

MÉTODOS NUMÉRICOS DE CÁLCULO DA
DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO E DEFORMAÇÕES DE CORPOS
ELÁSTICOS EM CONTATO

Tese submetida à
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
no
CONCURSO DE LIVRE DOCÊNCIA

Por
NELSON BACK
Eng. Mec., M.Sc., Ph.D.

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CENTRO TECNOLÓGICO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Florianópolis, S.C.

Abril - 1974

BANCA EXAMINADORA

À Maria Helena
Alexandre
Isabela

R E S U M O

No presente trabalho tem-se apresentado vári os métodos numéricos de cálculo da distribuição de pressão e de de formações de corpos elásticos em contato. Na primeira parte do trabalho são apresentados, de uma forma resumida e com uma aná lise crítica das limitações de métodos propostos por vários pes quisadores. Na parte final são apresentados três métodos prop os pelo Autor onde com várias aplicações mostra-se a versatili dade dos métodos e a precisão quando os resultados teóricos são comparados com os experimentais .

A B S T R A C T

In the present work are presented several numerical methods used to calculate the pressure distribution and deformations of elastic bodies in contact . In the first part, a short description and an analysis of the limitations of the methods proposed by several researchers is presented . The last part of this work presents three methods proposed by the Author and are illustrated with a wide range of applications showing a good correlation when the theoretical and experimental results are compared .

S U M Á R I O

1 - INTRODUÇÃO	1
2 - MÉTODO DE GOULD E MIKIC	2
3 - MÉTODO DE WHITE E ENDERBY	8
4 - MÉTODO DE SCHOLES E STROVER	15
5 - MÉTODO DE CHAN E TUBA	23
6 - RIGIDEZ NORMAL E TANGENCIAL DAS SUPERFÍCIES USINADAS .	31
7 - MÉTODO DE SIMULAÇÃO DA PRESSÃO	41
8 - MÉTODO DA PLACA	46
9 - MÉTODO DA MOLA	51
10 - APLICAÇÕES	55
10.1 - Problema 1	56
10.2 - Problema 2	61
10.3 - Problema 3	62
10.4 - Problema 4	67
10.5 - Problema 5	70
10.6 - Problema 6	78
11 - CONCLUSÕES	81
REFERÊNCIAS	83

NOMENCLATURA

A_k	Área de influência de um par de nós.
$[A]$	Matriz de rigidez
a_n	Secção transversal da barra finita para cálculo da rigidez axial
a_s	Secção transversal da barra finita para cálculo da rigidez ao cisalhamento
$[C]$	Matriz de ligação
c	Parâmetro da rigidez normal da superfície
$[D]$	Matriz de ligação
E	Módulo de elasticidade
e	Espessura
$[F_1]$, $[F_{11}]$, $[F_2]$, $[F_{22}]$, $[F]$	Matrizes de flexibilidade
f	Coeficiente de atrito
G	Módulo de elasticidade transversal
h	Folga
I	Momento de inércia de área
k	Constante
$[K_1]$, $[K_a]$, $[K_b]$	Matrizes de rigidez
K_n	Flexibilidade normal da superfície
K_s	Flexibilidade tangencial da superfície
L	Comprimento
m	Parâmetro da rigidez normal da superfície
N_r	Nós das superfícies de contato
\bar{n}	Vetor unitário
P	Força
$\{P_a\}$, $\{P_b\}$	Vetores de carregamento externo
$\{P'_a\}$, $\{P'_b\}$	Vetores de carregamento nos nós de contato

P'_n	Força normal à superfície de contato
P'_f	Força tangencial na superfície de contato
$\{P\}$	Forças de contato
p_n	Pressão normal de contato
p_s	Pressão tangencial de contato
\bar{q}	Força nos nós em contato
r, r_c	Raios
R_1, R_2	Raios do eixo e mancal
R	Parâmetro da flexibilidade tangencial das superfícies em contato
s	Parâmetro da flexibilidade tangencial das superfícies em contato
$[T], [T_1]$	Matrizes de transformação
\bar{t}	Vetor unitário
u	Deslocamento
$\{u_1\}, \{u_2\}, \{u_a\}, \{u_b\}$	Vetores de deslocamentos
\bar{V}_r	Soma do vetor de posição inicial e do vetor de deslocamento dos nós no contato
v	Deslocamento
$\{X_1\}$	Vetor de deslocamento
$X, Y, Z,$	Coordenadas
α	Relação entre pressão tangencial e normal
θ	Ângulo
λ_n	Deformação normal das superfícies em contato
λ_s	Deformação tangencial das superfícies em contato
λ_{sf}	Deformação elástica limite para carregamento não simultâneo
λ'_{sf}	Deformação elástica limite para carregamento simultâneo
λ_{sr}	Deslocamento relativo na direção tangencial num par de nós

1. INTRODUÇÃO

Até recentemente, uns cinco anos atrás, o cálculo da distribuição de pressão e deformações estava limitado aos casos em que os corpos elásticos apresentavam formas geométricas bem definidas. A chamada teoria de Hertz que está discutida e desenvolvida na referência¹ permite o cálculo das pressões no contato e a aproximação de corpos elásticos tais como: esfera contra esfera; esfera contra plano; cilindro contra cilindro; etc. Este método de cálculo tem sido empregado com sucesso no cálculo das tensões e deformações em elementos como rolamentos de esferas e de rolos.

Na maioria dos casos práticos tem-se o contato de corpos elásticos de forma irregular como é o caso de juntas parafusadas e de guias de deslizamento frequentemente utilizadas em máquinas ferramentas. O cálculo da distribuição de pressão e as deformações no contato de corpos elásticos tem adquirido grande importância nos últimos anos, tendo em vista os seguintes exemplos de aplicação: exigências de maior rigidez das juntas de máquinas ferramentas com controle numérico; dissipação de energia em juntas; resistência à fadiga de juntas parafusadas³; resistência à transmissão do calor² e corrente elétrica no contato de peças metálicas.

Tendo em vista a necessidade de calcular a distribuição de pressão e deformações em corpos elásticos em contato, foram desenvolvidos vários métodos de cálculo ou de experimentação. Nas referências^{4, 5} foram desenvolvidos métodos para o cálculo da distribuição de pressão de chapas de pequena espessura, grandes superfícies e parafusadas por um único parafuso, portanto, não apresentam aplicação para a maioria dos casos práticos. Na referência⁶ foi sugerido o ultrassom para determinar experimentalmente a distribuição de pressão no contato, mas o valor prático deste método é pequeno.

Com o desenvolvimento do método do elemento finito e dispondo de computadores de grande memória e alta velocidade, atualmente tem-se desenvolvido vários métodos que possibilitam o cálculo da distribuição de pressão e deformações de corpos elásticos em contato. Os métodos apresentados a seguir usam como ferramenta de cálculo o método do elemento finito, quando, como

se verifica mais tarde, não se tem limitações no que se refere à forma dos corpos elásticos em contato. No presente trabalho não será descrito o método do elemento finito e para familiarizar-se com o mesmo recomenda-se a leitura das referências^{7,8,9,10}.

Os métodos apresentados a seguir resumem os principais resultados de pesquisa desenvolvidos por vários pesquisadores e pelo Autor. Cada método será apresentado de forma reduzida sendo também discutidas as vantagens e limitações de sua aplicação na prática.

2. MÉTODO DE GOULD E MIKIC

O presente método, descrito a seguir, resume a pesquisa apresentada na referência¹¹. Quando se considera duas chapas parafusadas, como mostra a figura 1a, pode-se substituir a força de protensão do parafuso por uma força distribuída, p , no anel de contato da cabeça do parafuso e porca, como mostra a figura 1b. Através da experimentação e cálculo verifica-se que o contato entre as duas chapas somente ocorre na zona próxima do parafuso. A área de contato decresce quando a espessura das chapas decresce. A distribuição de pressão p_n no contato das chapas apresenta a forma indicada na figura 1b.

Para o cálculo da distribuição de pressão e deformações nas chapas parafusadas, foi sugerido¹¹ a união das duas chapas como se fosse uma peça única, com um furo central para passagem do parafuso e com um carregamento equivalente à força de aperto como mostra a figura 2a. Considerando então dois discos, que é o exemplo utilizado na referência¹¹, estes são divididos em elementos finitos, anéis de secção triangular ou retangular como mostra a figura 2b. Além destes elementos finitos pode-se usar tetraedros ou sólidos de oito nós, no caso em que as peças em contato não são axisimétricas. Na área de contato entre a cabeça do parafuso e porca o carregamento distribuído é substituído por cargas concentradas nos nós, como mostra a figura 2b. Nesta fase prepara-se os dados para o programa de computador para o método do elemento finito, quando é possível calcular a tensão no plano que separa as duas chapas. No presente método, quando a tensão normal ao plano de contato é de tração elimina-se a união entre as duas chapas e duplica-se os nós nas superfícies como mostra a figura 2c.

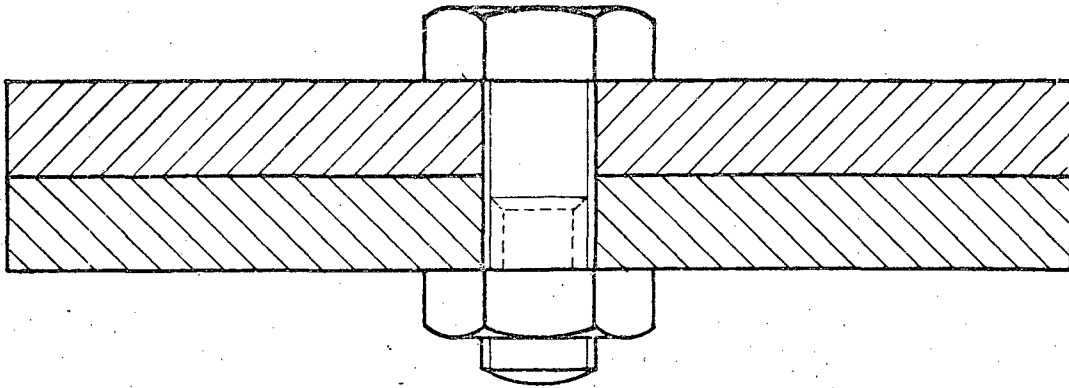


Fig. 1a - Junta parafusada

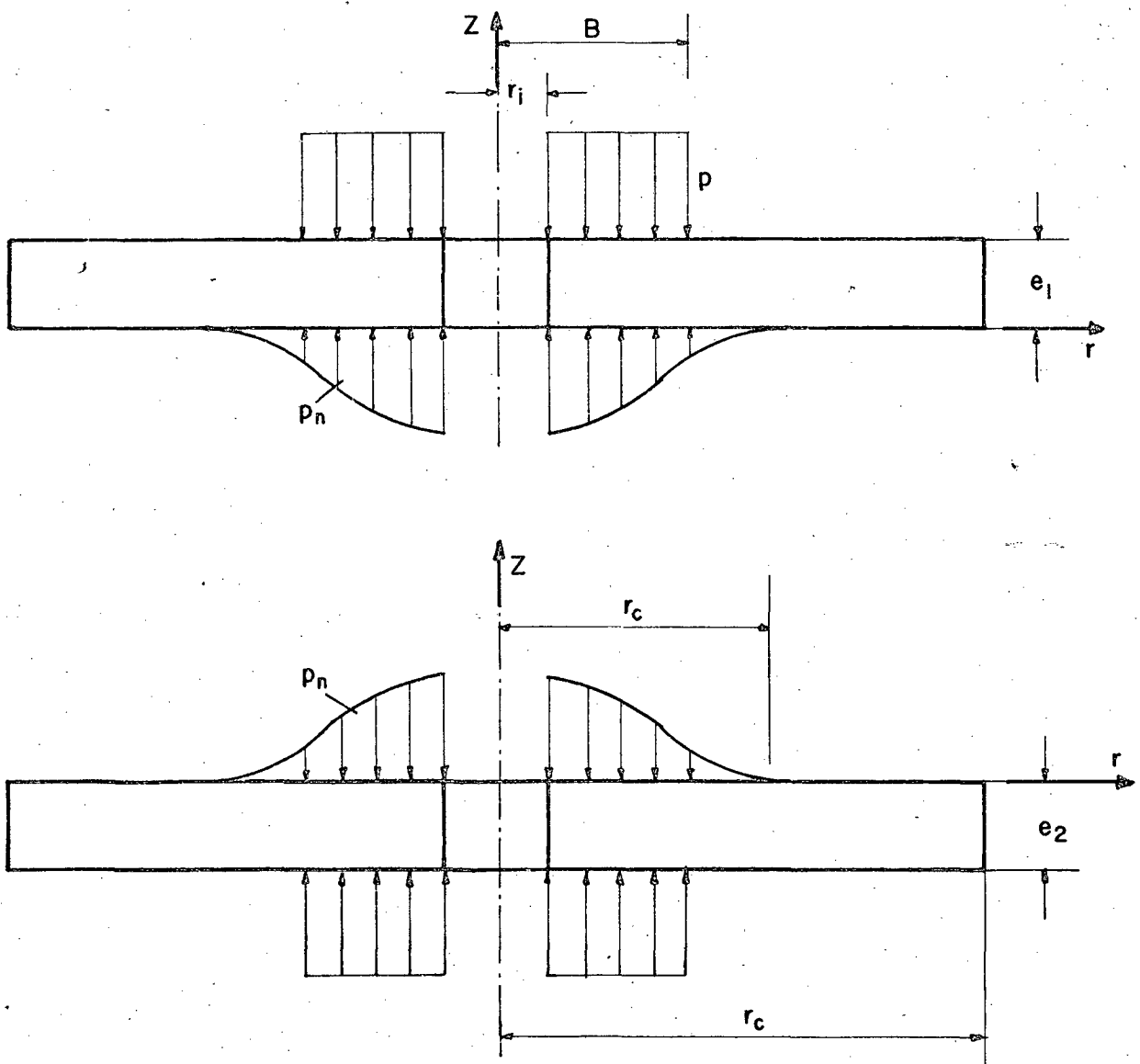


Fig. 1b - Diagrama de corpo livre de dois discos em contato.

Na parte do plano de contato onde a tensão é de compressão mantêm-se as chapas unidas. Nesta etapa tem-se uma nova estrutura mas como mesmo carregamento e requer-se nova solução pelo programa de computador. Verifica-se novamente se existem tensões de tração no plano de contato quando a ligação entre as chapas é eliminada. Como se observa o processo é iterativo, sendo alcançado o resultado quando nas sucessivas iterações não se observa mais tensão de tração no plano de contato. Como mostra a figura 2c somente para um raio menor que r_c ocorre tensões de compressão e segundo o método, corresponde ao raio de contato das duas chapas parafusadas. A distribuição de pressão no contato das chapas é calculada de acordo com o método do elemento finito.

Para obter-se resultados mais precisos no cálculo da distribuição de pressão de contato recomenda-se usar uma malha menor na divisão do elemento finito como mostra a figura 2b ou seja na parte mais próxima do parafuso onde se tem uma concentração de tensão.

O modelo de duas chapas, até aqui descrito, representaria a realidade com maior precisão, caso a força de atrito no contato impedisse o deslizamento das superfícies. Quando as duas chapas são de espessura diferente então o modelo da figura 2b deve ser adotado. Sendo de mesma espessura então pode-se adotar o modelo de uma chapa afirmando que os nós ao longo do contato se deslocam livremente na direção radial sem deslocar-se na direção normal ao plano de contato. Desta forma será necessário analisar somente uma chapa como mostra a figura 2d. Segundo os resultados obtidos na referência¹¹ no modelo de duas chapas obtém-se um raio de contato menor do que no modelo de uma chapa, como mostra a figura 3. A diferença entre os resultados obtidos na determinação do raio r_c depende das dimensões das chapas, e segundo a referência¹¹ a diferença pode ser da ordem de 30%. Conforme a mesma pesquisa o modelo de duas chapas apresenta boa correlação com os resultados experimentais. Para os testes foram usados discos de aço inoxidável e as superfícies de contato foram lapidadas.

Um dos métodos experimentais para a determinação do raio de contato consistiu em parafusar os dois discos e girar vári

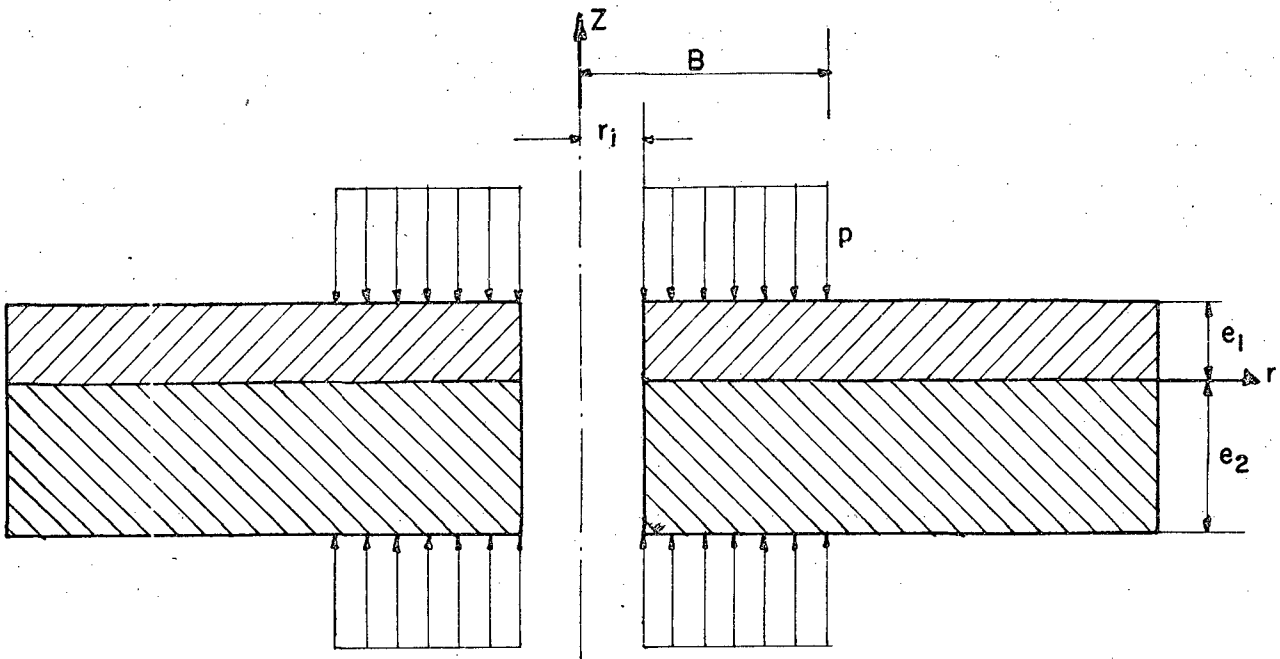


Fig. 2a — Modelo equivalente da junta parafusada.

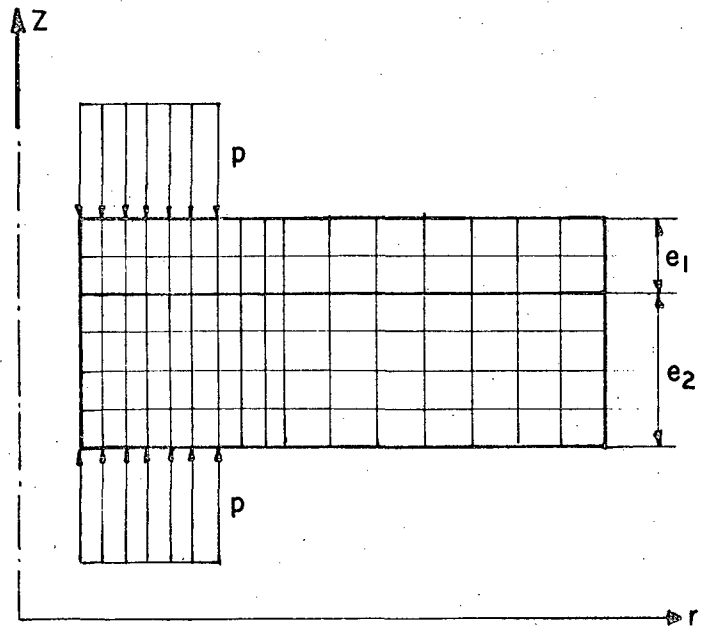


Fig. 2b — Divisão do elemento finito da junta de discos de diferentes espessuras.

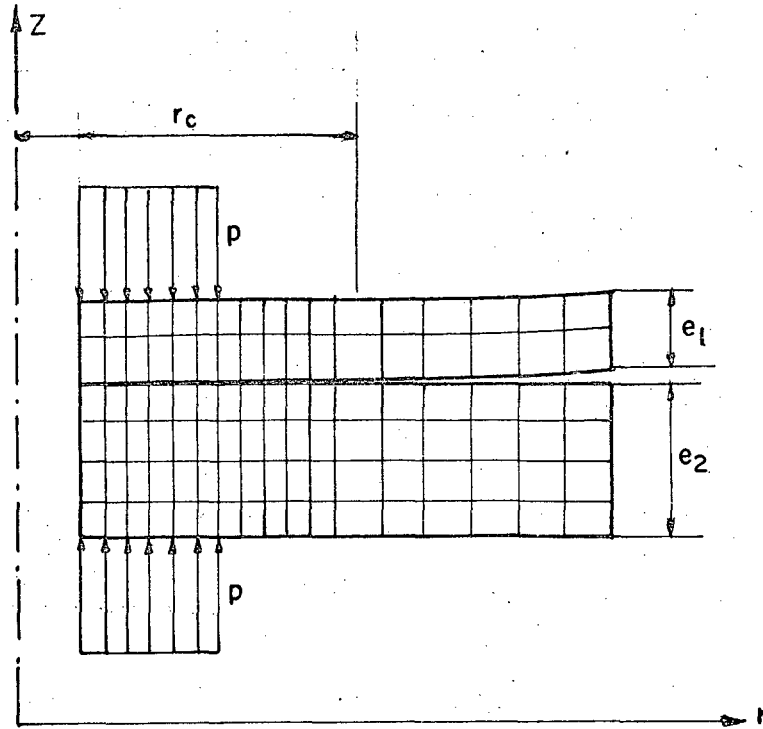


Fig. 2c — Deformações da junta parafusada.

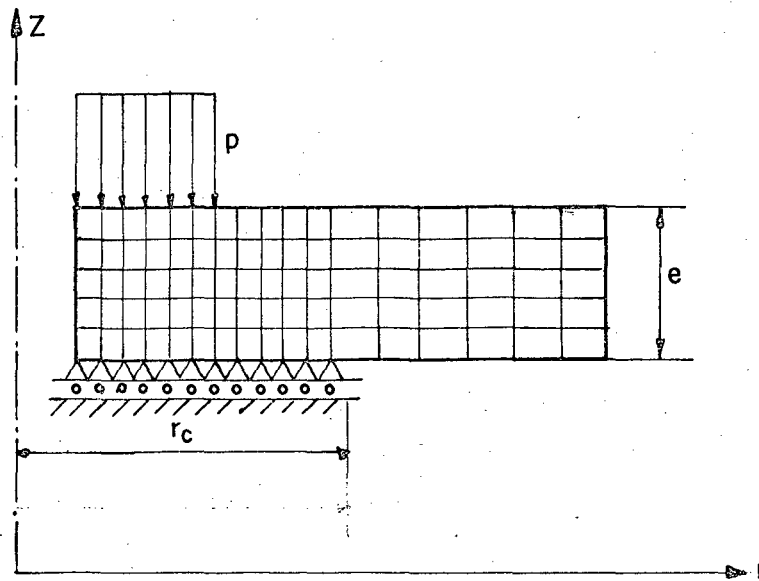


Fig. 2d — Divisão do elemento finito do modelo da junta parafusada de discos de mesma espessura.

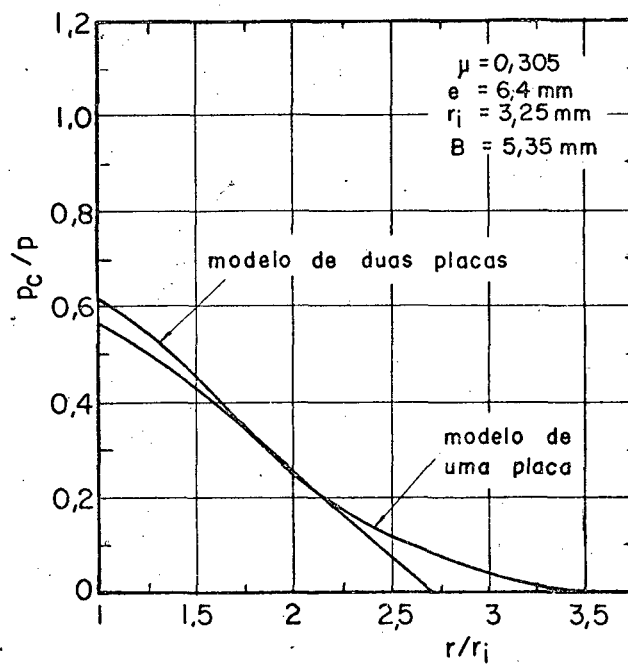


Fig. 3 — Distribuição de pressão calculada pelo modelo de duas placas e de uma placa.

as vezes um disco em relação ao outro de um ângulo de $\pm 5^\circ$ e quando desmontado o conjunto, constatou-se um polimento da superfície realmente em contato, permitindo assim medir r_c . Na tabela 1 tem-se os resultados de teste e de cálculo considerando o modelo de duas chapas e de mesma espessura. Considerou-se para o diâmetro externo e diâmetro do furo dos discos respectivamente os valores de 101,6 mm e 6,5 mm.

TABELA 1 - VALORES DO RAIOS EM CONTATO DE CHAPAS PARAFUSADAS

Teste	espessura e (mm)	diâmetro 2 B (mm)	experimentação 2 r_c (mm)	cálculo 2 r_c (mm)
1	1,65	10,7	10,65 - 12,2	12,4
2	3,15	10,7	12,75 - 13,50	14,05
3	4,86	10,7	14,75 - 16,3	15,75
4	6,45	10,7	17,8 - 19,4	17,80
5	3,15	25,4	27,0 - 28,0	27,8
6	4,86	25,4	28,3 - 29,8	30,8

Para os casos em que os corpos elásticos não apresentem simetria de forma e carregamento verifica-se em geral consideráveis deslocamentos relativos na superfície de contato, portanto, não se recomenda o uso do método descrito.

Conforme será descrito mais adiante o presente método também não é indicado quando as superfícies de contato apresentam um acabamento superficial de qualidade inferior.

3. MÉTODO DE WHITE E ENDERBY

O método descrito a seguir foi utilizado por White & Enderby¹² para calcular a distribuição de pressão no mancal do sistema biela-manivela com folga radial e carregado por um pino. Como mostra a figura 4a considerou-se um estado plano de tensões e as duas peças são divididas em elementos finitos. No presente caso tem-se elementos triangulares, onde a divisão das duas peças é efetuada de forma independente, com exceção na superfície de contato onde os nós das duas peças são coincidentes.

Para a solução, os dois elementos estruturais são ligados por elementos finitos triangulares superpostos como mostra a

figura 4b. Um dos triângulos apresenta o terceiro nó na superfície interna da peça 1 e o outro com a mesma base mas o terceiro nó na superfície externa da peça 2. Como mostra a figura 4a, foi considerado que o contato deveria ocorrer num ângulo menor do que 105° . Como mostra a figura 4a, foram colocados ao longo do arco de contato, 15 elementos de ligação igualmente espaçados. Para o presente exemplo foi considerado o aço para material das duas peças como no início não é possível conhecer o arco de contato entre as superfícies, supõe-se que o contato se verifica somente no nó do elemento 1 mostrado na figura 4a. Para a preparação dos dados para o cálculo das deformações no sistema considera-se que o elemento de ligação 1 apresenta grande rigidez ou seja, adota-se um grande módulo de elasticidade, por exemplo $71,6 \cdot 10^{12}$ Kgf/cm². Adotando uma grande rigidez do elemento, atende-se à condição de compatibilidade ou seja que um nó da superfície de um corpo não pode estar no interior de outro corpo elástico. Para os outros elementos, ao longo do contato pode-se arbitrar um módulo de elasticidade qualquer, como por exemplo, igual a 960000 Kgf/cm² como mostra a tabela 2. Nos nós onde é suposto que não vai haver contato considera-se um valor bem pequeno para o módulo de elasticidade. Para efeito de cálculo considera-se a carga externa aplicada nos pontos D, E e F que é uma considerável aproximação. Ao longo de \overline{AB} considera-se os nós fixos e segundo \overline{BC} o deslocamento dos nós estão impedidos segundo a direção y. No exemplo foi considerado uma carga de 2690 Kgf por centímetro de largura do mancal.

Como mostra a figura 4b onde R_1 e R_2 são respectivamente o raio do eixo do mancal, então no contato sem carga das duas peças a folga é dada por:

$$h = R_2 - (R_2 - R_1) \cos \theta - \sqrt{R_1^2 - (R_2 - R_1)^2 \sin^2 \theta} \quad (1)$$

Sendo $a = R_2 - R_1$ um valor pequeno quando comparado com R_1 então a equação (1) será transformada para:

$$h = a (1 - \cos \theta) \quad (2)$$

Para o presente caso foram considerados dois valores de a ou seja igual a 38 μm e 96,5 μm . Considerando estes valores o valor de h poderá ser traçado em função de θ como mostram

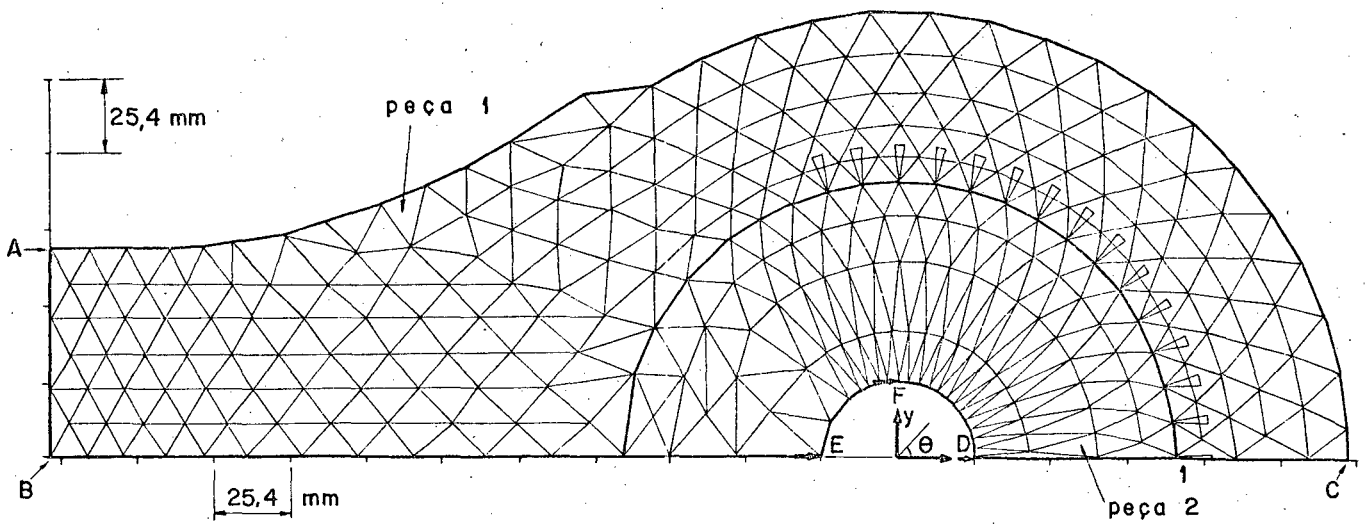


Fig. 4 - a) Divisão do elemento finito do mancal e biela .

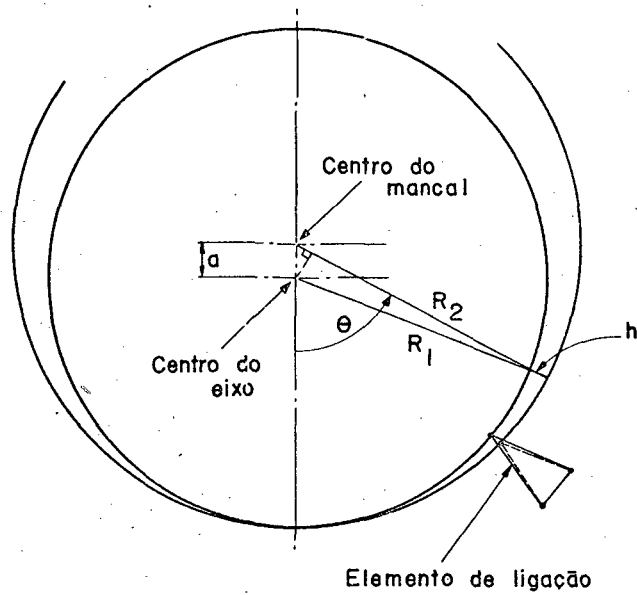


Fig. 4 - b) Diagrama do sistema sem carga.

