UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS

UM MODELO DE TRANSPORTE E DEMANDA ESTOCÁSTICOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

COMO REQUISITO PARCIAL PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE

"MESTRE EM ENGENHARIA"

JULIO CARLOS BORBA GONZALEZ

FLORIANÓPOLIS

SANTA CATARINA - BRASIL

AGOSTO - 1979

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE "MESTRE EM ENGENHARIA"

ESPECIALIDADE PESQUISA OPERACIONAL E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Prof. Leonardo Ensslin, Ph.D.
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Leonardo Ensslin, Ph.D.
Presidente da Banca

W. Rödder

Prof. Wilhelm Rödder, Ph.D.

G.M. Buxey.

Prof. Geoffrey Buxey, Ph.D.

Paulo Nascimento

Prof. Paulo Renécio Nascimento M.Sc.

Aos Meus Pais

A G R A D E C I M E N T O S

A CAPES e ao CNPq por terem proporcionado condições financeiras para realização deste trabalho.

Aos Professores Geoffrey Buxey, Willem Rödder e Paulo Renecio Nascimento, pelo auxílio e colaboração prestados.

Ao professor Leonardo Ensslin, pela orientação e incentivo dados durante a execução deste trabalho.

A Anita Schütz de Medeiros, pelo paciente trabalho de datilografia.

S U M Á R I O

R E S U M O

Este trabalho foi desenvolvido com a finalidade de construir um modelo matemático que represente os sistemas de armazenagem e distribuição de um produto, sujeitos a uma disponibilidade de transporte e consumo aleatórios.

Em uma primeira etapa são apresentados alguns "problemas de transporte" e seus respectivos modelos matemáticos que servirão de base para a construção do novo modelo.

A etapa seguinte inicia com a concepção e desenvolvimento de um modelo matemático de transporte e armazenagem que incorpore as informações sobre a disponibilidade de transporte aleatória, para um produto. Posteriormente, este modelo é associado ao modelo de transporte estocástico. Ao final desta etapa é desenvolvida uma análise qualitativa da função objetivo do modelo proposto .

Na terceira parte, é analisada a possibilidade de solução do modelo através de diversos métodos matemáticos relatados na literatura.

Na etapa final é apresentada uma ilustração da aplicação do modelo, cuja a solução ótima é obtida usando-se uma variante do método de Frank - Wolfe.

A B S T R A C T

This work was performed with the aim of constructing a mathematical model that would represent systems of storage and distribution of a product, where both the availability of transport and the consumption of the product in question are random.

In the first stage some transportation problems and their respective mathematical models are presented, which serves as a basis for the construction of the new model.

The next stage begins with the conception and development of a mathematical model of transportation and warehousing that incorporates information about the random availability of transport for a product. Afterwards this is linked to the "stochastic transportation model", and finally a qualitative analysis of the objective function of the proposed model is outlined.

The third part analises the possibilities of solving the model through various mathematical methods that appear in the literature.

The last stage presents an illustration of how the model can be applied, an optimal solution to a problem being obtained with a variant of the Frank Wolfe method.

CAPÍTULO I

1. INTRODUÇÃO

A preocupação em desenvolver técnicas e procedimentos que reduzam os custos de frete, armazenamento e perdas nos sistemas de transporte e armazenagem, tem se refletido amplamente na literatura especializada. Certamente esta preocupação surge da necessidade que se tem de minimizar os custos globais de operação, bem como prever e avaliar o impacto econômico na eficiência global dos sistemas de transporte e armazenagem.

1.1. Propósito

O propósito fundamental deste trabalho de pesquisa consiste na concepção, desenvolvimento e implementação em computador de um novo modelo projetado para representar um sistema de transporte e armazenagem de um produto, no qual sejam relevantes as seguintes informações:

- custo do frete para transportar o produto
- vários modos de transporte
- custo de armazenagem nas fontes de abastecimento
- custo de oportunidade por manter ocioso parte do sistema de transporte
- custo de armazenagem no local dos mercados consumidores
- custo de oportunidade devido a perda em vendas ocasionada pela falta do produto nos mercados consumidores
- disponibilidade de transporte aleatório com função densidade de probabilidade conhecida.

- consumo aleatório com função densidade de probabilidade conhecida

Para alcançar os objetivos propostos, tendo em vista a magnitude do trabalho, tornou-se necessário:

- fazer um estudo do estágio atual de desenvolvimento dos modelos de transporte e armazenagem
- definir e caracterizar o sistema em estudo
- criar e desenvolver um novo modelo matemático que incorporasse as informações relevantes do sistema considerado
- analisar o modelo matemático do ponto de vista qualitativo
- escolher um método para solução do problema
- implantar em computador o modelo proposto

1.2. Importância

Grande parte dos paises desenvolvidos e os em desenvolvimento também, estão constantemente investindo recursos consideráveis a fim de capacitar os sistemas de transporte e armazenagem para que estes cumpram eficientemente a tarefa de conservação e distribuição dos produtos nas diversas regiões. Na maioria dos paises, o transporte e armazenagem é executado tanto por empresas governamentais como por companhias particulares, evidentemente tanto uma como outra estão sujeitas a riscos comerciais de operação. Assim, um dos objetivos destas empresas é sem duvida minimizar os custos operacionais, e é com esta intenção que muitas delas procuram desenvolver e aplicar métodos e sistemas que visem a redução nos custos totais de operação.

Neste trabalho, o autor se propõe a desenvolver um modelo matemático para representar determinados sistemas de estocagem e distribuição de um produto, levando em consideração importantes informações adicionais sobre o comportamento destes sistemas, permitindo assim, uma redução no custo esperado de operação dos mesmos. Tais informações adicionais se caracterizam fundamentalmente pela aleatoriedade da demanda e pela disponibilidade de meios de transportes.

1.3. Limitações

Para formulação deste modelo fazem-se algumas suposições restritivas a saber:

- os custos unitários são considerados constantes
- a disponibilidade de transporte e a demanda pelo produto seguem distribuições contínuas e independentes
- a vida útil do produto será limitada em um período fixo e conhecido de tempo
- o modelo proposto tem como horizonte de planejamento o período de vida útil do produto.

Mesmo com estas limitações, diversos sistemas de transporte e armazenagem podem ser aproximados a este modelo.

1.4. Condições de Pesquisa

Este trabalho de pesquisa foi desenvolvido na Universidade Federal de Santa Catarina durante o período de tempo de 14 meses. As idéias e o desenvolvimento destas, foram se materializando após inúmeros debates entre o Prof. Leonardo Ensslin, Ph.D. e o autor.

1.5. Organização do Trabalho

No capítulo 2 serão apresentados alguns dos modelos matemáticos mais usados atualmente para planejamento do transporte e armazenagem.

O novo modelo proposto juntamente com a análise qualitativa do mesmo, estão apresentados no capítulo 3.

No capítulo 4 é discutido a viabilidade de solução do modelo pelos diversos métodos matemáticos relatados na literatura.

No capítulo 5 é apresentado um exemplo de aplicação do modelo no qual a solução ótima é obtida por via computacional. O método utilizado para este fim é uma variante do algoritmo de Frank e Wolfe.

O capítulo final apresenta as conclusões e recomendações para aplicação do modelo e algumas considerações sobre futuras pesquisas.

CAPÍTULO II

2. RESTROSPECTO

2.1. Histórico

O problema de transporte diz respeito a distribuição de um produto por diversos mercados consumidores, a partir de diferentes fontes de abastecimento. O transporte de uma unidade do produto, de uma determinada fonte até o mercado consumidor, faz-se segundo um custo dado. O problema consiste em encontrar uma tabela de distribuição que estabeleça quais as quantidades de produto que cada uma das fontes de abastecimento irá fornecer aos diferentes mercados, de forma a que seja mínimo o custo total de operação.

Conforme descreve Dantzig (1) a primeira formulação do problema de transporte foi proposto em 1939 por L.V. Kantorovich, posteriormente em 1941, F.L. Hitchcock reformulou o problema, dando a este a forma tradicionalmente conhecida e aceita nos dias de hoje.

T.C. Koopmans, foi outro pesquisador, que com sua experiência adquirida na segunda guerra mundial, muito colaborou no desenvolvimento e aplicação dos problemas de transporte.

---

(1) DANTZIG, G.B. - op. citado - pg. 299,300.

2.2. O Problema de Transporte Clássico

O modelo matemático que expressa o problema de transporte clássico (PT) é formulado, na literatura atual, como segue:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_{ij} \qquad (2.1)$$

sujeito as seguintes restrições:

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = S_i \quad ; \quad i = 1, M \qquad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^{M} x_{ij} = D_j \quad ; \quad j = 1, N \qquad (2.3)$$

$$x_{ij} \geq 0; \; i = 1, M \; ; \; j = 1, N \qquad (2.4)$$

Onde:

Z = função objetivo

M = número de fontes de abastecimento

N = número de mercados de consumo

x_{ij} = quantidade do produto a ser transportado da fonte i para o mercado j

c_{ij} = custo unitário do frete para transportar o produto da fonte i para o mercado j

S_i = quantidade máxima do produto disponível na fonte i

D_j = quantidade mínima do produto necessária no mercado j

O modelo apresentado acima, tem sofrido nos últimos anos várias mutações a fim de se obter o modelo matemático apropriado a certos tipos de problemas, que envolvam condições e aspectos adicionais, que não são considerados no problema clássico de transporte.

Evidentemente, a inclusão de informações adicionais nos problemas de transporte, tende a deixá-los mais complexos. Estes são os casos, por exemplo, dos problemas de: "transporte estocástico", "baldeação" e "multicomodidades".

Dado que este trabalho se propõe a desenvolver uma extensão do problema de transporte estocástico, o autor julgou ser conveniente um estudo mais pormenorizado deste assunto.

2.3. O Problema de Transporte Estocástico

O problema de transporte estocástico (PTE), consiste na determinação das fontes de abastecimento, que irão fornecer o produto, bem como a quantidade do produto que cada uma destas fontes irá colocar nos mercados consumidores, quando a demanda é uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade (fdp) conhecida.

A formulação deste problema difere do problema de transporte clássico, nos seguintes aspectos:

- Por considerar os custos de armazenagem
- Por considerar os custos de oportunidade devido a perda de vendas
- A demanda já não é constante, mas sim uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade conhecida.

O PTE que será considerado aqui, neste trabalho, terá um período de planejamento igual a vida útil do produto.

Existem diversas abordagens para a solução de problemas estocásticos sendo que as mais importantes, conforme está descrito em (2), são:

- a técnica "stochastic linear programming" (SLP)
- o método "chance - constrained programming" (CCP)
- a técnica "two-stage programming under uncertainty"

A formulação do PTE será desenvolvida neste trabalho segundo as premissas definidas na última das citações acima.

Assim, desde que a demanda seja considerada uma variável aleatória, qualquer quantidade do produto transportada para um mercado consumidor estará sujeita às variações da demanda. Esta situação pode ocasionar situações onde a procura global real em um mercado seja maior, menor ou igual a quantidade disponível do produto neste mercado consumidor. Desta forma, poderá haver um custo de armazenagem do produto quando a procura global real for menor que a quantidade transportada para o mercado ou, o contrário, um custo pela perda da oportunidade de vender mais, na situação em que a procura for maior do que a quantidade transportada para o mercado em questão.

---

(2) TINTER, G. e SENGUPTA, J.K., "Stochastic Economics", Academic Press, pg. 204, 1972.

A partir destas considerações, serão agora apresentados alguns conceitos úteis a formulação do problema, conforme está descrito em (3).

Há necessidade inicialmente, de se estabelecer o período de tempo para o qual se está planejando a distribuição e estocagem do produto, isto pode ser feito com base em dias, semanas, etc.

A quantidade esperada do produto, que irá ficar armazenada de um período para outro no local do mercado consumidor j será expressa por:

$$\int_0^{Y_j} (Y_j - v) \quad f_j(v)dv \;\; ; \; j = 1,N \qquad (2.5)$$

Onde:

$f_j(v)$ = função densidade de probabilidade da procura para um período no mercado consumidor j.

Y_j = quantidade total a ser transportada para o mercado consumidor j a partir de todas as fontes i, i=1,M.

$$Y_j = \sum_{i=1}^{M} x_{ij} \quad ; \quad j = 1,N \qquad (2.6)$$

A quantidade esperada do produto, que irá faltar no período considerado, caso haja uma procura maior do que a quantidade disponível no mercado consumidor será representada por:

---

(3) COOPER, L. e LeBlanc, L.L., "Stochastic Transportation Problems and Other Network Related Convex Problems", Naval Res. Logist. Quart. Vol. 24; nº 2, pg. 227-237, 1978.

$$\int_{Y_j}^{\infty} (v - Y_j)\, f_j(v)dv \quad ; \quad j = 1, N \qquad (2.7)$$

A partir destas considerações serão agora definidos os custos esperados de armazenagem e por falta do produto.

