



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Juliana Oliveira Costa

ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA EM COLISÕES DE ÍONS PESADOS

Florianópolis
2024

Juliana Oliveira Costa

ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA EM COLISÕES DE ÍONS PESADOS

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientadora: Prof^a. Débora Peres Menezes, Dra.

Florianópolis

2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Costa, Juliana Oliveira
ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA EM COLISÕES DE ÍONS PESADOS /
Juliana Oliveira Costa ; orientadora, Débora Peres
Menezes, 2024.
78 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Física. 2. Colisão de íons pesados. 3. Colisão Au-Au.
4. Estatística não-extensiva. I. Menezes, Débora Peres. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós
Graduação em Física. III. Título.

Juliana Oliveira Costa

ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA EM COLISÕES DE ÍONS PESADOS

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Odilon Lourenço da Silva Filho, Dr.
Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA)

Prof. Tiago José Nunes da Silva, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Física.

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

Prof^a. Débora Peres Menezes, Dra.
Orientadora
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Florianópolis, 2024.

*À Agnes e à Júlia,
para as mulheres incríveis que vocês se tornarão!*

AGRADECIMENTOS

Há muito o que e a quem agradecer. Começo pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), em especial ao Programa de Pós-Graduação em Física (PPGFSC), do qual tive o privilégio de participar. Às agências de fomento à pesquisa do país, em especial à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo financiamento da minha formação. Agradeço também ao INCT/FNA pelos eventos e financiamento, tão importantes para minha formação.

Agradeço imensamente à orientação da Professora Débora, por toda a paciência que há no universo. Ao Professor Marcelo Alloy pela disponibilidade em me ajudar com as correções e orientações necessárias. Ao Professor Luiz Guilherme, que talvez não tenha ideia do quanto me ajudou. Aos demais professores, por essa trajetória.

Aos amigos feitos durante essa caminhada: Rafael, por sua ajuda infinita e apoio acadêmico tão necessário e tão importante – me inspirou a ser uma acadêmica melhor; ao Eduardo, meu eterno companheiro de eventos científicos; ao João, por todo apoio, ajuda e disponibilidade em falar de física; ao Gabriel, Fábio e Everlyn, pelas correções, ajudas acadêmicas e incentivos durante esse processo. À Lavínia, pelo compartilhamento de vida, ciência e apoio incondicional. À Janayna, pelo contato inicial e por me mostrar a beleza desta Universidade.

Um carinho e agradecimento infinito à minha tia Dalva, que, sem ela, nada disso teria sido possível. Ao meu pai, Dário, que foi a primeira pessoa a me ensinar ciência; e à minha mãe, Joelma, por sempre estar com um livro na mão e fazer disso um incentivo aos estudos. Aos meus irmãos, Danilo e Júlia, que são a minha alma. Agradeço às diversas palavras de encorajamento da minha sogra, Clissi, por muitas vezes ter me enxergado melhor do que eu me enxergava. À Priscila, por todo o carinho, amor, empatia e suporte emocional tão necessários durante todos esses 11 anos que nos conhecemos. À Benedita, por estar ao meu lado (mesmo à distância).

E um agradecimento mais que especial à pessoa que fez de tudo por mim, pelo meu curso e pelo meu sonho, meu esposo Igor Ávila. Sem você e seu apoio incondicional, nada disso teria sido possível de ser concluído. Muito obrigada por me ouvir falar de física durante todos esses anos. Você e o Hertz (meu cachorro) sempre foram a minha melhor plateia enquanto eu ensaiava minhas apresentações. Obrigada, Hertz (meu fisicão), por manter meus pés aquecidos enquanto você se deitava neles pedindo atenção no momento em que eu escrevia este trabalho. E obrigada, Planck (meu novo fisicão), que chegou trazendo alívio nessa reta final, onde o nervosismo reinava (em breve, você também ouvirá física).

Todos foram imprescindíveis nessa jornada! Cada pessoa e cada passo foram importantes. Obrigada a todos!

*“O mundo era para mim um segredo que desejava desvendar.
A curiosidade, a pesquisa séria para aprender as leis ocultas da natureza,
a alegria semelhante ao êxtase à medida que se revelavam para mim,
acham-se entre as primeiras sensações de que me recordo.”*
(Frankenstein, Mary Shelley)

RESUMO

As razões de partículas medidas em colisões centrais de íons de ouro (Au-Au) no RHIC são analisados utilizando modelos baseados nas estatísticas que descrevem gases livres de Fermi e Bose. Esses modelos fornecem uma base teórica simples para o entendimento do comportamento das partículas produzidas nessas colisões. Para uma descrição alternativa dos dados experimentais, as estatísticas supra-mencionadas foram substituídas pela estatística não-extensiva. Para realizar os cálculos necessários, foram escolhidos valores do parâmetro de Tsallis (q) entre 1,01 e 1,25. Entre esses valores, o parâmetro q igual a 1,16 mostrou-se o mais adequado, proporcionando a melhor concordância com os dados experimentais, de acordo com uma minimização de χ^2 . Este resultado sugere que a estatística não-extensiva pode levar em conta uma característica subjacente importante em colisões de íons pesados.

Palavras-chave: Colisão de íons pesados, Colisão Au-Au, Estatística não-extensiva.

ABSTRACT

The particle ratios measured in central collisions of gold ions (Au-Au) at RHIC are analysed using models based on the statistics describing Fermi and Bose free gases. These models provide a simple theoretical basis for understanding the behaviour of the particles produced in these collisions. For an alternative description of the experimental data, the aforementioned statistics have been replaced by non-extensive statistics. To carry out the necessary calculations, we chose values of the Tsallis parameter (q) between 1.01 and 1.25. Among these values, the parameter q equal to 1.16 proved to be the most appropriate, providing the best agreement with the experimental data, according to a minimisation of χ^2 . This result suggests that non-extensive statistics can take into account an important underlying characteristic in heavy ion collisions.

Keywords: Heavy ion collisions, Au-Au collision, Non-extensive statistics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Ilustra-se a representação dos modelos atômicos, respectivamente: o modelo da esfera indivisível de Dalton, o modelo do pudim de Passas de Thomson, o modelo com núcleo de Rutherford e o modelo quantizado de Bohr (retirado e modificado de [19]).	16
Figura 2.2 – Linha do tempo que mostra a cronologia das primeiras descobertas de partículas (figura elaborada pela autora, baseada em [24]).	17
Figura 2.3 – Partículas Elementares de acordo com o Modelo Padrão de Partículas (figura retirada e adaptada de [35]).	19
Figura 2.4 – A relação entre o acoplamento da força forte α_s e a escala de energia Q é representada neste gráfico. À medida que α_s diminui e Q aumenta, a força forte se enfraquece (figura retirada de [39]).	21
Figura 2.5 – Diagrama de fase da matéria da QCD, que varia de acordo com a temperatura e com a densidade bariônica (figura retirada de [40]).	23
Figura 2.6 – O principal injetor do Tevatron, o segundo maior acelerador de partículas do mundo, esteve em operação de 1983 a 2011 (figura retirada de [47]).	25
Figura 2.7 – Complexo de aceleradores do CERN, o maior laboratório de física de partículas do mundo (figura retirada de [50]).	26
Figura 2.8 – A figura ilustra os diferentes aceleradores e detectores que compõem o LHC (figura retirada e modificada de [51]).	27
Figura 2.9 – Complexo de aceleradores do RHIC, o maior colisor de íons pesados do mundo (figura retirada de [57]).	28
Figura 2.10 – Evolução hidrodinâmica de uma colisão de íons pesados, ilustrando os cenários possíveis de como o estado da matéria muda à medida que o sistema se expande e esfria (figura retirada de [63]).	30
Figura 2.11 – Evolução temporal de uma colisão de íons pesados. A figura ilustra como a temperatura e a densidade variam com o tempo durante a colisão (figura retirada de [65]).	30
Figura 3.1 – Ilustração de partículas fermiônicas distribuídas em níveis de energia, mostrando que dois férmions idênticos não podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente (figura adaptada de [74]).	40
Figura 3.2 – Ilustração de partículas bosônicas ocupando um único nível de energia (figura adaptado de [74]).	42
Figura 5.1 – Resultados obtidos de χ^2/dof como função de q no intervalo $1,01 \leq q \leq 1,25$, para $T = 58,2$ MeV e $\mu_B = 51,5$ MeV, obtidos por minimização (azul). O valor de dof é 14, pois há 16 dados experimentais e 2 parâmetros no ajuste (vermelho). O valor mínimo de χ^2/dof é obtido para $q = 1,16$. A linha horizontal indica o valor de $\chi^2/\text{dof} = 1$	57

Figura 5.2 – Gráfico de μ_B como função de q . Os resultados foram obtidos a partir do processo de minimização (azul) juntamente com os respectivos ajustes (vermelho).	58
Figura 5.3 – Gráfico de T como função de q . Os resultados foram obtidos a partir do processo de minimização (azul) juntamente com os respectivos ajustes (vermelho).	58

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – A tabela apresenta as quatro interações fundamentais da natureza. Além disso, é evidente que a interação forte é a mais intensa, porém possui um alcance menor comparado às outras interações (tabela retirada de [31]).	18
Tabela 2.2 – Nesta tabela são destacadas as propriedades dos seis tipos de quarks. Na tabela, a massa considerada é dos quarks livres (tabela elaborada pela autora, dados retirados de [27]).	20
Tabela 2.3 – Esta tabela destaca a composição dos sabores dos bárions Σ^* e ilustra como a diversidade da carga de cor permite a existência de configurações de quarks (tabela elaborada pela autora, dados retirados de [27]).	20
Tabela 3.1 – Estatísticas e configurações possíveis das ocupações nos estados (tabela elaborada pela autora, dados retirados de [72]).	40
Tabela 5.1 – Razões de partículas em colisões Au-Au, considerando $q = 1.01$ e $q = 1.16$, juntamente com dados experimentais a $\sqrt{s} = 130$ GeV, analisados com parâmetros definidos em $T = 58.2$ MeV e $\mu_B = 51.5$ MeV.	59

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	FÍSICA DE PARTÍCULAS	15
2.1	MODELO PADRÃO	15
2.2	CROMODINÂMICA QUÂNTICA	19
2.3	FÍSICA DE ALTAS ENERGIAS	24
2.4	COLISÃO DE ÍONS PESADOS	29
3	MODELOS ESTATÍSTICOS	32
3.1	<i>ENSEMBLE</i> MICRO-CANÔNICO	32
3.2	<i>ENSEMBLE</i> CANÔNICO	33
3.3	<i>ENSEMBLE</i> GRANDE-CANÔNICO	35
3.4	ESTATÍSTICAS QUÂNTICAS E CLÁSSICA	37
3.4.1	Estatística de Fermi-Dirac	40
3.4.2	Estatística de Bose-Einstein	42
3.5	GÁS DE FERMI LIVRE	43
3.6	GÁS DE BOSE LIVRE	45
4	ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA	47
4.1	PROPRIEDADES DA ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA	47
4.2	DISTRIBUIÇÃO DE PARTÍCULAS COM A ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA	50
4.2.1	Distribuição de Férmions no sistema	51
4.2.2	Distribuição de Bósons no sistema	52
5	RESULTADOS	54
5.1	FORMALISMO	54
5.2	ANÁLISE DA FRAÇÃO DE PARTÍCULAS NA COLISÃO AU-AU	56
6	CONCLUSÃO	60
	REFERÊNCIAS	61
	ANEXO A – PUBLICAÇÃO	72

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, experimentos de colisão de íons pesados, como ouro (Au) ou chumbo (Pb), com velocidades relativísticas em aceleradores de partículas [1, 2, 3], como o RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) e o LHC (Large Hadron Collider), têm desempenhado um papel fundamental na exploração do diagrama de fases da QCD [4, 3]. QCD, do inglês Quantum Chromodynamics, é a teoria que descreve a força forte, e o diagrama de fases contém as diferentes fases da matéria: a matéria hadrônica, o plasma de quarks e glúons e, possivelmente, uma fase supercondutora de cor, além de haver a possibilidade da chamada fase quarkíônica. A transição entre as fases dá-se em função da temperatura e da densidade bariônica.

Essas colisões criam condições extremas de energia, proporcionando um ambiente único para a formação do plasma de quarks e glúons (QGP, do inglês *Quark Gluon Plasma*) [5, 6]. Esse plasma altamente energético e denso recria, por breves momentos, as condições extremas que se acredita terem prevalecido nos estágios iniciais do Universo [7]. Contudo, a observação direta desse plasma ainda não é possível, e sua existência ainda é inferida a partir das propriedades das partículas finais detectadas nesses experimentos. Nesse contexto, no Capítulo 2 serão apresentados os fundamentos da física de partículas. Também no Capítulo 2, os constituintes básicos da matéria serão discutidos. Neste Capítulo será explorado o Modelo Padrão de partículas, desenvolvido na década de 70, que descreve três forças fundamentais da natureza (o eletromagnetismo, interação fraca e a interação forte) e classifica as partículas elementares conhecidas.

Nas colisões a altas energias, cria-se um ambiente complexo, especialmente em relação às possíveis configurações nas quais essas partículas podem ser formadas. O Modelo Padrão ajudará a entender essa constituição, e a Cromodinâmica Quântica (QCD) servirá para descrever um tipo de interação importante na formação dessas partículas: a interação forte. Veremos que o *quarks* e os *glúons* são elementares, e como estes se mantêm unidos para formação de partículas. Esses experimentos acontecem em aceleradores de partículas, que são os instrumentos que nos proporcionam a capacidade de explorar a estrutura fundamental do universo, como aquelas que existiam pouco após o Big Bang. O Capítulo 2 conclui discutindo as colisões de íons pesados, onde esses núcleos atômicos pesados são acelerados a velocidades muito altas e colididos uns com os outros.

A compreensão dessas condições extremas e a caracterização das partículas fundamentais requerem a combinação de dados experimentais e modelos teóricos. Uma forma de avaliar esses resultados é através de Modelos Estatísticos. No Capítulo 3, serão introduzidos os Modelos Estatísticos, baseados em conceitos de *ensembles*. Esses *ensembles* descrevem sistemas físicos sob as mesmas condições e incluem: o *ensemble* micro-canônico, para sistemas isolados; o *ensemble* canônico, para sistemas que trocam energia com um reservatório térmico; e o *ensemble* grande-canônico, para sistemas que trocam energia e partículas. No Capítulo 3

também serão abordados os modelos de Gás de Fermi livre e Gás de Bose livre, que obedecem as estatísticas de Fermi-Dirac e Bose-Einstein, respectivamente. Estes modelos serão construídos a partir do *ensemble* grande-canônico, adequado para a modelagem de distribuição de partículas produzidas em colisões de altas energias.

Esses modelos consideram o QGP como um sistema altamente aquecido em equilíbrio termodinâmico, permitindo uma análise muito simplificada para entender partículas resultantes. Nesse contexto, a estatística não-extensiva surge como uma alternativa aos modelos e estatísticas convencionais, proporcionando uma visão simples do processo de produção de partículas. No Capítulo 4 será introduzida a estatística não-extensiva, suas propriedades e como ela generaliza a estatística usual.

À medida que o QGP formado em colisões ultra-relativísticas entre íons pesados se expande, ele esfria e quarks e glúons se recombinaem em hádrons, processo conhecido como hadronização [8]. A produção múltipla de partículas nessas colisões oferece informações valiosas sobre a natureza e composição do QGP. Neste trabalho, será apresentada uma abordagem para estudar a produção de partículas nesses experimentos, baseada na estatística não-extensiva. No Capítulo 4, a estatística não-extensiva, uma generalização da mecânica estatística clássica [9], é explorada. Neste capítulo, as funções exponenciais e logarítmicas generalizadas, essenciais para a descrição dessa estatística, serão consideradas. A formulação da entropia e suas propriedades fundamentais, como não-extensividade e não-aditividade, também serão discutidas. Além disso, no Capítulo 4 será tratada a estatística não-extensiva como uma generalização das estatísticas de Fermi-Dirac e Bose-Einstein. Assim, as densidades de partículas serão reformuladas para considerar os efeitos da não extensividade.

No Capítulo 5, são apresentados as razões de partículas medidos em experimentos de colisão de dois núcleos de ouro, utilizando os conhecimentos dos capítulos anteriores. Será investigado o efeito do parâmetro de Tsallis (discutido no Capítulo 4) nas distribuições de partículas e comparadas às previsões do modelo com os dados experimentais. No Capítulo 6, será discutida a adequação do modelo baseado na estatística não-extensiva para descrever as propriedades observadas em colisões de íons pesados.

2 FÍSICA DE PARTÍCULAS

No âmbito da física de partículas, o Modelo Padrão é uma teoria fundamental que descreve as partículas elementares e as interações entre elas. Um componente essencial desse modelo é a QCD (do inglês *Quantum Chromodynamics*), que é a teoria responsável por descrever a interação forte. Esta interação age entre quarks e glúons, os constituintes básicos dos hádrons, como os prótons e nêutrons. A QCD é fundamental para compreender a formação e a estabilidade da matéria nuclear. A pesquisa em física de altas energias é essencial para testar e expandir o Modelo Padrão, e pode ser estudada por meio de aceleradores de partículas. Dois dos mais importantes laboratórios nesse campo são: o Laboratório Nacional de Brookhaven, nos Estados Unidos, onde se localiza o Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC), e o CERN (do francês, antigo *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire*), na fronteira franco-suíça, onde se localiza o Large Hadron Collider (LHC).

O RHIC acelera e colide íons pesados, como íons de ouro (Au), a altas energias. O CERN, através do LHC, realiza colisões entre prótons e entre íons pesados, como chumbo (Pb). Essas colisões criam condições extremas de temperatura e densidade similares às existentes no Universo logo após o Big Bang. Tais condições são propícias para o estudo do plasma de quarks e glúons (QGP, do inglês *Quark Gluon Plasma*), um estado da matéria em que se acredita que os quarks e glúons estão desconfinados, oferecendo perspectivas preciosas sobre a QCD e a estrutura da matéria. Isso permite não apenas testar a QCD em regimes de energia extremamente altos, mas também investigar fenômenos além do Modelo Padrão, como busca por novas partículas e a compreensão da matéria escura.

2.1 MODELO PADRÃO

Desde a exploração da estrutura da matéria até a crença inicial de que o átomo era a menor unidade possível, a busca pela composição fundamental da matéria tem alimentado a curiosidade humana ao longo do tempo [10]. O início deu-se com Leucipo (480-420 a.C.) e Demócrito (460-370 a.C.) [11, 12, 13], os quais foram responsáveis por formular a primeira teoria atomista. Nessa teoria, a matéria, em sua essência, era composta por partículas minúsculas e indivisíveis: o átomo [12, 14]. Assim, o átomo era, até então, considerado a menor unidade constituinte da matéria e era indivisível.

Com a evolução do entendimento atômico, John Dalton (1766-1844) trouxe sua concepção em 1808 da esfera indivisível e maciça [12, 15] e Joseph Thomson (1856-1940) avançou os estudos descobrindo o elétron em 1897 [16] e propondo em 1904 o famoso “pudim de passas” [17]. Esta analogia explicaria a distribuição das partículas elementares no átomo, que carregava consigo os elétrons e as cargas positivas, e que estes estavam distribuídos de forma homogênea dentro de uma esfera. Posteriormente, Ernest Rutherford (1871-1937) observou em seu experimento de dispersão de partículas alfa que estas sofriam desvios, indicando assim, que a maior parte da massa do átomo estava concentrada em uma região central muito menor, que

ele chamou de núcleo [12]. Sendo assim, em 1911 Rutherford desenvolveu a teoria do modelo planetário [12, 13] no qual os elétrons orbitavam ao redor de um núcleo central carregado positivamente, em vez de estarem dispersos junto com os prótons.

Embora revolucionária, a teoria de Rutherford ainda não explicava completamente a estabilidade do átomo e a distribuição dos seus elétrons, cuja explicações vieram com Niels Bohr (1885-1962). Bohr em 1913 desenvolveu seu modelo tomando como base as ideias de quantização de energia de Max Planck (1858-1947) [18] e teorias de Albert Einstein (1879-1955). Sendo assim, propôs que os níveis de energia dos elétrons eram quantizados e que os elétrons se movem em órbitas estáveis ao redor do núcleo, mas podem saltar de um nível de energia (ou órbita) para outro.

A fig. 2.1 ilustra a evolução dos modelos atômicos citados:

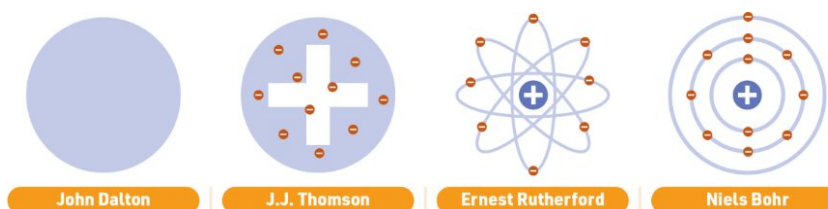


Figura 2.1 – Ilustra-se a representação dos modelos atômicos, respectivamente: o modelo da esfera indivisível de Dalton, o modelo do pudim de Passas de Thomson, o modelo com núcleo de Rutherford e o modelo quantizado de Bohr (retirado e modificado de [19]).

Após o modelo atômico de Bohr, o descobrimento do nêutron em 1932 por James Chadwick (1891-1974) desempenhou um papel importante na física atômica [12, 20, 21]. Embora o modelo de Bohr fosse aplicável em estruturas simples, como o átomo de hidrogênio, ele apresentava lacunas quando aplicado a estruturas maiores, especialmente em relação à estabilidade nuclear e à discrepância de massa atômica. Essa partícula sem carga elétrica [21], ajudou a explicar algumas dessas questões, pois contribui para a massa atômica sem influenciar a carga nuclear. Hideki Yukawa (1907-1981), destacou o papel fundamental do nêutron na estabilidade do núcleo atômico.

No entanto, ainda persistiam questões a serem resolvidas na área nuclear. Yukawa havia teorizado sobre a existência de uma partícula [22], mais tarde identificada como méson pi (ou pión), que mediaría a interação nuclear, fornecendo a força atrativa necessária para superar a repulsão eletrostática entre os prótons. Mais tarde, isso se tornou conhecido como *píon*, observado em 1947 por Cecil Powell (1903-1969), César Lattes (1924-2005) e colaboradores [23] por meio do rastro em emulsões fotográficas obtidas da alta atmosfera.

Pouco tempo depois da descoberta do méson pi (π^\pm/π^0), o méson K (ou Kaón - K^\pm/K^0) também foi descoberto. A partir de então, uma gama de novas partículas, antipartículas e uma série de partículas exóticas começaram a emergir, conforme podemos visualizar na fig. 2.2. E com chegada dos grandes aceleradores de partículas, houve uma profusão de novas partículas, sendo necessário estabelecer uma certa ordem e retornar à simplicidade para encontrar o que há de mais fundamental na constituição destas partículas [24].

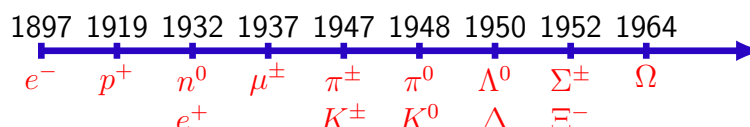


Figura 2.2 – Linha do tempo que mostra a cronologia das primeiras descobertas de partículas (figura elaborada pela autora, baseada em [24]).

O modelo de Gell-Mann (1929-2019) [25] e Stefan Zweig (1937-Atual) [26], proposto de maneira independente em 1964, introduziu os quarks como constituintes elementares das partículas, como prótons e nêutrons. Essa teoria descreve os quarks agrupados [27] em trios (bárions) ou pares (mésons), oferecendo uma explicação para a vasta gama de partículas observadas em experimentos de altas energias. Além disso, os léptons são apresentados como partículas elementares sem subestrutura, assim como os quarks, ambos essenciais na composição da matéria.

As descobertas e contribuições científicas no campo da física de partículas, revelaram que há outras interações fundamentais que regem o universo, e com isso foi possível ter uma visão geral de que a física atual é capaz de explicar quase todos os fenômenos físicos conhecidos por meio de quatro interações fundamentais: força gravitacional, força eletromagnética, força nuclear fraca e força nuclear forte.

A interação gravitacional atua em todas as partículas com massa¹ e a primeira a ser compreendida fenomenologicamente. Na física clássica, a teoria da gravitação universal de Newton descreve essa força, mostrando que todos os objetos com massa são afetados por ela. No entanto, sua descrição quântica ainda não é bem definida, e a possível partícula mediadora dessa força, chamada de “*gráviton*”, ainda não foi detectada. Hoje, a teoria moderna da gravidade é explicada pela teoria da relatividade geral de Albert Einstein (1879-1955), que descreve a gravidade como a curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa/energia. Quando esses objetos massivos (como planetas, estrelas e buracos negros) sofrem mudanças significativas em sua distribuição de massa ou aceleram, produzem ondulações na curvatura do espaço-tempo, conhecidas como ondas gravitacionais, que se propagam pelo universo. Essas ondas foram detectadas pela primeira vez em 2015 [28] pelo LIGO (do inglês, *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*), confirmando assim a previsão de Einstein.

A interação eletromagnética é responsável por atuar em partículas com carga elétrica. Uma descrição inicial dessa força clássica foi feita por James Clerk Maxwell (1831-1879), cujas equações fundamentais descrevem a natureza do campo eletromagnético. Essa interação possui sua descrição quântica [29, 30] como uma das teorias mais bem-sucedidas da física moderna, estabelecida por Richard Feynman (1918-1988), Julian Schwinger (1918-1994) e Shin’ichiro Tomonaga (1906-1979), que é a Eletrodinâmica Quântica (QED², do inglês *Quantum Electrodynamics*). A QED fornece uma descrição do comportamento das partículas carregadas sob a influência do campo eletromagnético e em uma ampla gama de fenômenos físicos, desde a

¹ Também atua em fótons, uma vez que feixes de luz são desviados perto de objetos supermassivos.

² A base foi essencial para a construção da QCD.

interação entre partículas subatômicas até a descrição do comportamento da luz e da matéria em níveis fundamentais. O *fóton* é a partícula mediadora da força eletromagnética, não possui massa e é responsável pela mediação desta força entre partículas carregadas.