às figuras 5a e 5b.

Com os dados assim preparados pode-se através do programa de computador para o método do elemento finito, calcular os deslocamentos dos nós e através deste determinar os deslocamentos relativos dos pares de nós ao longo do contato. Como mostra a figura 5a, para a primeira iteração, o deslocamento relativo dos nós na direção radial é maior do que os valores de h para o ângulo menor do que 45° , ou seja, a superfície interna do mancal e a superfície externa do eixo se superpõem. Isto não pode ocorrer na prática logo a rigidez dos elementos finitos de ligação das duas peças deve ser aumentada.

A alteração da rigidez destes elementos será efetuada da seguinte forma. Se, para um dado par de nós h_r é a folga radial e h_i é a aproximação resultante da iteração i então para a iteração $i+1$ o novo módulo de elasticidade para este par de nós é dado pela equação:

$$E_{i+1} = \frac{E_i h_i}{h_r} \quad (3)$$

A tabela 2 mostra a alteração do módulo de elasticidade dos vários elementos de ligação para as diversas iterações. Como se verifica nesta tabela e na figura 4a o contato entre as duas peças somente ocorre para ângulos menores que 75° .

Na figura 5a, para facilitar o traçado e tornar-se mais claro, não foram representadas todas as iterações. Quando a folga radial de $96,5 \mu\text{m}$ foi considerada e para início de cálculo adotou-se para os elementos de ligação os módulos de elasticidade da última iteração, dados na tabela 2, foram necessárias somente três iterações como mostra a figura 5b. Nesta figura tem-se representado novamente os dados da figura 5a para comparação.

A figura 6a mostra os valores calculados da distribuição de pressão ao longo do contato das duas peças. Uma das maiores dificuldades na prática consiste em medir a distribuição de pressão no contato de corpos elásticos. Para analisar a precisão dos resultados teóricos, comparou-se a tensão tangencial calculada e medida na superfície interna e externa do mancal como mostra a figura 6b. Como se observa obteve-se boa correlação

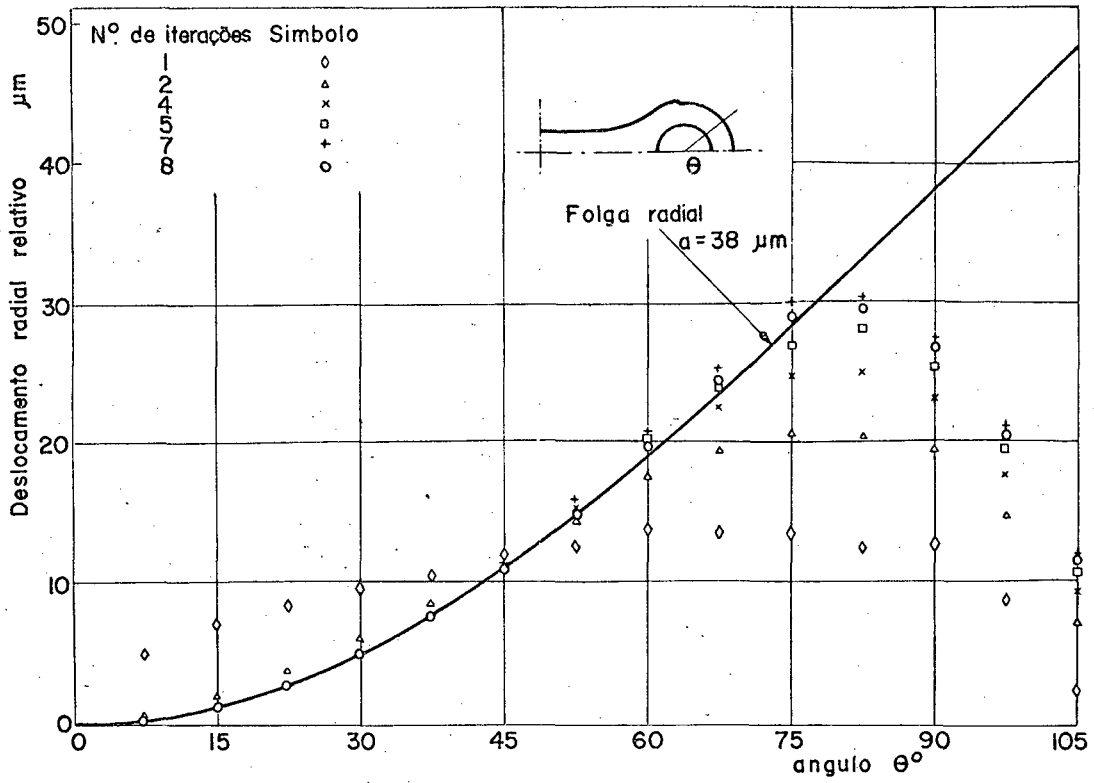


Fig. 5 - a) Variação dos deslocamentos radiais relativos dos pares de nós na superfície de contato.

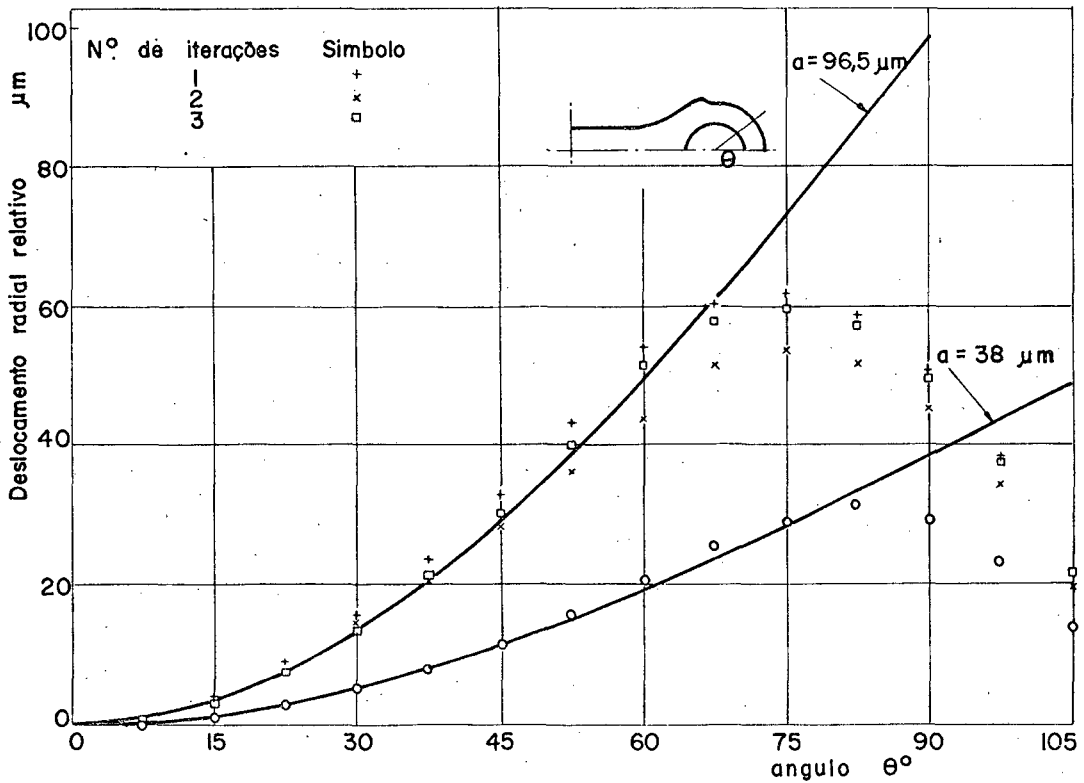


Fig. 5 - b) Comparação dos deslocamentos radiais relativos para folgas radiais de 38 μm e 96,5 μm .

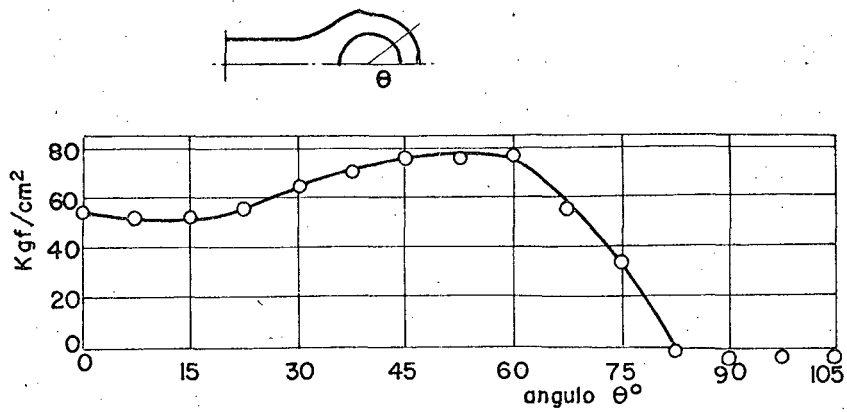


Fig. 6 - a) Distribuição de pressão no contato do eixo e mancal.

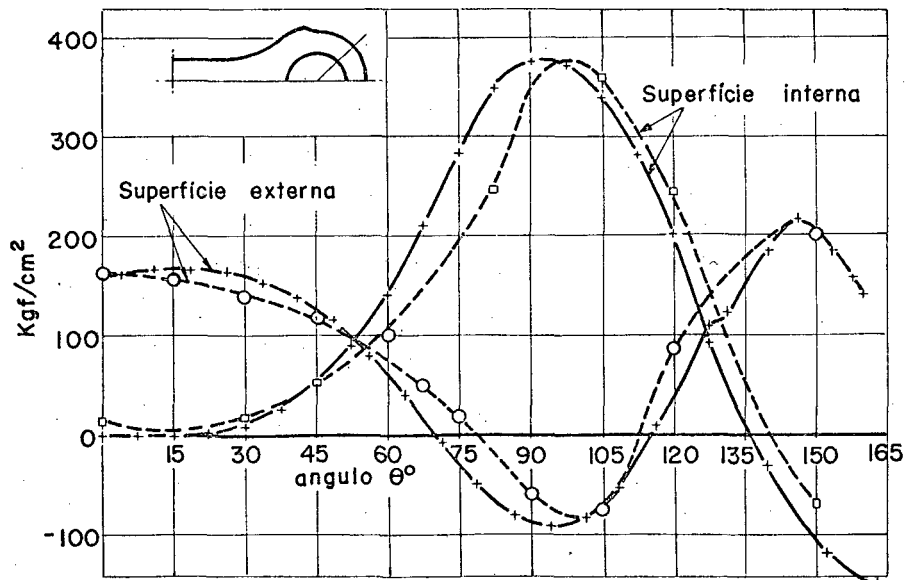


Fig. 6 - b) Distribuição da tensão circunferencial na superfície interna e externa do mancal. — calculada, ---- medida.

entre os resultados teóricos e experimentais.

Na maioria das aplicações ocorre um considerável deslocamento relativo dos nós na direção da superfície de contato. Neste caso e adotando elementos de ligação de grande rigidez, estes também transmitem forças tangenciais no contato normalmente maiores do que as forças de atrito, portanto, este efeito induz erros nos resultados. No exemplo do sistema biela-manivela não se verificou maiores deslocamentos relativos das superfícies na direção da superfície de contato¹², portanto, os resultados teóricos não foram prejudicados.

4. MÉTODO DE SCHOLLES e STROVER

Scholes e Strover¹⁴ tem apresentado um método que permite o cálculo das forças ou distribuição de pressão no contato de corpos elásticos. Neste método considera-se contatos em pontos discretos onde admite-se folga ou perda de contato durante o carregamento da estrutura.

O método apresentado pode ser descrito da seguinte forma. A figura 7 mostra duas estruturas que podem entrar em contato em diversos pontos dependendo do carregamento externo. As folgas podem ser em qualquer direção e as forças de contato, $\{P\}$, apresentam as direções correspondentes. Quando num ponto discreto j existe uma folga então a força de contato $P_j = 0$.

As matrizes $\{P_1\}$ e $\{P_2\}$ são os vetores de carregamento externo nas estruturas 1 e 2. Como mostra a figura 7 a estrutura 2 está aterrada enquanto que a estrutura 1 pode ou não estar aterrada. Para a estrutura 1, um conjunto de deformações $\{X_1\}$, suficiente para definir movimentos rígidos, é usado para cálculo da flexibilidade e equilíbrio.

Os deslocamentos nos pontos de contato da estrutura 2 devido a um aumento das forças externas $\{P_2\}$ e das forças de contato são dados pela equação:

$$\{du_2\} = k [F_2] \{P_2\} + [F_{22}] \{dP\} \quad (4)$$

onde: k define o acréscimo da força $\{P_2\}$, $[F_2]$ é a matriz de flexibilidade nos pontos de contato para as forças $\{P_2\}$, $[F_{22}]$ é a matriz de flexibilidade nos pontos de contato para as forças $\{P\}$.

Da mesma forma pode-se escrever para a estrutura 1 a seguinte equação:

$$\{du_1\} = [T]\{dX_1\} + k[F_1]\{P_1\} - [F_{11}]\{dP\} \quad (5)$$

onde $[T]$ é uma matriz de transformação, $[F_{11}]$ é a matriz de flexibilidade nos pontos de contato da estrutura 1 relativo ao movimento rígido do corpo, e $[F_1]$ é a matriz de flexibilidade nos pontos de contato para as forças $\{P_1\}$.

Para o caso em que ocorre o contato entre os corpos elásticos então a variação dos deslocamentos, devido à variação de carga, nas duas estruturas devem obedecer a seguinte relação:

$$[C]\{du_1\} = [C]\{du_2\} \quad (6)$$

onde $[C]$ é uma matriz de ligação que apresenta uma coluna para cada possível contato e uma linha para cada ponto realmente em contato. Assim $C_{ij} = 0$ com exceção do caso em que a linha i corresponde ao ponto de contato j quando $C_{ij} = 1$.

Introduzindo as equações (4) e (5) na equação (6) obtem-se:

$$\begin{aligned} [C]([T]\{dX_1\} + k[F_1]\{P_1\} - [F_{11}]\{dP\}) &= \\ &= [C](k[F_2]\{P_2\} + [F_{22}]\{dP\}) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} -[C][T]\{dX_1\} + [C]([F_{11}] + [F_{22}])\{dP\} &= \\ &= k[C]([F_1]\{P_1\} - [F_2]\{P_2\}) \end{aligned}$$

Chamando $[F] = [F_{11}] + [F_{22}]$ e sabendo que $[C]^t [C]$ é a matriz unitária, tem-se:

$$\begin{aligned} -[C][T]\{dX_1\} + [C][F][C]^t [C]\{dP\} &= \\ &= k [C]([F_1]\{P_1\} - [F_2]\{P_2\}) \end{aligned} \quad (7)$$

Como mostra a figura 7 a estrutura 2 está aterrada e para a estrutura 1 tem-se a seguinte equação de equilíbrio:

$$[K_1] \{dX_1\} = k [T_1] \{P_1\} - [T]^t \{dP\} \quad (8)$$

onde $[K_1]$ é a matriz de rigidez da estrutura 1 considerando os deslocamentos $\{X_1\}$ e $[T_1]$ é uma matriz de transformação das forças $\{P_1\}$. A matriz $[K_1]$ pode ser de uma estrutura parcialmente ou não vinculada então para a solução será necessário adicionar nesta matriz valores bem pequenos para evitar que esta seja singular.

Combinando as equações (7) e (8) pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} [K_1] & & [T]^t & [C]^t \\ - [C] & [T] & [C] & [F] & [C]^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{dX_1\} \\ [C] \{dP\} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} [T_1] \{P_1\} \\ [C] [F_1] \{P_1\} - [F_2] \{P_2\} \end{bmatrix} \quad (9)$$

No início antes de aplicar a carga as folgas nos pontos de contato são dadas pela equação:

$$\{h\} = \{u_1\} - \{u_2\} \quad (10)$$

Para resolver a equação (9), assume-se que a matriz de ligação $[C]$ é conhecida, então a variação de $\{dX_1\}$ e $\{dP\}$ podem ser calculadas em função de k , ou seja, toma-se $k = 1$.

Conhecendo estes valores pode-se calcular a variação das folgas nos pontos de contato pela seguinte equação:

$$\{dh'\} = \{du_1'\} - \{du_2'\}$$

ou

$$\{dh'\} = [T] \{dX_1'\} + [F_1] \{P_1\} - [F_2] \{P_2\} - [F] \{dP'\} \quad (11)$$

O sistema de equações (9) pode ser calculado para um acréscimo de k que provoca duas situações. Em primeiro lugar quando uma folga se torna nula e segundo quando um ponto sai do contato. A primeira situação ou o acréscimo das forças externas para a qual se verifica um novo contato é dado pelo menor valor de k_i de tal forma que $h_i + dh_i' k_i = 0$ excluindo os pontos já

em contato. Isto significa que o acréscimo k_a da carga é o mínimo valor positivo de:

$$k_a = (-h_i/dh_i') \quad (12)$$

Para a segunda situação o acréscimo da carga externa que faz com que um ponto sai do contato é dado pela relação $P_i + dP_i' k_i = 0.$, onde se inclui somente os pontos já em contato. Desta forma o acréscimo da carga k_b é dado pelo menor valor positivo de:

$$k_b = (-P_i/dP_i') \quad (13)$$

O valor de k que define o acréscimo da carga é então dado pelo menor valor entre k_a e k_b . Quando estes valores são calculados e substituídos na equação (9) calcula-se os valores de $\{dX_1\}$ e $\{dP\}$. A partir destes valores a variação da folga $\{dh\}$ será calculada por:

$$\{dh\} = [T]\{dX_1\} + k[F_1]\{P_1\} - k[F_2]\{P_2\} - [F]\{dP\} \quad (14)$$

Conhecendo-se $\{dX_1\}$, $\{dP\}$ e $\{dh\}$ pode-se redefinir os valores de $\{X_1\}$, $\{P\}$ e $\{h\}$.

Para a segunda iteração a matriz de ligação $[C]$ é definida e todo o procedimento repetido. Procede-se desta forma até que toda carga externa seja aplicada ou $\Sigma k = 1$. Quando para a última iteração tem-se que $\Sigma k > 1$ o valor de k deverá ser redefinido de tal forma que $\Sigma k = 1$.

No início do processo e para a maioria dos casos práticos é difícil definir a matriz de ligação $[C]$, portanto, considera-se que não existe contato entre as estruturas então a equação (9) se reduz para:

$$K_1 \{dX_1'\} = [T_1] \{P_1\} \quad (15)$$

Para ilustrar o método é considerado o exemplo da figura 8 onde os valores indicados representam a constante de mola. Para simplicidade supõe-se que as duas barras sejam rígidas e que apresentam somente um grau de liberdade ou seja o movimento na vertical.

Para este exemplo tem-se as seguintes matrizes:

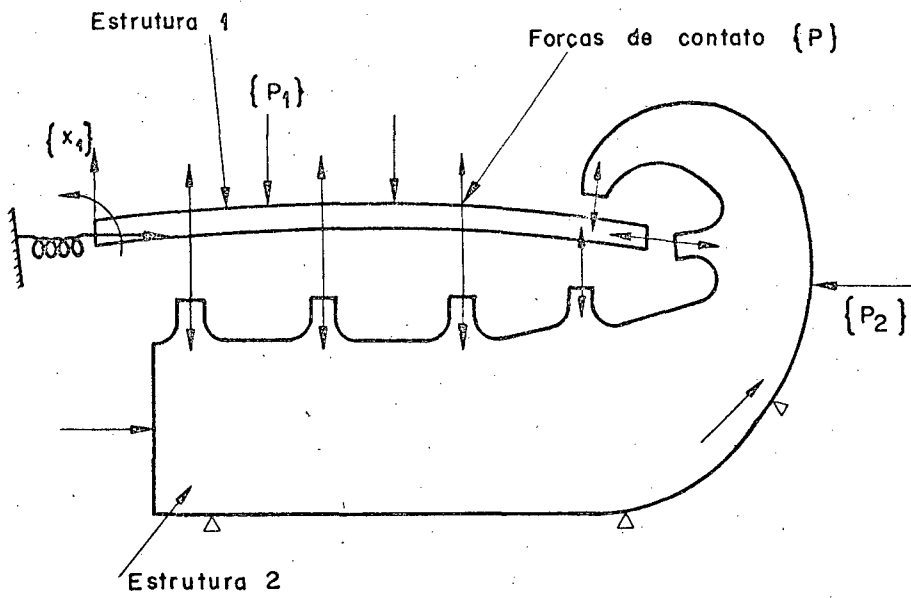


Fig. 7 - Modelo de duas estruturas elásticas em contato em pontos discretos.

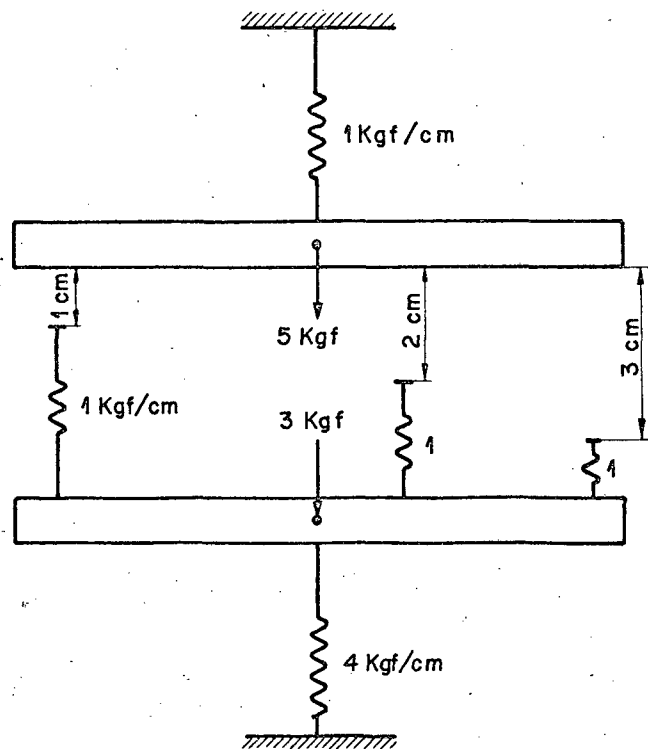


Fig. 8 - Exemplo simplificado de duas estruturas em contato.

$$\{X_1\} = 0 ; \quad \{P_1\} = 5 ; \quad [T_1] = 1 ; \quad [K_1] = 1 ; \quad \{P_2\} = 3$$

$$\{h\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} ; \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \{P\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad [F_1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[F_{11}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [F_{22}] = [F] = \begin{bmatrix} 1,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 1,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 1,25 \end{bmatrix}$$

Para a primeira iteração e considerando a equação (15) tem-se:

$$dX_1' = 5$$

Substituindo este valor na equação (11) a variação das folgas é dada por:

$$\{dh'\} = \begin{bmatrix} 4,25 \\ 4,25 \\ 4,25 \end{bmatrix}$$

Considerando a equação (12), $k_a = 0,235$ e quando substituído em (9) tem-se que $dX_1 = 1,176$. Desta forma a primeira iteração está completa e o carregamento é tal que a primeira mola entra em contato, logo tem-se:

$$\{X_1\} = 1,176 ; \quad \{dP\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \{P\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \{dh\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\{h\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Procedendo da mesma forma, na segunda iteração tem-se que:

$$C = [1 \ 0 \ 0] ; \quad \{dP'\} = \begin{bmatrix} 1,888 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \{dX_1'\} = 3,112$$

$$\{dh'\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,89 \\ 1,89 \end{bmatrix} ; k_a = 0,529 ; \{dX_1\} = 1,64 ; \{X_1\} = 2,816$$

$$\{dP\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \{P\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \{dh\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \{h\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para a terceira iteração tem-se:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \{dX_1\} = 2,58 ; \{dP'\} = \begin{bmatrix} 1,21 \\ 1,21 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\{dh'\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,125 \end{bmatrix} ; k_a = 0,9$$

Somando os valores de k_a obtêm-se $\Sigma k_a = 1,664$ que é maior do que 1, logo deve-se reduzir o valor de k_a para última iteração ou seja igual a 0,236, portanto, tem-se:

$$\{dX_1\} = 0,608 ; \{X_1\} = 3,424 ; \{dP\} = \begin{bmatrix} 0,286 \\ 0,286 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\{P\} = \begin{bmatrix} 1,286 \\ 0,286 \\ 0 \end{bmatrix} ; \{dh\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,431 \end{bmatrix} ; \{h\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,569 \end{bmatrix}$$

Aplicações mais complexas foram apresentadas na referência¹⁴. O primeiro exemplo está mostrado na figura 9a onde tem-se uma bucha e um pino. Como o sistema é simétrico considerou-se, para a análise, somente a metade das duas estruturas. A folga radial adotada foi de 75 μ m. Para o cálculo das flexibilidades nos pontos discretos de contato foi utilizado o método do elemento finito, para o qual tem-se a divisão, em elementos triangulares mostrada na figura 9a. Desde o início foi suposto que o contato entre as duas peças deveria ocorrer ao longo dos nós indicados ou seja 9.

As duas peças foram consideradas de aço e as dimensões estão indicadas na figura, e a largura da bucha foi de 225,4 mm. O carregamento foi aplicado por uma força concentrada

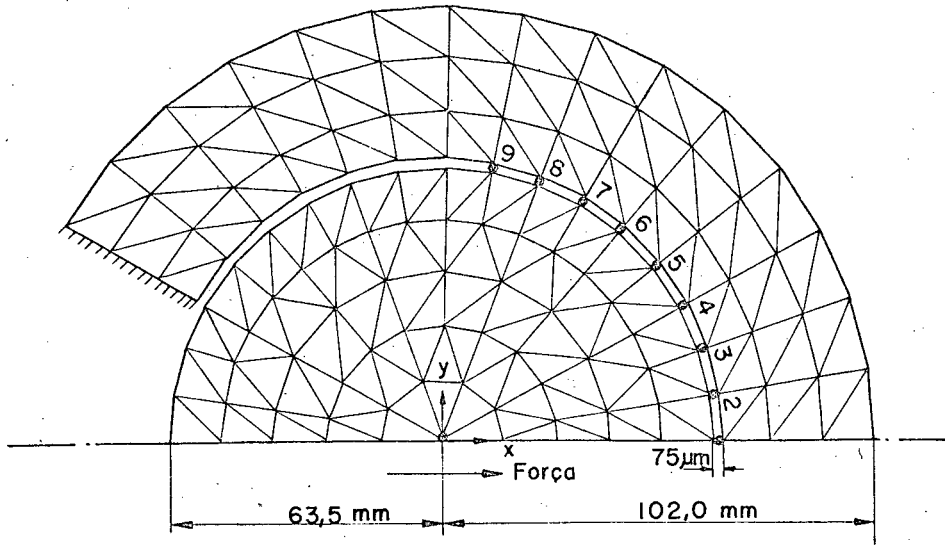


Fig. 9 - a) Divisão do elemento finito da bucha e pino.

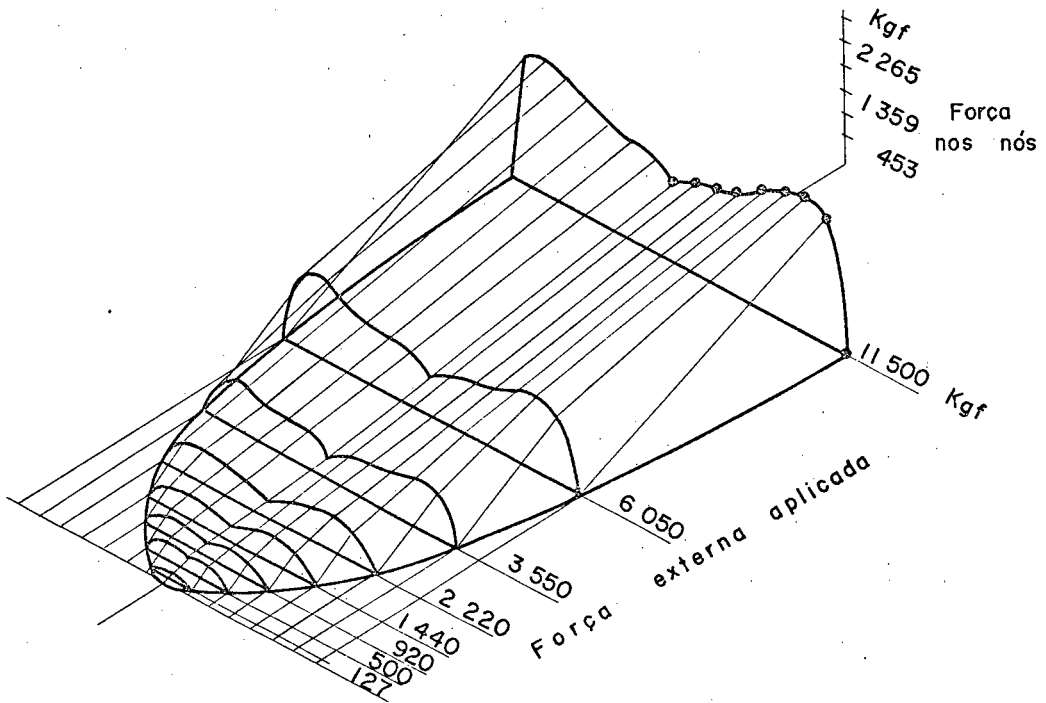


Fig. 9 - b) Distribuição do carregamento no contato.

no centro do pino. Na figura 9b tem-se representado a sequência dos valores calculados das forças nos pontos de contato. Como se verifica tem-se valores máximos mais próximos do final do arco de contato.

Outro exemplo está mostrado na figura 10 onde tem-se um eixo apoiado em suportes flexíveis. Os valores indicados na figura, são quantidades adimensionais dadas pela relação:

$$\frac{P L^3}{E I h}$$

onde P é a carga aplicada, L a distância entre apoios, E I rigidez à flexão do eixo e h a folga. Como mostra a figura 10 tem-se toda a sequência do carregamento do eixo, onde se verifica a mudança de contatos nos apoios flexíveis.

A aplicação deste método não é recomendado para a maioria dos casos práticos como por exemplo em juntas móveis usadas em máquinas ferramentas e juntas parafusadas devido ao que segue. Para determinar com razoável precisão a distribuição de pressão no contato das juntas será necessário considerar um número elevado de pontos de contato. Para estes casos a única solução viável de cálculo das flexibilidades é pelo método do elemento finito. Para a determinação das matrizes de flexibilidade $[F_1]$ e $[F_2]$ são necessárias duas soluções do elemento finito, enquanto que, para determinar as matrizes $[F_{11}]$ e $[F_{22}]$ necessita-se de um número de soluções do elemento finito igual ao dobro do número de pontos de contato.

A outra dificuldade surge quando se considera a flexibilidade das superfícies de contato como será visto mais adiante. Neste caso as flexibilidades $[F_{11}]$ e $[F_{22}]$ teriam que ser recalculadas após cada passo do carregamento. Por último, o efeito da rigidez tangencial das superfícies de contato e das forças de atrito torna-se difícil de ser considerado.