O custo esperado de armazenagem no mercado consumidor j, será definido como:

$$d_j \int_{0}^{Y_j} (Y_j - v)\, f_j(v)dv \quad ; \quad j = 1, N \qquad (2.8)$$

Onde:

d_j = custo unitário de armazenagem no mercado consumidor j

O custo esperado na falta do produto no mercado consumidor j, será definido como:

$$e_j \int_{Y_j}^{\infty} (v - Y_j) f_j(v)dv \quad ; \quad j = 1, N \qquad (2.9)$$

Onde:

e_j = custo unitário devido a perda da oportunidade de venda no mercado j.

Deve-se salientar aqui, que as variáveis x_{ij} e v devem ser consistentes entre si e portanto avaliadas em uma mesma base dimensional, compatível com a base dimensional dos custos unitários.

O objetivo será encontrar a solução para o problema que minimize os custos de frete, bem como os custos esperados de armazenagem e por falta do produto.

Assim, o PTE pode ser formulado como segue abaixo:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{N} \left[d_j \int_0^{Y_j} (Y_j - v) f_j(v) dv + \right.$$

$$\left. + \; e_j \int_{Y_j}^{\infty} (v - Y_j) f_j(v) dv \right] \qquad (2.10)$$

sujeito as seguintes restrições:

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \leq S_i \qquad ; \qquad i = 1, M \qquad (2.11)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad ; \qquad i = 1, M \; ; \; j = 1, N \qquad (2.12)$$

Observa-se aqui, uma diferença entre as restrições do problema clássico de transporte e do problema de transporte estocástico pois este último, não possui restrições estabelecendo a quantidade mínima do produto a ser transportada para cada destino.

Por outro lado, a função objetivo do PTE poderá ser simplificada desde que as funções: $(Y_j - v)\, f_j(v)$ e $(v - Y_j)\, f_j(v)$ sejam integráveis no intervalo $[0, \infty)$. Através da aplicação do teorema 4 do capítulo 13 de (3) que diz "se f é integrável sobre $[a,b]$ então

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \text{ "} ,$$

é possível se obter a seguinte formulação alternativa para a função objetivo do PTE:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\, x_{ij} +$$

$$\sum_{j=1}^{N} \left[e_j\, E_j - e_j Y_j + (d_j + e_j)\, F_j(Y_j) \right] \tag{2.13}$$

Onde:

E_j = valor esperado da demanda no mercado consumidor j.

$$F_j(Y_j) = \int_0^{Y_j} (Y_j - v) f_j(v) dv$$

Os estudos desenvolvidos neste capítulo tiveram por objetivo preparar a base teórica necessária ao desenvolvimento do modelo que será proposto no próximo capítulo.

---

(3) SPIVAK, M., "Cálculo Infinitesimal", Reverté, Vol. 1, pg. 339, 1970.

CAPÍTULO III

3. MODELO PROPOSTO

O autor neste capítulo, desenvolve inicialmente um modelo matemático que utiliza as informações acerca da disponibilidade aleatória de transporte, em um ou mais modos, em cada uma das fontes de abastecimento; posteriormente este modelo é associado ao modelo de transporte estocástico. Ao final do capítulo é feita a análise qualitativa do modelo proposto.

3.1. Concepção e Desenvolvimento

Grande parte dos sistemas de armazenagem e distribuição de produtos estão sujeitos a aleatoriedade da disponibilidade de transporte, isto é, não há certeza de que o volume de transporte disponível em qualquer das fontes de abastecimento seja igual ao volume de transporte necessário, nas referidas fontes, no período de tempo considerado. A situação se torna mais complexa ainda quando existem vários modos de transporte em cada uma das fontes.

Para facilitar a análise e estudo destes sistemas, será considerado a distribuição de apenas um produto cujo período de vida útil é limitado e ainda, com respeito ao transporte, considera-se na análise que os meios de transporte sejam todos de propriedade da empresa responsável pelo sistema de armazenagem e distribuição.

Assim, uma fonte de abastecimento poderá fornecer o produto a um mercado consumidor através de um ou mais modos de transporte. Desde que a disponibilidade de transporte para cada modo seja uma variável aleatória, esta poderá ser menor, maior ou igual ao volume de transporte necessário na fonte de abastecimento.

Se o volume de transporte disponível for menor do que o necessário, parte do produto deverá ficar estocado aguardando transporte. Se o volume de transporte disponível for maior do que o necessário, parte da capacidade de transporte daquele modo estará sendo perdida, representando um custo de oportunidade em manter este transporte ocioso.

A partir destas considerações, serão agora definidos alguns conceitos úteis a formulação do problema.

Assim como no PTE, aqui também, é necessário que se estabeleça o período de tempo para o qual se está planejando a distribuição do produto. Este período de planejamento deverá ter um horizonte igual a vida útil do produto considerado.

A quantidade esperada do produto, que irá ficar armazenada de um período para outro, no local da fonte de abastecimento i a espera do modo k de transporte será dada por:

$$\int_0^{Y_{ik}} (Y_{ik} - t) g_{ik}(t) \quad ; \qquad j = 1, N \qquad k = 1, L \qquad (3.1)$$

Onde:

$g_{ik}(t)$ = função densidade de probabilidade da disponibilidade de transporte do modo k na fonte de abastecimento i.

Y_{ik} = quantidade e ser transportada para todos os mercados consumidores, a partir da fonte de abastecimento i, através do modo k de transporte.

$$= \sum_{j=1}^{N} x_{ijk} \quad ; \quad i = 1, M \; ; \; k = 1, L$$

x_{ijk} = quantidade do produto a ser transportada da fonte de abastecimento i para o mercado consumidor j através do modo k de transporte.

L = número máximo de modos de transporte disponíveis em qualquer das fontes de abastecimento.

A quantidade esperada de transporte do modo k que ficará ocioso na fonte de abastecimento i, será expresso também em termos probabilísticos, como segue abaixo:

$$\int_{Y_{ik}}^{\infty} (t - Y_{ik}) g_{ik}(t) dt \quad ; \quad \begin{array}{l} i = 1, M \\ k = 1, L \end{array} \qquad (3.2)$$

A partir destas considerações serão agora definidos os custos esperados de armazenagem e ociosidade do transporte.

O custo esperado de armazenagem na fonte de abastecimento i relativo ao modo k de transporte, será definido como:

$$a_{ik} \int_{0}^{Y_{ik}} (Y_{ik} - t) g_{ik}(t) dt ; \quad \begin{array}{l} i = 1, M \\ k = 1, L \end{array} \qquad (3.3)$$

Onde:

a_{ik} = custo unitário de armazenagem na fonte de abastecimento i para o modo k de transporte.

O custo esperado de oportunidade em manter ocioso o transporte do modo k relativo a fonte i, será definido como:

$$b_{ik} \int_{Y_{ik}}^{\infty} (t - Y_{ik}) g_{ik}(t) dt \quad i=1,M \quad k=1,L \qquad (3.4)$$

Onde:

b_{ik} = custo unitário de oportunidade que se tem ao manter ocioso o transporte do modo k na fonte i.

O objetivo será encontrar a solução para o problema que minimize os custos de frete, bem como os custos esperados de manter o transporte ocioso e armazenagem:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{L} c_{ijk}\, x_{ijk} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{L} \left[a_{ik} \int_{0}^{Y_{ik}} (Y_{ik} - t) g_{ik}(t) dt + \right.$$

$$\left. + \; b_{ik} \int_{Y_{ik}}^{\infty} (t - Y_{ik}) g_{ik}(t) dt \right] \qquad (3.5)$$

Sujeito as seguintes restrições:

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ijk} = S_{ik} \quad ; \quad i = 1,M \quad k = 1,L \qquad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{L} x_{ijk} = D_j \quad ; \qquad j = 1, N \qquad (3.7)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \; ; \quad i = 1, M; \quad j = 1, N; \quad k = 1, L \qquad (3.8)$$

Onde:

c_{ijk} = custo unitário do frete, a partir da fonte i para o mercado j, através do modo k de transporte.

S_{ik} = quantidade máxima do produtos que será transportada da fonte de abastecimento i através do modo k de transporte.

O modelo exposto acima requer, evidentemente, que as distribuições de probabilidade sejam independentes

Se as funções: $(Y_{ik} - t)g_{ik}(t)$ e $(t - Y_{ik})g_{ik}(t)$ forem integráveis no intervalo $[0, \infty)$, pode-se aplicar o teorema 4 do capítulo 13 de (1) que diz "se f é integrável sobre $[a, b]$ então

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \text{ "} ,$$

na expressão (3.5) e se obter a seguinte formulação alternativa para a função objetivo:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{L} c_{ijk}\, x_{ik} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{L} \Big[b_{ik}\, E_{ik} - b_{ik}\, Y_{ik} +$$

$$+ (a_{ik} + b_{ik}) G_{ik}(Y_{ik}) \Big] \qquad (3.9)$$

(1) SPIVAK, M, - op. citado - p. 339.

Onde:

$E_{ik}(t)$ = valor esperado da disponibilidade de transporte k na fonte de abastecimento i.

$$G_{ik}(Y_{ik}) = \int_0^{Y_{ik}} (Y_{ik} - t) g_{ik}(t) dt \quad ; \quad \begin{array}{l} i = 1, M \\ k = 1, L \end{array}$$

Até o presente momento, todas as considerações e formulações feitas pelo autor, tinham como objetivo modelar o problema de transporte descrito no começo desta seção, o que foi alcançado através das expressões (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9). Este modelo apresenta a hipótese implícita de que a demanda seja constante em todos os mercados consumidores. Com a finalidade de eliminar esta hipótese, o modelo desenvolvido será associado ao modelo do problema de transporte estocástico. Assim, o modelo resultante estará bastante próximo de muitos sistemas reais de transporte e armazenagem.

Antes de conectar-se os dois modelos, é necessário que se faça algumas alterações na formulação do problema de transporte estocástico. Reescrevendo as expressões: (2.11), (2.12), (2.13) que definem o PTE, de forma a considerar a possibilidade de transportar o produto, em um ou mais modos, chega-se a seguinte formulação:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{L} c_{ijk}\, x_{ijk} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \left[e_j \; E_i - e_i Y_j + (d_j + e_j) F_j(Y_j) \right] \quad (3.10)$$

sujeito as seguintes restrições:

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ijk} \leq S_{ik} \; ; \quad i=1, M \; ; \quad k=1, L \quad (3.11)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \; ; \quad i=1, M \; ; \quad j=1, N \; ; \quad k=1, L \quad (3.12)$$

Onde:

$$Y_j = \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{L} x_{ijk} \; ; \quad j=1, N$$

Os demais parametros permanecem com suas definições originais.

Desta forma, se pode associar o PTE ao modelo desenvolvido, simplesmente adicionando na expressão (3.9) a parcela da expressão (3.10) correspondente aos custos esperados, por falta do produto e armazenagem no mercado consumidor. Resultando na seguinte formulação para a função objetivo:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{L} c_{ijk} x_{ijk} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{L} \Big[b_{ik} E_{ik} - b_{ik} Y_{ik} +$$

$$+ (a_{ik} + b_{ik}) G_{ik}(Y_{ik}) \Big]$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \Big[e_j E_j - e_j Y_j + (d_j + e_j) F_j(Y_j) \Big] \quad (3.13)$$

E, como a demanda é agora tratada probabilisticamente, não há mais necessidade das restrições que estabelecem as quantidades mínimas a serem transportadas, restando apenas as restrições que limitam a capacidade da fonte, ou seja:

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ijk} \leq S_{ik} \; ; \quad i=1, M \; ; \quad k=1, L \qquad (3.14)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \; ; \quad i=1, M \; ; \quad k=1, L \qquad (3.15)$$

A obtenção da função objetivo expressa em (3.13) considera implicitamente as mesmas hipóteses feitas para obtenção das expressões (2.13) e (3.9).

O modelo acima, expresso por (3.13), (3.14) e (3.15), será chamado de "modelo de transporte e demanda estocásticos" e o problema que o originou chamar-se-a "problema de transporte e demanda estocásticos" (PTDE).

A solução do problema, tal como está modelado, irá fornecer a estratégia ótima que servirá de base às futuras decisões da administração do sistema de transporte e armazenagem. Deve-se ter em mente, que o modelo não considera os eventuais prejuízos que a empresa venha a ter caso não consiga uma aproximação satisfatória entre a situação real e a situação descrita na estratégia ótima.

3.2. Análise Qualitativa do PTDE

Neste ítem será feito uma análise qualitativa da função objetivo do PTDE.

Proposição 1.