A força nuclear fraca desempenha um papel fundamental em decaimentos radioativos, captura de elétrons e a interação de neutrinos com a matéria hadrônica [31]. A força nuclear fraca possui alcance curto e ela atua sobre os hádrons e os léptons. As partículas trocadas são os bósons Z^0 e W^\pm . O exemplo mais comum dessa interação é o processo conhecido como decaimento β , que é um processo fundamental que pode alterar a identidade dos quarks dentro dos hádrons, onde um tipo de quark pode se transformar em outro tipo de quark, mediado pela emissão ou absorção de um W ou Z . Essa transformação de quarks é fundamental para entender a variedade de partículas elementares e seus decaimentos. O decaimento β também é responsável pelo processo de transformar um núcleo instável em outro núcleo através da emissão das partículas β , como os elétrons ou pósitrons. Por completeza, a interação eletrofraca (teoria GWS) unifica a força nuclear fraca e a eletromagnética, e foi desenvolvida por Sheldon Glashow (1932-Atual), Abdus Salam (1926-1996) e Steven Winberg (1933-2021). Esta, descreve como os bósons mediadores da força fraca interagem com os quarks e léptons.

E por fim, a força nuclear forte, que assegura a estabilidade do núcleo atômico e cuja descrição é dada pela QCD, que explica a interação entre os quarks e suas partículas mediadoras, os *glúons* [32]. O glúon deriva do inglês e significa cola, devido a sua ação para manter os quarks agrupados. Ela é a interação de maior intensidade, atua mantendo os quarks unidos para formar hádrons.

Um dos comportamentos extremos da QCD é a *liberdade assintótica* [33, 34], que sugere que quanto mais próximos os quarks estão um dos outros, mais fraca é a força entre eles, inversamente, quanto mais afastados, mais forte é a força, e esse comportamento impede que os quarks sejam observados isoladamente no estado livre, fenômeno este que é conhecido por confinamento de cor. Em contraste com o fóton, os glúons se distinguem por suas cargas de cor, o que os capacita a interagir entre si. Na tab. 2.1, contém as principais características das quatro interações fundamentais discutidas:

Interação	Teoria	Mediador	Intensidade	Alcance	Atua em
Forte	QCD	Glúon	1	10^{-15} m	carga de cor
Eletromagnética	QED	Fóton	$1/137$	∞	carga elétrica
Fraca	GWS	W^\pm, Z	10^{-20}	10^{-18} m	Todas
Gravitacional		“Graviton”	5.3×10^{-39}	∞	partículas com massa

Tabela 2.1 – A tabela apresenta as quatro interações fundamentais da natureza. Além disso, é evidente que a interação forte é a mais intensa, porém possui um alcance menor comparado às outras interações (tabela retirada de [31]).

As partículas elementares, de acordo com o Modelo Padrão, podem ser classificadas em dois grupos: os férmions e os bósons. Os férmions, que obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, compõem a matéria que encontramos no universo. Por outro lado, os bósons, que

não estão sujeitos a esse princípio, são responsáveis por mediar as interações fundamentais.

Sendo assim, o Modelo Padrão da física de partículas além de contemplar as três forças fundamentais da natureza (o eletromagnetismo e as forças nucleares fraca e forte³) contém os doze férmions fundamentais que são os quarks e os léptons, e também os bósons mediadores, conforme pode ser notado na fig. 2.3. Há também o setor de Higgs, onde o bóson de Higgs interage com as demais partículas.

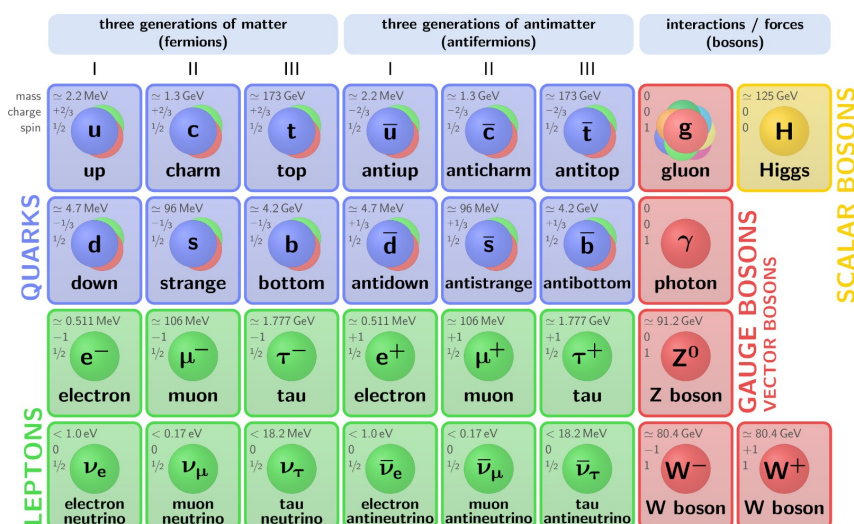


Figura 2.3 – Partículas Elementares de acordo com o Modelo Padrão de Partículas (figura retirada e adaptada de [35]).

Também na fig. 2.3, é possível observar que existem seis tipos de quarks (ou 'sabores'⁴) distintos: *up* (*u*), *down* (*d*), *charm* (*c*), *strange* (*s*), *bottom* (*b*) e *top* (*t*), e para cada quark (*q*) existe um antiquark (\bar{q} , sua antipartícula) que são *anti-up* (\bar{u}), *anti-down* (\bar{d}), *anti-charm* (\bar{c}), *anti-strange* (\bar{s}), *anti-bottom* (\bar{b}) e *anti-top* (\bar{t}). Esses quarks interagem entre si por meio da força forte, mediada pelos glúons, o que resulta na formação de partículas hadrônicas. Já os léptons incluem o *elétron*, o *múon*, o *tau* e os neutrinos associados a cada um deles. Além desses férmions, existem seis bósons fundamentais: o fóton é responsável pela interação eletromagnética, os bósons *W* e *Z* regem a interação fraca, o glúon é o mediador da interação forte entre os quarks (estes foram apresentados na tab. 2.1) e o bóson de Higgs confere massa às partículas fundamentais.

A compreensão da interação entre essas partículas é crucial para entender a estrutura básica do universo. Em particular, nos hádrons – como os prótons e os nêutrons – a interação entre quarks e glúons cria um ambiente complexo, onde as leis da física de partículas precisam ser consideradas para entendermos aspectos fundamentais da matéria e da energia no universo.

2.2 CROMODINÂMICA QUÂNTICA

A QCD é a teoria que descreve a interação entre quarks por meio da força forte e é importante compreender as propriedades quânticas dessas partículas elementares, como a carga de “cor”, que é uma característica envolvida na interação forte entre os quarks, e os diversos

³ A gravitação não é abordada no modelo padrão.

⁴ Número quântico que define o tipo de quark.

sabores que essas partículas podem apresentar. A carga de cor representa os três estados fundamentais da QCD (vermelho, azul e verde) e seus respectivos antielementos (anticores: antivermelho, antiazul e antiverde) – e os diferentes “sabores” de quarks ($u, d, c, s, b, t, \bar{u}, \bar{d}, \bar{c}, \bar{s}, \bar{b}, \bar{t}$) representam o tipo de quark.

Quark	Sabor	Carga Elétrica	Spin	Massa
(u)	up	+2/3	+1/2	≈ 4 MeV
(d)	down	-1/3	+1/2	≈ 6 MeV
(c)	charm	+2/3	+1/2	≈ 1,270 MeV
(s)	strange	-1/3	+1/2	≈ 150 MeV
(b)	bottom	-1/3	+1/2	≈ 4,180 MeV
(t)	top	+2/3	+1/2	≈ 173,000 MeV

Tabela 2.2 – Nesta tabela são destacadas as propriedades dos seis tipos de quarks. Na tabela, a massa considerada é dos quarks livres (tabela elaborada pela autora, dados retirados de [27]).

Os quarks, dada a sua complexidade de suas propriedades, participam ativamente em todas as interações conhecidas. Por possuírem massa, são afetados pela gravidade, com sua carga elétrica, interagem através da força eletromagnética, ao carregarem carga de cor, ficam sujeitos à interação forte e são capazes de mudar de sabor durante processos de decaimento, respondendo à força nuclear fraca. Esses atributos distinguem os quarks dos léptons.

Os glúons, que são mediadores da interação forte, possuem carga de cor, o que os faz interagir entre si. A necessidade de conservar a carga de cor nessas interações implica que os glúons transportem uma combinação de cor e anticor simultaneamente. Assim, diferentemente da interação fóton-elétron, na qual a carga elétrica é preservada, a interação forte envolvendo quarks e glúons é marcada pela troca dinâmica de cores.

A introdução do conceito de carga de cor [36, 37] foi fundamental para resolver uma aparente violação do Princípio de Exclusão de Pauli no modelo dos quarks. Originalmente, este modelo fornecia uma explicação para a diversidade de hádrons observados, mas enfrentava desafios ao explicar certas configurações de partículas, as quais pareciam contrariar o Princípio. O conceito de carga de cor permitiu aos físicos contornar essas contradições, introduzindo um novo grau de liberdade para os quarks.

Um caso ilustrativo dessa situação é observado na família de bárions Σ^* , que compreende partículas como Σ^+ , Σ^0 , e Σ^- , todas formadas por três quarks de diferentes sabores. Na tab. 2.3 podemos visualizar a composição de quarks dessa família de bárions:

Bárion	Composição de Quarks	Spin Total
Σ^+	uus	3/2
Σ^0	uds	3/2
Σ^-	dds	3/2

Tabela 2.3 – Esta tabela destaca a composição dos sabores dos bárions Σ^* e ilustra como a diversidade da carga de cor permite a existência de configurações de quarks (tabela elaborada pela autora, dados retirados de [27]).

Uma característica notável desses bárions é que eles possuem um spin total de $3/2$. Esse spin elevado, combinado com a composição de quarks, inicialmente parecia desafiar o Princípio de Exclusão de Pauli, já que todos os três quarks poderiam ocupar estados quânticos semelhantes em violação ao princípio. Contudo, a introdução da carga de cor como um grau de liberdade adicional oferece uma solução, permitindo que três quarks idênticos (em termos de sabor) coexistam no mesmo estado quântico sem violar o princípio, desde que eles tenham diferentes cargas de cor.

Essa complexidade destaca uma característica importante da QCD: o confinamento quântico [38], que prevalece sob condições de baixa energia e temperatura, onde os quarks se agregam para formar partículas compostas, um processo conhecido como hadronização.

A teoria prevê a existência de uma fase da matéria, o QGP, sob condições extremas de temperatura ou densidade, permitindo que os quarks e glúons circulem livremente fora dos hádrons. Este fenômeno é contrastante com o princípio de confinamento, onde a força forte, que mantém os quarks unidos, torna-se cada vez mais intensa à medida que tentam se separar, efetivamente impedindo sua dispersão em condições normais. No entanto, no regime de altas energias, a liberdade assintótica se manifesta na QCD. A constante de acoplamento (α_s) da QCD diminui, resultando em uma interação menos intensa entre quarks e glúons. Isso conduz ao aumento do livre caminho médio dessas partículas, sugerindo a possibilidade de quarks existirem de maneira livre, não confinados dentro dos hádrons, em contextos específicos que transcendem as condições normais de confinamento.

A constante de acoplamento forte, que regula a força da interação forte em diferentes escalas energéticas, desempenha um papel crucial neste cenário, evidenciando a dinâmica complexa e as transições de fase que caracterizam o comportamento dos constituintes fundamentais da matéria sob condições extremas. A fig. 2.4, resume as medições de α_s em função da escala de energia Q [39]. As curvas são previsões da QCD.

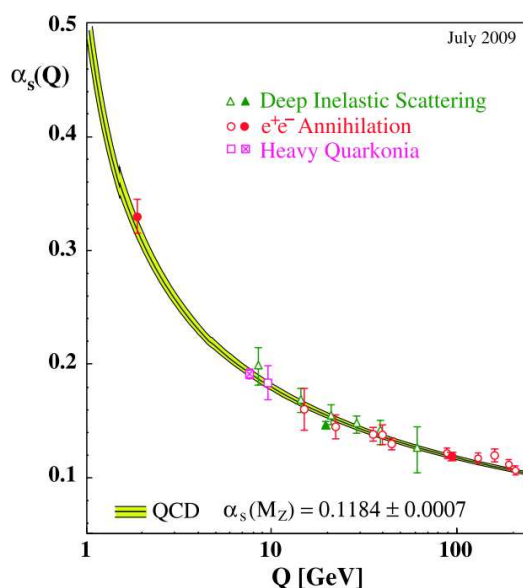


Figura 2.4 – A relação entre o acoplamento da força forte α_s e a escala de energia Q é representada neste gráfico. À medida que α_s diminui e Q aumenta, a força forte se enfraquece (figura retirada de [39]).

No regime de baixas energias, a força forte aumenta à medida que a separação entre dois quarks aumenta. Ao tentar separar os quarks injetando energia no sistema, chega-se a um ponto crítico onde, antes de se observar quarks livres, essa energia contribui para a criação espontânea de um novo par quark-antiquark ($q\bar{q}$). Esse processo transforma o hádron inicial em um par de novos hádrons. Esse processo da QCD é conhecido como confinamento de cor, que efetivamente impede a observação de quarks isolados na natureza. A alta constante de acoplamento forte neste regime torna as técnicas perturbativas inadequadas devido à complexidade dos cálculos envolvidos. Tal desafio motiva o desenvolvimento de modelos fenomenológicos que buscam compreender a física de partículas sob essas condições extremas de confinamento.

Uma via para compreender as propriedades da QCD é através da análise de sua densidade Lagrangiana. Essa expressão contém todas as informações fundamentais sobre como os quarks e glúons interagem sob a influência da força forte:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{a,f} [\bar{\psi}_f^a (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) \psi_f^a - g \bar{\psi}_f^a A_\mu \gamma^\mu \psi_f^a] - \frac{1}{8} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Na densidade Lagrangiana da QCD, os índices de cor $a = r, g, b$ representam os três campos de cores: vermelha, verde e azul, respectivamente. Os sabores dos quarks são indicados por f . Aqui, ψ e $\bar{\psi}$ denotam campos de quark e o antiquark, respectivamente, m_f se refere à massa do quark de sabor f e g à constante de acoplamento forte. As matrizes γ^μ são as matrizes de Dirac, que medeiam a interação entre os campos de quarks e o campo de glúons, e $G_{\mu\nu}^a$ é o tensor do campo de glúons, descrevendo a dinâmica e auto-interação dos glúons.

Os termos cinéticos dos quarks, $\bar{\psi}_f^a (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) \psi_f^a$, descrevem a propagação livre dos quarks e sua massa, enquanto o termo cinético dos glúons, $-\frac{1}{8} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$, representa a dinâmica dos glúons e suas auto-interações, essencial para a teoria da QCD. O termo de interação, $-g \bar{\psi}_f^a A_\mu \gamma^\mu \psi_f^a$, ilustra como os quarks interagem com o campo de glúons através da constante de acoplamento forte g .

A expansão do campo dos glúons A é efetivamente realizada através das matrizes de Gell-Mann λ_b , que servem como a base da álgebra de Lie para os grupos de simetria de cor $SU(3)_C$. Os índices da álgebra, b e c , que variam de 1 a 8, indicam a existência de oito glúons distintos na teoria, cada um descrito por um campo vetor A_μ^a :

$$A_\mu = \sum_{b=1}^8 \frac{1}{2} \lambda_b A_\mu^b. \quad (2.2)$$

A estrutura completa do campo de glúons é capturada pelo tensor de campo $G_{\mu\nu}^a$:

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \sum_{b,c=1}^8 f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.3)$$

onde o primeiro par de termos $\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$ representa a derivada do campo de glúons, correspondendo ao termo cinético, e o termo $g \sum_{b,c=1}^8 f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ descreve as auto-interações

entre os glúons, mediadas pelas constantes de estrutura f^{abc} do grupo $SU(3)_C$ e a constante de acoplamento forte g .

Embora a solução completa da QCD ainda seja um desafio distante, existe uma abordagem conhecida como QCD na rede (*Lattice QCD, LQCD*) [32], que permite obter soluções numéricas para baixos potenciais químicos. Essa abordagem tem se tornado mais confiável, especialmente com os avanços rápidos na capacidade computacional. Isso nos permite explorar, por exemplo, o diagrama de fases da QCD, um aspecto fundamental da teoria que descreve as transições de fases da matéria hadrônica.

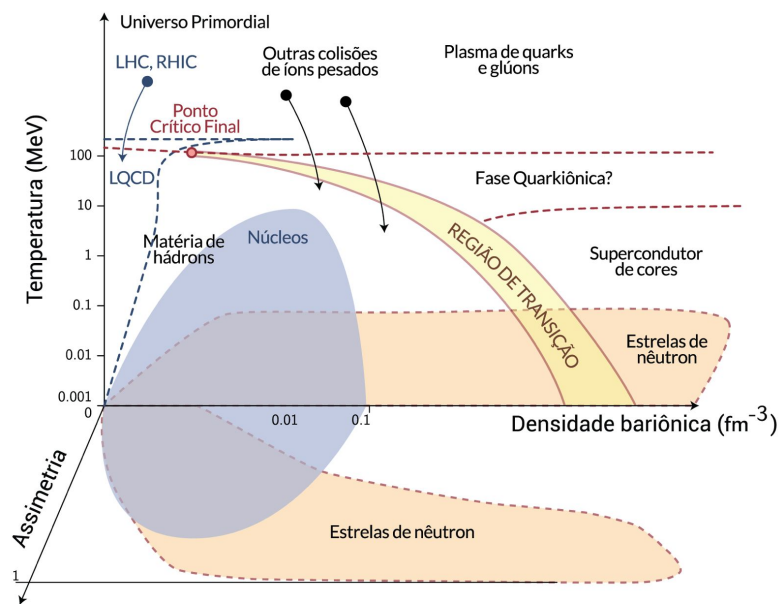


Figura 2.5 – Diagrama de fase da matéria da QCD, que varia de acordo com a temperatura e com a densidade bariônica (figura retirada de [40]).

O diagrama de fases da QCD, ilustrado na fig. 2.5, desempenha um papel importante na análise da matéria hadrônica e suas diferentes fases, e está descrito em termos da temperatura e da densidade bariônica. Contudo, é crucial enfatizar que os potenciais químicos estão intimamente relacionados às densidades, resultando na representação frequente do diagrama em termos de ambas as grandezas.

A análise das diferentes regiões do diagrama revela características distintas das fases da matéria: em condições de alta temperatura e alta densidade bariônica, a matéria assume o estado do QGP, onde ocorre o fenômeno de desconfinamento, permitindo que quarks e glúons se movam livremente. Em uma região de alta temperatura e baixa densidade bariônica, observa-se a transição para o QGP em torno de 150 MeV, onde a alta temperatura facilita o estado de desconfinamento mesmo em densidades reduzidas. Por outro lado, em um regime de baixa temperatura e baixa densidade bariônica, a matéria se apresenta no estado hadrônico confinado, com quarks e glúons confinados dentro dos hádrons. Além disso, em condições de baixa temperatura e alta densidade bariônica, antecipam-se transições de fase para estados exóticos da matéria, como a matéria de quarks densa, potencialmente presente em estrelas de nêutrons.

A LQCD oferece resultados que sugerem que em altas temperaturas e baixas densidades, a transição de fases é do tipo *crossover*, caracterizado por uma mudança suave, sem alterações abruptas na ordem da transição ou descontinuidades nas derivadas das propriedades termodinâmicas. Por outro lado, em temperaturas baixas e densidades altas, antecipa-se uma transição para uma fase desconfiada de primeira ordem, por envolver uma mudança brusca nas grandezas termodinâmicas e uma descontinuidade na energia livre. No entanto, é importante notar que em baixas temperaturas e altas densidades, como nas condições encontradas no interior de estrelas de nêutrons, teoriza-se a possibilidade de fases exóticas de matéria.

A existência da fase desconfiada, como o QGP, apresenta uma série de desafios teóricos para sua descrição, assim como obstáculos experimentais para sua produção. No entanto, acredita-se que essa fase possa existir em condições de temperatura ou densidades extremas. Embora seja uma ocorrência que se presume existir na natureza, o estudo do QGP envolve a recriação dessas condições extremas em laboratório. Isso é possível por meio de colisões em aceleradores de partículas, especialmente colisões envolvendo íons pesados, criando ambientes densos de quarks e glúons submetidos a altas energias.

2.3 FÍSICA DE ALTAS ENERGIAS

Ao longo das últimas décadas, diversos laboratórios ao redor do mundo têm dedicado seus esforços ao estudo metódico da matéria, buscando compreender sua composição por meio da fragmentação controlada. Essa jornada de exploração tem sido marcada pela aceleração e colisão deliberada de feixes de partículas. Aceleradores de partículas têm desempenhado um papel fundamental nesse processo, impulsionando partículas carregadas a velocidades próximas a da luz.

Rutherford foi um dos pioneiros em experimentos que envolviam o choque entre partículas [41] ou o direcionamento delas contra um alvo. Este começou a acelerar partículas alfa para usá-las como projéteis em suas pesquisas. Seus alunos, John Cockcroft (1897-1967) e Ernest Walton (1903-1995), receberam a tarefa de construir um dispositivo capaz de gerar um alto potencial elétrico para acelerar essas partículas. Em 1929, Cockcroft e Walton conseguiram desenvolver um multiplicador de tensão composto por capacitores ligados a diodos retificadores que agiam como interruptores, alcançando 700 keV. Seu princípio operacional baseava-se no uso de um campo elétrico para aumentar a velocidade de partículas carregadas.

Em paralelo a isso, estudos iniciais se concentravam na observação e análise das partículas de alta energia que alcançavam a atmosfera. Com os raios cósmicos, vislumbrou-se o comportamento dessas partículas em condições específicas de energia e de velocidade, provenientes de diversas fontes, desde partículas do Sol até objetos além da nossa galáxia. Neste cenário em que Powell, Lattes e demais colaboradores consolidaram o método [23, 42].

Os primeiros experimentos relacionados aos raios cósmicos remontam ao final do século XIX e início do século XX. Para detectar essas partículas, em 1936, Anderson (1905 - 1991) e

Neddermeyer (1907 - 1988) utilizaram uma câmara de Wilson⁵ [43]. Esta câmara era um ambiente preenchido com vapor, geralmente álcool ou água, onde partículas carregadas deixavam rastros visíveis ao interagir com o gás. Eles observaram rastros de partículas que não se comportavam como elétrons quando expostos a um campo magnético específico. Essas partículas possuíam uma massa maior que a do elétron, mas menor que a do próton – posteriormente foram identificadas como múons [44].

Entretanto, a ideia de acelerar essas partículas e conduzir análises detalhadas foi o ponto de partida, e hoje com o advento dos aceleradores e colisores de partículas, há a categorização destes diferentes aceleradores em duas classes: lineares e circulares. Os aceleradores lineares geralmente são mais simples e compactos em comparação com seus equivalentes circulares, além de apresentarem menor energia máxima. Sua estrutura básica envolve a aceleração de partículas em linha reta por meio de campos elétricos em tubos de vácuo, resultando em colisões com um alvo fixo. Esse acelerador desempenhou um papel significativo na pesquisa em física de partículas, como evidenciado pela detecção indireta do *quark charm* em 1974 no SLC [45, 46] (do inglês *Stanford Linear Collider*) nos Estados Unidos, além de contribuir, em parte, para o processo de identificação dos bósons *W* e *Z* em 1983.

O Tevatron, construído pelo Fermilab⁶, representou um marco na física de partículas. Inaugurado em 1987, manteve-se como o maior acelerador por cerca de 25 anos e foi pioneiro como o primeiro colisor de prótons com antiprótons, alcançando energias de 1 TeV. Localizado em um túnel de 6,44 km originalmente destinado ao anel principal do Fermilab, foi o primeiro a empregar ímãs supercondutores de alta potência e operava gerando cerca de 10 milhões de colisões próton-antipróton a cada segundo. Cada uma dessas colisões produzia centenas de partículas diferentes. Aproximadamente 200 dessas colisões por segundo eram cuidadosamente registradas em cada detector para análises detalhadas em estudos posteriores.

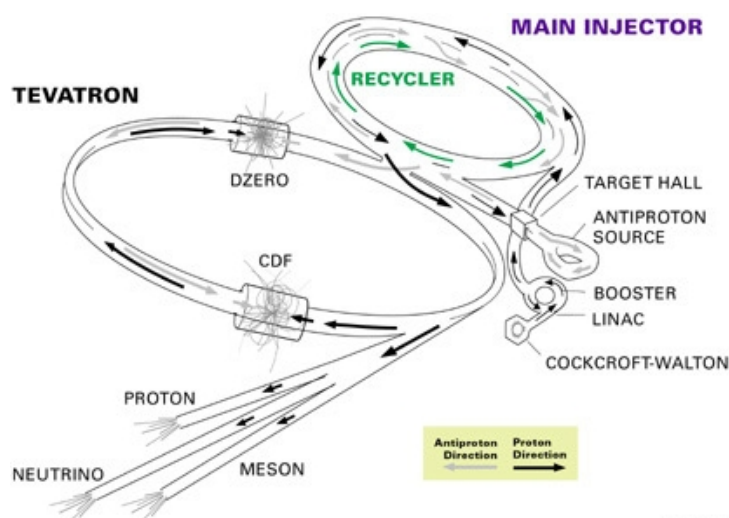


Figura 2.6 – O principal injetor do Tevatron, o segundo maior acelerador de partículas do mundo, esteve em operação de 1983 a 2011 (figura retirada de [47]).

Durante sua operação, o Tevatron teve um papel fundamental na física de partículas,

⁵ Versão primitiva dos detectores de partículas.

⁶ *Fermi National Laboratory*, Chicago, EUA.

realizando descobertas notáveis, como o quark bottom [46]. Em 1995, foi crucial na detecção por assinatura do quark top, a última partícula da família dos quarks a ser identificada e reconhecida como o quark mais massivo. Além disso, contribuiu significativamente para a compreensão das propriedades dos bósons de mediação da interação fraca, os bósons W e Z .

O Tevatron perdeu relevância na pesquisa de colisão em comparação com os avanços europeus, especialmente após a inauguração do CERN em 2008. Em resposta, surgiu a proposta para desenvolver o próximo grande acelerador nos Estados Unidos, o SSC (do inglês, *Superconducting Super Collider*). Previsto para ser aproximadamente três vezes maior que o CERN atual, o SSC prometia uma capacidade de aceleração de prótons até 40 TeV. No entanto, o custo considerável do investimento tornou-se um desafio. Infelizmente, devido a complicações financeiras e problemas de gestão do projeto o projeto do SSC foi cancelado em 1993.

