CADERNO DE MATEMÁTICA

CURSO INDUSTRIAL BÁSICO

— 4ª Série —

SÉRIE A - Nº 4 - Vol. 4

2ª Edição

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA
COMISSÃO BRASILEIRO-AMERICANA DE EDUCAÇÃO INDUSTRIAL

[illegible]
18/1/58

CADERNO DE MATEMÁTICA

CURSO INDUSTRIAL BÁSICO

A Comissão Brasileiro-Americana de Educação Industrial (CBAI) é o órgão executivo de um Acôrdo firmado entre o Ministério da Educação e Cultura e a Education Division - The Institute of Inter-American Affairs, sôbre a educação industrial.

Enderêço da CBAI:

Avenida Marechal Câmara, 350 - 8º andar
Caixa Postal 1879 - End. Teleg. CEBAI
Rio de Janeiro

CADERNO DE MATEMÁTICA

CURSO INDUSTRIAL BÁSICO

— 4ª Série —

SÉRIE A - Nº 4 - Vol. 4

2ª Edição

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA
COMISSÃO BRASILEIRO-AMERICANA DE EDUCAÇÃO INDUSTRIAL

PREFÁCIO À 2ª EDIÇÃO

Tendo em vista a grande aceitação com que foram recebidos os Cadernos de Matemática, nos meios escolares, a CBAI resolveu atender a inúmeros pedidos, entregando aos interessados uma segunda edição devidamente revista.

Na presente tiragem foram incluidos, na la. série do Curso Básico, problemas aplicados aos trabalhos de agulha e, na 4a. Série do Curso Básico, foi acrescentada uma unidade extra-programa, sôbre Cálculo de Radicais, a fim de atender à necessidade eventual do uso de Radicais no Curso Técnico.

Encarregou-se do preparo da nova edição o próprio autor, Engº Arlindo Clemente, que se dedicou a êsse trabalho com a responsabilidade de seu reconhecido mérito.

Confiante na utilidade desta publicação, a CBAI acolherá com prazer as apreciações e sugestões que fôrem dadas no sentido de melhorar o conteudo dêstes livros.

Rio de Janeiro, março de 1955

Flávio P. Sampaio
Superintendente da CBAI

E. W. Sheridan
Chefe Delegação Americana

APRESENTAÇÃO

O presente trabalho foi elaborado com o objetivo de servir como subsídio aos professôres e alunos, para o desenvolvimento do programa de Matemática dos cursos industriais básicos.

Cada unidade do programa é objeto de uma ligeira explanação teórica, seguida de exercícios e problemas aplicados a trabalhos típicos dos ofícios em metal, madeira, eletricidade e artes gráficas.

Incumbiu-se da organização dêste caderno o engº Arlindo Clemente, professor de Matemática da Escola Técnica Nacional.

Tratando-se de trabalho que se acha ainda em fase experimental espera a CBAI receber, dos professôres de ensino industrial, sugestões e críticas que auxiliem a dar forma definitiva a êste caderno.

Rio de Janeiro, janeiro de 1951

ITALO BOLOGNA
Superintendente da CBAI

EDWARD W. SHERIDAN
Chefe da Delegação Americana

ÍNDICE

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

NOÇÃO DE FUNÇÃO

Sejam duas grandezas variáveis y e x. Diz-se que y é função de x, quando a um valor de x corresponde um ou mais valores de y, em outras palavras, quando o valor de y depende do valor de x . A notação usual é $y = f(x)$.

Assim, quando um automóvel percorre uma estrada, o espaço percorrido varia com o tempo em que o veículo se desloca (admitindo-se, para argumentar, que a velocidade é constante).

Logo, o espaço percorrido é função do tempo.

A variável x, que pode assumir diferentes valores arbitràriamente é a variável livre, independente; ao passo que a variável y, cujos valores dependem de x, é a variável dependente ou função.

Quando a relação entre as variáveis pode ser estabelecida por meio dos sinais das operações, a função é matemática ou analítica.

Ex: $y = 3x + 2$

A cada valor de x corresponde, no caso, um valor de y. Assim para $x = 2$, vem $y = 8$.

A função é empírica, quando a relação entre as variáveis, só pode ser obtida experimentalmente.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO

COORDENADAS CARTESIANAS

Chama-se sistema de coordenadas a um conjunto de grandezas por meio dos quais se determina a posição de um ponto no plano ou no espaço.

Há uma infinidade de sistemas de coordenadas. Será estudado apenas o sistema cartesiano ortogonal.

Sejam os dois eixos XX_1 e YY_1 cortando-se em O e formando um ângulo de 90^o. Considerando-se um ponto M qualquer, tracem-se as retas $\overline{MP}$ e $\overline{MP_1}$ paralelas aos eixos. As distâncias $\overline{OP}$ e $\overline{OP_1}$ são as coordenadas do ponto M. fig. 1

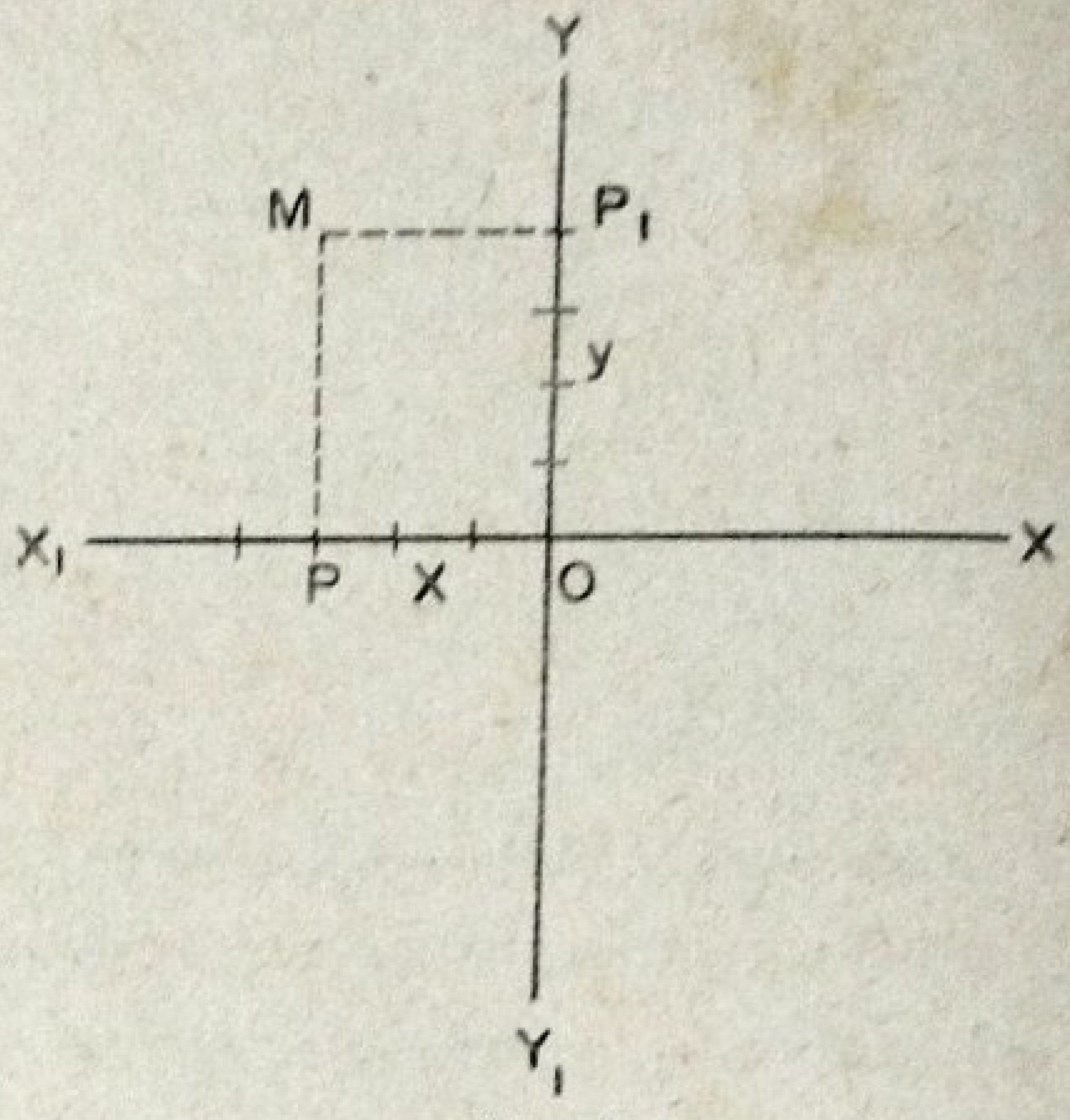


Fig. 1

A coordenada $OP_1 = y$ chama-se ordenada. A coordenada $OP = x$ chama-se abcissa.

Se um ponto M tem x e y por coordenadas escreve-se M(x,y).

O eixo XX_1 é o eixo das abcissas e o eixo YY_1 é o das ordenadas.

Convenções: O eixo XX_1 é positivo na sua parte OX e negativo na parte OX_1: o eixo YY_1 é positivo em OY e negativo em OY_1.

REPRESENTAÇÃO DE UM PONTO:

Seja representar um ponto M (-3,4).

Toma-se sôbre o eixo dos x a distância $\overline{OP} = -3$ e na direção do eixo dos y a distância $\overline{PM} = 4$.

Encontra-se o ponto M (-3,4). Fig. 2

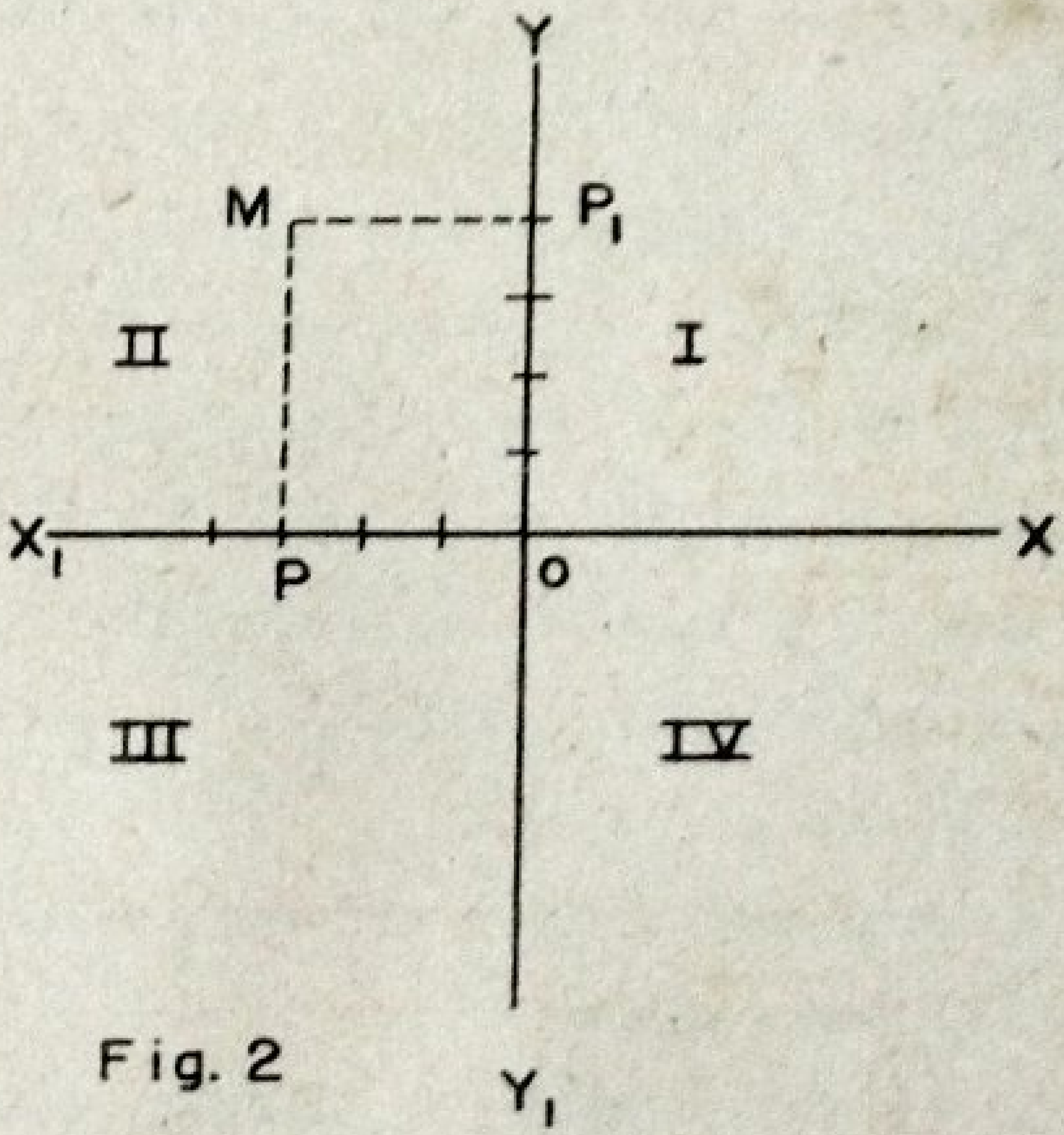


Fig. 2

OBSERVAÇÃO:

Os dois eixos de coordenadas dividem o plano em quatro quadrantes. Ao lado vão indicados os sinais das coordenadas nos diferentes quadrantes.

Quadrantes	I	II	III	IV
Abcissa: x	+	−	−	+
Ordenada: 4	+	+	−	−

Se a ordenada é nula, o ponto pertence ao eixo dos x: se a abcissa é nula, o ponto pertence ao eixo dos y.

A origem tem ordenada e abcissa nulas.

EXEMPLOS:

M_1 (3,4) é do 1º quadrante

M_2 (-1,5) é do 2º quadrante

M_3 (-2,-1) é do 3º quadrante

M_4 (5,-3) é do 4º quadrante

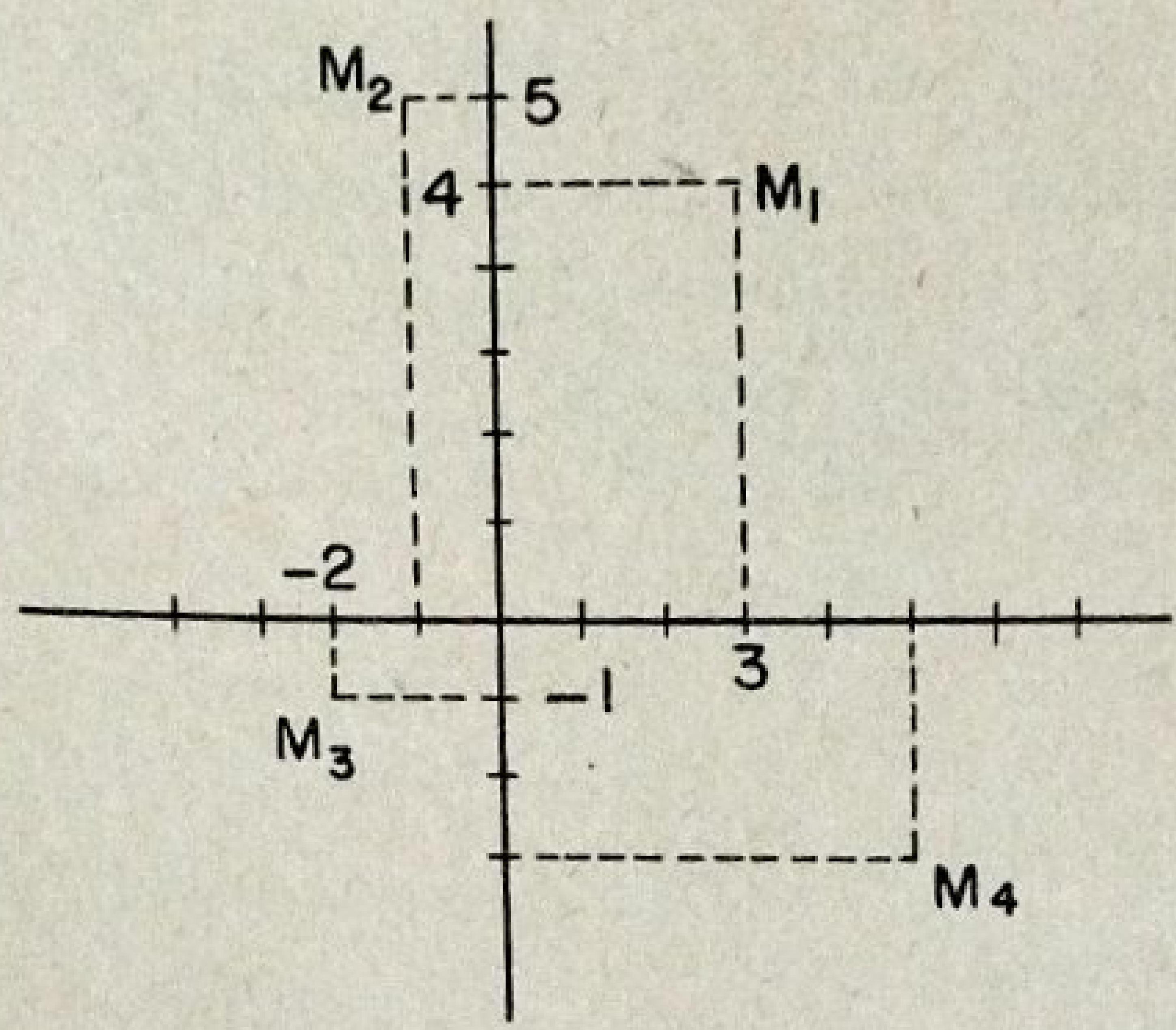


Fig.3

1ª APLICAÇÃO:

Seja representar a equação

$y = 2x + 3$ (1)

Atribuindo a x uma série de valores x_1, x_2, x_3 ... encontra-se para cada valor de x um valor correspondente de y, isto é valores y_1, y_2, y_3 ...

Êstes pares de valores determinam os pontos M_1 (x_1,y_1): M_2 (x_2,y_2) M_3 (x_3,y_3) ... que, unidos, formarão a linha que indicará a correspondência entre x e y, (no caso uma reta).

Retomando a equação (1) e atribuindo-se a x uma série de valores arbitrários organiza-se o quadro abaixo. Representando-se gràficamente os pontos encontrados e unindo-os, virá a linha representativa da função (1), figura (4).

x	y
0	3
1	5
2	7

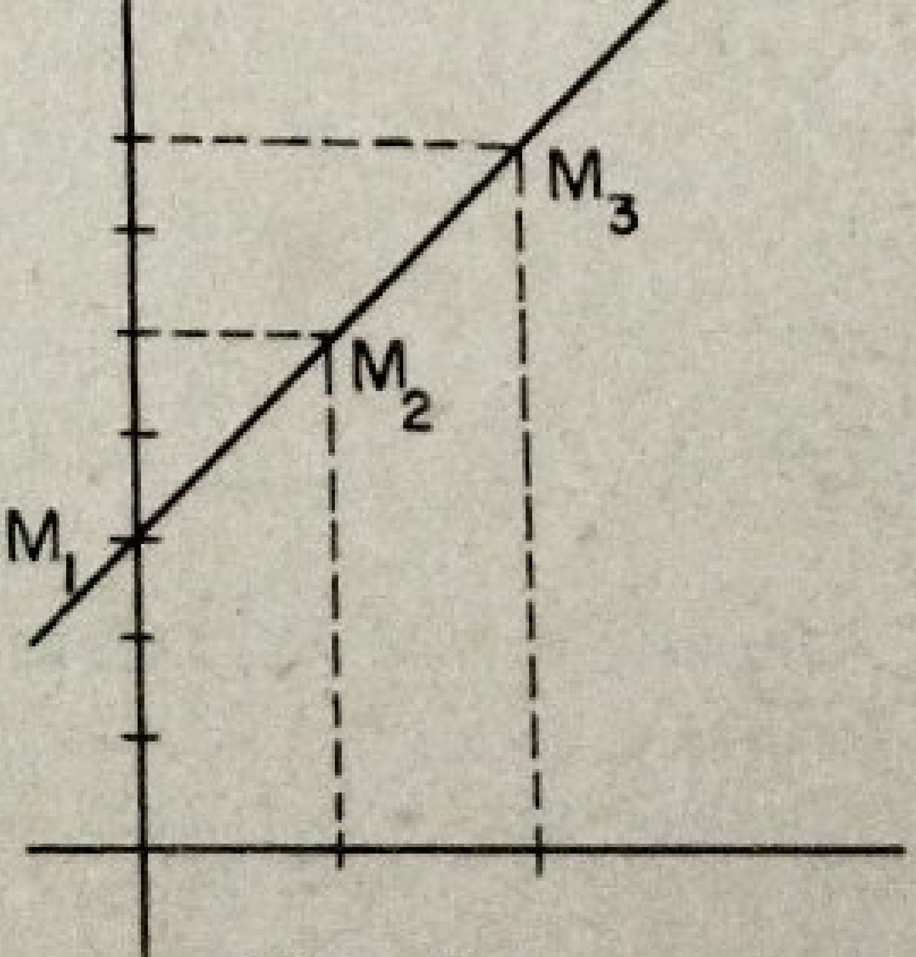


Fig.4

2ª APLICAÇÃO:

Seja a equação $y = x^2 - 2$ (2)

Atribuindo-se a x uma série de valores arbitrários, organiza-se o quadro ao lado.

x	y
-3	7
-2	2
-1	-1
0	-2
1	-1
2	2
3	7

Representando gràficamente os pontos encontrados e unindo-os, virá a curva representativa da função (2), fig.(4a).

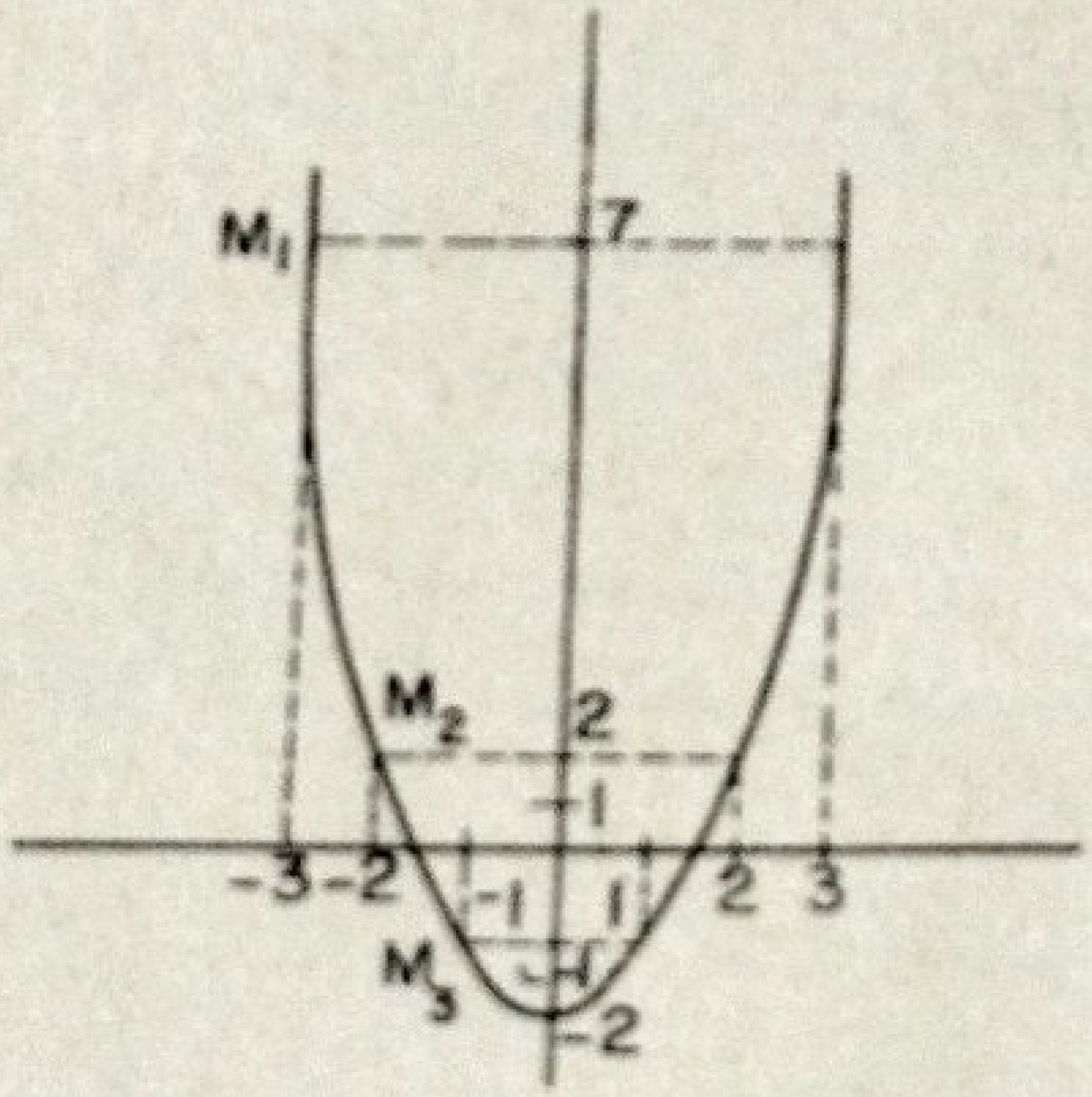


Fig. 4a

EXERCÍCIOS:

1) Representar os pontos A(-1,0); B(-4,-4); C(0,-3); D(1,2)

2) Representar a função $y = 2x - 3$

4) Representar a função $y = x^2 - 5x + 6$

GRÁFICOS ESTATÍSTICOS

O gráfico estatístico é uma maneira de apresentar os dados estatísticos de modo a mais ràpidamente impressionar o leitor que uma simples tabela de dados.

O gráfico deve ser simples, claro, real.

Sempre que possível, as grandezas em estudo devem ser representadas linearmente porque as representações em frações ou volumes são de difícil interpretação. A orientação do gráfico deve ser sempre da esquerda para direita e de baixo para cima (escalas horizontal e vertical). A linha O (zero) e no caso de porcentagem a linha 100% devem sobressair.

Há três tipos principais de representação gráfica:

a) diagrama: gráficos geométricos de duas dimensões

b) cartogramas: ilustrações sôbre cartas geográficas

c) estereogramas: representação em volume.

Os mais usados são os diagramas entre os quais figuram os gráficos em barras, em setôres, os histogramas e polígonos de freqüência.

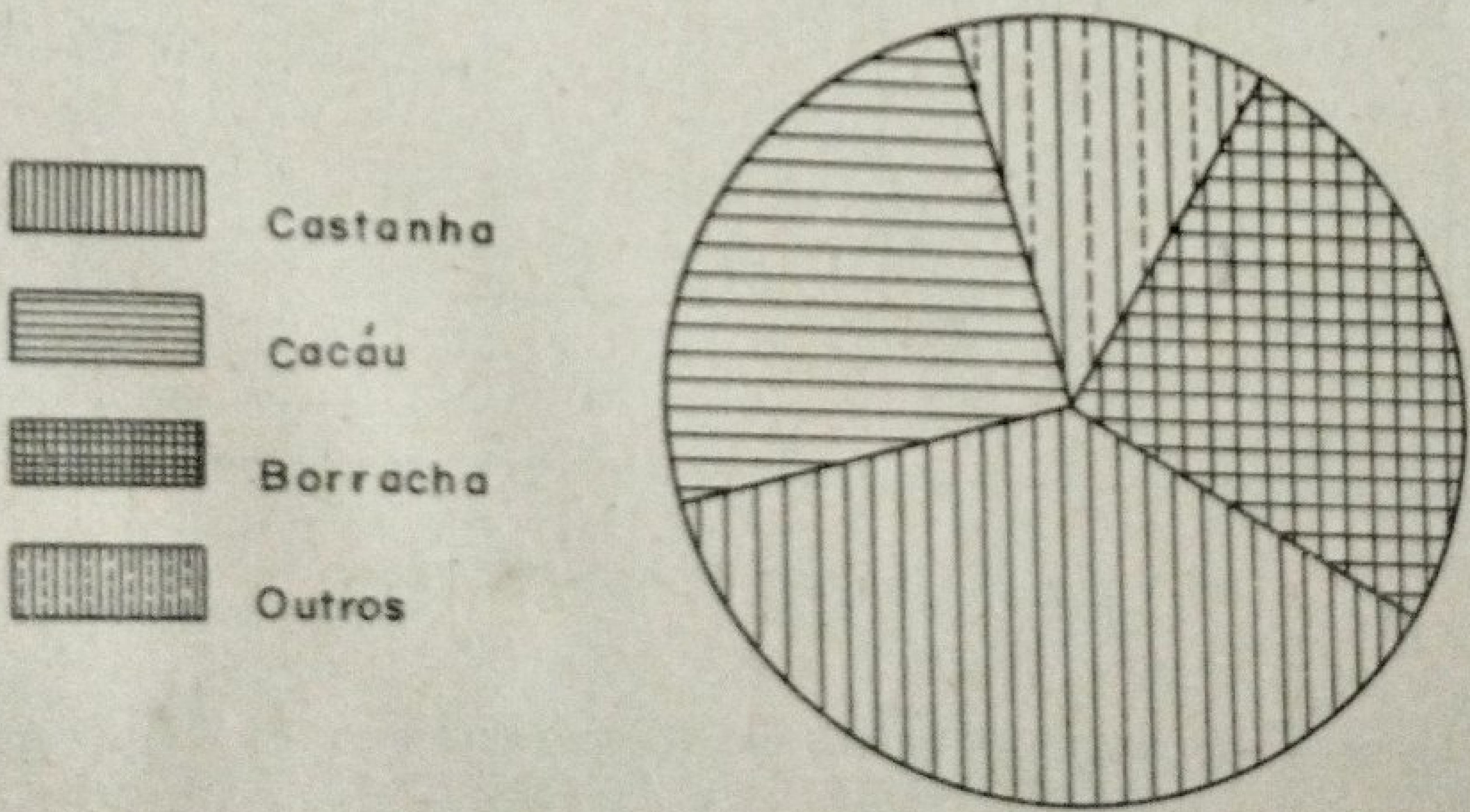
Serão dados abaixo exemplos de cada um dêles.

a) Setôres:

b) Barras:

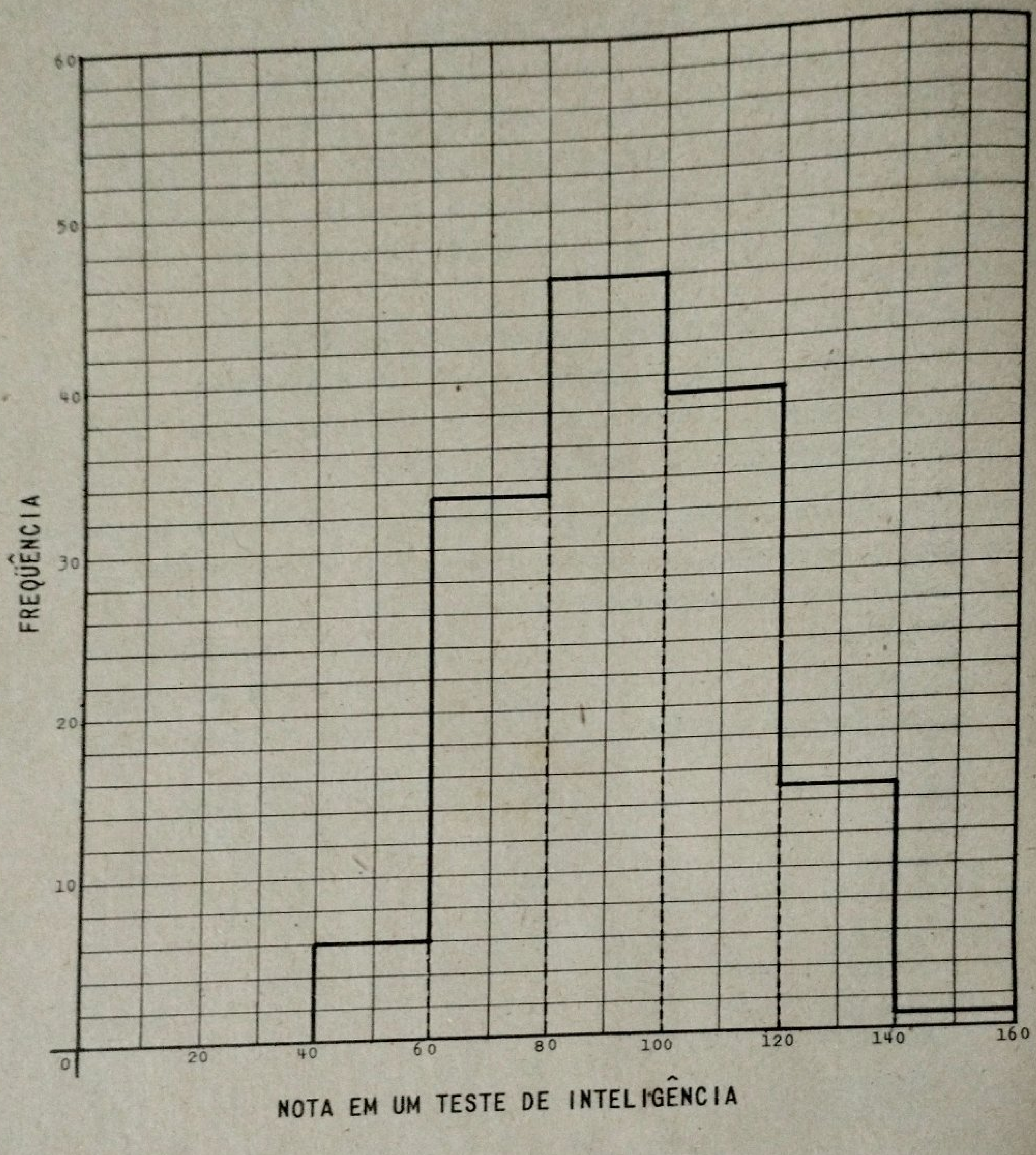
c) Polígonos ajustados

GRÁFICO EM SETÔRES
PRODUÇÃO DO ESTADO X
(Dados fictícios)



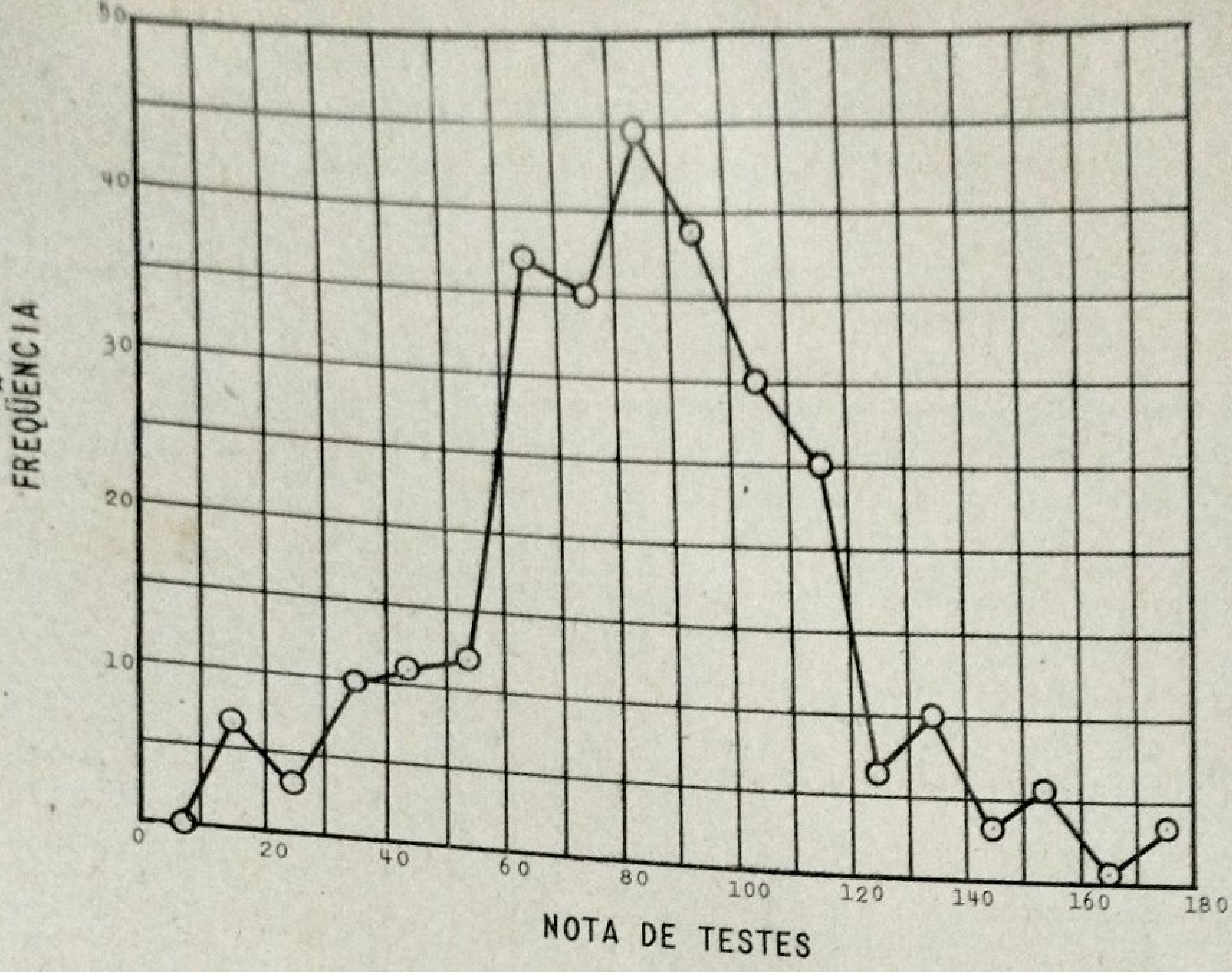
Extraido do livro "PONTOS DE ESTATÍSTICA" de Lauro Sodré Viveiros de Castro.

