

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**DESCONTINUIDADES GEOMÉTRICAS E  
FRATURA DÚTIL EM AÇO ESTRUTURAL**

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA.

INGEBORG KÜHN ARROYO

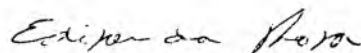
FLORIANÓPOLIS  
SANTA CATARINA - BRASIL  
DEZEMBRO - 1979

DESCONTINUIDADES GEOMÉTRICAS E FRATURA DÚTIL  
EM AÇO ESTRUTURAL


INGEBORG KÜHN ARROYO

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
"MESTRE EM ENGENHARIA"

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL  
PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO.

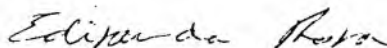


Prof. Edison da Rosa, M.Sc.  
Orientador

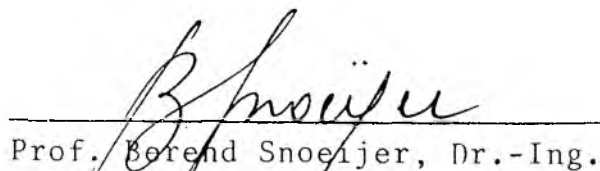


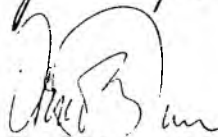
Prof. Arno Blass, Ph.D.  
Coordenador

Banca Examinadora:

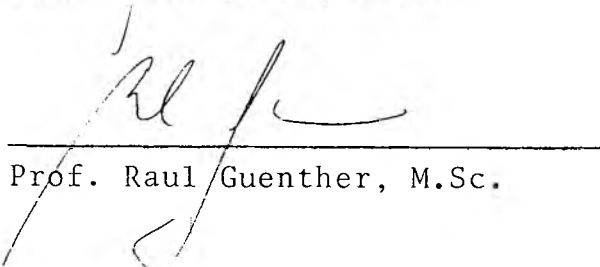


Prof. Edison da Rosa, M.Sc.

  
Prof. Berend Snoeijs, Dr.-Ing.



Prof. Arno Blass, Ph.D.

  
Prof. Raul Guenther, M.Sc.

Ao meu esposo Narciso  
Aos meus pais Herbert e Irma  
À minha irmã Maria Leonor  
Às minhas filhas Irma e Márcia

## **Agradecimentos**

A autora, ao término deste trabalho, deseja agradecer:

- Ao professor Edison da Rosa, pela impecável orientação e inestimável apoio e incentivo dados em todos os momentos da execução deste trabalho.

- Aos professores Arno Blass e Berend Snoeijer pelo apoio, estímulo e assistência recebidos.

- Aos técnicos Anildo Corrêa Agostinho, Antônio Duarte da Silva Filho e Valdir Ristow Jr. pela assistência amigável em várias fases da execução deste trabalho.

- Aos técnicos do Laboratório de Máquinas Operatrizes pela preparação dos vários dispositivos e corpos de prova utilizados na parte experimental.

- Ao pessoal do Laboratório de Medidas Mecânicas pelas sugestões e ajuda recebidas.

- Aos amigos e colegas que de alguma forma contribuíram neste trabalho, em particular ao acadêmico Nestor Back, pelo serviço de datilografia.

- Ao meu marido, pais e irmã pelo estímulo sempre renovador e efetiva ajuda no transcurso deste trabalho.

## Índice

1. INTRODUÇÃO .....	1
2. TEORIAS MICROSCÓPICAS DE RUPTURA DÚTIL .....	3
2.1 - Introdução .....	3
2.2 - Teoria de Broek .....	7
2.3 - Modelo de McClintock .....	8
2.4 - Modelo de Tracey .....	11
2.5 - Modelo de Rice e Tracey .....	12
2.6 - Modelo de Thomason .....	15
2.7 - Modelo de Nemat-Nasser .....	18
2.8 - Teoria específica para corpos de prova fissurados .....	20
3. CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES .....	26
3.1 - Concentração de tensões e deformações .....	27
4. MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR .....	37
4.1 - Desenvolvimento da Mecânica da Fratura .....	37
4.2 - Fratura com plasticidade restrita .....	42
4.2.1 - Estimativa da zona plástica segundo Irwin .....	43
4.2.2 - Estimativa da zona plástica segundo Dugdale .....	45
5. MECÂNICA DA FRATURA ELASTO-PLÁSTICA .....	49
5.1 - Introdução .....	49
5.2 - Integral J .....	50
5.3 - Deslocamento de abertura da trinca .....	51
5.3.1 - Análise teórica segundo Burdekin e Stone .....	52
5.3.2 - Algumas considerações sobre COD .....	53
5.4 - Método de Dowling e Townley .....	55
5.4.1 - Análise teórica .....	55

A1.2 - Integral J em corpos de prova do tipo CT .....	111
A1.2.1 - Análise limite de um corpo de prova CT .....	112
A1.2.2 - Análise da integral J .....	115
A1.3 - Estimativa de $\epsilon_{\text{máx}}$ pela integral J .....	122
A1.4 - Alguns comentários sobre a validade da integral J ....	128
APÊNDICE 2 - O MÉTODO DE MOIRÉ .....	131
A2.1 - Introdução .....	131
A2.2 - O fenômeno físico .....	131
A2.3 - Propriedade fundamental das franjas de Moiré .....	132
A2.4 - Determinação gráfica das componentes de deslocamento e deformação .....	136
APÊNDICE 3 - TABELAS E GRÁFICOS COM DADOS EXPERIMENTAIS .....	139

## Notação

A	- área da seção transversal do corpo de prova
a	- dimensão característica da trinca
$a_{eq}$	- dimensão da trinca equivalente
B	- espessura do corpo de prova
b	- distância entre o extremo da trinca e a extremidade do corpo de prova
c	- metade da distância entre o extremo da trinca e a extremidade do corpo de prova
E	- módulo de elasticidade do material
$E_0$	- módulo de elasticidade tangente, correspondente à tensão nominal
$E_s$	- módulo secante correspondente à tensão máxima
$E_{so}$	- módulo secante correspondente à tensão nominal
$E_T$	- módulo de elasticidade tangente, correspondente à tensão máxima
F	- carga
$F_{Icd}$	- carga máxima
G	- taxa de liberação de energia de deformação
J	- valor da integral J
$J_p$	- incremento da integral J causado pelo comportamento não linear do material
$K_i$	- fator de intensidade de tensão segundo o modo i de abertura da trinca
$K_{Ic}$	- fator de intensidade de tensão crítico
$K_{Icd}$	- fator de intensidade de tensão crítico segundo a equação (5.17)
$K_{I\epsilon}$	- fator de intensidade de deformação
$K_p$	- fator de intensidade de tensão plástico
$K_t$	- fator teórico de concentração de tensão
$K_\epsilon$	- fator de concentração de deformação
$K_\sigma$	- fator de concentração de tensão
k	- constante da relação $\sigma = k \epsilon^n$ (equação (3.11))
k	- constante elástica de rigidez do corpo de prova
$L_f$	- carga de falha real

$L_k$	- carga de falha prevista pela Mecânica da Fratura Elástica Linear
$L_u$	- carga de falha prevista pela análise limite
$n$	- expoente de encruamento do material
$p$	- passo do reticulado
$r$	- coordenada polar cilíndrica de um ponto em relação ao extremo da trinca
$r_p$	- raio plástico
$r_t$	- raio de curvatura do entalhe
$U$	- energia potencial
$u_i$	- deslocamento do extremo da descontinuidade na direção $i$
$W$	- função densidade de energia de deformação
$w$	- distância entre o ponto de aplicação de carga e a extremidade do corpo de prova
$Y$	- fator geométrico
$Y_p$	- fator de correção plástico
$\alpha$	- coeficiente (equação 14 - Apêndice 1)
$\Delta$	- deslocamento total
$\Delta_e$	- deslocamento elástico
$\Delta_p$	- deslocamento plástico
$\delta$	- deslocamento de abertura da trinca
$\epsilon$	- deformação
$\epsilon_{m\acute{a}x}$	- deformação máxima na descontinuidade
$\epsilon_o$	- deformação nominal
$\epsilon_t$	- deformação transversal
$\theta$	- coordenada polar cilíndrica
$\nu$	- coeficiente de Poisson elástico
$\sigma$	- tensão
$\sigma_E$	- tensão de escoamento do material
$\sigma_f$	- tensão de fratura
$\sigma_{frat}$	- tensão real de fratura
$\sigma_L$	- média entre as tensões de escoamento e ruptura convencionais
$\sigma_{m\acute{a}x}$	- tensão máxima na descontinuidade
$\sigma_o$	- tensão nominal
$\sigma_R$	- tensão convencional de resistência à tração



$\phi$  - ângulo tangente ao raio de curvatura do entalhe  
 $\Psi$  - estrição

## **Resumo**

Neste estudo, são analisadas teorias existentes de concentração de tensões e deformações, no regime elasto-plástico, bem como métodos de análise para caracterizar o início de uma ruptura dútil. Estas teorias são comparadas com dados obtidos experimentalmente quanto à concentração de deformações e à aplicação dos métodos de análise. É dado enfoque à utilização da Integral J tanto como parâmetro caracterizador de fratura dútil como também no cálculo da concentração de deformações. Simultaneamente foram estudadas algumas teorias de ruptura visando fornecer uma explicação sobre a forma como esta se processa.

## **Abstract**

Some existing theories of stress and strain concentration applicable in the elastic-plastic range as well as some methods of analysis for characterizing the beginning of a ductile rupture are analysed. Results of such theories are compared with experimental data in so far as strain concentration and application of analysis methods are concerned. Moreover, attention is paid to the use of the J-Integral as a characteristic parameter of ductile fracture and in the strain concentration computation. Simultaneously, some fracture theories are analysed with respect to the assumption which describes how the rupture develops.

## 1. Introdução

Um aspecto importante no dimensionamento de elementos estruturais é a capacidade do material suportar carga, sem que venha a falhar. De uma forma geral esta falha pode ser provocada por uma sobrecarga, que leva a uma ruptura estática, ou então devido à nucleação e propagação de trincas, provenientes de um carregamento dinâmico.

Durante muitos anos, a indústria aeronáutica desenvolveu esforços para compreender e prever o crescimento das trincas de fadiga. Mais recentemente, as indústrias de veículos e equipamentos pesados, passaram a mostrar um interesse crescente na propagação de fissuras. A análise da rejeição ou não de uma peça por algum processo não destrutivo, como por exemplo o uso do ultrassom, raios-X, raios- $\gamma$ , etc., baseia-se na indicação da existência de algum defeito interno de dimensão razoável. Este defeito, todavia, poderia ser aceito desde que houvesse a possibilidade de definir intervalos de inspeção de manutenção em função do seu crescimento, para evitar que este atinja um tamanho perigoso. Isto é de vital importância para peças de grandes dimensões, onde o custo de fabricação é elevado.

A Mecânica da Fratura Elástica Linear levou ao aparecimento de novos conceitos de projeto. Se um componente com um pequeno defeito for aceito, então o conhecimento da sua taxa de crescimento, geralmente por fadiga, irá permitir uma definição lógica de um ciclo de re-inspeção adequado para detectar a largura da trinca antes que ela aumente o bastante para causar a fratura. Similarmente, se há uma incerteza sobre o tamanho da trinca que tenha escapado à detecção, os testes de sobrecarga demonstram que uma trinca maior que um certo tamanho não causa fratura, e portanto pode-se considerar como se não existisse. A Mecânica da Fratura Elástica Linear pode ajudar na seleção do material ótimo ou tratamento térmico para um trabalho em particular.

Por outro lado, há a necessidade de examinar-se cuidadosamente os campos de tensão local, inclusive tensões residuais e

térmicas, os efeitos tri-dimensionais e os defeitos adjacentes, a fim de estimar uma propriedade do material que caracterize o início de ruptura. Contudo, as propriedades do material podem ser afetadas pela deterioração através de soldagem, alguma forma de fragilização metalúrgica (como a presença de altas concentrações de fósforo ou enxofre), anisotropia bem como outras causas. As indústrias com alta tecnologia tem tentado estabelecer vários procedimentos de controle de qualidade, inspeção e ensaios não destrutivos, como uma metodologia complementar necessária ao uso dos métodos de projeto baseados na Mecânica da Fratura Elástica Linear.

Para os materiais usualmente utilizados em componentes estruturais, os critérios de falha baseados na Mecânica da Fratura Elástica Linear não são aplicáveis, pois existe, quando da ruptura, uma plastificação generalizada. O presente trabalho visa obter informações detalhadas sobre o aspecto de concentração de tensões e deformações quando dentro do regime plástico, importante para o problema de fadiga, bem como analisar os métodos propostos para caracterizar o início da ruptura dútil, através da Mecânica da Fratura Elasto-Plástica.

O trabalho visa ainda comparar os dados obtidos experimentalmente com as teorias existentes de concentração de tensões e deformações, assim como com os métodos de análise para caracterizar o início de uma ruptura dútil. É dada maior atenção à utilização da integral J tanto como um método de análise para caracterizar a ruptura, como também no cálculo da concentração de deformações.

Ao mesmo tempo, fez-se um estudo sobre algumas teorias de ruptura dútil, com o fim de fornecer uma explicação sobre a forma como esta se processa.

## 2. Teorias Microscópicas de Ruptura Dútil

### 2.1 - Introdução

Uma ruptura pode ser classificada como frágil ou dútil. O termo frágil refere-se à fratura associada com baixa tenacidade, ou seja, pouca energia absorvida antes e durante a ruptura. Já a fratura dútil é aquela associada com alta tenacidade e grande deformação plástica antes da ruptura.

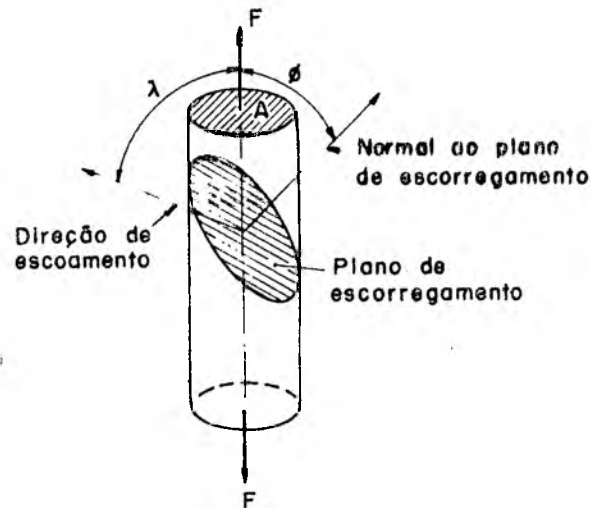
Os metais, em sua maioria, apresentam fratura dútil e é este tipo de ruptura que este trabalho se propõe a analisar.

Para um monocristal puro sob a ação de uma força de tração, ocorre o deslizamento sobre um plano devido a um esforço cortante ao longo de uma direção preferencial de escorregamento. Este esforço requerido para iniciar o deslizamento denomina-se tensão tangencial crítica (Lei de Schmid) e é uma constante para cada material a uma dada temperatura. Os planos preferenciais de escorregamento variam conforme o tipo de estrutura cristalina, mas, de forma geral, são aquelas famílias de planos com menor distância interplanar. As direções preferenciais de escorregamento semelhantemente variam com a estrutura cristalina, porém são aquelas que tem maior densidade linear [27]. A ruptura em um monocristal puro é mostrada na figura 2.1a.

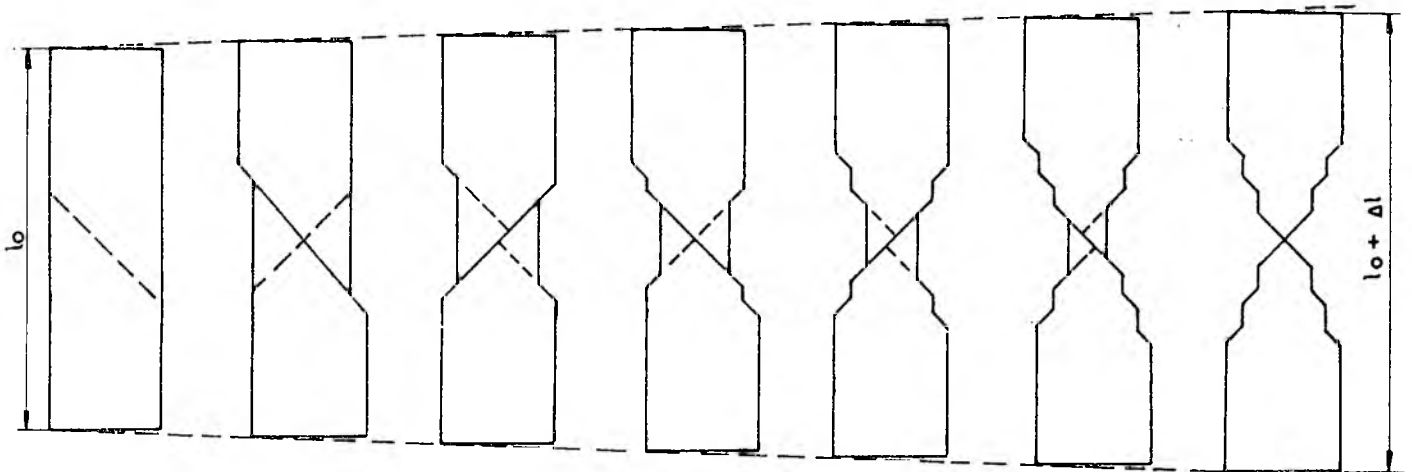
Para o caso de um policristal puro sob tensão, há o escorregamento simultâneo em vários planos conjugados de deslizamento. Isto ocorre porque cada cristal que compõe o material tem uma orientação distinta e assim, para cada um haverá um plano preferencial de deslizamento. Desta maneira a elongação plástica torna-se não homogênea, concentrando-se em uma pequena porção do corpo até que haja uma redução de área na sua seção transversal de 100%, conforme esquematizado na figura 2.1b.

Os materiais reais apresentam uma certa quantidade de defeitos cristalinos, inclusões e partículas de segunda fase. A fratura dútil destes materiais ocorre pelo deslizamento de um plano crist-

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{P}{A} \cos \phi \cos \lambda$$



(a)



(b)

Fig. 2.1 - Ruptura dútil de (a) um monocristal puro mostrando a tensão tangencial crítica necessária ao cisalhamento e, (b) de um policristal puro por cisalhamento.

lográfico sobre outro, paralelamente à formação de vazios em torno das inclusões ou partículas de segunda fase, com o consequente crescimento destes vazios até o seu coalescimento final.

Assim, a ruptura dútil pode ser caracterizada por três eventos essenciais: a nucleação de vazios em torno das inclusões ou partículas de segunda fase; o crescimento dos vazios sob a ação de deformação crescente; e a interconexão dos vazios levando à falha final.

A fratura dútil pode ainda ser classificada [02, 17,35] como transgranular (formação de vazios em torno das inclusões ou

partículas de segunda fase) e intergranular (formação de vazios ao longo dos contornos de grão durante a deformação plástica), conforme esquematizado na figura 2.2. Contudo, a fratura intergranular só ocorre em altas temperaturas e a baixos níveis de deformação [17]. Com base nestas conclusões, apenas a fratura dútil transgranular será estudada mais detalhadamente.

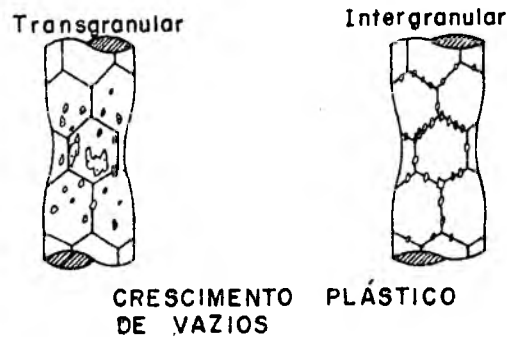


Fig. 2.2 - Classificação da fratura dútil

A nucleação dos vazios depende muito do tipo de partícula e da forma pela qual esta está ligada à matriz. As partículas podem ser classificadas como [06]:

- a) Partículas grandes, cujo tamanho varia entre 1 a 20  $\mu\text{m}$ . Consistem de compostos complexos formados por vários elementos de liga e não são tão resistentes quanto o material da matriz, exceto no caso dos carbonetos em certos aços;
- b) Partículas intermediárias, com tamanho da ordem de 500 a 5000  $\text{A}^\circ$ . Consistem de compostos complexos de vários elementos de liga, geralmente essenciais às propriedades do material;
- c) Partículas de precipitados, cujo tamanho é da ordem de 50 a 500  $\text{A}^\circ$ . Os elementos de liga são adicionados ao material através de tratamentos térmicos ou envelhecimento, com o fim de dar à liga uma tensão de escoamento elevada.

A nucleação dos vazios pode ocorrer ou pela separação da interface entre a partícula e a matriz, ou pela ruptura das partículas. Lindley et al. [17] concluíram que não é a magnitude da tensão aplicada que determina o início da nucleação, mas sim o estado local de deformação. A maneira pela qual as partículas respondem à deformação e induzem à formação de vazios depende de uma



série de fatores. As partículas que são aproximadamente esféricas sofrem em geral uma separação interfacial após uma certa quantidade de deformação plástica, enquanto que as partículas de forma irregular geralmente rompem por fratura interna.

Gurland [17] observou a dependência entre o tamanho da partícula e a forma de nucleação, concluindo que as partículas grandes rompem com pequenas deformações. Este comportamento pode ser devido à redução na capacidade de relaxação plástica para aliviar as grandes concentrações de tensão (ou deformação) na interface da partícula. Broek [06] observou que, embora os vazios sejam iniciados pelas partículas grandes a baixos níveis de deformação, a fratura final só ocorre com deformações bem maiores, concluindo que as grandes inclusões não são essenciais ao processo de fratura, embora reduzam a ductilidade do material.

Conforme Broek [06], a fratura é induzida pelas partículas intermediárias, já que estas, como não podem deformar-se tão facilmente quanto a matriz, perdem coesão com a mesma quando o corre extenso trabalho plástico.

Nemat-Nasser [35] relacionou a resistência das partículas e a energia interfacial entre a partícula e a matriz com a nucleação dos vazios. Conforme o autor citado, quando as partículas são frágeis, de forma que não acomodam a deformação plástica sofrida pela matriz, a nucleação ocorre pela ruptura destas partículas a baixos níveis de deformação. Por outro lado, quando as partículas são tão resistentes quanto a matriz, mas estão fracamente ligadas a esta, a nucleação pode ocorrer pelo deslizamento da interface entre a partícula e a matriz. Finalmente, quando as partículas são resistentes e estão fortemente ligadas à matriz, a nucleação é retardada, e o material exhibe alta ductilidade. Vários modelos teóricos tem sido propostos com o fim de predizer o início da nucleação dos vazios, em termos dos processos microestruturais e da mecânica do contínuo, tais como os modelos de Brown e Stobbs [17], Tanaki et al. [17] e Argon et al. [17].

Embora a nucleação seja essencial ao processo de fratura dútil, o evento principal que leva à falha final é o crescimento e a interconexão dos vazios. Diversos modelos tem sido apresentados a fim de explicar o crescimento e o coalescimento dos vazios. Estes podem ser classificados em modelos baseados na teoria

das discordâncias, como os apresentados por Ashby [49] e Broek [06], ou modelos baseados na mecânica do contínuo, como os propostos por McClintock [31], Tracey [49], Rice e Tracey [43], Thomason [50], Hellan [49], Needleman [49], Nemat-Nasser [35] e outros. Rice e Johnson [42] e posteriormente Green e Knott [18], apresentaram um modelo específico de ruptura dútil em corpos de provã fissurados, baseados na mecânica do contínuo. Nenhum destes modelos, no entanto, é compatível com as observações que podem ser feitas em superfícies com fratura dútil, embora muitos deles possam ser aplicados a casos particulares.

## 2.2 - Teoria de Broek

Baseado na teoria das discordâncias, Broek [06] desenvolveu um modelo para a nucleação, crescimento e coalescimento dos vazios, conforme resumido a seguir.

Quando as discordâncias encontram uma inclusão através dos planos de escorregamento ao longo dos quais vem se movendo durante a deformação plástica, elas tenderão a empilhar-se contra este obstáculo [23] (Figura 2.3a). O laço de discordâncias mais próximo à partícula será impelido em sua direção pelas tensões provocadas pelos laços subsequentes que emergem continuamente de uma fonte de discordâncias e pela tensão de cisalhamento aplicada. Este empilhamento, por sua vez, produz uma tensão contrária sobre a fonte, a qual continuará a produzir discordâncias até que a magnitude da tensão contrária seja igual à da tensão aplicada menos a tensão necessária para ativar a fonte. Quando um laço ou um par de laços, de discordâncias são impulsionados contra a interface da partícula, há uma separação entre a interface e o material, formando-se assim um vazio. Como consequência, as forças de repulsão sobre os laços subsequentes são drasticamente reduzidas e a maior parte destes pode atingir o vazio recém formado. As fontes de discordâncias, que se tornaram inativas devido à tensão de repulsão criada pelo empilhamento das discordâncias ao redor da inclusão, recomeçam a agir e o processo leva ao crescimento lateral instável do vazio e ao coalescimento final, logo que os vazios tenham se nucleado (Figura 2.3c,d).

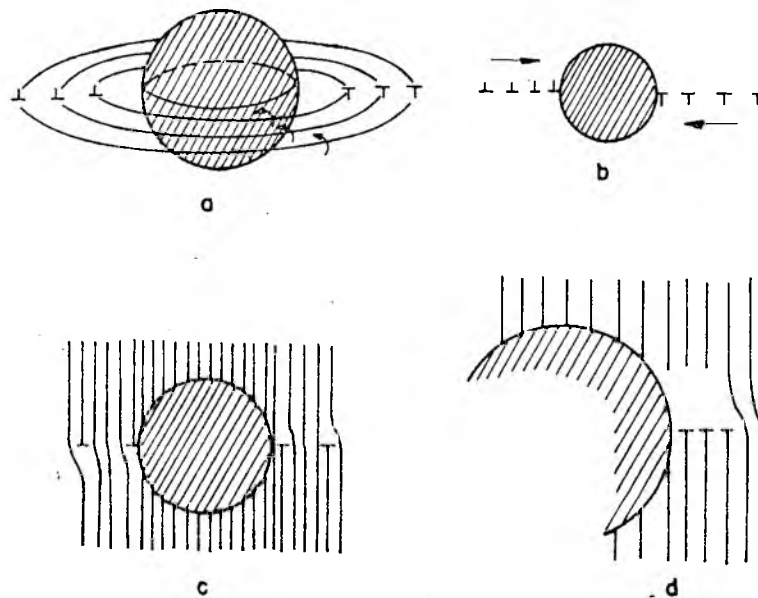


Fig. 2.3 - Modelo das discordâncias para o início e crescimento de vazios. (a) Laços de discordâncias empilhados. (b) Seção transversal; (c) Detalhe; (d) Cavidade.

O modelo de Broek [06] sugere que a nucleação dos vazios só ocorre em altas tensões ou deformações, de forma que o crescimento e coalescimento destes acontece imediata e espontaneamente. Isto está em desacordo com as observações experimentais, onde se constata que a nucleação ocorre em baixos níveis de deformação, enquanto que a falha final acontece em níveis bem mais elevados.

### 2.3 - Modelo de McClintock

McClintock [31] apresentou um modelo baseado na mecânica do contínuo para o crescimento e coalescimento de vazios cilíndricos de seção transversal elíptica, cujos eixos estão alinhados com as direções principais da tensão aplicada. Cada vazio é circundado por uma célula cilíndrica cujas dimensões são metade do espaçamento entre os vazios adjacentes. McClintock considera que os vazios permanecem bastante pequenos durante a maior parte do carregamento, tal que as interações entre eles possa ser desprezada. Desta forma, o problema fica reduzido à deformação generalizada de um vazio em um estado plano de deformação, em um meio infinito. O vazio pode expandir-se ou contrair-se e

continuará a ter uma seção transversal mais ou menos elíptica. O critério de ruptura empregado é aquele no qual o crescimento dos vazios, calculado como se eles estivessem em um meio infinito, é tal que cada vazio atinge as paredes de sua célula. Em outras palavras, um dos semi-eixos  $a$  ou  $b$  do vazio alcança o tamanho correspondente da sua célula (metade do espaçamento),  $\ell_a/2$  ou  $\ell_b/2$ , respectivamente. Esta condição pode ser descrita em termos de um fator de crescimento relativo,  $F_{ij}$ , que fornece o aumento dos semi-eixos do vazio em relação aos espaçamentos correspondentes. Por exemplo, para vazios com o eixo cilíndrico na direção  $z$  e que crescem na direção  $b$ , o fator de crescimento relativo pode ser definido como

$$F_{zb} = (b/\ell_b)/(b^0/\ell_b^0)$$

onde os sobre-índices  $o$  referem-se aos tamanhos iniciais do semi-eixo  $b$  e do espaçamento entre vazios adjacentes. Portanto, o fator de crescimento relativo de um vazio no momento de falha, devido aos vazios com eixo cilíndrico na direção  $z$  crescerem na direção  $b$  é

$$F_{zb}^f = (1/2)/b^0/\ell_b^0 \quad (2.1)$$

Devido à história do carregamento anterior, os semi-eixos e espaçamentos iniciais podem ser diferentes em direções diferentes. Assim, para o material como um todo, a fratura ocorrerá no plano  $ij$  (vazios paralelos ao eixo  $x_i$  coalescendo na direção  $j$ ) quando o fator de crescimento  $F_{ij}$  é o que primeiro alcança o seu valor crítico para a ruptura

$$F_{ij} = F_{ij}^f$$

McClintock [31] definiu ainda uma medida para o dano associado com o coalescimento parcial de um vazio, quando o material estiver sujeito a carregamentos variáveis, como sendo

$$d\eta_{ij} = d(\ln F_{ij})/\ln F_{ij}^f \quad (2.2)$$

Uma expressão simplificada para a taxa de crescimento dos vazios, denominada por McClintock [31] como taxa de dano, foi encontrada como sendo

$$\frac{d\eta_{zb}}{d\bar{\epsilon}} = \frac{\sinh \left[ \frac{(1-n)(\sigma_a + \sigma_b)}{(2\bar{\sigma}/\sqrt{3})} \right]}{(1-n) \ln F_{zb}^f} \quad (2.3)$$

onde  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  são as componentes transversais de tensão aplicadas ao sistema,  $\bar{\sigma}$  e  $\bar{\epsilon}$  são a tensão e a deformação equivalentes segundo a teoria de Von Mises e  $n$  é o expoente de encruamento. McClintock [31] integrou a equação (2.3) para o caso em que as relações entre as componentes de tensão são constantes, obtendo assim uma expressão para a deformação equivalente na fratura,  $\bar{\epsilon}^f$ , necessária para que os vazios com o eixo cilíndrico na direção  $z$  coalesçam na direção  $b$  como

$$\bar{\epsilon}^f = \frac{(1-n) \ln (\ell_b^0/2b^0)}{\sinh \left[ \frac{(1-n)(\sigma_a + \sigma_b)}{(2\bar{\sigma}/\sqrt{3})} \right]} \quad (2.4)$$

A aplicação do critério de fratura de McClintock a testes de tração pode ser feita com a ajuda da fórmula de Bridgman [47], já que esta relaciona as tensões tangenciais e radiais que surgem em um corpo com o início da estrição. Se a distribuição de deformações for uniforme ao longo da seção transversal do corpo, a tensão radial,  $\sigma_r$ , pode ser dada na forma

$$\sigma_r/\bar{\sigma} = \ln (1 + a/2R)$$

onde  $\bar{\sigma}$  é a tensão média do corpo em estrição,  $a$  é o raio na seção onde ocorreu a estrição e  $R$  é o raio de curvatura da superfície externa.

→ A equação (2.4) está em concordância qualitativa [49] com o resultado de testes experimentais, já que prevê um aumento na ductilidade com o aumento do expoente de encruamento e um decréscimo na deformação da fratura com o aumento das tensões transversais aplicadas. Contudo, a equação não está em concordância

quantitativa com testes experimentais, já que superestima consideravelmente as deformações na fratura para testes de tração, conforme comparações feitas com os dados experimentais obtidos por Edelson e Baldwin [49]. No sentido de reduzir a discrepância entre os resultados teóricos e experimentais, McClintock introduziu um critério de coalescimento dos vazios pelo cisalhamento localizado entre vazios adjacentes; contudo este procedimento não obteve sucesso, já que os valores experimentais relativamente baixos das deformações na fratura não podem ser fundamentados nesta explicação [49].

#### 2.4 - Modelo de Tracey

Tracey [49] apresentou um modelo, com base na mecânica do contínuo, para o crescimento transversal de um vazio circular, sobre o eixo de um cilindro de diâmetro finito, em um material rígido-plástico com encruamento. O autor admitiu primeiramente que o cilindro estivesse sujeito a uma taxa de deformação axial e a uma tensão transversal uniforme aplicada sobre sua parede externa. Sob esta condição, Tracey desenvolveu uma equação para a taxa de crescimento transversal do vazio em termos do expoente de encruamento do material e da triaxialidade do estado de tensões. Seus resultados mostram que um aumento no expoente de encruamento pode causar uma marcante redução na taxa inicial de crescimento do vazio. Em grandes deformações, porém, a taxa de crescimento converge rapidamente para a solução perfeitamente plástica (sem encruamento). A redução inicial da taxa de crescimento do vazio com o encruamento é grande para altos níveis de triaxialidade, porém pequena a baixos níveis de triaxialidade.

O critério de coalescimento do vazio adotado por Tracey [49] foi aquele proposto por McClintock [31], ou seja, haverá ruptura quando o crescimento transversal do vazio for tal que este alcance as paredes da célula cilíndrica que o envolve.

Tracey [49] usou este modelo para estimar a deformação na fratura da superfície estriccionada de um corpo de prova sob tração uniaxial. O autor admitiu que as células cilíndricas estivessem uniformemente distribuídas através da região estriccionada,

com seus eixos paralelos à linha de centro do corpo de prova. Tracey considerou ainda que as células tinham o mesmo diâmetro do vazio quando as relações de espaçamento fossem iguais à raiz cúbica da fração de volume dos vazios na região estriccionada. A equação da taxa de crescimento foi então integrada com a ajuda da fórmula de Bridgmann [47] para obter a distribuição das tensões na região estriccionada de um corpo de prova sob tração. As deformações na fratura obtidas por Tracey [49], assim como aquelas obtidas por McClintock [31], desprezam os efeitos de um possível coalescimento instável dos vazios em níveis de deformação onde as superfícies dos vazios estejam ainda bastante espaçadas. Admitindo que as propriedades do material fossem as mesmas do usado por Edelson e Baldwin [49] em suas experiências, foram calculadas as deformações na fratura teórica segundo o modelo de Tracey. Os resultados teóricos superestimam grandemente os experimentais, exceto os casos em que se tenha uma pequena fração de volume de vazios. No intuito de determinar se esta discrepância era devido aos efeitos do encruamento, Tracey [49] admitiu o expoente de encruamento como sendo zero e calculou as deformações na fratura para o mesmo modelo. Contudo, estes novos resultados, embora um pouco menos discrepantes com os experimentos, pouco diferiram dos resultados teóricos para o modelo com encruamento. Estes resultados estão em marcante contraste ao forte efeito do encruamento previsto pelo modelo de McClintock [31]. Os resultados de Tracey sugerem que o forte efeito do encruamento previsto na equação para a deformação na fratura do modelo de McClintock [31] é devido à falha da teoria ao desprezar a natureza transiente da taxa de crescimento dos vazios sob condições de encruamento.

## 2.5 - Modelo de Rice e Tracey

Rice e Tracey [43] apresentaram um modelo, fundamentado na mecânica do contínuo, para o crescimento de um vazio em um corpo de dimensões infinitas de um material rígido-plástico incompressível, sujeito a um estado triaxial de tensões e a um campo de deformação uniforme aplicado no infinito. Contudo, os autores não introduziram um critério para o coalescimento do vazio a fim

de estimar as deformações na fratura, interessando-se apenas em obter expressões para as taxas de crescimento do vazio nas direções dos eixos principais do campo plástico remoto.

No desenvolvimento do modelo, Rice e Tracey [43] consideraram primeiramente o crescimento de um vazio esférico de raio  $R_0$ , conforme ilustrado na figura 2.4, sob um campo de deformação constituído pela expansão do vazio na direção 3 e por sua contração nas direções 1 e 2, além de uma tensão normal média aplicada no infinito. O campo de velocidades através do material foi colocado em termos de três componentes básicos: (i) uma componente resultante do campo de deformação uniforme a fim de satisfazer as condições de contorno remotas; (ii) uma componente de dilatação  $D$ , correspondente à mudança de volume do vazio, sem variação de sua forma; (iii) uma componente de variação de forma  $E$ , dando a mudança da forma do vazio a volume constante. O termo  $(1+E)$  representa a razão entre a mudança de forma incompressível e a taxa de deformação imposta que, juntamente com  $D$ , determina completamente a geometria do vazio. Rice e Tracey [43] obtiveram soluções numéricas para  $D$  e  $E$  no caso de um material sem encruamento, concluindo

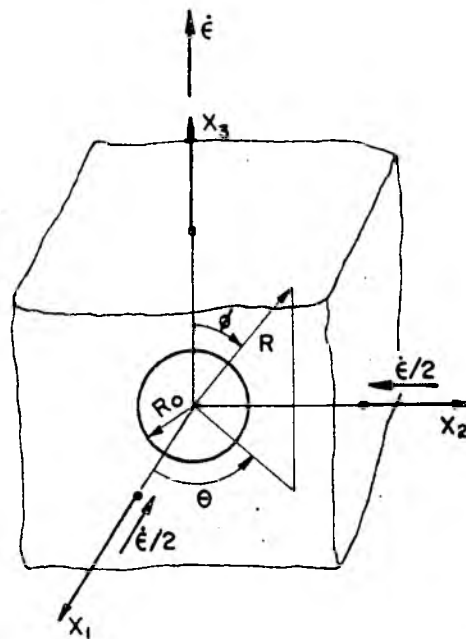


Fig. 2.4 - Vazio esférico sujeito a um campo de deformação e a uma tensão média aplicados no infinito.



que D depende exponencialmente da tensão média aplicada,  $\sigma_m$ , enquanto que o fator (1+E) é uma função linear de  $\sigma_m$ . Logo, em altos níveis de tensão aplicada, o crescimento do vazio é guiado pelo fator D.

Rice e Tracey [43] posteriormente consideraram que o campo de deformação aplicado fosse da mesma ordem de grandeza da tensão aplicada, e ambos fossem grandes, de modo que o corpo estivesse sujeito a um alto nível de triaxialidade. Desta análise os autores obtiveram uma expressão para o fator D que mostrou ser uma boa aproximação de D em todos os níveis do estado de tensão triaxial, como sendo

$$D = 0,558 \operatorname{senh} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_m}{\tau_E} \right) + 0,008\nu \operatorname{cosh} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_m}{\tau_E} \right) \quad (2.5)$$

onde  $\tau_E$  é a tensão de escoamento ao cisalhamento de um material sem encruamento e  $\nu$  é definido como

$$\nu = - \frac{3\dot{\epsilon}_{II}}{\dot{\epsilon}_I - \dot{\epsilon}_{III}} \quad (2.6)$$

sendo  $\dot{\epsilon}_I \geq \dot{\epsilon}_{II} \geq \dot{\epsilon}_{III}$  as componentes principais do campo de velocidades de deformação remotamente aplicado.

Rice e Tracey [43] desenvolveram então uma expressão aproximada para a taxa de crescimento de um vazio esférico em um campo de deformação arbitrário. Sendo  $\dot{R}_{OI}$ ,  $\dot{R}_{OII}$  e  $\dot{R}_{OIII}$  as velocidades radiais sobre a superfície do vazio em pontos alinhados com as direções das deformações principais  $\dot{\epsilon}_I$ ,  $\dot{\epsilon}_{II}$  e  $\dot{\epsilon}_{III}$ , tem-se que

$$\dot{R}_{Ok} = \left[ (1 + E)\dot{\epsilon}_k + \bar{\epsilon} D \right] R_o, \quad k = I, II, III \quad (2.7)$$

onde  $\bar{\epsilon}$  é a deformação remota equivalente e  $R_o$  é o raio do vazio esférico. A equação (2.7) pode ser integrada de modo a dar o crescimento finito de um vazio [43], substituindo-se para isto,  $R_o$  pela média dos três raios principais do vazio.

Embora Rice e Tracey não tivessem usado as equações (2.5) e (2.6) para predizer as deformações na fratura em um teste

de tração uniaxial, Thomason [49] efetuou esta tarefa admitindo o critério de coalescimento proposto por McClintock [31] e Tracey [49]. As deformações resultantes na fratura, em um teste de tração, para o modelo de crescimento do vazio sem encruamento de Rice e Tracey, foram comparadas com os resultados de testes experimentais obtidos por Edelson e Baldwin [49]. Thomason [49] concluiu que os resultados teóricos superestimam grandemente os resultados experimentais e que esta discrepância poderia ser ainda maior se os efeitos de encruamento fossem incluídos no modelo da taxa de crescimento. Contudo, Thomason [49] admite que o critério de coalescimento dos vazios empregado levou a erros apreciáveis no cálculo das deformações envolvidas nos resultados.

→ Com base nos resultados de Thomason, parece não ser conveniente propor-se um modelo para o coalescimento dos vazios e daí utilizar-se as equações de Rice e Tracey [43] para prever as deformações na fratura em um teste de tração.

## 2.6 - Modelo de Thomason

O modelo empregado por Thomason [50] para descrever o crescimento e coalescimento dos vazios está baseado em um pequeno elemento prismático de seção quadrada (Figura 2.5) em um estado plano de deformação, que contém uma distribuição uniforme de cavidades prismáticas quadradas. O material é rígido-plástico. Thomason considera que o elemento é deformado pela ação de uma tensão axial,  $\sigma_z$ , e uma tensão transversal,  $\sigma_x$ , que podem ser tanto de tração como de compressão. A deformação plástica ocorre sob a ação de uma pressão hidrostática sobreposta,  $P$ , transmitida ao corpo através de um fluido não viscoso. É admitido que o fluido não penetra nas cavidades internas. Conforme Thomason [50], a deformação plástica é composta de duas partes: se as cavidades estão bem distantes entre si, o material se deforma uniformemente como um todo (escoamento plástico uniforme) até o ponto em que as cavidades começam a coalescer (escoamento plástico instável). Foi admitido que a presença das cavidades não influencia o modo de escoamento uniforme da matriz, já que aquelas se deformam uniformemente com a mesma.

→ Para que haja o início do coalescimento, é preciso que

a carga necessária para causar a estricção interna de uma linha de cavidades seja maior que a carga necessária para o escoamento uniforme do elemento como um todo. Esta condição foi colocada como

$$\frac{\sigma_n}{2\tau_E} (1 - \sqrt{V_f}) + \frac{P}{2\tau_E} < \frac{\sigma_x}{2\tau_E} + 1 \quad (2.8)$$

onde  $\sigma_n$  é a tensão de tração principal necessária para causar escoamento do volume de material entre duas cavidades adjacentes (inter-cavidade),  $\tau_E$  é a tensão de escoamento ao cisalhamento do material e  $V_f$  é a fração de volume das cavidades na matriz. Thomason denominou de fator de restrição a razão  $\sigma_n/2\tau_E$  e obteve uma relação entre este fator e a geometria da inter-cavidade,  $a/b$  (figura 2.5) para estricções localizadas.  $\sigma_n/2\tau_E$  foi calculado para diferentes geometrias da intercavidade, concluindo-se que se  $a/b \ll 1$ , o fator de restrição necessário para causar a estricção entre as cavidades é tão alto que o coalescimento é impedido e o elemento continua a se deformar uniformemente, alongando as cavidades na direção de tração principal e causando uma contração transversal. Este modo de deformação tem o efeito de reduzir a razão  $a/b$ , e com isto reduzir o fator de restrição, chegando-se à condição em que possa ocorrer o coalescimento instável das cavidades e subsequente fratura da linha mais débil de cavidades. A deformação na fratura é, portanto, a deformação média alcançada no início do coalescimento instável, desde que o deslocamento associado com o estriccionamento interno de uma linha de cavidades corresponda a um incremento desprezível de deformação, a nível macroscópico (figura 2.5).

