UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS BLUMENAU
PROGRAMA MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Analberto Schot

Ensino de Cônicas com movimentos orbitais: A Elipse

Blumenau
2024

Analberto Schot

Ensino de Cônicas com movimentos orbitais: A Elipse

Dissertação submetida ao Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Renan Gambale Romano, Dr.

Blumenau
2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Schot, Analberto
Ensino de Cônicas com movimentos orbitais. : A Elipse / Analberto Schot ; orientador, Renan Gambale Romano, 2024.
113 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Blumenau, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Cônicas. 3. Elipse. 4. Hipérbole. 5. Parábola. I. Romano, Renan Gambale . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

Analberto Schot

Ensino de cônicas com movimentos orbitais: A Elipse

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Documento assinado digitalmente
Louise Reips
Data: 17/07/2024 15:10:22-0300
CPF: ***.405.570-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof.(a) Louise Reips, Dr(a).
Universidade Federal de Santa Catarina

Documento assinado digitalmente
MARCIANO PEREIRA
Data: 18/07/2024 10:40:20-0300
CPF: ***.638.780-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Marciano Pereira, Dr.
Universidade Estadual de Ponta Grossa

Documento assinado digitalmente
Renan Gambale Romano
Data: 17/07/2024 14:02:31-0300
CPF: ***.828.658-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Renan Gambale Romano, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

Documento assinado digitalmente
Felipe Delfini Caetano Fidalgo
Data: 17/07/2024 14:46:59-0300
CPF: ***.425.308-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Felipe Delfini Caetano Fidalgo, Dr.
Coordenação do Programa de Pós-Graduação

Documento assinado digitalmente
Renan Gambale Romano
Data: 17/07/2024 14:02:57-0300
CPF: ***.828.658-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Renan Gambale Romano, Dr.
Orientador

Blumenau, 2024.

Dedico este trabalho à todos os professores de Matemática que
compartilham momentos de suas vidas à uma transformação
acadêmica de qualidade, buscando sempre o melhor à seus
alunos no processo Ensino-Aprendizagem.

AGRADECIMENTOS

Nada se constrói sozinho e por isso agradeço à todos que de certa forma contribuíram para que este trabalho fosse desenvolvido, aos meus colegas de programa que harmonizou, alegrou e deixou mais leve os nossos encontros semanais na universidade. Aos meus colegas de trabalho que em vários momentos me ouviram e opinaram sobre todo o processo de especialização. Deixo aqui um agradecimento especial à todos os professores que tive no Programa, pelo comprometimento que juntos tiveram ao transmitir não só os conhecimentos científicos mas também uma motivação nos encontros semanais. Aos meus cunhados Marlon e Juliana, que sem questionar me ajudaram quando mais necessitei. Ao meu pai Ademar Schot, que desde sempre me incentivou e proporcionou meus estudos iniciais assim como sua contribuição foi essencial na introdução ao meio acadêmico superior, demostrando a vontade de um crescimento intelectual e profissional. À minha esposa Márcia Regina da Silva Schot que me apoiou em todos os momentos sendo a maior incentivadora, pela compreensão que teve em compartilhar nossos finais de semana de descanso com os meus estudos e por fim, à Deus, que me deu saúde e tranquilidade para não desistir. À estes, meus sinceros agradecimentos.

“Os únicos princípios que eu aceito, ou necessito, na Física são os da Geometria e da Matemática pura; estes princípios explicam todos os fenômenos naturais, e nos permitirem fazer demonstrações bastante acertadas a respeito deles.”

(RENÉ DESCARTES, 1644)

RESUMO

Diante da dificuldade atual de prender a atenção dos alunos no processo de ensino-aprendizagem da matemática nas salas de aula, especialmente diante das distrações tecnológicas como as redes sociais, jogos online e aplicativos de inteligência artificial, precisamos de certa forma criar estratégias para que o aprendizado e o desenvolvimento não se percam. Em meio aos processos engessados, à qualquer circunstância que caiba, podemos introduzir o lúdico, o visual, a teoria com a prática. Percebe-se que, na maioria dos casos, a qualquer incentivo à pesquisa, o aluno não busca informações por conta própria para a obtenção de dados para argumentação, usando aplicativos que resolvem rapidamente seus problemas. O grande detalhe é que, sem o conhecimento puro e científico e suas relações com o mundo real, alguns erros podem não serem percebidos e a falta de clareza deixa de lado o principal. O aprendizado. Aprendemos com a vida, aprendemos com manuseios, aprendemos com tentativas e erros, não com algo pronto e finalizado por alguém. Assim, diante desta preocupação, este trabalho tem por objetivo mostrar aos alunos que é possível fazer relações entre a álgebra e a realidade física, apresentando como as seções de cônicas aparecem em movimentos orbitais.

Palavras-chave: Problema de dois corpos. Cônicas. Elipse. Movimentos orbitais.

ABSTRACT

Given the current difficulty of keeping students' attention in the mathematics teaching-learning process in classrooms, especially in the face of technological distractions such as social networks, online games and artificial intelligence applications, we need to somehow create strategies so that the learning and development are not lost. In the midst of rigid processes, in any circumstance that fits, we can introduce the playful, the visual, theory with practice. It is clear that, in most cases, with any incentive to research, students no longer use the "traditional method" to obtain data for argumentation, using applications that quickly solve their problems. The great detail is that, without pure and scientific knowledge and its relationships with the real world, some errors may not be noticed and the lack of clarity leaves the main thing aside. The learning. We learn from life, we learn from handling, we learn from trials and errors, not from something ready and finalized by someone. Therefore, given this concern, this work aims to show students that it is possible to make relationships between algebra and physical reality, showing how conic sections appear in orbital movements.

Keywords: Two body problem. Conical. Ellipse. Orbital movements.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação das curvas cônicas. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009) . . 15
Figura 2 – Lugar geométrico conhecido como circunferência. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009). 17
Figura 3 – Triângulo retângulo na circunferência λ. Fonte: De autoria própria. 17
Figura 4 – Lugar geométrico conhecido como elipse. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009). 19
Figura 5 – Losango inicial para elipse com eixo focal horizontal. Fonte: De autoria própria. 20
Figura 6 – Elipse de centro na origem do plano cartesiano com eixo focal horizontal. Fonte: De autoria própria. 21
Figura 7 – Elipse transladada no plano cartesiano com eixo focal horizontal. Fonte: De autoria própria. 24
Figura 8 – Losango inicial para elipse com eixo focal vertical. Fonte: De autoria própria. 25
Figura 9 – Elipse de centro na origem do plano cartesiano com eixo focal vertical. Fonte: De autoria própria. 26
Figura 10 – Elipse transladada no plano cartesiano e com eixo focal vertical. Fonte: De autoria própria. 29
Figura 11 – Lugar geométrico conhecido como hipérbole. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009). 31
Figura 12 – Hipérbole - Introdução. Fonte: De autoria própria. 32
Figura 13 – Hipérbole - Determinação do eixo $\overline{B_1B_2}$. Fonte: De autoria própria. 33
Figura 14 – Elementos de uma hipérbole. Fonte: De autoria própria. 33
Figura 15 – Assíntotas da hipérbole. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009). 34
Figura 16 – Hipérbole com eixo real horizontal x. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009). 35
Figura 17 – Hipérbole com eixo vertical sobre o eixo y. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009). 38
Figura 18 – Hipérbole transladada no plano cartesiano com eixo real horizontal. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009). 40
Figura 19 – Hipérbole transladada no plano cartesiano com eixo real vertical. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009). 42
Figura 20 – Hipérbole - Pontos iniciais. Fonte: De autoria própria. 44
Figura 21 – Hipérbole $y = \frac{1}{x}$, para $x \neq 0$ (para $k = \sqrt{2}$). Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009). 45
Figura 22 – Lugar geométrico conhecido como parábola. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009). 45
Figura 23 – Parábola. Fonte: De autoria própria. 46
Figura 24 – Parábola: Reta diretriz paralela ao eixo x - Caso I. Fonte: De autoria própria. 47

Figura 25 – Parábola: Reta diretriz paralela ao eixo x - Caso II. Fonte: De autoria própria. 48
Figura 26 – Parábola: Reta diretriz paralela ao eixo y - Caso III. Fonte: De autoria própria. 50
Figura 27 – Parábola: Reta diretriz paralela ao eixo y - Caso IV. Fonte: De autoria própria. 51
Figura 28 – Parábola com vértice fora da origem e reta diretriz paralela ao eixo x - Caso I. Fonte: De autoria própria. 53
Figura 29 – Parábola com vértice fora da origem e reta diretriz paralela ao eixo x - Caso II. Fonte: De autoria própria. 54
Figura 30 – Parábola com vértice fora da origem e reta diretriz paralela ao eixo y - Caso III. Fonte: De autoria própria. 56
Figura 31 – Parábola com vértice fora da origem e reta diretriz paralela ao eixo y - Caso IV. Fonte: De autoria própria. 57
Figura 32 – Esboço das massa m_1 e m_2 no espaço e seus respectivos vetores e coordenadas. Fonte: De autoria própria. 61
Figura 33 – Massas m_1 e m_2 e suas respectivas forças gravitacionais. Fonte: De autoria própria. 61

SUMÁRIO

Introdução **12**

1 CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO **14**

1.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DAS SECÇÕES CÔNICAS 14

1.2 ENSINO DAS PROPRIEDADES ANALÍTICAS E GEOMÉTRICAS . . 16

1.2.1 Circunferências **16**

1.2.2 Elipses **18**

1.2.3 Hipérboles **30**

1.2.4 Parábolas **45**

2 CÔNICAS VIA PROBLEMA DE DOIS CORPOS **60**

2.1 INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DE DOIS CORPOS 60

2.1.1 Coordenadas polares **64**

2.1.2 Resolução do Problema de Dois Corpos **65**

3 UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DAS CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO **68**

3.1 DIRETRIZES DO MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA 68

3.1.1 Ensino Médio Antigo x O Novo Ensino Médio **68**

3.2 ABORDAGEM DO ESTUDO DAS CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO . . 74

3.2.1 Plano de Aula **74**

4 CONCLUSÃO **77**

Referências **78**

APÊNDICE A – PLANO DE AULA: ELIPSE **80**

APÊNDICE B – PLANO DE AULA: MOVIMENTO DE DOIS CORPOS E A ELIPSE **83**

ANEXO A – MATRIZ REFERENCIA ENEM **86**

ANEXO B – CONSULTA PÚBLICA - PORTARIA Nº 399, DE 8 DE MARÇO DE 2023 . . . . **111**

INTRODUÇÃO

De acordo com as disposições estabelecidas para a formação básica nas escolas, o Ministério da Educação (MEC) afirma, no artigo 22 da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) de 20 de dezembro de 1996, que a finalidade da Educação Básica é "desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores."Assim, o Ensino Médio deve ser planejado considerando as necessidades cognitivas, sociais e culturais dos alunos que estão nessa etapa de aprendizado.

Atualmente, há uma grande variedade de softwares que utilizam a Inteligência Artificial, ganhando destaque no meio acadêmico. No entanto, é importante observar que a atratividade do mundo externo e a facilidade de acesso a distrações têm levado os alunos a perderem o interesse pela pesquisa e pelo novo, focando mais na praticidade e na rapidez do que nos benefícios que o conhecimento pode proporcionar. Por outro lado, podemos considerar uma perspectiva diferente: essa inteligência foi desenvolvida por uma pessoa curiosa, que, ao explorar suas dúvidas, deu continuidade a suas investigações e descobertas. Assim, a partir da curiosidade, surgiu um estudo, uma pesquisa e uma evolução na área da tecnologia.

Diante de todas essas dificuldades enfrentadas pela escola, nós, como professores, precisamos repensar os métodos de abordagem dos conhecimentos a serem introduzidos aos alunos. Com isso, este trabalho não apenas apresenta o desenvolvimento algébrico tradicional, mas também demonstra que, por trás de muitas aplicações, definições e teoremas que podem parecer distantes para os alunos do Ensino Médio, existe a possibilidade de visualizar, de forma lúdica, prática e tangível, todas as descobertas científicas e algébricas discutidas dentro da sala de aula.

Para que essas tecnologias não comprometam o desenvolvimento cognitivo dos jovens estudantes, precisamos encontrar maneiras de estimular a busca pelo conhecimento e pelo aprendizado, criando o hábito de discussões criativas com o objetivo de promover o crescimento científico, cultural e social. Dessa forma, formaremos cidadãos críticos capazes de contribuir positivamente para a sociedade em que vivem. Não basta termos ferramentas que tragam soluções se não possuímos o conhecimento necessário para questionar a precisão e a coerência dessas soluções. Aceitar isso sem questionamento nos expõe ao risco de manipulação, e seguir por esse caminho sem perceber, devido ao desconhecimento e à falta de pensamento crítico, pode acarretar graves consequências.

Assim, este trabalho apresenta a matemática pura e aplicada, buscando chamar a atenção dos alunos para que possam estabelecer a relação entre ambas. Através de uma abordagem didática, procuramos atrair o interesse pelo estudo realizado em sala de aula, demonstrando sua aplicação visual e prática. Nosso objetivo é mostrar a importância do conhecimento adquirido como base para novas descobertas no mundo que os cerca. Fazemos isso com o tema “ensino das cônicas com movimentos orbitais”.

O estudo do movimento de dois corpos no espaço é um aspecto fascinante que desempenha um papel fundamental na Física e na Astronomia. Esse tipo de movimento refere-se à interação gravitacional entre dois objetos celestes, onde cada um exerce uma força de atração sobre o outro, conforme a Lei da Gravitação Universal de Newton. A compreensão desse fenômeno remonta aos tempos de Kepler e Galileu, que observaram os movimentos dos planetas em torno do Sol. Johannes Kepler formulou suas famosas leis do movimento planetário, estabelecendo os princípios básicos que regem as órbitas dos corpos celestes.

As Leis de Kepler, combinadas com a Lei da Gravitação Universal de Newton, fornecem uma estrutura matemática sólida para prever e compreender o movimento orbital de dois corpos. Essas leis descrevem como a força gravitacional entre dois corpos varia com a distância entre eles e como essa força resulta em órbitas elípticas, circulares ou parabólicas, dependendo das condições iniciais. O estudo do movimento de dois corpos não se limita ao sistema solar. Com a descoberta de exoplanetas e sistemas estelares binários, os cientistas têm a oportunidade de explorar uma variedade de configurações e interações gravitacionais únicas.

Além disso, o movimento de dois corpos desempenha um papel crucial na exploração espacial. Missões destinadas a investigar cometas, asteroides e outros corpos celestes frequentemente envolvem estratégias complexas para interagir com suas gravidades e ajustar as trajetórias das naves espaciais.

Em resumo, o estudo do movimento de dois corpos no espaço é essencial para nossa compreensão do cosmos e possui aplicações significativas na Física, Astronomia e exploração espacial. Ao explorar as leis e padrões que regem esse movimento, podemos desvendar os segredos do universo e avançar em nosso conhecimento sobre o funcionamento do mundo ao nosso redor.

1 CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO

Atualmente, estamos passando por uma transição nos parâmetros do Ensino Médio. Neste estudo, vamos analisar as cônicas conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), conforme descrito por (EDUCAÇÃO, 2000). Nosso objetivo é abordar as cônicas de maneira tradicional, como são apresentadas aos alunos do Ensino Médio. Em particular, iremos mostrar como as equações são derivadas diretamente da definição da cônica e da fórmula da função distância na Geometria Analítica.

1.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DAS SECÇÕES CÔNICAS

Na história da matemática, nota-se que os gregos não demonstravam uma forte afinidade pela álgebra. Unir a Geometria Euclidiana, estudada pelos gregos, com pensamentos algébricos não parecia uma tarefa simples, mas isso não significa que naquela época não fossem possíveis essas conexões. Somente no século XVII surgiram as "condições ideais"para essa integração acontecer, principalmente porque a Álgebra havia evoluído o suficiente para se harmonizar plenamente com a Geometria.

Muitos estudiosos naquela época buscavam novas descobertas e, quando foi o caso, o mérito não se dava apenas a um deles. A Geometria Analítica foi um desses casos. Suas descobertas se iniciaram como fruto da curiosidade e simpatia pela matemática de um estudante de Direito chamado Pierre de Fermat[1], onde seus estudos contribuíram muito para o crescimento dessa área. Mas Fermat não foi apenas um curioso que coincidentemente topou com uma descoberta. Ele era um amante dos cálculos, com contribuições no Cálculo Diferencial, no Cálculo de Probabilidade e em um dos mais identificados com ele, estudos dentro da teoria dos números, trabalhando com características e propriedades dos números inteiros. Sua contribuição surge quando escreve um texto com o título "Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos" que só foi publicado em 1679, postumamente compartilhado junto com todos os seus textos e obras. É nesse trabalho que Fermat introduz a ideia de eixos perpendiculares, permitindo a identificação e definição de equações de retas e circunferências, em sua forma geral, e equações mais simplificadas envolvendo as cônicas (elipses, hipérboles e parábolas), concluindo que as equações de 1º e 2º grau poderiam ser reduzidas à uma das cônicas já descritas. Fermat era considerado "Príncipe dos Amadores" uma vez que, como citado, a matemática estava apenas no "sangue" e não como uma atividade principal já que era um Jurista por profissão. O fato de que alguns de seus textos só foram expostos e publicados após sua morte mostra como Fermat era um pouco avesso às publicações. Blaise Pascal[2] o considerou o maior matemático de seu

---

1 *Pierre de Fermat* segundo (CANTÃO, 2002), Francês nascido em 17 de agosto de 1601 e com falecimento datado em 12 de janeiro de 1665. Um magistrado que teve uma significativa contribuição na matemática por ser um amante da ciência. Muito conhecido por enunciar um trabalho intitulado "O último teorema de Fermat" cuja sua prova se deu 300 anos depois pelo matemático britânico Andrew Wiles, em 1994.

2 *Blaise Pascal* segundo (FRASÃO, 2023) Francês nascido em 19 de junho de 1623 e falecido em 19 de agosto de 1662. Além de Físico e Filósofo era também um teólogo e devido a isso, em 8 de julho de 2017 o Papa

tempo.

René Descartes também se interessou pela Geometria Analítica, mas diferente de Fermat que também era graduado em Direito, nunca exerceu o direito como profissão. Começou cedo seus estudos e seus interesses pelos cálculos surgem inicialmente por razões filosóficas. Sua iniciação acadêmica se dá aos 8 anos de idade no “College de la Fleche”, uma escola de alto nível dirigida pelos jesuítas. Ele frequentava grupos de matemáticos e em 1637, aos 41 anos, em uma obra intitulada “A Geometria”, publica seus preceitos sobre a Geometria Analítica. É um pequeno texto, um apêndice do Discurso do Método[3]. Descartes só obteve certo reconhecimento após o Discurso ser traduzido para o latim, em 1649, pelo fato do tradutor acrescentar comentários à obra.

Uma das principais características que diferenciam Fermat de Descartes é que, enquanto Fermat partia da álgebra com a apresentação de equações para, em seguida, aplicar à geometria e apresentar as curvas em um plano, Descartes partia das curvas geométricas e, a partir da álgebra, apresentava suas respectivas equações, descrevendo-as como uma das propriedades dessas curvas. Dessa forma, o que Descartes se propunha a fazer, era lidar com equações mais complexas, criando métodos para abordar essas equações polinomiais de ordens elevadas.

Embora textos matemáticos indicam que o início da Geometria Analítica partiu do matemático grego Menêcmo, ao qual atribui-se a descoberta das cônicas, o estudo da Geometria Analítica nos remete a René Descartes por trabalharmos num sistema de coordenadas cujo nome foi dado em sua homenagem, chamado de *plano cartesiano*.

O estudo das cônicas parte então da ideia de lugar geométrico determinado pela intersecção de um plano com um ou dois cones, tal como apresentado na Figura 1.

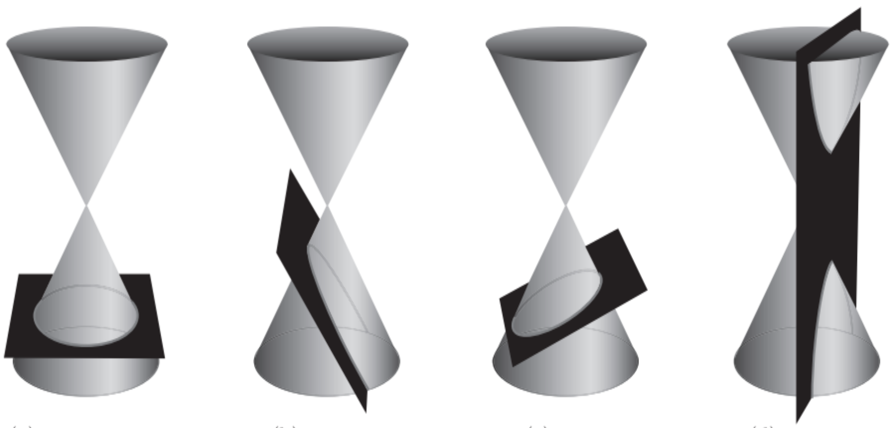

Figura 1 – Representação das curvas cônicas. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009)

Nota-se que, a partir da intersecção, dependendo de seu ângulo de inclinação com a horizontal ou com o plano da base do cone, o plano que intercepta os cones pode determinar

Francisco disse para um jornal italiano que Blaise Pascal merecia a beatificação e que planejava o início do processo oficialmente.

3 *Discurso do Método* é um tratado matemático e filosófico que propõe um modelo matemático na elaboração do pensamento do homem, na tentativa da certeza e da ausência da dúvida, situações características da matemática. (DESCARTES, 2018)

até quatro lugares geométricos distintos, chamados de *cônicas*. São elas: Circunferência, elipse, hipérbole e parábola.

(a) *Circunferência*: Temos que o ângulo de inclinação do plano que corta o cone é de 0°, ou seja, o plano é paralelo à base dos cones; Para este caso, como se observa, temos uma circunferência.

(b) *Parábola*: Temos que o ângulo de inclinação do plano que corta o cone é idêntico ao da geratriz, intersectando apenas um cone. O lugar geométrico formado neste caso é uma elipse;

(c) *Elipse*: Temos que o ângulo de inclinação do plano que corta o cone é maior que 0° e é menor que o ângulo de inclinação da reta (chamada *geratriz*) que gera o cone por rotação do eixo z, fazendo assim com que esse plano intersecta todas as suas geratrizes. Com isso temos que o lugar geométrico para este caso é uma elipse.

(d) *Hipérbole*: Temos que a inclinação do plano que corta o cone é maior que o ângulo da geratriz e menor ou igual a um ângulo reto, intersectando assim os dois cones. Para este caso, o lugar geométrico é uma hipérbole.

Assim, após todas estas construções, a análise dessas curvas se dá de forma individual a partir de coordenadas cartesianas. Logo, seus lugares geométricos passarão a ser representados por equações, as quais terão, cada uma, propriedades particulares dependendo de cada curva.

1.2 ENSINO DAS PROPRIEDADES ANALÍTICAS E GEOMÉTRICAS

O estudo das cônicas se apresenta nos tópicos finais da Geometria Analítica, após toda a apresentação da introdução básica do plano cartesiano, pontos, retas e circunferências. Embora a circunferência seja um caso abordado nas cônicas, o tópico “cônicas” na maioria dos livros didáticos é iniciado com os seus estudos nas elipses, hipérboles e parábolas. Aqui, vamos tratar de secções cônicas, desde a circunferência, passando em seguida pelas elipses, hipérboles e parábolas, como seria apresentado ao aluno em sala de aula, dando bastante ênfase à definição deste objetos e dando ferramentas sobre como obter as equações diretamente da definição da cônica e da função distância no plano (usando basicamente o Teorema de Pitágoras.)

1.2.1 Circunferências

Inciaremos o estudo das cônicas a partir do Lugar Geométrico conhecido como circunferência (Figura 2). Sendo esta curva a interseção de um plano com um cone, é uma curva plana e pode ser representada no plano cartesiano xOy tais que as coordenadas de seus pontos serão dadas por (x,y).

De acordo com (DELGADO; FRENSEL; CRISSF, 2017), temos a seguinte definição:

Definição 1 (Circunferência)**.** Uma *circunferência* é o conjunto de todos os pontos (x,y) do plano cartesiano cuja distância a um ponto fixo $O(x_o,y_o)$ é uma constante chamada *raio*.

Figura 2 – Lugar geométrico conhecido como circunferência. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009).

Considere λ uma circunferência de raio R e centro O com coordenadas (x_o, y_o) e P um ponto arbitrário pertencente à essa circunferência, com coordenadas (x_p, y_p). Pela Definição 1, temos que a distância entre o centro de uma circunferência até qualquer um dos pontos que pertence a circunferência é igual a medida de seu raio, isto é, a distância entre os pontos O e P será R.

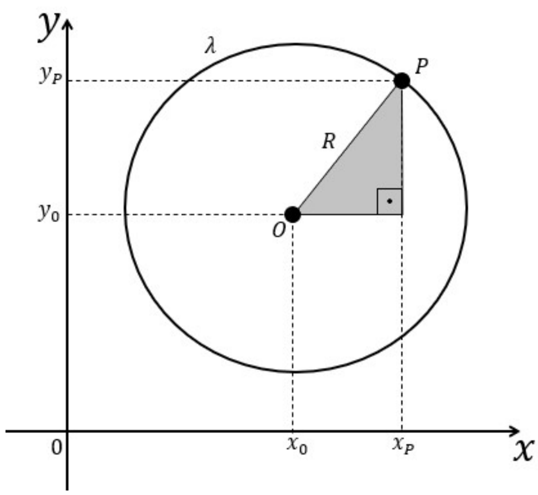

Figura 3 – Triângulo retângulo na circunferência λ. Fonte: De autoria própria.

A partir da Figura 3, identificamos um triângulo retângulo (sombreado) e, aplicando o *Teorema de Pitágoras*, determinamos a equação inicial da circunferência. Sendo a hipotenusa igual a R e os catetos iguais a $|x_p - x_o|$ e $|y_p - y_o|$, podemos determinar a seguinte equação, substituindo P por um ponto genérico (x, y),

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2, \tag{1}$$

a qual é chamada de *equação reduzida da circunferência*.

Lembrando que equações do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0, \tag{2}$$

são chamadas *equações quadráticas de duas variáveis*, podemos expressar a equação da circunferência como uma equação deste tipo. Desenvolvendo a equação (1), obtemos

$$x^2 + y^2 - 2x_o x - 2y_o y + {x_o}^2 + {y_o}^2 - R^2 = 0, \tag{3}$$

chamada *equação geral da circunferência*.

Vemos então que para que a equação (2) seja a representação de uma circunferência, comparando as equações (2) e (3) devemos ter $A = B \neq 0$, $C = 0$, $D/A = -2x_o$ e $E/A = -2y_o$. Ainda, estas relações permitem determinar as coordenadas do centro $x_o = -D/(2A)$ e $y_o = -E/(2A)$ e a medida do raio, a qual é dada por:

$$\begin{aligned} {x_o}^2 + {y_o}^2 - R^2 = \frac{F}{A} &\Rightarrow R^2 = {x_o}^2 + {y_o}^2 - \frac{F}{A} \\ &\Rightarrow R = \sqrt{\frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A}}. \end{aligned}$$

Concluímos que, para que a equação quadrática (2) seja uma circunferência, precisamos que os seguinte itens sejam satisfeitos:

$$\begin{cases} A = B \neq 0, \\ C = 0 \\ \dfrac{D^2}{4A^2} + \dfrac{E^2}{4A^2} - \dfrac{F}{A} > 0 \end{cases}$$

1.2.2 Elipses

Assim como as circunferências, conforme descrito anteriormente, as elipses são lugares geométricos determinados pela interseção de planos cujos ângulos de inclinação em relação ao plano de base dos cones variam entre $0,^\circ$ e o ângulo de inclinação de suas geratrizes (ver Figura 4).

De acordo com (DELGADO; FRENSEL; CRISSF, 2017), temos a seguinte definição:

Definição 2 (Elipse)**.** Uma *elipse* de focos F_1 e F_2 é definida como sendo o conjunto dos pontos $P(x,y)$ do plano cuja soma das distâncias entre este ponto e os pontos F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a$, sendo que $2a$ é um número maior do que a distância entre os pontos F_1 e F_2, dado por $2c$.