DIAGRAMA EM COLUNAS COM INTERVALOS DE CLASSE DE VINTE

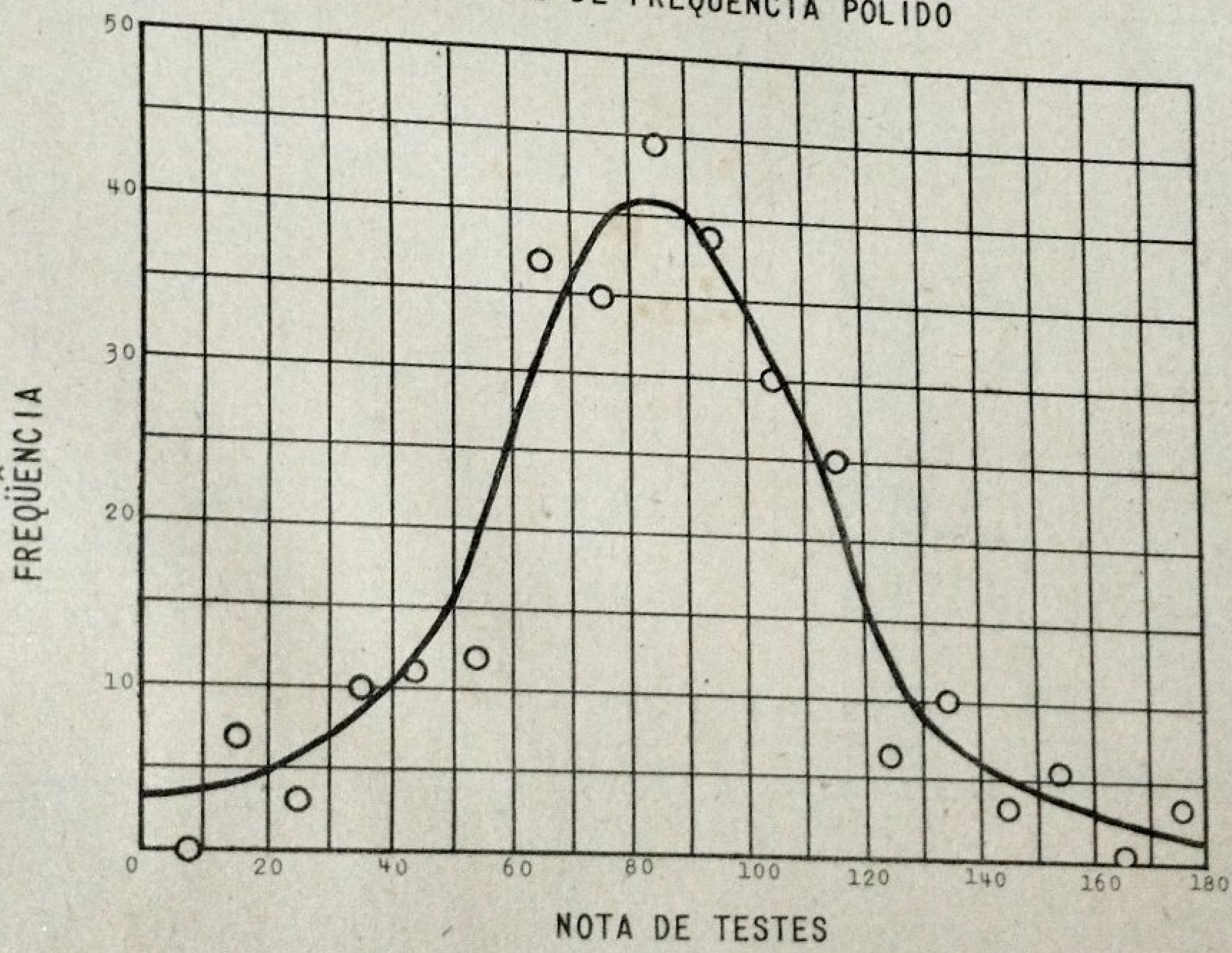


Extraido do livro "Noções Básicas de Estatística" de L.L. Thurstone Ph.D.

POLÍGONO DE FREQÜÊNCIA ANTES DE SER POLIDO



POLÍGONO DE FREQÜÊNCIA POLIDO

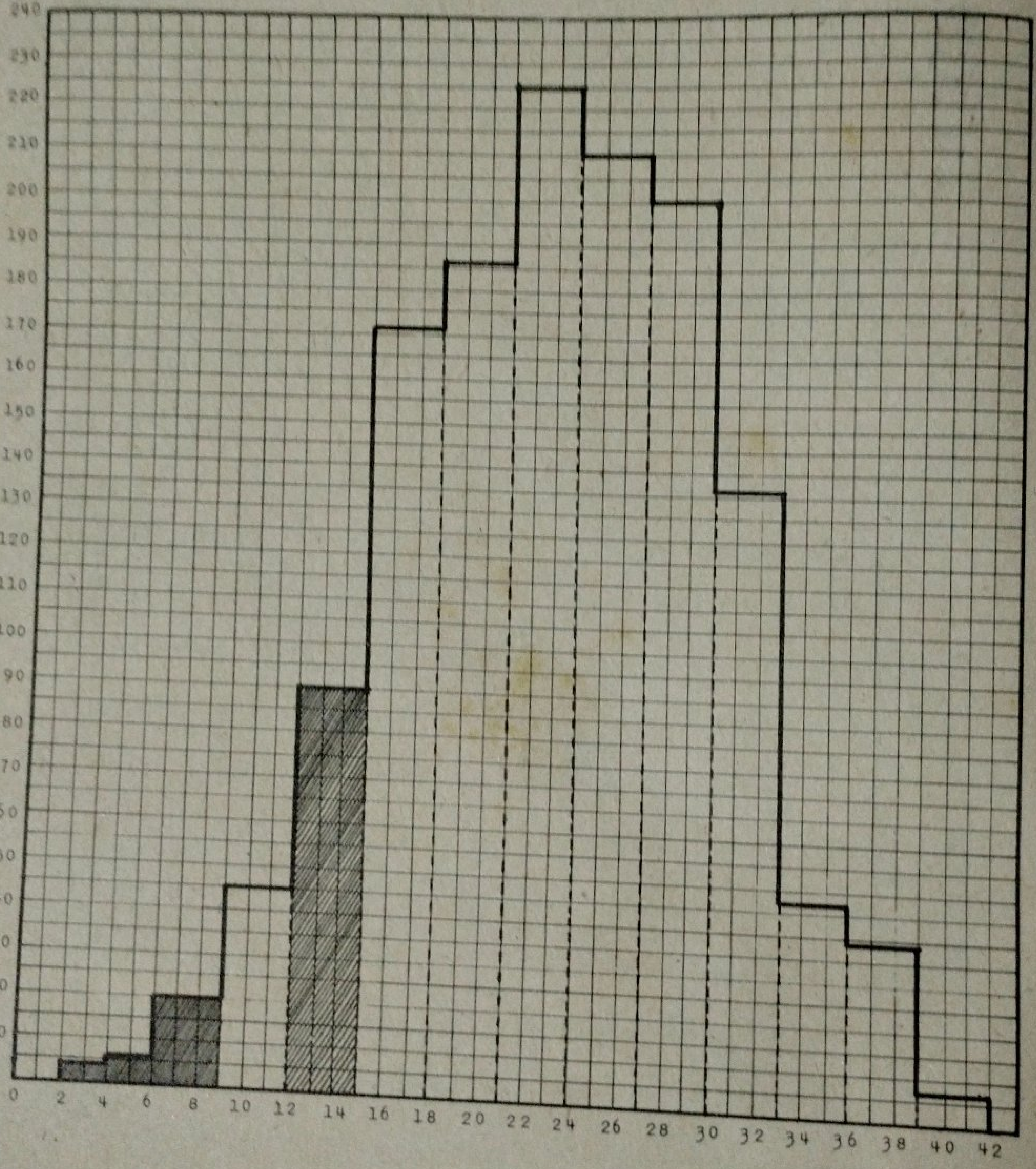


Extraido do livro "Noções Básicas de Estatística" de L.L.Thurstone Ph.D.

HISTOGRAMA DO TOTAL DE PONTOS DA PROVA DE MATEMÁTICA

- CURSO INDUSTRIAL -

(Exame vestibular de 1950)



ESCORES

NOTAS DE AULA

EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

EQUAÇÕES EQUIVALENTES

Uma equação do 1º grau a duas icógnitas pode sempre ser reduzida à forma $ax + by = c$.

Um sistema é de equações simultâneas quando tôdas as equações são verificadas pelos mesmos valores das incógnitas.

Êstes valores são a solução do sistema

Assim as equações $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$

São simultâneas porque são verificadas para $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Os sistemas a duas incógnitas podem sempre ser reduzidos à forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE DUAS EQUAÇÕES A DUAS INCÓGNITAS
MÉTODOS ANALÍTICOS E GRÁFICO

Os métodos mais usuais de resolução de sistemas são:

a) <u>substituição</u>

b) <u>comparação</u>

c) <u>adição</u>

d) <u>gráfico</u>

a) MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

Consiste em tirar o valor de uma das incógnitas, x, em uma das equações e substituir na outra que se transforma em equação a uma incógnita. Resolve-se esta equação e substitui-se o valor de y encontrado na expressão da primeira incógnita, determinando-a.

APLICAÇÃO:

Ressolver: $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

Tirando o valor de x na primeira equação vem

$$x = \frac{(-4 + 3y)}{2} \quad (1)$$

Substituindo na segunda

$$3 \; \frac{(-4 + 3y)}{2} + 2y = 7$$

Resolvendo esta última chega-se a

$$-12 + 9y + 4y = 14$$
$$13y = 14 + 12$$
$$13y = 26$$
$$y = \frac{26}{13} = 2$$

Levando êste valor à expressão (1), virá

$$x = \frac{-4 + 3 \times 2}{2} = 1$$

Resposta $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

b) MÉTODO DE COMPARAÇÃO

Resolvem-se ambas as equações em relação à mesma incógnita, x, igualam-se os resultados. Determina-se y.

Substitui-se o valor desta incógnita em uma das expressões de x determinando assim a segunda incógnita.

APLICAÇÃO

Resolver: $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

8) Calcular a diferença entre os perímetros de um triângulo e de um quadrado inscrito num círculo de $r = 2cm$.

9) A diagonal de um quadrado mede $4\sqrt{2cm}$. Calcular o raio do círculo circunscrito.

10) Unem-se os meios dos lados de um triângulo equilátero, formando-se novo triângulo equilátero. A soma dos perímetros das duas figuras é 22,5dm. Calcular o lado de cada um.

Multiplicando-se a 1ª equação por 3 e a segunda por −2, resulta:

$$\begin{cases} 6x - 9y = 12 \\ -6x - 4y = 14 \end{cases}$$

Somando, vem:

$$-13y = -26 \qquad \text{ou} \quad 13y = 26, \quad \text{logo}$$

$$y = \frac{26}{13} - 2$$

Levando êste valor à 1ª equação, resulta

$$\begin{aligned} 2x - 3 \times 2 &= -4 \\ 2x &= -4 + 6 \\ 2x &= 2, \quad \text{logo} \\ x &= \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Resposta: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

d) MÉTODO GRÁFICO

Tôda equação do 1º grau a duas incógnitas é representada por uma reta.

Logo, dado um sistema de duas equações a duas incógnitas, cada equação representará uma reta.

As coordenadas da interseção das retas, ponto comum entre elas, representarão a solução do sistema, valores que verificam as duas equações.

Para representar uma reta é bastante obter dois pontos delas.

Êste método consistirá, pois, em representar gràficamente as duas equações e ler no gráfico as coordenadas do ponto de interseção.

APLICAÇÃO

Resolver: $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$

Construa-se a reta R_1, representativa da 1ª equação.

$$y = \frac{2x - 1}{3}$$

Para $x = 5$ $\left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$ ponto M_1 (5,3)
$y = 3$

e para

$x = 8$
$y = 5$ $\left. \right\}$ ponto M_2 (8,5)

Em seguida construa-se a reta R_2, representativa da 2a. equação.

$$y = \frac{3x - 2}{4}$$

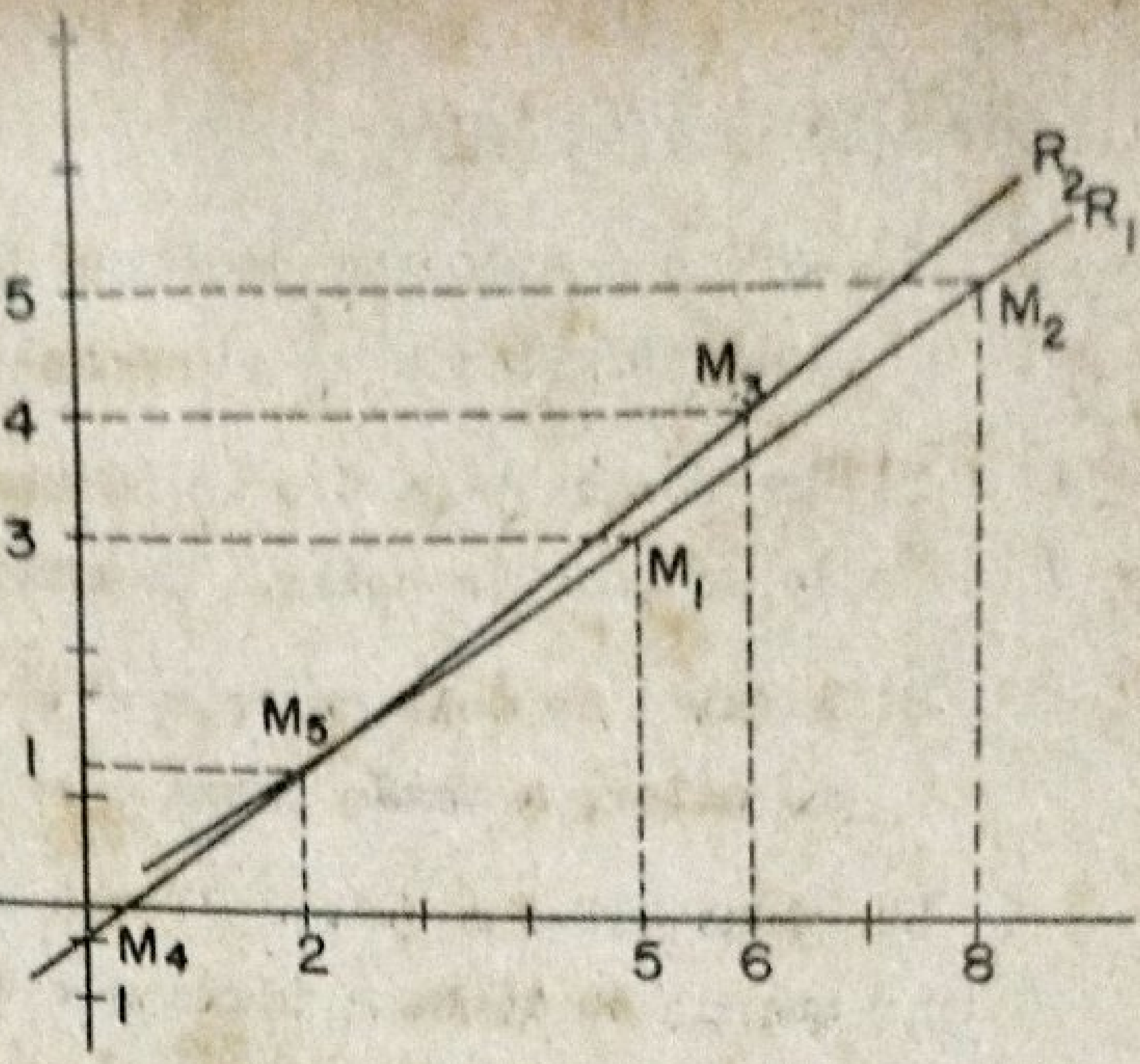


Fig. 5

Para $x = 6$ vem $y = 4$ ponto M_3 (6,4)
Para $x = 0$ vem $y = -\frac{1}{2}$ ponto $M_4 \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

A interseção M_5 (2,1) é a solução do sistema, isto é,

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Como se vê na fig. 5.

EXERCÍCIOS:

Resolver pelos quatro processos os sistemas:

1) $5x + 6y = 17$
$6x + 5y = 16$

2) $8x - 7y = -6$
$3x + y = 5$

3) $\frac{2x}{3} + y = 16$

$x + \frac{y}{4} = 14$

4) $\frac{2x}{3} + 3y = 5$

$\frac{x}{6} - \frac{2y}{3} = -\frac{5}{6}$

5) $\frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 0$

$3x + \frac{y}{2} = 17$

RESOLVER OS PROBLEMAS:

6) Qual a fração que se torna igual a $\frac{2}{3}$, quando se soma 5 aos dois têrmos e a $\frac{5}{8}$, quando se soma 3?

7) Uma pessoa paga Cr$ 48,00 com notas de Cr$ 5,0C e Cr$ 2,00 dando ao todo 14 notas. Quantas deu de cada espécie ?

8) A razão de dois números é $\frac{2}{3}$. Aumentando 1000 ao menor a 2000 ao maior, a razão passa a ser $\frac{3}{4}$. Quais são os números?

9) Pedro disse a João: "Tenho duas vêzes a idade que tu tinhas, quando eu tinha a idade que tu tens: quando tiveres a idade que eu tenho, teremos juntos 90 anos. Qual a idade de cada um ?

10) Um número é composto de dois algarismos, sendo 3 a diferença entre êles. Escrevendo o número em ordem inversa, obtém-se $\frac{4}{7}$ do número primitivo. Qual o número ?

NOTAS DE AULA

LINHAS PROPORCIONAIS

RAZÃO DE DOIS SEGMENTOS. SEGMENTOS PROPORCIONAIS. SEGMENTOS ADITIVOS E SUBTRATIVOS

Qualquer segmento de reta é representado por um número que exprime a sua grandeza. A razão entre dois segmentos de reta é formada com os dois números que os medem.

EXEMPLO:

Se dois segmentos $\overline{A}$ e $\overline{B}$ têm valores iguais a 3cm e 4cm, a razão entre êstes segmentos é $\frac{3}{4}$.

Dois segmentos são proporcionais a outros dois, se a razão entre os dois primeiros fôr igual à razão dos dois últimos, isto é, se os quatro números que os medirem formarem uma proporção.

EXEMPLO:

Quatro segmentos de reta que medem respectivamente 2cm, 3cm, 6cm, e 9cm são proporcionais, pois os números 2, 3, 6 e 9 que os medem formam a proporção $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$.

Um segmento é a <u>média proporcional</u> entre dois outros, quando ocupa os dois meios ou os dois extremos da proporção formada com os outros dois.

EXEMPLO:

Se h é a média proporcional entre m e n virá $\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$ ou $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$, isto é, $h^2 = m \times n$ ou $h = \sqrt{m \times n}$.

Cada um dos segmentos m e n é chamado terceira proporcional.

Quarta proporcional é qualquer um dos quatro segmentos proporcionais.

PONTOS QUE DIVIDEM UM SEGMENTO DE RETA NUMA RAZÃO
DIVISÃO HARMÔNICA

a) O estudo da proporcionalidade da linha é baseada no seguinte:

1º TEOREMA

"Sôbre um segmento de reta há sòmente um ponto que o divide em dois segmentos que estejam numa razão dada".

Considere-se um segmento de reta $\overline{AB}$, e, nêle, um ponto P, formando dois segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$. (fig.6)

Admita-se que $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{5}{2}$ (1), sendo $\frac{5}{2}$ a razão dada. Se houver um 2º ponto Q, que também divida o segmento AB na razão $\frac{5}{2}$ virá $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{5}{2}$ (2).

As igualdades (1) e (2) permitem escrever a proporção $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}$

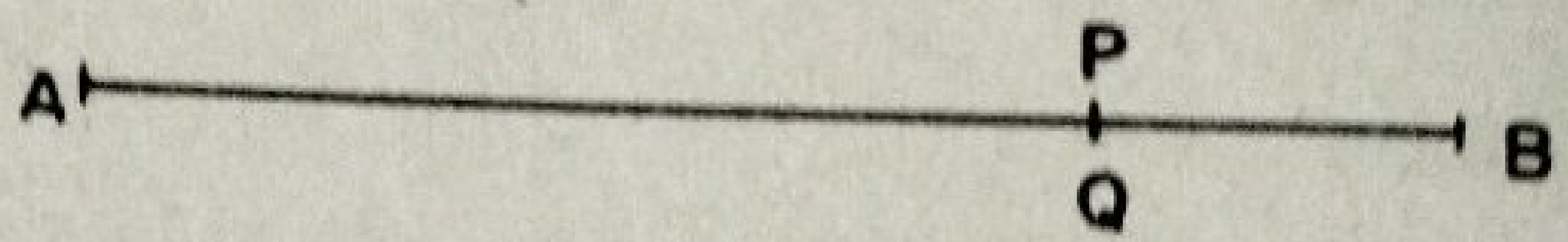


Fig.6

Em virtude de uma propriedade das proporções, esta última pode ser escrita $\frac{\overline{AP} + \overline{PB}}{\overline{PB}} = \frac{AQ + QB}{\overline{QB}}$

mas $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AQ} + \overline{QB} = \overline{AB}$ logo $\frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{QB}}$

Desta última proporção, conclui-se que $\overline{PB} = \overline{QB}$

Para que $\overline{PB} = \overline{QB}$, é preciso que os pontos P e Q coincidam, pois os dois segmentos têm as mesmas origens e extremidades.

Se os pontos P e Q coincidem, só há um ponto que divide AB numa razão dada.

Anàlogamente prova-se que:

"Há sòmente, no prolongamento do segmento AB, um ponto P tal, que a razão dos segmentos é igual a uma razão dada".

b) Seja o segmento $\overline{AB}$. Dois pontos M e N o <u>dividem harmônicamente</u>, se o dividirem em razões iguais e de sinais contrários, isto é, se $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{-\overline{NA}}{\overline{NB}}$

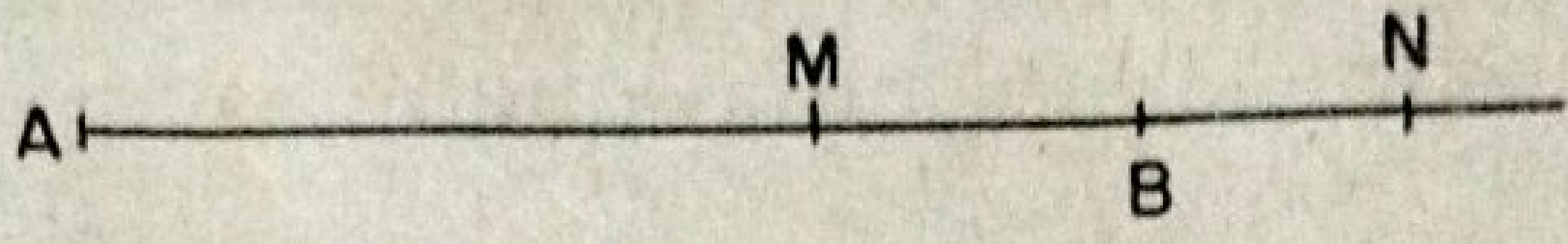


Fig.7

Os pontos M e N chamam-se conjugados harmônicos e os 4 pontos formam uma divisão harmônica. (fig.7)

CONSEQÜÊNCIAS

A metade de um segmento retilíneo é meia proporcional entre as distâncias do seu meio a dois pontos que dividem o segmento harmônicamente. (fig.7-A)

Sejam $\overline{AB} = 2a$ e os pontos M e N conjugados harmônicos.

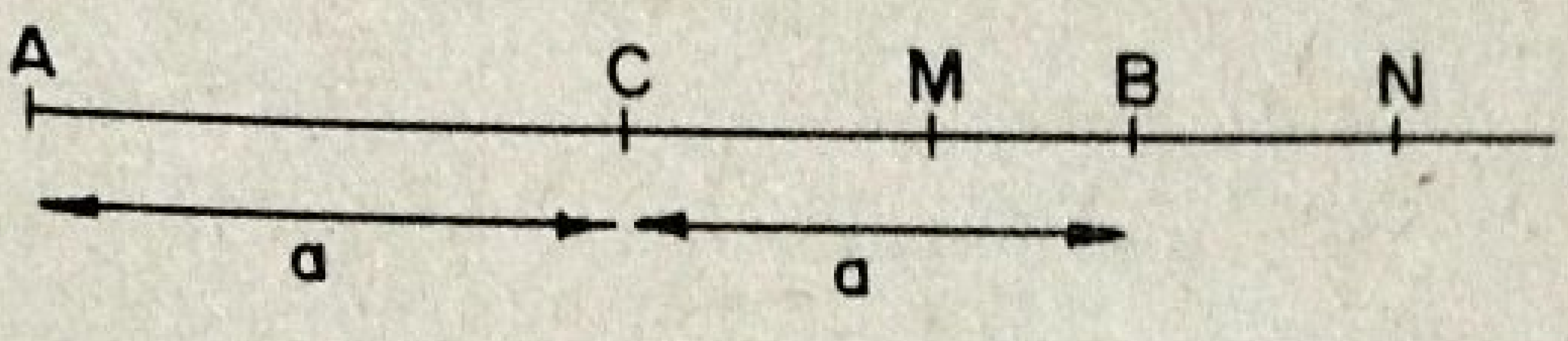


Fig 7a

Com efeito $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{-\overline{NA}}{\overline{NB}}$ ou $\frac{-a - \overline{CM}}{a - \overline{CM}} = -\left(\frac{-a - \overline{CN}}{a - \overline{CN}}\right)$

ou efetuando $a^2 = \overline{CM} \times \overline{CN}$

Como $\overline{CM} \times \overline{CN}$ é positivo, os pontos M e N ficam ambos à direita ou à esquerda de C.

SEGMENTOS DETERMINADOS SÔBRE TRANSVERSAIS
POR UM FEIXE DE PARALELAS

$2^{\underline{o}}$ TEOREMA

<u>Se um feixe de paralelas determina segmentos iguais sôbre uma transversal, determina também segmentos iguais sôbre outra transversal.</u>

Por hipótese $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, fig. 8.

Tracem-se $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ paralelas a A_1D_1 virá

$$\left.\begin{aligned} \overline{AE} &= \overline{A_1B_1} \\ \overline{BF} &= \overline{B_1C_1} \\ \overline{CG} &= \overline{C_1D_1} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

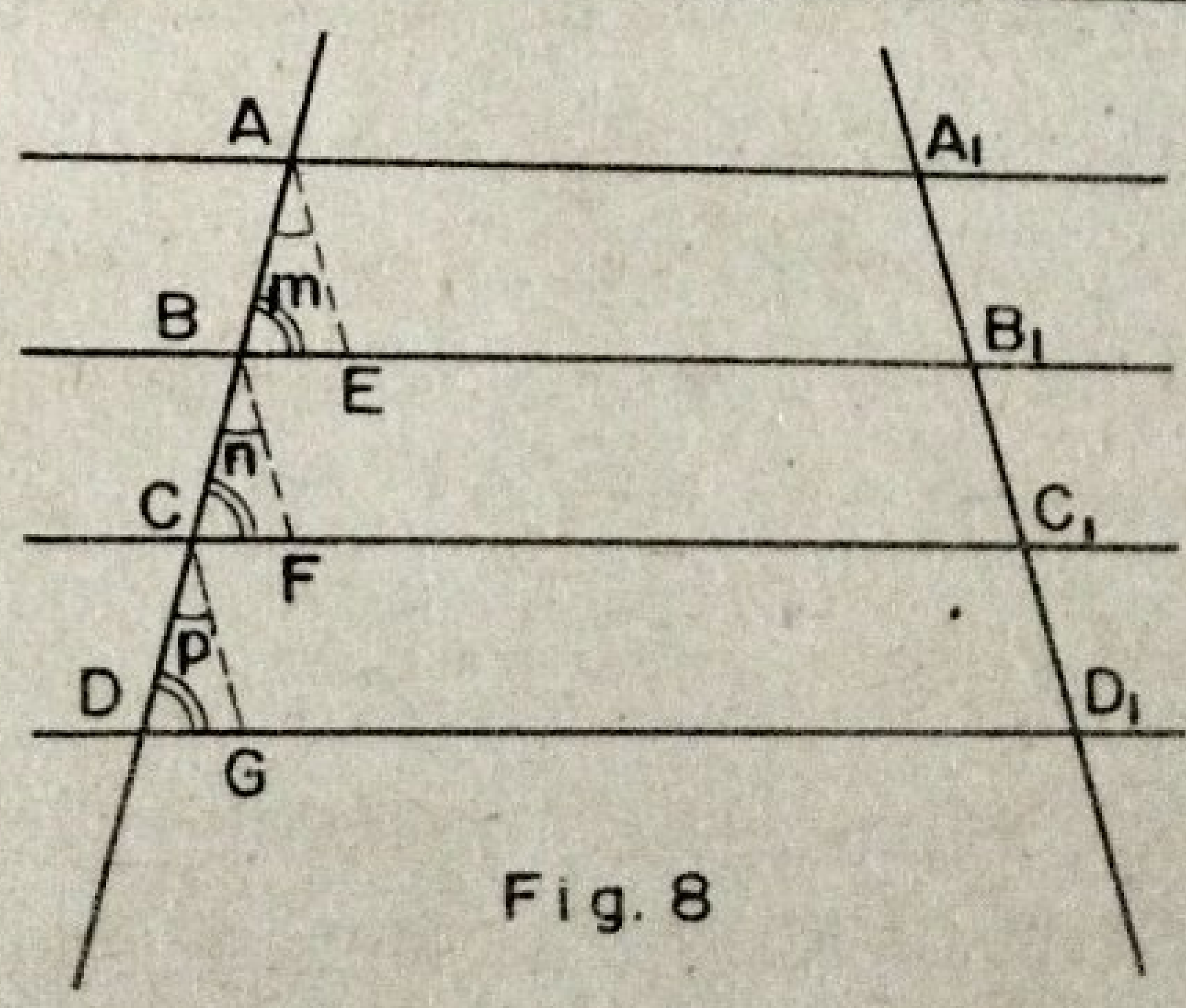


Fig. 8

Mas

$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ porque são correspondentes e

$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P}$ pelo mesmo motivo logo virá: $\overset{\triangle}{ABE} = \overset{\triangle}{BCF} = \overset{\triangle}{CDG}$ e daí

$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG}$ (2)

As igualdades (1) e (2) permitem concluir que $\overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} = \overline{C_1O_1}$

3º TEOREMA

Um feixe de paralelas determina sôbre duas transversais segmentos proporcionais.

Veja-se 4º Teorema. A demonstração é a mesma. (fig.9)

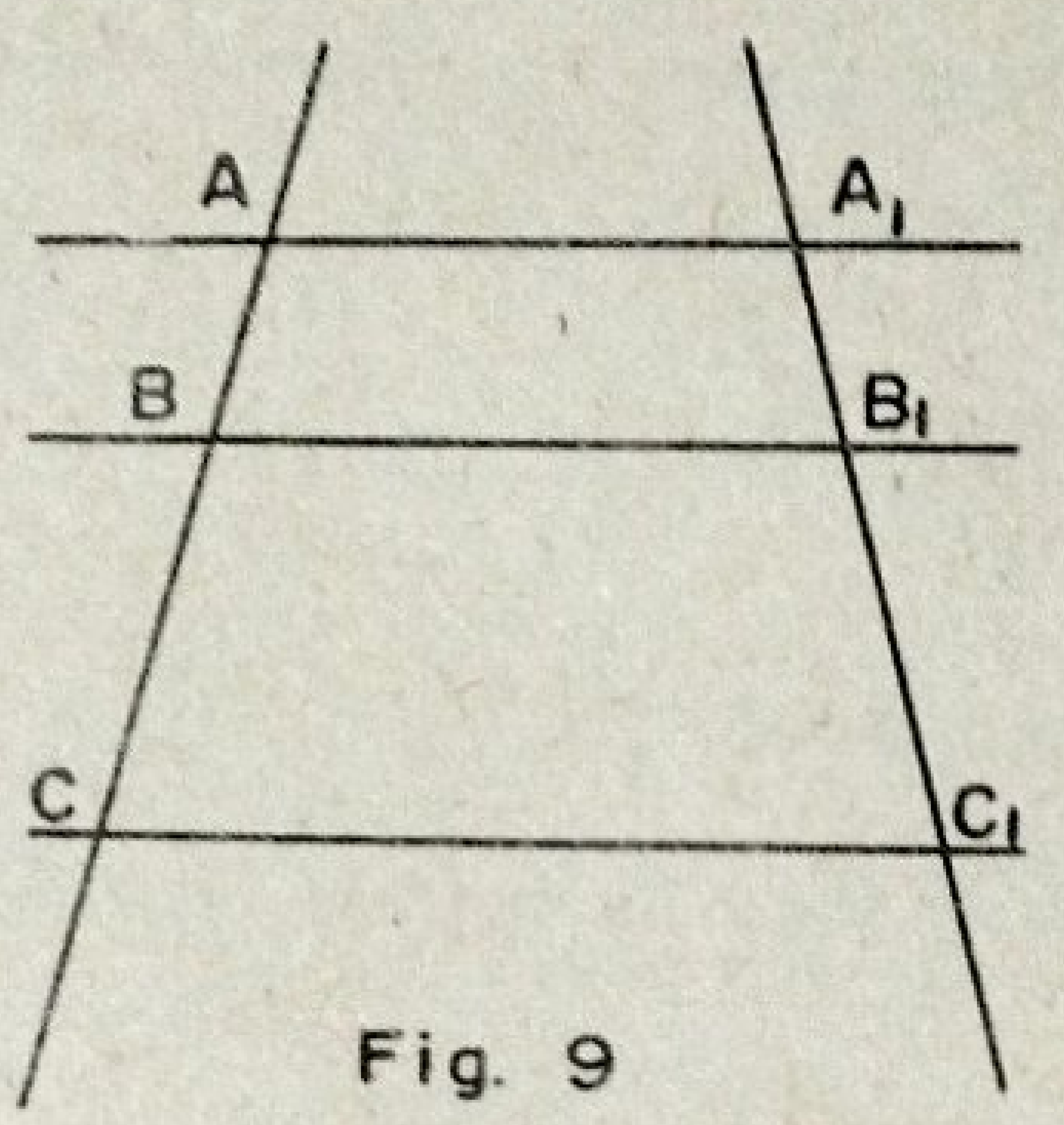


Fig. 9

LINHAS PROPORCIONAIS NO TRIÂNGULO

PROPRIEDADES DAS BISSETRIZES

4º TEOREMA

Tôda paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois em partes proporcionais (1º teorema de Tales).