Thomason [50] reescreveu a equação (2.8) para o caso de um estado triaxial de tensões como

$$\frac{\sigma_n}{2\tau_E} (1 - \sqrt{V_f}) + \frac{P}{2\tau_E} < \frac{1}{2} + \frac{\sigma_m}{2\tau_E} \quad (2.9)$$

onde  $\sigma_m$  é a componente de tensão hidrostática.

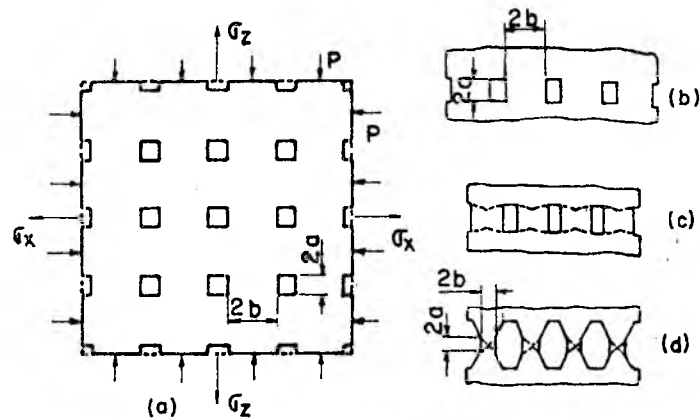


Fig. 2.5 - (a) Elemento quadrado prismático em um estado plano de deformação, mostrando (b), (c) escoamento uniforme e (d) estriccionamento interno.

O critério para o coalescimento instável das cavidades no modelo de Thomason [50] é dependente da tensão, o que o difere fundamentalmente dos modelos de McClintock [31], Tracey [49] e Rice e Tracey [43]. É proposto no modelo de Thomason que antes do início do estriccionamento interno, as grandes expansões transversais dos vazios não são uma condição essencial à fratura dútil, desde que o grande crescimento transversal necessário para o coalescimento dos vazios ocorra rapidamente em uma linha de vazios associada com a formação da superfície de fratura, uma vez iniciado o estriccionamento interno. Este aspecto do modelo é consistente com observações experimentais de micro-seções de regiões imediatamente adjacentes às superfícies de fratura dútil [50], as quais mostram que os vazios ainda estão largamente espaçados.

A aplicação do modelo de Thomason a testes de tração pode ser feita através da equação (2.8) e da expressão abaixo, que relaciona a geometria da inter-cavidade  $a/b$  com a deformação  $\epsilon_z$  devida à tensão principal e a fração de volume  $V_f$ , durante o escoamento plástico uniforme.

$$\frac{a}{b} = \exp(2\epsilon_z) \sqrt{V_f} / (1 - \sqrt{V_f}), \quad (2.10)$$

Quando comparados resultados teóricos obtidos por este procedimento com dados experimentais [50], vê-se que os mesmos estão em boa

concordância qualitativa, embora os resultados teóricos tendam a dar um valor para a deformação na fratura ligeiramente menor que o valor observado experimentalmente. Um fator que contribui para esta discrepância é indubitavelmente a ausência do encruamento no modelo teórico. Partindo de que, quando partículas de segunda fase estão fracamente ligadas à matriz de um metal real que apresenta encruamento, as condições para o início do estriccionamento interno são provavelmente retardadas até que a matriz alcance um nível de deformação correspondente ao expoente de encruamento, onde este nível é atingido a uma deformação aproximadamente igual à de formação para a instabilidade plástica,  $\epsilon_I$  (estriccionamento externo); e que quando as partículas estão fortemente ligadas à matriz, é necessária uma deformação da ordem de  $\epsilon_I$  para nuclear uma fração de volume apreciável de vazios; Thomason [50] adicionou a deformação na instabilidade plástica,  $\epsilon_I$ , aos resultados de deformação na fratura do modelo sem encruamento. Assumindo  $\epsilon_I \approx 0,1$ , Thomason [50] mostrou que estes resultados teóricos que consideram o efeito do encruamento estão em excelente concordância quantitativa com os dados experimentais.

## 2.7 - Modelo de Nemat-Nasser

Nemat-Nasser [35] propôs, recentemente, uma possível teoria para a fratura dútil baseada na mecânica do contínuo, que está sendo desenvolvida pelo autor e por seus colaboradores. Neste modelo, o material é considerado dividido em células unitárias de dimensões microscópicas, cada qual contendo uma ou mais inclusões onde foram nucleados vazios. O tamanho e a localização das partículas dentro da célula, bem como o tamanho da célula e ainda a distribuição das células do material podem ser caracterizados estatisticamente, e, com este intuito, o autor vem desenvolvendo modelos que satisfaçam as condições precedentes.

Nemat-Nasser descreve o processo de ruptura dútil em termos de dois parâmetros: o trabalho plástico médio, por unidade de volume inicial da matriz dentro de uma célula e o desvio padrão do trabalho plástico dentro da célula, ou seja:

$$\bar{w}_p = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} w_p dV \quad (2.11)$$

$$\epsilon_p = \left\{ \frac{1}{V_0} \int_{V_0} |w_p - \bar{w}_p|^2 dV \right\}^{1/2} \quad (2.12)$$

onde  $\bar{w}_p$  é a densidade média do trabalho plástico,  $V_0$  é o volume inicial da matriz dentro de uma célula,  $w_p$  é a densidade do trabalho plástico medida por unidade do volume inicial e  $\epsilon_p$  é a medida da localização do trabalho plástico. O autor definiu um parâmetro de localização,  $\sigma_p$ , como sendo

$$\sigma_p = \epsilon_p / \bar{w}_p \quad (2.13)$$

e introduziu uma medida para o dano causado durante o processo de fratura,  $D$ , como

$$D = D(\bar{w}_p, \sigma_p)$$

tal que a falha final ocorre quando  $D$  alcança um valor crítico  $D_c$ . Para avaliar-se  $\bar{w}_p$  e  $\sigma_p$  é necessário um modelo representativo do material em questão.

Segundo Nemat-Nasser [35], o modelo considera os efeitos de um estado triaxial de tensões, bem como os efeitos das propriedades da matriz, especialmente sua resistência e plasticidade e ainda inclui os efeitos do espaçamento entre partículas, tamanho destas e sua interação, já que todos influenciam a densidade média do trabalho plástico,  $\bar{w}_p$ , e o parâmetro de localização,  $\sigma_p$ .

O autor argumenta que o uso dos parâmetros  $\bar{w}_p$  e  $\sigma_p$  são suficientes na caracterização da incipiência da fratura dútil, com base no seguinte: o crescimento dos vazios envolve intensa deformação plástica e, portanto, intenso trabalho plástico; esta deformação plástica, e logo o trabalho plástico, está altamente localizada; e, a distribuição dos vazios é aleatória, sendo que a distribuição do trabalho plástico é aleatória, de forma que  $\bar{w}_p$  e  $\sigma_p$

representam duas medidas elementares para uma descrição estatística.

O modelo apresentado por Nemat-Nasser parece estar bem embasado, embora não seja possível fazer-se uma análise mais completa do mesmo pela ausência de maiores resultados.

## 2.8 - Teoria específica para corpos de prova fissurados.

Rice e Johnson [42] apresentaram um modelo de ruptura específico para corpos de prova fissurados. Green e Knott [18], baseados neste primeiro modelo, desenvolveram uma análise para prever a fratura dútil de um corpo contendo um entalhe, sujeito a um estado plano de deformação, com pequena plastificação. O procedimento de Green e Knott será descrito já que este considera ainda os efeitos do encruamento e do tamanho e número de inclusões no material sobre a ruptura dútil.

Se um corpo contendo uma trinca aguda, como o proposto por Green e Knott [18], for tracionado, o campo de linhas de escorregamento é tal que não há concentração de deformação ao redor do extremo da trinca, mas intensa concentração de tensões de cisalhamento (figura 2.6), que tenderá a abrir a trinca. Como consequência, as linhas de escorregamento não ficam centradas com o extremo da trinca e convergem a uma distância  $x_0$  que pode ser relacionada à abertura da trinca  $\delta$ . Esta região de convergência é o foco de uma espiral logarítmica de linhas cisalhantes e é uma zona que apresenta intensa concentração de deformação. A tensão máxima de tração localiza-se no ponto D, conforme pode ser visto na figura 2.7. Para um material apresentando encruamento, a tensão máxima ocorreria no extremo da trinca. O critério de coalescimento adotado consiste no seguinte: quando uma inclusão for envolvida pela zona de grande deformação criada à frente da trinca, esta ficará sujeita à deformação plástica até o momento em que o ponto D coincidir com o seu centro, onde então ocorrerá a nucleação de um vazio (Figura 2.8). Este vazio irá crescendo juntamente com uma extensão adicional na abertura da trinca. O coalescimento final ocorrerá pelo intenso cisalhamento ao longo da espiral loga-

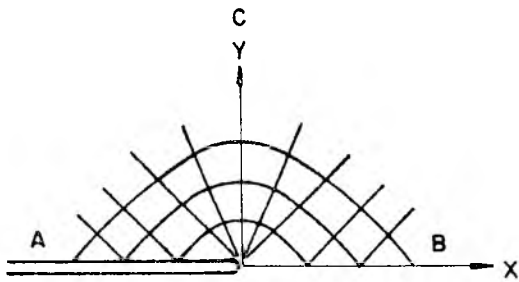


Fig. 2.6 - Campo de linhas de escorregamento para o extremo de uma trinca aguda em um estado plano de deformação.

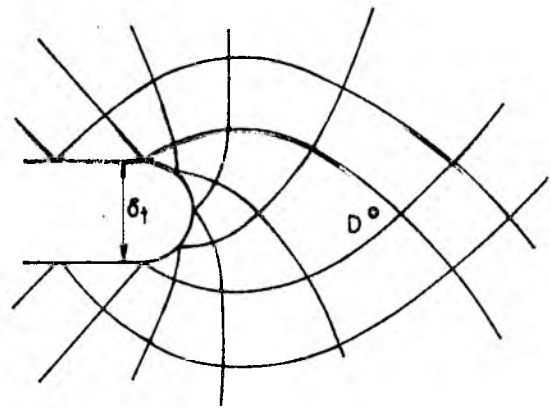


Fig. 2.7 - Campo de linhas de escorregamento para o extremo aberto de uma trinca em um estado plano de deformação.

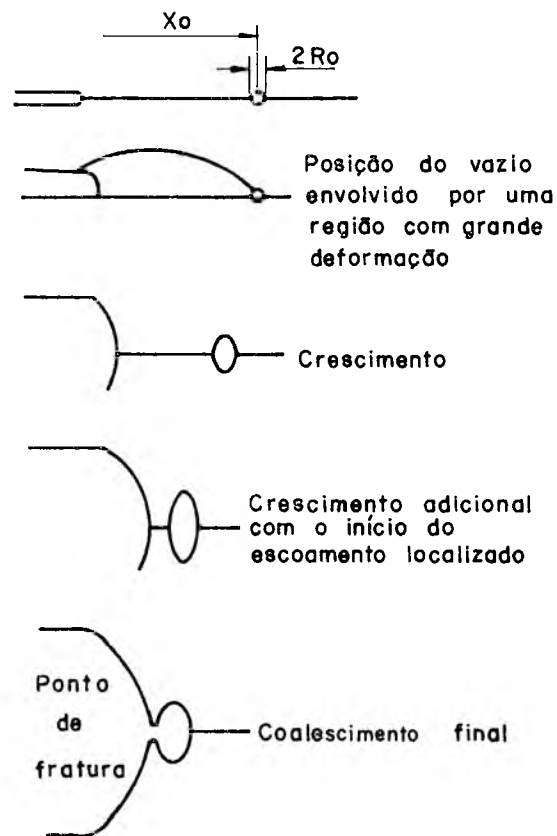


Fig. 2.8 - Modelo para a ruptura dútil conforme [18,42]



rítmica. Se ocorrer encruamento, a distribuição de deformação ao redor da extremidade da trinca é mais espalhada, já que cada incremento sucessivo de deformação causa encruamento e este, por sua vez, faz com que o próximo incremento de deformação ocorra numa disposição diferente. Em locais mais distantes ocorre deformação uniforme antes de ser atingida a condição para o estriccionalmente final entre o vazio expandido e o extremo aberto da trinca (Figura 2.8). Desta forma, Green e Knott [18] propuseram que o início da ruptura dútil para materiais que apresentam encruamento depende de duas componentes. A primeira é a zona plástica macroscópica, onde ocorrem pequenas deformações em uma área constituída por dois lóbulos de comprimento máximo de  $50x_0$  e mínimo de  $10x_0$ , conforme está esquematizado na figura 2.9. A segunda componente é a zona de processo, ou região na qual as deformações são grandes e aproximadamente iguais à deformação na fratura. Para que a zona de processo se desenvolva é necessário que a zona plástica tenha tamanho suficiente a fim de acomodar os deslocamentos envolvidos, através dos gradientes de deformação, os quais variam de acordo com a capacidade de encruamento da matriz.

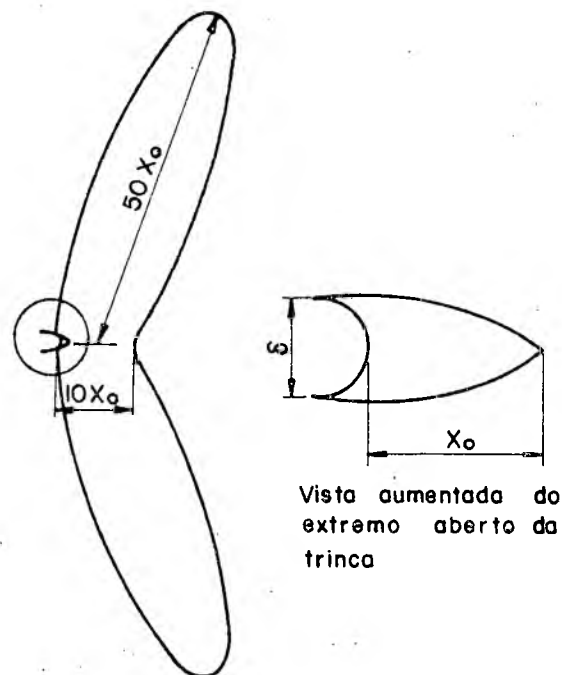


Fig. 2.9 - Tamanho da zona plástica para o início da fratura.

Green e Knott [18] estudaram o efeito da capacidade de encruamento do material sobre o início da fratura dútil, através de dados experimentais. A capacidade de encruamento do material, medida pelo expoente de encruamento  $n$ , está diretamente relacionada ao tamanho da zona plástica (Figura 2.10). Logo, nos materiais com baixa capacidade de encruamento, a deformação está altamente localizada no extremo da trinca e, uma vez que a zona de processo tenha envolvido uma inclusão, a ligação entre o vazio e a extremidade da trinca torna-se instável. Já para os materiais com alta capacidade de encruamento, a deformação é dissipada através do arredondamento da fissura e será necessário então um grande crescimento dos vazios antes que a região entre estes e o extremo da trinca torne-se instável. O modelo teórico considera adequadamente estes efeitos, como mostrado em [18].

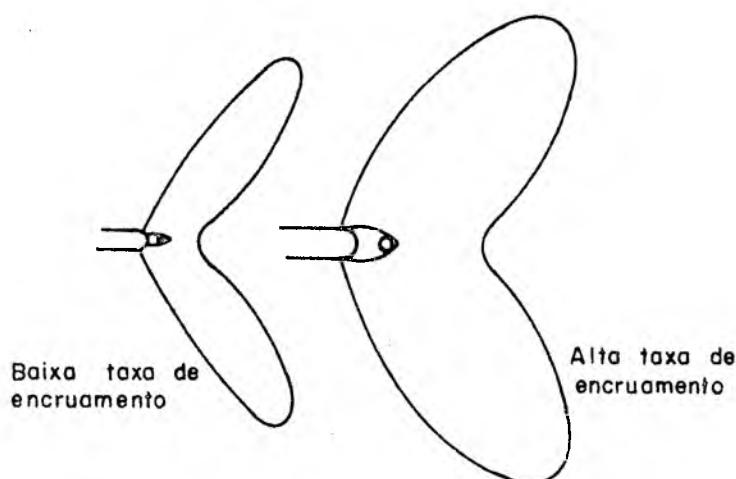


Fig. 2.10 - Influência da taxa de encruamento no tamanho da zona plástica.

Green e Knott [18] consideraram também os efeitos das inclusões sobre o início da fratura dútil, concluindo que estas influenciam a deformação necessária para iniciar a fratura e ainda determinam a distância característica,  $x_0$ , sobre a qual é alcançada a deformação na fratura. Conforme já previsto nos modelos anteriores [31,43,49,50], a deformação na fratura está diretamente relacionada à fração de volume das inclusões no material, de forma que quanto maior é o número de inclusões, menor é a dutilida

de do material. O grau de vínculo da inclusão à matriz também afeta os níveis de deformação nos quais irá iniciar-se o crescimento dos vazios. A orientação da inclusão em relação ao extremo da trinca também produz um efeito sobre a ductilidade do material. No modelo, o estágio crítico é o envolvimento de uma inclusão pela espiral logarítmica de linhas cisalhantes ao redor da extremidade aberta da trinca. Somente depois que este estágio é atingido é que se inicia um crescimento apreciável do vazio. Se as inclusões são alongadas, alinhadas normalmente ao extremo da trinca, necessitarão uma grande zona de processo para envolvê-las, e a taxa de crescimento do vazio para tais inclusões será menor quando comparada à taxa de crescimento para inclusões achatadas, por conseguinte dando origem a uma maior ductilidade. Os resultados experimentais mostram que o modelo se adapta perfeitamente ao caso das inclusões achatadas em relação ao extremo da trinca, porém superestima os valores da ductilidade para as inclusões alongadas. A influência das inclusões na determinação da distância característica,  $x_0$ , sobre a qual é atingida a deformação na fratura,  $\epsilon_f$ , pode ser determinada como

$$\delta_i = \epsilon_f x_0 \quad (2.14)$$

onde  $\delta_i$  é a abertura da trinca no início da ruptura dútil. Os resultados teóricos previstos pelo modelo e as observações experimentais mostraram-se em boa concordância. O tamanho das inclusões também afeta a ductilidade do material. As inclusões grandes ( $>1 \mu\text{m}$ ) determinam a distância  $x_0$  sobre a qual ocorre o processo de fratura e as inclusões pequenas determinam a deformação através da distância característica  $x_0$ , necessária à fratura. O maior efeito das inclusões sobre a energia necessária para o início da fratura dútil é na distância característica sobre a qual é atingida a deformação na fratura,  $x_0$ . Esta dita o tamanho da zona de processo, a qual por si própria determina o tamanho da zona plástica para determinadas propriedades de encruamento. Um pequeno decréscimo no teor das inclusões pode, no entanto, produzir um grande aumento de ductilidade.

A aplicação do modelo de Green e Knott para testes de tração em corpos apresentando entalhes pode ser feita diretamente

da medida do deslocamento de abertura da trinca,  $\delta$ , conforme será visto no capítulo 4, e da micrografia da região fraturada.

O modelo proposto por Green e Knott [18] parece ser o que melhor se adapta em caracterizar o início da ruptura dútil de materiais reais, já que os efeitos previstos de encruamento, forma, tamanho e quantidade de inclusões estão em boa concordância com os resultados experimentais.

### 3. Concentração de Tensões e Deformações

Se um corpo está sujeito à ação de forças externas, surgem tensões internas no seu interior, de forma que seja estabelecido o equilíbrio entre as forças externas e internas. No caso de uma barra prismática sob tração uniaxial, a distribuição de tensões apresenta-se conforme mostrado na figura 3.1, onde os esforços internos na seção A-A equilibram a carga aplicada.

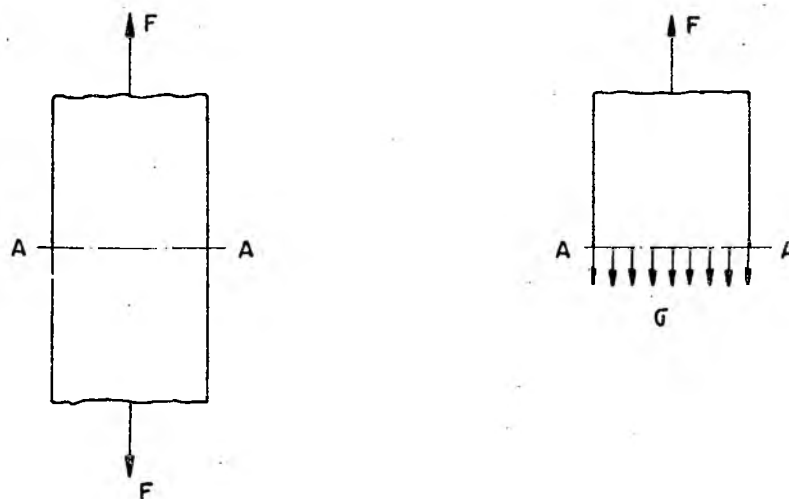


Fig. 3.1 - Corpo sob tensão

Contudo, se este corpo contiver uma descontinuidade geométrica, ocorre uma perturbação na distribuição de tensões, já que os elementos adjacentes à descontinuidade devem ser fisicamente contínuos em um estado deformado. Logo, as deformações são máximas na vizinhança da descontinuidade e as tensões correspondentes também o são (figura 3.2). Assim, as equações elementares relacionando as tensões aos carregamentos não mais descrevem o estado de tensões naquela região.

É usado um fator teórico de concentração da tensão,  $K_t$ , a fim de relacionar a tensão máxima na descontinuidade com a tensão nominal, admitindo um material perfeitamente elástico,  $K_t$  é definido pela equação

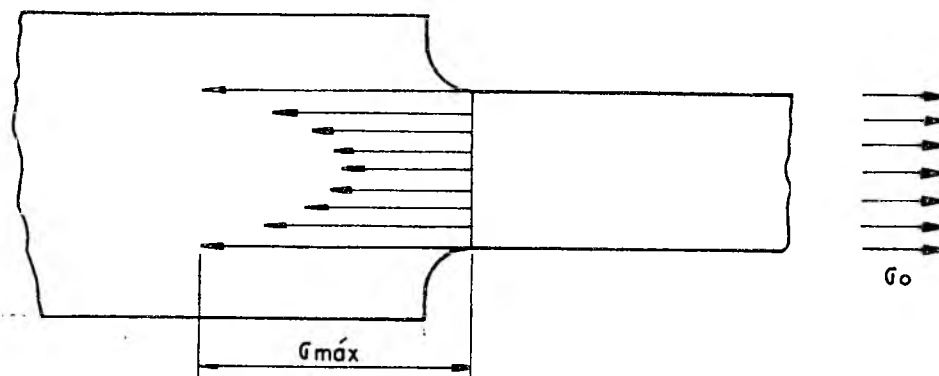


Fig. 3.2 - Distribuição de tensões próximas a um entalhe.

$$K_t = \sigma_{\text{máx}} / \sigma_0 \quad (3.1)$$

onde  $\sigma_{\text{máx}}$  é a tensão máxima na seção da descontinuidade geométrica e  $\sigma_0$  é a tensão nominal.

Dentro do regime elástico as tensões e as deformações estão relacionadas pela lei de Hooke. Assim, o fator de concentração de tensão pode ser também definido como

$$K_t = \frac{\epsilon_{\text{máx}}}{\epsilon_0} = \frac{E \epsilon_{\text{máx}}}{\sigma_0} \quad (3.2)$$

onde  $\epsilon_{\text{máx}}$  é a deformação máxima na descontinuidade,  $\epsilon_0$  é a deformação nominal e  $E$  é o módulo de elasticidade do material.

### 3.1 - Concentração de tensões e deformações

No regime plástico a tensão efetiva excede a tensão limite de elasticidade do material e, portanto, as deformações não serão somente elásticas mas também plásticas. Sob estas condições, em um estado plano de tensões, é conveniente definir um fator de concentração de tensão,  $K_\sigma$ , e um fator de concentração de deformação,  $K_\epsilon$ , como sendo

$$K_\sigma = \sigma_{\text{máx}} / \sigma_0 \quad (3.3)$$

e

$$K_{\epsilon} = \epsilon_{\text{máx}}/\epsilon_0 \quad (3.4)$$

De um modo mais geral, pode-se designar  $K_t$  como sendo o fator elástico de concentração de tensão ou deformação.

No entanto, quando a tensão máxima ultrapassa o limite elástico, ocorre um escoamento localizado nas proximidades da descontinuidade, de forma que a tensão máxima é menor do que a esperada para o caso elástico. Para compensar a redução da tensão máxima, ocorre um aumento da tensão no interior do corpo, e eleva-se também a deformação que se verifica no material, mantendo-se assim o equilíbrio com as cargas externas. Logo, o fator de concentração de tensões decresce em relação ao fator teórico, enquanto que o fator de concentração de deformação aumenta, ou seja,

$$K_{\sigma} = \sigma_{\text{máx}}/\sigma_0 \leq K_t \quad (3.5a)$$

$$K_{\epsilon} = \epsilon_{\text{máx}}/\epsilon_0 \geq K_t \quad (3.5b)$$

A fim de prever o comportamento plástico de uma descontinuidade geométrica foram propostas várias relações analíticas, dentre elas a de Neuber e a de Stowell-Hardrath-Ohman. Em ambas, o comportamento plástico da descontinuidade está caracterizado em termos dos fatores de concentração de tensão e deformação.

Segundo Neuber [01,36]

$$K_t^2 = K_{\sigma} K_{\epsilon} \quad (3.6)$$

e, segundo a teoria de Stowell-Hardrath-Ohman [01,08,38,53]

$$K_{\sigma} = 1 + (K_t - 1)E_s/E_{s0} \quad (3.7)$$

e

$$K_{\epsilon} = K_{\sigma} E_{s0}/E_s \quad (3.8)$$

onde  $E_s$  é o módulo secante do material correspondente à tensão máxima e  $E_{s0}$  é o módulo secante para a tensão nominal, definidos co

mo

$$E_s = \sigma_{\text{máx}} / \epsilon_{\text{máx}} \quad (3.9)$$

e

$$E_{s_0} = \sigma_0 / \epsilon_0 \quad (3.10)$$

— Sob condições de carregamento estático, os módulos secante  $E_s$  e  $E_{s_0}$  podem ser determinados através do diagrama tensão-deformação. No caso elástico tem-se que  $E_{s_0}$  é igual a  $E$ .

Admitindo que as tensões e as deformações possam ser tanto elásticas como plásticas, pode-se prever diferentes tipos de comportamento do material, ou seja

Caso	Condição na seção da peça	Condição no extremo da descontinuidade
EE	elástica	elástica
EP	elástica	plástica
PP	plástica	plástica

No primeiro caso, EE, tem-se que, tanto a tensão ou a deformação nominal na seção da peça, como a tensão ou a deformação na raiz da descontinuidade, são menores que a tensão ou deformação de escoamento do material, significando que ambos estão no estado elástico. No caso EP, tem-se que a seção da peça continua no regime elástico, porém o ponto onde há maior concentração de tensão e, portanto, no qual a deformação é máxima, já se encontra no regime plástico. Finalmente, tem-se a plastificação total, tanto da seção da peça como da região onde há a descontinuidade.

A figura 3.3 apresenta a representação do diagrama  $K_\sigma$  versus  $K_\epsilon$  de um material que exiba uma relação entre a tensão,  $\sigma$ , e a deformação,  $\epsilon$ , da forma

$$\sigma = k \epsilon^n \quad (3.11)$$

onde  $n$  é o expoente de encruamento e  $k$  é uma constante. Das definições dos fatores de concentração de tensão e de deformação, e a partir da equação (3.11), tem-se que





plástico, onde  $k$  representa agora a sua tensão de escoamento. Logo, pode-se concluir que a curva  $K_\sigma \times K_\epsilon$  para  $n = 1$  representa a condição EE. As curvas para  $0 \leq n < 1$  representam a condição PP. Quanto à condição EP, nada pode ser deduzido, pois neste caso tanto  $K_\sigma$  como  $K_\epsilon$  são dependentes do nível de sollicitação, já que

$$\bar{K}_\sigma = \frac{k \epsilon_{\text{máx}}^n}{E \epsilon_0} = k \frac{\epsilon_{\text{máx}}^n}{\epsilon_0^n} \frac{\epsilon_0^{n-1}}{E} = k \left( \frac{\epsilon_{\text{máx}}}{\epsilon_0} \right)^n \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma_0}{E} \right)^{n-1}$$

donde

$$K_\sigma = \frac{k}{E^n} K_\epsilon^n \sigma_0^{n-1} \quad (3.13)$$

A figura 3.3 apresenta ainda a determinação gráfica dos fatores de concentração de tensão e de deformação segundo as teorias de Neuber e de Stowell-Hardrath-Ohman. Para esta última, partiu-se das definições dos módulos de elasticidade secante a fim de colocar-se  $K_\sigma$  em função somente de  $K_t$  e  $K_\epsilon$ , ou seja

$$K_\sigma = 1 + (K_t - 1) \frac{\sigma_{\text{máx}}/\sigma_0}{\epsilon_{\text{máx}}/\epsilon_0} = 1 + (K_t - 1) K_\sigma / K_\epsilon$$

e, rearranjando a equação acima, tem-se

$$K_\sigma = K_\epsilon / (K_\epsilon - K_t + 1). \quad (3.14)$$

Note-se que estas curvas representam todos os valores possíveis de  $K_\sigma$  e  $K_\epsilon$  em relação a um determinado valor de  $K_t$ , para o caso PP, independentemente do comportamento exibido pelo material quando em tração. Pode-se observar que, segundo Neuber, para  $K_\sigma = 1$ , tem-se que  $K_\epsilon = K_t^2$ . Segundo Stowell-Hardrath-Ohman,  $K_\epsilon$  tende ao infinito quando  $K_\sigma = 1$ .

Portanto, um ponto de interseção entre os dois tipos de curvas representa os valores de  $K_\sigma$  e  $K_\epsilon$  para um certo  $K_t$  em um material que apresenta um comportamento sob tração, conforme a equação (3.11), segundo uma das teorias de concentração de tensões e deformações, para o caso PP.

Considere-se agora um material que exiba um comportamento do tipo

$$\sigma = k \varepsilon^n; k = E \text{ e } n = 1 \text{ para } \sigma_0 < \sigma_E \quad (3.15)$$

onde  $\sigma_E$  é a tensão de escoamento do material. As condições EE e PP para este tipo de comportamento estão esquematizadas na figura (3.4a). Conforme comentado (equação (3.13)), os valores de  $K_\sigma$  e  $K_\varepsilon$  para a condição EP dependem do nível de sollicitação da carga. Se, todavia, usar-se a teoria de Neuber e encontrar-se o ponto de transição entre as condições EE e EP, ou seja, a tensão que satisfaça simultaneamente as equações

$$\sigma = E \varepsilon$$

$$\text{e } \sigma = k \varepsilon^n$$

tem-se que os valores de  $K_\sigma$  e  $K_\varepsilon$  se encontram na curva  $K_\sigma \times K_\varepsilon$  entre os pontos em que esta intercepta as curvas  $n = 1$  e  $n = n$ , para um determinado valor de  $K_t$ .

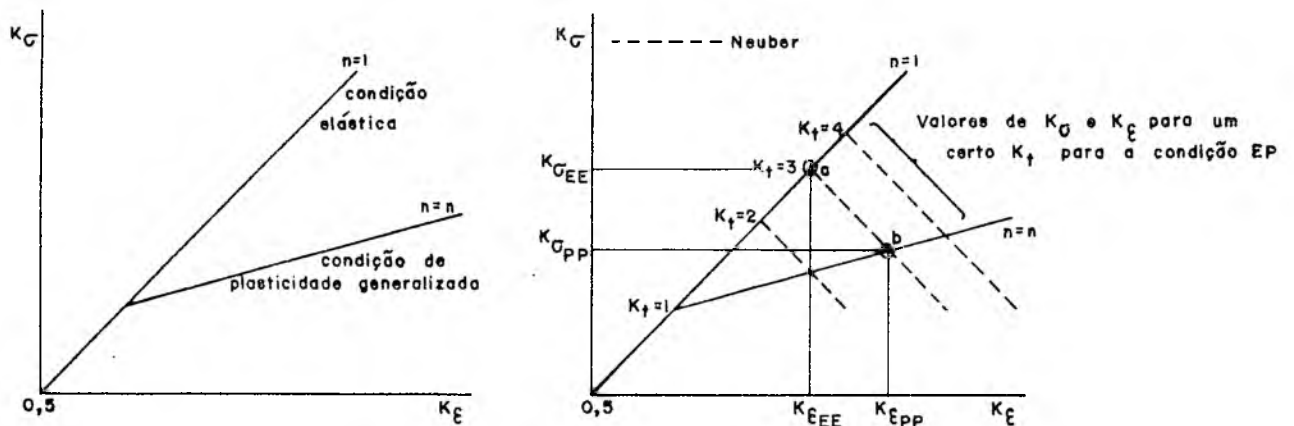


Fig. 3.4 - Variação de  $K_\sigma$  e  $K_\varepsilon$  de acordo com a sollicitação, segundo Neuber.

Resumindo, se  $K_t = 3$  os valores de  $K_\sigma$  e  $K_\varepsilon$  na condição EE são constantes e estão representados na figura 3.4b por  $K_{\sigma EE}$  e  $K_{\varepsilon EE}$ . Para a condição PP,  $K_{\sigma PP}$  e  $K_{\varepsilon PP}$  também são constantes para um mesmo valor de  $K_t$ , conforme esquematizados. Finalmente, segundo Neuber, os valores de  $K_\sigma$  e  $K_\varepsilon$  para a condição EP encontram-se na cur

va entre os pontos a e b e são dependentes do nível de sollicitação de carga.

Manson e Hirschberg [30] construíram sobre um diagrama  $K_\sigma \times K_\epsilon$ , segundo as teorias de Neuber e Stowell-Hardrath-Ohman, uma curva derivada da curva tensão-deformação do material, conforme pode ser visto na figura 3.5. Esta curva foi obtida dividindo-se os valores de tensão e deformação em uma série de valores selecionados (pontos 2) pelos valores de tensão e deformação de um ponto escolhido (ponto 1). Logo  $\sigma_0$  ( $\sigma_1$ ) é a constante e  $\sigma_{\text{máx}}$  ( $\sigma_2$ ) varia ao longo do diagrama tensão x deformação, o mesmo se aplicando a  $\epsilon_0$  e  $\epsilon_{\text{máx}}$ . Logo, para um determinado nível de sollicitação (correspondente a  $\sigma_0$ ), conhecendo-se  $K_t$ , determina-se  $K_\sigma$  e  $K_\epsilon$  pela interseção entre a curva normalizada a um ponto 1 e as curvas  $K_\sigma \times K_\epsilon$  segundo Neuber ou Stowell-Hardrath-Ohman. Note-se que para cada nível de sollicitação é necessário construir-se uma destas curvas normalizadas, o que dificulta a sua utilização.

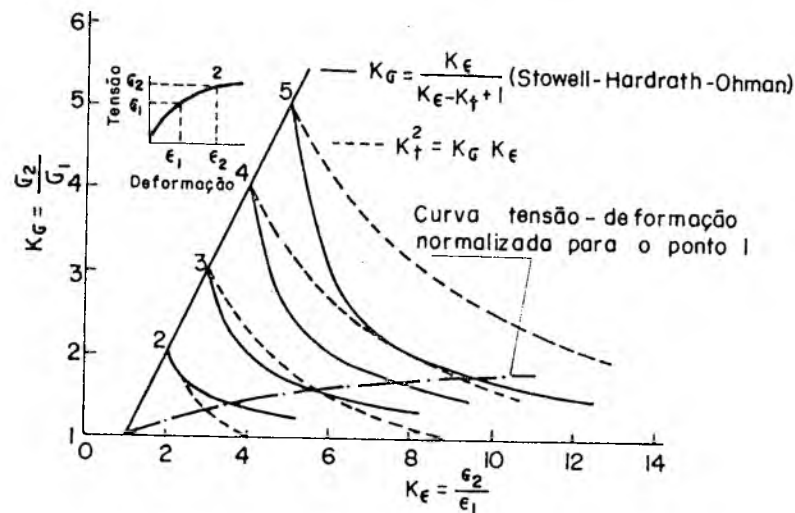


Fig. 3.5 - Determinação gráfica dos fatores de concentração de tensão e de deformação.

Visando comparar as teorias de Neuber e Stowell-Hardrath Ohman, Arroyo e Rosa [01] fizeram um estudo analítico usando características da curva tensão-deformação estimadas para o aço SAE 1020, chegando às seguintes conclusões:

- a) Quanto maior é o valor de  $K_t$ , maior é a deformação sofrida pelo material a um mesmo nível de tensão, qualquer que seja a

teoria utilizada, conforme esperado;

- b) Analisando-se as duas teorias (figura 3.3), nota-se que para valores de  $K_t = 2,5$ , elas praticamente coincidem. Para valores de  $K_t$  menores que este, a teoria de Neuber prevê menores valores para  $K_\epsilon$ . Entretanto, para valores de  $K_t$  maiores que 2,5 acontece o inverso, ou seja, a teoria de Stowell-Hardrath-Ohman prevê menores valores para  $K_\epsilon$ .

De um modo geral, pode-se dizer que a teoria de Neuber apresenta melhores valores para os fatores de concentração de tensão e de deformação quando comparada a resultados experimentais.

Arroyo e Rosa [01] definiram também os fatores de concentração de tensão e deformação para um estado biaxial de tensões e para um estado plano de deformações. Para um estado biaxial de tensões, os autores concluíram que

$$K_{\sigma b} = \frac{1}{s} K_\sigma \quad (3.16)$$

e

$$K_{\epsilon b} = s K_\epsilon \quad (3.17)$$

onde  $K_{\sigma b}$  e  $K_{\epsilon b}$  são os fatores de concentração de tensão e de deformação em um estado biaxial de tensões, respectivamente, e  $s$  é uma função do grau de deformação e da razão de biaxialidade da tensão, definida como

$$s = \frac{1}{(1 - \nu' \sigma_2/\sigma_1)} \quad (3.18)$$

sendo  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  as tensões principais nas direções 1 e 2 (figura 3.6) e

$$\nu' = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu\right) (E_s/E) \quad (3.19)$$

com  $\nu$  sendo o coeficiente de Poisson elástico. Através de análise por elementos finitos [54], foram calculados valores de  $s$  para diferentes  $K_t$ , concluindo-se que os fatores de concentração de de-

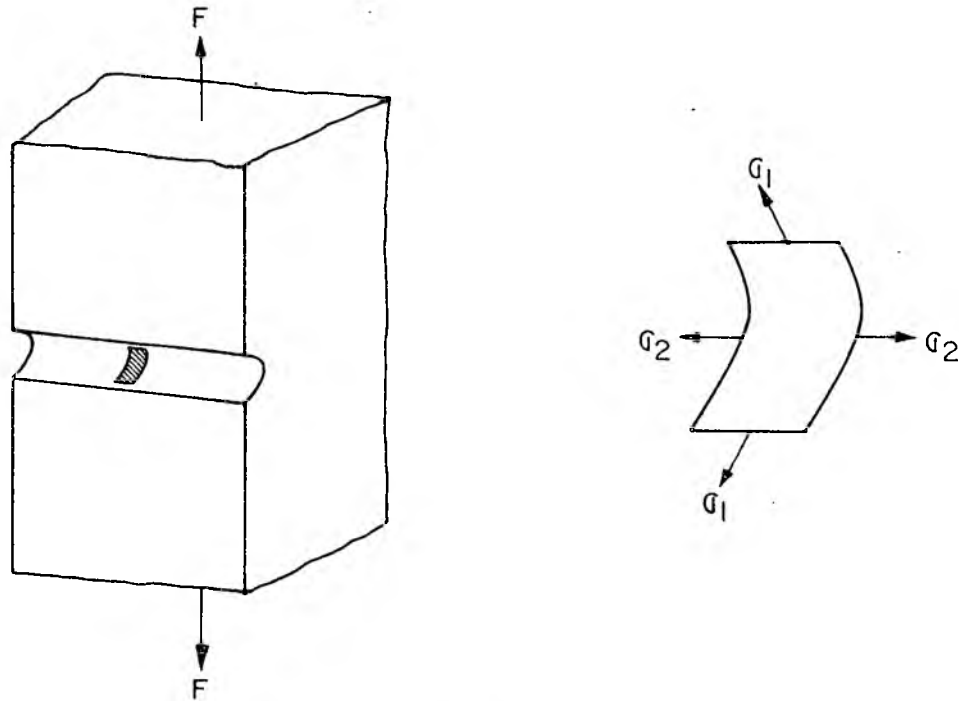


Fig. 3.6 - Representação esquemática das tensões que atuam na superfície do entalhe de um corpo sujeito a um carregamento monotônico.

formação uniaxiais são aproximadamente 20% maiores que os fatores biaxiais. Para um estado plano de deformações, Arroyo e Rosa [01] deduziram que

$$K_{\sigma d} = \frac{1}{s_d} K_{\sigma} \quad (3.20)$$

e

$$K_{\epsilon d} = s_d K_{\sigma} \quad (3.21)$$

sendo  $K_{\sigma d}$  e  $K_{\epsilon d}$  os fatores de concentração de tensão e de deformação para um estado plano de deformações, e

$$s_d = \frac{1}{[1 - (\nu')^2]} \quad (3.22)$$

Das equações (3.16), (3.17), (3.20) e (3.21), pode-se ver que os fatores de concentração de tensão e deformação tanto para um estado biaxial de tensões como para um estado plano de deformações tem formas análogas, e para ambos os casos é válida a teoria de Neuber, já que

$$K_t^2 = K_\sigma K_\epsilon$$

e usando-se (3.16) e (3.17) (ou, alternativamente, (3.20) e (3.21)), tem-se

$$K_t^2 = (s K_{\sigma b}) (K_{\epsilon b}/s)$$

$$K_t^2 = K_{\sigma b} K_{\epsilon b} \quad (3.23)$$

## 4. Mecânica da Fratura Elástica Linear

### 4.1 - Desenvolvimento da Mecânica da Fratura

A base da teoria da Mecânica da Fratura Elástica Linear para carregamentos estáticos é a premissa de que para que ocorra o crescimento de uma trinca são necessárias e suficientes duas condições. A primeira é de que haja tensão suficiente no extremo da trinca para que se produza algum mecanismo de crescimento da trinca, e a segunda é de que haja energia suficiente na extremidade da trinca a fim de suprir o trabalho feito na criação de novas superfícies. Inicialmente acreditava-se que somente o primeiro requisito fosse necessário, contudo a solução de Inglis [05] para um furo elíptico indica que a tensão elástica tende a infinito quando nas extremidades do extremo da trinca, chegando à paradoxal conclusão que um corpo trincado não pode suportar carga alguma. Este paradoxo foi resolvido por Griffith [19,20], que usou um balanço aproximado de energia, baseado na energia superficial, para explicar o comportamento do vidro à fratura. Sua premissa básica é a de que a propagação instável de uma trinca tem início se a energia liberada quando a trinca se propaga é igual à energia necessária para a criação de novas superfícies livres. A teoria de Griffith tem bom suporte experimental nos materiais cuja fratura ocorre virtualmente de maneira elástica, ou seja, nos materiais cuja fratura é frágil. Irwin [19,20] e Orowan [19,20] sugeriram uma modificação à formulação original de Griffith a fim de incluir a energia associada com a deformação plástica adjacente às novas superfícies de trinca. Esta teoria modificada consiste em avaliar a taxa de liberação de energia de deformação,  $G$ , no ponto de fratura. Se o processo de fratura é essencialmente similar para diferentes carregamentos e geometrias, o evento da fratura ocorre quando a taxa de liberação de energia de deformação alcança um valor crítico  $G_c$ . Contudo, o conceito de  $G_c$  como um critério de falha está restrito a situações onde a fratura é precedida por uma



deformação plástica limitada.