5. MÉTODO DE CHAN e TUBA

O método desenvolvido nas referências^{15,16} pode ser estendido para problemas tridimensionais, mas para a sua descrição foi considerado um caso de estado plano de tensão ou deformação, como mostra a figura 11a. Para o cálculo da distribuição

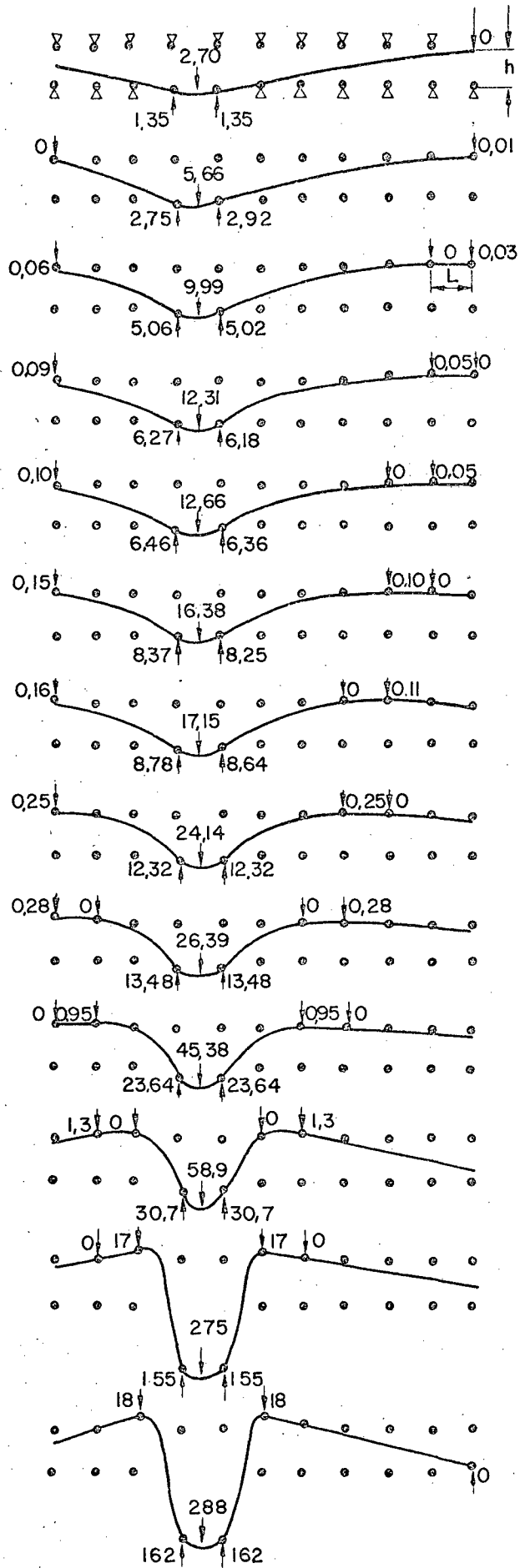


Fig. 10 - Deformações da barra apoiada em suportes flexível com folga h .

de pressão no contato dos corpos elásticos foi utilizado o método do elemento finito. Os dois corpos elásticos são divididos em elementos finitos de forma completamente independente, inclusive ao longo da superfície de contato, como mostra a figura 11b onde N_k é um nó da estrutura A e os nós N_i e N_j são nós da estrutura B. Pode-se então, escrever para os dois corpos em contato as seguintes equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} [K_a] \{u_a\} &= \{P_a\} + \{P'_a\} \\ [K_b] \{u_b\} &= \{P_b\} + \{P'_b\} \end{aligned} \quad (16)$$

onde $[K_a]$, $[K_b]$ são as matrizes de rigidez, $\{u_a\}$ e $\{u_b\}$ os vetores de deslocamentos; $\{P_a\}$ e $\{P_b\}$ as forças externas aplicadas nos nós, $\{P'_a\}$ e $\{P'_b\}$ as forças desconhecidas aplicadas nos nós ao longo das superfícies de contato.

A equação (16) pode ser transformada para:

$$\begin{bmatrix} K_a \\ \\ \\ K_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ \\ \\ u_b \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P'_a \\ \\ \\ P'_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_a \\ \\ \\ P_b \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Desde que $\{P'_a\}$ está em equilíbrio com $\{P'_b\}$ a equação (17) será escrita como segue:

$$\begin{bmatrix} K_a \\ \\ \\ K_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ \\ \\ u_b \end{Bmatrix} - [D] \begin{Bmatrix} P'_a \\ \\ \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_a \\ \\ \\ P_b \end{Bmatrix} \quad (18)$$

A matriz $[D]$ é uma matriz de ligação cujos termos são determinados como segue. Para simplicidade considera-se que a enumeração dos nós ao longo do contato do corpo A seja de 1 a m e para o corpo B de m+1 a n.

Desta forma tem-se que $D_{k,k} = 1$ para $k = 1$ a $2m$. Para determinar os demais termos da matriz considera-se a figura 11c. Sendo P'_k a força de contato aplicada no ponto N_k então determina-se as forças nos nós i e j como segue:

$$P'_i = - P'_k \left(1 - \frac{L_i}{L_j}\right) \quad P'_j = - P'_k \frac{L_i}{L_j}$$

A partir destas relações, os termos da matriz $[D]$ são

dados em geral pelas relações

$$D_{2k-1,2i-1} = D_{2k,2i} = -\left(1 - \frac{L_i}{L_j}\right) \quad \text{para os pontos } N_i \quad (19)$$

$$D_{2k-1,2j-1} = D_{2k,2j} = -\frac{L_i}{L_j} \quad \text{para os pontos } N_j$$

onde $k = m+1$ a n e $i, j = 1$ a $n-m$.

Caso a disposição dos nós ao longo do contato não obedecem a forma da figura 11c deve-se preparar outros algoritmos. Normalmente nos extremos das superfícies de contato as relações (19) também não são válidas. De acordo com o descrito, considerou-se dois graus de liberdade por nó mas para problemas tridimensionais tem-se tres graus de liberdade, portanto, as equações (19) deveriam ser modificadas.

Para simplicidade de escrita a equação (18) será modificada para:

$$[A]\{U\} - [D]\{P'\} = \{P\} \quad (20)$$

Na equação (20) tem-se mais incógnitas, $\{U\}$ e $\{P'\}$, do que equações, logo são introduzidas condições de compatibilidade ou seja que pontos do corpo A não podem estar no interior do corpo B. Esta condição é dada pelo seguinte produto vetorial

$$(\bar{V}_k - \bar{V}_i) \times (\bar{V}_j - \bar{V}_i) \leq 0 \quad (21)$$

onde o vetor \bar{V}_r ($r = i, j, k$) é a soma do vetor de posição inicial com o vetor de deslocamento dos nós.

Quando se considera o atrito nas superfícies de contato, as forças de atrito são dadas por:

$$|P'_t| \leq f |P'_n| \quad \text{sem escorregamento} \quad (22)$$

$$\bar{P}'_t = \pm f |P'_n| \bar{t} \quad \text{com escorregamento} \quad (23)$$

onde P'_t é a força de atrito, P'_n a força de compressão normal à superfície, f o coeficiente de atrito e \bar{t} um vetor unitário tangente à superfície de contato.

Quando um determinado ponto, N_r não está em contato, logo P'_{2r-1} e P'_{2r} são nulas, então as correspondentes linhas

do sistema de equações são as seguintes:

$$\sum_{j=1}^N A_{2r-1,j} \bar{u}_j = P_{2r-1} \quad (24)$$

$$\sum_{j=1}^N A_{2r,j} \bar{u}_j = P_{2r}$$

onde N é o número de nós do sistema.

Para a solução do sistema de equações (20) e (21) foi usado o método descrito na referência¹⁷.

Para o cálculo das forças nos pontos que estão ou não em contato procede-se da seguinte forma. Como este caso é um problema não linear um procedimento iterativo é adotado para sua solução, portanto após um determinado número de iterações supõe-se que a posição relativa entre o ponto N_k e a linha que une os pontos N_i e N_j seja como mostra a figura 11c. As forças de contato são calculadas em função da interferência ou separação do ponto N_k e da linha $N_i N_j$. Seja N'_k o ponto onde se inicia o contato entre o ponto N_k e a linha $N_i N_j$.

Para a construção da matriz [D] foi suposto que quando uma força \bar{q} é aplicada no ponto N_k então as forças aplicadas nos pontos N_i e N_j seriam dadas respectivamente por:

$$- \left(1 - \frac{L_i}{L_j}\right) \bar{q} \quad \text{e} \quad - \frac{L_i}{L_j} \bar{q}$$

Considerando que r seja um nó na superfície de contato, então ao supor que os demais nós sejam fixos, a matriz de rigidez deste ponto apresenta a seguinte forma:

$$[K]_r = \begin{bmatrix} A_{2r-1,2r-1} & A_{2r-1,2r} \\ A_{2r,2r-1} & A_{2r,2r} \end{bmatrix} \quad (25)$$

onde $r = i, j, k$ para os pontos N_k , N_i e N_j .

Sendo a matriz de rigidez dos pontos N_i e N_j do tipo da equação (25) então a matriz de flexibilidade no ponto N'_k na superfície do corpo B, que é a projeção do ponto N_k do corpo A, será dada por:

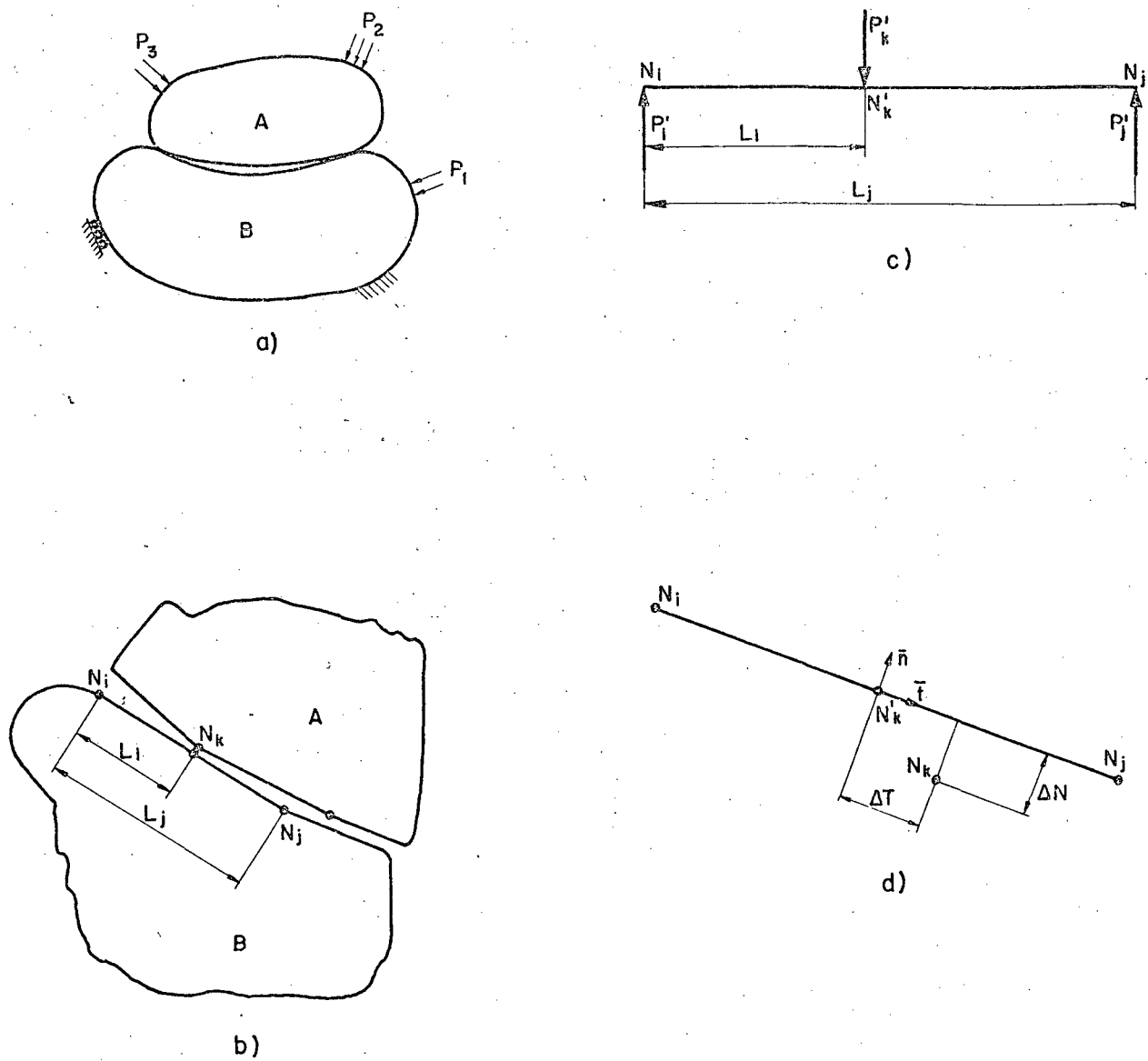


Fig. 11- a) Modelo de dois corpos elasticos em contato.

b) Representação dos nós ao longo do contato.

c) Esquema para efeito de cálculo das forças de contato.

d) Representação dos deslocamentos relativos dos nós ao

longo do contato.

$$[K']^{-1}_k = \left(1 - \frac{L_i}{L_j}\right)^2 [K]^{-1}_i + \left(\frac{L_i}{L_j}\right)^2 [K]^{-1}_j \quad (26)$$

As deformações no ponto N'_k , sobre a linha $N_i N_j$ devido ao carregamento \bar{q} são dados por:

$$\bar{v} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = - [K']^{-1}_k \bar{q} \quad (27)$$

Se um pequeno acréscimo da força normal $\Delta\bar{q}_n$ é aplicada no ponto N_k , o deslocamento deste ponto será $\Delta\bar{w}$, e uma força oposta $\Delta\bar{q}_n$ é aplicada no ponto N'_k , o deslocamento deste ponto é $\Delta\bar{v}$ e pode-se escrever:

$$\Delta\bar{w} = \begin{Bmatrix} \Delta U_{2k-1} \\ \Delta U_{2k} \end{Bmatrix} = [K]^{-1}_k \Delta\bar{q}_n \quad (28a)$$

$$\Delta\bar{v} = - [K']^{-1}_k \Delta\bar{q}_n \quad (28b)$$

Pretende-se agora determinar a força $\Delta\bar{q}_n$ que fará com que o ponto N_k se desloque sobre a linha $N_i N_j$, ou seja que não haja interferência dos dois corpos elásticos, logo:

$$(\Delta\bar{w} - \Delta\bar{v}) \cdot \bar{n} = \Delta N \quad (29)$$

onde ΔN é a distância entre o ponto N_k e a linha $N_i N_j$ e \bar{n} é um vetor unitário normal a superfície de contato.

Substituindo as equações (28a) e (28b) na equação (29) tem-se:

$$([K]^{-1}_k + [K']^{-1}_k) \Delta\bar{q}_n \cdot \bar{n} = \Delta N \quad (30)$$

$$e \quad \Delta\bar{q}_n \times \bar{n} = 0 \quad (31)$$

Sendo determinado o valor de $\Delta\bar{q}_n$ pode-se calcular a força normal no contato pela seguinte relação:

$$\bar{q}_n^{s+1} = \bar{q}_n^s + \Delta\bar{q}_n \quad (32)$$

onde s é a ordem da iteração.

No caso em que \bar{q}_n^{s+1} não é de compressão então consi
dera-se:

$$\bar{q}_n^{s+1} = 0 \quad (33)$$

Quando as forças de atrito são consideradas pode-se
escrever:

$$([K']^{-1}_k + [K]^{-1}_k) \bar{q}_t \cdot \bar{t} = \Delta T \quad (34)$$

$$e \quad \bar{q}_t \times \bar{t} = 0 \quad (35)$$

onde ΔT é a distância entre os pontos N'_k e N_k na direção tangencial.

A força de atrito é dada pelas seguintes equações:

$$\bar{q}_t^{s+1} = \bar{q}_t \quad \text{se } |\bar{q}_t| < f |q_n^{m+1}| \quad (36b)$$

ou

$$\bar{q}_t^{s+1} = f |\bar{q}_n^{s+1}| \bar{t} \quad \text{se } |\bar{q}_t| \geq f |q_n^{s+1}| \quad (36b)$$

onde a equação (36a) corresponde ao caso em que não ocorre es-
corregamento das superfícies, e a equação (36b) quando há escorregamento
das superfícies.

Quando concluído o processo iterativo tem-se, pelas
equações (32) e (36), as forças do nó N_k , dado pela relação

$$\left\{ \begin{array}{l} P'_{2k-1} \\ P'_{2k} \end{array} \right\} = \bar{q}_n^{s+1} + \bar{q}_t^{s+1} \quad (37)$$

Uma das principais desvantagens deste método surge
quando será necessário considerar as forças de atrito. Neste ca-
so é necessário determinar o ponto N'_k ou seja onde o ponto N_k
do corpo A inicia o contato com o corpo B. A localização do
ponto N'_k permite determinar a direção das forças de atrito.

Para determinar a localização do ponto N'_k procede-se
da seguinte forma. Inicialmente a força externa é reduzida, um
valor arbitrário, determina-se as forças de contato e desloca-
mentos ao assumir que as forças de contato existam somente nos
pontos onde os pontos N'_k são conhecidos e determina-se a variação

ção das folgas nos outros pontos onde poderá haver contato. A força externa é aumentada graduativamente até que a folga para um determinado ponto é menor do que um valor admissível, portanto, localizou-se novo ponto N'_k . Com mais pontos, N'_k conhecidos, considera-se no cálculo as forças de contato destes pontos. Assim sucessivamente aumenta-se a carga até que o carregamento externo seja integralmente aplicado. Como se verifica o trabalho de computação é anti-econômico e segundo a referência¹⁵ deve-se evitar à medida do possível.

A precisão deste método foi testada no contato de dois cilindros¹⁵ e quando os resultados da distribuição de pressão foram comparados com os resultados obtidos pela solução de Hertz obteve-se boa correlação.

6. RIGIDEZ NORMAL E TANGENCIAL DAS SUPERFÍCIES USINADAS.

Quando uma superfície usinada é analisada no rugosímetro verifica-se que esta se apresenta com asperezas maiores ou menores dependendo do processo de usinagem e de sua qualidade. Colocando duas superfícies usinadas em contato constata-se que a área real de contato é menor do que a aparente ou seja somente se verificam contatos nos picos das asperezas^{18,19}. O número de contatos aumenta com a pressão no contato.

Através de ensaios^{9,18,19,23,24} quando duas peças de pequena área aparente de contato são pressionadas, as deformações ou a aproximação das superfícies e da forma mostrada na figura 12.

Segundo as pesquisas realizadas a aproximação das superfícies pode ser relacionada à pressão de contato pela equação:

$$\lambda_n = c (p_n)^m \quad (38)$$

onde λ_n é a aproximação das superfícies dada em μm , p_n é a pressão de contato dada em Kgf/cm^2 e os valores de c e m dependem do acabamento superficial e do par de materiais das peças em contato. O valor de m é da ordem de 0,5 e o valor de c varia entre 0,3 e 2,0 para o caso de aço e ferro fundido ao considerar os tipos convencionais de acabamento superficial. Um estudo mais completo a respeito da rigidez normal das superfícies pode-se encontrar nas referências^{9,18,19,23,24}.

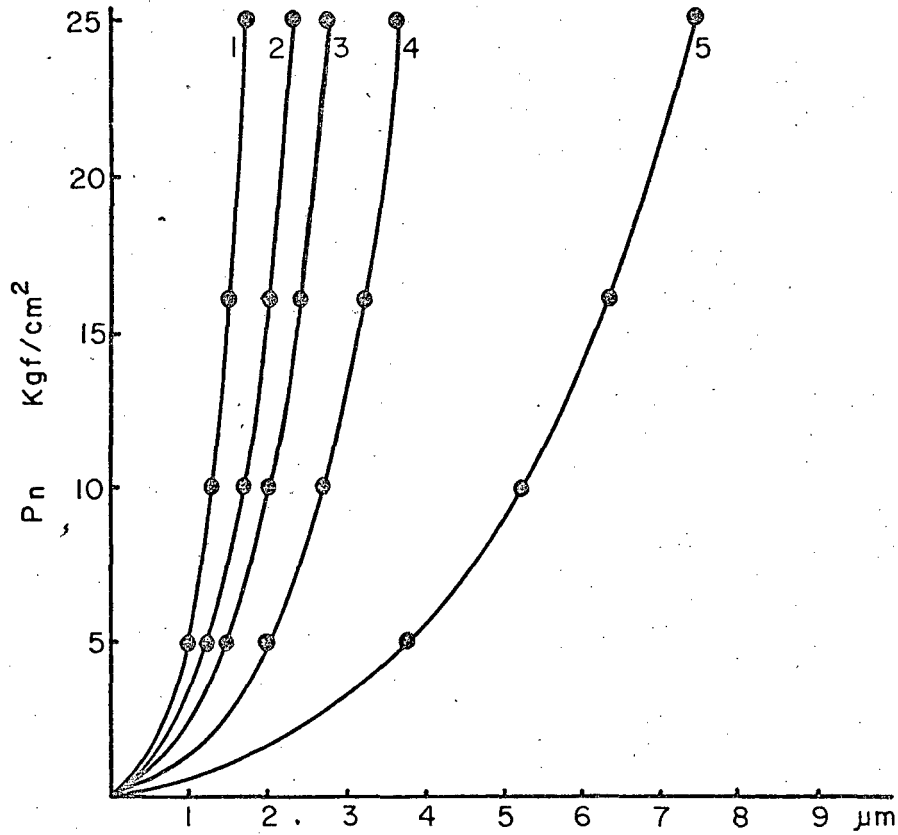


Fig. 12. Relação entre a pressão e deformação para superfícies de ferro fundido. 1 - Retificado. 2 - Rasquetado fino, $Z = 24$ a 36 . 3 - Plainamento de acabamento. 4 - Rasquetado normal. 5 - Rasquetado grosseiro, $Z = 5$ a 10 .

No caso em que as peças são submetidas a um carregamento normal e posteriormente ao carregamento tangencial tem-se que a relação entre a pressão tangencial e a deformação é da forma como mostra a figura 13a. Como se verifica no primeiro carregamento tem-se deformações permanentes que são de natureza elástica, plástica e de escorregamento²⁵. Quando as superfícies são descarregadas e carregadas sem ultrapassar a pressão do primeiro ciclo de carga então o comportamento é puramente elástico. Pode-se desta forma traçar a variação da flexibilidade tangencial das superfícies em função da pressão normal como mostra a figura 13b. As figuras 14a e 14b mostram resultados obtidos nas referências^{9,19} e como se verifica nos ciclos sucessivos de carga e descarga o comportamento das superfícies é aproximadamente linear, portanto, pode-se relacionar a pressão e deformação tangencial como segue:

$$\lambda_s = K_s p_s \quad (39)$$

onde λ_s e p_s são respectivamente a deformação e pressão tangencial na superfície de contato.

Como mostra a figura 13b, o valor de K_s decresce com o aumento da pressão normal p_n , e tem-se verificado que a flexibilidade tangencial pode ser relacionada com p_n como segue^{9,19}:

$$K_s = \frac{R}{(p_n)^s} \quad (40)$$

onde R e s dependem do acabamento superficial e do par de materiais.

De acordo com estudos efetuados pelo Autor^{9,19} o valor de s é aproximadamente igual a 0,5 e o valor de R pode ser calculado como segue:

$$R = c m \frac{E}{G} \quad (41)$$

onde E e G são os módulos de elasticidade normal e tangencial do par de materiais dados em Kgf/mm^2 .

Na figura 14a e 14b tem-se os resultados experimentais^{9,19} da flexibilidade tangencial de superfícies de ferro

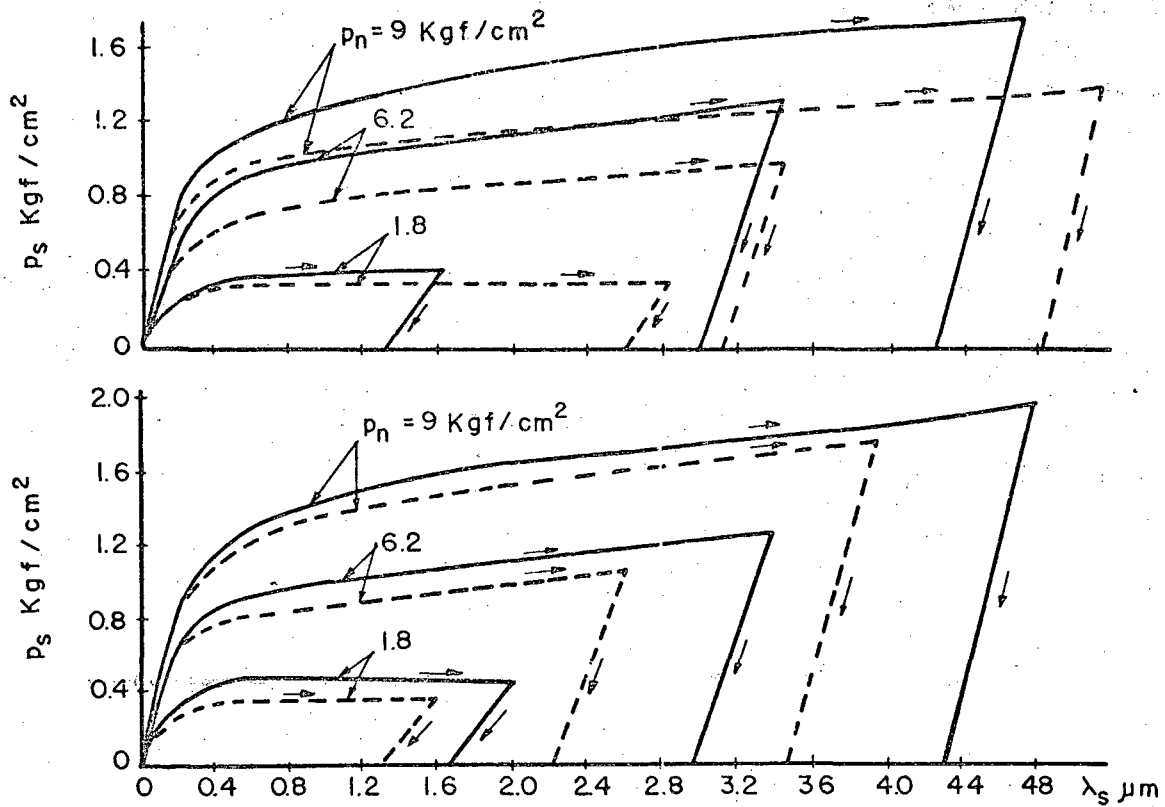


Fig.13 a - Deformações tangenciais de superfícies de ferro fundido, uma retificada e outra rasquetada. a) Contato de cinco minutos, linhas contínuas para superfícies sêcas e tracejadas com lubrificação. b) Linhas contínuas para contato de 24 horas e tracejadas para cinco minutos.

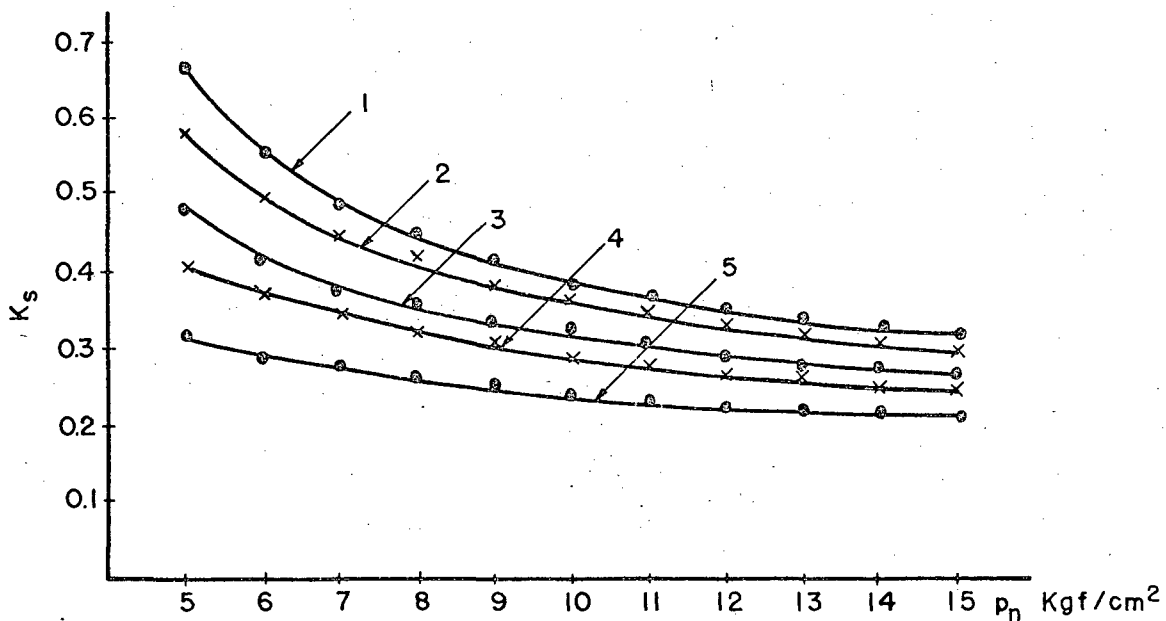


Fig.13b - Resultados experimentais da flexibilidade de superfícies de ferro fundido. 1- Rasquetado normal. 2- Rasquetado fino. 3- Torneamento fino. 4- Retificado. 5 - Rasquetado muito fino.

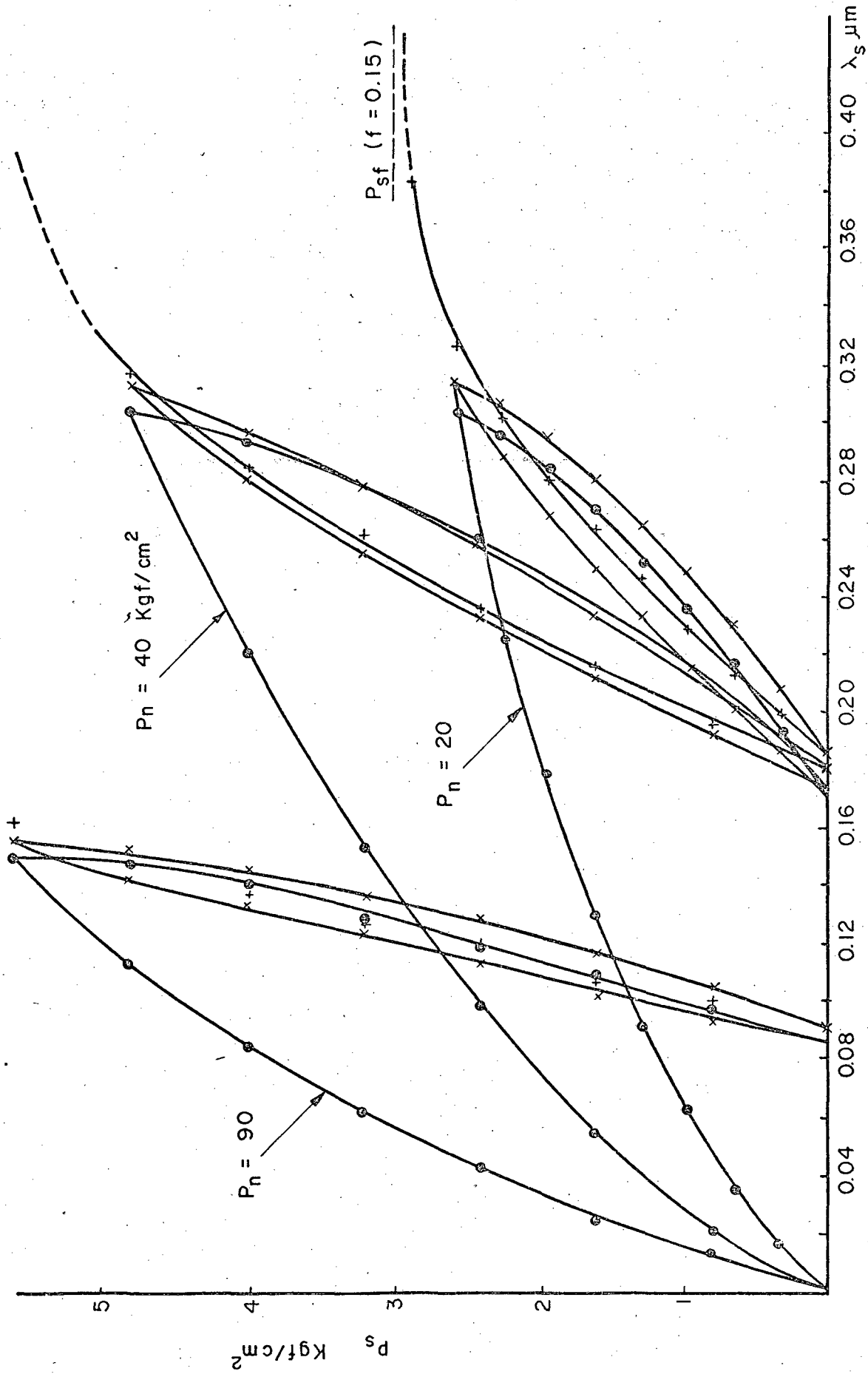


Fig. 14a - Medida de deformações tangenciais para diversas pressões normais para um par de superfícies de ferro fundido (retificado e rasquetado).