Seja o triângulo ABC no quàl $\overline{DE}$ é paralela a $\overline{AC}$ (fig.10).

Admita-se que $\overline{AD}$ e $\overline{DB}$ contenham uma dada medida, respectivamente, quatro e duas vêzes.

Virá $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \dfrac{2}{4}$ (1)

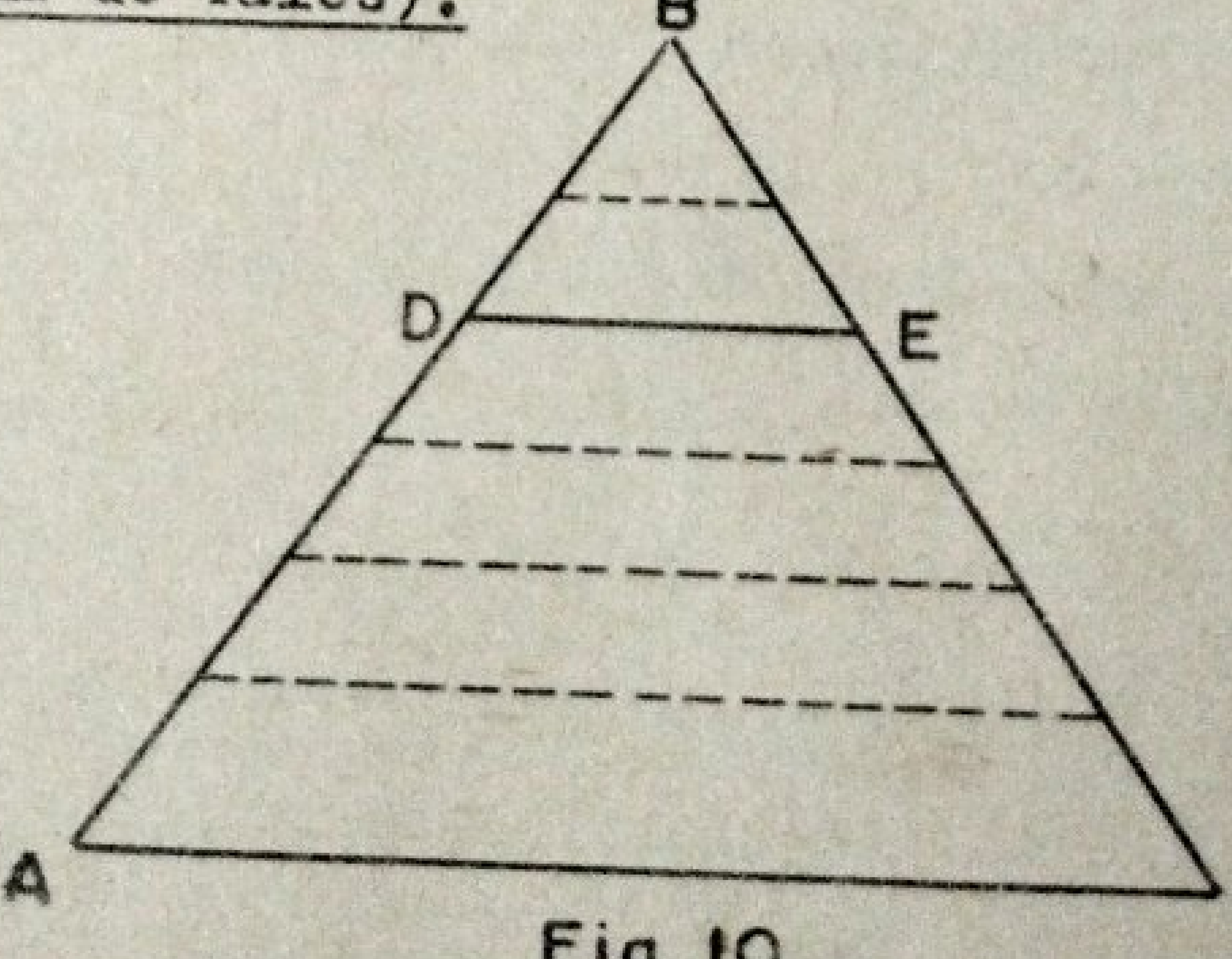


Fig. 10

Pelos pontos de divisão tracem-se paralelas a $\overline{AC}$. Elas determinam sôbre $\overline{BC}$ seis segmentos iguais dos quais 2 correspondem a $\overline{BE}$ e 4 a $\overline{EC}$.

Virá $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \dfrac{2}{4}$ (2)

Comparando (1) e (2) vem $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$

5º TEOREMA

A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em dois segmentos aditivos proporcionais aos lados adjacentes.

Seja o triângulo ABC e a bissetriz $\overline{BE}$ do ângulo $\hat{B}$ (fig.11)

Trace-se $\overline{DC}$ paralela a $\overline{BE}$

O teorema anterior, considerando triângulo ACD, permite escrever $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{EC}}{\overline{BD}}$ (1)

Mas $\hat{a} = \hat{b}$; $\hat{b} = \hat{c}$; $\hat{a} = \hat{d}$ logo $\hat{c} = \hat{d}$ e o triângulo BCD é isósceles e então $\overline{BD} = \overline{BC}$.

A expressão (1) dá $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{EC}}{\overline{BC}}$

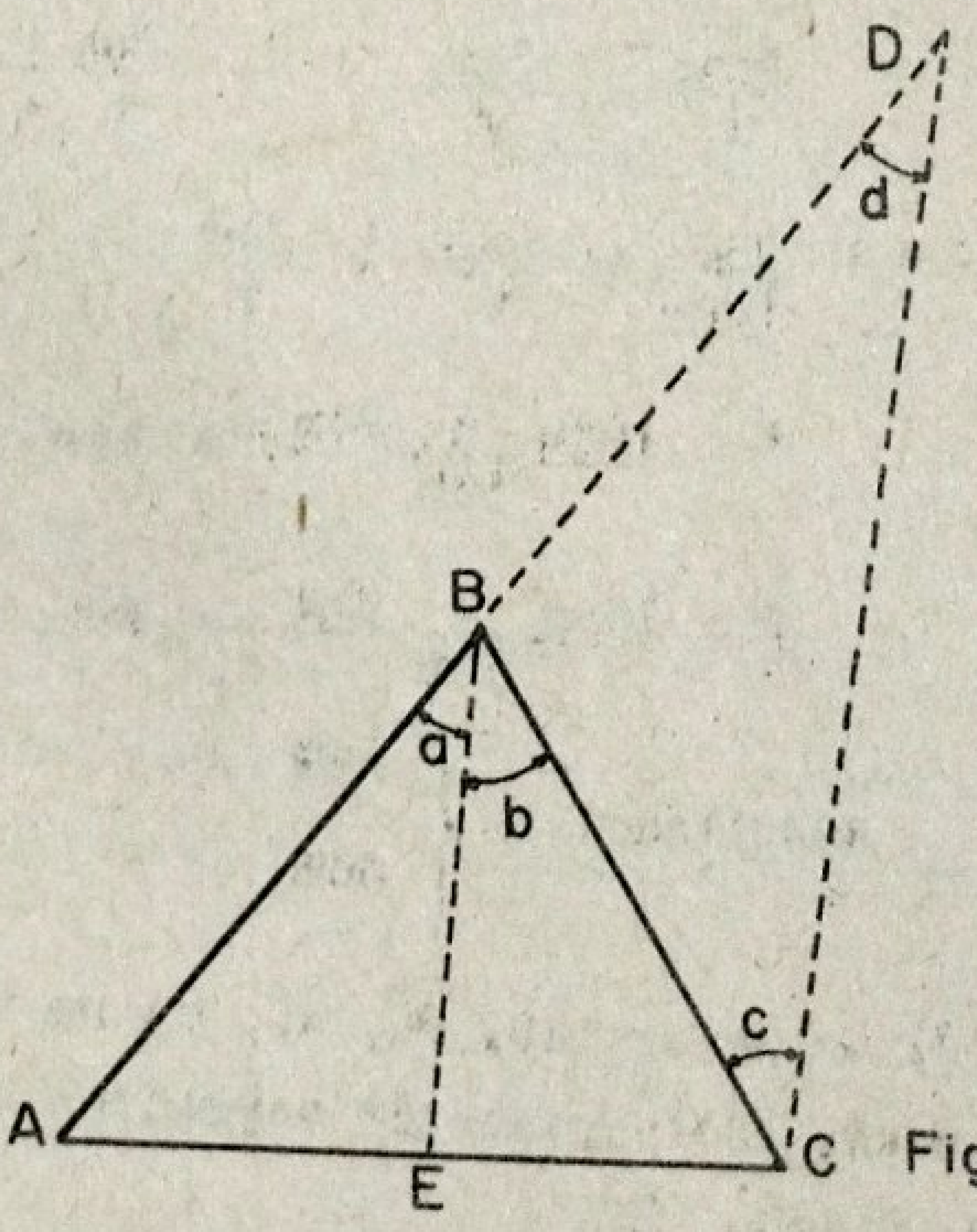


Fig. II

6º TEORAMA

A bissetriz de um ângulo externo de um triângulo divide o lado oposto em dois segmentos subtrativos proporcionais aos lados adjecentes.

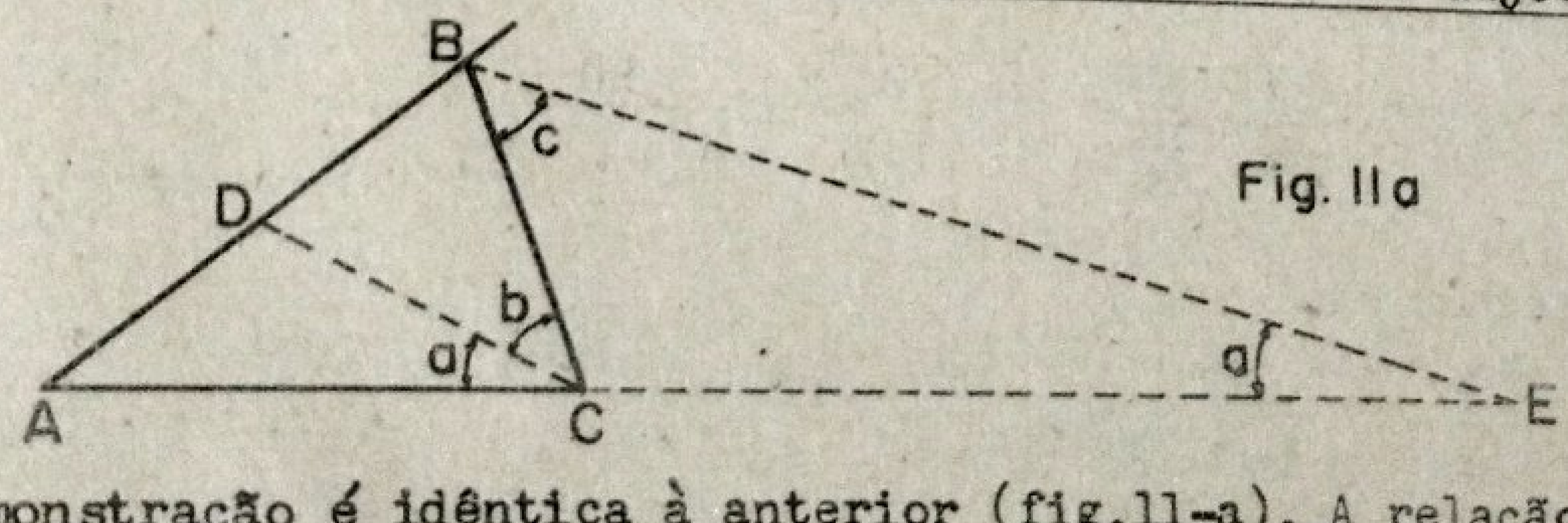


Fig. IIa

A demonstração é idêntica à anterior (fig.11-a). A relação final é

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$$

APLICAÇÕES

1) Calcular a média proporcional aos segmentos de 4cm e 16cm

$$\frac{4}{m} = \frac{m}{16} \quad \therefore \quad m = \sqrt{16cm^2} \quad \therefore \quad n = 4cm$$

Resultado: $n = 4cm$

2) Uma paralela a um dos lados de um triângulo determina, no outro, segmentos de 2cm e 3cm. Calcular o segmento determinado no 3º lado que mede 10cm.

Solução:

Pelo teorema de Tales vem, chamando x e y os segmentos procurados:

$$\frac{2cm}{x} = \frac{3cm}{y} \quad \text{ou} \quad \frac{2cm + 3cm}{x + y} = \frac{2cm}{x} = \frac{3cm}{y}$$

logo $\dfrac{5cm}{10cm} = \dfrac{2cm}{x} = \dfrac{3cm}{y}$

$$x = \frac{10cm \times 2cm}{5cm} = 4cm$$

$$y = \frac{10cm \times 3cm}{5cm} = 6cm$$

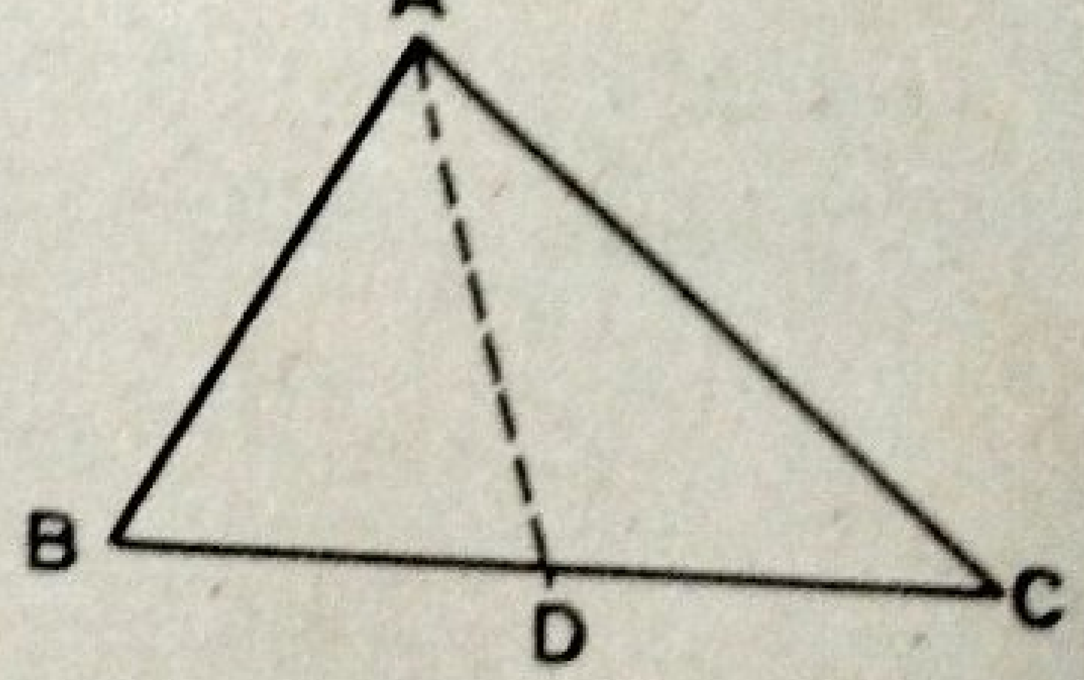
Resultado: $\begin{cases} 4cm \\ 6cm \end{cases}$

3) Os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, de um triângulo medem respectivamente 3m, 4m e 6m. Determinar os segmentos em que a bissetriz do ângulo A divide o lado $\overline{BC}$.

Solução:

Sabe-se que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC} - \overline{BD}}$$



Aplicando vem

$$\frac{3m}{6m} = \frac{\overline{BD}}{4m - \overline{BD}} \quad \text{ou} \quad 12m - 3\overline{BD} = 6\overline{BD}$$

logo

$$\overline{BD} = \frac{12m}{9} = 1,3m$$

$\overline{CD} = 4m - 1,3m = 2,7m$

Resultado $\begin{cases} 1,3m \\ 2,7m \end{cases}$

<u>PROBLEMAS</u>

1) Calcular a média proporcional aos segmentos de 4cm e 9cm.

2) Calcular a terceira proporcional aos segmentos de 5cm e 4cm.

3) Calcular a quarta proporcional aos segmentos de 5cm e 2cm.

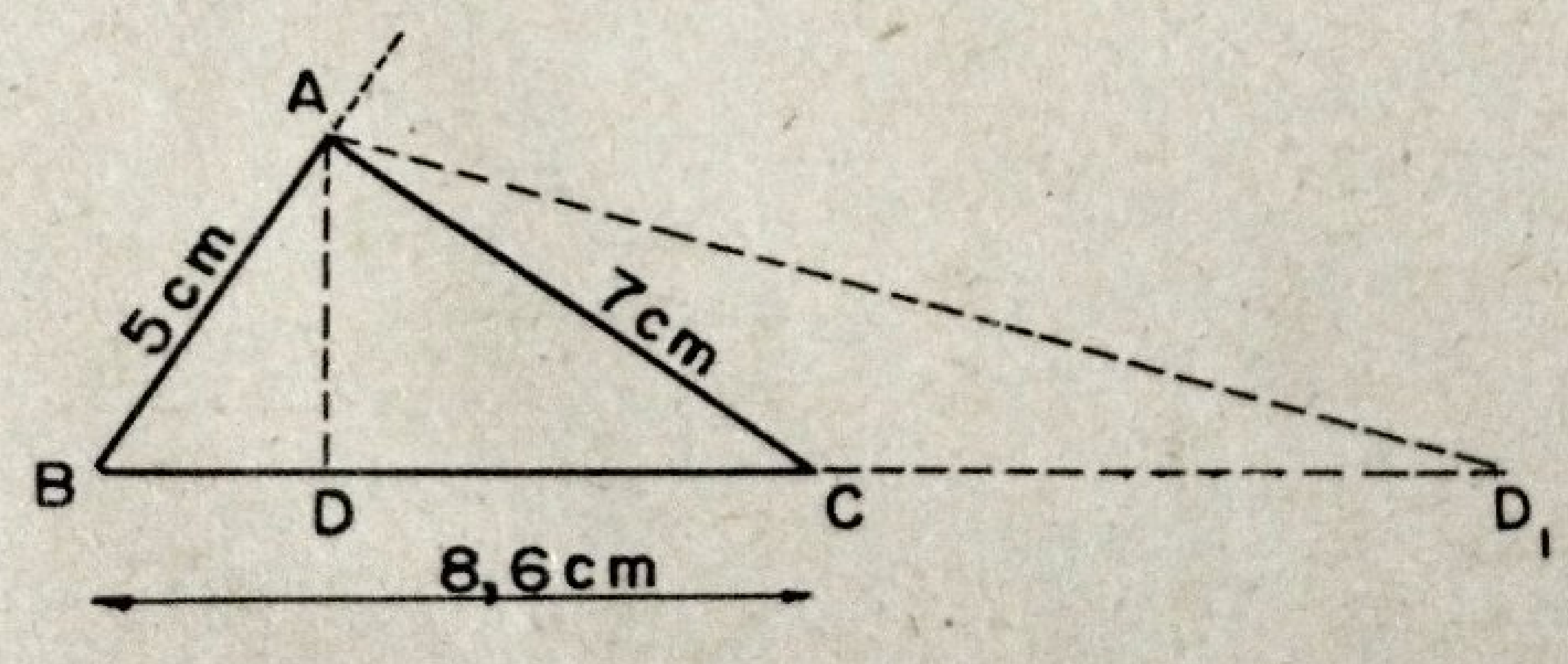
4) Uma paralela a um lado de um triângulo determina no outro lado segmentos de 4m e 5m. Calcular os segmentos determinados sôbre o terceiro lado que mede 15m.

5) Um feixe de cinco paralelas corta uma transversal em quatro segmentos que medem 5m, 7m, 2m e 9m. Calcular os segmentos determinados pelo mesmo feixe em outra transversal, sabendo que o segundo segmento compreendido entre as 2 primeiras paralelas mede 3m.

6) Os lados de um triângulo medem 10m, 20m e 35m. Calcule os segmentos que uma das bissetrizes internas divide o lado de 20m.

7) Os lados de um triângulo medem 6m, 11m e 15m. De quanto é preciso prolongar o lado maior para que encontre a bissetriz do ângulo externo.

8) Calcular o segmento $\overline{DD_1}$ sabendo-se que $\overline{AD}$ e $\overline{AD_1}$ são bissetrizes do ângulo A.



NOTAS DE AULA

SEMELHANÇA DE POLÍGONOS

NOÇÃO DE SEMELHANÇA, ÂNGULOS HOMÓLOGOS, VÉRTICES HOMÓLOGOS E LADOS HOMÓLOGOS

Polígonos semelhantes são os que têm os ângulos respectivamente iguais e os lados homólogos, proporcionais.

Vértices homólogos de polígonos semelhantes são os que podem ser unidos a lados homólogos por triângulos semelhantes e semelhantemente dispostos.

Lados homólogos são os que unem vértices homólogos.

Ângulos homólogos são os formados por lados homólogos.

CONDIÇÃO DE SEMELHANÇA, RAZÃO DE SEMELHANÇA

Para que os dois polígonos ABCDE e $A_1B_1C_1D_1E_1$ sejam semelhantes é pois necessário:

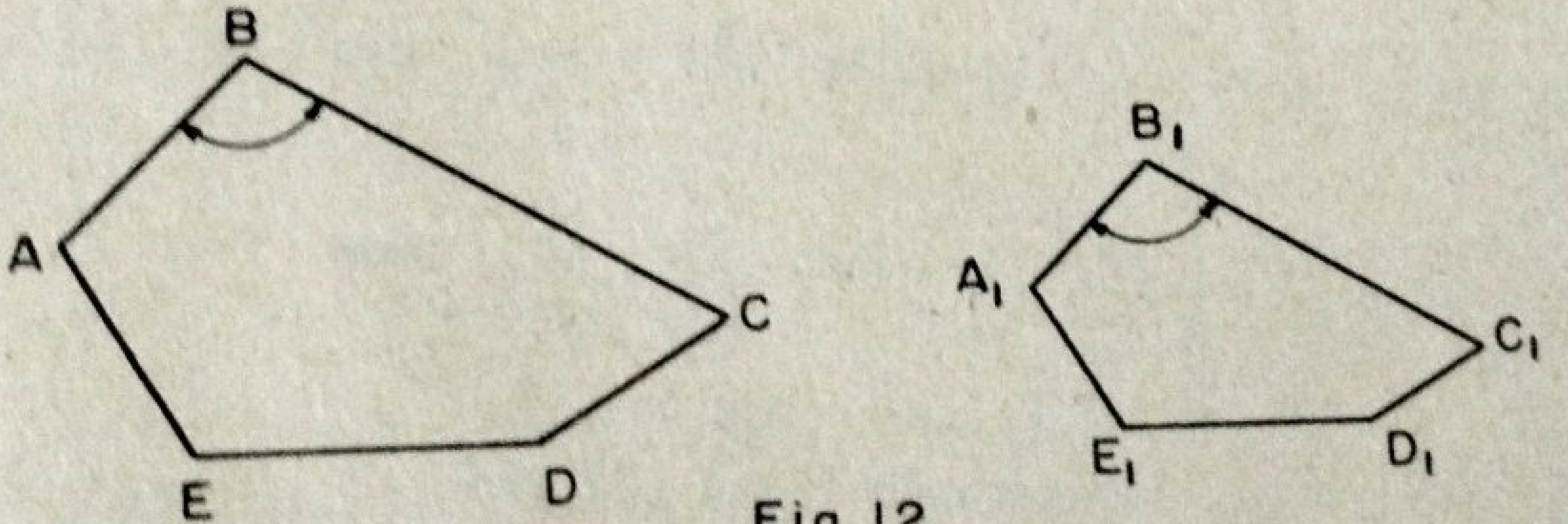


Fig. 12

$\hat{A} = \hat{A}_1$: $\hat{B} = \hat{B}_1$: $\hat{C} = \hat{C}_1$: $\hat{D} = \hat{D}_1$: $\hat{E} = \hat{E}_1$: e que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \cdots \frac{\overline{DA}}{\overline{D_1A_1}} \qquad \text{(fig.12)}$$

Razão de semelhança é a razão entre os dois números que medem dois lados homólogos quaisquer.

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

7º TEOREMA

Tôda paralela a um lado de um triângulo determina um segundo triângulo semelhante ao primeiro (2º teorema de Tales).

Seja o triângulo ABC e uma reta $\overline{DE}$, paralela a $\overline{BC}$, formando um 2º triângulo ADE. (fig.13) Trata-se de demonstrar que:

a) - Os triângulos ABC e DBE têm os ângulos respectivamente iguais.

b) - Têm os lados homólogos proporcionais.

a) O ângulo em $\hat{B}$ é comum: os ângulos em $\hat{D}$ e $\hat{A}$ são iguais por serem correspondentes, como também os ângulos em $\hat{E}$ e $\hat{C}$, são correspondentes. Os três ângulos são portanto iguais.

b) Tire-se $\overline{DF}$ paralela $\overline{BC}$. O quadrilátero DEFC é um paralelogramo e assim $\overline{DE}=\overline{FC}$.

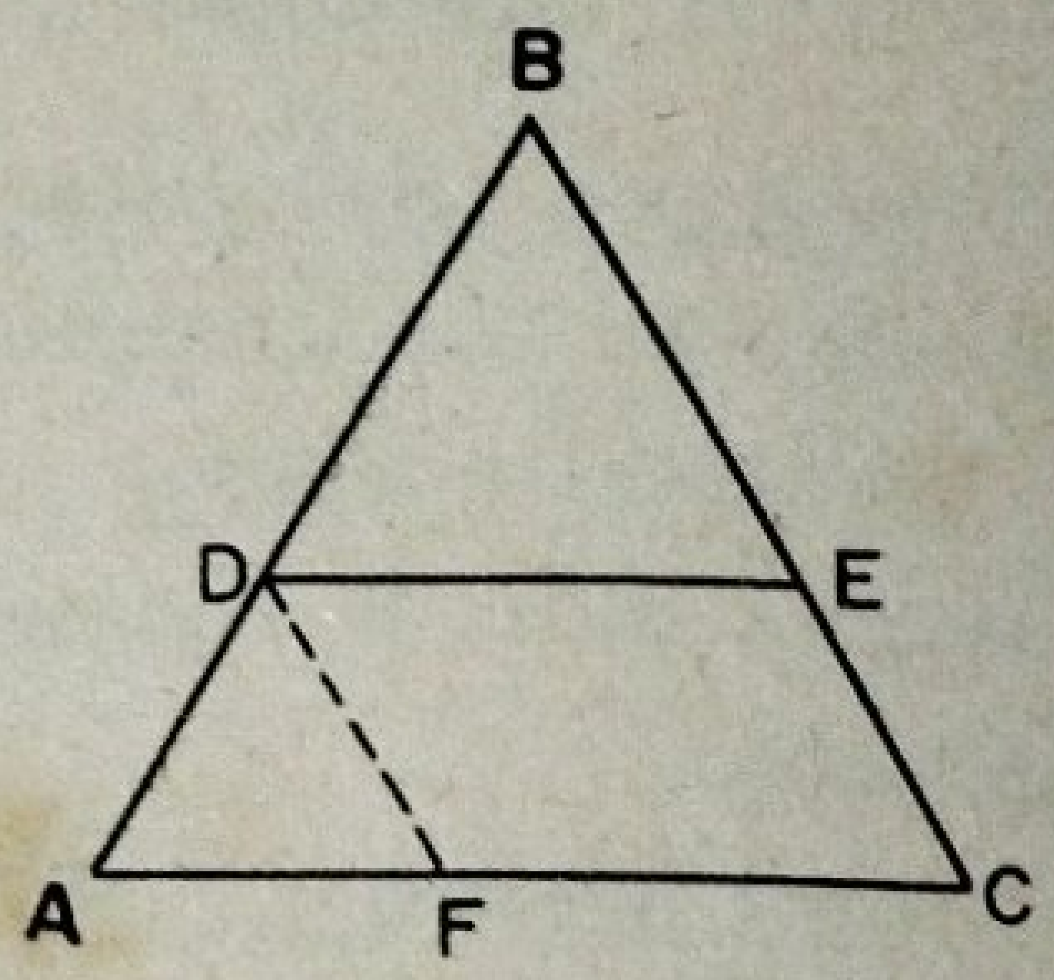


Fig.13

Mas $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$ ou $\dfrac{\overline{AD} + \overline{DB}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{BE} + \overline{EC}}{\overline{BE}}$ ou ainda $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$ (1)

Por outro lado, os triângulos ADF e BAC dão $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{AF}}{\overline{FC}}$ ou

$\dfrac{\overline{BD} + \overline{AD}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{AF} + \overline{FC}}{\overline{FC}}$ ou ainda $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{FC}}$. Como $\overline{FC} = \overline{DE}$ vem

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{DE}}$ (2). Comparando (1) e (2) vem $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{DE}}$

Os três lados são portanto proporcionais, o que demonstra o teorema.

8º TEOREMA

Dois triângulos são semelhantes quando têm os três ângulos iguais.

Sejam os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ nos quais

$$(1)\begin{cases}\hat{A} = \hat{A}_1\\ \hat{B} = \hat{B}_1\\ \hat{C} = \hat{C}_1\end{cases}$$

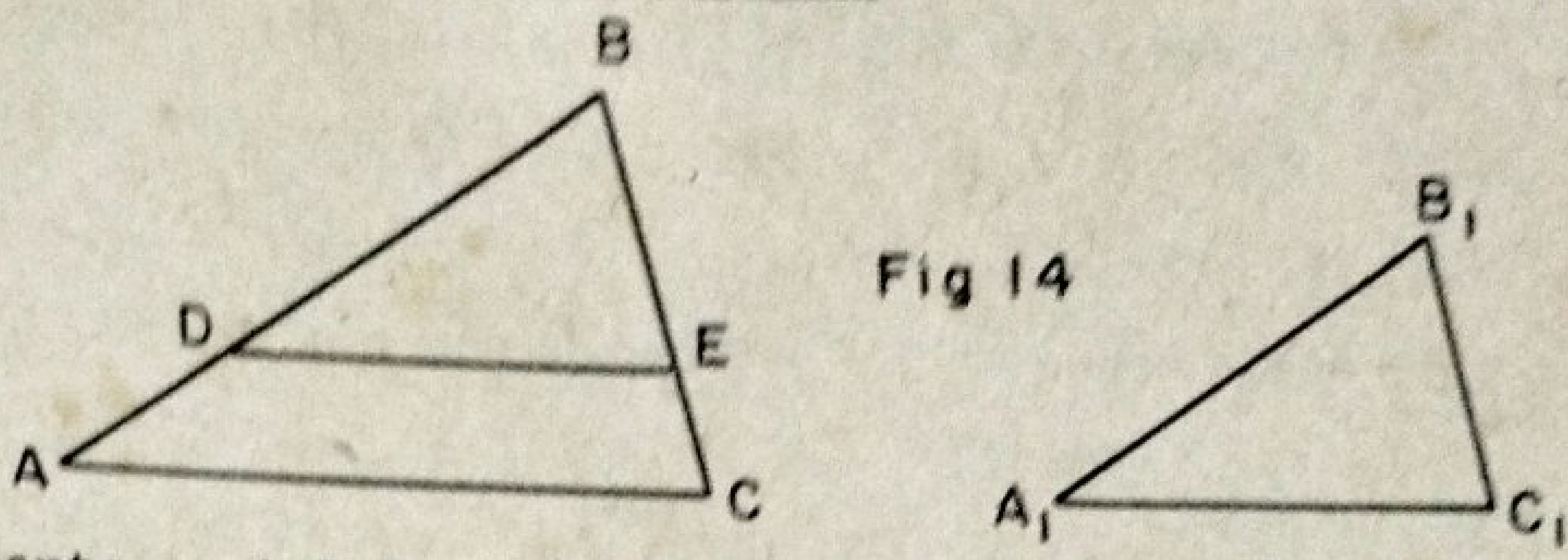


Fig 14

ABC será semelhante a $A_1B_1C_1$ (fig.14)

Com efeito, faça-se $\overline{BD} = \overline{A_1B_1}$. Pelo ponto D, trace-se $\overline{DE}$ paralela a $\overline{AC}$. Pelo teorema de Tales BDE $\sim$ BAC (2). Provar-se-á, então, que BDE = $A_1B_1C_1$.

Assim $\overline{BD} = \overline{A_1B_1}$ por construção, $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{C} = \hat{E}$ daí em virtude de (1), vem:

$$\hat{D} = \hat{A}_1 \quad e \quad \hat{E} = \hat{C}_1$$

Logo, os dois triângulos BDE e $A_1B_1C_1$ são iguais. A expressão (2) então dá: $A_1B_1C_1 \sim$ ABC.

9º TEOREMA

Dois triângulos são semelhantes quando têm um ângulo igual compreendido entre dois lados proporcionais.

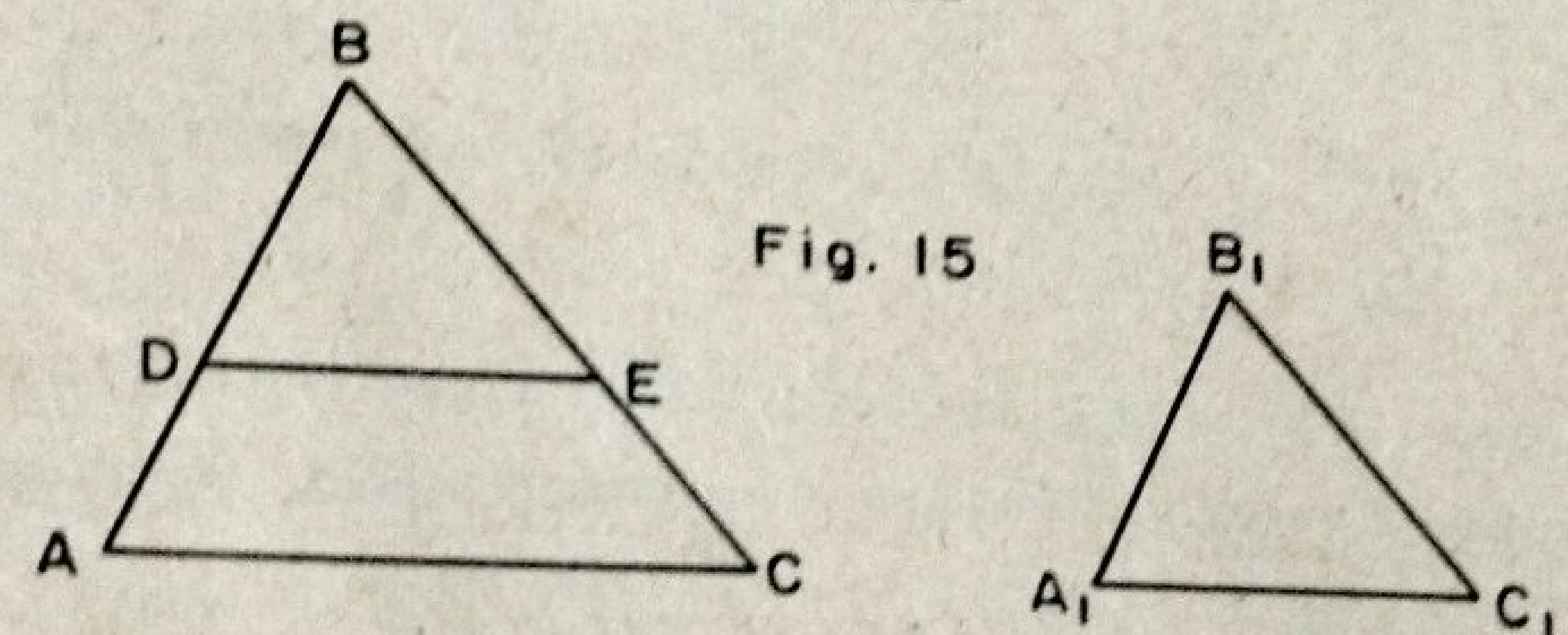


Fig. 15

Sejam os triângulos ABC = $A_1B_1C_1$ nos quais $\hat{B} = \hat{B}_1$ e

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} \quad (1)$$

Seja $\overline{BD} = \overline{A_1B_1}$ e pelo ponto D trace-se $\overline{DE}$ paralela a $\overline{AC}$ fig.15. Pelo teorema de Tales pode-se escrever DBE $\sim$ ABC (2).

