bep Biblioteca do Educador Profissional

Como Ensinar Matemática

no básico e no secundário

Volker Hole

Livros Horizonte

COMO ENSINAR MATEMÁTICA NO BÁSICO E NO SECUNDÁRIO

BEP — BIBLIOTECA DO EDUCADOR PROFISSIONAL

1 A Matemática Moderna no Ensino Primário — *Z. P. Dienes.*
2 Matemática Moderna Matemática Viva — *André Revuz.*
3 A Adolescência — *W. D. Wall.*
4 Educação e Educadores — *Rui Grácio.*
5 A Orientação Escolar e Profissional — *Jean Drévillon.*
6 Temas de Psicopedagogia Escolar — O Professor e os Alunos — *M. David, Roger Gal, Louis François, L. Voeltzel* e *A. Ferré.*
7 A Hecatombe Escolar — *Georges Bastin.*
8 Testes Sociométricos — Um Guia para Professores — *Mary L. Northway* e *Lindsay Weld.*
9-10 A Educação Afectiva e Caracterial da Criança — *Georges Mauco.*
11 Fundamentação Existencial da Pedagogia — *Delfim Santos.*
12 João de Barros — Educador Republicano — *Rogério Fernandes.*
13 Pedagogia e Psicologia dos Grupos — *A. R. I. P.*
14 Introdução à Didáctica na Escola Activa — *Francesco de Bartolomeis.*
15 Ensino Programado e Estudo da sua Didáctica — *M. F. M. Rubens.*
16 As Três Faces da Pedagogia — *Maria Amália Borges Medeiros.*
17 Introdução à Educação Permanente — *Paul Lengrand.*
18 A Pedagogia e as Grandes Correntes Filosóficas — *Bogdan Suchodolski.*
19 A Educação nas Escolas Mistas — *Edouard Breuse.*
20 Os Professores e a Reforma do Ensino — *Rui Grácio.*
21 Uma Nova Compreensão da Arte Infantil — *Arno Stern.*
22 Aspectos e Técnicas da Pintura de Crianças — *Arno Stern.*
23 A Inóvação do Ensino — *Jean Hassenforder.*
24 O Fim dos Liceus — *Robert Brechon.*
25 As Relações Humanas na Aula — *Christine Blouet-Chapiro.*
26 Adolescência na Escola e na Sociedade — *W. D. Wall.*
27 O Trabalho em Grupo nas Escolas Secundárias — *Barrington Kaye* e *Irving Rogers.*
28 A Educação Estético-Visual no Ensino Escolar — *A. Betâmio de Almeida.*
29 A Educação, Acto Político — *Agostinho dos Reis Monteiro.*
30 A Nova Escola Infantil — As Crianças dos 3 aos 6 — *Francesco de Bartolomeis.*
31 A Higiene Mental na Escola — *André Berge* e *João dos Santos.*
32 A Escola na Sociedade de Classes — *Ana Benavente.*
33 Do Ensino da Filosofia — *Fernando Gilot.*
34 Educação sem Selecção Social — *Bártolo Paiva Campos.*
35 Perspectivas Psicopedagógicas — *Arquimedes Santos.*
36 Educação: Uma Frente de Luta — *Rogério Fernandes.*
37 Animação Sócio-Cultural — Prática e Instrumentos — *Edouard Limbos.*
38 A Escola Paralela — *Louis Porcher.*
39 A Formação de Professores: Participação na Aprendizagem — *Barrington Kaye.*
40 Educação e Constituição de Abril — *Agostinho dos Reis Monteiro.*
41 Para onde vai a Educação? — *Jean Piaget.*
42 A Escola Aberta — *Bernard Eliade.*
43 Pensamento Pedagógico — *Vassili Sukhomlinski.*
44 A Psicologia da Inteligência — *Jean Piaget.*
45 Para o Ensino e Aprendizagem da Língua Materna — *Dulce Rebelo* e *Lucinda Atalaia.*
46 Meio Social e Sucesso Escolar — *Torsten Husén.*
47 Educação Popular e Processo de Consciencialização — *Júlio Barreiro.*
48 Uma Socióloga na Escola Primária — *Ida Berger.*
49 Portugal — A Educação em Números — *José Salvado Sampaio.*
50 Questões de Psicologia e Pedagogia — *Manuel Viegas de Abreu.*
51 Programas de Ensino e Senso Comum — *Robin Barrow.*
52 O Ensino das Ciências Sociais — Inovação no Ensino Secundário — *Denis Gleeson* e *Geoff Whitty.*
53 O Contexto Social do Ensino — *Gerald Cortis.*
54 Orientação Vocacional no Unificado e Formação de Professores — *Bártolo Paiva Campos.*
55 A Atitude Não-Directiva de Carl Rogers — *Hubert Hannoun.*
56 Leitura e Leituras — nos ensinos primário e secundário — *John Potts.*
57 A Escola e o Aluno — *Maria Corda Costa, Bruna Brianchi Valentini, Giovanni d'Andrea, Roberto Maragliano* e *Benedetto Vertechi.*
58 Pedagogia Prospectiva — *António Mora Ramos.*
59 Para uma Educação em Mudança — *Ivor Morrish.*
60 Educação Vocacional no Ensino Secundário — *Mário Silva Freire.*
61 Por uma Pedagogia do Despertar — *Francine Bert.*
62 Como Ensinar Matemática no Básico e no Secundário — *Volker Hole.*

VOLKER HOLE

COMO ENSINAR MATEMÁTICA NO BÁSICO E NO SECUNDÁRIO

ATRAVÉS DE UM PLANEAMENTO, EXECUÇÃO E APRECIAÇÃO ADEQUADOS

LIVROS HORIZONTE

Colecção BEP — Biblioteca do Educador Profissional
Sob a direcção de Rui Grácio

Título original: Erfolgreicher Mathematikunterricht
Autor : Volker Hole
© Verlag Herder Freiburg
6.ª edição - Março 1977
LIVROS HORIZONTE, 1980
Traduçaõ de : Prof.-Eng. Santos Heitor
Capa de : Estúdios Horizonte

Índice

Sobre a tradução do livro

Desejamos, também, dizer alguma coisa, ao professor de expressão em língua portuguesa, a quem esta tradução se destina.

Trata-se, como verão, dum livro que expõe processos de didáctica aplicada à Matemática. Parte de situações vividas na sala da aula e relaciona-as, continuamente, a uma doutrinação didáctica, mais geral.

Nem a escolha daquelas situações, nem a doutrinação invocada, foram condicionadas por currículos determinados e sistemáticos, pelos quais o Autor tivesse optado. Nem por qualquer confronto, entre programas de Matemática Moderna e Matemática Clássica.

O que preocupou o Autor foi extrair da Matemática os assuntos que ilustram os métodos de a ensinar: assim, um tema será interessante — quer se diga vindo de aqui ou de acolá — na medida e na forma, em que possa levar o aluno a agir e a pensar, no mundo de hoje, como um matemático incipiente e original.

Sendo as situações apresentadas, pelo Autor, mais de 200, estas distribuem-se, com certo equilíbrio, entre as referências a dois escalões etários: 1.°-4.° anos de escolaridade e 5.°-10.° anos. Portanto, o livro destina-se aos professores do ensino básico e aos do ensino secundário.

Se entre os primeiros, os professores do ensino primário estarão menos familiarizados com algumas questões invocadas de Matemática Moderna — embora não muito variadas — cremos que tal circunstância não afectará, da parte deles, a possibilidade de utilizarem o livro.

Por outro lado, ousamos esperar que um livro que faz aparecer a Matemática Moderna, como um processo de usar novos e estruturados meios de estudar e aplicar matemática, será mais um apelo à necessidade de apoiar, oficialmente, o empenho dos professores em se reciclarem. A resenha bibliográfica, introduzida no final desta edição portuguesa, é um aceno neste sentido.

A extensa e pormenorizada bibliografia, inserida no final do livro e citada ao longo dele, é um dos seus méritos. Infelizmente, pelo facto de ser toda em alemão, perde alcance para a maioria de nós. Na intenção de compensar esta perda, procedemos em dois campos:

— Na altura própria, em nota ao fundo da página, referimos a tradução (ou o original) da obra citada, quando dela tivermos conhecimento, em língua mais acessível para nós. Ou, então, na sua falta, indicamos a obra que a possa, em parte, substituir.

— No final do livro, apresentamos uma resenha de obras que reputamos de interesse, para consolidar, — e até alargar — a sua interpretação. Nesta conformidade, referimos algumas publicações que o autor teria, talvez, omitido, por o seu livro se dedicar, originariamente, ao professor alemão.

Mencionamos, ainda, alguns outros critérios a que obedece esta resenha:

— Dar o predomínio às obras que, fundamentalmente, informaram o livro, isto é, às de Piaget, Bruner e Dienes.

— Continuar a omitir, como sucede no original alemão — as obras que, embora de larga e justificada influência entre nós — apresentam, implícita ou explicitamente, opções curriculares sistemáticas, que sairiam para fora dos objectivos do livro.

— Suprir a deficiência de obras respeitantes a determinados aspectos (visualização, intuição, analogia, etc.) que no original, são extensamente citadas, mas não acessíveis, entre nós, por outras compensatórias, embora, o autor não as cite.

— Incluir algumas obras que apresentam uma iniciação científica, embora rudimentar, em conceitos de matemática moderna.

Sugerimos um itinerário cíclico de leitura, a partir de obras mais rudimentares para outras mais complicadas: daqui, a indicação, em algarismos romanos, de vários níveis.

A resenha dá preferência a livros de mais fácil aquisição, ou leitura, entre nós. É, necessariamente, imperfeita e incompleta; mas porque este livro pretende abrir um diálogo com o leitor, agradecemos qualquer indicação no sentido de a melhorar.

Santos Heitor

INTRODUÇÃO

A reforma do ensino da Matemática trouxe, a par de muitos resultados positivos, alguns problemas, ainda por resolver: Assim, a questão do engurgitamento dos programas agravou-se, de forma evidente [47, pág. 95]*; e perguntas da seguinte natureza continuam, em grande parte, sem resposta. Quando e com que desenvolvimento deve ser tratado o estudo dos conjuntos? [50, pág. 10]. Com que amplitude devem ser introduzidos, na Escola, os conceitos de estrutura e os métodos axiomáticos? [5, pág. 59]

Estes e outros problemas levaram a prática escolar a uma grande incerteza. De facto, verificamos que os blocos lógicos, nas mãos dos alunos, e os colchetes dos conjuntos, nos seus cadernos, não garantem, ainda, qualquer ensino eficiente da Matemática.

Entretanto, para os Estagiários, Professores, Orientadores, Avaliadores, bem como, para Estudantes e Pais, permanece a questão: a que ponto se chegou, efectivamente, no ensino da Matemática?

O livro desejaria responder a esta pergunta. Porém não pode solucionar o problema posto assim, já que no todo foi outro o seu ponto de partida. Assim, o livro não apresentará quaisquer propostas sobre a escolha do «currículo» e do preciso momento de o ensinar. O que fará é partir, sempre, desta posição: — dado que tal assunto deverá ser tratado — qual será a maneira mais eficiente de o ensinar?

Esta finalidade tornar-se-á, imediatamente, mais clara, se soubermos como o livro nasceu:

Desde alguns anos que o autor vinha recolhendo, sistematicamente, da prática das aulas, muitas situações positivas e negativas — que ele próprio individualmente enfrentou ou que, muitas vezes, conjuntamente com outros colegas, teve que apreciar.

Ainda nesta conformidade, as situações de aula provinham de diferentes tipos de escola pré-primária, primária, básica (Hauptschule), liceu prático (Realschule) e ginásio; bem como de vários níveis etários — até, principalmente, o 10.° ano de escolaridade.

Uma vez recolhidas, as situações foram, em cada caso, classificadas, segundo tendências didáticas semelhantes, sendo de interesse notar que nelas se encontram exemplos, tanto da Matemática Moderna como da Clássica.

---

* O primeiro número dentro do parêntese recto, refere-se ao número da obra do registo bibliográfico em alemão, do final do livro.

De seguida, tentou-se referir aquelas situações típicas que foram observadas isoladamente, a resultados já consagrados, vindos, principalmente, da Psicologia da Inteligência, e da Pedagogia e Didáctica da Matemática. Aqui, mais uma vez e como sempre, se notou [por ex.°: 9, pág. 397] o inconveniente de a Investigação Científica, por um lado, e a Prática Escolar, pelo outro, sofrerem orientações opostas; de maneira que, entre os dois domínios, as vias de comunicação são muito estreitas e pouco fecundas, em intercâmbios. O presente livro desejaria ser um meio de comunicação entre os dois campos; isto a favor de uma configuração efectiva, para o ensino da Matemática.

Na formação dos professores e na reciclagem destes, o autor verificou que os docentes só poderão projectar, na realidade escolar, as concepções da didáctica, se estas forem concretizadas, a partir de muitas situações reais de ensino. Assim, este livro apresenta-se ao contrário de muitos outros, pois aos exemplos que, muitas vezes, «falam por si», concede-se o mais largo lugar, em relação à teoria.

De forma alguma, então, deve o livro ser interpretado, como uma conceitualização didáctica completa. Se, em parte, se apoia na terminologia de Heimann, Otto e Schulz [36], não trata, porém, separada e completamente, dos seis elementos estruturais, estabelecidos por aqueles autores.

Ao longo do livro, apresentam-se 24 critérios (a cada um dos quais corresponde o assunto dum capítulo), e que podem ser invocados, como meios de orientação, para a planificação, execução e apreciação do ensino da Matemática. Para mais fácil consulta, estes meios são novamente referidos, no final do livro numa espécie de matriz de enquadramento.

A questão — o que se deve entender por um ensino eficiente da matemática, e como este se atinge — não é possível de tratar, sem a referir, fundamentalmente, a esta outra: Como se deve encarar, predominantemente, a finalidade e a função do ensino de matemática?

Primeiro, não se trata — e esta opção prévia constitui um dos fundamentos deste livro — de aprender uma colecção de definições, teoremas, fórmulas e regras. Muito pelo contrário, e em resumo: cada aluno deve aprender a pensar, com independência, sobre a Matemática. Um ensino desta disciplina, exclusivamente dirigido à transmissão de factos e, quanto muito, à sua dedução, só com dificuldade poderá exercer a essencialidade da sua função: a preparação de situações de aprendizagem, na qual se possam originar formas independentes e transferíveis de raciocínio. Segundo a opinião do autor, este é, simultâneamente, o caminho apropriado para a eficiência, na aquisição dum sólido saber matemático.

Neste lugar, o autor agradece ao Professor Dr. Josef Lauter, ao Professor Wolfgang Werner e a muitos Estagiários da Escola Superior de Pedagogia de Schwäbisch Gmund, as valiosas sugestões que lhe forneceram, para a elaboração deste livro.

Schwäbisch Gmund, Maio de 1973

Volker Hole

1. Análise da Doutrina Científica de uma Unidade do Programa

Em críticas sobre a forma porque as lições foram dadas, expressa-se muitas vezes a opinião que, se de facto o professor cometeu vários erros de doutrina, a totalidade da lição sustenta o confronto com esses erros, porque a metodologia seguida revelou muitos aspectos positivos. Esta opinião será insustentável, mais tarde, se os erros de doutrina não consistirem, só, em pequenas imprecisões, pois a apresentação deles será particularmente nociva, principalmente se forem revestidos de uma metodologia hábil.

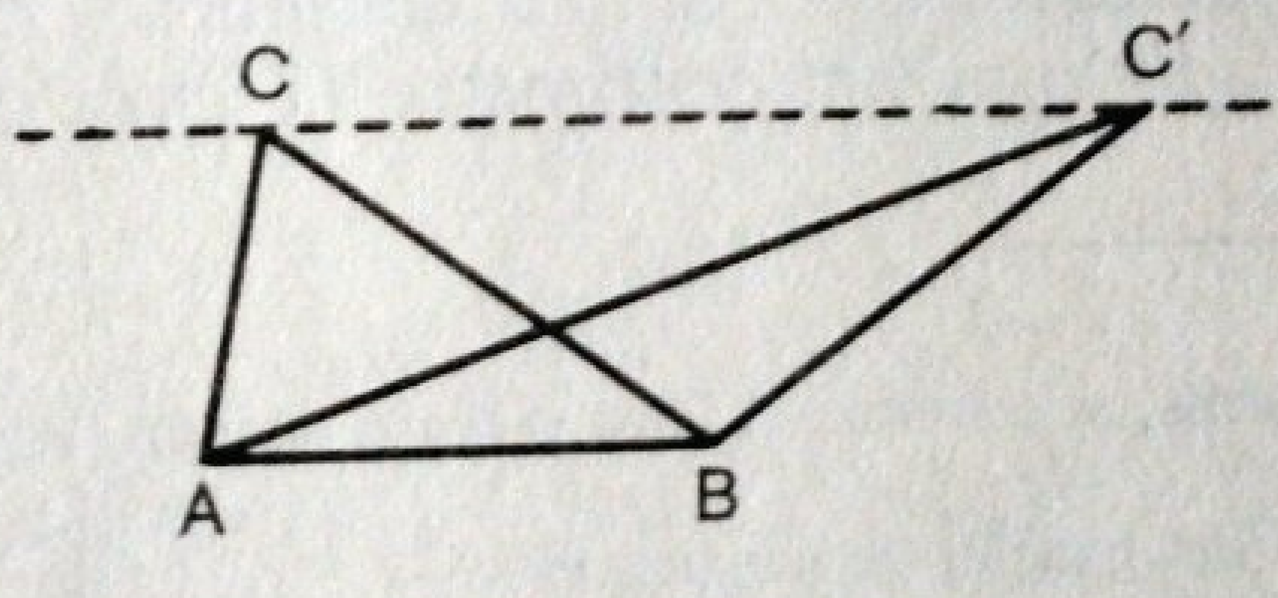
Este capítulo não pode, naturalmente, substituir uma preparação científica sólida que, por si só, seja a garantia da condução cientificamente correcta de uma unidade do programa. Poderá, contudo, sobre este ponto, chamar a atenção para lacunas e erros, através do exame de aspectos, predominantemente negativos, de exemplos extraídos de algumas lições. Isto é tanto mais importante, quanto os erros de doutrina científica só raras vezes são reconhecidos, pelo próprio professor. Pelo outro lado, junto dos alunos, não provocam uma reacção tão nítida, como a proveniente duma actuação didacticamente errada.

1.1 *Erros e imprecisões de doutrina*

Os erros e imprecisões de doutrina podem surgir, no ensino, quer vindos da parte do professor, quer da parte dos alunos; sem que aquele os reconheça como tais e, assim, os combata. Além das faltas usuais — cometidas em operações e no estabelecimento de expressões — podemos considerar que são seis os principais tipos de erro:

(1) Formas incorrectas de dicção e de escrita.

Num 7.º ano de escolaridade, para a dedução da fórmula da área, 1
desenharam-se vários triângulos, com a mesma base $\overline{AB}$:



Professor (P): «Como é que os triângulos provêm um dos outros?»
Aluno (A): «Através da translação paralela».*

A noção, «translação paralela», que também foi invocada pelo professor, está aqui, evidentemente, fora de causa, porque é reservada para uma determinada transformação congruente; na qual todos os pontos do plano estão em correspondência com pontos imagem, obtidos por deslocamentos, que mantém a mesma direcção, sentido e distância.

A resposta certa, seria impossível, porque o tipo de «transformação afim», a invocar, seria ainda, desconhecido dos alunos. A resposta errada poderia, contudo, ter sido substituída pela seguinte proposição: «Todos os vértices ficam sobre uma recta paralela a $\overline{AB}$.»

2 Na comparação de potências de conjuntos, empregam-se, muitas vezes expressões tais como: «ambos os conjuntos têm a mesma grandeza», ou «este conjunto é menor do que aquele».

Tratando-se de conjuntos finitos, tais expressões são pouco felizes, porque neles — pense-se por exemplo em conjuntos de blocos lógicos — a qualidade dos elementos não influe, para a comparação de potências; pelo que deve ser posta de lado. Tratando-se de conjuntos infinitos, do uso de tais expresões resultam erros, porque, por exemplo, o conjunto dos números naturais é uma parte própria do conjunto dos números inteiros e, contudo, ambos os conjuntos são equipotentes.

3 (A): «Um cubo tem 12 catetos iguais».

O aluno deve ser corrigido: de facto, os 12 catetos têm igual comprimento, porém, são diferentes.

Aqui se revela a vantagem de usar a linguagem dos conjuntos: se considerarmos os catetos como conjuntos de pontos, torna-se, imediatamente, evidente que, «por 12 catetos» se entende 12 catetos diferentes.

(P): «Denominaremos, para o futuro, ''centímetro quadrado'', um quadrado unidade com 1 cm de lado».

Trata-se, aqui, de uma confusão entre «superfície», no sentido de uma forma geométrica, e o de «área» dessa superfície. O correcto seria dizer:

«De futuro, entenderemos por um centímetro quadradado (1 cm^2) a área de um quadrado com um centímetro (1 cm), de lado».

---

* N. T.
Aqui, como noutros locais, seguiremos à letra o texto alemão, reportado ao modelo físico de translação.
Mantivemos também a designação «congruente».

O sinal de igualdade é, muitas vezes, usado de forma incorrecta. Tais 5
casos são notórios, através das contradições a que dão origem.

a) 36 = Múltiplo de 12. Com o mesmo direito, se poderia, também, ter escrito, 48 = Múltiplo de 12.

A partir da simetria e da transitividade da relação de igualdade, resultaria, então: 36 = 48.

b) $7 : 3 = 2$ R1, e correlativamente:
$9 : 4 = 2$ R1

O que daria: $\frac{7}{3} = \frac{9}{4}$

c) $21 \cdot 14 = 210 + 21 \cdot 4 = 84$
$= 294$

o que traria, como conclusão: 294 = 84.

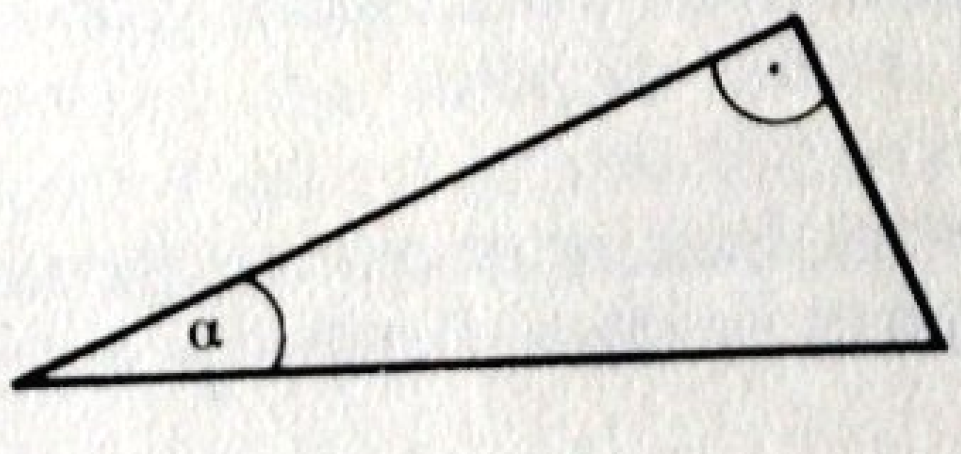
d) Também o uso desta expressão $i = \sqrt{-1}$ é arriscado, porque o aluno é, facilmente, levado a transferir as regras de radiciação com radicandos positivos, para os casos em que estes são negativos. A não validade daquela escrita surge, através do seguinte exemplo, que leva a contradizer a definição. De facto:

De $i^2 = -1$, resulta,
$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{+1} = 1$$
[23, pág. 55]

(2) Muitas vezes, as falhas de sentido ocorrem, porque se alarga a legitimidade das definições:

Num 10.º ano de escolaridade, definiu-se a tangente dum ângulo como 6
sendo a razão, num triângulo rectângulo, do cateto oposto para o cateto adjacente.

O professor não notara que, para $\alpha = 0°$, já se não poderia falar dum triângulo rectângulo e que, portanto, para tang 0°, seria necessário um novo conceito.
Poderia ter perguntado, apenas:
«Porque se é levado a estabelecer, para tang 0° o valor 0?».
Então, chegar-se-ia à expressão:
«quando α tende para 0, tang α tenderá, também, para 0».



Dá-se uma omissão análoga, ao considerar $4^0 = 1$.

7 De facto, segundo um princípio de permanência, somos levados a estabelecer $4^0 = 1$. Porém, deveria ter sido esclarecido, especificamente, que, de origem, as potências só foram estabelecidas para expoentes que sejam números naturais.

Deve-se acentuar a necessidade permanente — em termos, até certo ponto, globais — de desenvolver o raciocínio lógico.

Assim, cedo será de introduzir o aluno na distinção entre «definição» e «teorema»; sem o qual o raciocínio lógico não se poderá exercer. A propósito de numerosas situações de ensino, o aluno será «alertado»:

Aqui, parecer-lhe-á tratar-se duma experiência prévia ou de uma intuição, mas, de facto, tratar-se-á dum teorema ainda por demonstrar (frequentemente, um «teorema básico», ou até um «axioma»); ou dum teorema consequente (muitas vezes, um corolário).

8 Num 7.° ano de escolaridade, um professor falou das três possibilidades seguintes de transformações:

Reflexão, com auxílio dum espelho rigoroso.
Dobragem, em torno dum eixo.
Reflexão, referida a uma recta.

Desta forma se substituiu a noção matemática da simetria axial, no plano, pelos modelos físicos correspondentes de reflexão e dobragem.

9 No tratamento da divisibilidade, deve-se esclarecer o aluno que, de facto, muitos dos critérios são independentes dos sistemas de representação dos números. Assim:

Se a divide b e b divide c $\quad$ a divide $b + c$.

Porém, outros critérios há que são determinados pela representação especial dos números. Tal sucede, por exemplo, com a regra (válida no sistema de base 10 e referida à soma dos números que os algarismos representam):

«esta soma é divisível por 3 logo o número correspondente é divisível por 3».

Ora, enquanto no sistema de base 10, o número 24, por exemplo, apresenta a soma 6 — já na base 5, o mesmo número, sendo representado por 44, dá uma soma 8, não divisível por 3.

10 Um professor disse, num 4.° ano escolar:

«Devemos distinguir entre ''tirar'' ou ''subtrair'', por um lado, e ''ver quanto falta'' ou ''complementar'', por outro lado. A ''complementação'' é ''uma espécie de adição''.»

Em vez disto, deveria ele salientar que se deve distinguir entre adicionar e subtrair, e que «o ver quanto fica» ou «o ver quanto falta», são, apenas, duas maneiras de pensar e, por conseguinte, de falar e escrever sobre a operação única: a subtracção [Vide 58, pág. 158].

(4) A exposição e a representação de modelos duma noção matemática devem ser adequados a esta noção, isto é, serem isomorfos. Apresentamos mais exemplos no capítulo 4.1, Critério 1; aqui, basta este:

Num 2.º ano, escolheu-se, para tratamento do produto cartesiano dum 11
conjunto, no próprio conjunto, o seguinte exemplo: 4 amigos encontraram-se e deram, entre si, as mãos.

Ora este exemplo não é isomorfo, porquanto se, por exemplo, os pares ordenados (Bernd, Dieter) e (Dieter, Bernd) — dentro do significado de produto cartesiano — são diferentes, já o não são, na prática. Além disso, o produto cartesiano contém, por exemplo, o par (Dieter, Dieter), o qual na prática, não ocorre.

Isomorfo seria, sim, o seguinte modelo:

4 amigos na véspera do Natal, «presentearam-se», entre si, com um livro.

Neste modelo, os pares (Bernard, Dieter) e (Dieter, Bernard) são, completamente diferentes, e até o caso em que um oferece, a si próprio, um livro, por exemplo (Dieter, Dieter) se ajusta, completamente, à realidade.

(5) Dá-se, muitas vezes, o caso de, devido às condições não serem cuidadosamente classificadas como «suficientes» ou «necessárias», delas se concluirem proposições recíprocas falsas. Ou ainda sucede, que as conclusões das hipóteses não continuem a ser consideradas como hipóteses, mas, já sim, como afirmações verdadeiras.

A afirmação dum aluno do 8.º ano: «No rectângulo, as diagonais são 12
do mesmo comprimento, porque os lados opostos são do mesmo comprimento», não foi devidamente esclarecida pelo professor. Em primeiro lugar, nos quadriláteros, a condição, «lados opostos, do mesmo comprimento» não é, nem necessária (considere-se um trapézio isósceles), nem suficiente (considere-se um paralelogramo), para chegar à conclusão, «diagonais do mesmo comprimento».

A implicação estabelecida por um aluno: "$x^2=49$, logo $x=7$" é ilegíti- 13
ma, porque não se limitou, antecipadamente, o universo, ao conjunto dos números positivos. É válido, de facto "$x=7$, logo $x^2=49$", mas reciprocamente, de $x^2=49$ deduz-se, ainda, a solução $x= -7$.

Se não se insistir, desde o princípio e a partir dum exemplo fácil, num procedimento lógico exacto, mais tarde não se compreenderá (em casos mais difíceis, por exemplo, na solução desta equação com radicais, ($\sqrt{2x-3}=x-3$), porque é que, a partir duma prova — por razões lógicas tornada necessária e em que entra uma elevação ao quadrado — vem, que dos valores calculados $x_1=2$ e $x_2=6$, só o último seja solução.

(6) Muitas vezes, peca-se, directamente, usando determinadas simplificações e generalizações.

14 Num 9.° ano de escolaridade, a seguinte proposição dum aluno ficou por corrigir «Na potenciação só raras vezes se verifica a propriedade comutativa».

O aluno pensaria, acertadamente, que, na potenciação, só em casos determinados se poderiam trocar os números, sem que, com tal, os resultados se alterassem. Contudo, não reconheceria que só se pode falar duma propriedade, quando ela se verifica, para todos os casos.

15 Num 10.° ano de escolaridade, a princípio, nem o professor nem os alunos reconheceram a falta de raciocínio que, aliás, partira do próprio professor:

$$\frac{x}{\log 0{,}5} \geq \log 2$$

$$\text{logo, } x \geq \log 2 \cdot \log 0{,}5$$

De facto, não se reparou que log 0,5 é um número negativo, que impõe, na multiplicação, a passagem para a relação inversa, ou seja:

$$x \leq \log 2 \cdot \log 0{,}5$$

Como conclusão deste capítulo, formulamos o seguinte critério, para a planificação, execução e apreciação duma lição:

C_1	Cometeram-se, na lição, erros ou imprecisões de doutrina científica?

1.2 *Interdependência sob os aspectos de doutrina científica.*

Cada unidade de ensino compõe-se de várias passagens.

Neste capítulo, tratar-se-á duma ajustada sequência e articulação dessas passagens.

A sequência pode ter sido mal escolhida, por motivos metodológicos ou, também, temáticos. Este capítulo ocupa-se do segundo aspecto, onde se podem distinguir dois casos:

(1) Numa passagem, usaram-se ou anteciparam-se fundamentos, noções, teoremas, abstracções ou representações que, só mais tarde, serão introduzidos e tratados.

O ensino da matemática, no 2.º trimestre dum 1.º ano, foi organizado segundo o esquema: 16

— Introdução dos números de 0 a 9.
— Operações no intervalo numérico de 0 a 9.
— Introdução dos números de 10 a 20, através das noções do «dobro de...» e do «sucessor de...»
— Operações no intervalo de 10 a 20.
— Jogos de agrupamento em «blocos», segundo várias bases.
— Operações em sistemas de numeração não decimal.

Por um lado, há argumentos que depõem contra o tratamento de sistemas de numeração não decimal, no 1.º ano.

Por outro lado, mesmo se aceitarmos o esquema anterior, a sequência indicada não é a mais favorável: Segundo esta, serão introduzidos e representados números de 10 a 20, através da escrita de numerais, cuja construção só mais tarde será apreendida, na sua essência, através de jogos de agrupamentos. A isto há, ainda, a acrescentar, como argumento metodológico, que as operações de 10 a 20 e os relacionamentos ligados à representação dos números (por ex. as chamadas analogias, na base 10), serão apreendidas mais facilmente, na sua essência, nas seguintes condições:

Se, anteriormente, for apresentada uma convenção sobre a escrita dos números; por exemplo, se 17 for apresentado como uma dezena (formando um agrupamento) e 7 unidades.

Num 5.º ano de escolaridade, as classes resto foram, primeiro, introduzidas, em ligação com a adição das classes resto dos números naturais dígitos. Só depois se ensinou aos alunos que, na adição de classes resto, é indiferente a escolha dos representantes que se adicionam. Sem o conhecimento daquilo que, hoje, denominamos a compatibilidade da adição de números naturais, com a relação de equivalência «classe resto para a divisão por *m*», a definição da adição das classes resto não teria qualquer alcance. 17

Num 3.º ano, o processo de subtracção escrita com transporte, foi justificado pelo princípio expresso por: 18

$a - b = (a + n) - (b + n)$

A justificação da operação, junta, feita pelo professor, foi: «$8 + 5 = 13$; porque tivemos que pedir uma dezena emprestada às 6 dezenas, temos que acrescentar uma dezena às de baixo». Assim, $5 + 1 = 6$ $\quad 5 + 2 = 7$*.

$$\begin{array}{r} 763 \\ -\ 548 \\ {\scriptstyle +1} \\ \hline 215 \end{array}$$

* N. T.
O autor aplicou um método de subtraír por «complementação», pouco usado nas escolas portuguesas. Consiste em, mentalmente, ir adicionando ao subtractivo o complemento ao aditivo (que se irá inscrevendo como resto) e que adicionado ao subtractivo irá «dando» o aditivo.

Numa lição seguinte, os alunos não compreenderam porque é que a justificação não assentaria sobre a propriedade, $(a - n) - b = a - (b + n)$, então apresentada.

19 Num 1.° ano, a adição foi introduzida da seguinte forma:

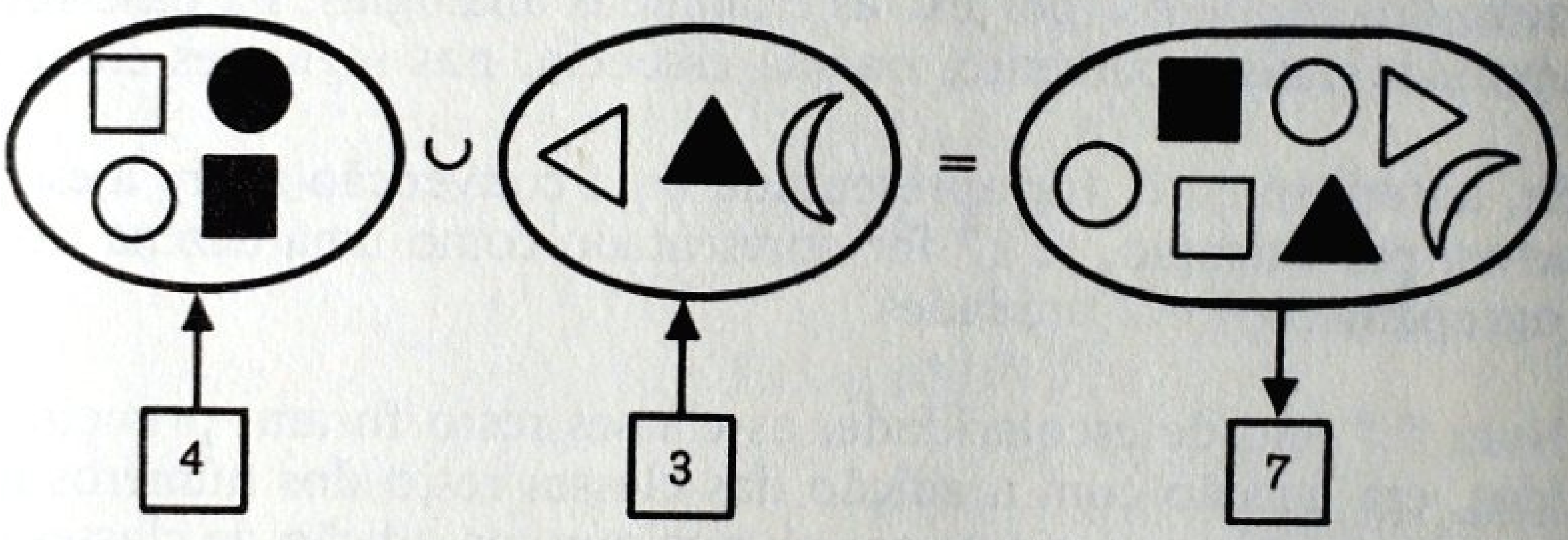
1.° passo. A exercícios de reuniões de conjuntos ligaram-se os correspondentes exercícios de adição de números.

2.° passo. Numa tarefa estática, associou-se, a dois números, a soma.

É evidente que a maior parte dos alunos não encontra qualquer estímulo para a resolução deste exercício.

Falta o passo intermédio, recíproco do primeiro:

Em correspondência com dois números dispor-se-iam, dois conjuntos disjuntos que, depois, seriam reunidos; o cardinal deste conjunto reunião seria determinado por contagem.



Em resumo de (1):

C_2	A sequência de passos é, cientificamente, coerente?

Também, em muitas lições, sucede o seguinte:

(2) De facto, a sequência em que os passos são apresentados está cientificamente coerente, porém, não é suficientemente explorada, na sua relacionação científica.

20 Num 5.° ano (ao apresentar-se o cubo), as faces e as arestas foram consideradas como conjuntos de pontos. Porém — e para continuar a explorar este conceito — as arestas não foram consideradas como conjuntos intersecções de duas faces contíguas, apesar de as operações sobre conjuntos serem, de há muito, conhecidas.

Analogamente, num 5.º ano, a relacionação entre as partes dum conjunto foi assim tratada:

1.º Passo: o exame de «conjuntos partes», em diferentes situações: entre outras, as de conjuntos partes de caixas de conservas derrubadas, ao atirar sobre 4 caixas.

2.º Passo: Definição das relações entre as partes.

3.º Passo: Cada conjunto é parte de si próprio (todas as 4 caixas foram derrubadas).

Muitos alunos acham um contrasenso a proposição de que todo o conjunto é uma parte de si próprio, pois a parte é sempre menor que o todo. O professor «safa-se» recorrendo à analogia: «Também se diz que um número é divisor de si próprio».

No lugar desta analogia, tão pouco esclarecedora, o professor deveria logo, desde o princípio, ter-se ocupado em definir um conjunto parte, por uma forma elaborada e aceite pelos alunos: Esclareceria que a sua introdução em matemática teria tido em vista que se podesse distinguir entre parte própria e parte imprópria. Em relacionamento, e na intenção de aprofundar, invocaria, depois, a analogia com a relação «... divisor de ...».

C_3	A relacionação entre os passos científicos está esclarecida?

1.3 *Núcleo matemático de uma unidade do programa*

Em primeiro lugar, é uma questão científica o que, num tema a ensinar, deve ser considerado como núcleo (cerne). Se nem sempre é possível responder univocamente a esta questão, podemos contudo avançar que, de uma maneira geral, aquele núcleo não é constituído por definições, expressões escritas e orais, ou processos isolados; juízo esse que se pode formar ao assistir a muitas lições. Antes, ele se pode procurar, nos relacionamentos e propriedades apreendidos, nestas tais lições.

A profundidade até onde o aluno deverá penetrar nesse núcleo é, pois, dependente de muitas condições didácticas e metodológicas. Mas se o professor, como tal, souber, antecipadamente, que ao tratar um determinado tema com os alunos, só poderá chegar a convenções e à aplicação dessas convenções a factos isolados, deve considerar seriamente, se este tema ainda virá a apresentar relevância didáctica.

Estas considerações resumem-se no seguinte critério:

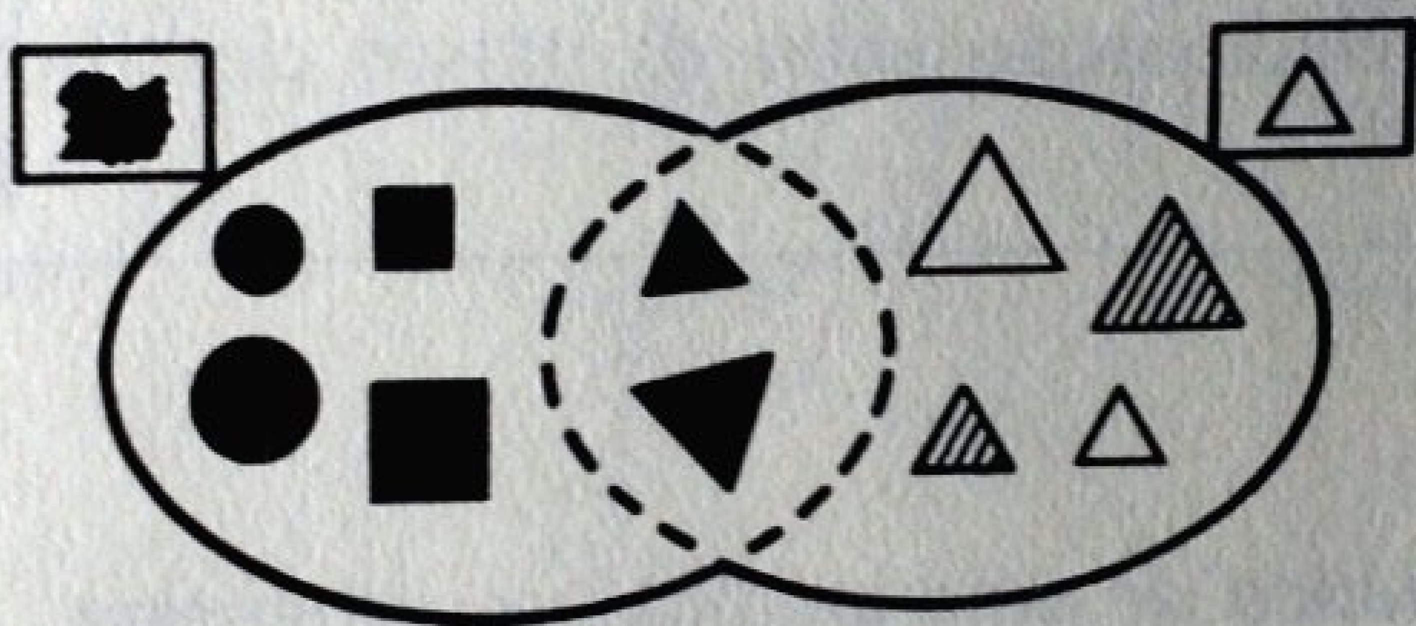
C_4	O núcleo do tema a ensinar é conhecido e acentuado pelo professor?

A este respeito, apresentaremos um exemplo do 1.º ano.

22 Na introdução do conjunto reunião, a matéria da lição consistiu na «junção» de dois conjuntos, a princípio dijuntos, e na denominação do conjunto reunião. Com referência a esta, o professor acentuou, por ex.º: «Chama-se assim o conjunto das fichas vermelhas *ou* triangulares».

No fim da lição o professor ficou muito perplexo, porque a maioria dos alunos, à pergunta do professor: «Que fichas estão no conjunto reunião?» respondiam, teimosamente: «Dentro de todo o espaço, estão as fichas vermelhas e triangulares».

O professor não reconheceu que, com esta resposta, os alunos não diziam nada de falso, pois eles atribuiam ao *e* o significado de, «as fichas vermelhas e além destas as triangulares» e não, como o professor pensava, ligavam o *e* às características de cada ficha que, sem dúvida, deviam ser «ligadas» pelo «*ou*».



Numa lição paralela a esta, pos-se, então, a questão, de maneira que ela incidisse sobre as características de cada elemento (P): «Se eu, agora, retirar do conjunto reunião, qualquer ficha, como é que ela é?». Os alunos reconheceram, sem esforço: «Ela pode ser vermelha ou, pelo contrário, triangular e, naturalmente, também pode ser as duas coisas, ao mesmo tempo».

(P): Assim, nós podemos, também dizer, abreviadamente:

«No conjunto reunião, cada ficha é vermelha ou é triangular».

Sucedeu ao professor desta lição atingir, assim, um dos possíveis núcleos do tema, ligado às seguintes relações lógicas:*

(a) $A \wedge B \Rightarrow \Rightarrow A \vee B$

(b) $A \vee B \Leftrightarrow \neg A \rightarrow B$*

N. T.

*O autor emprega, como sinal da negação, o sinal $\neg$

Exercícios em relação a (a):

I (P): «Levantem-se todos os alunos que têm na mão uma ficha vermelha e triangular».

II (P): «Levantem-se os alunos que têm na mão uma ficha que é vermelha ou é triangular».

As crianças reconheceram, em grande parte por si sós, que todas aquelas que se levantaram, da primeira vez, também o fizeram, da segunda vez.

Alunos (A): «Se uma ficha é vermelha e triangular, então ela, certamente, também é vermelha ou é triangular».

Exercício em relação a (b): Como em Dienes [20, pág. 53]*.

O tema duma prova, no 5.º ano, consistia em «divisor, conjunto de divisores e relações entre conjuntos de divisores» [consulte 4, pág. 80 e seg.]. 23

Na lição, esclareceu-se, muito bem, a questão do divisor, formaram-se conjuntos de divisores e, nestes, conjuntos de partes. O núcleo do tema, que se situava muito perto, e que se poderia atingir, através da propriedade:

$\text{Divisores}_a \subset \text{Divisores}_b \Leftrightarrow a$ divide b não foi acentuado. Isto muito embora a ocasião, várias vezes, se tivesse proporcionado.

Num 9.º ano escolar, e igualmente no contexto duma prova para professores, tratou-se dum exercício de optimização linear. 24

Na lição em sistema de coordenadas, determinou-se graficamente o polígono correspondente e o ganho óptimo, através das coordenadas dos vértices.

Porém, o núcleo do tema, isto é, o estabelecimento da função — objectivos e da sua representação gráfica para cálculo do valor óptimo — não foi acentuado e, nem sequer, anunciado durante a lição.

N. T.

*Vide, também «Matemática Moderna no Ensino Primário» — Dienes.

2. Objectivos duma Unidade do Programa

O objectivo predominante de muitos professores consiste em tratar — o mais possível sem omissões — a matéria prevista no livro; com o argumento, certamente justificado, de que o professor seguinte possa prosseguir, a partir daí.

Contudo, esta forma de estabelecer um objectivo é perigosa, pela razão seguinte: Muitos livros modernos de ensino, em virtude da extensão do seu conteúdo, devem apenas ser considerados como repositórios de tarefas [47, pág. 96].

Se não quisermos anquilosar o ensino, numa estéril e fatigante antecipação genérica de bases, sobre a qual nada poderá ser construído, é necessária uma escolha apropriada, feita pelo professor, em correspondência com as valorizações atribuídas ao tema. Para tal, o professor está, porém, obrigado a ter ideias sobre os objectivos do seu ensino.

A afirmação acabada de expor é, ainda, válida sob outro ponto de vista: Cada professor tem um estilo de ensino que lhe é peculiar, influenciado pelas suas próprias disposições, interesses e experiências. A este estilo pessoal deve ainda, geralmente, estar associado, em cada professor, um relevo próprio a dar às finalidades, que não devem já ser consideradas como um caso privado, mas sim como devendo satisfazer a exigências objectivas.

Em muitas aulas a que nos foi dado assistir, os professores revelaram-se-nos sob quatro tipos principais, segundo a importância relativa que dão, respectivamente, a:

(1) Formas correctas de expressão escrita e oral.
(2) Solução de problemas subtis.
(3) Estimulação extensa de formas de comportamento dos alunos que sejam espontâneas (independentes do professor), e traduzam um alargamento de representações, descobertas e disposições.
(4) Um domínio rápido e seguro dos processos básicos relacionados com o tema a ser tratado.

De facto, estes tópicos não se excluem e são, até, cada um de «per se», de um valor positivo; contudo, podem-se tornar perigosos, quando são prosseguidos, um por um, unilateralmente, à custa de outros objectivos importantes. Cada professor deve, por isso, de quando em quando, proceder a uma análise prescrutadora dos objectivos em vista.

Em caso ideal, tal análise poderá fazer-se, a partir de uma lista de objectivos, pormenorizadamente elaborada. Tais descrições encontram-se na literatura sobre o assunto [52, pág. 49]. Uma das mais elaboradas é a de Christine Möller [52] a qual, por sua vez, se apoia na Taxonomia de

Objectivos Educativos de Bloom e Guilford. Na de Möller, estabelece-se uma distinção entre objectivos limitados, globais e específicos, que se caracterizam por graus crescentes de abstracção. [52, pág. 49].

Objectivo limitado: Resolver este sistema de equações lineares, por meio do processo de adição (redução ao mesmo coeficiente).

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right| \begin{array}{l} a, b, c \in \mathbb{N} \\ x, y \in \mathbb{Q} \end{array}$$

Objectivo global: Aprender a determinar o conjunto de soluções de um sistema.

Objectivo específico: Poder dominar a aplicação de vários processos.

Os objectivos educativos podem, porém, ser classificados, não só segundo o grau de abstracção, como, também, segundo a esfera psíquica do processo de aprendizagem de que dependem. Consequentemente, distinguem-se os seguintes objectivos educativos:

(*a*) Objectivos cognitivos (percepção, memória, raciocínio, etc.).
(*b*) Objectivos afectivos (tendências, interesses, disposições, valorizações, etc.).
(*c*) Objectivos psico-motores (manuais, etc.).

Uma classificação um tanto diferente é a de Heimann e Schulz:
Distingue entre objectivos cognitivos, emotivos e pragmáticos [36].

Para o ensino da matemática, deve-se destacar, em especial, a detalhada exposição que se encontra em Lenné [47, capítulo II]. Também é de remeter para [1, pág. 127, 128].

Nos limites deste livro, o autor não pode expor e discutir qualquer lista detalhada de objectivos. Apenas se limitará a, no capítulo seguinte 2.1, salientar quatro centros de gravidade — que serão facilmente reconhecidos — e cuja consideração pode evitar, em grande parte, uma atitude unilateral. Os critérios expostos podem, talvez, referir-se, em correspondência com quatro domínios:

O raciocínio, o conhecimento, a aplicação, a atitude.

2.1 *Algumas elaborações de objectivos importantes*

O autor tem assistido a muitas lições, nas quais — como a metodologia tradicional requer [68, pág. 47-119] — os requisitos de clareza, actividade, vivência, solidez dos resultados, prática, adaptação à idade foram todos cumpridos. Poder-se-á, notar, ainda, um acréscimo de conhecimentos adquiridos; mas tais lições deixam, atrás de si, uma desagradável sensação de vazio. Se tentarmos indagar a razão deste, reconhecemos que os raciocínios, considerados tipicamente matemáticos, foram muito pouco solicitados e desenvolvidos (ou mesmo nada).

C_5	A lição contém bastantes situações que, para um grande número de alunos, ponham em jogo actividades, tipicamente matemáticas?

A seguir faremos uma discriminação das principais actividades intelectuais, sem intenção de formular qualquer classificação rígida. Esta discriminação seguirá critérios já expostos: As actividades intelectuais só serão tidas em conta se, em grande parte, intervierem sobre aspectos metodológicos, noutros locais. Por outro lado, desprezar-se-ão noções muito usadas, como a transferência de raciocínio, a possibilidade de relacionar, o pensamento criador, a possibilidade de reestruturar este, porque estão, implicitamente, contidas, noutras actividades intelectuais.

Actividades intelectuais de localização lógica (consulte Freudenthal, [28, pág. 6 e seg.]):

— Definir, isto é, a partir de adaptação a finalidades, encontrar uma convenção.
— Pôr hipóteses, deixar em aberto conclusões.
— Obter sequências de conclusões, para comprovar ou negar hipóteses, teoremas, proposições.
— Formular condições necessárias ou suficientes; provar se determinadas condições são necessárias ou suficientes; axiomatizar, isto é, investigar sobre a suficiência, independência e compatibilidade de condições.

Se dividirmos as noções de matemática, segundo o seu grau de abstracção, podemos, na esteira de Strunz [69, pág. 181 e seg.] (mas não em concordância com este autor), falar em actividades intelectuais: horizontais e verticais.

Actividades intelectuais horizontais

Comparar; associar; combinar; ordenar.
Encontrar diferenças de caso para caso.
Fazer variar as variáveis contidas numa noção.
Generalizar; ampliar.
Especializar; particularizar.
Tornar análogo ou assimilar.
Contrastar.

Actividades intelectuais verticais

Abstraír.
Representar; concretizar.

Actividades intelectuais psicomotoras

Representar manipuladoramente; operacionalizar.
Representar figurativamente; «iconisar» (representar por ícones); esboçar; esquematizar.
Expor verbalmente; verbalizar.
Desenhar; simbolizar; formalizar; codificar.

A classificação a seguir indicada salienta o caracter operatório da inteligência, segundo a qual todo o acto intelectual é uma operação, Piaget [61]*. Falaremos, pois, de actividades intelectuais. Por outro lado, distingui-las-emos, de uma maneira geral, das simples actividades manipuladoras, porque as primeiras, no sentido dum pensamento móvel, devem satisfazer a determinadas exigências. Por isto mesmo, serão também, indicadas por operações intelectuais [Aebli 2, pág. 75-83]*.

Atendendo a que uma das finalidades importantes do ensino da Matemática é conduzir a um pensamento flexível, as actividades intelectuais podem ser abrangidas e ordenadas, de acordo com o seguinte aspecto:

Actividades intelectuais sob o ponto de vista operatório

Operações reversíveis.
Operações associativas.
Operações compostas.

Uma vez que, neste livro, se interpretarão vários casos, segundo as operações acabadas de mencionar, bastará, nesta altura, dar um exemplo:

Numa lição, a um 2.º ano, de exercícios sobre a divisão (no significado 1
de repartição), foram fixados os seguintes objectivos:

1. Aplicar a divisão a numerosas situações da vida corrente (em que entrem ovos, maçãs, pessoas, cordões...).
2. Fornecer uma boa capacidade de cálculo.

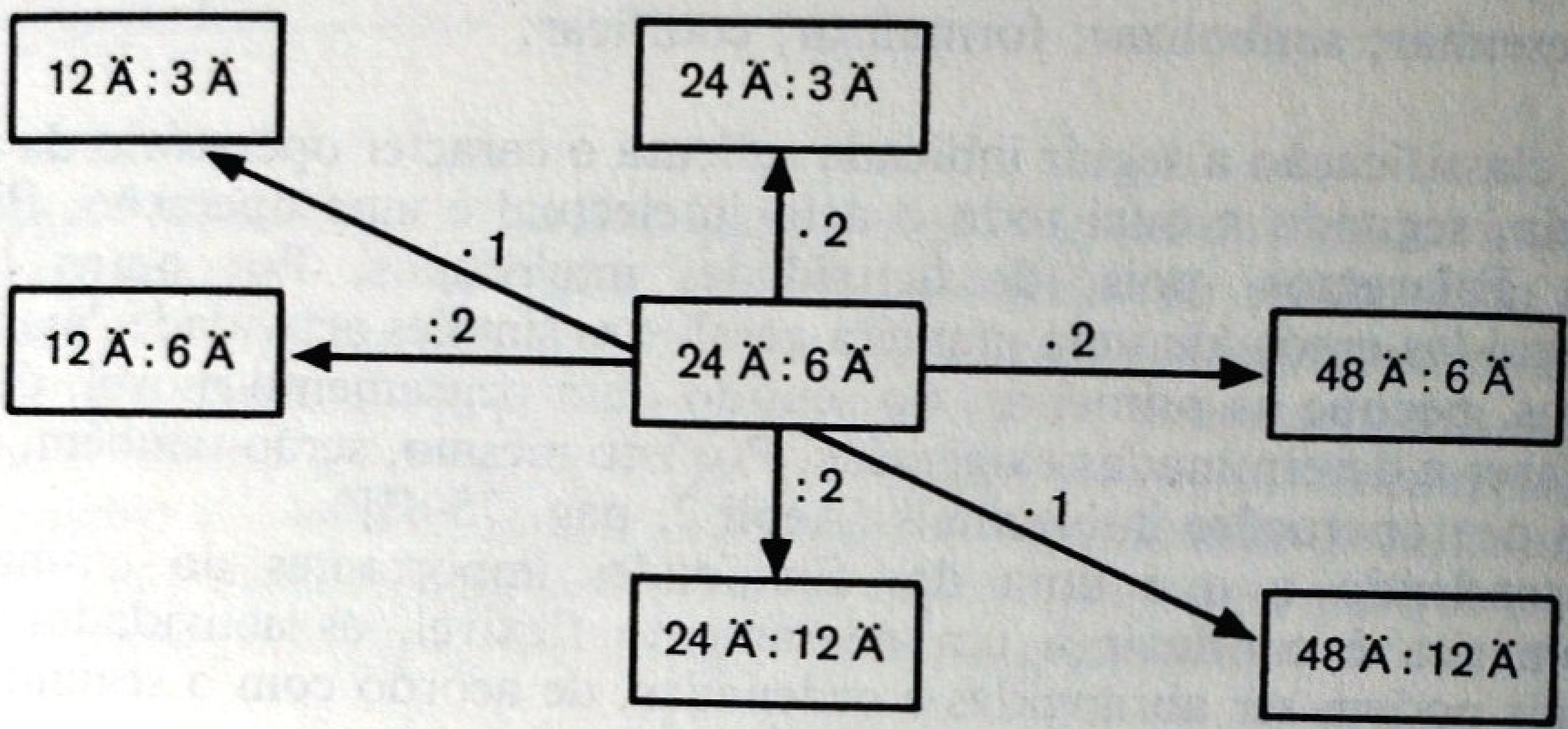
(Actividades intelectuais, no sentido mencionado em C_5, não foram, sequer, solicitadas).

N. T.
*Psychologie de l'Intelligence — Há uma tradução portuguesa: A psicologia da Inteligência (Livros Horizonte — Lisboa).
*Em tradução portuguesa: Hans Aebli — Prática de ensino, Editora Vozes — Brasil (pág. 95-106).

Procedendo a um exame e redução de grande número de situações vivenciais, poder-se-iam introduzir actividades intelectuais tipicamente matemáticas, através da formulação de problemas, tais como:

Numa loja, 24 maçãs foram embaladas, em sacos de 6 maçãs, cada. Como é que o número de sacos iria variar, se o total das maçãs (ou então, o número delas por saco), tivesse duplicado, ou reduzido a metade.

Obter-se-ia, então, o seguinte esquema, no qual haverá que discriminar várias partes:



As finalidades globais da lição teriam revestido as seguintes modalidades.

1. Aplicação da divisão, em situações da vida corrente.
2. Generalização (descoberta das propriedades, formulação verbal) e especialização (aplicação das propriedades especiais), com referência às seguintes propriedades:

$$a : b = \frac{a}{n} : \frac{b}{n} \qquad a : b = c \Leftrightarrow \frac{a}{n} : b = \frac{c}{n}$$
$$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n) \qquad a : b = c \Leftrightarrow (n \cdot a) : b = n \cdot c$$
$$a : b = c \Leftrightarrow a : \frac{b}{n} = n \cdot c$$
$$a : b = c \Leftrightarrow a : (b \cdot n) = \frac{c}{n}$$

3. Procurar analogias e distinguir casos (as crianças devem, por si sós, formular uma situação problemática análoga, da qual resultarão, também, 6 casos de variabilidade).
4. Desenvolvimento da capacidade de cálculo, para o que contribuirá, essencialmente, a formulação dos problemas a que acabámos de aludir.

Ligado ao desenvolvimento do raciocínio, tratar-se-á, no ensino, da construção dum sólido saber matemático:

C_6	Quais: *a*) As convenções (principalmente noções, expressões orais e escritas); *b*) As leis a serem formuladas; *c*) Os relacionamentos com os fundamentos (porque é válida uma lei, porque é que uma definição é significativa); *d*) Os processos; que os alunos devem exprimir, com segurança, em diferentes domínios de representação (manipuladora, figurativa, desenhada, verbal)?

Intencionalmente, evitar-se-á a noção de aprendizagem de conhecimentos, mas, pelo contrário, será acentuada a capacidade de dar respostas. Isto porque em numerosas lições, baseadas num extenso catálogo de objectivos, — e nas quais se invocaram todos os aspectos correspondentes — aqueles objectivos só aparentemente ficaram esclarecidos. Assim, no final, só se registaram vestígios muito fracos do aumento da aprendizagem; o que se revelou, principalmente, porque os alunos não ficaram em condições de reproduzir o novo saber, o novo trajecto dos conhecimentos.

Isto é válido, principalmente, para as chamadas lições de demonstração (teoremas de Pitágoras, de Thales, etc.), para as quais, em regra, no final, só raros alunos serão capazes de reconstruir a demonstração, se esta for apoiada numa figura levemente modificada.

Por isso, invocamos o problema da operacionalização dos objectivos da aprendizagem, do qual trataremos, mais detalhadamente, no capítulo 2.2.

O critério seguinte (C_7) refere-se às possibilidades de aplicação.

C_7	São consideradas as possibilidades de aplicação e transferência dos conhecimentos matemáticos e da capacidade de raciocínio, a outros sectores da vida diária, à profissão, e a outros ramos da Matemática?

Lenné pronunciou-se, muito claramente, sobre esta questão: Várias representações conceituais da Matemática Moderna não são de aconselhar, sob o ponto de vista da formação profissional, na sua generalidade, e, em especial, para a formação da cultura técnica [47, pág. 275].

Ao objectivo do ensino da Matemática — o de introduzir este, como o estudo das estruturas formais — é de impor, em parte, limites, devido, não só, à capacidade de abstracção dos alunos, mas, também, às necessidades profissionais e sociais; e isto, principalmente, no que se refere ao grau de formalização.

Por outro lado, há uma quantidade de aplicações relevantes e de aspectos super-profissionais que, pela primeira vez, só através da Matemática Moderna foram abrangidos. Pense-se no aumento de capacidade de expressão das crianças do 1.° ano (confirmada por muitos professores), obtida através do uso de material estruturado; ou no contributo que veio trazer para a compreensão de circuitos e computadores; na sobrevalorização dos usos da Estatística (através do tratamento pela Álgebra de Boole, do uso de outras bases numéricas e do Cálculo de Probabilidades). A lista poderá, ainda, aumentar muito.

O problema didáctico — ainda por resolver — do equilíbrio relativo a estabelecer entre objectivos a serem formulados, dentro ou fora da Matemática, não pode ser esclarecido, nos limites desta introdução. Na medida em que tal não é possível, podemos, contudo, salientar as duas exigências seguintes:

1. Cada professor deve, tão amplamente quanto possível, — e em relação a um dado assunto do programa, do livro escolar etc. —, introduzir (e reflectir sobre) todas as aplicações e aspectos acima da especialidade, que sejam importantes.

2. Por outro lado, o professor não deve procurar, unilateralmente, motivar cada tema, só a partir das aplicações e limitar-se, assim, a tratar destas: Juntamente com outros objectivos, é função importante da Matemática interessar os alunos, em questões puramente matemáticas.

2 Incisivamente, mas com critério, referindo-se ao desenvolvimento do tema — «Cálculo do perímetro do círculo e dedução de π» — uma candidata ao professorado escreveu:

«Qual é o aluno de 14 anos que se interessa pelo comprimento da franja que a Mãe terá que usar à volta duma toalha de mesa redonda, ou pelo perímetro do anel do casamento do Pai?».

Em vez disto, essa Professora desenhou, no princípio da aula, uma grande circunferência a giz, no quadro, e disse:

«Queremos, hoje, averiguar qual é o comprimento desta linha traçada no quadro. Todos os meios são permitidos.»

As tentativas de medições, com uma régua, deram resultados tão diversos, que os alunos, por si próprios, procuraram melhores processos. Depois de recorreram a vários, sem êxito, a professora deu uma sugestão: «Quem pode obter um comprimento tal que, em relação a este, se possa dizer — com absoluta certeza — que a circunferência não é, mais curta, (ou, então, mais comprida)»?

Em grande parte, por si sós, os alunos chegaram à inscrição e circunscrição de polígonos, e ao processo matemático do enquadramento por intervalos.

Por outro lado, uma lição ao 8.º ano, sobre o tema «Resolução numérica e gráfica de sistemas de equações a duas incógnitas», decorreu, com grande sucesso, ao ser incursa nesta aplicação: «2 carros com velocidades (v_1 e v_2) e inícios de percurso (b_1 e b_2), partiram ao mesmo tempo. Procura-se a hora ($x_1 = x_2$) em que se encontraram ($y_1 = y_2$)».

Com notável facilidade, os alunos aderiram à resolução, ligada à discussão das várias possibilidades de solução: uma, nenhuma, infinitas.

Observações como esta não nos permitem, em geral, dizer, à certa, qual é a insistência com que o aspecto da aplicação deve ser valorizado, através de lições específicas. Devem-se evitar, contudo, os recursos extremos.

O último critério a referir, em relação ao estabelecimento dos objectivos, devem incidir sobre as atitudes assumidas pelos alunos:

C_8	As atitudes seguintes recebem algum estímulo, durante a lição: *a*) A vontade de trabalhar, com independência? *b*) O interesse pelo assunto? *c*) A disponibilidade para uma socialização do comportamento?

O raciocínio e o comportamento independente, original, dos alunos não devem só ser acolhidos, como representando mudanças desejáveis de sistemas de ensinar Matemática. A vontade de trabalhar com independência e o interesse pelos assuntos são, em grande parte, das condições mais importantes para a disponibilidade e capacidade futuras de aprender — durante toda a vida — que, hoje, se requerem dos homens. Na medida em que criar tais condições, é finalidade permanente do ensino da Matemática, os outros objectivos — por exemplo, o da aquisição de conhecimentos — de forma alguma lhes são subordinados: antes constituem, para aquele, uma condição prévia indispensável. Assim, aparece em destaque a questão metodológica da motivação, que será tratada em 3.2.

Ainda uma breve observação, quanto à socialização do comportamento: O comportamento socializado, entre alunos, não se consegue, apenas, criando métodos — por exemplo, de trabalho em grupo — que o possibilite. Nesta conformidade, a seguir se citam algumas disposições que, conjuntamente com métodos de ensino apropriados (→ 3.4)*, podem levar a comportamentos socializados:

— A utilização dos alunos mais capazes, como auxiliares dos mais fracos.

* A seta indica que a referência vem mais adiante, no prosseguimento do livro.

— O «encaminhamento» dos alunos que sentem dificuldades; primeiro, para os outros colegas, antes de se dirigirem ao professor.
— A insistente imposição aos alunos para que oiçam os seus camaradas,afim de compreenderem os seus problemas e comparticiparem deles: Sobretudo, os erros ou as falhas de compreensão que surjam devem ser descobertos e esclarecidas, pelos próprios alunos.
— A realização duma divisão de funções (condutor de grupo, etc.) e seu intercâmbio entre alunos.

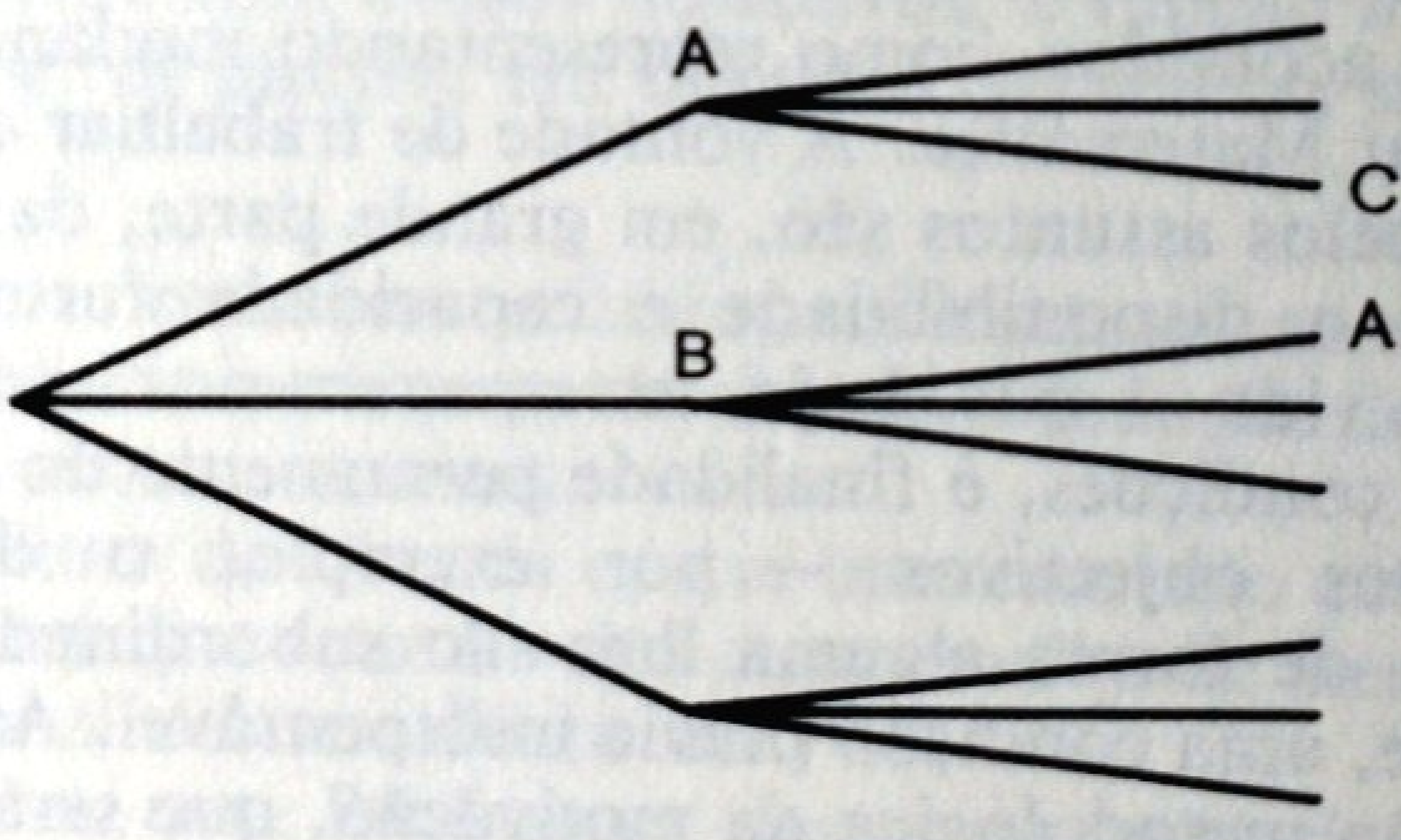
Uma das condições mais importantes, para alcançar este objectivo, é um comportamento aberto do professor, pronto a ajudar, isoladamente, cada aluno e a classe inteira, em globo.

Para final deste capítulo, vamos explorar, na sua finalidade, uma lição sobre Combinações a um 6.º ano.

O tema era o seguinte: «Dois, obtidos a partir de três, com repetição e consideração da ordem».

4 A lição, para a qual não foi formulado qualquer objectivo, decorreu nos seguintes passos:

1. Quadro da situação: o tio vem de visita e traz aos sobrinhos (Anton, Beate, Christa), 2 presentes.
2. Trabalhando em comum, as crianças procuram, todas as variações possíveis, que, intencionalmente, se escreveram, sem ordem, no quadro.



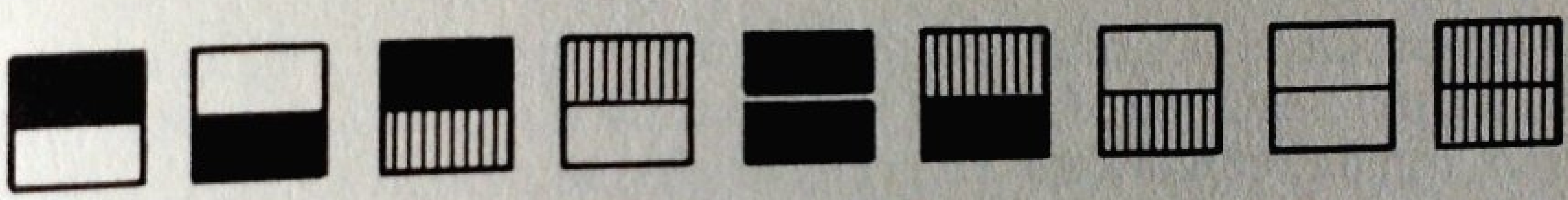
3. O professor desenha o esquema anterior no quadro, no qual ele próprio insere as primeiras soluções e as crianças, as seguintes.
4. As crianças copiam o esquema, para os seus cadernos.

A lição falhou, devido, não só, ao exemplo mal escolhido, que levou os alunos a concentrarem a maior atenção sobre a forma como se poderia chegar a uma repartição justa. Combinações intencionais (como A, A) não chegaram a ser consideradas pela maioria dos alunos, não obstante o professor ter acentuado, repetidamente, de que não se tratava de praticar justiça. Assim, a principal discordância incidiu contra a fixação dos objectivos.

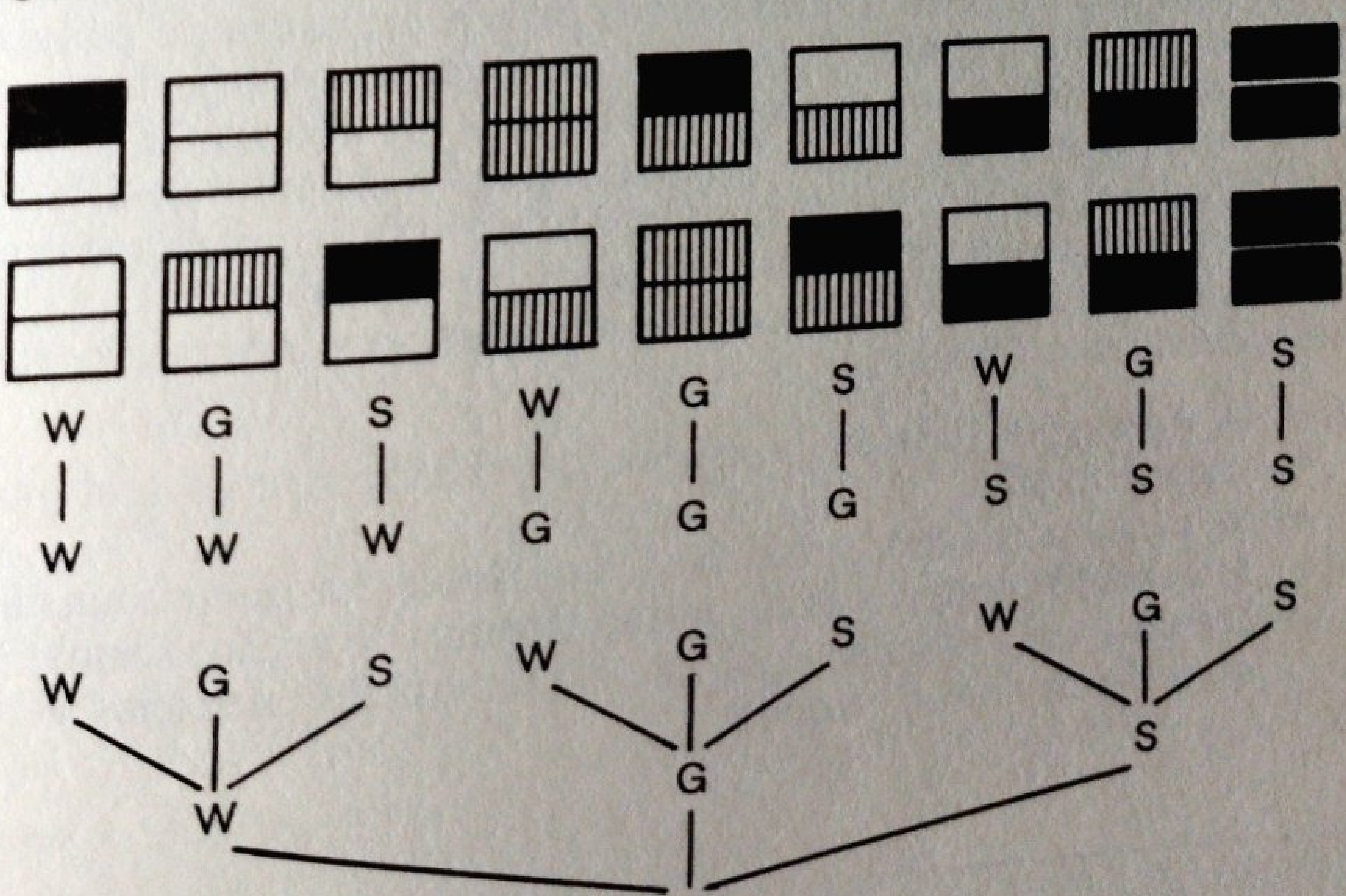
1. O facto da classe ter chegado, finalmente, a calcular todas as 9 combinações não indica, de forma alguma, que o professor tenha desenvolvido a capacidade para esse cálculo. É grande a possibilidade de que seja sempre por acaso (e mais duma vez) que algum dos trinta alunos esbarre em combinações omissas. Só poderemos falar do desenvolvimento da capacidade de formar combinações se — como resulta de C_5 e C_6 — cada aluno, só por si ou em grupo, as tenha encontrado todas. Assim, se revelaria, aos alunos, a necessidade de procederem, segundo um planeamento e uma ordem parcial, o que é um sinal importante da capacidade, para entrar a fazer análise combinatória.

2. Muito de ponderar é, também, o facto de o esquema da árvore ter sido fornecido aos alunos. Os esquemas ficarão, tanto mais aptos para mais tarde serem aplicados, quanto maior tiver sido a intervenção dos alunos, na sua descoberta. É o que se poderia ter atingido, por exemplo, através do seguinte processo:

   Cada aluno, ou cada grupo, constroi, com três cores diferentes (branca, verde, preta) todas as «torres» possíveis de dois andares:



A partir desta, poder-se-ia exigir uma disposição ordenada («assim não se poderia deixar de verificar se, de facto, o ''construtor'', teria pensado em todas as possibilidades!») Os passos graduais dos alunos afinar-se-iam e, finalmente, seriam esquematizados. Vide figura seguinte:



Possibilidades de escolha
do construtor

3. Ao limitarmo-nos a empregar, exclusivamente, o esquema da árvore, não só iriamos colidir com C_5 e C_8, mas também com C_6, na medida em que da lição não se poderia concluir se os alunos teriam apanhado, com segurança, a estrutura combinatória: se em condições eventualmente um pouco diversas, estariam em condições de reproduzir o esquema.

No lugar do desenho no quadro dum esquema como aquele, tão inutilmente extenso, os alunos poderiam ter desenvolvido árvores*, para os seguintes problemas, levemente alterados, em relação ao primeiro:

Agora, aparece mais o primo Dieter (cor vermelha). Como é que se deve completar a árvore?

O tio trouxe 3 presentes (as torres passam a ter 3 andares). Que modificações sofre, agora, a árvore?

Segundo C_7 poder-se-ia, talvez, entrar, também, em aplicações, tais como:

Uma firma construiu um modelo de automóvel, no qual a pintura e os estofos podiam ser escolhidos entre 4 cores diferentes: vermelha, bege, azul e doirada.

Depois deste capítulo se ter ocupado de diferentes espécies de objectivos, os três seguintes tratarão de assuntos nos quais, ainda e embora de forma rápida, continuará a haver referência a objectivos.

2.2 *Operacionalização e controlo dos objectivos de aprendizagem*

Para uma exposição detalhada do problema — como construir um objectivo da aprendizagem — remetemos para a literatura de pedagogia escolar, por ex. [41, capítulo 3.3]. Aqui trataremos, apenas, da necessidade — exposta, primeiro que todos, por Mager — de apresentar os objectivos sob a forma operacionalizada. Por conseguinte. salientar-se-á, a partir da descrição do objectivo, o que o educando deve fazer, para mostrar que o atingiu e, além disso, como os resultados serão avaliados.

Para tal, os objectivos devem ser indicados, por intermédio duma descrição detalhada, incluindo:

— as operações (por ex. a espécie de exercícios e os seus planos de representação);
— os meios auxiliares permitidos, ou não, e em que circunstâncias;
— as condições exteriores do ensino (formas de acção, formas sociais);
— a escala de avaliação (por ex. o número de exercícios a resolver, num determinado tempo).

---

* N. T.
Interpretamos, aqui, as árvores como vindo a seguir às torres.

Flechsig falou, dentro deste contexto, do que, para o ensino da Matemática, é particularmente significativo, ou seja, a: «Operacionalização, no plano de descrição das tarefas» [27].

A operacionalização dos objectivos da Matemática não é, apenas, um simples caso formal. Pelo contrário, só ela garante, no ensino da Matemática, um comportamento projectado — previsto, para cada capítulo, dos objectivos da aprendizagem. Isto tornar-se-á claro, através dum exemplo do 1.º ano:

Para o tema «Introdução da adição e subtracção no intervalo numéri- 5
co de 0 a 5», um candidato a professor esboçou, os seguintes objectivos:

1. Os alunos devem dominar a adição e a subtracção, no intervalo de 0 a 5.

2. Devem reconhecer os significados de «mais», «menos», «igual», e saber aplicar estes conceitos.

Os objectivos assim formulados não se podem considerar como operacionalizados, porque é evidente que não são inequivocamente controláveis. Os objectivos de aprendizagem sobre o mesmo tema, mas de forma operacionalizada, podiam, por exemplo, ser expressos assim:

1. A partir de vários gráficos, representando a reunião (ou a complementação) de conjuntos (feitos pelo professor), reconhecer e exprimir que o número de elementos, contados a partir dos conjuntos de partida, coincide com o número de elementos contados no conjunto $A \cup B$ (ou $A \setminus B$) — Condições: $a \cap B = \emptyset$ (ou $B \subset A$).

2. A partir da representação concreta, ou por gráfico, da reunião (ou complementação) de conjuntos, indicar uma igualdade que exprima por escrito, também oralmente, a soma (ou a subtracção) — usando os sinais de «mais», «menos» e «igual».

3. Resolver um exercício de adição (ou subtracção), com auxílio de diagramas de conjuntos, e obter o resultado, através de contagem.

4. Poder verificar o resultado alcançado, servindo-se duma recta numérica, em que o exercício será «figurado», através de flechas curvas.

A partir destes objectivos, se conclui o que o educando deve fazer, para demonstrar que os alcançou.

O controlo que, duma maneira realista, deve ser feito para todos os objectivos da aprendizagem, tem de, facto, um efeito próximo: o de permitir ao professor uma avaliação de rendimentos. Porém, mais importantes do que esta avaliação são as consequências que dela resultam, para a condução futura do ensino.

C_9	Procede-se na Escola: *a*) de forma, reconhecidamente clara e operacional, a uma formulação de objectivos? *b*) Estes são, de facto, controlados? *c*) As consequências resultantes do controlo são tidas em consideração, para o prosseguimento do ensino?

2.3 *Análise dos objectivos da aprendizagem, sob o aspecto antropológico*

Há sempre aulas preparadas com bastante cuidado e que, contudo, falham, porque, na sua concepção, as predisposições que os alunos trazem consigo foram tidas em pouca consideração.

C_{10}	Os objectivos da aprendizagem foram, antes de tudo, adaptados às condicionantes cognitivas e afectivas da turma?

6 Num 3.° ano, em aula de rotina, a sucessão dos números de 20 em 20 foi introduzida, exclusivamente, a partir da adição iterada. Verificou-se que quase todos os alunos, mental e independentemente do professor, tinham escolhido uma via mais simples: o uso da propriedade associativa. Isto é, não:

$$4 \cdot 20 = 20 + 20 + 20 + 20 = 40 + 20 + 20 = 60 + 20 = 80$$

mas sim:

$$4 \cdot 20 = 4 \cdot (2 \cdot 10) = (4 \cdot 2) \cdot 10 = 8 \cdot 10 = 80.$$

O professor cometeu uma falta: forçar os alunos na via, que era a sua. Na preparação da aula, ou então durante esta, o professor deveria ter partido de ambos os processos; inclusivamente, da sua comparação.

7 No exemplo 4, apresentado em 2.1, o professor não teve em atenção que, os «sentimentos de justiça», de rapazes de 11-12 anos se podem antepôr ao interesse em questões de conhecimento.

2.4 *Análise dos objectivos da aprendizagem sob aspectos metodológicos*

Já no estabelecimento de objectivos de aprendizagem para uma unidade do programa, ou para uma lição, se terá, logo, optado por decisões metodológicas essenciais, principalmente se tratarmos de objectivos detalhadamente operacionalizados.

Aquelas opções podem, principalmente, referir-se a:

— Formas de representação (→ 3.1)
— Formas de introduzir os problemas (→ 3.3)
— Sequência dos problemas (→ 3.6)

De facto, no ensino da Matemática, a ligação entre o estabelecimento dos objectivos e o método a seguir, surge tão íntima, que não só a discussão dos métodos logo se deveria ter posto, ao estabelecer os objectivos, mas reciprocamente: estes não deveriam ser formulados, sem se conhecerem as possibilidades de usar os respectivos métodos eficientes.

Mostramos, em dois exemplos, já apresentados anteriormente, como no estabelecimento de objectivos, surgem, logo, decisões sobre os métodos a seguir:

No exemplo 5 de 2.2, ocorrem para a fixação dos objectivos 1-4, as **8**
seguintes premissas:

a) Tratamento simultâneo da adição e da subtracção (→ 3.6.2, processo de relacionamento).
b) Exploração de todos os campos de representação (→ 3.1).
c) Possibilidades do controlo próprio (pelo aluno).

No exemplo 4, de 2.1, optou-se pelas seguintes vias de introdução: **9**

a) Nenhum método genético de ensino (→ 3.4.1): os alunos completaram, apenas, o esquema da árvore.
b) Através da condição «2 presentes para 3 crianças», está já assumida a possibilidade de apresentar a solução, sob o plano operatório; de facto, só a representação figurativa ou esquemática permite apreender, simultâneamente, todas as 9 possibilidades.
c) São completamente banidas formas mais «aprofundadas» de pôr o problema (→ 3.3).

C_{11}	Os objectivos de aprendizagem estão adaptados às exigências metodológicas?

3. Didáctica especializada

A parte principal deste livro ocupa-se de questões de didáctica especializada. Por didáctica especializada deve-se entender uma sucessão de critérios apropriados, para garantir, neste caso, a consecução dos objectivos do ensino da Matemática, exposta em 2.1.

A designação de didáctica especializada aparece, aqui, tanto mais justificada, quanto mais específica for a referência de critérios, à disciplina da Matemática; os quais só com uma adaptação, poderão ser transferidos para outras disciplinas. Nesta conformidade, ficam excluidas do nosso tratamento, em grande parte, as questões de interesse metodológico geral.

Mesmo em relação à didáctica especializada, não poderemos aspirar, neste livro, a um tratamento completo. Os critérios apresentados devem ser compreendidos, só como auxiliares para orientação, nos domínios da planificação, execução e apreciação do ensino. Têm demarcados âmbitos de validade e provêm, por um lado, de numerosas experiências de ensino; pelo outro lado, da literatura especializada.

Na discussão com os candidatos a professores, revelou-se, com frequência, que os muitos exemplos citados, para clareza e para estímulo, sugeriam interpretações completamente diferentes, por vezes mesmo opostas; o que era, principalmente, devido a terem surgido em situações especiais diferentes de turma.

3.1 *Formas de representação do tema matemático a ensinar.*

Neste capítulo, tratar-se-á desta questão: Sob que planos pode o estudante «abordar» a mateŕia de ensino; que possibilidades isoladas se encontram à sua disposição nesses vários planos; e que alcance metodológico pode ter o jogo combinado daqueles planos.

Bruner distingue três «Media» diferentes, sob os quais se pode experimentar qualquer coisa: o que se faz, o que se representa figurativamente, e o que se usa como meio simbólico (por ex. a linguagem) [10, pág. 27]*.

Mostra-se-á, como a simples escolha dos processos de apresentação e da forma apropriada de os introduzir, influem, decisivamente, na extensão em que se irá estimular o raciocínio matemático.

---

* N. T.
O título original da obra citada, em inglês, é: Bruner, Jerome — Studies in Gognitive Growth (New York, John Wiley & Sons, Inc 1966).
Ver, ainda, do mesmo autor: Bruner, Jerome — Uma nova teoria de aprendizagem (Bloch Editores, Rio de Janeiro) — (pág. 24-32).

3.1.1 *Processo interiorizado por via de manuseamento*

Sobretudo, as investigações de Piaget* vieram mostrar que as crianças, até à idade de 11-12 anos, para chegarem a assimilar certas experiências e conhecimentos, necessitam de lidar, concretamente, com os objectos e de os manusear. Os manuseamentos operatórios prévios não devem, assim, ser relegados para o mero aspecto metodológico da motivação ou da alternância. Mas devem, sim, ser considerados como um aspecto essencial, para a introdução do raciocínio matemático. Esta concepção baseia-se na já citada tese de Piaget [2,1]**: todo o pensamento é uma operação.

Sob o ponto de vista metodológico, tal concepção deve ser encarada, sob dois aspectos:

1. Em primeiro lugar, trata-se de encontrar, para a matéria do ensino da Matemática, manuseamentos, que sejam adequados e estimulantes para a inteligência. Isto significa que os manuseamentos não serão meros processos divertidos, tais como se podem encontrar, frequentemente, nos jogos comerciais.

Mas, sim, que ligando os objectos manuseados e o assunto dos manuseamentos — deverão apresentar componentes, relacionamentos ou sequências, que fundamentam a noção matemática.

Um professor que trata de «relações» no 1.° ano, não está, ainda, a 1
proceder com orientação operatória, ao limitar-se a colocar fichas, sobre o chão, e a mandar desenhar flechas, segundo a indicação, «... tem mais vértices do que...» De facto, utiliza objectos de referência concretos; porém, estes só estão a ser relacionados uns com os outros, por meios gráficos.