Uma interpretação alternativa do fenômeno de fratura foi originalmente desenvolvida por Irwin [21] que introduziu o conceito do fator de intensidade de tensões,  $K$ , como sendo um parâmetro característico do estado de tensões e deslocamentos do extremo de uma descontinuidade, tal que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} &= \frac{K_I \cos \theta/2}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{K_{II} \operatorname{sen} \theta/2}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} + \text{termos de ordem} \\ &\text{superior em } r \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \theta/2 \\ \cos \theta/2 \end{bmatrix} + \text{termos de ordem} \quad (4.2)$$

superior em  $r$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} (f_1(v) + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}) \\ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} (f_2(v) - \cos^2 \frac{\theta}{2}) \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} (f_2(v) + \cos^2 \frac{\theta}{2}) \\ -\cos \frac{\theta}{2} (f_1(v) - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$u_3 = \frac{2K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad (4.4)$$

onde  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas polares cilíndricas de um ponto em

relação ao extremo da trinca, conforme pode ser visto na figura 4.1.  $f_1(\nu)$  e  $f_2(\nu)$  são funções que dependem do estado de tensões e deformações que ocorre, tal que

$$f_1(\nu) = 1 - 2\nu \quad \text{para um estado plano de deformação,} \quad (4.5)$$

$$f_2(\nu) = 2(1 - \nu)$$

e

$$f_1(\nu) = (1 - \nu)/(1 + \nu) \quad \text{para um estado plano de tensões,} \quad (4.6)$$

$$f_2(\nu) = 2/(1 + \nu)$$

sendo  $\nu$  o coeficiente de Poisson. O fator de intensidade de tensões fornece o coeficiente do termo singular da série que define o campo de tensões. Os subscritos que aparecem no fator de intensidade de tensões caracterizam os três possíveis modos de propagação da trinca conforme o carregamento, como esquematizado na figura 4.2. Os fatores de intensidade de tensão dependem somente da geometria e das condições de carregamento. De uma maneira geral é possível dizer que, sendo  $a$  uma dimensão da trinca

$$K_I = \sigma Y \sqrt{\pi a} \quad (4.7.1)$$

$$K_{II} = \tau Y \sqrt{\pi a} \quad (4.7.2)$$

$$K_{III} = \tau Y \sqrt{\pi a} \quad (4.7.3)$$

onde  $Y$  é um fator geométrico que depende da forma e proporções do componente sob estudo, bem como do carregamento. No caso da figura 4.3, placa de dimensões infinitas sob tração, com uma trinca central.  $Y = 1$ , o modo de abertura da trinca é do tipo I e neste caso

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (4.8)$$

Para uma placa de largura finita, sob tração e com uma trinca cen

tral,

$$Y = \sqrt{\sec \pi a/2b} \quad (4.9)$$

sendo  $2b$  a largura da placa e  $2a$  o comprimento da trinca.

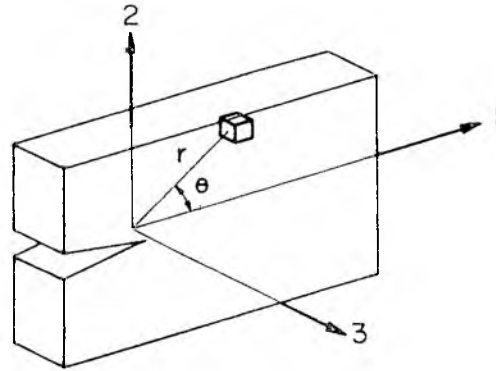


Fig. 4.1 - Localização do sistema de coordenadas usado no estudo das tensões em uma peça com fissura.

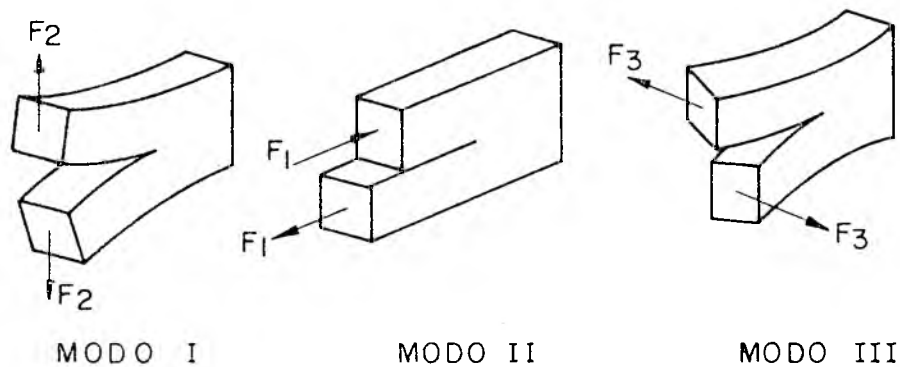


Fig. 4.2 - Modos de abertura da trinca

O fator de intensidade de tensões é uma medida do estado de tensões e deformações que solicita o material nas proximidades do extremo da trinca. Para que ocorra uma propagação da trinca é necessário que as tensões e as deformações nas proximidades da extremidade da trinca alcancem um valor crítico, ou seja, pode-se esperar que ocorra fratura quando  $K_I$  alcance um valor crítico,  $K_{Ic}$ . Logo  $K_{Ic}$  é uma propriedade do material. Contudo, o uso de  $K_{Ic}$  está restrito a situações onde a fratura é precedida por uma deformação plástica limitada, pois conforme Liu [21] assinalou, não

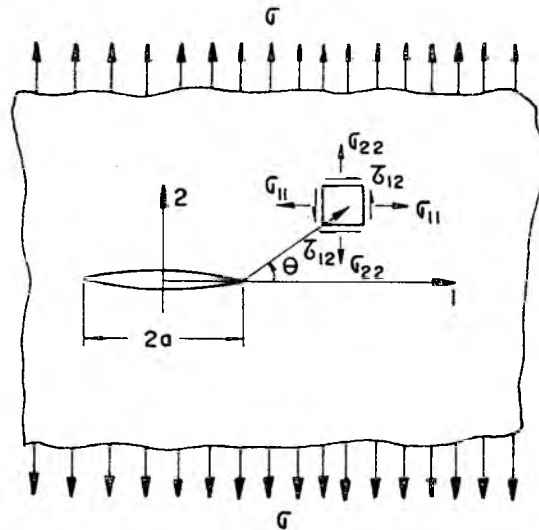


Fig. 4.3 - Placa infinita sob tração contendo uma trinca central.

são as tensões e deformações elásticas, fora da zona plástica, que causam a fratura embora estas controlem o estado de tensões e deformações plásticas. Outro ponto que deve ser ressaltado quanto à validade de  $K_{Ic}$  como critério de falha, está na própria definição de  $K$  como um parâmetro caracterizador da singularidade do extremo da trinca, expresso na forma (equações (4.1) e (4.2))

$$\sigma = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta) + \dots \text{ s\u00e9rie} \quad (4.10)$$

A equação (4.10) apresenta o primeiro termo da expansão da s\u00e9rie da express\u00e3o para a distribui\u00e7\u00e3o de tens\u00f5es em pontos pr\u00f3ximos ao extremo da trinca e esta forma s\u00f3 \u00e9 v\u00e1lida quando  $r \ll a$ . Para um corpo infinito, o fator de intensidade de tens\u00f5es \u00e9 dado pela equa\u00e7\u00e3o (4.8), mas a presen\u00e7a de superf\u00edcies livres nos contornos finitos modifica a distribui\u00e7\u00e3o de tens\u00e3o e portanto altera o valor de  $K$  obtido de um \u00fanico par de valores,  $\sigma$  e  $a$ . Existem erros na caracteriza\u00e7\u00e3o da tens\u00e3o a uma dist\u00e2ncia finita do extremo da trinca por um \u00fanico valor de  $K$  e estes erros aumentam com a dist\u00e2ncia. Al\u00e9m disso, os erros s\u00e3o diferentes em corpos de geometrias diferentes como pode ser visto na figura 4.4 (segundo Wilson [26]), e a distribui\u00e7\u00e3o de tens\u00e3o caracterizada pelos valores de  $K$  torna-se cada vez mais imprecisa.

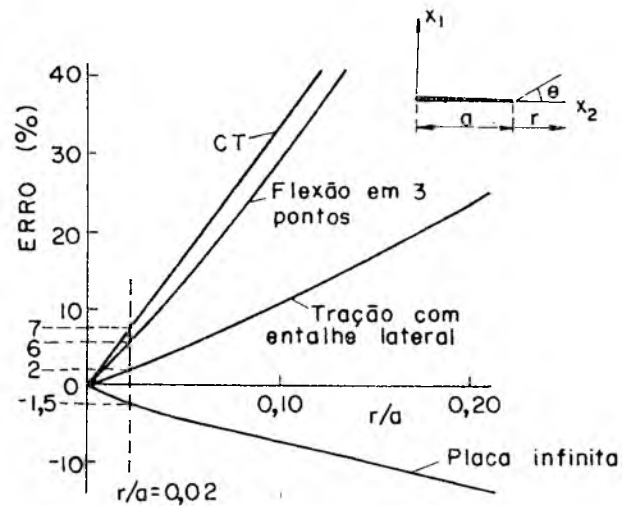


Fig. 4.4 - Variação entre a tensão no extremo da trinca como calculada por  $K$  e aquela calculada para toda a série para  $\sigma_{11}$  em função da distância adimensionalizada em torno do extremo da trinca, considerando o material elástico.

#### 4.2 - Fratura com plasticidade restrita

Como os materiais reais exibem uma tensão de escoamento acima da qual eles se deformam plasticamente, existe então uma região ao redor do extremo da trinca onde ocorre deformação plástica e portanto não pode existir a singularidade elástica. É possível estimar o comprimento da zona plástica, tanto para um estado plano de tensão como para um estado plano de deformação. Irwin [06] e Dugdale [06,11] propuseram métodos de estimativa da zona plástica, com os quais é possível determinar-se um valor de  $K$  que se adapte melhor às condições de plasticidade no extremo da trinca, admitindo que a região plastificada seja de pequena dimensão.

#### 4.2.1 - Estimativa da zona plástica segundo Irwin

Irwin [06] obteve uma expressão para o comprimento da zona plástica, partindo da solução elástica para uma trinca em uma placa infinita, solicitada segundo o modo de abertura I. A distribuição de tensões segundo o eixo 2 é

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (4.11)$$

e, para  $\theta = 0$ , torna-se

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

Admitindo que o material possui uma tensão de escoamento  $\sigma_E$ , tem-se que o raio de plastificação,  $r_p$ , é definido no ponto onde  $\sigma_{22}$  é igual a  $\sigma_E$ . Então

$$\sigma_E = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_p}}$$

ou

$$r_p = \frac{1}{2\pi} (K_I/\sigma_E)^2 \quad (4.12)$$

para um estado plano de tensões. No estado plano de deformações

$$r_p = \frac{1}{6\pi} (K_I/\sigma_E)^2 \quad (4.13)$$

Considerando o escoamento, a distribuição de tensões pode ser pensada como proveniente de uma trinca fictícia, em um material perfeitamente elástico, com dimensão característica  $a+r_p$ , sendo assim definida uma trinca equivalente (figura 4.5)

$$a_{eq} = a + r_p \quad (4.14)$$

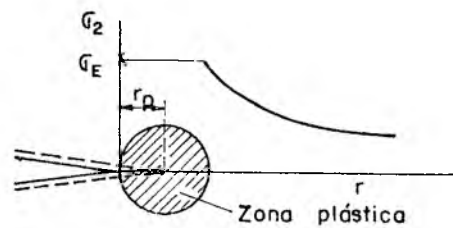


Fig. 4.5 - Correção da zona plástica segundo Irwin.

Irwin [06] então propôs que, quando a tensão  $\sigma$  que sol<sup>i</sup>cita o material for da mesma ordem de grandeza da tensão de escoamento, o fator de intensidade de tensões deve ser definido através da trinca equivalente. Logo, o fator plástico de intensidade de tensões  $K_p$ , pode ser obtido como

$$K_p = Y \sigma \sqrt{\pi a_{eq}} \quad (4.15)$$

Substituindo a equação do raio plástico (equação (4.12)), tem-se

$$K_p = Y \sigma \sqrt{\pi \left( a + \frac{1}{2\pi} (K/\sigma_E)^2 \right)}$$

onde  $K$  é calculado com base no tamanho geométrico da trinca (equação (4.7)), e desta forma vem

$$K_p = Y \sigma \sqrt{\pi a \left[ 1 + \frac{1}{2} (\sigma/\sigma_E)^2 \right]} \quad (4.16)$$

Porém o fator plástico de intensidade de tensões é definido por

$$K_p = Y Y_p \sigma \sqrt{\pi a} \quad (4.17)$$

onde  $Y_p$  é o fator de correção plástico. Desta forma, o fator de correção segundo Irwin, é

$$Y_p = \sqrt{1 + \frac{1}{2} (Y \sigma/\sigma_E)^2} \quad (4.18)$$

A definição do fator de correção plástica dada pela equação (4.18) não é rigorosamente correta, em parte porque o valor de  $r_p$  foi calculado usando o fator de intensidade de tensões  $K$ , sem correção. Usando  $K_p$  no cálculo do raio de plastificação, obtém-se

$$Y_p = 1 / \sqrt{1 - \frac{1}{2} (Y \sigma / \sigma_E)^2} \quad (4.19)$$

Uma análise mais rigorosa mostra que as expressões acima são razoavelmente exatas, desde que o nível de sollicitação não exceda o limite de escoamento do material. Em outras palavras, a equação (4.18) pode ser usada para níveis de tensão nominal de até 70% da tensão de escoamento e a equação (4.19) pode ser usada para tensões de até 90% da tensão de escoamento.

#### 4.2.2 - Estimativa da zona plástica segundo Dugdale.

Dugdale [06,11] obteve uma expressão para o comprimento da zona plástica de uma trinca sollicitada segundo o modo de abertura I, para um material elasto-plástico ideal.

Quando ocorre o escoamento sobre um comprimento  $s$  medido do extremo da trinca de comprimento  $2a$  (Figura 4.6a), é admitido que esta situação é equivalente à deformação elástica de uma trinca hipotética de comprimento  $2a_{eq}$ , que está sob a ação da tensão aplicada  $\sigma$  que tende a abrir a trinca e da tensão de escoamento  $\sigma_E$  sobre parte de sua superfície, que tende a fechá-la (Figura 4.6b).

Dugdale [06,11] define o comprimento da zona plástica como

$$s = c \left[ 2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi \sigma}{4 \sigma_E} \right) \right]$$

que pode ser colocada na forma

$$s = a (\sec \pi \sigma / 2 \sigma_E - 1) \quad (4.20)$$



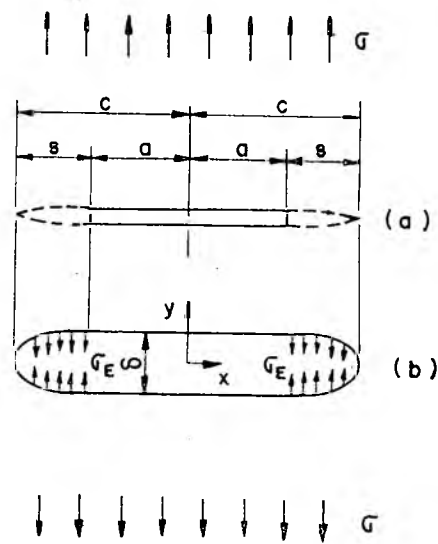


Fig. 4.6 - Correção da zona plástica segundo Dugdale: (a) escorregamento interno; (b) tensões internas atuando sobre a região que sofreu escorregamento.

Portanto, a trinca equivalente pode ser definida como

$$a_{eq} = a + \frac{1}{2} s = a + \frac{1}{2} a (\sec \pi \sigma / 2\sigma_E - 1)$$

ou seja

$$a_{eq} = c - \frac{1}{2} s, \quad \text{logo} \quad a_{eq} = \frac{1}{2} a (1 + \sec \pi \sigma / 2\sigma_E) \quad (4.21)$$

E assim o fator plástico de intensidade de tensões será

$$K_p = Y \sigma \sqrt{\pi a (1 + \sec \pi \sigma / 2\sigma_E) / 2} \quad (4.22)$$

onde o fator de correção plástico, segundo Dugdale, é

$$Y_p = \sqrt{(1 + \sec \pi \sigma / 2\sigma_E) / 2} \quad (4.23)$$

Uma outra forma de usar os resultados de Dugdale é definir o fator de correção da zona plástica a partir do conceito de deslocamento de abertura da trinca,  $\delta$ . Segundo Dugdale [06,07,11] a extremidade da trinca sofre uma abertura  $\delta$ , devida ao afastamento de suas faces, como consequência das deformações plásticas, e pode ser obtida como

$$\delta = \frac{8}{\pi} \frac{\sigma_E}{E} a \ln (\sec \pi\sigma/2\sigma_E) \quad (4.24)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material. A expressão para  $\delta$  pode ser expandida e, tomando-se apenas o primeiro termo da série, vem que

$$\delta = \frac{\pi \sigma^2 a}{E \sigma_E}$$

ou

$$\sigma = \sqrt{\frac{\delta E \sigma_E}{\pi a}} \quad (4.25)$$

Da equação (4.25) pode-se então definir o fator plástico de intensidade de tensões como

$$K_p = Y \sqrt{\frac{\delta E \sigma_E}{\pi a}} \sqrt{\pi a}$$

e desenvolvendo a equação acima tem-se

$$K_p = Y \sigma \sqrt{\pi a} \frac{\sigma_E}{\pi \sigma} \sqrt{8 \ln (\sec \pi\sigma/2\sigma_E)} \quad (4.26)$$

Portanto, o fator de correção da zona plástica é

$$Y_p = \frac{\sigma_E}{\pi \sigma} \sqrt{8 \ln (\sec \pi\sigma/2\sigma_E)}. \quad (4.27)$$

Dentre as expressões para  $Y_p$ , ou seja, equações (4.18), (4.19), (4.23) e (4.27), a última é a mais exata. Contudo, deve ser salientado que elas foram obtidas para o modelo de uma placa de dimensões infinitas sob tração. Deste modo, em peças ou corpos de prova reais, a menos que o tamanho da zona plastificada seja pequeno comparado com as outras dimensões, estas expressões não fornecem resultados muito confiáveis. Assim, é necessário analisar a influência do contorno da peça sobre o tamanho da zona plástica para cada geometria, antes de usar o conceito de correção da zona

plástica sobre o fator de intensidade de tensões como critério de falha. Alguns resultados podem ser vistos na referência [26].

A figura 4.7 ilustra as quatro equações para  $Y_p$  segundo os modelos apresentados.

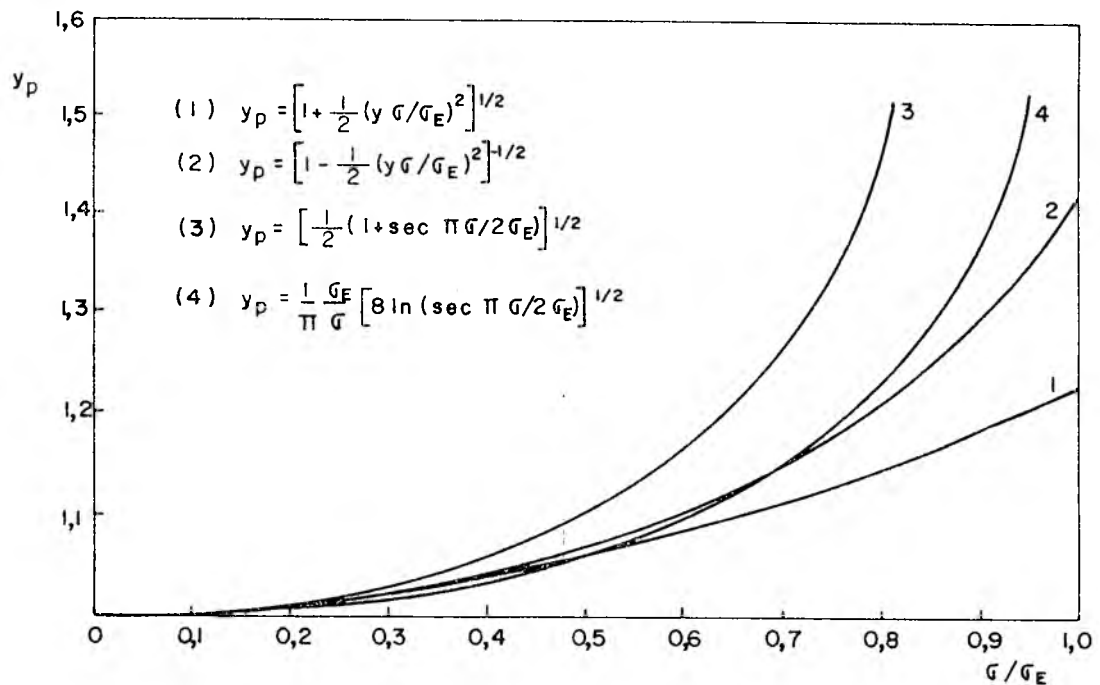


Fig. 4.7 - Comparação entre as várias equações para o fator de correção da zona plasticificada (segundo Irwin (1) e (2) e Dugdale (3) e (4)) em função da razão entre a tensão aplicada e a tensão de escoamento do material.

A Mecânica da Fratura Elástica Linear tem limitada aplicação aos aços estruturais, já que a teoria se aplica somente à fratura essencialmente elástica. Mesmo usando-se os fatores de correção para a zona plástica, a fratura da maioria dos metais estruturais está acompanhada de uma plasticidade maior do que a teoria permite.

## 5. Mecânica da Fratura Elasto-Plástica

### 5.1 - Introdução

Paralelamente à Mecânica da Fratura Elástica Linear vem se desenvolvendo a Mecânica da Fratura Elasto-Plástica, que procura encontrar um parâmetro caracterizador do estado elasto-plástico e dos campos de deformação locais no extremo de uma trinca de um material com comportamento elasto-plástico. Um processo tal como o de fratura frágil, suposta ser governada pelas circunstâncias no extremo da trinca, deve ser caracterizado por um valor crítico deste parâmetro, para uma dada composição, temperatura, taxa de deformação e meio ambiente. O problema pode ser resolvido se puder ser estabelecido um modelo simplificado do comportamento elasto-plástico do extremo da trinca, tal que as tensões e deformações dominantes ao redor da extremidade da trinca sejam descritas de forma simples e que este modelo possa ser suficientemente independente das condições distantes do extremo da trinca, principalmente do seu comprimento, geometria e do sistema de cargas aplicadas, a fim de poder predizer a fratura de estruturas reais.

O processo de ruptura dútil consiste no início de uma trinca, com alguma propagação estável posterior, até chegar à instabilidade final. Para predizer o início da fratura é importante usar parâmetros que possam ser determinados experimentalmente. Vários parâmetros foram propostos a fim de predizer a ruptura dútil de materiais sob condições elasto-plásticas. Muitos deles são derivados da Mecânica da Fratura Elástica Linear, outros resultam de avaliações empíricas do comportamento elasto-plástico.

Este capítulo visa sumarizar alguns destes parâmetros, onde são feitos comentários de como estes podem ser interpretados, com base nos resultados de testes experimentais. Um deles, a integral  $J$ , parece ser o que melhor caracteriza as condições reais no extremo de uma trinca. Para este parâmetro é feita uma análise mais detalhada já que servirá de base para a caracterização da

fratura dútil dos testes experimentais.

## 5.2 - Integral J

A integral de contorno J foi definida por Rice [41] para um campo de deformação bi-dimensional em x e y em um material que apresente comportamento elástico linear ou não linear, como sendo

$$J = \int_{\Gamma} (W \, dy - \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \, ds) \quad (5.1)$$

onde  $\Gamma$  é uma curva em torno de um entalhe plano,  $W$  é a função densidade de energia de deformação,  $\vec{T}$  é o vetor tensão perpendicular a  $\Gamma$ ,  $\vec{u}$  é o vetor deslocamento e  $ds$  é um elemento do arco ao longo de  $\Gamma$ . Rice [41] demonstrou que  $J$  é uma integral independente do percurso de integração.

Para o comportamento elasto-plástico, estudos com elementos finitos usando a teoria incremental da plasticidade [41], mostram que  $J$  também é independente do caminho, concluindo-se então que  $J$  é um parâmetro que caracteriza a singularidade da extremidade de um entalhe, de maneira similar ao que acontece com o fator de intensidade de tensões,  $K$ .

A integral  $J$  também pode ser interpretada como uma mudança na energia potencial quando uma trinca se propaga de uma quantidade da [41], de modo análogo à taxa de liberação de energia de deformação,  $G$ , como sendo

$$J = - \frac{\partial U}{\partial a} \quad (5.2)$$

onde  $U$  é a energia potencial total por unidade de espessura. Com base nesta definição,  $J$  pode ser obtida experimentalmente a partir da área da curva carga-deslocamento de uma peça, ou seja, avaliando-se o trabalho devido à variação virtual  $\partial a$  do comprimento da trinca. Foi evidenciada a existência de um valor crítico de  $J$ ,  $J_c$  [41], o qual pode ser considerado como uma propriedade do mate

rial que caracteriza a fratura.

Como  $J$  foi definida para um material elástico linear ou não linear e sua validade foi determinada teórica e experimentalmente para materiais elasto-plásticos, é um parâmetro que tanto pode ser usado para caracterizar a fratura frágil como a fratura dútil, já que fratura frágil implica em pouca energia absorvida pelo material antes da ruptura, enquanto que a fratura dútil é caracterizada por extensa plastificação do material e consequentemente grande energia absorvida antes da ruptura.

A integral  $J$  pode ainda ser relacionada com a concentração de deformação no extremo de um entalhe, bastando para tal tomar-se um percurso de integração bem próximo à extremidade do mesmo.

Contudo, a validade do uso da integral  $J$  como um parâmetro caracterizador do campo de deformação do extremo de um entalhe de um material elasto-plástico tem algumas limitações. O Apêndice I apresenta detalhadamente uma análise sobre a integral  $J$ .

### 5.3 - Deslocamento de abertura da trinca

A presença de uma zona plástica no extremo de uma trinca faz com que a mesma se abra sem que haja aumento no seu comprimento. O movimento relativo das duas faces no extremo da trinca é denominado deslocamento de abertura do fundo da trinca e simbolizado por  $\delta$  ou COD ("Crack Opening Displacement").

Estudos sobre as consequências do escoamento no extremo da trinca, causando um deslocamento das superfícies da mesma, foram realizados independentemente por Wells e Cottrel [07], como um possível critério de falha.

A fim de determinar COD, Dugdale e Barenblatt [51], separadamente, propuseram um modelo baseado na elasticidade linear, que foi posteriormente interpretado em termos de fratura por Wells [51]. Burdekin e Stone [07], baseados no modelo proposto, mostraram teórica e experimentalmente que este era consistente com os resultados de fratura de testes de tração e flexão. Ao mesmo tempo em que estes estudos se desenvolviam, um modelo similar foi proposto por Bilby et al. [51] usando a teoria das discordâncias.

O critério de falha adotado é o valor de  $\delta$  no momento do início da fratura,  $\delta_{crit}$ .

### 5.3.1 - Análise teórica segundo Burdekin e Stone

O modelo empregado para esta análise é baseado em uma trinca de comprimento  $2a$  em uma placa infinita sob tensão de tração uniforme  $\sigma$  aplicada no infinito (Figura 5.1). O sistema de co

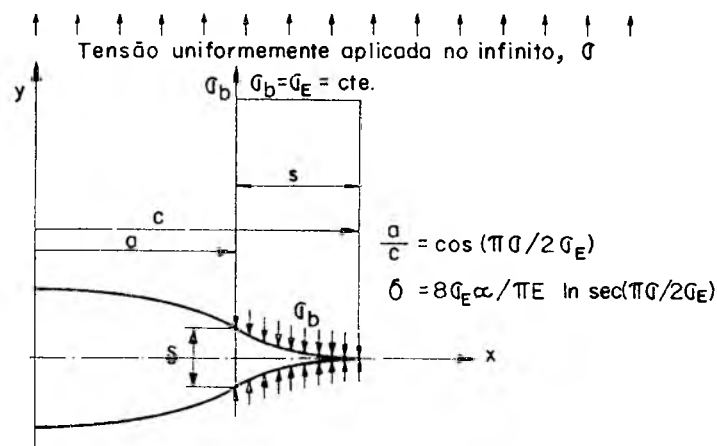


Fig.5.1-Representação da plasticidade local pela análise teórica.

ordenadas é tal que sua origem coincide com o centro da trinca, com o eixo  $x$  ao longo da linha da trinca. Devido à tensão  $\sigma$ , surgem zonas plastificadas no extremo da trinca estendendo-se até  $c$ . Esta situação é representada por uma trinca de comprimento  $2c$  que está completamente contornada por um campo de tensão elástico quando sob carga, porém que é tensionada pela tensão externa aplicada  $\sigma$  e por uma tensão interna  $\sigma_b$ , na direção  $y$ , na região entre  $a$  e  $c$ . As tensões aplicadas no interior da trinca  $2c$  representam as tensões que as zonas plásticas causam ao extremo da trinca real, e na análise, são consideradas constantes e iguais à tensão de escoamento uniaxial do material,  $\sigma_E$ . Este modelo é similar ao proposto originalmente por Barenblatt e posteriormente empregado por Dugdale e por Smith [07].

Por meio de uma combinação de soluções perfeitamente elásticas para as tensões e deslocamentos ao redor de uma trinca

central em uma placa infinita, a situação real de uma trinca com plasticidade local é substituída por uma que possa ser analisada convenientemente. Embora esta análise não seja uma solução plástica rigorosa, parece dar uma resposta conclusiva à esperada para um material elasto-plástico ideal.

Segundo Burdekin e Stone [07], o deslocamento de abertura da trinca é dado pelo deslocamento no ponto  $x = \pm a$ , como

$$\delta = \frac{8}{\pi} \frac{\sigma_E}{E} a \ln (\sec \pi \sigma / 2 \sigma_E) \quad (5.3)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material. Expandindo a equação acima e considerando apenas o primeiro termo da série, vem que

$$\delta = \frac{\pi \sigma^2 a}{E \sigma_E} \quad (5.4)$$

A equação (5.4) pode ser diretamente relacionada à taxa de energia de deformação liberada,  $G$ ,

$$G = \sigma_E \delta \quad (5.5)$$

A determinação de  $\delta_{crit}$  é, portanto, a determinação de  $\delta$  no momento de início da fratura. Em baixas temperaturas a fratura ocorre por clivagem e, por conseguinte, a carga de fratura é a máxima atingida durante o teste. Porém, em altas temperaturas, a fratura é caracterizada por uma sequência bem menos definida, na qual a carga (em função de COD) se eleva a um valor máximo e então decresce, bem antes que se possa detectar macroscopicamente a fratura.  $\delta_{crit}$  é usualmente determinado no ponto de carga máxima.

### 5.3.2 - Algumas considerações sobre COD

Na determinação analítica de COD foi usado o conceito de trinca equivalente em um material perfeitamente elástico. A correção da zona plastificada no extremo da trinca não leva em



consideração a taxa de encruamento do material. Quando o material é quase elástico, a zona de deformação plástica tem a forma circular. À medida que o material começa a escoar, a zona plástica adquire uma forma semelhante às asas de uma borboleta, que vai se acentuando até o caso do material perfeitamente plástico, quando o desenvolvimento da zona plástica está confinado a uma linha no plano da trinca, conforme ilustrado na figura 5.2 [15].

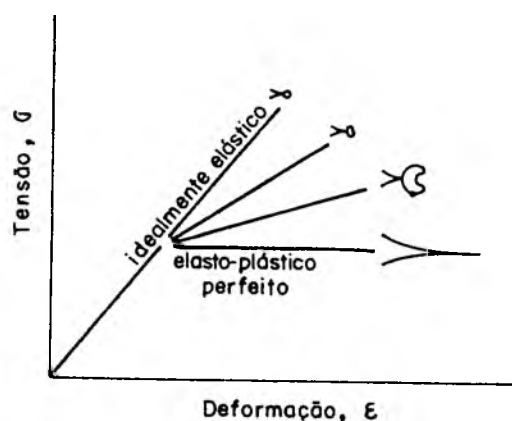


Fig. 5.2 - Forma da zona plástica em função do comportamento da curva tensão-deformação para materiais metálicos.

Existem outros fatores que podem afetar o resultado da medida de COD; entre estes poder-se-ia citar a relação entre o tamanho da trinca e a largura do corpo de prova [06], o comprimento da ligação entre o extremo da trinca e a extremidade do corpo de prova [06], a acuidade do entalhe [26], além da rigidez da máquina [26] e da temperatura [07,24]. As figuras 5.3, 5.4 e 5.5 apresentam COD em função de alguns destes parâmetros.

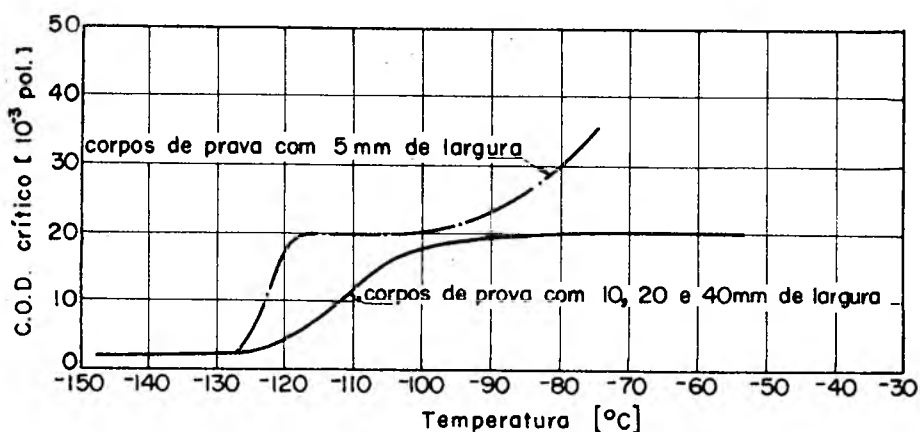


Fig. 5.3 - Efeito da largura do rasgo sobre a variação de COD com o crescimento desta (Segundo Smith e Knott [26]).

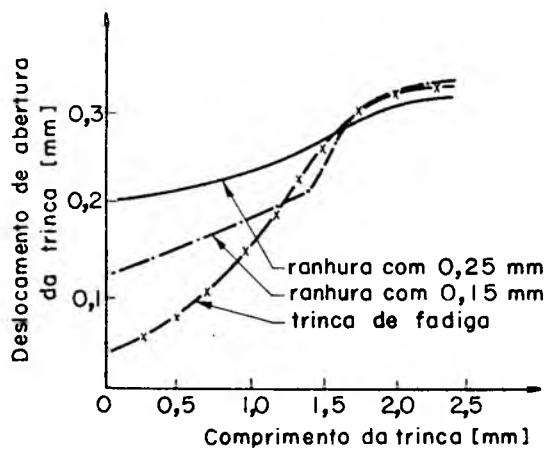


Fig. 5.4 - Efeito do tamanho do corpo de prova sobre COD (Segundo Burdekin e Stone [07]).

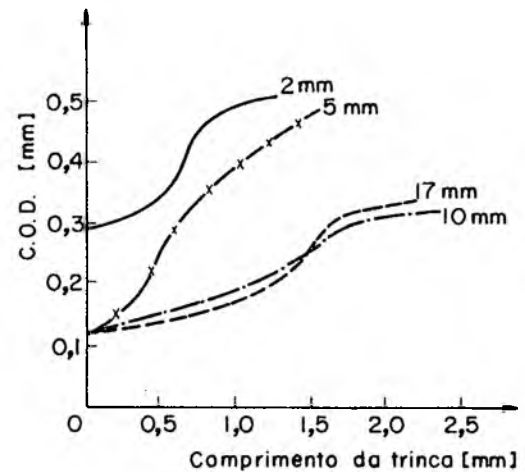


Fig. 5.5 - Efeito da espessura do corpo de prova sobre COD (Segundo Knott [26]).

#### 5.4 - Método de Dowling e Townley

Baseados no modelo de Dugdale, Dowling e Townley [10] desenvolveram um processo para a análise de falhas de elementos estruturais que, segundo os autores, se aplica desde um estado inteiramente elástico até um estado de plasticidade generalizada no material, quando da ruptura.

Dowling e Townley partiram da relação entre o deslocamento de abertura da trinca e  $G$  e posteriormente  $J$ , com o qual definiram o fator de intensidade de tensões. O critério de falha adotado consiste no cálculo do valor crítico de  $K$ ,  $K_{Ic}$ , generalizado em função das cargas que agem sobre a estrutura.

##### 5.4.1 - Análise teórica

Segundo a equação (5.5), existe uma relação bem defini-

da entre a taxa de liberação de energia,  $G$ , e o deslocamento de abertura da trinca,  $\delta$ , na forma

$$G = \sigma_E \delta$$

No regime elástico existe uma dependência perfeita entre o fator de intensidade de tensões e a taxa de liberação de energia. Estendendo este conceito para o campo elasto-plástico, Dowling e Townley partiram da relação entre a integral  $J$  e  $\delta$  [41], onde

$$J = \sigma_E \delta \quad (5.6)$$

com a qual definiram o fator de intensidade de tensões plástico,  $K_p$ , como

$$K_p^2 = J E \quad (5.7)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade do material. A equação (5.7) só é válida para um estado plano de tensões.

Usando  $\delta$  segundo o modelo de Dugdale, resulta

$$K_p = Y \sigma_E \sqrt{a} \sqrt{(8/\pi) \ln (\sec \pi\sigma/2\sigma_E)} \quad (5.8)$$

que é uma expressão idêntica à equação (4.26) para o fator de correção da zona plástica vista no capítulo 4.

O desenvolvimento de Dowling e Townley admite que a tensão  $\sigma$  que leva o material à falha,  $\sigma_f$ , ocorre quando o fator plástico de intensidade de tensões atinge o valor da tenacidade à fratura do material,  $K_{Ic}$ . Desta forma, no ponto de ruptura,

$$K_{Ic} = Y \sigma_E \sqrt{\pi a} \frac{1}{\pi} \sqrt{8 \ln (\sec \sigma_f/2\sigma_E)} \quad (5.9)$$

ou, reescrevendo a equação acima em termos de  $\sigma_f$ ,

$$\sigma_f = \frac{2}{\pi} \sigma_E \arccos \left[ \exp \left( - \frac{1}{8} \frac{\pi K_{Ic}^2}{a Y^2 \sigma_E^2} \right) \right] \quad (5.10)$$

Usando a expressão elástica para o fator de intensidade de tensões quando este atinge a tenacidade à fratura do material,

$$K_{Ic} = Y \sigma_{Ic} \sqrt{\pi a}$$

onde  $\sigma_{Ic}$  é a tensão correspondente no ponto de falha, tem-se que a equação (5.10) pode ser reescrita como

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_E} = \frac{2}{\pi} \arccos \left[ \exp \left( - \frac{\pi^2}{8} \frac{\sigma_{Ic}^2}{\sigma_E^2} \right) \right] \quad (5.11)$$

expressão que se aplica ao modelo de Dugdale. Dowling e Townley [10] generalizaram a equação (5.11) em função das cargas que agem sobre a estrutura na forma

$$\frac{L_f}{L_u} = \frac{2}{\pi} \arccos \left[ \exp \left( - \frac{\pi^2}{8} \frac{L_k^2}{L_u^2} \right) \right] \quad (5.12)$$

onde  $L_f$  é a carga de falha real,  $L_k$  é a carga de falha prevista pela Mecânica da Fratura Elástica Linear e  $L_u$  é a carga de falha prevista pela análise limite.

As cargas de falha  $L_k$  e  $L_u$  devem ser calculadas usando a geometria real da peça fissurada e para tal é necessário conhecer o fator de intensidade de tensões para a geometria dada e a carga limite, que podem ser obtidos tanto analítica como numericamente.

A equação (5.12) pode ser interpretada como uma solução intermediária entre os dois modos de falha que se verificam nos extremos do comportamento do material, ou seja, perfeitamente elástico, onde vale a Mecânica da Fratura Elástica Linear e perfeitamente plástico, onde vale a análise limite.

A figura 5.6 [10] ilustra o comportamento previsto pela equação (5.12) e mostra ainda a faixa de dispersão encontrada com os resultados experimentais.

A equação (5.12) pode ainda ser posta em uma forma tal que sua representação fique linear quanto a  $L_f$ , permitindo uma análise imediata do efeito da carga que está solicitando a estru-

tura,

$$\frac{L_f}{L_k} = \frac{L_f}{L_u} \left[ \frac{8}{\pi^2} \ln \left( \sec \frac{\pi}{2} \frac{L_f}{L_u} \right) \right]^{-1/2} \quad (5.13)$$

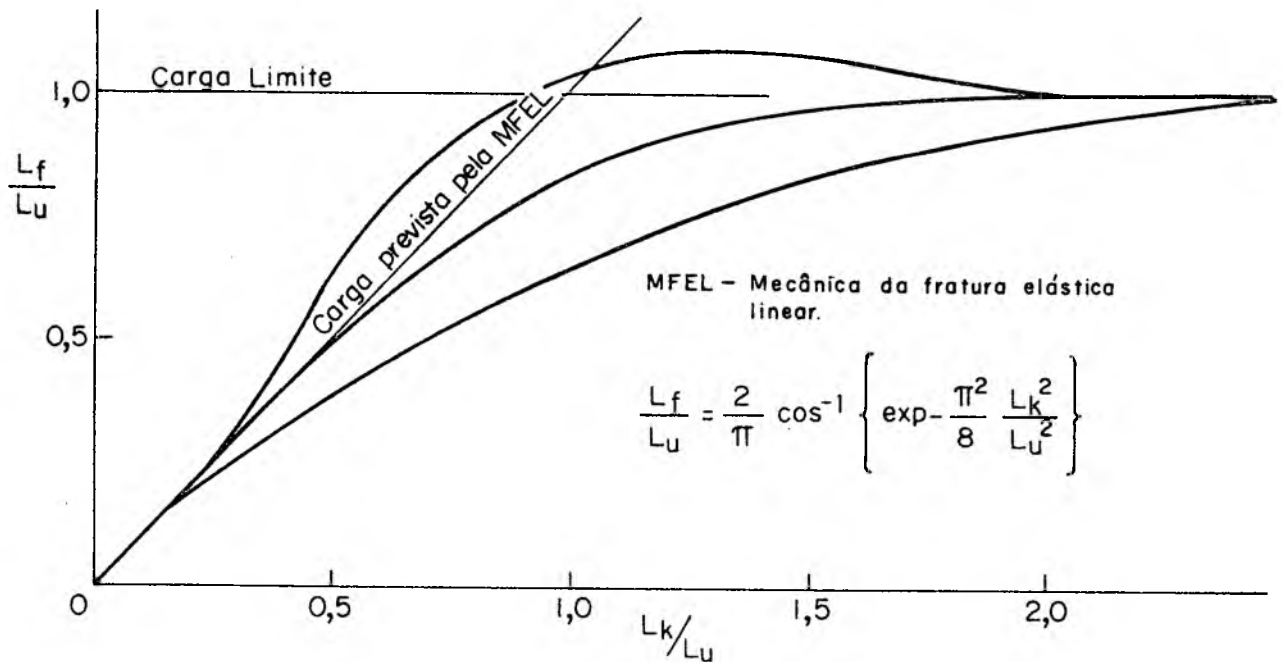


Fig. 5.6 - Comparação da equação (5.12) com dados experimentais.

A figura 5.7 apresenta a linha de falha segundo a equação (5.13). Note-se que esta forma é mais útil em casos práticos para a análise de segurança, pois uma representação de  $L_f/L_k$  e  $L_f/L_u$  fica linear quanto a  $L_f$ , permitindo um exame imediato a respeito do efeito de alterar-se a carga que está solicitando a estrutura.

