

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DETERMINAÇÃO DE PROPRIEDADES SECCIONAIS NA FLEXÃO, NA TORÇÃO
UNIFORME E NÃO UNIFORME DE SECÇÕES DE PAREDES DELGADAS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA A UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.

VOLNEI ANDERSSON

FLORIANÓPOLIS
SANTA CATARINA - BRASIL
MARÇO - 1978

DETERMINAÇÃO DE PROPRIEDADES SECCIONAIS NA FLEXÃO, NA TORÇÃO
UNIFORME E NÃO UNIFORME DE SECÇÕES DE PAREDES DELGADAS

VOLNEI ANDERSSON

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia", Especialidade Engenharia Mecânica, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação.

Prof. Domingos Boechat Alves, Ph.D.
Orientador

Prof. Arno Blass, Ph.D.
Coordenador

Apresentada perante a Banca Examinadora composta dos Professores:

Prof. Domingos Boechat Alves, Ph.D.

Prof. Clóvis Sperb de Barcellos, Ph.D.

Prof. Arno Blass, Ph.D.

Prof. Edison da Rosa, M.Sc.

A minha esposa.

AGRADECIMENTOS

- À Fundação Universidade de Rio Grande, pelo apoio financeiro;
- Ao Professor Domingos Boechat Alves, pela orientação;
- E a todos que, de qualquer forma, contribuíram com sugestões e indicações de referências.

S U M Á R I O

	<u>PÁG.</u>
SIMBOLOGIA	vii
RESUMO	xi
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</u>	3
2.1 - Introdução	3
2.2 - Pontos Característicos de uma Secção Transversal	6
2.2.1 - Definições	6
2.2.2 - Fluxo de tensões cisalhantes e coordenadas do centro de cisalhamento em secções abertas...	8
2.2.3 - Fluxo de tensões cisalhantes e coordenadas do centro de cisalhamento em secções fechadas ou mistas	10
2.3 - Torção Uniforme	12
2.4 - Torção Não Uniforme	13
2.4.1 - Secções abertas	13
2.4.2 - Secções fechadas	16
<u>CAPÍTULO 3 - PROCESSO NUMÉRICO COMPUTACIONAL</u>	20
3.1 - Introdução	20
3.2 - Configuração geométrica do iésimo elemento	22
3.3 - Propriedades geométricas do iésimo elemento	24
3.3.1 - Elemento retilíneo	24
3.3.2 - Elemento circular	25
3.4 - Propriedades geométricas da secção	27
3.5 - Estabelecimento do sentido origem-término	28
3.6 - Propriedades seccionais de secções abertas	29
3.6.1 - Fluxo de tensões cisalhantes básico no iési mo elemento	29

3.6.2 - Produtos de inércia setoriais e centro de cisalhamento	34
3.6.3 - Função empenamento	36
3.6.4 - Momento setorial de primeira espécie	38
3.6.5 - Constante torcional e de empenamento	39
3.7 - Propriedades seccionais de secções fechadas ou mistas	40
3.7.1 - Fluxos de tensões cisalhantes básicos, centro de cisalhamento e constante torcional...	41
3.7.2 - Função empenamento e constante de empenamento	43
3.7.3 - Momento setorial de primeira espécie e fluxo de tensões cisalhantes secundário básico ...	45
3.7.4 - Momento de inércia central	46
3.8 - Programa Codificado em FORTRAN	46
<u>CAPÍTULO 4</u> - ENTRADA DE DADOS	47
4.1 - Modelação da secção	47
4.2 - Entrada de dados	52
<u>CAPÍTULO 5</u> - EXEMPLOS E COMPARAÇÕES	64
<u>CAPÍTULO 6</u> - CONCLUSÃO	70
APÊNDICE	72
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	80

S I M B O L O G I A

=====

A lista seguinte descreve os símbolos adotados neste trabalho. A simbologia do Capítulo 3 é descrita durante o texto.

- A - Área da secção transversal.
- A_{tubj} - Dobro da área encerrada pela linha média da j -ésima cavidade tubular.
- b, b_i - Comprimento da linha média da secção e do i -ésimo elemento, respectivamente.
- C - Centróide da secção transversal.
- C_1 - Constante da função empenamento de secções fechadas ou mistas.
- D - Constante na expressão do fluxo de tensões cisalhantes devido à flexão, em secções abertas.
- D_t - Constante da função empenamento de secções abertas.
- E - Módulo de elasticidade.
- $f(z)$ - Função que considera a variação do empenamento das secções transversais ao longo da barra.
- G - Módulo de elasticidade ao cisalhamento.
- I_c - Momento de inércia central (dimensão L^4).
- $I_\eta, I_\xi, I_{\eta\xi}$ - Momentos e produto de inércia de área (dimensão L^4).
- $I_{\eta\omega_c}, I_{\xi\omega_c}$ - Produtos de inércia setoriais (dimensão L^5).
- J, J_{tub} - Constante torcional (dimensão L^4).
- M_t, m_t - Momento torçor (dimensões FL e $FL L^{-1}$, respectivamente)
- M_ω, \bar{M}_ω - Bimomento (dimensão FL^2).
- n - Número de elementos da secção.
- n_a - Número de elementos adicionais de secção aberta.
- n_{ccj} - Número de cavidades conexas (vizinhas) à cavidade j .

- nct - Número de cavidades tubulares.
- N, s - Sistema de referência ortogonal destrógiro, onde s é medido segundo a linha média da secção transversal, e positivo no sentido anti-horário; N é medido a partir da linha média, segundo a espessura t .
- N_z - Força normal à secção transversal.
- q - Fluxo de tensões cisalhantes em geral (dimensão FL^{-1}).
- q' - Fluxo de tensões cisalhantes primário, ou fluxo de tensões cisalhantes devido à torção uniforme de secções fechadas ou mistas (dimensão FL^{-1}).
- q'' - Fluxo de tensões cisalhantes devido às restrições ao empenamento de secções fechadas ou mistas, ou fluxo de tensões cisalhantes secundário (dimensão FL^{-1}).
- q_0 - Fluxo de tensões cisalhantes na flexão de secções abertas (dimensão FL^{-1}).
- \bar{q}_0 - Fluxo de tensões cisalhantes redundante de secções fechadas (dimensão FL^{-1}).
- \bar{q} - Fluxo de tensões cisalhantes básico da torção uniforme (dimensão L^2).
- \bar{q}'' - Fluxo de tensões cisalhantes secundário básico (dimensão L^4).
- \bar{q}_s - Fluxo de tensões cisalhantes secundário básico - parte estaticamente determinável (dimensão L^4).
- \bar{q}_w - Fluxo de tensões cisalhantes secundário básico - parte estaticamente indeterminável (dimensão L^4).
- q_η, q_ξ - Fluxos de tensões cisalhantes básicos (dimensão L^{-1}).
- $\bar{q}_\eta, \bar{q}_\xi$ - Fluxos de tensões cisalhantes redundantes básicos (dimensão L^{-1}).

- q_ω - Fluxo de tensões cisalhantes devido às restrições ao empenamento de secções abertas (dimensão FL^{-1}).
- Q_η, Q_ξ - Momentos estáticos de área (dimensão L^3).
- Q_ω, \bar{Q}_ω - Momentos setoriais de primeira espécie (dimensão L^4).
- r_c - Distância do centróide C à tangente num ponto s da linha média das paredes da secção transversal.
- r_N - Distância do centro de cisalhamento S à normal num ponto s da linha média das paredes da secção transversal.
- r_s - Distância do centro de cisalhamento S à tangente num ponto s da linha média das paredes da secção transversal.
- S - Centro de cisalhamento.
- t, t_i - Espessura da parede da secção e do iésimo elemento, respectivamente.
- V_η, V_ξ - Componentes da força cisalhante V, segundo os eixos η, ξ (dimensão F).
- V_ω - Força cisalhante de empenamento (dimensão FL).
- w - Empenamento da secção transversal.
- x, y - Eixos coordenados do sistema de referência global.
- x_c, y_c - Coordenadas do centróide C.
- x_{sa}, y_{sa} - Coordenadas do centro de cisalhamento S de secções abertas.
- x_{sf}, y_{sf} - Coordenadas do centro de cisalhamento S de secções fechadas ou mistas.
- $\Gamma, \bar{\Gamma}, \Gamma^*$ - Constante de empenamento (dimensão L^6).
- $\delta_{j,k}; \delta 0_j;$
 $\delta 1_j; \delta 2_j$ - Coeficientes de influência ou flexibilidades.

- η, ξ - Eixos coordenados com centro no centróide C e paralelos aos eixos x, y .
- θ - Ângulo de torção por unidade de comprimento.
- μ - Constante que dá indicação de regularidade das secções fechadas ou mistas.
- σ_z - Tensão normal.
- $\tau_{N,z}$ - Tensão cisalhante.
- $\phi(z)$ - Ângulo de torção.
- ω_c, ω_s - Áreas setoriais duplas.
- $\bar{\omega}_s$ - Área setorial dupla modificada (secções fechadas).
- Ω_j - Área encerrada pela linha média das paredes da cavidade j .
- $\psi, \bar{\psi}$ - Função empenamento.

Neste trabalho, adota-se a seguinte convenção:

$\sum_{n=1, K}^n$ - Somatório sobre o índice, de 1 até K.

R E S U M O
=====

Desenvolve-se um processo numerico computacional e programa codificado em FORTRAN, a fim de determinar as propriedades seccionais requeridas na analise da flexao, da torcao uniforme e nao uniforme de secoes de paredes delgadas, abertas, fechadas ou mistas. As secoes transversais sao modeladas por elementos binodais. O processo e o programa sao desenvolvidos a partir de uma configuraao geometrica adotada e de um sentido origem-termino estabelecido, para cada elemento, na determinaao das propriedades seccionais ligadas ao empenamento da secao ou ao fluxo de tensoes cisalhantes.

Alguns resultados obtidos sao comparados com a formulaao existente na literatura.

A B S T R A C T

A numerical computational process and a FORTRAN program are developed to determine the cross sectional properties required in bending, uniform and nonuniform torsion of open, closed or mixed thin walled sections. The cross sections are modelled as an assembly of binodal elements. The process and the program are developed from an adopted geometrical configuration and an established origin-terminus sense for each element, in the determination of cross sectional properties, related to the warping of the section, or to shear flow.

Some results obtained are compared with the existing formulations in the literature.

C A P Í T U L O 1

INTRODUÇÃO

Membros estruturais com secções de paredes delgadas, abertas, fechadas ou mistas, são frequentemente usados em Engenharia. Para uma análise geral das tensões em tais membros, devem ser incluídos não só os efeitos da flexão e torção uniforme, como também, os efeitos da torção não uniforme, notadamente em secções abertas. A fim de considerar esses efeitos, devem ser determinadas todas as propriedades seccionais requeridas, tais como : centróide, momento de inércia, constante torcional, centro de cisalhamento, constante de empenamento e momento setorial estático ou momento setorial de primeira espécie.

O propósito deste trabalho é desenvolver um processo numérico para a determinação das propriedades seccionais usadas na análise de tensões de membros estruturais, classificados como barras ou vigas, e cujas secções são constituídas de paredes delgadas.

Um processo numérico é apresentado no Capítulo 3. Para a obtenção da formulação básica do referido processo numérico, supõe-se que os elementos de parede das secções transversais possam ser discretizados em tantos elementos quantos necessários, de tal forma, que a secção seja modelada por um conjunto de nós interconectados por elementos retilíneos e/ou circulares.

O programa efetua rotinas numéricas, e determina todas as propriedades seccionais envolvidas na flexão, torção uniforme e não uniforme, de secções de paredes delgadas.

Para utilizar o programa, no Capítulo 4 são apresentadas as instruções de modelação e entrada de dados. Tais instruções podem ser seguidas por quaisquer indivíduos que tenham um conhecimento mínimo dos formatos usados em FORTRAN.

As propriedades seccionais, para uma variedade de secções encontradas na literatura, foram determinadas com o programa, e comparadas com os resultados conhecidos. No Capítulo 5 são apresentados alguns exemplos.

Os resultados obtidos com o programa são aplicáveis às barras curvas e de secção variável, pois estas podem ser discretizadas em elementos de barras prismáticas, para utilização dos métodos de cálculo numérico apropriados aos computadores.

Um exemplo, onde se pode utilizar um programa geral que forneça as propriedades seccionais requeridas na flexão, torção uniforme ou não uniforme, de quaisquer formas de secções de paredes delgadas, é o PROASE [34, 35]. O PROASE é um programa geral de elementos finitos elaborado especialmente para análise linear estática de estruturas complexas. Tal programa constrói um número de bibliotecas de dados [35] e entre elas está a de Propriedades de Secções Transversais de Vigas, a qual inclui algumas propriedades seccionais que se pretende determinar no Processo Numérico Computacional a ser descrito.

C A P Í T U L O 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 - INTRODUÇÃO

Estruturas de paredes delgadas podem ser estudadas como barras, cascas ou membranas. Este trabalho refere-se às estruturas classificadas como barras ou vigas.

Um resumo da bibliografia, referente à teoria geral das Barras de Paredes Delgadas, até 1966, encontra-se em [4]. Segundo essa referência, importantes contribuições para o assunto foram, entre outros, os trabalhos de VLASOV, TIMOSHENKO, ARGYRIS-DUNNE, KÁRMÁN-CHRISTENSEN e KÁRMÁN-WEI-ZANG-CHIEN.

Em 1940 foi publicado o livro de VLASOV contendo um compreensivo estudo de equilíbrio, estabilidade e vibrações que serviu, basicamente, para desenvolver a escola russa no assunto. Em 1961, este livro foi publicado em idioma inglês e tem servido como referência em trabalhos publicados recentemente [14, 15, 18, 19, 21, 24, 25].

Em 1944, KÁRMÁN e CHRISTENSEN [9] desenvolveram uma teoria de torção não uniforme válida para barras prismáticas de secções abertas, fechadas ou mistas. Para calcular o fluxo de tensões cisalhantes e as tensões normais devidos às restrições ao empenamento da secção, desenvolveram um método análogo à flexão de vigas simples.

O trabalho de TIMOSHENKO [5], publicado em 1945, unificava a teoria da flexão, torção e estabilidade de barras prismáticas de secção aberta, até então. Um estudo bastante completo, semelhante ao trabalho de TIMOSHENKO, é encontrado na referência [1].

Em 1946, KÁRMÁN e WEI-ZANG CHIEN [10] apresentaram uma teoria que usa conceitos da teoria das cascas e se aplica, também, às barras com secções variáveis. Os autores alcançaram resultados que relacionam, por meio de duas equações, o empenamento,

o ângulo de torção e o momento torçor aplicado na secção. As tensões são determinadas por relações obtidas da Teoria da Elasticidade.

A teoria desenvolvida por ARGYRIS E DUNNE (1947-1949) é, particularmente, aplicável às estruturas aeronáuticas e limitada a conicidades até 10^0 . Segundo estes autores [11], o método da superposição usado para separar flexão e torção por meio do conceito de centro de cisalhamento é, em geral, incorreto, pois não inclui o efeito conhecido como "defasagem de cisalhamento" (shear lag) ou difusão. DUNNE mostrou que é incorreto referir as cargas torcionais ao centro de cisalhamento. "Deve-se tomar um ponto que satisfaz a condição de empenamento zero". Os autores determinaram equações diferenciais que relacionam deslocamentos e a torção da secção e calcularam as tensões assumindo uma função tensão.

Um estudo bastante compreensível do efeito "defasagem de cisalhamento" é apresentado na referência [1].

As teorias apresentadas em [10, 11] podem ser consideradas matematicamente exatas dentro dos limites supostos [2, 4]. Entretanto, para fins de Engenharia, podem ser usadas teorias aproximadas. Assim, adotar o conceito de função empenamento e centro de cisalhamento, constitui uma simplificação vantajosa no estudo das tensões originadas das restrições ao empenamento [1, 2, 3, 5, 6, 8, 10]. Este trabalho limitar-se-á a essas simplificações. Será adotada a Teoria Linear Elástica das Barras de Paredes Delgadas e desprezado o efeito da difusão.

A Teoria Linear Elástica das Barras de Paredes Delgadas, em geral, supõe [14]:

- Ausência de flambagem
- Pequenos deslocamentos
- Tensões elásticas
- Tensões de distorção desprezáveis (a secção guarda a forma).

Estudos que levam em consideração a distorção da secção podem ser vistos em [3, 8, 15]. Um tipo de estrutura de paredes delgadas, conhecido na literatura como "folded-plate" e que admite distorção da secção, é apresentado por KOLLBRUNNER-BASLER [3].

Outro caso é o trabalho desenvolvido por KRAJCINOVIC [15].

A análise de tensões, em barras curvas e de seção variável, pode ser feita usando o conceito de centro de cisalhamento [16, 36] ou, então, usando o centróide como único ponto de referência da seção [17, 19]. Uma razão para evitar o uso do centro de cisalhamento é a impossibilidade de uma definição rigorosamente exata em tais barras [4, 20].

Tendo em vista os métodos de cálculo numérico apropriados para uso de computador, tais como diferenças finitas e elementos finitos, as barras curvas e de seção variável podem ser discretizadas em elementos de barras prismáticas [3, 21, 22, 23, 24, 25, 26]. Deste modo, todas as constantes envolvidas na torção uniforme ou não uniforme podem ser descritas como propriedades seccionais. Este é, portanto, o objetivo da presente dissertação.

Pretende-se desenvolver um processo numérico computacional e programa em FORTRAN para calcular essas propriedades em seções abertas, fechadas ou mistas. A formulação básica de tal processo é descrita, parcialmente, em [37].

KOLLBRUNNER e BASLER [3] mostram um processo prático, baseado em diferenças finitas e adaptado a calculadoras de mesa, para calcular as propriedades seccionais em seções abertas, somente.

Um programa em FORTRAN IV que calcula centróide, eixos principais, momentos de inércia de área e a posição do centro de cisalhamento, é citado em [12]. Esse programa é limitado às seções abertas, formadas de elementos retilíneos, de tal modo que as ramificações estejam com elementos a 90° .

Outro programa, em que se calculam as mesmas propriedades de [12], é encontrado em [13]. Tal programa é limitado às seções constituídas de uma linha poligonal contínua, sem ramificações, aberta ou fechada (seções com uma cavidade tubular apenas) e, também, prevê elementos circulares que, no entanto, não são utilizados.

Um programa mais geral, denominado PROSEC [33], é utilizado na determinação das propriedades seccionais requeridas na flexão, torção uniforme ou não uniforme, de seções de paredes delga

das. Esse programa é limitado às secções abertas formadas somente por elementos retilíneos de tal modo que, aos pontos de ramificações (nós), concorram, no máximo, quatro elementos. O programa é aplicável, também, às secções mistas com apenas uma cavidade tubular.

O processo numérico computacional a ser desenvolvido deverá superar certas limitações inerentes aos programas e métodos encontrados na literatura, tais como:

- Tipos de secções transversais (abertas, fechadas ou mistas);
- Disposição dos elementos de parede entre si;
- Propriedades seccionais determinadas;
- Limitações quanto às ramificações e número de cavidades tubulares;
- Número de elementos de parede que concorrem a um mesmo nó.

Nos títulos seguintes serão apresentadas as fórmulas para calcular as principais propriedades seccionais, bem como equações de equilíbrio dos momentos torçores, tensões normais e cisalhantes, em barras prismáticas de paredes delgadas.

2.2 - PONTOS CARACTERÍSTICOS DE UMA SECÇÃO TRANSVERSAL

2.2.1 - Definições

Segundo NOWINSKI [4], existem quatro pontos característicos numa secção transversal: centro de cisalhamento, centro de torção, centro de mínima deformação e centro de empenamento zero.

Com relação ao centro de torção, a bibliografia consultada [1, 2, 3, 7, 18, 27] não permitiu concluir qual a definição adotada em definitivo. Dependendo da definição adotada, centro de cisalhamento e centro de torção, em secções de paredes delgadas, coincidem [2, 3, 27] ou não [1, 7].

Os quatro pontos característicos têm as definições seguintes:

1. Centro de empenamento zero [4, 11].

É o ponto intersecção de eixos que satisfazem a condição de empenamento zero.

2. Centro de mínima deformação [28, 29, 30]

É o ponto do plano da secção pelo qual a carga deve passar a fim de que a energia de deformação seja mínima. Este ponto, em secções compactas, aproximadamente, coincide com o centro de cisalhamento mas, em secções delgadas, a diferença é considerável [28, 30].

3. Centro de torção

a) Segundo as referências [2, 3, 27] é o ponto no plano da secção que satisfaz as relações,

$$\int_A \eta \Psi \, dA = 0 \quad (2.1)$$

$$\int_A \xi \Psi \, dA = 0 \quad (2.2)$$

onde Ψ é a função empenamento, e η, ξ eixos coordenados com origem no centróide. Neste caso há a coincidência do centro de cisalhamento e de torção.

b) Segundo TIMOSHENKO [7], a localização do centro de torção depende da maneira como a barra é suportada. Quando a barra é suportada de tal modo que a integral $\int_A w^2 \, dA$ seja um mínimo, sendo w o empenamento da secção, o centro de cisalhamento e o centro de torção coincidem.

c) Segundo ODEN [1], é o ponto do plano da secção que tem vetor deslocamento nulo. A coincidência do centro de torção e de cisalhamento depende das condições de contorno e carga. Geralmente, não coincidem.

4. Centro de cisalhamento

Definições rigorosas são encontradas em [7, 28, 29, 30]. Na referência [30], encontram-se expressões das coordenadas do centro de cisalhamento aplicáveis às secções maciças ou mul

ticonexas (secções vazadas), onde aparecem a função empenamento e a função tensão de PRANDTL. No entanto, em secções de paredes delgadas, considerando a teoria de flexão simples, o centro de cisalhamento pode ter uma definição simples [1, 5]:

É o ponto no plano da secção através do qual o plano da resultante das cargas flexionais deve passar, a fim de não causar torção.

2.2.2 - Fluxo de tensões cisalhantes e coordenadas do centro de cisalhamento em secções abertas.

O fluxo de tensões cisalhantes devido à flexão [1, 3, 5], em secções abertas, é dado por

$$q_0 = -(V_\xi (I_{\xi Q_\eta} - I_{\eta \xi} Q_\xi) + V_\eta (I_{\eta Q_\xi} - I_{\eta \xi} Q_\eta)) / D \quad (2.3)$$

onde,

$$D = I_\eta I_\xi - I_{\eta \xi}^2 \quad (2.4)$$

$$Q_\eta = \int \xi \, dA = \int_0^s \xi \, t \, ds \quad (2.5)$$

$$Q_\xi = \int \eta \, dA = \int_0^s \eta \, t \, ds \quad (2.6)$$

Q_η , Q_ξ são os momentos estáticos de área (função de s), respectivamente, em relação aos eixos η , ξ (Figura 2.1).

A equação (2.3) pode ser sintetizada na forma

$$q_0 = q_\eta V_\eta + q_\xi V_\xi \quad (2.7)$$

onde q_η , q_ξ são denominados fluxos de tensões cisalhantes básicos [2].