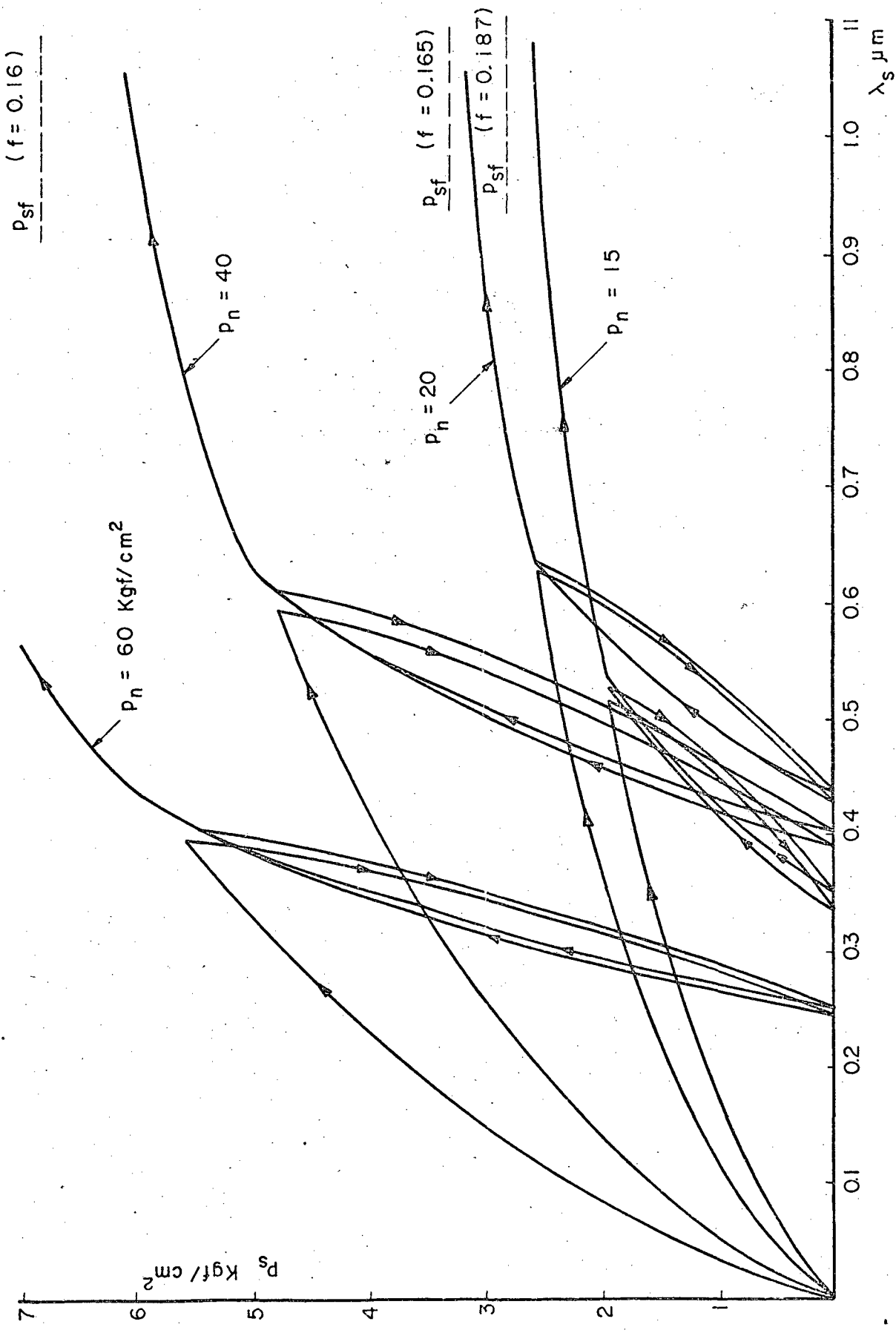


Fig 14b - Relação entre pressão e deformação tangencial de superfícies de ferro fundido (retificado e retificado).

fundido considerando altas pressões de contato. Na figura 15b, tem-se uma comparação entre a flexibilidade tangencial e normal com o objetivo de comprovar que a relação entre as flexibilidades K_s e K_n é da ordem de E/G .

O estudo apresentado até o momento é válido quando a pressão normal é aplicada integralmente e em seguida aplica-se o carregamento tangencial.

Quando o carregamento é aplicado simultaneamente então pode-se demonstrar^{9,19} que a deformação tangencial é dada pela relação:

$$\lambda'_s = \frac{R \cdot \alpha}{1 - s} (p_n - p_{no}) (1-s) \quad (42)$$

onde α é a relação entre a pressão tangencial e normal e que deverá ser menor do que o coeficiente de atrito f quando a pressão normal inicial p_{no} é nula.

Para comprovar os resultados teóricos da equação (42) foram efetuados testes^{9,19} obtendo relações entre p_s e λ'_s como mostram as figuras 16a e 16b. Nestas figuras as curvas S representam o carregamento simultâneo, enquanto que as curvas NS indicam o carregamento não simultâneo. Comparando as equações (42) e (39) e como s é aproximadamente igual a 0,5, conclui-se que no carregamento simultâneo a deformação deverá ser o dobro. Nos testes efetuados, foi possível o carregamento simultâneo, somente no primeiro ciclo de carga e observando as figuras 16a e 16b constata-se que as equações são válidas.

Como um último dado necessário para os métodos de cálculo da distribuição de pressão e deformações em corpos elásticos em contato, que serão descritos a seguir, é a deformação elástica limite acima da qual as superfícies escorregam. Para que não haja escorregamento entre as superfícies, a pressão tangencial deve ser menor do que a força de atrito ou seja:

$$p_s \leq f \cdot p_n \quad (43)$$

Substituindo nesta equação o valor de p_s em função de λ'_s , e p_n em função de λ'_n tem-se que a deformação elástica limite é dada por:

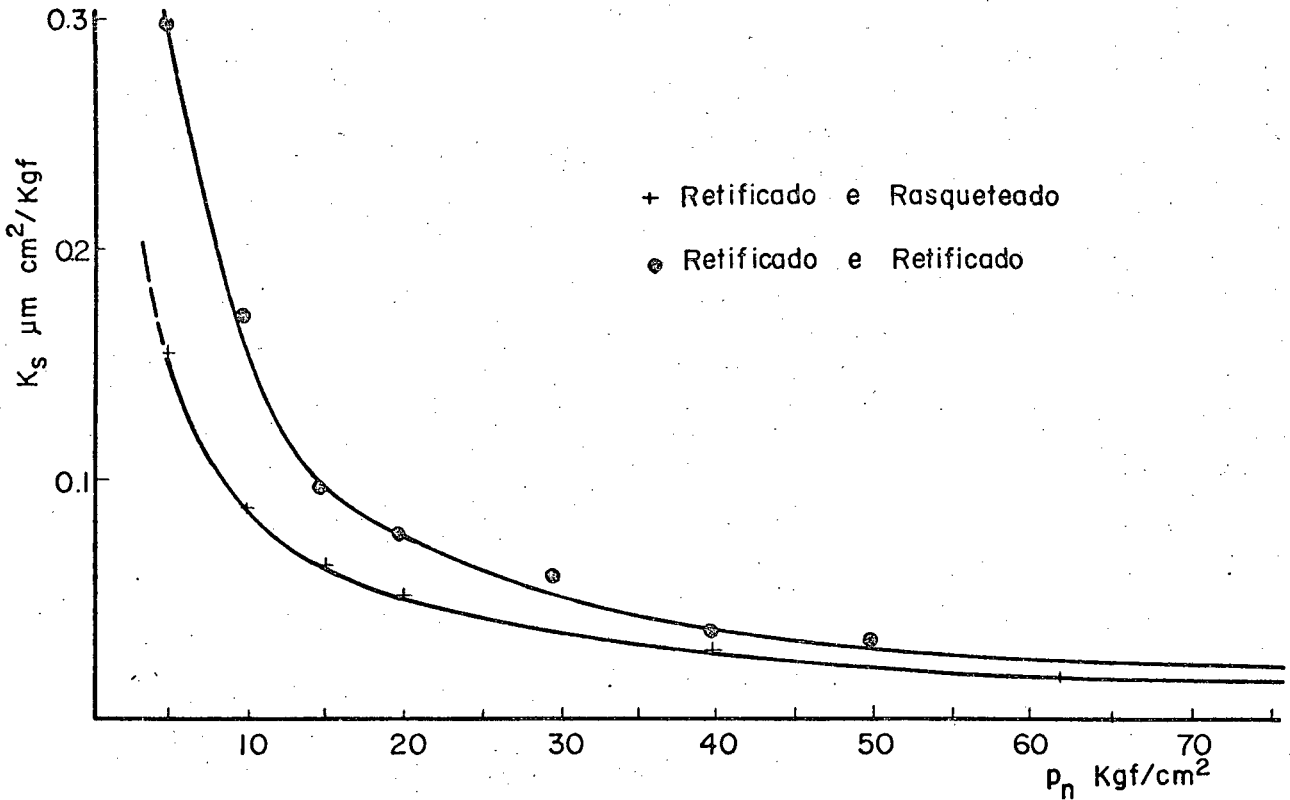


Fig.15a - Comparação da flexibilidade tangencial de superfícies de ferro fundido.

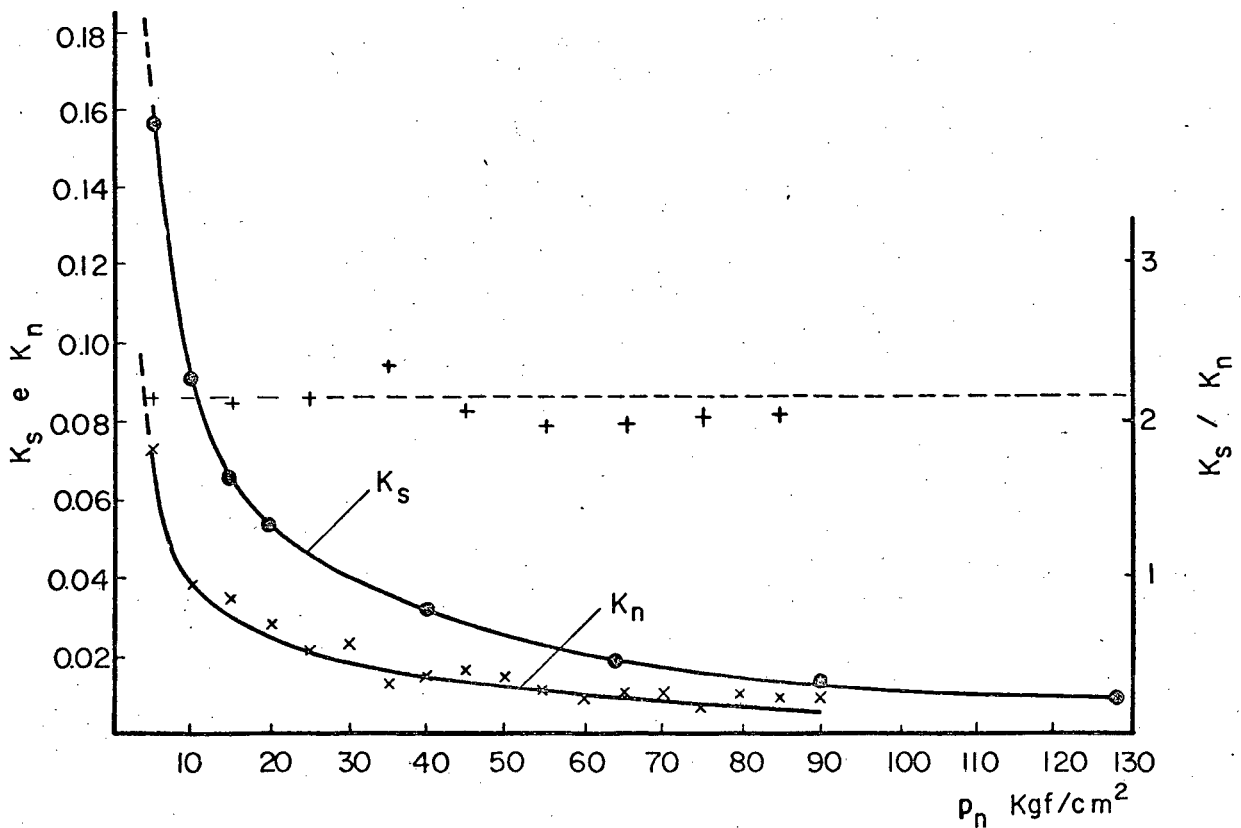


Fig. 15b - Flexibilidade normal e tangencial em função da pressão normal para superfícies de ferro fundido (Retificado e rasquetado)

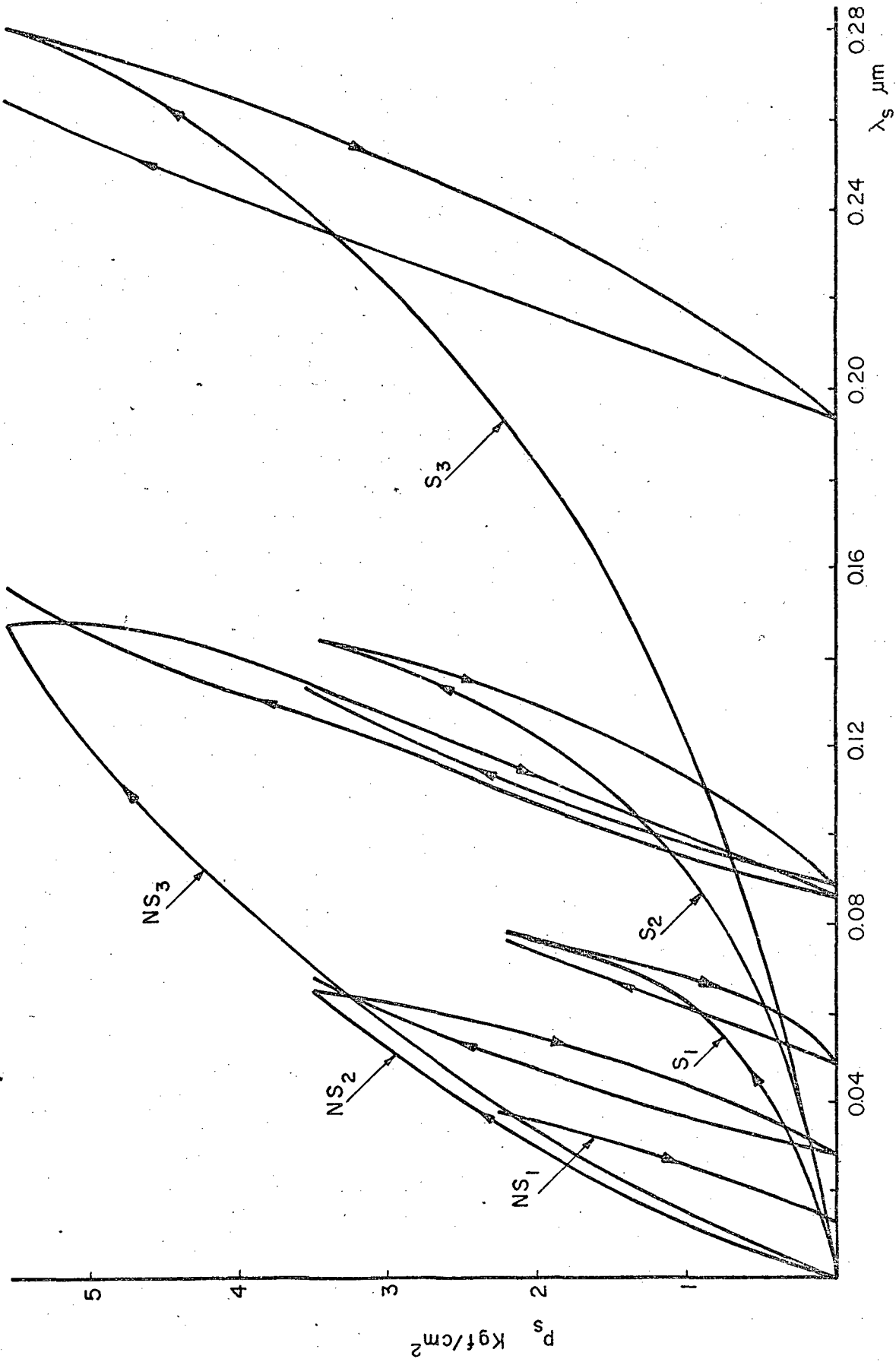


Fig. 16a — Deformação tangencial de superfícies de ferro fundido (Rasqueteado e retificado). S — Carregamento simultâneo. NS — Carregamento não simultâneo. Máxima pressão normal de 90 Kg/cm^2 para todos testes.

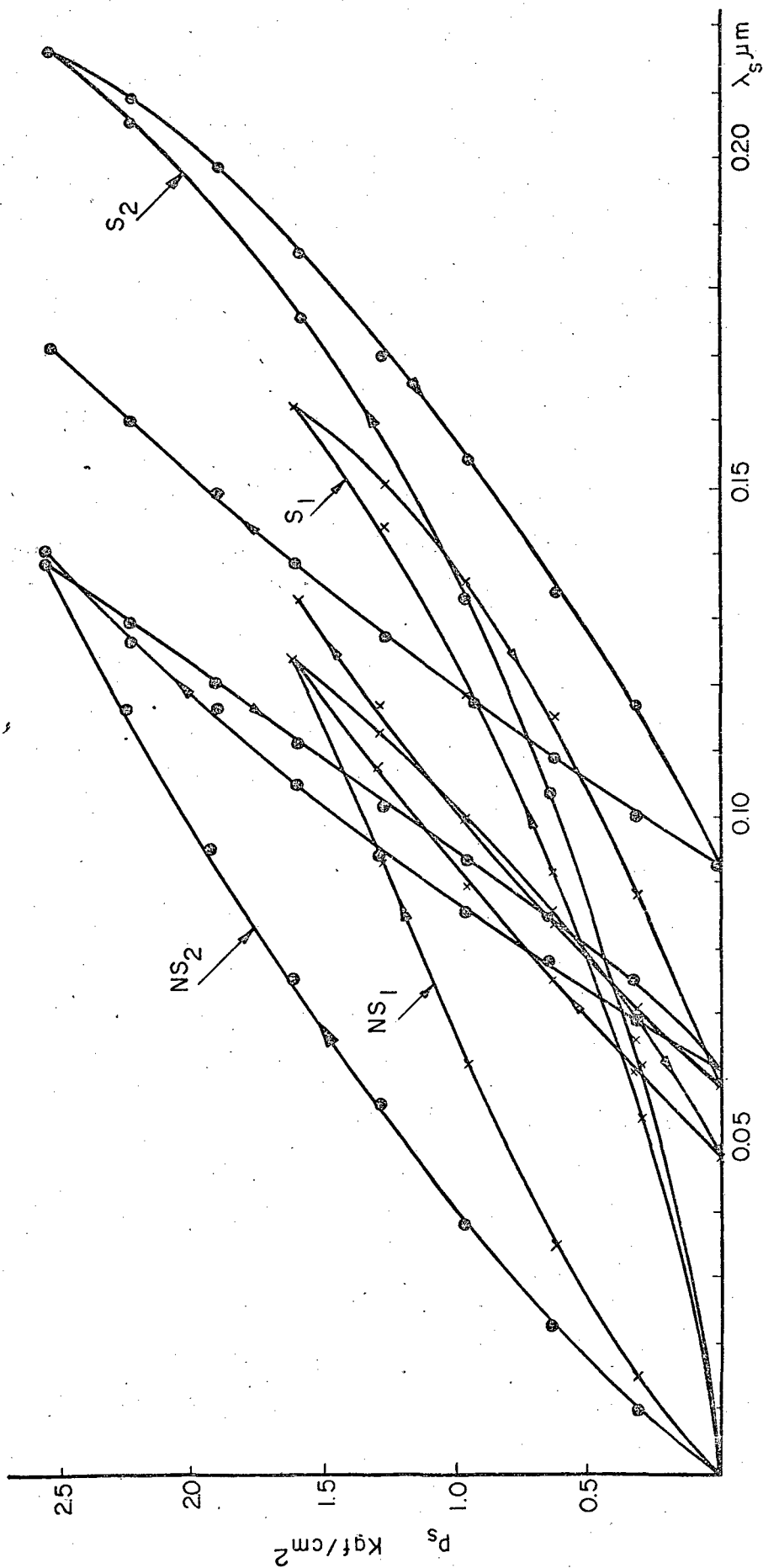


Fig. 16b - Relação entre a pressão e deformação tangencial de superfícies de ferro fundido (retificado e retificado). S - Carregamento simultâneo, NS - Carregamento não simultâneo. • Máxima pressão normal de 50 Kgf/cm^2 . x Idem para 30 Kgf/cm^2 .

$$\lambda_{sf} = f R \left(\frac{\lambda_n}{c} \right) (1-s)/m \quad (44)$$

que é válida para o caso em que o carregamento não é simultâneo.

Para carregamento simultâneo pode-se deduzir da mesma forma a seguinte equação:

$$\lambda'_{sf} = \frac{R f}{1-s} \left(\frac{\lambda_n}{c} \right) (1-s)/m \quad (45)$$

As relações (44) e (45) permitem determinar se as superfícies em contato estão deformadas elasticamente ou se houve escorregamento na direção tangencial.

7. MÉTODO DE SIMULAÇÃO DA PRESSÃO.

Para a descrição do método^{9,21} considera-se o cálculo da distribuição de pressão no contato e as deformações, devido a força P, dos corpos elásticos em contato mostrados na figura 17a. Para simplicidade supõe-se que as peças sejam de pequena e igual espessura de modo a considerar um estado plano de tensões o que não é uma limitação.

O primeiro passo para a solução consiste em dividir ambas as peças em elementos finitos, como mostra a figura 17b, de uma forma independente, com exceção ao longo do contato onde recomenda-se que os nós sejam coincidentes formando pares de nós. A distância entre os consecutivos pares de nós pode ser diferente mas, como será mostrado mais adiante, o cálculo e preparação de dados torna-se mais fácil quando as distâncias são iguais.

Considerando que o sistema seja simétrico, como mostra a figura 17a, então os deslocamentos u ao longo de AB são nulos, então os dois corpos elásticos são analisados independentemente com os pontos A e B fixos.

A solução do problema é de forma iterativa, então para a primeira iteração assume-se uma distribuição de pressão no contato, por exemplo, pressão uniforme estaticamente em equilíbrio com a força externa P. Desta distribuição de pressão, calcula-se forças equivalentes ($P_{(i+n)}$) concentradas nos nós como mostra a figura 17b. Com os dados assim preparados, calcula-se as deformações das duas peças, através de um programa de compu-

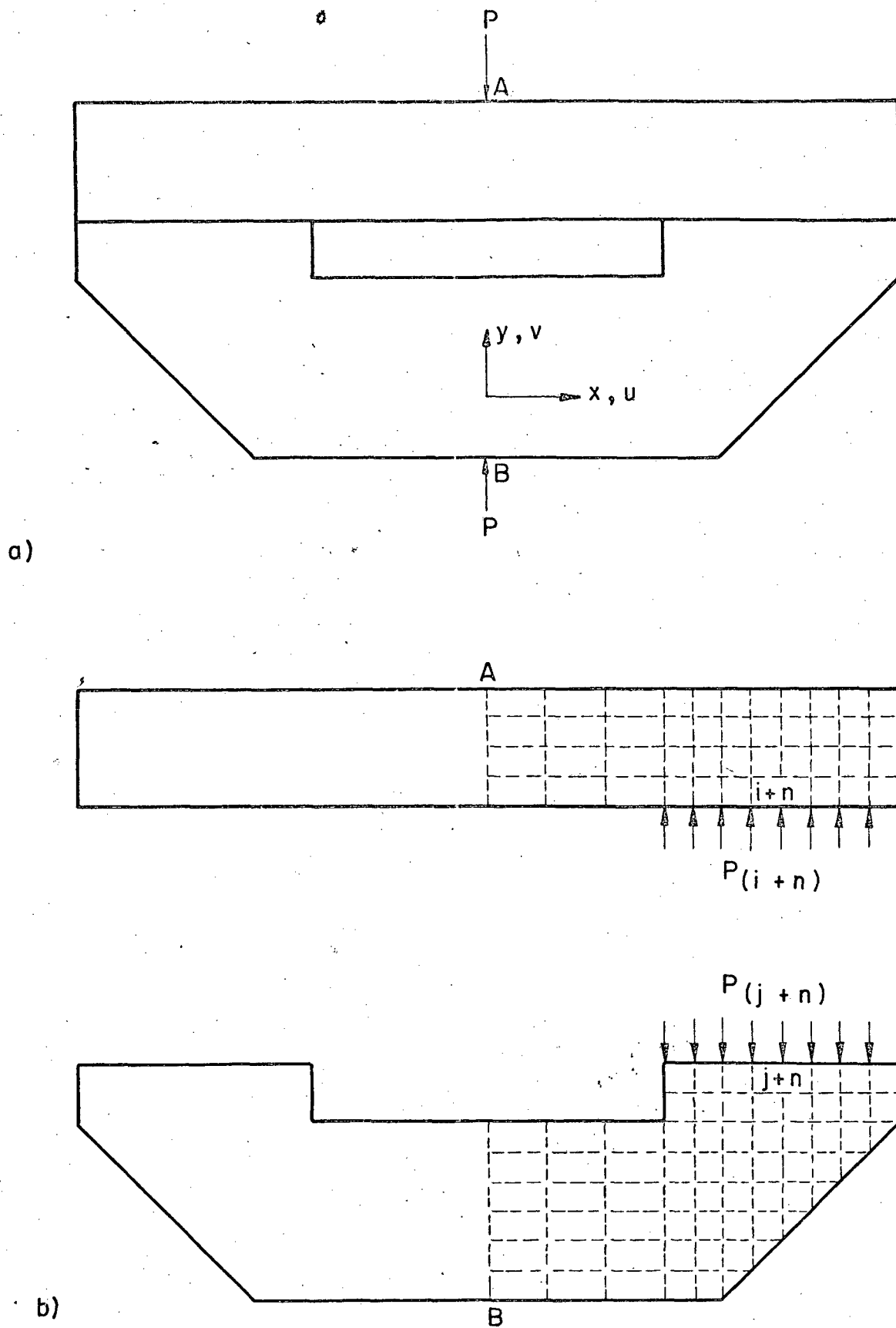


Fig. 17. a) Modelo de corpos elásticos em contato.
 b) Divisão em elementos finitos e forças nos nós ao longo do contato.

tador para o método do elemento finito. Considera-se, assim, que os deslocamentos v , das duas peças, ao longo do contato, sejam os mostrados na figura 17c.

Para a preparação dos dados da segunda iteração, calcula-se em primeiro lugar a diferença dos deslocamentos v dos pares de nós como segue:

$$d_{(i+n, i+j)} = V_{(i+n)} - V_{(i+j)} \quad (46)$$

Comparando os valores da equação (46), seleciona-se o menor valor, seja $d_{(i,j)}$ e calcula-se os seguintes valores:

$$D_{(i+n, j+n)} = d_{(i+n, j+n)} - d_{(i,j)}$$

que estão apresentados na figura 17d.

Para a segunda iteração calcula-se uma nova distribuição de pressão, função dos deslocamentos v , ou de uma forma já modificada conforme os valores da figura 17d. Pela figura 17d, pode-se concluir se os componentes da junta são flexíveis ou não e conseqüentemente se o contato entre as duas peças permanece ou não ao longo da superfície aparente. Supõe-se no caso em que o contato permanece ao longo da superfície nominal. Considera-se então uma extrapolação linear como mostra a figura 17d. Para as aplicações práticas esta é uma boa aproximação, isto porque, a pressão nesta parte da superfície é pequena e pode-se considerar que as superfícies em contato permanecem retilíneas. No ponto onde se tem o menor valor da equação (46), assume-se que a compressão das superfícies seja $\lambda_{n(i,j)}$, um valor arbitrário em geral bem maior do que o valor final esperado. A partir deste valor traça-se uma linha reta como mostra a figura 17d, e no ponto de intersecção com a curva, a pressão de contato torna-se nula. As distâncias entre estas duas linhas, considera-se como sendo as deformações de contato e são calculadas por:

$$\lambda_{n(i+n, j+n)} = \lambda_{n(i,j)} - D_{(i+n, j+n)} \quad (47)$$

De acordo com a equação (38) pode-se calcular a pressão nos pontos dos pares de nós como segue:

$$p'_{n(i+n, j+n)} = \left(\frac{\lambda_{n(i+n, j+n)}}{c} \right)^{1/m} \quad (48)$$

que está apresentada na figura 17e.

Quando esta distribuição de pressão é integrada ao longo da superfície de contato a força deverá ser maior ou igual a força externa P, caso contrário a suposição inicial não é correta. Para calcular as forças que deverão ser aplicadas nos nós para a segunda iteração, introduz-se a seguinte correção:

$$\sum_{n=0}^{n=q} \frac{p_{n(i, j)}}{p'_{n(i, j)}} A_{(i+n, j+n)} p'_{n(i+n, j+n)} = P \quad (49)$$

onde q é o número de pares de nós em contato e $A_{(i+n, j+n)}$ é a área de influência de cada par de nós. Na equação (49) a incógnita é $p_{n(i, j)}$ e ao ser calculada permite corrigir a distribuição de pressão como segue:

$$p_{n(i+n, j+n)} = p_{n(i, j)} \frac{p'_{n(i+n, j+n)}}{p'_{n(i, j)}} \quad (50)$$

que está apresentada na figura 17e.

Pela distribuição de pressão, mostrada na figura 17e, calcula-se as forças concentradas na figura 17f, o método do elemento finito é aplicado e a deformação dos corpos elásticos são calculadas para a segunda iteração. Para as demais iterações reduz-se o valor de $\lambda_{n(i, j)}$, reduções maiores no início e menores quando se aproxima do resultado final. Outra forma consiste em reduzir o comprimento de contato nas sucessivas iterações, o que é recomendado.

Para analisar a convergência do método verifica-se no par de nós, onde o valor da equação (46) é o máximo, que de uma para outra iteração o valor de $p'_{n(i, j)}$ decresce e $p_{n(i, j)}$ cresce. A convergência se verifica quando os dois valores são iguais ou seja:

$$p'_{n(i, j)} = \left(\frac{\lambda_{n(i, j)}}{c} \right)^{1/m} \quad (51)$$

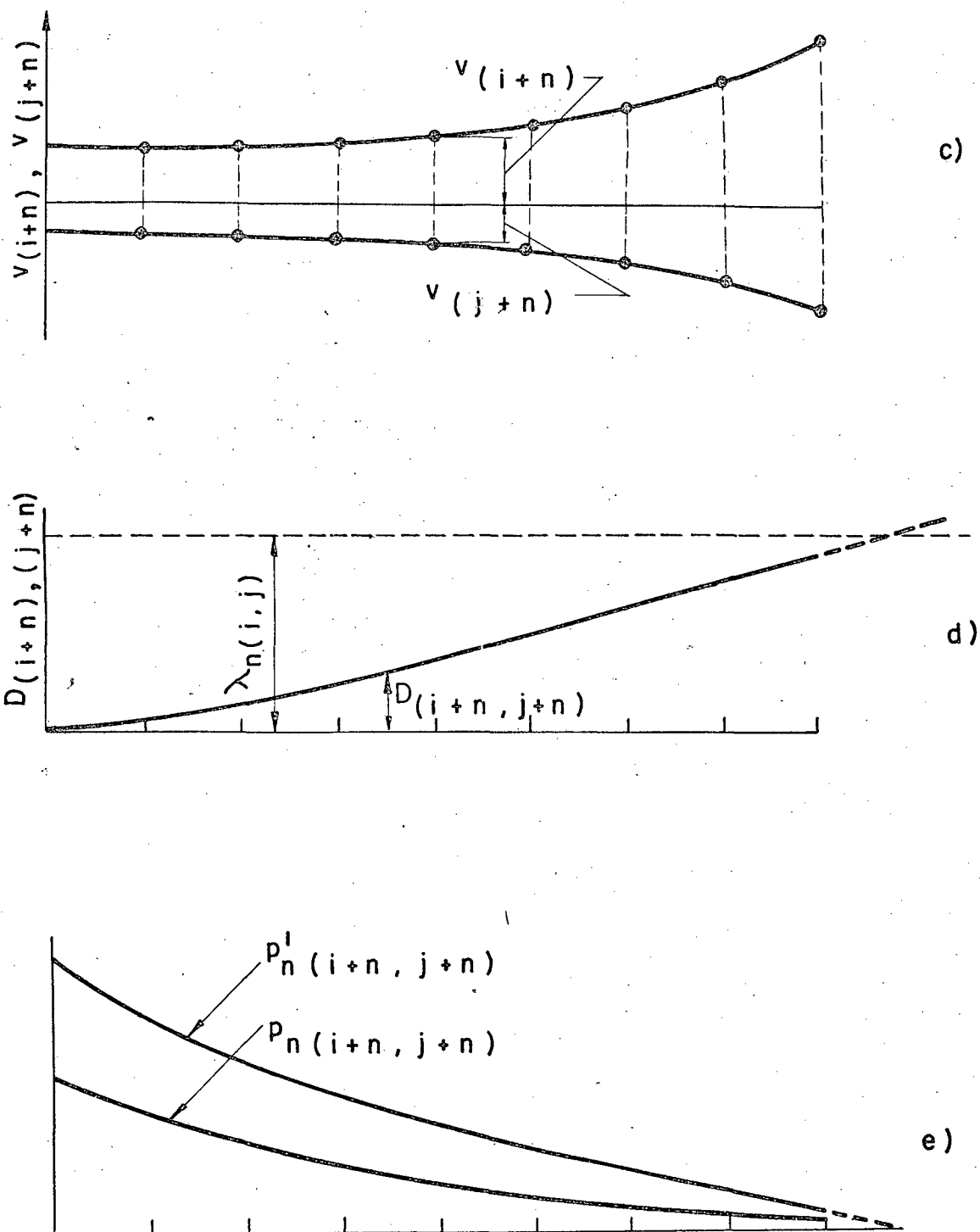


Fig. 17 c) Deslocamentos dos nós na superfícies de contato.
 d) Deformações de contato usadas para gerar nova distribuição de pressão.
 e) Distribuição de pressão calculada.

