TEORIA DOS CONJUNTOS

DELMAR BASSO

SAGRA
s/a gráfica e editora do professor gaúcho

TEORIA DOS CONJUNTOS

DELMAR BASSO

SAGRA
s/a gráfica e editora do professor gaúcho

gráfica e editora do professor gaúcho ltda.

Inscrição no C.G.C.M.F. n. 092/856 715/0001 Inscrição Estadual n. 096/0466363
Livraria: Pça. Dom Feliciano, 78 - térreo Fone 25-7034
Depto. Comercial: R. João Alfredo, 448 - Fone 21-9166
Depto. Gráfico: R. Baronesa do Gravataí, 123 - Fone 21-2358

CAIXA POSTAL 601
PORTO ALEGRE - 90 000 - RS

SÍMBOLOS USADOS

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\in$	pertence
$\notin$	não pertence
$\mid$	tal que
$\Longleftrightarrow$	equivale
$\Longrightarrow$	implica
$\forall$	qualquer
$\subseteq$	está contido
$\supseteq$	contém
$\subset$	está estritamente contido
$\exists$	existe
$\exists^*$	existe um único
$\nexists$	não existe

$P(A)$	conjunto de partes de A
U	conjunto universo
$\cup$	união
$\cap$	interseção
$\complement_E^A$	complementar de A em relação a E
$A' = \complement_U^A$	complementar de A em relação ao conjunto universo U
R	relação
D	domínio
I_m	imagem
C	contradomínio
R^{-1}	relação inversa
$f: A \to B$	função de A em B
$g \circ f$	f composta g ou f círculo g
f^{-1}	função inversa
$(\ )$	intervalo aberto
$[\ ]$	intervalo fechado

TEORIA DOS CONJUNTOS

Capítulo I

1.1. NOÇÕES

A palavra conjunto sugere a reunião das partes que formam o todo. A significação matemática da palavra conjunto é, de um modo geral, a mesma.

Exemplos:

1) Conjunto dos números naturais de um algarismo.
2) Conjunto das vogais do nosso alfabeto.
3) Conjunto dos números primos.

1.2. NOTAÇÃO

O nome do conjunto é representado por uma letra maiúscula. Os seus elementos são separados por vírgulas e colocados entre chaves.

Assim, os conjuntos do item anterior são, respectivamente, representados:

$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$B = \{a,e,i,o,u\}$

$C = \{2,3,5,7,11,13,17,...\}$

Para indicar quando um elemento PERTENCE a um conjunto, usa-se o símbolo $\in$ e quando NÃO PERTENCE usa-se o símbolo $\notin$.

Exemplos	Leituras
$5 \in A$	5 pertence ao conjunto A
$13 \notin A$	13 não pertence ao conjunto A
$d \notin B$	d não pertence ao conjunto B

1.3. PRINCIPAIS CONJUNTOS NUMÉRICOS

1) Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,...\}$$

2) Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$$

3) Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

$$\mathbb{Q} = \{...,-2,...,-\frac{11}{9},...,-\frac{1}{3},...,0,...,\frac{1}{2},...,\frac{127}{100},...,2,...\}$$

Recordando:

Número racional é um número

$$\boxed{\frac{n}{d}}$$

em que n e d são números inteiros e $d \neq 0$.

4) <u>Conjunto dos números irracionais</u>

$\{\ldots,-\sqrt{2},\ldots,\sqrt{2},\ldots,\sqrt{5},\ldots,e,\ldots,\pi,\ldots,\sqrt{13},\ldots\}$

Recordando:

Número irracional é um número que nunca pode ser representado pela forma anterior:

$$\boxed{\frac{n}{d}}$$

5) <u>Conjunto dos números reais</u> ($\mathbb{R}$)

$$\mathbb{R} = \{\ldots,-2,\ldots,-\sqrt{3},\ldots,-\frac{11}{9},\ldots,0,\ldots,$$
$$\ldots,\sqrt{2},\ldots,\frac{23}{10},\ldots,\sqrt{7},\ldots,\pi,\ldots\}$$

Recordando:

O conjunto dos números reais é o conjunto formado pelo conjunto dos números racionais e pelo conjunto dos números irracionais.

1.4. CARACTERIZAÇÃO DE UM CONJUNTO POR EXTENSÃO E POR COMPREENSÃO

Um conjunto está caracterizado por EXTENSÃO quando tem todos os seus elementos mencionados.

Exemplos:

1) $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

2) $B = \{4,8,12,16,20,24,28\}$

3) $C = \{-2,-1,0,1,2\}$

Um conjunto está caracterizado por COMPREENSÃO quando todos os seus elementos ficam conhecidos mediante uma propriedade característica a eles, e somente a eles.

A caracterização por compreensão, dos conjuntos anteriores é:

1) $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 6\}$

O símbolo | significa tal que. Logo, esse exemplo deve ser lido: "A é o conjunto dos elementos x pertencentes ao conjunto dos números naturais tal que x seja menor ou igual a 6".

2) $B = \{x \in \mathbb{N} | x = 4n,\ n \in \mathbb{N},\ 1 \leq n \leq 7\}$

3) $C = \{x \in \mathbb{Z} | -2 \leq x \leq 2\}$

Observação:

Um conjunto pode ser considerado como elemento de um outro conjunto. Por exemplo, no conjunto:

$$A = \{3, 6, \{2,3\}, \{\tfrac{1}{2}\}, \tfrac{3}{2}\}$$

os conjuntos

$$\{2,3\} \text{ e } \{\tfrac{1}{2}\}$$

são considerados seus elementos.

1.5. CONJUNTO VAZIO, CONJUNTO UNITÁRIO E FAMÍLIA DE CONJUNTOS

Definição:

Conjunto vazio é o conjunto que não tem elementos.

Representa-se com o símbolo $\emptyset$ ou $\{\}$.

Exemplos:

1) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 4\}$
2) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
3) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 9 = 0\}$
4) Conjunto dos pontos comuns a duas retas paralelas.

Definição:

> Conjunto unitário é o conjunto que tem um só elemento.

Exemplos:

1) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x = 6\}$
2) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 9x - 5 = 0\}$
3) Conjunto dos pontos comuns a duas retas concorrentes.

Definição:

> Família de conjuntos é o conjunto em que todos os seus elementos são também conjuntos.

Exemplo:

O conjunto:

$$A = \{\{5\}, \{3,4,5\}, \emptyset, \{1,3\}\}$$

é uma família de conjuntos.

Já o conjunto:

$$B = \{\{1\},2,\{5,4,6\}\},$$

não é uma família de conjuntos, pois um de seus elementos não é conjunto (2).

1.6. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Caracterize por extensão os conjuntos:

a) $\{x \in \mathbb{N} | 2 < x < 7\}$

b) $\{x \in \mathbb{N} | 1 < x \leq 8\}$

c) $\{x \in \mathbb{Z} | -2 \leq x < 4\}$

d) $\{x \in \mathbb{Z} | |x| \leq 2\}$

e) $\{x \in \mathbb{N} | x = 5n, n \in \mathbb{N} , n < 100\}$

f) $\{x \in \mathbb{N} | 2x^2 - 7x + 6 = 0\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} | 16x^2 - 8x - 3 = 0\}$

2) Caracterize por compreensão os conjuntos:

a) $\{-2,-1,0,1,2,3,...\}$

b) $\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$

c) $\{0,2,4,6,...\}$

d) $\{0,3,6,9,...,150\}$

3) Determinar os conjuntos vazios:

a) $\{x \in \mathbb{N} | x + 3 = 3\}$

b) $\{x \in \mathbb{Z} | 15x^2 - 11x + 2 = 0\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} | 2 < x < 4\}$

d) $\{x \in \mathbb{Z} | x^2 = 4 \text{ e } 2x = 6\}$

4) Determinar os conjuntos unitários:

a) $\{x \in \mathbb{N} | 3 < x < 5\}$

b) $\{x \in \mathbb{N} | x^2 + 6x + 8 = 0\}$

c) $\{x \in \mathbb{Z} | -1 < x < 1\}$

1.7. RESPOSTAS

1) a) $\{3,4,5,6\}$

b) $\{2,3,4,5,6,7,8\}$

c) $\{-2,-1,0,1,2,3\}$

d) $\{-2,-1,0,1,2\}$

e) $\{0,5,10,15,...,495\}$

f) $\{2\}$

g) $\{-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$

2) a) $\{x \in \mathbb{Z} | x \geq -2\}$ ou $\{x \in \mathbb{Z} | x > -3\}$

b) $\{x \in \mathbb{Z} | x \leq 5\}$ ou $\{x \in \mathbb{Z} | x < 6\}$

c) $\{x \in \mathbb{N} | x$ é par$\}$ ou

$\{x \in \mathbb{N} | x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$

d) $\{x \in \mathbb{N} | x = 3n, n \in \mathbb{N}, n \leq 50\}$

3) b, d

4) a, c

Capítulo II

2.1. IGUALDADE DE CONJUNTOS

Definição:

> Dois conjuntos A e B são iguais somente se possuem os mesmos elementos.

Escreve-se: $A = B$.

Esta definição, em símbolos:

$$\boxed{A = B \Longleftrightarrow (\forall x \in A \Longrightarrow x \in B) \text{ e } (\forall x \in B \Longrightarrow x \in A)} \tag{1}$$

Os símbolos $\Longleftrightarrow$, $\Longrightarrow$ e $\forall$ significam, respectivamente, equivale, implica e qualquer. Então, a leitura da (1) fica: "A igual a B" equivale "qualquer x pertence a A implica x pertence a B" e "qualquer x pertence a B implica x pertence a A".

Exemplos:

$$\{1,2,3\} = \{1,3,2\}$$

$$\{a,b,c\} = \{a,a,a,b,c\}$$

Por esses exemplos, vê-se que a ordem dos elementos não altera a igualdade dos conjuntos e que se consideram os elementos repetidos de um conjunto, como um único elemento.

Propriedades da Igualdade de Conjuntos

Reflexiva: $A = A$

Simétrica: $A = B \Longrightarrow B = A$

Transitiva: $A = B$ e $B = C \Longrightarrow A = C$

2.2. SUBCONJUNTO - INCLUSÃO

Definição:

> Um conjunto A é SUBCONJUNTO ou parte de um conjunto B, se todo elemento do conjunto A é elemento do conjunto B.

Escreve-se: $A \subseteq B$ ou $B \supseteq A$.

Lê-se: A é subconjunto de B, A está contido em B ou B contém A.

Em símbolos:

$$\boxed{A \subseteq B \iff (\forall x \in A \Longrightarrow x \in B)}$$

Exemplos:

1) $\{1,4,5\} \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}$

2) $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$

3) $\{1,1,1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$

4) Todos os subconjuntos do conjunto $\{a,b,c\}$ são:
$\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$

Propriedades da Inclusão:

Reflexiva: $A \subseteq A$

Transitiva: $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$

Anti-simétrica: $A \subseteq C$ e $B \subseteq A \Longrightarrow A = B$

2.3. SUBCONJUNTO PRÓPRIO

Definição:

Um conjunto A é subconjunto próprio de um conjunto B se A é subconjunto de B e se houver, pelo menos, um elemento de B que não pertença à A.

Escreve-se: $A \subset B$ ou $B \supset A$.

Lê-se: A está estritamente contido em B ou B contém estritamente A.

Em símbolos:

$$\boxed{A \subset B \Longrightarrow (A \subseteq B \text{ e } \exists x \in B \mid x \notin A)}$$

O símbolo $\exists$ significa existe.

Exemplo: $\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$

2.4. CONJUNTO UNIVERSO

Definição:

> Conjunto universo é o conjunto ao qual pertencem todos os elementos de todos os conjuntos que se está considerando.

Representa-se, em geral, pela letra U.

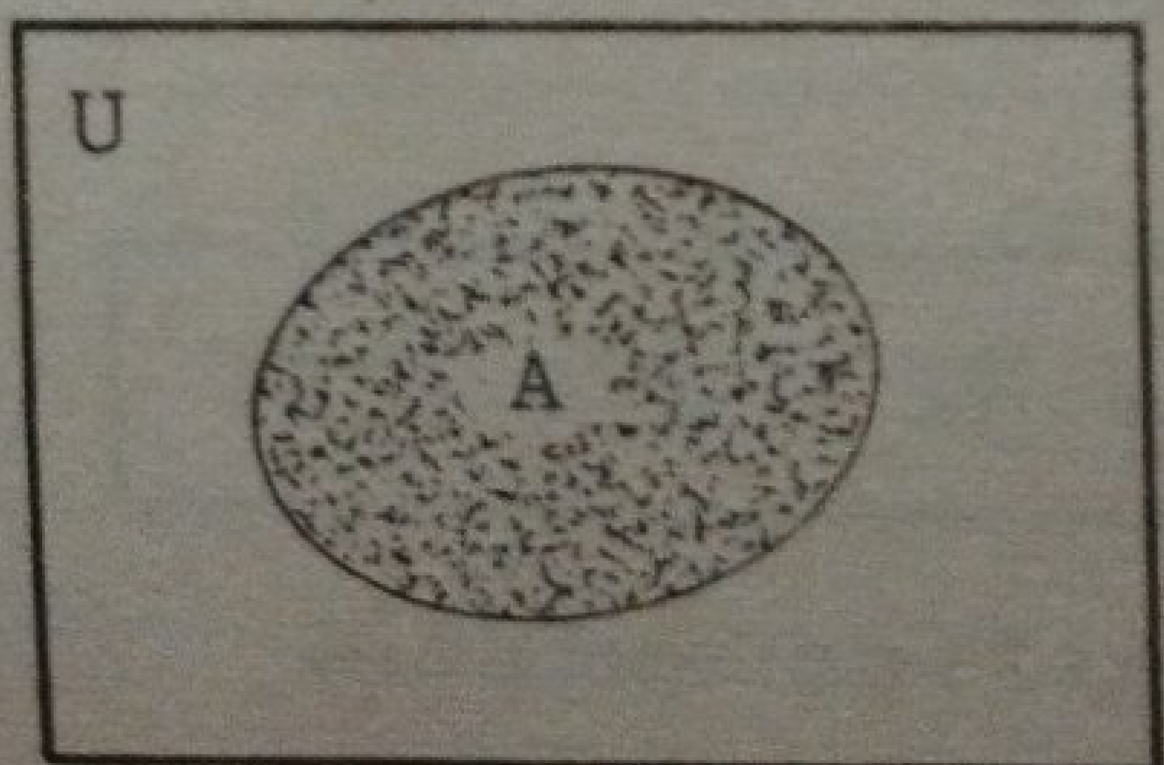
Exemplo:

Na geometria plana, o conjunto universo é o plano.

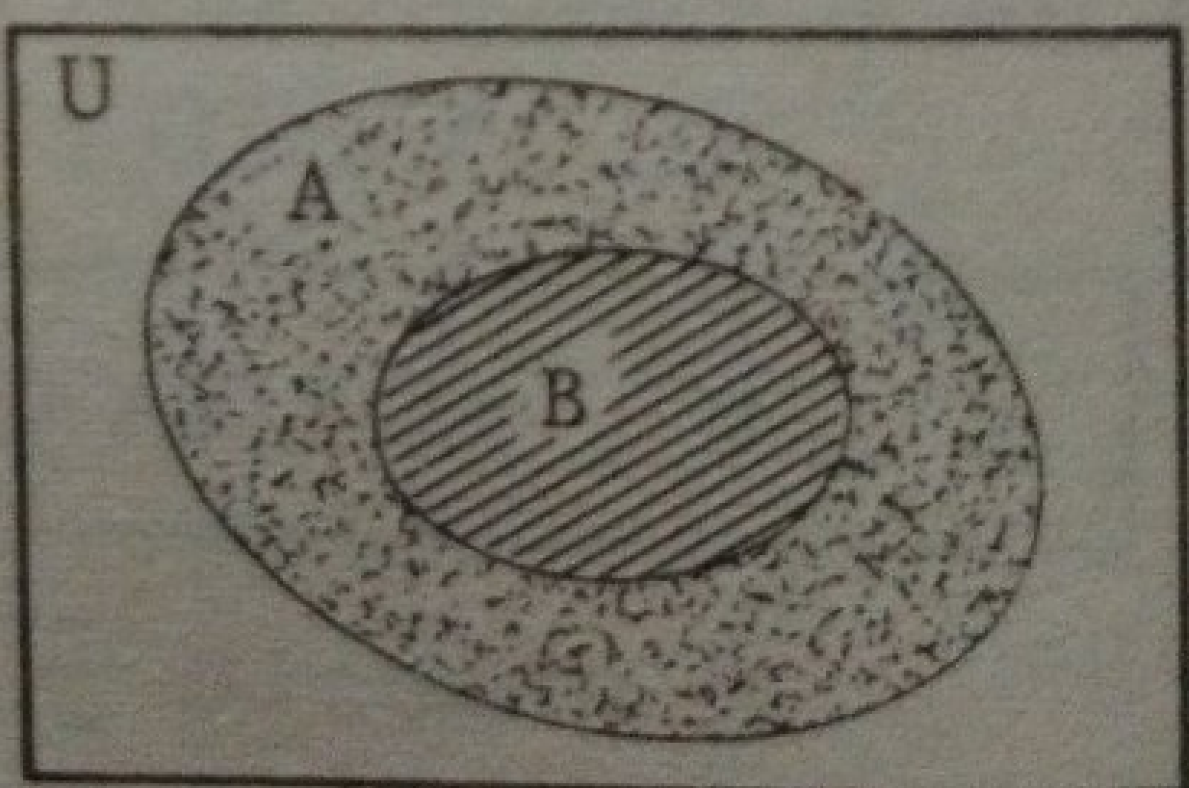
2.5. DIAGRAMA DE VENN

Para a visualização de algumas definições ou propriedades, John Venn representou o conjunto universo por pontos da superfície de um retângulo e os subconjuntos desse conjunto universo por porções planas desse retângulo limitadas por curvas fechadas.

Exemplos:



$A \subset U$



$B \subset A \subset U$

2.6. CONJUNTO DE PARTES DE UM CONJUNTO

Definição:

> Conjunto de partes de um conjunto A, é uma família de conjuntos P(A), cujos elementos são todos os subconjuntos do conjunto A.

Exemplos:

1) Se $A = \{a,b\}$, então:

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$$

2) Se $A = \{1,2,3\}$, então:

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$$

2.7. OBSERVAÇÕES

1ª) O número de elementos de uma família de partes de um conjunto de m elementos é 2^m.

Exemplo:

O número de elementos da família de partes do conjunto $A = \{a,b,c\}$ é $2^3 = 8$.

2ª) A pertinência relaciona um elemento ao conjunto e a inclusão, um conjunto a outro conjunto.

Exemplo:

$$a \in \{a,b,c\} \quad e \quad \{a,b\} \subset \{a,b,c\}.$$

2.8. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Verificar quais das igualdades é verdadeira:

a) $\{2,3,4\} = \{4,3,2\}$

b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 9 = 0\} = \{3\}$

c) $\{x \in \mathbb{N} \mid 3x - 6 = 0\} = \{2\} = \{2,2,2\}$

2) Sendo $A = \{0,1,2,3\}$, quais das sentenças a seguir são verdadeiras:

a) $\emptyset \in A$

b) $3 \subset A$

c) $\emptyset \subset A$

d) $0 \in \emptyset$

e) $0 \in A$

f) $\{0\} \subseteq A$

3) Verificar quais das sentenças é verdadeira:

a) $\{1,3\} \in \{\{2,3\},2,\{3\},\{1,3\}, \emptyset\}$

b) $\{1,2,3\} \subseteq \{\{1,2\},\{1,2,3,4\},1,\{1,2,3\}\}$

c) $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$

d) $\emptyset \subset \{\{a\}\}$

e) $\{0\} \neq \emptyset \neq \{\emptyset\}$

4) Determinar o conjunto de partes dos conjuntos:

$A = \{a,b,c\}$, $B = \{a, \{b,c\}\}$ e $C = \{\emptyset, \{1\}\}$

5) Quais os subconjuntos próprios dos conjuntos:

a) $\{d,\{b,c\}\}$

b) $\{1,2,3,4\}$

2.9. RESPOSTAS

1) a, c

2) c, e, f

3) a, d, e

4)

$P(A) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A\}$

$P(B) = \{\emptyset,\{a\},\{\{b,c\}\},B\}$

$P(C) = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{1\}\},C\}$

5)

a) $\emptyset,\{d\},\{\{b,c\}\}$

b) $\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},$
$\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}$

Capítulo III

3.1. UNIÃO OU REUNIÃO

Definição:

> Reunião de dois conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B.

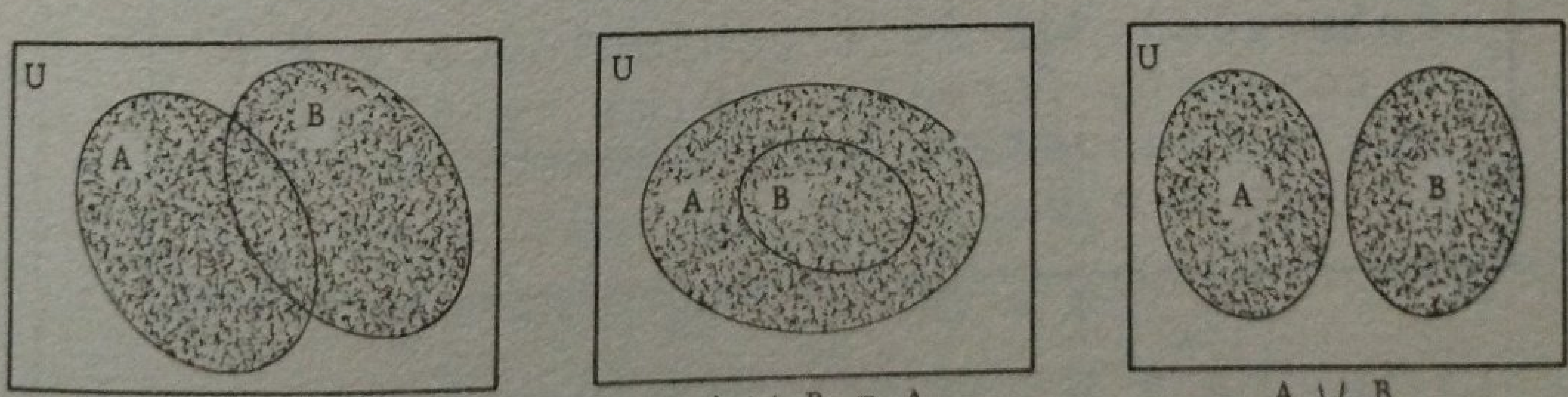
Indica-se: $A \cup B$.

Lê-se: A união B.

Em símbolos:

$$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}}$$

No diagrama de Venn, abaixo, $A \cup B$ é constituído pela parte hachurada.



$A \cup B$ $\qquad$ $A \cup B = A$ $\qquad$ $A \cup B$

Exemplos:

1) Sejam os conjuntos $A = \{1,3,7,9\}$ e $B = \{1,2,3,7\}$

$$A \cup B = \{1,2,3,7,9\}$$

2) Dados os conjuntos $A = \{a,b,c\}$ e $B = \{b,c\}$

$$A \cup B = \{a,b,c\} = A$$

Propriedades da União:

Idempotente: $A \cup A = A$

Comutativa: $A \cup B = B \cup A$

Associativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

União de mais de dois Conjuntos:

É o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a um, pelo menos, desses conjuntos.

Exemplo:

Dados $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$, $C = \{1,6,7\}$ e $D = \{1,4,7\}$

$$A \cup B \cup C \cup D = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

3.2. INTERSEÇÃO

Definição:

Interseção de dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B

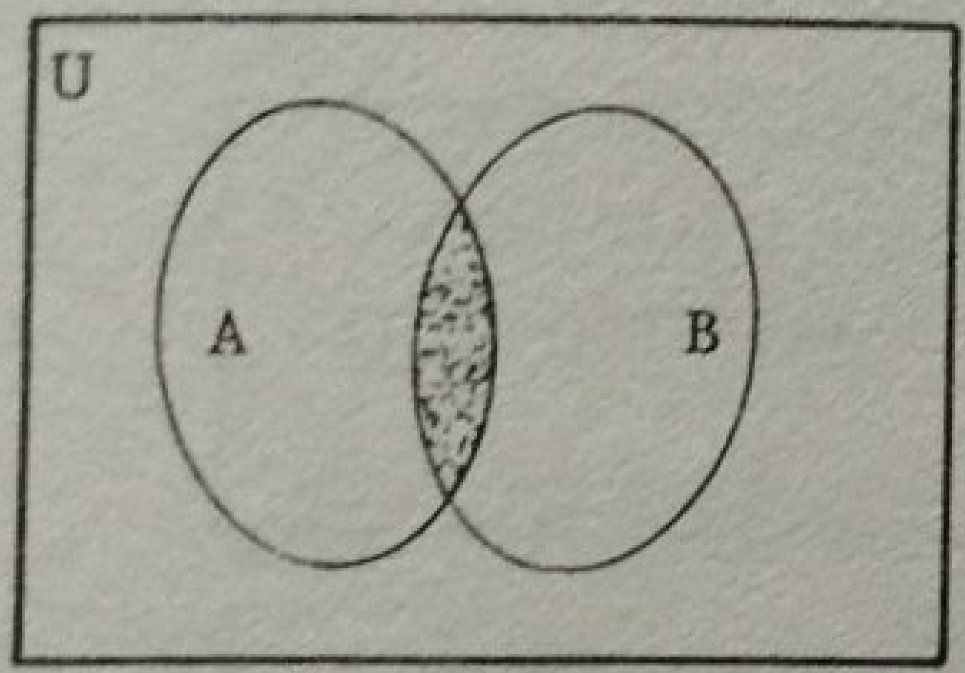
Escreve-se: $A \cap B$.

Lê-se: A inter B.

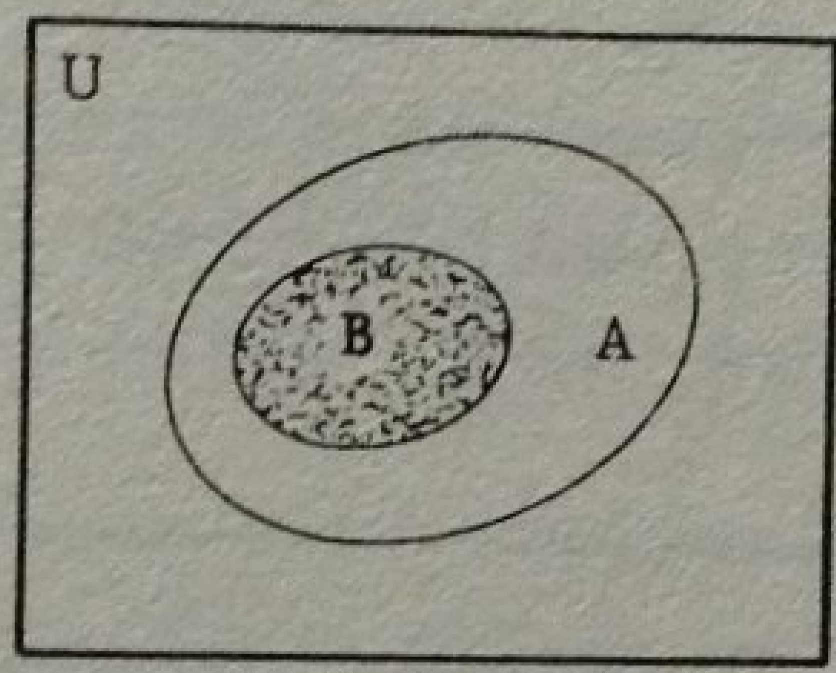
Simbolicamente:

$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}}$$

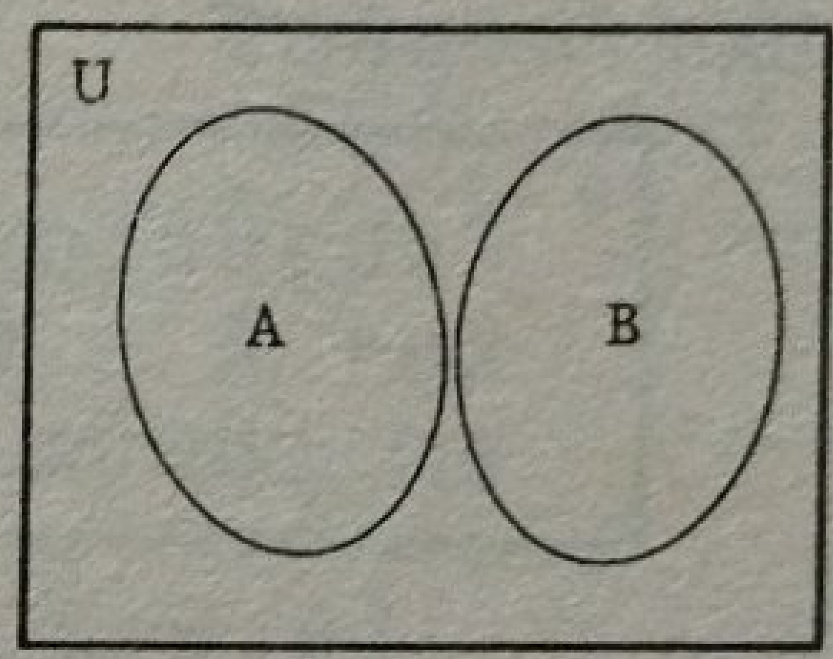
No diagrama de Venn, $A \cap B$ é constituído pela parte hachurada.



$A \cap B$



$A \cap B = B$



$A \cap B = \emptyset$

Exemplos:

1) Dados $A = \{1,3,4,7\}$ e $B = \{1,2,3,5\}$

$$A \cap B = \{1,3\}$$

2) Sejam $A = \{a,b\}$ e $B = \{c,d,e\}$

$$A \cap B = \emptyset$$

3) Considerando $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,3\}$

$$A \cap B = \{2,3\} = B$$

Propriedades da Interseção:

Idempotente: $A \cap A = A$

Comutativa: $A \cap B = B \cap A$

Associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Interseção de mais de dois Conjuntos:

É o conjunto formado pelos elementos comuns a todos esses conjuntos.

Exemplo:

Sendo $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,7,8\}$ e $C = \{1,3,4,9,12\}$

$$A \cap B \cap C = \{3,4\}.$$

3.3. CONJUNTOS DISJUNTOS

Definição:

> Conjuntos disjuntos são dois conjuntos A e B que não possuem elemento em comum.

Decorrência da definição: $\boxed{A \cap B = \emptyset}$

Exemplo:

Se $A = \{1,3,5\}$ e $B = \{2,4\}$ então A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$).

3.4. DIFERENÇA DE DOIS CONJUNTOS

Definição:

> Diferença de dois conjuntos A e B, nessa ordem, é o conjunto constituído dos elementos do conjunto A, que não pertencem ao conjunto B.

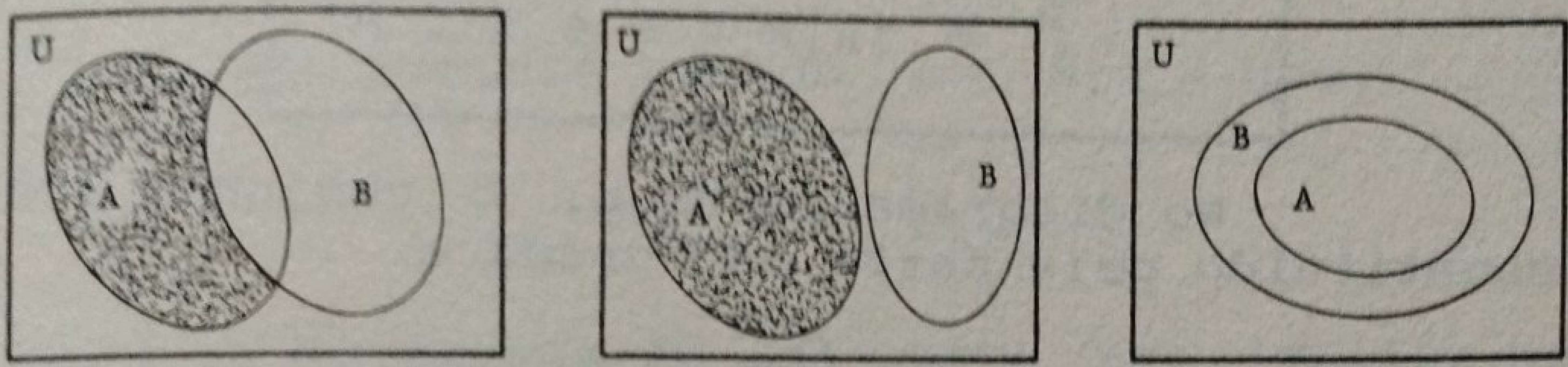
Indica-se: $A - B$.

Lê-se: A menos B.

Simbolicamente:

$$\boxed{A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}}$$

No diagrama o conjunto A - B está hachurado.



A - B   A - B = A   A - B = Ø

Exemplos:

1) Se $A = \{1,2,5,7,8\}$ e $B = \{1,5,6,9\}$

$A - B = \{2,7,8\}$

2) Dados $A = \{a,b,c\}$ e $B = \{r,s\}$

$A - B = \{a,b,c\} = A$

3) Sendo $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{1,2,3,4,5\}$

$A - B = \emptyset$

3.5. CONJUNTO COMPLEMENTAR

Definição:

> Seja A um subconjunto de um conjunto E ($A \subseteq E$). Conjunto complementar de A em relação a E, ou complemento de A em relação a E, é o conjunto dos elementos de E que não pertencem a A.

Indica-se: $\complement_E^A$

Lê-se: Complementar de A em relação a E.

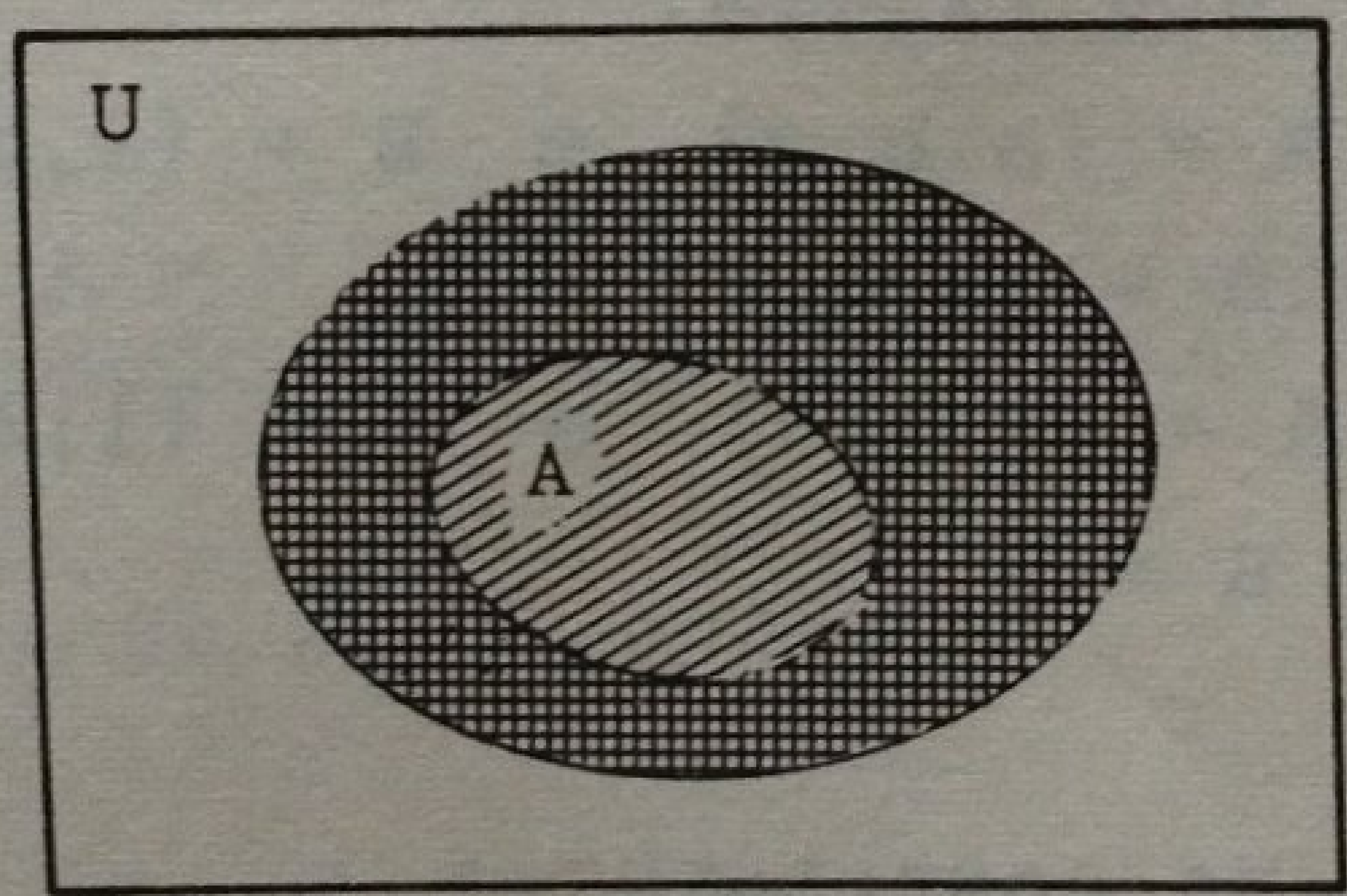
Simbolicamente:

$$\boxed{\complement_E^A = \{x \mid x \in E \text{ e } x \notin A\}}$$

No diagrama de Venn, o conjunto E é constituído pela parte hachurada e

$\complement_E^A$

pela parte quadriculada.



Exemplo:

Dados $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e $A = \{1,4,5,6\}$

$$\complement_E^A = \{2,3,7\}$$

Observações:

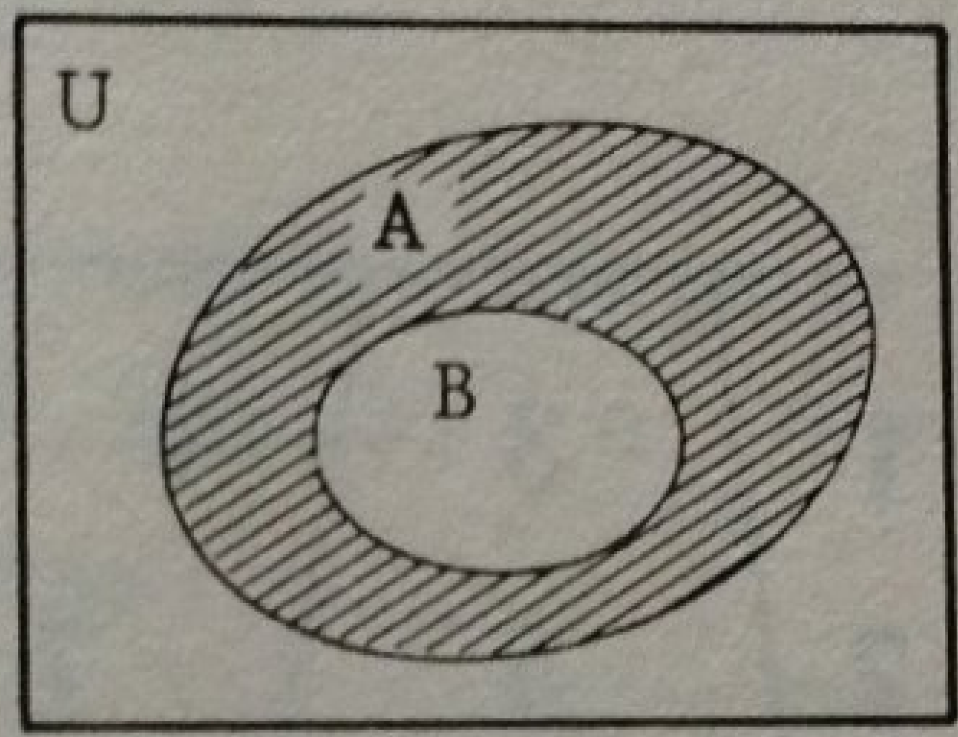
1ª) Costuma-se representar o conjunto complementar de A, em relação ao conjunto universo U, por A'. Isto é:

$$\complement_U^A = A'.$$

2ª) Somente quando $B \subset A, \subseteq$ é que

$$A - B = \complement_A^B$$

pois, a diferença de conjuntos não implica na inclusão de B em A.



$$\complement_A B = A - B$$

3.6. PARTIÇÃO DE UM CONJUNTO

Definição:

Partição de um conjunto não vazio E é a família de subconjuntos não vazios de E, disjuntos dois a dois e cuja união é E.

Exemplo:

Seja $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ e sejam $A = \{1,2,6\}$, $B = \{3,5,8\}$ e $C = \{4,7\}$ três subconjuntos não vazios de E.

A família:

$$\{\{1,2,6\}, \{3,5,8\}, \{4,7\}\}$$

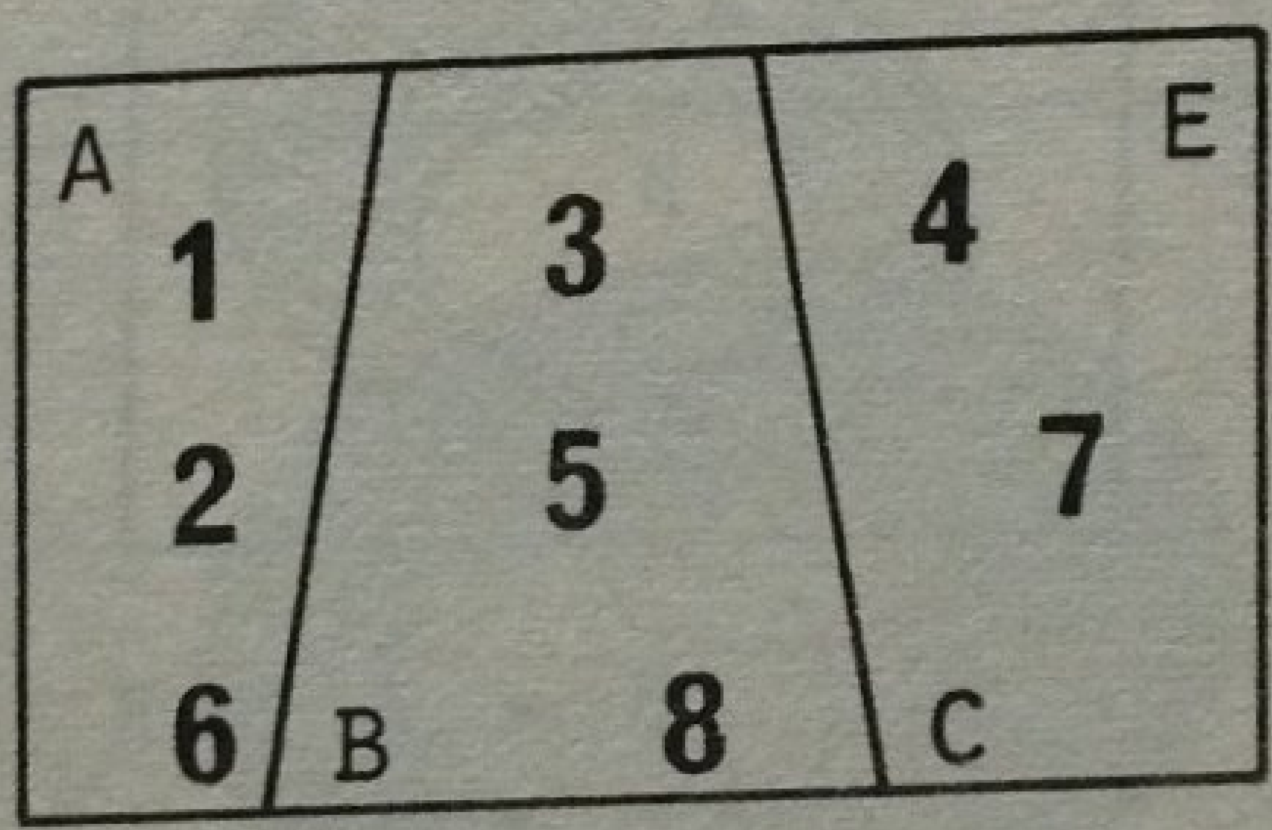
é uma partição do conjunto E, pois, A, B e C são disjuntos, isto é:

$$A \cap B = \emptyset,\ A \cap C = \emptyset,\ B \cap C = \emptyset$$

e

$$A \cup B \cup C = E.$$

No diagrama de Venn:



3.7. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Dados os conjuntos: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,5,6\}$ e $C = \{4,5,6,7\}$,

calcular:

a) $A \cup B$

b) $B \cup C$

c) $A \cup (B \cup C)$

d) $A \cap B$

e) $A \cap C$

f) $(A \cup B) \cap (B \cap C)$

g) $(A \cap B) \cup C$

h) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

2) Sendo $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x \leq 7\}$ e
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 9\}$ determinar:

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

3) Sendo $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$ e
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}$ determinar:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

4) Dados os conjuntos: $A = \{1,2,3,4,5\}$,
$B = \{2,4,5,6,8\}$ e $C = \{1,3,5,6,7\}$
determinar:

a) $A - B$

b) $B - A$

c) $A - C$

e) $C - B$

5) Dados os conjuntos: $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,
$A = \{1,3,5,6,7\}$ e $B = \{2,4,6,8\}$
determinar:

a) C_E^A

b) C_E^B

6) Sendo: $U = \{0,1,2,3,4,5,6\}$,
$A = \{0,2,4,6\}$ e $B = \{0,1,3,5,6\}$
calcular:

a) $A' = \complement_{U}^{A}$

b) $B' = \complement_{U}^{B}$

7) Sendo $U = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,4,6\}$ e $C = \{1,2,3,4\}$ calcular:

a) $A' \cup B'$

b) $B' \cap C'$

c) $(A \cap C) \cup B'$

d) $(B - A') \cup C'$

e) $(A \cap C)'$

f) $(C - B)'$

8) Dados os conjuntos $U = \{1,2,3,\ldots,12\}$, $A = \{2,4,6,8,10,12\}$, $B = \{1,3,5,7,9,11\}$ e $C = \{4,5,6,7,8\}$, efetuar as seguintes operações:

a) $(C - A) \cap B$

b) $(C \cap A) - B$

c) $(B - C) \cap A$

d) $(B - A) \cap C$

e) $(A \cap C) \cup B$

f) $(A - C) \cap B$

g) $(A \cap B) \cup C$

h) $(A - B) \cap C$

i) $(C \cap B) - A$

9) Sendo E = {1,2,3,4}, determinar quais das famílias a seguir é uma partição de E.

a) {{1,4},{2,3}}

b) {{1},{3,4},{1}}

c) {{1},{3},{2,4}}

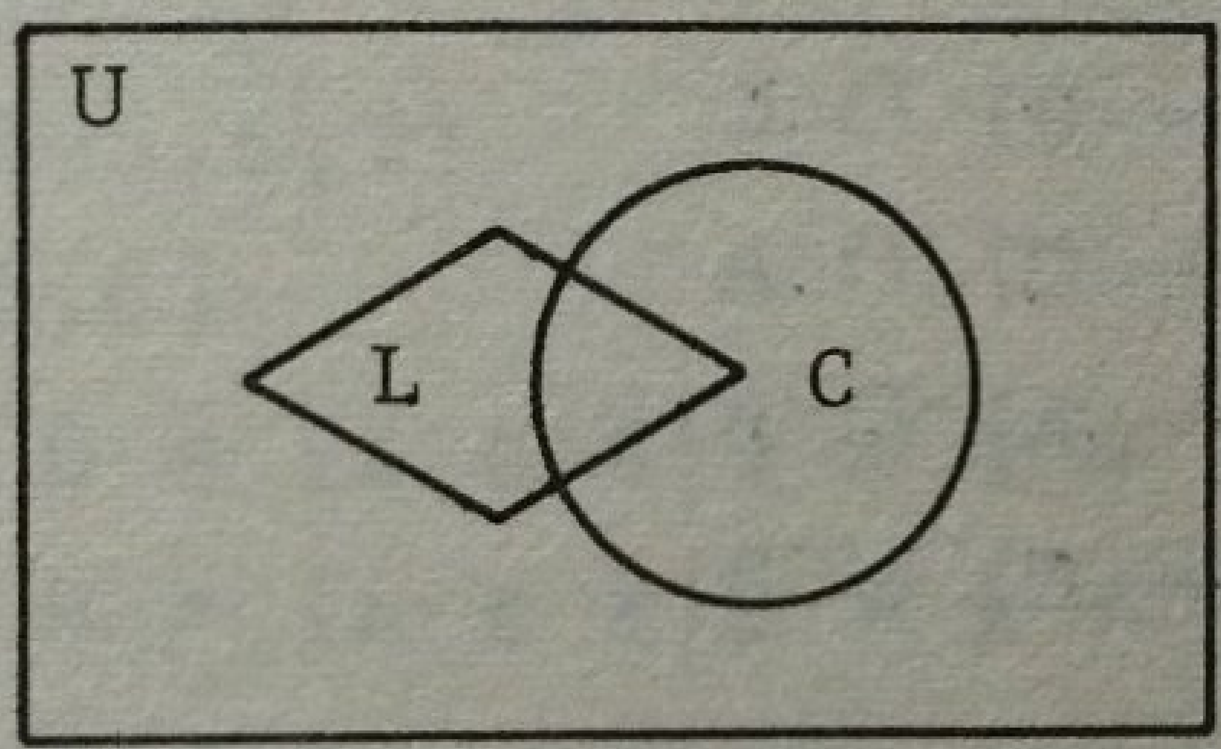
d) {{1,3},{3,4}}

e) {{3},{1,2,4}}

f) {{1,2,3,4}}

10) Determinar todas as partições do conjunto E = {a,b,c}.