Somando momentos em relação ao centróide C, obtém-se as coordenadas do centro de cisalhamento S (Figura 2.1).

$$x_{sa} = -(I_\xi I_{\eta \omega c} - I_{\eta \xi} I_{\xi \omega c}) / D + x_c \quad (2.8)$$

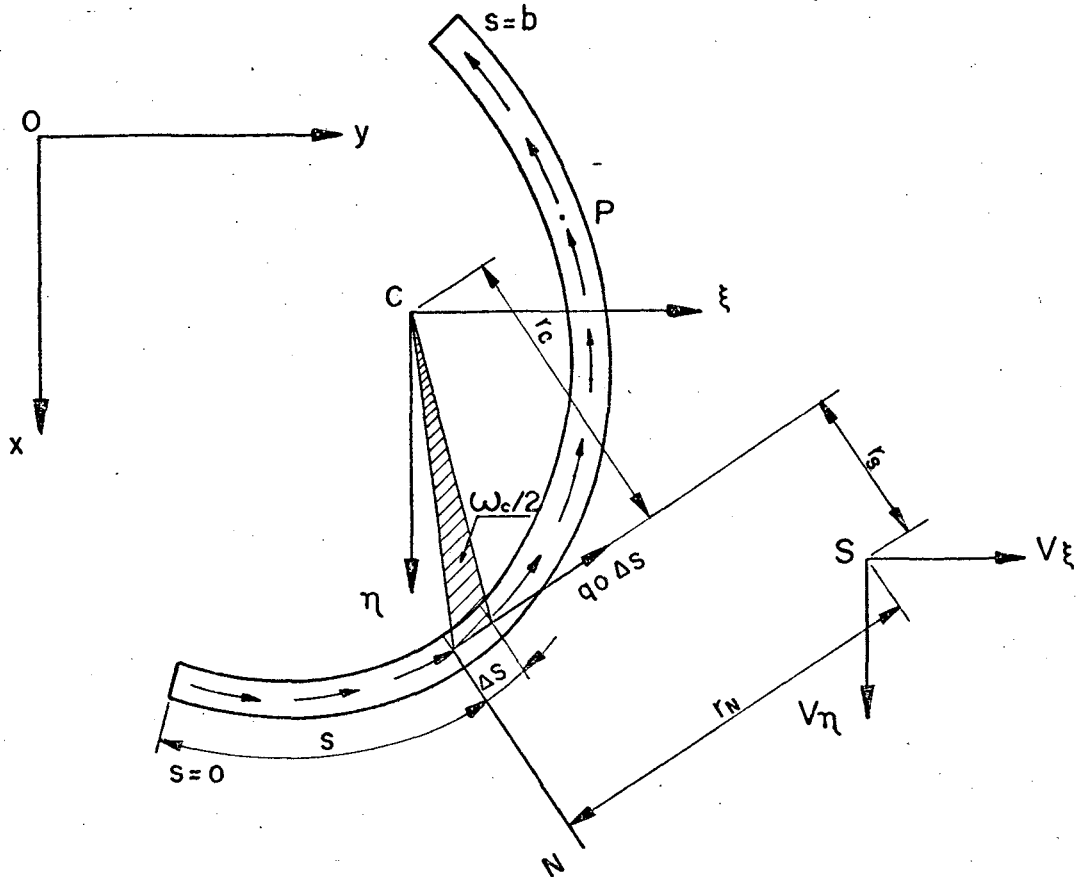


FIG. 2.1 - Secção aberta de forma geral.

$$y_{sa} = (I_{\eta} I_{\xi\omega_c} - I_{\eta\xi} I_{\eta\omega_c}) / D + y_c \quad (2.9)$$

onde,

$$I_{\eta\omega_c} = \int_A Q_{\eta} d\omega_c \quad (2.10)$$

$$I_{\xi\omega_c} = \int_A Q_{\xi} d\omega_c \quad (2.11)$$

são denominados produtos de inércia setoriais [1, 3] e

$$d\omega_c = r_c ds \quad (2.12)$$

é o dobro da área varrida por r_c desde s a $s + ds$.

2.2.3 - Fluxo de tensões cisalhantes e coordenadas do centro de cisalhamento em secções fechadas ou mistas.

Na Figura 2.2, mostra-se parte de uma secção constituída de nct cavidades tubulares. Introduzem-se cortes hipotéticos na secção de modo que possa ser considerada aberta. As linhas traçadas em D_i , D_j , D_k indicam as posições desses cortes.

Se somente a cavidade j retornar à forma anterior (fechada), o fluxo de tensões cisalhantes será,

$$q_j = q_{0j} + \bar{q}_{0j} \quad (2.13)$$

onde q_{0j} é dado por (2.7), admitindo que, em todos pontos D_1 , D_2 , ..., D_{nct} , a secção esteja aberta e \bar{q}_{0j} é o fluxo de tensões cisalhantes redundante [1, 3, 37] necessário para fechar o corte em D_j .

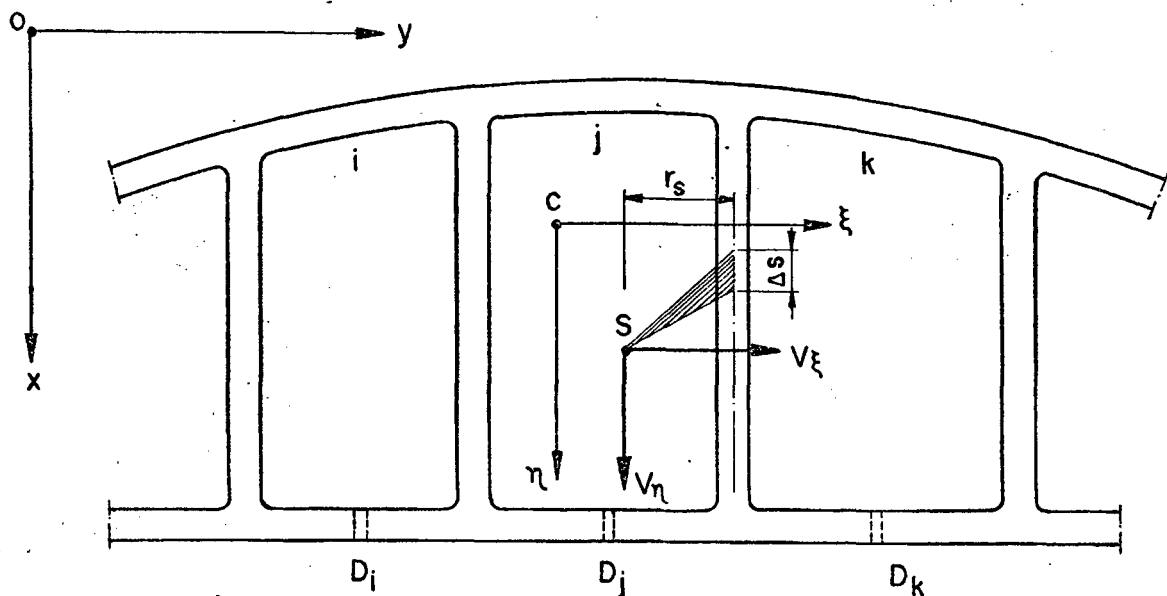


FIG. 2.2 - Secção fechada de forma geral.

Quando todos os cortes estiverem fechados, o fluxo de tensões cisalhantes num elemento qualquer da parede de cavidade j é,

$$q_j = q_{0j} + \bar{q}_{rj} \quad (2.14)$$

onde \bar{q}_{rj} é a soma algébrica dos fluxos de tensões cisalhantes

redundantes no referido elemento. Os fluxos de tensões cisalhantes redundantes são obtidos das equações

$$\delta_{j,j} \bar{q}_{o_j} + \sum_k \delta_{j,k} \bar{q}_{o_k} + \delta o_j = 0 ; \quad (2.15)$$

$j = 1, nct \text{ e } k = 1, ncc_j$

na forma seguinte,

$$\bar{q}_{o_j} = \bar{q}_{\eta_j} V_{\eta} + \bar{q}_{\xi_j} V_{\xi} \quad (2.16)$$

onde,

$$\delta_{j,j} = \oint_j ds / (Gt) \quad (2.17)$$

$$\delta_{j,k} = \delta_{k,j} = - \int_{j,k} ds / (Gt) \quad (2.18)$$

$$\delta o_j = \oint_j q_{o_j} ds / (Gt) \quad (2.19)$$

$\delta_{j,j}$, $\delta_{j,k}$, δo_j são denominados coeficientes de influência ou flexibilidades [1].

\bar{q}_{η_j} , \bar{q}_{ξ_j} são denominados fluxos de tensões cisalhantes redundantes básicos [2, 3].

Somando momentos em relação ao centróide, obtém-se as coordenadas do centro de cisalhamento

$$x_{sf} = x_{sa} + \sum_j \bar{q}_{\xi_j} Atub_j ; \quad j = 1, nct \quad (2.20)$$

$$y_{sf} = y_{sa} - \sum_j \bar{q}_{\eta_j} Atub_j ; \quad j = 1, nct \quad (2.21)$$

onde,

$$Atub_j = \oint_j r_c ds = 2 \Omega_j \quad (2.22)$$

e Ω_j é a área encerrada pela linha média das paredes da cavidade de j .

As equações (2.20) e (2.21) são aplicáveis, também, às secções mistas (Figura 2.3).

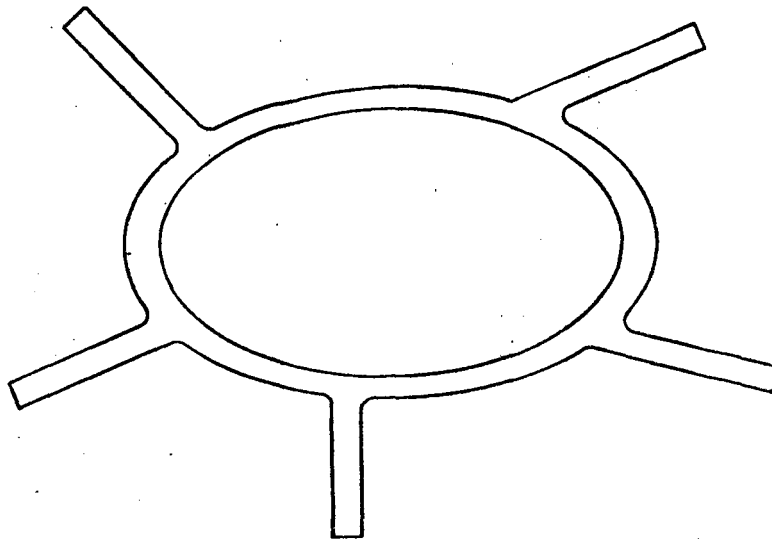


FIG. 2.3 - Exemplo de secção mista

2.3 - TORÇÃO UNIFORME

Se aos extremos de uma barra de secção uniforme forem aplicados torques agindo em planos normais ao seu eixo e se os extremos estiverem livres ao empenamento, ter-se-á o caso de torção uniforme ou torção pura.

A equação de equilíbrio dos momentos, em relação ao eixo de torção, é

$$M_t = J G \theta \quad (2.23)$$

onde M_t é o torque na secção, JG a rigidez torcional, J a constante torcional e θ o ângulo de torção por unidade de comprimento, constante [7].

Em secções abertas (Figura 2.1), pode-se usar [33]:

$$J = \left(\int_0^b t^3 ds \right) / 3 \quad (2.24)$$

Em secções fechadas (Figura 2.2),

$$J_{\text{tub}} = \sum_j \bar{q}_j A_{\text{tub}_j} \quad ; \quad j = 1, n_{\text{ct}} \quad (2.25)$$

onde \bar{q}_j é o fluxo de tensões cisalhantes básico da torção uniforme ou de Saint-Venant. Sabe-se que [2],

$$q_j = \bar{q}_j G \theta \quad (2.26)$$

q_j sendo o fluxo de tensões cisalhantes obtido das equações a seguir [1]:

$$\delta_{j,j} q_j + \sum_k \delta_{j,k} q_k + \delta 1_j = 0 \quad ; \quad (2.27)$$

$$j = 1, nct \quad ; \quad k = 1, ncc_j$$

onde,

$$\delta 1_j = - A t u b_j \theta \quad (2.28)$$

e $\delta_{j,j}$, $\delta_{j,k}$ dados pelas equações (2.17) e (2.18), respectivamente.

Em secções mistas (Figura 2.3), a constante torcional é calculada por,

$$J = \sum_j \bar{q}_j A t u b_j + (\sum_i b_i t_i) / 3 \quad ; \quad (2.29)$$

$$j = 1, nct \quad ; \quad i = 1, n_a$$

onde n_a é o número de elementos adicionais de secção aberta.

2.4 - TORÇÃO NÃO UNIFORME

Torção não uniforme ocorre se qualquer secção transversal estiver impedida de empenar ou se o torque aplicado variar ao longo do comprimento da viga. Consequentemente, o empenamento e o ângulo de torção serão variáveis e surgirão tensões normais e cisalhantes ao plano da secção.

2.4.1 - Secções abertas

Para a torção não uniforme de barras de secção aberta, as equações de equilíbrio dos momentos, em relação ao eixo Z que passa pelo centro de cisalhamento, são:

1º) Se o momento de torção aplicado é constante,

$$M_t = G J d\phi/dz - E \Gamma d^3\phi/dz^3 \quad (2.30)$$

2º) Se o momento de torção m_t aplicado é distribuído,

$$m_t = -G J d\phi/dz + E \Gamma d^4\phi/dz^4 \quad (2.31)$$

$E\Gamma$ é a rigidez ao empenamento e Γ a constante de empenamento. Γ é conhecido, também, como momento de inércia setorial, momento setorial de segunda espécie [3] ou momento de inércia de empenamento [2, 14].

A constante de empenamento é definida como,

$$\Gamma = \int_A \psi^2 dA \quad (2.32)$$

onde,

$$\psi = D_t - \omega_s \quad (2.33)$$

é a função empenamento normalizada ou, simplesmente, função empenamento, como adotado neste trabalho, para a qual

$$\omega_s = \int_0^s r_s ds \quad (2.34)$$

$$D_t = (\int_A \omega_s dA)/A \quad (2.35)$$

Alguns autores [6, 8] chamam ω_s de função empenamento.

As tensões normais e o fluxo de tensões cisalhantes que surgem devido ao empenamento variável, são calculados por,

$$\sigma_z = \psi M_\omega / \Gamma \quad (2.36)$$

$$q_\omega = -Q_\omega V_\omega / \Gamma \quad (2.37)$$

onde M_ω é o denominado bimomento,

$$V_{\omega} = dM_{\omega}/dz \quad (2.38)$$

é a força cisalhante de empenamento, e

$$Q_{\omega} = \int_0^S \Psi \, t \, ds \quad (2.39)$$

o momento setorial de primeira espécie.

Segundo ODEN [1], o bimomento é definido como,

$$M_{\omega} = E \Gamma \, d^2\phi/dz^2 \quad (2.40)$$

Quando uma carga axial N_z estiver agindo num ponto P da secção (Figura 2.1), o bimomento é dado por,

$$M_{\omega} = N_z \Psi_P \quad (2.41)$$

onde $\Psi_P = 0$ não significa que V_{ω} deva ser nulo ([1], p. 216).

Conforme a definição de constante de empenamento vista anteriormente, obtém-se $\Gamma = 0$ para os casos de secções da Figura 2.4, onde S é o centro de cisalhamento. Isto significaria que a rigidez de empenamento é nula, o que não é verdade. Existe uma rigidez, embora pequena. A constante de empenamento para esses casos é,

$$\Gamma^* = (\int_0^b t^3 r_N^2 \, ds)/12 \quad (2.42)$$

onde r_N é indicado na figura 2.1.

Para secções abertas quaisquer, a constante de empenamento total é a soma ($\Gamma + \Gamma^*$). No entanto, Γ^* é muito pequeno comparado com Γ e pode ser desprezado [1]. Em elementos de paredes extremamente curtos ou secções do tipo da Figura 2.4, Γ^* deve ser considerado [1, 8].

Segundo ODEN, para essas secções, as tensões normal e cisalhante são,

$$\sigma_z^* = - r_N N E \, d^2\phi/dz^2 \quad (2.43)$$

$$\tau_{Nz} = E (d^3\phi/dz^3) r_N(t^2/4 - N^2) / 2 \quad (2.44)$$

onde

$$-t/2 \leq N \leq t/2 \quad (\text{ver Figura 2.1}).$$

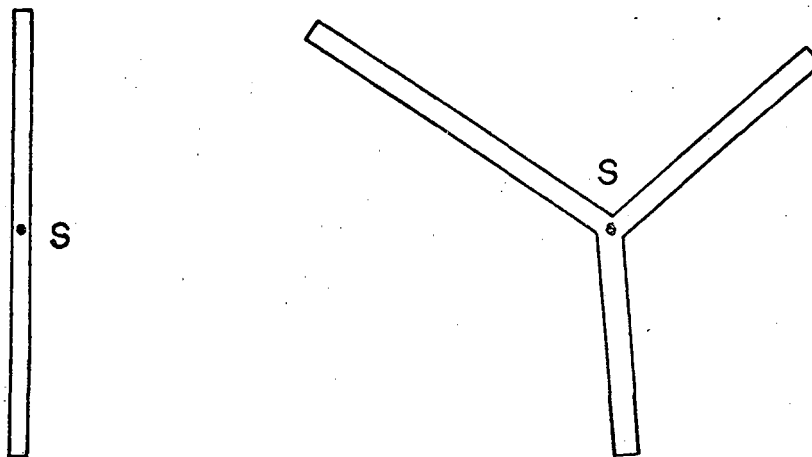


FIG. 2.4

2.4.2 - Secções fechadas

Na torção não uniforme, são apresentadas as fórmulas de BENSCHOTER [2] com as devidas simplificações para barras prismáticas de secção fechada ou mista.

O empenamento das secções pode ser expresso por

$$w = \bar{\Psi} f(z) \quad (2.45)$$

onde $f(z)$ é uma função que leva em conta a variação de w ao longo da barra,

$$\bar{\Psi} = C_1 - \bar{\omega}_s \quad (2.46)$$

é a função empenamento e

$$\bar{\omega}_s = \int_0^s r_s ds - \int_0^s \bar{q} (ds/t) \quad (2.47)$$

Na equação (2.47), \bar{q} é o fluxo de tensões cisalhantes básico da torção uniforme e r_s indicado na Figura 2.2.

A função empenamento deve satisfazer as condições,

$$\int_A \bar{\Psi} dA = 0 ; \quad \int_A \bar{\Psi} \eta dA = 0 \quad e \quad \int_A \bar{\Psi} \xi dA = 0 \quad (2.48)$$

As duas últimas condições são automaticamente satisfeitas ao tomar o polo de r_s como sendo o centro de cisalhamento. A primeira condição determina a constante,

$$C_1 = \left(\int_A \bar{\omega}_s dA \right) / A \quad (2.49)$$

de modo análogo às secções abertas.

A constante de empenamento (ou momento de inércia de empenamento), é dada por,

$$\bar{T} = \int_A \bar{\Psi}^2 dA \quad (2.50)$$

BENSCOTER usa, também, a constante seccional,

$$I_c = \int_A r_s^2 dA \quad (2.51)$$

denominada momento de inércia central e introduz a constante adimensional μ definida como,

$$\mu = 1 - J/I_c \quad (2.52)$$

onde J é a constante torcional. A constante μ dá uma indicação da regularidade da secção. Para polígonos regulares, $\mu = 0$.

A equação que permite calcular $f(z)$ é,

$$E \bar{T} d^2 f/dz^2 - G J \mu^2 f = - \mu^2 M_t \quad (2.53)$$

onde M_t é o momento torçor na secção, ou

$$E \bar{T} d^3 f/dz^3 - G J \mu^2 df/dz = \mu^2 m_t \quad (2.54)$$

em caso de torção distribuída.

O ângulo de torção ϕ está relacionado com f por,

$$d\phi/dz = M_t / (G I_c) + \mu^2 f \quad (2.55)$$

Substituindo f de (2.55) em (2.53) ou (2.54), obtêm-se equações para o ângulo de torção da secção. Para o caso geral de momento torçor aplicado distribuído m_t , tem-se,

$$E \bar{\Gamma} d^4\phi/dz^4 - \mu^2 GJ d^2\phi/dz^2 = \mu^2 m_t - E \bar{\Gamma} / (G I_c) dm_t/dz \quad (2.56)$$

Observa-se que, quando $\mu = 0$, a equação (2.55) reduz-se à equação da torção uniforme.

Para calcular as tensões normais tem-se, de modo análogo às secções abertas,

$$\sigma_z = \bar{\Psi} \bar{M}_\omega / \bar{\Gamma} \quad (2.57)$$

onde o bimomento \bar{M}_ω é dado por,

$$\bar{M}_\omega = E \bar{\Gamma} df/dz \quad (2.58)$$

No entanto, se houver interesse, pode-se calcular as tensões σ_z sem conhecer f , usando a equação

$$1 / (G J \mu^2) d^2 \bar{M}_\omega / dz^2 - \bar{M}_\omega / E \bar{\Gamma} = -1 / (GJ) dM_t / dz \quad (2.59)$$

Quando uma barra de secção fechada ou mista está submetida a torção não uniforme, a distribuição do fluxo de tensões cisalhantes consiste da superposição de duas partes. A primeira é devida à torção de Saint-Venant, e a segunda devida ao empenamento variável. Tem-se, portanto,

$$q = q' + q'' \quad (2.60)$$

onde $q' = \bar{q} G \theta$ é o fluxo de tensões cisalhantes de Saint-Venant ou fluxo de tensões cisalhantes primário e

$$q'' = E \bar{q}'' d^2 f / dz^2 \quad (2.61)$$

é o fluxo de tensões cisalhantes secundário.

Denomina-se \bar{q}'' de fluxo de tensões cisalhantes secundário básico, o qual, por sua vez, consiste de duas partes: uma parte estaticamente determinável e outra indeterminável.

$$\bar{q}'' = \bar{q}_s - \bar{q}_w \quad (2.62)$$

A parte estaticamente determinável é,

$$\bar{q}_s = - \int_0^s \bar{\psi} t \, ds = - \bar{Q}_w \quad (2.63)$$

onde \bar{Q}_w denomina-se, neste trabalho, como um momento setorial de primeira espécie, em analogia às secções abertas.

A parte estaticamente indeterminável é obtida do sistema de equações (em analogia à flexão simples),

$$\delta_{j,j} \bar{q}_{wj} + \sum_k \delta_{j,k} \bar{q}_{wk} + \delta 2_j = 0 ; \quad j=1, nct, \quad k=1, ncc_j \quad (2.64)$$

onde $\delta_{j,j}$, $\delta_{j,k}$ são os mesmos coeficientes dados em (2.17), (2.18) e

$$\delta 2_j = - \oint (\bar{q}_s / (Gt)) ds = \oint (\bar{Q}_w / (Gt)) ds \quad (2.65)$$

Resumindo, conhecidos \bar{q} , \bar{Q}_w e \bar{q}_w , pode-se determinar a distribuição do fluxo de tensões cisalhantes.

Para calcular o fluxo de tensões cisalhantes na torção não uniforme das barras prismáticas de secção mista, as equações de BENSCHOTER podem ser escritas como segue:

$$q = \bar{q} G \theta + E \bar{q}'' d^2 f / dz^2 \quad (2.66)$$

$$q = M_t \bar{q} / J + E (\bar{q} \bar{I} / J + \bar{q}'') d^2 f / dz^2 \quad (2.67)$$

$$q = M_t \bar{q} / J + (\bar{q} / J + \bar{q}'' / \bar{I}) d\bar{M}_w / dz \quad (2.68)$$

onde \bar{M}_w é determinado por (2.59).

C A P Í T U L O 3

PROCESSO NUMÉRICO COMPUTACIONAL

3.1 - INTRODUÇÃO

Desenvolve-se um processo numérico computacional e programa codificado em FORTRAN, para determinar propriedades seccionais requeridas no cálculo do empenamento da secção, ângulo de torção, tensões normais e cisalhantes em secções de paredes delgadas abertas, fechadas ou mistas, quando sob condições gerais de carregamento.