Sejam as funções $(Y_j - v) \cdot f_j(v)$ e $(Y_{ik} - t)\, g_{ik}(t)$ integráveis no intervalo $[0, \infty)$ e defina-se F_j e G_{ik} sobre $[0, \infty)$ por:

$$F_j(Y_j) = \int_0^{Y_j} (Y_j - v) f_j(v) dv$$

$$G_{ik}(Y_{ik}) = \int_0^{Y_{ik}} (Y_{ik} - t) Y_{ik}(t) dt$$

então a função Z definida por:

$$Z = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{L} c_{ijk}\, x_{ijk} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{L} \left[b_{ik}\, E_{ik} - b_{ik}\, Y_{ik} + \right.$$

$$\left. + (a_{ik} + b_{ik}) G_{ik}(Y_{ik}) \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \left[e_j\, E_j - e_i Y_j + (d_j + e_j) F_j(Y_j) \right]$$

é continua.

Prova.

Dado que as funções f_j e g_{ik} são integráveis sobre $[0, \infty)$, então as funções F_j e G_{ik} são contínuas no mesmo intervalo (teorema 8, capítulo 13 de (2)), portanto as funções:

---

(2) SPIVAK, M. - op. citado - pg. 344.

$(a_{ik} + b_{ik})G_{ik}$ e $(d_j + e_j)F_j$ são também contínuas.

Por outro lado, as funções $-b_{ik}\ Y_{ik} + b_{ik}\ E_{ik}$; $-e_j\ Y_j + e_j\ E_j$ e $c_{ijk}\ x_{ijk}$, são funções lineares e portanto contínuas para os valores de x_{ijk} sobre $[0, \infty)$.

Desde que a soma de funções contínuas em um mesmo intervalo, é também uma função continua para este intervalo, resulta que Z é contínua para valores de x_{ijk} sobre $[0, \infty)$.

A proposição 2 irá definir as condições necessárias para que a função Z da expressão (3.13) seja derivável.

Proposição 2.

Sejam as funções $(Y_j - v)f_j(v)$ e $(Y_{ik} - t)g_{ik}(t)$ integráveis e contínuas sobre $[0, \infty)$ e defina-se F_j e G_{ik} sobre $[0, \infty)$ por:

$$F_j(Y_j) = \int_0^{Y_j} (Y_j - v)f_j(v)dv$$

$$G_{ik}(Y_{ik}) = \int_0^{Y_{ik}} (Y_{ik} - t)g_{ik}(t)dt$$

então a função Z definida por:

$$Z = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{L} c_{ijk}\, x_{ijk}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{L} \left[b_{ik}\, E_{ik} - b_{ik} Y_{ik} + (a_{ik} + b_{ik}) G_{ik}(Y_{ik}) \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \left[e_j\, E_j - e_j\, Y_j + (d_j + e_j) F_j (Y_j) \right]$$

é derivável em relação a x_{ijk} sobre $[0, \infty)$.

Prova.

A partir do teorema fundamental do cálculo, podemos afirmar que F_j e G_{ik} são deriváveis em qualquer ponto sobre $[0, \infty)$, portanto $(a_{ik} + b_{ik}) G_{ik}$ e $(d_j + e_j) F_j$ serão também deriváveis.

As funções $-b_{ik}\, Y_{ik} + b_{ik}\, E_{ik}$, $-e_j\, Y_j + e_j\, E_j$ e $c_{ijk}\, x_{ijk}$ são funções lineares e portanto contínuas e deriváveis para todos valores de x_{ijk} sobre $[0, \infty)$.

Desde que a soma das derivadas de duas ou mais funções com respeito a uma mesma variável é igual a derivada da soma destas funções para a variável em questão, resulta que Z é derivável em $[0, \infty)$ com respeito a variável x_{ijk}.

O lema que será apresentado a seguir servirá apenas como base teórica de referência para a proposição 3. Este mesmo lema aparece demonstrado no capítulo 3 de (3), porém

---

(3) HADLEY, G., "Nonlinear and Dynamic Programming, Addison - Wesley, pg. 89-90, 1964.

Lema 1.

Seja $h(x)$ uma função contínua e $h(x) \geq 0$ sobre $[0,\infty)$ então a função:

$$H(Y) = \int_0^Y (Y - x)h(x)dx$$

é convexa desde que $(Y - x)f(x)$ seja integrável.

Prova.

Considere o ponto $\bar{Y}$ definido sobre $[k_1, k_2]$ com $k_2 > k_1$, logo $\bar{Y}$ pode ser expresso por combinação dos limites do intervalo, seja então $\bar{Y} = \lambda k_2 + (1 - \lambda)k_1$ com $0 \leq \lambda \leq 1$. Por outro lado, o valor de H no ponto $\bar{Y}$ será dado por:

$$H(\bar{Y}) = \int_0^{\bar{Y}} [\lambda k_2 + (1 - \lambda)k_1 - x]h(x)dx$$

$$= \int_0^{\bar{Y}} [\lambda k_2 + (1 - \lambda)k_1 - x + \lambda x - \lambda x]h(x)dx$$

$$= \int_0^{\bar{Y}} [\lambda k_2 + (1 - \lambda)k_1 - (1 - \lambda)x - \lambda x]\ h(x)dx$$

$$= \lambda \int_0^{\bar{Y}} (k_2-x)h(x)dx + (1-\lambda) \int_0^{\bar{Y}} (k_1-x)h(x)dx$$

$$= \lambda \int_0^{k_2} (k_2 - x)h(x) - \lambda \int_{\bar{Y}}^{k_2} (k_2 - x)h(x)dx \quad +$$

$$+ (1 - \lambda)\int_0^{k_1} (k_1 - x)h(x)dx + (1 - \lambda)\int_{k_1}^{\bar{Y}} (k_1 - x)h(x)dx$$

Entretanto, desde que $h(x) \geq 0$ e $k_1 - x \leq 0$ para um x qualquer entre k_1 e $\bar{Y}$ e $k_2 - x \geq 0$ para valores de x entre $\bar{Y}$ e k_2, se conclui que as seguintes afirmações são verdadeiras:

$$\int_{\bar{Y}}^{k_2} (k_2 - x)h(x)dx \geq 0$$

e

$$\int_{k_1}^{\bar{Y}} (k_1 - x)h(x)dx \leq 0$$

Portanto:

$$H(\bar{Y}) \leq \lambda \int_0^{k_2} (k_2 - x)f(x)dx + (1 - \lambda)\int_0^{k_1} (k_1 - x)f(x)dx$$

ou

$$H(\bar{Y}) \leq \lambda H(k_2) + (1 - \lambda)H(k_1)$$

logo a função H(Y) é convexa.

A próxima prova mostra que sob determinadas condições, a função objetivo Z é convexa.

Proposição 3.

Sejam as funções $(Y_j - v)f_j(v)$ e $(Y_{ik} - t)g_{ik}(t)$ integráveis e contínuas sobre $[0, \infty)$, com $f_j(v) \geq 0$ e $g_{ik}(t) \geq 0$ sobre $[0, \infty)$, e defina-se F_j e G_{ik} sobre $[0, \infty)$ por:

$$F_j(Y_j) = \int_0^{Y_j} (Y_j - v)f_j(v)dv$$

$$G_{ik}(Y_{ik}) = \int_0^{Y_{ik}} (Y_{ik} - t)g_{ik}(t)dt$$

então a função Z definida por:

$$Z = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{L} c_{ijk} \quad x_{ijk} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{L} \left[b_{ik} \quad E_{ik} + b_{ik}Y_{ik} + (a_{ik} + b_{ik})G_{ik}(Y_{ik}) \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \left[e_j \quad E_j - e_jY_j + (d_j + e_j)F_j(Y_j) \right]$$

é convexa sobre o espaço de $[0, \infty)^{M\times N\times L}$.

Prova.

Através do lema 1 podemos afirmar que F_{ik} e G_j são funções convexas. Por outro lado as funções expressas por: $-b_{ik} Y_{ik} + b_{ik} E_{ik}$, $-e_j Y_j + e_j E_j$ e $c_{ijk} x_{ijk}$ são funções lineares. Desde que a soma de funções convexas e lineares definidas em um mesmo espaço resulta em uma função convexa no espaço considerado, conclui-se imediatamente que Z será convexa.

Assim, fica demonstrado que sob certas condições, a função objetivo do PTDE é contínua, derivável e convexa sobre $[0, \infty)^{MxNxL}$.

CAPÍTULO IV

4. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Desde que se utilize o computador para a solução do PTDE, a preferência por um ou outro algoritmo deverá recair sobre aquele que melhor satisfaça as seguintes condições:

- facilidade de implementação em computador,
- baixo consumo de memória,
- pouco tempo de processamento.

É evidente que os atributos descritos são bastante subjetivos e com isto a avaliação de um algoritmo "a priori" tem razoável grau de incerteza, o que não impede no entanto, de se definir pelo menos um grupo de algoritmos, potencialmente capazes de atender os requisitos para a solução computacional do PTDE.

4.1. Técnicas Potencialmente Capazes para a Solução do PTDE

Para a solução do PTE, já foram propostos diversos métodos. Entre as primeiras tentativas esta a de Dantzig e Ferguson (1) que desenvolveram uma técnica para a solução do problema quando a distribuição de probabilidades da demanda é discreta.

---

(1) DANTZIG, G. B., "Linear Programming and Extensions", Princeton University Press, pg. 580-591, 1963.

Em 1960, Elmaghraby (2) publicou um método específico para a solução do PTE o qual leva ao ótimo em um número finito de iterações.

Williams (3), Szwarc (4), Hadley (5) e Wilson (6) são alguns dos pesquisadores que propuseram técnicas para encontrar a solução ótima do PTE.

Em 1978, Cooper e LeBlanc (7) publicaram um excelente trabalho onde utilizam uma variante do algoritmo de Frank e Wolfe, na solução do PTE e de outros problemas cujas funções objetivo eram convexas. Nesta mesma publicação é discutida o desempenho de vários algoritmos na solução de problemas convexos. As conclusões a que estes autores chegaram são bastante favoráveis a utilização da variante do algoritmo de Frank e Wolfe em problemas com funções objetivo convexas e, a medida que as dimensões do problema crescem, junto com estas crescem também as vantagens no uso deste método em relação aos demais.

---

(2) ELMAGHRABY, S.E., "Allocation Under Uncertainty When the Demand Has a Continous D.F.", Managemment Science, Vol. 6, nº 7, pg. 270-294, 1960.

(3) WILLIAMS, A. C., "A Stochastic Transportation Problem, Oper. Research, Vol 11, nº 5, pg. 759-770, 1963

(4) SZWARC, W., "The Transportation Problem With Stochastic Demand", Management Science, Vol. 11, nº 1, pg. 33-50, 1964.

(5) HADLEY - op. citado - pg. 165-167.

(6) WILSON, D., "An a Priori Bounded Model for Transportation Problems With Stochastic Demand and Integer Solutions", AIIE Transactions, Vol. 4, nº 3, pg. 186-193, 1972.

(7) COOPER, L. e LeBlanc, L.L. - op. citados - pg. 327-337.

Ainda em 1978, França e Luna (8) também obtiveram bons resultados com a aplicação da variante do algoritmo de Frank e Wolfe na solução do PTE.

Estes resultados animadores conseguidos recentemente por Cooper e LeBlanc, França e Luna, levaram o autor a também utilizar o algoritmo de Frank e Wolfe na solução do PTDE.

4.2. A Variante do Algoritmo de Frank e Wolfe

A variante do algoritmo de Frank e Wolfe, trata de problemas de otimização de uma função não linear, porém derivável, sujeita a restrições lineares. Conforme está descrito no capítulo 8 de (9), trata-se de um algoritmo que determina a cada iteração, uma direção de busca da solução ótima do problema de minimização não linear. Isto é obtido através da solução completa de um subproblema linear, que tem como objetivo, a minimização da aproximação de Taylor de primeira ordem da função linear, a partir de uma solução factivel do problema não linear.

Antes de apresentar o algoritmo, convém esclarecer a notação empregada aqui:

---

(8) FRANÇA, P. M., e LUNA, H. P., "Problemas de Transporte e Localização Estocásticos pela Decomposição De Benders Generalizada", XI - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 1978

(9) ZANGWILL, W., "Nonlinear Programming: a unified approach" , Prentice - Hall, p.158-162, 1969.

U^k = uma solução factivel para o problema não linear,

U = variáveis do problema não linear,

V^k = uma solução factivel para o problema linear,

V = variáveis do problema linear,

d^k = $V^k - U^K$ = direção que provoca um decrescimo na função objetivo não linear,

$\hat{f}(U)$ = função objetivo não linear,

$\bar{f}(V)$ = função objetivo linear que se aproxima da $\hat{f}(U)$

A = matriz dos coeficientes das restrições,

B = matriz das constantes.