11) No diagrama de Venn:



hachurar o conjunto resultante das operações:

a) $L \cup C$

b) $L \cap C$

c) $L - C$

d) $C - L$

e) C'

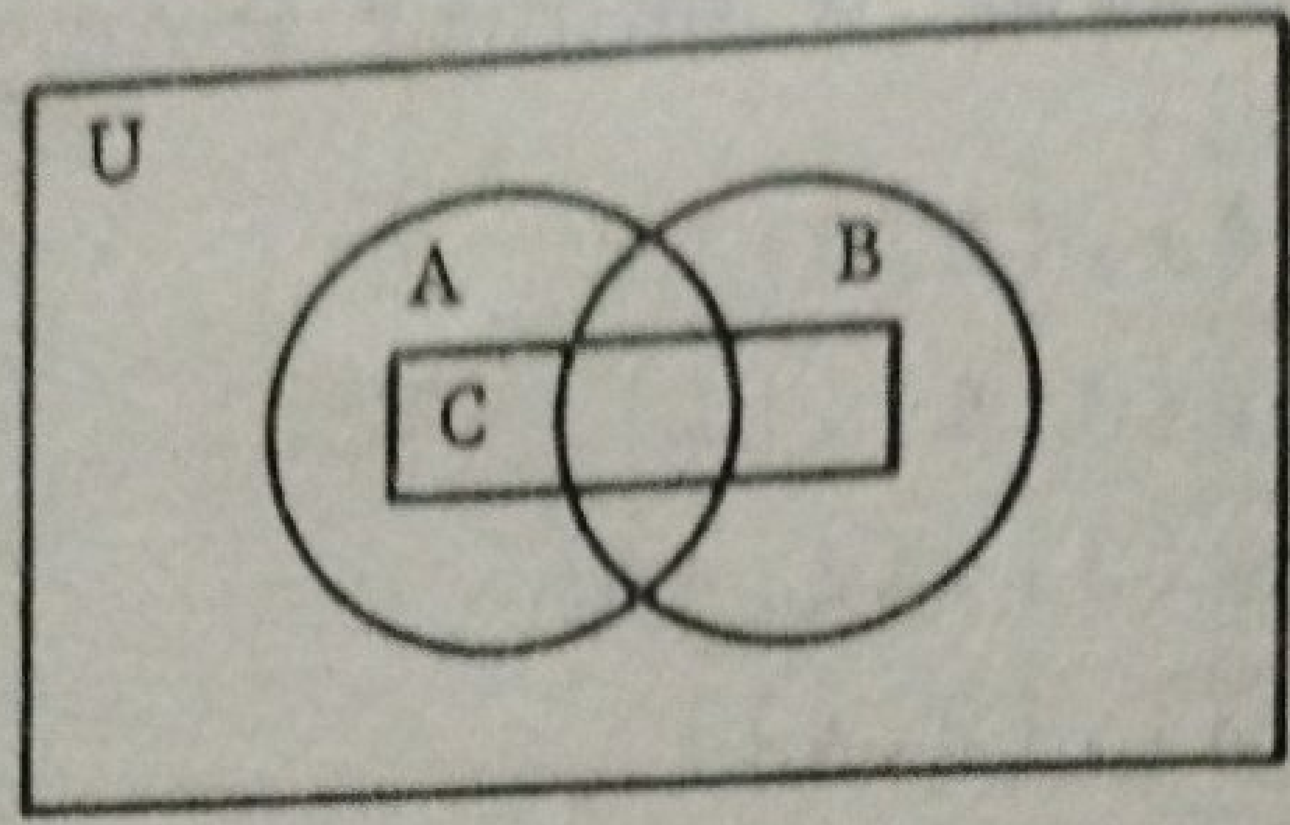
f) L'

g) $L' \cap C'$

h) $L \cap C'$

i) $(C - L)'$

12) No diagrama de Venn:



sombrear o conjunto resultante das operações:

a) $(A \cap B) \cup C$

b) $(A \cap B) \cap C$

c) $(A \cap C) \cup B$

d) $(A \cup C) \cap B$

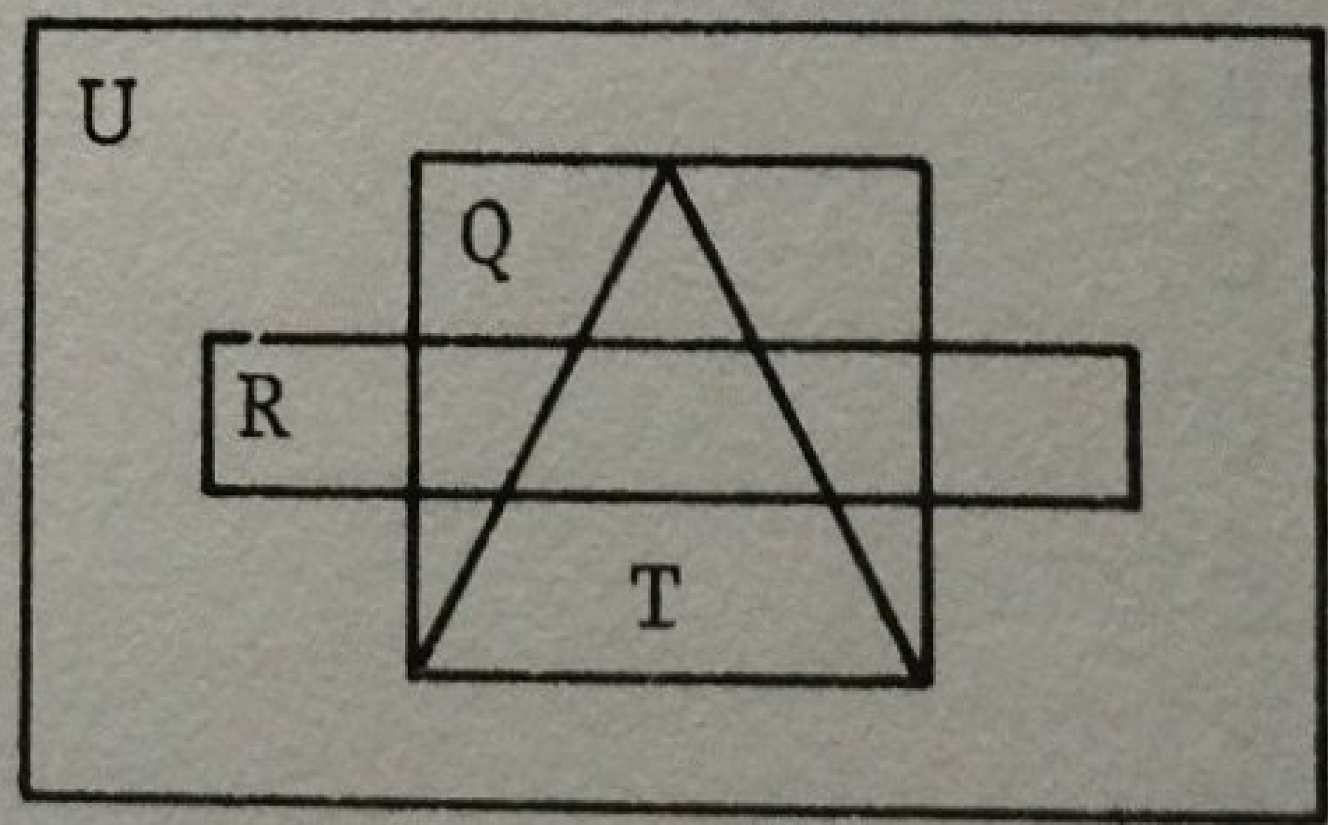
e) $(A - B) \cap C$

f) $(B - C) \cap A$

g) $(C - A) \cap B$

h) $(A - C) \cup B$

13) No diagrama de Venn:



hachurar o conjunto da resultante das operações:

a) $R \cap (T \cap Q)$

b) $(Q - R) \cap T$

c) $(R' - Q') \cup T$

d) $(R' \cap Q) \cup (T' \cap R)$

e) $[(T' - R') \cup (R' - Q)]'$

f) $[(T' \cap Q) \cup (R' \cap T)]'$

g) $[(R' - Q') \cup (T' - R)]'$

3.8. RESPOSTAS

1) a) $\{1,2,3,5,6\}$

b) $\{3,4,5,6,7\}$

c) $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

d) $\{3\}$

e) $\emptyset$

f) $\{5,6\}$

g) $\{3,4,5,6,7\}$

h) $\{3,5,6\}$

2) a) $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 7\} = A$

b) $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 8\} = B$

3) a) $A \cup B = A$

b) $A \cap B = B$

4) a) $A - B = \{1,3\}$

b) $B - A = \{6,8\}$

c) $A - C = \{2,4\}$

d) $C - B = \{1,3,7\}$

5) a) $\complement_E^A = \{2,4,8\}$

b) $\complement_E^B = \{1,3,5,7\}$

6) a) $A' = \{1,3,5\}$

b) $B' = \{2,4\}$

7) a) $\{2,4,5,6\}$

b) $\{5\}$

c) $\{1,3,5\}$

d) $\{5,6\}$

e) $\{2,4,5,6\}$

f) $\{2,4,5,6\}$

8) a) $\{5,7\}$

b) $\{4,6,8\}$

c) $\emptyset$

d) $\{5,7\}$

e) $\{1,3,4,5,6,7,8,9,11\}$

f) $\emptyset$

g) $\{4,5,6,7,8\} = C$

h) $\{4,6,8\}$

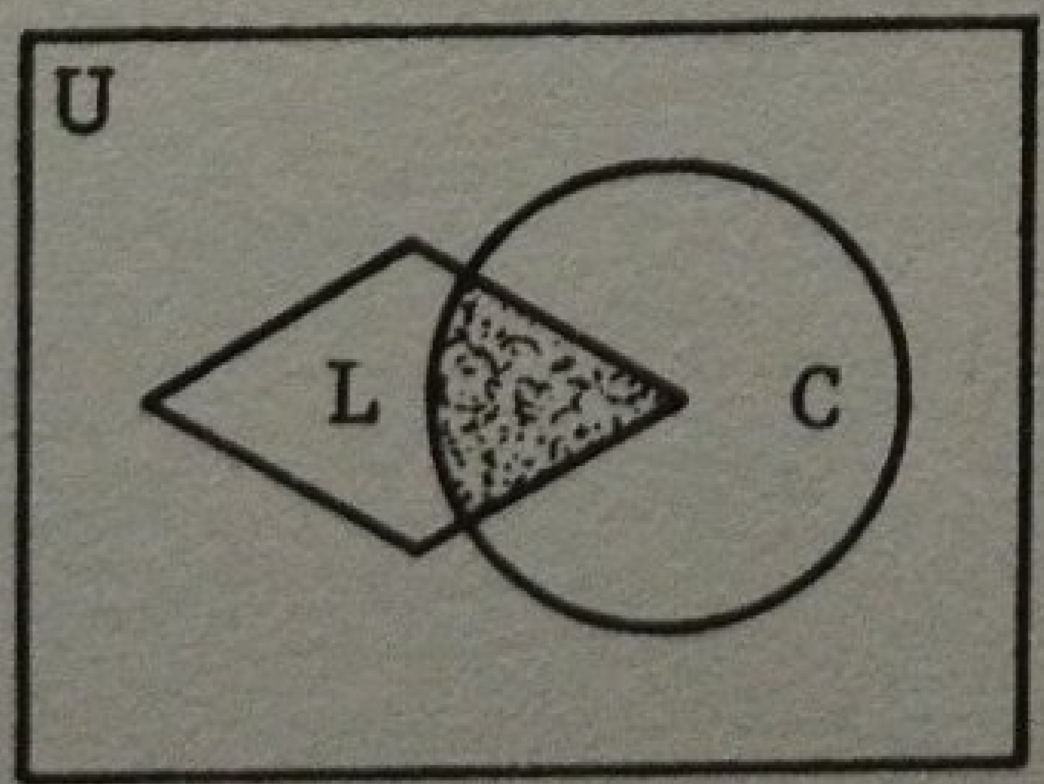
i) $\{5,7\}$

9) a, c, e, f.

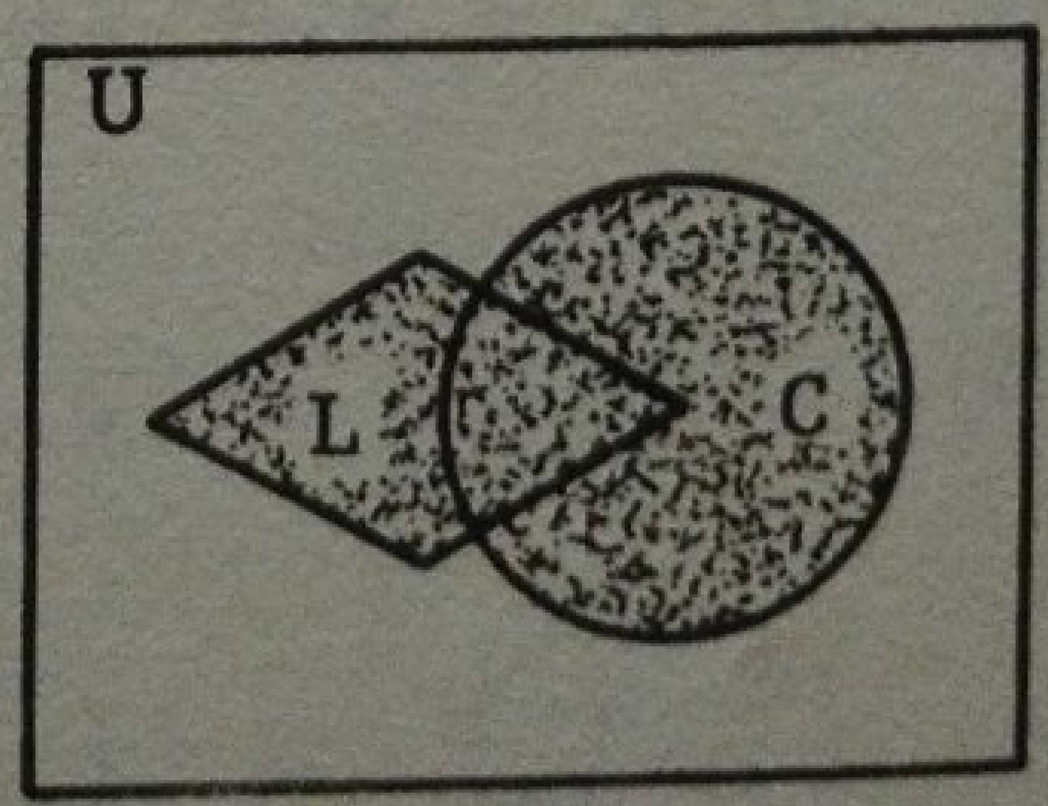
10) $\{\{a,b,c\}\}, \{\{a\},\{b,c\}\}, \{\{b\},\{a,c\}\}, \{\{c\},\{a,b\}\}, \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$.

11)

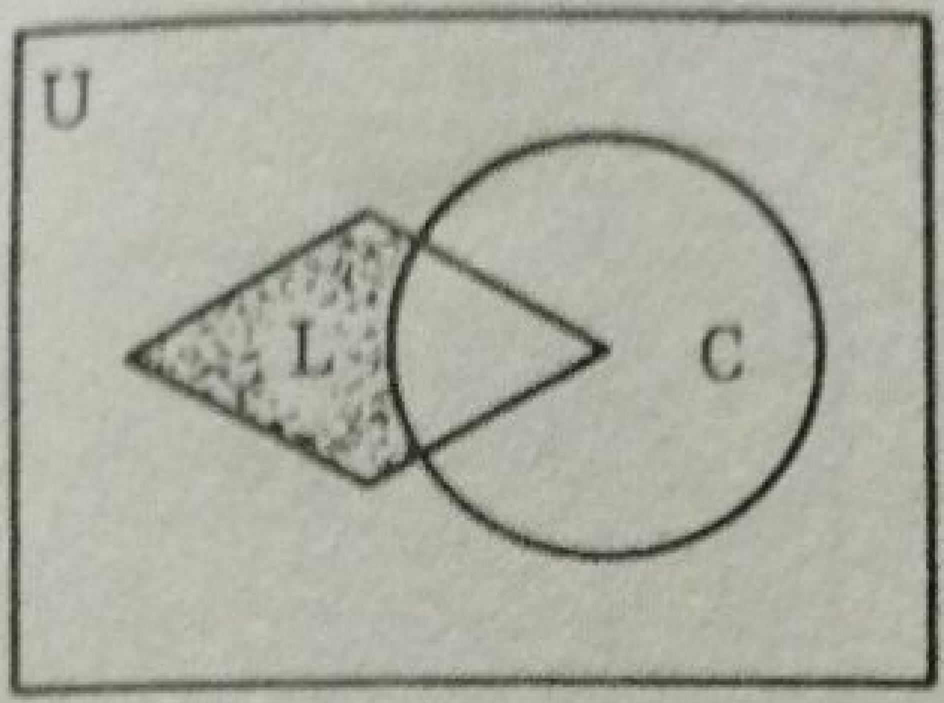
b)



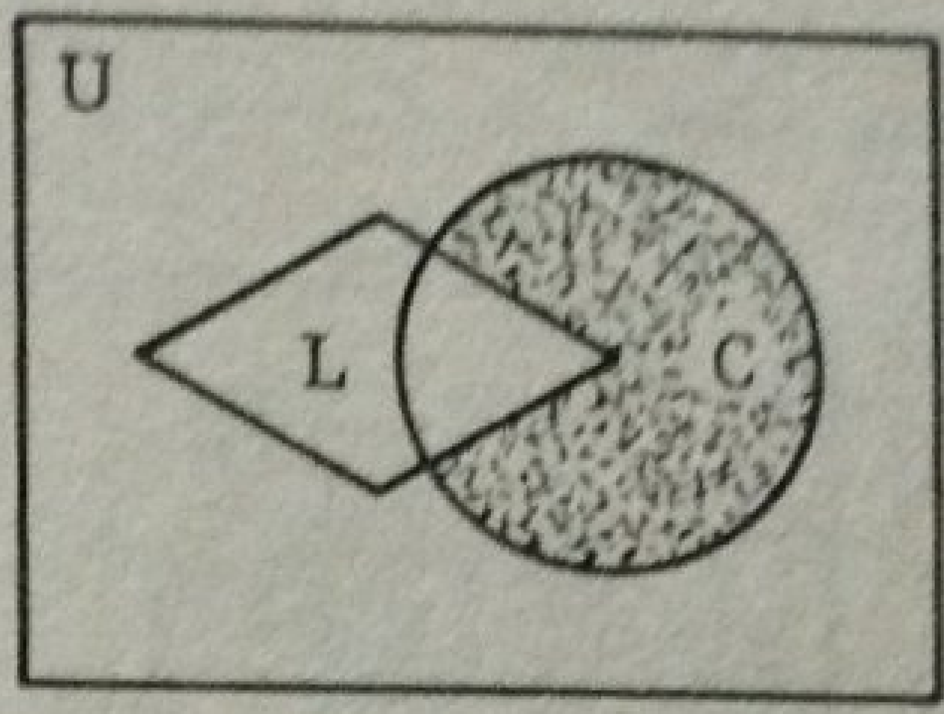
a)



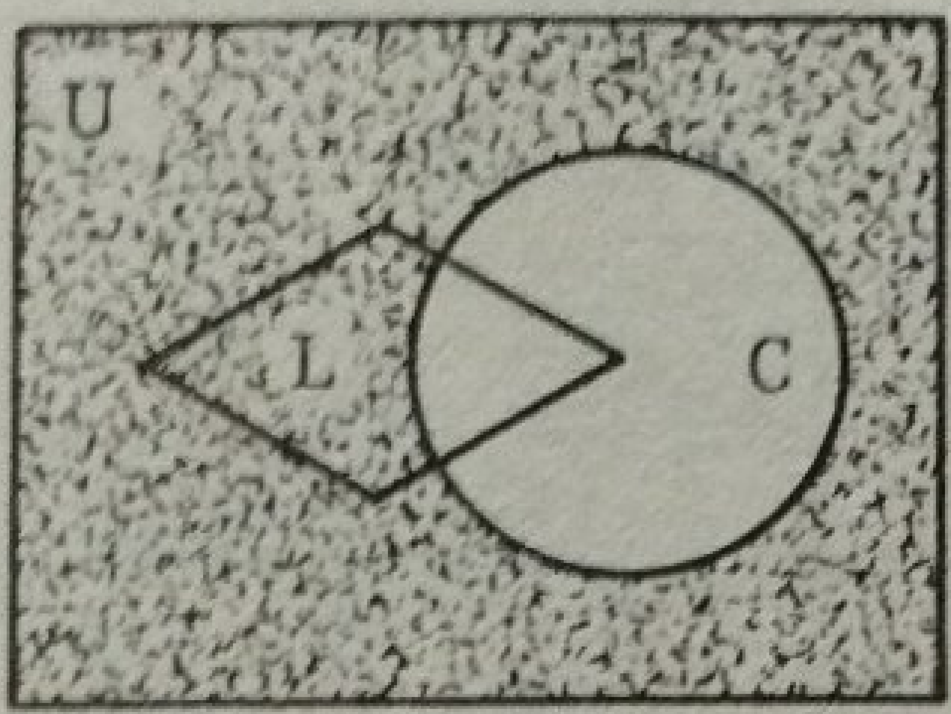
c)



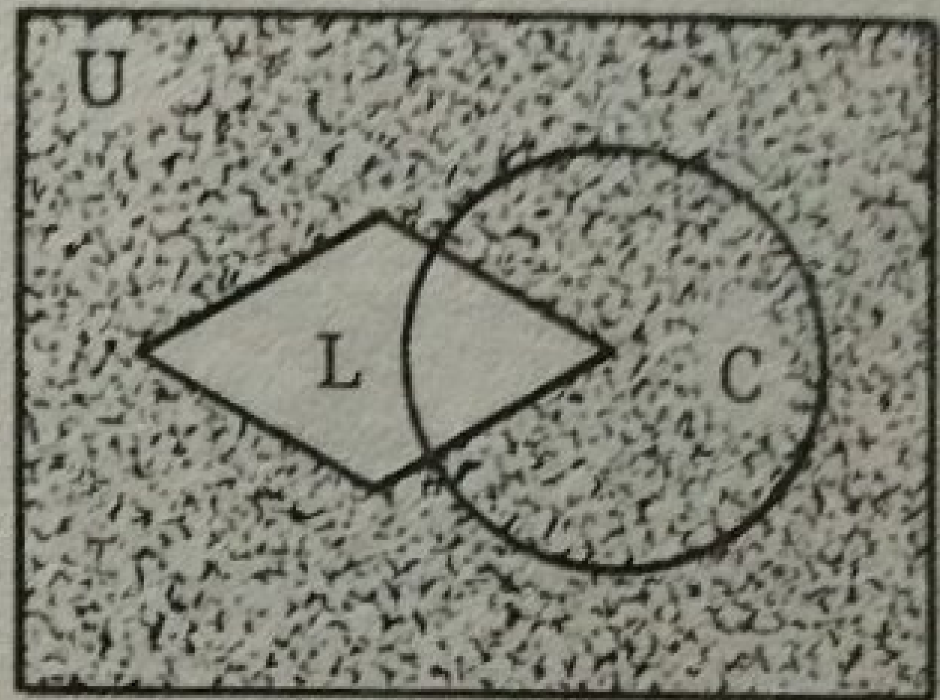
d)



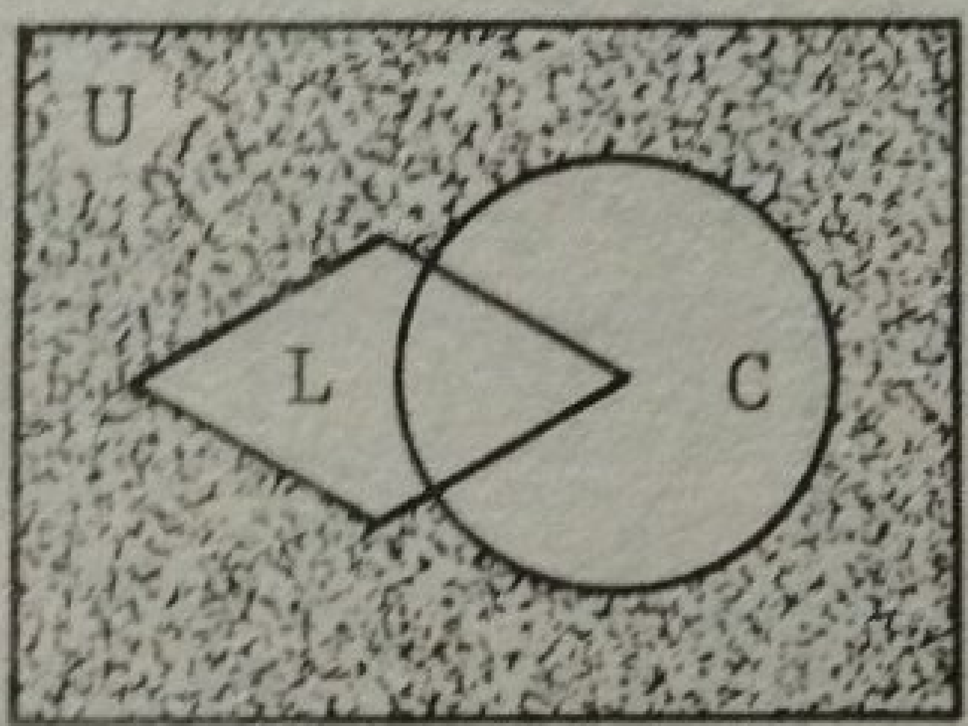
e)



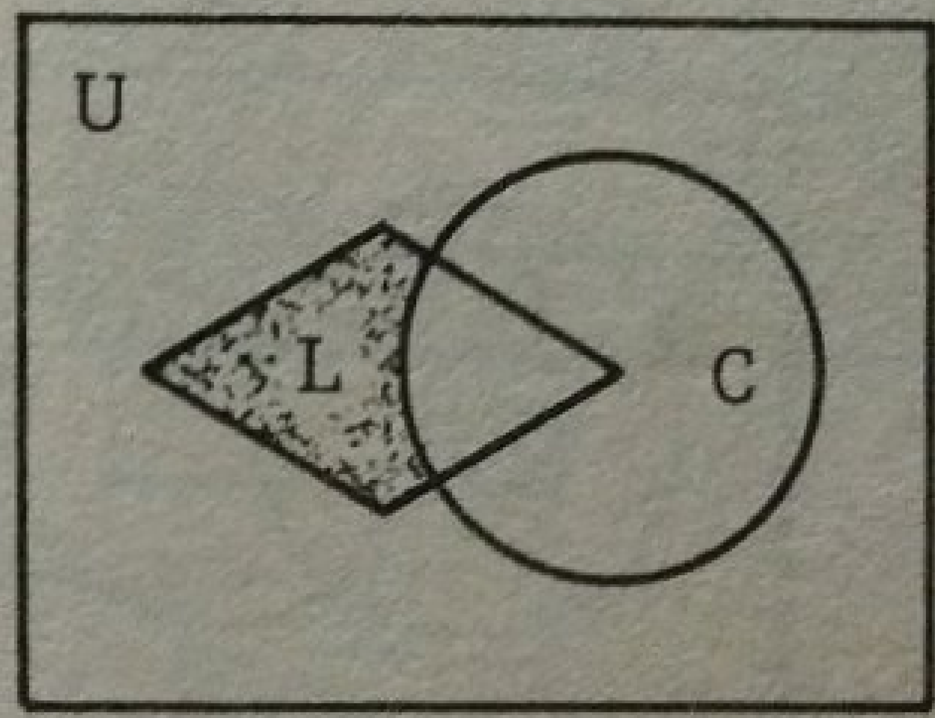
f)



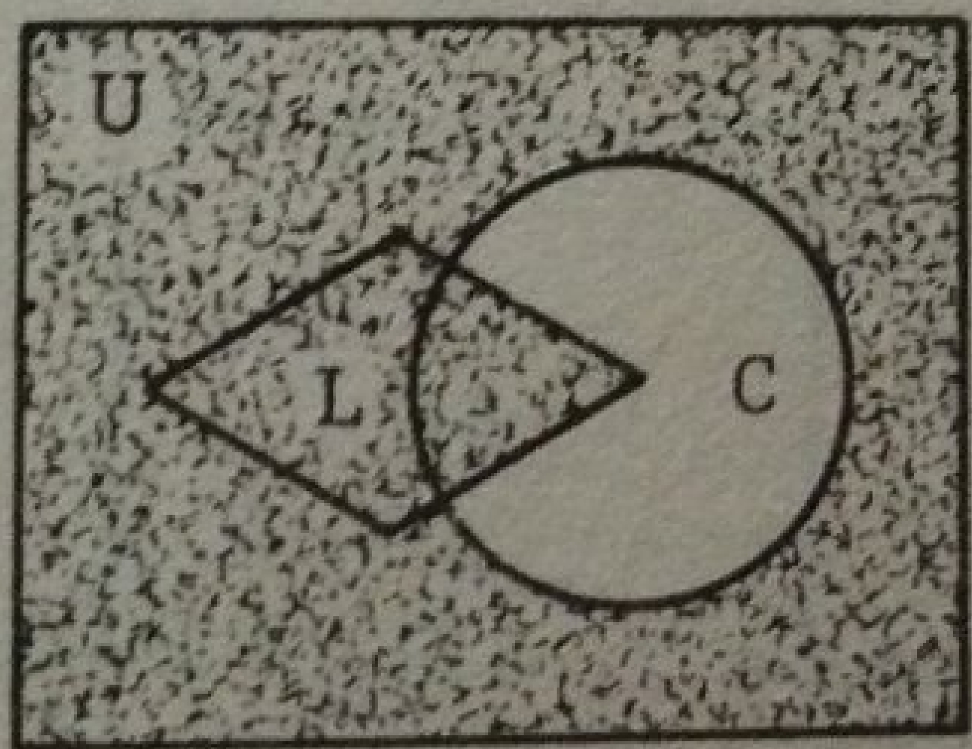
g)



h)

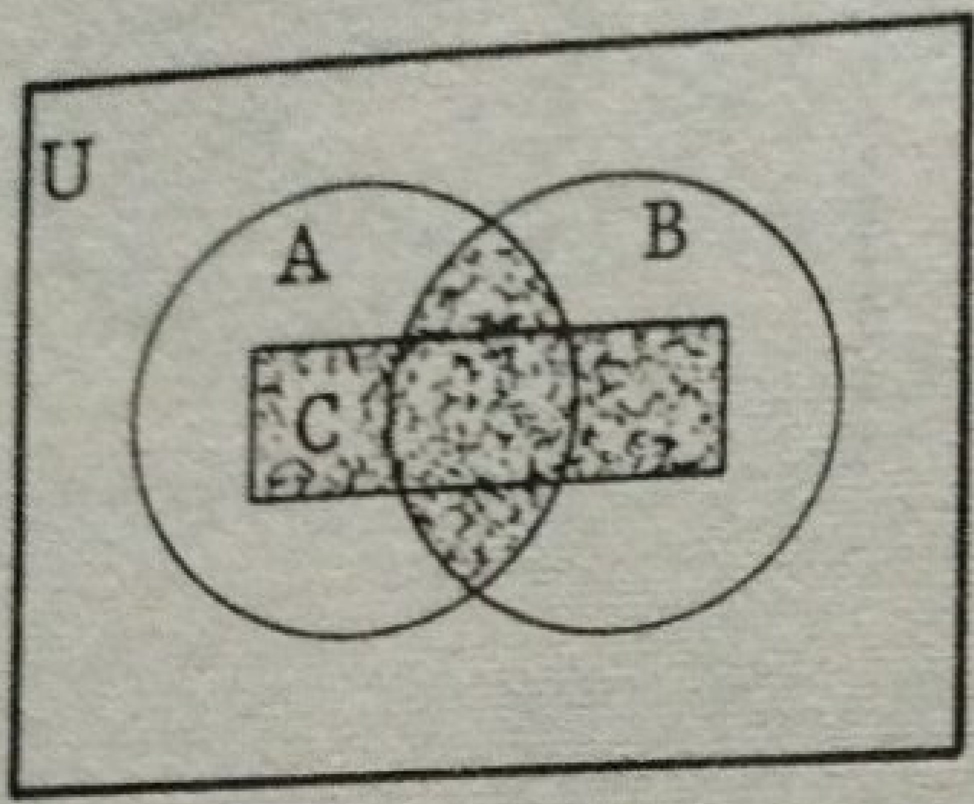


i)

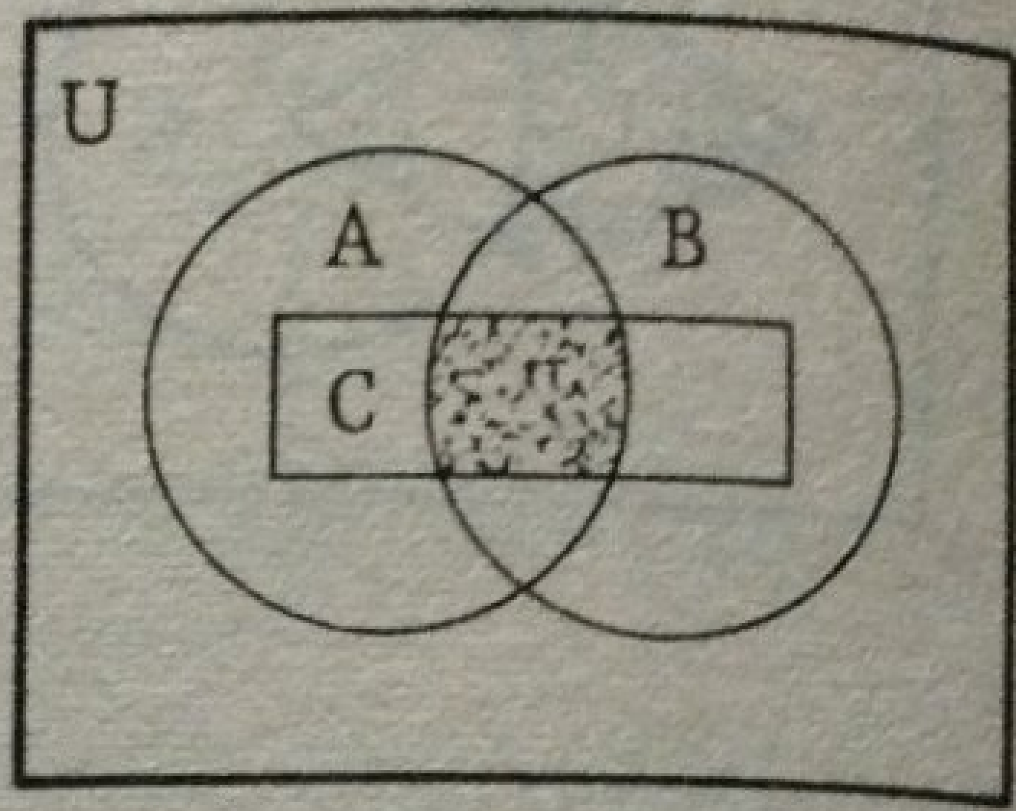


12)

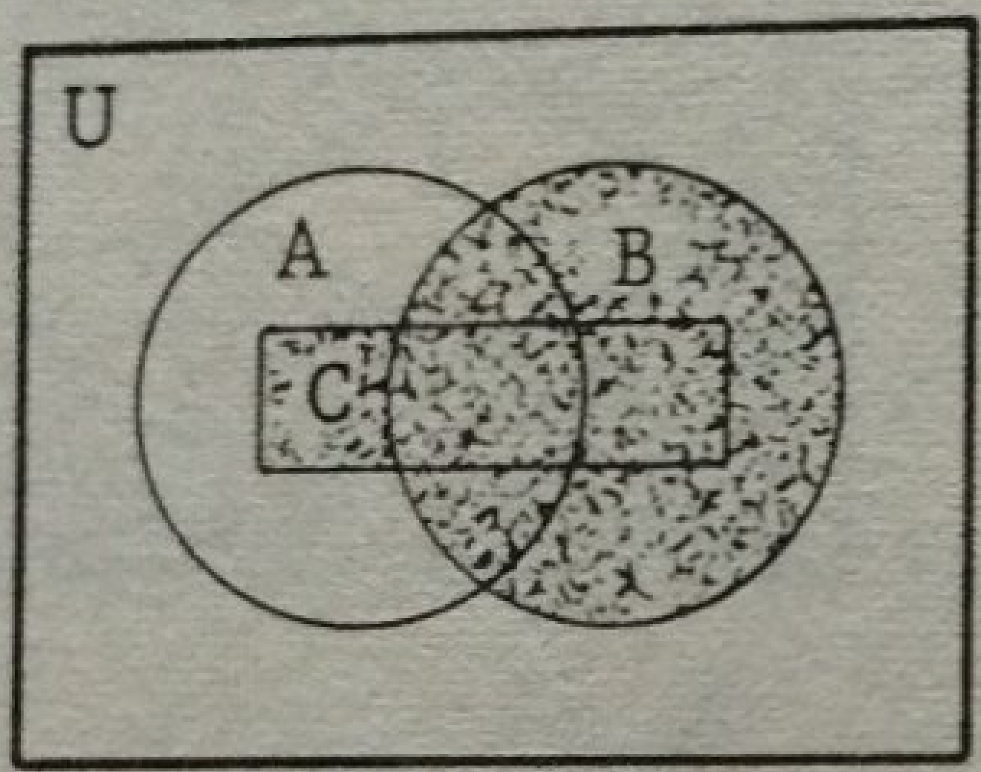
a)



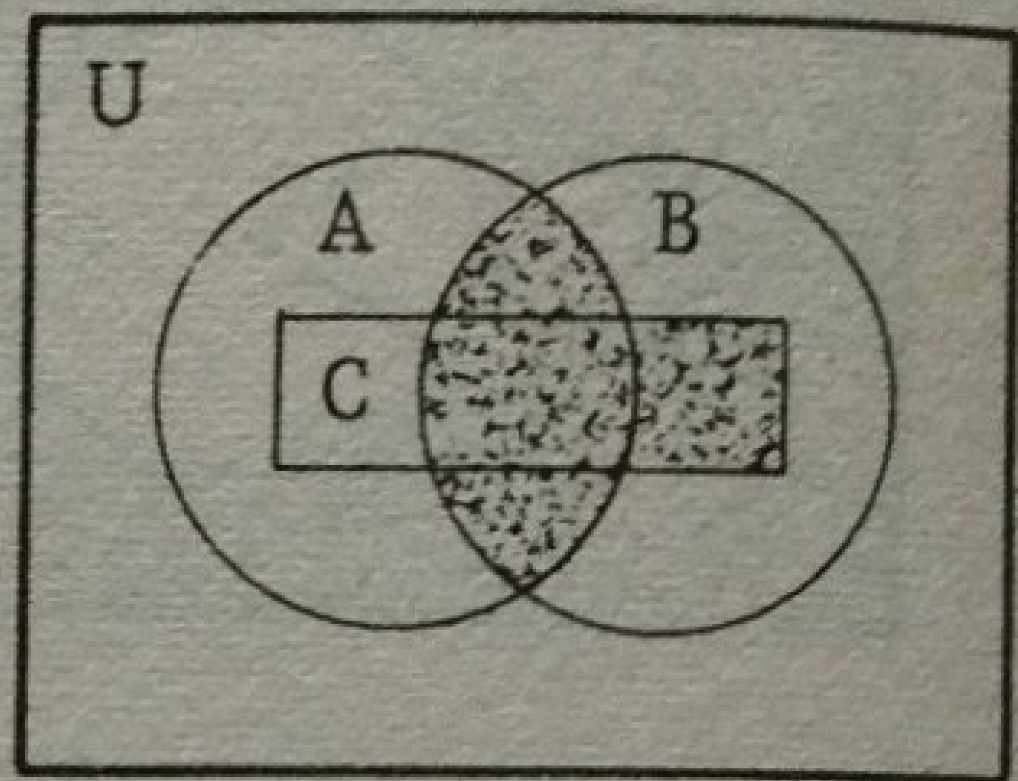
b)



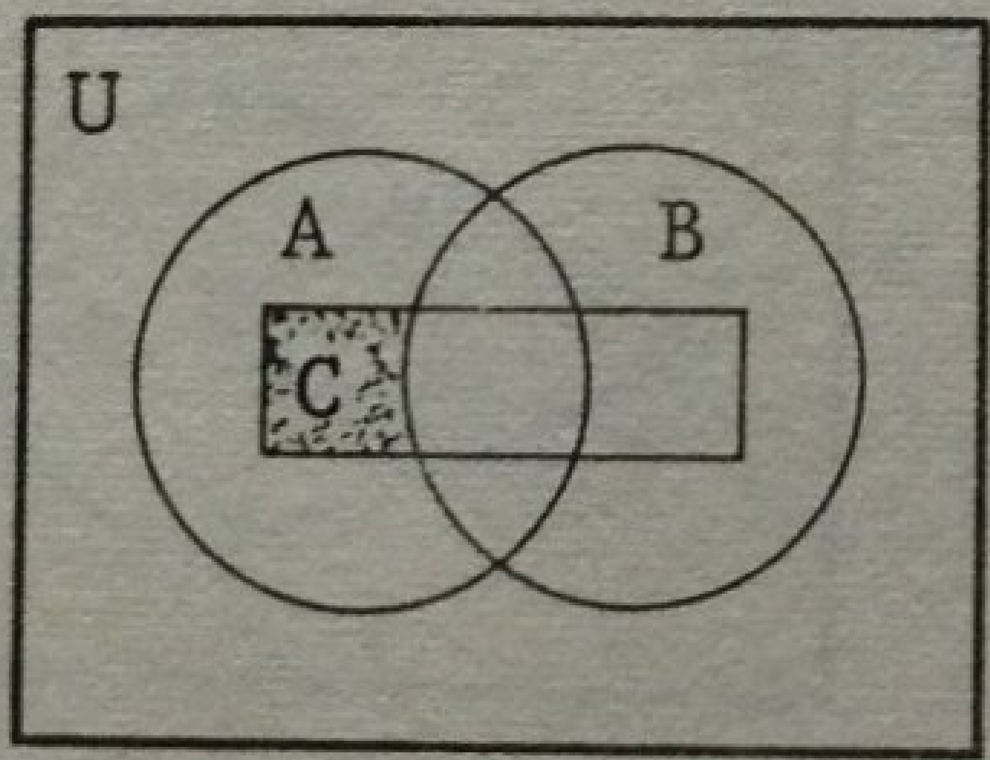
c)



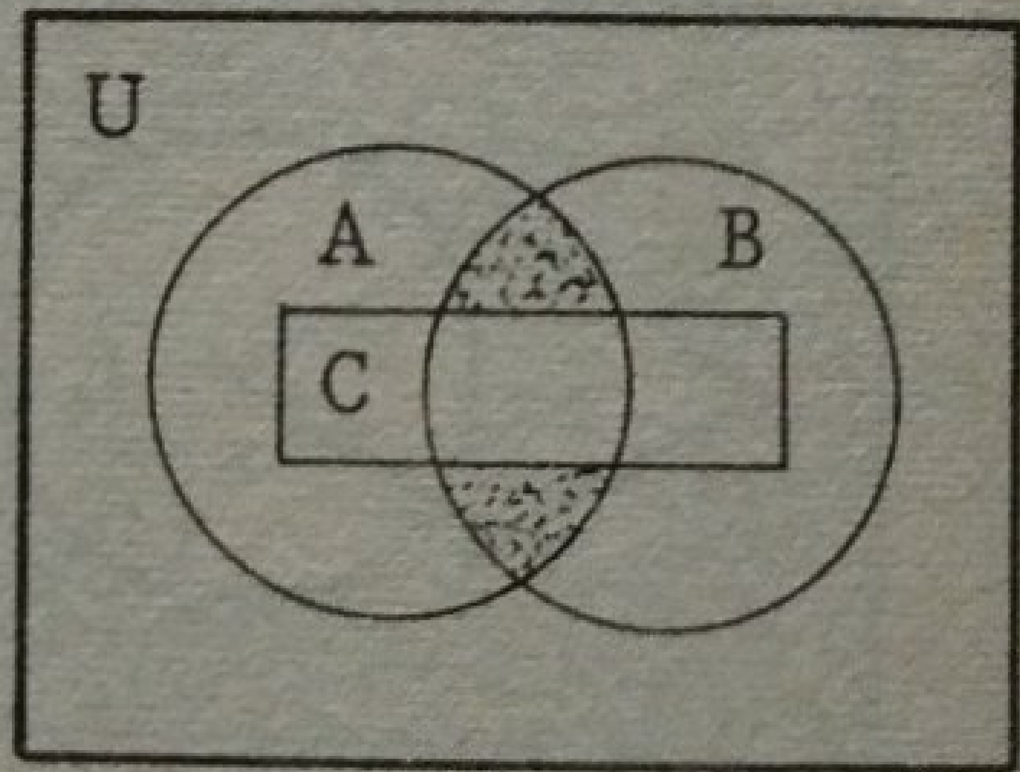
d)



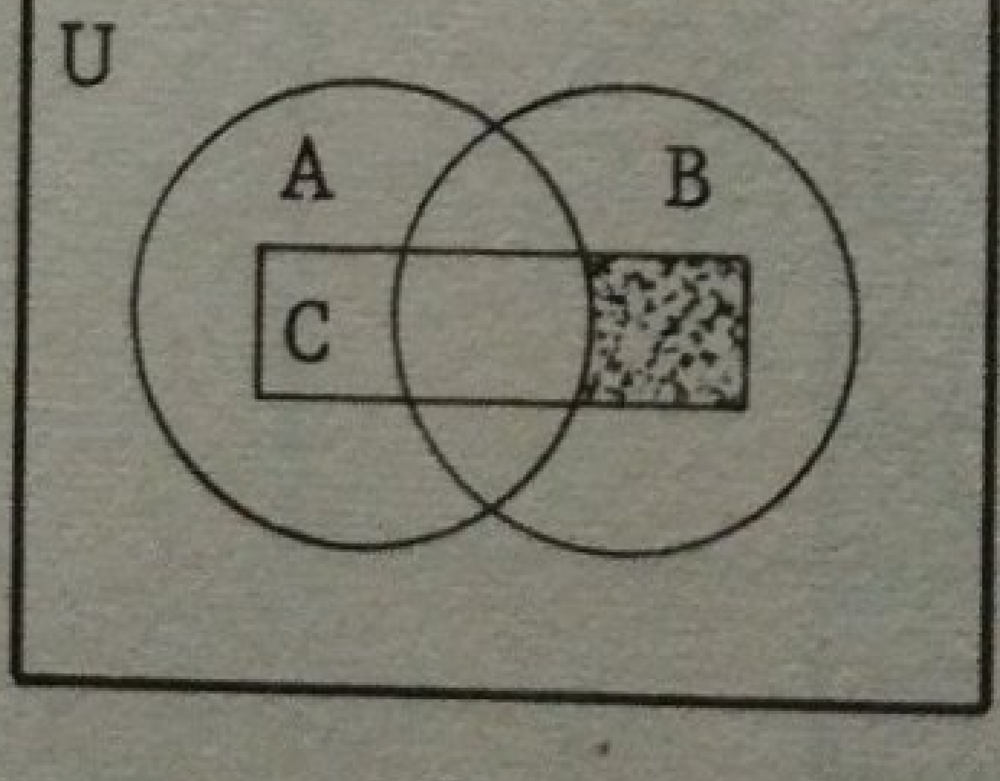
e)



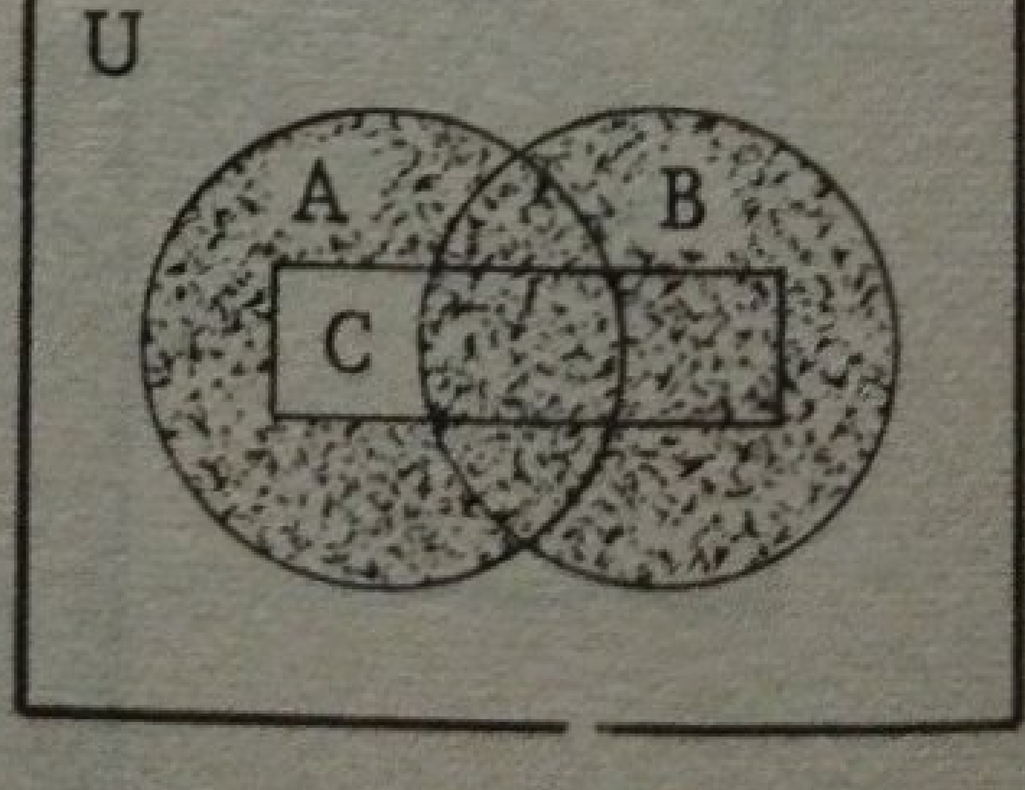
f)



g)

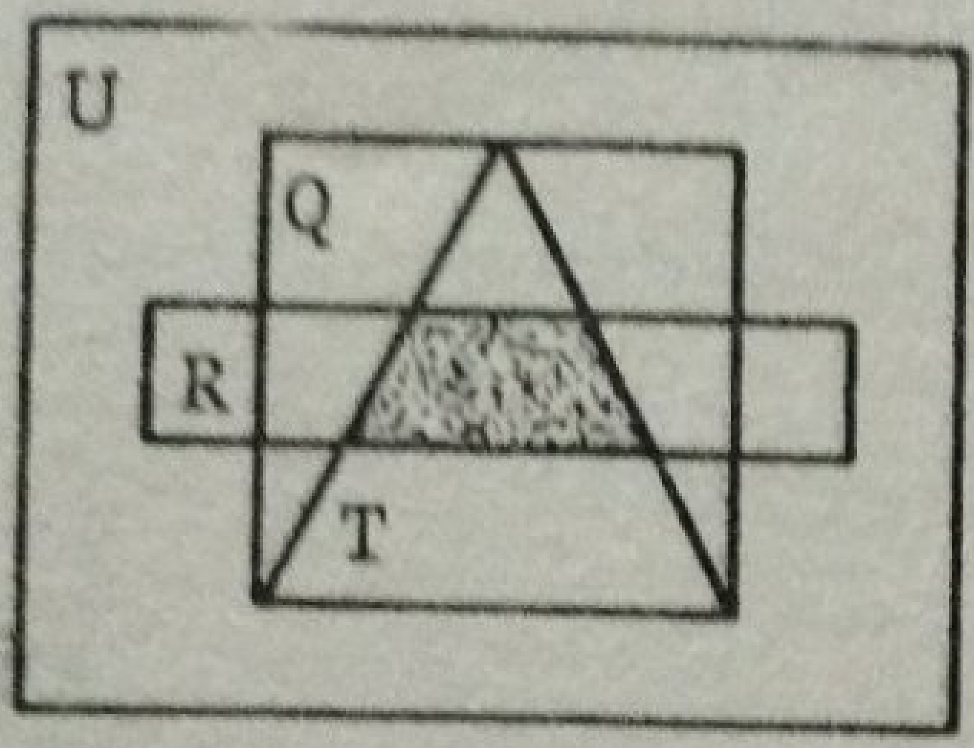


h)

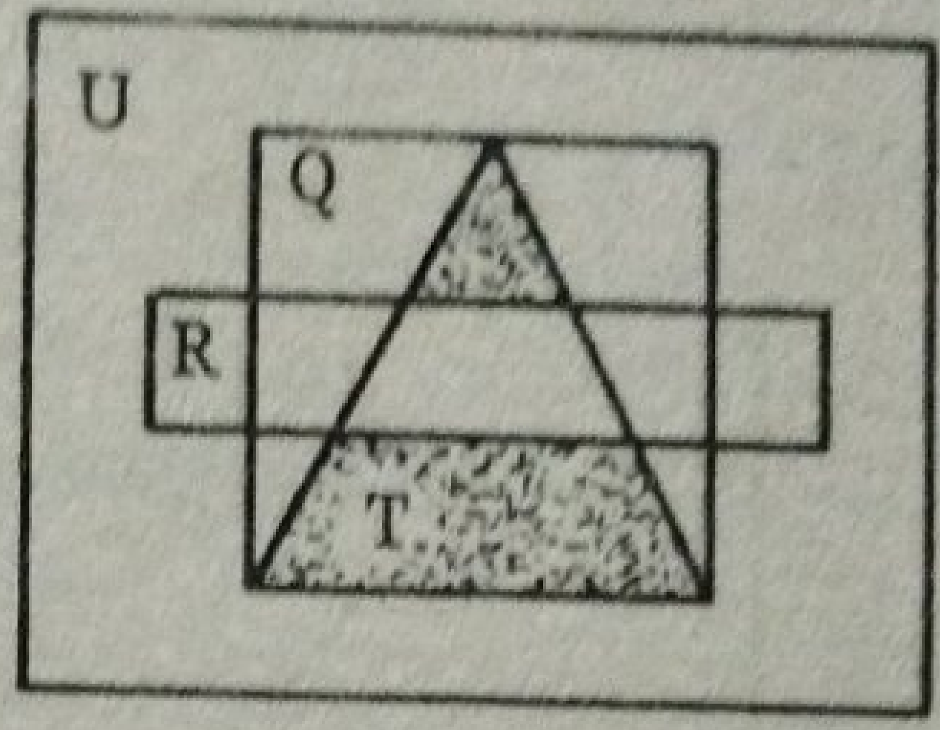


13)

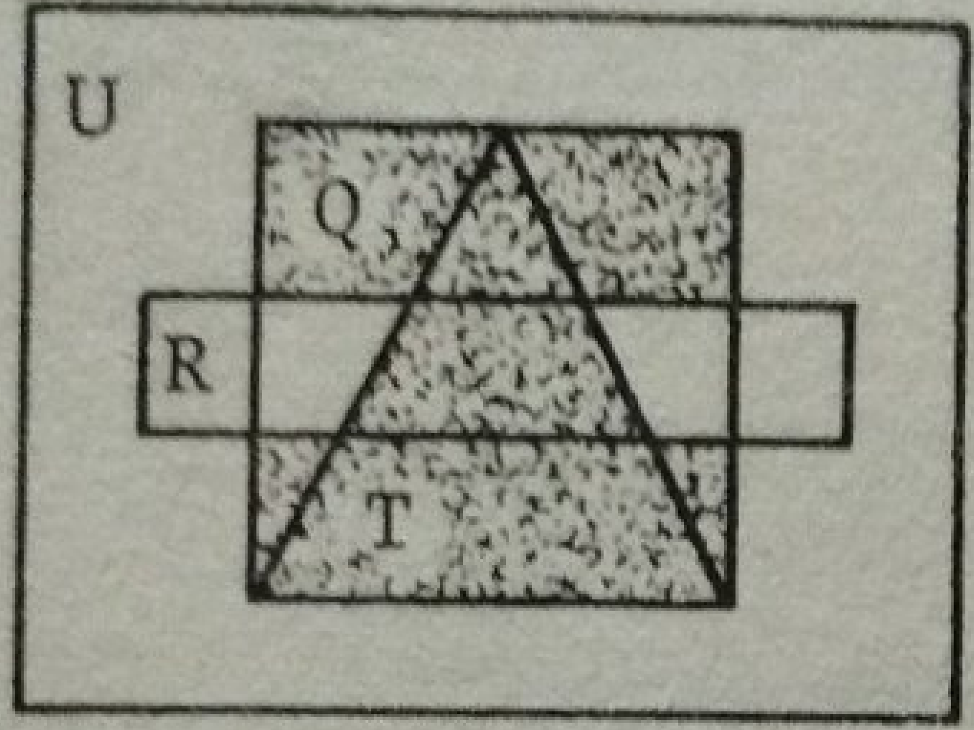
a)