O LHC, ilustrado na fig. 2.7, consiste em um anel de 27 km equipado com ímãs supercondutores e várias estruturas para aumentar a energia do feixe ao longo do percurso, que está localizado na fronteira franco-suíça. Ele é reconhecido como o maior centro de pesquisa em física de partículas e tem o mérito de ter descoberto o Bóson de Higgs [48, 49].

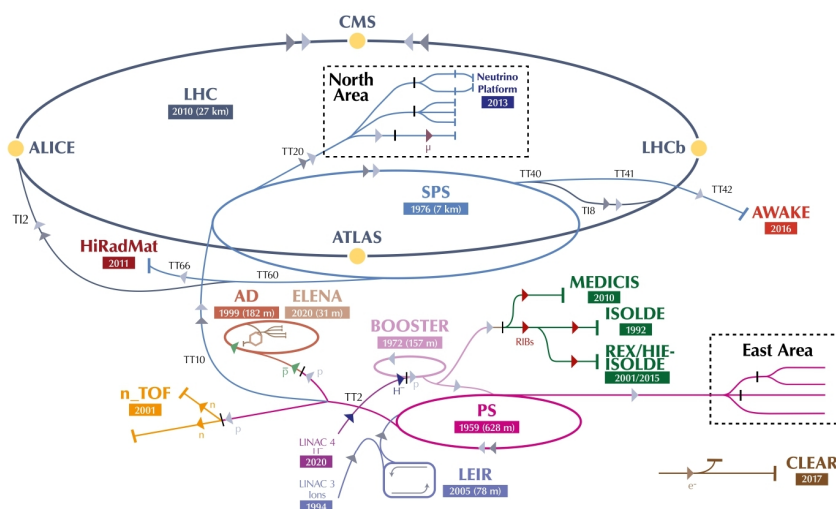


Figura 2.7 – Complexo de aceleradores do CERN, o maior laboratório de física de partículas do mundo (figura retirada de [50]).

Cada máquina no complexo de aceleradores do CERN adiciona velocidade aos feixes incidentes. Quando os prótons atingem o anel principal do LHC, sua energia chega a aproximadamente 7 TeV. O procedimento empregado nos experimentos do CERN envolve o uso de um gás de hidrogênio como fonte de prótons. Ao aplicar um campo elétrico sobre esse gás, os elétrons dos átomos são removidos. Posteriormente, o hidrogênio é introduzido em uma câmara de alimentação, onde prótons e nêutrons são separados. Apenas os prótons são conduzidos e acelerados em quatro estágios distintos por meio de aceleradores, conforme podemos visualizar a ilustração do LHC de forma reduzida na fig. 2.8:

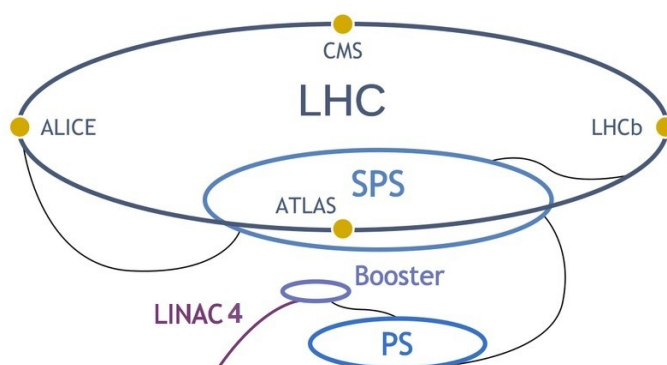


Figura 2.8 – A figura ilustra os diferentes aceleradores e detectores que compõem o LHC (figura retirada e modificada de [51]).

O primeiro deles é o LINAC 4⁷, destinado a fornecer aos prótons uma energia de 160 MeV. O segundo é o Booster, encarregado de atingir uma velocidade próxima a 91% da velocidade da luz. Em seguida, o feixe acelerado alcança o PS, que eleva sua energia para 25 GeV. O quarto acelerador, o SPS, opera com uma energia de 450 GeV. Nesse ponto, o feixe está próximo da velocidade da luz, e somente então é direcionado para sua fase final no LHC. Cada próton adquire uma energia de 7 TeV, resultando em uma colisão esperada de 14 TeV.

O LHC é equipado com quatro detectores principais, nos quais as colisões de partículas são meticulosamente investigadas. Um deles é o ATLAS (do inglês, *A Toroidal LHC Apparatus*)[52], um detector cilíndrico que ganhou destaque ao contribuir para a notável descoberta do Bóson de Higgs. Este detector é utilizado para a análise de uma ampla gama de partículas e fenômenos, abrangendo desde a busca por super-simetria até a investigação de matéria escura e novos aspectos da física do Modelo Padrão. O CMS (do inglês, *Compact Muon Solenoid*)[53], é semelhante ao ATLAS, especializado na detecção de múons, partículas subatômicas carregadas geradas em colisões de alta energia. Além de sua contribuição significativa para a descoberta do Bóson de Higgs, o CMS desempenha um papel crucial na pesquisa dessas partículas. Outro detector de importância é o ALICE (do inglês, *A Large Ion Collider Experiment*)[54], empregado para investigações em colisões de íons pesados. Seu propósito é examinar a matéria nuclear em condições extremas, reminescentes das que existiam nos estágios iniciais do universo. Adicionalmente, o LHCb (do inglês, *Large Hadron Collider beauty*)[55], configurado em formato de “L”, é especializado na detecção de quarks bottom. Este detector também desempenha um papel crucial no estudo da quebra de simetria CP⁸, um fenômeno fundamental que pode fornecer perspectivas na compreensão da existência de matéria e antimatéria.

O concorrente direto do CERN, o RHIC, localizado no Brookhaven National Laboratory em Upton, Nova York, é um complexo de aceleradores especializados na colisão de íons pesados [56], notadamente núcleos de ouro que foram despojados de seus elétrons. Isso possibilita estudos sobre a matéria densa e quente que existia nos estágios iniciais do universo.

⁷ Até 2018, era o LINAC 2, com 50 MeV.

⁸ Simetria de Carga e Simetria de Paridade, a quebra dessa simetria é uma violação da simetria entre partículas e antipartículas.

A história do RHIC remonta à década de 80, quando surgiu a necessidade premente de desenvolver um novo tipo de acelerador de partículas dedicado ao estudo da matéria nuclear em condições extremas de temperatura e de densidade. Em 2000, o RHIC iniciou suas operações e, desde então, tem desempenhado um papel fundamental em descobertas importantes para a física. Estas incluem os avanços nos estudos para produção de QGP, a exploração das propriedades de prótons e de nêutrons, a análise da estrutura do núcleo atômico e a pesquisa sobre a origem dos elementos pesados no universo.

O RHIC é reconhecidamente um dos maiores e mais poderosos aceleradores de partículas do mundo, com um diâmetro de 3,9 km, realiza colisões de íons pesados a 200 GeV por nucleon. Essas colisões permitem a formação de um plasma formado nessas colisões e facilitam a investigação das propriedades da matéria em condições extremas. Além disso, através de colisões de prótons, o RHIC investiga o spin e a estrutura interna dos prótons, explorando diversos aspectos da dinâmica das partículas e da interação forte.

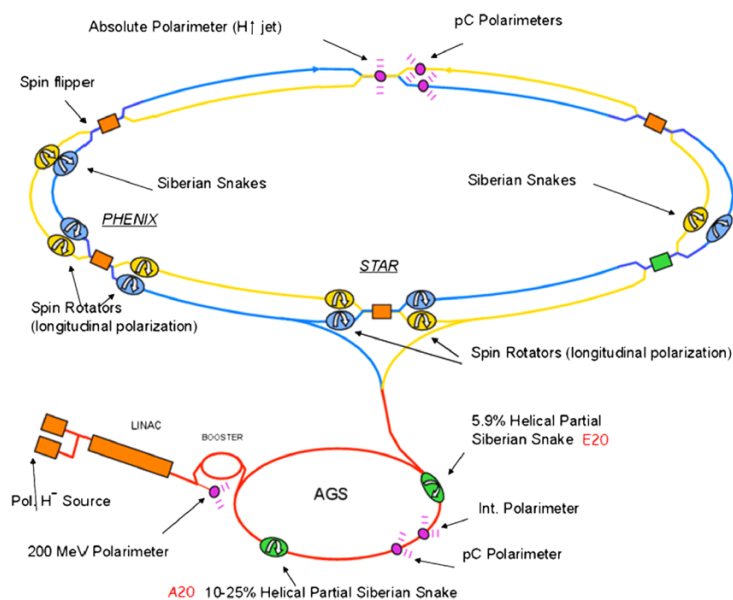


Figura 2.9 – Complexo de aceleradores do RHIC, o maior colisor de íons pesados do mundo (figura retirada de [57]).

Similar ao LHC, o RHIC também é equipado com uma série de pré-aceleradores de partículas, conforme notamos na fig. 2.9, incluindo o *Tandem Van der Graaff*, o *Booster Synchrotron* e o AGS (do inglês, *Alternating Gradient*), juntamente com dois anéis de ímãs supercondutores. Esses componentes permitem a aceleração de feixes de núcleos diversos a energias relativísticas.

Cada um dos três primeiros aceleradores desempenha funções distintas. O *Tandem Van der Graaff* utiliza eletricidade estática para acelerar átomos, removendo alguns de seus elétrons. Os íons resultantes são então direcionados para o *Booster*, que amplifica a energia do feixe e gera aglomerados de núcleos, organizando o feixe em seis blocos. Por fim, esses blocos são encaminhados para o AGS, onde os íons são pré-acelerados e, em seguida, lançados no RHIC. Dentro do RHIC, os íons são acelerados através das voltas no anel até alcançarem a energia final desejada.

O RHIC conta com dois detectores de grande porte e mais dois detectores de menor escala, dentre os principais. O STAR (do inglês, *Solenoidal Tracker at RHIC*)[58], representa um detector solenoidal de dimensões consideráveis. Este detector inclui outros detectores especializados na rastreabilidade de partículas carregadas, identificação de diversos tipos de partículas, além de mensuração da energia e do momento das partículas. Ele desempenha um papel importante no estudo da matéria quark-glúon. O segundo detector de grande porte era o PHENIX, (do inglês, *Pioneering High Energy Nuclear Interaction eXperiment*)[59], um detector de braços múltiplos, operando de forma semelhante ao STAR, porém com uma ênfase maior no estudo da física de colisões de íons pesados. Suas funcionalidades incluíam a investigação da produção de novas partículas, a identificação de partículas e a análise das propriedades do núcleo atômico. Após uma reformulação, o PHENIX foi substituído pelo sPHENIX[60], projetado para estudar o QGP com maior precisão e taxa de coleta de dados. O BRAHMS (do inglês, *Broad Range Hadron Magnetic Spectrometer*)[61] foi utilizado para investigar a produção de partículas em colisões de íons pesados. O PHOBOS (do inglês, *Pioneering High Energy Observation of Back-to-Back Hadron Spectroscopes*)[61] tinha como objetivo estudar a multiplicidade de partículas e a estrutura espacial em colisões de íons pesados. Atualmente, apenas o STAR e o sPHENIX estão em funcionamento.

2.4 COLISÃO DE ÍONS PESADOS

A notável quantidade de energia envolvida nas colisões de íons pesados relativísticos constitui a base para a pesquisa dentro dos aceleradores, como o RHIC e o LHC. Essas instalações, por meio de colisões de íons de ouro no RHIC e íons de chumbo no LHC (por exemplo) proporcionaram evidências consistentes da formação do QGP [7]. Esses resultados foram corroborados pelos dois laboratórios, solidificando o papel desses centros como líderes na exploração e estudo das propriedades do QGP e demais fases de colisão.

O plasma gerado nessas colisões, com dimensões extraordinariamente pequenas na ordem de 10^{-14} metros e uma existência efêmera da ordem de 10^{-23} segundos, destaca-se como um fluido singular. Reconhecido como o mais “perfeito” da natureza, exibindo uma viscosidade de $\eta/s \approx 0.08 - 0.20$ [62], pode ser obtida a partir de modelos holográficos e simulações. Esse estado da matéria desafia as capacidades de observação direta devido à sua rápida dissolução. Assim, as investigações nessas condições extremas permanecem predominantemente indiretas, limitando, até o momento, o acesso a medidas diretas do QGP. Essas complexas características do plasma formado em colisões de íons pesados relativísticos continuam a oferecer compreensões valiosas sobre o comportamento da matéria nuclear em regimes específicos.

A observação direta do QGP é desafiadora experimentalmente, pois o sistema gerado permanece por um intervalo temporal notavelmente curto, da ordem de 1 femtossegundo, e essa etapa do processo de colisão pode ser considerada utilizando-se dois cenários distintos: o cenário à esquerda do eixo vertical da fig. 2.10, observa-se a produção de hádrons sem a existência da formação desse estado de QGP, enquanto que o cenário à direita da mesma figura,

assume a presença desse estado intermediário entre a colisão e a hadronização. Neste último cenário, inicialmente se forma um plasma equilibrado que, ao esfriar, dá lugar a uma transição onde coexistem tanto os hádrons quanto os componentes fundamentais do plasma, os quarks e os glúons.

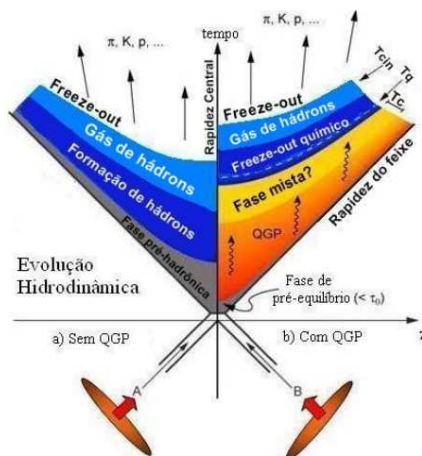


Figura 2.10 – Evolução hidrodinâmica de uma colisão de íons pesados, ilustrando os cenários possíveis de como o estado da matéria muda à medida que o sistema se expande e esfria (figura retirada de [63]).

Embora não haja uma observação direta que comprove a existência do QGP, sua formação em colisões de íons pesados pode ser inferida por algumas assinaturas, como pela observação de anisotropias na distribuição de momento das partículas produzidas, resultantes do comportamento hidrodinâmico do plasma em uma região de pressão assimétrica [64]. Dentro desse contexto, considerando que o sistema evoluirá de acordo com o cenário que inclui a existência de um estado com plasma equilibrado, compreender as fases de evolução do sistema em uma colisão de partículas e os estágios envolvidos nesses laboratórios torna-se importante.

Na fig. 2.11, é apresentada uma representação simplificada do processo de colisão de íons pesados, especificamente considerando núcleos de átomos pesados, como o par de íons ouro-ouro, que são estudadas a partir de modelagens computacionais. O processo tem início com a aceleração dos íons pesados a velocidades próximas a da luz antes de colidirem, ocasionando uma contração de Lorentz na direção do movimento. A consequente colisão desencadeia a produção de uma diversidade de partículas, tais como prótons, nêutrons, píons e káons.

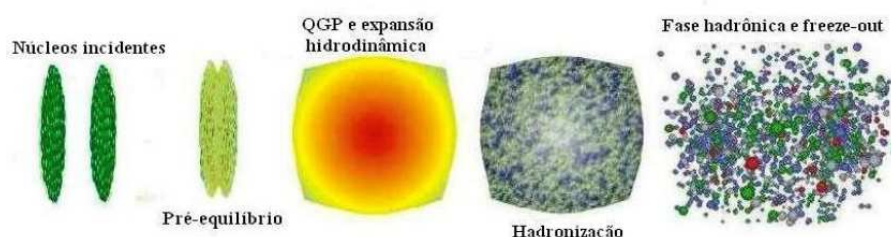


Figura 2.11 – Evolução temporal de uma colisão de íons pesados. A figura ilustra como a temperatura e a densidade variam com o tempo durante a colisão (figura retirada de [65]).

A sequência de eventos é delineada da seguinte maneira: à medida que os núcleos se aproximam, as forças nucleares fortes entre os núcleos atômicos se manifestam. A intensidade da colisão é tal que ocasiona a ruptura dos prótons e nêutrons, liberando quarks e glúons. Nesta

etapa de alta energia, acredita-se que a temperatura atinge aproximadamente 150-170 MeV [66], formando o QGP. Esta fase se comporta como um fluido devido à alta agitação térmica, começando a expandir e resfriar-se. Neste momento, ocorre a fase chamada de hadronização, onde essas partículas se recombinaem para formar novos hádrons, e até mesmo partículas mais exóticas.

Então, antes de qualquer recombinação, a interpretação dos resultados experimentais é que a quebra do núcleo libera quarks e glúons em estados desconfiados. Nas primeiras frações de segundo após a formação do QGP, a matéria começa a expandir, o que como consequência abaixa a temperatura e, conseqüentemente, inicia-se a fase de hadronização da matéria, e a temperatura estimada pelos modelos existentes está entre 50 e 100 MeV. Isso se deve à natureza diminuta e instável dos quarks e dos glúons, que não podem subsistir por períodos prolongados como partículas livres. Para alcançar a estabilidade, essas partículas recombinaem-se, formando partículas hadrônicas.

A LQCD indica a temperatura do QGP à 150 MeV para potencial químico 0 ($\mu = 0$) [67]. Os resultados obtidos a partir de dados coletados no LHC e no RHIC indicam concordância quanto à formação do QGP a temperaturas em torno de 150 a 170 MeV. Esses experimentos também evidenciam que a temperatura inicial do QGP depende principalmente da energia de colisão. Nos experimentos realizados no RHIC com íons de ouro, observou-se que a temperatura do QGP atingia cerca de 150 MeV em colisões com energia 200 GeV por par de núcleons do centro de massa [68, 69, 70]. Em contrapartida, os experimentos no LHC com íons de chumbo revelaram que a temperatura do QGP alcançava aproximadamente 170 MeV em colisões com energia de 2,76 TeV por núcleo [68, 69, 71].

Além disso, nota-se que a temperatura do QGP varia ao longo do tempo. No estágio inicial da formação do QGP, a temperatura é mais elevada, mas à medida que o QGP se expande e esfria, ocorre uma diminuição gradual da temperatura. Os experimentos também destacam que a temperatura do QGP é mais elevada no centro do colisor, uma vez que é nessa região que a energia da colisão é mais intensa. Em termos gerais, tanto os experimentos do LHC quanto do RHIC oferecem evidências convincentes sobre a formação do QGP em colisões de íons pesados, fornecendo informações valiosas sobre as propriedades do QGP, incluindo sua temperatura, densidade e tempo de vida.

Para explorar o processo de resfriamento do gás na fase hadrônica e produção de partículas, foi utilizado a descrição estatística de gases quânticos. No Capítulo 3, é examinado com detalhes o comportamento de gases de férmions e bósons, que são fundamentais para entender as condições pós-colisão. Já no Capítulo 4, a abordagem será ampliada para incluir a estatística não-extensiva, que oferece uma ferramenta adicional para analisar a taxa de formação de partículas resultante desses eventos.

3 MODELOS ESTATÍSTICOS

Um ensemble representa um conjunto de todos os estados microscópicos possíveis que um dado sistema físico pode assumir. Esses conjuntos são utilizados para descrever o comportamento de sistemas macroscópicos, baseando-se na distribuição de diversas configurações microscópicas possíveis. Existem muitos tipos de *ensembles*, e cada um é adequado para analisar sistemas sob certas condições sobre as variáveis termodinâmicas, como o volume (V), entropia (S), energia (E), número de partículas (N), potencial químico (μ) e temperatura (T).

Os principais *ensembles* usados na mecânica estatística são: 1) Micro-canônico: adequado para descrever sistemas isolados com energia total e número de partículas fixos, isto é, cada um dos possíveis estados que o sistema pode assumir tem energia total e número de partículas constantes; 2) Canônico: adequado para descrever um sistema fechado e em equilíbrio com um reservatório térmico a temperatura constante, trocando energia e mantendo fixo o número de partículas; e 3) Grande-Canônico: adequado para descrever um sistema aberto em equilíbrio com um reservatório térmico e de partículas, trocando energia e partículas com ele, enquanto mantém constante a temperatura e o potencial químico.

Em sequência, serão abordadas a estatística de Fermi-Dirac, que descreve as partículas fermiônicas, e a estatística de Bose-Einstein, que descreve as partículas bosônicas. Essas estatísticas são essenciais para explorar os modelos de gás de Fermi e de Bose livres, respectivamente. No caso dos férmions, a estatística de Fermi-Dirac leva em conta o princípio de exclusão de Pauli, que impede que duas partículas ocupem o mesmo estado quântico simultaneamente. Por outro lado, a estatística de Bose-Einstein, aplicável a bósons, permite que múltiplas partículas ocupem o mesmo estado quântico. Estes modelos serão utilizados para analisar as distribuições de partículas em sistemas de alta densidade de energia, como nas colisões de íons pesados. A aplicação destes modelos é particularmente relevante para descrever a fase hadrônica que ocorre após a formação do QGP, onde os quarks começam a se recombinar em hádrons como prótons, nêutrons, híperons, píons, kaons, etc.

3.1 ENSEMBLE MICRO-CANÔNICO

Em um sistema isolado, ou seja, num sistema que não troca energia e nem partículas com o ambiente, torna-se viável a utilização do *ensemble* micro-canônico. As principais características de um sistema descrito pelo *ensemble* micro-canônico incluem as variáveis termodinâmicas: energia (E), número de partículas (N) e volume (V) constantes. Nesse caso, todas as configurações microscópicas possíveis do sistema são igualmente prováveis. Assim, a probabilidade de o sistema ser encontrado em qualquer um desses microestados é a mesma para todos eles. O número de microestados para o *ensemble* micro-canônico é denotado por $\Omega(E, V, N)$.

Sendo assim, para o *ensemble* micro-canônico [72], a entropia (S) é relacionada ao

logaritmo natural do número de microestados (Ω):

$$S(E, V, N) = k_B \ln \Omega(E, V, N), \quad (3.1)$$

em que k_B é a constante de Boltzmann e possui o valor de $k_B = 8,6173336262 \cdot 10^{-5} \text{eV/K}$.

Mesmo em um sistema isolado, as partículas podem rearranjar-se de muitas maneiras. No equilíbrio termodinâmico, o macroestado mais provável é aquele que está relacionando ao maior número de microestados correspondentes, ou seja, o macroestado de um sistema termodinâmico em equilíbrio está relacionado a $\Omega = \Omega_{max}$ e $d\Omega = 0$. Assim, a entropia tende a aumentar até alcançar um máximo no equilíbrio termodinâmico, e com isso o sistema explora todas as configurações possíveis até que encontre o estado com o maior número de microestados, que define o estado de máxima entropia. Conseqüentemente, quando $S = S_{Máx}$, isto é, temos a entropia máxima, vale que:

$$dS = 0 \text{ para } S = S_{Máx}. \quad (3.2)$$

A equação (3.1) é de fundamental importância, pois a partir dela é possível calcular propriedades termodinâmicas de um sistema. A equação da entropia serve como base para o cálculo de propriedades relevantes e através das derivadas parciais da entropia em relação à energia (E), o volume (V) e o número de partículas (N), obtém-se as seguintes relações [73]:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right) \Big|_{V,N} = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right) \Big|_{E,N} = \frac{P}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right) \Big|_{E,V} = -\frac{\mu}{T}, \quad (3.3)$$

em que $1/T$ é essencialmente a definição da inversa da temperatura, P/T é a pressão dividida pela temperatura (indicando as mudanças no volume do sistema) e, por fim, $-\mu/T$ é menos o potencial químico dividido pela temperatura, mostrando que ao retirar ou adicionar partículas, pode aumentar ou diminuir a entropia. Em geral, calcular o número de microestados disponíveis para um sistema não é uma tarefa simples, porém, é possível descrever completamente o comportamento termodinâmico de um dado sistema a partir da função $S(E, V, N)$.

3.2 ENSEMBLE CANÔNICO

Por outro lado, em sistemas que podem trocar energia com um determinado reservatório, mas ainda mantêm seu número de partículas fixo, é válido utilizar o *ensemble* canônico. Como, por exemplo, sistemas em contato com grandes reservatórios térmicos⁹ em que há variação de energia do sistema enquanto o grande reservatório mantém a temperatura (T) constante, o que permite que a energia flutue enquanto busca o equilíbrio térmico.

⁹ O grande reservatório térmico é um sistema termodinâmico que troca energia com outros sistemas sem que a sua própria energia mude. A energia do reservatório E_R térmico é muito maior que a energia do sistema E_S . A energia total do sistema é $E = E_R + E_S$, dessa forma, $\frac{E_S}{E} = 1 - \frac{E_R}{E} \ll 1$, assegura que o reservatório pode ser considerado um banho térmico com temperatura constante, uma vez que E_S é muito menor que E .

No *ensemble* canônico, todos os microestados com a mesma energia E_i têm a mesma probabilidade p_i . Aqui, o índice i identifica os diferentes microestados do sistema. A probabilidade p_i diminui exponencialmente com o aumento da energia E_i do microestado i , conforme:

$$p_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}, \quad (3.4)$$

em que $\beta = 1/k_B T$ e Z é a função de partição canônica, pois é uma soma que se estende sobre todos os microestados:

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i}. \quad (3.5)$$

A função de partição Z assegura que a soma das probabilidades de todos os microestados é igual a 1, garantindo assim a normalização de p_i , na forma de $\sum_i p_i = 1$.

A noção de probabilidade e de função de partição fornecem ferramentas importantes dentro do *ensemble* canônico e permitem a manipulação das propriedades de sistemas em contato com um reservatório térmico. Anteriormente, foi visto que a entropia (3.1) é a função que contém toda a informação termodinâmica do sistema. Para o *ensemble* canônico, a entropia é uma medida da incerteza¹⁰ ou desordem associada às distribuições de probabilidades dos estados micro-canônico [72].

Para um sistema em contato com um reservatório térmico, a entropia é dada pela média (ou valor esperado)¹¹ do logaritmo da probabilidade p_i dos estados micro-canônicos, multiplicada pela constante de Boltzmann k_B ,

$$S = \langle -k_B \ln p_i \rangle, \quad (3.6)$$

em que p_i é a probabilidade do sistema estar no estado i , e o símbolo $\langle \rangle$ representa o valor esperado ou média sobre todos os estados possíveis do sistema:

$$S = -k_B \left\langle \ln \left(\frac{e^{-\beta E}}{Z} \right) \right\rangle. \quad (3.7)$$

Para resolver o logaritmo natural da fração $e^{-\beta E}/Z$, é preciso lembrar das propriedades de logaritmo natural do numerador e denominador e usar o logaritmo natural de uma exponencial:

$$S = -k_B \langle -\beta E - \ln Z \rangle. \quad (3.8)$$

Como o logaritmo natural da função de partição canônica não depende dos estados e é constante em relação à média do *ensemble*, a expressão (3.8) pode ainda ser simplificada:

$$S = k_B \beta \langle E \rangle + k_B \ln Z. \quad (3.9)$$

¹⁰ Nesse contexto, refere-se à quantidade de desordem ou imprevisibilidade na distribuição de probabilidades dos microestados do sistema.