A seguinte sequência de passos define o algoritmo para a minimização:

Passo 0: dê a solução inicial U^k com $k = 0$ para o problema.

$$\text{Min } \hat{f}(U)$$

s.a.

$$AU = B$$
$$U \geq 0$$

Passo 1: Calcule $\nabla\hat{f}(U^k)$ e faça $\bar{f}(V) = \nabla\hat{f}(U^k)^t V$

Passo 2: Resolva o problema linear

$$\text{Min } \bar{f}(V)$$

s.a.

$$AV = B$$
$$V \geq 0$$

a solução será $V = V^k$

Passo 3: Se $\nabla \hat{f}(U^k)^t (V^k - U^k) \leq 0$; PARE, a solução ótima é U^k; do contrário vá para o passo 4.

Passo 4: Calcule a nova solução:

$$U^{k+1} = U^k + \sigma(V^k - U^k); \quad \sigma \varepsilon J \text{ e } J = [0, 1]$$

faça $k := k + 1$ e retorne ao passo 1.

Este algoritmo foi implementado no computador IBM 360/40 da UFSC, com a finalidade de se obter a solução ótima para vários problemas do tipo PTDE, um dos quais é apresentado como ilustração no capítulo a seguir.

CAPÍTULO V

5. ILUSTRAÇÃO

5.1. O Problema

Este problema,é um problema reduzido de um problema real, isto é, o problema aqui apresentado tem um número de variáveis menor do que o verdadeiro, porém a estrutura original do problema real foi mantida.

Então, para ilustrar a aplicação do modelo do PTDE será apresentado um problema pequeno com duas fontes de abastecimento sendo que em uma destas fontes há dois modos de transporte, no outro apenas um modo e, existem cinco mercados consumidores a serem abastecidos.

As restrições do problema limitam a quantidade do produto fornecida por cada fonte de abastecimento (restrições naturais do PTDE) e além destas, foram estabelecidos limites mínimos e máximos da quantidade a ser transportada para cada mercado consumidor.

O quadro 1 apresenta os códigos atribuidos as fontes de abastecimento, mercados e modos de transporte.

Por conveniência e facilidade de tratamento matemático, foi assumido que a disponibilidade de transporte e a demanda sejam distribuições exponenciais.

A quantidade máxima a ser transportada para cada um dos mercados foi estabelecida como sendo igual a média do consumo do respectivo mercado.

No quadro 2 estão colocados os custos unitários relativos a cada uma das variáveis. Nota-se neste quadro que a variável x_{132} possui um custo unitário de frete bem maior do que qualquer outra variável, isto porque o percurso entre a fonte de abastecimento 1 e o mercado 3 não existe ou não pode ser usado, este procedimento tem como objetivo assegurar que este caminho seja preterido em relação aos demais.

No quadro 3 aparecem as médias da disponibilidade de transporte relativa a cada modo em cada fonte.

No quadro 4 estão as médias de consumo em cada mercado.

As médias apresentadas nos quadros 3 e 4 foram obtidas a partir de períodos anteriores de igual tamanho.

No quadro 5 estão colocados as quantidades máximas do produto que serão transportadas das fontes de abastecimento através dos modos de transporte disponíveis.

O quadro 6 apresenta as quantidades mínima e máxima do produto, que poderá ser colocada em cada mercado consumidor.

FONTE DE ABASTECIMENTO-FT	CÓDIGO
A	1
B	2
MODO-MD	**CÓDIGO**
Rodoviário	1
Ferroviário	2
MERCADO-MC	**CÓDIGO**
C	1
D	2
E	3
F	4
G	5

Quadro 1 - Código das fontes, mercados e modos de transportes.

FT	MC	MD	VAR	CUSTOS ($/ton)				
i	j	k	x_{ijk}	$\bar{c}_{ijk}$	a_{ik}	b_{ik}	d_j	e_j
1	1	1	x_{111}	55	5	80	4	10
1	1	2	x_{112}	40	5	70	4	10
1	2	1	x_{121}	30	5	80	3	15
1	2	2	x_{122}	30	5	70	3	15
1	3	1	x_{131}	10	5	80	5	10
1	3	2	x_{132}	1000000	0	0	0	0
1	4	1	x_{141}	30	5	80	4	12
1	4	2	x_{142}	27	5	70	4	12
1	5	1	x_{151}	60	5	80	5	10
1	5	2	x_{152}	43	5	70	5	10
2	1	1	x_{211}	35	6	50	4	10
2	2	1	x_{221}	10	6	50	3	15
2	3	1	x_{231}	15	6	50	5	10
2	4	1	x_{241}	80	6	50	4	12
2	5	1	x_{251}	55	6	50	5	10

Quadro 2 - Custos unitários relativos a cada uma das variáveis.

ABASTECIMENTO		DISTRIBUIÇÃO
FT	MD	EXPONENCIAL
i	k	MÉDIA (ton)
1	1	500.000
1	2	350.000
2	1	400.000

Quadro 3 - Médias da disponibilidade de transporte nas fontes de abastecimento.

CONSUMO	DISTRIBUIÇÃO
MC	EXPONENCIAL
j	MÉDIA (ton)
1	350.000
2	170.000
3	180.000
4	130.000
5	250.000

Quadro 4 - Médias do consumo em cada um dos mercados.

ABASTECIMENTO		
FT	MD	QUANTIDADES(ton)
i	k	S_{ik}
1	1	310.000
1	2	390.000
2	1	350.000

Quadro 5 - Quantidades máximas do produto, fornecidos pelas fontes de abastecimento.

CONSUMO	QUANTIDADES (ton)	
MC	D_j	
j	MÍNIMO	MÁXIMO
1	280.000	350.000
2	130.000	170.000
3	140.000	180.000
4	100.000	130.000
5	220.000	250.000

Quadro 6 - Quantidades mínimas e máximas do produto a serem colocadas em cada mercado.

5.2. Aplicação do método de Frank e Wolfe

Para aplicação do método, foi desenvolvido um programa computacional cuja listagem está no anexo 2.

No anexo 1 são descritos as formas de entrada de dados no programa computacional.

O anexo 3 contém os relatórios impressos pelo computador na solução do problema apresentado na seção 5.1.

A obtenção do gradiente da função objetivo do PTDE, utilizada no método de Frank e Wolfe esta contida no anexo 4.

5.3. Solução e Análise dos Resultados do Problema Exemplo

O programa computacional realizou sete iterações para encontrar o valor ótimo da função objetivo, gastando para isto 181 segundos de CPU em um computador IBM 360/40.

A solução inicial do problema não linear foi obtida resolvendo-se um problema linear onde eram considerados apenas os custos de frete na função objetivo, sujeita ao mesmo conjunto de restrições lineares do problema não linear.

A iteração número zero é a própria solução inicial do problema não linear.

A seguir aparecem os resultados para a iteração número zero do método de Frank e Wolfe, e como já se disse, os valores das variáveis correspondem aos valores da solução inicial:

Solução do problema não linear

Iteração nº 0 * solução intermediária

valor da FO = 51.620.096,00

VARIÁVEL	VALOR
x_{111}	0,0
x_{112}	60.000,0
x_{121}	0,0
x_{122}	0,0
x_{131}	140.000,0
x_{132}	0,0
x_{141}	0,0
x_{142}	100.000,0
x_{151}	0,0
x_{152}	220.000,0
x_{211}	220.000,0
x_{221}	130.000,0
x_{231}	0,0
x_{241}	0,0
x_{251}	0,0

segue a primeira iteração:

Solução do problema não linear

Iteração nº 1 * solução intermediária

valor da FO = 45.340.064,00

VARIÁVEL	VALOR
x_{111}	0,0
x_{112}	99.999,94
x_{121}	0,0
x_{122}	0,0
x_{131}	179.999,94
x_{132}	0,0
x_{141}	40.000,0
x_{142}	60.000,0
x_{151}	0,0
x_{152}	220.000,0
x_{211}	180.000,0
x_{221}	169.999,94
x_{231}	0,0
x_{241}	0,0
x_{251}	0,0

a segunda iteração:

Solução do problema não linear

Iteração nº 2 * solução intermediária

valor da FO = 45.116.096,00

VARIÁVEL	VALOR
x_{111}	0,0
x_{112}	100.000,0
x_{121}	0,0
x_{122}	0,0
x_{131}	130.000,0
x_{132}	0,0
x_{141}	71.999,94
x_{142}	28.000,01
x_{151}	0,0
x_{152}	220.000,0
x_{211}	180.000,0
x_{221}	170.000,0
x_{231}	0,0
x_{241}	0,0
x_{251}	0,0

A terceira, quarta, quinta e sexta iterações serão omitidas aqui, porém estão contidas no anexo 3, onde estão listados todos os relatórios impressos sob comando do programa computacional. A seguir será descrito a sétima solução que forneceu a solução ótima para o problema descrito no ínicio do capítulo.

Solução do problema não linear

Iteração nº 7 * solução ótima

valor da FO = 42.776.832,00

VARIÁVEL	VALOR
x_{111}	0,0
x_{112}	118.882,0
x_{121}	0,0
x_{122}	0,0
x_{131}	180.000,0
x_{132}	0,0
x_{141}	130.000,0
x_{142}	0,0
x_{151}	0,0
x_{152}	220.000,0
x_{211}	161.117,31
x_{221}	170.000,0
x_{231}	0,0
x_{241}	0,0
x_{251}	0,0

CAPÍTULO VI

6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste trabalho, o autor desenvolveu um modelo de armazenagem e distribuição através da consideração de informações adicionais, até então não utilizadas na formulação dos modelos matemáticos pertinentes a esta área.

Estas informações adicionais utilizadas na concepção do novo modelo, caracterizam-se por considerar:

- a disponibilidade aleatória de transporte em cada um dos modos disponíveis,
- os custos de armazenagem e também os custos de oportunidade dos diversos modos de transporte.

Posteriormente o modelo desenvolvido é associado ao modelo de transporte estocástico. Além disto, é feito ainda, uma análise qualitativa da função objetivo desta associação de modelos.

Devido a flexibilidade da programação linear para representação de redes, muitos casos excepcionais de sistemas de transporte e armazenagem, não descritos pelo modelo desenvolvido, poderão ser adaptados a este. Especificamente para o modelo proposto, podem ocorrer situações em que o administrador da área de transportes não estabelece uma quantidade máxima do produto a ser transportada em cada um dos modos de transporte, nes te caso, estas quantidades serão variáveis do problema. Tal situação, pode ser representada com pequenas alterações no conjunto de restrições do modelo proposto.

Outra situação não prevista pelo modelo, mas que pode ser incorporada a ele, é o caso em que parte dos veículos que executam o transporte não apresentem custo de oportunidade quando estão parados, sendo que ocorre o contrário com o restante dos veículos, que irão representar um ônus quando estiverem ociosos. Esta situação também pode ser representada pelo modelo proposto, utilizando-se para isto artifícios na formulação do problema.

Além destas, outras situações podem ser convenientemente representadas pelo novo modelo, sendo este portanto, uma ferramenta útil a solução de uma determinada classe de problemas de distribuição e armazenagem.

Como possíveis extensões deste estudo, o autor coloca a generalização do modelo desenvolvido para situação em que existe mais de um produto a ser transportado. Uma outra extensão pode ser feita através da incorporação de custos unitários, que se relacionem de forma não linear com as quantidades do produto. O desenvolvimento de um algoritmo específico para a solução do problema, também pode ser um estudo a ser feito no futuro.

B I B L I O G R A F I A

1 - COOPER, L. e LeBlanc, L.L., "Stochastic Transportation Problems anda other Network Related convex Problems", Naval Res. Logist. Quart. Vol. 24; nº 2, 1978.

2 - DANTZIG, G.B., "Linear Programming and Extensions", Princeton University Press, 1963.

3 - ELMAGHRABY, S.E., "Allocation Under Uncertainty when the Demand has a Continous D.F.", Managemment Science, Vol. 6, nº 7, 1960.

4 - FRANÇA, P.M., e LUNA, H.P., "Problemas de Transporte e Localização Estocásticos Resolvidos pela Decomposição de Benders Generalizada", XI - Simpósio Brasideiro de Pesquisa Operacional, 1978.

5 - HADLEY, G., "Linear Programming", Addison - Wesley, 1962.

6 - HADLEY, G., "Nonlinear and dynamic programming, Addison-Wesley, 1964.

7 - HIMMELBLAU, D.M., "Applied Nonlinear Programming", McGraw-Hill, 1972.

8 - KÜNZI, H.P., e KRELLE, W., "La Programmation Non Linéaire", Gauthier-Villars Paris, 1969.

9 - LUENBERGER, D.G., "Introduction to Linear and Nonlinear Programming", Addison-Wesley, 1973.