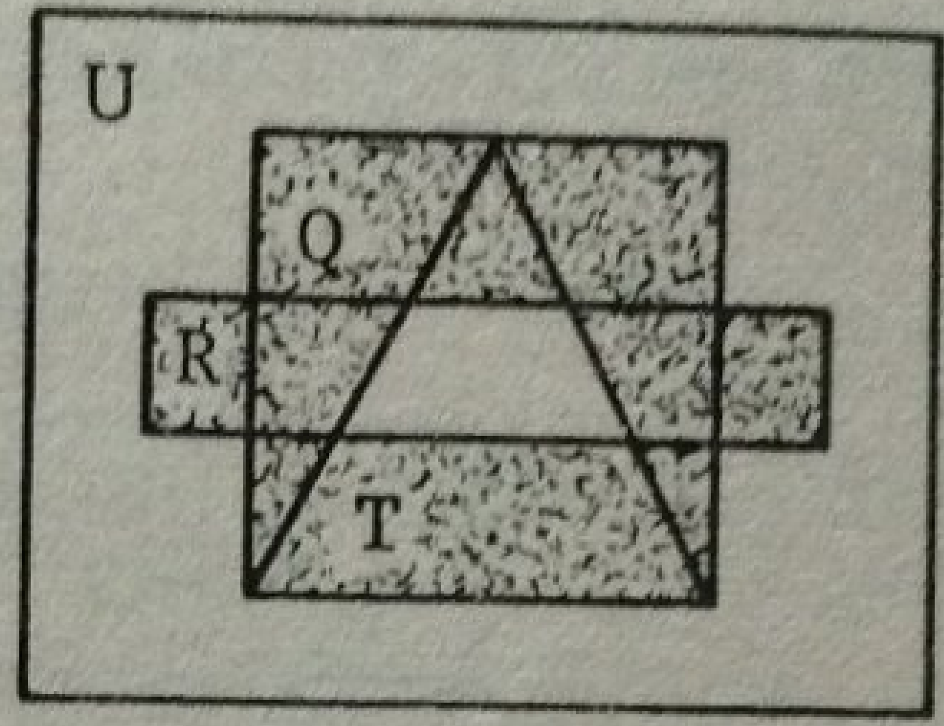
b)



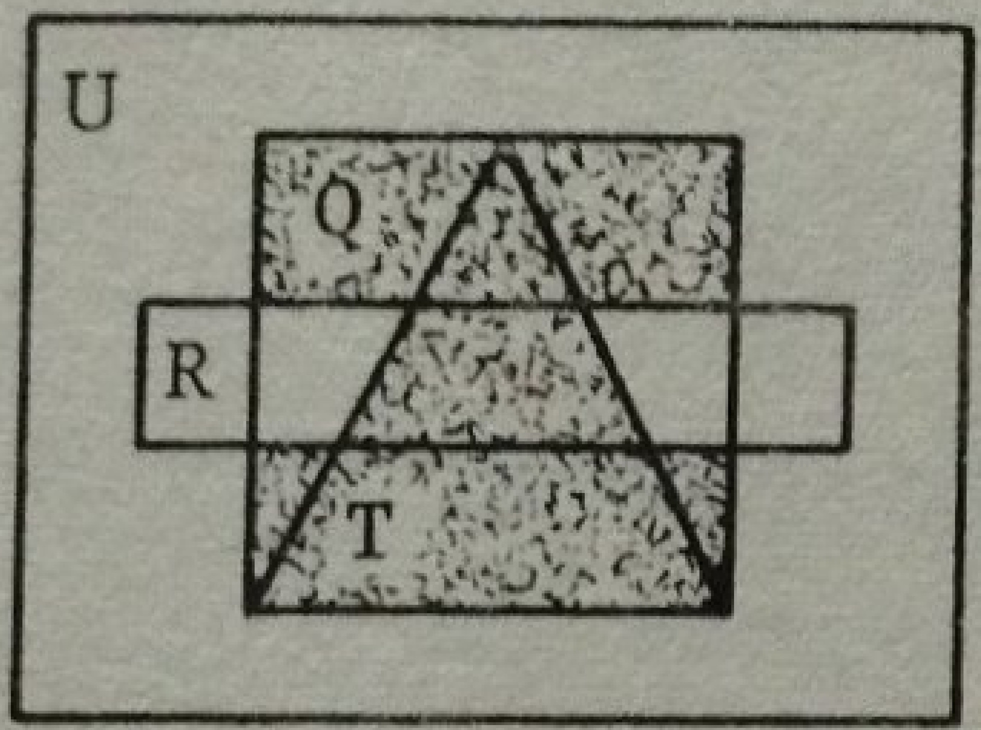
c)



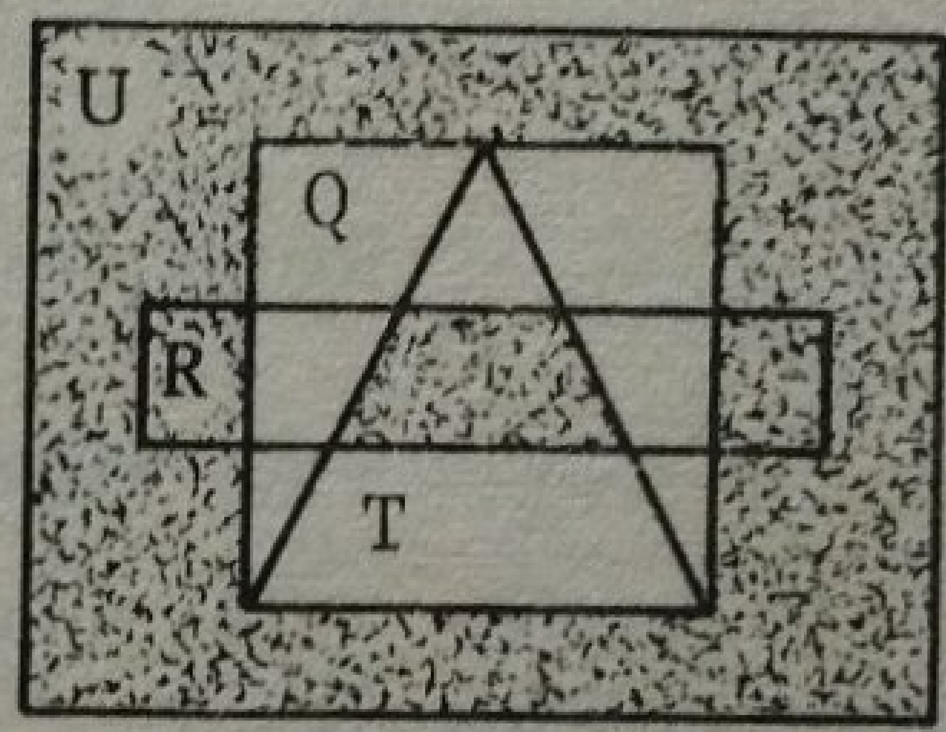
d)



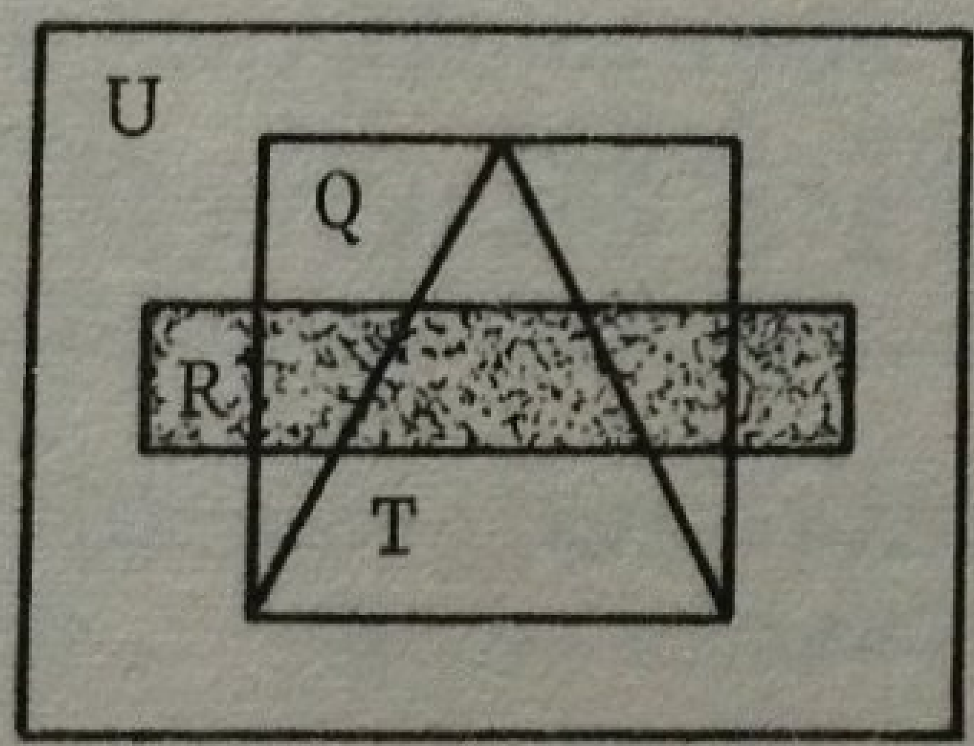
e)



f)



g)



3.9. INTERVALOS

Definição:

Intervalo fechado $[a,b]$ é o conjunto formado por todos os números $x \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq x \leq b$.

Os números a e b chamam-se extremos do intervalo e eles pertencem ao intervalo fechado.

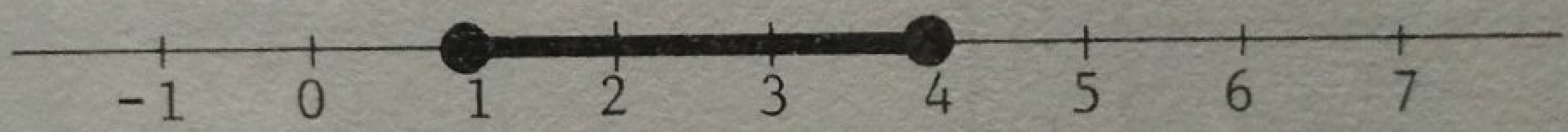
Em símbolos:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Exemplo:

$$[1,4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$$

Representação gráfica:



Definição:

Intervalo aberto (a,b) é o conjunto formado por todos os números $x \in \mathbb{R}$ tais que $a < x < b$.

Os extremos a e b não pertencem ao intervalo aberto.

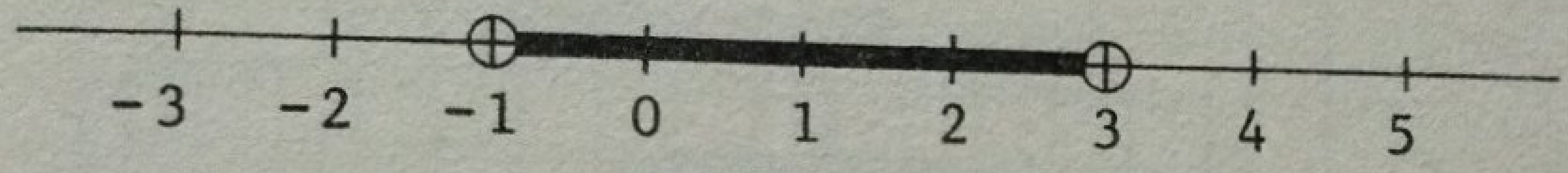
Em símbolos:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Exemplo:

$(-1,3) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$

Representação gráfica:



Outros tipos de Intervalos:

1) Intervalo fechado à esquerda ou aberto à direita

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

2) Intervalo aberto à esquerda ou fechado à direita

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

3) Intervalos ilimitados

1) $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

2) $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

3) $(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

4) $(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

5) $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$

3.10. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS SOBRE OPERAÇÕES COM INTERVALOS

1) Dados os intervalos $A = [-4, 1)$ e $B = (-2,3)$, determinar:

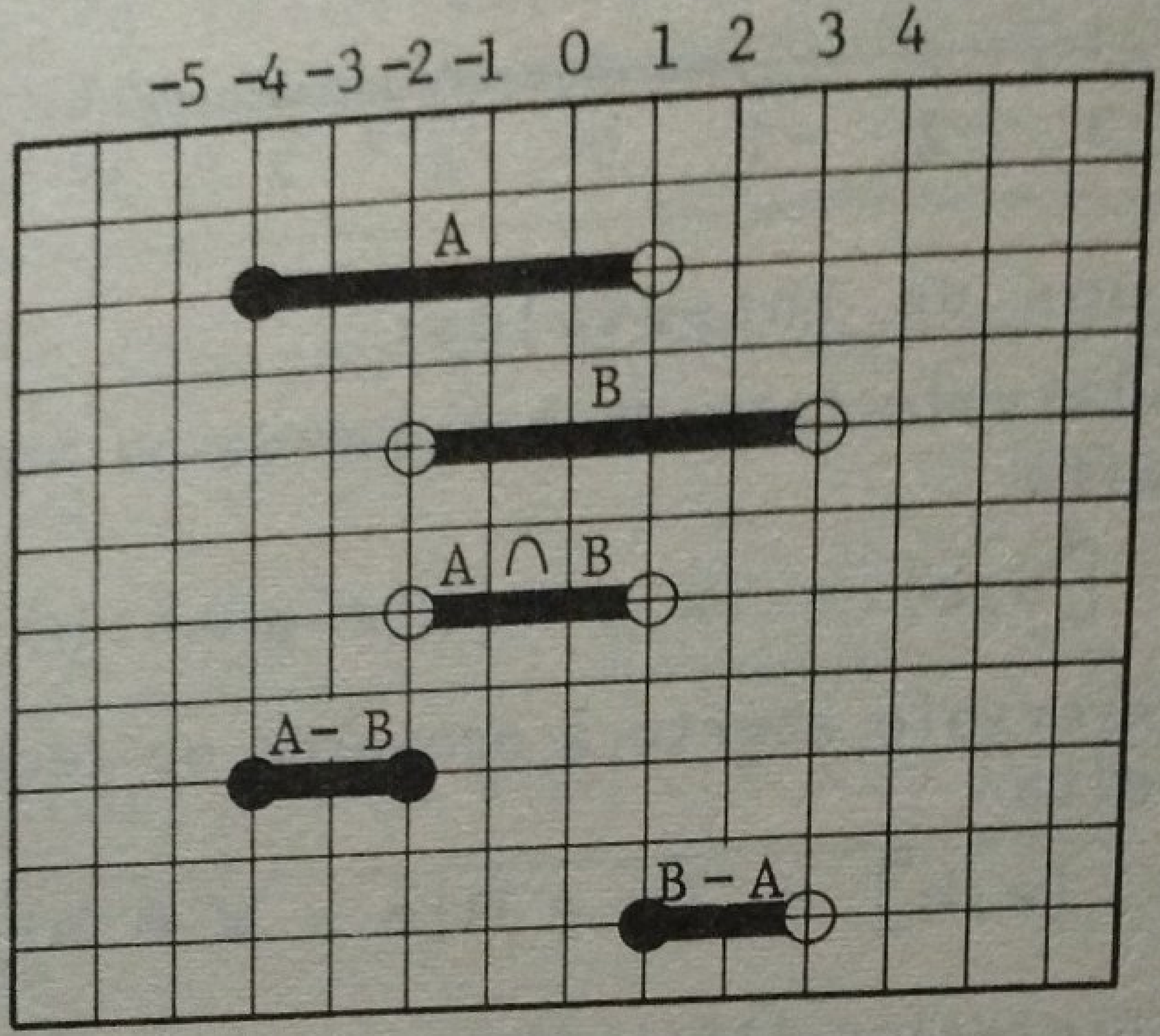
a) $A \cap B$

b) $A - B$

c) $B - A$

Resolução:

A representação gráfica, a seguir, dá a solução:



a) $A \cap B = (-2,1)$

b) $A - B = [-4,-2]$

c) $B - A = [1,3)$

2) Dados os conjuntos $U = [-4,+\infty)$ (conjunto universo), $A = (-2,3]$ e $B = [0,5)$, determinar:

a) A'

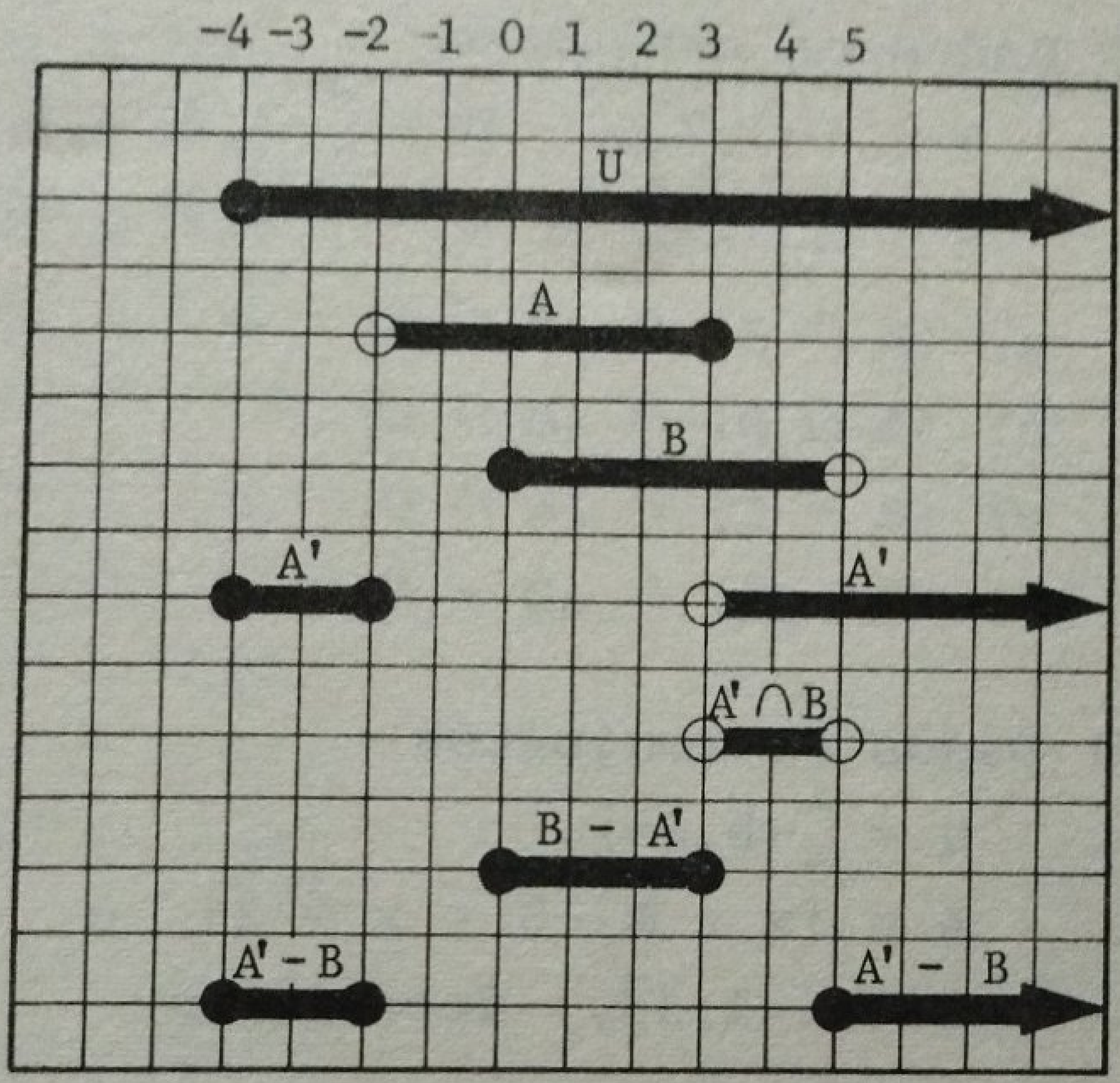
b) $A' \cap B$

c) $B - A'$

d) $A' - B$

Resolução:

Pelo gráfico, tem-se que:



a) $A' = [-4,-2] \cup (3,+\infty)$

b) $A' \cap B = (3,5)$

c) $B - A' = [0,3]$

d) $A' - B = [-4,-2] \cup [5,+\infty)$

3.11. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Dados os intervalos $A = [-3,1)$ e $B = (-1,2]$, determinar:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A - B$

d) $B - A$

2) Dados os conjuntos

$A = (-3,2]$, $B = [-2,4)$,

$C = [-4,0]$ e $D = (-3,3)$, calcular:

a) $(A \cap B) \cap (C \cap D)$

b) $(A \cup D) \cap (B \cap C)$

c) $(B - C) \cap (A \cap D)$

d) $(B - A) \cap (D - C)$

3) Dados os conjuntos

$U = [-8,+\infty)$,

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 2\}$ e

$B = (-1,4]$, determinar:

a) $A' \cap B$

b) $B - A$

c) $A - B$

d) $B' \cap A$

e) $A' - B'$

f) $B' - A'$

g) $A - B'$

h) $B - A'$

i) $B \cap A'$

j) $A \cap B'$

l) $A' - B$

m) $B' - A$

4) Dados os conjuntos

$U = (-\infty,20]$, $A = [-5,1)$ e $B = (-2,6]$,

calcular:

a) $A \cap B$

b) $B - A$

c) $B \cap A'$

d) $A - B'$

e) $B' - A'$

f) $A \cup B$

g) $A - B$

h) $A \cap B'$

i) $B - A'$

j) $A' - B'$

3.12. RESPOSTAS

1) a) $[-3,2]$

b) $(-1,1)$

c) $[-3,-1]$

d) $[1,2]$

2) a) $[-2,0]$

b) $[-2,0]$

c) $(0,2]$

d) $(2,3)$

3) a) $(2,4]$

b) $(2,4]$

c) $(-5,-1]$

d) $(-5,-1]$

e) $(2,4]$

f) $(-5,-1]$

g) $(-1,2]$

h) $(-1,2]$

i) $(2,4]$

j) $(-5,-1]$

l) $[-8,-5] \cup (4,+\infty)$

m) $[-8,5] \cup (4,+\infty)$

4) a) $(-2,1)$

b) $[1,6]$

c) $[1,6]$

d) $(-2,1)$

e) $[-5,-2]$

f) $[-5,6]$

g) $[-5,-2]$

h) $[-5,-2]$

i) $(-2,1)$

j) $[1,6]$

Capitulo IV

4.1. PAR ORDENADO

Definição:

Par ordenado são dois elementos, x e y, no qual x é considerado como o 1º elemento e y como o 2º elemento.

Representa-se: (x,y).

Igualdade:

Dois pares ordenados (x,y) e (u,v) são iguais se, e somente se, $x = u$ e $y = v$.

Em símbolos:

$$\boxed{(x,y) = (u,v) \iff x = u \text{ e } y = v}$$

4.2. PRODUTO CARTESIANO DE 2 CONJUNTOS

Definição:

Produto cartesiano de 2 conjuntos A e B não vazios é o conjunto cujos elementos são todos os pares ordenados (x,y) onde $x \in A$ e $y \in B$.

Lê-se: A por B ou A vezes B.

Em símbolos:

$$\boxed{A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}}$$

Exemplos:

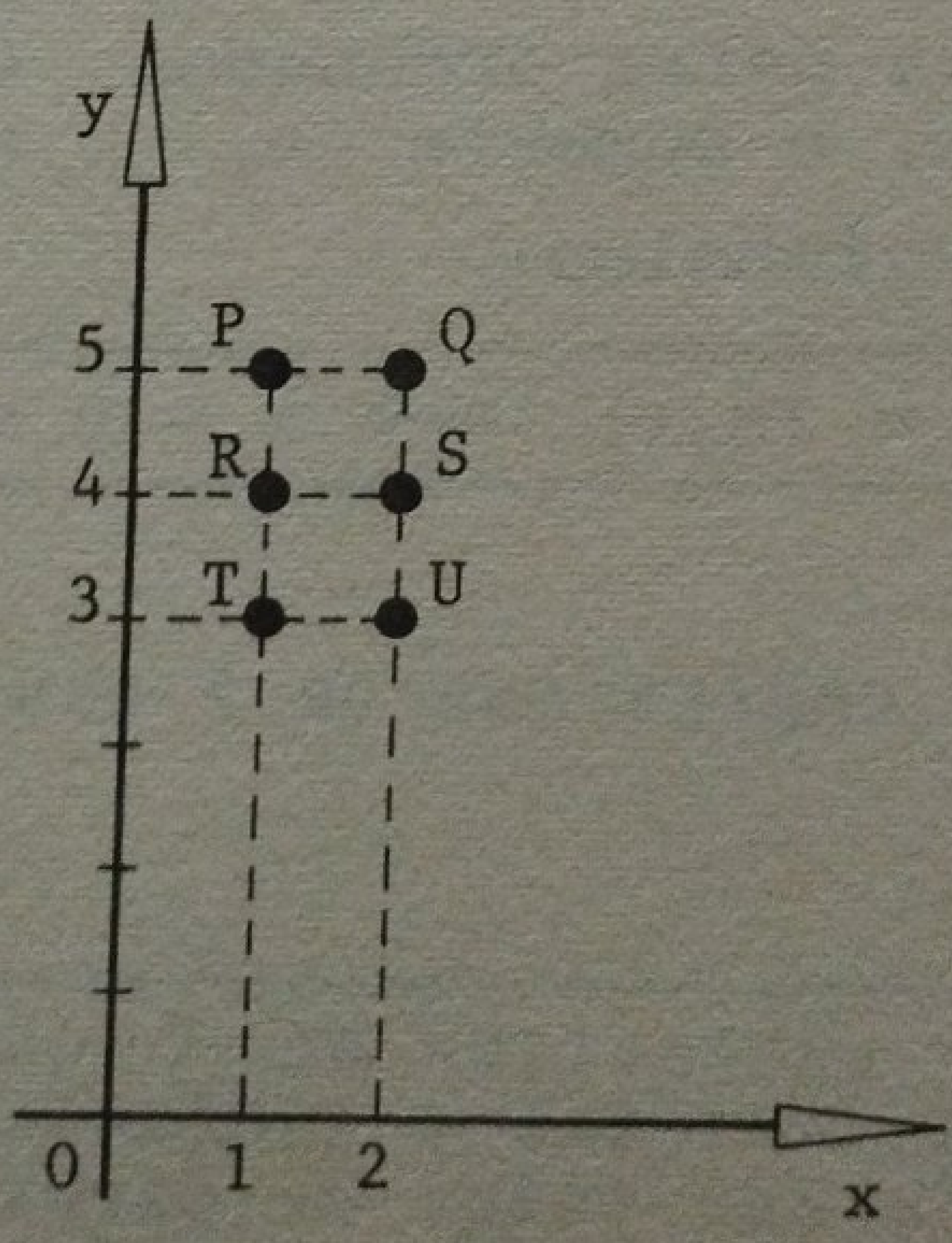
1º) Se $A = \{1,2\}$ e $B = \{3,4,5\}$ então:

$A \times B = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$

Colocando os elementos desse produto num quadro de dupla entrada, tem-se:

A \ B	3	4	5
1	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,3)	(2,4)	(2,5)

A representação gráfica cartesiana desse mesmo produto são os pontos P, Q, R, S, T e U.



2º) Se $A = \{3,4,5,6\}$ e $B = \{1,2,3\}$, os elementos de $A \times B$ num quadro de dupla entrada são:

A \ B	1	2	3
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)

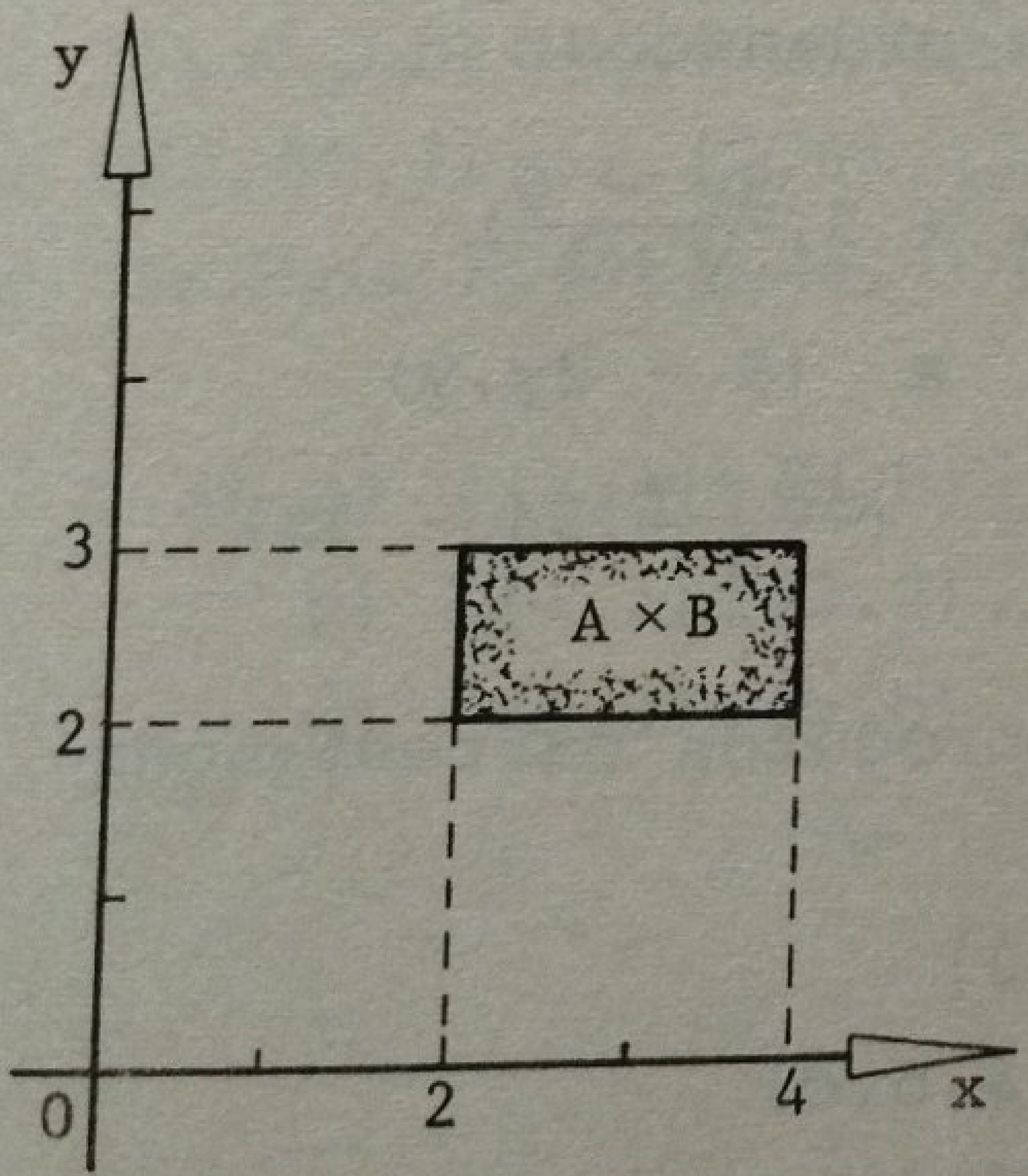
3º) Sejam os conjuntos:

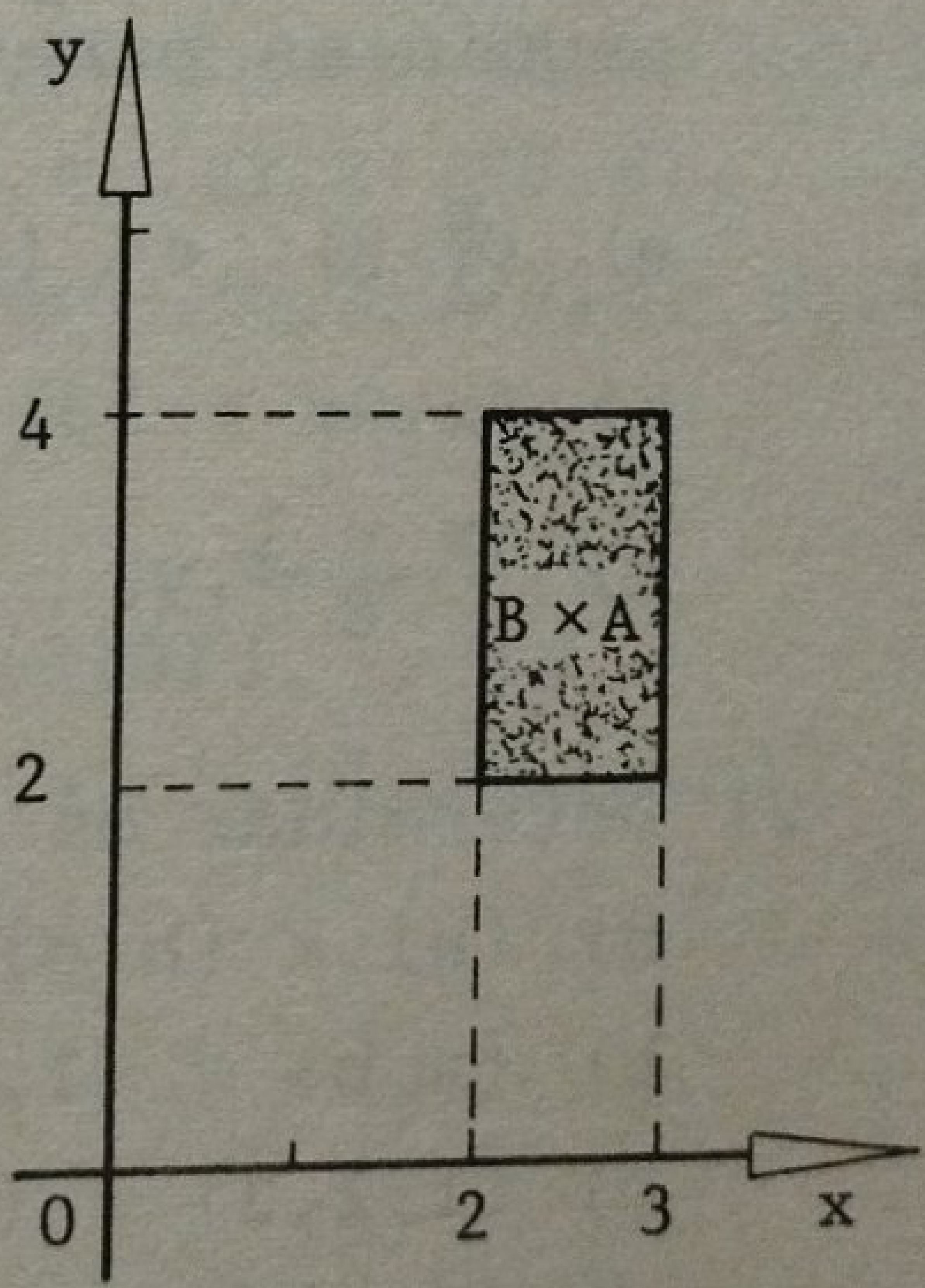
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y \leq 3\}$

e

$A \times B = \{(x,y) \mid 2 \leq x \leq 4 \text{ e } 2 \leq y \leq 3\}$

$B \times A = \{(x,y) \mid 2 \leq x \leq 3 \text{ e } 2 \leq y \leq 4\}$





Vê-se então, que esse produto cartesiano não é comutativo.

Observação:

Quando $A = B$ o produto cartesiano $A \times A$ representa-se por A^2 e o subconjunto

$$\boxed{\{(x,y) \in A \times A \mid x = y\}}$$

denomina-se DIAGONAL DE A^2.

Por exemplo, se $A = \{2,7\}$, então:

$$A \times A = A^2 = \{(2,2),(2,7),(7,2),(7,7)\}$$

e a diagonal de A^2 é:

$$\{(2,2),(7,7)\}.$$

4.3. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Calcular x e y para que sejam iguais os seguintes pares ordenados:

a) $(\frac{x}{2},3)$ e $(x + 3, \frac{5y - 5}{y + 1})$

b) $(x, 3x - 13)$ e $(9 - 2y, y)$

c) $(\frac{x - 1}{8}, y)$ e $(\frac{12 - y}{5}, 34 - 3x)$

2) Determinar os produtos cartesianos:

a) $\{a\} \times \{b,c\}$

b) $\{a,b\} \times \{1,2\}$

c) $\{1,2,3\} \times \{a,b,c\}$

d) $\{2,3\} \times \{4,5,6\}$

e) $\{a,b\} \times \{1,2,3,4\}$

3) Calcular a diagonal de A^2 nos conjuntos:

a) $A = \{a,b\}$

b) $A = \{1,2,3\}$

c) $A = \{a,b,c,d,e\}$

4.4. RESPOSTAS

1) a) $x = -6$ e $y = 4$

b) $x = 5$ e $y = 2$

c) $x = 9$ e $y = 7$

2)

a) $\{(a,b),(a,c)\}$

b) $\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$

c) $\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$

d) $\{(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)\}$

e) $\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4)\}$

3) a) $\{(a,a),(b,b)\}$

b) $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

c) $\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$

Capítulo V

RELAÇÕES COMO SUBCONJUNTOS DE PRODUTOS CARTESIANOS

5.1. DEFINIÇÃO GERAL - RELAÇÃO BINÁRIA DE A EM B

Relação binária entre os elementos de dois conjuntos A e B não vazios é qualquer subconjunto R do produto cartesiano A x B.

Em símbolos:

$$\boxed{R \subseteq A \times B}$$

ou

$$\boxed{(x,y) \in R \Longrightarrow (x,y) \in A \times B}$$

Exemplo:

Sendo $A = \{2\}$ e $B = \{a,b\}$ então:

$$A \times B = \{(2,a),(2,b)\}$$

São relações binárias de A em B os subconjuntos de $A \times B$:

$R_1 = \emptyset$, $R_2 = \{(2,a)\}$, $R_3 = \{(2,b)\}$ e $R_4 = A \times B$

Relação Binária em A - Definição:

Relação binária em A é a relação binária R em que A = B.

5.2. SENTENÇA ABERTA

SENTENÇA ABERTA é aquela em que há valor incógnito.

Exemplo:

a) $x + 3 = 5$.

b) x é número natural ímpar de 1 algarismo.

CONJUNTO VERDADE de uma sentença aberta é o conjunto de todos os elementos que tornam a sentença verdadeira.

Os conjuntos verdade dos exemplos anteriores são:

a) $\{2\}$

b) $\{1,3,5,7,9\}$

SENTENÇA FECHADA é aquela em que não há nenhum valor incógnito.

Exemplos:

a) $7 - 4 = 3$

b) $5 > 1$

5.3. RELAÇÃO BINÁRIA DE A EM B DADA POR UMA SENTENÇA ABERTA S

Definição:

Relação binária de A em B dada por uma sentença aberta S é o subconjunto R de todos os pares ordenados do produto cartesiano A x B que satisfazem a S.

Simbolicamente:

$$\boxed{R = \{(x,y) \in A \times B \mid S(x,y) \text{ é verdadeira}\}}$$

Se $(x,y) \in R$, usa-se a notação $x\,R\,y$, que se lê: "x, R, y". Isso indica que o elemento "x" está na relação R com o elemento "y".

Então: $(x,y) \in R \iff x\,R\,y$

Caso contrário, isto é:

$$(x,y) \notin R \iff x\,R\,y$$

que se lê: "x, não R, y".

Exemplos:

1º) Sejam os conjuntos $A = \{2,3\}$ e $B = \{1,2,3\}$ em que $x \in A$ e $y \in B$ e seja a sentença aberta: $x + y = 4$.

Sabe-se que:

$$A \times B = \{(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

e

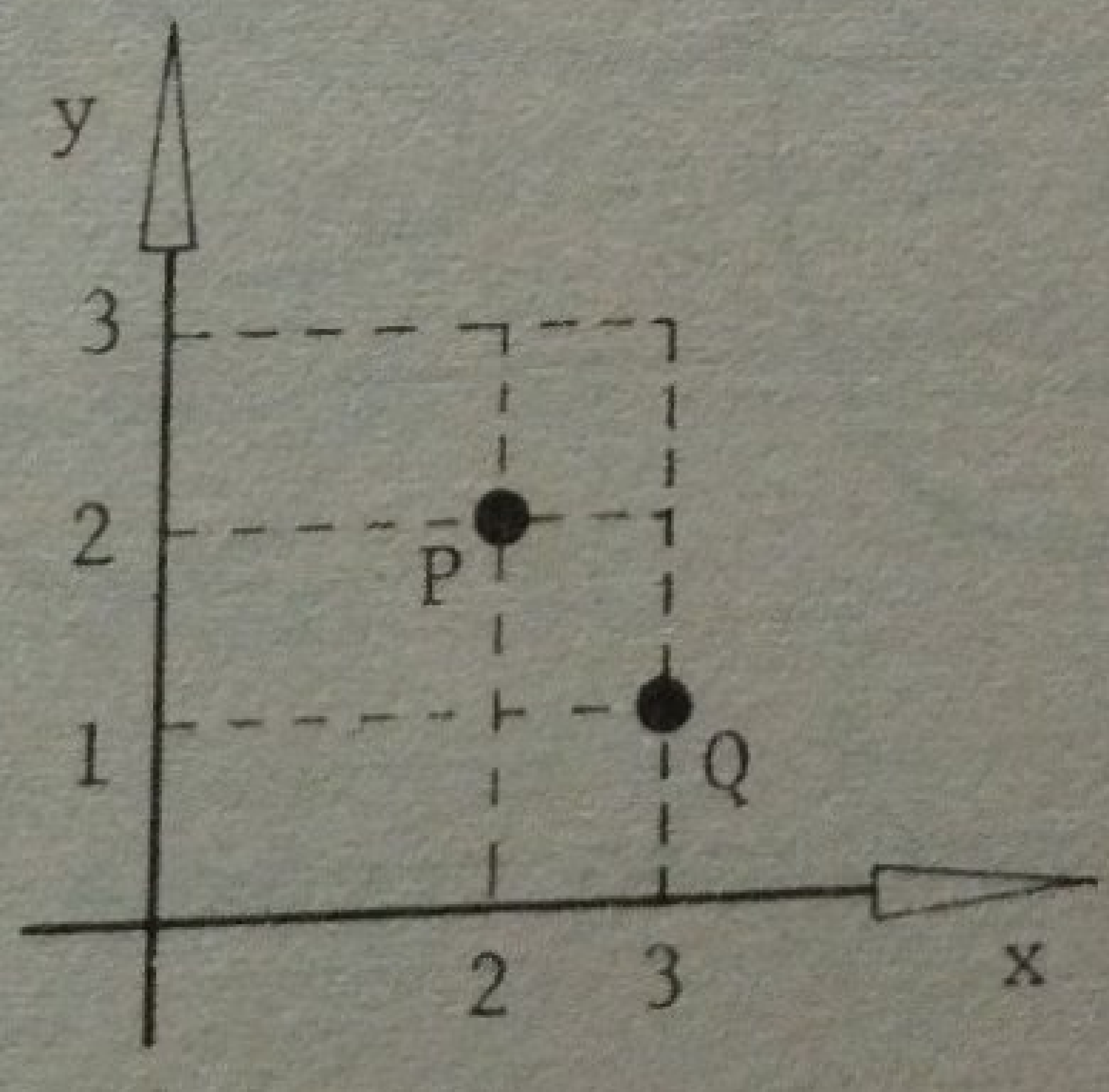
$$R = \{(2,2),(3,1)\}$$

Neste exemplo:

$$(3,1) \in R \iff 3\,R\,1$$

$$(3,3) \notin R \iff 3\,R\,3$$

O gráfico dessa relação binária são os pontos P e Q do diagrama do produto de $A \times B$.



2º) Sejam os conjuntos A = {2,3,5} e B = {3,4,6,7,10} em que x ε A e y ε B e seja a sentença aberta:

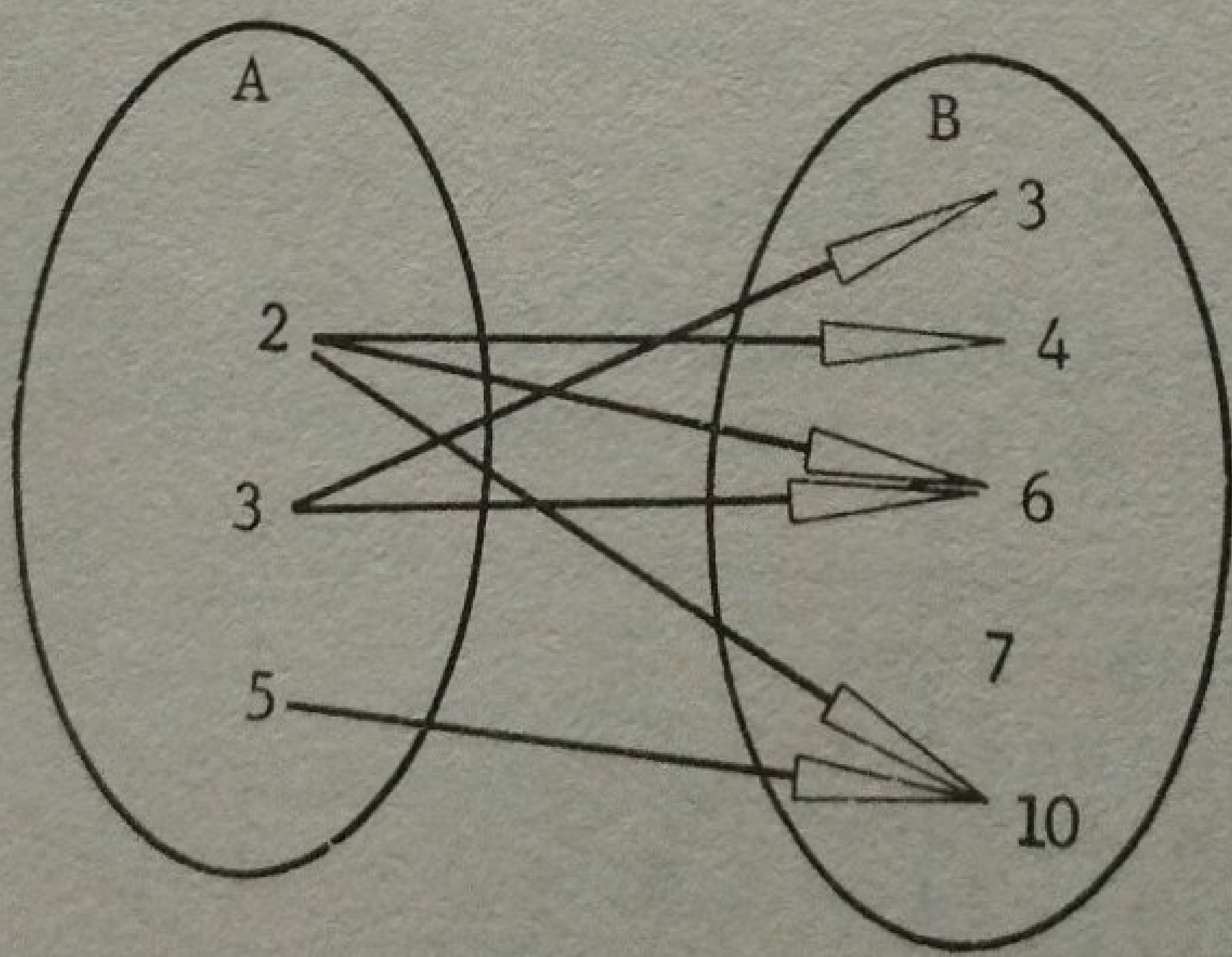
$\frac{y}{x}$ = nº natural (x é dividido de y)

Considerando os elementos do produto cartesiano A × B, numa tabela de dupla entrada, vem:

A \ B	3	4	6	7	10
2	(2,3)	(2,4)	(2,6)	(2,7)	(2,10)
3	(3,3)	(3,4)	(3,6)	(3,7)	(3,10)
5	(5,3)	(5,4)	(5,6)	(5,7)	(5,10)

R = {(2,4),(2,6),(2,10),(3,3),(3,6),(5,10)}

Essa relação binária R de A em B, pode também ser representada por flechas:

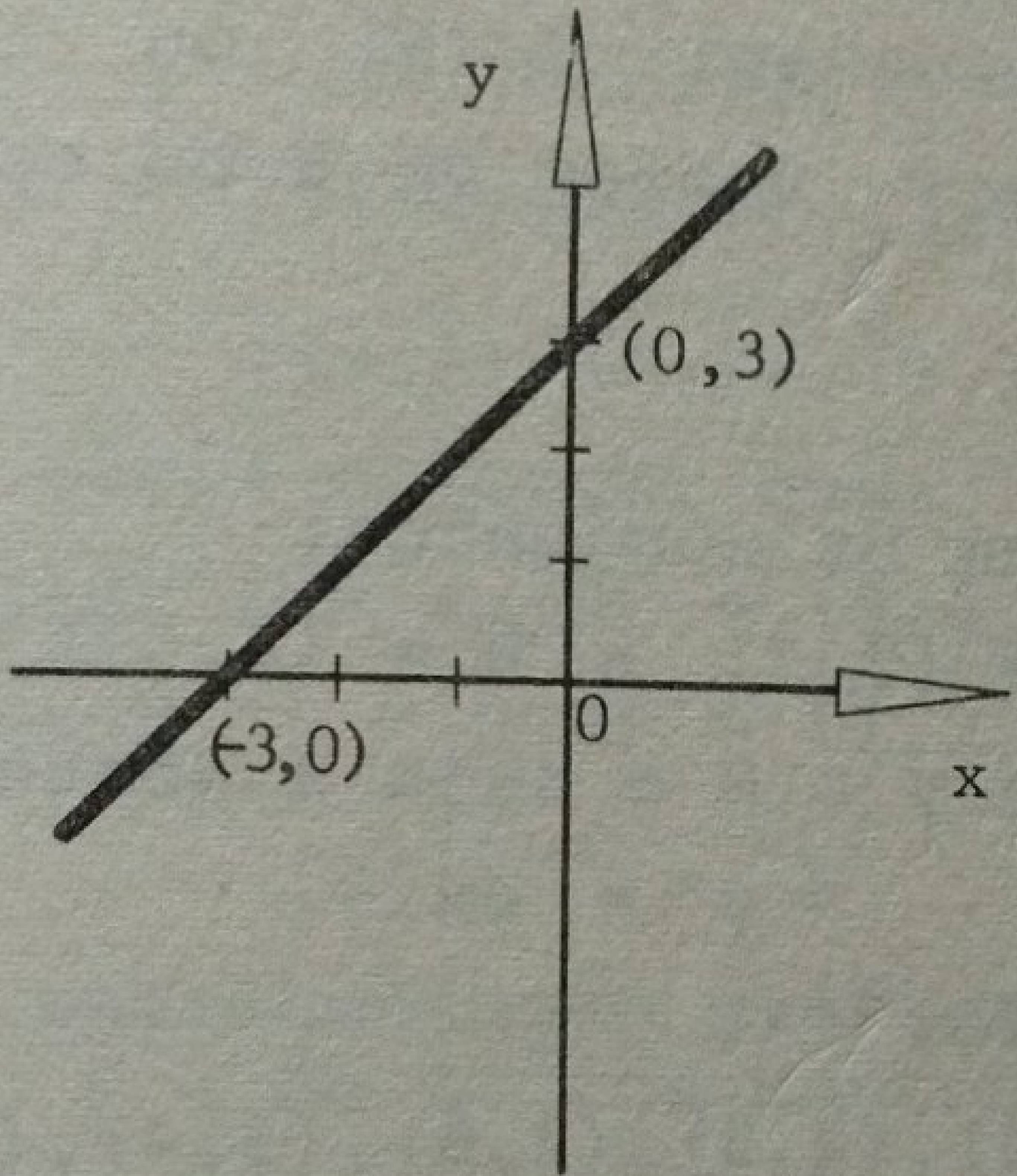


3º) Seja a relação binária R definida por:

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x + 3\}$$

onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.

Neste exemplo o produto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ representa o próprio plano cartesiano e a relação binária R, uma reta desse plano que passa pelos pontos (0,3) e (-3,0).



5.4. DOMÍNIO E IMAGEM DE UMA RELAÇÃO BINÁRIA

Definição:

> Domínio de uma relação binária é o conjunto de todos os primeiros elementos dos pares ordenados que pertencem ao conjunto R.

Escreve-se: D(R).

Lê-se: domínio de R.

Definição:

> Imagem (contradomínio) de uma relação binária é o conjunto de todos os segundos elementos dos pares ordenados que pertencem ao conjunto R.

Escreve-se: $Im(R)$ ou $C(R)$.

Lê-se: imagem de R ou contradomínio de R.