¹¹ $\langle \ln p_i \rangle = \sum_i p_i \ln p_i$.

Além disso, como a energia interna do sistema é definida como $\langle E \rangle = U$, tal quantidade pode ser substituída a seguir:

$$S = k_B \beta U + k_B \ln Z. \quad (3.10)$$

Relembrando ainda que $\beta = 1/k_B T$, podemos utilizar essa notação para eliminar a constante de Boltzmann k_B do primeiro termo em (3.9)

$$S = \cancel{k_B} \frac{1}{\cancel{k_B} T} U + k_B \ln Z, \quad (3.11)$$

tornando-se então:

$$S = \frac{U}{T} + k_B \ln Z. \quad (3.12)$$

Ainda é possível isolar o termo que contém o logaritmo natural e dessa forma obter a relação:

$$U - TS = -k_B \ln Z, \quad (3.13)$$

fornecendo uma informação importante que é a energia livre de Helmholtz [72], dada por:

$$F(T, V, N) = U - TS. \quad (3.14)$$

Dessa forma, a energia livre de Helmholtz é diretamente relacionada à função de partição canônica.

$$F = -k_B T \ln Z(T, V, N). \quad (3.15)$$

Anteriormente, a entropia, que é o potencial termodinâmico do sistema fechado, pode ser calculada a partir da quantidade Ω , agora, a energia livre deve ser calculada a partir da função de partição Z [72].

3.3 ENSEMBLE GRANDE-CANÔNICO

Quando o sistema é capaz de trocar não apenas energia, mas também o número de partículas, é utilizado o *ensemble* grande-canônico para descrevê-lo. Em colisões de alta energia, por exemplo, partículas são frequentemente criadas e destruídas, e esse tipo de *ensemble* é útil para descrever esses sistemas, onde o número de bárions, léptons ou mésons flutua devido à criação e aniquilação de partículas. Para este trabalho, o interesse é obter as distribuições de partículas; portanto, prosseguiremos com uma análise mais detalhada desse *ensemble*.

Nesse regime, as variáveis termodinâmicas fixas são o volume (V), a temperatura (T) e o potencial químico (μ). Este *ensemble* permite a troca de energia e partículas entre o sistema e um reservatório, resultando em flutuações dessas quantidades. Portanto, é mais prático trabalhar com os valores médios de energia $\langle E \rangle$ e do número de partículas $\langle N \rangle$. Esses valores

médios representam o comportamento esperado do sistema. Em contextos macroscópicos, as flutuações em torno desses valores são pequenas, o que simplifica a análise e proporciona uma descrição mais estável e previsível do comportamento termodinâmico.

No *ensemble* grande-canônico, a probabilidade de um sistema estar em um determinado microestado pode ser definida com base na energia e no número de partículas. Assim a probabilidade é escrita como [72]:

$$p_{\{n_k\}} = \frac{e^{-\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\varepsilon_k - \mu)}}{\mathcal{Z}}, \quad (3.16)$$

em que $p_{\{n_k\}}$ é a probabilidade do sistema estar em um determinado microestado com número de ocupação $\{n_k\}$, energia ε_k e potencial químico μ . Neste contexto, \mathcal{Z} é a grande função de partição, que atua como o termo de normalização, semelhante ao que ocorre no *ensemble* canônico. Notadamente, além do fator $e^{-\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k \varepsilon_k}$, tem-se a presença do fator $e^{\beta \mu \sum_{k=1}^{\infty} n_k}$. Este segundo termo ajusta a probabilidade com base no número de partículas, enquanto o primeiro termo, que já está presente no *ensemble* canônico, depende da energia do microestado. Dessa forma, a probabilidade em um *ensemble* grande-canônico considera tanto a energia quanto o número de partículas do sistema, refletindo a influência do reservatório em ambos os aspectos. A grande função de partição [72] é:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z(T, V, N), \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\{n_k\}} e^{-\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k \varepsilon_k}, \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_k\}} e^{\beta(\mu N - \sum_{k=1}^{\infty} n_k \varepsilon_k)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

em que $Z(T, V, N)$ é a função de partição canônica para N partículas, $z = e^{\beta \mu}$ é a fugacidade e $N = \sum_{k=1}^{\infty} n_k$ é a soma dos números de ocupação sobre todos os estados possíveis, o que, na prática, resulta no número total de partículas N no sistema. Também, não há restrição na soma sobre todos os números de ocupação.

Com a função de partição do *ensemble* grande-canônico, é possível extrair informações termodinâmicas a partir da entropia,

$$S = \langle -k_B \ln p_N \rangle. \quad (3.18)$$

Da mesma forma que foi feito no *ensemble* canônico, a distribuição de probabilidade p_N será substituída diretamente

$$S = -k_B \left\langle \ln \left(\frac{e^{-\beta(E - \mu N)}}{\mathcal{Z}} \right) \right\rangle, \quad (3.19)$$

indicando a média ao longo de todos os possíveis estados do sistema. Usando novamente as propriedades do logaritmo natural, podemos reescrever a expressão da entropia como:

$$S = -k_B \langle (-\beta(E - \mu N) - \ln \mathcal{Z}) \rangle, \quad (3.20)$$

e, como $\ln \mathcal{Z}$ é uma constante e não depende do estado particular do sistema sobre o qual a média do *ensemble* está sendo tomada, podemos simplificar ainda mais a equação anterior na forma de:

$$S = k_B \beta \langle E - \mu N \rangle + k_B \ln \mathcal{Z}. \quad (3.21)$$

Assim como foi possível recuperar a informação que $\beta = 1/k_B T$ no *ensemble* canônico, aqui também se torna necessário a substituição na equação (3.21),

$$S = \cancel{k_B} \frac{1}{\cancel{k_B} T} \langle E - \mu N \rangle + k_B \ln \mathcal{Z}, \quad (3.22)$$

logo, k_B se cancela.

Apresentada em (3.9), a definição da energia interna é $\langle E \rangle = U$, portanto:

$$S = \frac{U}{T} - \frac{\mu N}{T} + k_B \ln \mathcal{Z}. \quad (3.23)$$

Ainda é possível isolar o termo que contém o logaritmo natural,

$$U - TS - \mu N = -k_B T \ln \mathcal{Z}, \quad (3.24)$$

e observar que a expressão à esquerda é o grande potencial termodinâmico [72]:

$$\Phi(T, V, \mu) = U - TS - \mu N, \quad (3.25)$$

ou, em termos da grande função de partição,

$$\Phi(T, V, \mu) = -k_B T \ln \mathcal{Z}(T, V, \mu). \quad (3.26)$$

O grande potencial Φ é uma medida conveniente da energia livre do sistema, quando o número de partículas pode variar. Assim, a equação (3.26) surge naturalmente como a forma de relacionar a grande função de partição com o grande potencial.

3.4 ESTATÍSTICAS QUÂNTICAS E CLÁSSICA

As principais estatísticas que descrevem partículas em sistemas físicos são: a de Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein e Fermi-Dirac. Cada uma dessas tem características distintas:

- Estatística de Maxwell-Boltzmann (E^{MB}) \rightarrow descreve partículas distinguíveis e clássicas;
- Estatística de Bose-Einstein (E^{BE}) \rightarrow descreve os bósons, têm estados simétricos e não há restrições quanto ao número de partículas no mesmo estado quântico;
- Estatística de Fermi-Dirac (E^{FD}) \rightarrow descreve os férmions, têm estados anti-simétricos, duas partículas não podem ocupar o mesmo estado quântico devido ao Princípio de Exclusão de Pauli.

Na abordagem de sistemas quânticos, como será o caso das estatísticas de Fermi-Dirac e Bose-Einstein, que regem o comportamento de sistemas constituídos por partículas quânticas de spin semi-inteiro e inteiro, a descrição dos estados quânticos é fundamental. Na mecânica quântica, a hamiltoniana de sistemas não interagentes pode ser expressa em uma soma de operadores hamiltonianos H correspondentes a cada partícula que constitui o sistema. O problema de autovalores representado pela equação a seguir

$$H|k\rangle = \sum_k \varepsilon_k |k\rangle, \quad (3.27)$$

onde $|k\rangle$ é um autoestado quântico e ε_k é o correspondente autovalor de energia, permite calcular a função de onda do sistema a partir da função de onda de uma única partícula. Enumerando o estado quântico de partícula única $|k\rangle$ pelo índice k , e conhecendo o número de ocupação de cada estado quântico $\{n_1, n_2, \dots\}$, é possível determinar o estado quântico do sistema de N partículas. Para bósons, esses valores podem assumir $n_k = 0, 1, \dots, N$, possibilitando múltiplas ocupações, enquanto que para os férmions, esses valores são $n_k = 0, 1$, indicando a ocupação ou não do estado. A ocupação total do sistema é definida pela soma de todos os números de ocupações possíveis:

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} n_k, \quad (3.28)$$

no qual N representa o número total de partículas no sistema e n_k é o número de ocupação para o estado quântico k ,

A energia total do sistema é expressa como a soma dos produtos dos números de ocupação pelos respectivos autovalores de energia:

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \varepsilon_k. \quad (3.29)$$

Nessa formulação, o índice k percorre todos os estados de uma partícula.

A utilização dos elementos da matriz densidade (ρ) ajuda a entender sistemas em equilíbrio no *ensemble* grande-canônico.

$$\rho = \frac{e^{-\beta(H-\mu N)}}{\mathcal{Z}}. \quad (3.30)$$

A grande função de partição \mathcal{Z} nesse contexto é a soma sobre todos os estados quânticos possíveis do sistema, considerando todas as possíveis quantidades de partículas e energias associadas, assim:

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} [e^{-\beta(H-\mu N)}], \quad (3.31)$$

em que Tr denota o traço, que é a soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz. A grande função de partição normaliza a matriz densidade, garantindo que a soma das probabilidades seja igual a 1.

Os elementos da diagonal principal da matriz densidade ρ correspondem às probabilidades dos estados. Para encontrar a probabilidade de o sistema estar em um estado específico $|n_1, n_2, \dots\rangle$, podemos calcular o valor esperado usando a matriz densidade ρ na base dos números de ocupação:

$$\langle n'_1, n'_2, \dots | \rho | n_1, n_2, \dots \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \langle n'_1, n'_2, \dots | e^{-\beta(H - \mu N)} | n_1, n_2, \dots \rangle, \quad (3.32)$$

Para simplificar a expressão acima, consideramos a ortogonalidade dos estados de número de ocupação:

$$\langle n'_1, n'_2, \dots | n_1, n_2, \dots \rangle = \delta_{n'_1 n_1} \delta_{n'_2 n_2} \dots \quad (3.33)$$

em que o símbolo δ representa a delta de Kronecker, que resulta em 1 quando os números de ocupações correspondentes nos dois estados são iguais e 0 quando são estados diferentes. Assim, a expressão simplificada dos elementos matriciais da matriz densidade, devido ao fato de que apenas os elementos da diagonal principal não são nulos por conta dos deltas, é:

$$\langle n'_1, n'_2, \dots | \rho | n_1, n_2, \dots \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\varepsilon_k - \mu)} \delta_{n'_1 n_1} \delta_{n'_2 n_2} \dots \quad (3.34)$$

Substituindo o autovalor de energia (3.29) e (3.33), obtemos:

$$p_{\{n_k\}} = \frac{1}{\mathcal{Z}(T, V, \mu)} e^{-\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\varepsilon_k - \mu)} \delta_{n'_1 n_1} \delta_{n'_2 n_2} \dots \quad (3.35)$$

e $p_{\{n_k\}}$ é a probabilidade de encontrar o sistema no conjunto de números de ocupação $\{n_k\}$ dentro desse ensemble:

$$p_{\{n_k\}} = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\varepsilon_k - \mu)}. \quad (3.36)$$

Existem partículas distinguíveis e indistinguíveis, e essa diferença afeta a distribuição de partículas nas diferentes estatísticas que serão discutidas. O fator de correção $1/N!$ é geralmente utilizado para sistemas de partículas clássicas e distinguíveis, como na estatística de Maxwell-Boltzmann:

$$p_{\{n_k\}} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{1}{N!} e^{-\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\varepsilon_k - \mu)}, \quad (3.37)$$

no entanto, para partículas indistinguíveis, como em estatísticas de Fermi-Dirac e Bose-Einstein, esse fator é substituído por um termo de degenerescência $g\{n_k\}$ que contabiliza a simetria ou anti-simetria dos estados ocupados:

$$p_{\{n_k\}} = \frac{1}{\mathcal{Z}} g\{n_k\} e^{-\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\varepsilon_k - \mu)}. \quad (3.38)$$

Assim a grande função de partição para os três casos pode ser reescrita como:

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \sum_{\{n_k\}} g\{n_k\} e^{-\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\varepsilon_k - \mu)}. \quad (3.39)$$

A tab. 3.1 apresenta os termos de degenerescência $g\{n_k\}$, que definem as funções de partição para cada tipo de estatística:

Estatística	Configuração $\{n_k\}$	Descrição
Maxwell-Boltzmann	$g^{\text{MB}}\{n_k\} = \frac{1}{N!} = \frac{1}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_k!...}$	Para partículas distinguíveis, considera todas as permutações.
Fermi-Dirac	$g^{\text{FD}}\{n_k\} = \begin{cases} 1 & \text{para } n_k = 0 \text{ ou } 1; \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$	Permite no máximo uma partícula por estado, seguindo o Princípio de Exclusão de Pauli.
Bose-Einstein	$g^{\text{BE}}\{n_k\} = 1$	Permite múltiplas ocupações do mesmo estado por bosons.

Tabela 3.1 – Estatísticas e configurações possíveis das ocupações nos estados (tabela elaborada pela autora, dados retirados de [72]).

A seguir, analisaremos como $g^{\text{FD}}\{n_k\}$ é aplicado na estatística de Fermi-Dirac e como $g^{\text{BE}}\{n_k\}$ é utilizado na estatística de Bose-Einstein.

3.4.1 Estatística de Fermi-Dirac

Na estatística de Fermi-Dirac, com a degenerescência $g^{\text{FD}}\{n_k\}$ dada na tab. 3.1, a grande função de partição é escrita como:

$$\mathcal{Z}^{\text{FD}}(T, V, \mu) = \sum_{\{n_k\}} g^{\text{FD}}\{n_k\} e^{-\beta \sum_{k=1}^1 n_k (\epsilon_k - \mu)}, \quad (3.40)$$

onde o limite superior do somatório será 1 devido ao Princípio de exclusão de Pauli. A fig. 3.1 ilustra a distribuição de partículas nos níveis de energia. As partículas são representadas pelas esferas coloridas, sendo as vermelhas férmions com spin para baixo e as azuis com spin para cima. Cada linha corresponde a um nível de energia, ilustrando apenas um tipo de férmion por nível.

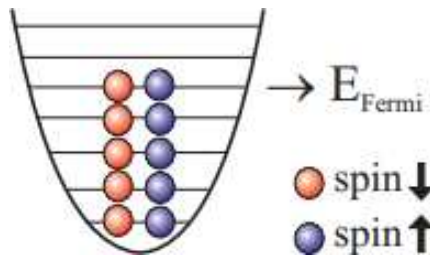


Figura 3.1 – Ilustração de partículas fermiônicas distribuídas em níveis de energia, mostrando que dois férmions idênticos não podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente (figura adaptada de [74]).

A expressão da grande função de partição para a estatística de Fermi-Dirac, de maneira geral, pode ser escrita como:

$$\mathcal{Z}^{\text{FD}}(T, V, \mu) = \sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^1 (e^{-\beta(\epsilon_1 - \mu)n_1})(e^{-\beta(\epsilon_2 - \mu)n_2}) \dots \quad (3.41)$$

em que a soma é tomada sobre todos os estados de ocupação possíveis, que pode ser 0 ou 1. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{\text{FD}}(T, V, \mu) &= \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k=0}^1 (e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)^{n_k}}), \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 + ze^{-\beta\varepsilon_k}). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Assim, encontrada a grande função de partição de um sistema fermiônico, tem-se a informação para achar o grande potencial termodinâmico, necessário para estudar o gás livre de Fermi, que será discutido mais à frente. O grande potencial é então dado por:

$$\Phi^{\text{FD}}(T, V, \mu) = -k_B T \ln \left(\prod_{k=1}^{\infty} (1 + ze^{-\beta\varepsilon_k}) \right). \quad (3.43)$$

Usando a propriedade do logaritmo natural,

$$\Phi^{\text{FD}}(T, V, \mu) = -k_B T \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}), \quad (3.44)$$

resulta no grande potencial termodinâmico da estatística de Fermi-Dirac.

A distribuição de partículas é determinada pela ocupação média de um estado com energia ε_k . Esta ocupação média é obtida pela derivada logarítmica da função de partição em relação à energia ao estado:

$$\langle n_k \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \varepsilon_k}. \quad (3.45)$$

Assim, para obter a distribuição de partículas que são férmions,

$$\langle n_k \rangle^{\text{FD}} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + ze^{-\beta\varepsilon_k}) \right). \quad (3.46)$$

Calculando a derivada e simplificando os termos,

$$\langle n_k \rangle^{\text{FD}} = -\frac{1}{\beta} \frac{e^{-\beta\varepsilon_k} \beta}{1 + ze^{-\beta\varepsilon_k}}, \quad (3.47)$$

temos que a distribuição de partículas da estatística de Fermi-Dirac é dada por:

$$\langle n_k \rangle_{(+)}^{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1}. \quad (3.48)$$

Na equação (3.48) foi indicado um sub-índice (+) para diferenciar que essa distribuição é para partículas. Assim, a função para o número médio de antipartículas (ou distribuição), indicada pelo sub-índice (−) é dada por:

$$\langle n_k \rangle_{(-)}^{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k + \mu)} + 1}, \quad (3.49)$$

em que essa diferenciação é feita pelo potencial químico.

3.4.2 Estatística de Bose-Einstein

No caso da estatística de Bose-Einstein, a grande função de partição é dada por:

$$\mathcal{Z}^{\text{BE}}(T, V, \mu) = \sum_{\{n_k\}} g^{\text{BE}}\{n_k\} e^{-\beta \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\varepsilon_k - \mu)}, \quad (3.50)$$

com $g\{n_k\}^{\text{BE}} = 1$, conforme tab. 3.1. A fig. 3.2 ilustra que os bósons, ao contrário dos férmions, não obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, e podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente.

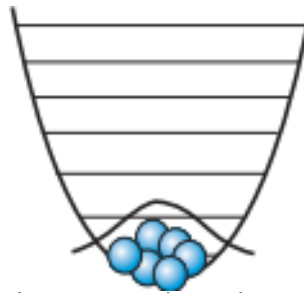


Figura 3.2 – Ilustração de partículas bosônicas ocupando um único nível de energia (figura adaptado de [74]).

As linhas da fig. 3.2 indicam os níveis de energia que as partículas podem ocupar e a soma sobre todas as possíveis ocupações dos bósons pode ser realizada da seguinte forma:

$$\mathcal{Z}^{\text{BE}}(T, V, \mu) = \sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^{\infty} (e^{-\beta(\varepsilon_1 - \mu)^{n_1}}) (e^{-\beta(\varepsilon_2 - \mu)^{n_2}}) \dots \quad (3.51)$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)n_k}. \quad (3.52)$$

Cada termo na somatória é uma soma sobre os possíveis números de ocupação n_k de cada estado de energia k , que, para os bósons, não há limites no número de partículas que podem ocupar o mesmo estado de energia, então pode ser simplificado também por uma série geométrica:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{\text{BE}}(T, V, \mu) &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 - ze^{-\beta\varepsilon_k})^{-1}, \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - ze^{-\beta\varepsilon_k}}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

a equação acima é a grande função de partição da estatística de Bose-Einstein que permite achar o grande potencial termodinâmico desse sistema.

Novamente, usando (3.26) e substituindo (3.53):

$$\Phi^{\text{BE}}(T, V, \mu) = -k_B T \prod_{k=1}^{\infty} \ln(1 - ze^{-\beta\varepsilon_k})^{-1}, \quad (3.54)$$

em que z mantém o mesmo significado da fugacidade $= e^{\beta\mu}$. Para simplificar, usa-se a propriedade do logaritmo natural que diz que $\ln(x)^{-1} = -\ln(x)$, assim

$$\Phi^{\text{BE}}(T, V, \mu) = k_B T \prod_{k=1}^{\infty} \ln(1 - ze^{-\beta\varepsilon_k}). \quad (3.55)$$

Agora, usando propriedade de logaritmo natural, temos o grande potencial termodinâmico da estatística de Bose-Einstein:

$$\Phi^{\text{BE}}(T, V, \mu) = k_B T \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}). \quad (3.56)$$

A distribuição de partículas bosônicas pode ser calculada a partir da equação (3.45),

$$\langle n_k \rangle^{\text{BE}} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \left(\sum_{k=1}^{\infty} -\ln(1 - ze^{-\beta\varepsilon_k}) \right). \quad (3.57)$$

Calculando a derivada e simplificando a equação,

$$\langle n_k \rangle^{\text{BE}} = -\frac{1}{\beta} \frac{ze^{-\beta\varepsilon_k} \beta}{1 - ze^{-\beta\varepsilon_k}} \quad (3.58)$$

Com isso, a expressão final para partículas bosônicas é:

$$\langle n_k \rangle_{(+)}^{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1}, \quad (3.59)$$

enquanto que para antipartículas é:

$$\langle n_k \rangle_{(-)}^{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k + \mu)} - 1}. \quad (3.60)$$

Essas distribuições são fundamentais para descrever o comportamento das partículas, sobretudo as distribuições vindas da Estatística de Fermi-Dirac e de Bose-Einstein que descrevem as partículas quânticas. Para modelar a produção e o comportamento de partículas em colisões de altas energias, torna-se essencial saber essas funções.

3.5 GÁS DE FERMI LIVRE

Conforme discutido no Capítulo anterior, acredita-se que o QGP seja formado após uma colisão de íons pesados, devido às altas energias e densidades envolvidas. À medida que o sistema se expande e a temperatura diminui, os quarks, que são férmions, começam a se recombinar em hádrons, como prótons, nêutrons, além de partículas como $\Sigma^{\pm,0}$ e $\Xi^{-,0}$. Esse processo, discutido no subtópico (2.4), é conhecido como hadronização. A utilização de um modelo de gás de férmions livres oferece uma boa aproximação inicial para entender o comportamento estatístico e estudar a distribuição das partículas formadas na fase hadrônica, típicas de colisões de íons pesados.

O termo “gás” é utilizado porque, nesta fase, o sistema quântico encontra-se em um estado de agitação térmica, com as partículas movendo-se livremente, semelhante às moléculas de um gás clássico. Assim, o gás de Fermi livre, sendo um sistema extenso que troca energia e partículas com o ambiente, é comumente descrito utilizando o *ensemble* grande canônico. Este modelo é descrito pela estatística de Fermi-Dirac, uma vez que os férmions obedecem a essa estatística. Diferentemente da abordagem estatística anteriormente descrita, que utilizava um tratamento discreto, o modelo do gás de Fermi livre adota um tratamento contínuo devido ao grande número de partículas e às altas densidades de energia envolvidas:

$$\sum_k \rightarrow \gamma V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \quad (3.61)$$

em que essa integral é sobre o espaço de momento (d^3p) das partículas. O termo V é o volume do sistema. O termo $\gamma = (2J + 1)$ é a degenerescência do estado. Essa transição da soma para a integral é importante quando lidamos com o limite termodinâmico em que o número de partículas (N) e o volume (V) tendem ao infinito.

O momento linear (p) está relacionado à energia de uma partícula relativística através de:

$$E_p = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad (3.62)$$

em que c é a velocidade da luz no vácuo, cujo valor é $c \approx 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, e m é a massa de repouso da partícula e E_p é a energia total da partícula.

A grande função de partição (\mathcal{Z}) no meio discreto considerando partículas (+) e antipartículas (−) é

$$\mathcal{Z}^{\text{FD}}(T, V, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}] \prod_{j=1}^{\infty} [1 + e^{-\beta(\varepsilon_j + \mu)}], \quad (3.63)$$

em que ε é a energia dos estados do sistema e μ o potencial químico, que regula a troca de partículas e antipartículas do sistema. Os índices k e j distinguem os conjuntos de partículas e antipartículas, respectivamente. Essa grande função de partição está dividida em dois produtos: o primeiro representa a contribuição de cada estado possível para a função de partição de partículas, enquanto o segundo termo reflete a contribuição das antipartículas.

Portanto, utilizando (3.61) e (3.62) e já considerando os possíveis valores para o número de ocupação dos férmions, o grande potencial, anteriormente definido em (3.44), passa a ser expresso por:

$$\Phi^{\text{FD}}(T, V, \mu) = -k_B T \gamma V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\ln(1 + e^{-\beta(E_p - \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E_p + \mu)})]. \quad (3.64)$$

O número de partículas em função do potencial químico pode ser derivado do grande potencial termodinâmico:

$$N(T, V, \mu) = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right) \Big|_{T, V}, \quad (3.65)$$

mantendo T e V constantes. Assim,

$$N^{\text{FD}} = \gamma V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{e^{\beta(E_p - \mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(E_p + \mu)} + 1} \right]. \quad (3.66)$$

As distribuições de partículas, já conhecidas e referenciadas nas equações (3.48) e (3.49), podem ser renomeadas como funções de distribuições para partículas $f_{(+)}^{\text{FD}}$ e antipartículas $f_{(-)}^{\text{FD}}$, respectivamente

$$f_{(+)}^{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(E_p - \mu)} + 1} \quad \text{e} \quad f_{(-)}^{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(E_p + \mu)} + 1}. \quad (3.67)$$

Simplesmente substituindo a nova notação (3.67), temos:

$$N^{\text{FD}} = \gamma V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (f_{(+)}^{\text{FD}} - f_{(-)}^{\text{FD}}). \quad (3.68)$$

Ao dividir a expressão (3.68) pelo volume, elimina-se a dependência do volume do sistema, convertendo uma contagem absoluta de partículas em uma medida de densidade, que é o número de partículas por unidade de volume,

$$\frac{N^{\text{FD}}}{V} = \gamma \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (f_{(+)}^{\text{FD}} - f_{(-)}^{\text{FD}}). \quad (3.69)$$

Dessa forma,

$$\rho^{\text{FD}} = \gamma \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (f_{(+)}^{\text{FD}} - f_{(-)}^{\text{FD}}) \quad (3.70)$$

têm-se a densidade de partículas representado por ρ .