10 - POLAK, E., "Computacional Methods in Optimization", Academic Press, 1971.

11 - SPIVAK, M., "Cálculo Infinitesimal", Reverté, Vol. 1, 1970.

12 - SZWARC, W., "The Transportation Problem With Stochastic Demand", Managemment Science, Vol. 11, nº 1, 1964.

13 - TINTER, G. e SENGUPTA, J.K., "Stochastic Economics", Academic Press, 1972.

14 - WILLIAMS, A.C., "A Stochastic Transportation Problem", Oper. Research, Vol. 11, nº 5, 1969.

15 - WILSON, D., "An a Priori Bounded Model for Transportation Problems With Stochastic Demand and Integer Solutions", AIIE Transactions, Vol. 4, nº 3, 1972.

16 - ZANGWILL, W., "Nonlinear Programming: a Unified Approach", Prentice - Hall, 1969.

A N E X O 1

ENTRADA DE DADOS DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

A seguir são descritos a forma com que devem ser colocados os dados do problema.

CARTÃO	CAMPO	D E S C R I Ç Ã O	VAR.	COLUNAS	FORMATO	OBSERVAÇÕES
P/1	1	título do problema	TITL	1 - 60	15A4	(1) o nº max. de restr. é = 20
P/1	1	nº de restrições(1)	M	1 - 4	I4	
	2	nº de variaveis(2)	N	9 - 12	I4	(2) o nº max de variáveis é = 40
	3	tolerância	TOL	17 - 26	F10.8	
	4	nº máx. de iterações	NITER	31 - 34	I4	
P/1	1	fator de aprox.	ALFA	1 - 5	F 5.2	(3) de todas as variáveis inclusive as de folga
	2	cte. multiplicativo	XKAPA	9 - 12	F 4.3	
	3	lim. fator prodt.	EPLON	22 - 29	F 8.4	
P/N	1	nome da variável(3)	VAR	1 - 4	A4	(4) este cartão é necessário somente para os coeficientes ≠ 0
	2	solução inicial	XX	9 - 18	F10.3	
	3	descrição da variável	EXPL	23 - 62	10A4	
P/M	1	nome da restrição	XLNHA	1 - 4	A4	(5) * * * *
	2	recurso	D	9 - 20	F12.3	
	3	descrição da restrição	EXPL	25 - 64	10A4	
P/?	1	nome da restrição(4)	XLNHA	1 - 4	A4	
	2	nome da variável	VAR	9 - 12	A4	
	3	coef.das restrições	C	17 - 26	F10.3	
P/1	1	cartão bandeira(5)	XI	1 - 4	A4	

NOTA: A notação P/k empregada acima, indica que os próximos cartões daquele tipo são em número de k

ANEXO 2

LISTAGEM DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

Este programa computacional, resolve problemas de programação não lineares com restrições lineares, através da aplicação da variante do método de Frank e Wolfe, tal como ela é descrita em (1) ou (2).

Além do programa principal existem ainda mais cinco subrotinas: INP1, DEVA, SOLUC, AVALE e OUTP.

A listagem segue nas próximas páginas.

