

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

TEORIA NÃO LINEAR DE CASCAS ELÁSTICAS

JESUS ADJALMA COSTA JR

FLORIANÓPOLIS

SANTA CATARINA - BRASIL

AGOSTO - 1979

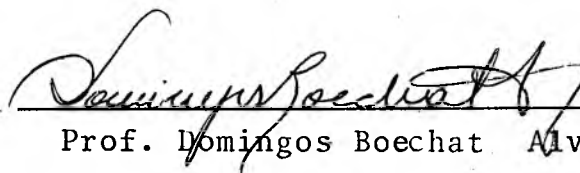
TEORIA NÃO LINEAR DE CASCAS ELÁSTICAS

JESUS ADJALMA COSTA JR

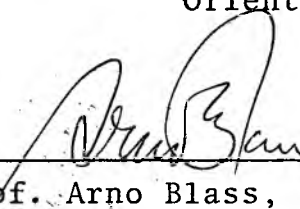
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA - ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: PROJETO

E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO

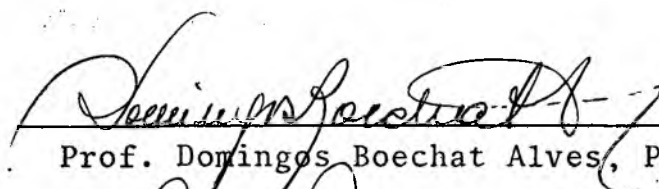


Prof. Domingos Boechat Alves, Ph.D.
Orientador

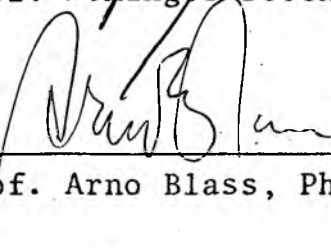


Prof. Arno Blass, Ph.D.
Coordenador

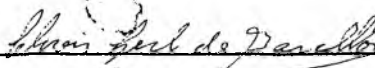
APRESENTADA PERANTE A BÀNCA EXAMINADORA COMPOSTA DOS PRO-
FESSORES:



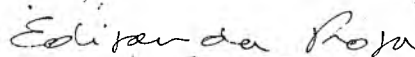
Prof. Domingos Boechat Alves, Ph.D.



Prof. Arno Blass, Ph.D.



Prof. Clóvis Sperb de Barcellos, Ph.D.



Prof. Edison da Rosa, M.Sc.

AGRADECIMENTOS

- À Universidade Federal de Santa Catarina, por ter proporcionado a realização deste trabalho;
- Aos professores Domingos Boechat Alves e Clóvis Sperb de Barcellos, pela orientação prestada.

O autor agradece à Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) e à Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) que apoiaram a realização desta pesquisa.

À meus pais e meu amigo Cicero in memoriam

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO.....1

CAPÍTULO 2

PROPRIEDADES MÉTRICAS DAS CASCAS.....4

CAPÍTULO 3

RELAÇÃO DEFORMAÇÃO - DESLOCAMENTO.....8

CAPÍTULO 4

EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE.....14

CAPÍTULO 5

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.....19

CAPÍTULO 6

EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS.....27

CAPÍTULO 7

PARTICULARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES.....33

7.1 - Propriedades Métricas e Relação Deformação-Deslocamento..33

7.2 - Equação de Compatibilidade.....39

7.3 - Equações de Equilíbrio.....45

7.4 - Equações Constitutivas.....47

CAPÍTULO 8

CONCLUSÃO.....56

LINHAS DE PESQUISAS DECORRENTES DESTE TRABALHO.....57

REFERÊNCIAS.....58

APÊNDICE A.....61

APÊNDICE B.....73

RESUMO

Neste trabalho é desenvolvida uma teoria não linear de cascas elásticas incorporando tanto não linearidades geométricas quanto físicas e sem usar a hipótese de Kirchhoff-Love.

As equações obtidas são formuladas em notação tensorial e se reduzem às de uso corrente, quando adotadas as mesmas hipóteses simplificativas encontradas na literatura específica.

ABSTRACT

In this work a nonlinear theory of elastic shells is developed which incorporates both geometric and physical nonlinearities and which does not make use of the well known Love-Kirchhoff hypothesis. The resulting equations are formulated in tensorial notation and are reduced to the ones of common use when the simplifying assumptions encountered in the specific literature are taken.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Encontram-se na literatura grandes contribuições ao estudo de teoria não linear de cascas [22] , [25] , [28] , [29] , entretanto, a maioria destas trata apenas de não linearidades geométricas .

No estudo das cascas, grande número de investigações tem sido desenvolvido baseado na hipótese de Kirchhoff-Love, porém, uma vez feita esta hipótese, ficam subentendidos pequenos deslocamentos e pequenas deformações.

Para casca fina elástica, considerando grandes deslocamentos e pequenas deformações, várias teorias para problemas de não linearidade geométrica foram desenvolvidas [14] , [25] .

Introduzindo os tensores tensão resultantes de Euler e os tensores flexão definidos pela diferença entre os tensores da segunda forma fundamental da superfície de referência deformada e indeformada, Sander [25] desenvolveu uma teoria não linear de casca fina e indicou a existência de teorias que poderão ser formuladas fazendo-se várias aproximações. As equações de equilíbrio são obtidas como na teoria linear considerando vetores - base da superfície de referência indeformada, porém uma aproximação é feita para relação entre o cisalhamento transversal e momentos fletores resultantes.. Koiter [14] também obteve resultados semelhantes considerando a hipótese de pequenas deformações e estado plano de tensão. Contudo, nestas investigações , as equações fundamentais são expressas com relação ao estado indeformado e o tensor tensão de Euler e os tensores - deformação

de Cauchy-Green são usados. Isto implica uma inconsistência quando se usa a hipótese de pequenas deformações do ponto de vista da mecânica dos meios contínuos.

Por outro lado, usando tensores tensão Lagrangeano, Shrivastava [26] obteve as equações não lineares de equilíbrio - considerando a superfície de referência indeformada e assumindo a hipótese de Kirchhoff-Love. As aplicações práticas destas equações são muito limitadas devido ao fato de os tensores tensão Lagrangeano serem não simétricos.

Estas considerações, no tocante às definições do tensor tensão e do tensor deformação no desenvolvimento das equações fundamentais, assim como as relações constitutivas, deverão ser tomadas numa forma consistente do ponto de vista da mecânica dos meios contínuos, quando se formulam as equações para a teoria de cascas considerando grandes deslocamentos e grandes deformações.

Das teorias não lineares existentes para casca fina a mais consistente é a de Naghdi [22], uma vez que nela são consideradas as não linearidades geométricas e físicas, usando a formulação Euleriana.

Para cascas em geral, Yokoo [32] formulou uma teoria não linear, onde as equações fundamentais são desenvolvidas considerando a superfície de referência indeformada em termos dos tensores deformação de Cauchy-Green e dos tensores tensão de Kirchhoff. Uma vez tendo sido escolhida a formulação Lagrangeana, a inconsistência da escolha é compensada porque as equações constitutivas não lineares são desenvolvidas.

Baseado no que foi exposto acima e utilizando a formulação Euleriana, foi desenvolvida uma teoria não linear de cas

cas elásticas, incorporando tanto não linearidades geométricas- quanto físicas e sem usar a hipótese de Kirchhoff-Love.

Através de relações cinemáticas entre as superfícies deformada e indeformada, são expressos os tensores de deformação em termos dos componentes dos deslocamentos.

Uma vez que os deslocamentos são desconhecidos, as equações de compatibilidade são obtidas fazendo-se uso do teorema de Riemann.

As equações de equilíbrio são obtidas pelo princípio dos trabalhos virtuais. As equações constitutivas não lineares são obtidas para cascas elásticas isotrópicas, considerando a densidade de energia de deformação como sendo uma função analítica em termos das deformações.

Assim, esta é uma teoria completa não linear de cascas incorporando tanto não linearidades geométricas quanto físicas.

As equações obtidas se reduzem as equações da literatura fazendo as hipóteses simplificativas adotadas na mesma.

Neste trabalho, símbolos com asterísticos denotam grandezas referentes ao estado deformado e usando a convenção tensorial de soma; os índices latinos denotam o estado tridimensional, ao passo que índices gregos indicam o estado bidimensional.

Nos apêndices são apresentados os quesitos básicos necessários para a formulação do trabalho, bem como para o entendimento do mesmo.

CAPÍTULO 2

PROPRIEDADES MÉTRICAS DAS CASCAS

Uma casca é definida como sendo um corpo elástico tri-dimensional de volume V , delimitado por duas superfícies externas, uma superior (s^+) e outra inferior (s^-), distantes de uma superfície de referência s_0 , de h^+ e h^- , respectivamente, com a condição de que $h^+ - h^-$, denominada espessura da casca, seja menor do que o menor dos raios de curvatura no ponto considerado. A posição do ponto P na superfície de referência indeformada é denotado por \bar{r}_0 e o ponto P^* na deformada, por \bar{r}_0^* , como ilustra a figura 1.1.

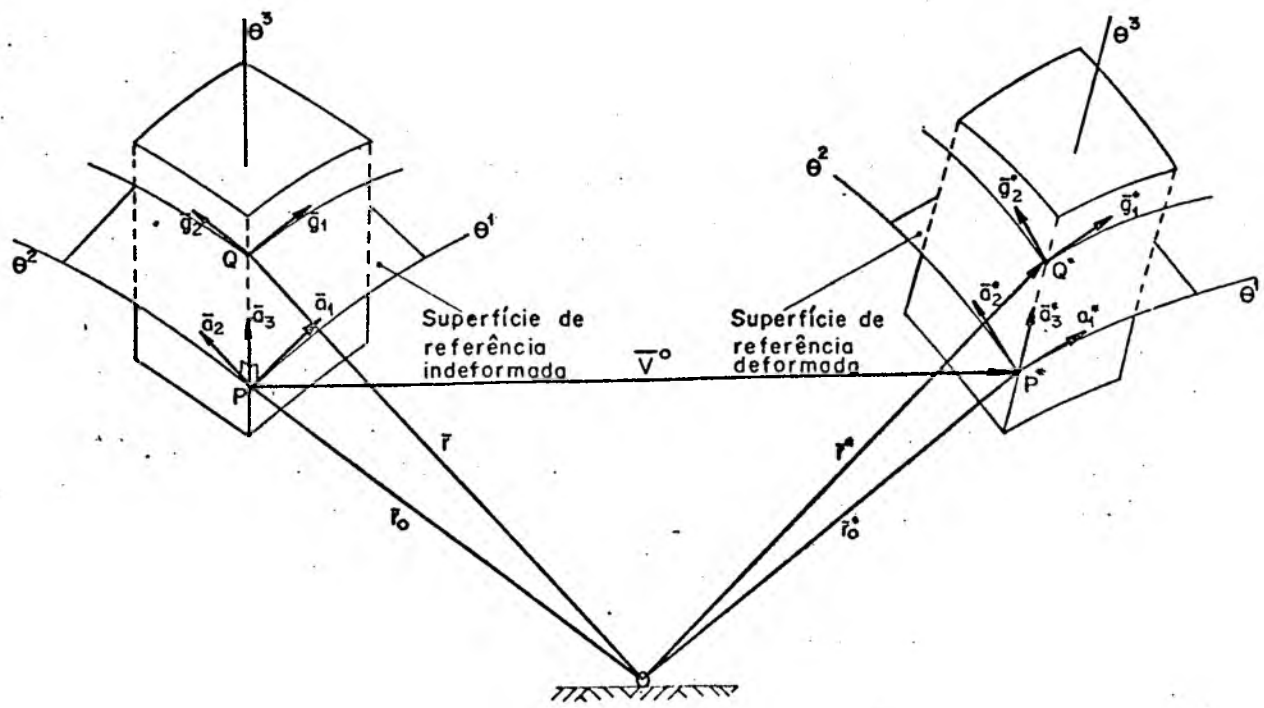


Fig. 1.1

O vetor posição de um ponto Q numa superfície arbitrária é dado por:

$$\bar{r}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{r}_0(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{a}_3(\theta^1, \theta^2) \quad (2.1)$$

onde (θ^i) ($i = 1, 2, 3$) são coordenadas curvilíneas, e \bar{a}_3 é o vetor unitário normal à superfície de referência indeformada e θ^3 a distância ao longo da normal.

Os vetores tangentes às linhas coordenadas são obtidos derivando-se a relação (2.1);

$$\bar{g}_\alpha = \bar{r}_{0,\alpha} + \theta^3 \bar{a}_{3,\alpha} \quad (2.2)$$

$$\bar{g}_3 = \bar{a}_3 \quad (2.3)$$

Substituindo-se a equação (B-2.21) em (2.2) resulta:

$$\bar{g}_\alpha = \bar{a}_\alpha - \theta^3 b_\alpha^\beta \bar{a}_\beta \quad (2.4)$$

As componentes do tensor métrico são obtidas fazendo-se o produto interno de \bar{g}_α por \bar{g}_β , onde substituindo as equações (B-2.14) e (B-2.21) obtém-se

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2\theta^3 b_{\alpha\beta} + (\theta^3)^2 b_{\alpha\beta}^\alpha b_\beta \quad (2.5)$$

$$g_{\alpha 3} = a_{\alpha 3} = 0 \quad (2.6)$$

Observa-se que as componentes do tensor métrico acima

são totalmente determinadas pelas componentes dos dois tensores da superfície (métrica ($a_{\alpha\beta}$) e tensor curvatura ($b_{\alpha\beta}$))

O elemento de volume, em termos das coordenadas curvilíneas da superfície de referência s_0 , e da coordenada θ^3 é

$$dv = \mu d\theta^3 ds_0, \quad ds_0 = \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2 \quad (2.7)$$

$$\mu = \sqrt{g/a} = 1 - 2\theta^3 H + (\theta^3)^2 K \quad (2.8)$$

onde (μ) é dado por (B-3.10).

Da figura 2.1, o vetor posição do ponto Q^* numa superfície arbitrária é dado por:

$$\bar{r}^* = \bar{r}_0^*(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{a}_3^*(\theta^1, \theta^2). \quad (2.9)$$

As componentes dos vetores base e do tensor métrico para o caso deformado são:

$$\bar{g}_\alpha^* = \bar{a}_\alpha^* + \theta^3 {}^* \Gamma_{3\alpha}^i \bar{a}_i^* \quad (2.10)$$

$$g_{\alpha\beta}^* = a_{\alpha\beta}^* + \theta^3 ({}^* \Gamma_{3\alpha\beta} + {}^* \Gamma_{3\beta\alpha}) + (\theta^3)^2 ({}^* \Gamma_{3\alpha}^i {}^* \Gamma_{3\beta i}) \quad (2.11)$$

$$g_{\alpha 3}^* = a_{\alpha 3}^* + \theta^3 {}^* \Gamma_{3\alpha 3}, \quad g_{33}^* = a_{33}^* \quad (2.12)$$

onde

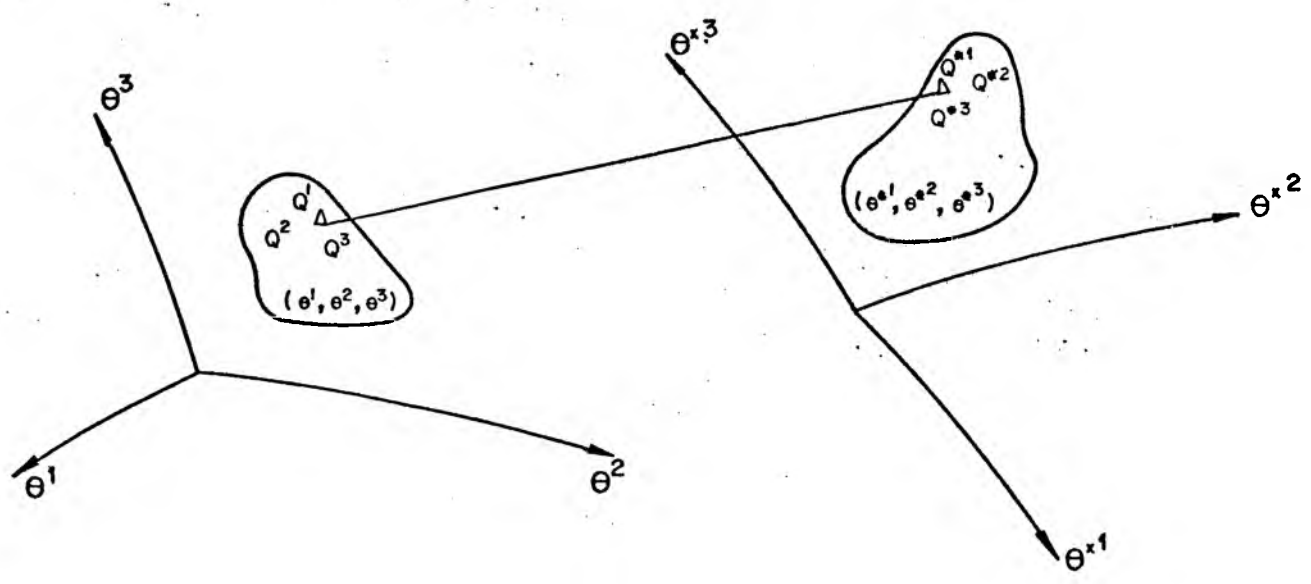
$${}^* \Gamma_{ijk} = \bar{a}_k^* \cdot \bar{a}_{i,j}^* \quad \text{e} \quad {}^* \Gamma_{ij}^k = \bar{a}^{*k} \cdot \bar{a}_{i,j}^* \quad (2.13)$$

Nota-se a diferença entre as equações (2.2) a (2.6) e (2.10) a (2.12), tendo em vista que $a_{33}^* \neq 1$, e que as componentes do tensor métrico não são determinadas somente pelas componentes da métrica e do tensor curvatura da superfície de referência deformada.