A figura 17g mostra a distribuição de pressão obtida nas sucessivas iterações.

Para a última iteração as deformações de cada corpo e lástico estão determinadas e a compressão superficial é calculada. A partir destes resultados pode-se construir o sistema deformado e a respectiva distribuição de pressão no contato.

No caso em que requer-se o deslocamento relativo entre os pontos A e B da figura 17a este será calculado pela relação:

$$d_{AB} = d(i,j) + \lambda_n(i,j) \quad (52)$$

O método de simulação da pressão não é recomendado para o caso de corpos elásticos em contato e não simétricos^{9,21,22}.

Para o método aquidescrito não foi considerado o efeito da rigidez tangencial das superfícies bem como as forças de atrito. Nas referências^{9,22} tem-se descrito a forma de introduzir estes efeitos, mas para o presente método torna-se muito trabalhoso, portanto, pouco recomendado.

A vantagem da aplicação deste método consiste em que a matriz de rigidez do sistema não se modifica de uma para outra iteração, o que varia é o vetor de carregamento nos nós de contato.

8. MÉTODO DA PLACA.

Para descrever o método, considera-se o cálculo das deformações e a distribuição de pressão no contato dos corpos e lásticos mostrados na figura 18a. Neste exemplo, supõe-se para simplicidade de descrição, que as duas peças são de espessura u nitária, portanto, um estado plano de tensões.

O primeiro passo consiste em dividir ambas as peças em elementos finitos como mostra a figura 18b, onde novamente os nós ao longo do contato devem ser coincidentes.

Para o método da placa, interpõe-se ao longo do contato uma placa fictícia com um comportamento equivalente às superfícies em contato. Quando esta placa é introduzida não se modificam as dimensões do sistema, a espessura da placa é somente considerada para efeito de cálculo da rigidez normal.

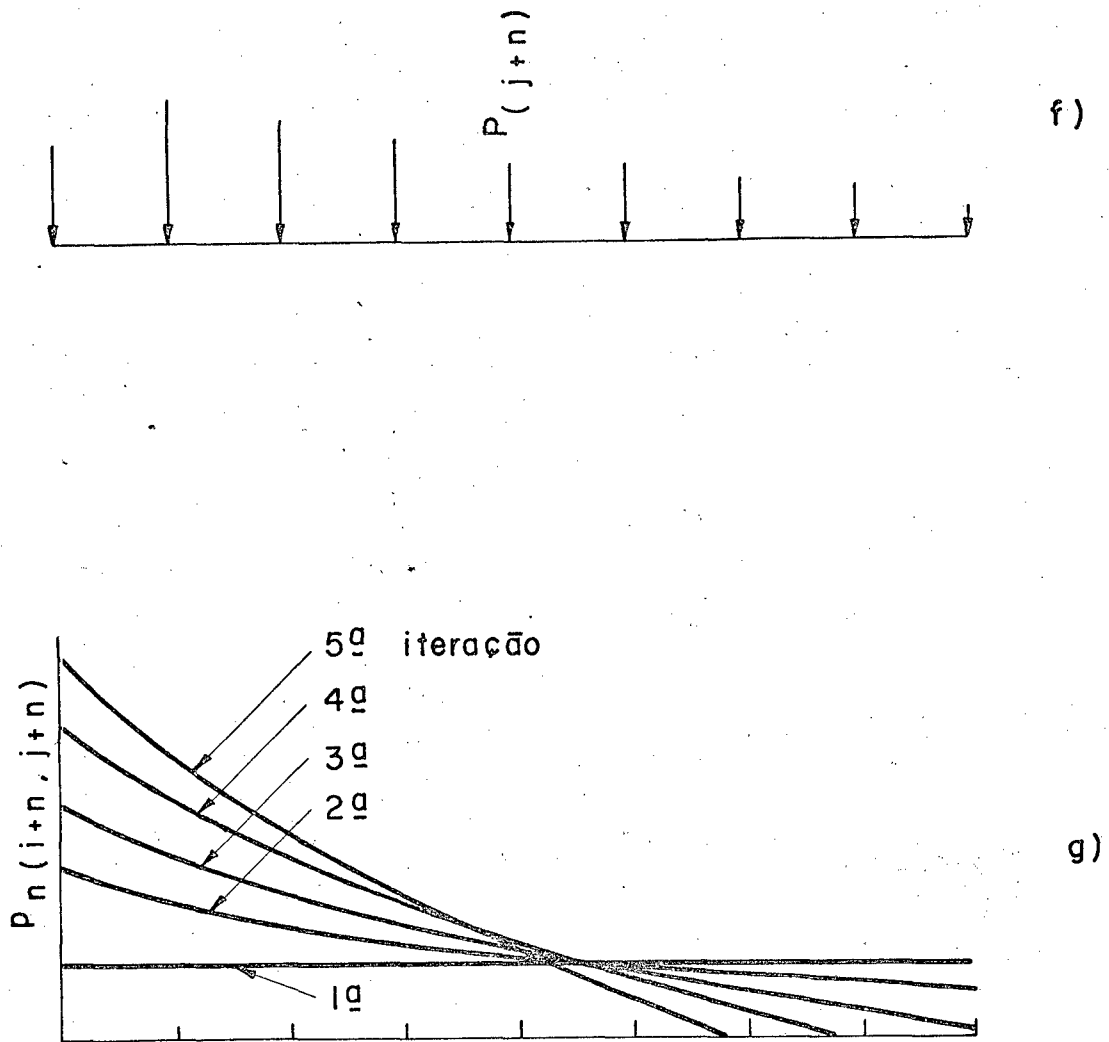


Fig. 17 f) Forças concentradas nos nós ao longo do contato.

g) Sequencia da distribuição de pressão nas diversas iterações.

A espessura e o módulo de elasticidade desta placa devem ser escolhidos de tal forma que a ligação das peças permaneça a mesma do que no caso das superfícies de contato. Esta placa de ligação deveria apresentar as seguintes propriedades: alta rigidez e não linear à compressão; rigidez nula à tração; rigidez ao cisalhamento igual à rigidez tangencial das superfícies e no caso em que haja escorregamento das superfícies deveria simular as forças de atrito no contato. O método descrito não permite todas estas propriedades mas as principais são consideradas.

O processo de solução é de forma iterativa e para a primeira iteração adota-se o seguinte: para a espessura da placa adota-se um valor constante, por exemplo 1 mm; o módulo de elasticidade da placa é escolhido em função do acabamento superficial, do par de materiais e da distribuição de pressão; a distribuição de pressão deve ser arbitrada, pode ser uniforme ou variável de tal forma que esteja em equilíbrio com o carregamento externo.

Para um material isotrópico vale a seguinte relação:

$$p_n = \frac{\lambda_n E}{10 e} \quad (53)$$

onde e é a espessura da placa.

Quando a equação (38) é comparada com a equação (53) tem-se:

$$\left(\frac{\lambda_n}{c} \right)^{1/m} = \frac{\lambda_n E}{10 e}$$

ou

$$E = \frac{10 e \lambda_n^{(1/m-1)}}{c^{1/m}} \quad (54)$$

onde E é o módulo de elasticidade em Kgf/mm^2 , λ_n a compressão superficial em μm e e a espessura em mm.

Considerando um par de nós qualquer k , a equação (54) será escrita como segue:

$$E_k = \frac{10 e \lambda_n^{(1/m-1)}(k)}{c^{1/m}} \quad (55)$$

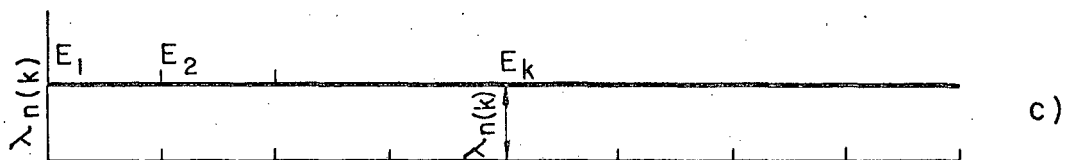
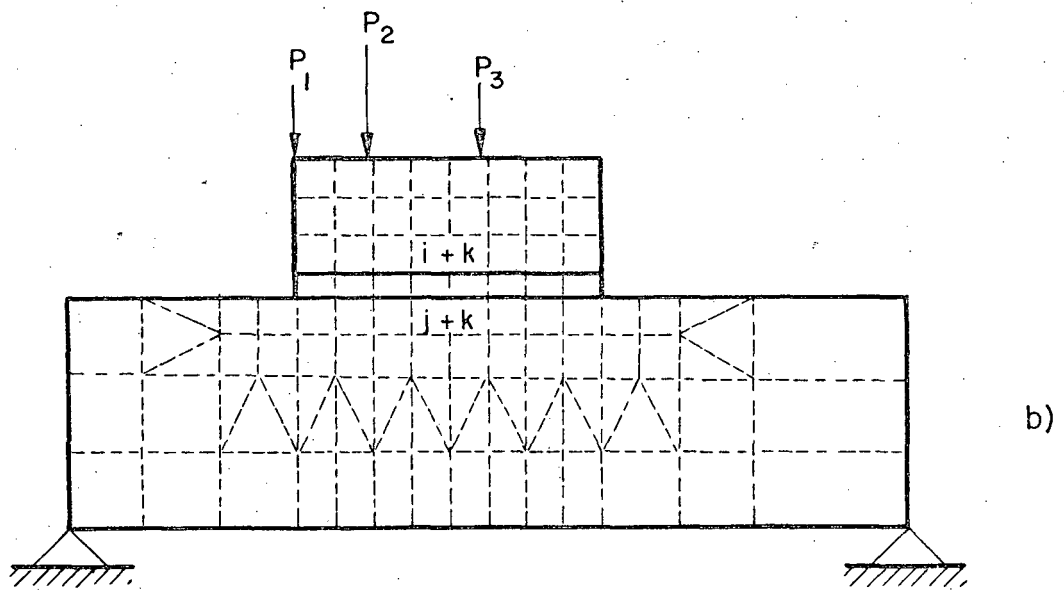
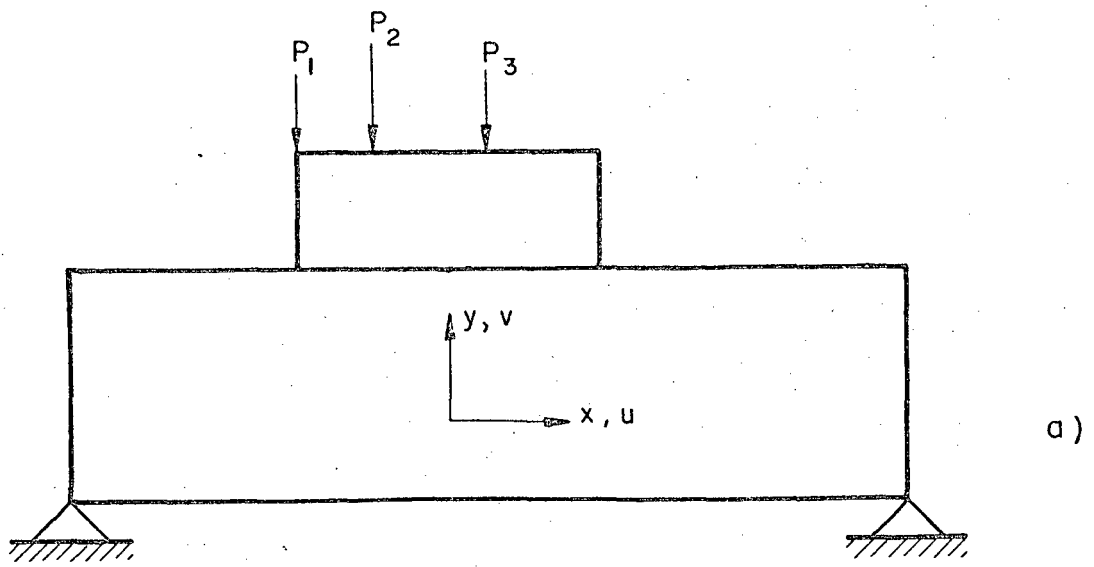


Fig. 18 - a) Modelo da junta. b) Divisão dos elementos finitos e representação da placa fictícia na superfície de contato. c) Deformação de contato para a primeira iteração.

Para o problema da figura 18b, e supondo que a pressão no contato é uniforme, calcula-se a compressão superficial $\lambda_{n(k)}$ pela equação (38) e o correspondente módulo de elasticidade pela equação (55) para cada elemento finito ao longo do contato como mostra esquematicamente a figura 18c.

Para o sistema assim formado, quando o método do elemento finito é aplicado, obtêm-se os deslocamentos, na direção y , dos nós ao longo do contato como mostra a figura 18d. Pela figura se observa que todas as placas finitas estão deformadas em compressão de uma quantidade dada pela relação:

$$\lambda_{n(k)} = V_{(i+k)} - V_{(j+k)} \quad (56)$$

Substituindo estes valores na equação (55) calcula-se o módulo de elasticidade no correspondente par de nós. Para o caso em que $\lambda_{n(k)}$ torna-se negativo, o valor de E_k é considerado nulo ou seja que a placa finita é eliminada. Para a segunda iteração, o módulo de elasticidade das placas finitas é calculado pela média entre os valores de E_k dos pares de nós das extremidades de cada placa, como segue:

$$E'_k = \frac{E_k + E_{k+1}}{2} \quad (57)$$

Com estes valores calculados, tem-se todos os dados preparados para a segunda iteração. Esta sequência é seguida até que a diferença entre os valores de $\lambda_{n(k)}$ de uma para outra iteração é menor que um valor pré-determinado.

Supõe-se que após um determinado número de iterações os deslocamentos dos nós, ao longo do contato, sejam os representados na figura 18e. Quando os valores da equação (56) são calculados para a última iteração então a pressão nos pares de nós em contato são calculados pela equação:

$$p_n(\bar{k}) = \left(\frac{\lambda_{n(k)}}{c} \right)^{1/m} \quad (58)$$

o que está representado na figura 18f.

A distribuição pode também ser calculada pela equação:

$$P_n(k) = \frac{(E'_{k-1} + E'_k) \lambda_n}{20 e} \quad (59)$$

Como será visto mais adiante os resultados obtidos pelas equações (58) e (59) são aproximadamente os mesmos.

Quando a sequência descrita acima for seguida a convergência é certa mas muito lenta. Se a compressão superficial de um determinado par de nós é analisada nas sucessivas iterações obtém-se resultados da forma mostrada na figura 18g, ou seja convergindo para um valor médio. Para aumentar a velocidade de convergência, a compressão superficial adotada para definir o módulo de elasticidade das placas finitas da terceira iteração é considerada como sendo a média entre os valores da primeira e segunda iteração. Para a quarta iteração adota-se a média da primeira média e a compressão superficial da terceira iteração. Seguindo desta forma a convergência é várias vezes mais rápida.

9. MÉTODO DA MOLLA.

O método da mola é similar ao método da placa, a diferença consiste no elemento finito adotado para a ligação dos corpos elásticos em contato. No presente método os pares de nós coincidentes na superfície de contato são ligados por elementos finitos, tipo barras, que apresentam rigidez axial e ao cisalhamento para simular a rigidez normal e tangencial das superfícies em contato.

Em primeiro lugar será descrito a forma de calcular a rigidez normal das barras, como segue. Considerando que num determinado par de nós em contato, a pressão $p_n(k)$ é conhecida e sendo A_k a área de influência deste par de nós, então a força normal transmitida entre as duas peças será dado pela equação:

$$P_n(k) = p_n(k) A_k / 100 \quad (60)$$

Introduzindo entre os dois nós uma barra de secção transversal $a_n(k)$, comprimento L , módulo de elasticidade E , a deformação axial da barra será dada por $\lambda_n(k)$ e tem-se a relação:

$$P_n(k) = \frac{E \lambda_n(k) a_n(k)}{10^3 L} \quad (61)$$

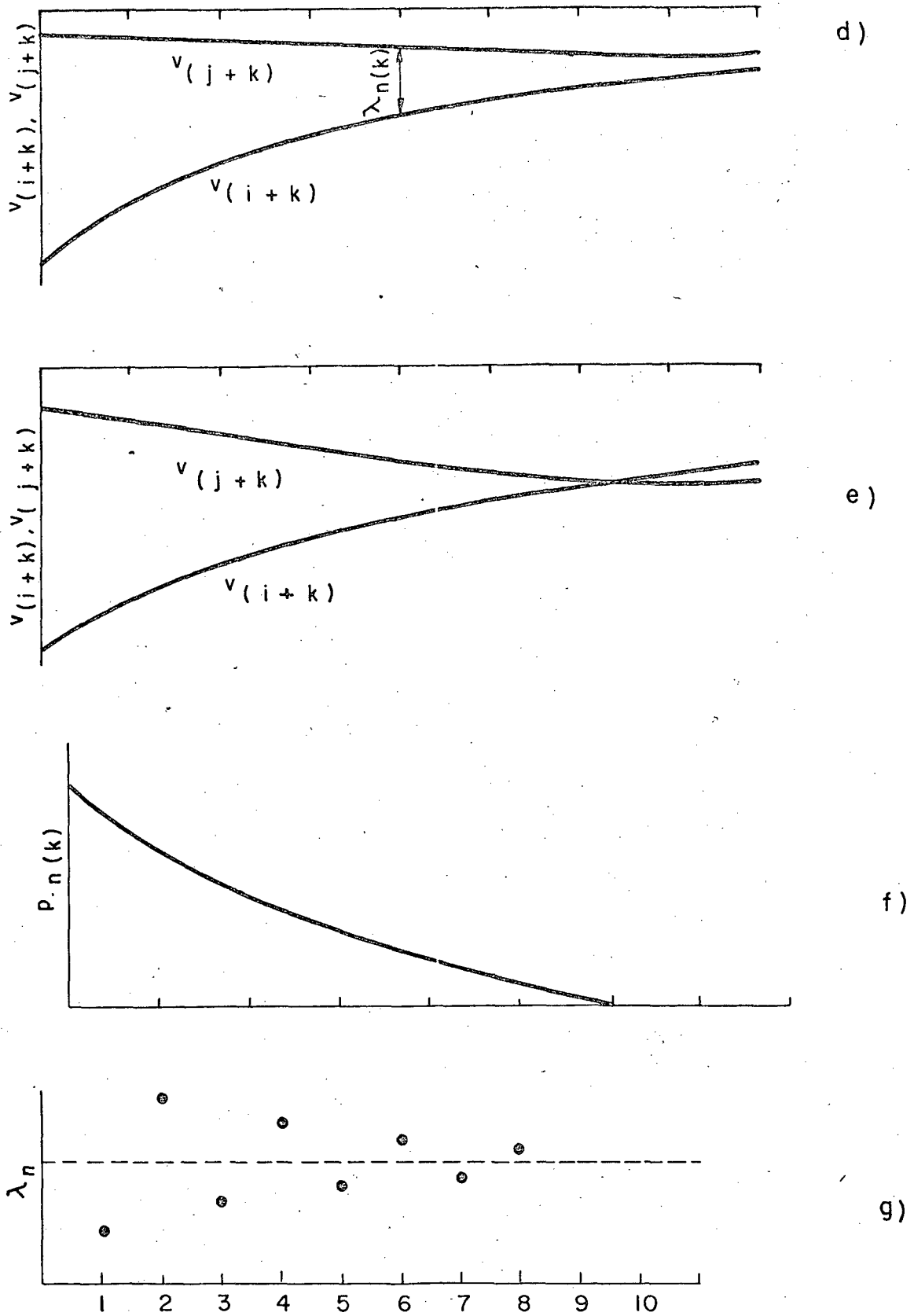


Fig. 18 – d) Deslocamentos dos nós ao longo do contato na primeira iteração. e) Deslocamentos dos nós ao longo do contato na última iteração. f) Distribuição de pressão. g) Sequência das deformações de contato, num par genérico de nós sem acelerar a convergência.

ou

$$a_{n(k)} = \frac{10^3 P_{n(k)} L}{E \lambda_{n(k)}} \quad (62)$$

Quando $P_{n(k)}$ da equação (60) e $p_{n(k)}$ da equação (58) são substituídos na equação (62) obtém-se:

$$a_{n(k)} = \frac{10 L A_k \lambda_{n(k)}^{(1/m-1)}}{c^{1/m} E} \quad (63)$$

Neste método quando $\lambda_{n(k)}$, calculado pela equação (56), torna-se negativo significa que a barra está sujeita à tração e como a superfície em contato só resiste à compressão, iguala-se a zero o valor de $a_{n(k)}$ da equação (63).

No presente método, quando a última iteração for efetuada, a distribuição de pressão no contato pode ser calculado pela equação (58) ou pela seguinte:

$$P_{n(k)} = \frac{a_{n(k)} E \lambda_{n(k)}}{10 A_k L} \quad (64)$$

Para definir a rigidez transversal da barra considera-se o seguinte. Seja $p_s(k)$ a pressão tangencial num determinado par de nós, A_k a área de influência então a força tangencial transmitida será dada por:

$$P_s(k) = p_s(k) A_k / 100 \quad (65)$$

Considerando que a barra tenha somente rigidez transversal ao cisalhamento então a deformação da barra será dada por:

$$\lambda_s(k) = \frac{10^3 P_s(k) L}{G a_s(k)} \quad (66)$$

onde $a_s(k)$ é a secção transversal da barra para efeito de cálculo da rigidez ao cisalhamento.

Substituindo na equação (66) o valor de $P_s(k)$ da equação (65) obtém-se:

$$\lambda_s(k) = \frac{10 A_k L}{G a_s(k)} p_s(k) \quad (67)$$

Comparando a equação (67) com a equação (39) obtém-se:

$$a_s(k) = \frac{10 A_k L \lambda_n^{s/m}(k)}{G R c^{s/m}} \quad (68)$$

O elemento finito definido desta forma, e para problemas tridimensionais apresenta uma matriz de rigidez de dimensões 6x6. Para a maioria dos casos práticos, quando é necessário considerar elementos sólidos, placas e barras, como elementos finitos, então o número de graus de liberdade por nó é 6, portanto a matriz de rigidez da barra finita especial deverá ser expandida para a dimensão 12x12. Considerando a barra finita orientada num sistema de coordenadas retangulares, em que o eixo x coincide com o eixo da barra e os eixos y e z são perpendiculares ao eixo da barra, então os coeficientes da matriz de rigidez são os seguintes:

$$\begin{aligned} K_{i,j} &= 0 \quad \text{para } i,j = 1,2,\dots,12 \text{ exceto} \\ K_{1,1} &= \frac{E a_{nx}}{L} ; \quad K_{7,1} = -K_{1,1} ; \quad K_{7,7} = K_{1,1} \\ K_{2,2} &= \frac{G a_{sy}}{L} ; \quad K_{8,2} = -K_{2,2} ; \quad K_{8,8} = K_{2,2} \\ K_{3,3} &= \frac{G a_{sz}}{L} ; \quad K_{9,3} = -K_{3,3} ; \quad K_{9,9} = K_{3,3} \end{aligned} \quad (69)$$

A sequência de cálculo e forma de convergência adotada no método da placa é adotada no método da mola e obtendo os resultados da última iteração pode-se calcular a distribuição da pressão tangencial pelas relações:

$$p_s(k) = \frac{\lambda_{sr}(k) \lambda_n^{s/m}(k)}{R c^{s/m}} \quad (70)$$

e

$$p_s(k) = \frac{\lambda_{sr}(k) E a_s(k)}{10 L A_k} \quad (71)$$

onde $\lambda_{sr}(k)$ são os deslocamentos relativos dos pares de nós na direção tangencial.

As equações (68) a (71) são válidas para o caso em que $\lambda_{sr}(k)$ é menor do que λ_{sf} definido pela equação (44). Caso em que $\lambda_{sr}(k)$ é maior do que λ_{sf} , as superfícies escorregam e a pressão tangencial é dada pela equação:

$$p_s(k) = f \left(\frac{\lambda_n(k)}{c} \right)^{1/m} \quad (72)$$

Nesta situação faz-se $a_s(k) = 0$ ou seja, elimina-se a ligação tangencial, e introduz-se nos pares de nós as forças de atrito dadas pela equação:

$$P_s(k) = p_s(k) A_k / 100 \quad (73)$$

Os resultados apresentados até aqui são válidos para o caso em que o carregamento normal e tangencial não é simultâneo. Quando o carregamento das superfícies é simultâneo a equação (68) deve ser corrigida para a seguinte:

$$a'_s(k) = \frac{10 A_k L (1 - s) \lambda_n^{s/m}(k)}{G R c^{s/m}} \quad (74)$$

A pressão tangencial é calculada pela equação:

$$p'_s(k) = \frac{\lambda_{sr}(k) (1 - s) \lambda_n^{s/m}(k)}{R c^{s/m}} \quad (75)$$

Para verificar se as superfícies estão carregadas elasticamente ou escorregaram deve-se comparar o valor de $\lambda_{sr}(k)$ com o valor de λ'_{sf} calculado pela equação (45).

10. APLICAÇÕES

A seguir serão apresentados vários problemas resolvidos pelos métodos da simulação de pressão, método da placa e o método da mola que para simplicidade de referência serão chamados respectivamente, pelas iniciais, como segue: M.S.P.; M.P. e M.M.

As aplicações incluem problemas simples, como um modelo de viga sobre um apoio elástico até juntas móveis e juntas parafusadas.

10 - 1. PROBLEMA 1.

Na figura 19a tem-se representada uma barra elástica em contato com uma base suposta rígida. O contato entre a barra e a base considerou-se elástico com $c = 0,3$ e $m = 0,5$. A barra foi dividida em placas retangulares e considerou-se um estado plano de tensões:

Considerando várias pressões médias p_a ou seja a relação entre a carga externa P e a área aparente de contato, tem-se na figura 19b as correspondentes distribuições de pressão calculadas pelo M.S.P. Na figura 19c tem-se as deformações de contato da viga. A figura 19d representa a sequência da distribuição de pressão calculadas nas sucessivas iterações.

Na figura 20 tem-se o mesmo problema usando os métodos M.P. e M.M. A figura 20a mostra a viga deformada cujos resultados foram obtidos pelo método M.P. Nas figuras 20b e 20c, tem-se a distribuição de pressão e deformações de contato, para pressões aparentes de 6,6 e 1,32 Kgf/cm^2 , calculadas pelos métodos M.P. e M.M.

Como se verifica a diferença entre os resultados obtidos pelos tres métodos é muito pequena. Para uma comparação mais precisa tem-se na tabela 3 os resultados obtidos pelos tres métodos.

Tanto no presente problema como nos descritos posteriormente foi desprezada a rigidez tangencial da superfície ou a força de atrito quando foram empregados os métodos M.S.P. e M.M. A tabela 3 além de comparar as deformações de contato, compara também as pressões calculadas pelas equações (58), (59) e (64).

Para verificar a precisão dos resultados de cálculo da distribuição de pressão, a tabela 3 mostra também o valor da integral da pressão ao longo do contato. Como se verifica, os resultados obtidos pelos métodos M.S.P. e M.M. são mais próximos enquanto que o M.P. difere um pouco, isto porque, as placas de ligação apresentam rigidez tangencial. Tendo em vista as simplificações o resultado correto está entre os resultados obtidos pelos métodos M.S.P. e M.M. e o método M.P.

As figuras 20d e 20e mostram a sequência da compressão superficial calculadas nas diversas iterações. Como mostram

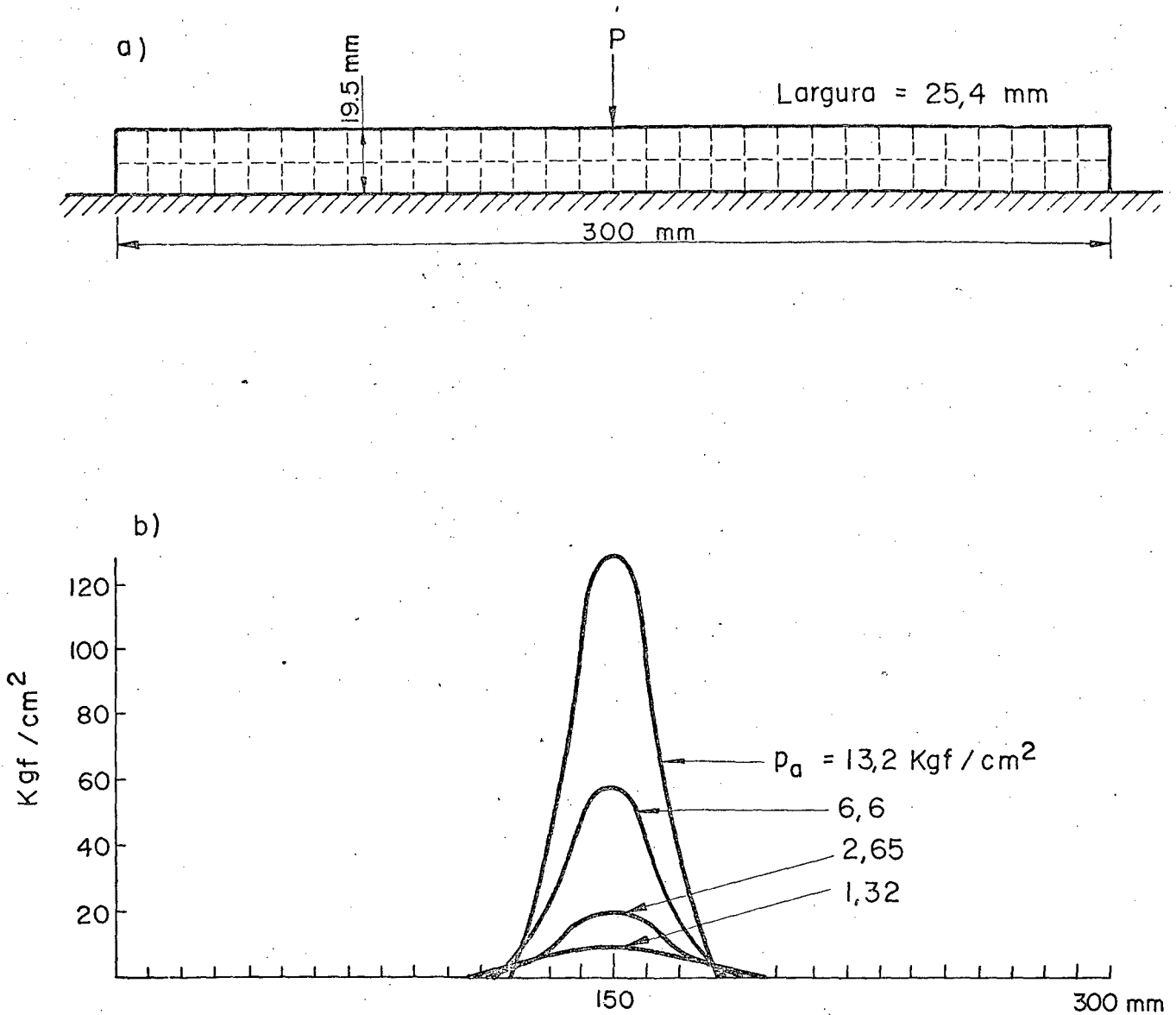


Fig. 19 - a) Divisão do elemento finito e dimensões da barra sobre a base rígida.

b) Distribuição de pressão para diversas pressões aparentes usando o método da simulação de pressão.