---

(1) COOPER, L. e LeBlanc, L. L. - op. citado

(2) ZANGWILL, W. - op. citado - pg.158-162

```
C****
C****
C**** P R O G R A M A   P R I N C I P A L
C****
C**** M E T O D O   D E   F R A N K
C****
C****              E   W O L F E
C****
      COMMON A(22,60),C(20,40)
      COMMON TITL(15),B(22),D(20),DV(40),AAUX4(4),
     1 AAUX5(4),XSOL(40),XX(40),XLNHA(20),VAR(40),
     2EXPL(10),IBASI(20)
      COMMCN NO,NI,ITEST,I,J,JJ,N,M,NITER,
     1EPLON,ALFA,XKAPA,SIGL,TOL,NIT,X,Z
      NI=1
      NJ=3
      NIT=0
      SIGL=0.
C
C**** SUBROTINA PARA LEITURA DOS DADOS
C
      CALL INPI
      IF(ITEST)1,1,999
C
C**** SUBROTINA PARA CALCULO DA DERIVADA
C
    1 CALL DEVA
      DO 8 J=1,N
      A(M+1,J)=DV(J)
    8 CONTINUE
C
C**** PREPARACAO DOS DADOS
C
      DO 32 I=1,M
      DO 31 J=1,N
      A(I,J)=C(I,J)
   31 CONTINUE
      B(I)=D(I)
   32 CONTINUE
      MPLU2=M+2
      NM=N+M
      N1=N+1
      DO 33 I=1,MPLU2
      DO 33 J=N1,NM
      A(I,J)=0.
   33 CONTINUE
C
C**** SUBROTINA PARA SOLUCAO DO
C**** PROBLEMA DE PROGRAMACAO LINEAR
C
      CALL SOLUC
      IF(ITEST)3,3,999
C
C**** SUBROTINA PARA AVALIACAO DA FO
C
    3 CALL AVALE
C
C**** TESTE DA SOLUCAO ENCONTRADA
C
      X=0.
      DO 41 J=1,N
      X=X+DV(J)*(XSOL(J)-XX(J))
   41 CONTINUE
      IF(ABS(X)-TOL)44,44,43
   44 ITEST=1
      GO TO 6
   43 ITEST=0
C
C**** SUBROTINA PARA IMPRESSAO DAS SOLUCOES
C
    6 CALL OUTP
      IF(ITEST)999,12,999
C
C**** NOVA SOLUCAO
C
   12 IF(NITER-NIT)16,999,16
```

```
16 NIT=NIT+1
   SIGL=(ALFA**FLOAT(NIT))*XKAPA
   IF(SIGL-EPLON)13,14,14
14 DO 9 J=1,N
   XSOL(J)=XSOL(J)-XX(J)
   IF(XSOL(J))20,9,21
20 IF(XSOL(J)+SIGL)22,22,23
22 XX(J)=XX(J)-SIGL
   GO TO 9
23 XX(J)=XX(J)+XSOL(J)
   GO TO 9
21 IF(XSOL(J)-SIGL)24,25,25
24 XX(J)=XX(J)+XSOL(J)
   GO TO 9
25 XX(J)=XX(J)+SIGL
 9 CONTINUE
   GO TO 1
13 WRITE(NO,1002)
1002 FORMAT(1H1,24X,49('*')//25X,'** FATOR DE ',
  1'APROXIMACAO MENOR QUE O ESPECIFICADO *',
  2//25X,49('*'))
999 CALL EXIT
   END
```

```
C****
C**** S U B R O T I N A   I N P 1
C****
      SUBROUTINE INP1
      COMMON A(22,60),C(20,40)
      COMMON TITL(15),B(22),D(20),DV(40),AAUX4(4),
     1 AAUX5(4),XSOL(40),XX(40),XLNHA(20),VAR(40),
     2EXPL(10),IBASI(20)
      COMMON NO,NI,ITEST,I,J,JJ,N,M,NITER,
     1EPLON,ALFA,XKAPA,SIGL,TOL,NIT,X,Z
      DATA CMC/'****'/
      ITEST=0
      WRITE(NO,1001)
 1001 FORMAT(1H1,9X,'L I S T A G E M   D O S  '
     1'D A D O S')
C
C**** LEITURA  DO  TITULO  DO  PROBLEMA
C
      READ(NI,1002)(TITL(I),I=1,15)
 1002 FORMAT(15A4)
      WRITE(NO,1003)(TITL(I), I=1,15)
 1003 FORMAT(//10X,15A4)
C
C**** LEITURA DO NO. DE  RESTRICOES,  VARIAVEIS,
C**** TOLERANCIA  E  ITERACOES  DESEJADAS
C
      READ(NI,1004)M,N,TOL,NITER
 1004 FORMAT(I4,4X,I4,4X,F10.8,4X,I4)
C
C**** LEITURA DO FT DE APROXIMACAO,  CT  MULTPVA
C**** E  LIM  DO FT  DE  APROX
C
      WRITE(NO,1005)M,N,NITER,TOL
 1005 FORMAT(//10X,'NO. DE RESTRICOES = ',I4/10X,
     1'NO. DE VARIAVEIS = ',I4/10X,'NO. MAX DE ',
     2'ITERACOES = ',I4/10X,'TOLERANCIA = ',F12.6)
      READ(NI,1016)ALFA,XKAPA,EPLON
 1016 FORMAT(F5.4,4X,F8.2,4X,F8.5)
      WRITE(NO,1017)ALFA,XKAPA,EPLON
 1017 FORMAT(//10X,'FATOR DE APROXIMACAO = ',F5.4/
     110X,'CONSTANTE MULTIPLICATIVA = ',F8.2/
     210X,'LIMITE DO FATOR PRODUTO = ',F12.6)
      WRITE(NO,1009)
 1009 FORMAT(//10X,'VARIAVEIS DO PROBLEMA'/10X,
     1'E SOLUCAO INICIAL'/)
C
C**** LEITURA DAS VAR  DO PROG   E SOL INICIAL
C
      DO 2 J=1,N
      READ(NI,1010)VAR(J),XX(J),(EXPL(I),I=1,10)
 1010 FORMAT(A4,4X,F10.2,4X,10A4)
    2 WRITE(NO,1011)VAR(J),XX(J),(EXPL(I),I=1,10)
 1011 FORMAT(10X,A4,' = ',F10.2,'  - - - -  ',
     110A4)
      WRITE(NO,1006)
 1006 FORMAT(//10X,'PARAMETROS DAS RESTRICOES'/)
C
C**** LEITURA DOS PARAMETROS DAS RESTRICOES
C
      DO 1 I=1,M
      READ(NI,1007)XLNHA(I),D(I),(EXPL(J),J=1,10)
 1007 FORMAT(A4,4X,F12.2,4X,10A4)
    1 WRITE(NO,1008)XLNHA(I),D(I),(EXPL(J),J=1,10)
 1008 FORMAT(10X,A4,3X,F10.2,'  - - - -  ',10A4)
      DO 12 I=1,M
      DO 12 J=1,N
      C(I,J)=0.
   12 CONTINUE
      WRITE(NO,1012)
 1012 FORMAT(//10X,'RESTRICOES -- VARIAVEIS E',
     1' COEFICIENTES'/)
C
C**** LEITURA DOS COEF   DAS  RESTRICOES
C
    7 READ(NI,1013)XI,XJ,X
 1013 FORMAT(A4,4X,A4,4X,F10.2)
```

```
      IF(XI-CMC)3,11,3
    3 DO 5 I=1,M
      IF(XLNHA(I)-XI)5,6,5
    5 CONTINUE
   10 WRITE(NO,1014)
 1014 FORMAT(10X,'OS DADOS ABAIXO SAO INCONSISTE',
     1'NTES')
      WRITE(NO,1015)XI,XJ,X
 1015 FORMAT(10X,A4,6X,A4,6X,F10.2)
      ITEST=1
      GO TO 7
    6 II=I
      DO 8 J=1,N
      IF(VAR(J)-XJ)8,9,8
    8 CONTINUE
      GO TO 10
    9 JJ=J
      WRITE(NO,1015)XI,XJ,X
      C(II,JJ)=X
      GO TO 7
   11 RETURN
      END
```

```
C****
C**** S U B R O T I N A   D E V A
C****
      SUBROUTINE DEVA
      COMMON A(22,60),C(20,40)
      COMMON TITL(15),B(22),D(20),DV(40),AAUX4(4),
     1 AAUX5(4),XSOL(40),XX(40),XLNHA(20),VAR(40),
     2EXPL(10),IBASI(20)
      COMMON NO,NI,ITEST,I,J,JJ,N,M,NITER,
     1EPLON,ALFA,XKAPA,SIGL,TOL,NIT,X,Z
      Y11=XX(1)+XX(3)+XX(5)+XX(7)+XX(9)
      Y12=XX(2)+XX(4)+XX(6)+XX(8)+XX(10)
      Y21=XX(11)+XX(12)+XX(13)+XX(14)+XX(15)
      YY1=XX(1)+XX(2)+XX(11)
      YY2=XX(3)+XX(4)+XX(12)
      YY3=XX(5)+XX(6)+XX(13)
      YY4=XX(7)+XX(8)+XX(14)
      YY5=XX(9)+XX(10)+XX(15)
C  *
      DV(1)=-50.+80.+10.-
     1(5.0+80.)*(1.-2.71828**(-Y11/500000.))-
     2(4.+10.)*(1.-2.71828**(-YY1/300000.))
C  *
      DV(2)=-40.+70.+10.-
     1(5.0+70.)*(1.-2.71828**(-Y12/350000.))-
     2(4.+10.)*(1.-2.71828**(-YY1/300000.))
C  *
      DV(3)=-30.+80.+15.-
     1(5.0+80.)*(1.-2.71828**(-Y11/500000.))-
     2(3.+15.)*(1.-2.71828**(-YY2/150000.))
C  *
      DV(4)=-30.+70.+15.-
     1(5.0+70.)*(1.-2.71828**(-Y12/350000.))-
     2(3.+15.)*(1.-2.71828**(-YY2/150000.))
C  *
      DV(5)=-10.+80.+10.-
     1(5.0+80.)*(1.-2.71828**(-Y11/500000.))-
     2(5.+10.)*(1.-2.71828**(-YY3/150000.))
C  *
      DV(6)=-1000000.
C  *
      DV(7)=-30.+80.+12.-
     1(5.0+80.)*(1.-2.71828**(-Y11/500000.))-
     2(4.+12.)*(1.-2.71828**(-YY4/130000.))
C  *
      DV(8)=-27.+70.+12.-
     1(5.0+70.)*(1.-2.71828**(-Y12/350000.))-
     2(4.+12.)*(1.-2.71828**(-YY4/130000.))
C  *
      DV(9)=-60.+80.+10.-
     1(5.0+80.)*(1.-2.71828**(-Y11/500000.))-
     2(5.+10.)*(1.-2.71828**(-YY5/220000.))
C  *
      DV(10)=-43.+70.+10.-
     1(5.0+70.)*(1.-2.71828**(-Y12/350000.))-
     2(5.+10.)*(1.-2.71828**(-YY5/220000.))
C  *
      DV(11)=-35.+50.+10.-
     1(6.0+50.)*(1.-2.71828**(-Y21/400000.))-
     2(4.+10.)*(1.-2.71828**(-YY1/300000.))
C  *
      DV(12)=-10.+50.+15.-
     1(5.0+50.)*(1.-2.71828**(-Y21/400000.))-
     2(3.+15.)*(1.-2.71828**(-YY2/150000.))
C  *
      DV(13)=-15.+50.+10.-
     1(6.0+50.)*(1.-2.71828**(-Y21/400000.))-
     2(5.+10.)*(1.-2.71828**(-YY3/150000.))
C  *
      DV(14)=-80.+50.+12.-
     1(6.0+50.)*(1.-2.71828**(-Y21/400000.))-
     2(4.+12.)*(1.-2.71828**(-YY4/130000.))
C  *
      DV(15)=-55.+50.+10.-
     1(6.0+50.)*(1.-2.71828**(-Y21/400000.))-
     2(5.+10.)*(1.-2.71828**(-YY5/120000.))
```

```
C *
      DV(16)=0.
C *
      DV(17)=0.
C *
      DV(18)=0.
C *
      DV(19)=0.
C *
      DV(20)=0.
C *
      DV(21)=0.
C *
      DV(22)=0.
C *
      DV(23)=0.
C *
      DV(24)=0.
C *
      DV(25)=0.
C *
      DV(26)=0.
C *
      DV(27)=0.
C *
      DV(28)=0.
C *
      RETURN
      END
```

```
C****
C****  S U B R O T I N A   S O L U C
C****
       SUBROUTINE SOLUC
       COMMON A(22,60),C(20,40)
       COMMON TITL(15),B(22),D(20),DV(40),AAUX4(4),
      1 AAUX5(4),XSOL(40),XX(40),XLNHA(20),VAR(40),
      2EXPL(10),IBASI(20)
       COMMON NO,NI,ITEST,I,J,JJ,N,M,NITER,
      1EPLON,ALFA,XKAPA,SIGL,TOL,NIT,X,Z
       DATA KBASI/'BA'/
       DATA LBASI/'  '/
       ITEST=0
       ITERS=0
       B(M+1)=0.
       B(M+2)=0.
       K=2
       N1=N+1
       NM=N+M
C
C****  INICIO DA FASE I
C
       DO 120 JJJ=1,N
       A(M+2,JJJ)=0.0
       DO 120 III=1,M
       A(M+2,JJJ)=A(M+2,JJJ)+A(III,JJJ)
  120  CONTINUE
C
C****  DESENVOLVIMENTO DE UMA BASE ARTIFICIAL
C
       DO 110 III=1,M
       NPLUI=N+III
       A(III,NPLUI)=1.0
       IBASI(III)=0
       B(M+2)=B(M+2)+B(III)
  110  CONTINUE
       WTEST=B(M+2)/1000000.
C


  399  DPS=0.
       SA=B(M+1)
       SB=B(M+2)
       WRITE(NO,8100)SB,SA
 8100  FORMAT(1X,2HW=,F12.2,10X,2HZ=,F12.2)
       MPLUK=M+K
       DO 410 JJJ=1,N
       IF(A(MPLUK,JJJ)-DPS)410,410,420
  420  DPS=A(MPLUK,JJJ)
       JPIV=JJJ
  410  CONTINUE
       IF(DPS-1.E-06)501,501,450
C
C****  BUSCA DA LINHA PIVO
C
  450  RATMI=1.E+06
       IPIV=M+3
       DO 470 III=1,M
       IF(A(III,JPIV)-1.E-06)470,460,460
  460  RATIO=B(III)/A(III,JPIV)
       IF(RATIO-RATMI)465,465,470
  465  RATMI=RATIO
       IPIV=III
  470  CONTINUE
       WRITE(NO,2001)IPIV,JPIV,ITERS,K
 2001  FORMAT(1X,5HIPIV=,I4,5HJPIV=,I4,6HITERS=,I4,2HK=,I4)
       IF(K-2)471,474,471
  471  DO 475 III=1,M
       IF(IBASI(III)-0)475,472,475
  472  IF(ABS(A(III,JPIV))-1.E-06)475,475,473
  473  IPIV=III
  475  CONTINUE
  474  PIVOT=A(IPIV,JPIV)
       IBASI(IPIV)=JPIV
       ITERS=ITERS+1
C
```

```
C**** SE O PIVO FOI ENCONTRADO TRANSFORME
C**** O TABLEAU, DO CONTRARIO, A SOLUCAO
C**** SERA ILIMITADA
C
      M3=M+3
      IF(IPIV-M3)485,496,485
  485 DO 500 III=1,MPLUK
      IF(III-IPIV)497,500,497
  497 DO 480 JJJ=1,NM
      IF(JJJ-JPIV)479,480,479
  479 A(III,JJJ)=A(III,JJJ)-A(III,JPIV)*A(IPIV,JJJ)/PIVOT
  480 CONTINUE
      B(III)=B(III)-A(III,JPIV)*B(IPIV)/PIVOT
      A(III,JPIV)=0.0
  500 CONTINUE
      DO 495 JJJ=1,NM
      A(IPIV,JJJ)=A(IPIV,JJJ)/PIVOT
  495 CONTINUE
      B(IPIV)=B(IPIV)/PIVOT
      GO TO 399
  496 WRITE(NO,1006)
 1006 FORMAT(13H SOLUCAO ILIMITADA)
      ITEST=1
      GO TO 571
  501 IF(K-1)509,510,509
  509 IF(B(M+2)-WTEST)504,504,505
C
C**** NAO EXISTE SOLUCAO POSSIVEL
C
  505 WRITE(NO,1007)
 1007 FORMAT(28H NAO EXISTE SOLUCAO POSSIVEL)
      ITEST=1
      GO TO 571
  504 K=1
      GO TO 399
C
C**** IMPRESSAO DA SOLUCAO OTIMA
C
  510 CONTINUE
      WRITE(NO,1008)ITERS
 1008 FORMAT(19H SOLUCAO OTIMA APOS,2X,I5,10H ITERACOES)
      ZIMBO=-B(M+1)
      WRITE(NO,1010)ZIMBO
 1010 FORMAT(25H FUNCAO OBJETIVO MAXIMA =,F12.2)
      WRITE(NO,1011)
 1011 FORMAT(2X,8HVARIAVEL,2X,6HSTATUS,8X,5HVALOR,9X,6HDELTAJ)
      DO 580 JJJ=1,N
      COLJ=VAR(JJJ)
      DELTJ=A(M+1,JJJ)
      DO 520 III=1,M
      II=III
      IF(IBASI(III)-JJJ)520,550,520
  520 CONTINUE
      XSOL(JJJ)=0.0
      JBASI=LBASI
      GO TO 560
  550 XSOL(JJJ)=B(II)
      JBASI=KBASI
  560 WRITE(NO,1009)COLJ,JBASI,XSOL(JJJ),DELTJ
 1009 FORMAT(5X,A4,4X,A2,7X,F12.2,4X,F12.6)
  580 CONTINUE
      GO TO 999
  571 WRITE(NO,1015)
 1015 FORMAT(1H1)
      MPLU2=M+2
      DO 800 III=1,MPLU2
      WRITE(NO,1016)(A(III,JJ),JJ=1,NM),B(III)
 1016 FORMAT(1X,10F12.4)
  800 CONTINUE
  999 WRITE(NO,1015)
      RETURN
      END
```

```
C****
C****  S U B R O T I N A   A V A L E
C****
      SUBROUTINE AVALE
      COMMON A(22,60),C(20,40)
      COMMON TITL(15),B(22),D(20),DV(40),AAUX4(4),
     1 AAUX5(4),XSOL(40),XX(40),XLNHA(20),VAR(40),
     2EXPL(10),IBASI(20)
      COMMON NJ,NI,ITEST,I,J,JJ,N,M,NITER,
     1EPLON,ALFA,XKAPA,SIGL,TOL,NIT,X,Z
      Z=50.*XX(1)+40.*XX(2)+30.*XX(3)+30.*XX(4)+
     1  10.*XX(5)+1000000.*XX(6)+30.*XX(7)+27.*XX(8)+
     2  60.*XX(9)+43.*XX(10)+35.*XX(11)+
     3  10.*XX(12)+15.*XX(13)+80.*XX(14)+
     4  55.*XX(15)
      Y11=XX(1)+XX(3)+XX(5)+XX(7)+XX(9)
      Y12=XX(2)+XX(4)+XX(6)+XX(8)+XX(10)
      Y21=XX(11)+XX(12)+XX(13)+XX(14)+XX(15)
      YY1=XX(1)+XX(2)+XX(11)
      YY2=XX(3)+XX(4)+XX(12)
      YY3=XX(5)+XX(6)+XX(13)
      YY4=XX(7)+XX(8)+XX(14)
      YY5=XX(9)+XX(10)+XX(15)
      Z=Z+(5.+80.)*(1.-2.71828**(-Y11/500000.))
      Z=Z+(5.+70.)*(1.-2.71828**(-Y12/300000.))
      Z=Z+(6.+50.)*(1.-2.71828**(-Y21/400000.))
      Z=Z+(4.+10.)*(1.-2.71828**(-YY1/300000.))
      Z=Z+(3.+15.)*(1.-2.71828**(-YY2/150000.))
      Z=Z+(5.+10.)*(1.-2.71828**(-YY3/150000.))
      Z=Z+(4.+12.)*(1.-2.71828**(-YY4/130000.))
      Z=Z+(5.+10.)*(1.-2.71828**(-YY5/220000.))
      Z=Z+80.*(500000.-Y11)
      Z=Z+70.*(300000.-Y12)
      Z=Z+50.*(400000.-Y21)
      Z=Z+10.*(300000.-YY1)
      Z=Z+15.*(150000.-YY2)
      Z=Z+10.*(150000.-YY3)
      Z=Z+12.*(130000.-YY4)
      Z=Z+10.*(220000.-YY5)
      RETURN
      END
```

```
C****
C**** S U B R O T I N A   O U T P
C****
      SUBROUTINE OUTP
      COMMON A(22,60),C(20,40)
      COMMON TITL(15),B(22),D(20),DV(40),AAUX4(4),
     1 AAUX5(4),XSOL(40),XX(40),XLNHA(20),VAR(40),
     2EXPL(10),IBASI(20)
      COMMON NO,NI,ITEST,I,J,JJ,N,M,NITER,
     1EPLON,ALFA,XKAPA,SIGL,TOL,NIT,X,Z
      DATA CMC/'****'/
      WRITE(NO,1001)
 1001 FORMAT(1H1,9X,100('*')/10X,'*',98X,'*'/,
     110X,'*',23X,'M E T O D O   D E   F R A N K',
     2'  E   W O L F E',30X,'*'/10X,'*',
     398X,'*',/10X,100('*'))
      WRITE(NO,1002)(TITL(I),I=1,15)
 1002 FORMAT(/30X,15A4//10X,100('*'))
      IF(ITEST)1,2,1
    1 WRITE(NO,1003)NIT,Z
 1003 FORMAT(10X,'*',98X,'*'/10X,'*',3X,'SOLUCAO',
     1' OTIMA',10X,'*',3X,'ITERACAO NO. ',I3,10X,
     2'*',3X,'VALOR DA FO ',F12.2,14X,'*'/10X,
     3'*',98X,'*'/10X,100('*'))
      GO TO 3
    2 WRITE(NO,1004)NIT,Z
 1004 FORMAT(10X,'*',98X,'*'/10X,'*',3X,'SOLUCAO',
     1' INTERMEDIARIA',2X,'*',3X,'ITERACAO NO. ',
     2I3,10X,'*',3X,'VALOR DA FO ',F12.2,14X,'*',
     3/10X,'*',98X,'*'/10X,100('*'))
    3 WRITE(NO,1005)SIGL
 1005 FORMAT(10X '*',98X,'*'/10X,'*',3X,'CARACTE',
     1'RISTICA -- FATOR DE MAX. APROXIMACAO  ',
     2F12.6,38X,'*'/10X,'*',98X,'*'/10X,100('*'))
      J=0
      DO 19 I=1,N
      J=J+1
      AAUX4(J)=VAR(I)
      AAUX5(J)=XX(I)
      IF(J-4)20,21,21
   20 IF(I-N)19,23,23
   23 J=J+1
      DO 24 JJ=J,4
      AAUX4(J)=CMC
      AAUX5(J)=0.
   24 CONTINUE
   21 WRITE(NO,1008)AAUX4(1),AAUX5(1),AAUX4(2),
     1AAUX5(2),AAUX4(3),AAUX5(3),AAUX4(4),AAUX5(4)
 1008 FORMAT(10X,'*',98X,'*'/10X,'*',5X,A4,'=',
     1F10.2,3X,'*',5X,A4,'=',F10.2,4X,'*',5X,
     2A4,'=',F10.2,4X,'*',5X,A4,'=',F10.2,4X,'*')
      J=0
   19 CONTINUE
      WRITE(NO,1010)
 1010 FORMAT(10X,'*',98X,'*'/10X,100('*'))
      RETURN
      END
```

