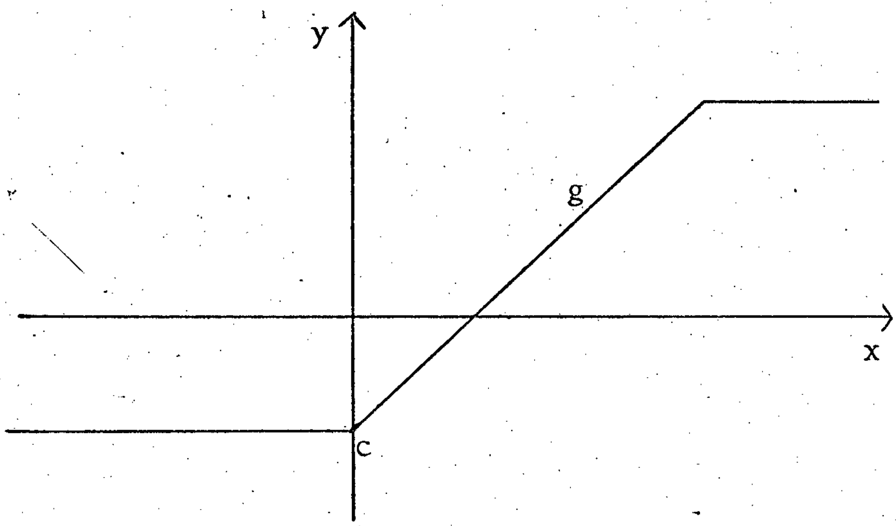


Gráfico 3.1

3.1.2.1 Designaremos por K_r ao conjunto de todas as funções rampa.

3.1.3 Proposição

Seja $f \in K_r$ então

$f' = \mathcal{X}_{[a,\, b]}$.

Demonstração:

$f \in K_r \Rightarrow f = g + c$

$$df = d\,(g + c)$$
$$= dg\,.$$

Como $g \in K \subset K$, então dg é uma medida.

f é diferenciável no sentido usual com $df = \chi_{[a,b]}$

A proposição acima sugere o seguinte:

3.1.4 Definição

Consideremos uma sucessão $(f_n)_n$ de elementos de K_r. Então denominaremos λ_n a medida dada por:

$$\lambda_n = df_n = \chi_{[a_n,\, b_n]}$$

Para maior clareza anexamos o gráfico 3.2 de um elemento de K_r e sua derivada.