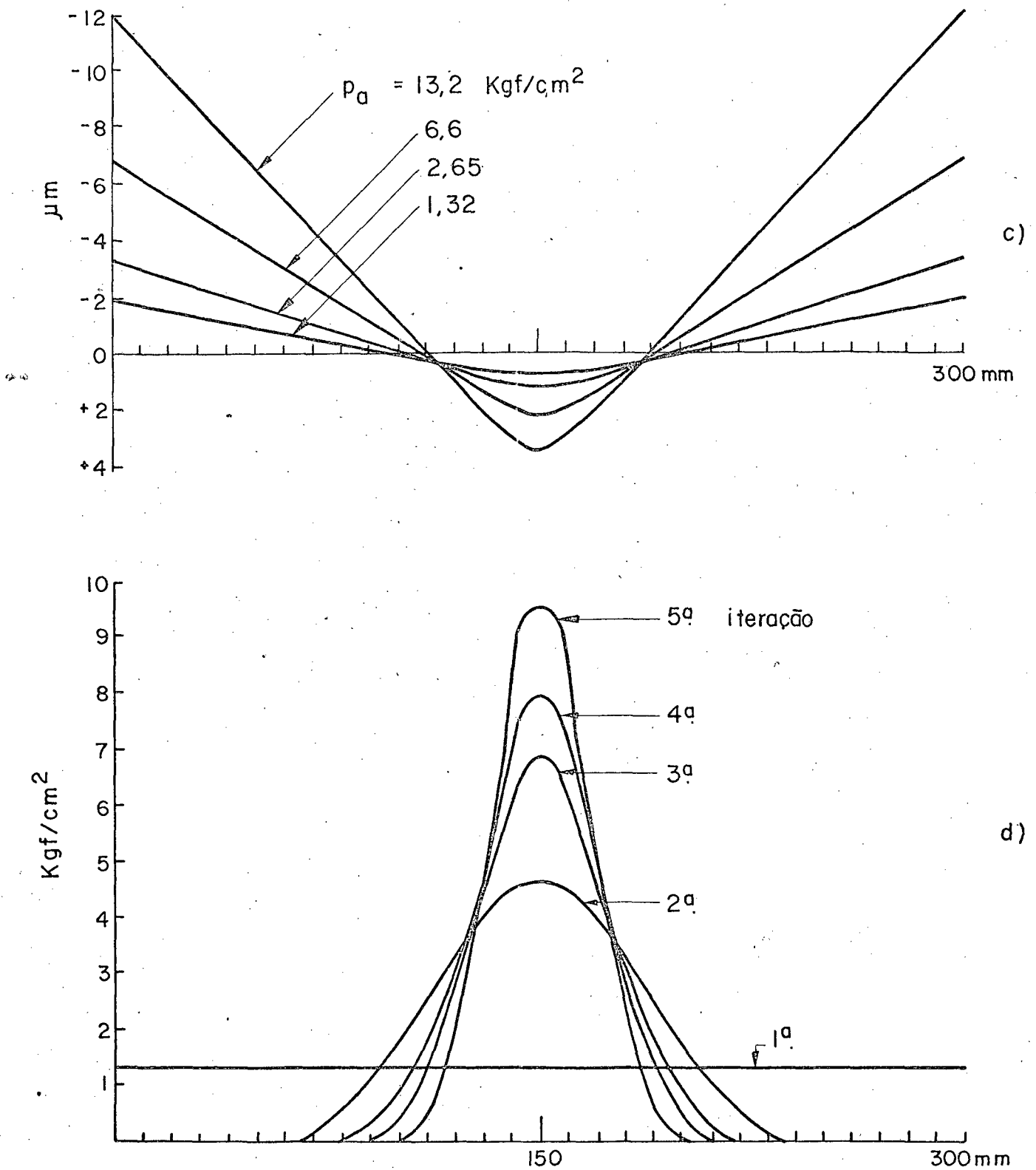


Fig. 19 - c) Deformações de contato para diversas pressões aparentes usando o método da simulação de pressão.

d) Sequência da distribuição de pressão calculada pelo método da simulação de pressão para $p_a = 1,32 \text{ Kgf/cm}^2$.

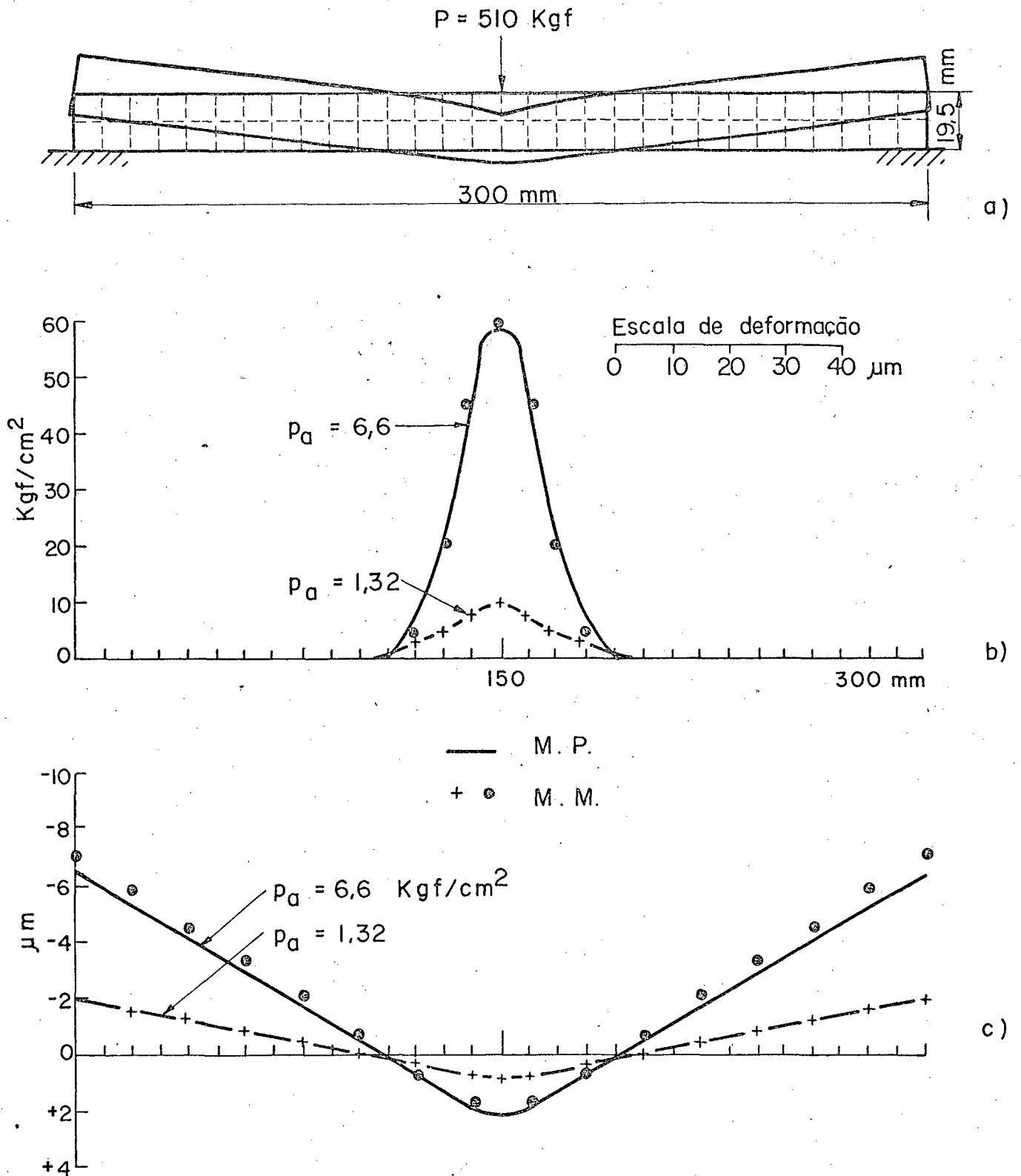
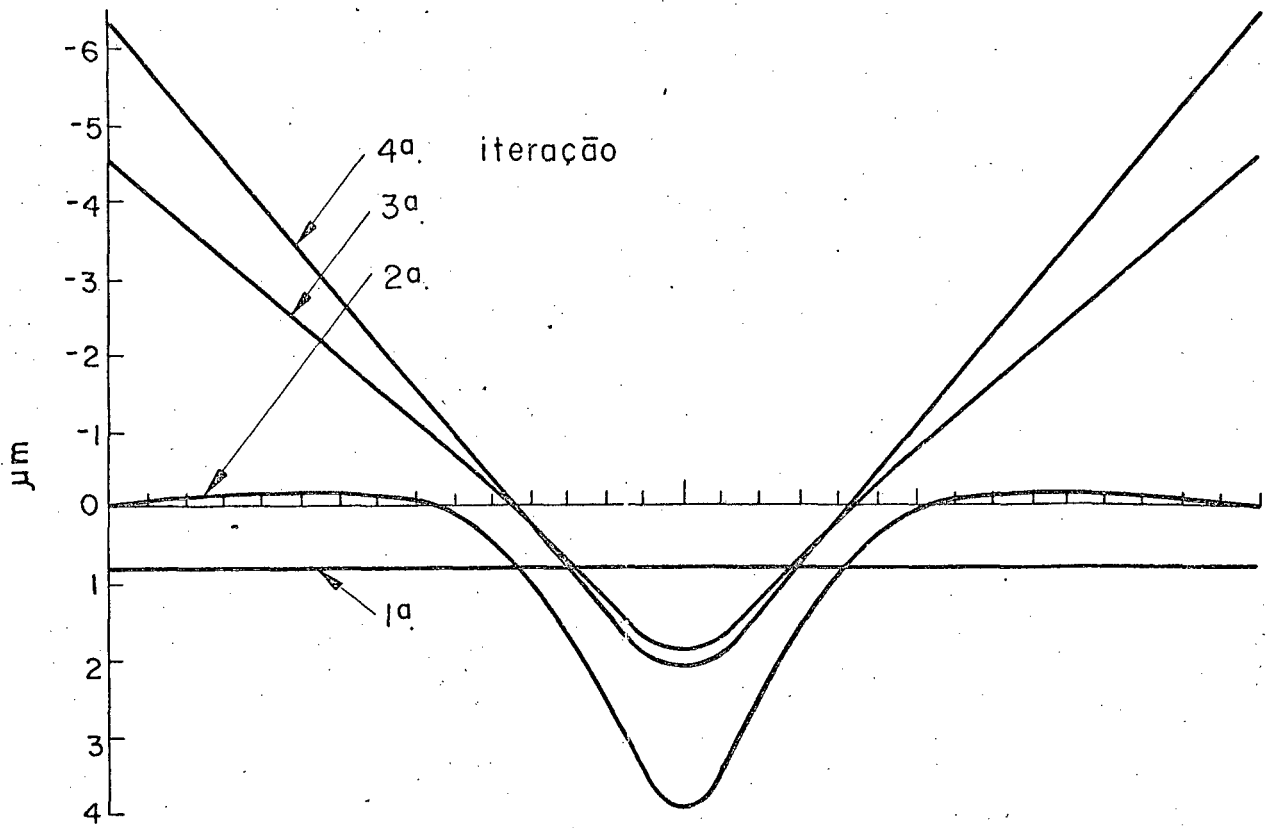


Fig. 20 - a) Deformações da barra usando o método da placa. b) Distribuição de pressão calculada pelos métodos M.P. e M.M. c) Deformações de contato calculadas pelos métodos M.P. e M.M.

d)



e)

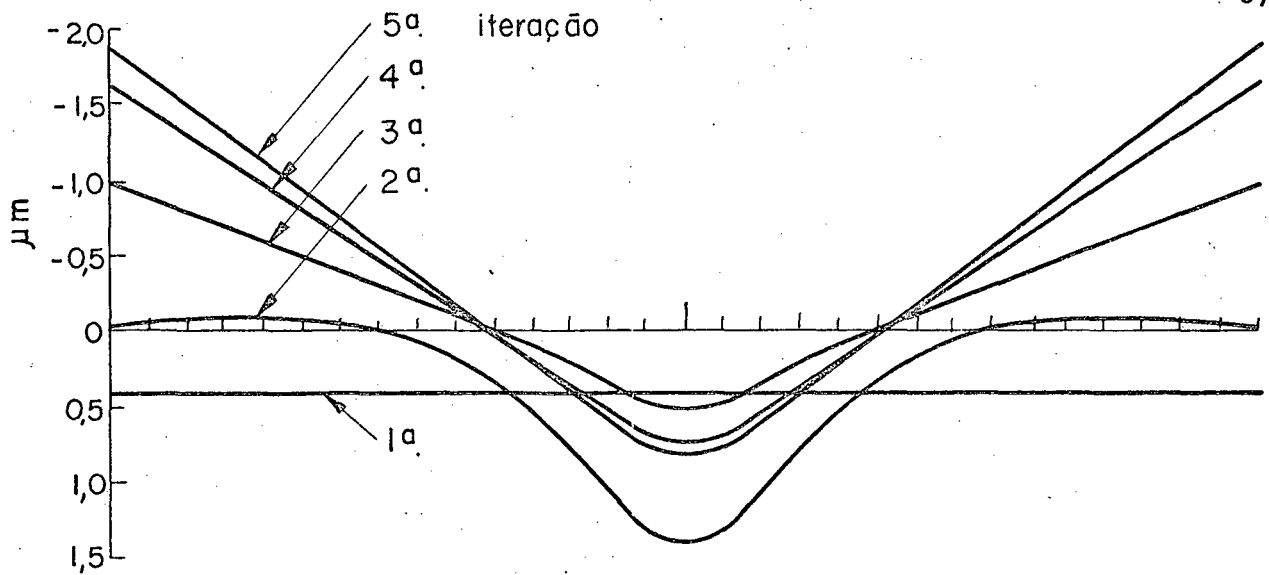


Fig. 20 – d) Sequência das deformações de contatos usando M. P. e $p_a = 6,6 \text{ Kgf/cm}^2$ e) Sequência das deformações de contato usando M. P. e $p_a = 1,32 \text{ Kgf/cm}^2$.

TABELA 3 - COMPARAÇÃO DAS DEFORMAÇÕES DE CONTATO E DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO DA METADE DO CONTATO.

Força P Kgf	M.S.P.		M.P.			M.M.		
	λ_n μm	P_n Kgf/cm^2	λ_n	P_n eq(58)	P_n eq(59)	λ_n	P_n eq(58)	P_n eq(64)
102,0	0,87	9,50	0,86	8,94	8,76	0,88	9,35	9,65
	0,79	7,90	0,77	7,31	7,29	0,79	7,69	7,91
	0,60	4,79	0,59	4,38	4,39	0,61	4,54	4,67
	0,40	2,14	0,40	1,90	2,00	0,41	2,01	2,09
	0,20	0,53	0,21	0,51	0,59	0,21	0,52	0,59
	0,00	0,00	0,02	0,00	0,18	0,01	0,00	0,04
	F.Tot.	102,0	F.Tot.	93,83	95,65	F.Tot.	98,73	102,0
510	2,20	59,2	2,18	57,8	53,4	2,20	59,3	59,1
	1,93	45,3	1,90	43,9	41,2	1,93	45,6	44,8
	1,35	20,4	1,30	20,7	19,8	1,34	21,9	20,7
	0,72	5,09	0,69	5,75	5,59	0,70	5,92	5,33
	0,10	0,00	0,10	1,20	2,30	0,06	0,47	0,41
	-0,53	0,00	-0,50	0,00	0,00	-0,59	0,00	0,00
	F.Tot.	510,0	F.Tot.	509,9	485,2	F.Tot.	526,1	511,9

estas figuras, mesmo assumindo para a primeira iteração uma distribuição de pressão bem diferente da real, o número de iterações é igual ou menor do que cinco iterações.

10 - 2. PROBLEMA 2.

Na figura 21a tem-se representado um modelo de junta deslizante. No presente problema pretende-se calcular a distribuição de pressão no contato e as deformações do sistema devido a uma força de 30 Kgf distribuída nos nós como mostra a figura 21a. Para simplicidade considera-se que os nós ao longo de AB não se deslocam na direção y. Os nós ao longo de EF são totalmente fixos. Para efeito de cálculo considerou-se o material com um módulo de elasticidade igual a 9500 Kgf/mm^2 , o sistema de 1 cm de largura e um estado plano de tensões. Para a definição da rigidez das superfícies de contato foram adotados os seguintes valores: $c = 0,6$ e $m = 0,5$.

Utilizando o método da simulação da pressão calcula-se as deformações das duas peças como mostram as figuras 21b e 21c. Composto as peças deformadas das figuras 21b e 21c obtém-se o sistema deformado da figura 21d.

Quando o método da placa é empregado considera-se ao longo de CD as placas de ligação. O resultado do sistema deformado é da forma da figura 20d havendo diferenças insignificantes quando comparadas com os resultados obtidos pelo método da simulação da pressão.

A figura 21e mostra os resultados calculados da distribuição de pressão no contato considerando os métodos M.P. e M.S.P. Como se verifica os dois métodos de formulações completamente diferentes apresentam resultados aproximadamente iguais o que comprova a validade dos métodos.

Quando se verificam elevados deslocamentos relativos dos pares de nós na direção da superfície então os resultados diferem um pouco.

10 - 3. PROBLEMA 3.

Para testar a precisão dos métodos M.S.P., M.P. e M.M. foi adotado o modelo mostrado na figura 22a, onde tem-se duas barras de ferro fundido de 300 mm de comprimento, 40 mm de altura e 20 mm de largura. A superfície de contato foi rasquetada com um acabamento de 25 pontos de contato por polegada quadrada. Como parâmetros obteve-se $m = 0,7$ e $c = 0,25$ isto porque considerou-se no teste pressões mais elevadas⁹. Na figura 22a tem-se representado a divisão do elemento finito adotada para o cálculo da distribuição de pressão no contato e as deformações das barras pressionadas por uma força central como mostra a figura 22b. Para verificar a precisão dos métodos teóricos, foram fixados, ao longo do contato, transdutores indutivos⁹ de 30 em 30 mm como mostra a figura 22a, para medir as deformações no contato.

Teoricamente foram testados os tres métodos e devido a forma dos elementos em contato e o carregamento simétrico, os resultados foram aproximadamente os mesmos. Na figura 22b tem-se representado os resultados de cálculo pelo M.M. para cargas tais que a pressão média seja de 8 e 16 Kg/cm². Na figura 22c

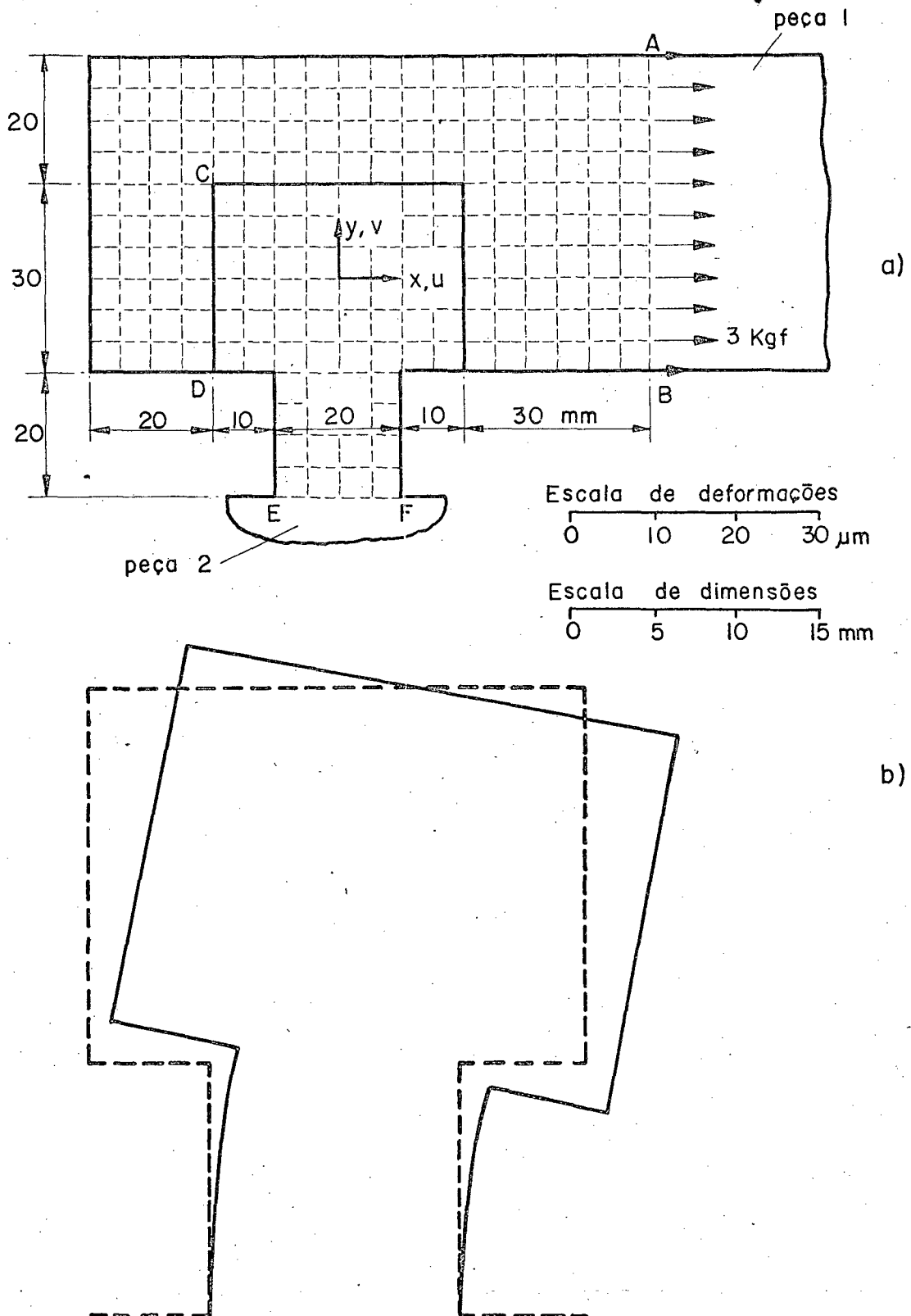


Fig. 21 - a) Divisão do elemento finito da junta.

b) Deformações da peça 2 usando o M. S. P.

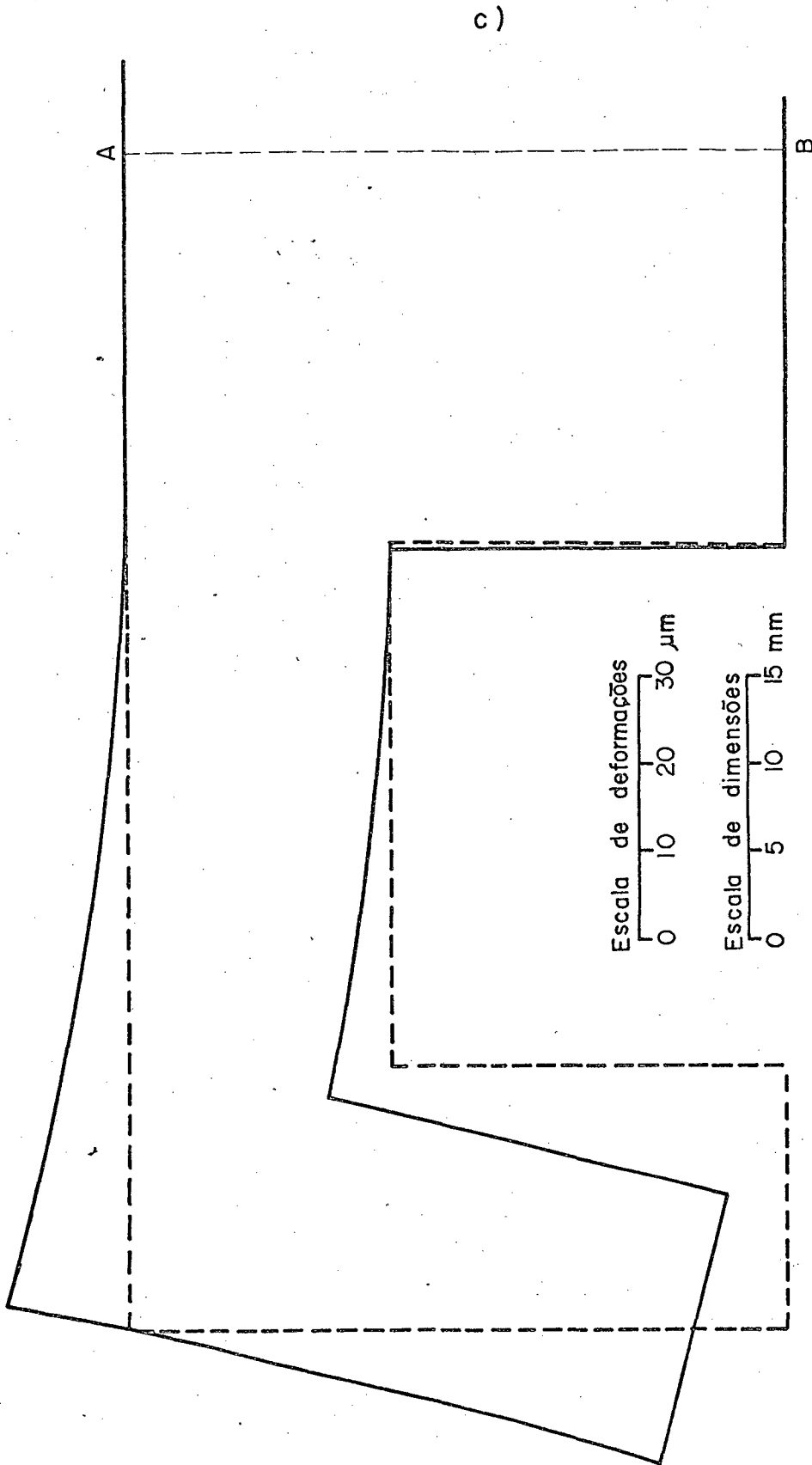


Fig. 21 - c) Deformações da peça I usada o M. S. P.

d)

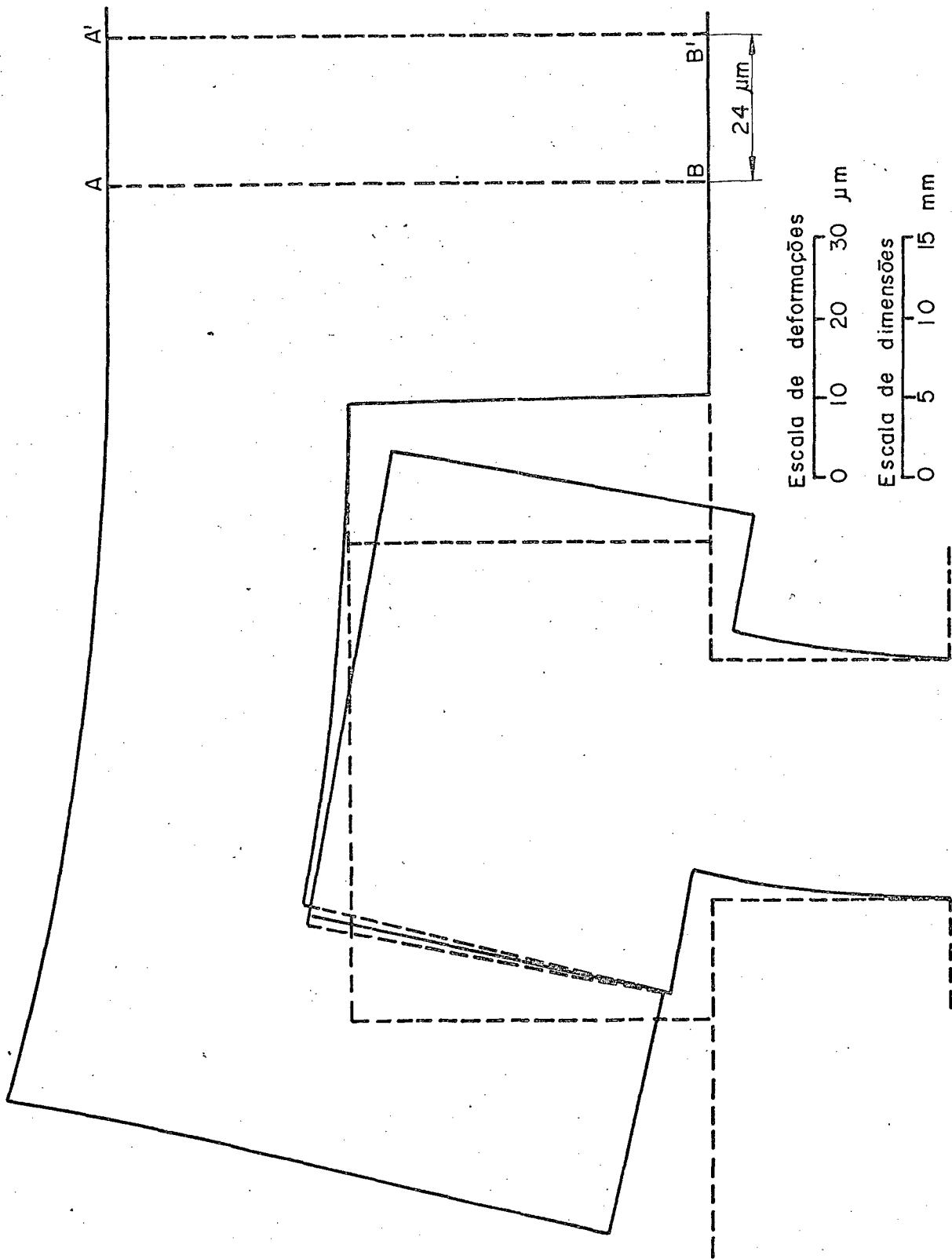


Fig. 21 — d) Deformações da junta usando o M. S. P.

e)

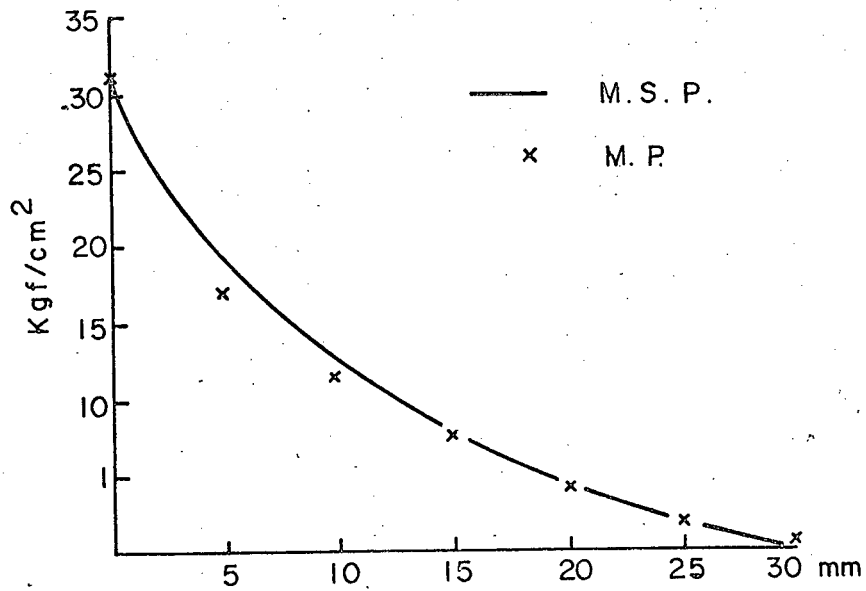


Fig. 21 - e) Distribuição de pressão no contato usando o M. S. P. e M. P.

tem-se a correspondente distribuição de pressão. A figura 22d compara os resultados calculados e medidos das deformações de contato e como se verifica tem-se uma ótima correlação, demonstrando assim a precisão do método de cálculo.

Na referência⁹ tem-se os resultados de cálculo e de medição para pressões aparentes de $p_a = 0,5$ a 64 Kgf/cm^2 e em toda esta gama de cargas obteve-se boa correlação.

10 - 4. PROBLEMA 4.

O campo de aplicação que mais exigiu pesquisas com o objetivo de cálculo da distribuição de pressão e deformações de corpos elásticos em contato é o de máquinas ferramentas. Ao efetuar-se um levantamento detalhado das deformações numa máquina ferramenta, verifica-se que as juntas apresentam uma grande influência, chegando a valores de 60% a 70%. Com o desenvolvimento das máquinas com controle numérico que exigem grande rigidez de suas estruturas, foi necessário a formulação de métodos que permitem uma análise mais detalhada da rigidez de juntas móveis ou guias de deslizamento e juntas parafusadas.