Resumidamente, temos que uma elipse ε é o conjunto

$$\varepsilon = \left\{P\,(x,y) : \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a\right\}.$$

Vamos relembrar a notação:

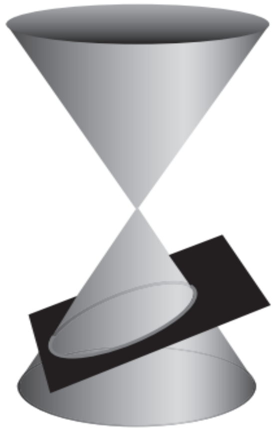

Figura 4 – Lugar geométrico conhecido como elipse. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009).

- F_1 e F_2 são os focos da elipse;
- r é a reta que contém os focos F_1 e F_2 e é chamada de *reta focal*;
- $\varepsilon \cap \{F_1\} = \varnothing$ e $\varepsilon \cap \{F_2\} = \varnothing$;
- $\varepsilon \cap r = \{A_1, A_2\}$;
- A_1 e A_2 são denominados *vértices* da elipse ε;
- $\overline{F_1F_2}$ é chamado de *distância focal* da elipse ε;
- A_1A_2 é chamado de *eixo focal* da elipse ε;
- $\overline{F_1F_2} = 2c$;
- $\overline{A_1A_2} = 2a$;
- O centro da elipse ε é determinado por $O(x_0, y_0)$ tal que O é ponto médio de A_1A_2, isto é, $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = a$;
- r' é a mediatriz de A_1A_2 e é a chamada de *reta não focal* da elipse ε. Assim, o centro da elipse $O(x_0, y_0)$ pertence à reta não focal;
- $\varepsilon \cap r' = \{B_1, B_2\}$;
- B_1 e B_2 são denominados *vértices* da elipse ε sobre a reta não focal;
- B_1B_2 é chamado de *eixo não focal* da elipse ε;
- $\overline{B_1B_2} = 2b$.

Com as informações anteriores, temos o losango $F_1B_1F_2B_2$ da Figura 5 tal que $\overline{F_1B_1} = \overline{B_1F_2} = \overline{F_2B_2} = \overline{B_2F_1} = a$.

Nota-se que se $b \to 0$, a medida $c \to a$, uma vez que a medida a é a maior das três medidas assim definidas e, dessa maneira, o triângulo retângulo dado por B_2OF_2 passa a ser degenerado (isto é, se transforma em uma reta). Assim, a razão entre c e a será igual a 1, e teremos um segmento de reta e não uma elipse. Por outro lado, se $c \to 0$, os focos F_1 e F_2 tendem ao centro da elipse enquanto os vértices sobre a reta não focal B_1B_2 se distanciam do

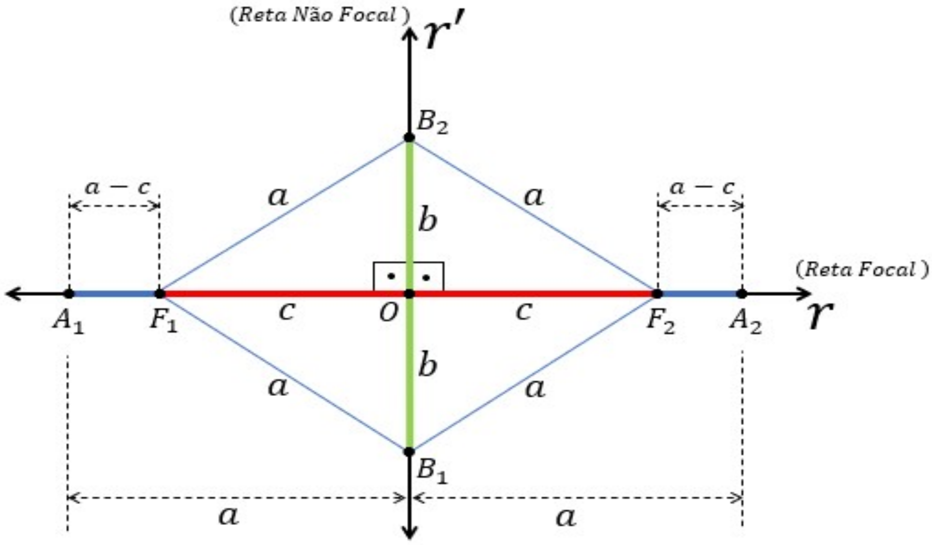

Figura 5 – Losango inicial para elipse com eixo focal horizontal. Fonte: De autoria própria.

centro da elipse tendendo ao valor de a. Dessa forma, quando $c = 0$, temos $b = a$ e a distância entre os respectivos vértices de uma mesma reta sendo iguais a uma mesma medida a. Com isso, nota-se que, neste caso, teremos uma circunferência de raio a, que é um caso especial da elipse.

Assim, teremos uma degeneração em elipses nos casos em que $b = 0$ ou $c = 0$, resultando, respectivamente, em um segmento de reta A_1A_2 ou em uma circunferência de centro $O(x_o, y_o)$ e raio $R = a$. Essas conclusões levam à ideia de excentricidade de uma elipse, que basicamente mede o quão distante ela está de ser um círculo.

Assim, definimos a *excentricidade "e"* de uma elipse a razão descrita por

$$e = \frac{c}{a}.$$

Nos casos comentados, temos que

(i) $b = 0 \Rightarrow a = c \Rightarrow e = \frac{a}{a} \Rightarrow e = 1$

(ii) $c = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow e = \frac{0}{a} \Rightarrow e = 0$

Logo, para $0 < c < a$ temos $0 < e < 1$. A excentricidade de uma elipse mostra o quanto "oval" ela é. Quanto mais próximo de 1 estiver a excentricidade, mais oval ela será, enquanto quanto mais próximo de zero ela estiver, menos oval ela será, tendendo à uma circunferência.

Para encontrar as equações, vamos considerar dois casos:

- (i) Elipse de centro $O(x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo x;
- (ii) Elipse de centro $O(x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo y;

Em ambos os casos, iniciaremos com as elipses centradas na origem do plano cartesiano, como representado pela Figura 6.

Portanto, para a situação (i), de acordo com a imagem, vamos considerar que a elipse está centrada na origem do plano de coordenadas cartesianas, ou seja, $O(0, 0)$. Note que os focos F_1 e F_2 são pontos sobre o eixo x, assim como os vértices A_1 e A_2, portanto a reta focal coincide

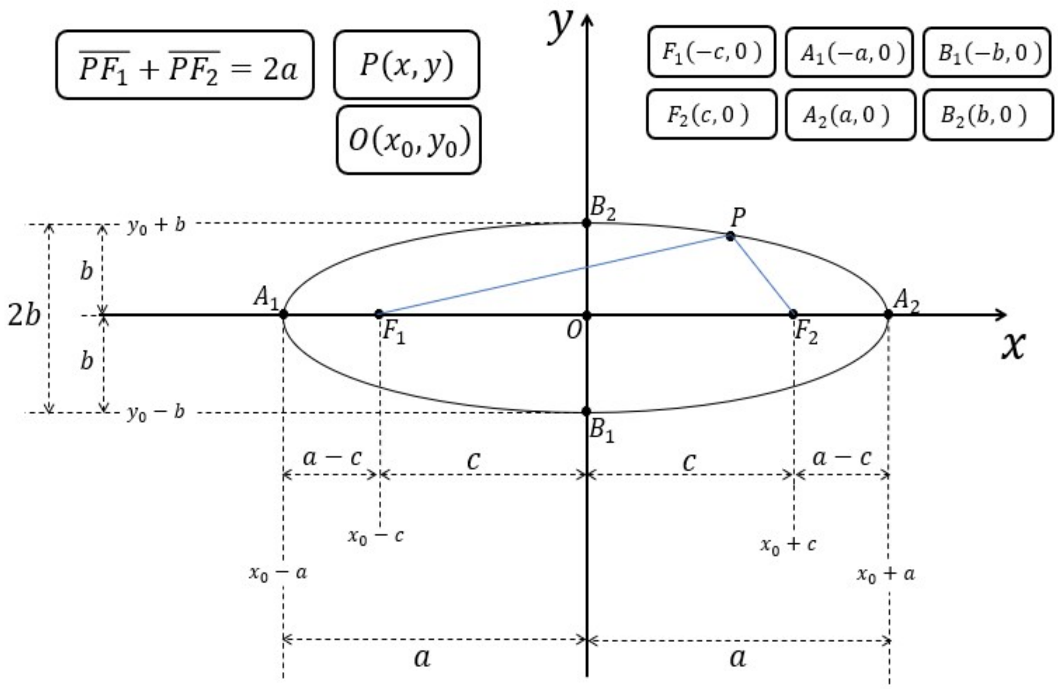

Figura 6 – Elipse de centro na origem do plano cartesiano com eixo focal horizontal. Fonte: De autoria própria.

com o eixo x. Analogamente, os vértices B_1 e B_2 estão sobre o eixo y. Dessa forma, associando um ponto $P(x,y)$ qualquer pertencente à elipse ε, temos as seguintes notações:

$$\text{Centro} \longrightarrow O(0,0),$$
$$\text{Ponto} \longrightarrow P(x{,}y),$$
$$\text{Foco 1} \longrightarrow F_1(-c,0),$$
$$\text{Foco 2} \longrightarrow F_2(c,0).$$

De acordo com a Definição 2, tem-se que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ logo, a partir desses dados apresentados, é necessário trabalhar com a relação que envolve a distância entre dois pontos. Dados dos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_A, y_B)$ temos que $\overline{AB}$ é a distância entre estes dois pontos A e B, a qual é dada por

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \tag{4}$$

Aplicando (4) à $\overline{PF_1}$, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{PF_1} &= \sqrt{\left(x_P - x_{F_1}\right)^2 + \left(y_P - y_{F_1}\right)^2} \\
&= \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} \\
&= \sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} \\
&= \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Aplicando (4) para os pontos P e F_2 temos:

$$\begin{aligned}\overline{PF_2} &= \sqrt{\left(x_P - x_{F_2}\right)^2 + \left(y_P - y_{F_2}\right)^2}\\ &= \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\\ &= \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2}\\ &= \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}.\end{aligned} \tag{6}$$

Dado que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, substituindo (5) e (6) temos então que:

$$\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = 2a,$$

$$\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} = 2a - \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}. \tag{7}$$

Ao elevar ambos os membros da equação (7) ao quadrado, tem-se que:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2a - \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}\right)^2\\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= (2a)^2 - 2(2a)\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + \left(\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}\right)^2\\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.\end{aligned} \tag{8}$$

Ao isolar o radical na equação (8), chega-se à expressão:

$$\begin{aligned}4cx - 4a^2 &= -4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}\\ cx - a^2 &= -a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}.\end{aligned} \tag{9}$$

Ao elevar ambos os membros ao quadrado da equação (9), tem-se que:

$$\begin{aligned}\left(cx - a^2\right)^2 &= \left(-a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}\right)^2,\\ c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right)\\ c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2\end{aligned} \tag{10}$$

Nota-se que, termos iguais em lados opostos da equação (10) são anulados obtendo assim a simplificação:

$$\begin{aligned}c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &\Rightarrow a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2\\ &\Rightarrow a^2\left(a^2 - c^2\right) = x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2.\end{aligned} \tag{11}$$

De acordo com o apresentado inicialmente nos estudos das elipses, temos que $a^2 = b^2 + c^2$ e portanto, $a^2 - c^2 = b^2$. Assim, ao substituir na expressão (11), temos:

$$\begin{aligned}a^2\left(a^2 - c^2\right) = x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 &\Rightarrow a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2\\ &\Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.\end{aligned} \tag{12}$$

Ao dividir ambos os membros de (12) por $a^2b^2 \neq 0$, concluímos que:

$$\frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2},$$

logo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{13}$$

Perceba que, nesse caso temos $a > b$, uma vez que o eixo focal está na horizontal (sobre o eixo x). Assim, conclui-se que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{com } a > b \quad \text{(eixo focal sobre eixo } x\text{)}.$$

Esta mesma lei de formação para a elipse cujo centro é a origem do plano cartesiano $O(0,0)$ dada pela equação que definimos por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é também chamada de *forma canônica* da elipse.

Dessa maneira, a próxima etapa é trabalhar com uma elipse transladada (Figura 7) tal que essa translação altere apenas a posição do centro da elipse, ou seja, os eixos transladados do plano cartesiano continuarão com os mesmos ângulos definidos pelos eixos x e y originalmente. Essa associação leva a conclusão de que os eixos transladados serão dados pelas reta focal e reta não focal.

Então, temos que, ainda analisando a situação (i) mas com centro fora da origem do plano, determina-se que:

- a reta focal é paralela ao eixo x e não coincidente;
- a reta não focal paralela ao eixo y e não coincidente.

Assim, adotaremos os devidos pontos apresentados genericamente no plano de coordenadas cartesianas conforme descrição abaixo:

$$\begin{aligned} \text{Centro} &\longrightarrow O(x_0, y_0), \\ \text{Ponto} &\longrightarrow P(x,y), \\ \text{Foco 1} &\longrightarrow F_1(x_0 - c, y_0), \\ \text{Foco 2} &\longrightarrow F_2(x_0 + c, y_0). \end{aligned}$$

Conforme exposto, suponha-se que o ponto P, de coordenada (x,y) seja reescrito tal que sua posição será definida por um k além do centro x_0 e de forma análoga, tem-se h além do centro y_0. Logo,

$$P(x,y) \longrightarrow x = x_0 + k \text{ e } y = y_0 + h.$$

com isso temos que $k = x - x_0$ e $h = y - y_0$ e a translação faz com que ocorra a seguinte mudança $P(x,y) \to P'(k,h)$ no plano transladado $x'Oy'$.

Assim, utilizando a relação da distância entre dois pontos e trabalhando analogamente ao exposto na forma canônica, temos que:

$$\overline{P'F_1} + \overline{P'F_2} = 2a.$$

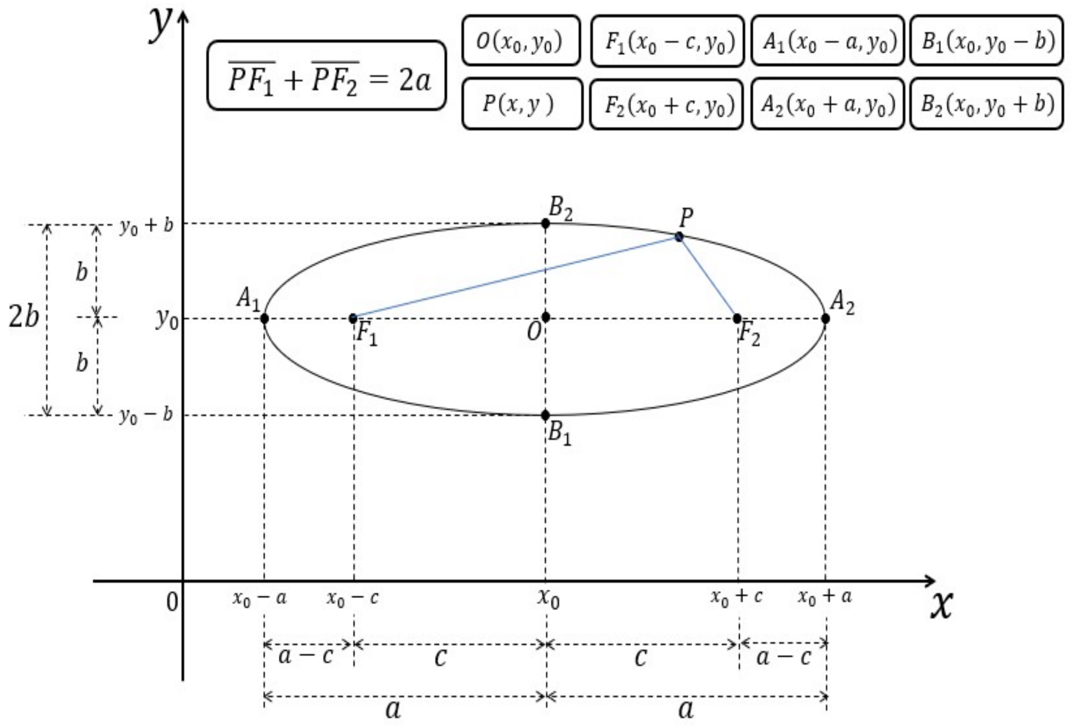

Figura 7 – Elipse transladada no plano cartesiano com eixo focal horizontal. Fonte: De autoria própria.

Se, para uma elipse de centro $(0,0)$ com reta focal na horizontal, um ponto $P(x,y)$ temos $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$, então para os pontos de $P'(k,h)$ tem-se $\frac{k^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1$.

Como $P'(k,h)$ é do plano transladado, ao retornar para o plano de coordenadas cartesianas original dado por xOy, tem-se como definido anteriormente que $x = x_0 + k$ e $y = y_0 + h$ reportando assim para os respectivos valores:

$$x = x_0 + k \Rightarrow k = x - x_0$$
$$y = y_0 + h \Rightarrow h = y - y_0.$$

Logo, ao substituir $k = x - x_0$ e $h = y - y_0$ em $k^2/a^2 + h^2/b^2 = 1$, conclui-se que sua lei de formação será dada por

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{14}$$

A análise final deve-se fixar que, generalizando os casos, para qualquer que seja a elipse que exista com reta focal paralela ao eixo x (coincidente ou não coincidente), ou seja, para os casos em que $a > b$, admite-se a equação:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

em que no caso de $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, teremos um caso em especial tal que a lei de formação já foi definida como forma canônica da elipse.

Por outro lado e de forma análoga ao que já fizemos, podemos apresentar uma elipse centrada na origem $O(x_0, y_0)$ mas com a reta focal sobre o eixo y. Para que isso ocorra, continua-se tendo $a > b$ porém como o eixo focal A_1A_2 tal que $\overline{A_1A_2} = 2a$ está na vertical e sobre o eixo y. As medidas b e c sofrem alterações nas posições, uma vez que a distância focal se dá por $2c$ tal que $\overline{F_1F_2} = 2c$ e assim, passa estar também na vertical sobre o eixo y uma vez que A_1A_2 é o eixo focal. Logo, $\overline{B_1B_2} = 2b$ trata-se do eixo não focal e este estará sobre o eixo x. Percebe-se

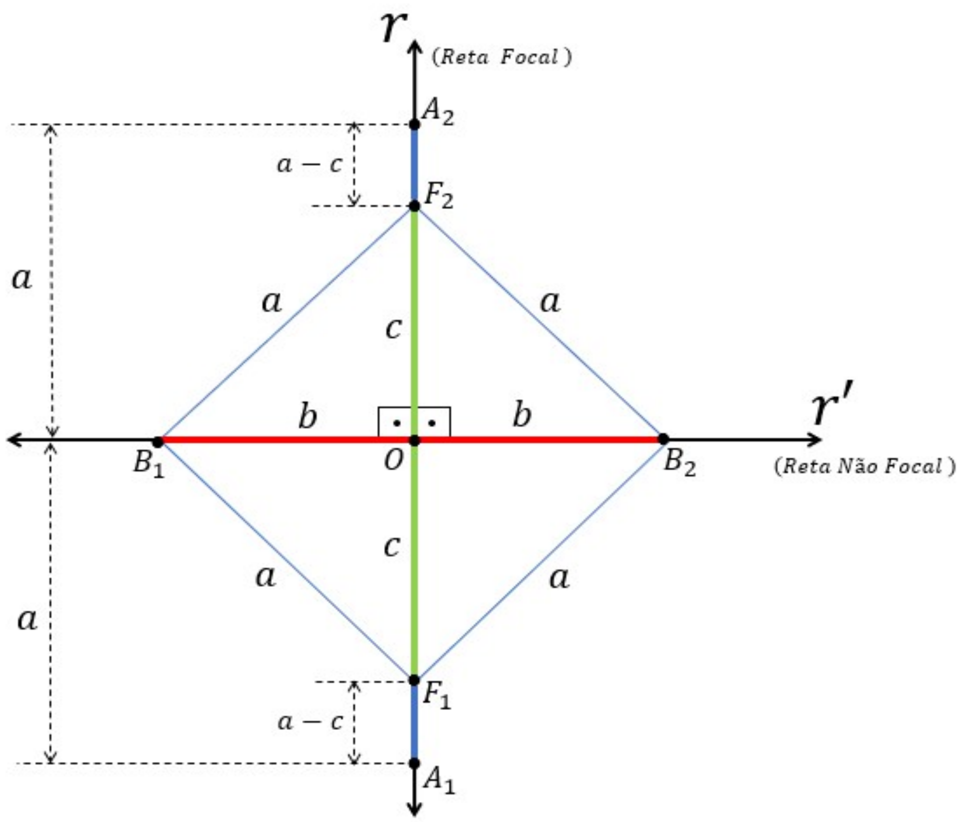

Figura 8 – Losango inicial para elipse com eixo focal vertical. Fonte: De autoria própria.

que $\overline{B_1F_1} + \overline{B_1F_2} = \overline{B_2F_1} + \overline{B_2F_2} = 2a$:

Dadas descrições anteriores, conclui-se que a é a distância do centro da elipse aos vértices sobre a reta focal, b é a distância do centro da elipse aos vértices sobre a Reta Não Focal e c é a distância do centro da elipse aos focos e, sendo assim, nota-se:

$$\overline{A_1O} = \overline{0A_2} = a,$$

$$\overline{B_1O} = \overline{0B_2} = b,$$

$$\overline{F_1O} = \overline{0F_2} = c.$$

Logo, com as informações anteriores, temos inicialmente a definição de um quadrilátero $F_1B_1F_2B_2$ tal que $\overline{A_1B_1} = \overline{B_1F_2} = \overline{F_2B_2} = \overline{B_2F_1} = a$. Assim, $F_1B_1F_2B_2$ é um losango de lado igual a a, como apresentado na Figura 8.

De forma análoga à Figura 5, na Figura 8 teremos também que $a^2 = b^2 + c^2$ porém, agora a estrutura apresentada difere nas posições dos catetos.

A excentricidade da elipse permanece de acordo com as definições apresentadas em que ela será dada pela razão

$$e = \frac{c}{a}.$$

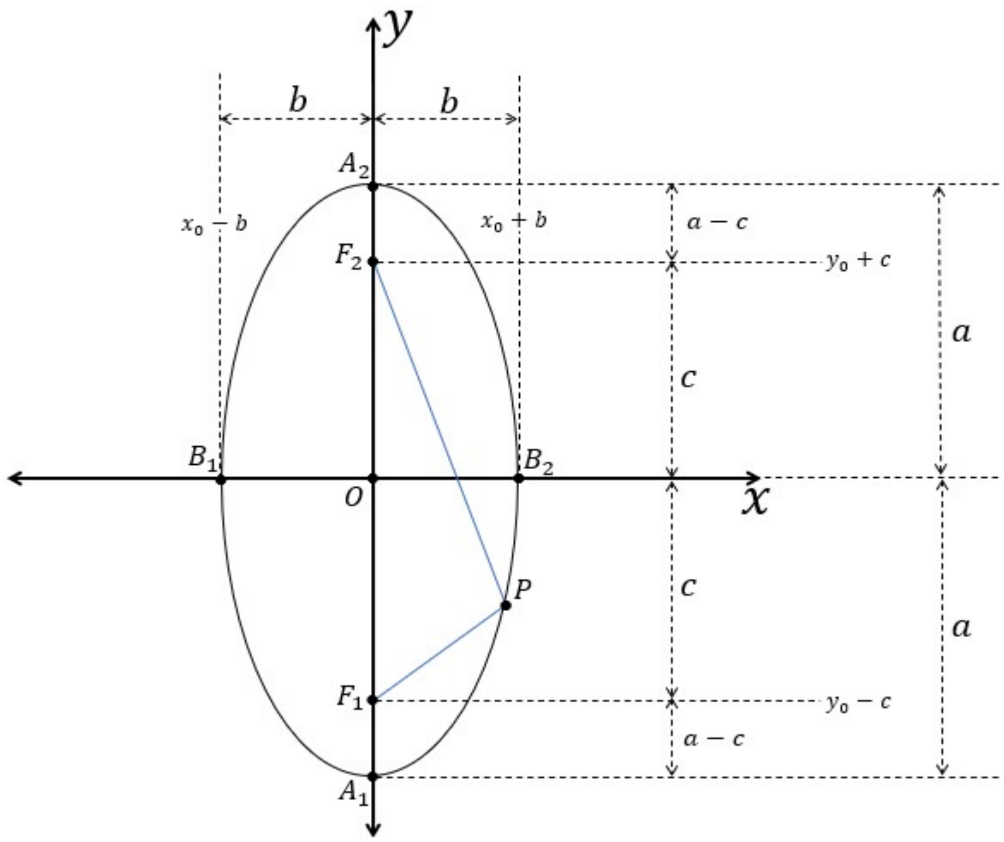

Figura 9 – Elipse de centro na origem do plano cartesiano com eixo focal vertical. Fonte: De autoria própria.

Nota-se que, a partir destas situações, buscaremos neste segundo momento, as leis de suas equações, tais quais serão creditadas todas as informações já impostas anteriormente. Com isso, tomemos como base para as leis de formações desses lugares geométricos, agora o caso (ii), onde para este, inicialmente trabalharemos com o eixo focal sobre o eixo y.

Lembre-se que, como já descrevemos, temos que

- (i) Elipse de centro $O(x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo x;
- (ii) Elipse de centro $O(x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo y.

Busca-se agora estudar o caso (ii). Iniciaremos da mesma maneira como determinamos em (i), utilizando as elipses centradas na origem do plano cartesiano.

Assim, para a situação (*ii*), de acordo com a Figura 9, vamos admitir que a elipse está centrada na origem do plano de coordenadas cartesianas, ou seja, $O(0,0)$. Com isso, perceba-se que os focos F_1 e F_2 são pontos sobre o eixo y assim como os vértices A_1 e A_2 e, portanto, teremos a reta focal sendo coincidente com o eixo y, logo o eixo focal estará sobre o eixo y. De forna análoga ocorrerá com os vértices B_1 e B_2 porém sobre o eixo x. Dessa forma, associando um ponto $P(x,y)$ qualquer pertencente a elipse, temos:

$$\begin{aligned}
\text{Centro} &\longrightarrow O(0,0),\\
\text{Ponto} &\longrightarrow P(x,y),\\
\text{Foco 1} &\longrightarrow F_1(0,-c),\\
\text{Foco 2} &\longrightarrow F_2(0,c).
\end{aligned}$$

Como é sabido, por definição, tem-se que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ logo, a partir desses dados apresentados, novamente trabalharemos com a relação que envolve a distância entre dois pontos dada essa propriedade principal da elipse em que o somatório desses dois segmentos gera uma constante.

Dada a relação da distância entre dois pontos, aplicas-se em $\overline{PF_1}$:

$$\begin{aligned}
\overline{PF_1} &= \sqrt{(x_P - x_{F_1})^2 + (y_P - y_{F_1})^2}\\
&= \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-c))^2}\\
&= \sqrt{x^2 + (y+c)^2}\\
&= \sqrt{x^2 + y^2 + 2cy + c^2}.
\end{aligned}$$

Aplicando a relação da distância entre dois pontos em $\overline{PF_2}$ temos:

$$\begin{aligned}
\overline{PF_2} &= \sqrt{(x_P - x_{F_2})^2 + (y_P - y_{F_2})^2}\\
&= \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2}\\
&= \sqrt{x^2 + (y-c)^2}\\
&= \sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2}.
\end{aligned}$$

Dado que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ temos então que:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + y^2 + 2cy + c^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2} &= 2a,\\
\sqrt{x^2 + y^2 + 2cy + c^2} &= 2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2}.
\end{aligned}$$

Ao elevar ambos os membros ao quadrado, tem-se que:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 2cy + c^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 + 2cy + c^2 = (2a)^2 - 2(2a)\sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2} + \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 + 2cy + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2} + x^2 + y^2 - 2cy + c^2.$$

Ao isolar o radical, chegamos à expressão:

$$4cy - 4a^2 = -4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2} \implies cy - a^2 = -a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2}.$$

Ao elevar ambos os membros ao quadrado, tem-se que:

$$\begin{aligned}\left(cy - a^2\right)^2 &= \left(-a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2}\right)^2,\\ c^2y^2 - 2a^2cy + a^4 &= a^2\left(x^2 + y^2 - 2cy + c^2\right)\\ &= a^2x^2 + a^2y^2 - a^22cy + a^2c^2.\end{aligned}$$

Nota-se que, termos iguais em lados opostos da equação são anulados obtendo assim a simplificação:

$$\begin{aligned}c^2y^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2y^2 + a^2c^2 &\implies a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 + a^2y^2 - c^2y^2\\ &\implies a^2(a^2 - c^2) = a^2x^2 + y^2(a^2 - c^2).\end{aligned}$$

De acordo com o apresentado inicialmente nos estudos das elipses, temos que $a^2 = b^2 + c^2$ e portanto $a^2 - c^2 = b^2$. Assim, ao substituir na expressão anterior, temos:

$$\begin{aligned}a^2(a^2 - c^2) = a^2x^2 + y^2(a^2 - c^2) &\implies a^2b^2 = a^2x^2 + y^2b^2\\ &\implies a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2.\end{aligned}$$

Ao dividir ambos os membros por a^2b^2 concluímos que:

$$\begin{aligned}\frac{a^2x^2 + b^2y^2}{a^2b^2} &= \frac{a^2b^2}{a^2b^2},\\ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} &= 1.\end{aligned} \tag{15}$$

Perceba que, como dado que nesse caso, temos $a > b$, uma vez que o eixo focal está na vertical (sobre o eixo y),

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad \text{com } a > b \quad \text{(eixo focal sobre eixo } y\text{)}.$$

Pelas características já citadas anteriormente temos que esta lei de formação da elipse de centro na origem do plano cartesiano $O(0,0)$ dada por $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ porém, agora com o eixo focal sobre y, também é chamada de forma canônica da elipse.