Exemplo:

Sejam os conjuntos:

$$A = \{2,3\} \text{ e } B = \{4,5,6\}$$

em que $x \in A$ e $y \in B$ e seja a sentença aberta:

$$y = 2x.$$

Então:

$$A \times B = \{(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)\}$$

e

$$R = \{(2,4),(3,6)\}$$

$$D(R) = \{2,3\} \text{ e } Im(R) = \{4,6\}$$

5.5. RELAÇÃO INVERSA OU RELAÇÃO RECÍPROCA

Definição:

> Relação inversa de uma relação binária R de A em B, é o conjunto de todos os pares ordenados (y,x) tais que $(x,y) \in R$.

Representa-se por R^{-1}.

Simbolicamente:

$$\boxed{R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}}$$

Exemplo:

Seja a relação binária R de $A = \{1,2,3,4,5\}$ em $B = \{1,2,3,4,6,9\}$ definida por $y = 3x$. Então:

$$R = \{(1,3),(2,6),(3,9)\}$$

e

$$R^{-1} = \{(3,1),(6,2),(9,3)\}$$

É fácil observar que:

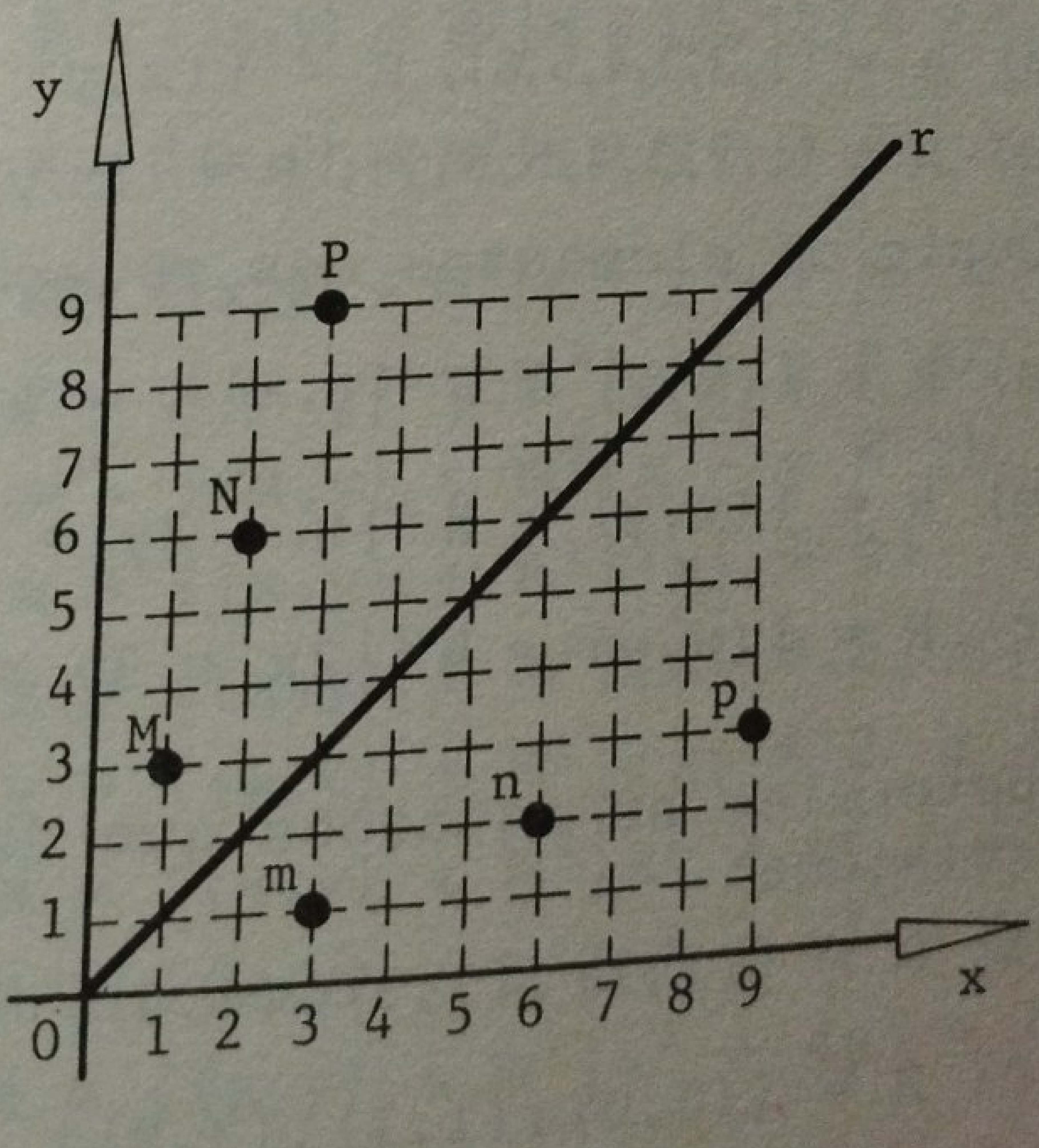
$$D(R^{-1}) = I_m(R) = \{3,6,9\}$$

$$I_m(R^{-1}) = D(R) = \{1,2,3\}$$

e que:

$$(R^{-1})^{-1} = R$$

A representação gráfica de R são os pontos M, N, P e de R^{-1} os pontos m, n, p.



Observa-se que os pontos de R são simétricos, em relação à reta r, aos pontos de R^{-1}.

5.6. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nos exercícios aqui propostos $x \in A$ e $y \in B$.

1) Quais as relações de A em B:

a) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,3,4\}$, $R = \{(x,y) \mid x > y\}$

b) $A = \{6,12,16,22,24\}$, $B = \{4,5,8\}$, $R = \{(x,y) \mid \frac{x}{y} \in \mathbb{N}\}$

c) $A = \{1,3,4,5\}$, $B = \{0,2,3,4\}$, $R = \{(x,y) \mid x + y = 5\}$

2) Quais as relações binárias em A:

a) $A = \{1,2,3,4\}$, $R = \{(x,y) \mid x = y\}$

b) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $R = \{(x,y) \mid x - y = 4\}$

c) $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $R = \{(x,y) \mid y = 2x - 3\}$

3) Quais os elementos das relações:

a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = 3 - x\}$

b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x + 2y = 5\}$

c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid 2x + 3y = 8\}$

4) Determine as equações que definem as relações:

a) $R = \{(1,1),(3,3),(4,4)\}$

b) $R = \{(0,0),(1,1),(3,9)\}$

c) $R = \{(-1,-3),(0,-2),(-3,-5)\}$

5) Determinar o domínio e a imagem das relações:

a) $R = \{(0,0),(1,5),(2,10)\}$

b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = 4 - 2x\}$

c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid 3x + 2y = 18\}$

6) Fazer o gráfico das relações:

a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}$

b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2\}$

c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 1\}$

d) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqq -2\}$

e) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 2\}$

f) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x + 2\}$

g) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,3] \text{ e } y \in [-2,2]\}$

h) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,-3] \text{ e } y \in [-1,-5]\}$

i) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 3 \text{ ou } x - y = 1\}$

j) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 3 \text{ e } x - y = 1\}$

k) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leqq 3\}$

l) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \leqq 1\}$

m) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geqq 3\}$

n) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geqq 2 \text{ e } |y| \geqq 2\}$

o) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqq 2 \text{ e } |y| \geqq 2\}$

p) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25\}$

q) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 25\}$

r) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 25\}$

s) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 4y^2 \geq 25\}$

t)

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 4y^2 \leq 25\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq x\}$

u)

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 25\} \cap \{(x,y) \in {}^2 | x \leq 2y\}$

v)

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq -x\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq x^2 - 2x - 3\}$

w) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = |x|\}$

x) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq |x|\}$

y) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x| + |y| = 4\}$

z) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x| + |y| \leq 4\}$

7) Quais as relações inversas das relações:

a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 | y = 3 - x\}$

b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 | y = \frac{5 - x}{2}\}$

c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 | 2x + 3y = 8\}$

5.7. RESPOSTAS

1) a) $\{(3,2),(4,2),(4,3)\}$

b) $\{(12,4),(16,4),(24,4),(16,8),(24,8)\}$

c) $\{(1,4),(3,2),(5,0)\}$

2) a) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

b) $\{(5,1),(6,2)\}$

c) $\{(2,1),(3,3),(4,5),(5,7)\}$

3) a) (0,3),(1,2),(2,1),(3,0)

b) (1,2),(3,1),(5,0)

c) (1,2),(4,0)

4) a) $y = x$

b) $y = x^2$

c) $y = x - 2$

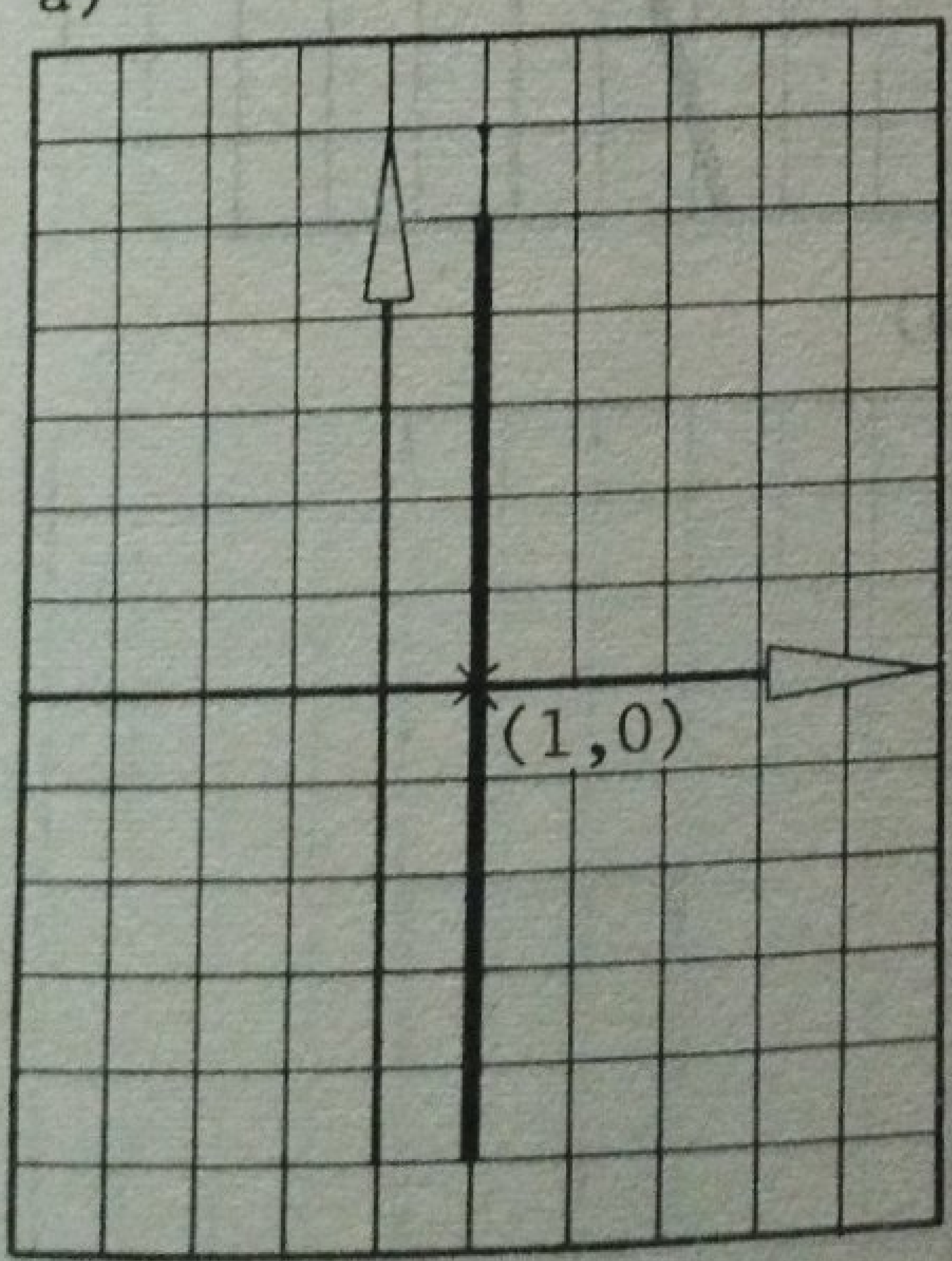
5) a) $D(R) = \{0,1,2\}$ e $I_m(R) = \{0,5,10\}$

b) $D(R) = \{0,1,2\}$ e $I_m(R) = \{4,2,0\}$

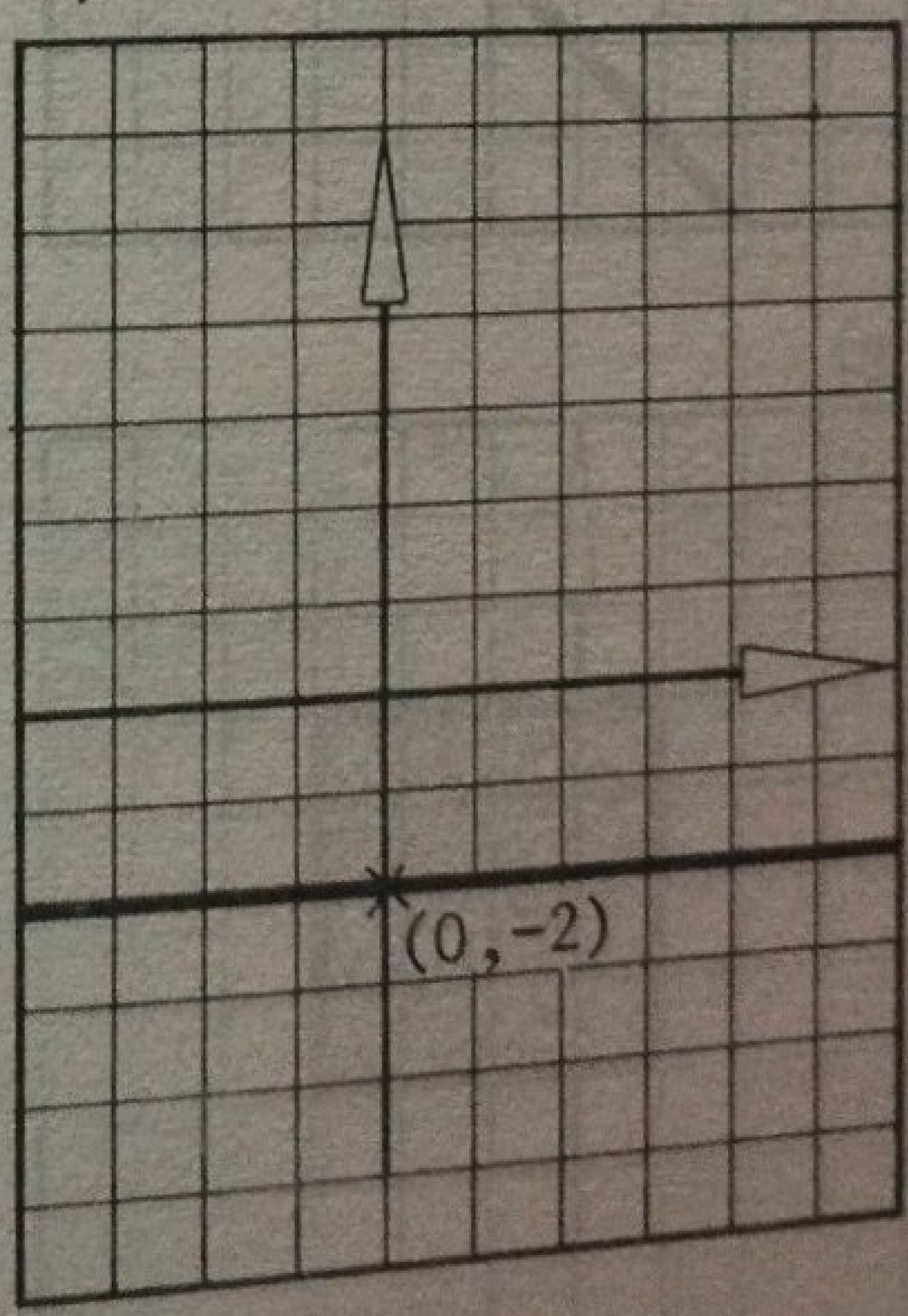
c) $D(R) = \{0,2,4,6\}$ e $I_m(R) = \{9,6,3,0\}$

6)

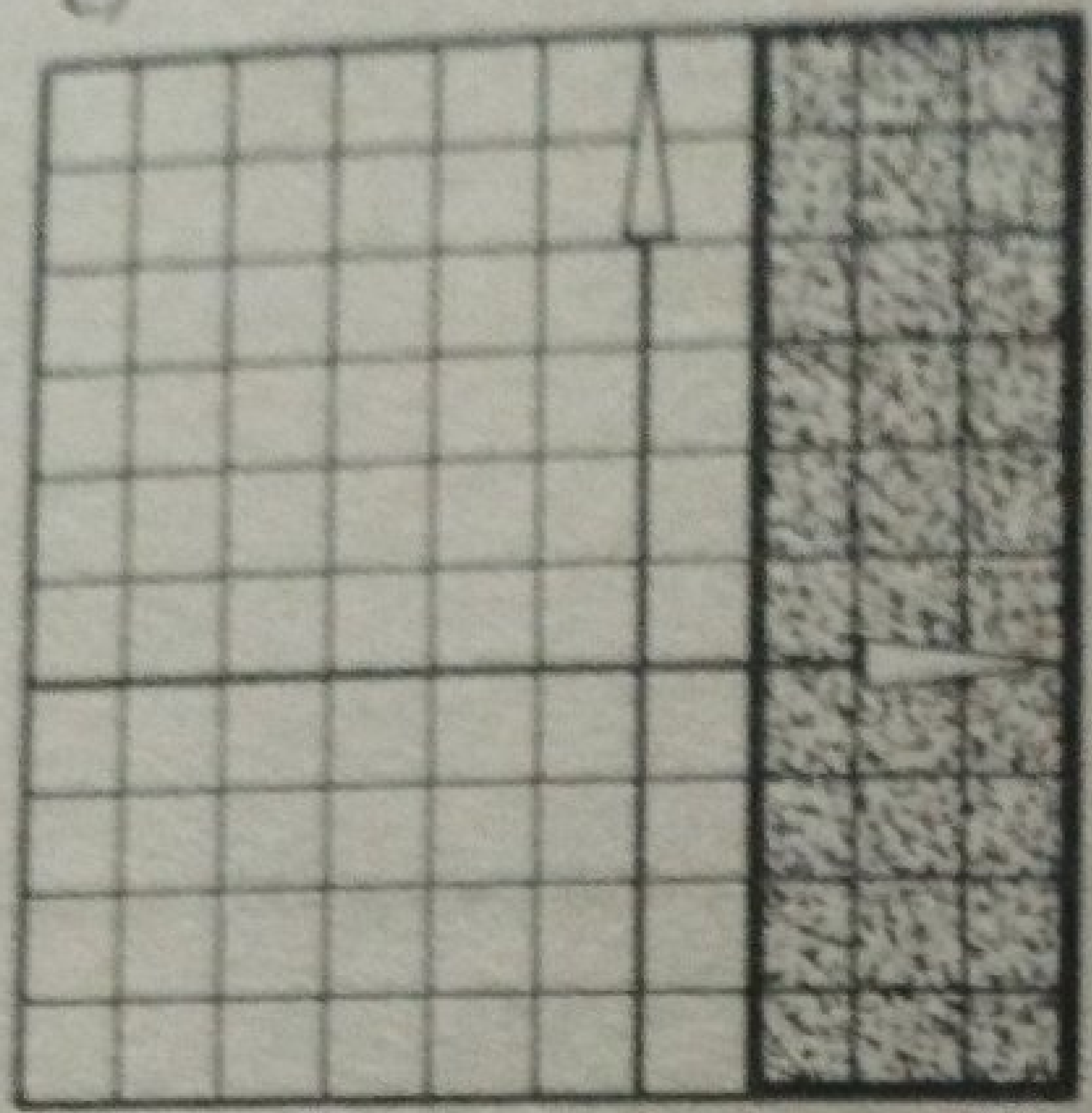
a)



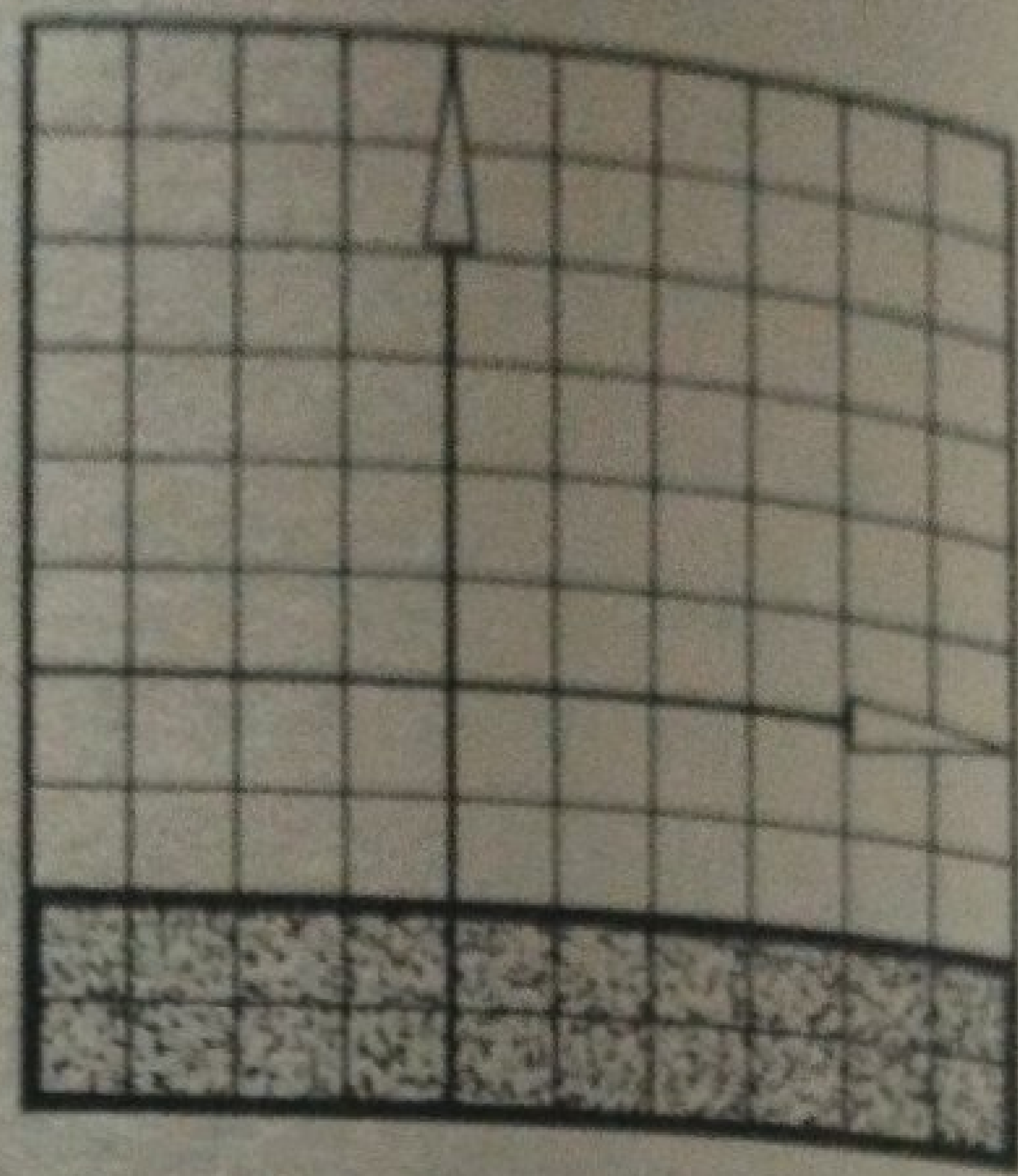
b)



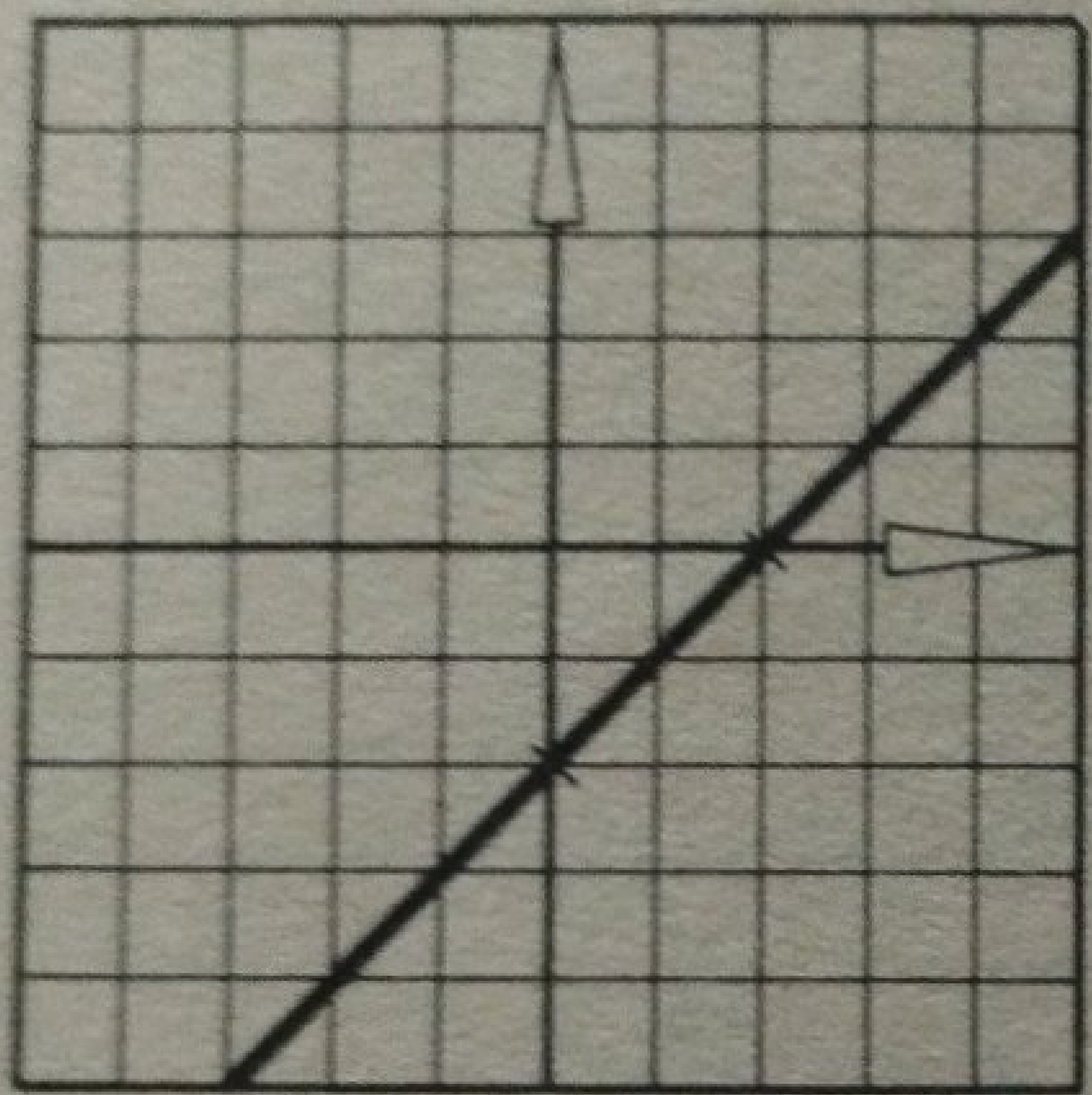
c)



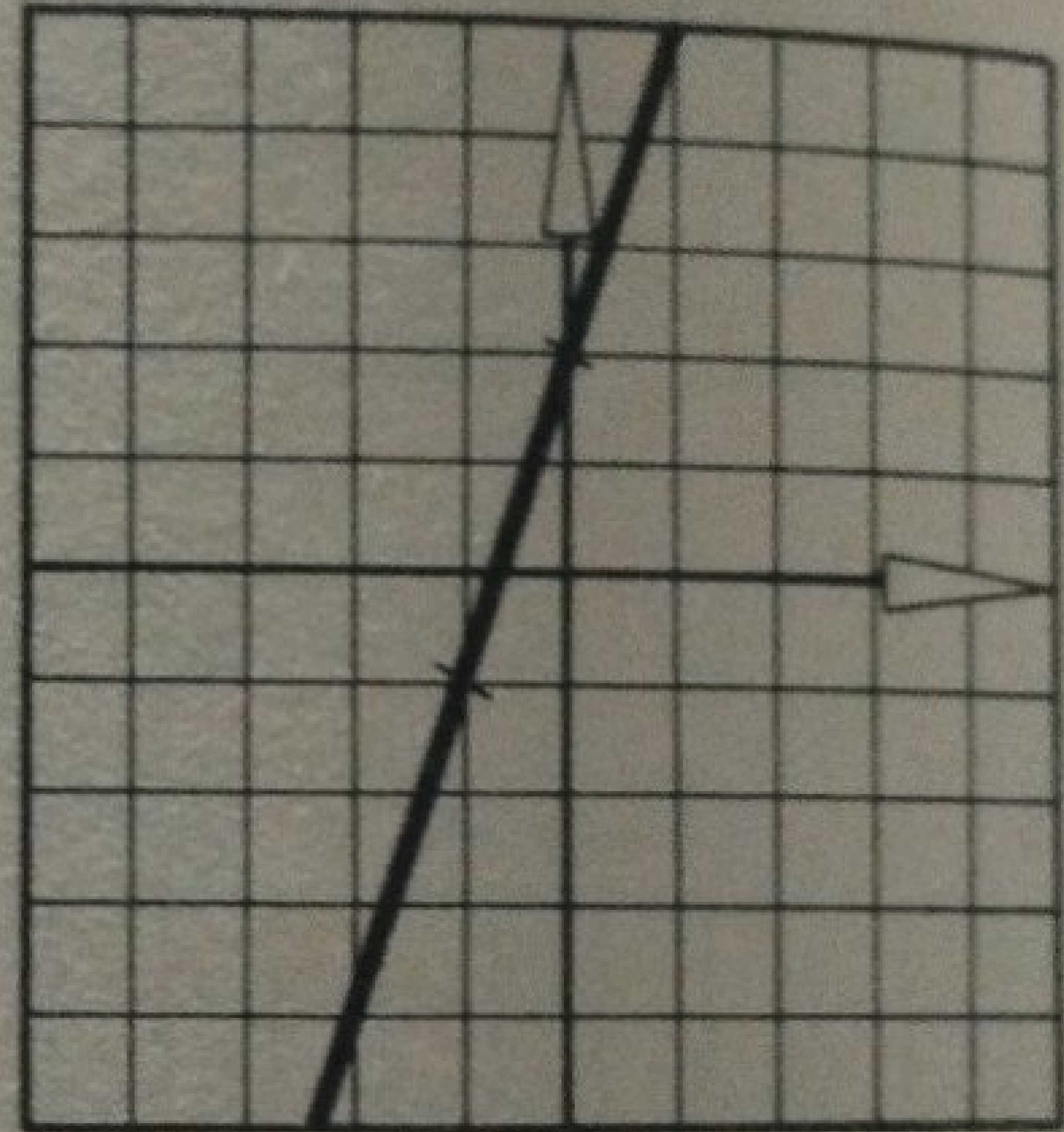
d)



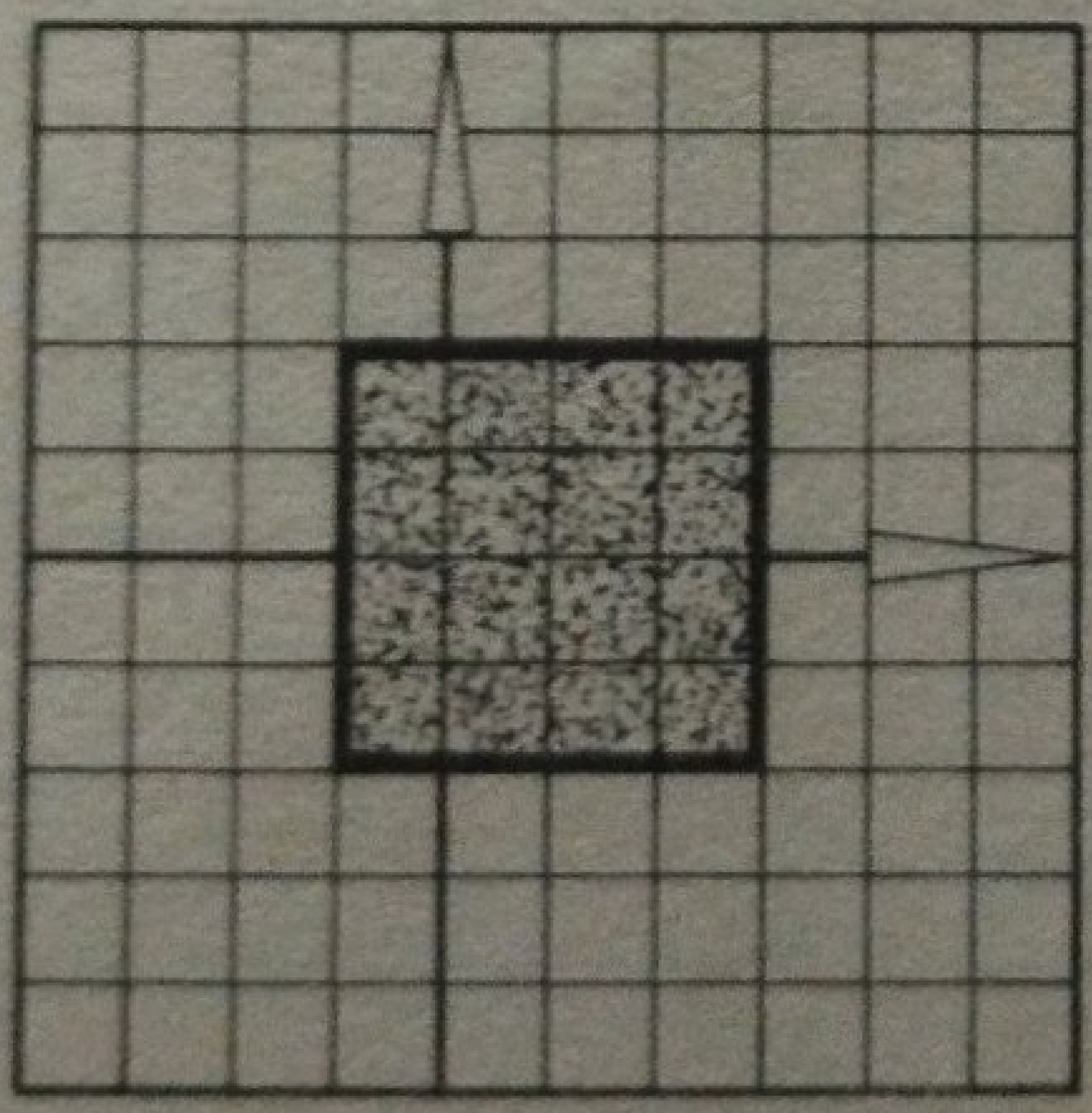
e)



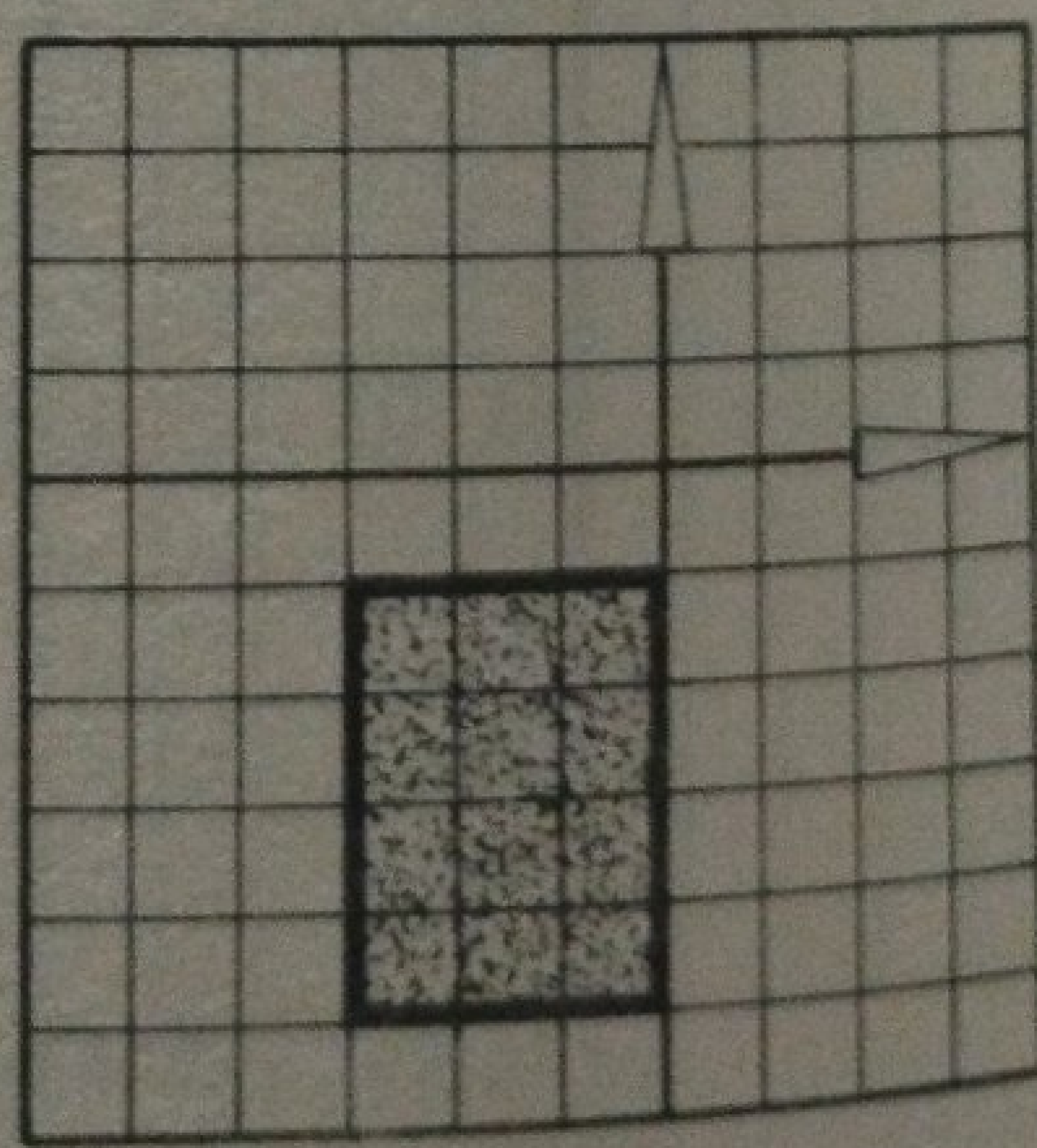
f)



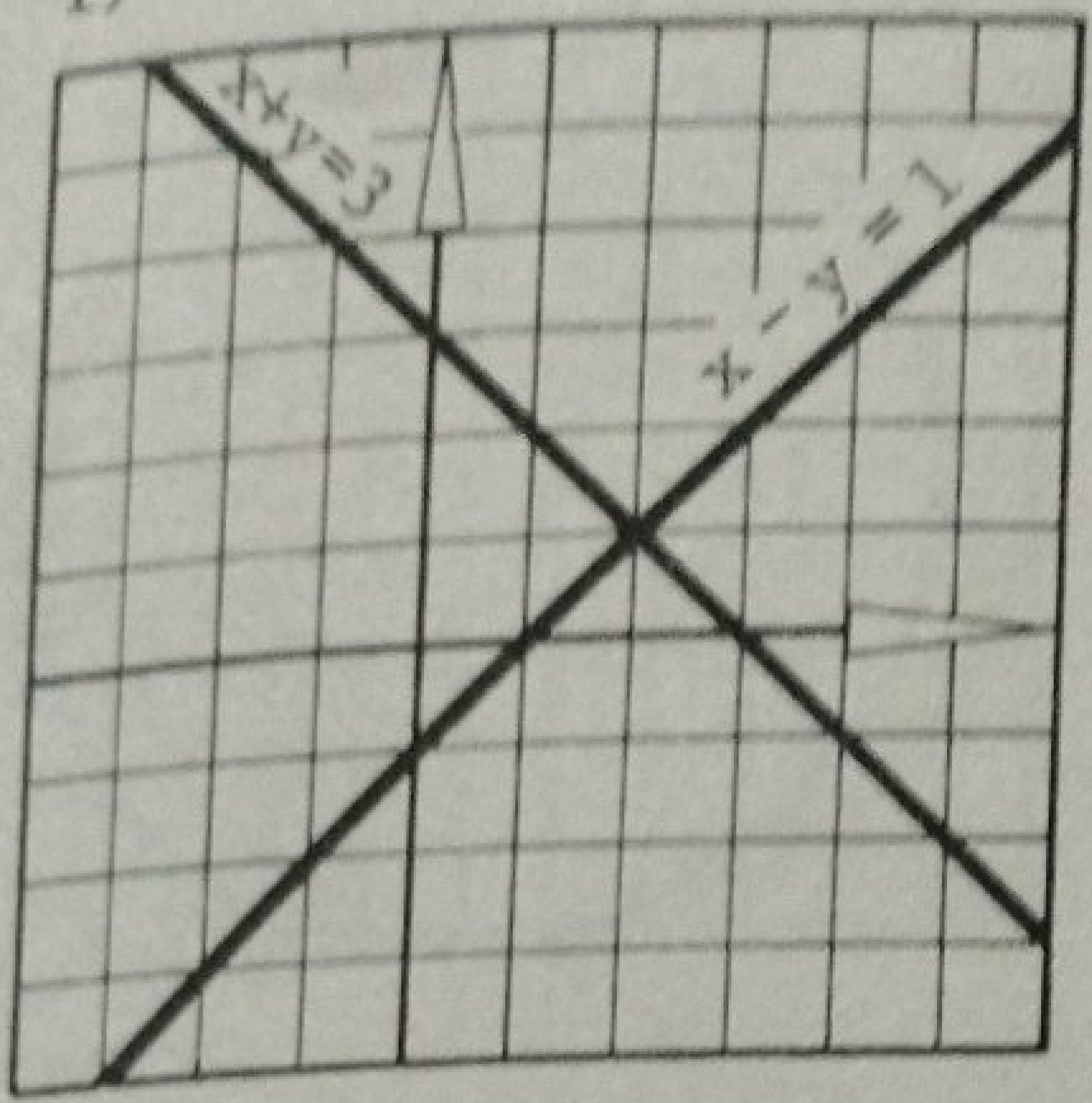
g)



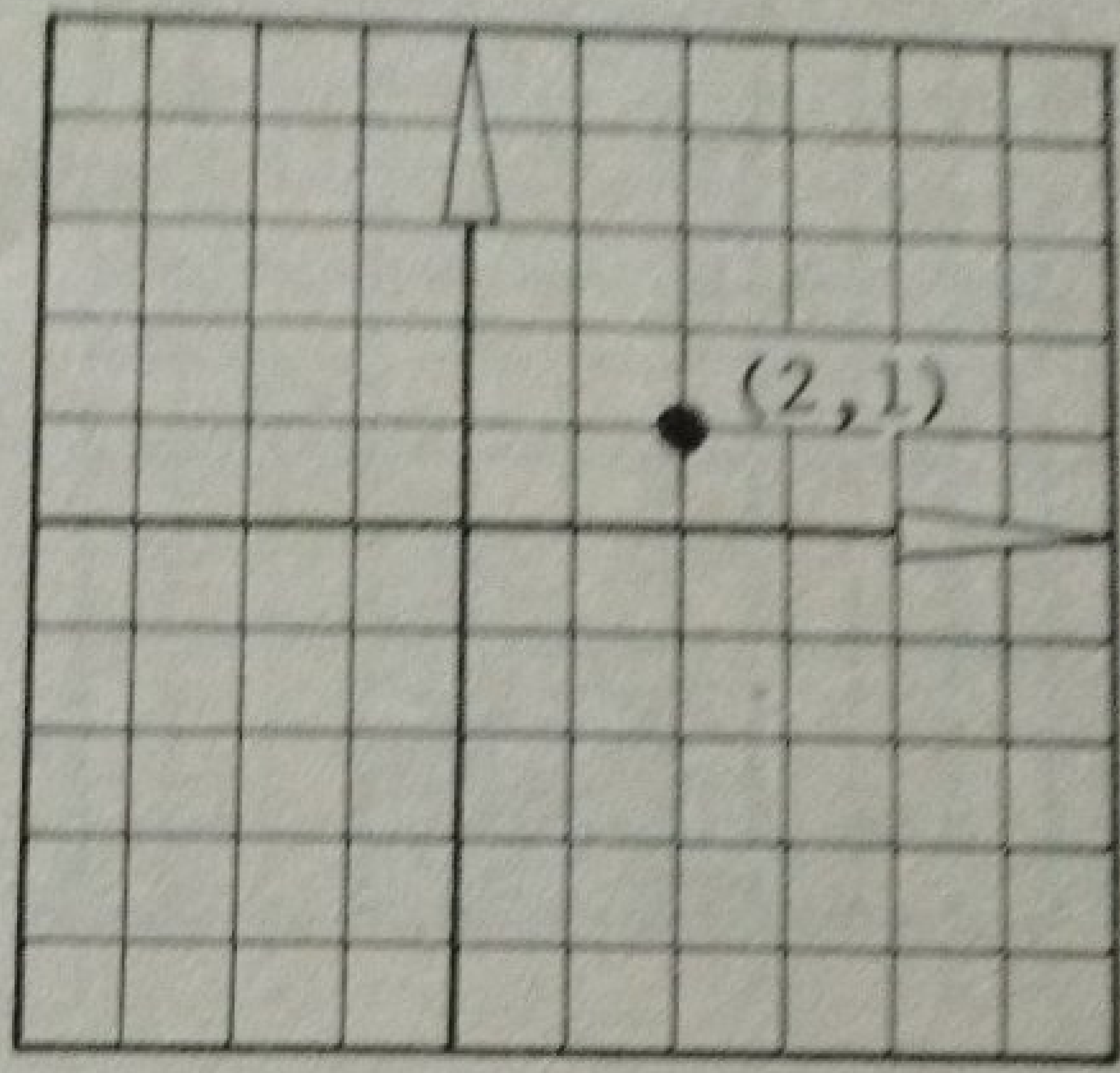
h)



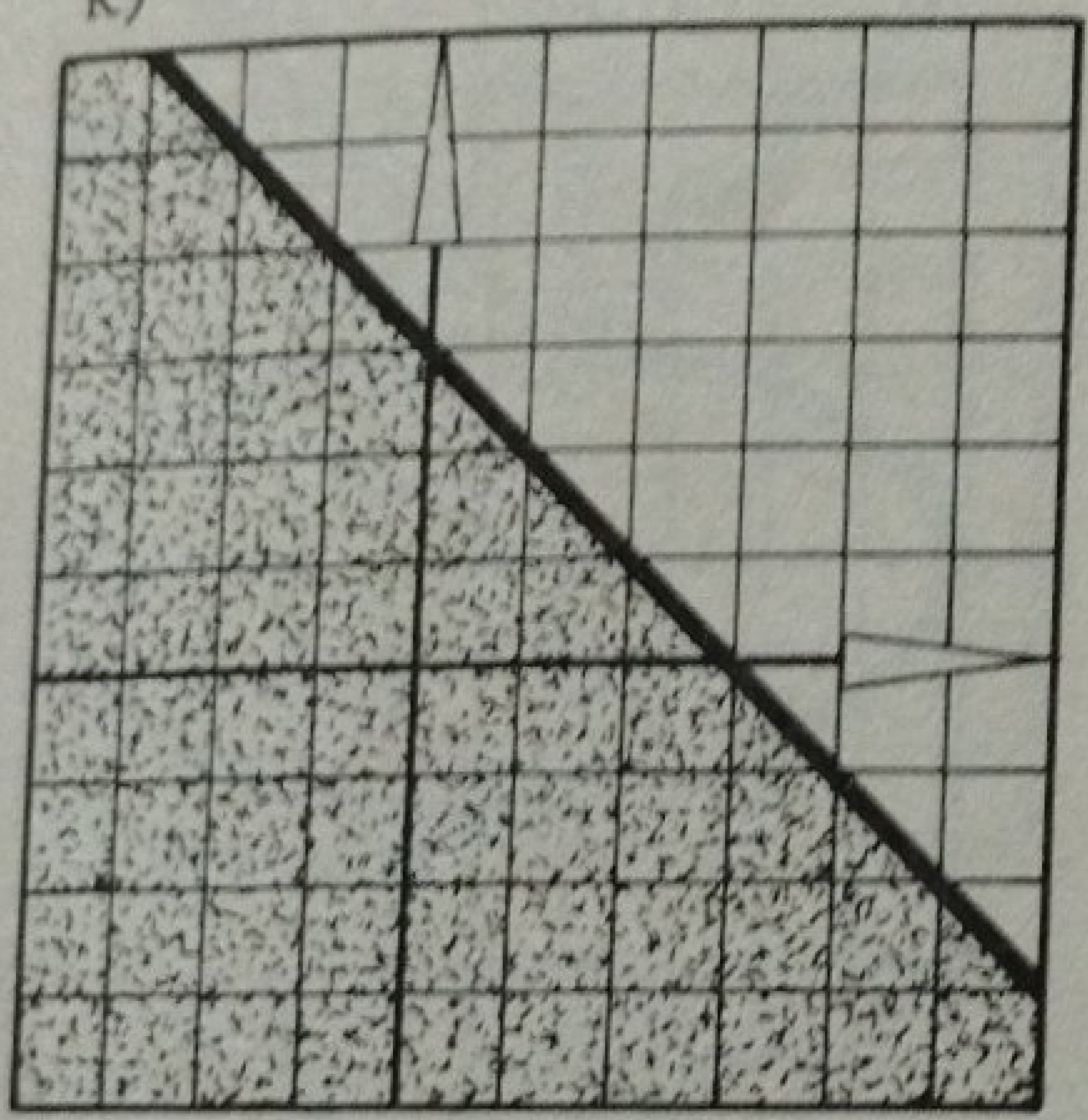
i)



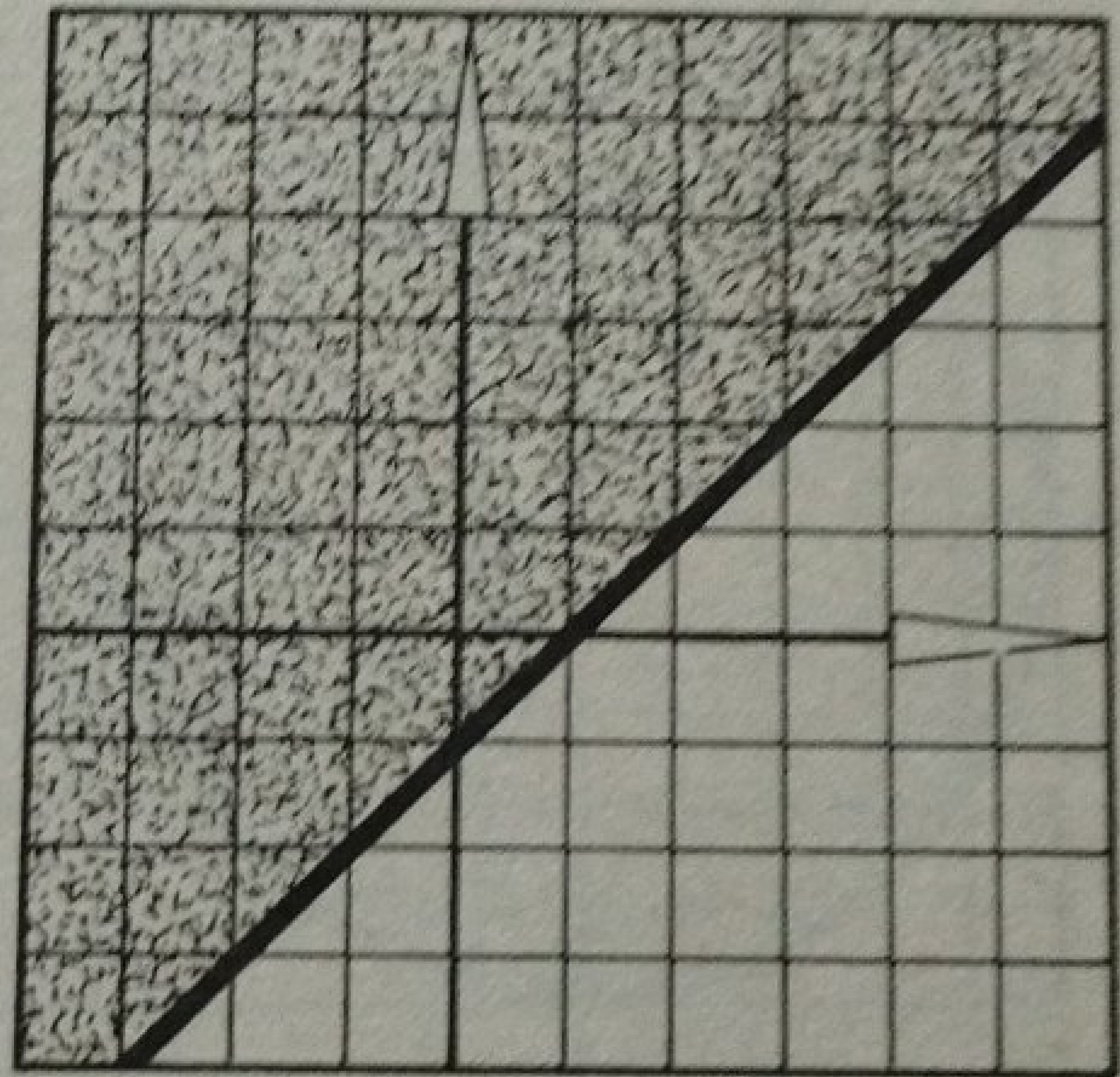
j)