### 5.5 - Método da energia equivalente

O conceito de energia equivalente surgiu do estudo sobre o efeito do tamanho na tenacidade à fratura, desenvolvido por Witt [14] e Witt e Mager [14]. Eles ensaiaram corpos de prova do tipo CT com diversas espessuras observando que, para uma pequena

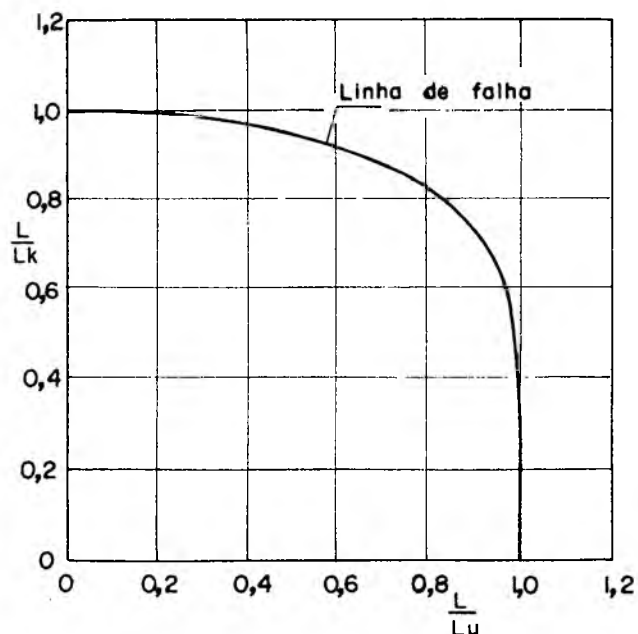


Fig. 5.7 - Linha de falha segundo a equação (5.13)

faixa de temperatura, todas as curvas carga-deslocamento poderiam ser sobrepostas quando expressas em forma adimensionalizada. A área sob a curva representa a energia entregue até o ponto de carga máxima, dividida pela espessura do corpo de prova ao cubo, definida como energia normalizada.

O método foi concebido para analisar resultados que não o poderiam ser pela Mecânica da Fratura Elástica Linear, devido ao alto grau de deformação plástica envolvida. Um gráfico carga-deslocamento típico de um ensaio deste tipo é mostrado na figura 5.8. O método da energia equivalente procura obter um valor para a tenacidade à fratura, denominada  $K_{Icd}$ , através da curva carga-deslocamento e das expressões usuais para calcular o fator de intensidade de tensões. A única diferença que surge é quanto à carga usada no cálculo. O valor desta é obtido como sendo a carga para um material que apresente comportamento linear, em que a energia absorvida é igual à energia absorvida pelo material real, até o ponto de carga máxima.

#### 5.5.1 - Análise teórica e considerações gerais

Sendo  $U$  a energia absorvida até o ponto de carga máxima, a carga  $F_{Icd}$ , que corresponde à energia equivalente para um compor

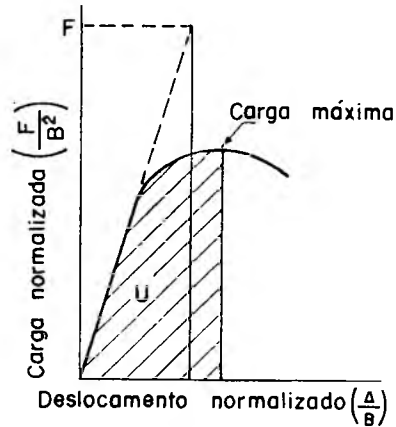


Fig. 5.8 - Curva carga-deslocamento normalizada mostrando a seção elástica extrapolada (linha tracejada).

tamento elástico linear, pode ser obtida como

$$U = \frac{1}{2} F_{Icd} \Delta \quad (5.14)$$

Porém, na parte linear,

$$\Delta = c F_{Icd} \quad (5.15)$$

logo,

$$F_{Icd}^2 = \frac{2 U}{c} \quad (5.16)$$

onde  $c$  é a flexibilidade do corpo de prova.

Com esta força que corresponde à energia equivalente que foi absorvida até o ponto de carga máxima pelo corpo de prova, é calculado o fator de intensidade de tensões pela expressão convencional, admitindo agora um comportamento elástico linear para o corpo de prova

$$K_{Icd} = Y f(F_{Icd}) \sqrt{\pi a} \quad (5.17)$$

onde  $f(F_{Icd})$  é uma função que fornece a tensão nominal correspondente à geometria do corpo de prova. Este valor para o fator de intensidade de tensão é referido algumas vezes como limite infe-

rior da tenacidade à fratura do material,  $K_{IC}$ . Contudo esta denominação não está absolutamente correta já que, segundo Egan e Robinson [14],  $K_{Icd}$  depende do tipo de corpo de prova utilizado, bem como do tamanho da trinca.

Para que o conceito de  $K_{Icd}$  seja válido é necessário que a energia absorvida por um corpo de prova quando a fratura se inicia, após o escoamento, seja igual ou menor do que a energia absorvida por um corpo de prova maior, geometricamente similar, no qual a fratura se inicia sob condições elásticas lineares. Estudos feitos por Sumpter [14] mostraram que esta relação é verdadeira para corpos de prova sob flexão, porém no caso de tração com  $a/w > 0,6$ , obtêm-se valores de  $K_{Icd}$  ligeiramente maiores que  $K_{IC}$ , sendo  $a$  e  $w$  o comprimento da trinca e a largura do corpo de prova, respectivamente.

Outro ponto que deve ser levantado é se o ponto de carga máxima é coincidente com o ponto de início de fratura. Como já foi mostrado [14], quando ocorre ruptura dútil, a fratura pode iniciar-se antes de ser alcançada a carga máxima. Com o aumento da temperatura [14,40], a razão entre  $K_{IC}$  e a tensão de escoamento cresce, e assim aumenta a disparidade entre o ponto de início de fratura e o ponto de carga máxima. Sendo assim, o valor de  $K_{Icd}$  tende a superestimar o valor de  $K_{IC}$ .

Se  $K_{Icd}$  é calculado de um deslocamento aleatório, e se nenhuma correção é feita considerando deslocamentos estranhos (escoamento no ponto de aplicação da carga, deformação da máquina, etc.), estes deslocamentos diminuirão o valor aparente de  $K_{Icd}$ . Este efeito pode total ou parcialmente compensar o valor superestimado de  $K_{IC}$  como uma consequência de as medidas serem feitas no ponto de carga máxima. O valor resultante de  $K_{Icd}$  será, contudo, uma função da rigidez da máquina, etc.

Os valores de  $K_{Icd}$  podem ser obtidos simplesmente através da curva carga-deslocamento, e então podem ser usados para prever a fratura de peças que apresentem ruptura com extensiva plastificação.



## 5.6 - Método do módulo tangente

O método do módulo tangente foi proposto por Merkle [33] e é baseado em uma forma diferencial da teoria de Neuber [01] para estimar a tensão e a deformação que ocorrem no extremo de um entalhe, através dos fatores de concentração de tensão e de deformação no regime plástico. O uso da teoria de Neuber permite considerar os efeitos da geometria da peça sobre o extremo da trinca, através do fator geométrico  $Y$ , calculado pela Mecânica da Fratura Elástica Linear. A equação diferencial resultante pode ser integrada diretamente, desde que o módulo de elasticidade tangente, efetivo, na seção nominal possa ser calculado como uma função da deformação nominal. Com este propósito, Merkle considera que o módulo tangente médio sobre a seção líquida é o módulo efetivo, e o método de análise é denominado método do módulo tangente. O critério de falha está diretamente relacionado ao fator de intensidade de tensões  $K_{IC}$ .

### 5.6.1 - Desenvolvimento analítico

Pela teoria de Neuber [01], a relação entre o fator de concentração de tensões  $K_{\sigma}$ , e o fator de concentração de deformações,  $K_{\epsilon}$ , é dada pela relação

$$K_{\sigma} K_{\epsilon} = K_t^2$$

conforme mostrado no capítulo 3.

Para a análise incremental, Merkle [33] define  $K_{\sigma}$  e  $K_{\epsilon}$  como sendo

$$K_{\sigma} = \frac{\Delta\sigma_{\text{máx}}}{\Delta\sigma_0} \quad K_{\epsilon} = \frac{\Delta\epsilon_{\text{máx}}}{\Delta\epsilon_0} \quad (5.18)$$

Considerando-se uma curva tensão-deformação qualquer, como mostrada na figura 5.9, tem-se que o módulo de elasticidade tangente pode ser definido como

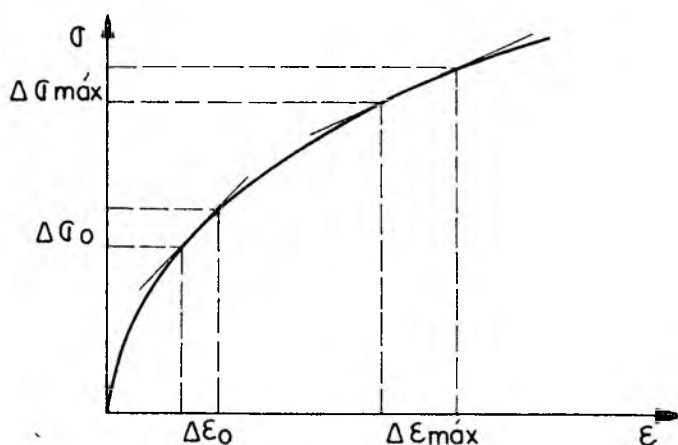


Fig. 5.9 - Definição do módulo de elasticidade tangente para uma curva tensão-deformação genérica.

$$\frac{\Delta\sigma_o}{\Delta\epsilon_o} = E_o \qquad \frac{\Delta\sigma_{m\acute{a}x}}{\Delta\epsilon_{m\acute{a}x}} = E_T \qquad (5.19)$$

onde os sub-índices o e T se referem a pontos tomados na seção nominal do corpo de prova e na extremidade do entalhe, respectivamente. Combinando as equações acima, obtêm-se

$$\frac{\Delta\sigma_{m\acute{a}x}}{\Delta\sigma_o} = \frac{E_T \Delta\epsilon_{m\acute{a}x}}{E_o \Delta\epsilon_o} \qquad (5.20)$$

Substituindo as definições dadas na equação (5.18) para os fatores de concentração de tensão e de deformação incrementais na equação (5.19), segue que

$$K_\sigma = K_\epsilon \frac{E_T}{E_o} \qquad (5.21)$$

Substituindo então a equação (5.20) na expressão de Neuber, tem-se

$$K_\epsilon = K_t \sqrt{E_o/E_T} \qquad (5.22)$$

Por outro lado, o fator de concentração de tensões, cal

culado no regime elástico,  $K_t$ , é estimado para uma placa de dimensões finitas sob tração contendo uma trinca bastante aguda no centro, como sendo

$$K_t = 2Y \sqrt{a/\rho} \quad (5.23)$$

onde  $a$  é a profundidade do entalhe,  $\rho$  é o raio de curvatura do extremo do entalhe, tal que  $\rho \ll a$ , e  $Y$  é o fator de forma que leva em consideração o efeito da geometria da peça sobre o valor de  $K_t$  calculado para uma placa de dimensões infinitas.

Substituindo agora a equação (5.23) na equação (5.22), obtêm-se

$$K_\varepsilon = 2Y \sqrt{a/\rho} \sqrt{E_o/E_T}$$

e, usando-se a equação (5.18) na forma diferencial, segue que

$$d\varepsilon = 2Y \sqrt{a/\rho} \sqrt{E_o/E_T} d\varepsilon_o \quad (5.24)$$

onde o sub-índice máx foi omitido por conveniência. A equação (5.24) pode ser rearranjada como

$$d\varepsilon \sqrt{\rho} = 2Y\sqrt{a} \sqrt{E_o/E_T} d\varepsilon_o \quad (5.25)$$

O fator  $d\varepsilon \sqrt{\rho}$  deve ser calculado indiretamente, já que é impossível separar as duas variáveis, pois  $d\varepsilon \rightarrow \infty$  e  $\sqrt{\rho} \rightarrow 0$ . Usando-se a forma integrada,  $\varepsilon\sqrt{\rho}$ , pode ser diretamente relacionada ao valor da tenacidade à fratura convencionalmente medida.

Partindo da equação do fator de intensidade de tensões para a ruptura,  $K_{IC}$ , em um estado plano de tensões,

$$K_{IC} = Y \sigma_{of} \sqrt{\pi a} \quad (5.26)$$

válida para o campo elástico, onde  $\sigma_{of}$  é a tensão nominal de fratura, pode-se obter a deformação de ruptura  $\varepsilon_{of}$ , como

$$\epsilon_{of} = \frac{K_{Ic}}{\sigma_E} \frac{\epsilon_E}{Y \sqrt{\pi a}} \quad (5.27)$$

Segundo Merkle [33], para condições nominais elásticas, a integral da equação (5.25) fornece

$$\epsilon_f \sqrt{\rho} = 2Y\sqrt{a} \sqrt{E_0/E_T} \epsilon_{of}$$

onde a integração foi feita admitindo-se que o extremo da trinca penetre rapidamente na zona plástica com encruamento, quando então é calculado o valor de  $E_T$ , suposto neste caso constante para esta zona (Figura 5.10). Rearranjando a equação acima em função da deformação nominal na fratura, tem-se

$$\epsilon_{of} = \frac{\epsilon_f \sqrt{\rho}}{2Y\sqrt{a}} \sqrt{E_T/E_0}$$

e igualando este resultado com o da equação (5.27), isolando-se  $\epsilon_f \sqrt{\rho}$ , vem

$$\epsilon_f \sqrt{\rho} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{K_{Ic}}{\sigma_E} \epsilon_E \sqrt{E_0/E_T} \quad (5.28)$$

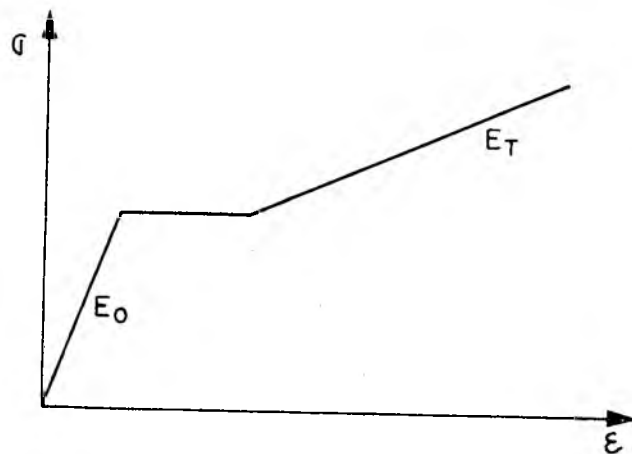


Fig. 5.10 - Curva  $\sigma$ - $\epsilon$  usada no método do módulo tangente.

O produto  $\epsilon_f \sqrt{\rho}$ , denominado por Merkle [33] como utilidade no entalhe, é diretamente proporcional à relação  $K_{Ic}/\sigma_E$ , on-

de o autor admite que  $K_{IC}/\sigma_E$  é constante, qualquer que seja a deformação nominal na ruptura, elástica ou plástica.

### 5.6.2 - Algumas considerações sobre o método

Merkle [33] baseia toda a sua proposição na forma diferencial da teoria de Neuber. Porém, partindo da expressão original de Neuber, pode-se facilmente determinar a sua forma diferencial, ou seja, a relação que fornece a dependência entre os acréscimos de tensões e deformações que ocorrem na zona da extremidade de um entalhe e na seção nominal.

Segundo Neuber

$$K_\sigma K_\epsilon = K_t^2$$

onde  $K_\sigma = \sigma_{\text{máx}}/\sigma_0$  e  $K_\epsilon = \epsilon_{\text{máx}}/\epsilon_0$ , conforme já definidos anteriormente. Deseja-se obter

$$K'_\sigma = d\sigma_{\text{máx}}/d\sigma_0 \quad \text{e} \quad K'_\epsilon = d\epsilon_{\text{máx}}/d\epsilon_0$$

Deste modo,  $K'_\sigma$  e  $K'_\epsilon$  podem ser pensados como sendo as derivadas de  $\sigma_{\text{máx}}$  e  $\epsilon_{\text{máx}}$  em relação a  $\sigma_0$  e  $\epsilon_0$ , respectivamente, sendo

$$\sigma_{,\sigma_0} = \frac{\partial K_\sigma}{\partial \sigma_0} \sigma_0 + K_\sigma$$

logo  $\sigma_{,\sigma_0} = K_\sigma$  apenas quando  $\frac{\partial K_\sigma}{\partial \sigma_0} = 0$ .

E, quanto à deformação, tem-se

$$\epsilon_{,\epsilon_0} = \frac{\partial K_\epsilon}{\partial \epsilon_0} \epsilon_0 + K_\epsilon$$

logo,  $\epsilon_{,\epsilon_0} = K_\epsilon$  somente se  $\frac{\partial K_\epsilon}{\partial \epsilon_0} = 0$ .

Deste modo, apenas no caso em que

$$\frac{\partial K_{\sigma}}{\partial \sigma_0} = \frac{\partial K_{\epsilon}}{\partial \epsilon_0} = 0$$

é que a forma diferencial de Neuber pode ser posta como

$$K'_{\sigma} K'_{\epsilon} = K_t^2$$

conforme proposto por Merkle [33]. Isto só é válido para um material linear, com  $K_{\sigma} = K_{\epsilon} = K_t$  para quaisquer valores de  $\sigma_0$ .

Deste modo, parece pouco recomendável o uso do Método do Módulo Tangente, já que sua hipótese fundamental não encontra justificativa alguma.

## 5.7 - Método do módulo secante

O método do módulo secante foi desenvolvido por Rosa [46], baseado no método do módulo tangente, procurando corrigir a debilidade deste método, que é a falta de base teórica para a forma diferencial da equação de Neuber, a partir da qual o mesmo é desenvolvido.

Partindo da definição formal da equação de Neuber [01], são estimadas as tensões e as deformações que ocorrem no extremo de um entalhe, com as quais se define os fatores de intensidade de tensões ou deformações plásticas. O critério de falha adotado está diretamente relacionado ao fator de intensidade de tensões crítico,  $K_C$  ou  $K_{IC}$ . Desta forma, o método permite analisar fraturas que não o podem ser pela Mecânica da Fratura Elástica Linear, devido ao nível de deformação plástica quando da ruptura.

### 5.7.1 - Análise teórica

A teoria de Neuber [01] para o efeito de concentração de tensões e deformações no estado elasto-plástico, fornece a expressão

$$K_{\sigma} K_{\epsilon} = K_t^2$$

conforme visto no capítulo 3.

Esta relação pode ser modificada com a introdução da definição dos módulos de elasticidade secante  $E_s$  e  $E_{s0}$ , correspondentes à região no extremo do entalhe e à seção nominal, tal que

$$E_s = \sigma/\epsilon \quad \text{e} \quad E_{s0} = \sigma_0/\epsilon_0$$

logo

$$K_{\epsilon} = K_t \sqrt{E_{s0}/E_s} \quad (5.29)$$

e

$$K_{\sigma} = K_t \sqrt{E_s/E_{s0}} \quad (5.30)$$

Para o caso de entalhes profundos ou trincas em uma placa finita sob tração, é possível estimar-se  $K_t$  como

$$K_t = 2Y \sqrt{a/\rho}$$

onde  $Y$  é o fator geométrico definido pela Mecânica da Fratura Elástica Linear, que leva em consideração a geometria finita da placa,  $a$  é o semi-eixo da fissura normal à tensão aplicada e  $\rho \ll a$  é o raio de curvatura no extremo deste semi-eixo. Substituindo este valor na equação (5.29)

$$K_{\epsilon} = 2Y \sqrt{a/\rho} \sqrt{E_{s0}/E_s}$$

e usando a definição de  $K_{\epsilon}$ , tem-se que

$$\epsilon = 2Y \sqrt{a/\rho} \sqrt{E_{s0}/E_s} \epsilon_0 \quad (5.31)$$

A equação (5.31) pode ser usada para definir o fator de intensidade de deformações  $K_{I\epsilon}$ , logo

$$K_{I\epsilon} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} 2Y\sqrt{a} \sqrt{E_{SO}/E_S} \epsilon_0,$$

então

$$K_{I\epsilon} = Y \epsilon_0 \sqrt{\pi a} \sqrt{E_{SO}/E_S} \quad (5.32)$$

admitindo-se que  $Y$  não é afetado pelo processo de limite.

O valor de  $K_{I\epsilon}$ , conforme definido na equação (5.32), pode ser usado na análise da fratura da mesma forma que  $K_I$  convencional, não ficando limitado, no entanto, ao campo elástico como ocorre com  $K_I$ .

A equação (5.32) pode ser desenvolvida de modo a obter-se a relação de dependência entre  $K_{I\epsilon}$  e o fator de intensidade de tensões convencional,  $K_{I\sigma}$ , resultando

$$K_{I\epsilon} = K_{I\sigma} / \sqrt{E_{SO} E_S} \quad (5.33)$$

Partindo do fator de intensidade de tensões crítico para um estado plano de tensões  $K_C$ , ou para um estado plano de deformações,  $K_{IC}$ , é possível estimar-se o valor crítico de  $K_{I\epsilon}$ , que pode ser estendido para pontos de ruptura com deformações plásticas apreciáveis.

Com base na definição de  $K_C$ ,

$$K_C = Y \sigma_{of} \sqrt{\pi a}$$

onde  $\sigma_{of}$  é a tensão nominal na falha, Rosa [46] obteve uma expressão para o fator crítico de intensidade de deformações, como sendo

$$K_{I\epsilon C} = \left( \frac{K_C}{\sigma_E} \right) \epsilon_E \sqrt{E_{SO}/E_S} \quad (5.34)$$

$\sigma_E$  e  $\epsilon_E$  são a tensão e a deformação de escoamento, respectivamente. Logo, conhecido  $K_C$  através de um ensaio no regime elástico, e ainda  $E_{SO}$  e  $E_S$ , é possível estimar-se  $K_{I\epsilon C}$ . O valor de  $E_{SO}$  não apresenta maiores problemas, já que corresponde ao ponto



nominal. No entanto  $E_s$  não é facilmente obtido, pois não é conhecido a priori o estado de tensões no extremo da trinca. Rosa [46] sugere que se faça a hipótese de que, quando da ruptura, o ponto correspondente seja o ponto de ruptura no ensaio de tração convencional, trabalhando com a curva tensão-deformação real do material.

## 6. Parte Experimental

### 6.1 - Objetivos

Os ensaios experimentais realizados visaram:

- (i) comprovar as teorias existentes de concentração de deformações com os dados experimentais;
- (ii) analisar a utilização da integral J no cálculo da concentração de deformações e na caracterização da fratura dútil;
- (iii) verificar outras teorias para caracterizar o início de fratura dútil.

Para atingir tais objetivos, tornou-se necessário ensaiar à tração corpos de prova que apresentassem algum tipo de descontinuidade geométrica, a fim de produzir um efeito de concentração de tensões em uma determinada região. Para calcular os fatores de concentração de deformação foi necessário medir a deformação que ocorria no extremo desta descontinuidade. Além disso, para o cálculo da integral J, foi necessário traçar o gráfico força versus deslocamento, até o ponto de início de fratura macroscópica.

### 6.2 - Programa experimental

Para os ensaios, resolveu-se utilizar um material de larga aplicação industrial. Assim, empregou-se uma chapa de aço SAE 1015 laminada à quente, com 6,25 mm de espessura que, após analisada na Escola Técnica Tupy, apresentou a seguinte composição química:

Carbono .....	0,13%
Silício .....	0,12%
Manganês .....	0,30%
Enxofre .....	0,017%
Fósforo .....	0,008%

Foi realizada uma análise micrográfica do material por meio do microscópio metalográfico Carl Zeiss-Jena-Neophot 21, que mostrou que sua estrutura estava constituída de aproximadamente 80% de ferrita e 20% de perlita, com algumas inclusões dispersas de sulfeto de manganês, conforme pode ser visto na figura 6.1. Os grãos do material não se apresentaram deformados em nenhum dos planos em que foi feita a análise (plano de laminação e dois planos perpendiculares entre si e ao primeiro), caracterizando uma completa recristalização do material após o processo de laminação.

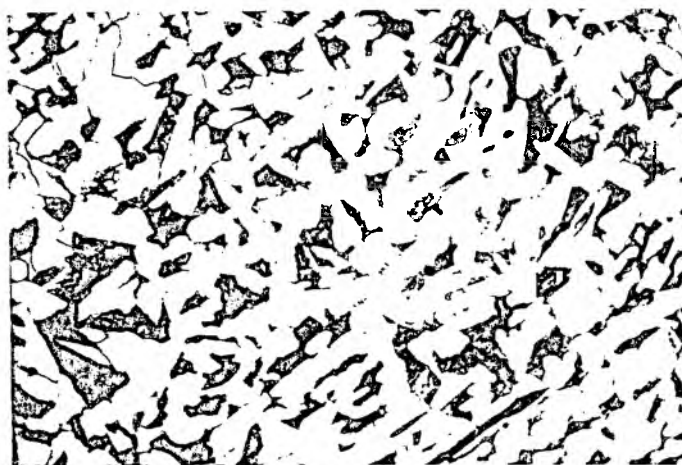


Fig. 6.1 - Microestrutura típica do material utilizado nos ensaios experimentais.

Para o cálculo da deformação máxima no extremo de uma descontinuidade por meio da integral J, foi necessário calcular o expoente de encruamento do material. Isto foi feito através da curva tensão versus deformação, levantada em corpos de prova cilíndricos de 4,00 mm de diâmetro, conforme esquematizado na figura 6.2. Os resultados dos testes experimentais estão resumidos nas tabelas 6.1 e 6.2, apresentando-se em excelente concordância com os valores obtidos por Keshavan [25] e Landgraf et al [28].

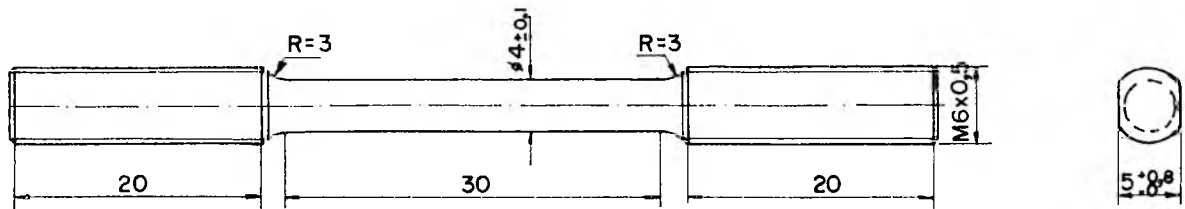


Fig. 6.2 - Corpo de prova cilíndrico usado na determinação da curva tensão-deformação do material.

TABELA 6.1 - Propriedades mecânicas básicas do material

	$\psi$	$\sigma_E$ (MPa)	$\sigma_R$ (MPa)	$\sigma_{\text{frat}}$ (MPa)	$n_1$	$k_1$ (MPa)	$\epsilon_f$
$\bar{X}$	0,702	283,9	469,2	1051,3	0,162	740,8	1,21
V	0,024	0,031	0,016	0,054	0,154	0,050	0,045

$\bar{X}$  média

V. coeficiente de dispersão

$\psi$  estrição

$\sigma_E$  tensão de escoamento

$\sigma_R$  tensão convencional de resistência à tração

$\sigma_{\text{frat}}$  tensão real de fratura

$n_1$  expoente de encruamento para a relação  $\sigma = k \epsilon^n$ , onde  $\epsilon = n$  no ponto de instabilidade, ou seja,

$\epsilon = -\ln(\phi_e/\phi_0)/\nu$ , onde  $\nu = 0,5$  e  $\phi_0$  e  $\phi_e$  são o diâmetro inicial do corpo de prova e o seu diâmetro depois do alongamento uniforme do corpo.

$k_1$  constante da relação  $\sigma = k \epsilon^n$

$\epsilon_f$  deformação real na fratura =  $\ln [1/(1 - \psi)]$

TABELA 6.2 - Propriedades mecânicas do material

E (MPa)	$n_2$	$k_2$ (MPa)
208400	0,2504	925

E módulo de elasticidade do material

$n_2$  e  $k_2$  expoente de encruamento e constante da relação  $\sigma = k \epsilon^n$  obtida da curva  $\sigma_{\text{real}} \times \epsilon_{\text{real}}$  do material, considerando-se o fator de Bridgman.

Os corpos de prova utilizados para atingir os objetivos fins foram do tipo Keyhole ou CTK, com três diferentes tipos de entalhes cilíndricos, conforme pode ser visto na figura 6.3. A espessura destes corpos ficou limitada à espessura máxima da chapa depois de retificada e polida. Desta forma, obteve-se uma razão  $w/B$  da ordem de 19, onde  $w$  é a largura entre o ponto de aplicação de carga e a extremidade do corpo de prova e  $B$  é sua espessura. Devido à pequena espessura, pouco antes do início da trinca, o corpo de prova tendeu a apresentar acentuada tendência à flambagem, que era corrigida tão logo detectada. Com base nessas verificações, recomenda-se trabalhar com razões  $w/B$  menores, da ordem de 8 ou menos.

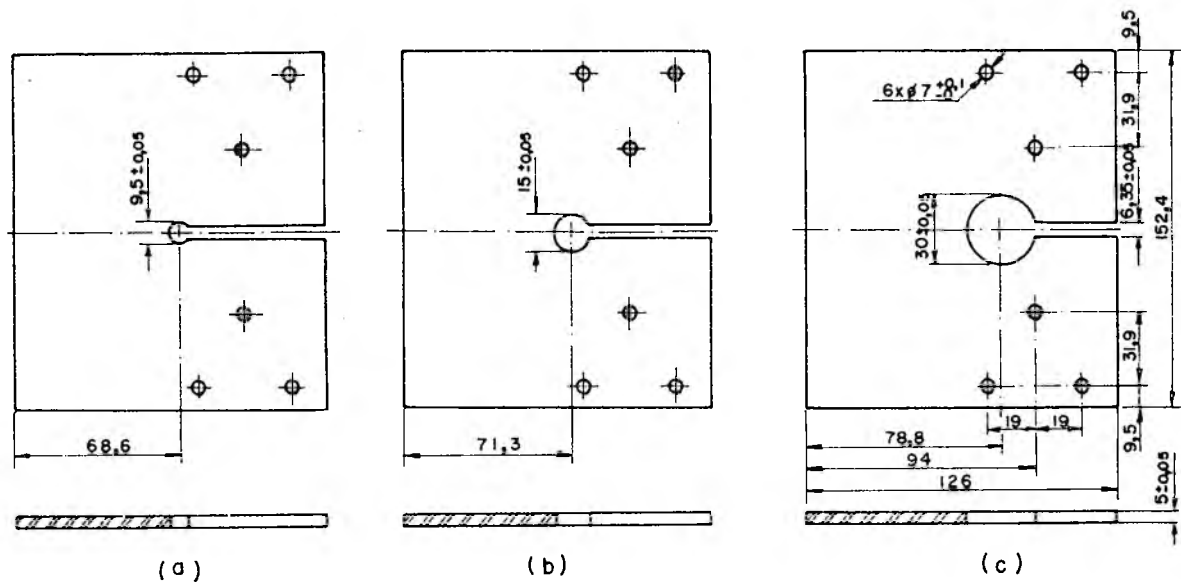


Fig. 6.3 - Geometria do corpo de prova CTK.

Todos os corpos de prova foram usinados de maneira que a carga fosse aplicada no sentido de laminação do material.

Para o cálculo da integral  $J$  nos corpos de prova CTK, u sou-se o desenvolvimento analítico descrito no Apêndice 1.

Logo, a integral  $J$  é dada por

$$J = \frac{1}{2} \frac{F^2}{B} \frac{\partial(1/k)}{\partial a} + \frac{2}{b} \frac{(1 + \alpha)}{(1 + \alpha^2)} \int_0^{\Delta_p} (F/B) d\Delta_p +$$

$$+ \frac{2}{b} \frac{\alpha(1 - 2\alpha - \alpha^2)}{(1 + \alpha^2)^2} \int_0^{F/B} \Delta_p d(F/B)$$

A fim de obter a razão entre a flexibilidade do corpo usado em função do tamanho de trinca, foram realizados testes de tração em corpos de prova com as mesmas dimensões do CTK, mas com entalhes na forma de trincas agudas de três diferentes tamanhos. Os valores de  $\alpha$  foram calculados para cada corpo de prova, devido às pequenas variações dimensionais (da ordem de centésimos de milímetro) devidas ao processo de fabricação, porém os mesmos diferiram em menos de 0,1%. As integrais de trabalho real e trabalho complementar plástico, por unidade de espessura, foram encontradas a partir da curva força versus deslocamento levantada durante os ensaios.

Os valores dos fatores de concentração de tensão elásticos, para os três diferentes tipos de entalhes usados, foram estimados segundo Peterson [39], que sugere que, devido à carga excêntrica, se deve calcular separadamente as tensões nominais e máximas devidas à tração e à flexão, somá-las, e então calcular  $K_t$ . A tabela 6.3 apresenta os valores de  $K_t$  para os três tipos de entalhe.

TABELA 6.3 - Fatores de concentração de tensão elásticos para os três tipos de entalhes usados nos corpos de prova CTK.

CTK tipo	$\sigma_{ot}$ (mm <sup>-2</sup> )	$\sigma_{máxt}$ (mm <sup>-2</sup> )	$K_{tt}$	$\sigma_{of}$ (mm <sup>-2</sup> )	$\sigma_{máxf}$ (mm <sup>-2</sup> )	$K_{tf}$	$K_t$ calcu lado	$K_t$ medido
1	0,003196F	0,00895F	2,80	0,01841F	0,05210F	2,83	2,826	3,167
2	0,003192F	0,00749F	2,38	0,01804F	0,04258F	2,36	2,364	2,587
3	0,003194F	0,00593F	1,86	0,01839F	0,03365F	1,83	1,834	1,904

$$\sigma_{ot} = F/B b$$

$$\sigma_{of} = 6F|a + b/2|/B b^2$$

Os fatores de concentração de tensão foram ainda obtidos experimentalmente através do uso de extensômetros de resistência dos tipos MM-CEA-06-062UW-120 e MM-EP-08-125BB-120, com comprimento ativo de medida de 1,57 mm e 3,17 mm, respectivamente. Os extensômetros foram colocados nos corpos de prova conforme mostra a figura 6.4(a e b), e para tal, foi necessário construir um dispositivo que fornecesse uma pressão de  $1 \text{ kg/cm}^2$  sobre os mesmos, durante o tratamento térmico necessário para a cura da cola, a  $95^\circ\text{C}$  por uma hora. As deformações no extremo do entalhe foram lidas através de uma ponte de Wheatstone HBM-Kompensator MK. Os valores de  $K_t$  assim obtidos encontram-se na tabela 6.3. A figura 6.5 apresenta um detalhe das medições.

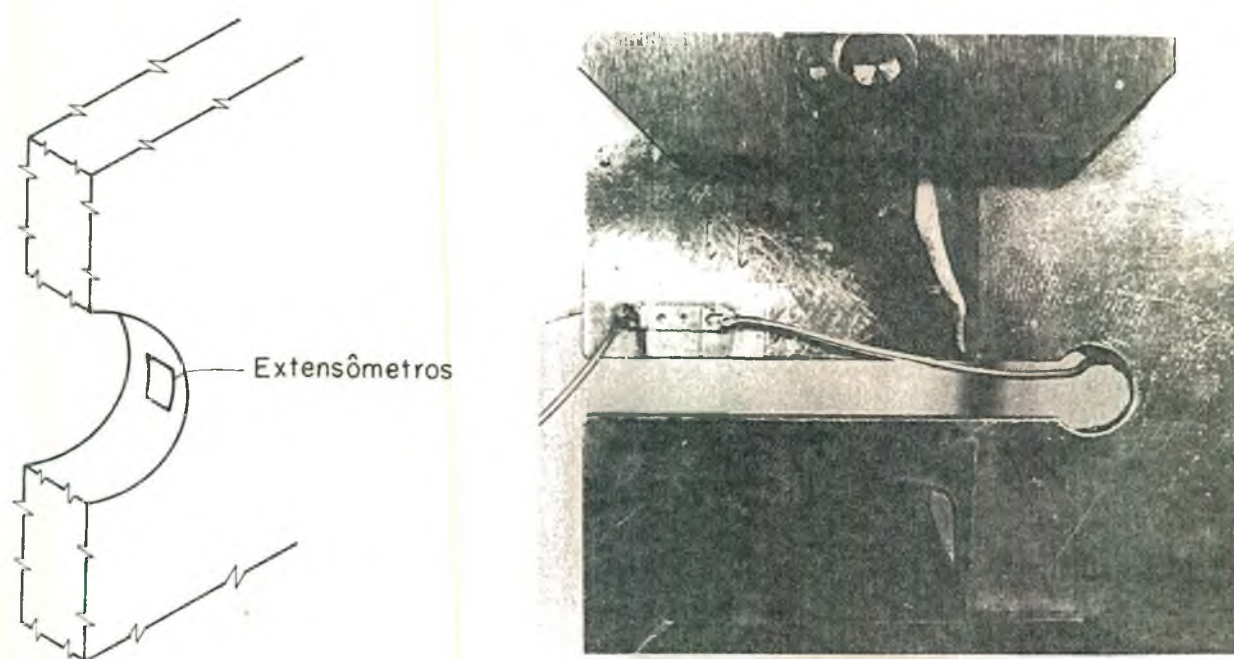


Fig. 6.4 - Posição dos extensômetros nos corpos de prova CTK.

Devido às deformações sofridas pelo corpo de prova na região do entalhe serem muito maiores que as admitidas pelos extensômetros, foi utilizado o método de Moiré como uma alternativa para a medida das deformações. O reticulado mestre utilizado consistiu da aplicação em mylar do reticulado comercial Normatone 1040-50% com passo de 0,25 mm, de linhas retas e paralelas. Este mesmo reticulado foi impresso ao corpo de prova depois de cuidadosamente lixado e polido com óxido de cromo, por meio da resina



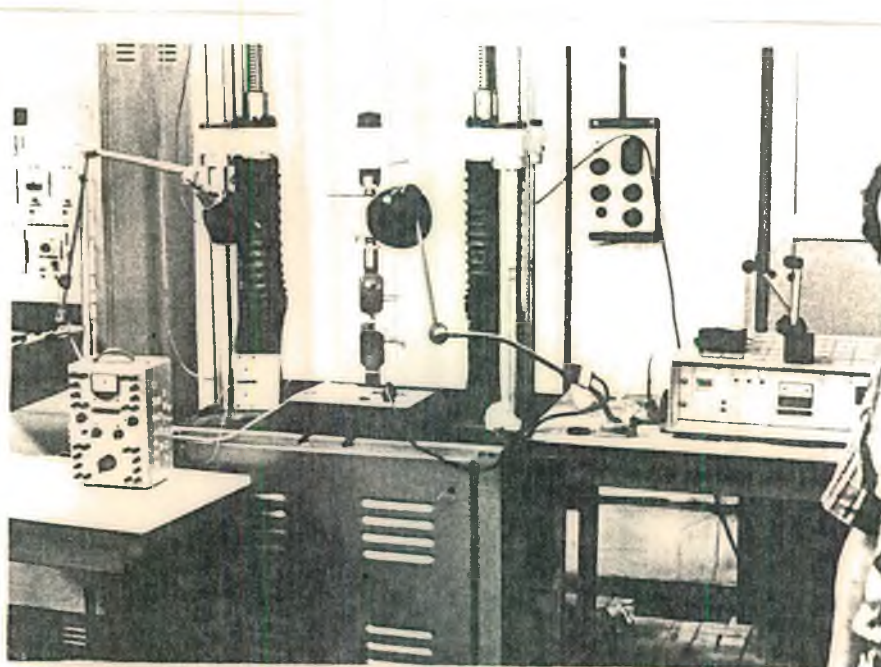


Fig. 6.5 - Corpo de prova com extensômetro e equipamento de teste.

Kodak KPR-42346-CAT 1892074, sensível à luz ultravioleta, e posterior ataque químico com ácido nítrico a 50% em álcool etílico por 30 segundos. Durante cada ensaio foram feitas várias fotografias das isotéticas a diferentes carregamentos, por meio da máquina fotográfica CALUMET 21590 com lente Schneider - Kreuznach Xenar 1:4,5/180. O filme utilizado foi o Kodalith Ortho tipo 3, com tempo de exposição de um minuto para uma abertura do diafragma de f11. A figura 6.6 mostra as franjas de Moiré obtidas durante o carregamento de um dos corpos de prova. A figura 6.7 apresenta uma visão do equipamento utilizado nestas medidas.

Todos os ensaios de tração foram realizados na máquina Amsler-Wolpert Testatron com capacidade máxima de 100 kN (figuras 6.5 e 6.7). Para a realização dos mesmos, foi necessário confeccionar dispositivos apropriados para a fixação dos corpos de prova à máquina, conforme pode ser observado na figura 6.8.



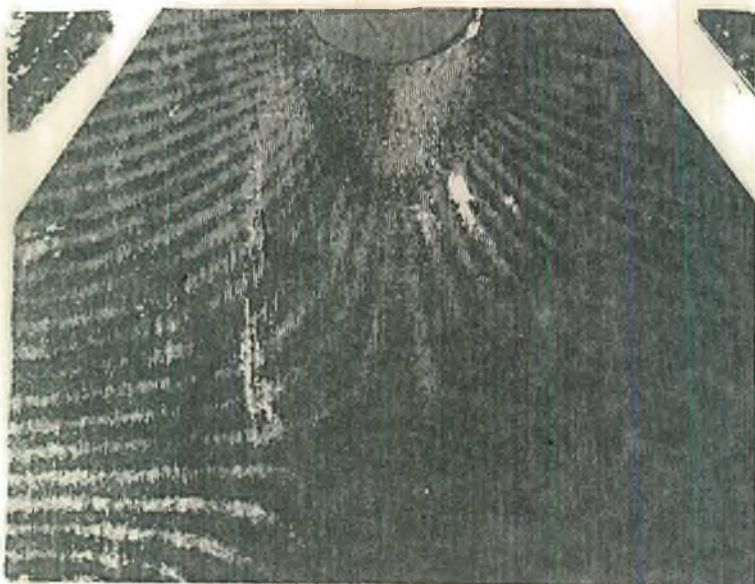
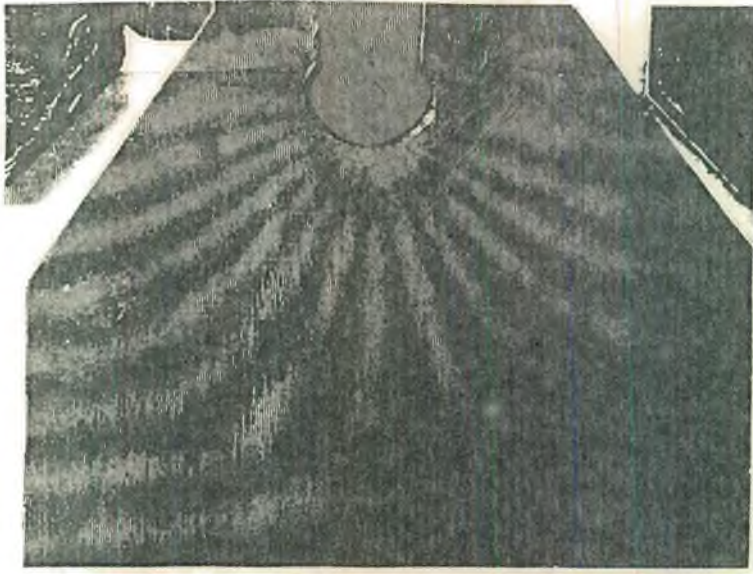


Fig. 6.6 - Franjas de Moiré durante várias etapas do carregamento monotônico em um corpo de prova CTK.