Em orientação de manuseamento operatório, o professor poderia, por exemplo, ter procedido assim: Cada criança dum grupo coloca, na sua frente, uma ficha. Uma criança agarra numa bola e pode lançá-la para outra, se puder dizer: «A minha ficha tem mais vértices do que a tua».

As crianças da escola primária experimentam, em geral, dificuldades, no reconhecimento da propriedade reflexiva de uma relação; porém, já fizeram a experiência, muito tempo antes da idade escolar, de que é possível lançar a si próprias uma bola (de facto, quando a lançam em altura).

As crianças, por exemplo, acham «estúpida» a indicação, «... tem a mesma cor que...» e (no plano gráfico) a de terem de traçar uma flecha em anel para a indicar. Assim, na maioria dos casos, de tal se esquecem. Porém, no plano de manuseamento operatório, sentem, como tarefa excitante, descobrir uma relação, segundo a qual uma delas lança, a si própria, uma bola.

N. T.

* Além de:
Piaget — Psicologia da inteligência, pode-se consultar ainda com proveito:
John L Phillips, J R — Teoria de Piaget sobre as origens do intelecto (edição Sócio-cultura) — Pág. 178-179.

** Hans Aebli — Prática de Ensino (tradução brasileira-Editora Vozes).

A operação de «lançar» é adequada à noção matemática de relação, na medida em que esta — como sendo um conjunto de pares ordenados — é representada por um conjunto de operações. A existência ordenada de pares é, então, representada pelo sentido do lançamento. Apropriadamente, o manuseamento operatório possibilita, assim, uma apreensão da lei. Lei essa que, considerada noutro domínio, muitas vezes, permaneceria estranha, para estas idades.

Uma outra forma de manuseamento operatório é «o indicar-se, um ao outro».

Porém as crianças reconhecem, rapidamente, o inconveniente destes comportamentos manipuladores: O conjunto de todos os possíveis lançamentos diferentes não se deixa abranger em globo, por uma só vez. Tal facto pode, então, ser utilizado como uma valiosa motivação para se passarem a usar os diagramas de flechas. O reforço de percepção que adquire um determinado sentido de lançamento aparece expresso, ainda, sob outra forma: Uma criança desenhou, entre as fichas estendidas sobre o tapete, a flecha em sentido contrário ao certo. A sugestão, para reflectir um pouco mais, não levou a qualquer correcção. É evidente que a criança ainda não alcançou a compreensão subjacente ao uso da linguagem: sujeito-objecto.

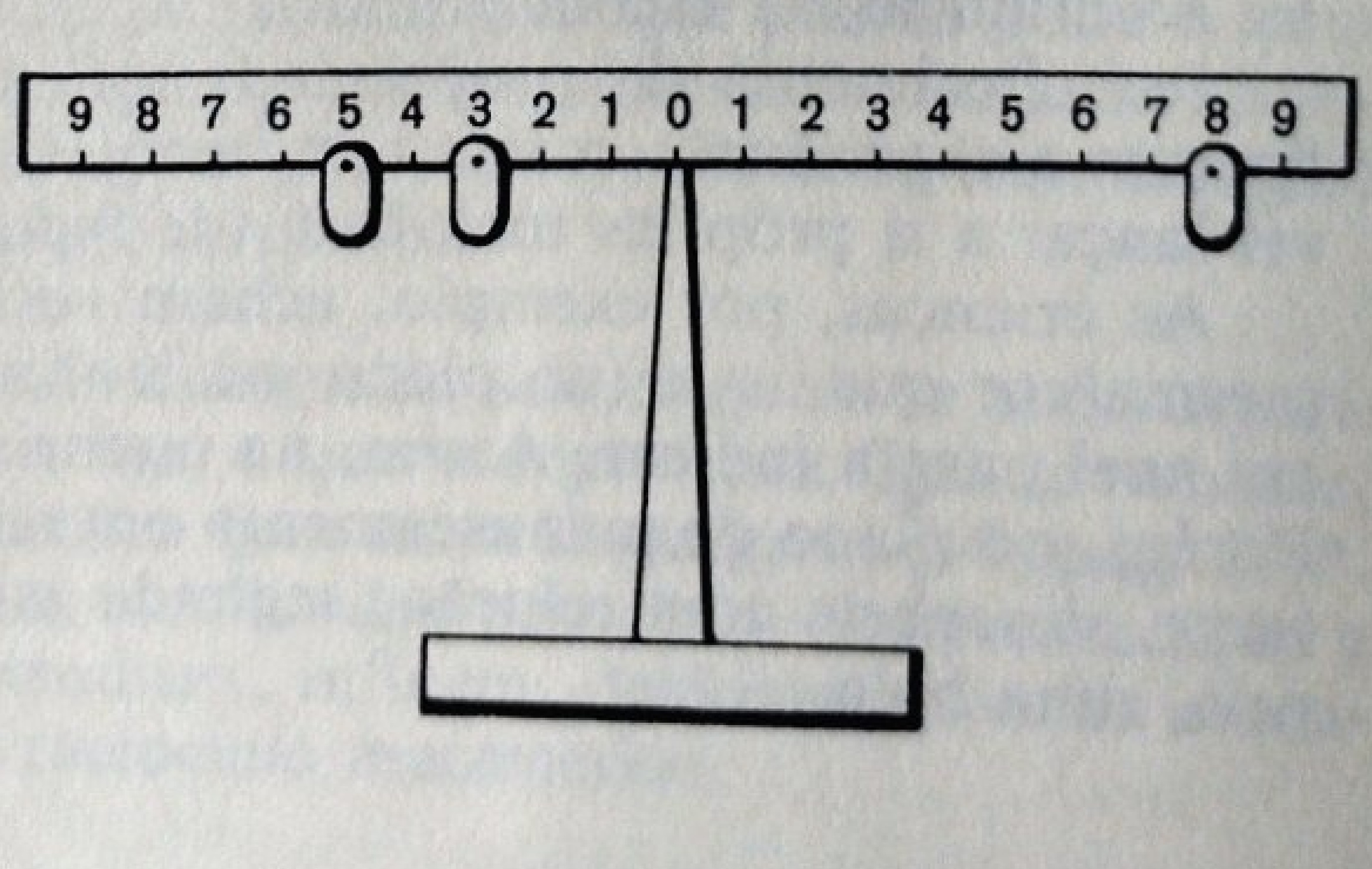
Só, quando ao professor estagiário lhe ocorreu a ideia de mandar colocar a criança, no lugar das fichas e, assim, verificar se podia lançar a bola, no sentido das flechas, ocorreu a percepção. Após as últimas correcções, a criança exclamou:

«Agora também sei fazer, sem me colocar nos lugares».

Ainda alguns outros exemplos, sem apreciação pormenorizada:

2 A noção matemática de correspondência biunívoca pode ser dada de forma manipuladora, através da sobreposição, aproximação, ou ligação de objectos, por cordões.

3 A igualdade de números, por ex.º de $5+3$ e 8, corresponde ao resultado manipulador de repormos a balança em equilíbrio.



4 Podemos adoptar o seguinte manuseamento, para determinarmos os restos da divisão dum número por 4:

Pomos, sobre uma mesa, um conjunto de elementos (peças de Lego, cubos...) correspondente ao número dado (cada grupo de 4 elementos, tanto quanto possível aglomerados, e os restantes destacados).

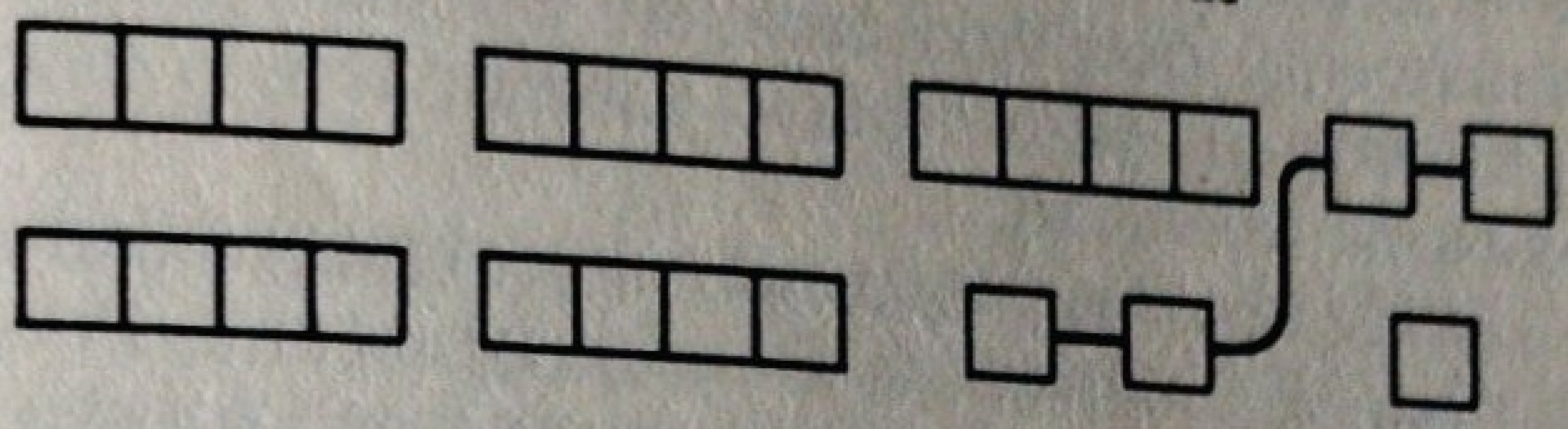
A adição das classes resto pode ser representada, recorrendo a uma graduação de abstracções que envolvem:

Classes resto. — Números. — Conjuntos. Isto é, recorendo à reunião de dois conjuntos de barras de 4; à junção dos restantes elementos em barras de 4; à contagem dos elementos restantes:

Classes resto módulo 4 $\quad \overline{2} \oplus \overline{3} = \overline{1}$

Números cardinais $\quad 14 + 11 = 25$

(Cubos) — Conjuntos



Observações técnicas: Em determinados casos, não se verifica qualquer isomorfismo, entre as estruturas manipuladoras e as estruturas matemáticas. Poder-se-á verificar, apenas, um homomorfismo. O requisito frequentemente invocado — inclusivamente, mais adiante, neste livro — de que a estrutura manipuladora seja isomorfa da estrutura matemática, é um requesito ideal, mas não necessário, sob o ponto de vista metodológico. Em geral, é metodologicamente, suficiente uma transformação homomorfa, da estrutura manipuladora em estrutura matemática.

Quanto à maneira de como o assunto «números primos e decomposi- 5
ção em factores primos» pode ser «manipulado» remetemos para a literatura da especialidade (por ex. [70, pág. 197 e seg.]).

2. Deve chamar-se, insistentemente, a atenção, para um aspecto metodológico omisso, em muitas lições. Frequentemente, dá-se, no ensino, o seguinte caso:

O professor fez muitos esforços, para organizar aparelhagem própria, adequada às manipulações; os alunos conduziram estas, com notável dispêndio de tempo. Contudo, não se nota um efeito sensível, no prosseguimento da aprendizagem. A causa reside, muitas vezes, no seguinte:

Os alunos executaram, efectivamente, as manipulações, mas estas eram tão rígidas no seu encadeamento imediato, que os alunos, uma vez sujeitos ao abandono posterior das representações (e do raciocínio assente sobre elas), esbarravam em alcançar o resultado. Quando então, tinham de calcular este, queixavam-se eles de que as possibilidades de percepção e de raciocínio tinham sido pouco trabalhadas, para a nova situação.

Para evitar uma manipulação cega (ou de vista curta), pode-se, então, proceder de duas formas: em seguida à manipulação, manda-se o aluno descrever o que é que ele, propriamente, fez; ou — o que é mais excitante e, ao mesmo tempo mais intensivo — pede-se-lhe para prever, antes da manipulação, qual será o resultado desta. A manipulação assume assim, mais ou menos, a função dum controlo do decorrer das representações e processos de raciocínio.

Nalguns casos, porém, a manipulação é tão complexa, que não se pode abranger, de uma só vez. Então, oferece-se a possibildiade de conduzir uma experiência antecipatória, por meio de manipulações parciais.

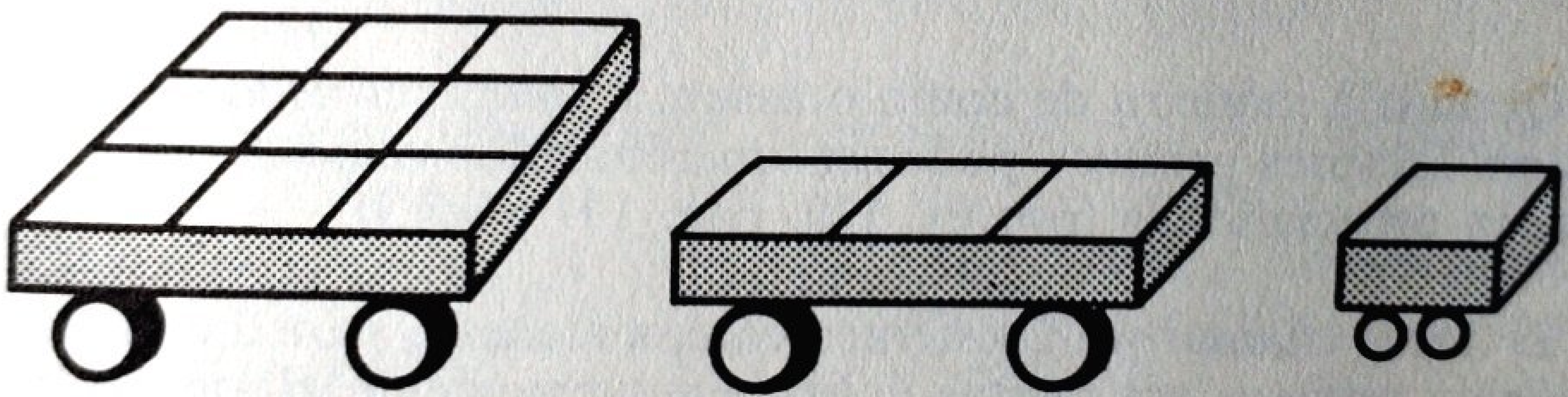
Este aspecto metodológico deve ainda ser contemplado, embora de forma resumida, pelo lado psicológico.

Segundo Piaget, nas actividades de raciocínio puro — que podem ser verbalmente representadas ou formalizadas — tratar-se-á de operações interiorizadas. Na interiorização duma operação, o processo operatório transfere-se, do plano concreto e visual, para o plano das representações e, finalmente, para o plano formal; com o que nada se altera a estrutura lógica da operação.

Aebli que descreveu neurologicamente este processo de interiorização [2, pág. 73]* , defende, consequentemente, a posição de que, no ensino, o processo de interiorização deve ser metodicamente apoiado [2, pág. 73]**. Se, portanto, este subcapítulo foi referenciado pela designação «Processo interiorizado por via de manuseamento», por tal se deverá entender um método que procure desenvolver, conscientemente, a passagem dos manuseamentos efectuados, para a representação destes. É o que se vai ilustrar, com alguns exemplos:

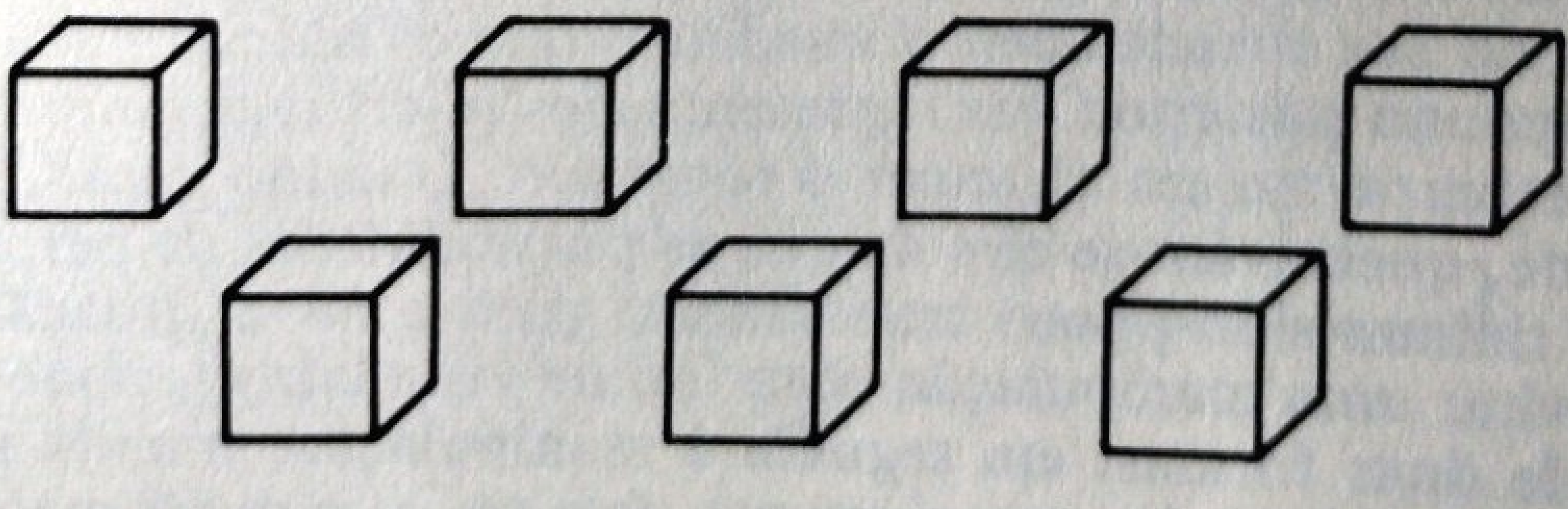
6 Num 2.º ano escolar, o sistema de numeração de base 3 foi introduzido por meio deste engenhoso modelo operatório:

Uma empresa de transportes tem 3 carros.



Carros de carga pesada (para 9 caixotes) — Carros ligeiros (para 3 caixotes) — Carros (para 1 caixote)

Numa mudança, trata-se de transportar os seguintes caixotes:



N. T.
Da tradução portuguesa: Hans Aebli — Prática de ensino (1970):
* Pág 81 e seguintes.
** Pág. 92.

O condutor recebeu indicação, para só fazer a mudança, com os carros completamente carregados, de forma a evitar percursos desnecessários.
Todas as viagens devem ser registadas num livro.

Carros de carga pesada	Carros ligeiros de barras	Carros para um caixote	Número de caixotes
?	?	?	7

Para todos os exercícios, nos quais se deve encontrar um cardinal de base 3 para um dado conjunto de caixotes — ou reciprocamente — as crianças podem calcular o resultado, por meio de simples manipulações, e sem considerações prévias ou posteriores. (Como caixotes empregar-se-ão peças de lego, colocadas em caixas do tamanho correspondente).

Apesar das variadas manipulações realizadas, no final, muitas crianças não estavam, ainda, em condições — sem ser manualmente, isto é, a partir só de representações — de conseguir o propósito do referido exercício: fazer transferências, entre os sistemas de base 10 e 3. Uma causa importante do insucesso deveria ser que as crianças, em momento algum dos primeiros dez minutos, foram solicitadas para representar a situação, antes do princípio da manipulação. De facto — não logo a partir da primeira tentativa, mas, contudo, imediatamente a seguir à primeira manipulação realizada com êxito — as crianças deveriam pensar previamente (com a mente), a partir dum conjunto de caixotes e, mais tarde, a partir dum número dado desses caixotes: «Sabes, agora já, antes da maçada do carregamento, quantas vezes deves fazer o caminho com o carro ligeiro ou com o carro de «um só?».

Além disso, para as crianças mais fracas, deveria, também, ser prevista a possibilidade de, depois da pura fase manipuladora, fortalecerem as suas possibilidades representativas: Para tal, controlariam, por iniciativa própria, os resultados assim calculados — independentemente das manipulações, e logo a seguir recorrendo, novamente, a estas.

Uma capacidade de representação assim impressa, com este desenvolvimento, deve, também, ser uma condição importante, para o domínio da adição escrita, tal como se inscreve neste quadro:

	Carros pesados	Carros de barras	Carros de um
		2	2
+	1_1	0_1	2
	2	0	1

7 Para introdução do quilograma, a uma turma do 3.° ano, um professor quis proceder o mais manipuladoramente possível; para tal fez circular, pela aula, pesos de 500 g, 1 kg e 2 kg. De facto, nada há a objectar a este procedimento. Contudo, é de perguntar, se assim estaremos, propriamente, a desenvolver a capacidade de percepção dos alunos, pois estes já a possuiriam: por exemplo, em relação a 1 kg, através duma embalagem de 1 litro de leite.

Dar ao aluno a percepção de 1 kg tinha menos importância — por ser a repetição duma experiência já feita — do que alargar os conhecimentos dos alunos à noção de classe de todas as massas, que podiam ser postas em correspondência com 1 kg. Tal se conseguiria, de forma mais efectiva, se aos alunos se apresentassem várias massas: uma rede com maçãs, um pacote de açúcar, uma garrafa de vinho, um livro, um pão etc. Eles, então, em ligação com as representações, avaliariam a qual das massas 1 kg, 1,5 kg etc., corresponderiam as massas apresentadas. Por meio duma balança, seriam, depois, verificadas e reproduzidas as percepções.

É diferente o caso para a introdução do m^3, do qual poucos alunos possuem experiências e representações concretas. Neste caso, é aconselhável colocar, diante dos alunos, um cubo com 1 m de aresta. Os alunos ficam, principalmente, espantados com o tamanho do m^3.

A teoria de intriorização de Peaget tem, entretanto, levado a que, no ensino — principalmente em instrução primária — todo ele venha a começar com as mãos. Assim a linguagem, em confronto com o manuseamento,terá sofrido uma subvalorização, já que, só por efectiva manipulação, se poderia realizar o raciocínio: o manuseamento efectivo seria o único alimento para o raciocínio.

Bruner e os seus colaboradores efectuaram investigações detalhadas sobre este problema, cujos resultados levantaram fortes dúvidas sobre a generalidade da teoria da interiorização. Assim, apresentam os meios de representação figurativa e simbólica (principalmente os verbais) como equivalentes aos do manuseamento.

Sonstroem escreve a este respeito [10, pág. 267]*: «Devemos, aqui..., pôr em questão a convicção geral de Piaget, em relação a uma capacidade cognitiva, como sendo o resultado da interiorização dos manuseamentos e das suas transformações em operações: há circunstâncias que invalidam esta regra. A afirmação geral de Piaget não fornece qualquer esclarecimento seguro, sobre o processo psicológico que entra em jogo, na aquisição duma capacidade cognitiva...» A propósito das consequências metodológicas de esta posição, referir-nos-emos, em 3.1.6, à linguagem.

Como conclusão deste subcapítulo devemos, salientar três possibilidades particulares, que podem surgir, duma aproximação orientada manipuladamente e interiorizada.

1. A elaboração e o emprego dum modelo manuseával pode despertar problemas matemáticos que, a não ser assim, provavelmente, nunca seriam considerados.

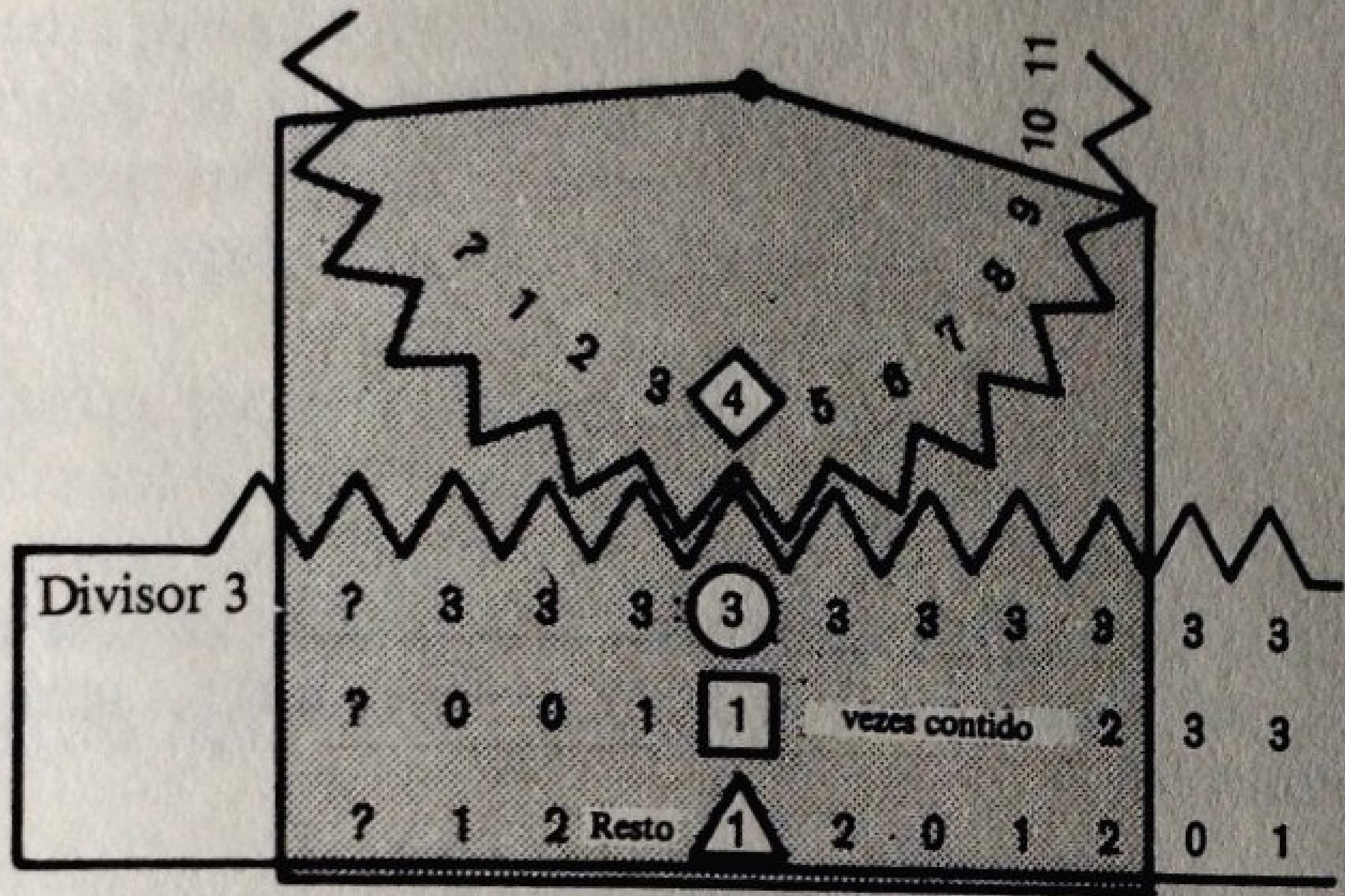
---

* N. T.
Vide ainda: J. Bruner — Uma nova teoria da aprendizagem, já citada — Pág. 21-22.

No 5.° ano, a elaboração duma máquina de divisão, levou, por si própria, aos seguintes problemas matemáticos: 8

— Devemos principiar a roda dentada por 0 (o número 0 é divisível? 0 : 5?).

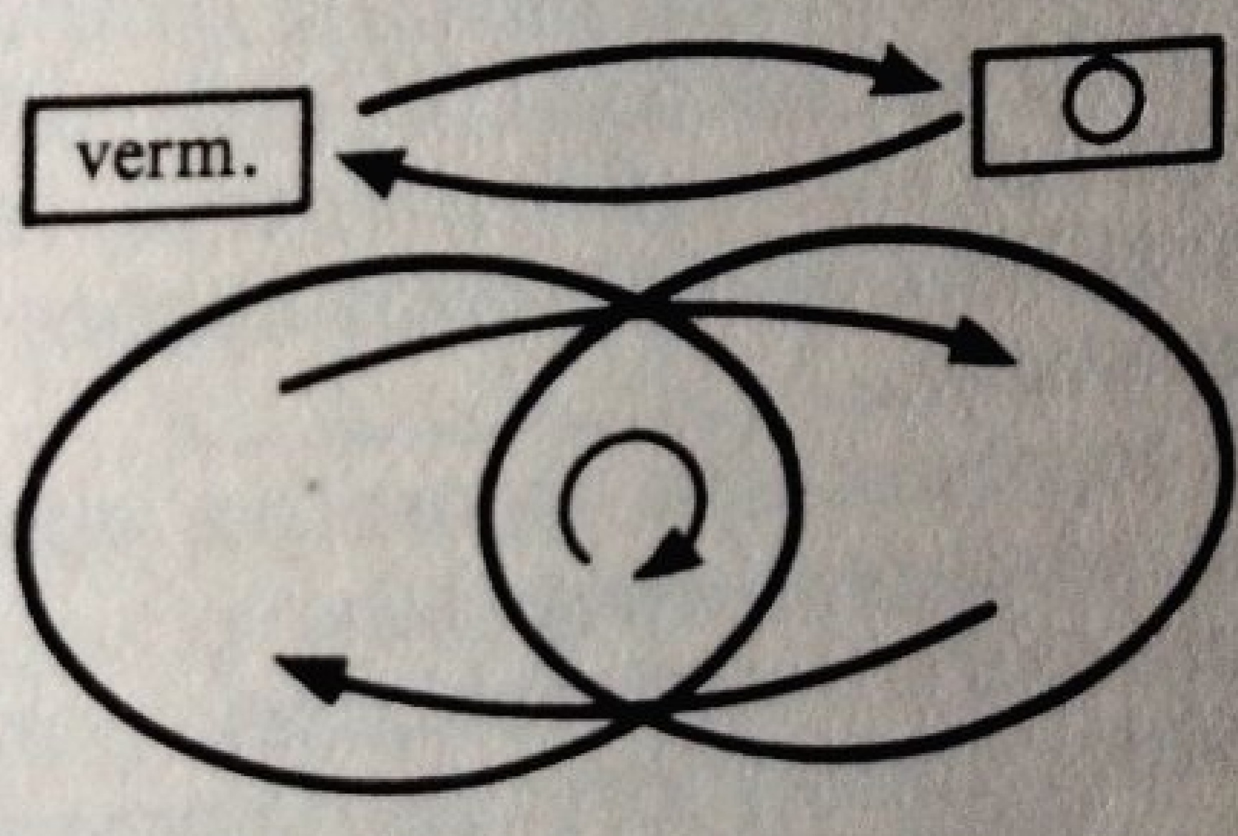
— Devemos usar uma régua de divisor 0 (pode-se dividir por 0? por exemplo, 5 : 0?).



A máquina aproxima-se da definição da relação «... é divisor de ...» (ou seja, $\circ$ divide exactamente $\diamond$, se existir um número $\square \in \mathbb{N}_0$, tal que $\square \cdot \circ = \diamond$). Com auxílio desta definição, podemos resolver os dois problemas (veja [70, pág. 171]).

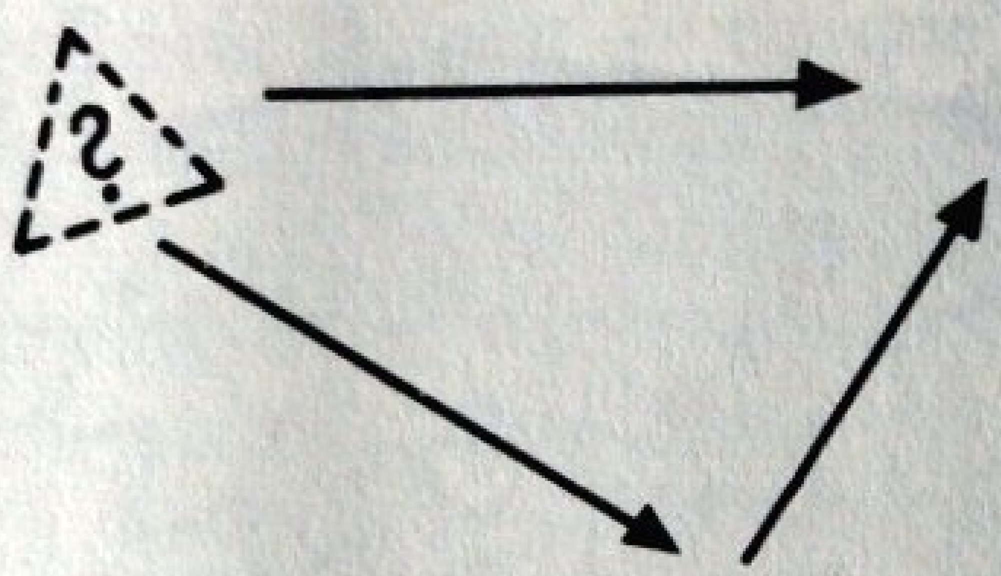
2. Os manuseamentos permitem consciencializar, com clareza, certas propriedades, através das suas representações figurativas ou simbólicas.

A propriedade comutativa da operação de intersecção de conjuntos 9 torna-se, imediatamente, perceptível, para as crianças, se numa mutação de fichas, em diagrama de Venn, só trocarmos as duas regiões parciais, «à esquerda» e à direita» e deixarmos ficar a da intersecção.



3. Continuamente se verifica, pela prática do ensino, que alunos que não respondem a questões de índole estatística, rapidamente, porém, chegam a compreendê-las, se lhes apresentarem as questões de forma operacionalizada: se lhes derem ocasiões para um manuseamento (efectivo ou representativo).

10 No estudo da relação «... tem menos vértices do que ...», a partir do conjunto-universo dos blocos lógicos* — uma criança colocou, no lugar da esquerda um triângulo. Não soube responder à pergunta do professor: «Porque é que ali, o triângulo está mal?» Só depois de se dar à criança a oportunidade de várias experiências, ela chegou à percepção: «no meio** deveria, então, ser um quadrado; à direita deveria ser um pentágono. Como não há nenhum pentágono devo retirar o triângulo».



Observa-se, a propósito, que a percepção conduziu a uma demonstração indirecta, que a criança dificilmente teria feito, sem a possibilidade dum manuseamento.

11 Um aluno que fica embaraçado perante a pergunta «O que é uma simetria central?» pode, sem qualquer auxílio, responder a esta outra. «Como se efectua uma simetria central?».

3.1.2 *Representação figurativa*

Sob representação figurativa de um tema de ensino, deve-se entender todo o meio espacial, plano ou linear, em que são expressas propriedades fundamentais desse tema — de tal forma que o aluno, através da percepção, o possa reproduzir. Para tal, esse meio será tanto mais apropriado, quanto mais ele poder ser compreendido, como o resultado de operações que, por seu lado, serão típicas, para o tema matemático a ensinar.

A representação figurativa diferencia-se, fundamentalmente, da manipuladora, porque na primeira falha a componente temporal da segunda. Por um lado, a figurativa pode ser apreendida mais dificilmente que a manipuladora, porque contém em si, simultâneamente, muitos aspectos e opções, enquanto que, nesta última, os aspectos e opções aparecem sucessivamente, segundo uma ordenação.

Mas, por outro lado, a representação figurativa apresenta, em confronto com a manipuladora, vantagens essenciais:

1. É mais adequada para informações isoladas, porque os aspectos fragmentados, se for necessário, podem ser, imediatamente captáveis, en-

---

N. T.

* Há no mercado conjuntos de blocos lógicos: peças que, pelo menos, costumam variar em três atributos: forma, cor e grandeza. Quanto à forma, os blocos são, geralmente, triangulares, quadrangulares e circulares.

** Parte inferior da figura.

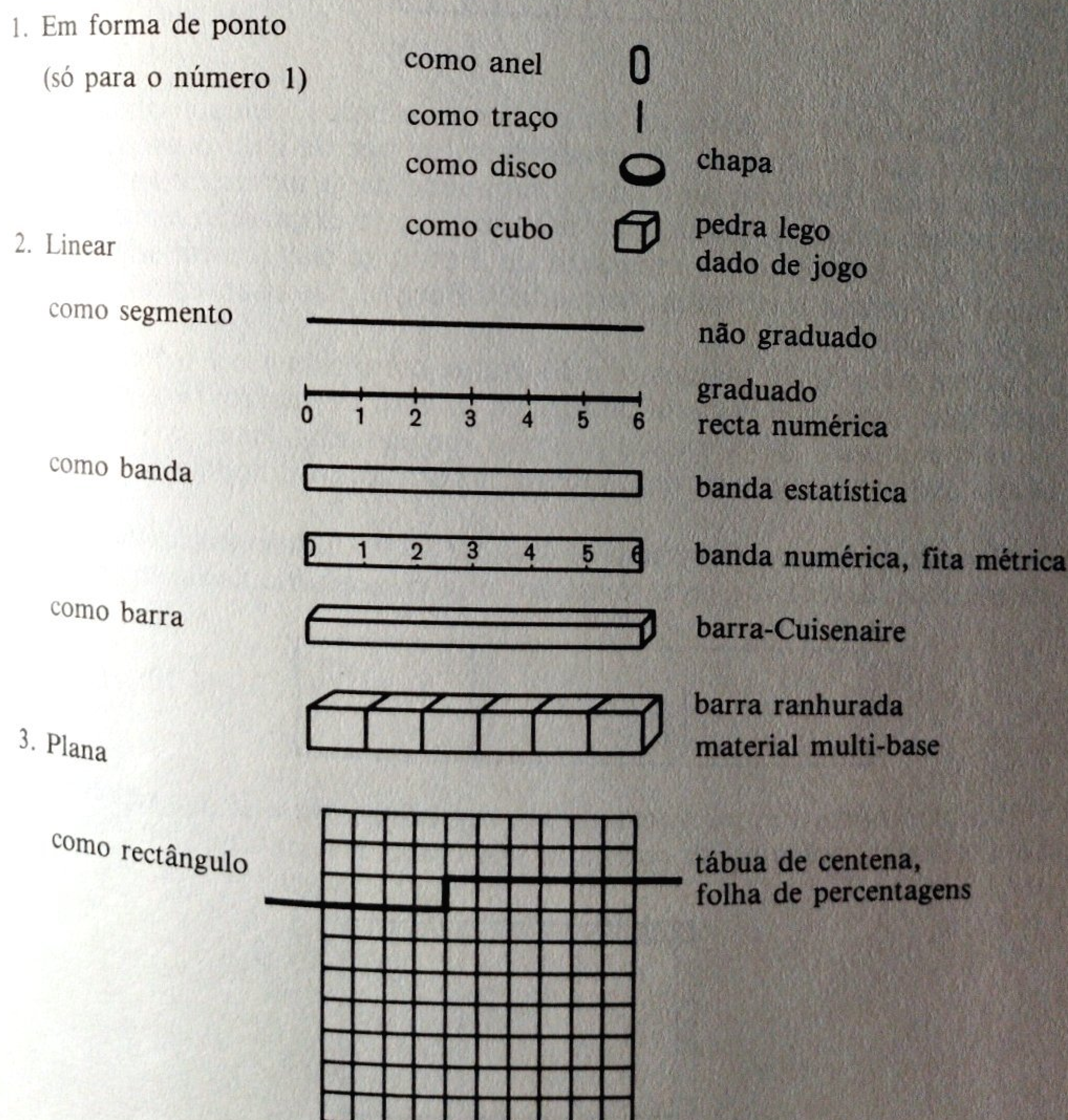
quanto numa manipulação, muitas vezes, só através do desenrolar «memorístico» de todo o trajecto, podem ser invocados.

2. A representação figurativa é também mais apropriada para a captação de relações, porque nela ocorrem, simultâneamente, diversos aspectos que assim podem ser mais facilmente comparados, uns com os outros. Propõe-se por exemplo o estudo de A x B de forma manipuladora; em que A é um conjunto de carros de carga e B um conjunto de atrelados: O produto carteseano não surge, como tal, porque os pares isolados devem ser sempre desfeitos, para se poderem formar outros. Pelo contrário, através do gráfico, todos os pares são formados simultâneamente.

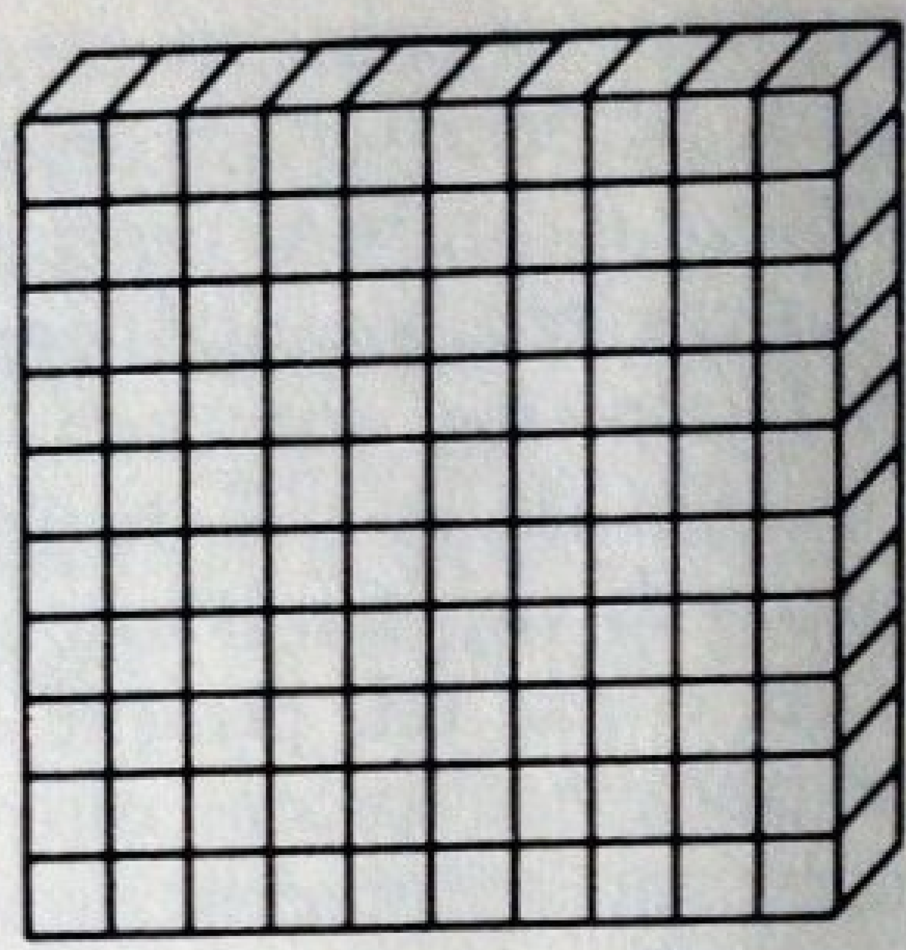
3. Através da representação figurativa, podem salientar-se, facilmente, partes essenciais, por meio da cor, do reforço de traço, etc.

De seguida, damos uma visão, embora incompleta, de algumas possibilidades mais importantes de representação figurativa esquemática. Deve-se deixar, para um livro detalhado de metodologia, uma discussão fundamentada das respectivas vantagens e inconvenientes.

(1) Representação figurativa de números:



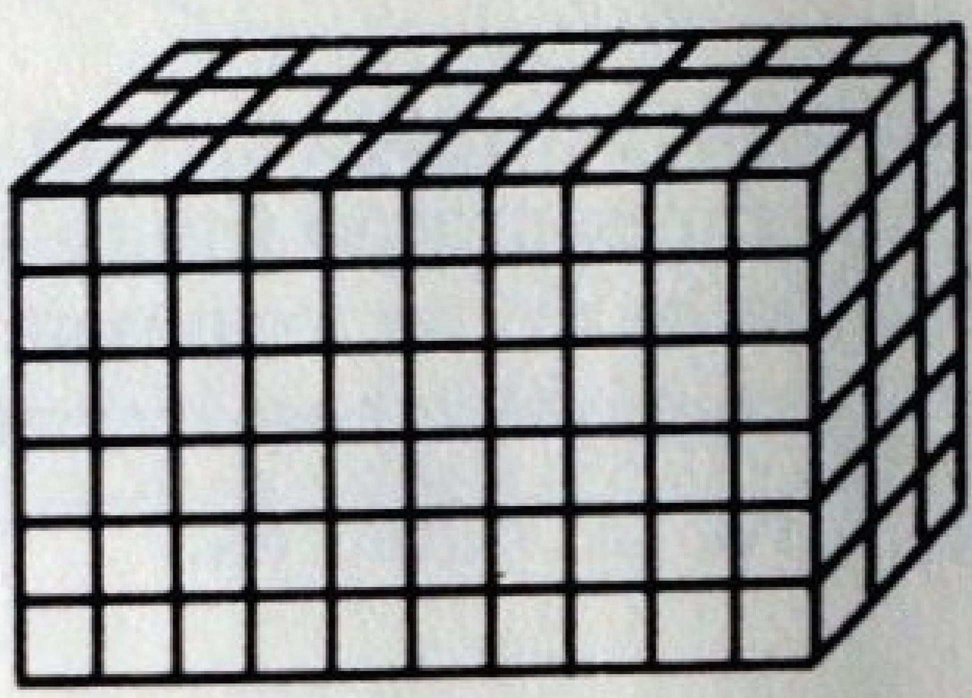
como placa



material multi-base,
chapa de encaixes (as fichas podem ser encavilhadas)

4. Volumétrica

como paralelepípedo



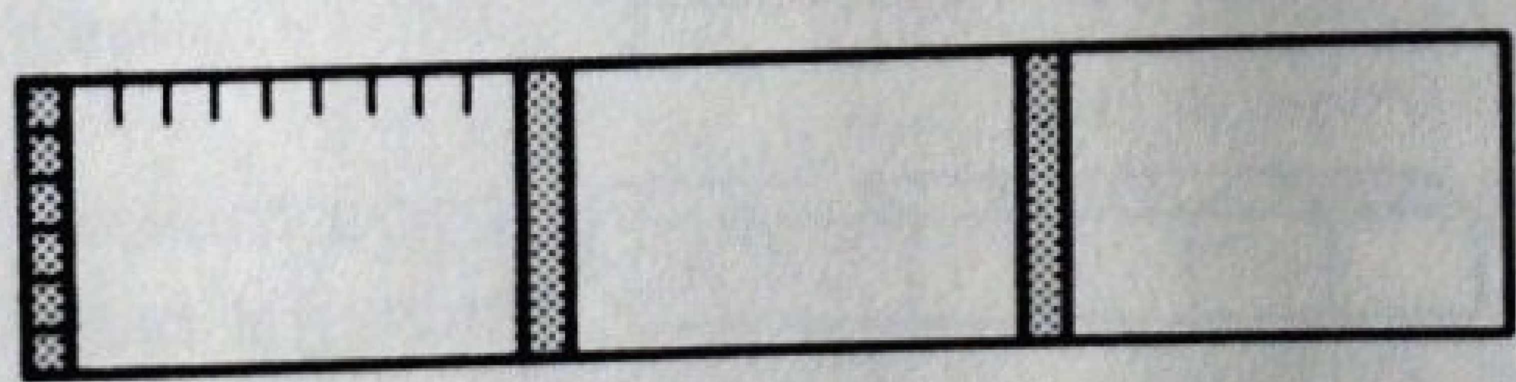
material multi-base

12 Os meios de representação devem ser escolhidos, cuidadosamente. Na representação de números, é, geralmente, de pôr de lado o uso do plano ou do espaço. Para dar ao aluno a impressão da grandeza de 1 milhão de marcos (em moedas), geralmente usar-se-á, só, a disposição linear: «Uma moeda de 1 Marco tem a espessura de 2 mm; se elas fossem sobrepostas que altura teria a torre assim formada?» Porque não usar, então, o plano ou o espaço:

«Uma nota de 10 marcos tem 13 cm de comprimento e 6,5 cm de largura. Que superfície poderia cobrir um milhão de marcos?»

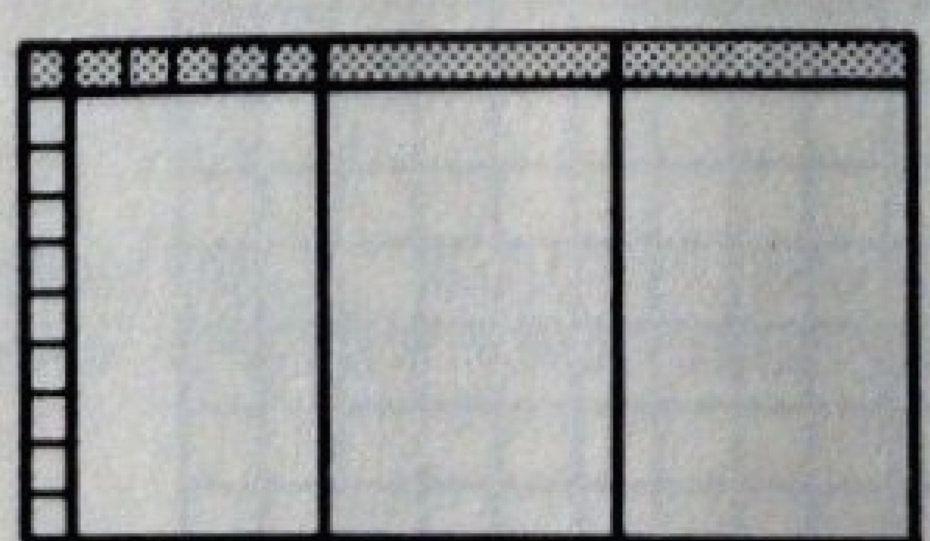
«Uma moeda de 1 marco ocupa, aproximadamente, o volume de 1 cm^3. Que volume teria a caixa, necessária para conter o milhão de marcos?»

13 Para demonstrar a propriedade associativa da multiplicação dos números naturais, a seguinte representação teria pouca articulação mental:



$3 \cdot (6 \cdot 10) = (3 \cdot 6) \cdot 10$

Pelo contrário, seriam directamente sugestivas: ou a última representação a três dimensões acima indicada ou, então a seguinte:

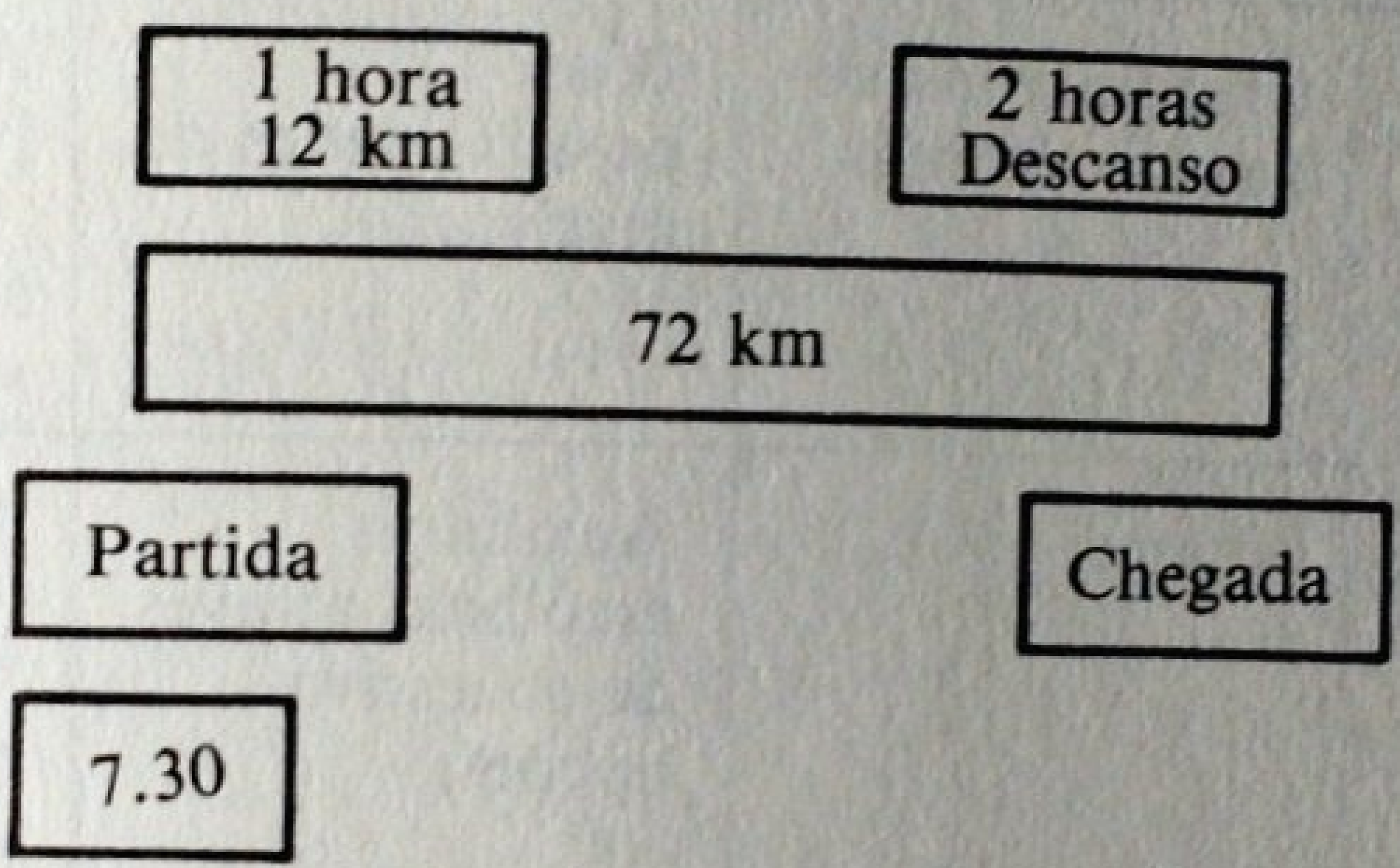


Com o auxílio dos blocos multi-base, pode-se também, dar uma repre- 14
sentação clara das regras de divisibilidade, ligadas à divisão por 3 e por 9. Indicação bibliográfica [70, pág. 182].

(2) *Esquemas da situação*

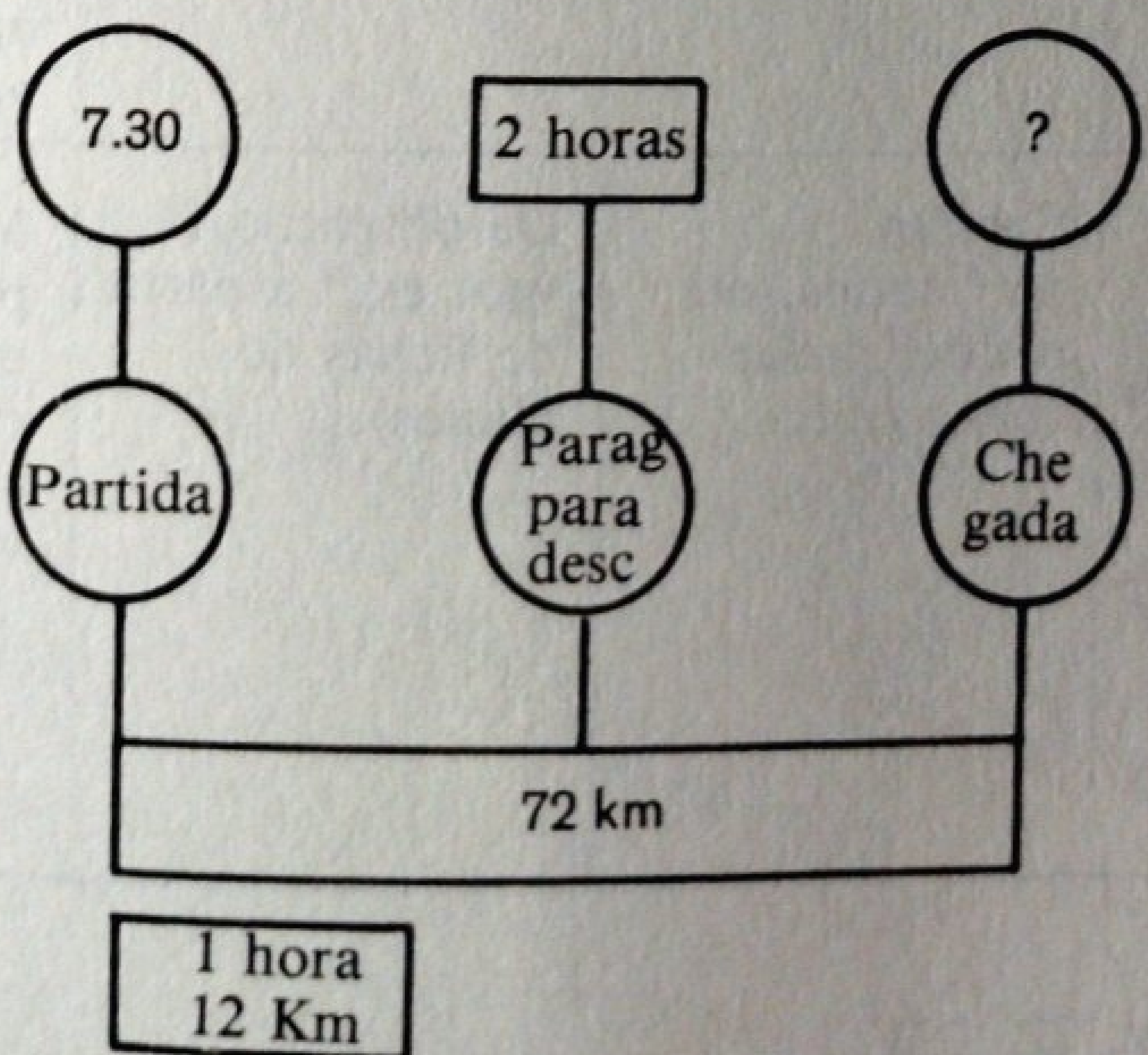
Os esquemas da situação servem, principalmente, para a representação de grandezas variáveis e de relações entre estas, em problemas tais como se encontram, por exemplo, nos livros de texto escolares. Constituem uma etapa de ligação essencial, entre o texto e a via de solução numérica. É importante, neles, que o esquema da situação não seja feito, previamente, pelos professores mas, sim, elaborado pelos alunos. Indicação bibliográfica [33, pág. 154], [59, pág. 62].

Para um problema de texto, elaborou-se o seguinte esquema da situa- 15
ção, o qual poderia ser, habilmente, feito pelos alunos. Para tal o professor teria trazido as grandezas expressas em cartões móveis, que, assim, se poderiam mover, à vontade, sobre um quadro expositor.



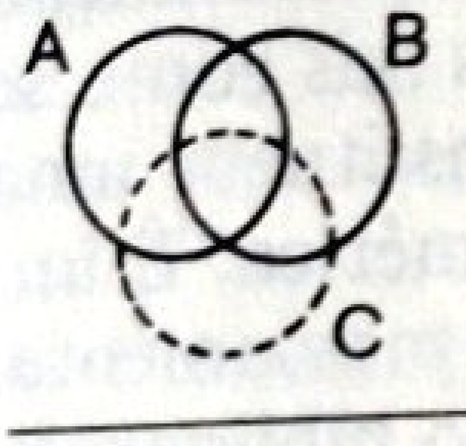
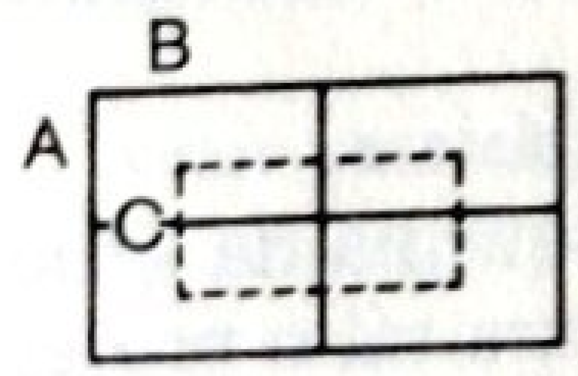
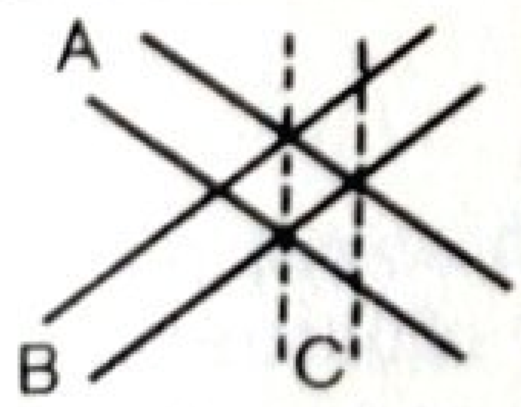
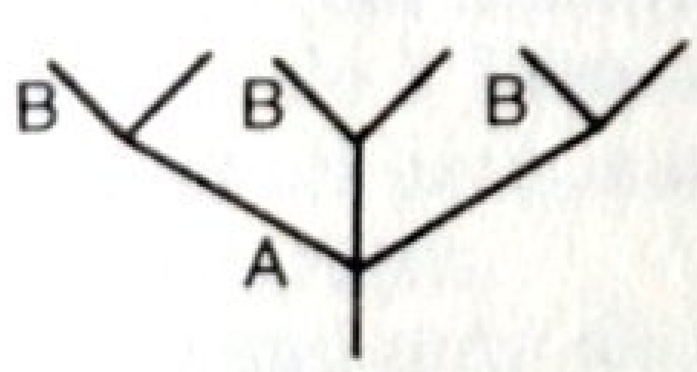
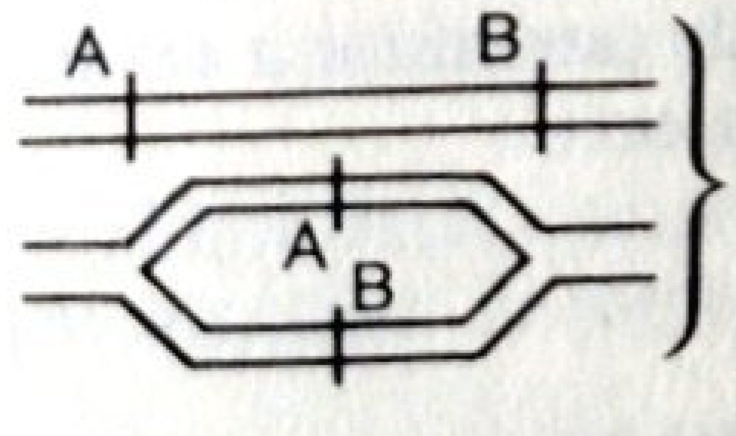
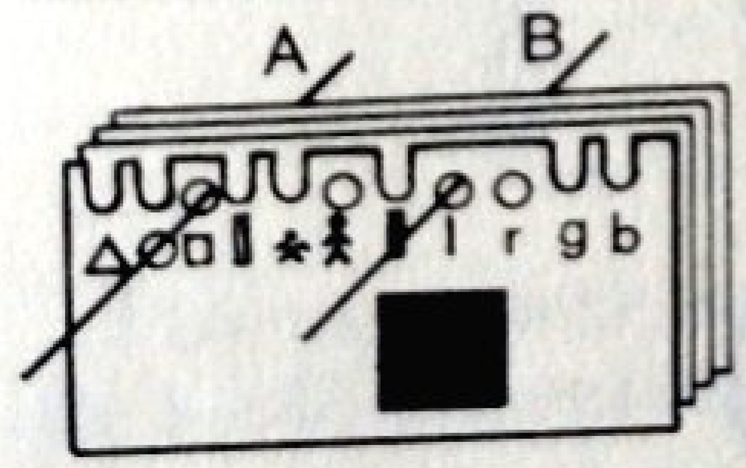
O inconveniente deste esquema da situação é o facto de, pelo desenho, não se poderem tirar relacionamentos entre: o ponto de partida e a extensão do trajecto; a hora de partida e a duração do trajecto.

Aperfeiçoamento proposto:



(3) *Representação de conjuntos*

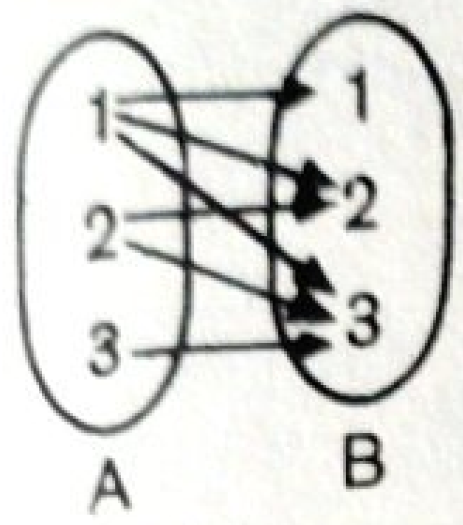
Possibilidades de concretização: Caixas, pacotes, sacos, gaitas, autos miniaturas, caixas com divisórias, cordões etc.

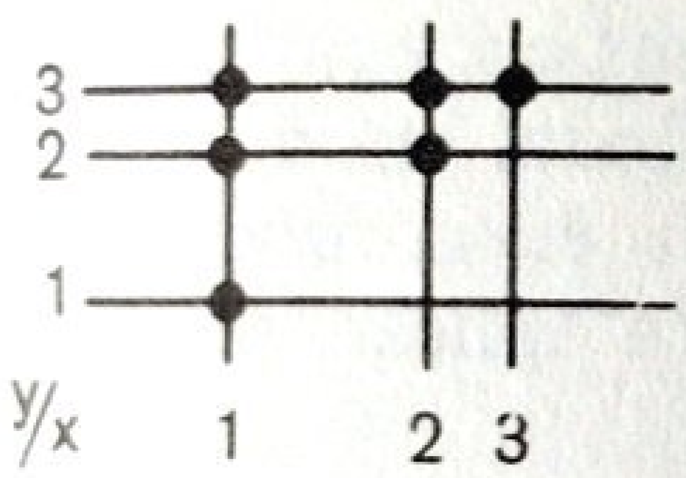
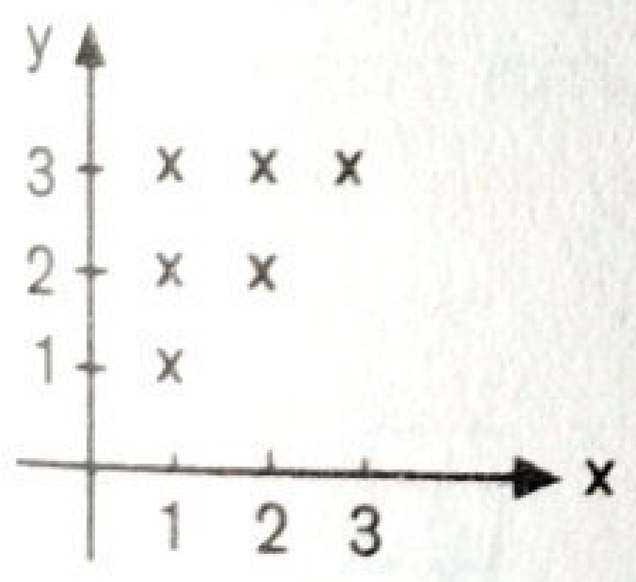
Desenhos	Diagramas	Vantagens	Inconvenientes
	Venn-Euler	Claro (mesmo para 3 conjuntos)	0 4.º campo exterior ($\overline{A} \cap \overline{B}$) não se distingue.
	De caixa Carrol--Karnaugh	($\overline{A} \cap \overline{B}$) aparece, imediatamente, definido.	As delimitações rectangulares, para os compartimentos imbricados um no outro não são claras.
	Cruzamentos de bandas de ruas.	Boas possibilidades de motivação.	Alguns conjuntos por ex.º $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$, aparecem, sempre, em vários campos.
	Árvore	Auxilia as escolhas, através de sucessivas opções.	Alguns conjuntos (por ex.º $\overline{A}$,$\overline{B}$, $A \cup B$) não aparecem, por vezes, inter--relacionados.
	Comportas	Boas possibilidades de motivação; escolhas sucessivas.	Cada combinação de conjuntos requer um esquema especial. Os conjuntos aparecem «desligados».
 	Cartões perfurados, ou cartões presos com agrafos.	De obtenção fácil (por ex.º a partir de fichas de alunos).	Manuseamento pouco cómodo; os elementos dos conjuntos não são, facilmente visíveis.

Literatura [48, pág. 72, 73]

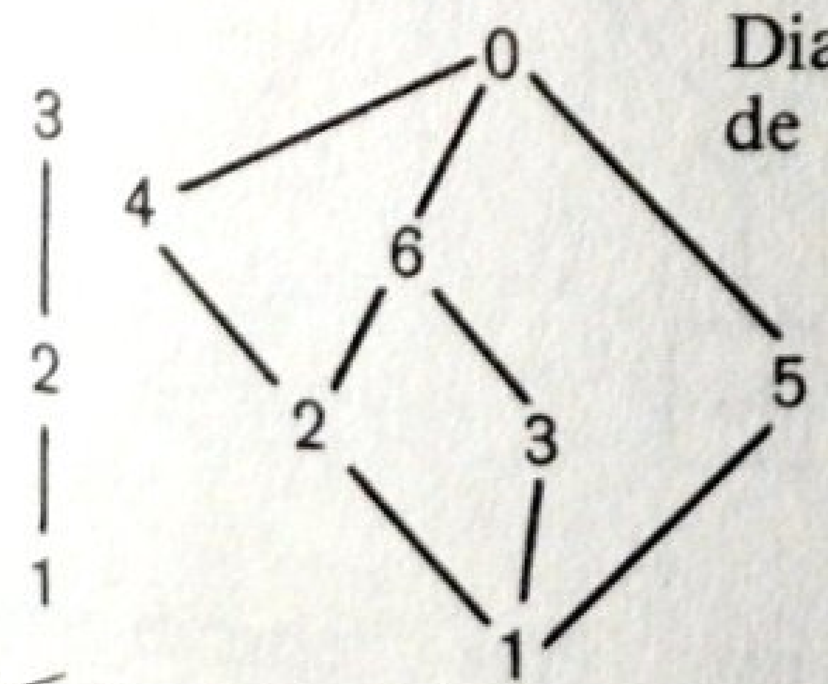
(4) *Representação de relações*

Exemplo: ({ 1,2,3 } ; x ≤ y)

<table>
<tr><th>Desenhos</th><th>Diagramas</th><th>Vantagens</th><th>Inconvenientes</th></tr>
<tr><td>

Só caso A = B</td><td>Diagramas de setas.</td><td>Aparece, claramente, o tipo de correspondência.</td><td>Para conjuntos com muitos elementos, torna-se, rapidamente, confuso.</td></tr>
<tr><td><table><tr><th>x \ y</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr><tr><td>1</td><td>×</td><td>×</td><td>×</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td>×</td><td>×</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td>×</td></tr></table></td><td>Tábua.
Tabela.</td><td>De emprego frequente na vida corrente. Claro.</td><td>Tábuas completas só para conjuntos finitos.</td></tr>
<tr><td></td><td>Rede de malhas</td><td>Forma preliminar do sistema de coordenadas cartesianas.</td><td>Só serve para conjuntos finitos.</td></tr>
<tr><td></td><td>Sistema de coordenadas cartesianas.</td><td>Também serve para conjuntos infinitos (por ex.º subconjuntos de R x R).</td><td>O tipo de relacionamento já não é claro.</td></tr>
</table>

Apropriado para relações de ordem:



$x \leqq y$ x divide y

$x, y \in \{1, 2, 3\}$ $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Diagrama de Hasse

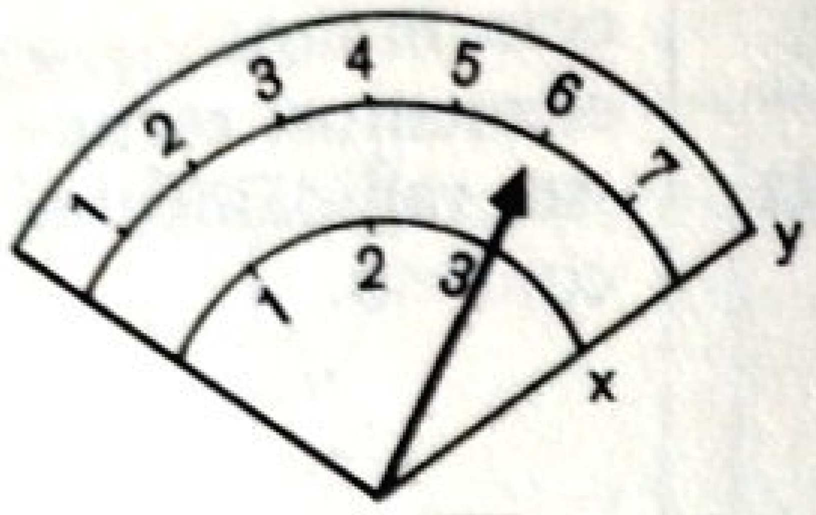
Obtém-se a partir do diagrama de setas, por meio da supressão:

1. dos anéis;
2. das setas de ultrapassagem;
3. dos extremos das setas (supostas a apontarem todas para cima).

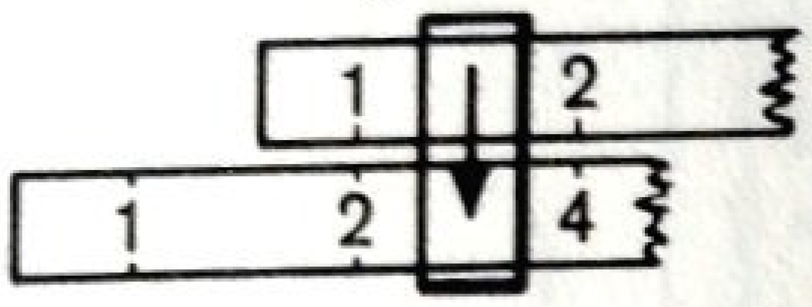
Apropriados para funções

x	1	2	3	4
y	2	4	6	8

Tabela de valores (pode, nalguns casos, ser empregado para relações)

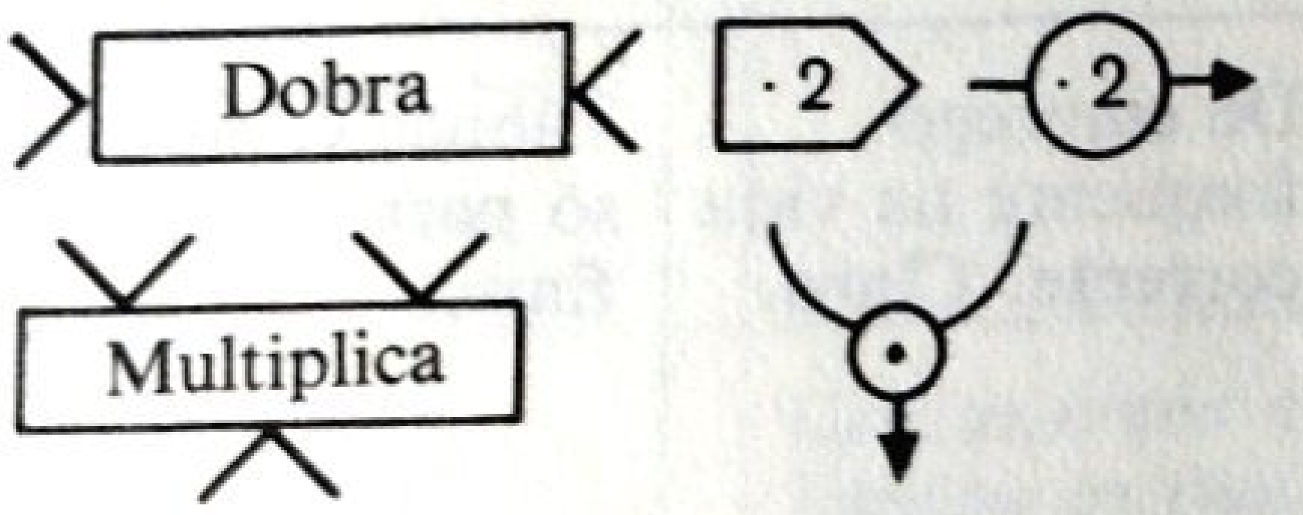


Balança



Escalas com cursores

} Representações com escala



Transformador

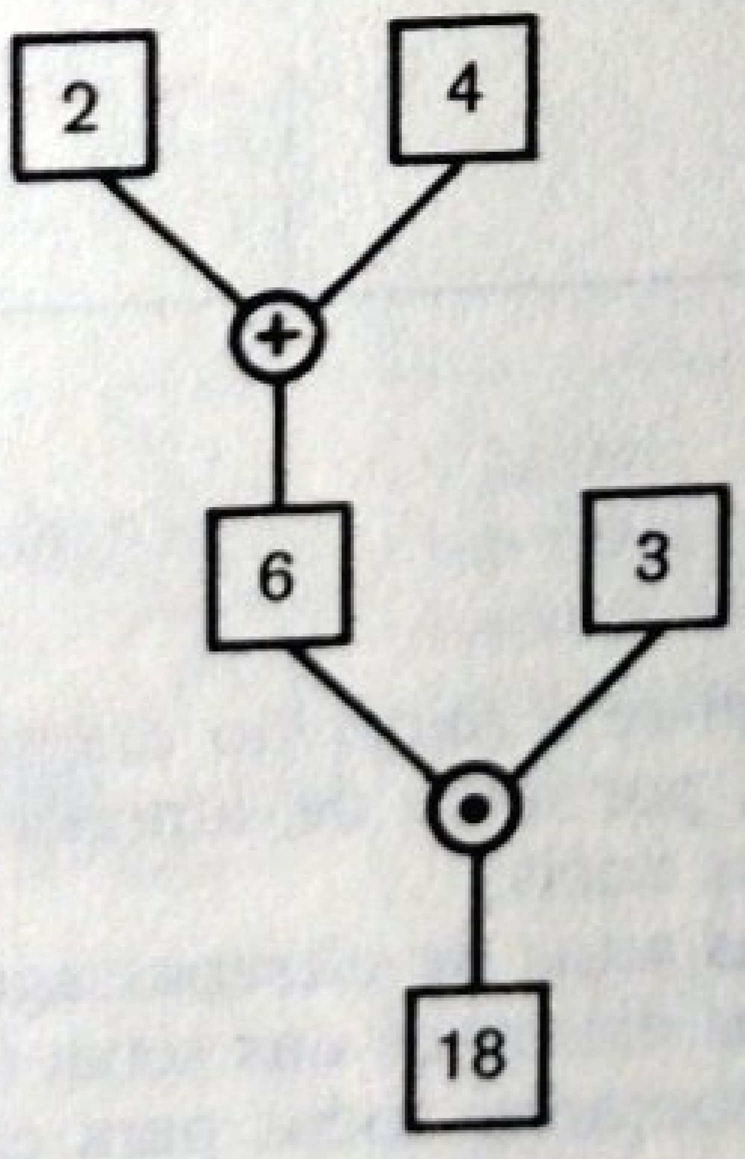
Acoplador

} Representação por máquinas

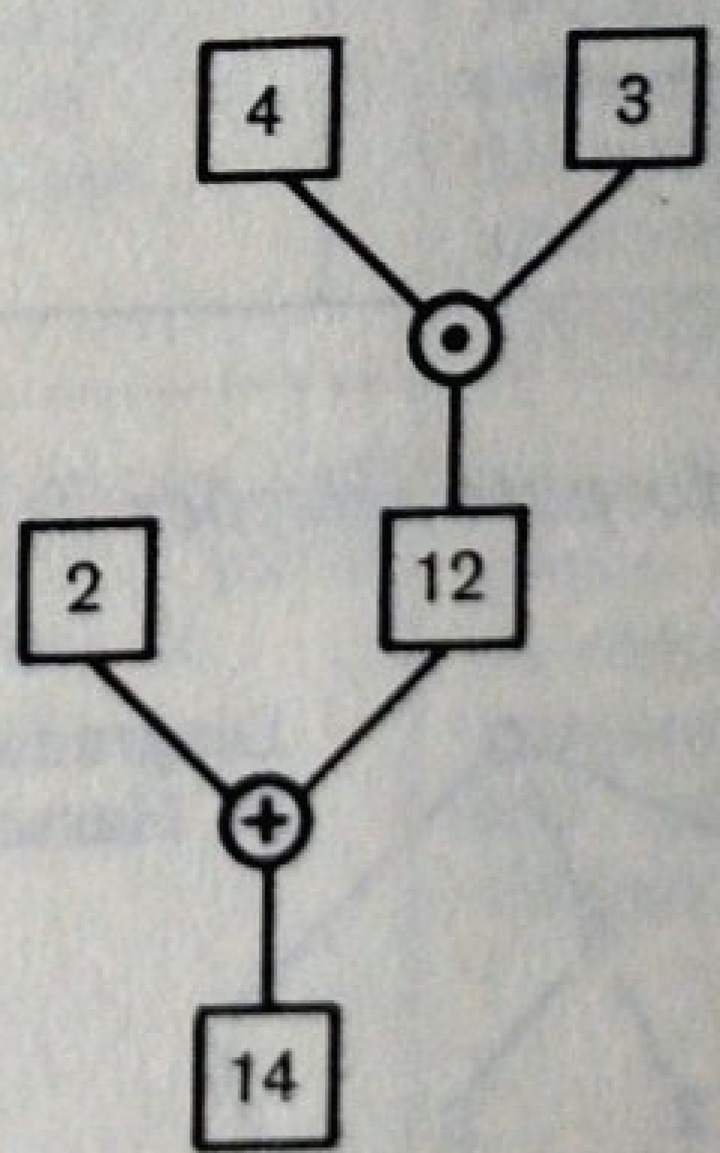
16 Num 1.º ano de escolaridade, observámos que muitas crianças traçam as flechas em sentido contrário, porque apresentam, ainda, em desenho, dificuldades psico-motoras. Reconhecemos que assim é, porque essas crianças trabalham sem erros, quando lhes damos, para aplicar, setas de cartão.

17 Obtemos as chamadas árvores de cálculos, — vide fig. seguinte — se combinarmos vários «simplex» (formas vazias com 3 lugares para estádios e 1 lugar vazio para um operador).

(2 + 4) · 3



2 + (4 • 3)



A importância destas àrvores está em que elas reproduzem, visualmente, ao aluno, a sequência, segundo a qual ele deve proceder, para resolver um problema, ou efectuar uma combinação de operações.

Através das seguintes explorações duma árvore de cálculo, obtemos várias possibilidades de formular problemas:

1. Introduzir, numa árvore de cálculo, os termos correspondentes, ou inversamente:

2. Elaborar uma árvore de cálculo, para um dado problema prático.

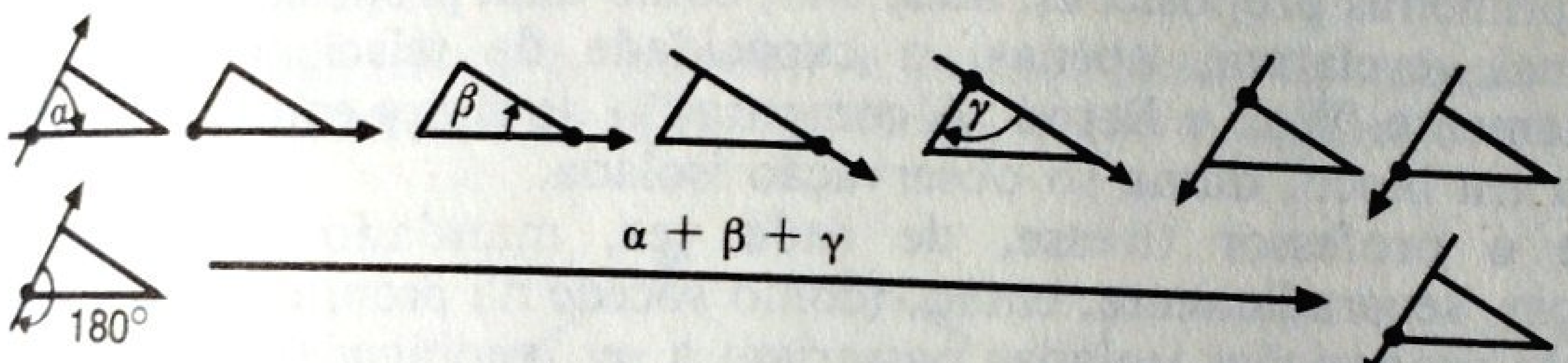
3. Elaborar para uma árvore de cálculo — a qual eventualmente só apresenta, como lugares vazios os dos operadores — vários problemas, extraídos duma grande diversidade de situações.

As aplicações segundo 2 e 3 mostram, imediatamente, em que medida as árvores de cálculos são apropriadas, para revelar a permanência de estrutura da combinação, independentemente de vários domínios.

Mais raramente usar-se-á, ainda, a seguinte representação:

(5) *Representação em banda desenhada*

Indução do valor da soma dos ângulos internos dum triângulo:



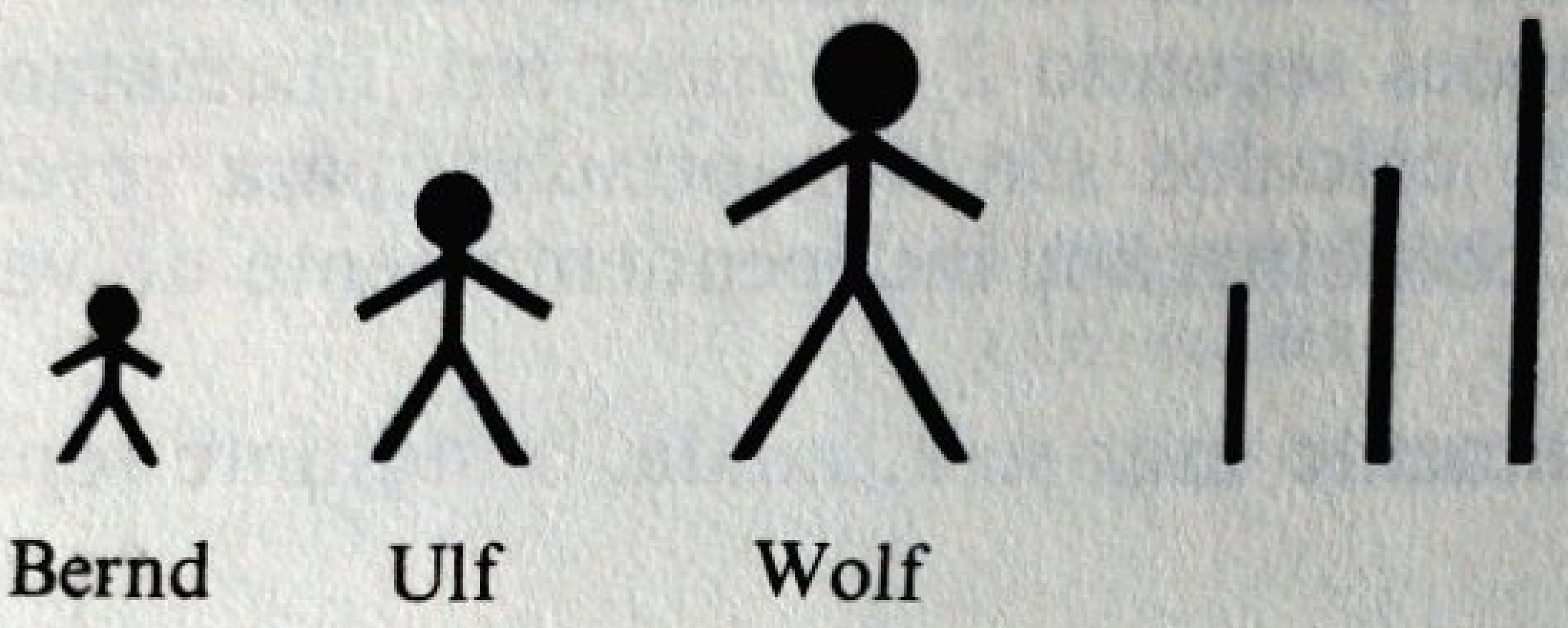
Um outro exemplo sobre o assunto encontra-se em [3, pág. 50].

3.1.3 *A defesa contra erros de intuição, como propósito metodológico.*

Em princípio, poderá espantar — o de precaver o aluno, contra intuições e conhecimentos, adquiridos à «priori». Pois, geralmente, não é a intuição que se invoca para facilitar o raciocínio e, assim, cuidar de integrar os novos conhecimentos, em novas elaborações?

Contudo, há numerosas situações de ensino — estas têm, mesmo, aumentado consideravelmente de significado na Álgebra Moderna — em que a intuição ou o conhecimento prévio, não só não facilitam os processos intelectuais mas, até, mantendo-se num anteplano, os podem dificultar. O professor subestimou, facilmente, este risco, ao pensar que o processo de raciocínio se realizou: não obstante o aluno, na realidade, só reproduziu uma das observações ou das proposições possíveis, retiradas da intuição ou do conhecimento prévio. Da mesma maneira que, na representação manipuladora, acentuámos a vantagem da pré ou pós reflexão, também em situações de ensino — que visam ao esclarecimento — a intuição ou conhecimento prévio devem receber assistência: principalmente durante todo o tempo, em que o processo do raciocínio está tendo lugar.

18 Referida a um conjunto de alunos, um professor quis, num 1.° ano de escolaridade, explorar a transitividade da relação «... é maior do que...». Para isto, chamou três crianças, para se disporem numa fila, segundo as alturas. Depois de terem ocorrido, entre outras as comparações «Wolf é mais alto do que Ulf e Ulf é mais alto que Bernd», o professor perguntou: «Bem, se o Wolf é mais alto do que o Ulf e o Ulf é mais alto do que Bernd, que mais podemos concluir?»



Entre várias respostas certas, surgiu, também a proposição correspondente à transitividade: «Wolf é mais alto do que Bernd». Contudo, as crianças não formularam a resposta como consequência das duas primeiras proposições, mas, sim, como uma proposição «de per se»: na qual revelaram, apenas, a capacidade de relacionarem, entre si directamente, Wolf e Bernd. A comparação de altura entre Wolf e Bernd surgiu em bloco, duma śo observação isolada.

Se o professor tivesse, de cada vez, mandado comparar duas crianças separadamente, então, (como sucede na propriedade transitiva), as duas proposições isoladas passariam a ser combinadas a partir da sua representação, para darem origem à proposição que se pretendia. A princípio, ter-se-ia evitado a percepção visual, que só seria invocada, depois do reconhecimento da propriedade transitiva, como um controlo desta.