Basta provar agora que DBE = $A_1B_1C_1$

Ora a expressão (2) dá $\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$ ou, então, $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$ (3)

Das expressões (3) e (1) conclui-se que $\overline{BE} = B_1C_1$, logo os triângulos BDE e $A_1B_1C_1$, são iguais porque têm dois lados iguais e o ângulo compreendido igual.

A expressão (2) dará então $A_1B_1C_1 \sim ABC$

10º TEOREMA

Dois triângulos são semelhantes quando têm os três lados proporcionais.

Sejam os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ (fig.16)

nos quais $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}}$ (1)

Mostrar-se-á então que $ABC \sim A_1B_1C_1$ (2)

Faça-se $\overline{BD} = \overline{A_1B_1}$ (3)

Pelo ponto D, trace-se $\overline{DE}$ paralela a $\overline{AC}$.

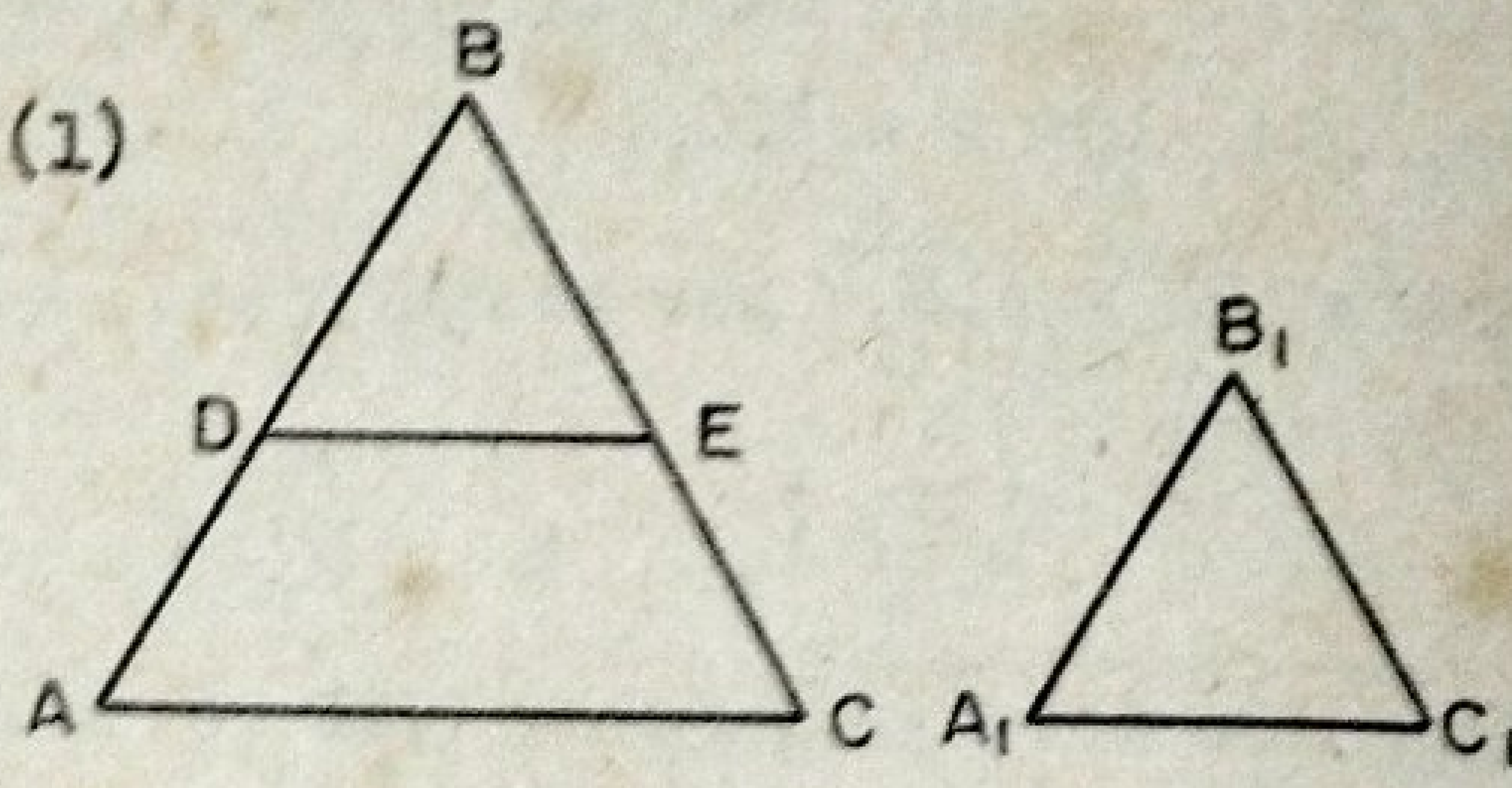


Fig.16

O teorema de Tales permite escrever:

$DBE \sim ABC$ (2) logo $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}}$; devido a (3)

vem, $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}}$ (4). Comparando as expressões (4) e (1), conclui-se que $\overline{B_1C_1} = \overline{BE}$ e $\overline{A_1C_1} = \overline{DE}$, logo os triângulos BDE e $A_1B_1C_1$ são iguais porque têm os três lados iguais e então a expressão (2) dá $ABC \sim A_1B_1C_1$.

11º TEOREMA

As medianas de um triângulo se encontram no mesmo ponto o qual se acha nos $\frac{2}{3}$ de cada uma delas, partindo dos vértices.

Assim, dados o triângulo ABC e as medianas $\overline{AE}$ e $\overline{DC}$, unindo-se os pontos D e E, a reta $\overline{DE}$ é paralela a $\overline{BC}$, e igual à sua metade.

Logo $\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$ (fig.17)

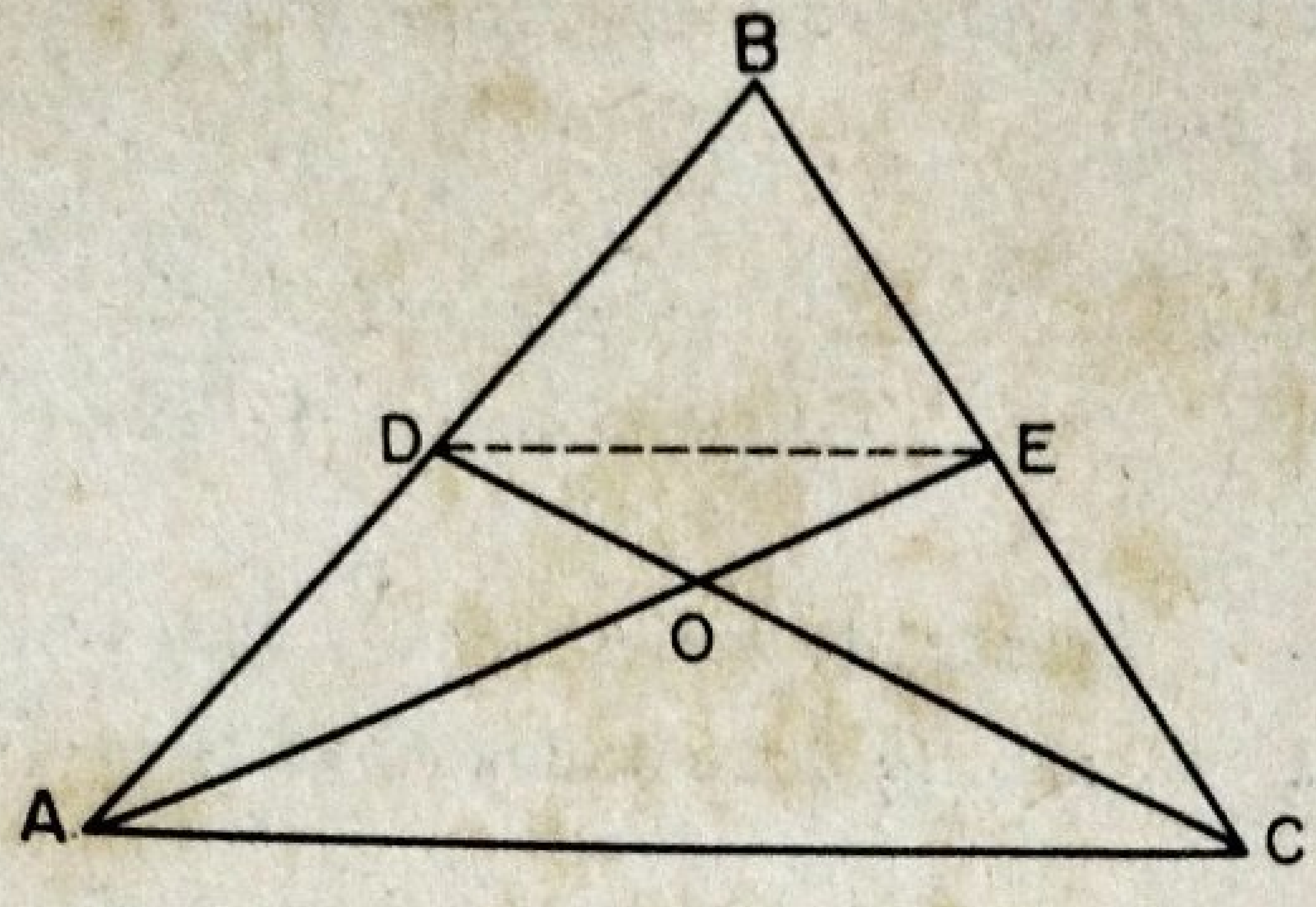


Fig. 17

Mas os triângulos DOE e AOC são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} = \frac{1}{2}$$

daí $2\ \overline{OD} = \overline{OC}$, logo O está nos $\frac{2}{3}$ de DC.

A mesma propriedade obriga a 3ª mediana a passar por O.

SEMELHANÇA DE POLÍGONOS REGULARES. PROPRIEDADES DOS POLÍGONOS

12º TEOREMA

Dois polígonos regulares de um mesmo número de lados são sempre semelhantes porque têm sempre os ângulos iguais e os lados homólogos proporcionais.

Assim os ângulos dos polígonos dados são iguais porque compreendem entre seus lados a mesma parte da circunferência, $\frac{4}{6}$ no caso fig.18

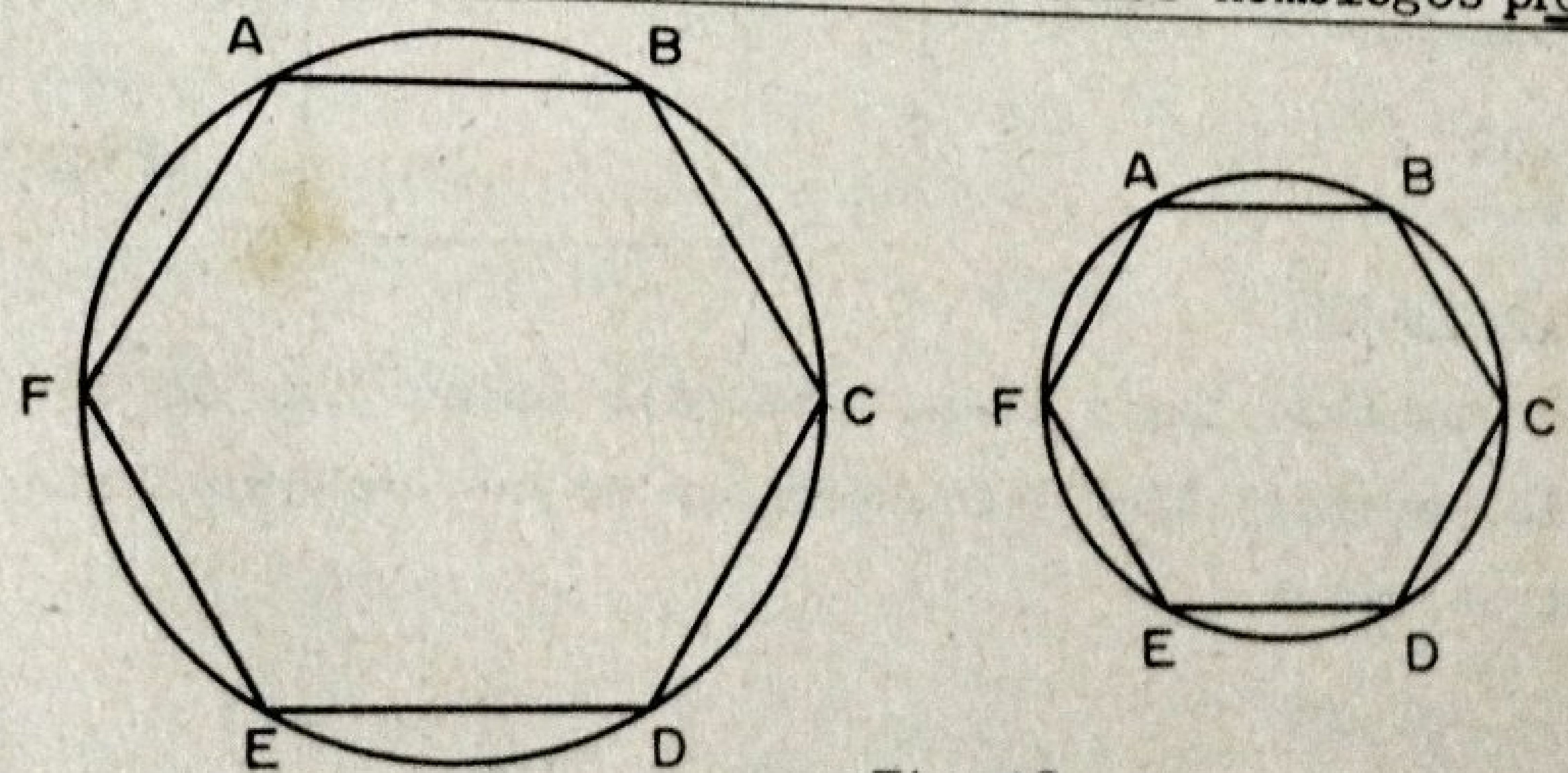


Fig. 18

Pode-se ainda escrever que $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} \ldots\ldots \frac{\overline{DA}}{\overline{D_1A_1}}$ (1)

porque os numeradores de tôdas as razões são iguais, bem como os denominadores.

CONSEQÜÊNCIAS

1) A razão dos lados homólogos de dois polígonos é igual à razão dos perímetros. Aplicando uma propriedade de proporções à expressão (1), vem

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \overline{DA}}{\overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1} + \ldots\ldots\ldots + \overline{D_1A_1}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{P}}{\overline{P_1}}$$ (razão de semelhança). Daí conclue-se que a razão de dois lados homólogos é igual à razão dos perímetros.

2) Todos os círculos são semelhantes. A razão de semelhança é a relação entre os raios, pois

$$\frac{2\pi r}{2\pi r_1} = \frac{r}{r_1}$$

13º TEOREMA

<u>Dois polígonos semelhantes podem ser decompostos no mesmo número de triângulos semelhantemente dispostos.</u>

Os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$, são semelhantes, bem como a ACE e $A_1C_1E_1$ ADE e $A_1D_1E_1$ fig.19

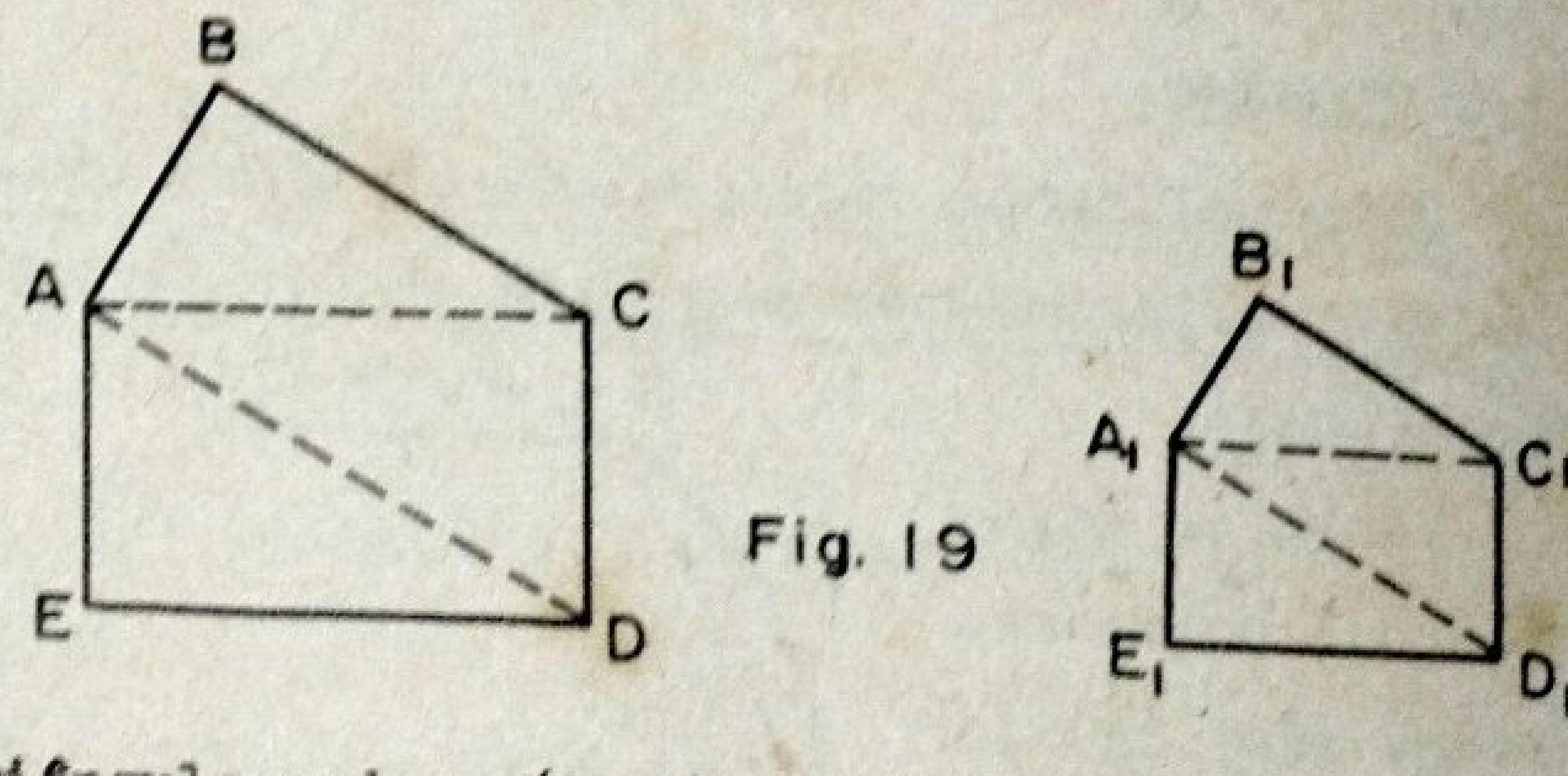


Fig. 19

APLICAÇÃO

Os três lados de um triângulo medem 6m, 8m e 10m e, em um triângulo semelhante, o lado homólogo ao de 6m mede 4m. Quais são os outros lados ?

Solução:

$$\frac{6m}{4m} = \frac{8m}{x} = \frac{10m}{y}$$

Resultado

$$x = \frac{8m \times 4m}{6m} = 5,3m$$

$$y = \frac{10m \times 4m}{6m} = 6,4m$$

PROBLEMAS

1) O perímetro de 1 triângulo é 18cm. Qual o perímetro de outro triângulo semelhante, se a razão de semelhança é $\frac{1}{3}$.

2) Os lados de um triângulo medem 3cm, 4cm, 5cm. Quais são os lados de outro triângulo semelhante a êste, sabendo que o lado homólogo ao de 4cm mede 12cm ?

3) Dois triângulos são semelhantes. Os lados do 1º medem 10cm, 12cm, 14cm. Quais os lados do segundo triângulo cujo perímetro tem 108cm ?

4) As bases de um trapézio medem 5cm e 8cm e a altura, 6cm. Qual a altura do triângulo formado pelos prolongamentos dos lados não paralelos e pela base menor ?

ESCALAS - DISTÂNCIAS GRÁFICAS, DISTÂNCIAS NATURAIS

Escala é a relação existente entre as dimensões de um desenho e as dimensões correspondentes do objeto desenhado. O objeto desenhado e o desenho formam duas figuras semelhantes. A escala é, portanto,a razão de semelhança. Esta razão é geralmente representada por uma fração ordinária na qual, para facilitar,se faz o numerador igual a 1 (um).

Assim a fração $\frac{1}{50}$ é uma <u>escala</u> ou <u>título</u>, que significa que cada unidade no desenho representa 50 unidades da figura a desenhar. Assim, nesta escala uma dimensão de 50m no objeto terá 1m no desenho. A distância no desenho, denomina-se distância gráfica, e a correspondente na figura denomina-se distância natural. No exemplo dado 1m é a distância gráfica e 50m a distância natural.

Representando uma escala por $\frac{1}{M}$, a distância gráfica por ℓ e a distância natural por L, podemos escrever:

$$\frac{\ell}{L} = \frac{1}{M} \quad \text{donde} \quad \ell = L \times \frac{1}{M} \qquad (1)$$

$$L = \ell \times m \qquad (2)$$

$$M = \frac{L}{\ell} \qquad (3)$$

A igualdade (1) indica que a distância gráfica é igual à distância natural multiplicada pela escala. A igualdade (2) indica que a distância natural é igual à distância gráfica multiplicada pelo denominador da escala. A igualdade (3) indica que o denominador da escala é igual ao cociente entre a distância natural e a gráfica. As escalas utilizadas são: escala ordinária ou simples, escala transversal, escala de redução e de ampliação.

1º Escala simples - (fig.20)

Seja $\frac{1}{50}$ a escala ou título dado.

1) Reduzindo $\frac{1}{50}$ a decimal teremos $\frac{1}{50} = 0{,}02\text{m}$ que é a divisão principal.

2) Traça-se uma reta indefinida marcando-se a partir de 1 ponto qualquer A, os comprimentos $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} \ldots = 0{,}02\text{m}$

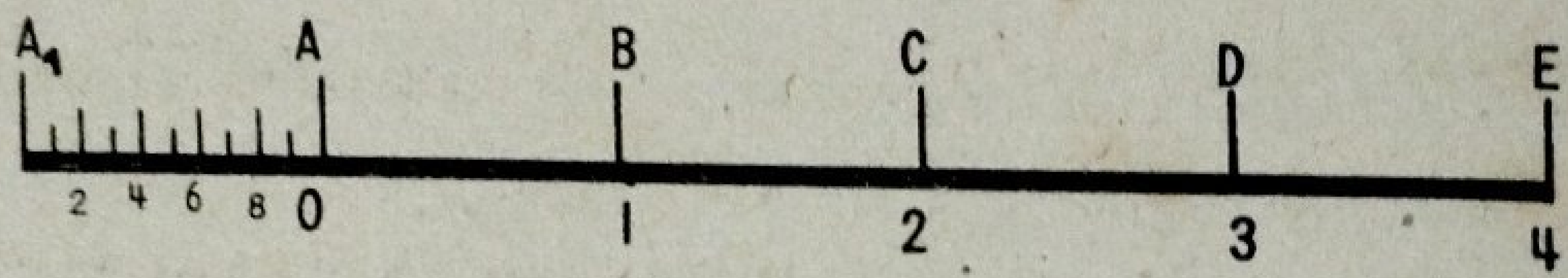


Fig. 20

3) A graduação da escala começa no ponto A no qual se coloca um zero: no ponto B, coloca-se a unidade, e assim por diante.

4) Divide-se o comprimento $A A_1$ em 10 partes iguais para se obterem as divisões decimais. Êsse comprimento é denominado <u>talão da escala</u>.

5) Os comprimentos 0 a 1, 1 a 2, 2 a 3, ... são os metros, e os comprimentos 0 a 1, 1 a 2, etc., no <u>talão</u>, são os decímetros.

6) Para obter os centímetros, divide-se uma das divisões do talão em 10 partes iguais, o que equivale a dividir o talão em 100 partes iguais.

2º Escala transversal - (fig.21)

Seja $\frac{1}{2500}$ a escala dada, ou título

1) A divisão principal de $\frac{1}{2500} = 0{,}0004\text{m}$, que por dar cociente muito pequeno se multiplica por 100, obtendo-se 0,04m, que representarão 100 metros.

2) Sôbre uma reta $\overline{AE}$, toma-se $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 0{,}05m$, dividindo-se $\overline{AB}$ em 10 partes iguais. Cada uma destas divisões representa 10m.

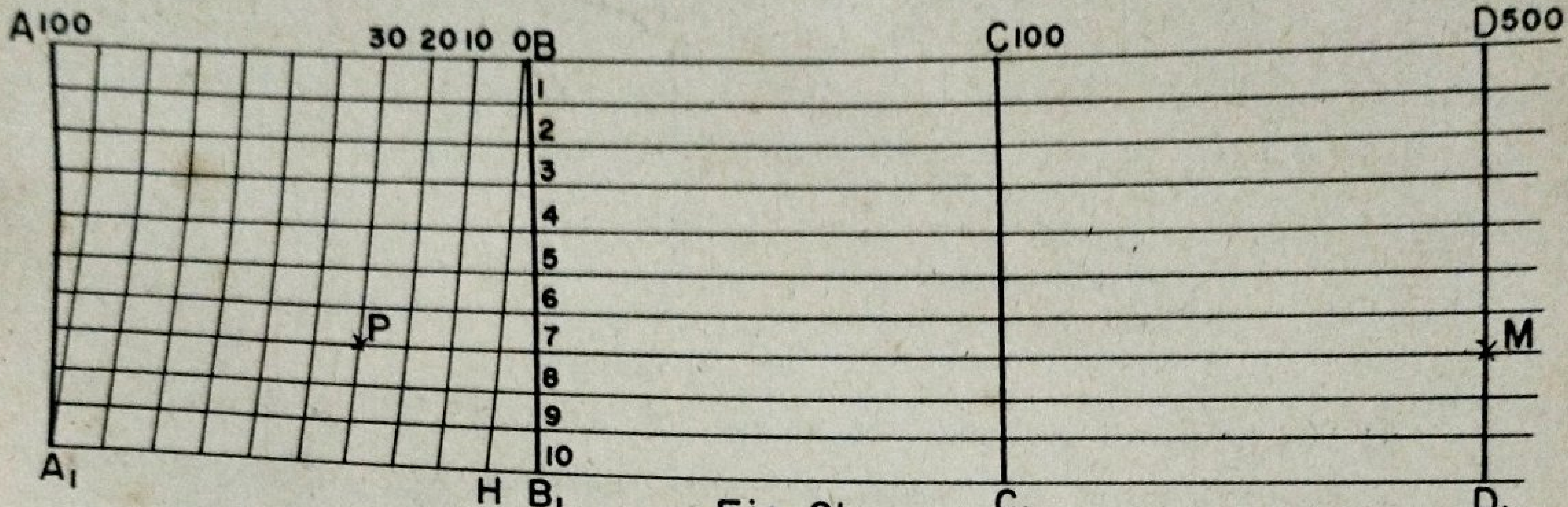


Fig. 21

3) Numeram-se as divisões de 100 em 100, a partir de B, que corresponde a zero.

4) Traçam-se AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, perpendiculares a AD, nos pontos A,B,C,D, respectivamente.

5) Sôbre BB_1, marcam-se 10 divisões iguais e por estas se tiram paralelas a $\overline{AD}$.

6) Sôbre a última paralela B_1 B_1 toma-se B_1 H igual à décima parte de AB, ligando H a B: pelos outros pontos de divisão de AB tiram-se paralelas de B_1 H, formando o retângulo ABB_1 A_1, que é o talão da escala.

7) As centenas de metros são representadas pelas divisões de BD as dezenas de metros pelas divisões de AB e os metros pelas partes das paralelas a AD compreendidas no triângulo B_1 BH. Assim 7P representa 37 metros. Assim PM representa 237 metros.

3º Redução e ampliação - (fig.22)

1) Sôbre uma reta Ax, marca-se um segmento AB igual a m divisões iguais.

2) Tira-se BB_1 perpendicular a AB, marcando-se BC com n divisões iguais às anteriores, sendo $n = m$.

3) Traça-se $\overline{AC}$, formando o triângulo ABC.

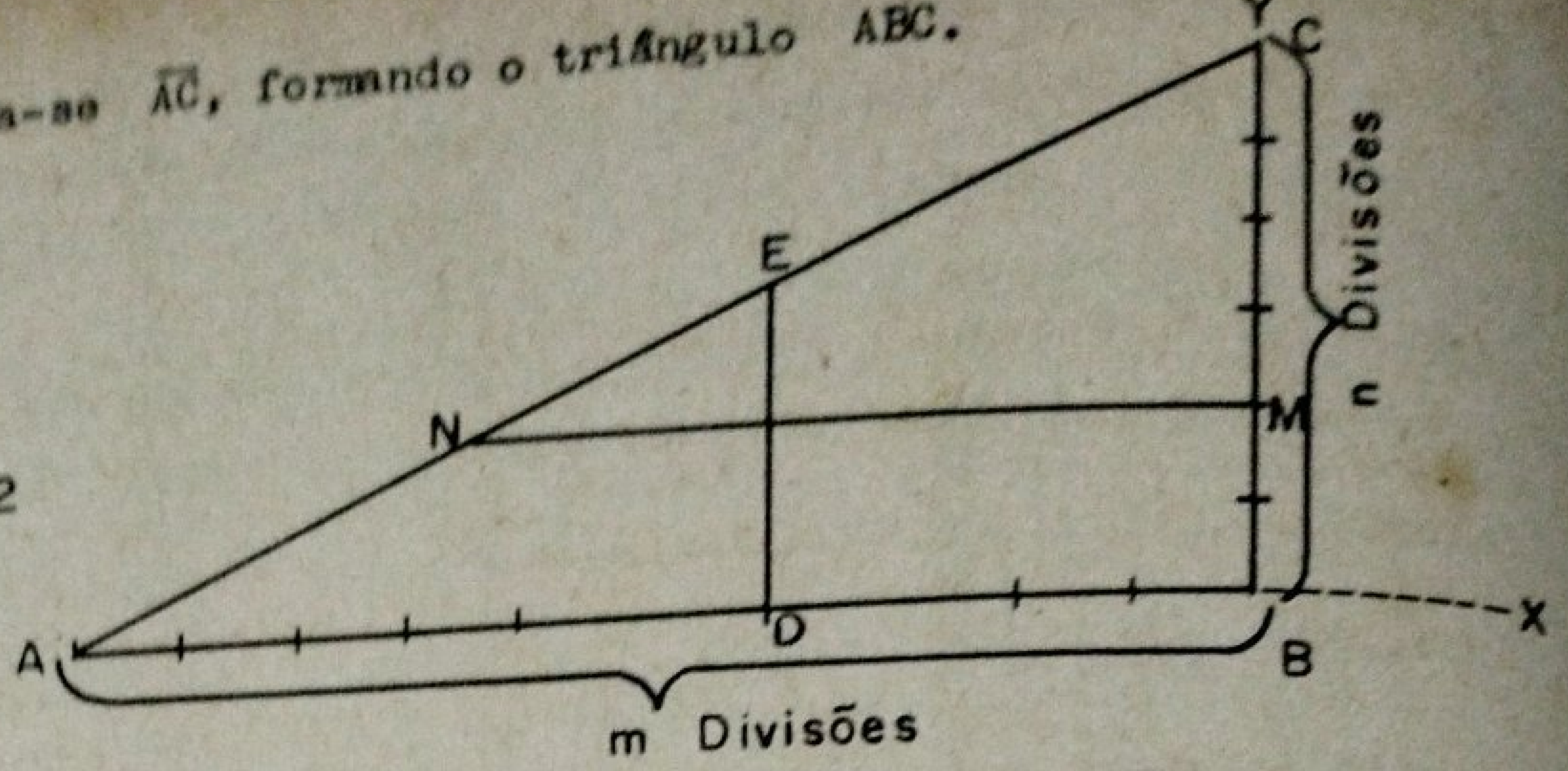


Fig. 22

4) Por um ponto qualquer D, sôbre $\overline{AB}$, tira-se $\overline{DE}$ paralela a $\overline{BC}$. Os triângulos ABC e ADE são semelhantes a $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{m}{n}$ donde $\overline{DE} = \overline{AD} \times \frac{n}{m}$ (redução de $\frac{n}{m}$)

5) Por um ponto M qualquer de BC, tira-se MN paralela a AB.

6) Os dois triângulos CMN e CBA são semelhantes e dão:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{MN}} = \frac{n}{m}, \text{ donde } \overline{MN} = \overline{CM} \times \frac{m}{n}$$

(ampliação de $\frac{m}{n}$).

4º Redução e ampliação (2a. contrução) - fig.23

1) Sôbre uma reta AX, toma-se AB contendo M divisões iguais.
2) Com centro em B, descreve-se um arco C de raio igual a n divisões das anteriores.
3) De A como centro e raio igual a AB determina-se a interseção C.

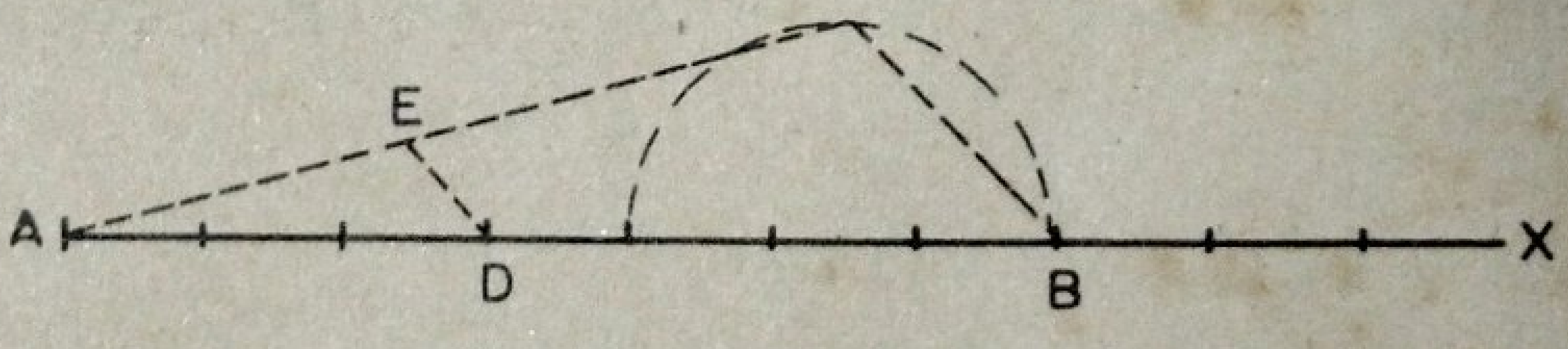


Fig. 23

4) Traça-se o triângulo isósceles BAC.
5) Tomando-se um ponto qualquer D, sôbre AB, a corda DE paralela a BC dá redução $\frac{n}{m}$ para AD.

6) Para se obter a ampliação, basta tomar AB com <u>n</u> divisões e BC com <u>m</u> divisões.

APLICAÇÕES

1) Numa planta desenhada na escala $\frac{1}{50}$, a quantos metros equivale um comprimento de 8cm no terreno ?

Solução: 8cm x 50 = 400cm = 4m

Resultado: 4m

2) Qual o comprimento gráfico equivalente a 20m numa escala de $\frac{1}{100}$?