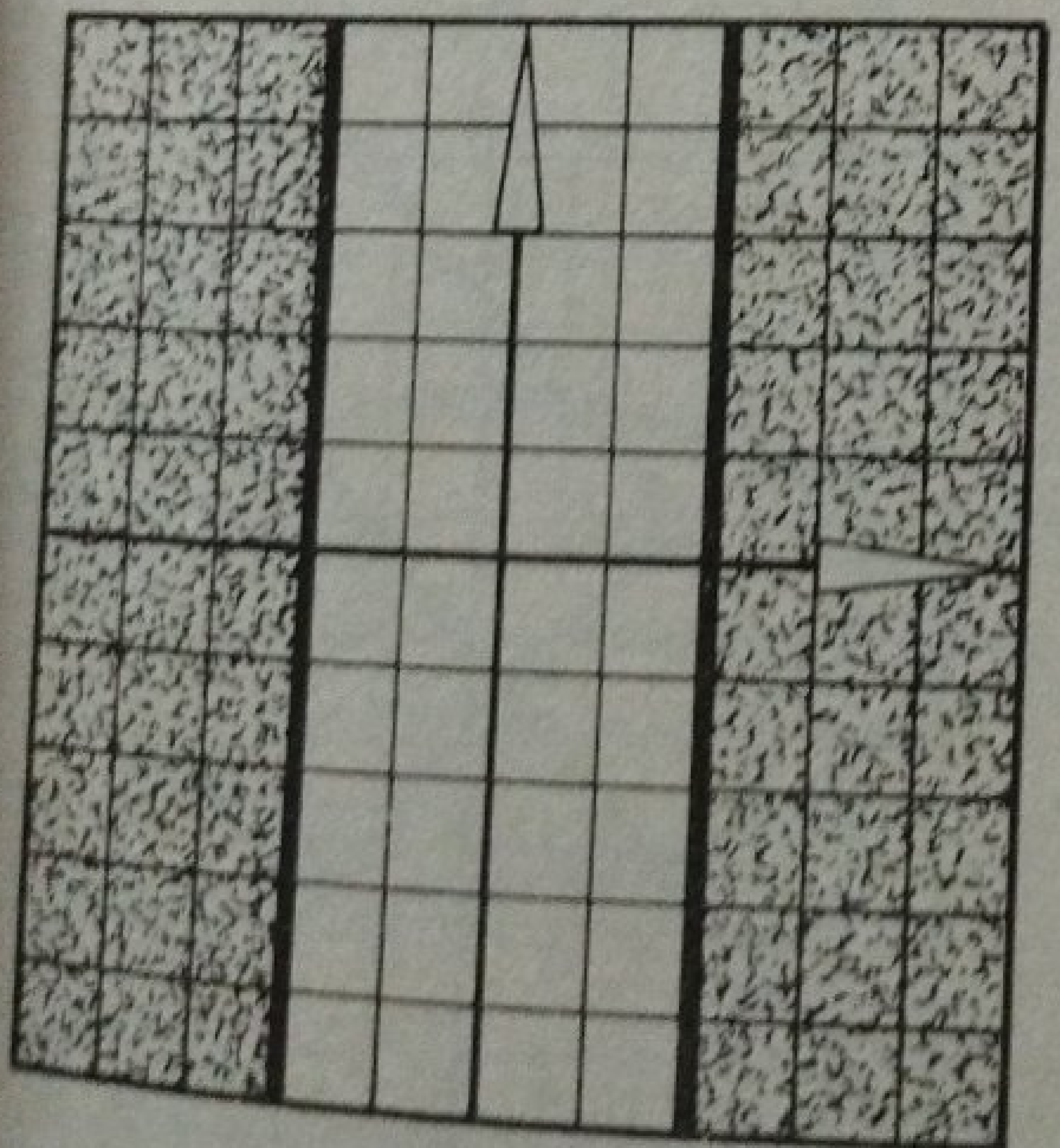
k)



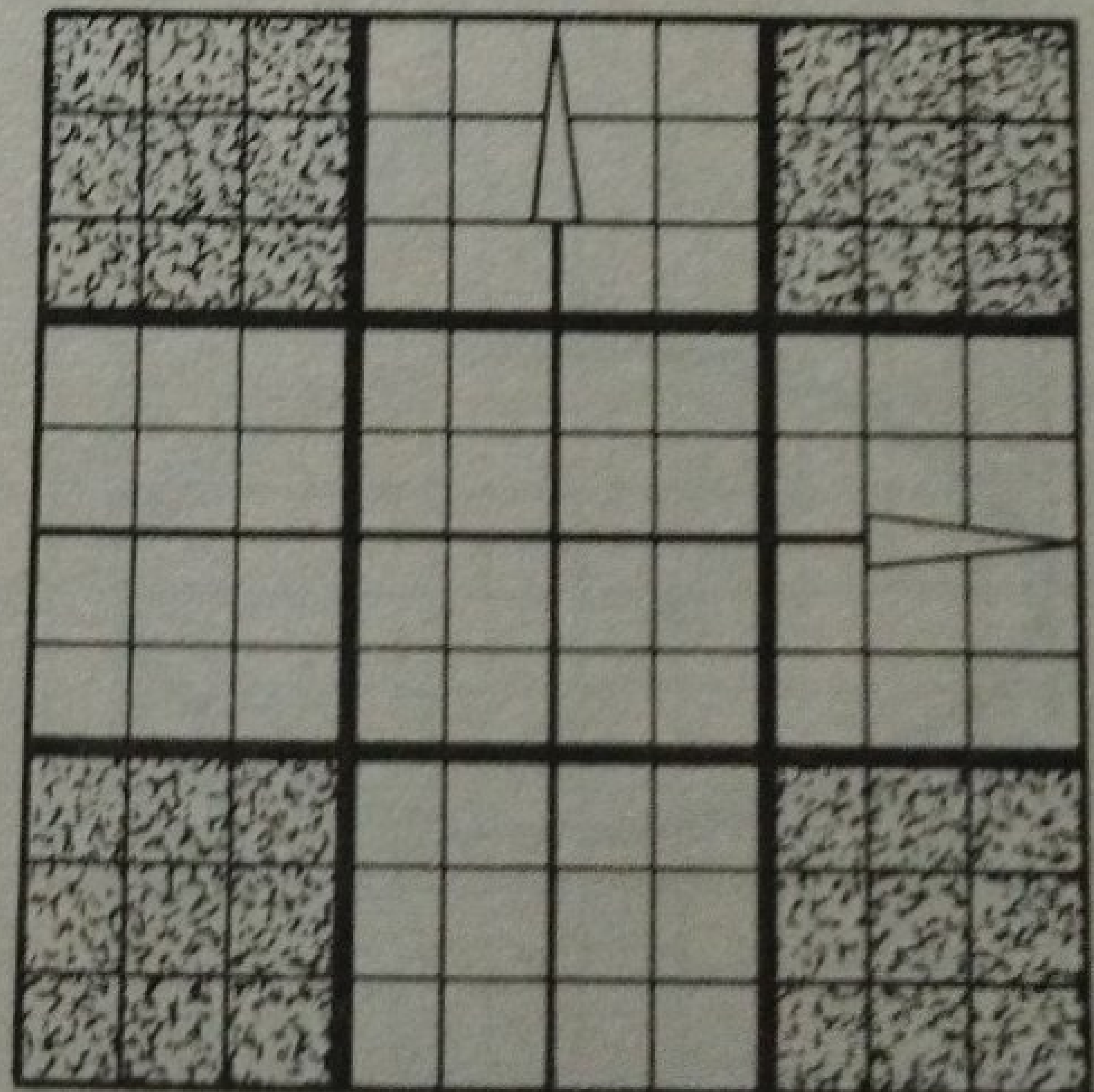
l)



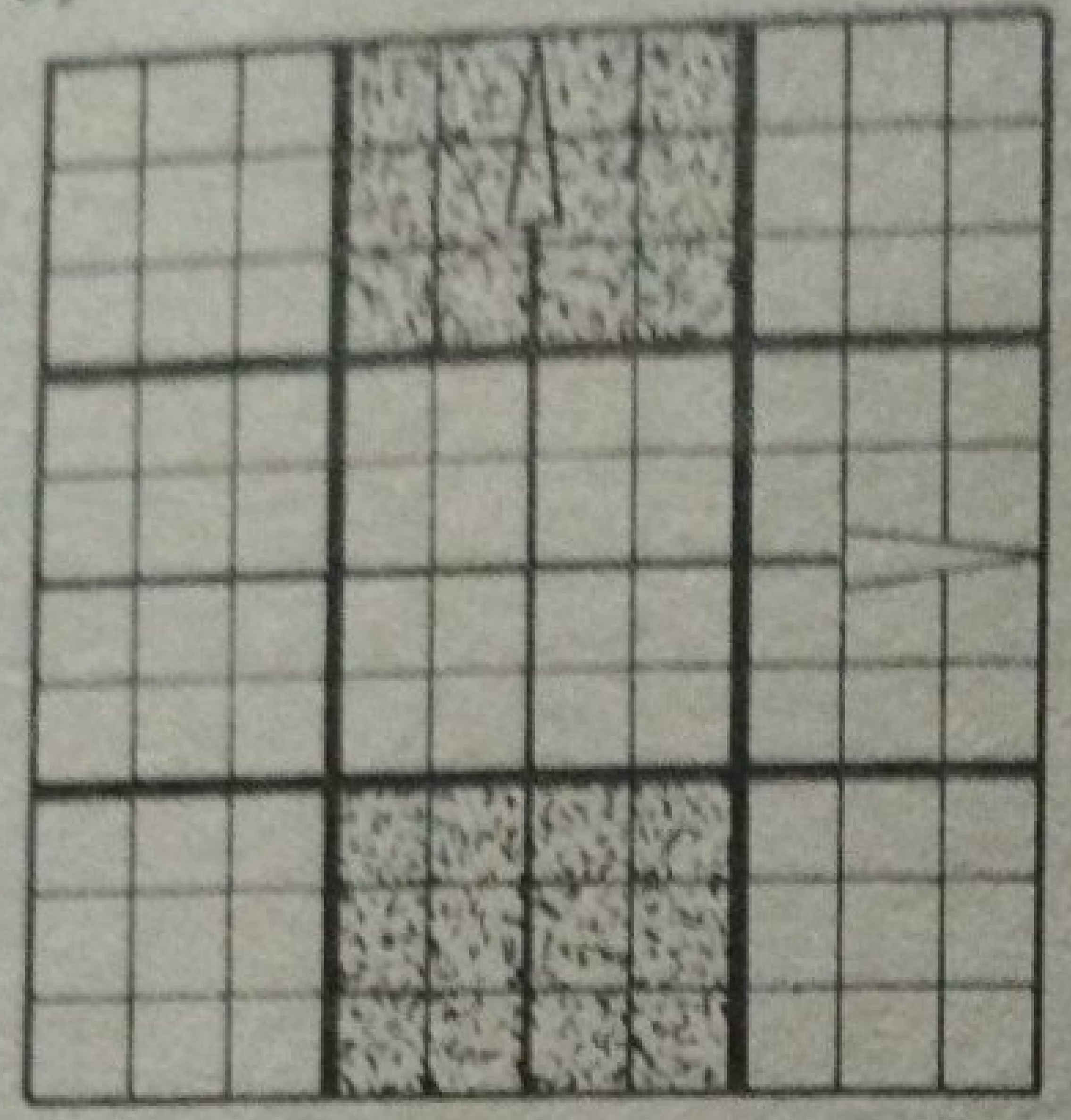
m)



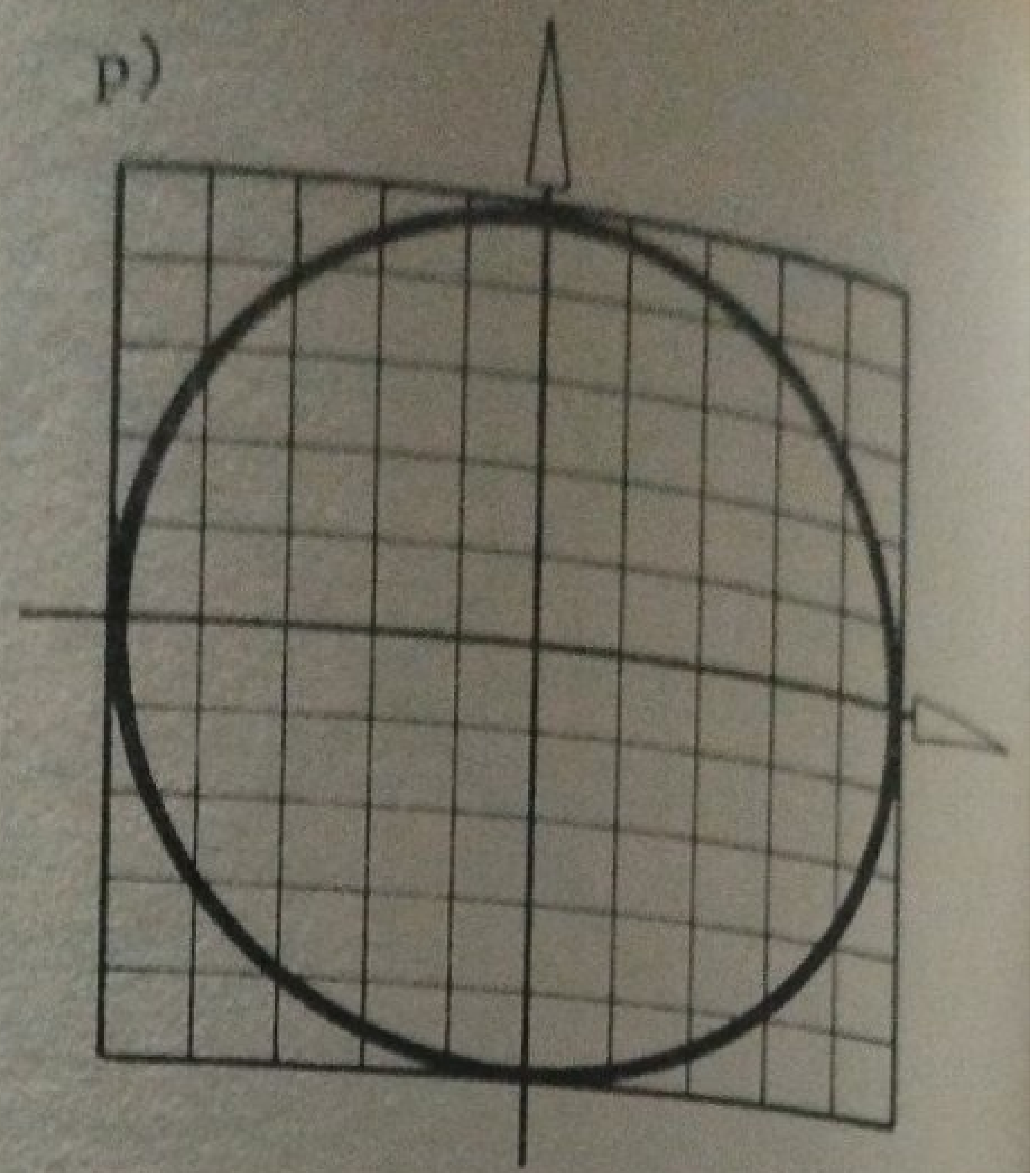
n)



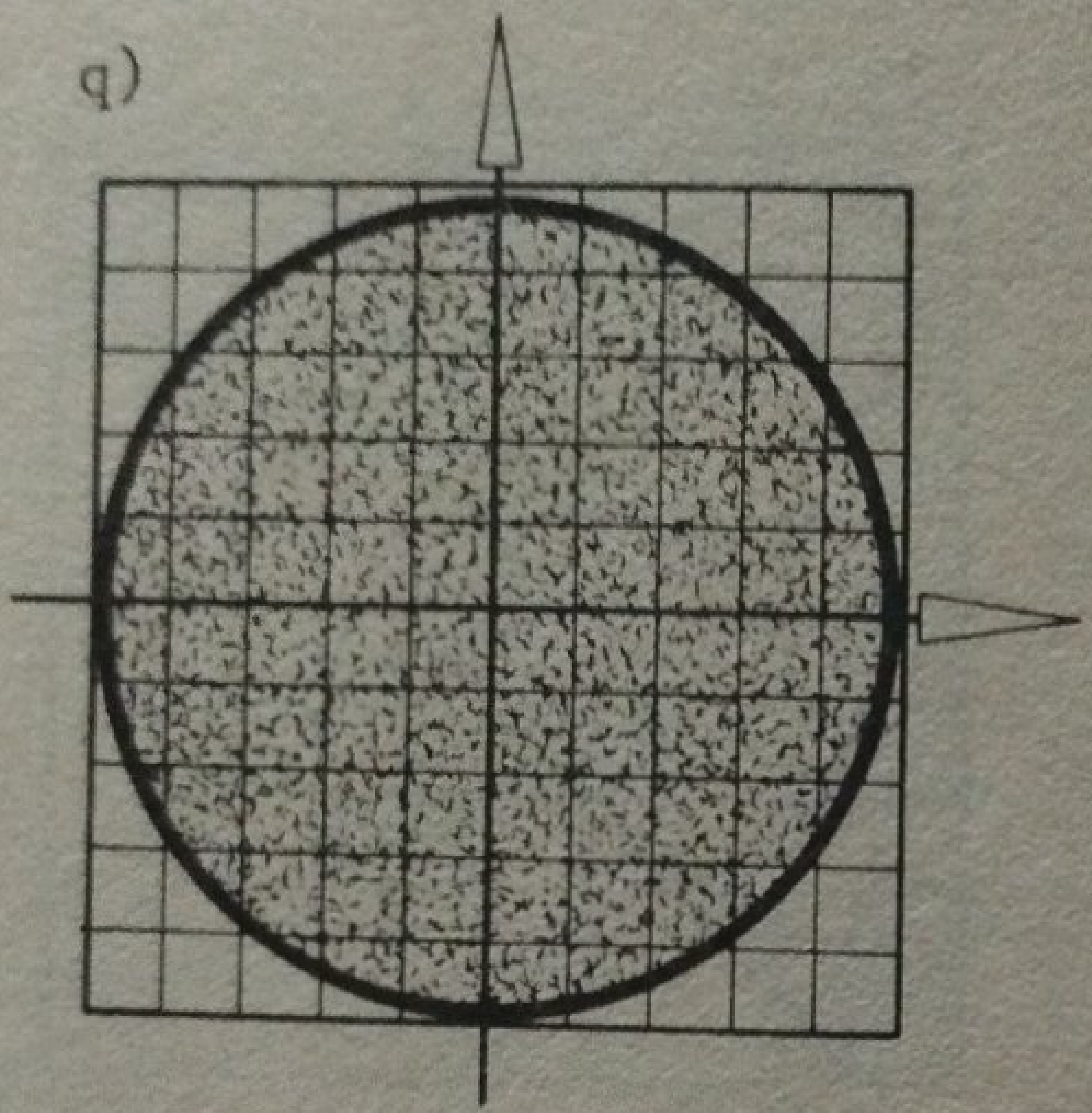
o)



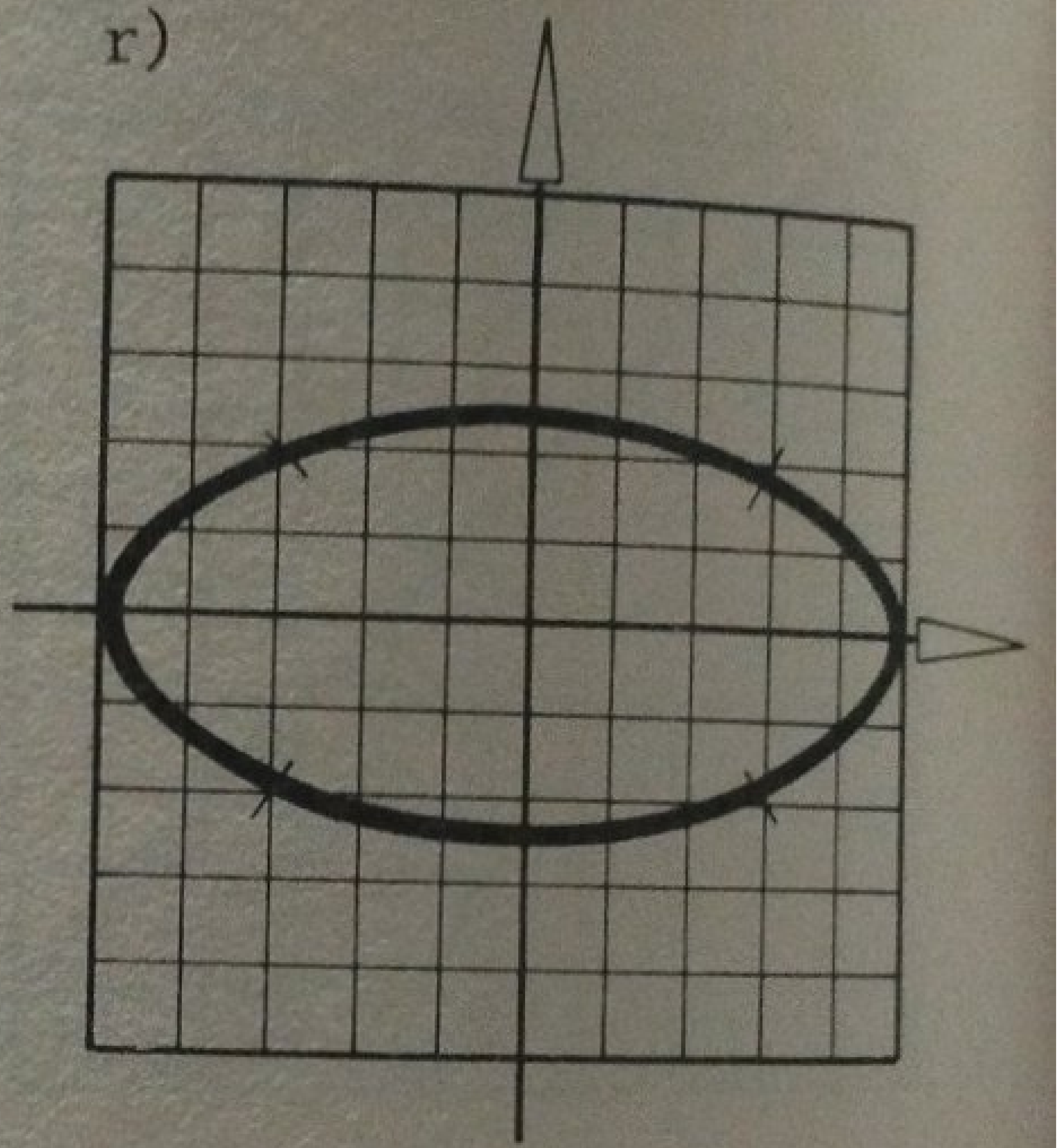
p)



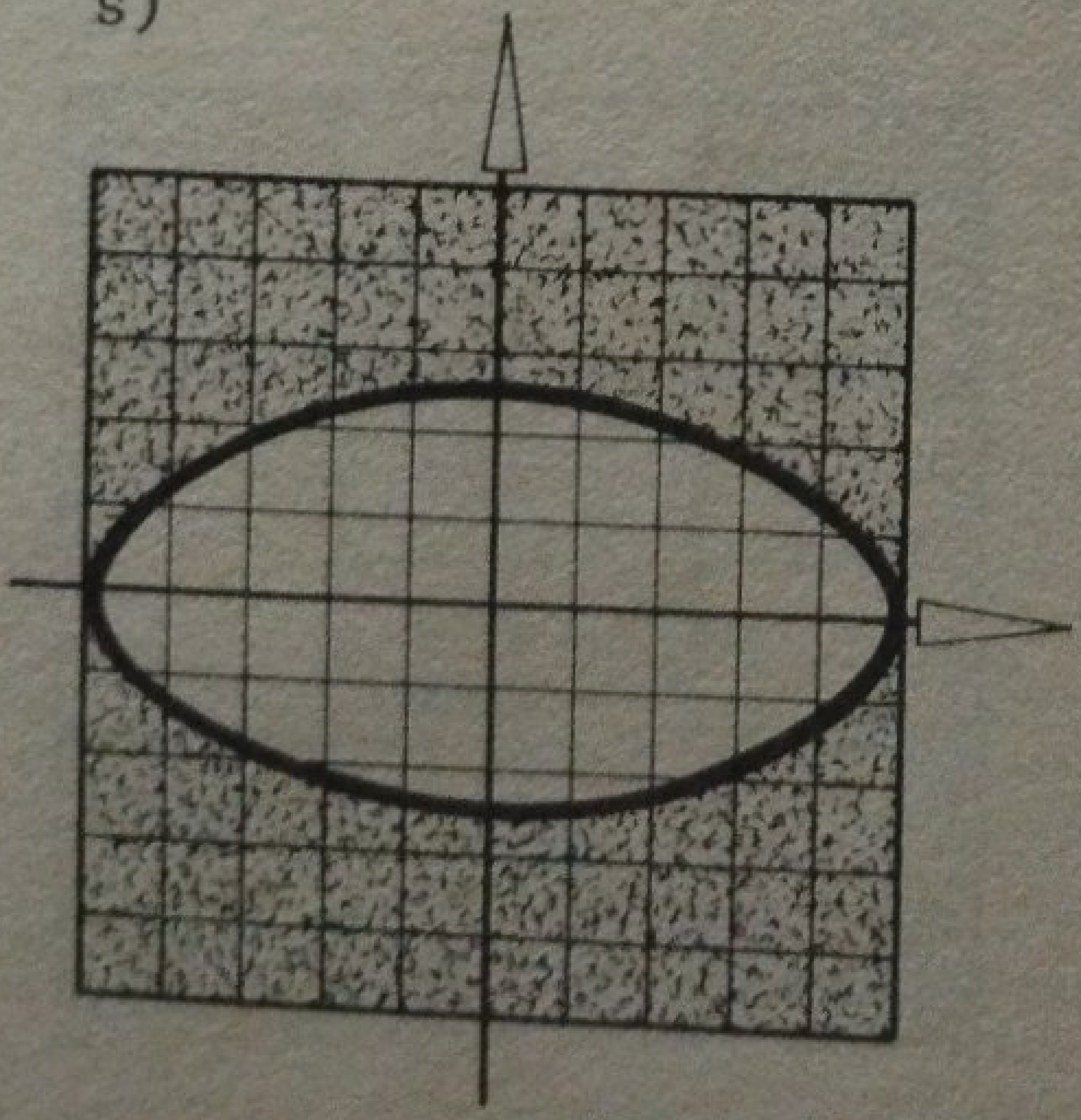
q)



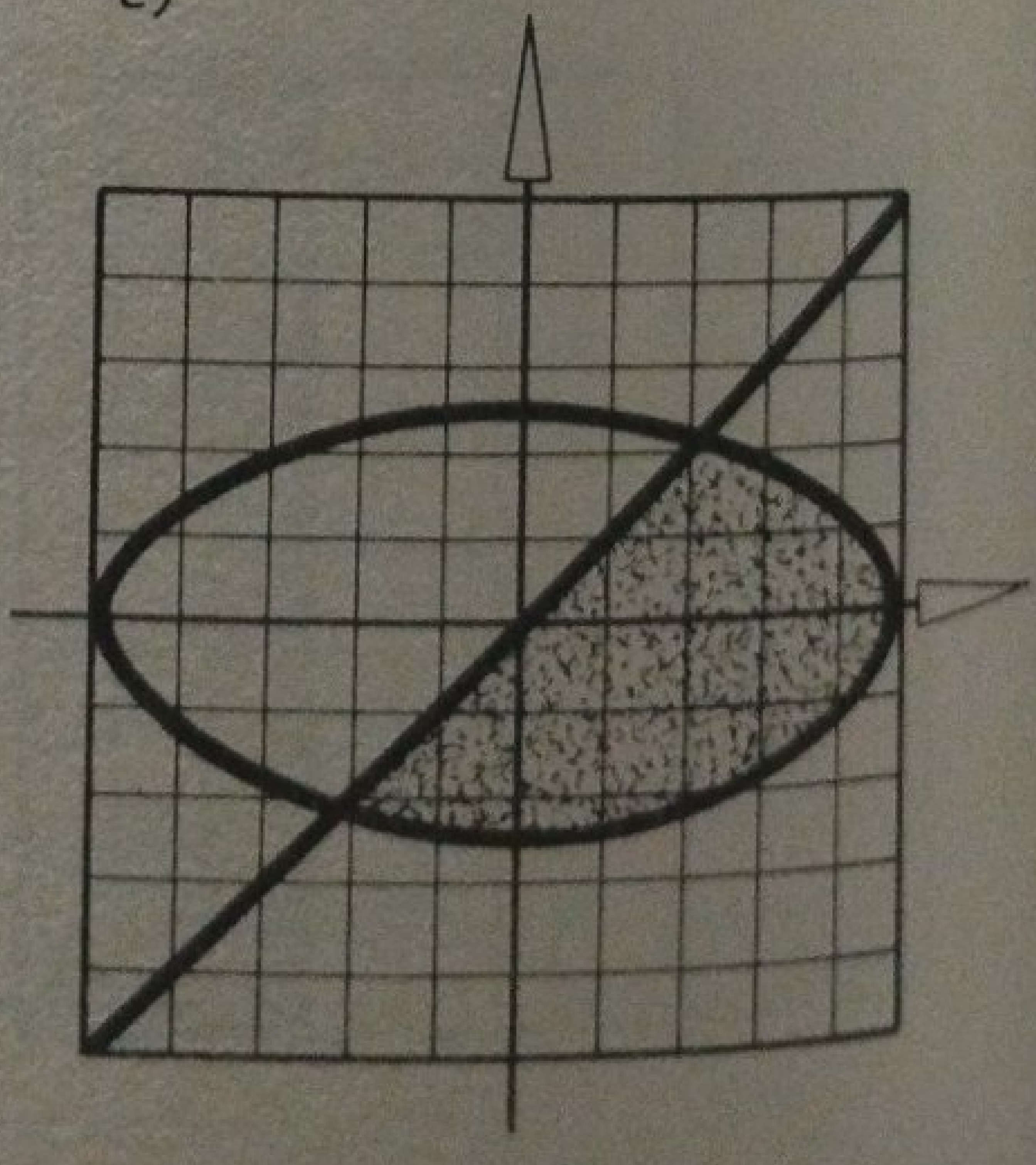
r)



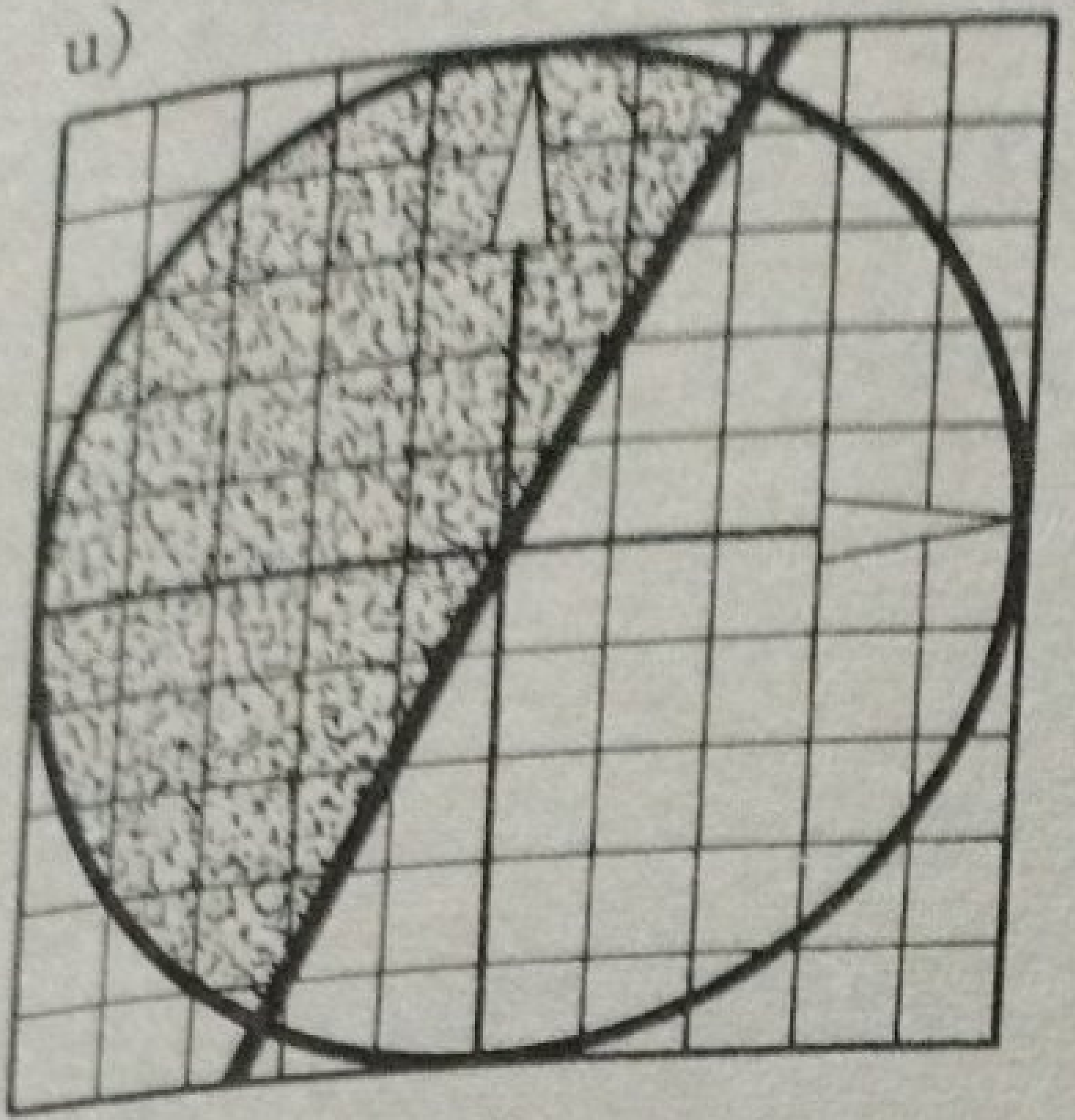
s)



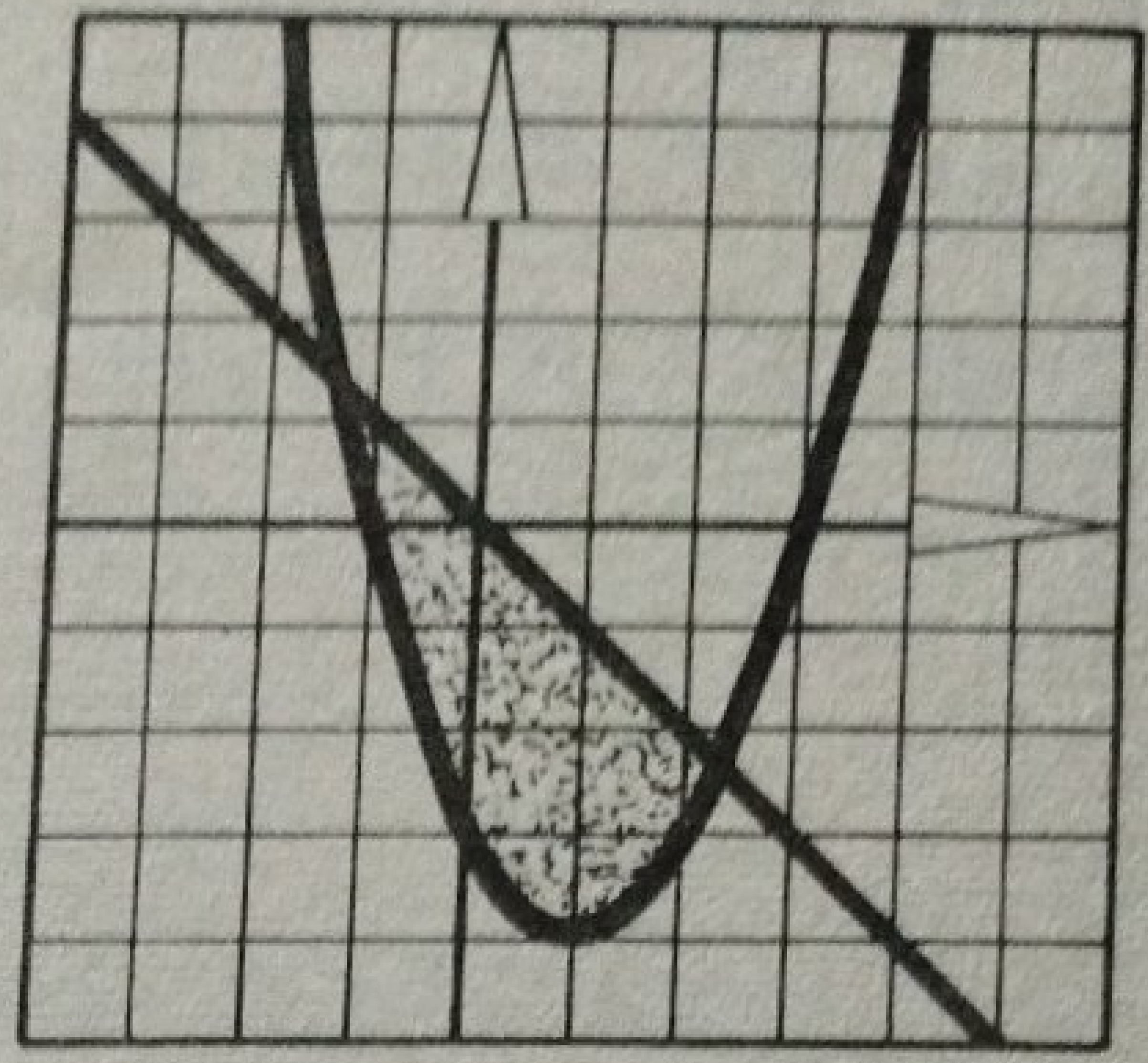
t)



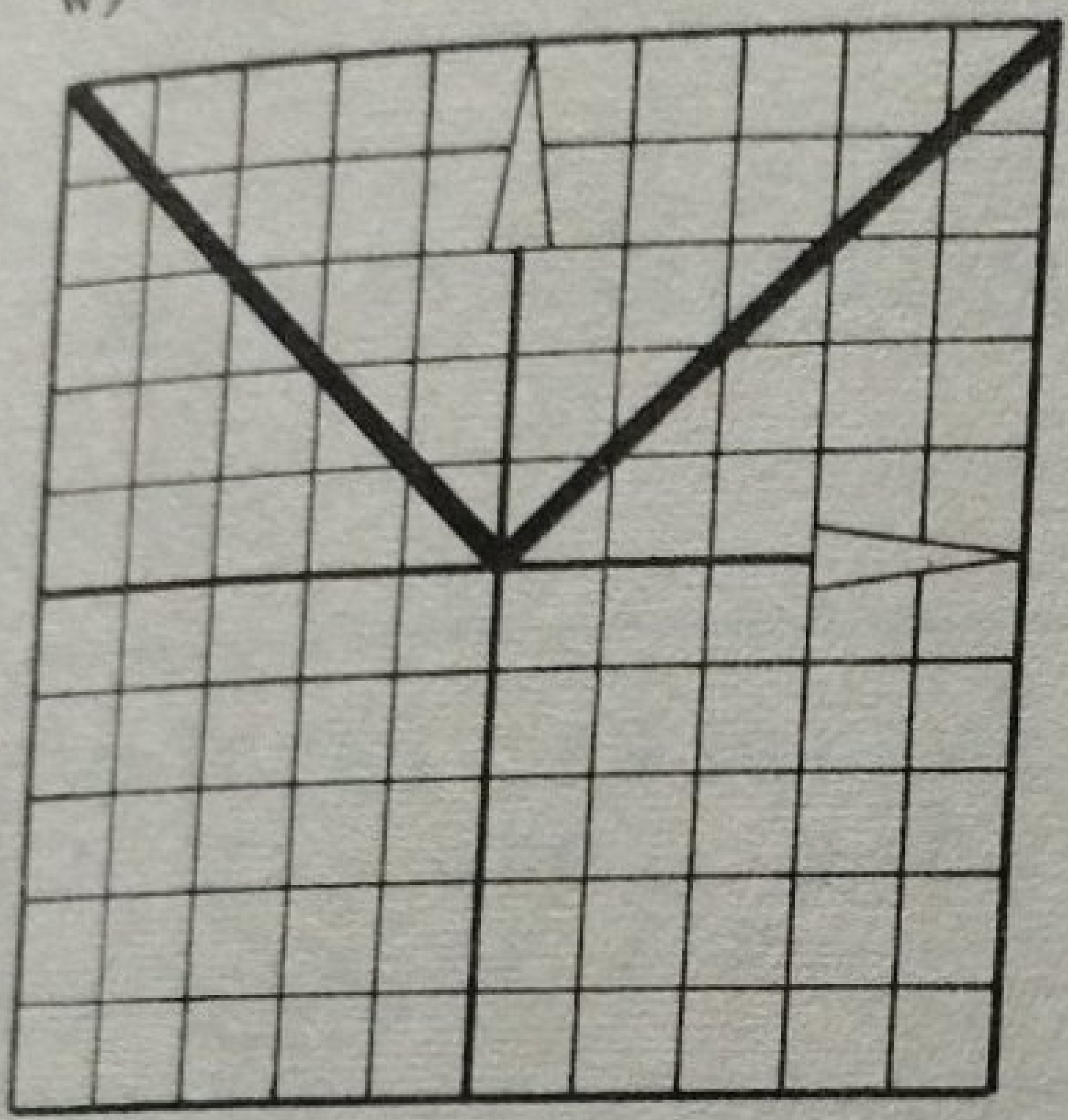
u)



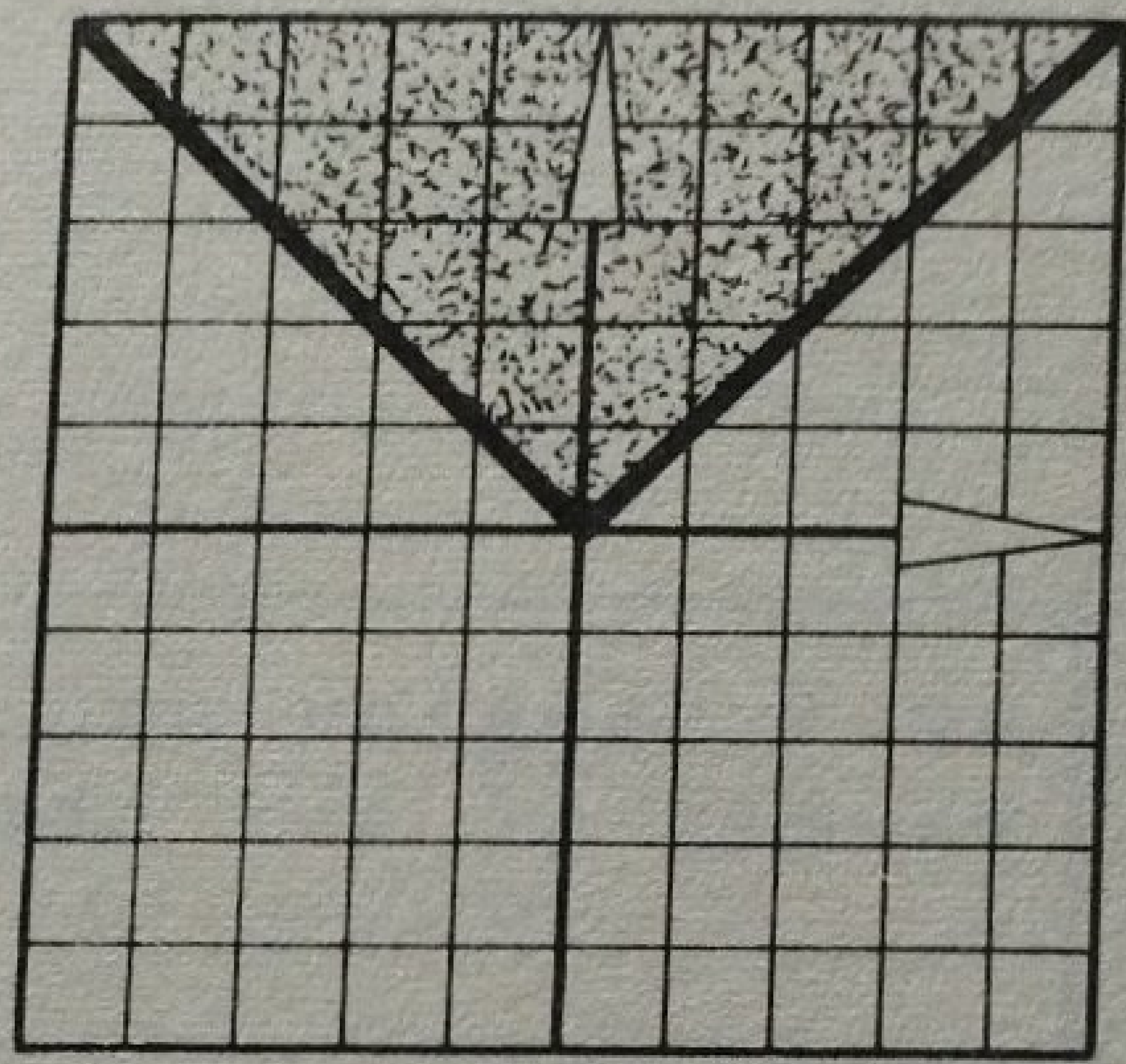
v)



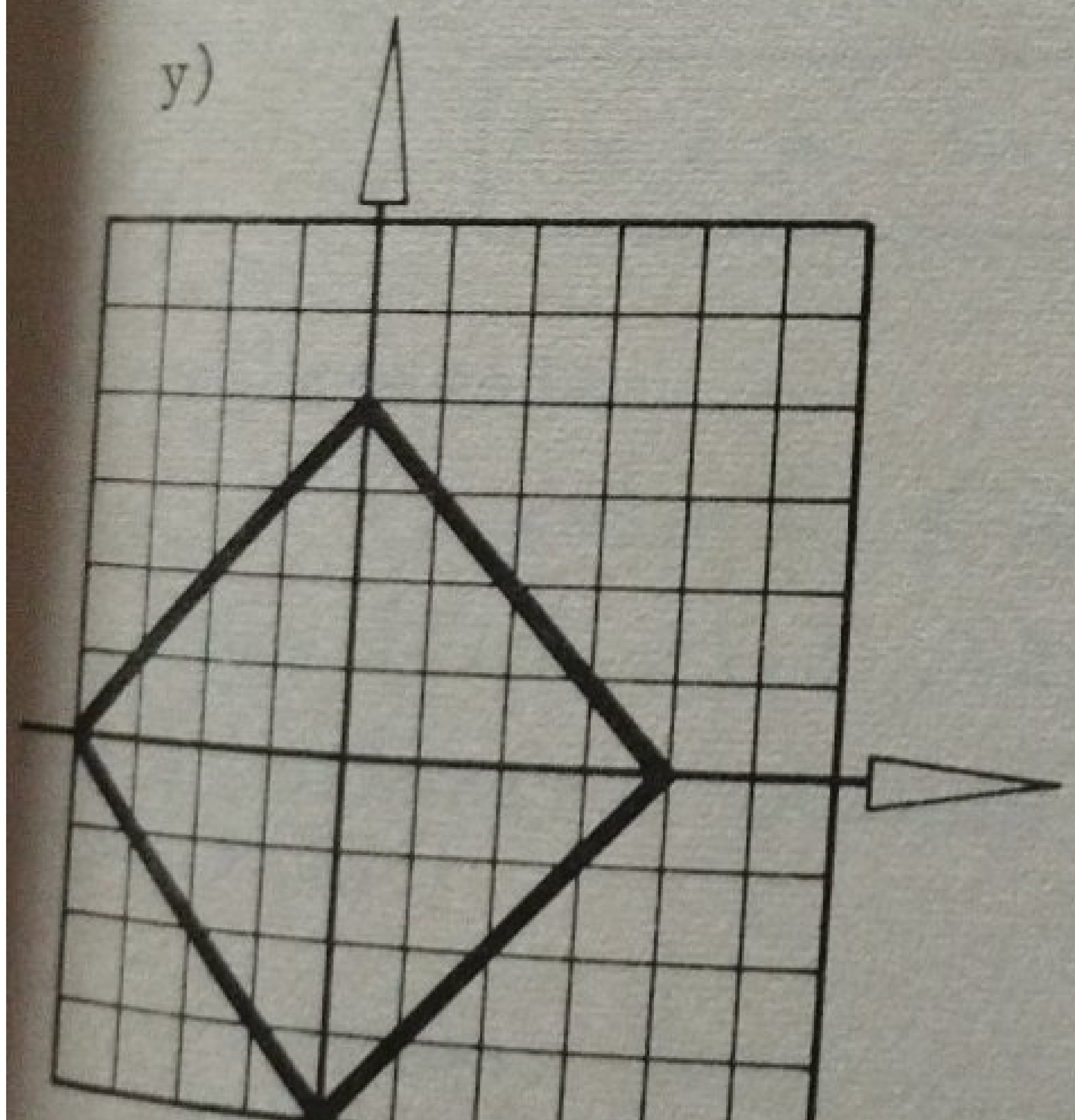
w)



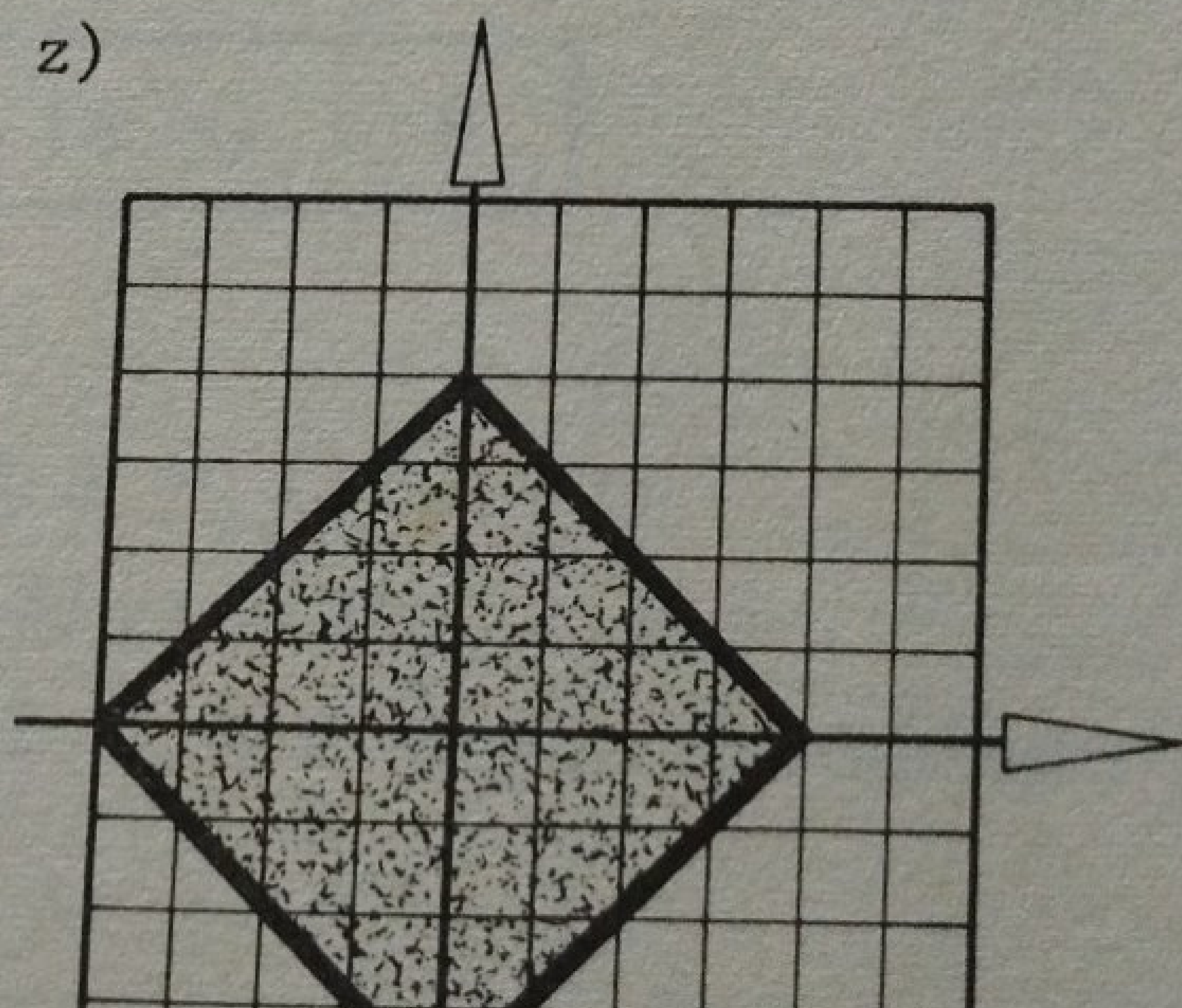
x)



y)



z)



7) a) $R^{-1} = \{(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)\}$

b) $R^{-1} = \{(2,1),(1,3),(0,5)\}$

c) $R^{-1} = \{(2,1),(0,4)\}$

Capítulo VI
PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES

6.1. RELAÇÃO REFLEXIVA

Definição:

> Relação reflexiva é uma relação R em A, tal que, para todo $x \in A$, tem-se que $(x,x) \in R$.