O programa, denominado SEDEL, é utilizado na determinação das seguintes propriedades seccionais:

1. Momentos e produto de inércia de área.
2. Coordenadas do centróide.
3. Coordenadas do centro de cisalhamento.
4. Constante torcional.
5. Constante de empenamento.
6. Momento de inércia central.
7. Coeficientes da expressão da função empenamento.
8. Coeficientes da expressão do momento setorial de primeira espécie.
9. Coeficientes das expressões dos fluxos de tensões cisalhantes básicos de secções abertas e, se for o caso, fluxos de tensões cisalhantes redundantes básicos em cavidades tubulares, na flexão simples.
10. Fluxo de tensões cisalhantes básico na torção uniforme de secções fechadas.
11. Fluxo de tensões cisalhantes secundário básico (parcela estatisticamente indeterminável), na torção não uniforme de secções fechadas.

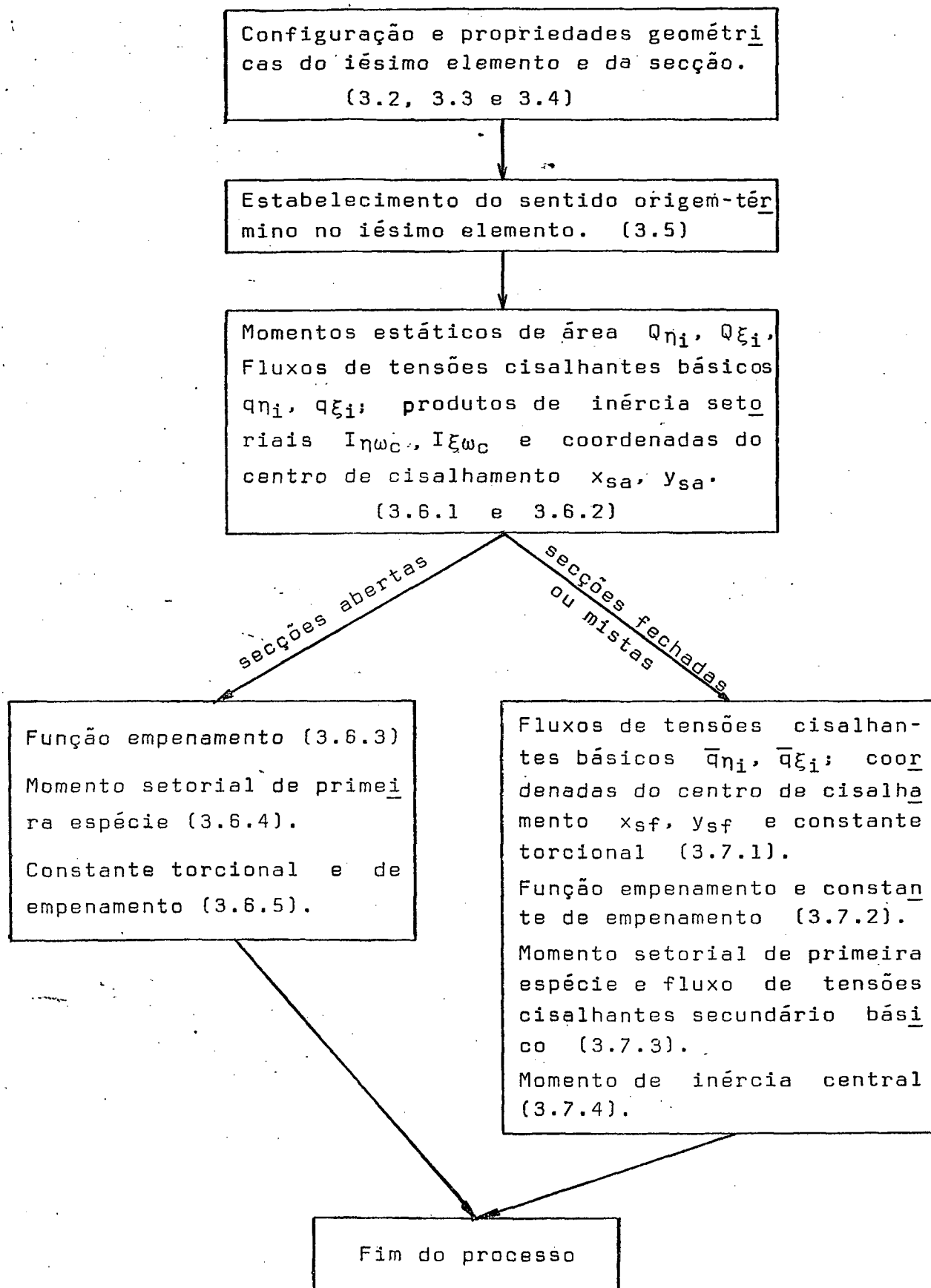


FIG. 3.1 - Fluxo de desenvolvimento do processo numérico computacional

O processo numérico computacional, desenvolvido nos títulos subsequentes, fornece as expressões que permitem calcular essas propriedades seccionais. Um fluxo de desenvolvimento do referido processo é mostrado na Figura 3.1, onde os números entre parênteses indicam sob quais títulos se encontram tais expressões.

As secções transversais, para as quais o processo é aplicável, estão sujeitas às seguintes hipóteses:

- 1 - Cada secção transversal é modelada por um conjunto de nós interconectados por elementos retilíneos e/ou circulares, individualizados pela ordem dos seus nós origem e término.
- 2 - Os nós origem e término de cada elemento são tomados sobre a linha média da secção transversal e a espessura da parede, entre esses dois nós, é considerada constante.
- 3 - Elementos circulares devem ter arcos, no máximo, correspondentes a 180° . Para arcos maiores, dividir o elemento de tal forma que cada novo elemento tenha arco menor ou igual a 180° .
- 4 - Áreas concentradas são consideradas como elementos retilíneos cujos nós origem e término têm mesmas coordenadas e cuja espessura é nula.
- 5 - As secções fechadas são tratadas como se fossem abertas, ou seja, dão-se cortes hipotéticos, de modo a torná-las abertas e, em cada corte, formam-se dois nós de mesmas coordenadas.

3.2 - CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA DO IÉSIMO ELEMENTO

A configuração geométrica do iésimo elemento é esquematizada na Figura 3.2, onde:

A_i, B_i - Nós origem e término, respectivamente, do elemento. O sentido origem-término é definido de A_i para B_i .

C'_i - Centróide do elemento.

- M_i - Ponto médio entre A_i e B_i .
 D_i - Centro de curvatura (o raio de curvatura é denotado por R_i).
 C - Centróide da secção.
 S - Centro de cisalhamento da secção.
 O - Origem do sistema de referência global.
 x'_i, y'_i - Eixos paralelos aos eixos x, y e com origem em C'_i .
 x''_i, y''_i - Eixos paralelos aos eixos x, y e com origem em D_i .

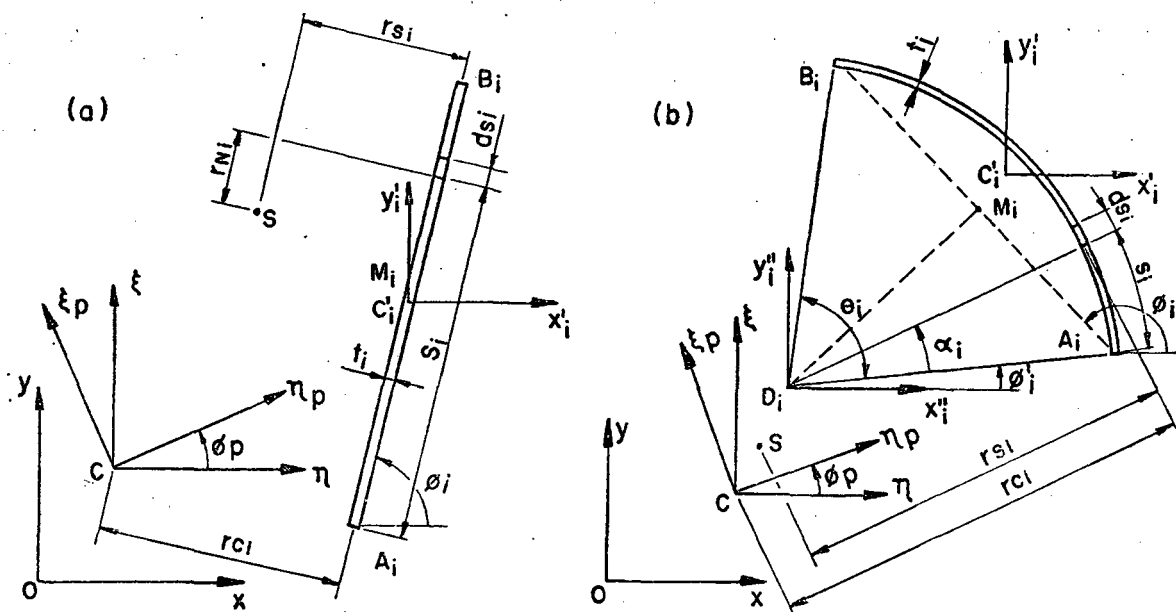


FIG. 3.2 - Elementos: (a) retilíneo; (b) circular.

- η, ξ - Eixos paralelos aos eixos x, y e com origem em C .
 η_p, ξ_p - Eixos principais de inércia.
 ϕ_p - Direção dos eixos principais de inércia.
 ϕ_i - Ângulo que o segmento de reta orientado $\overline{A_i B_i}$ faz com o eixo x .
 ϕ'_i - Ângulo que o segmento de reta orientado $\overline{D_i A_i}$ faz com o eixo x .
 θ_i - Ângulo do arco de circunferência $\widehat{A_i B_i}$.
 t_i - Espessura da parede.

- r_{c_i} - Distância de C à tangente à linha média da parede do elemento.
 r_{s_i} - Distância de S à tangente à linha média da parede do elemento.
 r_{N_i} - Distância de S à normal à linha média da parede do elemento.
 s_i - Coordenada curvilínea com origem em A_i .

3.3 - PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DO IÉSIMO ELEMENTO

3.3.1 - Elemento retilíneo

- 1 - Distância entre os nós A_i e B_i ou comprimento do elemento.

$$d_i = b_i = ((y_{B_i} - y_{A_i})^2 + (x_{B_i} - x_{A_i})^2)^{1/2} \quad (3.1)$$

- 2 - Inclinação do segmento de reta $\overline{A_i B_i}$.

$$\text{sen } \phi_i = (y_{B_i} - y_{A_i}) / b_i \quad (3.2)$$

$$\text{cos } \phi_i = (x_{B_i} - x_{A_i}) / b_i \quad (3.3)$$

- 3 - Coordenadas do ponto médio M_i ou centróide C'_i .

$$x_{M_i} = x_i = (x_{A_i} + x_{B_i}) / 2 \quad (3.4)$$

$$y_{M_i} = y_i = (y_{A_i} + y_{B_i}) / 2 \quad (3.5)$$

- 4 - Momentos de inércia e produto de inércia em relação aos eixos x'_i, y'_i .

$$I_{x'_i} = A r_i (t_i^2 \cos^2 \phi_i + b_i^2 \text{sen}^2 \phi_i) / 12 \quad (3.6)$$

$$I_{y'_i} = A r_i (t_i^2 \text{sen}^2 \phi_i + b_i^2 \cos^2 \phi_i) / 12 \quad (3.7)$$

$$I_{x'_i y'_i} = A r_i (b_i^2 - t_i^2) \text{sen } \phi_i \cos \phi_i / 12 \quad (3.8)$$

Em elementos de áreas concentradas,

$$I_{x'_i} = I_{y'_i} = I_{x'_i y'_i} = 0$$

3.3.2 - Elemento circular

Para todas as fórmulas a seguir adota-se a seguinte convenção:

"Quando o sentido origem-termino no iésimo elemento, considerado circular, é anti-horário, em relação a D_i , toma-se R_i com sinal positivo e, caso contrário, negativo".

1 - Distância entre os nós A_i e B_i .

$$d_i = ((y_{B_i} - y_{A_i})^2 + (x_{B_i} - x_{A_i})^2)^{1/2} \quad (3.9)$$

2 - Distância entre os pontos D_i e M_i .

$$h_i = (R_i^2 - (d_i/2)^2)^{1/2} \quad (3.10)$$

3 - Coordenadas do ponto M_i .

$$x_{M_i} = (x_{B_i} + x_{A_i}) / 2 \quad (3.11)$$

$$y_{M_i} = (y_{B_i} + y_{A_i}) / 2 \quad (3.12)$$

4 - Ângulo do arco $\widehat{A_i B_i}$.

$$\theta_i = 2 \tan^{-1} (d_i / (2h_i)) ; \quad 0 < \theta_i < \pi \quad (3.13)$$

5 - Inclinação do segmento de reta $\overline{A_i B_i}$.

$$\text{sen } \phi_i = (y_{B_i} - y_{A_i}) / d_i \quad (3.14)$$

$$\text{cos } \phi_i = (x_{B_i} - x_{A_i}) / d_i \quad (3.15)$$

6 - Coordenadas do centro de curvatura.

$$x_{D_i} = x_{M_i} - R_i \cdot \text{sen } \phi_i \cos (\theta_i/2) \quad (3.16)$$

$$y_{D_i} = y_{M_i} + R_i \cos \phi_i \cos (\theta_i/2) \quad (3.17)$$

7 - Inclinação do segmento de reta $\overline{D_i A_i}$.

$$\text{sen } \phi'_i = (y_{A_i} - y_{D_i}) / |R_i| \quad (3.18)$$

$$\text{cos } \phi'_i = (x_{A_i} - x_{D_i}) / |R_i| \quad (3.19)$$

8 - Comprimento do elemento.

$$b_i = |R_i| \theta_i \quad (3.20)$$

9 - Área do iésimo elemento retilíneo ou circular.

$$A_{r_i} = b_i t_i \quad (3.21)$$

Em elementos de áreas concentradas A_{r_i} é dado.

10 - Momentos de inércia e produto de inércia em relação aos eixos x'' , y'' .

$$I_{x''} = A_{r_i} R_i^2 (1 + \text{sen } \theta_i (\cos^2 \phi_i - \text{sen}^2 \phi_i) / \theta_i) / 2 \quad (3.22)$$

$$I_{y''} = A_{r_i} R_i^2 (1 - \text{sen } \theta_i (\cos^2 \phi_i - \text{sen}^2 \phi_i) / \theta_i) / 2 \quad (3.23)$$

$$I_{x''y''} = - A_{r_i} R_i^2 \text{sen } \theta_i \text{sen } \phi_i \cos \phi_i / \theta_i \quad (3.24)$$

11 - Coordenadas do centróide.

$$x_i = x_{D_i} + 2 R_i \text{sen } (\theta_i/2) \text{sen } \phi_i / \theta_i \quad (3.25)$$

$$y_i = y_{D_i} - 2 R_i \text{sen } (\theta_i/2) \cos \phi_i / \theta_i \quad (3.26)$$

12 - Momentos de inércia e produto de inércia em relação aos eixos x'_i, y'_i .

$$Ix'_i = Ix''_i - A_{r_i} (y_i - y_{D_i})^2 \quad (3.27)$$

$$Iy'_i = Iy''_i - A_{r_i} (x_i - x_{D_i})^2 \quad (3.28)$$

$$Ix'_i y'_i = Ix''_i y''_i - A_{r_i} (y_i - y_{D_i}) (x_i - x_{D_i}) \quad (3.29)$$

3.4 - PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SECÇÃO

No caso de secções de paredes delgadas compostas de n elementos, tem-se as seguintes fórmulas para o cálculo das correspondentes propriedades geométricas:

1 - Área da secção.

$$Area = \sum_i A_{r_i} \quad ; \quad i = 1, n \quad (3.30)$$

2 - Centróide da secção.

$$x_C = (\sum_i A_{r_i} x_i) / Area \quad ; \quad i = 1, n \quad (3.31)$$

$$y_C = (\sum_i A_{r_i} y_i) / Area \quad ; \quad i = 1, n \quad (3.32)$$

3 - Momentos de inércia e produto de inércia em relação aos eixos do centróide η, ξ .

$$I_\eta = \sum_i (Ix'_i + A_{r_i} y_i^2 - A_{r_i} y_i y_C) \quad ; \quad i = 1, n \quad (3.33)$$

$$I_\xi = \sum_i (Iy'_i + A_{r_i} x_i^2 - A_{r_i} x_i x_C) \quad ; \quad i = 1, n \quad (3.34)$$

$$I_{\eta\xi} = \sum_i (Ix'_i y'_i + A_{r_i} x_i y_i) - Area x_C y_C \quad ; \quad (3.35)$$

$i = 1, n$

4 - Direção dos eixos principais.

$$\phi_P = 0,5 \tan^{-1} 2 I_{\eta\xi} / (I_\xi - I_\eta) \quad (3.36)$$

5 - Momentos de inércia em relação aos eixos principais.

$$I_{\eta P} = I_\eta \cos^2 \phi_P + I_\xi \sin^2 \phi_P - I_{\eta\xi} \sin 2 \phi_P \quad (3.37)$$

$$I_{\xi P} = I_\eta \sin^2 \phi_P + I_\xi \cos^2 \phi_P + I_{\eta\xi} \sin 2 \phi_P \quad (3.38)$$

3.5 - ESTABELECIMENTO DO SENTIDO ORIGEM-TÉRMINO

Para estabelecer o sentido origem-término no iésimo elemento, ou seja, determinar a origem da coordenada s_i , sabe-se que, em extremidades livres, o fluxo de tensões cisalhantes é nulo e as extremidades dos elementos conectados a um determinado nó, têm o mesmo empenamento. Assim, a determinação de momentos estáticos de área, momento setorial de primeira espécie e fluxo de tensões cisalhantes básicos, requer que a ordem dos nós origem-término, em geral, seja diferente daquela usada para a função empenamento.

O sentido origem-término, para o cálculo das grandezas ligadas ao fluxo de tensões cisalhantes, deve ser tal que: extremidades livres sejam escolhidas como origem dos elementos que: as possuem; e cada nó possa ser designado como origem de um único elemento. Este nó será um término para todos os outros elementos a ele ligados (Figura 3.3-a).

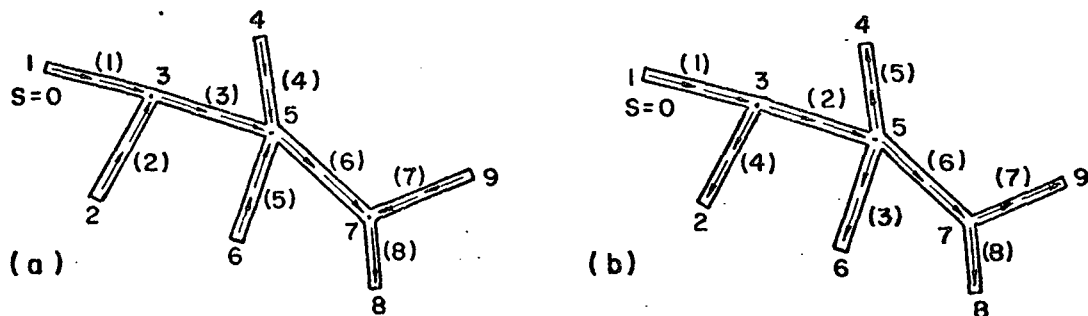


FIG. 3.3 - (a) Orientação dos elementos para o cálculo de grandezas ligadas ao fluxo de tensões cisalhantes, e (b) ao empenamento.

Por outro lado, para as grandezas ligadas ao empenamento, o sentido origem-término é estabelecido de tal modo que cada nó seja término de somente um elemento. Este nó será uma origem para todos outros elementos a ele ligados (Figura 3.3-b).

Na determinação das propriedades geométricas do iésimo elemento e da secção (itens 3.3 e 3.4), adota-se a orientação da Figura 3.3-a.

O elemento (7), por exemplo, na Figura 3.3-a tem como origem o nó 9 e como término o 7. Já na Figura 3.3-b, a situação é inversa; o nó 7 é a origem e o nó 9 o término.

3.6 - PROPRIEDADES SECCIONAIS DE SECÇÕES ABERTAS

3.6.1 - Fluxo de tensões cisalhantes básico no iésimo elemento

Das equações (2.3) e (2.7) obtém-se,

$$q_{\eta i} = - (I_{\xi} Q_{\eta i} - I_{\eta \xi} Q_{\xi i}) / D \quad (3.39)$$

$$q_{\xi i} = - (I_{\eta} Q_{\xi i} - I_{\eta \xi} Q_{\eta i}) / D \quad (3.40)$$

onde os momentos estáticos de área são escritos como:

$$Q_{\eta i} = Q_{\eta a i} + \Delta Q_{\eta i} = Q_{\eta a i} + \int_0^{s_i} \xi t_i ds_i \quad (3.41)$$

$$Q_{\xi i} = Q_{\xi a i} + \Delta Q_{\xi i} = Q_{\xi a i} + \int_0^{s_i} \eta t_i ds_i \quad (3.42)$$

Substituindo $Q_{\eta i}$, $Q_{\xi i}$ em (3.39), (3.40) resulta

$$q_{\eta i} = q_{\eta a i} - (I_{\eta} \int_0^{s_i} \eta t_i ds_i - I_{\eta \xi} \int_0^{s_i} \xi t_i ds_i) / D \quad (3.43)$$

$$q_{\xi i} = q_{\xi a i} - (I_{\xi} \int_0^{s_i} \xi t_i ds_i - I_{\eta \xi} \int_0^{s_i} \eta t_i ds_i) / D \quad (3.44)$$

onde $q_{\eta ai}$, $q_{\xi ai}$ representam os fluxos de tensões cisalhantes básicos na origem do iésimo elemento.

$$q_{\eta ai} = - (I_{\eta} Q_{\xi ai} - I_{\eta\xi} Q_{\eta ai}) / D \quad (3.45)$$

$$q_{\xi ai} = - (I_{\xi} Q_{\eta ai} - I_{\eta\xi} Q_{\xi ai}) / D \quad (3.46)$$

Em função da configuração geométrica (Figura 3.2) as variáveis η e ξ podem ser expressas como:

1º) Em elementos retilíneos

$$\eta = x_{A_i} - x_C + s_i \cos \phi_i \quad (3.47)$$

$$\xi = y_{A_i} - y_C + s_i \sen \phi_i \quad (3.48)$$

2º) Em elementos circulares

$$\eta = x_{D_i} - x_C + |R_i| \cos \alpha_i \quad (3.49)$$

$$\xi = y_{D_i} - y_C + |R_i| \sen \alpha_i \quad (3.50)$$

onde, levando em conta o sentido origem-término anti-horário ou horário, tem-se,

$$\alpha_i = \phi_i' + s_i / |R_i| = \phi_i' + R_i s_i / |R_i|^2 \quad (3.51)$$

Com η e ξ conhecidos, as integrais que aparecem nas equações (3.43) e (3.44) são escritas na forma geral:

$$\begin{aligned} \Delta Q_{\eta i} = \int_0^{s_i} \xi t_i ds_i &= Q_{\eta 1 i} s_i + Q_{\eta 2 i} s_i^2 + Q_{\eta 3 i} \sen (s_i / |R_i|) + \\ &+ Q_{\eta 4 i} (1 - \cos (s_i / |R_i|)) \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \Delta Q_{\xi i} = \int_0^{s_i} \eta t_i ds_i &= Q_{\xi 1 i} s_i + Q_{\xi 2 i} s_i^2 + Q_{\xi 3 i} \sen (s_i / |R_i|) + \\ &+ Q_{\xi 4 i} (1 - \cos (s_i / |R_i|)) \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde,