A N E X O 3

RELATÓRIOS DE SAÍDA

Nas próximas páginas, encontram-se os relatórios emitidos pelo computador, sob comando do programa contido no anexo 2. Estes relatórios se referem a solução do problema apresentado no item 5.1 deste trabalho.

```
L I S T A G E M   D O S   D A D O S

      P R O B L E M A   T E S T E

NO. DE RESTRICOES =    13
NO. DE VARIAVEIS =   28
NO. MAX DE ITERACOES =    -1
TOLERANCIA =  1000.000000

FATOR DE APROXIMACAO = .8000
CONSTANTE MULTIPLICATIVA = 50000.00
LIMITE DO FATOR PRODUTO =   100.000000

VARIAVEIS DO PROBLEMA
E SOLUCAO INICIAL

X111 =         0.0    - - - -   QTD  TRANSP  OR 1    DES 1    MD 1
X112 =     60000.00   - - - -                   1        1       2
X121 =         0.0    - - - -                   1        2       1
X122 =         0.0    - - - -                   1        2       2
X131 =    140000.00   - - - -                   1        3       1
X132 =         0.0    - - - -                   1        3       2
X141 =         0.0    - - - -                   1        4       1
X142 =    100000.00   - - - -                   1        4       2
X151 =         0.0    - - - -                   1        5       1
X152 =    220000.00   - - - -                   1        5       2
X211 =    220000.00   - - - -                   2        1       1
X221 =    130000.00   - - - -                   2        2       1
X231 =         0.0    - - - -                   2        3       1
X241 =         0.0    - - - -                   2        4       1
X251 =         0.0    - - - -                   2        5       1
F1   =    170000.00   - - - -
F2   =     10000.00   - - - -
F3   =         0.0    - - - -
F4   =         0.0    - - - -
F5   =     70000.00   - - - -
F6   =         0.0    - - - -
F7   =     40000.00   - - - -
F8   =         0.0    - - - -
F9   =     40000.00   - - - -
F10  =         0.0    - - - -
F11  =     30000.00   - - - -
F12  =         0.0    - - - -
F13  =     30000.00   - - - -

PARAMETROS DAS RESTRICOES

FT11      310000.00   - - - -
FT12      390000.00   - - - -
FT21      350000.00   - - - -
LID1      280000.00   - - - -
LSD1      350000.00   - - - -
LID2      130000.00   - - - -
LSD2      170000.00   - - - -
LID3      140000.00   - - - -
LSD3      180000.00   - - - -
LID4      100000.00   - - - -
LSD4      130000.00   - - - -
LID5      220000.00   - - - -
LSD5      250000.00   - - - -
```

RESTRICOES -- VARIAVEIS E COEFICIENTES

FT11	X111	1.00
FT11	X121	1.00
FT11	X131	1.00
FT11	X141	1.00
FT11	X151	1.00
FT11	F1	1.00
FT12	X112	1.00
FT12	X122	1.00
FT12	X132	1.00
FT12	X142	1.00
FT12	X152	1.00
FT12	F2	1.00
FT21	X211	1.00
FT21	X221	1.00
FT21	X231	1.00
FT21	X241	1.00
FT21	X251	1.00
FT21	F3	1.00
LID1	X111	1.00
LID1	X112	1.00
LID1	X211	1.00
LID1	F4	-1.00
LSD1	X111	1.00
LSD1	X112	1.00
LSD1	X211	1.00
LSD1	F5	1.00
LID2	X121	1.00
LID2	X122	1.00
LID2	X221	1.00
LID2	F6	-1.00
LSD2	X121	1.00
LSD2	X122	1.00
LSD2	X221	1.00
LSD2	F7	1.00
LID3	X131	1.00
LID3	X132	1.00
LID3	X231	1.00
LID3	F8	-1.00
LSD3	X131	1.00
LSD3	X132	1.00
LSD3	X231	1.00
LSD3	F9	1.00
LID4	X141	1.00
LID4	X142	1.00
LID4	X241	1.00
LID4	F10	-1.00
LSD4	X141	1.00
LSD4	X142	1.00
LSD4	X241	1.00
LSD4	F11	1.00
LID5	X151	1.00
LID5	X152	1.00
LID5	X231	1.00
LID5	F12	-1.00
LSD5	X151	1.00
LSD5	X152	1.00
LSD5	X251	1.00
LSD5	F13	1.00

SOLUCAO OTIMA APOS 24 ITERACOES
FUNCAO OBJETIVO MAXIMA = 5893597.00

VARIAVEL	STATUS	VALOR	DELTAJ
X111	BA	0.0	0.0
X112	BA	100000.00	0.0
X121		0.0	-5.000000
X122		0.0	-15.000000
X131	BA	180000.00	0.0
X132		0.0	************
X141	BA	130000.00	0.0
X142		0.0	-7.000000
X151		0.0	-6.937500
X152	BA	220000.00	0.0
X211	BA	180000.00	0.0
X221	BA	170000.00	0.0
X231		0.0	-20.062500
X241		0.0	-64.999985
X251		0.0	-20.062500
F1		0.0	-28.857498
F2	BA	70000.00	0.0
F3		0.0	-2.019699
F4		0.0	-18.169998
F5	BA	70000.00	0.0
F6	BA	40000.00	0.0
F7		0.0	-9.890900
F8	BA	40000.00	0.0
F9		0.0	-21.330002
F10	BA	30000.00	0.0
F11		0.0	-3.738510
F12		0.0	-22.169998
F13	BA	30000.00	0.0

METODO DE FRANK E WOLFE

PROBLEMA TESTE

SOLUCAO INTERMEDIARIA * ITERACAO NO. 0 * VALOR DA FO 51620096.00

CARACTERISTICA -- FATOR DE MAX. APROXIMACAO 0.0

X111= 0.0	X112= 60000.00	X121= 0.0	X122= 0.0
X131= 140000.00	X132= 0.0	X141= 0.0	X142= 100000.00
X151= 0.0	X152= 220000.00	X211= 220000.00	X221= 130000.00
X231= 0.0	X241= 0.0	X251= 0.0	F1 = 170000.00
F2 = 10000.00	F3 = 0.0	F4 = 0.0	F5 = 70000.00
F6 = 0.0	F7 = 40000.00	F8 = 0.0	F9 = 40000.00
F10 = 0.0	F11 = 30000.00	F12 = 0.0	F13 = 30000.00

SOLUCAO OTIMA APOS 24 ITERACOES
FUNCAO OBJETIVO MAXIMA = 2420189.00

VARIAVEL	STATUS	VALOR	DELTAJ
X111	BA	0.0	0.0
X112	BA	100000.00	0.0
X121		0.0	-5.000000
X122		0.0	-15.000000
X131	BA	180000.00	0.0
X132		0.0	************
X141	BA	130000.00	0.0
X142		0.0	-7.000000
X151		0.0	-6.937500
X152	BA	220000.00	0.0
X211	BA	180000.00	0.0
X221	BA	170000.00	0.0
X231		0.0	-20.062500
X241		0.0	-65.000000
X251		0.0	-20.062500
F1		0.0	-19.419998
F2	BA	70000.00	0.0
F3		0.0	-2.019699
F4		0.0	-18.169998
F5	BA	70000.00	0.0
F6	BA	40000.00	0.0
F7		0.0	-8.119858
F8	BA	40000.00	0.0
F9		0.0	-19.892502
F10	BA	30000.00	0.0
F11		0.0	-3.738525
F12		0.0	-22.169998
F13	BA	30000.00	0.0

M E T O D O   D E   F R A N K   E   W O L F E

P R O B L E M A   T E S T E

SOLUCAO INTERMEDIARIA * ITERACAO NO. 1 * VALOR DA FO 45340064.00

CARACTERISTICA -- FATOR DE MAX. APROXIMACAO 39999.996094

X111=	0.0	X112=	99999.94	X121=	0.0	X122=	0.0
X131=	179999.94	X132=	0.0	X141=	40000.00	X142=	60000.00
X151=	0.0	X152=	220000.00	X211=	180000.00	X221=	169999.94
X231=	0.0	X241=	0.0	X251=	0.0	F1 =	130000.00
F2 =	50000.00	F3 =	0.0	F4 =	0.0	F5 =	70000.00
F6 =	40000.00	F7 =	0.00	F8 =	40000.00	F9 =	0.00
F10 =	30000.00	F11 =	0.0	F12 =	0.0	F13 =	30000.00

SOLUCAO OTIMA APOS 25 ITERACOES
FUNCAO OBJETIVO MAXIMA = 2213270.00

VARIAVEL	STATUS	VALOR	DELTAJ
X111	BA	0.0	0.0
X112	BA	170000.00	0.0
X121		0.0	-5.000000
X122		0.0	-14.999985
X131	BA	180000.00	0.0
X132		0.0	************
X141	BA	130000.00	0.0
X142		0.0	-6.999985
X151		0.0	-6.937515
X152	BA	220000.00	0.0
X211	BA	110000.00	0.0
X221	BA	170000.00	0.0
X231		0.0	-20.062500
X241		0.0	-64.999935
X251		0.0	-20.062515
F1		0.0	-13.962799
F2		0.0	-0.404785
F3	BA	70000.00	0.0
F4		0.0	-16.150299
F5	BA	70000.00	0.0
F6	BA	40000.00	0.0
F7		0.0	-10.139542
F8	BA	40000.00	0.0
F9		0.0	-21.912201
F10	BA	30000.00	0.0
F11		0.0	-5.758209
F12		0.0	-20.150284
F13	BA	30000.00	0.0

METODO DE FRANK E WOLFE

PROBLEMA TESTE

SOLUCAO INTERMEDIARIA * ITERACAO NO. 2 * VALOR DA FC 45116096.00

CARACTERISTICA -- FATOR DE MAX. APROXIMACAO 31999.992188

X111= 0.0	X112= 100000.00	X121= 0.0	X122= 0.0
X131= 180000.00	X132= 0.0	X141= 71999.94	X142= 28000.01
X151= 0.0	X152= 220000.00	X211= 180000.00	X221= 170000.00
X231= 0.0	X241= 0.0	X251= 0.0	F1 = 98000.00
F2 = 70000.00	F3 = 0.0	F4 = 0.0	F5 = 70000.00
F6 = 40000.00	F7 = 0.0	F8 = 40000.00	F9 = 0.0
F10 = 30000.00	F11 = 0.0	F12 = 0.0	F13 = 30000.00

SOLUCAO OTIMA APOS 24 ITERACOES
FUNCAO OBJETIVO MAXIMA = 1922796.00

VARIAVEL	STATUS	VALOR	DELTAJ
X111	BA	0.0	0.0
X112	BA	100000.00	0.0
X121		0.0	-5.000000
X122		0.0	-15.000000
X131	BA	180000.00	0.0
X132		0.0	************
X141	BA	130000.00	0.0
X142		0.0	-7.000000
X151		0.0	-6.937500
X152	BA	220000.00	0.0
X211	BA	180000.00	0.0
X221	BA	170000.00	0.0
X231		0.0	-20.062500
X241		0.0	-64.999985
X251		0.0	-20.062500
F1		0.0	-10.995514
F2	BA	70000.00	0.0
F3		0.0	-1.138077
F4		0.0	-15.745514
F5	BA	70000.00	0.0
F6	BA	40000.00	0.0
F7		0.0	-10.544342
F8	BA	40000.00	0.0
F9		0.0	-22.316986
F10	BA	30000.00	0.0
F11		0.0	-6.163010
F12		0.0	-19.745514
F13	BA	30000.00	0.0