CAPÍTULO 3

RELAÇÃO DEFORMAÇÃO - DESLOCAMENTO

Na formulação da mecânica do contínuo, a configuração de um corpo sólido é descrita por um modelo matemático contínuo, cujos pontos geométricos são indentificados com a posição das partículas materiais do corpo. Se o sistema de coordenadas $\theta^1, \theta^2, \theta^3$, localiza um ponto Q do corpo num certo instante, e após um intervalo de tempo o ponto se desloca, para Q^* , este será definido pelo novo sistema de coordenadas $\theta^{*1}, \theta^{*2}, \theta^{*3}$. Os sistemas de coordenadas $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ e $\theta^{*1}, \theta^{*2}, \theta^{*3}$ podem ser curvilíneos e não necessariamente os mesmos (Fig.(3.1)), porém, ambos descrevem um espaço euclidiano.



A variação da configuração do corpo é considerada ser contínua, e a transformação do ponto Q para Q^* é suposta ser unívoca.

A equação de transformação pode ser escrita por

$$\theta^i = \bar{\theta}^i (\theta^{*1}, \theta^{*2}, \theta^{*3}) \quad (3.1)$$

que possui uma única inversa:

$$\theta^{*i} = \bar{\theta}^{*i} (\theta^1, \theta^2, \theta^3), \quad (3.2)$$

para cada ponto do corpo.

As funções $\bar{\theta}^i (\theta^{*1}, \theta^{*2}, \theta^{*3})$ e $\bar{\theta}^{*i} (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ devem ser contínuas e diferenciáveis.

Se Q_1, Q_2, Q_3 são três pontos formando um triângulo na configuração original, e se eles se transformarem em Q_1^*, Q_2^*, Q_3^* na configuração deformada, a variação da área e dos ângulos do triângulo é completamente determinada se for conhecida a variação do comprimento dos lados.

Similarmente, se a variação do comprimento para todo e qualquer par de pontos do corpo é conhecida, a nova configuração do corpo pode ser definida. A descrição da variação da distância entre dois pontos do corpo é a chave da análise da deformação. Considere-se um elemento de linha infinitesimal conectando o ponto $Q (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ a um ponto vizinho $Q_1 (\theta^1+d\theta^1 / \theta^2+d\theta^2, \theta^3+d\theta^3)$. O quadrado do comprimento (ds) de QQ_1 na sua configuração inicial é dado por

$$ds^2 = g_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (3.3)$$

onde g_{ij} é o tensor métrico euclidiano calculado no ponto Q pa-

ra o sistema de coordenadas θ^i .

Quando Q e Q_1 se deslocam para os pontos $Q^* (\theta^{*1}, \theta^{*2}, \theta^{*3})$ e $Q_1^* (\theta^{*1} + d\theta^{*1}, \theta^{*2} + d\theta^{*2}, \theta^{*3} + d\theta^{*3})$, respectivamente, o quadrado do comprimento (ds^*) do novo elemento $Q^*Q_1^*$ é

$$ds^{*2} = g_{ij}^* d\theta^{i*} d\theta^{j*} \quad (3.4)$$

onde g_{ij}^* é o tensor métrico para sistemas θ^{*i} .

As equações (3.3) e (3.4), podem ser escritas por

$$ds^2 = g_{ij} \frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^{*\ell}} \frac{\partial \theta^j}{\partial \theta^{*m}} d\theta^{*\ell} d\theta^{*m} \quad (3.5)$$

$$ds^{*2} = g_{ij}^* \frac{\partial \theta^{*i}}{\partial \theta^\ell} \frac{\partial \theta^{*j}}{\partial \theta^m} d\theta^\ell d\theta^m \quad (3.6)$$

A diferença entre os quadrados dos comprimentos dos elementos pode ser escrita como

$$ds^{*2} - ds^2 = (g_{kp}^* \frac{\partial \theta^{*k}}{\partial \theta^i} \frac{\partial \theta^{*p}}{\partial \theta^j} - g_{ij}) d\theta^i d\theta^j \quad (3.7)$$

ou

$$ds^{*2} - ds^2 = (g_{ij}^* - g_{kp} \frac{\partial \theta^k}{\partial \theta^{*i}} \frac{\partial \theta^p}{\partial \theta^{*j}}) d\theta^{*i} d\theta^{*j} \quad (3.8)$$

Definindo os tensores

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (g_{kp}^* \frac{\partial \theta^{*k}}{\partial \theta^i} \frac{\partial \theta^{*p}}{\partial \theta^j} - g_{ij}) \quad (3.9)$$

$$\epsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} (g_{ij}^* - g_{kp} \frac{\partial \theta^k}{\partial \theta^{*i}} \frac{\partial \theta^p}{\partial \theta^{*j}}) \quad (3.10)$$

e substituindo em (3.7) e (3.8) resulta:

$$ds^{*2} - ds^2 = 2\epsilon_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (3.11)$$

$$ds^{*2} - ds^2 = 2\epsilon_{ij}^* d\theta^{*i} d\theta^{*j} \quad (3.12)$$

O tensor de deformação ϵ_{ij} foi introduzido por Green e St Venant, e é chamado tensor de deformação de Green. O tensor de deformação ϵ_{ij}^* foi introduzido por Cauchy para deformações infinitesimais e por Almansi e Hamel para deformação finitas, sendo chamado tensor de deformação de Almansi. Como para a formulação do trabalho foi escolhido um sistema convectivo, o mais conveniente para estudo de grandes deformações, então $\theta^{*i} = \theta^i$, $\frac{\partial \theta^{*k}}{\partial \theta^i} = \delta_{ki}$, $\frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^{*k}} = \delta_{ki}$, e as equações (3.9) e (3.10) se reduzem a

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} (g_{ij}^* - g_{ij}). \quad (3.13)$$

Portanto, definindo o vetor deslocamento, que determina o vetor posição \bar{r}^* , por

$$\bar{v} = \bar{v}^0 + \theta^3 \bar{v}^1, \quad (3.14)$$

onde

$$\bar{v}^0 = \bar{r}_0^* - \bar{r}_0 \quad (3.15)$$

$$\bar{V}^1 = \bar{a}_3^* - \bar{a}_3 \quad (3.16)$$

e de acordo com as equações (B-2.6), (2.13), (3.15) e (3.16) tem-se

$$\bar{a}_\alpha^* = \bar{a}_\alpha + \bar{V}_{,\alpha}^0 \quad (3.17)$$

$$a_{\alpha\beta}^* = \bar{a}_\alpha \cdot \bar{V}_{,\beta}^0 + \bar{a}_\beta \cdot \bar{V}_{,\alpha}^0 + \bar{V}_{,\alpha}^0 \cdot \bar{V}_{,\beta}^0 + a_{\alpha\beta} \quad (3.18)$$

$$\bar{a}_{\alpha 3} = \bar{a}_3 \cdot \bar{V}_{,\alpha}^0 + \bar{a}_\alpha \cdot \bar{V}^1 + \bar{V}^1 \cdot \bar{V}_{,\alpha}^0 \quad (3.19)$$

$$a_{33}^* = 2\bar{a}_3 \cdot \bar{V}^1 + \bar{V}^1 \cdot \bar{V}^1 + a_{33} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} * \Gamma_{3\alpha\beta} + * \Gamma_{3\beta\alpha} &= (\bar{a}_\alpha \cdot \bar{V}_{,\beta}^1 + \bar{a}_\alpha \cdot \bar{V}_{,\alpha}^1 - \\ &- b_\alpha^\mu \bar{a}_\mu \cdot \bar{V}_{,\beta}^0 - b_\beta^\mu \bar{a}_\mu \cdot \bar{V}_{,\alpha}^0 + \bar{V}_{,\alpha}^0 \cdot \bar{V}_{,\beta}^1 + \\ &+ \bar{V}_{,\beta}^0 \cdot \bar{V}_{,\alpha}^1 - 2b_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} * \Gamma_{3\alpha}^i * \Gamma_{3\beta i} &= -b_\beta^\mu \bar{a}_\mu \cdot \bar{V}_{,\alpha}^1 - b_\alpha^\mu \bar{a}_\mu \cdot \bar{V}_{,\beta}^1 + \\ &+ \bar{V}_{,\beta}^1 \cdot \bar{V}_{,\alpha}^1 + b_\alpha^\mu b_{\mu\beta}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$* \Gamma_{3\alpha 3} = (\bar{a}_3 \cdot \bar{V}_{,\alpha}^1 - b_\alpha^\mu \bar{a}_\mu \cdot \bar{V}^1 + \bar{V}^1 \cdot \bar{V}_{,\alpha}^1) \quad (3.23)$$

Com as expressões (2.11) a (2.12) e (3.18) a (3.23) substituídas em (3.13), obtém-se

$$\epsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}^0 + e_{\alpha\beta}^1 (\theta^3)^{\mu\alpha} + e_{\alpha\beta}^2 (\theta^3)^2 \quad (3.24)$$

$$\epsilon_{\alpha 3} = e_{\alpha 3}^0 + e_{\alpha 3}^1 (\theta^3) \quad (3.25)$$

$$\epsilon_{33} = e_{33}^0 \quad (3.26)$$

onde

$$e_{ij}^0 = \frac{1}{2} (a_{ij}^* - a_{ij}) \quad (3.27)$$

$$e_{\alpha\beta}^1 = \frac{1}{2} (*\Gamma_{3\alpha\beta} + *\Gamma_{3\beta\alpha} + 2b_{\alpha\beta}) \quad (3.28)$$

$$e_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{2} (*\Gamma_{3\alpha}^i *\Gamma_{3\beta i} - b_{\alpha}^{\mu} h_{\mu\beta}) \quad (3.29)$$

$$e_{\alpha 3}^1 = \frac{1}{2} (*\Gamma_{3\alpha 3}) \quad (3.30)$$

CAPÍTULO 4

EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

Em três dimensões o tensor deformação (3.13) tem seis componentes que são expressas pelas três componentes do vetor deslocamento. As equações (3.13), podem ser visualizadas como sendo um sistema simultâneo de seis equações diferenciais parciais, para a determinação das três componentes do vetor deslocamento, que são prescritas pelos tensores - deformação. Evidentemente, se a solução deste sistema existe, as componentes dos tensores deformação poderão ser especificadas arbitrariamente. Porém, para assegurar a integrabilidade deste sistema, é necessário impor certas restrições nas escolhas das equações resultantes de (3.13). Estas condições foram deduzidas e a prova de que são necessárias e suficientes foi feita por "B. Saint Venant em 1860", para equação linear da elasticidade [27]. Estas condições de integrabilidade, ou compatibilidade, podem ser deduzidas para o caso geral. Se, contudo, os tensores-deformação forem selecionados com as componentes independentes do deslocamento do corpo, então as equações de compatibilidade fazem parte do conjunto de equações que devem ser satisfeitas.

Um caminho óbvio para obtenção das equações de compatibilidade, consiste na eliminação das três componentes dos deslocamentos das seis equações de (3.13) por diferenciação parcial e combinações das mesmas. Este método, contudo, é muito tedioso; um outro método alternativo é fazer uso do Teorema de Riemann [7] :

"Para que um tensor simétrico seja um tensor métrico do espaço euclidiano, é necessário e suficiente que o tensor seja não-singular, positivo-definido e que o tensor de Riemann - Christoffel $(R_{k\ell mn})$ formado por este seja identicamente nulo".

Tem-se de (A-4.13), quando este tensor é identicamente nulo, a ordem de diferenciação covariante dos tensores que lhe deram origem, é indiferente. Por definição de (A-4.14), a expressão do símbolo de Riemann - Christoffel é:

$$R_{ijkl} = \Gamma_{j\ell i,k} - \Gamma_{jki,\ell} + g^{mn} [\Gamma_{iln} \Gamma_{jnm} - \Gamma_{ikn} \Gamma_{j\ell m}], \quad (4.1)$$

onde $(\Gamma_{k\ell}^m)$ e $(\Gamma_{n\ell m})$ são símbolos de Christoffel de segunda e primeira espécie, respectivamente, dados por (A-4.3) e (A-4.4).

Ambos tensores de deformação, o de Green e o de Cauchy, são tensores positivo-definidos em um espaço euclidiano tridimensional, e de (4.1) resulta

$$R_{ijkl(TG)} = 0, \quad R_{ijkl(TC)} = 0, \quad (4.2)$$

onde os subscritos (TG) e (TC) representam os símbolos de Riemann-Christoffel formados pelos tensores de Green e Cauchy, respectivamente.

Em um espaço tridimensional apenas seis das oitenta e uma componentes do tensor (R_{ijkl}) são algebricamente independentes e a equação (4.2) constitui a equação de compatibilidade para os tensores de deformação de Green e Cauchy, respectivamente. Como foi adotado um sistema convectivo, os tensores de Green e

Cauchy se confundem e de (4.2) resulta:

$$R_{ijkl} = 0 \quad , \quad (4.3)$$

e

$$R_{ijkl}^* = 0 \quad , \quad (4.4)$$

cujas expressões são:

$$R_{ijkl} = \bar{\Gamma}_{j\ell i, k} - \bar{\Gamma}_{jki, \ell} + \bar{\Gamma}_{jkm} \bar{\Gamma}_{i\ell}^m - \bar{\Gamma}_{j\ell m} \bar{\Gamma}_{ik}^m \quad , \quad (4.5)$$

$$R_{ijkl}^* = {}^* \bar{\Gamma}_{j\ell i, k} - {}^* \bar{\Gamma}_{jki, \ell} + {}^* \bar{\Gamma}_{jkm} {}^* \bar{\Gamma}_{i\ell}^m - {}^* \bar{\Gamma}_{j\ell m} {}^* \bar{\Gamma}_{ik}^m \quad , \quad (4.6)$$

$$\bar{\Gamma}_{ijk} = \frac{1}{2} (g_{ik, j} + g_{jk, i} - g_{ij, k}) \bar{\Gamma}_{ij}^k = g^{k\ell} \bar{\Gamma}_{ij\ell} \quad (4.7)$$

O tensor métrico do sistema deformado é expresso em termos do tensor de deformação e do tensor métrico do estado indeformado por

$$g^{*ij} = -2g^{i\ell} g^{jk} \epsilon_{\ell k} + g^{ij} \quad (4.8)$$

e

$$g_{ij}^* = +2\epsilon_{ij} + g_{ij} \quad (4.9)$$

Utilizando-se as equações (4.7) e (4.9) para calcular símbolos de Christoffel no estado deformado, tem-se:

$${}^* \bar{\Gamma}_{j\ell i} = \bar{\Gamma}_{j\ell i} + \epsilon_{ji, \ell} + \epsilon_{\ell i, j} - \epsilon_{j\ell, i} \quad (4.10)$$

$${}^* \bar{\Gamma}_{jki} = \bar{\Gamma}_{jki} + \epsilon_{ji, k} + \epsilon_{ki, j} - \epsilon_{jk, i} \quad (4.11)$$

Os símbolos de Christoffel de segunda espécie são calculados a partir de (4.7) e (4.8) resultando:

$$\begin{aligned}
 * \bar{\Gamma}_{ij}^k &= \bar{\Gamma}_{ij}^k - 2g^{ks} g^{lr} (\bar{\Gamma}_{ijl} + \epsilon_{il,j} + \epsilon_{jl,i} - \epsilon_{ij,l}) (\epsilon_{sr}) + \\
 &+ g^{kl} (\epsilon_{il,j} + \epsilon_{jl,i} - \epsilon_{ij,l}) . \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