1º) Em elementos retilíneos

$$Q_{\eta 1_i} = t_i (y_{A_i} - y_C) \quad (3.54)$$

$$Q_{\eta 2_i} = t_i \operatorname{sen} \phi_i / 2 \quad (3.55)$$

$$Q_{\xi 1_i} = t_i (x_{A_i} - x_C) \quad (3.56)$$

$$Q_{\xi 2_i} = t_i \operatorname{cos} \phi_i / 2 \quad (3.57)$$

$$Q_{\eta 3_i} = Q_{\eta 4_i} = Q_{\xi 3_i} = Q_{\xi 4_i} = 0 \quad (3.58)$$

2º) Em elementos circulares

$$Q_{\eta 1_i} = t_i (y_{D_i} - y_C) \quad (3.59)$$

$$Q_{\eta 3_i} = t_i |R_i|^2 \operatorname{sen} \phi'_i \quad (3.60)$$

$$Q_{\eta 4_i} = t_i R_i |R_i| \operatorname{cos} \phi'_i \quad (3.61)$$

$$Q_{\xi 1_i} = t_i (x_{D_i} - x_C) \quad (3.62)$$

$$Q_{\xi 3_i} = t_i |R_i|^2 \operatorname{cos} \phi'_i \quad (3.63)$$

$$Q_{\xi 4_i} = - t_i R_i |R_i| \operatorname{sen} \phi'_i \quad (3.64)$$

$$Q_{\eta 2_i} = Q_{\xi 2_i} = 0 \quad (3.65)$$

Levando (3.52) e (3.53) em (3.43) e (3.44), respectivamente, obtém-se,

$$q_{\eta i} = q_{\eta a_i} + q_{1 \eta i} s_i + q_{2 \eta i} s_i^2 + q_{3 \eta i} \operatorname{sen}(s_i / |R_i|) + \\ + q_{4 \eta i} (1 - \operatorname{cos}(s_i / |R_i|)) \quad (3.66)$$

$$q_{\xi i} = q_{\xi a i} + q_{1 \xi i} s_i + q_{2 \xi i} s_i^2 + q_{3 \xi i} \text{sen} (s_i / |R_i|) + \\ + q_{4 \xi i} (1 - \cos (s_i / |R_i|)) \quad (3.67)$$

cujos coeficientes são:

$$q_{1 \eta i} = - (I_{\eta} Q_{\xi 1 i} - I_{\eta \xi} Q_{\eta 1 i}) / D \quad (3.68)$$

$$q_{2 \eta i} = - (I_{\eta} Q_{\xi 2 i} - I_{\eta \xi} Q_{\eta 2 i}) / D \quad (3.69)$$

$$q_{3 \eta i} = - (I_{\eta} Q_{\xi 3 i} - I_{\eta \xi} Q_{\eta 3 i}) / D \quad (3.70)$$

$$q_{4 \eta i} = - (I_{\eta} Q_{\xi 4 i} - I_{\eta \xi} Q_{\eta 4 i}) / D \quad (3.71)$$

$$q_{1 \xi i} = - (I_{\xi} Q_{\eta 1 i} - I_{\eta \xi} Q_{\xi 1 i}) / D \quad (3.72)$$

$$q_{2 \xi i} = - (I_{\xi} Q_{\eta 2 i} - I_{\eta \xi} Q_{\xi 2 i}) / D \quad (3.73)$$

$$q_{3 \xi i} = - (I_{\xi} Q_{\eta 3 i} - I_{\eta \xi} Q_{\xi 3 i}) / D \quad (3.74)$$

$$q_{4 \xi i} = - (I_{\xi} Q_{\eta 4 i} - I_{\eta \xi} Q_{\xi 4 i}) / D \quad (3.75)$$

No término B_i do iésimo elemento, os fluxos de tensões cisalhantes básicos e os momentos estáticos de área valem, respectivamente:

$$q_{\eta b i} = q_{\eta a i} + q_{1 \eta i} b_i + q_{2 \eta i} b_i^2 + q_{3 \eta i} \text{sen} \theta_i + \\ + q_{4 \eta i} (1 - \cos \theta_i) \quad (3.76)$$

$$q_{\xi b i} = q_{\xi a i} + q_{1 \xi i} b_i + q_{2 \xi i} b_i^2 + q_{3 \xi i} \text{sen} \theta_i + \\ + q_{4 \xi i} (1 - \cos \theta_i) \quad (3.77)$$

$$Q_{\eta b i} = Q_{\eta a i} + \Delta Q_{\eta b i} \quad (3.78)$$

$$Q_{\xi b i} = Q_{\xi a i} + \Delta Q_{\xi b i} \quad (3.79)$$

onde,

$$\Delta Q_{\eta b_i} = B_{\eta i} A_{r_i} + Q_{\eta 2_i} b_i^2 + Q_{\eta 3_i} \text{sen } \theta_i + Q_{\eta 4_i} (1 - \text{cos } \theta_i) \quad (3.80)$$

$$\Delta Q_{\xi b_i} = B_{\xi i} A_{r_i} + Q_{\xi 2_i} b_i^2 + Q_{\xi 3_i} \text{sen } \theta_i + Q_{\xi 4_i} (1 - \text{cos } \theta_i) \quad (3.81)$$

Em elementos retilíneos:

$$B_{\eta i} = x_{A_i} - x_C \quad (3.82)$$

$$B_{\xi i} = y_{A_i} - y_C \quad (3.83)$$

Em elementos circulares:

$$B_{\eta i} = x_{D_i} - x_C \quad (3.84)$$

$$B_{\xi i} = y_{D_i} - y_C \quad (3.85)$$

Para determinar os momentos estáticos na origem do iésimo elemento, considera-se que ao nó A_i estejam conectados $L_i + 1$ elementos. Assim, haverá um total de L_i elementos cujos nós término coincidem com o nó A_i (Ver Figura 3.3-a).

Seja p_{ij} ($j = 1, L_i$ e i a ordem do iésimo elemento) o índice identificador desses elementos. Os momentos estáticos iniciais são dados pelas somas dos momentos estáticos de todos L_i e elementos ligados à origem A_i . Então, usando (3.78) e (3.79),

$$Q_{\eta i} (s_i=0) = \sum_j (Q_{\eta a_{p_{ij}}} + \Delta Q_{\eta b_{p_{ij}}}) , \quad j = 1, L_i \quad (3.86)$$

$$Q_{\xi i} (s_i=0) = \sum_j (Q_{\xi a_{p_{ij}}} + Q_{\xi b_{p_{ij}}}) , \quad j = 1, L_i \quad (3.87)$$

Das equações (3.41), (3.42) e (3.52), (3.53), obtém-se

$$Q_{\eta i} (s_i=0) = Q_{\eta a_i} \quad (3.88)$$

$$Q_{\xi i} (s_i=0) = Q_{\xi a_i} \quad (3.89)$$

donde se conclui que,

$$Q\eta_{a_i} = \sum_j (Q\eta_{a_{pij}} + \Delta Q\eta_{b_{pij}}), \quad j = 1, L_i \quad (3.90)$$

$$Q\xi_{a_i} = \sum_j (Q\xi_{a_{pij}} + \Delta Q\xi_{b_{pij}}), \quad j = 1, L_i \quad (3.91)$$

Por exemplo, o momento estático no elemento (6) da Figura 3.3-a, é $Q\eta_{a_6} = \Delta Q\eta_{b_4} + \Delta Q\eta_{b_5} + (Q\eta_{a_3} + \Delta Q\eta_{b_3})$. Observa-se que, nas extremidades livres, os momentos estáticos são nulos.

Com $Q\eta_{a_i}$ e $Q\xi_{a_i}$ determinados, pode-se calcular os fluxos de tensões cisalhantes básicos na origem do i ésimo elemento, usando as equações (3.45) e (3.46). Por estas equações nota-se que, quando entre dois elementos estiver interposto um elemento de área concentrada, este ocasionará uma descontinuidade no fluxo de tensões cisalhantes, pois o fluxo de tensões cisalhantes no término de um elemento não será o mesmo da origem do outro. No elemento de área concentrada não se considera o fluxo de tensões cisalhantes, ao contrário dos momentos estáticos.

3.6.2 - Produtos de inércia setoriais e centro de cisalhamento

De acordo com a configuração geométrica (Figura 3.2), os produtos de inércia setoriais (equações (2.10) e (2.11)), podem ser escritos do seguinte modo:

$$I_{\eta\omega_c} = \sum_i \left(\int_0^{b_i} Q\eta_i rc_i ds_i \right), \quad i = 1, n \quad (3.92)$$

$$I_{\xi\omega_c} = \sum_i \left(\int_0^{b_i} Q\xi_i rc_i ds_i \right), \quad i = 1, n \quad (3.93)$$

onde rc_i tem a expressão geral

$$rc_i = A_{0_i} + A_{1_i} \text{sen}(s_i/|R_i|) + A_{2_i} \text{cos}(s_i/|R_i|) \quad (3.94)$$

Os coeficientes de rc_i valem:

1º) Em elementos retilíneos.

$$A0_i = (x_{A_i} - x_C) \text{ sen } \phi_i - (y_{A_i} - y_C) \text{ cos } \phi_i \quad (3.95)$$

$$A1_i = A2_i = 0 \quad (3.96)$$

2º) Em elementos circulares,

$$A0_i = R_i \quad (3.97)$$

$$A1_i = -(x_{D_i} - x_C) \text{ sen } \phi'_i + (y_{D_i} - y_C) \text{ cos } \phi'_i \quad (3.98)$$

$$A2_i = R_i ((x_{D_i} - x_C) \text{ cos } \phi'_i + (y_{D_i} - y_C) \text{ sen } \phi'_i) / |R_i| \quad (3.99)$$

Levando (3.94) em (3.92) e (3.93), resulta

$$I_{\eta\omega_c}, I_{\xi\omega_c} = \sum_i (C1_i + C2_i + C3_i + C4_i + C5_i + C6_i), \quad (3.100)$$

$i = 1, n$

onde as constantes para $I_{\eta\omega_c}$ são:

$$C1_i = b_i ((A1_i Qn3_i - A2_i Qn4_i) / 2 + A0_i (Qn4_i + Qna_i + b_i (Qn1_i / 2 + b_i (Qn2_i / 3))) \quad (3.101)$$

$$C2_i = |R_i| (A0_i Qn3_i + A2_i (Qn3_i / 4 - |R_i| Qn1_i) + A1_i (Qna_i + 3 Qn4_i / 4 - 2 |R_i|^2 Qn2_i)) \quad (3.102)$$

$$C3_i = |R_i| \text{ sen } \theta_i (Qn4_i (A2_i - A0_i) + Qn1_i (A1_i |R_i| + b_i A2_i) + Qn2_i (2 b_i |R_i| A1_i + A2_i (b_i^2 - |R_i|^2)) + A2_i Qna_i) \quad (3.103)$$

$$C4_i = |R_i| \text{ cos } \theta_i (-A0_i Qn3_i + A1_i (2 |R_i|^2 Qn2_i - Qn4_i - Qna_i - b_i (Qn1_i + b_i Qn2_i)) + |R_i| A2_i (Qn1_i + 2 b_i Qn2_i)) \quad (3.104)$$

$$C5_i = -|R_i| (A2_i Qn3_i - A1_i Qn4_i) \text{ cos } 2\theta_i \quad (3.105)$$

$$C6_i = -|R_i| (A2_i Qn4_i + A1_i Qn3_i) \text{ sen } 2\theta_i / 4 \quad (3.106)$$

As constantes para $I_{\xi\omega_c}$ têm as mesmas expressões, bastando apenas permutar η por ξ .

Conhecidos os momentos de inércia de áreas (eqs. (3.33), (3.34) e (3.35)) e os produtos de inércia setoriais, pode-se determinar as coordenadas do centro de cisalhamento, usando as equações (2.8) e (2.9).

3.6.3 - Função empenamento

Em virtude da configuração geométrica, a função empenamento WF_i no iésimo elemento (equação (2.33)) é dada por:

$$WF_i = D_t - Ws_i \quad (3.107)$$

onde,

$$Ws_i = Wa_i + \int_0^{s_i} rs_i ds_i \quad (3.108)$$

$$D_t = (\sum_i \int_0^{b_i} Ws_i t_i ds_i) / \text{Area}, \quad i = 1, n \quad (3.109)$$

A expressão geral de rs_i tem a mesma forma da expressão de rc_i (equação (3.94)). No entanto, deve-se atentar para o fato de rs_i ser relativo ao centro de cisalhamento S (Fig. 3.2), e os nós origem e término da Figura 3.3-b serem, geralmente, diferentes dos correspondentes da Figura 3.3-a, para cada elemento. Por conveniência adota-se,

$$rs_i = F0_i + F1_i \text{sen}(s_i/|R_i|) + F2_i \text{cos}(s_i/|R_i|) \quad (3.110)$$

onde $F0_i$, $F1_i$ e $F2_i$ tem expressões análogas a $A0_i$, $A1_i$ e $A2_i$.

Levando rs_i em (3.108) resulta,

$$Ws_i = Wa_i + W1_i s_i + W2_i \text{sen}(s_i/|R_i|) + W3_i (1 - \text{cos}(s_i/|R_i|)) \quad (3.111)$$

o qual, por sua vez, levado em (3.109) dá,

$$D_t = (\sum_i (Ar_i (Wa_i + W3_i + W1_i b_i / 2) + t_i (W2_i |R_i| (1 - \text{cos} \theta_i) - W3_i |R_i| \text{sen} \theta_i))) / \text{Area}, \quad i=1, n \quad (3.112)$$

Com W_{s_i} e D_t conhecidos, pode-se escrever a função empenamento na forma

$$WF_i = WFa_i + WF1_i s_i + WF2_i \text{sen}(s_i/|R_i|) + WF3_i(1-\text{cos}(s_i/|R_i|)) \quad (3.113)$$

onde,

$$WFa_i = D_t - Wa_i \quad (3.114)$$

$$WF1_i = - W1_i \quad (3.115)$$

$$WF2_i = - W2_i \quad (3.116)$$

$$WF3_i = - W3_i \quad (3.117)$$

Os coeficientes de W_{s_i} são,

$$W1_i = Fo_i \quad (3.118)$$

$$W2_i = |R_i| F2_i \quad (3.119)$$

$$W3_i = |R_i| F1_i \quad (3.120)$$

Para determinar Wa_i , considera-se que ao nó A_i estejam conectados $L_i + i$ elementos, sendo L_i o número de elementos cujos nós origem coincidem com o nó A_i . Assim, existirá apenas um elemento cujo nó término coincide com A_i (Ver Figura 3.3-b).

Seja pa_i (i a ordem do iésimo elemento) o índice identificador desse elemento. Como o empenamento no término desse elemento é igual ao da origem do iésimo elemento, pode-se escrever,

$$Wa_i = Wb_{pa_i} \quad (3.121)$$

No término do iésimo elemento tem-se,

$$Wb_i = Wa_i + W1_i b_i + W2_i \text{sen } \theta_i + W3_i (1-\text{cos } \theta_i) \quad (3.122)$$

$$Wfb_i = WFa_i + WF1_i b_i + WF2_i \text{sen } \theta_i + WF3_i (1-\text{cos } \theta_i) \quad (3.123)$$

A expressão de Wb_i é utilizada no cálculo de Wb_{pa_i} .

3.6.4 - Momento setorial de primeira espécie

Para o i ésimo elemento, a equação (2.39) pode ser escrita como,

$$Qws_i = Qwsa_i + \int_0^{s_i} WF_i t_i ds_i \quad (3.124)$$

ou substituindo WF_i de (3.113), resulta

$$Qws_i = Qwsa_i + Qws1_i s_i + Qws2_i s_i^2 + Qws3_i (1 - \cos(s_i/|R_i|)) + \\ + Qws4_i \text{sen}(s_i/|R_i|) \quad (3.125)$$

onde,

$$Qws1_i = t_i WFF_i \quad (3.126)$$

$$WFF_i = WFa_i + WF3_i \quad (3.127)$$

$$Qws2_i = t_i WF1_i / 2 \quad (3.128)$$

$$Qws3_i = t_i |R_i| WF2_i \quad (3.129)$$

$$Qws4_i = - t_i |R_i| WF3_i \quad (3.130)$$

No término B_i do i ésimo elemento, tem-se que o valor do momento setorial de primeira espécie $Qwsb_i$ é,

$$Qwsb_i = Qwsa_i + WFF_i Ar_i + Qws2_i b_i^2 + \\ + Qws3_i (1 - \cos \theta_i) + Qws4_i \text{sen} \theta_i \quad (3.131)$$

A determinação de $Qwsa_i$ é idêntica à determinação de $Q\eta a_i$ e $Q\xi a_i$ pois, também, é uma grandeza ligada ao fluxo de tensões cisalhantes. Deste modo, tem-se

$$Qwsa_i = \sum_j Qwsb_{pij} \quad , \quad j = 1, L_i \quad (3.132)$$

onde pij é o mesmo índice das equações (3.90) ou (3.91) e $Qwsb_{pij}$ calculado usando (3.131).

Ao calcular WFF_i , deve-se notar que o sentido origem-

término, quando se determina a função empenamento, poderá ser contrário ao sentido origem-término, quando se determina Q_{ws_i} , no i ésimo elemento. Toda vez que isto ocorrer, toma-se $W_{Fa_i} = W_{Fb_i}$ na equação (3.127).

3.6.5 - Constante torcional e de empenamento

Com a configuração geométrica adotada, a constante torcional (equação (2.24)) pode ser calculada pela expressão,

$$J = \left(\sum_i b_i t_i^3 \right) / 3, \quad i = 1, n \quad (3.133)$$

A constante de empenamento é calculada pela expressão,

$$\Gamma = \sum_i \left(\int_0^{b_i} W_{F_i}^2 t_i ds_i \right), \quad i = 1, n \quad (3.134)$$

ou, substituindo a função empenamento de (3.107),

$$\Gamma = \sum_i \left(\int_0^{b_i} (D_t - W_{s_i})^2 t_i ds_i \right), \quad i = 1, n \quad (3.135)$$

Desenvolvendo esta equação resulta,

$$\Gamma = \sum_i \left(\int_0^{b_i} W_{s_i}^2 t_i ds_i \right) - D_t^2 \text{Area}, \quad i = 1, n \quad (3.136)$$

Substituindo W_{s_i} de (3.111), obtém-se

$$\Gamma = \sum_i (D1_i + D2_i + D3_i + D4_i + D5_i + D6_i) - D_t^2 \text{Area}, \quad (3.137)$$

$i = 1, n$

onde,

$$D1_i = 2t_i |R_i| (W2_i(Wa_i+W3_i) + |R_i| W1_i W3_i) (1 - \cos \theta_i) \quad (3.138)$$

$$D2_i = -2Ar_i |R_i| W1_i W2_i \cos \theta_i \quad (3.139)$$

$$D3_i = Ar_i ((Wa_i+W3_i)^2 + (W2_i^2+W3_i^2)/2 + b_i(W1_i(Wa_i+W3_i) + W1_i b_i/3)) \quad (3.140)$$

$$D4_i = 2t_i |R_i| (|R_i| W1_i W2_i - W3_i (W1_i + W3_i + b_i W1_i)) \text{ sen } \theta_i \quad (3.141)$$

$$D5_i = t_i |R_i| (W3_i^2 - W2_i^2) \text{ sen } \theta_i \text{ cos } \theta_i / 2 \quad (3.142)$$

$$D6_i = -t_i |R_i| W2_i W3_i \text{ sen}^2 \theta_i \quad (3.143)$$

A constante de empenamento Γ^* (equação (2.42)) será considerada apenas para secções constituídas de elementos retilíneos pois, em elementos circulares as áreas setoriais não se anulam e, conseqüentemente, $\Gamma \gg \Gamma^*$. Assim, tem-se

$$\Gamma^* = \left(\sum_i \int_0^{b_i} t_i^3 r_{N_i}^2 ds_i \right) / 12, \quad i = 1, n \quad (3.144)$$

Da figura 3.1-a, obtém-se

$$r_{N_i} = (x_{A_i} - x_S) \text{ cos } \phi_i + (y_{A_i} - y_S) \text{ sen } \phi_i + s_i \quad (3.145)$$

Substituindo r_{N_i} na expressão de Γ^* , resulta

$$\Gamma^* = \left(\sum_i b_i t_i^3 (P_i (P_i + b_i) + b_i^3/3) \right) / 12, \quad (3.146)$$

$i = 1, n$

onde,

$$P_i = (x_{A_i} - x_S) \text{ cos } \phi_i + (y_{A_i} - y_S) \text{ sen } \phi_i \quad (3.147)$$

3.7 - PROPRIEDADES SECCIONAIS DE SECCÕES FECHADAS OU MISTAS

Considera-se uma secção transversal constituída de n cavidades tubulares, n elementos e nn nós. Dos n elementos, nt_j formam cada cavidade tubular j e na é o número de elementos adicionais de secção aberta. Cada cavidade tubular j está ligada a ncc_j cavidades tubulares, sendo que $necc_j$ elementos separam cada par de cavidades conexas (ou vizinhas).

3.7.1 - Fluxos de tensões cisalhantes básicos, centro de cisalhamento e constante torcional.

O fluxo de tensões cisalhantes devido à flexão, no iésimo elemento, é dado pela equação (2.14) ou, em termos da configuração geométrica, por

$$q_i = q_{o_i} + \bar{q}r_i \quad (3.148)$$

onde, em geral, $\bar{q}r_i = \bar{q}_{o_j} - \bar{q}_{o_k}$ e j, k representam a ordem das cavidades separadas pelo iésimo elemento.

Os coeficientes de influência (equações (2.17), (2.18) e (2.19)), podem ser escritos como

$$\delta_{j,j} = \Delta_{j,j} / G \quad (3.149)$$

$$\delta_{j,k} = \Delta_{j,k} / G \quad (3.150)$$

$$\delta_{o_j} = \Delta_{o_j} / G = (h\eta_j V_\eta + h\xi_j V_\xi) / G \quad (3.151)$$

Assim, as equações (2.15) reduzem-se a

$$\Delta_{j,j} \bar{q}_{o_j} + \sum_k \Delta_{j,k} \bar{q}_{o_k} + h\eta_j V_\eta + h\xi_j V_\xi = 0 \quad , \quad (3.152)$$

$j = 1, nct \quad , \quad k = 1, ncc_j$

onde,

$$\Delta_{j,k} = - \sum_m b_m / t_m \quad , \quad m = 1, ncc_j \quad (3.153)$$

ou quando não houver cavidade vizinha à j ,

$$\Delta_{j,k} = 0 \quad (3.154)$$

Os restantes coeficientes são,

$$\Delta_{j,j} = \sum_m b_m / t_m \quad , \quad m = 1, nt_j \quad (3.155)$$

$$h\eta_j = \oint_j q_{\eta_j} (ds/t) \quad (3.156)$$

$$h\xi_j = \oint_j q_{\xi_j} (ds/t) \quad (3.157)$$

Levando (3.66) e (3.67) em (3.156) e (3.157), respectiva

mente, obtêm-se

$$h\eta_j = \sum_m (b_m(q\eta a_m + b_m(q1\eta_m/2 + q2\eta_m b_m/3)) + q3\eta_m |R_m| (1 - \cos\theta_m) + q4\eta_m (b_m - |R_m| \text{sen } \theta_m))/t_m, \quad (3.158)$$

$$m = 1, nt_j$$

$$h\xi_j = \sum_m (b_m(q\xi a_m + b_m(q1\xi_m/2 + q2\xi_m b_m/3)) + q3\xi_m |R_m| (1 - \cos\theta_m) + q4\xi_m (b_m - |R_m| \text{sen } \theta_m))/t_m, \quad (3.159)$$

$$m = 1, nt_j$$

O índice m identifica os elementos da cavidade j que são considerados.