Neste caso, no prosseguimento dos estudos, poder-se-iam, também, apresentar as premissas de forma simbólica, sem amarras concretas: Por ex.°:

$$\left.\begin{array}{l}\text{B está antes de C}\\ \text{B vem depois de A}\end{array}\right\} \Rightarrow \ ?$$

As medidas de contensão são recomendáveis, não só para raciocínios dedutivos, como, também, para o desenvolvimento da representação espacial. É o que pretendemos mostrar, no exemplo seguinte:

19 A pergunta, quantas arestas tem um cubo, feita após a observação dum modelo, não apresenta, em grande parte, qualquer alcance, se simplesmente — como sempre acontece — se pediu ao aluno, para contar as arestas duma caixa. Tal pergunta seria de muito maior alcance, se tivesse como objectivo uma avaliação mental, sequente à apresentação da caixa, uma vez esta retirada. Os alunos anotariam, para si, os resultados a que chegavam e alguns destes seriam afixados, no quadro da aula; de preferência, acompanhados dos nomes dos alunos calculadores. Só, então, e novamente em presença do modelo, seria confirmado o número certo.

O processo de contensão, neste exemplo, ganha alcance ainda maior, se considerarmos que em geral, não se tem capacidade de fixar, na memória, todos os números de elementos dos sólidos simples; e, também, não dispomos de um formulário que os mencione. É muito preferível imaginar a forma geométrica em causa, independentemente da sua observação directa, e calcular os elementos procurados, a partir de processos hábeis. Correlativamente, na Escola, dar-se-ia maior valor à discriminação destes diferentes processos, do que aos próprios resultados calculados.

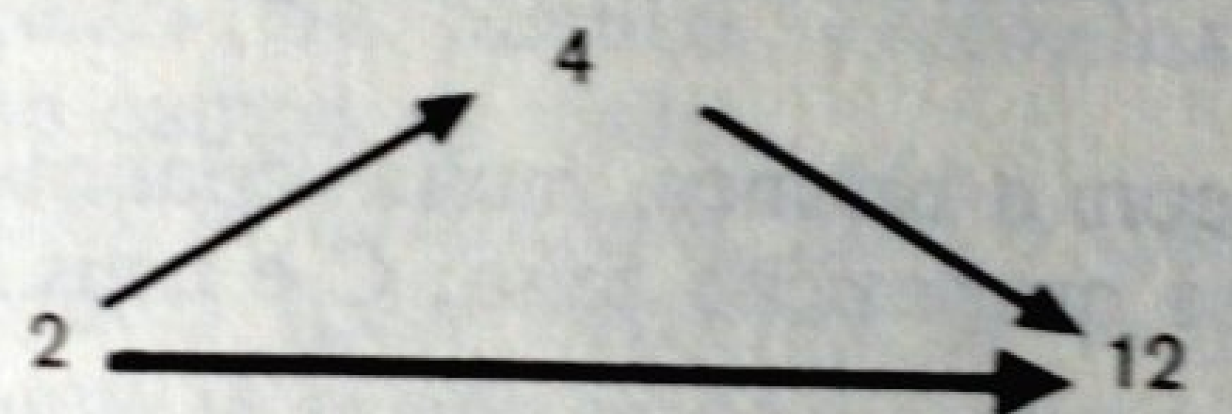
Para o número de arestas dum cubo, discutir-se-iam, por exemplo, os seguintes processos:

Processo I: 2 rectângulos em posição paralela, o que dá, para cada um, 4 lados. Os 4 vértices correspondentes, num e noutro dos rectângulos, ligar-se-iam por 4 arestas.

ProcessoII: Em cada direcção, há 4 arestas paralelas. As direcções são 3.

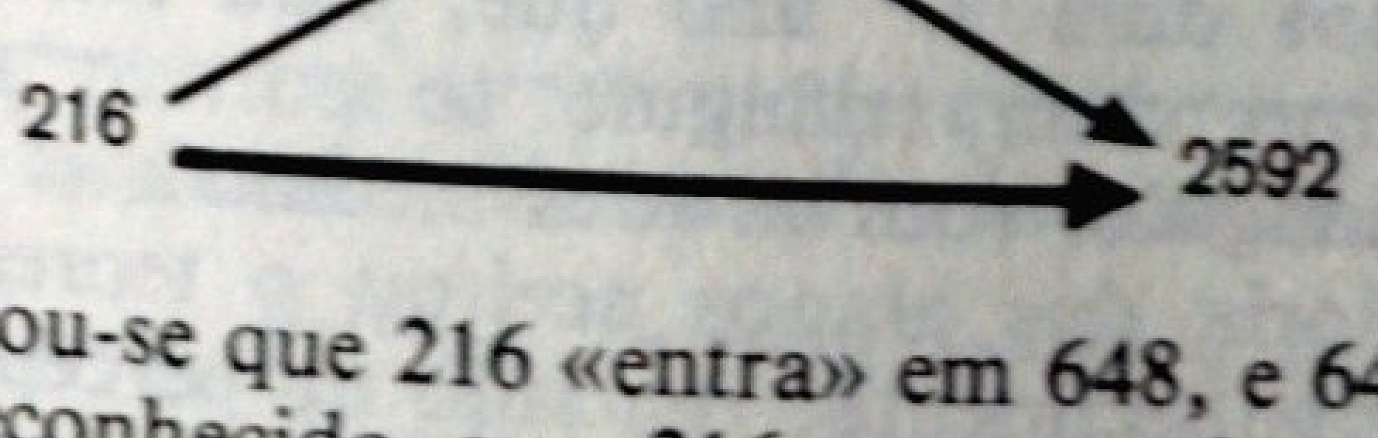
O seguinte exemplo volta a referir-se à transitividade duma relação. Revela como há situações, para as quais é necessária a contensão dum conhecimento já adquirido.

Num 5.º ano, tentou-se elaborar a transitividade da relação «... é 20
divisor de...», recorrendo a exemplos fáceis, como o seguinte:



Verificou-se que os alunos não chegaram à proposição «2 divide 12», porque tivessem apercebido a transitividade da relação «... é divisor de ...» (e assim tivessem combinado as proposições «2 divide 4» e «4 divide 12»), mas, sim, porque, de há muito, dispunham do conhecimento: «2 divide 12». Isto se tornou bem claro, quando o professor perguntou: «Porque é que, se 2 divide 4 e 4 divide 12, então 2 divide 12?» Os alunos não consideraram, de forma alguma, as premissas da relação de transitividade, mas sim «fundamentaram» sapientemente: «porque 2 vezes 6 dá 12».

O tratamento da transitividade resultou muito melhor, numa lição paralela a esta, em que se recorreu a exemplos «mais complicados», tais como:



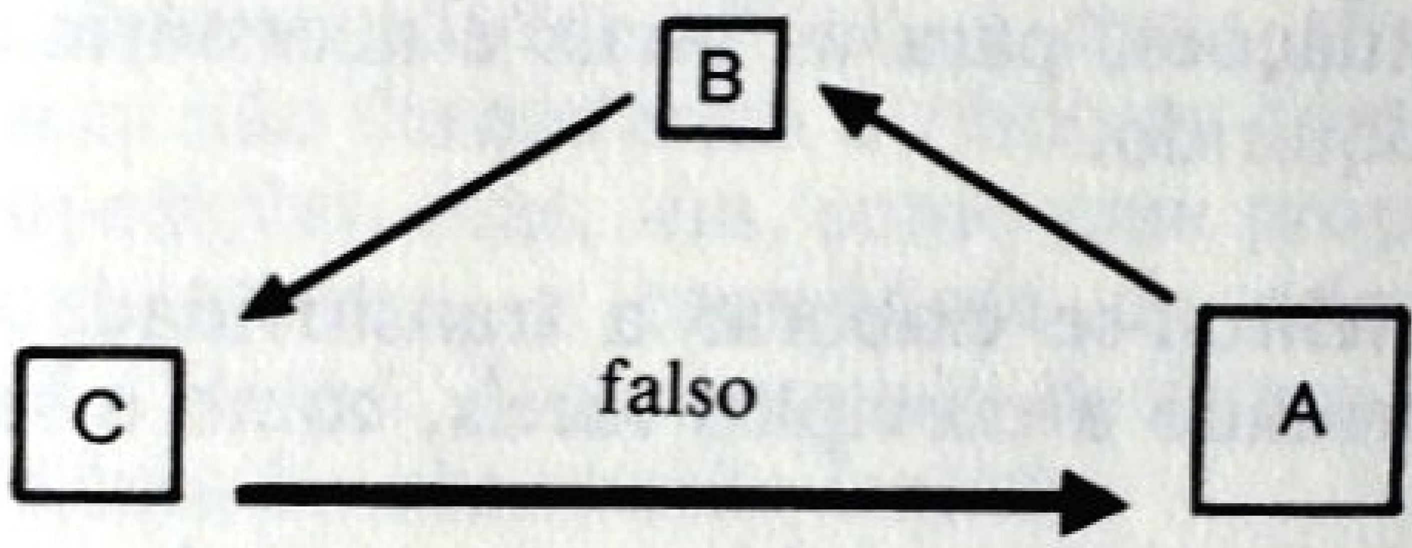
Primeiro, verificou-se que 216 «entra» em 648, e 648 «entra» em 2592; depois de se ter reconhecido que 216 «entra» 3 vezes em 648, e 648 «entra» 4 vezes em 2592, o professor perguntou: «Como é possível, sem uma operação muito grande, responder, rapidamente: 216 "entra" também em 2592?»

Depois de reflexão muito curta, alguns alunos deram uma justificação, que correspondia à demonstração geral da transitividade da relação «... é divisor de ...»: «Certamente, 216 "entra" em 2592: pois se 216 "entra" 3 vezes em 648 e 648 "entra" 4 vezes em 2592, então $2592 = 4 \cdot 3 \cdot 216$».

São ainda interessantes os casos em que, a intuição ou o conhecimento prévio não só facilitam o raciocínio — ou eventualmente o substituem — mas sim, precisamente, o dificultam: isto até ao ponto de darem origem a outras proposições, como se estas fossem o resultado de raciocínio.

Para melhor dar a conhecer diferentes modalidades dum método, o seguinte exemplo refere-se, ainda, à transitividade:

21 Com auxílio duma balança de braços, verificou-se que: de 3 caixas cheias, a caixa A, maior de todas, é mais leve do que a caixa mais pequena B, e que B é mais leve do que a terceira caixa C:



Sem comprovação com a balança, muitas crianças, devido à impressão visual, chegaram a uma proposição falsa: C é mais leve do que A.

O exemplo seguinte mostra, ainda, a influência perturbante que o conhecimento prévio pode ter.

22 Trata-se dum exercício sobre lógica de proposições:

Apesar de os alunos saberem que numa implicação: «Se A, então B», se A for verdadeira e B falsa, a proposição é falsa, a maior parte desses alunos avaliaram a proposição verdadeira: «Se $3 \cdot 3 = 20$, então $6 \cdot 3 = 14$», como sendo falsa.

Os alunos sabiam que: $3 \cdot 3 = 9$; $6 \cdot 3 = 18$; e, pela propriedade monótona $(a \cdot b) = c \Rightarrow v \cdot (a \cdot b) = v \cdot c$ (o que não se verifica na implicação em causa). Todos estes conhecimentos teriam levado à conclusão errada.

23 Pedimos a alunos dum 7.º ano que, para introdução do teorema, «todas as mediatrizes dum triângulo se cortam no mesmo ponto», desenhassem um triângulo, com as suas mediatrizes.

De facto, a maioria dos alunos aceitou o teorema, em virtude do desenho. Mas este conhecimento, fundado na percepção, é tão evidente, que só uma minoria permanecerá motivada para uma demonstração. Haveria, pois, que considerar as seguintes alternativas ao método:

1. Dizer a alguns alunos (não a todos) para, no quadro, desenharem, com o giz afiado, as mediatrizes dum triângulo relativamente grande. A

imprecisão do desenho levará a que as mediatrizes, só «quase», se cortem num ponto.

2. Prevenir os alunos, por meio de exemplos apropriados, contra o risco de induções erradas.

3. Interessar os alunos na questão: «porque é impossível construir um triângulo, em que as mediatrizes se não encontrem num ponto?»

Se no tratamento dum assunto, houver o risco de ocorrerem efeitos ilusórios, então, poderemos proceder de duas maneiras:

1. Dentro duma fase introdutória, na qual, pela primeira vez, devem surgir determinados processos mentais, recomenda-se, com insistência, uma protecção contra as influências pertubadoras de natureza visual ou mental. Neste contexto, pode-se reconhecer, a partir das concludentes experiências de Françoise Frank [10, pág. 234 e seg.]:

Uma parte dos alunos revela notáveis êxitos de aprendizagem, a partir de processos especiais de prevenção de erros (mantendo-se as outras condições invariantes).

Já nos referimos em Ex.º 22, capítulo 1.3, à introdução da reunião de 24
conjuntos, num 1.º ano de escolaridade. Se, por exemplo, reunirmos os conjuntos das fichas vermelhas e o das triangulares, os alunos respondem, expontâneamente, à pergunta: Como é uma ficha do conjunto reunião? «Vermelha ou triangular», ou, também, «vermelha e triangular», segundo a ficha que estiver no campo de visão.

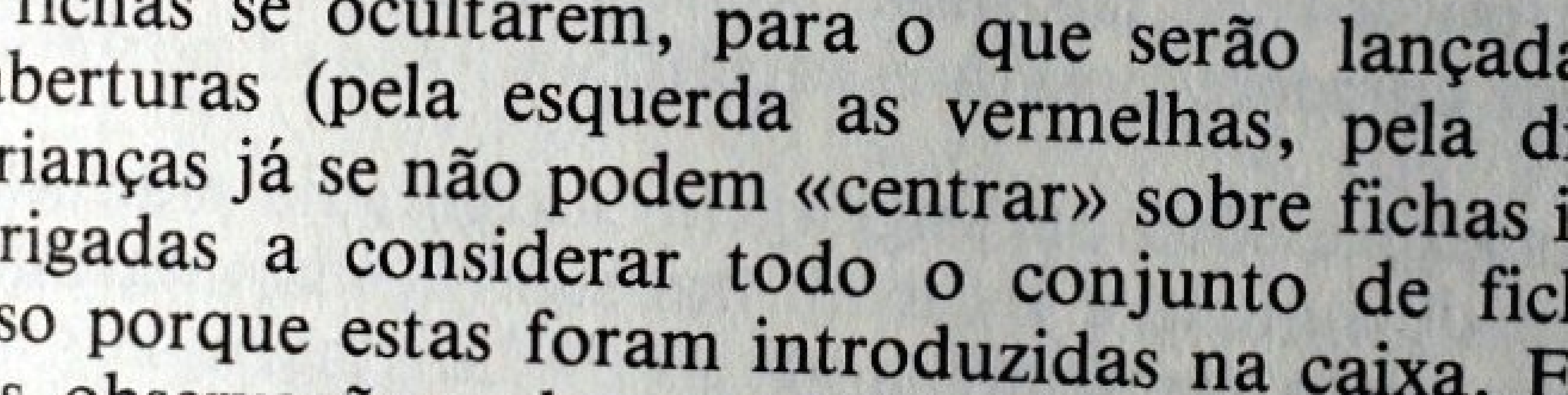
Se porém, as fichas se ocultarem, para o que serão lançadas numa caixa por duas aberturas (pela esquerda as vermelhas, pela direita as triangulares), as crianças já se não podem «centrar» sobre fichas isoladas. Serão, então, obrigadas a considerar todo o conjunto de fichas, em virtude do processo porque estas foram introduzidas na caixa. E, assim, segundo as nossas observações, chegam, mais facilmente, à expressão: «vermelhas ou triangulares».

2. À medida que os processos de raciocínio em vista vão sendo introduzidos, devem ser protegidos — aliás cuidadosamente — das influências ilusórias pertubadoras. Por um lado, fortalecer-se-ão, assim, os processos de raciocínio. Por outro lado, o professor exercerá um controlo seguro sobre os mesmos processos: verificará se eles, fundamentalmente, se realizam, e com que segurança.

Depois de problemas mais fáceis de correspondência biunivoca, propoz-se, a alunos do 1.º ano, o seguinte: 25

Cesto de fruta de Peter

de Ulrike



O professor perguntou:
«Ambos os alunos têm a mesma quantidade de cestos?»

Não obstante o professor, por mais duma vez, ter insistido, que não estava perguntando se cada um dos alunos tinha colhido o mesmo número de maçãs, mas, sim, se cada um deles tinha o mesmo número de cestos, 1/3 dos alunos foram de opinião que Peter tinha mais cestos, que a sua irmãzinha Ulrike.

O professor reconheceu, assim, que estas crianças não tinham, ainda, completamente, adquirido a noção de número. Agrupou-as, então, e fez com elas, sobre o assunto, exercícios de intuição mais forte, usando combóios. Assim, já uma parte maior dos alunos respondeu certo, às duas perguntas: «Em que combóio se pode sentar mais gente?» e «que combóio tem mais carruagens?»

3.1.4 *Representação simbólica*

Por representação simbólica, entendemos a correspondência entre noções matemáticas e qualquer espécie de sinais, cuja configuração possa ser escolhida à vontade. Isto é, que ao contrário do que designamos por representação figurativa, tais sinais não precisam de reproduzir quaisquer propriedades consubstanciais do tema matemático. Os símbolos podem ser do tipo acústico (fala — audição) ou do óptico (escrita — leitura).

O sistema simbólico mais importante é a linguagem, quer seja a corrente ou a especializada. A transição, gradualmente trabalhada, da linguagem corrente para a especializada, faz-se por dois modos:

a) As expressões da linguagem sofrem, na transição, uma mudança semântica de função e recebem um significado matemático definido com rigor. Este pode ser semelhante ao da linguagem corrente (por exemplo: «bandas., «translação», «se, então») ou diferente (por exemplo: «anel», «raiz»).

b) As expressões são formadas de novo e definidas matematicamente sem entrarem, contudo, na linguagem corrente (por exemplo, «homomorfismo», «biúnivoca»).

Devemos notar que as expressões da linguagem corrente, ao adquirirem significado matemático, foram escolhidas, a maior parte das vezes, mais por razões de técnica «memorística», do que por razões intrinsecamente matemáticas. Uma participante dum curso de aperfeiçoamento, para professores, expos este parecer, ao comparar os diferentes tipos de representação dos conjuntos: «o diagrama de Venn é, de longe, o mais apropriado para representar a intersecção, porque através dele, o «corte» é bem expressivo». Assim, de uma forma pouco correcta, se está identificando, o significado matemático da expressão «conjunto intersecção», ao seu significado em linguagem corrente. Sob o ponto de vista matemático, nada se corta efectivamente e, de uma forma mais geral, o diagrama deverá sugerir que duas propriedades ocorrem, simultaneamente. Isto é, porém sugerido, com igual vantagem, por ex.º, pelo diagrama das comportas.

No que se refere ao papel da verbalização (representação por palavras), podem encontrar-se, com frequência, entre os professores, duas posições extremas opostas:

Posição extrema 1: «O raciocínio (matemático) sem linguagem é impossível». Tais professores obrigam, continuamente, os alunos a exprimir todas as ideias por palavras. De preferência, até, por frases completas: O aluno só pensa com acerto, e percebe os factos, se os puder verbalizar.

Posição extrema 2: «Dispensar-se-á a verbalização, se os raciocínios matemáticos se poderem representar por manipulações ou simbologia matemática ($A \sim B$, $3+5=8$, $\times \vee \Diamond$, ...).

No ensino da matemática, uma verbalização muito insistente paralizará as crianças de fraca expressão oral.

As relações entre o pensamento e a linguagem não podem ser tratadas, pormenorizadamente, nos limites deste livro. Remetemos, pois, para a literatura correspondente [10, pág. 55 e seg.]*, [32, pág. 25 e seg.], [69, pág. 195 e seg.].

Aqui, só referiremos algumas conclusões e as suas possíveis consequências.

1. Já em 1921, Sapir distinguia entre linguagem e raciocínio [10, pág. 77] e sustentava que os dois, até determinada fase, se desenvolviam, em grande parte, independentemente um do outro. A psicologia da inteligência confirmou, entretanto, esta tese.

Oevermann apresentou este ponto de vista: só passados os primeiros 4 anos, se inicia o processo de interacção recíproca. Neste, porém, o maior peso corresponde ao desenvolvimento do raciocínio [64, pág. 336 e seg.]: Funções simples do conhecimento, tais como classificar, colocar em sucessão, comparar, tirar conclusões, parecem exceder, em muito, a capacidade verbal. Experiências de Kessen (1965), Bower (1965) e Frank (1965) concluíram [10 pág. 36] que já crianças de mama (nos primeiros dias, semanas e meses de vida, revelaram notáveis capacidades de raciocínio (Diferenciação, identificação e localização de figuras e fichas).

2. Chomsky (1965) mostrou que a linguagem só pode proteger o pensamento matemático, se for diferenciada, em correspondência com problemas [13]. Aos mesmos resultados chegou Sonstroem (1966) [10, capítulo X)], na aprendizagem das invariâncias.

Quanto à representação por meio de simples desenhos e por verbalização, inumeráveis pesquisas e experiêncas, sobre a psicologia do raciocínio, levaram às seguintes conclusões: Uma grande parte dos problemas devem apresentar-se às crianças — principalmente, nos dois primeiros anos escolares — através de manipulações, figuras e desenhos. E, por estes mesmos meios, se lhes dará a possibilidade de os resolverem. Além disto, poder-se-á introduzir — mas sem forçagem — uma interpretação verbal que será anterior, simultânea ou posterior à resolução.

N. T.

* J. Bruner-Studies in Cognitive Growth (já citado) — Notemos, mais uma vez, que o número da página da referência alemã só é válido para a obra editada nesta língua.

26 No tratamento da proporcionalidade, um professor poderia desenvolver a exploração verbal e mental do tema: os alunos inseririam os dados num quadro de valores, mas antes de calcularem os intermédios ou omissos, indicariam, com um sinal de «maior» ou «menor», como esperavam que esses valores ocorreriam, em referência aos já calculados.

Cabo	Preço:	6 DM	1 DM	15 DM
	Comprimento:	3 m		

Deveríamos auxiliar as crianças, nas tentativas para encontrarem as suas próprias formalizações — mesmo se estas não forem completas ou inteiramente correctas — e não desanimá-las, através de repetidas correcções nossas. Aliás, desde o início, devemos valorizar o emprego, correcto e diferenciado, de palavras e locuções isoladas: estamos pensando no uso dos conectivos lógicos «e», «ou», «não», «se-então» ou, ainda na palavra «grande», que pode ser substituida pelas expressões diferenciadas: «comprido», «alto», «largo», «grosso». O seguinte exemplo mostra, porém, que uma designação correcta nem sempre precisa de ser convencional.

27 Crianças do 1.° ano, quando interrogadas, chamaram ao conjunto vazio «o conjunto não»; outras do 3.° ano, ao elemento neutro, referido a um operador, «o não faz nada» ou «o preguiçoso». Estas designações equivalentes podem-se considerar como aceitáveis. Em todo o caso, será uma perda de tempo o professor esperar, até o aluno, atingir, por acaso, a designação oficial.

De qualquer forma, a partir do 1.° ano, recomenda-se uma representação dos factos matemáticos, através de desenhos simples. Principalmente, Bereiter (1966) e Jensen (1967) concluíram que as formas de comportamento inteligente se desenvolviam, significativamente, desde que as noções, relações e processos se podessem representar, referenciadas a desenhos [46, pág. 3].

Como a propósito mais adiante iremos salientar, a escolha de desenhos especiais é de decisiva importância.

O número de problemas verbais (por ex.° enunciados em textos) e a representação oral e escrita, exigidas no desenvolvimento de soluções simples, deverão aumentar, nos últimos dois anos da escola primária. Mais tarde, a partir do 5.° e 6.° ano escolares, será de pedir ao aluno a reprodução verbal de definições simples («associações», «transformações» e «condições»), além da dedução de conclusões directas. A partir do 7.° ano, a exposição escrita e oral duma cadeia de conclusões deve ser, cada vez mais extensa. De uma maneira geral e, principalmente, em escolas com continuação: para o desenvolvimento do raciocínio lógico formal, deve-se exigir, cada vez mais, a construção e a utilização duma linguagem correcta. Atender-se-á, então, aos seguintes aspectos:

1. Tal linguagem ocorrerá — principalmente, como estímulo duma comunicação verbal — na classificação e no controlo de representações e conceitos imprecisos.

2. Os relacionamentos verbalizados serão, mais facilmente, fixados e também reproduzidos, transferidos e aplicados: é o que não acontece com as frequentes incompreensões de teoremas, definições e processos, quando aprendidos de cor. Portanto, dar-se-á a maior importância a uma formulação original, da parte do aluno.

3. A propósito de transformações de escrita, alguns factos matemáticos podem vir a ser expressos, em termos e sinais duma linguagem especializada, mais breve e incisiva; o que assim, pela primeira vez, possibilitará, níveis mais altos de abstracção de raciocínio.

Depois destes aspectos gerais, são de mencionar, ainda, algumas observações da prática escolar:

Dienes e Jeeves supõem que a forma e a rapidez de compreensão de factos matemáticos dependem, muito, da escolha dos símbolos; mas o critério de escolha só será determinado por experiências futuras.

A justeza desta posição pode ser confirmada, pela prática escolar. Pelo menos, os seguintes pontos de vista parecem favorecer a apreensão rápida e o tratamento seguro, por meio de desenhos:

1. Os alunos devem aprender a necessidade dum novo símbolo. Para tal, antes da sua introdução devem-se ensinar as operações que esse símbolo requer.

Na introdução da raiz quadrada, ao 8.º ano, fizeram-se muitos exercí- **28**
cios. Através destes, procurou-se, para um dado número (por ex.º 4), um outro (neste caso, 2), tal que, o último multiplicado por si próprio, reproduzisse o primeiro. A professora estimulou as alunas a procurarem um símbolo a aplicar ao número de partida. Uma aluna propôs o símbolo $\frac{1}{2}$, com este fundamento (o que, aqui de facto, era válido): «de $\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$, vem $2 \cdot 2 = 4$». Porém, depressa se reconheceu que o símbolismo $\frac{1}{2} \cdot$ só serviria, na generalidade, se procurássemos um número que *adicionado* a si próprio, reproduzisse o número dado.

A proposta seguinte, que tomou como número de partida 64, revestiu a forma $\frac{64}{8}$; mas foi imediatamente posta de lado, pela proponente, já que este simbolismo presupunha o conhecimento prévio do número procurado, 8. Então, sobreveio a uma aluna a ideia luminosa de propor 64_2, baseado neste raciocínio: «$8^2 = 64$; se agora, a partir de 64, vou procurar 8, este processo será o inverso do primeiro. Assim, escrevo também 2, mas em posição oposta, isto é, 2 no fundo de 64».

Sob a advertência de que esta notação não seria conveniente, por causa das possíveis confusões com os índices, a professora introduziu a notação oficial: $\sqrt[2]{a}$.

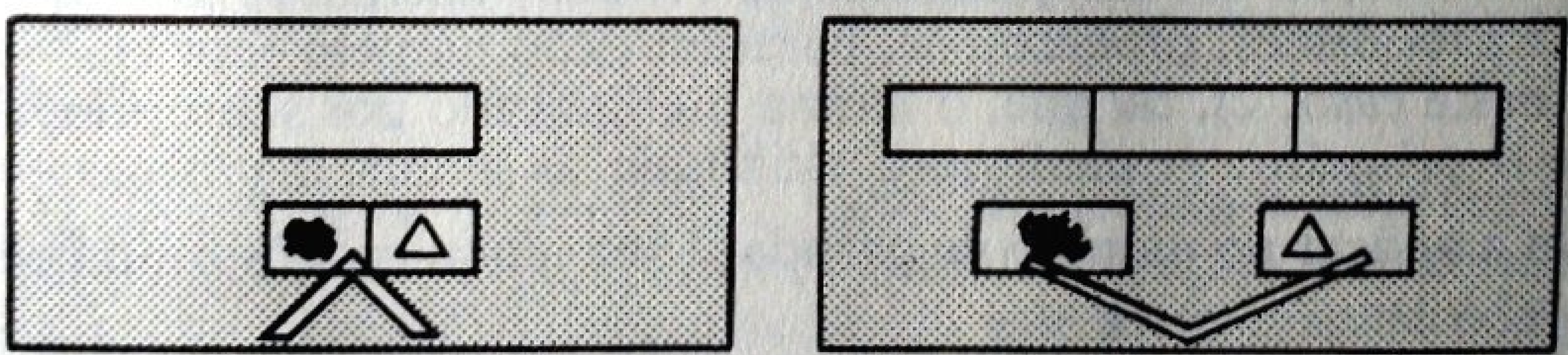
2. Como indica o exemplo acabado de referir, os alunos devem, antes de conhecerem a notação oficial, proporem a sua. Por vezes, surgem, assim, obscuridades, que podem ser esclarecidas, logo na altura própria. Sobretudo, a notação oficial será muito melhor apreendida, nas suas vantagens e inconvenientes.

3. Símbolos com significados diferentes e que apareçam, com frequência juntos, devem ser, também, adequadamente diferenciados, um do outro.

29 Por exemplo: os sinais $\wedge$ e $\vee$, como símbolos de conjunção e de disjunção, revelam-se confusos (pelo menos para os principiantes). Por isso, muitos professores mencionaram, junto deles, as palavras correspondentes «e» e «ou».

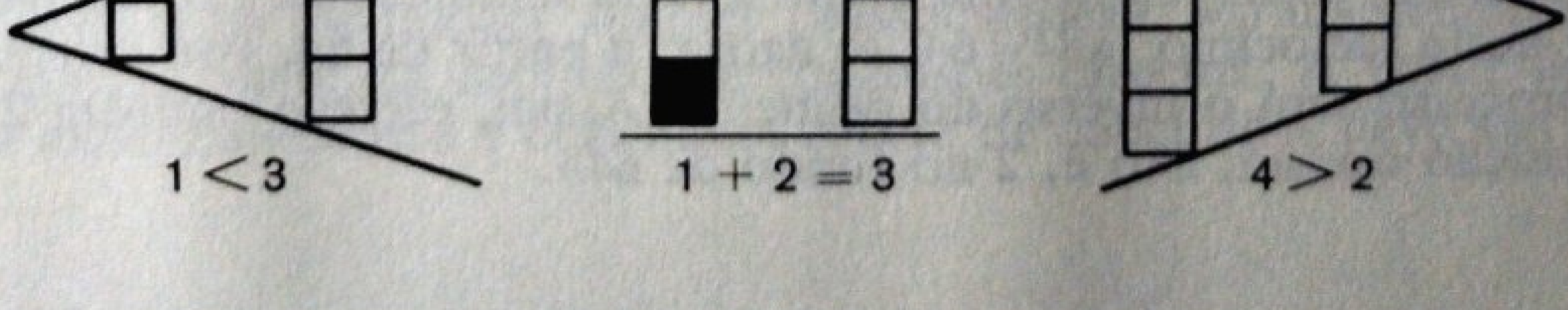
4. Principalmente em instrução primária, os símbolos devem ser apresentados, em ligação directa com manipulações e associações visuais.

30 Em conjunção com o exemplo 29, podemos evitar, em grande parte, a troca dos sinais $\wedge$ e $\vee$, se os associarmos ao emprego de postigos, abertos nas caixas referidas no ex.º 24. O sinal $\wedge$ evoca a junção, num parênteses, de duas fichas etiquetas; o sinal $\vee$, a sua separação numa caixa, na qual pela esquerda podemos lançar as fichas vermelhas, pela direita as triangulares e pelo meio as simultaneamente vermelhas e triangulares.

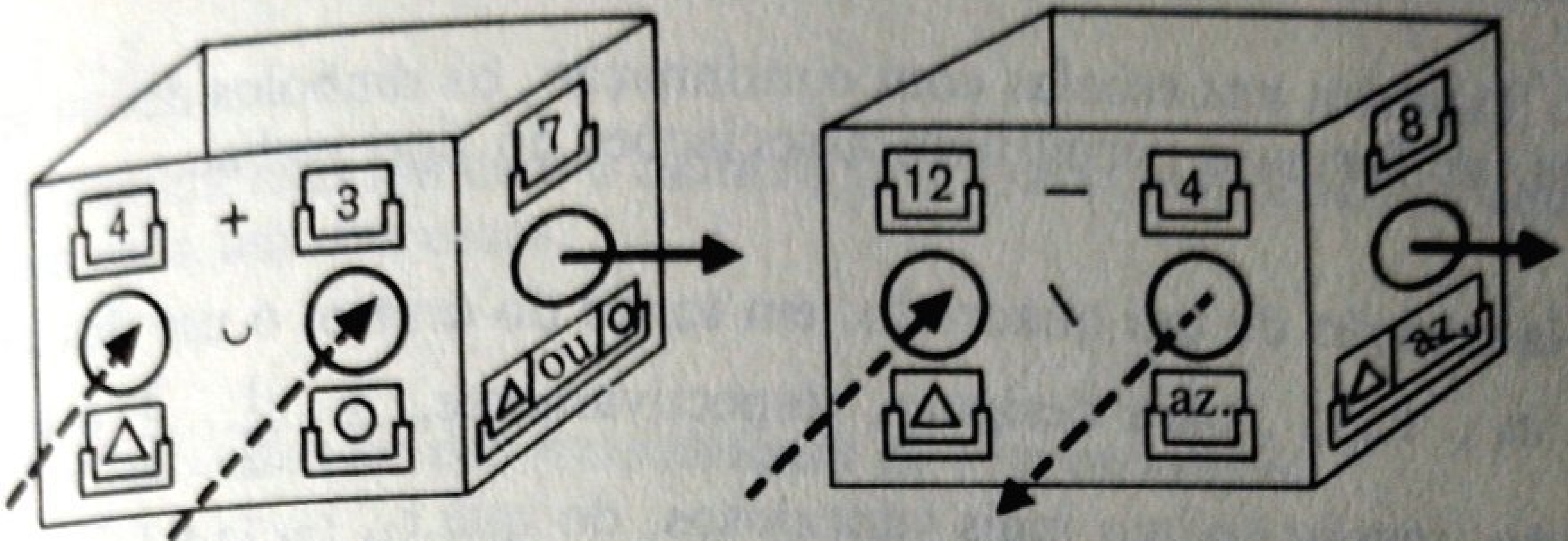


Vermelho e triangular — vermelho ou triangular

31 Como meio auxiliar de fixação dos sinais $<, =, >$, muitos livros associam-nos à abertura de mandíbulas dum animal ou de rectas. Assim, por ex.º.:



As crianças do 1.º ano trocam, muitas vezes, os sinais +, —, ∪, ∖, 32
porque só lhes podem associar poucas representações concretas. Isto remediar-se-á, se os sinais forem associados a determinados modelos manuseáveis.



Representação do conjunto reunião

Representação do conjunto complementar

As crianças fixam-se, rapidamente, nas duas actuações seguintes:

(1) Para formar a reunião de dois conjuntos, inserem-se os elementos, pelas duas aberturas da frente; o conjunto reunião pode, então, ser retirado, pela abertura da parede lateral.

(2) Para formar a diferença de dois conjuntos, inserem-se os elementos, pela abertura da esquerda; retiram-se, depois, alguns pela da direita; o conjunto diferença pode-se retirar, pela abertura lateral.

Simultaneamente, efectuar-se-ão os cálculos e as operações lógicas correspondentes.

Os progressos rápidos, verificados com o uso de estes modelos são de atribuir — para além do relacionamento incisivo da simbologia da teoria dos conjuntos, da lógica, e da aritmética bem como das operatórias correspondentes — ainda, mais, aos seguintes aspectos:

a) Os vários ramos matemáticos (noções sobre conjuntos, lógica e aritmética) bem como os símbolos correspondentes, derivam, claramente, uns dos outros.

b) Os casos especiais, necessários para fundamentar a adição e a subtracção (respectivamente $A \cap B = \emptyset$ para $A \cup B$, e $B \subset A$ para $A \setminus B$), aparecem, clara e directamente, no modelo.

c) A compreensão de igualdades do tipo:

4 + 3 = 7 12 − 4 = 8

é para as crianças, tanto mais difícil, quanto elas nem sempre identificam, um em relação ao outro, o lado esquerdo e o lado direito da igualdade; mas sim, compreendem o primeiro, como uma indicação para operar, e o segundo, como o resultado da operação [33, pág. 116, 122, 145]. Ou então, e mais simplesmente, consideram o lado esquerdo, em vias de se transformar no lado direito.

De facto, o modelo além de permitir reconhecer como é que o conteúdo da caixa pode ser operacionalizado, torna também acessível que o lado esquerdo e o lado direito duma igualdade representam duas direcções diferentes (diríamos a «da frente» e a «do lado»), de encarar uma e a mesma «coisa».

5. Também nas escolas com continuação, os símbolos devem ser escolhidos, de forma a permitirem associações do tipo verbal.

33 Na rotação de um quadrado, em torno do centro, o uso dos símbolos q , m , t , i , para designar, respectivamente, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e 1 de uma rotação, revelar-se-iam mais vantajosos, do que r_1, r_2, r_3 e r_4*

34 Em Geometria das Transformações, é de recomendar o uso de símbolos, tais como: $R_{A,\alpha}$, para indicar uma rotação de centro A e ângulo α; S_a, para uma simetria de eixo a; $A_{s,\alpha,k}$, para uma transformação afim, de eixo s, ângulo α e razão de afinidade k.

Muitos símbolos deverão despertar, também, associações de conhecimentos:

35 Se empregarmos $\div$, como um símbolo especial da divisão (no sentido dum «cabimento» repetido), podemos esclarecer que, também, o sinal — invoca a subtracção repetida de uma mesma grandeza.

36 Para a introdução das unidades de superfície, volume e comprimento, podemos sugerir as seguintes associações:

1 cm^2 a um quadrado, portanto, a uma figura, a cujos vértices convergem dois segmentos de recta perpendiculares.

1 cm^3 a um cubo, portanto, a uma figura, a cujos vértices convergem três segmentos de recta perpendiculares.

1 cm a um segmento, portanto, a uma figura, a cujos vértices (neste caso, extremos) converge um só segmento de recta.

37 É corrente uma pessoa que pouca matemática aplicou depois de sair da escola, não saber, mais, lidar com logaritmos. A culpa é de atribuir, em muitos casos, à assustadora palavra «logaritmo» e à sua forma usual — mas pouco feliz — de notação: por exemplo, $^3\log 81$, ou $\log_3 81$.

Poder-se-ia, então, tornar mais acessível, o usar, no lugar da expressão «logaritmo de _c_ na base _a_, esta outra, «expoente que aplicado a _a_ dá

---

* N. T.
As notações que empregamos, na nossa tradução, não representam qualquer compromisso de opinião, mas tão só a intenção de encontrar um equivalente em português, para o critério exposto pelo autor, para a língua alemã.

c », e adoptar uma escrita, que pusesse em evidência o carácter de inversão, em relação à extracção da raiz. Assim, por exemplo:

$_{3}\!\bigwedge\!\underline{81} = 4$, pois $3^4 = 81$, como operação inversa de:

$\sqrt[4]{81} = 3$.

As circunferências indicam o número procurado, em relação à equação $a^b = c$, em cada um dos casos.

3.1.5 *Variações dentro das modalidades de representação*

A exploração dum tema de ensino, em todas as modalidades de representação (manipuladora, figurativa, simbólica) não garante, por si só, a este ensino qualquer eficiência. Se porém, e apesar da representação em todas as modalidades, se não alcançar o objectivo em vista, tal pode ser devido a que, em cada uma dessas modalidades, a representação tenha sido pouco variada. Esta á a posição assumida, principalmente, por Dienes, e que deu origem ao método dos vários modelos de percepção: segundo o qual cada ideia será ilustrada por várias formas. Por modelo de percepção, Dienes significa, não só a representação figurativa, mas também, e essencialmente, a operatória.

Dienes [21, pág. 44-45] encara o citado método, principalmente, segundo estes aspectos:

1. Pode-se, através dele, ter em conta, as diferenças individuais dos alunos (tempo de aprendizagem, nível de aspiração).
2. Facilita-se a abstracção da ideia matemática fundamental. (Por meio duma só representação, a ideia ficar-lhe-á associada e não será, suficientemente, abstraída).
3. Desenvolve-se e enriquece-se a capacidade de transferência, através das variações.
4. Revelam-se efeitos positivos, no que respeita à memória a longo prazo.

Fricke adopta, sobre este ponto, uma posição em parte oposta: recomenda modelos vários, só para as noções de estruturas algébricas e das relações lógicas fundamentais. No campo da aritmética, não considera válido o processo: em sua opinião, os alunos trazem já consigo diversas experiências e, assim, será suficiente fazer despertar os correspondentes modelos de representação. Escreve a este respeito: [30, pág. 138]. É já para contestar que se vá falar, destacadamente, de bolas, pregos, pérolas ou castanhas, como tratando-se de vários modelos. Traze-los, para o ensino, cria, de facto, uma mudança. Qualquer deles é, porém, inútil para a formação da noção, se for um meio de trabalho, tão pouco diferenciado, que não pode ser considerado representativo de todos os outros conjuntos e permanecer assim num plano mais alto, do que os chamados meios de intuição.

Não podemos, em absoluto, concordar com Fricke, se pensarmos nas dificuldades que os lunos sentem quando, por exemplo, para a solução dum problema de texto, têm que imaginar a situação correspondente; e quantas vezes um processo de resolução, por falta de apoio representativo, vai determinar uma operação aritmética inversa.

De facto, Fricke ataca, com razão, um processo, segundo o qual as bolas são, simplesmente, substituídas por castanhas. Contudo, ele vê o conceito de variação sob um ponto de vista restrito se julga que se refere, apenas, à espécie dos elementos. Grisel, por exemplo, expõe, com clareza, o que no tratamento cardinal da adição, deve ser variável [33, pág. 146, 150]:

1. O tipo de desenrolar do processo (Exemplos, para os processamentos aditivos: Verter conjuntamente; verter ... em ...; «juntar» ... a ....; «juntar» simultâneamente; encontrar; ganhar; subir; pôr em seguimento; arrumar).
2. O tipo de situação (por exemplo: fabricação; venda; utilização).
3. A espécie de elementos (por exemplo: alunos duma turma; turmas duma escola; pancadas dum relógio).
4. A posição dos elementos (por exemplo: juntar no espaço ou manter afastados. — Veja, também, representações de conjuntos e funções).

Por outro lado, Dienes não pode ser incondicionalmente aceite, quando escreve [21, pág. 45]: «... a criança lenta precisa, possivelmente, de um grande número de experiências e de variadas e cuidadas representações». Ora, segundo algumas observações, há uma quantidade de alunos, para os quais o impacto intuitivo duma situação é, em si, tão forte, que uma grande quantidade de impressões mais iria confundir, do que esclarecer, o processo de abstracção a introduzir. Para tais alunos, o que pode, então, ser eficiente é reconhecer a ideia fundamental, através de poucas representações: eles obterem segurança, no lidar prévio com estas, e só depois, se debruçarem sobre outros modelos. Para, assim, persistentemente, adquirirem o processo de abstracção.

Se partirmos da validade de todas estas considerações, os processos, segundo os quais os alunos aprendem matemática, decorrem, de forma tão variada, que deveremos ser muito prudentes, ao tentarmos formular princípios de didáctica. Para já, torna-se evidente a necessidade duma diferenciação interna.*

38 Um professor poderá, desde logo, dominar, em grande parte, esta situação duvidosa, se colocar os alunos perante uma destas opções:

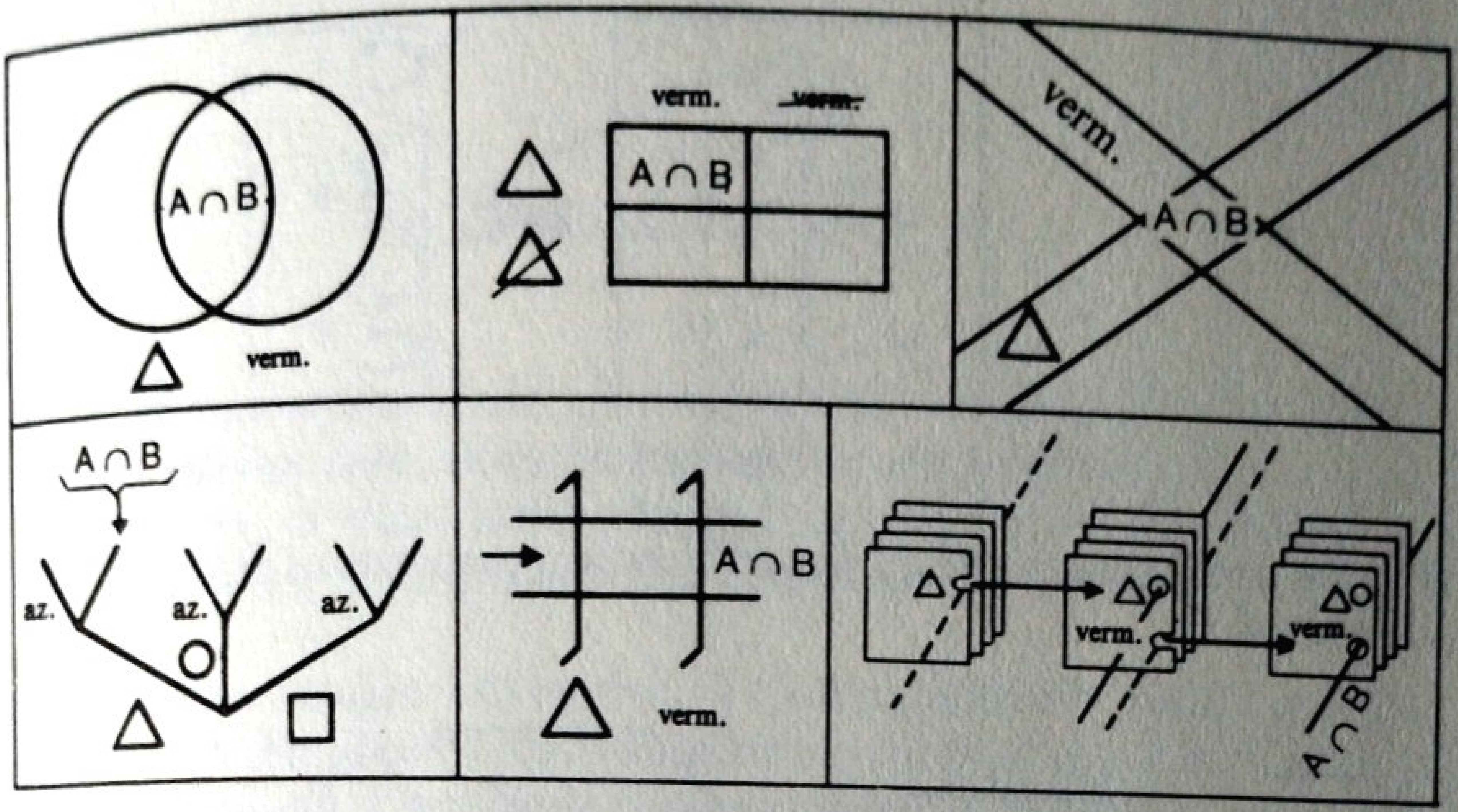
— Ou, a partir de colecções de fichas, pô-los a trabalhar sobre muitas representações e sua combinação, duma forma independente.

—Ou, então sujeitos a uma orientação e avaliação assíduas, pôr os alunos a trabalharem, a princípio, de forma gradual sobre poucas representações, para depois, eles irem adquirindo maior segurança.

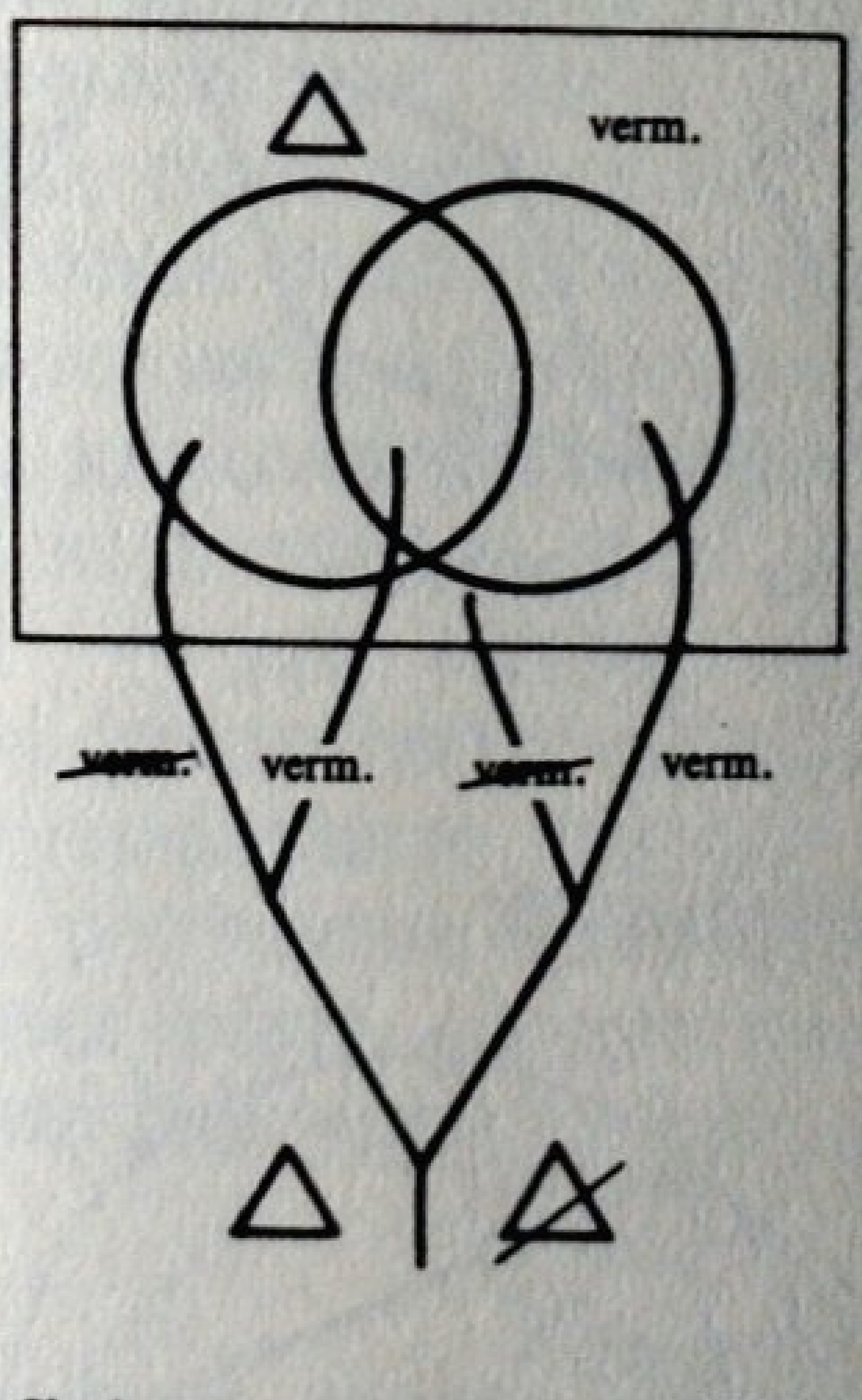
A seguir, e a partir de alguns exemplos, indicaremos como se podem variar as formas de percepção.

* N. T.
Por diferenciação interna, entende-se o sistema em que os alunos frequentam a mesma turma, porém, estão sujeitos a tarefas diferentes, segundo as aptidões e capacidades que revelam.

É um exercício estimulante, para as crianças, descobrir o conjunto intersecção, em várias representações (→ 3.1.2).



No caso de — como é prática frequente — para se apreenderem formas de relacionamento ser necessário fornecer meios auxiliares, devemos cuidar de que estes possam ser trabalhados, com independência, pelas próprias crianças. Para tal, Dienes propõe entre outras, as seguintes etapas [17, pág. 20]:

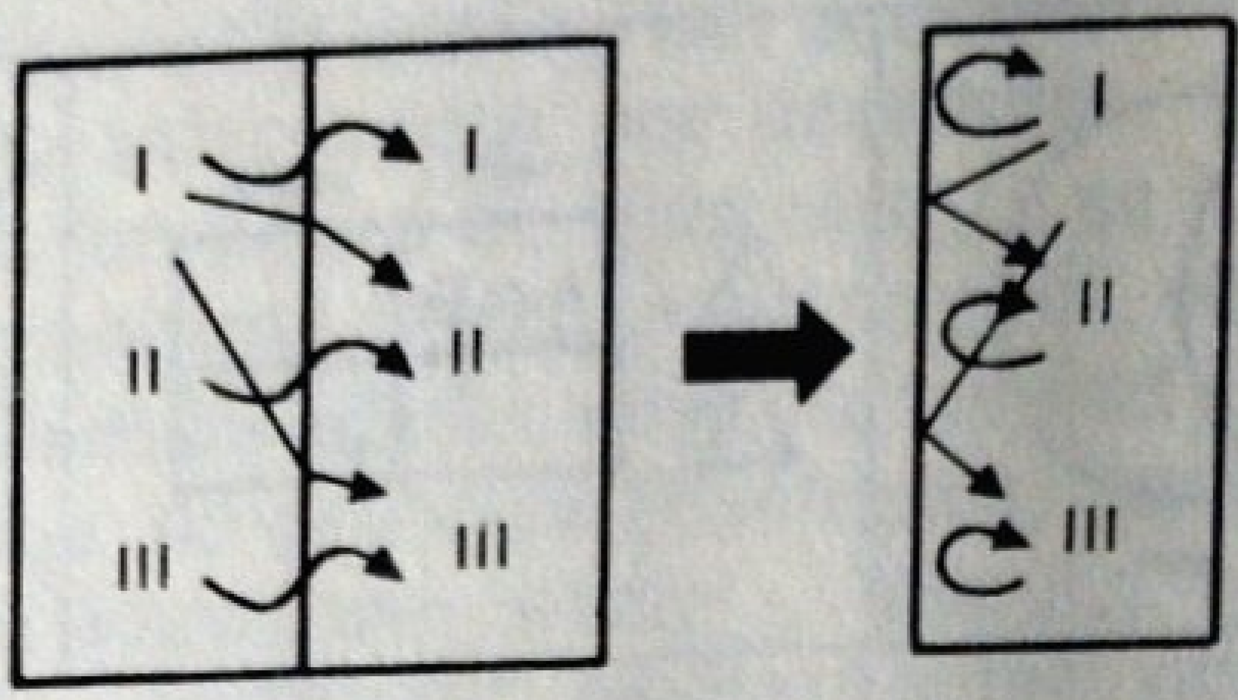


a) Fornecem-se várias fichas separadas. Depois de algumas experiências, as crianças reconhecem que:

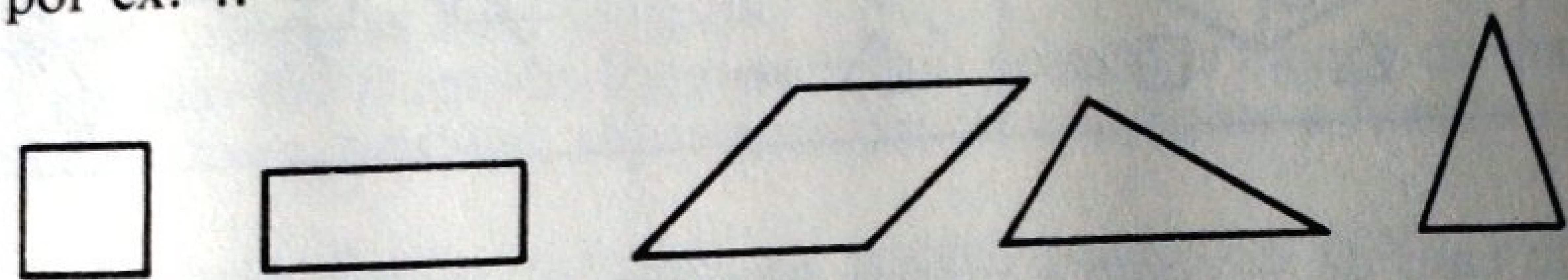
b) De cada vez, se podem obter vários subconjuntos.

* N. T.
Há uma tradução portuguesa do livro citado: Dienes — As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática (Editora Pedagógica e Universal-Brasil, Multi-Nova).
As seis etapas são:
1. Actividade livre. 2. Jogos. 3. Descoberta de traços comuns. 4. Representação. 5. Simbolização. 6. Formalização.

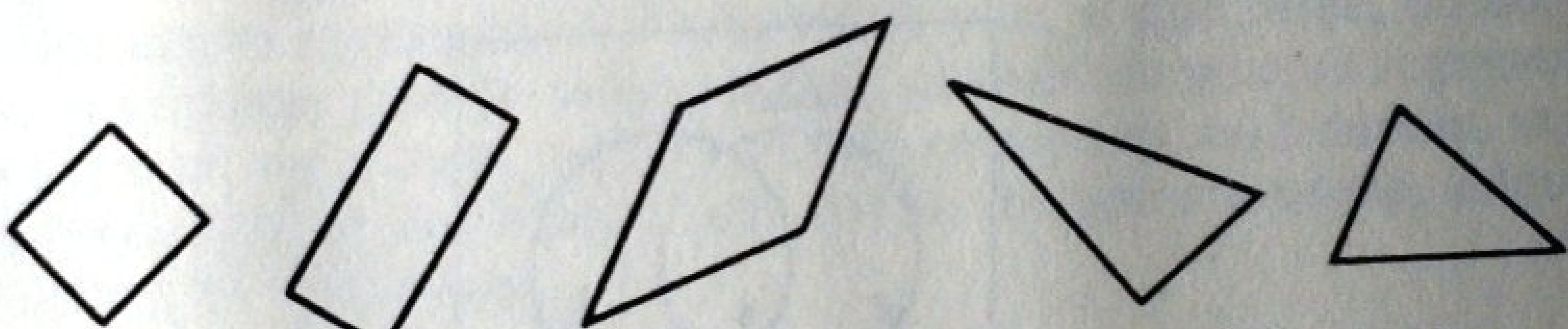
40 A possibilidade de representar uma relação num conjunto, por meio de flechas (→ 3.1.2) só se tornou clara, aos alunos, através da dobragem duma folha transparente sobre outra.



41 Muitos professores e livros escolares apresentam as figuras em posições fixas, por ex.º.:

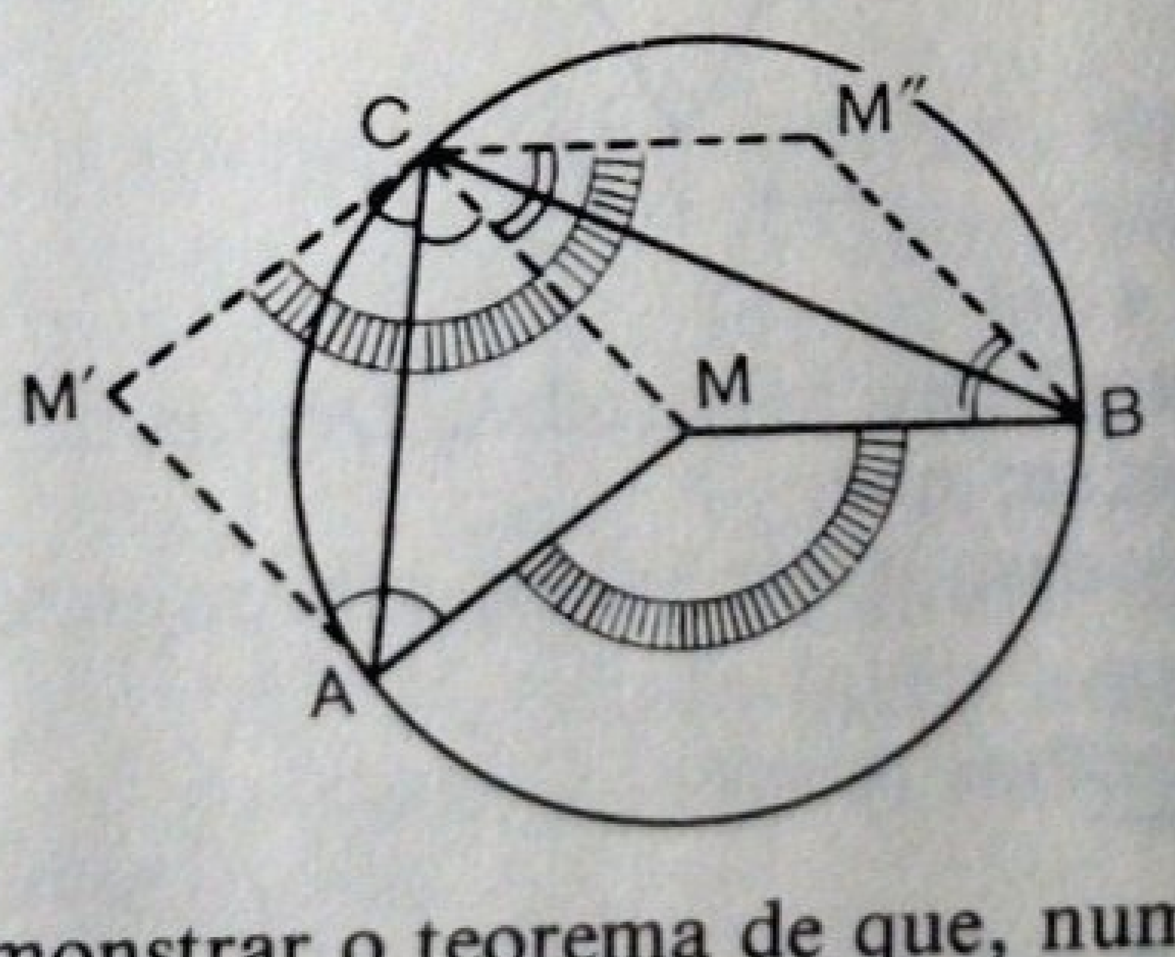


Uma tal apresentação leva, de facto, a uma apreensão rápida; mas conduz os alunos a fracassos, nas demonstrações ou aplicações em que as figuras não aparecem desenhadas naquelas posições normais, mas sim nestas:



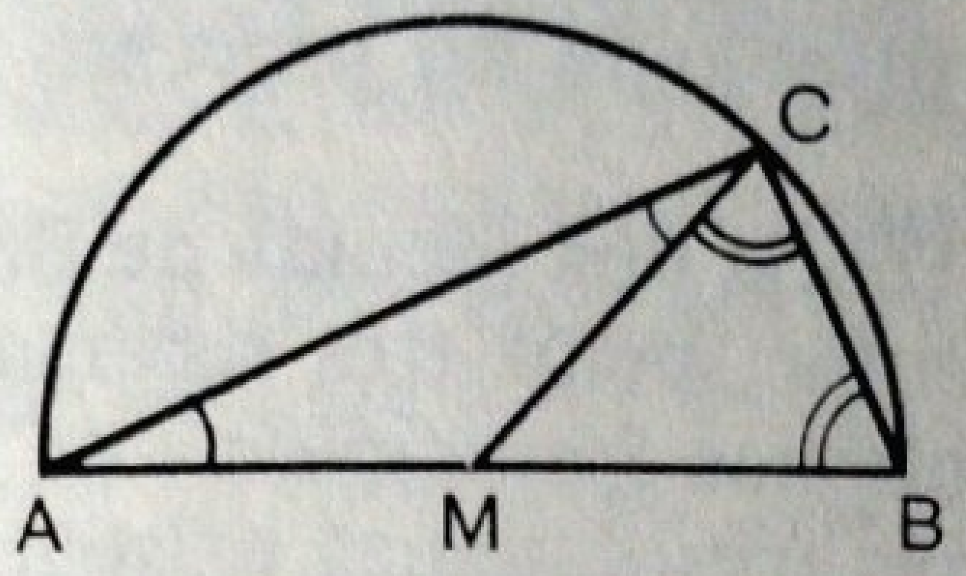
Quadrado Rectângulo Losângo Triâng. rectângulo Triâng. isósceles

É o que sucede na figura seguinte:



Pretende-se demonstrar o teorema de que, numa circunferência, o ângulo ao centro mede o dobro do ângulo inscrito correspondente. A demonstração parte dos losangos AMCM' e BMCM'' que se obtêm, por construção do simétrico de M em relação aos eixos AC e BC.

A demonstração do teorema de Thales parte dos triâgulos isósceles ACM e BCM.



As funções trigonométricas dos triângulos rectângulos deveriam ser tratadas, correlativamente, com os triângulos em posições muito variadas. Assim, de cada vez, o aluno seria obrigado a procurar o ângulo recto (primeiro, haverá um?) e a verificar onde está o cateto adjacente e o oposto.

Se debaixo das citadas limitações, é de recomendar uma variação nas modalidades representativas (manipuladora e figurativa), contudo, na simbólica, tal variação só é aconselhável, quando ao aluno se torna clara a distinção entre a designação (nome, palavra) e o designado (conceito). O aluno sente esta diferença e a arbitraridade fundamental da correspondência, entre a designação e o designado, quando aprende a usar vários símbolos ou palavras, para designar uma noção matemática. Este ponto de vista acentua-se, ainda mais, se o aluno — principalmente, na fase inicial duma unidade de ensino — criar algumas designações e formular o facto matemático, em termos dele próprio. Esta concepção contraria a atitude dogmática de muitos professores que, desde o princípio, só aceitam uma determinada designação (que pode ser por ex.º, uma palavra). De facto, uma variação, dentro da forma simbólica, permite desenvolver pouco o processo de abstracção e, com este, a formação do conceito; uma vez que os símbolos, devido à sua arbitrariedade, não representam, geralmente, qualquer parte essencial dum conceito.

Portanto, no ensino — por razões de tempo e de fixação memorística — os símbolos devem variar de uma forma restrita. Pense-se, por exemplo, na circulação rodoviária, em que se assinalariam as vias de circulação num só sentido, por vários sinais diferentes. De facto, quando na literatura matemática, por vezes, surgem para uma noção várias palavras ou vários símbolos, isto foi condicionado, na maioria dos casos, por razões históricas.

Num exame para professores, apenas numa só lição a um 5.º ano escolar, usaram-se três sinais diferentes, para indicar a mesma relação «… é divisor de …» 42

$3 \xrightarrow{D} 12$ 3 [é divisor de> 12 $3 \cdot | \ 12.$

O tempo inútil, assim perdido, teria sido melhor aproveitado, na descoberta de algumas propriedades simples. De resto, a segunda simbologia derivada do modelo «máquina», só adquire forma significativa, nas funções.

3.1.6 *Variações entre os planos de representação*

Hans Aebli no prefácio ao livro de Bruner «Estudos sobre o desenvolvimento do conhecimento»* [10, pág. 8] considera-o «um dos mais importantes contributos, para a psicologia do processo do conhecimento e da psicologia evolutiva».

Já em 3.1.1 citámos a «Teoria dos Media» de Bruner, segundo a qual a experiência se pode representar, pelos três sistemas: o manuseamento, a figuração (imagem) e a simbólica (principalmente a palavra).

A afirmação de que estes três sistemas existem não é, pois, nova. O que pode ser novo é considerar que:

— existem, em grande parte, independentemente uns dos outros;
— são de estruturas psicológicas mentais diferentes;
— conduzem a atitudes, também diferentes.

Como já assinalámos em 3.1.1, Bruner distancia-se bastante, neste ponto, de Piaget, principalmente na questão da linguagem. Esta, segundo Piaget, surge como um apoio ao raciocínio, que embora útil para o intercâmbio intelectual, não constitui, porém, qualquer componente da vida intelectual [10, pág. 8]**. Pelo contrário, segundo Bruner, a linguagem surge, em pé de igualdade, juntamente com os outros sistemas (Media). Precisamente, porque a linguagem é, muito menos que os outros sistemas, limitada pela maturação, é que o Meio e a Educação assumem a maior importância.

São, pois, muito importantes, para este capítulo, as consequências provenientes da «Teoria dos Media». Bruner e os seus colaboradores concluiram, através de inúmeras experiências, que é a partir dos conflitos, surgindo entre os três sistemas, levando a interacções entre eles, que se chega a um novo estado de equilíbrio [10 pág. 91], ou seja à:

Teoria da «equilibração».

Bruner fornece, a este respeito, um exemplo: «Uma criança pode dizer de, dois conjuntos, que um é maior do que o outro; um momento mais tarde, que ele é mais pequeno; e, depois, que são iguais. O que ela utiliza são, então, as palavras, como segmento da sua experiência***. Só quando está explorando a linguagem é que volta atrás, à experiência, para dominar a falsa correspondência entre a sua observação e o que ela (criança), precisamente, disse. A sua proposição deve, pois, ser considerada como um teorema e, neste nível, resistir à prova. Então, a criança pode voltar atrás e considerar, de novo, a experiência; ver o mundo literalmente diferente, e, de facto, a partir de processos simbólicos adaptá-lo, de novo, à natureza da experiência****.

N. T.

* Note-se que o original de J. Bruner. — Studies in Gognitive Growth (já citado), não leva o prefácio de Aebli.
Vide, também:
J. Bruner — Uma nova teoria de Aprendizagem (já citado) pág. 43; pág. 60-65.

** J. Bruner — Studies in Gognitive Growth (já citado).
Vide também:

*** J. Bruner — Uma nova teoria de Aprendizagem (já citado — pág. 20 e 26-33.
Aliás, sempre de forma incorrecta.

**** Interessará, também, conhecer as ideias de Piaget sobre a equilibração. Vide para tal:
J. Phillips — Teoria de Piaget sobre as origens do intelecto (já citado) — pág. 33-37.

Precisamente, no possível conflito, entre os diferentes sistemas de representação, é que Bruner vê o impulso essencial, para o conhecimento cognitivo.

No ensino da Matemática surgem, agora, dois casos:

1. O facto matemático é, em si, simples de aprender; eventualmente tão simples, que o aluno não toma dele pleno conhecimento.

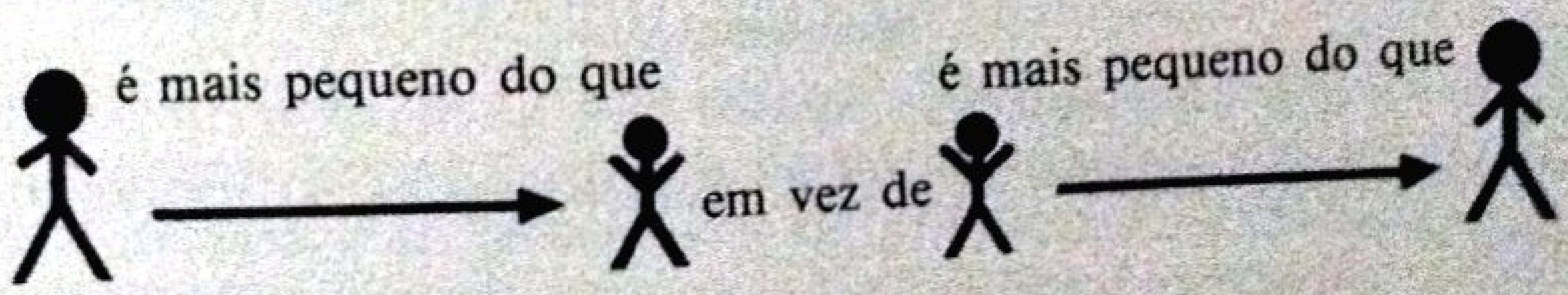
Neste caso, o professor deve escolher as representações em vários sistemas, de forma tal que venham à luz do dia conflitos; ou então, construí-las tão habilmente, que atraiam sobre elas a atenção dos alunos. Exemplos deste tipo encontram-se em 3.1.3 e 3.2.1

2. O facto matemático é, já em si, bastante complexo.

Então, o professor deve escolher as representações, nos vários sistemas, mas simplificá-los, de maneira que os conflitos iniciais sejam possivelmente banidos e que as representações se apoiem, umas às outras. Só depois de obtidas as primeiras certezas, é que se devem ir suprimindo, sucessivamente, os conflitos de que o aluno se deu conta.

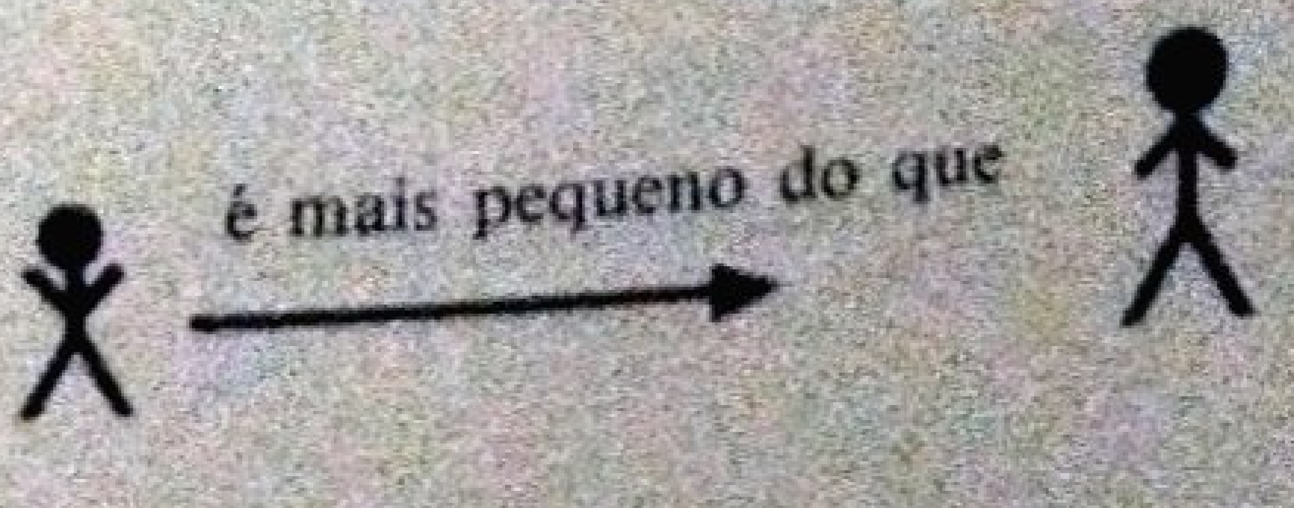
Apresentamos, aqui, um exemplo dum possível conflito de representações:

Em muitas classes do 1.° ano, podemos observar, na introdução da 43
relação «... é mais pequeno do que ...», que muitas das crianças expontaneamente dispunham uma seta de cartão, num sentido errado, dirigida directamente para a criança mais pequena.



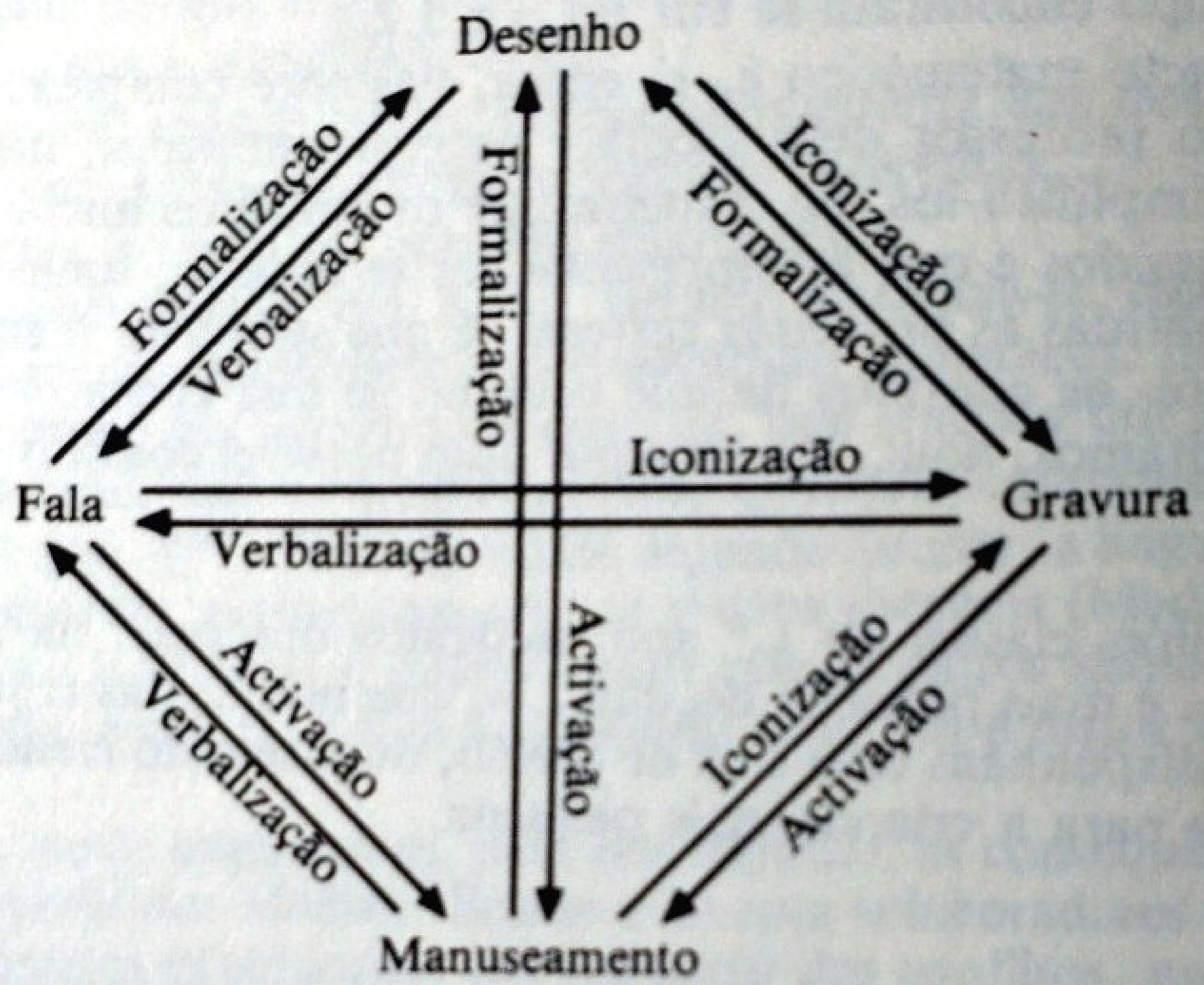
Por detrás desta estranha observação, o autor supõe um conflito de representações: No plano da linguagem, a partir da frase Hans é mais pequeno do que Ulrich aparece destacado, em primeiro lugar, o conceito absoluto «pequeno». Pelo contrário, na representação figurativa, destaca-se, principalmente, o sentido da seta. Aparentemente as duas impressões associam-se no espírito da criança, isto é, ela não assume o conflito: conceito «pequeno» referido a Hans, versus, «sentido da seta» apontando, precisamente, no sentido oposto.

A hipótese anterior foi confirmada quando, por meio dum enfraquecimento do conflito, o comportamento errado quase desapareceu. Para tal, aumentámos a distância entre crianças, de maneira que a seta, como um todo espacial, ficasse muito mais perto da criança pequena, do que da grande.



Correlativamente, indicámos às crianças, para estabelecerem, na fala, uma pausa: («Hans é mais pequeno... do que Ulrich». Desta maneira, «é mais pequeno» na sua contextura verbal, está, no tempo, mais perto da criança pequena, do que da grande*.

Em ambos os casos atrás mencionados 1 e 2, é, porém, importante apoiar e fortalecer as interacções, entre os diferentes sistemas. A seguir apresentamos um resumo sobre as principais interacções; nestas, no plano simbólico, destacamos a fala e o desenho.



Através dos exemplos seguintes, esclareceremos o significado de tais interacções:

44 Dentro do tema de transformações no plano, «rotação dum quadrado em torno do centro» [56, pág. 95 e seg.], a partir dum modelo grande de demonstração, exploram-se as noções de: rotação completa; semirotação; quarto de rotação para a direita; quarto de rotação para a esquerda.

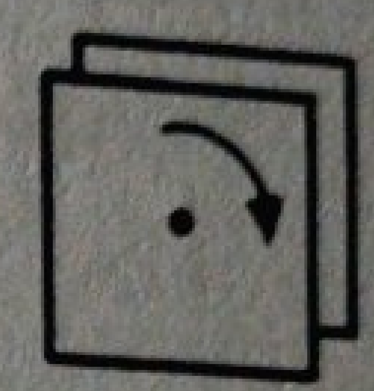
A construção, numa lição posterior, dum quadro de conclusões falhou, porque muitas das crianças confundiam, sempre, os dois sentidos de rotação: para a esquerda e para a direita. A causa principal desta confusão residia em que a exploração da noção, se fazia, exclusivamente sobre o modelo de demonstração que estava preso no quadro, em disposição vertical; enquanto os modelos das crianças se encontravam em posição horizontal. Numa outra lição sobre o mesmo tema, já se não registou qualquer confusão, apesar de não se lhe ter dedicado mais tempo. Para conseguir tal resultado, atendeu-se a todos os sistemas de representação e a várias interacções. Assim:

N. T.
* O mesmo processo se utiliza, quando na multiplicação, 3x5 se lê «três;... vezes cinco», salientando, com a pausa, após o «três», que tomamos «x5» como operador (multiplicador).

Activação: Ordens transmitidas verbalmente («mais um quarto de rotação, faz meia rotação») foram efectuadas a partir do modelo dum relógio com um ponteiro, e por todas as crianças, nestas condições: em torno do seu eixo vertical com os braços estendidos; com quadrados de cartão assentes no quadro preto e em cada carteira.

Verbalização — As crianças efectuaram os movimentos correspondentes às ordens anteriores e disseram qual a rotação feita, de cada vez.

Iconização — Ordens transmitidas, verbalmente, devem ser executadas em representação figurativa («Para onde olhas tu, depois dum quarto de rotação para a esquerda?»). As flechas correspondentes devem ser desenhadas sobre um quadro, traçado no quadro preto.



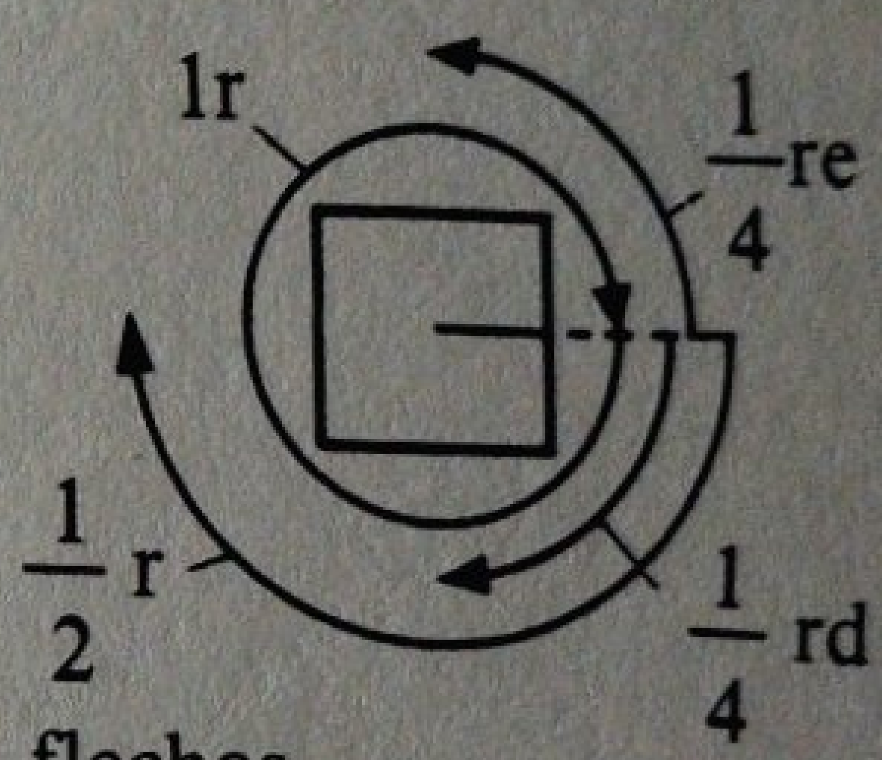
Formalização — Escrever no quadro:

1r : 1 rotação inteira*.

$\frac{1}{2}$ r : Uma meia rotação.

$\frac{1}{4}$ rd: Um quarto de rotação para a direita.

$\frac{1}{4}$ re: Um quarto de rotação para a esquerda.

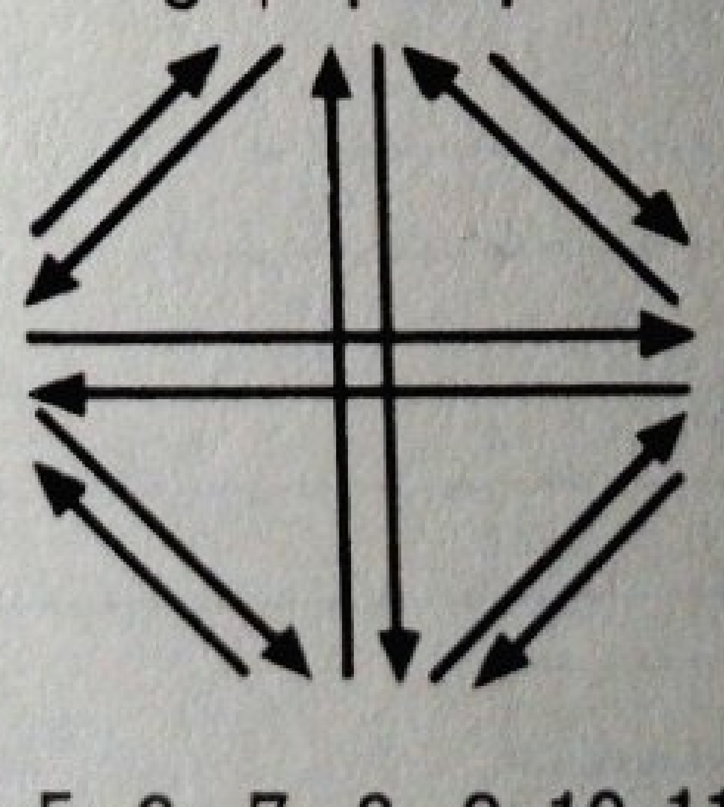


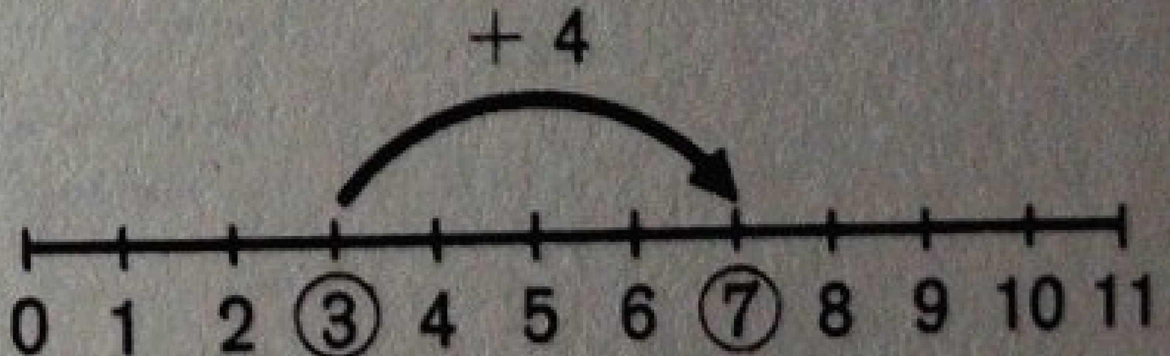
As abreviaturas escrevem-se na figura, junto das flechas.

A propósito do tema do 1.° ano escolar «Igualdade do tipo a + b = c», **45**
dentro do uso dum sistema completo de representações, são possíveis 12 interacções diferentes e as formulações de problemas correlativos.

A igualdade é interpretada ou com o significado do operador conhecido que vai actuar, ou do operador desconhecido que efectua a passagem de a para c**.

«A partir da posição 3, dar 4 passos para a frente e chegar à posição 7», ou «3 mais 4 igual a 7».





Os traços foram marcados a giz sobre o sobrado da sala de aula.

N. T.

* No original, respectivamente, G, M, V_r, V_e cujo similar em português: I, M, Q_r, Q_e, abandonámos por confusões a que poderia dar origem.