Solução: $20m \times \frac{1}{100} = 0,20m$

Resultado: 0,20m

REGRA:

1) Para se obter a distância natural multiplica-se a distância gráfica pelo denominador da escala;
2) Para se obter a distância gráfica divide-se a distância natural pelo denominador da escala.

PROBLEMAS

1) Um prédio está desenhado na escala $\frac{1}{50}$. Qual o comprimento de um quarto que em planta mede 8cm ?

2) Uma planta está desenhada na escala $\frac{1}{2000}$. Qual o comprimento no desenho que representa 20m de terreno ?

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

$14^{\underline{o}}$ TEOREMA - No triângulo retângulo

1) Qualquer cateto é a média proporcional entre a hipotenusa inteira e sua projeção sôbre ela.
2) A altura é média proporcional entre os dois segmentos que ela determina sôbre a hipotenusa.

$1^{\underline{o}}$) Seja o triângulo retângulo ABC, no qual $\overline{AD}$ é a altura. fig.24
Os triângulos CAB e CDA são semelhantes porque têm os 3 ângulos iguais e dão $\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$, portanto $b^2 = a \times m$ (1).

Os triângulos CAB e ADB são semelhantes pelo mesmo motivo e dão:

$\frac{a}{c} = \frac{c}{n}$, portanto

$c^2 = a \times n$ (2)

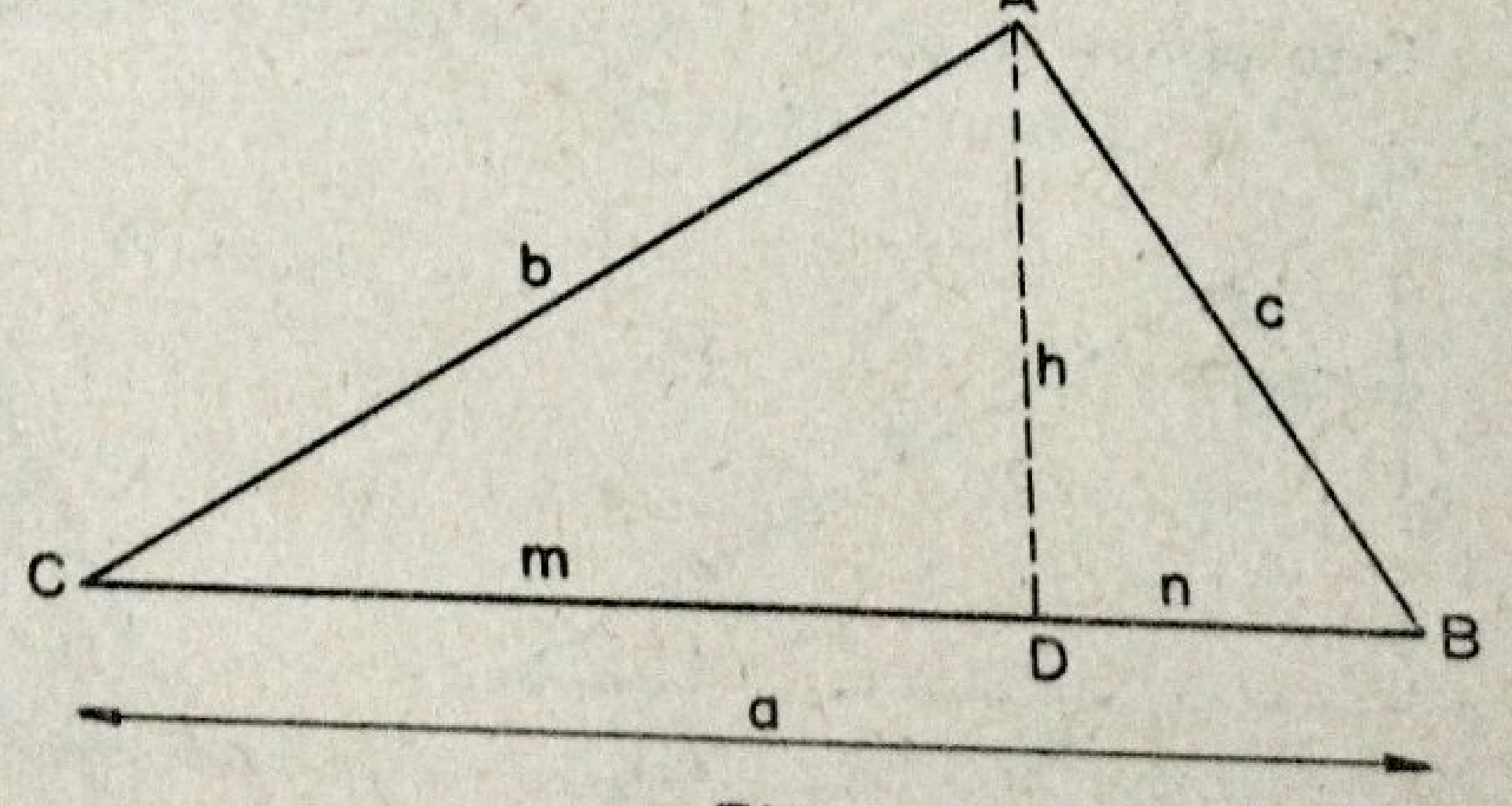


Fig. 24

$2^{\underline{o}}$) Os triângulos CDA a ADB são semelhantes pelo mesmo motivo dando:

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \text{ , portanto } h^2 = m \times n \quad (3).$$

As igualdades (1), (2) e (3) demonstram as duas proposições acima enunciadas.

a) Somando as igualdades (1) e (2), vem

$$\begin{array}{l} b^2 = a \times m \\ \underline{c^2 = a \times n} \\ b^2 + c^2 = am + an = a\,(m+n) = a \times a = a^2 \end{array}$$

A igualdade $a^2 = b^2 + c^2$ (4) traduz a relação de Pitágoras.
"Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos".

b) Dividindo membro a membro as igualdades (1) e (2), vem:

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{am}{an} = \frac{m}{n}$$

, isto é os quadrados nos catetos estão entre sí, como as suas projeções sôbre a hipotenusa.

c) Dividindo o quadrado da hipotenusa pelo quadrado de um cateto, virá:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a \times a}{a \times m} = \frac{a}{m}$$

, isto é, o quadrado da hipotenusa está para o quadrado de um cateto, como a hipotenusa está para a projeção dêsse lado.

d) Nos triângulos retângulos cujos ângulos agudos medem 60° e 30° existem as relações $b = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ e $c = \frac{a}{2}$, isto é o cateto maior é igual à metade da hipotenusa multiplicada pela $\sqrt{3}$ e o cateto menor é igual à metade da hipotenusa.(fig.25)

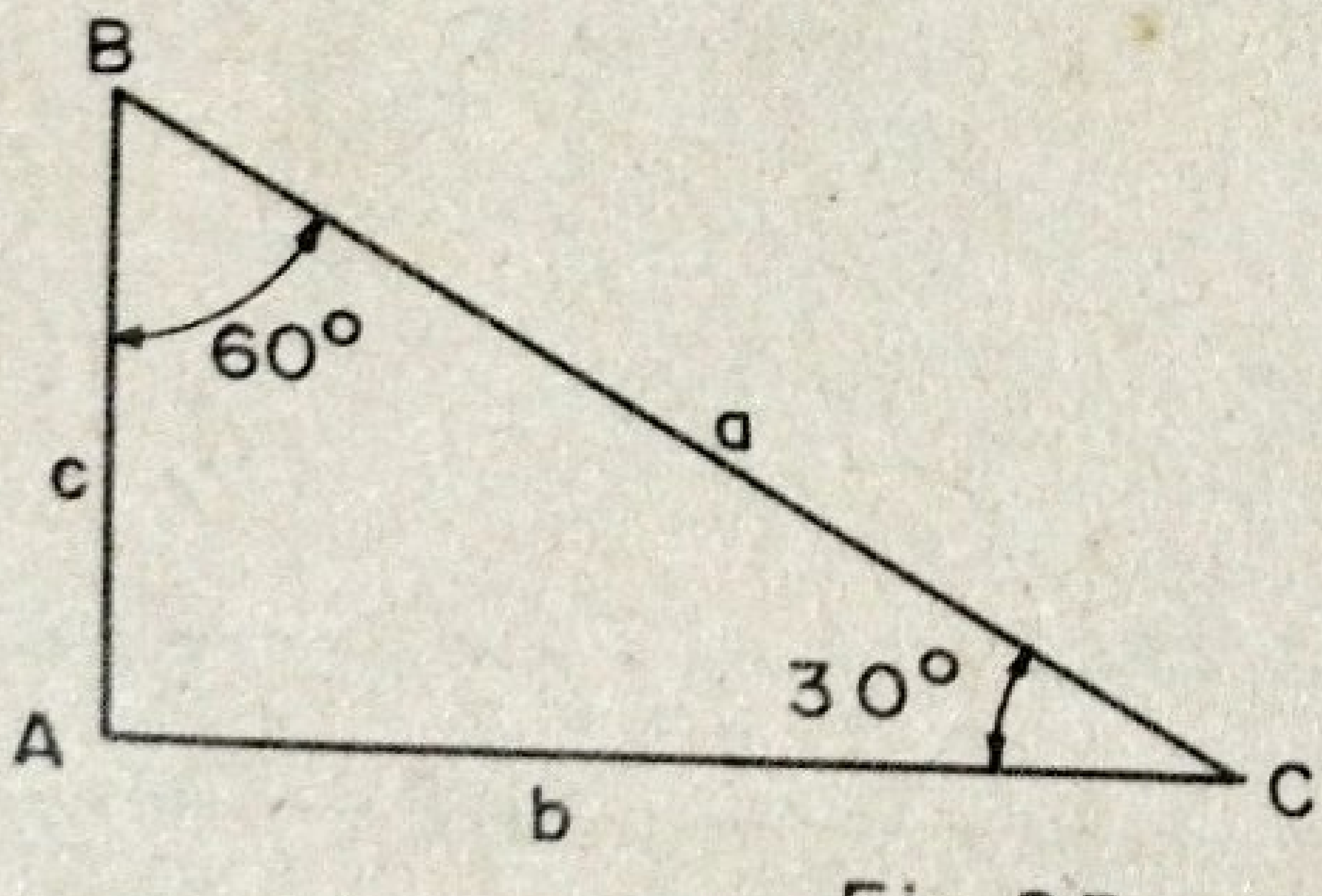


Fig. 25

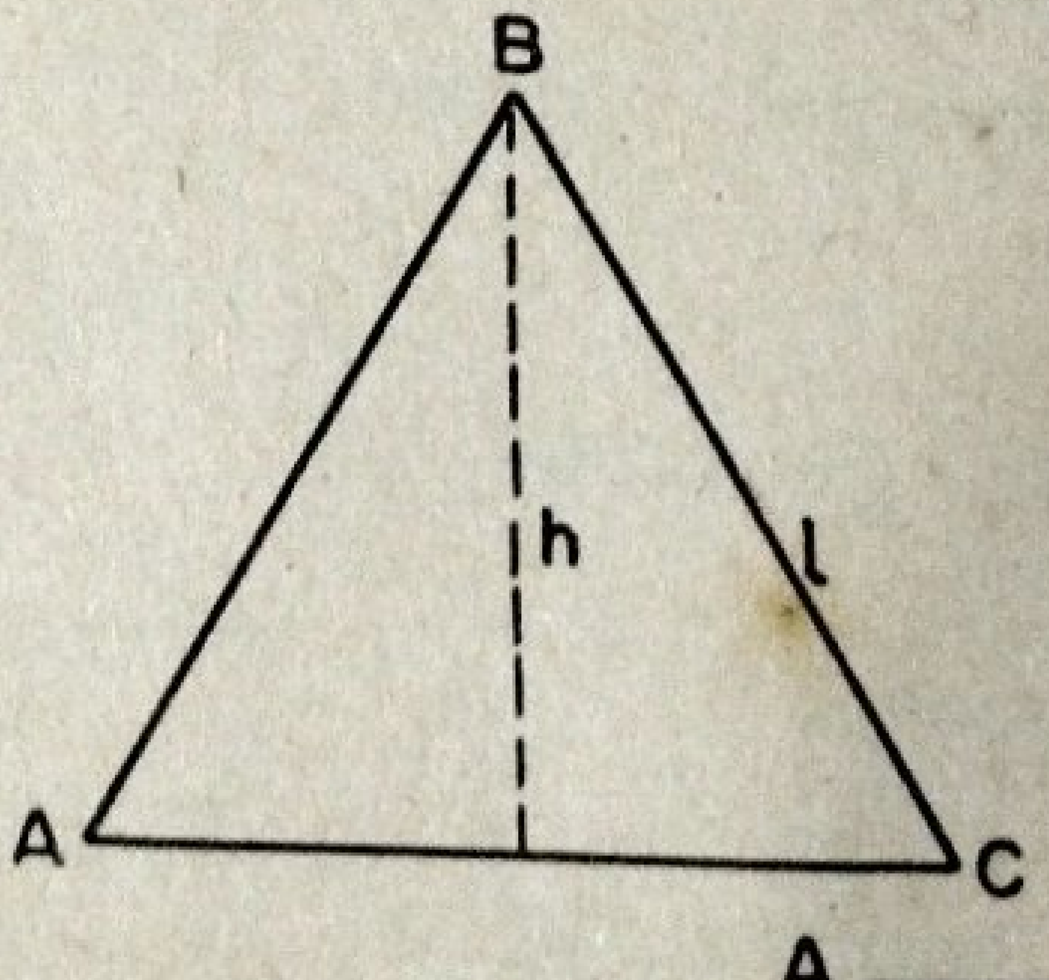


Fig. 26

e) A altura h de um triângulo equilátero de lado ℓ é $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ (fig.26)

f) A diagonal de um quadrado de lado ℓ será: $d = \ell\sqrt{2}$ (fig.27)

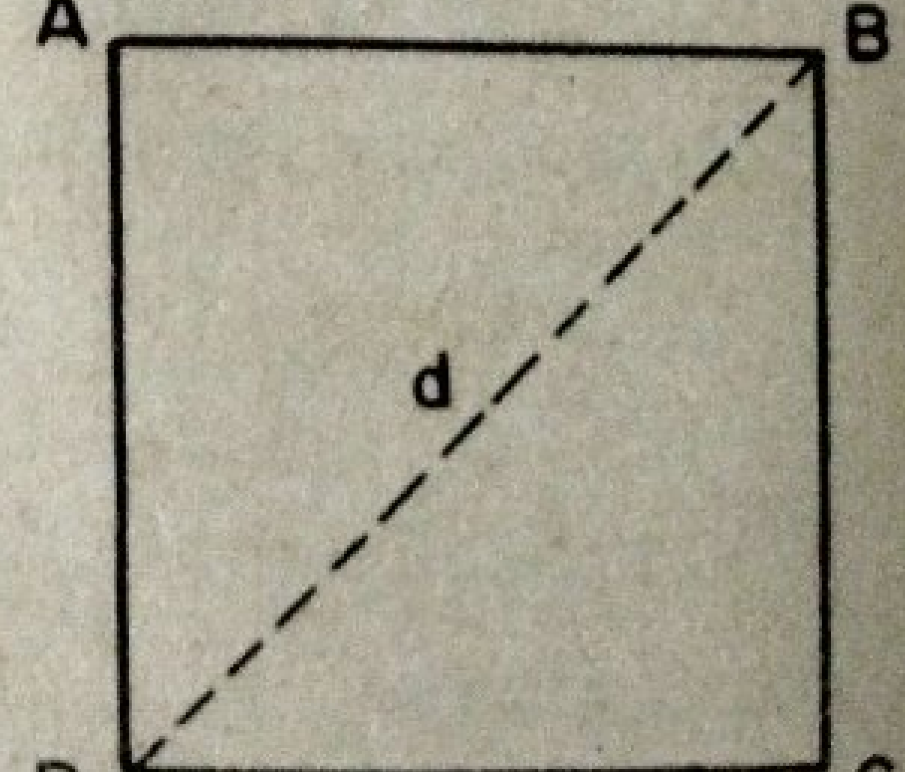


Fig. 27

OBSERVAÇÃO -

Os teoremas sôbre relações métricas em triângulos quaisquer, necessários à demonstração dos teoremas 15º e 16º, foram omitidos por não constarem do programa. Pela necessidade do cálculo da mediana em função dos lados, foram incluidos os teoremas, 15 e 16 que se seguem.

15º TEOREMA

A soma dos quadrados de dois lados de um triângulo é igual a duas vêzes o quadrado da mediana do 3º lado mais duas vêzes o quadrado da metade dêste lado.

Sejam o triângulo ABC, a mediana $\overline{BD} = m_b$ e a altura $\overline{BH}$. fig.28

Os triângulos BDC e ABD dão respectivamente:

$$a^2 = m_b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\,\frac{b}{2}\,n \quad (1)$$

$$c^2 = m_b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2\,\frac{b}{2}\,n \quad (2)$$

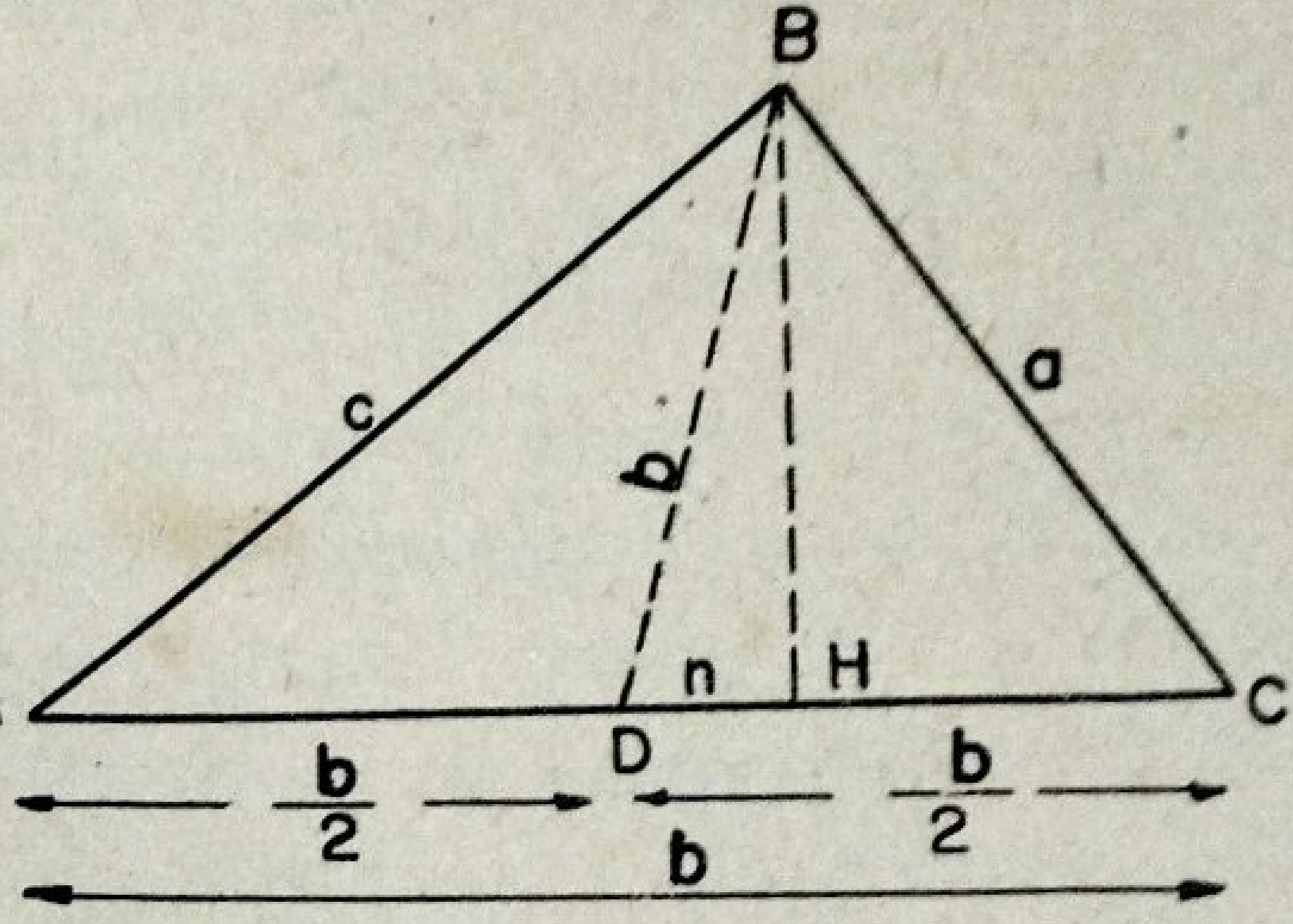


Fig. 28

Somando (1) e (2), vem

$$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 2\left(m_b^2 + \frac{b^2}{4}\right) \quad (3)$$

A relação (3) permite calcular a mediana em função dos lados. Vem então $m_b^2 = \dfrac{a^2 + c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4}$

As outras duas medianas serão calculadas pelas expressões:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

16º TEOREMA

A diferença dos quadrados de dois lados de um triângulo é igual ao duplo produto do terceiro lado pela projeção da mediana a êle correspondente sôbre êste lado.

Da relação (2) subtraindo a relação (1) vem

$$c^2 - a^2 = 4\,\frac{b}{2}\,n$$

$$c^2 - a^2 = 2\,b\,n$$

APLICAÇÕES

1º) Os catetos de um triângulo retângulo medem 6m e 8m.

$$\text{Calcular: } \begin{cases} \text{a) a hipotenusa} \\ \text{b) as projeções dos catetos sôbre a hipotenusa} \\ \text{c) a altura} \end{cases}$$

a) O teorema de Pitágoras dá:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 8^2 + 6^2 = 100\ m^2$$

$$a = \sqrt{100m^2} = 10m$$

b) As relações

$$\left.\begin{matrix} b^2 = an \\ \\ c^2 = am \end{matrix}\right\} \text{dão respectivamente,} \quad \begin{matrix} n = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{36m}{10} = 3{,}6m \\ \\ m = \dfrac{c^2}{a} = \dfrac{64m}{10} = 6{,}4 \end{matrix}$$

c) A altura é

$$h^2 = mn, \text{ logo } h = \sqrt{mn} = \sqrt{6{,}4 \times 3{,}8} = 4{,}8m$$

2º) Calcular a mediada relativa ao lado $\underline{n}$ em um triângulo cujos lados medem $a = 10m$: $b = 7m$: $c = 5m$.

$$m_a^{\ 2} = \frac{(7^2 + 5^2)\ m^2}{2} - \frac{(10\ m)^2}{4} = 37m^2 - 25m^2 = 12m^2$$

$$m_a = \sqrt{12m^2} = 3{,}4m$$

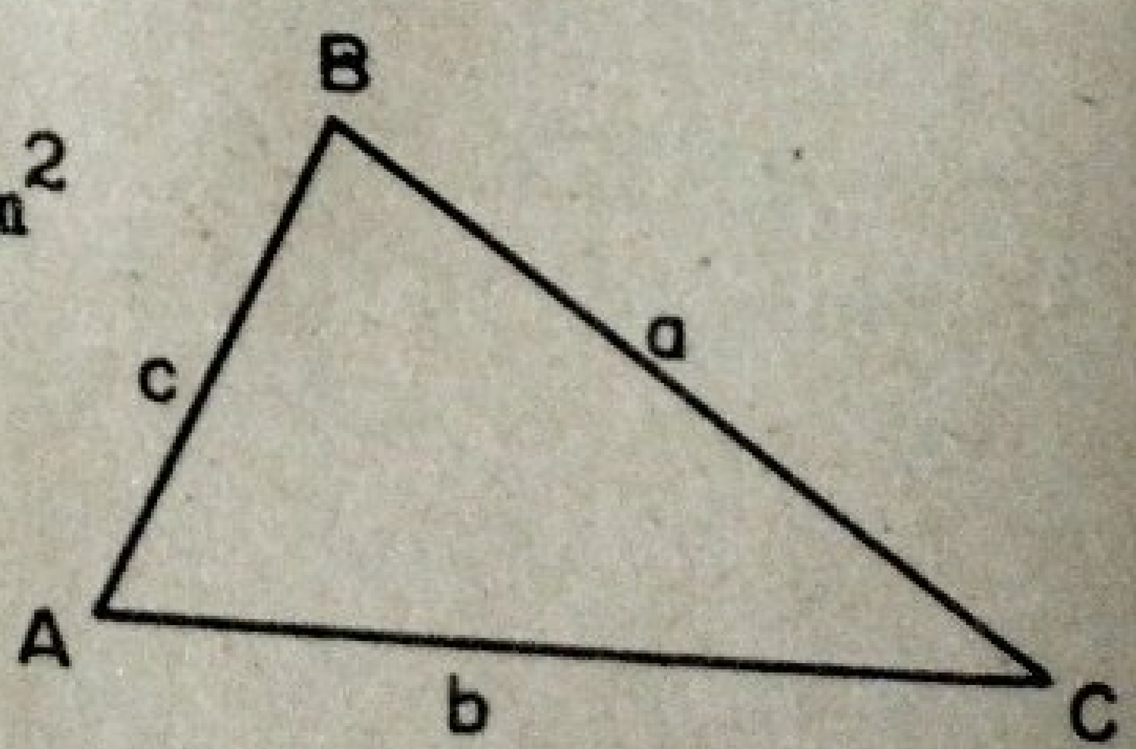
3º) Calcular a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$ em um triângulo cujos lados medem $\overline{AB} = 3cm$: $\overline{AC} = 7cm$: $\overline{BC} = 6cm$.

Solução:

$$m_c^{\ 2} = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \qquad \text{ou}$$

$$m_c^{\ 2} = \frac{(6cm)^2 + (7cm)^2}{2} - \frac{(3cm)^2}{4} = 40{,}3cm^2$$

$$m_c = 6{,}3cm$$



PROBLEMAS

1) Os catetos de um triângulo retângulo medem 12cm e 16cm. Calcular a hipotenusa, as projeções dos catetos sôbre a hipotenusa e a altura.

2) A hipotenusa de um triângulo mede 25dm. Calcular as projeções dos catetos sôbre a hipotenusa, sabendo que os catetos são proporcionais a 3 e 4 e sua soma é 35dm.

3) As projeções dos catetos sôbre a hipotenusa de um triângulo retângulo medem 2,88cm e 5,12cm. Calcular os catetos.

4) Calcular o lado de um losando cujas diagonais medem 24dm e 86dm.

5) Calcular a diagonal de um quadrado de 3m de lado.

6) Calcular a altura de um triângulo equilátero de 6m de lado.

7) Em triângulo retângulo cujos ângulos agudos medem 60° e 30°, a hipotenusa mede 8cm. Calcular os catetos.

8) Em um triângulo retângulo cujos ângulos agudos medem 60° e 30°, o menor cateto mede 2dm. Calcular a hipotenusa, o outro cateto e a altura.

9) O perímetro de um triângulo equilátero é 45dm. Calcular a altura.

10) Os lados de um triângulo medem 5m, 6m, 7m. Calcular as três medianas.

RELAÇÕES MÉTRICAS NO CÍRCULO

LINHAS PROPORCIONAIS NO CÍRCULO

TEOREMA

Tôda perpendicular baixada dum ponto da circunferência sôbre um diâmetro é a média proporcional entre os dois segmentos que ela determina sôbre êste diâmetro.

Seja $\overline{AD}$ a perpendicular ao diâmetro $\overline{CB}$, o triângulo CAB é retângulo e, portanto, dá $\overline{AB}^2 = \overline{CD} \times \overline{DB}$ ou $\overline{AB}^2 = \overline{CD} \times \overline{DB}$ ou $d^2 = m \times n$. (Fig.29)

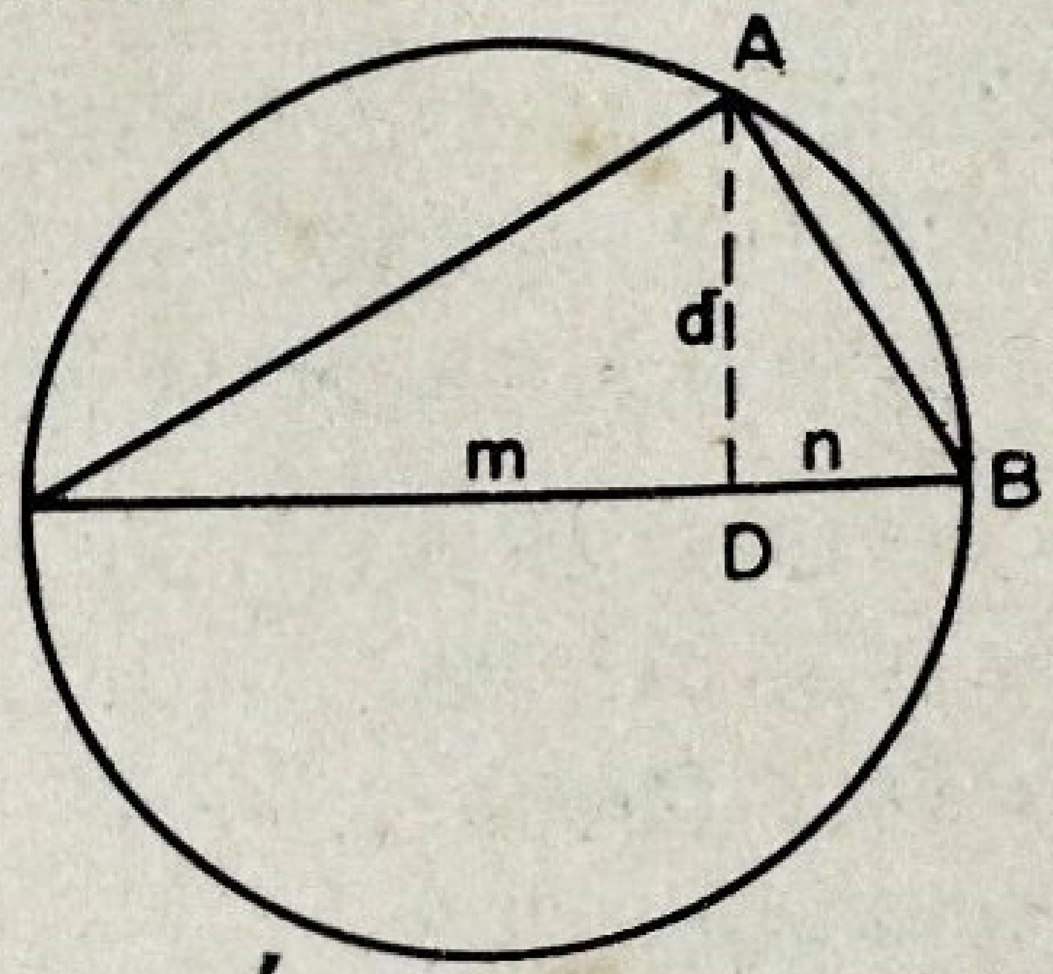


Fig.29

CORDAS QUE SE CORTAM NO INTERIOR DE UM CÍRCULO

TEOREMA

Quando duas cordas se cortam, o produto dos dois segmentos de uma é igual ao produto dos dois segmentos da outra.

Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ duas cordas de uma circunferência que se cortam no ponto O. (Fig.30) Os triângulos ODB e OAC são semelhantes e dão: $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OD}} = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OB}}$ ou

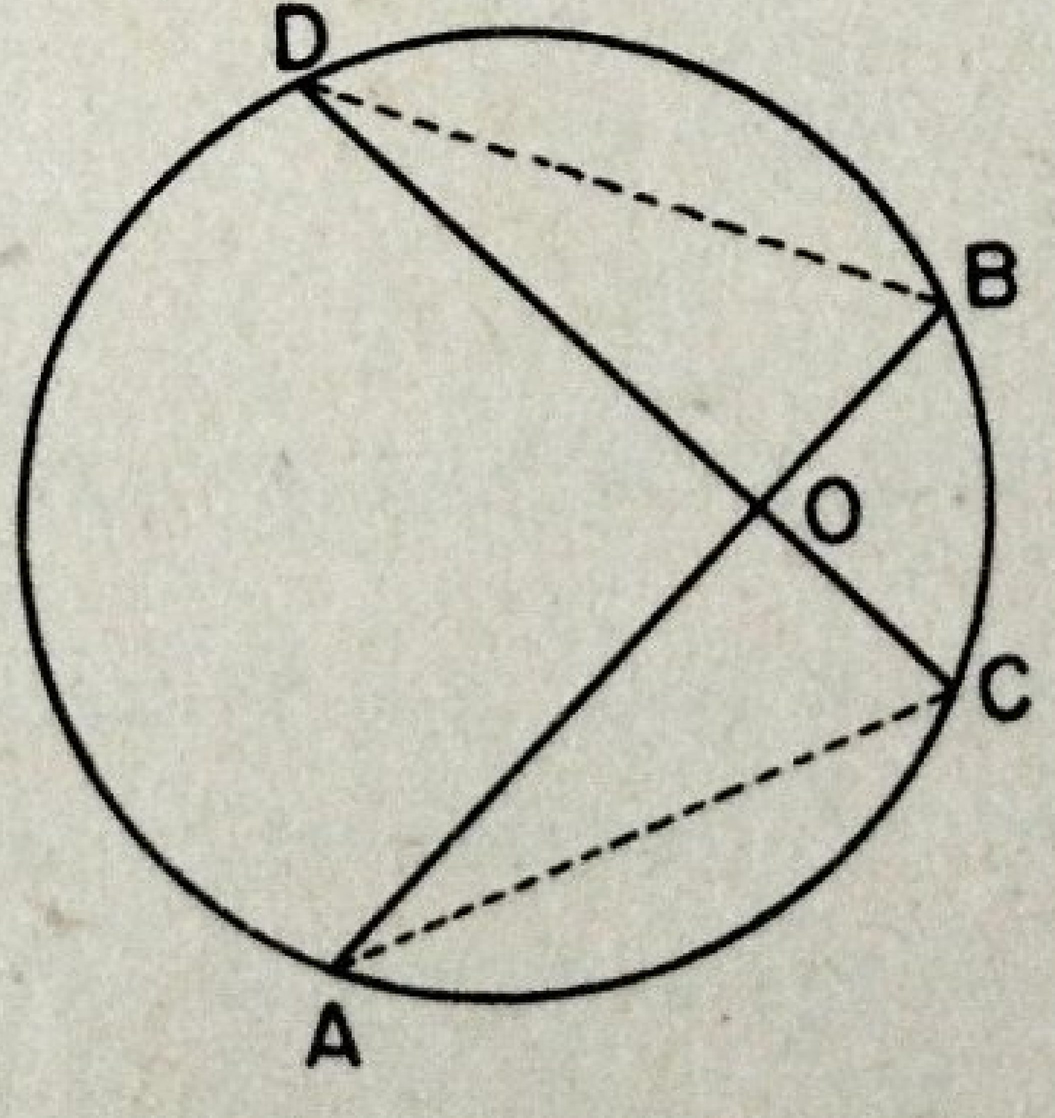


Fig. 30

$\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OD} \times \overline{OC}$

TEOREMA

Se duas secantes partem do mesmo ponto fora de um círculo, o produto da primeira secante por sua parte externa é igual ao produto da segunda pela sua parte externa.