Os termos dos somatórios das expressões (3.158) e (3.159) são considerados positivos se o sentido de integração coincidir com o sentido origem-término do i ésimo elemento.

Resolvendo o sistema de equações (3.152) (ver Apêndice) encontra-se

$$\bar{q}_0_j = \bar{q}_{\eta j} V_\eta + \bar{q}_{\xi j} V_\xi, \quad j = 1, nct \quad (3.160)$$

onde $\bar{q}_{\eta j}$, $\bar{q}_{\xi j}$ são constantes geométricas que dependem da forma da secção transversal.

As coordenadas do centro de cisalhamento são calculadas usando (2.20) e (2.21) onde, em função da configuração geométrica da figura 3.2 (ver equação (2.22)),

$$Atub_j = \sum_m (A0_m b_m + A1_m |R_m| (1 - \cos \theta_m) + A2_m |R_m| \text{sen } \theta_m) \quad (3.161)$$

$$m = 1, nt_j$$

As constantes $A0_m$, $A1_m$ e $A2_m$ são dadas em (3.95) a (3.99), considerando que todos elementos da j ésima cavidade têm sentido origem-término anti-horário, em relação à cavidade j .

O fluxo de tensões cisalhantes básico \bar{q}_j , na torção uniaxial, pode ser obtido de um sistema de equações semelhantes a (3.152), fazendo

$$\delta l_j = \Delta l_j \theta \quad (3.162)$$

onde,

$$\Delta l_j = - A_{tub_j} \quad (3.163)$$

Deste modo, as equações (2.27) podem ser reduzidas a

$$\Delta_{j,j} q_j + \sum_k \Delta_{j,k} q_k + \Delta l_j \theta = 0 \quad , \quad j=1, nct \quad , \quad k=1, ncc_j \quad (3.164)$$

de onde se obtêm (ver Apêndice),

$$q_j = \bar{q}_j G \theta \quad , \quad j = 1, nct \quad (3.165)$$

sendo \bar{q}_j uma constante que depende da forma da secção transversal.

Portanto, conhecidos A_{tub_j} e \bar{q}_j pode-se calcular a constante torcional em secções fechadas por (2.25) e em secções mistas por (2.29).

3.7.2 - Função empenamento e constante de empenamento

De acordo com a configuração geométrica adotada (Figura 3.2), a função empenamento em cavidades tubulares é

$$WF_i = C1 - \bar{W}s_i \quad (3.166)$$

onde,

$$\bar{W}s_i = \bar{W}a_i + \int_0^{s_i} r_{s_i} ds_i - \bar{q}_i \int_0^{s_i} (ds_i/t_i) \quad (3.167)$$

Substituindo r_{s_i} de (3.110), resulta.

$$\bar{W}s_i = \bar{W}a_i + \bar{W}1_i s_i + \bar{W}2_i \text{sen}(s_i/|R_i|) + \bar{W}3_i (1 - \text{cos}(s_i/|R_i|)) \quad (3.168)$$

que é uma expressão análoga à (3.111) e onde

$$\bar{W}1_i = W1_i - \bar{q}_i / t_i \quad (3.169)$$

$$\bar{W}2_i = W2_i \quad (3.170)$$

$$\bar{W}3_i = W3_i \quad (3.171)$$

sendo $W1_i$, $W2_i$ e $W3_i$ dados em (3.118), (3.119) e (3.120).

O fluxo de tensões cisalhantes básico \bar{q}_i no iésimo elemento é dado por

$$\bar{q}_i = IH_i (\bar{q}_j - \bar{q}_k) \quad (3.172)$$

onde \bar{q}_j e \bar{q}_k são os fluxos de tensões cisalhantes básicos, respectivamente, da cavidade j , à qual pertence o iésimo elemento, e da cavidade vizinha k . IH_i assume os valores ± 1 . Quando, em relação à cavidade j , o sentido origem-término do elemento i for anti-horário, toma-se $IH_i = +1$, caso contrário, $IH_i = -1$.

O valor inicial $\bar{W}a_i$ é calculado da mesma forma que em secções abertas (equação (3.121)), usando a expressão

$$\bar{W}b_i = \bar{W}a_i + \bar{W}1_i b_i + \bar{W}2_i \text{sen } \theta_i + \bar{W}3_i (1 - \cos \theta_i) \quad (3.173)$$

Conhecido $\bar{W}s_i$, pode-se determinar a constante $C1$ e a função empenamento. Assim, a expressão que calcula $C1$ é a mesma (3.112) das secções abertas, bastando apenas permutar D_t , W por $C1$, \bar{W} , respectivamente.

Substituindo $\bar{W}s_i$ em (3.166), obtém-se a função empenamento

$$WF_i = WFa_i + WF1_i s_i + WF2_i \text{sen}(s_i / |R_i|) + WF3_i (1 - \cos(s_i / |R_i|)) \quad (3.174)$$

que é a mesma expressão das secções abertas e onde

$$WFa_i = C1 - \bar{W}a_i \quad (3.175)$$

$$WF1_i = - \bar{W}1_i \quad (3.176)$$

$$WF2_i = - \bar{W}2_i \quad (3.177)$$

$$WF3_i = - \bar{W}3_i \quad (3.178)$$

A constante de empenamento deduz-se do mesmo modo que

em secções abertas (ver item 3.6.5) e tem a expressão

$$\bar{F} = \sum_i (D1_i + D2_i + D3_i + D4_i + D5_i + D6_i) - C1^2 \text{ Area} \quad (3.179)$$

$i=1,n$

Os coeficientes $D1_i, \dots, D6_i$ são dados em (3.138) a (3.143), onde em lugar de W escreve-se \bar{W} .

3.7.3 - Momento setorial de primeira espécie e fluxo de tensões cisalhantes secundário básico.

O fluxo de tensões cisalhantes secundário básico consiste de duas parcelas: a primeira denominada estaticamente determinável e a outra estaticamente indeterminável. A equação (2.63) determina a primeira parcela. Naquela equação aparece o que se chama, neste trabalho, de momento setorial de primeira espécie, o qual, em função da configuração geométrica, tem expressão e significado exatamente idênticos aos correspondentes em secções abertas. Por conveniência, reescreve-se

$$Qws_i = Qwsa_i + Qwsl_i s_i + Qws2_i s_i^2 + Qws3_i \cdot (1 - \cos(s_i/|R_i|)) + Qws4_i \text{ sen}(s_i/|R_i|) \quad (3.180)$$

Deve-se notar, no entanto, que os coeficientes de Qws_i (equações (3.126) a (3.130)) agora são calculados usando os coeficientes da função empenamento em (3.174).

A segunda parcela, em analogia à flexão simples, pode ser interpretada como um fluxo de cisalhamento básico redundante.

Fazendo

$$\delta 2_j = \Delta 2_j / G \quad (3.181)$$

onde, em função da configuração geométrica,

$$\Delta 2_j = \sum_m (b_m (Qwsa_m + Qws3_m + b_m (Qwsl_m/2 + Qws2_m b_m/3)) + |R_m| (Qws4_m (1 - \cos \theta_m) - Qws3_m \text{ sen } \theta_m)) , \quad (3.182)$$

$m=1,nt_j$

o sistema de equações (2.64) reduz-se a

$$\Delta_{j,j} \bar{q}_{wj} + \sum_k \Delta_{j,k} \bar{q}_{wk} + \Delta 2_j = 0, \quad j=1, nct, \quad k=1, ncc_j \quad (3.183)$$

do qual se obtém \bar{q}_{wj} e onde os coeficientes $\Delta_{j,j}$, $\Delta_{j,k}$ são os mesmos definidos em equações anteriores (ver Apêndice).

3.7.4 - Momento de inércia central

Com a configuração geométrica da Figura 3.2, tem-se

$$I_c = \sum_i \int_0^{b_i} r s_i^2 t_i ds_i, \quad i = 1, n \quad (3.184)$$

Substituindo $r s_i$ de (3.110) resulta

$$I_c = \sum_i (D1_i + D2_i + D3_i + D4_i + D5_i + D6_i), \quad i=1, n \quad (3.185)$$

onde,

$$D1_i = b_i t_i (F0_i^2 + F2_i^2) \quad (3.186)$$

$$D2_i = 2 t_i |R_i| F0_i F1_i (1 - \cos \theta_i) \quad (3.187)$$

$$D3_i = 2 t_i |R_i| F0_i F2_i \text{sen } \theta_i \quad (3.188)$$

$$D4_i = t_i |R_i| F1_i F2_i (1 - \cos 2\theta_i) / 2 \quad (3.189)$$

$$D5_i = t_i b_i (F1_i^2 - F2_i^2) / 2 \quad (3.190)$$

$$D6_i = - t_i |R_i| (F1_i^2 - F2_i^2) \text{sen } 2\theta_i / 4 \quad (3.191)$$

3.8 - PROGRAMA CODIFICADO EM FORTRAN

Para a solução numérica da formulação apresentada neste capítulo, foi codificado um programa em linguagem FORTRAN. A descrição e fluxogramas (os mais complexos) das sub-rotinas e programa principal são apresentados no Apêndice.

CAPÍTULO 4

ENTRADA DE DADOS

4.1 - MODELAÇÃO DA SECÇÃO

Antes de efetuar-se a entrada de dados, cada secção transversal deve ser modelada por nós, elementos e cavidades tubulares, obedecendo os seguintes itens:

- 1 - Em caso de secção fechada ou mista (Figura 4.1), cortar as cavidades tubulares (cortes hipotéticos) de modo que a secção seja considerada aberta. Os cortes podem ser feitos em quaisquer pontos sem, no entanto, subdividir a secção.

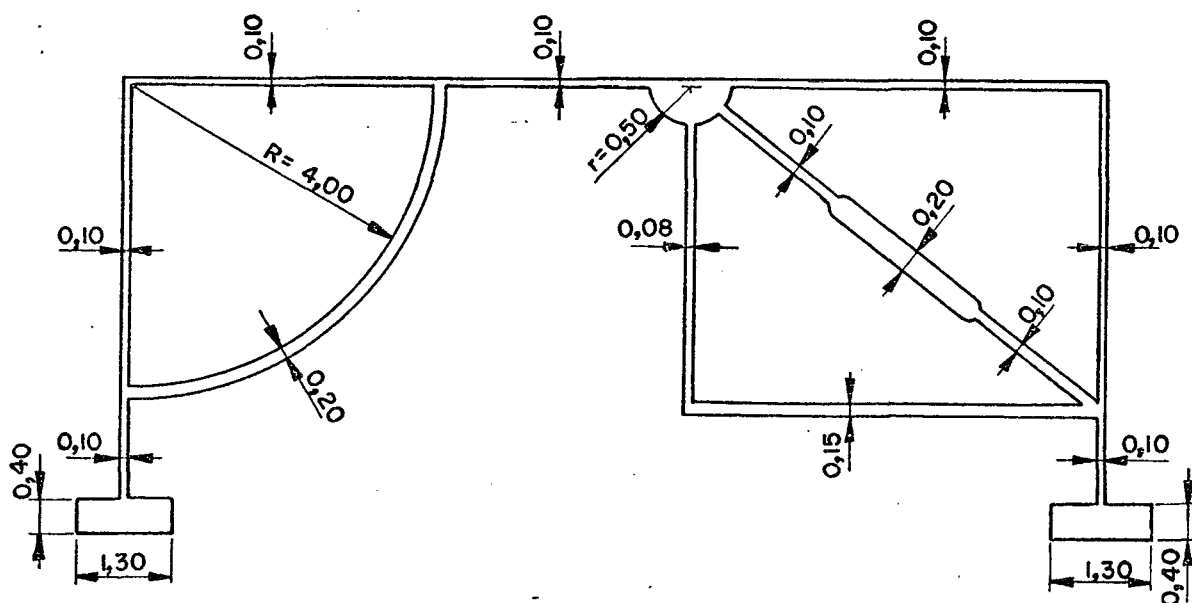
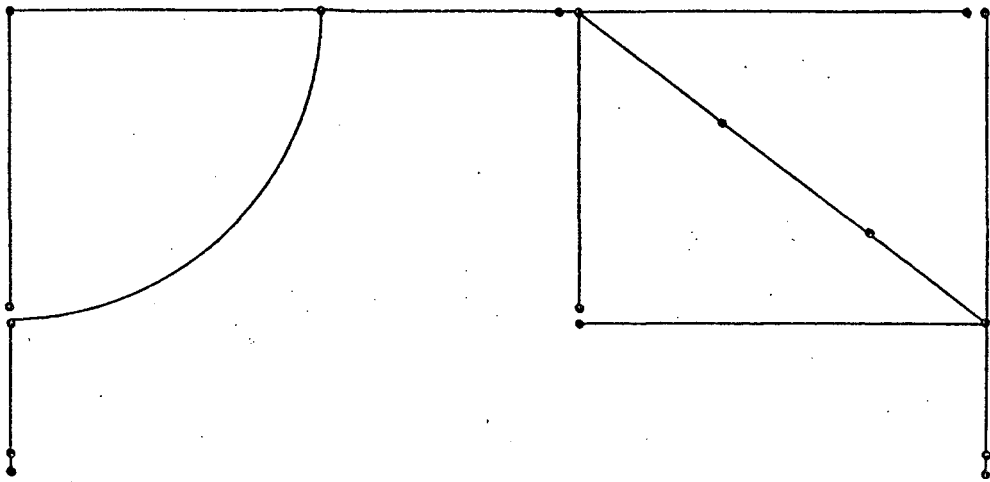
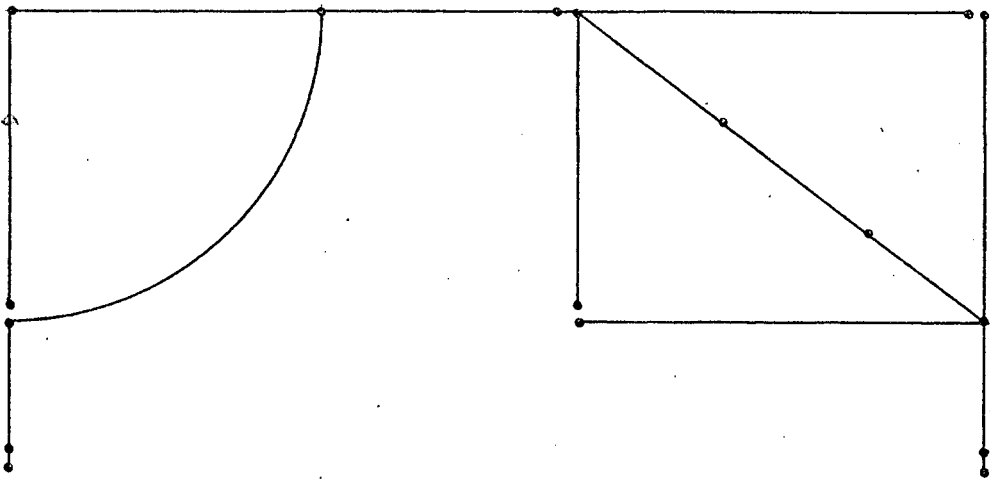


FIG. 4.1 - Exemplo de secção mista.

- 2 - Desenhar dois croquis da secção, modelada por um conjunto de elementos binodais (linha média da parede). Denominar os croquis por CR1 e CR2 (Figura 4.2).



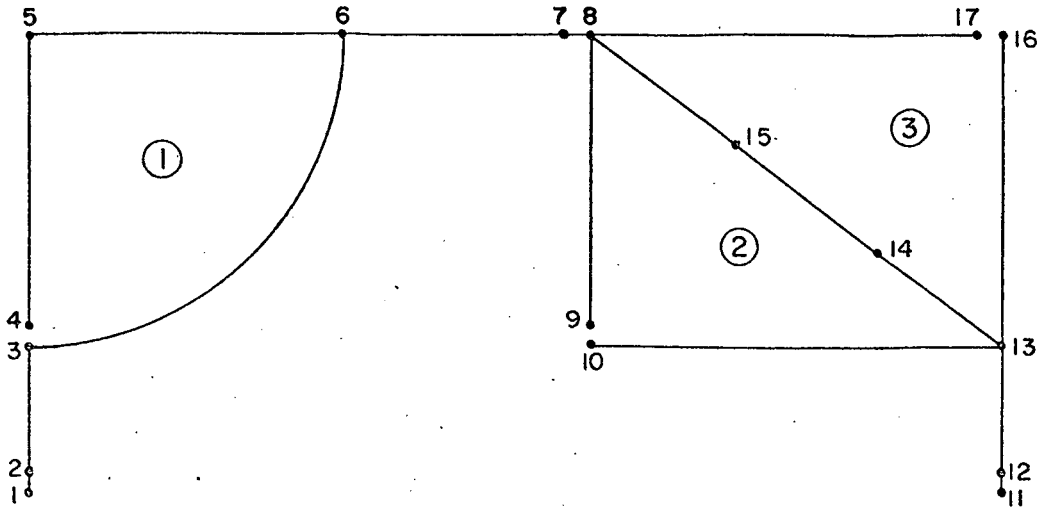
CR1



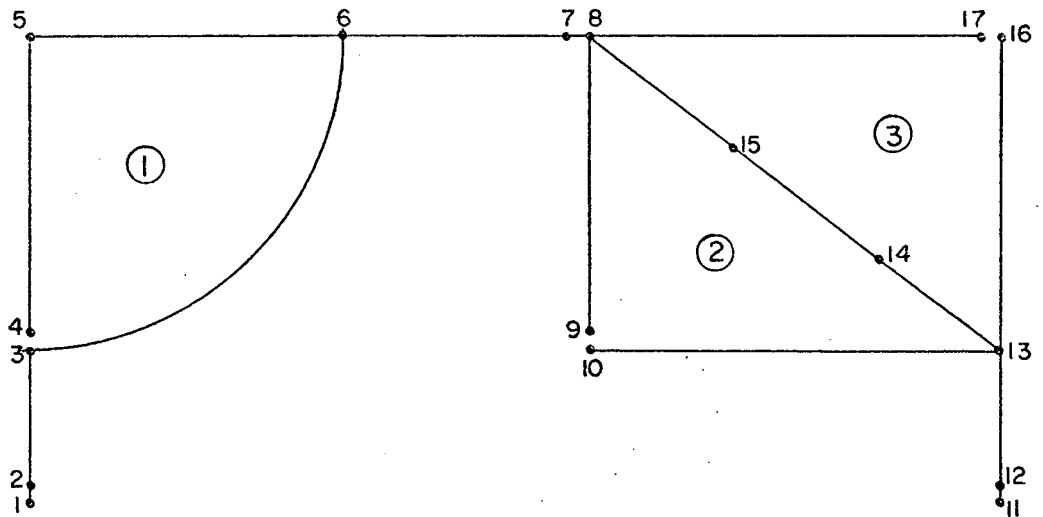
CR2

FIG. 4.2 - Exemplo de modelação da secção por elementos binodais.

- 3 - Áreas concentradas são consideradas como elementos retilíneos cujos nós origem e término têm mesmas coordenadas (Figura 4.2).
- 4 - Elementos circulares devem ter arcos, no máximo, correspondentes a 180° .
- 5 - Nenhuma cavidade deve estar contida em outra.
- 6 - Numerar as cavidades tubulares em CR1 e CR2 de 1 a NCT, onde NCT é o número de cavidades da secção (Figura 4.3).
- 7 - Numerar os nós em CR1 e CR2 de 1 a NN, onde NN é o número de nós da secção (Figura 4.3).
- 8 - Em CR1, representar as setas indicativas do sentido origem-término do fluxo de tensões cisalhantes, tomando extremidades livres como origem, exceto aquela escolhida como término do último elemento e assumindo que, de cada nó, "sai" apenas uma seta (Figura 4.4).
- 9 - Em CR2, representar as setas indicativas do sentido origem-término da função empenamento, considerando a origem do primeiro elemento como uma extremidade livre a qual não deverá coincidir com o término do último elemento em CR1. As demais setas são representadas assumindo que a cada nó "chega" somente uma seta (Figura 4.4).
- 10 - Os elementos são numerados de 1 a N, onde N é o número de elementos da secção transversal.
As numerações dos elementos em CR1 e CR2, em geral, não coincidem, com exceção do elemento de número de ordem (1), o qual deverá ser o mesmo nos dois croquis. Para numerar os demais elementos, é indiferente começar em CR1 ou CR2, desde que se tenha escolhido qual o elemento (1). A escolha do elemento (1) é feita sabendo-se que, em CR2, ele é o único cujo nó origem coincide com uma extremidade livre. Os demais elementos são numerados conforme regras a seguir.
- 11 - Em CR1, deve ser obedecida a ordem de contribuição dos fluxos de tensões cisalhantes. Isto é conseguido numerando os elementos do seguinte modo:

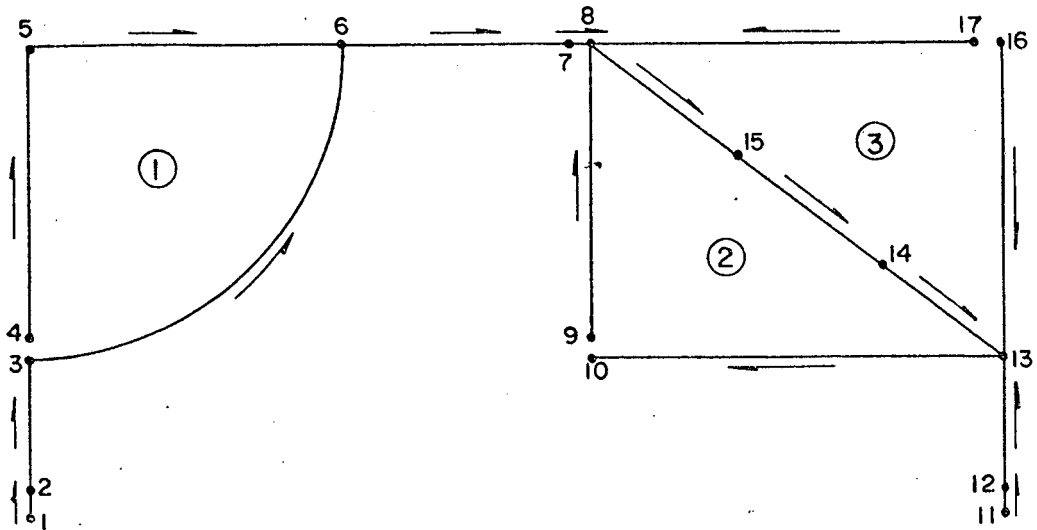


CR1

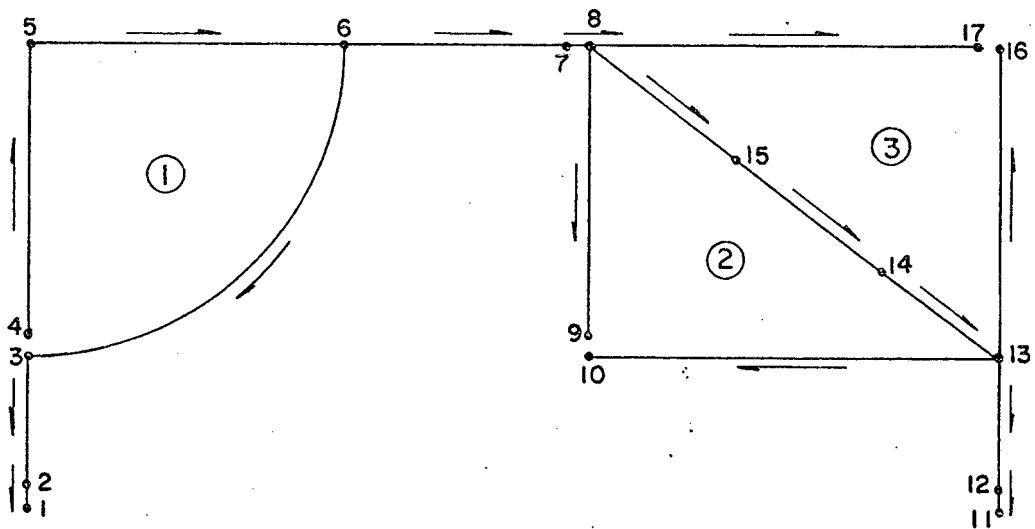


CR2

FIG. 4.3 - Exemplo de identificação de cavidades e nós.