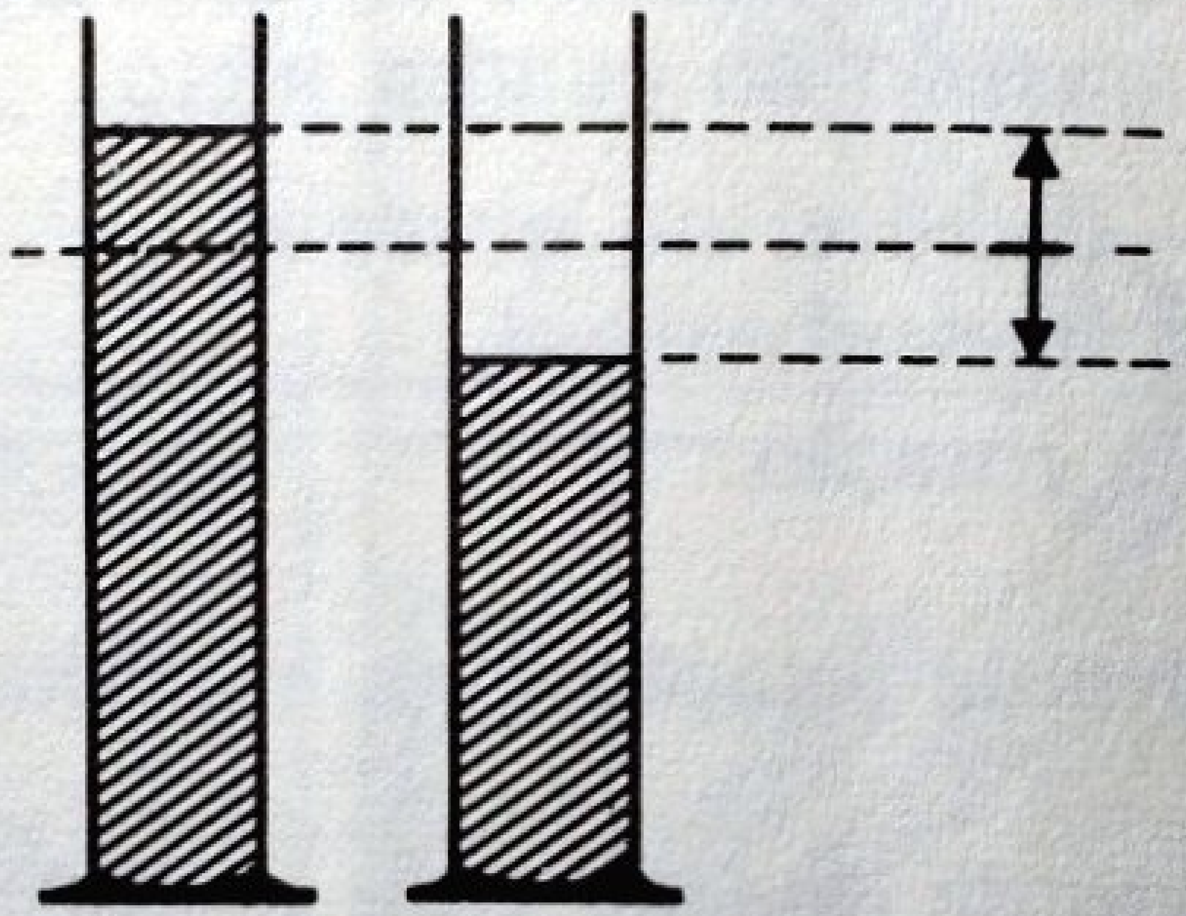
** No original, Zustand — Operador e Zustand — Auffassung que julgamos interpretar, como referidos respectivamente a $a \xrightarrow{Op} x$, e $a \xrightarrow{x} c$

Naturalmente que, para um dado tema, não será possível explorar todas as 12 variantes, contudo o seu auxílio permite sempre — com os muitos exercícios que sugere — uma desejável alternância.

As mesmas aplicações, respectivamente, para exercícios do tipo $a - b = c$ («a partir de a; b, passos para trás até c»).

46 Para a introdução, num 3.º ano, da média aritmética, devemos principiar por tornar iguais a altura dum líquido, em dois frascos proveta.

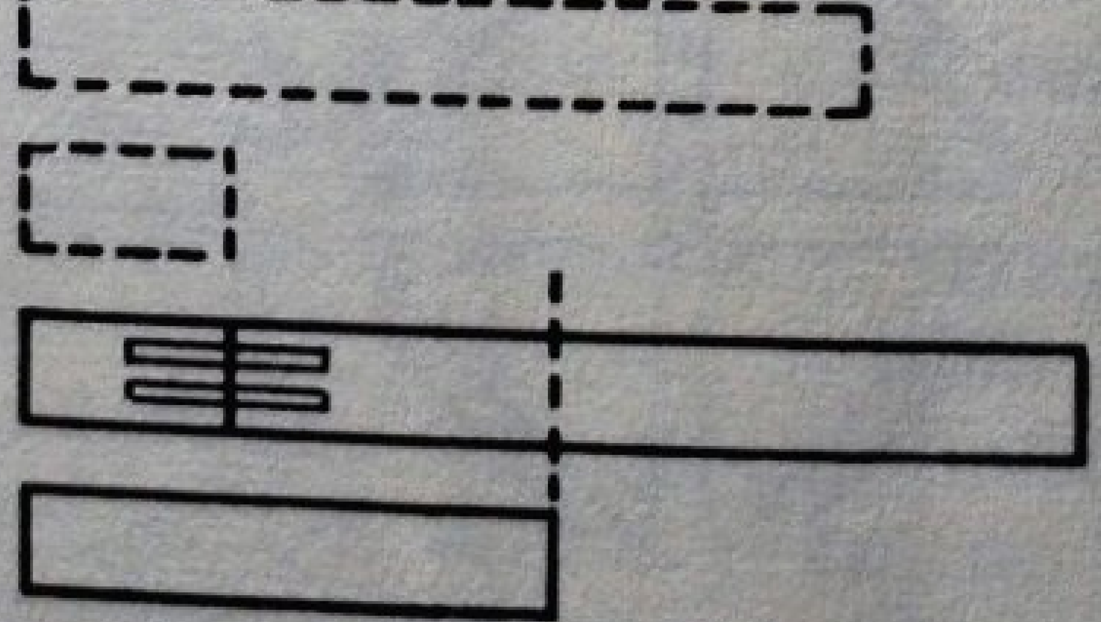
Após muitas experiências, o problema resolveu-se, manipuladoramente, através da divisão da diferença das alturas por 2. Depois das escalas graduadas em cm, terem sido colocadas uma ao lado da outra, chegou-se à formalização do problema, por meio das expressões $a - \frac{a-b}{2}$ e $b + \frac{a-b}{2}$.



Finalmente, o problema foi verbalizado, através de muitos exemplos.

Porém, em breve se revelou que muitos alunos calculavam doutro modo, principalmente segundo a expressão $\frac{a+b}{2}$.

A partir daqui, a resolução foi tornada activa. Para tal, os alunos receberam tiras de papel, a utilizar segundo as operações aritméticas que teriam de efectuar.



Muitos alunos, a princípio, tiveram dificuldade em encontrar, para as operações, os respectivos manuseamentos:

Adicionar ⟷ «Pôr no seguimento».

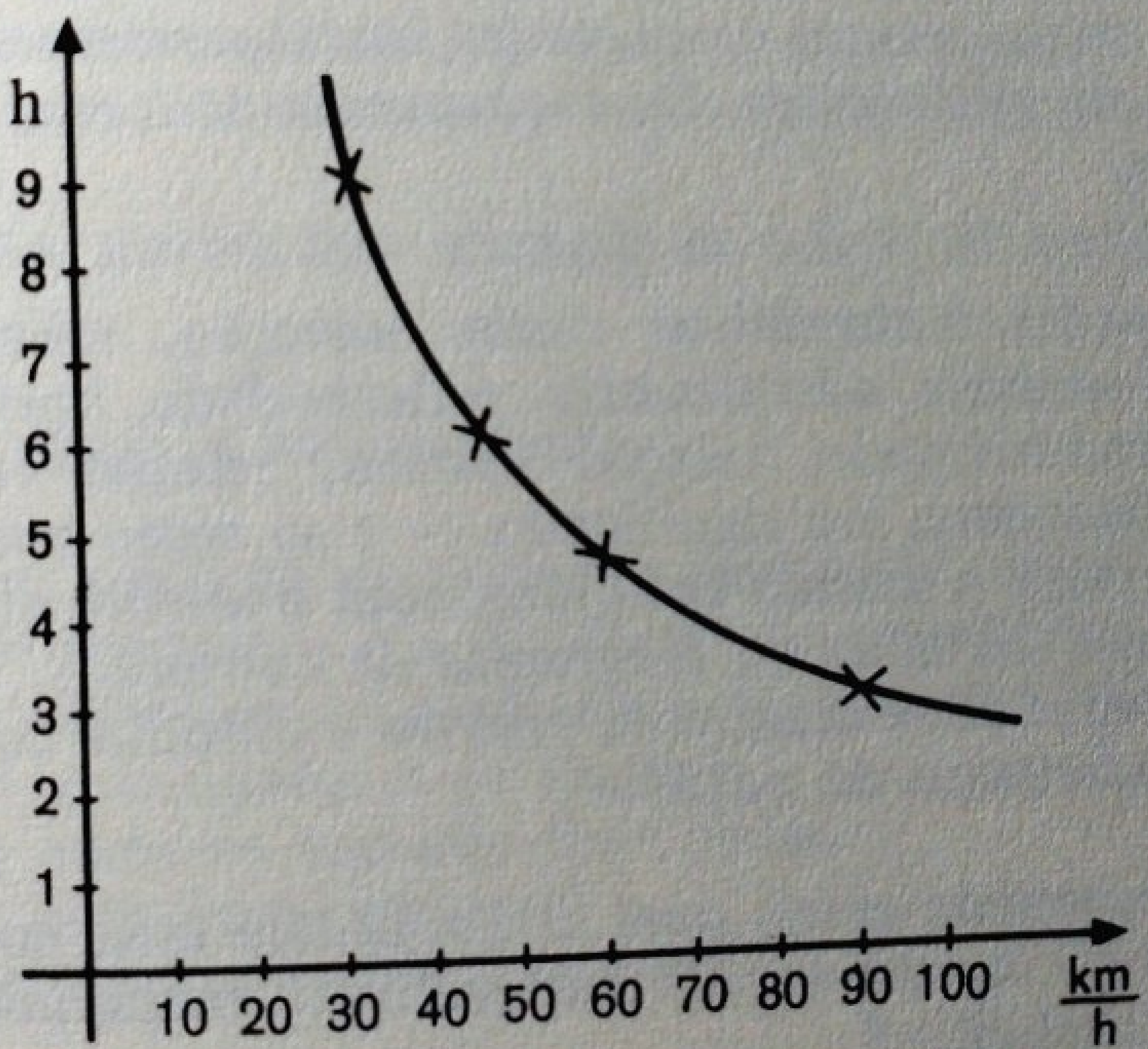
Dividir por 2 ⟷ Depois de «pôr no seguimento» «dobrar ao meio» e marcar a dobra.

Como no seguimento das aulas se verificou, a segurança de técnica desta nova «activação», agiu de forma positiva, sobre a verbalização e o cálculo aritmético.

No decorrer do ensino da matemática, não é de atribuir, aos vários sistemas de representação, a mesma importância: Com o aumento das capacidades de representação, a maior frequência das experiências manipuladoras e, ainda, com a transição para uma fase de lógica formal (que o prosseguimento escolar traz consigo), aquela importância desloca-se, mais ou menos, para os sistemas verbal, figurativo e escrito. Fundamentalmente, dever-se-ão, contudo, continuar a explorar as permanentes interacções, como indicamos nos seguintes exemplos:

Numa aula a um 9.º ano, sobre as aplicações da hipérbole, partiu-se do exemplo de um automóvel, com a velocidade de 60 $\frac{km}{hora}$, a fazer um dado percurso em 4,5 horas. O problema que se levantou foi o de achar as outras eventualidades que, neste caso, sobrevinham: 47

Partiu-se do estabelecimento, já conhecido, do quadro de valores a partir de $t = \frac{e}{v}$, e do desenho do gráfico.



A lição foi notavelmente positiva, uma vez conduzida sob a forma de muitas questões, ligadas às várias interacções entre a igualdade (I); o Gráfico (G); a representação objectiva da situação (O) e a verbalização do problema (V):

1. Determinação do quadro de valores e desenho do gráfico (I → G).
2. Quais as várias questões que se podem resolver sem cálculos, através do gráfico? (G → O → V). Por exemplo: o trajecto é para ser percorrido em 3,5 h; qual deverá ser a velocidade?
3. Seria de admitir que o gráfico aparecesse, segundo uma circunferência? (Nesse caso, poderia haver, para dadas velocidades: zero, um, ou dois tempos; e, da mesma forma, para dados tempos, existiria: zero, uma, ou duas velocidades. A igualdade $t = \frac{e}{v}$ fornece, porém, um só valor determinado). (G → 0 → V → I).

4. Afirmou-se, na introdução, que a hipérbole não toca (ou não corta) o eixo em qualquer ponto. Que consequências provêm daqui, para o automóvel? Vejamos:

Por muito elevada que fosse a velocidade, o tempo nunca se poderia reduzir a 0. Por muito tempo que nos detivéssemos num automóvel incapaz de andar ($v = 0 \frac{km}{h}$), nunca chegaríamos ao termo da viagem (G→I→0→V).

5. Podemos ler, no gráfico, o valor 270 km de percurso total? Como é que, neste gráfico, se revela o facto de o percurso se manter constante? (V → 0 → I → G).

6. Que modificações sofre o gráfico, quando:

*a)*Além do tempo (4, 5h) gasto no percurso, ocorre, ainda, no meio do caminho, uma paragem de 3 horas?

b) O tempo duplica, em virtude de se ter que contar com o regresso. Ocorrerá, novamente, uma hipérbole? V → 0 → I → G).

48 Sem o fazermos, detalhadamente, aqui: O tratamento da fórmula do binómio e da complementação dos seus quadrados ganha, essencialmente, em eficiência se, os termos e operações correspondentes forem «visualizados», através de rectângulos. De facto, assim se tornarão possíveis várias interpretações.

49 Muitas noções matemáticas como: injecção, sobrejecção, bijecção, simetria, anti-simetria, não simetria, reflexividade, irreflexividade, transitividade, intransitividade, relação inversa, relação complementar, ganham, essencialmente, em significado — e só serão compreendidas — se forem esclarecidas, e mesmo definidas, com o auxílio de gráficos de setas, tabelas, gráficos cartesianos, diagramas de conjuntos. Só as interacções, assim viabilizadas entre diagrama, palavra e símbolo, conduzem ao necessário aprofundamento da noção.

Discute-se, muitas vezes, qual será a ordem mais conveniente para os vários planos de representação, por exemplo: manipulador → figurativo → verbal → simbólico?

Se partirmos da validade das teorias de Bruner — a dos «media» e a da equilibração — estas duas diferem da teoria de Piaget (a da interiorização) em que, segundo as duas primeiras, no processo da aprendizagem matemática, não se trata da subida linear dum sistema de representação para o seguinte, mas sim, sempre, de novas e complementares interacções entre todos os sistemas: Então só durante a preparação e a introdução duma nova noção, é que as «activações» e, muitas vezes também, as «iconizações» e as «codificações», serão, em geral, mais favoráveis do que a verbalização. Assim, se pode observar, por exemplo, que para a introdução da disjunção a um 1.º ano, a tarefa introdutória de «activação»: «deita, nesta caixa, fichas que sejam vermelhas ou triangulares», provocou menos dificuldades e conduziu a uma aprendizagem mais rápida, do que a fase verbalizada de introdução, segundo o qual se reuniam os conjuntos das fichas vermelhas e o das triangulares, para, depois, perguntar, como era a ficha que se retirava do conjunto, uma vez oculta a representação deste.

O significado da teoria da interiorização, no ensino da Matemática, consiste em que este, durante os primeiros anos de vida escolar, acentua o papel primordial da manipulação, enquanto que, nos anos seguintes, desloca o centro de gravidade para os «media» simbólicos. O mérito de Dienes consiste, então, em ter feito várias contribuições dirigidas, principalmente, para a fase manipuladora. Assim, dentro do significado do seu chamado «Princípio da Construtividade» [15, pág. 44]* desvendou caminhos, para um «raciocínio construtivo» da criança.

Não podemos esclarecer, dentro das limitações deste livro, a medida em que os seis passos** da aprendizagem da matemática, apresentados por Dienes [17], são de considerar, a partir da psicologia do raciocínio de Bruner.

Para conclusão deste capítulo 3.1, apresentamos, ainda, algumas observações. Na didáctica, fala-se, muito, duma aprendizagem relacionada. Referida a uma determinada matéria de ensino, é possível obter relacionamentos nas três dimensões: das variações entre os campos matemáticos; entre os campos de representação; e no interior dos campos de representação. Quanto mais intensamente o espaço didáctico, assim ampliado, for percorrido em sectores escolhidos; e, quantas mais espécies de relacionamento se estabelecerem, maiores serão as probabilidades dum ensino efectivo.

Esclarecemos isto, através dum exemplo de adição de números cardinais.

Variação entre os campos matemáticos.

Em ligação com a adição de números cardinais, estão:
— a reunião de conjuntos e a disjunção de proposições;
— a subtracção de números cardinais e as correspondentes operações (da teoria dos conjuntos e da lógica);
— a adição de números segundo uma recta;
— a adição de grandezas, em geral.
— o conceito estádio; operador; estádio***.

Variação entre os campos de representação e dentro de cada campo.

Simbolicamente: por ex.º $3+4=\square$; $\square - 4 = 3$
Verbalmente: por ex.º três, mais quatro, igual a?

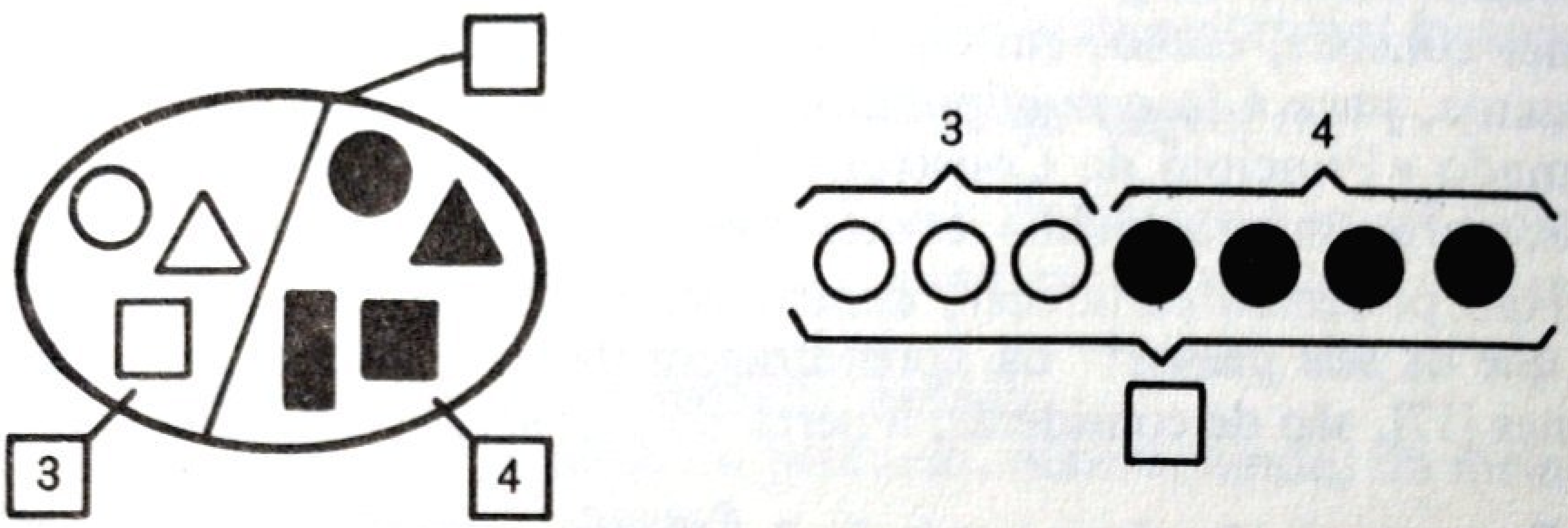
N. T.

* A tradução francesa da obra citada é «Construction des Mathématiques»(P.U.F.) — pág. 52 e 72. Da pág. 52, transcrevemos: «Na estruturação dos jogos, a construção deveria, sempre, preceder a análise, a qual, nas crianças de menos de 12 anos, está quase completamente ausente da aprendizagem».

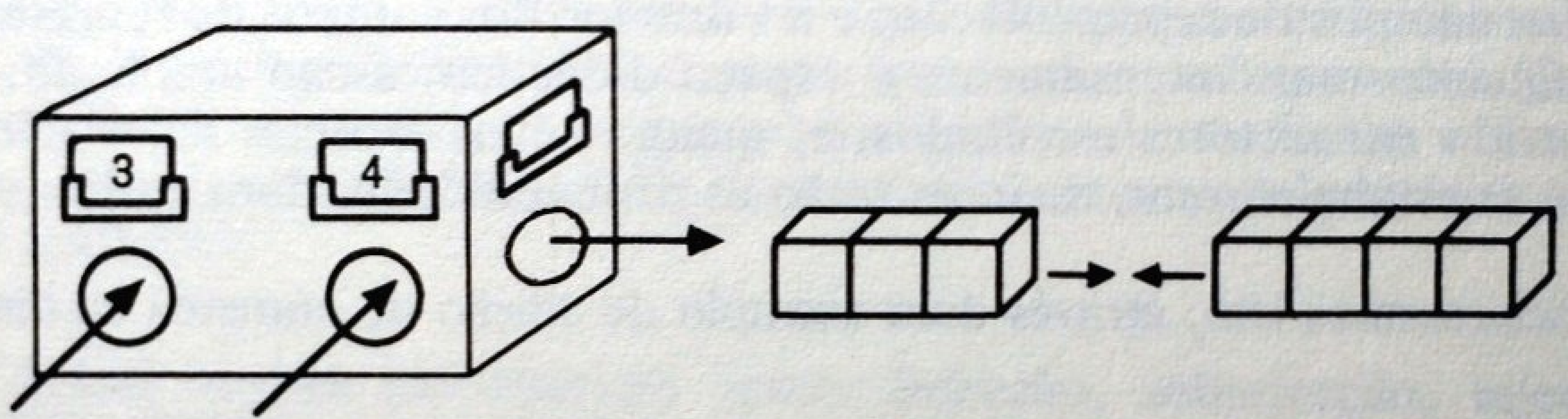
** Vide nota anterior da pág. 55, sobre as «Seis etapas de aprendizagem da Matemática».

*** Por tal, entendemos a relação que o operador estabelece, entre um estádio inicial de partida, e um estádio final de chegada.

Duma carruagem sairam 4 passageiros; 3 continuaram. Quantos iam, anteriormente?



Manipuladoramente: por ex.º:



Podemos, ainda, encontrar representações, correspondentes aos campos matemáticos que aqui falta indicar.

Resumindo o capítulo 3.1, apresentamos os seguintes critérios:

C_{12}	Introduziram-se durante o ensino, todos os sistemas possíveis de representação?

C_{13}	Os sistemas de representação puseram-se em relacionamento, uns com os outros?

C_{14}	Os tipos e a quantidade de representações provocaram confusão?

3.2 *Motivação e problematização do tema*

No passado, a estrutura que servia para a motivação do estudo da Matemática — incluindo o estudo das operações aritméticas — era, muitas vezes, caracterizada pelos seguintes factores:

Referência à vida diária e às aplicações.

Adaptação às características infantis.

Uso de louvores, censuras, castigos, classificações.

Personalidade do educador.

Muitos professores são conscientes do aspecto parcialmente restritivo de tal estrutura. Por isso, seguidamente, apresentamos algumas motivações importantes, tais como podem ser predominantemente orientadas, isto é, de forma objectiva. Neste capítulo, podemos distinguir três espécies:

Motivação, através do próprio tema matemático.

Motivação, através da configuração exterior do tema.

Motivação, através da aplicação do tema.

3.2.1 *Motivação através do próprio tema*

A motivação imanente ao tema é a mais importante de todas, porque desvia o olhar do aluno, do professor para o assunto. Assim, contribui para um comportamento individual responsável e uma aprendizagem independente (feita pelo aluno, por si só).

Um aluno pode ser, predominantemente, motivado pelo tema matemático, se este apresentar um valor que o aluno ainda não possue, ou ainda não possue completamente.

Os valores do tema matemático baseiam-se, fundamentalmente, na Estética, Afectividade e Teoria do Conhecimento.

Atendendo a que os valores estéticos são, ao mesmo tempo, uma questão de estrutura exterior do tema, falaremos sobre este aspecto em 3.2.2 *a*).

O aspecto seguinte da primeira espécie de motivação que passaremos a tratar, referir-se-á a uma concepção dinâmica da matemática, a saber: a matemática entendida, não como uma colecção de definições e teoremas, mas, sim, como um processo. Processo este, aliás, em cujo decurso intervêm — e muito bem — definições, teoremas, etc. Temos, pois:

1) Motivação através do valor afectivo, da satisfação proveniente do exercício da actividade mental matemática, ou duma heurística, que o aluno pode estimular, através do estabelecimento e resolução de questões. A esta categoria pertence, principalmente, a satisfação ligada às descobertas de:

— subordinação a leis;
— exemplos — contra exemplos — analogias;
— novas combinações;
— propriedades comuns.

Pertencem, ainda, a esta categoria as satisfações derivadas do estabelecimento de:

— ordenações (classificações, seriações);
— inversões.

Os processos, pelos quais tais valores de satisfação poderão ser introduzidos, serão esclarecidos, principalmente, nos capítulos 3.3 e 3.5.

2) Os valores ligados à teoria do conhecimento desdobram-se nos seguintes aspectos a) b) e c). Estes correspondem, de preferência, ao carácter estático da matemática:

a)Motivação através do valor do conhecimento teórico (da solução dum problema).

50 A observação de entrada, feita pelo professor a uma turma do 5.º ano — de que os números podem ser representados por uma maneira completamente diferente da habitual — assumiu, para eles, de princípio, um valor muito reduzido de conhecimento. Seria, por exemplo. muito mais sugestivo o problema de achar o menor número possível de algarismos, com os quais se poderão representar, aditivamente, todos os números de 1 a 100, sem utilizar mais do que esses algarismos. (Usar, consequentemente, o princípio do valor de posição).

Para tal, supõe-se que os alunos já teriam chegado à sucessão das potências de 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.

Tornou-se, então uma tarefa excitante, para os alunos, estabelecerem, para diferentes números, a sua representação, no sistema binário:

$1=1$
$2=2$
$3=2+1$
$4=4$
$5=4+1$
$6=4+2$

	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
7								1	1	1
579	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1

A importância desta espécie de motivação consiste em conhecer um relacionamento: a representação dum número com auxílio doutros, recorrendo a uma convenção aceitável.

b) Motivação através do conhecimento teórico dum processo de resolução.

O valor, aqui, reside em poder resolver, em qualquer altura, um problema, de forma correcta e hábil.

51 Já em Ex.º 46. se falou nas diferentes maneiras de determinar o valor médio de dois números. De forma geral, os alunos por si sós, chegam, apenas a um só processo; no máximo, a dois. Através duma escolha hábil da situação de partida, poderemos, contudo, provocar todos os processos possíveis:

Processo $\frac{a + b}{2}$ $a=40$; $b=2$

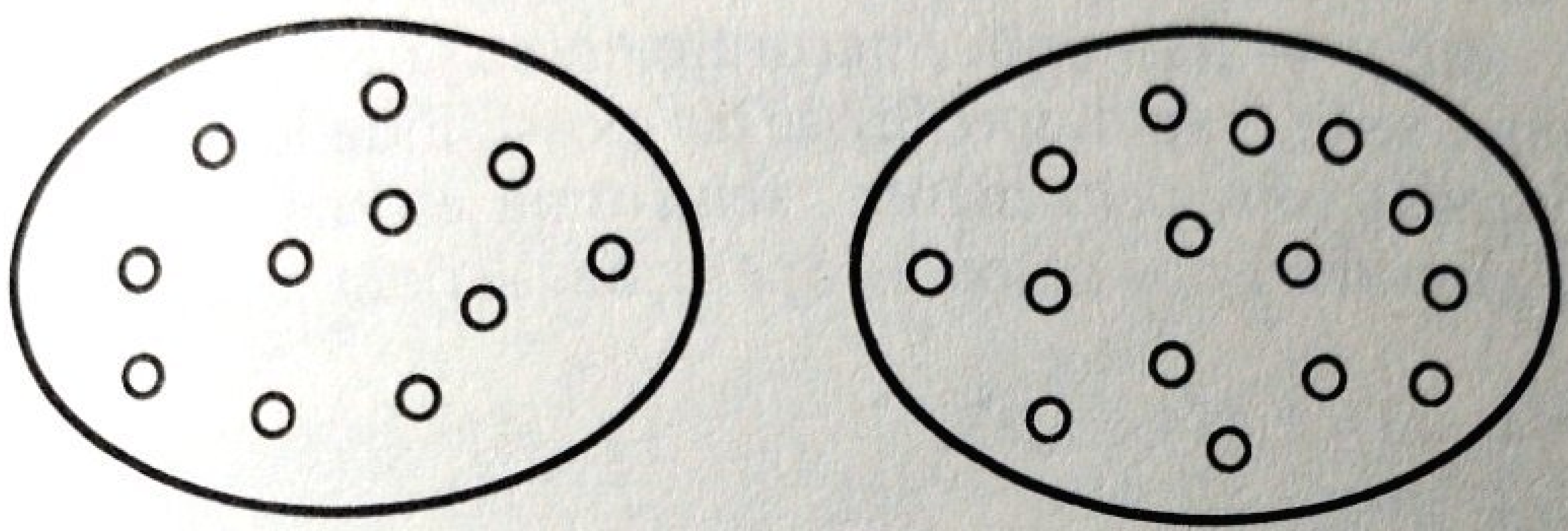
Processo $a - \frac{a - b}{2}$ $a=40$; $b=38$

Processo $a + \frac{b - a}{2}$ $a=40$; $b=42$

Processo $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ Hans recebe 30 «chupas»... e a sua irmã Marliese 20 «chupas»... Repartição justa.

Piaget salientou o significado psicológico da correspondência biunívo- 52
ca, para o desenvolvimento da noção de número. Porém, muitas vezes, a situação que se vive no ensino é esta: as crianças não seguem os porfiados esforços do professor, para assinalarem, com traços, a correspondência biunívoca; o que fazem é contar, separadamente, os elementos, em cada conjunto.

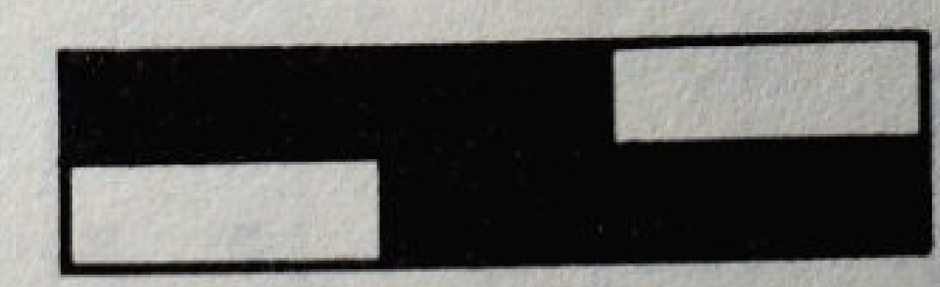
Uma disposição irregular — pouco «sinalizável» — de muitos elementos pode conduzir a números errados e obrigar, assim, ao processo que pretendemos.



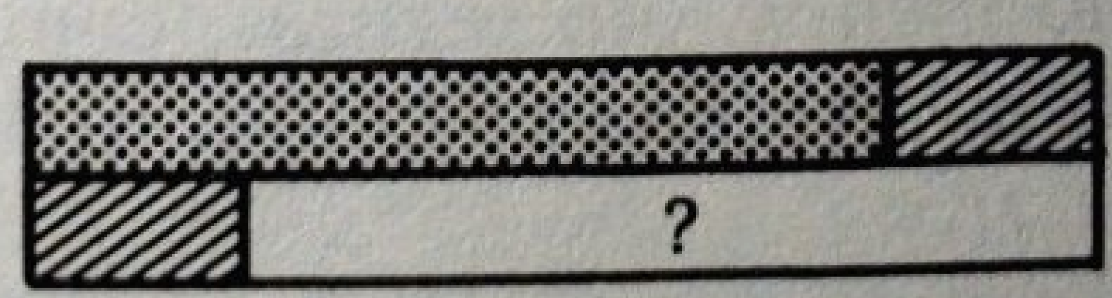
No estudo da Matemática Moderna, acentua-se a importância dum 53
tratamento baseado em leis. Por vezes, estas são tão fáceis — pense-se, por exemplo, nas leis comutativas e associativas para a adição e para a multiplicação — que o aluno se espanta, frequentemente, com a insistência que o professor põe, na sua invocação.

Ora, em muitas lições, verificámos que o aluno só aprende, completamente, o significado duma lei, se o professor a introduzir de tal maneira que, do seu seu uso, resultam vantagens técnicas, para o processo de achar soluções.

Assim, para crianças do 1.º ano, é banal achar que estas duas combinações de barras têm ambas o mesmo comprimento.



É, então de notar que as mesmas crianças para este outro problema:



Não cheguem, logo, a encontrar a barra apropriada para o sítio vazio; mas sim, só ao cabo de demoradas tentativas. Isto é, a lei comutativa não foi, ainda, conscencializada. Tal só se conseguiu após muitos exercícios adequados.

No ensino da Geometria, as transformações são muitas vezes introdu- 54
zidas, a partir de determinados modelos; por exemplo a simetria axial, a partir do uso dum espelho perfeito. Em muitas lições sequentes, a formulação dos correspondentes processos de transformação é, então, tida pelos alunos, como uma verbalização inútil daquilo que, de há muito, se

tornara claro. Aqui, os alunos neste exemplo, deveriam ser esclarecidos de que o modelo (espelho) nem sempre está à nossa disposição; é incómodo de usar; e, principalmente, é muito impreciso. Então, estes inconvenientes deverão ser removidos, por meio duma regra clara.

55 A propósito da racionalização dos denominadores das fracções, a uma turma dum 9.° ano, os alunos não viram, claramente, porque é que numa fracção, tal como $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, é o denominador que se racionaliza.

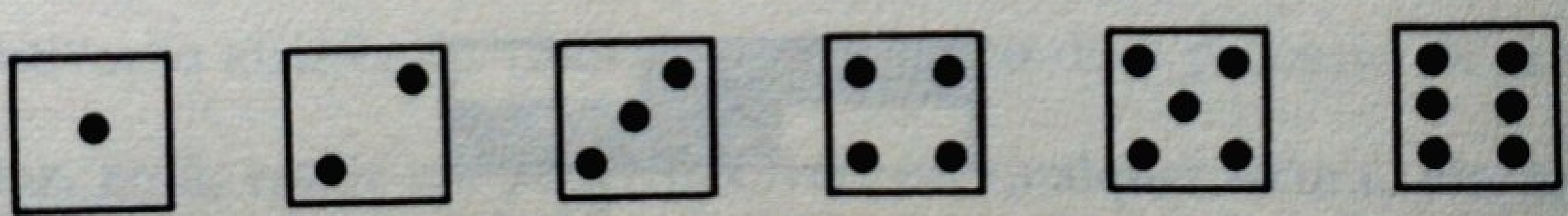
O esclarecimento do professor — «convencionou-se», em Matemática, proceder assim» — não pode, naturalmente, satisfazer os alunos. A aceitação atingir-se-ia, rapidamente, se as possibilidades de cálculo tivessem sido exploradas, ou, pelo menos, feita uma estima dos valores a que se chegaria: «Em qual dos casos as operações seriam mais fáceis:

a) $\sqrt{2} : \sqrt{3} = 1{,}414 : 1{,}732$;
b) $2 : \sqrt{6} = 2 : 2{,}449$;
c) $\sqrt{6} : 3 = 2{,}449 : 3$?''

Mesmo sem chegar a efectuar os cálculos, reconhecer-se-ia que isto se dá para o caso *c*). Nos casos *b*) e *c*) acresce ainda, que a aproximação do valor calculado é, apenas, prejudicada pela aproximação introduzida, num só valor, do qual se parte.

c) Motivação através do conhecimento teórico duma noção ou símbolo. A acentuação consiste, aqui, em invocar uma aquisição de conhecimentos, de forma directa e apropriada, e poder diferenciá-la de outras aquisições.

56 Num 1.° ano, os números de 1 a 6 foram introduzidos, marcados em cubos.



Os alunos não ficaram muito motivados, pois as figuras dos cubos já eram conhecidas e, pelo menos, tão seguras, como as «pintas», para a representação dos números. Poderiam, então, aqueles cubos ser utilizados directamente.

Se o professor partisse da pouca «visualizável» representação por traços | || ||| |||| ||||| ||||||, para atingir a representação mais diferenciada — por algarismos —, a motivação seria, essencialmente, mais forte.

57 Ao contrário do que sucedeu noutras aulas, numa do 5.° ano, o cubo — como conjunto de pontos — foi bem motivado: levaram-se os alunos a (com um ponteiro) indicarem vários pontos, que pertenciam a um cubo modelo, em arame. O significado da concepção de conjuntos de pontos tornou-se, ainda, mais claro, quando lados e vértices foram introduzidos, a partir da intersecção de conjuntos.

Muitas vezes, o tema matemático é, em si, pouco sugestivo para, desde logo, de — «per se», actuar como motivador. Sem recorrermos a outros tipos de motivação, oferece-se uma possibilidade de «problematizar» o tema a ensinar. Isto poder-se-á fazer, de três maneiras:

1 *Problematização através da criação do contraste matemático.*

Mostra-se que, por exemplo: uma noção ou um símbolo nem sempre surge com clareza; ou que uma definição, válida debaixo de certas circunstâncias, noutras pode ser contestável.

Os alunos dum 5.º ano não foram suficientemente motivados para a
definição duma proposição — como sendo uma afirmação verdadeira ou 58
falsa — enquanto esta só apareceu como afirmação, a partir de formas
proposicionais. Numa lição paralela, os alunos foram muito mais solicitados para a nova noção, depois de terem que trabalhar com uma lista de imagens nas quais, ao lado de afirmações verdadeiras ou falsas, se formulavam, também, perguntas, desejos, apelos, formas proposicionais e designações.

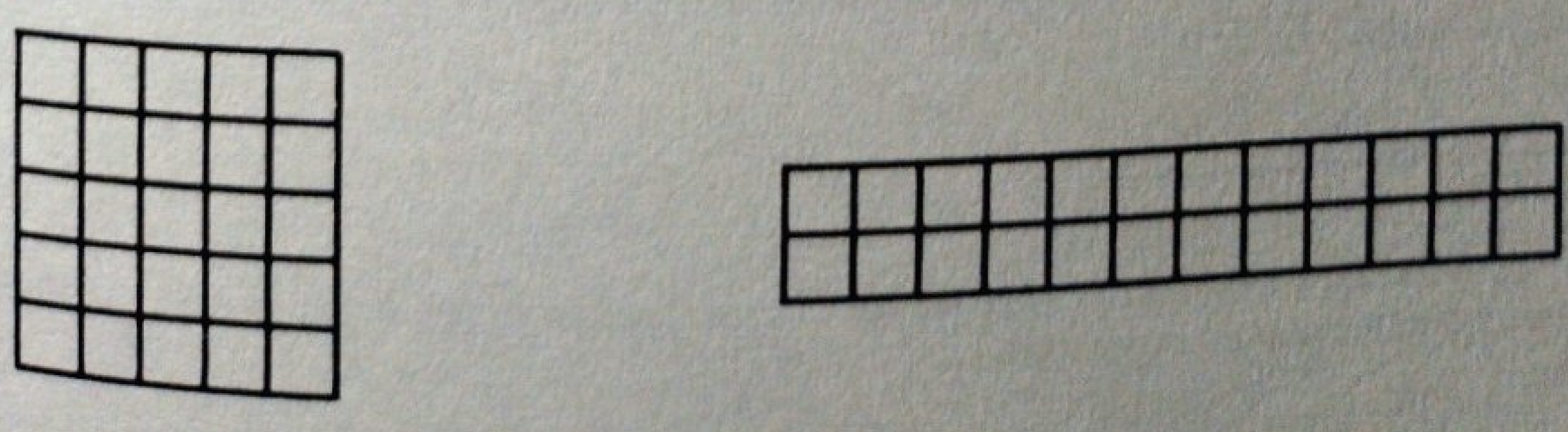
Os alunos só foram suficientemente motivados para a proposição: — 59
o perímetro do círculo é um múltiplo constante do seu diâmetro ($p = \pi . d$)
— quando reconheceram que, nem sempre, um perímetro é múltiplo constante de qualquer outra grandeza. Por exemplo: um quadrado de área 16 cm^2 tem de perímetro 16 cm (factor 1); mas já um quadrado de área 25 cm^2 e tem um perímetro de 20 cm (factor $\frac{4}{5}$).

Sobre a formação de contraste, exporemos, mais detalhadamente, outros aspectos em 3.5.2

2 *Problematização, através da criação de conflitos*

Já em 3.1.6 esclarecemos, em termos gerais, a importância para o desenvolvimento do raciocínio, dos conflitos entre representações. Alguns exemplos mostrarão, em termos gerais, como o aluno é motivado para se ocupar duma situação objectiva, através da criação de conflitos. Estes podem, principalmente, surgir de várias formas de representação, num, ou em mais dum domínio.

Para a introdução da área dum rectângulo, a um 5.º ano, perguntou- 60
-se aos alunos, em presença dos rectângulos a seguir desenhados, qual deles é maior e qual prefeririam, se eles representassem tabletes de chocolate da mesma qualidade e espessura.

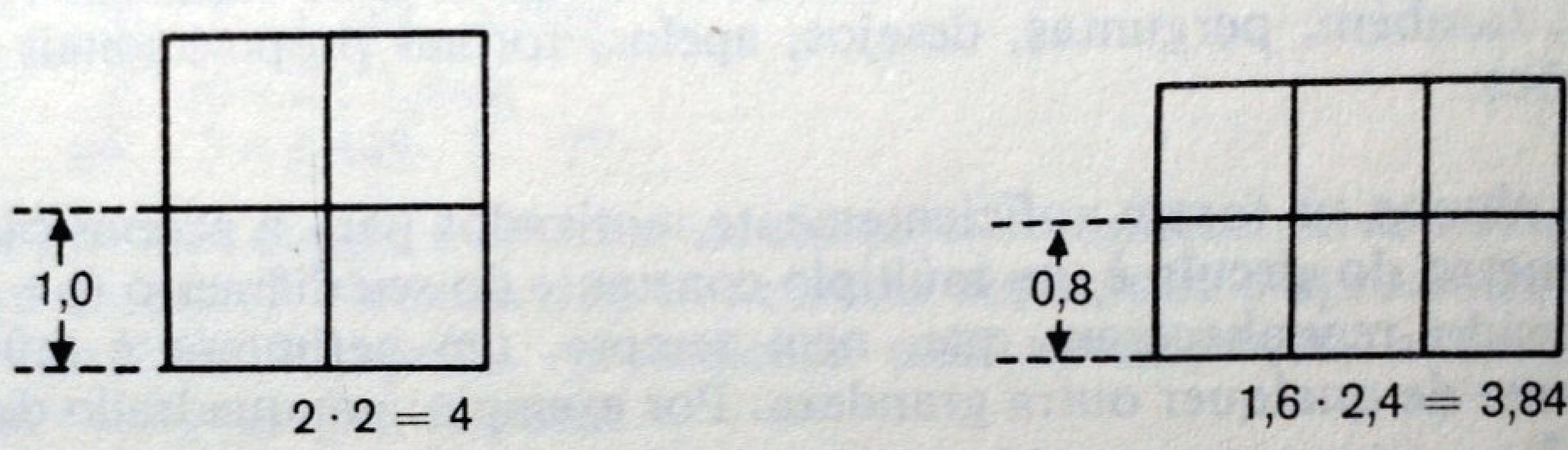


A maior parte dos alunos decidiu-se pelo rectângulo mais comprido e ficou, por consequência, muito admirada por ter escolhido o pior: com 2 · 12 bocados, contra os 5 · 5 do quadrado. Discutiu-se, então, porque é que a maioria se enganara. Trata-se, aqui, dum conflito, entre o tratamento pelo cálculo e o aspecto intuitivo da impressão óptica. Um aluno foi de opinião de que «muitos foram levados» pelo perímetro da tabelete que, de facto, no da direita é 8 unidades superior ao da esquerda.

Assim, os alunos foram motivados para chegarem à conclusão de que a área é «qualquer coisa de novo», diferente do perímetro já tratado.

Além disto, através dum conflito de representações, motivou-se uma fase posterior do ensino — a necessidade de uma unidade de medida, para as áreas. Assim:

O professor confrontou os alunos com esta conclusão «à esquerda há 4 quadrados; à direita há 6; logo o rectângulo da direita tem uma área maior».



Pela primeira vez, os alunos se sentiram estimulados, a terem que confrontar uma conclusão visual aproximada, com outra obtida por cálculo. De seguida, foram os alunos a chegarem, eles próprios, à conclusão da causa de erro, e à necessidade de usarem um quadrado unitário de comparação.

61 Num 3.º ano, para introdução da forma de usar o parêntese, o professor colocou os alunos perante o seguinte conflito, dentro da representação simbólica: «Qual é a vossa opinião, perante cada uma das afirmações de Uli e Peter, de que o seu cálculo é que estaria certo».

Uli: $3 \cdot 5+2=21$

Peter: $3 \cdot 5+2=17$?

Em pouco tempo, os alunos concluiram que se tratava de dois cálculos diferentes, e que se deveria combinar qualquer coisa para esclarecer aquilo que, de facto, se queria calcular. O professor aceitou a proposta dos alunos, para se sublinhar a operação a ser feita em primeiro lugar, e substituir esse sublinhado, pela convenção do parêntese:

Uli: $3 \cdot (5+2)=21$

Peter: $(3 \,.\, 5)+2=17$

Note-se que a convenção «pontos antes dos traços»* só foi estabelecida, após várias lições.

N. T.

* Traduzimos à letra esta forma rápida, de indicar que as multiplicações e as divisões devem preceder as adições e as subtracções.

62 Num 10.º ano, a Perspectiva Afim foi introduzida, como uma transformação do plano, a partir do modelo de dois planos que se cortam, segundo uma recta *a* e transformados, um no outro, por projecção paralela, em que as projectantes não são paralelas a *a*. Com a introdução duma transformação afim*, originou-se, para os alunos, um conflito, porque, neste caso especial da perspectiva por afinidade, as projectantes são paralelas ao eixo *a*.

A aparente contradição, em relação ao modelo geométrico espacial, forçou a capacidade de representação espacial dos alunos.

Através de apoios de «visualização» (dois planos materializados em chapas transparentes; projectantes, como cordões elásticos), os alunos reconheceram que à transformação afim, acima referida, correspondiam projectantes espaciais, que não são paralelas a *a*, mas que, sim, devem ter pontos de intersecção com ambos os planos, que estão à mesma distância de *a*.

63 Num 9.º ano, a questão porque é que para a multiplicação se fala duma operação inversa e, para a potenciação se fala de duas, provocou vivas discussões. Estas conduziram ao reconhecimento, da propriedade comutativa para a multiplicação, e à não comutividade da potenciação.

64 É, também, conhecido o conflito de representações que ocorre, ao introduzir em diagramas de Venn, o conjunto intersecção, quando os dois conjuntos não são disjuntos. O conflito resultante de alguns elementos se deverem situar nas duas zonas sobrepostas motiva os alunos, para uma comparação intensiva. Por meio desta, a conjunção das propriedades ocorre, claramente, à consciência, e conduz, frequentemente, à proposta que resolve o conflito das duas zonas sobrepostas.

3. *Problematização, através de lacunas e erros*

Não é só, da parte dos jovens, que as lacunas ou erros, surgidos no princípio da resolução dum problema ou perto do fim, provocam grande interesse. Mas, de uma maneira geral, os problemas não resolvidos, no todo, ou só em parte, chegam a provocar um fascínio, que não nos deixa mais repousar. Para tal, influem: a curiosidade; o desejo de conhecer; a tendência para a configuração total; a necessidade da complementação**.

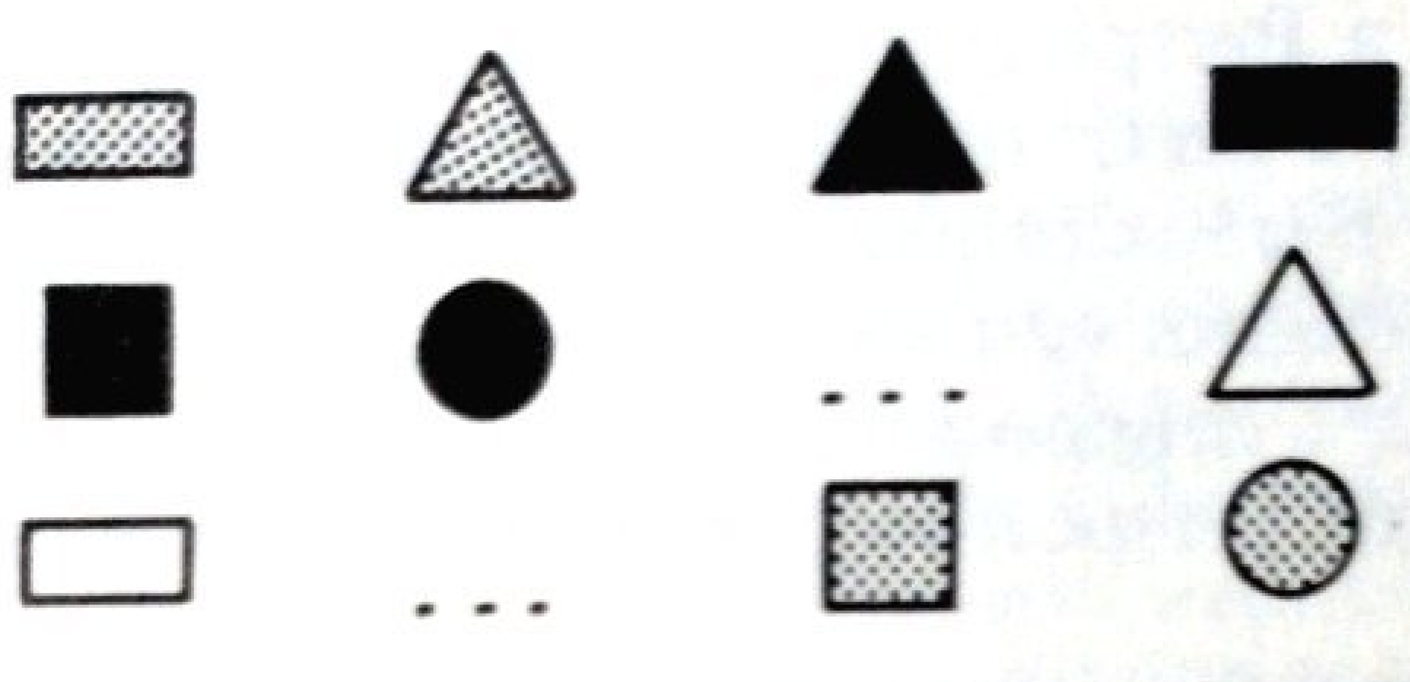
65 Podem-se introduzir lacunas, em jogos, onde entrem diferenças de configurações de peças.

No caso da figura junta dum jogo de dominó [veja-se 20, pág. 27 e seg.], deve-se, primeiro reconhecer que na linha horizontal surge uma diferença e na vertical duas.

N. T.

* Caso, por exemplo, da transformação dum paralelogramo noutro equivalente com as bases coincidentes e amesma altura.

** Max Wertheimer — Productive Thinking (Social Science Paperbacks).



As lacunas podem ser suprimidas, por meio das fichas ○ e □, pertencentes ao conjunto universo (fichas em três cores e quatro formas).

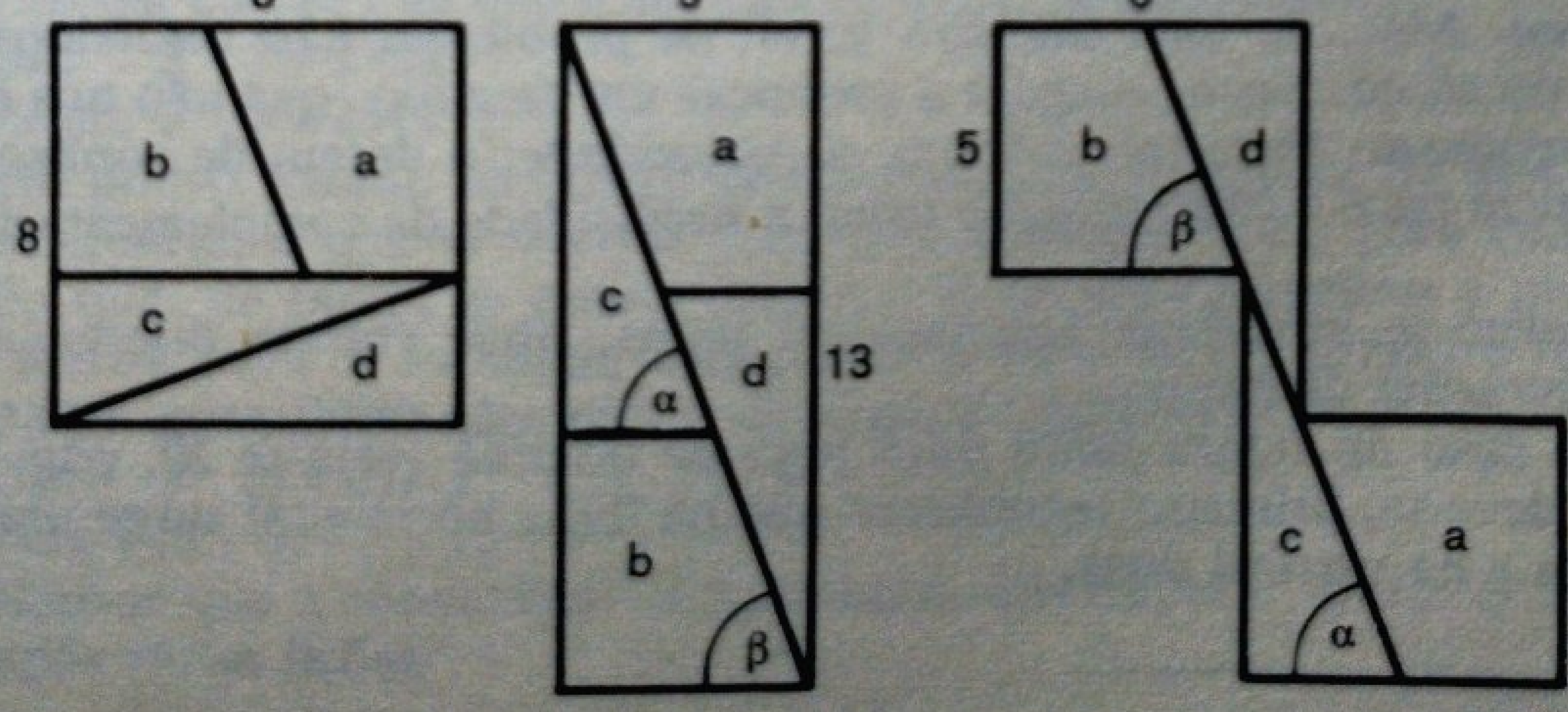
Sucedeu um caso semelhante a este, para a introdução de sucessões, a um 10.° ano: em que devíamos continuar na elaboração de algumas, já principiadas.

66 Em diagramas de Venn, referidos a atributos (em compreensão), os elementos falsamente introduzidos devem ser suprimidos. Ou, se as crianças preencherem correctamente um diagrama com fichas, o professor manda substituir duas delas, depois dum aluno fechar os olhos. Este do (1.° ano) deverá, então, indicar quais são as fichas erradas.

Também podem surgir conflitos, quando, como neste exemplo, os erros não estão perante os nossos olhos, mas sim ocultos [Veja Ex.° 60 — Ex.° 64].

67 A conclusão errada, que a seguir apresentamos, deriva de uma observação ilusória. Na 2.ª e 3.ª figura, a linha traçada, de cima para baixo e da esquerda para a direita, não representa, na realidade, uma recta, mas sim corresponde a um paralelogramo, com a área igual à dum quadrado unidade. Isto tornar-se-á claro, se observarmos as várias razões entre os lados.

O problema é, por exemplo, adequado para uma lição de iniciação sobre a tangente e a cotangente.



3.2.2 *Motivação, através da configuração exterior dos factos matemáticos.*

De um modo simples, a partir da configuração exterior dum facto, podem surgir várias possibilidades de provocar o interesse dos alunos:

a) Tornar o facto estético.

A partir de: a representação figurativa ou gráfica dos elementos dum facto, o enunciado dum problema, uma via de solução, a própria solução, podem surgir impulsos fortes, que servirão de estímulo para o tratamento desse facto. Para tal, podem influir os seguintes factores:

— O uso da cor (o realce das partes importantes, através da cor; o uso de cartões coloridos, na construção de modelos; a distinção de várias partes, através de cores diferentes).

— A espécie de material, principalmente de material estruturado (facilidade de manuseamento, de suporte; sua flexibilidade e estabilidade).

— O realce do traçado de linhas, principalmente nos gráficos de funções. Tornar-se-ão sugestivas parábolas de inversão, curvas de senos, figuras circulares combinadas, projecções em mais dum plano etc.

— Clara distinção de planos, no quadro, no caderno.

— Nitidez das representações.

Invocamos, aqui, apenas um, entre vários exemplos: **68**

Num 7.º ano. provocaram-se fortes estímulos, recorrendo à Geometria das Transformações e à Teoria dos Grupos, representadas em mostruários de tapeçarias. Isto, porque, simultaneamente, se verificaram vários dos aspectos acima apontados.

À fronteira entre os domínios de valores estéticos e de valores da teoria dos conhecimentos, podem corresponder casos, em que um problema complexo se resolve por uma via de solução muito fácil, ou conduz a um resultado especialmente simples.

b) A elaboração comprovativa dum facto.

O processo comprovativo dum facto, através de tentativas (de experiências e de erros) revela-se, geralmente, mais motivador, para o aluno, do que um processo estritamente dedutivo (ligado, o mais possível, a regras fixas, cujo emprego de forma sequente força e maça o aluno). Isto se aplica, por exemplo, ao tratamento escolar dum problema, pelo método axiomático.

Sobre outros aspectos do processo de experimentação, falaremos, pormenorizadamente, em 3.5.1

c) Representação manuseável de factos.

Duma maneira geral, os alunos sentem-se fortemente atraídos, pela possibilidade de poderem exercer manipulações, sobre a estrutura duma coisa. Disto se falou, na especialidade, em 3.1.1. Aqui chama-se, apenas, a atenção para as reacções adversas, que as manipulações podem provocar, em alunos mais idosos. Isto pode suceder, se um dado material estiver demasiado gasto ou «abaixo da categoria» do aluno, (por exemplo, barras ou fichas, com as quais lidam crianças mais «novatas»).

Na maior parte dos casos, as manipulações deixam, em breve, de fundamentar as questões de matemática pura.

d) Envolvimento de factos matemáticos, em situações de jogo.

É de salientar, com insistência, que, no ensino da Matemática, o significado didáctico do jogo não reside, apenas, na força motivadora — aliás grande — que apresenta. Em muitos casos, os comportamentos lúdicos revelam características, que são também próprias das formas superiores de raciocínio matemático.

Não esclareceremos, aqui, o parentesco especial, entre o jogo e a axiomática. Contudo, notaremos que, como fundamento do mais simples dos raciocínios, existe, sempre, a seguinte estrutura:

A princípio estabelecem-se convenções sobre conceitos e processos, dos quais — segundo regras lógicas — derivarão numerosas proposições isoladas, formulações de leis e de processos. Ora, também, para as regras de jogo se definem, de entrada, determinadas palavras e símbolos, aos quais o jogador se tem que submeter, rigorosamente. Daqui, provém uma variedade de consequências: («se o Ás tem maior valor do que o Rei, e este maior do que a Dama, então o Ás tem maior valor do que a Dama), bem como a possibilidade de várias «jogadas» e «estratégias».

De acordo com Siegfried Buckschat [11, pág. 74], podemos notar, principalmente em escolas primárias, que as experiências trazidas de casa exercem, em Matemática, uma influência positiva, sobre o comportamento e as capacidades.

Agora: onde reside, então, a força motivadora dos jogos?

Hermann Maier e Walter Plössl descrevem o jogo infantil, a partir de três importantes características, que, em si, actuam como motivadoras:

— Actividade (na maioria dos casos sobre objectos, através de movimentos).

— Alegria (principalmente, vinda da estimulação ou da possibilidade de qualquer coisa nova).

— Sucesso (proveniente de se alcançar um efeito ou um resultado válidos, por si mesmos).

Dienes encara uma outra característica essencial do jogo: a possibilidade das crianças poderem, livremente, falar sobre ele: sobre o que crêem ter feito e descoberto [21, pág. 78].

Arndt indica várias componentes determinantes do sucesso dos jogos didácticos:

— A escolha e disposições do material: estas devem permitir, às crianças, uma visualização clara e simples.

— O estímulo que devem dar, à fantasia das crianças: não a devem restringir.

— A clareza das regras do jogo: cada criança deve conhecer, com precisão, as regras; dominá-las e, depois, respeitá-las.

— O estabelecimento das próprias regras do jogo: as crianças devem ser impelidas a combiná-las.

Assim, além do principal efeito — o motivador, que provém dos jogos apropriados — a criança deve atender às exigências que, também, surgem, na axiomatização. Isto é:

Deve cuidar de que as regras do jogo não se contradigam (→ não contradição).

Deve reconhecer, muitas vezes, que uma certa regra pode vir a ser abolida, se ela for, por exemplo, o caso especial duma outra regra. (→ independência).

Deve verificar que muitos caminhos e efeitos não são permitidos, o que leva a criança a sentir-se tolhida. As regras do jogo devem então ser alteradas e completadas (→ suficiência).

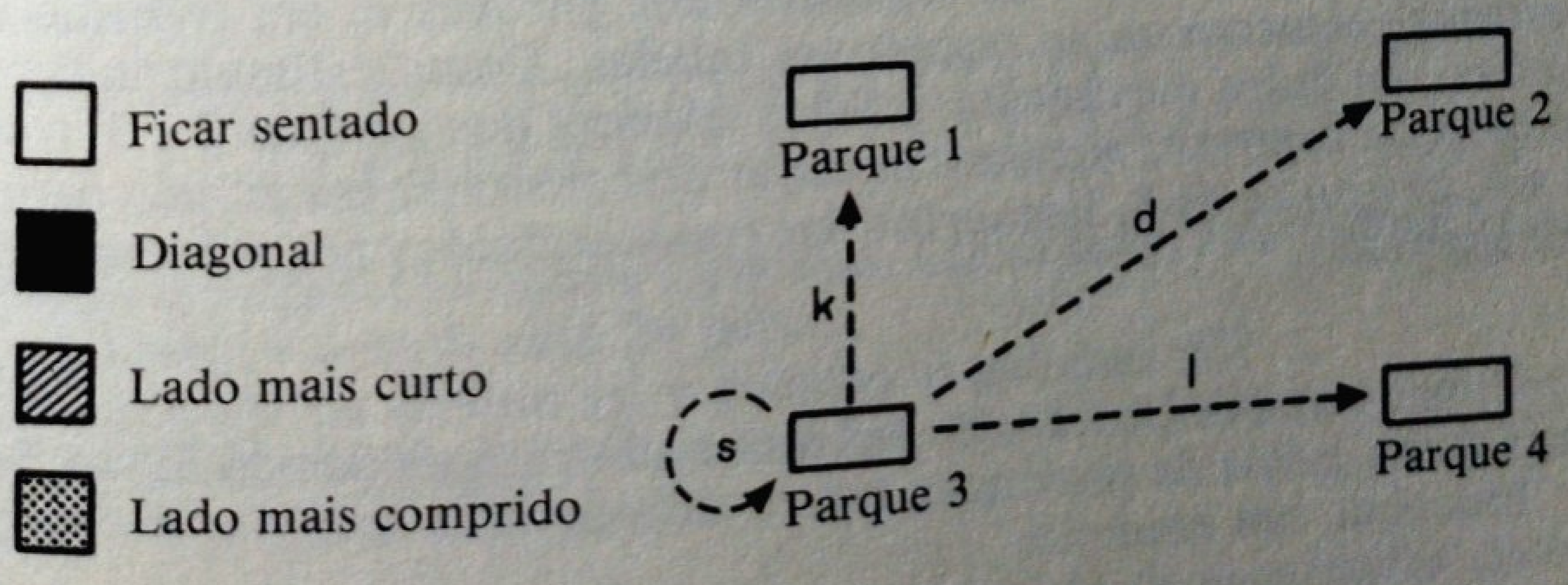
Do enquadramento acabado de mencionar não pode resultar uma definição precisa de jogo; qualquer esquema sobre as diversas espécies; ou uma discussão sobre os significados gerais — pedagógicos e didácticos — dos jogos de aprendizagem matemática. A este respeito, remetemos para a literatura da especialidade. Um bom resumo — principalmente sobre a diversidade dos jogos de aprendizagem matemática — encontra-se em [50, pág. 106 e seg.]. Em [20], [29], [43]*, [54], [72], descrevem-se detalhadamente, vários jogos.

Para terminar, apresentamos um jogo de matemática moderna e outro de matemática clássica.

No ensino dos grupos a um 3.º ano, surgiram dificuldades, com a 69
transformação do rectângulo, por rotação, em torno do centro.

Recorreu-se pois, para uma melhor compreensão, ao seguinte jogo, de estrutura isomorfa à do grupo dos 4, de Klein:

A classe foi dividida, no campo de jogos, por 4 parques. A partir destes, definiram-se, verbal e esquematicamente, 4 movimentos.



N. T.

* Quanto à obra referida em 43 há em, português, uma tradução: Kottre, S — Pensar é divertido (distribuidora Multinova).

Sobre dois grandes cubos de cartão, pintaram-se cores, em correspondência com os 4 movimentos. (Devido à distância, não se puderam usar letras).

Regra 1. Se a criança lançar dois cubos, um a seguir ao outro, mover-se-á para o parque que atingiria, se efectuasse, sucessivamente, os dois movimentos correspondentes às cores da face superior dos cubos.

Regra 2. Ganhará a equipa, em referência à qual todas as crianças forem as primeiras a sentarem-se no parque a que pertencem.

Sucedeu às crianças, que muito divertidas efectuaram o jogo, que, perto do final, já imaginavam a posição atingida, apenas a partir da representação dos movimentos.

	s	k	l	d
s	s	k	l	d
k	k	s	d	l
l	l	d	s	k
d	d	l	k	s

Numa discussão posterior, registou-se que os alunos tinham verificado as propriedades essenciais do grupo de 4 (de Klein).

1. «Muitas vezes, pode-se ficar sentado; isto sempre que os dois cubos mostrem a mesma cor».

(→ cada elemento tem, como inverso, ele próprio).

2. «A cor de ficar sentado leva a não fazer nada» (→ elemento neutro).

3. «É independente a ordem, porque se consideram as cores» (→ comutividade).

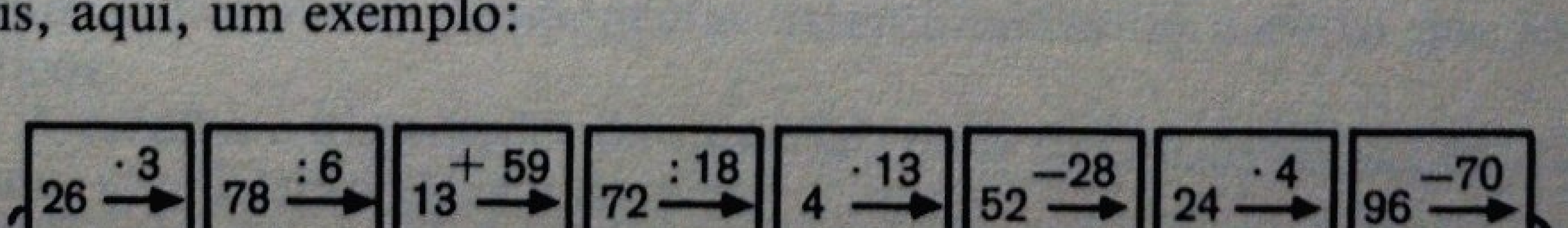
A partir duma pequena ajuda do professor, os alunos descobriram, também, um relacionamento entre este jogo e o grupo das transformações, por sobreposição, do rectângulo:

Ficar sentado ⟷ Rotação inteira.
Diagonal ⟷ Meia rotação.
Lado curto ⟷ «Dobrar» em torno do eixo «comprido».
Lado comprido ⟷ «Dobrar» em torno do eixo «curto».

Finalmente, pôs-se às crianças o problema de descobrirem, ainda, novos movimentos entre os jogadores dos parques e, em trabalho independente, construirem as respectivas tabelas. Como estímulo indicou-se, apenas, um outro movimento: «Só as crianças dos parques 2 e 3, trocam, entre si, de lugares». Algumas crianças descobriram, em grande parte por si sós, os grupos de 8, isomorfos das transformações por sobreposição de um quadrado.

70 O jogo «operar em cadeia» foi executado com alunos do 3.°, 4.° e 5.° anos duma escola de província, pouco diferenciada.

Eis, aqui, um exemplo:



As regras de jogo são as seguintes:

Regra 1: Universo dos números de 1 a 100. Operações permitidas, +, —, ·, :

Regra 2: Só 8 cartões se dispõem, em anel, de maneira que o número (resultado de cada cartão) coincida com o número de entrada do cartão seguinte.

Mesmo fora de situação de aposta, o grupo de cada mesa procurava criar uma cadeia, o mais difícil possível, para a mesa seguinte e, inversamente, fechar o mais rapidamente possível, em cadeia, os cartões que recebia.

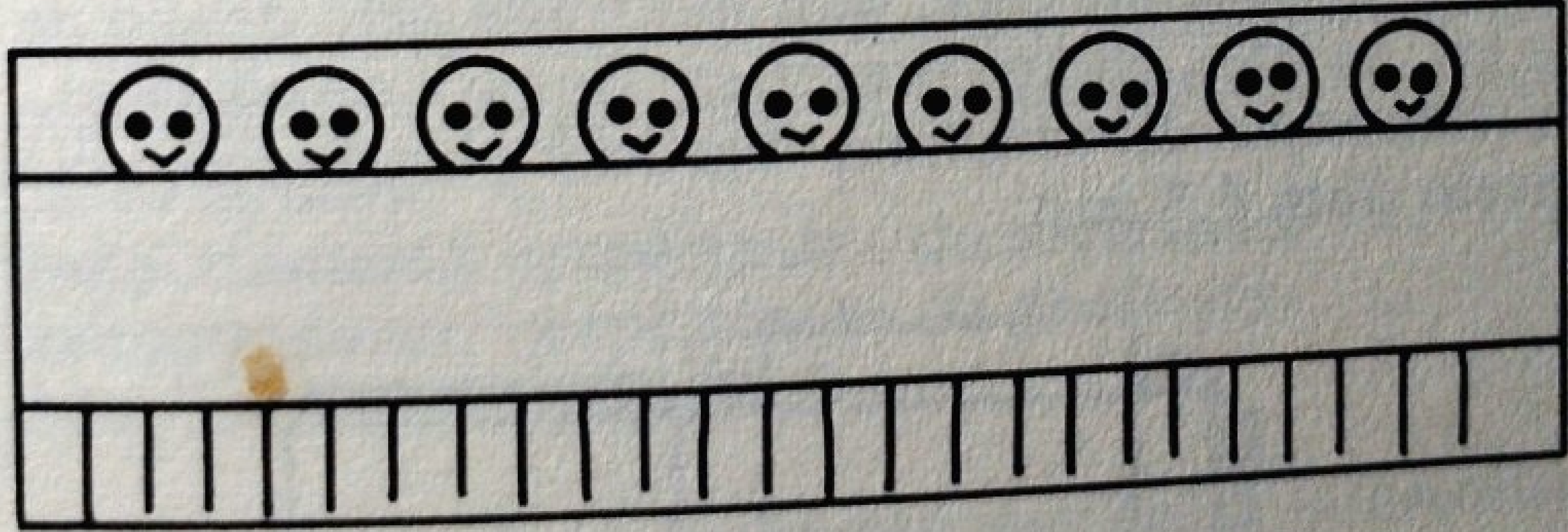
Além do efeito de treino, em cálculo, o significado didáctico consistia em os alunos procurarem agir, o mais possível, com independência e, ao mesmo tempo, sujeitos a controlo, da parte dos colegas da mesma mesa e da própria cadeia.

e) *Atitude de descontracção*. De vez em quando, o professor será levado a descontrair o ensino, por meio duma atitude brincalhona ou com a apresentação de problemas curiosos. De seguida, indicamos três exemplos, que podem motivar, fortemente, os alunos.

Numa lição a um 2.° ano (paralela a Ex.° 11 de 1.1), escolheu-se, 71
para estudar o produto cartesiano, a situação, numa gaiola, de 4 macacos, que tinham o hábito de cada um catar os outros. Perguntou-se, quais seriam todas as combinações possíveis, de macacos, a catarem-se.

Salientou-se, principalmente, que os pares ordenados (A, B) e (B, A), não só em Matemática, mas, também, dentro da gaiola, eram diferentes. Além disso, a combinação (A,A) também aparecia, na prática.

Para introdução, a um 8.° ano, dum sistema de duas equações a duas 72
incógnitas, apresentou-se, esquematicamente, o seguinte problema:



Numa capoeira, há coelhos e galinhas. Como se vê, através do esquema, são, ao todo, 9 animais com 24 patas.

Quantos são os coelhos (y) e quantas as galinhas (x)?

A partir das equações $x + y = 9$ e $2x + 4y = 24$, obtém-se a solução: 3 coelhos e 6 galinhas.

Apresentou-se a um 10.° ano, como exercício de progressões geomé- 73
tricas, o problema de Sessa, o criador do jogo de xadrez — que, como recompensa, escolheu receber:

Pela 1.ª casa do tabuleiro, 1 semente; pela 2.ª casa, 2 sementes; pela 3.ª casa, 4 sementes e, assim, sucessivamente.

A solução que é um número de 20 algarismos e corresponde a um peso de cerca de 1 bilião de toneladas, se 20 sementes pesarem 1 g, causou grande espanto, aos alunos.

Este exemplo distingue-se do anterior, porque aqui — só depois da solução — se libertou a motivação: a exercer-se, positivamente, na posterior atitude de aprendizagem.

3.2.3 *Motivação, através da aplicação do assunto.*

Muitas vezes, se atingem motivações, porque o tema matemático contribui para a solução de questões da vida prática, da técnica, da física, etc. A seguir, se recordam algumas situações de ensino, que nos alunos conduzem a grandes disposições para aprender.

74 A substituição de dois operadores (por ex.º $\succ\boxed{+6}\prec$, $\succ\boxed{-9}\prec$) por um só (aqui $\succ\boxed{-3}\prec$) foi motivada, no 1.º ano, assim:

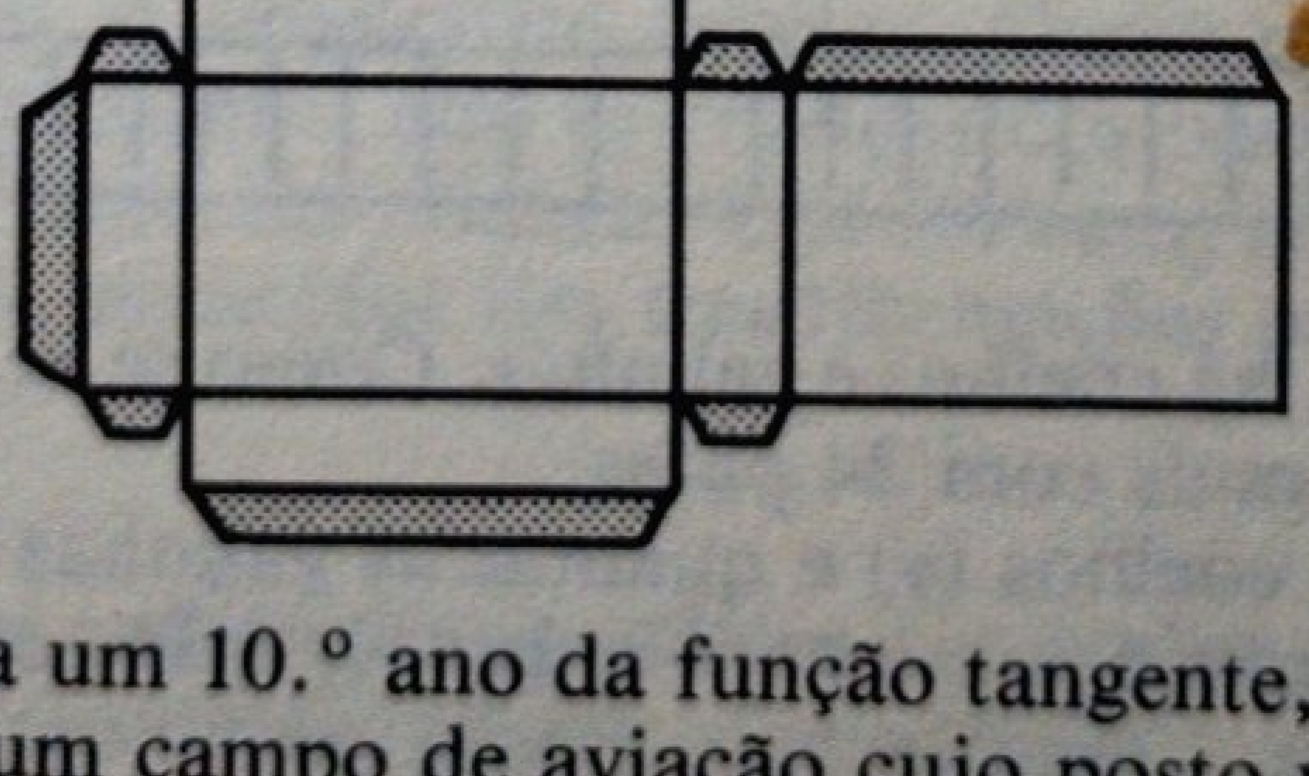
Duas máquinas velhas, necessitando de reparação, foram retiradas de serviço e substituídas, por uma só, que ocupava menos espaço.

75 Para a introdução de medidas de capacidade, a um 3.º ano, a escolha do litro foi motivada pela condição de ele ser, sempre, uma unidade fácil de obter.

Alguns alunos, por si próprios, propuseram uma esfera oca de um determinado diâmetro. Outros alunos acharam mais fácil construir uma determinada caixa. À pergunta do professor — como é que se poderia construir essa caixa bem simples? — os alunos propuseram uma, em forma de cubo, com 10 cm de aresta.

76 A procura duma «malha» de segmentos de recta definidos num corpo e que possa aplicar-se sobre este, será motivada pelo desejo de obter esse corpo. Para tal, se irão, então, prever «pestanas» de colagem.

O seguinte exemplo de «malha», (ligado à planificação) dum paralelepípedo, proveio dum 5.º ano.

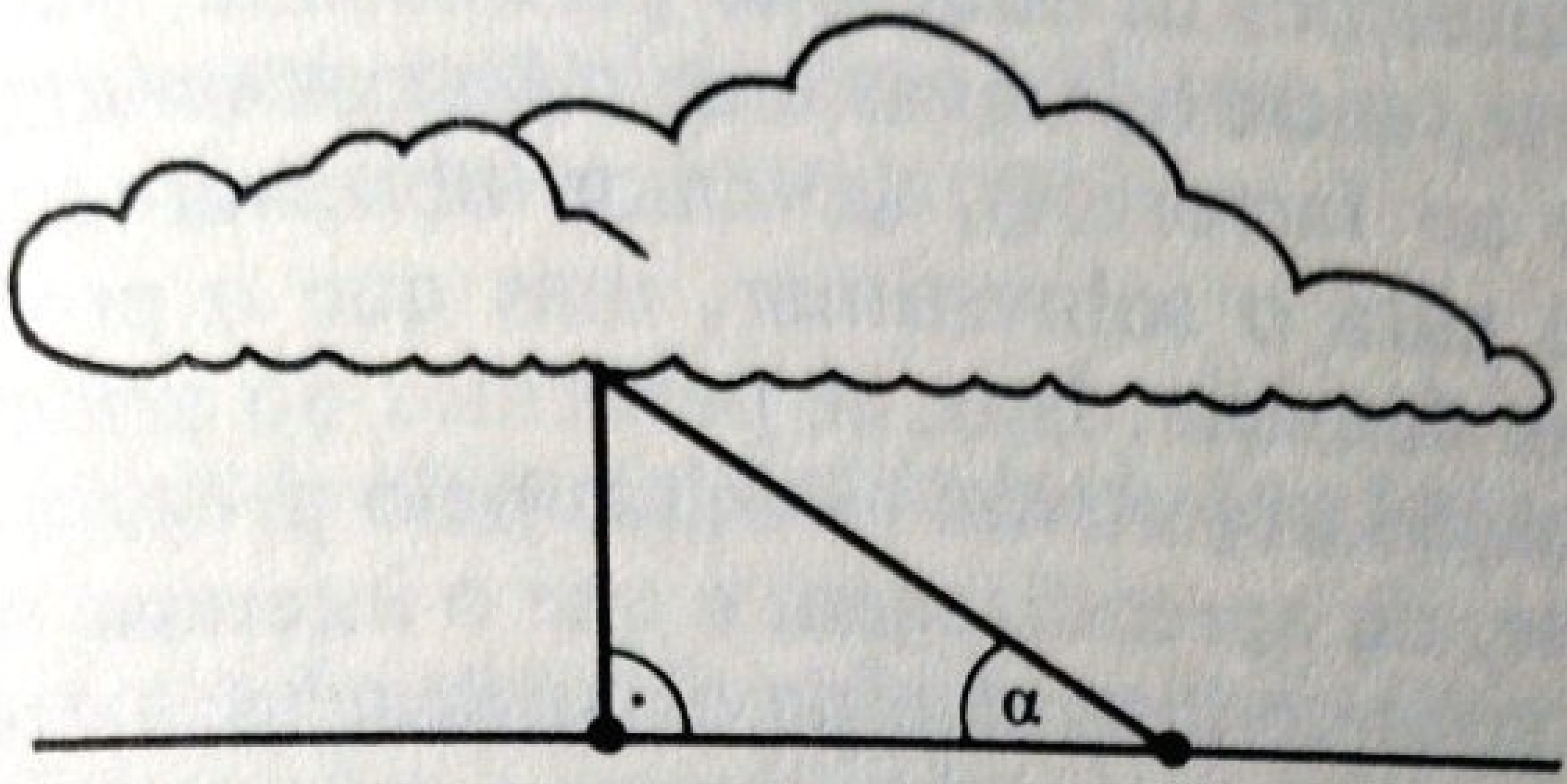


77 Para introdução a um 10.º ano da função tangente, escolheu-se, como situação de partida, um campo de aviação cujo posto metereológico estaria a um nível de altura determinado com auxílio dum projector e dum goniómetro (medidor de ângulos).

Para tal, em trabalho de grupos, chegaram todos a esta proposta:

A partir dum pequeno triângulo rectângulo, construído com o ângulo medido, determinar a razão do cateto vertical para o cateto horizontal e considerá-la transportada para o triângulo real.

A partir da propriedade definida pelas razões constantes de catetos correspondentes, em triângulos semelhantes, definiu-se, então, a tangente dum ângulo.



Projector de luz — 1000 m Estação metereológica

3.2.4 *Motivação, através da personalidade do aluno*

Neste subcapítulo, trataremos de duas forças motivadoras importantes, que residem, principalmente, na esfera afectiva e se referem à própria consciência da personalidade do aluno.

a) *A consciência de ser capaz*

A esperança justificada de poder exercer uma capacidade e a consciência de a ter exercido influem, decisivamente, para a motivação do aluno. Porém, a definição do que o aluno entende por capacidade é de natureza complexa. Nela, seguramente, desempenham um papel importante os seguintes factores:

(1) A quantidade de trabalho intelectual, necessária para a resolução dum problema.

(2) O reconhecimento visual da solução e da via para a atingir.

(3) A utilidade da solução e da via de acesso, na profissão e na existência de todos os dias.

(4) O comportamento «expectante» da sociedade.

(5) O comportamento «expectante» do professor.

(6) A classificação feita pelo professor.

O factor (2) revela-se, principalmente, nas lições — eventualmente elaboradas de forma estimulante e com a invocação de actos intelectuais puros — no final das quais, porém, os alunos são de opinião que não ficaram a saber muito do assunto. Portanto, as lições só parcialmente devem decorrer de forma verbal falada.

O factor (2) pode também actuar negativamente, em jogos figurativos, onde não se chega a provocar qualquer fixação figurativa ou simbólica.

O professor pode atender ao factor (4), principalmente, com a apresentação de novas matérias de ensino, sob a forma de problemas. De facto, a sociedade está, hoje, bastante interessada na Matemática Moderna; contudo, principalmente, por falta de conhecimentos da matéria, mantém-se muito afastada da determinação dos objectivos desta Matemática. Por exemplo, encontramos, sempre, crianças do 1.º ano, com boas capacidades matemáticas, que nos perguntam: «quando é que podemos, finalmente, contar?».

Portanto, no interesse dos alunos, devem adquirir uma importância fundamental as instituições de educação permanente, para os pais, e uma integração mais forte, entre as novas e as clássicas unidades do ensino.

Com referência ao factor (6), devemos observar que muitos alunos têm tendência fácil para o sobrestimar, mas que o professor não deve, nunca, utilizá-lo, em demasia. Isto, se partirmos do princípio de que uma avaliação e classificação objectivas — feitas pelo próprio aluno — são finalidade, importante, da aprendizagem e que o interesse no conhecimento deve ter vantagem, sobre o interesse na classificação.

b) A atitude de independência

O tratar um problema com independência aumenta, muito mais, a confiança pessoal do aluno, no seu próprio valor, do que um outro comportamento dirigido ou auxiliado pelo professor. Mais tarde, no prosseguimento dos seus estudos, o aluno terá a convicção, consciente ou inconsciente, de que foram os processos de raciocínio que ele independentemente adquiriu — e não, simplesmente, copiou — aqueles que, essencialmente, o desenvolveram.

78 Num 10.° ano duma Escola Profissional, um candidato a professor, apesar de formar um conceito certo sobre o ensino, falhou, completamente, numa lição para aplicação das funções trigonométricas. Ele tentou, junto da turma, em conversa frontal e com orientação rígida, desenvolver, para o problema do livro de texto, a via de solução que planeara em casa. Quando os alunos notaram que o professor, frente a uma proposta alternativa deles, se limitava a criticá-la e opôr-se-lhe — sem a explorar — ficaram mal dispostos e dispensaram a colaboração do professor, para o resto da lição. Assim, embora ele, insistentemente, continuasse a apelar para um trabalho comum, a lição terminou num monólogo.

O professor foi incitado a fazer uma lição seguinte, sobre o mesmo tema: depois dum curto exame apreciativo da posição do problema, convidou os alunos a trabalharem na sua resolução, em grupos ou em trabalho isolado. Sem exercer qualquer domínio, dispôs-se a só auxiliar, quando notasse que algum grupo não podia avançar. De facto, revelou-se, agora, nesta aula, um bom trabalho de colaboração: no último terço da hora, um grupo apresentou a sua via de resolução, enquanto a parte restante da turma se ocupou, em fazer perguntas intercalares e em formular propostas de alternativa.

c) Relações com os colegas.

Este capítulo pode imediatamente ser interpretado: a partir do ponto de vista das suas consequências das relações sociais dos jovens com os seus condiscípulos, podem provir estímulos, para lidar com os factos matemáticos. As origens de tais estímulos podem ser de vária natureza.

Assim, pode-se tratar de um impulso para estabelecer uma comunidade com os da mesma idade; de uma posição altruísta (querer ajudar os outros); ou, ainda, de uma afirmação ou valorização do aluno, perante a turma.

Tais motivos aparecem especialmente válidos, no trabalho em pequenos grupos (cerca de 2-6 alunos, por grupo).

3.2.5 *Motivação, através da personalidade do professor.*

Também o carácter desta motivação é, principalmente, afectivo e relacionado com as disposições e capacidades do professor.

Aqui, devemos salientar três aspectos:

a) *Abertura a uma aproximação com os alunos.*

De facto, hoje nenhum pofessor se declara fechado a uma aproximação profissional e pessoal, com os alunos.

Contudo, encontram-se muitos professores que, perante os alunos e os colegas, defendem esta atitude; mas, que estão longe de a seguir, na prática. Ora, os alunos captam, muito rapidamente, o que é uma abertura sincera: esta implica, da parte do professor, uma grande disposição para auxiliar, ser paciente e criticar-se a si próprio.

b) *Competência no assunto.*

Os erros repetidos, as incertezas, a forma confusa de ensinar, actuam, em geral, e de forma predominante, sobre a disposição dos alunos para aprender. Deve-se considerar a autoridade científica do professor, como condição indispensável, para em Matemática manter uma estrutura motivada do ensino.

c) *Relacionamento dinâmico com a matéria a ensinar.*

Não será o professor, que, talvez com grande erudição, dispõe de um vasto reportório de conhecimentos matemáticos e possibilidades de método, aquele que mais interessará o aluno, no estudo. Será sim, aquele que, continuamente com o aluno, formula e se preocupa por questões novas; que pode aceitar que um aluno procedeu mais rápida e habilmente do que ele; que não manda, de dois em dois anos, executar os mesmos trabalhos de turma. A este respeito, Heckausen esclareceu de uma forma geral [64, pág. 197], que a questão da motivação depende, decisivamente, do grau em que a capacidade do professor se sente, ela própria, motivada.

Muitas vezes, o autor notou que, numa classe, devido à mudança de professor, o primitivo interesse pela Matemática desabou, como um castelo de cartas. É bom professor aquele que sabe entusiasmar os alunos pela Matemática. Aliás, ele só é muito bom se — e independentemente de pessoas — criar um interesse que dure muito tempo.

Em conclusão deste capítulo, podemos enunciar este critério:

C_{15}	Estão os alunos suficientemente motivados, para todas as fases do ensino?

3.3 *Formas de colocar os problemas*

Se estivermos de acordo com o ponto de vista exposto em 3.2 — que a motivação, através do tema a tratar, é a mais importante de todas — seremos, então, levados a decompor uma unidade de ensino, numa sucessão de problemas separados que, contudo, na sua formulação, serão correlacionados. Neste capítulo, estudaremos que tipos de formulação de problemas se encontram à nossa disposição e quais os mais adequados, para pôr em movimento processos de aprendizagem. Note-se que, a introdução deste estudo far-se-á, mais segundo aspectos intrínsecos à Matemática, do que segundo aspectos ligados a formas de representação. Muitas conclusões deste capítulo poderiam, aliás, ter sido incluídas, como finalidades, no capítulo 2.