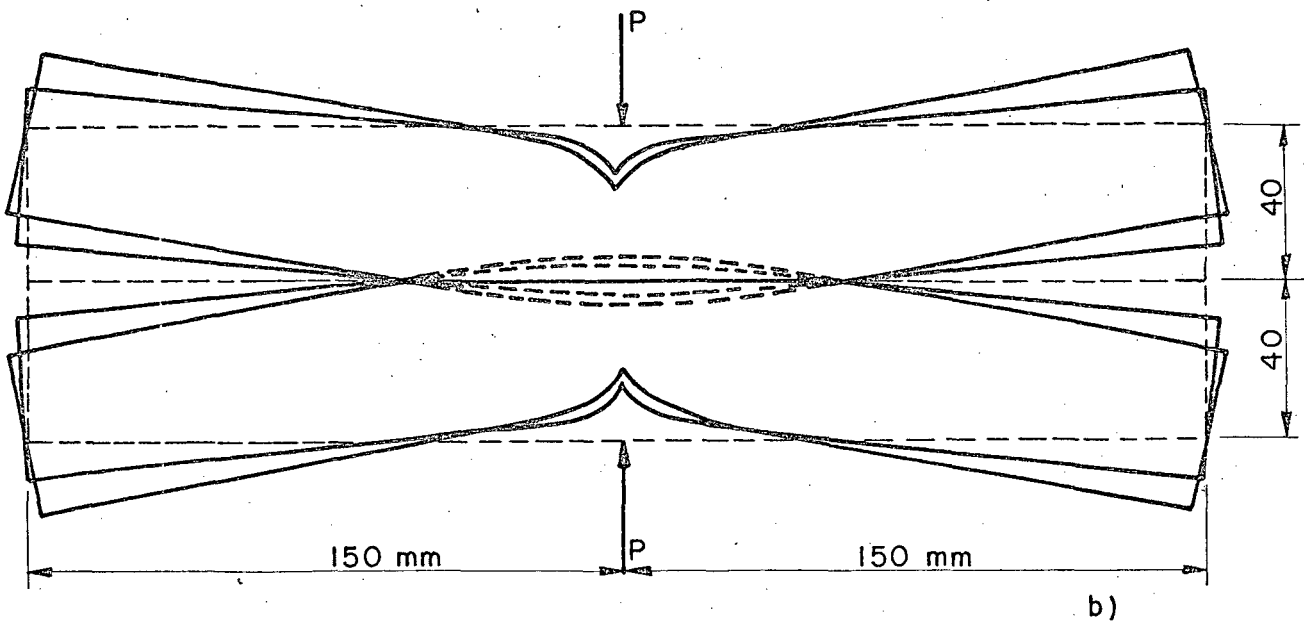
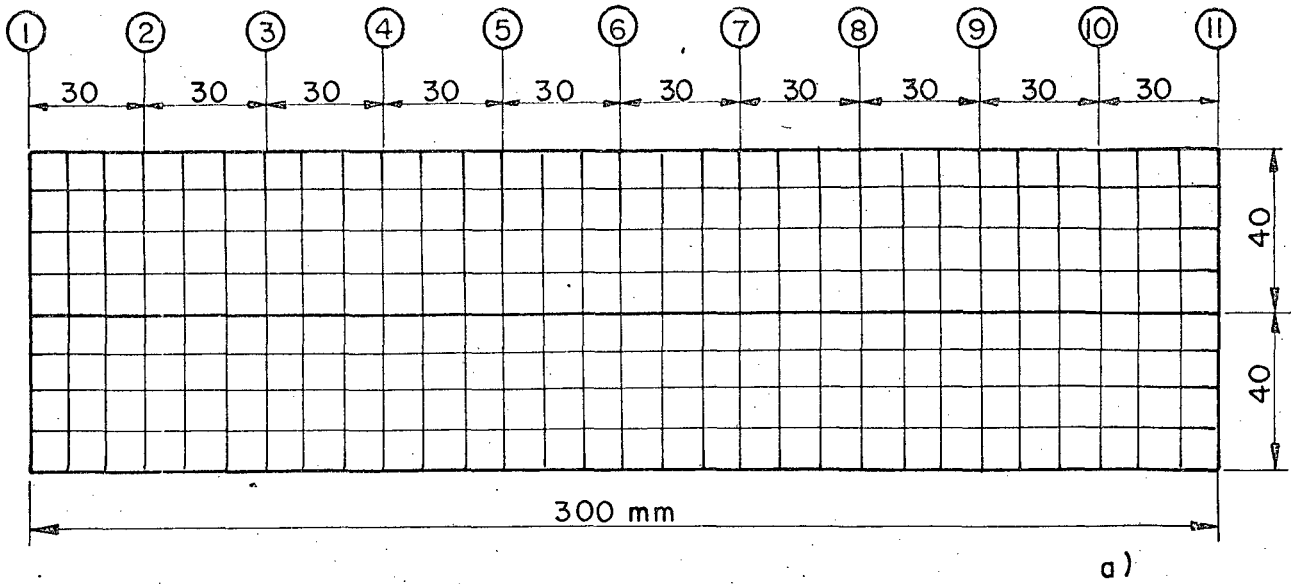
A figura 23a mostra um modelo simulando uma guia de deslizamento, onde tem-se também mostrado a divisão em elementos finitos, o carregamento e a posição dos transdutores indutivos para medição das deformações.

O material adotado para o modelo de teste foi o ferro fundido e considerou-se um estado plano de tensões. As superfícies de contato ao longo de AB foram retificadas e adotou-se $c = 0,69$ e $m = 0,5$.

No presente modelo foram testados os métodos M.P. e M.M. e devido a consideráveis deslocamentos tangenciais no contato dos corpos elásticos obteve-se certas diferenças de resultados. No método da mola não foi considerado o efeito da rigidez tangencial da superfície e no método da placa as placas finitas apresentam rigidez tangencial provavelmente maior do que o efeito de atrito. O resultado correto deve se situar entre os resultados obtidos pelos dois métodos.

Quando os resultados de cálculo pelos dois métodos são comparados com os medidos na superfície externa do modelo obtém-se boa correlação como mostra a figura 23b.

Os resultados teóricos da figura 23b foram obtidos pe



Deformações
0 10 20 30 40 μm

Fig. 22 - a) Divisão do elemento finito das barras. b) Deformações calculadas das barras para o carregamento $p_d = 8 \text{ Kgf/cm}^2$ e $p_d = 16 \text{ Kgf/cm}^2$.

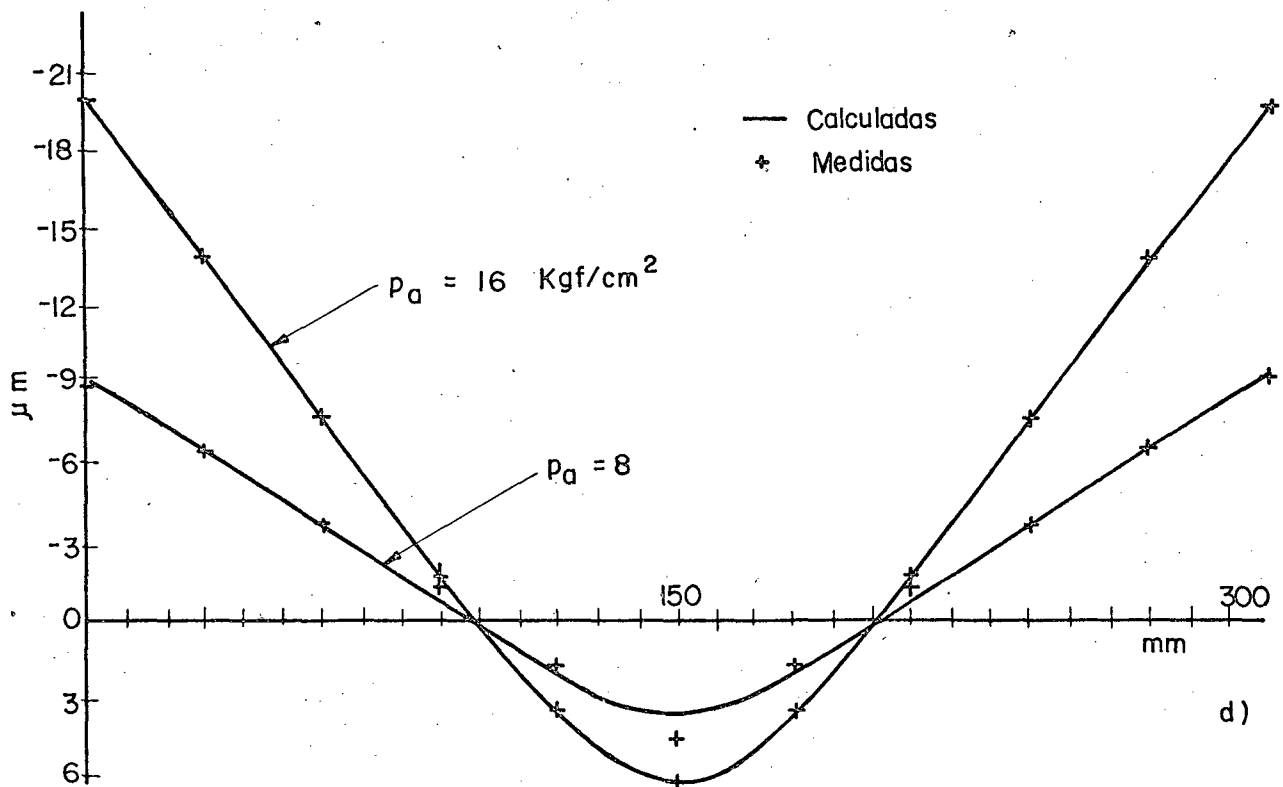
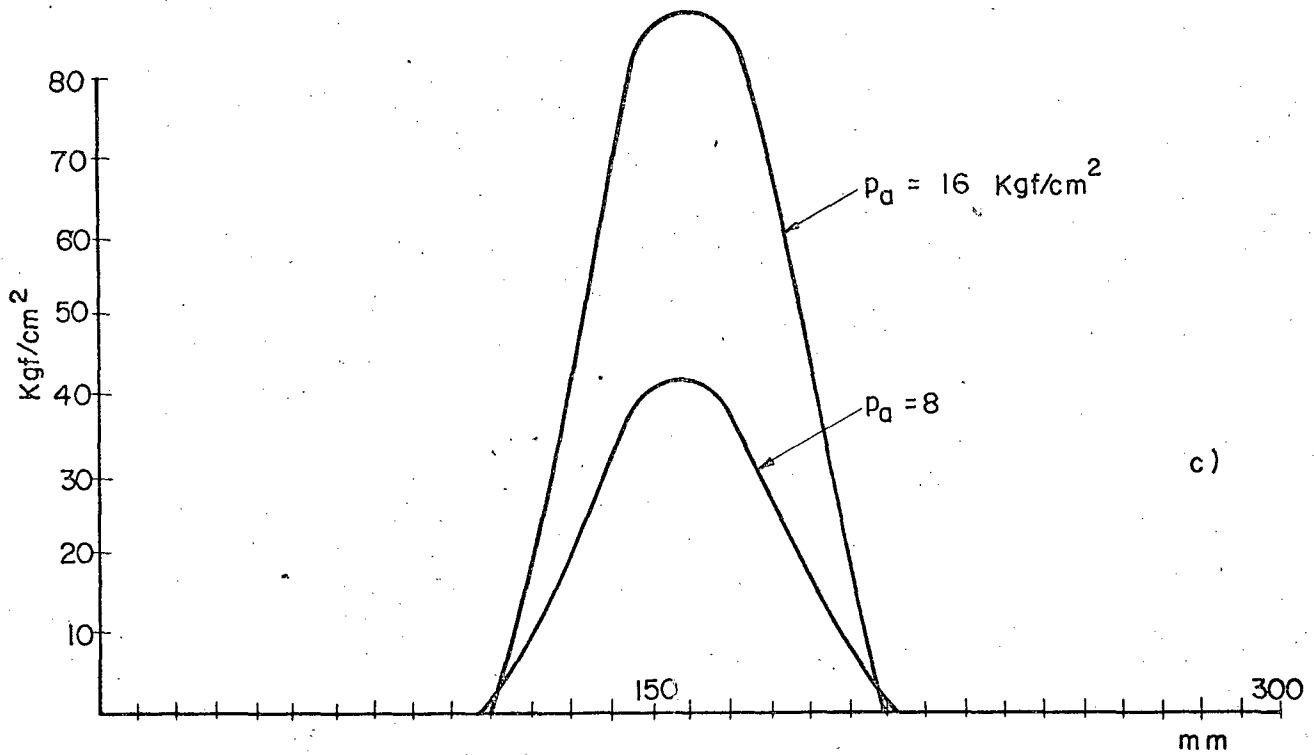


Fig. 22 - c) Distribuição de pressão no contato das barras. d) Deformações calculadas e medidas na superfície de contato.

lo método da mola considerando pressões aparentes de 4 a 16 Kgf/cm^2 . A figura 23c mostra os resultados de cálculo da distribuição de pressão para uma grande faixa de valores da pressão aparente ou seja de 1,0 a 64 Kgf/cm^2 . Estes resultados não foram verificados experimentalmente, por ser uma das experimentações mais difíceis, mas como as deformações são precisas pode-se concluir que o mesmo se verifica com a distribuição de pressão.

10 - 5. PROBLEMA 5.

Na figura 24a tem-se mostrado um modelo de uma coluna parafusada numa base que foi suposta rígida. A coluna foi construída com chapas de aço soldadas. As superfícies de contato foram retificadas e considerou-se $c = 0,3$ e $m = 0,5$. Na figura 24b tem-se a divisão do elemento finito de uma metade da coluna representada num plano. Neste caso foram usadas somente placas triangulares e retangulares. Os furos de passagem dos parafusos foram substituídos por furos quadrados como mostra a figura 24b.

Para a solução foi adotado o método da mola, não foi considerado a rigidez tangencial da superfície e os nós nos vértices dos furos quadrados foram fixos no plano xy.

A pressão aparente de contato obtida pelo aperto dos parafusos foi de 67 Kgf/cm^2 o que foi considerado tanto para a solução teórica como na medição da deformação na coluna.

Na figura 24c tem-se representado os valores de cálculo e de medição para uma carga externa de 200 Kgf. Nesta figura tem-se representado a deformação da coluna ao considerar o flange rígido e flexível.

A tabela 4 mostra uma comparação entre os valores calculados e medidos numa altura de 300 mm quando a força de 200 e 400 Kgf é aplicada na mesma altura.

Comparando os resultados calculados ao considerar a coluna engastada com os valores quando se inclui o efeito do flange, verifica-se que a junta parafusada tem uma influência no total da deformação no ponto 1 de 43,0% e 52,0% respectivamente para as forças de 100 Kgf e 200 Kgf.

Ao comparar os resultados teóricos com os experimentais obteve-se novamente boa correlação provando mais uma vez a precisão do método proposto.

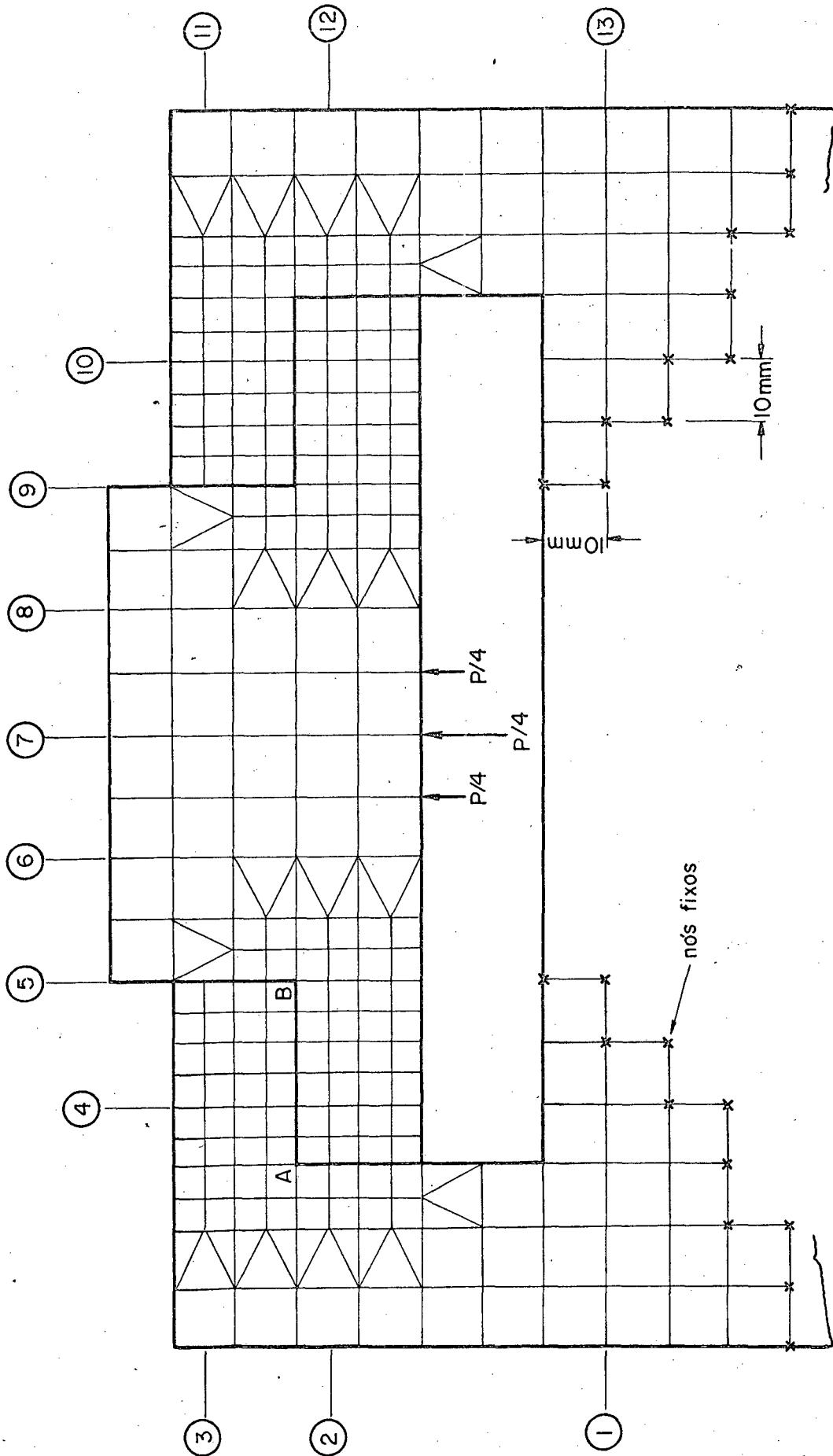


Fig. 23 - a) Divisão do elemento finito do modelo da junta.

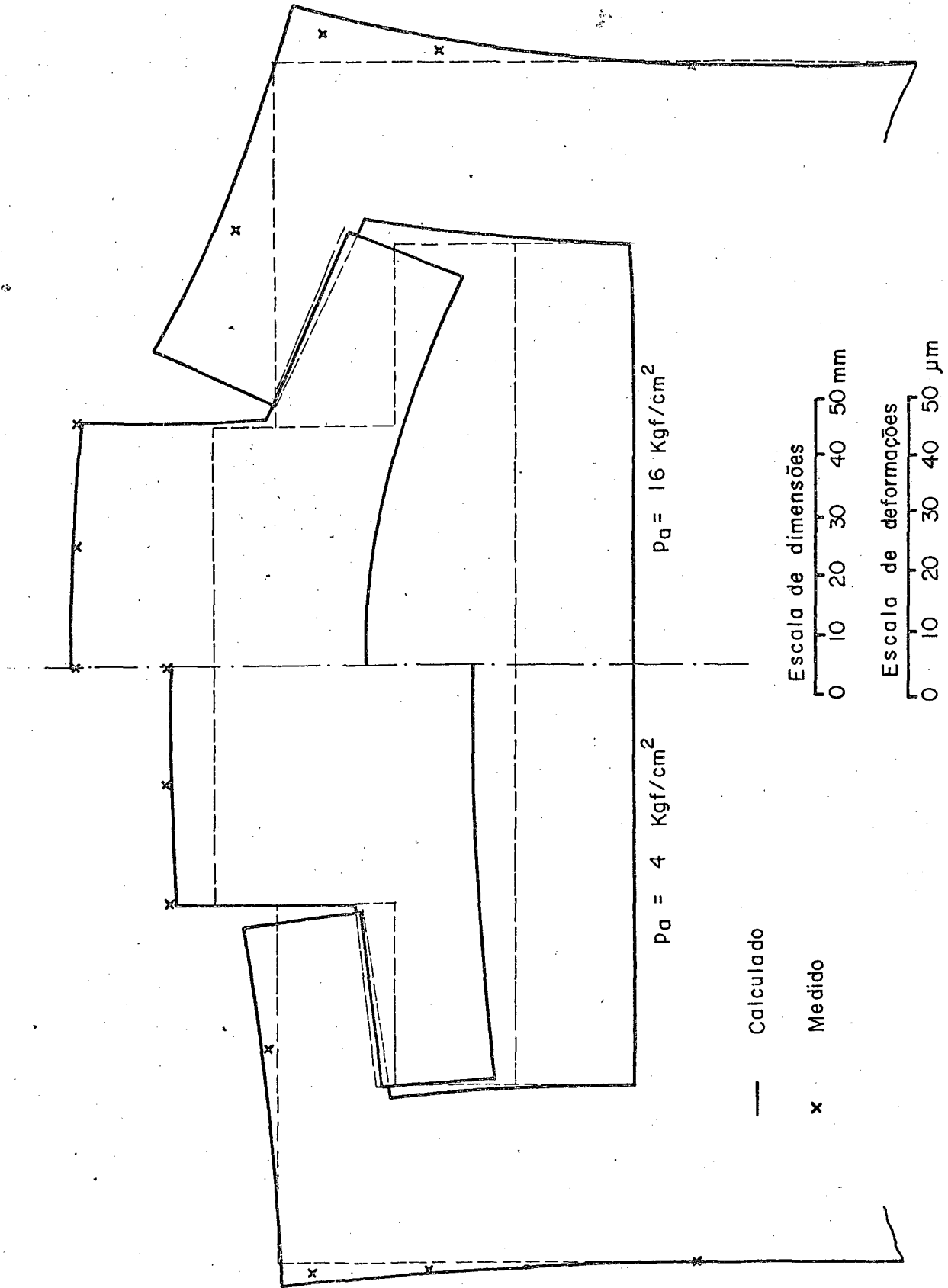


Fig. 23 b) Deformações calculadas e medidas no modelo da junta.

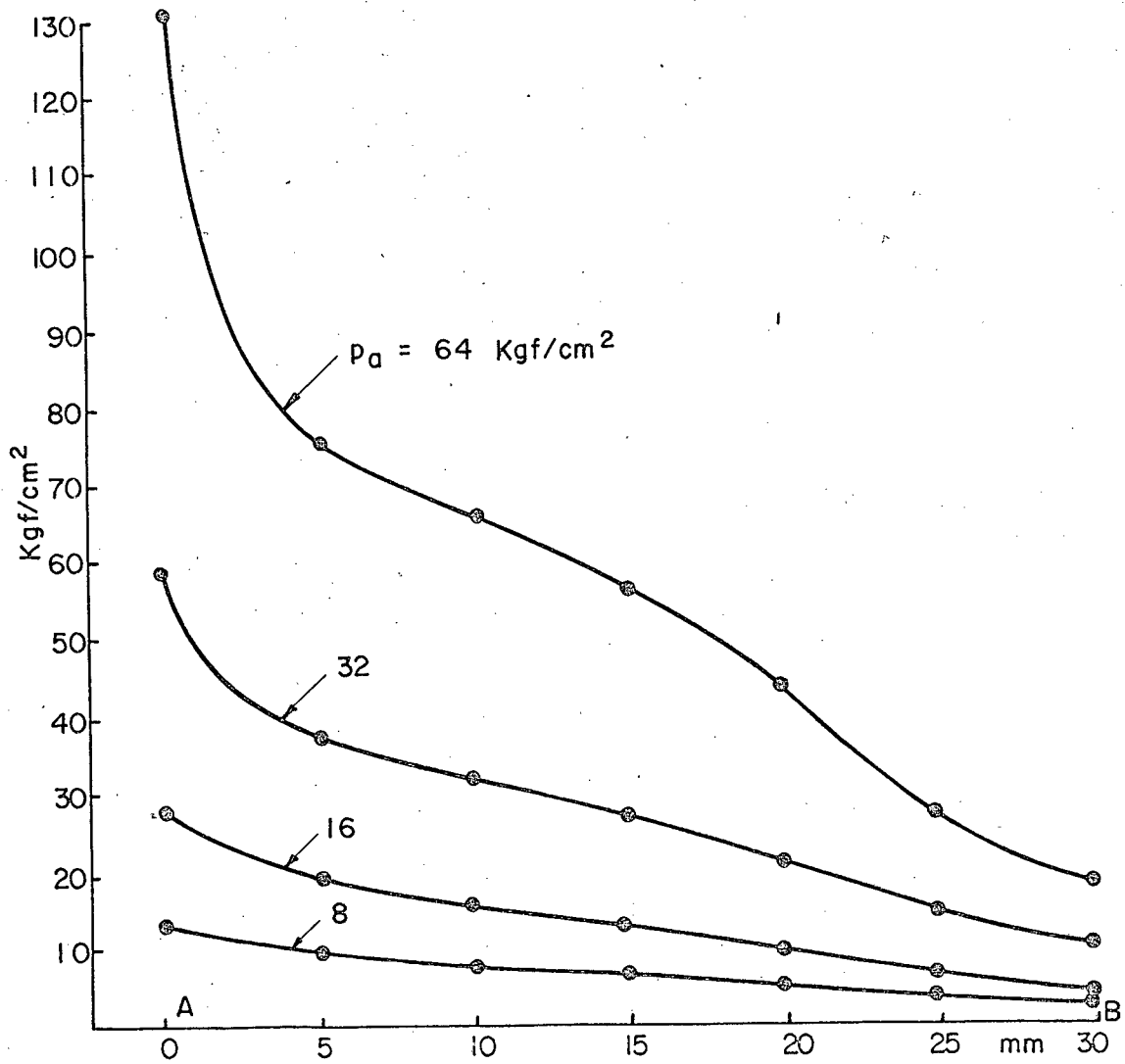
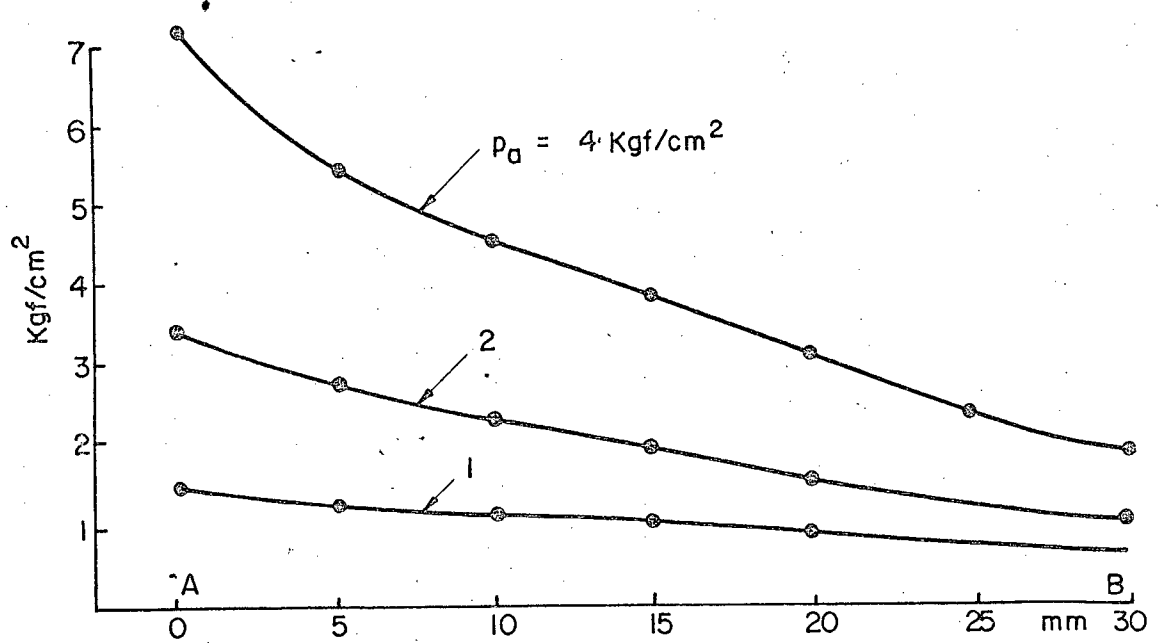


Fig. 23 c) Distribuição de pressão no contato do modelo da junta.

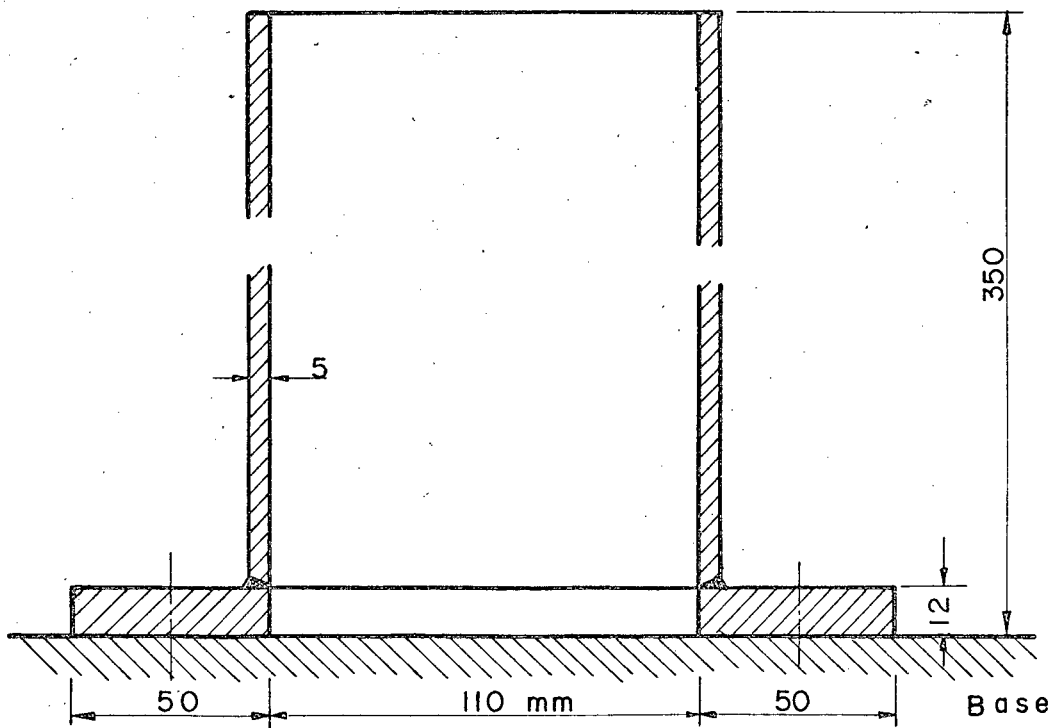
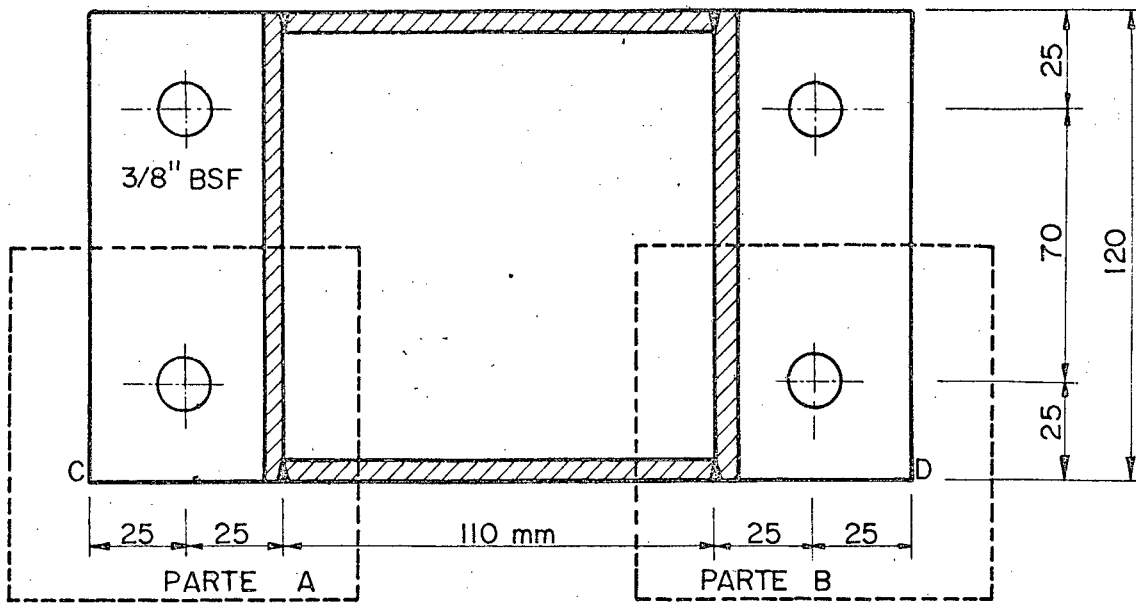


Fig.24 - a) Dimensões do modelo da coluna usada para cálculo e experimentações.