Sejam as secantes $\overline{OA}$ e $\overline{OD}$ de uma circunferência.(fig.31) Tracem-se as cordas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, formando os triângulos OAC e OBD, que são semelhantes,

logo $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OD}} = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OB}}$ donde

$\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OC} \times \overline{OD}$

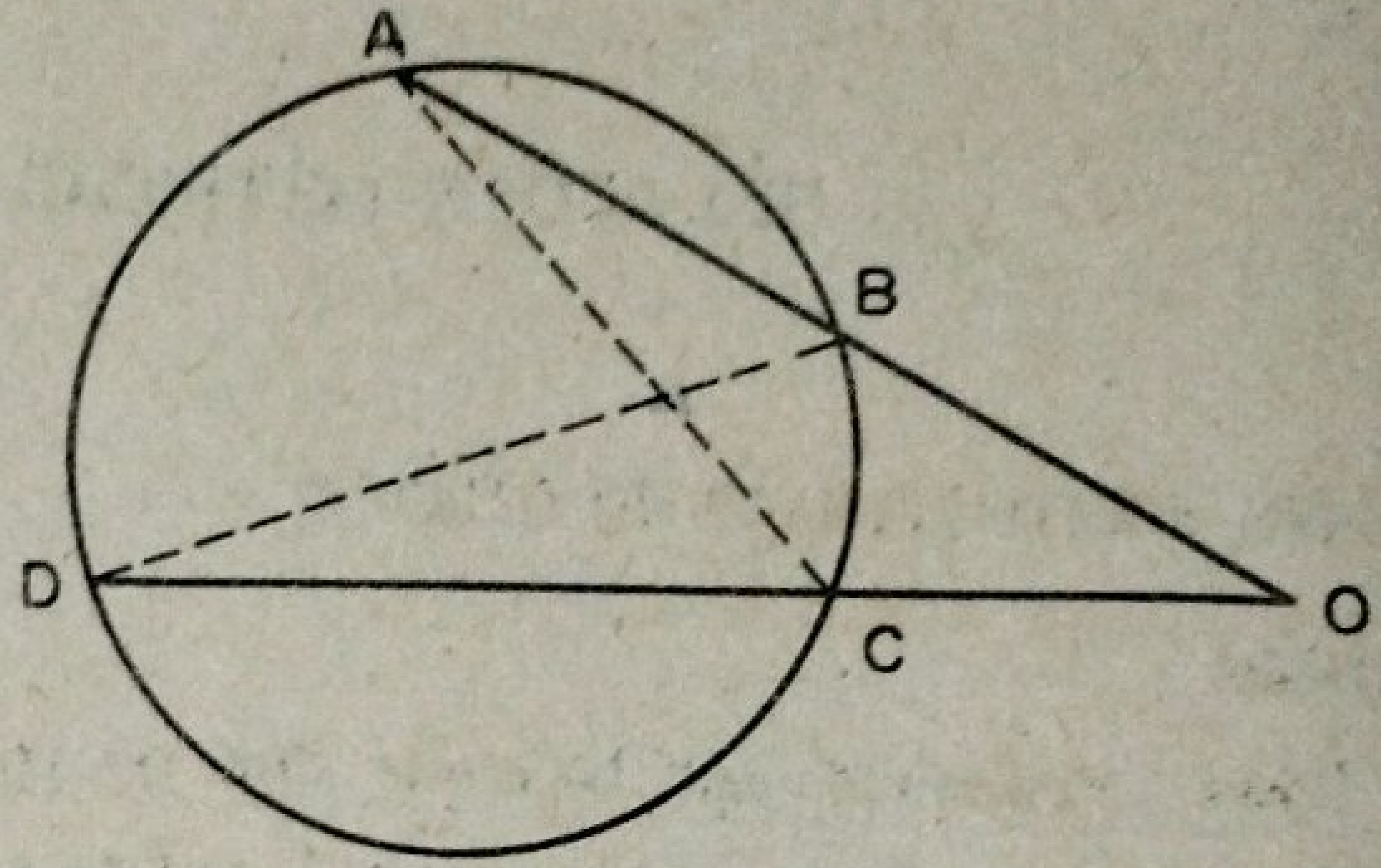


Fig. 31

TEOREMA

Se de um ponto fora de uma circunferência partem uma secante e uma tangente a esta circunferência, a tangente é média proporcional entre a secante inteira e a sua parte externa.

Seja uma tangente $\overline{OB}$ e a secante $\overline{OA}$.(fig.32) Tracem-se $\overline{BA}$ e $\overline{DB}$, formando-se dois triângulos OAB e OBD, que são semelhantes, dando portanto:

$\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$ ou

$\overline{OB}^2 = \overline{OA} \times \overline{OD}$.

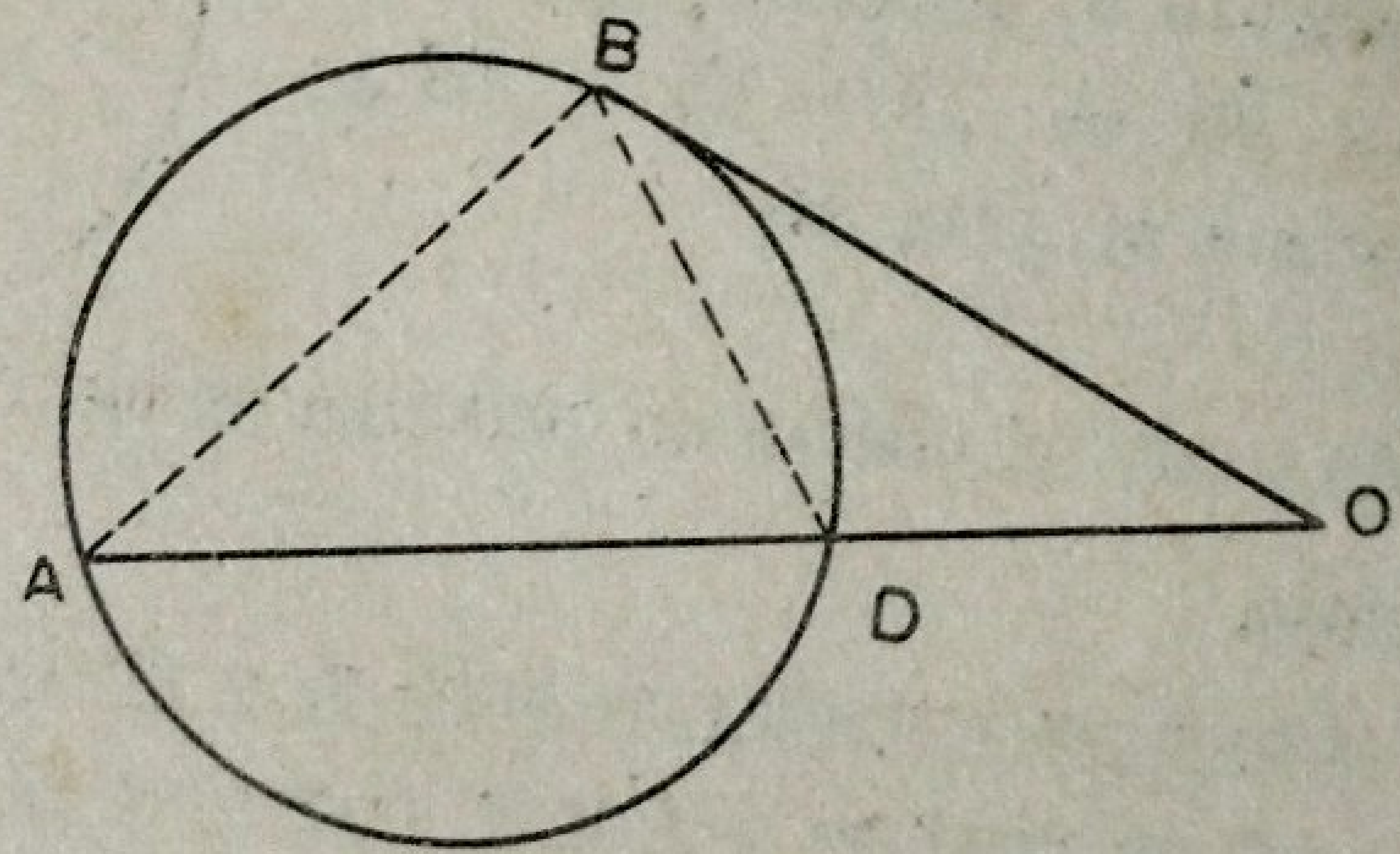


Fig.32

DIVIDIR UMA RETA EM MEIA E EXTREMA RAZÃO:

Diz-se que uma reta está dividida em meia e extrema razão, quando o maior segmento é a média proporcional entre o menor segmento e tôda reta.

Seja o triângulo retângulo ABC, em que o cateto BC é a metade de AC.(fig.33) Construa-se a semi-circunferência GCE, de centro em B e tangente à AC no ponto C e trace-se $\overline{AD} = \overline{AG}$. O ponto D divide AC em meia e extrema razão de sorte que virá:

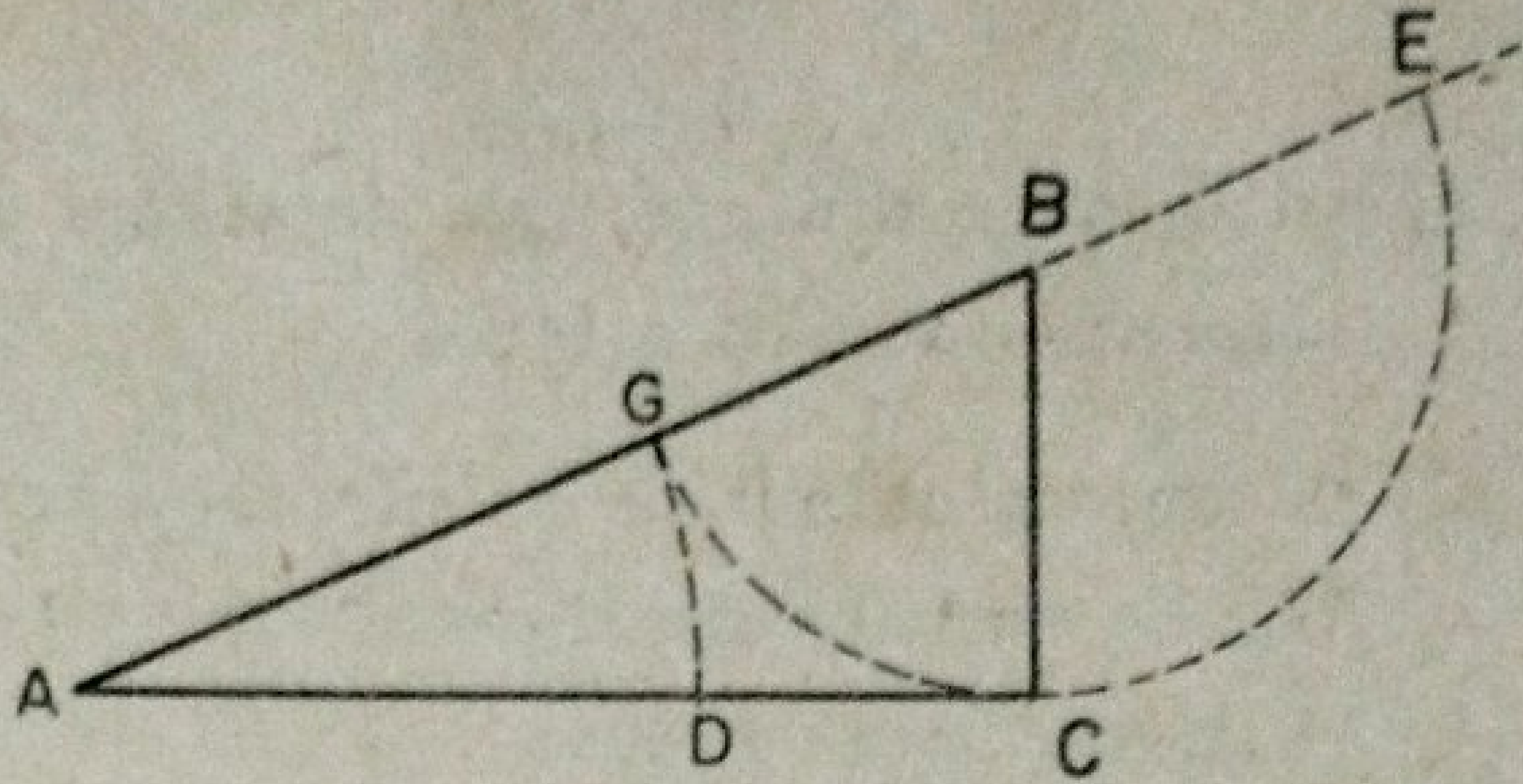


Fig.33

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$$

De fato, a tangente $\overline{AC}$ e secante $\overline{AE}$ dão $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AG}}$ que por uma propriedade das proporções dá:

$$\frac{\overline{AE} - \overline{AC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC} - \overline{AG}}{\overline{AG}} \qquad (1)$$

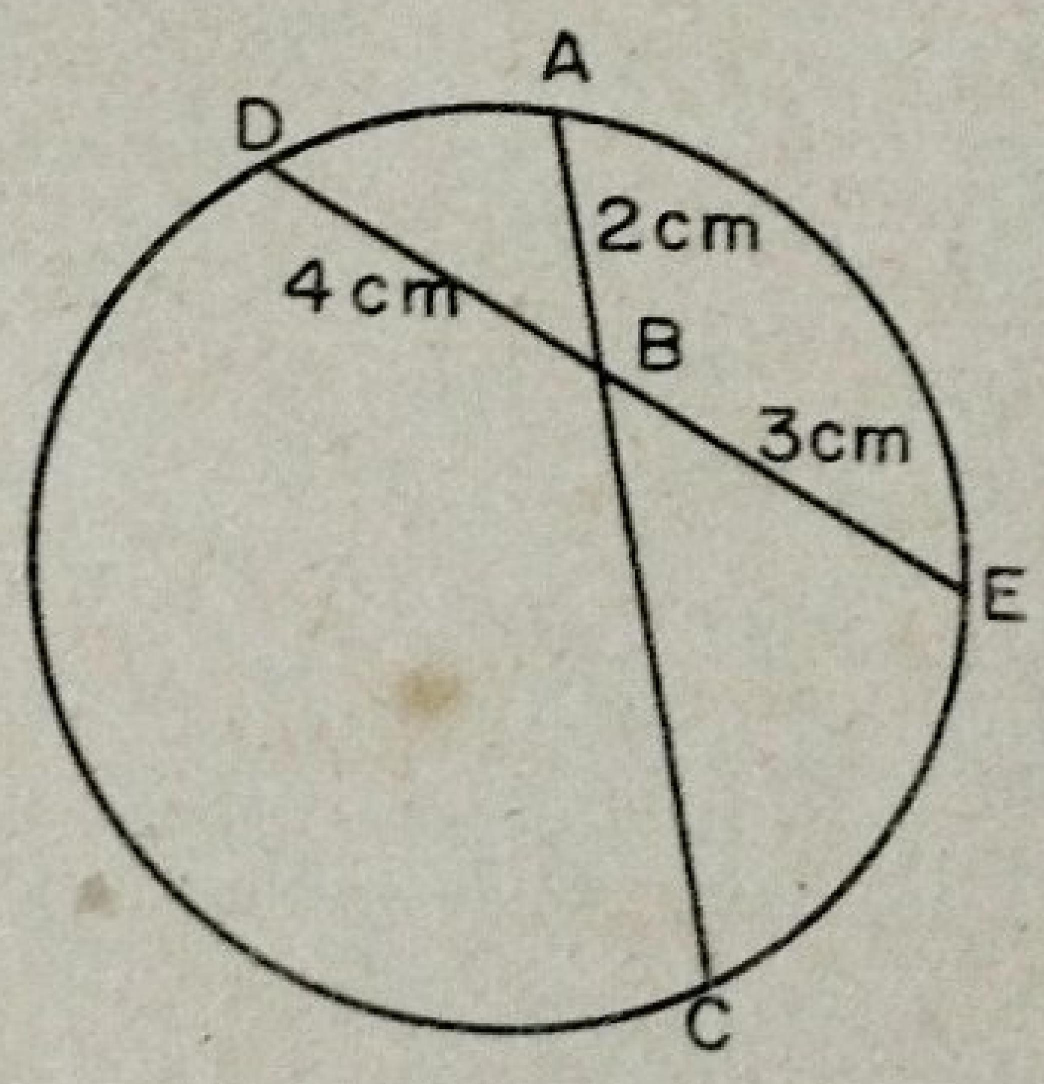
Mas $\overline{AC} = \overline{GE}$ e assim $\overline{AE} - \overline{AC} = \overline{AG} = \overline{AD}$ e $\overline{AC} - \overline{AG} = \overline{AC} - \overline{AD} = \overline{DC}$

Com essas igualdades (1) pode ser escrito:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$$

APLICAÇÕES

1) Calcular o segmento $\overline{BC}$ da figura ao lado.

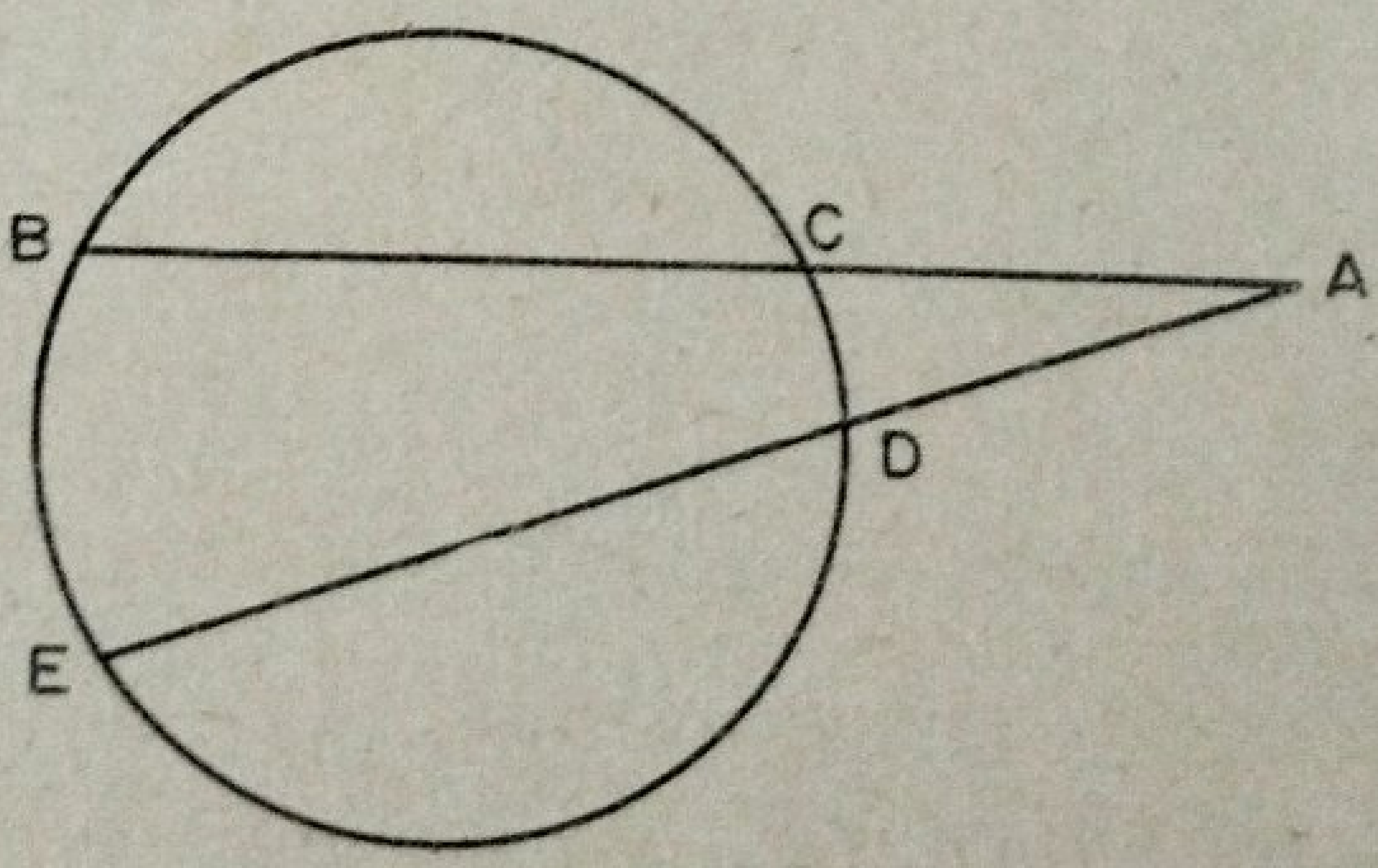


$2cm \times \overline{BC} = 3cm \times 4cm$ ∴

∴ $\overline{BC} = \frac{3cm \times 4cm}{2cm} = 6cm$

Resultado: 6cm

2) De um ponto fora de um círculo, traçam-se as secantes $\overline{AB}$ = 8cm e $\overline{AE}$ = 5cm. Sabendo-se que $\overline{AC}$ = 2cm, calcular $\overline{AD}$.



$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AE} \times \overline{AD}$

$8cm \times 2cm = 5cm \times \overline{AD}$ ∴ $\overline{AD} = 8cm \times 2cm = \frac{16}{5} = 3,2cm$

1) Calcular a ordenada que determina sôbre o diâmetro de um círculo segmentos de 4cm e 16cm.

2) De um ponto fora de um círculo, traça-se uma secante e uma tangente. A secante mede 9cm e sua parte externa 4cm. Calcular o comprimento da tangente.

3) O raio de um círculo mede 4m. Prolonga-se o diâmetro de 1m e do ponto obtido traça-se uma tangente. Calcular o comprimento da tangente dêste ponto ao ponto de contato.

4) Num círculo de $r = 7{,}5cm$ cortam-se perpendicularmente um diâmetro e uma corda. Calcular esta corda, sabendo-se que a flecha correspondente mede 3m.

5) De um ponto situado a 6cm do centro de um círculo de $r = 3cm$, traça-se uma tangente. Calcular seu comprimento.

POLÍGONOS REGULARES

POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS E CIRCUNSCRITOS

Um polígono é <u>regular</u> quando tem os lados e os ângulos iguais.

Um polígono está <u>inscrito</u> numa circunferência, quando seus vértices estão sôbre a circunferência. Os lados são cordas desta circunferência.

Um polígono está <u>circunscrito</u> a uma circunferência, quando seus lados são tangentes à circunferência.

Dividindo-se uma circunferência em partes iguais e unindo-se os pontos de divisão, obtém-se um polígono regular inscrito nesta circunferência. Se, forem traçadas tangentes pelos pontos de divisão, o polígono regular que se obtém fica circunscrito à circunferência.

<u>CENTRO</u> de um polígono regular é o centro dos círculos inscrito e circunscrito no polígono.

<u>RAIO</u> de um polígono regular é o raio do círculo circunscrito a êste polígono.

<u>APÓTEMA</u> de um polígono regular é a distância do centro do polígono a qualquer dos lados. É pois o segmento de perpendicular traçado do centro do polígono sôbre o lado. É o raio do círculo inscrito no polígono.

<u>ÂNGULO CENTRAL E INTERNO</u>

Ângulo central de um polígono regular é o ângulo $\hat{O}$ formado por dois raios que unem o centro do polígono às extremidades de um lado qualquer.(fig.34) Sua expressão é $A_c = \frac{360^\circ}{n}$ sendo n o número de lados do polígono. O ângulo central é igual ao ângulo externo. <u>Ângulo interno</u> de um polígono regular é o ângulo formado por dois lados consecutivos. Como a soma dos ângulos internos é $S = 180^\circ\ (n-2)$, a expressão do ângulo interno é

$A_i = \frac{180^\circ\ (n-2)}{n}$ sendo n o número de lados.

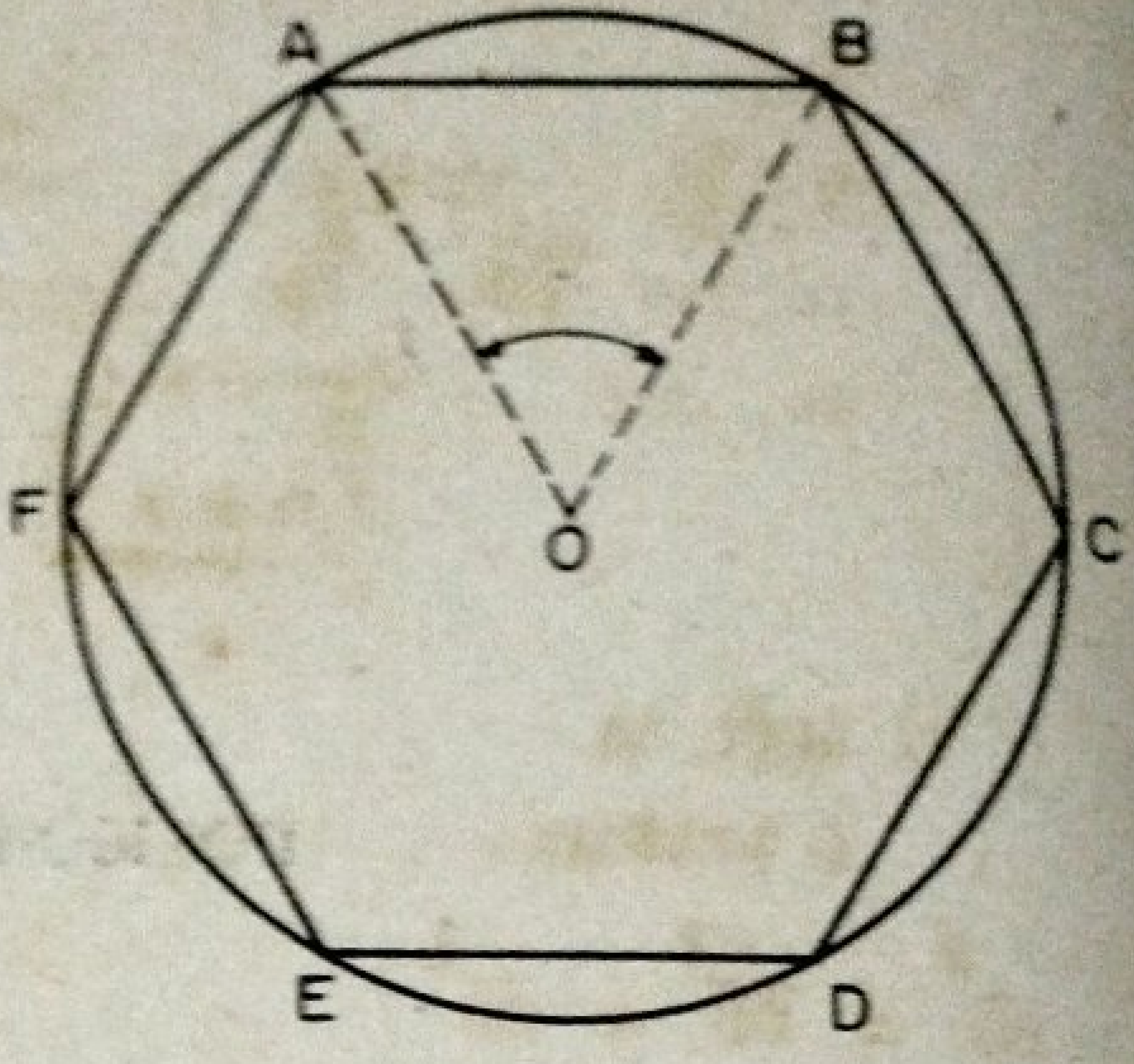


Fig. 34

LADOS E APÓTEMAS DOS QUADRADO, HEXÁGONO, TRIÂNGULO E OCTÓGONO

1º) LADO E APÓTEMA DO QUADRADO - Fig.35

a) <u>Lado</u>

O triângulo retângulo AOB dá

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2$$

$$l_4^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$$

$$l_4 = r\sqrt{2}$$

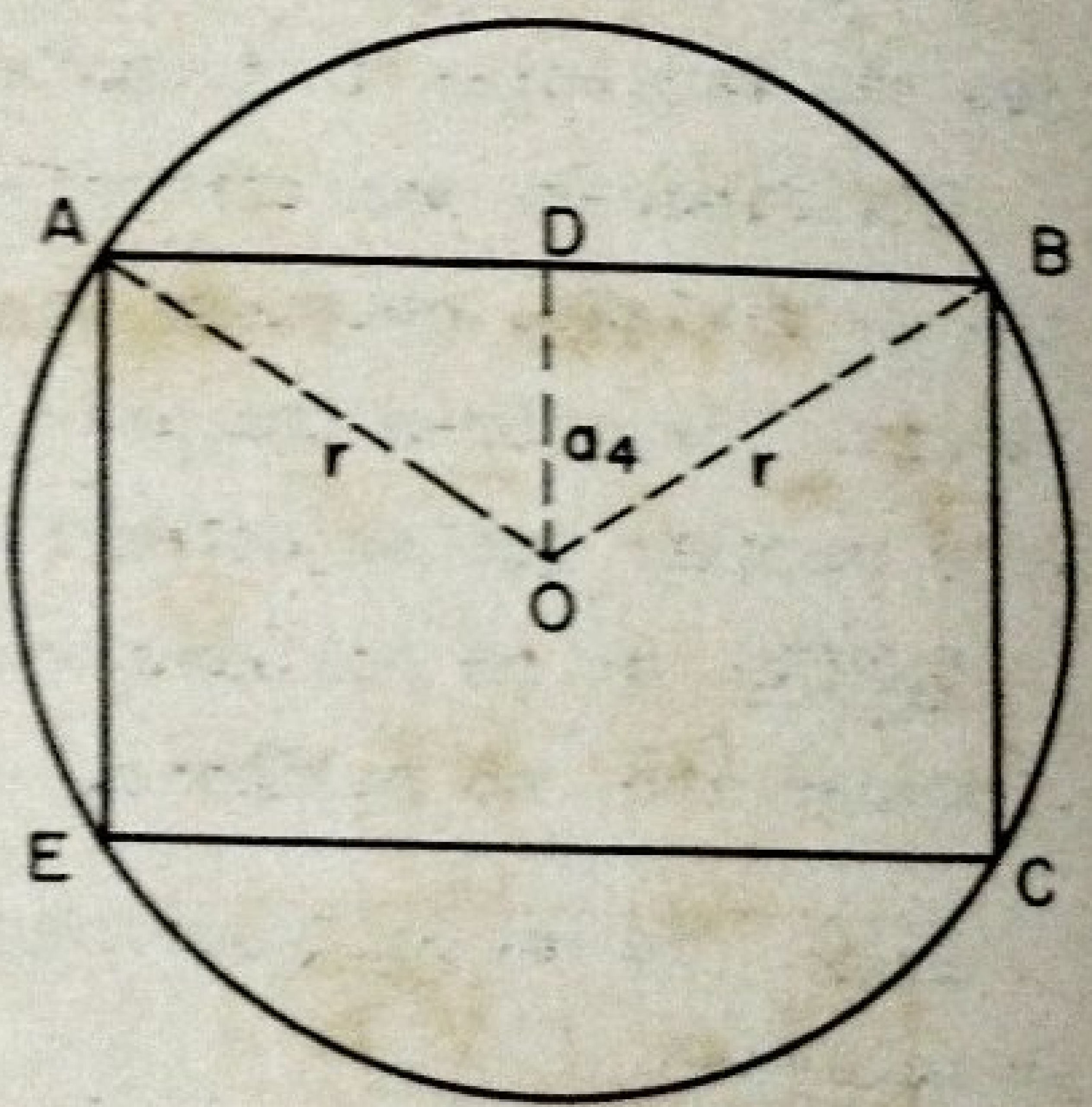


Fig. 35

b) <u>Apótema</u>

O triângulo retângulo ODB dá

$$\overline{OD}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OB}^2$$

$$a_4^2 = r^2 - \left(\frac{l_4}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{4r^2 - 2r^2}{4} = \frac{2r^2}{4} = \frac{r^2}{2}$$

$$a_4 = \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$$

2º) LADO E APÓTEMA DO HEXÁGONO - fig.36

a) Lado

O ângulo central $\hat{O}$ mede 60°. Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são iguais porque $\overline{AO} = \overline{OB}$ como raios, logo o triângulo OAB é equilátero, daí

$$\boxed{\ell_6 = r}$$

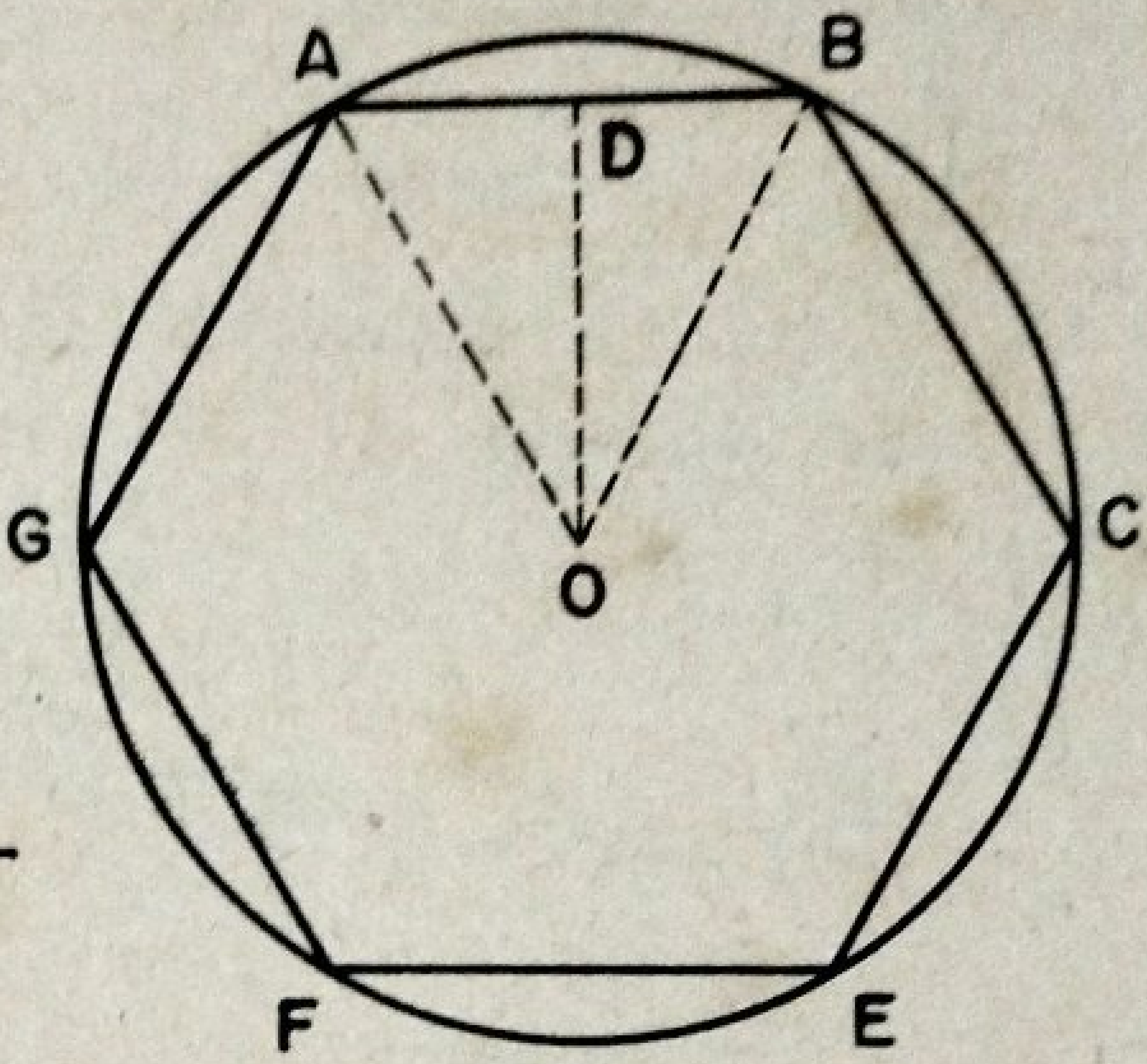


Fig. 36

b) Apótema

O triângulo retângulo ODB dá

$$\overline{OD}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{DB}^2$$

$$a_6^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{4r^2 - r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$$

$$\boxed{a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}}$$

3º) LADO E APÓTEMA DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO INSCRITO - fig.37

a) Lado

O triângulo retângulo ABD dá:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2$$