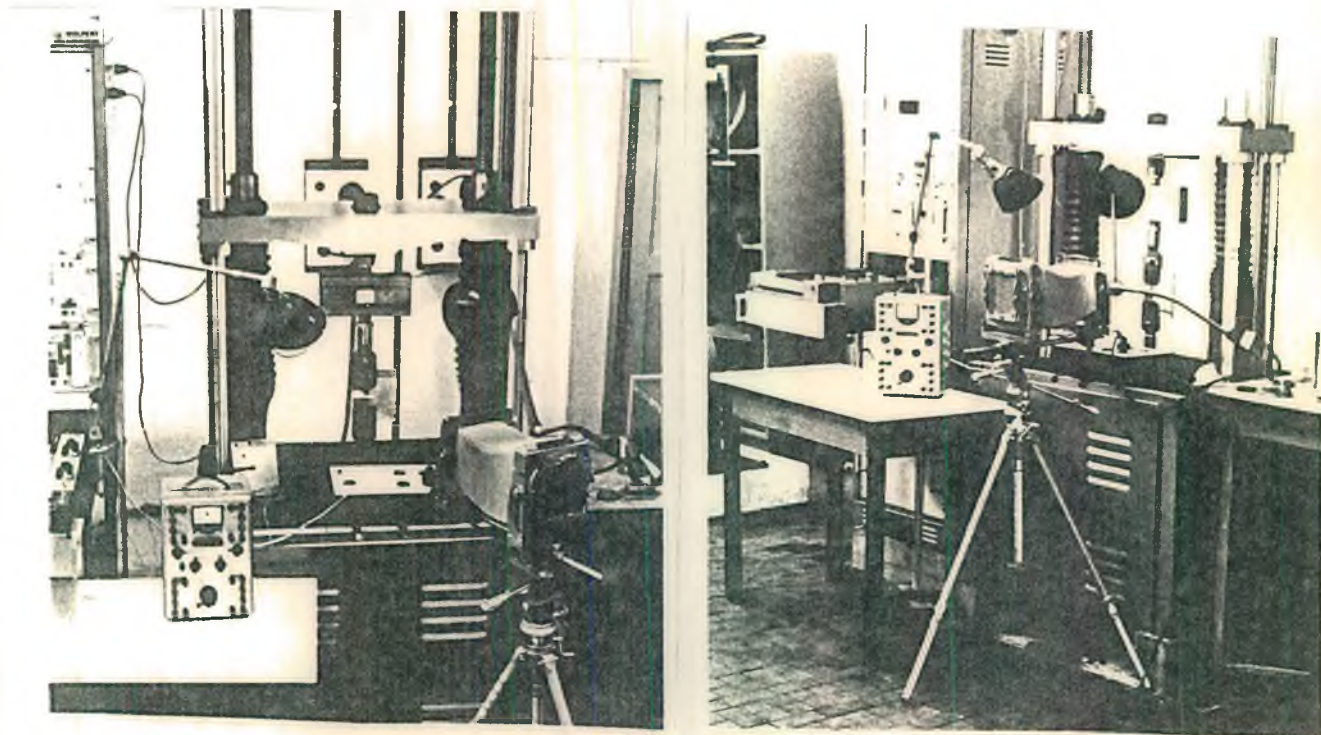


Fig. 6.7 - Corpo de prova CTK e equipamento utilizado para a medida das franjas de Moiré.

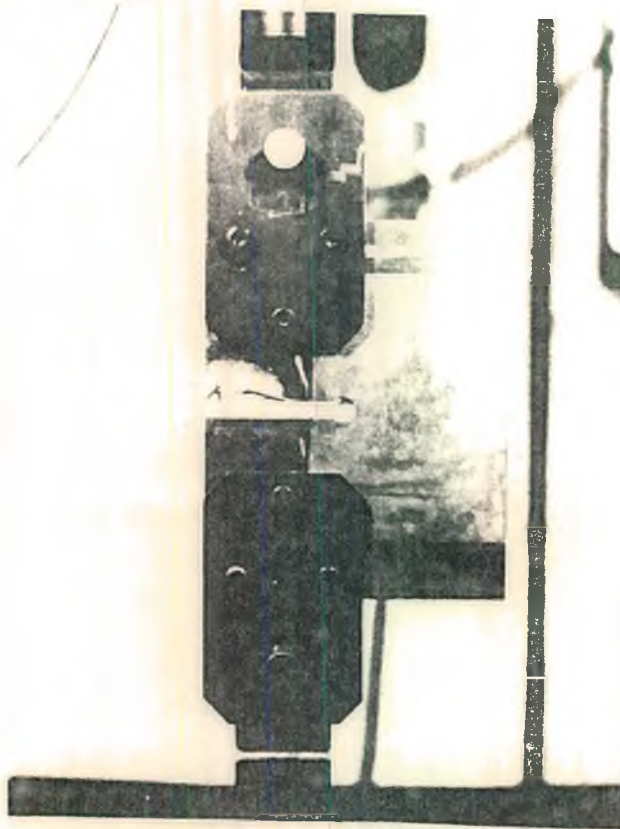


Fig. 6.8 - Corpo de prova CTK 1 montado na máquina de ensaio.



## 7. Análise dos Resultados

Foram realizados vários ensaios experimentais tanto com os corpos de prova cilíndricos, para o levantamento das propriedades mecânicas do material, bem como com os corpos de prova CTK, com diferentes formas de entalhe. Os resultados experimentais, para um mesmo tipo de corpo de prova, se apresentaram bastante próximos entre si, e assim foi considerada a média dos valores obtidos experimentalmente como base para os cálculos que se seguem.

### 7.1 - Integral J

A integral J, como já citado no capítulo 6, foi calculada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 J = & \frac{1}{2} \frac{F^2}{B} \frac{\partial(1/k)}{\partial a} + \frac{2}{b} \frac{(1 + \alpha)}{(1 + \alpha^2)} \int_0^{\Delta_p} (F/B) d\Delta_p + \\
 & + \frac{2}{b} \frac{(1 - 2\alpha - \alpha^2)}{(1 + \alpha^2)^2} \int_0^{F/B} \Delta_p d(F/B) \quad (7.1)
 \end{aligned}$$

A partir da curva média  $F \times \Delta l$  foi levantada a curva  $F/B \times \Delta_p$ , e daí calculadas as áreas referentes ao trabalho real e ao trabalho complementar plástico em diversos pontos. Com isto foram obtidos os valores da integral J em função do deslocamento, para os três diferentes tipos de entalhe, conforme pode ser visto na figura 7.1.

Posteriormente, a integral J foi calculada com base na equação

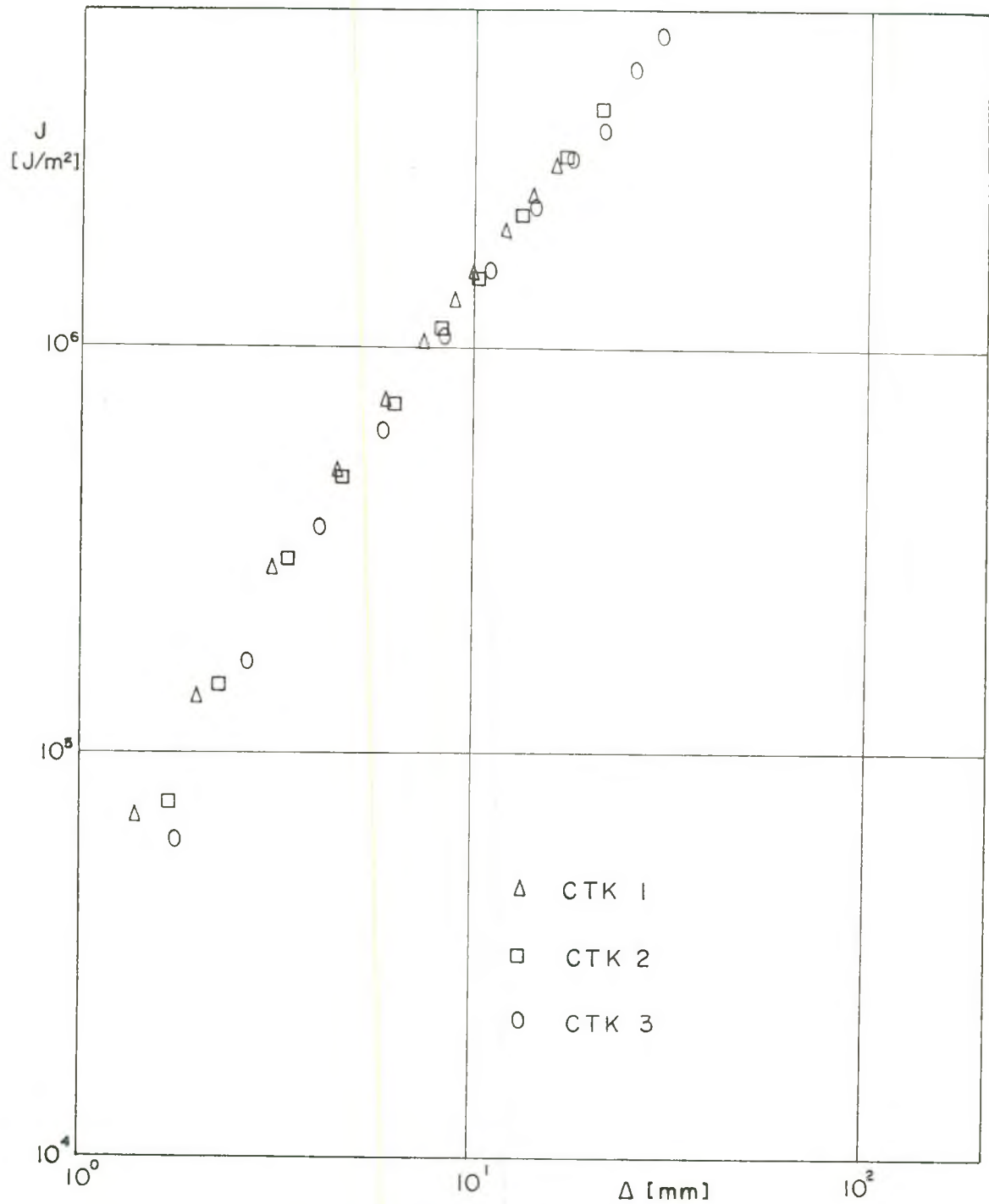


Fig. 7.1 - Integral J em função do deslocamento

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} W[\epsilon(\phi)] r(\phi) \cos \phi \, d\phi$$

onde se usou a solução numérica, por não se ter uma única equação representativa da curva  $\sigma \times \epsilon$  do material. Considerando  $r(\phi) = r_t = \text{constante}$ , tem-se

$$J = 2r_t \sum_{i=1}^n W(\epsilon_i) \cos \phi_i \Delta\phi \quad (7.2)$$

onde  $W(\epsilon_i) = W(\epsilon_{\text{m\`a}x} \cos^2 \phi_i)$ , sendo que  $\phi_i$  varia de 0 a  $\pi/2$  r\u00e1dianos.

Para o c\u00e1lculo da energia de deforma\u00e7\u00e3o, foi arbitrado um valor de  $\epsilon_{\text{m\`a}x}$  e ent\u00e3o calculando-se  $W(\epsilon_i)$ , em m\u00e9dia, para vinte diferentes valores de  $\phi_i$ , a partir da curva m\u00e9dia  $\sigma \times \epsilon$ , obtida atrav\u00e9s dos corpos de prova cil\u00edndricos. Com isto foi levantada uma curva  $J/r_t \times \epsilon_{\text{m\`a}x}$ , que resultou em

$$J/r_t = 932,33 \epsilon_{\text{m\`a}x}^{1,2263} \quad (7.3)$$

onde  $r_t$  \u00e9 o raio do entalhe. O coeficiente de correla\u00e7\u00e3o para esta curva foi de 0,9997. Segundo Rice [41] (Ap\u00eêndice 1), para um material que exiba um comportamento entre a tens\u00e3o e a deforma\u00e7\u00e3o do tipo

$$\sigma = \sigma_E (\epsilon/\epsilon_E)^n$$

onde  $n$  \u00e9 o expoente de encruamento, a integral  $J$  \u00e9 dada por

$$J/r_t \approx \text{cte} \epsilon_{\text{m\`a}x}^{(n+1)} \quad (7.4)$$

Comparando-se as equa\u00e7\u00f5es (7.3) e (7.4), pode-se concluir que, segundo a integral  $J$ , o expoente de encruamento do material \u00e9 0,2263.

Com os valores de  $J$  calculados conforme a equa\u00e7\u00e3o (7.1), foram obtidos os valores de  $\epsilon_{\text{m\`a}x}$  a partir da curva  $J/r_t \times \epsilon_{\text{m\`a}x}$ , conforme pode ser visto na figura 7.8.

## 7.2 - M\u00e9todo de Moir\u00e9

Utilizando-se o m\u00e9todo de Moir\u00e9, conforme descrito no Ap\u00eêndice 2, foi levantado o valor da deforma\u00e7\u00e3o ao longo da linha m\u00e9

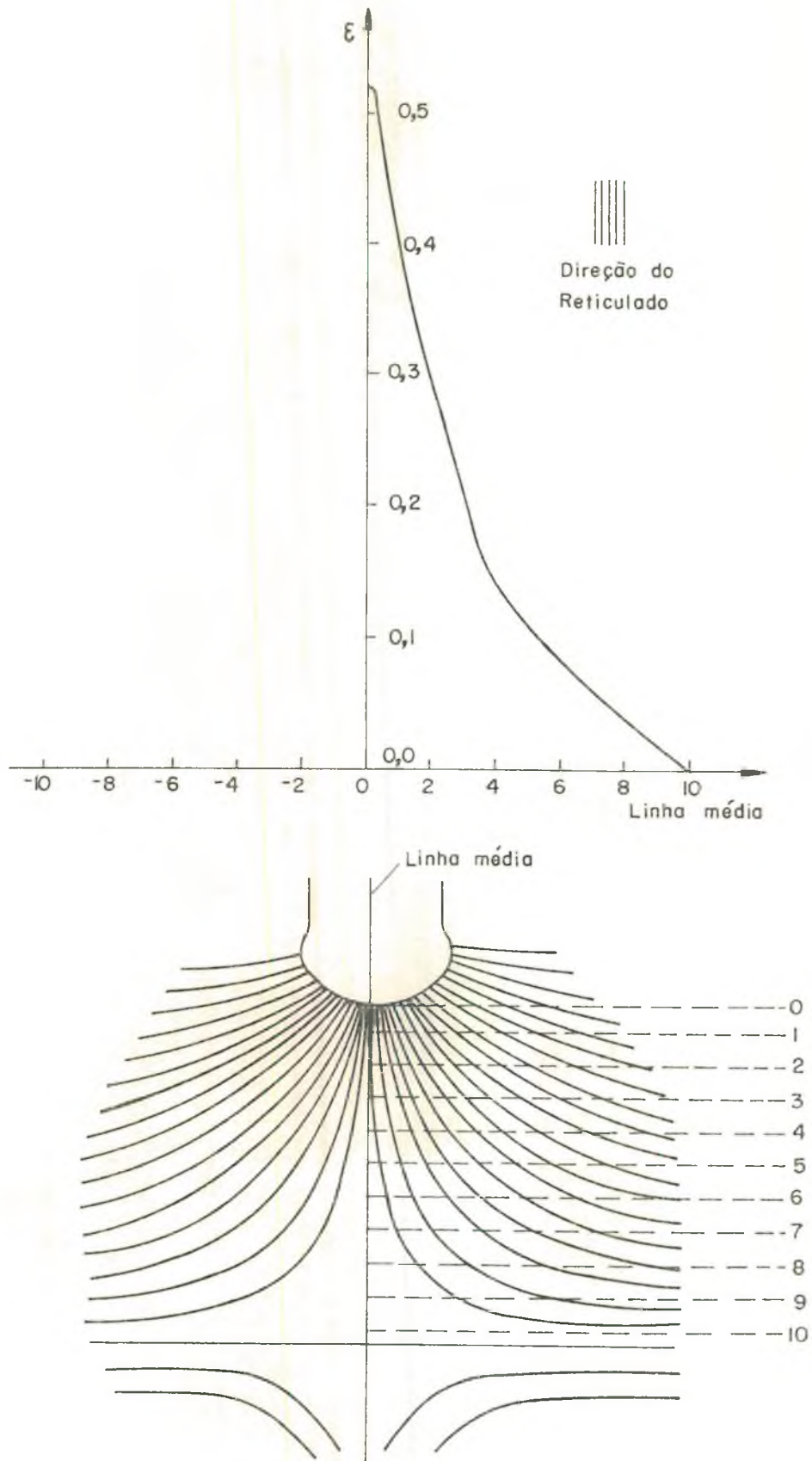


Fig. 7.2 - Distribuição de deformação ao longo da linha média do do corpo de prova.

dia do corpo de prova, para diversos valores de deslocamento. Durante os ensaios foram tiradas várias fotografias das franjas de Moiré em diferentes pontos de deslocamento. Houve alguns problemas nesta parte, tais como filmes que não sensibilizaram à luz e a máquina que não abriu o diafragma durante a foto. Devido a isto, não se obteve o número de dados esperados, principalmente nos ensaios com os corpos de prova de maior entalhe.

A figura 7.2 apresenta a distribuição da deformação sofrida pelo corpo de prova ao longo de sua linha média, e a figura 7.8 apresenta os valores de  $\epsilon_{m\acute{a}x}$  em função do deslocamento.

### 7.3 - Teorias de Neuber e Stowell-Hardrath-Ohman

Para calcular-se o valor da deformação máxima no ápice do entalhe segundo as teorias dos fatores de concentração de deformações, admitiu-se que a distribuição de tensões ao longo da seção transversal efetiva do corpo de prova seja do tipo

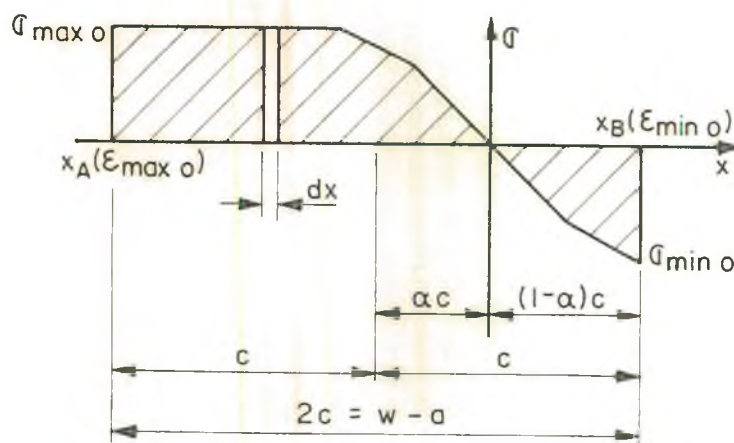


Figura 7.3 - Distribuição de tensões ao longo da seção transversal líquida do corpo de prova CTK.

Logo, tem-se que a força que está sendo aplicada em um instante qualquer pode ser obtida como

$$F = \int_0^{x_A} \sigma B dx - \int_0^{x_B} \sigma B dx = \int_0^{\epsilon_{m\acute{a}x_0}} \sigma B \frac{x_A}{\epsilon_{m\acute{a}x_0}} d\epsilon - \int_0^{\epsilon_{m\grave{m}n_0}} \sigma B \frac{x_B}{\epsilon_{m\grave{m}n_0}} d\epsilon$$



$$F = \frac{x_A}{\epsilon_{\text{máx}_0}} B \int_0^{\epsilon_{\text{máx}_0}} \sigma \, d\epsilon - \frac{x_B}{\epsilon_{\text{mín}_0}} B \int_0^{\epsilon_{\text{mín}_0}} \sigma \, d\epsilon$$

mas  $x_A = (1 + \alpha)c,$

$$x_B = (1 - \alpha)c,$$

$$\epsilon_{\text{mín}_0} = \left( \frac{\epsilon_{\text{máx}_0}}{x_A} \right) x_B = \epsilon_{\text{máx}_0} \frac{(1 - \alpha)}{(1 + \alpha)} \quad (7.4)$$

portanto,

$$F = B \frac{(1 + \alpha)c}{\epsilon_{\text{máx}_0}} \int_0^{\epsilon_{\text{máx}_0}} \sigma \, d\epsilon - B \frac{(1 - \alpha)(1 + \alpha)c}{(1 - \alpha)\epsilon_{\text{máx}_0}} \int_0^{\epsilon_{\text{mín}_0}} \sigma \, d\epsilon$$

ou

$$F = B \frac{(1 + \alpha)c}{\epsilon_{\text{máx}_0}} \left[ W(\epsilon_{\text{máx}_0}) - W(\epsilon_{\text{mín}_0}) \right] \quad (7.5)$$

O valor de  $\alpha$  foi obtido a partir da linha neutra, admitindo-se o comportamento elástico linear do material, pois, conforme verificado experimentalmente, a linha neutra praticamente não sofre variação durante a plastificação da seção transversal do corpo de prova. Sendo assim, tem-se que a tensão nominal elástica é a soma das tensões resultantes dos esforços de tração e flexão, ou seja

$$\sigma_{\text{máx}_0} = \frac{F}{B(w - a)} + \frac{3F(w + a)}{B(w - a)^2}$$

logo,

$$\sigma_{\text{máx}_0} = \frac{F}{Bw(1 - a/w)} (1) + \frac{F}{Bw(1 - a/w)} \left[ \frac{3(1 + a/w)}{(1 - a/w)} \right]$$

Da figura 7.4 podemos ver que



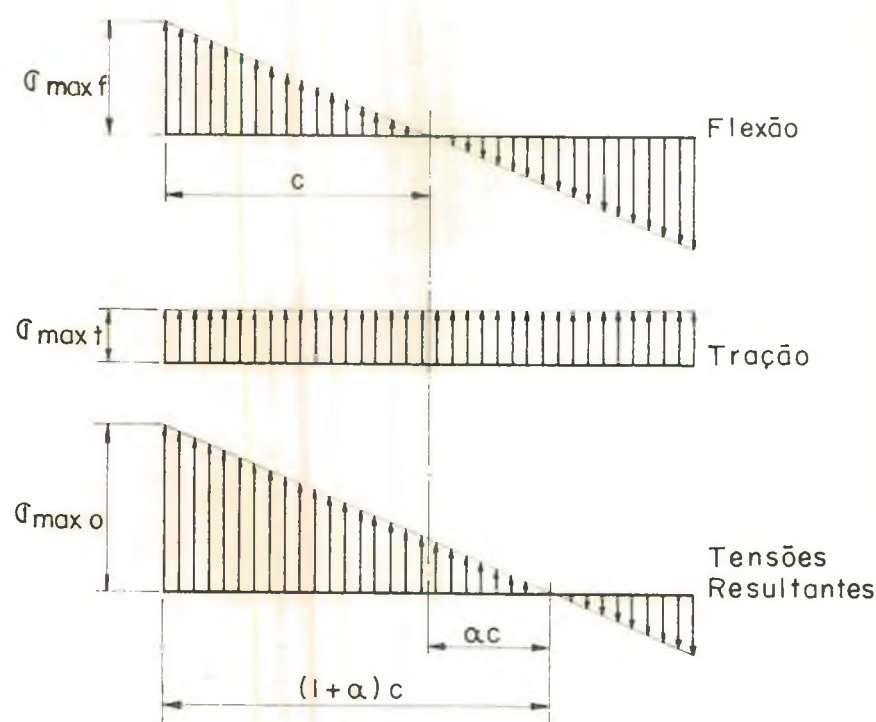


Fig. 7.4 - Distribuição das tensões ao longo da seção transversal do corpo de prova CTK, admitindo o comportamento elástico linear do material.

$$\frac{c}{\sigma_{\text{máxf}}} = \frac{(1 + \alpha)c}{\sigma_{\text{máxo}}}$$

ou seja

$$\alpha = \frac{\sigma_{\text{máxo}} - \sigma_{\text{máxf}}}{\sigma_{\text{máxf}}}$$

Arbitrando-se um valor para  $\epsilon_{\text{máxo}}$  foram calculadas  $\epsilon_{\text{míno}}$  por meio da equação (7.4) e, então, a força correspondente através da equação (7.5). Os valores de  $W(\epsilon)$  foram tomados da área sob a curva  $\sigma \times \epsilon$ , obtida experimentalmente com os corpos de prova cilíndricos. Desta mesma curva foram obtidos os valores da tensão nominal correspondentes aos valores de  $\epsilon_{\text{máxo}}$  arbitrados. Com os valores de força calculados, foi obtido o deslocamento correspondente por meio das curvas  $F \times \Delta$  dos corpos de prova CTK. Para cada valor de deformação considerado, foi construída uma curva normalizada, conforme Manson e Hirschberg [30] (Capítulo 3). Dos pontos de interseção entre estas curvas normalizadas e as curvas  $K_{\sigma} \times K_{\epsilon}$ ,

segundo as teorias de Neuber e Stowell-Hardrath-Ohman, foi obtido o valor de  $K_\epsilon$  para um determinado  $K_t$ , e daí, o valor da deformação máxima no fundo do entalhe em função do deslocamento. A figura 7.5 apresenta as curvas normalizadas e  $K_\sigma \times K_\epsilon$ , conforme as teorias em estudo, para os valores de  $K_t$  teóricos dos corpos de prova CTK.

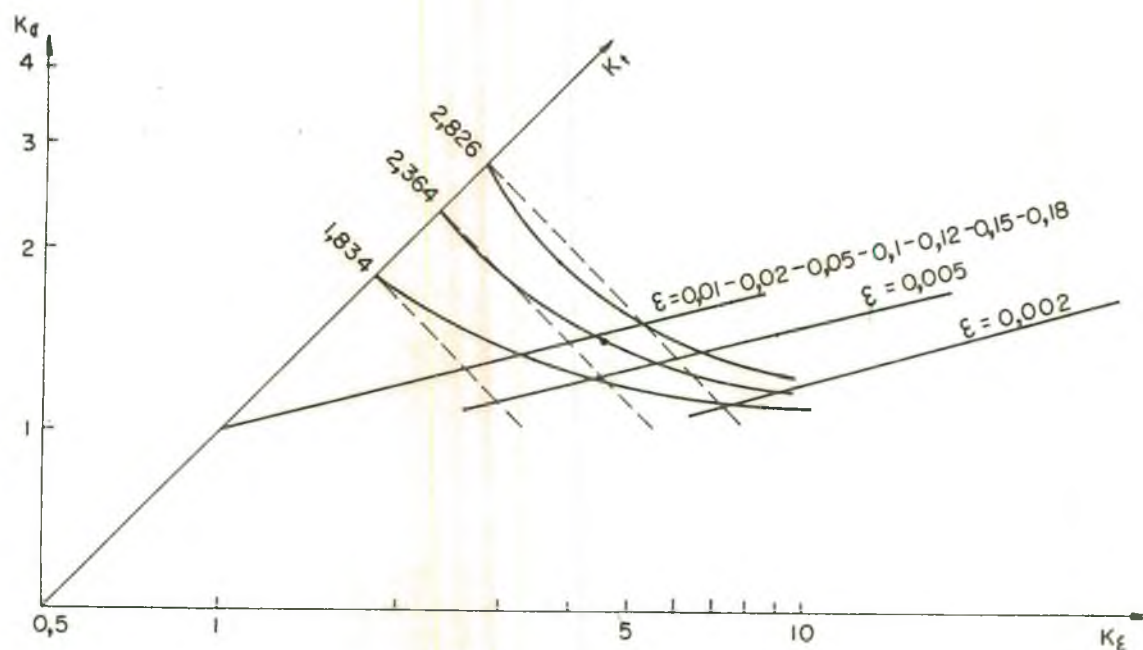


Fig. 7.5 - Curvas normalizadas.

#### 7.4 - Extensômetros de resistência

Foram selecionados dois tipos de extensômetros de resistência para se medir o valor da deformação no ápice do entalhe em função do deslocamento. Um deles, MM-CEA-06-062 UW-120, é um extensômetro com 1,575 mm de comprimento ativo, dimensionado para resistir até 3% de deformação. Já o MM-EP-08-125BB-120 tem 3,175 mm de comprimento ativo, mas resiste a uma deformação de até 20%. A cola selecionada para uní-los aos corpos de prova foi a MM-AE-15, que, conforme o catálogo do fabricante, resiste até 20% de deformação. Contudo, em todos os ensaios realizados com extensômetros, houve o desprendimento destes em deformações de apenas 0,4%, ou de no máximo 2,9%.

Os extensômetros foram posicionados sobre a superfície do entalhe com base nos resultados experimentais obtidos por Czoboly e Sandor [09], que mostraram ser o melhor ponto de medida para a deformação do extremo do entalhe, mesmo que sujeito a erros devido à curvatura deste.

Notou-se acentuadamente o efeito do raio do entalhe e do comprimento ativo do extensômetro sobre o valor de deformação medido. Quanto menor o raio, maiores eram os erros relativos aos resultados teóricos. Inversamente, quanto maior o comprimento ativo, maior a discrepância de resultados. Os dados obtidos com os extensômetros maiores foram desprezados devido à total falta de confiabilidade, pois demonstraram que a deformação medida é uma função exponencial do comprimento ativo do extensômetro, quando colocado sobre uma superfície curva.

Os valores médios de  $K_t$ , calculados por meio dos resultados obtidos com os extensômetros de resistência, encontram-se na tabela 6.3. A figura 7.8 apresenta graficamente os resultados obtidos.

#### 7.5 - Energia equivalente

A partir da curva média  $F \times \Delta$ , obtida experimentalmente para os corpos de prova CTK, foi construída a curva normalizada  $F/B^2 \times \Delta/B$  até o ponto de carga máxima, com a qual foi obtido o valor da carga na fratura assumindo um comportamento linear do material.

Para os corpos de prova CTK,  $K_{Icd}$  é calculado como

$$K_{Icd} = \frac{F Y}{B \sqrt{w}} \quad (7.7)$$

Contudo, conforme Merkle [32],

$$K_t = \frac{2BY}{\sqrt{w\pi r_t}} \quad (7.8)$$

logo, combinando as equações (7.7) e (7.8), tem-se que

$$K_{Icd} = F_{Icd} K_t \frac{\sqrt{\pi r} t}{2} \quad (7.9)$$

onde  $F_{Icd} = F/B^2$  é a carga de falha prevista, admitindo-se um comportamento linear do material. A tabela 7.1 apresenta os resultados obtidos bem como os resultados da relação

$$K_{Icd} = \sqrt{EJ_c} \quad (7.10)$$

prevista por Witt e Mager [14].

A fim de estabelecer se o valor de  $J_c$  determinado é válido, é necessário que [45]

$$B > 25 \frac{J}{\sigma_L}$$

onde  $\sigma_L = (\sigma_E + \sigma_R)/2$ , verificando-se que esta relação é satisfeita qualquer que seja o tipo de entalhe considerado.

A equação (7.9) foi empregada para o cálculo de  $K_{Icd}$  por não se ter o fator geométrico  $Y$  para corpos de prova do tipo CTK. Foram realizados cálculos usando-se o valor de  $Y$  dos corpos CT, porém estes apresentaram discrepâncias da ordem de 80% quando comparados com a equação (7.10).

TABELA 7.1 - Valores de  $K_{Icd}$  para os três tipos de entalhe observados.

CTK	$F_{Icd}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$K_{Icd}$ (MPa.√m)	$\sqrt{EJ_c}$ (MPa.√m)	$J_c$ (J/m <sup>2</sup> )
1	4787,8	828,196	771,547	2856,95 x 10 <sup>3</sup>
2	5110,0	926,128	872,462	3703,61 x 10 <sup>3</sup>
3	6055,2	1208,228	1130,970	6138,76 x 10 <sup>3</sup>

A figura 7.6 apresenta graficamente os valores de  $K_{Icd}$  e  $\sqrt{EJ_c}$  em função do raio do entalhe.



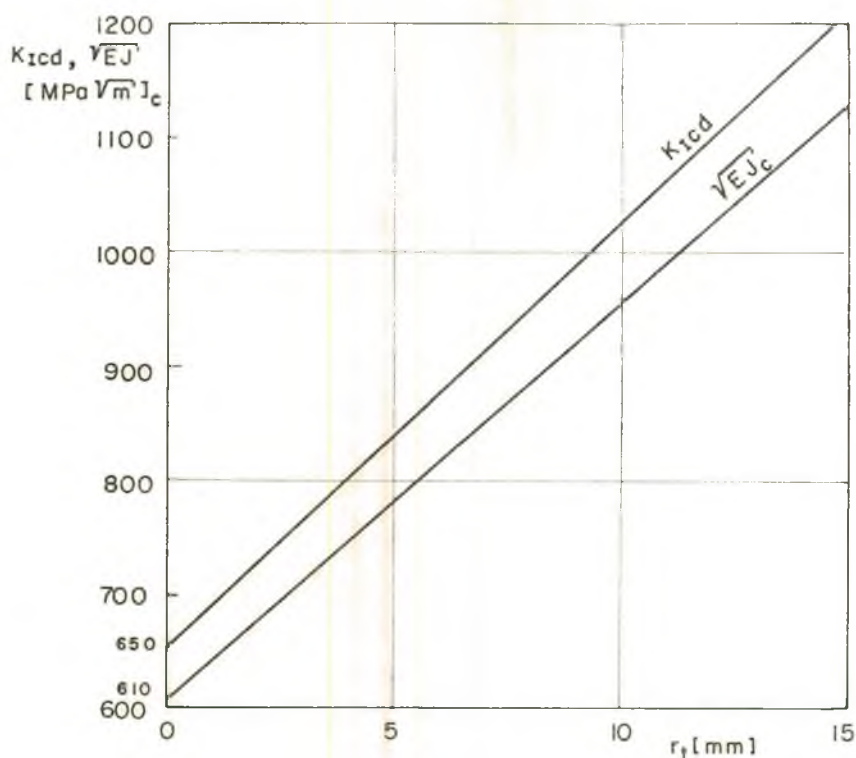


Fig. 7.6 -  $K_{Icd}$  e  $\sqrt{EJ_c}$  em função do raio do entalhe, onde  $r_t = 0$  corresponde a uma fissura de fadiga.

#### 7.6 - Método de Dowling e Townley

Para calcular-se a carga de falha,  $L_f$ , usando-se o método de Dowling e Townley, considerou-se a tensão de falha prevista pela análise limite como sendo

$$\sigma_L = \frac{\sigma_E + \sigma_R}{2}$$

onde  $\sigma_E$  e  $\sigma_R$  são as tensões de escoamento e ruptura convencionais, respectivamente. Logo, a carga de falha prevista pela análise limite é

$$L_u = 2\alpha c B \sigma_L \quad (7.11)$$

A equação (7.11) foi desenvolvida analogamente à equação (11) do Apêndice 1, já que as condições são semelhantes, ou seja, plasticificação completa da seção transversal do corpo de prova.

A carga de falha prevista pela Mecânica da Fratura Elástica Linear foi tomada a partir do valor de  $K_{Icd}$  calculado pelo método da Energia Equivalente. Logo,

$$L_k = F_{Icd} B^2 \quad (7.12)$$

Os resultados da equação (5.12), (7.11) e (7.12) estão resumidos na tabela 7.2, onde se tem que

$$\frac{L_f}{L_u} = \frac{2}{\pi} \arccos \exp \left( - \frac{\pi^2}{8} \frac{L_k^2}{L_u^2} \right) \quad (5.12)$$

e

$$\sigma_L = 376,55 \text{ N/mm}^2$$

A tabela 7.2 apresenta ainda os valores de  $L_f$  medidos experimentalmente, usando-se para tal o ponto de carga máxima. A figura 7.7 apresenta os valores calculados graficamente.

TABELA 7.2 - Razão entre a carga de falha real e a carga de falha prevista pela análise limite.

CTK	$L_u$ (DT) (N)	$L_k$ (DT) (N)	$L_f$ (exp.) (N)	$L_f/L_u$ (DT)	$L_f/L_u$ (exp.)	$L_k/L_u$ (DT)	$L_f/L_k$ (DT)
1	28906,72	114955,08	29321,05	1,0000	1,0143	3,9768	0,2515
2	28912,16	123192,39	30442,0	1,0000	1,0529	4,2609	0,2347
3	28869,58	145385,35	34157,90	1,0000	1,1832	5,0359	0,1986

Obs.: Os sub-índices (DT) e (exp.) referem-se aos valores calculados segundo o método de Dowling e Townley e aos dados experimentais, respectivamente.

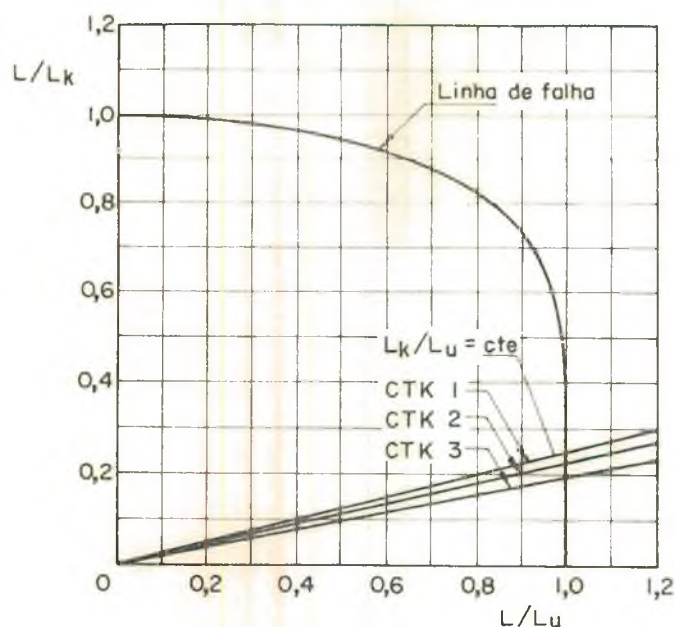


Fig. 7.7 - Carga de falha prevista pelo método de Dowling e Townley.

### 7.7 - Estimativa de $\epsilon_{\text{máx}}$ via estriçãoamento

Finalmente, com a medida da espessura no ponto mais solicitado, ou seja, na raiz do entalhe, foi determinado aproximadamente o valor de  $\epsilon_{\text{máx}}$  em função do deslocamento, usando-se o coeficiente de Poisson, ou seja.

$$\epsilon_t = \ln B_i/B_o \quad (7.13)$$

onde  $B_i$  e  $B_o$  são a espessura em um instante qualquer e a espessura antes do corpo de prova ser carregado, e  $\epsilon_t$  é a deformação transversal sofrida pelo mesmo;

$$\epsilon_{\text{máx}} = -\nu \epsilon_t \quad (7.14)$$

onde  $\nu = 0,5$ . Os resultados obtidos encontram-se na figura 7.8.

Os valores da espessura foram medidos com um paquímetro, o que tornou o resultado bastante impreciso. Inicialmente havia sido feito um dispositivo constituído de dois relógios comparadores fixados à base da máquina de ensaio. Com a elongação sofrida

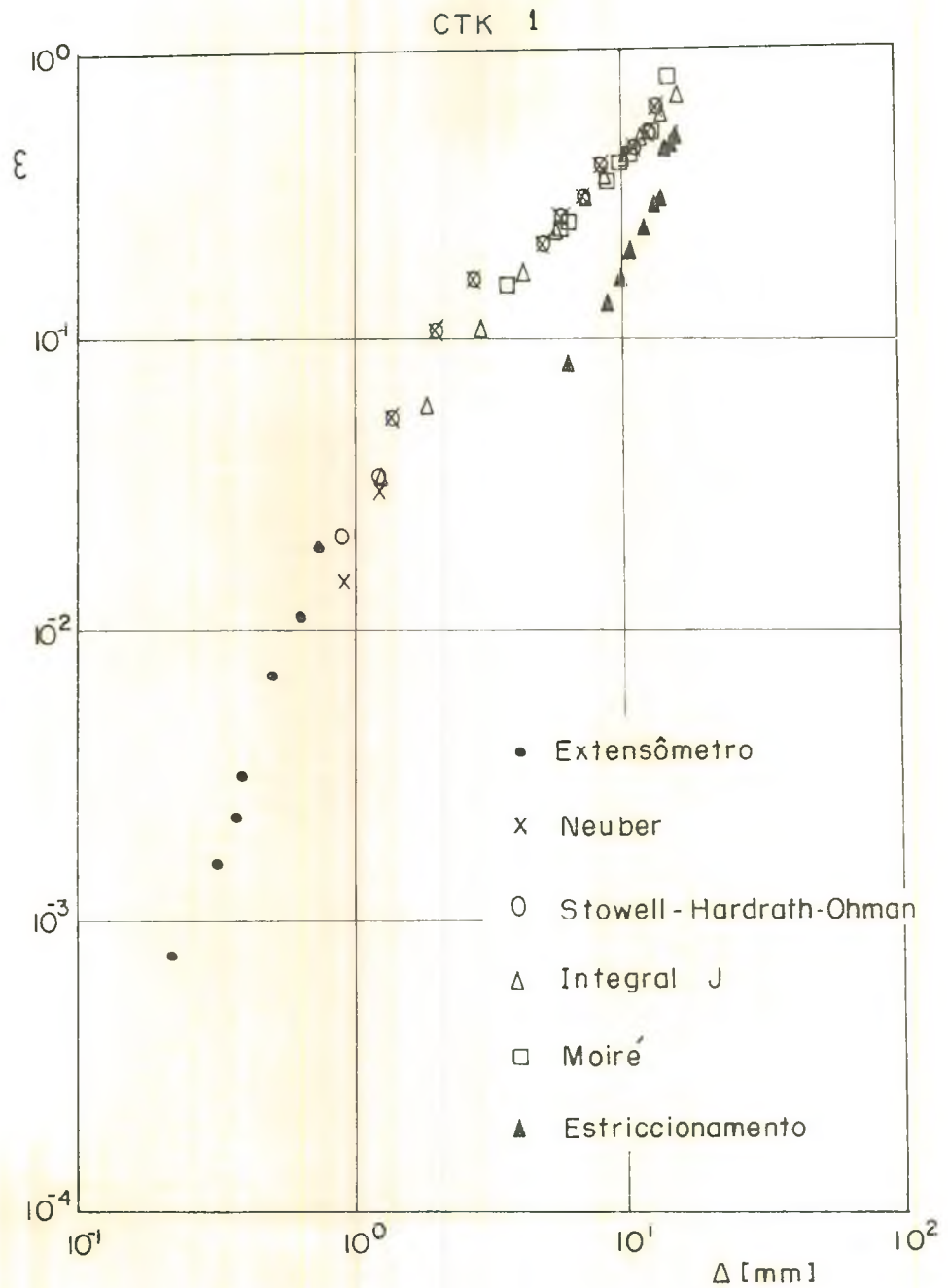


Fig. 7.8a- Deformação máxima na raiz do entalhe em função do deslocamento, segundo a integral J, o método de Moiré, as teorias de Neuber e Stowell-Hardrath-Ohman, o valor medido pelos extensômetros de resistência e a estimativa via estriccionamento.