CR1



CR2

FIG. 4.4 - Exemplo de representação das setas indicativas do sentido origem - término.

- a) o último elemento, isto é, o de número de ordem N é aquele cujo nó término coincide com uma extremidade livre.
- b) numerar em ordem crescente (2, 3, 4, ...) todos elementos cujos nós origem são extremidades livres, escolhendo os arbitrariamente.
- c) os elementos restantes são numerados como segue:
 - procurar um nó onde todos elementos, cujas setas que "entram", estão numerados e continuar a numeração no elemento cuja seta "sai" do referido nó.
 - repetir este procedimento até o último elemento cuja seta "sai" quando, então, será conhecido o número de elementos da secção (Figura 4.5).

12 - Em CR2, deve ser obedecida a ordem de contribuição da função empenamento.

O elemento (2) tem como origem o término do elemento (1), o elemento (3) tem a origem no término do elemento (2) e assim para os elementos seguintes até chegar a uma extremidade livre. Se, ainda, alguns elementos estiverem sem número, reiniciar a sequência a partir de um elemento que se liga a, pelo menos, um elemento já numerado (Figura 4.5).

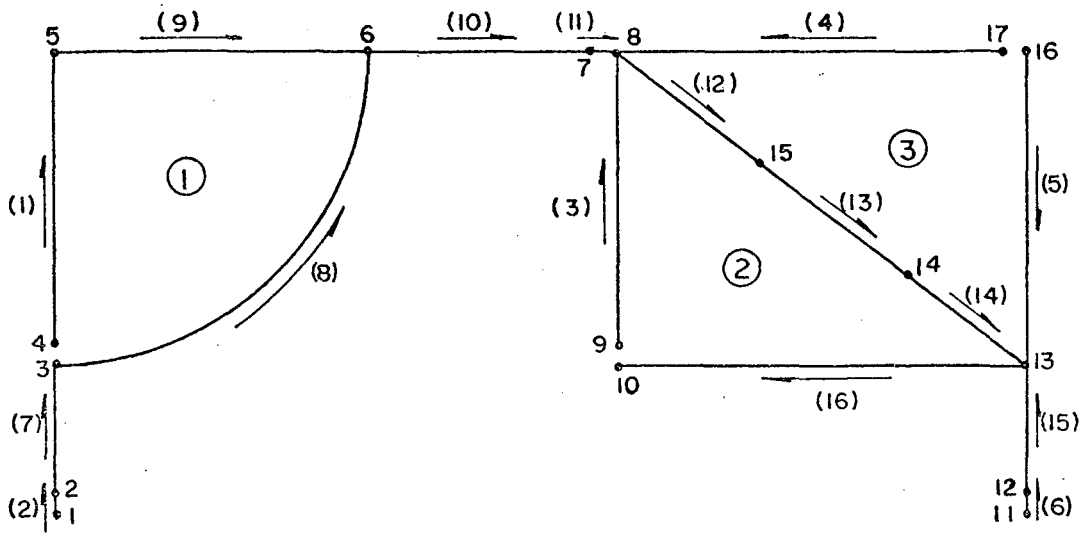
4.2 - ENTRADA DE DADOS

Para cada secção transversal são fornecidas as listas de variáveis e respectivos formatos que devem ser obedecidos na perfuração dos cartões de dados.

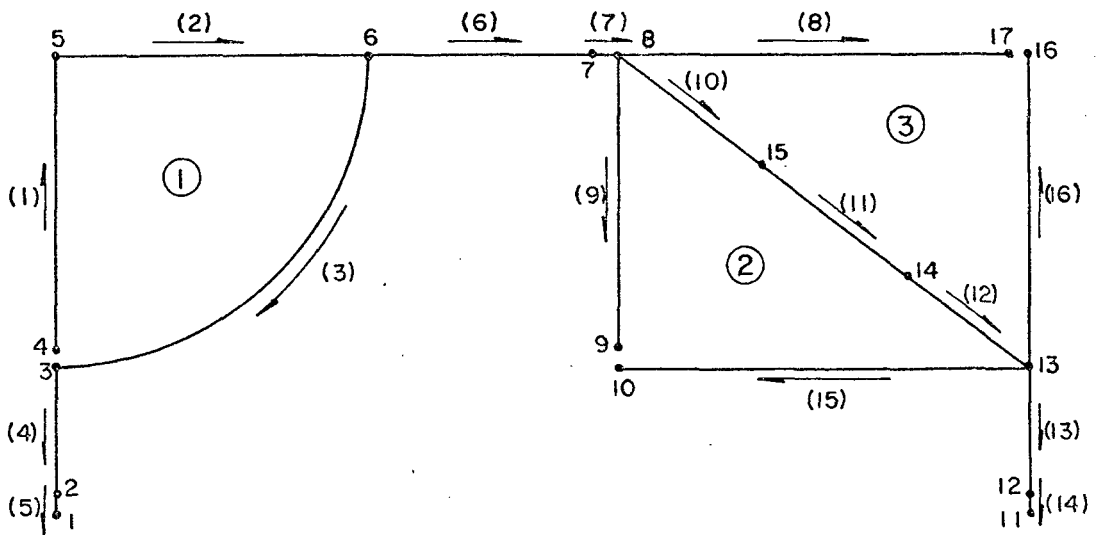
A seguir, relaciona-se a sequência dos cartões de dados.

1 - Cartões tituladores

São cartões usados para construir cabeçalho na impressão dos resultados de cada secção testada. As informações contidas nesses cartões devem ser perfuradas dentro do limite das colunas 2 a 73. Todos cartões devem ter um inteiro na coluna 1, exceto o último que conterà um zero ou nenhuma perfuração, finalizando o cabeçalho. Não havendo cabeçalho, deve



CR1



CR2

FIG. 4.5 - Exemplo de identificação de cavidades, nós e elementos.

ser inserido um cartão em branco.

2 - Informações gerais

LISTA N, NN, NC, IFLAG, ISEC, ITOR, ALFA, XP, YP
 FORMAT (6I5, 3F10.5)

onde:

- N - Número de elementos da secção ou o maior número de ordem de elementos em CR1 ou CR2.
- NN - Número de nós.
- NC - Número de áreas concentradas.
- IFLAG - Se IFLAG = 1, o programa calcula os momentos de inércia CIU, CIV e CIUV em relação a um sistema de referência UV com origem no centróide C e paralelo a um outro sistema de referência com centro em P, cujo eixo X_p faz um ângulo ALFA (α) graus com o eixo X de referência da secção. Além disso, o programa calcula a distância d entre C e P, bem como, o ângulo agudo δ que o segmento de reta \overline{CP} faz com o eixo de coordenadas Y (Figura 4.6). Se IFLAG \neq 1, essas grandezas não são determinadas.
- ALFA - Dado em graus e corresponde a α (Figura 4.6).
- XP,YP - Coordenadas de um ponto P (Figura 4.6).
- ISEC - Se ISEC < 1, a secção é fechada ou mista. ISEC = 1 indica secção aberta. ISEC > 1, secção aberta, constituída de um elemento retilíneo ou múltiplos elementos retilíneos e colineares ou, ainda, secção composta de membros formados de elementos retilíneos e colineares de tal modo que esses membros tenham um ponto comum (Figura 4.7).
- ITOR - Indica o tipo de torção que o programa considera. Se ITOR > 0, o programa considera que a secção a ser testada está submetida à torção não uniforme, caso contrário, torção uniforme.

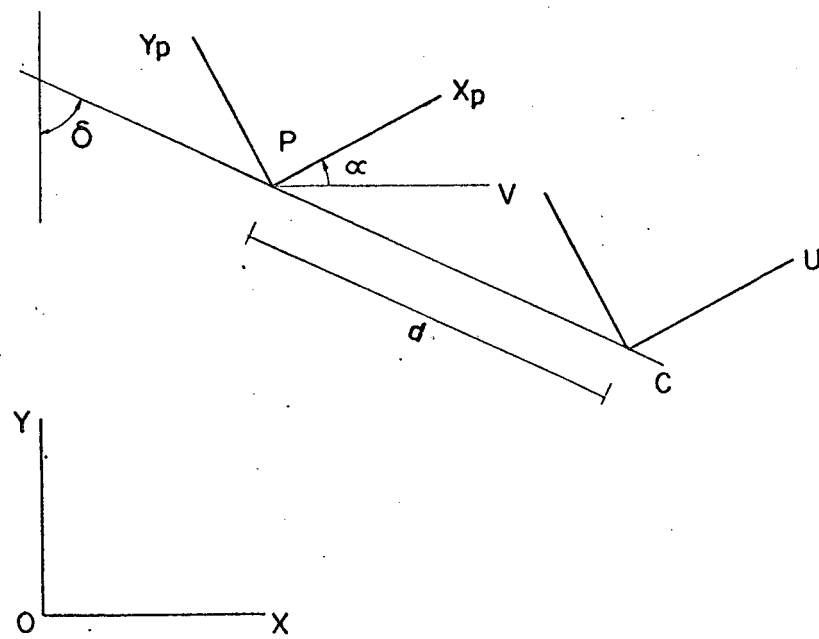


FIG. 4.6 - Posição dos sistemas de referência UV e $X_p Y_p$.

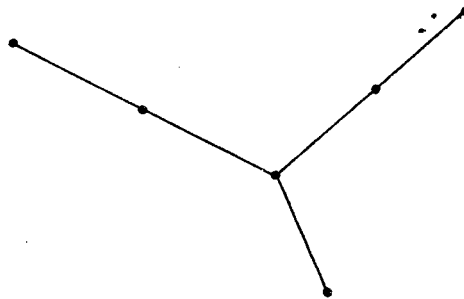


FIG. 4.7 - Modelo de secção tipo ISEC > 1 .

3 - Coordenadas dos nós.

```
LISTA (XNA(I),YNA(I), I=1,NN)
FORMAT (8F10.5)
```

onde,

XNA(I), YNA(I) - Coordenadas (x_i , y_i), respectivamente, do i ésimo nó.

Cada cartão conterá quatro pares de coordenadas, exceto o último, que poderá conter menos. Os pares de coordenadas dos nós deverão ser fornecidos ordenadamente de 1 a NN, em relação ao sistema global (Figura 3.2).

4 - Identificação dos elementos.

```
LISTA (NOELI(I), IEPA(I), IEPB(I), L(I), NOEMP(I),
IS(I), IPA(I), T(I), R(I), I=1,N)
FORMAT (7I5, 2F10.5)
```

onde,

- NOELI(I) - Número de ordem do i ésimo elemento em CR1.
- IEPA(I), IEPB(I) - Número de ordem dos nós origem e término, respectivamente, do i ésimo elemento, em CR1.
- L(I) - Número de elementos cujas setas indicativas do sentido origem-término "chegam" no nó origem do i ésimo elemento, em CR1. Como verificação, observa-se que $L(I)+1$ é o número de elementos ligados ao referido nó.
- NOEMP(I) - Número de ordem do i ésimo elemento em CR2 e correspondente a NOELI(I).
- IS(I) - IS(I)=1 significa que as setas indicativas do sentido origem-término dos correspondentes elementos, em CR1 e CR2, têm o mesmo sentido. IS(I)=-1, sentido contrário.
- IPA(I) - Número de ordem do elemento cuja seta indicativa do sentido origem-término "chega" no nó origem do i ésimo elemento, em CR2.

- T(I) - Espessura do iésimo elemento. Se o elemento for de área concentrada fazer $T(I) = 0$.
- R(I) - Raio de curvatura do iésimo elemento, em CR1. O sinal de R(I) é positivo se, em relação ao centro de curvatura, tomado como polo, as setas indicativas do sentido origem-término apontam rotação anti-horária. Caso contrário, negativo. Em elementos retilíneos fazer $R(I)=0$.

Os números NOELI(I) deverão ser fornecidos ordenadamente, de 1 a N.

Para o exemplo da Figura 4.5, os seguintes cartões de dados são fornecidos:

1	4	5	0	1	1	0	0.10	4.15
2	1	2	0	5	-1	4	0.00	0.00
3	9	8	0	9	-1	7	0.08	0.00
4	17	8	0	8	-1	7	0.10	0.00
5	16	13	0	16	-1	12	0.10	0.00
6	11	12	0	14	-1	13	0.00	0.00
7	2	3	1	4	-1	3	0.10	0.00
8	3	6	1	3	-1	2	0.20	0.00
9	5	6	1	2	1	1	0.10	0.00
10	6	7	2	6	1	2	0.10	0.00
11	7	8	1	7	1	6	0.00	0.00
12	8	15	3	10	1	7	0.10	0.00
13	15	14	1	11	1	10	0.20	0.00
14	14	13	1	12	1	11	0.10	0.00
15	12	13	1	13	-1	12	0.10	0.00
16	13	10	3	15	1	12	0.15	0.00

5 - Áreas concentradas

Se $NC > 0$, os seguintes dados deverão ser fornecidos.

LISTA (NOEAC(N1), AA(N1), N1=1,NC)

FORMAT (5(I5,F10.5))

onde:

NOEAC(N1) - Número de ordem do elemento considerado de á
rea concentrada, em CR1.

AA(N1) - Área do elemento.

Cada cartão conterà cinco pares desses valores, exceto o ú
timo que poderá conter menos.

Para o exemplo da Figura 4.5, tem-se os dados:

2	0.52	11	0.39	6	0.52
---	------	----	------	---	------

6 - Número de ordem dos elementos cujas setas indicativas do sent
tido origem-término "chegam" na origem do iésimo elemento,
em CR1.

Devem ser perfurados cartões contendo esses números para cad
a elemento da secção. Se o número $JL=L(I)$ de setas que
"chegam" na origem do iésimo elemento for nulo, nada se dev
e informar mas, se $JL > 0$, os seguintes dados são fornec
idos:

```
LISTA NOELI(I), (LPI(IL), IL=1,JL)
FORMAT (16I5,/, (5X,15I5))
```

onde,

LPI(IL) - Número de ordem dos elementos cujas setas indic
ativas do sentido origem-término "chegam" na
origem do iésimo elemento.

Quando o espaço no cartão não for suficiente para informar
todos os números LPI(IL), deve-se continuar em outro cart
tão, excluindo as cinco primeiras colunas.

Os cartões devem ser perfurados na mesma ordem dos números
NOELI(I) do item 4.

Continuando com o exemplo da Figura 4.5, tem-se os seguint
tes cartões de dados:

7	2		
8	7		
9	1		
10	9	8	
11	10		

12	3	4	11
13	1		
14	13		
15	6		
16	5	14	15

A regra de numeração dos elementos em CR1 (item 11, do artigo 4.1) continuaria válida caso fosse suprimido o sub-item b e assumido que nós origem, em extremidades livres, satisfazem a condição "todos elementos, cujas setas que chegam, devem estar numerados".

Considerando a regra sem o referido sub-item, pode-se identificar os elementos da secção da Figura 4.4 em CR1, como mostrado na Figura 4.8.

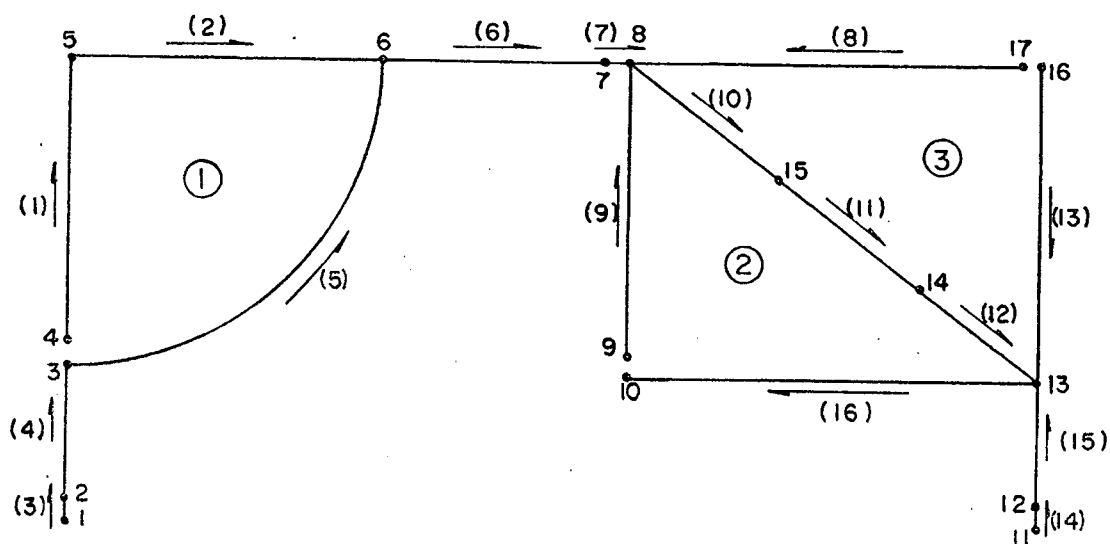


FIG. 4.8 - Exemplo de identificação de cavidades, nós e elementos em CR1.

Os cartões que contêm informações sobre o número de ordem dos elementos cujas setas chegam na origem do iésimo elemento, em CR1, são os seguintes:

2	1	
4	3	
5	4	
6	2	5

7	6		
10	7	8	9
11	10		
12	11		
15	14		
16	12	15	13

Para secções abertas, $ISEC \geq 1$, os dados de entrada são os indicados nos itens 1 a 6. Quando $ISEC < 1$, devem ser fornecidos os dados adicionais seguintes.

- 7 - Número de cavidades e elementos adicionais de secção aberta.

LISTA NCT, NA
FORMAT (2I5)

onde,

NCT - Número de cavidades tubulares.

NA - Número de elementos adicionais de secção aberta.

Para o exemplo da Figura 4.5, tem-se três cavidades e cinco elementos adicionais de secção aberta.

- 8 - Número de elementos e cavidades vizinhas à jésima cavidade.

LISTA (NNCT(J), NT(J), NCC(J), J=1,NCT)
FORMAT (15I5)

onde,

NNCT(J) - Número de ordem da jésima cavidade.

NT(J) - Número de elementos que compõem a jésima cavidade.

NCC(J) - Número de cavidades vizinhas à jésima cavidade.

Cada cartão conterà 75 números, ou seja, dados correspondentes a cinco cavidades. Para um maior número de cavidades usar tantos cartões quantos necessários.

Os números NNCT(J) devem ser fornecidos, ordenadamente, de 1 a NCT.

Para o exemplo da Figura 4.5, os dados são fornecidos em um



Único cartão como segue:

1 3 0 2 5 1 3 5 1

- 9 - Especificação dos elementos constituintes da j ésima cavidade e orientação das setas indicativas do sentido origem-término desses elementos, em CR2.

Para cada cavidade devem ser informados os seguintes dados:

LISTA NNCT(J), (IPJII(JP), IHI(JP), JP=1,NTJ)
 FORMAT (15I5,/(5X, 14I5))

onde,

IPJII(JP) - Número de ordem do j_p éximo elemento constituinte da j ésima cavidade. Os números IPJII(JP) podem ser fornecidos sem obedecer qualquer ordem.

IHI(JP) - Representa a orientação da seta indicativa do sentido origem-término do j_p éximo elemento. Quando, em relação à própria cavidade, a seta estiver orientada em sentido anti-horário, toma-se IHI(JP)=1 e, em sentido horário, IHI(JP)=-1.

NTJ=NT(J) - Número de elementos que compõem a j ésima cavidade.

Os números de ordem NNCT(I) das cavidades devem ser fornecidos, ordenadamente, de 1 a NCT.

Se NTJ > 7, usar tantos cartões quantos necessários para informar todos os pares de números IPJII(JP) e IHI(JP).

Para o exemplo da Figura 4.5, os dados são fornecidos em três cartões como segue:

1	2	-1	1	-1	3	-1				
2	15	-1	12	-1	11	-1	10	-1	9	1
3	8	-1	10	1	11	1	12	1	16	1

Se a secção for constituída de mais de uma cavidade tubular e se existirem cavidades vizinhas, os seguintes dados adicionais deverão ser fornecidos.

- 10 - Especificação das cavidades vizinhas e dos elementos que as separam.

Para cada cavidade que tiver cavidades vizinhas, deve ser informado o número de ordem das cavidades vizinhas, o número de elementos que separam cada cavidade vizinha da cavidade considerada, bem como, o número de ordem desses elementos. As listas e formatos seguintes dão estas informações.

```
LISTA NNCT(J), NNCC(J2), NECC(J2)
FORMAT (3I5)
```

onde,

NNCC(J2) - Número de ordem da j_2 é^sima cavidade vizinha. Este número pode ser fornecido em qualquer ordem.

NECC(J2) - Número de elementos que separam a j_2 é^sima cavidade vizinha da j_1 é^sima cavidade considerada.

Imediatamente, após cada cartão com esses três números, segue a lista,

```
LISTA (ICJLI(J3), J3=1,NECCJ)
FORMAT (5X, 15I5)
```

onde,

ICJLI(J3) - Número de ordem do j_3 é^simo elemento em CR2, pertencente ao conjunto de elementos que separam as duas cavidades vizinhas consideradas. Os números ICJLI(J3) podem ser fornecidos sem obedecer qualquer ordem.

NECCJ=NECC(J2) é o número de elementos que separam as cavidades consideradas.

A ordem em que devem ser fornecidas as listas é a mesma dos números de ordem NNCT(J) das cavidades consideradas e estes, por sua vez, são fornecidos, ordenadamente, de 1 a NCT. No entanto, quando a cavidade considerada não tiver vizinhas, nada deverá ser informado.

Os números de ordem NNCT(J) das cavidades consideradas, deverão ser repetidos tantas vezes quantas forem as cavidades vi

zinhos.

Para o exemplo da Figura 4.5, os cartões de dados são os seguintes:

2	3	3	
	10	11	12
3	2	3	
	12	10	11

- 12 - Após os cartões de dados, correspondentes a todas secções, devem seguir dois cartões em branco. Estes cartões indicam o término do programa. O programa, então, imprimirá os resultados correspondentes a cada secção, bem como, o número de secções testadas.