Isto depõe a favor de uma pecularidade do ensino da matemática: Assim como as suas motivações essenciais são de origem intrinsecamente matemática, assim também, há uma estreita correlação entre o estabelecimento destas motivações, e o ponto de vista, metodológico, da forma de pôr os problemas.

3.3.1 *A variação matemática, na formulação de problemas.*

O requisito da formulação matemática variável dos problemas deriva do chamado princípio da variabilidade matemática. É enunciado por Dienes [16, pág. 10]*, nos seguintes termos:

«Se uma noção matemática depender dum certo número de variáveis, isto é, de lugares vazios, nos quais podem ser introduzidos vários valores, então, a variação assim obtida é uma questão prévia importante, para a aprendizagem eficiente daquela noção».

Nesta conformidade, muitos dos problemas apresentados em ligação com uma noção matemática serão, então, também chamados «matematicamente» variáveis, se cada variável, contida na noção, for variar, de forma determinada.

Desta forma sucedeu já em parte, nos processos anteriormente apresentados: Por exemplo, as variáveis a_i e n são fundamentais, para o cálculo de média aritmética m, pois:

$$m = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Aplicado a este exemplo, o requisito didáctico da variabilidade matemática indica que o estudante não pode adquirir a noção de média aritmética, se o professor, em todos os exercícios, deixar constantes os valores a_i e n. Mas antes deverá — como aliás sempre acontece — fazer, variar, de exercício para exercício, os valores de substituição e também o

---

N. T.

* Na obra já citada «La construction des Mathématiques., o enunciado é: «Princípio de variabilidade matemética ou princípio das representações múltiplas: Os conceitos comportando variáveis, deverão ser estudados com auxílio de experiências, comportando o maior número possível de variáveis».

número desses valores. Se nos limitássemos, sempre, a dois valores, o aluno, possivelmente, ligaria m à representação geométrica do ponto médio, entre esses dois valores, na recta numérica. Ora esta representação não poderia, sem mais, ser transferível, para o caso de termos que determinar a média de mais de dois valores; seria, por conseguinte, muito especial.

Então, a sua forma generalizada conduzirá, por exemplo, às duas propriedades:

— a soma de todas as diferenças, em relação ao valor médio, deve ser nula.
— a soma de todos os n valores deverá ser igual a n vezes o valor médio.

Portanto, a apresentação de problemas, em variabilidade matemática, procura, principalmente, favorecer os processos de generalização: levar a noção abstracta à sua maior generalização e assim, ajudar, também, à sua transferência.

Porém, como Dienes observa:

Até agora, o príncipio em causa não tem sido adoptado em Matemática, de qualquer maneira sequente. E apresenta, como um dos principais exemplos, a representação decimal dos números, expressa pela igualdade,

$$z = a_n b^n + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0,$$

em que entram as variáveis: a_i, b e n. De facto o ensino anterior limitava-se ao exemplo da base 10, enquanto a Matemática Moderna acentua, também, o uso de sistemas não decimais.

Embora Dienes não atribua limites à validade do seu princípio, devemos, pelo menos, expor a problemática da sua aplicação ilimitada, de acordo com a orientação duma didática objectiva.

1. Nem sempre, no ensino, há tempo para explorar as noções, na sua completa generalidade. Se a continuação do ensino da Matemática o permitir, esta generalização, embora limitada de princípio a um âmbito mais restrito, será, mais tarde e eventualmente, ampliada.

Se, de facto (principalmente por razões de tempo) introduzirmos as variáveis muito rapidamente, poderão surgir confusões, no lugar duma generalização.

Esta objecção perderá força, na medida em que for válida a tese que atribui vantagem à passagem do geral para o particular. Esta tese será esclarecida em 3.6.

2. Quanto mais geral for uma noção, tanto maiores exigências ela porá, às capacidades de abstracção do aluno. Este deverá, então, examinar um conjunto extenso de representantes da noção que, reciprocamente, a rectificam, suspendem o conteúdo e a aplicabilidade.

Portanto, o tempo disponível e a capacidade de abstracção dos alunos determinam os limites de aplicação do princípio de Dienes.

Há também a atender, que não se deverá supor que se atingiu, sem mais, o extremo último de «generalização» duma lição: Esta é, essencialmente, ilimitada; através duma «generalização» continuada, os conceitos confluem noutros, de ordem mais elevada.

Aliás, na maioria dos casos, varia-se muito pouco. principalmente, com referência ao quanto deverá ser «afinada» a estrutura duma lição de introdução — na formulação de problemas — o professor reconhece pouco o alcance do princípio de variabilidade matemática. Alguns exemplos confirmam este parecer:

79 Muitas vezes, chega-se, demasiado depressa, à introdução duma unidade de medida — por ex.º de superfície ou de volume — por meio das figuras «estandardizadas», representando o centímetro quadrado ou o centímetro cúbico. Estas são, então, postas em correspondência, com as unidades de medida: o centímetro quadrado ou o centímetro cúbico.

Neste caso, aquelas figuras poderiam ser substituídas por figuras variáveis. Sequentemente seriam, então, usadas para o «preenchimento» duma superfície ou dum volume, vários rectângulos, triângulos, cubos etc. Isto levar-nos-ia, de princípio, à ideia, de que: fundamentalmente, servem várias figuras com dimensões determinadas, mas que (em parte, por razões práticas, em parte, por acaso), nos limitamos às figuras «standard».

80 O autor propôs o seguinte problema de texto, a um 4.º ano:

«Na sala de espera dum médico, havia 20 cadeiras. Às 8 horas da manhã, esperavam 7 mulheres e 4 homens. Às 9 horas esperavam, já, 16 pessoas».

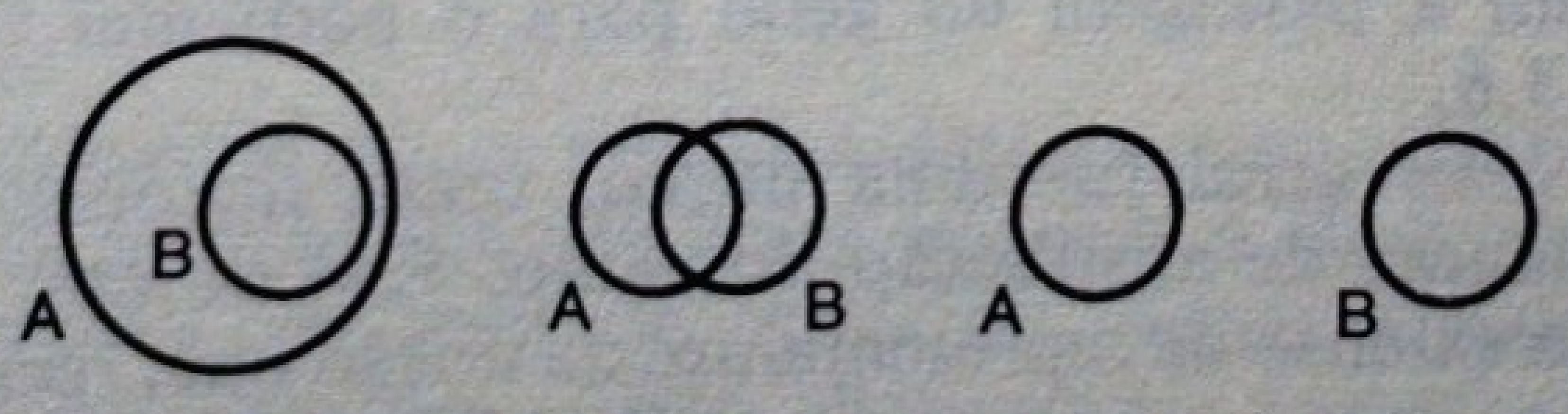
a) Às 8 horas, quantas mulheres havia, a mais do que homens? [$7 - 4 = 3$]

b) Às 8 horas, quantos lugares vazios havia, ainda? [$20 - (7 + 4) = 9$]

c) Às 9 horas, quantas pessoas esperavam, a mais do que às 8 horas? [$16 - 11 = 5$]

Entre 26 crianças, 22, ao todo, deram respostas parcialmente erradas, o que proveio (com uma excepção, apenas), de erros de raciocínio; pois que já, intencionalmente, o número de elementos sc limitou a 20.

Uma razão para este estranho fracasso, é que na maioria dos casos, a comparação de potências de conjuntos não fora feita, no 1.º ano, segundo o princípio da variabilidade matemática. Isto significa, de facto, que, por qualquer forma análoga à do texto acima, os conjuntos a comparar A e B tivessem variado, de maneira a darem origem aos três casos possíveis:



O mesmo sucede no caso dos conjuntos soluções dum sistema de duas equações lineares e duas incógnitas. Com referência aos dois conjuntos soluções das duas equações podem surgir os três casos: igualdade, disjunção e conjunto intersecção definido (8.º ano).

81 Num 10.º ano, os alunos tiveram grande dificuldade, em desenhar um decágono regular. Só com grande esforço, chegaram à conclusão que o ângulo ao centro seria de 36°. O professor, neste caso, deveria ter, logo, variado: «Como se desenha um polígono regular de 18, 12, 9, 4 e 3 vértices?».

Em resumo, na formulação dum problema, há três inconvenientes a evitar:

1. Variar, muito rapidamente.
2. «Enquistar», durante, muito tempo, num tipo de problema.
3. Introduzir pouca variabilidade.

3.2.2 *A formulação transversal de problemas*

Na formulação dum problema, segundo a variabilidade matemática, trata-se de variações dentro dum conceito; na formulação transversal de problemas, trata-se das dependências recíprocas entre muitos conceitos.

Geralmente, a formulação dum problema diz-se transversal, se num conceito procurarmos o que nele é comum ou diferente, em comparação com outros conceitos. São desta categoria, por exemplo: as comparações de estruturas particulares, o estabelecimento de dualidades, de isomorfismos e de homomorfismos; além de comparações gerais, tais como elas surgem, sob qualquer temática e em qualquer fase, muitas vezes referida, só, a aspectos estruturais isolados.

Por um lado, através da formulação transversal de problemas, introduzir-se-á uma capacidade estrutural de abstracção; por outro lado, terá lugar uma deslocação do conhecimento, o que poderá conduzir a uma maior elasticidade: de transferência, aplicação e, em parte, de memorização.

As numerosas analogias entre a Álgebra e a Geometria desempenham, nesta formulação, um papel importante.

Os exemplos seguintes mostram como, sem tratar explicitamente de estruturas, tais como Grupos, Anéis etc., se pode trabalhar transversalmente, «em pequeno» (diríamos).

As crianças dum 3.º ano reconheceram que as duas rotações sucessivas **82**
dum quadrado se podiam comutar, sem que o resultado se alterasse.

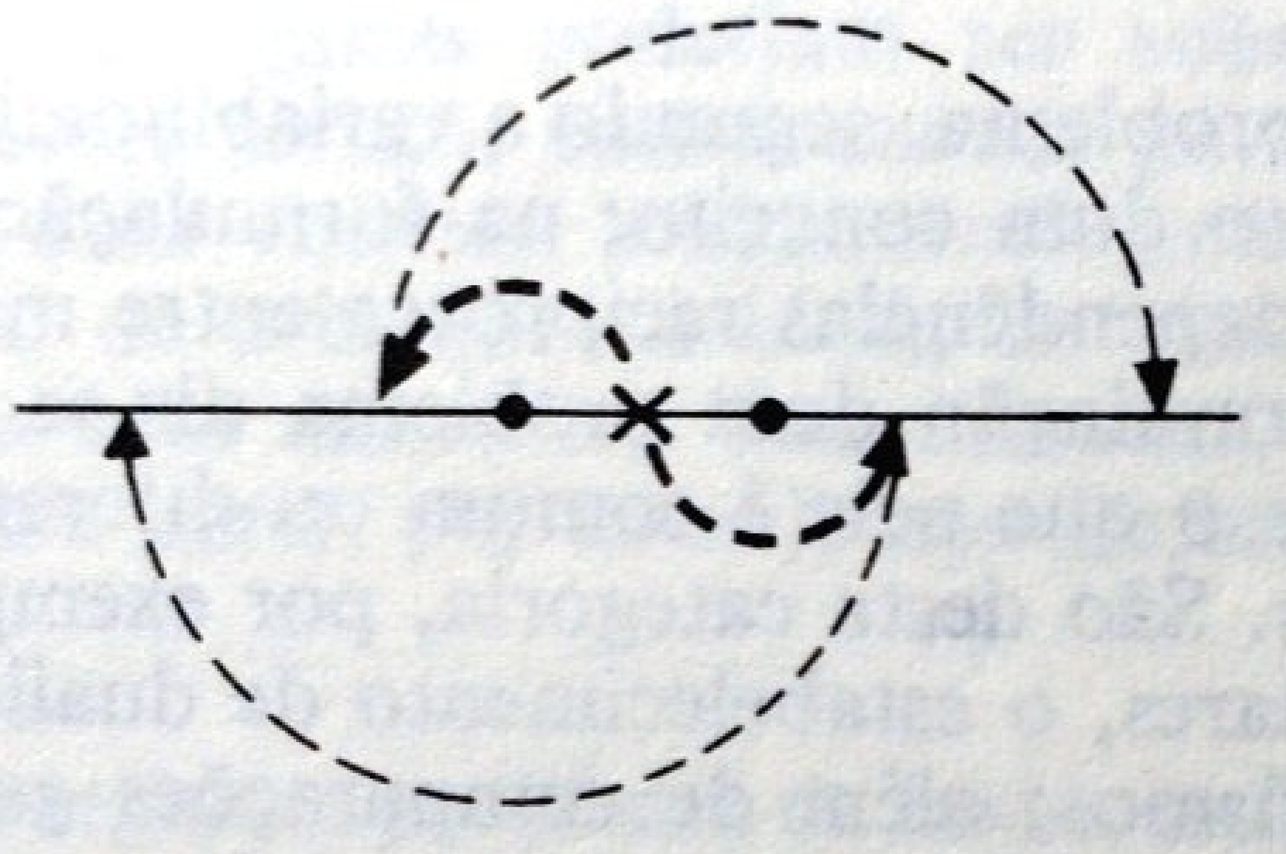
Pergunta-se, então, às crianças, se já lhes sucedera o caso de poderem trocar duas coisas, sem que o resultado se alterasse e, o caso contrário, de esses resultado mudar.

Depois de proposições semelhantes a esta: «A minha mãe ralha, se eu, primeiro brincar e depois fizer as obrigações de casa, no lugar de fazer o contrário», as crianças investigaram sobre operações aritméticas, cujos resultados reuniram, numa tabela.

Pode-se trocar em	Adições	Multiplicações	Rotações em torno dum ponto
Não se pode geralmente trocar em	Subtracções	Divisões	

Assim se formularam analogias e contrastes, em relação aos aspectos estruturais da comutatividade. A proposição dum aluno de que, «na subtracção não se podiam trocar os números», foi vivamente constestada por outro: «Mas em 4 — 4 = 0, posso trocar»! Esta a razão porque a palavra «geralmente» foi introduzida, na tabela.

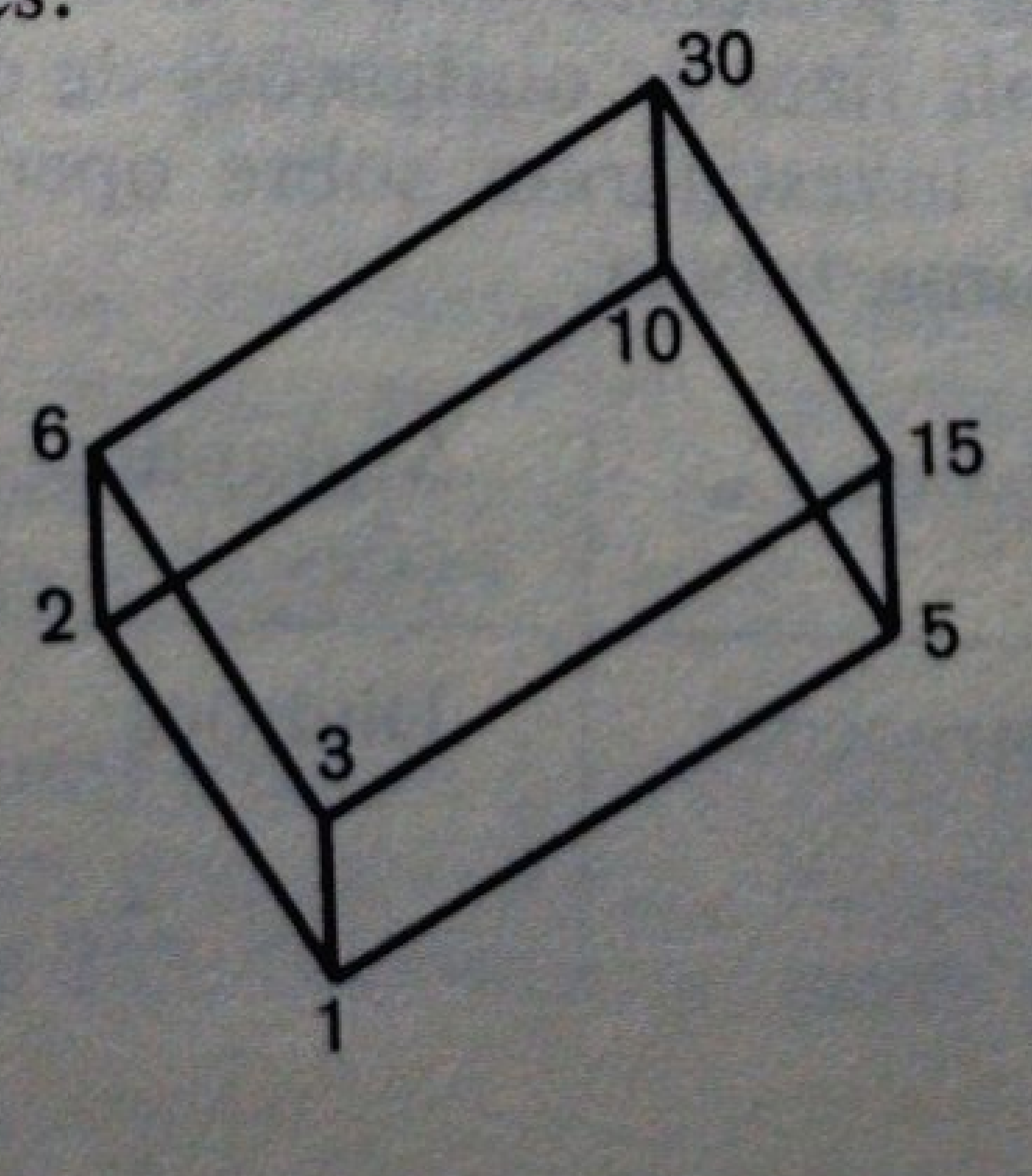
Um aluno perguntou: «Não existe qualquer coisa como rotações que não se podem trocar?». Nesta altura, o professor colocou um aluno entre outros dois e mandou-lhe, segundo duas ordens de sucessão diferentes, executar uma semi-rotação, en torno de cada colega. Os alunos reconheceram, assim, que duas rotações com centros diferentes se não podem trocar, sem se alterar o resultado final.



83 Ao tratar do quintal e do quilograma, devem-se apresentar, também, outros pares de grandezas, em que uma é «100 vezes» a outra (tais como: o hl e o l, um escudo e um centavo, o m e o cm) e, de seguida, mais grandezas, em que a razão é outra.

84 No enquadramento duma lição de Geometria a um 9.º ano, chegar-se-ia à proposição: «dois planos podem ter, em comum, uma recta, nenhuma, ou todas». Nesta altura, surgiria a pergunta de ligação transversal: se os casos «uma, nenhuma ou todas», não apareceram, já, noutro momento. Então, se poderiam referir, por exemplo, os casos de:
—posição de duas rectas;
— solução dum sistema de duas equações a duas incógnitas, analiticamente igual a:
— conjunto intersecção de dois conjuntos.

85 A uma aula do 5.º ano, a estrutura dos divisores de 30 foi representada em diagrama de Hasse, sob a forma dum paralelepípedo. Estabeleceu-se que, cada dois divisores (que, multiplicados, dão 30) seriam chamados divisores complementares.



Perguntou-se, então, de seguida, se esta «complementaridade» estaria também representada geometricamente, de qualquer maneira, em diagrama de Hasse. Os alunos reconheceram, imediatamente, essa representação, na diagonal do diagrama. O exercício para casa, de procurar outros divisores complementares, veio assim ao encontro do impulso dos alunos para continuar a descobrir.

Depois de ter sido definida a média geométrica *g* de dois números *a*, e *b* como sendo $g = \sqrt{a \cdot b}$, surgiu o problema do que se poderia entender 86
por média geométrica de três números *a b* e *c*.

O problema pode ser conduzido, «transversalmente», por duas formas simples:

1. A partir duma analogia geométrica: Se a média geométrica de dois números *a* e *b*, se pode representar, pelo lado do quadrado, de área equivalente à do rectângulo de lados *a* e *b*, então, no caso de três números *a*, *b* e *c*, partir-se-á dum paralelepípedo, tendo, como medidas de arestas, esses três números. E, analogamente ainda, entender-se-á como média geométrica a aresta dum cubo de volume equivalente: $g = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$.

2. A partir duma analogia aritmetica: Se para a média aritmética, *m*, de três números se verifica,

$$m + m + m = a + b + c$$

teremos na geométrica,

$$\begin{aligned} g \cdot g \cdot g &= a \cdot b \cdot c \\ g^3 &= a \cdot b \cdot c \\ g &= \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \end{aligned}$$

Ao tratarmos da propriedade $\sqrt[b]{a} = \sqrt[b \cdot n]{a^n}$, podemos perguntar 87
por propriedades análogas.

Serão, então, válidas as seguintes propriedades, baseadas em variações do «mesmo sentido»:

$$a - b = (a + n) - (b + n)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

Os exemplos acabados de citar referem-se ao estabelecimento de propriedades e definições. Mas a formulação transversal de problemas é, também, apropriada para combinar processos:

Se para a resolução dum problema, houve vários processos, um exercício importante será o aluno reconhecer a ligação, ou a equivalência, desses vários processos ou, até, fundamentá-la. Neste ponto, remetemos para Ex.º 136.

3.3.3 *A formulação funcional de problemas*

Em numerosos casos, no ensino da Matemática, conhecem-se os valores $x_1, x_2 \dots x_n$, em relação aos quais se procura um valor y, que univocamente seja determinado por aqueles. É, então, frequente que na resolução dum tal caso, surja uma situação parecida com a seguinte:

Cerca de um quarto dos alunos resolvem, bem, o problema, indicando a via certa da resolução. Cerca de outro quarto chega à solução certa, mas sem indicar, completamente, o caminho. Um 3.º quarto só ajudado chegou à solução certa e o restante quarto, não obstante ser ajudado, não chegou a qualquer resultado ou, então, chegou a um falso.

Ora, experimentámos, que, de uma forma especial, uma formulação funcional de problemas pode influir, positivamente, sobre esta situação.

Uma formulação de problemas chamar-se-á funcional, se, através dela, se procurar como é que o resultado y varia, quando um (ou mais) dos *n* valores dados x_1, $x_2 \ldots$ x_n, variarem, mantendo-se os outros constantes.

Tais formulações de problemas adquirem — sob várias formas — significado didáctico, para:

1. Os alunos, captarem, na estrutura do problema, o papel de cada variável isolada e, assim, a estrutura completa desse problema. Este caso surge, se os alunos, a partir duma alteração de dados, não necessitarem de voltar ao cálculo a partir do início, mas, sim, se estimulados, souberem dizer como irá variar o resultado.

2. Os alunos aprenderem a conhecer propriedades elementares.

Os alunos desenvolverem a capacidade de estabelecer hipóteses e conclusões. Assim, se chegaria, por exemplo, a formulações deste tipo: «Se x_3 aumentar de *d*, então y diminuirá, porque...»

4. Os alunos reconhecerem, claramente, os casos especiais, nas suas conotações com o geral.

88 No cálculo duma média de classificações, verificou-se que se tinha partido dum valor 3, no lugar de 5. Como é que a correcção iria influir, na média?

Este problema que, a princípio, foi esclarecido com números determinados e, depois, na sua generalidade, revelou que, numa média aritmética, cada número de partida a_i comparticipa com uma fracção $\frac{a_i}{n}$.

Para justificação deste facto, dever-se-á invocar a propriedade distributiva:

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ com *a b* e *c* $\in \mathbb{Q}$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = m$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + (a_n + d)}{n} = m + \frac{d}{n}$$

89 Antes da apresentação do problema indicado ao lado, preveniu-se, em termos gerais, que ele se poderia resolver, mecânicamente, logo que a lei da sequência fosse conhecida.

$17+49=$
$17+51=$
$17+53=$
. .
. .
. .
$17+65=$

São de facto, muito de recomendar as sequências de exercício sobre as quais os alunos, de imediato, possam especular:

$17 + 49 =$	$42 - 15 =$
$17 + 51 = \curvearrowleft + 2$	$42 - 17 = \curvearrowleft - 2$
$15 + 53 = \curvearrowleft + 0$	$40 - 19 = \curvearrowleft - 4$
$18 + 56 = \curvearrowleft + 6$	$43 - 22 = \curvearrowleft + 0$

Acessoriamente, estaremos, ainda, a proceder «transversalmente», se mandarmos comparar duas linhas de exercícios, e chegarmos à conclusão de que, não obstante os números citados variarem no mesmo sentido, tal não influi no resultado final.

Especialmente, em Aritmética e a propósito da formulação transversal dos problemas, falar-se-á, ainda, de problemas vizinhos [por ex.º: 33. Pág. 183].

Quando, na Geometria, se apresentam fórmulas para calcular o volume ou a superfície dum sólidio, as variações mais frequentes são as de usar «números mais difíceis», ou apresentar aplicações. Desprezam-se, porém, muitas vezes, formulações de problemas da seguinte espécie: «Como irá variar o volume ou, então, a superfície dum paralelepípedo, se o seu comprimento duplicar (ou se reduzir a metade); ou se aumentarmos a largura em 3 cm?» 90
A ligação operatória de três grandezas e a diferença entre volume e superfície, tornar-se-ão, assim, evidentes e a finalidade última não será a de aplicar várias regras de cálculo.

No tratamento das funções trigonométricas ao 10.º ano, não nos limitaremos a calcular, apenas, vários valores, a partir das equações. Estas deverão, sim, ser apresentadas num sentido funcional, de forma a serem exploradas qualitativamente: como, por exemplo variará o seno, quando o cateto oposto, ou a hipotenusa, ou ainda o ângulo, variarem. 91

O último exemplo mostra as vantagens das considerações funcionais, em casos especiais de raciocínio.

A partir da fórmula da área do trapézio, $A = h \cdot \frac{a+c}{2}$, podemos, por meio de variações, obter, imediatamente, a fórmula da área do triângulo ($c = 0 \Rightarrow A = \frac{I}{2} h . a$), do paralelogramo ($a = c \Rightarrow A = h \cdot a$) e do rectângulo ($a = c,\ h = b \Rightarrow A = a \cdot b$) 92

Se assim, pela formulação variável dum problema, pretendermos conhecer uma noção, na sua completa generalidade, teremos que procurar, por meio dessa formulação, tornada funcional, qual a natureza das variações e do seu resultado, por intermédio dos quais as partes isoladas da noção poderão ser esclarecidas.

Ambas as espécies de formulação de problemas se encontram no exercício seguinte, destinado a uma prova, para alunos dum 13.º ano escolar.

93

É dada a função f_k em que:

$f_k(x) = 4\ (1 - e^{kx})^2$ com $K \in \mathbb{Q}^+$

a) Onde se encontra, na representação gráfica, o mínimo de f_k?

b) Determinar os pontos de inflexão da curva.

c) Demonstrar que os pontos de intersecção com o eixo vertical, das tangentes nos pontos de inflexão, são independentes de k.

d) Quais são as assímptotas, em função de k? Faz um traçado para $k = 0{,}5$.

e) Determinar o ponto de intersecção das assímptotas à curva, no 1.° quadrante. Determinar, também, para estes pontos de intersecção, a equação da tangente, em função de k. Onde é que estas tangentes encontram o eixo vertical?

f) Determinar os conjuntos dos pontos de inflexão, para:

$f_{a,\,k}(x) = 4(a - kx)^2$ sendo $k \in \mathbb{Q}^+$ e $a \in \mathbb{Q}^+$,

1.° em função de *k*, sendo *a* constante;

2.° em função de *a*, sendo *k* constante;

3.° para $a = 2$.

g) Pode-se, por meio duma escolha apropriada do parâmetro *a*, obter-se $k \in \mathbb{Q}^+$, de maneira que o ponto de inflexão seja um ponto da curva, com uma posição qualquer (c,d) determinada no semi-plano (x,y) em que $y > 0$?

3.3.4 *A formulação reversível de problemas*

Suponhamos que, para um dado problema P_n, são dados os valores $x_1, x_2 \ldots x_n$, *e se tem de determinar um valor r*, numa dada relação, com aqueles valores. Chamar-se-á, então, a um outro problema $P_n{}^*$, o reversível de P, se: reciprocamente, para a mesma relação, se procura um valor x_i, sendo dados os *n* valores restantes $x_1, \ldots, x_k \ldots x_n$ (além de *r*) e em que $k = 1 \ldots n$ e $k \neq i$

Na literatura didáctica, este problema é também conhecido, frequentemente, por problema inverso ou problema de prova.

Está ao nosso alcance achar problemas reversíveis, para um dado problema P_n, em relação aos *n* valores.

Assim, para um problema de adição

$$a + b = \square$$

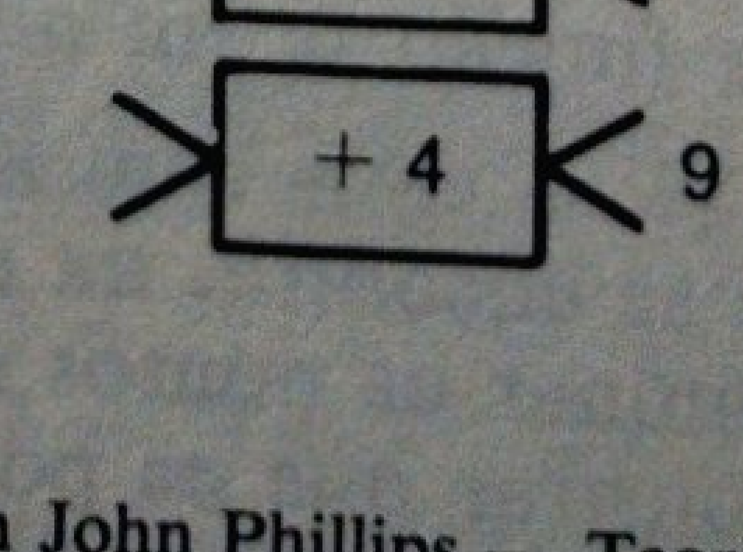
há dois problemas reversíveis, que são:

$$a + \triangle = c \quad \longleftrightarrow \quad c - a = \triangle$$

$$\bigcirc + b = c \quad \longleftrightarrow \quad c - b = \bigcirc$$

Piaget assinalou que o raciocínio da criança, na fase de simbolismo visual (2-7 anos), ainda é irreversível. Uma observação proveniente do 1.° ano escolar confirma este facto.

Muitas crianças, que sem esforço puderam resolver a questão, falharam no tipo reversível.



N. T.

* Sobre o assunto em especial, ler-se-á, com proveito, em John Phillips — Teoria de Piaget sobre as origens do intelecto (já citado) pág 44-128: Propriedades de grupos e agrupamentos.

Segundo Piaget, o raciocínio só poderá ser considerado reversível, se essencialmente, se verificarem as seguintes propriedades:*

— a reversibilidade (capacidade de inverter uma operação mental).

— a associatividade (capacidade de poder atingir um determinado ponto, por caminhos diferentes → 3.3.5)

— a composição (capacidade de coordenar duas operações mentais, numa só → 3.3.6).

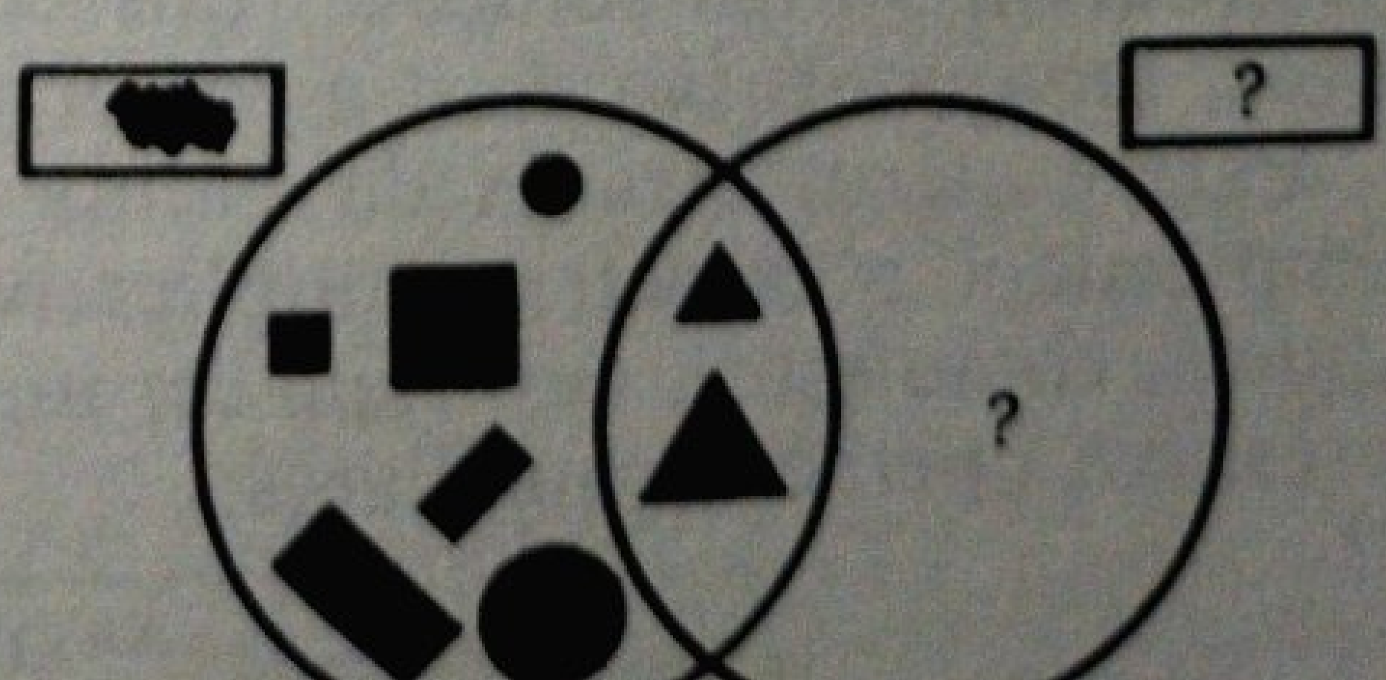
Desta maneira, formam-se, a partir dos 7 anos, os chamados agrupamentos — ligados a operatórias e a representações — e que libertados destas últimas, só a partir dos 12 anos, se podem referir, formalmente, a proposições ou relações de proposições.

Arnold Fricke ocupa-se, na sua tese «Princípios operatórios da aprendizagem da Matemática, na Escola Primária» [30, pág. 79], de vários de tais agrupamentos ou «sistemas globais» de operações.

Neste ponto, deixemos ficar a questão em aberto: se, de forma geral, se poderá ir tão longe, como Piaget, e afirmar que uma operação (por exemplo, a adição) só é compreendida, quando o aluno a puder abranger, em todas as direcções (aqui, a subtracção): ou, se conforme Aebli sustenta [2, pág. 79]*, uma operação só pode ser efectuada, como operação inversa, quando for compreendida pelo aluno.

Não parece, contudo — como seria de prever, a partir da teoria dos estágios, de Piaget — que, globalmente, quanto ao désenvolvimento duma capacidade móvel de raciocínio (sempre, no significado de Piaget), se trate dum processo genético de amadurecimento, posto em movimento por uma acção exterior. Mas, antes, — segundo Bruner — dum processo, desenvolvido por meios apropriados. Daqui que, em matemática, adquiram um importante significado — para o desenvolvimento do raciocínio adaptado a novas situações e duma aprendizagem, segundo combinações totais — as formulações reversíveis, associativas e combinadas de problemas. Estas, assim como as formulações matematicamente variáveis, transversais e funcionais contribuem, essencialmente, para a intuição e compreensão de estruturas.

Uma lição de intersecção de conjuntos, a um 1.º ano, sofreu de mono- 94
tonia, pois decorreu, sempre desta forma: dados dois conjuntos de fichas, definidos por dois atributos, determinar o conjunto intersecção. Ora o raciocínio seria muito mais estimulado, se também se tivesse procedido, inversamente: dados um conjunto e uma parte deste, procurar um 2.º conjunto e o seu atriburto, de forma que aquela parte seja a intersecção dos dois.



N. T.

* Hans Aebli — Prática do ensino (já citada).

95 Depois de proposições, tais como (Alunos): «3 é menor que 5» ou «12 é divisor de 36», dever-se-á através de perguntas, tais como: (Professor) «podes dizer isto, de outra maneira?», tornar corrente, sob a forma verbal, a combinação de relações, com as suas inversas. Aqui, os alunos serão levados a formular: «5 é maior do que 3», ou «36 é múltiplo de 12».

96 Um problema reversível, referido ao perímetro dum rectângulo, pode ser este: «Perímetro 16 cm; comprimento 5 cm; qual é a largura?».

Tal problema adquire um significado que não se projecta, apenas, numa melhor compreensão da fórmula, $P = 2a + 2b$. De facto, o aluno quando calcula através de $(16 - 5.2) : 2 = 3$, tem de realizar processos de transformação de expressões. E estes processos, dando origem a outras representações concretas, prepararão, mais tarde, na Álgebra, outras transformações, agora literais:

$$2a + 2b = P$$
$$2b = P - 2a$$
$$b = (P - 2a) : 2$$

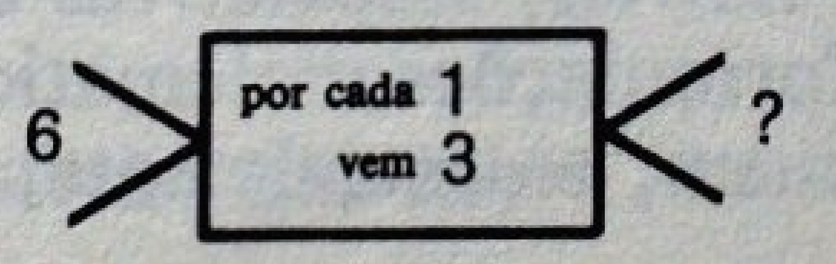
Os problemas reversíveis servem, também, como um controlo para os alunos, aos quais assim, sempre de uma forma renovada, se vão esclarecendo as relações entre as diversas operações.

97 Na introdução ao 2.º ano da divisão, é aconselhável que, tanto oralmente como por escrito, a cada problema que envolva a divisão, a prova se siga, imediatamente.

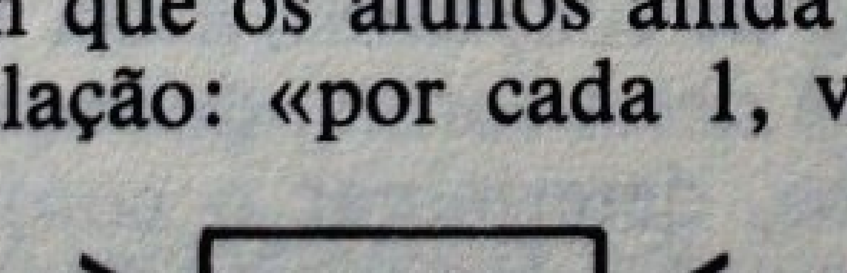
24 ovos : 4 ovos = 6 (vezes), pois 6 · 4 ovos = 24 ovos.

Através da formulação reversível, o professor pode, também, controlar se os alunos compreenderam o primitivo enunciado dum problema.

98 Depois de, num 2.º ano, a maior parte dos exercícios do tipo:

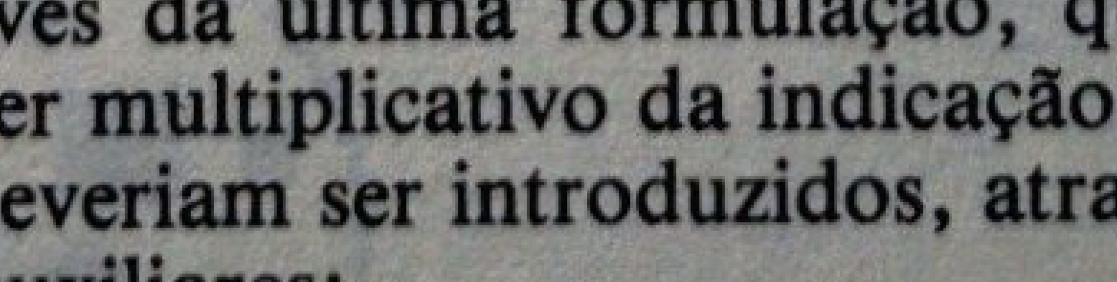


terem sido resolvidos sem erros, ocorreram, na forma reversível, inúmeras soluções, que mostraram que os alunos ainda não tinham compreendido completamente a formulação: «por cada 1, vém ...». De facto, para o exercício:



encontraram várias soluções, tais como «para 3, é 12», que significará, talvez, uma confusão com a formulação aditiva: «3 com 12, dá 15».

Parece claro, através da última formulação, que o aluno ainda não compreendeu o caracter multiplicativo da indicação «por cada 1 vêm ...». Alunos, como estes, deveriam ser introduzidos, através de fichas de várias cores, em operações auxiliares:



Este problema mostra, claramente, que um problema P_n pode, não só tornar-se reversível, em referência aos valores nele representados («Sujeitos»), mas também aos sinais de ligação («Predicados» e «Operadores») [→53, pág. 4, 5 e 6].

Assim, de um problema de adição $a+b=?$, provêm 2+2 inversões:

$$? + b = c$$
$$a + ? = c$$
$$a \ ? \ b = c$$
$$a + b \ ? \ c$$

Para $a > ?$, há, correspondentemente, 1+1 inversões, a saber: $? > b$ e $a \ ? \ b$.

Como veio a revelar uma lição a um 1.° ano, em que se introduziram 99
as relações «... é maior do que ...» e «... é menor do que ...», o apelo para uma formulação reversível dos problemas não deve levar a uma maneira «fraca» de inverter. O que conduziria, facilmente, a confusões e não a um raciocínio flexível.

Na lição, pediu-se às crianças, de uma forma pouco hábil, para indicarem as condições, em que um número era maior ou menor do que outro. No lugar de este procedimento, dever-se-ia ter feito um esclarecimento fundamental de palavras e símbolos, baseado em conjuntos e em ligação com a recta numérica.

Para conclusão desta parte do capítulo, mostraremos, ainda, como é que as crianças do 1.° ano que, conforme já notámos, não souberam resolver os problemas reversíveis da forma: $> \boxed{+\ 4} < 9$*, poderão ser bastante ajudadas.

Algumas crianças vieram a responder bem, depois de impelidas a ensaiarem números de prova. Assim. calcularam o valor certo, por meio de considerações qualitativas funcionais. Exemplificaremos:

«Se eu entrar com 3 e «juntar» 4, ficarão, ao todo 7: é pouco; portanto, devo «juntar» um número maior».

Porém, mesmo com este auxílio, as crianças mais fracas não puderam «arrancar», porque ele requereria, já, um certo raciocínio hipotético: De acordo com Piaget, a interpretação seria que tais crianças não estariam, ainda, maduras, no seu desenvolvimento psicológico, para o raciocínio reversível.

Provavelmente, contudo, segundo Bruner, surgiria, neste caso, um conflito de representações. De facto, as crianças sabem que devem procurar um número que, «aumentado» de 4, dê 9. Porém, a impressão óptica da máquina é, para elas, tão forte, que não puderam «reduzir o 9, de 4»: assim a «correr» são levadas a resolver o problema $4+9=?$ O que esclarece, também, a circunstância de muitas crianças proporem 13, como resultado.

---

*N. T.
Os sinais $>$ e $<$ significam entrada e saída da «máquina»

O «processo dos passos» (vide Ex.º 45 de 3.1) poderia ter ajudado, na maioria destes casos: O operador $+4$ seria aqui interpretado como «4 passos para a frente». Assim, depois de exercícios do tipo $3 \ \boxed{+5}\ ?$, as crianças reconheceram que o problema? $\boxed{+4}$ 9 só poderia ser resolvido, se a partir da posição 9, se dessem 4 passos para trás: Donde se chegou ao problema equivalente? $\boxed{-4}$ 9.

De facto, no modelo da «máquina» e no dos «passos», a impressão óptica é da mesma intensidade, no que se refere aos símbolos $+4$ e 9. Contudo, para as crianças de raciocínio mais fraco, a representação reversível operacionalizada (activada) «4 passos para trás» tornou-se possível, apesar do símbolo $+4$; e, assim, mais intensa do que esta outra representação: «uma máquina que sempre acrescenta 4 marcas, se marchar, ao contrário, sempre retirará 4 marcas». Esta tentativa de interpretação confirma, novamente, a necessidade da variedade de representações dum tema.

3.3.5 *A formulação associativa de problemas*

A formulação dum problema é associativa, se for expressa de tal maneira, que se possa chegar à solução, por vários caminhos. Estes vários caminhos não é necessário que se baseiem, exclusivamente, na propriedade associativa: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$. No que aqui se refere, a noção psicológica e didáctica da associatividade é mais geral, do que a matemática [Veja 30, pág. 15].

100 Num 2.º ano, ao tratar-se, especialmente, de flexibilidade de cálculo, os alunos puderam apresentar 5 vias de solução, para o exercício $4 \cdot 18 = \square$.

$$\begin{aligned} 4 \cdot 18 &= 4 \cdot 10 + 4 \cdot 8 = 40 + 32 = 72 \text{ (propriedade distributiva)} \\ &= (4 \cdot 9) \cdot 2 = 36 \cdot 2 = 72 \text{ (propriedade associativa)} \\ &= 8 \cdot 9 = 72 \text{ (variação oposta)} \\ &= 12 \cdot 6 = 72 \text{ (variação oposta)} \\ &= 4(20 - 2) = 80 - 8 = 72 \text{ (propriedade distributiva)} \end{aligned}$$

É de reconhecer ao raciocínio matemático, a qualidade de ser criador. Contribui, então para tal, o facto de, na solução de muitos problemas, serem possíveis, para cada um, trajectos diferentes; e, até, a descoberta de novos, mais fáceis, quando se reconsideram os primeiros.

Além do efeito, que o aluno assim experimentará de que a Matemática é alguma coisa de dinâmico e, de forma alguma, um sistema unilateralmente fixo, as diversas vias de solução conduzem, frequentes vezes, à descoberta ou aplicação de propriedades. É o que mostra o ex.º 100.

Assim, a formulação associativa dos problemas contribui, essencialmente, para a vivência do ensino da Matemática.

Se porém, o aluno achou uma via que é fácil, ficará pouco motivado para descobrir outras, possivelmente mais tortuosas. Então muitas vezes, se alteram os dados de partida, de maneira que a via encontrada se revele, agora, incómoda; assim, novas vias se apresentarão, como mais simples. É o que mostra o exemplo seguinte (vide também Ex.º 51, em 3.2):

O perímetro dum rectângulo calcula-se, geralmente, pela fórmula $P=2a+2b$. 101

Os números $a=17$ e $b=13$ conduzem, através da propriedade distributiva, a um caminho mais fácil: $P=2(a+b)$.

Os números $a=30$ e $b=29$ suscitam a via $P=4a-2(a-b)$.

Para os números $a=31$ e $b=30$ é aconselhável o caminho, a partir da igualdade $P=4b+2(a-b)$.

Também a resolução da chamada regra de três, pode seguir várias vias. 102
Damos um exercício:

«4 litros de vinho custam 84 escudos. Quanto custam 6 litros?»

1.ª via: $4\,l \xrightarrow{:4} 1\,l \xrightarrow{\cdot 6} 6\,l$ (via normal)*

2.ª via: $4\,l \xrightarrow{:2} 2\,l \xrightarrow{\cdot 3} 6\,l$ (via normal abreviada)

3.ª via: $4\,l \xrightarrow{:2} 2\,l \qquad 4\,l + 2\,l$ (via de decomposição)

4.ª via: $4\,l \rightarrow 6\,l$ (operador. $\frac{3}{2}$)

5.ª via: $4\,l \rightarrow 84$ esc., $6\,l \rightarrow$ (coeficiente $21\ \frac{\text{esc}}{1}$)

As vias de 1 a 4 baseiam-se nas propriedades, $f(q \cdot a)=q \cdot f(a)$ e $f(a+b)=f(a)+f(b)$, válidas para a proporcionalidade.

A 5.ª via, baseia-se na aplicação do coeficiente de proporcionalidade.

Num 9.º ano, para calcular $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$, adoptaram-se vários processos; a seguir, discutiu-se o mais fácil e as propriedades que foram aplicadas: 103

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{16}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

3.3.6 *A formulação de problemas, em composição*

A formulação dum problema diz-se em «composição» se, nela pudermos reconhecer, simultaneamente, várias operações, funções, relações, proposições ou predicados, com a finalidade de os pormos em oposição, ligação ou substituição.

N. T.
* O original só dá indicações para «abrir caminhos».
Os dados foram adaptados.

O facto de, os alunos, não poderem exercer expontaneamente, uma capacidade de composição, mostra-o o seguinte exemplo, apresentado por Piaget [Compare 59, pág. 24], que só foi resolvido, com acerto, aos 12 anos:

«Edite é mais clara do que Suzana; Edite é mais escura do que a Zita. Qual é a mais escura das três?»

Sem auxílio visual, só raros alunos, até àquela idade, puderam considerar simultaneamente, as duas proposições contidas na pergunta e referenciá-las, uma à outra.

A composição das duas proposições é, no presente caso, dificultada pelo facto da primeira dever ser, mentalmente, invertida. Só a partir das duas proposições: «A Suzana é mais escura do que a Edite e a Edite é mais escura do que a Zita, se torna evidente que a Suzana é a mais escura de todas.

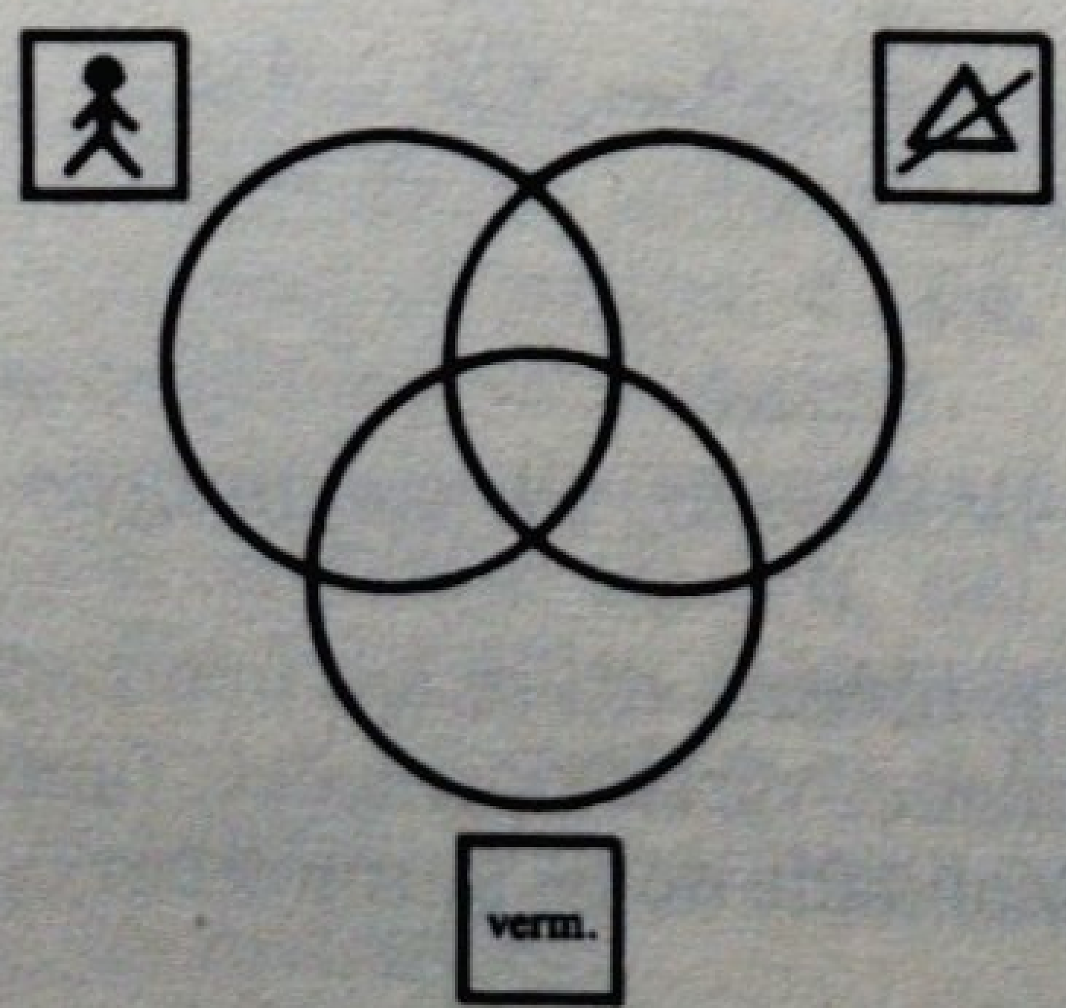
É uma questão difícil, para o candidato ao ensino — e até mesmo, por vezes, para um professor experimentado — o reconhecer, quantos aspectos diversos devem ser apresentados, simultaneamente, e com que graus de diferenças, nas dificuldades.

Sob este aspecto, parece-nos ser importante um conceito de Bruner, essencialmente simples, e, contudo, rico de consequências, para o ensino da Matemática [10, pág. 232]:

«Somos de opinião que o desenvolvimento intelectual talvez, em parte, derive da simples «capacidade do canal», isto é, da capacidade de considerar, ao mesmo tempo, vários aspectos duma situação, tais como eles puderam, já, ser observados, nas esperiências anteriores».

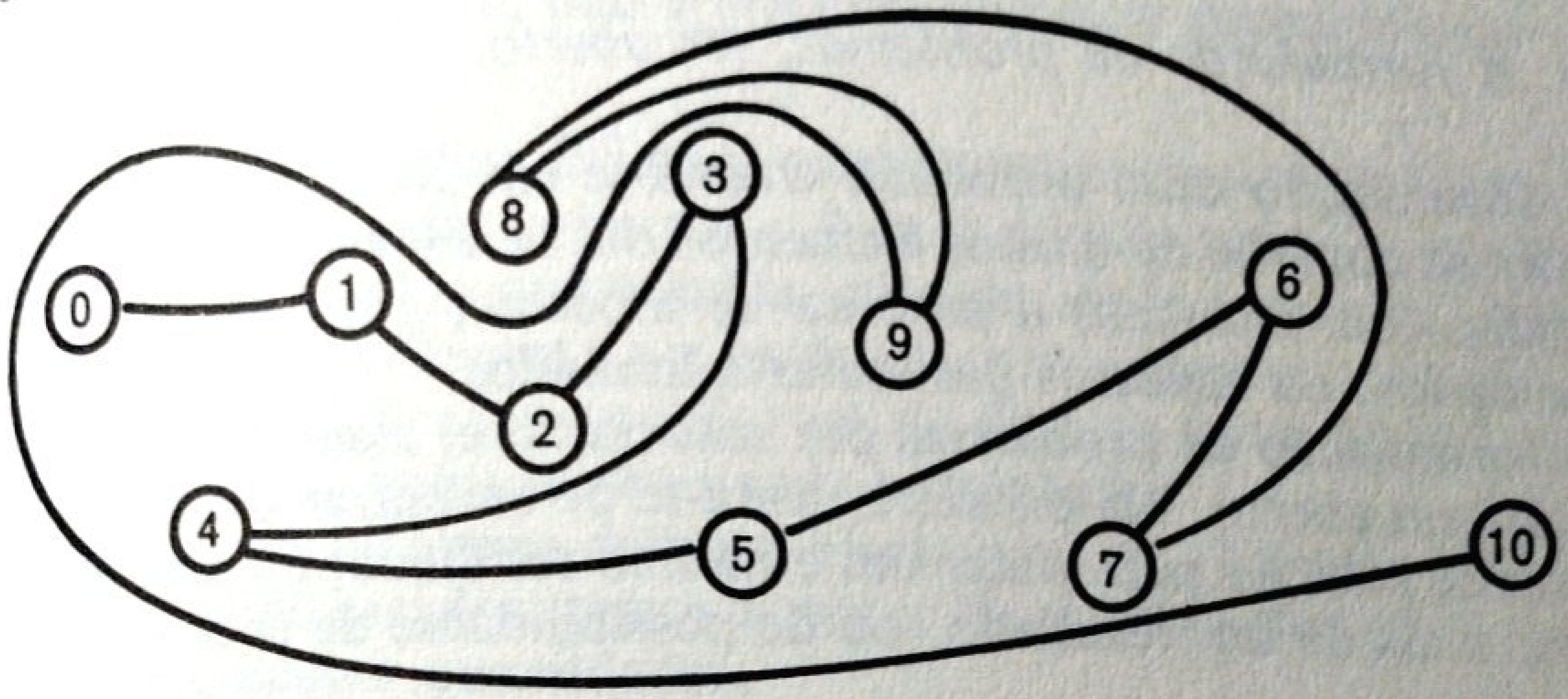
Se aceitarmos esta tese, devemos escolher como uma das finalidades do ensino da Matemática, «carregar» bem a capacidade de canal disponível do aluno, e desenvolvê-la, o mais possível, de forma a dar ao desenvolvimento intelectual estímulos importantes.

104 Partindo, então, desta tese, inumeráveis formulações de problemas de matemática moderna adquirem um significado especial. Entre aquelas, devemos citar os jogos de discriminação de diferenças e o de matrizes, descritos por Dienes [20], nos quais as crianças devem atender, simultaneamente, a vários aspectos.



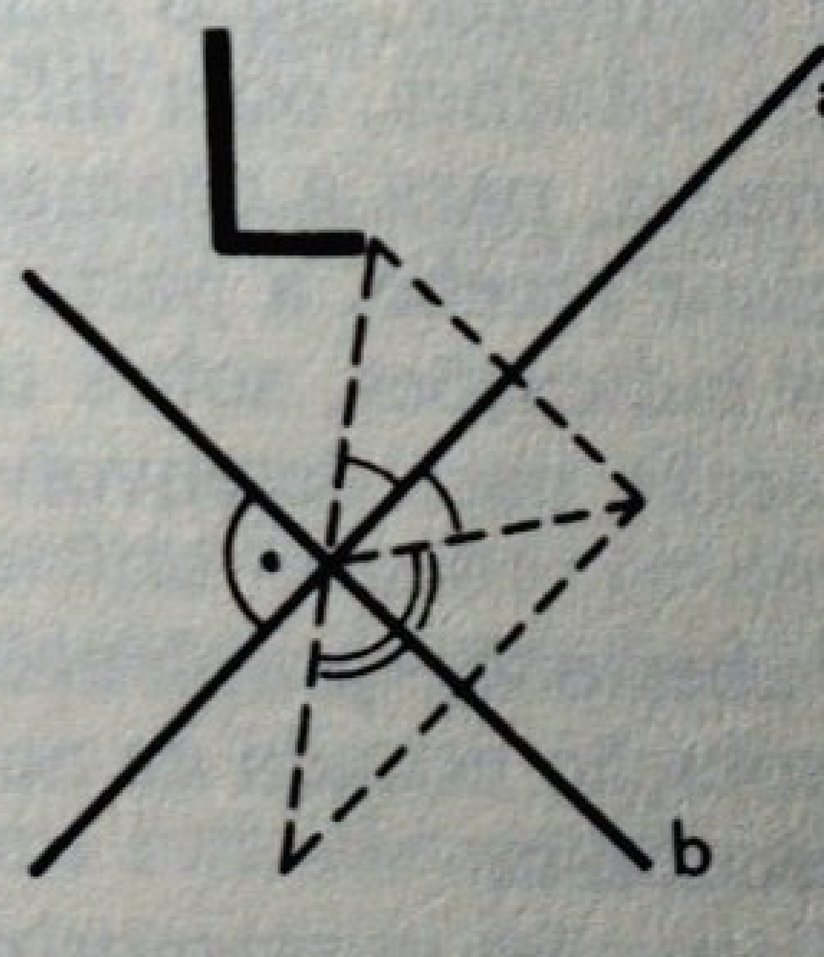
No exemplo acima indicado, para ordenar fichas sob o aspecto psicológico mental, a criança deve considerar os quatro aspectos: grande (1), vermelho (2), não vermelho (3), triangular (4). Correlativamente, vêm as correspondências a determinados domínios. A formulação combinada de problemas surge, também, logo, nas primeiras operações aritméticas: Tal como acontece no excitante exercício, do 1.° ano, de ligar («sem corte») números de 1 a 10, escritos em ordem caótica.

Neste caso, há que considerar, ao mesmo tempo, aspectos aritméticos (da sucessão de números), topológicos e psico-motores (vide a figura seguinte).



A transposição de 10 (por ex.° $8+5=\square$), segundo a propriedade associativa $8+(2+)=(8+2)+3=10+3=13$, é também, um problema composto, porque a operação neste caso, deve ser compreendida, como a composição de duas operações.

No ensino da geometria, ao 7.° ano, a seguinte formulação dum problema, para a introdução da simetria em relação a um ponto, é, também, composta: 105



«Constrói a simétrica da letra L, primeiro em relação ao eixo *a* e, depois, em relação ao eixo perpendicular *b*.

Poderias, também, ter obtido esta simetria composta, por meio duma só transformação?»

Naturalmente, que a simetria central também poderia não ter sido tratada, segundo aquela forma composta. — Se, por exemplo, partíssemos da figura simétrica, em relação a um centro, e procurássemos, directamente, o processo de transformação.

O processo composto — que é possível, para muitas transformações geométricas — tem a vantagem de que, muitas propriedades duma dada transformação resultam directamente, como consequências das transformações que a compõem. Assim, por exemplo, a conservação dos comprimentos e ângulos da simetria central provém, directamente, da conservação dos comprimentos e ângulos da simetria axial: Aqui, devem ser compostas, transitivamente, duas proposições da forma, — «... tem o mesmo comprimento que...»; e outras duas, da forma, — «... tem a mesma medida de ângulo que ...».

3.3.7 *A formulação de problemas, em aberto.*

A formulação dum problema chama-se em aberto, se o conjunto de soluções se compõe de muitos elementos ou, se a formulação do problema possibilita (ou necessita) a procura de aspectos, geralmente não directamente dados, ou aspectos particulares limitados.

A formulação de problemas por associação é, assim, diferente da formulação em aberto. Na primeira, trata-se de encontrar uma, ou mais duma, via de solução para obter um e mesmo resultado; na segunda, de encontrar mais de um resultado, ou de possibilidades de encontrar mais de um.

A formulação de problemas em aberto tem a vantagem de nenhuma coacção, proveniente duma só solução possível, poder limitar o raciocínio heurístico, que procede às «apalpadelas, rico de implicações: tornado, assim na verdade, uma parte do raciocínio matemático, tanto como é o raciocínio fortemente dedutivo e sistemático [69, pág. 219]; [71, pág. 244 e 248].

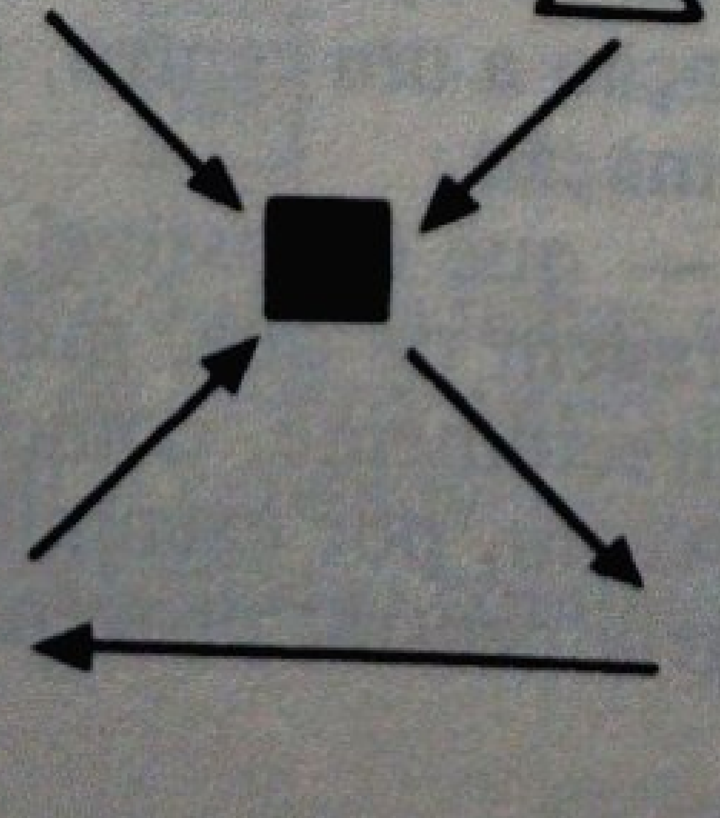
Além disso, tais formulações abertas exigem dos alunos (e permitem-lhes) um comportamento mais independente: Uma vez que dentro da formulação em aberto é o professor, ou o aluno, que muitas vezes fixam a extensão do conjunto das soluções, ou a dificuldade das soluções isoladas, contribui-se, assim, também, para a chamada diferenciação interna.

Finalmente, o professor recebe, a partir da escolha de soluções feitas pelo aluno, importantes indicações, sobre trajectos de raciocínio e interpretações erradas, que serão para desenvolver ou para corrigir.

Da formulação em aberto de problemas, pode resultar, ainda, uma forte motivação. Cada solução achada de novo pode trazer, consigo, o sinal de uma pequena descoberta.

Sem entrarmos em discussões pormenorizadas, apresentamos, a seguir, alguns exemplos de formulações de problemas, em aberto.

106 Se num 1.° ano, mandarmos, por exemplo, preencher este esquema, com fichas, e segundo a relação «... tem menos vértices do que ...», na maior parte dos casos, há mais do que uma solução.



Podemos observar crianças que, de preferência, ocupam o lugar (?), com um círculo pequeno. Possivelmente, para elas, as noções, «o número de vértices duma figura» e «o tamanho duma figura», não estão, ainda, diferenciadas. É, também, interessante, para as crianças, o exercício de — entre vários esquemas de flechas — procurar aqueles, para os quais, em referência à relação acima, não é possível qualquer preenchimento.

Pediu-se a crianças dum 2.º ano, para enunciarem um problema de di- 107
visão do tipo «... quantas vezes em ...?» e incidindo sobre os números 15 e 3. Só então, se revelou que aquelas crianças ainda trocavam os problemas de «... quantas vezes em...» e os de «... repartido por ...». Um exemplo destes é o da criança que propôs: «A tia deu, ao todo, 15 bolos para 3 sobrinhos. Quantos bolos recebeu cada sobrinho?»

Outra formulação aberta dum problema para um 2.º ano: «Para selar uma carta com 10 escudos, temos à nossa disposição selos de 1, 2, 4 e 5 escudos, em qualquer quantidade».

A formulação, a um 5.º ano, do problema em aberto: «desenhar 108
vários rectângulos, com a área de 16 cm²», levou a discussões interessantes sobre:

— a propriedade $(A=)\ a \cdot b = (a : n) \cdot (b \cdot n)$;

— problemas de máximos e mínimos, tais como:

«Qual é o rectângulo que tem, para um perímetro constante, a maior área?» e, inversamente:

«qual é o rectângulo que tem, para uma área constante, o menor perímetro?»

— problemas de limites, tais como: «há, para uma área constante um perímetro máximo?»

Para o problema de representar 64 como potência, alunos dum 9.º ano 109
descobriram que tal representação seria possível, de várias maneiras:

$64 = 2^6 = 4^3 = 8^2$

A partir daqui, surgiu mais esta observação funcional: como é que o expoente varia, com a base?

A observação de que $2^6 = 4^3$ sugeriu a propriedade:

$a^b = (a \cdot n)^{\frac{b}{n}}$,

mas que foi posta de lado, a partir do contra-exemplo:

$4^3 = 8^2$

A formulação transversal da pergunta — se uma propriedade parecida, como aquela que, neste caso, foi falsamente sugerida, não poderia, contudo, ser válida, noutro contexto — recebeu uma resposta afirmativa, através das propriedades:

$(a \cdot b) = (a \cdot n) \cdot (b : n)$

$a + b = (a + n) + (b - n)$.

Em conclusão tirada por analogia, os alunos «adivinharam», então esta propriedade, como sendo verdadeira:

$a^b = \sqrt[n]{(a^n)^b}$

110 O caso deu-se num 10.º ano. Antes de se resolver um problema sobre sucessões geométricas, e que se referia às alturas decrescentes a que subia uma bola elástica ($g = \frac{9}{10}$), o professor apresentou este problema, sob a forma em aberto:

Referidos a uma bola elástica presente, capaz de saltar, quais os comprimentos físicos que eram de esperar, partindo das considerações matemáticas do capítulo de sucessões e de séries.

Os alunos indicaram, uma a seguir à outra, algumas sucessões possíveis de: tempos, alturas, velocidades e forças. Depois. destacaram várias formulações interessantes de problemas (em cada um deles, tratar-se-á duma sucessão aritmética ou geométrica?), ou o célebre paralogismo: Se a sucessão das alturas fosse uma sucessão geométrica infinita seria que — por razões meramente matemáticas — a bola nunca mais acabaria de saltar?

Critério resumo do capítulo 3.3:

C_{16}	O Tipo de formulação dos problemas conduz a uma intensificação e mobilização dos raciocínios e conhecimentos matemáticos?

3.4 *Condições exteriores para uma solução independente (original) de problemas*

3.4.1 *Formas de acção para a solução do problema.*

Não apresentaremos, aqui, qualquer exposição, em geral, sobre formas directas ou indirectas de acção. Por exemplo:

— o professor debruça-se sobre o aluno ou, pelo contrário, este fica entregue a si próprio — e, correlativamente —, quais as características, campo de aplicação, vantagens ou desvantagens dessas duas atitudes. Para tal, remetemos às publicações sobre pedagogia escolar.

Aqui, tratar-se-á, apenas, de alguns aspectos especiais referidos ao ensino da Matemática, e ao comportamento independente, original, do aluno.

No seu livro «A Matemática e o Raciocínio Plausível», Polya exprime, claramente, que a descoberta da solução dum problema, em confronto com o tratamento matematicamente correcto dessa solução, exige um método próprio, que se dirá heurístico. [62, pág. 10]*:

N. T.

* Polya — Mathematics and Plausible Reasoning — Vol I (Princeton University)

«Deve-se descobrir um teorema matemático, antes de o ter demonstrado, deve-se estabelecer o plano da sua demonstração, antes de elaborar os detalhes; combinar observações, e seguir analogias; voltar; sempre e sempre, às provas. O resultado da actividade criadora do matemático é a conclusão demonstrativa, ou seja, é uma demonstração: mas esta é a descoberta, através do raciocínio plausível, através da descoberta. Se a aprendizagem da Matemática, reflectisse, suficientemente bem a sua elaboração, deveria, nela, haver lugar para a descoberta, para o raciocínio plausível».

Dificilmente haverá um professor que não tenha, no maior apreço, o método da descoberta própria, independente, denominado, tanto por Wagenschein como por Wittenberg, «método genético». Há, porém, muitos professores que, «pressionados» pelo programa e pelo tempo, só o aplicam, em plena consciência, de forma limitada; ou que (mas agora inconscientemente) não consideram que um problema se desenvolve, segundo inumeráveis problemas de detalhe, e, assim, também esquecem que, precisamente, na escolha e sequência destes problemas é que se baseia uma grande parte do trabalho intelectual, independentemente criador.

Dever-se-á dizer aqui, com clareza, que um método genético, visto a curto prazo, é devorador de tempo. Porém, que considerado a prazo mais longo, é sobrevalorizado pela génese posterior de mais completas realizações, sob os seguintes aspectos:

1. O aluno adquire métodos de raciocínio heurístico, que, mais tarde, lhe permitirão uma exploração rapida de novos temas.
2. As soluções e os caminhos, para as atingir, descobertos com independência, fixam-se melhor, na memória e, assim, serão mais facilmente reproduzidos.
3. O processo genético actua, junto dos alunos, através do desenvolvimento duma motivação mais elevada (→ 3.2.4); a qual favorece, duma maneira geral, o processo de aprendizagem.

Contudo, a experiência mostra que o método genético pode ser utilizado sem resultado, ou, até mesmo, de forma prejudicial. Assim, as soluções de muitos problemas são devidas a acontecimentos felizes; às quais o aluno, só por acaso, poderia chegar. Nestes problemas, é preferível seguir um processo de desenvolvimento contínuo, maeutico, muitas vezes, também, deduzido.

Muitos professores criaram, com o tempo, uma forma mista: de descoberta independente e de marcha em desenvolvimento progressivo. Esta forma pode ser boa, em determinados casos, mas não é aplicável, na generalidade; de facto, no compromisso que a caracteriza, podem perder-se as vantagens dos dois métodos. Quando assim for, defenderemos métodos levados aos extremos:

Em muitos assuntos, o aluno — sozinho ou quando muito, apenas acompanhado, como membro dum grupo — deverá trabalhar, na solução dum problema. Assim, tornar-se-á consciente de que só, às «migalhas», poderá esperar, do professor, pequenos auxílios. Entretanto, o professor poderá dedicar-se, predominantemente, a auxiliar a parte mais fraca da turma.

Pelo contrário, noutros capítulos de ensino, o aluno, em posição oposta — sujeito a solicitações e tensões dum desenrolar mais rápido do ensino — deverá aprender a conhecer «matematizações» já completas, ou seja, o percurso do pensamento duma outra pessoa.

Se nos decidirmos na resolução dos problemas dum capítulo do programa, por formas de acção indirectas, estas só serão eficientes, se tiverem em conta os seguintes aspectos:

1. A formulação do problema deverá cumprir esta dupla condição: predomínio duma intuição geral e duma complexidade crescente (→3.4.3). Para tal, o problema deve, muitas vezes, ir-se sujeitando a mais condições. Muitas vezes, também, a transparência necessária pode ser auxiliada, durante a resolução pela introdução emergente de fórmulas, propriedades, construções, figuras, constantes.

2. A formulação do problema e algumas condições exteriores devem-se tornar claras a todos os alunos: os meios auxiliares permitidos, o tipo de apresentação, a forma social (por ex.º a sucessão do jogo).

No lugar de instruções prévias (orais ou escritas) muito extensas, recomenda-se — principalmente até ao 6.º ano e com apoio em formas socializadas — apresentar um aluno (ou juntar mais dum) diante da turma e fazê-lo (ou fazê-los) completar, ou pelo menos esboçar, a resolução dum problema semelhante.

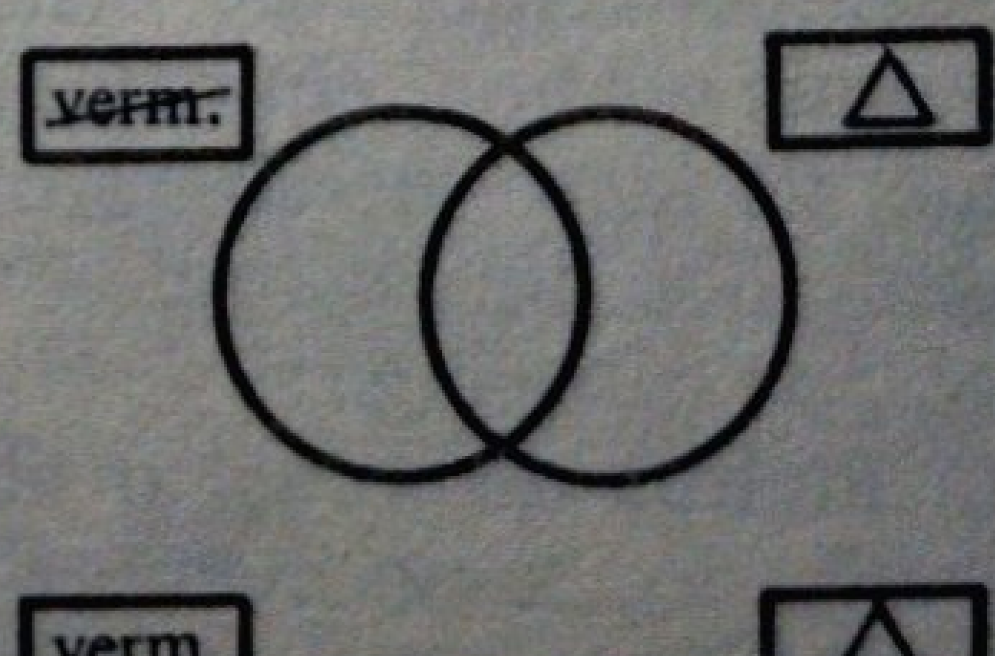
Os principais elementos de partida (unidades, números, etc.) devem ser apresentados, claramente no quadro, ou na ficha de trabalho do aluno.

3. A representação da resolução deve ser expressa de forma apropriada ao nível da idade do aluno. Principalmente, devem-se indicar todas as possibilidades de emprego de meios auxiliares. Especialmente na escola primária, deve-se cuidar dos manuseamentos adequados: o que se conseguirá, facilmente, se dermos a conhecer, com clareza, o campo de acção, por meio de caixas, capas de cadernos, etc.

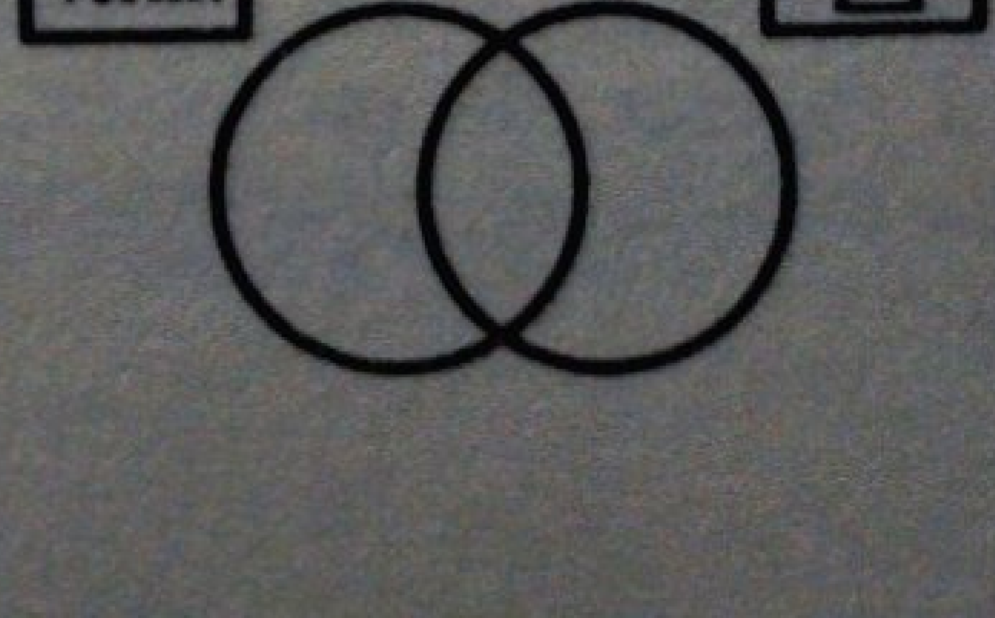
4. As formulações dos problemas devem ser apresentadas de forma diferenciada: Os alunos de mais fraca capacidade recebem os problemas em formulação mais simples; os alunos de mais forte capacidade trabalham os problemas em formulação mais profunda, ou com perguntas adicionais (ou então, são inseridos num sistema de assistência, aos mais fracos).

111 A propósito do conjunto intersecção, indicaremos como um problema pode ser introduzido, de forma diferenciada:

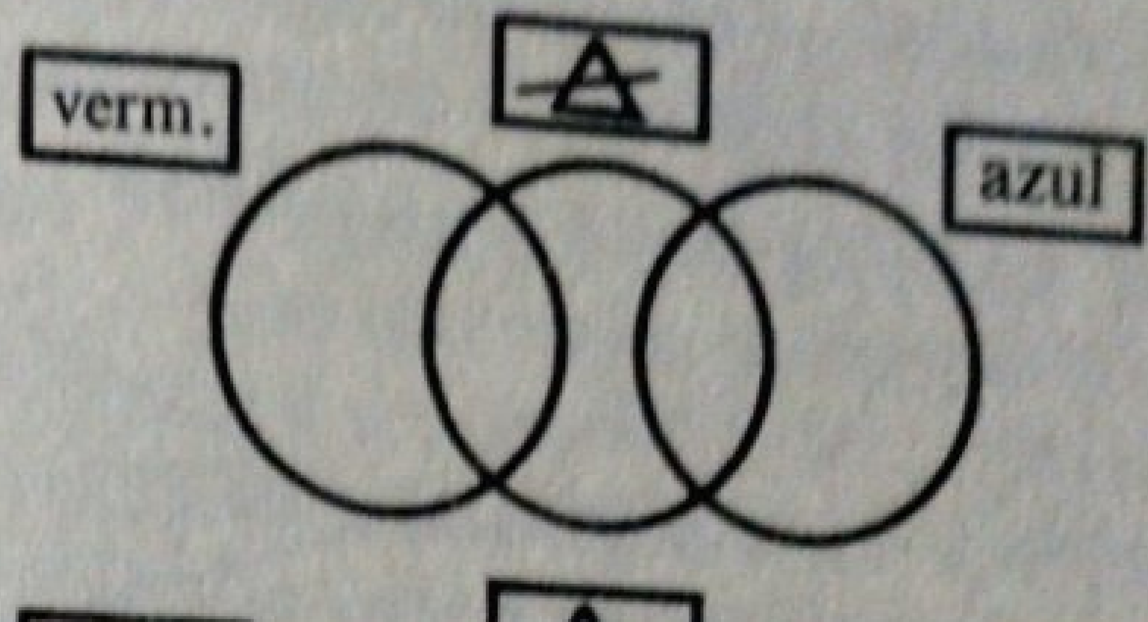
Nível de capacidade média



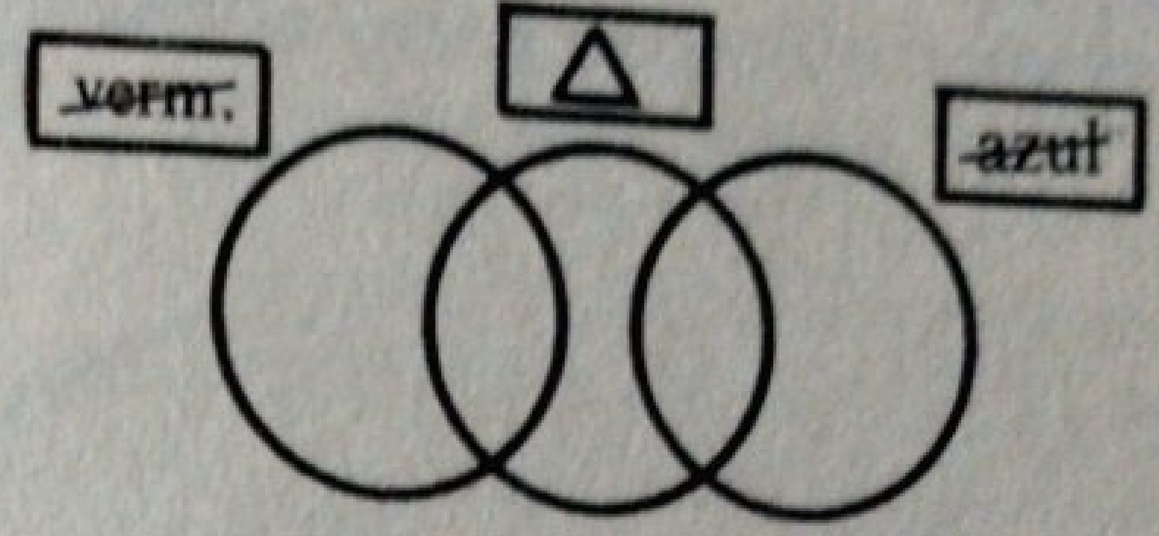
Nível de capacidade mais baixa



Nível de capacidade mais alta



Problema adicional:
O problema apresentado pode ser resolvido? Propostas de alteração?



Se, porém, em relação a um assunto do programa, nos decidirmos por um processo de desenvolvimento progressivo, teremos, então, que ter em conta os seguintes requisitos:

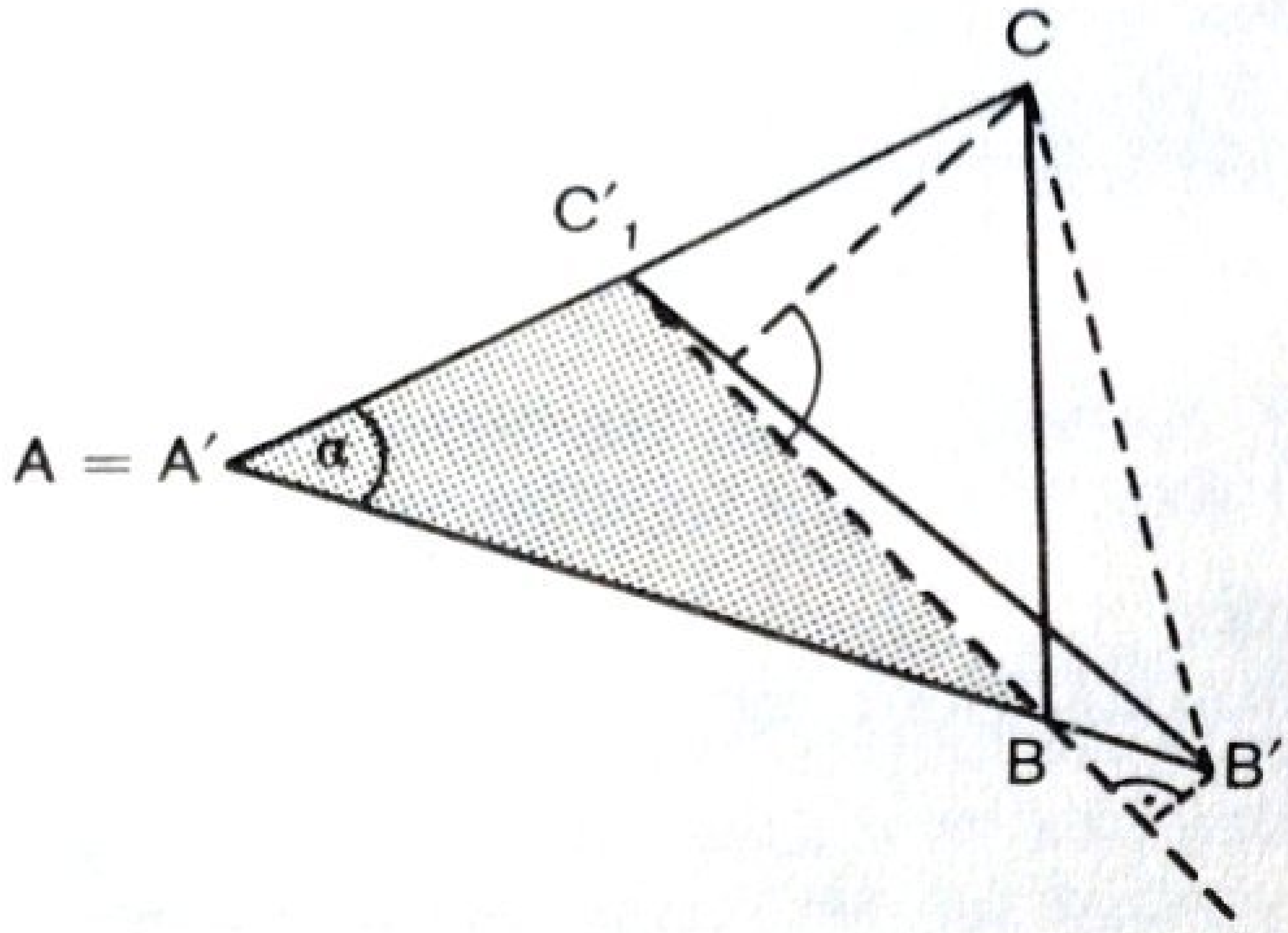
1 — Não formular as perguntas de maneira tal, que o aluno se limite a repetir definições, regras, combinações, processos ou a efectuar operações. Em resumo: o aluno não deve ser estimulado apenas para «reproduzir», mas sim, principalmente, para «produzir».*
As formas de apresentação dos problemas, já referidas em 3.3, fornecem possibilidades especiais para tal.

2 — Na maioria das lições, em que se desenvolvem noções ou «relacionamentos» novos, há um pequeno número de pontos básicos de articulação. Estes devem ser descobertos e tratados (o mais possível), pelos próprios alunos. Dado que, a princípio, não se pode prever o número de apoios, que o aluno precisará para esse efeito, o professor deve introduzir uma sucessão, cuidadosamente planificada, de estímulos e perguntas, que conduzam, sempre, o aluno, directamente, ao núcleo de questões. Sucede, muitas vezes, que o professor não fez tal introdução e que o aluno, depois de não ter conseguido dominar a complexidade do problema, ponha de lado uma resolução completa ou o seu núcleo básico. Isto é, muitas vezes, um sinal claro da falta de instruções preparatórias.