Partindo agora, de uma generalização, independentemente de o eixo focal estar sobre o eixo x ou y, chamaremos a forma canônica de uma elipse às situações cujos os lugares geométricos possuem centro na origem do plano cartesiano xOy.

Dessa maneira, como fizemos para o caso do eixo focal ser paralelo do eixo x e não coincidente, a nossa próxima etapa também será trabalhar com uma elipse transladada. Tal translação altera apenas a posição do centro da elipse, ou seja, os eixos transladados do plano cartesiano continuarão com os mesmos ângulos definidos pelos eixos x e y originalmente. Como isso, os eixos transladados serão paralelos aos eixos originais do plano concluindo que, dessa forma, o processo da obtenção da lei de formação dessas elipses se darão analogamente ao que já foi exposto na forma canônica, um vez que a lei obtida auxilia no processo. Essa associação leva a conclusão de que os eixos transladados aos respectivos eixos x e y serão dados pelas respectivas reta não focal e reta focal.

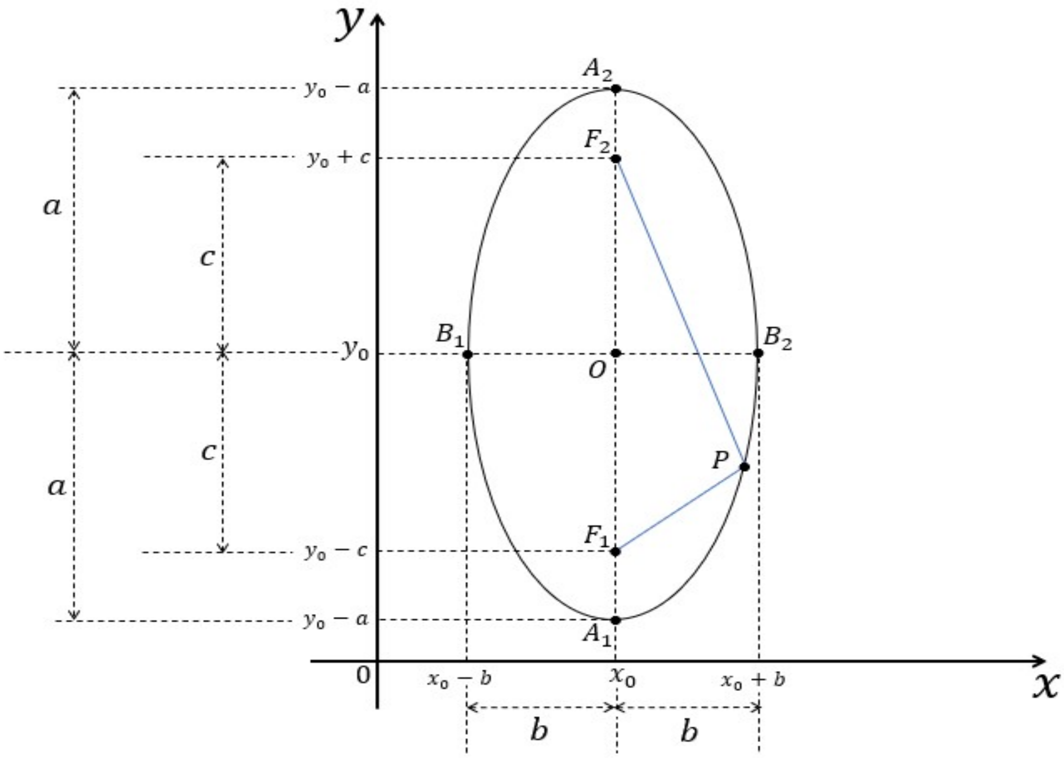

Figura 10 – Elipse transladada no plano cartesiano e com eixo focal vertical. Fonte: De autoria própria.

Analisando a situação (ii) mas com centro fora da origem do plano cartesiano, determina-se que:

- a reta focal é paralela ao eixo y e não coincidente;
- a reta não focal paralela ao eixo x e não coincidente.

Adota-se os devidos pontos apresentados genericamente no plano de coordenadas cartesianas conforme descrição abaixo:

$$
\begin{aligned}
\text{Centro} &\longrightarrow O(x_0, y_0),\\
\text{Ponto} &\longrightarrow P(x,y),\\
\text{Foco 1} &\longrightarrow F_1(x_0, y_0 - c),\\
\text{Foco 2} &\longrightarrow F_2(x_0, y_0 + c).
\end{aligned}
$$

Suponha-se que o ponto P, de coordenada (x,y) seja reescrito tal que

$$P(x,y) \longrightarrow x = x_0 + k \text{ e } y = y_0 - h,$$

e com isso tem-se que $k = x - x_0$ e $h = y_0 - y$. Logo, a origem do plano cartesiano é transladada para o centro da elipse $O(x_0, y_0)$ justificando assim uma troca de variável em que $P(x,y) \Rightarrow P'(k, -h)$ no plano transladado $x'Oy'$.

Assim, utilizando a relação da distância entre dois pontos e trabalhando analogamente ao exposto na forma canônica, temos que:

$$\overline{P'F_1} + \overline{P'F_2} = 2a.$$

Se, para uma elipse de centro $(0,0)$ com reta focal na horizontal, um ponto $P(x,y)$ tem a representação dada pela equação $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, então para os pontos de $P'(k,h)$ tem-se que

$$\frac{k^2}{b^2} + \frac{(-h)^2}{a^2} = 1 \implies \frac{k^2}{b^2} + \frac{h^2}{a^2} = 1.$$

Como $x = x_0 + k$ e $y = y_0 - h$, tem-se $k = x - x_0$ e $h = y_0 - y$ e substituindo em $\frac{k^2}{b^2} + \frac{h^2}{a^2} = 1$, conclui-se que sua lei de formação será dada por

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y_0 - y)^2}{a^2} = 1,$$
$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1.$$

A análise final deve-se fixar que, generalizando os casos, para qualquer que seja a elipse que exista com reta focal paralela ao eixo y (coincidente ou não coincidente), ou seja, para os casos em que $a > b$, admite-se a equação

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1,$$

em que no caso de $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, teremos um caso em especial tal que a lei de formação já foi definida como forma canônica da elipse.

Dessa maneira, as exposições anteriores determinam que as elipses ε apresentarão equações tais que, de acordo o seu eixo focal dado por $\overline{A_1A_2} = 2a$, teremos duas situações:

- (i) Eixo focal paralelo ao eixo x: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
- (i) Eixo focal paralelo ao eixo y: $\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$

Assim, dado que existe um lugar geométrico conhecido como elipse tem-se que suas equação serão descritas como apresentado anteriormente, de acordo suas especificidades.

1.2.3 Hipérboles

Assim como as circunferências e as elipses, as hipérboles são lugares geométricos determinados pelas intersecções de planos tais que os ângulos de inclinação, em relação ao plano

Figura 11 – Lugar geométrico conhecido como hipérbole. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009).

da base dos cones, são maiores que o ângulo da geratriz e menores ou iguais que 90 °, como na Figura 11.

De acordo com (DELGADO; FRENSEL; CRISSF, 2017), temos a seguinte definição:

Definição 3 (Hipérbole)**.** Uma *hipérbole* de focos F_1 e F_2 é definida como sendo o conjunto dos pontos $P(x,y)$ do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos F_1 e F_2, dado por $2c > 0$.

Resumidamente, temos que uma hipérbole H é o conjunto

$$H = \left\{P : \left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a\right\}, \tag{16}$$

com $0 < a < c$ e $\overline{F_1F_2} = 2c$.

Depois de desenhar a curva que representa este lugar geométrico no plano com coordenadas cartesianas, iniciamos o processo de busca de sua lei de formação. Pela definição, uma hipérbole de focos F_1 e F_2 é um conjunto de pontos P dado $P(x,y)$ do plano de coordenadas cartesianas cuja diferença modular entre distâncias destes aos focos F_1 e F_2 são iguais a uma constante $2a$ tal que $2a$ é menor do que a distância entre os focos F_1 e F_2 a qual chamaremos de $2c$. Matematicamente, temos $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$ com $0 < a < c$.

Vamos chamar de V_1 e V_2 as intersecções da hipérbole com a reta que contem o segmento F_1F_2. Observa-se que $\overline{V_1F_2} > \overline{V_1F_1}$ e $\overline{V_2F_1} > \overline{V_2F_2}$. Temos que, de acordo com a Figura 12,

(i) $\overline{V_1F_2} - \overline{V_1F_1} = 2a \Rightarrow \overline{V_2F_2} + \overline{V_1V_2} - \overline{V_1F_1} = 2a$,

(ii) $\overline{V_2F_1} - \overline{V_2F_2} = 2a \Rightarrow \overline{V_2V_1} + \overline{V_1F_1} - \overline{V_2F_2} = 2a$.

Ao somar as duas condições, ou seja, $(i) + (ii)$, temos:

$$2 \cdot (\overline{V_1V_2}) = 4a \implies \overline{V_1V_2} = 2a.$$

Assim, dado que $\overline{V_1V_2} = 2a$, ao substituir em (i) temos que

$$\begin{aligned}\overline{V_2F_2} + \overline{V_1V_2} - \overline{V_1F_1} = 2a &\implies \overline{V_2F_2} + 2a - \overline{V_1F_1} = 2a\\ &\implies \overline{V_2F_2} - \overline{V_1F_1} = 0\\ &\implies \overline{V_2F_2} = \overline{V_1F_1}.\end{aligned}$$

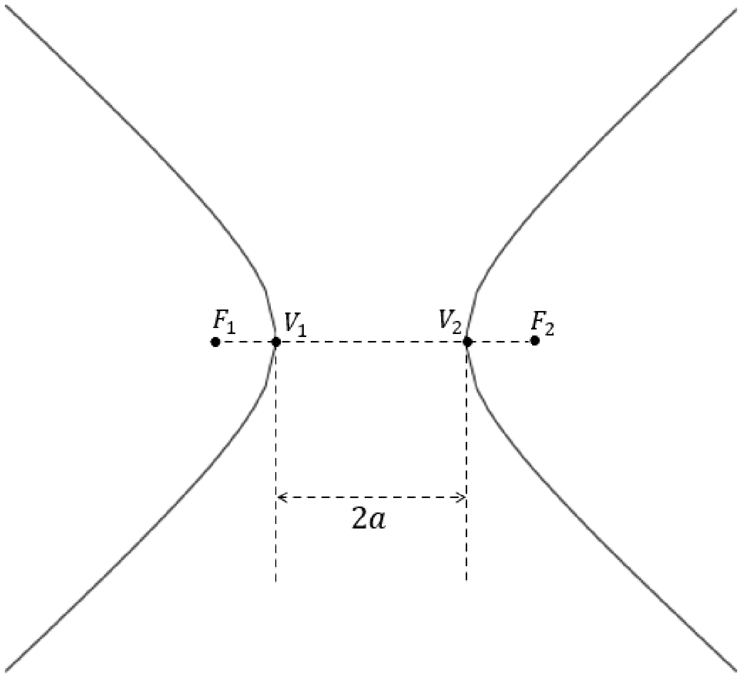

Figura 12 – Hipérbole - Introdução. Fonte: De autoria própria.

Define-se agora o eixo B_1B_2 como sendo a corda determinada pelas intersecções de duas circunferências λ_1 e λ_2 de centro em V_1 e V_2, ambas de raio medindo $r = c$, como na Figura 13. Temos que B_1B_2 é o eixo contido na mediatriz de V_1V_2 e também V_1V_2 está contido na mediatriz de B_1B_2. Portanto, o ponto $O(x_0, y_0)$, é a intersecção entre V_1V_2 e B_1B_2, ou seja, $V_1V_2 \bigcap B_1B_2 = O(x_0, y_0)$.

Com isso, nota-se que $O(x_0, y_0)$ é o ponto médio de V_1V_2 e B_1B_2 e, como $\overline{V_1F_1} = \overline{V_2F_2}$, temos que $O(x_0, y_0)$ é também ponto médio de F_1F_2. Logo, resumidamente os seguintes elementos (ver Figura 13):

- $B_1B_2 \perp V_1V_2$;
- $O(x_0, y_0)$ é a intersecção entre B_1B_2 e V_1V_2;
- $O(x_0, y_0)$ é ponto médio de V_1V_2, de B_1B_2 e de F_1F_2.

Como λ_1 e λ_2 são secantes entre si ($\overline{V_1V_2} = 2a < 2c$), determina-se então que a corda B_1B_2 terá medida indicada por $2b$, ou seja, $\overline{B_1B_2} = 2b$.

Abaixo seguem os elementos de uma hipérbole, identificados na Figura 14.

- F_1 e F_2 são os *Focos*;
- $\overline{F_1F_2} = 2c$ tal que $2c$ é a *distância focal*;

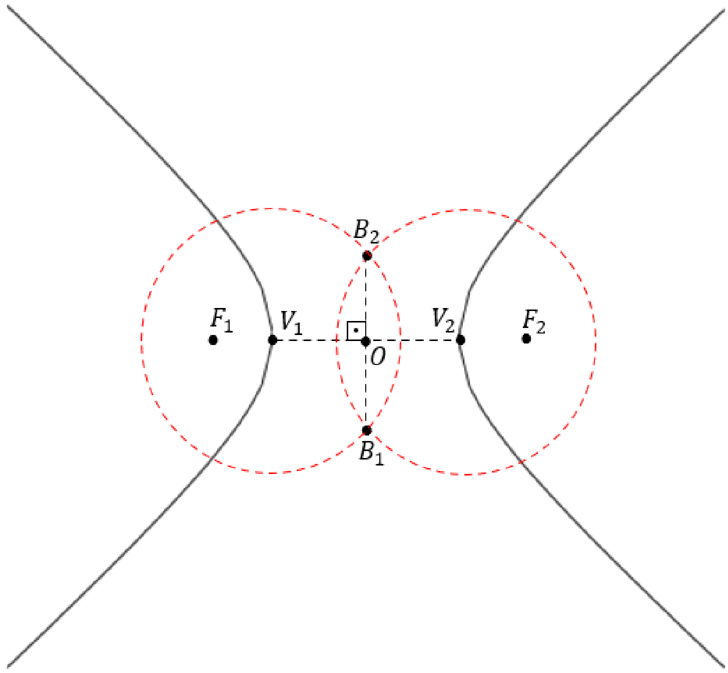

Figura 13 – Hipérbole - Determinação do eixo $\overline{B_1B_2}$. Fonte: De autoria própria.

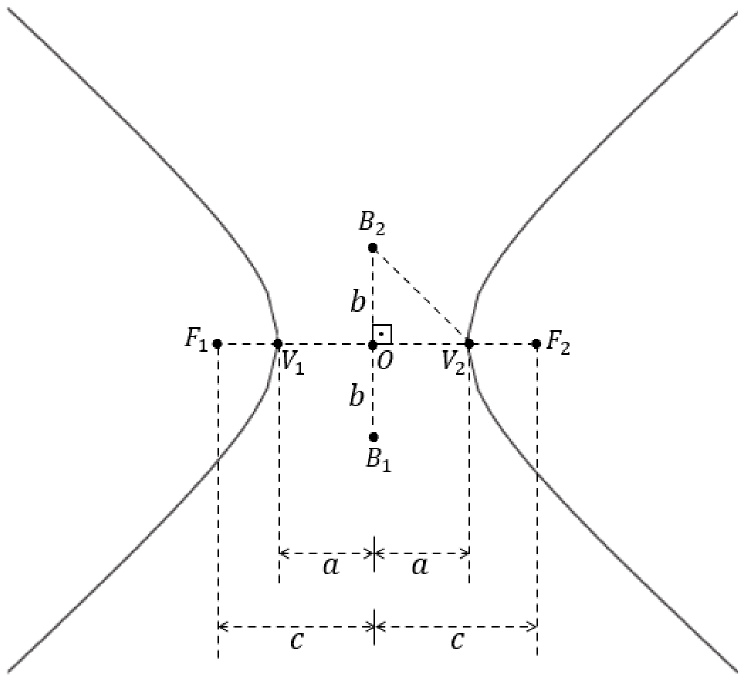

Figura 14 – Elementos de uma hipérbole. Fonte: De autoria própria.

- V_1V_2 é o *eixo real,eixo transverso ou eixo principal*;
- $\overline{V_1V_2} = 2a$ tal que $2a$ é o comprimento do eixo real, com $2a < 2c$;
- B_1B_2 é o *eixo conjugado ou eixo imaginário* (definição de imaginário segue posteriormente);
- $\overline{B_1B_2} = 2b$ tal que $2b$ é o comprimento do eixo imaginário;
- $O(x_0, y_0)$ é o ponto médio do segmento F_1F_2.

Ao aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo V_2OB_2, com ângulo reto em O e $\overline{V_2B_2} = c$, conclui-se que:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Semelhante ao que foi feito nas elipses, a *excentricidade* da hipérbole é dada pela razão entre os valores de c e a, nessa ordem, tal que $e > 1$, uma vez que é sabido que $c > a$. Logo:

$$e = \frac{c}{a}, \text{ com } 0 < a < c \implies e > 1.$$

Nas hipérboles define-se ainda lugares geométricos chamados de *assíntotas*. Estas são determinadas pelos prolongamentos das diagonais de um retângulo plotado entre as curvas tal que suas dimensões são dadas por $2a$ e $2b$, como na Figura 15.

Assim, as curvas conhecidas como ramos da hipérbole se aproximam destas retas prolongadas pelas diagonais dos retângulos citados, tal que essa aproximação acontece sem tangenciá-las ou interceptá-las. Essas retas mencionadas anteriormente são chamadas de *assíntotas* e serão denotadas por r_1 e r_2.

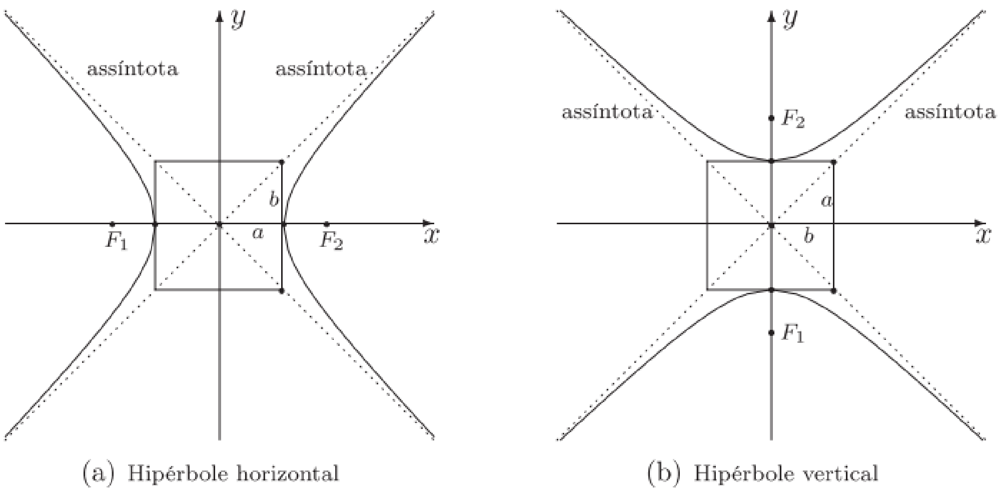

Figura 15 – Assíntotas da hipérbole. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009).

Usa-se, para determinar as leis de formação das retas assíntotas r_1 e r_2, a equação geral da reta dada por:

$$r : y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0), \text{ com } O(x_0, y_0).$$

Assim, seja o ponto $O(x_0, y_0)$ o centro dos ramos da hipérbole e os coeficientes angulares de r_1 e r_2 serão determinados mediante a tangente dos ângulos de inclinações, no sentido anti-horário, a partir da horizontal (eixo real) até chegar nas respectivas retas.

Nota-se também que esses coeficientes angulares podem ser encontrados com a variação de dois pontos pertencentes as retas, tal que é dado por $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ em que $\Delta_y = y_m - y_0$ e $\Delta_x = x_m - x_0$, em que M é o ponto de intersecção da reta r com a circunferência centrada em $O(x_0, y_0)$ e de raio igual a c, conforme a Figura 15.

Assim, temos que as respectivas assíntotas serão descritas de forma que:

- em r_1 temos $O(x_0, y_0)$ e $m_1 = b/a$, de acordo com o triângulo A_1OM_1;
- em r_2 temos $O(x_0, y_0)$ e $m_2 = -b/a$, de acordo com o triângulo A_2OM_2.

Logo, ao substituir na equação de feixe de retas, temos:

- em $r_1 : y - y_0 = b/a \cdot (x - x_0) \implies$ reta crescente, pois $m_1 = b/a \Rightarrow m_1 > 0$;
- em $r_2 : y - y_0 = -b/a \cdot (x - x_0) \implies$ reta decrescente, pois $m_2 = -b/a \Rightarrow m_2 < 0$.

Assim, após as informações expostas anteriormente,supõe-se que seu centro será a origem do plano cartesiano e que seus eixos estarão contidos nos eixos coordenados desse plano cartesiano xOy. Nota-se então que o eixo real está sobre o eixo x enquanto o eixo imaginário está sobre o eixo y.

A partir da definição da hipérbole, temos $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$ e da definição de módulo, utilizando novamente a distância entre dois pontos, tem-se:

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm 2a,$$

e portanto,

- (i) $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$;
- (ii) $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = -2a$.

Logo, admitindo o centro da hipérbole na origem do plano cartesiano, de acordo com a Figura 16, e que $P(x, y)$ é um ponto qualquer da hipérbole de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, em (i) temos:

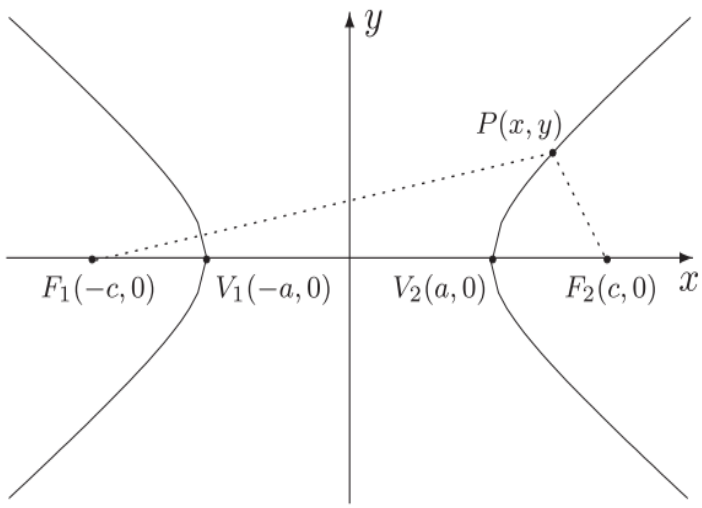

Figura 16 – Hipérbole com eixo real horizontal x. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009).

$$
\begin{aligned}
\overline{PF_1} &= \sqrt{\left(x_P - x_{F_1}\right)^2 + \left(y_P - y_{F_1}\right)^2} \\
&= \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} \\
&= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
&= \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} \\
&= \sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2}.
\end{aligned}
$$

Aplicando a relação da distância entre dois pontos em $\overline{PF_2}$ temos:

$$
\begin{aligned}
\overline{PF_2} &= \sqrt{\left(x_P - x_{F_2}\right)^2 + \left(y_P - y_{F_2}\right)^2} \\
&= \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \\
&= \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} \\
&= \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2}.
\end{aligned}
$$

Dado que $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$ temos então que:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2} - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} = 2a,$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2} = 2a + \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2}$$

Ao elevar ambos os membros ao quadrado, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2}\right)^2 &= \left(2a + \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2}\right)^2, \\
x^2 + y^2 + 2cx + c^2 &= (2a)^2 + 2(2a)\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} + \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2}\right)^2, \\
&= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} + x^2 + y^2 - 2cx + c^2.
\end{aligned}
$$

Ao isolar o radical, chega-se à expressão:

$$-4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} = 4a^2 - 4cx \implies -a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} = a^2 - cx.$$

Ao elevar ambos os membros ao quadrado, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
\left(-a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2}\right)^2 &= \left(a^2 - cx\right)^2, \\
a^2\left(x^2 + y^2 - 2cx + c^2\right) &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \\
a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2cx + a^2c^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2.
\end{aligned}
$$

Nota-se que, termos iguais em lados opostos da equação são anulados obtendo assim a simplificação:

$$\begin{aligned} a^2x^2 + a^2y^2 + a^2c^2 = a^4 + c^2x^2 &\implies a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2, \\ &\implies x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \end{aligned}$$

Nos estudos das hipérboles, temos que $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = -b^2$. Assim, ao substituir na expressão anterior, temos:

$$\begin{aligned} x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) &\implies x^2(-b^2) + a^2y^2 = a^2(-b^2), \\ &\implies -b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2. \end{aligned}$$

Ao dividir ambos os membros por $-a^2b^2$ concluímos que:

$$\frac{-b^2x^2 + a^2y^2}{-a^2b^2} = \frac{-a^2b^2}{-a^2b^2},$$

logo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{17}$$

Para o caso (*ii*) a situação é análoga e não há necessidade dessa descrição uma vez que ambos levam para

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Outra possibilidade é trabalhar com uma hipérbole tal que seu eixo real vertical, ou seja, sobre o eixo y. Neste caso, observando a Figura 17 temos:

- V_1V_2 é o eixo real e está sobre o eixo y;
- F_1F_2 é a distância focal;
- B_1B_2 é o eixo imaginário e está sobre o eixo x;
- $P(x, y)$ qualquer pertencente a hipérbole;
- $\overline{V_1V_2} = 2a$;
- $\overline{F_1F_2} = 2c$;
- $\overline{B_1B_2} = 2b$;
- $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$.

Ao analisar essas informações no plano cartesiano tem-se que $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$. Assim:

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm 2a,$$

e portanto,

- (*i*) $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$;
- (*ii*) $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = -2a$.

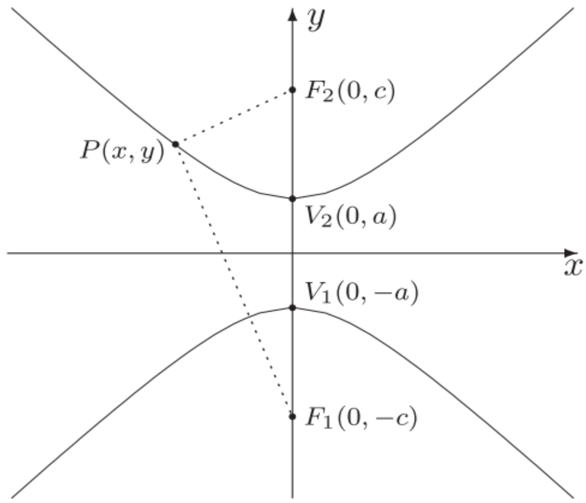

Figura 17 – Hipérbole com eixo vertical sobre o eixo y. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009).