Multiplicando-se (4.11) por (4.12) e fazendo a troca de índices, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 * \bar{\Gamma}_{jkm}^* \bar{\Gamma}_{il}^m &= \bar{\Gamma}_{il}^m \bar{\Gamma}_{jkm} + \bar{\Gamma}_{il}^m (\epsilon_{jm,k} + \epsilon_{km,j} - \epsilon_{jk,m}) \\
 &- 2g^{ms} g^{pr} \epsilon_{sr} (\bar{\Gamma}_{ilp} + \epsilon_{ip,l} + \epsilon_{lp,i} - \epsilon_{il,p}) (\bar{\Gamma}_{jkm} + \\
 &+ \bar{\Gamma}_{jm,k} + \epsilon_{km,j} - \epsilon_{jk,m}) + g^{mp} (\epsilon_{ip,l} + \epsilon_{lp,i} - \\
 &- \epsilon_{il,p}) (\bar{\Gamma}_{jkm} + \epsilon_{jm,k} + \epsilon_{km,j} - \epsilon_{jk,m}) . \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Substituindo a equação (4.13) e as derivadas de (4.10) e (4.11) com relação a k e l , respectivamente, na equação (4.6) e fazendo uso das relações (4.3) e (4.4), obtém-se

$$\begin{aligned}
 &(\epsilon_{jk,il} + \epsilon_{li,jk} - \epsilon_{jl,ik} - \epsilon_{ki,jl}) + \bar{\Gamma}_{il}^m (\epsilon_{jm,k} + \\
 &+ \epsilon_{km,j} - \epsilon_{jk,m}) - \bar{\Gamma}_{ik}^m (\epsilon_{jm,l} + \epsilon_{lm,j} - \epsilon_{jl,m}) + \\
 &+ 2g^{ms} g^{pr} \epsilon_{sr} \cdot ((\bar{\Gamma}_{ikp}) (\bar{\Gamma}_{jlm} + \epsilon_{jm,l} + \epsilon_{lm,j} - \epsilon_{jl,m}) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\bar{\Gamma}_{j\ell m}) (\epsilon_{ip,k} + \epsilon_{kp,i} - \epsilon_{ik,p}) - 2g^{ms}g^{pr}\epsilon_{sr} \cdot \\
& \cdot ((\bar{\Gamma}_{i\ell p}) (\bar{\Gamma}_{jkm} + \epsilon_{jm,k} + \epsilon_{km,j} - \epsilon_{jk,m}) - (\bar{\Gamma}_{jkm}) \\
& (\epsilon_{ip,\ell} + \epsilon_{\ell p,i} - \epsilon_{i\ell,p})) + g^{mp}(\epsilon_{ip,\ell} + \epsilon_{\ell p,i} - \\
& \epsilon_{i\ell,p}) (\bar{\Gamma}_{jkm} - \epsilon_{jm,k} + \epsilon_{km,j} - \epsilon_{jk,m}) - g^{mp}(\epsilon_{ip,k} + \\
& + \epsilon_{kp,i} - \epsilon_{ik,p}) (\bar{\Gamma}_{j\ell m} + \epsilon_{jm,\ell} + \epsilon_{\ell m,j} - \epsilon_{j\ell,m}) = 0
\end{aligned}
\tag{4.14}$$

A equação (4.14), juntamente com a identidade de Bianchi [7]

$$R_{k\ell mn;p}^* + R_{k\ell mp;n}^* + R_{k\ell pm;n}^* = 0 \tag{4.15}$$

constituem a equação de compatibilidade para os tensores da superfície, onde (;) denota diferenciação covariante.

CAPÍTULO 5

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Para se obter as equações de equilíbrio utiliza-se o princípio variacional do trabalho virtual por dois motivos:

- a) Quando se utiliza o princípio variacional para obter as equações de equilíbrio, automaticamente se obtêm as condições de contorno associadas
- b) As equações obtidas são mais claras e compactas.

Princípio dos Trabalhos Virtuais

Um corpo em equilíbrio estático sob ação de forças de corpo e de superfície está representado na Fig. 5.1.

A superfície de contorno S é constituída de duas partes S_σ e S_u , com as seguintes condições de contorno:

sobre S_σ : São prescritas as forças T^i

sobre S_u : São prescritos os deslocamentos u_i

Para se obter a equação de equilíbrio para um elemento de um corpo deformado, pelo princípio variacional, considera-se uma classe de deslocamentos arbitrários $u_i + \delta u_i$ consistente

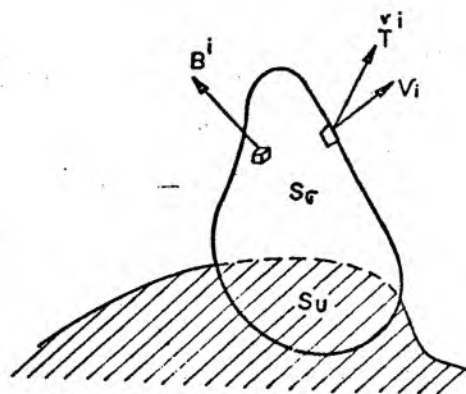


Fig. 5.1

com as vinculações impostas ao corpo. Assim, δu_i deverá anular-se sobre S_u , porém é arbitrário sobre S_σ . Outra restrição sobre δu_i é de ser tri-diferenciável e de ordem de magnitude tal que, o material permaneça elástico. Os deslocamentos arbitrários δu_i são chamados deslocamentos virtuais. Considerando o equilíbrio estático, o trabalho virtual para um corpo deformado, sujeito a forças B^i por unidade de volume e forças T^i por unidade de área, é:

$$\int_V B^i \delta u_i dv + \int_S T^i \delta u_i ds ; \quad (5.1)$$

substituindo $T^i = \sigma^{ij} v_j$ e usando o teorema de Gauss, tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_V B^i \delta u_i dv + \int_S T^i \delta u_i ds \\ &= \int_V B^i \delta u_i dv + \int_S \sigma^{ij} v_j \delta u_i ds \\ &= \int_V B^i \delta u_i dv + \int_V (\sigma^{ij} \delta u_i)_{,j} dv \\ &= \int_V (B^i + \sigma^{ij}_{,j}) \delta u_i dv + \int_V \sigma^{ij} (\delta u_i)_{,j} dv. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Considerando-se a variação da deformação cinematicamente compatível $(\delta \epsilon_{ij})$, tem-se

$$(\delta u_i)_{,j} = \delta(u_{i,j}) = \delta(\epsilon_{ij} + w_{ij}) = \delta\epsilon_{ij} + \delta w_{ij} . \quad (5.3)$$

Como o tensor rotação (w_{ij}) é anti-simétrico e o tensor tensão simétrico, $\sigma^{ij} \delta w_{ij} = 0$, e conclui-se que

$$\sigma^{ij} (\delta u_i)_{,j} = \sigma^{ij} \delta\epsilon_{ij} . \quad (5.4)$$

De acordo com (5.4) a equação (5.2) torna-se:

$$\begin{aligned} & \int_V B^i \delta u_i \, dv + \int_S T^i \delta u_i \, ds \\ &= \int_V (\sigma^{ij}_{,j} + B^i) \delta u_i \, dv + \int_V \sigma^{ij} \delta\epsilon_{ij} \, dv . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Impondo-se a condição de equilíbrio estático, isto significa que:

- a) As cargas externas B^i e T^i são tais, que existe o equilíbrio total para o corpo do ponto de vista da mecânica dos corpos rígidos. Diz-se que B^i e T^i são estaticamente compatíveis e, conseqüentemente,
- b) em qualquer ponto do corpo $\sigma^{ij}_{,j} + B^i = 0$ e o primeiro termo do lado direito da equação (5.5) se anula.

A equação resultante é a seguinte:

$$\int_V B^i \delta u_i \, dv + \int_S T^i \delta u_i \, ds = \int_V \sigma^{ij} \delta\epsilon_{ij} \, dv . \quad (5.6)$$

Este é o princípio do trabalho virtual para um corpo deformável. Contudo, outra maneira de visualizar esta equação é considerar o lado esquerdo como trabalho virtual externo e o lado direito, trabalho virtual interno. A relação acima é uma equação na forma integral para σ^{ij} desconhecida, assumindo T^i e B^i conhecidos e δu_i e $\delta \epsilon_{ij}$ escolhidos, mas compatíveis com as condições de contorno forçadas. Outro fato também significativo é que a relação matemática (5.6) é independente de qualquer lei constitutiva utilizada para todos materiais sem limitações de pequenas deformações ou rotações. Portanto, o trabalho virtual das forças internas para um elemento de casca é

$$TVI = \int_{v^*} \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} dv^* \quad (5.7)$$

onde σ^{ij} é o tensor tensão simétrico e ϵ_{ij} é o tensor deformação e v^* denota o volume do corpo deformado. A equação (5.7) pode ser reescrita como

$$TVI = \int_{v^*} (\sigma^{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta} + 2\sigma^{\alpha 3} \delta \epsilon_{\alpha 3} + \sigma^{33} \delta \epsilon_{33}) dv^* \quad (5.8)$$

Introduzindo as equações (3.24) a (3.26) em (5.2) e levando-se em conta as equações (3.15) e (3.16), obtém-se

$$TVI = \int_{s_0^*} \{ N^{\alpha\beta} (\bar{a}_{\alpha} + \bar{V}_{,\alpha}^0) \cdot \delta \bar{V}_{,\beta}^0 + M^{\alpha\beta} (\bar{a}_{\alpha} + \bar{V}_{,\alpha}^0) \cdot \delta \bar{a}_{3,\beta}^* + \bar{a}_{3,\beta}^* \cdot \delta \bar{V}_{,\alpha}^0 \} + B^{\alpha\beta} \bar{a}_{3,\alpha}^* \cdot \delta \bar{a}_{3,\beta}^* + S^{\alpha} ((\bar{a}_{\alpha} +$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{V}^0_{,\alpha} \cdot \delta \bar{a}_3^* + \bar{a}_3^* \cdot \delta \bar{V}^0_{,\alpha}) + Q^\alpha (\bar{a}_3^* \cdot \delta \bar{a}_{3,\alpha}^* + \\
& + \bar{a}_{3,\alpha}^* \cdot \delta \bar{a}_3^* + \bar{p}^3 \cdot \delta \bar{a}_3^*) ds_0^* \quad (5.9)
\end{aligned}$$

onde s_0^* é a área da superfície de referência deformada, sendo usada a seguinte notação

$$N^{\alpha\beta} = \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \sigma^{\alpha\beta} d\theta^3 ,$$

$$M^{\alpha\beta} = \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \sigma^{\alpha\beta} \theta^3 d\theta^3 ,$$

$$B^{\alpha\beta} = \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \sigma^{\alpha\beta} (\theta^3)^2 d\theta^3 ,$$

$$S^\alpha = \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \sigma^{\alpha 3} d\theta^3 ,$$

$$Q^\alpha = \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \sigma^{\alpha 3} \theta^3 d\theta^3 ,$$

$$\bar{P}_3 = \bar{a}_3^* \int_{-h^-}^{h^+} \mu^* \sigma^{33} d\theta^3 . \quad (5.10)$$

O trabalho virtual das cargas atuantes nas superfícies externas, \bar{T}_e , e o das forças associadas às condições de contorno, \bar{T}_c , (Fig. 5.2), são respectivamente:

$$TVE_e = \int_{s^*} \bar{T}_e (\delta \bar{V}^0 + \theta^3 \delta \bar{a}_3^*)_e ds^* , \quad (5.11)$$

$$TVE_c = \int_{s_b^*} \bar{T}_c (\delta \bar{V}^0 + \theta^3 \delta \bar{a}_3^*)_c ds^* , \quad (5.12)$$

onde os subscritos (e) e (c) se referem à superfície exterior e ao contorno, respectivamente.

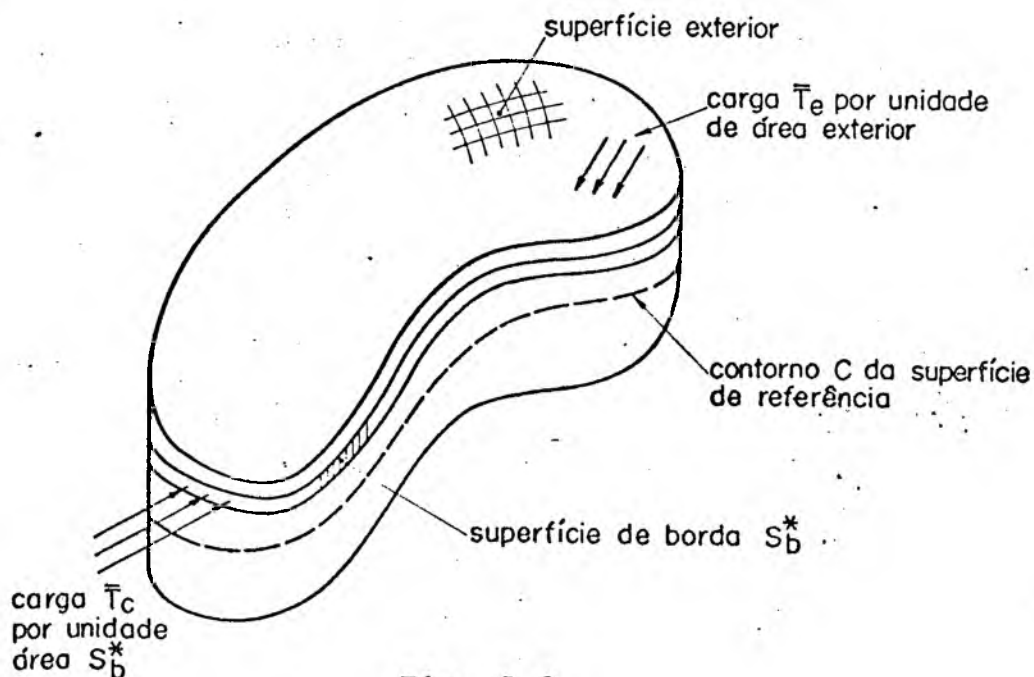


Fig. 5.2

A expressão (5.11) pode ser transformada para superfície de referência:

$$TVE_e = \int_{s_0^*} \sqrt{\frac{g_e^*}{a^*}} \bar{T}_e (\delta \bar{V}^0 + \theta^3 \delta \bar{a}_3^*) d\bar{s}_0^* \quad (5.13)$$

Denotando por \bar{n} o vetor normal unitário a s_b^* e por C o contorno da superfície de referência, a equação (5.12) é reescrita:

$$TVE_c = \int_{s_b^*} \int_{\theta^3} \bar{T}_c (\delta \bar{V}^0 + \theta^3 \delta \bar{a}_3^*) (\bar{n} \cdot (\bar{a}_\alpha^* \times \bar{a}_3^*)) \frac{d\theta^\alpha d\theta^3 dC}{dC} \quad (5.14)$$

Pelo princípio dos trabalhos virtuais tem-se

$$TVI = TVE = TVE_e + TVE_c \quad (5.15)$$

em que não foi imposta nenhuma condição de vínculo. Todas as variações estaticamente admissíveis que aparecem nesta expressão são independentes. Das equações (5.9) a (5.15), obtêm-se as equações de equilíbrio

$$[N^{\beta\alpha} (\bar{a}_\beta + \bar{V}^0_{,\beta}) + M^{\alpha\beta} \bar{a}_{3,\beta}^* + S^\alpha \bar{a}_3^*]_{;\alpha} + \sqrt{g_e^*/a^*} \bar{T}_e = 0 \quad (5.16)$$

$$[M^{\alpha\beta} (\bar{a}_\alpha + \bar{V}^0_{,\alpha}) + B^{\alpha\beta} \bar{a}_{3,\alpha}^* + Q^\beta \bar{a}_3^*]_{;\beta} - S^\alpha (\bar{a}_\alpha + \bar{V}^0_{,\alpha}) + Q^\alpha \bar{a}_{3,\alpha}^* - \bar{p}^3 + \sqrt{g_e^*/a^*} \bar{T}_e \theta^3 = 0 \quad (5.17)$$

onde (;) denota diferenciação covariante no estado de deformação e ambas equações possuem somente três componentes não nulas.

Condições de contorno

As condições de contorno associadas com as equações (5.16) e (5.17) são, respectivamente,

$$\begin{aligned} & (N^{\beta\alpha} (\bar{a}_{\beta} + \bar{V}^0_{,\beta}) + M^{\alpha\beta} \bar{a}_{3,\beta}^* + S^{\alpha} \bar{a}_3^*) v_{\alpha} = \\ & = \int_{\theta^3} \bar{T}_e [\bar{n} \cdot (\bar{a}_{\alpha}^* \times \bar{a}_3^*)] \frac{d\theta^{\alpha}}{dC} d\theta^3 \end{aligned}$$

ou \bar{V}^0 prescrito

(5.18)

$$\begin{aligned} & (M^{\alpha\beta} (\bar{a}_{\alpha} + \bar{V}^0_{,\alpha}) + B^{\alpha\beta} \bar{a}_{3,\alpha}^* + Q^{\beta} \bar{a}_3^*) v_{\beta} = \\ & = \int_{\theta^3} \bar{T}_c \theta^3 [\bar{n} \cdot (\bar{a}_{\alpha}^* \times \bar{a}_3^*)] \frac{d\theta^{\alpha}}{dC} d\theta^3 \end{aligned}$$

ou \bar{a}_3^* prescrito,

(5.19)

onde v_{α} são as componentes do vetor unitário normal à superfície de borda na superfície de referência s_0^* .

CAPÍTULO 6

EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Quando diferentes corpos de mesma geometria são submetidos ao mesmo esforço externo, as respostas observadas quanto às tensões e deformações devido a aplicação do esforço, são geralmente diferentes. A diferença nas respostas dos corpos é devida a constituição interna dos materiais dos corpos.