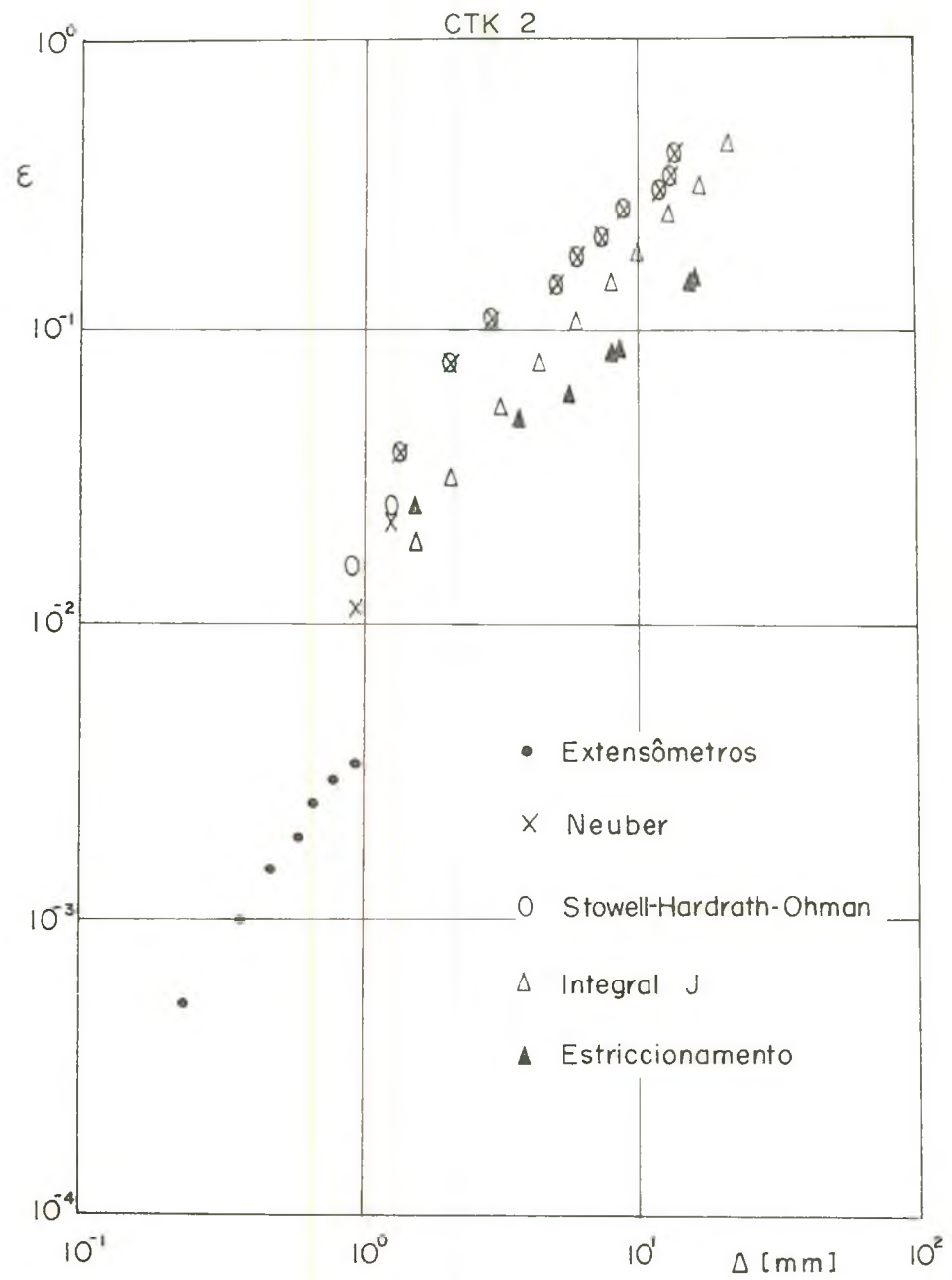


Fig. 7.8b - Deformação máxima na raiz do entalhe em função do deslocamento, segundo a integral J, o método de Moiré, as teorias de Neuber e Stowell-Hardrath-Ohman, o valor medido pelos extensômetros de resistência e a estimativa via estriccionamiento.

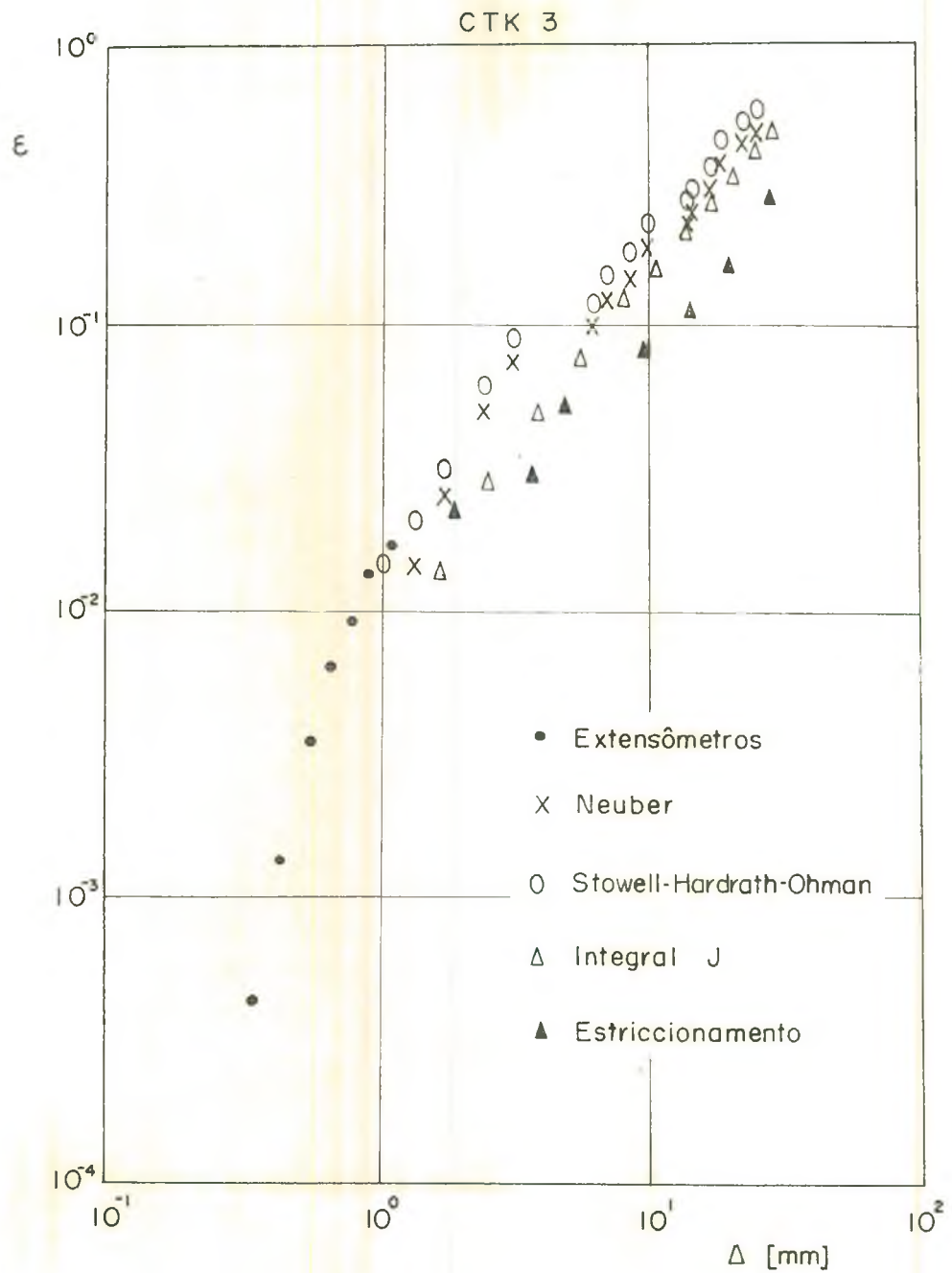


Fig. 7.8c- Deformação máxima na raiz do entalhe em função do deslocamento, segundo a integral J, o método de Moiré, as teorias de Neuber e Stowell-Hardrath-Ohman, o valor medido pelos extensômetros de resistência e a estimativa via estriccionamiento.

pelo corpo de prova, estes relógios não mais ficavam fixados sobre a raiz do entalhe, o que ocasionava a mudança na forma de medida.

#### 7.8 - Mecanismo de ruptura dútil

Depois de rompimentos, foram analisados ao microscópio algumas amostras dos corpos de prova testados, visando obter resultados que comprovassem as teorias microscópicas de ruptura dútil, sem entretanto fazer-se um estudo mais aprofundado sobre as mesmas.

A figura 7.9 apresenta uma vista transversal do corpo de prova na zona trincada. Pode-se ver claramente a trinca bastante aberta e as zonas adjacentes com uma quantidade bastante grande de poros de dimensões razoáveis, porém ainda bem afastados entre si.

A figura 7.10 apresenta uma região do material próxima à trinca, depois de atacada com reativo de Nital, mostrando os grãos bastante deformados e inclusões de sulfeto de manganês, sem nenhuma deformação, rodeadas por uma grande cavidade.

A figura 7.11 apresenta outra região próxima à trinca, onde se pode constatar a presença de microcavidades transgranulares.

A figura 7.12 apresenta uma vista da trinca logo que esta começou a propagar. Nas figuras 7.13 e 7.14 tem-se a ampliação de seus extremos, podendo-se notar nitidamente que a propagação da trinca ocorreu de forma a coalescer as cavidades de maior dimensão.

Pode-se ver que, embora tenha havido a nucleação e crescimento de um número bastante grande de poros, o seu coalescimento final só ocorre no momento de fratura.



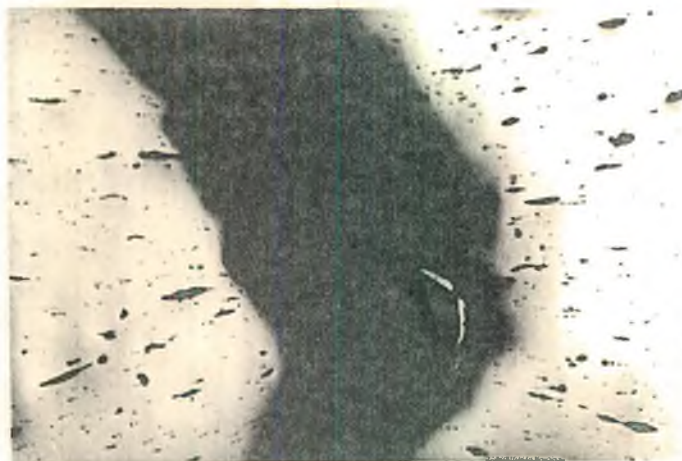


Fig. 7.9 - Vista frontal da trinca, apresentando grande quantidade de poros próximos à mesma. Sem ataque (Aumento-50x)



Fig. 7.10 - Cavidade típica ao redor de partículas de sulfeto de manganês. Ataque. Nital (Aumento - 250x).

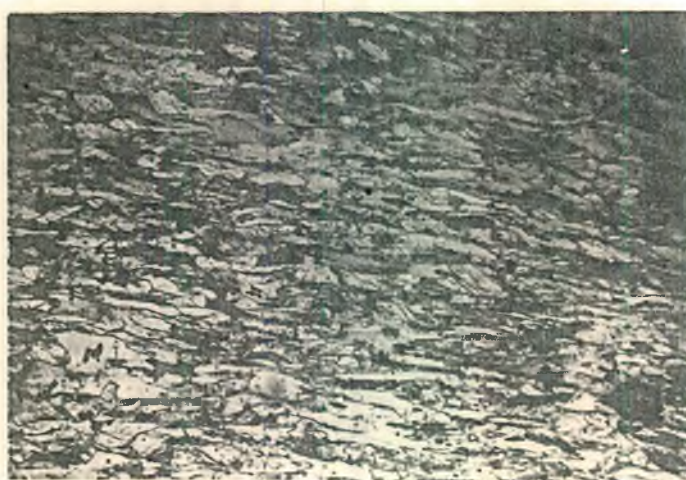


Fig. 7.11 - Zona próxima à trinca, apresentando inúmeras cavidades de tamanho microscópico. Ataque: Nital (Aumento 156x).



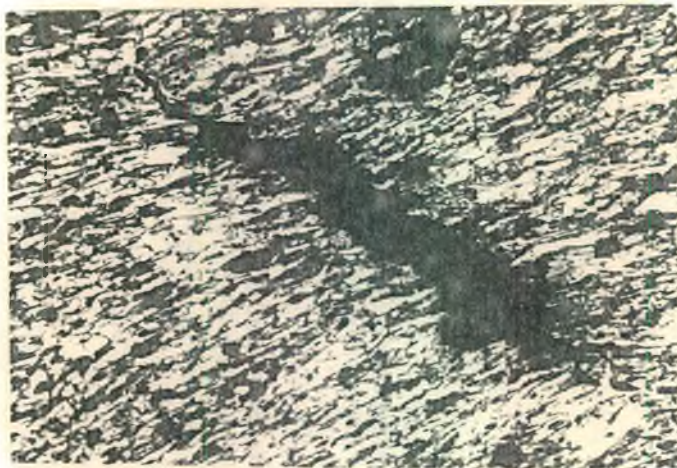


Fig. 7.12 - Trinca pouco propagada. Ataque: Nital (Aumento-125x)

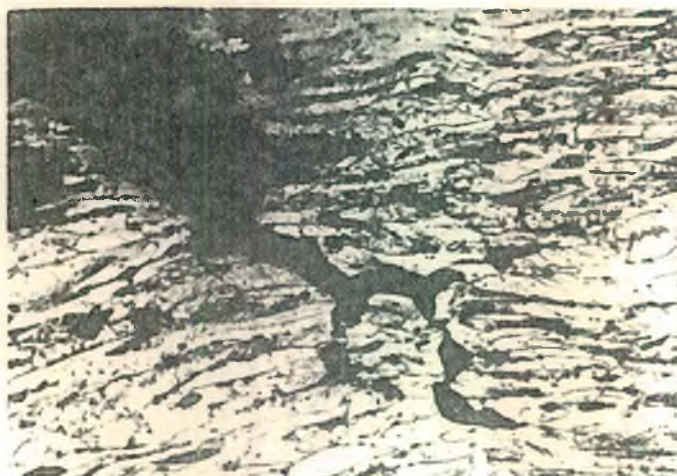


Fig. 7.13 - Vista de uma das extremidades da trinca acima, notando-se o sentido de propagação da mesma em função do coalescimento dos poros de maior dimensão. Ataque: Nital (Aumento - 250x).



Fig. 7.14 - Vista da outra extremidade da trinca, podendo-se ver ainda o sentido de deformação do material. Ataque: Nital (Aumento - 156x).

## 8. Conclusões

A parte experimental teve como objetivos precípuos verificar o cálculo da concentração de deformações e os métodos de análise para caracterizar a ruptura dútil.

### 8.1 - Concentração de deformações

Os cinco métodos utilizados para obter a concentração de deformações deram bons resultados, já que os valores da deformação máxima na raiz do entalhe calculados segundo a integral  $J$ , ou segundo as teorias de Neuber e Stowell-Hardrath-Ohman, resultaram em valores bem próximos aos reais, quando comparados com os dados medidos via extensômetros de resistência e pelo método de Moiré.

Os valores de  $J_c$  no ponto de carga máxima da curva  $F \times \Delta_p$  foram ligeiramente imprecisos, já que a carga máxima se manteve constante ao longo de um incremento razoável de deformação, sendo que o ponto tomado no cálculo de  $J_c$  foi a média entre o início e fim deste valor.

Observou-se ainda a necessidade de desenvolver uma tecnologia mais aprimorada para trabalhar com extensômetros que admitem grandes deformações, pois se obteve apenas cerca de 10% do valor de deformação permitido para os extensômetros em serviço.

O reticulado usado para a medida das deformações pelo método de Moiré, deu bons resultados quando da medida da ruptura, porém deveria ser mais flexível, já que não se conseguiu bom contato entre o corpo de prova e a malha quando havia estriccionamento mais acentuado. Todavia, para se obter valores de deformação com menores deslocamentos, se faz necessário o uso de um reticulado bem mais fino, da ordem de 50  $\mu\text{m}$ , para poder comparar estes resultados com os obtidos pelos extensômetros de resistência.

Outro ponto a ressaltar é quanto à revelação dos filmes utilizados para fotografar a malha em diversas etapas de carregamento: deve ser feita cuidadosamente, nunca em função de tempo mas da melhor imagem, visto que muitas fotos foram perdidas.

Os valores de deformação calculados por meio da medida do estirricionamento do corpo de prova no ponto mais solicitado apresentaram-se razoáveis, embora não sejam confiáveis, já que no cálculo não foi feita uma análise rigorosa do estado de deformações que agia naquela região.

## 8.2 - Métodos de análise para caracterizar a ruptura dútil.

Foram analisados três parâmetros caracterizadores de ruptura dútil, obtendo-se resultados bastante concordantes entre si. Dos valores obtidos, pôde-se prever, inclusive, qual será o valor de  $K_{Icd}$  ou  $J_c$  para uma fissura de fadiga, oscilando este entre 610 a 650  $MPa\sqrt{m}$ , conforme o método utilizado.

O método de Dowling e Townley comprovou o esperado, ou seja, que o material rompe de uma forma bastante dútil, já que a razão entre as cargas de falha prevista pela Mecânica da Fratura Elástica Linear e pela análise limite oscilaram entre 4 a 5, conforme o raio do entalhe. Os valores de carga de falha real calculados por este método pouco divergiram dos valores medidos experimentalmente, subestimando os mesmos no caso dos entalhes de raios maiores, significando inclusive maior confiabilidade dos resultados.

Em particular, a integral J mostrou-se um método bastante bom tanto como parâmetro caracterizador de ruptura como também no cálculo da concentração de deformações.

## 8.3 - Conclusões

Como previsto pelas teorias de ruptura dútil, o material realmente parece romper pela nucleação de poros com o seu conseqüente crescimento, sendo que a fratura final se dá por cisalhamento, visto estar-se predominantemente em um estado plano

de tensões. Uma análise mais detalhada sobre os mecanismos de nucleação é assunto bastante vasto e poderia ser considerada como um tópico específico de dissertação.

Dos resultados obtidos, conclui-se que os métodos estudados podem ser aplicados no projeto de estruturas com algum tipo de descontinuidade, que venham a sofrer um carregamento estático ou mesmo dinâmico. Conhecendo-se o fator de concentração de tensões teórico do entalhe e a curva experimental ( $\sigma \times \epsilon$ ) real do material, pode-se calcular a deformação máxima que está ocorrendo no ponto mais solicitado através das teorias de Neuber ou Stowell-Hardrath-Ohman. Com este valor é possível, então, calcular a integral  $J$ , e a partir daí, prever a carga de falha por intermédio de  $J_c$ ,  $K_{Icd}$  ou  $K_{Ic}$ . Pode-se também, a partir de  $K_{Ic}$  (ou  $K_{Icd}$ ) e das tensões de escoamento e ruptura convencionais do material, calcular-se a carga de falha por intermédio do método de Dowling e Townley, e com isto trabalhar em um valor de carga dentro de um limite de segurança, considerando-se a linha de falha prevista por este procedimento.



**Bibliografia**

1. Arroyo, I.K., Rosa, E.da, Concentração de tensões e deformações, Publicação 01/79, GRANTE-UFSC.
2. Ashby, M.F., Gandhi, C., Taplin, D.M.R., Fracture-mechanism maps their construction for F.C.C. metals and alloys. Acta Metallurgica, Vol. 27, Nº 5, May 1979, pp. 699-729.
3. ASTM E 399-72, Standard method of test for plane-strain fracture toughness of metallic materials. 1973 Annual Book of ASTM Standards, Part 31, pp. 960-979.
4. Blauel, J.G., Hollstein, T., On the assessment of cracks for elasto-plastic material behavior. Transactions of the 4th International Conference of Structural Mechanics in Reactor Technology, San Francisco, California, USA, August 1977, Paper G 2/6.
5. Broberg, K.B., Critical Review of some theories in fracture mechanics. International Journal of Fracture Mechanics, Vol. 4, Nº 1, March 1968, pp. 11-18.
6. Broek, D., "Elementary engineering fracture mechanics" Noordhoff International Publishing, Leyden, 1974.
7. Burdekin, F.M., Stone, D.E., The crack opening displacement approach to fracture mechanics in yielding materials. Journal of Strain Analysis, Vol. 1, Nº 2, 1966, pp. 145-153.
8. Crews, Jr., J.H., Hardrath, H.F., A study of cyclic plastic stresses at a notch root. Experimental Mechanics. June 1966, pp. 313-320.
9. Czoboly, E., Sandor, B.I., Fatigue behavior of notched steel specimens. EES Report Nº 39, University of Wisconsin, August, 1974.

21. Hayes, D.J., Origins of the stress intensity factor approach to fracture. *Journal of Strain Analysis*, Vol. 10, N° 4, October 1975, pp. 198-200.
22. Holister, G.S., "Experimental stress analysis," Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
23. Honeycombe, R.W.K., "The plastic deformation of metals" Edward Arnold (Publishers) Ltd., London, 1974.
24. Kanazawa, T., Kihara, H., Present status on the evaluation of fracture criteria for structural steels. Em "Significance of defects in welded structures", por T. Kanazawa e A.S. Kobayashi, University of Tokyo Press, 1974, pp. 308-317.
25. Keshavan, A., "Some studies on the deformation and fracture of normalized steel under cyclic conditions" Ph.D. Thesis, University of Waterloo, 1967.
26. Knott, J.F., The fracture toughness of metals. *Journal of Strain Analysis*, Vol. 10, N° 4, October 1975, pp. 201-206.
27. Knott, J.F., "Fundamental of fracture mechanics" John Wiley and Sons, New York, 1973.
28. Landgraf, R.W., Mitchell, M.R., La pointe, N.R., Monotonic and cyclic properties of engineering materials. Metallurgical Dept., Scientific Research Staff., Ford Motor Co. Dearborn, Michigan, 1972.
29. Lebey, J., Roche, R., Brouard, D., Effects of specimen and vessels size on toughness measurements and crack propagation in ductile structures. Transactions of the 4th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, San Francisco, California, USA, August 1977, Paper G 2/3.
30. Manson, S.S., Hirschberg, M.H., Crack initiation and propagation in notched fatigue specimens. 1st. International Conference on Fracture, Tohoku University, Sendai, Japan,

September 1965, Paper A-29, pp. 479-498.

31. McClintock, F.A., A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, June 1968, pp. 363-371.
32. Merkle, J.G., Analytical applications of the J-integral. *Progress in flaw growth and fracture toughness testing. ASTM STP 536 - American Society for Testing and Materials*, 1973, pp. 264-280.
33. Merkle, J.G., Development of the tangent modulus method of elastic-plastic fracture analysis. *Oak Ridge National Laboratory, Report ORNL 5059, Appendix H*, 1975.
34. Merkle, J.G., Corten, H.T., A J integral analysis for the compact specimen, considering axial force as well as bending effects. *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*, November 1974, pp. 286-292.
35. Nemat-Nasser, S., Overview of the basic progress in ductile fracture. *Transactions of the 4th Int. Conf. of Structural Mech. in Reactor Technology, San Francisco, California, USA, August 1977, Paper L 2/1*.
36. Neuber, H., Theory of stress concentration for shear strained prismatical bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, December 1961, pp. 544-550.
37. Nilsson, F. Östensson, B.,  $J_{IC}$ -Testing of A-533 B-statistical evaluation of some different testing techniques. *Engineering Fracture Mechanics, Vol. 10*, 1978, pp. 223-238.
38. Papirno, R., Plastic stress-strain history at notch roots in tensile strips under monotonic loading. *Experimental Mechanics*, October 1971, pp. 446-452.
39. Peterson, R.E., "Stress concentration factors" *John Wiley and Sons, New York*, 1974.

40. Priest, A.H., Experimental methods for fracture toughness measurement. Journal of Strain Analysis. Vol. 10, N° 4, October 1975, pp. 225-232.
41. Rice, J.R., A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, June 1968, pp. 379-386.
42. Rice, J.R., Johnson, M.A., The role of large crack tip geometry changes in plane strain fracture. Inelastic Behavior of Solids, Kanninen et al., editors, McGraw-Hill, 1970, pp. 641-661.
43. Rice, J.R., Tracey, D.M., On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 17, 1969, pp. 201-217.
44. Roche, R.L., Some comments about the  $J_1$  integral criterion in post yield fracture mechanics. Transactions of the 4th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, San Francisco, California, USA, August 1977, Paper G 3/2.
45. Rolfe, S.T., Barson, J.M., "Fracture and fatigue control in structures", Prentice Hall, New Jersey, 1977.
46. Rosa, E.da, Notas sobre fadiga e mecânica da fratura, Publicação 05/79, GRANTE-UFSC.
47. Rosa, E.da, Leal, L.C.M., Estudo de métodos usados em análise de fadiga. Publicação 07/77, GRANTE-UFSC.
48. Sahgal, S., Varga, T., Junker, M., Shakeshaft, M., Pressure vessel fracture safety investigations using as criterion the onset of crack propagation. Transaction of the 4th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, San Francisco, California, USA, August 1977, Paper G 1/4.

49. Thomason, P.F., A critical assessment of plastic hole-growth mechanisms of ductile fracture. Prospects of fracture mechanics, Sih et al, editors, Noordhoff Publishing, 1974 pp. 2-18.
50. Thomason, P.F., A theory for ductile fracture by internal necking of cavities. Journal of the Institute of Metals, Vol. 96, 1968, pp. 360-365.
51. Turner, C.E., Yielding fracture mechanics. Journal of strain Analysis, Vol. 10, N° 4, October 1975, pp. 207-216.
52. Wilhelm, D.P., Ratwani, M.M., Zielsdorff, G.F., A J-integral approach to crack resistance for aluminium, steel, and titanium alloys. Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME, April 1977, pp. 97-104.
53. Wundt, B.M., Stowell-Hardrath-Ohman equation and its application to low-cycle fatigue. Effect of notches on low-cycle fatigue, ASTM STP 490, May 1972, pp. 15-27.
54. Zwicky, Jr.E.E., Cyclic strain concentration factors with local plastic flow. ASME Winter Annual Meeting, Pittsburgh P.A., USA, 1967, pp. 12-17.

## **Apêndices**

## APÊNDICE 1

## INTEGRAL J

## A1.1 - Definição

A integral J foi definida por Rice [41] para um corpo homogêneo de um material elástico linear ou não linear, livre de forças internas e sujeito a um campo de deformação bidimensional em x e y (estado plano de deformações, estado plano de tensões ou um antiplano de deformações), como sendo uma integral de linha ao longo de uma curva  $\Gamma$  em torno da extremidade de um entalhe, conforme pode ser visto na figura A1.1,

$$J = \int_{\Gamma} (W dy - \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds), \quad (1)$$

onde  $\vec{T}$  é o vetor tensão, perpendicular a  $\Gamma$ , tomado para fora, tal que  $T_i = \sigma_{ij} n_j$ ,  $\vec{u}$  é o vetor deslocamento,  $ds$  é um elemento de arco ao longo de  $\Gamma$  e  $W$  é a função densidade de energia de deformação definida como

$$W = W(x,y) = W(\vec{\epsilon}) = \int_0^{\vec{\epsilon}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}, \quad (2)$$

onde  $\vec{\epsilon} = [\epsilon_{ij}]$  é o tensor deformação. A integral J deve ser avaliada no sentido anti-horário, partindo da superfície plana inferior do entalhe e continuando ao longo de  $\Gamma$  até a superfície plana superior.

Rice provou que se  $\Gamma^*$  for uma curva fechada,  $J = 0$ , demonstrando com isto que a integral J é independente do caminho. Considere-se o contorno ABCDEFA em torno da extremidade do entalhe da figura A1.2. A integral ao longo deste contorno é zero. Como  $\vec{T} = 0$  e  $dy = 0$  ao longo dos segmentos AF e CD, a contribuição destas partes na integral é zero. Desta maneira, a contribuição de

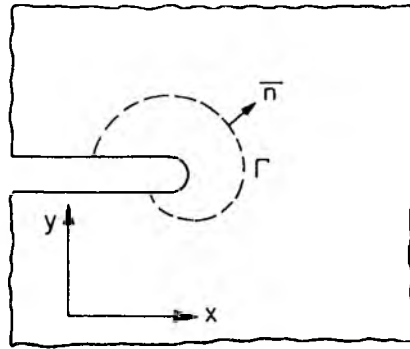


Fig. A1.1 - Entalhe de superfícies planas em um campo de deformações bi-dimensionais

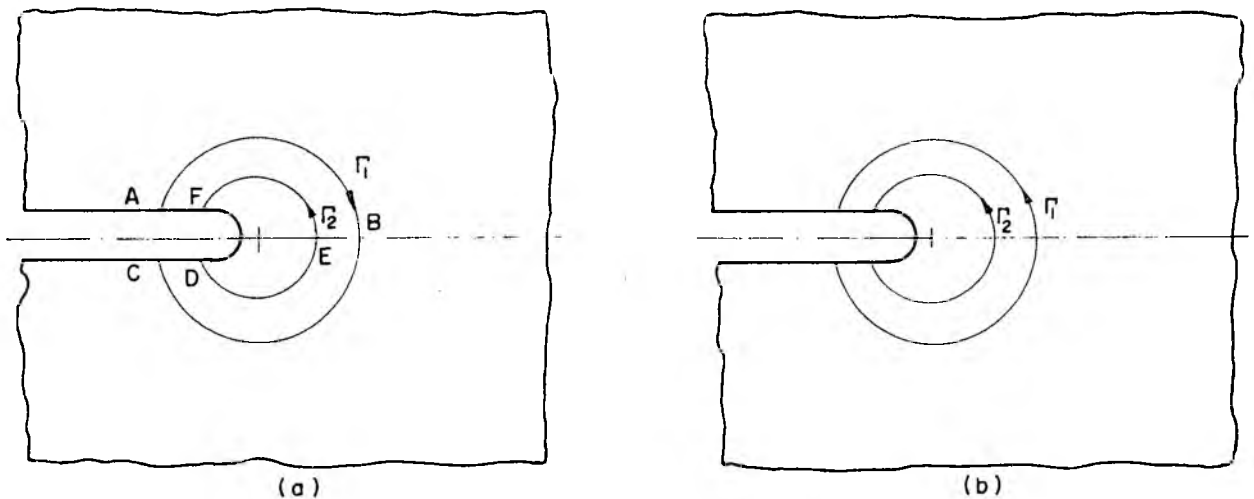


Fig. A1.2 - Contorno ao redor da extremidade do entalhe.

ABC tem que ser igual à contribuição de DEF de sinal contrário. Assim, a integral ao longo de  $\Gamma_1$  no sentido anti-horário e a integral ao longo de  $\Gamma_2$  no sentido horário, quando somadas valem zero. Logo  $J$  tem o mesmo valor quando integrada ao longo de  $\Gamma_1$  ou  $\Gamma_2$  (figura A1.2b), e a independência de caminho é provada. Admitese, todavia, que a área entre as curvas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  é livre de singularidades.

Portanto, tomando-se um contorno  $\Gamma$  fechado em relação ao extremo do entalhe, pode-se fazer com que a integral  $J$  seja dependente somente do campo local. Em particular  $\Gamma_t$  pode ser reduzido à extremidade (Figura A1.1) de um entalhe plano, e uma vez que  $T = 0$ , tem-se

$$J = \int_{\Gamma_t} W \, dy \quad (3)$$



tal que  $J$  é uma medida da energia de deformação do extremo do entalhe. Este limite não tem significado para uma trinca aguda.

Com base nesta definição, a integral  $J$  pode ser usada na Mecânica da Fratura Elástica Não-Linear e pode ainda ser considerada como um parâmetro que caracteriza a singularidade na raiz do entalhe similarmente ao que acontece com  $K_I$  (fator de intensidade de tensões no topo do entalhe na Mecânica da Fratura Elástica Linear). Tomando a integral  $J$  sobre um contorno  $\Gamma$  que passe através do material na fase elástica, tem-se que

$$J = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 \quad (4)$$

para um estado plano de deformações, onde  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. Para um estado plano de tensões

$$J = K_I^2/E \quad (5)$$

Rice [41] também demonstrou que a integral  $J$  pode ser interpretada como a mudança na energia potencial quando uma trinca é estendida de uma quantidade  $da$ , de maneira análoga à taxa de energia de deformação liberada  $G$  da Mecânica da Fratura Elástica Linear.

$$J = - \lim_{da \rightarrow 0} \frac{U(a+da) - U(a)}{da} = - \frac{dU}{da} \quad (6)$$

onde  $U$  é a energia potencial por unidade de espessura, tal que

$$U = \int_{A'} W \, dx \, dy - \int_{\Gamma''} \vec{T} \cdot \vec{u} \, ds \quad (7)$$

sendo  $A'$  a seção transversal de um corpo elástico e  $\Gamma''$  a porção do contorno na qual os vetores tração  $\vec{T}$  estão formulados. Esta definição é conceitualmente igual à do termo  $G$  de Griffith [34,41], exceto que  $G$  implica em um comportamento elástico linear. Logo, tanto em um estado plano de tensões como em um estado plano de deformações,

$$J = G \quad (8)$$

Para materiais elásticos lineares ou não-lineares as definições (1) e (6) são equivalentes.

Com base nestas definições é de se esperar que a propagação de uma trinca se inicie quando  $J$  alcança um valor crítico,  $J_{1C}$ , visto que na Mecânica da Fratura Elástica Linear, a propagação inicia com  $G_C$  ou  $K_{IC}$ .

#### A1.2 - Integral $J$ em corpos de prova do tipo CT

O método experimental mais direto para a avaliação da integral  $J$  se baseia na sua definição como taxa de mudança da energia potencial com o comprimento da trinca, já que, como relatado por Neale e Townley [44], não existe um valor experimental da integral de contorno. Testes experimentais feitos por Begley e Landes usando corpos de prova com geometrias idênticas mas com diferentes tamanhos de trinca demonstraram a praticabilidade do uso da integral  $J$  como um critério de falha.

Para corpos de prova do tipo CT (Figura A1.3) foram determinados vários procedimentos de análise do valor da integral  $J$ , dentre eles os propostos por Merkle e Cortem [34,48], Begley e Landes [04,29], e Rice, Paris e Merkle [48].

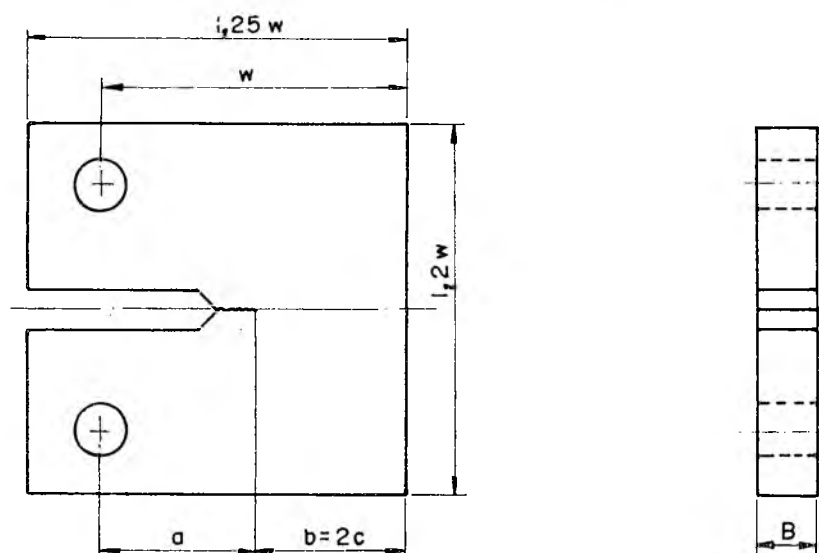


Fig. A1.3 - Corpo de prova do tipo CT

Alguns destes procedimentos [04] tem tratado o corpo de prova CT como sendo uma viga sob flexão pura, usando a equação

$$J = \frac{2}{b} \int_0^{\Delta} (F/B) d\Delta, \quad (9)$$

onde  $b$  é o comprimento do ligamento entre o topo da trinca e a extremidade do corpo de prova,  $B$  é a espessura do corpo de prova,  $F$  é a carga total e  $\Delta$  é o deslocamento total (elástico mais plástico) do ponto de aplicação de carga. A equação (9) fornece um valor de  $J$  ligeiramente menor que o valor de  $G$  dado pela análise da Mecânica da Fratura Elástica Linear do corpo de prova CT, para a falha na zona linear da curva carga-deslocamento. Isto se deve ao fato de serem ignorados na análise os efeitos da força axial.

O procedimento apresentado por Merkle e Corten analisa tanto os efeitos causados pelo momento fletor como aqueles causados pela força axial em um corpo de prova CT, chegando a uma expressão da integral  $J$  que considera separadamente os efeitos linear e não-linear do comportamento do material. Este será o procedimento adotado, o qual é resumido a seguir.

#### Al.2.1 - Análise limite de um corpo de prova CT

As condições de carga limite para a completa plastificação de um corpo de prova CT podem ser analisadas com a ajuda da equação de interação que relacione a força axial e o momento fletor na carga limite de um membro de seção transversal retangular. Neste estudo será desenvolvida e usada uma análise alternativa que proporciona o valor de um único coeficiente geométrico que determina o efeito da força axial sobre o valor da integral  $J$ .

Na figura Al.4 pode-se ver que o momento resistente interno na carga limite,  $M_L$ , em um corpo de prova CT é

$$M_L = \sigma_E B c^2 (1 - \alpha^2), \quad (10)$$

e que a carga aplicada nesta condição,  $F_L$ , é

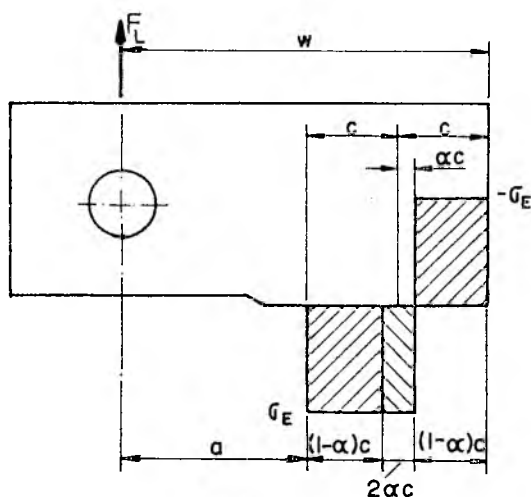


Fig. A1.4 - Condições de tensão em um corpo de prova do tipo CT na carga limite.

$$F_L = \sigma_E B c(2\alpha) \quad (11)$$

onde  $\sigma_E$  é a tensão de escoamento,  $B$  é a espessura do corpo de prova,  $c$  é a metade da distância entre o topo da trinca e a extremidade do corpo de prova, e  $\alpha$  é o coeficiente adimensional que determina a largura do bloco de tensão interna necessário para equilibrar a carga de tração aplicada  $F_L$ . O momento na plastificação completa da secção é o momento da carga  $F_L$ , ou seja

$$M_L = F_L(a + c) \quad (12)$$

onde  $a$  é o comprimento da trinca. Igualando as expressões para  $M_L$  dadas pelas equações (10) e (12), e usando a equação (11) obtém-se

$$\alpha^2 + 2\left(\frac{a}{c} + 1\right)\alpha - 1 = 0 \quad (13)$$

Resolvendo a equação (13) para  $\alpha$ , tem-se

$$\alpha = \left[ \left(\frac{a}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{c} + 1\right) + 2 \right]^{1/2} - \left(\frac{a}{c} + 1\right) \quad (14)$$

A figura A1.5 apresenta um diagrama de  $\alpha$  em função da razão entre o comprimento da trinca e o comprimento do corpo de

prova,  $a/w$ .

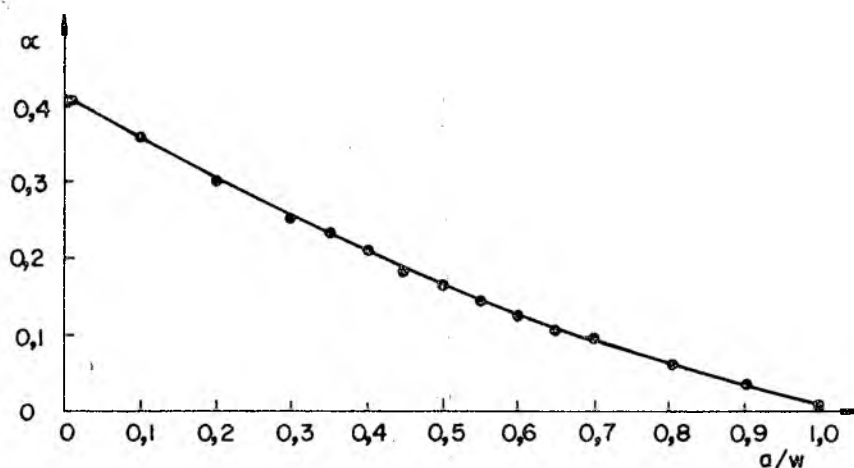


Fig. A1.5 - Coeficiente  $\alpha$  em função de  $a/w$ .

A figura A1.6 apresenta o diagrama de deslocamento na carga limite para um corpo de prova CT. Note-se que as rotações  $\theta$  ocorrem sobre o ponto de tensão nula. O ângulo de rotação plástica  $\theta_p$  é definido em termos do deslocamento plástico do ponto de aplicação de carga como sendo

$$\theta_p = \frac{\Delta_p}{a + (1 + \alpha)c} \quad (15)$$

onde  $\Delta_p$  é o deslocamento plástico do ponto de aplicação de carga.

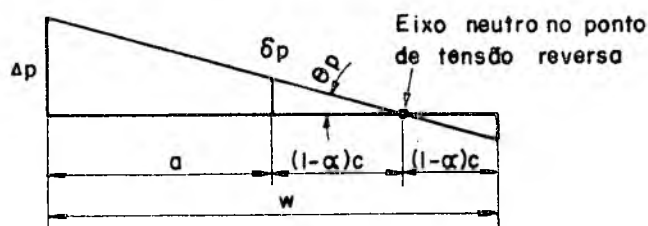


Fig. A1.6 - Diagrama de deslocamento para um corpo de prova CT na carga limite.

Em termos do deslocamento de abertura da trinca,  $\theta_p$  é

definido por

$$\theta_p = \frac{\delta_p}{(1 + \alpha)c} \quad (16)$$

onde  $\delta_p$  é a parte plástica do deslocamento de abertura da trinca.

Equacionando as expressões (15) e (16) para  $\theta_p$ , e usando a substituição

$$a = w - 2c, \quad (17)$$

onde  $w$  é a largura do corpo de prova como definida nas figuras A1.3 e A1.6, tem-se

$$\Delta_p = \frac{\left(\frac{w}{c} + \alpha - 1\right)}{(1 + \alpha)} \delta_p \quad (18)$$

#### A1.2.2 - Análise da integral J

Para esta análise define-se a integral J como a taxa de variação da energia potencial quando a trinca se propaga de  $\partial a$ .

Considere uma placa infinita com uma trinca de comprimento  $2a$  submetida à tensão uniforme  $\sigma$  aplicada no infinito. A figura A1.7 apresenta curvas carga-deslocamento para trincas de comprimento  $a$  e  $(a+\partial a)$ . Considerando as condições de contorno apresentadas, ou seja, deslocamento constante ( $\Delta_1 = \text{cte}$ ), um aumento no comprimento da trinca de  $a$  para  $(a+\partial a)$ , ocasiona uma diminuição na energia de deformação elástica do corpo de  $1/2 F_1 \Delta_1$  para  $1/2 F_2 \Delta_1$ . Logo, sob condições de deslocamento constante, a propagação da trinca provoca uma liberação de energia elástica  $1/2(F_1 - F_2)\Delta_1$ , representada na figura A1.7 pelo triângulo  $OF_1(\Delta_1)F_2$ .

Sob condições de carga constante ocorre que, durante o aumento do deslocamento a carga se movimenta de  $(\Delta_2 - \Delta_1)$ , realizando trabalho. A energia potencial sofre então um decréscimo de

$$F_1(\Delta_2 - \Delta_1) - \frac{1}{2} F_1(\Delta_2 - \Delta_1) = \frac{1}{2} F_1(\Delta_2 - \Delta_1)$$

representada na figura Al.7 pelo triângulo  $OF_1(\Delta_1)F_1(\Delta_2)$ .

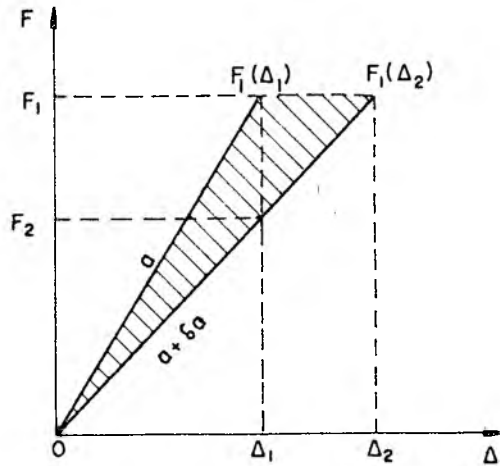


Fig. Al.7 - Definição da área entre duas curvas carga-deslocamento para diferentes comprimentos de trinca.