Logo, admitindo o centro da hipérbole dado na origem do plano cartesiano e que $P(x,y)$ é um ponto qualquer da hipérbole de focos F_1 dado por $F_1(0,-c)$ e F_2 dado por $F_2(0,c)$, em (i) temos:

$$\begin{aligned}\overline{PF_1} &= \sqrt{(x_P - x_{F_1})^2 + (y_P - y_{F_1})^2}\\ &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-c))^2}\\ &= \sqrt{x^2 + (y+c)^2}\\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + 2cy + c^2}.\end{aligned}$$

Aplicando a relação da distância entre dois pontos em $\overline{PF_2}$ temos:

$$\begin{aligned}\overline{PF_2} &= \sqrt{(x_P - x_{F_2})^2 + (y_P - y_{F_2})^2}\\ &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2}\\ &= \sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2}.\end{aligned}$$

Dado que $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$ temos então que:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2cy + c^2} - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2} = 2a,$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2cy + c^2} = 2a + \sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2}.$$

Ao elevar ambos os membros ao quadrado, tem-se que:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 2cy + c^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2cy + c^2 &= (2a)^2 + 2(2a)\sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2} + \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2}\right)^2,\\ &= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2} + x^2 + y^2 - 2cy + c^2.\end{aligned}$$

Ao isolar o radical, chegamos à expressão:

$$-4a\sqrt{x^2+y^2-2cy+c^2} = 4a^2-4cy \implies -a\sqrt{x^2+y^2-2cy+c^2} = a^2-cy.$$

Ao elevar ambos os membros ao quadrado, tem-se que:

$$\begin{aligned}\left(-a\sqrt{x^2+y^2-2cy+c^2}\right)^2 &= \left(a^2-cy\right)^2,\\ a^2\left(x^2+y^2-2cy+c^2\right) &= a^4-2a^2cy+c^2y^2,\\ a^2x^2+a^2y^2-2a^2cy+a^2c^2 &= a^4-2a^2cy+c^2y^2.\end{aligned}$$

Nota-se que, termos iguais em lados opostos da equação são anulados obtendo assim a simplificação:

$$\begin{aligned}a^2x^2+a^2y^2+a^2c^2 = a^4+c^2y^2 &\implies a^2x^2+a^2y^2-c^2y^2 = a^4-a^2c^2,\\ &\implies a^2x^2+y^2(a^2-c^2) = a^2(a^2-c^2).\end{aligned}$$

Nos estudos das hipérboles, temos que $c^2 = a^2+b^2 \Rightarrow a^2-c^2 = -b^2$. Assim, ao substituir na expressão anterior, temos:

$$\begin{aligned}a^2x^2+y^2(a^2-c^2) = a^2(a^2-c^2) &\implies a^2x^2+y^2(-b^2) = a^2(-b^2)\\ &\implies a^2x^2-b^2y^2 = -a^2b^2.\end{aligned}$$

Ao dividir ambos os membros por $-a^2b^2$ concluímos que:

$$\frac{a^2x^2-b^2y^2}{-a^2b^2} = \frac{-a^2b^2}{-a^2b^2} \implies -\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2} = 1,$$

logo

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{18}$$

Para o caso (*ii*) a situação é análoga, resultando em

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Concluímos que a equação da hipérbole centrada na origem do plano cartesiano xOy pode ser definida como

- $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 \implies$ eixo real horizontal sobre o eixo x;
- $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1 \implies$ eixo real vertical sobre o eixo y.

Assim como nas elipses, estas leis de formações das hipérboles cujo centro é a origem do plano cartesiano $O(0,0)$ dadas pelas equações que foram definidas anteriormente, são chamadas de forma canônica da hipérbole.

Agora a próxima etapa é trabalhar com uma hipérbole transladada tal que essa translação altere apenas a posição do centro da hipérbole mantendo os eixos paralelos aos eixos do plano cartesiano.

Então, temos que, analisando a situação em que o centro estará fora da origem do plano cartesiano tem-se inicialmente a condição em que

- o eixo real é paralelo ao eixo x e não coincidente;
- o eixo imaginário paralelo ao eixo y e não coincidente.

Assim, adotaremos os devidos pontos apresentados genericamente no plano de coordenadas cartesianas conforme descrição abaixo:

$$\begin{aligned}
\text{Centro} &\longrightarrow O(x_0, y_0),\\
\text{Ponto} &\longrightarrow P(x,y),\\
\text{Foco 1} &\longrightarrow F_1(x_0 - c, y_0),\\
\text{Foco 2} &\longrightarrow F_2(x_0 + c, y_0).
\end{aligned}$$

Para uma melhor visualização, veja a Figura 18.

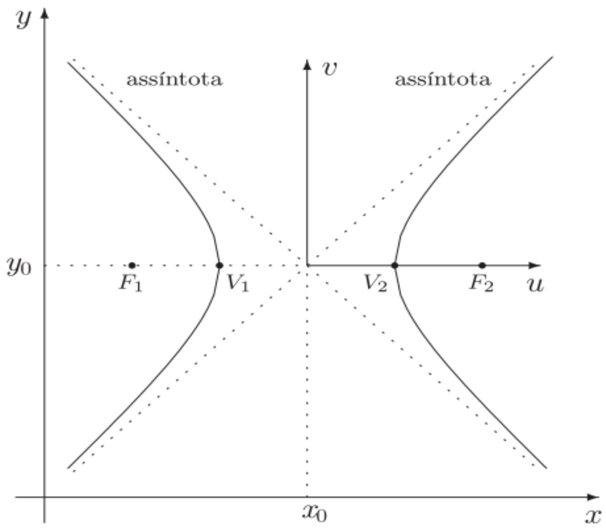

Figura 18 – Hipérbole transladada no plano cartesiano com eixo real horizontal. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009).

Como já definimos, no plano xOy temos que, dado o centro da hipérbole em $O(0,0)$ e de eixo real sobre x, sua equação é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

então

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1,$$

como

$$\begin{aligned}
x = x' + k &\implies x' = x - k,\\
y = y' + h &\implies y' = y - h,
\end{aligned}$$

e, assim, com isso temos que ao substituir na equação do plano $uO'v$ os respectivos valores do plano xOy, temos:

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1 \implies \frac{(x-k)^2}{a^2} - \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1.$$

Como em xOy temos que $k = x_0$ e $h = y_0$, conclui-se que a lei de formação será dada por:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Assim, para a equação

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

com $a > b$, cabem as seguintes observações:

- Se $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ então recuperamos a forma canônica da hipérbole com eixo real sobre o eixo x (coincidente ao eixo x). Caso $x_0 \neq 0$ mas $y_0 = 0$, a equação deixa de ser canônica mas o eixo real continua sobre o eixo x (coincidente ao eixo x);
- Se $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$ então temos uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo x (não coincidente) e eixo imaginário paralelo ao eixo y. Caso $x_0 = 0$ mas $y_0 \neq 0$, a hipérbole continua tendo o eixo real paralelo ao eixo x (não coincidente) mas o eixo imaginário paralelo e igual ao eixo y, ou seja, o eixo imaginário é coincidente ao eixo y.

De forma análoga ao exposto na translação do plano xOy para a hipérbole com eixo horizontal, faremos o mesmo para a hipérbole com eixo vertical. Então analisando a situação em que o centro estará fora da origem do plano cartesiano tem-se inicialmente a condição em que:

- O eixo real é paralelo ao eixo y e não coincidente;
- O eixo imaginário paralelo ao eixo x e não coincidente.

Assim, adotaremos os devidos pontos apresentados genericamente no plano de coordenadas cartesianas conforme descrição abaixo e observando a Figura 19.

$$\begin{aligned}
\text{Centro} &\longrightarrow O(x_0, y_0),\\
\text{Ponto} &\longrightarrow P(x,y),\\
\text{Foco 1} &\longrightarrow F_1(x_0, y_0 - c),\\
\text{Foco 2} &\longrightarrow F_2(x_0, y_0 + c).
\end{aligned}$$

Conforme exposto, suponha-se que de forma intuitiva temos que o plano $uO'v$ seja definido tal que $O'(k,h)$ e, assim, tem-se que $x_0 = k$ e $y_0 = h$. Assim, tem-se que que os eixos u e v serão respectivamente, os eixos imaginário e real.

Como já definimos, no plano xOy temos que, dado o centro da hipérbole em $O(0,0)$ e de eixo real sobre y, sua equação é dada por

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

então

$$\frac{(y')^2}{a^2} - \frac{(x')^2}{b^2} = 1,$$

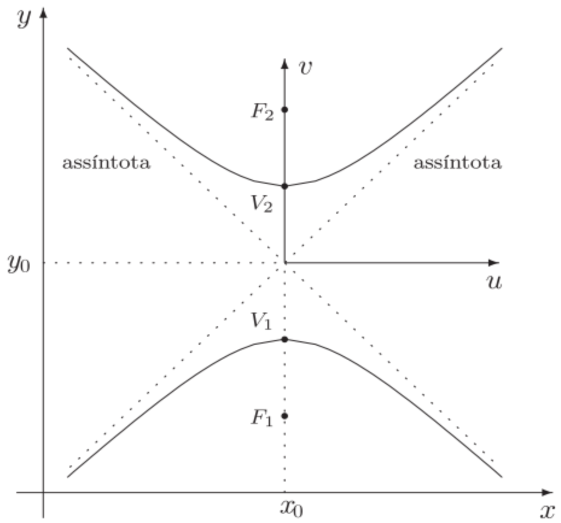

Figura 19 – Hipérbole transladada no plano cartesiano com eixo real vertical. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009).

como

$$x = x' + k \implies x' = x - k,$$

$$y = y' + h \implies y' = y - h,$$

e, assim, com isso temos que ao substituir na equação do plano $X'O'Y'$ os respectivos valores do plano xOy, temos:

$$\frac{(y')^2}{a^2} - \frac{(x')^2}{b^2} = 1 \implies \frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1.$$

Como em xOy temos que $k = x_0$ e $h = y_0$, conclui-se que a lei de formação será dada por:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1. \tag{19}$$

Assim, para

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1,$$

com $a > b$, cabem as seguintes observações:

- Se $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ então recuperamos a forma canônica da hipérbole com eixo real sobre o eixo y (coincidente ao eixo y). Caso $x_0 = 0$ mas $y_0 \neq 0$, a equação deixa de ser canônica mas o eixo real continua sobre o eixo y (coincidente ao eixo y).
- Se $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$ temos uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo y (não coincidente) e eixo imaginário paralelo ao eixo x. Caso $x_0 \neq 0$ mas $y_0 = 0$, a hipérbole continua tendo o eixo real paralelo ao eixo y (não coincidente) mas o eixo imaginário paralelo e igual ao eixo x, ou seja, o eixo imaginário é coincidente ao eixo x.

Dessa maneira nota-se que, para as quatro descrições dadas, tem-se que estes se resumem em dois casos tais que, a equação da hipérbole centrada em $O(x_0, y_0)$ do plano cartesiano xOy, serão definidas como:

- $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \implies$ Eixo real paralelo ao eixo x;
- $\dfrac{(y-y_0)^2}{a^2} - \dfrac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1 \implies$ Eixo real paralelo ao eixo y.

Um detalhe especial que se tem para as hipérboles, são os casos em que:

- (i) $a = b$.
- (ii) os focos F_1 e F_2 pertencem a reta bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano xOy.

Vamos analisar cada um desses casos separadamente. Em (i) temos uma hipérbole chamada de *equilátera*. Para este caso, se tivermos a sua forma canônica, as retas determinadas pelas suas assíntotas serão bissetrizes dos quadrantes.

Para o caso em que a hipérbole é canônica, dada uma de suas assíntotas sendo $r_1 : y - y_0 = \dfrac{b}{a} \cdot (x - x_0)$, temos que $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ determinando $r_1 : y = \dfrac{b}{a} \cdot x$. Dado que $a = b$, então essa reta r_1 determinada por essa assíntota será dada por $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).

Além disso, dada uma de suas assíntotas sendo $r_2 : y - y_0 = -b/a \cdot (x - x_0)$, $x_0 = 0$ e $y_0 = 0 \Rightarrow r_2 : y = -b/a \cdot x$. Dado que $a = b$, então essa reta r_2 determinada por essa assíntota será dada por $y = -x$ (bissetriz dos quadrantes pares).

Já para o caso em que a hipérbole não seja canônica ($x_0 \neq 0$ ou $y_0 \neq 0$), temos que as assíntotas descritas pelas equações $r_1 : y - y_0 = x - x_0$ e $r_2 : y - y_0 = -(x - x_0)$, não representam retas bissetrizes dos quadrantes. Logo, para estas temos:

- $r_1 : y - y_0 = x - x_0 \implies r_1 : y = x - (x_0 - y_0)$;
- $r_2 : y - y_0 = -(x - x_0) \implies r_2 : y - y_0 = -x + x_0 \implies r_2 : y = -x + (x_0 + y_0)$.

Em (ii) vamos admitir que a hipérbole seja Canônica $O(x_0, y_0) = O(0,0)$ de modo que seus focos F_1 e F_2 e seus Vértices V_1 e V_2 pertencem a reta bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$), como na Figura 20. Logo, como os focos pertencem a $y = x$, teremos suas respectivas coordenadas $F_1(k,k)$ e $F_2(-k,-k)$. Dado que $P(x,y)$ é um ponto da hipérbole, temos por definição que $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$.

Como V_1 e V_2 pertencem a reta $y = x$ e $\overline{V_1V_2} = 2a$, temos que seu ponto médio é a origem (0,0) e $\overline{B_1B_2} = 2b$ estará sobre a reta bissetriz dos quadrantes pares. Vamos admitir que $2a = 2b = 2k$ isto é, $a = b = k$ (chamada *hipérbole equilátera*). Temos que a distância focal $2c$ é dada por $2k\sqrt{2}$.

Assim, temos:

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a \implies \left|\sqrt{(x-k)^2 + (y-k)^2} - \sqrt{(x+k)^2 + (y+k)^2}\right| = 2k,$$

logo,

$$\sqrt{(x-k)^2 + (y-k)^2} - \sqrt{(x+k)^2 + (y+k)^2} = \pm 2k,$$

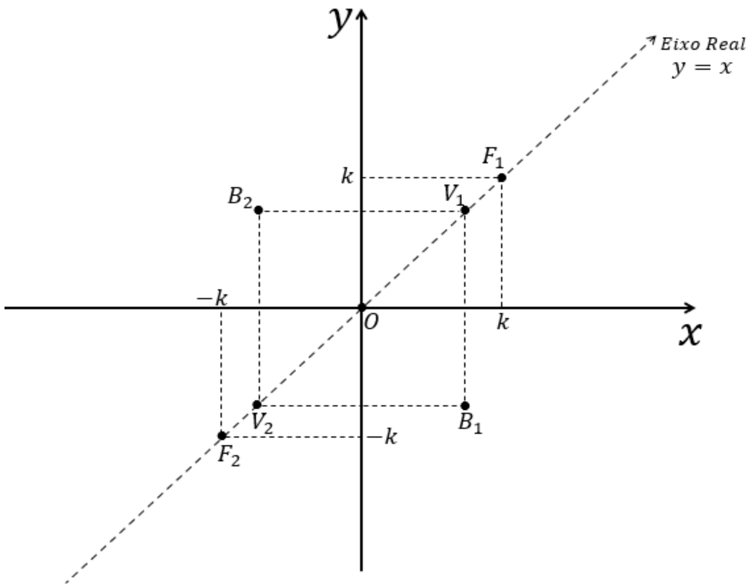

Figura 20 – Hipérbole - Pontos iniciais. Fonte: De autoria própria.

$$\sqrt{(x-k)^2+(y-k)^2} = \pm 2k + \sqrt{(x+k)^2+(y+k)^2},$$

e elevando os dois membros da igualdade ao quadrado,

$$\left(\sqrt{(x-k)^2+(y-k)^2}\right)^2 = \left(\pm 2k + \sqrt{(x+k)^2+(y+k)^2}\right)^2,$$

$$(x-k)^2+(y-k)^2 = 4k^2 \pm 4k\sqrt{(x+k)^2+(y+k)^2} + (x+k)^2+(y+k)^2,$$

$$x^2-2kx+k^2+y^2-2ky+k^2 = 4k^2 \pm 4k\sqrt{(x+k)^2+(y+k)^2} + x^2+2kx+k^2+y^2+2ky+k^2.$$

Ao simplificar,

$$\pm 4k\sqrt{(x+k)^2+(y+k)^2} = 4k^2+4kx+4ky.$$

Ao dividir a expressão toda por $(4k)$ e elevando os dois membros da igualdade ao quadrado, tem-se

$$\pm\sqrt{(x+k)^2+(y+k)^2} = k+x+y,$$

$$\left(\pm\sqrt{(x+k)^2+(y+k)^2}\right)^2 = (k+x+y)^2,$$

$$(x+k)^2+(y+k)^2 = k^2+2k(x+y)+(x+y)^2,$$

$$x^2+2kx+k^2+y^2+2ky+k^2 = k^2+2kx+2ky+x^2+2xy+y^2,$$

$$2k^2 = k^2+2xy \implies k^2 = 2xy \implies xy = \frac{k^2}{2},$$

e assim, temos que $y = \dfrac{k^2}{2x}$, para $x \neq 0$ ou $x = \dfrac{k^2}{2y}$, para $y \neq 0$ cujo gráfico está representado na Figura 21.

Com isso, se admitirmos $k = \sqrt{2}$, tem-se a hipérbole da Figura 21, $y = \dfrac{1}{x}$, para $x \neq 0$. Para este caso, perceba-se que as equações das retas assíntotas são dadas por $y = 0$ e $x = 0$.

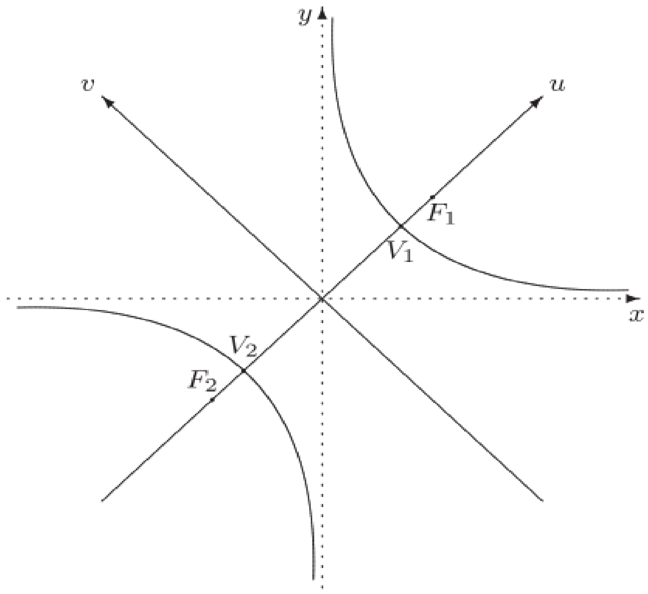

Figura 21 – Hipérbole $y = \frac{1}{x}$, para $x \neq 0$ (para $k = \sqrt{2}$). Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009).

1.2.4 Parábolas

Assim como as circunferências, as elipses e as hipérboles, as parábolas são lugares geométricos determinados pela intersecção de planos tais que o ângulo da inclinação, em relação ao plano da base dos cones, é sempre igual ao ângulo da geratriz do cone, como representado pela Figura 22.

Figura 22 – Lugar geométrico conhecido como parábola. Fonte: (SANTOS; FERREIRA, 2009).

Definição 4 (Parábola)**.** Seja d uma reta e F um ponto do plano não pertencente a d. Uma *parábola* ρ de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto F é igual a distância até a reta d.

Resumidamente, temos que uma parábola ρ é o conjunto

$$\rho = \{P(x,y) : dist(P,F) = dist(P,d)\}\ .$$

Ao plotar esse lugar geométrico no plano com coordenadas cartesianas, vamos iniciar o processo da busca de sua lei de formação, assim como foi feito anteriormente. Vamos adotar as seguintes notações e nomenclaturas, observando a Figura 23:

- F é o *foco* da parábola;
- d é a *reta diretriz* da parábola;
- V é o *vértice* da parábola;
- V' é o ponto de r tal que V é o ponto médio do segmento FV' perpendicular à r.
- $\overline{VF} = \overline{VV'} = p$;
- VF está contido em uma reta chamada de *eixo de simetria* da parábola;
- Como $\overline{VF} = \overline{VV'}$, então V é o ponto médio de FV' tal que $FV' \perp d$ e $V' \in d$;
- $\overline{PF} = \overline{PP'}$;
- $\overline{RF} = \overline{RR'}$;
- $\overline{VF} = \overline{VV'}$;
- $\overline{QF} = \overline{QQ'}$.

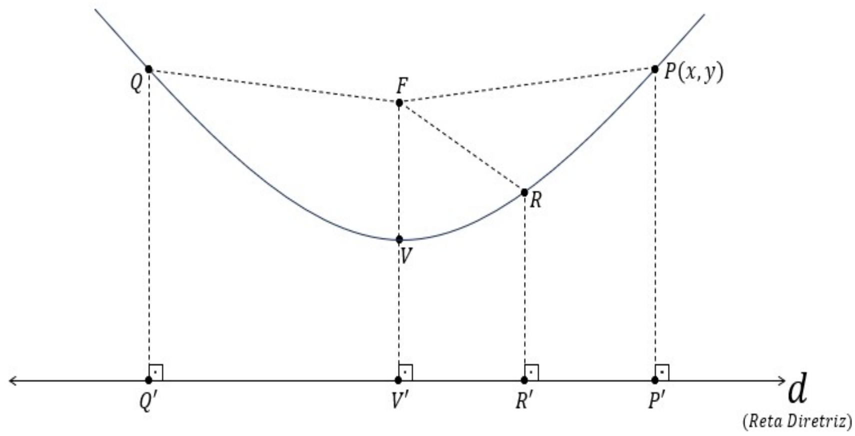

Figura 23 – Parábola. Fonte: De autoria própria.

Sendo p o valor parâmetro da parábola, então temos que $\overline{FV'} = 2p$, $\overline{VV'} = p$ e $\overline{FV} = p$.

Vamos começar a análise da curva no plano cartesiano xOy inicialmente com o vértice da parábola $V(x_0, y_0)$ na origem do plano cartesiano xOy e a reta diretriz d paralela ao eixo x e abaixo da parábola como na Figura 24. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \text{Foco} &\longrightarrow F(0,p), \\ \text{Vértice} &\longrightarrow V(0,0), \\ \text{Ponto na parábola} &\longrightarrow P(x,y), \\ \text{Reta diretriz} &\longrightarrow y+p=0, \\ \text{Ponto na diretriz} &\longrightarrow P'(x,-p). \end{aligned}$$

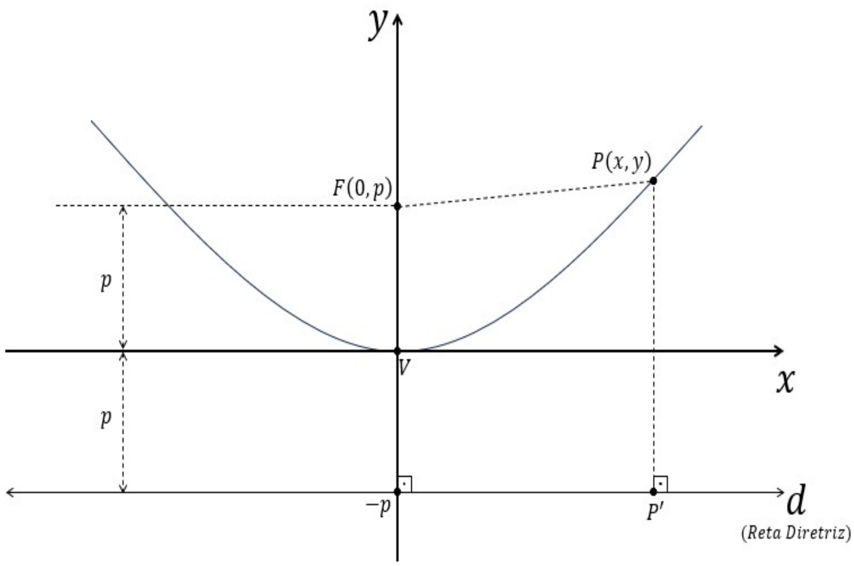

Figura 24 – Parábola: Reta diretriz paralela ao eixo x - Caso I. Fonte: De autoria própria.

Como sabemos que $\overline{PF} = \overline{PP'} = 2p$ então

$$\overline{PF} = \overline{PP'} \implies \sqrt{(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2} = \sqrt{(x-x_{P'})^2 + (y-y_{P'})^2},$$

logo

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2},$$

e elevando ambos os membros da equação ao quadrado

$$\left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}\right)^2,$$

e portanto

$$(x-0)^2 + (y-p)^2 = (x-x)^2 + (y+p)^2 \implies (x)^2 + (y-p)^2 = (0)^2 + (y+p)^2.$$

Assim, concluímos que

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = 0 + y^2 + 2py + p^2,$$
$$x^2 - 2py = 2py$$
$$4py = x^2,$$

e com isso, chegamos a equação

$$y = \frac{x^2}{4p} \quad ou \quad y = \frac{1}{4p} \cdot x^2.$$

Além dessa descrição, podemos admitir o caso em que a reta diretriz esteja acima da parábola, ou seja, a concavidade da parábola estará voltada para baixo como na Figura 25.

Neste caso, temos:

$$\text{Foco} \longrightarrow F(0,-p),$$
$$\text{Vértice} \longrightarrow V(0,0),$$
$$\text{Ponto da parábola} \longrightarrow P(x,y),$$
$$\text{Reta diretriz} \longrightarrow y - p = 0,$$
$$\text{Ponto da reta} \longrightarrow P'(x,p).$$

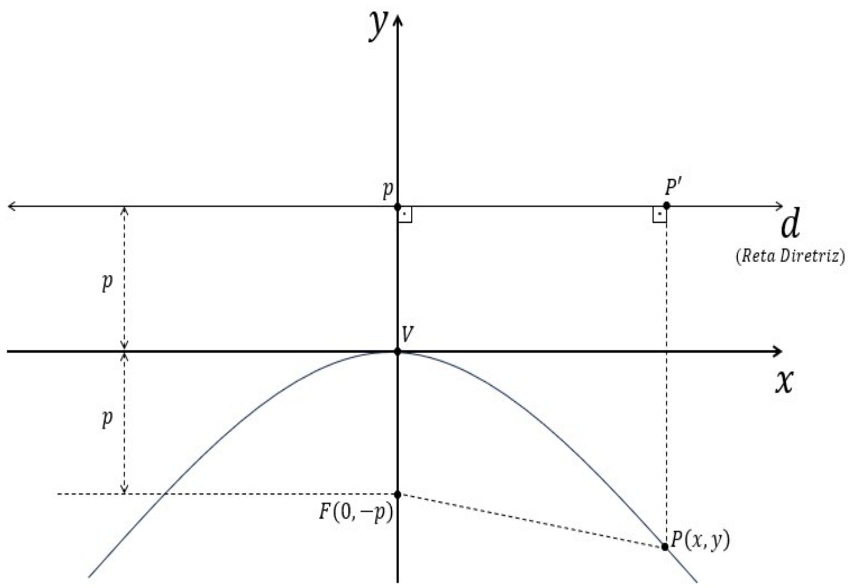

Figura 25 – Parábola: Reta diretriz paralela ao eixo x - Caso II. Fonte: De autoria própria.