Do ponto de vista do contínuo, a teoria das equações constitutivas, possibilita, devido a certos princípios básicos, (por exemplo, Princípio da Entropia, Conservação da Massa, Conservação da Energia, etc), válidos para todos materiais independentemente de suas constituições, desenvolver equações que refletem os efeitos das estruturas de diferentes materiais quando submetidos a um esforço externo.

A teoria é feita introduzindo-se modelos apropriados para a classe particular do fenômeno pesquisado. Todos estes modelos deverão satisfazer certas regras e requirements de invariância existentes. Depois destes requirements introduzidos, as equações permanecem em função de coeficientes constitutivos que são determinados experimentalmente ou pela teoria molecular.

Neste capítulo, assumindo uma função densidade de energia para um corpo elástico isotrópico, são deduzidas as equações constitutivas não linear, em função dos invariantes de deformação e coeficientes constitutivos.

Equações constitutivas de um sólido elástico isotrópico

De acordo com a teoria do estado natural, um corpo perfeitamente elástico e isotrópico possui uma função densidade de energia da seguinte forma [7.] [23]

$$\phi = \phi(\theta^i, I_1, I_2, I_3) \quad , \quad (6.1)$$

onde: θ^i ($i = 1, 2, 3$) são coordenadas referidas a um certo sistema de referência e I_i ($i = 1, 2, 3$) são os invariantes de deformação definidos por:

$$I_1 = K_1, \quad I_2 = \frac{1}{2}(K_1^2 - K_2), \quad I_3 = \frac{1}{6}(K_1^3 - 3K_1K_2 + 2K_3), \quad (6.2)$$

onde

$$K_1 = g^{ij} \epsilon_{ij}, \quad K_2 = g^{ip} g^{jq} \epsilon_{ij} \epsilon_{pq}, \quad (6.3)$$

$$K_3 = g^{ip} g^{jq} g^{kr} \epsilon_{ij} \epsilon_{pk} \epsilon_{qr}.$$

A relação tensão-deformação entre o tensor σ^{ij} e o tensor deformação ϵ_{ij} é obtida da seguinte forma:

$$\sigma^{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}} \right), \quad \text{onde } \rho_0 = \rho \sqrt{g^*}, \quad \rho = \text{densidade} \quad (6.4)$$

A equação (6.4) foi introduzida por Boussinesq (1870, 1872). Derivando parcialmente a relação (6.1)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial \phi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial \phi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial \phi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (6.5)$$

Usando as expressões (6.2) para os invariantes, tem-se

$$\frac{\partial I_1}{\partial \epsilon_{ij}} = g^{ij} \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \epsilon_{ij}} = I_1 g^{ij} - g^{ip} g^{jq} \epsilon_{pq} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon_{ij}} = & I_2 g^{ij} - I_1 (g^{ip} g^{jq} \epsilon_{pq}) + \\ & + (g^{ip} g^{jq} g^{kr} \epsilon_{pk} \epsilon_{qr}) \end{aligned} \quad (6.8)$$

consequentemente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}} = & C_1 g^{ij} + C_2 (I_1 g^{ij} - g^{ip} g^{jq} \epsilon_{pq}) + \\ & + C_3 [(I_2 g^{ij} - I_1 (g^{ip} g^{jq} \epsilon_{pq}) + \\ & + (g^{ip} g^{jq} g^{kr} \epsilon_{pk} \epsilon_{qr}))] \end{aligned} \quad (6.9)$$

onde

$$C_1 = \frac{\partial \phi}{\partial I_1}, \quad C_2 = \frac{\partial \phi}{\partial I_2}, \quad C_3 = \frac{\partial \phi}{\partial I_3} \quad (6.10)$$

A expressão (6.4) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\rho}{\rho_0} & \left[C_1 g^{ij} + C_2 (I_1 g^{ij} - \right. \\ & \left. - g^{ip} g^{jq} \epsilon_{pq}) + C_3 (I_2 g^{ij} - I_1 (g^{ip} g^{jq} \epsilon_{pq}) + \right. \\ & \left. + (g^{ip} g^{jq} g^{kr} \epsilon_{pk} \epsilon_{qr})) \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

Considerando Φ como uma função analítica em termos das deformações, ela pode ser expressa como uma série de potências em termos dos três invariantes I_1, I_2, I_3 . Como foi suposta a existência de uma função densidade de energia de deformação Φ , analítica, tem-se que

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial I_i \partial I_j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I_j \partial I_i} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial C_i}{\partial I_j} = \frac{\partial C_j}{\partial I_i} \quad (6.12)$$

Como os coeficientes C_i podem ser expressos em série de potências dos invariantes de deformação, então C_3 pode ser escrito na forma [29]:

$$C_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial I_3} = C_{T W Y} I_1^T I_2^W I_3^Y, \quad (6.13)$$

onde $T, W, Y = 0, 1, 2, \dots$, e a soma dos índices fica subentendida como sendo aquela que não aparece repetida.

Com C_3 dado por (6.13) e usando (6.12), tem-se

$$\frac{\partial C_3}{\partial I_2} = \frac{\partial C_2}{\partial I_3} = W C_{T W Y} I_1^T I_2^{W-1} I_3^Y \quad (6.14)$$

e integrando resulta

$$C_2 = \frac{W}{Y+1} C_{TWY} I_1^T I_2^{W-1} I_3^{Y+1} + D_{TW} I_1^T I_2^W \quad (6.15)$$

onde o segundo termo do lado direito da equação representa uma função arbitrária de integração. Similarmente, com o resultado (6.15) e usando a relação (6.12) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_2}{\partial I_1} = \frac{\partial C_1}{\partial I_2} = \frac{TW}{Y+1} C_{TWY} I_1^{T-1} I_2^{W-1} I_3^{Y+1} + \\ + T D_{TW} I_1^{T-1} I_2^W \end{aligned} \quad (6.16)$$

e integrando obtém-se

$$\begin{aligned} C_1 = \frac{T}{Y+1} C_{TWY} I_1^{T-1} I_2^W I_3^{Y+1} + \frac{T}{W+1} D_{TW} I_1^{T-1} I_2^{W+1} + \\ + E_T I_1^T \end{aligned} \quad (6.17)$$

onde o terceiro termo do lado direito representa uma função arbitrária de integração.

Com base em (6.13), (6.15) e (6.17) o tensor tensão (6.4) é novamente reescrito como:

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{T}{Y+1} C_{TWY} I_1^{T-1} I_2^W I_3^{Y+1} + \frac{T}{W+1} D_{TW} I_1^{T-1} I_2^{W+1} + \right. \\ \left. + E_T I_1^T (g^{ij} + \left(\frac{W}{Y+1} C_{TWY} I_1^T I_2^{W-1} I_3^{Y+1} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D_{TW} I_1^T I_2^W (I_1 g^{ij} - g^{ip} g^{jq} \epsilon_{pq}) + \\
& + C_{TWY} I_1^T I_2^W I_3^Y (I_2 g^{ij} - I_1 (g^{ip} g^{jq} \epsilon_{pq}) + \\
& + g^{ip} g^{jq} g^{kr} \epsilon_{pk} \epsilon_{qr})
\end{aligned}$$

As equações constitutivas das tensões resultantes, é obtida substituindo a equação (6.18) em (5.10).

CAPÍTULO 7

PARTICULARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Este capítulo compara as equações obtidas do texto com as equações da literatura, adotando as suas respectivas hipóteses. Dentro do contexto do capítulo são feitas as hipóteses e as descrições das equações obtidas pelos autores, de uma maneira comparativa.

7.1. - Propriedades Métricas e Relação Deformação-Deslocamento

JONES [24]

Em seu trabalho [24] JONES utilizou a hipótese simplificada de Kirchhoff-Love, isto é:

$$\bar{a}_3^* \cdot \bar{a}_3^* = 1 \quad , \quad \bar{a}_3^* \cdot \bar{a}_\alpha^* = 0$$

$$\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_3 = 1 \quad , \quad \bar{a}_3 \cdot \bar{a}_\alpha = 0$$

e conseqüentemente

$$\bar{g}_{3\alpha}^* = 0 \quad , \quad \bar{g}_{3\alpha} = 0$$

o que implica na nulidade das equações (3.25) e (3.26) e o tensor deformação é dado apenas por (3.24), isto é

$$\epsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}^0 + e_{\alpha\beta}^1(\theta^3) + e_{\alpha\beta}^2(\theta^3)^2$$

onde

$$e_{\alpha\beta}^0 = (a_{\alpha\beta}^* - a_{\alpha\beta})$$

$$e_{\alpha\beta}^1 = \frac{1}{2} (*\Gamma_{3\alpha\beta} + *\Gamma_{3\beta\alpha} + 2b_{\alpha\beta})$$

$$e_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{2} (*\Gamma_{3\alpha}^i *\Gamma_{3\beta i} - b_{\alpha}^{\mu} b_{\mu\beta}).$$

Como \bar{a}_3^* é unitário, implica que

$$*\Gamma_{3\alpha\beta} = \bar{a}_{3,\alpha}^* \cdot \bar{a}_{\beta}^* = -b_{\alpha\beta}^* , \quad *\Gamma_{3\beta 3} = 0$$

$$*\Gamma_{\beta 3}^{\alpha} = -b_{\beta}^{*\alpha} , \quad *\Gamma_{3\alpha}^3 = 0 ,$$

que levadas, em conta nas equações anteriores, resultam

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta}^* - a_{\alpha\beta}) - \theta^3 (b_{\alpha\beta}^* - b_{\alpha\beta}) \\ &+ \frac{1}{2} (\theta^3)^2 (b_{\alpha\eta}^* b_{\beta}^{*\eta} - b_{\alpha}^{\mu} b_{\mu\beta}) . \end{aligned} \quad (7.1)$$

A equação acima é idêntica à equação (13) utilizada pela referência .

ALVES | 1 |

Utilizou a hipótese de Kirchhoff-Love, o que reduz as equações do texto à equação (7.1), considerando apenas termos lineares. Como a referência [1] não usa notação tensorial é necessário o desenvolvimento da equação (7.1) para efeito de comparação.

Das equações (3.14) e (3.15), tem-se

$$\bar{r}^* = \bar{r} + \bar{v} \quad (7.2)$$

$$\bar{r}_0^* = \bar{r}_0 + \bar{v}^0 \quad (7.3)$$

$$\bar{v} = \bar{v}^0 + \theta^3 \bar{v}^1 \quad (7.4)$$

e do apêndice B, o vetor deslocamento (7.4) é escrito como

$$\bar{v} = v_i \bar{g}^i \quad (7.5)$$

Derivando-se o vetor posição (7.2), resulta

$$\bar{g}_i^* = \bar{r}_{,i}^* + v_{j;i} \bar{g}^j$$

que levado em conta em (3.13), fornece

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i;j} + v_{j;i}) \quad (7.6)$$

Considerando a hipótese de Kirchhoff-Love, as componentes de (7.6), $\epsilon_{\alpha 3}$ e $\epsilon_{3\alpha}$, são nulas, e das equações (7.6) e (A-4.8), obtém-se

$$\epsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} (v_{\alpha,3} - v_{\beta} \Gamma_{\alpha 3}^{\beta} + v_{3,\alpha} - b_{\beta} \Gamma_{3\alpha}^{\beta}) \quad (7.7)$$

e como a conservação da normal é assegurada, resulta

$$v_{\alpha,3} + v_{3,\alpha} = 2 v_{\beta} \Gamma_{3\alpha}^{\beta} \quad (7.8)$$

Uma vez que a casca é delgada e não há tensão σ^{33} na direção do vetor base \bar{g}_3 , o comprimento da normal não varia durante a deformação, então

$$v_3 = v_3^0 = w.$$

Quando a equação (7.7) é aplicada para a superfície de referência, pode-se introduzir o tensor curvatura, isto é

$$v_{\alpha,3}^0 + w_{,\alpha} = -2 v_{\beta} b_{\alpha}^{\beta} \quad (7.9)$$

Da equação (7.3), tem-se

$$\bar{r}_{0,3}^* = \bar{r}_{0,3} + v_{,3}^0$$

e fazendo

$$v^0 = u_{\alpha} \bar{a}^{\alpha} + u_3 \bar{a}^3$$

e usando as equações (A-4.8) e (B-2.19), resulta

$$\bar{a}_3^* = \bar{a}_3 + (u_{\alpha,3} + u_{\gamma} b_{\alpha}^{\gamma}) \bar{a}^{\alpha} + u_{3,3} \bar{a}_3$$

Uma vez que $u_3 = w$ e não depende de θ^3 , tem-se

$$\bar{a}_3^* - \bar{a}_3 = (u_{\alpha,3} + u_{\gamma} b_{\alpha}^{\gamma}) \bar{a}^{\alpha}$$

e devido à equação (7.9), a equação acima pode ser reescrita em forma alternativa como,

$$\bar{a}_3^* - \bar{a}_3 = -(w_{,\alpha} + u_{\gamma} b_{\alpha}^{\gamma}) \bar{a}^{\alpha} \quad (7.10)$$

Ambos os vetores \bar{a}_3^* e \bar{a}_3 são unitários e a diferença entre eles é o ângulo de rotação da normal.

Os vetores no plano tangente à superfície são dadas por (3.17) e quando utilizadas as relações (A-4.8), (B-2.17) e (B-2.19), resultam em

$$\begin{aligned} \bar{a}_\alpha^* &= \bar{a}_\alpha + (u_{\eta;\alpha} - w b_{\eta\alpha}) \bar{a}^\eta + \\ &+ (w_{,\alpha} + u_\eta b_\alpha^\eta) \bar{a}^3 \end{aligned} \quad (7.11)$$

Fazendo-se o produto interno de \bar{a}_α^* por \bar{a}_β^* e substituindo no primeiro termo da equação (7.1), obtém-se

$$\begin{aligned} 2 e_{\alpha\beta}^0 &= u_{\beta;\alpha} + u_{\alpha;\beta} - 2 w b_{\alpha\beta} + \\ &+ w_{,\alpha} \cdot w_{,\beta} \end{aligned} \quad (7.12)$$

onde

$$u_{\beta;\alpha} = u_{\beta,\alpha} - u_\lambda \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \quad (7.13)$$

Diferenciando a equação (7.10), tem-se

$$a_{3,\alpha}^* = \bar{a}_{3,\alpha} - (w_{;\lambda} + u_\eta b_\lambda^\eta)_{;\alpha}$$

$$\bar{a}^\lambda - (w_{;\lambda} + u_\eta b_\lambda^\eta) b_\alpha^\lambda \bar{a}^3$$

e da equação (B-2.14)

$$b_{\alpha\beta}^* = - \bar{a}_{3,\alpha} \cdot \bar{a}_\beta$$

$$= b_{\alpha\beta} + (u_{\gamma;\beta} - w b_{\gamma\beta}) b_{\alpha}^{\gamma} + \\ + w_{;\beta\alpha} + (u_{\lambda} b_{\beta}^{\lambda})_{;\alpha}$$

Uma vez substituídos $b_{\alpha\beta}^*$ em (7.1), resulta

$$e_{\alpha\beta}^1 = - (u_{\gamma;\beta} - w b_{\gamma\beta}) b_{\alpha}^{\gamma} + \\ + w_{;\beta\alpha} + (u_{\lambda} b_{\beta}^{\lambda})_{;\alpha} \quad (7.14)$$

onde

$$w_{;\alpha\beta} = w_{,\alpha\beta} - w_{,\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \quad (7.15)$$

Como a referência $|1|$ é dada em notação física, é necessário transformar as equações para componentes físicas. Das equações (A-3.6), (A-3.7), (A-3.13) e (A-3.16), tem-se

$$u^{(i)} = u^i \sqrt{g_{\underline{i}\underline{i}}}$$

$$g^{\underline{i}\underline{i}} = (g_{\underline{i}\underline{i}})^{-1} \quad (\text{sistema ortogonal})$$

$$\varepsilon^{(ij)} = \varepsilon_{ij} / \sqrt{g_{\underline{i}\underline{i}} g_{\underline{j}\underline{j}}}$$

que levadas em conta em (7.12) e (7.14), resultam

$$e_{(11)}^0 = \frac{u_{,1}^{(1)}}{\sqrt{a_{11}}} + \frac{u^{(2)} \Gamma_{21}^1}{\sqrt{a_{22}}} - \frac{w b_{11}}{a_{11}}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(w,1)^2}{2 a_{11}} , \\
e_{(11)}^1 &= \frac{-2 b_{11} \Gamma_{11}^1 u^{(1)}}{\sqrt{a_{11}}} + \frac{2 b_{11} u^{(1)}}{\sqrt{a_{11}}} \\
& + \frac{u^{(1)} b_{11;1}}{\sqrt{a_{11}}} + \frac{u^{(2)} b_{12;1}}{\sqrt{a_{22}}} + \\
& + \frac{2 b_{12} u_{,1}^{(2)}}{\sqrt{a_{22}}} + \frac{w_{,1} \Gamma_{11}^1}{\sqrt{a_{11}}} + \\
& + \frac{w_{,2} \Gamma_{11}^2}{\sqrt{a_{11}}} - w \left(\frac{b_{11}^2}{a_{11}} + \frac{b_{12}^2}{a_{22}} \right) - \frac{w_{,11}}{\sqrt{a_{11}}}
\end{aligned}$$

As equações acima correspondem as equações (3.45) e (3.24), respectivamente, utilizadas pela referência [1].