3.6 GÁS DE BOSE LIVRE

Para bósons formados após uma colisão, como $\pi^{\pm,0}$ e $K^{\pm,0}, \bar{K}^0$, o modelo de gás de Bose livre pode ser aplicado sob certas condições. Diferentemente dos férmions, os bósons podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente. Em situações de alta energia, como em colisões de íons pesados, este modelo é útil para entender a distribuição de energia e a geração de partículas.

A grande função de partição para gases de bósons, considerando tanto partículas (+) quanto antipartículas (-), é dada por:

$$\mathcal{Z}^{\text{BE}}(T, V, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_j + \mu)}}. \quad (3.71)$$

Da mesma forma que para o gás de Fermi, usando (3.61) e (3.62) e considerando os valores possíveis para o número de ocupação de bósons, o grande potencial, conforme definido em (3.56), é expresso por:

$$\begin{aligned} \Phi^{\text{BE}}(T, V, \mu) &= -k_B T \gamma V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\ln \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta(E_p - \mu)}} \right) + \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta(E_p + \mu)}} \right) \right] \\ &= k_B T \gamma V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\ln (1 - e^{-\beta(E_p - \mu)}) + \ln (1 - e^{-\beta(E_p + \mu)}) \right]. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Para o número de partículas N desse sistema, conforme revisado na equação (3.65), teremos:

$$N^{\text{BE}} = \gamma V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{e^{\beta(E_p - \mu)} - 1} \right], \quad (3.73)$$

onde a distribuição de Bose-Einstein para partículas é:

$$f_{(+)}^{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(E_p - \mu)} - 1}. \quad (3.74)$$

Ao dividir a expressão (3.73) pelo volume, obtém-se a densidade de partículas ρ ,

$$\rho_{(+)}^{\text{BE}} = \gamma \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_{(+)}^{\text{BE}}. \quad (3.75)$$

Da mesma forma, para o N de antipartículas desse sistema, é dado por:

$$N^{\text{BE}} = \gamma V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{e^{\beta(E_p + \mu)} - 1} \right], \quad (3.76)$$

onde a distribuição de Bose-Einstein para antipartículas é:

$$f_{(-)}^{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(E_p + \mu)} - 1}. \quad (3.77)$$

Analogamente, para as antipartículas, a densidade de antipartículas ρ é:

$$\rho_{(-)}^{\text{BE}} = \gamma \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_{(-)}^{\text{BE}}. \quad (3.78)$$

Os conceitos discutidos neste capítulo são fundamentais para trabalhar com o modelo de gases livres na descrição e formação de hádrons em colisões de altas energias. No próximo capítulo, discutiremos a estatística não-extensiva, que ampliará o conhecimento sobre a formação de partículas após eventos de colisões.

4 ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA

Neste Capítulo exploraremos a estatística não-extensiva, uma generalização da mecânica estatística clássica. A extensividade é um conceito relacionado às quantidades termodinâmicas de um sistema, como a entropia. Portanto, o Capítulo inicia com uma formulação da entropia e suas propriedades de extensividade e aditividade. Prosseguirá para a entropia de Tsallis, discutindo suas propriedades fundamentais, como a generalização das funções exponenciais e logarítmicas, essenciais para a definição da entropia não-extensiva. Essas funções alteram propriedades clássicas da entropia, demonstrando como a entropia de Tsallis se reduz à entropia de Boltzmann-Gibbs quando o parâmetro q aproxima-se de 1.

O objetivo final deste trabalho é a obtenção da razão entre partículas resultantes após uma colisão de íons pesados, portanto, o Capítulo abordará a aplicação da estatística não-extensiva nas descrições estatísticas de partículas quânticas, os férmions e bósons. A teoria modifica as expressões tradicionais para a função de partição e as distribuições de partículas, utilizando as funções q -exponenciais e q -logarítmicas para adaptar as equações ao contexto de não-extensividade.

São analisadas as fórmulas para a densidade de partículas e antipartículas, destacando as diferenças introduzidas pela estatística de Tsallis em relação ao que se obtém com as estatísticas tradicionais.

4.1 PROPRIEDADES DA ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA

A estatística não-extensiva (ou estatística de Tsallis) é uma generalização da estatística usual de Boltzmann-Gibbs [9], proposta por Constantino Tsallis em 1988, que se aplica a vários sistemas, como sistemas complexos com interações de longo alcance [75], correlações de longo alcance ou estrutura fractal [76].

Na estatística clássica, a entropia é uma quantidade extensiva, ou seja, é uma variável que varia proporcionalmente ao tamanho ou à quantidade de matéria do sistema. Demonstrar que a entropia possui essa propriedade significa mostrar que ela é proporcional às variáveis extensivas do sistema, como energia (E), volume (V) e número de partículas (N). Considere uma transformação do sistema por um fator λ , onde λ é uma constante arbitrária representando a escala de mudança do sistema. Sendo a entropia uma variável extensiva, deve obedecer a relação [73]:

$$S(\lambda U, \lambda V, \lambda N) = \lambda S(U, V, N). \quad (4.1)$$

Além disso, a entropia na estatística clássica é aditiva, pois a entropia total de sistemas inicialmente independentes que são combinados é a soma das entropias individuais desses sistemas. Dessa forma [73]:

$$S(A + B) = S(A) + S(B), \quad (4.2)$$

ou mais precisamente, se dois sistemas inicialmente separados, A e B , são combinados, a entropia total $S(A + B)$ do sistema combinado é a soma da entropia do sistema A e do sistema B . Essa propriedade de aditividade vale para qualquer quantidade de sistemas. Se tivermos N sistemas, a entropia total será a soma das entropias individuais desses N sistemas, confirmando que a entropia é uma quantidade aditiva.

Diferentemente, a estatística não-extensiva, proposta por Tsallis, trata a entropia como uma quantidade não-extensiva, ou seja, suas propriedades termodinâmicas não escalam de forma linear com o tamanho do sistema, conforme será visto a seguir. Primeiramente serão definidas a exponencial e sua inversa, pois são fundamentais para a formulação da entropia dentro da estatística não-extensiva. No formalismo da estatística não-extensiva, a generalização da função exponencial natural e^x para a q -exponencial e_q^x pode ser entendida a partir da solução de uma equação diferencial não linear $dy/dx = y^q$ cuja solução é $y = [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)} = e_q^x$ [77], assim, a função q -exponencial generalizada é [9]:

$$e_q^{(+)}(x) = [1 + (q - 1)x]^{1/(q-1)}, \quad x \geq 0, \quad (4.3)$$

$$e_q^{(-)}(x) = [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}, \quad x < 0. \quad (4.4)$$

em que q é um parâmetro real também conhecido como índice entrópico ou parâmetro de Tsallis e vai caracterizar o grau de não-extensividade do sistema. Os índices (+) e (-) diferenciam os intervalos do domínio de x . Para $q = 1$, a entropia de Tsallis se reduz à entropia de Boltzmann-Gibbs. Valores de q significativamente diferentes de 1 sugerem que o sistema não está em completo equilíbrio termodinâmico.

A inversa é $y = \frac{x^{1-q}-1}{1-q} = \ln_q x$ [77], assim, a função inversa de e_q^x é $\ln_q(x)$:

$$\ln_q^{(+)}(x) = \frac{x^{q-1} - 1}{q - 1}, \quad x \geq 0, \quad (4.5)$$

$$\ln_q^{(-)}(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}, \quad x < 0, \quad (4.6)$$

em que $\ln_q(x)$ é conhecido como q -logaritmo. A generalização da entropia (3.6), conhecida como entropia de Tsallis, pode ser escrita em termos de valor esperado, utilizando as generalizações das funções acima generalizadas, como [78]:

$$S_q = k_B \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1}. \quad (4.7)$$

Para mostrar que a entropia de Tsallis se reduz à entropia de Boltzmann-Gibbs quando $q \rightarrow 1$, consideramos o limite:

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = \lim_{q \rightarrow 1} k_B \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1}. \quad (4.8)$$

Lembrando que k_B é a constante de Boltzmann e p_i é a probabilidade associada ao microestado i . Como k_B é uma constante, podemos reescrever a equação anterior na forma:

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = k_B \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1}. \quad (4.9)$$

É necessário fazer uma expansão em série de Taylor¹² de p_i^q e substituir no termo $\sum_i p_i^q$. Considerando essa expansão:

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = k_B \frac{1 - \sum_i (p_i + (q-1)p_i \ln p_i)}{q-1}, \quad (4.10)$$

como $\sum_i p_i = 1$, então:

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} S_q &= k_B \frac{1 - [1 + (q-1) \sum_i p_i \ln p_i]}{q-1}, \\ &= k_B \frac{\cancel{1} - \cancel{1} - (q-1) \sum_i p_i \ln p_i}{q-1}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Assim, o fator $(q-1)$ no numerador e no denominador se cancelam.

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = k_B \frac{-\cancel{(q-1)} \sum_i p_i \ln p_i}{\cancel{q-1}}. \quad (4.12)$$

Portanto, a entropia de Tsallis, recupera a forma de Boltzmann-Gibbs no limite $q \rightarrow 1$, confirmando que para este valor de q , a entropia de Tsallis coincide com a entropia convencional:

$$S_q \rightarrow -k_B \sum_i p_i \ln p_i. \quad (4.13)$$

Além disso, a entropia de Tsallis é não aditiva. Para dois sistemas independentes, $S_q(A+B)$, a entropia de Tsallis é expressa como:

$$S_q(A+B) = k_B \frac{1 - \sum_k p_{AB,k}^q}{q-1}, \quad (4.14)$$

aqui, $p_{AB,k}$ representa a probabilidade do estado k no sistema combinado $A+B$. Para sistemas independentes, a probabilidade conjunta é o produto das probabilidades individuais $p_{AB,k} = p_{A,i} p_{B,j}$, onde $k = (i, j)$:

$$\begin{aligned} S_q(A+B) &= k_B \frac{1 - \sum_i \sum_j p_{A,i}^q p_{B,j}^q}{q-1}, \\ &= k_B \frac{1 - \sum_i p_{A,i}^q \sum_j p_{B,j}^q}{q-1}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pode-se ainda fazer a expansão dos termos de S_q :

$$\begin{aligned} S_q(A+B) &= k_B \left(\frac{1 - (\sum_i p_{A,i}^q + \sum_j p_{B,j}^q - \sum_i p_{A,i}^q \sum_j p_{B,j}^q)}{q-1} \right), \\ &= k_B \left(\frac{1 - \sum_i p_{A,i}^q}{q-1} + \frac{1 - \sum_j p_{B,j}^q}{q-1} - \frac{(1 - \sum_i p_{A,i}^q)(1 - \sum_j p_{B,j}^q)}{q-1} \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Separando dessa forma os termos, podemos visualizar as definições de entropia (4.7) para cada sistema:

$$S_q(A) = k_B \frac{1 - \sum_i p_{A,i}^q}{q-1} \quad \text{e} \quad S_q(B) = k_B \frac{1 - \sum_j p_{B,j}^q}{q-1}, \quad (4.17)$$

¹² $p_i^q \approx p_i + (q-1)p_i \ln p_i$.

assim, substituindo (4.17) devidamente na equação (4.16), temos então:

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) - k_B \frac{(1 - \sum_i p_{A,i}^q)(1 - \sum_j p_{B,j}^q)}{q - 1}. \quad (4.18)$$

Essa equação satisfaz à propriedade pseudo-aditiva¹³ [77] do q -logaritmo, resultando em:

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B). \quad (4.19)$$

Essa expressão final (4.19) demonstra que a entropia de Tsallis não é aditiva como a entropia de Boltzmann-Gibbs. O termo $(1 - q)S_q(A)S_q(B)$ reflete a não-extensividade e não-aditividade da entropia de Tsallis. Nota-se também que, no limite $q \rightarrow 1$, a entropia de Tsallis se reduz à forma aditiva da entropia de Boltzmann-Gibbs, recuperando a aditividade.

4.2 DISTRIBUIÇÃO DE PARTÍCULAS COM A ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA

Com base no tópico anterior e levando em consideração a estatística não-extensiva, serão utilizadas as funções já vistas em (4.3), (4.4), (4.5) e (4.6) para generalizar o *ensemble* grande-canônico. Com essas relações, a probabilidade (3.16), a grande função de partição (3.17) e o grande potencial termodinâmico (3.26) do sistema podem ser generalizados a partir dessas funções q -exponenciais e q -logarítmicas. Assim, para a estatística não-extensiva, a grande função de partição pode ser reescrita como:

$$\mathcal{Z}_q^{(+)} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_k\}} [1 + (q - 1)(-x)]^{\frac{1}{q-1}} \quad x \geq 0, \quad (4.20)$$

$$\mathcal{Z}_q^{(-)} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_k\}} [1 - (q - 1)x]^{\frac{1}{1-q}} \quad x < 0. \quad (4.21)$$

em que $x = \beta(E_p \mp \mu N)$. A grande função de partição completa, considerando ambos regimes, é a soma das duas partes:

$$\mathcal{Z}_q = \mathcal{Z}_q^{(+)} + \mathcal{Z}_q^{(-)}. \quad (4.22)$$

Substituindo as definições:

$$\mathcal{Z}_q = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_k\}} \left[\Theta(x) [1 - (q - 1)x]^{\frac{1}{q-1}} + \Theta(-x) [1 - (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} \right], \quad (4.23)$$

em que $\Theta(x)$ é a função de Heaviside, que é 1 para $x \geq 0$ e 0 para $x < 0$. A soma desses estados $\sum_{\{n_k\}}$ pode ser aproximada por uma integral no espaço de momentos $V \int \frac{d^3p}{(1\pi)^3}$, então essa função de partição torna-se densidade de estados integrada sobre o espaço de momentos:

$$\mathcal{Z}_q = V \sum_{N=0}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\Theta(x) [1 - (q - 1)x]^{\frac{1}{q-1}} + \Theta(-x) [1 - (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} \right]. \quad (4.24)$$

¹³ $\ln_q(x_A x_B) = \ln_q x_A + \ln_q x_B + (1 - q)(\ln_q x_A)(\ln_q x_B)$.

Para simplificar a notação anterior, os termos podem ser combinados usando a função de Heaviside ($\Theta(x)$) e somando sobre $r = \pm$:

$$\mathcal{Z}_q = V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{r=\pm} \Theta(rx) [1 + r(q-1)x]^{\frac{1}{r(q-1)}}. \quad (4.25)$$

Assim, os dois regimes de x ficam em uma única expressão usando $r = \pm$ e a função de Heaviside $\Theta(rx)$. Para obter o logaritmo da grande função de partição, utilizam-se as propriedades das funções q -exponenciais e q -logarítmicas. Usando estas relações, obtemos a expressão final para o logaritmo da grande função de partição:

$$\log \mathcal{Z}_q = -\xi V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{r=\pm} \Theta(rx) \log_q^{(-r)} \left(\frac{e_q^{(r)}(x) - \xi}{e_q^{(r)}(x)} \right). \quad (4.26)$$

no qual ξ é o fator que diferencia os tipos de partículas, $\xi = +1$ para bósons e $\xi = -1$ para férmions. Como descrito anteriormente no Capítulo 3, a função de partição é fundamental para a obtenção de informações sobre o sistema. Para as distribuições de Fermi-Dirac e Bose-Einstein, essa função possibilita o cálculo da probabilidade de ocupação dos estados de energia.

4.2.1 Distribuição de Férmions no sistema

Considerando o formalismo apresentado no subtópico anterior, a distribuição de partículas (3.45) generalizada é:

$$\langle n_k \rangle_q = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}_q}{\partial \varepsilon_k}. \quad (4.27)$$

Para férmions, o valor que ξ assume é -1 . Para o primeiro caso, em que o regime da função para partículas e antipartículas é dado por $r = +$, utiliza-se as funções (4.3 e 4.6), e temos que a função de partição (4.26) torna-se:

$$\log \mathcal{Z}_q^{\text{FD}} = V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Theta(x) \log_q^{(-)} \left(\frac{e_q^{(+)}(x) + 1}{e_q^{(+)}(x)} \right). \quad (4.28)$$

Escrevendo explicitamente as funções, onde o índice \pm indica, respectivamente, partículas e antipartículas, temos:

$$\log \mathcal{Z}_q^{\text{FD}(\pm)} = V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Theta(\beta(E_p \mp \mu)) \log_q^{(-)} \left(\frac{[1 + (q-1)\beta(E_p \mp \mu)]^{\frac{1}{q-1}} + 1}{[1 + (q-1)\beta(E_p \mp \mu)]^{\frac{1}{q-1}}} \right). \quad (4.29)$$

Com a função definida, podemos resolver a distribuição de partículas $n_q^{\text{FD}(+)}$ e antipartículas $n_q^{\text{FD}(-)}$ generalizada e temos então o resultado:

$$n_q^{\text{FD}(+)} = \frac{1}{\left([1 + (q-1)\beta(E - \mu)]^{\frac{1}{q-1}} + 1\right)^q} \quad \text{e} \quad n_q^{\text{FD}(-)} = \frac{1}{\left([1 + (q-1)\beta(E + \mu)]^{\frac{1}{q-1}} + 1\right)^q}. \quad (4.30)$$

Para o segundo caso, em que o regime da função para partículas e antipartículas é $r = -$, aplica-se as funções (4.4 e 4.5), assim a função de partição (4.26) é:

$$\log \mathcal{Z}_q^{\text{FD}} = V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Theta(-x) \log_q^{(+)} \left(\frac{e_q^{(-)}(x) + 1}{e_q^{(-)}(x)} \right), \quad (4.31)$$

Explicitamente escrita:

$$\log \mathcal{Z}_q^{\text{FD}(\pm)} = V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Theta(-\beta(E_p \mp \mu)) \log_q^{(+)} \left(\frac{[1 + (1 - q)\beta(E_p \mp \mu)]^{\frac{1}{1-q}} + 1}{[1 + (1 - q)\beta(E_p \mp \mu)]^{\frac{1}{1-q}}} \right). \quad (4.32)$$

A distribuição de partículas $n_q^{\text{FD}(+)}$ e antipartículas $n_q^{\text{FD}(-)}$ neste sistema é:

$$n_q^{\text{FD}(+)} = \frac{1}{\left([1 + (1 - q)\beta(E - \mu)]^{\frac{1}{1-q}} + 1\right)^{2-q}} \quad \text{e} \quad n_q^{\text{FD}(-)} = \frac{1}{\left([1 + (1 - q)\beta(E + \mu)]^{\frac{1}{1-q}} + 1\right)^{2-q}}. \quad (4.33)$$

Com essas novas definições, a densidade de partículas passa a considerar as distribuições de partículas generalizadas, então substituímos (3.70) por:

$$\rho_q^{\text{FD}} = \gamma \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (n_q^{\text{FD}(+)} - n_q^{\text{FD}(-)}). \quad (4.34)$$

Essa equação então é a densidade de partículas na estatística não-extensiva.

4.2.2 Distribuição de Bósons no sistema

Para bósons, o valor de ξ é $+1$. Para o primeiro caso, considerando as partículas e antipartículas, o regime é $r = +$, usa-se as funções (4.3 e 4.6), então a função de partição torna-se:

$$\log \mathcal{Z}_q^{\text{BE}} = -V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Theta(x) \log_q^{(-)} \left(\frac{e_q^{(+)}(x) - 1}{e_q^{(+)}(x)} \right). \quad (4.35)$$

De forma explícita, substituindo diretamente a função q -exponencial:

$$\log \mathcal{Z}_q^{\text{BE}(\pm)} = -V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Theta(\beta(E_p \mp \mu)) \log_q^{(-)} \left(\frac{[1 + (q - 1)\beta(E_p \mp \mu)]^{\frac{1}{q-1}} - 1}{[1 + (q - 1)\beta(E_p \mp \mu)]^{\frac{1}{q-1}}} \right). \quad (4.36)$$

A distribuição de partículas $n_q^{\text{BE}(+)}$ e antipartículas $n_q^{\text{BE}(-)}$ é:

$$n_q^{\text{BE}(+)} = \frac{1}{\left([1 + (q - 1)\beta(E - \mu)]^{\frac{1}{q-1}} - 1\right)^q} \quad \text{e} \quad n_q^{\text{BE}(-)} = \frac{1}{\left([1 + (q - 1)\beta(E + \mu)]^{\frac{1}{q-1}} - 1\right)^q}. \quad (4.37)$$

Para o segundo caso, em que $r = -$, emprega-se as funções (4.4 e 4.5), a função de partição passa a ser:

$$\log \mathcal{Z}_q^{\text{BE}} = -V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Theta(-x) \log_q^{(+)} \left(\frac{e_q^{(-)}(x) - 1}{e_q^{(-)}(x)} \right). \quad (4.38)$$

Explicitamente:

$$\log Z_q^{\text{BE}(\pm)} = -V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Theta(-\beta(E_p \mp \mu)) \log_q^{(+)} \left(\frac{[1 + (1-q)\beta(E_p \mp \mu)]^{\frac{1}{1-q}} - 1}{[1 + (1-q)\beta(E_p \mp \mu)]^{\frac{1}{1-q}}} \right). \quad (4.39)$$

A distribuição para partículas $n_q^{\text{BE}(+)}$ e antipartículas $n_q^{\text{BE}(-)}$ é:

$$n_q^{\text{BE}(+)} = \frac{1}{\left([1 + (1-q)\beta(E - \mu)]^{\frac{1}{1-q}} - 1\right)^{2-q}} \quad \text{e} \quad n_q^{\text{BE}(-)} = \frac{1}{\left([1 + (1-q)\beta(E + \mu)]^{\frac{1}{1-q}} - 1\right)^{2-q}}. \quad (4.40)$$

A densidade de partículas (3.75) generalizada é

$$\rho_q^{\text{BE}(+)} = \gamma \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (n_q^{\text{BE}(+)}), \quad (4.41)$$

enquanto que para antipartículas, a densidade de partículas (3.78) generalizada é:

$$\rho_q^{\text{BE}(-)} = \gamma \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (n_q^{\text{BE}(-)}). \quad (4.42)$$

Este capítulo introduz uma metodologia baseada na estatística não extensiva para analisar a produção de partículas em experimentos de colisões, diferenciando-se das abordagens convencionais que se apoiam na estatística de Boltzmann-Gibbs. A aplicação das estatísticas não-extensivas é uma estratégia consolidada para a descrição da formação de hádrons em colisões de íons pesados Au-Au [79, 80, 81, 82]. O próximo capítulo empregará essa descrição na análise de uma colisão de íons pesados, com foco nas distribuições de férmions e bósons em sistemas de colisão ouro-ouro (Au-Au).

5 RESULTADOS

Conforme mencionado anteriormente, não há observação direta do QGP, e sua existência é inferida a partir das propriedades das partículas finais detectadas nos experimentos que ocorrem dentro dos aceleradores de partículas. Essa limitação demanda a combinação de dados experimentais e modelos teóricos para uma compreensão mais aprofundada dessas colisões. O QGP pode ser considerado um sistema altamente aquecido em um equilíbrio termodinâmico local aproximado, permitindo uma análise retrospectiva fundamental para entender não apenas a formação do plasma e suas propriedades, mas também a geração das partículas resultantes. À medida que o QGP formado nessas colisões se expande, ele esfria, e eventualmente, quarks e glúons se recombinaem em uma variedade de hádrons. Neste contexto, utilizamos os conhecimentos sobre a física de partículas vistos no Capítulo 2 e as descrições dos modelos de gases livres vistas no Capítulo 3, que nos ajudam a descrever essa fase de gás de hádrons. Usaremos a estatística não-extensiva vista no Capítulo 4 como uma alternativa aos demais modelos e estatísticas convencionais, oferecendo uma visão simplificada do processo de produção de partículas.

5.1 FORMALISMO

Inicialmente, investigamos as distribuições de férmions e bósons em sistemas de colisão ouro-ouro (Au-Au), usando o modelo de gás de Fermi livre para férmions e o modelo de Bose livre para bósons. Para o propósito deste trabalho, partículas e antipartículas devem ser tratadas separadamente [83] e suas densidades (3.70) são dadas respectivamente por:

$$\rho_{(+)}^{\text{FD}} = (2J + 1) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_{(+)}^{\text{FD}}, \quad (5.1)$$

e,

$$\rho_{(-)}^{\text{FD}} = (2J + 1) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_{(-)}^{\text{FD}}. \quad (5.2)$$

Nas equações (5.1) e (5.2), o fator $(2J + 1)$ indica a degenerescência dos estados, onde $J = 1/2$ e $3/2$ representam férmions com spin $1/2$ e spin $3/2$, respectivamente. A expressão $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$ integra sobre todos os momentos possíveis, normalizada por $(2\pi)^3$. As funções $f_{(+)}^{\text{FD}}$ e $f_{(-)}^{\text{FD}}$ são as distribuições de Fermi-Dirac (3.67) para partículas e antipartículas, que podem ser expressas como:

$$f_{(\pm)}^{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(E_p \mp \mu)} + 1}, \quad (5.3)$$

onde $\pm\mu$ é o potencial químico para partículas e antipartículas, E_p é a energia e $\beta = 1/k_B T$ é o inverso da temperatura.

Agora passamos para o modelo de gás de Bose livre, que, ao contrário dos férmions, não obedece ao princípio de exclusão de Pauli. As densidades (3.75) e (3.78) de partículas e antipartículas bosônicas é então definida, com $J = 0$ ou 1 . As densidades de partículas e

antipartículas $\rho_{(\pm)}^{\text{BE}}$ são dadas por:

$$\rho_{(\pm)}^{\text{BE}} = (2J + 1) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_{(\pm)}^{\text{BE}}. \quad (5.4)$$

O termo $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$ é a integral sobre o espaço de momento tridimensional, normalizada pela constante $(2\pi)^3$. As funções de distribuição $f_{(\pm)}^{\text{BE}}$ de Bose-Einstein (3.74) e (3.77), são expressas como:

$$f_{(\pm)}^{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(E \mp \mu)} - 1}, \quad (5.5)$$

que diferem das distribuições de Fermi-Dirac (5.3) pelo sinal do termo constante no denominador.

Para este trabalho, analisamos a possibilidade de estudar colisões de partículas em altas energias utilizando a termodinâmica não-extensiva. Estendemos a exponencial padrão por [9]:

$$e^{(-\beta x)} \longrightarrow [1 + (q - 1)\beta x]^{-\frac{q}{q-1}}, \quad (5.6)$$

onde q é um parâmetro livre.