Como sabemos que $\overline{PF} = \overline{PP'} = 2p$ então como no caso anterior, tem-se:

$$\overline{PF} = \overline{PP'} \implies \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} = \sqrt{(x - x_{P'})^2 + (y - y_{P'})^2},$$

logo

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-(-p))^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-p)^2},$$

e elevando ambos os membros da equação ao quadrado, temos:

$$\left(\sqrt{(x-0)^2+(y+p)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(x-x)^2+(y-p)^2}\right)^2.$$

Portanto

$$(x-0)^2+(y+p)^2=(x-x)^2+(y-p)^2 \implies (x)^2+(y+p)^2=(0)^2+(y-p)^2.$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2py+p^2&=0+y^2-2py+p^2,\\ x^2+2py&=-2py\\ -4py&=x^2, \end{aligned}$$

e com isso, chegamos a equação

$$y=\frac{x^2}{-4p} \implies y=-\frac{x^2}{4p} \implies y=-\frac{1}{4p}\cdot x^2.$$

Portanto, com as definições descritas, tem-se que:

- Se $y=\dfrac{x^2}{4p}$, dado que $p>0$, temos uma parábola com a concavidade voltada para cima, com vértice na origem e eixo de simetria coincidente ao eixo y;
- Se $y=-\dfrac{x^2}{4p}$, dado que $p>0$, temos uma parábola com a concavidade voltada para baixo, com vértice na origem e eixo de simetria coincidente ao eixo y;

O que podemos perceber é que as parábolas não serão necessariamente concavidade voltada para cima ou para baixo como descritas. Não podemos confundir equações com funções. O que acontece em alguns momentos é que as parábolas que não se enquadram nessas duas situações fiquem esquecidas, devido a preferência para o estudos das funções. Esse equívoco faz com que esses casos não tenham a devida abordagem analítica. Assim, passamos a analisar o caso em que a reta diretriz d seja paralela ao eixo y com o vértice na origem do plano cartesiano, como na Figura 26. Neste caso, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Foco} &\longrightarrow F(p,0),\\ \text{Vértice} &\longrightarrow V(0,0),\\ \text{Ponto da parábola} &\longrightarrow P(x,y),\\ \text{Reta diretriz} &\longrightarrow x+p=0,\\ \text{Ponto da diretriz} &\longrightarrow P'(-p,y). \end{aligned}$$

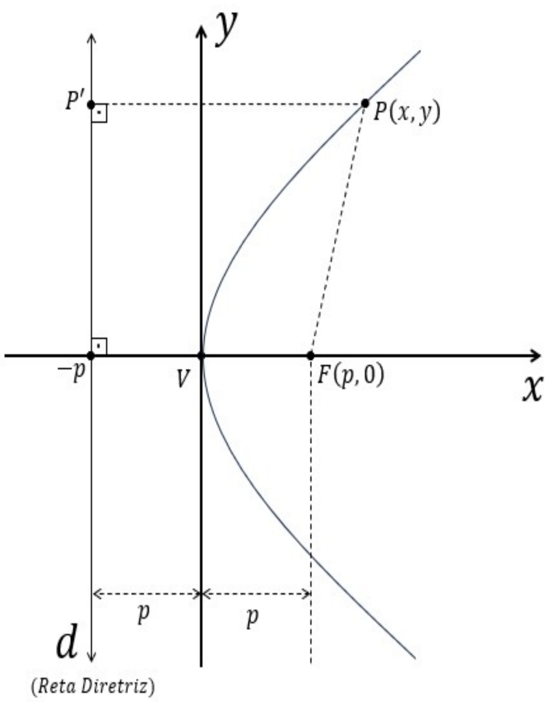

Figura 26 – Parábola: Reta diretriz paralela ao eixo y - Caso III. Fonte: De autoria própria.

Como sabemos que $\overline{PF} = \overline{PP'} = 2p$ então

$$\overline{PF} = \overline{PP'} \implies \sqrt{(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2} = \sqrt{(x-x_{P'})^2 + (y-y_{P'})^2},$$

logo

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-(-p))^2 + (y-y)^2},$$

e elevando ambos os membros da equação ao quadrado, temos

$$\left(\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-(-p))^2 + (y-y)^2}\right)^2.$$

Portanto

$$(x-p)^2 + (y-0)^2 = (x+p)^2 + (y-y)^2 \implies (x-p)^2 + (y)^2 = (x+p)^2 + (0)^2.$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} x^2 - 2px + p^2 + y^2 &= x^2 + 2px + p^2, \\ y^2 - 2px &= 2px \\ 4px &= y^2, \end{aligned}$$

e com isso, chegamos a equação

$$x = \frac{y^2}{4p} \quad ou \quad x = \frac{1}{4p} \cdot y^2.$$

Além dessa descrição, podemos admitir que a reta diretriz esteja acima da parábola, ou seja, a concavidade da parábola estará voltada para esquerda como na Figura 27. Neste caso, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\text{Foco} &\longrightarrow F(-p, 0),\\
\text{Vértice} &\longrightarrow V(0, 0),\\
\text{Ponto da parábola} &\longrightarrow P(x, y),\\
\text{Reta diretriz} &\longrightarrow x - p = 0,\\
\text{Ponto da diretriz} &\longrightarrow P'(p, y).
\end{aligned}$$

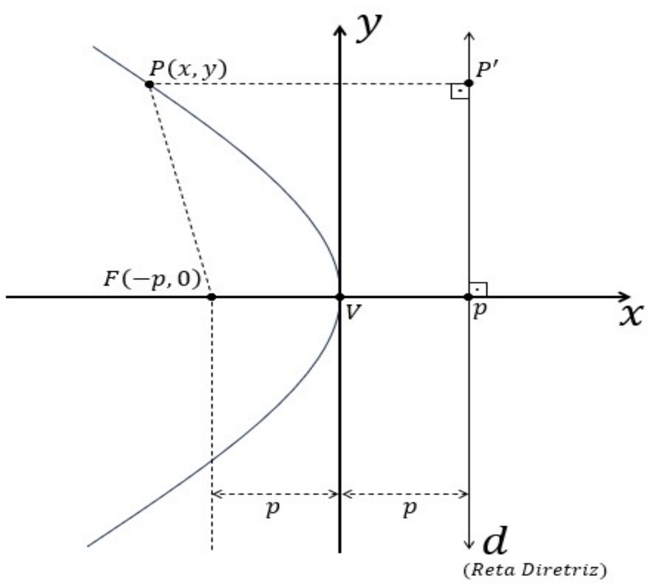

Figura 27 – Parábola: Reta diretriz paralela ao eixo y - Caso IV. Fonte: De autoria própria.

Como sabemos que $\overline{PF} = \overline{PP'} = 2p$ então, tem-se:

$$\overline{PF} = \overline{PP'} \implies \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} = \sqrt{(x - x_{P'})^2 + (y - y_{P'})^2},$$

logo

$$\sqrt{(x - (-p))^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - p)^2 + (y - y)^2}.$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, temos

$$\left(\sqrt{(x + p)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x - p)^2 + (y - y)^2}\right)^2,$$

portanto

$$(x+p)^2 + y^2 = (x-p)^2 + (y-y)^2 \implies (x+p)^2 + y^2 = (x-p)^2 + (0)^2.$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} x^2 + 2px + p^2 + y^2 &= x^2 - 2px + p^2 + 0, \\ y^2 + 2px &= -2px \\ -4px &= y^2, \end{aligned}$$

e com isso, chegamos a equação

$$x = -\frac{y^2}{4p} \implies x = -\frac{1}{4p} \cdot y^2.$$

Portanto, com as definições descritas, tem-se que:

- Se $x = \dfrac{y^2}{4p}$ com $p > 0$, temos uma parábola com a concavidade voltada para a direita, com vértice na origem e eixo de simetria coincidente ao eixo x;
- Se $x = -\dfrac{y^2}{4p}$ com $p > 0$, temos uma parábola com a concavidade voltada para a esquerda, com vértice na origem e eixo de simetria coincidente ao eixo x;

Suponha agora que o vértice da parábola esteja fora da origem do plano cartesiano e que a reta geratriz continue perpendicular ao eixo y. Assim, dos quatro casos possíveis, inicialmente adotaremos a situação em que o vértice pertença a qualquer um dos quadrante do plano de coordenadas cartesianas, ou seja, o vértice não pertence aos eixos coordenados, tais que a reta diretriz seja paralela ao eixo x e não coincidente e ainda, analisaremos o caso da concavidade voltada para cima. Ainda, vamos supor que eixos x e y são transladados de de forma paralelas às suas posições originais (horizontal e vertical) como na Figura 28. Logo, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Foco} &\longrightarrow F(x_0, y_0 + p), \\ \text{Vértice} &\longrightarrow V(x_0, y_0), \\ \text{Ponto da parábola} &\longrightarrow P(x, y), \\ \text{Reta diretriz} &\longrightarrow y = y_0 - p, \\ \text{Ponto da diretriz} &\longrightarrow P'(x, y_0 - p). \end{aligned}$$

Como já é sabido, qualquer que seja $P(x,y)$ um ponto pertencente a parábola, temos que $\overline{PF} = \overline{PP'}$. Assim:

$$\overline{PF} = \overline{PP'} \implies \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} = \sqrt{(x - x_{P'})^2 + (y - y_{P'})^2},$$

logo

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - (y_0 + p))^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y - (y_0 - p))^2},$$

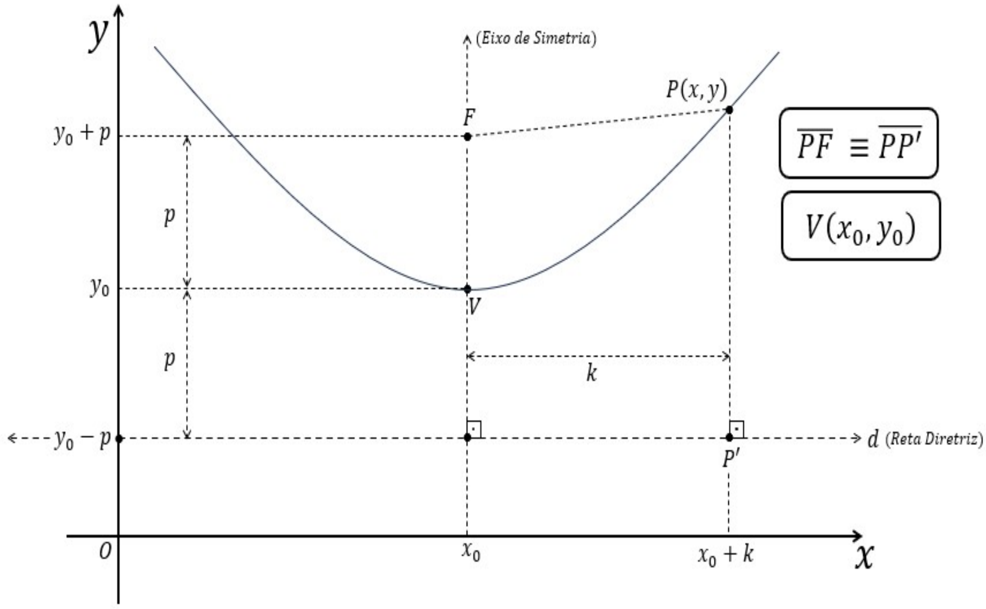

Figura 28 – Parábola com vértice fora da origem e reta diretriz paralela ao eixo x - Caso I. Fonte: De autoria própria.

elevando ambos os membros da equação ao quadrado, temos

$$\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + \big(y-(y_0+p)\big)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-x)^2 + \big(y-(y_0-p)\big)^2}\right)^2,$$

portanto

$$\begin{aligned}
(x-x_0)^2 + \big(y-(y_0+p)\big)^2 &= (x-x)^2 + \big(y-(y_0-p)\big)^2, \\
(x-x_0)^2 + (y-(y_0+p))^2 &= (0)^2 + (y-(y_0-p))^2, \\
(x-x_0)^2 + y^2 - 2y(y_0+p) + (y_0+p)^2 &= y^2 - 2y(y_0-p) + (y_0-p)^2, \\
(x-x_0)^2 - 2y(y_0+p) + (y_0+p)^2 &= -2y(y_0-p) + (y_0-p)^2, \\
(x-x_0)^2 - 2yy_0 - 2py + (y_0)^2 + 2py_0 + p^2 &= -2yy_0 + 2py + (y_0)^2 - 2py_0 + p^2, \\
(x-x_0)^2 - 2py + 2py_0 &= -2py_0 + 2py,
\end{aligned}$$

com isso temos que

$$(x-x_0)^2 = 4py - 4py_0 \implies (x-x_0)^2 = 4p \cdot (y-y_0),$$

e assim, descrevemos

$$\frac{(x-x_0)^2}{4p} = y - y_0 \quad \text{ou} \quad y - y_0 = \frac{1}{4p} \cdot (x-x_0)^2.$$

Admitimos agora o vértice da parábola fora da origem do plano cartesiano com $C.V.B.$ como na Figura 29. De forma análoga ao exposto anteriormente, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Foco} &\longrightarrow F(x_0, y_0 - p), \\ \text{Vértice} &\longrightarrow V(x_0, y_0), \\ \text{Ponto da parábola} &\longrightarrow P(x, y), \\ \text{Reta diretriz} &\longrightarrow y = y_0 + p, \\ \text{Ponto da diretriz} &\longrightarrow P'(x, y_0 + p). \end{aligned}$$

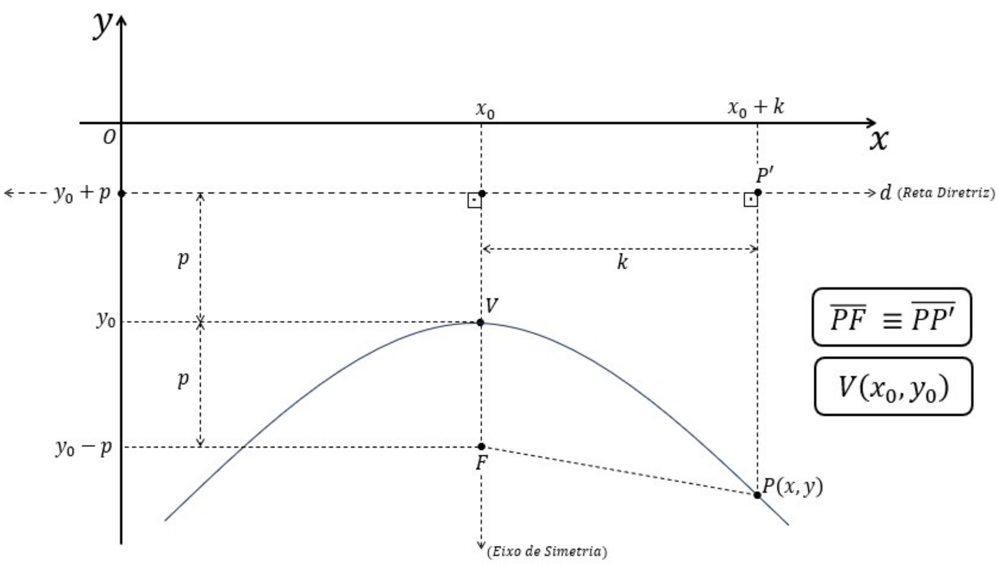

Figura 29 – Parábola com vértice fora da origem e reta diretriz paralela ao eixo x - Caso II. Fonte: De autoria própria.

Dado qualquer que seja $P(x,y)$ pertencente a parábola, temos que $\overline{PF} = \overline{PP'}$. Assim:

$$\overline{PF} = \overline{PP'} \implies \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} = \sqrt{(x - x_{P'})^2 + (y - y_{P'})^2},$$

logo

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - (y_0 - p))^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y - (y_0 + p))^2},$$

elevando ambos os membros da equação ao quadrado, temos

$$\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - (y_0 - p))^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x - x)^2 + (y - (y_0 + p))^2}\right)^2,$$

portanto

$$\begin{aligned}
(x-x_0)^2+(y-(y_0-p))^2 &= (x-x)^2+(y-(y_0+p))^2,\\
(x-x_0)^2+(y-(y_0-p))^2 &= (0)^2+(y-(y_0+p))^2,\\
(x-x_0)^2+y^2-2y(y_0-p)+(y_0-p)^2 &= y^2-2y(y_0+p)+(y_0+p)^2,\\
(x-x_0)^2-2y(y_0-p)+(y_0-p)^2 &= -2y(y_0+p)+(y_0+p)^2,\\
(x-x_0)^2-2yy_0+2py+(y_0)^2-2py_0+p^2 &= -2yy_0-2py+(y_0)^2+2py_0+p^2,\\
(x-x_0)^2+2py-2py_0 &= 2py_0-2py,
\end{aligned}$$

com isso temos que

$$(x-x_0)^2=-4py+4py_0 \implies (x-x_0)^2=-4p\cdot(y-y_0),$$

e assim, descrevemos

$$\frac{(x-x_0)^2}{-4p}=y-y_0 \quad \text{ou} \quad y-y_0=-\frac{1}{4p}\cdot(x-x_0)^2.$$

Assim, de forma geral, independentemente de onde esteja o vértice $V(x_0,y_0)$ da parábola (na origem ou fora dele), tem-se que:

- Se $y-y_0=\dfrac{(x-x_0)^2}{4p}$ com $p>0$, temos uma parábola de vértice $V(x_0,y_0)$ com a concavidade voltada para cima;
- Se $y-y_0=-\dfrac{(x-x_0)^2}{4p}$ com $p>0$, temos uma parábola de vértice $V(x_0,y_0)$ com a concavidade voltada para baixo.

Para os próximos dois casos, vamos continuar supondo que o vértice da parábola está fora da origem do plano cartesiano e que a reta geratriz continue perpendicular ao eixo x. Assim, agora adotaremos a situação em que dada a equação cujo vértice pertença a qualquer um dos quadrante do plano de coordenadas cartesianas, ou seja, o vértice não pertence aos eixos coordenados, tais que a reta diretriz seja paralela ao eixo y e não coincidente e ainda, analisaremos o caso *C.V.D.*. Contudo, tem-se então os casos cujos eixos x e y são transladados de de forma paralelas às suas posições originais (Horizontal e Vertical), como mostrado na Figura 30. Logo, tem-se:

$$\begin{aligned}
\text{Foco} &\longrightarrow F(x_0+p,y_0),\\
\text{Vértice} &\longrightarrow V(x_0,y_0),\\
\text{Ponto da parábola} &\longrightarrow P(x,y),\\
\text{Reta diretriz} &\longrightarrow x=x_0-p,\\
\text{Ponto da diretriz} &\longrightarrow P'(x_0-p,y).
\end{aligned}$$

Qualquer que seja $P(x,y)$ um ponto pertencente a parábola, temos que $\overline{PF}=\overline{PP'}$. Assim:

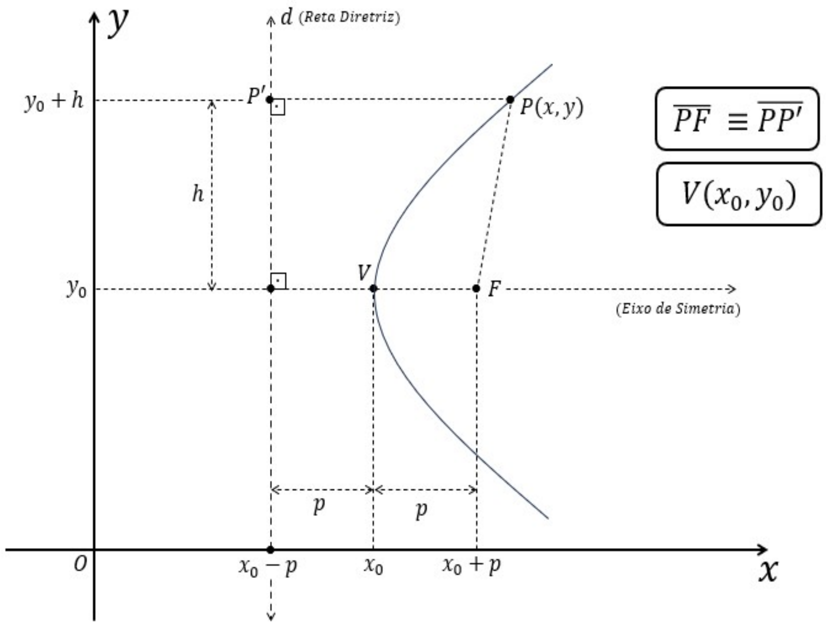

Figura 30 – Parábola com vértice fora da origem e reta diretriz paralela ao eixo y - Caso III. Fonte: De autoria própria.

$$\overline{PF} = \overline{PP'} \implies \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} = \sqrt{(x - x_{P'})^2 + (y - y_{P'})^2},$$

logo

$$\sqrt{(x - ((x_0 + p))^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(x - (x_0 - p))^2 + (y - y)^2},$$

elevando ambos os membros da equação ao quadrado, temos

$$\left(\sqrt{(x - ((x_0 + p))^2 + (y - y_0)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x - (x_0 - p))^2 + (y - y)^2}\right)^2,$$

portanto

$$\begin{aligned}
(x - ((x_0 + p))^2 + (y - y_0)^2 &= (x - (x_0 - p))^2 + (y - y)^2, \\
x^2 - 2x(x_0 + p) + (x_0 + p)^2 + (y - y_0)^2 &= x^2 - 2x(x_0 - p) + (x_0 - p)^2 + (0)^2, \\
-2x(x_0 + p) + (x_0 + p)^2 + (y - y_0)^2 &= -2x(x_0 - p) + (x_0 - p)^2, \\
-2xx_0 - 2px + (x_0)^2 + 2px_0 + p^2 + (y - y_0)^2 &= -2xx_0 + 2px + (x_0)^2 - 2px_0 + p^2, \\
-2px + 2px_0 + (y - y_0)^2 &= 2px - 2px_0, \\
(y - y_0)^2 &= 4px - 4px_0,
\end{aligned}$$

com isso temos que

$$(y - y_0)^2 = 4p \cdot (x - x_0) \implies \frac{(y - y_0)^2}{4p} = x - x_0,$$

e assim, descrevemos

$$x - x_0 = \frac{(y - y_0)^2}{4p} \quad \text{ou} \quad x - x_0 = \frac{1}{4p} \cdot (y - y_0)^2.$$

Ao admitirmos que o vértice da parábola esteja fora da origem do plano cartesiano tal que o caso da concavidade voltada para a esquerda, como na Figura 31, tem-se de forma análoga ao exposto anteriormente a descrição de sua equação. Neste caso, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Foco} &\longrightarrow F(x_0 - p, y_0),\\ \text{Vértice} &\longrightarrow V(x_0, y_0),\\ \text{Ponto da parábola} &\longrightarrow P(x, y),\\ \text{Reta diretriz} &\longrightarrow x = x_0 + p,\\ \text{Ponto da diretriz} &\longrightarrow P'(x_0 + p, y). \end{aligned}$$

Dado qualquer que seja $P(x,y)$ pertencente a parábola, temos que $\overline{PF} = \overline{PP'}$. Assim:

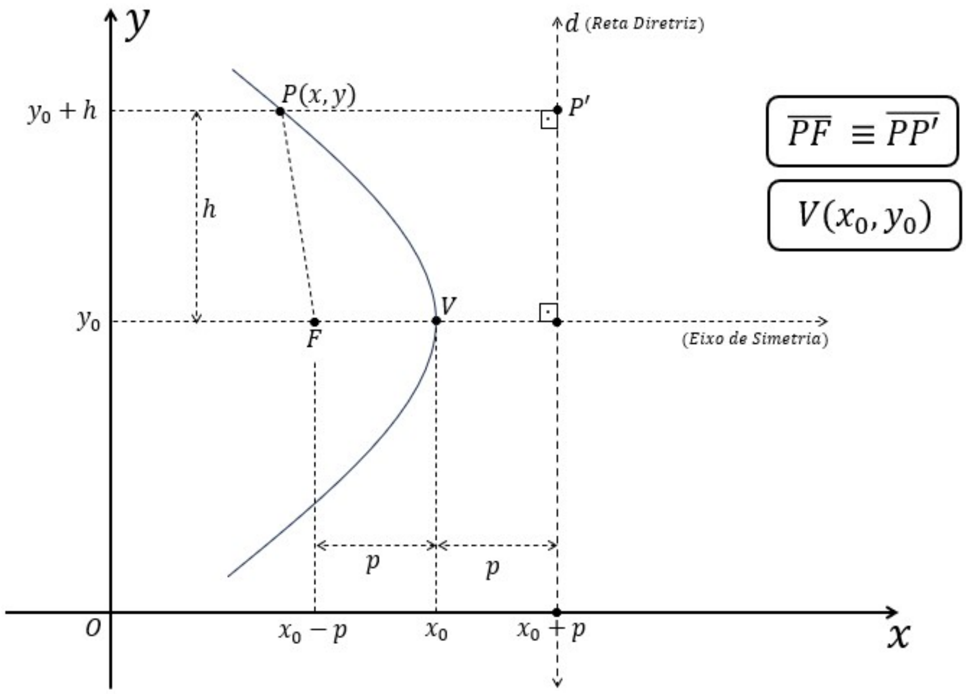

Figura 31 – Parábola com vértice fora da origem e reta diretriz paralela ao eixo y - Caso IV. Fonte: De autoria própria.

$$\overline{PF} = \overline{PP'} \implies \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} = \sqrt{(x - x_{P'})^2 + (y - y_{P'})^2}.$$

Como $\sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} = \sqrt{(x - x_{P'})^2 + (y - y_{P'})^2}$, temos:

$$\sqrt{(x - ((x_0 - p))^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(x - (x_0 + p))^2 + (y - y)^2},$$

logo, elevando ambos os membros da equação ao quadrado, temos

$$\left(\sqrt{(x - ((x_0 - p))^2 + (y - y_0)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x - (x_0 + p))^2 + (y - y)^2}\right)^2,$$

portanto

$$
\begin{aligned}
(x-((x_0-p))^2+(y-y_0)^2 &= (x-(x_0+p))^2+(y-y)^2,\\
x^2-2x(x_0-p)+(x_0-p)^2+(y-y_0)^2 &= x^2-2x(x_0+p)+(x_0+p)^2+(0)^2,\\
-2x(x_0-p)+(x_0-p)^2+(y-y_0)^2 &= -2x(x_0+p)+(x_0+p)^2,\\
-2xx_0+2px+(x_0)^2-2px_0+p^2+(y-y_0)^2 &= -2xx_0-2px+(x_0)^2+2px_0+p^2,\\
2px-2px_0+(y-y_0)^2 &= -2px+2px_0,\\
(y-y_0)^2 &= -4px+4px_0,
\end{aligned}
$$

com isso temos que

$$(y-y_0)^2=-4p\cdot(x-x_0) \implies \frac{(y-y_0)^2}{-4p}=x-x_0,$$

e assim, descrevemos

$$x-x_0=-\frac{(y-y_0)^2}{4p} \quad \text{ou} \quad x-x_0=-\frac{1}{4p}\cdot(y-y_0)^2.$$

Logo, ao generalizarmos as curvas parabólicas, $\forall\, p>0$ tal que p é a distância entre seu foco e vértice e também a distância entre o vértice e a sua projeção ortogonal (V') sobre a reta diretriz (d) ou seja, $\overline{FV}\equiv\overline{VV'}$, e $\forall\, V(x_0,y_0)$, temos:

- (i) Se $(x-x_0)^2=4p\cdot(y-y_0)$, dado que $p>0$, temos uma parábola de vértice $V(x_0,y_0)$ com a concavidade voltada para cima;
- (ii) Se $(x-x_0)^2=-4p\cdot(y-y_0)$, dado que $p>0$, temos uma parábola de vértice $V(x_0,y_0)$ com a concavidade voltada para baixo;
- (iii) Se $(y-y_0)^2=4p\cdot(x-x_0)$, dado que $p>0$, temos uma parábola de vértice $V(x_0,y_0)$ com a concavidade voltada para a direita;
- (iv) Se $(y-y_0)^2=-4p\cdot(x-x_0)$, dado que $p>0$, temos uma parábola de vértice $V(x_0,y_0)$ com a concavidade voltada para a esquerda.

Como $\overline{FV}$ está sobre o eixo de simetria da parábola e, este é perpendicular a reta diretriz, temos:

- em (i) temos o eixo de simetria paralelo ao eixo y e, sua reta diretriz d é paralela ao eixo x, cuja equação é dada por $d: y-y_0+p=0$;
- em (ii) temos o eixo de simetria paralelo ao eixo y e, sua reta diretriz d é paralela ao eixo x, cuja equação é dada por $d: y-y_0-p=0$;
- em (iii) temos o eixo de simetria paralelo ao eixo x e, sua reta diretriz d é paralela ao eixo y, cuja equação é dada por $d: x-x_0+p=0$;
- em (iv) temos o eixo de simetria paralelo ao eixo x e, sua reta diretriz d é paralela ao eixo y, cuja equação é dada por $d: x-x_0-p=0$.

Nos casos em que as retas diretrizes são paralelas coincidentes aos eixos x e y, suas respectivas equação são dadas por:

- d: $y = 0$ $\Rightarrow$ Reta diretriz é o eixo x;
- d: $x = 0$ $\Rightarrow$ Reta diretriz é o eixo y.

2 CÔNICAS VIA PROBLEMA DE DOIS CORPOS

Segundo (FIGUEIREDO; NEVES, 2018), Kepler publicou, em 1609, o livro Astronomia Nova, no qual expôs o que hoje chamamos de Primeira e Segunda leis de Kepler. Dez anos depois, Kepler publicou seu segundo trabalho com o título *"Harmonia do Universo"* em que procurou mostrar de acordo com sua teoria a *"perfeição na obra de Deus"*. Neste, explicou a relação que existe entre o período de revolução dos planetas ao redor do Sol e o raio médio de suas órbitas. As três leis de Kepler são descritas em seus trabalhos, segundo (FIGUEIREDO; NEVES, 2018) enunciadas como:

- Primeira lei. Cada planeta se move em uma órbita elíptica, tendo o Sol em um de seus focos.
- Segunda lei. O raio vetor ligando o Sol a um dado planeta varre áreas iguais em tempos iguais.
- Terceira lei. A razão entre o quadrado do período de um planeta e o cubo do semi-eixo maior de sua órbita é a mesma para todos os planetas.