7.2 - Equação de Compatibilidade

YAMAMOTO [31]

As equações (4.14) e (4.15) do trabalho, são as equações (8) da referência, que entretanto, não as desenvolve em termos dos tensores de deformação.

KOITER |14|

Para se obter a equação dada pelo autor a partir das equações (4.14) e (4.15) é necessário que se faça os seguintes comentários: O autor, para obter a equação de compatibilidade, baseou-se no estudo da geometria diferencial. Deste estudo, concluiu que a existência do vetor posição \bar{r}_0^* (θ^1, θ^2) é garantido se os tensores fundamentais ($a_{\alpha\beta}^*$ e $b_{\alpha\beta}^*$) satisfizerem a equação de Gauss e Codazzi. Como estes tensores ($a_{\alpha\beta}^*$ e $b_{\alpha\beta}^*$) são determinados pelos tensores fundamentais ($a_{\alpha\beta}$ e $b_{\alpha\beta}$) da superfície indeformada e por dois tensores de deformação ($\epsilon_{\alpha\beta}^0$ e $\epsilon_{\alpha\beta}^1$), as equações de Gauss e Codazzi, são tomadas como equações de compatibilidade.

Isto corresponde a nada mais do que, ao invés de se considerar o espaço tridimensional Euclidiano, considerar-se o espaço bi-dimensional não Euclidiano, que é a superfície de referência. Como o símbolo de Riemann-Christoffel representa a curvatura do espaço, a equação (4.14) é igual à curvatura gaussiana, e a equação (4.15) implica a equação de Codazzi.

Potanto, a equação de Gauss para superfície deformada é

$$K^* = \frac{1}{4} \epsilon^{*\lambda\alpha} \epsilon^{*\mu\beta} (b_{\lambda\mu}^* b_{\alpha\beta}^* - b_{\lambda\beta}^* b_{\alpha\mu}^*) \quad (7.16)$$

$$= \frac{1}{4} \epsilon^{*\lambda\alpha} \epsilon^{*\mu\beta} R_{\lambda\alpha\mu\beta}^*$$

onde K^* é a curvatura gaussiana da superfície deformada.

como

$$\sqrt{a^*} \dot{\epsilon}^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta} = \sqrt{a} \dot{\epsilon}^{\alpha\beta}, \quad e^{12} = -e^{21} = 1 \quad (7.17)$$

a equação de Gauss anterior acima tem a forma alternativa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \dot{\epsilon}^{\lambda\beta} \dot{\epsilon}^{\mu\beta} R^*_{\lambda\alpha\mu\beta} &= \frac{a^*}{a} K^* \\ &= \frac{1}{4} \dot{\epsilon}^{\lambda\beta} \dot{\epsilon}^{\mu\beta} (b^*_{\lambda\mu} b^*_{\alpha\beta} - b^*_{\lambda\beta} b^*_{\alpha\mu}) \end{aligned} \quad (7.18)$$

Uma equação de compatibilidade é obtida subtraindo a equação de Gauss da superfície indeformada da correspondente à deformada.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \dot{\epsilon}^{\lambda\alpha} \dot{\epsilon}^{\mu\beta} (R^*_{\lambda\alpha\mu\beta} - R_{\lambda\alpha\mu\beta}) &= \frac{a^*}{a} K^* - K \\ &= \frac{1}{4} \dot{\epsilon}^{\lambda\beta} \dot{\epsilon}^{\mu\beta} (b^*_{\lambda\mu} b^*_{\alpha\beta} - b^*_{\lambda\beta} b^*_{\alpha\mu} - b_{\lambda\mu} b_{\alpha\beta} + b_{\lambda\beta} b_{\alpha\mu}) \end{aligned} \quad (7.19)$$

Definindo o tensor deformação por

$$\epsilon^1_{\alpha\beta} = (b^*_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})$$

resulta, para a equação (7.19), a seguinte expressão:

$$\frac{a^*}{a} K^* - K = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}^{\lambda\alpha} \dot{\epsilon}^{\mu\beta} (b_{\lambda\beta} \epsilon^1_{\alpha\mu} + b_{\lambda\mu} \epsilon^1_{\alpha\beta} - \epsilon^1_{\lambda\beta} \epsilon^1_{\alpha\mu}) \quad (7.20)$$

Os símbolos de Riemann-Christoffel são:

$$R_{\lambda\alpha\mu\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\lambda, \mu} - \Gamma_{\alpha\mu\lambda, \beta} + a^{\gamma\eta} (\Gamma_{\lambda\beta\eta} \Gamma_{\alpha\mu\gamma} - \Gamma_{\lambda\mu\eta} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}). \quad (7.21)$$

Analogamente para a superfície deformada

$$R_{\lambda\alpha\mu\beta}^* = {}^*\Gamma_{\alpha\beta\lambda,\mu} - {}^*\Gamma_{\alpha\mu\lambda,\beta} + a^*\gamma\eta ({}^*\Gamma_{\lambda\beta\eta} {}^*\Gamma_{\alpha\mu\gamma} - {}^*\Gamma_{\lambda\mu\eta} {}^*\Gamma_{\alpha\beta\gamma}). \quad (7.22)$$

onde os símbolos de Cristoffel são

$${}^*\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\gamma,\beta}^* + a_{\beta\gamma,\alpha}^* - a_{\alpha\beta,\gamma}^*) \quad (7.23)$$

$${}^*\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} = a^*\gamma\nu {}^*\Gamma_{\alpha\beta\gamma} \quad (7.24)$$

O tensor métrico do sistema deformado é expresso em termos do tensor métrico do estado indeformado por

$$a^{*\alpha\beta} = -2 a^{\alpha\lambda} a^{\beta\eta} \epsilon_{\lambda\eta} + a^{\alpha\beta} \quad (7.25)$$

e

$$a_{\alpha\beta}^* = +2 \epsilon_{\alpha\beta}^0 + a_{\alpha\beta} \quad (7.26)$$

Utilizando-se as equações (7.23) e (7.26) para calcular os símbolos de Christoffel no estado deformado, tem-se

$${}^*\Gamma_{\alpha\beta\lambda} = \Gamma_{\alpha\beta\lambda} + \epsilon_{\alpha\lambda,\beta}^0 + \epsilon_{\beta\lambda,\alpha}^0 - \epsilon_{\alpha\beta,\lambda}^0 \quad (7.27)$$

Os símbolos de Christoffel de segunda espécie são calculados a partir de (7.24) e (7.27) considerando apenas termos lineares resultando:

$${}^*\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} + a^{\gamma\eta} (\epsilon_{\alpha\eta,\beta}^0 + \epsilon_{\eta\beta,\alpha}^0 - \epsilon_{\alpha\beta,\eta}^0) - 2 a^{\gamma\lambda} a^{\eta\zeta} \epsilon_{\lambda\zeta}^0 \Gamma_{\alpha\beta\eta} \quad (7.28)$$

Utilizando-se as equações (7.23) a (7.28) em (7.21) e (7.22), obtem-se as seguintes aproximações

$$\frac{1}{4} \dot{\epsilon}^{\lambda\alpha} \dot{\epsilon}^{\mu\beta} (R_{\lambda\alpha\mu\beta}^* - R_{\lambda\alpha\mu\beta}) = \epsilon^{\lambda\alpha} \epsilon^{\mu\beta} (\epsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} + \frac{1}{2} \epsilon^{\sigma\zeta} R_{\zeta\alpha\mu\beta}) \quad (7.29)$$

Da equação de Gauss utilizada em (7.16) e das propriedades de (simetria, anti-simetria) do tensor $R_{\zeta\alpha\mu\beta}$, o termo final da equação (7.29) toma a forma alternativa:

$$\frac{1}{2} \dot{\epsilon}^{\lambda\alpha} \dot{\epsilon}^{\mu\beta} \epsilon^{\sigma\zeta} R_{\zeta\alpha\mu\beta} = \epsilon^{\sigma\alpha} K \quad (7.30)$$

Substituindo (7.30) em (7.29) e o resultado é levado em conta nas equações (7.19) e (7.20), resultando na seguinte equação de compatibilidade:

$$\dot{\epsilon}^{\lambda\alpha} \dot{\epsilon}^{\mu\beta} \epsilon_{\lambda\beta,\alpha\mu}^0 + K \cdot \epsilon_{\alpha}^{0\alpha} = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}^{\lambda\alpha} \dot{\epsilon}^{\mu\beta} (b_{\alpha\mu} \epsilon_{\lambda\beta}^1 + b_{\lambda\beta} \epsilon_{\alpha\mu}^1 + \epsilon_{\alpha\beta}^1 \epsilon_{\lambda\mu}^1) \quad (7.31)$$

As duas equações adicionais de compatibilidade são derivadas da equação de Codazzi, que é

$$b_{\alpha\beta;\mu}^* = b_{\alpha\mu;\beta}^*$$

onde

$$b_{\alpha\beta;\mu}^* = b_{\alpha\beta,\mu}^* - b_{\alpha\gamma}^* \Gamma_{\beta\mu}^{\gamma} - b_{\gamma\beta}^* \Gamma_{\alpha\mu}^{\gamma}$$

Outra forma alternativa de se escrever a equação de Codazzi é

$$\dot{\epsilon}^{\mu\beta} (b_{\alpha\mu,\beta}^* + {}^*\Gamma_{\alpha\mu}^{\gamma} b_{\gamma\beta}^*) = 0 \quad (7.32)$$

Substituindo-se a expressão (7.28) em (7.32) e fazendo-se o uso da continuidade da superfície de referência indeformada e da definição do tensor curvatura ($\epsilon_{\alpha\beta}^1$), obtém-se

$$\dot{\epsilon}^{\mu\beta} (\epsilon_{\alpha\mu\beta}^1 + (b_{\beta}^{\eta} - \epsilon_{\beta}^{1\eta}) (\epsilon_{\alpha\eta,\mu}^0 + \epsilon_{\eta\mu,\alpha}^0 - \epsilon_{\alpha\mu,\eta}^0)) = 0 \quad (7.33)$$

As equações (7.31) e (7.33) são as equações de compatibilidade usadas pela referência [14].

7.3 - Equações de Equilíbrio

SANDERS [25] , LEONARD [16]

Estes autores utilizaram as seguintes hipóteses:

$$\bar{a}_3^* = \bar{a}^{*3} = \bar{N}^* , \bar{N}^* \cdot \bar{a}_\alpha = 0 , \bar{N}^* \cdot \bar{N}^* = 1$$

$$\bar{a}_{3,\alpha}^* = -b_\alpha^{*\beta} \bar{a}_\beta^*$$

$$\bar{a}_{\alpha,\beta}^* = \Gamma_{\alpha\beta}^{*\mu} \bar{a}_\mu^* + b_{\alpha\beta}^* \bar{a}_3^*$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}^0 + e_{\alpha\beta}^1 \theta^3$$

Das equações (3.17) , juntamente com as relações acima, quando levadas em conta em (5.16) e (5.17), resulta:

$$\left[N^{\alpha\beta} \bar{a}_\beta^* + M^{\alpha\beta} \bar{a}_{3,\beta}^* + S^\alpha \bar{a}_3^* \right] ;_\alpha + \sqrt{\bar{g}_e^*/a^*} \bar{T}_e = 0 \quad (7.34)$$

$$\left[M^{\beta\alpha} \bar{a}_\alpha^* \right] ;_\beta - S^\alpha \bar{a}_\alpha^* + \sqrt{\bar{g}_e^*/a^*} \bar{T}_e \theta^3 = 0 \quad (7.35)$$

Ambos os autores definem

$$\tilde{N}^{\alpha\beta} = N^{\alpha\beta} - b_\mu^{*\alpha} M^{\mu\beta}$$

que quando empregada em (7.34) e (7.35) resulta

$$\left(\tilde{N}^{\alpha\beta} - b_\gamma^{*\beta} M^{\gamma\alpha} \right) ;_\alpha - S^\alpha b_\alpha^{*\beta} + T^\beta = 0 , \quad (7.36)$$

$$S^\alpha_{;\alpha} + (N^{\alpha\beta} - b_\gamma^{*\beta} M^{\gamma\alpha}) b_{\beta\alpha}^* + T^3 = 0, \quad (7.37)$$

$$M^{\alpha\beta}_{;\alpha} + C^\beta - S^\beta = 0, \quad (7.38)$$

$$\sqrt{g_e^*/a^*} \bar{T}_e = T^\beta \bar{a}_\beta^* + T^3 \bar{a}_3^*$$

$$\sqrt{g_e^*/a^*} \bar{T}_e \theta^3 = C^\beta \bar{a}_\beta^* + C^3 \bar{a}_3^*$$

As equações (7.34) a (7.38) são as equações de equilíbrio utilizadas pelas referências [25] e [16].

7.4 - Equações Constitutivas

NAGHDI [22]

O autor usou a mesma formulação do texto, exceto o desenvolvimento em termos dos invariantes.

YOKOO [32]

Este utilizou o mesmo desenvolvimento, somente que para a equação (6.4) usou a equação que relaciona o tensor tensão de Kirchhoff com o tensor de Cauchy - Green, atribuído por Cosserat [7].

EPSTEIN [8] [9]

Para obter a equação linear utilizada pelo autor, faz-se a seguinte linearização da equação (6.10):

$$C_1 = \frac{\partial \phi}{\partial I_1} = \lambda + 2G - \alpha(3\lambda + 2G)(T - T_0) \quad (7.39)$$

$$C_2 = \frac{\partial \phi}{\partial I_2} = -2G \quad (7.40)$$

$$C_3 = \frac{\partial \phi}{\partial I_3} = 0 \quad (7.41)$$

onde λ e G são as constantes de Lamé e módulo de cisalhamento, respectivamente, e α é o coeficiente de expansão térmico.

Das equações (7.39) a (7.40) resulta

$$\phi = \frac{\lambda + 2G}{2} I_1^2 - 2G I_2 - \alpha(3\lambda + 2G) I_1 (T - T_0) \quad (7.42)$$

Substituindo-se as equações (6.3) em (7.42), tem-se:

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{2} G (g^{ip} g^{jq} + g^{iq} g^{jp} + \frac{\lambda}{G} g^{ij} g^{pq}) \epsilon_{ij} \epsilon_{pq} \\ & - \alpha(3\lambda + 2G) g^{ij} \epsilon_{ij} (T - T_0) \end{aligned} \quad (7.43)$$

e utilizando-se o módulo de Young e a razão de Poisson, dados por

$$E = \frac{(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$$

a equação (7.43) torna-se

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{E}{4(1 + \nu)} (g^{ip} g^{jq} + g^{iq} g^{jp} + \frac{2\nu}{1 - 2\nu} g^{ij} g^{pq}) \epsilon_{ij} \epsilon_{pq} \\ & - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha(T - T_0) g^{ij} \epsilon_{ij} \end{aligned} \quad (7.44)$$

Portanto, a relação tensão deformação é obtida substituindo-se (7.44) em (6.4) resultando:

$$\sigma^{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}} \left\{ \left(\frac{E}{4(1+\nu)} (g^{\lambda p} g^{mq} + g^{\lambda q} g^{mp} + \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{\lambda m} g^{pq}) \epsilon_{\lambda m} \epsilon_{pq} - \frac{E}{1+2\nu} \alpha (T - T_0) \right. \right. \\ \left. \left. g^{\lambda m} \epsilon_{\lambda m} \right) \right\} \quad (7.45)$$

e fazendo-se

$$E^{ijpq} = \frac{E}{2(1+\nu)} (g^{ip} g^{jq} + g^{iq} g^{jp} + \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{ij} g^{pq})$$

$$\alpha^{ij} = \frac{\alpha E}{1-2\nu} g^{ij}$$

$$\rho \cong \rho_0 \quad \text{caso linear}$$

a equação (7.45) é reescrita da forma

$$\sigma^{ij} = E^{ijpq} \epsilon_{pq} - \alpha^{ij} (T - T_0) \quad (7.46)$$

A equação (7.46) é a equação constitutiva empregada nas equações das tensões resultantes, pelas referências |8| e |9|

NAGHDI [20], KOITER [14]

De acordo com as equações vistas no caso anterior, a função densidade de energia linear para um material elástico tem a forma:

$$\phi = \frac{1}{2} E^{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - \alpha^{ij} \epsilon_{ij} (T - T_0) \quad (7.47)$$

Se um corpo elástico é simétrico com respeito a uma superfície $\theta^3 = 0$, então a transformação $\bar{\theta}^3 = -\theta^3$, $\bar{\theta}^1 = \theta^1$, $\bar{\theta}^2 = \theta^2$, não altera a função densidade, isto é, $\phi(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \phi(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3)$.