Um professor elaborou um plano meticuloso de passos estimulantes e **112**
de questões, para este problema:
Transformar um $\triangle$ ABC, num outro da mesma área $\triangle$ A'B'C', de lado conhecido ($\overline{A'B'}$) e com um ângulo constante.

1) — Prof. «O novo vértice C' pode coincidir com C?»
Al. «Não, pois então a área teria aumentado do $\triangle$ BB'C».
2) — Prof. «Poderemos, então, limitar o número de possibilidades para C'?»
Al. «C' deve ficar sobre [AC]».

N. T.
* Strunz distingue entre raciocínio receptivo, reprodutivo e produtivo.



3) — Prof. «Porque é que C' não pode vir a ficar sobre C'_1?»
Al. «Vê-se, imediatamente, que o △ $AB'C'_1$ é muito mais pequeno!»

4) — Prof. «Quem é que pode demonstrar isto?»
Al. (Nenhuma resposta).

5) — Prof. «Vocês afirmam que a área do △ $AB'C'_1$ é menor que a do △ ABC. Haverá alguma área parcial comum a estes dois triângulos?»
Al. «O △ ABC'_1». O segmento [BC'_1] foi traçado como linha interrompida.
Prof. «Os dois triângulos teriam, então, a mesma área, se os dois triângulos C'_1BB' e C'_1BC tivessem a mesma área. Contudo, vê-se, claramente, que a área do triângulo C'_1BB' é muito menor que a do triângulo C'_1BC!»

6) — Prof. «Será, de facto, △ C'_1BB' menor do que △ C'_1BC? Ambos têm a mesma base $\overline{C'_1B}$!»..
Al. «△ C'_1BB' é, porém, muito menor do que △ C'_1BC».

7) — Prof. «Quem é que poderá, então dizer, com precisão, sob que condições deveríamos ter escolhido, acertadamente, C'_1?»
Al. «Ambos os triângulos devem devem ter a mesma altura, isto é, as alturas baixadas de C e B' sobre a recta C'_1B devem ser iguais». Desenharam-se as duas alturas.

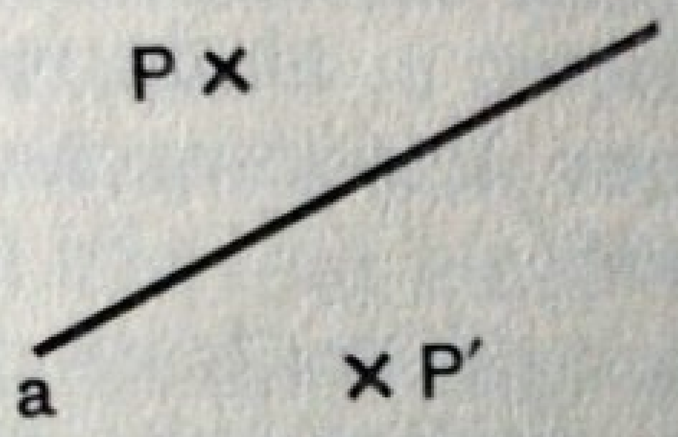
8) — Prof. «Creio que Vocês podem, agora, dizer, como é que C' se pode determinar!»
Al. «Obtemos a mesma altura, se traçarmos por B, uma paralela a CB'. C' é, então, o ponto de intersecção com $\overline{AC}$».

3 — Não só se devem evitar questões, que ponham novamente em causa o núcleo basilar do facto, mas também questões pouco claras.

Seria assim esta pergunta, feita na lição seguinte: «O que é característico, quanto à paralela traçada por B?» Ora, o que desejaria saber o prof.? A que recta seria paralela a recta traçada por B, ou então, uma condição de paralelismo?

Já a pergunta, eventualmente assim formulada: «Em determinada altura de construção, aparece uma paralela. Quais são as duas rectas que deverão ser paralelas e porquê?» Seria uma questão unívoca e aberta.

Depois de, num 7.º ano, a partir do modelo de dobragem, ter sido introduzida a simetria em relação ao eixo colocou-se a questão: «Qual é a posição da recta *a* em relação ao segmento $\overline{PP'}$ e como é que este fica dividido?» Esta pergunta retiraria já dos alunos (sem querer) a maior parte do trabalho de eles pensarem. A formulação: «Qual é a posição de ..., em relação a ...» provocaria, logo, por associação verbal a palavra «perpendicular» Além disso, por hábito, o aluno saberia que à pergunta «como fica dividido?», se segue, frequentemente, a resposta: «ao meio».

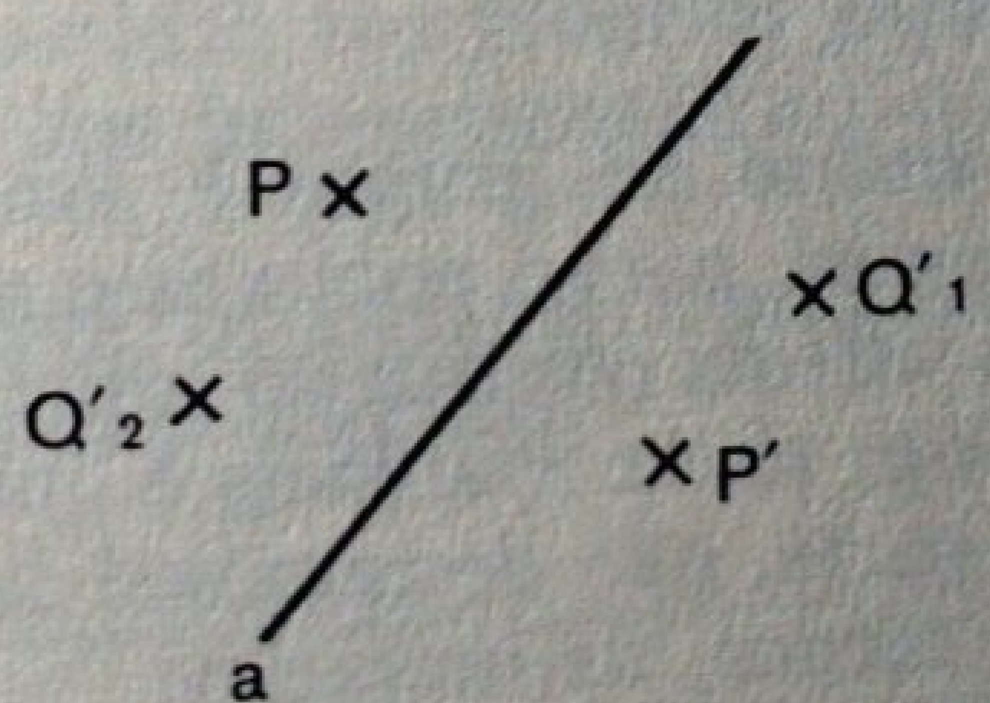


Finalmente, através da pergunta, o aluno foi solicitado a formular, ao mesmo tempo, duas proposições: uma referente à direcção e outra a uma razão entre segmentos.

A situação anterior poderia, por exemplo, ter sido tratada, mais eficientemente, por qualquer destas duas formas:

Estaticamente

1) Prof.: «Olha bem, para os pontos P e P', De que te lembras?» A resposta foi, frequentemente: «Estão igualmente afastados de *a*!»
2) Prof.: «Mas isto não é tudo!» (Este «empurrão» para mais considerações, nem sempre ajuda).
3) Prof.: «Como poderemos determinar um outro ponto Q', à mesma distância de *a* do que P, mas que não coincida com P'?» Na maior parte dos casos, a pergunta provocou a resposta certa. Mas se ela não viesse, então surgiria, finalmente, através da sugestão seguinte:
4) Prof.: «Desenha o segmento PP'» ou prof.: «Desenha as distâncias!»



Dinamicamente

Prof., «Pensem: *a* é um rio e *P* um ponto qualquer marcado no terreno. Em P' está oculto um tesouro. Num mapa, vai indicado como é que de P se chega a P'. Como é que poderia ter sido indicado?»

As formas de acção directa devem alternar com as indirectas. Não só por razões prédeterminadas, mas, também, a fim de possibilitar uma alternância que, ocasionalmente, levará o aluno a uma maior intensidade de intervenção, ou, outras vezes, lhe permitirá uma recuperação de forças.

3.4.2 *Formas socializadas de resolver problemas*

Dentro do âmbito deste livro, não trataremos da discriminação e apreciação das formas socializadas do ensino, que, aliás, se podem encontrar na literatura geral e na especial da didáctica da matemática. Assim:

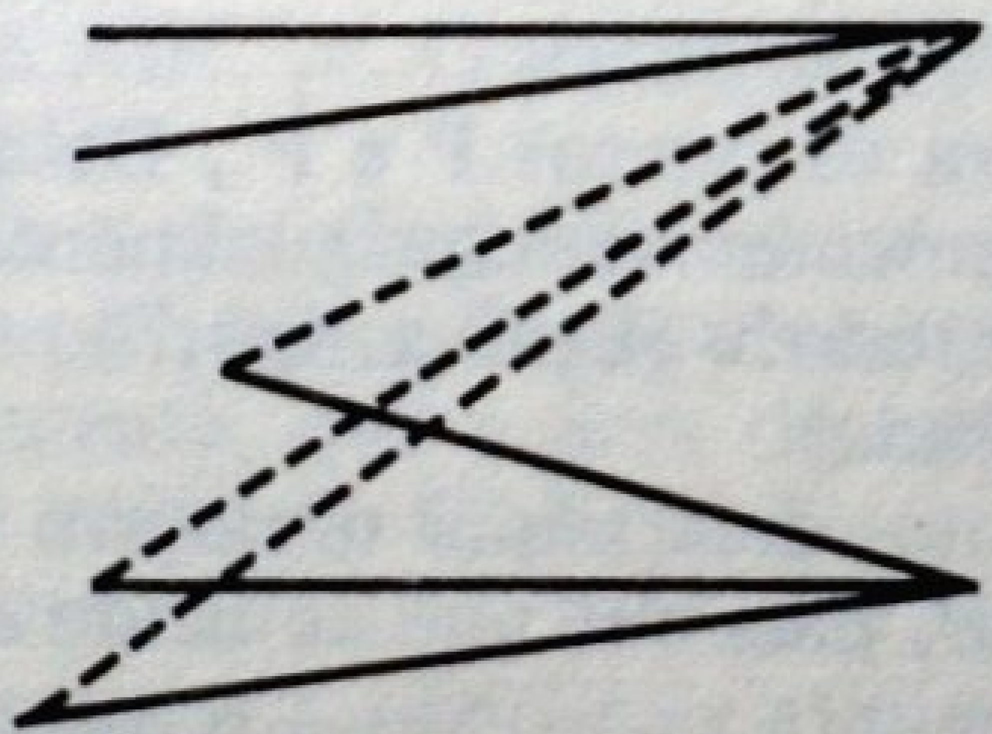
— Heimann, Otto e Schulz fazem um relato daquelas diferentes formas [→ 36].

— Dienes salienta a importância, na aprendizagem, da discussão entre «os da mesma idade» [→ 21, pág. 49]; salienta, também, o problema dos grupos homogéneos (as mesmas capacidades e velocidades de aprendizagem) e dos grupos heterogéneos; e, ainda, se os grupos se devem constituir, expontaneamente, ou por determinação do professor [21, pág. 134-153, principalmente, pág. 140].

— Bauersfeld e outros fornecem vários conselhos práticos, principalmente importantes para os primeiros anos escolares.

Neste lugar, apoiados em Heimann, Otto e Schulz, daremos uma indicação das várias formas socializadas e da sua correspondência com formas de acção.

Formas socializadas	*Formas de acção*
Ensino frontal	Directas, por ex.º
Ensino em círculo	Apresentação Demonstração
Ensino em grupos	Exploração Colóquio
Ensino a «dois»	
Ensino individual	Indirectas por ex.º: Trabalhos escritos Experimentação Jogos de aprendizagem



A importância do ensino em grupos é, ainda hoje, muito discutida. Enquanto Dienes o valoriza, até ao ponto de o considerar uma consequência das bases de todo o sistema construído sobre fichas de trabalho, outros professores contestam-no: só na aparência é que toda a classe está ocupada; na realidade, uma parte, não desprezável das crianças, toma uma atitude passiva, ou, pelo menos, de imitação.

Neunzig e Sorger [57, pág. 51-52] representam uma espécie de posição intermédia em que reservam o ensino frontal para a introdução de novos assuntos; para os preparativos da resolução de problemas, e, para considerações posteriores a estas resoluções.

A validade do ensino em grupos parece depender, fundamentalmente, dos seguintes aspectos:

1. Em que extensão é, assim, o ensino influenciado, de forma a conduzir o aluno para atitudes independentes, na aprendizagem e na resolução de problemas? (Estas condições interiores serão tratadas em 3.5).

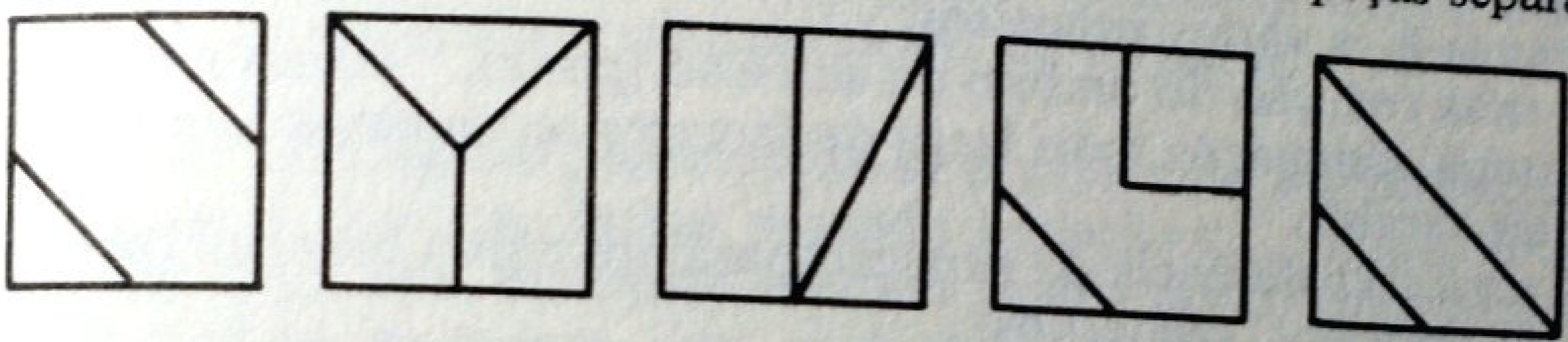
Em minha opinião, a resposta a esta questão é, em grande parte, independente de qualquer escolha de um tipo especial de socialização.

2. Em que extensão se cumprem as quatro condições de método (mencionadas em 3.4.1, para formas de acção indirecta), e segundo as quais, de uma maneira geral, decorre o ensino em grupos?

3. Qual é a qualidade das fichas e outros meios de trabalho? (→ 4.1, 4.2).

4. Em que extensão é que todos os professores da turma se esforçam, por ensinar aos alunos formas de comportamento socializadas? O exemplo seguinte mostra, como neste sentido, uma estagiária tentou, no ensino da religião, um trabalho de cooperação.

Uma turma do 7.° ano foi disposta em grupos de 6 alunos.
Em cada um desses grupos, um aluno figurava como observador; cada **114**
um dos outros tinha que compor um quadrado, a partir de peças separadas.



Para este efeito, cada grupo recebeu uma colecção desordenada de 15 peças. Ganharia o grupo que primeiro construisse, completamente, os 5 quadrados, cumprindo, ao mesmo tempo, as seguintes regras:

1. Nenhum comparticipante deveria falar.
2. Nenhum comparticipante deveria pedir a outro uma peça, ou, de qualquer forma, significar que precisaria duma determinada peça, que outro lhe deveria dar.
3. Cada comparticipante poderia, se quisesse, colocar uma peça no meio da mesa ou dá-la a outro; porém, nenhum deveria observar, directamente, a figura que o outro estaria construindo.

A discussão, com que rematou o jogo, mostrou, nitidamente que, não só aos observadores, mas também aos próprios jogadores, se revelou claramente o comportamento dos intervencionistas; o que conduziu a uma apreciação objectiva.

De forma, um tanto global, os aspectos mencionados em 3.4.1 e 3.4.2 podem resumir-se, nos seguintes critérios:

C_{17}	As formas de acção e socialização correspondem ao assunto e aos alunos a ensinar?

C_{18}	Atende-se a uma alternância adequada, em formas de ensinar?

3.4.3 *Intuição e complexidade, na formulação dos problemas*

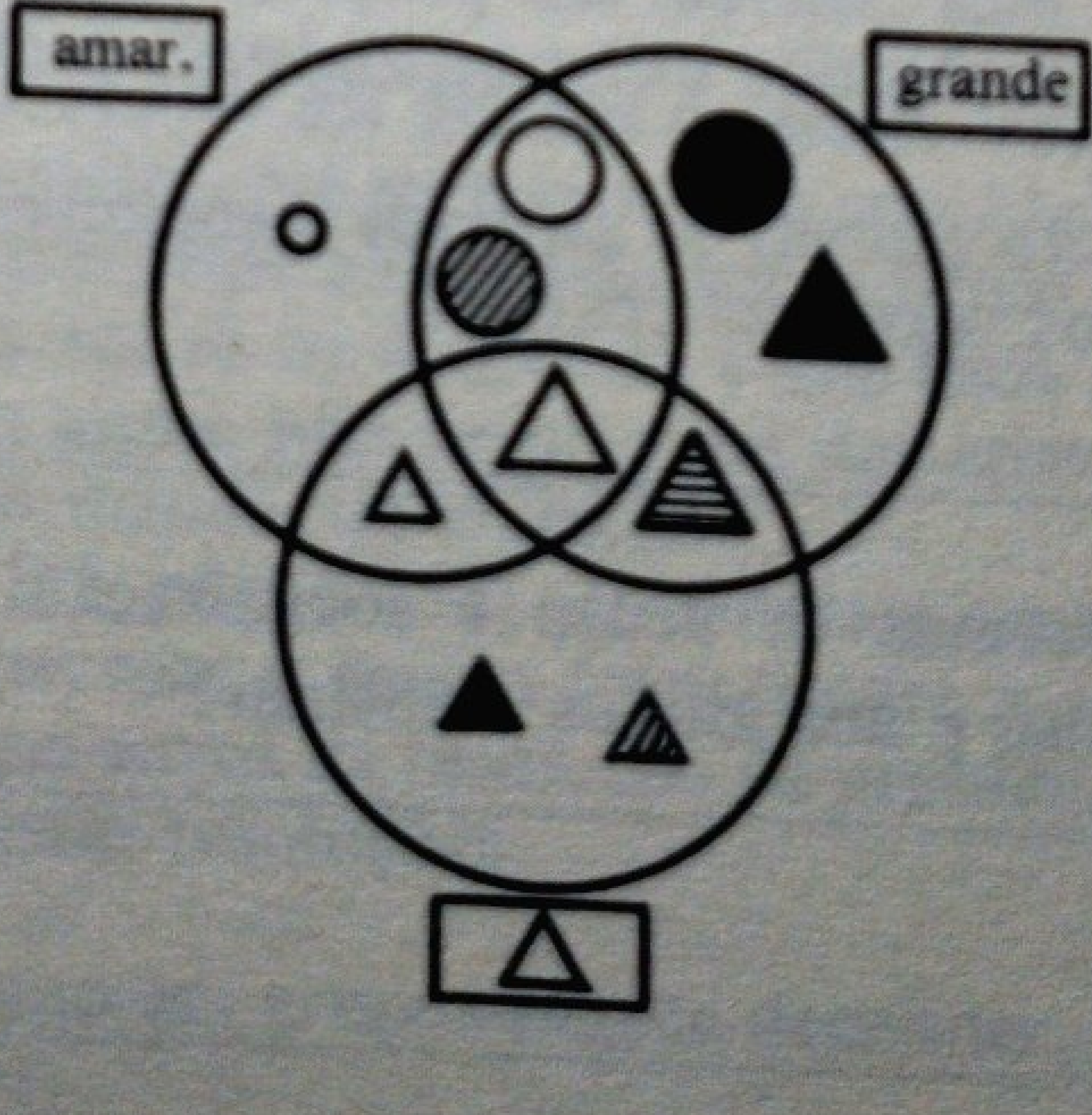
A opinião de que um aluno, na resolução dum problema deve, tanto quanto possível, exercer um trabalho próprio, independente, obedece, em psicologia da inteligência, a duas condições prévias:

1. A partir dos seus conhecimentos e capacidades, o aluno deve poder abranger a situação e ter pontos de referência para a analisar.
2. A solução da situação não deve estar, completamente, ao alcance do aluno e deve apresentar, para ele, valores práticos e de conhecimento teórico e estético (compare 3.2.1 «Motivações através do assunto»).

Daqui derivam duas consequências de método:

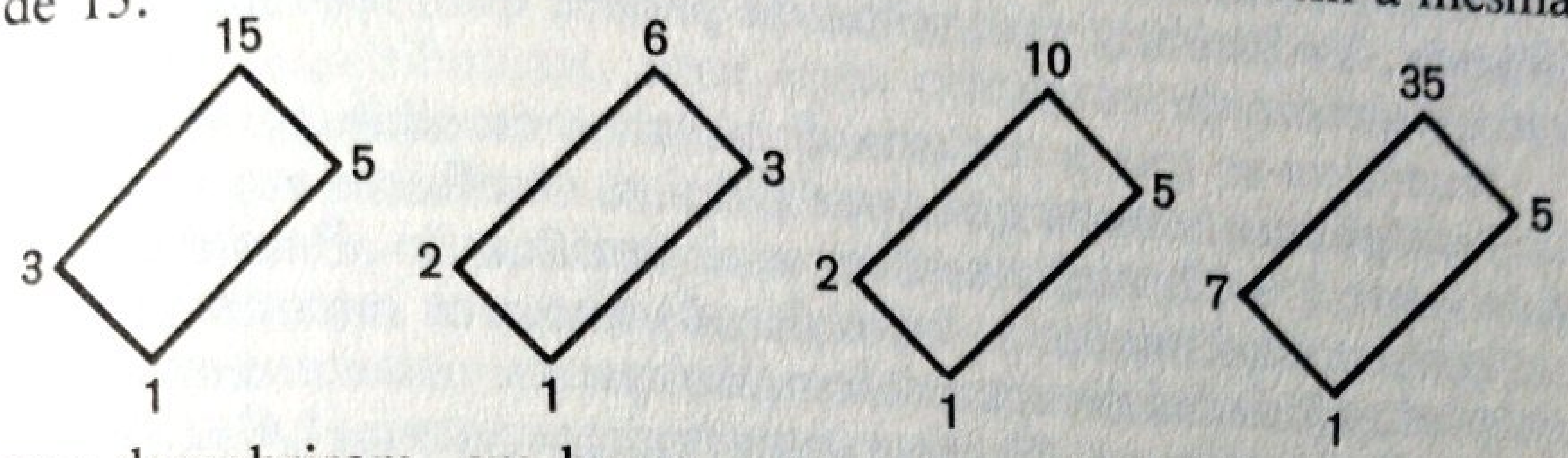
1. Se há, desde logo, o perigo — ou se ele surgir durante o ensino — de que o aluno não poderá abranger a situação, então esta será simplificada, até ao ponto de poder ser abrangida pela maioria da turma. Para tal, recorrer-se-á, a vários processos:
   — uma redução do âmbito da situação (por ex.° menos números), ou,
   — uma eliminação mais larga de factores secundários (por ex.° números mais fáceis),
   — uma transferência da situação para um plano concreto (por ex.° no lugar de números, conjuntos).
2. Em correspondência com este procedimento, deve-se agir de maneira inversa, se existir o perigo, ou ele surgir, de os alunos ultrapassarem o professor desinteressando-se do seu raciocínio e da sua concepção de o transmitir, por conhecerem, desde o princípio, a resolução do problema.

115 Apesar de muita insistência, um aluno do 1.° ano não conseguia reconhecer fichas, inseridas erradamente, num diagrama com três conjuntos. O professor tornou a situação intuitiva, afastando o conjunto das fichas grandes. Desta forma, levou a concentrar-se toda a atenção, sobre os dois atributos: amarelo e triangular.



Agora, as fichas que estavam em posição errada, foram expontaneamente reconhecidas e retiradas. Então, encontrou-se a solução, mesmo quando o conjunto das fichas grandes voltou, outra vez, ao seu lugar.

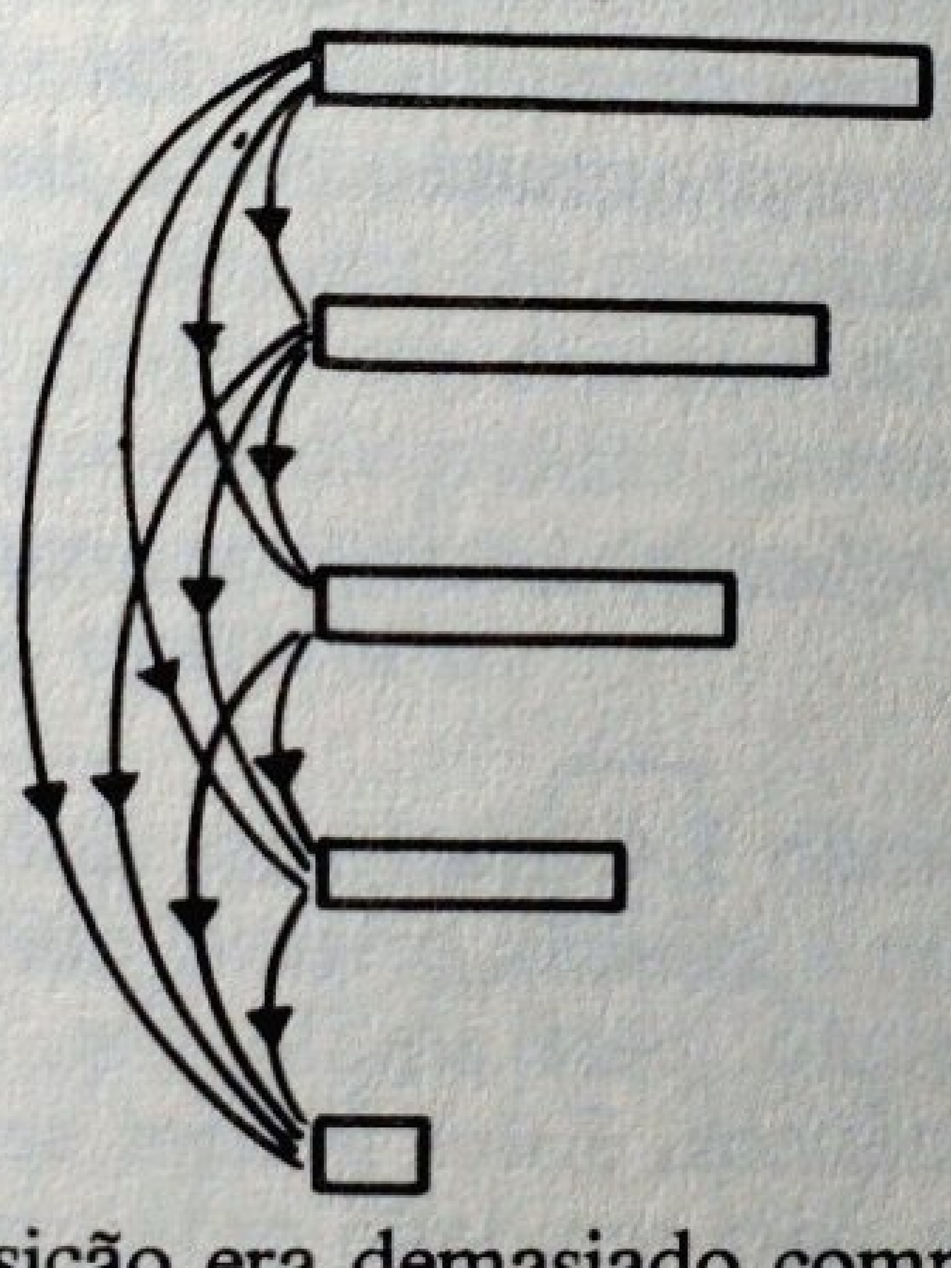
Num 5.º ano, o problema de procurar outros números que tivessem a mesma estrutura que 30, quanto aos divisores, (veja Ex.º 85 em 3.3.2) 116
conduziu uma parte dos alunos, a um processo limitado de verificação. A complexidade do problema foi simplificada, reduzindo as três dimensões, que apareciam no diagrama de Hasse, a duas. Assim, o novo problema reduziu-se a procurar números, que, quanto aos divisores, tivessem a mesma estrutura de 15.



Os alunos descobriram, em breve, que se tratava de números que se deixavam decompor em dois factores primos diferentes. Daqui derivou o fundamento de estruturas mais complexas de divisores.

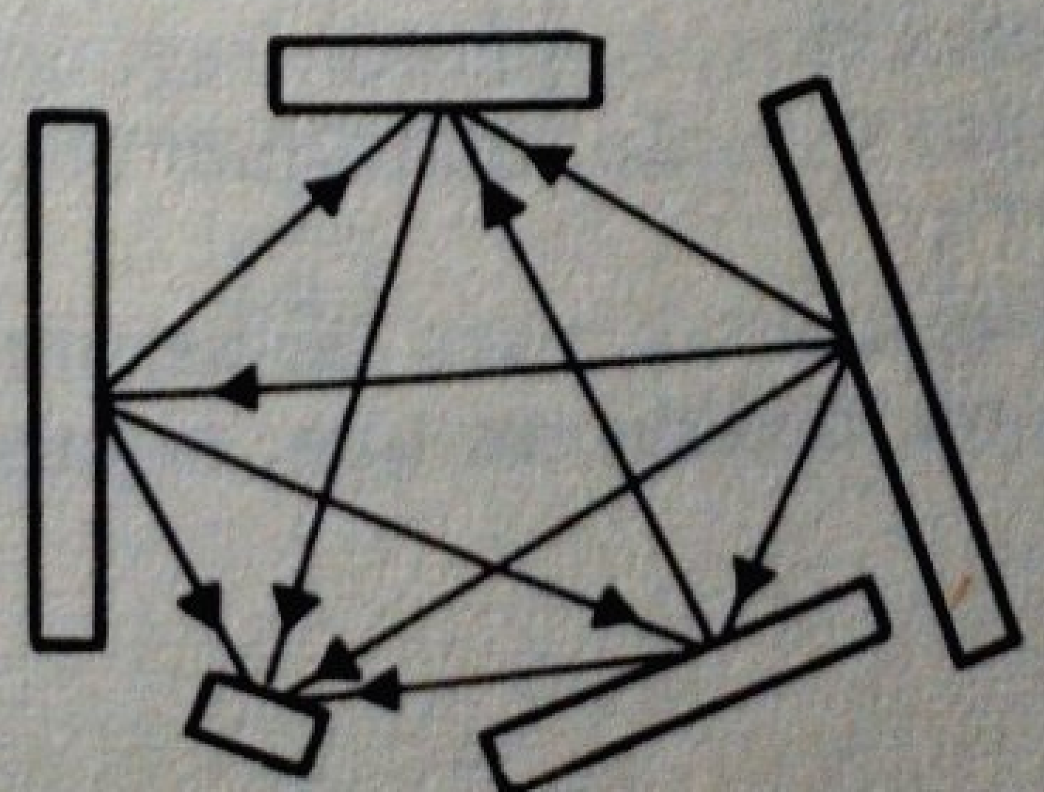
A um 1.º ano escolar, apresentou-se o problema de, na sucessão se- 117
guinte de barras, desenhar flechas, segundo a relação «... é maior do que ...»

Por um lado, este problema oferecia muito pouco interesse, porque todas as crianças poderiam, sem as flechas, observar, muito mais facilmente que barra era mais comprida do que outra.



Por outro lado, a disposição era demasiado complexa, para que o aluno, por si só, chegasse a todas as 10 setas possíveis. Essencialmente, seria mais favorável, então, a disposição seguinte, para a qual, de facto, se tornaria necessário comparar, para poder dizer que barra seria mais comprida, do que outra.

Além disso, a disposição em círculo facilitaria a descoberta de todas as 10 flechas. Também a configuração regular das flechas levou alguns alunos a reconhecerem que, em cada barra, se encontrarão 4 flechas, porque as outras 4 barras serão, ou mais curtas, ou mais compridas.



118 Num 7.º ano, a noção clássica de probabilidade, como sendo, para um dado acontecimento o quociente entre o número de casos prováveis e o número de casos possíveis, apresentou-se com um grau de intuição e de complexidade apropriados, ao ser introduzida, em ligação com a soma de «pintas» de dois cubos.

Primeiro, estabeleceu-se que se fariam 24 lanços e que cada aluno escolheria, livremente, uma soma de pintas, que, segundo ele, apareceria o maior número de vezes.

Verificou-se que a maioria dos alunos escolhia ao acaso.

Aos poucos alunos que, por palpite, escolhiam um «número intermédio» entre 2 e 12, pediu-se-lhes uma justificação. Para a maior parte, era um puro conhecimento o facto de os «números intermédios» terem maiores probabilidades de aparecerem, do que os «números extremos». Assim, por exemplo, a soma (7) das pintas apareceria em (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2) e (6,1), enquanto a soma, 2, só apareceria em (1,1).

Depois da organização de uma tabela, desenvolveu-se a noção de probabilidade e dos valores especiais de probabilidade.

A introdução do conceito, feita sobre a probabilidade de obter uma soma determinada de pintas, com um cubo, tornara-se, de facto, essencialmente intuitiva. Porém, o grau de complexidade ficara tão submerso, que não conduzira a qualquer intuição valiosa, para a prática e teoria do conhecimento. A noção de probabilidade teve, então, simplesmente, o valor de estabelecer um conceito, através do qual se fixou um comportamento de factos, já suficientemente conhecido. Os alunos aceitarão novos conceitos, tanto mais facilmente, quanto mais eles poderem ser associados com antigos conhecimentos.

3.5 *Vias imanentes aos factos, levando a uma solução original do problema*

Assim como no capítulo 3.4, tratámos, principalmente, dos processos exteriores, que permitiam a solução original duma questão, neste capítulo, dirigiremos a nossa atenção, para aquilo que, durante essa resolução, se refere aos factos matemáticos. Estes podem ser compreendidos como os auxiliares do ensino que, para um dado problema, facilitam a sua solução; mas muito mais importante é a finalidade de que o aluno se aproprie deles, como processos heurísticos, que possa vir a aplicar, em cada situação nova.

3.5.1 *O método indutivo*

Se a solução dum problema não resulta, por via sistemática, ou seja, através de deduções lógicas extraídas das hipóteses, ou através da aplicação de processos conhecidos, o método seguinte, dá, então, muitas vezes, resultado: tomar, como solução, quaisquer supostos valores ou processos, e fazer o ensaio.

Este método não é, apenas, para ser assumido, como recurso, em idades até aos 12 anos, na medida em que, segundo Piaget e Dienes, os alunos não dispõem, ainda, duma capacidade sistemática de raciocínio lógico ou formal. Também, mais tarde, o raciocínio matemático é tributário de processos de ensaio por indução. É o que se conclui, aliás, da citação de Polya, já mencionada em 3.4.1.

Se entre muitos professores, principalmente de graus mais avançados do ensino, encontramos uma aversão contra o «método de ensaio», a razão reside no facto de haver muitas situações, em que o aluno, sem fio condutor, verifica possibilidades, uma após outra, até que, finalmente, apenas por acaso, encontra o resultado que serve.

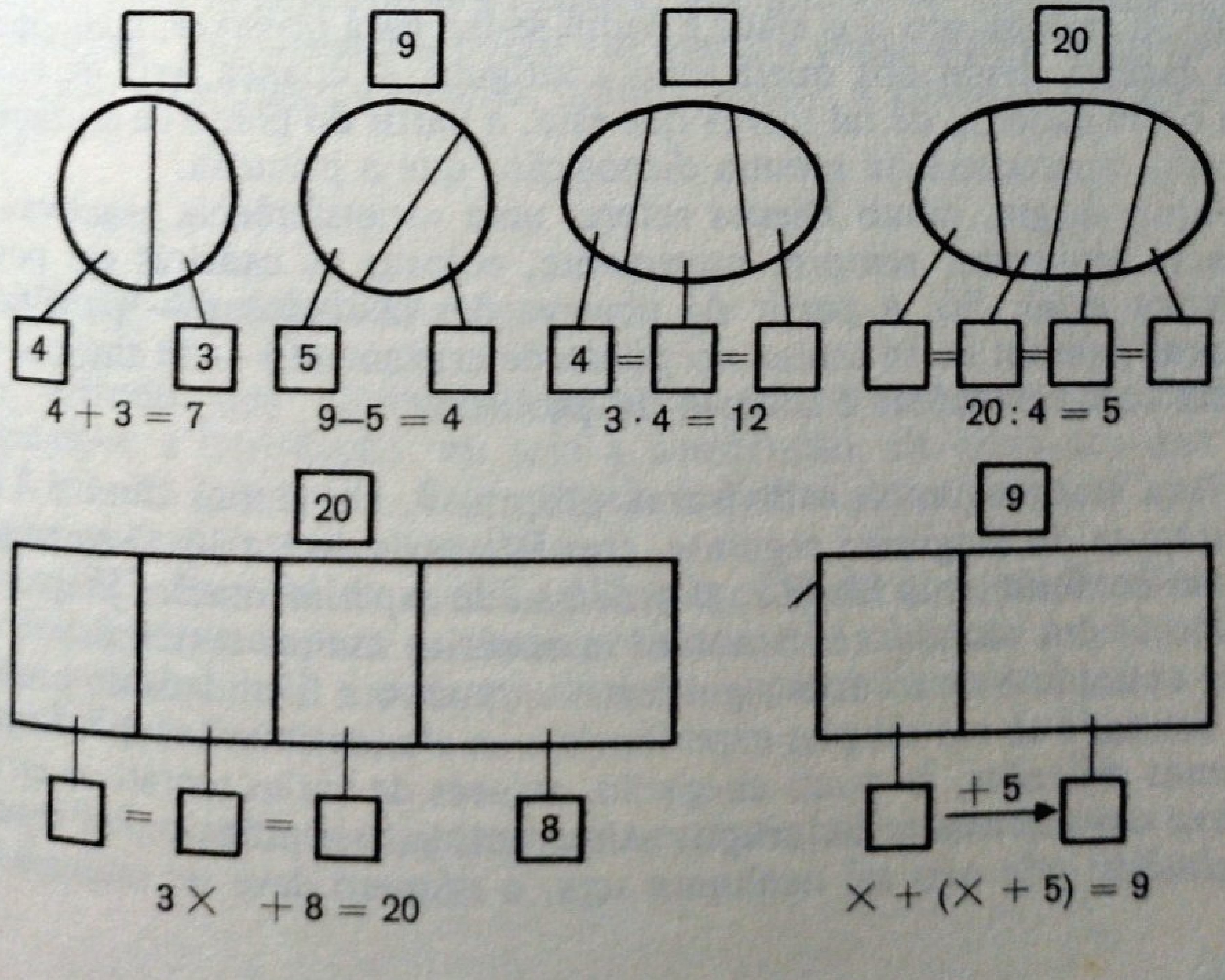
Daqui provém a necessidade de escolher a estrutura do problema tão flexível, que permita um comportamento perto do ensaio puro, ou que é, ainda, preferível: em que o ensaio já prepare e conduza à sistemática.

Antes de apresentarmos, a propósito, vários exemplos de situações típicas de ensaio, esclareceremos, ainda, um aspecto de método: O ensaio será, essencialmente facilitado, se cada tentativa puder ser repetida, sem grande dispêndio de técnica. Esta condição é, principalmente, realizável por meio de material móvel (por ex.º fichas, cartões com números, etc.). Ainda a propósito, os seguintes exemplos esclarecerão que um ensaio não está, de qualquer modo, ligado a um determinado sistema de representação.

Estes exemplos mostram como a criança, logo no 1.º ano, pode efec- 119
tuar, mentalmente, todas as quatro operações fundamentais (adição, subtracção, multiplicação e divisão), bem como resolver equações simples a uma incógnita, sem precisar, ainda, de empregar o correspondente simbolismo — frequentemente paralisador do raciocínio.

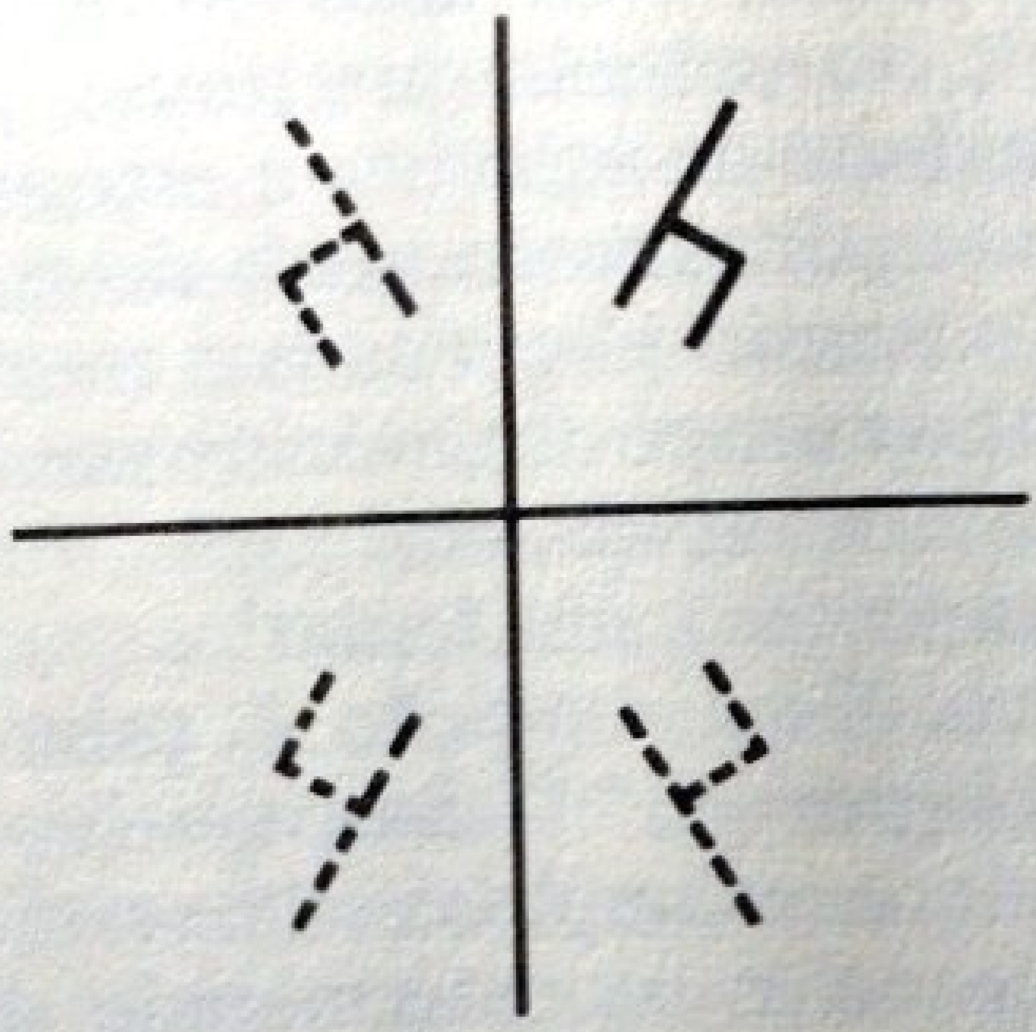
As situações seguintes podem ser representadas manipuladoramente, utilizando cartões numéricos ou diagramas desenhados.

Os exercícios podem ser resolvidos, como provas demonstrativas ou como exercícios de cálculo operatório.



120 Num curso de aperfeiçoamento para professores, realizado no Verão de 1972, na Escola Superior de Pedagogia de Schwäbisch Gmund, Dienes conduziu uma lição, a um 2.° ano de escolaridade, em que as crianças, por processos de ensaio, e em grande parte por si próprias, exploraram as transformações de simetria axial e de rotação:

No chão, estavam marcados dois traços perpendiculares um ao outro. Num dos quadrantes, colocou-se uma cadeira, numa posição qualquer.



Pediu-se, então, às crianças para colocarem, num outro quadrante, outra cadeira; de tal maneira, que as duas cadeiras deveriam apresentar uma disposição regular («parecida»), em relação às rectas interpostas. Cada nova posição, sugerida por uma criança, provocava vivas discussões e propostas de melhoria.

Passado cerca de um quarto de hora, as crianças tinham resolvido o problema, nos quatro quadrantes.

Depois, passou-se à transformação de marcas colocadas nos «cantos» das cadeiras.

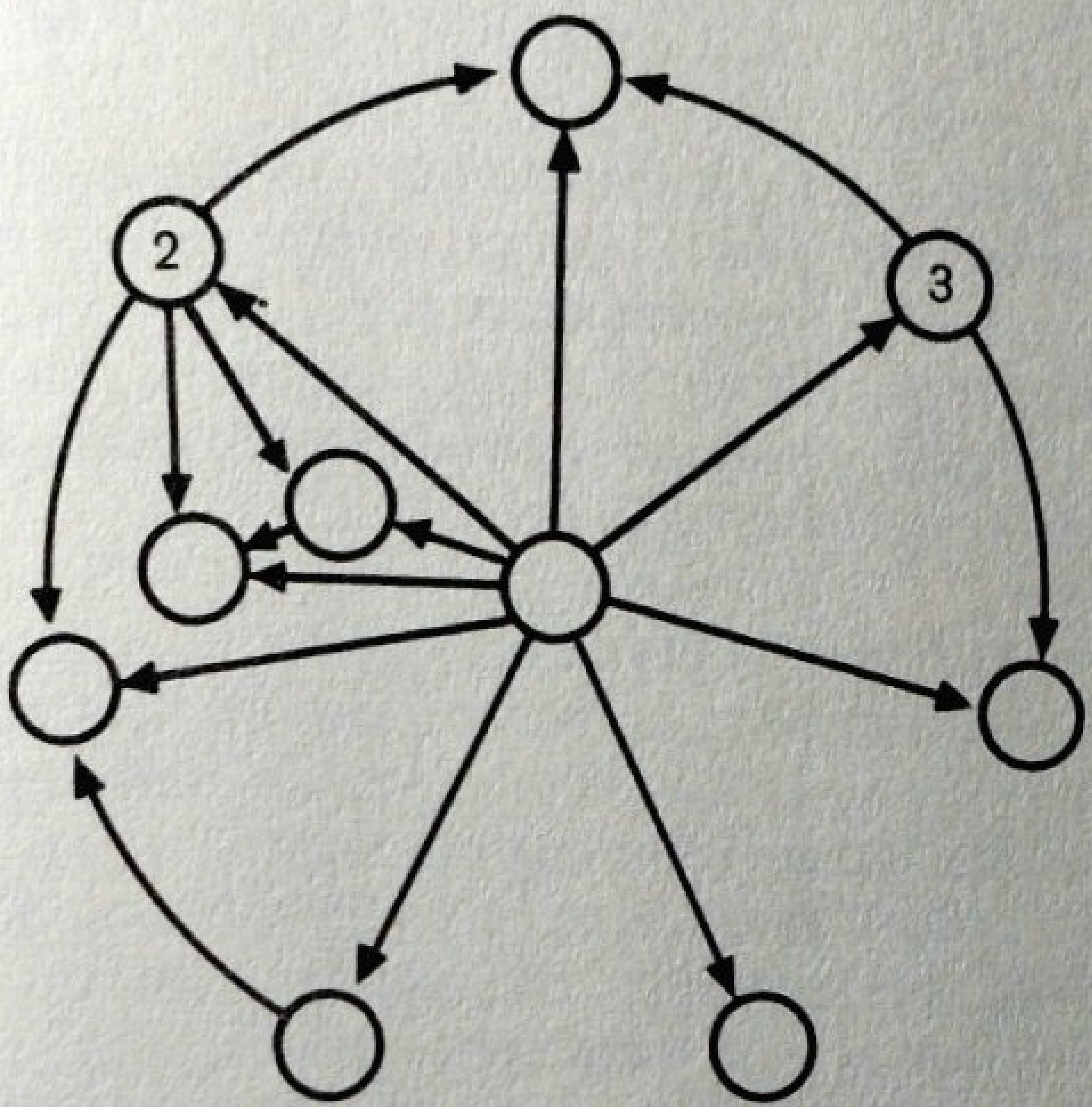
No problema seguinte, que levou à rotação, colocou-se uma criança no ponto de cruzamento dos eixos e pediu-se-lhe para observar, atentamente, uma cadeira. Num dos quadrantes contíguos, a criança teria de colocar uma outra cadeira, de tal forma que esta, a partir do ponto de cruzamento referido, aparecesse na mesma disposição, que a primeira.

Aqui, surgiu, como Dienes refere, uma «transferência negativa». As crianças tentavam, sempre, novamente, colocar as cadeiras em posição simétrica axial. Só, a partir de observações cuidadosas — para tal, as crianças tiveram de se sentar no ponto de cruzamento — se chegou, após muitas comprovações, à solução do problema.

121 Para tratamento de «divisores próprios», os alunos dum 5.° ano, serviram-se do diagrama seguinte, com números de 1 a 10. O emprego de cartões com números facilitou o processo de experimentação, já que, para a maioria dos alunos, se tornaram necessárias muitas correcções.

O exemplo é tanto mais significativo, quanto a finalidade do problema não consistia só em simples experiências: os alunos deverão, sim, formular algumas reflexões, às quais chegarão, através de várias tentativas erradas. Assim, em discussões de grupo, atingiram, por si próprios, as seguintes conclusões: «Se não sai nenhuma seta, o número deve ser maior do que

5». «A partir do número 1, deverá sair uma seta para cada um dos outros números». Estas proposições indicam como tais condições de experiência podem, já, conduzir a um raciocínio analítico, hipotético.



Aliás, um grupo mais fraco só principiou a indicar números, depois do professor ter introduzido, no diagrama, os números 2 e 3. Estes actuaram como núcleos de cristalização, para o raciocínio, unilateralmente divergente, destes alunos. Também não se deve apresentar, previamente, o número 1, como aparece num livro escolar. Este foi descoberto pela maior parte dos alunos, eles próprios.

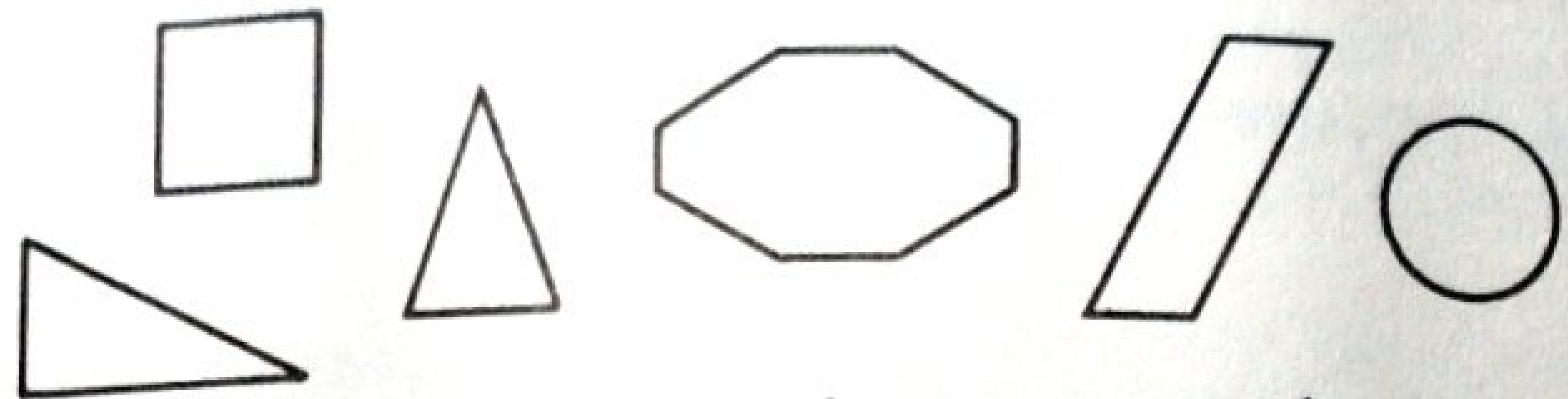
No livro «Modelos para o ensino da Matemática na Escola Primária» [8], encontramos muitas outras situações, que podem ser resolvidas experimentalmente. Tais situações porão em marcha capacidades elementares do raciocínio matemático e levarão, indutivamente, a interessantes generalizações.

3.5.2 *Método dos contrastes*

Por método dos contrastes para a resolução dum problema, compreende-se a introdução, ou seja a construção, de exemplos que se opõem à solução procurada. Este método encontra a sua principal aplicação na generalização e na abstracção.

Já em 1923, Kuo foi da opinião [32, pág. 39] de que, predominantemente, nos orientamos para os casos positivos, não obstante os exemplos negativos — quando não usados em demasia — também contribuirem, para a formação do conceito.

Seria difícil, ao aluno, encontrar uma propriedade comum, para as se- **122**
guintes figuras:



Se apresentarmos um contra exemplo, o processo de abstracção será, consideravelmente, facilitado. Assim, o contra exemplo conduziu ao conceito «convexo», e o contra exemplo ao conceito «fechado».

Aliás, e ainda com referência a estes exemplos, inicialmente dever-nos-emos limitar a impelir os alunos, para desenharem qualquer outra figura, que se apresente completamente diferente.

123 No exercício 112 de 3.4 (Transformação dum triângulo, noutro equivalente) empregou-se, também, o método dos contrastes. O novo vértice C' seria, a princípio, intencionalmente marcado numa posição oposta.

Recorre-se, aliás, ao método dos contrastes, se a abstracção (ou o processo) a adquirir, não é ainda conhecido, como uma noção (ou praticado), pelo aluno. Assim, por exemplo, na fase de aquisição de noções, as representações de conjuntos e o tratamento por relações, adquirem essencial importância, porque permitem recorrer a bastantes contraexemplos (por ex.º: fichas, para as quais se não verifica...).

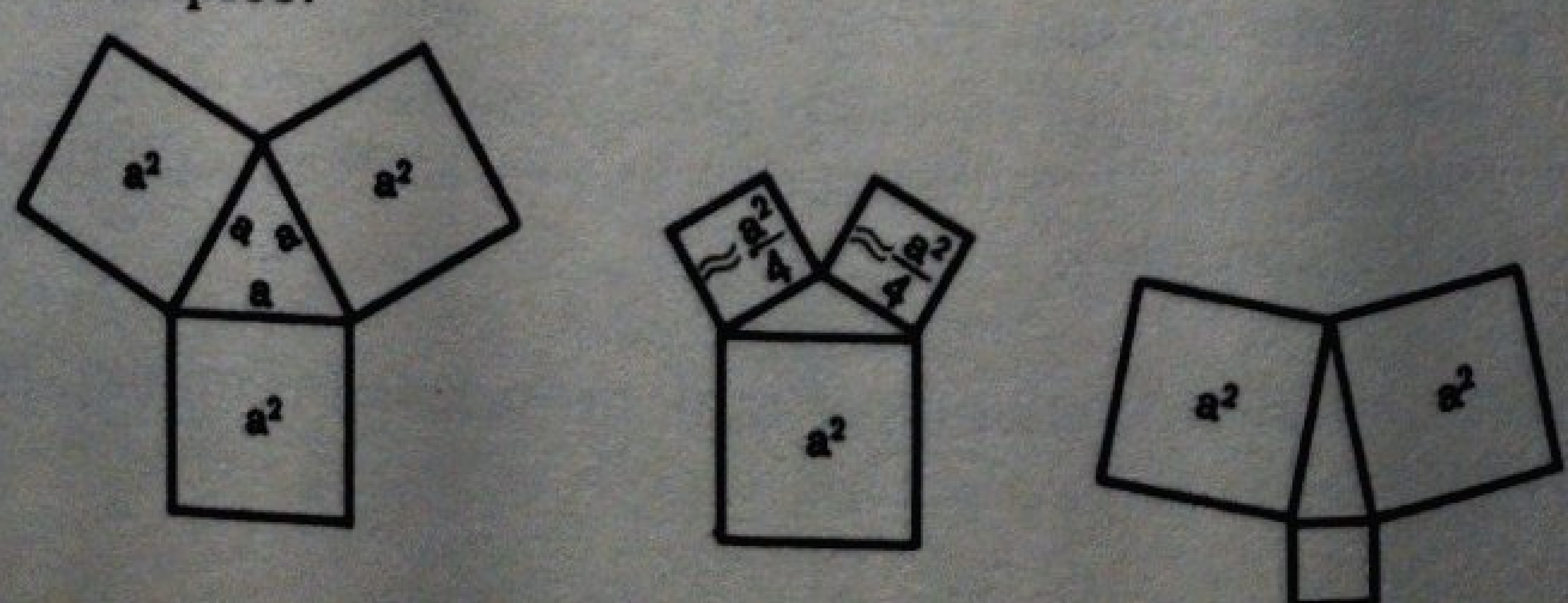
Também, definições orais, a princípio pouco claras, se podem justificar, pelo método dos contrastes.

124 Não é claro, para muitos alunos, que uma proposição do tipo «se... então...» é verdadeira, se a proposição «se ...» for falsa e a proposição «então ...» for verdadeira. Porém, à pergunta: «teria um homem mentido, no caso de ele, após ter afirmado: «se ganhar no totobola, construo uma casa» e, mais tarde, sem ganhar no totobola, construir uma casa?», a maior parte dos alunos concordaram que o facto não comportava uma falsidade. Portanto, o predicado «verdadeira» era justificado.

Uma outra situação importante em que está indicado empregar o método dos contrastes, ocorre, quando o aluno afirma falsamente uma proposição, por exemplo: a validade duma lei, para um domínio onde ela se não verifica.

125 A atitude de um professor ao irritar-se, com um aluno do 9.º ano, por este aplicar a fórmula $a^2+b^2=c^2$, a um triângulo não rectângulo é muito discutível. Provavelmente, o professor ter-se-ia esquecido de, alguma vez, ter apresentado um contra exemplo. Qualquer desenho teria fornecido um esclarecimento, contudo, que se não deve...»

Contra exemplos:

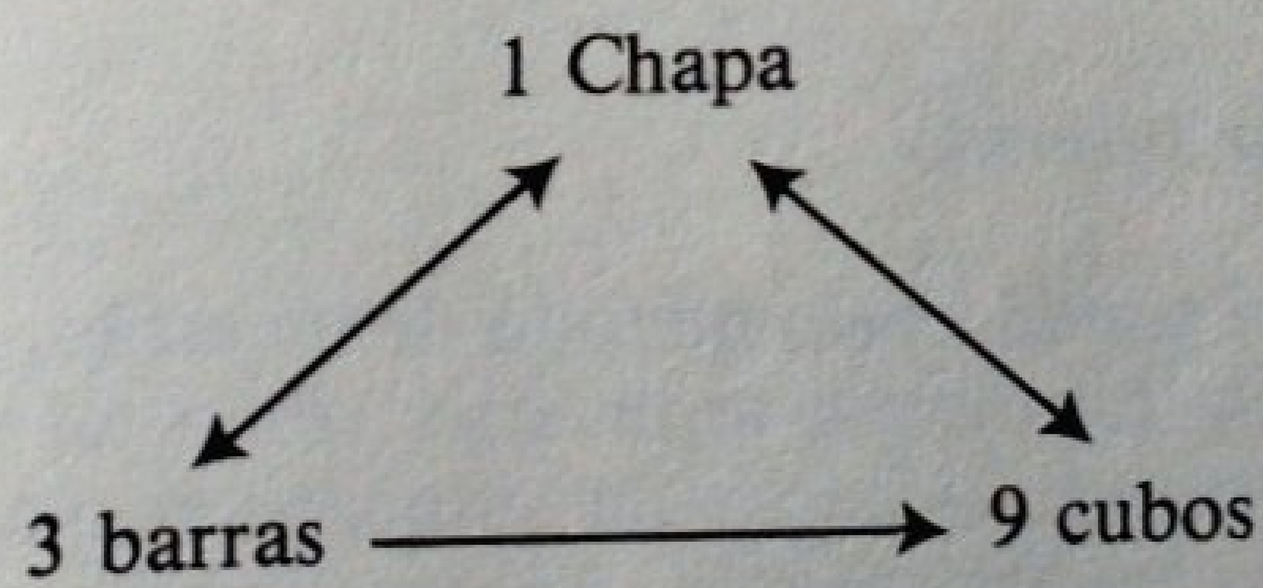


3.5.3 *Método por analogia*

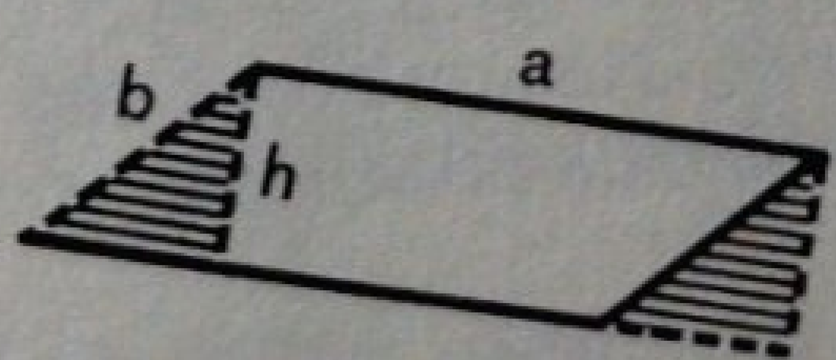
Emprega-se o método por analogia, na resolução dum problema, quando este se refere a outro análogo, já conhecido: uma vez resolvido o último, transfere-se, então, a solução para o problema primitivo.

A este propósito, Hartkopf salientou a noção de «transformação dum problema» [69, pág. 232]. Polya dá uma definição precisa da noção de analogia [62, paǵ. 35]*.

Algumas crianças do 1.° ano — ao lidarem com um sistema de nume- 126
ração base 3, servindo-se dos blocos multi-base — apesar de todos os esclarecimentos introdutórios, não viram claramente, que 122 é menor do que 200: Elas dirigiram a atenção só para a quantidade dos blocos distintos (aqui dado pela «soma dos algarismos»), mas não para os valores representados pelos vários blocos. Esta elementar dificuldade de interpretação foi, imediatamente, suplantada, quando o professor extraiu da bolsa uma moeda de 5 Marcos e quatro de 1 Marco, e perguntou de novo, qual era maior. Aqui, tornou-se nítido que os alunos compreenderam, não só o caso analogo do valor do dinheiro, mas, também, o relacionamento analógico, com o sistema de blocos multi-base. Isto revelou-se quando as crianças, expontâneamente, afirmaram: «a placa tem o valor de 9 cubos». A dificuldade de compreensão inicial proviera, provavelmente, de que os seguintes comportamentos de troca se tinham processado, muito rapidamente:

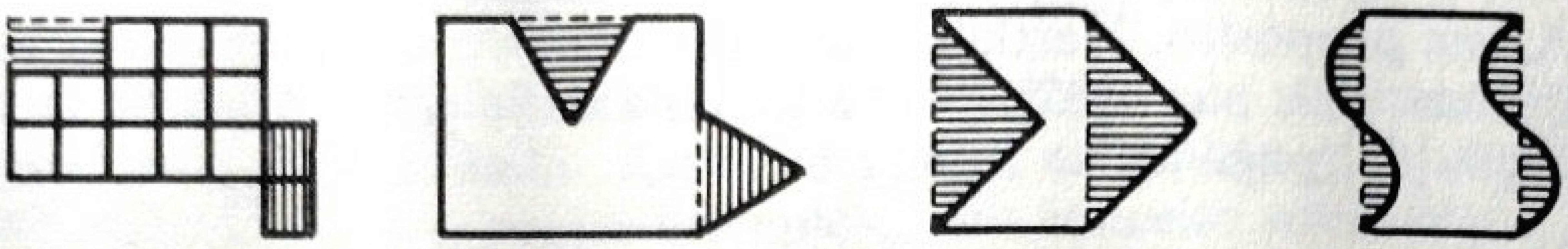


No 7.° ano, várias fórmulas de áreas de figuras geométricas podem ser 127
demonstradas, através do processo de decomposição em áreas equivalentes. A maioria dos alunos não chegou, expontâneamente, a esta conclusão: «verifica-se, por decomposição de áreas, que qualquer paralelogramo é equivalente a um rectângulo, tendo por base um dos lados do paralelogramo e por altura, a altura do paralelogramo».



N. T.
* Polya — Mathematics and Plausible Reasoning — Vol I (já citado).

Com auxílio doutras figuras, os alunos puderam, eles mesmos, descobrir o processo e, também, transferi-lo para o caso em questão. A seguir, indicamos algumas possíveis configurações:*



Enquanto no Ex.° 127, o método das analogias funcionou, como auxiliar da descoberta, no Ex.° 126, serviu, para revelar a falsidade de uma concepção errada. As representações erradas podem, de forma notavelmente fácil, serem eliminadas, por meio de analogias extremas:

Uma estudante do 10.° ano foi de opinião que um polígono de 10 vértices tem 20 lados, porque de cada vértice «saiem» dois lados. A objecção — também a cada lado pertencem dois vértices — não esclareceu, completamente. Só a consequência — «então, analogamente um triângulo teria seis lados» — convenceu a aluna, plenamente.

Também em problemas numéricos ou analíticos, é frequente chegar a descobrir-se o caminho para a solução, transpondo o problema para relações mais fáceis, entre os números.

3.5.4 *Método por inversão*

Um problema é tratado pelo método de inversão, se o sentido de raciocínio, sugerido pelo problema, se inverter. Para tal inversão, o problema considera-se resolvido e, a partir da solução, chega-se, possivelmente, a passos do processo resolvente que são consistentes.

A inversão do sentido do raciocínio pode efectuar-se por vários processos, dos quais citamos alguns:

— passar da formulação do problema, para o inverso (→ 3.3.4)
— partir da construção do esquema, suposto concluso;
— trocar a tese pelas hipóteses;
— partir da negação da tese para chegar a uma contradição com qualquer hipótese, segundo a lei lógica da contraposição.

128 O problema é: «A pontuação média, em 4 trabalhos de aula, é 2,75. O primeiro trabalho perdeu-se. Nos outros, estão inscritas as seguintes pontuações: 4, 3,5 e 2». O problema pode resolver-se, da seguinte forma, pelo método das inversões:

Se admitíssemos que o primeiro trabalho se não perdera, poder-se-ia, primeiro, somar as quatro pontuações, e dividir, depois, a soma por 4. In-

N. T.
* Vide: Max Wertheimer — Productive Thinking (Social Science Paperbacks.)

versamente, multiplicar-se-ia, primeiro, a pontuação média por 4 e, depois, subtrair-se-ia a soma das três pontuações.

Se aos alunos do 7.º e 8.º anos lhes parecem tão fáceis os denominados «cálculos do valor de x», isto advém, muitas vezes, de que, na sua base, se encontra o método de inversão.

Apoiado no desenho, um aluno descobriu um processo — não previsto 129
pelo livro ou pelo professor — de traçar as tangentes exteriores comuns a duas circunferências:

Esse aluno notou que os dois raios para os pontos de contacto $\overline{M_1 T_1}$ e $\overline{M_2 T_2}$ eram perpendiculares à tangente, e , por conseguinte, paralelos. A partir de dois raios quaisquer paralelos, poderia, então, determinar o ponto de encontro S das duas tangentes exteriores* (baseando-se na proporcionalidade de segmentos de concorrentes, interceptados por rectas paralelas).

Muitas candidatas a professoras não conseguiram com auxílio dos qua- 130
tro axiomas:

A 1: $x \rightarrow y \Leftrightarrow \neg x \vee y$
A 2: $x \vee y \Leftrightarrow y \vee x$
A 3: $x \Leftrightarrow \neg \neg x$
A 4: $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \Rightarrow x \rightarrow z$

derivar a lei da contraposição

$x \rightarrow y \Leftrightarrow \neg y \rightarrow \neg x$

Só depois de ter sido chamada a atenção das candidatas, para que — não só se pode tentar obter, a partir do «lado esquerdo» das equivalências, «o lado direito», mas também o inverso — elas atingiram a via de solução:

$$\underbrace{x \rightarrow y \Leftrightarrow \neg x \vee y \Leftrightarrow}_{A\,1} \qquad \underbrace{\Leftrightarrow \neg \neg y \vee \neg x \Leftrightarrow \neg y \rightarrow \neg x}_{A\,1}$$

$\longrightarrow$ Primitivo sentido do raciocínio

$\longleftarrow$ Sentido inverso do raciocínio

Só através do jogo combinado dos dois sentidos de raciocínio, se determinou o termo intermédio em falta ($y \vee \neg x$), que a dedução, a partir da «esquerda» de A_2 e da «direita de A_3» tornou necessária.

N. T.
* O leitor dar-se-á conta da propriedade aplicada se:
— Nas duas circunferências, traçar dois pares de raios paralelos.
— Unir os extremos de cada par de raios por rectas, até estas encontrarem a recta dos centros das duas circunfrências.
— Provar que todas as rectas assim traçadas se encontram no mesmo ponto, sobre a recta dos centros.

131 O problema, de a partir de um conjunto de 5 elementos, formar todos os subconjuntos de 4 elementos, pode ser resolvido, muito facilmente, por meio do método de inversão: A questão transforma-se em reconhecer quantas possibilidades há de omitir um elemento (ou seja 5).

3.5.5 *Método por combinações*

Um problema resolve-se pelo método das combinações, quando se recorre a uma combinação peculiar de partes destacadas do problema (que, geralmente, não é a habitual).

Há muitos problemas que se resolvem, de maneira muito fácil e alguns outros que só, através do método das combinações, se deixam resolver. Os estudantes experimentam, neste método, muitas dificuldades, porque as combinações que conduzem à solução se opõem às associações habituais (ou intuitivamente condicionadas), e, principalmente, porque neles a capacidade de combinação está pouco desenvolvida.

Fundamentalmente, não há qualquer receita para a aplicação do método das combinações.

Há uma actividade própria do aluno (em pelo menos, dois dos seus aspectos) que requer duas capacidades a serem desenvolvidas continuamente desde o princípio da escola, sem se esperar que apareçam, expontâneamente:

1. A capacidade de decompor um problema nas suas partes, de forma que as combinações, eventualmente nele contidas, se desprendam.
2. A capacidade de poder combinar, de várias formas, as partes assim destacadas dum problema.

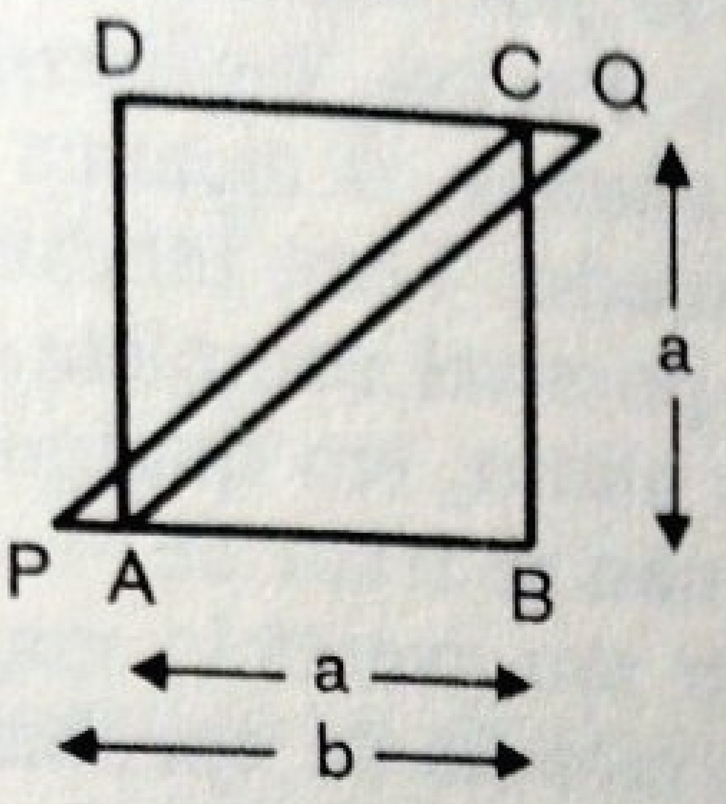
132 O princípio da combinação constitue o fundamento de várias facilidades de cálculo:

Para calcular o produto $12 \cdot 98$ decompõe-se, primeiro, 98 nos dois termos da subtracção (100 e 2) e combinam-se estes números, «multiplicativamente», com 12.

Também o processo muito conhecido devido a Gauss, de adicionar todos os números naturais de 1 a 100, teve como fundamento, o das combinações:

$$(1+100)+(2+99)+\ldots\ldots+(50+51)=50 \;.\; 101$$

É de Wertheimer* este processo de calcular a área S(PAQC) + S(ABCD), da figura seguinte [32, pág. 233]. 133



A primeira ideia consistirá em calcular, separadamente, as áreas do quadrado e do paralelogramo e, depois, adicioná-las. Ora, será muito mais fácil combinar as partes da figura, de forma a formar os dois triângulos PBC e ADQ, o que dá como área total:

$$2 \cdot \frac{b \cdot a}{2} = a \cdot b$$

Também, recorrendo à Geometria das Transformações se chegaria a um rectângulo de área $a \cdot b$, se o triângulo PBC sofresse uma translação, defenida pelo vector $\overrightarrow{PA}$.

A simplificação de $\dfrac{x^2 + 2xz + yx + yz + z^2}{x + y + z}$ é tida, por muitos alunos, 134
como impossível, porque no numerador existem 5 termos, e não 3 ou 6, como seria necessário para pôr em evidência, dentro dum parêntese, $x + y + z$.

Porém, decompondo o numerador «aditivamente» e «multiplicativamente», nas suas partes componentes, obtém-se a expressão $\dfrac{xx + xz + xz + yx + yz + zz}{x + y + z}$, com um numerador de 6 termos.

O emprego do método por inversões sugere-nos a ideia de que se $x + y + z$, no numerador, poder ser inserido num parêntese, talvez apareça uma expressão da forma:

$$(x + y + z) \cdot (\triangle + \square) =$$
$$= x \cdot \triangle + y \cdot \triangle + z \cdot \triangle + x \cdot \square + y \cdot \square + z \cdot \square \cdot$$

De facto, combinações deste tipo são possíveis, por meio do método de inversão, em casos especiais como este. Agora, temos:

$$\frac{x \cdot x + y \cdot x + z \cdot x + x \cdot z + y \cdot z + z \cdot z}{x + y + z} = \frac{(x + y + z)x + (x + y + z)z}{x + y + z} =$$

$$= x + z \text{ se for, } x + y + z \neq 0$$

N. T.

* Apesar de na obra que vamos citar não encontrarmos referência ao exemplo apontado acima, ler-se-á, com proveito:
Max Wertheimer — Productive Thinking (Social Science Paperbacks).

3.5.6 *Método por exame directo*

O matemático pode dar-se por satisfeito, se conseguir encontrar a demonstração de um teorema. Porém, na Escola, o desenvolvimento duma demonstração não tem, apenas, o alcance matemático de nos fazer cientes dum teorema já formulado. Tem, também, este outro: o de fornecer uma visão, tanto quanto possível completa e global de relacionamentos, pondo-a à disposição do aluno, em qualquer momento. Assim, com execução das demonstrações não se trata de — em primeiro lugar e como muitas vezes se pensa — fazer um exercício maçador. Trata-se, antes, de estabelecer uma classificação, através da «problematização» das questões, que, eventualmente, surgiram: «Porque é que isto deve ser, mesmo, assim?»

Considerada, sob o ponto de vista matemático, cada demonstração dá, naturalmente, uma resposta a estas questões. Mas, por outro lado, as demonstrações são, muitas vezes, conduzidas tão formalmente, ou compõem-se de passos tão extensos, que os alunos, por razões psicológicas mentais, perdem o relacionamento.

O facto de o aluno ter compreendido cada passo isolado, não é, de forma alguma, garantia de ele ter abrangido todos os passos, na sua totalidade, e, assim, ter alcançado esta.

Devemos considerar um outro ponto de vista: De facto, através de muitas «démarches» de raciocínio, pode-se ter chegado, rapidamente, ao entendimento. Contudo, a situação é tão pouco motivada ou de raciocínio tão sobrecarregado, que, após curto tempo, o entendimento se perde novamente, e, com ele, a possibilidade de o aluno poder completar, por si só, outra vez, o raciocínio. Porém, a ideia de que tudo que uma vez se tenha compreendido, também, em qualquer altura, poderá ser invocado, é uma ilusão muito espalhada.

Na minha opinião, uma via de raciocínio que permite um entendimento directo, deve obedecer às seguintes condições:

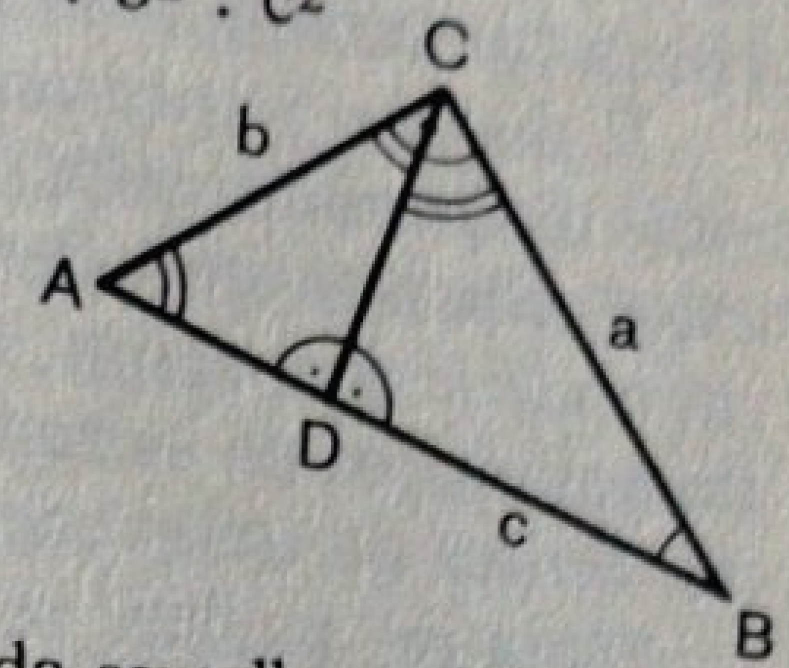
1. Abranger possivelmente poucos passos e ser feita, sem grandes esforços.
2. O esquema ser, facilmente, reproduzível.
3. A via de raciocínio integrar os conhecimentos disponíveis.
4. A via do raciocínio poder ser, o mais possível, acompanhada visualmente ou, até mesmo, manipuladoramente.

135 Há inúmeras demonstrações para o teorema de Pitágoras, mas poucas delas satisfazem — totalmente, ou em parte — àquelas condições. Uma neste sentido, das mais elementares e remontando ao tempo de Euclides, caiu quase no esquecimento: É curta; o esquema completa-se facilmente, e de forma visual, com o traçado de uma altura; requer o conhecimento e a aplicação da soma dos ângulos dum triângulo e de propriedades elementares de figuras semelhantes:

$\triangle$ CBD, $\triangle$ ACD e $\triangle$ ABC são semelhantes, pois os ângulos são iguais.

Segundo um teorema conhecido, as áreas estão entre si na razão dos quadrados das medidas dos lados correspondentes. Escolhemos como lados as hipótenusas, e assim vem: $F_1 : F_2 : F_3 = a^2 : b^2 : c^2$

Isto é: $F_1 = ka^2$, $F_2 = kb^2$, $F_3 = kc^2$



Temos, agora: $F_1 + F_2 = F_3$

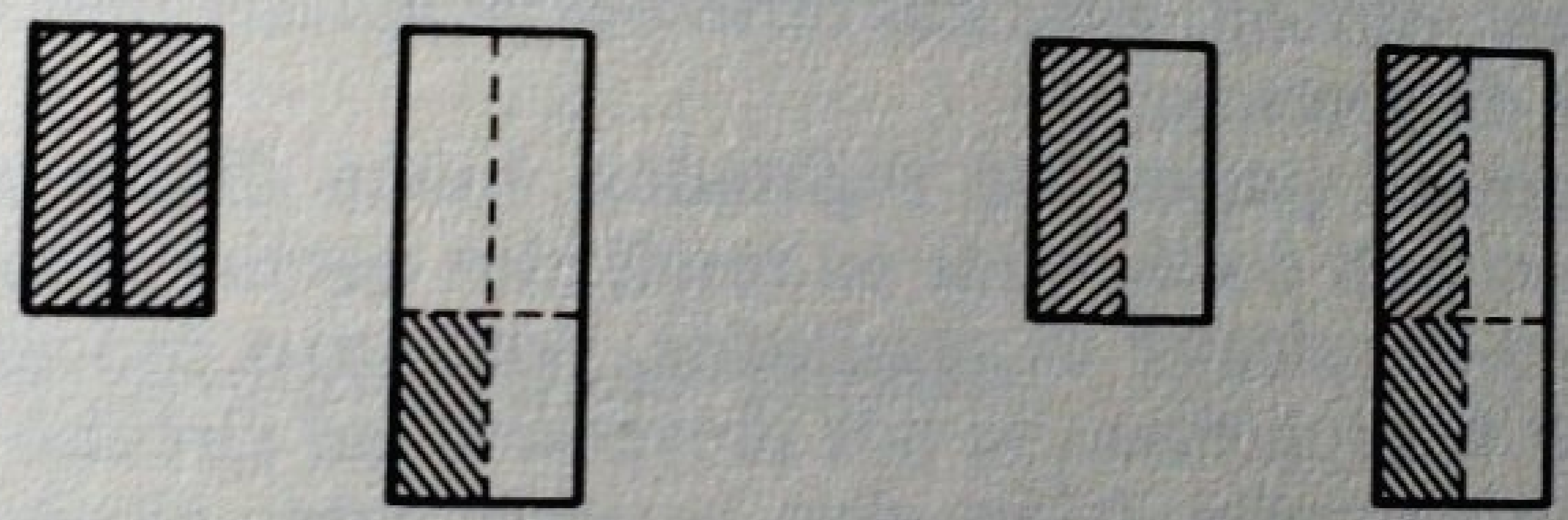
Ou: $ka^2 + kb^2 = kc^2$
$a^2 + b^2 = c^2$

O princípio da demonstração (o citado teorema da semelhança) justifica, também, imediatamente, a generalização do teorema de Pitágoras, para quaisquer figuras semelhantes, construídas sobre os catetos e a hipotenusa do $\triangle$ ABC.

A equivalência dos diversos processos, apresentados em Ex.º 51, para **136**
a determinação da média de dois números, pode também, demonstrar-se aritmeticamente. Por ex.º

$$a + \frac{b - a}{2} = a + \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}.$$

Principalmente na Escola primária de continuação (Hauptschule) estas transformações de cálculo fazem-se, a maior parte das vezes, mecânicamente sem uma racionalização. Deve-se, pois, também tentar executar estas transformações «manipuladoramente», ou por desenho.



$$a \quad + \quad \frac{b-a}{2} \quad = \quad \frac{a}{2} \quad + \quad \frac{b}{2}$$

O alcance deste subcapítulo não é apenas mostrar que as vias de raciocínio simples e visuais facilitam a originalidade da resolução dos problemas em causa, mas ainda, e acima de tudo, que: Estas vias conduzem, mais tarde noutros capítulos do ensino, à originalidade do comportamento dos alunos, principalmente quando surgem vias de raciocínio semelhantes ou iguais.

3.5.7 *Reflexão sobre as vias de solução dum problema*

Nos subcapítulos 3.5.1 a 3.5.5, tratámos, principalmente, dos meios que permitem, a um professor, levar os seus alunos à descoberta, possivelmente original, da via de solução dum problema.

Duma maneira rigorosa, trata-se, agora, de meios para meios.

Expontâneamente, nos ocorrem as experiências do macaco de Hebbs [35 → pág. 59]. Elas mostram que os mamíferos, mesmo os mais evoluídos, ainda podem utilizar meios, mas raramente ou nunca usam meios para meios, ou podem transformar meios. Aqui reside, mesmo, uma diferença fundamental entre o homem e os outros animais.

É decerto importante resolver a maior variedade possível de questões; porém, é muito mais importante, neste contexto, adaptar os cálculos às exigências das questões: reflectir sobre as vias de solução. A razão determinante é que, assim, na aprendizagem da matemática, os alunos, através de aquisições de estratégias de resolução, se tornam, cada vez mais, independentes da intervenção do professor.

Nota-se, muitas vezes, que os exercícios, sempre repetidos de novo, não conduzem àquele objectivo. Torna-se, pois, necessário prever disposições para a reflexão, antes, durante e após a resolução da questão.

A este respeito, ainda alguns aspectos complementares:

Antes de se principiar a registar a via para a resolução é, em geral, conveniente usar uma disposição «panorâmica» (→ 3.1), indicativa da organização dos dados, ou das transformações do problema. Para os problemas de texto, referimo-nos a um esquema da situação; para os problemas geométricos, a um esquema de localização; para os problemas numéricos a árvores de cálculo (→ Ex.°: 17) e diagramas de fluxos [por ex.° 70, pág. 53-82].

O essencial é que seja o próprio aluno a elaborar estas representações preparatórias da resolução. Muitas vezes, aparecem dificuldades, durante a elaboração da resolução dum problema. Se os resultados que surgem são inverosímeis, existem, além das reflexões já apresentadas, duas outras possibilidades de controlo:

1. Todos os passos são registados, numa disposição geométrica ou num esboço com cotas, onde os resultados parciais são comparados.

2. Tenta-se calcular os resultados, por outro processo. Se não notarmos qualquer progresso, ou nos movermos em circuito fechado, então as seguintes disposições (além das possibilidades citadas em 3.5.1-3.5.5) podem ajudar:

3. Averiguar se todos os dados numéricos e condições entraram no processo de resolução.

4. Em problemas que conduzem a equações, se o número das variáveis for superior ao das equações resolventes, ou seja, das condições, de forma a impedir que se determinem univocamente as soluções: Verificar se as varáveis — por vezes, de forma trivial — não são dependentes, umas das outras e, assim, eventualmente, uma ou outra não deve ser eliminada.

5. Não partir de problemas, mas sim de teoremas, leis e processos conhecidos (que podem ser complementares uns dos outros), e tentar, através de grandezas auxiliares ou de transferências de problemas, aplicar os conhecimentos já adquiridos.

Depois de estabelecida a via para a solução, vamos examiná-la, através das seguintes reflexões:

1. Qual é o núcleo básico, o antecedente matemático, a ideia a demonstrar?

2. O que é que mudaria no resultado, se alterássemos cada uma das condições iniciais? (→ 3.3.1, 3.3.3).

3. Como é que as condições iniciais teriam que ser alteradas, se quiséssemos obter um outro resultado? (→ 3.3.4).

4. A via para a solução já foi percorrida, de maneira igual ou parecida, noutro contexto?

5. Qual das várias vias para a solução é mais rápida, mais segura, mais sugestiva? Qual das vias é de uso mais generalizável? Porque é que uma e outra via são equivalentes?

Critérios resumo:

C_{19}	O professor incentiva, em larga extensão, os alunos a resolverem, com independência e originalidade, os problemas, através de métodos heurísticos, formulação de perguntas e transmissão de estímulos?

C_{20}	O professor ocupa-se, não só da resolução de problemas particulares, mas também do desenvolvimento da futura atitude, para resolver problemas?

3.6 *Possibilidades de sequência das questões*

Enquanto nos capítulos 3.1-3.5 se tratou. predominantemente, de questões metodológicas isoladas, neste capítulo, falar-se-á de várias possibilidades de estabelecer a sequência de questões, umas às outras.

Este problema central tem sido, até hoje, pouco tratado e com falta de método científico. No esboço a seguir, limitar-nos-emos a uma discrição de várias possibilidades isoladas, a uma referência bibliográfica, e a uma prática de experiências.

3.6.1 *O processamento localizado*

Ao projectar uma sequência de questões, procede-se localmente, se todas elas provêm de um tema matemático restrito e apresentam, sempre, a mesma direcção de raciocínio matemático. Então, os vários problemas diferem só em extensão, nível de representação e complexidade de aplicações.

Apenas, quando se atingiu uma completa familiaridade, em relação ao assunto do problema, se mudará a direcção do raciocínio, ou, antes, se mudará de tema.

137 Tema matemático: Cálculos sobre o rectângulo (5.º ano). A sequência de problemas (P) que se vai indicar corresponde a um isolamento do processo:

P_1 Cálculo de perímetros com «números simples», em rectângulos isolados.
P_2 Cálculo de perímetros com «números mais difíceis», em rectângulos isolados.
P_3 Cálculo de perímetros com «números fáceis», em composições de rectângulos.
P_4 Cálculo de perímetros com «números mais difíceis», em composições de rectângulos.
P_5 Aplicações a canteiros.
$P_6 P_9$ Cálculo de áreas, respectivamente, como de P_1 a P_4.
P_{10} Aplicações a campos, fundações.

Vantagens

1. Menor risco de dificuldades excessivas; estão garantidas menores exigências de raciocínio flexível e estruturado.
2. Rápido alcance de objectivos limitados: «números mais difíceis», aplicações mais complicadas.

Inconvenientes

1. Maior predisposição para confusões e falsas identificações; que se revelarão, principalmente, na transição para outros domínios de questões.
2. Pouco estímulo para a compreensão de relacionamentos; reduzida capacidade de transferência do conhecimento para novos problemas; aparecimento de gavetas de conhecimento (problemas já «aparecidos» e «não aparecidos»).
3. Subdesenvolvimento da mobilidade do raciocínio matemático, devido a uma concepção predominantemente estática.
4. Maior monotonia de ensino.