Em símbolos:

$$\boxed{\forall x \in A \implies (x,x) \in R}$$

Contra-exemplo:

A relação R em $A = \{1,2,3\}$:

$R = \{(1,1),(1,3),(2,3),(3,2),(3,3)\}$

não é reflexiva, porque $2 \in A$ e o par ordenado $(2,2) \notin R$.

Exemplo:

A relação R em $A = \{1,2,3\}$:

$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,1),(3,3)\}$

é reflexiva.

6.2. RELAÇÃO SIMÉTRICA

Definição

Relação simétrica é uma relação R em A, tal que, para todo $(x,y) \in R$, se tenha sempre que $(y,x) \in R$.

Simbolicamente:

$$\boxed{(x,y) \in R \implies (y,x) \in R}$$

Contra-exemplo:

A relação R em $A = \{1,2,3\}$:

$$R = \{(1,2),(2,2),(1,3),(2,1)\}$$

não é simétrica, porque $(1,3) \in R$ e $(3,1) \notin R$.

Exemplo:

A relação R em $A = \{1,2,3,4\}$:

$$R = \{(1,2),(3,3),(2,4),(2,1),(4,2)\}$$

é simétrica.

6.3. RELAÇÃO TRANSITIVA

Definição:

Relação transitiva é uma relação R em A, tal que, para todo $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$, se tenha sempre que $(x,z) \in R$.

Em símbolos:

$$\boxed{(x,y) \in R \text{ e } (y,z) \in R \implies (x,z) \in R}$$

Contra-exemplo:

A relação R em $A = \{1,2,3\}$:

$$R = \{(1,2),(3,2),(2,1),(1,1),(1,3)\}$$

não é transitiva, porque $(3,2) \in R$ e $(2,1) \in R$ porém $(3,1) \notin R$.

Exemplos:

1º) A relação R em $A = \{1,2,3,4\}$:

$$R = \{(2,2),(2,3),(1,4),(3,2),(3,3)\}$$

é transitiva.

2º) A relação R em $A = \{1,2,3,4,5\}$:

$$R = \{(1,2),(3,4),(1,5)\}$$

é transitiva.

3º) A relação R em $A = \{1,2,3\}$:

$$R = \{(1,3)\}$$

é transitiva.

Observação:

Vê-se, por esses exemplos, que em princípio todas as relações são transitivas. Só não são transitivas as relações que, possuindo simultaneamente os pares ordenados (x,y) e (y,z), não possuem o par ordenado (x,z).

6.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Dado o conjunto $A = \{1,2,3\}$ e as relações em A:

$R_1 = \{(1,2),(2,2),(1,3),(3,3)\}$

$R_2 = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$

$R_3 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3)\}$

$R_4 = A^2$

$R_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

$R_6 = \{(2,3),(3,2)\}$

dizer quais dessas relações são reflexivas.

2) Dado o conjunto $A = \{1,2,3\}$ e as relações em A:

$R_1 = \{(1,1),(2,1),(1,2),(3,1)\}$

$R_2 = \{(1,1),(2,2)\}$

$R_3 = \{(1,2),(3,2),(2,1),(2,3),(1,3)\}$

$R_4 = A^2$

$R_5 = \{(1,2),(2,3),(3,1),(2,1),(3,2),(1,3)\}$

$R_6 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$

dizer quais dessas relações são simétricas.

3) Dado o conjunto $A = \{1,2,3\}$ e as relações em A:

$R_1 = \{(2,3)\}$

$R_2 = \{(2,3),(3,3)\}$

$R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

$R_4 = A^2$

$R_5 = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,1)\}$

$R_6 = \{(1,2),(2,3)\}$

dizer quais dessas relações são transitivas.

6.5. RESPOSTAS

1) R_3, R_4 e R_5

2) R_4, R_5 e R_2

3) R_1, R_2, R_3 e R_4

Capítulo VII

RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

7.1. DEFINIÇÃO

Relação de equivalência é uma relação binária em A, que é reflexiva, simétrica e transitiva.

Sejam x, y e z três elementos quaisquer de um conjunto A.

Se R é uma relação binária em A, R é uma relação de equivalência somente se forem verificadas as propriedades:

Reflexiva: $x \; R \; x$.

Simétrica: $x \; R \; y \implies y \; R \; x$.

Transitiva: $x \; R \; y$ e $y \; R \; z \implies x R z$.

7.2. EXEMPLOS

a) A igualdade é uma relação de equivalência em qualquer universo, pois, goza das propriedades:

Reflexiva: $x = x$.

Simétrica: $x = y \implies y = x$.

Transitiva: $x = y$ e $y = z \implies x = z$.

b) Seja A o conjunto de todas as retas de um plano. A relação binária em A, definida por

$$\boxed{x\,R\,y \iff x \| y \iff \text{a reta } x \text{ é paralela a reta } y}$$

é uma relação de equivalência, porque é:

Reflexiva: $x \| x$.

Simétrica: $x \| y \implies y \| x$.

Transitiva: $x \| y$ e $y \| z \implies x \| z$.

c) Seja A o conjunto de todos os triângulos de um plano. A relação binária em A, definida por

$$\boxed{x\,R\,y \iff x \sim y \iff \text{o triângulo } x \text{ é semelhante ao triângulo } y}$$

também é uma relação de equivalência, pois é:

Reflexiva: $x \sim x$.

Simétrica: $x \sim y \implies y \sim x$.

Transitiva: $x \sim y$ e $y \sim z \implies x \sim z$.

d) Seja o conjunto:

$A = \{3,4,5,6,7,8,9\}$.

A relação binária em A, definida por

$$\boxed{x\,R\,y \iff x - y \text{ é múltiplo de } 2 \iff \frac{x-y}{2} = n \iff x - y = 2n}$$

é uma relação de equivalência (n é número inteiro, $n \in \mathbb{Z}$).

Com efeito, essa relação R é:

REFLEXIVA - Para qualquer $x \in A$, tem-se:

$$x - x = 0$$

e zero é múltiplo de 2 $(2 \times 0 = 0)$. Logo:

$$\boxed{x \; R \; x}$$

SIMÉTRICA - Se $x \; R \; y$, então $x - y$ é múltiplo de 2, ou,

$$x - y = 2n.$$

Ora:

$$y - x = -\underbrace{(x - y)}_{2n} = -2n.$$

Donde, $y - x$, também é múltiplo de 2 e $y \; R \; x$.

Portanto, está provado que:

$$\boxed{x \; R \; y \implies y \; R \; x}$$

TRANSITIVA - Se $x \; R \; y$, $x - y = 2n$ e se $y \; R \; z$, $y - z = 2n'$, em que $n' \in \mathbf{Z}$.

Então:

$$x - z = \underbrace{(x - y)}_{2n} + \underbrace{(y - z)}_{2n'} = 2n + 2n' = 2(n + n')$$

também é múltiplo de 2, isto é, $x \; R \; z$.

Conseqüentemente, se

$$\boxed{x \; R \; y \text{ e } y \; R \; z \implies x \; R \; z}$$

Observação:

Seja o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

A relação binária em $\mathbb{N}$, definida por:

$$\boxed{x\ R\ y \longleftrightarrow x - y \text{ é um múltiplo de } n,\ n \in \mathbb{N}}$$

é uma relação de equivalência.

Pois, bastaria colocar em lugar do número 2, na demonstração anterior, um outro número qualquer que quisesse considerar.

7.3. CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

Definição:

> Classe de equivalência módulo R determinada pelo elemento "a", $a \in A$ é o subconjunto $\bar{a}$ de todos os elementos $x \in A$, tal que $x\ R\ a$.

Simbolicamente:

$$\boxed{\bar{a} = \{x \in A \mid x\ R\ a\}}$$

Exemplos:

a) No exemplo anterior

$A = \{3,4,5,6,7,8,9\}$ e

$$\boxed{x\ R\ y \Longleftrightarrow x - y \text{ é um múltiplo de } 2}$$

Os conjuntos do tipo $\bar{a}$, são

$\overline{3} = \{3,5,7,9\}$

pois, $3\ R\ 3$, $5\ R\ 3$, $7\ R\ 3$ e $9\ R\ 3$, isto é, 3-3, 5-3, 7-3 e 9-3, são múltiplos de 2.

Da mesma forma:

$\overline{4} = \{4,6,8\}$

$\overline{5} = \{3,5,7,9\} = \overline{3}$

$\overline{6} = \{4,6,8\} = \overline{4}$

$\overline{8} = \{4,6,8\} = \overline{4}$

$\overline{9} = \{3,5,7,9\} = \overline{3}$

Vê-se que existem apenas 2 subconjuntos distintos, o $\overline{3}$ e o $\overline{4}$. A cada um desses subconjuntos dá-se o nome de CLASSE DE EQUIVALÊNCIA MÓDULO R.

É oportuno observar que os subconjuntos $\overline{3}$ e $\overline{4}$ são, não vazios, disjuntos e sua reunião é o conjunto A. Logo, a família de subconjuntos $\{\overline{3},\overline{4}\}$ é uma partição de A.

b) Se $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e

$$\boxed{x\ R\ y \iff x - y \text{ é um múltiplo de } 4}$$

$\overline{1} = \{1,5,9\}$

$\overline{2} = \{2,6\}$

$\overline{3} = \{3,7\}$

$\overline{4} = \{4,8\}$

$\overline{5} = \{1,5,9\} = \overline{1}$

$\overline{6} = \{2,6\} = \overline{2}$

$\overline{7} = \{3,7\} = \overline{3}$

$\overline{8} = \{4,8\} = \overline{4}$

$\overline{9} = \{1,5,9\} = \overline{1}$

As classes de equivalência são os subconjuntos:

$\overline{1} = \{1,5,9\}$, $\overline{2} = \{2,6\}$, $\overline{3} = \{3,7\}$, $\overline{4} = \{4,8\}$.

Como no exemplo anterior, verifica-se que os subconjuntos $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ e $\overline{4}$ são não vazios, disjuntos 2 a 2 e sua reunião é o conjunto A. Donde a família de subconjuntos:

$$\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$$

é uma partição de A.

7.4. PROPRIEDADES DAS CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

1ª) Qualquer classe de equivalência $\overline{a}$ é um subconjunto não vazio de A.

2ª) Duas classes de equivalência distintas são disjuntas.

3ª) A reunião de todas as classes de equivalência é o conjunto A.

7.5. CONJUNTO-QUOCIENTE

Definição:

> Conjunto-quociente de A por R é a família de subconjuntos cujos elementos são todas as classes de equivalência módulo R, de uma relação de equivalência sobre um conjunto A.

Representa-se: $\dfrac{A}{R}$.

Considerando-se as propriedades das classes de equivalência, percebe-se que o conjunto-quociente A/R é uma partição de A.

Assim, os conjuntos-quocientes dos exemplos anteriores a) e b) são, respectivamente, as partições:

$\frac{A}{R} = \{\overline{3},\overline{4}\} = \{\{3,5,7,9\}, \{4,6,8\}\}$

$\frac{A}{R} = \{\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}\} = \{\{1,5,9\},\{2,6\},\{3,7\},\{4,8\}\}$

7.6. CONGRUÊNCIA EM $\mathbb{Z}$

Definição:

> Dois números inteiros x e y são congruentes (côngruos) módulo m somente se a diferença x - y é divisível por m. ($m \in \mathbb{N}$).

Notação: $x \equiv y \pmod{m}$

Leitura: x é congruente a y, módulo m.

Exemplos:

$17 \equiv 5$ (mod. 4), pois $17 - 5 = 12 = 3.4$

$23 \equiv 9$ (mod. 7), pois $23 - 9 = 14 = 2.7$

$-14 \equiv 4$ (mod. 6), pois $-14 - 4 = -18 = -3.6$

7.7. CLASSES DE EQUIVALÊNCIA EM $\mathbb{Z}$

Definição:

> Classe de equivalência em $\mathbb{Z}$ do elemento $\overline{a}$ é o conjunto de todos os elementos $x \in \mathbb{Z}$, tal que $x \equiv a$ (mod. m).

Em símbolos:

$$\boxed{\overline{a} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{m}\}}$$

sendo $m \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

1) Para $a = 0$ e $m = 4$:

$$\boxed{x \equiv 0 \pmod{4}}$$

$\overline{0} = \{\ldots,-8,-4,0,4,8,\ldots\}$

2) Para $a = 1$ e $m = 4$:

$$\boxed{x \equiv 1 \pmod{4}}$$

$\overline{1} = \{\ldots,-7,-3,1,5,9,\ldots\}$

3) Para $a = 2$ e $m = 4$:

$$\boxed{x \equiv 2 \pmod{4}}$$

$\overline{2} = \{\ldots,-6,-2,2,6,10,\ldots\}$

4) Para $a = 3$ e $m = 4$:

$$\boxed{x \equiv 3 \pmod{4}}$$

$\overline{3} = \{\ldots,-5,-1,3,7,11,\ldots\}$

Daqui por diante, os subconjuntos $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$, etc., serão iguais a um dos subconjuntos $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$ ou $\overline{3}$.

De tudo, observa-se que, para a relação de equivalência em $\mathbb{Z}$ definida por

$$\boxed{x \equiv a \ (\text{mod. } m)}$$

há "m classes de equivalências distintas".

7.8. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Dar em $\mathbb{Z}$, as classes de equivalência:

1) (mod. 3)

2) (mod. 5)

7.9. RESPOSTAS

1) $\overline{0} = \{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\}$
$\overline{1} = \{\ldots,-5,-2,1,4,\ldots\}$
$\overline{2} = \{\ldots,-4,-1,2,5,\ldots\}$

2) $\overline{0} = \{\ldots,-10,-5,0,5,10,\ldots\}$
$\overline{1} = \{\ldots,-9,-4,1,6,11,\ldots\}$
$\overline{2} = \{\ldots,-8,-3,2,7,12,\ldots\}$
$\overline{3} = \{\ldots,-7,-2,3,8,13,\ldots\}$
$\overline{4} = \{\ldots,-6,-1,4,9,14,\ldots\}$

Capítulo VIII
FUNÇÕES (aplicações)

8.1. PRELIMINAR

Sejam A e B dois conjuntos e seja f uma relação binária de A em B, isto é, f é uma parte do produto cartesiano $A \times B$.

8.2. DEFINIÇÃO

> Função de A em B é uma relação binária f que associa a cada elemento x de A um único elemento y de B, tal que $(x,y) \in f$.

Representa-se:

$$f:A \longrightarrow B \quad \text{ou} \quad A \xrightarrow{f} B$$

O conjunto A é chamado de conjunto partida da função f e o conjunto B, conjunto chegada da função f.

Indica-se que um elemento $x \in A$ tem como imagem um elemento $y \in B$, dos modos

$f: x \longrightarrow y$ ou $x \xrightarrow{f} y$ ou melhor $y = f(x)$, o elemento x é chamado de pré-imagem.

É oportuno observar que a imagem de um elemento é um elemento e a imagem de um conjunto é um conjunto.

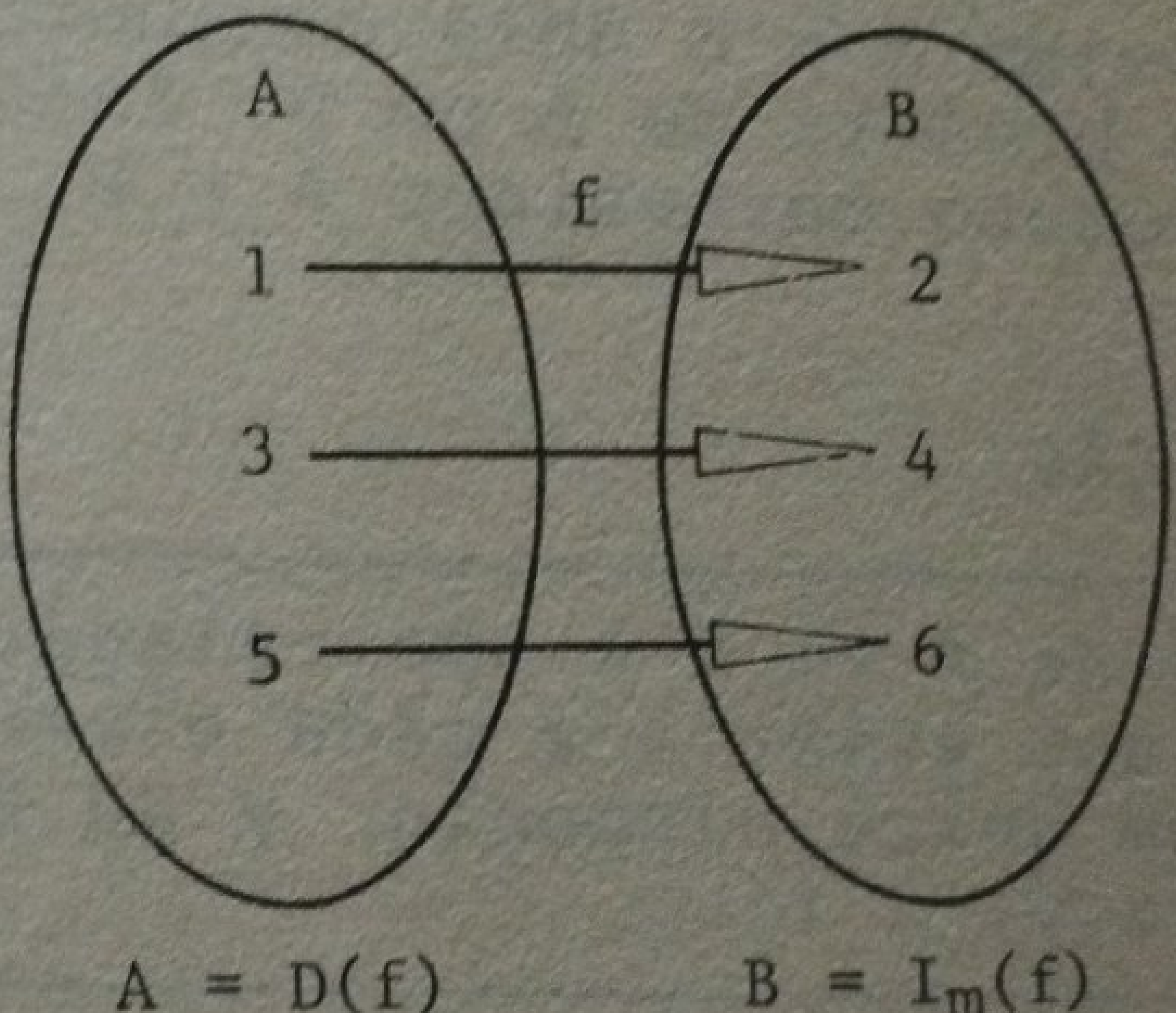
8.3. EXEMPLOS

1) Dados os conjuntos

$$A = \{1,3,5\} \text{ e } B = \{2,4,6\}$$

$f = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$ é uma função.

Representando a f num diagrama, tem-se:



O conjunto partida A é também o domínio da função f e o conjunto chegada B é, neste exemplo, a imagem da função f.

Essa função, também poderia ser definida pela fórmula $y = x + 1$, em que $x = 1,3,5$. Isto é:

$$f: x \longrightarrow y = x + 1 \quad \text{ou} \quad x \xrightarrow{f} y = x + 1$$

ou melhor:

$$y = f(x) = x + 1$$

porque os elementos 1,3 e 5 (pré-imagens) do domínio estão, respectivamente, associados às imagens 2, 4 e 6 pela equação dada. Pois, se:

$$\begin{array}{lcl} x = 1 & \Longrightarrow & y = f(1) = 1 + 1 = 2 \\ x = 3 & \Longrightarrow & y = f(3) = 3 + 1 = 4 \\ x = 5 & \Longrightarrow & y = f(5) = 5 + 1 = 6 \end{array}$$

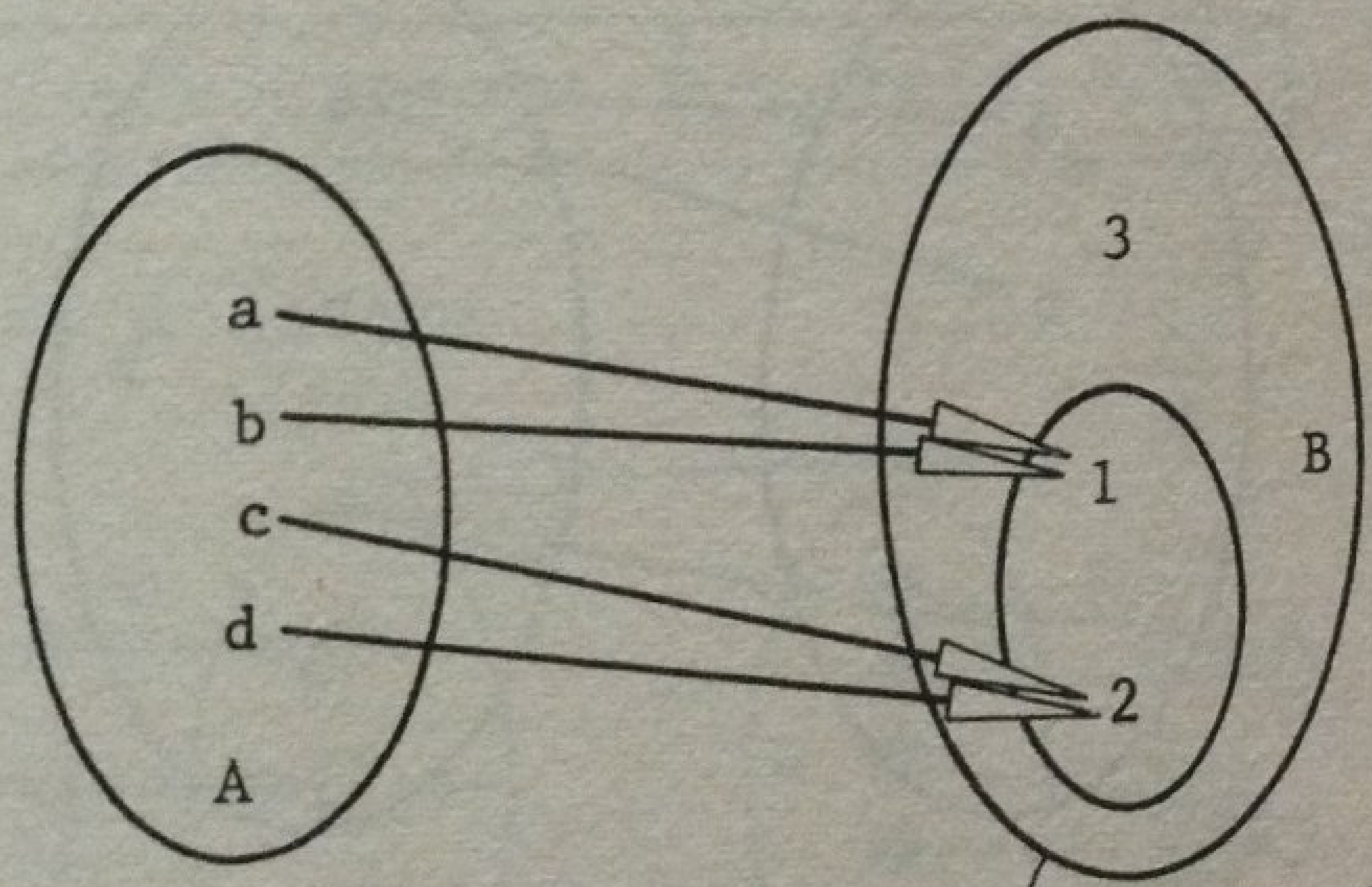
Elementos do domínio da f — Elementos da imagem da f

2) Dados $A = \{a,b,c,d\}$ e $B = \{1,2,3\}$

$$f = \{(a,1),(b,1),(c,2),(d,2)\}$$

também é uma função.

Num diagrama:

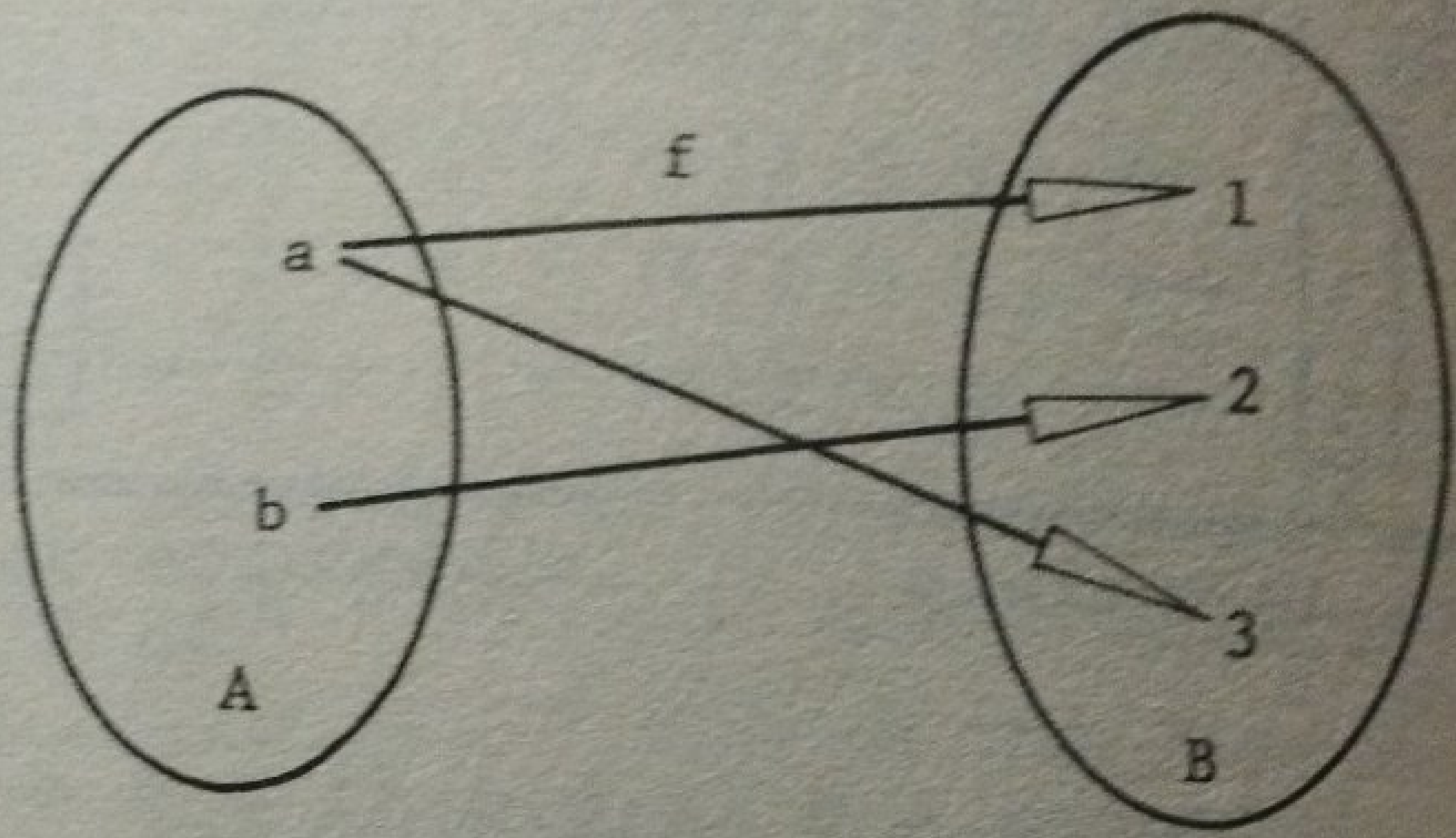


$D(f) = A$ $\qquad$ $I_m(f) = \{1,2\}$

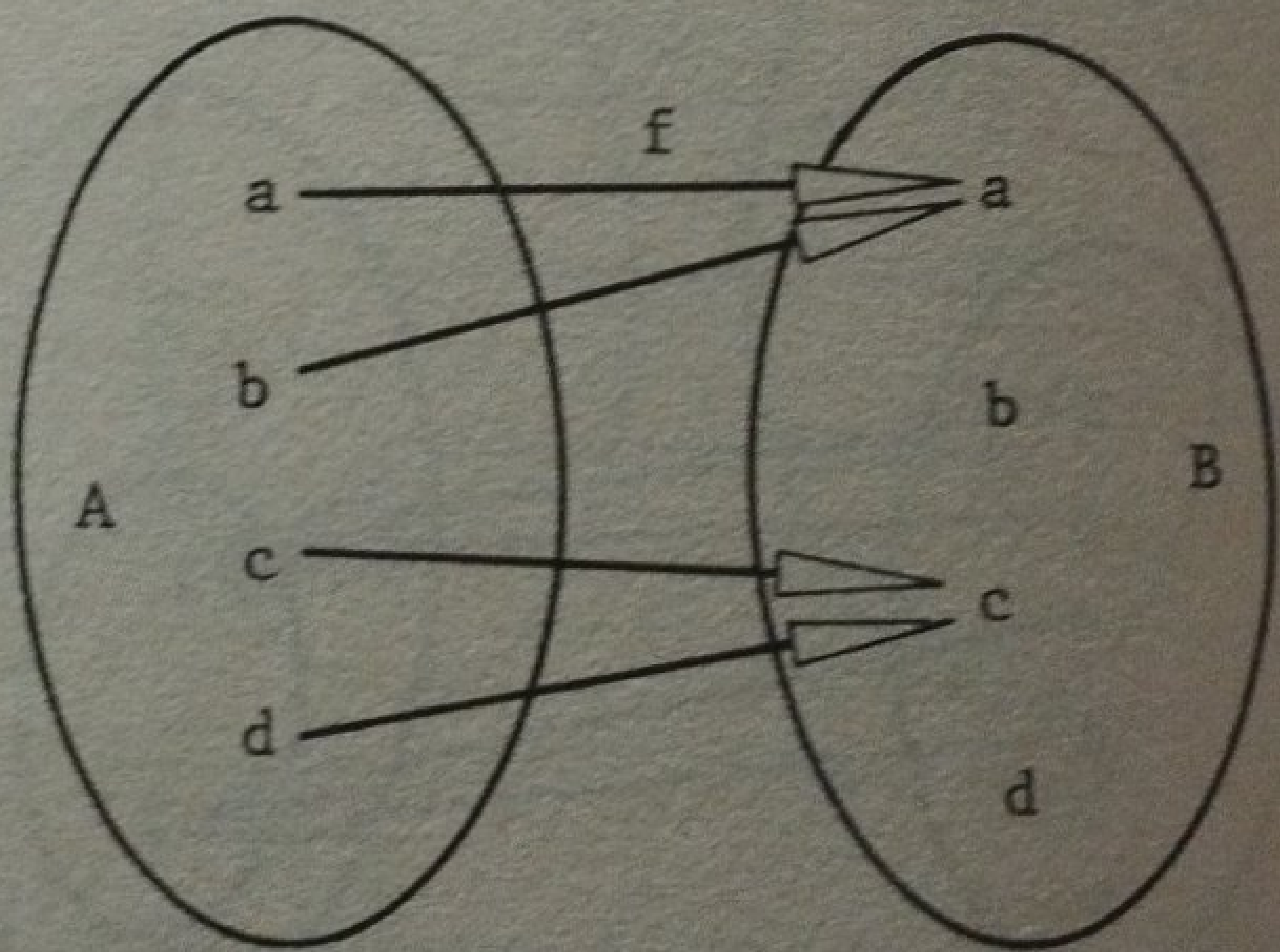
3) Se $A = \{a,b\}$ e $B = \{1,2,3\}$

$$f = \{(a,1),(b,2),(a,3)\}$$

NÃO É UMA FUNÇÃO de A em B, porque a cada elemento de A não está associado um único elemento de B. Ao elemento a ε A estão associados 2 elementos de B (1 e 3).



4) Seja o conjunto A = {a,b,c,d} e seja o diagrama:



A função de A em A é:

f = {(a,a),(b,a),(c,c),(d,c)}

D(f) = {a,b,c,d} e I_m(f) = {a,c}

Observação:

O domínio D(f) de uma função f de A em B, é sempre o conjunto A, já a imagem $I_m(f)$ pode ser tanto o conjunto B como um subconjunto de B, isto é:

$$Im(f) \subseteq B,$$

o que se pode verificar nos exemplos dados.

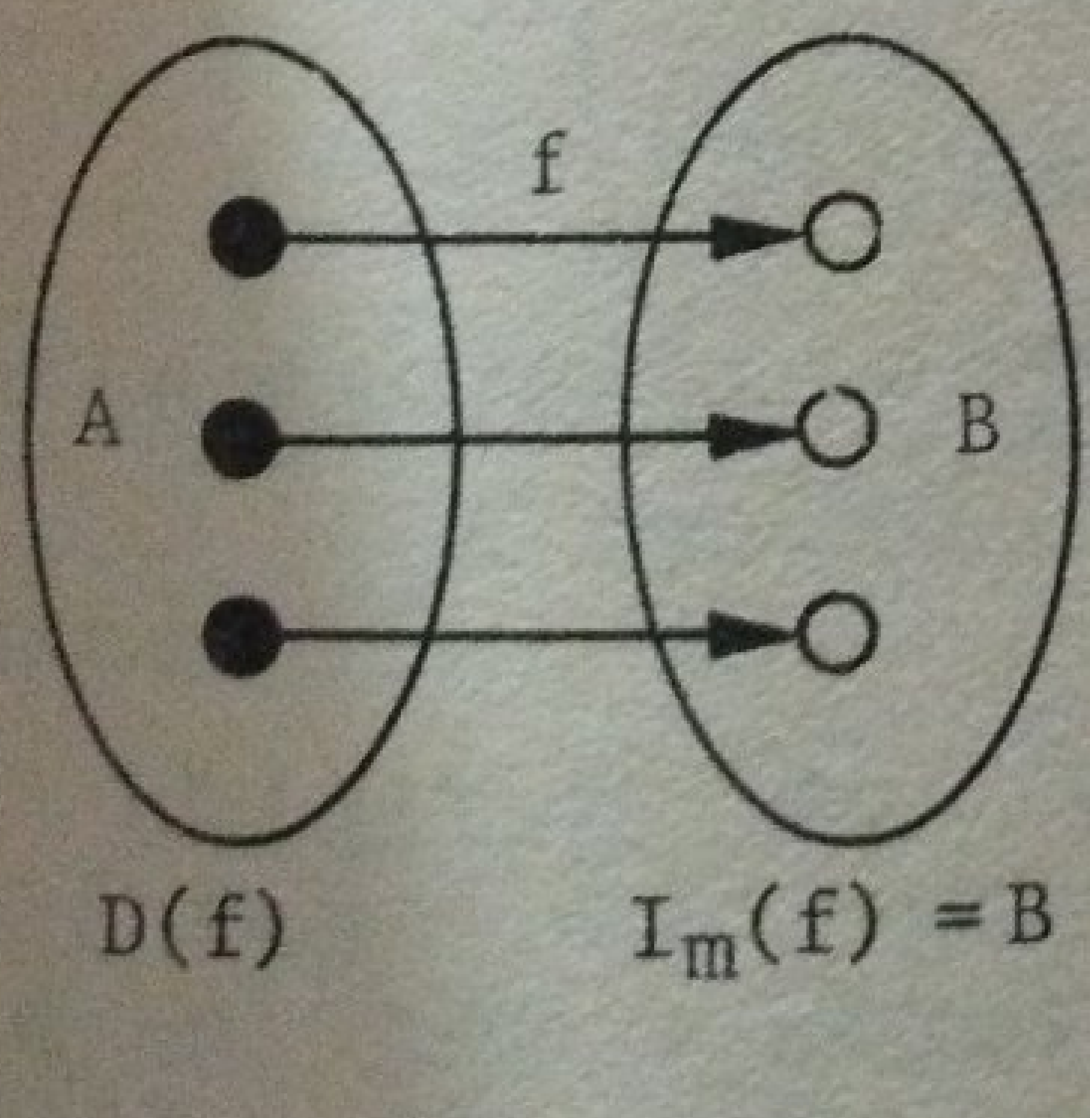
8.3. FUNÇÃO SOBREJETORA (sobrejeção)

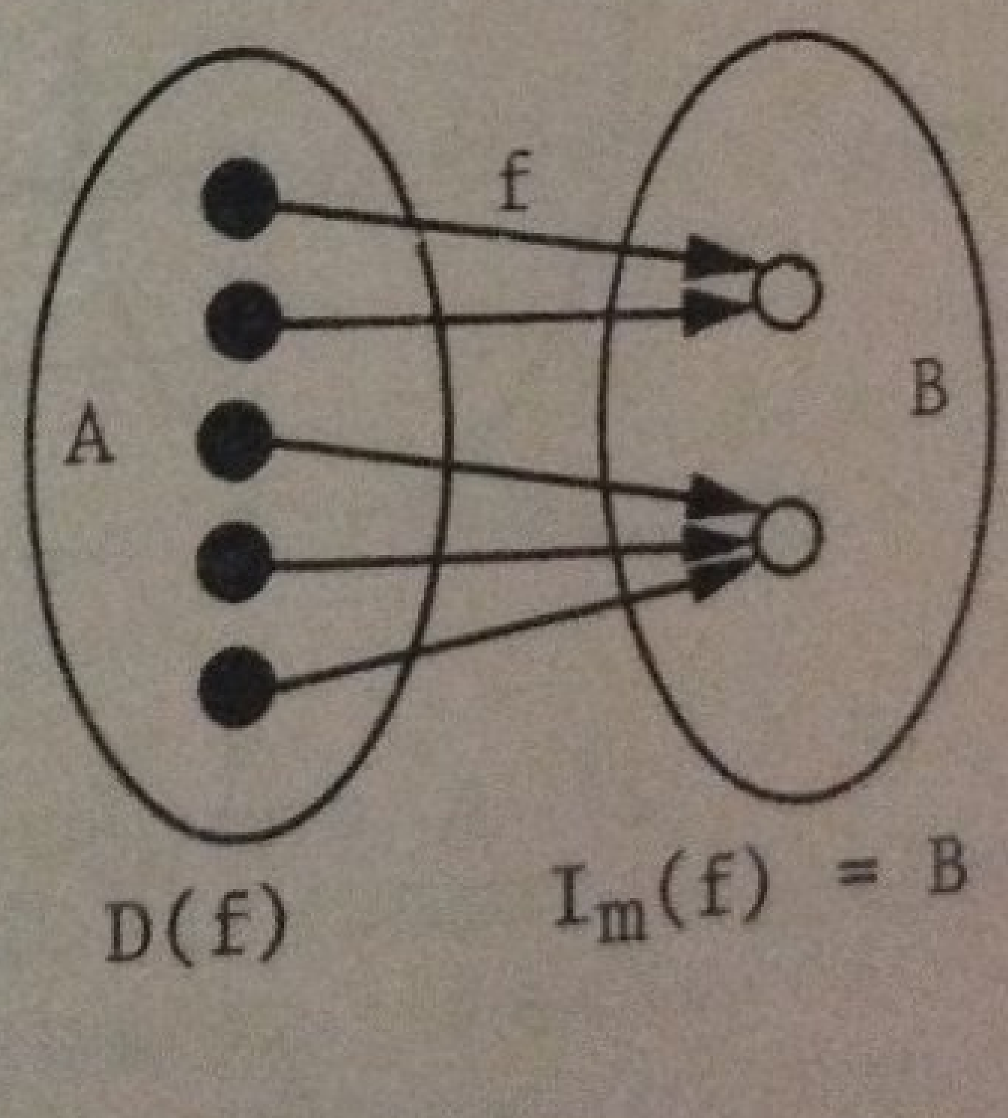
Definição

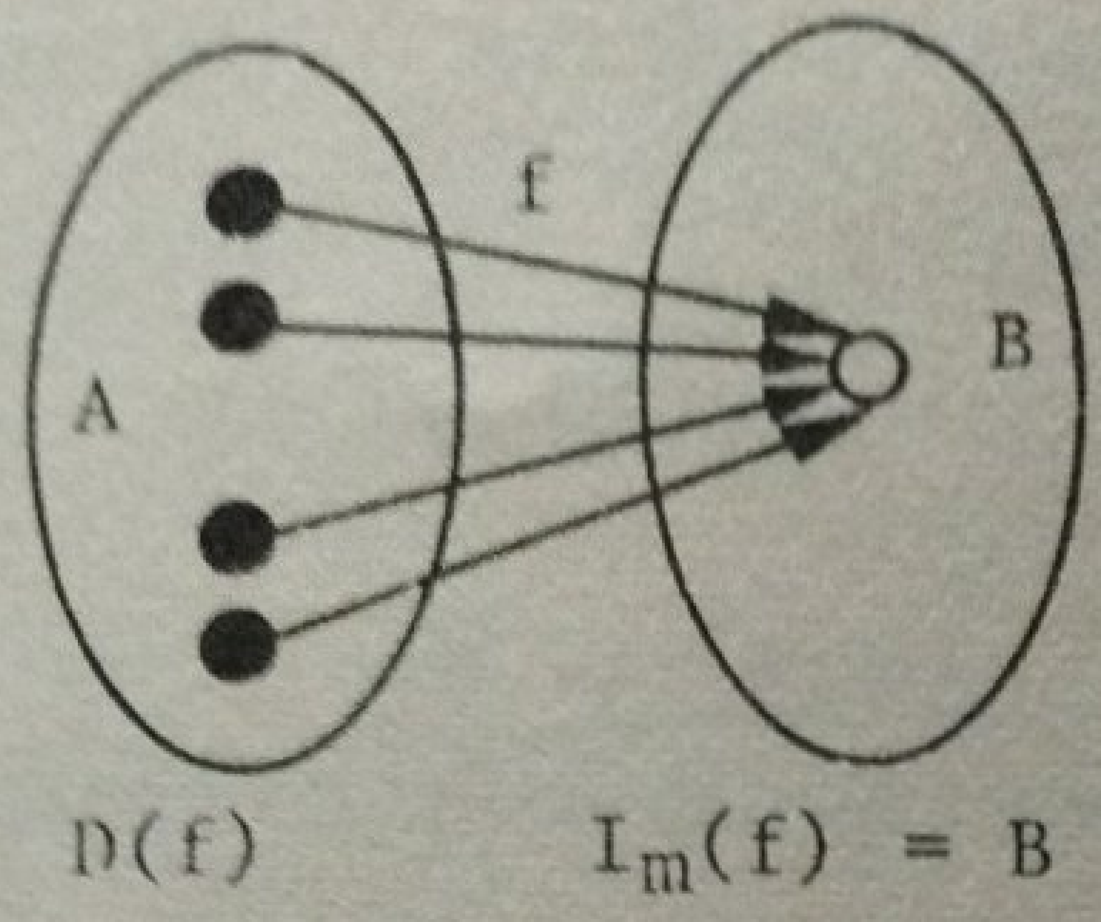
> Função sobrejetora é uma função $f: A \longrightarrow B$, tal que todo elemento y de B é imagem de, pelo menos, um elemento x de A.

$$\boxed{f \text{ sobrejetora} \iff I_m(f) = B}$$

Exemplos de Diagrama:







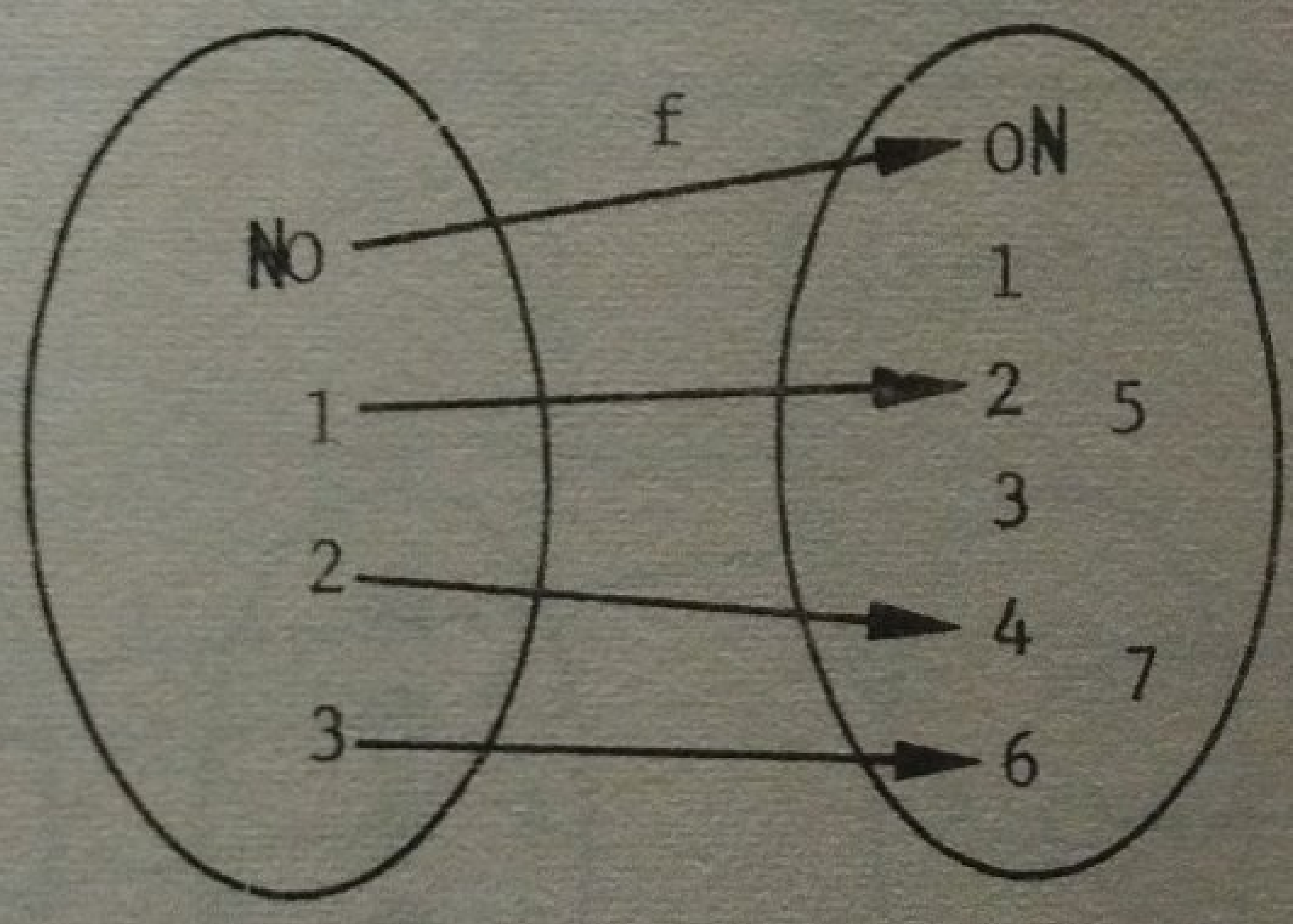
Vê-se que no conjunto B não podem sobrar elementos.

Contra-exemplos:

1) A função $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida pela equação

$$y = f(x) = 2x$$

não é sobrejetora, pois os números ímpares não são imagens de nenhum elemento (número) do domínio.



2) A função $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida pela equação

$$y = f(x) = x^2$$

não é sobrejetora, pois os números inteiros negativos não são imagens de nenhum número do domínio.

8.4. FUNÇÃO INJETORA (injeção)

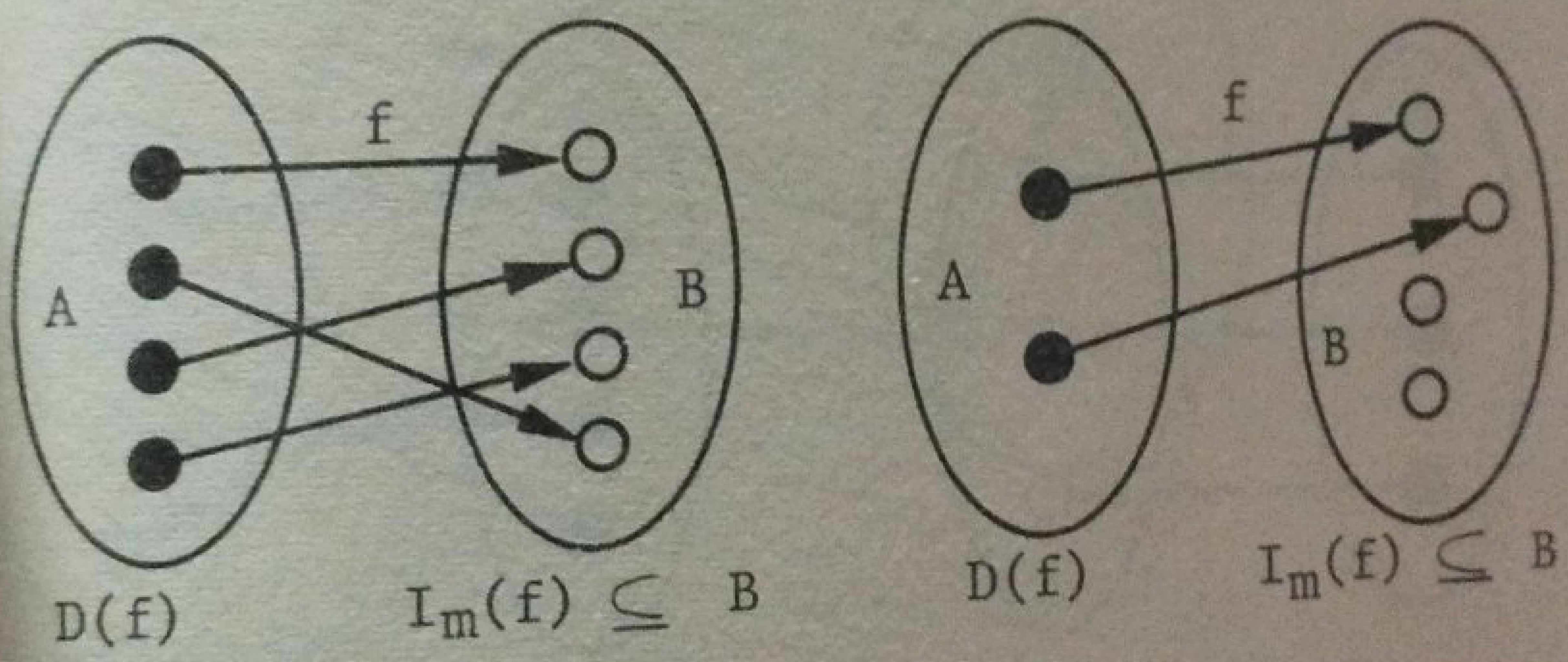
Definição:

Função injetora é uma função $f: A \to B$, tal que cada elemento $y = f(x)$ de B é a imagem de um único elemento x de A.

$$\boxed{f \text{ injetora} \iff x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)}$$

A função é injetora se elementos diferentes têm imagens diferentes.

Exemplos em Diagrama:



No conjunto B podem sobrar elementos.