Portanto, tem-se que:

$$E^{333\alpha} = E^{3\alpha\beta\gamma} = 0 \quad \alpha^{3\alpha} = 0$$

e a equação (7.47) torna-se

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\gamma\eta} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\eta} + E^{33\gamma\eta} \epsilon_{33} \epsilon_{\gamma\eta} + \\ & 2 E^{\alpha 3\beta 3} \epsilon_{\alpha 3} \epsilon_{\beta 3} + \frac{1}{2} E^{3333} \epsilon_{33}^2 - \alpha^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} (T - T_0) \\ & - \alpha^{33} \epsilon_{33} (T - T_0) \end{aligned} \quad (7.48)$$

Levando a relação (7.48) em (7.46), tem-se:

$$\sigma^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\gamma\eta} \epsilon_{\gamma\eta} + E^{\alpha\beta 33} \epsilon_{33} - \alpha^{\alpha\beta} (T - T_0) \quad (7.49)$$

$$\sigma^{\alpha 3} = 2 E^{\alpha 3 \beta 3} \epsilon_{\beta 3} \quad (7.50)$$

$$\sigma^{33} = E^{33\gamma\eta} \epsilon_{\gamma\eta} + E^{3333} \epsilon_{33} - \alpha^{33} (T - T_0) \quad (7.51)$$

Se o corpo é delgado, é possível desprezar-se a tensão σ^{33} . Portanto, igualando-se (7.51) a zero, obtém-se

$$\epsilon_{33} = - \frac{E^{33\gamma\eta}}{E^{3333}} \epsilon_{\gamma\eta} + \frac{\alpha^{33}}{E^{3333}} (T - T_0)$$

e fazendo-se

$$C^{\alpha\beta\gamma\eta} \equiv E^{\alpha\beta\gamma\eta} - \frac{E^{33\alpha\beta} E^{33\gamma\eta}}{E^{3333}}, \quad \bar{\alpha}^{\alpha\beta} = \frac{\alpha^{\alpha\beta} - E^{33\alpha\beta} \alpha^{33}}{E^{3333}}$$

a equação (7.48) assume a forma simplificada:

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{2} C^{\alpha\beta\gamma\eta} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\eta} + 2E^{\alpha 3 \beta 3} \epsilon_{\alpha 3} \epsilon_{\beta 3} \\ & - \bar{\alpha}^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} (T - T_0) \end{aligned} \quad (7.52)$$

e as equações (7.49) a (7.51) tornam-se

$$\sigma^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\gamma\eta} \epsilon_{\gamma\eta} - \bar{\alpha}^{\alpha\beta} (T - T_0) \quad (7.53)$$

$$\sigma^{\alpha 3} = 2E^{\alpha 3 \beta 3} \epsilon_{\beta 3}, \quad \sigma^{33} = 0 \quad (7.54)$$

Supondo-se que a superfície de referência da casca é a superfície média, a densidade de energia de deformação por unidade de área da superfície de referência é:

$$\psi = \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{\frac{g}{a}} \phi d\theta^3 = \int_{-h/2}^{h/2} |1 - 2h\theta^3| + K(\theta^3)^2 | \phi d\theta^3 \quad (7.55)$$

Considerando-se que as propriedades elásticas não variam através da espessura da casca. Isto significa que a relação entre os componentes físicos de tensão e deformação são independentes de θ^3 .

Das equações (A3-13), (A3-14) e (7.53), levando-se em conta a hipótese de Kirchhoff-Love, tem-se:

$$\sigma^{(\alpha\beta)} = \sqrt{\frac{g_{\beta\beta} g_{\gamma\gamma} g_{\eta\eta}}{g_{\alpha\alpha}}} C^{\alpha\beta\gamma\eta} \epsilon_{(\gamma\eta)} - \bar{\alpha}^{\alpha\beta} (T - T_0) \quad (7.56)$$

Os coeficientes de deformação e temperatura dependem apenas das propriedades do material, isto é, são componentes físicos:

$$D^{\alpha\beta\gamma\eta} \equiv \sqrt{\frac{g_{\beta\beta} g_{\gamma\gamma} g_{\eta\eta}}{g_{\alpha\alpha}}} C^{\alpha\beta\gamma\eta}$$

$$A^{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{g_{\beta\beta}}{g_{\alpha\alpha}}} \bar{\alpha}^{\alpha\beta}$$

Desde que as propriedades são uniformes através da espessura

$$D^{\alpha\beta\gamma\eta} = D^{\alpha\beta\gamma\eta} (\theta^1, \theta^2) \quad A^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} (\theta^1, \theta^2)$$

Denotando-se K_1 como a maior curvatura da superfície,

tem-se:

$$g_{\alpha\beta} \cong a_{\alpha\beta} (1 + O(K_1 \theta^3))$$

$$g^{\alpha\beta} \cong a^{\alpha\beta} (1 + O(K_1 \theta^3))$$

e

$$\begin{aligned} C^{\alpha\beta\gamma\eta} &= \sqrt{\frac{a_{\alpha\alpha}}{a_{\beta\beta} a_{\gamma\gamma} a_{\eta\eta}}} D^{\alpha\beta\gamma\eta} (1 + O(K_1 \theta^3)) \\ &= C_0^{\alpha\beta\gamma\eta} (1 + O(K_1 \theta^3)) \end{aligned} \quad (7.57)$$

onde $C_0^{\alpha\beta\gamma\eta}$ denota o componente da rigidez calculada na superfície média. De maneira semelhante, tem-se para o coeficiente de dilatação térmica

$$\bar{\alpha}^{\alpha\beta} = \bar{\alpha}_0^{\alpha\beta} (1 + O(K_1 \theta^3)) \quad (7.58)$$

A expressão (7.48) modificada pelas equações (7.57) e (7.58) é levada à relação (7.51) fornecendo

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} C_o^{\alpha\beta\gamma\eta} \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\eta} (1 + o(K_1\theta^3)) d\theta^3 \\ &- \bar{\alpha}_o^{\alpha\beta} \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{\alpha\beta} (T - T_o) (1 + o(K_1\theta^3)) d\theta^3 \end{aligned} \quad (7.59)$$

Substituindo-se a equação (3.24), a menos do termo quadrático, na relação acima, resulta:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} C_o^{\alpha\beta\gamma\eta} \int_{-h/2}^{h/2} (e_{\alpha\beta}^0 + e_{\alpha\beta}^1\theta^3) (e_{\gamma\eta}^0 + e_{\gamma\eta}^1\theta^3) \\ &\cdot (1 + o(K_1\theta^3)) d\theta^3 - \bar{\alpha}_o^{\alpha\beta} \int_{-h/2}^{h/2} (e_{\alpha\beta}^0 + e_{\alpha\beta}^1\theta^3) \\ &\cdot (T - T_o) (1 + o(K_1\theta^3)) d\theta^3 \end{aligned} \quad (7.60)$$

A integração da equação (7.60) tem o seguinte resultado aproximado

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{h}{2} C_o^{\alpha\beta\gamma\eta} (e_{\alpha\beta}^0 e_{\gamma\eta}^0 + \frac{h^2}{12} e_{\alpha\beta}^1 e_{\gamma\eta}^1) \\ &- h \bar{\alpha}_o^{\alpha\beta} (e_{\alpha\beta}^0 \Delta^0 T + h e_{\alpha\beta}^1 \Delta^1 T) \end{aligned} \quad (7.61)$$

onde

$$\Delta^0 T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (T - T_0) d\theta^3$$

$$\Delta^1 T = \frac{1}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} (T - T_0) \theta^3 d\theta^3$$

No resultado (7.61) foram desprezados os termos quadráticos em $e_{\alpha\beta}^0$, $h e_{\alpha\beta}^1$ e levando-se em conta que a casca é delgada, isto é, $K_1 h \ll 1$, as equações constitutivas são obtidas substituindo-se a equação (7.61) nas equações das tensões resultantes.

A equação (7.61) é a equação constitutiva substituída nas equações das tensões resultantes, utilizadas pelas referências [20] e [14].

CAPÍTULO 8

CONCLUSÃO

A presente teoria é desenvolvida para cascas elásticas isotrópicas, sem usar a hipótese de Kirchhoff-Love. Assim foi possível descrever uma teoria não linear incorporando tanto não linearidades geométricas quanto físicas, uma vez que as condições introduzidas por esta hipótese não se apresentam.

As equações obtidas são exatas e se reduzem às apresentadas por vários autores quando são introduzidas as respectivas hipóteses simplificativas. Estas equações fundamentais são muito complexas e dependendo do problema se pode fazer certas hipóteses tais como:

(1) hipótese Kirchhoff-Love.

(2) pequenas deformações e/ou pequenos deslocamentos.

(3) pequenas curvaturas e/ou pequenas rotações, etc.,

que levadas em conta nas equações fundamentais do trabalho, diminuem sua complexidade.

Assumindo certas hipóteses simplificativas, o trabalho possibilita a obtenção das equações fundamentais da teoria clássica de cascas, com a principal importância de se poder estimar os parâmetros envolvidos por estas.

Como a maioria das referências são escritas em notação tensorial, assim como o presente trabalho, é necessária sua transformação das grandezas envolvidas para componentes físicas, quando se utiliza em um programa computacional. O processo de transformação é dado no Apêndice A, uma vez que raramente é citado nas referências

Linhas de Pesquisas Decorrentes deste Trabalho

A partir dos resultados, e conclusões do presente trabalho, podem-se extrair as seguintes linhas de pesquisas decorrentes:

- (a) Equações gerais para teoria linear de cascas;
- (b) Formulação de uma teoria não-linear de cascas finas;
- (c) Desenvolvimento de equações fundamentais para cascas sanduiche;
- (d) Estudo de estabilidade de cascas;
- (e) Desenvolvimento de equações constitutivas para sólidos elásticos, constando tanto a formulação teórica como a verificação experimental.
- (f) Equações fundamentais da teoria de cascas quasishallow ou shallow.

REFERÊNCIAS

- [1] ALVES, D. Boechat Teoria de Cascas e Placas, CTC - UFSC - FEESC, 1977.
- [2] _____. Teoria de Elasticidade, CTC - UFSC - FEESC, 1976.
- [3] BIRICIOGLU, V. and KALNINS, A. Large Elastic Deformations of Shells with the Inclusion of Transverse Normal Strain, Int. J. Solids Struct, 7, 431-444, (1971).
- [4] CHIEN WEI-ZANG. Intrinsic Theory of Shells and Plates, Part I - General Theory, Q. appl Math 1 - 297 - 327 (1944).
- [5] DIKMEN, Murat. Recent Advances the General Theory of Thin Elastic Shells, Int. J. Engng Sci, 17, 235-250, 1979.
- [6] DYM and SHAMES. Solids Mechanics: A Variational Approach, Mc Graw-Hill, 1973.
- [7] ERINGEN , A.C. Nonlinear Theory of Continuous Media; McGraw-Hill (1962).
- [8] EPSTEIN, Marcelo and GLOCKNER, Peter. Nonlinear Analysis of Multilayered Shells, Int. J. Solids Struct, 13, 1081-1089, (1977).
- [9] EPSTEIN, Marcelo and TENE, Yair. A Linear Theory of Thin Elastic Shells, Based on Conservation of a Non-Normal Straight Line, Int. J. Solids Struct, 9, 257-268, (1973).
- [10] FLUGGE, Wilhelm. Tensor Analysis and Continuum Mechanics. Springer, Berlin, 1972.
- [11] GLOCKNER, P.G. and SHRIVASTAVA, J.P. Physical Strains in Nonlinear Thin Shells Theory; Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 95, 1969.
- [12] GREEN, A.E. and J.E. Adkins. Large Elastic Deformations and Nonlinear Continuum Mechanics. London: Oxford University Press, 1960.
- [13] GREEN, A.E. and W. Zerna. Theoretical Elasticity. London: Oxford University Press, 1954.

- [14] KOITER, W.T. A Consistent First Approximation in the Theory of Thin Elastic Shells, Proc. IUTAM Symp, Delft, (1959).
- [15] _____. On the Nonlinear Theory of Thin Shells, I, II, III, Proc. Kon. Ned. Ar. Wet. Amsterdam, B-69, 1-54.
- [16] LEONARD, R.W. Nonlinear First Approximation Thin Shell and Membrane Theory, NASA, 1961.
- [17] LIBRESCU, Liviu. On the Theory of Anisotropic Elastic Shells and Plates, Int. J. Solids Structures, 3, 53-68, 1967.
- [18] MURNAGHAN, Francis D. Finite Deformation of an Elastic Solid. New York, Wiley, 1951.
- [19] NAGHDI, P.M. A New Derivation of the General Equations of Elastic Shells, Int. J. Engng. Sci, 1, 507-522, 1963.
- [20] _____. Foundations of Elastic Shell Theory, Progress in Solid Mechanics, Vol. 4. North-Holland (1963).
- [21] _____. Further Results in the Derivation of the General Equations of Elastic Shells Int. J. Engng. Sci, 2, 269-273, 1964.
- [22] NAGHDI, P.M. and NORDGREEN, R.P. On the Nonlinear Theory of Elastic Shells Under the Kirchhoff Hypothesis, Q. appl Math 21, 49-59, (1963).
- [23] NOVOZHILOV, V.V. Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity. Gray Lock Press (1953).
- [24] R.F. Jones, Jr. A Curved Finite Element for General Thin Shell Structures, Nuclear Engineering and Design 48, 415-425, 1978.
- [25] SANDERS, J.L. Nonlinear Theories for Thin Shells, Q. appl. Math 21, 21-36, (1963).
- [26] SHRIVASTAVA, J.P. and GLOCKNER, P.G. Lagrangean Formulation of Static of Shells, J. Engng Mech. Div; ASCE, 96, 547-563 (1970).
- [27] SOKOLNIKOFF, I.S.. Mathematical Theory of Elasticity, 24-25, Mc Graw-Hill, 1956.

- |28| SOKOLNIKOFF, I.S. Tensor Analysis. New York, Wiley, 1958.
- |29| WAINWRIGHT, W.L. On a Nonlinear Theory of Elastic Shells, Int. J. Engng Sci 1, 339-358, (1963).
- |30| WEMPNER, Gerald. Mechanics of Solids, Mc Graw-Hill, 1973.
- |31| YAMAMOTO, Yoshiyuki. An Intrinsic Theory of Shells, Int. J. Solids Structures, 2, 235-248, 1966.
- |32| YOKOO, Yoshitsura and MATSUNAGA, Hiroyuki. A General Non-linear Theory of Elastic Shells, Int. J. Solids Structures, 261-274, (1974).

APÊNDICE A

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A-1. INTRODUÇÃO

Este apêndice é uma breve apresentação do cálculo tensorial, sendo um pré-requisito para o entendimento do texto assim como também uma das ferramentas úteis para sua formulação.

Tensores são características por possuírem suas propriedades invariantes, com uma transformação do sistema de coordenadas da referência.

Semelhantemente aos vetores, os tensores são referidos a um sistema de coordenadas de referência, sendo que as leis de transformação não variam com o sistema de coordenadas. Algumas das importantes vantagens de se utilizar a notação tensorial são:

a) Tensores constituem um poderoso método de derivação das equações;

b) Por serem invariantes, as equações obtidas são gerais, isto é, são válidas para qualquer sistema de coordenadas;

c) Economia no uso de símbolos e nas propriedades de simetria fazem com que as equações que regem o fenômeno se tornem mais compactas.

A-2. SISTEMA DE COORDENADAS CURVILÍNEAS

Seja (x^1, x^2, x^3) um sistema retangular de coordena

das e

$$\theta^k = \theta^k(x^1, x^2, x^3) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (\text{A-2.1})$$

funções contínuas para as quais o Jacobiano é diferente de zero na região considerada. Consequentemente a cada triplo ordenado $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ corresponde um ponto do espaço e a cada triplo (x^1, x^2, x^3) corresponde um unívoco triplo $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$.

Se for mantido $\theta^1 = \text{constante}$ e θ^2 e θ^3 variáveis, as funções x^1, x^2 e x^3 representam uma superfície em termos dos dois parâmetros θ^2 e θ^3 , denominada superfície de coordenada θ^1 . Assim, tem-se uma família de superfícies de coordenadas θ^1 , sendo uma e somente uma para cada valor de θ^1 . Para $\theta^1 = \xi$ e $\theta^1 = \eta$, $\xi \neq \eta$, tem-se duas superfícies que não se interseptam, sendo essa condição assegurada pela não nulidade do Jacobiano, pois caso contrário a inversão do triplo x^1, x^2, x^3 em $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ não seria unívoca. Similarmente definem-se as superfícies de coordenadas θ^2 e θ^3 . (Fig. (A-2.1)).