3.6.2 *O processamento relacionado*

Numa sequência de questões, proceder-se-á com relacionamento, se antecipadamente, todas as direcções diferentes dum tema matemático forem previstas e referidas umas às outras, quando, entre si, tenham relacionamento. Só quando estes diferentes relacionamentos forem integrados numa estrutura, se entrará em problemas de detalhe, tais como: extensões de âmbito, trabalho de cálculo, nível de representação, complexidade das aplicações.

Para melhor possibilidade de comparação, apresentaremos o mesmo 138
tema metemático, referido em Ex.º 137:

1. P_1 e P_6: Para o mesmo rectângulo, calcular-se-ão, logo, o perímetro e a área.

2. No lugar de P_4 e P_9, far-se-á dos problemas uma apresentação funcional (como no ex.º 91) e aberta (como no ex.º 108).

3. P_3 e P_8
4. P_2 e P_7
5. P_5 e P_{10}

Vantagens

1. As identificações condenáveis ficam, antecipadamente, excluídas; há menor risco de trocas.

De facto, as observações e verificações do autor deram-lhe a conhecer que, por ex.º, as relações complementares e inversas, quando introduzidas isoladamente, são consideradas por um grande número de alunos, como idênticas.

2. A construção de estruturas de referência permite uma mais rápida mutação de conceitos e uma maior adaptabilidade a novas situações.

3. As características dinâmicas do processo actuam, como motivadoras, e levam o aluno a um trabalho mais independente.

Inconvenientes

1. Alunos de fraca capacidade, com dificuldades em reestruturação, podem ser sobre-esforçados ou «baralhados».

2. No aluno, não se estabelece, tão cedo, um sentimento de segurança. A falta de sucesso, nos resultados da fase inicial, pode influir a futura capacidade de aprendizagem. Aliás, quanto a este ponto, o processamento localizado, também, mais tarde, conduz a insegurança, principalmente se a fixação for de tal maneira forte, que proíba ou, pelo menos, dificulte uma mudança de raciocínio.

Apreciação conjunta de 3.6.1 e 3.6.2

Antigamente procedia-se, em geral, segundo um processamento localizado. Assim, por ex.º, nos primeiros meses do 1.º ano, introduzia-se a subtracção a seguir à adição; no 7.º ano, os três casos de cálculo de percentagens eram tratados em separado; da mesma maneira, se estabelecia uma separação, no tempo e na forma de tratamento, da Álgebra e da Geometria.

Porém, desde algum tempo, se recomenda uma aprendizagem em inter-relacionamento [por ex.º 30, pág. 79 e seg,], (que nos casos extremos é «contrastadora — integradora»), como metodologicamente superior ao processamento localizado.

Esta mutação pedagógica realizou-se, principalmente, sob a influência de resultados provenientes de:

1. As investigações de Rees e Israel (1935) e mais tarde de Luchins* (1959), sobre os factores de arranque, para o raciocínio [32, pág. 34 e seg.].

2. As investigações de Duncker* (1945), sobre o papel negativo da experiência [32, pág. 265 e seg.], foram confirmadas e precisadas por Birch e Rabinowitz.

3. O trabalho de Piaget (1948), sobre o agrupamento das operações da inteligência: as partes dum complexo, sem os relacionamentos de ligação não podem ser, realmente, apreendidas [61] (→ 3.3.4)**.

Contudo há limites para o processamento relacionado, que convém mencionar:

1. O processamento relacionado não é recomendável, se as diferentes partes dum complexo revelarem técnicas diferentes de processamento.

139 Muito embora se possa defender o critério dum tratamento global relacionado, na introdução simultânea da multiplicação e da divisão (nos dois significados desta última), pelo contrário, quanto aos algorítmos, devemos pugnar por um tratamento separado: de facto, eles são de natureza diferente e necessitam, também, em cada caso, de algumas formas de preparação semi-escritas. Um tratamento simultâneo excederia a capacidade de raciocínio, da maior parte dos alunos, e conduziria a erros.

2. O processamento relacionado também não é recomendável, se de facto, embora as diferentes partes dum complexo se conjuguem, se deixem fraccionar muito pouco (por ex.°, só através da escolha de números mais simples, ou representações visuais). Então, o relacionamento nunca mais se torna claro e é preferível uma introdução separada das partes, com o realce posterior do seu relacionamento.

140 A integração e a diferenciação são (em termos grosseiros) a inversa uma da outra. De facto, pode-se observar o seu relacionamento de forma geométrica, num exemplo de introdução, a partir das funções área e tangente; porém, tornam-se necessárias observações anteriores particulares e independentemente de relacionamento.

N. T.

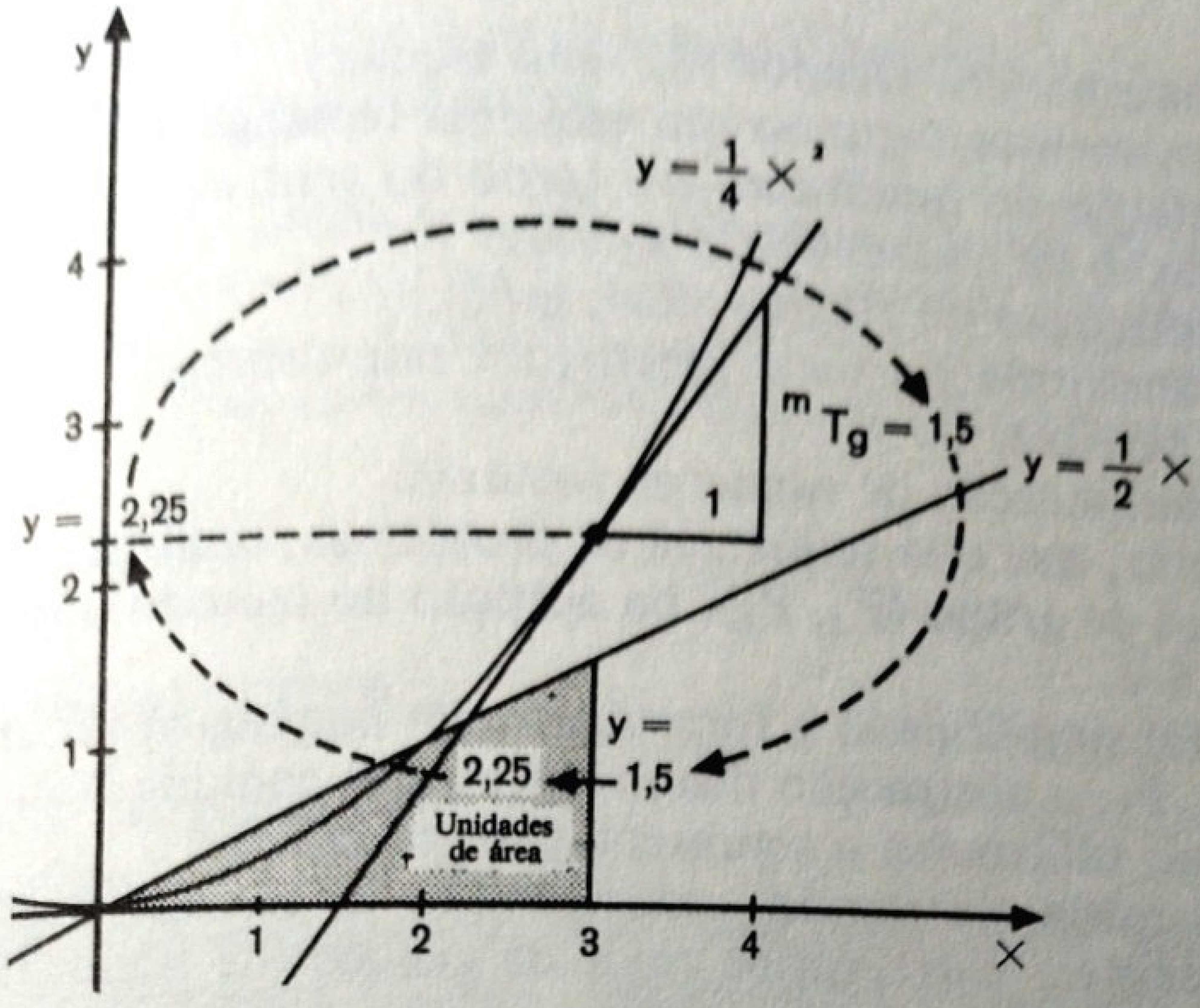
* Duncker e Luchins, através de experiências, concluiram que:

— Há uma «fixidez funcional»: o lidar com as coisas fixa o seu objectivo de utilização e limita a descoberta de outras novas possibilidades de utilização (Duncker).

— Adaptação e habituação ocasionam uma atomização do processo de raciocínio, um comportamento cego, em relação às tarefas; não nos dirigimos a estas, providos das considerações que lhes dizem respeito, mas sim, permanece-se atomizado, pela forma de raciocínio já praticada (Luchins).

** Obra já citada:

Piaget — A psicologia da inteligência (tradução de Livros Horizonte).



De uma maneira geral, o que é recomendável é uma introdução separada da diferenciação e da integração e, mais tarde, um tratamento e fundamentação de relacionamento, através do teorema fundamental do Cálculo Infinitessimal.

Muitas vezes, o que se revela aconselhável é uma planificação de compromisso: Primeiro, trabalhar-se-á uma componente do complexo, até nela se alcançar uma segurança completa. E, principalmente, para que o aluno possa reconhecer de que objectivo se trata. As outras componentes serão, depois, trabalhadas, já não por si isoladamente mas sim em conjunto, debaixo dum constante relacionamento ao ponto de partida; e, também, serão relacionadas entre elas, reciprocamente. Assim se garante um ponto de referência sólido, bem como a panorâmica de uma aprendizagem relacionada: Talvez aqui se possa falar de um processo de relacionamento, com referência a um ponto fixo.

Para introdução da potenciação e da respectiva notação, tem-se reco- 141
nhecida, como válida, uma permanente confrontação com a multiplicação; porém, já não o tratamento simultâneo das operações inversas da radiciação e logaritmização, bem como as duas formas correspondentes de escrita. Aliás, já teriam sido apresentados mais cedo, exercícios inversos sob a forma de escrita de potências (por ex.º: $\square^3 = 8, 3^\square = 81$), cujas notações (escritas e faladas) e relações opostas só mais tarde seriam introduzidas.

3.6.3 *O processamento para a abstracção*
(Do concreto para o abstracto)

Numa sucessão de questões, proceder-se-á ao encontro da abstracção, se elas apresentarem muitos exemplos matemáticos (modelos), com diferenças e pontos comuns, em referência ao tema, e só, gradualmente, se abstraia a noção e as propriedades, como sendo aquilo que é comum.

142 Tema matemático: Grupos (3.° ano escolar).

P_1: Movimentos segundo um esquema rectangular (veja 69).
P_2: Rotação do quadrado, em torno do centro.
P_3: Adição de classes-resto, módulo 4.
P_4: Subtracção de classes-resto, módulo 4.
P_5: Transformação dum rectângulo por sobreposição, conservando os vértices.
P_6: Multiplicação de números naturais.

É de notar, que esta sequência de problemas, também, apresenta contra exemplos de grupo (P_4, P_6), na acepção do método por contraste, tratado em 3.5.2.

Assim foi simplificado e formulado, em linguagem infantil, através de P_1, P_2, P_3, P_5, a abstracção das propriedades comuns à estrutura de grupo. Para tal, utilizou-se a representação em tabelas.

Além daquela abstracção, reconheceram-se as diferenças que, estruturalmente, existem entre vários tipos de grupos (de Klein, cíclicos de 4)*. Note-se, entretanto, que este tratamento não serviu, para uma introdução das designações matemáticas («grupo», «neutro», «inverso»...).

A obtenção de processos de abstracção pode, em geral, ser favorecida, se a confrontação das crianças, com algumas das questões, for simultânea, ou decorrer com pouco intervalo de tempo.

Vantagens

1. Desenvolvimento da capacidade de abstracção.
2. O início, através de exemplos concretos, actua como motivador.
3. Até mesmo, os alunos de raciocínio fraco (principalmente em juízos abstractos) adquirem conhecimentos de factos, dentro dos moldes isolados.
4. Através do manuseamento de entrada dos exemplos concretos, torna-se largamente possível um comportamento original, apenas entregue a si próprio.

Inconvenientes

1. Perigo de raciocínio por associação. O aluno pode — principalmente se lhe tiverem sido apresentados poucos exemplos — não se desprender dos modelos e cair assim, facilmente, numa identificação de modelos com conceitos.
2. Não se garantir o desenvolvimento do raciocínio lógico — formal, uma vez que muitas proposições não foram obtidas como resultados de dedução, mas sim através da experiência com modelos. Isto tornar-se-á claro, para um estudante dum 1.° semestre, que, durante os anos anteriores, terá trabalhado com números, e agora de repente, por exemplo, deverá demonstrar, axiomaticamente, que qualquer número multiplicado por 0 dá 0.

N. T.
* Veja-se, a propósito, o exemplo mais adiante, 27.

3.6.4 *O processamento a partir de representações abstractas* (Do abstracto para o concreto)

Numa sequência de problemas, proceder-se-á a partir de representações, se as noções matemáticas, ou seja, as proposições, forem, primeiro, adquiridas num plano abstracto (através de definições ou na sequência de raciocínios) e só, no final, forem confrontadas com exemplos matemáticos (modelos).

Tema matemático: Grupos:

143

P_1: Definição de grupo.
P_2: Demonstração de $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$
P_3: Verificação se a composição das transformações de um triângulo equilátero por sobreposição, (que conserva os vértices) é, ou não, um grupo. Confirmação do teorema enunciado em P_2.
P_4: Definição de subgrupo.
P_5: Dedução do teorema de Lagrange.
P_6: Pesquisa de subgrupos, em diversos modelos (por ex.º transformações por sobreposição de um hexágono regular), com auxílio do teorema de Lagrange.

Vantagens

1. Transferência fácil;
2. Rápida e directa inserção num assunto matemático;
3. Desenvolvimento do raciocínio abstracto;
4. Desenvolvimento do raciocínio assente em símbolos;
5. A ciência desenvolve-se a partir dum ponto de vista mais alto. O significado do raciocínio lógico só é plenamente apreendido, quando o estudante encontra os seus resultados verificados nas aplicações concretas.

Inconvenientes

1. Os estudantes com fracas capacidades de raciocínio lógico — abstracto, são facilmente sobrecarregados;
2. Os modelos matemáticos, em si, são pouco considerados. Ocorre, então, frequentemente um abandono da capacidade de criar abstracções — que aliás não deve ser posta, em pé de igualdade, com a capacidade de raciocínio abstracto;
3. O processo requer frequentemente intervenções docentes, pelo que contraria, notavelmente, as formas de comportamento original dos alunos.

Apreciação em globo de 3.6.3 e 3.6.4

A matemática, como ciência, decorre segundo vários níveis de abstracção, em que, duma maneira geral, os mais altos se desenvolvem, a partir dos mais baixos. Assim, por exemplo, a partir do anel dos números inteiros, se pode desenvolver o corpo dos números racionais.

Está muito espalhada a concepção segundo a qual — e em especial na matemática — a estrutura de método didáctico deverá corresponder, em grande parte, à estrutura da ciência. Pense-se, por ex.º na concepção de Klafki [47, pág. 100]. Por esta razão, no ensino da matemática se procede, geralmente, do concreto para o abstracto. Isto torna-se, principalmente, claro, se tivermos presentes os seis passos da aprendizagem matemática enunciados por Dienes [17]* ou os chamados princípios de variabilidade matemática ou ainda de variabilidade de representação [15, pág. 44]**.

É interessante, então, notar que o ensino primitivo da Matemática seguiu, frequentemente, o caminho inverso: do plano abstracto para baixo. Veja-se, por exemplo, o que sucede, com referência ao ensino das primeiras operações.

Enquanto no ensino primitivo — e mesmo, hoje, em testes — se impunha de entrada, o conhecimento dos números até 10 (aproximadamente) e os cálculos isolados eram representados, pelos conjuntos correspondentes de castanhas, etc., hoje não se procede assim. Valoriza-se o duplo processo de abstracção: do meio ambiente circundante, para o dos conjuntos e, deste, para o dos números [33, pág. 146]. Assim, consequentemente, também no ensino se segue aquele processo [por ex.º 55 pág. 26, 66, 67].

Porém, a questão — se no ensino se deve proceder por abstracção ou por concretização — deve, ainda, mais uma vez, ser posta:

Certamente que, no ensino, se deve ir caminhando no sentido, para a abstracção, enquanto o aluno não se apropriar dos novos conceitos. O facto de muitos destes, em virtude do seu contexto, serem ainda novos para o aluno e de, no decorrer da frequência escolar, permanentemente se exercer uma pressão, no sentido de se atingirem níveis mais altos de abstracção, não deve, porém, levar a que a sequência dos problemas para a elaboração dos conhecimentos matemáticos, assuma, predominantemente, esta marcha: do concreto para o abstracto. Logo que se efectuem as primeiras experiências de uma nova noção, a formação desta deve continuar, e ser aprofundada, em novos planos. Para tal, se deverá recorrer a mais processamentos de abstracções, em intervenção equilibrada com processamentos de concretizações e de pura operatória.

De facto, as experiências de Piaget revelaram que, à entrada na escola, as crianças não trazem, ainda, completamente desenvolvida a noção de número [60, pág. 50 e seg.]. Porém, a maioria delas traz tanta experiência prévia desta noção que, desde essa entrada e, por exemplo, com referência

---

N. T.

* Z. P. Dienes «As seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática», já citado.
** Z. P. Dienes — «La construction des Mathématiques», já citado.

ao número 5, logo a princípio podem não só reconhecer a propriedade 5, por abstracção em vários conjuntos, mas, ainda, representar o número 5, através de vários conjuntos. Assim, Fricke notou, a propósito, que não se pode falar, propriamente, do conceito numérico 5 [30, pág. 46]. Quando muito, este pode ser completamente compreendido, quando for posto em confronto com outros números, relações e suas propriedades.

De maneira diferente do que para a noção de número, acontece, por exemplo, com a de grupo: o aluno não traz, do meio exterior, qualquer experiência (ou só muito pouca); de maneira que fica limitado, principalmente, a um processamento do concreto para o abstracto; pelo menos, até ao início do raciocínio lógico-formal. Só para características isoladas do grupo se podem verificar prematuras concretizações.

3.6.5 *O processamento para a generalização* (Do particular para o geral)

Uma sequência de problemas é organizada para uma generalização, se as noções e as proposições se referem, a princípio, a um domínio muito limitado de elementos, e este se vai, gradualmente, ampliando.

Noção: Valor da média: 144
P_1: Valor da média de dois números;
P_2: Vários processos para o cálculo do valor da média e sua combinação (compare com 51);
P_3: Valor da média de três números;
P_4: Transferências do processo trabalhado em P_2, para P_3;
P_5: Valor da média de mais de três números.

Noção da raiz: 145
P_1: $\sqrt[2]{a}$;
P_2: $\sqrt[3]{a}$;
P_3: $\sqrt[n]{a}$; $n \in \mathbb{N}$

Vantagens

1. O caso especial fica em evidência e é, pois, compreendido facilmente.
2. O processamento por generalização permite, em geral, o emprego do método indutivo, que, em grande medida, desenvolve no aluno um comportamento independente.
3. O aluno torna-se consciente dos seus progressos, durante a aprendizagem. A descoberta dum caso já conhecido, como um caso especial duma generalidade, pode levar a uma maior vivência de demonstração (por ex.º, as fórmulas para as áreas dum rectângulo, dum triângulo, dum paralelogramo, como casos especiais da área dum trapézio).
4. O caso especial é apreendido com maior clareza, em virtude da pormenorização, com que é tratado. Isto é, principalmente, importante se, sob o ponto de vista científico e de aplicação prática, lhe for atribuído um significado peculiar grande.

Inconvenientes

1. A generalização é demorada, porque, mais duma vez, requer reestruturações. Levar a sua exploração no ensino, até uma plena generalização, não é, pois, muitas vezes, possível.
2. A capacidade de transferência permanece fraca, porque a elaboração mental exerce-se sobre casos especiais.

3.6.6 *O Processamento para a especialização*
(Do geral para o particular)

Uma sequência de questões é organizada, para atingir o caso especial, particular, se as noções e as proposições se referem, de princípio, a um domínio vasto — que abrange todos os casos especiais — e estes, como tais, só decorrentemente se tratam.

146 Num 1.° ano escolar, procede-se no caminho para a especialização se, antes da introdução de igualdades como $3+5=8$ ou $7-4=3$, se fizerem comparações gerais de potências de conjuntos (conjuntos reunião e conjuntos diferença), para tal usando os sinais $>$, $<$, $=$ [por ex.° 67, pág. 39-45]. Só, mais tarde, se interpretarão, então, as igualdades obtidas, como casos especiais de comparação de potências.

147 O processamento, no 5.° ano, de tratar o rectângulo, antes do quadrado e o paralelepípedo rectângulo, antes do cubo, é um processamento para a especialização.

148 P_1: Definição $\sqrt[n]{a}$
P_2: Exercícios do tipo $\sqrt[6]{64}=\square$, $\sqrt[3]{27}=\square$, $\sqrt[4]{0,0625}=\square$
P_3: $\sqrt[2]{a}$ e $\sqrt[3]{a}$ e suas aplicações ao cálculo do lado do quadrado e da aresta do cubo, respectivamente.

Vantagens

1. Processo directo e que poupa tempo.
3. Menor tendência para a inserção de erros, do que no anterior: Por ex.°, se, no processamento para a generalização, partirmos da implicação certa:
$5=\sqrt[2]{25} \Rightarrow 0,5=\sqrt[2]{0,25}$, cometemos, contudo, um erro se concluirmos:
$4=\sqrt[3]{64} \Rightarrow 0,4=\sqrt[3]{0,64}$

Inconvenientes

1. A base geral de partida é, muitas vezes, obscura ou pouco referida à aplicação, o que torna necessário um forte dirigismo da parte do professor.
2. O caso especial e o seu tratamento peculiar, bem como as propriedades e as suas aplicações ficam, possivelmente, subvalorizadas.

Apreciação global de 3.6.5 e 3.6.6

No ensino actual da matemática, em confronto com o anterior, ocorre, por duas formas, uma deslocação do centro de gravidade:

1. As vantagens dum processamento, do geral para o particular só, recentemente, foram reconhecidas. Para tal, além da contribuição primordial de Piaget, influiram, também, as investigações de Dienes e Jeeves.

   Estes puderam verificar, num exemplo dos do «grupo 4», que uma marcha do geral para o particular (este inserido naquele) provoca uma atitude de aprendizagem muito apreciável e é mais aconselhável, com referência à ocorrência de erros. A consequência metodológica deste ponto de vista é o que Dienes denomina «A teoria dos objectivos em profundidade». Escreve este investigador [21, pág. 46]: «Nem sempre, é inteligente e útil fornecer, pela primeira vez, um novo conceito matemático, na sua forma mais simples e crer, a partir daqui, que bastam alguns passos ligeiros, para chegar aos aspectos mais difíceis da estrutura. Descobriu-se que, é muito preferível, pelo menos, nalguns casos, introduzir a nova estrutura a um nível mais difícil. Com isto, confia-se em que a criança descubra, ela própria, as partes menos complexas, dentro do conjunto da estrutura.»

   Note-se que este tipo de processamento está em oposição, com os métodos antigos, ao recomendarem que as novas estruturas deviam ser introduzidas, de forma fácil, e que as suas configurações mais complexas seriam, então, construídas gradualmente.
2. Condicionadas pelas vantagens do processamento do geral para o particular, são detectáveis, nos novos programas, as tendências para reservar um lugar mais largo ao geral, mesmo se o conhecimento deste, de princípio, tiver para o aluno um alcance prático muito pequeno. Assim, por exemplo, através do tratamento precoce de sistemas de valor de posição não decimais, tenta-se transmitir a ideia geral do princípio do valor de posição e das suas propriedades — o que conduzirá a uma maior mobilidade, no tratamento do sistema decimal.

Dienes e Jeeves não tentam, de forma alguma, radicalizar a «teoria dos objectivos em profundidade». [22, pág. 118]:

«Nalguns casos, pode ser preferível começar, perante as crianças, por uma estrutura mais fácil e, a partir daqui, generalizar. Enquanto, noutros casos, a aprendizagem se fará melhor, se principiarmos por uma estrutura mais geral e, a seguir, «particularizarmos». Não podemos, a partir das nossas investigações, fornecer critérios certos e concretos para decidir qual o melhor processamento a seguir, em cada caso. Invocamos, apenas, a necessidade de que a situação isolada, de partida, não seja demasiado complexa, mas, por outro lado, o seja suficientemente». [21, pág. 47], [22, pág. 118].

Aliás, não se pode afirmar, sem hesitações, que para o aluno seja, sempre, mais fácil «apanhar» o caso especial, do que o caso geral. Assim, por exemplo, o tratamento dirigido do produto carteseano AxB, no caso especial de A = B, tropeça em maiores dificuldades, do que se A e B forem conjuntos disjuntos. Com referência à fórmula $d = \frac{n(n-3)}{2}$ (número de diagonais dum polígono de *n* vértices) ela é mais fácil de atingir nas seguintes condições: quando referida a um polígono de muitos vértices em que de cada um parte mais duma diagonal, do que aos casos especiais do quadrilátero ou, ainda, do triângulo.

Além do grau de complexidade, queria ainda lembrar dois outros aspectos, a ter em consideração, na escolha deste ou daquele processamento:

1. Mesmo quando o processamento do geral para o particular — principalmente, devido a razões da própria ciência matemática e da sua «transferibilidade» — mostrar vantagens, do que se trata, essencialmente, no ensino da Matemática, é do desenvolvimento do raciocínio generalizador (capaz de generalizar). É este que reveste uma alta função propedeutica e não o raciocínio generalizado a um ou outro caso.

Investigações notáveis de Reinhard Gullash vão ao ponto de atribuir, a principal expectativa de melhoria das capacidades escolares, a uma subida de nível da capacidade de generalizar (e também de abstrair) [34, pág. 192]. Assim, a reestruturação, que, no processo do particular para o geral, deve ter lugar é, de considerar, não só como um caso frequente, interdecorrente, mas, principalmente, como uma finalidade de provocar o raciocínio.

149 De facto, os alunos podem, imediatamente, calcular a média de vários valores, com o auxílio do processo mecânico (Ex.° média de classificações). Contudo, faltam nele importantes generalizações, que transferem os vários processos do cálculo da média, a partir de dois valores, para mais de dois valores.

$$\frac{a+b}{2} \to \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

$$a+\frac{b-a}{2} \to a_1+\frac{(a_2-a_1)+\ldots+(a_n-a_1)}{n}$$

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2} \to \frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_n}{n}$$

Além disso, os alunos aprenderiam, a propósito, a introdução e a rejeição de hipóteses.

2. Se nos inclinarmos para o processamento do particular para o geral, a estrutura do problema donde partimos é, frequentemente, tão particular, que, muitas vezes, ocorrem identificações ilegítimas, entre a noção em vista e ocorrências que lhe são estranhas. Muitas vezes, tais intromissões falsas só se podem dominar, com grande esforço. Então, será de dar primazia ao processo do geral para o particular.

Se no 1.º ano escolar, ao estudar a reunião de dois conjuntos, nos 150
limitarmos ao caso de eles serem disjuntos — como fazem vários livros escolares — então, no plano lógico, ao «ou» — ligar-se-á, de princípio, apenas o sentido esclusivo. Muitas crianças identificarão, assim, a proposição inclusiva «ou ... ou ...» ($A \vee B$), com a proposição exclusiva, «ora ... ora» ($A >\!\!-\!\!< B$). Então, mais tarde, sentirão dificuldades em interpretar o sinal $\vee$ no sentido inclusivo, e em dominarem o conceito de reunião de dois conjuntos, da forma logicamente certa.

Muitos estudantes de escolas superiores que, no decorrer dos seus estu- 151
dos na tranasformação por sobreposição* só viram um caso especial de transformações por congruência**, não ficaram em condições de, em exame, determinarem o conjunto de transformações afins*** que transformaram um triângulo qualquer ABC, em si próprio. Para alguns destes estudantes, a noção de transformação por sobreposição era entendida como um caso particular das transformações por congruência.

No que se refere ao critério de escolha do tipo de processamento das questões, não devemos fixar-nos em quaisquer princípios rígidos. Das considerações 3.6.0 a 3.6.6 resulta que cada um deles revela vantagens e inconvenientes, Saliente-se, especialmente, o facto de que, aos vários tipos de processamento correspondem vários processos mentais. Daqui, resulta, então, a consequência metodológica que consiste em trocar, oportuna e sucessivamente, o tipo de problemas: só assim, poderemos instalar o desenvolvimento sobre uma base larga e promover uma condução flexível do ensino. Em resumo, é de aconselhar que, se o professor, como tal, tem em mente os vários tipos de processamentos, ele faculte, através de várias alternativas, impulsos fortes, para que se siga um ou outro.

Vantagens salientes deste ou daquele processamento só decorrem, principalmente, de circunstâncias metodológicas ocasionais que, condicionadas pelo assunto ou pelo acaso, revelam um processamento como mais elegante do que outro.

C_{21}	No que se refere à sequência das questões, consideraram-se as vantagens e os inconvenientes dos vários tipos de processamento?

N. T.

* Dadas as dificuldades de interpretação do texto, apresentamos os significados que encontrámos, para os termos alemães usados:

* No original alemão, «Deckabbildungen» que entendemos, segundo este exemplo: como a transformação que leva um triângulo isósceles a sobrepôr-se, a si próprio, por rotações e simetrias axiais.

** No original alemão, «Kongruenzabbildungen» que entendemos por «isometrias»: transformações que mantêm invariantes as distâncias entre dois pontos.

*** No original alemão «Affinenabbildungen», transformações afins.

4. Escolha e inserção dos «média»

Nos limites deste livro, não é possível apresentar um resumo, sobre a diversidade dos «media» para o ensino da matemática; que aliás, continuamente, aumentam. Também, não tentaremos estabelecer uma classificação desses «media», tal como ela se encontra, nas obras referentes ao ensino em geral. Preferimos limitarmo-nos a citar três aspectos, referidos à totalidade do complexo dos «media», que se tem tornado especialmente actual, dentro das tendências da Matemática Moderna. Trata-se de aspectos, ligados a critérios para a escolha, elaboração e emprego dos três tipos de «media».

— Material estruturado.
— Fichas de trabalho.
— Livros escolares.

4.1. *Critérios para a elaboração, escolha e emprego de material estruturado*

Já em 3.1, esclarecemos a importância que, no processo da aprendizagem da matemática, assume a representação do assunto. E também vimos como o desenvolvimento do conhecimento pode ser acelarado, através da actividade mental do aluno. Este conceito abriu caminho, a partir da Reforma Pedagógica; encontrou apoio na teoria de interiorização de Piaget; e foi adaptado à prática do ensino, através de numerosas propostas didáticas e de uso de material, vindas, principalmente, de Dienes.

Em conformidade com a fase (que Piaget, principalmente, acentuou do raciocínio lógico concreto, é de reconhecer que a importância que o uso dos materiais estruturados assume, principalmente para os jovens até aos 12 anos. Aliás, segundo as nossas observações (feitas nas escolas de educação permanente e de formação de professores), o emprego do material estruturado, depende, muito menos da idade, do que da preparação matemática anterior do aluno e da sua flexibilidade geral de raciocínio.

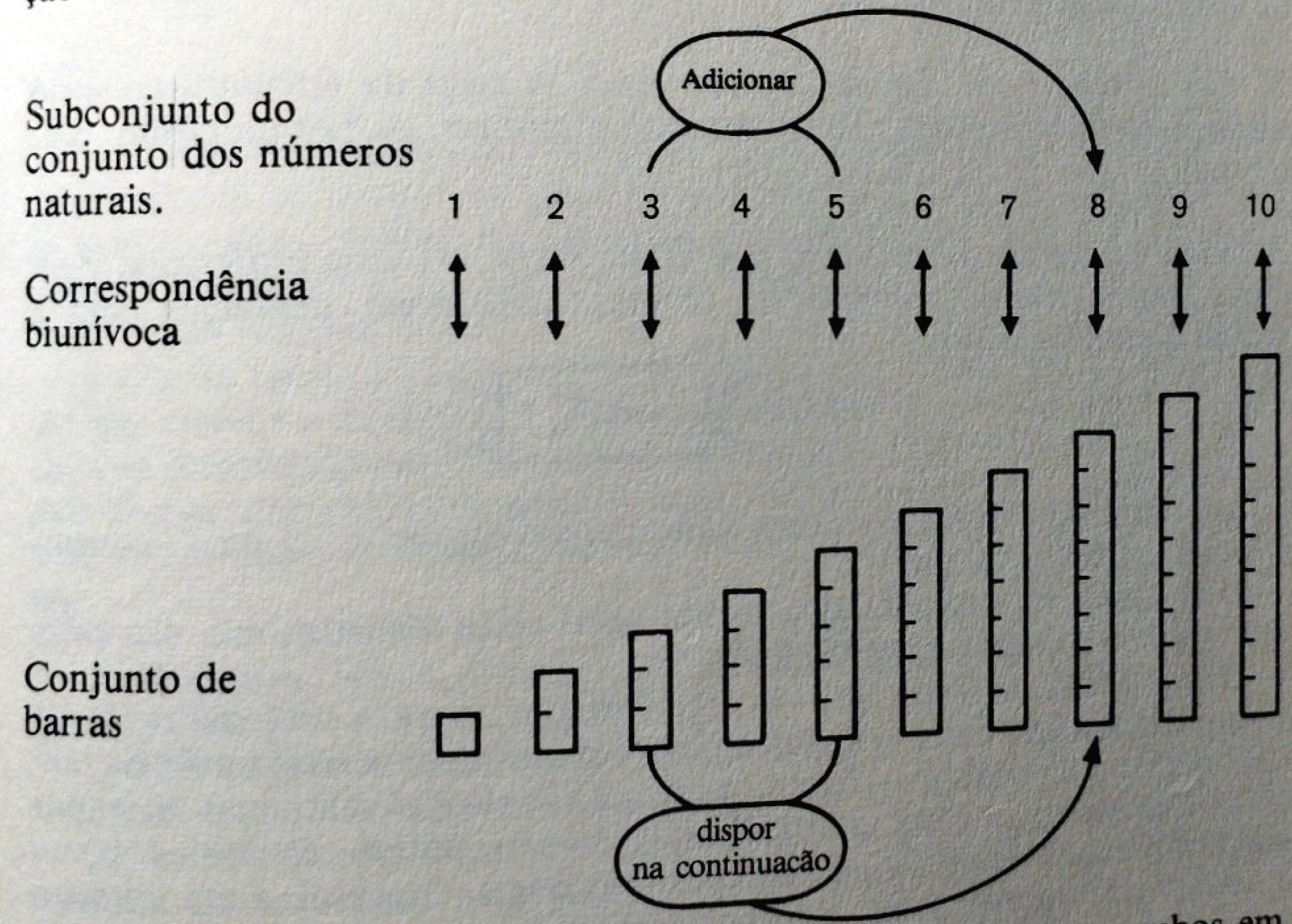
Depois da generalidade destas observações prévias, debrucemo-nos, nós próprios, sobre o material estruturado. Em primeiro lugar compreende-se por material estruturado* uma colecção de objectos, configurados de maneira a «corporizarem, de uma forma apropriada», uma ou mais estruturas matemáticas. Esclareçamos, então, o que se deve entender

* Em sentido restrito: Por material compreende-se um conjunto de coisas (objectos, marcas, etc.) que podem apresentar várias combinações de atributos e, entre as quais, a partir de quaisquer características de classe a que pertencem (por ex.º cor, forma, tamanho etc.), se pode escolher, com precisão, um elemento.

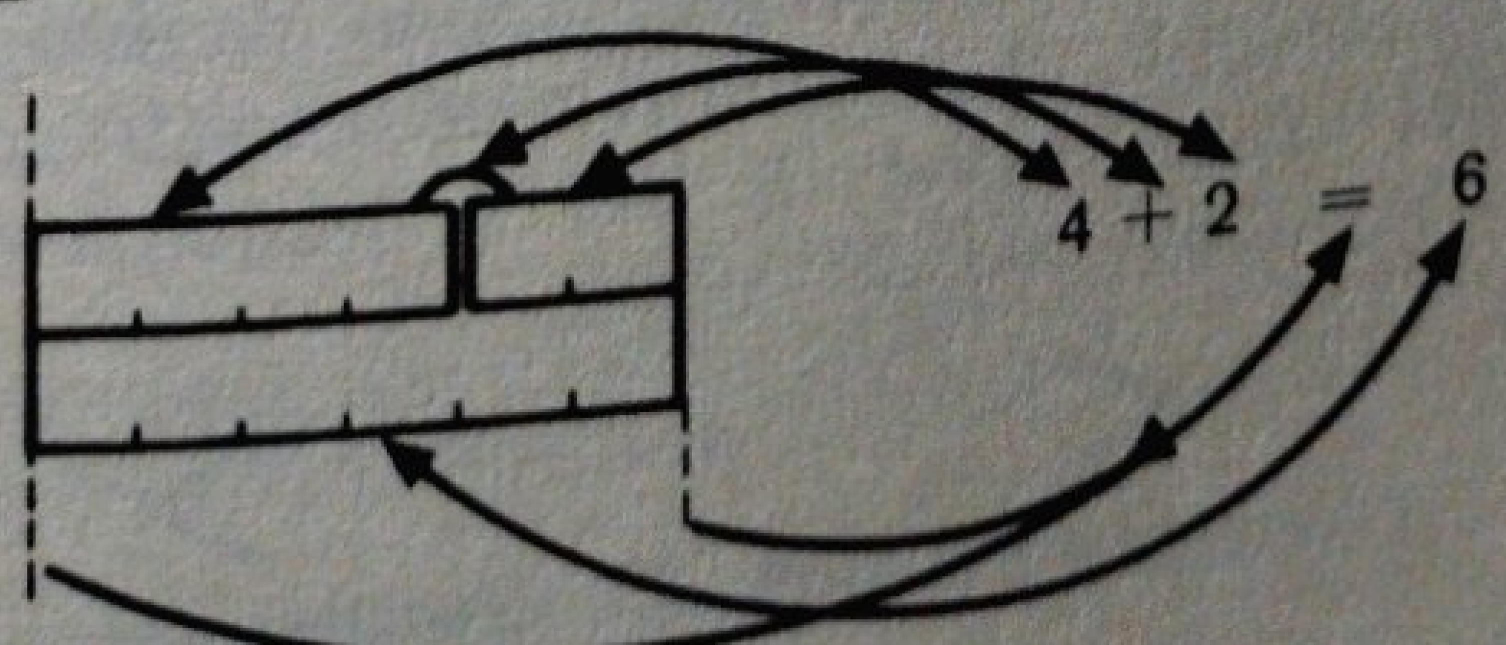
por «apropriada»: os critérios para tal entendimento são, principalmente, de tipo matemático, psico-mental, metodológico, estético e pragmático--económico.

1. O mais importante de todos os critérios é a exigência do material «corporizar *isomorficamente*» a estrutura matemática, no todo ou em parte. Sob a designação de estrutura matemática, compreende-se um conjunto M e uma relação nele definida R. A materialização é então isomorfa, se os elementos do conjunto M (ou de uma parte dele M') puderem ser postos em correspondência com os elementos doutro conjunto material e, se neste, se tiver definido uma outra relação R', tal que: as correspondências se mantêm ao operar num e noutro conjunto, segundo as respectivas relações R e R'.

1. No exemplo a que se refere a figura seguinte, como estrutura mate- 1
mática temos o subconjunto dos 10 primeiros números naturais, no qual se pretende estudar a relação com três «posições» R_1 (a adição), e a relação com duas «posições» R_2 (a igualdade).



O conjunto formado por 10 barras (Cuisenaire, Legos, ou cubos em alinhamento) será isomorfo dos números, se escolhermos como relações materiais correspondentes: à adição numérica (R_1), a igualdade de comprimento das barras (R_2). É o que mostra o seguinte exemplo:



De facto, as barras são apropriadas para materializações isomorfas de várias estruturas numéricas. Fundamentalmente, podem-se assimilar estruturas de barras e estruturas de conjuntos, não obstante elas não serem o modelo ideal, pelas razões seguintes:

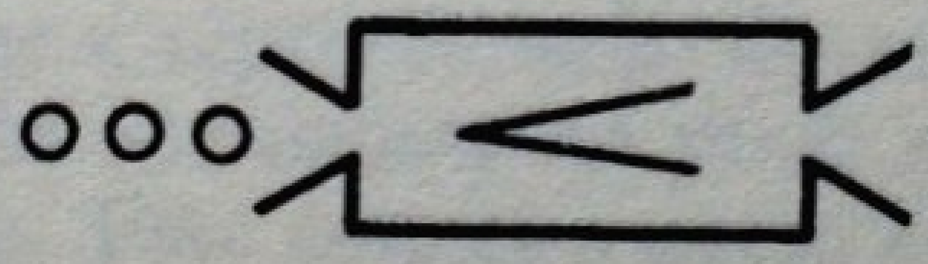
a) Os conjuntos podem ser constituídos por elementos de aparências completamente diferentes, uns dos outros, enquanto que todas as barras se apresentam «parecidas», isto é, são todas limitadas por rectângulos. Os alunos, por razões matemáticas e mentais (psicológicas), devem poder escolher, para formar conjuntos, elementos de diversa espécie uns dos outros.

b) As barras — inclusive as de mesmo comprimento — são, de facto, distintas umas das outras, como é necessário ao tratar-se de conjuntos; mas, na prática do ensino, a sua distinção e, consequentemente, designação unívoca apresentam dificuldades.

c) As barras apresentam fraca discriminação e não permitem uma variabilidade nítida na formação de conjuntos, como sucede com fichas de várias características.

No ensino, pode dar-se, muitas vezes, o caso da estrutura do meio auxiliar não corresponder, à do assunto a ensinar. A este propósito, dois exemplos:

2 Para exercícios sobre o uso dos sinais $<, >, =$, uma professora, estudante universitária, mandou as crianças utilizarem máquinas com a seguinte configuração:



Este meio não traduz, sob dois aspectos, as relações $<$, $>$ ou $=$, no conjunto dos números naturais:

a) O sinal «$<$» na máquina estaria certo entre números; mas não entre conjuntos, com que a máquina trabalha.

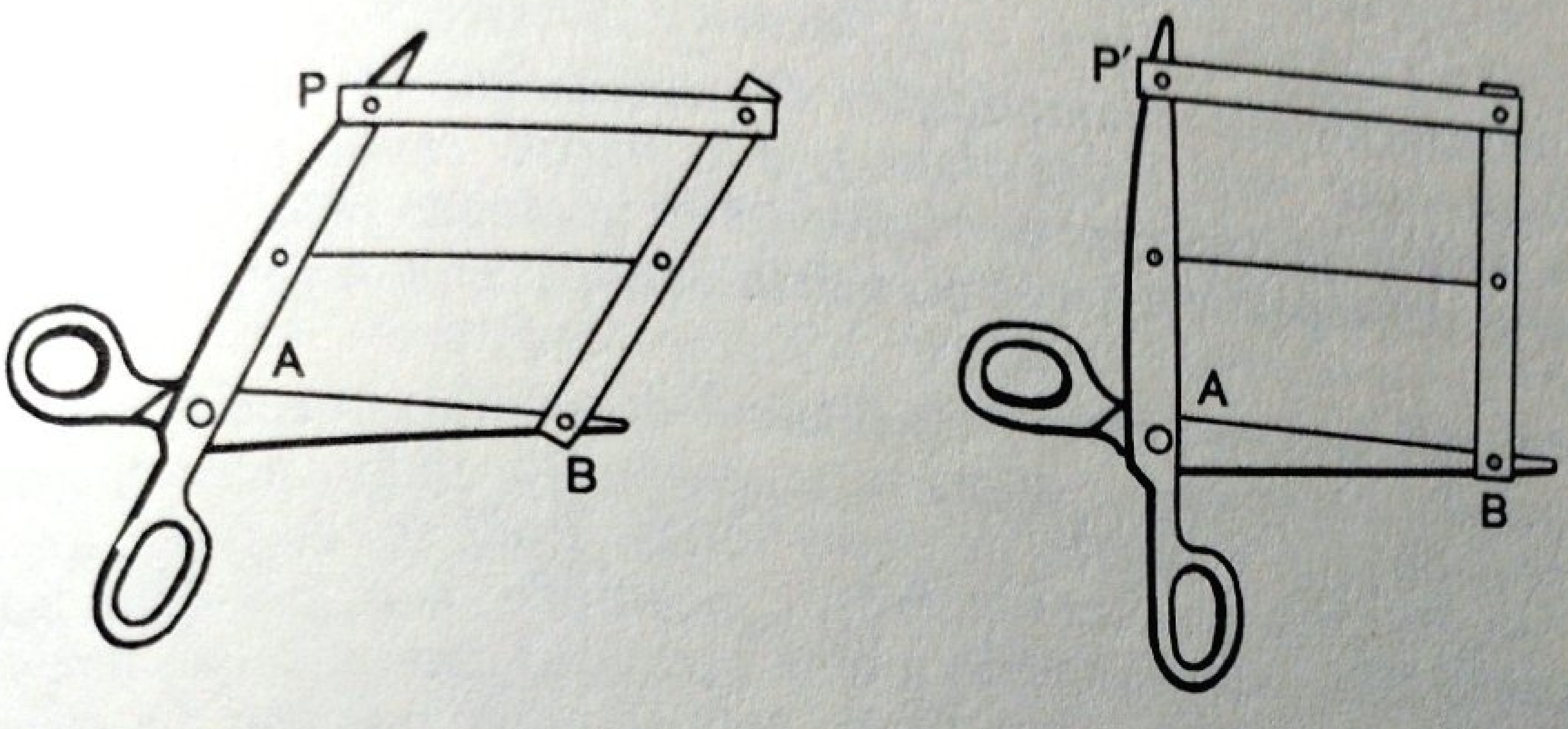
b) De facto, as máquinas são apropriadas, para a materialização de conjuntos, em que cada «entrada» deve ser posta em correspondência unívoca com cada «saída» — como, pode ser o caso nas máquinas reais (por ex.º os automáticos para estampilhas). Não são, porém, apropriadas para a materialização de quaisquer relações, nas quais, em geral, a um primeiro elemento não corresponde, rigorosamente, um outro, através da relação. É o que compreende a criança que, neste caso, pergunta ao professor: «Sim, e de quanto o devo fazer maior?».

A resposta do professor: «Isto deixo eu, à tua vontade», pode não satisfazer as crianças.

O professor poderia ter recuperado a lição, se tivesse «agarrado», simplesmente, na pergunta do aluno, e a tivesse tomado como ponto de partida para proceder assim: Antes de pôr a máquina em funcionamento, introduzir-lhe-ia um adicional da forma,

$<$	$>$
«acrescentar» 2!	«tirar» 3!

Um outro candidato a professor começou uma aula de introdução a um 8.º ano sobre a transformação geométrica «scherung», com o material indicado na figura, e a questão: «Queremos, hoje, tratar duma transformação que «é parecida», com o modelo que tenho na mão. O que é que vos ocorre, se eu mover a tesoura, e como poderemos denominar esta transformação?» 3



Os alunos reconheceram, de facto, algumas propriedades que também se encontram na transformação que se pretende estudar. Contudo não foi esclarecido que o modelo utilizado não é isomorfo da «Scherung»*, porque naquele um ponto P e a sua imagem P', duma maneira geral, não se situam numa paralela a AB.**

Seria, de facto, interessante uma discussão, na aula, sobre este tema: em que medida a designação «Scherung» pode induzir a uma definição errada da transformação a estudar. Efectivamente, não seria de afastar o receio de que uma parte dos alunos, mais tarde, venham associar a transformação a estudar, ao modelo da tesoura (impressivo, embora inconveniente).

2. Tratemos, agora, doutro critério importante, que vamos encerrar nesta questão:

O lidar com o material poderá permitir uma intuição da estrutura matemática? Ou, se exprimirmos a pergunta sob outra forma:

Em relação às operação mentais, necessárias para a apreensão das estruturas matemáticas, será que o material possibilita manuseamentos «transparentes», ou o resultado destes será, rigidamente, condicionado pelo material?

4

Para o estudo do valor de posição, nos sistemas numéricos, os construtores fornecem material em peças, umas vezes rigidamente ligadas, outras

---

N. T.

* Conservámos a tradução alemã, pois só assim se poderá apreciar a analogia que o professor estabeleceu com «tesoura»: «scher» em alemão. Trata-se de uma transformação afim no plano.

** Como seria o caso, na transformação afim que o professor estaria a querer introduzir.

vezes, em peças soltas que se poderão ligar. Se quisermos executar, num sistema de base 3, a seguinte adição, utilizando material rígido:

$$\begin{array}{r} 112 \\ 22 \\ 11 \\ \hline 211 \end{array}$$

serão necessárias duas manipulações de substituição (3 cubos soltos serão substituídos por uma barra rígida), e 3 barras soltas por uma chapa rígida). O que parece não corresponder a qualquer processo intelectual forçoso e, principalmente, nos primeiros anos, é uma origem frequente de erros.*

Pelo contrário, o processo intelectual do «enfaixamento», com vista ao chamado transporte, é duma «transparência» muito mais directa, ao ser efectuado com a junção de peças soltas. Pode-se, de facto, objectar que a junção, para grandes números, é incómoda; mas, por outro lado, a assimilação dum manuseamento a uma operação mental é mais importante, que a sua economia. Além disso, deve-se notar que não é a grandeza dos números e, consequentemente, a amplidão dos manuseamentos, mas sim, e apenas, a transparência destes, que decide se a pretendida interiorização terá lugar.

3. O critério seguinte: Versatilidade (múltipla lateralidade) dum material, assume, desde logo, dois aspectos:

a) Um material deve ser configurado — na sua estrutura corpórea — de forma a permitir inúmeras formulações de problemas, dentro do sentido do princípio da «variabilidade matemática». (→3.3.1).

5 Para a representação das estruturas lógicas, as barras são, por isso, «unilaterais», porque só permitem proposições sobre comprimentos. De facto, as barras Cuisenaire diferem, ainda, quanto à cor. Contudo existe aqui, entre comprimento e cor, uma correspondência biunívoca: as cores têm, predominantemente, o objectivo auxiliar de permitir distinguir, mais facilmente, os comprimentos.

Nas colecções de fichas devem, pelo menos, figurar três características, independentes umas das outras e escolhidas entre estas: cor, forma, tamanho, espessura, furação, rugosidade, rebordo etc. Aliás, como as experiências de Olver e Hornsby mostraram [10, pág. 102], os alunos preferem, em geral, características funcionais (objectos para comer, puchar etc.).

b) É preferível que um material possa «corporizar», ao mesmo tempo, várias estruturas isomórficas, principalmente aquelas que necessitam um tratamento interrelacionado.

---

* N. T.:
Parece que, neste caso, o autor poria de parte o uso de qualquer chamado «mecanismo de transporte».

Com fichas de vários atributos podem-se esclarecer, correlativamente: estruturas lógicas, teoria dos conjuntos e aritmética (→3.1.6). Além disto, 6
elas, deixam, também, explorar o estudo das estruturas algébricas (por exemplo, com os jogos de transformação) [20, pág. 59 e seg.].

É fácil concluir que este critério não tem só consequências práticas económicas, mas também, a vantagem de tornar mais claras as comparações entre várias estruturas. Não se apresenta, assim, qualquer dificuldade, para uma variabilidade de representação, se esta continuar a referir-se, a uma determinada estrutura.

Um exemplo típico são as duas espécies de material já citadas, para o 7
estudo dos sistemas de valor numérico de posição: Os «enfeichamentos» rígidos só podem representar, sempre, um mesmo sistema, enquanto que unidades soltas, mas conjugáveis, podem aplicar-se para vários sistemas.

Com a versatilidade (lateralidade múltipla) liga-se ainda, na maior parte dos casos, uma outra condição, que se deve pôr ao material estruturado: que ele apresente uma configuração essencial para formas de acção indirecta (→3.4.1): de facto, devem permitir a formulação diferenciada de problemas.

4. As exigências de «Discriminação», «Clareza», «Atracção», «Manuseamento», e «Duração» dum material são compreensíveis, mas nem sempre atendidas.

No primeiro ano, as crianças são, frequentemente, escolhidas para ele- 8
mentos de conjuntos. Isto, para as envolver e permitir mobilidade, em actividades próprias. Porém, ao utilizar certas características, tais como, cabelos louros, camisolas amarelas, cabelos compridos, surgem, muitas vezes, discussões inúteis, e o recurso à decisão do professor. Podem ocorrer, ainda, dificiências de visão entre as crianças.

Se não quisermos restringir a alegria da movimentação das crianças, podemo-nos auxiliar, pondo-lhes, nas mãos, fichas com marcas, que, depois, por questão de clareza, em qualquer altura, podem ser postas de lado.

Nos próprios jornais médicos, se esclarece que a falta de distinção das 9
cores (em 8,7% dos rapazes e 0,5% das raparigas), podem conduzir a desastres. Assim, se não é de dispensar o uso da cor (por razões de estímulo estético, de discriminação e realce), deveremos, contudo, ter em consideração a referida falta, ao avaliarmos as capacidades escolares dos alunos.

Muitas vezes, surgem situações com dois significados diferentes, quan- 10
do se utilizam, sobre o chão ou a mesa, cartões com os símbolos 9,6, $\vee$, $\wedge$, $\cap$, $\cup$. Em tais casos, evitam-se as confusões, por meio de qualquer convenção, ou marcando nos cartões sinais de posição.

Não se deve escolher material muito pequeno, pois se assim for, a 11
maiores distâncias ou sob determinadas perspectivas, não se poderão reconhecer, facilmente, os sinais mais fracos (por ex.º: em fichas com os atributos espesso-delgado, rugoso-liso).

12 Construções com fios (por ex.º de elipses) em folhas do caderno falham, muitas vezes, ao tentar-se obter pontos fixos, por meio de agulhas espetadas. A solução rápida e limpa desta dificuldade consistirá, muitas vezes, em reforçar o verso da folha, com a introdução de mais folhas ou de cartão delgado.

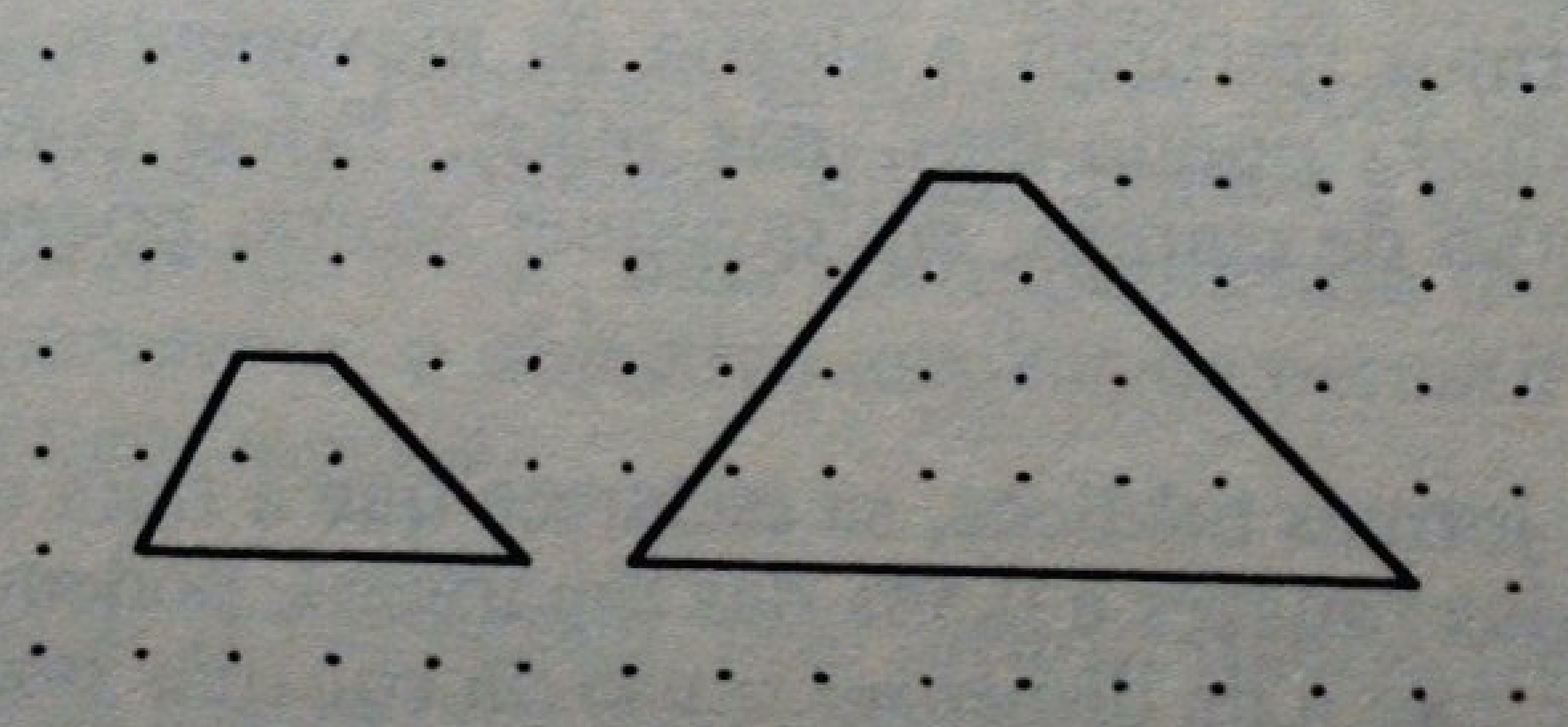
13 Na maioria dos casos, o cartão, como material, é impróprio; principalmente quando não é para ser usado, apenas, uma vez: não só por ser de menor duração, mas, também, porque as legendas (designações, dados fundamentais etc.) não se podem apagar. Se o material se tiver que voltar a usar várias vezes, é recomendável substituí-lo por plástico, de superfices lisas.

5. Os manuseamentos executados com material são facilmente *corrigíveis e invertíveis*? Este critério tem dois alcances:

a) O lidar com material estruturado exige, em geral, um comportamento experimental, que pode trazer, consigo, o erro. Aquele comportamento deverá ser, rapidamente, posto de lado.

b) Segundo Piaget, o raciocínio não será móvel, se não for, ao mesmo tempo, reversível. Se os manuseamentos se não puderem inverter, não se poderá desenvolver aquela configuração reversível.

14 Suponhamos que pedimos aos alunos para num plano, com pontos marcados (segundo a figura a seguir), construirem uma figura maior, mas com a mesma forma (semelhante) a outra, já nele construida. Se as propriedades das duas figuras envolvidas nesta transformação por semelhança não forem ainda conhecidas, surgirão várias tentativas erradas; estas seriam mais difíceis de corrigir, se as figuras tivessem sido desenhadas. Porém, neste caso, poder-se-á empregar um geo-plano*.



Na solução representada na figura, o aluno reconheceu, de facto, que a figura maior não tem a mesma forma da outra (parece «mais regular»), mas não chegou, ainda, à conclusão de que:

— os ângulos correspondentes deveriam ser iguais, o que se determinaria por contagem dos pontos, segundo «direita-esquerda» e «acima-abaixo»:

— os segmentos de recta deveriam ser multiplicados pelo mesmo factor.

N. T.

* Plano (prancheta) com pregos espetados segundo os vértices duma quadricula geralmente quadrangular, e entre os quais se podem esticar elásticos que, facilmente, mudam de posição.

O aluno deveria, então, esticar um elástico entre pregos, balizando a figura procurada e, depois de muita tentativa falhada e da formulação de problemas análogos, teria descoberto, em grande parte por si só, as propriedades duma transformação por semelhança.

6. Já que o aluno está, em grande parte, inserido em formas de acção indirecta, o material deve oferecer-lhe as possibilidades de um autocontrolo. Estas formas de acção libertam o professor que, sem elas, estaria muito sobrecarregado e servem — o que é, ainda, mais importante — para a autoafirmação do aluno.

Em conformidade com este ponto de vista, é de reconhecer o alcance
da «balança de contas», para os dois primeiros anos de aprendizagem. 15
Para algoritmos de «contas», fornecem, de facto, poucos esclarecimentos: apenas uma «estima» aproximada. Porém, através do estabelecimento duma posição de equilíbrio, a balança dá, ao aluno, um controlo próprio aproximado: sobre se ele calcularia certo. Acessoriamente, a balança fornece, também, experiências prévias sobre as leis das alavancas.

O último ponto de vista, a tratar, refere-se, tanto à configuração do material, como à forma de o usar.

7. O material estruturado provoca uma estimulação do raciocínio? Ou, antes deprime-o — como se reconhece frequentes vezes — no caso do material em que predomina a percepção visual?

Para uma lição de introdução do paralelepípedo rectângulo, uma pro- 16
fessora trouxe um modelo, esmeradamente feito, de cartão colorido, no qual as duas faces opostas apresentavam a mesma cor. A partir do modelo, podia-se concluir, sem esforço, que o paralelepípedo possui seis rectângulos, como superfície fronteira, e que os dois rectângulos opostos são iguais.

Levantou-se então, o problema de como construir um paralelepípedo rectângulo:

Um aluno teve, para tal, de cortar o modelo com a tesoura, de forma a obter a superfície planificada completa, diante dos colegas. No quadro, sublinhou-se, com giz, o bordo; marcaram-se as medidas necessárias, e, facilmente, os alunos desenharam a planificação nos seus cadernos.

Foi o caso típico duma lição sobre a qual estaríamos prontos a afirmar:

«Alcançado o objectivo; material de trabalho sugestivo; boa colaboração dos alunos».

Contudo, o valor didáctico duma tal lição deve ser apreciado com rigor:

Através da inserção prematura do modelo antes de cada passo, quase não se puseram, aos alunos, quaisquer exigências sobre capacidades de raciocínio e de representação: os resultados mais importantes puderam ser obtidos sem esforço.

O valor deste modelo não é, de forma alguma, de pôr em causa: porém, ele valorizaria muito mais o 2.º passo, «como se pode obter o sólido?», se este, de cada vez, fosse introduzido, para confirmar, com evidência, as suposições dos alunos.

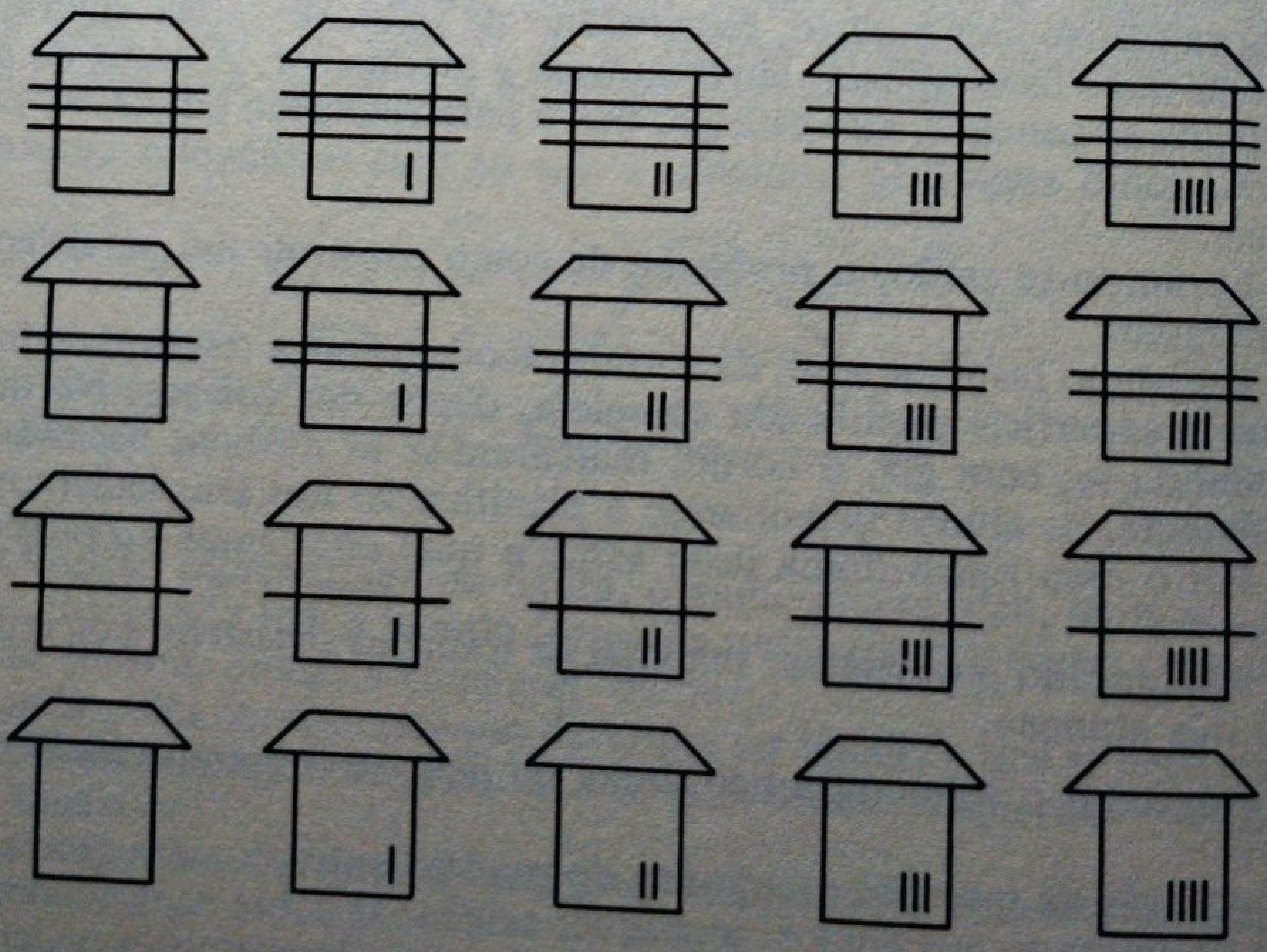
Aliás, mais uma vez se deve acentuar:

Uma lição só, em parte, pode ser avaliada, através dos seus resultados visíveis. O critério mais importante é a extensão do raciocínio que foi posto em jogo, no caminho até esses resultados.

17 É de Bruner que provem a aceitação da hipótese didáctica chamada de «influência nula»*, que enuncia: «Pode-se ensinar qualquer assunto, através duma preparação didáctica óptima, a toda a criança de inteligência normal, em qualquer idade».

Embora, pensemos que nos devemos manter críticos a tal hipótese, queremos, para conclusão deste capítulo, apresentar material estruturado original, com que se tentou iniciar, desde logo, as crianças da escola pré-primária, em sistemas de coordenadas. Aliás, na sua plena utilização o material pode, mesmo, ser empregado na escola primária:

Um ponto de coordenadas (n, m) em que (n, m) $\in$ N x N, é posto em correspondência com uma casa de *n* janelas e *m* varandas. A princípio, as crianças recebem indicações graduais para construir uma cidade, o mais bonita possível, em disposição regular. Depois de um trabalho hábil, com muitas tentativas falhadas, muitas discussões e, relativamente, poucas intervenções da parte do professor da escola pré-primária, resultou, finalmente, a seguinte cidade, disposta sobre o pavimento.

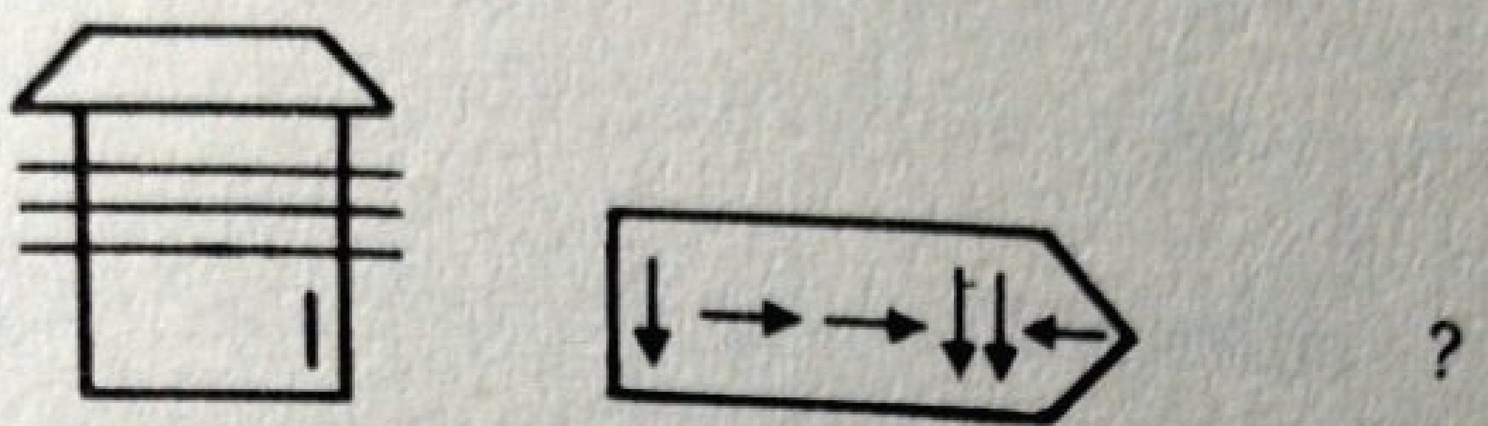


* N. T.
Aquela que tem que ser aceite, porque nada a rejeita.
Vide J. Bruner: O processo da Educação, já citado, pág. 11-12.

Nas Lições seguintes resolveram-se problemas, que tinham várias finalidades:

a) Noções de orientação: para a esquerda, direita, acima, abaixo. Por ex.º: «como se deve deslocar Uwe, se quiser visitar Petra, em casa?»

b) Exercícios de codificação e descodificação. Operadores, simplificação de cadeias de operadores. Relações aritméticas simples, referidas em cartões de trajecto. Por ex.º:



Partida | Bilhete de viagem | Chegada

Por ex.º: com que cartão se chegaria, mais depressa, a um determinado sítio?

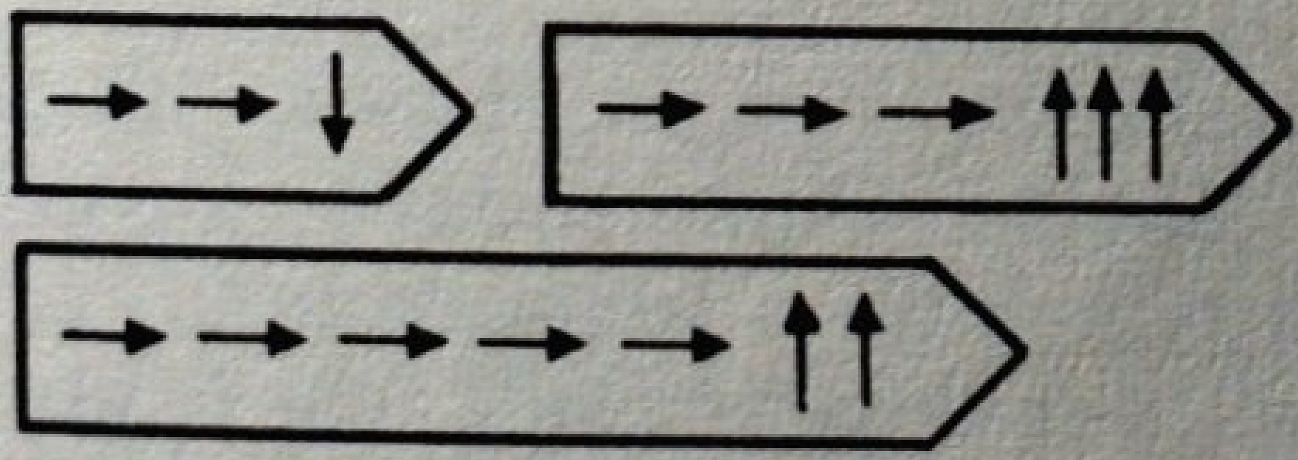
c) Relacionamentos simples de Geometria Analítica (processos de generalização).

Por ex.º: Onde ficam todas as casas que têm tantas janelas, como varandas ($y=x$).

Por ex.º: Onde ficam todas as casas, em que o número das varandas é duplo do das janelas? ($y=2x$).

Por ex.º: O que sucede às casas que ficam sobre a mesma rua horizontal? ($y=\text{const}$).

Por ex.º:



Adição vectorial

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Através da «reflexão da cidade», em torno da fila inferior das casas, depois composta com uma reflexão, em torno da coluna da esquerda, resulta uma cidade que representa pontos da quadrícula Z x Z.

Por intermédio deste exemplo, tenta-se mostrar como, a partir dum material simples. se podem introduzir crianças muito novas em estruturas de vários âmbitos (aqui, relações e operadores; aritmética; geometria analítica; cálculo vectorial).

Novamente, sob a forma global, se resume o capítulo anterior, através duma pergunta:

C_{22}	Os meios materiais para o ensino, introduzidos na lição, estão adaptados ao tema matemático desta?

4.2 *Critérios para configuração e escolha das fichas de trabalho*

Já em 3.4.2, afirmámos que a efectividade do trabalho em grupos depende, muito ou quase exclusivamente, da qualidade das fichas de trabalho — que se tomem como base de formas de acção indirecta.

Se compararmos as fichas de trabalho publicadas pelas editoras, professores etc., notamos diferenças notáveis de qualidade. Extraímos alguns critérios destas fichas usadas em provas de aproveitamento, que podem ser transferidos, para a elaboração das fichas de trabalho, na própria escola, e para a escolha daquelas colecções existentes no mercado.

a) *Critérios referentes à maneira de formular os problemas*

1. A formulação dos problemas é dirigida à flexibilidade do raciocínio? Uma vez que, em 3.3, falámos dos tipos de formulação dos problemas, segundo a sua estrutura, podemo-nos dispensar de considerar este aspecto, no presente capítulo.

Os critérios seguintes referem-se, pois, principalmente, à configuração exterior que assume a formulação dos problemas.

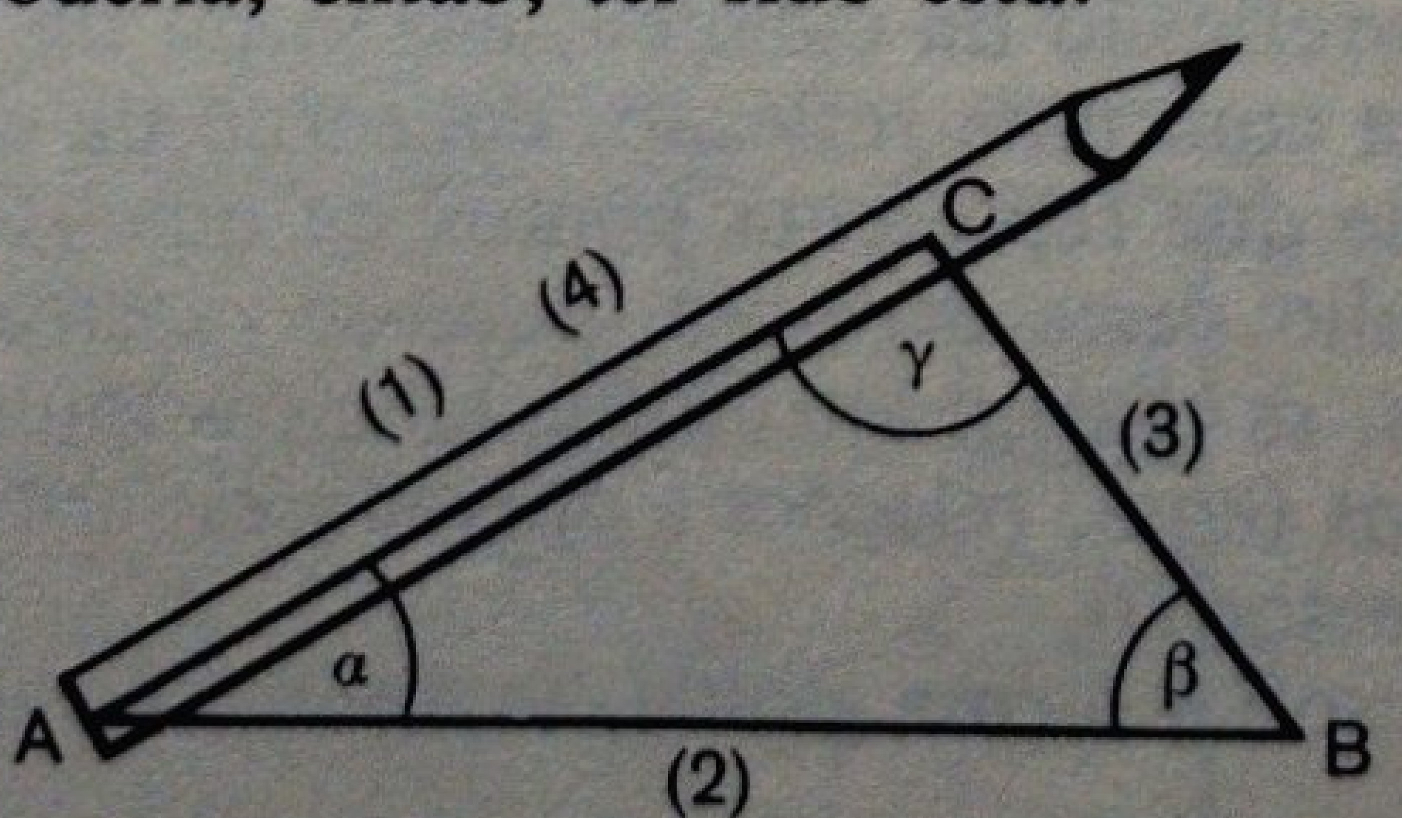
2. O texto introdutório descreve e põe o problema, de forma precisa e «finalizada», bem como o comportamento que se espera do aluno?

Muitos textos são tão detalhados e prolixos, que não dão a conhecer ao aluno o que é essencial, quando ele pretende resolvê-lo. São, também, numerosos os casos, em que o aluno não saberá claramente o que fazer, em determinado passo.

18 Antes de tentarem demonstrar o valor da soma dos ângulos dum triângulo, os alunos devem, em trabalho no lugar, executar, segundo uma ficha, os seguintes exercícios:

«Desenha um triângulo qualquer. Agarra, agora, no teu lápis e desloca-o sobre os ângulos do triângulo. O que podes — a partir do deslocamento total — concluir, com referência à soma de todos os ângulos?»

A maior parte dos alunos sentiu-se desamparada, em frente deste exercício, assim mal formulado e pouco claro (que ângulos?). Uma proposta de aperfeiçoamento poderia, então, ter sido esta:



«Põe o lápis na posição (1)
Dá-lhe rotações sucessivas em torno de A, de B e de C.
Desta forma o lápis descreverá, sucessivamente, os ângulos α, β e γ.
Em que é que se distinguem as posições (1) e (4) do lápis?

De quantos graus rodou, assim, o lápis, na totalidade?»

$$\alpha + \beta + \gamma = \ . \ . \ . \ .$$

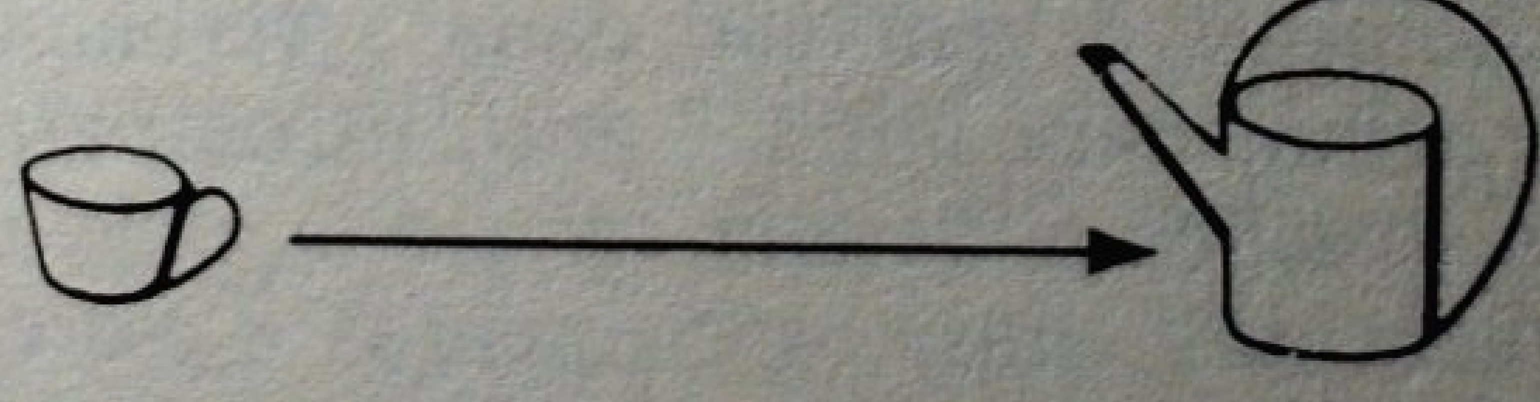
Os problemas e as possíveis formas de comportamento que sugerem aos alunos são, frequentemente, tão complexos, que não se lhes podem tornar compreensíveis, através dum texto sucinto. Em tais casos, há, principalmente, três modalidades de esclarecimento que podem ser abrangidas, pelas seguintes questões:

3. Será que, principalmente nas primeiras classes, e em problemas complexos, o reconhecimento da formulação do problema e do tipo de comportamento solicitado têm apoio, em:
— instruções desenhadas de trabalho?
— «muletas» para a resolução, mas que não dispensam o trabalho essencial de raciocínio?
— exemplos de soluções?

Os esclarecimentos sob a forma desenhada são, no 1.º ano, quase a única possibilidade, porque os textos — mesmo resumidos — são lidos e compreendidos, com dificuldade.

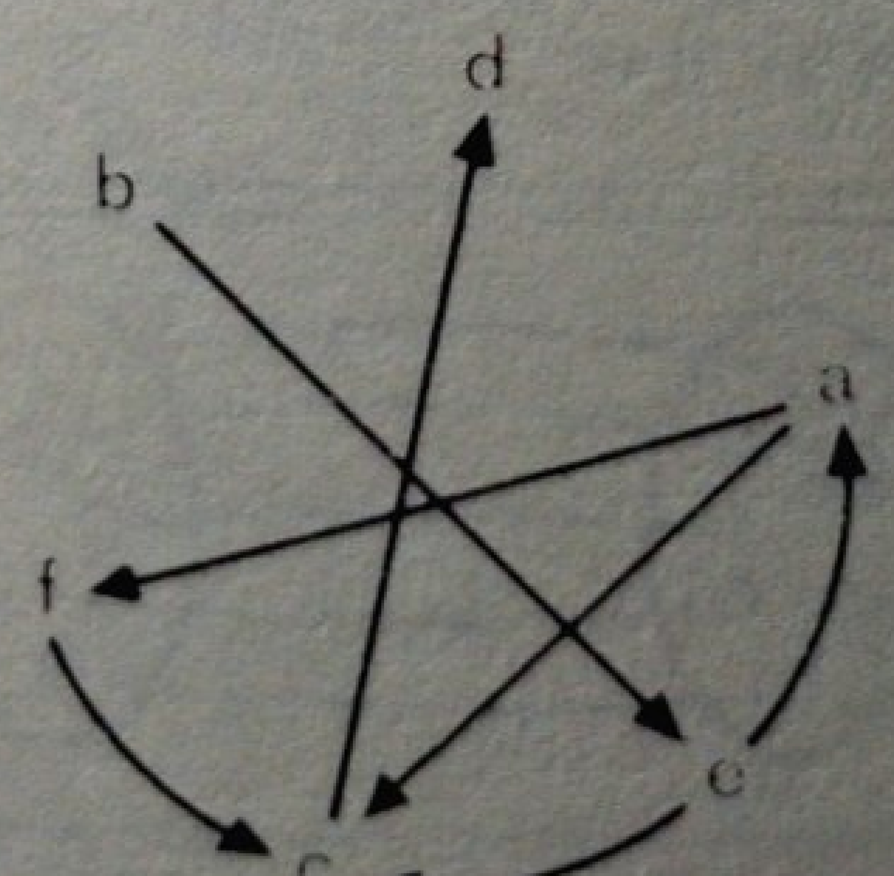
É, também, Dienes que escreve [18, pág. 1]: «Quanto mais novas são as crianças, mais importantes são os desenhos, em ligação com o texto. Sucede que o significado dum esclarecimento só poderá provir de figuras. Estas são as melhores fichas de trabalho».

O exemplo seguinte é extraído duma lição para a introdução, a um 3.º ano, das medidas de capacidade.



Em ... entra menos água do que em ...

19



1) Em que vasilha «cabe» mais água?
. . . .
2) Que vasilha tem a menor capacidade de todas?

3) Coloca as vasilhas, segundo capacidades cada vez maiores.

. . .→ . . .→ . . .→ . . .→ . . .→ . . .→
1 2 3 4 5 6

4) Descobre algumas das 8 flechas que ainda faltam, no esquema acima.

Através do esclarecimento (figurativo) dado pelo significado das flechas e através da representação gráfica (não verbal!) do problema, o aluno pode concentrar-se no processo essencial do raciocínio.

20 Uma ficha de trabalho dum 5.° ano, apresentou o seguinte exercício preliminar, antes do tratamento das adições das classes-resto módulo 4:

«Exercício 3

Pela Páscoa uma família com 4 crianças recebe dum vizinho e do tio Paulo um presente de ovos. Quantos ovos ofereceu cada um deles, de maneira a poderem ser repartidos, igualmente, pelas 4 crianças?»

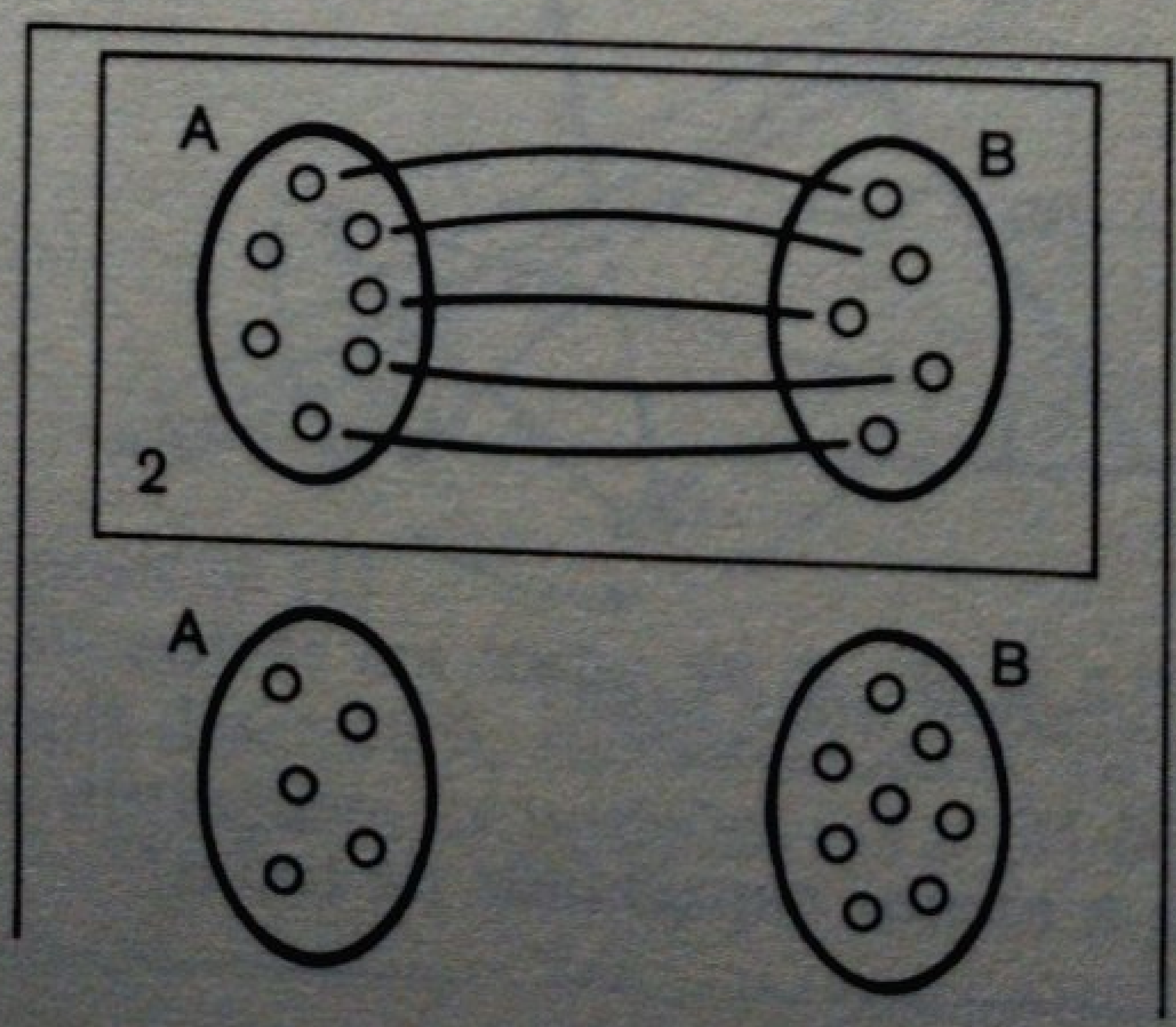
Muitas destas contentaram-se com a indicação dum par de números; para algumas, ainda demorou bastante tempo, até elas atingirem uma primeira tentativa de notação; e a maioria pensou assim: «24 ovos podem-se dividir; por isso eu escrevo, por exemplo 11 e «acrescento-lhe» 13». Sem pensarem, sequer, numa adição de classes resto.