Em caso de secções constituídas de materiais diferentes, deve-se usar uma espessura ou área equivalente que depende do tipo de secção:

- a) Em secções abertas ($I_{SEC} \geq 1$) usar,

$$t_{eq} = m t$$

$$A_{eq} = m A$$

onde,

$$m = E / E_0$$

- b) Em secções mistas ($I_{SEC} < 1$) usar,

$$t_{eq} = n t$$

$$A_{eq} = n A$$

onde,

$$n = G / G_0$$

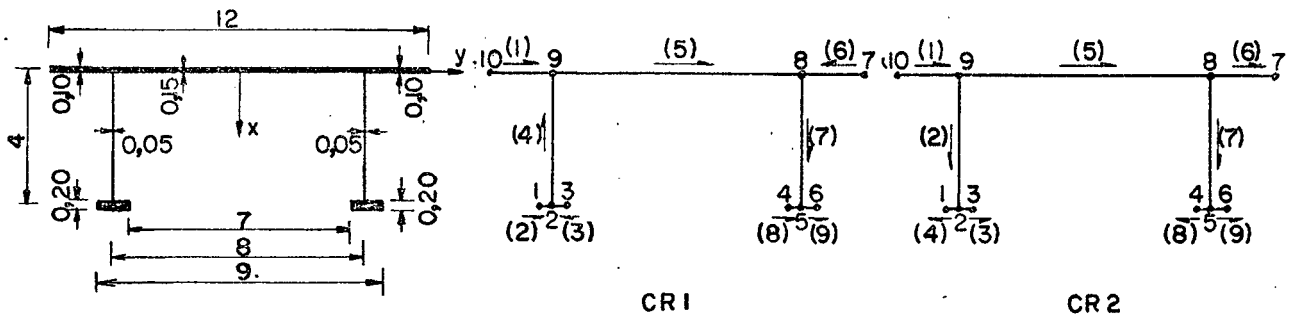
E_0 e G_0 correspondem ao material de referência.

C A P Í T U L O 5

EXEMPLOS E COMPARAÇÕES

Nas figuras seguintes, são mostrados alguns exemplos de secções cujas propriedades seccionais, comumente encontradas na literatura, são comparadas com os resultados obtidos do processo numérico computacional desenvolvido no Capítulo 3. As fontes bibliográficas, utilizadas para comparação, estão indicadas em cada figura ou citadas no texto. As unidades estão em um sistema coerente de unidades.

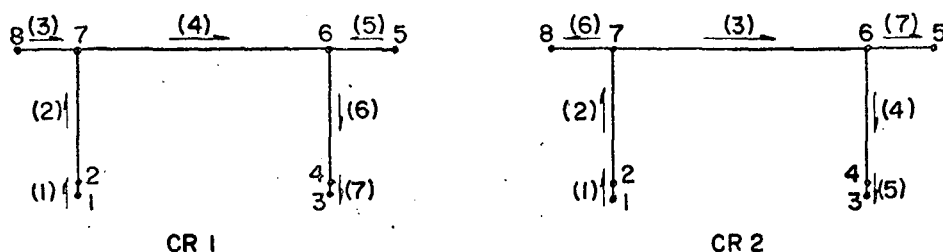
As Figuras 5.1 e 5.2, mostram uma mesma secção modelada de dois modos distintos. Na Figura 5.2, considera-se que os elementos de parede inferiores sejam de áreas concentradas. Os resultados obtidos com o processo numérico computacional, em geral, apresentam boa acuidade, comparados com as referências e, da mesma forma, comparando os dois tipos de modelação entre si. A constante torcional, no entanto, difere razoavelmente nos dois tipos de modelação adotados. No primeiro caso (Figura 5.1), J é calculado acima do seu valor exato, pois a relação comprimento/espessura é me



Fonte	Área	x_0	y_0	I_x	I_y	I_{xy}	x_{so}	y_{so}	J	r
Processo	2,40000	1,00000	0,00000	29,367	6,137	0,000	-1,303	0,000	0,016	87,20
Ref. [8]	2,400	1,000	0,000	29,367	6,137	0,000	-1,303	0,000	—	87,62

FIG. 5.1 - Exemplo de modelação de secção aberta, sem considerar áreas concentradas.

nor do que 10 ([1], p. 44) nos elementos de parede inferiores. No segundo caso (Figura 5.2), J é calculado abaixo do seu valor exato, pois o programa considera elementos de área concentrada com espessura e comprimento nulos. J está mais próximo do valor exato no primeiro caso. O valor mais exato da constante torcional é 0,015.



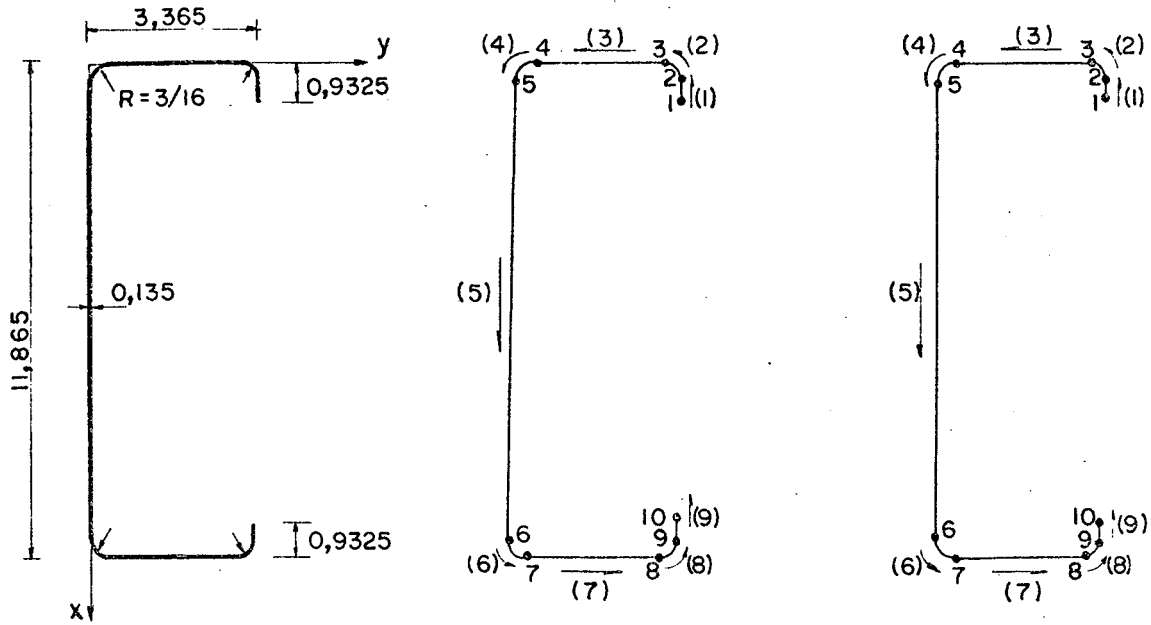
Fonte	Área	x_c	y_c	I_{η}	I_{ξ}	$I_{\eta\xi}$	x_{so}	y_{so}	J	Γ
Processo	2,40000	1,00000	0,00000	29,333	6,136	0,000	-1,309	0,000	0,011	86,26
Ref. [3]	2,40	1,00	0,00	29,36	6,16	0,00	-1,30	0,00	—	86,40

FIG. 5.2 - Exemplo de modelação de secção aberta (a mesma da Fig. 5.1), considerando áreas concentradas.

Normalmente, em secções abertas de paredes delgadas, os efeitos da torção não uniforme são dominantes em relação aos efeitos da torção uniforme ([3], p. 187 a 198). Pode-se, para efeito de projeto, calcular J usando, indiferentemente, uma ou outra modelação, embora a mais recomendável seja a da Figura 5.1.

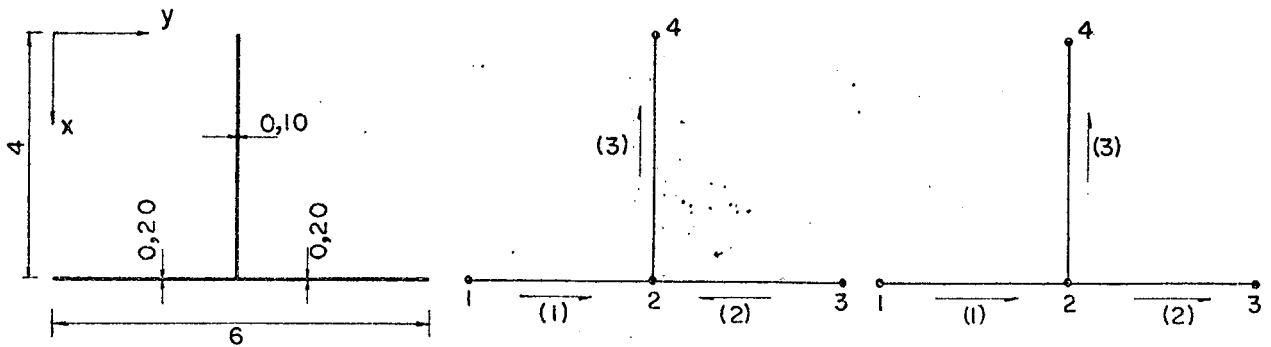
Existem casos de secções abertas onde não é possível modelar a secção sem áreas concentradas. A constante torcional, determinada pelo programa, devem ser adicionadas as parcelas correspondentes às constantes torcionais de cada área concentrada, mediante o uso de fórmulas específicas que dependerão da forma de cada secção de reforço (área concentrada).

O exemplo da Figura 5.3, onde aparecem elementos de parede circulares com arcos correspondentes a 90° , visa a comparação, em particular, das coordenadas do centro de cisalhamento e o exemplo da Figura 5.4, a comparação de Γ^* .



Fonte	Área	x_c	y_c	I_{η}	I_{ξ}	$I_{\eta\xi}$	x_{sa}	y_{sa}	J	Γ
Processo	2,70299	5,93249	0,84218	4,02	56,20	0,00	5,93249	-1,41730	0,016	111,76
Ref.[31]	2,70	5,93	0,84	4,02	56,20	0,00	5,93	-1,41	—	—

FIG. 5.3 - Exemplo de secção com elementos circulares.

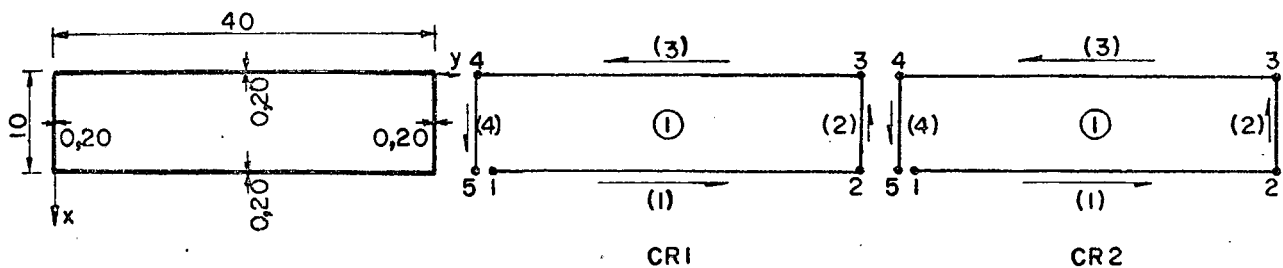


Fonte	Área	x_c	y_c	I_{η}	I_{ξ}	$I_{\eta\xi}$	x_{sa}	y_{sa}	J	Γ^*
Processo	1,60000	3,50000	3,00000	3,600	1,737	0,000	3,99995	3,00000	0,017	0,014
Ref.[1]	1,60	3,50	3,00	3,60	1,74	0,00	4,00	3,00	0,017	0,014

FIG. 5.4 - Exemplo de secção tipo ISEC > 1 .

Na Figura 5.5, mostra-se uma secção fechada com uma cavidade tubular. Os resultados obtidos com o programa SEDEL coincidem com os resultados da referência indicada.

Com o exemplo da Figura 5.5, foram testadas as equações de ODEN ([1], p. 218 a 222). Variou-se a posição dos cortes hipotéticos na modelação da secção e os correspondentes valores de $\bar{\Gamma}$ não se mantiveram constantes. Este foi um dos motivos pelos quais, nesta dissertação, foram adotadas as equações de BENSCHOTER.



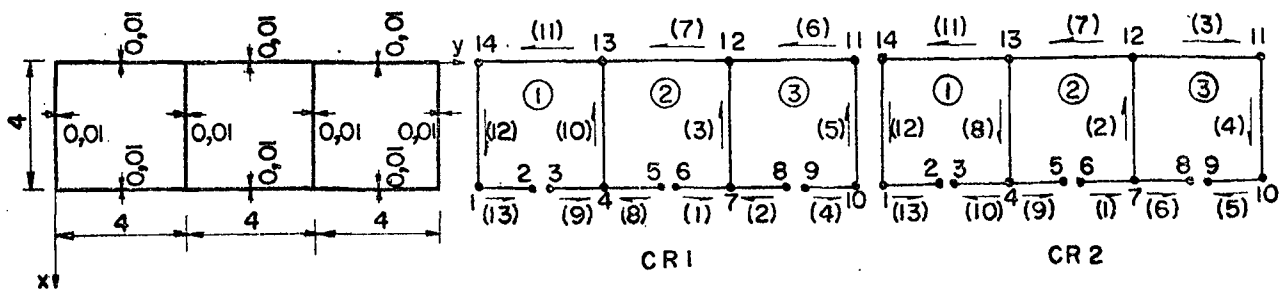
Fonte	$\bar{\psi}_1$	$\bar{\psi}_2$	$\bar{\psi}_3$	$\bar{\psi}_4$	$\bar{\psi}_5$	\bar{q}	\bar{q}_1''	\bar{q}_2''	\bar{q}_3''	\bar{q}_4''
Processo	-60,00	60,00	-60,00	60,00	-60,00	1,60	-60,00	-60,00	-60,00	-60,00
Ref. [9]	-60	60	-60	60	-60	1,60	-60	-60	-60	-60

\bar{q}_5''	$J_{tub.}$	$\bar{\Gamma}$
-60,00	1280	24×10^3
-60	1280	24×10^3

FIG. 5.5. - Exemplo de secção fechada com uma cavidade tubular.

O exemplo da Figura 5.6 é meramente comparativo. Para a verificação do valor da constante de empenamento $\bar{\Gamma}$, foi usada a fórmula (81) da referência [2].

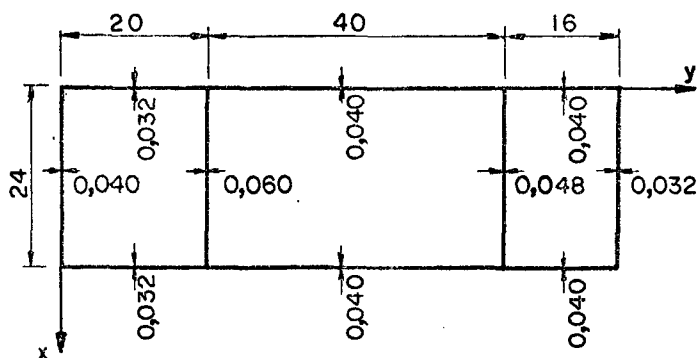
A Figura 5.7, mostra o exemplo básico adotado para testar o programa SEDEL, na determinação das coordenadas do centro de cisalhamento. O programa foi testado, também, com uma secção retangular, unitubular e assimétrica da referência [18] quando, então, houve a coincidência de resultados. Da mesma forma, nas secções das Figuras 5.5 e 5.6, o programa deu resultados esperados.



Fonte	\bar{q}_1	\bar{q}_2	\bar{q}_3	$\bar{\psi}_6$	$\bar{\psi}_7$	$\bar{\psi}_8$	$\bar{\psi}_9$	$\bar{\psi}_{10}$	J_{tub}	$\bar{\Gamma}$
Processo	$2,857 \times 10^{-2}$	$3,428 \times 10^{-2}$	$2,857 \times 10^{-2}$	0,000	2,857	4,571	4,571	6,286	2,926	4,989
Ref.[2]	$2,857 \times 10^{-2}$	$3,428 \times 10^{-2}$	$2,857 \times 10^{-2}$	0,00	2,857	4,571	4,571	6,286	2,926	4,989

FIG. 5.6 - Exemplo de secção fechada com três cavidades tubulares.

O método usado na referência indicada não é perfeitamente explícito, deixando dúvidas quanto ao valor real de y_{sf} , que pode ser tomando tanto como 41,77 ou 38,23, dependendo da interpretação. Deste modo, o método apresentado em [1] não é recomendável.



Fonte	x_{sf}	y_{sf}
Processo	11,99994	38,22935
Ref. [1]	12,00	?

FIG. 5.7 - Exemplo de secção fechada com três cavidades tubulares.

Analogamente às secções abertas, em secções fechadas com reforços, o valor da constante torcional também depende da modelação da secção. A Figura 5.8 é um exemplo onde se pode constatar tal afirmativa. Ao modelar a secção sem áreas concentradas, con

C A P Í T U L O 6
=====

CONCLUSÃO

O Processo Numérico Computacional e o programa codificado em FORTRAN, desenvolvidos neste trabalho, possibilitam a determinação das propriedades seccionais requeridas na flexão, torção uniforme e não uniforme, de secções de paredes delgadas, abertas, fechadas ou mistas.

O programa é geral e tem grande valia na análise de estruturas de paredes delgadas, consideradas como vigas ou barras. As suas aplicações surgem, notadamente, em estruturas de pontes, equipamentos mecânicos, estruturas aeronáuticas e navais.

Uma das aplicações do programa surge na análise preliminar de tensões, pela boa aproximação que se consegue, ao usar a teoria de torção uniforme e não uniforme apresentada neste trabalho.

As secções transversais das asas de um avião ou da sua fuselagem são de formas complexas, e a determinação das propriedades seccionais tais como centro de cisalhamento, função empenamento e constante de empenamento, seria árdua e penosa por meios manuais, já que dificilmente são encontradas na literatura.

Na construção naval, os efeitos da torção não uniforme também são considerados, pois, não raro, ocorre torção devido à ação das ondas. As secções transversais de navios graneleiros são exemplos de secções fechadas com múltiplas cavidades tubulares.

Uma tendência atual, em estruturas leves, é o uso de vigas conformadas a frio, com secções de formas variadas, cujas propriedades seccionais são de difícil obtenção manual, e que não se encontram facilmente na literatura. Surge daí uma aplicação para o programa. Com sua ajuda poderiam ser elaborados manuais de propriedades seccionais para os mais variados tipos de secções transversais.

Em secções de paredes delgadas, onde não aparecem áreas de reforço, o programa se aplica sem nenhuma restrição e os resultados obtidos apresentaram excelente concordância, comparados com os dados disponíveis na literatura. Por outro lado, para os casos de área concentrada, pode-se concluir o mesmo, com a ressalva da constante torcional. No entanto, este problema pode ser contornado obedecendo as recomendações seguintes:

1. Em secções abertas, evitar o uso de áreas concentradas na modelação da secção transversal.
2. Quando não for possível evitá-las, ou se houver interesse em usá-las, deve-se corrigir a constante torcional determinada pelo programa, somando a ela os valores das constantes torcionais de cada área de reforço.
3. Em secções fechadas, quando for o caso, usar preferivelmente áreas concentradas na modelação da secção transversal.

A teoria de torção não uniforme, apresentada por ODEN, para as secções fechadas, é aproximada e supõe que as tensões normais tenham mesmas expressões, tanto em secções abertas como fechadas. Neste trabalho, põe-se em dúvida a validade da expressão deduzida por ODEN, para a constante de empenamento, porque ao serem tomados distintos cortes hipotéticos nas secções fechadas, os valores de \bar{T} não se mantiveram constantes.

Ao programa SEDEL, elaborado com a formulação do Capítulo 3, poderia ser adicionada uma sub-rotina que determinasse o fluxo de tensões cisalhantes básico total, soma dos fluxos de tensões cisalhantes básicos q_η e \bar{q}_η ou q_ξ e \bar{q}_ξ , como também a diferença entre \bar{q}_s e \bar{q}_w , em secções fechadas ou mistas. Pelo presente trabalho, essas soma e diferença deverão ser efetuadas manualmente com ajuda dos croquis CR1 e CR2, apresentados no Capítulo 4. Ressalta-se que os fluxos de tensões cisalhantes redundantes básicos são considerados positivos no sentido anti-horário.

Para o futuro, sugere-se o estudo dos efeitos da torção não uniforme em barras curvas e de secções variáveis, sem usar o conceito do centro de cisalhamento. A necessidade de tal estudo é devida à impossibilidade de uma definição rigorosa do centro de cisalhamento em tais barras.

A P Ê N D I C E
=====

DESCRIÇÃO DO PROGRAMA PRINCIPAL E SUB-ROTINAS
DO PROGRAMA SEDEL

1 - Programa Principal

O fluxograma do programa principal é mostrado nas páginas seguintes, onde ISEC e ITOR são definidos no Capítulo 4. Observa-se que, quando $ITOR \leq 0$, o programa considera que, em geral, a secção está submetida à torção uniforme e flexão simples.

O fluxograma mostrado aplica-se a cada secção transversal testada. No programa SEDEL estão previstos testes consecutivos de várias secções.

2 - Sub-rotina AINER

Esta sub-rotina é utilizada na determinação de:

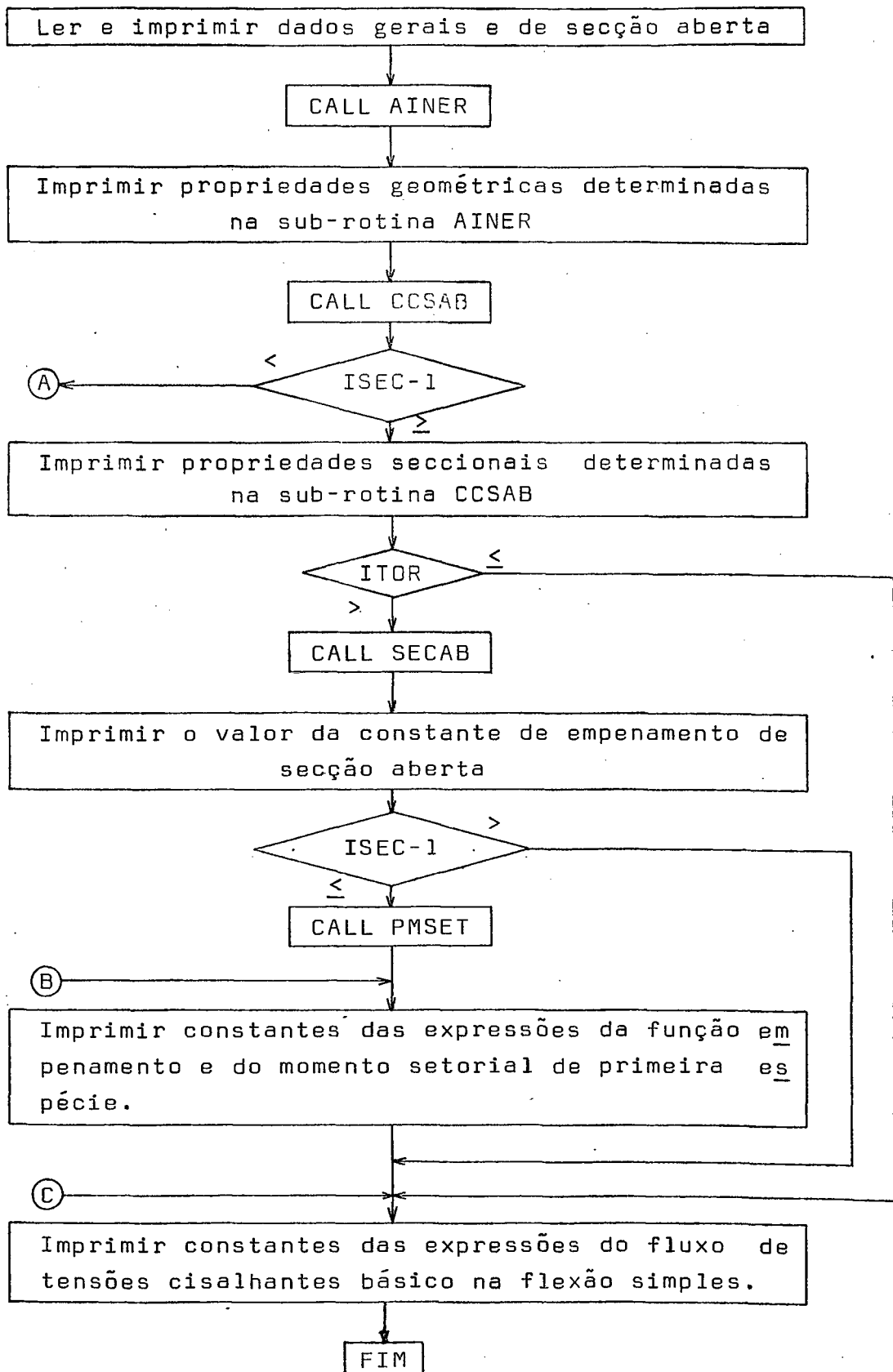
- a) Área da secção transversal;
- b) Coordenadas do centróide;
- c) Momentos e produto de inércia de área em relação a um sistema de referência com origem no centróide e paralelo ao sistema de referência global;
- d) Momentos de inércia de área e eixos principais;
- e) Momentos e produtos de inércia de área em relação a um sistema de referência com origem no centróide e com dada direção dos eixos.