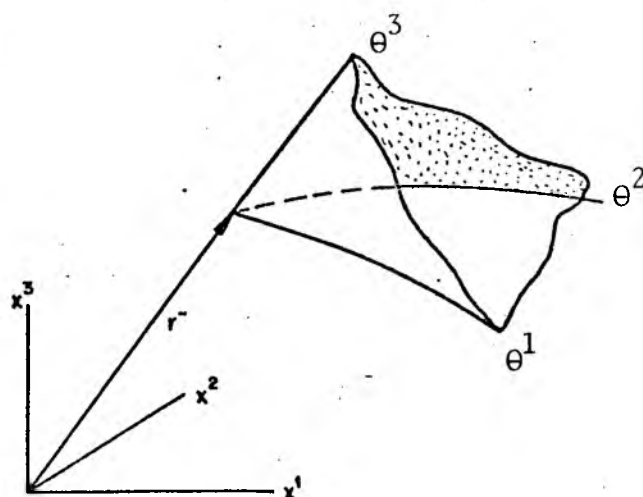


Fig. A-2.1

VETORES BASE

Os vetores tangente à k -ésima linha de coordenadas $\bar{g}_k(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$, ($k = 1, 2, 3$) são expressos por

$$\bar{g}_k = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta^k} = \frac{\partial X^m}{\partial \theta^k} i_m \quad (\text{A-2.2})$$

onde $\bar{r} = X^m i_m$ é o vetor posição de um ponto P , e a diagonal repetida do índice m , indica soma sobre a variação de $m = 1, 2, 3$. Esta convenção de soma será usada em todo o trabalho.

TENSOR MÉTRICO

O tensor métrico fundamental ($g_{k\ell}$) é definido por

$$g_{k\ell} = \bar{g}_k \cdot \bar{g}_\ell = \frac{\partial X^m}{\partial \theta^k} \cdot \frac{\partial X^n}{\partial \theta^\ell} \delta_{mn}, \quad (\text{A-2.3})$$

onde δ_{mn} é símbolo de Kronecker.

O vetor infinitesimal $d\bar{r}$ é:

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta^k} d\theta^k = \bar{g}_k d\theta^k \quad (\text{A-2.4})$$

e calculando-se o quadrado do elemento linha, resulta

$$ds^2 = d\bar{r} \cdot d\bar{r} = g_{k\ell} d\theta^k d\theta^\ell$$

Em geral as coordenadas curvilíneas não são mutuamente ortogonais. e portanto $g_{k\ell} \neq 0$ (para $k \neq \ell$), isto é, as componentes g_{12} , g_{23} e g_{31} não são todas nulas.

A base recíproca de vetores \bar{g}^k é a solução do sistema

$$\bar{g}^k \cdot \bar{g}_\ell = \delta_\ell^k, \quad (\text{A-2.5})$$

onde δ_ℓ^k é o tensor de Kromecker. Verifica-se que a solução única de (A-2.5) é

$$\bar{g}^k = g^{k\ell} \bar{g}_\ell, \quad \text{onde} \quad (\text{A-2.6})$$

$$g^{k\ell} = \frac{\text{cofator } |g_{k\ell}|}{g}, \quad g = \det |g_{k\ell}| \quad (\text{A-2.7})$$

Tomando-se o produto escalar (A-2.6), tem-se

$$g^{k\ell} = \bar{g}^k \cdot \bar{g}^\ell, \quad \text{e} \quad \delta_\ell^k = g^{km} g_{m\ell}. \quad (\text{A-2.8})$$

Quando as coordenadas curvilíneas são ortogonais, as direções de \bar{g}^k e \bar{g}_k coincidem. Neste caso os componentes $g^{k\ell} = g_{k\ell} = 0$, para $(k \neq \ell)$.

Os vetores base \bar{g}_k e os recíprocos \bar{g}^k são em geral de magnitude não unitária, e suas respectivas normas são $\sqrt{g_{kk}}$ e $\sqrt{g^{kk}}$, onde os traços são utilizados para suspender a soma sobre os índices livres. Qualquer vetor \bar{V} pode ser expresso em termos de componentes paralelos a \bar{g}_k ou \bar{g}^k por:

$$\bar{V} = V^k \bar{g}_k = V_k \bar{g}^k \quad (\text{A-2.9})$$

onde

as componentes (V^k) e (V_k) de \bar{V} são em geral diferentes e chamadas componentes contravariante e covariante de \bar{V} , respectivamente.

A-3. TENSORES

Se as N^2 quantidades A^{sr} relativas a um sistema de coordenadas θ^i estão relacionadas a N^2 outras quantidades \bar{A}^{pq} relativas a um outro sistema de coordenadas $\bar{\theta}^i$ através das relações

$$\bar{A}^{pq} = \frac{\partial \bar{\theta}^p}{\partial \theta^s} \frac{\partial \bar{\theta}^q}{\partial \theta^r} A^{sr}$$

então essas quantidades recebem o nome de componentes de um tensor contravariante de segunda ordem.

Assim pode-se dizer que se $N^p + q$ quantidades $\bar{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}$ relativas a sistema de coordenadas n-dimensional $\bar{\theta}^i$ estão relacionadas a $N^p + q$ outras quantidades $A^{k_1 \dots k_p}_{m_1 \dots m_q}$ referidas a um outro sistema de coordenadas n-dimensional θ^i através das relações

$$\bar{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} = \frac{\partial \bar{\theta}^{\alpha_1}}{\partial \theta^{k_1}} \dots \frac{\partial \bar{\theta}^{\alpha_p}}{\partial \theta^{k_p}} \frac{\partial \theta^{m_1}}{\partial \bar{\theta}^{\beta_1}} \dots \frac{\partial \theta^{m_q}}{\partial \bar{\theta}^{\beta_q}} A^{k_1 \dots k_p}_{m_1 \dots m_q}$$

então essas quantidades recebem o nome de componentes de um tensor misto de ordem $p + q$, contravariante de ordem p e covariante de ordem q .

COMPONENTES FÍSICAS:

As componentes de um tensor em geral não têm as mesmas unidades. Por exemplo, se $\bar{u} = u^k \bar{g}_k$ é um vetor deslocamento com componentes contravariantes u^k , referido ao sistema cilíndrico de coordenadas, tem-se

$$|\bar{g}_1| = \sqrt{g_{11}} = 1, \quad |\bar{g}_2| = \sqrt{g_{22}} = \theta^2, \quad |\bar{g}_3| = \sqrt{g_{33}} = 1$$

e, se \bar{u} é medido por comprimento L , então as dimensões de u^1 e u^3 são L , porém a dimensão de u^2 é $\frac{L}{L}$. Tomando-se as projeções do vetor em vetores unitários ao longo das coordenadas curvilíneas, definem-se as componentes físicas dos vetores. Assim, escrevendo-se

$$\bar{u} = u^{(k)} \bar{e}_k, \quad \text{onde} \quad (\text{A-3.4})$$

\bar{e}_k são vetores unitários, isto é

$$\bar{e}_k = \frac{\bar{g}_k}{\sqrt{g_{kk}}} \quad (\text{A-3.5})$$

então as componentes $u^{(k)}$ são as componentes físicas de \bar{u} , e escrevendo-se $\bar{u} = u^k \bar{g}_k = u^{(k)} \bar{e}_k$, diz-se que as componentes tensoriais e as componentes físicas estão relacionadas da seguinte forma:

$$u^{(k)} = u^k \sqrt{g_{kk}}, \quad u^k = \frac{u^{(k)}}{\sqrt{g_{kk}}} \quad (\text{A-3.6})$$

Para representar u_k por componentes físicas, basta contrair o índice de u^k , isto é

$$u_k = u^\ell g_{k\ell} = \sum_{\ell} \frac{u^{(\ell)}}{g_{\ell\ell}} g_{k\ell} . \quad (\text{A-3.7})$$

Considere-se agora um tensor de segunda ordem envolvido na seguinte expressão:

$$\overset{i}{T} = \sum_j \sqrt{\frac{g_{jj}}{g_{ii}}} \sigma^{ij} \frac{\bar{g}_j}{\sqrt{g_{jj}}} = \sum_j \sigma^{(ij)} \frac{\bar{g}_j}{\sqrt{g_{jj}}} . \quad (\text{A-3.8})$$

Uma vez que $\bar{g}_j/\sqrt{g_{jj}}$ são vetores unitários ao longo das coordenadas curvilíneas, as componentes $\sigma^{(ij)}$ são uniformes em dimensões físicas e representam as componentes físicas do vetor tensão $\overset{i}{T}$ nas direções dos vetores unitários $\bar{g}_j/\sqrt{g_{jj}}$. As componentes tensoriais e físicas estão relacionadas por

$$\sigma^{(ij)} = \sqrt{\frac{g_{jj}}{g_{ii}}} \sigma^{ij} , \quad (\text{A-3.9})$$

porém $\sigma^{(ij)}$ não é tensor.

Se por outro lado for usado um tensor misto em (A-3.8), resulta

$$\overset{i}{T} = \sigma^i_j \frac{\bar{g}^j}{\sqrt{g_{ii}}} = \sigma^{(i)}_{(j)} \sqrt{\frac{g_{jj}}{g_{ii}}} \cdot \frac{\bar{g}^j}{g_{jj}} . \quad (\text{A-3.10})$$

Assim as componentes físicas são:

$$\sigma_{(j)}^{(i)} = \sqrt{\frac{g_{jj}}{g_{ii}}} \sigma_j^i \quad (\text{A-3.11})$$

Se o sistema de coordenadas curvilíneas for ortogonal, isto é:

$$g_{ij} = g^{ij} = 0, \quad (i \neq j), \quad e \quad (\text{A-3.12})$$

$$g_{ii}^{-1} = (g_{ii})^{-1}, \quad (\text{A-3.13})$$

As equações (A-3.9) e (A-3.11) podem ser escritas para um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais como

$$\sigma^{(ij)} = \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} \sigma^{ij}, \quad (\text{A-3.14})$$

$$\sigma_{(j)}^{(i)} = \sqrt{g_{jj}} \sqrt{g_{ii}} \sigma_j^i \quad (\text{A-3.15})$$

$$\sigma_{(ij)} = \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} \sigma_{ij} \quad (\text{A-3.16})$$

A-4. DIFERENCIAÇÃO COVARIANTE

Em um sistema curvilíneo de coordenadas os vetores base \bar{g}^k e \bar{g}_k variam em direção com as coordenadas, no ponto considerado

Sendo assim na diferenciação e na integração estes vetores não podem ser tratados como sendo constantes. Tem-se que

$$\frac{\partial \bar{g}_\ell}{\partial \theta^p} = \frac{\partial}{\partial \theta^p} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta^\ell} \right) = \frac{\partial^2 \chi^n}{\partial \theta^\ell \partial \theta^p} \bar{i}_n,$$

e multiplicando-se a equação (A-2.2) em ambos os lados por $\partial \theta^k / \partial \chi^m$, e substituindo na equação anterior, resulta

$$\frac{\partial \bar{g}_\ell}{\partial \theta^p} = \Gamma_{\ell p}^k \bar{g}_k, \quad \text{onde:} \quad (\text{A-4.1})$$

$$\Gamma_{\ell p}^k = \frac{\partial^2 \chi^n}{\partial \theta^p \partial \theta^\ell} \frac{\partial \theta^k}{\partial \chi^n} \quad (\text{A-4.2})$$

são símbolos de Christoffel de segunda espécie. Os símbolos de Christoffel de primeira espécie são definidos por

$$\Gamma_{k\ell m} = g_{mn} \Gamma_{k\ell}^n \quad \text{ou} \quad \Gamma_{k\ell}^m = g^{mn} \Gamma_{k\ell n}. \quad (\text{A-4.3})$$

Usando-se a relação (A-2.3), tem-se

$$\Gamma_{k\ell m} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial \theta^\ell} + \frac{\partial g_{\ell m}}{\partial \theta^k} - \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial \theta^m} \right). \quad (\text{A-4.4})$$

Os símbolos de Christoffel são simétricos para ambas as espécies com relação ao par de índices k e ℓ , isto é,

$$\Gamma_{k\ell}^m = \Gamma_{\ell k}^m, \quad \Gamma_{k\ell m} = \Gamma_{\ell km} \quad (A-4.5)$$

Similarmente a equação (A-4.1) fornece

$$\frac{\partial \bar{g}^m}{\partial \theta^\ell} = - \Gamma_{\ell k}^m \bar{g}^k \quad (A-4.6)$$

Usando-se as expressões (A-4.1) e (A-4.6) para obter as derivadas parciais de vetores, resulta

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta^k} = \frac{\partial}{\partial \theta^k} (u^m \bar{g}_m) = \frac{\partial u^m}{\partial \theta^k} \bar{g}_m + u^m \frac{\partial \bar{g}_m}{\partial \theta^k} = \left(\frac{\partial u^m}{\partial \theta^k} + \Gamma_{k\ell}^m u^\ell \right) \bar{g}_m$$

quando (A-4.1) é empregado; por outro lado

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta^k} = \frac{\partial}{\partial \theta^k} (u_m \bar{g}^m) = \frac{\partial u_m}{\partial \theta^k} \bar{g}^m + u_m \frac{\partial \bar{g}^m}{\partial \theta^k} = \left(\frac{\partial u_m}{\partial \theta^k} - \Gamma_{mk}^\ell u_\ell \right) \bar{g}^m$$

Ambas as derivadas podem ser abreviadas por

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta^k} = u_{;k}^m \bar{g}_m, \quad \text{onde} \quad u_{;k}^m = \frac{\partial u^m}{\partial \theta^k} + \Gamma_{k\ell}^m u^\ell \quad (A-4.7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta^k} = u_{m;k} \bar{g}^m, \quad \text{onde} \quad u_{m;k} = \frac{\partial u_m}{\partial \theta^k} - \Gamma_{mk}^\ell u_\ell \quad (A-4.8)$$

De acordo com o cálculo infinitesimal, a ordem da derivada parcial mista para funções contínuas é indiferente, isto é:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^1 \partial \theta^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2 \partial \theta^1} .$$

Pergunta-se: em que condições a derivada covariante comuta, isto é, quando se pode escrever

$$A_{k;\ell m} = A_{k;m\ell} ?$$

Para responder a esta pergunta, toma-se a derivada covariante

$$A_{k;\ell} = A_{k,\ell} - \Gamma_{k\ell}^r A_r$$

o que implica

$$A_{k;\ell m} = (A_{k,\ell})_{,m} - \Gamma_{km}^r A_{r,\ell} - \Gamma_{\ell m}^r A_{k,r} ,$$

e usando a relação (A-4.9) resulta

$$\begin{aligned} A_{k;\ell m} &= A_{k,\ell m} - \Gamma_{k\ell,m}^r A_r - \Gamma_{k\ell}^r A_{r,m} - \Gamma_{km}^r A_{r,\ell} + \\ &+ \Gamma_{km}^r \Gamma_{r\ell}^s A_s - \Gamma_{\ell m}^r A_{k,r} + \Gamma_{\ell m}^r \Gamma_{kr}^s A_s . \end{aligned} \quad (A-4.10)$$

Permutando-se os índices ℓ e m e subtraindo o resultado de (A-4.10), obtêm-se

$$A_{k;\ell m} - A_{k;m\ell} = (\Gamma_{km,\ell}^r - \Gamma_{k\ell,m}^r + \Gamma_{km}^s \Gamma_{s\ell}^r -$$

$$- \Gamma_{k\ell}^s \Gamma_{sm}^r) \bar{A}_r, \quad (\text{A-4.11})$$

onde \bar{A}_r é um vetor arbitrário e o lado esquerdo de (A-4.11) é a derivada covariante de um tensor de terceira ordem. De acordo com a lei do quociente, o coeficiente de \bar{A}_r à direita da equação deverá ser um tensor de quarta ordem, isto é

$$R^r_{k\ell m} = \Gamma_{km, \ell}^r - \Gamma_{k\ell, m}^r + \Gamma_{km}^s \Gamma_{s\ell}^r - \Gamma_{k\ell}^s \Gamma_{sm}^r. \quad (\text{A-4.12})$$

Este é o chamado tensor de Riemann-Christoffel.

A equação (A-4.11) é reescrita como

$$A_{k; \ell m} - A_{k; m \ell} = R^r_{k\ell m} \bar{A}_r. \quad (\text{A-4.13})$$

Pela expressão (A-4.13) pode-se dizer que as derivadas de qualquer vetor são iguais se, e somente se, o tensor de Riemann-Christoffel é identicamente nulo. Define-se como tensor curvatura o tensor obtido de (A-4.12) por contração do índice r , isto é,

$$R_{k\ell mn} = g_{kr} R^r_{\ell mn} = \frac{1}{2} (g_{kn, \ell m} + g_{\ell m, kn} - g_{km, \ell n} - g_{\ell n, km}) + g^{rs} (\Gamma_{\ell ms} \Gamma_{knr} - \Gamma_{\ell ns} \Gamma_{kmr}). \quad (\text{A-4.14})$$

Este tensor representa uma medida da curvatura do espa

APÊNDICE B

GEOMETRIA DAS SUPERFÍCIES

B.1 - Introdução

Um dos resultados promissores do cálculo tensorial é no campo da mecânica do contínuo, em particular na Teoria das Cascas. É praticamente impossível formular uma Teoria de Cascas, sem um adequado conhecimento da Teoria das Superfícies.