Como já discutido no Capítulo 4, a estatística não-extensiva pode ser usada para ajustar os valores dos parâmetros termodinâmicos no congelamento químico, servindo como uma ferramenta analítica que facilita a descrição de sistemas fora do equilíbrio tradicional.

Para a substituição das estatísticas de Fermi e Bose pela estatística não-extensiva, a nova função de partição $\mathcal{Z}(V, T, \mu)$ é definida como [84]:

$$\log \mathcal{Z}(V, T, \mu) = -\xi V \int_p \sum_{r=\pm} \Theta(rx) \log_q^{(-r)} \left(\frac{e_q^{(r)}(x) - \xi}{e_q^{(r)}(x)} \right), \quad (5.7)$$

em que V é o volume, a integral percorre o momento, $\xi = \pm 1$ representa bósons e férmions, respectivamente, $x = \beta(E_p \mp \mu)$, Θ é a função degrau e $r = \pm$ caracteriza os dois regimes das funções q -exponenciais e q -logarítmicas: ($x \geq 0$) e ($x < 0$). Na equação (5.7), a função q -logarítmica é definida por:

$$\log_q^{(+)}(x) = \frac{x^{q-1} - 1}{q - 1}, \quad x \geq 0, \quad (5.8)$$

$$\log_q^{(-)}(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}, \quad x < 0. \quad (5.9)$$

Enquanto a função q -exponencial é dada por:

$$e_q^{(+)}(x) = [1 + (q - 1)x]^{\frac{1}{q-1}}, \quad x \geq 0, \quad (5.10)$$

$$e_q^{(-)}(x) = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}, \quad x < 0. \quad (5.11)$$

As funções de distribuição são [85]:

$$n_q^{(+)}(x) = \frac{1}{\left(e_q^{(+)}(x) - \xi\right)^q}, \quad x \geq 0, \quad (5.12)$$

$$n_q^{(-)}(x) = \frac{1}{\left(e_q^{(-)}(x) - \xi\right)^{2-q}}. \quad x < 0 \quad (5.13)$$

5.2 ANÁLISE DA FRAÇÃO DE PARTÍCULAS NA COLISÃO AU-AU

Aplicando o formalismo discutido nas seções anteriores com o propósito de descrever a produção de hádrons em colisões Au-Au, os resultados obtidos no processo de minimização serão, a seguir, comparados aos dados experimentais.

As restrições de conservação impostas ao número de bárions, estranheza e carga elétrica são, respectivamente [86]:

$$V \sum_i n_i B_i = Q_B = Z + N, \quad (5.14)$$

em que V é o volume do gás no qual as partículas estão confinadas, n_i é o número de partículas para a espécie i -hádron, B_i é o número bariônico e Q_B é a carga bariônica do gás. Por fim, Z é o número total de prótons e N é o número total de nêutrons no sistema,

$$V \sum_i n_i S_i = Q_S = 0, \quad (5.15)$$

com S_i a estranheza das partículas do gás e a estranheza total Q_S é zero;

$$V \sum_i n_i I_{3i} = Q_{I_3} = \frac{Z - N}{2}, \quad (5.16)$$

onde I_{3i} é a terceira componente do isospin associada a cada partícula, Q_{I_3} é o isospin total.

O valor do número bariônico é calculado considerando o número de núcleos envolvidos na colisão e o número de bárions em cada núcleo. A análise desta colisão envolve dois núcleos de Au. O isótopo mais comum utilizado em colisões é o ouro-197, que tem número de massa (A) igual a 197. Assim, cada núcleo de Au tem 79 prótons (Z) e 118 nêutrons (N)¹⁴, totalizando 394 bárions no sistema.

O isospin total (Q_{I_3}) do núcleo é calculado em 5.16, considerando as contribuições dos isospins de todos os prótons e nêutrons:

$$Q_{I_3} = \frac{Z - N}{2} = \frac{79 - 118}{2} = -19,5. \quad (5.17)$$

Dessa forma, o isospin total é $Q_{I_3} = -19,5$ para cada núcleo de ouro (ou -39 para o sistema inteiro).

O χ^2 será usado como uma medida de ajuste entre as previsões teóricas e os dados experimentais, indicando o quão bem as previsões do modelo estão em acordo com as observações, e pode ser calculado a partir de [83]:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(R_i^{\text{exp}} - R_i^{\text{theo}})^2}{\sigma_i^2}, \quad (5.18)$$

onde R_i^{exp} e R_i^{theo} são as razões experimentais e teóricas da i -ésima partícula, enquanto σ_i representa o erro nos pontos de dados experimentais. Um valor menor de χ^2 indica um melhor ajuste do modelo aos dados experimentais.

¹⁴ $N = A - Z$, o número de massa menos o número atômico.

As razões experimentais R_i^{exp} são obtidas diretamente dos resultados das medições experimentais. Essas razões são calculadas como a proporção entre as contagens de diferentes tipos de partículas produzidas, assim, $R^{\text{exp}} = \frac{\bar{N}_i}{N_i}$, em que N_i é o número de partículas do tipo i produzidas e \bar{N}_i é o número de antipartículas. As razões teóricas R_i^{theo} , são calculadas usando densidades de partículas e antipartículas.

As razões de partículas calculadas com nosso modelo para o valor convencional ($q = 1, 0$) e estatísticas não-extensivas são mostradas na tab. 5.1, juntamente com dados experimentais obtidos no RHIC das Colaborações STAR, PHENIX, PHOBOS e BRAHMS a $\sqrt{s} = 130$ GeV [87] [86]. Além da comparação dos resultados do modelo com os dados experimentais, na tab. 5.1 também apresentamos previsões do modelo para diferentes razões de partículas que ainda não foram observadas experimentalmente. Vale ressaltar que h^- é a notação para a densidade de partículas hadrônicas carregadas negativamente. O intervalo para minimizar q foi definido entre 1,01 e 1,25, ajustado para estar próximo ao valor de 1 que leva às estatísticas usuais. Esta escolha particular nos levou à constatação de que $q = 1,16$ é o valor que minimiza a função para $T = 58,2$ MeV e $\mu_B = 51,5$ MeV, como mostrado na fig. 5.1, enquanto o intervalo correspondente a $\chi^2/\text{dof} \sim 1$ é $1,11 < q < 1,22$. As razões de partículas obtidas com este valor também são exibidas na tab. 5.1.

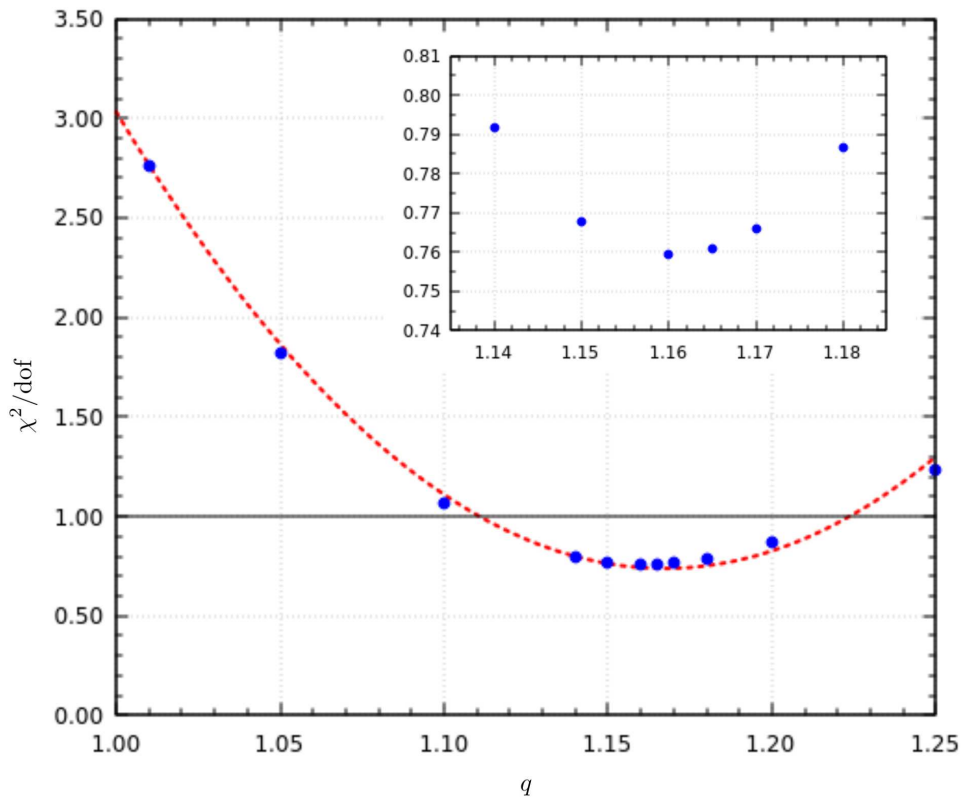


Figura 5.1 – Resultados obtidos de χ^2/dof como função de q no intervalo $1,01 \leq q \leq 1,25$, para $T = 58,2$ MeV e $\mu_B = 51,5$ MeV, obtidos por minimização (azul). O valor de dof é 14, pois há 16 dados experimentais e 2 parâmetros no ajuste (vermelho). O valor mínimo de χ^2/dof é obtido para $q = 1,16$. A linha horizontal indica o valor de $\chi^2/\text{dof} = 1$.

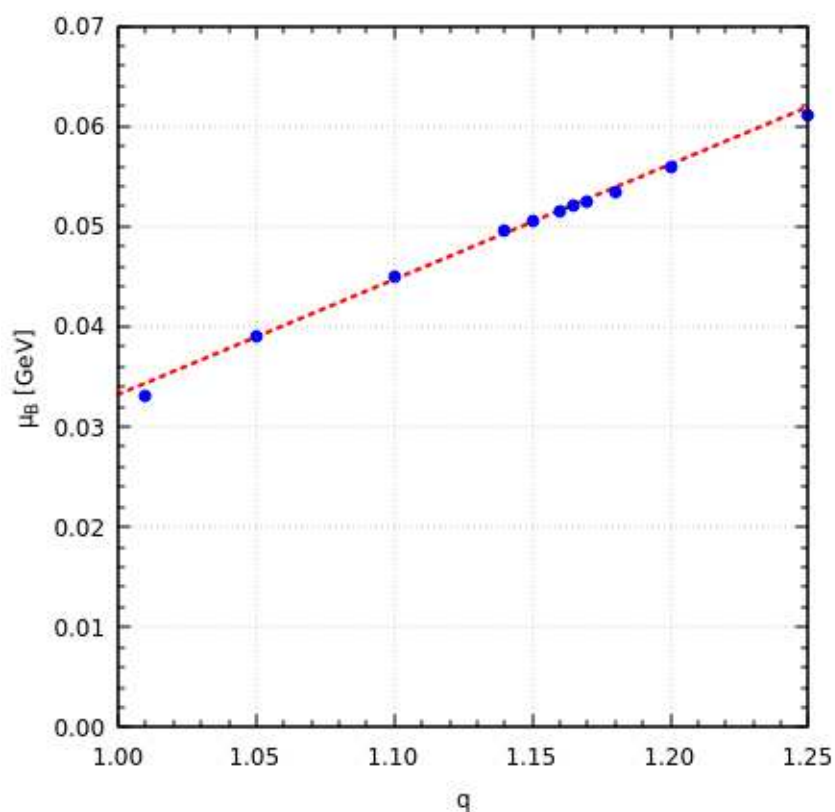


Figura 5.2 – Gráfico de μ_B como função de q . Os resultados foram obtidos a partir do processo de minimização (azul) juntamente com os respectivos ajustes (vermelho).

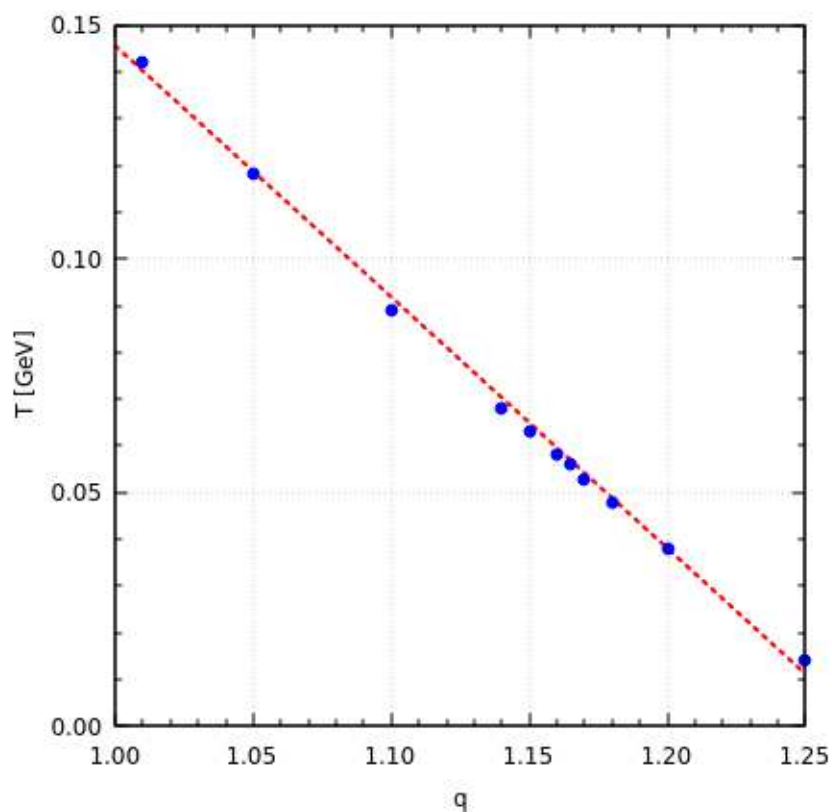


Figura 5.3 – Gráfico de T como função de q . Os resultados foram obtidos a partir do processo de minimização (azul) juntamente com os respectivos ajustes (vermelho).

Os melhores ajustes (*fit*) correspondentes aos dados obtidos são dados pelas seguintes equações:

$$\chi^2/\text{dof} = 3,03253 - 27,4348(q - 1) + 82,0251(q - 1)^2, \quad (5.19)$$

$$\mu_B = [33,2202 + 114,829(q - 1)] \text{ MeV}, \quad (5.20)$$

$$T = [145,52 - 537,165(q - 1)] \text{ MeV}, \quad (5.21)$$

onde $\text{dof} = 14$ (graus de liberdade) é obtido a partir dos 16 dados experimentais e 2 parâmetros de ajuste (T e μ_B). Quando são usadas as estatísticas de Fermi e Bose, a temperatura $T = 148,8$ MeV e o potencial químico $\mu_B = 32,5$ MeV associados ao valor mínimo de $\chi^2/\text{dof} = 2,97387$ são obtidos. Para o melhor valor das estatísticas não-extensivas, $T = 58,2$ MeV, $\mu_B = 51,5$ MeV e $\chi^2/\text{dof} = 0,75926$ são obtidos.

Razão	$q = 1.01$	$q = 1.16$	Dados $\sqrt{s} = 130$ GeV	Exp.	Ref.
\bar{p}/p	0.648694	0.656767	0.65 ± 0.07	STAR	[88]
			0.64 ± 0.07	PHENIX	[89]
			0.60 ± 0.07	PHOBOS	[90]
			0.64 ± 0.07	BRAHMS	[91]
\bar{p}/π^-	0.041363	0.064067	0.08 ± 0.01	STAR	[92]
			1.00 ± 0.02	PHOBOS	[90]
π^-/π^+	1.008493	1.019848	0.95 ± 0.06	BRAHMS	[93]
			0.88 ± 0.05	STAR	[94]
K^-/K^+	0.940661	0.829491	0.78 ± 0.13	PHENIX	[95]
			0.91 ± 0.09	PHOBOS	[90]
			0.89 ± 0.07	BRAHMS	[93]
			0.149 ± 0.02	STAR	[94]
K^-/π^-	0.235757	0.169266	0.77 ± 0.07	STAR	[96]
$\bar{\Lambda}^0/\Lambda^0$	0.689054	0.770251	0.82 ± 0.08	STAR	[97]
$\bar{\Xi}^-/\Xi^-$	0.732019	0.875823			
$\bar{\Omega}^-/\Omega^-$	0.783607	0.976638			
$\bar{\Omega}^-/\pi^-$	0.001389	0.025813			
K^{0*}/h^-	0.061003	0.071760	0.06 ± 0.017	STAR	[96]
\bar{K}^{0*}/h^-	0.056983	0.062544	0.058 ± 0.017	STAR	[96]
h^-/ρ	14.194047	7.903081			
Λ^0/h^-	0.013941	0.026713			
Ω^-/Ξ^-	0.250425	0.871511			
Λ^0/K^{0*}	0.228535	0.372255			
$\bar{\Xi}^-/\Lambda^0$	0.222069	0.487735			
$\bar{\Xi}^-/\bar{\Lambda}^0$	0.322280	0.633215			
$\bar{\Xi}^-/\bar{K}^-$	0.021990	0.156920			

Tabela 5.1 – Razões de partículas em colisões Au-Au, considerando $q = 1.01$ e $q = 1.16$, juntamente com dados experimentais a $\sqrt{s} = 130$ GeV, analisados com parâmetros definidos em $T = 58.2$ MeV e $\mu_B = 51.5$ MeV.

Como visto na tab. 5.1, o valor mínimo de $\chi^2/\text{dof} = 0,75926$ fornece uma melhor descrição das razões de partículas produzidas em colisões Au-Au do que as estatísticas usuais. Os resultados apresentados estão publicados no artigo “*Non-extensive statistics in Au-Au collisions*” [98], cujo anexo encontra-se no final dessa dissertação.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, discutiu-se a aplicação da estatística não-extensiva para descrever a produção de partículas em colisões de íons pesados Au-Au. A estatística não-extensiva difere da estatística tradicional de Boltzmann-Gibbs pela introdução de um parâmetro real não-extensivo (q), que controla o grau de não-extensividade e incorpora efeitos de correlação em sistemas complexos. Desde 2000, estudos têm demonstrado a relevância da estatística não-extensiva na descrição da produção de multipartículas em colisões de alta energia [80, 99]. Os mecanismos responsáveis pela emergência do caráter não-extensivo da produção de multipartículas foram ligados a flutuações na temperatura do sistema [100, 101, 102] e a efeitos relacionados a sistemas pequenos, correlações de longo alcance [103, 104] e invariância de escala [76, 105]. No presente trabalho, não estamos preocupados com os mecanismos subjacentes à geração de entropia não-aditiva e ao comportamento não-extensivo resultante das propriedades termodinâmicas.

Investigamos as distribuições de férmions e bósons em sistemas de colisão Au-Au, usando o modelo de gás de Fermi livre para férmions e o modelo de Bose livre para bósons. Esses modelos são particularmente valiosos, pois o gás livre oferece uma base sólida para avaliar como as partículas se comportariam na ausência de interações. A estatística não-extensiva foi usada para descrever a produção de hádrons, utilizando uma estratégia baseada em estudos anteriores [106, 84, 81, 86]. A aplicação dessas estatísticas visa obter um ajuste bom entre os modelos teóricos e os dados experimentais, minimizando o valor de χ^2/dof . Ao considerar o parâmetro q , que governa o grau de não-extensividade do sistema, buscamos descrever efetivamente as interações e transições que levam à formação de hádrons.

O objetivo central foi alcançar uma descrição mais precisa das partículas sob condições extremas, ajustando modelos teóricos aos dados experimentais. Para as análises, foi utilizado um banco de dados experimental abrangente de colisões Au-Au realizadas no RHIC a $\sqrt{s} = 130$ GeV, incluindo resultados do STAR [88, 92, 94, 96, 97], PHENIX [95, 89], PHOBOS [90] e BRAHMS [93, 91]. O objetivo principal foi determinar o melhor valor de q que fornecia a descrição mais precisa dos dados experimentais.

A minimização mostrou que o melhor valor de q é 1,16. Comparando os resultados obtidos com $q = 1,16$ e o valor convencional de $q = 1,0$ relacionado às estatísticas de Fermi e Bose, mostrou-se que a estatística não-extensiva fornece uma descrição mais precisa das proporções de partículas produzidas em colisões Au-Au. Com o uso da estatística não extensiva, conseguimos uma descrição mais acurada das razões de algumas partículas resultantes de colisões Au-Au em colisões de íons pesados. Tal resultado sugere que o parâmetro de Tsallis pode simular possíveis interações não descritas por sistemas de gases livres.

REFERÊNCIAS

- [1] P. Achenbach *et al.* “The Present and Future of QCD” 2023. arXiv: 2303.02579 [hep-ph].
- [2] C. Aidala *et al.* [PHENIX]. “Creation of quark–gluon plasma droplets with three distinct geometries”. *Nature Phys.* 15.3 2019, p. 214–220. DOI: 10.1038/s41567-018-0360-0. arXiv: 1805.02973 [nucl-ex].
- [3] X. Luo. “Exploring the QCD Phase Structure with Beam Energy Scan in Heavy-ion Collisions”. *Nuclear Physics A* 956 2016. The XXV International Conference on Ultra-relativistic Nucleus-Nucleus Collisions: Quark Matter 2015, p. 75–82. ISSN: 0375-9474. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2016.03.025>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947416300112>.
- [4] A. K. Chaudhuri. *A short course on Relativistic Heavy Ion Collisions*. 2012. arXiv: 1207.7028 [nucl-th].
- [5] O. Kalashnikov e V. Klimov. “Phase transition in the quark-gluon plasma”. *Physics Letters B* 88.3-4 1979, p. 328–330.
- [6] U. Heinz e M. Jacob. “Evidence for a new state of matter: An assessment of the results from the CERN lead beam programme”. *arXiv preprint nucl-th/0002042* 2000.
- [7] D. J. Schwarz. “The first second of the universe”. *Annalen der Physik* 515.4 2003, p. 220–270.
- [8] Z. Sweger. “Recent Results and Future Prospects from the STAR Beam Energy Scan Program”. *arXiv preprint arXiv:2305.07139* 2023.
- [9] C. Tsallis. “Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics”. *J. Statist. Phys.* 52 1988, p. 479–487. DOI: 10.1007/BF01016429.
- [10] M. F. S. Alves, D. Alanis e L. G. Costa. “Um mapa conceitual sobre a evolução do conceito do átomo: uma introdução à Física de partículas elementares para o Ensino Médio”. *Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia 2* 2010.
- [11] J. Basaco. “Do átomo-filosófico de Leucipo ao átomo-científico de Dalton”. *Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo* 2.2 1980, p. 70–76.
- [12] F. Caruso e V. Oguri. “A eterna busca do indivisível: do átomo filosófico aos quarks e léptons”. *Química nova* 20 1997, p. 324–334.
- [13] C. O. d. Silva e P. L. Natti. “Modelo de quarks e sistemas multiquarks”. *Revista Brasileira de Ensino de Física* 29 2007, p. 175–187.
- [14] J. Henry. *A revolução científica*. Zahar, 1998.

- [15] M. A. Gatto, J. B. S. Júnior e E. de Lorena Stanzani. "Subsídios histórico-filosóficos para o ensino do modelo atômico de Dalton". *ACTIO: Docência em Ciências* 2.1 2017, p. 376–400.
- [16] J. M. F. Bassalo. "Física Moderna: origens clássicas e fundamentos quânticos". *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* 23.3 2006, p. 444–449.
- [17] I. G. Monteiro e R. S. Justi. "Analogias em livros didáticos de química brasileiros destinados ao ensino médio". *Investigações em ensino de ciências* 5.2 2000, p. 67–91.
- [18] A. Raicik. "Um resgate histórico-epistemológico do átomo de Bohr: uma gênese nem sempre contada e suas implicações ao ensino de ciências". *Revista Brasileira de Ensino de Física* 45 2023, e20230039.
- [19] C. Chemistry. *History of the Atom*. 2023. Disponível em: <https://i0.wp.com/www.compoundchem.com/wp-content/uploads/2023/09/History-of-the-Atom-2023.png?ssl=1> (acesso em 24/02/2023).
- [20] G. S. Zahn. "Eu, o neutron (prazer em conhecer)" 2007.
- [21] J. Chadwick. "Possible Existence of a Neutron". *Nature* 129 1932, p. 312. DOI: 10.1038/129312a0.
- [22] H. Yukawa. "On the Interaction of Elementary Particles I". *Proc. Phys. Math. Soc. Jap.* 17 1935, p. 48–57. DOI: 10.1143/PTPS.1.1.
- [23] C. M. G. Lattes, G. P. S. Occhialini e C. F. Powell. "Observations on the Tracks of Slow Mesons in Photographic Emulsions. 2". *Nature* 160 1947, p. 486–492. DOI: 10.1038/160486a0.
- [24] J. d. Anjos e A. A. Natale. *Partículas Elementares: A (Des)Construção da Matéria pelo Homem*. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Disponível em: <https://mesonpi.cbpf.br/projetos/>.
- [25] M. Gell-Mann. "A Schematic Model of Baryons and Mesons". *Phys. Lett.* 8 1964, p. 214–215. DOI: 10.1016/S0031-9163(64)92001-3.
- [26] G. Zweig. "An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2". *DEVELOPMENTS IN THE QUARK THEORY OF HADRONS. VOL. 1. 1964 - 1978*. 1964, p. 22–101.
- [27] D. J. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. 9th. Wiley, 2017.
- [28] B. P. Abbott *et al.* [LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration]. "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger". *Phys. Rev. Lett.* 116 6, 2016, p. 061102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>.
- [29] R. P. Feynman. "The Theory of positrons". *Phys. Rev.* 76 1949, p. 749–759. DOI: 10.1103/PhysRev.76.749.