Estas leis foram demonstradas com um grande rigor por Newton em 1665 utilizando A Lei da Gravitação e Mecânica.

Em (FIGUEIREDO; NEVES, 2018) p.170-179 são descritas as demostrações destas três leis onde após a descrição da 1ª Lei, o texto mostra que as Leis de Kepler implicam a Lei da Gravitação Universal.

O problema de dois corpos aqui tratado é baseado em uma abordagem moderna para o problema da dinâmica entre dois corpos atraídos apenas por forças gravitacionais entre eles. Como veremos, as cônicas aparecem diretamente das equações diferenciais que modelam este tipo de fenômeno.

2.1 INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DE DOIS CORPOS

Nesta seção e no decorrer do resto do texto, usa-se a notação $\vec{v}$ para vetores.

Para analisarmos as trajetórias de dois corpos de massas m_1 e m_2 tomaremos suas posições no espaço como representado na Figura 32. Com isso, considere m_1 e m_2 as massas de dois corpos com posições no espaço dados respectivamente por $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ tal que $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$ e $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)$.

Seja $\vec{r}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$ a posição relativa de m_2 em relação à m_1, temos que a força gravitacional entre m_1 e m_2 são dadas respectivamente por $\vec{F}_1(t)$ e $\vec{F}_2(t)$, aonde $\vec{F}_1(t) = G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \vec{r}(t)/r^3$, onde $r = \|\vec{r}\|$, G uma constante real e $\vec{F}_2(t) = -G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \vec{r}(t)/r^3$, onde $r = \|\vec{r}\|$, com G uma constante real, como na Figura 33.

Denotando $\dot{\vec{r}}_1(t)$ a derivada de $\vec{r}_1(t)$, temos que $\dot{\vec{r}}_1(t)$ representa a velocidade do vetor em sua trajetória no plano, o qual é dado por $\dot{\vec{r}}_1(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$.

Já a segunda derivada de $\vec{r}_1(t)$ representada por $\ddot{\vec{r}}_1(t)$ determina a aceleração da massa m_1 no espaço. Nota-se que nosso objetivo inicial é descrever a situação em que

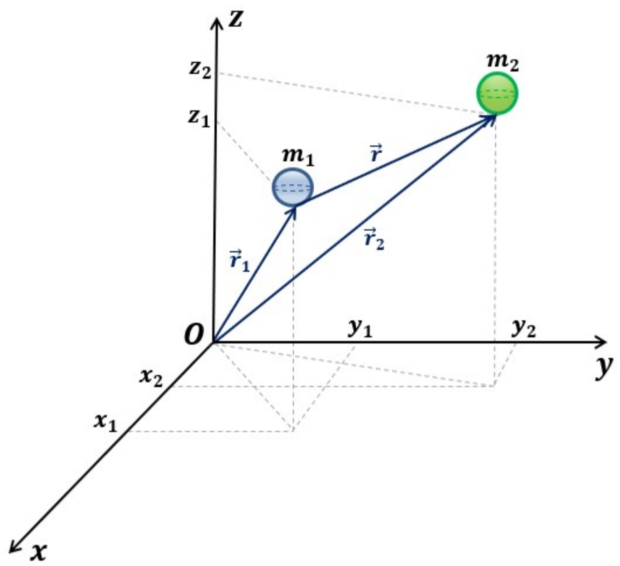

Figura 32 – Esboço das massa m_1 e m_2 no espaço e seus respectivos vetores e coordenadas. Fonte: De autoria própria.

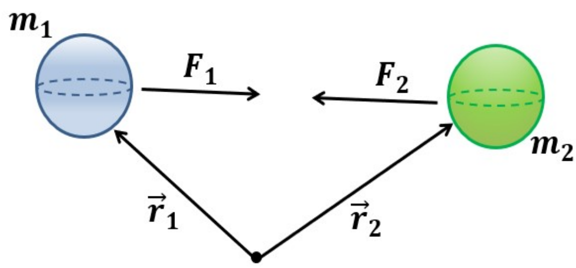

Figura 33 – Massas m_1 e m_2 e suas respectivas forças gravitacionais. Fonte: De autoria própria.

$$\vec{F}_1(t) + \vec{F}_2(t) = \vec{0}$$

e isso ocorrerá se, e somente se,

$$m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1(t) + m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2(t) = \vec{0}.$$

Integrando em ambos os lados,

$$\int (m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1(t) + m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2(t)) \cdot \mathrm{d}t = \int \vec{0} \cdot dt \implies \int (m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1(t)) \cdot \mathrm{d}t + \int (m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2(t)) \cdot \mathrm{d}t = \int \vec{0} \cdot \mathrm{d}t$$

Logo,

$$m_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1(t) + m_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2(t) + \vec{k} = \vec{c},$$

com $\vec{k}$ e $\vec{c}$ sendo constantes quaisquer. Denotando $\vec{k} - \vec{c} = \vec{a}$, temos que

$$m_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1(t) + m_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2(t) = \vec{a}.$$

Com isso, integrando novamente,

$$\int (m_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1(t)) \cdot \mathrm{d}t + \int (m_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2(t)) \cdot \mathrm{d}t = \int \vec{a} \cdot \mathrm{d}t.$$

Assim, obtemos

$$m_1 \cdot \vec{r}_1(t) + m_2 \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{p} = \vec{a}t + \vec{q},$$

com $\vec{p}$ e $\vec{q}$ sendo constantes quaisquer. Denotando $\vec{q} - \vec{p} = \vec{b}$, tem-se que

$$m_1 \cdot \vec{r}_1(t) + m_2 \cdot \vec{r}_2(t) = \vec{a}t + \vec{b} \tag{20}$$

com $\vec{b}$ uma constante qualquer.

Lembrando que o centro de massa $\vec{R}(t)$ entre dois corpos de massas m_1 e m_2 é dada por

$$\vec{R}(t) = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1(t) + m_2 \cdot \vec{r}_2(t)}{m_1 + m_2}.$$

Substituindo na equação (20), tem-se que

$$\vec{R}(t) = \frac{\vec{a} \cdot t + \vec{b}}{m_1 + m_2},$$

ou

$$\vec{R}(t) = \frac{\vec{a}}{(m_1 + m_2)} \cdot t + \frac{\vec{b}}{(m_1 + m_2)}.$$

Portanto, provamos que o centro de massa se move uniformemente pelo espaço com velocidade $\vec{a} \neq \vec{0}$ constante ou permanece parado no caso em que $\vec{a} = \vec{0}$.

Agora, vamos investigar o movimento do corpo de massa m_1 em relação ao corpo de massa m_2. Dado então que o sistema está centrado em m_1, como $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$, tem-se que $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r_2}} - \ddot{\vec{r_1}}$. Usando as expressões

$$\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot \vec{r} = m_1 \cdot \ddot{\vec{r_1}},$$

$$\frac{-G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot \vec{r} = m_2 \cdot \ddot{\vec{r_2}}.$$

Dividindo a primeira por m_1 e a segunda por m_2, temos:

$$\frac{G \cdot m_2}{r^3} \cdot \vec{r} = \ddot{\vec{r_1}},$$

$$\frac{-G \cdot m_1}{r^3} \cdot \vec{r} = \ddot{\vec{r_2}}.$$

Subtraindo essas equações, temos

$$\ddot{\vec{r_2}} - \ddot{\vec{r_1}} = \frac{-G \cdot m_1}{r^3} \cdot \vec{r} - \frac{G \cdot m_2}{r^3} \cdot \vec{r}.$$

Assim, ao evidenciarmos $-G$, $\vec{r}$ e r^3 em suas respectivas posições, temos a seguinte expressão:

$$\ddot{\vec{r_2}} - \ddot{\vec{r_1}} = \frac{-G \cdot \vec{r}}{r^3} \cdot (m_1 + m_2).$$

Fazendo $\mu = G \cdot (m_1 + m_2)$ e lembrando que $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r_2}} - \ddot{\vec{r_1}}$ conclui-se que

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{-\mu \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

Com isso, podemos afirmar que

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu \cdot \vec{r}}{r^3} = 0. \tag{21}$$

A partir desse momento, a próxima etapa será analisar se o movimento relativo de m_2 em relação ao m_1 se dará no mesmo plano para que possamos aplicar coordenadas polares. Para isso, vamos mostrar primeiramente que a derivada de $\dot{\vec{r}}(t) \times \vec{r}(t)$ é igual a zero.

Denote $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e $\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$. Calculando o produto vetorial, temos

$$\dot{\vec{r}}(t) \times \vec{r}(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ x(t) & y(t) & z(t) \end{vmatrix} = \dot{y}(t)z(t)i + \dot{x}(t)y(t)k + \dot{z}(t)x(t)j - \dot{z}(t)y(t)i - \dot{y}(t)x(t)k - \dot{x}(t)z(t)j.$$

Derivando em relação à t e omitindo este para facilitar a visualização, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}(t) \times \vec{r}(t)) &= \left[(\ddot{y}z + \dot{y}\dot{z}\right] i + \left[(\ddot{x}y + \dot{x}\dot{y}\right] k + [(\ddot{z}x + \dot{x}\dot{z}] j - \left[(\ddot{z}y + \dot{z}\dot{y}\right] i - \left[(\ddot{y}x + \dot{y}\dot{x}\right] k - [(\ddot{x}z + \dot{x}\dot{z}] j \\ &= (\ddot{y}z)\, i + (\ddot{x}y)\, k + (\ddot{z}x)\, j - (\ddot{z}y)\, i - (\ddot{y}x)\, k - (\ddot{x}z)\, j. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada de $\dot{\vec{r}}(t) \times \vec{r}(t)$ pode ser reescrita usando o determinante de uma matriz 3×3 da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}(t) \times \vec{r}(t)) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \\ x(t) & y(t) & z(t) \end{vmatrix} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{r}. \tag{22}$$

Como de $\ddot{\vec{r}} + \dfrac{\mu \cdot \vec{r}}{r^3} = \vec{0}$ segue que $\left(\ddot{\vec{r}} + \dfrac{\mu \cdot \vec{r}}{r^3}\right) \times \vec{r} = \vec{0} \times \vec{r} = \vec{0}$ e assim, aplicando a distributiva, temos

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{r} + \frac{\mu \cdot \vec{r}}{r^3} \times \vec{r} = \vec{0}.$$

Como $\dfrac{\mu \cdot \vec{r}}{r^3} \times \vec{r} = \vec{0}$ concluímos que

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}(t) \times \vec{r}(t)\right) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{r} = \vec{0}. \tag{23}$$

Integrando em relação à t, temos que $\dot{\vec{r}}(t) \times \vec{r}(t) = \vec{h}$ com $\vec{h}$ independente de t. Isto demonstra que os movimentos se dão em um mesmo plano, o que nos permite aplicar coordenadas polares.

2.1.1 Coordenadas polares

Para facilitar nossos cálculos, abordaremos aqui uma mudança de coordenadas. Particularmente, como estamos em um mesmo plano, podemos trabalhar com coordenadas polares em duas dimensões, isto é, $x(t) = r(t)\cos(\theta(t))$ e $y(t) = r(t)\,\mathrm{sen}(\theta(t))$ sendo $(x(t), y(t))$ o vetor posição relativa de uma massa com relação à outra em coordenadas cartesianas naquele plano de referência.

Primeiramente, vamos encontrar as seguintes igualdades em coordenadas polares:

$$\begin{cases} \vec{r} = xi + yj \\ \dot{\vec{r}} = \dot{x}i + \dot{y}j \\ \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}i + \ddot{y}j \end{cases}.$$

Considerando os vetores unitários relacionados às coordenadas polares

$$\begin{cases} \hat{r} = \cos(\theta)i + \mathrm{sen}\,(\theta)j \\ \hat{\theta} = -\,\mathrm{sen}\,(\theta)i + \cos(\theta)j \end{cases},$$

lembrando que $r(t) = \|\vec{r}(t)\|$ e observando que o vetor posição relativa $\vec{r}$ é radial em relação à origem, temos

$$\vec{r}(t) = r(t) \cdot \hat{r}(t).$$

Derivando $\vec{r}(t)$ em t, temos:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}(r(t) \cdot \hat{r}(t)) = \dot{r}(t)\hat{r}(t) + r(t)\dot{\hat{r}}(t).$$

Dado que $\hat{r}$ não é constante em relação a t, temos

$$\dot{\hat{r}} = \frac{d}{dt}(\cos(\theta)i + \mathrm{sen}\,(\theta)j) = \frac{d}{dt}(\cos\theta)\,i + \frac{d}{dt}(\mathrm{sen}\,\theta)\,j, \tag{24}$$

logo

$$\dot{\hat{r}} = -\,\mathrm{sen}\,(\theta)\dot{\theta}i + \cos(\theta)\dot{\theta}j = \dot{\theta} \cdot (-\,\mathrm{sen}\,\theta i + \cos\theta j) \implies \dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \cdot \hat{\theta}. \tag{25}$$

Assim, dado que $\dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \hat{r} + r \cdot \dot{\hat{r}}$, temos que

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \hat{r} + r \cdot \dot{\theta} \cdot \hat{\theta}.$$

Derivando novamente em relação à t, tem-se

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}\right),$$

logo

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \frac{d}{dt}(\dot{r}) \cdot \hat{r} + \dot{r} \cdot \left(\frac{d}{dt}\hat{r}\right) + \left(\frac{d}{dt}r\right) \cdot \theta \cdot \hat{\theta} + r\left(\frac{d}{dt}\dot{\theta}\right) \cdot \hat{\theta} + r \cdot \hat{\theta} \cdot \left(\frac{d}{dt}\hat{\theta}\right) \\ &= \ddot{r} \cdot \hat{r} + \dot{r} \cdot \dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}}. \end{aligned}$$

Calculando $\dot{\hat{\theta}}$ temos

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}} = \frac{d}{dt}\left(-\operatorname{sen}(\theta)i + \cos(\theta)j\right) &= -\cos(\theta)\cdot\dot{\theta}\cdot i - \operatorname{sen}(\theta)\cdot\dot{\theta}\cdot j \\ &= -\dot{\theta}\cdot(\cos(\theta)\cdot i + \operatorname{sen}(\theta)\cdot j) \\ &= -\dot{\theta}\cdot\hat{r}.\end{aligned}$$

Substituindo, temos

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\cdot\hat{r} + \dot{r}\cdot\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\cdot\left(-\dot{\theta}\cdot\hat{r}\right) \\ &= \ddot{r}\cdot\hat{r} + \dot{r}\cdot\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r(\dot{\theta})^2\cdot\hat{r} \\ &= \left(\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}(\dot{\theta}) + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}.\end{aligned}$$

Note que $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ pode ser escrito como $\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$. Portanto, em coordenadas polares $(\hat{r},\hat{\theta})$ temos

- $\vec{r} = r\hat{r}$;
- $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$;
- $\ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2\right)\cdot\hat{r} + \left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)\right]\cdot\hat{\theta}.$

Lembrando que $\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \vec{h}$ com $\vec{h}$ constante, temos

$$\vec{h} = (r\hat{r})\times\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}\right).$$

Assim, conclui-se que

$$\vec{h} = \begin{vmatrix}\hat{r} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & 0\end{vmatrix} = r^2\dot{\theta}\hat{z},$$

onde $\hat{z}$ é perpendicular à $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$.

2.1.2 Resolução do Problema de Dois Corpos

Usando coordenadas polares na equação $\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu\cdot\vec{r}}{r^3} = \vec{0}$, temos que

$$\left(\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2\right)\cdot\hat{r} + \left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}\left(r^2(\dot{\theta})\right)\right]\cdot\hat{\theta} + \frac{\mu\cdot\vec{r}}{r^3} = \vec{0},$$

e lembrando que $\vec{0} = 0\cdot\hat{r} + 0\cdot\hat{\theta}$ e que $\vec{r} = r\cdot\hat{r}$,

$$\left(\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2\right)\cdot\hat{r} + \left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}\left(r^2(\dot{\theta})\right)\right]\cdot\hat{\theta} + \frac{\mu\cdot r\cdot\hat{r}}{r^3} = 0\cdot\hat{r} + 0\cdot\hat{\theta}.$$

Separando as componentes, temos

$$\begin{cases}\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 + \mu\cdot\frac{1}{r^2} = 0, \\ \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}\left(r^2(\dot{\theta})\right) = 0.\end{cases}$$

Supondo que $u = \dfrac{1}{r}$ e lembrando que $h = r^2\dot{\theta}$ com h constante, temos

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{r} & \Rightarrow r = \dfrac{1}{u}, \\ h = r^2\dot{\theta} & \Rightarrow \dot{\theta} = h \cdot u^2, \end{cases} \tag{26}$$

e derivando em relação à r, temos

$$\dot{r} = \left(\frac{1}{u}\right)' \Rightarrow \dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2}. \tag{27}$$

Pela regra da cadeia, temos $\dot{u} = \dfrac{du}{d\theta} \cdot \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{du}{d\theta} \cdot \dot{\theta}$ e assim temos

$$\dot{r} = -\frac{\dfrac{du}{d\theta} \cdot \dot{\theta}}{u^2} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{d\theta} \cdot u^2 h = -h \cdot \frac{du}{d\theta}.$$

Lembrando que h é constante, derivando $\dot{r}$ em relação à t, temos $\ddot{r} = -h \cdot \dfrac{d^2u}{(d\theta)^2} \cdot \dot{\theta}$ e como $\dot{\theta} = h \cdot u^2$ obtemos $\ddot{r} = -h \cdot \dfrac{d^2u}{(d\theta)^2} \cdot h \cdot u^2$. Assim, chegamos a

$$\ddot{r} = -h^2 \cdot u^2 \cdot \frac{d^2u}{(d\theta)^2},$$

portanto a equação $\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = -\mu \cdot \dfrac{1}{r^2}$ passa a ser escrita na forma

$$-h^2 \cdot u^2 \cdot \frac{d^2u}{(d\theta)^2} - \frac{1}{u}\left(h \cdot u^2\right)^2 = -\mu \cdot u^2.$$

Dividindo ambos os membros por u^2h^2 temos:

$$-\frac{d^2u}{(d\theta)^2} - u = -\frac{\mu}{h^2} \implies \frac{d^2u}{(d\theta)^2} + u = \frac{\mu}{h^2}. \tag{28}$$

A partir deste resultado, nota-se que chegamos a uma expressão simplificada de uma fórmula conhecida como *Fórmula de Binet* [1].

Observa-se que a equação $\dfrac{d^2u}{(d\theta)^2} + u = \dfrac{\mu}{h^2}$ possui solução dada por senos e cossenos (basta fazer uma substituição direta para verificar este fato). Mais precisamente, podemos escrever

$$u = \frac{k}{h^2} \cdot \left[1 + e\cos(\theta - \theta_0)\right],$$

[1] *Fórmula de Binet* surge a partir de um estudo inicial sobre a parte de um campo central de força conservativo F com V um potencial de F. A afirmação inicial é de que F é central se e só se V depende apenas de $\left|X\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ com a existência de uma função real de variável real g tal que $F(X) = G(|X|)X$ e aí sim, tomado isto passa a descrever situações até surge a descrição da fórmula: $\dfrac{d^2}{(d\theta)^2}\left(\dfrac{1}{r}\right) + \dfrac{1}{r} = -\dfrac{Pr^2}{mh^2}$. Vide páginas 154 a 167 de (FIGUEIREDO; NEVES, 2018) onde ele afirma que, de acordo com a 2ª lei de Newton, esta é a equação diferencial de todas as órbitas $r = r(\theta)$ de uma massa em um campo central.

com e e θ_0 constantes de integração chamadas respectivamente de amplitude e fase e k uma constante qualquer diferente de zero. Assim, como $u = \dfrac{1}{r}$, então temos

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{h^2} \cdot \left[1 + e\cos(\theta - \theta_0)\right],$$

logo

$$r = \frac{h^2}{k} \cdot \frac{1}{\left[1 + e\cos(\theta - \theta_0)\right]},$$

e assim, dado $\dfrac{h^2}{k} = P$ tal que P é constante diferente de zero, podemos escrever

$$r = \frac{P}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}.$$

Com isso, dado valores arbitrários para as constantes e, P e θ_0, temos a equação geral de uma curva cônica em coordenadas polares. Note que e é a excentricidade da curva.

Assim, dados $P > 0$, $e \geq 0$ e admitindo $\theta - \theta_0 = \beta$ a equação $r = \dfrac{P}{1 + e\cos\beta}$ é classificada de acordo com a Excentricidade e.

- se $e = 0$ a curva é uma circunferência;
- se $0 < e < 1$ a curva é uma elipse;
- se $e = 1$ a curva é uma parábola;
- se $e > 1$ a curva é uma hipérbole.

Podemos concluir, com este estudo, que em um sistema de dois corpos, o centro de massa se move em velocidade constante e ambos os corpos estão orbitando em um mesmo plano em relação ao centro de massa. Ainda, o movimento se dá através de uma cônica cujo foco será o centro de massa do sistema.

3 UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DAS CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO

No contexto da educação, é crucial tentar ao máximo, sempre que possível, apresentar o conteúdo trabalhado de maneira ferramental ou lúdica, complementando o aprendizado tradicional em sala de aula (baseado em algebrismos), conforme sugerido pelas diretrizes e parâmetros nacionais. Portanto, este trabalho propõe uma exposição da teoria discutida em sala de aula, focando especificamente na elipse.

3.1 DIRETRIZES DO MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996) é um conjunto de normas que estabelece os direitos assegurados aos estudantes no Brasil. O documento é dividido em 9 títulos, representados por algarismos romanos, que abrangem desde os princípios e fins da educação nacional até as disposições gerais e transitórias. O Ministério da Educação e Cultura é responsável por garantir a abrangência e a implementação dessas diretrizes, incluindo o direito à educação fornecido pelas instituições responsáveis e o dever dos pais ou responsáveis de matricular os menores a partir dos 7 anos de idade. A lei também estabelece bases curriculares nacionais comuns para cada nível de ensino e prevê a adaptação através da elaboração e execução de políticas e planos educacionais alinhados com as diretrizes nacionais de educação. Em última instância, visa integrar e coordenar ações entre municípios e regiões, além de garantir a formação contínua e o aperfeiçoamento profissional dos educadores, contribuindo para a formação de cidadãos críticos e reflexivos.

3.1.1 Ensino Médio Antigo x O Novo Ensino Médio

O Ministério da Educação e Cultura (MEC) propõe em sua Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que a abordagem matemática no ensino médio deve ser apresentada com propósito de consolidar, aprofundar e ampliar o aprendizado do ensino fundamental. Dessa forma, a literatura propõe um ensino para que o estudante consiga visualizar uma integralização da matemática com a aplicação à sua realidade. Dessa forma, o ensino fica restrito as unidades de conhecimento do ensino fundamental. Segundo (EDUCAÇÃO, 2018) *"Na BNCC de Matemática do Ensino Fundamental, as habilidades estão organizadas segundo unidades de conhecimento da própria área (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística)."*.

Na proposta anterior ao Novo Ensino Médio, o MEC estabelecia habilidades dentro de competências a serem desenvolvidas durante o ensino da matemática no país. Ela trazia em suas bases legais que Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnologias estavam diretamente ligadas, em um trabalho conjunto com a Física, a Química e a Biologia. Ainda segundo (EDUCAÇÃO, 2000), "a presença da Matemática nessa área se justifica pelo que de ciência tem a Matemática, por sua afinidade com as Ciências da Natureza, na medida em que é um dos principais recursos de constituição e expressão dos conhecimentos destas últimas, e finalmente pela importância de integrar a Matemática com os conhecimentos que lhe são mais afins. Esta última justificativa é, sem dúvida, mais pedagógica do que epistemológica, e pretende retirar a Matemática do isolamento didático em que tradicionalmente se confina no contexto escolar." Um pouco mais adiante, essas competências e habilidades foram melhores traduzidas quando por sua vez o MEC, em sua análise pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) as descrevia, de acordo A Matriz Referência (EDUCAÇÃO, 2023b). Nela percebe-se uma sequência de conteúdos a serem discutidos e lecionados no ensino médio que aborda todos os tópicos entendidos como educação básica. Com isso, o estudo das cônicas é percebido, dada a devida interpretação, em várias competências e habilidades, com destaque à competência de área 2 "Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela" com as seguintes habilidades:

- H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

e a competência de área 5 "Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas" tem por sua vez todas as suas habilidades descritas que satisfazem o estudo das cônicas. São elas:

- H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
- H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
- H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Note que todas estas habilidades presentes nas Competências de Áreas 2 e 5 tornam possíveis uma abordagem dentro da geometria analítica envolvendo os estudos sobre as equações de secções cônicas.

Com base no exposto anteriormente, a BNCC (EDUCAÇÃO, 2018) não esclarece claramente em sua proposta se este estudo deve ocorrer no ensino médio, apresentando duas situações: uma relacionada à prioridade de aprofundamento dos tópicos do ensino fundamental e outra decorrente da forma como o documento define os conteúdos a serem trabalhados na transição para o Novo Ensino Médio. Ao analisar mais detalhadamente a disposição dos conteúdos do Novo Ensino Médio, observa-se conforme (EDUCAÇÃO, 2018) p. 519, que as competências devem desenvolver "o raciocínio, a representação, a comunicação e a argumentação". Dentro dessas perspectivas, o documento ainda estabelece articulações entre Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística, e Grandezas e Medidas. A partir disso, são caracterizados pares de ideias como variação e constância, certeza e incerteza, movimento e posição, e relações e inter-relações. Embora a BNCC descreva bem essas conexões e relações, como mencionado anteriormente, ainda há uma continuidade em relação aos tópicos do Ensino Fundamental, conforme (EDUCAÇÃO, 2018) p. 522.

Após toda essas análises, a BNCC descreve as 5 competências que estão relacionadas para esse Novo Ensino Médio, que nesse novo documento são designadas como *Competência Específica*. Cada uma delas, respeitando justamente o texto anterior, descreve suas respectivas habilidades e assim, nota-se que as mesmas áreas do Ensino Fundamental (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística) são os eixos centrais destas competências.

Como são estabelecidas as competências com suas respectivas habilidades, buscamos entender nesse novo momento onde se enquadra o Estudo das Cônicas. Dos pares de ideias citadas, podemos entender que o movimento e posição pode ser ligadas com a álgebra e a geometria. Segundo (EDUCAÇÃO, 2018) perceba que duas das cinco competências abordam ligações entre a álgebra e a geometria. Note como estas estão expostas:

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

- (EM13MAT301) - Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais.
- (EM13MAT302) - Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.
- (EM13MAT303) - Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial.
- (EM13MAT304) - Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.
- (EM13MAT305) - Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas,

em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

- (EM13MAT306) - Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
- (EM13MAT307) - Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT308) - Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.
- (EM13MAT309) - Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.
- (EM13MAT310) - Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.
- (EM13MAT311) - Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.
- (EM13MAT312) - Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
- (EM13MAT313) - Resolver e elaborar problemas que envolvem medições em que se discuta o emprego de algarismos significativos e algarismos duvidosos, utilizando, quando necessário, a notação científica.
- (EM13MAT314) - Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas compostas, determinadas pela razão ou pelo produto de duas outras, como velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.
- (EM13MAT315) - Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma.
- (EM13MAT316) - Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4

Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

- (EM13MAT401) - Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
- (EM13MAT402) - Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
- (EM13MAT403) - Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas.
- (EM13MAT404) - Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT405) - Reconhecer funções definidas por uma ou mais sentenças (como a tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento.
- (EM13MAT406) - Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
- (EM13MAT407) - Interpretar e construir vistas ortogonais de uma figura espacial para representar formas tridimensionais por meio de figuras planas.
- (EM13MAT408) - Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências, com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
- (EM13MAT409) - Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos, como o histograma, o de caixa (box-plot), o de ramos e folhas, reconhecendo os mais eficientes para sua análise

Para entendermos estes códigos tomaremos um exemplo cuja composição é (EM13MAT301). Logo, de acordo (EDUCAÇÃO, 2018) p.34 temos:

- (EM) - O primeiro par de letras indica a etapa de Ensino Médio.
- (13) - O primeiro par de números indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio, conforme definição dos currículos.
- (MAT) - A segunda sequência de letras indica a área (três letras) ou o componente curricular (duas letras): LGG = Linguagens e suas Tecnologias; LP = Língua Portuguesa; MAT = Matemática e suas Tecnologias; CNT = Ciências da Natureza e suas Tecnologias; CHS = Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.
- (301) - Os números finais indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (1º número) e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números). Vale destacar que o uso de numeração sequencial para identificar as habilidades não representa uma ordem ou hierarquia esperada das aprendizagens. Cabe aos sistemas e escolas definir a progressão das aprendizagens, em função de seus contextos locais.