M E T O D O   D E   F R A N K   E   W O L F E

P R O B L E M A   T E S T E

SOLUCAO INTERMEDIARIA * ITERACAO NO. 3 * VALOR DA FO 44552880.00

CARACTERISTICA -- FATOR DE MAX. APROXIMACAO 25599.992188

X111= C.0	X112= 125599.94	X121= 0.0	X122= 0.0
X131= 130000.00	X132= 0.0	X141= 97599.88	X142= 2400.02
X151= C.0	X152= 220000.00	X211= 154400.00	X221= 170000.00
X231= 0.0	X241= 0.0	X251= 0.0	F1 = 72400.00
F2 = 44400.01	F3 = 25599.99	F4 = 0.0	F5 = 70000.00
F6 = 40000.00	F7 = 0.0	F8 = 40000.00	F9 = 0.0
F10 = 30000.00	F11 = 0.0	F12 = 0.0	F13 = 30000.00

SOLUCAO OTIMA APOS 25 ITERACOES
FUNCAO OBJETIVO MAXIMA = 1471330.00

VARIAVEL	STATUS	VALOR	DELTAJ
X111	BA	0.0	0.0
X112	BA	170000.00	0.0
X121		0.0	-5.000000
X122		0.0	-15.000000
X131	BA	180000.00	0.0
X132		0.0	***********
X141	BA	130000.00	0.0
X142		0.0	-7.000000
X151		0.0	-6.937500
X152	BA	220000.00	0.0
X211	BA	110000.00	0.0
X221	BA	170000.00	0.0
X231		0.0	-20.062500
X241		0.0	-65.000000
X251		0.0	-20.062500
F1		0.0	-9.162109
F2		0.0	-1.978683
F3	BA	70000.00	0.0
F4		0.0	-15.849609
F5	BA	70000.00	0.0
F6	BA	40000.00	0.0
F7		0.0	-10.440262
F8	BA	40000.00	0.0
F9		0.0	-22.212891
F10	BA	30000.00	0.0
F11		0.0	-5.096329
F12		0.0	-19.849609
F13	BA	30000.00	0.0

METODO DE FRANK E WOLFE

PROBLEMA TESTE

SOLUCAO INTERMEDIARIA * ITERACAO NO. 4 * VALOR DA FO 43722320.00

CARACTERISTICA -- FATOR DE MAX. APROXIMACAO 20479.988281

X111= 0.0	X112= 105119.94	X121= 0.0	X122= 0.0
X131= 130000.00	X132= 0.0	X141= 118079.81	X142= 0.0
X151= 0.0	X152= 220000.00	X211= 174879.94	X221= 170000.00
X231= 0.0	X241= 0.0	X251= 0.0	F1 = 51920.01
F2 = 54880.00	F3 = 5120.00	F4 = 0.0	F5 = 70000.00
F6 = 40000.00	F7 = 0.0	F8 = 40000.00	F9 = 0.0
F10 = 30000.00	F11 = 0.0	F12 = 0.0	F13 = 30000.00

SOLUCAO OTIMA APOS 24 ITERACOES
FUNCAO OBJETIVO MAXIMA = 772296.75

VARIAVEL	STATUS	VALOR	DELTAJ
X111	BA	0.0	0.0
X112	BA	100000.00	0.0
X121		0.0	-5.000000
X122		0.0	-15.000000
X131	BA	180000.00	0.0
X132		0.0	************
X141	BA	130000.00	0.0
X142		0.0	-7.000000
X151		0.0	-6.937500
X152	BA	220000.00	0.0
X211	BA	180000.00	0.0
X221	BA	170000.00	0.0
X231		0.0	-20.062500
X241		0.0	-64.999935
X251		0.0	-20.062500
F1		0.0	-7.413193
F2	BA	70000.00	0.0
F3		0.0	-0.364700
F4		0.0	-15.225693
F5	BA	70000.00	0.0
F6	BA	40000.00	0.0
F7		0.0	-11.064178
F8	BA	40000.00	0.0
F9		0.0	-22.836807
F10	BA	30000.00	0.0
F11		0.0	-5.154999
F12		0.0	-19.225693
F13	BA	30000.00	0.0

M E T O D O   D E   F R A N K   E   W O L F E

P R O B L E M A   T E S T E

SOLUCAO INTERMEDIARIA * ITERACAO NO. 5 * VALOR DA FO 42737504.00

CARACTERISTICA -- FATOR DE MAX. APROXIMACAO 16383.996094

X111= 0.0	X112= 121503.88	X121= 0.0	X122= 0.0
X131= 130000.00	X132= 0.0	X141= 130000.00	X142= 0.0
X151= 0.0	X152= 220000.00	X211= 158495.94	X221= 170000.00
X231= 0.0	X241= 0.0	X251= 0.0	F1 = 35536.02
F2 = 49496.00	F3 = 21504.00	F4 = 0.0	F5 = 70000.00
F6 = 40000.00	F7 = 0.0	F8 = 40000.00	F9 = 0.0
F10 = 30000.00	F11 = 0.0	F12 = 0.0	F13 = 30000.00

SOLUCAO OTIMA APOS 26 ITERACOES
FUNCAO OBJETIVO MAXIMA = 953428.25

VARIAVEL	STATUS	VALOR	DELTAJ
X111	BA	0.0	0.0
X112	BA	170000.00	0.0
X121		0.0	-5.000000
X122		0.0	-15.000000
X131	BA	180000.00	0.0
X132		0.0	************
X141	BA	130000.00	0.0
X142		0.0	-7.000000
X151		0.0	-6.937500
X152	BA	220000.00	0.0
X211	BA	110000.00	0.0
X221	BA	170000.00	0.0
X231		0.0	-20.062500
X241		0.0	-64.999985
X251		0.0	-20.062500
F1		0.0	-7.842606
F2		0.0	-1.508148
F3	BA	70000.00	0.0
F4		0.0	-15.655106
F5	BA	70000.00	0.0
F6	BA	40000.00	0.0
F7		0.0	-10.634766
F8	BA	40000.00	0.0
F9		0.0	-22.407394
F10	BA	30000.00	0.0
F11		0.0	-4.725586
F12		0.0	-19.655106
F13	BA	30000.00	0.0

M E T O D O   D E   F R A N K   E   W O L F E

P R O B L E M A   T E S T E

SOLUCAO INTERMEDIARIA * ITERACAO NO. 6 * VALOR DA FO 42934128.00

CARACTERISTICA -- FATOR DE MAX. APROXIMACAO 13107.195313

X111= 0.0	X112= 108396.63	X121= 0.0	X122= 0.0
X131= 130000.00	X132= 0.0	X141= 130000.00	X142= 0.0
X151= 0.0	X152= 220000.00	X211= 171603.13	X221= 170000.00
X231= 0.0	X241= 0.0	X251= 0.0	F1 = 22428.82
F2 = 31603.20	F3 = 8396.80	F4 = 0.0	F5 = 70000.00
F6 = 40000.00	F7 = 0.0	F8 = 40000.00	F9 = 0.0
F10 = 30000.00	F11 = 0.0	F12 = 0.0	F13 = 30000.00

SOLUCAO OTIMA APOS 25 ITERACOES
FUNCAO OBJETIVO MAXIMA = 823567.56

VARIAVEL	STATUS	VALOR	DELTAJ
X111	BA	0.0	0.0
X112	BA	170000.00	0.0
X121		0.0	-5.000000
X122		0.0	-15.000000
X131	BA	180000.00	0.0
X132		0.0	************
X141	BA	130000.00	0.0
X142		0.0	-7.000000
X151		0.0	-6.937500
X152	BA	220000.00	0.0
X211	BA	110000.00	0.0
X221	BA	170000.00	0.0
X231		0.0	-20.062500
X241		0.0	-64.999985
X251		0.0	-20.062500
F1		0.0	-7.209396
F2		0.0	-0.008743
F3	BA	70000.00	0.0
F4		0.0	-15.021896
F5	BA	70000.00	0.0
F6	BA	40000.00	0.0
F7		0.0	-11.267975
F8	BA	40000.00	0.0
F9		0.0	-23.040604
F10	BA	30000.00	0.0
F11		0.0	-5.358795
F12		0.0	-19.021896
F13	BA	30000.00	0.0

METODO DE FRANK E WOLFE

PROBLEMA TESTE

SOLUCAO OTIMA * ITERACAO NO. 7 * VALOR DA FO 42776832.00

CARACTERISTICA -- FATOR DE MAX. APROXIMACAO 10485.757813

X111= 0.0	X112= 116882.38	X121= 0.0	X122= 0.0
X131= 180000.00	X132= 0.0	X141= 130000.00	X142= 0.0
X151= 0.0	X152= 220000.00	X211= 161117.31	X221= 170000.00
X231= 0.0	X241= 0.0	X251= 0.0	F1 = 11943.06
F2 = 51117.44	F3 = 18882.56	F4 = 0.0	F5 = 70000.00
F6 = 40000.00	F7 = 0.0	F8 = 40000.00	F9 = 0.0
F10 = 30000.00	F11 = 0.0	F12 = 0.0	F13 = 30000.00

A N E X O 4

O GRADIENTE DO PTDE

Neste anexo esta contido o desenvolvimento matemático necessário para se obter o gradiente da função objetivo do PTDE.

Deseja-se então:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_{ijk}} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{L} c_{ijk}\, x_{ijk} +$$

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{K=1}^{L} \left[b_{ik} VE_{ik} \quad - b_{ik} y_{ik} + (a_{ik} + b_{ik}) G_{ik}(Y_{ik}) \right] +$$

$$\sum_{j=1}^{N} \left[e_j VE_j \quad - e_j y_j + (d_j + e_j) F_j(y_j) \right] \qquad (A4.1)$$

Desde que a derivada da soma é igual a soma das derivadas, pode-se então, obter separadamente a derivada de cada uma das parcelas aditivas da função objetivo acima. Este procedimento tem por finalidade simplificar e tornar mais compreensivel à obtenção do gradiente da função em questão.

$$\frac{\partial}{\partial x_{ijk}} \left[\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{L} c_{ijk}\, x_{ijk} \right] = c_{ijk} \qquad (A4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{ijk}} \left[\sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{L} b_{ik}\, VE_{ik} \right] = 0 \qquad (A4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{ijk}} \left[\sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{L} b_{ik}\, Y_{ik} \right] = b_{ik} \qquad (A4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{ijk}}\left[\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{L}(a_{ik}+b_{ik})G_{ik}(Y_{ik})\right]=$$

$$(a_{ik}+b_{ik})\frac{\partial}{\partial x_{ijk}}\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{L}\left[\int_0^{Y_{ik}}(Y_{ik}-t)g_{ik}(t)\,dt\right]=$$

$$(a_{ik}+b_{ik})\int_0^{Y_{ik}} g_{ik}(t)\,dt \tag{A4.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{ijk}}\left[\sum_{j=1}^{N} e_j\, VE_j\right] = 0 \tag{A4.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{ijk}}\left[\sum_{j=1}^{N} e_j Y_j\right] = e_j \tag{A4.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{ijk}}\left[\sum_{j=1}^{N}(d_j+e_j)F_j\right] =$$

$$(d_j+e_j)\frac{\partial}{\partial x_{ijk}}\left[\sum_{j=1}^{N}\int_0^{Y_j}(Y_j-v)fj(v)\,dv\right] =$$

$$(d_j+e_j)\int_0^{Y_j} f_j(v)\,dv \tag{A4.8}$$

Através dos resultados encontrados em (A4.2), (A4.3), (A4.4), (A4.5), (A4.6), (A4.7), e (A4.8) pode-se obter a gradiente da função objetivo:

$$\nabla Z(x) = \left(\frac{\partial Z}{\partial x_{111}}, \frac{\partial Z}{\partial x_{211}}, \ldots, \frac{\partial Z}{\partial x_{MNL}}\right) \tag{A4.9}$$

onde:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_{ijk}} = c_{ijk} - b_{ik} + (a_{ik} + b_{ik}) \int_0^{Y_{ik}} g_{ik}(t)dt \; -$$

$$- \; e_j + (d_j + e_j) \int_0^{Y_j} f_j(v)dv \qquad (A4.10)$$

Portanto (A4.9) e (A4.10) estabelecem perfeitamente o gradiente da função objetivo do PTDE.