- [30] R. P. Feynman. "Space - time approach to quantum electrodynamics". *Phys. Rev.* 76 1949, p. 769–789. DOI: 10.1103/PhysRev.76.769.
- [31] D. Menezes, K. Marquez e T. Da Silva. *Introdução à física nuclear e de Hádrons*. Editora Livraria da Física, 2022. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=p2Q80AEACAAJ>.
- [32] W. Greiner, S. Schramm e E. Stein. *Quantum chromodynamics*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [33] D. J. Gross e F. Wilczek. "Asymptotically Free Gauge Theories - I". *Phys. Rev. D* 8 1973, p. 3633–3652. DOI: 10.1103/PhysRevD.8.3633.
- [34] H. D. Politzer. "Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?" *Phys. Rev. Lett.* 30 1973, p. 1346–1349. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1346.
- [35] A. B. Arbuzov. "Quantum Field Theory and the Electroweak Standard Model" 2017, p. 1–34. DOI: 10.23730/CYRSP-2017-004.1. arXiv: 1801.05670 [hep-ph].
- [36] O. W. Greenberg. "Spin and Unitary Spin Independence in a Paraquark Model of Baryons and Mesons". *Phys. Rev. Lett.* 13 1964, p. 598–602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.13.598.
- [37] M. Y. Han e Y. Nambu. "Three Triplet Model with Double SU(3) Symmetry". *Phys. Rev.* 139 1965, B1006–B1010. DOI: 10.1103/PhysRev.139.B1006.
- [38] K. G. Wilson. "Confinement of quarks". *Physical review D* 10.8 1974, p. 2445.
- [39] S. Bethke. "The 2009 world average of α_s ". *European Physical Journal C* 64.4 2009, p. 689–703. DOI: 10.1140/epjc/s10052-009-1173-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-009-1173-1>.
- [40] D. P. Menezes. "A Neutron Star Is Born". *Universe* 7.8 2021, p. 267. DOI: 10.3390/universe7080267. arXiv: 2106.09515 [astro-ph.HE].
- [41] E. Rutherford. "The scattering of alpha and beta particles by matter and the structure of the atom". *Phil. Mag. Ser. 6* 21 1911, p. 669–688. DOI: 10.1080/14786440508637080.
- [42] C. L. Vieira e A. A. Videira. "O papel das emulsões nucleares na institucionalização da pesquisa em física experimental no Brasil". *Revista Brasileira de Ensino de Física* 33 2011, p. 2603.
- [43] S. H. Neddermeyer e C. D. Anderson. "Note on the Nature of Cosmic Ray Particles". *Phys. Rev.* 51 1937, p. 884–886. DOI: 10.1103/PhysRev.51.884.
- [44] J. C. Street e E. C. Stevenson. "New Evidence for the Existence of a Particle of Mass Intermediate Between the Proton and Electron". *Phys. Rev.* 52 1937, p. 1003–1004. DOI: 10.1103/PhysRev.52.1003.

- [45] J. J. Aubert *et al.* [E598]. “Experimental Observation of a Heavy Particle J ”. *Phys. Rev. Lett.* 33 1974, p. 1404–1406. DOI: 10.1103/PhysRevLett.33.1404.
- [46] S. W. Herb *et al.* [E288]. “Observation of a Dimuon Resonance at 9.5-GeV in 400-GeV Proton-Nucleus Collisions”. *Phys. Rev. Lett.* 39 1977, p. 252–255. DOI: 10.1103/PhysRevLett.39.252.
- [47] Fermilab. *The Tevatron Accelerator*. 2023. Disponível em: <https://www.fnal.gov/pub/tevatron/tevatron-accelerator.html>.
- [48] S. Chatrchyan *et al.* “Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC”. *Physics Letters B* 716.1 2012, p. 30–61.
- [49] G. Aad *et al.* “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC”. *Physics Letters B* 716.1 2012, p. 1–29.
- [50] F. Landua. “The CERN accelerator complex layout in 2022. Complexe des accélérateurs du CERN en janvier 2022” 2022. General Photo. Disponível em: <https://cds.cern.ch/record/2813716>.
- [51] D. Saikumar. *Future of computing at the Large Hadron Collider*. 2022. arXiv: 2210.13213 [hep-ph].
- [52] CERN. *ATLAS Experiment*. 2024. Disponível em: <https://home.cern/science/experiments/atlas>.
- [53] CERN. *CMS Experiment*. 2024. Disponível em: <https://home.cern/science/experiments/cms>.
- [54] CERN. *ALICE Experiment*. 2024. Disponível em: <https://home.cern/science/experiments/alice>.
- [55] CERN. *LHCb Experiment*. 2024. Disponível em: <https://home.cern/science/experiments/lhcb>.
- [56] A. K. Chaudhuri. *A short course on relativistic heavy ion collisions*. IOP Publishing, 2014.
- [57] N. Tsoupas, H. Huang, T. Roser, W. MacKay e D. Trbojevic. “The AGS synchrotron with four helical magnets”. *IPAC 2012 - International Particle Accelerator Conference 2012* 2012.
- [58] Brookhaven National Laboratory. *The STAR Detector*. Accessed: 2024-06-20. 2024. Disponível em: <https://www.bnl.gov/rhic/star.php>.
- [59] Brookhaven National Laboratory. *The PHENIX Detector*. 2024. Disponível em: <https://www.bnl.gov/rhic/phenix.php>.
- [60] Brookhaven National Laboratory. *The sPHENIX Detector*. 2024. Disponível em: <https://www.bnl.gov/rhic/sphenix.php>.

- [61] Brookhaven National Laboratory. *PHOBOS and BRAHMS Detectors*. 2024. Disponível em: <https://www.bnl.gov/rhic/phobos-brahms.php>.
- [62] J. E. Bernhard, J. S. Moreland e S. A. Bass. “Bayesian estimation of the specific shear and bulk viscosity of quark–gluon plasma”. *Nature Physics* 15.11 2019, p. 1113–1117.
- [63] G. M. S. Vasconcelos. “Produção de estranheza em colisões de íons pesados relativísticos”. Tese de Doutorado. Instituto de Física “Gleb Wataghin, 2008.
- [64] R. Nouicer. “New state of nuclear matter: Nearly perfect fluid of quarks and gluons in heavy-ion collisions at RHIC energies: From charged particle density to jet quenching”. *The European Physical Journal Plus* 131.3 2016, p. 70.
- [65] S. I. Finazzo. “Estudando plasmas não-Abelianos fortemente acoplados usando a dualidade gauge/gravity”. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 2015.
- [66] F. Karsch. “Lattice results on QCD thermodynamics”. *arXiv preprint hep-ph/0103314* 2001.
- [67] Y. Aoki, S. Borsányi, S. Dürr, Z. Fodor, S. D. Katz, S. Krieg e K. Szabo. “The QCD transition temperature: results with physical masses in the continuum limit II”. *Journal of High Energy Physics* 2009.06 2009, p. 088. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/06/088. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2009/06/088>.
- [68] B. Müller. “A New Phase of Matter: Quark-Gluon Plasma Beyond the Hagedorn Critical Temperature”. *Melting Hadrons, Boiling Quarks - From Hagedorn Temperature to Ultra-Relativistic Heavy-Ion Collisions at CERN: With a Tribute to Rolf Hagedorn*. 2016, p. 107–116. DOI: 10.1007/978-3-319-17545-4_14. arXiv: 1501.06077 [nucl-th].
- [69] E. Shuryak. “Physics of Strongly coupled Quark-Gluon Plasma”. *Prog. Part. Nucl. Phys.* 62 2009, p. 48–101. DOI: 10.1016/j.pnpnp.2008.09.001. arXiv: 0807.3033 [hep-ph].
- [70] *Quark-Gluon Plasma*. Disponível em: <https://www.lbl.gov/science/particles/research/nuclear-physics/quark-gluon-plasma>.
- [71] *Quark-Gluon Plasma*. Disponível em: <https://home.cern/about/physics/quark-gluon-plasma>.
- [72] W. Greiner, L. Neise e H. Stöcker. *Thermodynamics and statistical mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [73] S. R. Salinas. *Introdução à física estatística*. Edusp, 1999.
- [74] C. Regal e D. S. Jin. *Experimental realization of BCS-BEC crossover physics with a Fermi gas of atoms*. 2006. arXiv: cond-mat/0601054 [cond-mat.other].
- [75] C. Tsallis. “Mecânica estatística de sistemas complexos”. *Revista Brasileira de Ensino de Física* 43 2021.

- [76] A. Deppman, E. Megias e D. P. Menezes. “Fractals, nonextensive statistics, and QCD”. *Phys. Rev. D* 101.3 2020, p. 034019. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.034019. arXiv: 1908.08799 [hep-th].
- [77] C. Tsallis. *Introduction to nonextensive statistical mechanics: approaching a complex world*. V. 1. 1. Springer, 2009.
- [78] C. Tsallis. “Nonextensive statistical mechanics: Applications to high energy physics”. *EPJ Web of Conferences*. EDP Sciences. 2011, p. 05001.
- [79] P. H. G. Cardoso, T. N. da Silva, A. Deppman e D. P. Menezes. “Quark matter revisited with non-extensive MIT bag model”. *The European Physical Journal A* 53.10 2017. DOI: 10.1140/epja/i2017-12388-0. Disponível em: <https://doi.org/10.1140/epja/i2017-12388-0>.
- [80] I. Bediaga, E. M. F. Curado e J. M. de Miranda. “A Nonextensive thermodynamical equilibrium approach in $e^+ e^- \rightarrow$ hadrons”. *Physica A* 286 2000, p. 156–163. DOI: 10.1016/S0378-4371(00)00368-X. arXiv: hep-ph/9905255.
- [81] A. Deppman. “Self-consistency in non-extensive thermodynamics of highly excited hadronic states”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 391.24 2012, p. 6380–6385. DOI: 10.1016/j.physa.2012.07.071. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2012.07.071>.
- [82] J. Cleymans e D. Worku. “The Tsallis distribution in proton–proton collisions at $\sqrt{s} = 0.9$ TeV at the LHC”. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 39.2 2012, p. 025006. DOI: 10.1088/0954-3899/39/2/025006. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0954-3899/39/2/025006>.
- [83] D. P. Menezes, C. Providência, M. Chiapparini, M. E. Bracco, A. Delfino e M. Malheiro. “Constraining relativistic models through heavy ion collisions”. *Phys. Rev. C* 76 6, 2007, p. 064902. DOI: 10.1103/PhysRevC.76.064902. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.76.064902>.
- [84] E. Megías, D. P. Menezes e A. Deppman. “Non extensive thermodynamics for hadronic matter with finite chemical potentials”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 421 2015, p. 15–24. ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2014.11.005>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037843711400956X>.
- [85] J. Conroy, H. Miller e A. Plastino. “Thermodynamic consistency of the q-deformed Fermi–Dirac distribution in nonextensive thermostatics”. *Physics Letters A* 374.45 2010, p. 4581–4584. ISSN: 0375-9601. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.09.038>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960110012375>.

- [86] M. C. et al. "Hadron production in non-linear relativistic mean field models". *Nuclear Physics A* 2009. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2009.05.002.
- [87] P. Braun-Munzinger, D. Magestro, K. Redlich e J. Stachel. "Hadron production in Au–Au collisions at RHIC". *Physics Letters B* 518.1-2 2001, p. 41–46. DOI: 10.1016/S0370-2693(01)01069-3. Disponível em: <https://doi.org/10.1016%2Fs0370-2693%2801%2901069-3>.
- [88] C. Adler et al. [STAR]. "Midrapidity anti-proton to proton ratio from Au + Au collisions at $s(\text{NN})^{1/2} = 130\text{-GeV}$ ". *Phys. Rev. Lett.* 86 2001, p. 4778. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.4778. arXiv: nucl-ex/0104022.
- [89] F. Messer [PHENIX]. "Spectra of high momentum particles in PHENIX". *Nucl. Phys. A* 698 2002, p. 511–514. DOI: 10.1016/S0375-9474(01)01416-6.
- [90] B. Back et al. "Recent results from PHOBOS at RHIC". *Nuclear Physics A* 721 2003, p. C227–C230. ISSN: 0375-9474. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9474\(03\)01037-6](https://doi.org/10.1016/S0375-9474(03)01037-6). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947403010376>.
- [91] I. G. Bearden et al. "BRAHMS Collaboration". *Phys. Rev. Lett.* 2001. nucl-ex/0106011, submitted to *Phys. Rev. Lett.* eprint: nucl-ex/0106011.
- [92] P. M. Jacobs. "Heavy ion physics in the RHIC era". *PoS HEP2001* 2001, p. 297. DOI: 10.22323/1.007.0297.
- [93] F. Videbaek et al. "BRAHMS Collaboration, Talk presented at QM2001". *Proceedings of Quark Matter 2001*. Nucl. Phys. A, in press. Stony Brook, New York, 2001.
- [94] H. J. Specht. "Experimental conference summary". *Nucl. Phys. A* 698 2002, p. 341–359. DOI: 10.1016/S0375-9474(01)01381-1. arXiv: nucl-ex/0111011.
- [95] H. Ohnishi [PHENIX]. "Particle ratios in PHENIX at RHIC". *Nucl. Phys. A* 698 2002, p. 659–662. DOI: 10.1016/S0375-9474(01)01452-X.
- [96] Z. Xu. *Proceedings of Quark Matter 2001*. Nucl. Phys. A, in press. Stony Brook, New York, 2001. eprint: nucl-ex/0104001.
- [97] H. Huang. *Proceedings of Quark Matter 2001*. Nucl. Phys. A, in press. Stony Brook, New York, 2001.
- [98] J. O. Costa, I. Aguiar, J. L. Barauna, E. Megías, A. Deppman, T. N. da Silva e D. P. Menezes. "Non-extensive statistics in Au-Au collisions". *Physics Letters B* 854 2024, p. 138727. ISSN: 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2024.138727>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269324002855>.

- [99] C. Beck. “Nonextensive statistical mechanics and particle spectra in elementary interactions”. *Physica A* 286 2000, p. 164–180. DOI: 10.1016/S0378-4371(00)00354-X. arXiv: hep-ph/0004225.
- [100] G. Wilk e Z. Włodarczyk. “Interpretation of the Nonextensivity Parameter q in Some Applications of Tsallis Statistics and Lévy Distributions”. *Phys. Rev. Lett.* 84 13, 2000, p. 2770–2773. DOI: 10.1103/PhysRevLett.84.2770. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.2770>.
- [101] G. Wilk e Z. Włodarczyk. “The imprints of nonextensive statistical mechanics in high-energy collisions”. *Chaos, Solitons & Fractals* 13.3 2002. Classical and Quantum Complexity and Non-Extensive Thermodynamics, p. 581–594. ISSN: 0960-0779. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(01\)00041-8](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(01)00041-8). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077901000418>.
- [102] G. Wilk e Z. Włodarczyk. “Power laws in elementary and heavy-ion collisions: a story of fluctuations and nonextensivity?” *The European Physical Journal A* 40 2009, p. 299–312.
- [103] C.-Y. Wong, G. Wilk, L. J. L. Cirto e C. Tsallis. “Possible Implication of a Single Nonextensive p_T Distribution for Hadron Production in High-Energy pp Collisions”. *EPJ Web Conf.* 90 2015, p. 04002. DOI: 10.1051/epjconf/20159004002. arXiv: 1412.0474 [hep-ph].
- [104] C.-Y. Wong, G. Wilk, L. J. L. Cirto e C. Tsallis. “From QCD-based hard-scattering to nonextensive statistical mechanical descriptions of transverse momentum spectra in high-energy pp and $p\bar{p}$ collisions”. *Phys. Rev. D* 91.11 2015, p. 114027. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.114027. arXiv: 1505.02022 [hep-ph].
- [105] A. Deppman, E. Megías e D. P. P. Menezes. “Fractal Structures of Yang–Mills Fields and Non-Extensive Statistics: Applications to High Energy Physics”. *Physics* 2.3 2020, p. 455–480. ISSN: 2624-8174. DOI: 10.3390/physics2030026. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.3390/physics2030026>.
- [106] D. P. Menezes, A. Deppman, E. Megias e L. B. Castro. “Non-extensive thermodynamics and neutron star properties”. *The European Physical Journal A* 51.12 2015. DOI: 10.1140/epja/i2015-15155-3. Disponível em: <https://doi.org/10.1140/epja/i2015-15155-3>.
- [107] L. Marques. “Estudo das propriedades não-extensivas das colisões ultrarelativísticas”. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 2014.
- [108] H. B. Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. John Wiley & sons, 1991.
- [109] R. K. Pathria. *Statistical mechanics*. Elsevier, 2016.

- [110] J. Conroy, H. Miller e A. Plastino. “Thermodynamic consistency of the q-deformed Fermi–Dirac distribution in nonextensive thermostatics”. *Physics Letters A* 374.45 2010, p. 4581–4584. DOI: 10.1016/j.physleta.2010.09.038. Disponível em: <https://doi.org/10.1016%2Fj.physleta.2010.09.038>.
- [111] I. Bediaga, E. Curado e J. de Miranda. “A nonextensive thermodynamical equilibrium approach in $e^+e^- \rightarrow$ hadrons”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 286.1 2000, p. 156–163. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:phsmap:v:286:y:2000:i:1:p:156-163>.
- [112] M. Gell Mann e C. Tsallis. “Nonextensive Entropy - Interdisciplinary Applications”. *Nonextensive Entropy - Interdisciplinary Applications, by Edited by Murray Gell-Mann and C Tsallis, pp. 440. Oxford University Press, Apr 2004. ISBN-10: 0195159764. ISBN-13: 9780195159769 2004*.
- [113] R. Hagedorn. “How we got to QCD matter from the hadron side by trial and error”. *Quark Matter '84*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1985, p. 53–76.
- [114] B. D. Serot e J. D. Walecka. “The Relativistic Nuclear Many Body Problem”. *Adv. Nucl. Phys.* 16 1986, p. 1–327.
- [115] P. Braun-Munzinger, D. Magestro, K. Redlich e J. Stachel. “Hadron production in Au–Au collisions at RHIC”. *Physics Letters B* 518.1 2001, p. 41–46. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(01\)01069-3](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(01)01069-3). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269301010693>.
- [116] C. Ratti. “Lattice QCD and heavy ion collisions: a review of recent progress”. *Reports on Progress in Physics* 81.8 2018, p. 084301. DOI: 10.1088/1361-6633/aabb97. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aabb97>.
- [117] J. Hofmann, H. Stoecker, W. Scheid e W. Greiner. “report of the Workshop on BeV/nucleon Collisions of Heavy Ions: How and Why”. *Bear Mountain, New York* 29 1975.
- [118] L. McLERRAN e N. Samios. *TD Lee: Relativistic heavy ion collisions and the Riken Brookhaven Center*. Rel. técn. BNL-77850-2007-CP, 2006.
- [119] R. P. Feynman. “Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction”. *Phys. Rev.* 80 1950, p. 440–457. DOI: 10.1103/PhysRev.80.440.
- [120] R. P. Feynman. “An Operator calculus having applications in quantum electrodynamics”. *Phys. Rev.* 84 1951, p. 108–128. DOI: 10.1103/PhysRev.84.108.
- [121] I. de Física da Universidade de São Paulo. *Plasma*. 2023. Disponível em: <https://qgp.if.usp.br/plasma.html>.
- [122] H. Fritzsch, M. Gell-Mann e H. Leutwyler. “Advantages of the Color Octet Gluon Picture”. *Phys. Lett. B* 47 1973, p. 365–368. DOI: 10.1016/0370-2693(73)90625-4.

- [123] H. D. Politzer. “Reliable perturbative results for strong interactions?” *Physical Review Letters* 30.26 1973, p. 1346.
- [124] D. J. Gross e F. Wilczek. “Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories”. *Phys. Rev. Lett.* 30 1973, p. 1343–1346. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1343.
- [125] A. F. Garcia *et al.* “Transição quiral na matéria de quarks magnetizada” 2012.
- [126] W. Greiner e J. Reinhardt. *Quantum electrodynamics*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [127] K. G. Wilson. “Confinement of Quarks”. *Phys. Rev. D* 10 1974, p. 2445–2459. DOI: 10.1103/PhysRevD.10.2445.
- [128] M. Alonso, E. J. Finn *et al.* “Física volumen III, fundamentos cuánticos y estadísticos” 1971.

Anexos


ANEXO A – PUBLICAÇÃO



Letter



Non-extensive statistics in Au-Au collisions

Juliana O. Costa^{a, *}, Isabelle Aguiar^a, Jadna L. Barauna^a, Eugenio Megías^b,
Airtton Deppman^c, Tiago N. da Silva^a, Débora P. Menezes^a

^a Departamento de Física, CFM, Universidade Federal de Santa Catarina, Rua Roberto Sampaio Gonzaga, s/n, Florianópolis, 88.035-972, Santa Catarina, Brazil

^b Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear and Instituto Carlos I de Física Teórica y Computacional, Universidad de Granada, Avenida de Fuente Nueva, s/n, Granada, 18071, Spain

^c Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Rua do Matão, Travessa R n.187, Cidade Universitária, São Paulo, 05.508-090, São Paulo, Brazil

ARTICLE INFO

Editor: A. Ringwald

Keywords:

Heavy ion collisions
Au-Au collision
Non-extensive statistics

ABSTRACT

Particle production yields measured in central Au-Au collision at RHIC are obtained with free Fermi and Bose gases and also with a replacement of these statistics by non-extensive statistics. For the latter calculation, a set of different parameters was used with values of the Tsallis parameter q chosen between 1.01 and 1.25, with 1.16 generating the best agreement with experimental data, an indication that non-extensive statistics may be one of the underlying features in heavy ion-collisions.

1. Introduction

In the past decades, heavy-ion collision experiments between ions, such as gold (Au) or lead (Pb), at relativistic speeds in particle accelerators [1,3,22], such as RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) and the LHC (Large Hadron Collider), have played a fundamental role in the exploration of the QCD [11,22] phase diagram. These collisions create extreme energy conditions, providing a unique environment for the formation of the quark-gluon plasma (QGP) [21,17]. This highly energetic and dense plasma recreates, for brief moments, the extreme conditions believed to have prevailed in the Universe's early stages [29].

However, there is no direct observation of this plasma, and its existence is inferred from the properties of the final particles that are detected in the experiments. This limitation demands the combination of experimental data and theoretical models, with thermal models playing an important role in understanding heavy-ion collisions [18,23]. These models consider the QGP as a highly heated system in thermodynamic equilibrium and enable a fundamental retrospective analysis to understand not only the formation of the plasma and its properties but also the generation of the resulting particles. Within this context, the use of non-extensive statistics (NES) stands out as an alternative to conventional models and statistics, offering a simple view of the particle production process.

As the QGP formed in ultra-relativistic collisions between heavy ions expands, it cools down. Eventually, quarks and gluons will recombine

into a variety of hadrons, a process known as hadronization [31]. As the system reaches the gaseous regime, collision times become remarkably short relative to relaxation times, resulting in chemical equilibrium. The multiple hadron productions in these collisions offer valuable information about their nature and composition.

We present an approach to study particle production in these experiments, based on NES, contrasting with traditional approaches based on Boltzmann-Gibbs statistics. The NES statistics [32] introduces a real non-extensive parameter (q) that plays a crucial role in describing the degree of non-extensiveness of the system, incorporating correlation effects in complex systems. This theory offers a more complete framework for understanding emergent interactions and behaviors in these highly energetic environments.

We investigate the distributions of fermions and bosons in gold-gold (Au-Au) collision systems, using the Fermi gas model for fermions and the free Bose model for bosons. These models are particularly valuable since the free gas offers a solid basis for evaluating how particles would behave in the absence of significant interactions. NES is used to describe hadron production, using a strategy based on previous studies [26,24,14,4]. The application of these statistics aims to obtain an optimal fit between theoretical models and experimental data, by minimizing the value of χ^2/dof . By considering the parameter q , which governs the degree of non-extensiveness of the system, we seek to effectively describe the interactions and transitions that lead to the formation of hadrons, enriching the understanding of the physical processes involved.

* Corresponding author.

E-mail address: juoliveiracosta17@gmail.com (J.O. Costa).

This approach, based on the previous application of non-extensive statistics, represents a consolidated strategy for describing hadron formation in Au-Au heavy ion collisions [10,8,14,12]. The central aim is to achieve a more accurate description of the particle dynamics under these extreme conditions by fitting theoretical models to the experimental data.

Since 2000, studies have demonstrated the relevance of the NES in describing multiparticle production in high-energy collisions [8,7]. The mechanisms responsible for the emergence of the nonextensive character of multiparticle production have been linked to fluctuations in the system temperature [34–36] and effects related to small sizes, long-range correlations [38,37], and scaling invariance [15,16]. In the present work, we are not concerned with the mechanisms underlying the generation of non-additive entropy and the resulting nonextensive behavior of thermodynamic properties. Instead, we employ it to uncover the physical properties of the system formed during high-energy collisions.

The analyses performed in this study are based on the comprehensive experimental database from the Au-Au heavy-ion collisions performed at RHIC at $\sqrt{s} = 130$ GeV. We have used results from STAR [2,20,30,39,19], PHENIX [28,27], PHOBOS [5] and BRAHMS [33,6]. The main objective is to determine the optimal value of the parameter q that provides the most accurate description of the experimental data. To achieve this goal, three separate and complementary analyses were carried out. The first analysis focused on finding the lowest possible value of χ^2 for different variations of the q parameter. This meticulous process allowed an exploration of how different values of q affect the agreement between theoretical models based on non-extensive statistics and experimental data. In this way, the optimal value of q that minimizes χ^2 , which represents the best fit between the model and the observed data, was identified. The second analysis focused on studying the effect of the chemical potential on the statistics of the system, considering different variations of the parameter q . This approach provided valuable insights into how the chemical potential varies with the non-extensive statistics parameter.

By studying variations in q it was possible to better understand how the system responds to changes in the chemical potential. Finally, the third analysis was devoted to investigating the deviations from thermodynamic equilibrium resulting from variations in the parameter q .

The minimization shows that the optimal value of q is 1.16. By comparing the results obtained with $q = 1.16$ and the conventional value of $q = 1.0$ related to the Fermi and Bose statistics, it is shown that the non-extensive statistic provides a more accurate description of the particle ratios produced in Au-Au collisions. By exploring how the introduction of the NES statistics affects the thermodynamic equilibrium properties in heavy ion collision systems, and by taking this integrative approach, we aim at shedding light on the underlying complexities of heavy ion collisions, bringing together the insights of non-extensive statistics and the wealth of information provided by high-energy nuclear collisions.

2. Formalism

In this section, we present the main equations to describe the free Fermi and Bose gases and to review the formalism underlying the use of non-extensive thermodynamics. In what follows, we will use natural units, $\hbar = c = k_B = 1$.

2.1. Free gases: Fermi and Bose

The free Fermi gas is a simple model that describes particles that obey the Pauli exclusion principle and in which interactions can be neglected. Its Lagrangian density reads

$$\mathcal{L}_0^{(F)} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (1)$$

where $\mathcal{L}_0^{(F)}$ is the Lagrangian density of a free fermion, the index 0 indicates the absence of interactions. The terms $\bar{\psi}$ and ψ represent the

Dirac fields. The first term carries the kinetic part, while the second term represents the mass.