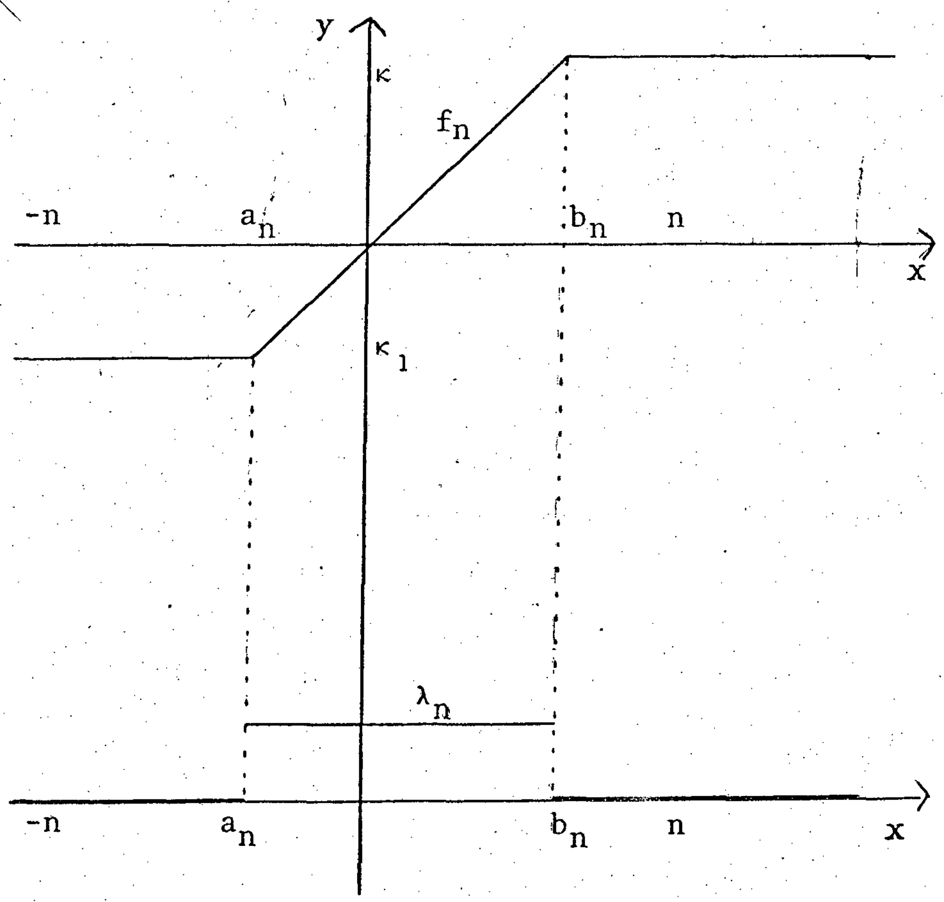


Gráfico 3.2

§ 3.2 A INTEGRAL DE RIEMANN COMO FUNCIONAL DE $C_c(R)$

3.2.1 Proposição

Seja $f \in C_c(R)$

então a equação

$$<\int, f> = \int f(x)\, dx$$

define um funcional linear em $C_c(R)$.

3.2.2 Proposição

A única medida que extende a integral de Riemann no sentido de Lebesgue é a medida de Lebesgue.

§ 3.3 A MEDIDA DE LEBESGUE COMO "LIMITE" DE λ_n

3.3.1 Proposição

λ_n definida por 3.1.4 é uma medida positiva finita.

3.3.2 Teorema

A medida λ_n é localmente idêntica a medida de Lebesgue.

Demonstração:

Seja $f \in C_c(R)$. Então,

$$\int_{\infty}^{\infty} f d\lambda_n = \int_{n}^{n} f\,(x)\, dx$$

onde $[-n, n]$ é um compacto que contém supp (f).

No segundo membro temos uma integral no sentido de Riemann.

3.3.3 Teorema

λ_n converge pontualmente para a medida de Lebesgue.

Demonstração:

$\forall$ f $\in C_c(R)$, f fixada

$\exists N_o$ / supp (f) $\subset [-N_o, N_o] \subset [-n, n]$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} f \, d\lambda_{N_o} = \int_{N_o}^{N_o} f dx = \int_{-n}^{n} f(x) \, dx = s_n \in R$$

então

$$\int f \, d\lambda_{N_o} = \int f \, d\lambda_n = s_n \in R$$

Temos portanto uma sucessão $(s_n)_n$ de elementos pertencentes aos reais, tais que

$$s_n = s_{N_o} \quad \text{para} \quad n > N_o$$

logo

$$s_n \to S_{N_o} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$$

Podemos concluir assim que as medidas $(\lambda_n)_n$ para qualquer função f coincidem com a integral de Riemann, significando que λ_n converge pontualmente para a medida de Lebesgue sobre os elementos de $C_c(R)$ onde os pontos são funções $\in C_c(R)$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BARROS SANTOS, Ivam - Probabilidades são Derivadas no Sentido de Schwartz de suas Funções de Distribuição Tese de Mestrado - UFSC - 1982.

[2] BARTLE, R. G. - The Elements of Integration - Copyrigt (c) 1966, by John Wiley & Sons - Inc. - USA.

[3] CARACTHÉODORY - Measure and Integration - Chelsea Publishing Company - New York.

[4] CHUNG, Kai Lai - A Course in Probability Theory - Academic Press - Inc. - New York.

[5] Francisco de Assis & Ronaldo Gilberto de Oliveira & Alaor de Jesus Corrêa - Funções de Distribuição como Representantes de Classes de Equivalências. Artigo a ser publicado.

[6] HONIG, Chaim S. - A Integral de Lebesgue e Suas Aplicações. Rio de Janeiro, IMPA - 1977.

[7] RUDIN, W. - Real and Complex Analisis. Mc Graw - New York - 1966.

[8] RUDIN, W. - Functional Analisis, Mc Graw, Hill, Publishing Company LTD - New Delhi.