$$\ell_3^2 = (2r)^2 - r^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$$

$$\boxed{\ell_3 = r\sqrt{3}}$$

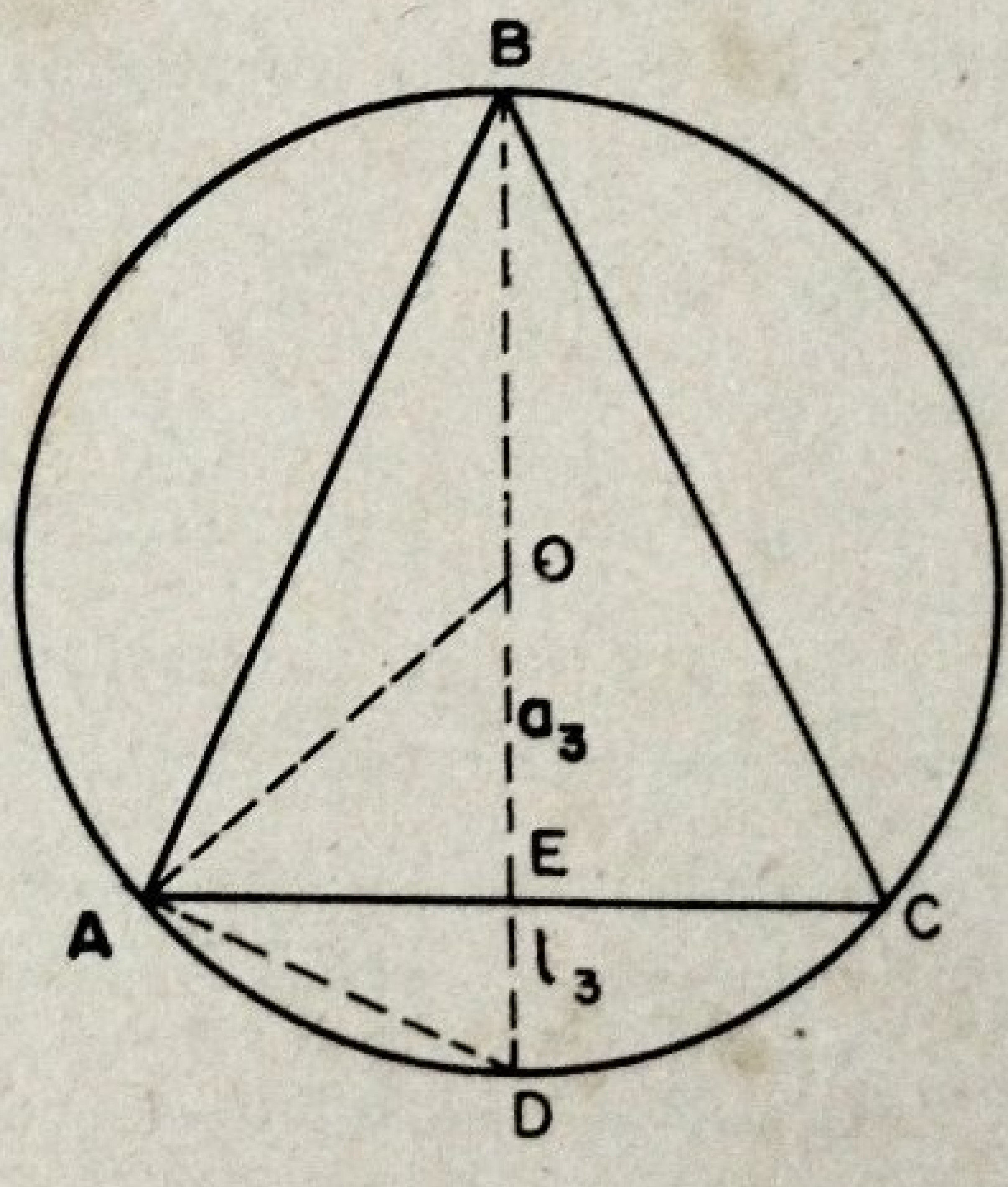


Fig. 37

b) Apótema

O triângulo retângulo OEA dá:

$$\overline{OE}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AE}^2$$

$$a_3^2 = r^2 - \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4} = \frac{4r^2 - 3r^2}{4} = \frac{r^2}{4}$$

$$\boxed{a_3 = \frac{r}{2}}$$

4º) LADO E APÓTEMA DO OCTÓGONO REGULAR INSCRITO - fig. 38

1,414
0,586

a) Lado

O triângulo retângulo AHE dá:

$$\overline{AH}^2 = \overline{AE} \times \overline{AI}$$

$\ell = 5\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 3,83...$

$$\ell^2_8 = 2r \ (r - OI)$$

Mas OI é o apótema do quadrado, logo vem:

$$\ell^2_8 = 2r \times \left(r - \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\ell^2_8 = 2r^2 - r^2\sqrt{2}$$

$$\ell^2_8 = r^2 \ (2 - \sqrt{2})$$

$$\boxed{\ell_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

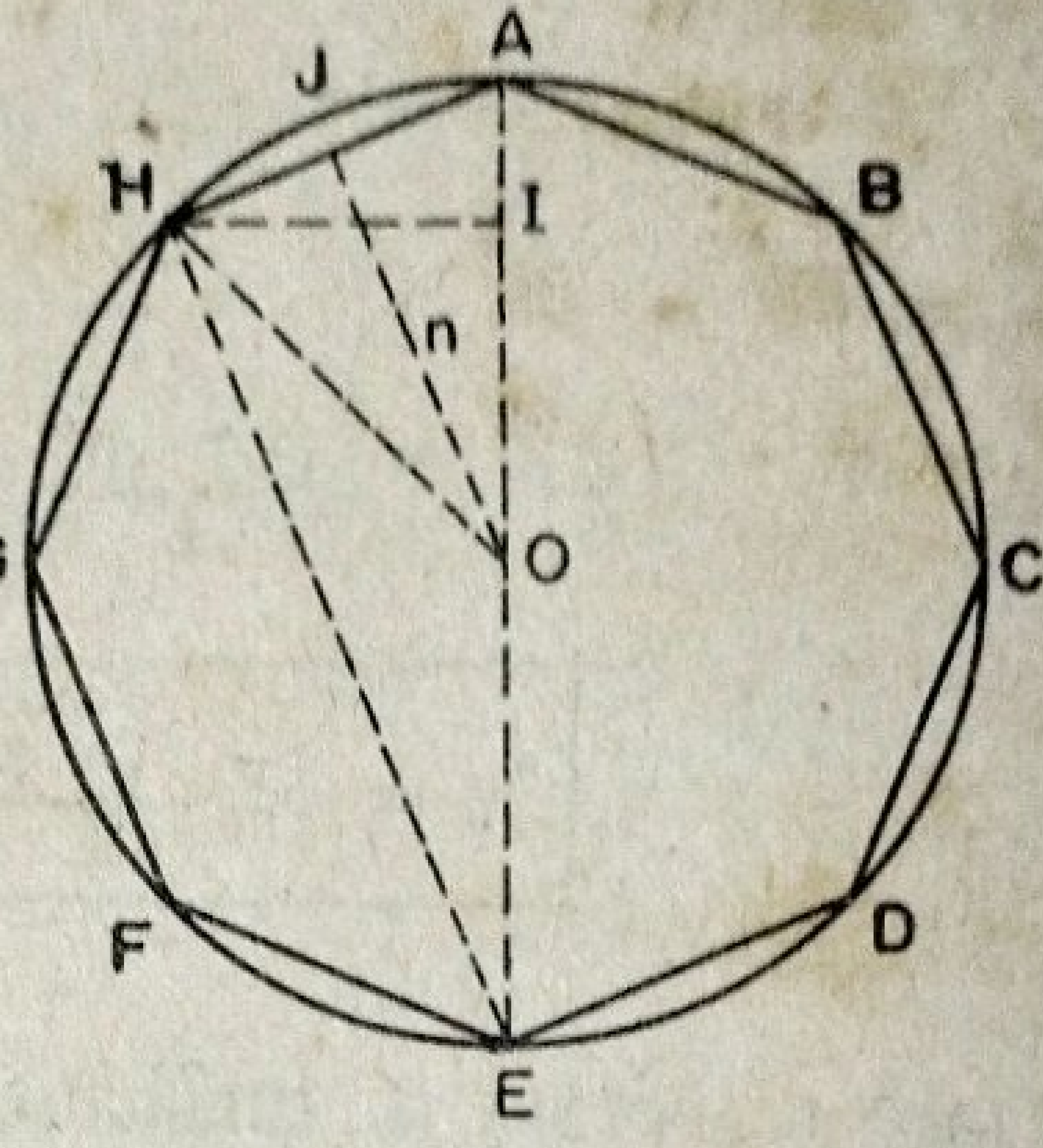


Fig 38

b) Apótema

O triângulo retângulo OJH dá:

$$\overline{OJ}^2 = \overline{OH}^2 - \overline{HJ}^2$$

$$a^2_8 = r^2 - \left(\frac{r\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{4r^2 - 2r^2 + r^2\sqrt{2}}{4} = \frac{2r^2 + r^2\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{\ell_8 = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

RELAÇÃO ENTRE O LADO DO POLÍGONO REGULAR INSCRITO E CIRCUNSCRITO COM O MESMO NÚMERO DE LADOS

Seja $\overline{AB}$ o lado ℓ_n de um polígono regular inscrito de n lados e $\overline{A_1B_1}$ o lado L_n do polígono regular circunscrito correspondente. (fig.39) Seja ainda $OC = a_n$ apótema do polígono inscrito.

Os triângulos OAB e OA_1B_1 são semelhantes logo dão

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OC_1}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OC}} \therefore \overline{A_1B_1} = \frac{\overline{OC_1} \times \overline{AB}}{\overline{OC}} \quad \text{ou}$$

$$L_n = \frac{r \times \ell_n}{a_n} = \frac{r \times \ell_n}{\sqrt{\frac{4r^2 - \ell_n^2}{4}}}$$

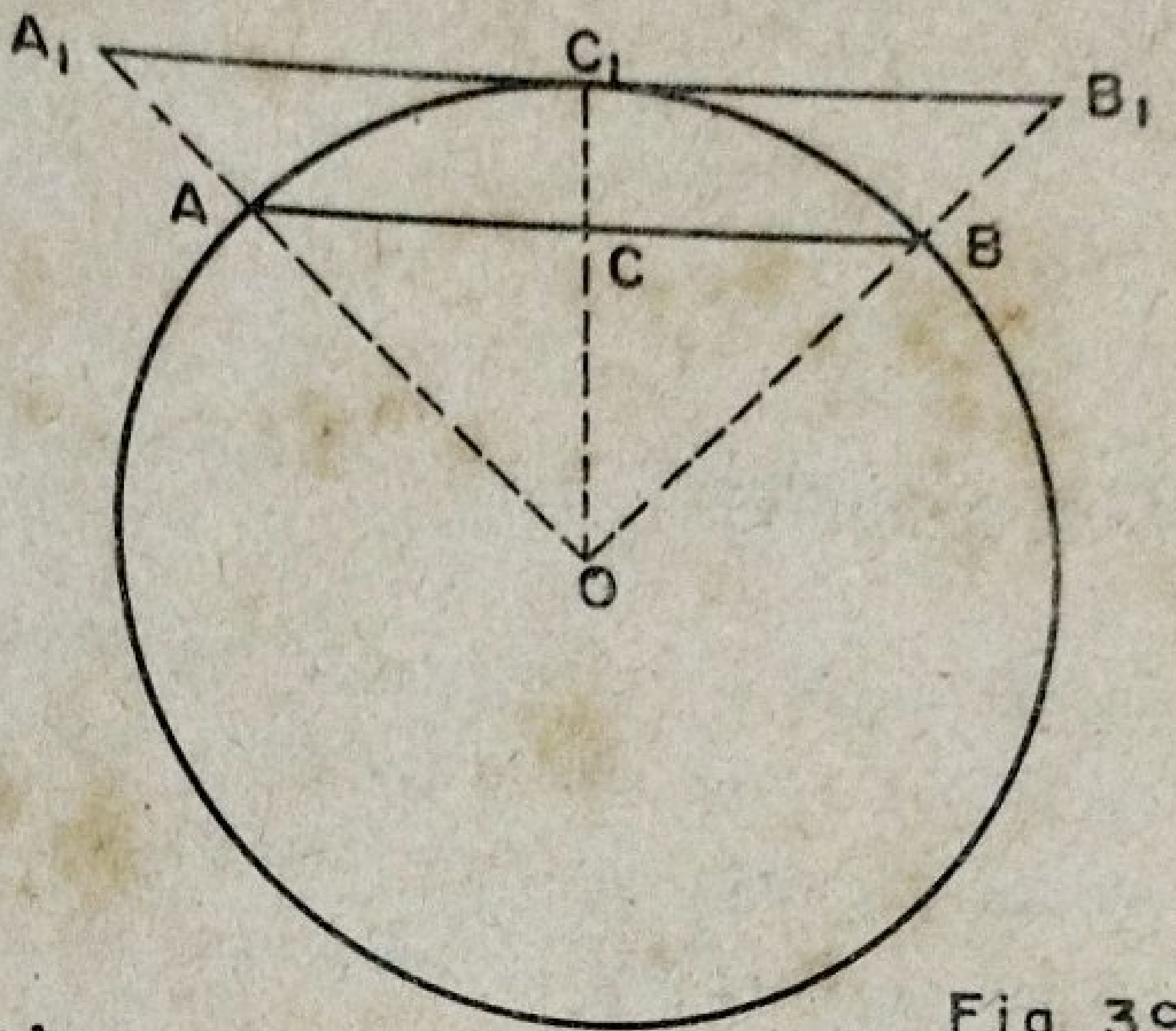


Fig. 39

Finalmente

$$L_n = \frac{2r \ell_n}{\sqrt{4r^2 - \ell_n^2}}$$

APLICAÇÃO

Calcular o lado do triângulo circunscrito, conhecendo-se o lado do triângulo inscrito.

$$L_3 = \frac{2r \ell_3}{\sqrt{4r^2 - \ell_3^2}} \quad \frac{2r.r\sqrt{3}}{\sqrt{4r^2 - (r\sqrt{3})^2}} = \frac{2r^2\sqrt{3}}{r}$$

$$L_3 = 2r\sqrt{3}$$

PROBLEMAS

1) Calcular o ângulo central do hexágono.
2) Calcular o ângulo interno de um pentágono.
3) Sendo $\sqrt{2}$ m o apótema de um quadrado, qual é seu perímetro ?
4) O apótema de um hexágono mede $5\sqrt{3}$ dm. Qual é sua área ?
5) Quantos lados tem um polígono cuja razão entre o ângulo central e o interno é 3/2 ?
6) Um quadrado está inscrito num círculo de r = 2dm. Calcular a diferença entre os perímetros dêste quadrado e do circunscrito ao mesmo círculo.
7) Um quadrado está inscrito num círculo de r = 2cm. Unem-se os meios dos lados consecutivos dêste quadrado. Calcular a área do novo quadrado.

Tirando o valor de x nas duas equações vem

$$(1) \quad \begin{cases} x = \dfrac{-4 + 3y}{2} \\[2ex] x = \dfrac{7 - 2y}{3} \end{cases}$$

Comparando os dois resultados, resultará:

$$\frac{-4 + 3y}{2} = \frac{7 - 2y}{3}$$

Resolvendo sucessivamente:

$$-12 + 9y = 14 - 4y$$
$$9y + 4y = 14 + 12$$
$$13y = 26$$
$$y = \frac{26}{13} = 2$$

Levando êste valor a qualquer das expressões do grupo (1), tem-se:

$$x = \frac{-4 + 3 \times 2}{2} = 1$$

Resposta: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

c) <u>MÉTODO DA ADIÇÃO</u>

Multiplicam-se ambos os membros de cada equação por números que tornem simétricos os coeficientes de uma mesma incógnita (x, por exemplo). Somam-se as duas equações resultantes, eliminando uma das incógnitas, neste caso x. Resolve-se a nova equação, determinando a outra incógnita, y.

Leva-se o valor desta incógnita a uma das equações primitivas e determina-se x.

<u>APLICAÇÃO</u>:

Resolver:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

NOÇÕES ELEMENTARES DE TRIGONOMETRIA

O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Trigonometria é a parte da matemática cujo objetivo é estudar as funções trigonométricas e resolver triângulos.

O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO - fig.40

1º) É orientado, isto é, tem um sentido positivo, de A para B, e um negativo de A para B_1. O primeiro é chamado sentido direto ou trigonométrico.

2º) Está dividido em quatro quadrantes por dois diâmetros perpendiculares AA_1 e BB_1. O ponto A é a origem dos arcos.

3º) Possui um eixo LL_1, tangente à circunferência em A.

4º) Possui um eixo SS_1 tangente à circunferência em B.

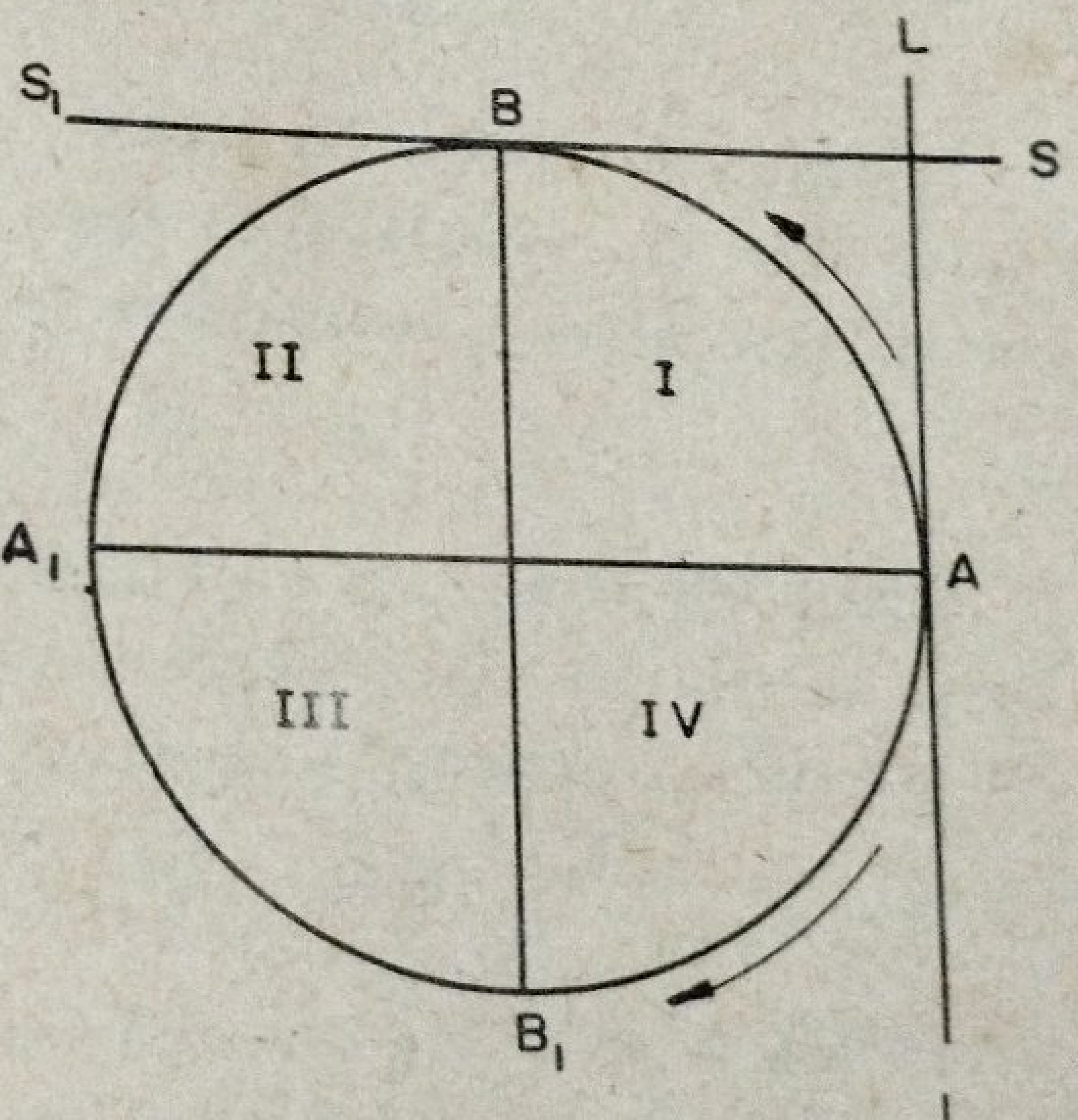


Fig. 40

5º) O raio do círculo trigonométrico é a unidade, dêste modo a circunferência é $C = 2\pi r. = 2\pi$

NOMENCLATURA E DEFINIÇÃO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS - fig.41

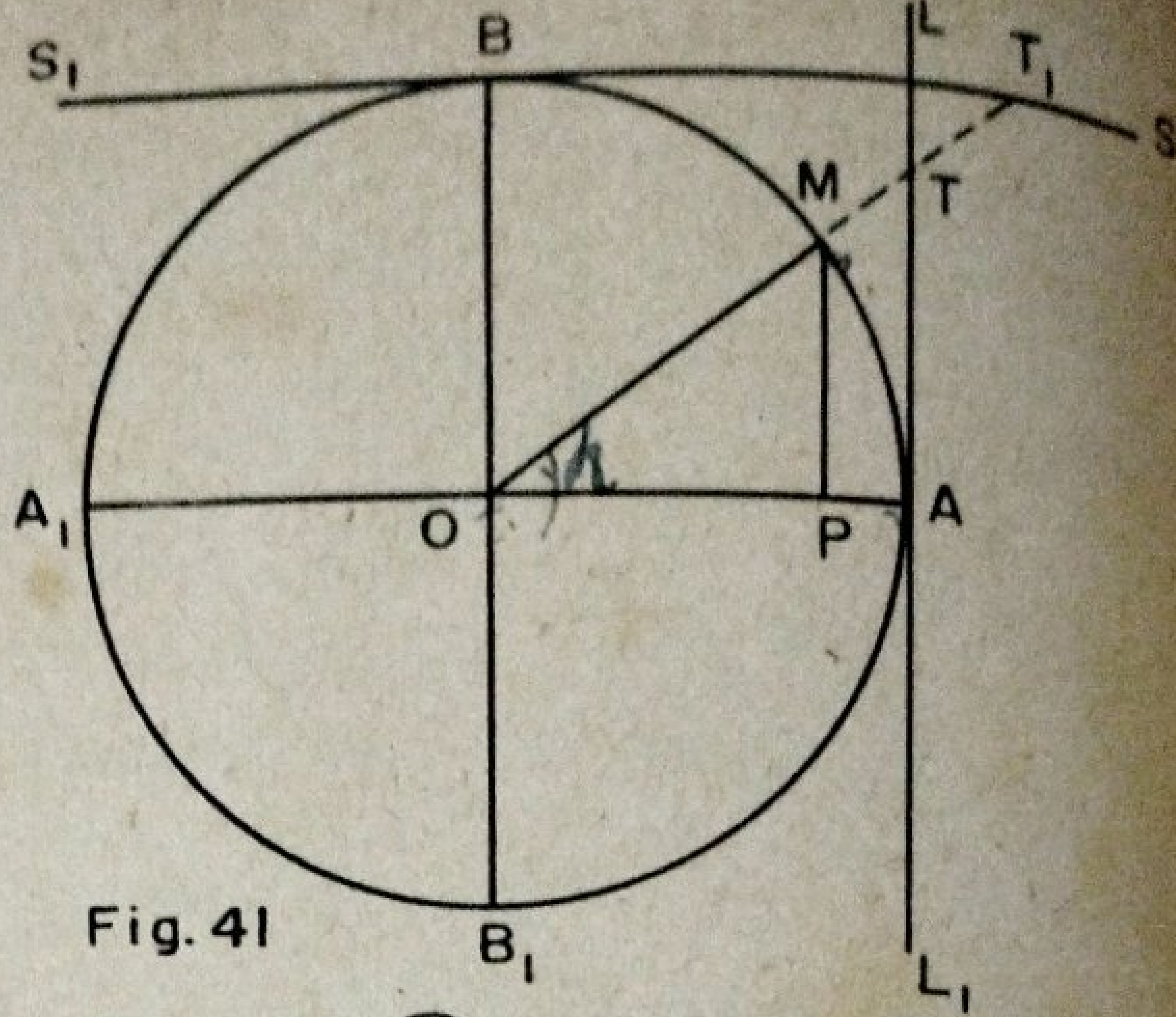


Fig. 41

a) seno, abreviação sen
b) cosseno " cos
c) tangente " tg
d) cotangente " cotg
e) secante " sec
f) cossecante " cossec

SENO de um arco é a relação entre a medida algébrica da perpendicular baixada da extremidade do arco sôbre o diâmetro que passa na origem e o raio, logo sen $\widehat{AM} = \frac{\overline{MP}}{r} = \overline{MP}$

COSSENO de um arco é a relação entre a medida algébrica do segmento que liga o centro do círculo ao pé do seno e o raio.

$$\cos \widehat{AM} = \frac{\overline{OP}}{r} = \overline{OP}$$

TANGENTE de um arco é a relação entre a medida algébrica do segmento do eixo LL_1 compreendido entre A e o encontro do prolongamento do raio que passa na extremidade do arco com o eixo LL_1 e o raio.

$$\text{tg } \widehat{AM} = \frac{\overline{AT}}{r} = \overline{AT}$$

COTANGENTE de um arco é a relação entre a medida algébrica do segmento do eixo SS_1 compreendido entre B e o encontro do prolongamento do raio que passa na extremidade do arco com o eixo SS_1 e o raio.

$$\text{cotg } \widehat{AM} = \frac{\overline{BT_1}}{r} = \overline{BT_1}$$

SECANTE de um arco é a relação entre a medida algébrica do segmento que une o centro do círculo à extremidade da tangente e o raio.

$$\sec \widehat{AM} = \frac{\overline{OT}}{r} = \overline{OT}$$

COSSECANTE de um arco é a relação entre a medida algébrica do segmento que une o centro do círculo à extremidade da cotangente e o raio.

$$\text{cossec } \widehat{AM} = \frac{\overline{OT_1}}{r} = \overline{OT_1}$$

VALORES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DE CERTOS ARCOS

sen $0^\circ = 0$

cos $0^\circ = 1$

tg $0^\circ = 0$

cotg $0^\circ = \infty$

sec $0^\circ = 1$

cossec $0^\circ = \infty$

sen $30^\circ = \frac{1}{2}$

cos $30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

tg $30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

cotg $30^\circ = \sqrt{3}$

sec $30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

cossec $30^\circ = 2$

sen $45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

cos $45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

tg $45^\circ = 1$

cotg $45^\circ = 1$

sec $45^\circ = \sqrt{2}$

cossec $45^\circ = \sqrt{2}$

sen $60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

cos $60^\circ = \frac{1}{2}$

tg $60^\circ = \sqrt{3}$

cotg $60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

sec $60^\circ = 2$

cossec $60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

sen $90^\circ = 1$

cos $90^\circ = 0$

tg $90^\circ = \pm\infty$

cotg $90^\circ = 0$

sec $90^\circ = \pm\infty$

cossec $90^\circ = 1$

TABELAS DE SENOS E CO-SENOS

Graus	SENOS 0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13353	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	80
10	0,17365	0,17651	0,17939	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40142	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0 46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0 58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0' CO-SENOS	Graus

Graus	SENOS 0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
45	0,70711	0,70916	0,71121	0,71325	0,71529	0,71732	0,71934	44
46	0,71934	0,72136	0,72337	0,72537	0,72737	0,72937	0,73135	43
47	0,73136	0,73333	0,73531	0,73728	0,73924	0,74120	0,74314	42
48	0,74314	0,74509	0,74703	0,74896	0,75088	0,75280	0,75471	41
49	0,75471	0,75661	0,75851	0,76041	0,76229	0,76417	0,76604	40
50	0,76604	0,76791	0,76977	0,77162	0,77347	0,77531	0,77715	39
51	0,77715	0,77897	0,78079	0,78261	0,78442	0,78622	0,78801	38
52	0,78801	0,78980	0,79158	0,79335	0,79512	0,79688	0,79864	37
53	0,79864	0,80038	0,80212	0,80386	0,80558	0,80730	0,80902	36
54	0,80902	0,81072	0,81242	0 81412	0,81580	0,81748	0,81915	35
55	0,81915	0,82082	0,82248	0,82443	0,82577	0,82741	0,82904	34
56	0,82904	0,83066	0,83228	0,83389	0,83549	0,83708	0,83867	33
57	0,83867	0,84025	0,84182	0,84339	0,84495	0,84650	0,84805	32
58	0,84805	0,84959	0,85112	0,85264	0,85416	0,85567	0,85717	31
59	0,85717	0,85866	0,86015	0,86163	0,86310	0,86457	0,86603	30
60	0,86603	0,86748	0,86892	0,87036	0,87178	0,87321	0,87462	29
61	0,87462	0,87603	0,87743	0,87882	0,88020	0,88158	0,88295	28
62	0,88295	0,88431	0,88566	0,88701	0,88835	0,88968	0,89101	27
63	0,89101	0,89232	0,89363	0,89493	0,89623	0,89752	0,89879	26
64	0,89879	0,90007	0,90133	0,90259	0,90383	0,90507	0,90631	25
65	0,90631	0,90753	0,90875	0,90996	0,91116	0,91236	0,91355	24
66	0,91355	0,91472	0,91590	0,91706	0,91822	0,91936	0,92050	23
67	0,92050	0,92164	0,92276	0,92388	0,92499	0,92609	0,92718	22
68	0,92718	0,92827	0,92935	0,93042	0,93148	0,93253	0,93358	21
69	0,93358	0,93462	0,93565	0,93667	0,93769	0,93869	0,93969	20
70	0,93969	0,94068	0,94167	0,94264	0,94361	0,94457	0,94552	19
71	0,94552	0,94646	0,94740	0,94832	0,94924	0,95015	0,95106	18
72	0,95106	0,95195	0,95284	0,95372	0,95459	0,95545	0,95630	17
73	0,95630	0,95715	0 95799	0,95882	0,95964	0,96046	0,96126	16
74	0,96126	0,96206	0,96285	0,96363	0,96440	0,96517	0,96593	15
75	0,96593	0,96667	0,96742	0,96815	0,96887	0,96959	0,97030	14
76	0,97030	0,97100	0,97169	0,97237	0,97304	0,97371	0,97437	13
77	0,97437	0,97502	0,97566	0,97630	0,97692	0,97754	0,97815	12
78	0,97815	0,97875	0,97934	0,97992	0,98050	0,98107	0,98163	11
79	0,98163	0,98218	0,98272	0,98325	0,98378	0,98430	0,98481	10
80	0,98481	0,98531	0,98580	0,98629	0,98676	0,98723	0,98769	9
81	0,98769	0,98814	0,98858	0,98902	0,98944	0,98986	0,99027	8
82	0,99027	0,99067	0,99106	0,99144	0,99182	0,99219	0,99255	7
83	0,99255	0,99290	0,99324	0,99357	0,99390	0,99421	0,99452	6
84	0,99452	0,99482	0,99511	0,99540	0,99567	0,99594	0,99619	5
85	0,99619	0,99644	0,99668	0,99692	0,99714	0,99736	0,99756	4
86	0,99756	0,99776	0,99795	0,99813	0,99831	0,99847	0,99863	3
87	0,99863	0,99878	0,99892	0,99905	0,99917	0,99929	0,99939	2
88	0,99939	0,99949	0,99958	0,99966	0,99973	0,99979	0,99985	1
89	0,99985	0,99989	0,99993	0,99996	0,99998	1,00000	1,00000	0
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0' CO-SENOS	Graus

TABELAS DE TANGENTES E CO-TANGENTES

TANGENTES

Graus	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03210	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	**0,06993**	**0,07285**	**0,07578**	**0,07870**	**0,08163**	**0,08456**	**0,08749**	**85**
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	**0,15838**	**0,16137**	**0,16435**	**0,16734**	**0,17033**	**0,17333**	**0,17633**	**80**
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	**0,24933**	**0,25242**	**0,25552**	**0,25862**	**0,26172**	**0,26483**	**0,26795**	**75**
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	**0,34433**	**0,34758**	**0,35085**	**0,35412**	**0,35740**	**0.36068**	**0,36397**	**70**
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44157	0,44523	66
24	**0,44523**	**0,44872**	**0,45222**	**0,45573**	**0,45924**	**0,46277**	**0,46631**	**65**
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51319	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	**0,55431**	**0,55812**	**0,56194**	**0,56577**	**0,56962**	**0,57348**	**0,57735**	**60**
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0596 91	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	**0,67451**	**0,67875**	**0,68301**	**0,68728**	**0,69157**	**0,69588**	**0,70021**	**55**
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77169	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	**0,80978**	**0,81461**	**0,81946**	**0,82434**	**0,82923**	**0,83415**	**0,83910**	**50**
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	**0,96569**	**0,97133**	**0,97700**	**0,98270**	**0,98843**	**0,99420**	**1,00000**	**45**
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Graus

CO-TANGENTE

TANGENTES

Graus	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
45	1,00000	1,00583	1,01170	1,01761	1,02355	1,02952	1,03553	44
46	1,03553	1,04158	1,04766	1,05378	1,05994	1,06613	1,07237	43
47	1,07237	1,07864	1,08496	1,09131	1,09770	1,10414	1,11061	42
48	1,11061	1,11713	1,12369	1,13029	1,13694	1,14363	1,15037	41
49	**1,15037**	**1,15715**	**1,16398**	**1,17085**	**1,17777**	**1,18474**	**1,19175**	**40**
50	1,19175	1,19882	1,20593	1,21310	1,22031	1,22758	1,23490	39
51	1,23490	1,24227	1,24969	1,25717	1,26471	1,27230	1,27994	38
52	1,27994	1,28764	1,29541	1,30323	1,31110	1,31904	1,32704	37
53	1,32704	1,33511	1,34323	1,35142	1,35968	1,36800	1,37638	36
54	**1,37638**	**1,38484**	**1,39336**	**1,40195**	**1,41061**	**1,41934**	**1,42815**	**35**
55	1,42815	1,43703	1,44598	1,45501	1,46411	1,47330	1,48256	34
56	1,48256	1,49190	1,50133	1,51084	1 52043	1,53010	1,53987	33
57	1,53987	1,54972	1,55966	1,56969	1,57981	1,59002	1,60033	32
58	1,60033	1,61074	1,62125	1,63185	1,64256	1,65337	1,66428	31
59	**1,66428**	**1,67530**	**1,68643**	**1,69766**	**1,70901**	**1,72047**	**1,73205**	**30**
60	1,73205	1,74375	1,75556	1,76749	1,77955	1,79174	1,80405	29
61	1,80405	1,81649	1,82906	1,84177	1,85462	1,86760	1,88073	28
62	1,88073	1,89400	1,90741	1,92098	1,93470	1,94858	1,96261	27
63	1,96261	1,97680	1,99116	2,00569	2,02039	2,03526	2,05030	26
64	**2,05030**	**2,06553**	**2,08094**	**2,09654**	**2,11233**	**2,12832**	**2,14451**	**25**
65	2,14451	2,16090	2,17749	2,19430	2,21132	2,22857	2,24604	24
66	2,24604	2,26374	2,28167	2,29984	2,31826	2,33693	2,35585	23
67	2,35585	2,37504	2,39449	2,41421	2,43422	2,45451	2,47509	22
68	2,47509	2,49597	2,51715	2,53865	2,56046	2 58261	2,60509	21
69	**2,60509**	**2,62791**	**2,65109**	**2,67462**	**2,69853**	**2,72281**	**2,74748**	**20**
70	2,74748	2,77254	2,79802	2,82391	2,85023	2,87700	2,90421	19
71	2,90421	2,93189	2,96004	2,98869	3,01783	3,04749	3,07768	18
72	3,07768	3,10842	3,13972	3,17159	3,20406	3,23714	3,27085	17
73	3,27085	3,30521	3,34023	3,37594	3,41236	3,44951	3,48741	16
74	**3,48741**	**3,52609**	**3,56557**	**3,60588**	**3 64705**	**3,68909**	**3,73205**	**15**
75	3,73205	3,77595	3,82083	3,86671	3,91364	3,96165	4,01078	14
76	4,01078	4,06107	4,11256	4,16530	4,21933	4,27471	4,33148	13
77	4,33148	4,38969	4,44942	4,51071	4,57363	4,63825	4,70463	12
78	4,70463	4,77286	4,84300	4,91516	4,98940	5,06584	5,14455	11
79	**5,14455**	**5.22566**	**5,30928**	**5,39552**	**5,48451**	**5,57638**	**5,67128**	**10**
80	5,67128	5,76937	5,87080	5.97576	6,08444	6,19703	6,31375	9
81	6,31375	6,43484	6,56055	6,69116	6,82694	6,96823	7,11537	8
82	7,11537	7,26873	7,42871	7,59575	7,77035	7,95302	8,14435	7
83	8,14435	8,34496	8,55555	8,77689	9,00983	9,25530	9,51436	6
84	**9,51436**	**9,78817**	**10,07803**	**10,38540**	**10,71191**	**11,05943**	**11,43005**	**5**
85	11,43005	11.82617	12,25051	12,70621	13,19688	13,72674	14,30067	4
86	14,30067	14,92442	15,60478	16,34986	17,16934	18,07498	19,08114	3
87	19,08114	20,20555	21,47040	22,90377	24,54176	26,43160	28,63625	2
88	28,63625	31,24158	34,36777	38,18846	42,96408	49,10388	57,28996	1
89	**57,28996**	**68,75009**	**85,93979**	**114,58865**	**171,88540**	**343,77371**	**∞**	**0**
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Graus

CO-TANGENTES

PROBLEMAS

1. DETERMINAR sen 40° $10'$

Entra-se na tabela com o valor 40° procurando-se o número correspondente na coluna vertical dos $10'$.