3 - Sub-rotina CCSAB

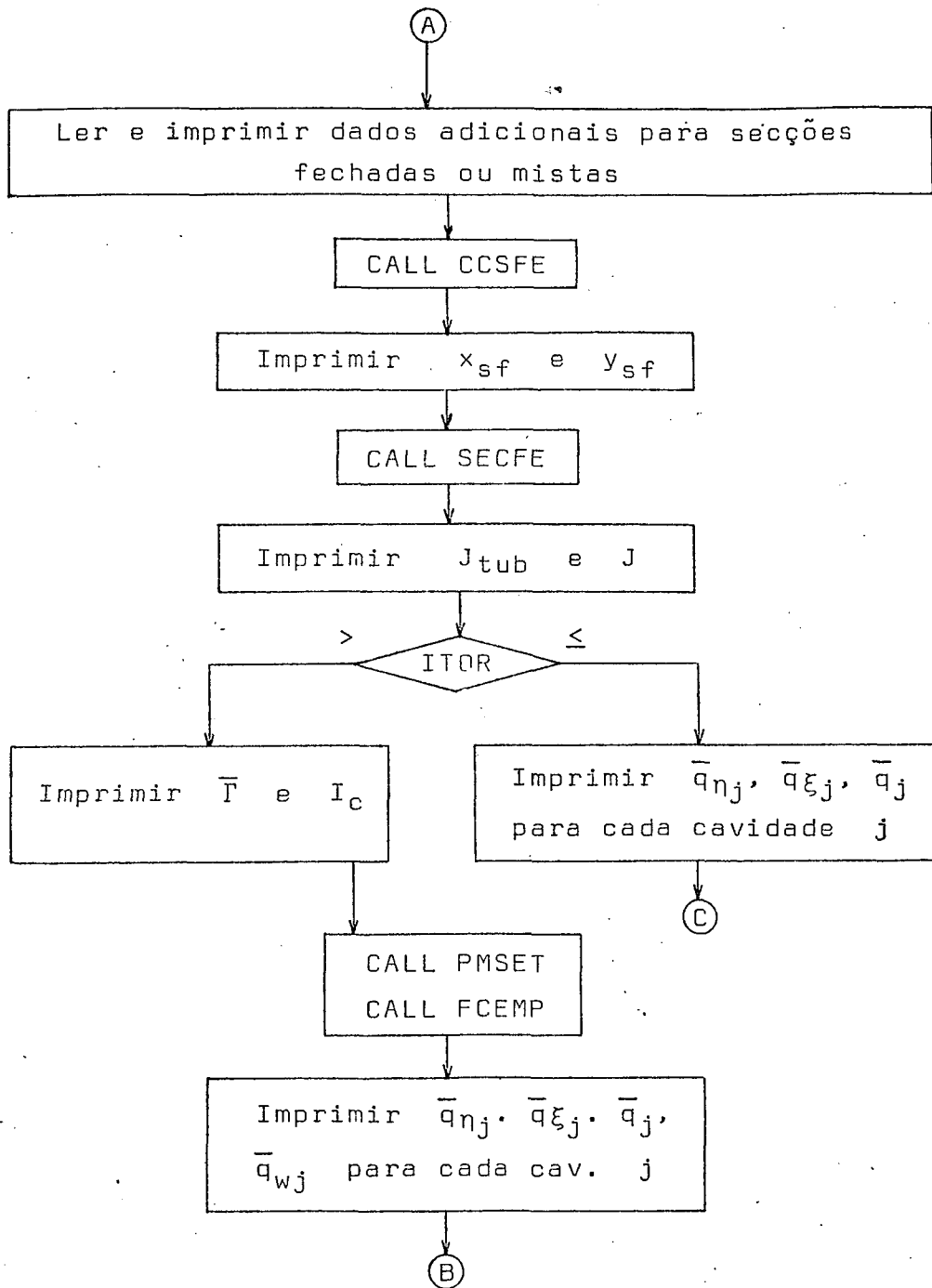
Esta sub-rotina é utilizada na determinação de:

- a) Constantes das expressões dos fluxos de tensões cisalhan-

FLUXOGRAMA PARA PROGRAMA PRINCIPAL



FLUXOGRAMA PARA PROGRAMA PRINCIPAL (continuação)



- tes básicos na flexão simples;
- b) Coordenadas do centro de cisalhamento; e
- c) Constante torcional, em secções abertas.

4 - Sub-rotina SECAB

Esta sub-rotina é utilizada para determinar, em secções abertas,

- a) Constantes da expressão da função empenamento, e
- b) Constante de empenamento.

5 - Sub-rotina SISEQ

Esta sub-rotina é utilizada para a resolução de um sistema de nct equações a $nct+2$ incógnitas. É adotado o método de redução à forma normal de Hermite da referência [32].

Os sistemas de equações (3.152), (3.164) e (3.183) podem ser escritos, de modo geral, como segue:

$$\left[\begin{array}{c|cc} \Delta_{j,1} & & \\ \hline & \Delta_{j, nct+1} & \Delta_{j, nct+2} \end{array} \right] \{q_i\} = 0 \quad (A1)$$

Reduzindo a matriz coeficiente à FNH resulta,

$$\left[\begin{array}{c|cc} I & & \\ \hline & h_{j, nct+1} & h_{j, nct+2} \end{array} \right] \{q_i\} = 0 \quad (A2)$$

de onde se obtém,

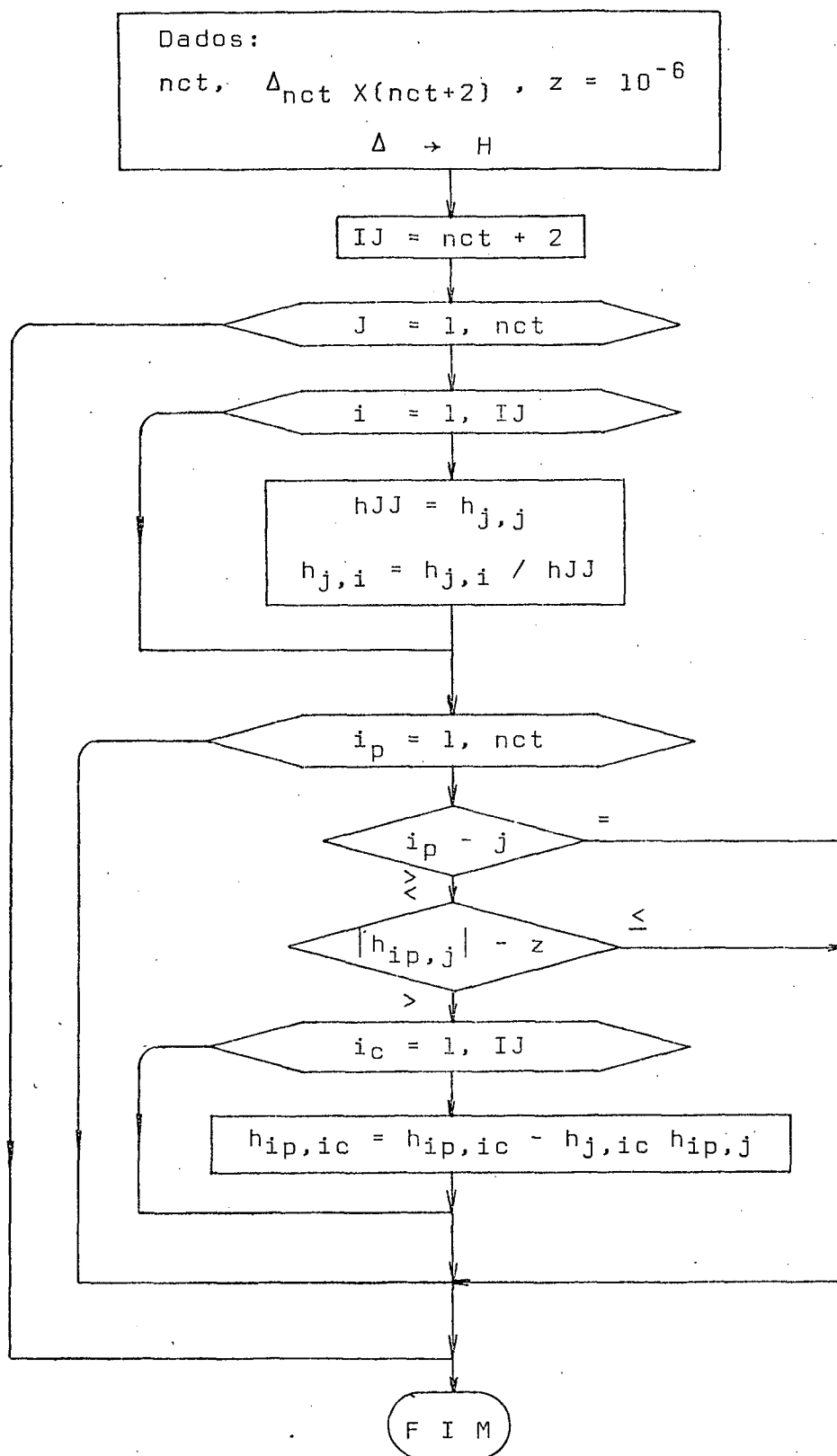
$$q_j = - h_{j, nct+1} q_{nct+1} - h_{j, nct+2} q_{nct+2}, \quad j=1, nct \quad (A3)$$

Assim, na resolução do sistema (3.152) faz-se

$$\Delta_{j, nct+1} = h\eta_j, \quad \Delta_{j, nct+2} = h\xi_j, \quad q_{nct+1} = V\eta \quad e$$

$$q_{nct+2} = V\xi.$$

FLUXOGRAMA PARA SUB-ROTINA SISEQ



No sistema (3.164),

$$\Delta_{j,nct+2} = q_{nct+2} = 0, \quad \Delta_{j,nct+1} = \Delta 1_j \quad \text{e} \quad q_{nct+1} = G\theta$$

No sistema (3.182),

$$\Delta_{j,nct+1} = q_{nct+2} = 0, \quad \Delta_{j,nct+2} = \Delta 2_j \quad \text{e} \quad q_{nct+2} = 1.$$

Como os sistemas de equações em questão são sempre redutíveis à forma (A2), o fluxograma da referência [32] pode ser simplificado (ver fluxograma para Sub-rotina SISEQ).

6 - Sub-rotina CCSFE

Esta sub-rotina é utilizada para determinar, em secções fechadas:

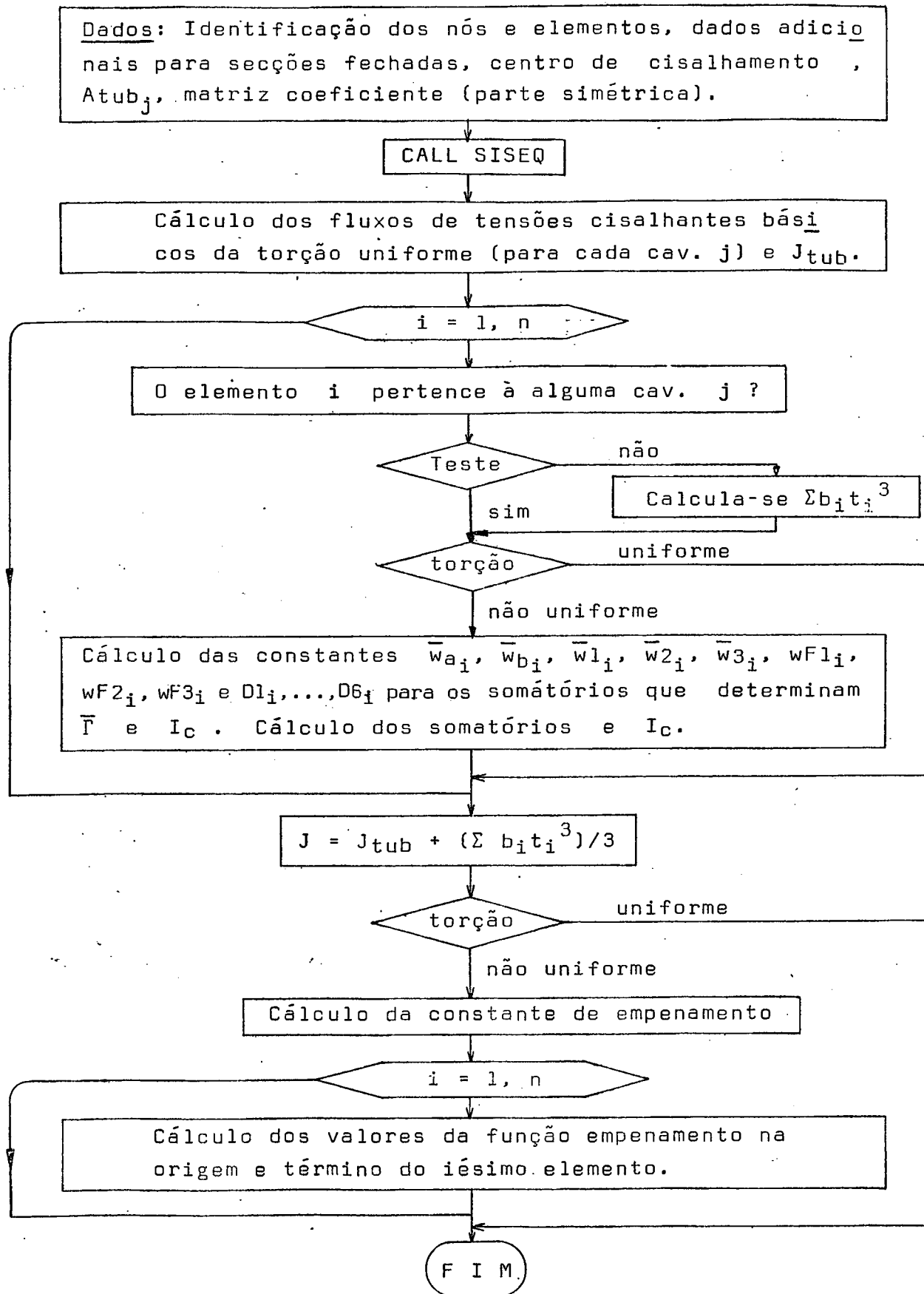
- a) Elementos da matriz coeficiente utilizada na sub-rotina SISEQ;
- b) Dobro da área encerrada pela linha média das paredes de cada cavidade tubular j , A_{tub_j} ;
- c) Fluxos de tensões cisalhantes redundantes básicas na flexão simples, \bar{q}_{η_j} , \bar{q}_{ξ_j} ;
- d) Coordenadas do centro de cisalhamento, x_{sf} e y_{sf} .

7 - Sub-rotina SECFE

Esta sub-rotina é utilizada para determinar, em secções fechadas:

- a) Fluxo de tensões cisalhantes básico \bar{q}_j , na torção uniforme, para cada cavidade j ;
- b) Constantes torcionais de secção fechada ou mista J_{tub} e J ;
- c) Constantes da expressão da função empenamento;
- d) Constante de empenamento \bar{T} ;

FLUXOGRAMA PARA SUB-ROTINA SECFE



e) Momento de inércia central I_c .

A sequência em que essas propriedades seccionais são de terminadas pode ser vista no fluxograma para sub-rotina SECFE.

8 - Sub-rotina PMSET

Esta sub-rotina é utilizada na determinação das constantes da expressão do momento setorial de primeira espécie.

9 - Sub-rotina FCEMP

Esta sub-rotina é utilizada na determinação do fluxo de tensões cisalhantes secundário básico da torção não uniforme (parcela corretiva), em seções fechadas ou mistas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ODEN, J.T. , Mechanics of Elastic Structures. McGraw-Hill Book Company, 1967.
- [2] BENSCOTER, S.U. , A Theory of Torsion Bending for Multi-cell Beams. Journal of Applied Mechanics, Vol. 21 , No. 1, pp. 25-34, 1954.
- [3] KOLLBRUNNER, C.F. and BASLER, K. , Torsion in Structures: An Engineering Approach. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1969.
- [4] NOWINSKI, J.L. , Theory of Thin-Walled Bars. Applied Mechanics Surveys, Spartan Books, Whashington, D.C. , pp. 325-338, 1966.
- [5] TIMOSHENKO, S.P. , Theory of Bending, Torsion and Buckling of Thin-Walled Members of Open Cross Section. Journal of The Franklin Institute, Vol. 239, No. 3, March, pp. 201-219, No. 4, April, pp. 249-268, No. 5, May, pp. 343-361, 1945.
- [6] TIMOSHENKO, S.P. and GERE, J.M. , Theory of Elastic Stability. Chapter 5, second edition, McGraw-Hill, B.C., 1961.
- [7] TIMOSHENKO, S.P. and GOODIER, J.N. , Theory of Elasticity. Chapter 10 and pp. 371-374, third edition, McGraw-Hill B.C., 1970.
- [8] BLEICH, F. , Buckling Strenght of Metal Structures. Chapter III, McGraw-Hill Book Company, 1952.
- [9] VON KÁRMÁN, T. and CHRISTENSEN, N.B. , Methods of Analysis for Torsion with Variable Twist. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 11, No. 2, pp. 110-124, April, 1944.
- [10] VON KÁRMÁN, T. and CHIEN, Wei-Zang , Torsion with Variable Twist. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 13 , No. 10, pp. 503-510, October, 1946.

- [11] ARGYRIS, J.H. and DUNNE, P.C. , The General Theory of Cylindrical and Conical Tubes Under Torsion and Bending Loads. Journal of The Royal Aeronautical Society, Vol. 51, pp. 199-269, 757-784, 884-930, 1947; Vol. 53, pp. 461-483, 558-620, 1949.
- [12] HARRISSON, T. , The Effect of Transverse Straps on The Bending and Torsional Behaviour of a Thin-Walled Prismatic Beam of Open Cross-Section Profile. International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 11, pp. 225-239 , 1969.
- [13] TRAUER, R.O. , Procedimento para Determinar os Valores do Coeficiente de Cisalhamento. Tese de Mestrado, Capítulos 4, 5 e 6, UFSC, Junho, 1974.
- [14] MCDONALD, R.E. , CHEN, Y.S. and YILMAZ, C. , Open Steel Box Sections with Top Lateral Bracing. Journal of The Structural Division, Vol. 102, No. ST1, pp. 35-49, January, 1976.
- [15] KRAJCIKOVIC, D. , Torsion of Prismatic Sheells. International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 12, No. 1 , pp. 77-90, January, 1970.
- [16] DOUGLAS, T.R. and GAMBRELL, S.C. , Theoretical Analysis of Curved Bridges. Journal of The Engineering Mechanics Division, Vol. 100, No. EM5, pp. 991-1003, October, 1974.
- [17] NITZSCHE, R.N. and MILLER, R.E. , Torsion and Flexure of Curved, Thin-Walled Beams or Tubes. Journal of The Engineering Mechanics Division, Vol. 98, No. EM4, pp. 867-889, August, 1972.
- [18] NITZSCHE, R.N. and MILLER, R.E. , Torsion and Flexure of Closed Thin-Walled Beams. Journal of The Engineering Mechanics Division, Vol. 102, No. EM1, pp. 189-193, February, 1976.

- [19] WILLIAMS, H.E. , Linear Theory of Thin Rings. Journal of The Engineering Mechanics Division, Vol. 98, No. EM5 , pp. 1031-1051, October, 1972.
- [20] JOHNSON, W. , The Effect of Curvature on the Centre of Shear. Journal of The Royal Aeronautical Society, Vol. 59, No. 536, pp. 562-565, August, 1955.
- [21] EVICK, D.R. and HEINS, C.P. , Torsion of Nonprismatic Beams of Open Section. Journal of The Structural Division, Vol. 98, No. ST 12, pp. 2769-2784, December, 1972.
- [22] CHU, Kuang-Han and JOHNSON, R.B. , Torsion in Beams with Open Sections. Journal of The Structural Division, Vol. 100, No. ST7, pp. 1397-1419, July, 1974.
- [23] CHANG, P.Y., THASANATORN, C. and PILKEY, W.D. , Restrained Warping Stresses in Thin-Walled Open Sections. Journal of The Structural Division, Vol. 101, No. ST11 , pp. 2467-2472, November, 1975.
- [24] MECK, J.L. and SWANNELL, P. , Stiffness Matrices for Beam Members Including Warping Torsion Effects. Journal of The Engineering Mechanics Division, Vol. 102, No. EMI , pp. 193-197, February, 1976.
- [25] HEIDEBRECHT, A.C. and SMITH, B.S. , Aproximate Analysis of Open Section Walls Subjected to Torsional Loading . Journal of The Structural Division, Vol. 99, No. ST12, pp. 2355-2373, December, 1973.
- [26] BAZĀNT, Z.P. and NIMIERY, M.E. , Large - Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames. Journal of The Engineering Mechanics Division, Vol. 99, No.EM6, pp. 1259-1281, December, 1973.
- [27] TSAI, W.T. , Note on The Center of Twist. Journal of Applied Mechanics, Vol. 39, No. 1, pp. 297-298 , March , 1972.

- [28] JACOBS, J.A. , The Center of Shear of Aerofoil Sections .
Journal of The Royal Aeronautical Society, Vol. 57, pp.
235-237, April, 1953.
- [29] DUNCAN, W.J. , The Flexural Centre or Centre of Shear .
Journal of The Royal Aeronautical Society, Vol. 57, No.
513, pp. 594-597, September, 1953.
- [30] KBITER, W.T. , The Flexural Centre or Centre of Shear .
Journal of The Aeronautical Society, Vol. 58, pp. 64-
65, January, 1954.
- [31] Light Gage Cold-formed Steel Design Manual, AISI, 1961.
- [32] ALVES, D.B. , Métodos Numéricos. Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC.
- [33] ALVES, D.B. , PROSEC - Propriedades Seccionais de Vigas Retas de Paredes Delgadas. Centro Tecnológico da UFSC, 1976.
- [34] ALVES, D.B. , Programa Analisador de Sistemas Estruturais. Anais do III Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Paper No. D-17, pp. 1067-1078, dezembro, 1975.
- [35] ALVES, D.B. , PROASE/Y75, Manual do Usuário. Publicação interna do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC, 1975.
- [36] ALVES, D.B. , Cascas Ortotrópicas de Revolução reforçadas por Anéis. Anais do IV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Paper No. A-12, pp. 143-155, dezembro, 1977.
- [37] ALVES, D.B. e ANDERSSON, V. , Determinação do Centro de Cisalhamento, Constante Torcional e de Empenamento em Seções de Paredes Delgadas. Anais do IV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Paper NO. A-4, pp. 41-51, dezembro, 1977.
- [38] PACITTI, T. , FORTRAN-Monitor, Princípios. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1974.