B.2 - Métrica e Curvatura

Na Teoria das Cascas consideram-se pontos localizados numa superfície, chamada superfície de referência, e pontos nas suas proximidades. Usa-se na formulação da teoria um sistema de coordenadas consistindo de duas coordenadas curvilíneas θ^1 e θ^2 na superfície de referência, e da distância ao longo da normal θ^3 . Este sistema de coordenadas tri-dimensional será usado em todo o texto. É interessante comparar as grandezas referentes à superfície de referência que são funções de θ^1 e θ^2 , com as grandezas referentes a uma superfície qualquer, distante de um valor $\theta^3 = z = \text{const}$ da superfície de referência. Para isto são usadas notações diferentes para as grandezas localizadas na superfície de referência e numa superfície próxima desta, sendo que o alfabeto latino denota estado tridimensional e o grego, estado bidimensional. O quadro a seguir ilustra as comparações.

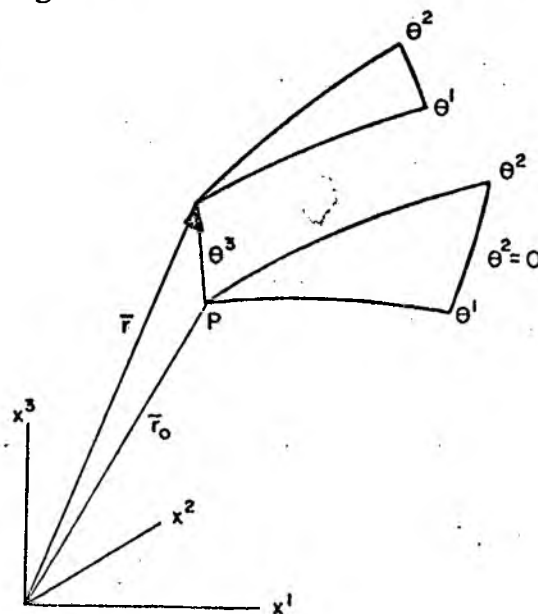
	Superfície Referência ($\theta^3 = 0$)	Superfície Genérica ($\theta^3 \neq 0$)
Vetor posição	\bar{r}_0	\bar{r}
Elemento linha	$d\bar{s}_0$	$d\bar{s}$
Vetores bases	$\bar{a}_\alpha, \bar{a}^\alpha, \bar{a}_3 = \bar{a}^3$	\bar{g}_i, \bar{g}^j
Tensor métrico	$a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta}$	g_{ij}, g^{ij}
Símbolos Christoffel	$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, \Gamma_{\alpha\beta\gamma}$	$\bar{\Gamma}_{ij}^k, \bar{\Gamma}_{ijk}$
Tensor permutação	$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}, \dot{\epsilon}^{\alpha\beta}$	$\dot{\epsilon}_{ijk}, \dot{\epsilon}^{ijk}$
Deslocamento	$\bar{u} = u^\alpha \bar{a}_\alpha + u^3 \bar{a}_3$	$\bar{v} = v^\alpha \bar{g}_\alpha + u^3 \bar{g}_3$
Tensor deformação	$\epsilon_{\alpha\beta}; \epsilon^{\alpha\beta}$	$\epsilon_{ij}, \epsilon^{ij}$

Vetores Base

O vetor posição de um ponto genérico P localizado na superfície de referência ($\theta^3 = 0$) é

$$\bar{r}(\theta^1, \theta^2, 0) \equiv \bar{r}_0(\theta^1, \theta^2) \quad (\text{B-2.1})$$

Denotando por θ^3 a distância ao longo da normal à superfície de referência s_0 e por \bar{a}_3 o vetor unitário, então o



vetor posição de um ponto arbitrário Q é

$$\bar{r}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{r}_0(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{a}_3(\theta^1, \theta^2) \quad (\text{B-2.2})$$

Derivando a relação acima, tem-se

$$\bar{g}_\alpha = \bar{r}_{0,\alpha} + \theta^3 \bar{a}_{3,\alpha}, \quad \bar{g}_3 = \bar{a}_3 \quad (\text{B-2.3})$$

e denotando os vetores tangentes à superfície de referência por

$$\bar{a}_i(\theta^1, \theta^2) = \bar{g}_i(\theta^1, \theta^2, 0), \quad (\text{B-2.4})$$

das equações (B-2.3) e (B-2.4) tem-se

$$\bar{g}_\alpha = \bar{a}_\alpha + \theta^3 \bar{a}_{3,\alpha}, \quad (\text{B-2.5})$$

$$\bar{a}_\alpha = \bar{r}_{0,\alpha}, \quad \bar{g}_3 = \bar{a}_3 = \bar{a}^3 \quad (\text{B-2.6})$$

Os vetores normais são unitários, isto é

$$\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_3 = 1, \quad \bar{g}_3 \cdot \bar{g}_3 = 1 \quad (\text{B-2.7})$$

Como \bar{a}_3 e \bar{g}_3 são normais a \bar{a}_α e \bar{g}_α , respectivamente,

tem-se

$$a_{\alpha 3} = \bar{a}_\alpha \cdot \bar{a}_3 = 0, \quad g_{\alpha 3} = \bar{g}_\alpha \cdot \bar{g}_3 = 0, \quad (\text{B-2.8})$$

então o tensor métrico tem a seguinte forma matricial

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [g_{ij}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-2.9})$$

e os determinantes correspondentes são

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} \quad (\text{B-2.10})$$

Um elemento de linha $d\bar{s}_0$ é um vetor tangente à superfície de referência, não tendo componente na direção θ^3 , sendo dado por:

$$d\bar{s}_0 = \bar{a}_\alpha d\theta^\alpha \quad (\text{B-2.11})$$

e o quadrado de sua norma é dado pelo produto interno

$$d\bar{s}_0 \cdot d\bar{s}_0 = \bar{a}_\alpha d\theta^\alpha \cdot \bar{a}_\beta d\theta^\beta = a_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta. \quad (\text{B-2.12})$$

Em geometria diferencial esta expressão é conhecida como primeira forma fundamental, e os coeficientes a_{11} , $a_{12} = a_{21}$, a_{22} são usualmente denotados por A, B, C. O vetor normal \bar{a}_3 é um vetor de módulo unitário, mas sua direção é função de θ^α e suas derivadas são vetores no plano tangente à superfície de referência no ponto considerado, ou seja

$$\bar{a}_{3,\alpha} = -b_{\alpha\beta} \bar{a}^\beta, \quad (\text{B-2.13})$$

onde

$$\bar{a}_{3,\alpha} \cdot \bar{a}_\beta = -b_{\alpha\gamma} \bar{a}^\gamma \cdot \bar{a}_\beta = -b_{\alpha\gamma} \delta_\beta^\gamma = -b_{\alpha\beta}. \quad (\text{B-2.14})$$

As quantidades $b_{\alpha\beta}$ são componentes covariantes de um tensor, chamados de tensor curvatura da superfície. Por diferenciação da relação de ortogonalidade ($\bar{a}_\alpha \cdot \bar{a}_3 = 0$), em relação a θ^β e usando (B-2.9), tem-se

$$\bar{a}_{\alpha,\beta} \cdot \bar{a}_3 = -\bar{a}_\alpha \cdot \bar{a}_{3,\beta} = b_{\beta\alpha}. \quad (\text{B-2.15})$$

Reescrevendo a equação (A-4.8) com a nova notação, resulta

$$\bar{a}_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \bar{a}_\gamma + \Gamma_{\alpha\beta 3} \bar{a}_3, \quad (\text{B-2.16})$$

onde

$$\Gamma_{\alpha\beta 3} = b_{\beta\alpha} = \bar{a}_{\alpha,\beta} \cdot \bar{a}_3.$$

Como os símbolos de Christoffel são simétricos com relação a α e β , $b_{\alpha\beta}$ também o é, e pode-se escrever

$$b_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta 3} = -\Gamma_{\alpha\beta}^3 = -\Gamma_{3\alpha\beta} = -\Gamma_{3\beta\alpha} = -\Gamma_{\alpha 3\beta}. \quad (\text{B-2.17})$$

Através do processo de levantamento de índices se pode obter os seguintes tensores

$$b_\beta^\alpha = b_{\gamma\beta} a^{\gamma\alpha}, \quad b^{\alpha\beta} = b_\gamma^\alpha a^{\gamma\beta} \quad (\text{B-2.18})$$

nos quais, utilizando as relações (B-2.17), resulta

$$b_{\beta}^{\alpha} = -\Gamma_{3\beta\gamma}^{\alpha\gamma} = -\Gamma_{3\beta}^{\alpha} = -\Gamma_{\beta 3}^{\alpha} . \quad (\text{B-2.19})$$

Reescrevendo a equação (A-4.5), com $\Gamma_{k\ell}^n = \Gamma_{3\beta}^{\alpha}$ ou $\Gamma_{\beta 3}^{\alpha}$, determina-se

$$\bar{a}_{3,\beta} \cdot \bar{a}^{\alpha} = \bar{a}_{\beta,3} \cdot \bar{a}^{\alpha} = -b_{\beta}^{\alpha} . \quad (\text{B-2.20})$$

A equação (B-2.8) pode ser escrita na forma alternativa como

$$\bar{a}_{3,\alpha} = -b_{\alpha}^{\beta} \bar{a}_{\beta} \quad (\text{B-2.21})$$

e, conseqüentemente, tem-se

$$d\bar{a}_3 = \bar{a}_{3,\alpha} d\theta^{\alpha} = -b_{\alpha}^{\beta} \bar{a}_{\beta} d\theta^{\alpha} = -b_{\alpha\beta} \bar{a}^{\beta} d\theta^{\alpha} \quad (\text{B-2.22})$$

e

$$\begin{aligned} d\bar{a}_3 \cdot d_o \bar{s} &= -b_{\alpha\beta} \bar{a}^{\beta} d\theta^{\alpha} \cdot \bar{a}_{\gamma} d\theta^{\gamma} = -b_{\alpha\beta} \delta_{\gamma}^{\beta} d\theta^{\alpha} d\theta^{\gamma} = \\ &= -b_{\alpha\beta} d\theta^{\alpha} d\theta^{\beta} . \end{aligned}$$

Em geometria diferencial o último membro da equação acima é conhecido como Segunda Forma Fundamental da Superfície e os coeficientes b_{11} , $b_{12} = b_{21}$, b_{22} são denotados por E, F, G. Uma interpretação da componente b_1^1 do tensor curvatura é obtida considerando $b_1^1 \neq 0$ e que o vetor \bar{a}_3 é normal à linha coordenada θ^1 conforme ilustrado na figura (B-2.2a).

Já que $|\bar{a}_3| = 1$, o comprimento do vetor

$$d\bar{a}_3 = \bar{a}_{3,1} d\theta^1 = -b_1^1 d\theta^1 \text{ sendo numericamente igual ao ângulo } d\phi \text{ que}$$

a normal a superfície girou.

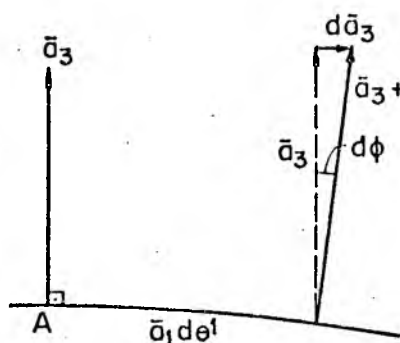


Fig. B-2.1a

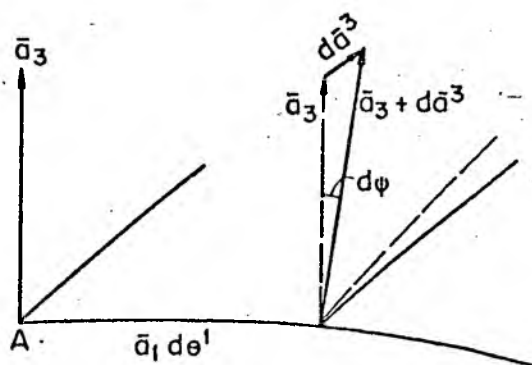


Fig. B-2.1b

A razão da variação do ângulo ϕ na direção θ^1 é

$$\frac{d\phi}{ds_1} = \frac{|d\bar{a}_3|}{|\bar{a}_1| d\theta^1} = b_{(1)}^{(1)}$$
 onde $b_{(1)}^{(1)}$ é a componente físico do tensor curvatura na direção θ^1 . Assumindo que $b_1^1 = 0$, porém $b_1^2 \neq 0$ e conforme figura (B-2.1b), tem-se

$$d\bar{a}_3 = \bar{a}_{3,1} d\theta^1 = -b_1^2 \bar{a}_2 d\theta^1$$

e conseqüentemente a razão da variação do ângulo ψ na direção θ^2 é

$$\frac{d\psi}{ds_0} = \frac{|d\bar{a}_3|}{|\bar{a}_1|} = b_{(1)}^{(2)} \frac{|\bar{a}_2|}{|\bar{a}_1|}$$

Quando $|\bar{a}_1| \neq |\bar{a}_2|$, os tensores b_1^2 e b_2^1 são diferentes. Existem dois importantes invariantes formados pelos tensores curvaturas que são

$$H = \frac{1}{2} b_\alpha^\alpha, \quad K = \frac{1}{2} \delta_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} b_\alpha^\lambda b_\beta^\mu \quad (\text{B-2.23})$$

chamados de curvaturas média e gaussiana, respectivamente.

B.3 - Áreas Elementares

Na figura (B-2.3), tem-se que a área elementar de uma superfície qualquer é delimitada pelas coordenadas θ^α . Essas mesmas coordenadas delimitam uma outra área elementar na superfície de referência. Portanto, a área ds é dada pela seguinte expressão

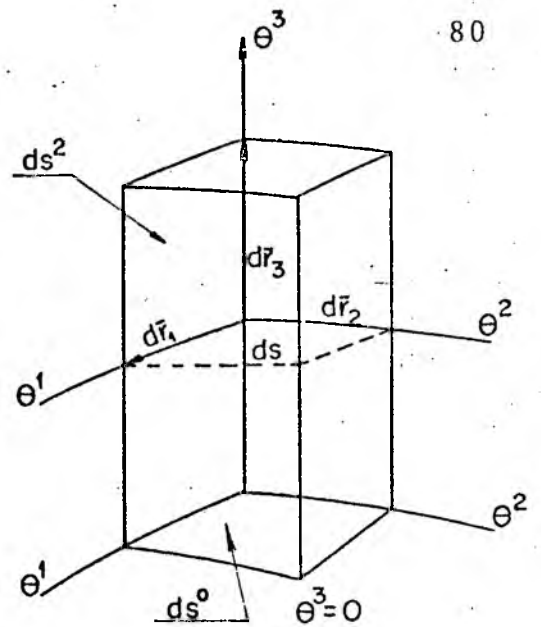


Fig. B-2.3

$$ds = \bar{a}^3 \cdot (d\bar{r}_1 \times d\bar{r}_2) = \bar{a}_3 \cdot (\bar{g}_1 \times \bar{g}_2) d\theta^1 d\theta^2 . \quad (\text{B-3.1})$$

Similarmente a área ds_0

$$ds_0 = \bar{a}_3 \cdot (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) d\theta^1 d\theta^2 , \quad (\text{B-3.2})$$

onde

$$\bar{g}_3 \cdot (\bar{g}_1 \times \bar{g}_2) = \bar{a}^3 \cdot (\bar{g}_1 \times \bar{g}_2) = \sqrt{g} , \quad (\text{B-3.3})$$

$$\bar{a}^3 \cdot (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = \bar{a}_3 \cdot (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = \sqrt{a} . \quad (\text{B-2.4})$$

Substituindo as equações (B-3.3) e (B-3.4) em (B-3.1) e (B-3.2) resulta

$$ds = \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 , \quad (\text{B-3.5})$$

$$ds_0 = \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2 . \quad (\text{B-3.6})$$

De acordo com a segunda equação (A-5.2) e considerando o espaço bidimensional, a equação (B-3.3) pode ser escrita na forma alternativa por:

$$\sqrt{g} = \sqrt{a} \frac{1}{2} \dot{\epsilon}^{\alpha\beta} a^{-3} \cdot (\bar{g}_\alpha \times \bar{g}_\beta) \quad (B-3.7)$$

Substituindo a equação (B-2.3) em (B-3.7) e utilizando (B-2.22), obtêm-se

$$\sqrt{g} = \sqrt{a} \frac{1}{2} \dot{\epsilon}^{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\mu\eta} (\delta_\alpha^\mu - \theta^3 b_\alpha^\mu) (\delta_\beta^\eta - \theta^3 b_\beta^\eta) \quad (B-3.8)$$

Com a expressão (B-2.23) para as curvaturas gaussianas e média, K e H, a equação (B-3.8) se reduz a forma

$$\sqrt{g} = \sqrt{a} [1 - 2H\theta^3 + K(\theta^3)^2] \quad (B-3.9)$$

Das equações (B-3.5) e (B-3.6) tem-se

$$\frac{ds}{ds_0} = \frac{dv}{ds_0 \theta^3} = \sqrt{\frac{g}{a}} = 1 - 2H\theta^3 + K(\theta^3)^2 \equiv \mu. \quad (B-3.10)$$