Assim, sen 40° $10' = 0{,}64501$

<u>Nota</u>: para o <u>cos</u> e a <u>cotg</u>, os graus são lidos à direita e os minutos em baixo.

2. DETERMINAR cotg 43° $15'$

Êste valor não está diretamente tabelado. Procura-se então cotg

$$43^\circ \; 10' = 1{,}06613$$

Para diferença de $10'$ há numèricamente uma diferença de $(1{,}06613 - 1{,}05994) = 0{,}00619$; para $5'$ vem $\frac{0{,}00619 \times 5}{10} = 0{,}00309$

Êste resultado subtrai-se de 1,06613, logo

$$\text{cotg} \quad 43^\circ \; 15' = 1{,}06304$$

Tipo de cálculo:

$$\text{cotg} \quad 43^\circ \; 10' = 1{,}06613$$

$$\text{decréscimo para } 5' = \frac{5' \times 0{,}00619}{10} = 0{,}00309$$

$$\text{cotg.} \quad 43^\circ \; 15' = 1{,}06304$$

<u>Nota</u>: Se fôr o cálculo de um cos procede-se do mesmo modo. Para sen ou tg, <u>acrescenta-se</u> o resultado encontrado.

3. CALCULAR O ÂNGULO CORRESPONDENTE A UMA LINHA DADA QUE FIGURA NA TABELA.

Basta procurar e lêr os graus e minutos correspondentes

Assim cos $a = 0{,}65166$

$a = 49^\circ \; 20'$

4. CALCULAR O ANGULO $\hat{a}$ SENDO sen $a = 0,41329$

Procura-se o ângulo correspondente ao sen inferior mais próximo

$$\text{sen } a_1 = 0,41204 \text{ correspondente a } \hat{a}_1 = 24^{\circ}\ 20'$$

À 10' de diferença corresponde uma diferença numérica de 0,41469 - - 0,41204 = 0,00245 (entre dois sen consecutivos tabelados).

À diferença de (0,41329 - 0,41204) = 0,00125, corresponderão

$$\frac{10' \times 0,00125}{0,00245} = 5'$$

logo $\quad a = 24^{\circ}\ 25'$

Tipo de cálculo

sen inferior $0,41204 \longrightarrow 24^{\circ}\ 20'$

$$\frac{10' \times 0,00125}{0,00245} = 5'$$

$$\hat{a} = 24^{\circ}\ 25'$$

Para tg o tipo de cálculo é o mesmo.

Para o cos e cotg , inicia-se o cálculo, procurando cos ou cotg imediatamente superior aos dados.

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS RETÂNGULOS POR MEIO DE TABELAS

Resolver um triângulo é calcular, por meio de elementos dados, os elementos desconhecidos. Os dois teoremas abaixo resolvem os quatro casos clássicos de triângulos retângulos.

1º TEOREMA

Cada cateto é igual à hipotenusa multiplicada pelo seno do ângulo oposto ou pelo cosseno do ângulo adjacente.

$$\begin{cases} c = a \text{ sen } C = a \cos B \\ b = a \text{ sen } B = a \cos C \end{cases}$$

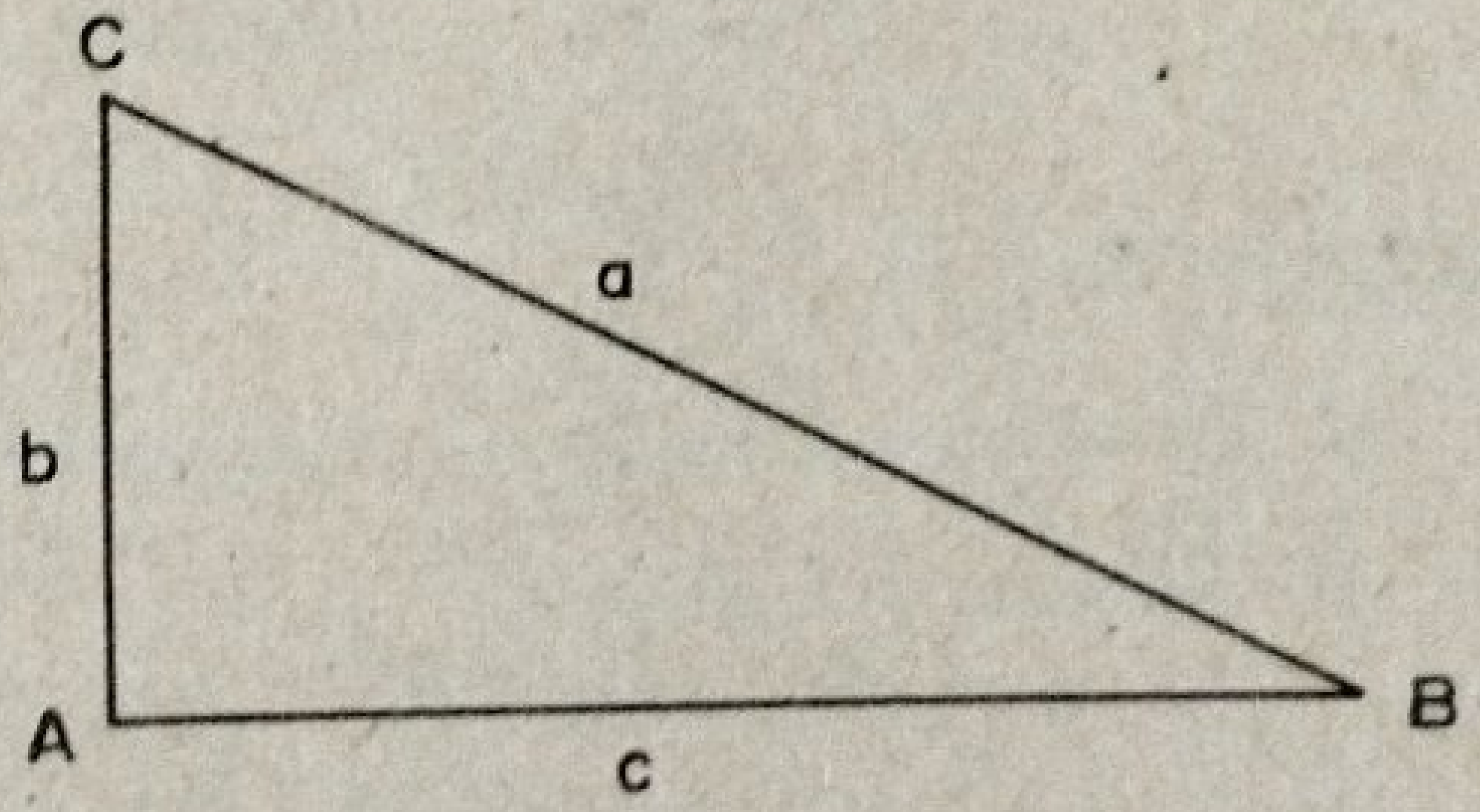


Fig. 42

2º TEOREMA

Cada cateto é igual ao outro cateto multiplicado pela tangente do ângulo oposto ou pela cotangente do ângulo adjacente.

$c = b$ tg $C = b$ cotg B
$b = c$ tg $B = c$ cotg C

A resolução de triângulos retângulos apresenta quatro casos clássicos, segundo sejam dados:

1º caso: a hipotenusa e um ângulo agudo
2º caso: a hipotenusa e um cateto
3º caso: um cateto e um ângulo agudo
4º caso: os dois catetos

APLICAÇÃO

Resolver o triângulo retângulo no qual $a = 36m$: $\hat{B} = 46^\circ\ 10'$

Solução

Cálculo de C

$$C = 90^\circ - B = 90^\circ - 46^\circ\ 10'$$
$$C = 43^\circ\ 50'$$

Cálculo de b

$$b = a \text{ sen } B$$
$$b = 36m \times \text{sen } 46^\circ\ 10'$$
$$b = 36m \times 0{,}72136 = 25{,}06896 \text{ m}$$

Cálculo de c

$$c = a \cos B$$
$$c = 36m \times \cos 46^\circ\ 10'$$
$$c = 36m \times 0{,}60256 = 24{,}93216 \text{ m}$$

EXERCÍCIOS

1) Desenhar as linhas trigonométricas nos quatro quadrantes.

2) Calcular:
a) sen $30^\circ\ 15'$: cos $45^\circ\ 17'$: tg $57^\circ\ 23'$: cotg $18^\circ\ 23'$.

3) Calcular m sendo:
a) sen $m = 0{,}38143$: cos $m = 0{,}43513$
tg $m = 0{,}450341$: cotg. $m = 7{,}38434$

4) Resolver o triângulo retângulo onde

1º) a = 17m: C = 40° 17'

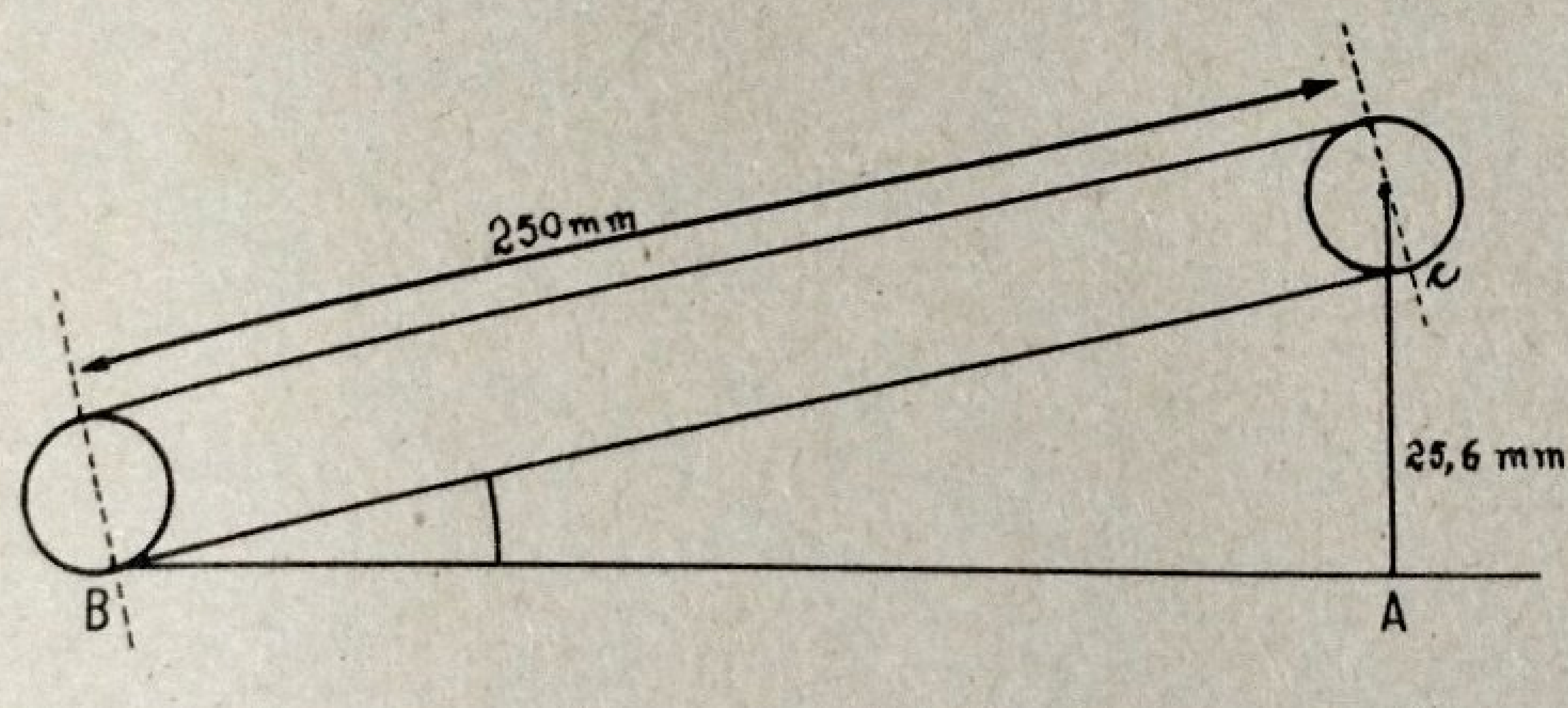
2º) a = 57m: b = 38m

3º) b = 151m: c = 53° 41'

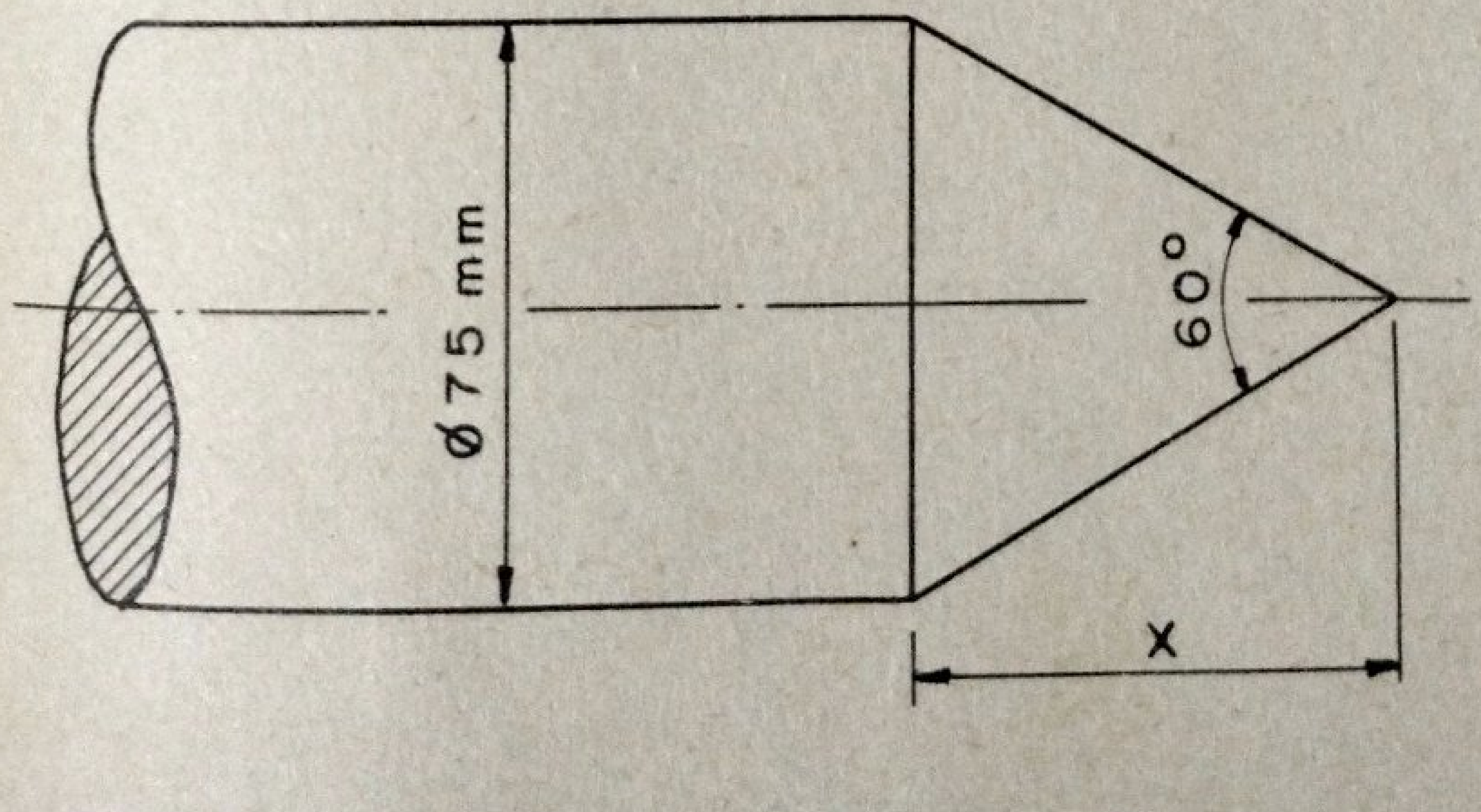
4º) b = 45m: c = 51m

5) A partir da base de uma tôrre, medem-se 50m e visado o vértice da tôrre encontra-se um ângulo de 53° 17'. Qual a altura da tôrre ?

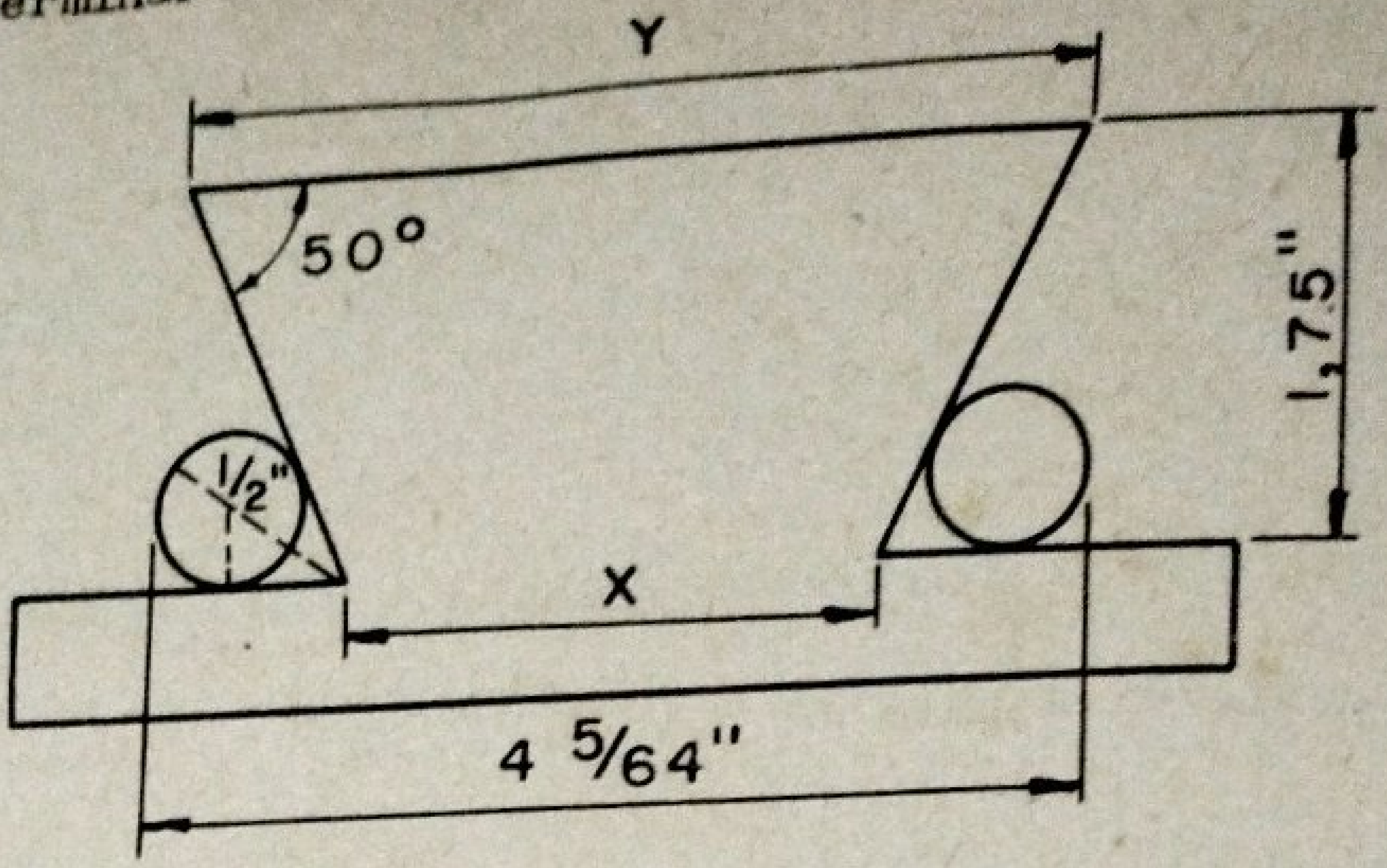
6) Determinar o ângulo assinalado



7) Na figura dada, determinar a distância x.

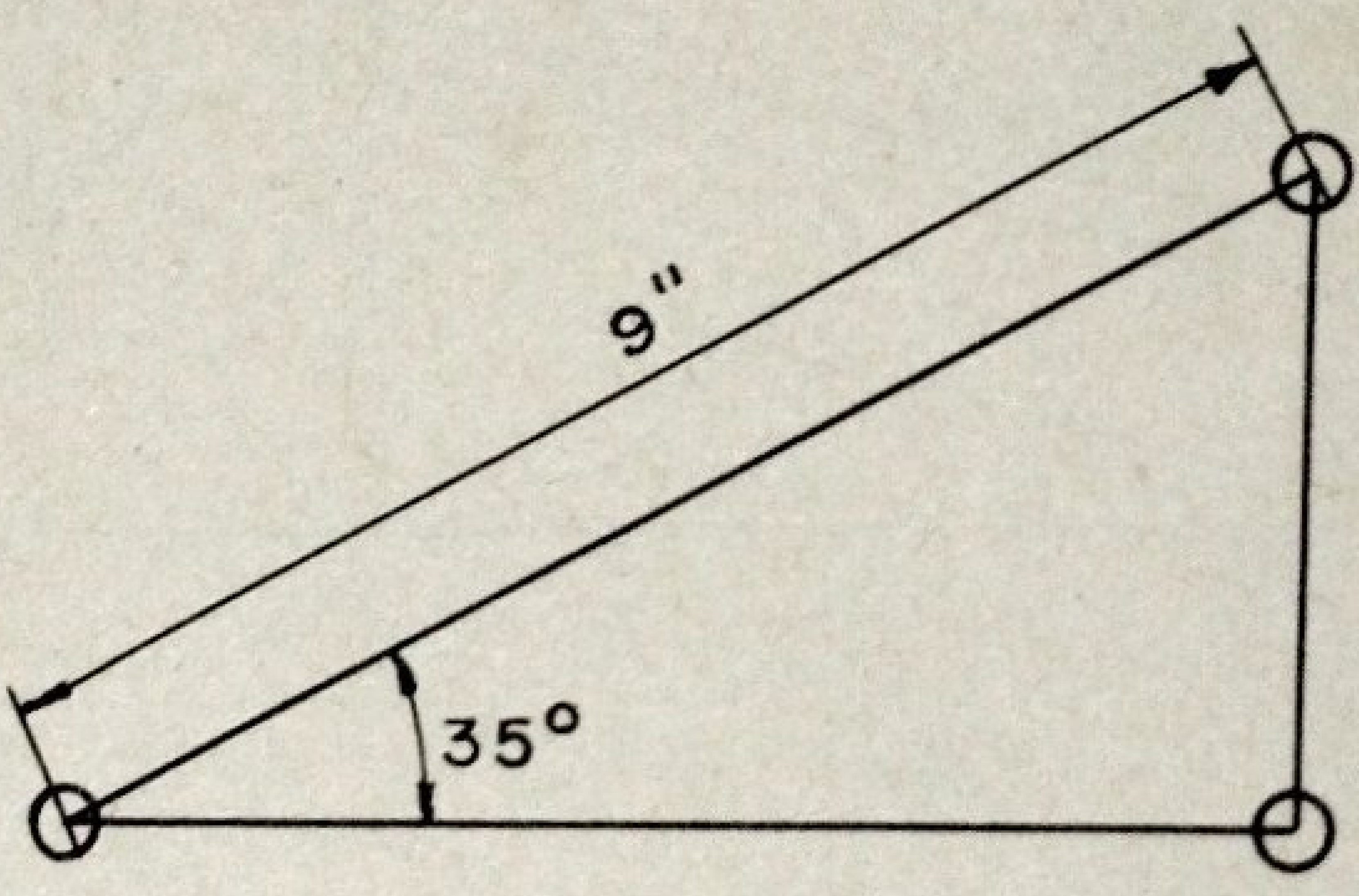


8) Determinar a distância Y na figura dada.



9) Na mesma figura determinar a distância x.

10) Determinar as distâncias entre os centros dos furos da figura dada.



NOÇÕES DE NÚMERO IRRACIONAL

Admita-se a realização da medida de uma grandeza. Considerando que seja "p" o número de vêzes que a grandeza contém a unidade "q", o valor numérico da medida será $\frac{p}{q}$.

Podem suceder então quatro casos:

1º) - p contém q um número exato de vêzes, então o valor numérico da medida será expresso por um número inteiro.

2º) - p contém q um determinado número de vêzes e mais um número exato de partes de q.

O valor numérico da medida será um número misto.

3º) - p é menor que q, contudo uma subdivisão de q é contida exatamente em p.

O valor numérico da medida será uma fração.

Êstes três tipos de números são os números comensuráveis, racionais porque podem ser expressos pela razão $\frac{p}{q}$.

4º) - Contudo pode ser escolhida uma unidade que não tenha medida comum com a grandeza a medir. Daí têm origem os números <u>incomensuráveis</u>. Por exemplo: se fôr feita a medida da diagonal de um quadrado, tomando como unidade o lado, chegar-se-á a um número desta espécie. Os números incomensuráveis não podem ser expressos por meio de uma razão $\frac{p}{q}$ e por isto chamam-se irracionais.

Considere-se $\sqrt{2}$ Calculando-a virá:

a) por falta:	1	1,4	1,41	1,414	1,4142 ....
b) por excesso:	2	1,5	1,42	1,415	1,4143 ....

Em ambas as sucessões, a primeira crescente e a segunda decrescente, os quadrados dos diferentes pares de números se aproximam cada vez mais de 2.

O número $\sqrt{2}$ pois, é, um número irracional.

Observações:

1) Tôda raiz quadrada de números não quadrados perfeitos conduz a números irracionais.

2) Com os números irracionais podem-se fazer tôdas as operações que se fazem com os números racionais, substituindo-se aquêles pelos seus valores aproximados.

Definições:

1º) - Raiz emésima de um número é outro número que elevado à potência "m" reproduz o número primitivo. Assim se $\sqrt[m]{A} = a$ virá $A = a^m$ "m" é o índice do radical; e A, quantidade sob radical, chama-se radicando.

2º) - Chama-se radical a raiz indicada de um número ou de uma expressão.

Convém notar que:

a) A raiz quadrada de um número qualquer tem duplo sinal, porque tanto o sinal mais como o sinal menos, elevados ao quadrado, dão resultado positivo. Assim:

$$\sqrt{4} = \pm 2 \quad \text{pois} \quad (\pm 2)^2 = 4$$

b) Os números negativos não têm raízes pares no campo real dos números.

$\sqrt{-49}$ não existe porque + 7 ou - 7 elevados ao quadrado não dão -49.

c) Tôda raiz de índice impar de qualquer número tem o sinal do número.

$$\sqrt[3]{-24} = -3$$

3º) - Chama-se valor aritmético de um radical ao seu valor positivo.

4º) - Dois radicais são semelhantes quando têm o mesmo índice e o mesmo radicando.

TEOREMAS SÔBRE RADICAIS

1º) - A raiz "m" de um produto é igual ao produto das raízes dos fatôres.

Pode-se escrever por definição $\left(\sqrt[m]{a \times b \times c}\right)^m = a \times b \times c$

ou sucessivamente $\left(\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c}\right)^m = a \times b \times c$

$$\left(\sqrt[m]{a \times b \times c}\right)^m = \left[\left(\sqrt[m]{a}\right) \times \left(\sqrt[m]{b}\right) \times \left(\sqrt[m]{c}\right)\right]^m$$

$$\left(\sqrt[m]{a \times b \times c}\right) = \left(\sqrt[m]{a}\right) \times \left(\sqrt[m]{b}\right) \times \left(\sqrt[m]{c}\right)$$

SIMPLIFICAÇÕES DE RADICAIS

1º) - Passar um fator para fora do radical.

<u>REGRA</u>:

Decompõe-se o radicando em fatores e extrai-se a raiz dêsses fatôres dividindo-se os expoentes pelo índice do radical.

$$\sqrt{125 \ a^3 \ b^2} = \sqrt{5^3 . a^2 \ a \ b^2} = 5 \ a \ b \sqrt{5 \ a}$$

2º) - Passar um fator para dentro do radical

<u>REGRA</u>:

Coloca-se êsse fator dentro do radical elevando-o a uma potência indicada pelo índice do radical e multiplicando o resultado pelo radicando.

$$2 \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3 \times 2} = \sqrt[3]{2^4}$$

TEOREMA

Um radical não muda quando se multiplica ou divide seu índice e o expoente da quantidade sob radical pelo mesmo número.

Seja: $\sqrt[m]{a^n} = p$

Virá elevando a m: $a^n = p^m$ ou $a^{bn} = p^{bm}$

Extraindo a raiz bm vem:

$$p = \sqrt[bm]{a^{bn}} \quad \text{ou ainda} \quad \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[bm]{a^{bn}}$$

CONSEQÜÊNCIAS

1º) - Pode-se dividir o índice da raiz e o expoente do radicando pelo mesmo número:

$$\sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3]{2}$$

2º) - Redução de radicais ao mesmo índice

REGRA:

Acha-se o m.m.c. dos índices dos radicais. Divide-se o m.m.c. pelos diferentes índices e multiplica-se o resultado pelos respectivos expoentes:

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{4}, \quad \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[12]{2^6}, \quad \sqrt[12]{4^4} \quad \sqrt[12]{5^6}$$

TEOREMA

Para se elevar um radical a uma potência, eleva-se a essa potência a quantidade sob o radical.

Seja: $$\left(\sqrt[m]{a}\right)^p = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \, \ldots\ldots\ldots = \sqrt[m]{a^p}$$

$$\left(\sqrt[3]{2a^4}\right)^5 = \sqrt[3]{2^5 a^{20}}$$

TEOREMA

Para se extrair a raiz "p" da raiz "m" de um radical, basta extrair-se a raiz "p m" do último radical.

Seja: $$\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}} = b$$

Elevando agora a potência m vem:

$$\sqrt[p]{a} = b^m$$

Elevando agora a potência p vem:

$$a = b^{mp} \quad \text{donde} \quad b = \sqrt[mp]{a}$$

Comparando essa expressão com a inicial vem:

$$\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[mp]{a} \qquad \text{Ex:} \ \sqrt{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[6]{a^3}$$

OPERAÇÕES SÔBRE RADICAIS

SOMA E SUBTRAÇÃO

REGRA:

Opera-se como se fossem números algébricos

$$3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

REGRA:

Reduzem-se radicais ao mesmo índice, dá-se ao produto o índice comum e multiplicam-se ou dividem-se os radicandos

$$\sqrt{3} \times \sqrt[5]{a} = \sqrt[10]{3^5} \times \sqrt[10]{a^2} = \sqrt[10]{3^5\ a^2}$$

EXPOENTE FRACIONÁRIO

De um modo geral se tem

$$\sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{p}{m}}$$

isto é, pode-se transformar uma raiz em um expoente fracionário e aplicar a êste as regras das operações sôbre potências.

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Diz-se que uma fração é irracional quando qualquer dos seus termos é irracional. Para efeito de cálculo convém que só apareçam radicais nos numeradores das frações. Existem regras especiais para transformar as frações de tal maneira que radicais surjam ùnicamente no numerador.

Chamam-se expressões conjugadas as do tipo

$$A + \sqrt{B} \quad e \quad A - \sqrt{B} \quad ou \quad \sqrt{A} + \sqrt{B} \quad e \quad \sqrt{A} - \sqrt{B}$$

Serão estudados os casos mais simples.

1º) - Há um radical de índice 2 no denominador.

__REGRA__:

Multiplica-se numerador e denominador, pelo denominador da fração.

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times 3}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2º) - Há um radical de índice diferente de 2 no denominador.

__REGRA__:

Multiplica-se o numerador e o denominador por um radical de mesmo índice do denominador cujo expoente do radicando seja a diferença entre o índice e o expoente do radical primitivo.

$$\frac{3}{\sqrt[6]{2^2}} = \frac{3\sqrt[6]{2^{6-2}}}{\sqrt[6]{2^2} \times \sqrt[6]{2^{6-2}}} = \frac{3\sqrt[6]{2^4}}{\sqrt[6]{2^6}} = \frac{3\sqrt[6]{2^4}}{2}$$

3º) - O denominador é um binômio onde um dos termos é um radical de índice 2.

__REGRA__:

Multiplica-se o numerador e o denominador pela expressão conjugada do denominador.

$$\frac{3}{\sqrt{2}-5} = \frac{3(\sqrt{2}+5)}{(\sqrt{2}-5)(\sqrt{2}+5)} = \frac{3(\sqrt{2}+5)}{4-25} = \frac{3(\sqrt{2}+5)}{-21} = \frac{\sqrt{2}+5}{-7}$$

4º) - O denominador tem dois radicais de índice 2.

__REGRA__:

Multiplica-se o numerador e o denominador pela expressão conjugada do denominador.

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$$

EXERCÍCIOS

Passar para fora do radical

1) $\sqrt{9a^4b^2}$, $\sqrt{25a^2b^4c^5}$, $\sqrt[3]{81a^2b^3c^6}$

2) $\sqrt{x^2+9+6x}$, $\sqrt{4x^2+16-4x}$

Reduzir ao mesmo índice

1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{9}$

2) $\sqrt[3]{2a^2}$, $\sqrt[6]{5^2a^3}$, $\sqrt{2^a}$

Passar para baixo do radical

1) $2\sqrt{3}$, $2a^2b\sqrt[3]{3ab^2}$, $\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}}$

2) $(y+x)\sqrt{\frac{1}{x^2+y^2+2xy}}$, $\frac{x-3}{x+4}\sqrt[3]{\frac{(x+4)^2}{x-3}}$

Efetuar

1) $7\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{80}-3\sqrt{49}$

2) $\sqrt{63}-\frac{3}{8}\sqrt{28}+\sqrt{112}$

3) $4\sqrt{-8}-2\sqrt{-2}-3\sqrt{-32}$

4) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\quad(x-y)$

5) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{2a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)$

6) $2\sqrt{6}\ \text{x}\ 3\sqrt[3]{8}$

7) $a\sqrt[3]{b} \times b\sqrt[4]{a}$

8) $7\sqrt{2} \div 3\sqrt[3]{2}$

9) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096\ x^{24}}}$

10) $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{4\ a^{24}\ b^{12}c}}}$

11) $\left(\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}\right)^{32}$

Tornar racional os denominadores das seguintes frações

1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

2) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

3) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{2^3}}$

4) $\dfrac{2}{\sqrt[7]{3^4}}$

5) $\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$

6) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

7) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

8) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

9) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

10) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-y}$

11) $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

12) $\dfrac{3\sqrt{a}-4\sqrt{3}}{2\sqrt{8}-3\sqrt{27}}$

COMPOSTO NA OFICINA
IMPRESSO GRÁFICA DA
CBAI
Av. Marechal Camara 350 Rio de Janeiro - D.F.
6-55-2.000