Nesse caso, entenda que os assuntos correspondentes ao código (EM13MAT301) trata-se da etapa do $\underbrace{\text{Ensino Médio}}_{\text{EM}}$ aplicado em $\underbrace{\text{qualquer uma das suas 3 séries (1º, 2º ou 3º)}}_{13}$, seguindo definição curricular inicial sugerida na proposta preliminar (EDUCAÇÃO, 2016) p.559-581. da disciplina de $\underbrace{\text{Matemática e suas Tecnologias}}_{\text{MAT}}$ fazendo parte da $\underbrace{\text{Competência Específica 3}}_{3}$ onde dentro desta competência será abordada a $\underbrace{\text{habilidade 01}}_{01}$.

Após toda esta exposição dos textos da BNCC, percebe-se que a descrição curricular não descreve diretamente o estudo da Geometria Analítica em nenhuma das três séries desse novo modelo.

Fica subentendido que talvez os assuntos possam se encaixar, conforme descrito nas Competências e Habilidades, porém os tópicos específicos não são mencionados nas exposições em (EDUCAÇÃO, 2016). A nova estrutura dá autonomia para as escolas introduzirem novas disciplinas denominadas *Eletivas* e *Itinerários*, permitindo que cada escola escolha quais assuntos não mais abordar em seu currículo. Isso se deve também à redução da carga horária semanal anteriormente dedicada à Matemática. A formação do Novo Ensino Médio trata esses tópicos como Formação Geral Básica (FGB), que sofreu reduções para abrir espaço para a introdução das eletivas e itinerários. Com a diminuição da carga horária semanal da FGB conforme proposto pela BNCC, alguns assuntos que eram tratados no Ensino Médio anterior deixaram de ser abordados. Assim, cabe a cada escola, de forma particular, ajustar seu currículo incluindo esses assuntos em eletivas ou itinerários, embora a BNCC não dê essa orientação específica.

Assim, devido a essas particularidades do Novo Ensino Médio, algumas escolas estão lidando com a redução na carga horária de Matemática da maneira que consideram mais adequada para elas. No entanto, isso não significa que as eletivas e os itinerários irão compensar essa redução. Portanto, não se pode garantir que a Geometria Analítica será ensinada de maneira uniforme em todo o país, pois seu ensino dependerá das decisões particulares de cada escola.

Chamo atenção para o fato de que estamos atualmente em uma fase de transição significativa. Devido às discussões em andamento sobre o novo sistema de ensino, o MEC realizou uma chamada pública conforme mencionado em (EDUCAÇÃO, 2023a), abrindo espaço para amplas discussões com a sociedade. O objetivo é ajustar o que for necessário e finalizar o novo processo educacional implementado no país.

3.2 ABORDAGEM DO ESTUDO DAS CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO

Vamos considerar uma proposta (em duas aulas) para os alunos da 3ª série do Ensino Médio em seus estudos da Geometria Analítica.

Caso todas as modificações e ajustes no programa do Novo Ensino Médio não incluam o ensino de Geometria Analítica, é possível buscar a inclusão dessa proposta de ensino das cônicas em uma disciplina eletiva ou itinerária. Isso ressalta a importância da interdisciplinaridade, especialmente devido à sua relação direta, como será proposto, com os estudos físicos relacionados a órbitas. É fundamental preparar os alunos do 3º ano para esse aprendizado, pois sua maturidade matemática e física contribuirá significativamente para um desenvolvimento sólido.

3.2.1 Plano de Aula

Aula 1

Introdução Conceitual, Gráfica e Algébrica que Traduzem as Equações de uma Elipse.

Inicialmente a exposição algébrica em sala de aula introduz o estudo das cônicas abordando-a de uma forma expositiva e dialogada, abrindo questionamentos sobre “o que lembram ou já se sabe a respeito de curvas chamadas de Elipses”. O objetivo é iniciar a construção no quadro partindo de dois pontos distintos e, com um barbante, traçar a curva e iniciar a parte conceitual, introduzindo o nome dos pontos inciais como os “focos” da elipse.

O uso do barbante serve para iniciar uma nova discussão sobre essa construção: "O que podemos inferir da construção feita no quadro que relaciona o pensamento algébrico na determinação de uma lei de formação para a curva? Alguém notou algo durante o processo?"Mediando essa situação, é possível descrever a principal característica de uma elipse, que está relacionada ao comprimento do barbante: em qualquer ponto da curva, a soma das distâncias desse ponto aos focos é uma constante

$$\varepsilon = \{P(x,y) : \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a\}.$$

Após todas essas análises e discussões, iniciar a busca da equação da curva tomando como base o plano cartesiano e as respectivas coordenadas dos pontos que chamamos de foco F_1 e foco F_2 e da generalização dos infinitos pontos da curva. Através da relação da distância entre dois pontos, expor pensamentos algébricos que implicarão na lei de formação da curva, que chamaremos de *equação da elipse*.

Em seguida, findado o primeiro contato com a lei de formação, de uma maneira suave e sutil, chamar atenção da “excentricidade” da curva e suas translações. O objetivo inicial dessa 1ª aula é expor a equação centrada na origem, expondo as características de seus elementos e o que eles representam.

Com todas estas descrições, características e propriedade citadas inicialmente, iniciar a resolução de exercícios, segundo (SMOLLE; SOUZA VIEIRA DINIZ, 2003) para a fixação do conteúdo exposto e assim, ao encerrar a aula, deixar proposto uma lista de exercícios para que possam abordar o assunto e verificar se algo ainda ficou pendente no que se refere a esta primeira exposição da equação da elipse.

AULA 2

AULA LÚDICA E FERRAMENTAL UTILIZANDO VÍDEOS E OBJETOS QUE DESCREVEM PROPRIEDADES E CARACTERÍSTICA DO MOVIMENTO DE DOIS CORPOS E ASSIM ASSOCIAR AS CURVAS ELÍPTICAS.

Sabemos que o aprendizado é constituído de várias maneiras e uma delas é a verificação física com o contato direto com objetos correlacionados. Assim, nessa segunda aula, a proposta é introduzir alguns vídeos que relacionam os movimentos gravitacionais e a Lei da Gravitação Universal para o movimento de dois corpos. Assim a introdução dos vídeos (APBHIOLHHS, 2012), (FÍSICA, 2021),(FÍSICRAFT, 2023) e (PORTUGUÊS, 2016) contribui na visualização do proposto.

Após a apresentação dos vídeos, em um ambiente aberto e apropriado, caso a sala de aula não permita, acompanhar os alunos ao pátio, onde uma mesa com um tecido elástico esta posicionado de tal maneira que este possa ser um reprodução caseira do nosso “Universo Espacial”. Com pesos e esferas de tamanhos distintos, reproduzir nesse espaço os movimentos orbitais dos corpos celestiais e assim, chamar a atenção para alguns casos específicos como o movimento em que elas descrevem dependendo da quantidade de esferas que são arremessadas no tecido.

Supor trajetórias com os arremessos de duas esferas de mesmo tamanho, depois variar o tamanho entre elas e chegar até o momento em que uma quantidade maior seja arremessadas e, a todo momento, chamar a atenção para o comportamento que possuem a cada alteração feita.

Por fim, tenta-se mostrar que os movimentos descritos pelas esferas se aproximam de uma curva elíptica, mas a "curva perfeita"não é alcançada devido à variação de velocidade das esferas, causada pelos arremessos, e às mudanças na energia ao longo do tempo, influenciadas pelo atrito. Mesmo nessas condições, é notável que os movimentos estudados surgem de forma natural, incluindo os de translação entre dois corpos.

Após alguns arremessos, ao término da aula, abrir uma discussão sobre se a reprodução caseira do Universo contribuiu com as informações vistas em sala, demonstrando que a matemática pode se relacionar com qualquer área de conhecimento. Neste experimento, houve uma correlação entre a matemática pura e seu algebrismo nas equações, e os estudos realizados na Física relacionados às Leis de Kepler para os movimentos orbitais.

4 CONCLUSÃO

Como descrito na apresentação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, este trabalho aborda um tema específico relevante para a educação básica, destacando a conexão entre os conteúdos abordados na disciplina de Física e sua correlação com o estudo matemático e suas equações na sala de aula.

A interdisciplinaridade entre elas, como observado nas descrições deste trabalho, foi facilitada pelo fato de que durante as aulas do PROFMAT, os temas abordados promoveram a atualização e o aperfeiçoamento na formação profissional, visando melhorar a maneira de apresentar os tópicos essenciais para sua aplicação em sala de aula.

Neste trabalho, observa-se que o Cálculo possibilita aprofundar o entendimento em um contexto de nível superior, abordando leis físicas que descrevem as condições para a definição das cônicas em um mesmo plano. Além disso, junto à exposição de argumentos da Geometria Analítica, podemos descrever como o ensino da Matemática propõe apresentar esses conceitos de forma acessível para alunos do Ensino Médio, permitindo que compreendam o conteúdo de maneira específica para seu nível de escolaridade.

O Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional efetivamente contribui significativamente para o crescimento, aperfeiçoamento e desenvolvimento dos professores de Matemática que atuam na Educação Básica. Esta atualização em sua formação profissional enfatiza o domínio aprofundado do conteúdo matemático relevante para a prática docente.

REFERÊNCIAS

APBHIOLHHS. **Gravity Visualized**. Ago. 2012. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=MTY1Kje0yLg&t=350s. Acesso em: 25 ago. 2023.

CANTÃO, Renato. **Informações gerais sobre o Matemático Pierre de Fermat (Texto autorizado por The MacTutor History of Mathematics archive**. Dez. 2002. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~sandra/CCA/history/fermat/fermat.html. Acesso em: 20 jul. 2023.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSF, Lhaylla. **Geometria Analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

DESCARTES, René. **Discurso do método & Ensaios: René Descartes**. Tradução: César Augusto Battisti, Érico Andrade, Guilherme Rodrigues Neto, Marisa Carneiro de Oliveira Franco Donatelli, Pablo Rubén Mariconda e Paulo Tadeu da Silva. São Paulo: Unesp, 2018.

EDUCAÇÃO, Ministério da. **Base Nacional Comum Curricular**. Abr. 2016. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/historico. Acesso em: 26 ago. 2023.

EDUCAÇÃO, Ministério da. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 15 abr. 2023.

EDUCAÇÃO, Ministério da. **Consulta Pública**. Mar. 2023. Disponível em: https://www.in.gov.br/en/web/dou/-/portaria-n-399-de-8-de-marco-de-2023-468762771. Acesso em: 10 jun. 2023.

EDUCAÇÃO, Ministério da. **Matriz de Referência ENEM**. Disponível em: https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 18 mar. 2023.

EDUCAÇÃO, Ministério da. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM)**. 2000. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/historico. Acesso em: 26 fev. 2023.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações Diferenciais Aplicáveis**. Rio de Janeiro: Impa, 2018.

FÍSICA, Gifs de. **MOVIMENTO DO SISTEMA SOLAR**. Ago. 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=7kNVni7EiUE. Acesso em: 25 ago. 2023.

FÍSICRAFT. **Leis de Kepler - 1ª, 2ª e 3ª leis**. Ago. 2023. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=nVHQ_mP_x7A. Acesso em: 25 ago. 2023.

FRASÃO, Dilva. **Informações gerais sobre o Matemático Blaise Pascal**. Jul. 2023. Disponível em: https://www.ebiografia.com/blaise_pascal/. Acesso em: 20 jul. 2023.

PORTUGUÊS, Socratica. **Primeira Lei de Kepler: Lei das Órbitas Elípticas (Astronomia)**. Ago. 2016. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=g1b8zZ3LZhY. Acesso em: 25 ago. 2023.

SANTOS, Fabiano José dos; FERREIRA, Silvimar Fábio. **Geometria Analítica**. Porto Alegre: Bookman, 2009.

SMOLLE, Kátia C. Stocco; SOUZA VIEIRA DINIZ, Maria I. de. **Matemática**: Ensino Médio 3ª série. São Paulo: Saraiva, 2003. v. 3.

APÊNDICE A – PLANO DE AULA: ELIPSE

Plano de Aula

Professor: Analberto Schot

Disciplina: Matemática

Duração: 50 min.

Assunto: Geometria Analítica

Tema: Elipse

[1]**Competência:** Área 5

[2]**Habilidades**: H21 e H22

Objetivos:

- Geral: A partir de definições descrever algebricamente a equação de uma elipse e suas propriedades conceituais.
- Específico: A partir das falas introdutórias sobre o modelo elíptico, que o aluno compreende pela álgebra quais são as informações necessárias para a obtenção da lei de formação da equação de uma Elipse e que assim, entenda suas propriedades através das exposições e discussões.

Conteúdo:

- Plano Cartesiano;
- Coordenadas Cartesianas;
- Distância entre dois pontos;
- Operações algébricas;
- Matemática Básica.

Recursos Didáticos:

- Quadro, Giz ou Canetão, Barbante, Régua; Compasso.

Metodologia:

Iniciar abrindo uma conversa sobre o que se sabe sobre o tema e a partir das discussões iniciar a construção gráfica de uma elipse no quadro utilizando barbante, compasso e se possível, pedir para que um aluno auxilie na construção. Em seguida comentar sobre a maneira que a Elipse foi plotada e inicia a busca da sua lei de formação expondo tópicos da matemática já trabalhados anteriormente por eles, dados como pré-requisitos para o desenvolvimento algébrico, como distância entre dois pontos. Após determinar a equação, abrir uma discussão sobre características e propriedades observadas e iniciar a resolução de alguns exercícios mediante o que foi descrito. Ao final da aula, pedir para que os alunos apliquem o que viram em alguns exercícios mediante lista apresentadas.

[1]***Competência de Área 5****: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.*

[2]***H21:*** *Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.*
H22: *Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.*

Avaliação:
Não haverá uma avaliação formal e descritiva sobre o abordado nessa aula mas sim uma discussão sobre a importância do exposto. A participação durante a exposição do conteúdo e a verificação do que realmente assimilaram e compreenderam do proposto na aula será levantado para um melhor desenvolvimento da aula.

Referências:

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSF, Lhaylla. **Geometria Analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

SMOLLE, Kátia C. Stocco; SOUZA VIEIRA DINIZ, Maria I. de. **Matemática:** Ensino Médio 3ª série. São Paulo: Saraiva, 2003. v. 3

Exercícios:
Propostos para a aula.

01. Seja a elipse de focos $F_1(6,0)$ e $F_2(-6,0)$ e eixo menor de comprimento 10. Determine:

a) O centro da elipse;
b) Obtenha a sua equação: (lei de formação).

02. Seja a elipse com eixo maior de extremidades $A_1(0,10)$ e $A_2(0,-10)$ e eixo menor de extremidades $B_1(8,0)$ e $B_2(-8,0)$. Determine:

a) Obtenha a sua equação (lei de formação);

Exercícios:
Propostos para fixação (tarefa de casa)

01. Seja a elipse de equação $16x^2 + 25y^2 = 400$. Determine:

a) Os comprimentos dos eixos;
b) Os focos e a excentricidade.

02. Obtenha a equação da elipse com centro na origem, que passa por $(2,1)$ e cujo semi-eixo maior mede 3.

03. Obtenha a equação da elipse com focos $F_1(-3,0)$ e $F_2(3,0)$ e que passa pelo ponto $\left(5/2,\ 2\sqrt{3}\right)$.

04. Faça o gráfico da elipse de equação

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

APÊNDICE B – PLANO DE AULA: MOVIMENTO DE DOIS CORPOS E A ELIPSE

Plano de Aula

Professor: Analberto Schot

Disciplina: Matemática

Duração: 50 min.

Assunto: Geometria Analítica

Tema: Movimento de dois corpos e a Elipse

[1]**Competência:** Área 2

[2]**Habilidades**: H6

Objetivos:

- Geral: A partir de definições possibilitar visualmente a compreensão através de um experimento caseiro simples que reproduz o Universo.
- Específico: Mostrar a partir de objetos a relação existente entre o movimento de dois corpos, suas caraterísticas físicas. Que suas trajetórias são descritas por movimentos elípticos que surgem de forma natural, de acordo estudado nas leis físicas e visualizar a realidade por traz da matemática pura aplicada em sala.

Conteúdo:

- Leis de Kepler;
- Movimento de dois corpos;
- Movimentos orbitais.
- Curvas elípticas.

Recursos Didáticos:

- Projetor, Computador, Vídeos, Mesa com tecido, Esferas.

Metodologia:

Iniciar retomando o assunto Elipse e em seguida comentar brevemente sobre as leis de Kepler e as situações envolvendo o movimento de dois corpos e movimentos orbitais. Falar sobre a atração e reproduzir um vídeo curto sobre estas referidas leis e comentar sobre a equação que estamos estudando. Após o vídeo, em sala ou no pátio da escola, utilizar uma mesa com um tecido elástico, já previamente montada de acordo como o vídeo (Apbiolghs. **Gravity Visualized)**, para descrever o que foi identificado no vídeo utilizando esferas de tamanhos distintos pra reproduzir caseiramente o movimento de dois corpos no espaço. Associar ao experimento várias situações e buscar a exposição das trajetórias que as esferas descrevem e comprovar, mesmo que de uma forma simples, o que foi matematicamente e fisicamente descrito em sala de aula.

[1]***Competência de Área 2**: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.*

[2]***H06:** Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.*

Avaliação:
Não haverá uma avaliação formal e descritiva sobre o abordado nessa aula uma vez que o objetivo é expor de maneira lúdica o movimento entre dois corpos. Haverá apenas uma percepção sobre a participação e a compreensão do abordado no experimento e a correlação que existe entre o conteúdo puramente matemático da sala e sua aplicação física.

Referências:

GIFs de Física. **Movimento do sistema solar.**
Disponível em: `https://www.youtube.com/watch?v=7kNVni7EiUE` . Acesso em: ago. 2023.

Socratica Português. **Primeira Lei de Kepler: Lei das Órbitas Elípticas (Astronomia).**
Disponível em: `https://www.youtube.com/watch?v=g1b8zZ3LZhY` . Acesso em: ago. 2023.

Físicraft**. Leis de Kepler - 1ª, 2ª e 3ª leis.**
Disponível em: `https://www.youtube.com/watch?v=nVHQ_mP_x7A`. Acesso em: ago. 2023.

Apbiolghs. **Gravity Visualized.**
Disponível em: `https://www.youtube.com/watch?v=MTY1Kje0yLg&t=9s`. Acesso em: ago. 2023.

Exercícios Propostos:
Para fixação (tarefa de casa):

01. Faça uma pesquisa sobre as ***Leis de Kepler*** que relacionam os *movimentos orbitais* e sua relação com a <u>*trajetória elíptica*</u> descrita pelo <u>***movimento de dois corpos***</u>.

ANEXO A – MATRIZ REFERENCIA ENEM

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA

MATRIZ DE REFERÊNCIA ENEM

EIXOS COGNITIVOS (comuns a todas as áreas de conhecimento)

I. **Dominar linguagens (DL)**: dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.

II. **Compreender fenômenos (CF)**: construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

III. **Enfrentar situações-problema (SP)**: selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

IV. **Construir argumentação (CA)**: relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

V. **Elaborar propostas (EP)**: recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

Matriz de Referência de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias

Competência de área 1 - Aplicar as tecnologias da comunicação e da informação na escola, no trabalho e em outros contextos relevantes para sua vida.

H1 - Identificar as diferentes linguagens e seus recursos expressivos como elementos de caracterização dos sistemas de comunicação.

H2 - Recorrer aos conhecimentos sobre as linguagens dos sistemas de comunicação e informação para resolver problemas sociais.

H3 - Relacionar informações geradas nos sistemas de comunicação e informação, considerando a função social desses sistemas.

H4 - Reconhecer posições críticas aos usos sociais que são feitos das linguagens e dos sistemas de comunicação e informação.

Competência de área 2 - Conhecer e usar língua(s) estrangeira(s) moderna(s) como instrumento de acesso a informações e a outras culturas e grupos sociais*.

H5 – Associar vocábulos e expressões de um texto em LEM ao seu tema.

H6 - Utilizar os conhecimentos da LEM e de seus mecanismos como meio de ampliar as possibilidades de acesso a informações, tecnologias e culturas.

H7 – Relacionar um texto em LEM, as estruturas linguísticas, sua função e seu uso social.

H8 - Reconhecer a importância da produção cultural em LEM como representação da diversidade cultural e linguística.

Competência de área 3 - Compreender e usar a linguagem corporal como relevante para a própria vida, integradora social e formadora da identidade.

H9 - Reconhecer as manifestações corporais de movimento como originárias de necessidades cotidianas de um grupo social.

H10 - Reconhecer a necessidade de transformação de hábitos corporais em função das necessidades cinestésicas.

H11 - Reconhecer a linguagem corporal como meio de interação social, considerando os limites de desempenho e as alternativas de adaptação para diferentes indivíduos.

Competência de área 4 - Compreender a arte como saber cultural e estético gerador de significação e integrador da organização do mundo e da própria identidade.

H12 - Reconhecer diferentes funções da arte, do trabalho da produção dos artistas em seus meios culturais.

H13 - Analisar as diversas produções artísticas como meio de explicar diferentes culturas, padrões de beleza e preconceitos.

H14 - Reconhecer o valor da diversidade artística e das inter-relações de elementos que se apresentam nas manifestações de vários grupos sociais e étnicos.

Competência de área 5 - Analisar, interpretar e aplicar recursos expressivos das linguagens, relacionando textos com seus contextos, mediante a natureza, função, organização, estrutura das manifestações, de acordo com as condições de produção e recepção.

H15 - Estabelecer relações entre o texto literário e o momento de sua produção, situando aspectos do contexto histórico, social e político.

H16 - Relacionar informações sobre concepções artísticas e procedimentos de construção do texto literário.

H17 - Reconhecer a presença de valores sociais e humanos atualizáveis e permanentes no patrimônio literário nacional.

Competência de área 6 - Compreender e usar os sistemas simbólicos das diferentes linguagens como meios de organização cognitiva da realidade pela constituição de significados, expressão, comunicação e informação.

H18 - Identificar os elementos que concorrem para a progressão temática e para a organização e estruturação de textos de diferentes gêneros e tipos.

H19 - Analisar a função da linguagem predominante nos textos em situações específicas de interlocução.

H20 - Reconhecer a importância do patrimônio linguístico para a preservação da memória e da identidade nacional.

Competência de área 7 - Confrontar opiniões e pontos de vista sobre as diferentes linguagens e suas manifestações específicas.

H21 - Reconhecer em textos de diferentes gêneros, recursos verbais e não-verbais utilizados com a finalidade de criar e mudar comportamentos e hábitos.

H22 - Relacionar, em diferentes textos, opiniões, temas, assuntos e recursos linguísticos.

H23 - Inferir em um texto quais são os objetivos de seu produtor e quem é seu público alvo, pela análise dos procedimentos argumentativos utilizados.

H24 - Reconhecer no texto estratégias argumentativas empregadas para o convencimento do público, tais como a intimidação, sedução, comoção, chantagem, entre outras.

Competência de área 8 - Compreender e usar a língua portuguesa como língua materna, geradora de significação e integradora da organização do mundo e da própria identidade.

H25 - Identificar, em textos de diferentes gêneros, as marcas linguísticas que singularizam as variedades linguísticas sociais, regionais e de registro.

H26 - Relacionar as variedades linguísticas a situações específicas de uso social.

H27 - Reconhecer os usos da norma padrão da língua portuguesa nas diferentes situações de comunicação.

Competência de área 9 - Entender os princípios, a natureza, a função e o impacto das tecnologias da comunicação e da informação na sua vida pessoal e social, no desenvolvimento do conhecimento, associando-o aos conhecimentos científicos, às linguagens que lhes dão suporte, às demais tecnologias, aos processos de produção e aos problemas que se propõem solucionar.

H28 - Reconhecer a função e o impacto social das diferentes tecnologias da comunicação e informação.

H29 - Identificar pela análise de suas linguagens, as tecnologias da comunicação e informação.

H30 - Relacionar as tecnologias de comunicação e informação ao desenvolvimento das sociedades e ao conhecimento que elas produzem.

Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em

gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Matriz de Referência de Ciências da Natureza e suas Tecnologias

Competência de área 1 – Compreender as ciências naturais e as tecnologias a elas associadas como construções humanas, percebendo seus papéis nos processos de produção e no desenvolvimento econômico e social da humanidade.

H1 – Reconhecer características ou propriedades de fenômenos ondulatórios ou oscilatórios, relacionando-os a seus usos em diferentes contextos.

H2 – Associar a solução de problemas de comunicação, transporte, saúde ou outro, com o correspondente desenvolvimento científico e tecnológico.

H3 – Confrontar interpretações científicas com interpretações baseadas no senso comum, ao longo do tempo ou em diferentes culturas.

H4 – Avaliar propostas de intervenção no ambiente, considerando a qualidade da vida humana ou medidas de conservação, recuperação ou utilização sustentável da biodiversidade.

Competência de área 2 – Identificar a presença e aplicar as tecnologias associadas às ciências naturais em diferentes contextos.

H5 – Dimensionar circuitos ou dispositivos elétricos de uso cotidiano.

H6 – Relacionar informações para compreender manuais de instalação ou utilização de aparelhos, ou sistemas tecnológicos de uso comum.

H7 – Selecionar testes de controle, parâmetros ou critérios para a comparação de materiais e produtos, tendo em vista a defesa do consumidor, a saúde do trabalhador ou a qualidade de vida.

Competência de área 3 – Associar intervenções que resultam em degradação ou conservação ambiental a processos produtivos e sociais e a instrumentos ou ações científico-tecnológicos.

H8 – Identificar etapas em processos de obtenção, transformação, utilização ou reciclagem de recursos naturais, energéticos ou matérias-primas, considerando processos biológicos, químicos ou físicos neles envolvidos.

H9 – Compreender a importância dos ciclos biogeoquímicos ou do fluxo energia para a vida, ou da ação de agentes ou fenômenos que podem causar alterações nesses processos.

H10 – Analisar perturbações ambientais, identificando fontes, transporte e(ou) destino dos poluentes ou prevendo efeitos em sistemas naturais, produtivos ou sociais.

H11 – Reconhecer benefícios, limitações e aspectos éticos da biotecnologia, considerando estruturas e processos biológicos envolvidos em produtos biotecnológicos.

H12 – Avaliar impactos em ambientes naturais decorrentes de atividades sociais ou econômicas, considerando interesses contraditórios.

Competência de área 4 – Compreender interações entre organismos e ambiente, em particular aquelas relacionadas à saúde humana, relacionando conhecimentos científicos, aspectos culturais e características individuais.

H13 – Reconhecer mecanismos de transmissão da vida, prevendo ou explicando a manifestação de características dos seres vivos.

H14 – Identificar padrões em fenômenos e processos vitais dos organismos, como manutenção do equilíbrio interno, defesa, relações com o ambiente, sexualidade, entre outros.

H15 – Interpretar modelos e experimentos para explicar fenômenos ou processos biológicos em qualquer nível de organização dos sistemas biológicos.

H16 – Compreender o papel da evolução na produção de padrões, processos biológicos ou na organização taxonômica dos seres vivos.

Competência de área 5 – Entender métodos e procedimentos próprios das ciências naturais e aplicá-los em diferentes contextos.

H17 – Relacionar informações apresentadas em diferentes formas de linguagem e representação usadas nas ciências físicas, químicas ou biológicas, como texto discursivo, gráficos, tabelas, relações matemáticas ou linguagem simbólica.

H18 – Relacionar propriedades físicas, químicas ou biológicas de produtos, sistemas ou procedimentos tecnológicos às finalidades a que se destinam.

H19 – Avaliar métodos, processos ou procedimentos das ciências naturais que contribuam para diagnosticar ou solucionar problemas de ordem social, econômica ou ambiental.

Competência de área 6 – Apropriar-se de conhecimentos da física para, em situações problema, interpretar, avaliar ou planejar intervenções científico-tecnológicas.

H20 – Caracterizar causas ou efeitos dos movimentos de partículas, substâncias, objetos ou corpos celestes.

H21 – Utilizar leis físicas e (ou) químicas para interpretar processos naturais ou tecnológicos inseridos no contexto da termodinâmica e(ou) do eletromagnetismo.