Quando  $\delta a \rightarrow 0$ , a energia de deformação liberada ( $\Delta = \text{cte}$ ) é igual à energia potencial liberada ( $F = \text{cte}$ ). Conclui-se então que para uma propagação infinitesimal da trinca, a diminuição na energia elástica armazenada num corpo cujas condições de contorno são de deslocamento constante, é igual à diminuição na energia potencial quando as condições são de carga constante.

Desta maneira a integral  $J$  pode ser tomada como a área entre duas curvas carga-deslocamento com diferentes tamanhos de trinca.

Para um material elasto-plástico real (figura Al.8) esta área pode ser tomada como a soma das áreas de uma série de paralelogramos diferenciais, um dos quais está hachurado na figura. A área de um destes paralelogramos diferenciais é então relacionada com o valor da integral  $J$  pela expressão

$$(dJ)(dA_c) = -\left(\frac{\partial \Delta}{\partial A_c}\right)_F dA_c \left(\frac{\partial F}{\partial A_c}\right)_{\Delta_p} dA_c \quad (19)$$

onde  $dA_c$  é o incremento na área superficial da trinca  $A_c$ ,  $F$  é a carga aplicada,  $\Delta$  e  $\Delta_p$  são os deslocamentos total e plástico do ponto de aplicação da carga, respecti

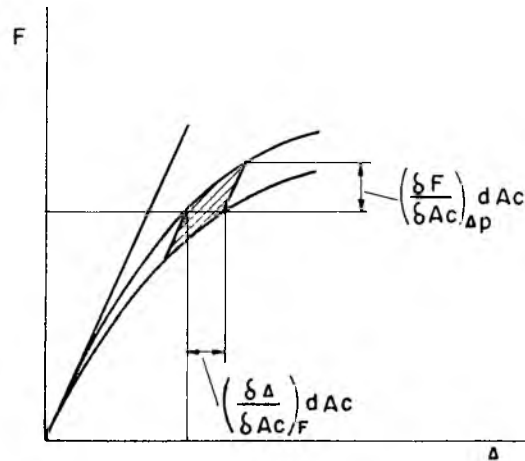


Fig. A1.8 - Definição da área incremental entre duas curvas carga deslocamento que é relacionada à integral J.

vamente, e os subíndices  $F$  e  $\Delta_p$  indicam as condições de carga constante e deslocamento plástico constante respectivamente. Como pode ser visto na figura A1.8, os paralelogramos diferenciais são tomados de forma a terem duas faces paralelas entre si, e com a inclinação da curva carga-deslocamento da parte elástica, garantindo assim, a constância no deslocamento elástico; daí usar-se o subíndice  $\Delta_p$  ao invés de  $\Delta$  para a diferenciação. Os deslocamentos total e plástico estão relacionados pela equação

$$\Delta = \Delta_e + \Delta_p, \quad (20)$$

onde  $\Delta_e$  é o deslocamento elástico do ponto de aplicação de carga. Substituindo a equação (20) na equação (19), separando os termos elástico e plástico, dividindo ambos os lados por  $dA_c$  e escolhendo subsequentemente a variável mais conveniente de integração para cada termo, obtém-se

$$dJ = \left( \frac{\partial \Delta_e}{\partial A_c} \right)_F dF - \left( \frac{\partial F}{\partial A_c} \right)_{\Delta_p} d\Delta_p \quad (21)$$

O deslocamento elástico pode ser escrito como

$$\Delta_e = F/k, \quad (22)$$



onde  $k$  é a rigidez elástica, a qual é independente de  $F$ . Portanto, substituindo a equação (22) na equação (21), usando a relação

$$A_c = B a, \quad (23)$$

e integrando ambos os lados da equação resultante, obtêm-se

$$J = \frac{1}{2} \frac{F^2}{B} \frac{\partial(1/k)}{\partial a} - \frac{1}{B} \int_0^{\Delta_p} \left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)_{\Delta_p} d\Delta_p. \quad (24)$$

O primeiro termo da equação (24) pode ser considerado como a taxa de energia de deformação elástica liberada,  $G$ . O segundo termo, o qual se reduz a zero para o comportamento elástico linear, é o incremento em  $J$  causado pelo comportamento não linear, e será denotado pelo símbolo  $J_p$ . Logo,

$$J_p = - \frac{1}{B} \int_0^{\Delta_p} \left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)_{\Delta_p} d\Delta_p. \quad (25)$$

O valor de  $J_p$  será positivo porque o valor de  $(\partial F/\partial a)_{\Delta_p}$  é negativo.

Admite-se que o ângulo de rotação plástica  $\theta_p$  é uma função somente da razão entre a carga aplicada  $F$  e a carga limite,  $F_L$  [34]. Para a aplicação na equação (25), esta função será escrita na sua forma inversa, ou seja

$$F = F_L g(\theta_p) \quad (26)$$

Usando a equação (17), a derivada parcial na equação (25) pode ser escrita como

$$- \left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)_{\Delta_p} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)_{\Delta_p} \quad (27)$$

Substituindo a equação (26) na equação (27) obtêm-se

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)_{\Delta p} = \frac{1}{2} \frac{F}{F_L} \left(\frac{\partial F_L}{\partial c}\right)_{\Delta p} + \frac{1}{2} F_L \left(\frac{\partial g}{\partial \theta_p}\right) \left(\frac{\partial \theta_p}{\partial c}\right)_{\Delta p} \quad (28)$$

Contudo

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \Delta p}\right)_c = F_L \left(\frac{\partial g}{\partial \theta_p}\right) \left(\frac{\partial \theta_p}{\partial \Delta p}\right)_c, \quad (29)$$

donde

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \theta_p}\right) = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \Delta p}\right)_c}{F_L \left(\frac{\partial \theta_p}{\partial \Delta p}\right)_c} \quad (30)$$

Logo, substituindo-se a equação (30) na equação (28) tem-se

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_{\Delta p} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial F_L}{\partial c}\right)_{\Delta p}}{F_L} F + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial \theta_p}{\partial c}\right)_{\Delta p}}{\left(\frac{\partial \theta_p}{\partial \Delta p}\right)_c} \left(\frac{\partial F}{\partial \Delta p}\right)_c \quad (31)$$

A avaliação do primeiro termo do lado direito da equação (31) pode ser obtida diferenciando-se parcialmente a equação (11) em relação a  $c$ , ou seja

$$\left(\frac{\partial F_L}{\partial c}\right)_{\Delta p} = 2\sigma_E B(\alpha + c \frac{\partial \alpha}{\partial c}) \quad (32)$$

Em seguida, substituindo-se a equação (17) na equação (13), tem-se

$$\alpha^2 + 2\left(\frac{w}{c} - 1\right)\alpha - 1 = 0 \quad (33)$$

Diferenciando-se então a equação (33) e eliminando  $(w/c)$  pela substituição da equação (33) obtém-se

$$\frac{\partial \alpha}{\partial c} = \frac{1}{c} \frac{(1 + 2\alpha - \alpha^2)\alpha}{(1 + \alpha^2)} \quad (34)$$

Substituindo agora a equação (34) na equação (32) e usando

$$b = 2c \quad (35)$$

segue que

$$\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial F_L}{\partial c}\right)_{\Delta_p}}{F_L} = \frac{2}{b} \frac{(1 + \alpha)}{(1 + \alpha^2)} \quad (36)$$

A avaliação do segundo termo do lado direito da equação (31) pode ser obtida diferenciando-se parcialmente a equação (15) em relação a  $c$ , a qual, com o auxílio da equação (34) dá

$$\left(\frac{\partial \theta_p}{\partial c}\right)_{\Delta_p} = \frac{\Delta_p}{|a + (1 + \alpha)c|^2} \frac{(1 - 2\alpha - \alpha^2)}{(1 + \alpha^2)} \quad (37)$$

Tomando então a derivada parcial da equação (15) em relação a  $\Delta_p$ , obtém-se

$$\left(\frac{\partial \theta_p}{\partial \Delta_p}\right)_c = \frac{1}{|a + (1 + \alpha)c|} \quad (38)$$

Das equações (13) e (35), segue que

$$|a + (1 + \alpha)c| = \frac{b}{2} \frac{(1 + \alpha^2)}{2\alpha} \quad (39)$$

Então, combinando as equações (37), (38) e (39), tem-se

$$\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial \theta_p}{\partial c}\right)_{\Delta_p}}{\left(\frac{\partial \theta_p}{\partial \Delta_p}\right)_c} = \frac{2}{b} \alpha \frac{(1 - \alpha - \alpha^2)\Delta_p}{(1 + \alpha^2)^2} \quad (40)$$

Finalmente, substituindo as equações (36) e (40) na equação (31), e o resultado na equação (25), obtêm-se

$$J_p = \frac{2}{b} \frac{(1 + \alpha)}{(1 + \alpha^2)} \int_0^{\Delta_p} (F/B) d\Delta_p + \frac{2}{b} \frac{\alpha(1 - 2\alpha - \alpha^2)}{(1 + \alpha^2)^2} \int_0^{F/B} \Delta_p d(F/B) \dots(41)$$

A equação (41) possibilita que o valor da integral J possa ser computado de uma única curva carga-deslocamento de um corpo de prova CT, considerando o efeito da força axial que age sobre a sua seção líquida, o que é desprezado pela equação (9).

A primeira e a segunda integral da equação (41) são o trabalho plástico e o trabalho complementar plástico, da carga aplicada por unidade de espessura, respectivamente.

Portanto, substituindo a equação (41) na equação (24) com base na definição da equação (25), tem-se que o valor da integral J para um corpo de prova CT pode ser dado por

$$J = \frac{1}{2} \frac{F^2}{B} \frac{\partial(1/k)}{\partial a} + \frac{2}{b} \frac{(1 + \alpha)}{(1 + \alpha^2)} \int_0^{\Delta_p} (F/B) d\Delta_p + \frac{2}{b} \frac{\alpha(1 - 2\alpha - \alpha^2)}{(1 + \alpha^2)^2} \int_0^{F/B} \Delta_p d(F/B). \quad (42)$$

Merkle e Corten [34] demonstraram que quando  $a$  for igual ou maior que  $0,5w$ , o deslocamento elástico do ponto de aplicação de carga é desprezível quando comparado com o deslocamento plástico, de forma que a equação (42) pode ser reduzida à equação (41) substituindo-se  $\Delta_p$  por  $\Delta$ . Contudo, para relações  $a/w < 0,5$ , os deslocamentos elástico e plástico devem ser considerados separadamente, usando-se então a equação (42).

### Al.3 - Estimativa de $\epsilon_{\text{máx}}$ pela integral J

Rice [41] apresentou uma solução aproximada para a concentração de deformação na extremidade de entalhes planos. Ele partiu da consideração de um entalhe de comprimento  $2a$  em uma placa de dimensões infinitas sob tensão uniforme, conforme mostrado na figura Al.9. Se  $\phi$  é o ângulo tangente a um ponto qualquer da extremidade do entalhe e  $r_t(\phi)$  o raio de curvatura, então, com base na equação (3), tem-se que

$$J = \int_{\Gamma_t} W \, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} W |\epsilon(\phi)| r_t(\phi) \cos \phi \, d\phi \quad (43)$$

onde  $\epsilon(\phi)$  é a deformação superficial no ponto com ângulo  $\phi$ . Como  $W |\epsilon(\phi)| \leq W(\epsilon_{\text{máx}})$ , tem-se, de imediato, um limite superior

$$J \leq W(\epsilon_{\text{máx}}) \int_{\Gamma_t} dy = 2h W(\epsilon_{\text{máx}}) \quad (44)$$

onde  $2h$  é a distância entre as superfícies planas do entalhe. Para um material elástico linear, tem-se

$$\sigma = E \epsilon$$

logo

$$W = \int_0^{\epsilon} \sigma(\epsilon) \, d\epsilon = \int_0^{\epsilon} E \epsilon^2 \, d\epsilon = \frac{1}{2} E \epsilon^2 = \frac{1}{2} \sigma E$$

para um estado plano de tensões, e (45.1)

$$W = \frac{1}{2} \frac{E \epsilon^2}{(1 - \nu^2)} \quad \text{para um estado plano de deformação.} \quad (45.2)$$

Então, no ponto de deformação máxima

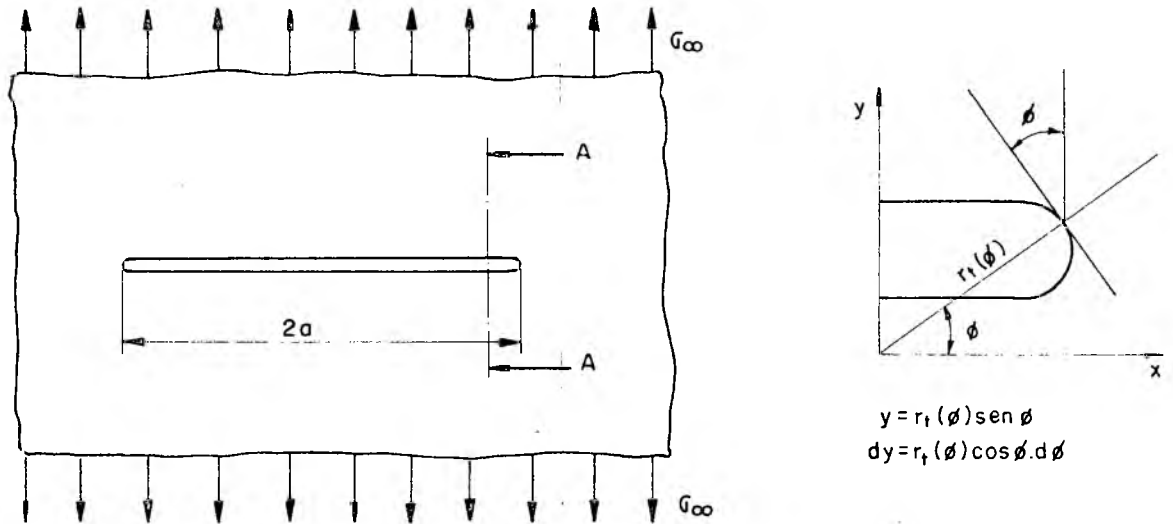


Fig. A1.9 - Entalhe agudo ou trinca de comprimento  $2a$  em um corpo de dimensões infinitas sob tensão uniforme  $\sigma_\infty$  aplicada no infinito, mostrando as coordenadas empregadas na descrição da superfície do entalhe;  $\phi$  é o ângulo tangente e  $r_t(\phi)$  é o raio de curvatura.

$$W(\epsilon_{\text{máx}}) = \frac{1}{2} \sigma_{\text{máx}} \epsilon_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \frac{E}{(1 - \nu^2)} \epsilon_{\text{máx}}^2 \quad \text{em deformação plana} \quad (46.1)$$

$$= \frac{1}{2} E \epsilon_{\text{máx}}^2 \quad \text{em tensão plana} \quad (46.2)$$

Se o entalhe da figura A1.9 for suficientemente estreito, tal que as equações (4) e (5) sejam válidas, tem-se que, pelas condições de contorno, o fator de intensidade de tensões será dado pela equação (4.8). Logo

$$J = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 \quad \text{em deformação plana,} \quad (4)$$

$$J = \frac{K_I^2}{E} \quad \text{em tensão plana,} \quad (5)$$

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \quad (4.8)$$

então

$$J = \frac{(1 - \nu^2)}{E} \sigma_{\infty}^2 a \quad \text{em deformação plana} \quad (47.1)$$

$$J = \frac{\sigma_{\infty}^2}{E} a \quad \text{em tensão plana.} \quad (47.2)$$

Substituindo as equações (46) na equação (44) e igualando os resultados às equações (47), obtém-se que, tanto no estado plano de tensão como no estado plano de deformação, a tensão máxima é

$$\sigma_{\text{máx}} \geq \sqrt{\pi} \sigma_{\infty} \sqrt{a/h} = 1,77 \sigma_{\infty} \sqrt{a/h} \quad (48)$$

desprezando-se a forma detalhada da curvatura do extremo do entalhe.

Em termos das deformações principais,  $\epsilon_{\text{máx}}$  e  $\epsilon_{\text{mín}}$ , é possível obter-se

$$\epsilon(\phi) = \epsilon_{\text{máx}} \cos^2 \phi + \epsilon_{\text{mín}} \sin^2 \phi \quad (49)$$

onde  $\epsilon_{\text{máx}}$  é a deformação ao longo do semi-eixo ( $\phi = 0, \pi$ ) e  $\epsilon_{\text{mín}}$  é a deformação ao longo da ( $\phi = \pi/2, 3\pi/2$ ). Admitindo-se então que esta mesma interpretação sobre as tensões superficiais possa ser aplicada a outros casos e considerando que  $\epsilon_{\text{mín}}$  é pequeno quando comparado com  $\epsilon_{\text{máx}}$ , tem-se que

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} W(\epsilon_{\text{máx}} \cos^2 \phi) r(\phi) \cos \phi \, d\phi \quad (50)$$

Para o comportamento elástico linear de um entalhe como o da figura A1.9 com o extremo semicircular, tem-se que  $r_t(\phi) = r_t$  (cte), e então, usando-se as equações (45.1) e (50)

$$W(\epsilon_{\text{máx}} \cos^2 \phi) = \frac{1}{2} E \epsilon_{\text{máx}}^2 \cos^4 \phi$$

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} E \epsilon_{\text{máx}}^2 \cos^4 \phi r_t \cos \phi \, d\phi = \\
 &= \frac{1}{2} r_t E \epsilon_{\text{máx}}^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 \phi \, d\phi \\
 J &= \frac{8}{15} r_t E \epsilon_{\text{máx}}^2 \tag{51.1}
 \end{aligned}$$

Comparando a equação (51.1) com a equação (47.2), e como  $\sigma_{\text{máx}} = E \epsilon_{\text{máx}}$  para um material elástico linear, obtém-se

$$\frac{8}{15} r_t \sigma_{\text{máx}} \frac{\sigma_{\text{máx}}}{E} \approx \frac{\pi}{E} \sigma_{\infty}^2 a$$

e, então,

$$\sigma_{\text{máx}} \approx \sqrt{\frac{15\pi}{8}} \sigma_{\infty} \sqrt{\frac{a}{r_t}} \tag{51.2}$$

Admitindo-se que o material tenha um comportamento perfeitamente plástico quando a tensão de escoamento  $\sigma_E$  for alcançada, tem-se que, sob um estado plano de tensões,

$$\sigma = E \epsilon \quad 0 < \epsilon \leq \epsilon_E$$

$$\sigma = \sigma_E \quad \epsilon > \epsilon_E$$

logo, a densidade de energia é

$$W = \int_0^{\epsilon} \sigma(\epsilon) \, d\epsilon = \int_0^{\epsilon_E} E \epsilon \, d\epsilon + \int_{\epsilon_E}^{\epsilon} \sigma_E \, d\epsilon = \sigma_E \epsilon - \frac{1}{2} \sigma_E \epsilon_E \tag{52}$$

e então

$$W(\epsilon_{\text{máx}} \cos^2 \phi) = \sigma_E \epsilon_{\text{máx}} \cos^2 \phi - \frac{1}{2} \sigma_E \epsilon_E \tag{53}$$



Substituindo-se a equação (53) na equação (50), obtêm-se

$$J \approx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sigma_E \epsilon_{\text{máx}} \cos^2 \phi - \frac{1}{2} \sigma_E \epsilon_E) r_t \cos \phi \, d\phi,$$

$$J \approx r_t \sigma_E \epsilon_{\text{máx}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \phi \, d\phi - \frac{1}{2} r_t \sigma_E \epsilon_E \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi \, d\phi$$

$$J \approx r_t \sigma_E \left( \frac{4}{3} \epsilon_{\text{máx}} - \epsilon_E \right)$$

ou

$$\epsilon_{\text{máx}} \approx \frac{3}{4} \left( \epsilon_E - \frac{J}{\sigma_E r_t} \right) \quad (54.1)$$

Fazendo uso da equação (47.2) na equação (54.1), tem-se

$$\epsilon_{\text{máx}} \approx \frac{3}{4} \epsilon_E \left[ 1 + \pi (\sigma_{\infty} / \sigma_E)^2 a / r_t \right] \quad (54.2)$$

Considerando então um material que apresente a relação entre a tensão superficial e a deformação além do limite elástico da forma

$$\sigma = \sigma_E (\epsilon / \epsilon_E)^n, \quad \epsilon > \epsilon_E$$

onde  $n$  é o expoente de encruamento, tem-se que a densidade de energia, desprezando-se os termos de ordem  $\epsilon_E$ , é dada por

$$W = \int_0^{\epsilon} \sigma_E (\epsilon / \epsilon_E)^n \, d\epsilon = \sigma_E \frac{1}{\epsilon_E} \int_0^{\epsilon} \epsilon^n \, d\epsilon$$

$$W = \frac{\sigma_E}{n+1} \frac{\epsilon^{n+1}}{\epsilon_E^n} \quad (55.1)$$

e, então,

$$W(\epsilon_{\text{máx}} \cos^2 \phi) = \frac{\sigma_E}{n+1} \frac{\epsilon_{\text{máx}}^{n+1}}{\epsilon_E^n} (\cos^2 \phi)^{n+1} \quad (55.2)$$

Substituindo a equação (55.2) na equação (50), obtém-se

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{\sigma_E}{n+1} \right) \left( \frac{\epsilon_{\text{máx}}^{n+1}}{\epsilon_E^n} \right) \cos^{2n+2} \phi r_t \cos \phi d\phi$$

$$J = r_t \sigma_E \frac{\epsilon_{\text{máx}}^{n+1}}{\epsilon_E^n} \frac{1}{(n+1)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n+2} \phi d\phi$$

mas

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{n+1} \right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n+3} \phi d\phi &= \left( \frac{1}{n+1} \right) \left\{ \left[ \frac{\text{sen } \phi \cos^{2n+2} \phi}{2n+3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \right. \\ &+ \frac{2(n+1)}{2n+3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n+1} \phi d\phi \left. \right\} = \frac{1}{(n+3/2)} \left\{ \left[ \frac{\text{sen } \phi \cos^{2n} \phi}{2n+1} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \right. \\ &+ \frac{2n}{2n+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n-1} \phi d\phi \left. \right\} \end{aligned}$$

Logo

$$J = r_t \sigma_E \left( \frac{\epsilon_{\text{máx}}^{n+1}}{\epsilon_E^n} \right) \left( \frac{1}{n+3/2} \right) \left( \frac{n}{n+1/2} \right) \beta(1/2, n)$$

onde  $\beta(1/2, n)$  é a função Beta. Como  $\beta(1/2, n) = \Gamma(1/2)\Gamma(n)/\Gamma(1/2+n)$ , sendo  $\Gamma(\dots)$  a função gama, tem-se que

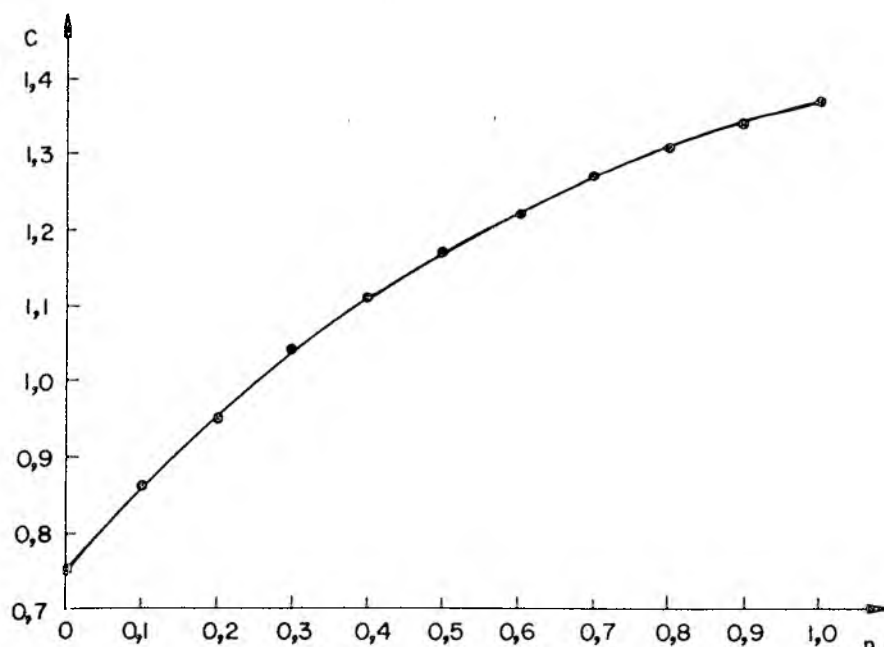


Fig. A1.10 - Relação entre  $c$  e o coeficiente de encruamento.

ma que o estado final de um corpo submetido à tensão depende da história do seu carregamento, o que não se verifica com um material elástico linear ou não linear, onde o estado final é função apenas do carregamento final.

Cabe então fazer-se alguns comentários sobre a validade do uso da integral  $J$  com materiais reais.

O primeiro aspecto que será levantado é quanto à definição de  $W$  como função densidade de energia de deformação, ou seja, densidade do trabalho recebido. Esta proposição está justificada [41] para um material elástico linear ou não linear, onde a energia de deformação é função do estado de deformação. Contudo, para os materiais reais a energia de deformação depende da história do carregamento, e se esta for complexa, ou se houver descarregamento, é de se esperar que ocorram grandes diferenças com o comportamento elástico.

Um segundo aspecto está relacionado com a independência de caminho da integral de linha  $J$ . Roche [44] determinou um método geral para avaliar a independência do caminho de  $J$  derivado da teoria de Eshelby sobre tensor momento de energia, concluindo que se nenhuma consideração for feita sobre a equação constitutiva do material, a integral  $J$  é independente do caminho para um entalhe plano ao longo do eixo  $x$ , em materiais que apresentem um comportamento do tipo de plasticidade incremental. Extensivos estudos com elementos finitos feitos por Hayes, Boyle e Sumpter [51] mostra-

ram que a independência de caminho de  $J$  não é alterada se forem escolhidos contornos ao redor do entalhe que passem parcialmente através de elementos elásticos e parcialmente por elementos plásticos, ou através de regiões onde a plasticidade se espalhou generalizadamente, tanto para os casos com ou sem encruamento.

Vários métodos tem sido propostos a fim de determinar a integral  $J$  a partir da curva carga-deslocamento. O objetivo é conhecer a variação do trabalho devido a uma variação virtual  $\partial a$  do comprimento de uma trinca  $a$ , sob a condição de carga constante (ou deslocamento constante). Contudo, o que realmente é testado são peças com vários comprimentos de trinca sob carregamento monotônico. Não há razão física, quando a trinca se propaga de  $\partial a$ , sob carga constante, para o deslocamento final virtual ser o mesmo de um carregamento de um corpo trincado de  $(a+\partial a)$ , e não é certo que a diferença do trabalho seja a mesma (Figura A1.11). De um ponto de vista teórico tal consideração implica em que o trabalho recebido é uma função bem definida do estado mecânico e geométrico, e não é dependente da história do carregamento, ou seja, admite-se que o trabalho é a energia potencial, isto é, admite-se que o material é elástico não linear.

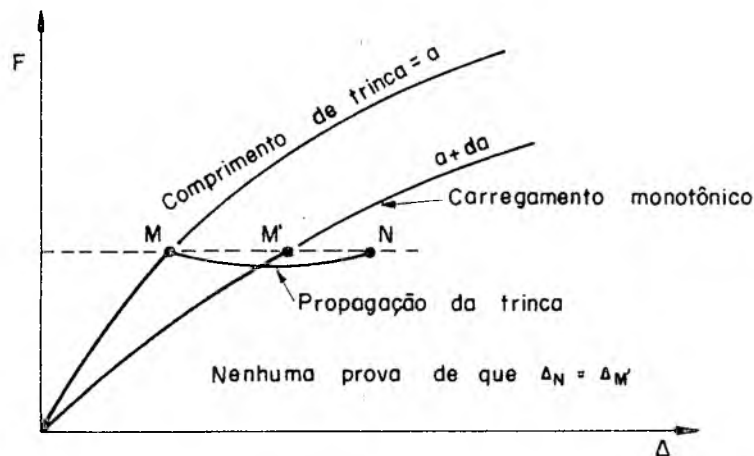


Fig. A1.11 - Curvas força versus deslocamento para dois diferentes tamanhos de trinca.

Em termos estritos, a integral  $J$  não é comprovadamente relevante na fratura elasto-plástica, já que não está teoricamente provada, contudo parece ser um bom critério, tendo sido utilizada extensivamente na análise de fratura dentro da zona plástica, com relativo sucesso.

## APÊNDICE 2

## O MÉTODO DE MOIRÉ

## A2.1 - Introdução

Um dos métodos de medida mais refinados e precisos para a determinação do campo de deslocamentos em meios contínuos é o Moiré [12,13,22]. Consiste, basicamente, na obtenção de franjas quando dois reticulados são superpostos e, então, deslocados vagarosamente. Estas franjas representam o lugar geométrico dos pontos que tem o mesmo valor da componente de deslocamento, e por isto são também chamadas de isotéticas. Com base nesta propriedade física, o método de Moiré pode ser empregado para a medida de deslocamentos e, por diferenciação, para a medida de deformações.

O efeito de Moiré está associado com os movimentos dos pontos, ou deslocamentos, que ocorrem em um plano. Assim, pode-se medir as deformações que estão ocorrendo em um plano, por meio de reticulados apropriados, desprezando ou ignorando a terceira componente de deformação.

O método de Moiré foi escolhido para a determinação da deformação em pontos específicos, por tratar-se de uma técnica aplicável ao problema em questão.

## A2.2 - O fenômeno físico

Os reticulados devem ser formados por linhas alternadamente opacas e transparentes (ou escuras e claras), geralmente retas e paralelas, e com a mesma distância entre si.

Dois reticulados são necessários para produzir o efeito de Moiré: o modelo ou corpo de prova e o reticulado mestre, geralmente idênticos.

A distância entre as linhas do reticulado é chamada passo,  $p$ . O número de linhas do reticulado por unidade de comprimento é chamada densidade,  $d$ .

Se dois reticulados forem superpostos, tal que tenham o mesmo passo e a direção de suas linhas seja a mesma, serão observadas franjas claras e franjas escuras, ou apenas franjas escuras, dependendo de como as linhas de um reticulado estão sobre as linhas do outro. A distância entre as franjas é chamada espaçamento das franjas,  $\delta$ .

Se um corpo de prova estiver sendo deslocado no plano do reticulado em uma direção perpendicular a este, serão observadas franjas claras todas as vezes que as linhas de um reticulado estiverem entre as linhas do outro. Cada ciclo completo corresponde à passagem de uma linha do reticulado através de um ponto específico; em outras palavras, cada franja (clara ou escura) indica o deslocamento de uma linha do reticulado igual ao passo do reticulado.

Se dois reticulados originalmente coincidentes são deslocados, mantendo-se paralelos entre si, o movimento relativo na direção perpendicular às linhas do reticulado é dado por

$$v = n p \quad (1)$$

onde  $n$  é o número de franjas claras ou escuras e  $p$  é o passo do reticulado.

Se o passo do reticulado for menor que 0,025 mm, poderão aparecer efeitos de difração, o que torna o fenômeno bem mais complicado.

### A2.3 - Propriedade fundamental das franjas de Moiré

Considere-se o caso de deslocamento relativo de um reticulado em relação a outro de mesmo passo, onde o movimento das linhas é sempre paralelo, como pode ser visto na figura A2.1. A interferência pode ser visualizada como sendo obtida do alongamento uniforme de um dos reticulados (corpo de prova, p. ex.) em relação ao outro (mestre). Note-se que o passo do reticulado do corpo de prova aumentou em relação ao passo do reticulado mestre. O deslocamento, como pode ser verificado, é

$$u = n p \quad (2)$$

e a deformação, segundo Euler,

$$\epsilon_X^E = \frac{\Delta l}{l_f}$$

mas

$$\Delta l = p$$

$$l_f = \delta$$

logo

$$\epsilon_X^E = p/\delta \quad (3)$$

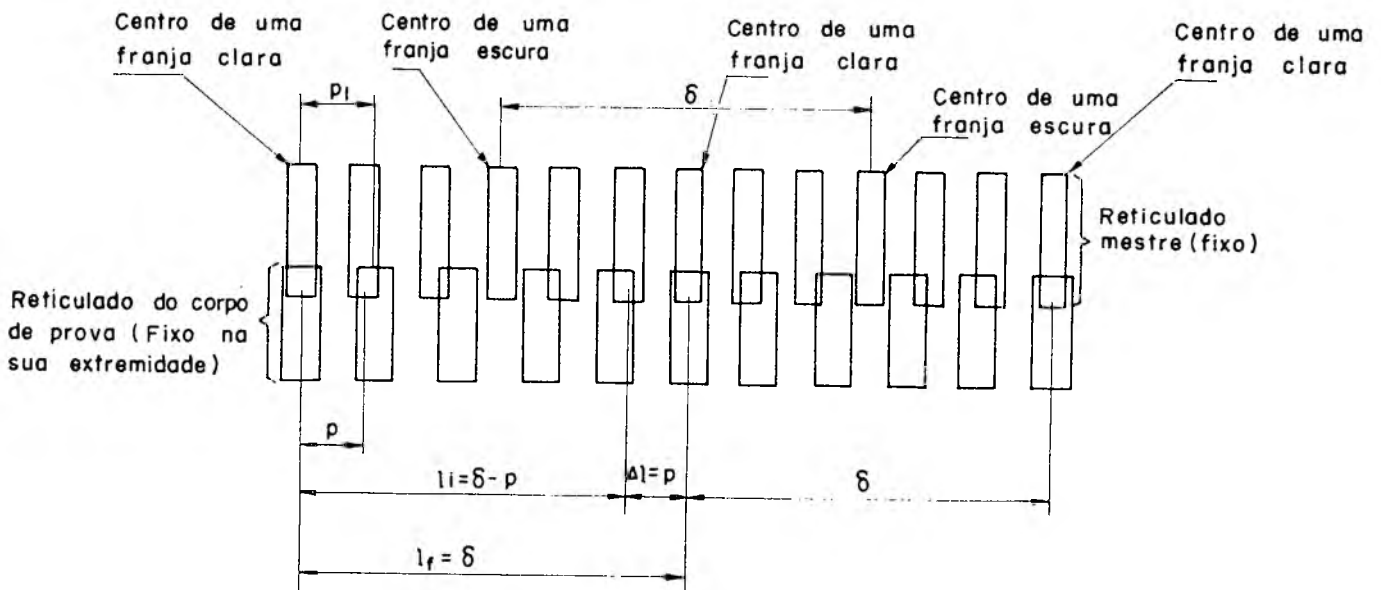


Fig. A2.1 - Formação das franjas de Moiré pela elongação uniforme de um dos reticulados.

Considere-se agora que o corpo de prova esteja sujeito somente à rotação, conforme esquematizado na figura A2.2. Supondo que o eixo de rotação seja coincidente com a intersecção de duas linhas dos reticulados, ponto O. Note-se que as franjas de Moiré não tiveram deslocamento na direção y. Logo, a franja que atravessa o eixo de rotação define uma linha de deslocamento zero ao longo de y. A franja à esquerda deste deslocamento zero pode ser vista como o lugar das intersecções das linhas do reticulado do corpo de prova com as linhas do reticulado mestre, as quais es-

tão separadas desta por uma distância de um passo de largura antes da rotação. Esta franja representa um deslocamento ao longo de  $y$  de um passo.

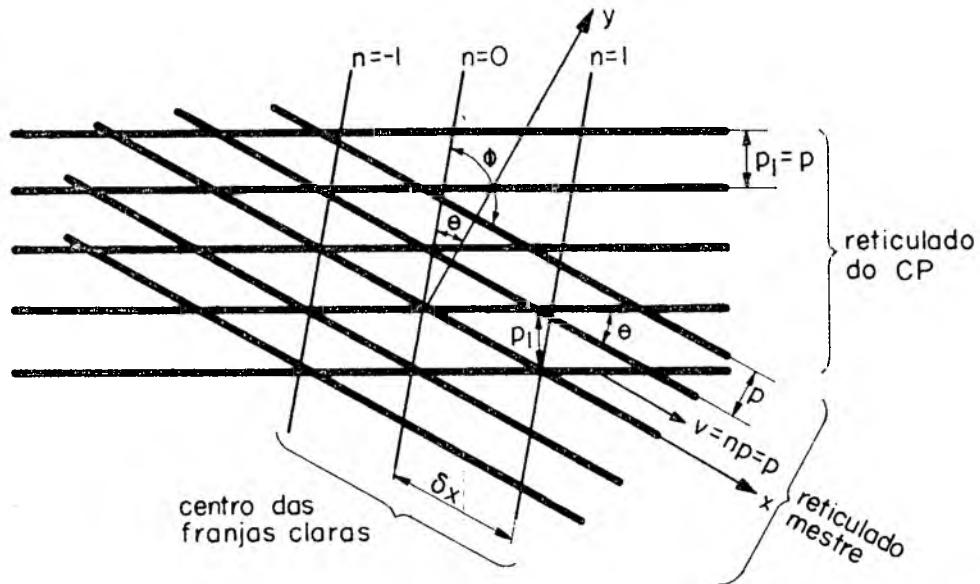


Fig. A2.2 - Franjas de Moiré produzidas por rotação pura de um reticulado em relação ao outro de mesmo passo.

Se as franjas estão ordenadas em relação à franja zero, definidas por  $n=1, 2, 3$ , etc., então o deslocamento  $v$  ao longo de  $y$  pode ser escrito como

$$v = n p \quad (4)$$

Finalmente, considere-se o caso de um corpo de prova que tanto se alongue como gire (Fig. A2.3). Depois do deslocamento relativo, existe um ponto no qual as duas linhas de ordem  $q$  se interceptam e indicam que não existe deslocamento na direção perpendicular às linhas do reticulado. A ordem da franja que passa através deste ponto é zero. O mesmo se aplica às linhas  $(q+n)$ . Por outro lado, a franja de ordem 1 é produzida pelo deslocamento  $p$  dos pontos do reticulado do corpo de prova na direção perpendicular às linhas do reticulado mestre; a franja de ordem 2 é produzida pelo deslocamento de ordem  $2p$ , e assim por diante. Assim as franjas de Moiré são os locais dos pontos com um deslocamento relativo na direção perpendicular às linhas do reticulado mestre, o



qual é igual a  $n$  vezes o passo do reticulado mestre. Estas componentes de deslocamento se referem a pontos que são dados na forma final ou deformada do corpo de prova.

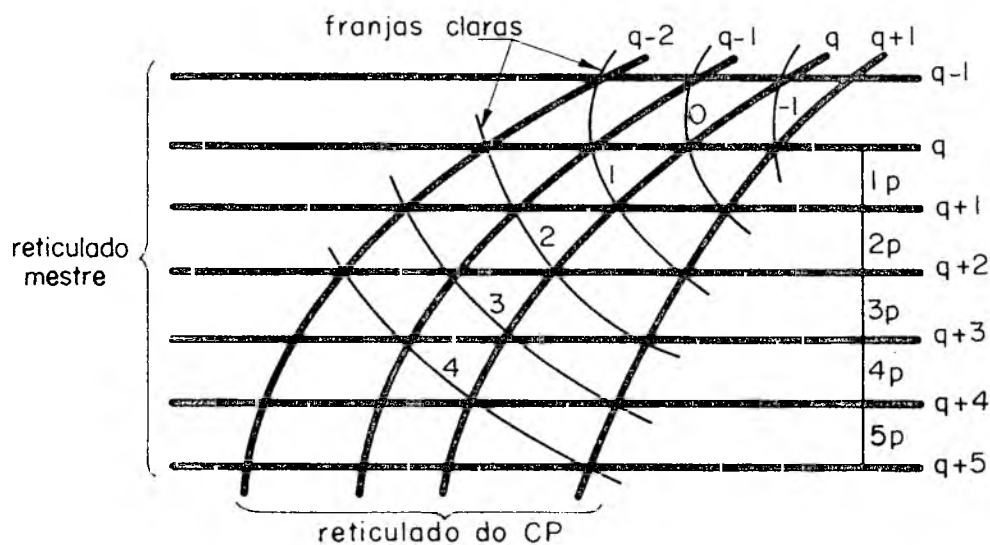


Fig. A2.3 - Franjas de Moiré ou local dos pontos de mesmo valor da componente de deslocamento na direção normal ao reticulado mestre.

Portanto, as deformações sofridas pelo corpo de prova nas direções  $x$  e  $y$ , podem ser dadas como

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Chamando de  $\delta_x$  e  $\delta_y$  a distância entre as franjas ao longo das direções  $x$  e  $y$ , e  $p$  ao passo da malha, que representa a diferença de deslocamento entre duas franjas adjacentes, tem-se que os valores incrementais das duas componentes de deslocamento e de mudança na posição podem ser escritos como

$$\Delta u = \Delta v = p$$

$$\Delta x = \delta_x$$

$$\Delta y = \delta_y$$

Então, os gradientes das componentes são

$$\epsilon_x = \frac{\Delta u}{\Delta x} = p/\delta_x \quad (5)$$

$$\epsilon_y = \frac{\Delta v}{\Delta y} = p/\delta_y \quad (6)$$

Para grandes deformações, porém, é conveniente usar a de definição de deformação natural, ou seja

$$\epsilon = \ln l_f/l_i$$

Logo

$$\epsilon = \ln \frac{1}{1 - \epsilon E}$$

e, portanto

$$\epsilon_x = \ln \left( \frac{1}{1 - p/\delta_x} \right) \quad (7)$$

$$\epsilon_y = \ln \left( \frac{1}{1 - p/\delta_y} \right) \quad (8)$$

Como as deformações esperadas nos ensaios experimentais são da ordem de 0,10 ou maiores, as equações (7) e (8) serão as empregadas para o cálculo daquelas.

#### A2.4 - Determinação gráfica das componentes de deslocamento e deformação

Para se determinar graficamente o deslocamento relativo dos pontos do corpo de prova, pode-se plotar a curva "ordem da franja x espaçamento da franja", onde a franja de ordem zero é escolhida arbitrariamente. A derivada em cada um dos pontos da cur-

va fornece o valor da deformação correspondente.

A figura A2.4 apresenta as curvas de deslocamento e deformação para uma seção analisada do corpo de prova em estudo. No te-se que a franja de ordem zero coincidiu com o local de pontos onde  $\partial v/\partial x = 0$  e pode-se ver também que esta franja intercepta o ponto onde  $\partial v/\partial y = 0$ . O campo de deslocamentos estudado foi escolhido de forma que interceptasse o ponto de deformação máxima, e isto pode ser facilmente verificado na figura A2.4, onde deslocou se o eixo y e repetiu-se o procedimento anterior.