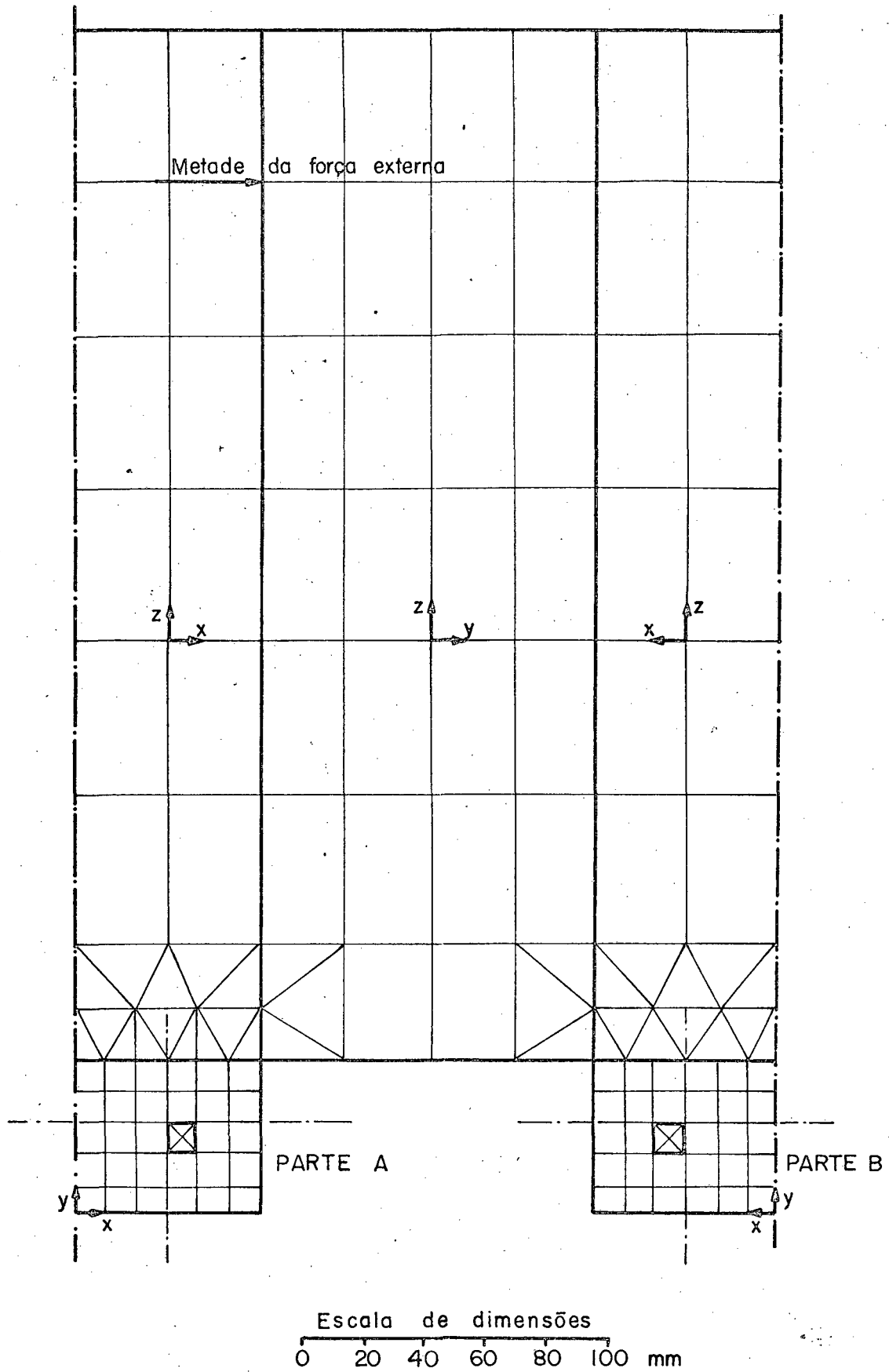


Fig. 24 b) Divisão do elemento finito da coluna.

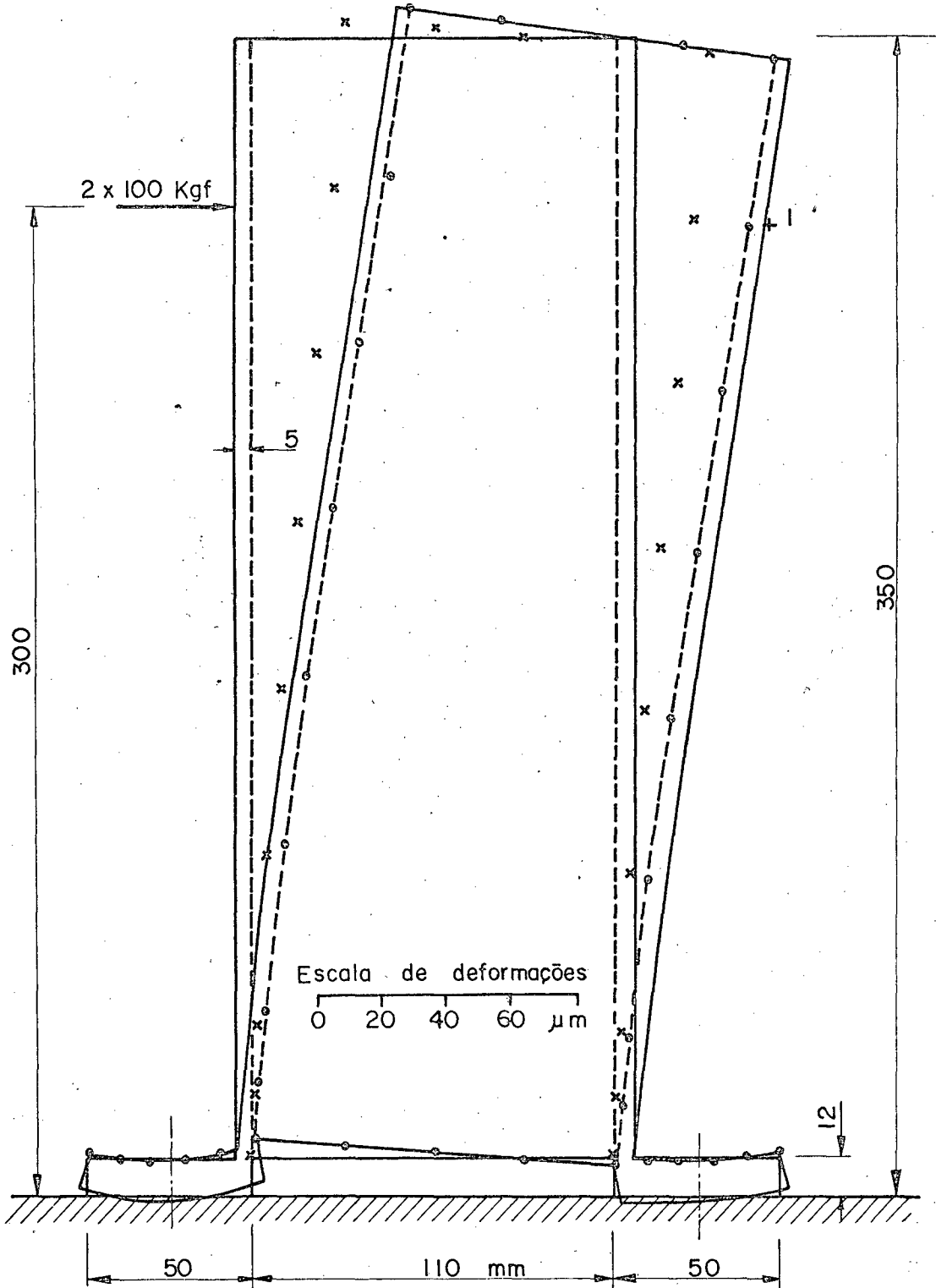


Fig. 24 - c) Deformações (500 x) da coluna com flange parafusado. x Calculado para a coluna engastada. o Para o flange flexível. + Deformação medida.

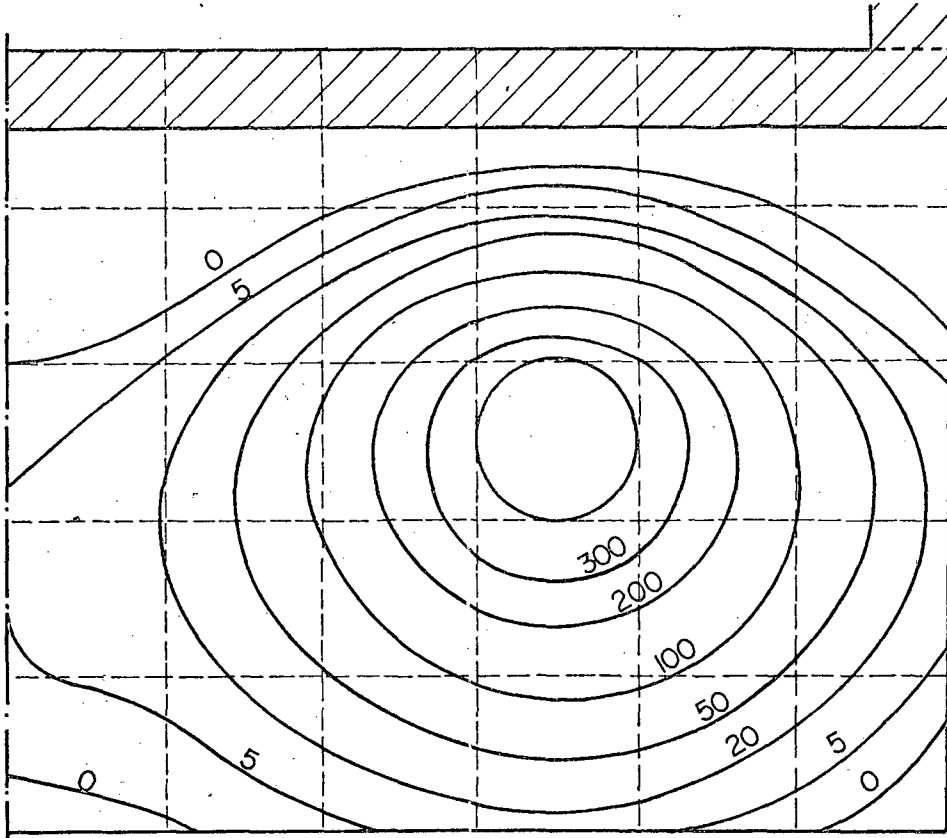


Fig. 24 - d) Distribuição de pressão (Kgf/cm²) na parte A do flange para 200 Kgf.

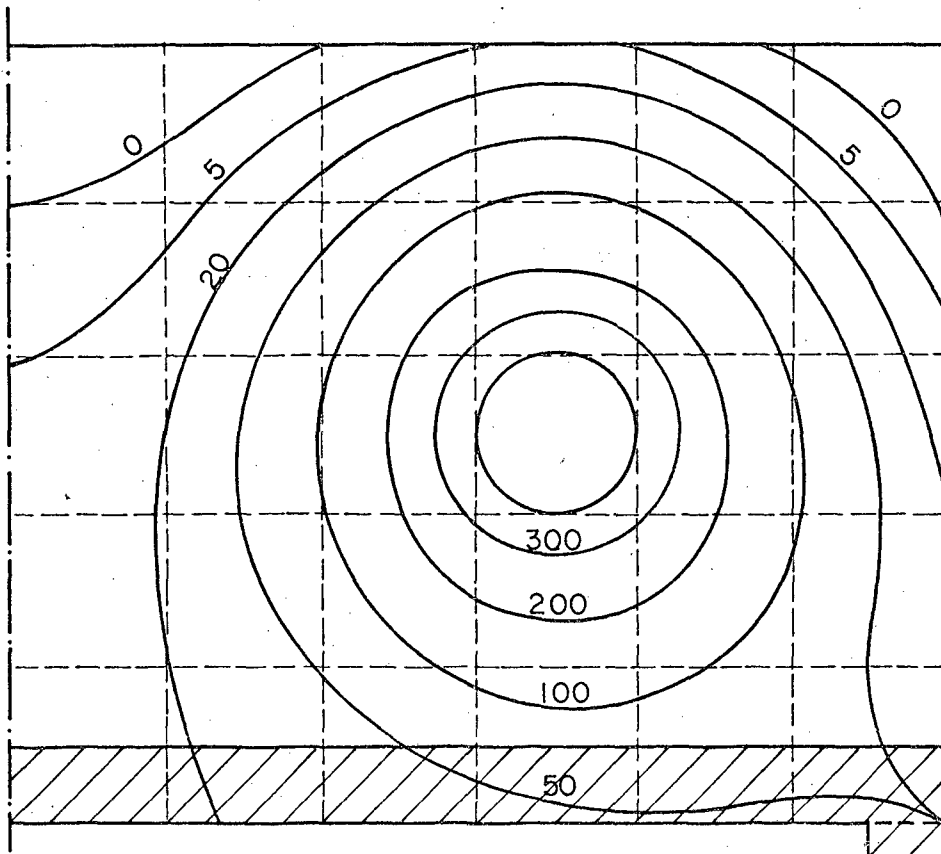


Fig. 24- e) Distribuição de pressão (Kgf/cm²) na parte B do flange para 200 Kgf.

TABELA 4 - COMPARAÇÃO ENTRE VALORES CALCULADOS E MEDIDOS.

Cargas (Kgf)	Método considerado	Deformações pt. 1 (μm)
200	Coluna engastada	22,71
	Coluna e flange flexíveis	40,56
	Medição	46,00
400	Coluna engastada	45,40
	Coluna e flange flexíveis	94,45
	Medição	95,00

As figuras 24d e 24e mostram os resultados de cálculo da distribuição de pressão no contato do flange, partes A e B, com a base.

10 - 6. PROBLEMA 6.

O exemplo mostrado na figura 25a foi escolhido para demonstrar o efeito das forças de atrito no contato dos corpos elásticos. Como o modelo é simétrico representou-se somente a metade das partes. Para a solução teórica foi considerada a base rígida, material de ferro fundido e para as superfícies adotou-se os parâmetros $c = 0,8$ e $m = 0,5$. Na figura 25b tem-se representado a deformação de contato para valores do coeficiente de atrito $f = 0$, $f = 0,2$ e $f = 0,3$. A figura 25c mostra os valores dos deslocamentos tangenciais para os respectivos valores do coeficiente de atrito. No presente exemplo verificou-se que os deslocamentos tangenciais ultrapassam os valores limites elásticos dados pela equação (45), portanto, na solução foram introduzidas as correspondentes forças de atrito nos nós ao longo do contato.

Nas figuras 25d e 25e tem-se representado a distribuição de pressão normal e tangencial para os diversos valores do coeficiente de atrito.

Como se verifica, neste exemplo, quando numa junta ocorrem grandes deformações tangenciais o efeito do atrito não pode ser negligenciado.

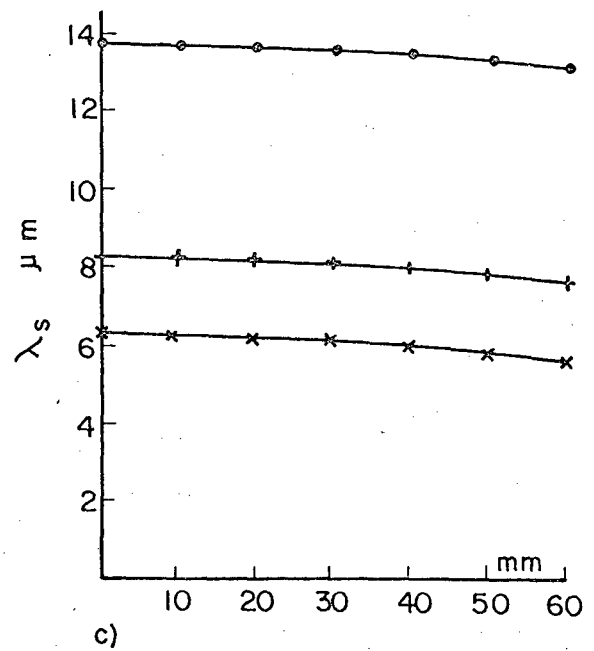
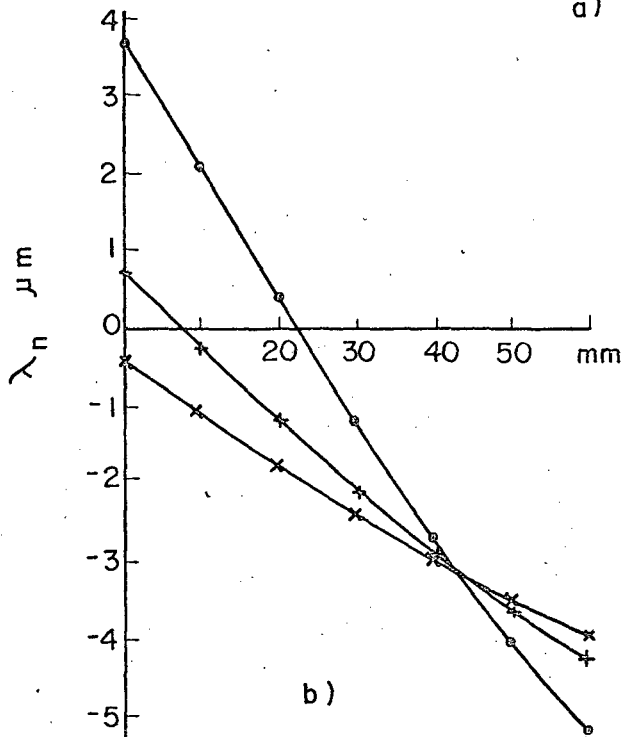
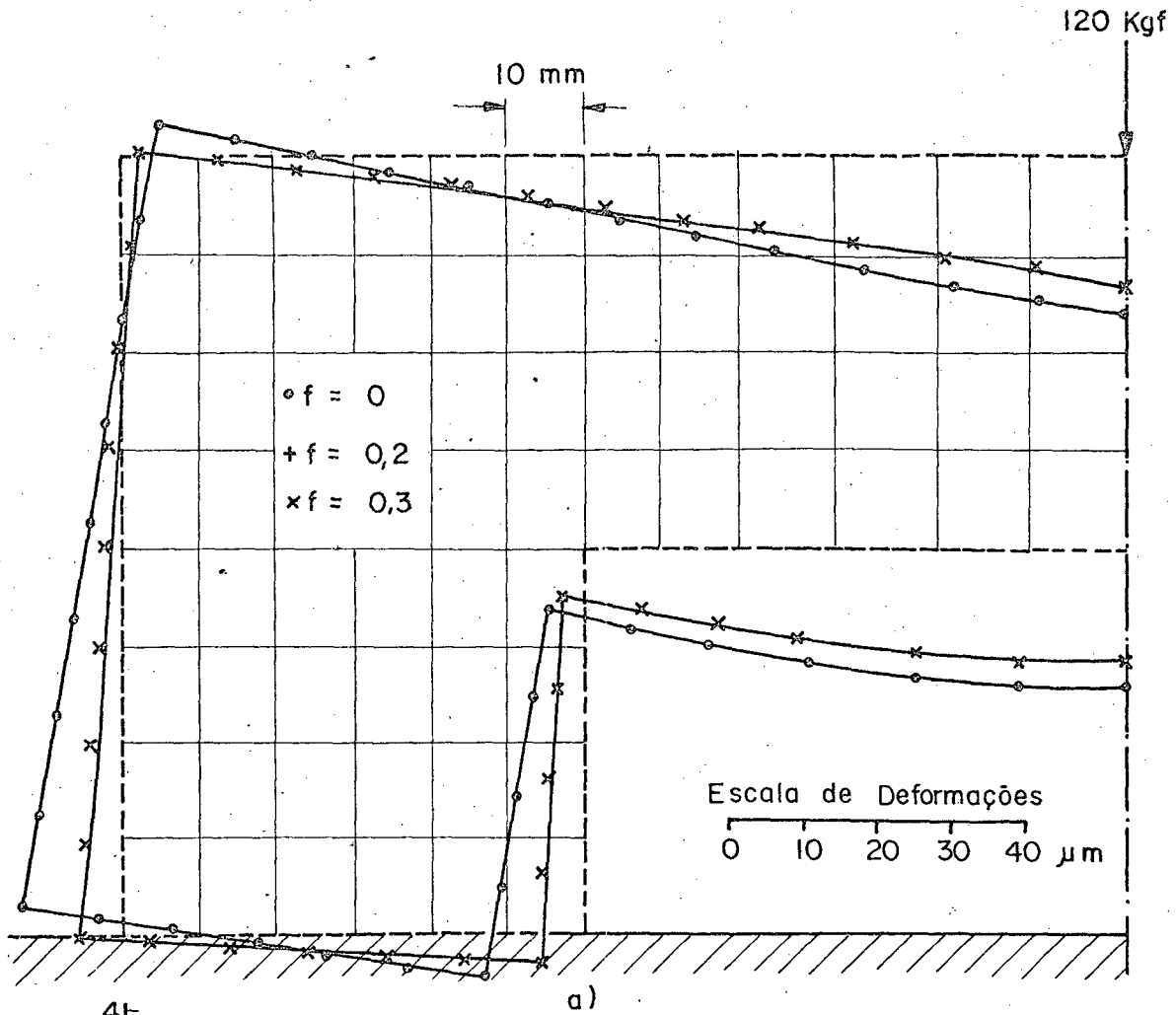
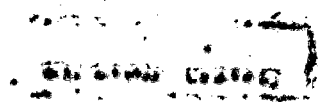


Fig. 25- a) Divisão do elemento finito e deformações na junta.

b) Deformações normais no contato.

c) Deformações tangenciais no contato.



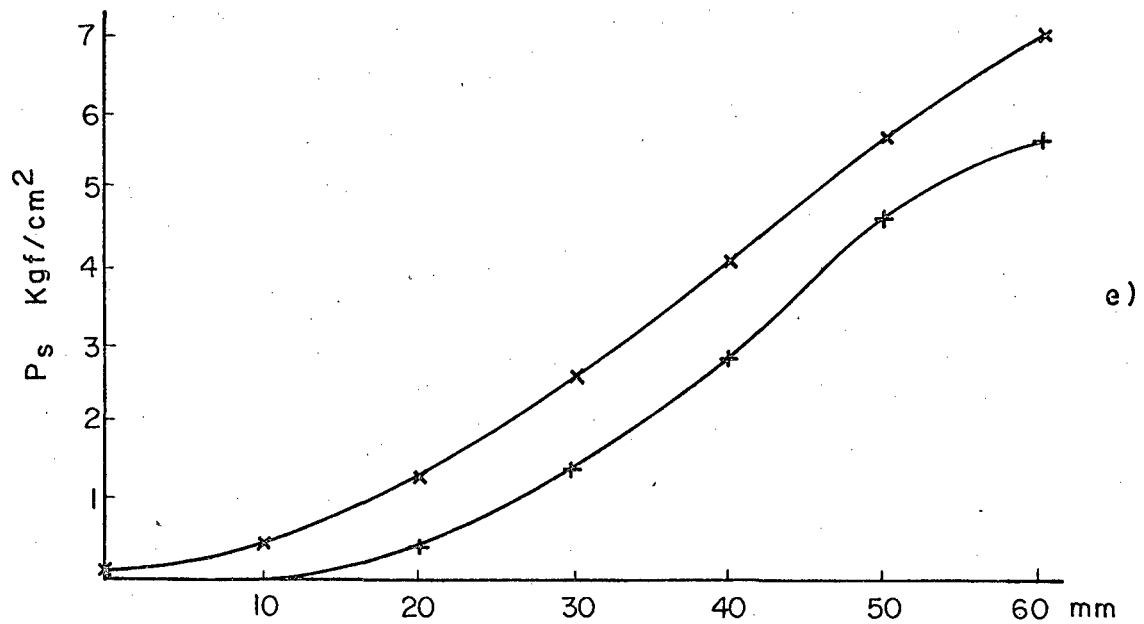
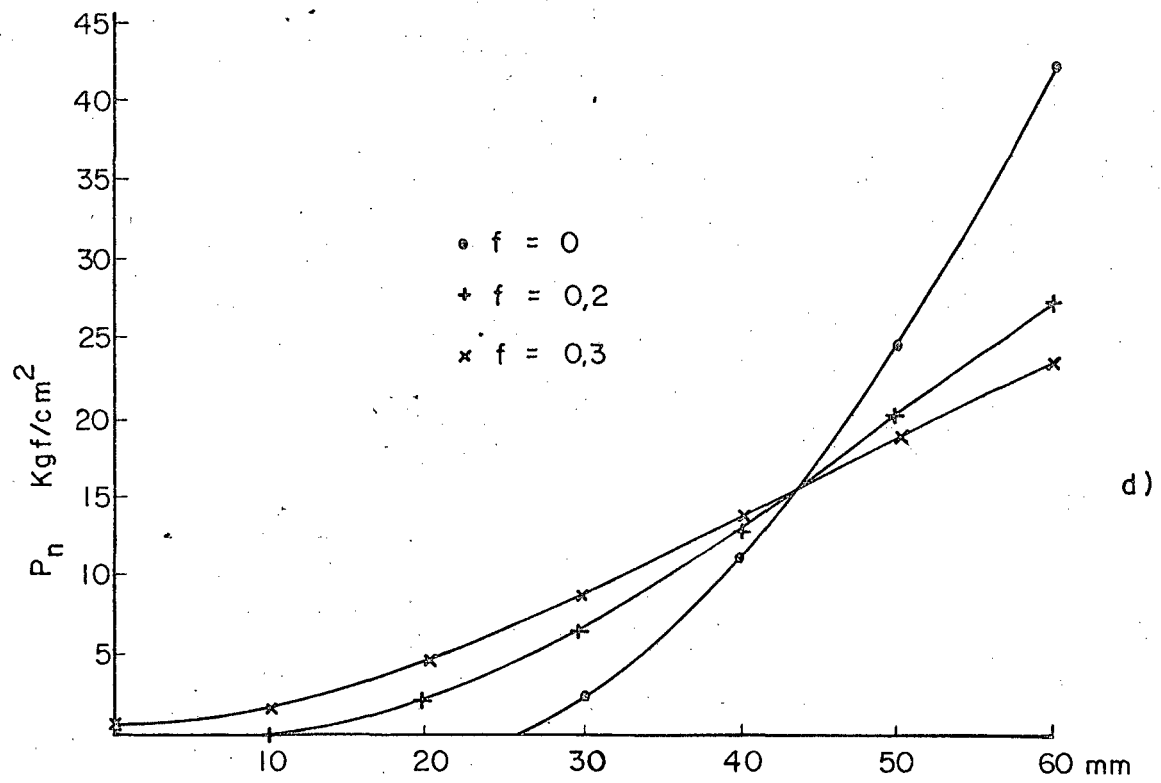


Fig. 25 - d) Pressão normal.
 c) Pressão tangencial.

11. CONCLUSÕES.

Pelo que foi exposto neste trabalho tem-se vários métodos numéricos para o cálculo das deformações e distribuição de pressão no contato de corpos elásticos em contato. À medida que foi feita uma sumária descrição de cada método foram apresentados também as limitações de cada técnica. Para uma rápida conclusão de qual deve ser adotado serão apresentadas as principais vantagens e limitações de cada método:

a) O método de Gould e Mikic apresenta como vantagem de necessitar um programa de computador comum para o método do elemento finito. Como desvantagem as peças em contato serão ligadas rigidamente na direção tangencial, ao longo do real contato, o que não se verifica na prática e por outro lado não é considerado a flexibilidade das superfícies em contato.

b) O método de White e Enderby é semelhante ao método desenvolvido pelo Autor⁹ mas com elementos de ligação rígidos logo também não permite simular a flexibilidade normal e tangencial das superfícies em contato. Este método pode ser adotado nos casos em que os deslocamentos relativos tangenciais das superfícies são pequenos.

c) O método de Scholes e Strover apresenta como principal inconveniente o grande volume de computação para a determinação das matrizes de flexibilidade nos nós de contato, ainda mais quando se pretende introduzir a flexibilidade das superfícies, quando estas matrizes deverão ser recalculadas para cada iteração devido a não linearidade da relação pressão-deformação de contato. A outra desvantagem deste método é que necessita além do programa de computador para o método do elemento finito, outro programa para a solução do sistema de equações (9).

d) O método de Chan e Tuba apresenta uma formulação matemática mais lógica mas tem-se dificuldades, de introduzir a flexibilidade das superfícies de contato e de complexidade da solução do sistema de equações (20) e (21).

e) O método da simulação de pressão é somente adequado para sistemas de forças e carregamentos simétricos, mas permite incluir o efeito da flexibilidade das superfícies e forças de atrito.

f) O método da placa é bem versátil mas também apre -

sentam dificuldades a considerar o efeito da flexibilidade tangencial das superfícies e das forças de atrito. Com este método obtêm-se bons resultados⁹ quando os deslocamentos tangenciais das superfícies são pequenos.

g) O método recomendado é o método da mola e que apresenta as seguintes vantagens: a solução é simples, necessita somente de um programa de computador comum para o método do elemento finito; considera a flexibilidade normal e tangencial das superfícies usinadas; quando ocorre o escorregamento pode ser introduzido o efeito das forças de atrito; não apresenta limitações de forma e carregamento dos corpos elásticos em contato; apresenta-se como um dos mais econômicos em termos de computação e como tem-se verificado nos exemplos do item 10 a correlação entre os resultados experimentais e teóricos é muito boa.

apr

REFERÊNCIAS

1. H. R. Thomas and V. A. Hoersch "Stresses Due to the Pressure of One Elastic Solid on Another" - Bulletin 212, Engineering Experiment Station, University of Illinois, June 15, 1930.
2. R. T. Roca and B. B. Mikic "Thermal Contact Resistance in a Non-Ideal Joint" Report No. DSR 71821-77, George C. Marshall Space Flight Center, NASA (1971).
3. R. Spiers and M. S. G. Cullimore "Fretting Fatigue Failure in Friction Grip Bolted Joints" - Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 10 (1968).
4. N. L. Klyachkin "Determining Contact Stresses on the Surfaces of Bolted Joints" - Russian Engineering Journal, Vol. 48 No. 3 (1968).
5. M. S. G. Cullimore and K. A. Upton "The Distribution of Pressure between Two Flat Plates Bolted Together" - Int. Journal of Mechanical Science, Vol. 6 (1964).
6. Y. Ito and M. Masuko "Distribution of Contact Pressure on Machine Tool Slideways" - 10th Int. M.T.D.R. Conf. (1969).
7. O. C. Zienkiewicz and Y. R. Cheung "The Finite Element Method Of Structural and Continuum Mechanics" - McGraw-Hill (1970).
8. J. S. Przemieniecki "Matrix Structural Analysis" McGraw-Hill (1968).
9. N. Back "Deformations in Machine Tool Joints" - Ph.D. Thesis U.M.I.S.T. (1972).
10. S. Hinduja "Analysis of Machine Tool Structures by the Finite Element Method" - Ph.D. Thesis, U.M.I.S.T. (1968).
11. H. H. Gould and B. B. Mikic "Areas of Contact and Pressure Distribution in Bolted Joints" ASME Publication, Paper no. 71-WA/DE-3 (1972).
12. D. J. White and L. R. Enderby "Finite Element Stress Analysis of a Non-Linear Problem: A Connecting-Rod Eye Loaded by Means of a Pin" - Journal of Strain Analysis, Vol. 5, No. 1 (1970).

13. H. W. McKenzie, D. J. White and C. Snell "Design of Steam-Turbine Casing Flanges: A Two-Dimensional Photoelastic Study" - Journal of Strain Analysis, Vol. 5, No. 1 (1970).
14. A. Scholes and E. M. Strover "The Picciewise-Linear Analysis of Two Connecting Structures Including the Effect of Clearance at the Connections" Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 3, 45-51 (1971).
15. S. K. Chan and I. S. Tuba " A Finite Element Method for Contact Problems of Solid Bodies - Part I. Teory and Validation" Int. Journal of Mechanical Science, Vol. 13, pp 615 (1971).
16. S.K. Chan and I. S. Tuba " A Finite Element Method for Contact Problems of Solid Bodies - Part II.Applications to Turbine Blade Fastenings" Int. Journal of Mechanical Science, Vol. 13, pp 627-639, (1971).
17. C. Visser and S. E. Gabrielse, Westinghouse, Report 67-1D7-GENCO - RZ (1967).
18. N. Back, M. Burdekin and A. Cowley "Review of the Research on Fixed and Sliding Joints" 13th Int. M.T.D.R. Conf.(1972)
19. N. Back "Rigidez Normal e Tangencial de Superfícies Usinadas" I Simpósio Brasileiro de Ciências Mecânicas e II Simposium Nacional de Engenharia Mecânica (1973).
20. N. Back "Algumas Aplicações do Computador no Projeto de Máquinas Ferramentas," - I Simpósio Brasileiro de Ciências Mecânicas e II Simposium Nacional de Engenharia Mecânica (1973).
21. N. Back, M. Burdekin and A. Cowley "Pressure Distribution and Deformations of Machined Components in Contact" Int. Journal of Mechanical Science, Vol. 15, pp 993-1010 (1973)
22. N. Back, M. Burdekin and A. Cowley "Analysis of Machine Tool Joints by the Finite Element Method" - 14th Int. M.T.D.R. Conf. (1973).
23. Z. M. Levina "Research on the Static Stiffness of Joints in Machine Tools" - 8th. Int. M.T.D.R. Conf. (1967).

24. M. P. Dolbey and R. Bell "The Contact Stiffness of Joints at low Apparent Interface Pressure" Annals of the C.I.R.P. (1970).
25. V. N. Kirsanova "The Shear Compliance on Flat Joints" Machines and Tooling, Vol 38 (1967):