H22 – Compreender fenômenos decorrentes da interação entre a radiação e a matéria em suas manifestações em processos naturais ou tecnológicos, ou em suas implicações biológicas, sociais, econômicas ou ambientais.

H23 – Avaliar possibilidades de geração, uso ou transformação de energia em ambientes específicos, considerando implicações éticas, ambientais, sociais e/ou econômicas.

Competência de área 7 – Apropriar-se de conhecimentos da química para, em situações problema, interpretar, avaliar ou planejar intervenções científico-tecnológicas.

H24 – Utilizar códigos e nomenclatura da química para caracterizar materiais, substâncias ou transformações químicas.

H25 – Caracterizar materiais ou substâncias, identificando etapas, rendimentos ou implicações biológicas, sociais, econômicas ou ambientais de sua obtenção ou produção.

H26 – Avaliar implicações sociais, ambientais e/ou econômicas na produção ou no consumo de recursos energéticos ou minerais, identificando transformações químicas ou de energia envolvidas nesses processos.

H27 – Avaliar propostas de intervenção no meio ambiente aplicando conhecimentos químicos, observando riscos ou benefícios.

Competência de área 8 – Apropriar-se de conhecimentos da biologia para, em situações problema, interpretar, avaliar ou planejar intervenções científico-tecnológicas.

H28 – Associar características adaptativas dos organismos com seu modo de vida ou com seus limites de distribuição em diferentes ambientes, em especial em ambientes brasileiros.

H29 – Interpretar experimentos ou técnicas que utilizam seres vivos, analisando implicações para o ambiente, a saúde, a produção de alimentos, matérias primas ou produtos industriais.

H30 – Avaliar propostas de alcance individual ou coletivo, identificando aquelas que visam à preservação e a implementação da saúde individual, coletiva ou do ambiente.

Matriz de Referência de Ciências Humanas e suas Tecnologias

Competência de área 1 - Compreender os elementos culturais que constituem as identidades

H1 - Interpretar historicamente e/ou geograficamente fontes documentais acerca de aspectos da cultura.

H2 - Analisar a produção da memória pelas sociedades humanas.

H3 - Associar as manifestações culturais do presente aos seus processos históricos.

H4 - Comparar pontos de vista expressos em diferentes fontes sobre determinado aspecto da cultura.

H5 - Identificar as manifestações ou representações da diversidade do patrimônio cultural e artístico em diferentes sociedades.

Competência de área 2 - Compreender as transformações dos espaços geográficos como produto das relações socioeconômicas e culturais de poder.

H6 - Interpretar diferentes representações gráficas e cartográficas dos espaços geográficos.

H7 - Identificar os significados histórico-geográficos das relações de poder entre as nações

H8 - Analisar a ação dos estados nacionais no que se refere à dinâmica dos fluxos populacionais e no enfrentamento de problemas de ordem econômico-social.

H9 - Comparar o significado histórico-geográfico das organizações políticas e socioeconômicas em escala local, regional ou mundial.

H10 - Reconhecer a dinâmica da organização dos movimentos sociais e a importância da participação da coletividade na transformação da realidade histórico-geográfica.

Competência de área 3 - Compreender a produção e o papel histórico das instituições sociais, políticas e econômicas, associando-as aos diferentes grupos, conflitos e movimentos sociais.

H11 - Identificar registros de práticas de grupos sociais no tempo e no espaço.

H12 - Analisar o papel da justiça como instituição na organização das sociedades.

H13 - Analisar a atuação dos movimentos sociais que contribuíram para mudanças ou rupturas em processos de disputa pelo poder.

H14 - Comparar diferentes pontos de vista, presentes em textos analíticos e interpretativos, sobre situação ou fatos de natureza histórico-geográfica acerca das instituições sociais, políticas e econômicas.

H15 - Avaliar criticamente conflitos culturais, sociais, políticos, econômicos ou ambientais ao longo da história.

Competência de área 4 - Entender as transformações técnicas e tecnológicas e seu impacto nos processos de produção, no desenvolvimento do conhecimento e na vida social.

H16 - Identificar registros sobre o papel das técnicas e tecnologias na organização do trabalho e/ou da vida social.

H17 - Analisar fatores que explicam o impacto das novas tecnologias no processo de territorialização da produção.

H18 - Analisar diferentes processos de produção ou circulação de riquezas e suas implicações sócio-espaciais.

H19 - Reconhecer as transformações técnicas e tecnológicas que determinam as várias formas de uso e apropriação dos espaços rural e urbano.

H20 - Selecionar argumentos favoráveis ou contrários às modificações impostas pelas novas tecnologias à vida social e ao mundo do trabalho.

Competência de área 5 - Utilizar os conhecimentos históricos para compreender e valorizar os fundamentos da cidadania e da democracia, favorecendo uma atuação consciente do indivíduo na sociedade.

H21 - Identificar o papel dos meios de comunicação na construção da vida social.

H22 - Analisar as lutas sociais e conquistas obtidas no que se refere às mudanças nas legislações ou nas políticas públicas.

H23 - Analisar a importância dos valores éticos na estruturação política das sociedades.

H24 - Relacionar cidadania e democracia na organização das sociedades.

H25 – Identificar estratégias que promovam formas de inclusão social.

Competência de área 6 - Compreender a sociedade e a natureza, reconhecendo suas interações no espaço em diferentes contextos históricos e geográficos.

H26 - Identificar em fontes diversas o processo de ocupação dos meios físicos e as relações da vida humana com a paisagem.

H27 - Analisar de maneira crítica as interações da sociedade com o meio físico, levando em consideração aspectos históricos e(ou) geográficos.

H28 - Relacionar o uso das tecnologias com os impactos sócio-ambientais em diferentes contextos histórico-geográficos.

H29 - Reconhecer a função dos recursos naturais na produção do espaço geográfico, relacionando-os com as mudanças provocadas pelas ações humanas.

H30 - Avaliar as relações entre preservação e degradação da vida no planeta nas diferentes escalas.

ANEXO

Objetos de conhecimento associados às Matrizes de Referência

1. Linguagem, Códigos e suas Tecnologias

• **Estudo do texto: as sequências discursivas e os gêneros textuais no sistema de comunicação e informação -** modos de organização da composição textual; atividades de produção escrita e de leitura de textos gerados nas diferentes esferas sociais - públicas e privadas.

• **Estudo das práticas corporais: a linguagem corporal como integradora social e formadora de identidade -** *performance* corporal e identidades juvenis; possibilidades de vivência crítica e emancipada do lazer; mitos e verdades sobre os corpos masculino e feminino na sociedade atual; exercício físico e saúde; o corpo e a expressão artística e cultural; o corpo no mundo dos símbolos e como produção da cultura; práticas corporais e autonomia; condicionamentos e esforços físicos; o esporte;. a dança; as lutas; os jogos; as brincadeiras.

• **Produção e recepção de textos artísticos: interpretação e representação do mundo para o fortalecimento dos processos de identidade e cidadania –** Artes Visuais: estrutura morfológica, sintática, o contexto da obra artística, o contexto da comunidade. Teatro: estrutura morfológica, sintática, o contexto da obra artística, o contexto da comunidade, as fontes de criação. Música: estrutura morfológica, sintática, o contexto da obra artística, o contexto da comunidade, as fontes de criação. Dança: estrutura morfológica, sintática, o contexto da obra artística, o contexto da comunidade, as fontes de criação. Conteúdos estruturantes das linguagens artísticas (Artes Visuais, Dança, Música, Teatro), elaborados a partir de suas estruturas morfológicas e sintáticas; inclusão, diversidade e multiculturalidade: a valorização da pluralidade expressada nas produções estéticas e artísticas das minorias sociais e dos portadores de necessidades especiais educacionais.

• **Estudo do texto literário: relações entre produção literária e processo social, concepções artísticas, procedimentos de construção e recepção de textos -** produção literária e processo social; processos de formação literária e de formação nacional; produção de textos literários, sua recepção e a constituição do patrimônio literário nacional; relações entre a dialética cosmopolitismo/localismo e a produção literária nacional;

elementos de continuidade e ruptura entre os diversos momentos da literatura brasileira; associações entre concepções artísticas e procedimentos de construção do texto literário em seus gêneros (épico/narrativo, lírico e dramático) e formas diversas.; articulações entre os recursos expressivos e estruturais do texto literário e o processo social relacionado ao momento de sua produção; representação literária: natureza, função, organização e estrutura do texto literário; relações entre literatura, outras artes e outros saberes.

• **Estudo dos aspectos linguísticos em diferentes textos: recursos expressivos da língua, procedimentos de construção e recepção de textos -** organização da macroestrutura semântica e a articulação entre idéias e proposições (relações lógico-semânticas).

• **Estudo do texto argumentativo, seus gêneros e recursos linguísticos: argumentação: tipo, gêneros e usos em língua portuguesa -** formas de apresentação de diferentes pontos de vista; organização e progressão textual; papéis sociais e comunicativos dos interlocutores, relação entre usos e propósitos comunicativos, função sociocomunicativa do gênero, aspectos da dimensão espaçotemporal em que se produz o texto.

• **Estudo dos aspectos linguísticos da língua portuguesa: usos da língua: norma culta e variação linguística -** uso dos recursos linguísticos em relação ao contexto em que o texto é constituído: elementos de referência pessoal, temporal, espacial, registro linguístico, grau de formalidade, seleção lexical, tempos e modos verbais; uso dos recursos linguísticos em processo de coesão textual: elementos de articulação das sequências dos textos ou à construção da micro estrutura do texto.

• **Estudo dos gêneros digitais: tecnologia da comunicação e informação: impacto e função social -** o texto literário típico da cultura de massa: o suporte textual em gêneros digitais; a caracterização dos interlocutores na comunicação tecnológica; os recursos linguísticos e os gêneros digitais; a função social das novas tecnologias.

2. Matemática e suas Tecnologias

• **Conhecimentos numéricos**: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.

• **Conhecimentos geométricos**: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.

• **Conhecimentos de estatística e probabilidade**: representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.

• **Conhecimentos algébricos**: gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

• **Conhecimentos algébricos/geométricos**: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

3. Ciências da Natureza e suas Tecnologias

3.1 Física

• **Conhecimentos básicos e fundamentais -** Noções de ordem de grandeza. Notação Científica. Sistema Internacional de Unidades. Metodologia de investigação: a procura de regularidades e de sinais na interpretação física do mundo. Observações e mensurações: representação de grandezas físicas como grandezas mensuráveis. Ferramentas básicas: gráficos e vetores. Conceituação de grandezas vetoriais e escalares. Operações básicas com vetores.

• **O movimento, o equilíbrio e a descoberta de leis físicas –** Grandezas fundamentais da mecânica: tempo, espaço, velocidade e aceleração. Relação histórica entre força e movimento. Descrições do movimento e sua interpretação: quantificação do movimento e sua descrição matemática e gráfica. Casos especiais de movimentos e suas regularidades observáveis. Conceito de inércia. Noção de sistemas de referência inerciais e não inerciais. Noção dinâmica de massa e quantidade de movimento (momento linear). Força e variação da quantidade de movimento. Leis de Newton. Centro de massa e a idéia de ponto material. Conceito de forças externas e internas. Lei da conservação da quantidade de movimento (momento linear) e teorema do impulso. Momento de uma força (torque). Condições de equilíbrio estático de ponto material e de corpos rígidos. Força de atrito, força peso, força normal de contato e tração. Diagramas de forças. Identificação das forças que atuam nos movimentos circulares. Noção de força centrípeta e sua quantificação. A hidrostática: aspectos históricos e variáveis relevantes. Empuxo. Princípios de Pascal, Arquimedes e Stevin: condições de flutuação, relação entre diferença de nível e pressão hidrostática.

• **Energia, trabalho e potência -** Conceituação de trabalho, energia e potência. Conceito de energia potencial e de energia cinética. Conservação de energia mecânica e dissipação de energia. Trabalho da força gravitacional e energia potencial gravitacional. Forças conservativas e dissipativas.

• **A Mecânica e o funcionamento do Universo -** Força peso. Aceleração gravitacional. Lei da Gravitação Universal. Leis de Kepler. Movimentos de corpos celestes. Influência na Terra: marés e variações climáticas. Concepções históricas sobre a origem do universo e sua evolução.

• **Fenômenos Elétricos e Magnéticos -** Carga elétrica e corrente elétrica. Lei de Coulomb. Campo elétrico e potencial elétrico. Linhas de campo. Superfícies equipotenciais. Poder das pontas. Blindagem. Capacitores. Efeito Joule. Lei de Ohm. Resistência elétrica e resistividade. Relações entre grandezas elétricas: tensão, corrente, potência e energia. Circuitos elétricos simples. Correntes contínua e alternada. Medidores elétricos.

Representação gráfica de circuitos. Símbolos convencionais. Potência e consumo de energia em dispositivos elétricos. Campo magnético. Imãs permanentes. Linhas de campo magnético. Campo magnético terrestre.

• **Oscilações, ondas, óptica e radiação -** Feixes e frentes de ondas. Reflexão e refração. Óptica geométrica: lentes e espelhos. Formação de imagens. Instrumentos ópticos simples. Fenômenos ondulatórios. Pulsos e ondas. Período, frequência, ciclo. Propagação: relação entre velocidade, frequência e comprimento de onda. Ondas em diferentes meios de propagação.

• **O calor e os fenômenos térmicos -** Conceitos de calor e de temperatura. Escalas termométricas. Transferência de calor e equilíbrio térmico. Capacidade calorífica e calor específico. Condução do calor. Dilatação térmica. Mudanças de estado físico e calor latente de transformação. Comportamento de Gases ideais. Máquinas térmicas. Ciclo de Carnot. Leis da Termodinâmica. Aplicações e fenômenos térmicos de uso cotidiano. Compreensão de fenômenos climáticos relacionados ao ciclo da água.

3.2 Química

• **Transformações Químicas -** Evidências de transformações químicas. Interpretando transformações químicas. Sistemas Gasosos: Lei dos gases. Equação geral dos gases ideais, Princípio de Avogadro, conceito de molécula; massa molar, volume molar dos gases. Teoria cinética dos gases. Misturas gasosas. Modelo corpuscular da matéria. Modelo atômico de Dalton. Natureza elétrica da matéria: Modelo Atômico de Thomson, Rutherford, Rutherford-Bohr. Átomos e sua estrutura. Número atômico, número de massa, isótopos, massa atômica. Elementos químicos e Tabela Periódica. Reações químicas.

• **Representação das transformações químicas -** Fórmulas químicas. Balanceamento de equações químicas. Aspectos quantitativos das transformações químicas. Leis ponderais das reações químicas. Determinação de fórmulas químicas. Grandezas Químicas: massa, volume, mol, massa molar, constante de Avogadro. Cálculos estequiométricos.

• **Materiais, suas propriedades e usos -** Propriedades de materiais. Estados físicos de materiais. Mudanças de estado. Misturas: tipos e métodos de separação. Substâncias químicas: classificação e características gerais. Metais e Ligas metálicas. Ferro, cobre e alumínio. Ligações metálicas. Substâncias iônicas: características e propriedades. Substâncias iônicas do grupo: cloreto, carbonato, nitrato e sulfato. Ligação iônica. Substâncias moleculares: características e propriedades. Substâncias moleculares: H_2, O_2, N_2, Cl_2, NH_3, H_2O, HCl, CH_4. Ligação Covalente. Polaridade de moléculas. Forças intermoleculares. Relação entre estruturas, propriedade e aplicação das substâncias.

• **Água** - Ocorrência e importância na vida animal e vegetal. Ligação, estrutura e propriedades. Sistemas em Solução Aquosa: Soluções verdadeiras, soluções coloidais e suspensões. Solubilidade. Concentração das soluções. Aspectos qualitativos das propriedades coligativas das soluções. Ácidos, Bases, Sais e Óxidos: definição, classificação, propriedades, formulação e nomenclatura. Conceitos de ácidos e base. Principais propriedades dos ácidos e bases: indicadores, condutibilidade elétrica, reação com metais, reação de neutralização.

• **Transformações Químicas e Energia -** Transformações químicas e energia calorífica. Calor de reação. Entalpia. Equações termoquímicas. Lei de Hess. Transformações químicas e energia elétrica. Reação de oxirredução. Potenciais padrão de redução. Pilha. Eletrólise. Leis de Faraday. Transformações nucleares. Conceitos fundamentais da radioatividade. Reações de fissão e fusão nuclear. Desintegração radioativa e radioisótopos.

• **Dinâmica das Transformações Químicas -** Transformações Químicas e velocidade. Velocidade de reação. Energia de ativação. Fatores que alteram a velocidade de reação: concentração, pressão, temperatura e catalisador.

• **Transformação Química e Equilíbrio -** Caracterização do sistema em equilíbrio. Constante de equilíbrio. Produto iônico da água, equilíbrio ácido-base e pH. Solubilidade dos sais e hidrólise. Fatores que alteram o sistema em equilíbrio. Aplicação da velocidade e do equilíbrio químico no cotidiano.

• **Compostos de Carbono -** Características gerais dos compostos orgânicos. Principais funções orgânicas. Estrutura e propriedades de Hidrocarbonetos. Estrutura e propriedades de compostos orgânicos oxigenados. Fermentação. Estrutura e propriedades de compostos orgânicos nitrogenados. Macromoléculas naturais e sintéticas. Noções básicas sobre polímeros. Amido, glicogênio e celulose. Borracha natural e sintética. Polietileno, poliestireno, PVC, Teflon, náilon. Óleos e gorduras, sabões e detergentes sintéticos. Proteínas e enzimas.

• **Relações da Química com as Tecnologias, a Sociedade e o Meio Ambiente -** Química no cotidiano. Química na agricultura e na saúde. Química nos alimentos. Química e ambiente. Aspectos científico-tecnológicos, socioeconômicos e ambientais associados à obtenção ou produção de substâncias químicas. Indústria Química: obtenção e utilização do cloro, hidróxido de sódio, ácido sulfúrico, amônia e ácido nítrico. Mineração e Metalurgia. Poluição e tratamento de água. Poluição atmosférica. Contaminação e proteção do ambiente.

• **Energias Químicas no Cotidiano -** Petróleo, gás natural e carvão. Madeira e hulha. Biomassa. Biocombustíveis. Impactos ambientais de combustíveis fosseis. Energia nuclear. Lixo atômico. Vantagens e desvantagens do uso de energia nuclear.

3.3 Biologia

• **Moléculas, células e tecidos -** Estrutura e fisiologia celular: membrana, citoplasma e núcleo. Divisão celular. Aspectos bioquímicos das estruturas celulares. Aspectos gerais do metabolismo celular. Metabolismo energético: fotossíntese e respiração. Codificação da informação genética. Síntese protéica. Diferenciação celular. Principais tecidos animais e vegetais. Origem e evolução das células. Noções sobre células-tronco, clonagem e tecnologia do DNA recombinante. Aplicações de biotecnologia na produção de alimentos, fármacos e componentes biológicos. Aplicações de tecnologias relacionadas ao DNA a investigações científicas, determinação da paternidade, investigação criminal e identificação de indivíduos. Aspectos éticos relacionados ao desenvolvimento biotecnológico. Biotecnologia e sustentabilidade.

• **Hereditariedade e diversidade da vida -** Princípios básicos que regem a transmissão de características hereditárias. Concepções pré-mendelianas sobre a hereditariedade. Aspectos genéticos do funcionamento do corpo humano. Antígenos e anticorpos. Grupos sanguíneos, transplantes e doenças auto-imunes. Neoplasias e a influência de fatores ambientais. Mutações gênicas e cromossômicas. Aconselhamento genético. Fundamentos genéticos da evolução. Aspectos genéticos da formação e manutenção da diversidade biológica.

• **Identidade dos seres vivos -** Níveis de organização dos seres vivos. Vírus, procariontes e eucariontes. Autótrofos e heterótrofos. Seres unicelulares e pluricelulares. Sistemática e as grandes linhas da evolução dos seres vivos. Tipos de ciclo de vida. Evolução e padrões anatômicos e fisiológicos observados nos seres vivos. Funções vitais dos seres vivos e sua relação com a adaptação desses organismos a diferentes ambientes. Embriologia, anatomia e fisiologia humana. Evolução humana. Biotecnologia e sistemática.

• **Ecologia e ciências ambientais -** Ecossistemas. Fatores bióticos e abióticos. Habitat e nicho ecológico. A comunidade biológica: teia alimentar, sucessão e comunidade clímax. Dinâmica de populações. Interações entre os seres vivos. Ciclos biogeoquímicos. Fluxo de energia no ecossistema. Biogeografia. Biomas brasileiros. Exploração e uso de recursos naturais. Problemas ambientais: mudanças climáticas, efeito estufa; desmatamento; erosão; poluição da água, do solo e do ar. Conservação e recuperação de ecossistemas. Conservação da biodiversidade. Tecnologias ambientais. Noções de saneamento básico. Noções de legislação ambiental: água, florestas, unidades de conservação; biodiversidade.

• **Origem e evolução da vida -** A biologia como ciência: história, métodos, técnicas e experimentação. Hipóteses sobre a origem do Universo, da Terra e dos seres vivos. Teorias de evolução. Explicações pré-darwinistas para a modificação das espécies. A teoria evolutiva de Charles Darwin. Teoria sintética da evolução. Seleção artificial e seu impacto sobre ambientes naturais e sobre populações humanas.

• **Qualidade de vida das populações humanas -** Aspectos biológicos da pobreza e do desenvolvimento humano. Indicadores sociais, ambientais e econômicos. Índice de desenvolvimento humano. Principais doenças que afetam a população brasileira:

caracterização, prevenção e profilaxia. Noções de primeiros socorros. Doenças sexualmente transmissíveis. Aspectos sociais da biologia: uso indevido de drogas; gravidez na adolescência; obesidade. Violência e segurança pública. Exercícios físicos e vida saudável. Aspectos biológicos do desenvolvimento sustentável. Legislação e cidadania.

4. Ciências Humanas e suas Tecnologias

• **Diversidade cultural, conflitos e vida em sociedade**

○ Cultura Material e imaterial; patrimônio e diversidade cultural no Brasil.

○ A Conquista da América. Conflitos entre europeus e indígenas na América colonial. A escravidão e formas de resistência indígena e africana na América.

○ História cultural dos povos africanos. A luta dos negros no Brasil e o negro na formação da sociedade brasileira.

○ História dos povos indígenas e a formação sócio-cultural brasileira.

○ Movimentos culturais no mundo ocidental e seus impactos na vida política e

social.

• **Formas de organização social, movimentos sociais, pensamento político e ação do Estado**

○ Cidadania e democracia na Antiguidade; Estado e direitos do cidadão a partir da Idade Moderna; democracia direta, indireta e representativa.

○ Revoluções sociais e políticas na Europa Moderna.

○ Formação territorial brasileira; as regiões brasileiras; políticas de reordenamento territorial.

○ As lutas pela conquista da independência política das colônias da América.

○ Grupos sociais em conflito no Brasil imperial e a construção da nação.

○ O desenvolvimento do pensamento liberal na sociedade capitalista e seus críticos nos séculos XIX e XX.

○ Políticas de colonização, migração, imigração e emigração no Brasil nos séculos XIX e XX.

○ A atuação dos grupos sociais e os grandes processos revolucionários do século XX: Revolução Bolchevique, Revolução Chinesa, Revolução Cubana.

○ Geopolítica e conflitos entre os séculos XIX e XX: Imperialismo, a ocupação da Ásia e da África, as Guerras Mundiais e a Guerra Fria.

- Os sistemas totalitários na Europa do século XX: nazi-fascista, franquismo, salazarismo e stalinismo. Ditaduras políticas na América Latina: Estado Novo no Brasil e ditaduras na América.

- Conflitos político-culturais pós-Guerra Fria, reorganização política internacional e os organismos multilaterais nos séculos XX e XXI.

- A luta pela conquista de direitos pelos cidadãos: direitos civis, humanos, políticos e sociais. Direitos sociais nas constituições brasileiras. Políticas afirmativas.

- Vida urbana: redes e hierarquia nas cidades, pobreza e segregação espacial.

• **Características e transformações das estruturas produtivas**

- Diferentes formas de organização da produção: escravismo antigo, feudalismo, capitalismo, socialismo e suas diferentes experiências.

- Economia agro-exportadora brasileira: complexo açucareiro; a mineração no período colonial; a economia cafeeira; a borracha na Amazônia.

- Revolução Industrial: criação do sistema de fábrica na Europa e transformações no processo de produção. Formação do espaço urbano-industrial. Transformações na estrutura produtiva no século XX: o fordismo, o toyotismo, as novas técnicas de produção e seus impactos.

- A industrialização brasileira, a urbanização e as transformações sociais e trabalhistas.

- A globalização e as novas tecnologias de telecomunicação e suas consequências econômicas, políticas e sociais.

- Produção e transformação dos espaços agrários. Modernização da agricultura e estruturas agrárias tradicionais. O agronegócio, a agricultura familiar, os assalariados do campo e as lutas sociais no campo. A relação campo-cidade.

• **Os domínios naturais e a relação do ser humano com o ambiente**

- Relação homem-natureza, a apropriação dos recursos naturais pelas sociedades ao longo do tempo. Impacto ambiental das atividades econômicas no Brasil. Recursos minerais e energéticos: exploração e impactos. Recursos hídricos; bacias hidrográficas e seus aproveitamentos.

- As questões ambientais contemporâneas: mudança climática, ilhas de calor, efeito estufa, chuva ácida, a destruição da camada de ozônio. A nova ordem ambiental internacional; políticas territoriais ambientais; uso e conservação dos recursos naturais, unidades de conservação, corredores ecológicos, zoneamento ecológico e econômico.

- Origem e evolução do conceito de sustentabilidade.

- Estrutura interna da terra. Estruturas do solo e do relevo; agentes internos e externos modeladores do relevo.

- Situação geral da atmosfera e classificação climática. As características climáticas do território brasileiro.

- Os grandes domínios da vegetação no Brasil e no mundo.

- **Representação espacial**

  - Projeções cartográficas; leitura de mapas temáticos, físicos e políticos; tecnologias modernas aplicadas à cartografia.

ANEXO B – CONSULTA PÚBLICA - PORTARIA Nº 399, DE 8 DE MARÇO DE 2023

DIÁRIO OFICIAL DA UNIÃO

Publicado em: 09/03/2023 | Edição: 47 | Seção: 1 | Página: 16
Órgão: Ministério da Educação/Gabinete do Ministro

PORTARIA Nº 399, DE 8 DE MARÇO DE 2023

Institui a consulta pública para a avaliação e reestruturação da política nacional de Ensino Médio.

O MINISTRO DE ESTADO DA EDUCAÇÃO, no uso das atribuições que lhe confere o art. 87, parágrafo único, inciso II, da Constituição Federal, e tendo em vista o disposto na Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, resolve:

Art. 1º Instituir a consulta pública para avaliação e reestruturação da política nacional de Ensino Médio, com objetivo de abrir o diálogo com a sociedade civil, a comunidade escolar, os profissionais do magistério, as equipes técnicas dos sistemas de ensino, os estudantes, os pesquisadores e os especialistas do campo da educação para a coleta de subsídios para a tomada de decisão do Ministério da Educação - MEC acerca dos atos normativos que regulamentam o Novo Ensino Médio.

Art. 2º A consulta pública será coordenada pelo Ministério da Educação, por meio da Secretaria de Articulação Intersetorial e com os Sistemas de Ensino - Sase, com a colaboração do Conselho Nacional de Educação - CNE, do Fórum Nacional dos Conselhos Estaduais e Distrital de Educação - Foncede e do Conselho Nacional de Secretários de Educação - Consed.

Art. 3º A consulta pública será implementada pelos seguintes instrumentos:

I - audiências públicas;

II - oficinas de trabalho;

III - seminários; e

IV - pesquisas nacionais com estudantes, professores e gestores escolares sobre a experiência de implementação do Novo Ensino Médio nas 27 (vinte e sete) Unidades da Federação.

Art. 4º A consulta pública terá o prazo de duração de 90 (noventa) dias, sendo admitida a prorrogação.

Art. 5º Após o término do prazo de que trata o art. 4º, a Secretaria de Articulação Intersetorial e com os Sistemas de Ensino elaborará o relatório final a ser encaminhado ao Ministro de Estado da Educação, no prazo de 30 (trinta) dias.

Art. 6º Esta Portaria entra em vigor na data de sua publicação.

CAMILO SOBREIRA DE SANTANA

Este conteúdo não substitui o publicado na versão certificada.