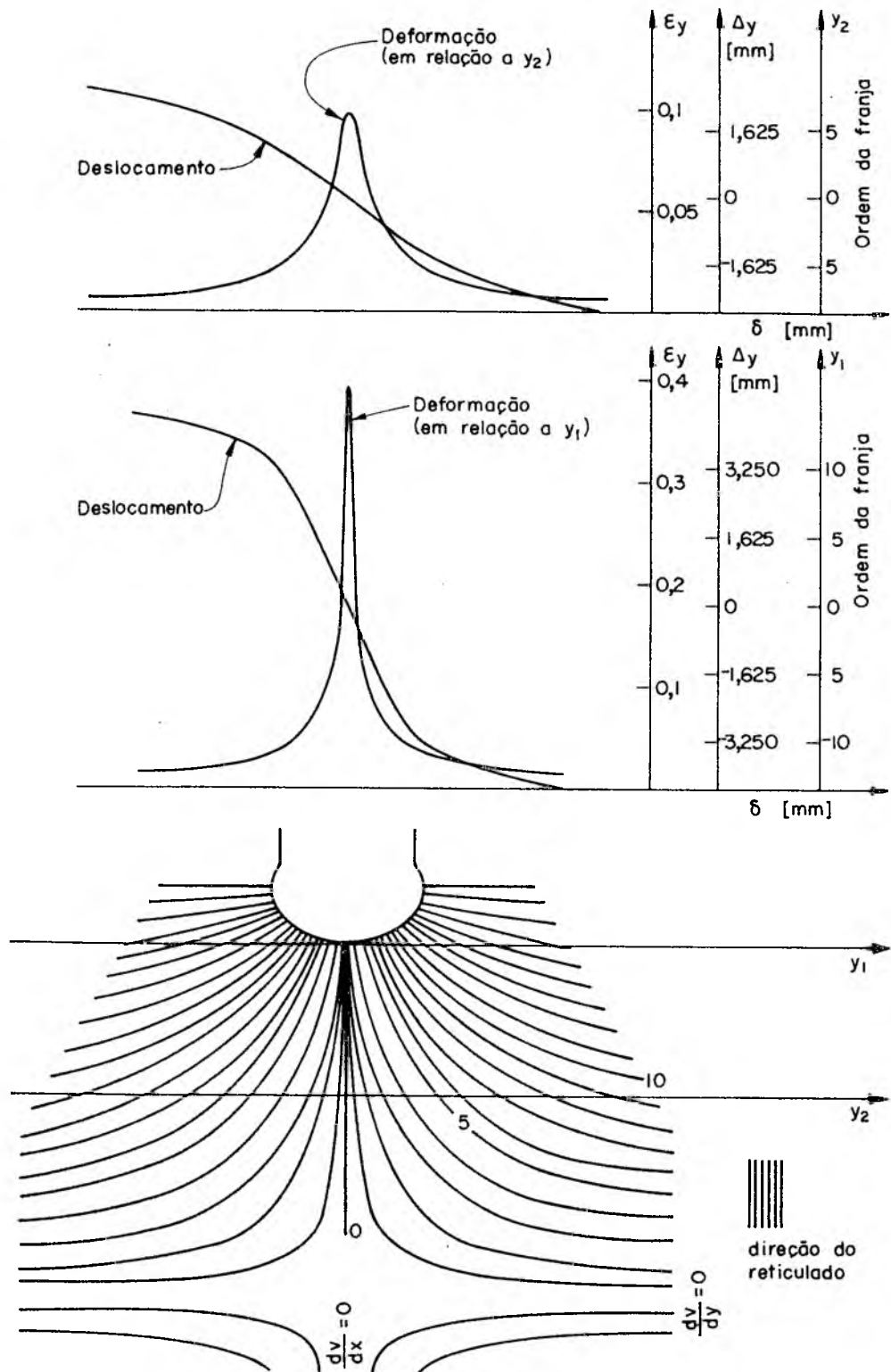


Fig. A2.4 - Deslocamentos e deformações ao longo dos eixos  $y_1$  e  $y_2$  dos corpos de prova CTK.

## APÊNDICE 3

## TABELAS E GRÁFICOS COM DADOS EXPERIMENTAIS

Este Apêndice apresenta algumas das curvas obtidas experimentalmente ou construídas com base em dados experimentais, assim como tabelas resumidas dos valores medidos ou calculados.

Para facilitar o manuseio, as tabelas encontram-se agrupadas na primeira parte deste, e, em seguida, encontram-se os gráficos.

TABELA A3.1 - Dimensões médias dos corpos de prova (valores medidos).

CTK	$r_t$ (mm)	B (mm)	a (mm)	b (mm)	w (mm)	$\alpha$
1	4,771	4,90	29,32	63,92	93,24	0,2451
2	7,485	4,91	29,38	63,88	93,26	0,2448
3	15,075	4,90	29,36	63,89	93,25	0,2449

TABELA A3.2 - Deformação máxima na raiz do entalhe em função da integral J para diferentes valores de deslocamento (usando Eq. 7.3).

Ponto	$\Delta$ (mm)	J (J/m <sup>2</sup> )	J/r <sub>t</sub> (J/m <sup>3</sup> .10 <sup>6</sup> )	$\epsilon_{\text{máx}}$
CTK 1				
1	1,390	70695,736	14,82	0,03414
2	1,988	139652,368	29,28	0,05948
3	3,085	287313,899	60,23	0,10710
4	4,483	502314,066	105,31	0,16892
5	5,955	755958,117	158,48	0,23574
6	7,538	1045443,669	219,17	0,30708
7	8,918	1312599,797	275,18	0,36970
8	10,055	1546019,531	324,11	0,42248
9	12,018	1968739,998	412,73	0,51451
10	14,088	2419588,896	507,25	0,60874
11	16,105	2856953,499	598,94	0,69707
CTK 2				
1	1,684	76065,511	10,16	0,02509
2	2,251	146579,357	19,58	0,04284
3	3,362	299675,980	40,04	0,07677
4	4,567	484147,441	64,68	0,11351
5	6,184	739918,851	98,85	0,16042
6	8,201	1111977,666	148,56	0,22363
7	10,201	1510102,185	201,75	0,28702
8	13,318	2172648,599	290,27	0,38615
9	17,018	3007045,699	401,74	0,50332
10	20,000	3703607,810	494,80	0,5965

TABELA A3.2 - (Continuação)

Ponto	$\Delta$ (mm)	J (J/m <sup>2</sup> )	J/r <sub>t</sub> (J/m <sup>3</sup> ·10 <sup>6</sup> )	$\epsilon_{m\acute{a}x}$
CTK 3				
1	1,752	61696,789	4,09	0,01195
2	2,650	171218,607	11,36	0,02748
3	4,088	367374,282	24,37	0,05121
4	5,825	633478,326	42,02	0,07985
5	8,401	1075828,253	71,37	0,12300
6	11,058	1583084,446	105,01	0,16853
7	14,415	2281997,397	151,38	0,22709
8	17,652	3010498,398	199,70	0,28464
9	21,509	3495105,915	261,70	0,35486
10	25,646	5009017,858	332,27	0,43113
11	29,933	6138761,139	407,21	0,50891

TABELA A3.3 - Deformação máxima na raiz do entalhe usando o método de Moiré.

$\Delta$ (mm)	p (mm)	$\delta$ (mm)	$\epsilon_{m\acute{a}x}$
CTK 1			
3,88	0,3140	2,20	0,1540
6,25	0,3233	1,55	0,2339
6,53	0,3149	1,40	0,2548
8,98	0,3138	1,05	0,3550
10,00	0,3240	1,03	0,4100
10,42	0,3145	0,90	0,4299
12,91	0,3127	0,75	0,5395
13,80	0,3250	0,61	0,8250

TABELA A3.4 - Deformação máxima na raiz do entalhe em função do fator de concentração de deformações segundo as teorias de Neuber e Stowell-Hardrath-Ohman, para diferentes valores de deslocamento.

$\epsilon_0$	F (N)	$\Delta$ (mm)	$K_{\epsilon N}$	$\epsilon_{\text{máx}N}$	$K_{\epsilon\text{SHO}}$	$\epsilon_{\text{máx}SHO}$
CTK 1						
0,002	14430,71	0,97	7,25	0,0145	10,30	0,0206
0,005	16103,57	1,34	5,98	0,0299	6,80	0,0340
0,010	16544,76	1,44	5,28	0,0528	5,33	0,0533
0,020	18107,32	2,14	5,28	0,1056	5,33	0,1066
0,030	18995,84	2,97	5,28	0,1580	5,33	0,1600
0,040	22059,68	5,15	5,28	0,2110	5,33	0,2130
0,050	22978,84	6,09	5,28	0,2640	5,33	0,2665
0,060	24204,38	7,40	5,28	0,3170	5,33	0,3200
0,075	25246,08	8,68	5,28	0,3960	5,33	0,4000
0,090	27574,61	11,96	5,28	0,4750	5,33	0,4800
0,100	27942,27	12,90	5,28	0,5280	5,33	0,5330
0,120	28493,76	13,60	5,28	0,6340	5,33	0,6400
CTK 2						
0,002	14451,11	1,02			8,90	0,0178
0,005	16126,34	1,20	4,50	0,0225	5,60	0,0280
0,010	16568,15	1,32	3,98	0,0398	4,40	0,0440
0,020	18132,92	2,05	3,98	0,0796	4,40	0,0880
0,030	19022,70	2,66	3,98	0,1190	4,40	0,1320
0,040	22090,87	4,90	3,98	0,1590	4,40	0,1760
0,050	23011,33	5,86	3,98	0,1990	4,40	0,2200
0,060	24238,60	7,25	3,98	0,2390	4,40	0,2640
0,075	25281,77	8,45	3,98	0,2990	4,40	0,3300
0,090	27613,59	12,00	3,98	0,3580	4,40	0,3960
0,100	27981,77	12,90	3,98	0,3980	4,40	0,4400
0,120	28534,04	13,80	3,98	0,4780	4,40	0,5280



TABELA A3.4 - (Continuação)

$\epsilon_0$	F (N)	$\Delta$ (mm)	$K_{\epsilon N}$	$\epsilon_{m\acute{a}xN}$	$K_{\epsilon SHO}$	$\epsilon_{m\acute{a}xSHO}$
CTK 3						
0,002	14426,19	1,18			7,50	0,0150
0,005	16098,53	1,43	2,95	0,0148	4,28	0,0214
0,010	16539,58	1,80	2,61	0,0261	3,24	0,0324
0,020	18101,66	2,55	2,61	0,0522	3,24	0,0648
0,030	18989,90	3,25	2,61	0,0783	3,24	0,0972
0,040	22052,78	6,43	2,61	0,1044	3,24	0,1296
0,050	22971,65	7,30	2,61	0,1305	3,24	0,1620
0,060	24196,81	8,80	2,61	0,1566	3,24	0,1944
0,075	25238,18	10,25	2,61	0,1958	3,24	0,2430
0,090	27565,98	14,43	2,61	0,2349	3,24	0,2916
0,100	27933,52	14,93	2,61	0,2610	3,24	0,3240
0,120	28484,84	17,43	2,61	0,3132	3,24	0,3888
0,150	30016,29	18,80	2,61	0,3915	3,24	0,4860
0,175	31924,00	22,93	2,61	0,4568	3,24	0,5670
0,190	33079,17	26,05	2,61	0,4959	3,24	0,6156

Obs.: Os sub-índices N e SHO referem-se às teorias de Neuber e Stowell-Hardrath-Ohman, respectivamente.

TABELA A3.5 - Deformação máxima na raiz do entalhe medida pelos extensômetros de resistência do tipo MM-CEA-06-062 UW-120, para diferentes valores de deslocamento.

CTK 1		CTK 2		CTK 3	
$\Delta$ (mm)	$\epsilon_{m\acute{a}x}$ (%)	$\Delta$ (mm)	$\epsilon_{m\acute{a}x}$ (%)	$\Delta$ (mm)	$\epsilon_{m\acute{a}x}$ (%)
0,220	0,0772	0,240	0,0564	0,355	0,0438
0,325	0,1521	0,390	0,1123	0,445	0,1396
0,385	0,2296	0,485	0,1660	0,575	0,3625
0,400	0,3083	0,620	0,2210	0,685	0,6517
0,515	0,6965	0,705	0,2921	0,820	0,9483
0,633	1,2114	0,840	0,3572	0,965	1,3094
0,785	1,9043	1,025	0,4075	1,185	1,7789

TABELA A3.6 - Deformação máxima na raiz do entalhe em função do estriccionamento (valores medidos).

$\Delta$ (mm)	$B_o$ (mm)	$B_i$ (mm)	$\epsilon_3$	$\epsilon_{m\acute{a}x}$
CTK 1				
6,25	4,92	4,20	-0,1582	0,0791
8,98	5,00	3,90	-0,2485	0,1242
10,00	4,92	3,62	-0,3068	0,1534
11,62	4,70	3,18	-0,3907	0,1953
12,92	5,00	3,21	-0,4432	0,2216
13,80	4,92	2,88	-0,5355	0,2678
15,10	4,70	2,70	-0,5543	0,2772
15,65	4,92	2,00	-0,9002	0,4501
15,86	5,00	2,00	-0,9163	0,4581
16,36	4,70	1,78	-0,9709	0,4855
CTK 2				
1,69	4,97	4,62	-0,0730	0,0365
4,08	4,97	4,32	-0,1402	0,0701
6,18	4,97	4,20	-0,1683	0,0842
8,64	4,97	3,94	-0,2322	0,1161
11,06	4,97	3,74	-0,2843	0,1422
16,25	4,97	3,04	-0,4916	0,2458
17,23	4,97	2,94	-0,5250	0,2625
CTK 3				
2,01	4,90	4,68	-0,0459	0,0230
3,93	4,90	4,62	-0,0688	0,0294
6,18	4,90	4,34	-0,1214	0,0607
11,08	4,90	4,10	-0,1782	0,0891
16,06	4,90	3,84	-0,2438	0,1219
22,73	4,90	3,50	-0,3365	0,1682
30,23	4,90	2,66	-0,6109	0,3055

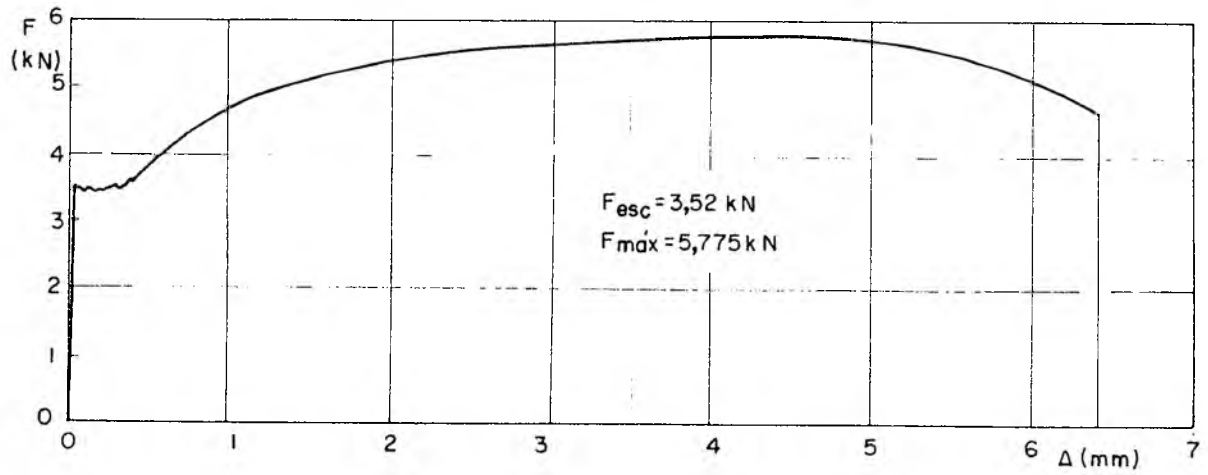


Fig. A3.1 - Curva força x deslocamento obtida nos ensaios de tração com os corpos de prova cilíndricos.

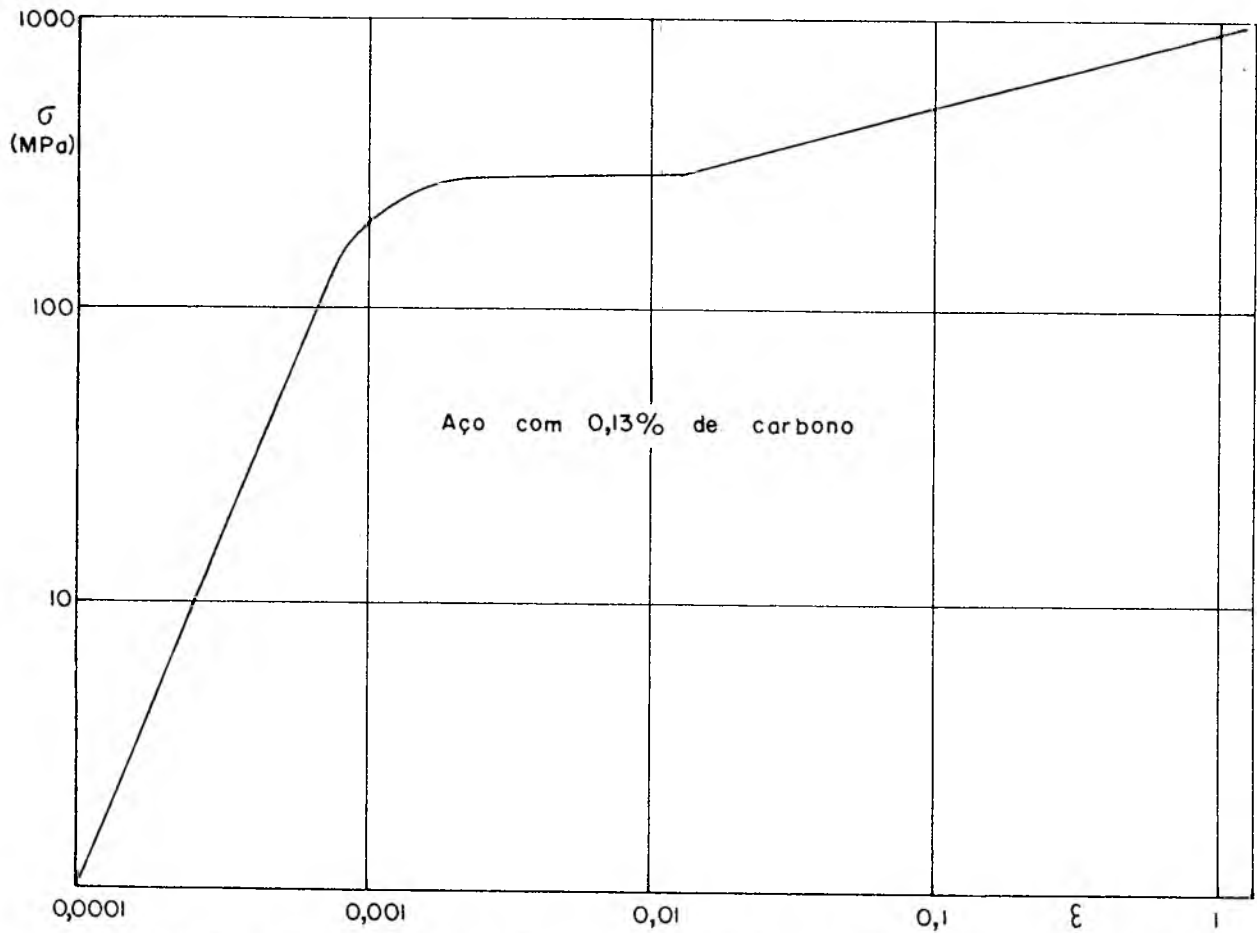


Fig. A3.2 - Gráfico tensão real x deformação real do material

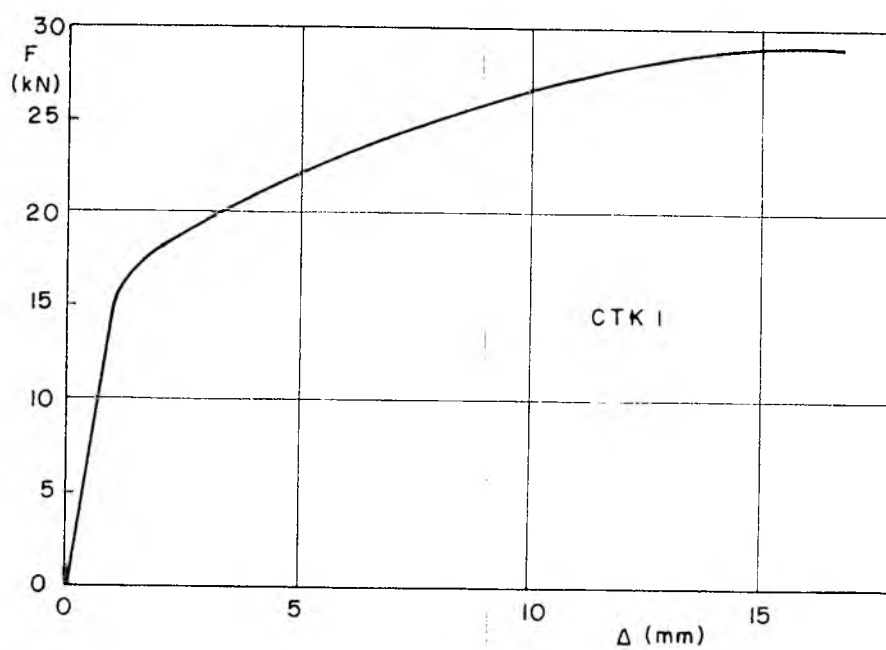


Figura A3.3a

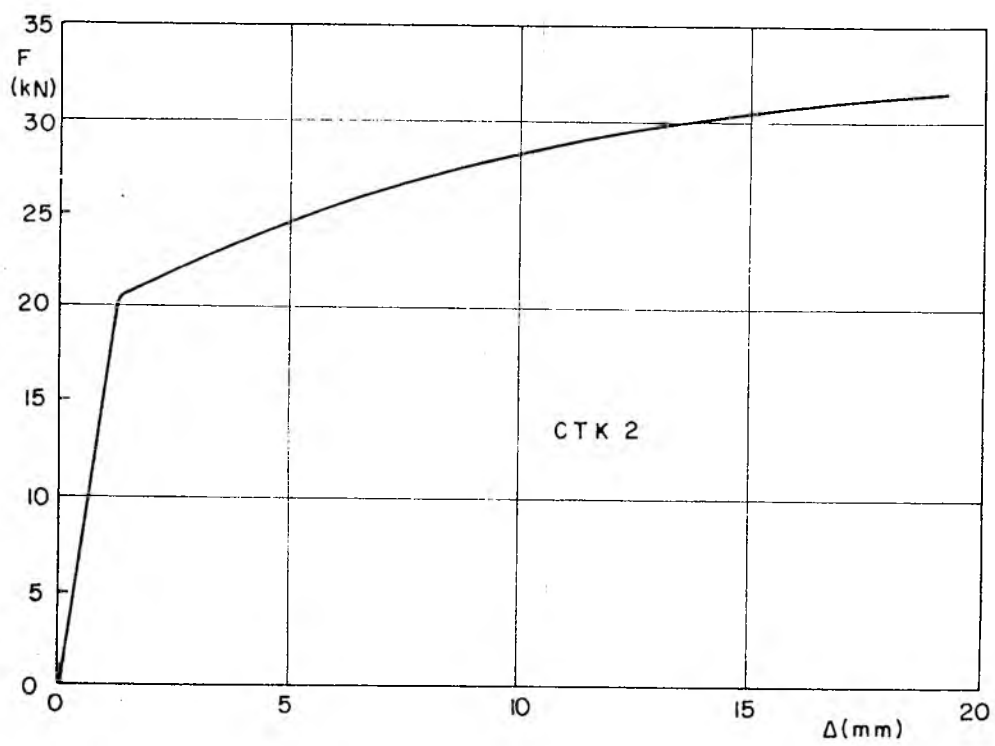
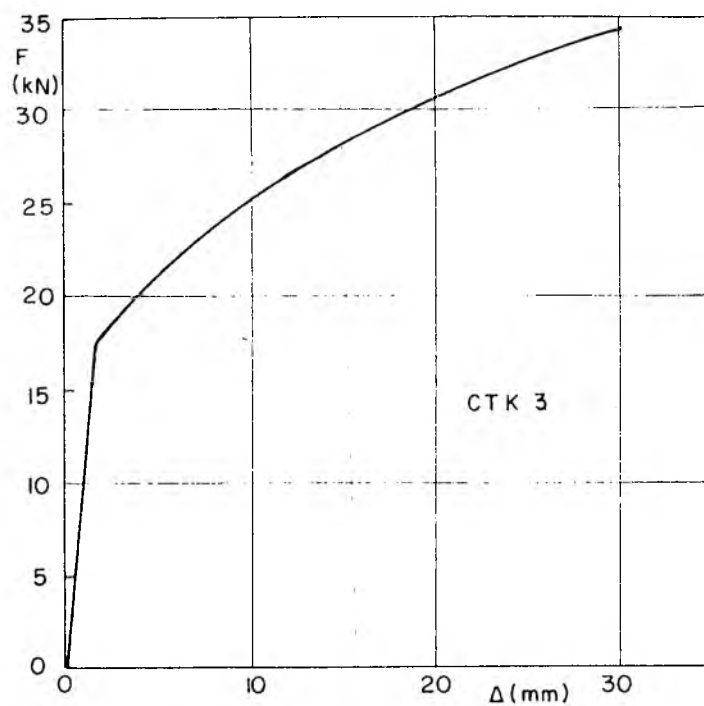


Figura A3.3b



A3.3c

Fig. A3.3 - Curva força x deslocamento obtida nos ensaios de tração com os corpos de prova CTK.

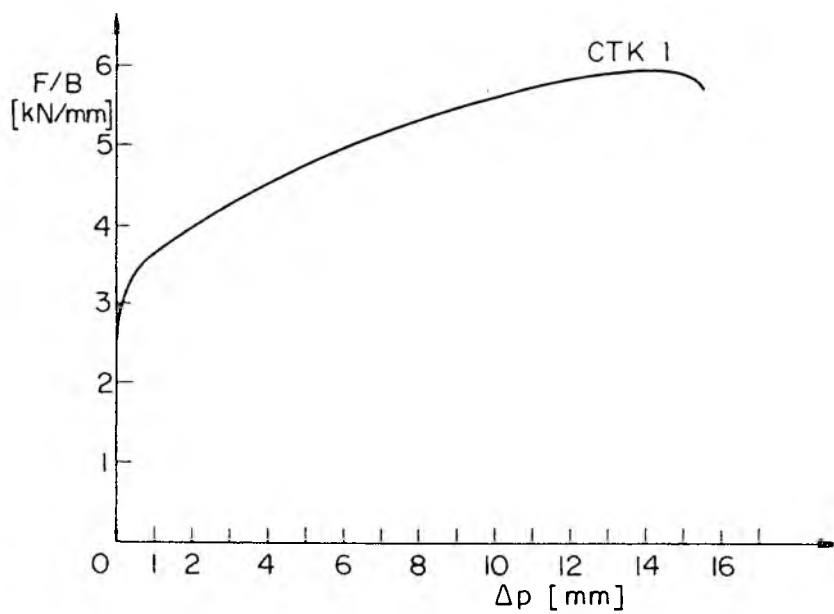


Figura A3.4a

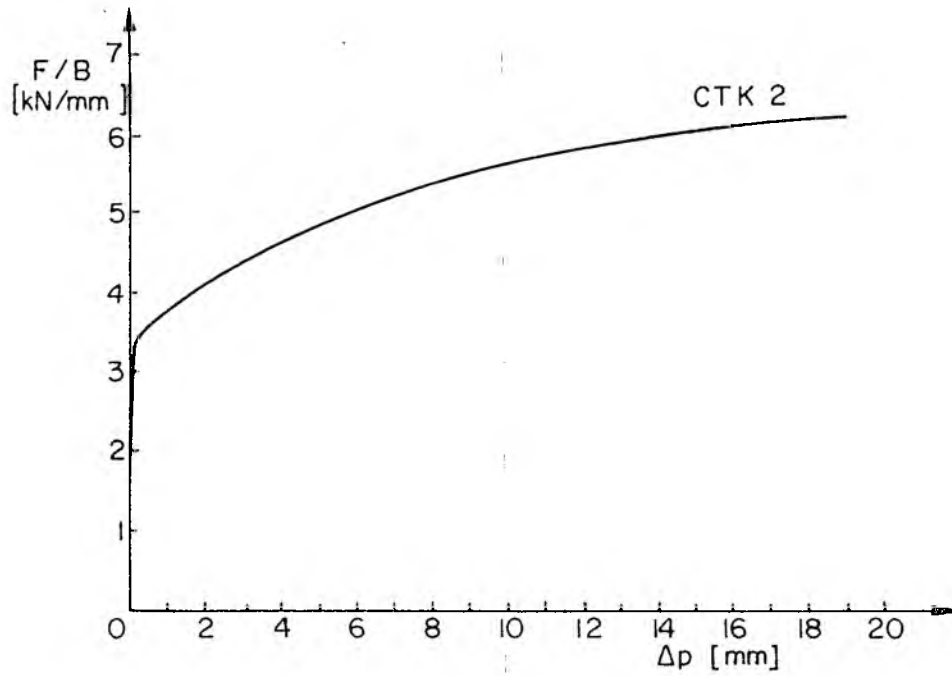


Figura A3.4b

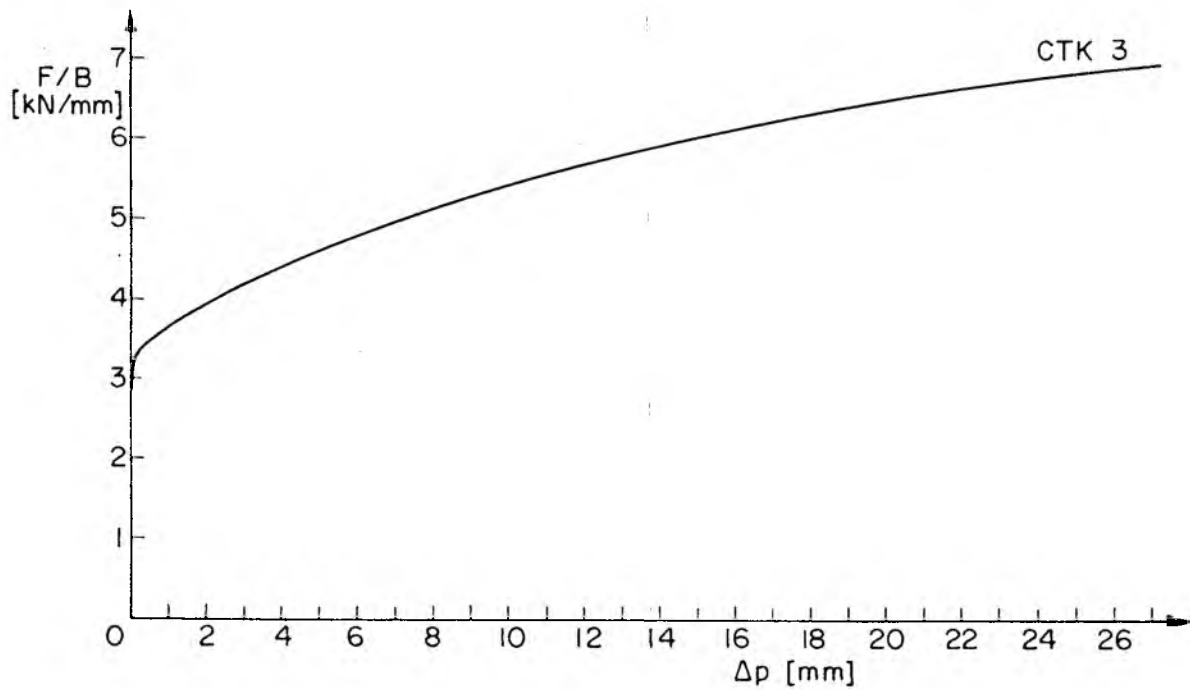


Figura A3.4c

Fig. A3.4 - Curva força/espessura x deslocamento plástica usada no cálculo da integral J.

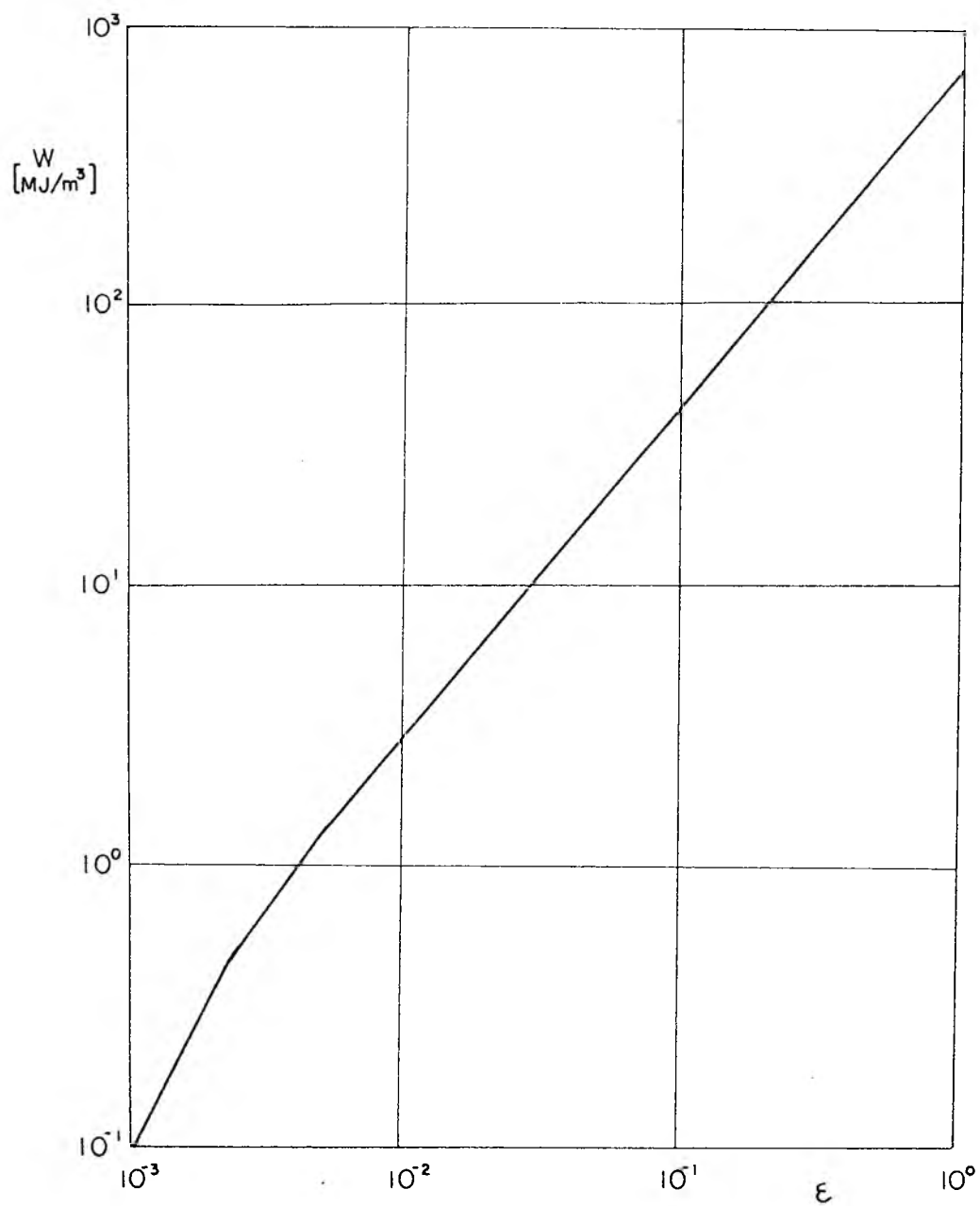


Fig. A3.5 - Relação entre a densidade de energia e a deformação para o material em estudo.

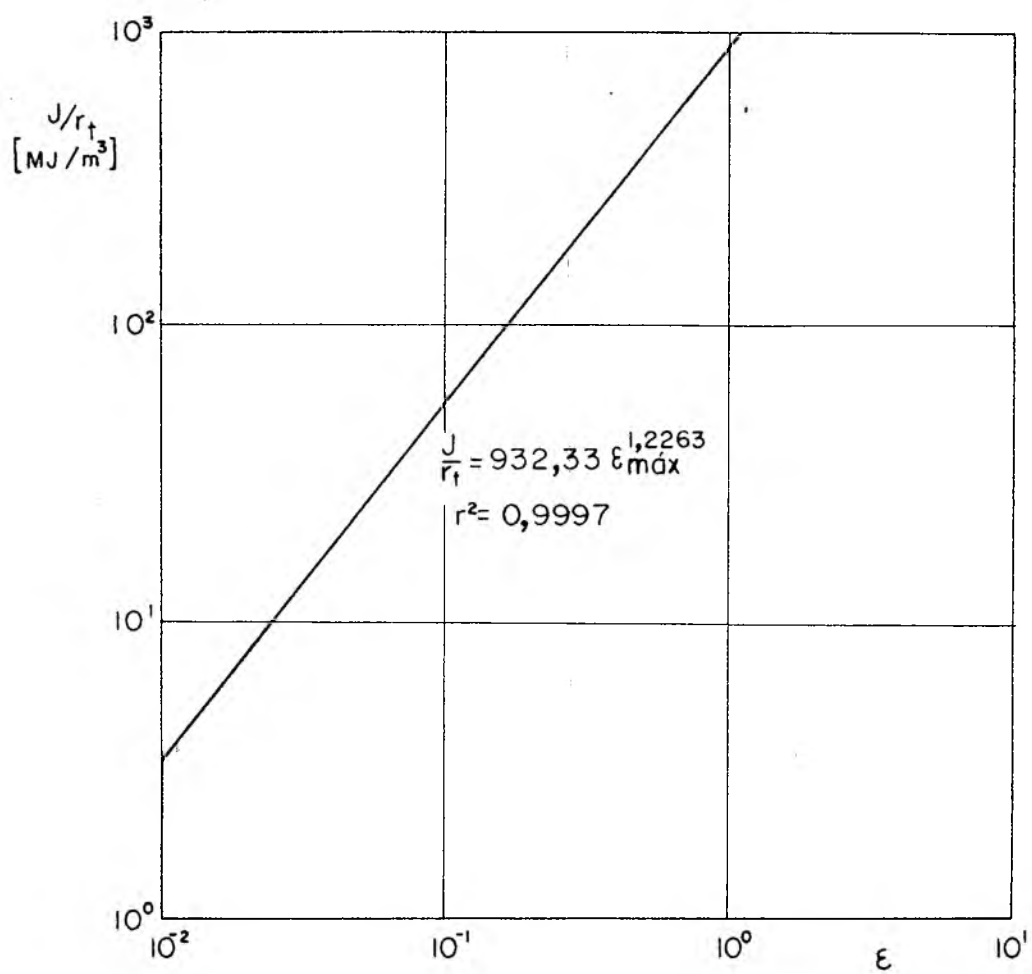
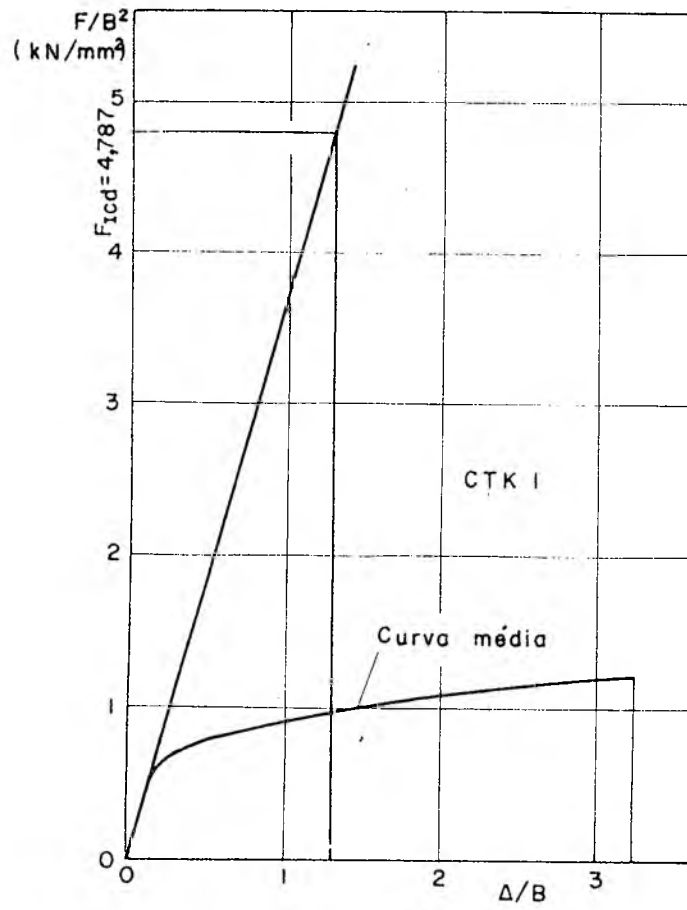
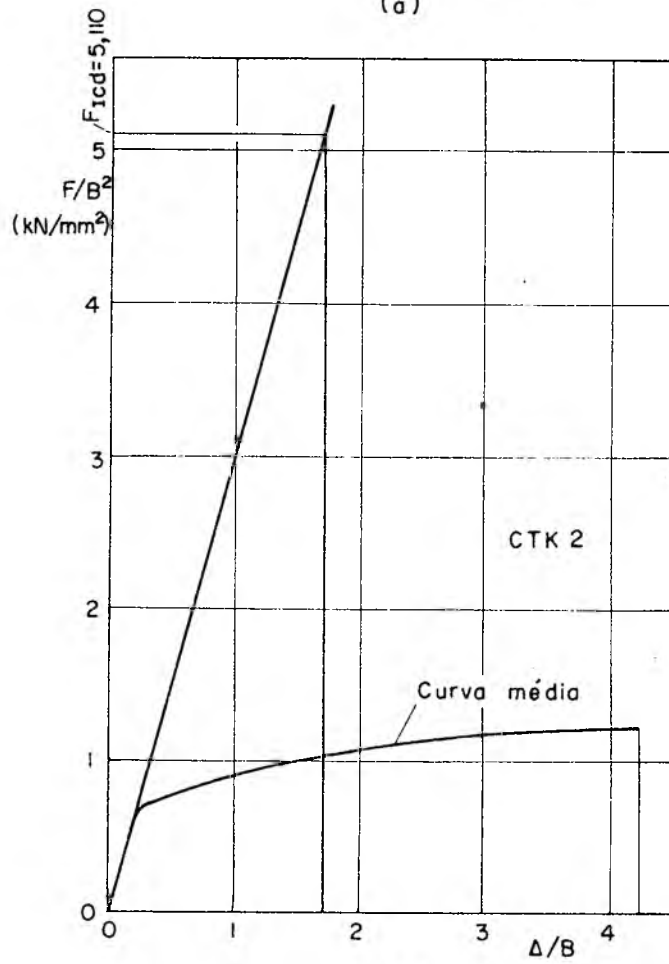


Fig. A3.6 - Relação entre a integral  $J$  e o raio do entalhe em função da deformação.





(a)



(b)

Fig. A3.7a

Fig. A3.7b

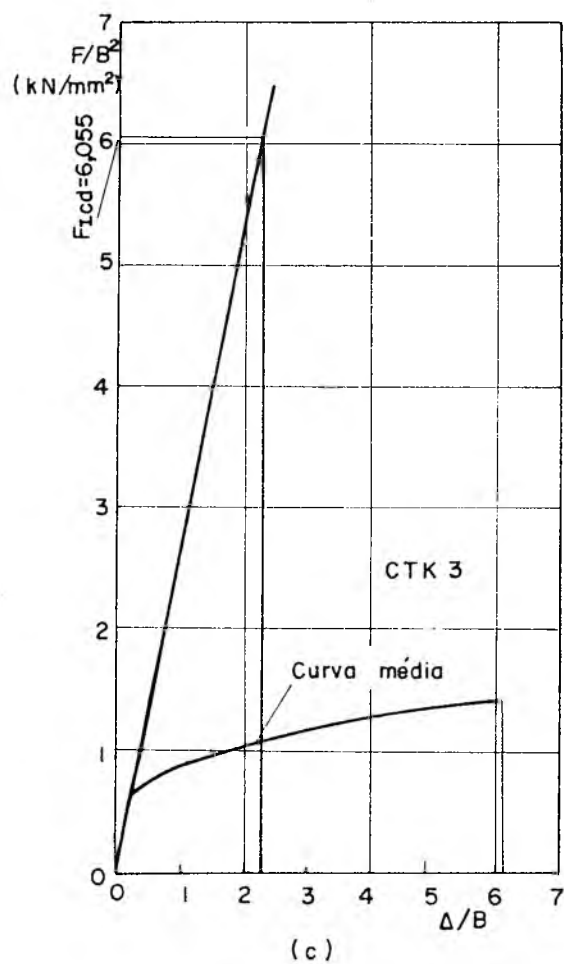


Figura A3.7c

Fig. A3.7 - Curva (força/espessura ao quadrado) em função do (Deslocamento/espessura) usada no cálculo de  $K_{Icd}$ .