O projecto dum quadro parcial de soluções, como o seguinte, teria estimulado as crianças, para um raciocínio mais alargado:

Tio Paulo	$11 \in \overline{3}$	$\ldots \in \overline{2}$	$\ldots \in \ldots$	$\ldots \in \ldots$
Vizinho	$13 \in \overline{1}$	$\ldots \in \ldots$	$28 \in \ldots$	$\ldots \in \ldots$
conjuntamente	$24 \in \ldots$	$\ldots \in \ldots$	$\ldots \in \ldots$	$\ldots \in \ldots$

21 Muitas vezes é aconselhável apresentar um problema sobre o assunto, acompanhado da indicação da via para a resolução. Noutros casos, as instruções para a solução devem ser dadas, verbalmente. Por exemplo, tratando-se deste tema, para um 1.° ano, «Comparação de potências de conjuntos», as instruções poderiam ter sido: «Põe em correspondência, aos pares, por meio de linhas, os elementos e escreve, para o conjunto com maior número de elementos, quantos é que ele tem a mais!»

O professor, porém, substituiu aquelas instruções pelo exemplo seguinte, inserido à «cabeça» da ficha:



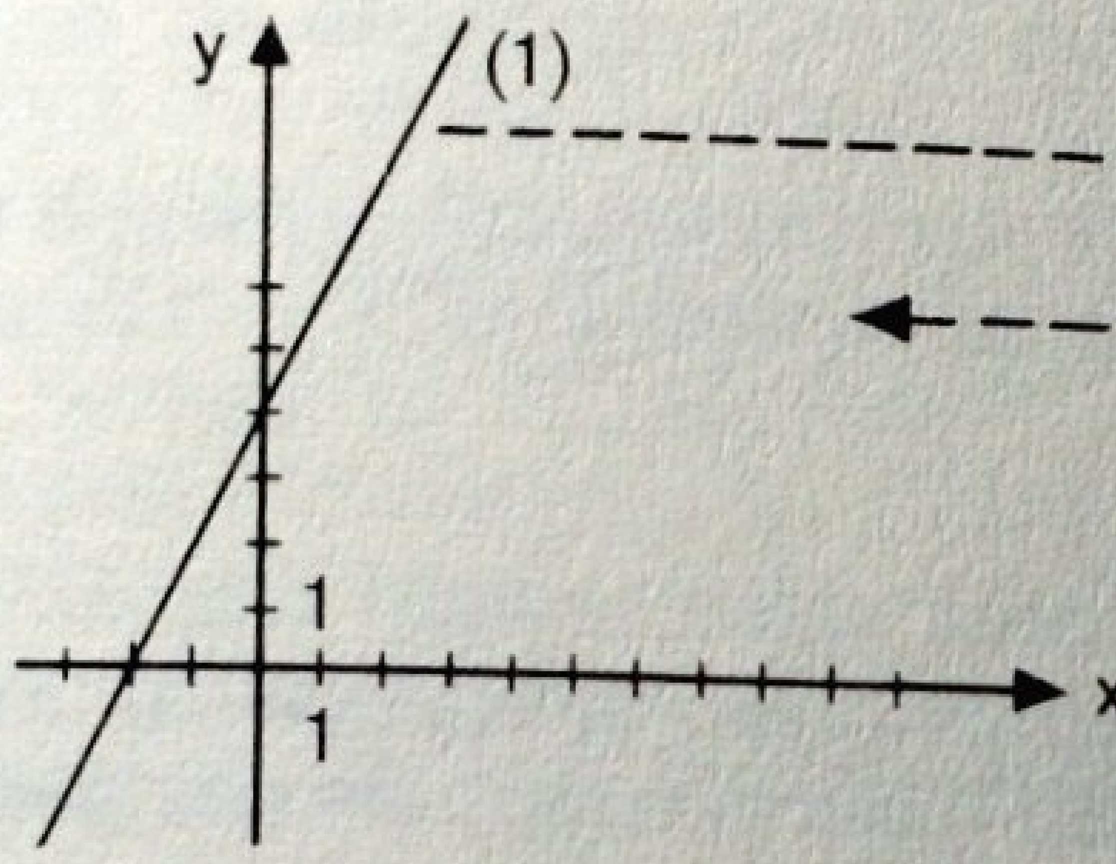
b) *Critérios respeitantes à resolução do problema*

A seguir mencionam-se alguns aspectos que se referem, principalmente, à resolução duma ficha.

4. *A ficha está organizada, com clareza, e poupa ao aluno uma parte — que não é essencial — do trabalho de escrever e de desenhar?* Pode, assim, o aluno concentrar a reflexão sobre o essencial da situação?

De seguida, reproduzimos uma ficha, em que as respostas a estas perguntas são afirmativas. Foi aplicada numa lição prática sobre o tema «Sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas», e adapta-se, através da sua composição flexível, à natureza do assunto.

Completa o gráfico junto e o sistema de equações respectivo.
b) Calcula, algebricamente, o conjunto de soluções. 22



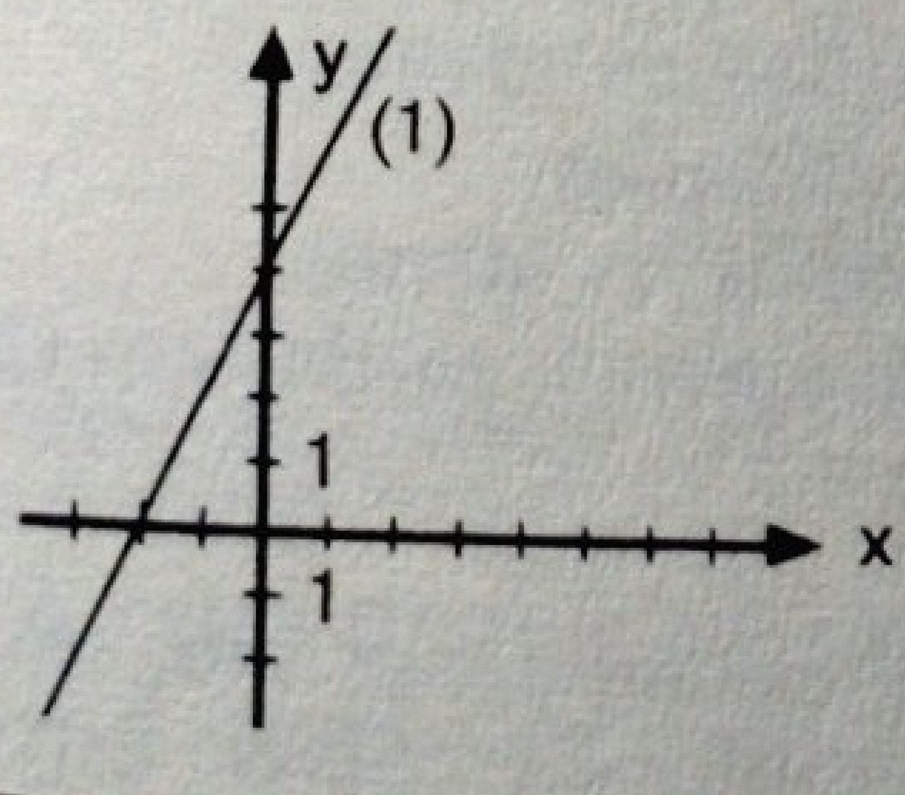
(1) $y = \dots\dots\dots\dots$

(2) $2x + y = 1$

$L = \{\dots$

c) A equação (2) deve ser alterada, de tal modo que as rectas que representam as equações (1) e (2) fiquem simétricas, em relação à recta $x=0$.

Determina, graficamente, e verifica, por cálculo, o ponto de cruzamento das duas rectas.



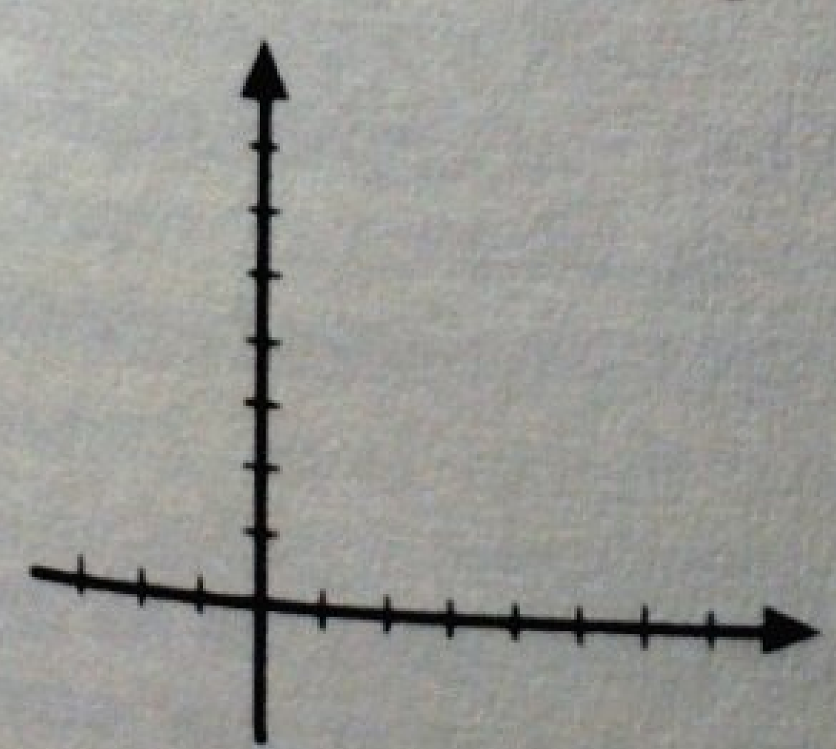
(1) $y = \dots\dots\dots\dots$

(2′) $- - - - - - - - - -$

$L = \{\dots$

d) Preenche nas seguintes equações, quando possível, os lugares marcados, de maneira que o conjunto das soluções seja o conjunto vazio. Em que casos é que isto não é possível?

Traça os gráficos, para controlo.



a) (1′) $\square \cdot x + 2y = 3$
(2) $2x + y = -1$

b) (1″) $\frac{x}{3} + \square \cdot y = \frac{1}{3}$.
(2) $2x + y = -1$

c) (1‴) $2x + 2y = \square$
(2) $2x + y = -1$

c) Como é possível, num sistema de 2 equações lineares a duas incógnitas, reconhecer, rapidamente, se ele tem uma solução?

As nossas observações poderiam confirmar a importância da configuração duma ficha de trabalho no processo de aprendizagem: Assim, muitas crianças dum 1.° ano falharam em exercícios para preenchimentos gráficos de diagramas (cada um de 3 conjuntos), quando dois destes diagramas apareceram na mesma página. Mas trabalharam sem erros, quando se lhes apresentou um só diagrama de 3 conjuntos numa só página, mas em tamanho duplo.

5. A ficha está organizada de tal forma que os alunos podem *controlar o seu próprio trabalho?*

Para o conseguir, existem duas possibilidades:

1) Manda-se trabalhar no problema, segundo dois aspectos matemáticos, um deles logo a seguir ao outro; por exemplo: o numérico e o gráfico, como em 22, ou por cálculo numérico e por operação de conjuntos (→3.5.1, 119).

2) Escolhem-se os problemas de tal maneira que, sob o mesmo tipo de tratamento matemático, permitam vias diferentes (→3.3.5 «Formulação de problemas, em associação»).

6. As fichas de trabalho permitem uma *diferenciação interna?*

Além doutras vantagens, as fichas apresentam uma essencial: a de permitirem uma diferenciação interna muito mais extensa, do que por actividades directas.

Para tal, sob o aspecto exterior, são possíveis várias modalidades:

1) Para os diversos níveis de capacidade dos grupos, fornecem-se fichas de trabalho diferenciadas.

2) Algumas fichas são trabalhadas por todos os alunos.

Acessoriamente, fornecem-se fichas diferenciadas.

3) Todas as fichas são trabalhadas por todos os alunos.

Contudo, para finalidades de diferenciação, alguns problemas são assinalados em especial.

As vantagens e inconvenientes das várias modalidades são, em parte, evidentes e não as mencionaremos aqui. O sistema a escolher, dependerá, em geral, da organização escolar, da própria escola e da turma.

A seguir, trataremos, rapidamente, da forma de diferenciar as questões.

Se analisarmos fichas de trabalho, no sentido duma diferenciação interna, confirma-se, frequentemente que: aos alunos de capacidade mais fraca se dirigem, predominantemente, as questões de técnica de resolução e, aos mais capazes, os problemas que requerem mais capacidade de raciocínio.

Um tal sistema é, fundamentalmente, de pôr de lado, pois ele só levará o raciocínio já, geralmente, rígido dos mais fracos, a um maior atrofiamento. Por isso, os problemas tratados em 3. 3, que se referem à exploração raciocinada dum assunto do programa, se destinam a grupos de todos os níveis de capacidade.

Uma diferenciação interna pode recorrer, principalmente, às seguintes disposições:

1) Abranger o conjunto dos aspectos, a que uma questão deve atender, simultâneamente. Já neste sentido, no capítulo 3.4.1, indicámos um exemplo (o 111).

Uma outra característica refere-se, principalmente, — nos casos em que há que recorrer a muitas operações numéricas — à escolha de relações numéricas simples. O aspecto do cálculo é, assim, remetido para um plano secundário, de maneira a permitir que os alunos mais fracos se concentrem sobre a estrutura interna da questão.

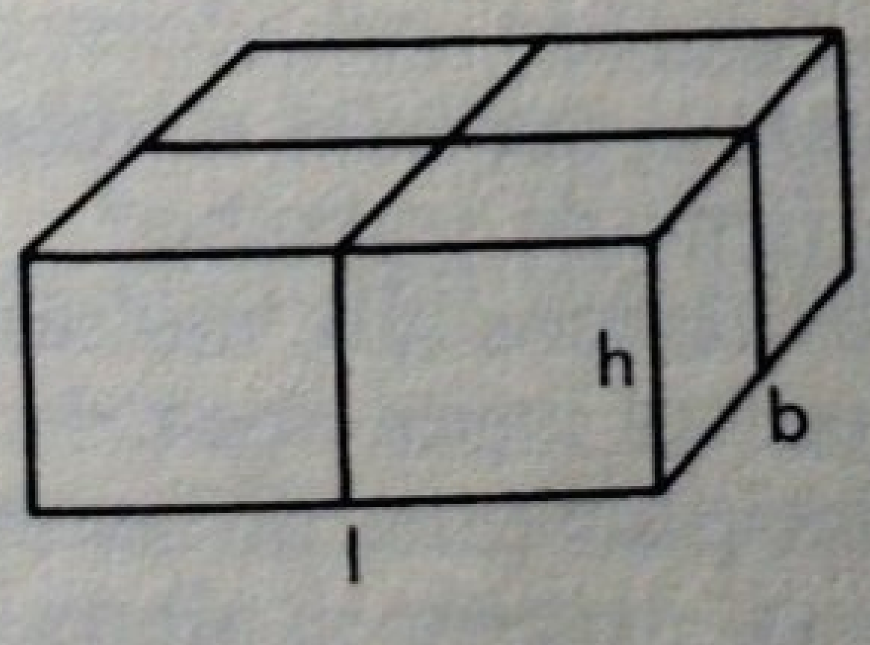
Indicamos, a seguir, a formulação funcional dum problema; nela veremos como se podem alterar os seus aspectos.

Numa turma do 5.° ano, calculou-se, em primeiro lugar, o compri- 23
mento de cordel necessário, para atar uma caixa com 40 cm de comprimento, 30 cm de largura e 20 cm de altura; para o nó e desperdícios são, ainda, necessários 25 cm.

O resultado proviria da relação:

$L = 2l + 2b + 4a + r$

Através da seguinte formulação do problema, em termos funcionais, introduziu-se, de cada vez, um novo aspecto:



a) Deve-se contar com mais 7 cm de desperdício:
$L + 7$ cm (1.° aspecto)

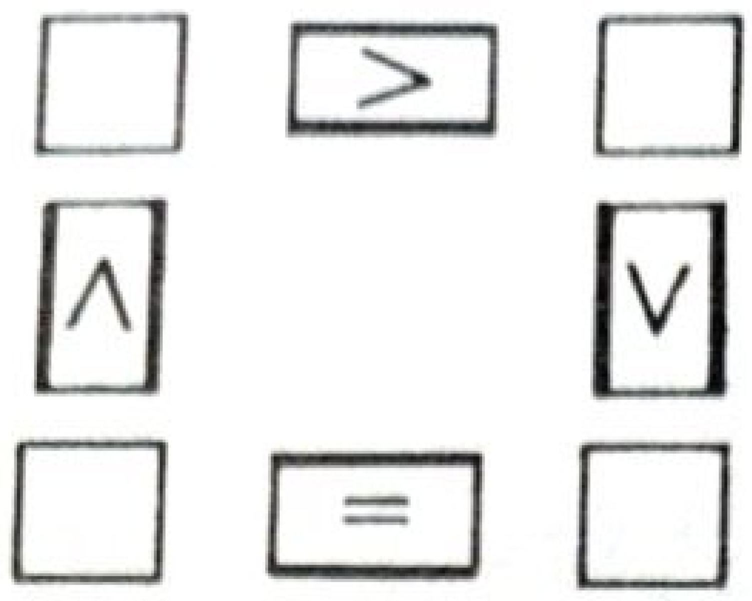
b) A caixa terá, agora, mais 3 cm de altura:
$L + 4.3$ cm (2.° aspecto)

c) A caixa levará, ainda uma volta completa do fio a meio da altura:
$L + 2(l + b)$ (3.° aspecto)

Através de combinações de a) b) e c) obtém-se, simultaneamente, 6 aspectos.

Um outro exemplo, aplicado a um 1.° ano, indica como se pode restringir o número de aspectos, através da restrição do conjunto universo.

Observámos que, na questão seguinte, de ocupar os lugares vazios com 24
números, as crianças mais fracas faziam um preenchimento ao acaso e que se mostravam incapazes de reconhecer as falhas de solução a que chegavam.



Quando fornecemos à crianças os 4 cartões $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{2}$, $\boxed{7}$, para preencherem os lugares vazios, a incapacidade de resolução cessou, imediatamente.

2) Também o plano de representação, em que o problema e a sua solução são apresentados, influem, essencialmente, sobre a diferenciação interna. Nesta conformidade, o plano simbólico-verbal requer, em geral, condições mais exigentes, do que o figurativo ou, simplesmente, o manipulatório. Assim, no exemplo anterior, influi também este facto: A colocação livre dos cartões — que, de cada vez, é imediatamente corregível — facilitou o processo de aprendizagem, em comparação com o comportamento mais moroso, sujeito a ter que escrever e apagar números.

O exemplo 19 seria, essencialmente, mais difícil, se as 7 proposições, expressas por setas no diagrama, fossem cada uma delas indicada por uma expressão verbal.

Para mais exemplos, remetemos ao capítulo 3.1.

O critério seguinte aplica-se, principalmente, às fichas de instrução primária:

7. Os manuseamentos com o material estruturado podem ser executados, directamente, sobre a ficha de trabalho?

Ora sobre estas fichas, os campos são, muitas vezes, tão pequenos que, os manuseamentos só podem ter lugar, fora delas.

Neste caso, surgem, principalmente, dificuldades de transposição e de perdas de tempo. Além disso, perdem-se ainda os apoios para o raciocínio, que a ficha poderá dar, através do enquadramento das questões. Se, pois, por razões de espaço, o manuseamento se tiver que fazer fora da ficha, é de recomendar o uso de cartões, em que os campos de manuseamento serão desenhados em ampliação. Estes cartões serão, eventualmente, introduzidos mais duma vez.

Um exemplo deste processo são os diagramas de conjuntos apresentados em 3.2.1

Uma vez que o aluno, através do trabalho com as fichas, deve chegar — o mais independentemente possível da acção do professor — a apreender a resolução do problema, aquelas fichas devem, para este efeito, proporcionar vários apoios.

A estes se refere o critério seguinte:

8. Usam-se, nas fichas de trabalho, *processos gráficos que estimulam a compreensão?*

A alunos dum 7.º ano foi apresentada a seguinte ficha, sobre as propriedades das relações: 25

«3 é menor do que 5; 5 é menor do que 9; então 3 é, também, menor do que 9».

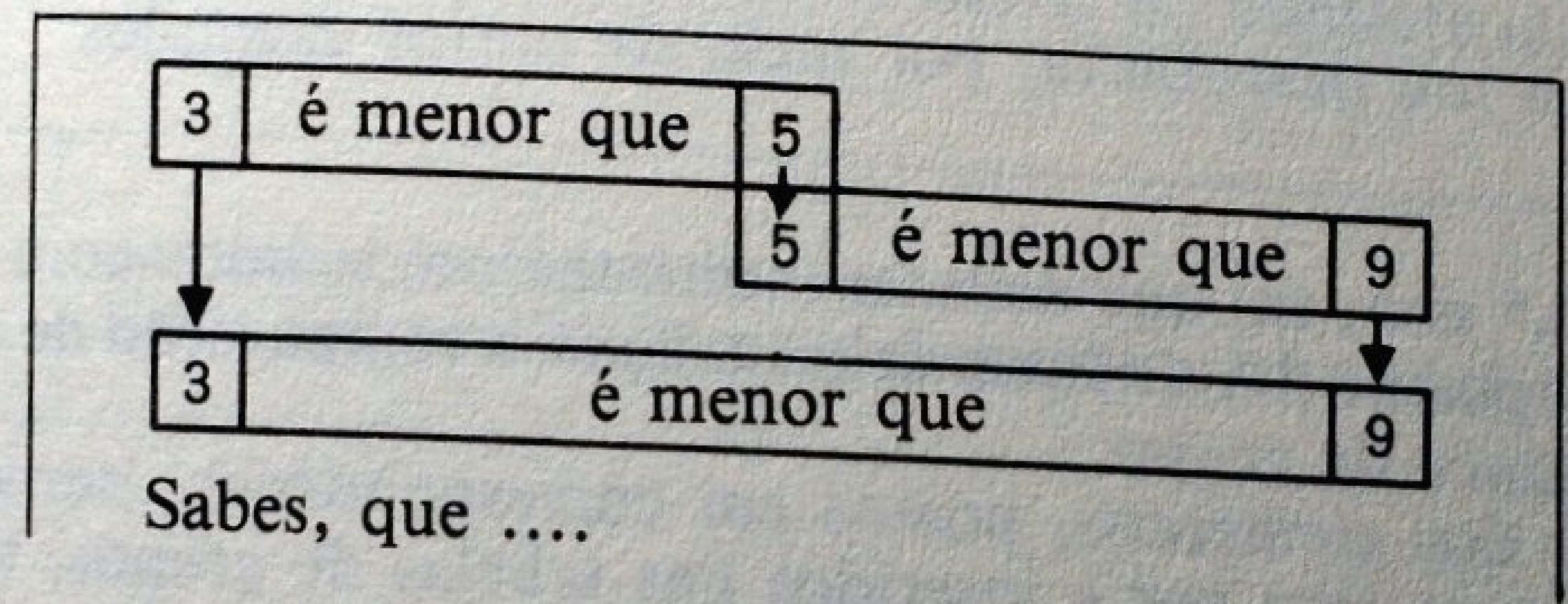
Sabes que tal relação se diz transitiva. Investiga, agora, através de exemplos, a transitividade das seguintes relações:

... é maior do que ... (no conjunto dos números naturais)
... é igual ao meio de ... (no conjunto dos números naturais)
... é pai de ... (no conjunto dos membros duma família)
... é perpendicular a ... (no conjunto das rectas do plano).

Então, muitos alunos mostraram não terem compreendido a questão (muito embora, por acaso, como no seguinte exemplo, tivessem dado a resposta certa):

«7 é maior do que 6 e 5 é maior do que 4
7 é também maior do que 3
transitiva!»

A partir daqui, na classe paralela, alterou-se a ficha.
Forneceu-se aos alunos o seguinte apoio gráfico:



Através do exame das resoluções, reconheceu-se que, a partir de agora, mais alunos tinham aprendido a estrutura da transitividade.

Conclusões análogas se colheram dos seguintes exemplos:

A partir de trabalho em grupo sobre fichas, os alunos dum 3.º ano, teriam que reconhecer a compatibilidade da adição, com referência à relação «a é da mesma classe de b, divisor 4», (a, b $\in$ N). No lugar do símbolo da classe de resto, $\overline{2}$, por exemplo, utilizou-se $\boxed{R\,2}$, que era reproduzido nas caixas que continham os números com este resto. 26

Concepção primitiva

Exercício 3

Retira, por várias vezes, das duas caixas, diferentes números e compara as somas. Que notas?

$\boxed{R\,2}$ $\boxed{R\,1}$

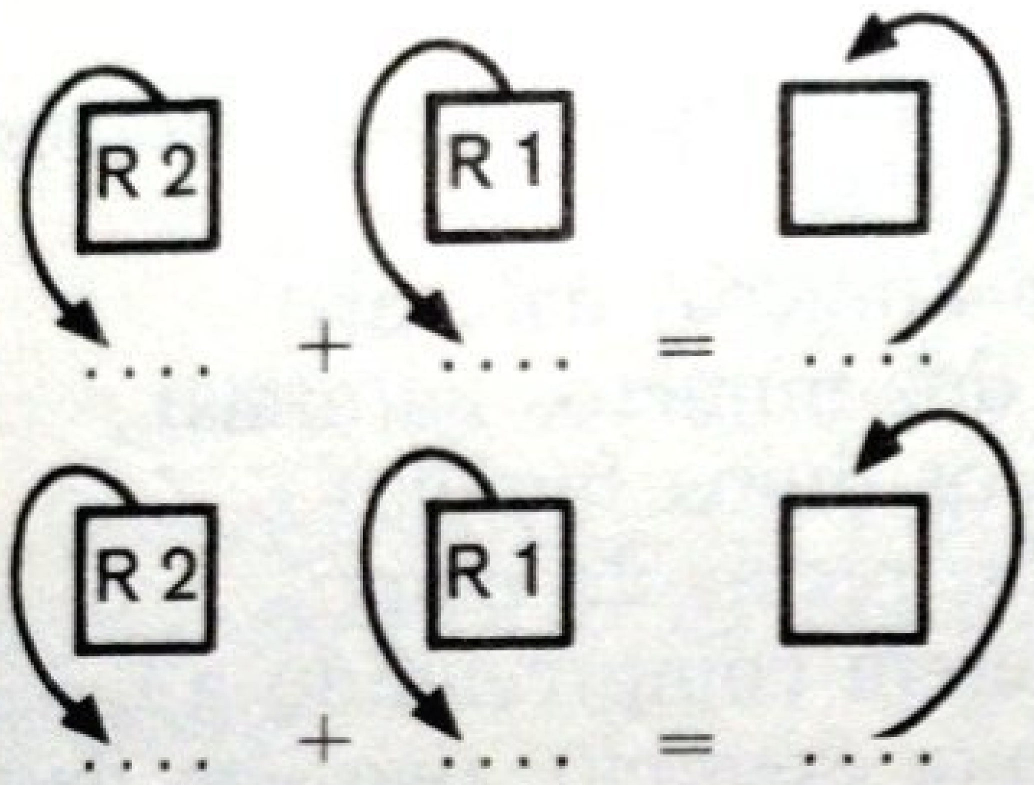
Concepção aperfeiçoada

Nesta, recorre-se, claramente, a:

— Definição das classes resto para a adição, e as operações em que se baseia.
— Os relacionamentos entre os conceitos de classe resto e os seus representantes:

Exercício 3

«Retira de cada uma das classes resto, por várias vezes, alguns números!»



«Que te parece?»

Prova a tua descoberta, por meio de outros exemplos.

27 Num 3.º ano, em que durante muito tempo, se lidou com vários modelos de «grupos de 4», dedicou-se uma lição à comparação de uma determinada estrutura de grupo.

Depois dos elementos, postos em correspondência isomórfica, serem pintados da mesma cor e inseridos nas tabelas de grupos, tornou-se evidente:

— A isomorfia do grupo A (rotação com sobreposição dum quadrado) e grupo B (classe resto, módulo 4);

∘	g	v	h	d
g	g	v	h	d
v	v	h	d	g
h	k	d	g	v
d	d	g	v	h

⊕	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

∘	g	k	h	l
g	g	k	h	l
k	k	g	l	h
h	h	l	g	k
l	l	h	k	g

— O facto do grupo C (transformação com sobreposição dum rectângulo) ser de espécie diferente dos anteriores: (grupo cíclico de 4 — grupos de Klein de 4)

Correlativamente, os resultados do trabalho foram discutidos, com auxílio do rectro-projector. Para tal, as três tabelas foram copiadas em folhas transparentes, os elementos correspondentes rodeados da mesma figura geométrica e, depois, levados à sobreposição.

A isomorfia de dois grupos finitos foi, assim, remetida para a possibilidade de os dispor em duas tabelas, de tal forma que, por sobreposição, se verifique uma coincidência de configuração.

Finalmente, o último critério que é, geralmente, cumprido:

9. As fichas de trabalho podem ser usadas, para *controlo e avaliação das capacidades?*

Diremos, a este respeito, que o uso das fichas constitui, para o professor, uma das possibildades mais válidas de controlar o tipo e o nível de capacidade dos alunos.

Se a ficha serviu só como campo de exercícios, e não como registo de comportamentos, aquele controlo e avaliação só serão possíveis, através doutra anotação muito continuada, do comportamento dos alunos. Note-se, porém, que não só neste caso, mas ainda fundamentalmente, em todos os trabalhos — quer em grupo, a dois, ou isoladamente — aquele controlo e avaliação devem ser, sempre, completados, através de várias observações. Observações estas que não se devem referir, apenas, a resultados de exercícios, mas sim, também, aos comportamentos socializados e às atitudes assumidas, perante os problemas, na medida em que representam uma parte essencial das capacidades do aluno.

Os diferentes aspectos devem ser resumidos, no seguinte critério:

C_{23}	Adoptam-se fichas de trabalho? Estas apresentam uma elaboração adequada?

4.3 *Critérios para a escolha e uso de livros escolares.*

A questão dos critérios a que deve obedecer a escolha dos livros escolares é, para o professor, de permanente importância. Por motivo de acentuadas mudanças de professores e da sua didáctica — ainda em progressivo desenvolvimento — deve-se empreender uma nova e continuada orientação, sob os aspectos da ciência especializada a ensinar e da sua metodologia didáctica.

Neste permanente aspecto de mudança, é importante que o livro apresente padrões aferidos para avaliar, escolher e aplicar as novidades.

Sob este aspecto, deve-se considerar abrangido o catálogo de critérios adiante indicado.

Em primeiro lugar, porém, esclareceremos dois pontos de vista, de especial importância:

1) É de estabelecer, hoje, quanto ao livro de ensino, que se afaste do tradicional esquema do livro escolar, o qual, escrito simultâneamente para o aluno e para o professor, não apresenta, muitas vezes, um compromisso feliz devido às discrepâncias entre as exigências fixadas e as possíveis. Josef Lauter na sua obra «Critérios para, na escola primária, trabalhar em Matemática com o livro de texto, [45, pág. 60], esclarece que, há hoje, uma divisão entre:

a) Fichas de trabalho para o aluno, com possibilidades de aditamentos e do tratamento isolado de problemas matemáticos especiais. (Podem, assim, ser utilizadas de uma forma variável e individual).

b) Manual para o professor, com intensivas informações científicas, de didáctica especial e de métodos.

2) É de consagrar uma especial atenção à espécie de organização de exercícios, pois esta condiciona, essencialmente, a efectividade do ensino da Matemática. De certo, os livros actuais para este ensino são enriquecidos com novos assuntos e acompanhados de instruções para os professores, em que se acentua, também, a referência a novas correntes psicológicas e didácticas. Porém, na elaboração dos problemas pouco se alterou: duma maneira geral, referem-se, apenas, a uma colecção de exercícios orientada para um determinado tema, mas, em grande parte, sem ligação uns com os outros. A necessidade, tão acentuada, de aprender, segundo relacionamentos não é atendida, de forma alguma.

Portanto, neste ponto, o caminho recomendável será: Para um determinado tema, extraír do livro um problema qualquer, e desenvolvê-lo, num complexo de formulação de vários outros, segundo os aspectos descritos em 3.3. Apresentamos, aqui, um exemplo aplicado a um 3.º ano:

28 Num livro escolar, encontra-se o seguinte problema:

«Nas férias, Klaus e Sigrid quiseram visitar a tia, em Glucksdorf, afastada 72 km. Viajaram de bicicleta e percorreram, por hora, 12 km. No trajecto, quiseram descansar 2 horas. Partiram às 7.30. Para que horas poderia a tia contar com eles? (Resultado: 15 h e 30 m).

No lugar de, agora, na sequência deste problema, apresentar outro diferente, o candidato a professor propôs, aos alunos, outros, mas sempre referidos ao problema inicial e dirigidos à exploração, dinâmica e mental, da estrutura deste.

Formulação funcional do problema.

a) Por causa dum desvio, Klaus e Sigrid tiveram de percorrer mais 6 km.

b) Klaus e Sigrid lutaram com vento contrário e só puderam percorrer, por hora, menos $\frac{1}{3}$ dos km, acima indicados.

Formulação funcional e, ao mesmo tempo, associativa:

c) Devido a Klaus não ter a bagagem pronta, a partida adiou-se de 40 mn. No caminho, viram aproximar-se a ameaça de uma trovoada, de maneira que Klaus e Sigrid encurtaram o descanso de $\frac{3}{4}$ de hora.

1.º processo (15.30 + 0,40) — 0,45
2.º processo (15.30 — 0,45) + 0,40
3.º processo 15.30 + (0,40 — 0,45)*

Formulação reversível e, simultaneamente, aberta:

---

*N. T.
Mantemos os dados do original, embora deles resulte, para o parêntese, um valor negativo.

d) Klaus e Sigrid só chegaram a Glucksdorf às 17 h e 30 m. Qual poderia ter sido a causa?

Os alunos, não habituados a tais problemas, chegaram contudo, com o auxílio do professor, a formular as seguintes causas:

— Talvez Klaus e Sigrid tivessem adormecido e partido, somente, duas horas mais tarde.
— Talvez tivessem tido uma avaria no trajecto e perdido, assim, 2 horas.
— Talvez tivéssem feito um desvio de 24 km, para visitar uma aldeia ou um velho moinho.
— Talvez, devido ao calor, tivessem andado só 9 km por hora, no lugar de 12.

As respostas dos alunos indicaram, de facto, que estes, só na sequência de problemas adicionais, chegaram à apreensão nítida do original, o que não teria acontecido, se tivessem transitado bruscamente para outros problemas.

A seguir agruparemos, em forma de catálogo, uma sequência de pontos de vista, que podem ser considerados, na apreciação de obras para o ensino. A enumeração não pretende ser completa.

1) *Desenvolvimento exterior da publicação*

a) Livro para o aluno (Configuração clara, sugestiva?) Fornece recapitulação e exemplos típicos de resoluções.?
b) Fichas de trabalho (Permitem formas de acção indirecta? Permitem uma diferenciação interna? → 4.2)
c) Material para o professor (Fornece, em quantidade suficiente, informações científicas, da especialidade, de didáctica especial e de metodologia?)
d) Material de trabalho (Cumpre os critérios referidos em 4.1?)

2) *A publicação para o ensino, sob o aspecto científico especializado.*

a) Correcção (Na apresentação detalhada? Na construção global?)
b) Âmbito (Está adaptada a um ano escolar? Ou obriga o professor a frequentes interrupções e escolhas?)
c) Estilo formal (Está adaptada à idade dos alunos ou é excessivamente formal?) [5, pag. 59]
d) Está de harmonia com o programa em vigor?

3) *Intenções da publicação*

Cada um destes aspectos é tido, suficientemente, em conta?

a) O raciocínio matemático.
b) Os conhecimentos matemáticos.
c) Os aspectos exteriores especializados.

d) O controlo da aprendizagem (Os objectivos largos e os mais afinados da aprendizagem são indicados de forma controlável? Dão-se indicações para o controlo escrito, provas de turma?)

4) *Metodologia da publicação*

a) Motivação e «problematização» (Fornece-se uma quantidade suficiente de propostas claras?)
b) Formulação dinâmica dos problemas (No sentido de 3.3?)
c) Sequência de assuntos metodicamente organizada (No sentido de 3.6?)
d) Apresentação variável do assunto (No sentido de 3.1?)
e) Possibilidade de formas de acção indirecta? (→ 3.4.1)
f) Possibilidade de diferenciação interna?

5) *Aspecto económico da obra*

a) Preço
b) Resistência ao uso
c) Utilização posterior (A obra será, utilizada, vantajosamente, nos anos seguintes?)

5. Prática da Planificação e Apreciação do Ensino

A planificação e a apreciação* do ensino devem depender, intimamente, uma da outra. Isto pode, antes de mais, suceder, se as instâncias de apreciação (Inspector, Direcção Escolar, Orientador da disciplina...) derem indicações detalhadas sobre a escala de apreciação. Tal indicação parece tanto mais necessária, quanto as instâncias apreciadoras, geralmente, atribuem aos vários critérios isolados um peso diferente.

A propósito da apreciação, encontram-se, frequentes vezes, os quatro centros seguintes de gravidade de critérios:

a) A correcção científica

b) A construção dum saber global científico, tendente para um objectivo.

c) A afirmação da independência original dos alunos em descobrir, raciocinar e progredir.

d)Comportamentos exteriores facilmente evidenciáveis, como, em geral: um trabalho intensivo de colaboração com os alunos; bom contacto do professor com a turma; uma alternativa, bem compensada, de formas de ensino; cumprimento exacto dos capítulos do programa; boas figuras (no quadro).

No capítulo 5.2, no que chamaremos os «guiões» de apreciação, resumimos os principais critérios de apreciação, que poderão servir, como base, para uma escala de apreciação global, que evite a parcialidade.

5.1 *O desenrolar do plano do ensino*

De acordo com as várias circunstâncias, o plano de ensino a desenvolver pelo candidato a professor ir-se-á exprimir, sob várias formas:

1) Um desenrolar global (por exemplo, com provas e classificação de aproveitamento fixadas).

2) Esboços de planos, subordinados a prazos.

3) Breves apontamentos sobre o desenrolar do estudo, nos seus passos essenciais (principalmente, para uso pessoal).

A seguir apresentaremos um esboço de projecto de enquadramento duma planificação do ensino da Matemática. No que se refere à extensão a dar a esse projecto, há diferenças essenciais de concepção.

---

* N. T.
Empregamos, aqui, o termo «apreciação», em tradução de «Beurteilung» e não o de «avaliação», por se tratar, neste caso, duma apreciação do ensino dado pelo professor. Daremos ao termo «avaliação» uma conotação ligada aos resultados da aprendizagem, verificada junto dos alunos.

O autor recomenda uma limitação a cerca de 4 páginas, levando títulos chave e nas quais as observações gerais a ter em conta, mas que não digam respeito, propriamente, às lições, podem ser escluídas. Em determinadas circunstâncias, pontos parciais só mencionados no prefácio, podem ser abandonados, se não derem origem a qualquer proposição essencial.

Projecto geral (expresso em 4-5 páginas) para uma planificação do ensino

1. *Temática*

Reprodução breve das principais definições e teoremas que constituem o núcleo matemático do tema. Justificação dos principais relacionamentos interdisciplinares.

Pontos de vista, para além da especialidade, ou ligados com esta.

2. *Condições antropológicas e sócio-culturais*

Aqui, podem ser tratados, entre outros, os seguintes aspectos:

— Condições mentais e, eventualmente, psicogenéticas dos alunos.
— Capacidades e disposições para a Matemática, a desenvolver segundo a planificação desta lição.
— Relações do professor com a turma.
— Composição da turma.
— Hábitos da turma (organização, comportamento, etc.)
— Cumprimento do programa de ensino.

Observação: Muitos projectos entram, neste capítulo, na explanação de lugares comuns e de generalidades que se devem evitar, dentro do plano duma preparação económica do ensino. De facto, só devem ser abordados pontos que, na aula, levem a medidas extraordinárias. Para que a referenciação fique clara e o projecto curto, este capítulo pode ser integrado na metodologia, ou na rotina do desenvolvimento do ensino.

3. *Intenções*

Aqui, referem-se as situações em que os objectivos se podem revelar, como estando alcançados (a referência corresponde ao desenrolar do plano).

a) Cognitivas, Capacidade de raciocínio (consulte os critérios 5 e 7); Conhecimentos (consulte os critérios 6 e 7).

b) Psicomotoras: Aptidões manuais (por exemplo: uso do compasso, do esquadro, da régua de cálculo, etc.)

c) Afectivas: Por exemplo, Interesses, Disposições (consulte o critério 8).

4. *Metodologia*

a) *Reflexões metodológicas detalhadas sobre o desenrolar do plano.*

Antes de mais, os objectivos cognitivos deverão ser investigados, separadamente, segundo os seguintes aspectos: (Para tal podem ser introduzidos, nas situações que adiante vão referidas na secção sobre a sequência planificada do ensino).

— Motivação.

— Representação (A questão dos «Media», possivelmente apoiada em Heimann — Schulz, pode ser tratada num capítulo especial):
manipuladora;
figurativa;
simbólica.

— Formulação típica dos problemas, principalmente nos aspectos de:
variabilidade matemática;
funcionalidade;
reversibilidade;
associatividade.

— Heurística, principalmente a partir de:
contra-exemplos;
exemplos análogos.

(A este respeito e de uma forma geral, nem todos os aspectos se podem considerar, para cada objectivo).

Observação — Em muitos casos, é possível exercer a reflexão em detalhe só depois da reflexão global, ou integrá-la no cumprimento do plano.

b) *Reflexão metodológica global*

Trata-se, aqui, de uma invocação metodológica dos *vários trajectos,* que podem provir: da Ciência Matemática; da formulação de objectivos, e da metodologia; da justificação, porque é que nos decidimos, precisamente, pela via que planificámos.

O desenvolvimento metodológico pode, então, ser orientado por estes e outros aspectos:

— possibilidades de motivação;
— possibilidades de representação;
— possíveis sequências de problemas;
— possíveis formas activas e socializadas;
— possibilidades de controlo.

A discussão dos vários trajectos apresenta, para as finalidades do ensino diversas vantagens:

— Um trajecto alternativo oferece, muitas vezes, perspectivas modificadas ou complementares do trajecto que se planificou.

— Os critérios dos críticos, que talvez se inclinassem mais para outro trajecto, ficam a saber que este não foi escolhido, devido a falta de reflexão didáctica; mas, sim, por determinadas razões que, ao professor, pareceram de considerar.

5. *Media*

Este aspecto pode, logo, ser tratado sob a rubrica «Representação» do capítulo anterior (4); pode também ser inserido, directamente, no capítulo seguinte (6) sob a «Sequência planificada do ensino».

Aos «Media» pertencem todos os meios de aprendizagem e ensino, tais como material estruturado, fichas de trabalho, livros escolares, jogos planificados, modelos de demonstração, transparências, quadros murais, etc.

Recomenda-se, no preenchimento do quadro da aula, uma planificação rigorosa, principalmente, para recapitulações e paralelismos de confronto.

Se nos esforçarmos por uma execução municiosa, então os «media» poderão ser discutidos, segundo os critérios expostos no capítulo 4 deste livro.

6. *Sequência planificada do ensino.*

Para nos podermos referir à sequência da planificação, segundo os pontos de 1 a 5, é recomendável numerar os passos destacados dessa sequência. Estes são, em geral, formulados segundo as fases correspondentes de aprendizagem (vide a seguir), e podem ocorrer, mais do que uma vez, numa lição.

a) Possíveis fases de aprendizagem:

— Formulação de questões.

— Resolução de questões. Exploração.

— Consciencialização de questões.

— Aplicação.

— Controlo.

Para cada fase de aprendizagem, devem ser previstos os seguintes aspectos:

b) O assunto do programa (por ex.º: adição de classes resto, unidades de superfície ...).

c) Os comportamentos previsíveis dos alunos e o comportamento planificado do professor (formas activas e socializadas).

d) Eventualmente, a provável duração.

Observações: 1. Se a resolução do problema for desenvolvida em acção frontal, perante toda a turma, recomenda-se (→3.4.1) que o professor descarregue uma sequência de estímulos, por ex.º: perguntas, de preferência escritas, com as quais conduzirá, gradualmente, os alunos à descoberta da solução.

2. Os desvios à execução da planificação prevista ocorrerão, principalmente, se:
— não estiverem disponíveis as condições prévias;
— outras não previstas, se tiverem entretanto apresentado;
— surgirem incertezas e dificuldades ocasionais de compreensão;
— ocorrerem erros esporádicos dos alunos, que estes proporão, para serem tratados ou discutidos.

Deve ser incluida, na planificação, a preparação de esclarecimentos adicionais, para os casos eventuais, sob a forma de: exemplos, demonstrações intuitivas («evidenciações»), etc.

7. *Literatura*

8. *Última afinação*

Recomendações ocasionais tais como: («boa colaboração»...) não têm qualquer valor. É mais importante que as passagens difíceis ou falhadas venham a ser analisadas, na suas causas (do tema em si, intencionais, metodológicas ...) e que sejam formuladas as respectivas alterações, para a configuração futura do ensino. Uma crítica aberta, e dirigida francamente a si próprio, é uma parte essencial da formação contínua do professor: de uma maneira geral é menos um sinal de fraqueza, do que a prova de uma autêntica «consciencialização».

Naturalmente, que é, também, de recomendar o registo das causas, dos acontecimentos e dos exemplos, que tiveram um efeito positivo especial, sobre a sequência do ensino.

5.2. *Apreciação*

5.2.1 *A decorrência e a finalidade de um colóquio de apreciação.*

Um colóquio de apreciação sobre uma lição decorre, de forma pouco satisfatória, se, por um lado durante a crítica, se invocarem, sem método, pontos que ocorrem a cada momento; mas, por outro lado, também assim acontece se, rigidamente, essa crítica se cingir a um determinado esquema. No primeiro caso, esquecem-se, facilmente, alguns pontos (ou outros são sobrevalorizados), o que dificulta uma apreciação global, objectiva; no segundo caso, não se terá tido em conta a peculiaridade de uma lição, dada sobre determinadas circunstâncias.

Sendo assim, não podemos recomendar, para base de apreciação, um catálogo fixo de critérios. Revela-se porém, como aconselhável o recurso a um determinado dirigismo: o que provenha dos acontecimentos científicos especializados e da didáctica da matemática e que, pernanentemente, se vá projectando, em questões isoladas de metodologia. Uma concepção deste género é representada por Chiout e Steffens [12, pág. 164].

Muitas vezes (porém, nem sempre), revelou-se valiosa, para um colóquio de apreciação, a proposta seguinte.

1. *Introdução da crítica*

a) O professor tomou, na lição que deu, determinada posição, enquanto que na sua planificação — ou, então, no seu decorrer — se referiu a um objectivo diferente. Tratar-se-á, pois, de fundamentar as alterações do plano e, principalmente, de referir as observações ocasionais, que a tal levaram.

b) Muitas vezes, para o crítico permanecem pouco claros os vários comportamentos e processos de quem deu a lição.

Este deverá, então justificar as razões das alterações que, por ventura, introduziu.

2. *Parte principal da crítica.*

a) No caso das faltas de correcção científica terem influenciado negativamente a lição — em grande extensão ou numa parte essencial — aquelas devem ser, imediatamente, esclarecidas, porque pouparão reflexões didácticas e metodológicas, a partir de premissas falsas.

b) Logo de princípio, podem surgir alternativas — de valor neutro — quanto à fixação dos objectivos gerais, ou da execução global da lição dada. (Elas podem provir, eventualmente, das observações, ou das reacções observadas nos alunos, ou das próprias observações geradas na mente do professor).

Estas alternativas podem ser citadas, em confronto com a lição dada. Independentemente da configuração própria e especificada das várias partes duma lição, pode-se entrar, depois, numa confrontação fundamentada com outras vias.

c) No decorrer da crítica, pode-se — em grande parte independentemente da concepção global — regressar a nova reflexão sobre os passos separados: na qual, se discutirão aspectos científicos, intencionais e metodológicos. Para tal, oferecem-se, essencialmente, as seguintes possibilidades:

— Observar a lição, em corte longitudinal, de cada vez sob determinado aspecto (por ex.º: questões de motivação, meios auxiliares, etc.).

— Discutir a lição, com referência ao seu desenrolar no tempo, como submetida a uma permanente alternativa de questões.

3. *Apreciação global.*

— Exploração da ciência matemática, feita pelo professor.
— Fixação de objectivos.
— Possibilidades metodológicas do professor.
— Comportamento da turma.
— Comportamento do professor.

Mesmo se uma avaliação traduzida em classificações pontuais («notas») for necessária, a função principal do colóquio de apreciação, ou crítica, seria a de dar, ao candidato ao professorado, estimulação e apoio para uma acção futura mais vasta: integradora de conhecimentos científicos, didácticos e de prática escolar.

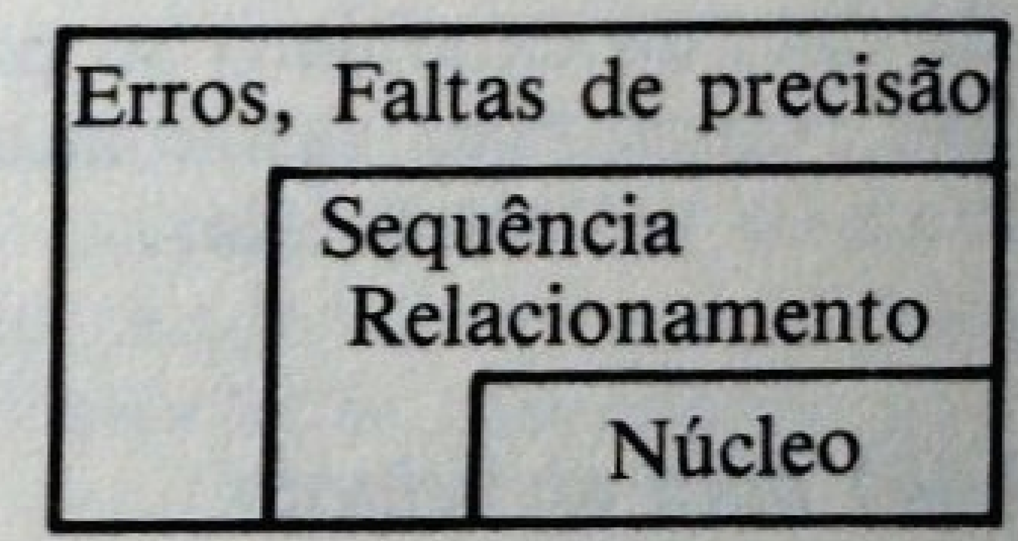
5.2.2 *Guião para apreciação*

No decorrer do livro, sob a forma de 23 critérios interrogativos, apresentam-se algumas questões centrais para a configuração e apreciação do ensino. A fim de permitir o seu exame mais rápido e inter-relacionado, os critérios vão ser reunidos num guião que, com flexibilidade, se poderá aplicar a uma unidade do ensino, a uma lição, ou a um passo parcial. Vão referidos à proposta mencionada em 5.1 para a sequência do ensino porque — conforme já acentuámos — no ensino, a planificação, execução e apreciação, devem ser estreitamente determinadas, umas pelas outras.

Guião para o exame de aspectos essenciais duma lição, no ensino da Matemática

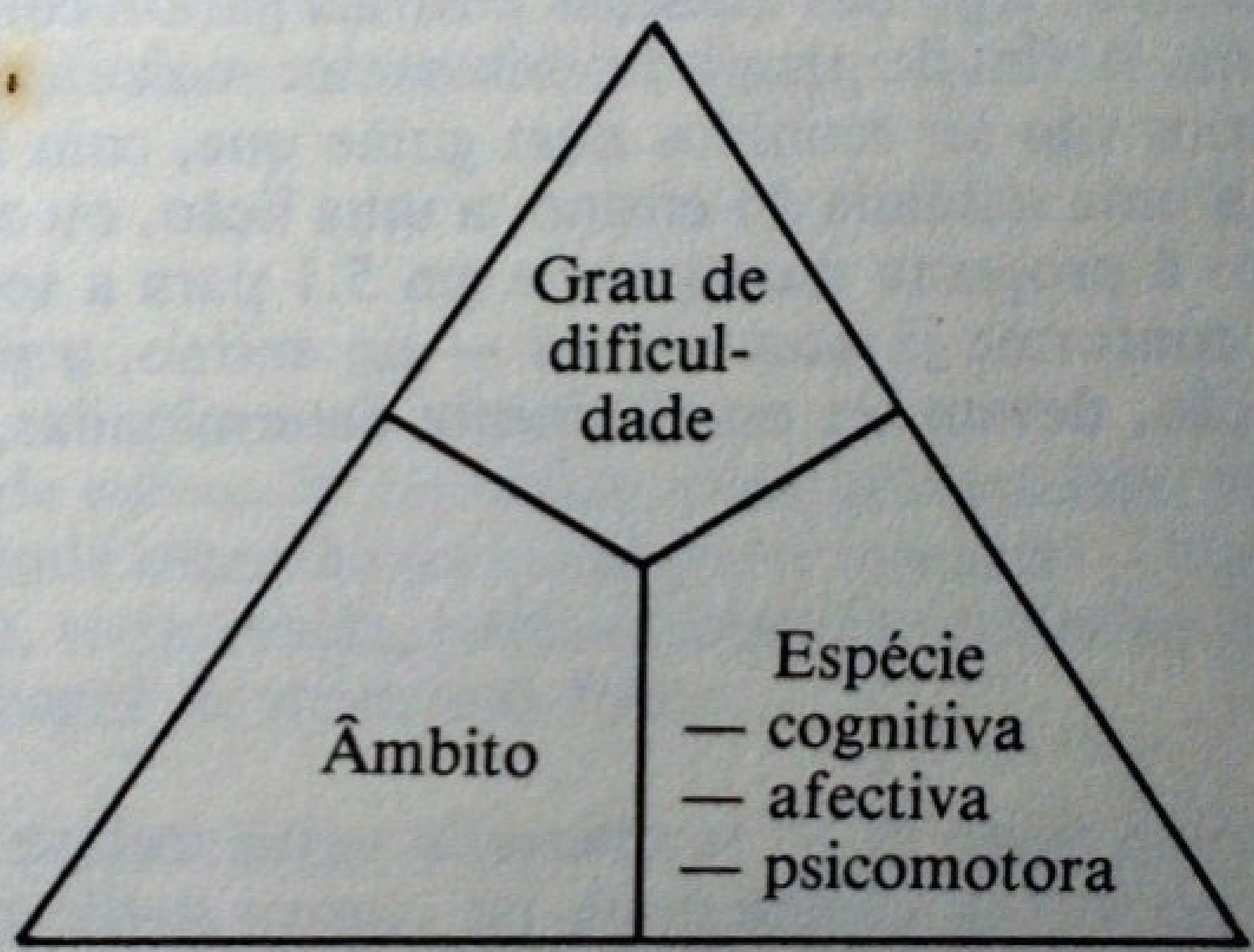
Guião 1

Ciência matemática



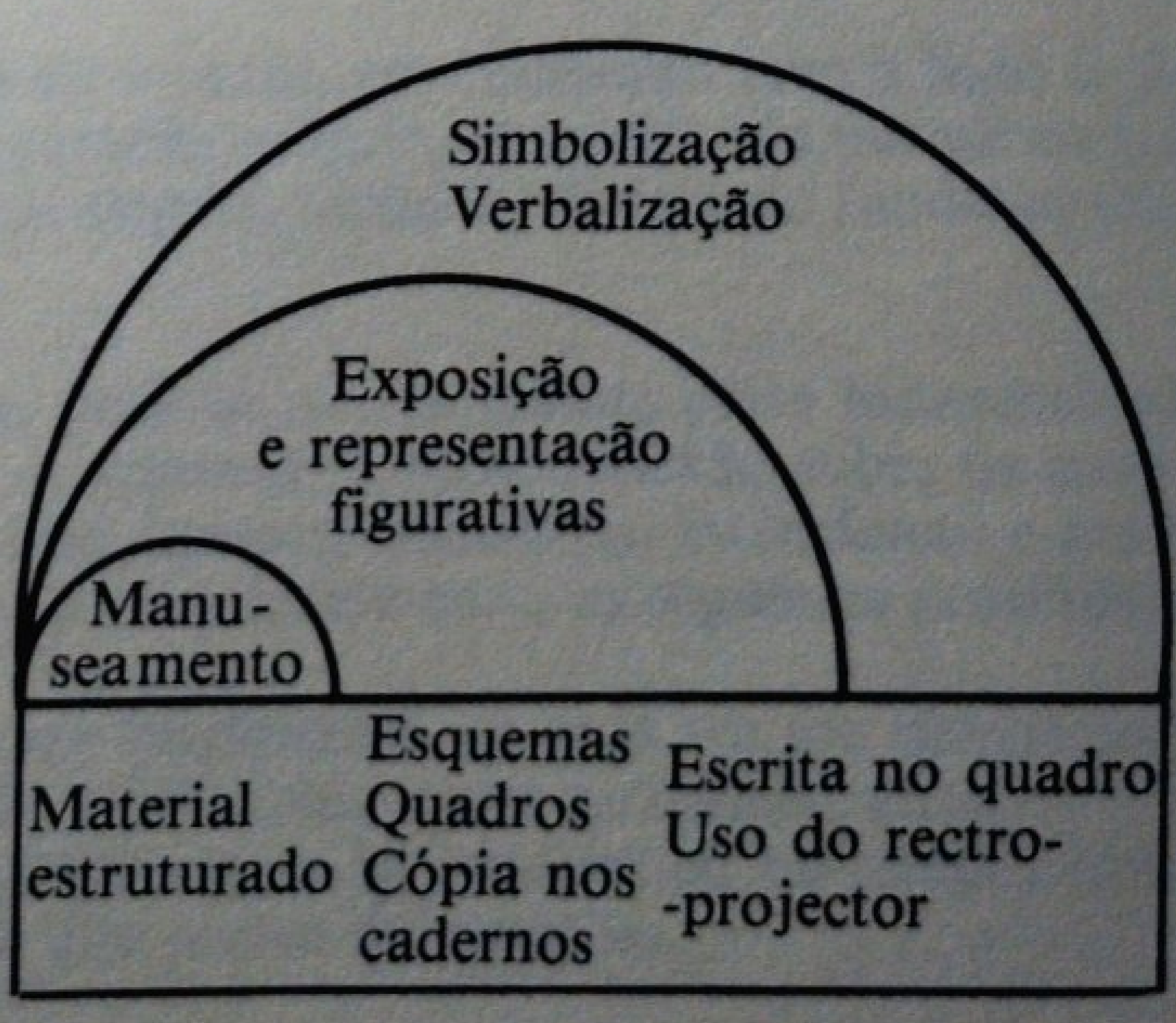
Guião 2

Formulação de objectivos



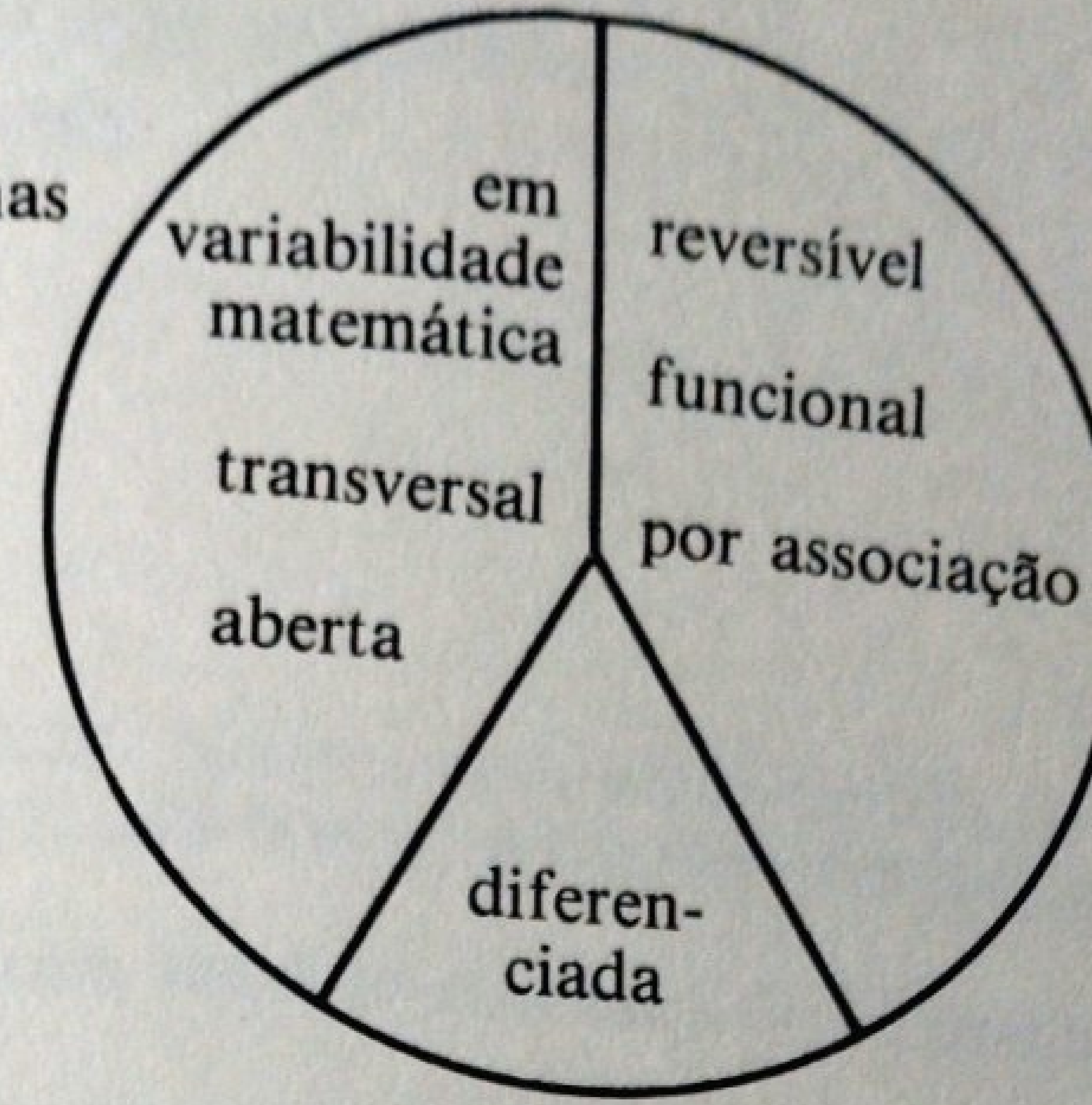
Guião 3

Exposição



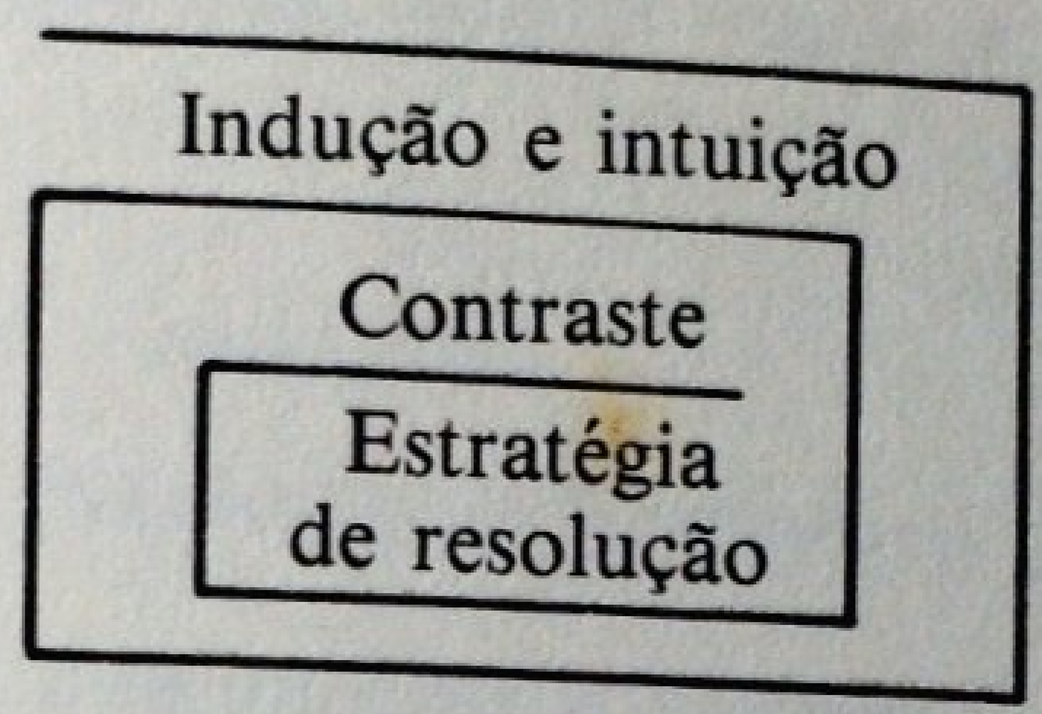
Guião 4

Formulação de problemas



Guião 5

Heurística



Guião 6

Fases

Problematização Motivação	Descoberta própria individual, Proposta de solução	Segurança Controlo; Trabalho para casa

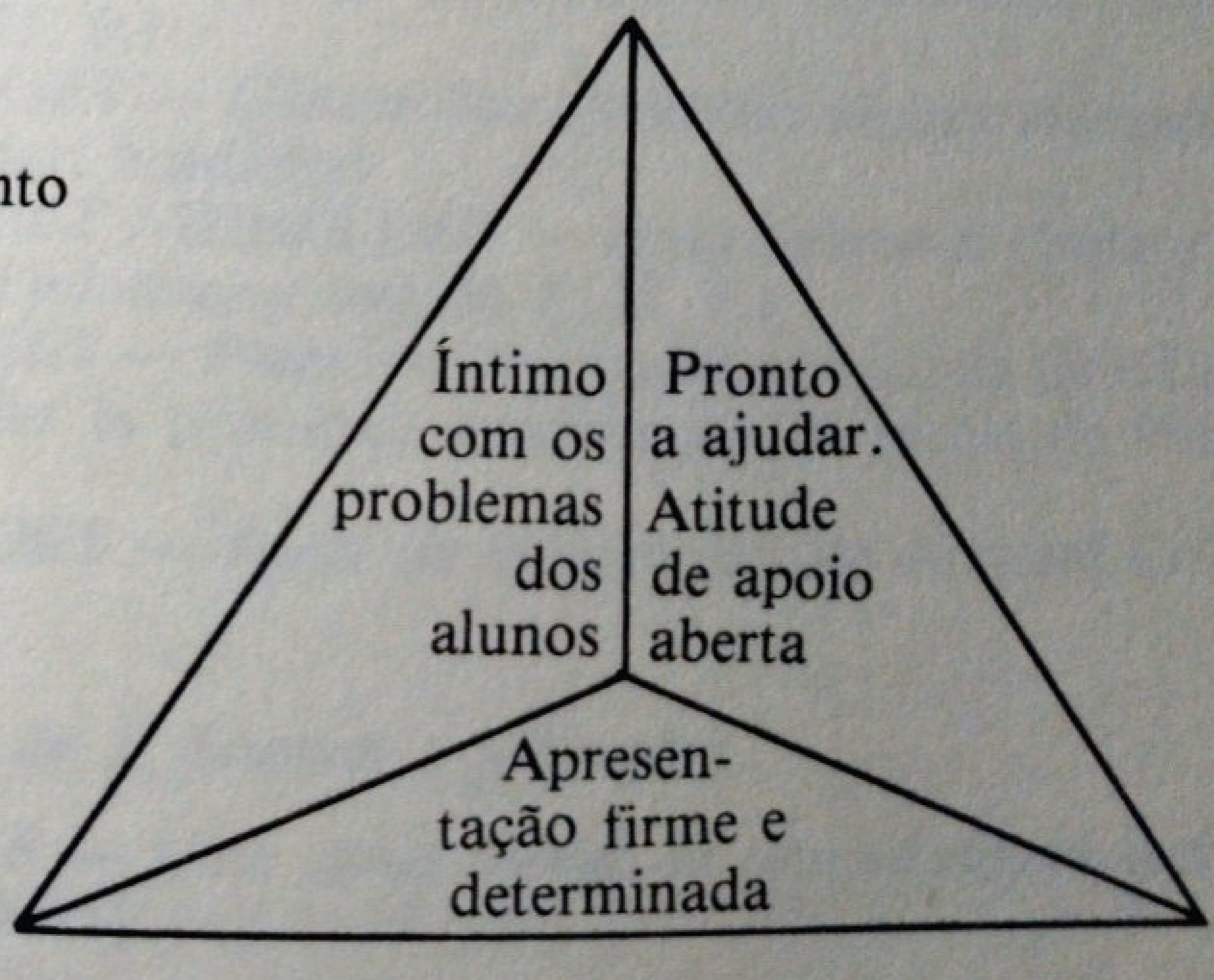
Guião 7

Alternância de formas

frontal
em grupos
isoladamente

Guião 8

Comportamento do professor



Resenha duma bibliografia adicional para a edição portuguesa

Esta resenha pretende, até certo ponto, suprir a bibliografia alemã, para os leitores que não conheçam esta língua; e até fornecer-lhes um complemento, nalguns casos.

Os números I, II e III indicam presumíveis níveis de dificuldade crescente.

Assinalamos com * os livros que mais incidem sobre as aplicações didácticas das teorias.

A) *Sobre as doutrinas de Piaget e aplicações*

I) JEAN PIAGET — *A Psicologia da Inteligência.* (edição Livros Horizonte).
JEAN PIAGET — *A Linguagem e o Pensamento da Criança.* (edição Morais).
JEAN PIAGET — *O Estruturalismo.* (edição Europa-América)
J. PHILLIPS — *Teoria de Piaget. Sobre as origens do intelecto* (edição Sociocultura).
*HANS AEBLI — *Didactique psychologique* (edição Delachaux et Niestlé).
*FRANCINE JAULIN MANNONI — *Pedagogia das Estruturas lógicas elementares.* (editorial Semente).

II) JEAN PIAGET — *A génese do número na criança.* (edição Zahar, brasileira).
JEAN PIAGET — *La représentation de l'espace chez l'enfant.* (edição P. U. F.)
JEAN PIAGET — *Génese das estruturas lógicas elementares* (edição Zahar, brasileira)
JEAN PIAGET / INHELDER — *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent* (edição P. U. F.)
JEAN PIAGET — *Piagetian Inventories* (edição da OECD) Fichas referidas às principais experiências da escola de Piaget.

III) JEAN PIAGET — *Traité de logique* (edição Armand Colin).

B) *Sobre as doutrinas de J. Brunner e aplicações*

I) *J. BRUNER — *Uma nova teoria da aprendizagem* (edição Bloch, brasileira)

III) J. BRUNER — *O processo da educação* (edição, Companhia Editora Nacional, brasileira).

II) J. BRUNER — *Studies in Cognitive Growth* (edição John Wiley)
J. BRUNER, GOODNOW, AUSTIN — *A study of Thinking* (edição John Wiley)

C) *Sobre a inter-relação das teorias de Piaget e Bruner*

MARGARET DONALDSON — *Children's Minds* (edição Fontana, inglesa).
*HANS AEBLI — *Prática do ensino* (edição Vozes Lda., brasileira)

D) *Sobre G. Polya e os métodos eurísticos*

I) G. POLYA — *Coment poser et résoudre un problème* (edição Dunod, francesa).

II) G. POLYA — *La découverte des Mathématiques — Vol I - Les Modèles; Vol II - Une Méthode générale* (edição Dunod, francesa).

III) Mathematics and Plausible Reasoning:
(Vol I) Indution and Analogy in Mathematics;
(Vol II) Patterns of Plausible Inference (edição Princeton University, americana)

E) *Sobre as doutrinas de Dienes e aplicações*

Z. P. DIENES — *As seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática* (edição Editora Pedagógica e Universitária Lda, brasileira.
Z. P. DIENES e JEEVES — *O pensamento em estruturas* (edição Editora Pedagógica e Universitária Lda., brasileira)
Z. P. DIENES e JEEVES — *O poder da Matemática* (edição Editora Pedagógica e Universitária Lda., brasileira).

Além doutras obras especialmente dedicadas à prática do ensino básico, adiante mencionadas sob «Aplicações da Matemática Moderna, no Ensino Básico».

F) *Sobre formas de representação*

*W. W. SAWYER — *Vision in Elementary Mathematics* (edição Pelican, inglesa).
W. W. SAWYER — *The Search for Pattern* (edição Pelican, inglesa).

III) MAX WERTHEIMER — *Productive Thinking* (edição Social Science Paperbacks, americana)

G) *Sobre aplicações da Matemática Moderna no Ensino Básico*

*Z. P. DIENES — *A Matemática Moderna no Ensino Primário* (edição Livros Horizonte).
*A. REVUZ — *Matemática Moderna - Matemática Viva* (edição Livros Horizonte).
*N. PICARD — *Fichas (para Instrução Primária) A conquista do número — Numeração — Operar — A Ordem — Topologia* (edição Livros Horizonte).
*DIENES GOLDING — Várias pequenas obras e cadernos publicadas sob diversas designações:

Primeiros passos em Matemática: I Lógica e jogos lógicos; II Conjuntos números e potências; III Exploração do espaço

A geometria pelas transformações. *I Topologia; II Geometria euclideana; III Grupos e coordenadas. Fracções. Fichas de trabalho.*

(Nota: Há edições em francês destas obras de Dienes publicadas pela O.C.D.L., mas também há edições brasileiras).

CALEB GATEGNO — *Mathématiques avec les nombres en coleur - Matériel Cuisenaire* (edição Delachaux et Niestlé).
*J. J. DUMORA — *A Matemática Natural na Instrução Primária* (edição Editorial Estampa).
M. PORQUET — *A Matemática Natural no Ensino Infantil* (edição Editorial Estampa).

II) *T. J. FLETCHER — *Ensino Moderno da Matemática* (edição Ao Livro Técnico, brasileira).
PAPY — *Vários volumes sobre Matemática Moderna* (edição Marcel Didier).

Literatura em alemão

1. Abele, A. u. a., Überlegungen und Materialien zu einem neuen Lehrplan für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In: Die Schulwarte 9/10 (1970). Neckar-Verlag, Villingen.
2. Aebli, H., Grundformen des Lehrens. Klett, Stuttgart ^{5}1968.
3. Andelfinger, B. - Nestle, F., Algebra 1. Herder, Freiburg i. Br. 1971.
4. Andelfinger, B. - Nestle, F., Mathematik 5. Schuljahr. Herder, Freiburg i. Br. 1970.
5. Andelfinger, B. - Nestle, F., Wege zu einer neuen Schulmathematik. Herder, Freiburg i. Br. 1967.
6. Arndt, M., Didaktische Spiele. Berlin ^{2}1971.
7. Bauersfeld, H., u. a., alef 1, Wege zur Mathematik, Handbuch zum Lehrgang Teil 1. Schroedel, Hannover 1970.
8. Bevan, R. u. a., Modelle für den Mathematikunterricht in der Grundschule. Klett, Stuttgart 1967.
9. Bigalke, H. G., Zehn Thesen zur Gründung eines überregionalen zentralen Instituts für Didaktik der Mathematik. In: M. N. U. Bd. 24 (1971), Heft 7, S. 396–398.
10. Bruner, J. S. u. a., Studien zur kognitiven Entwicklung. Klett, Stuttgart 1971.
11. Buckschat, S., Grundschulmathematik und Unterrichtspraxis. In: Westermanns Pädagogische Beiträge Heft 2 (1971).
12. Chiout, H. - Steffens, W., Unterrichtsvorbereitung und Unterrichtsbeurteilung. Diesterweg, Frankfurt a. M. 1970.
13. Chomsky, N., Aspekte der Syntaxtheorie. Suhrkamp, Frankfurt a. M. 1969.
14. Denis-Prinzhorn, M. - Grize, J. B., Entwicklung der geistigen Strukturen und Mathematikunterricht. In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 10 (1964), Heft 4, Klett, Stuttgart.
15. Dienes, Z. P., Aufbau der Mathematik. Herder, Freiburg i. Br. ^{3}1969.
16. Dienes, Z. P., Die Arithmetik der natürlichen Zahlen. Herder, Freiburg i. Br. ^{3}1967.
17. Dienes, Z. P., Die sechs Stufen im mathematischen Lernprozeß. Herder, Freiburg i. Br. 1971.
18. Dienes, Z. P., Operatoren. Lehreranleitung zu den Arbeitskarten. Herder, Freiburg i. Br. 1972.
19. Dienes, Z. P., Schulmathematik als Bildungsfach. Herder, Freiburg i. Br. 1967.
20. Dienes, Z. P. - Golding, E. W., Mathematisches Denken und logische Spiele. Herder, Freiburg i. Br. ^{4}1969.
21. Dienes, Z. P. - Golding, E. W., Methodik der modernen Mathematik. Herder, Freiburg i. Br., 1970.

22. Dienes, Z. P. - Jeeves, M. A., Denken in Strukturen. Herder, Freiburg i. Br. 1968.
23. Dittmann, H., Algebraische Strukturen und Gleichungen. Bayerischer Schulbuch-Verlag, München 1965.
24. Droz, R. u. a., Mathematik in Grundformen. Stufe 1. Klett, Stuttgart 1971.
25. Droz, R. u. a., Mathematik in Grundformen. Stufe 1 Lehrerheft. Klett, Stuttgart 1971.
26. Epping, J., Arbeitsmittel für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In: Beiträge zur Reform der Grundschule 11/12, Arbeitskreis Grundschule e. V. Frankfurt a. M. 1972, S. 179–214.
27. Flechsig, K. H. u. a., Probleme der Entscheidung über Lernziele. In: Programmierter Unterricht 1, 1970.
28. Freudenthal, Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben. In: MU 1963, Heft 4.
29. Freund, H. - Sorger, P., Denken mit Lego. Herder, Freiburg i. Br. 1971.
30. Fricke, A. - Besuden, H., Mathematik, Elemente einer Didaktik und Methodik. Klett, Stuttgart 1970.
31. Fricke, A., Mathematische Impulse, Grundbuch, 5. Schuljahr. Klett, Stuttgart 1971.
32. Graumann, C. F. (Herausgeber), Denken. Kiepenheuer & Witsch, Köln 1965.
33. Griesel, H., Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten 1. Schroedel, Hannover 1971.
34. Gullasch, R., Denkpsychologische Analysen mathematischer Fähigkeiten. VEB Volk und Wissen, Berlin 1971.
35. Haseloff, O. W. - Jorswieck, E., Psychologie des Lernens. Gruyter, Berlin 1970.
36. Heimann, P. - Otto, G. - Schulz, W., Unterricht – Analyse und Planung. In: Auswahl, Reihe 13, Bd. 1/2. Hannover 1965.
37. Hilgard, E. R. - Bower, G. H., Theorien des Lernens I. Klett, Stuttgart [2]1971.
38. Hilgard, E. R. - Bower, G. H., Theorien des Lernens II. Klett, Stuttgart [2]1971.
39. Hole, V. - Lauter, J. - Werner, W., Mathematik im 1. Schuljahr – aber wie? Koester, München 1972.
40. Jeziorsky, W., Praxis und Theorie der Unterrichtsvorbereitung. Westermann, Braunschweig 1968.
41. König, E. - Riedel, H., Unterrichtsplanung als Konstruktion. Beltz, Weinheim [2]1971.
42. Kober, H. - Rössner, L., Anleitungen zur Unterrichtsvorberitung. Diesterweg, Frankfurt a. M. [3]1967.
43. Kothe, S., Denken macht Spaß. Herder, Freiburg i. Br. [2]1968.
44. Lambacher, T. - Schweizer, W., Algebra 1. Klett, Stuttgart 1966.
45. Lauter, J., Kriterien zur Arbeit mit dem Lehrbuch im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Die Schulwarte 9 (1971). Neckar-Verlag, Villingen.
46. Laux, J. - Bigalke, H., Einführung in die Mathematik, 1. Schuljahr, Lehrerband. Diesterweg, Frankfurt a. M. 1972.
47. Lenné H., Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Klett, Stuttgart 1969.

48. Leppig, M., Mathematik der modernen Schule. Herder, Freiburg i. Br. 1972.
49. Lietzmann, W., Methodik des Mathematischen Unterrichts. Quelle u. Meyer, Heidelberg 1968.
50. Meschkowski, H. (Herausgeber), Didaktik der Mathematik 1. Klett, Stuttgart 1972.
51. Meschkowski, H. (Herausgeber), Mathematik-Duden für Lehrer. Bibliographisches Institut. Dudenverlag, Mannheim 1969.
52. Möller, Ch., Technik der Lernplanung. Beltz, Weinheim ^{2}1970.
53. Mönnig, R., Grundkurs der Mathematik. Salle, Frankfurt a. M. 1969.
54. Neunzig, W., Mathematik im Vorschulalter. Herder, Freiburg i. Br. 1972.
55. Neunzig, W. - Sorger, P., Wir lernen Mathematik, 1. Schuljahr. Herder, Freiburg i. Br. ^{8}1971.
56. Neunzig, W. - Sorger, P., Wir lernen Mathematik, 2. Schuljahr, Lehreranleitung. Herder, Freiburg i. Br. 1968.
57. Neunzig, W. - Sorger, P., Einstieg in die Mathematik. Herder, Freiburg i. Br. 1969.
58. Oehl, W., Der Rechenunterricht in der Grundschule. Schroedel, Hannover ^{6}1962.
59. Oehl, W, Der Rechenunterricht in der Hauptschule. Schroedel, Hannover ^{2}1967.
60. Odenbach, K. u. a., Rechenunterricht und Zahlbegriff. Westermann, Braunschweig ^{3}1967.
61. Piaget, J., Psychologie der Intelligenz. Rascher, Zürich 1948.
62. Pólya, G., Mathematik und plausibles Schließen, Band 1. Birkenhäuser, Basel 1962.
63. Pólya, G., Schule des Denkens. Francke, Bern 1949.
64. Roth, H., Begabung und Lernen. Klett, Stuttgart 1969.
65. Schaefer, G., Fach-Didaktik – Fachdidaktik. In: M. N. U. Bd. 24 (1971), Heft 7, S. 390–396.
66. Schwartze, H., Grundriß des Mathematischen Unterrichts. Kamp, Bochum.
67. Sprockhoff, W., Welt der Zahl, 1. Schuljahr. Schroedel, Hannover 1970.
68. Stöcker, K., Neuzeitliche Unterrichtsgestaltung. Ehrenwirth, München 1960.
69. Strunz, K., Der neue Mathematikunterricht in pädagogisch-psychologischer Sicht. Quelle u. Meyer, Heidelberg ^{5}1968.
70. Winter, H. - Ziegler, T., Neue Mathematik 5. Schuljahr. Schroedel, Hannover 1969.
71. Wolff, G. (Herausgeber), Handbuch der Schulmathematik, Band 5. Schroedel, Hannover ^{2}1967.
72. Ziegler, T. - Schumacher, B., Denkspiele für kleine und große Leute. Schroedel, Hannover 1971.

COLECÇÃO HORIZONTE

VOLUMES PUBLICADOS:

1 GEOGRAFIA DA PENÍNSULA IBÉRICA — *Michel Drain*
2 O SOCIALISMO E O FUTURO DA PENÍNSULA — 3.ª edição — *Vitorino Magalhães Godinho*
3 AUTÓMATOS, AUTOMATISMOS E AUTOMATIZAÇÃO — *P. Devaux*
4 DO SEBASTIANISMO AO SOCIALISMO EM PORTUGAL — 3.ª edição — *Joel Serrão*
5 PORTUGAL NA BALANÇA DA EUROPA — *Almeida Garrett*
6 DA FILOSOFIA — *Delfim Santos*
7 COOPERAÇÃO AGRÍCOLA — 3.ª edição — *Henrique de Barros*
8 ALEXANDRE HERCULANO — *Oliveira Martins*
9 HISTÓRIA DE ESPANHA — *Pierre Vilar*
10 INTRODUÇÃO À HISTÓRIA ECONÓMICA — *Vitorino Magalhães Godinho*
11 A SITUAÇÃO UNIVERSITÁRIA PORTUGUESA — *A. Sedas Nunes*
12 EMIGRAÇÃO PORTUGUESA — 3.ª edição — *Joel Serrão*
13 A PRIMEIRA REPÚBLICA PORTUGUESA — 3.ª edição — *A. H. de Oliveira Marques*
14 A ARTE E A SOCIEDADE PORTUGUESA NO SÉCULO XX — 2.ª edição — *José Augusto França*
15 INTRODUÇÃO À ATITUDE CIENTÍFICA — *J. Bronowski*
16 DA HISTÓRIA-CRÓNICA À HISTÓRIA-CIÊNCIA — 3.ª edição — *Joaquim Barradas de Carvalho.*
17 EÇA DE QUEIROZ E O SEU TEMPO — *João Medina*
18 SOBRE «FORMAS DE TRATAMENTO» NA LÍNGUA PORTUGUESA — *Luís Lindley Cintra*
19 DEMOGRAFIA PORTUGUESA — *Joel Serrão*
20 AS «CONFERÊNCIAS DO CASINO» NO PARLAMENTO — *José Augusto França*
21 PARA A HISTÓRIA DA CIÊNCIA EM PORTUGAL — *Luís de Albuquerque*
22 HISTÓRIA POLÍTICA DA PRIMEIRA REPÚBLICA PORTUGUESA — I vol. (1910-1915) — I parte — *David Ferreira*
23 HISTÓRIA POLÍTICA DA PRIMEIRA REPÚBLICA PORTUGUESA — I vol. (1910-1915) — II parte — *David Ferreira*
24 MASSA E CLASSE — *François Perroux*
25 A MITOLOGIA FADISTA — *António Osório*
26 RUMO DE PORTUGAL. A EUROPA OU O ATLÂNTICO? — *Joaquim Barradas de Carvalho*
27 UMA EDUCAÇÃO BURGUESA. — *Vasco Pulido Valente*
28 DESTINOS DO ULTRAMAR — *Orlando Ribeiro*
29 ESTRUTURA E DINÂMICA DO SISTEMA COLONIAL — *Fernando Novais*
30 AS RELAÇÕES POLÍTICAS LUSO-BRITÂNICAS — *John Vincent-Smith*
31 PORTUGAL — *Pierre Birot*
32 A ESPANHA ANTE O «ULTIMATUM» — *Pilar Vasquez Cuesta*
33 TESTEMUNHOS SOBRE A EMIGRAÇÃO PORTUGUESA — Antologia — *Joel Serrão e outros*
34 O CARÁCTER SOCIAL DA REVOLUÇÃO DE 1383 — 3.ª edição — *Joel Serrão*
35 A MULHER NA EXPANSÃO ULTRAMARINA IBÉRICA — 1415-1815 — *C. R. Boxer*
36 O TERCEIRO GOVERNO DE AFONSO COSTA — 1917 — *A. H. de Oliveira Marques*
37 DOENÇA DA CIDADE — *J. P. Martins Barata*
38 CONSPIRAÇÃO CONTRA PORTUGAL E A ESPANHA — *Hipólito de la Torre Gómez*
39 POLÍTICA E ECONOMIA (PORTUGAL NOS SÉCS. XIX E XX) *Miriam Halpern Pereira*

Composto e impresso por:
FILOGRÁFICA
para
LIVROS HORIZONTE, LDA.
Novembro 1980

A colecção — Pretende, essencialmente, propiciar ao educador de ofício, não apenas ao docente portanto, elementos de informação, instrumentos de análise, incitação reflexiva e crítica susceptíveis de trazer apoio a uma prática profissional que se pretenda responsável, isto é: não apenas conscienciosa, mas também consciente. Eis os seus objectivos.

Quanto às suas directrizes: por um lado, ir cobrindo um espectro largo de temas de reflexão e de investigação educacional, com aceitação deliberada da diversidade de pressupostos e de perspectivas no seu tratamento, não por inspiração eclética mas pela convicção de mérito que existe no confronto de contribuições diferenciadas; por outro lado, abrir a colecção a largos horizontes de experiência educativa e cultural; finalmente, intentar que a produção de autores nacionais tenha posição destacada, e, com eles, a realidade portuguesa, por mediação dos textos e dos dados de referência. Pois que se o desvendamento de outros horizontes, em rigor, apenas é possível pelo conhecimento do próprio horizonte, o conhecimento do que é alheio colha a sua principal razão na vontade de transformar o que é nosso.

O autor — VOLKER HOLE (n. 1943) é Conselheiro especializado para o ensino da Matemática numa Escola Superior de Pedagogia da República Federal Alemã. Nessa qualidade, tem desenvolvido actividade de ensino e de orientação pedagógico-didáctica de futuros professores e de professores em exercício, de Matemática.

A obra — Nasceu da recolha sistemática de situações didácticas significativas surgidas na prática das aulas, nos ensinos básico e secundário.

O que preocupou o Autor foi extrair da Matemática os assuntos que ilustram os métodos de a ensinar: assim, um tema será interessante na medida e na forma em que possa levar o aluno a agir e a pensar, no mundo de hoje, como um matemático incipiente e original. Para o efeito, o Autor utilizou 200 situações de aprendizagem, tanto da Matemática Moderna como da Clássica, organizadas e tratadas independentemente de um currículo sistemático específico. O que torna a obra proveitosa para o professorado de língua portuguesa.

Esta versão foi valorizada pelo trabalho do tradutor, Eng.º Santos Heitor, professor jubilado do ensino secundário, que preparou uma bibliografia especialmente ordenada para o leitor de língua portuguesa.