For the purpose of the present work, particles (ρ_{F_+}) and antiparticles (ρ_{F_-}) must be treated separately [25] and their particle densities are given respectively by

$$\rho_{F_+} = (2J + 1) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_{F_+}, \quad (2)$$

and,

$$\rho_{F_-} = (2J + 1) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_{F_-}. \quad (3)$$

In equations (2) and (3), the factor $(2J + 1)$ indicates the degeneracy of the states, where $J = 1/2$ and $3/2$ represent fermions with spin $-1/2$ and spin $-3/2$ respectively. The expression $\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$ integrates over all possible momenta, normalized by $(2\pi)^3$. The functions f_{F_+} and f_{F_-} are the Fermi-Dirac distributions for particles and antiparticles that can be expressed as

$$f_{F_\pm} = \frac{1}{e^{\beta(E \mp \mu)} + 1}, \quad (4)$$

where $\pm\mu$ is the chemical potential for particles and antiparticles, E is the energy, and $\beta = 1/T$ is the inverse of the temperature.

We now turn to the bosonic gas model, which, unlike fermions, do not obey the Pauli exclusion principle. The Lagrangian density of the free Bose gas is given by

$$\mathcal{L}_0^{(B)} = (\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^2, \quad (5)$$

where $\mathcal{L}_0^{(B)}$ represents the Lagrangian density of the free bosonic field, the index 0 the absence of interactions, and ϕ the scalar field. The first term of this Lagrangian density is the kinetic term and the second one is the mass term. The bosonic particle density is then defined below, with $J = 0$ or 1. The particle densities (ρ_{B_\pm}) are given by

$$\rho_{B_\pm} = (2J + 1) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_{B_\pm}. \quad (6)$$

The term $\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$ is the integral over the three-dimensional momentum space, normalized by the constant $(2\pi)^3$. The Bose-Einstein distribution functions, f_{B_\pm} , are expressed as

$$f_{B_\pm} = \frac{1}{e^{\beta(E \mp \mu)} - 1}, \quad (7)$$

which differ from the Fermi-Dirac distributions (4) by the sign of the constant term in the denominator.

2.2. Non-extensive statistics

In the present work, we analyze the possibility of studying particle collisions at high energies by using non-extensive statistics. We extend the standard exponential by [32]

$$\exp(-\beta x) \longrightarrow [1 + (q - 1)\beta x]^{-\frac{q}{q-1}}, \quad (8)$$

where q is a free parameter.

NES can be used to adjust the values of thermodynamic parameters at the chemical freeze-out, serving as an analytical tool that facilitates the description of systems outside the traditional equilibrium.

The basis of NES is the generalization of the Boltzmann-Gibbs entropy (S), in such a way such it depends on a real parameter q that determines the degree of non-additivity of the system, i.e.

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1}. \quad (9)$$

The non-extensive entropy for two independent systems A and B is given by

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B). \quad (10)$$

In this expression, q modulates the interaction between the entropies of the two systems. In the limit $q \rightarrow 1$, S_q reduces to S .

For the replacement of the Fermi and Bose statistics by the NES, the new partition function $\Xi(V, T, \mu)$ is defined as [24]

$$\log \Xi(V, T, \mu) = -\xi V \int_p \sum_{r=\pm} \Theta(rx) \log_q^{(-r)} \left(\frac{e_q^{(r)}(x) - \xi}{e_q^{(r)}(x)} \right), \quad (11)$$

where V is the volume, the integral runs over the momentum, $\xi = \pm 1$ stands for bosons and fermions respectively, $x = \beta(E \mp \mu)$, Θ is the step function, and $r = \pm$ characterizes the two regimes of the q -exponential and q -logarithmic functions: ($x \geq 0$) and ($x < 0$). In Eq. (11) the q -logarithmic function reads

$$\begin{cases} \log_q^{(+)}(x) = \frac{x^{q-1}-1}{q-1}, & x \geq 0, & (a) \\ \log_q^{(-)}(x) = \frac{x^{1-q}-1}{1-q}, & x < 0, & (b) \end{cases} \quad (12)$$

while the q -exponential function is given by

$$\begin{cases} e_q^{(+)}(x) = [1 + (q-1)x]^{\frac{1}{q-1}}, & x \geq 0, & (a) \\ e_q^{(-)}(x) = [1 + (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}}, & x < 0. & (b) \end{cases} \quad (13)$$

The distribution functions read [13]

$$\begin{cases} n_q^{(+)}(x) = \frac{1}{(e_q^{(+)}(x) - \xi)^q}, & x \geq 0, & (a) \\ n_q^{(-)}(x) = \frac{1}{(e_q^{(-)}(x) - \xi)^{2-q}}, & x < 0. & (b) \end{cases} \quad (14)$$

3. Results

Applying the formalism discussed in the previous sections with the purpose of describing hadron production in Au–Au collisions, the results obtained in the minimization process are then compared to experimental data.

The conservation constraints imposed on the number of baryons, the strangeness, and the electric charge are respectively [4]:

$$V \sum_i n_i B_i = Q_B = Z + N, \quad (15)$$

with V being the volume of the gas in which the particles are confined, n_i is the number of particles for the i -hadron species, B_i is the baryon number, and Q_B is the baryon charge of the gas. Finally, Z is the total number of protons and N is the total number of neutrons in the system,

$$V \sum_i n_i S_i = Q_S = 0, \quad (16)$$

with S_i the strangeness of the gas particles and the total strangeness Q_S is zero;

$$V \sum_i n_i I_{3i} = Q_{I_3} = \frac{Z - N}{2}, \quad (17)$$

with I_{3i} as the third component of the isospin associated with each particle, Q_{I_3} as the total isospin.

The χ^2 can be computed from [25]

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(R_i^{\text{exp}} - R_i^{\text{theo}})^2}{\sigma_i^2}, \quad (18)$$

where R_i^{exp} and R_i^{theo} are the i -th particle experimental and theoretical ratios, while σ_i represents the error in the experimental data points.

The particle ratios calculated with our model for the conventional value ($q = 1.0$) and non-extensive statistics are shown in Table 1 along with experimental data obtained at RHIC from STAR, PHENIX, PHOBOS

Table 1

Particle ratios of Au–Au collisions, considering $q = 1.01$ and $q = 1.16$ along with experimental data at $\sqrt{s} = 130$ GeV, are analyzed with parameters set to $T = 58.2$ MeV and $\mu_B = 51.5$ MeV.

Ratio	$q = 1.01$	$q = 1.16$	Exp. data $\sqrt{s} = 130$ GeV	Exp.	Ref.
\bar{p}/p	0.648694	0.656767	0.65 ± 0.07	STAR	[2]
			0.64 ± 0.07	PHENIX	[27]
			0.60 ± 0.07	PHOBOS	[5]
			0.64 ± 0.07	BRAHMS	[6]
\bar{p}/π^-	0.041363	0.064067	0.08 ± 0.01	STAR	[20]
	1.008493	1.019848	1.00 ± 0.02	PHOBOS	[5]
π^-/π^+			0.95 ± 0.06	BRAHMS	[33]
	0.940661	0.829491	0.88 ± 0.05	STAR	[30]
			0.78 ± 0.13	PHENIX	[28]
			0.91 ± 0.09	PHOBOS	[5]
K^-/K^+			0.89 ± 0.07	BRAHMS	[33]
	0.235757	0.169266	0.149 ± 0.02	STAR	[30]
	0.689054	0.770251	0.77 ± 0.07	STAR	[39]
	0.732019	0.875823	0.82 ± 0.08	STAR	[19]
$\bar{\Omega}^-/\bar{\Omega}^+$	0.783607	0.976638			
$\bar{\Omega}^-/\pi^-$	0.001389	0.025813			
K^{0*}/h^-	0.061003	0.071760	0.06 ± 0.017	STAR	[39]
\bar{K}^{0*}/h^-	0.056983	0.062544	0.058 ± 0.017	STAR	[39]
h^-/p	14.194047	7.903081			
Λ^0/h^-	0.013941	0.026713			
Ω^-/Ξ^-	0.250425	0.871511			
Λ^0/K^{0*}	0.228535	0.372255			
Ξ^-/Λ^0	0.222069	0.487735			
$\Xi^-/\bar{\Lambda}^0$	0.322280	0.633215			
Ξ^-/\bar{K}^-	0.021990	0.156920			

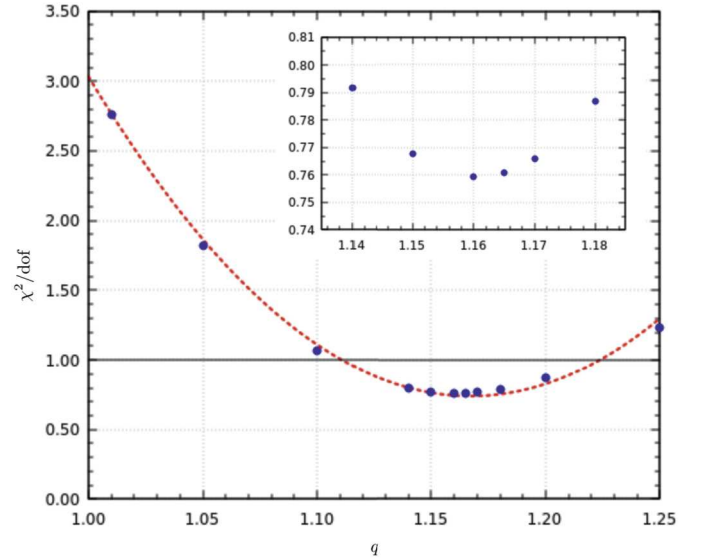


Fig. 1. Results obtained from χ^2/dof as a function of q in the range $1.01 \leq q \leq 1.25$, for $T = 58.2$ MeV and $\mu_B = 51.5$ MeV, obtained by minimization (blue). The value of dof is 14, as there are 16 experimental data and 2 parameters in the fit (red). The minimum value of χ^2/dof is obtained for $q = 1.16$. The horizontal line indicates the value of $\chi^2/\text{dof} = 1$.

and BRAHMS Collaborations at $\sqrt{s} = 130$ GeV [9] [4]. The interval for minimizing q was set between 1.01 and 1.25, adjusted to be close to the value of 1 that leads to the usual statistics. This particular choice led us to the finding that $q = 1.16$ (as shown in Fig. 1) is the value that minimizes the function for $T = 58.2$ MeV (see Fig. 3) and $\mu_B = 51.5$ MeV (see Fig. 2), while the range corresponding to $\chi^2/\text{dof} \sim 1$ is $1.11 < q < 1.22$. The particle ratios obtained with this value are also displayed in Table 1.

The best fits corresponding to the obtained data are given by the following equations

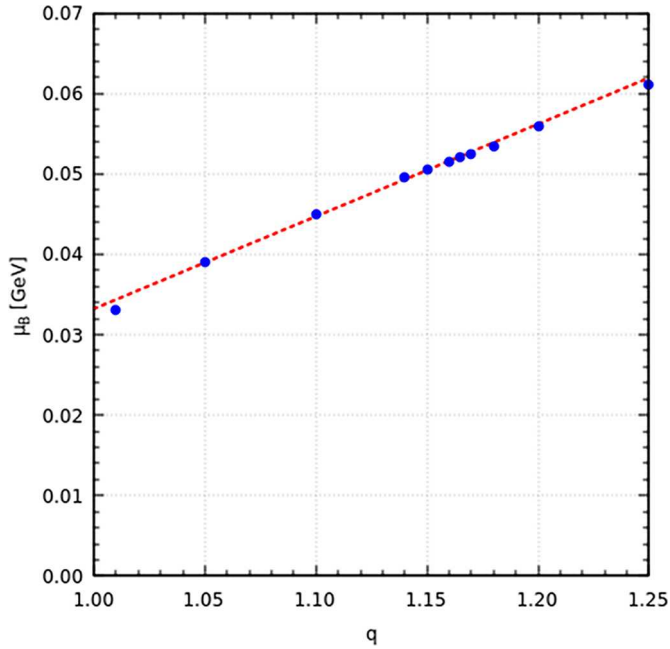


Fig. 2. Plot of μ_B as a function of q . The results were obtained from the minimization process (blue) together with the respective fits (red).

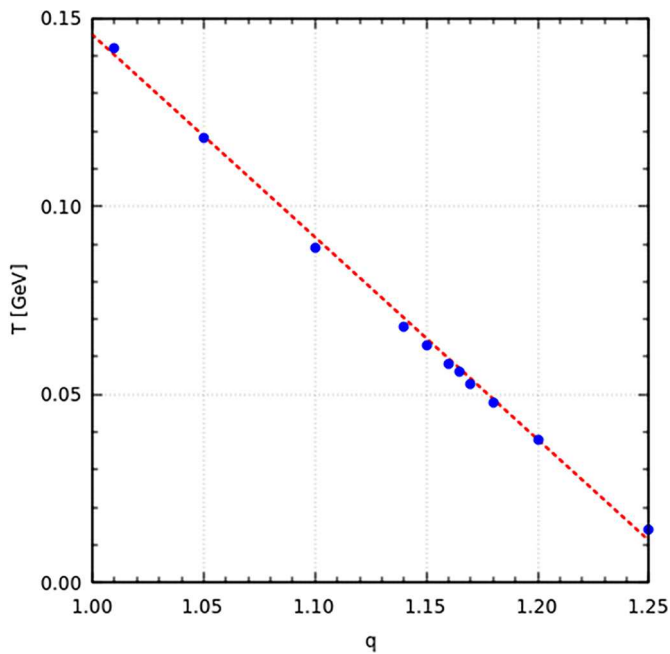


Fig. 3. Plot of T as a function of q . The results were obtained from the minimization process (blue) together with the respective fits (red).

$$\chi^2/\text{dof} = 3.03253 - 27.4348(q - 1) + 82.0251(q - 1)^2, \quad (19)$$

$$\mu_B = [33.2202 + 114.829(q - 1)] \text{ MeV}, \quad (20)$$

$$T = [145.52 - 537.165(q - 1)] \text{ MeV}, \quad (21)$$

where $\text{dof} = 14$ (degrees of freedom) is obtained from the 16 experimental data and 2 fitting parameters (T and μ_B).

When the Fermi and Bose statistics are used, the temperature $T = 148.8$ MeV and chemical potential $\mu_B = 32.5$ MeV associated with the minimum value of $\chi^2/\text{dof} = 2.97387$ are obtained. For the best value of the non-extensive statistics, $T = 58.2$ MeV, $\mu_B = 51.5$ MeV and $\chi^2/\text{dof} = 0.75926$ are obtained.

As seen in Table 1, the minimum value of $\chi^2/\text{dof} = 0.75926$ provides a better description of particle ratios produced in Au-Au collisions than the usual statistics.

4. Conclusions

In this paper, we discuss the application of non-extensive statistics to describe particle production in Au-Au heavy ion collisions. This approach differs from traditional Boltzmann-Gibbs statistics by the introduction of a real non-extensive parameter q , which controls the degree of non-extensivity and incorporates correlation effects in complex systems.

Through the analysis of particle distributions in collision systems, we explore the effects of the introduction of the non-extensive parameter q on the properties of thermodynamic equilibrium, with the aim of understanding the implications of this alternative statistic in extreme conditions.

We investigate the impact of the q parameter on particle distributions, explore the influence of baryonic density on system statistics, and analyze the variations in thermodynamic equilibrium resulting from different values of q . By comparing the model's predictions with experimental data, we assess the suitability of the NES statistic in describing the properties observed in heavy ion collisions. Another way of corroborating this theory is by obtaining the fractions of missing particles.

As a result, although we have made progress in understanding heavy ion collisions from an NES perspective, it is clear that the field is still evolving. Future studies can focus on more refined approaches, considering a variety of additional factors that can influence particle distributions in complex collision systems. In doing so, we can continue to expand our knowledge of the properties of matter under extreme conditions and enhance our understanding of heavy ion collisions as a window into fundamental phenomena of high-energy physics.

Declaration of competing interest

The authors declare the following financial interests/personal relationships which may be considered as potential competing interests: Juliana O. Costa reports financial support was provided by Coordination of Higher Education Personnel Improvement under grant 88887.672235/2022-00. Isabelle Aguiar reports financial support was provided by National Council for Scientific and Technological Development under grant 130432/2022-9. Jadna L. Barauna reports financial support was provided by National Council for Scientific and Technological Development under grant 130810/2024-0. Eugenio Megias reports financial support was provided by Ramon y Cajal Program. Airtton Deppman reports financial support was provided by National Council for Scientific and Technological Development. Tiago N. da Silva reports financial support was provided by National Council for Scientific and Technological Development. Debora P. Menezes reports financial support was provided by National Council for Scientific and Technological Development. If there are other authors, they declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Data availability

Data will be made available on request.

Acknowledgements

This work is a part of the project INCT-FNA Proc. No. 464898/2014-5. D.P.M. was partially supported by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq/Brazil) under grant 303490-2021-7. T.N.d.S. and D.P.M. acknowledge financial support from CNPq grant number 409029/2021-1. I.A. acknowledges a M.Sc. scholarship from Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

(CNPq/Brazil) under grant 130432/2022-9, J.O.C. acknowledges a M.Sc. scholarship from Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior (Capes/Brazil) under grant 88887.672235/2022-00 and J.L.B. acknowledges a M.Sc. scholarship from Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq/Brazil) under grant 130810/2024-0. The work of E.M. is supported by the project PID2020-114767GB-I00 and by the Ramón y Cajal Program under Grant RYC-2016-20678 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by “FSE Investing in your future”, by the FEDER/Junta de Andalucía-Consejería de Economía y Conocimiento 2014-2020 Operational Programme under Grant A-FQM-178-UGR18, by Junta de Andalucía under Grant FQM-225, and by the “Prórrogas de Contratos Ramón y Cajal” Program of the University of Granada. A.D. acknowledges the support from the Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq-Brazil), grant 306093/2022-7.

References

- [1] P. Achenbach, et al., *The Present and Future of QCD*, Mar. 2023.
- [2] C. Adler, et al., Midrapidity anti-proton to proton ratio from Au + Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}(1/2) = 130$ -GeV, *Phys. Rev. Lett.* 86 (2001) 4778, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.4778>.
- [3] C. Aidala, et al., Creation of quark-gluon plasma droplets with three distinct geometries, *Nat. Phys.* 15 (3) (2019) 214–220, <https://doi.org/10.1038/s41567-018-0360-0>.
- [4] M. Chiapparini, et al., Hadron production in non-linear relativistic mean field models, *Nucl. Phys. A* (2009), <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2009.05.002>.
- [5] B.B. Back, et al., Recent results from PHOBOS at RHIC, *Nucl. Phys. A* (ISSN 0375-9474) 721 (2003) C227–C230, [https://doi.org/10.1016/S0375-9474\(03\)01037-6](https://doi.org/10.1016/S0375-9474(03)01037-6), <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947403010376>.
- [6] I.G. Bearden, et al., BRAHMS Collaboration, Rapidity dependence of antiproton-to-proton ratios in Au + Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 130$ GeV, *Phys. Rev. Lett.* (2001), <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.112305>, arXiv:nucl-ex/0106011, submitted for publication.
- [7] Christian Beck, Nonextensive statistical mechanics and particle spectra in elementary interactions, *Physica A* 286 (2000) 164–180, [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(00\)00354-X](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00354-X).
- [8] I. Bediaga, E.M.F. Curado, J.M. de Miranda, A nonextensive thermodynamical equilibrium approach in $e^+ e^- \rightarrow$ hadrons, *Physica A* 286 (2000) 156–163, [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(00\)00368-X](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00368-X).
- [9] P. Braun-Munzinger, et al., Hadron production in Au–Au collisions at RHIC, *Phys. Lett. B* 518 (1–2) (Oct. 2001) 41–46, [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(01\)01069-3](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(01)01069-3).
- [10] Pedro H.G. Cardoso, et al., Quark matter revisited with non-extensive MIT bag model, *Eur. Phys. J. A* 53 (10) (2017) 191, <https://doi.org/10.1140/epja/i2017-12388-0>.
- [11] A.K. Chaudhuri, *A Short Course on Relativistic Heavy Ion Collisions*, IOPP, Sept. 2014, ISBN: 978-0-7503-1061-1, 978-0-7503-1060-4.
- [12] J. Cleymans, D. Worku, The Tsallis distribution in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 0.9$ TeV at the LHC, *J. Phys. G* 39 (2012) 025006, <https://doi.org/10.1088/0954-3899/39/2/025006>.
- [13] J.M. Conroy, H.G. Miller, A.R. Plastino, Thermodynamic consistency of the q-deformed Fermi–Dirac distribution in nonextensive thermostatics, *Phys. Lett. A* (ISSN 0375-9601) 374 (45) (2010) 4581–4584, <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.09.038>, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960110012375>.
- [14] A. Deppman, Self-consistency in non-extensive thermodynamics of highly excited hadronic states, *Phys. A, Stat. Mech. Appl.* 391 (24) (Dec. 2012) 6380–6385, <https://doi.org/10.1016/j.physa.2012.07.071>.
- [15] Airton Deppman, Eugenio Megias, Debora P. Menezes, Fractals, nonextensive statistics, and QCD, *Phys. Rev. D* 101 (3) (2020) 034019, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.034019>.
- [16] Airton Deppman, Eugenio Megias, Débora P.P. Menezes, Fractal structures of Yang–Mills fields and non-extensive statistics: applications to high energy physics, *Physics* (ISSN 2624-8174) 2 (3) (Sept. 2020) 455–480, <https://doi.org/10.3390/physics2030026>.
- [17] Ulrich Heinz, Maurice Jacob, Evidence for a new state of matter: an assessment of the results from the CERN lead beam programme, arXiv preprint, arXiv:nucl-th/0002042, 2000.
- [18] J. Hofmann, et al., *Report of the Workshop on BeV/nucleon Collisions of Heavy Ions: How and Why*, Bear Mountain, New York, 1975, p. 29.
- [19] H. Huang, in: *Proceedings of Quark Matter 2001*, Stony Brook, New York, Jan. 2001, *Nucl. Phys. A* (2024), in press.
- [20] P.M. Jacobs, Heavy ion physics in the RHIC era, PoS HEP2001 (2001) 297, <https://doi.org/10.22323/1.007.0297>, Ed. by Dezső Horváth, Péter Lévai, and András Patkós.
- [21] O.K. Kalashnikov, V.V. Klimov, Phase transition in the quark-gluon plasma, *Phys. Lett. B* 88 (3–4) (1979) 328–330.
- [22] Xiaofeng Luo, Exploring the QCD phase structure with beam energy scan in heavy-ion collisions, in: *The XXV International Conference on Ultrarelativistic Nucleus-Nucleus Collisions: Quark Matter 2015*, *Nucl. Phys. A* (ISSN 0375-9474) 956 (2016) 75–82, <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2016.03.025>, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947416300112>.
- [23] Larry McLerran, Nicholas Samios, TD Lee: Relativistic heavy ion collisions and the Riken Brookhaven Center, Tech. Rep. BNL-77850-2007-CP, 2006.
- [24] Eugenio Megias, Débora P. Menezes, Airton Deppman, Non extensive thermodynamics for hadronic matter with finite chemical potentials, *Phys. A, Stat. Mech. Appl.* (ISSN 0378-4371) 421 (2015) 15–24, <https://doi.org/10.1016/j.physa.2014.11.005>, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037843711400956X>.
- [25] D.P. Menezes, et al., Constraining relativistic models through heavy ion collisions, *Phys. Rev. C* 76 (6) (Dec. 2007) 064902, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.76.064902>.
- [26] Débora P. Menezes, et al., Non-extensive thermodynamics and neutron star properties, *Eur. Phys. J. A* 51 (12) (Dec. 2015), <https://doi.org/10.1140/epja/i2015-15155-3>.
- [27] F. Messer, Spectra of high momentum particles in PHENIX, *Nucl. Phys. A* 698 (2002) 511–514, [https://doi.org/10.1016/S0375-9474\(01\)01416-6](https://doi.org/10.1016/S0375-9474(01)01416-6), Ed. by T.J. Hallman et al.
- [28] H. Ohnishi, Particle ratios in PHENIX at RHIC, *Nucl. Phys. A* 698 (2002) 659–662, [https://doi.org/10.1016/S0375-9474\(01\)01452-X](https://doi.org/10.1016/S0375-9474(01)01452-X), Ed. by T.J. Hallman et al.
- [29] Dominik J. Schwarz, The first second of the universe, *Ann. Phys.* 515 (4) (2003) 220–270.
- [30] Hans J. Specht, Experimental conference summary, *Nucl. Phys. A* 698 (2002) 341–359, [https://doi.org/10.1016/S0375-9474\(01\)01381-1](https://doi.org/10.1016/S0375-9474(01)01381-1), Ed. by T.J. Hallman et al.
- [31] Zachary Sweger, Recent results and future prospects from the STAR beam energy scan program, arXiv preprint, arXiv:2305.07139, 2023.
- [32] Constantino Tsallis, Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, *J. Stat. Phys.* 52 (1988) 479–487, <https://doi.org/10.1007/BF01016429>.
- [33] F. Videbaek, et al., BRAHMS Collaboration, Talk presented at QM2001, in: *Proceedings of Quark Matter 2001*, Stony Brook, New York, Jan. 2001, *Nucl. Phys. A* (2024), in press.
- [34] G. Wilk, Z. Włodarczyk, Interpretation of the nonextensivity parameter q in some applications of Tsallis statistics and Lévy distributions, *Phys. Rev. Lett.* 84 (13 Mar. 2000) 2770–2773, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.2770>, <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.2770>.
- [35] G. Wilk, Z. Włodarczyk, The imprints of nonextensive statistical mechanics in high-energy collisions, in: *Classical and Quantum Complexity and Non-Extensive Thermodynamics, Chaos Solitons Fractals* (ISSN 0960-0779) 13 (3) (2002) 581–594, [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(01\)00041-8](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(01)00041-8), <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077901000418>.
- [36] Grzegorz Wilk, Z. Włodarczyk, Power laws in elementary and heavy-ion collisions: a story of fluctuations and nonextensivity?, *Eur. Phys. J. A* 40 (2009) 299–312.
- [37] Cheuk-Yin Wong, et al., From QCD-based hard-scattering to nonextensive statistical mechanical descriptions of transverse momentum spectra in high-energy pp and $p\bar{p}$ collisions, *Phys. Rev. D* 91 (11) (2015) 114027, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.114027>.
- [38] Cheuk-Yin Wong, et al., Possible implication of a single nonextensive p_T distribution for hadron production in high-energy pp collisions, *EPJ Web Conf.* 90 (2015) 04002, <https://doi.org/10.1051/epjconf/20159004002>, Ed. by F. Fabbri and P. Giacomelli.
- [39] Z. Xu, in: *Proceedings of Quark Matter 2001*, Stony Brook, New York, Jan. 2001, *Nucl. Phys. A* (2024), in press.