Contra-exemplo:

A função $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida pela equação

$$y = f(x) = x^2$$

não é injetora, porque dois números inteiros +n e -n, têm a mesma imagem n. Assim os números +3 e -3, têm ambos por imagem o número 9, pois,

$$y = f(x) = x^2 = (\pm 3)^2 = 9.$$

8.5. FUNÇÃO BIJETORA (bijeção)

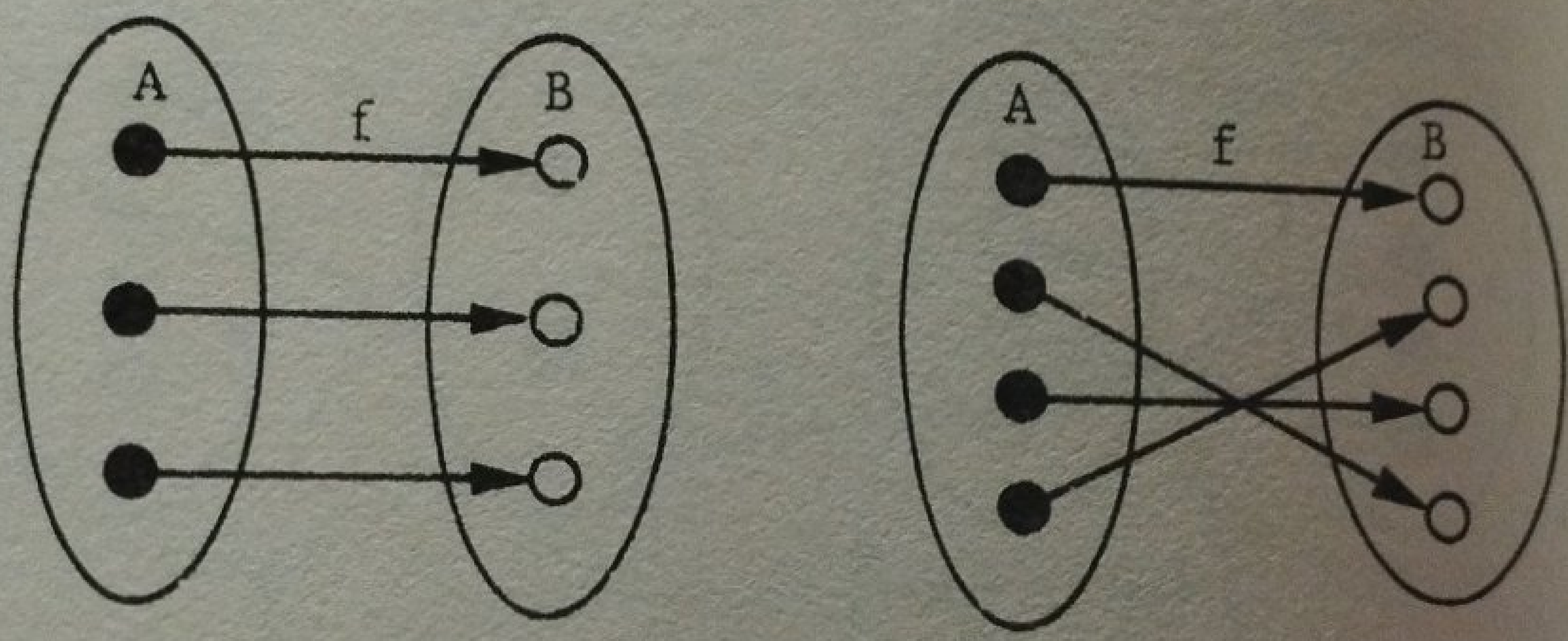
Definição:

Função bijetora é uma função $f: A \rightarrow B$, que é simultaneamente sobrejetora e injetora.

$$\boxed{f \text{ bijetora} \Longleftrightarrow \forall y,\ y \in B,\ \exists^{*}\ x,\ x \in A \mid y = f(x)}$$

$\exists^{*}$ significa: "existe um único".

Exemplos em Diagrama:



Vê-se que a correspondência entre os elementos de A e B é biunívoca, isto é, um a um.

Exemplo:

A função $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida pela equação $y = f(x) = x - 2$ é bijetora, pois ela é sobrejetora e injetora, ao mesmo tempo, como pode ser verificada à primeira vista.

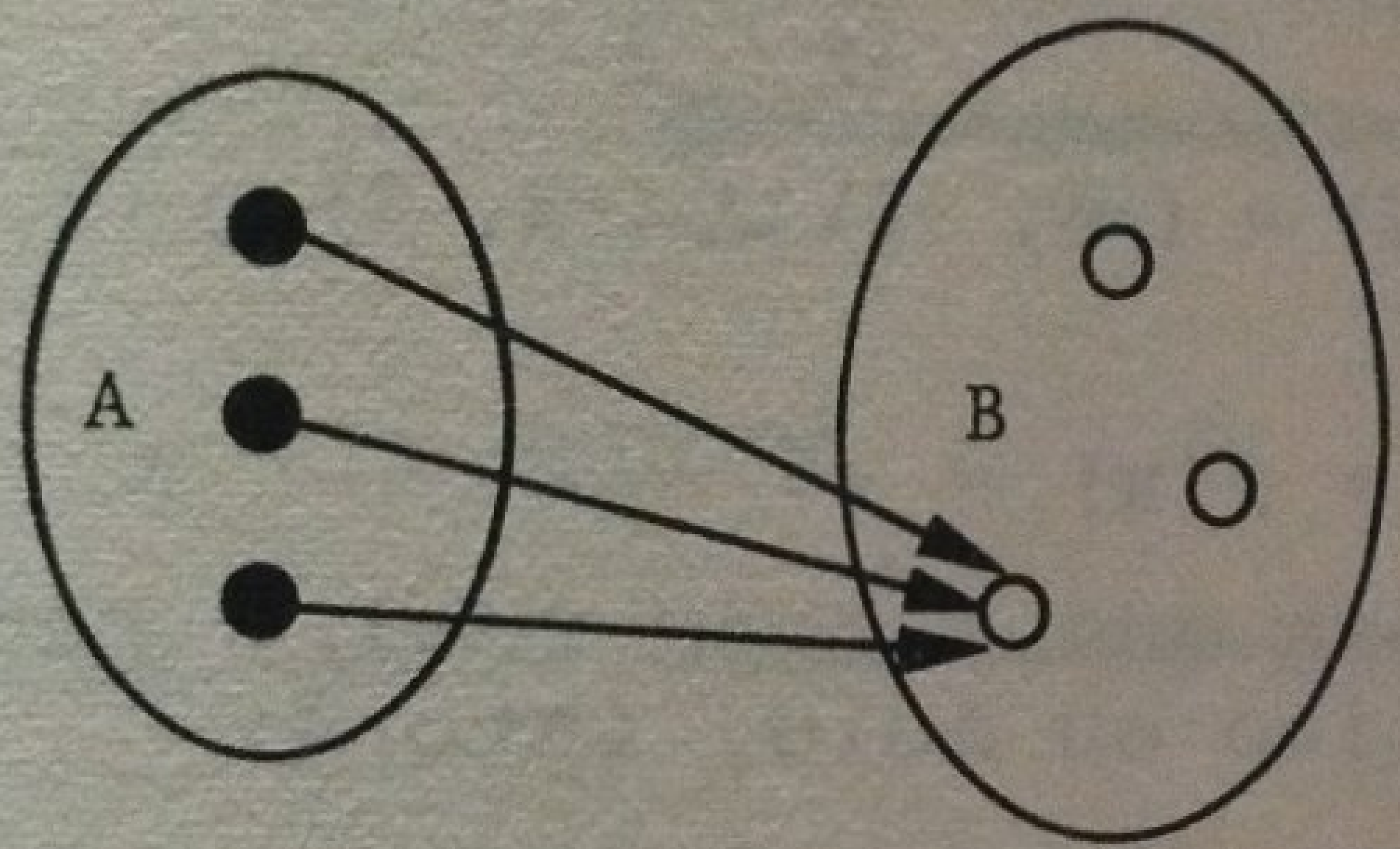
8.6. FUNÇÃO CONSTANTE

Definição:

Função constante é uma função $f:A \to B$ tal que, para todo elemento x de A, a imagem $f(x)$ de x é um único elemento y de B.

$$\boxed{f \text{ constante} \iff \forall\, x \in A,\ \exists^{*}\, y \in B \mid y = f(x)}$$

Exemplo em Diagrama:



Exemplo:

A função $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida pela fórmula $y = f(x) = 4$ é uma função constante, porque a imagem de qualquer elemento $x \in \mathbb{Z}$ do domínio é o elemento $4 \in \mathbb{Z}$, isto é, o conjunto unitário $\{4\}$.

8.7. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Calcular o domínio das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

1) $y = f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$

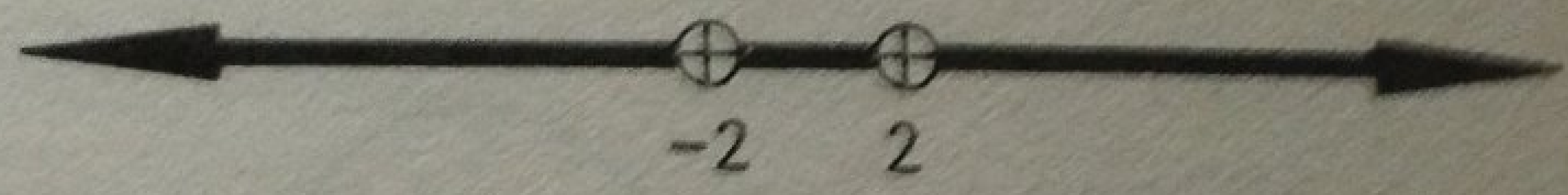
O denominador da fração deve ser diferente de zero, (3/0 tende para ∞, não é real), isto é:

$$x^2 = 4 \neq 0$$

$$x^2 \neq 4 \quad \text{e}$$

$$x \neq \pm 2$$

Portanto, x pode assumir qualquer valor real com excessão de -2 e $+2$. Logo, o domínio da função é:



$$D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$$

2) $y = f(x) = \sqrt{7 - x}$

Para que y seja real, o radicando deve ser positivo ou nulo, isto é:

$$7 - x \geqq 0$$

$$-x \geqq -7 \quad \times(-1)$$

$$x \leqq 7$$

Logo:

$$D(f) = (-\infty, 7]$$

3) $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 2}{x - 3}}$

Viu-se que:

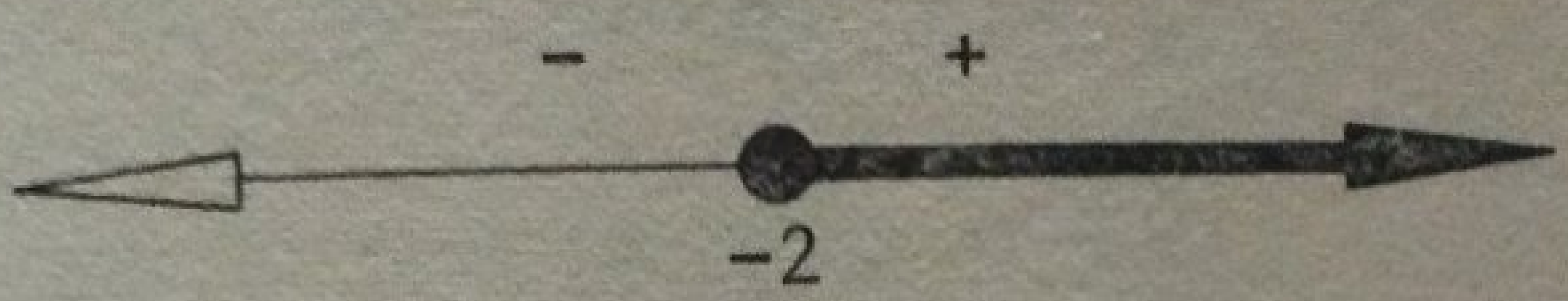
$$\frac{x + 2}{x - 3} \geq 0 \quad \text{e} \quad x - 3 \neq 0$$

Para uma fração ser positiva o numerador e o denominador devem ter os mesmos sinais:

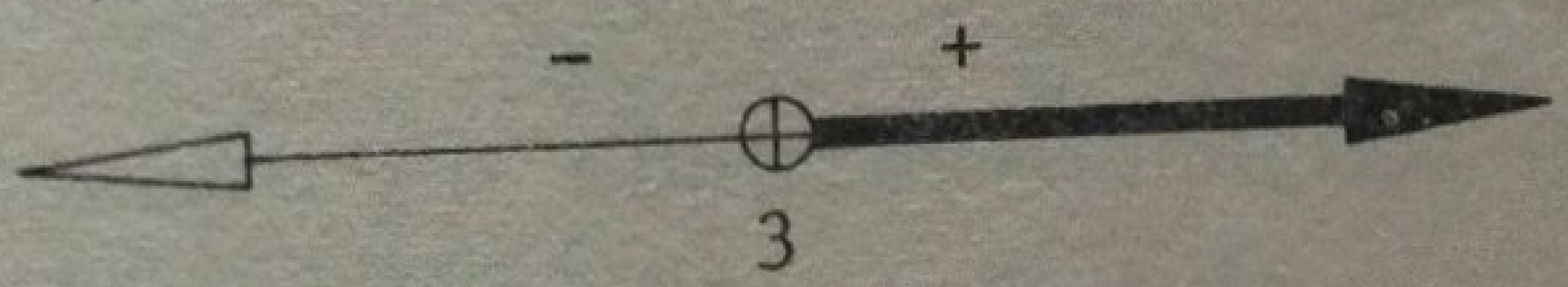
$$\left(\frac{+}{+} = \frac{-}{-} = +\right).$$

Supondo serem ambos positivos e levando-se em consideração que o numerador pode ser igual a zero, vem:

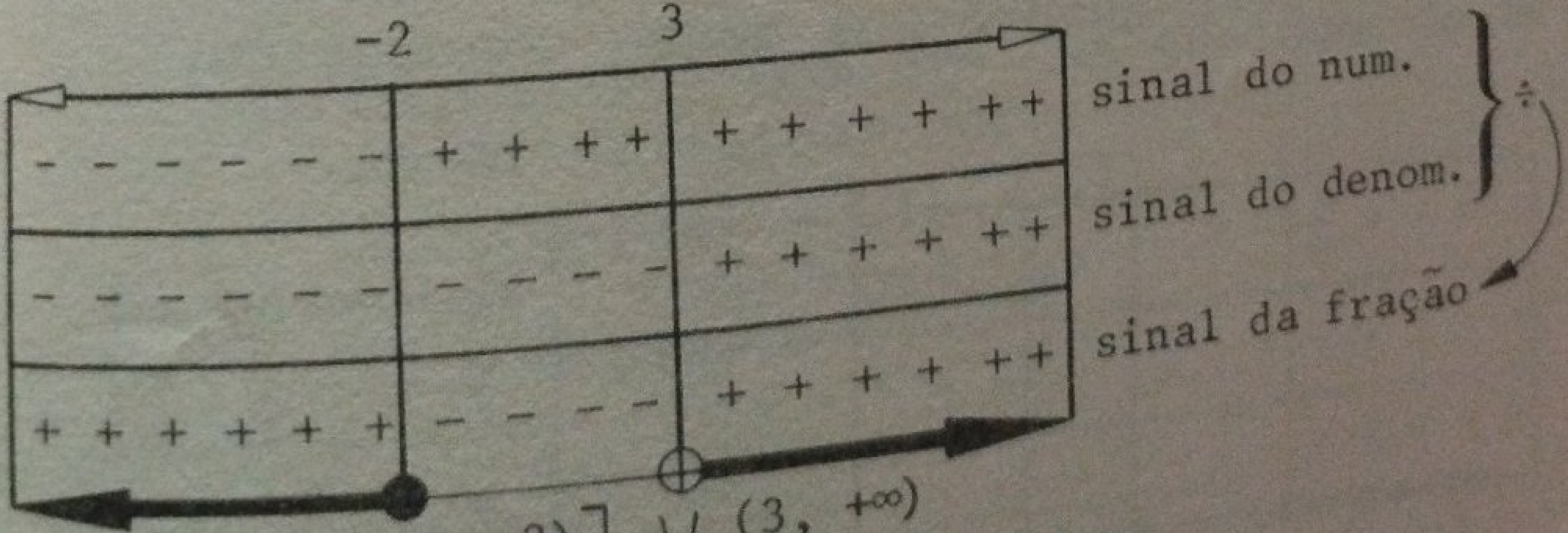
a) $x + 2 \geq 0$ e $x \geq -2$



b) $x - 3 = 0$ e $x > 3$



Levando-se esses valores para o quadro a seguir, no mesmo conclui-se que:



$D(f) = (-\infty, -2)] \cup (3, +\infty)$

4) $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 8x + 12}}$

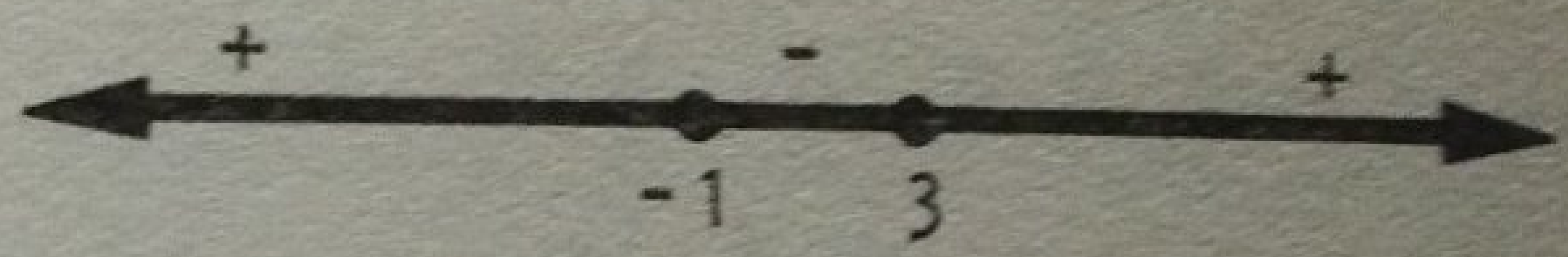
$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 8x + 12} \geq 0 \quad \text{e} \quad x^2 - 8x + 12 \neq 0$$

a) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

O conjunto-verdade da equação

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

é $V_1 = \{-1, 3\}$. Então:



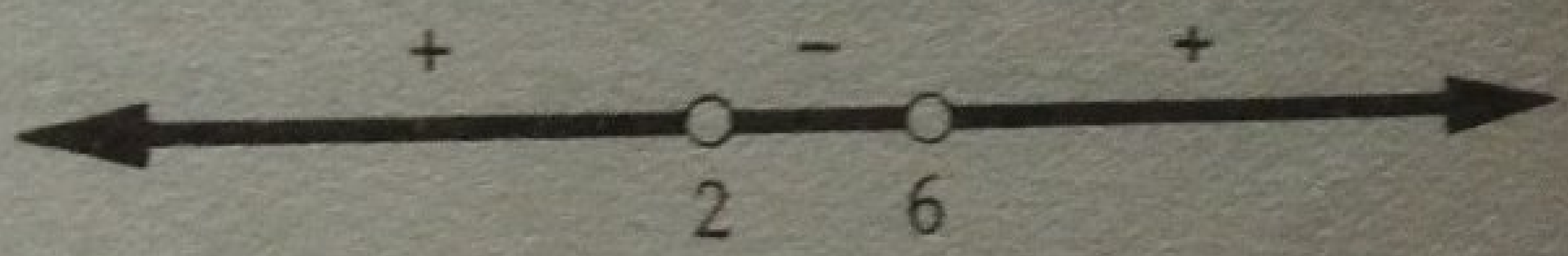
pelo sinal do trinômio do 2º grau.

b) $x^2 - 8x + 12 > 0$

O conjunto-verdade da equação

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

é $V_2 = \{2, 6\}$. Logo:



No quadro que segue conclui-se:

-1	2	3	6		
+ + + + +	- - -	-	+ + +	+ + + + +	sinal do num.
+ + + + +	+ + +	-	- - -	+ + + + +	sinal do denom.
+ + + + +	- - -	+	- - -	+ + + + +	sinal da fração

$D(f) = (-\infty, -1] \cup (2, 3] \cup (6, +\infty)$

8.8. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Assinalar quais dos seguintes conjuntos são funções:

a) $\{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4)\}$

b) $\{(2,3),(2,4),(2,5)\}$

c) $\{(2,4),(3,9),(7,8)\}$

d) $\{(1,0),(0,2),(1,-1)\}$

2) Calcular o domínio e o contradomínio das funções $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a) $f = \{(x,y) \mid y = x^2 - 9\}$

b) $f = \{(x,y) \mid y = \dfrac{x}{x - 5}\}$

c) $f = \{(x,y) \mid y = \dfrac{|x|}{x}\}$

3) Dada a função

$$f = \{(x,y) \mid y = 5x - 2\}$$

calcular:

a) $f(2)$

b) $f(-3)$

c) $f(x^3)$

4) Calcular o domínio das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

a) $y = f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

b) $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x^2 - 9}$

c) $y = f(x) = \sqrt{6x^2 + x - 2}$

d) $y = f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$

e) $y = f(x) = \sqrt{-2x^2 + 5x - 2}$

f) $y = f(x) = \sqrt{-(-3 - x)^2}$

g) $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 3}{x + 7}}$

h) $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 2}{x - 5}}$

i) $y = f(x) = \sqrt{(x^2 - 4x - 12).(x^2 + 3x - 10)}$

j) $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2 - 9x - 5}{x^2 + 2x - 3}}$

5) Fazer o gráfico das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a) $y = f(x) = 2x - 1$

b) $y = f(x) = -x$

c) $y = f(x) = -2x$

d) $y = f(x) = 2x + 1$

e) $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$

f) $y = f(x) = x^2$

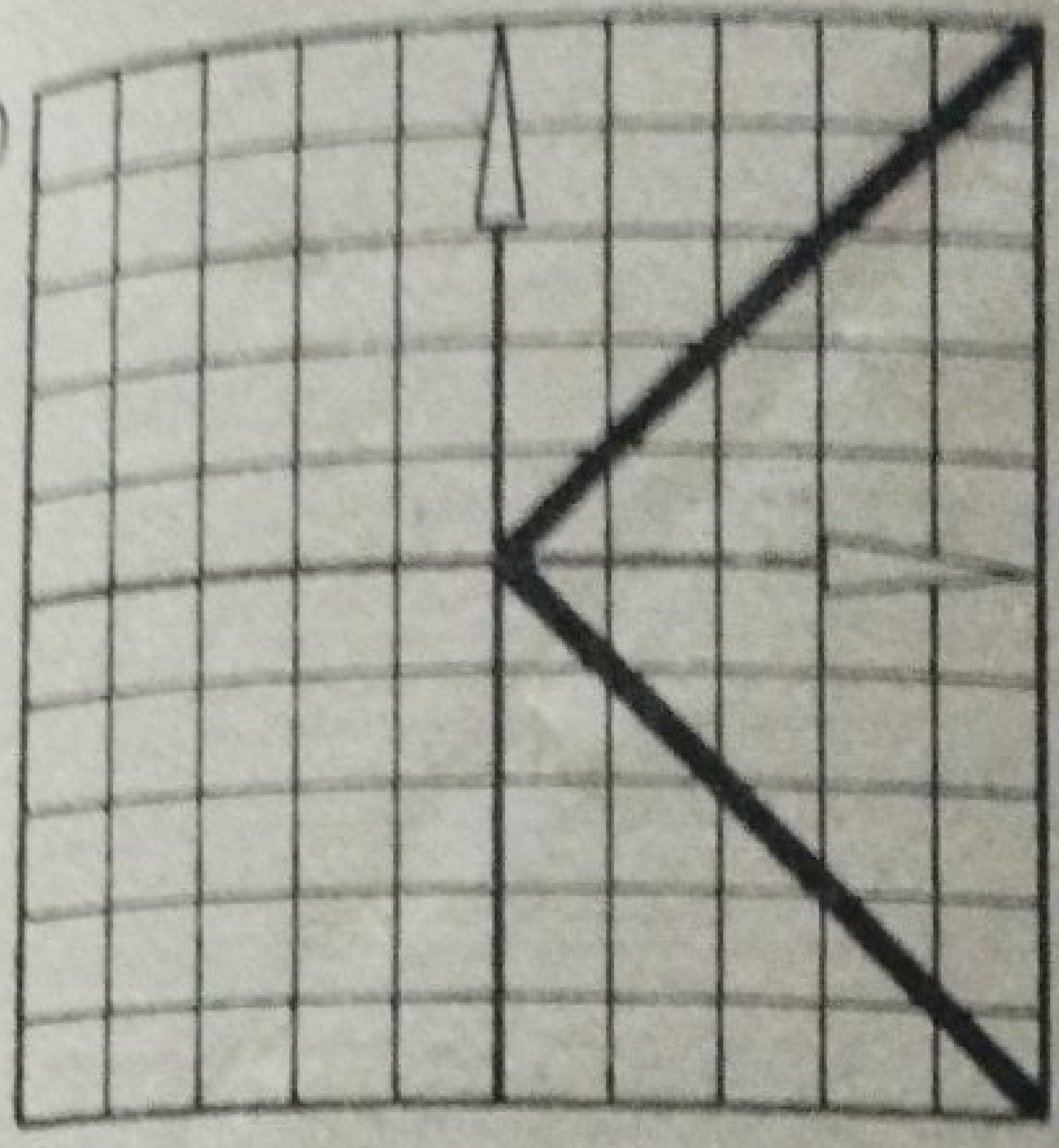
g) $y = f(x) = |x|$

h) $y = f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

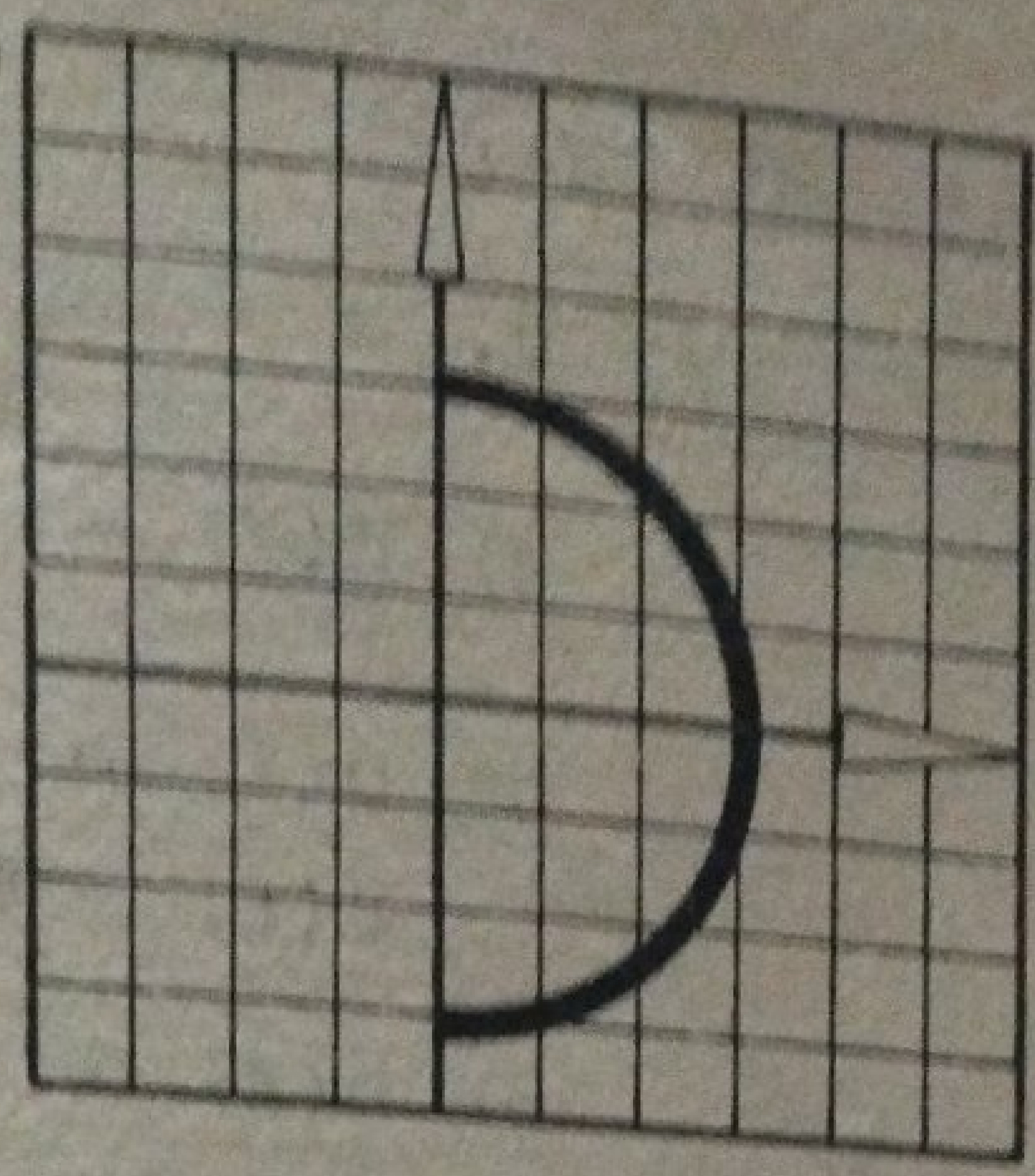
i) $y = x^2 - 2x - 3$

6) Dizer quais dos seguintes gráficos representam funções:

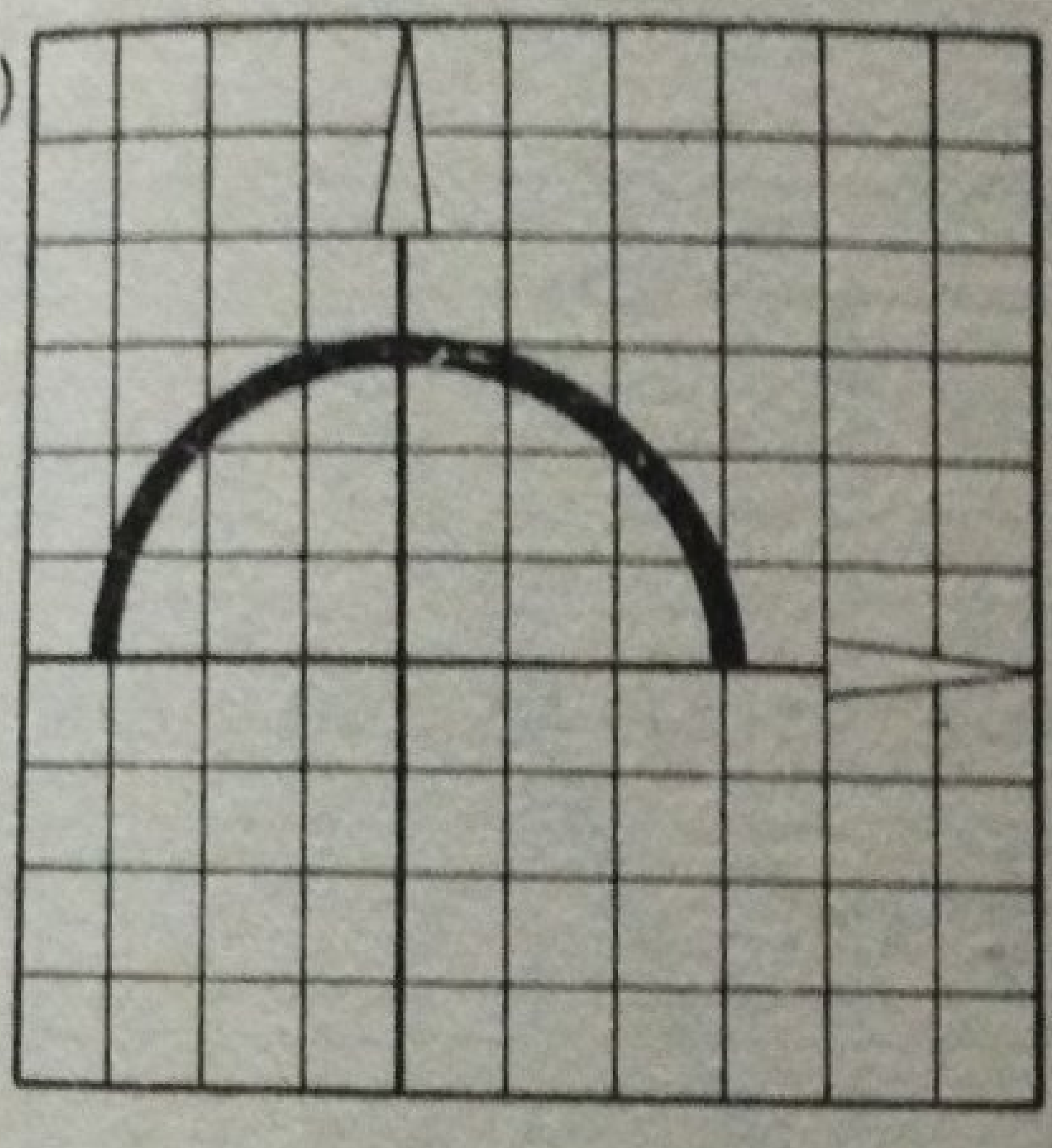
a)



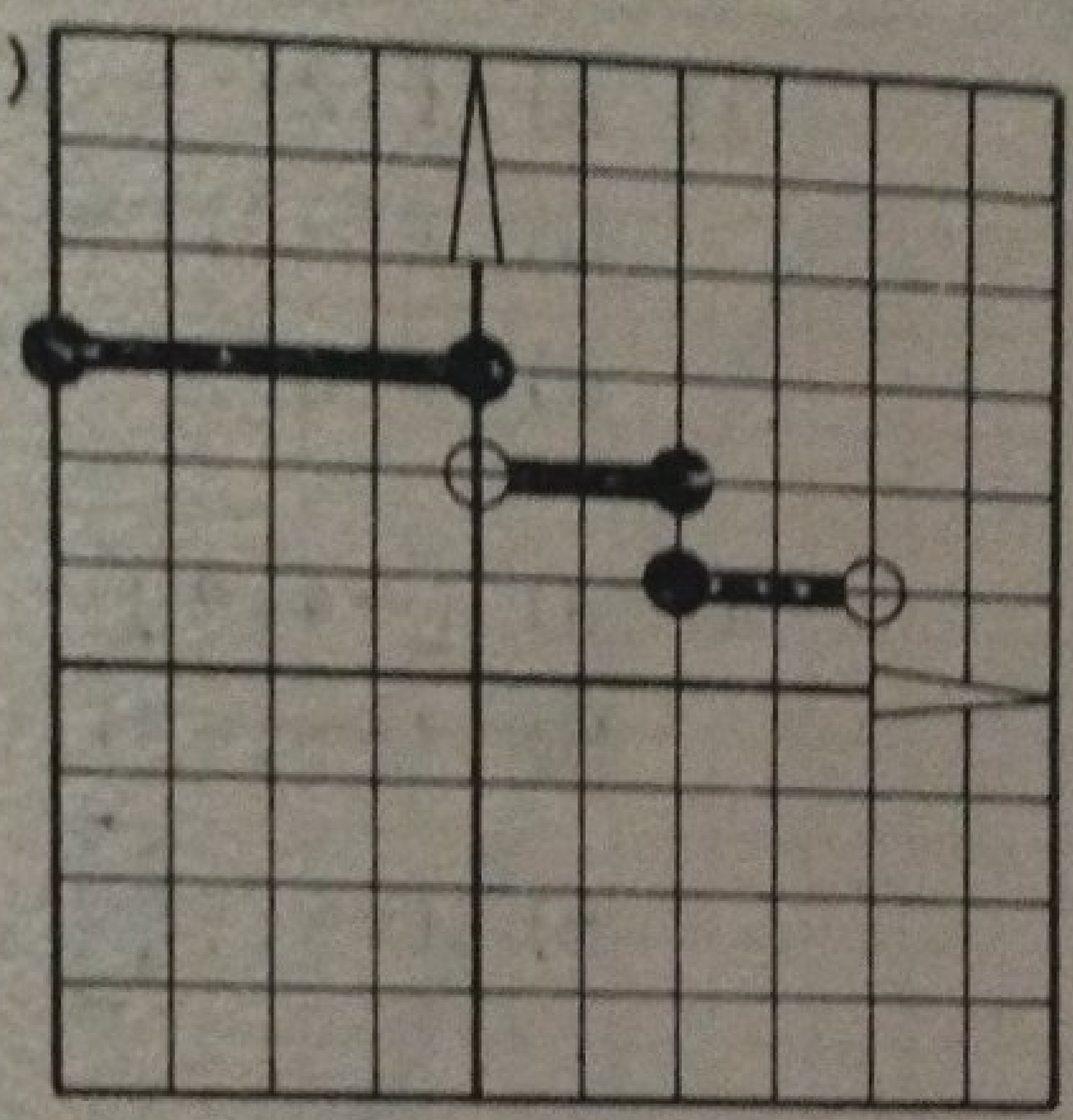
b)



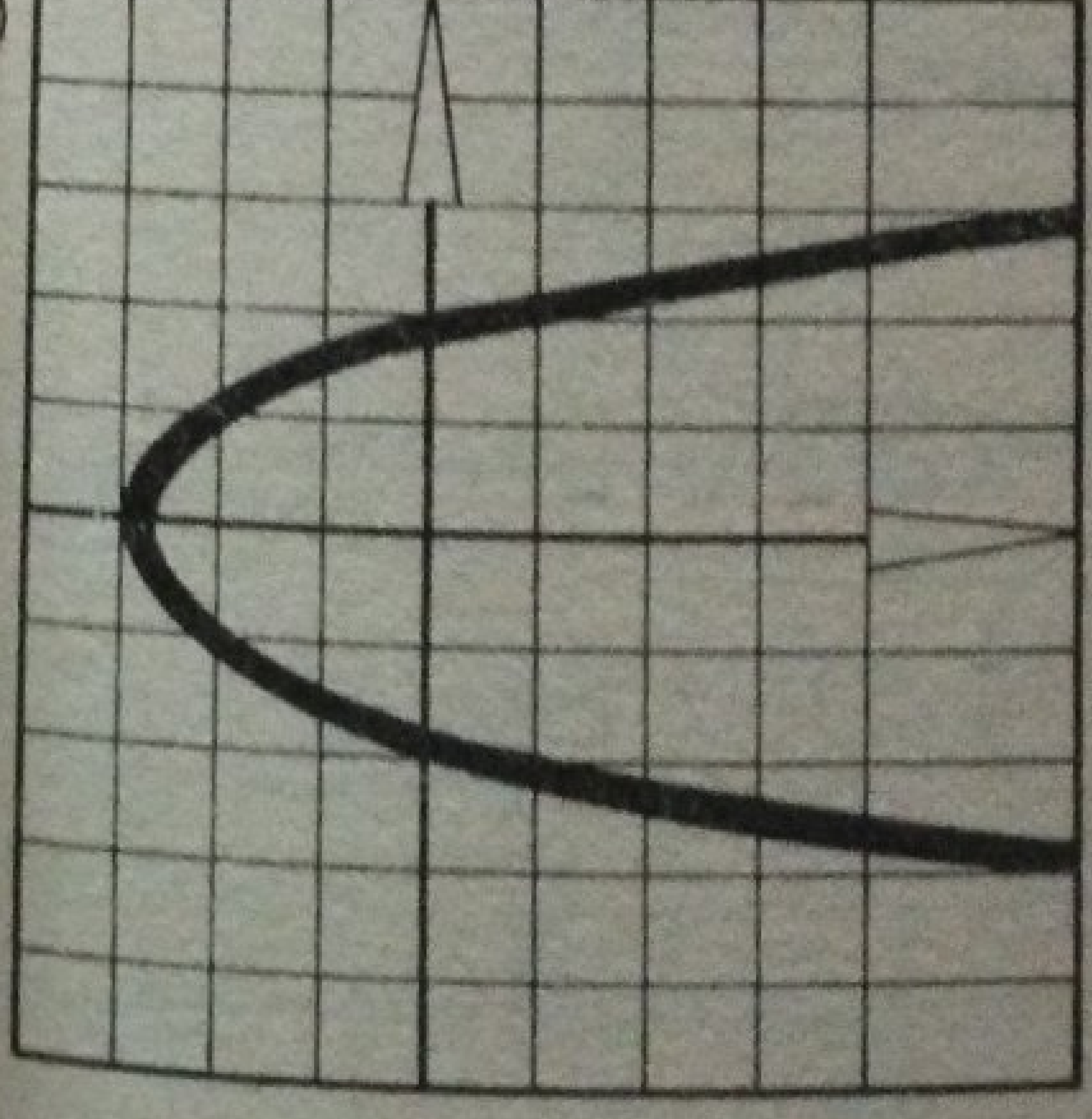
c)



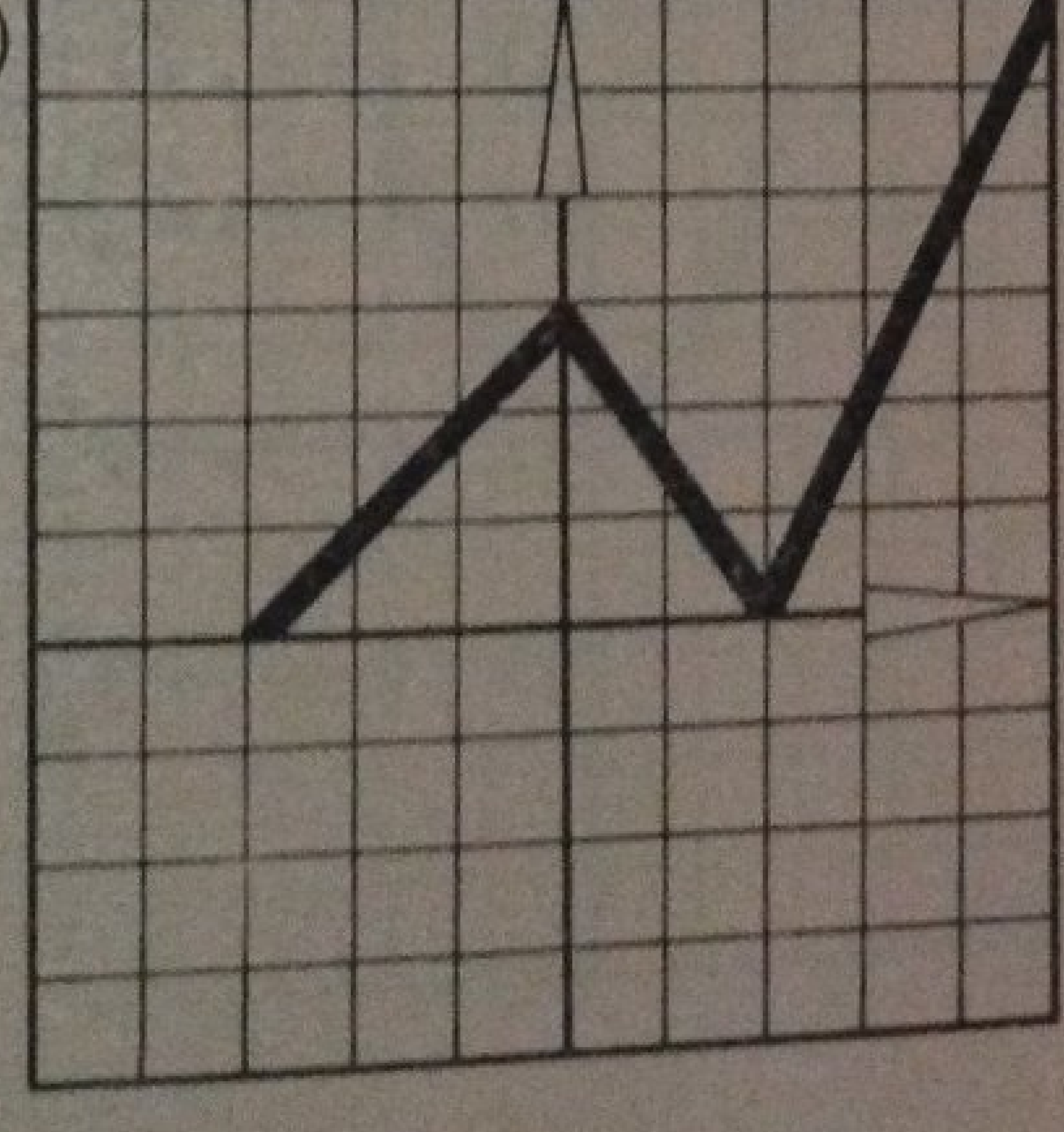
d)



e)



f)



8.9. RESPOSTAS

1) a, c

2) a) $D(f) = \mathbb{R}$, $C(f) = [-9, +\infty)$

b) $D(f) = (-\infty,5) \cup (5,+\infty)$,
$C(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

c) $D(f) = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$,
$C(f) = \{-1,1\}$

3) a) $f(2) = 8$

b) $f(-3) = -17$

c) $f(x^3) = 5x^3 - 2$

4) a) $[-4,4]$

b) $(-\infty,-3) \cup (-3,3) \cup (3,+\infty)$

c) $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

d) $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

e) $\left[\frac{1}{2},2\right]$ f) $\{3\}$

g) $(-\infty,7) \cup [3,+\infty)$

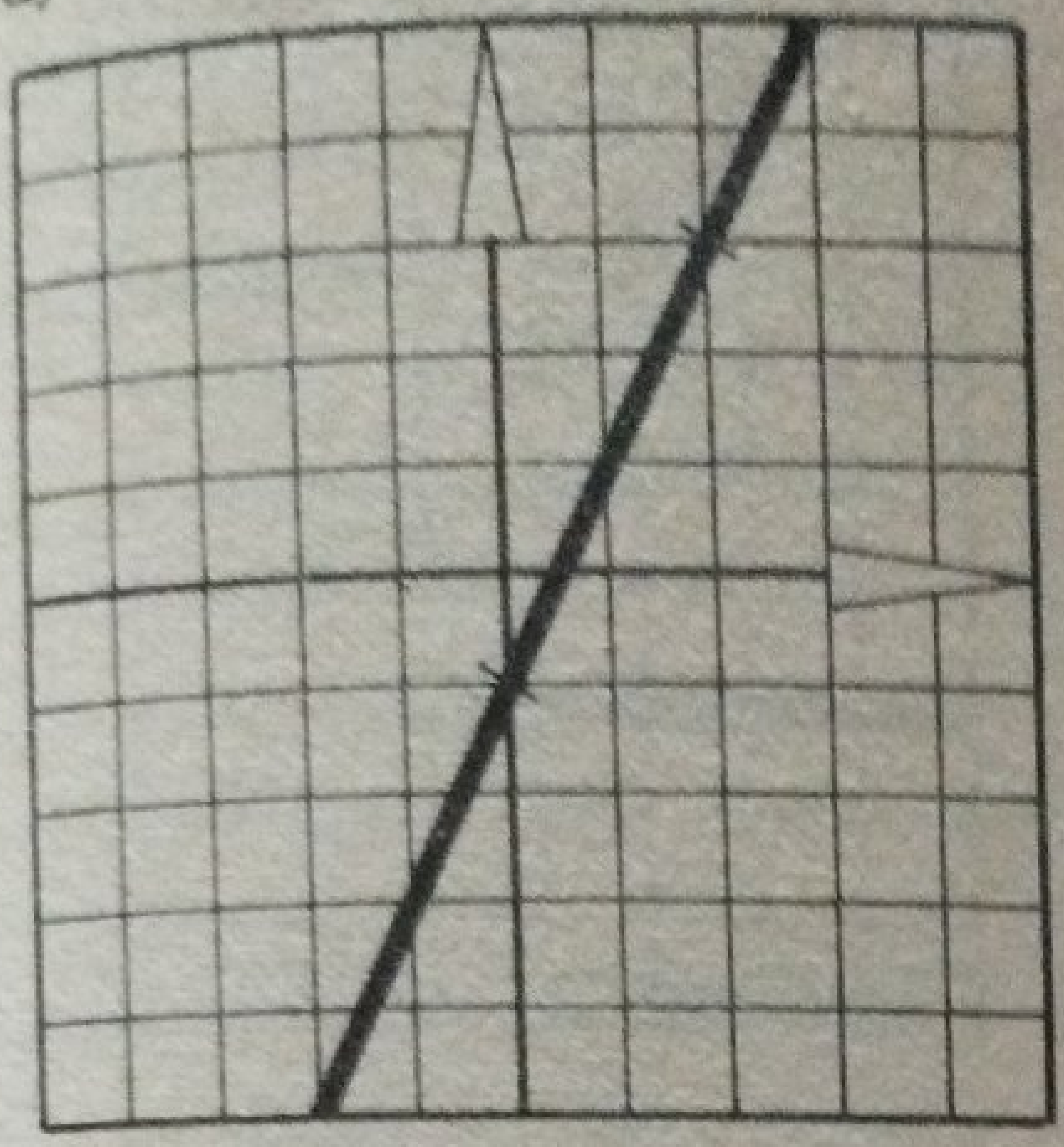
h) $(-\infty,2] \cup (5,+\infty)$

i) $(-\infty,-5] \cup [-2,2] \cup [6,+\infty)$

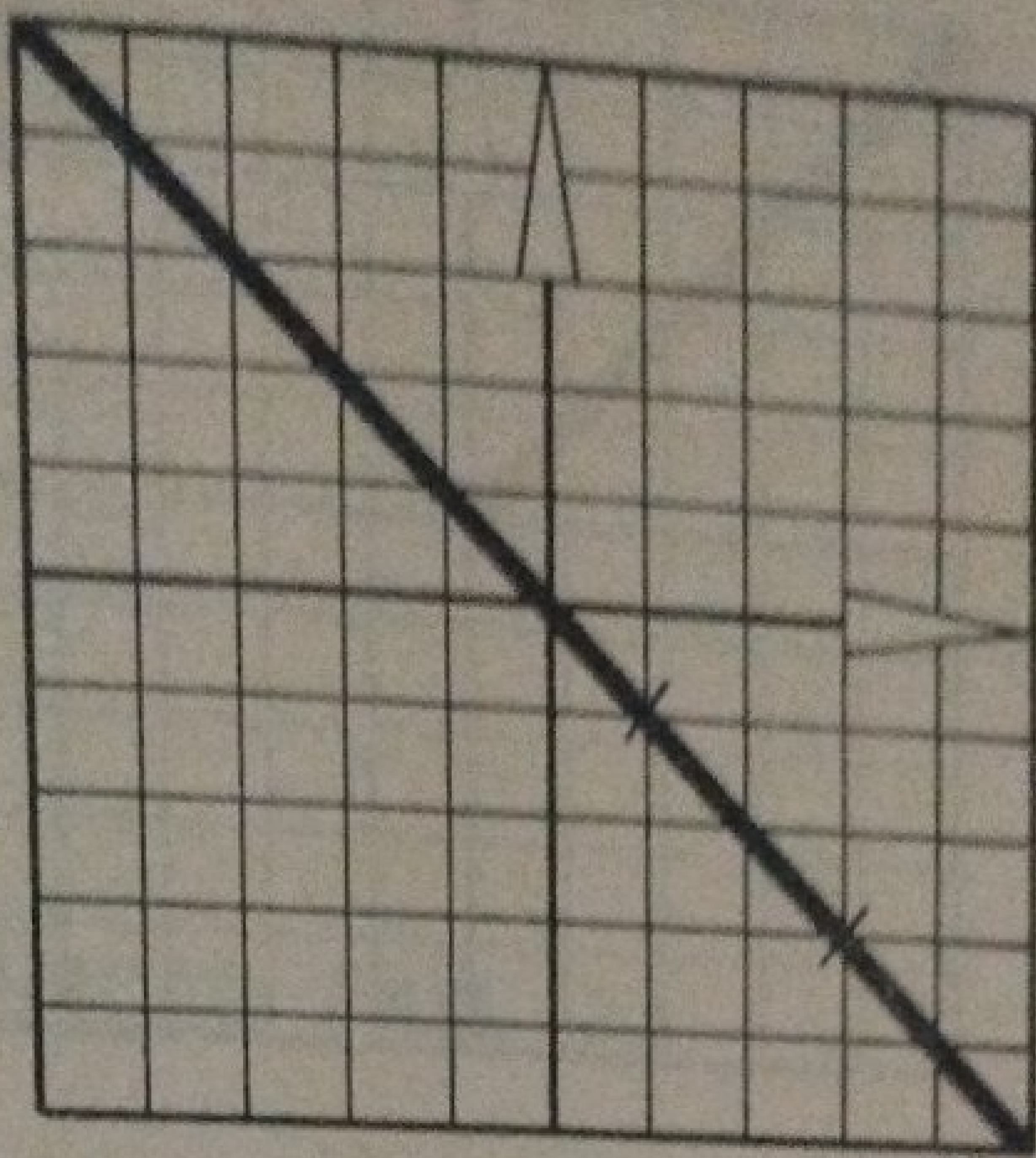
j) $(-\infty,-3] \cup \left[-\frac{1}{2},1\right) \cup [5,+\infty)$

5)

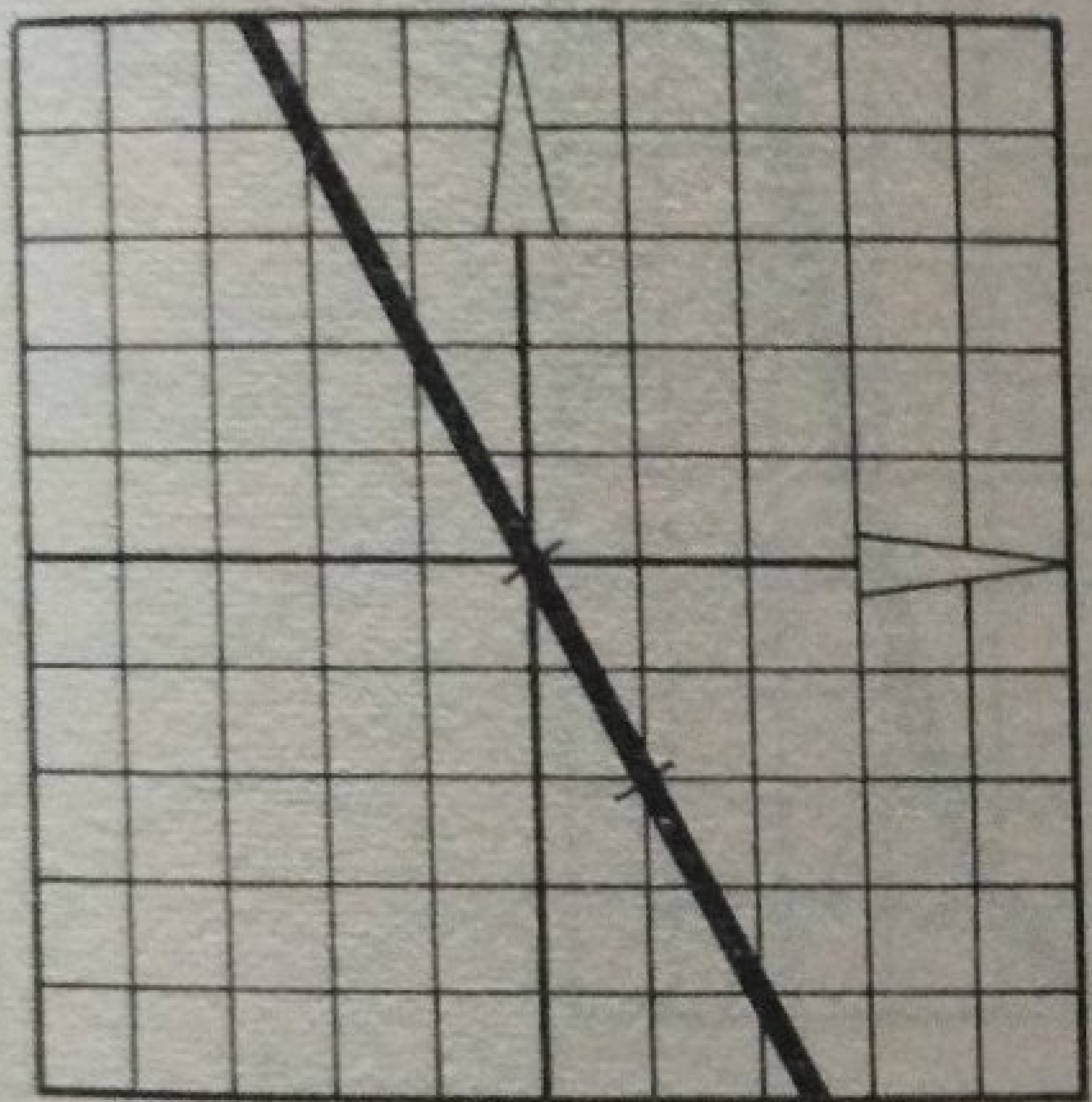
a)



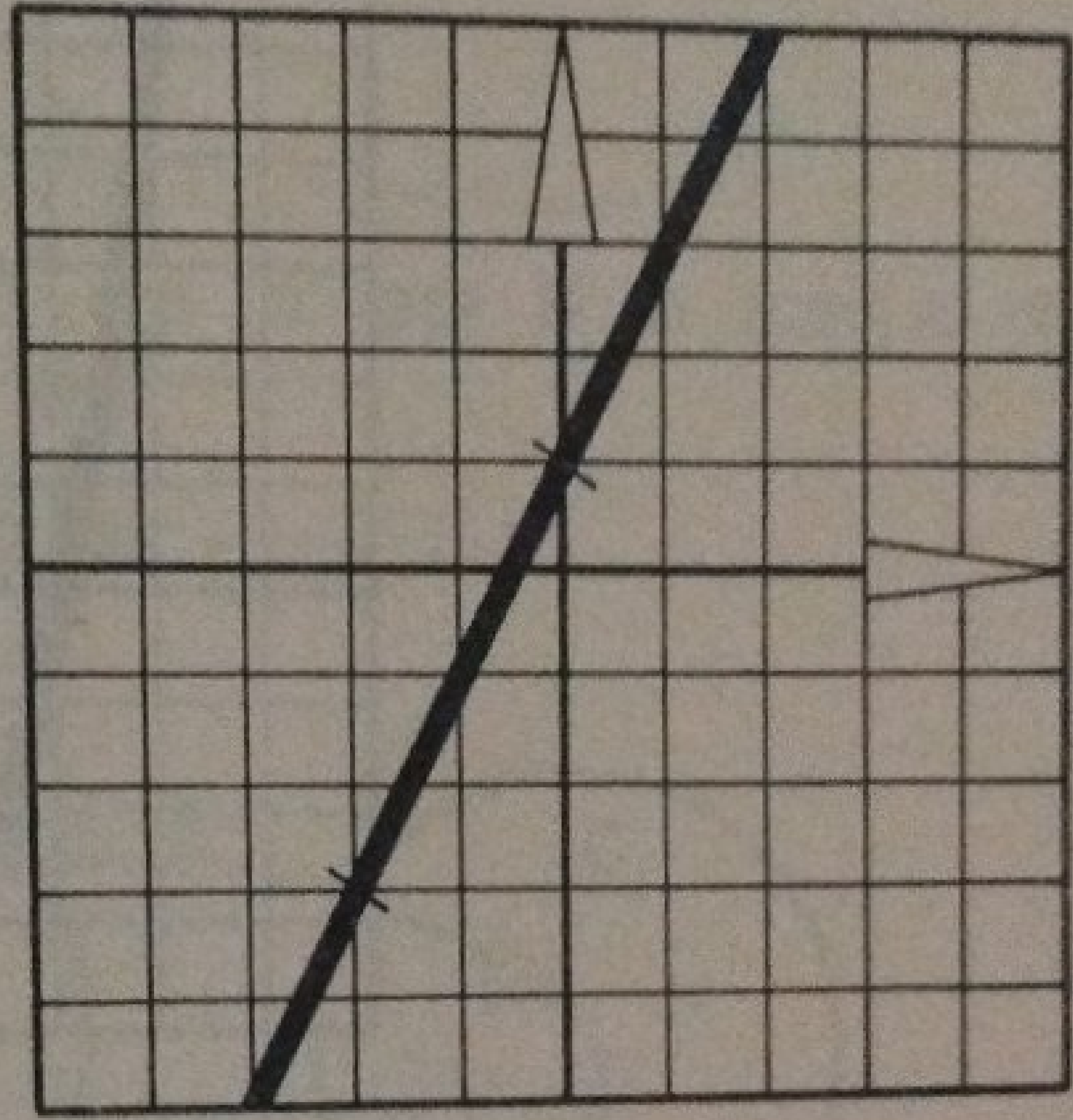
b)



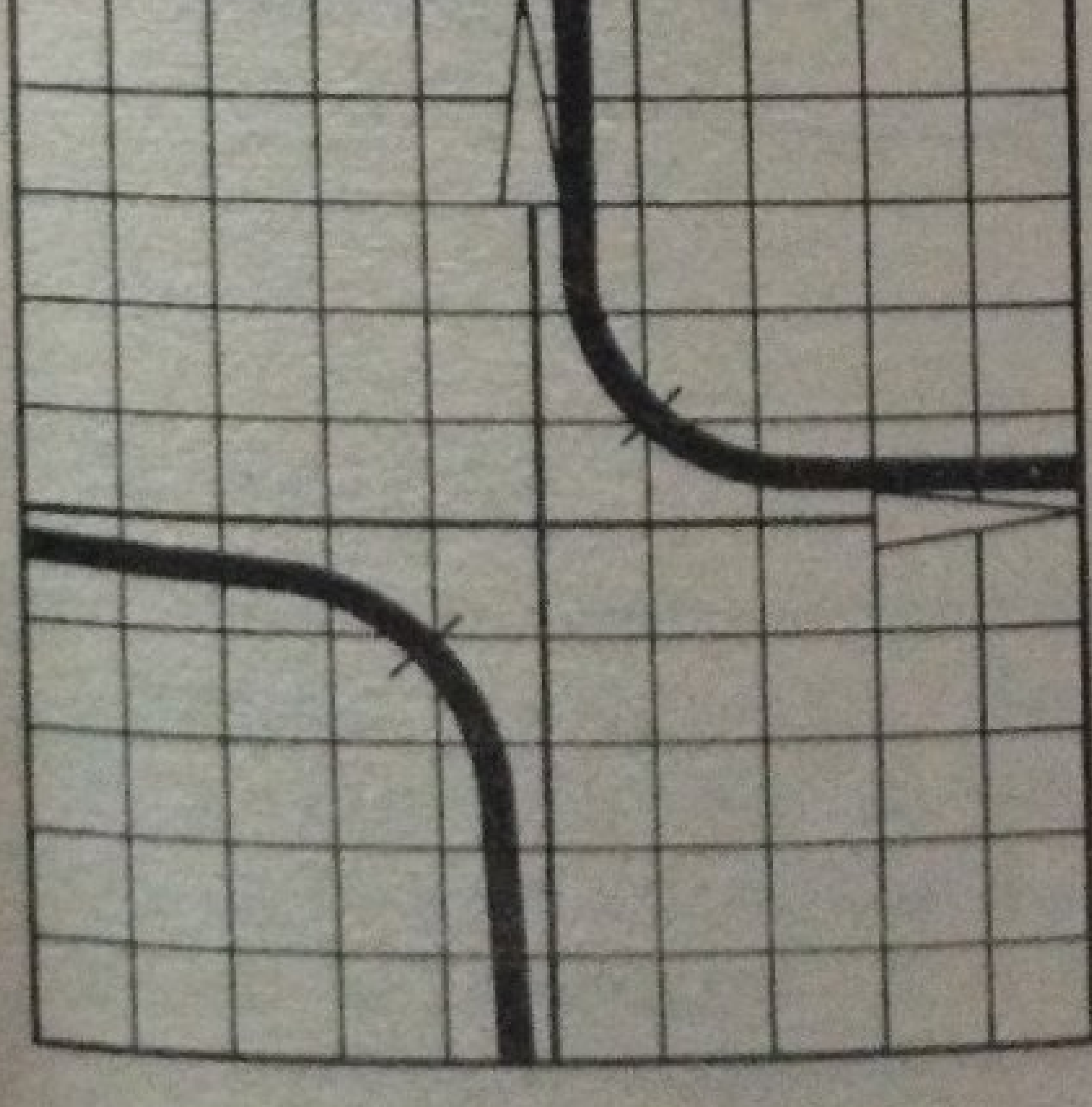
c)



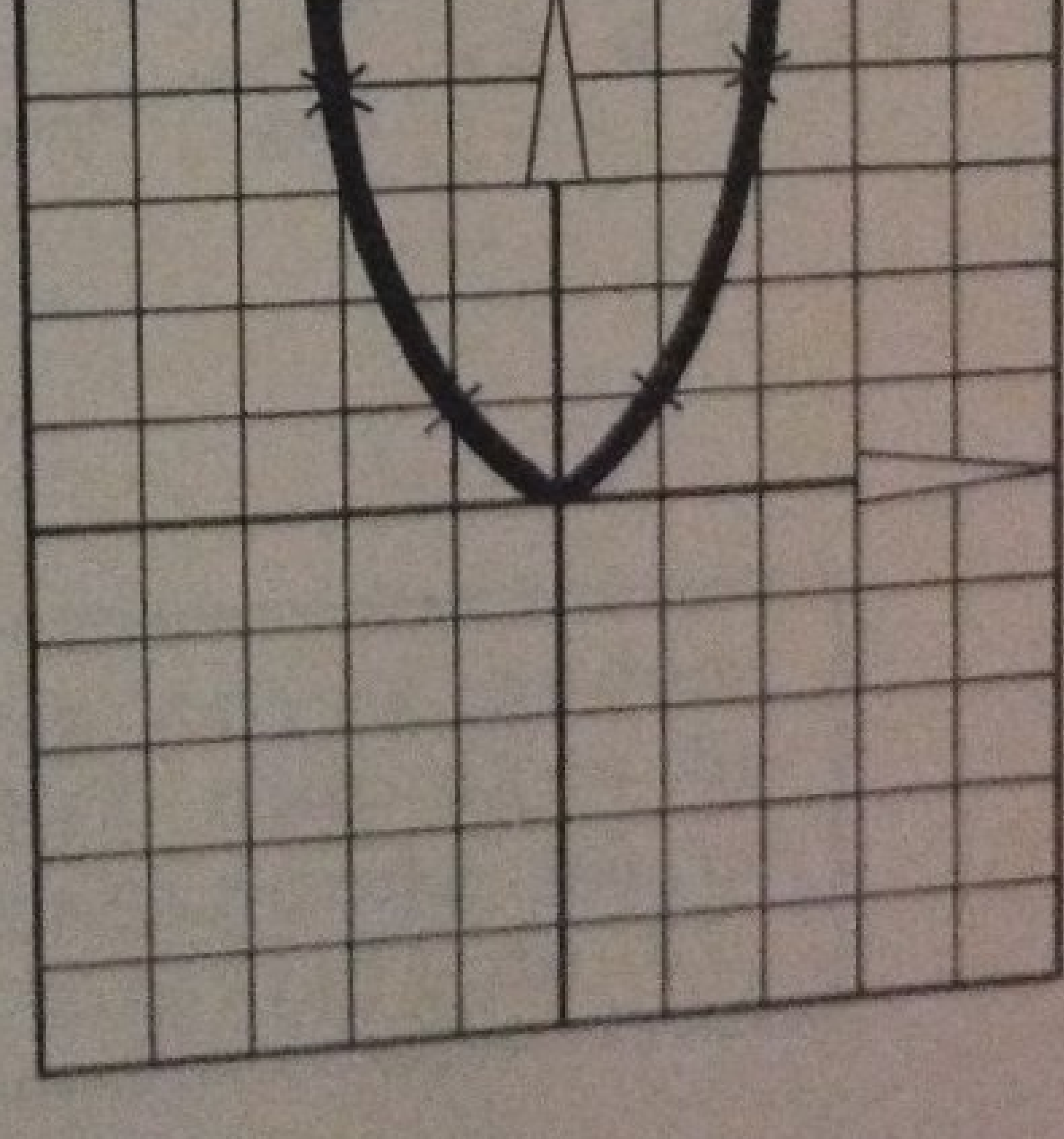
d)



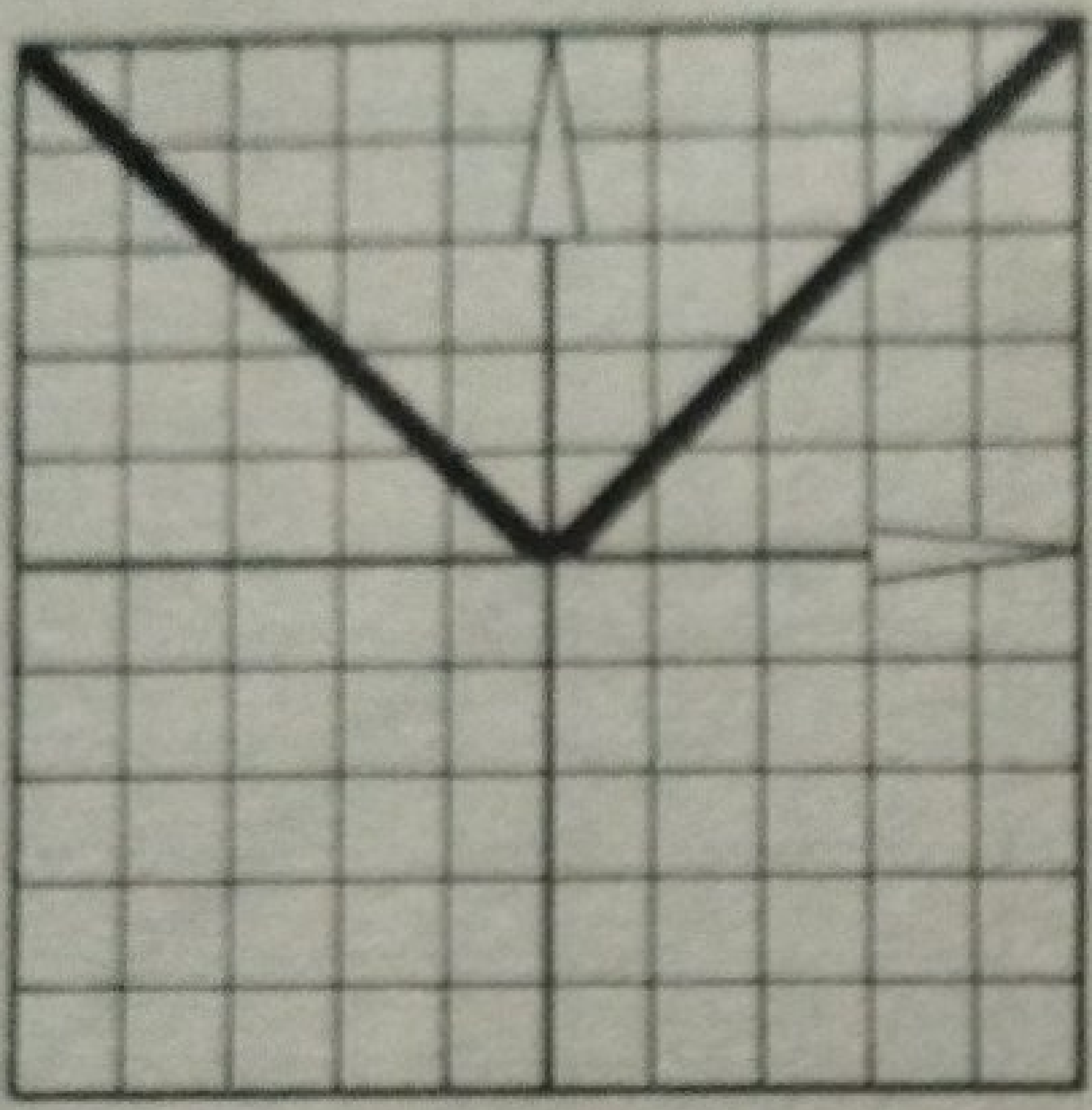
e)



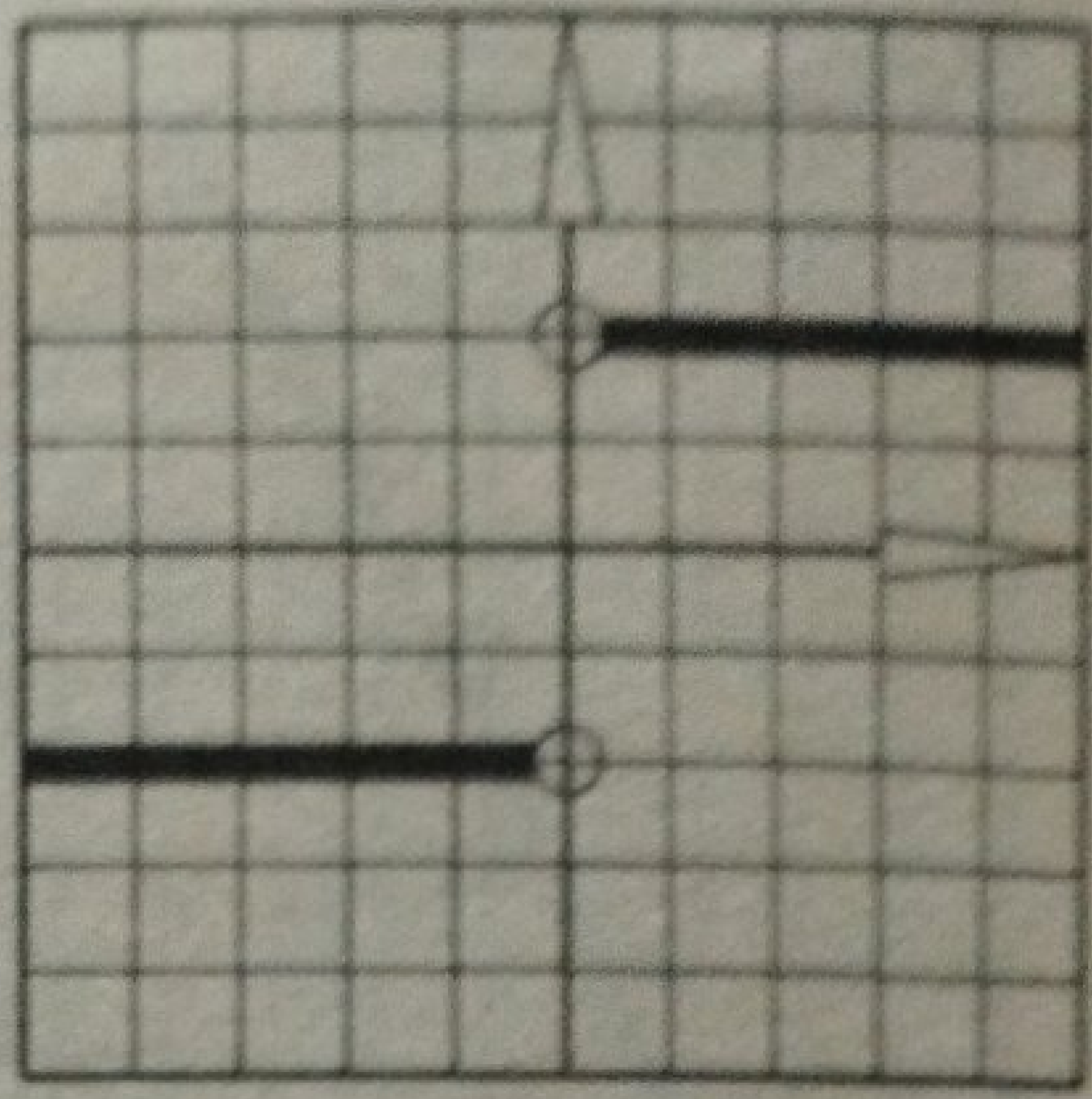
f)



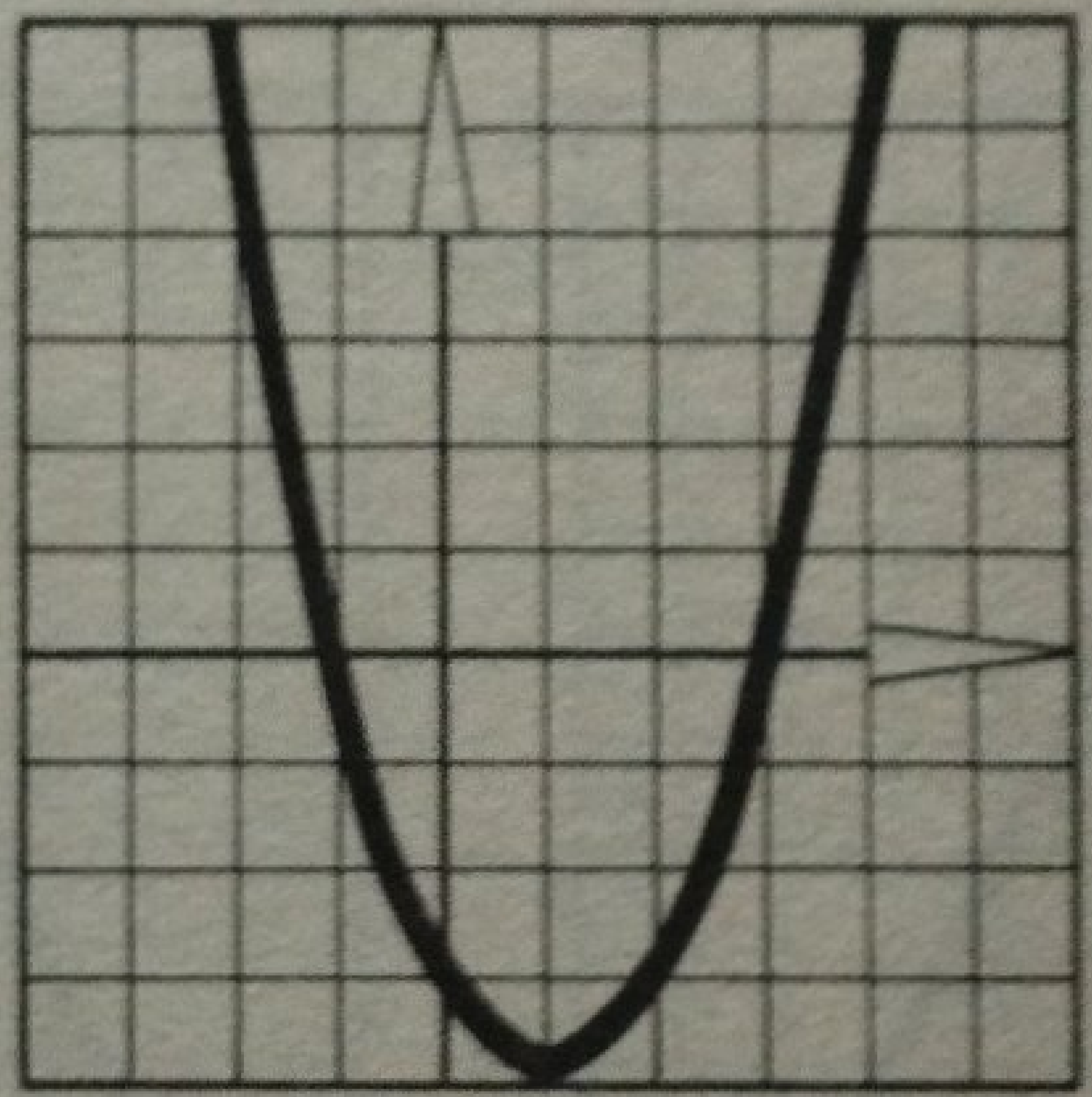
g)



h)



i)



6) c e f.

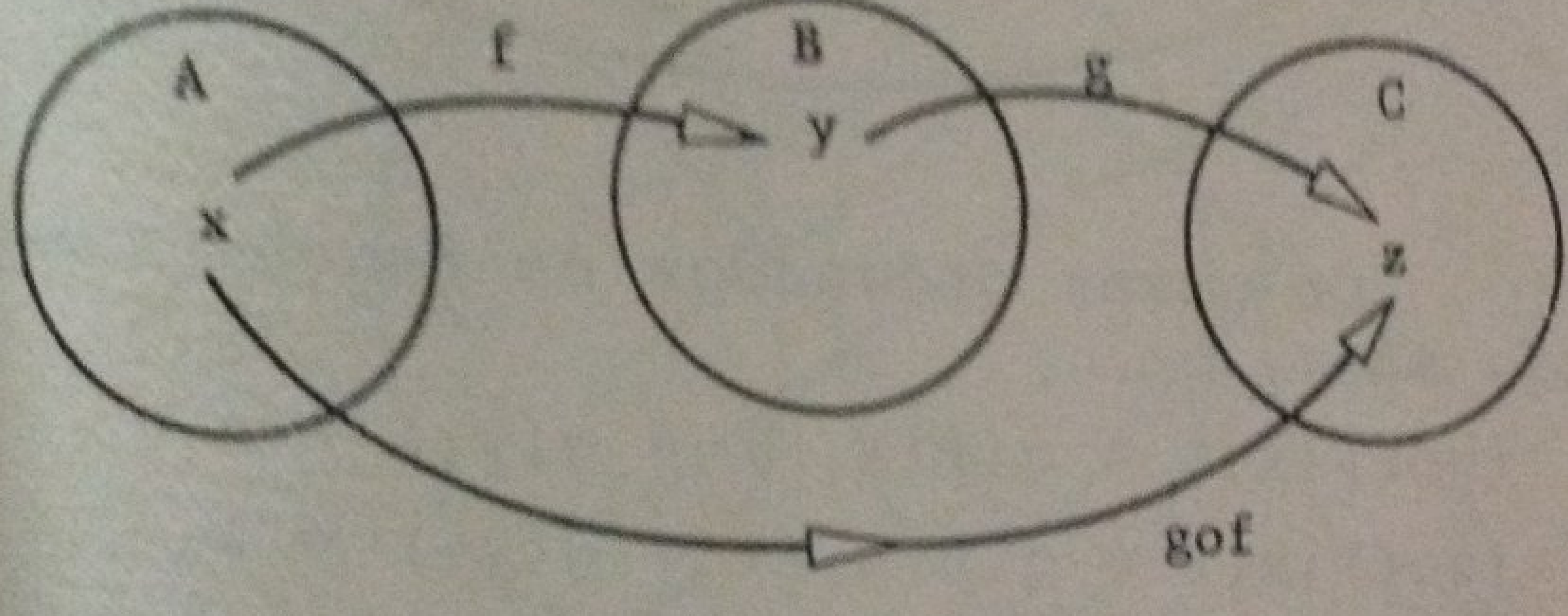
Capítulo IX

FUNÇÃO COMPOSTA E FUNÇÃO INVERSA

9.1. PRELIMINAR

Seja f uma função de A em B e seja g uma função de B em C, isto é:

$$f: A \longrightarrow B \quad \text{e} \quad g: B \longrightarrow C$$



9.2. DEFINIÇÃO

> Função composta de f e g, nesta ordem, é a função de A em C tal que para todo elemento x de A, corresponde um único elemento $z = g(y) = g(f(x))$ de C.

Notação: gof.

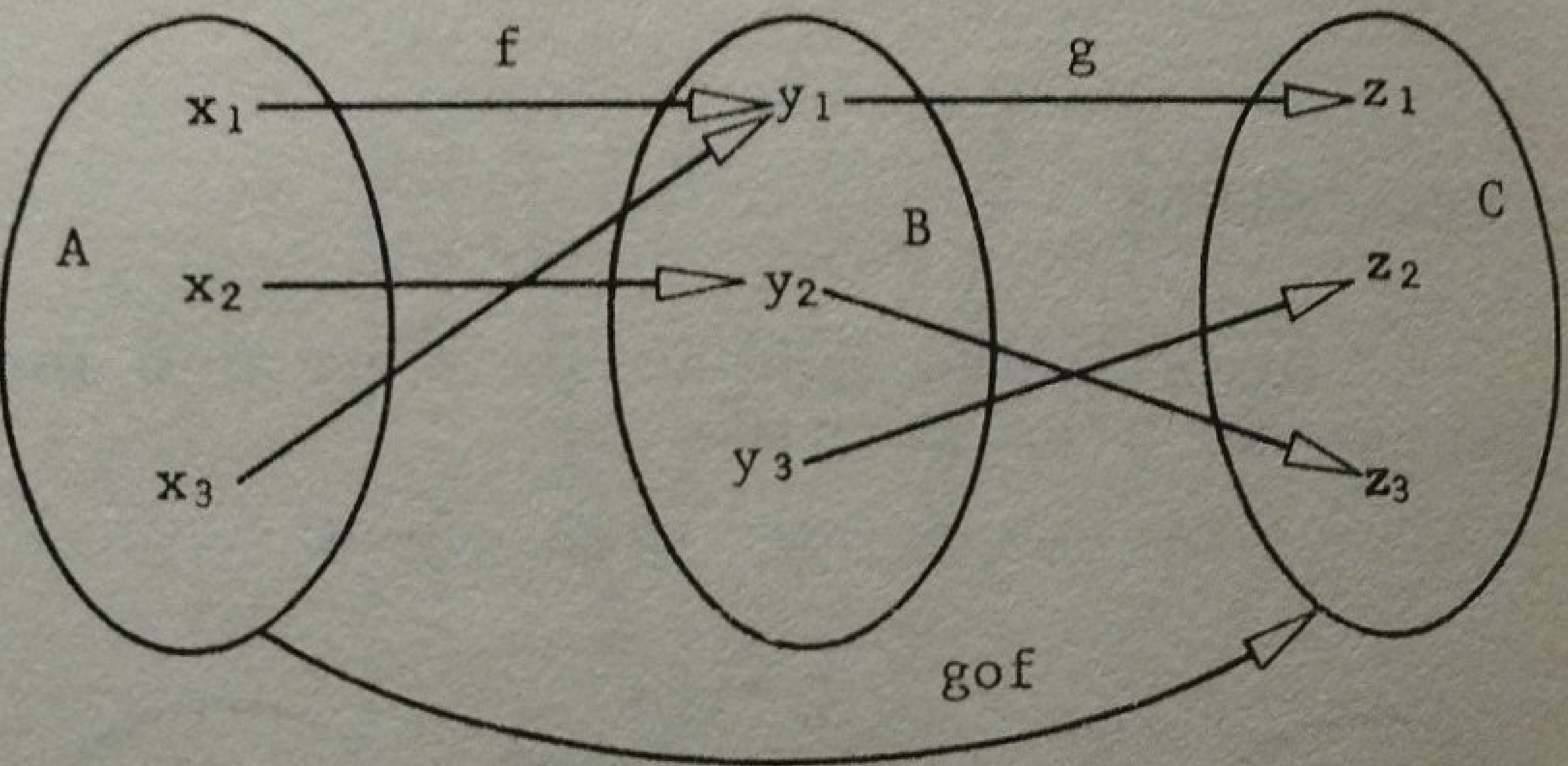
Leitura: "f composta g" ou "f círculo g".

9.3. EXEMPLOS

1) Sejam as funções

$f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow C$

definidas pelos diagramas abaixo:



Os pares ordenados da função composta gof, são:

$$(gof)(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) = z_1$$
$$(gof)(x_2) = g(f(x_2)) = g(y_2) = z_3$$
$$(gof)(x_3) = g(f(x_3)) = g(y_1) = z_1$$

Logo:

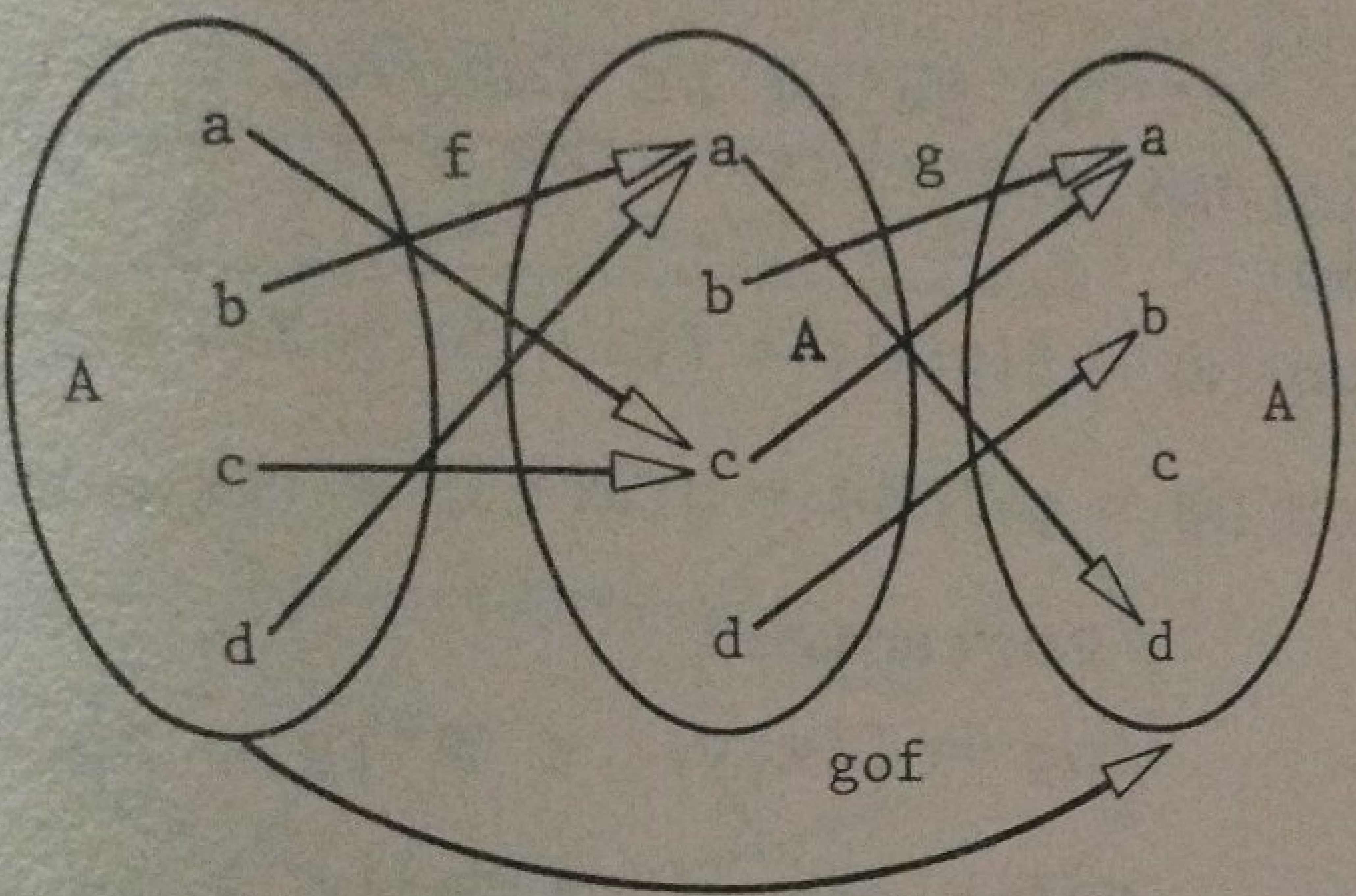
$$gof = \{(x_1,z_1),(x_2,z_3),(x_3,z_1)\}$$

2) Seja $A = \{a,b,c,d\}$ e sejam f e g 2 funções de A em A, tal que:

$f = \{(a,c),(b,a),(c,c),(d,a)\}$

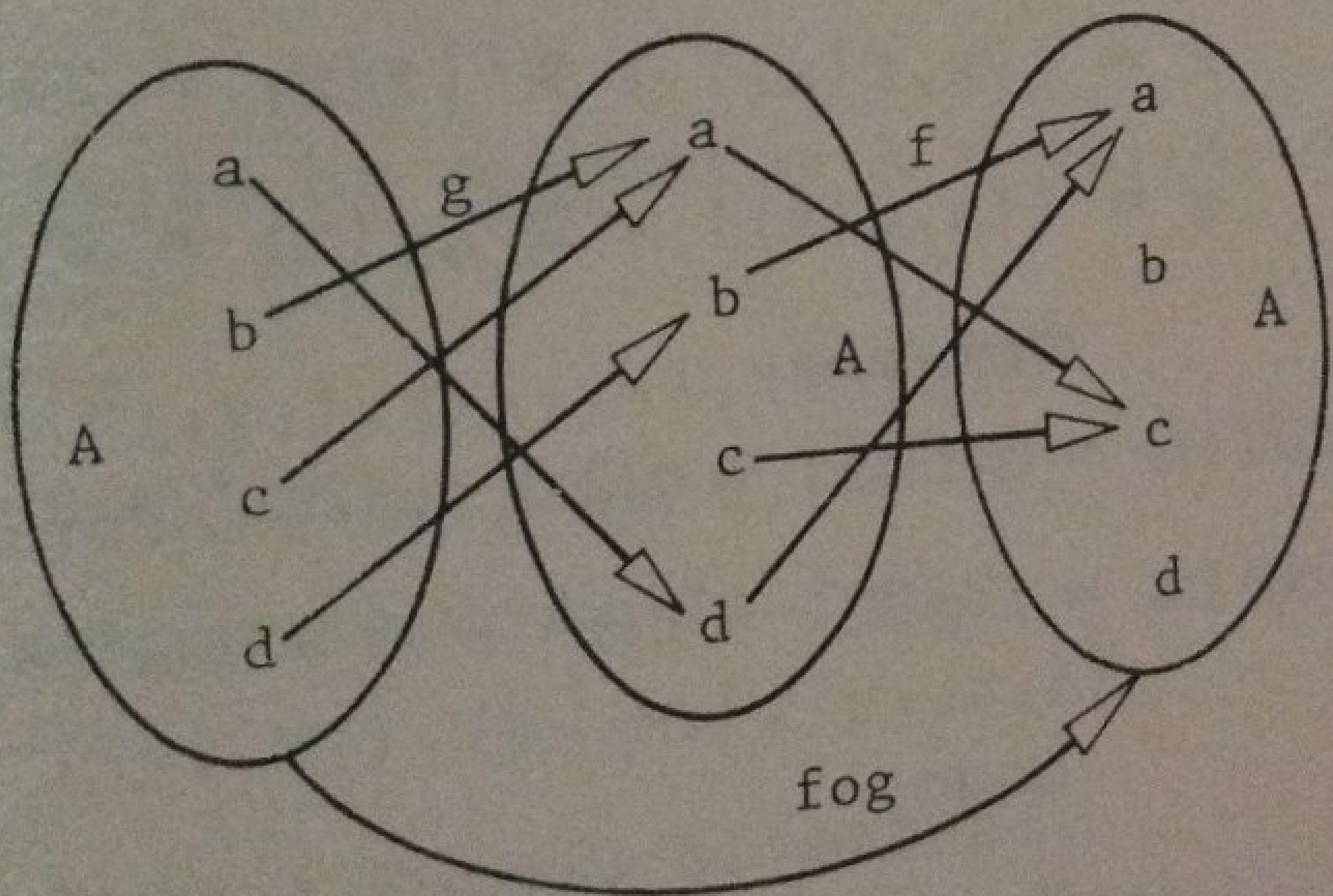
e $\quad g = \{(a,d),(b,a),(c,a),(d,b)\}$

A função composta de f e g, gof é:



$gof = \{(a,a),(b,d),(c,a),(d,d)\}$

A função composta de g e f, fog é:



$fog = \{(a,a),(b,c),(c,c),(d,a)\}$

Observa-se nesse exemplo que:

$$\boxed{gof \neq fog}$$

3) Dados $f = \{(a,b),(b,c),(c,d)\}$ e $g = \{(a,a),(c,e),(d,f)\}$ tem-se:

$$gof = \{(b,e),(c,f)\}$$

e

$$fog = \{(a,b)\}$$

4) Sejam as funções f e g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x - 5$. Então:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x - 5) = 2(x - 5) + 1 = 2x - 9$$

e

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = (2x + 1) - 5 = 2x - 4$$

Portanto:

$$fog = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x - 9\}$$

e

$$gof = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x - 4\}$$

5) Dados:

$$f = \{(x,f(x)) \in \mathbb{R}^2 | f(x) = 2x\}$$

e

$$g = \{(x,g(x)) \in \mathbb{R}^2 | g(x) = x + 3\}$$

Tem-se:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x) = (2x)^2 + 3 = 4x^2 + 3$$

e

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 3) = 2(x^2 + 3) = 2x^2 + 6$$

Logo:

$$gof = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 4x^2 + 3\}$$

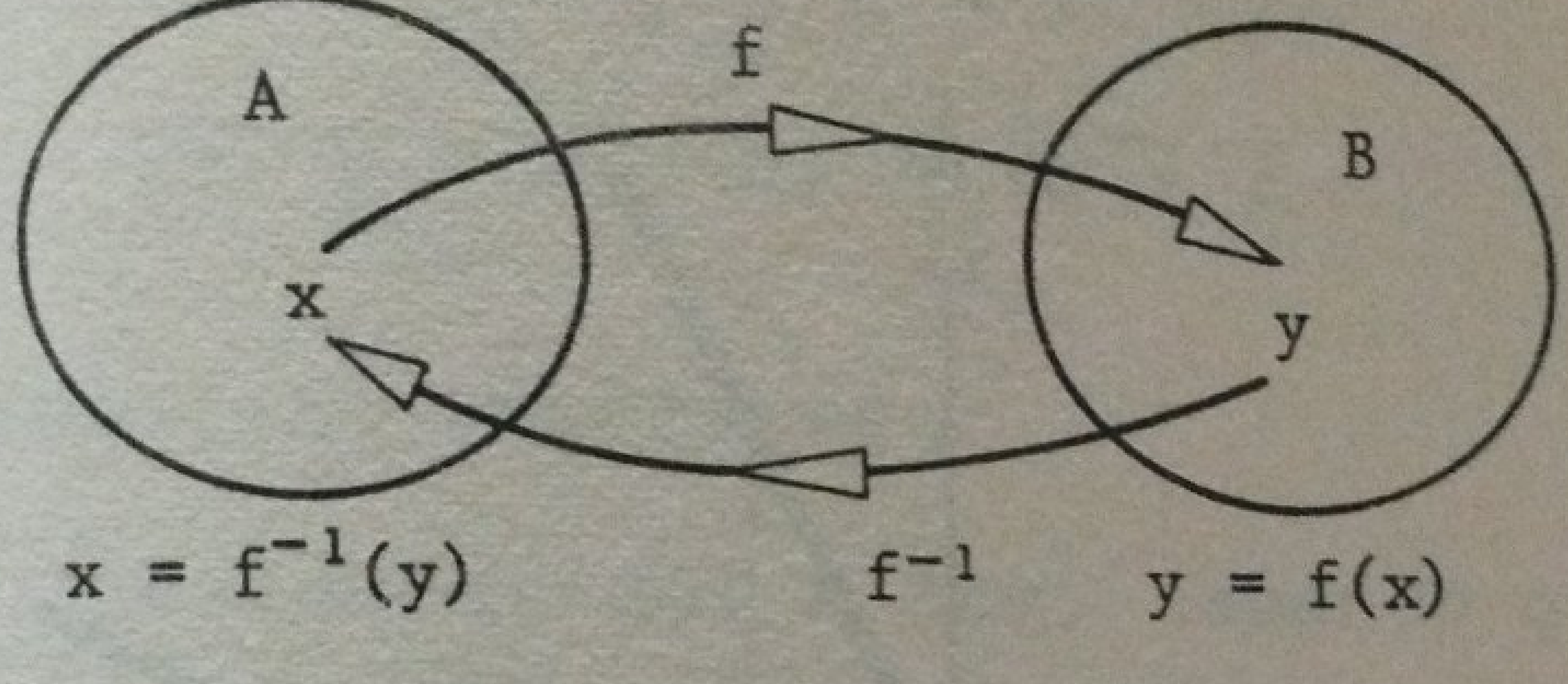
e

$$fog = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x^2 + 6\}$$

9.4. DEFINIÇÃO

$\boxed{\text{Função inversa de uma função bijetora } f \text{ de A em B é uma função } f^{-1} \text{ de B em A formada pelos pares ordenados } (y,x) \text{ tais que } (x,y) \in f.}$

$$\boxed{f^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in f\}}$$



9.5. EXEMPLOS

1) Sejam os conjuntos $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $B = \{y_1, y_2, y_3\}$ e seja

$$f = \{(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\}$$

uma função bijetora de A em B.

A função inversa de f é:

$$f^{-1} = \{(y_1,x_1),(y_2,x_2),(y_3,x_3)\}$$

2) Seja a função bijetora:

$$f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x + 1\}$$

Pela função f, a imagem de x é:

$$y = f(x) = 2x + 1$$

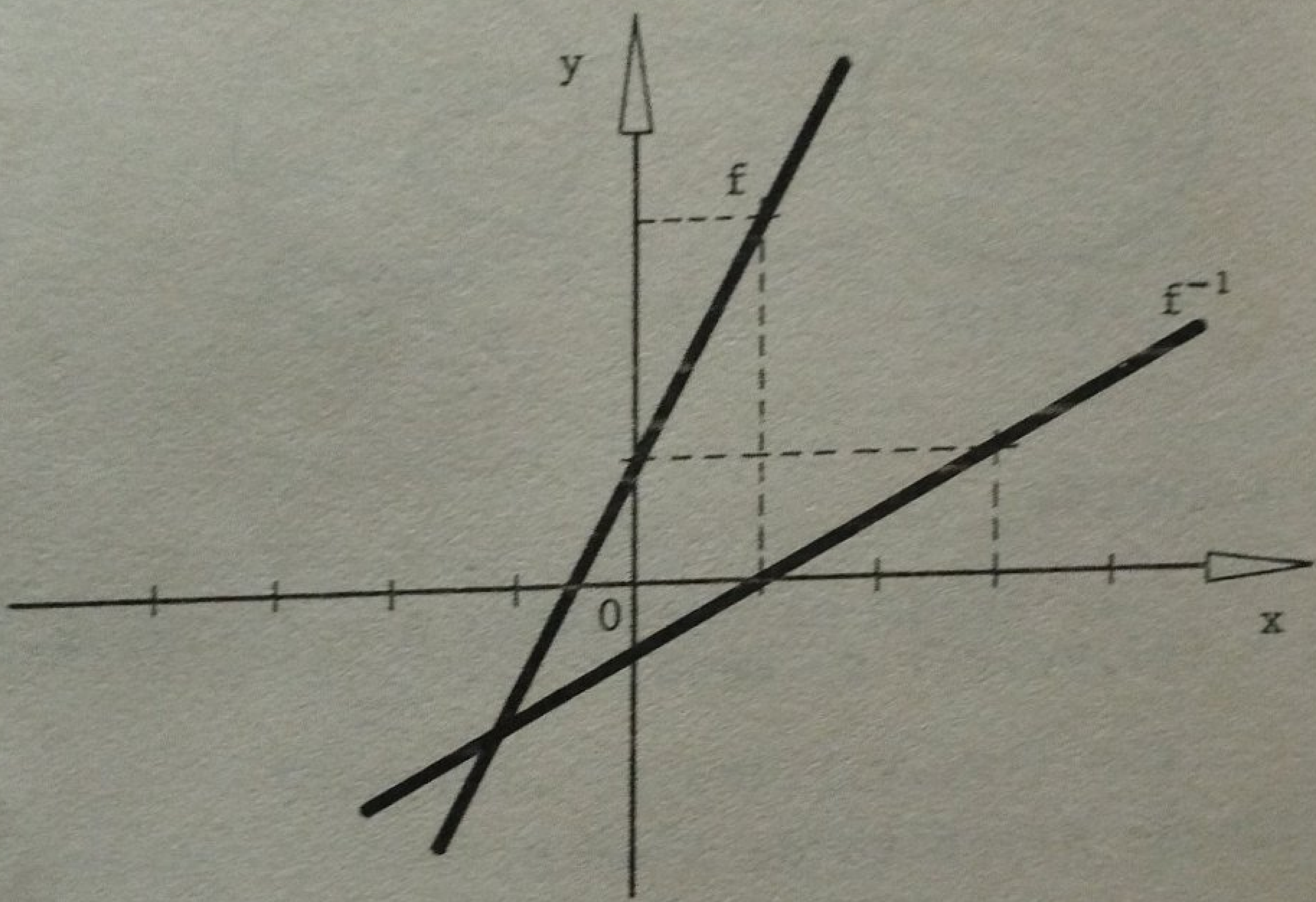
Pela função f^{-1}, a imagem de y é:

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y - 1}{2}$$

Permutando a letra y pela letra x que é mais usual, vem:

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2} \text{ ou } f^{-1}(x) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{x - 1}{2}\}$$

O gráfico das funções f e f^{-1} são as retas:



9.6. REGRA PRÁTICA

Dada a função f definida por $y = f(x)$, para obter-se sua função inversa:

1º) Resolve-se a equação $y = f(x)$ em relação a x.

2º) Permuta-se a letra y pela letra x.

Assim, no exemplo anterior:

$$y = f(x) = 2x + 1$$

1º) $x = \dfrac{y - 1}{2} = f^{-1}(y)$

2º) $y = f^{-1}(x) = \dfrac{x - 1}{2}$

Na função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$y = f(x) = x^3 + 2$$

1º) $x = \sqrt[3]{y - 2} = f^{-1}(y)$

2º) $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

9.7. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Calcular gof e fog, sabendo que:

$f = \{(a,b),(b,c),(d,e),(e,f)\}$

e

$g = \{(a,a),(c,e),(e,g)\}$

2) Dadas as funções f e g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, calcular gof e fog.

a) $f(x) = 3x + 2$ e
$g(x) = x - 8$

b) $f(x) = x^2 + 3$ e
$g(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e
$g(x) = 2x + 3$

3) Calcular as funções inversas das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

a) $y = f(x) = 5x - 3$

b) $y = f(x) = x^3$

c) $y = f(x) = \sqrt{3x - 4}$

d) $y = f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

e) $y = f(x) = a^x$

9.8. RESPOSTAS

1) $gof = \{(b,e),(d,g)\}$ e
$fog = \{(a,b),(c,f)\}$

2) a) $gof = 3x - 6$ e
$fog = 3x - 22$

b) $gof = \dfrac{1}{x^2 + 3}$ e

$fog = \dfrac{1 + 3x^2}{x^2}$

c) $fog = \dfrac{1}{4x^2 + 12x + 9}$ e

$gof = \dfrac{2 + 3x^2}{x^2}$

3) a) $y = f^{-1}(x) = \dfrac{x + 3}{5}$

b) $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $y = f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 + 4}{3}$

d) $y = f^{-1}(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

e) $y = f^{-1}(x) = \log_a x$

ÍNDICE

Distribuição para todo o Território Nacional,
exceto o Estado do Rio Grande do Sul:

LIVRARIA NOBEL S.A.
EDITORA – DISTRIBUIDORA
Rua Maria Antônia, 108 - São Paulo - S.P

Impresso e distribuído pela:
SAGRA
s.a. gráfica e editora do professor gaucho
DEPTº COMERCIAL: Rua João Alfredo nº 448 Fone: 21-9166
DEPTº GRÁFICO: Rua Baronesa do Gravataí nº 123 Fone: 21-2308
LIVRARIA: Praça Dom Feliciano nº 78, térreo Fone: 25-7034
Caixa Postal 601
PORTO ALEGRE — 90.000 — RS